П. А. Широков

Тензорное исчисление

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ГТТИ • 1934

Проф. П. А. Широков • ТЕНЗОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ • ч. I

П. А. ШИРОКОВ

ТЕНЗОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

АЛГЕБРА ТЕНЗОРОВ

ОНТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕНИНГРАД 1934 МОСКВА

ПРЕДИСЛОВИЕ.

В основу этой книги положен курс тензорного анализа, который читался мною в Казанском университете в течение последних 7 лет. Содержание курса за этот период, конечно, менялось: в разное время выдвигались на первый план и подробно освещались различные отделы тензорной алгебры и анализа. В настоящем руководстве я решил объединить и несколько дополнить тот материал, который я давал своим слушателям на лекциях.

Задачей курса тензорного анализа является ознакомление студентов с основными идеями и наиболее простыми вопросами теории инвариантов в геометрическом изложении. На разнообразных примерах, заимствованных из области аналитической и дифференциальной геометрии, механики и теоретической физики, начинающий математик знакомится с основными понятиями и задачами теории инвариантов и постепенно втягивается в круг идей этой абстрактной дисциплины. Имея такую подготовку, студент уже в состоянии перейти к систематическому изучению теории форм и инвариантов, как самостоятельной ветви математики, с ее общей постановкой проблемы определения инвариантов алгебраических и дифференциальных форм. В то же время студент получает подготовку к изучению принципа относительности и квантовой механики.

Настоящая книга предназначена для студентов старших курсов и аспирантов математических отделений университетов и тех лиц (математиков, физиков, инженеров), которые, не будучи специалистами в геометрии, захотели бы познакомиться с основами тензорного анализа. В части I этого курса излагается алгебра тензоров аффинного и метрического пространства, часть II будет посвящена теории поля и приложению тензорного анализа к дифференциальной геометрии Riemann'овых пространств и их обобщений. При составлении руководства я стремился дать по возможности простое изложение, иллюстрируя аналитический материал геометрическими образами. Иногда я жертвовал систематичностью в расположении материала, исследуя подробно сначала частные случаи какой-нибудь проблемы, и затем уже излагая общие теоремы. Поступая так, я имел в виду также и интересы тех, которые желали бы познакомиться с тензорным анализом для подготовки к изучению математической физики. Эти лица могут делать при чтении курса значительные пропуски (подробнее об этом см. ниже).

Часть I книги заключает в себе 4 главы. В главе I излагаются элементы исчисления матриц: основы матричной алгебры, теоремы о ранге матрицы и понятие об элементарных делителях.

Глава II содержит в себе элементы тензорной алгебры. Сначала здесь даются главнейшие понятия геометрии аффинного пространства на основе алгебраических операций над контравариантными и ковариантными векторами; затем вводятся линейные функции от векторов. Введению понятия о тензоре предшествует параграф, посвященный изложению идей Klein'а о роли теории групп в геометрии. В связи с изучением группы аффинных преобразований определяется понятие о ковариантной величине в аффинном пространстве. Тензоры вводятся на основе понятия скалярной многолинейной функции от векторов. Глава заканчивается изучением основных алгебраических операций тензорной алгебры.

В главе III изучаются некоторые специальные типы тензоров. Подробнее всего разбирается вопрос о смешанном тензоре 2-го порядка, как имеющем наиболее важные приложения в области теоретической и прикладной математики. Исследование этого тензора ведется на основе изучения линейной векторфункции 1-го рода (определяющей однородное аффинное преобразование контравариантных векторов). Сначала разбираются наиболее простые свойства этого тензора, вводится понятие о характеристическом полиноме и инвариантных направлениях. В § 17 дается общее исследование линейной векторфункции; здесь излагается метод

Weyl'я приведения матрицы векторфункции к каноническому виду. Следующий параграф посвящен применению теории элементарных делителей к определению характеристики линейной векторфункции. Ковариантный тензор 2-го порядка изучается в связи с теорией линейных векторфункций 2-го рода (определяющих коррелятивные преобразования аффинного пространства). Здесь я не даю общего исследования этого тензора, так как для этого потребовалось бы сильно увеличить объем книги введением общей теории пучков билинейных форм, созданной работами Weierstrass'a, Kronecker'a и Frobenius'a. Я ограничиваюсь только всесторонним изучением симметрической и антисимметрической линейной векторфункции; в то же время на примере исследования линейной векторфункции простого типа дается читателю представление о методе исследования в этой области. Вопрос о совместном приведении пары квадратичных форм к каноническому виду и изучение аффинных преобразований, оставляющих инвариантной квадратичную форму, исследуется до конца только для того случая, когда одна из форм — определенная. В § 25 дается теория форм Hermite'a и указывается на то обобщение понятия о тензоре, которое было введено Schouten'ом за последние годы. Глава заканчивается параграфом, посвященным теории мультивекторов.

Глава IV излагает основные алгебраические операции над тензорами в метрическом пространстве Евклида. В основу метрики кладется определенная квадратичная форма. Быть может, имея в виду теорию относительности, следовало бы дать более общее изложение, не ограничиваясь положительной формой. Но это потребовало бы для некоторых вопросов знания теории пучков билинейных форм, т. е. значительного увеличения главы III. По моему мнению, начинающему геометру полезно изучить сначала именно наиболее простой случай. Заметим, что элементарные вопросы теории относительности не требуют специальных исследований и решаются так же, как и в пространстве с обычным евклидовым мероопределением. Для исследования же более глубоких вопросов читатель должен ознакомиться с теорией пучков билинейных форм.

В алгебре тензоров я пользовался часто так называемыми прямыми обозначениями геометрических величин (главным образом векторов), так как считаю, что эта запись для простейших вопросов векторного и тензорного анализа очень удобна.

Приведу основные методические указания по изучению этой книги. Прежде всего о подготовке: по анализу, аналитической геометрии и высшей алгебре достаточно тех знаний, которые даются студентам математических отделений университетов на первых двух курсах. Рекомендуется тщательно повторить теорию определителей и ее применение к решению системы линейных уравнений (например, по курсу Сушкевича, Основы высшей алгебры). Очень полезно ознакомиться с основами векторного анализа; для части I книги достаточно знаний по векторной алгебре. Здесь можно рекомендовать такие прекрасные книги, как:

Дубнов. Основы векторного исчисления, ч. I. ГТТИ, 1933.

Фиников. Векторный анализ. ГТТИ, 1932.

Кочин. Векторное исчисление, ГТТИ, 1932.

Прежде всего читатель должен тщательно проработать основы матричной алгебры (§ 1). Здесь необходимо приобрести технику счета, так как на протяжении всей алгебры тензоров действия над матрицами будут постоянно встречаться. Крайне важно поупражняться на задачах, данных в этом параграфе. В § 2 разделы 5 и 6 могут быть изучены позже—в связи с прохождением §§ 20 и 23. § 3 тесно связан с § 18. Читатель, не интересующийся теорией элементарных делителей, может не читать оба эти параграфа, так как элементарные делители не имеют в курсе существенного значения; при чтении дальнейшего текста те места, где они будут встречаться, можно свободно пропускать.

В главе II читатель должен уделить специальное внимание § 5. Здесь необходимо приобрести навык к представлениям геометрии многомерного пространства и освоиться с основными понятиями аффинного пространства; рекомендуется решение задач, относящихся к этому параграфу. В § 8 при первом чтении можно пропустить разделы 3 и 4; они потребуются только для § 26. Крайне важно владеть формулами § 9 и быстро применять их в вычислениях. В § 12 разделы 10, 11 могут быть опущены теми, кто не интересуется анализом основных действий векторной алгебры.

§§ 14 и 15 следует особенно тщательно проработать, решая предложенные в них задачи. Из алгебраических операций над тензорами для начинающего затруднение могут доставить только альтернирование и симметрирование. Лица, изучающие тензорный анализ, имея в виду его приложения, могут только ознакомиться с этими действиями. Те же, которые хотят вполне овладеть техникой тензорного счета, должны приобрести навыки в этих операциях.

В главе III дается приложение алгебры тензоров к исследованию простейших типов тензоров. Особенное внимание читатель должен обратить на §§ 16, 17, 20, 21 и 23. Изучение линейной векторфункции 1-го рода является основным при чтении главы III.

Здесь рекомендуется овладеть вполне методом исследования, изложенным в § 17, для чего необходимо решение задач. При изучении квадратичных форм вопросы, связанные с методом Kronecker'a и определением сигнатуры формы, могут быть только прочитаны, но основные свойства квадратичных форм должны быть изучены тщательно. Важное значение имеет также теория антисимметрического тензора.

Проработка главы IV не требует специальных указаний.

Читатель, который не имеет в виду детального изучения алгебры тензоров, а желает сосредоточиться на теории поля, может при чтении части I сделать следующие пропуски: § 2: разделы 5 и 6; § 3; § 8: разделы 3 и 4; § 12: разделы 10 и 11; § 17; § 18; § 20: разделы 11, 13, 14, 16, 17, 18; § 22; § 23: разделы 4—10; § 24; § 25; § 26: разделы 8—18; § 27: разделы 15, 16; § 31; § 32.

Учитывая то обстоятельство, что основные вопросы тензорной алгебры имеют большое применение в различных отделах теоретической и прикладной математики, я ввел в часть I этой книги большое количество задач. Наиболее трудные из них или имеющие значение для проработки дальнейшего материала снабжены решениями или указаниями. Задачи 2, 6, 15, 33, 34 (§ 1) заимствованы мною из книги Turnbull, The Theory of Determinants, Matrices and Invariants, London, Glasgow, 1928; задачи 7, 13—16, 20—23 (§ 15) из книги Schouten, Der Ricci-Kalkül, Berlin, 1924.

В конце книги приложены указатели литературы и терминов.

14 февраля 1933.

П. Широков.

ВВЕДЕНИЕ.

1. Тензорный анализ является обобщением векторного исчисления: подобно тому как в последнем вектор представляет собою инструмент для исследований в области геометрии, механики и физики, так и тензорный анализ занимается изучением и приложением к тем же дисциплинам более общего понятия—тензора. Вектор является частным случаем тензора—именно тензором 1-го порядка, так что векторный анализ можно считать одной из глав более общей теории—тензорного исчисления.

Термины „тензор", „тензорный анализ" были введены в изучаемую нами дисциплину одновременно с созданием общего принципа относительности и были предложены Einstein'ом и Grossmann'ом в мемуаре: „Entwurf einer verallgemeinen Relativitätstheorie" (Zeitschr. für Math. u. Phys., 62, 1914). Но самая дисциплина, называемая в настоящее время тензорным анализом, возникла гораздо раньше,—тензорный анализ является по существу теорией алгебраических и дифференциальных форм и их инвариантов.

Теория алгебраических форм возникла на основе решения и обобщения проблем аналитической геометрии и механики. Исследование конических сечений и поверхностей 2-го порядка и те вопросы аналитической механики, которые базируются на изучении свойств квадратичных форм, дали первый толчок развитию теории алгебраических форм и инвариантов. Однако систематическое и углубленное изучение вопросов в этой области первое время было почти исключительно связано с проблемами теории чисел (Gauss, Jacobi). Только постепенно теория инвариантов начала обосабливаться в отдельную дисциплину, тесно связанную с геометрией и алгеброй. Возникновение проективной геометрии и изучение кривых высших порядков особенно стимулировали исследования в области общей теории инвариантов линейных однородных преобразований. Созданная и развитая работами Gauss'a, Hesse, Cayley, Sylvester'a, Clebsch'a, Study, Hilbert'a и др. теория алгебраических форм и инвариантов однородных линейных преобразований представляет в настоящее время обширную дисциплину, являясь одним из важнейших отделов современной алгебры.

Почти одновременно с теорией алгебраических начинает создаваться и теория дифференциальных квадратичных форм Возникновение ее тесно связано с развитием дифференциальной геометрии, именно теорией поверхностей. Исследования Gauss'а, возникшие в связи с его работами в геодезии, положили твердые основы теории квадратичных дифференциальных форм двух переменных и наметили дальнейшие пути исследования. Riemann распространил и углубил идеи Gauss'а, положив в основу построения неевклидовой геометрии теорию квадратичных дифференциальных форм n переменных. Идеи Riemann'а разрабатывались Christoffel'ем, Lipschitz'ем, Суворовым, Voss'ом и др. Очень простую форму исследования в этой области получили в работах Ricci, который предложил удобную символику, выделил операцию так называемого абсолютного дифференцирования и на примерах исследований в области геометрии и механики иллюстрировал преимущество этих новых методов, которым он дал название „абсолютного дифференциального исчисления". Первая работа Ricci, посвященная этому вопросу, появилась в 1887 г. [1] В мемуаре, относящемся к 1901 г., „Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications" (Math. Ann., Bd 54), Ricci совместно с Levi-Civita дал систематическое изложение основных своих исследований. Однако эти новые методы в области геометрии дифференциальной квадратичной формы не были в достаточной степени оценены широкими кругами математиков и физиков. Только с созданием общего принципа относительности, математическая сторона которого базируется всецело на абсолютном дифференциальном исчислении, возник интерес к этой дисциплине, и ее методы получили признание со стороны геометров, механиков и физиков-теоретиков. „Принцип относительности, говорит Einstein, является настоящим триумфом методов общего дифференциального исчисления, созданных Gauss'ом, Riemann'ом, Christoffel'ем, Ricci". [2]

2. Если абсолютное дифференциальное исчисление явилось математическим фундаментом для принципа относительности, то, с другой стороны, работы, связанные с принципом относительности, сильно способствовали прогрессу в области тензорного

[1] Ricci. Sulla derivazione covariante ad una forma quadratica differenziale. Rend. Accad. Lincei (IV), vol. 3, I, p. 15—18.

[2] Einstein. Zur allgemeinen Relativitätstheorie, Sitzungsber. d. preuss. Akad. 1915. S. 778—786.

анализа. Тот интерес, который привлекли к этой дисциплине исследования физиков, вызвал появление работ, внесших значительное упрощение и геометрическую ясность в основные вопросы абсолютного дифференциального исчисления. Например, созданное Levi-Civita понятие о параллельном переносе вектора в Riemann'овых пространствах способствовало, с одной стороны, упрощению в изложении основ тензорного анализа, а с другой—вызвало новые обобщения в геометрии, так что в настоящее время абсолютное дифференциальное исчисление в том виде, как оно было создано Ricci и Levi-Civita, является только одной из глав современной дифференциальной геометрии. Насколько большое упрощение внесло понятие о параллельном переносе, можно видеть хотя бы на примере исследований в области дифференциальных форм высших порядков (исследования E. Noether в классическом стиле — с одной стороны, и Berwald'а, основанное на теории параллельного переноса—с другой).

3. Мы уже говорили, что тензорный анализ представляет собою теорию форм и их инвариантов. Обычно в руководствах по тензорному анализу выбираются из этой теории наиболее простые вопросы, — именно те, которые находят применение в основных проблемах дифференциальной геометрии и теоретической физики. Следуя этому пути, мы сосредоточим свое внимание в этом курсе на теории дифференциальных квадратичных форм, являющейся основой дифференциальной геометрии метрического пространства. Конечно, этой теории должно предшествовать изучение алгебраических операций над тензорами — алгебра тензоров, которой и посвящена часть I этой книги.

Применение методов теории инвариантов в аналитической и дифференциальной геометрии, механике и математической физике дает значительное упрощение в исследовании основных проблем этих дисциплин. Те сжатые приемы вычисления, которые были созданы в теории инвариантов, облегчают формулировку геометрических и механических закономерностей и, освобождая исследователя от кропотливого счета, дают ему метод наиболее удобный и наиболее соответствующий самой природе геометрических и механических вопросов.

4. В векторном анализе существует два метода изложения: один употребляет так называемые прямые обозначения, другой пользуется счетом с составляющими векторов. В трехмерном пространстве Евклида метод прямых обозначений для простейших вопросов геометрии, механики и физики дает значительные упрощения в вычислениях и способствует сближению аналити-

ческого метода с синтетическим. Однако, если бы мы захотели перенести этот метод в векторный анализ многомерных пространств или создать способ прямых обозначений в тензорном анализе, то натолкнулись бы на большие затруднения. Те попытки, которые делались в этом направлении, приводили к очень сложной символике, уничтожающей все выгоды прямых обозначений. Вот почему в тензорном анализе приходится вести счет при помощи составляющих, но, благодаря удачно выбранной системе обозначений, этот счет не загромождает собою формул. Конечно, в некоторых наиболее простых вопросах бывает выгодно прибегать и к прямым обозначениям, например для элементарных алгебраических действий над векторами в n-мерных пространствах или в теории тензоров 2-го порядка (теория линейных операторов).

ГЛАВА I.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МАТРИЦ.

§ 1. Основные операции над матрицами. Рациональные функции от матриц.

1. Прежде чем приступить к изучению тензорного анализа, мы должны познакомиться с одним важным алгебраическим инструментом—счетом с матрицами.

Как известно из высшей алгебры, матрицей называется прямоугольная таблица, состоящая из некоторого числа строк и колонн, заполненных числами, называемыми элементами матрицы:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

Ряд вопросов алгебры (например, теория однородных линейных преобразований, теория билинейных форм) приводит к мысли рассматривать матрицу как комплексное число, определяемое ее элементами; над этими комплексными числами производятся операции, аналогичные тем алгебраическим действиям, которые совершаются над обычными комплексными числами алгебры.

Мы будем изучать в матричном исчислении исключительно так называемые квадратные матрицы, у которых число строк равно числу колонн[1] (в отличие от них матрицы, у которых число строк не равно числу колонн, называются прямоугольными). Квадратные матрицы тесно связаны с теорией однородных линейных преобразований:

$$x_i' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k, \quad (i = 1, 2, \dots n). \tag{1,1}$$

[1] Число строк квадратной матрицы называется ее порядком.

Каждому преобразованию соответствует квадратная матрица, составленная из коэффициентов преобразования:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{Vmatrix}$$

Условимся обозначать матрицы большими латинскими буквами; будем употреблять также следующий сокращенный символ:

$$A = \|a_{ik}\|.$$

Определитель матрицы $A = \|a_{ik}\|$ будем обозначать следующим образом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = |A| = |a_{ik}|.$$

Если $|A| \neq 0$, то матрица A называется неособенной, если же $|A| = 0$,—то особенной.

Покажем на простом примере, как теория линейных преобразований приводит к мысли создать действия над матрицами, рассматривая их как комплексные числа. Если к переменным (1, 1) применить снова линейное преобразование:

$$x_i'' = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} x_k', \tag{1,2}$$

то, выражая x_i'' через x_i, получим:

$$x_i'' = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} x_k, \tag{1,3}$$

причем коэффициенты c_{ik} выражаются следующим образом через коэффициенты первых двух преобразований:

$$c_{ik} = \sum_{p=1}^{n} b_{ip} a_{pk}. \tag{1,4}$$

Преобразование (1,3) называется произведением преобразований (1,1) и (1,2). Это дает мысль построить действие умножения двух матриц $\|a_{ik}\|$ и $\|b_{ik}\|$, считая матрицу $\|c_{ik}\|$ их произведением, тем более что, как мы увидим дальше, это произведен е обладет некоторыми основными свойствами произведения числовой алгебры.

2. Обратимся теперь к систематическому изучению основ матричной алгебры. Сначала определим, что мы будем понимать под равными матрицами.

Две матрицы одного и того же порядка $A = \|a_{ik}\|$ и $B = \|b_{ik}\|$ будем считать равными: $A = B$, если каждый элемент a_{ik} первой матрицы равен соответствующему элементу b_{ik} второй.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой и обозначается символом 0.

Суммой двух матриц $A = \|a_{ik}\|$ и $B = \|b_{ik}\|$ одного и того же порядка будем считать матрицу $C = \|c_{ik}\|$, элементы которой равны суммам соответствующих элементов слагаемых:

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}.$$

Будем употреблять запись:

$$C = A + B.$$

Очевидно, что сложение матриц обладает свойством коммутативности и ассоциативности:

$$A + B = B + A$$
$$A + (B + C) = (A + B) + C.$$

Вычитание определяется как действие, обратное сложению. Оно всегда возможно и однозначно. Матрицу, элементы которой получаются из соответствующих элементов матрицы A изменением знака, будем обозначать символом: $-A$.

Произведением матрицы $A = \|a_{ik}\|$ на число α называется матрица $B = \|b_{ik}\|$, элементы которой получаются из соответствующих элементов матрицы A умножением на число α:

$$b_{ik} = \alpha\, a_{ik}.$$

Это произведение будем обозначать αA или $A\alpha$. Очевидны следующие формулы:

$$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta) A,$$
$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B,$$
$$(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A,$$

выражающие законы ассоциативности и дистрибутивности.

Произведением матриц $A = \|a_{ik}\|$, $B = \|b_{ik}\|$ *одного и того же порядка называется матрица* $C = \|c_{ik}\|$, *элементы которой определяются следующим образом:*

$$c_{ik} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} b_{pk}. \tag{1,5}$$

Произведение обозначается символом:

$$C = AB.$$

Согласно формуле (1,5), элемент c_{ik} матрицы C получается следующим образом: элементы, стоящие в i-й строке матрицы A, умножаем на соответствующие элементы из k-ой колонны матрицы B и произведения эти складываем.

Нетрудно видеть, что перемножение матриц соответствует как раз произведению двух линейных преобразований; для преобразований (1,1), (1,2) и (1,3) имеем:

$$\|c_{ik}\| = \|b_{ik}\| \, \|a_{ik}\|.$$

Отметим следующее соотношение между определителями произведения и сомножителей:

$$|AB| = |A| \, |B|,$$

вытекающее из формулы (1, 5).

Произведение двух матриц в общем случае не обладает коммутативным свойством:

$$AB \neq BA.$$

В самом деле, $\sum a_{ip} b_{pk}$ вообще не равно $\sum b_{ip} a_{pk}$.

Пример.

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{Vmatrix}.$$

Две матрицы, произведение которых коммутативно, называются **п е р е с т а н о в о ч н ы м и.**

Свойства ассоциативности и дистрибутивности относительно операции сложения, как нетрудно видеть из (1,5), имеют место всегда:

$$A(BC) = (AB)C$$
$$(A + B)C = AC + BC$$
$$A(B + C) = AB + AC.$$

Важной особенностью действия умножения матриц является то, что *произведение двух ненулевых матриц может быть равно нулю.*

Пример:

$$\begin{Vmatrix} m & 0 \\ n & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ p & q \end{Vmatrix} = 0.$$

Роль единицы (правой и левой) в умножении играет матрица

$$E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{Vmatrix},$$

у которой элементы в главной диагонали равны 1, а все остальные — нули. Имеем:

$$AE = EA = A.$$

Нетрудно показать, что, к р о м е E, е д и н и ц в м а т р и ч н о м у м н о ж е н и и н е и м е е т с я.

Действительно, предположим, что существует еще одна правая единица E_1, т. е. матрица, удовлетворяющая соотношению:

$$AE_1 = A$$

для любой матрицы A. Полагая в этом равенстве $A = E$, получаем:

$$E_1 = E.$$

Аналогично доказывается, что левая единица также единственная, именно E.

Произведение $AA \ldots A$, в котором матрица A повторяется m раз, называется m-й степенью матрицы A и обозначается A^m. Очевидны формулы:

$$A^m A^n = A^{m+n},$$
$$(A^m)^n = A^{mn}$$

Задача 1. Дана матрица:

$$A = \begin{Vmatrix} 0, & 1, & 0 \\ -1, & 0, & 2 \\ 0, & 0, & 1 \end{Vmatrix};$$

вычислить матрицу $A^3 - A^2 - E$.

Ответ.

$$\begin{Vmatrix} 0, & -1, & 0 \\ 1, & 0, & -2 \\ 0, & 0, & -1 \end{Vmatrix}$$

Задача 2. Показать, что

$$\begin{Vmatrix} 0, & c, & -b \\ -c, & 0, & a \\ b, & -a, & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a^2, & ab, & ac \\ ab, & b^2, & bc \\ ac, & bc, & c^2 \end{Vmatrix} = 0.$$

Задача 3. Доказать, что произведение нескольких матриц представляет особенную матрицу тогда и только тогда, если по крайней мере один из множителей особенная матрица.

Задача 4. Показать, что $|aA| = a^n|A|$, где n—порядок матрицы A.

Задача 5. Почему в общем случае $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$, $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$, $(AB)^m \neq A^m B^m$? Показать, что

$$(A + aE)(A - aE) = A^2 - a^2E,$$
$$(A + aE)^2 = A^2 + 2aA + a^2E.$$

Задача 6. Показать, что

$$(E - AB)A(E + BA) = (E + AB)A(E - BA).$$

Задача 7. Даны матрицы n-го порядка:

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Доказать следующие соотношения:

$$A^n = 0, \ B^{2k} = E, \ B^{2k+1} = B.$$

Задача 8. Делителем нуля называется матрица A, обладающая тем свойством, что можно подобрать такую матрицу $B \neq 0$, что или $AB = 0$ или $BA = 0$. Доказать, что матрица тогда и только тогда является делителем нуля, если она особенная.

3. Матрица вида

$$\sigma E = \begin{Vmatrix} \sigma & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \sigma \end{Vmatrix}$$

называется **скалярной**. Скалярная матрица перестановочна с любой матрицей:

$$(\sigma E)A = A(\sigma E).$$

Нетрудно показать, что и обратно:

Матрица, перестановочная с любой матрицей того же порядка, является скалярной.

В самом деле, пусть матрица $A = \|a_{ik}\|$ перестановочна с каждой матрицей X:

(1,6) $$AX = XA.$$

Возьмем, в качестве X, матрицу, у которой элемент $x_{ik} = 1$, остальные же равны нулю:

$$X = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} \begin{array}{c} (k) \\ \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix} \end{array} & (i) \end{array}$$

Из равенства (1,6) получаем:

$$\begin{array}{c} (k) \\ \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \dots & a_{1i} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{2i} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_{ni} & \dots & 0 \end{Vmatrix} \end{array} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix} \ (i)$$

Отсюда имеем:

$$a_{ii} = a_{kk},$$
$$a_{pi} = 0 \ (\text{для } p \neq i),$$
$$a_{kq} = 0 \ (\text{для } q \neq k),$$

т. е. действительно матрица A должна быть скалярной.

4. Обратимся к изучению действия, обратного умножению. Рассмотрим линейное преобразование:

$$x_i' = \sum a_{ik} x_k.$$

Если определитель

(1,7) $$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

не равен нулю, то переменное x_i можно выразить через x_i'. Мы получаем так называемое обратное преобразование:

$$(1,8) \qquad x_i = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} \dots \overset{(i)}{x_1'} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots x_2' \dots a_{2n} \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ a_{n1} \dots x_n' \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Обозначая алгебраическое дополнение элемента a_{ik} в определителе (1,7) через A_{ik}, мы можем выразить преобразование (1,8) следующими формулами:

$$x_i = \sum \frac{A_{ki}}{|A|} x_k' .$$

Матрица этого преобразования называется обратной по отношению к матрице A и обозначается символом A^{-1}. Таким образом,

$$A^{-1} = \begin{Vmatrix} \frac{A_{11}}{|A|}, & \frac{A_{21}}{|A|}, \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|}, & \frac{A_{22}}{|A|}, \dots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ \frac{A_{1n}}{|A|}, & \frac{A_{2n}}{|A|}, \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{Vmatrix}$$

Обратная матрица существует, конечно, только у неособенной матрицы. Произведение двух взаимно-обратных линейных преобразований дает тождественное преобразование

$$x_i' = x_i$$

с матрицей E. Следовательно,

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Отсюда выводим, что

$$|A|\,|A^{-1}| = 1.$$

Таким образом, обратная матрица представляет собою также неособенную матрицу.

5. Имея понятие об обратной матрице, мы можем решить уравнение

$$(1,9) \qquad AX = B,$$

где A — неособенная матрица. Умножая обе части этого равенства слева на A^{-1}, получаем

$$X = A^{-1}B.$$

Как нетрудно видеть, уравнение (1, 9) имеет только одно решение.

Уравнение

$$(1,10) \qquad YA = B$$

имеет также единственное решение

$$Y = BA^{-1}.$$

Решения уравнений (1,9) и (1,10) в общем случае не одинаковы. Они совпадают только тогда, если матрицы A и B перестановочны. В самом деле, из равенства

$$(1,11) \qquad AB = BA$$

мы выводим, умножая обе части слева и справа на B^{-1}:

$$(1,12) \qquad B^{-1}A = AB^{-1};$$

обратно, из (1, 12) вытекает (1, 11).

Так как уравнения (1,9) и (1,10) имеют различные решения, то не имеет смысла говорить о „дроби" $\frac{B}{A}$, тем более что действия над матрицами $A^{-1}B$ и BA^{-1} не имеют близких аналогий с операциями над обыкновенными дробями.

6. Уравнение

$$A^{-1}X = E$$

имеет решение: $X = A$. Следовательно,

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

Рассмотрим уравнение вида

$$ABX = E,$$

где A и B — неособенные матрицы. Умножая слева обе части на $B^{-1}A^{-1}$, получаем:

$$X = B^{-1}A^{-1}.$$

Отсюда выводим важную формулу:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Вообще

$$(A_1A_2 \dots A_m)^{-1} = A_m^{-1}A_{m-1}^{-1} \dots A_2^{-1}A_1^{-1}.$$

7. Понятие о степени распространяется на отрицательные показатели. Положим

$$A^0 = E, \qquad A^{-m} = (A^{-1})^m.$$

Нетрудно видеть, что соотношения

$$A^m A^n = A^{m+n}, \qquad (A^m)^n = A^{mn}$$

справедливы и для отрицательных показателей.

Задача 9. Показать что матрицы

$$X = \begin{Vmatrix} 1, & 0, & -1 \\ 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \end{Vmatrix}, \qquad Y = \begin{Vmatrix} 1, & 0, & 0, & -1 \\ 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & -1, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \end{Vmatrix}$$

удовлетворяют уравнениям

$$X^{-2} + X = E,$$
$$Y^2 + Y^{-1} + Y^{-2} = E.$$

√ *Задача 10.* Если

$$A = \begin{Vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots \sigma_n \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} \sigma & 1 & 0 & \ldots 0 \\ 0 & \sigma & 1 & \ldots 0 \\ 0 & 0 & \sigma & 1 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots \sigma \end{Vmatrix},$$

то

$$A^{-1} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & \ldots\ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{\sigma_n} \end{Vmatrix},$$

$$B^{-1} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sigma}, & -\frac{1}{\sigma^2}, & \frac{1}{\sigma^3}, & -\frac{1}{\sigma^4}, \ldots \\ 0, & \frac{1}{\sigma}, & -\frac{1}{\sigma^2}, & \frac{1}{\sigma^3}, \ldots \\ 0, & 0, & \frac{1}{\sigma}, & -\frac{1}{\sigma^2}, \ldots \\ 0, & 0, & 0, & \frac{1}{\sigma}, \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \end{Vmatrix}$$

Задача 11. Если

$$\text{(a)} \qquad (AB)^{r-1} = A^{r-1}B^{r-1}$$
$$\text{(b)} \qquad (AB)^r = A^r B^r$$
$$\text{(c)} \qquad (AB)^{r+1} = A^{r+1}B^{r+1},$$

и если матрицы A и B неособенные, то они перестановочные.

Решение. Умножим соотношение (a) справа на AB; получаем: $(AB)^r = A^{r-1}B^{r-1}AB$. На основании равенства (b), выводим

$$A^{r-1}B^{r-1}AB = A^r B^r,$$

откуда

$$\text{(d)} \qquad B^{r-1}A = AB^{r-1}.$$

Аналогично из соотношений (b) и (c) выводим

$$\text{(e)} \qquad B^r A = AB^r.$$

Теперь умножаем равенство (d) слева на B; сопоставляя полученный результат с (e), имеем:

$$BAB^{r-1} = AB^r,$$

откуда

$$AB = BA.$$

8. У особенной матрицы обратной матрицы не существует. Иногда полезно, вместо обратной, рассматривать так называемую присоединенную матрицу к данной. Если дана матрица $A = \|a_{ik}\|$, то присоединенной называется такая матрица $B = \|b_{ik}\|$, у которой элементы

$$b_{ik} = A_{ki},$$

где A_{ki} — алгебраические дополнения, соответствующие элементам a_{ki} в определителе $|A|$. Присоединенная матрица существует, конечно, и у особенной. Произведение присоединенной и исходной матрицы выражается формулой

$$AB = BA = |A|E.$$

Задача 12. Если матрица B является присоединенной к A, то определитель $|B|$ называется взаимным с $|A|$. Показать, что

$$|B| = |A|^{n-1},$$

где n — порядок матрицы A.

9. Имея основные действия матричной алгебры, определяем целую алгебраическую функцию от матрицы (матричный полином):

$$\varphi(X) = \alpha_0 X^m + \alpha_1 X^{m-1} + \ldots + \alpha_{m-1} X + \alpha_m E,$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m$ — некоторые числа.

Если мы будем искать корни этого полинома среди скалярных матриц $X = \sigma E$, то придем к соотношению

$$\varphi(\sigma E) = (a_0\sigma^m + a_1\sigma^{m-1} + \ldots + a_m)E = 0;$$

таким образом, σ должно удовлетворять уравнению

$$\varphi(\sigma) = a_0\sigma^m + a_1\sigma^{m-1} + \ldots + a_m = 0.$$

Обозначая корни этого полинома через $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_m$, получаем формулу:

$$\varphi(X) = a_0(X - \sigma_1 E)(X - \sigma_2 E) \ldots (X - \sigma_m E),$$

которую нетрудно проверить, перемножая стоящие в правой части биномы. Матричный полином m-ой степени не может иметь больше m корней скалярного типа данного порядка; но, конечно, он может иметь корнями и матрицы нескалярного типа (см. задачу 13 в конце следующего раздела).

Если $\varphi(\sigma)$ разлагается на множители

$$\varphi(\sigma) = \varphi_1(\sigma)\,\varphi_2(\sigma),$$

то и

$$\varphi(X) = \varphi_1(X)\,\varphi_2(X) = \varphi_2(X)\,\varphi_1(X),$$

что проверяется перемножением.

10. Так как два полинома от одной и той же матрицы перестановочны:

$$\varphi(X)\,\psi(X) = \psi(X)\,\varphi(X),$$

то (в том случае, если $\psi(X)$ — неособенная матрица)

$$\psi^{-1}(X)\,\varphi(X) = \varphi(X)\,\psi^{-1}(X),$$

где через $\psi^{-1}(X)$ обозначена матрица, обратная матрице $\psi(X)$. Функция $\varphi(X)\psi^{-1}(X)$ называется **рациональной дробной функцией** от X. Она обозначается также как частное двух полиномов:

$$\frac{\varphi(X)}{\psi(X)} = \varphi(X)\,\psi^{-1}(X) = \psi^{-1}(X)\,\varphi(X).$$

Выше мы видели, что для двух произвольных матриц A и B символ $\dfrac{A}{B}$ неупотребителен, так как „частное" двух неперестановочных матриц имеет двоякий смысл: $AB^{-1} \neq B^{-1}A$.

В области же рациональных дробных функций символ $\dfrac{\varphi(X)}{\psi(X)}$

имеет определенный смысл и, кроме того, рациональные дроби обладают многими свойствами рациональных дробей обычной алгебры. Так например,

$$\frac{\varphi_1(X)}{\psi_1(X)}\,\frac{\varphi_2(X)}{\psi_2(X)} = \frac{\varphi_2(X)}{\psi_2(X)}\,\frac{\varphi_1(X)}{\psi_1(X)} = \frac{\varphi_1(X)\,\varphi_2(X)}{\psi_1(X)\,\psi_2(X)}$$

$$\frac{\varphi(X)}{\psi(X)} = \frac{\varphi(X)\,\omega(X)}{\psi(X)\,\omega(X)}$$

$$\left(\frac{\varphi(X)}{\psi(X)}\right)^{-1} = \frac{\psi(X)}{\varphi(X)}.$$

Вывести эти формулы предлагаем читателю в качестве упражнения.

Задача 13. Решить уравнение

$$X^2 = a^2E,$$

предполагая матрицы X и E второго порядка.

Ответ. 1) $\pm aE$, 2) $\begin{Vmatrix} s, & t \\ u, & -s \end{Vmatrix}$, где s, t, u — параметры, связанные соотношением

$$s^2 + ut = a^2.$$

Задача 14. Вычислить $\dfrac{A^2+E}{A+E}$, где

$$A = \begin{Vmatrix} 0, & 1, & -1 \\ 2, & 0, & 0 \\ 1, & -1, & 0 \end{Vmatrix}$$

Ответ. $2A^{-1}$.

Задача 15. Если

$$A = \begin{Vmatrix} 0, & \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, & 0 \end{Vmatrix},$$

то

$$\frac{E+A}{E-A} = \begin{Vmatrix} \cos\alpha, & -\sin\alpha \\ \sin\alpha, & \cos\alpha \end{Vmatrix}.$$

11. Если в матрице

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

колонны заменить строками и обратно, то получится новая матрица

$$A_c = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{21} \dots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} \dots a_{n2} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} \dots a_{nn} \end{matrix} \right\|,$$

которая называется сопряженной с A. Очевидно, что

$$(A_c)_c = A,$$

$$(A+B)_c = A_c + B_c.$$

Посмотрим, чему равна матрица $(AB)_c$. Пусть $AB = C$, $A = \|a_{ik}\|$, $B = \|b_{ik}\|$, $C = \|c_{ik}\|$, $A_c = \|\underset{c}{a_{ik}}\|$, $B_c = \|\underset{c}{b_{ik}}\|$, $C_c = \|\underset{c}{c_{ik}}\|$.

Имеем:

$$\underset{c}{c_{ik}} = c_{ki} = \sum a_{kp} b_{pi} = \sum \underset{c}{b_{ip}} \underset{c}{a_{pk}}.$$

Следовательно,

$$(AB)_c = B_c A_c. \tag{1,13}$$

Эта формула непосредственно распространяется на произведение любого числа матриц:

$$(AB \dots M)_c = M_c \dots B_c A_c.$$

Пользуясь соотношением (1,13), нетрудно получить выражение для матрицы, сопряженной с обратной. Пусть A — неособенная матрица. Подставляя в (1,13) $B = A^{-1}$ и учитывая, что $E_c = E$, получаем

$$(A^{-1})_c A_c = E.$$

Таким образом

$$(A_c)^{-1} = (A^{-1})_c.$$

На основании этого соотношения мы можем записывать $(A_c)^{-1}$ или $(A^{-1})_c$ просто A_c^{-1}. Отметим, что, если $A = B_c^{-1}$, то $B = A_c^{-1}$.

12. Пусть имеется два линейных преобразования

$$x_i' = \sum a_{ik} x_k,$$

$$y_i' = \sum b_{ik} y_k.$$

Обозначим матрицы этих преобразований через A и B: $A = \|a_{ik}\|$, $B = \|b_{ik}\|$. Если $A = B$, то говорят, что переменные x_i и y_i преобразуются когредиентно. Если $B = A_c^{-1}$, то говорят, что переменные x_i преобразуются контрагредиентно относительно y_i (и обратно).

13. Матрица, которая равна своей сопряженной, называется симметрической:

$$A = A_c.$$

Если же

$$A = -A_c,$$

то такая матрица называется антисимметрической (или кососимметрической).

Задача 16. Показать, что матрица AA_c — симметрическая (A — произвольная матрица).

Задача 17. Показать, что $(AB)_c^{-1} = A_c^{-1} B_c^{-1}$.

Задача 18. Возьмем матрицы A и B, данные в задаче 7. Показать, что

$$AB = BA_c, \qquad BA = A_c B.$$

Задача 19. Если A — симметрическая матрица, то и A^k — симметрическая. Если матрица A — антисимметрическая, то A^k представляет собою симметрическую или антисимметрическую матрицу, смотря по тому, четным или нечетным является показатель степени k.

Задача 20. Если $AA_c = 0$ и если A — действительная матрица, то $A = 0$.

Задача 21. Показать, что $(\varphi(A))_c = \varphi(A_c)$, где φ — дробная рациональная функция.

14. Будем обозначать матрицу, элементы которой комплексно-сопряженны с соответствующими элементами матрицы A, через $\bar{A}$: если $A = \|a_{ik}\|$, то $\bar{A} = \|\bar{a}_{ik}\|$. Выполним над некоторой матрицей A последовательно две операции: возьмем от нее сопряженную A_c и в этой последней элементы заменим комплексно-сопряженными числами. Обе эти операции, очевидно, перестановочны: $(\overline{A_c}) = (\bar{A})_c$. Полученную матрицу будем обозначать символом A^*. Итак, если $A = \|a_{ik}\|$, $A^* = \|b_{ik}\|$, то

$$b_{ik} = \bar{a}_{ki}.$$

Нетрудно обнаружить справедливость следующих равенств:

$$(A^*)^* = A,$$
$$(A+B)^* = A^* + B^*,$$
$$(AB)^* = B^* A^*,$$
$$(A^{-1})^* = A^{*-1}.$$

Матрица, удовлетворяющая соотношению:

$$A = A^* \quad a_{ik} = \bar{a}_{ki},$$

называется **матрицей Hermite'а (эрмитовой матрицей).**

Матрица Hermite'а является аналогом симметрической. Естественно возникает вопрос о матрице, аналогичной антисимметрической:

$$A^* = -A, \quad a_{ik} = -\bar{a}_{ki}.$$

Интересно отметить, что эти матрицы не отличаются существенно от эрмитовых: если умножить такую матрицу на i, то мы получим матрицу Hermite'а. В самом деле,

$$(iA)^* = -iA^* = iA.$$

Задача 22. Если A — антисимметрическая матрица с вещественными элементами, то iA — матрица Hermite'а.

Задача 23. Произведение двух матриц Hermite'а тогда и только тогда дает матрицу Hermite'а, если эти матрицы перестановочны.

Задача 24. Показать, что каждую матрицу M всегда можно представить, и только одним способом, в виде

$$M = A_1 + iA_2,$$

где A_1 и A_2 — матрицы Hermite'а.

Решение. Имеем

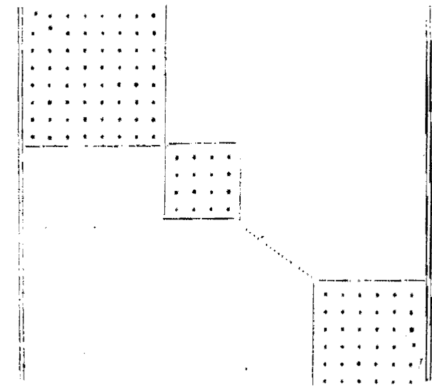
$$M = A_1 + iA_2$$
$$M^* = A_1 - iA_2,$$

откуда

$$A_1 = \frac{1}{2}\left(M + M^*\right), \quad A_2 = \frac{1}{2i}\left(M - M^*\right).$$

15. Рассмотрим матрицу, в которой элементы, отличные от нуля, стоят в квадратах, расположенных вдоль главной диагонали, все же остальные элементы равны нулю На приводимой схеме:

(1,14)



поля, не заполненные точками, состоят из нулей. Обозначим матрицы, стоящие вдоль главной диагонали, через $A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, \dots A_{\alpha_r}$ (индексами $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_r$ отметим порядки этих матриц); условимся записывать матрицу (1,14) следующим образом:

$$A = \begin{Vmatrix} A_{\alpha_1} & & & \\ & A_{\alpha_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{\alpha_r} \end{Vmatrix}.$$

Мы будем говорить, что **матрица A распадается на матрицы** $A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, \dots A_{\alpha_r}$, что A является диагональной матрицей. Отметим следующие формулы:

$$|A| = |A_{\alpha_1}|\,|A_{\alpha_2}| \dots |A_{\alpha_r}|,$$

$$\begin{Vmatrix} A_{\alpha_1} & & & \\ & A_{\alpha_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{\alpha_r} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} B_{\alpha_1} & & & \\ & B_{\alpha_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_{\alpha_r} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} C_{\alpha_1} & & & \\ & C_{\alpha_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_{\alpha_r} \end{Vmatrix},$$

где $\quad C_{\alpha_i} = A_{\alpha_i} B_{\alpha_i}, \quad (i = 1, \dots r)$

$$\begin{Vmatrix} A_{\alpha_1} & & & \\ & A_{\alpha_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{\alpha_r} \end{Vmatrix}^{-1} = \begin{Vmatrix} A_{\alpha_1}^{-1} & & & \\ & A_{\alpha_2}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{\alpha_r}^{-1} \end{Vmatrix}.$$

Доказательство этих соотношений предоставляем читателю в качестве упражнения.

---

16. Следующие задачи относятся к различным разделам настоящего параграфа:

Задача 25. Показать, что общий вид матрицы, перестановочной с матрицей второго порядка A (A — матрица не скалярного типа), выражается формулой:

$$\alpha A + \beta E,$$

где α и β — произвольные числа.

Задача 26. Если

$$AX + XB = \alpha X \tag{m}$$

при любом выборе матрицы X, то $A = \lambda E$, $B = (\alpha - \lambda)E$, где λ — произвольное число.

Решение. Пусть $A = \|a_{ik}\|$, $B = \|b_{ik}\|$, $X = \|x_{ik}\|$. Выберем элементы x_{ik} следующим образом: $x_{rs} = 1$, все же остальные элементы равны нулю. Тогда из (m) выводим:

$$a_{pr} = 0, \quad (p \neq r), \quad b_{sq} = 0, \quad (q \neq s)$$
$$a_{rr} + b_{ss} = \alpha,$$

откуда вытекает требуемый результат.

Задача 27. Показать, что полином $X^2 + \alpha_1 X + \alpha_2 E$ можно разложить на линейные множители вида $X - A_1$, $X - A_2$ только одним способом, причем $A_1 = \sigma_1 E$, $A_2 = \sigma_2 E$, где σ_1, σ_2 — корни уравнения:

$$\sigma^2 + \alpha_1 \sigma + \alpha_2 = 0.$$

Указание. Решение основывается на результате предыдущей задачи.

Задача 28. Если элементы матрицы $A = \|a_{ik}\|$ связаны соотношениями:

$$\sum_{p=1}^{n} a_{ip} a_{ip} = 1, \qquad (i = 1, \dots n)$$

$$\sum_{p=1}^{n} a_{ip} a_{kp} = 0, \qquad (i \neq k, \; i, k = 1, \dots n),$$

то A называется о р т о г о н а л ь н о й м а т р и ц е й (матрицей ортогонального преобразования). Вывести следующие свойства ортогональной матрицы: 1) $A^{-1} = A_c$, 2) $|A| = \pm 1$, 3) если A_{ik} — алгебраическое дополнение элемента a_{ik} в определителе $|A|$, то $A_{ik} = \pm a_{ik}$; знак плюс надо брать, если $|A| = +1$, минус — если $|A| = -1$, 4) произведение 2 ортогональных матриц есть матрица ортогональная.

Задача 29. Пусть A и B — матрицы n-го порядка. Составим матрицу M порядка $2n$ следующим образом:

$$M = \begin{Vmatrix} A & B \\ B & A \end{Vmatrix}.$$

Показать, что M тогда и только тогда ортогональна, если ортогональны матрицы $(A + B)$ и $(A - B)$.

Указание. Воспользоваться соотношением:

$$\begin{Vmatrix} A & B \\ C & D \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} AA_1 + BC_1, & AB_1 + BD_1 \\ CA_1 + DC_1, & CB_1 + DD_1 \end{Vmatrix},$$

где A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1 — матрицы одного и того же порядка.

Задача 30. Матрица U, удовлетворяющая соотношению:

$$UU^* = E,$$

называется у н и т а р н о й. Доказать следующие теоремы об унитарных матрицах:

1) Определитель унитарной матрицы по модулю равен единице.

2) Произведение двух унитарных матриц есть матрица унитарная.

3) Если A — произвольная матрица, U — унитарная, то из соотношения

$$B = U^{-1} A U$$

следует:

$$B^* = U^{-1} A^* U.$$

4) Если A — матрица Hermite'а, U — унитарная матрица, то и матрица

$$B = U^{-1} A U$$

также является матрицей Hermite'а.

Задача 31. Если A и B — матрицы Hermite'а и

$$B = V^{-1} A V,$$

то матрица VV^* перестановочна с A, матрица V^*V перестановочна с B.

Задача 32. Если

$$N = \begin{Vmatrix} A & B \\ B & A \end{Vmatrix},$$

где A и B — некоторые матрицы, то N тогда и только тогда является унитарной матрицей, если унитарны матрицы $A + B$ и $A - B$.

Задача 33. Обозначим сумму элементов, стоящих в главной диагонали матрицы $A = \|a_{ik}\|$, через S_A:

$$S_A = \sum a_{ii}.$$

Показать, что

$$S_{AB} = S_{BA}, \qquad S_{ABC} = S_{BCA} = S_{CAB}.$$

Как обобщить эти соотношения?

Задача 34. Если $\varphi = S_{X^m}$, где $X = \|x_{ik}\|$, то

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_{ik}} \right\| = m X_c^{m-1}.$$

Задача 35. Даны матрицы n-го порядка

$$A = \begin{Vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \sigma_n \end{Vmatrix}, \quad B_\sigma = \begin{Vmatrix} \sigma & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \sigma & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \sigma \end{Vmatrix}$$

и рациональная дробная функция $\varphi(x)$. Показать, что

$$\varphi(A) = \begin{Vmatrix} \varphi(\sigma_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \varphi(\sigma_2) & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \varphi(\sigma_n) \end{Vmatrix},$$

(1,15)
$$\varphi(B_\sigma) = \begin{Vmatrix} \varphi(\sigma), & \varphi_1(\sigma), & \varphi_2(\sigma), & \ldots & \varphi_{n-1}(\sigma) \\ 0, & \varphi(\sigma), & \varphi_1(\sigma), & \ldots & \varphi_{n-2}(\sigma) \\ 0, & 0, & \varphi(\sigma), & \ldots & \varphi_{n-3}(\sigma) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & 0, & \ldots & \varphi(\sigma) \end{Vmatrix},$$

где

$$\varphi_k(\sigma) = \frac{1}{k!} \frac{d^k \varphi}{d\sigma^k}.$$

Решение. Первая часть задачи, с матрицей A, решается просто. Займемся исследованием матрицы $\varphi(B_\sigma)$. Обозначим матрицу типа (1,15), в основу построения которой положена функция $\varphi(\sigma)$ и ее производные, через $U(\varphi)$.

Нетрудно обнаружить справедливость следующих соотношений:

(I) $$U(\varphi) + U(\psi) = U(\varphi + \psi),$$

(II) $$U(\varphi)\, U(\psi) = U(\varphi\psi).$$

На основании (II) имеем:

$$U(\varphi)\, U\left(\frac{1}{\varphi}\right) = U(1) = E, \quad \text{т. е.} \quad U\left(\frac{1}{\varphi}\right) = U^{-1}(\varphi),$$

откуда

(III) $$U\left(\frac{\varphi}{\psi}\right) = U(\varphi)\, U^{-1}(\psi).$$

Принимая во внимание, что

$$U(\sigma) = B_\sigma, \quad U(\alpha) = \alpha E,$$

где α — постоянное, выводим из (I), (II), (III) для рациональной функции $f(\sigma)$:

$$U(f(\sigma)) = f(U(\sigma)) = f(B_\sigma).$$

Задача 36. Пусть матрица A распадается на матрицы A_{α_1}, A ,.. ..A_{α_r}.

$$A = \begin{Vmatrix} A_{\alpha_1} & & & \\ & A_{\alpha_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{\alpha_r} \end{Vmatrix}.$$

Показать, что

$$\varphi(A) = \begin{Vmatrix} \varphi(A_{\alpha_1}) & & & \\ & \varphi(A_{\alpha_2}) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi(A_{\alpha_r}) \end{Vmatrix},$$

где $\varphi(x)$ — рациональная дробная функция.

Задача 37. Если матрица A имеет вид

$$A = \begin{Vmatrix} \sigma_1 E_{k_1} & & & \\ & \sigma_2 E_{k_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_m E_{k_m} \end{Vmatrix},$$

где $E_{k_1}, E_{k_2}, \ldots E_{k_m}$ — единичные матрицы порядков $k_1, k_2, \ldots k_m$, а $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_m$ — неравные между собою числа, то матрица B, перестановочная с A, распадается на m матриц:

$$B = \begin{Vmatrix} B_{k_1} & & & \\ & B_{k_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_{k_m} \end{Vmatrix},$$

где $B_{k_1}, B_{k_2}, \ldots B_{k_m}$ — произвольные матрицы порядков $k_1, k_2, \ldots k_m$.

§ 2. Ранг матрицы.

1. Возьмем прямоугольную матрицу, имеющую m строк и n колонн:

(2,1)
$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Вычеркивая в ней $(m-k)$ строк и $(n-k)$ колонн, мы получим матрицу k-го порядка. Определитель этой матрицы называется **минором** k-го **порядка** матрицы (2,1). Матрица имеет миноры различных порядков, начиная с 1 и кончая меньшим из чисел m и n.

Если все миноры какого-нибудь порядка рассматриваемой матрицы равны нулю, то все миноры более высокого порядка этой матрицы также равны нулю. В самом деле, каждый минор k-го порядка может быть линейно выражен через миноры $(k-1)$-го порядка (стоит только разложить его по элементам какой-нибудь строки или колонны).

Если среди миноров r-го порядка матрицы существует, по крайней мере, один не равный нулю, между тем как все миноры $(r+1)$-го (а следовательно, и высшего) порядка равны нулю, то говорят, что **ранг** матрицы равен r.

Нахождение ранга матрицы часто упрощается, если над ней произвести так называемые **элементарные преобразования**:

Элементарными преобразованиями матрицы называются следующие операции:

a) перестановка двух строк или колонн матрицы;

b) умножение каждого элемента какой-нибудь строки или колонны на одно и то же число, не равное нулю;

c) прибавление к элементам строки (или колонны) соответствующих элементов другой строки (или колонны), умноженных на одно и то же число.

Теорема 1. *Ранг матрицы не меняется, если к ней применить элементарные преобразования.*

Доказательство. Теорема очевидна для элементарных преобразований (a) и (b). Рассмотрим преобразование (c). Пусть оно состоит в прибавлении к элементам i-ой строки матрицы A соответствующих элементов k-ой строки, умноженных на число α. Преобразованную матрицу обозначим через A'. Докажем сначала, что ранг матрицы A' не больше r, где r — ранг матрицы A. Для этого покажем, что все миноры $(r+1)$-го порядка матрицы A' равны нулю. Те миноры матрицы A', которые не содержат в себе элементов i-ой строки или содержат элементы и i-ой и k-ой строк, равны соответствующим минорам матрицы A. Рассмотрим минор $(r+1)$-го порядка матрицы A', содержащий в себе элементы i-ой строки, но не содержащий элементов k-ой строки. Он может быть выражен, как $M+\alpha N$, где M и N — миноры $(r+1)$-го порядка матрицы A, и следовательно равен

нулю. Таким образом, ранг матрицы при элементарном преобразовании (c) повыситься не может.

Но ранг матрицы A' не может быть и меньше r, так как матрица A может быть получена из A' также при помощи преобразования (c), и при этом преобразовании ранг матрицы A' повысился бы.

Задача 1. Определить ранг следующих матриц, упрощая их при помощи элементарных преобразований:

$$1)\ \left\| \begin{matrix} 1, & 0, & 2, & -1 \\ 3, & 0, & 7, & -3 \\ 1, & 0, & 0, & -1 \end{matrix} \right\|, \qquad 2)\ \left\| \begin{matrix} 5, & 1, & 0, & 0, & 7 \\ 4, & 1, & 0, & 0, & 6 \\ 3, & 1, & 1, & 0, & 5 \\ 7, & 2, & 1, & 0, & 11 \end{matrix} \right\|.$$

Ответ. 1) 2; 2) 3.

Задача 2. Матрица

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots\dots \\ a_{m1} \dots a_{mn} \end{matrix} \right\|$$

тогда и только тогда имеет ранг, равный 0 или 1, если существует $(m+n)$ чисел $a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots b_n$, через которые элементы матрицы выражаются следующим образом:

$$a_{ik} = a_i b_k.$$

Задача 3. Каждая матрица ранга r при помощи элементарных преобразований может быть приведена к виду, в котором элементы $a_{ii} = 1$ $(i = 1, 2, \dots r)$, все же остальные равны нулю.

2. При определении ранга матрицы полезно применять следующую теорему:

Теорема 2. *Если какой-нибудь минор r-го порядка M матрицы A не равен нулю, между тем как все миноры $(r+1)$-го порядка, содержащие в себе M, равны нулю, то ранг матрицы A равен r.*

Доказательство. Не нарушая общности доказательства, можно предположить, что минор M стоит слева сверху в матрице A:

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1r} \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ a_{r1} \dots a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Рассмотрим минор N $(r+1)$-го порядка, включающий в себя M:

$$N=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rk} \\ a_{i1} & \dots & a_{ir} & a_{ik} \end{vmatrix};$$

он равен нулю: если $k \leqslant r$, то по основному свойству определителей, если $k > r$, — то по предположению теоремы. Разлагая N по элементам последней строки и учитывая, что $M \neq 0$, получаем:

$$a_{ik}=\lambda_{k1}a_{i1}+\lambda_{k2}a_{i2}+\dots+\lambda_{kr}a_{ir}, \tag{2,2}$$

причем коэфициенты $\lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{kr}$ не зависят от индекса i. Таким образом, элементы любой колонны могут быть линейно выражены через соответствующие элементы первых r колонн.

Теперь уже нетрудно показать, что любой минор $(r+1)$-го порядка

$$\begin{vmatrix} a_{i_1k_1} & \dots & a_{i_1k_{r+1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_{r+1}k_1} & \dots & a_{i_{r+1}k_{r+1}} \end{vmatrix} \tag{2,3}$$

равен нулю. Система $(r+1)$ уравнений

$$\begin{aligned} a_{i_1k_1}\mu_1+a_{i_1k_2}\mu_2+\dots\dots+a_{i_1k_{r+1}}\mu_{r+1}&=0,\\ a_{i_2k_1}\mu_1+a_{i_2k_2}\mu_2+\dots\dots+a_{i_2k_{r+1}}\mu_{r+1}&=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots&\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots&\\ a_{i_{r+1}k_1}\mu_1+a_{i_{r+1}k_2}\mu_2+\dots+a_{i_{r+1}k_{r+1}}\mu_{r+1}&=0 \end{aligned} \tag{2,4}$$

имеет ненулевое решение. В самом деле, подставляя в эти уравнения выражения для a_{ik} из формулы (2,2) и приравнивая нулю в каждом из этих уравнений выражения при $a_{i1}, a_{i2}, \dots a_{ir}$, мы получим всего только r линейных уравнений, которым должны удовлетворять неизвестные $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_{r+1}$. Следовательно, мы получим во всяком случае ненулевое решение. Но если уравнения (2,4) имеют ненулевое решение, то минор (2,3) равен нулю.

3. В дальнейшем изложении мы будем иметь дело с квадратными матрицами. Исследуем, в какой зависимости находится

ранг произведения от рангов множителей. Для этого выведем одну важную формулу. Пусть

$$C=AB,$$

$A=\|a_{ik}\|$, $B=\|b_{ik}\|$, $C=\|c_{ik}\|$. Выразим минор m-го порядка матрицы C через миноры матриц A и B. Имеем:

$$\varGamma=\begin{vmatrix} c_{i_1k_1} & \dots & c_{i_1k_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{i_mk_1} & \dots & c_{i_mk_m} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \sum a_{i_1\alpha}b_{\alpha k_1}, & \dots & \sum a_{i_1\alpha}b_{\alpha k_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum a_{i_m\alpha}b_{\alpha k_1} & \dots & \sum a_{i_m\alpha}b_{\alpha k_m} \end{vmatrix}.$$

Так как каждый элемент этого минора представляет собою сумму n членов, то этот определитель можно представить в виде суммы определителей:

$$\varGamma=\sum_{\alpha_1,\dots\alpha_m}\begin{vmatrix} a_{i_1\alpha_1}b_{\alpha_1k_1}, & a_{i_1\alpha_2}b_{\alpha_2k_2}, & \dots & a_{i_1\alpha_m}b_{\alpha_mk_m} \\ a_{i_2\alpha_1}b_{\alpha_1k_1}, & a_{i_2\alpha_2}b_{\alpha_2k_2}, & \dots & a_{i_2\alpha_m}b_{\alpha_mk_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_m\alpha_1}b_{\alpha_1k_1}, & a_{i_m\alpha_2}b_{\alpha_2k_2}, & \dots & a_{i_m\alpha_m}b_{\alpha_mk_m} \end{vmatrix}=$$

$$=\sum_{\alpha_1,\dots\alpha_m} b_{\alpha_1k_1}b_{\alpha_2k_2}\dots b_{\alpha_mk_m}\begin{vmatrix} a_{i_1\alpha_1} & \dots & a_{i_1\alpha_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_m\alpha_1} & \dots & a_{i_m\alpha_m} \end{vmatrix}.$$

В этой сумме равны нулю те члены, у которых среди индексов $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$ имеются равные. Те слагаемые, у которых индексы $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$ состоят из одних и тех же неравных между собой чисел и отличаются только порядком этих чисел, имеют общий множитель:

$$\begin{vmatrix} a_{i_1\alpha_1} & \dots & a_{i_1\alpha_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_m\alpha_1} & \dots & a_{i_m\alpha_m} \end{vmatrix}.$$

Вынося его за скобки, мы получаем в скобках сумму членов $\sum \pm b_{\alpha_1 k_1} b_{\alpha_2 k_2} \ldots b_{\alpha_m k_m}$, которая, как нетрудно видеть, дает определитель

$$\begin{vmatrix} b_{\alpha_1 k_1} & \ldots & b_{\alpha_1 k_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{\alpha_m k_1} & \ldots & b_{\alpha_m k_m} \end{vmatrix}$$

Таким образом,

$$\begin{vmatrix} c_{i_1 k_1} & \ldots & c_{i_1 k_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{i_m k_1} & \ldots & c_{i_m k_m} \end{vmatrix} = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m)} \begin{vmatrix} a_{i_1 \alpha_1} & \ldots & a_{i_1 \alpha_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_m \alpha_1} & \ldots & a_{i_m \alpha_m} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{\alpha_1 k_1} & \ldots & b_{\alpha_1 k_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{\alpha_m k_1} & \ldots & b_{\alpha_m k_m} \end{vmatrix} \tag{2,5}$$

Символом $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m)$ под знаком суммы мы отмечаем, что суммирование распространяется на $\binom{n}{m}$ сочетаний из индексов $1, 2, \ldots n$ по m в каждом.

Теорема 3. *Ранг произведения двух матриц не превышает ранга каждого множителя.*

Доказательство. На основании формулы (2,5) минор m-го порядка произведения линейно выражается через миноры того же порядка множителей. Следовательно, если у какого-нибудь из множителей все миноры порядка m равны нулю, то и у произведения миноры того же порядка равны нулю. Это и доказывает теорему.

Теорема 4. *Если умножить (справа или слева) матрицу ранга r на неособенную матрицу, то ранг произведения равен r.*

Доказательство. Пусть A — матрица ранга r, B — неособенная матрица. На основании предыдущей теоремы, ранг матрицы $C = AB$ не может быть выше r. Но он не может быть и ниже r, так как $A = CB^{-1}$.

Задача 4. Если $AB = 0$ и $A \neq 0$, $B \neq 0$, то обе матрицы A и B — особенные.

4. Теперь мы перейдем к рассмотрению ранга симметрических, антисимметрических и эрмитовых матриц. Для этого нам потребуется одна лемма о матрицах общего типа.

Лемма. *Если квадратная матрица n-го порядка имеет ранг $= r < n$, то матрица, составленная из ее миноров r-го порядка — первого ранга.*

Доказательство. Возьмем квадратную матрицу $\|a_{ik}\|$ ранга r. Элементы тех строк, к которым принадлежит один из миноров r-го порядка, отличных от нуля, обозначим через

$$\begin{matrix} b_{11}, & b_{12}, \ldots & b_{1n} \\ b_{21}, & b_{22}, \ldots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{r1}, & b_{r2}, \ldots & b_{rn} \end{matrix} \tag{2,6}$$

Так как все миноры $(r+1)$-го порядка равны нулю, то элементы каждой строки матрицы $\| a_{ik} \|$ могут быть линейно выражены через соответствующие элементы r строк (2,6):

$$a_{ik} = \lambda_{i1} b_{1k} + \lambda_{i2} b_{2k} + \ldots + \lambda_{ir} b_{rk} \quad (i = 1, 2, \ldots n). \tag{2,7}$$

Обозначим минор, в который входят элементы i_1-ой, i_2-ой, ... i_r-ой строк и k_1-ой, k_2-ой, ... k_r-ой колонн через

$$A^{i_1 \ldots i_r}_{k_1 \ldots k_r} = \begin{vmatrix} a_{i_1 k_1} & \ldots & a_{i_1 k_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_r k_1} & \ldots & a_{i_r k_r} \end{vmatrix}$$

На основании (2,7) получаем:

$$A^{i_1 \ldots i_r}_{k_1 \ldots k_r} = \begin{vmatrix} \sum \lambda_{i_1 \alpha} b_{\alpha k_1}, & \ldots & \sum \lambda_{i_1 \alpha} b_{\alpha k_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum \lambda_{i_r \alpha} b_{\alpha k_1}, & \ldots & \sum \lambda_{i_r \alpha} b_{\alpha k_r} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda_{i_1 1} & \ldots & \lambda_{i_1 r} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{i_r 1} & \ldots & \lambda_{i_r r} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1k_1} & \ldots & b_{1k_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{rk_1} & \ldots & b_{rk_r} \end{vmatrix}$$

Вводя обозначения

$$\begin{vmatrix} \lambda_{i_1 1} & \ldots & \lambda_{i_1 r} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{i_r 1} & \ldots & \lambda_{i_r r} \end{vmatrix} = \Lambda_{i_1 \ldots i_r}, \qquad \begin{vmatrix} b_{1k_1} & \ldots & b_{1k_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{rk_1} & \ldots & b_{rk_r} \end{vmatrix} = B^{1\,2\,\ldots\,r}_{k_1 k_2, \ldots k_r}$$

имеем

$$A_{k_1\ldots k_r}^{i_1\ldots i_r} = \Lambda_{i_1\ldots i_r} B_{k_1\ldots k_r}^{1\ldots r}.$$

Таким образом, миноры r-го порядка $A_{k_1\ldots k_r}^{i_1\ldots i_r}$, принадлежащие к одним и тем же строкам $i_1, \ldots i_r$, пропорциональны соответствующим минорам $B_{k_1\ldots k_r}^{1\ldots r}$ матрицы

$$\begin{Vmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{r1} & \ldots & b_{rn} \end{Vmatrix}$$

Следовательно, в матрице, составленной из миноров r-го порядка матрицы $\|a_{ik}\|$, все миноры 2-го порядка равны нулю.

5. Теорема 5. *Если симметрическая матрица имеет ранг, равный r, то, по крайней мере, один главный минор r-го порядка не равен нулю. Если элементы матрицы — действительные числа, то неравные нулю главные миноры r-го порядка имеют одинаковый знак.*

Доказательство. Обозначим, как и выше, миноры r-го порядка через $A_{k_1\ldots k_r}^{i_1\ldots i_r}$. На основании предыдущей леммы, имеем

$$(2,8) \qquad \begin{vmatrix} A_{i_1\ldots i_r}^{i_1\ldots i_r}, & A_{k_1\ldots k_r}^{i_1\ldots i_r} \\ A_{i_1\ldots i_r}^{k_1\ldots k_r}, & A_{k_1\ldots k_r}^{k_1\ldots k_r} \end{vmatrix} = 0.$$

Но для симметрической матрицы

$$A_{k_1\ldots k_r}^{i_1\ldots i_r} = A_{i_1\ldots i_r}^{k_1\ldots k_r}.$$

Таким образом,

$$(2,9) \qquad A_{i_1\ldots i_r}^{i_1\ldots i_r} A_{k_1\ldots k_r}^{k_1\ldots k_r} = \left(A_{k_1\ldots k_r}^{i_1\ldots i_r}\right)^2$$

Эта формула показывает, что если бы все главные миноры r-го порядка симметрической матрицы были равны нулю, то и вообще все миноры порядка r были бы также равны нулю; кроме того, если элементы матрицы — действительные числа, то все неравные нулю главные миноры имеют одинаковый знак.

Теорема 6. *Если ранг симметрической матрицы равен ее порядку n и если все ее главные миноры $(n-1)$-го порядка равны нулю, то существует, по крайней мере, один главный минор $(n-2)$-го порядка, отличный от нуля. Если элементы матрицы — вещественные числа, то все неравные нулю главные миноры $(n-2)$-го порядка имеют знак, противоположный знаку определителя матрицы.*

Доказательство. Обозначим определитель матрицы через C:

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix}, \quad c_{ik} = c_{ki},$$

алгебраическое дополнение элемента c_{ik} в определителе C — через C_{ik}. Имеем:[1]

$$\begin{vmatrix} C_{ii} & C_{ik} \\ C_{ki} & C_{kk} \end{vmatrix} = CC_{n-2},$$

где через C_{n-2} обозначено алгебраическое дополнение минора $\begin{vmatrix} c_{ii} & c_{ik} \\ c_{ki} & c_{kk} \end{vmatrix}$ в определителе C, являющееся главным минором $(n-2)$-го порядка. Согласно предположению теоремы $C_{ii} = C_{kk} = 0$. Следовательно,

$$CC_{n-2} = -C_{ik}^2,$$

что и доказывает теорему.

Последние две теоремы распространяются непосредственно на матрицы Hermite'а. Доказательства вполне аналогичны данным выше и потому предоставляются читателю. Отметим только два следующих факта, которыми придется воспользоваться при проведении этих доказательств:

1) Определитель матрицы Hermite'а является действительным числом.

В самом деле, если H — матрица Hermite'а, то $H_c = \overline{H}$, откуда

$$|H| = |\overline{H}|.$$

[1] Здесь мы пользуемся следующей теоремой о минорах взаимного определителя:

Пусть Δ — определитель, взаимный с D, M — минор k-го порядка определителя Δ, $\overline{M}$ — алгебраическое дополнение в определителе D минора k-го порядка, соответствующего M. Тогда

$$M = D^{k-1}\overline{M}$$

(см. Чезаро. Элементарный курс алгебраического анализа и исчисления бесконечно-малых, ч. 1, Одесса, 1913, стр. 33).

2) Миноры $A^{i_1\ldots i_r}_{k_1\ldots k_r}$ *и* $A^{k_1\ldots k_r}_{i_1\ldots i_r}$ *комплексно-сопряженны:*

$$A^{i_1\ldots i_r}_{k_1\ldots k_r}=\overline{A}^{k_1\ldots k_r}_{i_1\ldots i_r}.$$

Приведем формулировку теорем, аналогичных теоремам 5 и 6:

Теорема 5a. *Если матрица Hermite'a имеет ранг, равный r, то, по крайней мере, один главный минор r-го порядка не равен нулю. Все неравные нулю главные миноры r-го порядка имеют одинаковый знак.*

Теорема 6a. *Если ранг эрмитовой матрицы равен ее порядку n и если все главные миноры (n — 1)-го порядка равны нулю, то существует, по крайней мере, один главный минор (n — 2)-го порядка, отличный от нуля. Все неравные нулю главные миноры (n — 2)-го порядка имеют знак, противоположный знаку определителя матрицы.*

6. Перейдем к антисимметрическим матрицам.

Теорема 7. *Ранг антисимметрической матрицы всегда выражается четным числом. Если ранг антисимметрической матрицы равен r, то существует, по крайней мере, один главный минор r-го порядка не равный нулю.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что антисимметрический определитель нечетного порядка всегда равен нулю. В самом деле, если A — антисимметрическая матрица, то $A_c = -A$, откуда

$$|A| = (-1)^n |A|.$$

Для n нечетного $|A| = 0$. Рассмотрим соотношение (2,8) для антисимметрической матрицы r-го ранга. Так как в этом случае

$$A^{i_1\ldots i_r}_{k_1\ldots k_r}=(-1)^r A^{k_1\ldots k_r}_{i_1\ldots i_r},\ \text{то}\ A^{i_1\ldots i_r}_{i_1\ldots i_r}A^{k_1\ldots k_r}_{k_1\ldots k_r}=(-1)^r\left(A^{i_1\ldots i_r}_{k_1\ldots k_r}\right)^2.$$

Так как для r нечетного все главные миноры равны нулю, то и вообще все миноры r-го порядка равны нулю. Следовательно, ранг антисимметрической матрицы всегда четный.

Второе утверждение теоремы доказывается так же, как теорема 5.

Теорема 8. *Если ранг антисимметрической матрицы равен ее порядку n, то среди главных миноров (n — 2)-го порядка есть, по крайней мере, один отличный от нуля.*

Доказательство. Обозначим определитель матрицы через A, алгебраическое дополнение элемента a_{ik} — через A_{ik}. Имеем

$$\begin{vmatrix} A_{ii} & A_{ik} \\ A_{ki} & A_{kk} \end{vmatrix} = AA_{n-2},$$

где A_{n-2} главный минор $(n-2)$-го порядка, являющийся алгебраическим дополнением минора $\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ik} \\ a_{ki} & a_{kk} \end{vmatrix}$ в определителе A. Так как все главные миноры $(n-1)$-го порядка равны нулю, то

$$AA_{n-2} = A_{ik}^2. \qquad (2,10)$$

Теорема, таким образом, доказана.

Теорема 9. *Антисимметрический определитель, элементы которого — вещественные числа, не может быть отрицательным.*

Доказательство. Отбрасывая случаи, когда антисимметрический определитель равен нулю, рассмотрим определитель четного порядка. На основании формулы (2,10), неравный нулю главный минор $(n-2)$-го порядка имеет тот же знак, что и определитель. Отсюда следует, что среди главных миноров четного порядка всегда существуют отличные от нуля, причем знак их совпадает со знаком определителя. Но главные миноры 2-го порядка

$$\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ik} \\ a_{ki} & a_{kk} \end{vmatrix} = a_{ik}^2$$

отрицательными быть не могут, откуда следует утверждение теоремы.

В § 23 мы увидим, что антисимметрический определитель может быть представлен как квадрат целой алгебраической функции от его элементов.

Задача 5. Если A — антисимметрическая матрица с вещественными коэффициентами, то iA является матрицей Hermite'a. Пользуясь этим, вывести теорему 8 из 6a и показать, что неравный нулю главный минор $(n-2)$-го порядка имеет тот же знак, что и определитель $|A|$.

§ 3. λ-матрицы. Элементарные делители.[1]

1. Возьмем матрицу $A(\lambda)$, у которой элементы представляют собою полиномы от переменной λ. Такая матрица называется λ-матрицей. Пусть ранг матрицы $A(\lambda)$ равен r. Общий наи-

[1] Содержание этого параграфа потребуется только при изучении § 18.

больший делитель миноров i-го порядка $(i \leqslant r)$ обозначим через $D_i(\lambda)$, причем условимся коэффициент при старшем члене в этом полиноме брать равным 1. Так как каждый минор i-го порядка может быть линейно выражен через миноры $(i-1)$-го порядка, то $D_i(\lambda)$ делится нацело на $D_{i-1}(\lambda)$. Частное от деления $D_i(\lambda)$ на $D_{i-1}(\lambda)$ обозначим через $E_i(\lambda)$:

$$E_i(\lambda) = \frac{D_i(\lambda)}{D_{i-1}(\lambda)}, \quad (i = 1, 2 \ldots r).$$

($D_0(\lambda)$ будем считать равным единице). Многочлены $E_i(\lambda)$ называются **инвариантными факторами** матрицы $A(\lambda)$.

Обозначим корни полинома $D_r(\lambda)$ через $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ Так как $D_r(\lambda)$ делится на все $D_i(\lambda)$ $(i < r)$, то $D_i(\lambda)$, а следовательно, и $E_i(\lambda)$ будут иметь своими корнями числа из ряда $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ Положим

$$E_i(\lambda) = (\lambda - \alpha)^{e_i}(\lambda - \alpha')^{e_i'}(\lambda - \alpha'')^{e_i''} \ldots$$

Те из множителей:

$$(3,1) \qquad \begin{array}{llll} (\lambda-\alpha)^{e_1}, & (\lambda-\alpha)^{e_2}, & (\lambda-\alpha)^{e_3}, \ldots & (\lambda-\alpha)^{e_r} \\ (\lambda-\alpha')^{e_1'}, & (\lambda-\alpha')^{e_2'}, & (\lambda-\alpha')^{e_3'}, \ldots & (\lambda-\alpha')^{e_r'} \\ (\lambda-\alpha'')^{e_1''}, & (\lambda-\alpha'')^{e_2''} & (\lambda-\alpha'')^{e_3''}, \ldots & (\lambda-\alpha'')^{e_r''} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots, \end{array}$$

которые не приводятся к постоянной, называются **элементарными делителями** λ-матрицы.

Пример. Пусть

$$A(\lambda) = \begin{Vmatrix} \lambda, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, \\ 0, & \lambda-1, & 0, & 0, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & \lambda-1, & 0, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & 0, & \lambda-2, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \lambda-2, & 1, \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & \lambda-2, \end{Vmatrix}.$$

Имеем:

$$D_1 = 1, \quad D_2 = 1, \quad D_3 = 1, \quad D_4 = 1, \quad D_5 = (\lambda-1)(\lambda-2),$$
$$D_6 = \lambda(\lambda-1)^2(\lambda-2)^3.$$

Инвариантные факторы выражаются следующим образом:

$$E_1 = 1, \quad E_2 = 1, \quad E_3 = 1, \quad E_4 = 1, \quad E_5 = (\lambda-1)(\lambda-2),$$
$$E_6 = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2.$$

Таким образом схема (3,1) элементарных делителей матрицы $A(\lambda)$ имеет вид:

$$\begin{array}{l} \lambda-1, \ \lambda-1, \\ \lambda-2, \ (\lambda-2)^2, \\ \lambda. \end{array}$$

Задача 1. Вычислить элементарные делители следующих λ-матриц:

$$1) \begin{Vmatrix} (\lambda-1)^2, & 0, & 0 \\ 0, & \lambda(\lambda+1), & 0 \\ 0, & 0, & (\lambda-1)^3(\lambda+1)^2 \end{Vmatrix},$$

$$2) \begin{Vmatrix} \lambda(\lambda+1), & 0, & 0, & 0 \\ 0, & \lambda^2(\lambda-1), & 0, & 0 \\ 0, & 0, & \lambda-1, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & \lambda-1 \end{Vmatrix},$$

$$3) \begin{Vmatrix} (\lambda-1)^2, & 3\lambda-1, & 0, & 0 \\ 0, & \lambda(\lambda+1), & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 2\lambda+1, & \lambda+1 \\ 0, & 0, & \lambda, & \lambda \end{Vmatrix}.$$

Ответ. 1) λ, $(\lambda-1)^2$, $(\lambda-1)^3$, $\lambda+1$, $(\lambda+1)^2$; 2) λ, λ, λ^2, $(\lambda-1)$, $(\lambda-1)$, $\lambda+1$; 3) λ, λ^2, $(\lambda-1)^2$, $(\lambda+1)$.

2. Посмотрим, как отражается на элементарных делителях λ-матрицы ее умножение на постоянную матрицу. Докажем следующее положение:

Теорема 1. *Если λ-матрицу $A(\lambda)$ умножить (слева или справа) на неособенную матрицу B с постоянными элементами, то элементарные делители каждого из произведений $BA(\lambda)$ и $A(\lambda)B$ совпадают с элементарными делителями матрицы $A(\lambda)$.*

Доказательство. Разберем случай левого умножения: $C(\lambda) = BA(\lambda)$. Пусть $C(\lambda) = \|c_{ik}\|$, $B = \|b_{ik}\|$, $A(\lambda) = \|a_{ik}\|$. Для минора s-го порядка матрицы C имеем формулу:

$$(3,2) \qquad \begin{vmatrix} c_{i_1k_1} \ldots c_{i_1k_s} \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ c_{i_sk_1} \ldots c_{i_sk_s} \end{vmatrix} = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_s)} \begin{vmatrix} b_{i_1\alpha_1} \ldots b_{i_1\alpha_s} \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ b_{i_s\alpha_1} \ldots b_{i_s\alpha_s} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{\alpha_1k_1} \ldots a_{\alpha_1k_s} \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ a_{\alpha_sk_1} \ldots a_{\alpha_sk_s} \end{vmatrix}$$

Обозначим через D_i и D_i' общие наибольшие делители (со старшими коэффициентами $= 1$) миноров i-го порядка матриц $A(\lambda)$ и $C(\lambda)$. Формула (3,2) показывает, что D_i' делится на D_i. Но так как $A(\lambda) = B^{-1} C(\lambda)$, то и D_i делится на D_i'. Следовательно, $D_i = D_i'$, и инвариантные факторы, а следовательно и элементарные делители матриц $A(\lambda)$ и $C(\lambda)$ совпадают.

Две λ-матрицы $A(\lambda)$ и $A(\lambda)'$ называются **эквивалентными**, если существует такая неособенная матрица X с постоянными элементами, что

$$A(\lambda)' = XA(\lambda)X^{-1}.$$

Из теоремы 1 вытекает следующее положение:

Теорема 2. *У эквивалентных λ-матриц элементарные делители одинаковы.*

3. Из самого определения понятия об элементарных делителях λ-матрицы вытекает, что для их вычисления надо найти полиномы $D_1(\lambda), D_2(\lambda), \ldots D_r(\lambda)$. Однако нахождение этих полиномов в большинстве случаев представляет очень кропотливую задачу, так как приходится постепенно вычислять все миноры различных порядков λ-матрицы. Существует метод, позволяющий избегнуть определения полиномов $D_i(\lambda)$ и дающий возможность непосредственного вычисления инвариантных факторов $E_i(\lambda)$. Способ этот основывается на применении к λ-матрице так называемых элементарных преобразований.

Под **элементарным преобразованием** λ-матрицы будем понимать применение следующих операций:

a) перестановка двух строк или колонн матрицы,

b) умножение элементов какой-нибудь строки или колонны на одно и то же **постоянное** число, отличное от нуля,

c) прибавление к элементам какой-нибудь строки (или колонны) соответствующих элементов другой строки (или колонны), умноженных на один и тот же полином от λ.

Докажем теорему:

Теорема 3. *Инвариантные факторы (а следовательно и элементарные делители) инвариантны при элементарных преобразованиях λ-матрицы.*

Для доказательства достаточно обнаружить, что полиномы $D_i(\lambda)$ не изменяются при элементарных преобразованиях. Посмотрим, какие изменения в минорах i-го порядка λ-матрицы вызывают элементарные преобразования. Операции (a) и (b) только умножают некоторые из этих миноров на постоянный множитель, отличный от нуля. Рассмотрим операцию (c); пусть она заключается в том, что мы прибавляем к элементам p-ой строки элементы q-ой строки, умножив эти последние на полином $\varphi(\lambda)$. Те миноры, в которых не входят элементы p-ой строки или входят элементы и p-ой и q-ой строк, не изменяются. Рассмотрим теперь минор M, в который входят элементы p-ой строки, но не входят элементы q-ой строки. После применения рассматриваемого элементарного преобразования он превращается в $M + \varphi(\lambda)N$, где N — некоторый минор i-го порядка нашей матрицы. Таким образом, если $D_i(\lambda)$ и $D_i(\lambda)'$ — общие наибольшие делители миноров i-го порядков соответственно исходной матрицы $A(\lambda)$ и преобразованной $A(\lambda)'$, то $D_i(\lambda)'$ делится на $D_i(\lambda)$. Но так как $A(\lambda)$ может быть получена из $A(\lambda)'$ элементарным преобразованием (c), то $D_i(\lambda)$ делится на $D_i(\lambda)'$, т. е. $D_i(\lambda)' = D_i(\lambda)$. Теорема доказана.

Ясно, что применение элементарных преобразований может сильно облегчать процесс нахождения элементарных делителей, значительно упрощая матрицу. Так например, возьмем матрицу (3) из задачи 1. Прибавляем 1-ую колонну ко 2-й, затем вычитаем из 1-ой строки 2-ую; вычитаем из 3-ей колонны 4-ую и затем из 3-ей строки 4-ую; в результате получаем значительно более простую матрицу:

$$\begin{Vmatrix} (\lambda-1)^2, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & \lambda(\lambda+1), & 0, & 0 \\ 0, & 0, & \lambda, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & \lambda \end{Vmatrix}.$$

Теперь мы покажем, что путем применения ряда элементарных преобразований мы можем непосредственно отыскать инвариантные факторы, не определяя полиномов $D_i(\lambda)$.

Теорема 4. *Каждая λ-матрица ранга r может быть приведена при помощи элементарных преобразований к так называемому нормальному виду:*

$$\begin{Vmatrix} E_1(\lambda) & 0 & \ldots & 0 & 0\ldots0 \\ 0 & E_2(\lambda) & \ldots & 0 & 0\ldots0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & E_r(\lambda) & 0\ldots0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\ldots0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\ldots0 \end{Vmatrix},$$

где $E_1(\lambda)$, $E_2(\lambda), \ldots E_r(\lambda)$ — *инвариантные факторы этой матрицы.*

Доказательство разобьем на несколько пунктов.

1) Покажем прежде всего, что при помощи элементарных преобразований можно достигнуть того, чтобы 1-ый элемент матрицы $A(\lambda)$ (так мы будем называть левый верхний элемент a_{11}) был отличен от нуля и был делителем всех элементов матрицы.

Переставляя строки и колонны, мы можем сделать так, чтобы 1-ый элемент был отличен от нуля и степень его была не выше степени всех остальных элементов матрицы. Если 1-ый элемент a_{11} не делит нацело остальные элементы, можно достигнуть того, чтобы на его месте стоял многочлен степени более низкой, чем a_{11}. Докажем это. Пусть в 1-ой строке и i-ой колонне стоит элемент a_{1i}, не делящийся на a_{11}; пусть

$$a_{1i} = a_{11}p + q.$$

Умножаем 1-ую колонну на $-p$ и прикладываем к i-ой. Тогда в i-ой колонне вверху останется элемент q. Переставляя 1-ую и i-ую колонны, мы получаем матрицу, у которой на первом месте стоит полином q степени более низкой, чем a_{11}. Аналогично поступаем, если элемент, не делящийся на a_{11}, стоит в 1-ой колонне.

Предположим теперь, что все элементы 1-ой строки и 1-ой колонны делятся на a_{11}, и что элемент a_{ik} $(i, k > 1)$ не делится на a_{11}. В этом случае поступаем так: умножаем 1-ую строку на $\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ и вычитаем из i-ой строки. Получаем матрицу, у которой элемент, стоящий в i-ой строке и 1-ой колонне, равен нулю, а элемент, находящийся в i-ой строке и k-ой колонне, не делится на a_{11}. Теперь прикладываем i-ую строку к 1-ой. На первом месте стоит попрежнему a_{11}, между тем как элемент 1-ой строки и k-ой колонны уже не делится на a_{11}. Применяя вышеуказанный способ, мы можем заменить 1-ый элемент полиномом степени более низкой, чем a_{11}.

Таким образом, если 1-ый элемент не делит всех остальных элементов матрицы, мы можем, постепенно снижая его степень, достигнуть того, чтобы он был делителем всех остальных элементов (конечно, может случиться, что таким элементом будет постоянное число).

2) Добившись того, чтобы 1-ый элемент матрицы был делителем всех остальных ее элементов, мы можем, применяя опера-

цию (с), превратить все элементы 1-ой строки и 1-ой колонны, за исключением 1-го, в нуль. Получается матрица вида:

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} \ldots b_{2n} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \ldots b_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 & b_{n2} & b_{n3} \ldots b_{nn} \end{matrix} \right\|,$$

причем все b_{ik} делятся на a_{11}. Применяя тот же процесс к матрице

$$\left\| \begin{matrix} b_{22} \ldots b_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ b_{n2} \ldots b_{nn} \end{matrix} \right\|,$$

мы получаем матрицу вида

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \ldots c_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 & 0 & c_{n3} \ldots c_{nn} \end{matrix} \right\|,$$

причем a_{11} делит все элементы этой матрицы, b_{22} делит элементы c_{ik}. Повторяя этот процесс дальше, мы получим в конце концов матрицу:

$$A(\lambda)' = \left\| \begin{matrix} \varphi_1 & 0 & \ldots 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \varphi_2 & \ldots 0 & 0 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \\ 0 & 0 & \ldots \varphi_r & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & \ldots \;0 & 0 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \\ 0 & 0 & \ldots \;0 & 0 \ldots 0 \end{matrix} \right\|,$$

в которой каждый из полиномов φ_i является делителем φ_{i+1}, $\varphi_{i+2}, \ldots \varphi_r$. Старшие коэффициенты этих полиномов сделаем равными 1.

3) Покажем теперь, что функции φ_i являются инвариантными факторами матрицы $A(\lambda)$. Прежде всего, нетрудно видеть, что эти полиномы являются инвариантными факторами матрицы $A(\lambda)'$. В самом деле, так как φ_i делит полиномы φ_{i+1}, $\varphi_{i+2}, \ldots \varphi_r$, то

общий наибольший делитель миноров i-го порядка $D_i(\lambda) = \varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_i$. Отсюда:

$$E_i(\lambda) = \frac{D_i(\lambda)}{D_{i-1}(\lambda)} = \varphi_i.$$

Матрица $A(\lambda)'$ получена из $A(\lambda)$ при помощи элементарных преобразований, а эти последние не меняют инвариантных факторов. Следовательно, функции φ_i действительно являются инвариантными факторами матрицы $A(\lambda)$. Теорема доказана полностью.

Из этой теоремы вытекает одно интересное свойство показателей степеней у элементарных делителей. Рассмотрим схему элементарных делителей:

$$\begin{array}{l} (\lambda-\alpha)^{e_1}, \quad (\lambda-\alpha)^{e_2}, \ldots (\lambda-\alpha)^{e_r}, \\ (\lambda-\alpha')^{e_1'}, \quad (\lambda-\alpha')^{e_2'}, \ldots (\lambda-\alpha')^{e_r'}, \\ (\lambda-\alpha'')^{e_1''}, \quad (\lambda-\alpha'')^{e_2''}, \ldots (\lambda-\alpha'')^{e_r''}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

Элементарные делители, стоящие в какой-нибудь строке этой схемы, относятся к одному и тому же линейному фактору: в 1-ой строке — к $(\lambda-\alpha)$, во 2-ой — к $(\lambda-\alpha')$ и т. д. Так как инвариантные факторы $E_i(\lambda)$ обладают тем свойством, что $E_i(\lambda)$ делит факторы $E_{i+1}(\lambda)$, $E_{i+2}(\lambda), \ldots E_r(\lambda)$, то показатели степеней у элементарных делителей, относящихся к одной и той же строке, образуют неубывающую последовательность. Таким образом, получаем теорему:

Теорема 5. *Показатели степеней элементарных делителей, относящихся к одному и тому же линейному фактору, образуют неубывающую последовательность*:

$$\begin{array}{l} e_1 \le e_2 \le e_3 \le \ldots \le e_r, \\ e_1' \le e_2' \le e_3' \le \ldots \le e_r', \\ e_1'' \le e_2'' \le e_3'' \le \ldots \le e_r'', \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

4. Пример на приведение λ-матрицы к нормальному виду. При приведении λ-матрицы к нормальному виду можно употреблять тот процесс, который был применен при доказательстве теоремы 4. Для удобства рассуждений мы переставляли на первое место тот элемент, который является делителем всех остальных. Этого, конечно, делать при вычислениях не стоит: если элемент a_{ik} делит все остальные, то мы превращаем в нуль элементы i-ой строки и k-ой колонны (за исключением a_{ik}),

вычеркиваем i-ую строку и k-ую колонну и переходим к рассмотрению матрицы порядка на единицу меньшего.

Возьмем матрицу

$$\left\|\begin{matrix} \lambda, & 2\lambda+1, & 0, & 0 \\ 0, & \lambda, & 0, & 0 \\ 0, & \lambda, & 4\lambda, & (\lambda+1)^2 \\ 0, & 0, & 3\lambda, & \lambda^2+\lambda+1 \end{matrix}\right\|.$$

Так как ни один из ее элементов не является делителем всех остальных и наименьшая степень полиномов, входящих в матрицу, равна единице, необходимо понизить степень какого-нибудь элемента до нулевой. Сделать это в данном случае проще всего так: умножить 1-ую колонну на 2 и вычесть ее из 2-ой:

$$\left\|\begin{matrix} \lambda, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & \lambda, & 0, & 0 \\ 0, & \lambda, & 4\lambda, & (\lambda+1)^2 \\ 0, & 0, & 3\lambda, & \lambda^2+\lambda+1 \end{matrix}\right\|$$

Теперь элемент a_{12} является делителем всех остальных. Превращаем в нуль элементы a_{11}, a_{22}, a_{32}. Получаем:

$$\left\|\begin{matrix} 0, & 1, & 0, & 0 \\ -\lambda^2, & 0, & 0, & 0 \\ -\lambda^2, & 0, & 4\lambda, & (\lambda+1)^2 \\ 0, & 0, & 3\lambda, & \lambda^2+\lambda+1 \end{matrix}\right\|.$$

Первый этап вычисления закончен. Имеем $E_1(\lambda) = 1$. Вычеркивая 1-ую строку и 2-ую колонну и изменяя знак у 1-ой колонны, получаем матрицу:

$$\left\|\begin{matrix} \lambda^2, & 0, & 0 \\ \lambda^2, & 4\lambda, & (\lambda+1)^2 \\ 0, & 3\lambda, & \lambda^2+\lambda+1 \end{matrix}\right\|.$$

Снова ни один из элементов не является делителем всех остальных; степень одного из них придется понизить до нулевой. Для этого сначала вычитаем из 2-ой строки 3-ью:

$$\left\|\begin{matrix} \lambda^2, & 0, & 0 \\ \lambda^2, & \lambda, & \lambda \\ 0, & 3\lambda, & \lambda^2+\lambda+1 \end{matrix}\right\|.$$

Затем умножаем 2-ую строку на $(\lambda+1)$ и вычитаем из 3-ей:

$$\left\|\begin{matrix} \lambda^2, & 0, & 0 \\ \lambda^2, & \lambda, & \lambda \\ -\lambda^2(\lambda+1), & -\lambda^2+2\lambda, & 1 \end{matrix}\right\|.$$

Теперь элемент a_{33} является делителем остальных. Уничтожаем a_{23}, a_{31}, a_{32}:

$$\begin{Vmatrix} \lambda^2, & 0, & 0 \\ \lambda^4+\lambda^3+\lambda^2, & \lambda^3-2\lambda^2+\lambda, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{Vmatrix}.$$

Второй этап вычисления закончен. $E_2(\lambda)=1$. Переходим к матрице 2-го порядка:

$$\begin{Vmatrix} \lambda^2, & 0 \\ \lambda^4+\lambda^3+\lambda^2, & \lambda^3-2\lambda^2+\lambda \end{Vmatrix}.$$

Понижаем степень элемента a_{22} до 1-й. Для этого умножаем 1-ую строку на $\lambda^2+\lambda$ и вычитаем из 2-ой:

$$\begin{Vmatrix} \lambda^2, & 0 \\ \lambda^2, & \lambda^3-2\lambda^2+\lambda \end{Vmatrix}.$$

Умножаем 1-ую колонну на $(\lambda-2)$ и вычитаем из 2-ой:

$$\begin{Vmatrix} \lambda^2, & -\lambda^3+2\lambda^2 \\ \lambda^2, & \lambda \end{Vmatrix}.$$

Элемент 2-ой строки и 2-ой колонны делит все остальные. Умножаем 2-ую колонну на λ и вычитаем из 1-ой. Затем уничтожаем элемент a_{12}

$$\begin{Vmatrix} \lambda^4-2\lambda^3+\lambda^2, & 0 \\ 0, & \lambda \end{Vmatrix}.$$

Отсюда имеем: $E_3(\lambda)=\lambda$, $E_4(\lambda)=\lambda^2(\lambda-1)^2$.

Итак, элементарные делители рассматриваемой матрицы следующие:

$$\lambda,\ \lambda^2,\ (\lambda-1)^2.$$

Задача 2. При помощи приведения к нормальному виду определить элементарные делители следующих λ-матриц:

$$1)\ \begin{Vmatrix} \lambda, & 0, & \lambda \\ 2\lambda, & \lambda, & 2\lambda-1 \\ \lambda^2, & 0, & \lambda^2+\lambda+1 \end{Vmatrix},\quad 2)\ \begin{Vmatrix} \lambda+2, & 1, & \lambda^3-1 \\ 2\lambda, & \lambda, & \lambda+1 \\ 0, & 0, & \lambda \end{Vmatrix},$$

$$3)\ \begin{Vmatrix} \lambda-1, & 2\lambda-1, & 0, & 0 \\ 0, & \lambda^2+\lambda-1, & 0, & \lambda^2 \\ 0, & 3\lambda+1, & \lambda, & 3\lambda+1 \\ \lambda-1, & 3\lambda-1, & 0, & \lambda \end{Vmatrix}.$$

Ответ. 1) $\lambda,\ \lambda,\ \lambda+1$; 2) λ^3; 3) $\lambda^2,\ (\lambda-1)^2$.

5. При вычислении элементарных делителей бывают полезны следующие 2 теоремы:

Теорема 6. *Пусть у λ-матрицы все элементы, не стоящие в главной диагонали, равны нулю, элементы же в главной диагонали, не являющиеся постоянными, представлены в виде произведений различных степеней биномов: $\lambda-\alpha$, $\lambda-\alpha'$, $\lambda-\alpha''$, … Тогда эти степени биномов и являются элементарными делителями λ-матрицы.*

Доказательство. Пусть в элементах главной диагонали входят степени бинома $\lambda-\alpha$; именно, $(\lambda-\alpha)^{i_1}$ входит в k_1 элементах, $(\lambda-\alpha)^{i_2}$ — в k_2 элементах, … $(\lambda-\alpha)^{i_m}$ — в k_m элементах $(i_1<i_2<\ldots<i_m)$. Обозначим ранг рассматриваемой матрицы через r. Тогда в $D_r(\lambda)$ бином $(\lambda-\alpha)$ входит в степени $k_1i_1+k_2i_2+\ldots+k_mi_m$, в $D_{r-1}(\lambda)$ — в степени $k_1i_1+k_2i_2+\ldots+(k_m-1)\,i_m$, в $D_{r-2}(\lambda)$ — в степени $k_1i_1+k_2i_2+\ldots+(k_m-2)\,i_m$ и т. д. Следовательно, среди элементарных делителей $(\lambda-\alpha)^{i_m}$ будет повторяться k_m раз, $(\lambda-\alpha)^{i_m-1}$ — k_{m-1} раз и т. д.

Теорема 7. *Если λ-матрица $A(\lambda)$ распадается на λ-матрицы $A_{k_1}(\lambda)$, $A_{k_2}(\lambda)$, … $A_{k_m}(\lambda)$:*

$$A(\lambda)=\begin{Vmatrix} A_{k_1}(\lambda) & & & \\ & A_{k_2}(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{k_m}(\lambda) \end{Vmatrix},$$

то элементарные делители матриц $A_{k_1}(\lambda)$, … $A_{k_m}(\lambda)$ дают все элементарные делители матрицы $A(\lambda)$.

Доказательство. При помощи элементарных преобразований приводим к нормальному виду матрицы A_{k_1}, A_{k_2}, … A_{k_m}. Тогда в матрице $A(\lambda)$ все элементы, не стоящие в главной диагонали, равны нулю. Применяя теорему 6, мы видим, что элементарные делители матрицы A совпадают с элементарными делителями матриц A_{k_1}, … A_{k_m}.

6. Применим доказанные теоремы к вычислению элементарных делителей одного типа матрицы, с которым мы встретимся в теории линейных векторфункций. Пусть

$$(3,3) \qquad A(\lambda) = \left\| \begin{matrix} A_{k_1}(\lambda) & & & \\ & A_{k_2}(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{k_m}(\lambda) \end{matrix} \right\|,$$

при чем

$$A_{k_i}(\lambda) = \left\| \begin{matrix} \lambda - \alpha_i, & -1, & 0, \dots & 0, & 0 \\ 0, & \lambda - \alpha_i, & -1, \dots & 0, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0, \dots & \lambda - \alpha_i, & -1 \\ 0, & 0, & 0, \dots & 0, & \lambda - \alpha_i \end{matrix} \right\|.$$

На основании теоремы 7 нам необходимо вычислить элементарные делители матрицы $A_{k_i}(\lambda)$. Очевидно, что

$$D_{k_i}(\lambda) = (\lambda - \alpha_i)^{k_i}, \quad D_{k_i - 1}(\lambda) = 1.$$

Следовательно,

$$E_s(\lambda) = 1, \ (s = 1, 2, \dots k_{i-1}), \ E_{k_i}(\lambda) = (\lambda - \alpha_i)^{k_i}.$$

Таким образом, элементарные делители матрицы (3,3) имеют вид:

$$(\lambda - \alpha_1)^{k_1}, \quad (\lambda - \alpha_2)^{k_2}, \dots (\lambda - \alpha_m)^{k_m}.$$

ГЛАВА II.

АЛГЕБРА ТЕНЗОРОВ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

§ 4. Основные понятия геометрии n-мерных пространств.

1. Как известно, в алгебре и анализе большие выгоды приносит пользование геометрической терминологией. Рассматривая входящие в вопрос величины как координаты точек в многомерном пространстве, математик может говорить о линиях, поверхностях, семействах кривых, о соприкосновении поверхностей, о векторных полях и т. д. Эта терминология так проста и дает такие значительные выгоды, вызывая яркие интуитивные представления, что она уже давно завоевала право гражданства в анализе и алгебре. Такой „перевод“ аналитических исследований на язык геометрии выгоден не только в том отношении, что он облегчает их формулировку и делает их более ясными и наглядными, но и потому, что нередко решение проблемы находится легче и быстрее, если воспользоваться геометрическими представлениями. Таким образом, геометрический язык является не только удобной терминологией, но и важным подспорьем для исследования.

Геометрическими понятиями многомерных пространств пользуется часто и прикладная математика. Так например, механика, когда ей приходится иметь дело с системами с несколькими степенями свободы, прибегает к геометрической терминологии, сводя изучение такой системы к движению точки в многомерном пространстве. Физики нередко также пользуются понятием о многомерной протяженности. „Геометрия многих измерений за последние годы получила большое значение для многих отделов физики. Уже физико-химики начинают ею пользоваться для упорядочения тех сложных явлений, которые встречаются в их исследованиях“. (H. A. Lorentz. Atti del IV Congresso Intern. dei matem., vol. I). Особенно плодотворной для математической физики оказалась многомерная геометрия в теории относительности Einstein'а и квантовой механике. В принципе относительности физик прибегает, главным образом, к интуиции 4-мерного пространства (для некоторых специальных исследований приходится пользоваться многообразиями и более высокого числа измерений).

В теории же квант оказалась необходимой геометрия комплексного пространства бесконечного числа измерений.

Начало систематической разработки теории многомерных пространств относится к первой половине XIX столетия. Первым геометром, который дал твердые основы этой теории, был H. Grassmann (1809—1877); но его сочинение: „Die lineale Ausdehnungslehre“ (1844 г.) оставалось долгое время непризнанным и в начале не влияло сколько-нибудь заметно на построение теории многомерных пространств. Независимо от исследований Grassmann'а работы Cayley, Sylvester'а, Schläfli и др. дали также основы этой науки. Большой импульс для развития дифференциальной геометрии многомерных пространств дала вступительная лекция B. Riemann'а, прочитанная им в 1854 г. в Геттингенском университете. Идеи Riemann'а вообще создали эпоху в развитии геометрии; о них мы будем подробнее говорить в части II этого курса. В настоящее время геометрия многомерных пространств представляет собою обширную дисциплину с богатой литературой, разбросанной в различных математических журналах.

Как во всяком обобщении, в геометрии многомерных пространств есть положения, представляющие собою непосредственные аналоги фактов геометрии трех измерений; они являются наиболее простыми и наглядными и вывод их производится совершенно так же, как и в обычной геометрии. Но кроме этих тривиальных, так сказать, вопросов, есть проблемы, которые возникают только тогда, когда мы берем число измерений выше трех; эти вопросы являются, конечно, наиболее интересными, но и более трудными, чем непосредственные аналоги фактов трехмерного пространства.

В этом курсе мы будем иметь дело по большей части только с наиболее простыми проблемами многомерных пространств. Подробного и систематического изложения основных фактов мы давать не будем, так как это отняло бы слишком много места, да и было бы бесполезно для нашего курса.

2. Каждая определенная система значений n переменных $x_1, x_2, \ldots x_n$ называется **точкой числового пространства**

(**многообразия**) n **измерений**[1]; числа $x_1, x_2, \ldots x_n$ называются **координатами** этой точки. Само числовое пространство является совокупностью всех таких точек, когда переменные $x_1, x_2, \ldots x_n$ пробегают все вещественные значения. Мы получаем так называемое **вещественное** (реальное) пространство, которым и будем заниматься главным образом в этом курсе. Можно создать также комплексное пространство, если придавать координатам комплексные значения. Пользование таким пространством приносит значительные выгоды при решении некоторых проблем реального пространства, и в этих случаях мы будем прибегать к этому обобщению. Везде, где нет соответствующей оговорки, надо иметь в виду пространство реальное.

Относительно обобщения геометрии действительного пространства на комплексное пространство необходимо сделать следующее замечание. Те вопросы реального пространства, которые выражаются при помощи **аналитических** функций, переносятся непосредственно в комплексную область при помощи аналитического продолжения этих функций. Сложнее обстоит дело с обобщением тех соотношений, которые выражаются не аналитическими функциями. Эти последние, хотя и могут быть продолжены в комплексную область (бесконечным числом способов), однако уже дают функции, недифференцируемые в комплексной области.

Очень важное значение в развитии основ многомерной геометрии имеет понятие окрестности точки. Это понятие можно определить совершенно так же, как и в трехмерном пространстве. ε-окрестностью (или просто окрестностью) точки $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ называется совокупность точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам:

$$|x_i - a_i| < \varepsilon, \quad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Имея понятие окрестности, можно ввести понятие о точке сгущения бесконечной совокупности точек, понятие области, ее границы. Все это делается совершенно так же, как и в двух- и трехмерном пространстве.

---

[1] Числовое пространство является частным случаем более общего понятия о пространстве, так называемого „абстрактного“, с которым имеет дело современная геометрия, основанная на теории множеств.

Теория n-мерных пространств есть не что иное, как исследование совокупностей n переменных и функций от них, облеченное в геометрическую терминологию.

Если координаты точки являются функциями [1] некоторого параметра t:

$$x_i = f_i(t), \quad (i = 1, 2, \ldots n),$$

то мы будем говорить, что точка с изменением параметра t описывает линию в пространстве. Аналогично вводится определение поверхности. Пусть

$$x_i = f_i(t_1, t_2, \ldots t_m), \tag{4,1}$$

где $t_1, t_2, \ldots t_m$ переменные параметры, причем матрица

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial t_1}, & \frac{\partial f_2}{\partial t_1}, & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial t_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial t_m}, & \frac{\partial f_2}{\partial t_m}, & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial t_m} \end{matrix} \right\|$$

имеет ранг, равный m (в этом случае число параметров не может быть приведено к меньшему числу). Мы будем говорить, что формулы (4,1) определяют поверхность m измерений. $(n-1)$-мерные поверхности условимся называть гиперповерхностями.

Нетрудно видеть, что поверхность m измерений можно задать также системой $(n-m)$ независимых уравнений: исключая из (4,1) параметры $t_1, t_2, \ldots t_m$, мы приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \ldots x_n) &= 0, \\ F_2(x_1, x_2, \ldots x_n) &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ F_{n-m}(x_1, x_2 \ldots x_n) &= 0. \end{aligned}$$

Гиперповерхность задается одним уравнением.

[1] От функций, которые мы будем рассматривать в вещественном пространстве, мы будем требовать, чтобы они были непрерывны и имели столько непрерывных производных, сколько нам необходимо будет для исследования. Кривые и поверхности, выражаемые при помощи таких функций будем называть дифференцируемыми. Недифференцируемые образы рассматривать не будем. В комплексном пространстве будем иметь дело с аналитическими функциями.

Через каждую точку пространства проходит n координатных линий (вдоль каждой из них изменяется какая-нибудь одна координата, остальные же остаются постоянными) и n координатных гиперповерхностей (каждая такая гиперповерхность характеризуется тем, что фиксирована одна какая-нибудь координата, а остальные изменяются). Таким образом, можно говорить о координатном n-эдре, относящемся к данной точке пространства.

Рассмотрим n функций:

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(x_1, x_2, \ldots x_n), \\ x_2' &= f_2(x_1, x_2, \ldots x_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n' &= f_n(x_1, x_2, \ldots x_n). \end{aligned} \tag{4,2}$$

Пусть в некоторой области B пространства якобиан $\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots x_n)}$ отличен от нуля. Точкам $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ области B соответствуют точки $(x_1', x_2', \ldots x_n')$ некоторой области B', причем пусть это соответствие будет одно-однозначным. Формулы (4,2) можно рассматривать, как устанавливающие преобразование одной области в другую с одно-однозначным соответствием, причем функции, выражающие обратное преобразование, дифференцируемы в области B'.

Но можно также эти формулы считать за преобразование координат в области B: каждой точке этой области относится новая система координат, причем соответствие между новыми и старыми координатами одно-однозначное.

3. Если ограничиться теми понятиями, которые мы ввели до сих пор, мы получим очень примитивное пространство: в нем нет как раз тех понятий, к которым мы так привыкли, изучая геометрию: прямой линии, плоскости, параллелизма, расстояния, угла и т. д. Можно сказать, что построенное нами пространство слишком аморфно. Однако следует подчеркнуть, что и в этом пространстве можно найти богатый материал для исследования. Не говоря уже об изучении топологических вопросов, мы можем построить, пользуясь кривыми и поверхностями, выражаемыми дифференцируемыми функциями, теорию соприкосновения кривых и поверхностей. В каждой точке дифференцируемой кривой можно рассматривать „касательный элемент“ $\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \ldots \frac{dx_n}{dt}$, называя его „вектором“; аналогично, для дифференцируемых поверхностей можно создать понятие о касательном многомерном

элементе и т. д. Построенных таким образом понятий будет вполне достаточно, чтобы, например, облечь в геометрический язык теорию интегрирования дифференциальных уравнений.

Однако нашей целью будет изучение более специальных типов пространства. В основу изучения алгебры тензоров мы положим так называемое аффинное пространство Евклида, где существенную роль играет понятие о прямой линии, плоскости и параллелизме. В дальнейшем мы специализируем пространство еще более, введя понятия, связанные с процессом измерения (длины, угла, объема); это пространство называется метрическим пространством Евклида.

§ 5. Аффинное евклидово пространство. Контравариантные векторы.

1. Понятие о прямой линии и плоскостях в аффинном n-мерном пространстве мы введем по аналогии с геометрией трехмерного пространства Евклида, причем сделаем это так, чтобы координатная система была аналогом декартовой системы координат.

Изучение геометрии аффинного многообразия мы начнем с введения понятия о векторе и операциях над ним.

В геометрии аффинного пространства рассматриваются два различных вида векторов; векторы одного вида называются контравариантными, другого вида—ковариантными векторами. Употребляется также и такая терминология: контравариантные векторы называют просто векторами, а ковариантные—дуальными векторами.

Мы начнем с введения контравариантных векторов; термин „контравариантный" часто будем опускать.

Контравариантным вектором называется совокупность двух точек, рассматриваемых в определенном порядке. Одна из них называется начальной, или точкой приложения, другая—конечной. Будем употреблять также следующую терминологию: вектор „выходит" из начальной точки и „кончается" в конечной; вектор „соединяет" начальную точку с конечной. Если начальная точка имеет координаты $a_1, a_2, \dots a_n$, конечная—координаты $b_1, b_2, \dots b_n$, то числа $b_i - a_i$ называются составляющими, или координатами вектора.

Векторы условимся обозначать жирными латинскими буквами; составляющие вектора $\mathbf{v}$ будем записывать той же буквой с индексами, поставленными справа сверху этой буквы $v^1, v^2, \dots v^n$.

В тензорном анализе значительное упрощение формул получилось после того, как Ricci предложил ставить индексы, относящиеся к составляющим геометрических величин, сверху или снизу составляющих, смотря по тому, к какому роду принадлежат эти величины. Составляющие контравариантных векторов условились отмечать верхними индексами; составляющие ковариантных векторов, которые мы будем изучать в § 7, отмечают нижними индексами.

Для того чтобы верхние индексы не смешивать с показателями степеней, условимся отмечать возвышение в степень составляющей с верхним индексом тем, что будем ставить эту составляющую в скобку. Например 5-ую степень составляющей v^i будем записывать так: $(v^i)^5$. Условимся также в некоторых случаях, когда верхний индекс особенно легко спутать с показателем степени, ставить этот индекс в скобках, например: $x^{(2)} - 2x^{(3)} + x^{(5)} = 0$.

Два вектора $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ называются равными:

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}$$

если они имеют равные соответствующие составляющие:

$$u^i = v^i \quad (i = 1, 2, \dots n).$$

Для определения вектора необходимо задать его начальную или конечную точку и его составляющие. Если заданы только одни составляющие, то мы получаем целое поле равных векторов: каждую точку пространства можно считать точкой приложения вектора. Для простоты исследования условимся в следующем: если у вектора заданы его составляющие, но не указана точка приложения, мы будем считать, что он выходит из начала координат. Если точка приложения контравариантного вектора лежит в начале координат, то его составляющие дают координаты конечной точки. Поэтому и координаты точек в аффинном пространстве условимся отмечать верхними индексами. В аналитической геометрии мы будем определять положение точек пространства при помощи векторов, проведенных из начала. Если точка P определяется вектором $\mathbf{x}$, мы будем говорить просто — „точка $\mathbf{x}$".

Векторы с составляющими:

$$\begin{array}{l} 1,\ 0,\ 0, \dots 0 \\ 0,\ 1,\ 0, \dots 0 \\ 0,\ 0,\ 1, \dots 0 \\ \dots\dots\dots \\ 0,\ 0,\ 0, \dots 1 \end{array}$$

обозначим соответственно через $\underset{1}{\mathbf{e}}, \underset{2}{\mathbf{e}}, \ldots \underset{n}{\mathbf{e}}$ и будем называть их координатными контравариантными векторами.

Вообще, если несколько контравариантных векторов мы обозначаем одной и той же буквой, различая их индексами, то условимся эти индексы ставить под буквой, которой обозначаются векторы: например, $\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{v}}$.

2. В аффинной алгебре контравариантных векторов вводятся только два основных действия — сложение и умножение вектора на скаляр.

Суммой векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ называется вектор

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v},$$

составляющие которого равны:

$$w^i = u^i + v^i.$$

Действие вычитания вводится как обратное сложению.

Произведением вектора $\mathbf{u}$ на скаляр σ называется вектор

$$\mathbf{v} = \sigma \mathbf{u}$$

с составляющими:

$$v^i = \sigma u^i.$$

Эти два действия подчиняются тем же законам, что и в трехмерном пространстве:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}, \; (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}).$$
$$\alpha(\beta \mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a}, \; 1\mathbf{a} = \mathbf{a},$$
$$(\alpha + \beta)\,\mathbf{a} = \alpha\,\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}, \; \alpha\,(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}.$$

Пользуясь действием сложения и умножения, можно любой вектор выразить через его составляющие и координатные векторы:

$$\mathbf{v} = v^1 \underset{1}{\mathbf{e}} + v^2 \underset{2}{\mathbf{e}} + \ldots + v^n \underset{n}{\mathbf{e}}. \tag{5,1}$$

Следуя обозначению, введенному Einstein'ом в тензорном анализе, будем опускать знак суммы в том случае, если переменный индекс, по которому происходит суммирование от 1 до n, входит в формулу два раза, причем один раз сверху, а другой снизу; например сумму

$$\sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha} x^\alpha$$

будем записывать просто:

$$a_{i\alpha} x^\alpha;$$

обозначение это распространяется и на суммирование по нескольким индексам: сумма

$$\sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{n} a^\alpha{}_{\beta\gamma} x_\alpha y^\beta z^\gamma$$

обозначается следующим образом:

$$a^\alpha{}_{\beta\gamma} x_\alpha y^\beta z^\gamma.$$

Переменные индексы, по которым происходит суммирование, условимся обозначать греческими буквами. Таким образом, формула (5,1) перепишется так:

$$\mathbf{v} = v^\alpha \underset{\alpha}{\mathbf{e}},$$

или в составляющих:

$$v^i = v^\alpha \underset{\alpha}{e}{}^i.$$

3. Векторы $\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{v}}$ называются независимыми, если вектор

$$\lambda_1 \underset{1}{\mathbf{v}} + \lambda_2 \underset{2}{\mathbf{v}} + \ldots + \lambda_m \underset{m}{\mathbf{v}}$$

только в том случае превращается в нуль, если все λ_i равны нулю. Например, координатные векторы образуют систему n независимых векторов; наоборот, следующие три вектора в четырехмерном пространстве

$$\underset{1}{\mathbf{v}}(0,1,-1,0)$$
$$\underset{2}{\mathbf{v}}(1,4,-2,3)$$
$$\underset{3}{\mathbf{v}}(1,2,\ 0,3)$$

зависимы, так как между ними существует линейное соотношение

$$2\underset{1}{\mathbf{v}} - \underset{2}{\mathbf{v}} + \underset{3}{\mathbf{v}} = 0.$$

Система m векторов $\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{v}}$ тогда и только тогда независима, если ранг матрицы

$$\left\| \begin{matrix} \underset{1}{v}{}^1 \underset{1}{v}{}^2 \ldots \ldots \ldots \underset{1}{v}{}^n \\ \underset{2}{v}{}^1 \underset{2}{v}{}^2 \ldots \ldots \ldots \underset{2}{v}{}^n \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ \underset{m}{v}{}^1 \underset{m}{v}{}^2 \ldots \ldots \ldots \underset{m}{v}{}^n \end{matrix} \right\| \tag{5,2}$$

равен m. Действительно, система n уравнений

$$\begin{aligned} \lambda_1 \underset{1}{\nu^1} + \lambda_2 \underset{2}{\nu^1} + \ldots + \lambda_m \underset{m}{\nu^1} &= 0, \\ \lambda_1 \underset{1}{\nu^2} + \lambda_2 \underset{2}{\nu^2} + \ldots + \lambda_m \underset{m}{\nu^2} &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1 \underset{1}{\nu^n} + \lambda_2 \underset{2}{\nu^n} + \ldots + \lambda_m \underset{m}{\nu^n} &= 0 \end{aligned}$$

только в том случае имеет единственное решение:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots\ldots = \lambda_m = 0,$$

если ранг матрицы (5,2) равен m.

Один вектор называется независимым, если он не равен нулю. Если число рассматриваемых векторов больше n, то они всегда зависимы.

4. Два ненулевых вектора $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ с общей или различными точками приложения называются **параллельными**, если они зависимы: $\mathbf{u} = \sigma \mathbf{v}$.

Если $\sigma > 0$, мы будем говорить, что направления векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ одинаковы, если $\sigma < 0$, будем говорить, что их направления прямо противоположны.

Возьмем нулевой вектор $\mathbf{u}$ и рассмотрим систему векторов:

$$\mathbf{x} = \sigma \mathbf{u}.$$

Изменяя параметр σ, мы получаем так называемый одномерный пучок векторов; будем говорить, что точка $\mathbf{x}$ описывает прямую линию, проходящую через начало.

Общее понятие о прямой линии вводится следующим образом: берем произвольную точку $\mathbf{a}$ и проводим из нее одномерный пучок $\sigma\mathbf{u}$. Линия, точки которой определяются векторами:

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \sigma \mathbf{u},$$

где σ—переменный параметр, называется прямой. Вектор $\mathbf{u}$ называется **направляющим вектором**, а его составляющие $u^1, u^2, \ldots u^n$—**направляющими коэффициентами** этой прямой. Две прямые:

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \sigma \mathbf{u},$$
$$\mathbf{x} = \mathbf{b} + \tau \mathbf{v}$$

называются параллельными, если параллельны их направляющие векторы:

$$\mathbf{v} = \alpha \mathbf{u}.$$

Прямая в n-мерном аффинном пространстве обладает основными свойствами прямой трехмерного пространства: она вполне

определяется двумя точками, лежащими на ней, и для ее точек можно ввести понятие „между" и отрезка. Пусть даны точки $\underset{1}{\mathbf{x}}$ и $\underset{2}{\mathbf{x}}$. Прямая, проходящая через них, определяется уравнением

$$\mathbf{x} = \underset{1}{\mathbf{x}} + t(\underset{2}{\mathbf{x}} - \underset{1}{\mathbf{x}}) = \underset{1}{\mathbf{x}}(1 - t) + \underset{2}{\mathbf{x}}t. \tag{5,3}$$

Если параметр t в уравнении прямой

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{u}$$

изменяется монотонно, то говорят, что точка $\mathbf{x}$ движется в определенном направлении: если t возрастает,—то в направлении, определяемом вектором $\mathbf{u}$, а если убывает,—то в направлении, обратном вектору $\mathbf{u}$ (направлении, определяемом вектором $-\mathbf{u}$).

Рассмотрим три точки одной и той же прямой:

$$\underset{1}{\mathbf{x}} = \mathbf{a} + t_1\mathbf{u}, \quad \underset{2}{\mathbf{x}} = \mathbf{a} + t_2\mathbf{u}, \quad \underset{3}{\mathbf{x}} = \mathbf{a} + t_3\mathbf{u}.$$

Если $t_1 < t_2 < t_3$ или $t_1 > t_2 > t_3$, будем говорить, что точка $\underset{2}{\mathbf{x}}$ лежит **между** точками $\underset{1}{\mathbf{x}}$ и $\underset{3}{\mathbf{x}}$.

Совокупность точек прямой, лежащих между двумя точками $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$, называется **отрезком** и обозначается $\mathbf{pq}$.

В аффинной геометрии вводится понятие отношения двух параллельных отрезков. Пусть точки $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ определяют отрезок, параллельный отрезку, определяемому точками $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$:

$$\mathbf{b} - \mathbf{a} = \sigma(\mathbf{d} - \mathbf{c}).$$

Условимся говорить, что отношение отрезков $\mathbf{ab}$ и $\mathbf{cd}$ равно σ. Отношение двух параллельных отрезков положительно, если они имеют одно и то же направление, и отрицательно, если их направления противоположны. Точка $\mathbf{x}$ прямой (5,3) делит отрезок $\underset{1}{\mathbf{x}}\underset{2}{\mathbf{x}}$ в отношении $\frac{t}{1-t}$; именно отношение отрезка $\underset{1}{\mathbf{x}}\mathbf{x}$ к отрезку $\mathbf{x}\underset{2}{\mathbf{x}}$ равно $\frac{t}{1-t}$.

Понятие об отношении непараллельных отрезков в аффинной геометрии не существует; при его введении мы получаем уже более специальный вид геометрии—именно геометрию подобных преобразований.

После того как установлено понятие прямолинейного отрезка и направления, можно вектор отождествить с отрезком прямой, имеющим направление от начальной к конечной его точке.

5. Возьмем m независимых векторов $\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{v}}$ и образуем вектор

$$\mathbf{w} = \lambda_1 \underset{1}{\mathbf{v}} + \lambda_2 \underset{2}{\mathbf{v}} + \ldots + \lambda_m \underset{m}{\mathbf{v}}. \tag{5,4}$$

Изменяя $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$, мы получим совокупность векторов, которая называется *m-мерным плоским пучком*, или *m-мерной плоскостью* (слово „плоский“ при термине „пучок“ мы часто будем опускать). Нетрудно видеть, что двум разным системам коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ и $\lambda_1', \lambda_2', \ldots \lambda_m'$ будут отвечать *различные* векторы. В самом деле, из равенства

$$\lambda_1 \underset{1}{\mathbf{v}} + \lambda_2 \underset{2}{\mathbf{v}} + \ldots + \lambda_m \underset{m}{\mathbf{v}} = \lambda_1' \underset{1}{\mathbf{v}} + \lambda_2' \underset{2}{\mathbf{v}} + \ldots \lambda_m' \underset{m}{\mathbf{v}}$$

следует

$$(\lambda_1 - \lambda_1') \underset{1}{\mathbf{v}} + (\lambda_2 - \lambda_2') \underset{2}{\mathbf{v}} + \ldots + (\lambda_m - \lambda_m') \underset{m}{\mathbf{v}} = 0,$$

т. е. (так как векторы $\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{v}}$ независимы)

$$\lambda_1 = \lambda_1', \quad \lambda_2 = \lambda_2', \ldots \lambda_m = \lambda_m'.$$

Таким образом, мы получаем многообразие векторов, зависящее от m параметров. n-мерный пучок, охватывающий все векторы, мы будем называть также *полным векторным пространством*.

Векторы $\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{v}}$ назовем *базисом* пучка (5, 4). Пучок E_m, построенный на базисе $\underset{1}{\mathbf{v}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{v}}$, будем обозначать символом $\{\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{v}}\}$. Нетрудно показать, что за базис плоского пучка можно принять любые m независимых векторов, принадлежащих к этому пучку. Действительно, возьмем m независимых векторов:

$$\begin{aligned}
\underset{1}{\mathbf{w}} &= \lambda_{11} \underset{1}{\mathbf{v}} + \lambda_{12} \underset{2}{\mathbf{v}} + \ldots + \lambda_{1m} \underset{m}{\mathbf{v}}, \\
\underset{2}{\mathbf{w}} &= \lambda_{21} \underset{1}{\mathbf{v}} + \lambda_{22} \underset{2}{\mathbf{v}} + \ldots + \lambda_{2m} \underset{m}{\mathbf{v}}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\underset{m}{\mathbf{w}} &= \lambda_{m1} \underset{1}{\mathbf{v}} + \lambda_{m2} \underset{2}{\mathbf{v}} + \ldots + \lambda_{mm} \underset{m}{\mathbf{v}}
\end{aligned}$$

Условие независимости этих векторов заключается в том, что определитель

$$\begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \ldots & \lambda_{1m} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \ldots & \lambda_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{m1} & \lambda_{m2} & \ldots & \lambda_{mm} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Следовательно, можно векторы $\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{v}}$ выразить линейно через $\underset{1}{\mathbf{w}}, \underset{2}{\mathbf{w}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{w}}$:

$$\begin{aligned}
\underset{1}{\mathbf{v}} &= \mu_{11} \underset{1}{\mathbf{w}} + \mu_{12} \underset{2}{\mathbf{w}} + \ldots + \mu_{1m} \underset{m}{\mathbf{w}}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\underset{m}{\mathbf{v}} &= \mu_{m1} \underset{1}{\mathbf{w}} + \mu_{m2} \underset{2}{\mathbf{w}} + \ldots + \mu_{mm} \underset{m}{\mathbf{w}}.
\end{aligned}$$

Таким образом, каждый вектор пучка $\{\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{v}}\}$ можно линейно выразить через векторы $\underset{1}{\mathbf{w}}, \underset{2}{\mathbf{w}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{w}}$ и обратно, каждый вектор пучка $\{\underset{1}{\mathbf{w}}, \underset{2}{\mathbf{w}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{w}}\}$ принадлежит к пучку $\{\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{v}}\}$.

m-мерный плоский пучок

$$\mathbf{w} = \lambda_1 \underset{1}{\mathbf{v}} + \lambda_2 \underset{2}{\mathbf{v}} + \ldots + \lambda_m \underset{m}{\mathbf{v}}$$

может быть задан системой $n - m$ независимых линейных уравнений между составляющими вектора $\mathbf{w}$. Исключая из уравнений

$$\begin{aligned}
w^1 &= \lambda_1 \underset{1}{v}{}^1 + \lambda_2 \underset{2}{v}{}^1 + \ldots + \lambda_m \underset{m}{v}{}^1, \\
w^2 &= \lambda_1 \underset{1}{v}{}^2 + \lambda_2 \underset{2}{v}{}^2 + \ldots + \lambda_m \underset{m}{v}{}^2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
w^n &= \lambda_1 \underset{1}{v}{}^n + \lambda_2 \underset{2}{v}{}^n + \ldots + \lambda_m \underset{m}{v}{}^n
\end{aligned}$$

параметры $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$, получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned}
\overset{1}{a}_1 w^1 + \overset{1}{a}_2 w^2 + \ldots + \overset{1}{a}_n w^n &= 0, \\
\overset{2}{a}_1 w^1 + \overset{2}{a}_2 w^2 + \ldots + \overset{2}{a}_n w^n &= 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \\
\overset{n-m}{a}_1 w^1 + \overset{n-m}{a}_2 w^2 + \ldots + \overset{n-m}{a}_n w^n &= 0.
\end{aligned}$$

Обратно, $n-m$ независимых линейных однородных уравнений определяют m-мерный плоский пучок: эти уравнения дают m независимых решений:

$$\begin{matrix} \underset{1}{w}^1, & \underset{1}{w}^2, & \ldots\ldots\ldots & \underset{1}{w}^n, \\ \underset{2}{w}^1, & \underset{2}{w}^2, & \ldots\ldots\ldots & \underset{2}{w}^n, \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \underset{m}{w}^1, & \underset{m}{w}^2, & \ldots\ldots\ldots & \underset{m}{w}^n, \end{matrix}$$

которые и можно принять за базис пучка.

6. Возьмем m независимых векторов $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}$. Вектор

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \underset{1}{\mathbf{u}} + \lambda_2 \underset{2}{\mathbf{u}} + \ldots + \lambda_m \underset{m}{\mathbf{u}}$$

при любых изменениях параметров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ описывает своим концом m-мерную поверхность, называемую m-мерной плоскостью. Она проходит через начало координат.

m-мерная плоскость общего положения определяется следующим образом. Берем точку $\mathbf{a}$ и проводим из нее векторы m-мерного пучка $\{\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}\}$. Концы этих векторов и определяют m-мерную плоскость. Ее уравнение имеет следующий вид:

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \lambda_1 \underset{1}{\mathbf{u}} + \lambda_2 \underset{2}{\mathbf{u}} + \ldots + \lambda_m \underset{m}{\mathbf{u}}. \tag{5,5}$$

Пучок $\{\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}\}$ называется направляющим пучком этой плоскости. Записывая уравнение плоскости (5,5) в составляющих:

$$\begin{aligned} x^1 &= a^1 + \lambda_1 \underset{1}{u}^1 + \lambda_2 \underset{2}{u}^1 + \ldots + \lambda_m \underset{m}{u}^1, \\ x^2 &= a^2 + \lambda_1 \underset{1}{u}^2 + \lambda_2 \underset{2}{u}^2 + \ldots + \lambda_m \underset{m}{u}^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^n &= a^n + \lambda_1 \underset{1}{u}^n + \lambda_2 \underset{2}{u}^n + \ldots + \lambda_m \underset{m}{u}^n, \end{aligned}$$

и исключая параметры $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$, мы получим систему $(n-m)$ независимых уравнений:

$$\overset{1}{a}_\alpha x^\alpha = \alpha_1, \quad \overset{2}{a}_\alpha x^\alpha = \alpha_2, \quad \ldots \quad \overset{n-m}{a}_\alpha x^\alpha = \alpha_{n-m}.$$

$(n-1)$-мерная плоскость называется гиперплоскостью. Она определяется или параметрическим уравнением вида

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \lambda_1 \underset{1}{\mathbf{u}} + \ldots + \lambda_{n-1} \underset{n-1}{\mathbf{u}}$$

или одним линейным уравнением:

$$a_\alpha x^\alpha = \alpha.$$

7. Возьмем систему m векторов $\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{v}}$; условимся называть рангом этой системы наибольшее число независимых векторов, принадлежащих к этой системе. Ранг системы векторов $\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{v}}$ равен рангу матрицы:

$$\left\| \begin{matrix} \underset{1}{v}^1 \underset{1}{v}^2 & \ldots\ldots\ldots\ldots & \underset{1}{v}^n \\ \underset{2}{v}^1 \underset{2}{v}^2 & \ldots\ldots\ldots\ldots & \underset{2}{v}^n \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \underset{m}{v}^1 \underset{m}{v}^2 & \ldots\ldots\ldots\ldots & \underset{m}{v}^n \end{matrix} \right\| \tag{5,6}$$

Покажем это. Если ранг матрицы (5,6) равен r, то имеется, по крайней мере, один минор r-го порядка, не равный нулю. Пусть в него входят элементы i_1-ой, i_2-ой, $\ldots i_r$-ой строк. Тогда векторы $\underset{i_1}{\mathbf{v}}, \underset{i_2}{\mathbf{v}}, \ldots \underset{i_r}{\mathbf{v}}$ между собою независимы. Если бы в системе векторов $\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{v}}$ было s независимых векторов $(s > r)$, то по крайней мере один минор s-го порядка матрицы (5,6) был отличен от нуля, т. е. ранг матрицы был бы больше r.

Выделив r независимых векторов, можно все остальные векторы системы $\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{v}}$ линейно выразить через эти r векторов. В самом деле, пусть $\underset{i_1}{\mathbf{v}}, \underset{i_2}{\mathbf{v}}, \ldots \underset{i_r}{\mathbf{v}}$ независимые векторы этой системы; тогда система $(r+1)$ векторов $\underset{k}{\mathbf{v}}, \underset{i_1}{\mathbf{v}}, \underset{i_2}{\mathbf{v}} \ldots \underset{i_r}{\mathbf{v}}$ уже зависимая, т. е. существует соотношение $\mu \underset{k}{\mathbf{v}} + \lambda_1 \underset{i_1}{\mathbf{v}} + \lambda_2 \underset{i_2}{\mathbf{v}} + \ldots + \lambda_{i_r} \underset{i_r}{\mathbf{v}} = 0$, причем $\mu \neq 0$.

8. Два плоских пучка, не имеющих общих векторов, называются независимыми. Если пучки E_r и E_s независимы и $r + s = n$, то каждый вектор $\mathbf{x}$ можно разложить на два вектора $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}''$, лежащих в этих пучках, причем разложение это однозначно определяет векторы $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}''$. Покажем это. Выбрав за базис пучка E_r r независимых векторов $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{r}{\mathbf{u}}$, за базис пучка E_s — s независимых векторов $\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \ldots \underset{s}{\mathbf{v}}$, мы получим

n независимых векторов $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \dots \underset{r}{\mathbf{u}}, \underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \dots \underset{s}{\mathbf{v}}$, так как если бы существовало линейное соотношение:

$$\lambda_1 \underset{1}{\mathbf{u}} + \dots + \lambda_r \underset{r}{\mathbf{u}} + \mu_1 \underset{1}{\mathbf{v}} + \dots \mu_s \underset{s}{\mathbf{v}} = 0,$$

то вектор $\lambda_1 \underset{1}{\mathbf{u}} + \dots + \lambda_r \underset{r}{\mathbf{u}}$ пучка E_r принадлежал бы к E_s, между тем как эти пучки независимы. Таким образом, любой вектор $\mathbf{x}$ можно разложить по этим n независимым векторам

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \underset{1}{\mathbf{u}} + \dots + \lambda_r \underset{r}{\mathbf{u}} + \mu_1 \underset{1}{\mathbf{v}} + \dots + \mu_s \underset{s}{\mathbf{v}}.$$

Мы получаем, что

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{x}'',$$

причем $\mathbf{x}' = \lambda_1 \underset{1}{\mathbf{u}} + \dots + \lambda_r \underset{r}{\mathbf{u}}$ лежит в E_r, $\mathbf{x}'' = \mu_1 \underset{1}{\mathbf{v}} + \dots + \mu_s \underset{s}{\mathbf{v}}$ — в E_s. Однозначность разложения доказывается очень просто: если бы можно было дать новое разложение $\mathbf{x} = \mathbf{y}' + \mathbf{y}''$, мы имели бы: $\mathbf{x}' - \mathbf{y}' = \mathbf{y}'' - \mathbf{x}''$, т. е. пучки E_r и E_s не были бы независимы. Векторы $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}''$ называются **составляющими** вектора $\mathbf{x}$ в пучках E_r и E_s. Так как любой вектор может быть однозначно задан своими составляющими в E_r и E_s, то говорят, что два независимых пучка E_r и E_s, если $r + s = n$, **полностью определяют векторное пространство.**

Нахождение составляющей $\mathbf{x}'$ называется **проектированием** вектора $\mathbf{x}$ на E_r параллельно плоскости E_s; соответственно, нахождение $\mathbf{x}''$ называется проектированием вектора $\mathbf{x}$ на E_s параллельно E_r. Таким образом, в аффинном пространстве процесс проектирования определяется **двумя** пучками, полностью определяющими векторное пространство. Составляющая $\mathbf{x}'$ называется также **проекцией** вектора $\mathbf{x}$ на плоскость E_r.

Возьмем m-мерный пучок

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \underset{1}{\mathbf{z}} + \lambda_2 \underset{2}{\mathbf{z}} + \dots + \lambda_m \underset{m}{\mathbf{z}}.$$

Разложим каждый из векторов его базиса на составляющие в E_r и E_s: $\underset{i}{\mathbf{z}} = \underset{i}{\mathbf{z}}' + \underset{i}{\mathbf{z}}''$. Тогда

$$\mathbf{x}' = \lambda_1 \underset{1}{\mathbf{z}}' + \lambda_2 \underset{2}{\mathbf{z}}' + \dots + \lambda_m \underset{m}{\mathbf{z}}',$$
$$\mathbf{x}'' = \lambda_1 \underset{1}{\mathbf{z}}'' + \lambda_2 \underset{2}{\mathbf{z}}'' + \dots + \lambda_m \underset{m}{\mathbf{z}}''. \tag{5,7}$$

Таким образом, пучок при проектировании на E_r параллельно E_s дает также плоский пучок в E_r.

Как частный случай, из соотношения (5,7) получаем, что **проекция суммы двух векторов равна сумме их проекций и что отношение двух параллельных векторов при проектировании не меняется:**

$$\text{пр.}\,(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \text{пр.}\,\mathbf{x} + \text{пр.}\,\mathbf{y}, \quad \text{пр.}\,(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\,\text{пр.}\,\mathbf{x}. \tag{5,8}$$

9. Рассмотрим две плоскости E_r и E_s:

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \lambda_1 \underset{1}{\mathbf{u}} + \lambda_2 \underset{2}{\mathbf{u}} + \dots + \lambda_r \underset{r}{\mathbf{u}},$$
$$\mathbf{x} = \mathbf{b} + \mu_1 \underset{1}{\mathbf{v}} + \mu_2 \underset{2}{\mathbf{v}} + \dots + \mu_s \underset{s}{\mathbf{v}}. \tag{5,9}$$

Предположим, что $r \leqslant s$. Если пучки $\{\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \dots \underset{r}{\mathbf{u}}\}$ и $\{\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \dots \underset{s}{\mathbf{v}}\}$ имеют p общих независимых направлений, то плоскости E_r и E_s называются $\frac{p}{r}$-**параллельными**; дробь $\frac{p}{r}$ называется **степенью параллельности** этих плоскостей. В этом случае векторы $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \dots \underset{r}{\mathbf{u}}, \underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \dots \underset{s}{\mathbf{v}}$ определяют $r + s - p$ независимых направлений. Так как независимых направлений не может быть больше n, то $p \geqslant r + s - n$. Таким образом, если $r + s > n$, то пучки $\{\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \dots \underset{r}{\mathbf{u}}\}$ и $\{\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \dots \underset{s}{\mathbf{v}}\}$ не независимы, и степень параллельности плоскостей (5,9) отлична от нуля.

Если $p = r$, будем говорить, что плоскости E_r и E_s **полностью параллельны**, или просто — **параллельны.**

Установим критерий параллельности двух плоскостей. Пусть плоскости E_r и E_s заданы уравнениями (5,9) в параметрической форме. Если ϱ — ранг системы: $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \dots \underset{r}{\mathbf{u}}, \underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \dots \underset{s}{\mathbf{v}}$, то плоскости E_r и E_s имеют $r + s - \varrho$ общих независимых направлений, т. е. степень параллельности (при $r \leqslant s$) равна $\frac{r+s-\varrho}{r}$. Если плоскости заданы двумя системами линейных уравнений

$$\begin{array}{ll} \overset{1}{a}_\alpha x^\alpha = \alpha_1, & \overset{1}{b}_\alpha x^\alpha = \beta_1, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \overset{n-r}{a}_\alpha x^\alpha = \alpha_{n-r}, & \overset{n-s}{b}_\alpha x^\alpha = \beta_{n-s}, \end{array}$$

то число общих независимых векторов в их направляющих пучках равно $n-\sigma$, где σ — ранг матрицы:

$$\left\|\begin{matrix} \overset{1}{a}_1 & \dots\dots\dots & \overset{1}{a}_n \\ \dots & \dots\dots\dots & \dots \\ \overset{n-r}{a}_1 & \dots\dots\dots & \overset{n-r}{a}_n \\ \overset{1}{b}_1 & \dots\dots\dots & \overset{1}{b}_n \\ \dots & \dots\dots\dots & \dots \\ \overset{n-s}{b}_1 & \dots\dots\dots & \overset{n-s}{b}_n \end{matrix}\right\|,$$

т. е. степень параллельности равна $\frac{n-\sigma}{r}$.

Отметим, что условием параллельности (полной) двух гиперплоскостей, заданных двумя линейными уравнениями:

$$a_\alpha x^\alpha = \alpha, \qquad b_\alpha x^\alpha = \beta$$

является пропорциональность коэффициентов a_α и b_α:

$$a_\alpha = \sigma b_\alpha.$$

Задача 1. В 4-мерном пространстве задан вектор (1,0 — 1,2). Определить его составляющие в следующих пучках:

1) E_1, заданном вектором (0, 0, 1, —1); E_3, заданном векторами (0, 1, 0, 0), (—1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 1),

2) E_2, заданном уравнениями: $x^{(1)}=0$, $x^{(1)}-x^{(3)}=0$; E_2, заданном уравнениями $x^{(1)}+x^{(2)}=0$, $x^{(3)}+x^{(4)}=0$.

Ответ. 1) $\left(0,\ 0,\ -\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right)$, $\left(1,\ 0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$; 2) (0, 1, 0, 1), (1, —1, —1, 1).

Задача 2. r-мерная плоскость задана уравнением в параметрическом виде:

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \lambda_1 \underset{1}{\mathbf{u}} + \lambda_2 \underset{2}{\mathbf{u}} + \dots + \lambda_r \underset{r}{\mathbf{u}};$$

s-мерная плоскость задана системой линейных уравнений

$$\overset{1}{a}_\alpha x^\alpha = a_1, \dots \overset{n-s}{a}_\alpha x^\alpha = a_{n-s}.$$

Определить степень их параллельности.

Ответ Обозначим через ϱ ранг матрицы

$$\left\|\begin{matrix} \overset{1}{a}_\alpha \underset{1}{u}^\alpha, & \overset{1}{a}_\alpha \underset{2}{u}^\alpha, & \dots\dots\dots & \overset{1}{a}_\alpha \underset{r}{u}^\alpha \\ \dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots \\ \overset{n-s}{a}_\alpha \underset{1}{u}^\alpha, & \overset{n-s}{a}_\alpha \underset{2}{u}^\alpha, & \dots\dots\dots & \overset{n-s}{a}_\alpha \underset{r}{u}^\alpha \end{matrix}\right\|.$$

Степень параллельности равна $\frac{r-\varrho}{r}$, если $r \leqslant s$; $\frac{r-\varrho}{s}$, если $r \geqslant s$.

Задача 3. Определить степень параллельности следующих плоскостей в пятимерном пространстве:

1) E_3 с направляющим пучком: (0, 1, 0, 0, 0), (—1, 0, 0, 2, 0), (0, 0, 0, 0, 1); E_3 с направляющим пучком: (1, 0, —1, 0, 0), (0, 1 — 1, 2, 0), (0, 1, 0, 0, 1);

2) E_4, заданной уравнением: $x^{(1)}-x^{(2)}+2x^{(3)}-x^{(5)}=0$, и E_3, заданной уравнениями $3x^{(1)}+x^{(3)}+x^{(4)}=0$, $x^{(1)}+2x^{(2)}-3x^{(3)}+x^{(4)}+2x^{(5)}=0$;

3) E_3 с направляющим пучком: (1, 0, — 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 0, 1); E_2, заданной уравнениями: $x^{(1)}+x^{(3)}=0$, $x^{(2)}+x^{(4)}=0$, $x^{(4)}-x^{(5)}=0$.

Ответ. 1) $\frac{2}{3}$-параллельны, 2) полностью параллельны, 3) $\frac{1}{2}$-параллельны.

Задача 4. Точка

$$\mathbf{x} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b},$$

где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — независимые векторы, тогда и только тогда лежит на прямой, соединяющей точки $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, если $\lambda+\mu=1$. Вообще, условие того, что точка

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \underset{1}{\mathbf{x}} + \lambda_2 \underset{2}{\mathbf{x}} + \dots + \lambda_m \underset{m}{\mathbf{x}}$$

лежит в $(m-1)$-мерной плоскости, проходящей через точки $\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \dots \underset{m}{\mathbf{x}}$ ($\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \dots \underset{m}{\mathbf{x}}$ — независимые векторы), выражается равенством:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m = 1.$$

Задача 5. Даны m точек, определяемых m независимыми векторами $\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \dots \underset{m}{\mathbf{x}}$. Возьмем две точки $\underset{i}{\mathbf{x}}$ и $\underset{k}{\mathbf{x}}$; через остальные $(m-2)$ точек и через средину отрезка $\underset{i\,k}{\mathbf{x}\mathbf{x}}$ проводим $(m-2)$-мерную плоскость, которую обозначим через P_{ik}. Придавая индексам i, k значения от 1 до n, получаем $\binom{n}{2}$ плоскостей P_{ik}. Показать, что все эти плоскости пересекаются в точке

$$\mathbf{c} = \frac{\underset{1}{\mathbf{x}} + \underset{2}{\mathbf{x}} + \dots + \underset{m}{\mathbf{x}}}{m},$$

называемой центром системы точек $\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \dots \underset{m}{\mathbf{x}}$.

Задача 6. Даны m точек, определяемых m независимыми векторами $\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \dots \underset{m}{\mathbf{x}}$. Прямую, проходящую через точку $\underset{i}{\mathbf{x}}$ и центр $\underset{i}{\mathbf{c}}$ остальных $(m-1)$ точек, обозначим через P_i. Показать, что m прямых $P_1, P_2, \dots P_n$ пересекаются в точке

$$\mathbf{c} = \frac{\underset{1}{\mathbf{x}} + \underset{2}{\mathbf{x}} + \dots + \underset{m}{\mathbf{x}}}{m},$$

причем отношение отрезка $\underset{i}{\mathbf{x}}\mathbf{c}$ к $\underset{i}{\mathbf{c}}\mathbf{c}$ равно $m-1$.

Задача 7. Пусть E_r и E_s — два назависимых пучка, $r+s=n$. Проектируя m независимых векторов $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}$ на E_r параллельно E_s, получаем m векторов $\underset{1}{\mathbf{u}}', \underset{2}{\mathbf{u}}', \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}'$. Если пучки E_s и $\{\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}\}$ имеют ϱ общих независимых направлений, то ранг системы $\underset{1}{\mathbf{u}}', \underset{2}{\mathbf{u}}', \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}'$ равен $m-\varrho$.

Задача 8. Показать, что положение пучка E_r, принадлежащего к пучку E_s, определяется $r(s-r)$ параметрами.

Задача 9. Пусть плоские пучки $E_{r_1}, E_{r_2}, \ldots E_{r_k}$, лежащие в пучке E_s, имеют r общих направлений. Показать, что

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_k \leqslant (k-1)s + r.$$

10. Непосредственным обобщением понятия о двумерном параллелограмме и трехмерном параллелепипеде в геометрии многомерного аффинного пространства является понятие об m-мерном параллелепипеде (параллелотопе). Возьмем m независимых векторов $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}$. Если в формуле

$$\mathbf{x} = t_1\underset{1}{\mathbf{u}} + t_2\underset{2}{\mathbf{u}} + \ldots + t_m\underset{m}{\mathbf{u}} \tag{5,10}$$

параметрам $t_1, t_2, \ldots t_m$ придавать значения 0 или 1, мы получим 2^m точек:

$$0,\ \underset{1}{\mathbf{u}},\ \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}},$$

$$\underset{1}{\mathbf{u}} + \underset{2}{\mathbf{u}},\quad \underset{1}{\mathbf{u}} + \underset{3}{\mathbf{u}}, \ldots\ldots \underset{m-1}{\mathbf{u}} + \underset{m}{\mathbf{u}},$$

$$\underset{1}{\mathbf{u}} + \underset{2}{\mathbf{u}} + \underset{3}{\mathbf{u}}, \ldots\ldots\ldots \underset{1}{\mathbf{u}} + \underset{2}{\mathbf{u}} + \ldots \underset{m}{\mathbf{u}},$$

называемых **в е р ш и н а м и** m-мерного параллелепипеда, построенного на векторах $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}$. Если в формуле (5,10) параметры $t_1, t_2, \ldots t_m$ имеют значения, равные положительным правильным дробям: $0 < t_i < 1$ ($i = 1, 2, \ldots m$), мы будем говорить, что точка $\mathbf{x}$ лежит **в н у т р и** параллелепипеда. m-мерный параллелепипед имеет $2m$ граней, попарно параллельных. Если в формуле (5,10) положить $t_i = 0$, а остальные параметры считать переменными, мы получим уравнение $(m-1)$-мерной плоскости, проходящей через векторы $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{i-1}{\mathbf{u}}, \underset{i+1}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}$; обозначим эту грань параллелепипеда через G_i. Если в (5,10) положить $t_i = 1$, а остальные параметры изменять, мы получим уравнение грани G_i':

$$\mathbf{x} = \underset{i}{\mathbf{u}} + t_1\underset{1}{\mathbf{u}} + \ldots + t_{i-1}\underset{i-1}{\mathbf{u}} + t_{i+1}\underset{i+1}{\mathbf{u}} + \ldots + t_m\underset{m}{\mathbf{u}},$$

параллельной G_i. Полагая $i = 1, 2, \ldots m$, мы построим $2m$ попарно параллельных граней: $G_1, G_1', G_2, G_2', \ldots G_m, G_m'$.

11. Выше было введено понятие об отношении двух **п а р а л л е л ь н ы х** отрезков. Аналогично этому, устанавливается понятие об отношении двух m-мерных параллелепипедов, лежащих **в д в у х п а р а л л е л ь н ы х** m**-м е р н ы х п л о с к о с т я х**.

Пусть

$$\underset{1}{\mathbf{v}} = \lambda_{11}\underset{1}{\mathbf{u}} + \lambda_{12}\underset{2}{\mathbf{u}} + \ldots + \lambda_{1m}\underset{m}{\mathbf{u}},$$

$$\underset{2}{\mathbf{v}} = \lambda_{21}\underset{1}{\mathbf{u}} + \lambda_{22}\underset{2}{\mathbf{u}} + \ldots + \lambda_{2m}\underset{m}{\mathbf{u}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\underset{m}{\mathbf{v}} = \lambda_{m1}\underset{1}{\mathbf{u}} + \lambda_{m2}\underset{2}{\mathbf{u}} + \ldots + \lambda_{mm}\underset{m}{\mathbf{u}},$$

где $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}$ — m независимых векторов. Определитель

$$\begin{vmatrix} \lambda_{11} & \cdot & \cdot & \lambda_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{m1} & \cdot & \cdot & \lambda_{mm} \end{vmatrix}$$

называется **о т н о ш е н и е м** параллелепипеда V, построенного на $\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{v}}$, к параллелепипеду U, построенному на $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}$. Отметим, что это отношение зависит не только от тех векторов, на которых построены параллелепипеды, но и от **п о р я д к а**, в котором берутся векторы каждой из систем: $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}$ и $\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{v}}$ (при изменении порядка **з н а к** отношения может измениться).

Отношение двух параллелепипедов имеет те же основные свойства, что и отношение двух отрезков:

1) Отношение параллелепипеда к самому себе равно 1.

2) Если отношение параллелепипеда U к параллелепипеду V равно α, то отношение V к U равно $\frac{1}{\alpha}$.

3) Если отношение U к V равно α, V к W равно β, то отношение U к W равно $\alpha\beta$.

Докажем 2-е и 3-е предложения. Пусть параллелепипед U построен на m независимых векторах $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}$, параллелепипед

V — на независимых векторах $\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{v}}$. Так как $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}$ и $\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{v}}$ определяют один и тот же m-мерный пучок, то

$$\begin{array}{ll} \underset{1}{\mathbf{v}} = \lambda_{11}\underset{1}{\mathbf{u}} + \ldots + \lambda_{1m}\underset{m}{\mathbf{u}}, & \underset{1}{\mathbf{u}} = \mu_{11}\underset{1}{\mathbf{v}} + \ldots + \mu_{1m}\underset{m}{\mathbf{v}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \underset{m}{\mathbf{v}} = \lambda_{m1}\underset{1}{\mathbf{u}} + \ldots + \lambda_{mm}\underset{m}{\mathbf{u}}, & \underset{m}{\mathbf{u}} = \mu_{m1}\underset{1}{\mathbf{v}} + \ldots + \mu_{mm}\underset{m}{\mathbf{v}}. \end{array}$$

Отношение U к V равно определителю $|\mu_{ik}|$, отношение V к U равно $|\lambda_{ik}|$. Так как матрицы $\|\lambda_{ik}\|$ и $\|\mu_{ik}\|$ связаны соотношением: $\|\lambda_{ik}\| \, \|\mu_{ik}\| = E$, то

$$|\lambda_{ik}| \, |\mu_{ik}| = 1,$$

т. е. второе свойство доказано.

Присоединим теперь к параллелепипедам U и V параллелепипед W, лежащий в той же m-мерной плоскости и построенный на векторах $\underset{1}{\mathbf{w}}, \underset{2}{\mathbf{w}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{w}}$. Пусть

$$\begin{array}{ll} \underset{1}{\mathbf{v}} = \sigma_{11}\underset{1}{\mathbf{w}} + \ldots + \sigma_{1m}\underset{m}{\mathbf{w}}, & \underset{1}{\mathbf{u}} = \tau_{11}\underset{1}{\mathbf{w}} + \ldots + \tau_{1m}\underset{m}{\mathbf{w}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \underset{m}{\mathbf{v}} = \sigma_{m1}\underset{1}{\mathbf{w}} + \ldots + \sigma_{mm}\underset{m}{\mathbf{w}}, & \underset{m}{\mathbf{u}} = \tau_{m1}\underset{1}{\mathbf{w}} + \ldots + \tau_{mm}\underset{m}{\mathbf{w}}. \end{array}$$

Отношения U к V, V к W, U к W выражаются соответственно определителями: $|\mu_{ik}|$, $|\sigma_{ik}|$, $|\tau_{ik}|$. Так как $\|\tau_{ik}\| = \|\mu_{ik}\| \, \|\sigma_{ik}\|$, то

$$|\tau_{ik}| = |\mu_{ik}| \, |\sigma_{ik}|.$$

Если отношение двух параллелепипедов равно 1, условимся называть их **равновеликими**.

В метрической геометрии, как мы увидим ниже, абсолютная величина отношения двух параллелепипедов дает отношение объемов этих двух тел. В аффинной геометрии понятия объема нет; не существует также понятия об отношении двух m-мерных параллелепипедов, не лежащих в параллельных m-мерных плоскостях, или двух параллелепипедов различного числа измерений.

Задача 10. Если U — параллелепипед, построенный на векторах $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}$, V — параллелепипед, построенный на $\underset{1}{\mathbf{u}'}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}$, где $\underset{1}{\mathbf{u}'}$ — вектор, оканчивающийся в грани:

$$\mathbf{x} = \underset{1}{\mathbf{u}} + t_2\underset{2}{\mathbf{u}} + t_3\underset{3}{\mathbf{u}} + \ldots + t_m\underset{m}{\mathbf{u}}$$

параллелепипеда U, то параллелепипеды U и V равновелики.

Задача 11. Пусть E_r и E_s — два независимых пучка, $r + s = n$, U и V — два m-мерных параллелепипеда, лежащих в плоскости E_m, причем E_m и E_s не имеют общих направлений. Проектируя U и V на E_r параллельно E_s, получаем два параллелепипеда U' и V'. Отношение U' к V' равно отношению U к V.

§ 6. Контравариантные мультивекторы.

1. Теперь мы займемся одним обобщением понятия о векторе. Контравариантный вектор мы определили выше, как совокупность двух точек, рассматриваемых в определенном порядке. Аналогично вводится геометрический образ, называемый **контравариантным m-вектором** (**мультивектором** или **поливектором**); он представляет собою совокупность m независимых контравариантных векторов, взятых в определенном порядке. Число m называется порядком m-вектора.

Векторы $\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{v}}$, определяющие мультивектор, назовем его **базисом**. Будем говорить, что мультивектор построен на векторах $\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{v}}$, что он принадлежит к пучку $\{\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{v}}\}$.

При введении той или иной геометрической величины основным вопросом является вопрос о равенстве двух геометрических величин. Например, определение равенства двух векторов имеет решающее значение для всего дальнейшего построения аффинной геометрии, являясь основой для определения параллелизма и действий над векторами. Условимся, что мы будем понимать под равными мультивекторами.

Два мультивектора с базисами $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}$ и $\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{v}}$ называются равными, если параллелепипеды, построенные на этих двух системах векторов, равновелики.

Таким образом, два равных m-вектора должны лежать в параллельных m-мерных плоскостях. При этом определении равенства мультивекторов вытекает, что мультивектор может быть задан различными базисами, дающими равновеликие параллелепипеды.

Аналогично тому, как контравариантный вектор определяется системой n составляющих, вводят координаты или составляющие m-вектора. Делается это следующим образом.

Возьмем m-мерную плоскость E_m, определяемую координатными векторами $\underset{i_1}{\mathbf{e}}, \underset{i_2}{\mathbf{e}}, \dots \underset{i_m}{\mathbf{e}}$. $(n-m)$-мерную плоскость, проходящую через остальные $(n-m)$ координатных векторов, обозначим через E_{n-m}. Спроектируем базис $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \dots \underset{m}{\mathbf{u}}$ мультивектора на E_m параллельно плоскости E_{n-m}. В E_m мы получим m векторов $\underset{1}{\mathbf{u}}', \underset{2}{\mathbf{u}}', \dots \underset{m}{\mathbf{u}}'$:

$$\begin{aligned}
\underset{1}{\mathbf{u}}' &= \underset{1}{u}^{i_1}\underset{i_1}{\mathbf{e}} + \underset{1}{u}^{i_2}\underset{i_2}{\mathbf{e}} + \dots + \underset{1}{u}^{i_m}\underset{i_m}{\mathbf{e}},\\
\underset{2}{\mathbf{u}}' &= \underset{2}{u}^{i_1}\underset{i_1}{\mathbf{e}} + \underset{2}{u}^{i_2}\underset{i_2}{\mathbf{e}} + \dots + \underset{2}{u}^{i_m}\underset{i_m}{\mathbf{e}},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\underset{m}{\mathbf{u}}' &= \underset{m}{u}^{i_1}\underset{i_1}{\mathbf{e}} + \underset{m}{u}^{i_2}\underset{i_2}{\mathbf{e}} + \dots + \underset{m}{u}^{i_m}\underset{i_m}{\mathbf{e}}.
\end{aligned}$$

Отношение параллелепипеда, построенного на $\underset{1}{\mathbf{u}}', \underset{2}{\mathbf{u}}', \dots \underset{m}{\mathbf{u}}'$, к параллелепипеду, построенному на $\underset{i_1}{\mathbf{e}}, \underset{i_2}{\mathbf{e}}, \dots \underset{i_m}{\mathbf{e}}$, обозначим через $u^{i_1 i_2 \dots i_m}$. Имеем:

$$u^{i_1 i_2 \dots i_m} = \begin{vmatrix} \underset{1}{u}^{i_1} & \dots & \underset{1}{u}^{i_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \underset{m}{u}^{i_1} & \dots & \underset{m}{u}^{i_m} \end{vmatrix}.$$

Придавая индексам $i_1, i_2, \dots i_m$ значения от 1 до n, мы получим систему чисел, которые и принимаются за координаты или составляющие m-вектора. $u^{i_1 i_2 \dots i_m}$ являются минорами матрицы:

$$\begin{Vmatrix} \underset{1}{u}^1, & \underset{1}{u}^2, & \dots & \underset{1}{u}^n \\ \underset{2}{u}^1, & \underset{2}{u}^2, & \dots & \underset{2}{u}^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underset{m}{u}^1, & \underset{m}{u}^2, & \dots & \underset{m}{u}^n \end{Vmatrix}.$$

Покажем, что числа $u^{i_1 i_2 \dots i_m}$ действительно определяют мультивектор (или, лучше сказать, систему равных мультивекторов). Обнаружим прежде всего, что составляющие $u^{i_1 i_2 \dots i_m}$ задают тот плоский пучок, к которому принадлежат векторы базиса мультивектора. Если $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \dots \underset{m}{\mathbf{u}}$ — базис мультивектора $\mathbf{U}$[1] и если вектор $\mathbf{u}$ принадлежит к пучку $\{\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \dots \underset{m}{\mathbf{u}}\}$, то все определители $(m+1)$-го порядка матрицы

$$\begin{Vmatrix} u^1, & u^2, & \dots & u^n \\ \underset{1}{u}^1, & \underset{1}{u}^2, & \dots & \underset{1}{u}^n \\ \underset{2}{u}^1, & \underset{2}{u}^2, & \dots & \underset{2}{u}^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underset{m}{u}^1, & \underset{m}{u}^2, & \dots & \underset{m}{u}^n \end{Vmatrix}$$

равны нулю; обратно, если ранг этой матрицы меньше $(m+1)$, то $\mathbf{u}$ лежит в $\{\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \dots \underset{m}{\mathbf{u}}\}$. Разлагая миноры

$$\begin{vmatrix} u^{i_1} & u^{i_2} & \dots & u^{i_{m+1}} \\ \underset{1}{u}^{i_1} & \underset{1}{u}^{i_2} & \dots & \underset{1}{u}^{i_{m+1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \underset{m}{u}^{i_1} & \underset{m}{u}^{i_2} & \dots & \underset{m}{u}^{i_{m+1}} \end{vmatrix}$$

по элементам 1-й строки и приравнивая результаты нулю, мы получим систему уравнений, выражающих условие, что вектор $\mathbf{u}$ принадлежит к $\{\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \dots \underset{m}{\mathbf{u}}\}$:

$$(6,1)\quad u^{i_1}u^{i_2 i_3 \dots i_{m+1}} - u^{i_2}u^{i_1 i_3 \dots i_{m+1}} + u^{i_3}u^{i_1 i_2 \dots i_{m+1}} \dots\dots + \\ + (-1)^m u^{i_{m+1}} u^{i_1 i_2 \dots i_m} = 0.$$

Решая эти уравнения, мы найдем m независимых векторов $\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \dots \underset{m}{\mathbf{v}}$, принадлежащих к тому пучку, в котором лежит мультивектор. Если

$$\begin{aligned}
\underset{1}{\mathbf{v}} &= \lambda_{11}\underset{1}{\mathbf{u}} + \dots + \lambda_{1m}\underset{m}{\mathbf{u}},\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\\
\underset{m}{\mathbf{v}} &= \lambda_{m1}\underset{1}{\mathbf{u}} + \dots + \lambda_{mm}\underset{m}{\mathbf{u}},
\end{aligned}$$

[1] Мультивекторы мы условимся обозначать большими латинскими буквами жирного шрифта.

то

$$\begin{vmatrix} \underset{1}{v}^{i_1} & \ldots & \underset{1}{v}^{i_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \underset{m}{v}^{i_1} & \ldots & \underset{m}{v}^{i_m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \ldots & \lambda_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{m1} & \ldots & \lambda_{mm} \end{vmatrix} u^{i_1 i_2 \ldots i_m}.$$

Умножая один из векторов $\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{v}}$, например $\underset{1}{\mathbf{v}}$, на $\frac{1}{|\lambda_{ik}|}$, мы получим систему векторов, которую можно принять за базис мультивектора с составляющими $u^{i_1 i_2 \ldots i_m}$.

Пример. В 4-мерном пространстве базис мультивектора u^{ik} ищется из уравнений:

$$\begin{aligned} &u^1 u^{23} + u^2 u^{31} + u^3 u^{12} &&= 0, \\ &u^1 u^{24} + u^2 u^{41} \qquad\qquad + u^4 u^{12} &&= 0, \\ &u^1 u^{34} \qquad\qquad + u^3 u^{41} + u^4 u^{13} &&= 0, \\ &\qquad\qquad u^2 u^{34} + u^3 u^{42} + u^4 u^{23} &&= 0, \end{aligned} \tag{6,2}$$

из которых, как можно легко показать, только два независимых (см. ниже задачу 4).

У двух m-векторов, лежащих в параллельных m-мерных плоскостях, составляющие пропорциональны, причем коэффициент пропорциональности равен отношению тех параллелепипедов, которые построены на базисах этих мультивекторов. Обратно, если у двух мультивекторов составляющие пропорциональны, то плоскости этих мультивекторов параллельны.

Два мультивектора называются независимыми, если независимы те плоские пучки, в которых лежат эти мультивекторы. Если же эти пучки $\frac{p}{r}$-параллельны, то будем говорить, что степень параллельности соответствующих мультивекторов равна $\frac{p}{r}$.

2. Рассмотрим более подробно систему составляющих мультивектора: $u^{i_1 i_2 \ldots i_m}$. Эти числа обладают следующими свойствами:

1) $u^{i_1 i_2 \ldots i_m} = 0$, если в ряду индексов $i_1, i_2, \ldots i_m$ имеются одинаковые,

2) $u^{i_1 i_2 \ldots i_m} = \pm u^{k_1 k_2 \ldots k_m}$, если оба ряда индексов $i_1, i_2, \ldots i_m$ и $k_1, k_2, \ldots k_m$ состоят из одних и тех же чисел; знак плюс в этом равенстве надо брать в том случае, если подстановка $\begin{pmatrix} i_1 i_2 \ldots i_m \\ k_1 k_2 \ldots k_m \end{pmatrix}$ четная, минус — если она нечетная.

Таким образом, среди чисел $u^{i_1 i_2 \ldots i_m}$ имеется в общем случае столько не равных нулю и различных по абсолютной величине, сколько можно составить сочетаний из n элементов по m, т. е. $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$. Эти числа можно упорядочить, приписав каждому из них определенный номер. Для этого расположим в ряд те $\binom{n}{m}$ сочетаний, которые можно образовать из индексов $1, 2, 3, \ldots n$ по m в каждом сочетании. Сделать это можно, например, следующим образом.

Будем рассматривать только те сочетания индексов, у которых входящие в них числа идут в возрастающем порядке: $i_1 < i_2 < i_3 < \ldots < i_m$. Возьмем два сочетания: $i_1 i_2 \ldots i_m$ и $k_1 k_2 \ldots k_m$; если $k_1 > i_1$, то больший порядковый номер припишем сочетанию $k_1 k_2 \ldots k_m$; если же у этих сочетаний имеется r первых одинаковых индексов: $k_1 = i_1, k_2 = i_2, \ldots, k_r = i_r$, но $k_{r+1} > i_{r+1}$, то сочетанию $k_1 k_2 \ldots k_m$ отнесем больший порядковый номер, чем сочетанию $i_1 i_2 \ldots i_m$.

Упорядочив таким образом сочетания, мы можем перенумеровать те числа $u^{i_1 i_2 \ldots i_m}$, у которых индексы идут в возрастающем порядке. Упорядоченные по этому закону числа $u^{i_1 i_2 \ldots i_m}$ условимся обозначать большими латинскими буквами с одним верхним индексом: $U^1, U^2, \ldots U^N$, где $N = \binom{n}{m}$.

Пример. В 5-мерном пространстве составляющие тривектора $u^{i_1 i_2 i_3}$ упорядочиваются следующим образом:

$$u^{123} = U^1,\ u^{124} = U^2,\ u^{125} = U^3,\ u^{134} = U^4,\ u^{135} = U^5,\ u^{145} = U^6,\ u^{234} = U^7,$$
$$u^{235} = U^8,\ u^{245} = U^9,\ u^{345} = U^{10}.$$

В дальнейшем изложении составляющие мультивектора мы будем чаще всего обозначать через $u^{i_1 i_2 \ldots i_m}$; в тех же случаях, когда выгодно рассматривать их в определенном порядке, будем пользоваться обозначениями: $U^1, U^2, \ldots U^N$.

3. Возникает вопрос, могут ли быть заданы по произволу $\binom{n}{m}$ составляющих m-вектора. Исчерпывающий ответ на этот вопрос будет дан в § 26, где мы будем подробно заниматься m-векторами. Теперь же мы только заметим, что между координатами m-вектора существует ряд соотношений 2-го порядка и ограничимся простым примером. Возьмем бивектор u^{ik}; если он задан

базисом $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}$, то, развертывая по минорам первых двух строк определитель

$$\begin{vmatrix} \underset{1}{u}^{i_1} & \underset{1}{u}^{i_2} & \underset{1}{u}^{i_3} & \underset{1}{u}^{i_4} \\ \underset{2}{u}^{i_1} & \underset{2}{u}^{i_2} & \underset{2}{u}^{i_3} & \underset{2}{u}^{i_4} \\ \underset{1}{u}^{i_1} & \underset{1}{u}^{i_2} & \underset{1}{u}^{i_3} & \underset{1}{u}^{i_4} \\ \underset{2}{u}^{i_1} & \underset{2}{u}^{i_2} & \underset{2}{u}^{i_3} & \underset{2}{u}^{i_4} \end{vmatrix} = 0,$$

получаем

(6,3) $$u^{i_1 i_2} u^{i_3 i_4} + u^{i_2 i_3} u^{i_1 i_4} + u^{i_3 i_1} u^{i_2 i_4} = 0.$$

В 4-мерном пространстве составляющие бивектора связаны только одним соотношением:

(6,4) $$u^{23} u^{14} + u^{31} u^{24} + u^{12} u^{34} = 0.$$

4. Над мультивекторами производятся алгебраические операции. Простейшим является действие сложения m-векторов; если даны два m-вектора $\mathbf{U}$ с составляющими $u^{i_1 i_2 \ldots i_m}$, $\mathbf{V}$ с составляющими $v^{i_1 i_2 \ldots i_m}$, то геометрический образ, определяемый системой $\binom{n}{m}$ составляющих:

$$u^{i_1 i_2 \ldots i_m} + v^{i_1 i_2 \ldots i_m},$$

называется суммой данных m-векторов и обозначается $\mathbf{U} + \mathbf{V}$. Следует заметить, что полученный образ в общем случае не является m-вектором, а более сложной геометрической величиной, — так называемым антисимметрическим тензором, с которым мы более подробно ознакомимся в дальнейшем. Умножение мультивектора на скаляр определяется как действие, относящее m-вектору $u^{i_1 i_2 \ldots i_m}$ новый m-вектор $\mathbf{V} = \sigma \mathbf{U}$ с координатами $\sigma u^{i_1 i_2 \ldots i_m}$.

Кроме этих двух действий, можно ввести еще ряд алгебраических операций над мультивекторами. Всеми этими вопросами мы будем более подробно заниматься в § 26.

5. В теории мультивекторов вводят иногда и прямые обозначения для выражения m-вектора через векторы его базиса. m-вектор $\mathbf{U}$, построенный на базисе $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}$, обозначается следующим образом:

$$\mathbf{U} = [\underset{1}{\mathbf{u}}\, \underset{2}{\mathbf{u}} \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}]$$

и называется произведением векторов $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}$. Нетрудно видеть, что это произведение имеет следующие свойства:

1) оно дистрибутивно относительно операции сложения векторов:

$$[(\underset{1}{\mathbf{u}} + \underset{1}{\mathbf{u}}')\, \underset{2}{\mathbf{u}} \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}] = [\underset{1}{\mathbf{u}}\, \underset{2}{\mathbf{u}} \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}] + [\underset{1}{\mathbf{u}}'\, \underset{2}{\mathbf{u}} \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}],$$

$$[\underset{1}{\mathbf{u}}\, (\underset{2}{\mathbf{u}} + \underset{2}{\mathbf{u}}') \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}] = [\underset{1}{\mathbf{u}}\, \underset{2}{\mathbf{u}} \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}] + [\underset{1}{\mathbf{u}}\, \underset{2}{\mathbf{u}}' \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}],$$

и т. д.;

2) ассоциативно относительно умножения вектора на скаляр:

$$[(\sigma \underset{1}{\mathbf{u}})\, \underset{2}{\mathbf{u}} \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}] = \sigma\, [\underset{1}{\mathbf{u}}\, \underset{2}{\mathbf{u}} \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}],$$

$$[\underset{1}{\mathbf{u}}\, (\sigma \underset{2}{\mathbf{u}}) \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}] = \sigma\, [\underset{1}{\mathbf{u}}\, \underset{2}{\mathbf{u}} \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}],$$

и т. д.;

3) знакопеременно при перестановке каждой пары сомножителей:

$$[\underset{1}{\mathbf{u}}\, \underset{2}{\mathbf{u}} \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}] = -[\underset{2}{\mathbf{u}}\, \underset{1}{\mathbf{u}} \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}] = -[\underset{1}{\mathbf{u}}\, \underset{3}{\mathbf{u}}\, \underset{2}{\mathbf{u}} \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}] = \ldots$$

Выражая векторы $\underset{i}{\mathbf{u}}$ через составляющие и координатные векторы, получаем:

$$[\underset{1}{\mathbf{u}}\, \underset{2}{\mathbf{u}} \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}] = \sum_{(i_1, i_2, \ldots i_m)} u^{i_1 i_2 \ldots i_m} [\underset{i_1}{\mathbf{e}}\, \underset{i_2}{\mathbf{e}} \ldots \underset{i_m}{\mathbf{e}}],$$

где $u^{i_1 i_2 \ldots i_m}$ — составляющие m-вектора; $(i_1, i_2, \ldots i_m)$ под знаком суммы обозначает, что суммирование распространяется на $\binom{n}{m}$ сочетаний индексов по m в каждом (можно условиться брать индексы в возрастающем порядке: $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$).

m-векторы $[\underset{i_1}{\mathbf{e}}\, \underset{i_2}{\mathbf{e}} \ldots \underset{i_m}{\mathbf{e}}]$ называются координатными; их можно упорядочить в ряд так же, как мы делали это с координатами m-вектора, и обозначить через $\underset{1}{\mathbf{E}}, \underset{2}{\mathbf{E}}, \ldots \underset{N}{\mathbf{E}}$. Тогда

$$\mathbf{U} = [\underset{1}{\mathbf{u}}\underset{2}{\mathbf{u}} \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}] = \sum_{\alpha=1}^{N} U^{\alpha} \underset{\alpha}{\mathbf{E}}.$$

n-вектор имеет только одну составляющую. Ее принято обозначать символом

$$(\underset{1}{\mathbf{u}}\underset{2}{\mathbf{u}}\ldots\underset{n}{\mathbf{u}}) = \begin{vmatrix} \underset{1}{u^1} & \ldots & \underset{1}{u^n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \underset{n}{u^1} & \ldots & \underset{n}{u^n} \end{vmatrix}.$$

Относительно применения прямых обозначений необходимо сделать следующее замечание. Если в области простейших операций над мультивекторами прямые обозначения приносят известные выгоды, то в более сложных вопросах они приводят к слишком громоздкой символике, уничтожающей выгоды прямых обозначений.

Задача 1. Определить координаты бивектора в 4-мерном пространстве, построенного на векторах (1, 0, 1, 2), (0, 1, — 1, 1), и проверить, что они удовлетворяют соотношению (6,4).

Ответ. $u^{12}=1$, $u^{13}=-1$, $u^{14}=1$, $u^{23}=-1$, $u^{24}=-2$, $u^{34}=3$.

Задача 2. Пользуясь соотношениями (6,1), вывести уравнения, определяющие плоские пучки, в которых лежат следующие мультивекторы: 1) $u^{123}=-1$, $u^{124}=1$, $u^{134}=1$, $u^{234}=-2$ в 4-мерном пространстве, 2) $u^{123}=2$, $u^{124}=0$, $u^{125}=2$, $u^{134}=1$, $u^{135}=-1$, $u^{145}=-1$, $u^{234}=0$, $u^{235}=-2$, $u^{245}=0$, $u^{345}=-1$ в 5-мерном пространстве.

Ответ. 1) $2u^{(1)}+u^{(2)}-u^{(3)}-u^{(4)}=0$, 2) $u^{(2)}+2u^{(4)}=0$, $u^{(1)}-u^{(3)}+u^{(4)}+u^{(5)}=0$.

Задача 3. В 4-мерном пространстве задан бивектор: $u^{12}=2$, $u^{13}=-1$, $u^{14}=1$, $u^{23}=-2$, $u^{24}=0$, $u^{34}=1$. Определить базис этого бивектора.

Ответ. За базис можно принять вектор $(a,\ 2b,\ a-b,\ b)$ и вектор $(c,\ 2d,\ c-d,\ d)$, где a, b, c, d связаны соотношением: $ad-bc=1$.

Задача 4. Пользуясь соотношением (6,4), показать, что в системе (6,2) только два независимых уравнения. Отсюда вывести, что (6,4) является условием не только необходимым, но и достаточным для того, чтобы u^{ik} определяли бивектор в 4-мерном пространстве.

Задача 5. В 4-мерном пространстве заданы два бивектора u^{ik} и v^{ik}. Показать, что соотношение

$$u^{23}v^{14}+u^{31}v^{24}+u^{12}v^{34}+u^{14}v^{23}+u^{24}v^{31}+u^{34}v^{12}=0$$

является условием $\frac{1}{2}$-параллельности этих бивекторов; соотношение

$$u^{ik}=\lambda v^{ik}$$

— условием полной их параллельности.

Задача 6. В 4-мерном пространстве заданы два бивектора u^{ik} и v^{ik}. Показать, что сумма $u^{ik}+v^{ik}$ тогда и только тогда является бивектором, если пучки этих бивекторов не независимы (имеют, по крайней мере, одно общее направление).

Указание. Выписать соотношение (6,4) для $u^{ik}+v^{ik}$ и воспользоваться результатом предыдущей задачи.

Задача 7. Если элементы двух m-векторов $\frac{m-1}{m}$-параллельны, то сумма этих m-векторов представляет собою m-вектор.

Указание. При решении этой задачи удобно воспользоваться прямыми обозначениями.

§ 7. Ковариантные векторы.

1. Введенных в § 5 контравариантных векторов вполне достаточно для того, чтобы развить аналитическую геометрию аффинного пространства. Теория инвариантов аффинных преобразований требует однако создания нового понятия — ковариантного вектора. Мы дадим сначала геометрическое определение ковариантного вектора; в последующем изложении мы увидим, какое большое значение имеет он для тензорного анализа.

Ковариантным или дуальным вектором называется совокупность двух параллельных гиперплоскостей, из которых одна называется начальной, другая конечной. Если эти гиперплоскости заданы соответственно уравнениями:

$$a_\sigma x^\sigma = \alpha,$$

$$a_\sigma x^\sigma = \beta,$$

то n чисел

$$\frac{a_\sigma}{\beta-\alpha} \qquad (\sigma = 1,\ 2, \ldots n)$$

называются составляющими, или координатами, ковариантного вектора. Дуальные векторы мы будем обозначать жирными латинскими буквами и, для отличия их от контравариантных векторов, будем ставить над этими буквами точку. Составляющие будем записывать той же буквой с нижними индексами: например составляющие вектора $\dot{\mathbf{a}}$ суть: $a_1, a_2, \ldots a_n$.

Два ковариантных вектора называются равными:

$$\dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{b}},$$

если попарно равны их составляющие:

$$a_i = b_i.$$

Ковариантный вектор задан, если даны его составляющие и начальная или конечная гиперплоскость. Если заданы только составляющие u_i, то любую гиперплоскость из семейства параллельных гиперплоскостей

$$(7,1) \qquad u_\alpha x^\alpha = \lambda,$$

где λ — переменный параметр, мы можем выбрать за начальную гиперплоскость; тогда конечная выразится соответственно уравнением:

$$u_\alpha x^\alpha = \lambda + 1.$$

Для удобства исследования условимся в тех случаях, когда не указаны начальная и конечная гиперплоскость ковариантного вектора, за начальную брать ту гиперплоскость из семейства (7,1), которая проходит через начало координат:

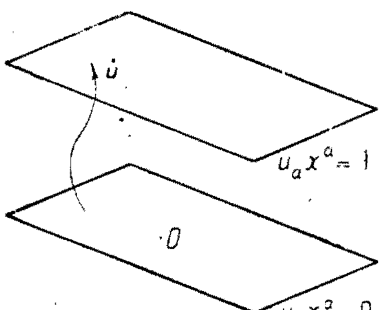
$$u_\alpha x^\alpha = 0.$$

Тогда конечная гиперплоскость будет определяться уравнением

(7,1a) $$u_\alpha x^\alpha = 1.$$

В тех случаях, где это не может вызвать неясности, эту конечную гиперплоскость мы будем просто называть: гиперплоскость $\dot{\mathbf{u}}$, аналогично тому, как точку пространства мы определяем контравариантным вектором, проведенным из начала координат. Составляющие $u_1, u_2, \dots u_n$ вектора $\dot{\mathbf{u}}$ называются *тангенциальными координатами* гиперплоскости (7,1a).

На черт. 1 дано изображение ковариантного вектора в трехмерном пространстве. Изогнутой стрелкой указано направление от начальной к конечной плоскости этого вектора.



Черт. 1.

Ковариантные векторы, имеющие составляющие

$$(1,\ 0,\ 0, \dots 0)$$
$$(0,\ 1,\ 0, \dots 0)$$
$$(0,\ 0,\ 1, \dots 0)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$(0,\ 0,\ 0, \dots 1),$$

называются *координатными* и обозначаются так: $\overset{1}{\mathbf{e}}, \overset{2}{\mathbf{e}}, \dots \overset{n}{\mathbf{e}}$. Точки над буквами мы ставить уже не будем, заменяя их цифрами. Вообще, если несколько ковариантных векторов

мы обозначаем одной и той же буквой с разными индексами, то эти последние будем ставить *над* буквами, заменяя ими точки: например, $\overset{1}{\mathbf{v}}, \overset{2}{\mathbf{v}}, \dots \overset{m}{\mathbf{v}}$.

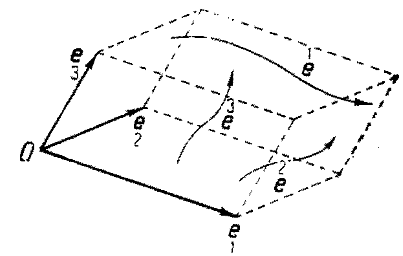
Дадим геометрическую интерпретацию координатных ковариантных векторов. Начальные и конечные гиперплоскости векторов $\overset{1}{\mathbf{e}}, \overset{2}{\mathbf{e}}, \dots \overset{n}{\mathbf{e}}$ определяются соответственно уравнениями:

$$\overset{1}{\mathbf{e}}:\ x^1 = 0,\ x^1 = 1,$$
$$\overset{2}{\mathbf{e}}:\ x^2 = 0,\ x^2 = 1,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\overset{n}{\mathbf{e}}:\ x^n = 0,\ x^n = 1;$$

они являются попарно параллельными гранями параллелепипеда построенного на векторах $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots \mathbf{e}_n$.

На черт. 2 показана картина для трехмерного пространства. Изогнутые стрелки соединяют начальную и конечные плоскости трех координатных ковариантных векторов.

2. Операции сложения ковариантных векторов и умножения вектора на скаляр определяются так же, как и в теории контравариантных векторов.



Черт. 2.

Ковариантный вектор $\dot{\mathbf{c}}$ называется суммой ковариантных векторов $\dot{\mathbf{a}}$ и $\dot{\mathbf{b}}$

$$\dot{\mathbf{c}} = \dot{\mathbf{a}} + \dot{\mathbf{b}},$$

если

$$c_i = a_i + b_i \qquad (i = 1, \dots n).$$

Пользуясь геометрическими представлениями, введенными § 5, можно дать геометрическую интерпретацию действия сложения двух ковариантных векторов. Рассмотрим тот случай, когда гиперплоскость $\dot{\mathbf{a}}$ не параллельна гиперплоскости $\dot{\mathbf{b}}$. Начальная гиперплоскость вектора $\dot{\mathbf{a}}$:

(7,2) $$a_\alpha x^\alpha = 0,$$

пересекаясь с конечной гиперплоскостью вектора $\dot{\mathbf{b}}$:

(7,3) $$b_\alpha x^\alpha = 1,$$

дает $(n-2)$-мерную плоскость E_{n-2}, определяемую уравнениями (7,2) и (7,3).

Аналогично начальная гиперплоскость вектора $\dot{\mathbf{b}}$:

(7,4) $$b_\alpha x^\alpha = 0$$

и конечная гиперплоскость вектора $\dot{\mathbf{a}}$:

(7,5) $$a_\alpha x^\alpha = 1,$$

дают в пересечении $(n-2)$-мерную плоскость E'_{n-2}, определяемую уравнениями (7,4) и (7,5). E_{n-2} и E'_{n-2} параллельны между собой.

Через них проводим гиперплоскость E_{n-1}; для того, чтобы получить ее уравнение, проводим пучок гиперплоскостей через E_{n-2}:

$$(\lambda a_\alpha + \mu b_\alpha)\, x^\alpha = \mu$$

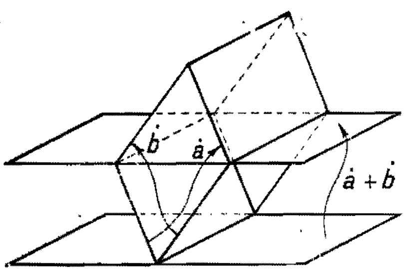
и пучок гиперплоскостей через E'_{n-2}:

$$(\sigma a_\alpha + \tau b_\alpha)\, x^\alpha = \sigma$$

и выбираем в этих пучках общую гиперплоскость; она определяется значением параметров: $\frac{\lambda}{\mu} = 1$, $\frac{\sigma}{\tau} = 1$. Таким образом, уравнение гиперплоскости E_{n-1} имеет вид:

$$(a_\alpha + b_\alpha)\, x^\alpha = 1,$$

т. е. E_{n-1} является конечной гиперплоскостью ковариантного вектора $(\dot{\mathbf{a}} + \dot{\mathbf{b}})$. На черт. 3 операция сложения двух ковариантных векторов представлена для трехмерного пространства.



Черт. 3.

Случай, когда гиперплоскости $\dot{\mathbf{a}}$ и $\dot{\mathbf{b}}$ параллельны, приводится к построению, разбираемому ниже для действия умножения вектора на скаляр.

П р о и з в е д е н и е м в е к т о р а $\dot{\mathbf{a}}$ н а с к а л я р σ называется вектор

$$\dot{\mathbf{b}} = \sigma \dot{\mathbf{a}}$$

с составляющими

$$b_i = \sigma a_i.$$

Гиперплоскость $\dot{\mathbf{b}}$ определяется уравнением

$$a_\alpha \sigma x^\alpha = 1.$$

Следовательно, она параллельна гиперплоскости $\dot{\mathbf{a}}$. Проведем через начало прямую

(7,6) $$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{u},$$

не лежащую в начальной гиперплоскости вектора $\dot{\mathbf{a}}$:

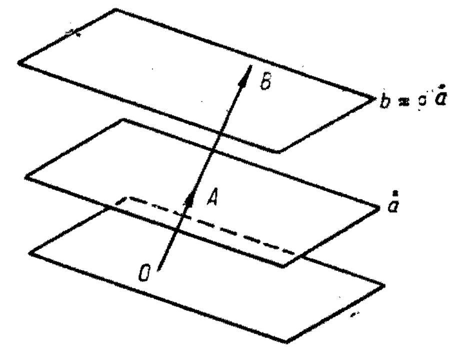
$$a_\alpha u^\alpha \neq 0.$$

Прямая (7,6) пересекает гиперплоскость $\dot{\mathbf{a}}$:

$$a_\alpha x^\alpha = 1$$

в точке A, определяемой параметром

$$\lambda_1 = \frac{1}{a_\alpha u^\alpha};$$



Черт. 4.

гиперплоскость $\dot{\mathbf{b}} = \sigma \dot{\mathbf{a}}$ эта прямая пересекает в точке B, которой соответствует значение параметра

$$\lambda_2 = \frac{1}{\sigma a_\alpha u^\alpha}.$$

Следовательно, отношение отрезков OA и OB равно σ.

Если $\sigma > 1$, то гиперплоскость $\dot{\mathbf{b}} = \sigma \dot{\mathbf{a}}$ лежит между началом O и гиперплоскостью $\dot{\mathbf{a}}$; если $0 < \sigma < 1$, то $\dot{\mathbf{a}}$ лежит между O и $\dot{\mathbf{b}}$; при $\sigma < 0$ начало находится между гиперплоскостями $\dot{\mathbf{a}}$ и $\dot{\mathbf{b}}$.

Пользуясь действием сложения и умножения вектора на скаляр, можно каждый ковариантный вектор выразить через координатные векторы:

$$\dot{\mathbf{a}} = a_a \overset{a}{\dot{\mathbf{e}}}.$$

3. Теория пучков контравариантных векторов, развитая в § 5, может быть непосредственно перенесена на ковариантные векторы. Мы не будем останавливаться на этом, разберем только в качестве примеров одномерный и двумерный пучки.

Если

$$\dot{\mathbf{b}} = \sigma \dot{\mathbf{a}},$$

то гиперплоскость $\dot{\mathbf{b}}$ параллельна гиперплоскости $\dot{\mathbf{a}}$. Посмотрим, как движется гиперплоскость $\dot{\mathbf{b}}$, когда параметр σ изменяется. Значению $\sigma=0$ никакой гиперплоскости $\dot{\mathbf{b}}$ не соответствует. Условно можно считать, что мы имеем в данном случае бесконечно-удаленную гиперплоскость. При изменении параметра σ от 0 до ∞ гиперплоскость $\dot{\mathbf{b}}$ движется поступательно из бесконечности к началу координат, оставаясь все время с той стороны плоскости $a_a x^a = 0$, с которой лежит гиперплоскость $\dot{\mathbf{a}}$. Когда σ изменяется от 0 до $-\infty$, гиперплоскость $\dot{\mathbf{b}}$ движется поступательно из бесконечности к началу координат, причем гиперплоскость $a_a x^a = 0$ лежит между $\dot{\mathbf{b}}$ и $\dot{\mathbf{a}}$.

Возьмем двумерный пучок:

$$\dot{\mathbf{c}} = \sigma\dot{\mathbf{a}} + \tau\dot{\mathbf{b}},$$

где $\dot{\mathbf{a}}$ и $\dot{\mathbf{b}}$ — независимые ковариантные векторы. С изменением параметров σ и τ гиперплоскость $\dot{\mathbf{c}}$ занимает различные положения в пространстве, оставаясь все время параллельной $(n-2)$-мерной плоскости пересечения гиперплоскостей.

$$a_a x^a = 1, \quad b_a x^a = 1\,.$$

4. Аналогично контравариантным m-векторам, вводятся ковариантные. Делается это совершенно так же, и потому мы ограничимся указанием символики. Если ковариантный m-вектор $\dot{\mathbf{U}}$ построен на базисе $\overset{1}{\mathbf{u}}, \overset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \overset{m}{\mathbf{u}}$, то он обозначается как произведение этих ковариантных векторов:

$$\dot{\mathbf{U}} = [\overset{1}{\mathbf{u}}\,\overset{2}{\mathbf{u}} \ldots \overset{m}{\mathbf{u}}].$$

Его составляющие обозначаются или

$$u_{i_1 i_2 \ldots i_m} = \begin{vmatrix} \overset{1}{u}_{i_1} & \overset{1}{u}_{i_2} & \ldots & \overset{1}{u}_{i_m} \\ \overset{2}{u}_{i_1} & \overset{2}{u}_{i_2} & \ldots & \overset{2}{u}_{i_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \overset{m}{u}_{i_1} & \overset{m}{u}_{i_2} & \ldots & \overset{m}{u}_{i_m} \end{vmatrix}$$

или, если они упорядочены, то $U_1, U_2, \ldots U_N$. Обозначая через $\overset{1}{\mathbf{E}}, \overset{2}{\mathbf{E}}, \ldots \overset{N}{\mathbf{E}}$ координатные ковариантные m-векторы, имеем

$$\dot{\mathbf{U}} = \sum U_\alpha \overset{\alpha}{\mathbf{E}}.$$

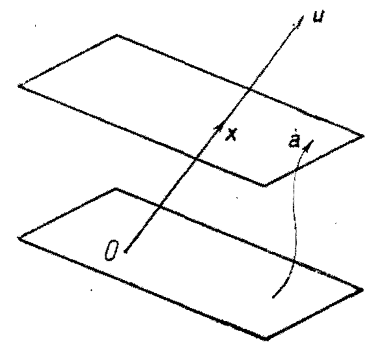
Для составляющей n-вектора будем употреблять символ:

$$(\overset{1}{\mathbf{u}}\,\overset{2}{\mathbf{u}} \ldots \overset{n}{\mathbf{u}}) = \begin{vmatrix} \overset{1}{u}_1 & \overset{1}{u}_2 & \ldots & \overset{1}{u}_n \\ \overset{2}{u}_1 & \overset{2}{u}_2 & \ldots & \overset{2}{u}_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \overset{n}{u}_1 & \overset{n}{u}_2 & \ldots & \overset{n}{u}_n \end{vmatrix}.$$

§ 8. Скалярное произведение ковариантного и контравариантного векторов и мультивекторов.

1. В алгебре ковариантных и контравариантных векторов можно ввести действие, относящее ковариантному и контравариантному векторам определенное число.

Возьмем ковариантный вектор $\dot{\mathbf{a}}$ и контравариантный $\mathbf{u}$ (черт. 5 дает иллюстрацию для трехмерного пространства). Рассмотрим сначала тот случай, когда $\mathbf{u}$ не лежит в начальной гиперплоскости вектора $\dot{\mathbf{a}}$. Обозначим точку пересечения прямой вектора $\mathbf{u}$ с конечной гиперплоскостью $\dot{\mathbf{a}}$ через $\mathbf{x}$.



Черт. 5.

Отношение отрезка $O\mathbf{u}$ к отрезку $O\mathbf{x}$ называется скалярным произведением векторов $\mathbf{u}$ и $\dot{\mathbf{a}}$.

Обозначать скалярное произведение его будем через $\dot{\mathbf{a}}\mathbf{u}$ или $\mathbf{u}\dot{\mathbf{a}}$. Если $\mathbf{u}$ лежит в начальной гиперплоскости вектора $\dot{\mathbf{a}}$, значение их скалярного произведения примем равным нулю.

Выразим величину произведения $\dot{\mathbf{a}}\mathbf{u}$ через составляющие. Так как вектор $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{u}$ оканчивается в гиперплоскости $\dot{\mathbf{a}}$, то

$$\lambda a_a u^a = 1;$$

следовательно, $\lambda = \dfrac{1}{a_a u^a}$, а так как по определению $\dot{\mathbf{a}}\mathbf{u} = \dfrac{1}{\lambda}$, то

$$\dot{\mathbf{a}}\mathbf{u} = a_a u^a. \tag{8,1}$$

Из этой формулы вытекают следующие соотношения для скалярного произведения:

$$\begin{gathered} (\dot{\mathbf{a}} + \dot{\mathbf{b}})\,\mathbf{u} = \dot{\mathbf{a}}\mathbf{u} + \dot{\mathbf{b}}\mathbf{u}, \\ \dot{\mathbf{a}}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \dot{\mathbf{a}}\mathbf{u} + \dot{\mathbf{a}}\mathbf{v}, \\ (\alpha\dot{\mathbf{a}})\,\mathbf{u} = \dot{\mathbf{a}}(\alpha\mathbf{u}) = \alpha(\dot{\mathbf{a}}\mathbf{u}). \end{gathered} \tag{8,2}$$

Таким образом, скалярное произведение подчиняется закону дистрибутивности относительно операции сложения векторов и ассоциативности относительно операции умножения вектора на скаляр. Самое название „произведения“ функция (8,1) получила потому, что она обладает этими двумя важнейшими свойствами произведения числовой алгебры.

Отметим следующее свойство скалярного произведения:

Если $\dot{\mathbf{a}}\mathbf{u} > 1$, то гиперплоскость $\dot{\mathbf{a}}$ лежит между началом координат O и точкой $\mathbf{u}$.

Если $\dot{\mathbf{a}}\mathbf{u} = 1$, то точка $\mathbf{u}$ лежит в гиперплоскости $\dot{\mathbf{a}}$.

Если $0 < \dot{\mathbf{a}}\mathbf{u} < 1$, то точка $\mathbf{u}$ лежит между 0 и гиперплоскостью $\dot{\mathbf{a}}$.

Если $\dot{\mathbf{a}}\mathbf{u} = 0$, то точка $\mathbf{u}$ лежит в начальной гиперплоскости вектора $\dot{\mathbf{a}}$.

Если $\dot{\mathbf{a}}\mathbf{u} < 0$, то начало координат лежит между точкой $\mathbf{u}$ и гиперплоскостью $\dot{\mathbf{a}}$.

Скалярное произведение координатных векторов обоего рода выражается следующей формулой

$$\overset{i}{\dot{\mathbf{e}}}\underset{k}{\mathbf{e}} = \delta^i_k, \tag{8,3}$$

где δ^i_k — символ Kronecker'а, равный 1, если $i = k$, и нулю, если $i \neq k$.

Составляющие любого вектора могут быть выражены через скалярное произведение этого вектора и координатных векторов. Умножим равенство

$$\mathbf{v} = v^a \underset{a}{\mathbf{e}}$$

скалярно на $\overset{i}{\dot{\mathbf{e}}}$; получаем

$$v^i = \mathbf{v}\overset{i}{\dot{\mathbf{e}}}.$$

Аналогично получаем для ковариантного вектора $\dot{\mathbf{a}}$:

$$a_i = \dot{\mathbf{a}}\underset{i}{\mathbf{e}}.$$

Задача. Пользуясь геометрическими построениями в аффинном 3-мерном пространстве, вывести непосредственно соотношения (8,2) и (8,3), не прибегая к формуле (8,1). Затем из (8,2) и (8,3) получить (8,1).

2. Аналогично произведению векторов вводится произведение контравариантного и ковариантного мультивекторов.

Пусть $\mathbf{U}$ — контравариантный, $\dot{\mathbf{V}}$ — ковариантный m-векторы. Определим их произведение формулой:

$$\mathbf{U}\dot{\mathbf{V}} = \sum_{\alpha=1}^{N} U^\alpha V_\alpha.$$

Выразим его через базисы мультивекторов. Пусть $\mathbf{U} = [\underset{1}{\mathbf{u}}\,\underset{2}{\mathbf{u}} \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}]$, $\dot{\mathbf{V}} = [\overset{1}{\mathbf{v}}\,\overset{2}{\mathbf{v}} \ldots \overset{m}{\mathbf{v}}]$. Имеем:

$$\mathbf{U}\dot{\mathbf{V}} = \sum_{(a_1 \ldots a_m)} u^{a_1 a_2 \ldots a_m} v_{a_1 a_2 \ldots a_m} = \sum_{(a_1 \ldots a_m)} \begin{vmatrix} \underset{1}{u}^{a_1} & \ldots & \underset{1}{u}^{a_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \underset{m}{u}^{a_1} & \ldots & \underset{m}{u}^{a_m} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \overset{1}{v}_{a_1} & \ldots & \overset{1}{v}_{a_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \overset{m}{v}_{a_1} & \ldots & \overset{m}{v}_{a_m} \end{vmatrix}.$$

Пользуясь формулой (2,5), получаем:

$$\mathbf{U}\dot{\mathbf{V}} = [\underset{1}{\mathbf{u}}\underset{2}{\mathbf{u}} \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}]\,[\overset{1}{\mathbf{v}}\overset{2}{\mathbf{v}} \ldots \overset{m}{\mathbf{v}}] = \begin{vmatrix} \underset{1}{\mathbf{u}}\overset{1}{\mathbf{v}} & \ldots & \underset{1}{\mathbf{u}}\overset{m}{\mathbf{v}} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \underset{m}{\mathbf{u}}\overset{1}{\mathbf{v}} & \ldots & \underset{m}{\mathbf{u}}\overset{m}{\mathbf{v}} \end{vmatrix}. \tag{8,4}$$

Правая часть этой формулы дает возможность построить геометрическую интерпретацию скалярного произведения мультивекторов.

3. Рассмотрим сначала вопрос, когда скалярное произведение двух m-векторов равно нулю. Обозначим через E_m плоскость, в которой лежит мультивектор $\mathbf{U}$, через E_{n-m} — $(n-m)$-мерную плоскость, образованную пересечением начальных гиперплоскостей ковариантных векторов $\overset{1}{\mathbf{v}}, \overset{2}{\mathbf{v}}, \dots \overset{m}{\mathbf{v}}$, служащих базисом мультивектора $\dot{\mathbf{V}}$. E_{n-m} определяется системой уравнений:

$$\overset{1}{\mathbf{v}}\mathbf{x} = 0, \quad \overset{2}{\mathbf{v}}\mathbf{x} = 0, \dots \overset{m}{\mathbf{v}}\mathbf{x} = 0.$$

Пусть

$$\mathbf{U}\dot{\mathbf{V}} = 0.$$

Из равенства нулю определителя (8,4) вытекает, что можно найти m постоянных $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m$, удовлетворяющих уравнениям:

$$(8,5) \qquad \lambda_1 \underset{1}{\mathbf{u}}\overset{k}{\mathbf{v}} + \lambda_2 \underset{2}{\mathbf{u}}\overset{k}{\mathbf{v}} + \dots + \lambda_m \underset{m}{\mathbf{u}}\overset{k}{\mathbf{v}} = 0 \qquad (k = 1, 2, \dots m).$$

Обозначая

$$\mathbf{u} = \lambda_1 \underset{1}{\mathbf{u}} + \lambda_2 \underset{2}{\mathbf{u}} + \dots + \lambda_m \underset{m}{\mathbf{u}},$$

имеем:

$$\mathbf{u}\overset{k}{\mathbf{v}} = 0 \qquad (k = 1, 2, \dots m).$$

Следовательно, вектор $\mathbf{u}$, принадлежащий к E_m, лежит в E_{n-m}. Обратно, если в E_m имеется вектор $\mathbf{u}$, лежащий в E_{n-m}, то имеют место уравнения (8,5), т. е. определитель (8,4) равен нулю. Таким образом, имеем следующее положение:

Скалярное произведение двух m-векторов тогда и только тогда равно нулю, если плоскости E_m и E_{n-m} зависимы (имеют, по крайней мере, одно общее направление).

5. Если произведение m-векторов $\mathbf{U}$ и $\dot{\mathbf{V}}$ не равно нулю, то плоскость E_m, в которой лежит мультивектор $\mathbf{U}$, и плоскость E_{n-m}, образованная пересечением начальных гиперплоскостей ковариантных векторов $\overset{1}{\mathbf{v}}, \overset{2}{\mathbf{v}}, \dots \overset{m}{\mathbf{v}}$, являющихся базисом m-вектора $\dot{\mathbf{V}}$, независимы. Следовательно, начальные и конечные гиперплоскости ковариантных векторов $\overset{1}{\mathbf{v}}, \overset{2}{\mathbf{v}}, \dots \overset{m}{\mathbf{v}}$ в пересечении

с плоскостью E_m дают $2m$ попарно параллельных $(m-1)$-мерных плоскостей, образующих m-мерный параллелепипед V. Параллелепипед V лежит в E_m. Вычислим отношение параллелепипеда U, построенного на векторах $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \dots \underset{m}{\mathbf{u}}$, к параллелепипеду V.

Обозначим через $\mathbf{w}$ контравариантный вектор, лежащий на прямой пересечения E_m с начальными гиперплоскостями векторов $\overset{1}{\mathbf{v}}, \overset{2}{\mathbf{v}}, \dots \overset{i-1}{\mathbf{v}}, \overset{i+1}{\mathbf{v}}, \dots \overset{m}{\mathbf{v}}$ и оканчивающийся в гиперплоскости $\overset{i}{\mathbf{v}}$:

$$(8,6) \qquad \underset{i}{\mathbf{w}}\overset{r}{\mathbf{v}} = \delta_i^r \qquad (r = 1, 2, \dots m).$$

Полагая $i = 1, 2, \dots m$, получаем m контравариантных векторов: $\underset{1}{\mathbf{w}}, \underset{2}{\mathbf{w}}, \dots \underset{m}{\mathbf{w}}$, на которых построен параллелепипед V. Выразим их через векторы $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \dots \underset{m}{\mathbf{u}}$:

$$\underset{1}{\mathbf{w}} = \lambda_{11}\underset{1}{\mathbf{u}} + \dots + \lambda_{1m}\underset{m}{\mathbf{u}}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\underset{m}{\mathbf{w}} = \lambda_{m1}\underset{1}{\mathbf{u}} + \dots + \lambda_{mm}\underset{m}{\mathbf{u}}.$$

Из соотношений (8,6) получаем уравнения

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_{ik}\underset{k}{\mathbf{u}}\overset{r}{\mathbf{v}} = \delta_i^r.$$

Следовательно,

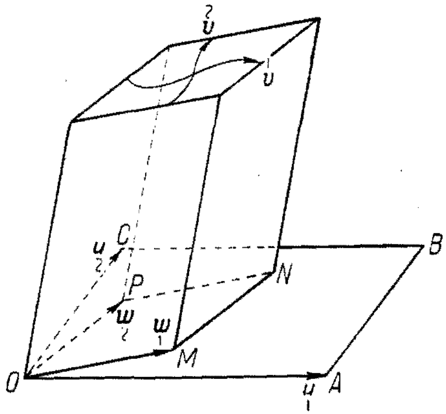
$$\begin{vmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{m1} & \dots & \lambda_{mm} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \underset{1}{\mathbf{u}}\overset{1}{\mathbf{v}} & \dots & \underset{1}{\mathbf{u}}\overset{m}{\mathbf{v}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \underset{m}{\mathbf{u}}\overset{1}{\mathbf{v}} & \dots & \underset{m}{\mathbf{u}}\overset{m}{\mathbf{v}} \end{vmatrix} = 1.$$

Отсюда выводим:

$$\mathbf{U}\dot{\mathbf{V}} = \frac{1}{|\lambda_{ik}|},$$

т. е. *скалярное произведение мультивекторов $\mathbf{U}$ и $\dot{\mathbf{V}}$ равно отношению m-мерного параллелепипеда U к параллелепипеду V.*

Черт. 6 иллюстрирует скалярное произведение двух бивекторов в трехмерном пространстве. $OABC$ является параллелограммом U бивектора $\mathbf{U}$. $OMNP$ — параллелограмм V, образован-



Черт. 6.

ный пересечением плоскостей ковариантного бивектора $\dot{\mathbf{V}}$ с плоскостью параллелограмма $OABC$. Скалярное произведение $\mathbf{U}\dot{\mathbf{V}}$ равно отношению параллелограмма $OABC$ к параллелограмму $OMNP$.

§ 9. Взаимные системы векторов.

1. Возьмем n независимых контравариантных векторов $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{n}{\mathbf{u}}$ и построим на них n-мерный параллелепипед. Рассмотрим две параллельных грани: гиперплоскость G_i:

$$\mathbf{x} = t_1\underset{1}{\mathbf{u}} + t_2\underset{2}{\mathbf{u}} + \ldots + t_{i-1}\underset{i-1}{\mathbf{u}} + t_{i+1}\underset{i+1}{\mathbf{u}} + \ldots + t_n\underset{n}{\mathbf{u}}$$

и G_i'

$$\mathbf{x} = \underset{i}{\mathbf{u}} + t_1\underset{1}{\mathbf{u}} + t_2\underset{2}{\mathbf{u}} + \ldots + t_{i-1}\underset{i-1}{\mathbf{u}} + t_{i+1}\underset{i+1}{\mathbf{u}} + \ldots + t_n\underset{n}{\mathbf{u}}.$$

Ковариантный вектор, у которого начальной гиперплоскостью служит G_i, конечной — G_i', обозначим через $\overset{i}{\mathbf{u}}$. Так как гиперплоскость G_i' проходит через точку $\underset{i}{\mathbf{u}}$, то

$$\overset{i}{\mathbf{u}}\underset{i}{\mathbf{u}} = 1.$$

В то же время векторы $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{i-1}{\mathbf{u}}, \underset{i+1}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{n}{\mathbf{u}}$ лежат в начальной гиперплоскости вектора $\overset{i}{\mathbf{u}}$. Следовательно,

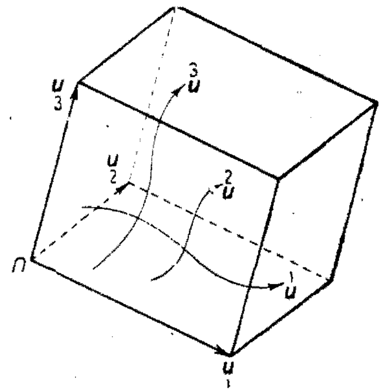
$$\overset{i}{\mathbf{u}}\underset{k}{\mathbf{u}} = 0 \qquad (k \neq i).$$

Перебирая таким образом n граней, проходящих через начало, мы построим n ковариантных векторов $\overset{1}{\mathbf{u}}, \overset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \overset{n}{\mathbf{u}}$, удовлетворяющих уравнениям:

$$(9,1) \qquad \overset{i}{\mathbf{u}}\underset{k}{\mathbf{u}} = \delta_k^i\,.$$

Обратно, если заданы n ковариантных независимых векторов $\overset{1}{\mathbf{u}}, \overset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \overset{n}{\mathbf{u}}$, дающих n пар параллельных граней параллелепипеда, мы можем построить n контравариантных векторов $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{n}{\mathbf{u}}$, связанных с $\mathbf{u}$ соотношениями (9,1).

Системы $\overset{1}{\mathbf{u}}, \overset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \overset{n}{\mathbf{u}}$ и $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{n}{\mathbf{u}}$, удовлетворяющие соотношениям (9,1), называются в з а и м н ы м и.



Черт. 7.

Черт. 7 иллюстрирует связь двух взаимных систем векторов в трехмерном пространстве.

2. Решим теперь аналитически задачу нахождения системы, взаимной с $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{n}{\mathbf{u}}$. Обозначим через U матрицу, составленную из координат векторов $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{n}{\mathbf{u}}$:

$$U = \left\| \begin{matrix} \underset{1}{u}^1 & \underset{1}{u}^2 & \ldots & \underset{1}{u}^n \\ \underset{2}{u}^1 & \underset{2}{u}^2 & \ldots & \underset{2}{u}^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \underset{n}{u}^1 & \underset{n}{u}^2 & \ldots & \underset{n}{u}^n \end{matrix} \right\|,$$

через U' — матрицу, образованную из составляющих искомых векторов $\overset{1}{\mathbf{u}}, \overset{2}{\mathbf{u}}, \dots \overset{n}{\mathbf{u}}$:

$$U' = \begin{Vmatrix} \overset{1}{u}_1, & \overset{1}{u}_2, & \dots & \overset{1}{u}_n \\ \overset{2}{u}_1, & \overset{2}{u}_2, & \dots & \overset{2}{u}_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overset{n}{u}_1, & \overset{n}{u}_2, & \dots & \overset{n}{u}_n \end{Vmatrix}.$$

На основании (9,1), имеем:

(9,2) $$U'U_c = E,$$

т. е. искомая матрица равна

$$U' = U_c^{-1}.$$

Обратно, если задана система ковариантных векторов $\overset{1}{\mathbf{u}}, \overset{2}{\mathbf{u}}, \dots \overset{n}{\mathbf{u}}$ с матрицей U', то матрица U найдется по формуле

$$U = U_c'^{-1}.$$

Отметим следующее соотношение:

$$(\underset{1}{\mathbf{u}}\underset{2}{\mathbf{u}}\dots\underset{n}{\mathbf{u}})(\overset{1}{\mathbf{u}}\overset{2}{\mathbf{u}}\dots\overset{n}{\mathbf{u}}) = 1.$$

Употребление взаимных систем сильно упрощает счетный аппарат алгебры векторов, позволяя в некоторых случаях избегать длинных вычислений с определителями.

Примером двух взаимных систем векторов может служить система контравариантных координатных векторов $\underset{1}{\mathbf{e}}, \underset{2}{\mathbf{e}}, \dots \underset{n}{\mathbf{e}}$ и ковариантных координатных векторов $\overset{1}{\mathbf{e}}, \overset{2}{\mathbf{e}}, \dots \overset{n}{\mathbf{e}}$.

3. Разложим контравариантный вектор $\mathbf{x}$ по n направлениям, определяемым n независимыми векторами $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \dots \underset{n}{\mathbf{u}}$:

(9,3) $$\mathbf{x} = \lambda_1 \underset{1}{\mathbf{u}} + \lambda_2 \underset{2}{\mathbf{u}} + \dots + \lambda_n \underset{n}{\mathbf{u}}.$$

Обозначим ковариантные векторы системы, взаимной с $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \dots \underset{n}{\mathbf{u}}$, через $\overset{1}{\mathbf{u}}, \overset{2}{\mathbf{u}}, \dots \overset{n}{\mathbf{u}}$. Для определения коэффициента λ_i в разложении

(9,3), умножим обе части этого равенства скалярно на $\overset{i}{\mathbf{u}}$; получаем: $\lambda_i = \mathbf{x}\overset{i}{\mathbf{u}}$. Таким образом

(9,4) $$\mathbf{x} = \mathbf{x}\overset{a}{\mathbf{u}} \cdot \underset{a}{\mathbf{u}}.$$

Аналогично получаем формулу

(9,5) $$\dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{a}}\underset{a}{\mathbf{u}} \cdot \overset{a}{\mathbf{u}}.$$

Формулы (9,4) и (9,5) очень важные: они будут играть большую роль в дальнейшем изложении.

4. Рассмотрим две пары взаимно сопряженных систем: $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \dots \underset{n}{\mathbf{u}}$; $\overset{1}{\mathbf{u}}, \overset{2}{\mathbf{u}}, \dots \overset{n}{\mathbf{u}}$ и $\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \dots \underset{n}{\mathbf{v}}$; $\overset{1}{\mathbf{v}}, \overset{2}{\mathbf{v}}, \dots \overset{n}{\mathbf{v}}$. Имеем

$$\underset{i}{\mathbf{u}} = \underset{i}{\mathbf{u}}\overset{a}{\mathbf{v}} \cdot \underset{a}{\mathbf{v}}; \quad \overset{i}{\mathbf{u}} = \overset{i}{\mathbf{u}}\underset{a}{\mathbf{v}} \cdot \overset{a}{\mathbf{v}}.$$

Перемножая $\underset{i}{\mathbf{u}}$ и $\overset{k}{\mathbf{u}}$, получаем

(9,6) $$\underset{i}{\mathbf{u}}\overset{a}{\mathbf{v}} \cdot \overset{k}{\mathbf{u}}\underset{a}{\mathbf{v}} = \delta_i^k.$$

Если в этой формуле принять за $\underset{i}{\mathbf{u}}$ координатные векторы $\underset{i}{\mathbf{e}}$, мы получим соотношение:

$$\overset{a}{v}_i \underset{a}{v}^k = \delta_i^k,$$

которому соответствует матричное равенство $U_c'U = E$, вытекающее из (9,2).

Задача 1. Построить систему, взаимную системе n контравариантных векторов

$$\underset{1}{\mathbf{u}} = \alpha_1 \underset{1}{\mathbf{e}}, \ \underset{2}{\mathbf{u}} = \alpha_2 \underset{2}{\mathbf{e}}, \dots \underset{n}{\mathbf{u}} = \alpha_n \underset{n}{\mathbf{e}}$$

Ответ: $$\overset{i}{\mathbf{u}} = \frac{1}{\alpha_i}\overset{i}{\mathbf{e}}.$$

Задача 2. В четырехмерном пространстве даны 4 ковариантных вектора:

$\overset{1}{\mathbf{u}}(1, 0, -1, 0)$, $\overset{2}{\mathbf{u}}(0, 1, 0, 0)$, $\overset{3}{\mathbf{u}}(2, 1, 0, -1)$, $\overset{4}{\mathbf{u}}(1, 0, 0, -1)$.

Построить взаимную систему.

Ответ: $\underset{1}{\mathbf{u}}(0, 0, -1, 0)$, $\underset{2}{\mathbf{u}}(-1, 1, -1, -1)$, $\underset{3}{\mathbf{u}}(1, 0, 1, 1)$, $\underset{4}{\mathbf{u}}(-1, 0, -1, -2)$.

Задача 3. Даны n независимых ковариантных векторов $\overset{1}{\mathbf{u}}, \overset{2}{\mathbf{u}}, \dots \overset{n}{\mathbf{u}}$. Строим систему

$$\begin{aligned}
\overset{1}{\mathbf{v}} &= \lambda_{11}\overset{1}{\mathbf{u}} + \lambda_{12}\overset{2}{\mathbf{u}} + \dots + \lambda_{1n}\overset{n}{\mathbf{u}},\\
\overset{2}{\mathbf{v}} &= \lambda_{21}\overset{1}{\mathbf{u}} + \lambda_{22}\overset{2}{\mathbf{u}} + \dots + \lambda_{2n}\overset{n}{\mathbf{u}},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
\overset{n}{\mathbf{v}} &= \lambda_{n1}\overset{1}{\mathbf{u}} + \lambda_{n2}\overset{2}{\mathbf{u}} + \dots + \lambda_{nn}\overset{n}{\mathbf{u}}
\end{aligned}$$

с определителем

$$\begin{vmatrix} \lambda_{11} \dots \lambda_{1m} \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ \lambda_{m1} \dots \lambda_{mm} \end{vmatrix},$$

отличным от нуля. Построить систему $\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \dots \underset{n}{\mathbf{v}}$, взаимную с $\overset{1}{\mathbf{v}}, \overset{2}{\mathbf{v}}, \dots \overset{n}{\mathbf{v}}$.

Ответ. Обозначим матрицу

$$\begin{Vmatrix} \lambda_{11} \dots \lambda_{1m} \\ \dots\dots \\ \lambda_{m1} \dots \lambda_{mm} \end{Vmatrix}$$

через Λ, строим матрицу

$$M = \begin{Vmatrix} \mu_{11} \dots \mu_{1m} \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \mu_{m1} \dots \mu_{mm} \end{Vmatrix}$$

по формуле

$$M = \Lambda_c^{-1}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\underset{1}{\mathbf{v}} &= \mu_{11}\underset{1}{\mathbf{u}} + \dots + \mu_{1n}\underset{n}{\mathbf{u}},\\
&\dots\dots\dots\dots\\
\underset{n}{\mathbf{v}} &= \mu_{n1}\underset{1}{\mathbf{u}} + \dots + \mu_{nn}\underset{n}{\mathbf{u}},
\end{aligned}$$

где $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \dots \underset{n}{\mathbf{u}}$ — векторы системы, взаимной с $\overset{1}{\mathbf{u}}, \overset{2}{\mathbf{u}}, \dots \overset{n}{\mathbf{u}}$.

Задача 4. Пусть E_m и E_{n-m} — независимые пучки. Берем две независимых системы векторов: $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \dots \underset{n}{\mathbf{u}}$ и $\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \dots \underset{n}{\mathbf{v}}$, причем векторы $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \dots \underset{m}{\mathbf{u}}$ и $\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \dots \underset{m}{\mathbf{v}}$ лежат в E_m, остальные — в E_{n-m}. Строим системы: $\overset{1}{\mathbf{u}}, \overset{2}{\mathbf{u}}, \dots \overset{n}{\mathbf{u}}$ и $\overset{1}{\mathbf{v}}, \overset{2}{\mathbf{v}}, \dots \overset{n}{\mathbf{v}}$, взаимные соответственно с $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \dots \underset{n}{\mathbf{u}}$ и $\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \dots \underset{n}{\mathbf{v}}$.

Показать, что

$$\sum_{\alpha=1}^{m} \overset{\alpha}{u}_i \underset{\alpha}{u}^k = \sum_{\alpha=1}^{m} \overset{\alpha}{v}_i \underset{\alpha}{v}^k,$$

$$\sum_{\alpha=m+1}^{n} \overset{\alpha}{u}_i \underset{\alpha}{u}^k = \sum_{\alpha=m+1}^{n} \overset{\alpha}{v}_i \underset{\alpha}{v}^k.$$

§ 10. Линейные функции от векторов.

В дальнейшем изложении очень важную роль будут играть линейные функции от векторных аргументов.

1. Если скалярная функция от контравариантного вектора $\varphi(\mathbf{x})$ обладает следующими свойствами:

$$\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y}), \tag{10,1}$$

$$\varphi(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\varphi(\mathbf{x}), \tag{10,2}$$

то она называется линейной.

Свойство (10,2) может быть заменено требованием, чтобы функция $\varphi(\mathbf{x})$ была непрерывна. В самом деле, из (10,1) выводим:

$$\varphi(\underset{1}{\mathbf{x}} + \underset{2}{\mathbf{x}} + \dots + \underset{r}{\mathbf{x}}) = \varphi(\underset{1}{\mathbf{x}}) + \varphi(\underset{2}{\mathbf{x}}) + \dots + \varphi(\underset{r}{\mathbf{x}}),$$

откуда

$$\varphi(r\mathbf{x}) = r\varphi(\mathbf{x}), \tag{10,3}$$

где r — положительное целое число. Отсюда, обозначая $r\mathbf{x} = \mathbf{y}$, имеем $\varphi\left(\frac{1}{r}\mathbf{y}\right) = \frac{1}{r}\varphi(\mathbf{y})$. Комбинируя это равенство с (10,3), получаем

$$\varphi\left(\frac{r}{s}\mathbf{x}\right) = \frac{r}{s}\varphi(\mathbf{x}).$$

Таким образом, свойство (10,2) установлено для α рационального и положительного.

На основании непрерывности функции $\varphi(\mathbf{x})$, свойство (10,2) распространяется на случай α иррационального положительного. Для α отрицательного свойство (10,2) выводится из соотношения

$$\varphi(\alpha\mathbf{x} - \alpha\mathbf{x}) = \varphi(\alpha\mathbf{x}) + \varphi(-\alpha\mathbf{x}).$$

Полагая в (10,1) $\mathbf{x} = \mathbf{y} = 0$, получаем $\varphi(0) = 0$. Следовательно,

$$\varphi(\alpha\mathbf{x}) + \varphi(-\alpha\mathbf{x}) = 0.$$

Заметим, что требование непрерывности может быть заменено некоторыми другими требованиями (см. ниже задачи 2 и 3).

Выражая аргумент через координатные векторы, имеем:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x^{\alpha}\underset{\alpha}{\mathbf{e}}) = \varphi(\underset{\alpha}{\mathbf{e}})\, x^{\alpha}.$$

Обозначая

$$\varphi(\underset{\alpha}{\mathbf{e}}) = a_{\alpha},$$

получаем

$$\varphi(\mathbf{x}) = a_{\alpha} x^{\alpha}.$$

Итак, скалярная линейная функция от контравариантного вектора есть линейная форма от составляющих этого вектора. Уравнение

$$(10,4) \qquad \varphi(\mathbf{x}) = a_{\alpha} x^{\alpha} = 1,$$

определяет гиперплоскость. Если ввести ковариантный вектор $\dot{\mathbf{a}}$ с составляющими $a_{\alpha} = \varphi(\underset{\alpha}{\mathbf{e}})$, то (10,4) определяет конечную гиперплоскость этого вектора.

Совершенно аналогично вводится скалярная линейная функция от ковариантного вектора

$$\varphi(\dot{\mathbf{x}}) = a^{\alpha} x_{\alpha},$$

где $a^{\alpha} = \varphi(\overset{\alpha}{\mathbf{e}})$. Рассмотрим уравнение

$$(10,\ 5) \qquad \varphi(\dot{\mathbf{x}}) = a^{\alpha} x_{\alpha} = 1.$$

Введем контравариантный вектор $\mathbf{a}$ с составляющими a^{α}. Гиперплоскости $\dot{\mathbf{x}}$, удовлетворяющие уравнению (10,5), проходят через конец вектора $\mathbf{a}$.

2. Скалярная функция, зависящая от m векторных аргументов и линейная относительно каждого из них, называется *m-линейной (многолинейной) скалярной функцией*.

Среди ее аргументов могут быть как ковариантные, так и контравариантные векторы. Пусть r первых аргументов — контравариантные векторы, s остальных — ковариантные:

$$\varphi(\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \dots \underset{r}{\mathbf{x}}, \overset{1}{\mathbf{x}}, \overset{2}{\mathbf{x}}, \dots \overset{s}{\mathbf{x}}).$$

Выражая каждый аргумент через координатные векторы, имеем:

$$\varphi = \varphi(\underset{\alpha_1}{\mathbf{e}}, \underset{\alpha_2}{\mathbf{e}}, \dots \underset{\alpha_r}{\mathbf{e}}; \overset{\beta_1}{\mathbf{e}}, \overset{\beta_2}{\mathbf{e}}, \dots \overset{\beta_s}{\mathbf{e}})\, \underset{1}{x}^{\alpha_1} \underset{2}{x}^{\alpha_2} \dots \underset{r}{x}^{\alpha_r} \overset{1}{x}_{\beta_1} \overset{2}{x}_{\beta_2} \dots \overset{s}{x}_{\beta_s}.$$

Введем обозначение:

$$(10,6) \qquad \varphi(\underset{\alpha_1}{\mathbf{e}}, \underset{\alpha_2}{\mathbf{e}}, \dots \underset{\alpha_r}{\mathbf{e}}; \overset{\beta_1}{\mathbf{e}}, \overset{\beta_2}{\mathbf{e}}, \dots \overset{\beta_s}{\mathbf{e}}) = A_{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_r}{}^{\beta_1\beta_2 \dots \beta_s}.$$

Тогда

$$\varphi = A_{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_r}{}^{\beta_1\beta_2 \dots \beta_s}\, \underset{1}{x}^{\alpha_1} \underset{2}{x}^{\alpha_2} \dots \underset{r}{x}^{\alpha_r} \overset{1}{x}_{\beta_1} \overset{2}{x}_{\beta_2} \dots \overset{s}{x}_{\beta_s}.$$

Таким образом, m-линейная скалярная функция представляет собою m-линейную форму от составляющих входящих в нее аргументов.

Многолинейная функция называется *симметрической относительно аргументов одного и того же рода* (т. е. или ковариантных или контравариантных), если она не меняется при перестановке любой пары из этих аргументов. Функция, зависящая от аргументов одного и того же рода и симметрическая относительно всех своих аргументов, называется *симметрической*. Из (10,6) вытекает, что коэффициенты формы, соответствующей симметрической функции, обладают тем свойством, что их величина не зависит от порядка принадлежащих им индексов:

$$A_{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_m} = A_{\alpha_2\alpha_1 \dots \alpha_m} = A_{\alpha_3\alpha_2\alpha_1 \dots \alpha_m} = \dots$$

или

$$A^{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_m} = A^{\alpha_2\alpha_1 \dots \alpha_m} = A^{\alpha_3\alpha_2\alpha_1 \dots \alpha_m} = \dots$$

Аналогично вводится свойство *антисимметрии*. Функция называется *антисимметрической относительно аргументов одного и того же рода*, если она при перестановке любой пары из этих аргументов меняет знак, оставаясь неизменной по абсолютной величине. Если функция, зависящая от аргументов одного и того же рода, антисимметрична относительно всех своих аргументов, она называется *антисимметрической*. Коэффициенты соответствующих форм

$$A_{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_m} \underset{1}{x}^{\alpha_1} \underset{2}{x}^{\alpha_2} \dots \underset{m}{x}^{\alpha_m} \quad \text{и} \quad A^{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_m} \overset{1}{x}_{\alpha_1} \overset{2}{x}_{\alpha_2} \dots \overset{m}{x}_{\alpha_m}$$

имеют свойство

$$A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m} = -A_{\alpha_2\alpha_1\ldots\alpha_m} = -A_{\alpha_1\alpha_3\alpha_2\ldots\alpha_m} = \ldots$$

или

$$A^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m} = -A^{\alpha_2\alpha_1\ldots\alpha_m} = -A^{\alpha_1\alpha_3\alpha_2\ldots\alpha_m} = \ldots$$

Отсюда вытекает, что антисимметрическая функция, зависящая от m контравариантных векторов: $\psi(\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{x}})$, может быть линейно выражена через миноры матрицы

$$\left\| \begin{matrix} \underset{1}{x^1} & \underset{1}{x^2} & \ldots & \underset{1}{x^n} \\ \underset{2}{x^1} & \underset{2}{x^2} & \ldots & \underset{2}{x^n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \underset{m}{x^1} & \underset{m}{x^2} & \ldots & \underset{m}{x^n} \end{matrix} \right\|,$$

образованной из составляющих ее аргументов:

$$(10,7)\qquad \psi(\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{x}}) = \sum_{(\alpha_1,\ldots\alpha_m)} A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m} \begin{vmatrix} \underset{1}{x^{\alpha_1}} & \underset{1}{x^{\alpha_2}} & \ldots & \underset{1}{x^{\alpha_m}} \\ \underset{2}{x^{\alpha_1}} & \underset{2}{x^{\alpha_2}} & \ldots & \underset{2}{x^{\alpha_m}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \underset{m}{x^{\alpha_1}} & \underset{m}{x^{\alpha_2}} & \ldots & \underset{m}{x^{\alpha_m}} \end{vmatrix}$$

$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m)$ под знаком суммы обозначает, что суммирование распространяется на $\binom{n}{m}$ сочетаний из индексов по m в каждом.

То же справедливо и для антисимметрической функции, зависящей от ковариантных аргументов:

$$(10,8)\qquad \psi(\overset{1}{\mathbf{x}}, \overset{2}{\mathbf{x}}, \ldots \overset{m}{\mathbf{x}}) = \sum_{(\alpha_1,\ldots\alpha_m)} A^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m} \begin{vmatrix} \overset{1}{x}_{\alpha_1} & \overset{1}{x}_{\alpha_2} & \ldots & \overset{1}{x}_{\alpha_m} \\ \overset{2}{x}_{\alpha_1} & \overset{2}{x}_{\alpha_2} & \ldots & \overset{2}{x}_{\alpha_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \overset{m}{x}_{\alpha_1} & \overset{m}{x}_{\alpha_2} & \ldots & \overset{m}{x}_{\alpha_m} \end{vmatrix}$$

Формулы (10,7) и (10,8) показывают, что антисимметрическая m-линейная скалярная функция представляет собою линейную функцию от m-вектора, построенного на ее аргументах:

$$\psi(\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{x}}) = \varphi([\underset{1}{\mathbf{x}}\underset{2}{\mathbf{x}}\ldots\underset{m}{\mathbf{x}}]), \qquad \psi(\overset{1}{\mathbf{x}}, \overset{2}{\mathbf{x}}, \ldots \overset{m}{\mathbf{x}}) = \varphi([\overset{1}{\mathbf{x}}\overset{2}{\mathbf{x}}\ldots\overset{m}{\mathbf{x}}]),$$

где φ — линейная функция.

Если $m = n$, мы получаем, что **антисимметрическая n-линейная функция имеет вид:**

$$\psi(\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \ldots \underset{n}{\mathbf{x}}) = \alpha(\underset{1}{\mathbf{x}}\,\underset{2}{\mathbf{x}}\ldots\underset{n}{\mathbf{x}}),$$

$$\psi(\overset{1}{\mathbf{x}}, \overset{2}{\mathbf{x}}, \ldots \overset{n}{\mathbf{x}}) = \alpha(\overset{1}{\mathbf{x}}\,\overset{2}{\mathbf{x}}\ldots\overset{n}{\mathbf{x}}),$$

где α — некоторое число.

Из формул (10,7) и (10,8) вытекает одно очень важное свойство антисимметрической функции. Если векторы $\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{x}}$ или $\overset{1}{\mathbf{x}}, \overset{2}{\mathbf{x}}, \ldots \overset{m}{\mathbf{x}}$ зависимы, то все миноры, стоящие в суммах (10,7) и (10,8), равны нулю. Таким образом,

если в антисимметрическую скалярную функцию подставить линейно зависимые аргументы, она превращается в нуль.

Отметим также, что *не существует антисимметрической функции, имеющей аргументов больше, чем n.*

Формула (10,7) является частным случаем более общего соотношения. Пусть

$$\begin{aligned} \underset{1}{\mathbf{x}} &= \lambda_{11}\underset{1}{\mathbf{u}} + \lambda_{12}\underset{2}{\mathbf{u}} + \ldots + \lambda_{1r}\underset{r}{\mathbf{u}}, \\ \underset{2}{\mathbf{x}} &= \lambda_{21}\underset{1}{\mathbf{u}} + \lambda_{22}\underset{2}{\mathbf{u}} + \ldots + \lambda_{2r}\underset{r}{\mathbf{u}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \underset{m}{\mathbf{x}} &= \lambda_{m1}\underset{1}{\mathbf{u}} + \lambda_{m2}\underset{2}{\mathbf{u}} + \ldots + \lambda_{mr}\underset{r}{\mathbf{u}}. \end{aligned}$$

Подставляя $\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{x}}$ в функцию и пользуясь свойством линейности и антисимметрии, мы приходим к следующему результату:

$$(10,9)\qquad \psi(\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{x}}) = \sum_{(\alpha_1,\ldots\alpha_m)} \psi(\underset{\alpha_1}{\mathbf{u}}, \underset{\alpha_2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{\alpha_m}{\mathbf{u}}) \begin{vmatrix} \lambda_{1\alpha_1} & \lambda_{2\alpha_2} & \ldots & \lambda_{1\alpha_m} \\ \lambda_{2\alpha_1} & \lambda_{2\alpha_2} & \ldots & \lambda_{2\alpha_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{m\alpha_1} & \lambda_{m\alpha_2} & \ldots & \lambda_{m\alpha_m} \end{vmatrix}$$

Если $r<m$, то $\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots \mathbf{x}_m)=0$, так как тогда аргументы $\mathbf{x}_1, \dots \mathbf{x}_m$ всегда зависимы.

Аналогичную формулу имеем, конечно, для антисимметрической функции от ковариантных аргументов.

3. Рассмотрим билинейную функцию, в которой один аргумент ковариантный, другой—контравариантный:

$$\varphi=\varphi(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{y}).$$

Построим две пары взаимных систем: $\mathbf{u}_1, \dots \mathbf{u}_n$; $\mathbf{u}^1, \dots \mathbf{u}^n$ и $\mathbf{v}_1, \dots \mathbf{v}_n$; $\mathbf{v}^1, \dots \mathbf{v}^n$. Образуем суммы

$$\varphi(\mathbf{u}^\alpha, \mathbf{u}_\alpha)=\varphi(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}_1)+\varphi(\mathbf{u}^2, \mathbf{u}_2)+\dots+\varphi(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}_n)$$

и

$$\varphi(\mathbf{v}^\alpha, \mathbf{v}_\alpha)=\varphi(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}_1)+\varphi(\mathbf{v}^2, \mathbf{v}_2)+\dots+\varphi(\mathbf{v}^n, \mathbf{v}_n).$$

Покажем, что

(10,10)
$$\varphi(\mathbf{v}^\alpha, \mathbf{v}_\alpha)=\varphi(\mathbf{u}^\alpha, \mathbf{u}_\alpha).$$

В самом деле, разлагая векторы $\mathbf{v}^i$ и $\mathbf{v}_k$ по системам $\mathbf{u}^1, \dots \mathbf{u}^n$ и $\mathbf{u}_1, \dots \mathbf{u}_n$, имеем

$$\mathbf{v}^i=\mathbf{v}^i\mathbf{u}_\alpha\cdot\mathbf{u}^\alpha, \quad \mathbf{v}_h=\mathbf{v}_h\mathbf{u}^\alpha\cdot\mathbf{u}_\alpha.$$

Следовательно,

$$\varphi(\mathbf{v}^\alpha, \mathbf{v}_\alpha)=\mathbf{v}^\alpha\mathbf{u}_\sigma\cdot\mathbf{v}_\alpha\mathbf{u}^\tau\varphi(\mathbf{u}^\sigma, \mathbf{u}_\tau).$$

Применяя соотношение (9,6), получаем (10,10).

Таким образом, из каждой билинейной функции $\varphi(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{y})$ можно получить число $\varphi(\mathbf{u}^\alpha, \mathbf{u}_\alpha)$, которое не зависит от выбора взаимных систем $\mathbf{u}^i$ и $\mathbf{u}_k$. Операция эта называется к о н т р а к т и р о в а н и е м.

В координатном счете результат контрактирования выражается следующим образом: если функции $\varphi(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{y})$ соответствует форма $\varphi(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{y}),=a^\alpha{}_\beta x_\alpha y^\beta$, то $\varphi(\mathbf{u}^\alpha, \mathbf{u}_\alpha)=\varphi(\mathbf{e}^\alpha, \mathbf{e}_\alpha)=a^\alpha{}_\alpha$.

Многолинейные функции, имеющие как ковариантные, так и контравариантные аргументы, можно контрактировать по нескольким парам разнородных аргументов. Например, из 8-линейной функции

(10,11)
$$\varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3; \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3, \mathbf{x}^4, \mathbf{x}^5)$$

получим функцию

(10,12)
$$\varphi(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\beta, \mathbf{x}_3; \mathbf{x}^1, \mathbf{u}^\alpha, \mathbf{x}^3, \mathbf{v}^\beta, \mathbf{x}^5),$$

имеющую только 4 аргумента: $\mathbf{x}_3, \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^3, \mathbf{x}^5$, причем полученная функция не зависит от выбора взаимных систем $\mathbf{u}^i, \mathbf{u}_h$ и $\mathbf{v}^i, \mathbf{v}_h$, при помощи которых мы произвели контрактирование:

$$\psi(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\beta, \mathbf{x}_3; \mathbf{x}^1, \mathbf{u}^\alpha, \mathbf{x}^3, \mathbf{v}^\beta, \mathbf{x}^5)=\varphi(\mathbf{w}_\alpha, \mathbf{w}_\beta, \mathbf{x}_3; \mathbf{x}^1, \mathbf{w}^\alpha, \mathbf{x}^3, \mathbf{w}^\beta, \mathbf{x}^5);$$

здесь $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots \mathbf{w}_n$ и $\mathbf{w}^1, \mathbf{w}^2, \dots \mathbf{w}^n$ две взаимных системы. Говорят, что функция (10,12) получена из (10,11) контрактированием 1-го аргумента с 5-ым и 2-го с 7-ым.

Задача 1.[1] Пусть скалярная функция от n векторов одного и того же рода (например, контравариантных) $\varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots \mathbf{x}_n)$ обладает следующими свойствами:

1) она не меняется, если к любому ее аргументу прибавить другой какой-нибудь аргумент; например

$$\varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots \mathbf{x}_n)=\varphi(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2, \dots \mathbf{x}_n)=\varphi(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_2, \dots \mathbf{x}_n)=\dots$$

2) при умножении какого-нибудь аргумента на скаляр функция умножается на тот же скаляр:

$$\varphi(\alpha\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots \mathbf{x}_n)=\varphi(\mathbf{x}_1, \alpha\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots \mathbf{x}_n)=\varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \alpha\mathbf{x}_3, \dots \mathbf{x}_n)=\dots=$$

$$=\varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \alpha\mathbf{x}_n)=\alpha\varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots \mathbf{x}_n).$$

[1] Содержание этой задачи заимствовано из книги C. C a r a t h é o d o r y, Vorlesungen über reelle Funktionen, Leipzig, 1918, Kap. VI.

Показать, что φ — линейная антисимметрическая функция, т. е.

$$\varphi(\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \ldots \underset{n}{\mathbf{x}}) = \sigma \begin{vmatrix} \underset{1}{x^1}, \ldots \underset{1}{x^n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \underset{n}{x^1}, \ldots \underset{n}{x^n} \end{vmatrix}.$$

Задача 2. Если скалярная функция $\varphi(\mathbf{x})$ обладает следующими двумя свойствами:

1) $\varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y})$;

2) существует n независимых прямых (определяемых n независимыми направлениями), проходящих через начало координат и обладающих тем свойством, что $\varphi(\mathbf{x})$ изменяется монотонно, если точка $\mathbf{x}$ движется в одном и том же направлении вдоль каждой из этих прямых, то $\varphi(\mathbf{x})$ — линейная функция.

Задача 3. Если скалярная функция $\varphi(\mathbf{x})$ имеет следующие два свойства:

1) $\varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y})$;

2) существует n независимых прямых, проходящих через начало и обладающих тем свойством, что на каждой прямой есть некоторый отрезок, в котором $\varphi(\mathbf{x})$ ограничена, то $\varphi(\mathbf{x})$ — линейная функция.

Задача 4. Проверить соотношение (10, 10) на следующем примере:

$$\varphi(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{y}}) = x^{(1)}y_1 + 2x^{(2)}y_2 + x^{(3)}y_3 + x^{(1)}y_2 - x^{(2)}y_1 + 3x^{(2)}y_3 - x^{(1)}y_3.$$

За векторы $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \underset{3}{\mathbf{u}}$ взять следующие:

$$\underset{1}{\mathbf{u}}(1, 0, -1),\ \underset{2}{\mathbf{u}}(2, 1, 1),\ \underset{3}{\mathbf{u}}(1, 0, 0),$$

за векторы $\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \underset{3}{\mathbf{v}}$ — координатные векторы $\underset{1}{\mathbf{e}}, \underset{2}{\mathbf{e}}, \underset{3}{\mathbf{e}}$.

4. Аналогично скалярным линейным функциям вводятся линейные векторфункции.

Если векторфункция относит своим аргументам контравариантный вектор, условимся обозначать ее жирной латинской буквой:

$$\mathbf{y} = \mathbf{F}(\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \ldots; \overset{1}{\mathbf{x}}, \overset{2}{\mathbf{x}}, \ldots).$$

Если же она является ковариантным вектором, будем над буквой, обозначающей функцию, ставить точку:

$$\dot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{F}}(\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \ldots; \overset{1}{\mathbf{x}}, \overset{2}{\mathbf{x}}, \ldots).$$

Если векторфункция $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ имеет следующие свойства:

(10,13) $$\mathbf{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}(\mathbf{y}),$$

(10,14) $$\mathbf{A}(a\mathbf{x}) = a\mathbf{A}(\mathbf{x}),$$

то она называется линейной. Свойство (10,14) может быть заменено требованием, чтобы функция $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ была непрерывной функцией[1]. Доказательство — то же, что и для скалярной линейной функции.

Посмотрим, как определяется линейная векторфункция в счете с составляющими.

Имеем:

$$y^i = \overset{i}{\mathbf{e}}\mathbf{y} = \overset{i}{\mathbf{e}}\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \overset{i}{\mathbf{e}}\mathbf{A}(x^\alpha \underset{\alpha}{\mathbf{e}}) = \overset{i}{\mathbf{e}}\mathbf{A}(\underset{\alpha}{\mathbf{e}})\, x^\alpha$$

Обозначая

$$a^i{}_k = \overset{i}{\mathbf{e}}\mathbf{A}(\underset{k}{\mathbf{e}}),$$

получаем:

$$y^i = a^i{}_\alpha x^\alpha.$$

Таким образом, линейная векторфункция устанавливает линейное преобразование составляющих аргумента в составляющие функции. Матрицу, образованную из коэффициентов $a^i{}_k$:

$$\begin{Vmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 \ldots a^1{}_n \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 \ldots a^2{}_n \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a^n{}_1 & a^n{}_2 \ldots a^n{}_n \end{Vmatrix},$$

условимся обозначать через $\|\mathbf{A}\|$, определитель этой матрицы — символом $|\mathbf{A}|$.

В теории линейных векторфункций создается специальное исчисление векторфункций, причем элементами, над которыми производятся действия, являются сами линейные векторфункции. Мы рассмотрим здесь только основные алгебраические операции, причем заметим, что алгебра векторфункций является алгеброй тех матриц, которые этим векторфункциям соответствуют.

В дальнейшем изложении читатель встретит повторение, в иной терминологии, тех понятий и операций, с которыми он имел дело в § 1.

---

[1] Векторфункция называется непрерывной, если непрерывны ее составляющие.

Возьмем две линейных векторфункции: $\underset{1}{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ и $\underset{2}{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$. Линейная векторфункция $\underset{1}{\mathbf{A}}(\mathbf{x})+\underset{2}{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ называется суммой линейных векторфункций $\underset{1}{\mathbf{A}}$ и $\underset{2}{\mathbf{A}}$ и обозначается: $(\underset{1}{\mathbf{A}}+\underset{2}{\mathbf{A}})(\mathbf{x})$. Очевидно, что $\|\underset{1}{\mathbf{A}}+\underset{2}{\mathbf{A}}\|=\|\underset{1}{\mathbf{A}}\|+\|\underset{2}{\mathbf{A}}\|$.

Если к вектору $\mathbf{x}$ применить векторфункцию $\underset{1}{\mathbf{A}}$, затем к вектору $\underset{1}{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ применить новую векторфункцию $\underset{2}{\mathbf{A}}$, то получающаяся в результате линейная векторфункция $\underset{2}{\mathbf{A}}(\underset{1}{\mathbf{A}}(\mathbf{x}))$ называется произведением векторфункций $\underset{1}{\mathbf{A}}$ и $\underset{2}{\mathbf{A}}$ и обозначается следующим образом:

$$\mathbf{y}=\underset{2}{\mathbf{A}}\underset{1}{\mathbf{A}}(\mathbf{x}),$$

или в составляющих:

$$y^i=\underset{2}{a}{}^i{}_\alpha\underset{1}{a}{}^\alpha{}_\beta x^\beta .$$

Матрица произведения двух векторфункций равна произведению матриц этих двух функций:

$$\|\underset{2}{\mathbf{A}}\underset{1}{\mathbf{A}}\|=\|\underset{2}{\mathbf{A}}\|\,\|\underset{1}{\mathbf{A}}\|.$$

Наконец, умножению линейной векторфункции на скаляр отвечает умножение соответствующей матрицы на этот скаляр: $\|\sigma\mathbf{A}\|=\sigma\|\mathbf{A}\|$.

Таким образом, основным алгебраическим действиям над векторфункциями соответствуют аналогичные операции над матрицами. Следовательно, алгебра линейных векторфункций есть алгебра матриц.

Линейная векторфункция $\mathbf{y}=\mathbf{x}$ называется тождественной или единичной; она обозначается также символом $\mathbf{y}=\mathbf{E}(\mathbf{x})$.

Векторфункция $\mathbf{A}$ называется неособенной, если $|\mathbf{A}|\neq 0$. Неособенная векторфункция $\mathbf{A}$ имеет обратную, которая обозначается символом $\mathbf{A}^{-1}$: если

$$\mathbf{y}=\mathbf{A}(\mathbf{x}),$$

то

$$\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{y}).$$

Очевидно, что

$$\|\mathbf{A}^{-1}\|=\|\mathbf{A}\|^{-1}.$$

Если

$$\mathbf{y}=\underset{1}{\mathbf{A}}\underset{2}{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$$

и если $\underset{1}{\mathbf{A}}$, $\underset{2}{\mathbf{A}}$ — неособенные векторфункции, то

$$\mathbf{x}=\underset{2}{\mathbf{A}}{}^{-1}\underset{1}{\mathbf{A}}{}^{-1}(\mathbf{y}).$$

Следовательно,

$$(\underset{1}{\mathbf{A}}\underset{2}{\mathbf{A}})^{-1}=\underset{1}{\mathbf{A}}{}^{-1}\underset{2}{\mathbf{A}}{}^{-1}.$$

Как в матричной алгебре, в исчислении векторфункций вводятся полиномы:

$$\varphi(\mathbf{A})(\mathbf{x})=(a_0\mathbf{A}^n+a_1\mathbf{A}^{n-1}+\ldots+a_n\mathbf{E})(\mathbf{x})$$

и дробные рациональные функции от векторфункций:

$$\frac{\varphi(\mathbf{A})}{\psi(\mathbf{A})}(\mathbf{x})=\varphi(\mathbf{A})\psi^{-1}(\mathbf{A})(\mathbf{x}).$$

5. Теория линейных векторфункций вида

$$\dot{\mathbf{y}}=\dot{\mathbf{A}}(\dot{\mathbf{x}}), \tag{10,15}$$

т. е. относящих ковариантному вектору также ковариантный, вполне аналогична развитой выше теории функций типа $\mathbf{A}(\mathbf{x})$. В счете с составляющими функция (10,15) выражается следующим образом:

$$y_i=\mathbf{y}\underset{i}{\mathbf{e}}=\underset{i}{\mathbf{e}}\dot{\mathbf{A}}(\dot{\mathbf{x}})=\underset{i}{\mathbf{e}}\dot{\mathbf{A}}(x_\alpha\overset{\alpha}{\mathbf{e}})=\underset{i}{\mathbf{e}}\dot{\mathbf{A}}(\overset{\alpha}{\mathbf{e}})\,x_\alpha .$$

Обозначая

$$\underset{i}{\mathbf{e}}\dot{\mathbf{A}}(\overset{k}{\mathbf{e}})=a_i{}^k,$$

имеем:

$$y_i=a_i{}^\alpha x_\alpha .$$

Матрицу

$$\left\|\begin{matrix} a_1{}^1 & a_1{}^2 & \ldots & a_1{}^n\\ a_2{}^1 & a_2{}^2 & \ldots & a_2{}^n\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_n{}^1 & a_n{}^2 & \ldots & a_n{}^n \end{matrix}\right\|$$

условимся обозначать $\|\dot{\mathbf{A}}\|$.

6. Каждой линейной векторфункции $\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{x})$ можно отнести линейную ковариантную векторфункцию с ковариантным аргументом. Делается это следующим образом. Умножим $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ на некоторый ковариантный вектор $\dot{\mathbf{z}}$ и попытаемся представить скалярное произведение $\dot{\mathbf{z}}\mathbf{A}(\mathbf{x})$ в виде

(10,16) $$\dot{\mathbf{z}}\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\dot{\mathbf{B}}(\dot{\mathbf{z}}),$$

где $\dot{\mathbf{B}}(\dot{\mathbf{z}})$ — искомая линейная ковариантная векторфункция. Найдем элементы $b_i^{\ k}$ матрицы $\|\dot{\mathbf{B}}\|$.

Полагая в равенстве (10,16) $\mathbf{x} = \underset{i}{\mathbf{e}}$, $\dot{\mathbf{z}} = \overset{k}{\mathbf{e}}$, получаем:

$$\underset{i}{\mathbf{e}}\dot{\mathbf{B}}(\overset{k}{\mathbf{e}}) = \overset{k}{\mathbf{e}}\mathbf{A}(\underset{i}{\mathbf{e}}),$$

т. е.

$$b_i^{\ k} = a^k_{\ i}.$$

Таким образом, матрица $\|\dot{\mathbf{B}}\|$ сопряженна с матрицей $\|\mathbf{A}\|$:

$$\|\dot{\mathbf{B}}\| = \|\mathbf{A}\|_c.$$

Векторфункция $\dot{\mathbf{B}}(\dot{\mathbf{x}})$ называется **сопряженной** с $\mathbf{A}$ и обозначается символом $\dot{\mathbf{A}}_c$. Итак, $\dot{\mathbf{A}}_c$ связана с $\mathbf{A}$ соотношением

(10,17) $$\dot{\mathbf{A}}_c(\dot{\mathbf{x}})\,\mathbf{y} = \dot{\mathbf{x}}\mathbf{A}(\mathbf{y}),$$

где $\dot{\mathbf{x}}$ и $\mathbf{y}$ — произвольные векторы. Как и в исчислении матриц,

(10,18) $$(\underset{2}{\mathbf{A}}\,\underset{1}{\mathbf{A}})_c = \underset{1}{\dot{\mathbf{A}}_c}\underset{2}{\dot{\mathbf{A}}_c}.$$

В самом деле, умножим $\underset{2}{\mathbf{A}}\underset{1}{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ скалярно на $\dot{\mathbf{y}}$; получаем

$$\dot{\mathbf{y}}\underset{2}{\mathbf{A}}\underset{1}{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \underset{2}{\dot{\mathbf{A}}_c}(\dot{\mathbf{y}})\,\underset{1}{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \underset{1}{\dot{\mathbf{A}}_c}\underset{2}{\dot{\mathbf{A}}_c}(\dot{\mathbf{y}})\,\mathbf{x},$$

откуда вытекает формула (10,18).

Пусть $\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{x})$, причем $\mathbf{A}$ — неособенная линейная векторфункция. Умножим соотношение $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{y})$ скалярно на $\dot{\mathbf{z}}$:

$$\dot{\mathbf{z}}\mathbf{x} = \dot{\mathbf{z}}\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}\,(\dot{\mathbf{A}}^{-1})_c(\dot{\mathbf{z}}).$$

Подставляя $\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{x})$, имеем:

$$\dot{\mathbf{z}}\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{x})\,(\dot{\mathbf{A}}^{-1})_c(\dot{\mathbf{z}}) = \mathbf{x}\dot{\mathbf{A}}_c\,(\dot{\mathbf{A}}^{-1})_c\,(\dot{\mathbf{z}}),$$

откуда, в виду произвольности вектора $\mathbf{x}$, получаем:

$$\dot{\mathbf{z}} = \dot{\mathbf{A}}_c(\dot{\mathbf{A}}^{-1})_c(\dot{\mathbf{z}}).$$

Это равенство показывает, что имеет место соотношение

$$\dot{\mathbf{A}}_c(\dot{\mathbf{A}}^{-1})_c = \mathbf{E},$$

т. е.

$$(\dot{\mathbf{A}}_c)^{-1} = (\dot{\mathbf{A}}^{-1})_c,$$

аналогичное формуле матричной алгебры. Это соотношение позволяет записывать $(\dot{\mathbf{A}}_c)^{-1}$ и $(\dot{\mathbf{A}}^{-1})_c$ просто $\dot{\mathbf{A}}_c^{-1}$. Отметим, что две векторфункции:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{x})$$
$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{A}}_c^{-1}(\dot{\mathbf{u}})$$

определяют два линейных преобразования, взаимно контрагредиентных.

7. Рассмотренные нами выше линейные векторфункции отличаются тем свойством, что аргумент и сама функция являются векторами одного и того же вида:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{x}), \quad \dot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{B}}(\dot{\mathbf{x}}).$$

Эти функции назовем **линейными векторфункциями 1-го рода**.

Кроме этих, существуют еще векторфункции, у которых функция и аргумент являются векторами различной природы:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}(\dot{\mathbf{x}}), \quad \dot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x});$$

условимся называть их **линейными векторфункциями 2-го рода**. В координатном счете они определяются соотношениями:

$$y^i = a^{i\alpha}x_\alpha, \quad y_i = a_{i\alpha}x^\alpha.$$

8. Мы не будем останавливаться дольше на линейных векторфункциях, так как мы вернемся к этому вопросу в §§ 16 — 22. Скажем только несколько слов о многолинейных векторфункциях. Функция

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}(\underset{1}{\mathbf{x}}, \ldots \underset{r}{\mathbf{x}};\ \overset{1}{\mathbf{x}}, \ldots \overset{s}{\mathbf{x}}),$$

относящая r контравариантным и s ковариантным аргументам контравариантный вектор $\mathbf{y}$, называется многолинейной, если она линейна относительно каждого своего аргумента. В составляющих она определяется следующим образом

$$y^i = \overset{i}{\mathbf{e}}\mathbf{A}\,(\underset{1}{x}^{\alpha_1}\underset{\alpha_1}{\mathbf{e}},\dots \underset{r}{x}^{\alpha_r}\underset{\alpha_r}{\mathbf{e}};\ \overset{1}{x}_{\beta_1}\overset{\beta_1}{\mathbf{e}},\dots \overset{s}{x}_{\beta_s}\overset{\beta_s}{\mathbf{e}}) =$$

$$= \overset{i}{\mathbf{e}}\mathbf{A}\,(\underset{\alpha_1}{\mathbf{e}},\dots \underset{\alpha_r}{\mathbf{e}};\ \overset{\beta_1}{\mathbf{e}},\dots \overset{\beta_s}{\mathbf{e}})\, \underset{1}{x}^{\alpha_1}\dots \underset{r}{x}^{\alpha_r}\overset{1}{x}_{\beta_1}\dots \overset{s}{x}_{\beta_s}.$$

Вводя обозначение

$$\overset{i}{\mathbf{e}}\mathbf{A}\,(\underset{\alpha_1}{\mathbf{e}},\dots \underset{\alpha_r}{\mathbf{e}};\ \overset{\beta_1}{\mathbf{e}},\dots \overset{\beta_s}{\mathbf{e}}) = A^i{}_{\alpha_1\dots\alpha_r}{}^{\beta_1\dots\beta_s},$$

получаем

$$y^i = A^i{}_{\alpha_1\dots\alpha_r}{}^{\beta_1\dots\beta_s}\,\underset{1}{x}^{\alpha_1}\dots \underset{r}{x}^{\alpha_r}\overset{1}{x}_{\beta_1}\dots \overset{s}{x}_{\beta_s}.$$

Аналогично вводится ковариантная многолинейная функция.

§ 11. Понятие о группе преобразований. Связь между теорией групп и геометрией.

1. Пусть функции

$$x_i' = f_i(x_1, x_2, \dots x_n). \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

определяют преобразование точек n-мерного пространства. Обозначим это преобразование через A. Применим к точкам преобразованного пространства новое преобразование B, определяемое формулами:

$$x_i'' = \varphi_i(x_1', x_2', \dots x_n') \qquad (i = 1, 2, \dots n).$$

Получающееся в результате преобразование

$$x_i'' = \varphi_i(f_1(x_1, \dots x_n), f_2(x_1, \dots x_n), \dots f_n(x_1, \dots x_n)) \quad (i = 1, 2, \dots n)$$

называется *произведением* преобразований A, B и обозначается символом BA. Нетрудно усмотреть, что это произведение обладает свойством ассоциативности:

$$(AB)C = A(BC),$$

но коммутативному закону в общем случае не подчиняется:

$$AB \neq BA.$$

Пример. Рассмотрим два преобразования точек в одномерном пространстве:

1) преобразование A:

$$x' = x + a,$$

2) преобразование B:

$$x' = x^m.$$

Произведение AB дает преобразование

$$x'' = x' + a = x^m + a.$$

Произведение же BA выражается формулой:

$$x'' = x'^m = (x + a)^m.$$

Если $a \neq 0$ или $m \neq 1$, то $AB \neq BA$.

Преобразование вида

$$x_i' = x_i \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

называется *единичным* или *тождественным* и обозначается через E. Оно оставляет точки пространства неподвижными.

Если функции

$$x_i' = f_i(x_1, x_2, \dots x_n),$$

определяющие преобразование A, допускают обращение:

$$x_i = F_i(x_1', x_2', \dots x_n'),$$

то говорят, что обратные функции дают преобразование, *обратное* преобразованию A; оно обозначается символом A^{-1}. Следовательно,

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E.$$

2. *Совокупность G преобразований называется группой, если она обладает следующими свойствами:*

1) каждое преобразование совокупности G имеет обратное, и это последнее принадлежит к G,

2) произведение двух преобразований, принадлежащих к G, принадлежит также к этой совокупности.

Из этих двух требований вытекает, между прочим, то, что в группе всегда имеется тождественное преобразование.

Пример 1. Рассмотрим поворот плоскости около некоторой точки против вращения часовой стрелки на угол в 60°. Обозначим это преобразование плоскости через A. Преобразование A^{-1} является вращением на 60° по часовой стрелке. Результат применения m поворотов: $\underbrace{AA\dots A}_{m \text{ раз}}$ обозначим A^m. Нетрудно видеть, что $A^6 = E$, $A^5 = A^{-1}$. Совокупность преобразований E, A, A^2, A^3, A^4, A^5 образует группу. Группа эта имеет конечное число преобразований (так называемая конечная группа).

Пример 2. Совокупность всех одно-однозначных непрерывных преобразований плоскости

(11,1) $$x' = f(x, y), \quad y' = \varphi(x, y),$$

очевидно, является группой. Каждый непрерывный образ, например, непрерывную кривую, она преобразует в непрерывный же образ. Группа эта бесконечная.

Пример 3. Группа проективных преобразований плоскости. Удобнее воспользоваться однородными координатами x_1, x_2, x_3, именно положить: $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$. Проективные преобразования задаются формулами:

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,$$
$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \tag{11,2}$$
$$x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3.$$

Если параметры a_{ik} подчинить условию, чтобы

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то совокупность этих преобразований образует группу. Прямые плоскости преобразуются в прямые. Порядок алгебраической кривой при проективных преобразованиях не меняется.

Пример 4. Если на проективные преобразования наложить ограничение, чтобы они преобразовывали конечные точки плоскости ($x_3 \neq 0$) в конечные, то придется ввести условия:

$$a_{31} = a_{32} = 0, \ a_{33} \neq 0.$$

Мы получаем аффинные преобразования (будем пользоваться снова неоднородными координатами и положим $a_{33} = 1$):

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}. \end{aligned} \tag{11,3}$$

Неособенные преобразования, т. е. те, у которых определитель $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, образуют группу. Аффинные преобразования преобразуют параллельные прямые в параллельные.

Пример 5. Преобразования

$$\begin{aligned} x' &= \varrho(x \cos\alpha - y \sin\alpha + a), \\ y' &= \varrho(x \sin\alpha + y \cos\alpha + b) \end{aligned} \tag{11,4}$$

являются частным случаем аффинных. Каждое такое преобразование можно осуществить, выполняя сначала движение плоскости

$$x' = x \cos\alpha - y \sin\alpha + a,$$
$$y' = x \sin\alpha + y \cos\alpha + b,$$

затем лучисто расширяя плоскость около начала координат:

$$x'' = \varrho x', \quad y'' = \varrho y'.$$

Преобразования (11,4) называются подобными преобразованиями плоскости. Если $\rho \neq 0$, то они образуют группу. При этих преобразованиях каждая фигура плоскости преобразуется в подобную фигуру.

Пример 6. Если $\rho = 1$, мы получаем группу движений плоскости:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos\alpha - y \sin\alpha + a, \\ y' &= x \sin\alpha + y \cos\alpha + b. \end{aligned} \tag{11,5}$$

3. Если группа G является частью более обширной группы Γ, то G называется подгруппой группы Γ.

Пример 1. Возьмем группу $G: E, A, A^2, A^3, A^4, A^5$, где A — поворот плоскости около неподвижной точки на угол в 60°. Преобразования E, A^2, A^4 (повороты на углы в 0°, 120°, 240°) образуют подгруппу группы G. Другая подгруппа получается, если взять преобразования: E, A^3.

Пример 2. Группа движений плоскости (11,5) является подгруппой группы подобных преобразований (11,4); эта последняя входит, как подгруппа, в группу аффинных преобразований; группа же аффинных преобразований является подгруппой проективных.

4. Предположим, что между преобразованиями двух групп G и G' можно установить соответствие, обладающее следующими свойствами:

1) каждому преобразованию группы G соответствует одно преобразование группы G',

2) каждому преобразованию группы G' соответствует одно или ряд преобразований группы G,

3) если преобразованиям A и B группы G соответствуют в группе G' преобразования A' и B', то произведению AB в 1-й группе соответствует преобразование $A'B'$ во 2-й.

В этом случае говорят, что группа G изоморфна группе G'.

5. Согласно взглядам Klein'а, высказанным им в 1872 г. в мемуаре „Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen“ и являющимся общепринятыми в современной геометрии, каждой группе пространственных преобразований соответствует своя геометрия, изучающая те свойства фигур, которые остаются инвариантными при преобразованиях этой группы. Эти свойства и называются геометрическими в геометрии данной группы. Две фигуры A и B, образованные из точек, линий, поверхностей, называются эквивалентными в геометрии группы G, если в этой группе существует такое преобразование, которое переводит фигуру A в фигуру B. С точки зрения геометрии группы G, эти две фигуры отличаются только своим расположением в пространстве, но имеют одинаковые геометрические свойства. Например, в геометрии группы (11,5) движений в плоскости (это обычная метрическая геометрия Евклида) два треугольника эквивалентны, если они могут быть наложены друг на друга при помощи движения в плоскости (конгруэнтны в обычном смысле). В геометрии подобных преобразований (11,4) два треугольника эквивалентны, если они

подобны. В геометрии аффинных преобразований (11,3) любые два невыродившихся треугольника эквивалентны, но два четыреугольника эквивалентны уже не всегда. В проективной геометрии, соответствующей группе (11,2), любые два невыродившихся четыреугольника эквивалентны, но пятиугольники вообще не эквивалентны. Геометрия группы (11,1) непрерывных одно-однозначных преобразований называется топологией; в ней любые два замкнутых простых контура эквивалентны.

Двум основным свойствам, лежащим в определении группы преобразований, соответствуют следующие свойства понятия эквивалентности двух фигур:

1) если фигура A эквивалентна фигуре B, то и B эквивалентна A,

2) если A эквивалентна B, B эквивалентна C, то A эквивалентна C.

Из существования в группе тождественного преобразования вытекает, что каждая фигура эквивалентна самой себе.

6. Как мы уже сказали, только те свойства фигур изучаются в геометрии группы G, которые не меняются при преобразованиях этой группы. Предположим, что мы построили геометрию группы G, т. е. изучили свойства пространственных образов, инвариантные при этой группе. Пусть у группы G есть подгруппа H; при переходе к геометрии этой подгруппы, конечно, все геометрические свойства, которые существуют в геометрии группы G, переносятся непосредственно в геометрию группы H, но в то же время, так как группа H является только частью G, появляются новые инварианты, которых не было в геометрии группы G. Следовательно, при переходе от геометрии группы к геометрии ее подгруппы область геометрических исследований расширяется, возникают новые понятия и теоремы, которые не имели смысла с точки зрения геометрии полной группы. При обратном переходе — от геометрии подгруппы к геометрии группы — область геометрических исследований суживается, геометрия становится более бедной; некоторые свойства фигур, которые были инвариантными при преобразованиях подгруппы, разрушаются преобразованиями более обширной группы; зато теоремы ее геометрии приобретают более общее значение.

Иллюстрируем это на примере геометрий тех групп преобразований, которые были перечислены выше. Наиболее богатой из них по геометрическим свойствам является метрическая геометрия. Специфическими инвариантами для нее являются: расстояние между двумя точками, угол между двумя прямыми, площадь фигуры. При переходе к геометрии подобных преобразований теряется понятие о расстоянии и площади; но угол между двумя прямыми имеет смысл в этой геометрии, являясь инвариантом подобных преобразований. Существует в ней и понятие об отношении двух отрезков и площадей двух фигур. В геометрии аффинных преобразований понятие об угле исчезает; отношение двух отрезков имеет смысл только в том случае, если они параллельны. Сохраняется еще понятие „между“, параллельности прямых и связанные с ними понятия. При дальнейшем расширении группы — в группу проективных преобразований — область геометрических понятий значительно суживается. Выпадают все те геометрические свойства, которые базируются на параллелизме прямых, понятии „между“, отношении отрезков. Понятие прямой еще сохраняется; степень алгебраической кривой является инвариантом проективных преобразований. Между прочим, существует понятие о коническом сечении, но уже подразделения кривых второго порядка на эллипсы, гиперболы и параболы нет (между тем как эта классификация еще существует в аффинной геометрии). Наконец, в топологии уже не существует понятия о прямой линии, алгебраической кривой. В ней изучаются только те свойства, которые не разрушаются непрерывными одно-однозначными преобразованиями плоскости.

7. Чем обширнее группа, лежащая в основе геометрии, тем беднее эта геометрия понятиями и тем более абстрактным становится ее содержание. Вот почему в истории развития геометрических дисциплин первые исследования относятся к наиболее богатой геометрическими свойствами, а следовательно и более доступной, метрической геометрии. Возникновение геометрии было вызвано потребностями землемерия и тесно связано с основными метрическими понятиями: расстояния, угла, площади. При дальнейшем развитии метрической геометрии были открыты многие теоремы и созданы многие понятия, относящиеся, строго говоря, уже к более абстрактным отделам геометрии (аффинной и проективной). Но доказаны эти теоремы и введены эти понятия были на основе метрических свойств фигур. Только в XVII столетии начинают постепенно выделяться методы исследования, основанные не на метрических понятиях. Связанная с развитием строительной техники начертательная геометрия и учение о перспективе подготовили почву для создания проективных методов исследования. В начале XIX века возникает проективная геометрия (Poncelet); своего расцвета синтетические методы в этой геометрии достигли в середине этого столетия

в работах Steiner'a, Chasles'a и Staudt'a; однако долгое время исследования в области проективной геометрии были связаны с метрическими понятиями и базировались на теоремах метрической геометрии Евклида. Почти одновременно начинается быстрое развитие аналитических методов в проективной геометрии (теория форм и инвариантов линейных преобразований). Параллельно этому были заложены основы аффинной геометрии и геометрии подобных преобразований (Möbius, Chasles). Большое влияние на развитие геометрической мысли в XIX в. оказало создание неевклидовых метрических геометрий: Лобачевского-Bolyai и Riemann'a.

Все эти разрозненные ветви геометрии, не объединенные одной общей точкой зрения, со случайными методами исследования, были систематизированы Klein'ом в его Эрлангеновской программе. Та групповая точка зрения на различные системы геометрий, которая была установлена Klein'ом, внесла полную ясность в классификацию различных геометрических дисциплин и очертила область исследования каждой геометрии. Постепенно идеи Klein'a стали руководящими для геометров. Начали систематически изучаться различные виды геометрий. Работы Pick'a, Blaschke, Radon'a, Berwald'a, Kowalewski и др. развили дифференциальную геометрию различных групп преобразований.

В исследованиях Weyl'я, Cartan'a и Schouten'a, относящихся к последнему десятилетию, была установлена связь с теорией групп той ветви геометрии, которая явилась обобщением теории Riemann'овых многообразий и в основу построения которой кладутся дифференциальные свойства пространства.

§ 12. Группа аффинных преобразований.

1. Обратимся к изучению той группы преобразований, которая лежит в основе аффинной геометрии.

Зададимся целью построить группу преобразований, обладающих следующими свойствами:

1) преобразования непрерывны (выражаются непрерывными функциями),

2) преобразуют параллельные контравариантные векторы в параллельные.

Пусть какое-нибудь преобразование группы задается векторфункцией

$$\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x}),$$

относящей точке пространства $\mathbf{x}$ точку $\mathbf{x}'$. Вектор с началом в точке $\mathbf{a}$ и концом в точке $\mathbf{b}$ она преобразует в вектор $\mathbf{F}(\mathbf{b}) - \mathbf{F}(\mathbf{a})$.

Рассмотрим два независимых вектора $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, выходящих из начала координат. Векторфункция $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ преобразует их в векторы

$$\mathbf{u}' = \mathbf{F}(\mathbf{u}) - \mathbf{F}(0), \qquad \mathbf{v}' = \mathbf{F}(\mathbf{v}) - \mathbf{F}(0).$$

Эти два вектора независимы, так как в противном случае обратное преобразование переводило бы параллельные векторы $\mathbf{u}'$ и $\mathbf{v}'$ в независимые $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$.

Вектор, соединяющий точки $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, параллелен вектору $\mathbf{v}$; следовательно,

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) - \mathbf{F}(\mathbf{u}) = \sigma(\mathbf{F}(\mathbf{v}) - \mathbf{F}(0)),$$

или

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) - \mathbf{F}(0) = \mathbf{F}(\mathbf{u}) - \mathbf{F}(0) + \sigma(\mathbf{F}(\mathbf{v}) - \mathbf{F}(0)).$$

Аналогично выводим:

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) - \mathbf{F}(0) = \mathbf{F}(\mathbf{v}) - \mathbf{F}(0) + \tau(\mathbf{F}(\mathbf{u}) - \mathbf{F}(0)).$$

Следовательно,

$$(\mathbf{F}(\mathbf{u}) - \mathbf{F}(0))(\tau - 1) = (\mathbf{F}(\mathbf{v}) - \mathbf{F}(0))(\sigma - 1).$$

Так как $\mathbf{F}(\mathbf{u}) - \mathbf{F}(0)$ и $\mathbf{F}(\mathbf{v}) - \mathbf{F}(0)$ независимые векторы, то $\tau = \sigma = 1$, т. е.

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) - \mathbf{F}(0) = \mathbf{F}(\mathbf{u}) - \mathbf{F}(0) + \mathbf{F}(\mathbf{v}) - \mathbf{F}(0).$$

Если ввести в рассмотрение векторфункцию

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(0),$$

получим

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{u}) + \mathbf{f}(\mathbf{v}). \tag{12,1}$$

Так как функция $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ непрерывна, то соотношение (12,1) справедливо и в том случае, если векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ зависимы. Но непрерывная векторфункция, удовлетворяющая уравнению (12,1), линейна.

Обозначая вектор $\mathbf{F}(0)$ через $\mathbf{a}$, имеем:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{a}.$$

Итак, преобразования группы имеют вид:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{a},$$

где $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ линейная векторфункция. В составляющих эти преобразования выражаются формулами:

$$x^{i'} = a^{i'}_{\alpha} x^{\alpha} + a^{i'}.$$

Так как группа содержит обратные преобразования, вектор-функции $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ должны быть неособенные;

$$|\,\mathbf{A}\,| \neq 0.$$

Группа эта называется **группой аффинных преобразований**; она имеет две основные подгруппы:

1) подгруппу параллельных переносов

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{a}, \tag{12,2}$$

2) подгруппу однородных аффинных преобразований:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(\mathbf{x}). \tag{12,3}$$

2. При применении преобразований аффинной группы к пространству контравариантные векторы трансформируются однородными аффинными преобразованиями:

$$u^{i'} = a^{i}{}_{\alpha} u^{\alpha}, \quad \mathbf{u}' = \mathbf{A}(\mathbf{u}).$$

Посмотрим, как преобразуются ковариантные векторы при аффинных преобразованиях. Так как преобразования подгруппы (12,2) не меняют ковариантных векторов, передвигая только параллельно их начальные и конечные гиперплоскости, сосредоточим свое внимание на подгруппе однородных аффинных преобразований.

Уравнение конечной гиперплоскости ковариантного вектора $\dot{\mathbf{a}}$ имеет вид:

$$\dot{\mathbf{a}}\mathbf{x} = 1.$$

После применения к точкам пространства преобразования (12,3) она переходит в гиперплоскость

$$\dot{\mathbf{a}}\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}') = 1$$

или

$$\dot{\mathbf{A}}_{c}^{-1}(\dot{\mathbf{a}})\,\mathbf{x}' = 1.$$

Следовательно, после применения преобразования (12,3) вектор $\dot{\mathbf{a}}$ преобразуется в $\dot{\mathbf{A}}_{c}^{-1}(\dot{\mathbf{a}})$:

$$\dot{\mathbf{a}}' = \dot{\mathbf{A}}_{c}^{-1}(\dot{\mathbf{a}}). \tag{12,4}$$

Таким образом, составляющие ковариантного вектора преобразуются контрагредиентно относительно составляющих контравариантного вектора.

Группа (12,4) *изоморфна группе* (12,3).

В самом деле, если преобразованиям $\underset{1}{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ и $\underset{2}{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ группы (12,3) соответствуют $\underset{1}{\dot{\mathbf{A}}}{}_{c}^{-1}(\dot{\mathbf{a}})$ и $\underset{2}{\dot{\mathbf{A}}}{}_{c}^{-1}(\dot{\mathbf{a}})$, то $\underset{1}{\mathbf{A}}\underset{2}{\mathbf{A}}$ соответствует

$$(\underset{1}{\mathbf{A}}\underset{2}{\mathbf{A}})_{c}^{-1} = \underset{1}{\dot{\mathbf{A}}}{}_{c}^{-1}\underset{2}{\dot{\mathbf{A}}}{}_{c}^{-1}.$$

3. Рассмотрим преобразование m-вектора, когда к точкам пространства применяется аффинное преобразование.

Возьмем контравариантный мультивектор $\mathbf{U}$, построенный на базисе $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}$. При применении к векторам $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}$ аффинного преобразования (12,3) составляющие мультивектора $\mathbf{U}$ преобразуются по следующему закону:

$$u^{i_1 i_2 \ldots i_m\,'} = \begin{vmatrix} a^{i_1}{}_{\alpha}\underset{1}{u}{}^{\alpha} & \ldots & a^{i_m}{}_{\alpha}\underset{1}{u}{}^{\alpha} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a^{i_1}{}_{\alpha}\underset{m}{u}{}^{\alpha} & \ldots & a^{i_m}{}_{\alpha}\underset{m}{u}{}^{\alpha} \end{vmatrix} = \sum_{(\alpha_1 \ldots \alpha_m)} \begin{vmatrix} a^{i_1}{}_{\alpha_1} & \ldots & a^{i_1}{}_{\alpha_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a^{i_m}{}_{\alpha_1} & \ldots & a^{i_m}{}_{\alpha_m} \end{vmatrix} u^{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m},$$

или

$$u^{i_1 i_2 \ldots i_m\,'} = \sum_{(\alpha_1 \ldots \alpha_m)} a^{i_1 i_2 \ldots i_m}{}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m} u^{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m}, \tag{12,5}$$

где через $a^{i_1 \ldots i_m}{}_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ обозначен минор:

$$a^{i_1 \ldots i_m}{}_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} = \begin{vmatrix} a^{i_1}{}_{\alpha_1} & \ldots & a^{i_1}{}_{\alpha_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a^{i_m}{}_{\alpha_1} & \ldots & a^{i_m}{}_{\alpha_m} \end{vmatrix}. \tag{12,6}$$

Располагая в ряд сочетания $i_1, i_2, \ldots i_m$ индексов по m в каждом, как мы делали это в § 6 при введении координат мультивектора, мы можем приписать минорам $a^{i_1 \ldots i_m}{}_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ по два индекса, из которых каждый изменяется от 1 до $N = \binom{n}{m}$. Упорядоченные таким образом миноры обозначим через $A^{i}{}_{k}$. Преобразования (12,5) могут быть заданы следующими формулами:

$$U^{i'} = \sum_{\alpha=1}^{N} A^{i}{}_{\alpha} U^{\alpha}. \tag{12,7}$$

Преобразования (12,7), *образуют группу, изоморфную группе* (12,3).

Доказательство: Обозначим коэффициенты матриц линейных векторфункций $\underset{1}{\mathbf{A}}$, $\underset{2}{\mathbf{A}}$ и $\underset{3}{\mathbf{A}} = \underset{1}{\mathbf{A}}\underset{2}{\mathbf{A}}$ через $\underset{1}{a}{}^i_k$, $\underset{2}{a}{}^i_k$, $\underset{3}{a}{}^i_k$. Имеем:

$$\underset{3}{a}{}^i_k = \underset{1}{a}{}^i_\alpha \underset{2}{a}{}^\alpha_k. \tag{12,8}$$

Коэффициенты линейных преобразований (12,7), соответствующих векторфункциям $\underset{1}{\mathbf{A}}$, $\underset{2}{\mathbf{A}}$, $\underset{3}{\mathbf{A}}$, обозначим соответственно через $\underset{1}{A}{}^i_k$, $\underset{2}{A}{}^i_k$, $\underset{3}{A}{}^i_k$, или через $\underset{1}{a}{}^{i_1\dots i_m}{}_{k_1\dots k_m}$, $\underset{2}{a}{}^{i_1\dots i_m}{}_{k_1\dots k_m}$, $\underset{3}{a}{}^{i_1\dots i_m}{}_{k_1\dots k_m}$. Так как на основании (12,6) и (12,8)

$$\underset{3}{A}{}^i_k = \underset{3}{a}{}^{i_1\dots i_m}{}_{k_1\dots k_m} = \begin{vmatrix} \underset{3}{a}{}^{i_1}_{k_1} & \dots & \underset{3}{a}{}^{i_1}_{k_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \underset{3}{a}{}^{i_m}_{k_1} & \dots & \underset{3}{a}{}^{i_m}_{k_m} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{(\alpha_1\dots\alpha_m)} \begin{vmatrix} \underset{1}{a}{}^{i_1}_{\alpha_1} & \dots & \underset{1}{a}{}^{i_1}_{\alpha_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \underset{1}{a}{}^{i_m}_{\alpha_1} & \dots & \underset{1}{a}{}^{i_m}_{\alpha_m} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \underset{2}{a}{}^{\alpha_1}_{k_1} & \dots & \underset{2}{a}{}^{\alpha_1}_{k_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \underset{2}{a}{}^{\alpha_m}_{k_1} & \dots & \underset{2}{a}{}^{\alpha_m}_{k_m} \end{vmatrix},$$

то

$$\underset{3}{A}{}^i_k = \sum_{(\alpha_1\dots\alpha_m)} \underset{1}{a}{}^{i_1\dots i_m}{}_{\alpha_1\dots\alpha_m} \underset{2}{a}{}^{\alpha_1\dots\alpha_m}{}_{k_1\dots k_m} = \sum_{\alpha=1}^{N} \underset{1}{A}{}^i_\alpha \underset{2}{A}{}^\alpha_k,$$

т. е. положение доказано.

4. Преобразование ковариантных мультивекторов производится по вполне аналогичным формулам. Рекомендуем читателю, в качестве упражнения, показать, что составляющие ковариантного m-вектора преобразуются контрагредиентно относительно составляющих контравариантного m-вектора.

5. Те понятия, которые были введены в предыдущих параграфах в геометрию аффинного пространства, не разрушаются при применении к пространству преобразований аффинной группы; они являются, как принято говорить, аффинными.

В самом деле, если векторы $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ связаны соотношением $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, то и преобразованные векторы $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$ и $\mathbf{w}'$ связаны той же зависимостью; если $\mathbf{u} = \sigma\mathbf{v}$, то и $\mathbf{u}' = \sigma\mathbf{v}'$. Следовательно, все те понятия, которые базировались на двух основных операциях над контравариантными векторами (понятия прямой, параллелизма прямых, „между“, отрезка, направления, отношения двух параллельных отрезков), — все они являются аффинными. Например, если три точки $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ лежат на одной прямой, и точка $\mathbf{b}$ лежит между $\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}$, то и преобразованные точки $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$ будут находиться на одной прямой, причем $\mathbf{b}'$ будет лежать между $\mathbf{a}'$ и $\mathbf{c}'$; если отношение двух параллельных отрезков $\mathbf{ab}$ и $\mathbf{cd}$ равно σ, то и отношение преобразованных отрезков $\mathbf{a}'\mathbf{b}'$ и $\mathbf{c}'\mathbf{d}'$ также равно σ и т. д.

Покажем, что ранг системы векторов является инвариантом аффинных преобразований. Пусть система векторов $\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \dots \underset{m}{\mathbf{v}}$ имеет ранг, равный r, т. е. все определители порядка, большего, чем r, матрицы

$$\begin{Vmatrix} \underset{1}{v}{}^1 & \underset{1}{v}{}^2 & \dots & \underset{1}{v}{}^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \underset{m}{v}{}^1 & \underset{m}{v}{}^2 & \dots & \underset{m}{v}{}^n \end{Vmatrix} \tag{12,9}$$

равны нулю. Рассмотрим какой-нибудь определитель s-го порядка матрицы, образованной из составляющих преобразованных векторов:

$$\begin{Vmatrix} \underset{1}{v}{}^{1'} & \underset{1}{v}{}^{2'} & \dots & \underset{1}{v}{}^{n'} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \underset{m}{v}{}^{1'} & \underset{m}{v}{}^{2'} & \dots & \underset{m}{v}{}^{n'} \end{Vmatrix}. \tag{12,10}$$

Имеем:

$$\begin{vmatrix} \underset{i_1}{v}{}^{k_1'} & \dots & \underset{i_1}{v}{}^{k_s'} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \underset{i_s}{v}{}^{k_1'} & \dots & \underset{i_s}{v}{}^{k_s'} \end{vmatrix} = \sum_{(\alpha_1\dots\alpha_m)} \begin{vmatrix} a^{k_1}_{\alpha_1} & \dots & a^{k_1}_{\alpha_s} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a^{k_s}_{\alpha_1} & \dots & a^{k_s}_{\alpha_s} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \underset{i_1}{v}{}^{\alpha_1} & \dots & \underset{i_1}{v}{}^{\alpha_s} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \underset{i_s}{v}{}^{\alpha_1} & \dots & \underset{i_s}{v}{}^{\alpha_s} \end{vmatrix}.$$

Так как исходная матрица (12,9) имела ранг r, то все определители матрицы (12,10), имеющие порядок выше чем r, обращаются в нуль. Таким образом, ранг матрицы при аффинном преобразовании повыситься не может. Но он не может и понизиться, так как при обратном преобразовании, — от новой матрицы к старой, он повысился бы.

Из факта инвариантности ранга системы векторов вытекает, что независимые векторы после преобразования превращаются также в независимые. Следовательно, m-мерному плоскому пучку соответствует также m-мерный пучок. Понятие о плоскостях различного числа измерений является, таким образом, аффинным. Степень параллелизма является также инвариантом аффинной группы.

Рассмотрим скалярное произведение ковариантного и контравариантного вектора $\dot{\mathbf{a}}\mathbf{u}$. При применении к пространству аффинного преобразования имеем:

$$\dot{\mathbf{a}}'\mathbf{u}' = \dot{\mathbf{A}}_c^{-1}(\dot{\mathbf{a}})\,\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \dot{\mathbf{a}}\,\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \dot{\mathbf{a}}\mathbf{u}.$$

Таким образом, эта функция является инвариантом. Отсюда вытекает, что две взаимные системы после аффинного преобразования пространства переходят во взаимные системы и что скалярное произведение двух мультивекторов инвариантно при аффинных преобразованиях.

6. Возьмем группу однородных аффинных преобразований

(12, 11) $$x^{i'} = a^i{}_\alpha x^\alpha.$$

Пусть имеется группа линейных преобразований с m переменными:

(12,12) $$\xi_i' = \sum_{k=1}^{m} X_{ik}\xi_k \qquad (i = 1,\ 2, \ldots m),$$

изоморфная группе (12,11), причем X_{ik} являются функциями от коэффициентов $a^i{}_k$ соответствующих преобразований группы (12,11). Возьмем m чисел $\xi_1,\ \xi_2, \ldots \xi_m$ и условимся при применении к точкам пространства группы (12,11) преобразовывать их по формулам (12,12), при применении же к точкам пространства подгруппы параллельного переноса оставлять числа $\xi_1,\ \xi_2, \ldots \xi_m$ неизменными. Обобщая понятие о векторе и мультивекторе, говорят, что числа $\xi_1,\ \xi_2, \ldots \xi_m$ определяют *ковариантную величину* аффинного пространства.[1] $\xi_1,\ \xi_2, \ldots \xi_m$ называются *составляющими*, или *координатами*, этой ковариантной величины. Принято говорить, что при применении к точкам про-

[1] Терминология H. Weyl'я. Ср. H. Weyl. Gruppentheorie und Quantenmechanik. 1928, стр. 114.

странства однородного аффинного преобразования ковариантная величина $(\xi_1,\ \xi_2, \ldots \xi_m)$, участвуя в этом преобразовании, переходит в $(\xi_1',\ \xi_2', \ldots \xi_m')$; при параллельных переносах она остается неизменной.

Ковариантные и контравариантные векторы и мультивекторы являются, согласно этому определению, ковариантными величинами аффинной геометрии.

Приведем еще один простой пример ковариантной величины. Возьмем два независимых контравариантных вектора $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ и образуем систему n^2 чисел:

$$T^{ik} = u^i v^k \qquad (i,\ k = 1,\ 2, \ldots n).$$

Если при применении к пространству аффинных преобразований: $x^{i'} = a^i{}_\alpha x^\alpha$ мы условимся преобразовывать числа T^{ik} по формулам:

$$T^{ik'} = u^{i'} v^{k'} = a^i{}_\alpha a^k{}_\beta u^\alpha v^\beta = a^i{}_\alpha a^k{}_\beta T^{\alpha\beta},$$

то система чисел T^{ik} определит ковариантную величину. Покажем, что группа линейных преобразований

(12, 13) $$T^{ik'} = A^{ik}{}_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta},$$

где

$$A^{ik}{}_{\alpha\beta} = a^i{}_\alpha a^k{}_\beta$$

изоморфна группе (12, 11). Пусть преобразованиям

$$u^{i'} = \underset{1}{a}{}^i{}_\alpha u^\alpha,\ \ u^{i'} = \underset{2}{a}{}^i{}_\alpha u^\alpha,\ \ u^{i'} = \underset{3}{a}{}^i{}_\alpha u^\alpha,$$

где

$$\underset{3}{a}{}^i{}_k = \underset{1}{a}{}^i{}_\alpha \underset{2}{a}{}^\alpha{}_k,$$

соответствуют преобразования:

$$T^{ik'} = \underset{1}{A}{}^{ik}{}_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta},\ \ T^{ik'} = \underset{2}{A}{}^{ik}{}_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta},\ \ T^{ik'} = \underset{3}{A}{}^{ik}{}_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta}.$$

Имеем:

$$\underset{3}{A}{}^{ik}{}_{pq} = \underset{3}{a}{}^i{}_p \underset{3}{a}{}^k{}_q = \underset{1}{a}{}^i{}_\alpha \underset{2}{a}{}^\alpha{}_p \underset{1}{a}{}^k{}_\beta \underset{2}{a}{}^\beta{}_q = \underset{1}{A}{}^{ik}{}_{\alpha\beta} \underset{2}{A}{}^{\alpha\beta}{}_{pq}.$$

Следовательно, линейные преобразования (12,13) действительно образуют группу, изоморфную группе (12,11).

Основной задачей тензорного анализа является отыскание ковариантных величин аффинной геометрии; эта задача приводится к определению групп линейных преобразований (12,12), изоморфных однородной аффинной группе (12,11).

7. Мы уже несколько раз употребляли термин „инвариант". Уточним теперь это понятие.

Пусть функция Φ зависит от координат точек пространства и составляющих ряда ковариантных величин; обозначим ее величину при применении к пространству некоторого преобразования аффинной группы через Φ'. Если

$$\Phi' = \varphi \Phi,$$

причем φ зависит исключительно от коэффициентов аффинного преобразования, то Φ называется относительным инвариантом группы аффинных преобразований; если $\varphi = 1$, т. е. если функция Φ остается неизменной, то она называется абсолютным инвариантом, или просто инвариантом этой группы.

Примеры. Скалярное произведение $\dot{\mathbf{a}}\mathbf{u}$ является абсолютным инвариантом; ранг системы векторов — абсолютный инвариант. Определитель $(\underset{1}{\mathbf{u}}\underset{2}{\mathbf{u}}\ldots\underset{n}{\mathbf{u}})$ представляет собою относительный инвариант, так как

$$(\underset{1}{\mathbf{u}'}\underset{2}{\mathbf{u}'}\ldots\underset{n}{\mathbf{u}'}) = \begin{vmatrix} a^1{}_1 \ldots a^1{}_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a^n{}_1 \ldots a^n{}_n \end{vmatrix} (\underset{1}{\mathbf{u}}\underset{2}{\mathbf{u}}\ldots\underset{n}{\mathbf{u}}).$$

8. Каждое преобразование координат точек пространства

$$(12,14) \qquad x_i' = f_i(x_1, x_2, \ldots x_n) \qquad (i = 1,2, \ldots n)$$

можно рассматривать с двух точек зрения: 1) можно считать, как мы делали это выше, что $x_1', x_2', \ldots x_n'$ и $x_1, x_2, \ldots x_n$ являются координатами двух различных точек, взятых в одной и той же системе координат. Тогда уравнения (12,14) определяют перемещение каждой точки пространства из одного положения в другое; 2) можно, наоборот, рассматривать $x_1', x_2', \ldots x_n'$ и $x_1, x_2, \ldots x_n$ как координаты одной и той же точки, но только взятые в двух различных координатных системах. При преобразованиях (12,14) точки пространства считаются тогда неподвижными, а система координат преобразуется из одной в другую. Обе эти точки зрения равноправны и ими обеими мы будем пользоваться в дальнейшем.

Та система координат, которой мы пользуемся в аффинной геометрии, называется декартовой. Координатные линии (оси) представляют собою прямые, координатные гиперповерхности — гиперплоскости, причем соответствующие координатные оси двух n-эдров, относящихся к различным точкам пространства, параллельны между собой.

Преобразования аффинной группы

$$(12,15) \qquad x^{i'} = a^i{}_a x^a + a^i$$

можно рассматривать как переход от одной декартовой системы координат к другой. Подгруппа параллельного переноса определяет перемещение начала координат при неизменном направлении координатных осей; подгруппа однородных линейных преобразований соответствует изменению координатного n-эдра при неподвижном начале. Как мы уже говорили, аффинными считаются те свойства геометрических фигур, которые инвариантны при преобразованиях (12,15). Если эти последние рассматривать, как преобразования координатной системы, то инвариантность аффинных свойств имеет следующий смысл: те соотношения, которые присущи геометрическим фигурам, в силу основных свойств аффинного пространства, не должны зависеть от выбора той или другой системы координат, так как координатная система является только вспомогательным средством для изучения геометрических соотношений.

Линейные преобразования

$$(12,16) \qquad \xi_i' = \sum_{k=1}^{m} X_{ik}\xi_k$$

составляющих ковариантной величины могут быть истолкованы, как переход от составляющих этой величины в одной системе координат к составляющим той же величины в другой координатной системе. Изоморфизм группы (12,16) с группой однородных преобразований:

$$u^{i'} = a^i{}_a u^a$$

имеет следующий смысл: если при переходе от координатной системы K к системе K' (с тем же началом) составляющие трансформировались преобразованием A_1:

$$\xi_i' = \sum_1 X_{ik}\xi_k$$

при переходе от системы K' к K'' — преобразованием A_2:

$$\xi_i'' = \sum_2 X_{ik}\xi_k',$$

то преобразование A_3:

$$\xi_i'' = \sum \underset{3}{X}_{ik} \xi_k,$$

соответствующее переходу от координатной системы K к K'', должно быть произведением преобразований A_2 и A_1:

$$A_3 = A_2 A_1, \quad \text{или} \quad \underset{3}{X}_{ik} = \sum \underset{2}{X}_{i\alpha} \underset{1}{X}_{\alpha k}.$$

Следовательно, если составляющие ковариантной величины заданы в какой-нибудь одной системе координат K, то этим самым они **однозначно** определены в любой другой системе декартовых координат K', причем составляющие в системе K' имеют одни и те же значения, независимо от того, перешли ли мы сразу от системы K к K', или совершили ряд промежуточных преобразований: от K к K_1, от K_1 к $K_2, \ldots$ от K_{n-1} к K_n, от K_n к K'.

9. При изучении алгебры тензоров мы часто будем сталкиваться с вопросом о преобразовании декартовых координат. Поэтому рассмотрим его здесь детально и условимся в обозначениях, которыми мы в дальнейшем будем пользоваться.

Каждая декартова система координат определяется вполне, если заданы контравариантые или ковариантные координатные векторы, так как эти системы векторов, будучи взаимными, однозначно друг друга определяют.

Возьмем n независимых контравариантных векторов $\underset{1}{\mathbf{e}}', \underset{2}{\mathbf{e}}', \ldots \underset{n}{\mathbf{e}}'$, которые мы примем за контравариантные координатные векторы в новой системе координат. Новыми ковариантными векторами будут служить векторы $\overset{1}{\mathbf{e}}'\, \overset{2}{\mathbf{e}}' \ldots \overset{n}{\mathbf{e}}'$ системы, взаимной с $\underset{1}{\mathbf{e}}', \underset{2}{\mathbf{e}}', \ldots \underset{n}{\mathbf{e}}'$:

$$\overset{i}{\mathbf{e}}'\, \underset{k}{\mathbf{e}}' = \delta^i_k.$$

Обозначим составляющие векторов $\underset{i}{\mathbf{e}}'$ и $\overset{i}{\mathbf{e}}'$ в старой системе координат следующим образом:

$$\underset{i}{\mathbf{e}}'\, \overset{k}{\mathbf{e}} = \binom{k}{i'}, \qquad \overset{i}{\mathbf{e}}'\, \underset{k}{\mathbf{e}} = \binom{i'}{k}.$$

При употреблении обозначений $\binom{k}{i'}$ и $\binom{i'}{k}$ следует помнить, что ударение при букве i' не означает, что здесь берется индекс, отличный от i; индекс i' равен численно i, ударение же

только указывает на то, что в скалярных произведениях $\underset{i}{\mathbf{e}}'\overset{k}{\mathbf{e}}$, $\overset{i}{\mathbf{e}}'\underset{k}{\mathbf{e}}$ этот индекс относится к вектору, отмеченному ударением. Например $\underset{5}{\mathbf{e}}'\overset{3}{\mathbf{e}} = \binom{3}{5'}$, $\overset{4}{\mathbf{e}}'\underset{4}{\mathbf{e}} = \binom{4'}{4}$.

Разлагая новые координатные векторы по старым и обратно, получаем, на основании формул (9,4) и (9,5)

(12,17) $$\underset{i}{\mathbf{e}}' = \underset{\alpha}{\mathbf{e}}\binom{\alpha}{i'}, \qquad \overset{i}{\mathbf{e}}' = \overset{\alpha}{\mathbf{e}}\binom{i'}{\alpha},$$

(12,18) $$\underset{i}{\mathbf{e}} = \underset{\alpha}{\mathbf{e}}'\binom{\alpha'}{i}, \qquad \overset{i}{\mathbf{e}} = \overset{\alpha}{\mathbf{e}}'\binom{i}{\alpha'}.$$

Эти соотношения связывают между собою старую и новую координатные системы.

Выведем формулы преобразования составляющих векторов. Пользуясь (12,17), получаем: $u^{i'} = \mathbf{u}\overset{i}{\mathbf{e}}' = \mathbf{u}\overset{\alpha}{\mathbf{e}}\binom{i'}{\alpha} = u^\alpha\binom{i'}{\alpha}$. Аналогично этому получаем выражения для u^i через новые составляющие, а также формулы для преобразования составляющих ковариантных векторов:

(12,19) $$u^{i'} = u^\alpha\binom{i'}{\alpha},$$

(12,20) $$u^i = u^{\alpha'}\binom{i}{\alpha'},$$

(12,21) $$u_i' = u_\alpha\binom{\alpha}{i'},$$

(12,22) $$u_i = u_\alpha'\binom{\alpha'}{i}.$$

Условимся обозначать матрицу коэффициентов преобразований (12,19) через X:

(12,23) $$X = \left\| \begin{matrix} \binom{1'}{1} & \binom{1'}{2} & \cdots & \binom{1'}{n} \\ \binom{2'}{1} & \binom{2'}{2} & \cdots & \binom{2'}{n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \binom{n'}{1} & \binom{n'}{2} & \cdots & \binom{n'}{n} \end{matrix} \right\|.$$

Так как формулы (12,20) определяют преобразования, обратные преобразованиям (12, 19), то

$$X^{-1} = \left\| \begin{matrix} \binom{1}{1'} & \binom{1}{2'} & \cdots & \binom{1}{n'} \\ \binom{2}{1'} & \binom{2}{2'} & \cdots & \binom{2}{n'} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \binom{n}{1'} & \binom{n}{2'} & \cdots & \binom{n}{n'} \end{matrix} \right\|.$$

Нетрудно видеть, что матрица линейных преобразований (12,21) равна X_c^{-1} (составляющие u_i преобразуются контрагредиентно относительно u^i); наконец, преобразованиям (12,22) соответствует матрица X_c. Так как $XX^{-1}=X^{-1}X=E$, то коэффициенты $\binom{i'}{k}$ и $\binom{i}{k'}$ связаны следующими соотношениями:

(12,24) $$\binom{i'}{a}\binom{a}{k'}=\delta^i_k,$$

(12,25) $$\binom{i}{a'}\binom{a'}{k}=\delta^i_k.$$

В качестве примера решим следующую задачу:

Задача. В 4-мерном пространстве заданы новые контравариантные координатные векторы своими составляющими

$$\underset{1}{\mathbf{e}}'(1, 1, 0, 1),\quad \underset{2}{\mathbf{e}}'(0, 0, 1, 0),\quad \underset{3}{\mathbf{e}}'(0, 2, 1, 0),\quad \underset{4}{\mathbf{e}}'(-1, 0, 1, 0).$$

Определить матрицу X.

Решение. Так как $\binom{1}{1'}=1$, $\binom{2}{1'}=1$, $\binom{3}{1'}=0$, $\binom{4}{1'}=1$, $\binom{1}{2'}=0$, $\binom{2}{2'}=0$, и т. д., то

$$X^{-1}=\begin{Vmatrix} 1, & 0, & 0, & -1\\ 1, & 0, & 2, & 0\\ 0, & 1, & 1, & 1\\ 1, & 0, & 0, & 0 \end{Vmatrix},\qquad X=\begin{Vmatrix} 0, & 0, & 0, & 1\\ 1, & -\frac{1}{2}, & 1, & -\frac{1}{2}\\ 0, & \frac{1}{2}, & 0, & -\frac{1}{2}\\ -1, & 0, & 0, & 1 \end{Vmatrix}.$$

Рассмотрим три преобразования координат:

1) от системы $K\ (\underset{1}{\mathbf{e}}, \underset{2}{\mathbf{e}}, \dots \underset{n}{\mathbf{e}})$ к системе $K'\ (\underset{1}{\mathbf{e}}', \underset{2}{\mathbf{e}}', \dots \underset{n}{\mathbf{e}}')$,

2) от системы $K'\ (\underset{1}{\mathbf{e}}', \underset{2}{\mathbf{e}}', \dots \underset{n}{\mathbf{e}}')$ к системе $K''\ (\underset{1}{\mathbf{e}}'', \underset{2}{\mathbf{e}}'', \dots \underset{n}{\mathbf{e}}'')$,

3) от системы $K\ (\underset{1}{\mathbf{e}}, \underset{2}{\mathbf{e}}, \dots \underset{n}{\mathbf{e}})$ к системе $K''\ (\underset{1}{\mathbf{e}}'', \underset{2}{\mathbf{e}}'' \dots \underset{n}{\mathbf{e}}'')$.

Введем следующие обозначения для коэффициентов тех линейных преобразований, которые соответствуют переходу от одной системы координат к другой:

1) от K к K': $\quad \overset{i}{\mathbf{e}}{}'\underset{k}{\mathbf{e}}=\binom{i'}{k},\qquad \overset{i}{\mathbf{e}}\underset{k}{\mathbf{e}}'=\binom{i}{k'}$,

2) от K' к K'': $\quad \overset{i}{\mathbf{e}}{}''\underset{k}{\mathbf{e}}'=\binom{i''}{k'},\qquad \overset{i}{\mathbf{e}}{}'\underset{k}{\mathbf{e}}''=\binom{i'}{k''}$,

3) от K к K'': $\quad \overset{i}{\mathbf{e}}{}''\underset{k}{\mathbf{e}}=\binom{i''}{k},\qquad \overset{i}{\mathbf{e}}\underset{k}{\mathbf{e}}''=\binom{i}{k''}$.

Обозначим через X, X_1, X_2 матрицы:

$$X=\begin{Vmatrix} \binom{1'}{1} & \dots & \binom{1'}{n}\\ \dots & \dots & \dots\\ \binom{n'}{1} & \dots & \binom{n'}{n} \end{Vmatrix},\qquad X_1=\begin{Vmatrix} \binom{1''}{1'} & \dots & \binom{1''}{n'}\\ \dots & \dots & \dots\\ \binom{n''}{1'} & \dots & \binom{n''}{n'} \end{Vmatrix},$$

$$X_2=\begin{Vmatrix} \binom{1''}{1} & \dots & \binom{1''}{n}\\ \dots & \dots & \dots\\ \binom{n''}{1} & \dots & \binom{n''}{n} \end{Vmatrix}.$$

X, X_1, X_2 являются матрицами тех линейных преобразований, которые трансформируют составляющие контравариантного вектора при переходе от одной системы координат к другой:

$$u^{i'}=u^a\binom{i'}{a},\qquad u^{i''}=u^{a'}\binom{i''}{a'},\qquad u^{i''}=u^a\binom{i''}{a}.$$

Следовательно,

$$X_1X=X_2,\qquad X^{-1}X_1^{-1}=X_2^{-1},$$

т. е.

(12,26) $$\binom{i''}{a'}\binom{a'}{k}=\binom{i''}{k},$$

(12,27) $$\binom{i}{a'}\binom{a'}{k''}=\binom{i}{k''}.$$

Задача 1. В 4-мерном пространстве заданы своими составляющими новые ковариантные координатные векторы:

$$\overset{1}{\mathbf{e}}{}'(0, 0, 1, 1),\ \overset{2}{\mathbf{e}}{}'(1, 0, 1, 0),\ \overset{3}{\mathbf{e}}{}'(1, 1, 0, 0),\ \overset{4}{\mathbf{e}}{}'(0, 0, 1, -1).$$

Определить коэффициенты $\binom{i}{k'}$ и $\binom{i'}{k}$.

Ответ:

$$X=\begin{Vmatrix} 0, & 0, & 1, & 1\\ 1, & 0, & 1, & 0\\ 1, & 1, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 1, & -1 \end{Vmatrix},\qquad X^{-1}=\begin{Vmatrix} -\frac{1}{2}, & 1, & 0, & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}, & -1, & 1, & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}, & 0, & 0, & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}, & 0, & 0, & -\frac{1}{2} \end{Vmatrix}.$$

Задача 2. В трехмерном пространстве заданы своими составляющими ковариантный вектор $\mathbf{a}$ (2, 0, 1) и контравариантный $\mathbf{u}$ (1, —1, 3).

Вычислить их составляющие в новой системе координат, заданной контравариантными координатными векторами:

$$\underset{1}{\mathbf{e}'}(1,\ 1,\ -1),\quad \underset{2}{\mathbf{e}'}(1,\ 1,\ 1),\quad \underset{3}{\mathbf{e}'}(1,\ 0,\ 1).$$

Ответ:

$$a_1'=1,\ a_2'=3,\ a_3'=3;\qquad u^{1'}=-1,\ u^{2'}=0,\ u^{3'}=4.$$

Задача 3. Формулы (12, 24) могут быть получены следующим образом: в соотношении $\underset{i}{\mathbf{e}'}\overset{k}{\mathbf{e}'}=\delta_i^k$ вставим выражения для $\underset{i}{\mathbf{e}'}$ и $\overset{k}{\mathbf{e}'}$ из (12,17); аналогично можно получить формулы (12, 25).

Задача 4. Подставляя в равенство

$$\binom{i''}{k}=\overset{i}{\mathbf{e}''}\underset{k}{\mathbf{e}}$$

вместо $\overset{i}{\mathbf{e}''}$ его выражение через $\underset{k}{\mathbf{e}'}$:

$$\overset{i}{\mathbf{e}''}=\overset{i}{\mathbf{e}''}\underset{\alpha}{\mathbf{e}'}\cdot\overset{\alpha}{\mathbf{e}'}=\overset{\alpha}{\mathbf{e}'}\binom{i''}{\alpha'},$$

получаем:

$$\binom{i''}{k}=\binom{i''}{\alpha'}\binom{\alpha'}{k}.$$

Вывести аналогично формулу (12,27).

Задача 5. Если n^2 чисел T'_{ik} $(i,\ k=1,\ 2,\dots n)$ связаны с n^2 чисел T_{ik} соотношениями:

(a) $$T'_{ik}=T_{\alpha\beta}\binom{\alpha}{i'}\binom{\beta}{k'},$$

то

$$T_{ik}=T'_{\alpha\beta}\binom{\alpha'}{i}\binom{\beta'}{k}.$$

Указание. Умножить соотношения (а) на $\binom{i'}{r},\binom{k'}{s}$ и просуммировать по i' и k' от 1 до n.

Задача 6. Если

$$T'_{ik}=T_{\alpha\beta}\binom{\alpha}{i'}\binom{\beta}{k'};\qquad T''_{ik}=T'_{\alpha\beta}\binom{\alpha'}{i''}\binom{\beta'}{k''},$$

то

$$T''_{ik}=T_{\alpha\beta}\binom{\alpha}{i''}\binom{\beta}{k''}.$$

10. При построении основ аффинной геометрии мы исходили из понятия о контравариантном векторе и двух основных операциях— сложении векторов и умножении вектора на скаляр. Эти две операции позволили нам очень просто ввести понятие о параллелизме, о линейной векторфункции, которые в свою очередь мы положили в основу построения группы аффинных преобразований. Можно поступить и обратно: встать на „групповую"

точку зрения и в основу построения аффинной геометрии положить группу линейных преобразований. Тогда можно аналитически прийти к двум основным операциям алгебры векторов, характеризуя эти операции некоторыми отличительными их свойствами.

Мы рассмотрим вопрос применительно к контравариантным векторам; для ковариантных он решается вполне аналогично.

Прежде всего зададимся целью построить общий вид векторфункции

$$\mathbf{u}=\mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

обладающей следующим свойством: если к вектору $\mathbf{x}$ применить однородное аффинное преобразование, вектор $\mathbf{u}$ преобразуется тем же самым преобразованием (составляющие этих векторов преобразуются когредиентно). Мы будем говорить, что такая векторфункция когредиентно связана со своим аргументом.

Докажем следующую лемму:

Лемма 1. *Векторфункция* $\mathbf{u}=\mathbf{f}(\mathbf{x})$, *когредиентно связанная со своим аргументом, определяется следующим образом:*

$$u^i=a\,x^i,$$

где a — *некоторая постоянная.*

Доказательство. Условие, налагаемое леммой на векторфункцию, требует, чтобы

$$f^i(a^1{}_\alpha x^\alpha,\ a^2{}_\alpha x^\alpha,\dots a^n{}_\alpha x^\alpha)=a^i{}_\alpha f^\alpha(x^1,\ x^2,\dots x^n).$$

Так как в правой части фигурируют только коэффициенты $a^i{}_1,\ a^i{}_2,\dots a^i{}_n$, которые слева входят в функцию f^i в i-ом аргументе, то f^i зависит только от составляющей x^i. Следовательно,

(12,28)
$$f^i(a^i{}_1x^1+a^i{}_2x^2+\dots+a^i{}_nx^n)=$$
$$=a^i{}_1f^1(x^1)+a^i{}_2f^2(x^2)+\dots+a^i{}_nf^n(x^n).$$

Полагая в этом равенстве $x^{(1)}=1,\ x^{(2)}=x^{(3)}=\dots=x^{(n)}=0$, получаем:

(12,29) $$f^i(a^i{}_1)=a^i{}_1f^1(1),\ f^2(0)=f^3(0)=\dots=f^n(0)=0.$$

Теперь уже нетрудно показать, что $f^i(1)$ равны между собой. Полагая в соотношении (12,28) $x^{(1)}=x^{(2)}=1,\ x^{(3)}=x^{(4)}=\dots x^{(n)}=0$, получаем:

$$f^i(a^i{}_1+a^i{}_2)=a^i{}_1f^1(1)+a^i{}_2f^2(1),$$

откуда следует, что $f^1(1)=f^2(1)$. Аналогично выводим, что вообще $f^1(1)=f^2(1)=f^3(1)=\ldots=f^n(1)$. Учитывая (12,29), мы получаем, что $f^i=\alpha x^i$. Лемма доказана.

Решим аналогичный вопрос для векторфункции от двух аргументов. Если при применении одного и того же аффинного преобразования к аргументам $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ функция $\mathbf{u}=\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ преобразуется тем же самым преобразованием (векторы $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и $\mathbf{u}$ преобразуются когредиентно), мы будем говорить, что функция $\mathbf{u}$ когредиентно связана со своими аргументами.

Лемма 2. *Непрерывная векторфункция* $\mathbf{u}=\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})$, *когредиентно связанная со своими аргументами, определяется следующим образом:*

$$u^i=\alpha x^i+\beta y^i,$$

где α, β*—некоторые постоянные.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{x},\mathbf{y}$ — независимые векторы. Аналогично в общем тому, как это было сделано при доказательстве предыдущей леммы, мы устанавливаем, что f^i зависит только от x^i и y^i. Затем из равенства

$$(12,30)\qquad f^i(a^i_{\ 1}x^1+a^i_{\ 2}x^2+\ldots+a^i_{\ n}x^n,\ a^i_{\ 1}y^1+a^i_{\ 2}y^2+\\+\ldots+a^i_{\ n}y^n)=a^i_{\ 1}f^1(x^1,y^1)+a^i_{\ 2}f^2(x^2,y^2)+\ldots+a^i_{\ n}f^n(x^n,y^n),$$

полагая $x^{(1)}=x^{(2)}=1$, $x^{(3)}=x^{(4)}=\ldots=x^{(n)}=0$, $y^{(1)}==y^{(2)}=\ldots=y^{(n)}=0$, получаем:

$$f^i(a^i_{\ 1}+a^i_{\ 2},0)=a^i_{\ 1}f^1(1,0)+a^i_{\ 2}f^2(1,0),$$

откуда

$$f^1(1,0)=f^2(1,0),\ \text{т. е.}\ f^i(x^i,0)=\alpha x^i.$$

Аналогично этому выводим, что $f^i(0,y^i)=\beta y^i$.

Из (12, 30) получаем, полагая $x^{(1)}=1$, $x^{(2)}=x^{(3)}=\ldots==x^{(n)}=0$, $y^{(1)}=0$, $y^{(2)}=1$, $y^{(3)}=y^{(4)}=\ldots=y^{(n)}=0$,

$$f^i(a^i_{\ 1},a^i_{\ 2})=a^i_{\ 1}\alpha+a^i_{\ 2}\beta.$$

Следовательно, $u^i=\alpha x^i+\beta y^i$.

Требование непрерывности распространяет справедливость леммы на тот случай, когда аргументы — зависимые векторы.

Теперь уже нетрудно выделить те свойства, которые полностью характеризуют операции сложения вектора и умножения вектора на скаляр.

Теорема 1. *Существует одна и только одна непрерывная векторфункция* $\mathbf{u}=\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})$, *когредиентно связанная со своими аргументами и удовлетворяющая следующим двум требованиям:*

1) $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{f}(\mathbf{y},\mathbf{x})$
2) $\mathbf{f}(\mathbf{x},0)=\mathbf{x}$.

Векторфункция эта определяется следующим образом:

$$u^i=x^i+y^i.$$

Доказательство. На основании леммы 2, $f^i(\mathbf{x},\mathbf{y})==\alpha x^i+\beta y^i$. Из свойства (1) вытекает, что $\alpha=\beta$. Из равенства $f^i(\mathbf{x},0)=x^i$ получаем $\alpha=\beta=1$.

Построенную векторфункцию назовем суммой векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ и будем обозначать ее $\mathbf{x}+\mathbf{y}$.

Теорема 2. *Существует одна и только одна векторфункция* $\mathbf{u}=\mathbf{f}(\alpha,\mathbf{x})$, *зависящая от скаляра* α *и вектора* $\mathbf{x}$, *когредиентно связанная с аргументом* $\mathbf{x}$ *и обладающая следующими свойствами:*

1) *функция непрерывна относительно аргумента* α,
2) $\mathbf{f}(\alpha+\beta,\mathbf{x})=\mathbf{f}(\alpha,\mathbf{x})+\mathbf{f}(\beta,\mathbf{x})$,
3) $\mathbf{f}(1,\mathbf{x})=\mathbf{x}$.

Эта функция определяется следующим образом:

$$u^i=\alpha x^i.$$

Доказательство. На основании леммы 1, функция $\mathbf{f}(\alpha,\mathbf{x})$ определяется следующей формулой:

$$f^i=\varphi(\alpha)x^i.$$

На основании свойства (2) имеем:

$$\varphi(\alpha+\beta)=\varphi(\alpha)+\varphi(\beta).$$

Из непрерывности функции $\mathbf{f}(\alpha,\mathbf{x})$ вытекает, что $\varphi(\alpha)=\lambda\alpha$, где λ—некоторая постоянная. Наконец, из свойства (3) выводим что $\lambda=1$. Итак,

$$u^i=\alpha x^i.$$

Мы определили, таким образом, и действие умножения вектора на скаляр.

11. Перейдем к анализу скалярного произведения двух векторов.

Мы ввели это произведение, пользуясь тем, что контравариантный и ковариантный векторы определяют в аффинном пространстве некоторое число, которое подчиняется закону дистрибутивности относительно операции сложения векторов и ассоциативности относительно операции умножения вектора на скаляр. Далее мы показали, что функция эта является инвариантом при аффинных преобразованиях пространства.

Возникает вопрос, единственна ли такая функция и какими свойствами может быть она охарактеризована.

Назовем скалярным произведением двух векторов функцию φ, удовлетворяющую следующим требованиям:

1) она линейна относительно каждого аргумента (свойство дистрибутивности относительно операции сложения векторов и ассоциативности относительно умножения вектора на скаляр),

2) она инвариантна при преобразованиях аффинной группы.

Нетрудно видеть, что билинейная функция с двумя аргументами одного и того же рода инвариантной быть не может. В самом деле, среди аффинных преобразований имеется лучистое расширение:

$$\mathbf{x}' = \alpha\,\mathbf{x}.$$

При применении его к обоим аргументам билинейной функции $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ получаем:

$$\varphi(\mathbf{x}', \mathbf{y}') = \alpha^2 \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Аналогично обстоит дело с функцией от 2 ковариантных аргументов.

Рассмотрим билинейную функцию:

$$\varphi(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{v}}) = A_\alpha{}^\beta\, u^\alpha\, v_\beta,$$

где

$$A_\alpha{}^\beta = \varphi(\underset{\alpha}{\mathbf{e}}, \overset{\beta}{\mathbf{e}}).$$

Посмотрим, какие ограничения на коэффициенты $A_\alpha{}^\beta$ накладывает требование об инвариантности функции $\varphi(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{v}})$ при аффинных преобразованиях.

Рассмотрим аффинное преобразование пространства, которое переводит i-ый координатный контравариантный вектор $\underset{i}{\mathbf{e}}$ в $\underset{k}{\mathbf{e}}$, а k-ый — в i-ый, все же остальные координатные векторы оставляет без изменения:

$$\underset{i}{\mathbf{e}} \to \underset{k}{\mathbf{e}},$$
$$\underset{k}{\mathbf{e}} \to \underset{i}{\mathbf{e}},$$
$$\underset{r}{\mathbf{e}} \to \underset{r}{\mathbf{e}} \quad (r \neq i,\ k)$$

(стрелками указан переход векторов при разбираемом аффинном преобразовании пространства). Тогда, как нетрудно видеть,

$$\overset{i}{\mathbf{e}} \to \overset{k}{\mathbf{e}},$$
$$\overset{k}{\mathbf{e}} \to \overset{i}{\mathbf{e}},$$
$$\overset{r}{\mathbf{e}} \to \overset{r}{\mathbf{e}} \quad (r \neq i,\ k).$$

Следовательно,

$$\varphi(\underset{i}{\mathbf{e}}, \overset{i}{\mathbf{e}}) \to \varphi(\underset{k}{\mathbf{e}}, \overset{k}{\mathbf{e}}).$$

Из свойства инвариантности функции вытекает, что

$$A_i{}^i = A_k{}^k.$$

Таким образом,

$$A_1{}^1 = A_2{}^2 = \ldots = A_n{}^n.$$

Рассмотрим теперь аффинное преобразование, при котором координатные векторы преобразуются следующим образом:

$$\underset{i}{\mathbf{e}} \to -\underset{i}{\mathbf{e}},$$
$$\underset{r}{\mathbf{e}} \to \underset{r}{\mathbf{e}} \quad (r \neq i).$$

Ковариантные векторы преобразуются так же:

$$\overset{i}{\mathbf{e}} \to -\overset{i}{\mathbf{e}},$$
$$\overset{r}{\mathbf{e}} \to \overset{r}{\mathbf{e}} \quad (r \neq i).$$

Получаем:

$$A_i{}^k = \varphi(\underset{i}{\mathbf{e}}, \overset{k}{\mathbf{e}}) \to -\varphi(\underset{i}{\mathbf{e}}, \overset{k}{\mathbf{e}}) = -A_i{}^k \ (i \neq k).$$

Отсюда:

$$A_i{}^k = 0,\ (i \neq k),\ \text{т. е. } \varphi(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{v}}) = \sigma u^\alpha v_\alpha,$$

где σ — некоторая постоянная.

Мы можем, таким образом, формулировать теорему:

Теорема 3. *Если отвлечься от некоторого произвольного числового множителя, то существует одно и только одно скалярное произведение двух векторов в аффинном пространстве:*

$$\mathbf{u}\dot{\mathbf{v}} = u^\alpha\, v_\alpha.$$

12. Можно поставить более общий вопрос—о скалярных произведениях нескольких векторов, понимая под ними многолинейные функции, инвариантные при группе аффинных преобразований. При решении этой задачи тот элементарный прием, который мы употребляли при анализе понятия о произведении двух векторов, приводит к слишком громоздким выкладкам, и потому мы ограничимся ссылкой на основную теорему теории инвариантов линейных преобразований, не приводя ее доказательства. Согласно этой теореме, каждый относительный целый рациональный инвариант системы контравариантных и ковариантных векторов есть целая рациональная функция от трех типов основных инвариантов: скалярных произведений $\mathbf{u}\mathbf{v}$ и определителей $(\underset{1}{\mathbf{u}}\underset{2}{\mathbf{u}}\dots\underset{n}{\mathbf{u}})$ и $(\overset{1}{\mathbf{v}}\overset{2}{\mathbf{v}}\dots\overset{n}{\mathbf{v}})$, составленных из векторов, входящих в систему.

Отсюда вытекает, что многолинейная функция, инвариантная при аффинных преобразованиях, представляет собою многолинейную форму от скалярных произведений контравариантных и ковариантных аргументов, входящих в эту функцию.

Рекомендуем читателю, в качестве упражнения, произвести анализ скалярного произведения двух m-векторов, пользуясь приемом, аналогичным тому, который был применен выше при доказательстве теоремы 3.

§ 13. Комплексное аффинное пространство.

В предыдущих параграфах вопросы геометрии аффинного пространства мы рассматривали в предположении, что пространство это реальное. Но никакого затруднения не представляет обобщить эти результаты на комплексное многообразие. Конечно, в некоторых местах необходимо сделать тогда незначительные изменения. Так например, мы имели теорему, что скалярная непрерывная функция от векторного аргумента, удовлетворяющая соотношению

$$\varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\varphi(\mathbf{x})+\varphi(\mathbf{y}),$$

является линейной. В комплексном пространстве свойства непрерывности недостаточно: оно должно быть заменено более сильным требованием, например, чтобы функция $\varphi(\mathbf{x})$ была аналитической относительно составляющих вектора $\mathbf{x}$.

Мы не будем пересматривать заново всех вопросов, которые были затронуты в предыдущих параграфах, так как почти все они переносятся без всякого изменения в комплексное пространство. Условимся, что дальнейшее изучение алгебры тензоров будет происходить в комплексном аффинном пространстве. В тех случаях, когда изучение какого-нибудь вопроса в вещественном пространстве требует специальных исследований, мы будем выделять эти вопросы особо. Отметим, что исследование некоторых задач в вещественном пространстве значительно упрощается, если применять более общие методы геометрии комплексного многообразия. В этих случаях мы будем пользоваться комплексным пространством как вспомогательным инструментом для изучения вопросов вещественной области.

Комплексный вектор (например контравариантный) может быть выражен при помощи двух вещественных векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$:

$$(13,1)\qquad \mathbf{x}=\mathbf{u}+i\mathbf{v},\qquad x^a=u^a+iv^a.$$

Пара действительных векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ может служить геометрической интерпретацией комплексного вектора в реальном пространстве. Комплексно-сопряженный вектор условимся обозначать чертой:

$$(13,2)\qquad \bar{\mathbf{x}}=\mathbf{u}-i\mathbf{v},\qquad \bar{x}^a=u^a-iv^a.$$

Следует заметить, что понятие о комплексной сопряженности двух векторов имеет геометрический смысл только с точки зрения вещественного пространства,—когда в основу положена группа действительных аффинных преобразований. Если же перейти к координатной системе, определяемой комплексными векторами, то в этой системе составляющие векторов (13,1) и (13,2) уже не будут комплексно-сопряженными величинами.

Пара комплексно-сопряженных векторов определяет в вещественном пространстве реальную двумерную плоскость. В самом деле, выбирая в соотношении

$$\mathbf{y}=\alpha(\mathbf{u}+i\mathbf{v})+\beta(\mathbf{u}-i\mathbf{v})$$

за α и β два комплексно-сопряженных числа: $\alpha=\mu+i\nu$, $\beta=\mu-i\nu$, мы получим двумерный вещественный пучок:

$$\mathbf{y}=2(\mu\mathbf{u}-\nu\mathbf{v}).$$

Аналогично, если мы имеем комплексный m-мерный пучок E_m, определяемый комплексным базисом $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}},\dots\underset{m}{\mathbf{u}}$, то этот пучок вместе с комплексно-сопряженным пучком $\bar{E}_m$ $\{\underset{1}{\bar{\mathbf{u}}}, \underset{2}{\bar{\mathbf{u}}},\dots\underset{m}{\bar{\mathbf{u}}}\}$ определит в вещественном пространстве $2m$-мерную реальную плоскость.

§ 14. Понятие о тензоре.

1. В основу определения тензора положим многолинейную скалярную функцию от векторных аргументов.

Многолинейная функция $\varphi(\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \ldots \underset{r}{\mathbf{x}}, \overset{1}{\mathbf{x}}, \overset{2}{\mathbf{x}}, \ldots \overset{s}{\mathbf{x}})$ определяет в каждой системе координат n^{r+s} чисел

$$(14,1)\qquad A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r}{}^{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_s} = \varphi(\underset{\alpha_1}{\mathbf{e}}, \underset{\alpha_2}{\mathbf{e}}, \ldots \underset{\alpha_r}{\mathbf{e}}, \overset{\beta_1}{\mathbf{e}}, \overset{\beta_2}{\mathbf{e}}, \ldots \overset{\beta_s}{\mathbf{e}})$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \beta_1, \beta_2, \ldots = 1, 2, \ldots n),$$

являющихся коэффициентами той многолинейной формы, которая соответствует этой функции в счете с составляющими.

При параллельном переносе координатного n-эдра числа $A_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}^{\beta_1 \ldots \beta_s}$ не изменяются. Посмотрим, как преобразуются они при изменении векторов координатного n-эдра (в дальнейшем под преобразованиями координат мы будем подразумевать однородные линейные преобразования, связанные с изменением векторов координатного n-эдра). Обозначим числа (14,1) в системе координат $K'(\underset{1}{\mathbf{e}'}, \underset{2}{\mathbf{e}'}, \ldots \underset{n}{\mathbf{e}'})$ через

$$A_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}^{\beta_1 \ldots \beta_s'} = \varphi(\underset{1}{\mathbf{e}'}, \ldots \underset{r}{\mathbf{e}'}, \overset{1}{\mathbf{e}'}, \ldots \overset{s}{\mathbf{e}'}).$$

Выражая новые координатные векторы через старые:

$$\underset{i}{\mathbf{e}'} = \underset{\alpha}{\mathbf{e}} \binom{\alpha}{i'}, \qquad \overset{i}{\mathbf{e}'} = \overset{\alpha}{\mathbf{e}} \binom{i'}{\alpha},$$

получаем

$$(14,2)\qquad A_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}^{\beta_1 \ldots \beta_s'} = A_{\sigma_1 \ldots \sigma_r}{}^{\tau_1 \ldots \tau_s} \binom{\sigma_1}{\alpha_1'} \ldots \binom{\sigma_r}{\alpha_r'} \binom{\beta_1'}{\tau_1} \ldots \binom{\beta_s'}{\tau_s}.$$

Таким образом, при переходе от одной координатной системы к другой числа $A_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}^{\beta_1 \ldots \beta_s}$ преобразуются линейно. Нетрудно видеть, что преобразования (14,2) образуют группу, изоморфную с группой однородных линейных преобразований декартовых координат.

Таким образом, с и с т е м а ч и с е л $A_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}^{\beta_1 \ldots \beta_s}$ о п р е д е л я е т к о в а р и а н т н у ю в е л и ч и н у в а ф ф и н н о м п р о с т р а н с т в е с группой преобразований (14,2). Эта ковариантная величина называется т е н з о р о м $(r+s)$-го порядка, а числа $A_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}^{\beta_1 \ldots \beta_s}$ — составляющими этого тензора.

Если функция φ, лежащая в основе определения тензора, имеет исключительно контравариантные аргументы, т. е. если составляющие тензора имеют только нижние индексы: $A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r}$, тензор называется к о в а р и а н т н ы м.

Если у φ аргументы все ковариантные, т. е. у составляющих тензора только одни верхние индексы: $A^{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r}$, тензор называется к о н т р а в а р и а н т н ы м.

Наконец, в общем случае, когда у составляющих имеются и верхние и нижние индексы, тензор называется с м е ш а н н ы м: $A_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}^{\beta_1 \ldots \beta_s}$.

Составляющие тензора будем обозначать большими или малыми буквами. Порядок следования ковариантных (нижних) и контравариантных (верхних) индексов может быть самый разнообразный, например $a_i{}^{kl}{}_p{}^q{}_{st}$. Некоторые авторы записывают верхние и нижние индексы одни под другими; например приведенный выше тензор $a_i{}^{kl}{}_p{}^q{}_{st}$ обозначается так: a^{klq}_{ipst}; однако это может приводить к недоразумениям (особенно при изучении метрического пространства), и потому эту запись следует избегать.

2. При определении понятия о тензоре мы базировались на теории многолинейных функций. Можно также в основу определения тензора положить закон преобразования составляющих (14,2) и ввести тензор как ковариантную величину, определяемую системой составляющих $A_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}^{\beta_1 \ldots \beta_s}$.

Тогда, наоборот, можно показать, что численное значение формы:

$$\varphi = A_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}^{\beta_1 \ldots \beta_s} \underset{1}{x}^{\alpha_1} \ldots \underset{r}{x}^{\alpha_r} \overset{1}{x}_{\beta_1} \ldots \overset{s}{x}_{\beta_s}$$

не зависит от выбора системы координат. В самом деле,

$$\varphi' = A_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}^{\beta_1 \ldots \beta_s'} \underset{1}{x}^{\alpha_1'} \ldots \underset{r}{x}^{\alpha_r'} \overset{1}{x}'_{\beta_1} \ldots \overset{s}{x}'_{\beta_s} =$$

$$= A_{\sigma_1 \ldots \sigma_r}{}^{\tau_1 \ldots \tau_s} \binom{\sigma_1}{\alpha_1'} \ldots \binom{\sigma_r}{\alpha_r'} \binom{\beta_1'}{\tau_1} \ldots \binom{\beta_s'}{\tau_s} \underset{1}{x}^{\lambda_1} \ldots$$

$$\ldots \underset{r}{x}^{\lambda_r} \overset{1}{x}_{\mu_1} \ldots \overset{s}{x}_{\mu_s} \binom{\alpha_1'}{\lambda_1} \ldots \binom{\alpha_r'}{\lambda_r} \binom{\mu_1}{\beta_1'} \ldots \binom{\mu_s}{\beta_s'}.$$

Пользуясь соотношениями:

$$\binom{i}{\alpha'}\binom{\alpha'}{k} = \delta^i_k, \qquad \binom{i'}{\alpha}\binom{\alpha}{k'} = \delta^i_k,$$

получаем:

$$\varphi' = A_{\sigma_1 \ldots \sigma_r}{}^{\tau_1 \ldots \tau_s} \underset{1}{x}{}^{\sigma_1} \ldots \underset{r}{x}{}^{\sigma_r} \overset{1}{x}_{\tau_1} \ldots \overset{s}{x}_{\tau_s} = \varphi.$$

3. Теория тензоров аффинного пространства является, в сущности говоря, теорией многолинейных функций от векторных аргументов (многолинейных форм). Поэтому некоторые авторы определяют тензор как многолинейную форму и операции над тензорами производят при помощи счета с формами.

В истории развития тензорного анализа первые этапы представляли собою именно изучение алгебраических и дифференциальных форм (Gauss, Riemann, Christoffel, Lipschitz).

4. Два тензора называются равными, если равны соответствующие им m-линейные функции. У равных тензоров составляющие попарно равны:

$$A_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}^{\beta_1 \ldots \beta_s} = B_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}^{\beta_1 \ldots \beta_s}.$$

Тензор называется нулевым, если все его составляющие равны нулю.

5. За тензор нулевого порядка принимается скаляр—абсолютный инвариант при преобразованиях координат.

Векторы можно рассматривать как тензоры 1-го порядка. В самом деле, возьмем линейную функцию $\varphi(\mathbf{x})$. Она определяет n составляющих ковариантного тензора 1-го порядка:

$$A_\alpha = \varphi(\underset{\alpha}{\mathbf{e}}).$$

При преобразованиях координат эти числа трансформируются как составляющие ковариантного вектора:

$$A'_\alpha = A_\sigma \left(\begin{matrix}\sigma \\ \alpha'\end{matrix}\right).$$

Следовательно, A_α можно принять за составляющие ковариантного вектора, конечная гиперплоскость которого определяется уравнением:

$$\varphi(\mathbf{x}) = A_\alpha x^\alpha = 1.$$

Аналогично обстоит дело с контравариантным тензором 1-го порядка.

6. Если многолинейная функция $\varphi(\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \ldots \underset{r}{\mathbf{x}}, \overset{1}{\mathbf{x}}, \overset{2}{\mathbf{x}}, \ldots \overset{s}{\mathbf{x}})$ симметрична или антисимметрична относительно ряда однородных аргументов, то говорят, что тензор, соответствующий этой функции, симметричен или антисимметричен относительно соответствующих индексов. Тензор не смешанного типа, симметричный или антисимметричный относительно всех своих индексов, называется соответственно с и м м е т р и ч е с к и м или а н т и с и м м е т р и ч е с к и м.

Антисимметрическая n-линейная форма имеет, как мы знаем, следующий вид:

$$\varphi(\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \ldots \underset{n}{\mathbf{x}}) = K_1 (\underset{1}{\mathbf{x}} \underset{2}{\mathbf{x}} \ldots \underset{n}{\mathbf{x}}),$$
$$\psi(\overset{1}{\mathbf{x}}, \overset{2}{\mathbf{x}}, \ldots \overset{n}{\mathbf{x}}) = K_2 (\overset{1}{\mathbf{x}} \overset{2}{\mathbf{x}} \ldots \overset{n}{\mathbf{x}}).$$

Отсюда следует, что антисимметрические тензоры n-го порядка (ковариантный и контравариантный), определяются составляющими:

$$A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} = K_1 i_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}, \quad A^{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} = K_2 i_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}, \tag{14,3}$$

где через $i_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}$ обозначена величина, равная: 1) нулю, если среди индексов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ имеются одинаковые, 2) $+1$, если подстановка $\left(\begin{matrix}1 & 2 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n\end{matrix}\right)$ — четная, 3) -1, если эта подстановка нечетная. Коэффициенты K_1 и K_2 при преобразовании координат трансформируются по следующим формулам:

$$K_1' = K_1 |X|^{-1}$$
$$K_2' = K_2 |X|.$$

7. Существует ряд тензоров, играющих фундаментальную роль в изучении аффинного пространства.

Возьмем билинейную функцию, являющуюся скалярным произведением ковариантного и контравариантного векторов:

$$\varphi(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{y}}) = \mathbf{x}\dot{\mathbf{y}}.$$

Имеем:

$$\varphi(\underset{\alpha}{\mathbf{e}}, \overset{\beta}{\mathbf{e}}) = \underset{\alpha}{\mathbf{e}} \overset{\beta}{\mathbf{e}} = \delta_\alpha^\beta.$$

Таким образом, в любой системе координат соответствующий смешанный тензор имеет составляющими 0 или 1. Этот тензор называется е д и н и ч н ы м. Его составляющие будем записывать при помощи символа Kronecker'а δ_h^i, отступая от принятого правила—не ставить один индекс над другим.

Рассмотрим скалярное произведение двух m-векторов: $\mathbf{U} = [\underset{1}{\mathbf{u}}\,\underset{2}{\mathbf{u}}\dots\underset{m}{\mathbf{u}}]$ и $\dot{\mathbf{V}} = [\overset{1}{\mathbf{v}}\,\overset{2}{\mathbf{v}}\dots\overset{m}{\mathbf{v}}]$. Это произведение определяет $2m$-линейную функцию:

$$(14,4)\qquad \varphi(\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \dots \underset{m}{\mathbf{u}}, \overset{1}{\mathbf{v}}, \overset{2}{\mathbf{v}}, \dots \overset{m}{\mathbf{v}}) = \mathbf{U}\dot{\mathbf{V}} = \begin{vmatrix} \underset{1}{\mathbf{u}}\overset{1}{\mathbf{v}} & \dots & \underset{1}{\mathbf{u}}\overset{m}{\mathbf{v}} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \underset{m}{\mathbf{u}}\overset{1}{\mathbf{v}} & \dots & \underset{m}{\mathbf{u}}\overset{m}{\mathbf{v}} \end{vmatrix}.$$

Составляющие соответствующего тензора выражаются формулой:

$$(14,5)\qquad \varphi(\underset{\alpha_1}{\mathbf{e}}, \dots \underset{\alpha_m}{\mathbf{e}}, \overset{\beta_1}{\mathbf{e}} \dots \overset{\beta_m}{\mathbf{e}}) = \begin{vmatrix} \underset{\alpha_1}{\mathbf{e}}\overset{\beta_1}{\mathbf{e}} & \dots & \underset{\alpha_1}{\mathbf{e}}\overset{\beta_m}{\mathbf{e}} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \underset{\alpha_m}{\mathbf{e}}\overset{\beta_1}{\mathbf{e}} & \dots & \underset{\alpha_m}{\mathbf{e}}\overset{\beta_m}{\mathbf{e}} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \delta^{\beta_1}_{\alpha_1} & \dots & \delta^{\beta_m}_{\alpha_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta^{\beta_1}_{\alpha_m} & \dots & \delta^{\beta_m}_{\alpha_m} \end{vmatrix} = \delta^{\beta_1\dots\beta_m}_{\alpha_1\dots\alpha_m},$$

где через $\delta^{\alpha_1\dots\alpha_m}_{\beta_1\dots\beta_m}$ обозначен так называемый обобщенный символ Kronecker'a. Он определяется следующим образом: если индексы $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$ все различны и индексы $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_m$ получены из $\alpha_1 \dots \alpha_m$ некоторой перестановкой, то он равен $+1$ или -1, смотря по тому, четной или нечетной является подстановка $\begin{pmatrix}\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m \\ \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m\end{pmatrix}$; во всех остальных случаях $\delta^{\beta_1\dots\beta_m}_{\alpha_1\dots\alpha_m} = 0$.

Составляющие тензора, соответствующего функции (14,4), мы будем обозначать обобщенными символами Kronecker'a $\delta^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}_{\beta_1\beta_2\dots\beta_m}$, отступая снова от правила записи верхних и нижних индексов. Отметим, что составляющие рассматриваемого тензора имеют одно и то же численное значение в любой системе координат.

8. Понятие о тензоре может быть несколько обобщено. n^{r+s} чисел с законом преобразования:

$$A_{\alpha_1\dots\alpha_r}{}^{\beta_1\dots\beta_s'} = |X|^N A_{\sigma_1\dots\sigma_r}{}^{\tau_1\dots\tau_s}\binom{\sigma_1}{\alpha_1'}\dots\binom{\sigma_r}{\alpha_r'}\binom{\beta_1'}{\tau_1}\dots\binom{\beta_s'}{\tau_s},$$

где

$$|X| = \begin{vmatrix} \binom{1'}{1} & \dots & \binom{1'}{n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \binom{n'}{1} & \dots & \binom{n'}{n} \end{vmatrix},$$

определяют, как нетрудно обнаружить, ковариантную величину в аффинном пространстве, которая называется *относительным тензором веса* N *и порядка* $(r+s)$. Если $N=0$, мы получаем обычный (так называемый *абсолютный*) тензор. Тензор нулевого порядка веса N называется *относительным скаляром веса* N.

В основу определения относительного тензора может быть положена многолинейная скалярная функция от векторных аргументов, но представляющая собою не абсолютный, а относительный инвариант при преобразованиях координат.

Теория относительных тензоров незначительно отличается от теории абсолютных тензоров. В настоящем курсе мы будем иметь дело исключительно с абсолютными тензорами, затрагивая относительные тензоры только в задачах.

Задача 1. Если тензор симметричен относительно индексов α_r и α_s и антисимметричен относительно индексов α_s и α_t, то он равен нулю.

Задача 2. Рассмотрим матрицы тензоров 2-го порядка:

$$\|a_{\alpha\beta}\| = \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}, \qquad \|a^{\alpha\beta}\| = \begin{Vmatrix} a^{11} & \dots & a^{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a^{n1} & \dots & a^{nn} \end{Vmatrix},$$

$$\|a_\alpha{}^\beta\| = \begin{Vmatrix} a_1{}^1 & \dots & a_1{}^n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n{}^1 & \dots & a_n{}^n \end{Vmatrix}, \qquad \|a^\alpha{}_\beta\| = \begin{Vmatrix} a^1{}_1 & \dots & a^1{}_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a^n{}_1 & \dots & a^n{}_n \end{Vmatrix}.$$

Показать, что при преобразованиях координат эти матрицы трансформируются по следующим формулам:

$$\|a_{\alpha\beta'}\| = X_c^{-1}\|a_{\alpha\beta}\|X^{-1}, \qquad \|a^{\alpha\beta'}\| = X\|a^{\alpha\beta}\|X_c,$$
$$\|a_\alpha{}^{\beta'}\| = X_c^{-1}\|a_\alpha{}^\beta\|X_c, \qquad \|a^\alpha{}_\beta{}'\| = X\|a^\alpha{}_\beta\|X^{-1},$$

где

$$X = \begin{Vmatrix} \binom{1'}{1} & \dots & \binom{1'}{n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \binom{n'}{1} & \dots & \binom{n'}{n} \end{Vmatrix}.$$

Задача 3. Если у относительного ковариантного антисимметрического тензора порядка n и веса $=1$ составляющие в некоторой системе координат выражаются формулой:

$$a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = i_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n},$$

(см. раздел 6 настоящего параграфа), то они имеют то же значение во всякой другой системе координат. Аналогичный вопрос о контравариантном тензоре веса $=-1$.

Задача 4. Пусть $a_{\alpha\beta}$, $a^{\alpha\beta}$, $a_\alpha{}^\beta$, $a^\alpha{}_\beta$ — тензоры 2-го порядка; тогда определитель $|a_{\alpha\beta}|$ является относительным скаляром (инвариантом) веса $=-2$, $|a^{\alpha\beta}|$ — относительным скаляром веса $=2$, $|a_\alpha{}^\beta|$ и $|a^\alpha{}_\beta|$ — абсолютными скалярами.

Задача 5. Составляющие ковариантного антисимметрического тензора $(n-1)$-го порядка можно принять за составляющие контравариантного относительного тензора 1-го порядка веса $=-1$. Составляющие контравариантного антисимметрического тензора $(n-1)$-го порядка можно принять за составляющие ковариантного тензора 1-го порядка веса $=1$. Как обобщить это положение на антисимметрические тензоры любого порядка?

§ 15. Алгебраические операции над тензорами.

1. Сложение тензоров. Сумма двух многолинейных функций с одинаковым числом ковариантных и контравариантных аргументов и с одинаковыми соответствующими аргументами дает многолинейную функцию с тем же числом ковариантных и контравариантных аргументов. Сложение многолинейных функций определяет операцию сложения соответствующих тензоров. Тензор $C_{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}^{\beta_1\ldots\beta_s}$, составляющие которого выражаются формулами:

$$C_{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}^{\beta_1\ldots\beta_s} = A_{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}^{\beta_1\ldots\beta_s} + B_{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}^{\beta_1\ldots\beta_s},$$

называется суммой тензоров

$$A_{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}^{\beta_1\ldots\beta_s} \text{ и } B_{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}^{\beta_1\ldots\beta_s}.$$

Вычитание определяется как действие, обратное сложению.

2. Умножение тензоров. Произведение двух многолинейных функций: $\varphi(\underset{1}{\mathbf{x}}, \ldots \underset{r}{\mathbf{x}}, \overset{1}{\mathbf{x}}, \ldots \overset{s}{\mathbf{x}})$ и $\psi(\underset{1}{\mathbf{y}}, \ldots \underset{p}{\mathbf{y}}, \overset{1}{\mathbf{y}}, \ldots \overset{q}{\mathbf{y}})$ определяет многолинейную функцию ω:

$$\omega(\underset{1}{\mathbf{x}}, \ldots \underset{r}{\mathbf{x}}, \overset{1}{\mathbf{x}}, \ldots \overset{s}{\mathbf{x}}, \underset{1}{\mathbf{y}}, \ldots \underset{p}{\mathbf{y}}, \overset{1}{\mathbf{y}}, \ldots \overset{q}{\mathbf{y}}) =$$

$$= \varphi(\underset{1}{\mathbf{x}}, \ldots \underset{r}{\mathbf{x}}, \overset{1}{\mathbf{x}}, \ldots \overset{s}{\mathbf{x}})\, \psi(\underset{1}{\mathbf{y}}, \ldots \underset{p}{\mathbf{y}}, \overset{1}{\mathbf{y}}, \ldots \overset{q}{\mathbf{y}}),$$

имеющую $r+p$ контравариантных и $s+q$ ковариантных аргументов. Обозначая тензоры, соответствующие функциям φ, ψ, ω, через

$$A_{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}^{\beta_1\ldots\beta_s}, \quad B_{\gamma_1\ldots\gamma_p}{}^{\delta_1\ldots\delta_q}, \quad C_{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}^{\beta_1\ldots\beta_s}{}_{\gamma_1\ldots\gamma_p}{}^{\delta_1\ldots\delta_q},$$

имеем:

$$C_{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}^{\beta_1\ldots\beta_s}{}_{\gamma_1\ldots\gamma_p}{}^{\delta_1\ldots\delta_q} = A_{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}^{\beta_1\ldots\beta_s}\, B_{\gamma_1\ldots\gamma_p}{}^{\delta_1\ldots\delta_q}.$$

Тензор C называется произведением тензоров A и B (иногда употребляется термин „внешнее произведение").

3. Контрактирование смешанных тензоров. Возьмем билинейную функцию $\varphi(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{y}})$. В § 10 мы видели, что $\varphi(\underset{\alpha}{\mathbf{u}}, \overset{\alpha}{\mathbf{u}})$ является числом, не зависящим от того, при помощи какой пары сопряженных систем мы произвели контрактирование. Следовательно,

$$\varphi(\underset{\alpha}{\mathbf{e}'}, \overset{\alpha}{\mathbf{e}'}) = \varphi(\underset{\alpha}{\mathbf{e}}, \overset{\alpha}{\mathbf{e}}),$$

или, обозначая тензор, соответствующий функции $\varphi(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{y}})$, через $a_\alpha{}^\beta$, имеем:

$$a_\alpha{}^{\alpha'} = a_\alpha{}^\alpha.$$

Мы получили, таким образом, инвариант, не зависящий от выбора координатной системы.

Вообще, имея смешанный тензор, можно, контрактируя его по нескольким парам индексов, получать тензор более низкого порядка. Например, из тензора 7-го порядка $a_\alpha{}^{\beta\gamma}{}_\delta{}^\varepsilon{}_{\zeta\eta}$ мы получаем, контрактируя 3-й индекс с 7-ым, 4-ый с 5-ым, тензор 3-го порядка:

$$b_\alpha{}^\beta{}_\zeta = a_\alpha{}^{\beta\gamma}{}_\delta{}^\delta{}_{\zeta\gamma}.$$

Отметим следующие формулы, относящиеся к контрактированию основных тензоров аффинного пространства:

$$\delta^\alpha_\alpha = n, \qquad \delta^{\alpha_1\ldots\alpha_r\,\sigma_1\ldots\sigma_s}_{\beta_1\ldots\beta_r\,\sigma_1\ldots\sigma_s} = \frac{(n-r)!}{(n-r-s)!}\,\delta^{\alpha_1\ldots\alpha_r}_{\beta_1\ldots\beta_r}.$$

4. Операция внутреннего умножения тензоров получается как комбинация действий умножения и контрактирования.

Пусть даны два тензора $A_{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}^{\beta_1\ldots\beta_s}$, $B_{\gamma_1\ldots\gamma_p}{}^{\delta_1\ldots\delta_q}$. Перемножаем их и полученный тензор контрактируем, причем один из индексов, по которым ведется контрактирование, берем у тензора A, другой — у тензора B. Получаем тензор $(r+s+p+q-2)$-го порядка

$$A_{\alpha_1 \ldots \sigma \ldots \alpha_r}{}^{\beta_1 \ldots \beta_s} \; B_{\gamma_1 \ldots \gamma_p}{}^{\delta_1 \ldots \sigma \ldots \delta_q},$$

представляющий собою внутреннее произведение тензоров A и B. При внутреннем перемножении можно, конечно, контрактировать и несколько пар индексов.

Пример. Пусть $u_\alpha{}^\beta$, $v_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ и w_α — тензоры соответственно 2-го, 3-го и 1-го порядков. Перемножая внутренно, получаем: $u_\alpha{}^\beta w_\beta$ — тензор 1-го порядка, $u_\alpha{}^\beta v_\beta{}^\alpha{}_\gamma$ — тензор 1-го порядка, $u_\alpha{}^\beta v_\beta{}^\gamma{}_\delta$ — тензор 3-го порядка.

Пользуясь операцией внутреннего умножения, можно каждому тензору отнести многолинейную векторфункцию. Например, имея тензор $A_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_m}$, строим $(m-1)$-линейную ковариантную векторфункцию $\dot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{A}}(\underset{2}{\mathbf{x}}, \underset{3}{\mathbf{x}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{x}})$, определяемую ее составляющими:

$$y_{\alpha_1} = A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m} \underset{2}{x}^{\alpha_2} \underset{3}{x}^{\alpha_3} \ldots \underset{m}{x}^{\alpha_m}.$$

Обратно, если дана многолинейная векторфункция, например

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\,(\underset{1}{\mathbf{x}}, \ldots \underset{r}{\mathbf{x}}, \overset{1}{\mathbf{x}}, \ldots \overset{s}{\mathbf{x}}), \tag{15,1}$$

то она определяет тензор $(r+s+1)$-го порядка. В самом деле, умножая обе части равенства скалярно на произвольный ковариантный вектор $\dot{\mathbf{z}}$, получаем $(m+1)$-линейную скалярную функцию:

$$\mathbf{y}\dot{\mathbf{z}} = \dot{\mathbf{z}}\mathbf{A}\,(\underset{1}{\mathbf{x}}, \ldots \underset{r}{\mathbf{x}}, \overset{1}{\mathbf{x}}, \ldots \overset{s}{\mathbf{x}}).$$

Ей соответствует тензор с составляющими:

$$T^\alpha{}_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}^{\beta_1 \ldots \beta_s} = \overset{\alpha}{\mathbf{e}}\mathbf{A}\,(\underset{\alpha_1}{\mathbf{e}}, \ldots \underset{\alpha_r}{\mathbf{e}}, \overset{\beta_1}{\mathbf{e}}, \ldots \overset{\beta_s}{\mathbf{e}}),$$

которые определяют векторфункцию (15,1):

$$y^\alpha = T^\alpha{}_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}^{\beta_1 \ldots \beta_s} \underset{1}{x}^{\alpha_1} \ldots x^{\alpha_r} \overset{1}{x}_{\beta_1} \ldots \overset{s}{x}_{\beta_s}.$$

5. Полученный результат относительно многолинейных векторфункций может быть значительно обобщен. Докажем справедливость следующей теоремы.

Теорема. *Пусть в каждой системе координат задана совокупность n^{r+s} чисел: $A_{\alpha_1 \ldots \alpha_r \beta_1 \ldots \beta_s}$, обладающих тем свойством, что система чисел*

$$T_{\alpha_1 \ldots \alpha_r} = \sum A_{\alpha_1 \ldots \alpha_r \beta_1 \ldots \beta_s} \overset{}{\underset{1}{x}}{}^{\beta_1} \ldots \underset{s}{x}{}^{\beta_s} \tag{15,2}$$

определяет ковариантный тензор n-го порядка при любом выборе контравариантных векторов $\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \ldots \underset{s}{\mathbf{x}}$. Тогда числа $A_{\alpha_1 \ldots \alpha_r \beta_1 \ldots \beta_s}$ определяют ковариантный тензор $(r+s)$-го порядка.

Доказательство. Так как $T_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}$ — ковариантный тензор r-го порядка, то

$$\sum A_{\alpha_1 \ldots \alpha_r \beta_1 \ldots \beta_s} \underset{1}{y}^{\alpha_1} \underset{2}{y}^{\alpha_2} \ldots \underset{r}{y}^{\alpha_r} \underset{1}{x}^{\beta_1} \ldots \underset{s}{x}^{\beta_s}$$

является $(r+s)$-линейной скалярной функцией, инвариантной при преобразованиях координат. Отсюда следует, что, действительно, числа $A_{\alpha_1 \ldots \alpha_r \beta_1 \ldots \beta_s}$ представляют собою составляющие ковариантного тензора $(r+s)$-го порядка.

Доказанное положение можно, конечно, обобщить на те случаи, когда числа $T_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}$ определяют смешанный тензор и когда в сумме (15,2) входят как контравариантные, так и ковариантные векторы. Теорема эта имеет очень важное значение и с ней мы часто будем встречаться в дальнейшем. Она является как бы обратной тому положению, что в результате операции внутреннего умножения двух тензоров получается новый тензор. Вот почему английские и американские математики называют ее quotiend law of tensors.

Задача 1. Рассмотреть основные алгебраические операции над относительными тензорами.

Ответ. 1) Сложение двух тензоров одного и того же порядка (с одинаковым числом ковариантных и контравариантных индексов), одного и того же веса дает тензор того же порядкаи того же веса; 2) умножение тензора веса N_1 на тензор веса N_2 дает тензор веса $N_1 + N_2$; 3) контрактирование относительного тензора не меняет его веса; 4) внутреннее умножение дает тензор, вес которого равен сумме весов перемножаемых тензоров.

Задача 2. Показать, что составляющие контравариантного антисимметрического тензора m-го порядка могут быть приняты за составляющие ковариантного относительного антисимметрического тензора $(n-m)$-го порядка веса $=+1$. Аналогичный вопрос о ковариантном антисимметрическом тензоре.

У к а з а н и е. Воспользоваться относительным тензором $i_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ веса $=+1$ и относительным тензором $i^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ веса $=-1$. $i_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ и $i^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ равны: 1) нулю, если среди чисел $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ есть одинаковые, 2) $+1$, если подстановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$ — четная, 3) -1, если эта подстановка нечетная.

Задача 3. Показать, что

$$i_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} i^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n} = \delta^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$$

$$i^{\alpha_1\ldots\alpha_r\sigma_{r+1}\ldots\sigma_n}\delta^{\beta_{r+1}\ldots\beta_n}_{\sigma_{r+1}\ldots\sigma_n} = (n-r)!\, i^{\alpha_1\ldots\alpha_r\beta_{r+1}\ldots n}$$

$$\delta^{\alpha_1\ldots\alpha_r\beta_1\ldots\beta_s}_{\gamma_1\ldots\gamma_r\sigma_1\ldots\sigma_s}\delta^{\sigma_1\ldots\sigma_s}_{\delta_1\ldots\delta_s} = s!\,\delta^{\alpha_1\ldots\alpha_r\beta_1\ldots\beta_s}_{\gamma_1\ldots\gamma_r\delta_1\ldots\delta_s}$$

$$\delta^{\alpha_1\ldots\alpha_r\sigma_1\ldots\sigma_s}_{\beta_1\ldots\beta_r\tau_1\ldots\tau_s}\delta^{\tau_1\ldots\tau_s}_{\sigma_1\ldots\sigma_s} = \frac{(n-r)!\,s!}{(n-r-s)!}\,\delta^{\alpha_1\ldots\alpha_r}_{\beta_1\ldots\beta_r}.$$

Задача 4. Если $a_{\alpha_1\ldots\alpha_r}$ — антисимметрический тензор, и если

$$b_{\alpha_1\ldots\alpha_r} = \delta^{\sigma_1\ldots\sigma_r}_{\alpha_1\ldots\alpha_r}\, a_{\sigma_1\ldots\sigma_r},$$

то

$$a_{\alpha_1\ldots\alpha_r} = \frac{1}{(r!)^2}\,\delta^{\sigma_1\ldots\sigma_r}_{\alpha_1\ldots\alpha_r}\, b_{\sigma_1\ldots\sigma_r}.$$

Задача 5. Если выражение

$$u_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta,$$

определяет скаляр при произвольном выборе контравариантного вектора v^α, то $u_{\alpha\beta}+u_{\beta\alpha}$ суть составляющие ковариантного симметрического тензора.

Задача 6. Если тензор $A_{\alpha\beta\gamma}$ симметричен относительно индексов α, β и кроме того удовлетворяет соотношению:

$$A_{\alpha\beta\gamma}v^\alpha v^\beta v^\gamma = 0$$

при любом выборе вектора v^α, то

$$A_{\alpha\beta\gamma} + A_{\beta\gamma\alpha} + A_{\gamma\alpha\beta} = 0.$$

Задача 7. Если равенство

$$u_\alpha{}^\beta v_\beta = \sigma v_\alpha$$

---

[1] См. указание к предыдущей задаче.

справедливо для любого ковариантного вектора v_α, то тензор u_α^β имеет вид:

$$u_\alpha{}^\beta = \sigma\delta^\beta_\alpha,$$

причем σ не зависит от $\mathbf{v}$. Какой геометрический смысл имеет это предложение?

Задача 8. Если тензор $T_{\alpha\beta\gamma\delta}$ удовлетворяет соотношению:

$$T_{\alpha\beta\gamma\delta}u^\alpha v^\beta u^\gamma v^\delta = 0$$

при любом выборе векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, то

$$T_{\alpha\beta\gamma\delta} + T_{\gamma\beta\alpha\delta} + T_{\alpha\delta\gamma\beta} + T_{\gamma\delta\alpha\beta} = 0.$$

Если, кроме того, тензор $T_{\alpha\beta\gamma\delta}$ удовлетворяет условиям:

(a) $T_{\alpha\beta\gamma\delta} + T_{\beta\alpha\gamma\delta} = 0 \quad T_{\alpha\beta\gamma\delta} + T_{\alpha\beta\delta\gamma} = 0, \quad T_{\alpha\beta\gamma\delta} + T_{\beta\gamma\alpha\delta} + T_{\gamma\alpha\beta\delta} = 0$

то он равен нулю.

У к а з а н и е. Из соотношений (а) вывести сначала, что $T_{\alpha\beta\gamma\delta} = T_{\gamma\delta\alpha\beta}$.

6. О п е р а ц и я с и м м е т р и р о в а н и я и а л ь т е р н и р о в а н и я т е н з о р а. Если некоторый тензор имеет несколько индексов одного и того же рода, то из него можно образовать новый тензор, обладающий свойством симметрии или антисимметрии.

Рассмотрим ковариантный тензор m-го порядка $A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}$. Возьмем $m!$ составляющих, переставив индексы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ всеми возможными способами: $A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}, A_{\alpha_2\alpha_1\ldots\alpha_m}, A_{\alpha_1\alpha_3\alpha_2\ldots\alpha_m}, \ldots$ Сложив их, мы получаем составляющую симметрического тензора. В целях упрощения вычислений, образованную сумму делят на $m!$ Результат обозначается символом:

$$A_{(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m)} = \frac{1}{m!}\left(A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m} + A_{\alpha_2\alpha_1\ldots\alpha_m} + \ldots\right).$$

Например,

$$A_{(\alpha_1\alpha_2)} = \frac{1}{2!}\left(A_{\alpha_1\alpha_2} + A_{\alpha_2\alpha_1}\right),$$

$$U_{(ikl)} = \frac{1}{3!}\left(U_{ikl} + U_{kli} + U_{lik} + U_{ilk} + U_{lki} + U_{kil}\right).$$

Мы будем говорить, что тензор $A_{(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m)}$ получен из $A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}$ операцией с и м м е т р и р о в а н и я. Симметрировать можно, конечно, и контравариантные индексы, а также и не все индексы одного и того же рода, принадлежащие тензору. Например,

$$V^{i\,(kl)\,pq} = \frac{1}{2!}\left(V^{iklpq} + V^{ilkpq}\right).$$

$$A_{(\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma)\,\delta} = \frac{1}{2!}\left(A_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma\delta} + A_{\gamma}{}^{\beta}{}_{\alpha\delta}\right).$$

Совершенно аналогично симметрированию вводится операция альтернирования. Возьмем снова тензор $A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}$. Образуем из $m!$ составляющих $A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}$, $A_{\alpha_2\alpha_1\ldots\alpha_m}$, $A_{\alpha_3\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}$, ... новую сумму, в которой каждую составляющую $A_{\alpha_{k_1}\alpha_{k_2}\ldots\alpha_{k_m}}$ возьмем со знаком плюс или минус, смотря по тому, будет ли подстановка $\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_m \\ \alpha_{k_1} & \alpha_{k_2} & \ldots & \alpha_{k_m}\end{pmatrix}$ четная или нечетная. Разделив эту сумму на $m!$, получим составляющую нового тензора, антисимметрического, который обозначается символом:

$$A_{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]} = \frac{1}{m!}\left(A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m} - A_{\alpha_2\alpha_1\ldots\alpha_m} + \ldots\right).$$

Операция образования тензора $A_{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]}$ из $A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}$ называется альтернированием.

Альтернировать так же, как и симметрировать, можно и не все индексы тензора. Например,

$$A_{[\alpha_1}{}^{\beta}{}_{\alpha_2\alpha_3]\gamma} = \frac{1}{3!}\left(A_{\alpha_1}{}^{\beta}{}_{\alpha_2\alpha_3\gamma} + A_{\alpha_2}{}^{\beta}{}_{\alpha_3\alpha_1\gamma} + A_{\alpha_3}{}^{\beta}{}_{\alpha_1\alpha_2\gamma} + \right.$$

$$\left. - A_{\alpha_1}{}^{\beta}{}_{\alpha_3\alpha_2\gamma} - A_{\alpha_3}{}^{\beta}{}_{\alpha_2\alpha_1\gamma} - A_{\alpha_2}{}^{\beta}{}_{\alpha_1\alpha_3\gamma}\right),$$

$$T_{\alpha}{}^{[\beta}S_{\gamma}{}^{\delta]} = \frac{1}{2!}\left(T_{\alpha}{}^{\beta}S_{\gamma}{}^{\delta} - T_{\alpha}{}^{\delta}S_{\gamma}{}^{\beta}\right).$$

Если надо показать, что знак симметрирования или альтернирования не распространяется на какой-нибудь индекс, который оказался внутри скобок ( ) или [ ], то этот индекс выделяется чертами | |. Например,

$$A_{(\alpha\,|\,\beta\,|\,\gamma\delta)} = \frac{1}{3!}\left(A_{\alpha\beta\gamma\delta} + A_{\gamma\beta\delta\alpha} + A_{\delta\beta\alpha\gamma} + A_{\alpha\beta\delta\gamma} + A_{\delta\beta\gamma\alpha} + A_{\gamma\beta\alpha\delta}\right)$$

$$S_{\alpha\,[\beta\,|\,\gamma\,|\,\delta\,|\,\varepsilon]} = \frac{1}{2!}\left(S_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon} - S_{\alpha\varepsilon\gamma\delta\beta}\right).$$

Если тензор A симметричен относительно ряда индексов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$, то

$$A_{\ldots(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m)\ldots} = A_{\ldots\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\ldots}, \quad A_{\ldots[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]\ldots} = 0.$$

Если тензор B антисимметричен относительно индексов $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$, то

$$B_{\ldots[\beta_1\beta_2\ldots\beta_m]\ldots} = B_{\ldots\beta_1\beta_2\ldots\beta_m\ldots}, \quad B_{\ldots(\beta_1\beta_2\ldots\beta_m)\ldots} = 0.$$

Заметим, что операцию альтернирования можно заменить внутренним умножением на тензор $\delta^{\alpha_1\ldots\alpha_m}_{\beta_1\ldots\beta_m}$:

$$A_{\ldots[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]\ldots} = \frac{1}{m!}\,\delta^{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_m}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}\,A_{\ldots\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_m\ldots}$$

7. Отметим некоторые соотношения, играющие основную роль при выполнении операции альтернирования.

Прежде всего заметим, что имеют место формулы, аналогичные формуле разложения определителя по элементам какой-нибудь строки или колонны:

$$A_{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]} = \frac{1}{m}\left(A_{\alpha_1[\alpha_2\ldots\alpha_m]} - A_{\alpha_2[\alpha_1\alpha_3\ldots\alpha_m]} + \right.$$

$$\left. + A_{\alpha_3[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]} - \ldots + (-1)^{m-1}A_{\alpha_m[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m-1}]}\right),$$

$$A_{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]} = \frac{1}{m}\left(A_{\alpha_1[\alpha_2\ldots\alpha_m]} - A_{[\alpha_2|\alpha_1|\alpha_3\ldots\alpha_m]} + \right.$$

$$\left. + A_{[\alpha_2\alpha_3|\alpha_1|\ldots\alpha_m]} - \ldots + (-1)^{m-1}A_{[\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_m]\alpha_1}\right).$$

Очевидными являются также следующие формулы:

$$a_{[i_1}{}^{k_1}a_{i_2}{}^{k_2}\ldots a_{i_m]}{}^{k_m} = a_{i_1}{}^{[k_1}a_{i_2}{}^{k_2}\ldots a_{i_m}{}^{k_m]} = a_{[i_1}{}^{[k_1}a_{i_2}{}^{k_2}\ldots a_{i_m]}{}^{k_m]}.$$

При помощи символа [ ] удобно записывать определители, как обыкновенные, так и многомерные. Например, составляющие m-вектора $[\underset{1}{\mathbf{v}}\,\underset{2}{\mathbf{v}}\ldots\underset{m}{\mathbf{v}}]$ могут быть представлены в следующем виде:

$$v^{i_1 i_2\ldots i_m} = \begin{vmatrix} \underset{1}{v}^{i_1} & \ldots & \underset{1}{v}^{i_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \underset{m}{v}^{i_1} & \ldots & \underset{m}{v}^{i_m} \end{vmatrix} = m!\;\underset{1}{v}^{[i_1}\,\underset{2}{v}^{i_2}\ldots\underset{m}{v}^{i_m]}$$

В качестве второго примера, рассмотрим составляющие тензора $\delta^{i_1 \dots i_m}_{k_1 \dots k_m}$; они выражаются через составляющие δ^i_k единичного тензора в следующем виде:

$$\delta^{i_1 \dots i_m}_{k_1 \dots k_m} = \begin{vmatrix} \delta^{i_1}_{k_1} & \dots & \delta^{i_1}_{k_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta^{i_m}_{k_1} & \dots & \delta^{i_m}_{k_m} \end{vmatrix} = m!\ \delta^{[i_1}_{k_1} \delta^{i_2}_{k_2} \dots \delta^{i_m]}_{k_m} =$$

$$= m!\ \delta^{i_1}_{[k_1} \delta^{i_2}_{k_2} \dots \delta^{i_m}_{k_m]} = m!\ \delta^{[i_1}_{[k_1} \delta^{i_2}_{k_2} \dots \delta^{i_m]}_{k_m]}.$$

В дальнейшем нам придется встречаться с выражениями вида: $a_{[i_1 [k_1} a_{i_2 k_2} \dots a_{i_m] k_m]}$; под этим выражением условимся понимать тензор, образованный двукратным применением операции альтернирования к произведению $a_{i_1 k_1} a_{i_2 k_2} \dots a_{i_m k_m}$, причем альтернируется ряд индексов $i_1, i_2, \dots i_m$ и независимо от него ряд индексов $k_1, k_2, \dots k_m$.

Имеем:

$$a_{[i_1 [k_1} a_{i_2 k_2} \dots a_{i_m] k_m]} = a_{[i_1 | k_1 |} a_{i_2 | k_2 |} \dots a_{i_m] k_m} =$$

$$= a_{i_1 [k_1} a_{| i_2 | k_2} a_{| i_3 | k_3} \dots a_{| i_m | k_m]} = \frac{1}{m!} \begin{vmatrix} a_{i_1 k_1} & \dots & a_{i_1 k_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_m k_1} & \dots & a_{i_m k_m} \end{vmatrix}.$$

8. Возьмем антисимметрический тензор $A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}$. Соответствующую ему многолинейную форму можно представить в виде:

$$\varphi = A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m} \underset{1}{x}^{\alpha_1} \underset{2}{x}^{\alpha_2} \dots \underset{m}{x}^{\alpha_m} =$$

$$= \sum_{(\alpha_1 \dots \alpha_m)} A_{\alpha_1 \dots \alpha_m} \begin{vmatrix} \underset{1}{x}^{\alpha_1} & \dots & \underset{1}{x}^{\alpha_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \underset{m}{x}^{\alpha_1} & \dots & \underset{m}{x}^{\alpha_m} \end{vmatrix} = \frac{1}{m!} A_{\alpha_1 \dots \alpha_m} \begin{vmatrix} \underset{1}{x}^{\alpha_1} & \dots & \underset{1}{x}^{\alpha_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \underset{m}{x}^{\alpha_1} & \dots & \underset{m}{x}^{\alpha_m} \end{vmatrix}.$$

В первой и третьей из написанных сумм суммирование происходит по каждому из индексов $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$, причем каждый из них изменяется от 1 до n; во второй сумме суммирование происходит по $\binom{n}{m}$ сочетаний из индексов $1, 2, \dots n$ по m

в каждом. Применяя символ [ ], мы можем записать в выражение для φ в следующем виде:

$$\varphi = A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m} \underset{1}{x}^{\alpha_1} \underset{2}{x}^{\alpha_2} \dots \underset{m}{x}^{\alpha_m} = A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m} \underset{1}{x}^{[\alpha_1} \underset{2}{x}^{\alpha_2} \dots \underset{m}{x}^{\alpha_m]}.$$

Эта формула является частным случаем более общего соотношения:

$$A_{[\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m]} B^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m} = A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m} B^{[\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m]} =$$
$$= A_{[\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m]} B^{[\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m]},$$

где A и B — тензоры, вообще говоря, не антисимметрические.

При выводе этих формул удобно воспользоваться тензором $\delta^{\beta_1 \dots \beta_m}_{\alpha_1 \dots \alpha_m}$. Так как

$$A_{[\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m]} = \frac{1}{m!} \delta^{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_m}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m} A_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_m},$$
$$B^{[\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m]} = \frac{1}{m!} \delta^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_m} B^{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_m},$$

то

$$A_{[\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m]} B^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m} = \frac{1}{m!} \delta^{\sigma_1 \dots \sigma_m}_{\alpha_1 \dots \alpha_m} A_{\sigma_1 \dots \sigma_m} B^{\alpha_1 \dots \alpha_m} =$$
$$= A_{\sigma_1 \dots \sigma_m} \frac{1}{m!} \delta^{\sigma_1 \dots \sigma_m}_{\alpha_1 \dots \alpha_m} B^{\alpha_1 \dots \alpha_m} = A_{\sigma_1 \dots \sigma_m} B^{[\sigma_1 \dots \sigma_m]}.$$

Так как

$$\delta^{\alpha_1 \dots \alpha_m}_{\beta_1 \dots \beta_m} = \frac{1}{m!} \delta^{\alpha_1 \dots \alpha_m}_{\sigma_1 \dots \sigma_m} \delta^{\sigma_1 \dots \sigma_m}_{\beta_1 \dots \beta_m},$$

то

$$A_{[\alpha_1 \dots \alpha_m]} B^{\alpha_1 \dots \alpha_m} = \frac{1}{m!} \delta^{\sigma_1 \dots \sigma_m}_{\alpha_1 \dots \alpha_m} A_{\sigma_1 \dots \sigma_m} B^{\alpha_1 \dots \alpha_m} =$$
$$= \frac{1}{m!} \delta^{\sigma_1 \dots \sigma_m}_{\tau_1 \dots \tau_m} A_{\sigma_1 \dots \sigma_m} \frac{1}{m!} \delta^{\tau_1 \dots \tau_m}_{\alpha_1 \dots \alpha_m} B^{\alpha_1 \dots \alpha_m} =$$
$$= A_{[\tau_1 \dots \tau_m]} B^{[\tau_1 \dots \tau_m]}.$$

Задача 9. Показать, что

$$v_{\alpha\beta} = v_{(\alpha\beta)} + v_{[\alpha\beta]},$$

$$w_{\alpha\beta\gamma} = w_{(\alpha\beta\gamma)} + w_{[\alpha\beta\gamma]} + \frac{2}{3}(w_{[\alpha\beta]\gamma} + w_{[\gamma\beta]\alpha}) + \frac{2}{3}(w_{(\alpha\beta)\gamma} - w_{\gamma(\alpha\beta)}).$$

Задача 10. Если тензор $A_{\alpha\beta\gamma}$ симметричен относительно индексов α, β, то

$$A_{(\alpha\beta\gamma)} = \frac{1}{3}(A_{\alpha\beta\gamma} + A_{\beta\gamma\alpha} + A_{\gamma\alpha\beta}).$$

Если тензор $B_{\alpha\beta\gamma}$ антисимметричен относительно α, β, то

$$B_{[\alpha\beta\gamma]} = \frac{1}{3}\left(B_{\alpha\beta\gamma} + B_{\beta\gamma\alpha} + B_{\gamma\alpha\beta}\right).$$

Если тензор $A_{\alpha_1, \dots \alpha_p \beta_1, \dots \beta_q}$ антисимметричен как относительно индексов $\alpha_1 \dots \alpha_p$, так и относительно $\beta_1 \dots \beta_q$, то

$$A_{[\alpha_1 \dots \beta_q]} = \frac{1}{p+q}\left(pA_{\alpha_1[\alpha_2 \dots \beta_q]} + (-1)^{p+q-1} q A_{[\alpha_2 \dots 1\beta q]\alpha_1}\right).$$

Задача 11. Если

$$A_{\alpha_1 \dots \alpha_m} = B_{\alpha_1 \dots [\alpha_p \dots \alpha_q] \dots \alpha_m},$$
$$C_{\alpha_1 \dots \alpha_m} = D_{\alpha_1 \dots (\alpha_p \dots \alpha_q) \dots \alpha_m},$$

то

$$A_{[\alpha_1 \dots \alpha_m]} = B_{[\alpha_1 \dots \alpha_p \dots \alpha_q \dots \alpha_m]},$$
$$C_{(\alpha_1 \dots \alpha_m)} = D_{(\alpha_1 \dots \alpha_p \dots \alpha_q \dots \alpha_m)}$$

(т. е. внутренние скобки можно снять).

Задача 12. Если

$$A_{\alpha_1 \dots \alpha_m} = \delta^{\sigma_1 \dots \sigma_m}_{\alpha_1 \dots \alpha_m} B_{\sigma_1 \dots \sigma_m},$$

то

$$B_{[\sigma_1 \dots \sigma_m]} = \frac{1}{(m!)^2} \delta^{\alpha_1 \dots \alpha_m}_{\sigma_1 \dots \sigma_m} A_{\alpha_1 \dots \alpha_m}.$$

Задача 13. Если равенство

$$U_{\alpha\beta} V^\alpha V^\beta = 0$$

справедливо для любого вектора V^α, удовлетворяющего соотношению:

$$V^\alpha W_\alpha = 0,$$

то

$$U_{(\alpha\beta)} = W_{(\alpha} S_{\beta)},$$

где S_β — некоторый ковариантный вектор.

Задача 14. Если соотношение

$$U_{\alpha\beta}{}^\gamma V^\alpha V^\beta W_\gamma = 0$$

справедливо при любом выборе векторов V^α W_α, удовлетворяющих уравнению:

$$V^\alpha W_\alpha = 0,$$

то

$$U_{(\alpha\beta)}^{\gamma} = S_{(\alpha} \delta^\gamma_{\beta)},$$

где S_α — некоторый ковариантный вектор.

Задача 15. Если равенство

$$U_\alpha{}^\beta W_\beta = \sigma W_\alpha$$

справедливо для любого вектора W_α, удовлетворяющего уравнению:

$$W_\alpha V^\alpha = 0,$$

то

$$U_\alpha{}^\beta = \sigma \delta^\beta_\alpha + S_\alpha V^\beta,$$

причем σ не зависит от вектора W_α, S_α — некоторый ковариантный вектор.

Задача 16. Если тензор $U_{\alpha\beta}{}^\gamma$ антисимметричен относительно индексов α, β, и если $U_{\alpha\beta}{}^\gamma V^\beta W_\gamma$ имеет то же направление, что и вектор W_α при любом выборе V^α и W_α, удовлетворяющих соотношению:

$$V^\alpha W_\alpha = 0, \text{ то } U_{\alpha\beta}{}^\gamma = S_{[\alpha} \delta^\gamma_{\beta]}.$$

Задача 17. Доказать формулу:

$$a_{[\alpha_1}{}^{\beta_1} a_{\alpha_2}{}^{\beta_2} \dots a_{\alpha_m]}{}^{\beta_m} b_{[\beta_1}{}^{\gamma_1} b_{\beta_2}{}^{\gamma_2} \dots b_{\beta_m]}{}^{\gamma_m} =$$
$$= a_{[\alpha_1}{}^{\beta_1} b_{|\beta_1|}{}^{\gamma_1} a_{\alpha_2}{}^{\beta_2} b_{|\beta_2|}{}^{\gamma_2} \dots a_{\alpha_m]}{}^{\beta_m} b_{\beta_m}{}^{\gamma_m}.$$

Как частный случай, для $m = n$, получается теорема об умножении определителей.

Задача 18. Показать, что

$$a_{[\alpha[\beta} b_{\gamma]\delta]} = \frac{1}{4}\left(a_{\alpha\beta} b_{\gamma\delta} - a_{\gamma\beta} b_{\alpha\delta} - a_{\alpha\delta} b_{\gamma\beta} + a_{\gamma\delta} b_{\alpha\beta}\right).$$

Задача 19. Доказать соотношение:

$$A_{[\alpha_1[\beta_1}{}^{\gamma_1} A_{\alpha_2\beta_2}{}^{\gamma_2} \dots A_{\alpha_m]\beta_m]}{}^{\gamma_m} = A_{[\alpha_1[\beta_1}{}^{(\gamma_1} A_{\alpha_2\beta_2}{}^{\gamma_2} \dots A_{\alpha_m]\beta_m]}{}^{\gamma_m)}.$$

Задача 20. Если $\overset{1}{U}{}^\alpha{}_\beta$, $\overset{2}{U}{}^\alpha{}_\beta$, ... $\overset{m}{U}{}^\alpha{}_\beta$ $(m \leqslant n)$ и $V^\alpha{}_\beta$ — тензоры 2-го порядка, и если

$$\overset{r}{W}{}^\alpha{}_\beta = \overset{r}{U}{}^\sigma{}_\beta V^\alpha{}_\sigma \qquad (r = 1, \dots m),$$

то

$$\overset{1}{W}{}^{[\alpha_1}{}_{[\beta_1} \overset{2}{W}{}^{\alpha_2}{}_{\beta_2} \dots \overset{m}{W}{}^{\alpha_m]}{}_{\beta_m]} =$$
$$= \overset{1}{U}{}^{[\sigma_1}{}_{[\beta_1} \overset{2}{U}{}^{\sigma_2}{}_{\beta_2} \dots \overset{m}{U}{}^{\sigma_m]}{}_{\beta_m]} V^{[\alpha_1}{}_{[\sigma_1} V^{\alpha_2}{}_{\sigma_2} \dots V^{\alpha_m]}{}_{\sigma_m]}.$$

Задача 21. Если $\overset{r}{U}{}^\alpha{}_\beta$ и $\overset{s}{V}{}^\alpha{}_\beta$ $(r, s = 1, \dots m, m \leqslant n)$ — тензоры 2-го порядка и если

$$\overset{rs}{W}{}^\alpha{}_\beta = \overset{r}{U}{}^\sigma{}_\beta \overset{s}{V}{}^\alpha{}_\sigma,$$

то

$$\overset{1}{U}{}^{[\sigma_1}{}_{[\beta_1} \dots \overset{m}{U}{}^{\sigma_m]}{}_{\beta_m]} \overset{1}{V}{}^{[\alpha_1}{}_{[\sigma_1} \dots \overset{m}{V}{}^{\alpha_m]}{}_{\sigma_m]} = \overset{1(1}{W}{}^{[\alpha_1}{}_{[\beta_1} \overset{|2|2}{W}{}^{\alpha_2}{}_{\beta_2} \dots \overset{|m|m)}{W}{}^{\alpha_m]}{}_{\beta_m]}.$$

Задача 22. Если для двух систем ковариантных векторов:

$$\overset{1}{\mathbf{u}}, \overset{2}{\mathbf{u}}, \dots \overset{m}{\mathbf{u}},$$
$$\overset{1}{\mathbf{v}}, \overset{2}{\mathbf{v}}, \dots \overset{m}{\mathbf{v}}$$

($m \leqslant n$) существует соотношение:

$$\overset{1}{u}_{[\alpha}\overset{1}{v}_{\beta]} + \overset{2}{u}_{[\alpha}\overset{2}{v}_{\beta]} + \dots + \overset{m}{u}_{[\alpha}\overset{m}{v}_{\beta]} = 0$$

и если векторы $\overset{1}{\mathbf{u}}, \overset{2}{\mathbf{u}}, \dots \overset{m}{\mathbf{u}}$ независимы друг от друга, то векторы $\overset{1}{\mathbf{v}}, \overset{2}{\mathbf{v}}, \dots \overset{m}{\mathbf{v}}$ могут быть линейно выражены через $\overset{1}{\mathbf{u}}, \overset{2}{\mathbf{u}}, \dots \overset{m}{\mathbf{u}}$, причем матрица коэффициентов — симметрическая.

Задача 23. Если для r симметрических тензоров $\underset{1}{A}_{\alpha\beta}, \underset{2}{A}_{\alpha\beta}, \dots \underset{r}{A}_{\alpha\beta}$ имеет место соотношение:

$$\sum_{k=1}^{r} \underset{k}{A}_{[\alpha[\beta}\underset{k}{A}_{\gamma]\delta]} = 0,$$

то такое же соотношение существует для r симметрических тензоров $\underset{1}{B}_{\alpha\beta}, \dots \underset{r}{B}_{\alpha\beta}$, которые связаны с $\underset{1}{A}_{\alpha\beta} \dots \underset{r}{A}_{\alpha\beta}$ формулами:

$$\underset{k}{B}_{\alpha\beta} = \sum_{l=1}^{r} a_{kl}\underset{l}{A}_{\alpha\beta} \qquad k = 1, \dots r),$$

причем матрица $\| a_{kl} \|$ — ортогональная.

ГЛАВА III.

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ВИДОВ ТЕНЗОРОВ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

§ 16. Смешанный тензор 2-го порядка. Его связь с линейной векторфункцией 1-го рода.

1. Наиболее детально изученными в тензорном анализе являются тензоры 2-го порядка. Их теория находит большое применение в различных отделах теоретической и прикладной математики, и потому на изучении этих тензоров мы остановимся более подробно.

Мы начнем с рассмотрения смешанного тензора вида $a^\alpha{}_\beta$. Ему соответствует билинейная скалярная функция $\varphi(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) = a^\alpha{}_\beta u_\alpha v^\beta$ и две взаимно-сопряженных линейных векторфункции 1-го рода:

$$(16{,}1) \qquad \mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{x}), \quad y^\alpha = a^\alpha{}_\beta x^\beta,$$

и

$$(16{,}2) \qquad \dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{A}}_c(\dot{\mathbf{u}}), \quad v_\alpha = a^\beta{}_\alpha u_\beta .$$

Смешанный тензор с составляющими $b_\alpha{}^\beta$, у которых первый индекс ковариантный, а второй контравариантный, не отличается чем-нибудь существенным от тензора $a^\alpha{}_\beta$; тензор $b_\alpha{}^\beta$ также определяет две линейных векторфункции 1-го рода: одну ковариантную:

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{B}}(\dot{\mathbf{u}}), \quad v_\alpha = b_\alpha{}^\beta u_\beta,$$

другую контравариантную, сопряженную с ней:

$$\mathbf{y} = \mathbf{B}_c(\mathbf{x}), \quad y^\alpha = b_\beta{}^\alpha x^\beta.$$

Изучение смешанного тензора 2-го порядка $a^\alpha{}_\beta$ лучше всего вести при помощи исследования той линейной векторфункции 1-го рода (16,1), которую этот тензор определяет.

2. В § 10 мы уже указывали, что теория линейных вектор-

функций 1-го рода совпадает с матричной алгеброй. Каждой векторфункции $\mathbf{y} = A(\mathbf{x})$ соответствует матрица

$$\|A\| = \begin{Vmatrix} a^1_1 & a^1_2 \dots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 \dots & a^2_n \\ \dots & \dots & \dots \\ a^n_1 & a^n_2 \dots & a^n_n \end{Vmatrix},$$

и каждой алгебраической операции над линейной векторфункцией отвечает аналогичная операция над соответствующей матрицей.

3. Рангом линейной векторфункции называется ранг соответствующей матрицы. Покажем, что ранг является инвариантом при преобразовании координат. Так как

$$a^{\alpha}{}_{\beta}{}' = a^{\sigma}{}_{\tau} \binom{\alpha'}{\sigma} \binom{\tau}{\beta'},$$

то

$$(16{,}3) \qquad \|\mathbf{A}\|' = X \|\mathbf{A}\| X^{-1}.$$

(напомним, что через X мы условились обозначать матрицу:

$$X = \begin{Vmatrix} \binom{1'}{1} & \binom{1'}{2} & \dots & \binom{1'}{n} \\ \binom{2'}{1} & \binom{2'}{2} & \dots & \binom{2'}{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{n'}{1} & \binom{n'}{2} & \dots & \binom{n'}{n} \end{Vmatrix},$$

составленную из коэффициентов $\left(\binom{i'}{k}\right)$.

Так как при умножении матрицы на неособенную матрицу ранг 1-ой не изменяется то из формулы (16,3) выводим, что ранг $\|\mathbf{A}\|'$ совпадает с рангом $\|\mathbf{A}\|$.

Если векторфункция имеет ранг, равный $r < n$, то уравнение

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = 0$$

имеет $n - r$ независимых решений: $\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \dots \underset{n-r}{\mathbf{x}}$. Каждый вектор, принадлежащий к пучку $\{\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \dots \underset{n-r}{\mathbf{x}}\}$, обращает векторфункцию $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ в нуль. Этот пучок называется нулевой областью векторфункции, а направления, принадлежащие к этому пучку,— нулевыми направлениями.

Из формулы (16,3) вытекает также, что определитель

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a^1_1 & \dots & a^1_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a^n_1 & \dots & a^n_n \end{vmatrix}$$

является абсолютным инвариантом при преобразованиях координат: $|\mathbf{A}|' = |\mathbf{A}|$.

4. В теории линейных векторфункций 1-го рода большую роль играют так называемые главные или инвариантные направления.

Направление, определяемое вектором $\mathbf{x}$, который удовлетворяет уравнению:

$$(16{,}4) \qquad \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x},$$

называется главным, или инвариантным. Следовательно, при применении векторфункции к вектору, принадлежащему к инвариантному направлению, мы получаем вектор, имеющий то же направление. Коэффициент λ в уравнении (16,4) называется характеристическим числом, соответствующим главному направлению $\mathbf{x}$. Главное направление с характеристическим числом, равным нулю, является нулевым.

Главные направления ищутся следующим образом. Перепишем уравнение (16,4) в виде:

$$(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A})(\mathbf{x}) = 0, \ (\lambda \delta^i_\alpha - a^i{}_\alpha) x^\alpha = 0.$$

Таким образом, главное направление векторфункции $\mathbf{A}$ соответствует нулевому направлению векторфункции $\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}$, а потому ранг этой последней должен быть ниже n:

$$|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = 0,$$

или

$$(16{,}5) \qquad \varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a^1_1, & -a^1_2, \dots & -a^1_n \\ -a^2_1, & \lambda - a^2_2, \dots & -a^2_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ -a^n_1, & -a^n_2, \dots & \lambda - a^n_n \end{vmatrix} = 0.$$

Полином $\varphi(\lambda)$ называется характеристическим полиномом векторфункции $\mathbf{A}$ (или матрицы $\|\mathbf{A}\|$). Соответственно матрица $\|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}\|$ называется характеристической матрицей функции $\mathbf{A}$.

Теорема 1. *Характеристический полином инвариантен при преобразованиях координат.*

Доказательство. Характеристический полином векторфункции **A** представляет собою определитель векторфункции $\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}$, который является инвариантом при преобразованиях координат, ч. и т. д.

Разлагая характеристический полином по степеням λ, получаем:

$$\varphi(\lambda)=\lambda^n-a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}+\ldots+(-1)^n a_n.$$

Коэффициент a_k этого полинома равен сумме главных миноров k-го порядка матрицы $\|\mathbf{A}\|$. Эти коэффициенты называются инвариантами векторфункции **A**. В частности, инвариант

$$a_1=a^a_a$$

называется следом или дивергенцией векторфункции. Инвариант a_n выражается определителем

$$a_n=|\mathbf{A}|.$$

Выпишем выражения для производных от характеристического полинома. Обозначим сумму главных миноров k-го порядка определителя $\varphi(\lambda)$ через $S_k(\lambda)$. Дифференцируя этот определитель по λ, мы выводим, что производная $\varphi'(\lambda)$ равна $S_{n-1}(\lambda)$; дифференцируя $\varphi(\lambda)$ снова по λ, мы получим сумму главных миноров $(n-2)$-го порядка, в которой каждый минор повторяется два раза; продолжая дифференцирование дальше, приходим к формулам:

$$\begin{aligned}
\varphi'(\lambda)&=S_{n-1}(\lambda)\\
\varphi''(\lambda)&=2!S_{n-2}(\lambda)\\
\varphi'''(\lambda)&=3!S_{n-3}(\lambda)\\
&\ldots\ldots\ldots\\
\varphi^{(k)}(\lambda)&=k!S_{n-k}(\lambda)
\end{aligned}\tag{16,6}$$

5. Вернемся теперь к определению главных направлений. Найдя какой-нибудь корень характеристического уравнения, подставляем его в уравнение $(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})(\mathbf{x})=0$. Так как ранг матрицы $\|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}\|$ для этого корня $<n$, то уравнение $(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})(\mathbf{x})=0$ имеет, по крайней мере, одно ненулевое решение. Таким образом, имеем:

Теорема 2. *Каждому корню характеристического уравнения соответствует, по крайней мере, одно главное направление.*

Теорема 3. *Корню k-ой кратности соответствует не больше k независимых главных направлений.*

Доказательство. Если бы существовало больше k независимых направлений (т. е. если бы уравнение $(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})(\mathbf{x})=0$ имело больше, чем k, независимых решений), то ранг матрицы $\|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}\|$ был бы ниже $n-k$. Но тогда все миноры $(n-k)$-го порядка этой матрицы были бы равны нулю, производная $\varphi^{(k)}(\lambda)$ превратилась бы для этого корня в нуль (см. формулы (16,6)), т. е. корень был бы кратности выше, чем k.

Следствие. *Простому корню соответствует одно и только одно главное направление.*

Теорема 4. *Главные направления, соответствующие неравным характеристическим числам, независимы.*

Доказательство. Пусть неравным характеристическим числам $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ соответствуют главные направления $\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \ldots \underset{k}{\mathbf{x}}$; если ранг r этой системы меньше k, то можно выбрать r независимых векторов, причем остальные линейно выразятся через них. Пусть такими векторами будут $\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \ldots \underset{r}{\mathbf{x}}$ и пусть $\underset{m}{\mathbf{x}}=\alpha_1\underset{1}{\mathbf{x}}+\alpha_2\underset{2}{\mathbf{x}}+\ldots+\alpha_r\underset{r}{\mathbf{x}}$ $(m>r)$. Имеем:

$$\mathbf{A}(\underset{m}{\mathbf{x}})=\lambda_m\underset{m}{\mathbf{x}}=\mathbf{A}(\alpha_1\underset{1}{\mathbf{x}}+\alpha_2\underset{2}{\mathbf{x}}+\ldots+\alpha_r\underset{r}{\mathbf{x}})=$$
$$=\alpha_1\lambda_1\underset{1}{\mathbf{x}}+\alpha_2\lambda_2\underset{2}{\mathbf{x}}+\ldots+\alpha_r\lambda_r\underset{r}{\mathbf{x}},$$

т. е.

$$\lambda_m(\alpha_1\underset{1}{\mathbf{x}}+\alpha_2\underset{2}{\mathbf{x}}+\ldots+\alpha_r\underset{r}{\mathbf{x}})=\alpha_1\lambda_1\underset{1}{\mathbf{x}}+\alpha_2\lambda_2\underset{2}{\mathbf{x}}+\ldots+\alpha_r\lambda_r\underset{r}{\mathbf{x}}.$$

Так как $\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \ldots \underset{r}{\mathbf{x}}$ — независимые векторы, то

$$\lambda_m\alpha_i=\lambda_i\alpha_i \qquad (i=1, 2\ldots r);$$

если $\alpha_s\neq 0$ $(s\leq r)$, то $\lambda_m=\lambda_s$, что противоречит предположению теоремы.

Теорема 5. *Если имеется k независимых главных направлений с одинаковыми характеристическими числами, то каждое направление, принадлежащее к k-мерному плоскому пучку, определяемому этими k направлениями, является главным и имеет то же характеристическое число.*

Доказательство. Пусть $\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \ldots \underset{k}{\mathbf{x}}$ — векторы k независимых главных направлений с характеристическим числом λ_1. Из соотношений

$$\mathbf{A}(\underset{1}{\mathbf{x}})=\lambda_1\underset{1}{\mathbf{x}},\quad \mathbf{A}(\underset{2}{\mathbf{x}})=\lambda_1\underset{2}{\mathbf{x}},\ \ldots\ \mathbf{A}(\underset{k}{\mathbf{x}})=\lambda_1\underset{k}{\mathbf{x}}$$

получаем

$$\mathbf{A}(\alpha_1\underset{1}{\mathbf{x}} + \alpha_2\underset{2}{\mathbf{x}} + \ldots + \alpha_k\underset{k}{\mathbf{x}}) = \lambda_1(\alpha_1\underset{1}{\mathbf{x}} + \alpha_2\underset{2}{\mathbf{x}} + \ldots + \alpha_k\underset{k}{\mathbf{x}}),$$

что и доказывает теорему.

Таким образом, в этом случае мы имеем k-мерный пучок, весь состоящий из главных направлений с одним и тем же характеристическим числом λ_1. Такой пучок называется **главной областью** векторфункции, соответствующей характеристическому числу λ_1. Если $\lambda_1 = 0$, то получается пучок нулевых направлений, который мы условились раньше называть нулевой областью векторфункции.

6. Корни характеристического полинома могут быть комплексными. Если элементы матрицы векторфункции — действительные числа, то комплексным характеристическим числам соответствуют комплексные векторы инвариантных направлений. Таким образом, в действительном пространстве главных направлений у векторфункции может и не быть. Например у векторфункции с матрицей

$$\begin{Vmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{Vmatrix}$$

действительных инвариантных направлений нет (они определяются комплексными векторами $\underset{1}{\mathbf{x}}(1, i)$, $\underset{2}{\mathbf{x}}(1, -i)$). При исследованиях мы будем пользоваться комплексным пространством; в конце § 17 будет указано, какие видоизменения в выводах надо внести, если иметь в виду реальное пространство.

7. Если у характеристического полинома нет кратных корней, мы получаем очень простую картину: имеется n независимых главных изолированных (т. е. не принадлежащих к пучкам, всецело состоящим из инвариантных прямых) направлений, причем каждому из них соответствует определенное характеристическое число. Сложнее обстоит дело, если имеются кратные корни: в этом случае корню кратности k может соответствовать меньше k главных направлений (одно во всяком случае существует). Например, у векторфункций с матрицами

$$\begin{Vmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{Vmatrix}, \qquad \begin{Vmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{Vmatrix}$$

характеристические числа равны единице; у первой все направления являются главными, и из них можно выделить два независимых, например $\underset{1}{\mathbf{e}}$ и $\underset{2}{\mathbf{e}}$; у второй имеется только одно инвариантное направление: $\underset{1}{\mathbf{e}}$.

Если у линейной векторфункции можно выделить n независимых главных направлений (для этого не обязательно то, чтобы все характеристические числа были простыми), мы будем называть ее **векторфункцией простого типа**; соответствующий тензор 2-го порядка — тензором простого типа.

Матрица такой функции может быть приведена к очень простому виду. Возьмем контравариантные координатные векторы по главным направлениям; тогда

$$\mathbf{A}(\underset{k}{\mathbf{e}}) = \lambda_k \underset{k}{\mathbf{e}} \qquad (k = 1, 2, \ldots n).$$

Следовательно,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha x^\alpha \underset{\alpha}{\mathbf{e}}, \tag{16,7}$$

$$a^\alpha{}_\beta = \overset{\alpha}{\mathbf{e}}\mathbf{A}(\underset{\beta}{\mathbf{e}}) = \lambda_\alpha \delta^\alpha_\beta,$$

т. е. матрица $\|\mathbf{A}\|$ имеет следующий вид:

$$\|\mathbf{A}\| = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{Vmatrix}, \tag{16,8}$$

который называется **диагональным** или **каноническим**.

8. Составляющие тензора простого типа могут быть выражены через векторы независимых главных направлений $\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \ldots \underset{n}{\mathbf{x}}$. Обозначим систему, взаимную с $\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \ldots \underset{n}{\mathbf{x}}$ через $\overset{1}{\mathbf{x}}, \overset{2}{\mathbf{x}}, \ldots \overset{n}{\mathbf{x}}$. Разлагая в формуле

$$a^\alpha{}_\beta = \overset{\alpha}{\mathbf{e}}\mathbf{A}(\underset{\beta}{\mathbf{e}})$$

вектор $\underset{\beta}{\mathbf{e}}$ по векторам $\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \ldots \underset{n}{\mathbf{x}}$:

$$\underset{\beta}{\mathbf{e}} = \underset{\beta}{\mathbf{e}}\overset{\sigma}{\mathbf{x}} \cdot \underset{\sigma}{\mathbf{x}} = \overset{\sigma}{x}_\beta \underset{\sigma}{\mathbf{x}},$$

получаем:

$$a^{\alpha}_{\ \beta} = \overset{\sigma}{x}_{\beta}\overset{\alpha}{\mathbf{e}}\mathbf{A}(\underset{\sigma}{\mathbf{x}}) = \sum_{\sigma} \lambda_{\sigma}\overset{\sigma}{x}_{\beta}\overset{\alpha}{\mathbf{e}}\underset{\sigma}{\mathbf{x}},$$

т. е.

$$a^{\alpha}_{\ \beta} = \sum_{\sigma} \lambda_{\sigma}\underset{\sigma}{x}^{\alpha}\overset{\sigma}{x}_{\beta}. \tag{16,9}$$

9. В качестве примера, разберем следующие векторфункции простого типа:

1) Единичная векторфункция: $\mathbf{y} = \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. У ней все направления являются главными, все характеристические числа равны единице.

2) Проектирующая векторфункция. Возьмем два независимых пучка E_m и E_{n-m}. Как мы видели в § 5, каждый вектор $\mathbf{x}$ может быть разложен на два вектора: $\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{x}''$, причем $\mathbf{x}'$ лежит в E_m, $\mathbf{x}''$ — в E_{n-m}; это разложение может быть выполнено только одним способом. Говорят, что вектор $\mathbf{x}'$ получается проектированием вектора $\mathbf{x}$ на плоскость E_m параллельно плоскости E_{n-m}, и, соответственно, $\mathbf{x}''$ получается проектированием $\mathbf{x}$ на плоскость E_{n-m} параллельно E_m.

Проектирование определяет две линейных векторфункции: $\mathbf{x}' = \mathbf{E}'(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}'' = \mathbf{E}''(\mathbf{x})$. В самом деле, мы видели, что

$$\text{пр.}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \text{пр.}\mathbf{x} + \text{пр.}\mathbf{y}, \quad \text{пр.}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\,\text{пр.}(\mathbf{x}).$$

Рассмотрим функцию $\mathbf{E}'(\mathbf{x})$. Каждое направление в пучке E_m является главным для нее, причем характеристические числа равны 1; направления же в E_{n-m} являются нулевыми для этой векторфункции. Возьмем n независимых векторов: $\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \ldots \underset{n}{\mathbf{x}}$, из которых первые m выберем в E_m, остальные — в E_{n-m}. Обозначая составляющие тензора, соответствующего $\mathbf{E}'(\mathbf{x})$, через $a^{\alpha}_{\ \beta}$ и применяя формулу (16,9), получаем:

$$a^{\alpha}_{\ \beta} = \sum_{\sigma=1}^{m} \underset{\sigma}{x}^{\alpha}\overset{\sigma}{x}_{\beta}. \tag{16,10}$$

Если за координатные векторы принять $\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \ldots \underset{n}{\mathbf{x}}$, то матрица $\|\mathbf{E}'\|$ примет вид:

$$\|\mathbf{E}'\| = \begin{Vmatrix} A_m & \\ & A_{n-m} \end{Vmatrix},$$

где

$$A_m = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{Vmatrix}, \quad A_{n-m} = 0.$$

Аналогично, обозначая составляющие тензора, соответствующего векторфункции $\mathbf{E}''(\mathbf{x})$, через $b^{\alpha}_{\ \beta}$, имеем

$$b^{\alpha}_{\ \beta} = \sum_{\sigma=m+1}^{n} \underset{\sigma}{x}^{\alpha}\overset{\sigma}{x}_{\beta}.$$

Нетрудно видеть, что $\mathbf{E}' + \mathbf{E}'' = \mathbf{E}$.

Задача 1. Найти главные направления и характеристические числа линейных векторфункций, заданных следующими матрицами:

$$1) \begin{Vmatrix} 2, & -1, & -1 \\ 0, & -1, & 0 \\ 0, & 2, & 1 \end{Vmatrix}, \quad 2) \begin{Vmatrix} -1, & 2, & 2 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{Vmatrix}$$

$$3) \begin{Vmatrix} -4, & 0, & 0 \\ 0, & -4, & 0 \\ 0, & 0, & -4 \end{Vmatrix} \quad 4) \begin{Vmatrix} 2, & -1, & 0 \\ 0, & 1, & -1 \\ 0, & 1, & 3 \end{Vmatrix},$$

$$5) \begin{Vmatrix} -1, & 0, & 0, & -2 \\ -1, & -1, & 0, & -1 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{Vmatrix}, \quad 6) \begin{Vmatrix} 0, & 0, & 1, & -1 \\ -1, & 0, & 1, & -1 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{Vmatrix}.$$

Ответ (указаны характеристические числа и векторы соответствующих главных направлений): 1) $\lambda_1 = 2$, $(1, 0, 0)$, $\lambda_2 = 1$, $(1, 0, 1)$, $\lambda_3 = -1$, $(0, 1, -1)$; 2) $\lambda_1 = -1$, $(1, 0, 0)$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, пучок, построенный на векторах $(1, 0, 1)$, $(0, 1, -1)$; 3) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -4$, все направления главные; 4) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$, единственное главное направление $(1, 0, 0)$, 5) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, пучок, построенный на векторах $(1, 0, 0, -1)$, $(0, 0, 1, 0)$; $\lambda_3 = \lambda_4 = -1$ с одним главным направлением $(0, 1, 0, 0)$; 6) $\lambda_1 = 1$; $(1, 0, 0, -1)$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ с одним инвариантным направлением $(0, 1, 0, 0)$.

Задача 2. Показать, что инварианты линейной векторфункции могут быть выражены формулой:

$$a_k = a^{\alpha_1}_{\ [\alpha_1} a^{\alpha_2}_{\ \alpha_2} \ldots a^{\alpha_k}_{\ \alpha_k]} = a^{[\alpha_1}_{\ \ \alpha_1} a^{\alpha_2}_{\ \alpha_2} \ldots a^{\alpha_k]}_{\ \ \alpha_k} = a^{[\alpha_1}_{\ \ [\alpha_1} a^{\alpha_2}_{\ \alpha_2} \ldots a^{\alpha_k]}_{\ \ \alpha_k]}.$$

Решение. Так как a_k является суммой главных миноров k-го порядка определителя $|a_{ik}|$, то

$$a_k = \frac{1}{k!}\,\delta^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k}\, a^{\beta_1}_{\ \alpha_1} a^{\beta_2}_{\ \alpha_2} \ldots a^{\beta_k}_{\ \alpha_k}, \tag{а}$$

откуда

$$a_k = a^{[\alpha_1}{}_{\alpha_1} a^{\alpha_2}{}_{\alpha_2} \dots a^{\alpha_k]}{}_{\alpha_k} = a^{\alpha_1}{}_{[\alpha_1} a^{\alpha_2}{}_{\alpha_2} \dots a^{\alpha_k}{}_{\alpha_k]}.$$

Выражая в формуле (а)

$$\delta^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k}_{\beta_1\beta_2\dots\beta_k} = \frac{1}{k!}\,\delta^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k}_{\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_k}\,\delta^{\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_k}_{\beta_1\beta_2\dots\beta_k},$$

получаем

$$a_k = a^{[\alpha_1}{}_{[\alpha_1} a^{\alpha_2}{}_{\alpha_2} \dots a^{\alpha_k]}{}_{\alpha_k]}.$$

Задача 3. Если линейные векторфункции $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ имеют общее главное направление с характеристическими числами λ и μ, то это направление является инвариантным и для функций $\mathbf{AB}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{BA}(\mathbf{x})$, причем ему соответствует характеристическое число $= \lambda\mu$.

Задача 4. Каждое главное направление и главная область линейной векторфункции $\mathbf{A}$ является также главным направлением и главной областью векторфункции $\psi(\mathbf{A})$, где ψ — рациональная дробная функция. Если λ — характеристическое число функции $\mathbf{A}$, то $\psi(\lambda)$ является характеристическим числом функции $\psi(\mathbf{A})$.

Задача 5. Обозначим характеристические числа линейной векторфункции $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ через $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Показать, что

I) $$|\psi(\mathbf{A})| = \psi(\lambda_1)\psi(\lambda_2)\dots\psi(\lambda_n),$$

где ψ — рациональная дробная функция.

Решение. Докажем справедливость равенства (I) сначала для того случая, когда ψ — полином. Пусть

$$\psi(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_m = a(\mu_1 - x)(\mu_2 - x)\dots(\mu_m - x),$$

где $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_m$ — корни полинома ψ, $a = (-1)^m a_0$. Имеем:

$$\psi(\mathbf{A}) = a(\mu_1\mathbf{E} - \mathbf{A})(\mu_2\mathbf{E} - \mathbf{A})\dots(\mu_m\mathbf{E} - \mathbf{A}).$$

Отсюда:

$$|\psi(\mathbf{A})| = a^n|\mu_1\mathbf{E} - \mathbf{A}|\,|\mu_2\mathbf{E} - \mathbf{A}|\dots|\mu_m\mathbf{E} - \mathbf{A}| = a^n\varphi(\mu_1)\varphi(\mu_2)\dots\varphi(\mu_m),$$

где φ — характеристический полином векторфункции $\mathbf{A}$. Разлагая $\varphi(\mu_i)$ на линейные множители, получаем:

$$\begin{aligned} |\psi(\mathbf{A})| = a^n\,&(\mu_1 - \lambda_1)(\mu_1 - \lambda_2)\dots(\mu_1 - \lambda_n)\\ &(\mu_2 - \lambda_1)(\mu_2 - \lambda_2)\dots(\mu_2 - \lambda_n)\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &(\mu_m - \lambda_1)(\mu_m - \lambda_2)\dots(\mu_m - \lambda_n) \end{aligned}$$

Перемножая двучлены по колоннам, имеем:

$$|\psi(\mathbf{A})| = \psi(\lambda_1)\psi(\lambda_2)\dots\psi(\lambda_n).$$

Теперь пусть $\psi(x) = \dfrac{\omega(x)}{\pi(x)}$, где $\omega(x)$ и $\pi(x)$ — полиномы. Имеем:

$$|\psi(\mathbf{A})| = \frac{|\omega(\mathbf{A})|}{|\pi(\mathbf{A})|} = \frac{\omega(\lambda_1)\,\omega(\lambda_2)\dots\omega(\lambda_n)}{\pi(\lambda_1)\,\pi(\lambda_2)\dots\pi(\lambda_n)} = \psi(\lambda_1)\,\psi(\lambda_2)\dots\psi(\lambda_n).$$

Задача 6. Пусть линейная векторфункция $\mathbf{A}$ имеет характеристические числа: $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$. Показать, что у $\psi(\mathbf{A})$ характеристические

числа равны $\psi(\lambda_1)$, $\psi(\lambda_2), \dots \psi(\lambda_n)$, где ψ — рациональная дробная функция.

Решение. Выведем характеристический полином векторфункции $\psi(\mathbf{A})$:

$$|\lambda\mathbf{E} - \psi(\mathbf{A})|.$$

Применяя формулу (I) предыдущей задачи, имеем:

$$|\lambda\mathbf{E} - \psi(\mathbf{A})| = (\lambda - \psi(\lambda_1))(\lambda - \psi(\lambda_2))\dots(\lambda - \psi(\lambda_n)).$$

Задача 7. Показать, что сумма k-ых степеней характеристических чисел линейной векторфункции $\mathbf{A}$ равна:

$$s_k = a^{\alpha_1}{}_{\alpha_2} a^{\alpha_2}{}_{\alpha_3} a^{\alpha_3}{}_{\alpha_4} \dots a^{\alpha_k}{}_{\alpha_1}.$$

Указание. Применить результат предыдущей задачи к векторфункции $\mathbf{A}^k$ и взять след этой векторфункции.

Задача 8. Пользуясь формулами задач 2 и 7, установить зависимость между симметрическими функциями a_k и s_k:

$$a_1 = s_1$$

$$a_2 = a^{\alpha_1}{}_{[\alpha_1} a^{\alpha_2}{}_{\alpha_2]} = \frac{1}{2!}\left(a^{\alpha_1}{}_{\alpha_1} a^{\alpha_2}{}_{\alpha_2} - a^{\alpha_1}{}_{\alpha_2} a^{\alpha_2}{}_{\alpha_1}\right) = \frac{1}{2!}(s_1{}^2 - s_2)$$

$$a_3 = a^{\alpha_1}{}_{[\alpha_1} a^{\alpha_2}{}_{\alpha_2} a^{\alpha_3}{}_{\alpha_3]} = \dots = \frac{1}{3!}(s_1{}^3 - 3s_1s_2 + 2s_3).$$

Вообще

$$a_k = \frac{1}{k!}\sum A_{r_1r_2\dots r_i}\, s_1{}^{r_1} s_2{}^{r_2} \dots s_i{}^{r_i},$$

причем $1r_1 + 2r_2 + \dots + ir_i = k$, а коэффициент $A_{r_1r_2\dots r_i}$ равен $\pm$ числу подстановок типа:

$$\underbrace{(1)(1)\dots}_{r_1\ \text{раз}}\quad \underbrace{(12)(12)\dots}_{r_2\ \text{раз}}\quad \underbrace{(123\dots i)(123\dots i)\dots}_{r_i\ \text{раз}},$$

входящих в симметрическую группу подстановок из k букв; знак $+$ берется, если подстановки класса четные, минус — если они нечетные.

Задача 9. Инварианты векторфункции $\mathbf{A}$ могут быть определены следующими соотношениями:

$$(\underset{1}{\mathbf{z}}\underset{2}{\mathbf{x}}\underset{3}{\mathbf{x}}\dots\underset{n}{\mathbf{x}}) + (\underset{1}{\mathbf{x}}\underset{2}{\mathbf{z}}\underset{3}{\mathbf{x}}\dots\underset{n}{\mathbf{x}}) + \dots + (\underset{1}{\mathbf{x}}\underset{2}{\mathbf{x}}\dots\underset{n-1}{\mathbf{x}}\underset{n}{\mathbf{z}}) = a_1(\underset{1}{\mathbf{x}}\underset{2}{\mathbf{x}}\dots\underset{n}{\mathbf{x}}),$$

$$(\underset{1}{\mathbf{z}}\underset{2}{\mathbf{z}}\underset{3}{\mathbf{x}}\dots\underset{n}{\mathbf{x}}) + (\underset{1}{\mathbf{z}}\underset{2}{\mathbf{x}}\underset{3}{\mathbf{z}}\dots\underset{n}{\mathbf{x}}) + \dots + (\underset{1}{\mathbf{x}}\underset{2}{\mathbf{x}}\dots\underset{n-1}{\mathbf{z}}\underset{n}{\mathbf{z}}) = a_2(\underset{1}{\mathbf{x}}\underset{2}{\mathbf{x}}\dots\underset{n}{\mathbf{x}}),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(\underset{1}{\mathbf{x}}\underset{2}{\mathbf{z}}\underset{3}{\mathbf{z}}\dots\underset{n}{\mathbf{z}}) + (\underset{1}{\mathbf{z}}\underset{2}{\mathbf{x}}\underset{3}{\mathbf{z}}\dots\underset{n}{\mathbf{z}}) + \dots + (\underset{1}{\mathbf{z}}\underset{2}{\mathbf{z}}\dots\underset{n-1}{\mathbf{z}}\underset{n}{\mathbf{x}}) = a_{n-1}(\underset{1}{\mathbf{x}}\underset{2}{\mathbf{x}}\dots\underset{n}{\mathbf{x}}),$$

$$(\underset{1}{\mathbf{z}}\underset{2}{\mathbf{z}}\dots\underset{n-1}{\mathbf{z}}\underset{n}{\mathbf{z}}) = a_n(\underset{1}{\mathbf{x}}\underset{2}{\mathbf{x}}\dots\underset{n}{\mathbf{x}}),$$

где $\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \dots \underset{n}{\mathbf{x}}$ — произвольные независимые векторы, $\underset{i}{\mathbf{z}} = \mathbf{A}(\underset{i}{\mathbf{x}})$.

§ 17. Линейная векторфункция 1-го рода (продолжение). Метод H. Weyl'я приведения матрицы линейной векторфункции к каноническому виду.

1. Мы переходим к исследованию линейной векторфункции 1-го рода в общем случае, когда она не принадлежит к простому типу. Выше уже упоминалось, что характеристическому числу кратности k может соответствовать меньше чем k главных направлений; мы покажем в следующем разделе настоящего параграфа, что такому корню соответствует всегда k-мерный инвариантный пучок векторов.

Плоский пучок E_m называется *инвариантным*, если векторы, принадлежащие к нему, при преобразованиях векторфункцией превращаются в векторы этого же пучка; можно сказать, что пучок остается неподвижным. Каждая главная область векторфункции является инвариантным элементом, но не обратно: например, если провести через m главных направлений, имеющих разные характеристические числа, m-мерный пучок, то векторы этого пучка будут при применении векторфункции вообще изменять свои направления, но пучка покидать не будут; инвариантными будут только те m главных направлений, на которых был построен пучок (доказательство предоставляется в качестве упражнения читателю). Инвариантные пучки называются также *инвариантными плоскостями* или *инвариантными элементами* векторфункции.

Пусть векторфункция имеет инвариантный пучок E_m. Матрица векторфункции принимает примечательный вид, если m первых координатных контравариантных векторов мы возьмем в этом пучке. Тогда

$$\mathbf{A}(\underset{i}{\mathbf{e}}) = a_1 \overset{k}{\underset{1}{\mathbf{e}}} + a_2 \underset{2}{\mathbf{e}} + \ldots + a_m \underset{m}{\mathbf{e}} \quad (i = 1, 2, \ldots m).$$

Следовательно,

$$a^k_{\ i} = \overset{k}{\mathbf{e}}\mathbf{A}(\underset{i}{\mathbf{e}}) = 0, \text{ если } i \leqslant m, k > m.$$

Таким образом матрица $\|\mathbf{A}\|$ имеет следующий вид:

$$\left.\left\|\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix}\cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline & & \\ & & \\ & & \\ & & \end{matrix}}_{m \text{ колонн}} & \begin{matrix}\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \end{array}\right\|\right.$$

(m строк — первые строки матрицы.)

Поле, незаполненное точками, состоит из нулей.

Рассмотрим теперь тот случай, когда векторфункция имеет два инвариантных пучка E_m и E_{n-m}, полностью определяющих векторное пространство (т. е. не имеющих общих направлений). Возьмем m первых координатных векторов $\underset{1}{\mathbf{e}}, \underset{2}{\mathbf{e}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{e}}$ в первом пучке, $n-m$ остальных: $\underset{m+1}{\mathbf{e}}, \underset{m+2}{\mathbf{e}}, \ldots \underset{n}{\mathbf{e}}$ — во втором. Тогда векторы $\mathbf{A}(\underset{1}{\mathbf{e}}), \mathbf{A}(\underset{2}{\mathbf{e}}), \ldots \mathbf{A}(\underset{m}{\mathbf{e}})$ будут лежать в E_m, векторы $\mathbf{A}(\underset{m+1}{\mathbf{e}}), \mathbf{A}(\underset{m+2}{\mathbf{e}}), \ldots \mathbf{A}(\underset{n}{\mathbf{e}})$.

В выражении для линейной векторфункции

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = x^\alpha \mathbf{A}(\underset{\alpha}{\mathbf{e}})$$

первые m членов дают векторфункцию:

$$\mathbf{A}_m(\mathbf{x}) = x^1 \mathbf{A}(\underset{1}{\mathbf{e}}) + x^2 \mathbf{A}(\underset{2}{\mathbf{e}}) + \ldots + x^m \mathbf{A}(\underset{m}{\mathbf{e}}),$$

которая любой вектор пространства преобразует в вектор, лежащий в пучке E_m, причем векторы пучка E_{n-m} превращает в нуль. Аналогичным свойством обладает векторфункция:

$$\mathbf{A}_{n-m}(\underset{n-m}{\mathbf{x}}) = x^{m+1} \mathbf{A}(\underset{m+1}{\mathbf{e}}) + x^{m+2} \mathbf{A}(\underset{m+2}{\mathbf{e}}) + \ldots + x^n \mathbf{A}(\underset{n}{\mathbf{e}})$$

по отношению к E_{n-m}. Мы будем говорить, что векторфункции $\mathbf{A}_m$ и $\mathbf{A}_{n-m}$ лежат соответственно в плоскостях E_m и E_{n-m} и что они определяют преобразования, индуцированные функцией $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ в этих плоскостях. Отметим, что функция $\mathbf{A}_m \mathbf{A}_{n-m}$ тождественно равна нулю. Если $\mathbf{A}_{n-m} = 0$, то будем говорить, что $\mathbf{A}$ лежит в плоскости E_m, которая называется *областью существования* функции $\mathbf{A}$; пучок E_{n-m} является нулевой областью этой функции.

Матрица $\|\mathbf{A}\|$, отнесенная к выбранной выше системе координат, приобретает примечательный вид. Так как $\mathbf{A}(\underset{1}{\mathbf{e}}), \mathbf{A}(\underset{2}{\mathbf{e}}), \ldots \mathbf{A}(\underset{m}{\mathbf{e}})$ лежат в E_m, то $a^\alpha_{\ \beta} = \overset{\alpha}{\mathbf{e}}\mathbf{A}(\underset{\beta}{\mathbf{e}}) = 0$, если $\alpha > m, \beta \leqslant m$; точно так же выводим, что $a^\sigma_{\ \tau} = \overset{\sigma}{\mathbf{e}}\mathbf{A}(\underset{\tau}{\mathbf{e}}) = 0$, если $\sigma \leqslant m, \tau > m$. Таким образом, матрица $\|\mathbf{A}\|$ распадается на две:

$$\|\mathbf{A}\| = \left\|\begin{matrix} A_m & \\ & A_{n-m} \end{matrix}\right\|,$$

причем матрицы A_m и A_{n-m} соответствуют векторфункциям $\mathbf{A}_m$ и $\mathbf{A}_{n-m}$.

Вообще, если имеется s инвариантных пучков $E_{k_1}, E_{k_2}, \ldots E_{k_s}$ полностью определяющих векторное пространство (т. е. не имеющих общих направлений, причем $k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n$), то векторфункция распадается на s слагаемых $\mathbf{A}_{k_1}(\mathbf{x}), \mathbf{A}_{k_2}(\mathbf{x}), \ldots \mathbf{A}_{k_s}(\mathbf{x})$, лежащих в этих элементах; матрица $\|\mathbf{A}\|$ распадается также на s матриц:

$$\|\mathbf{A}\| = \begin{Vmatrix} A_{k_1} & & & \\ & A_{k_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{k_s} \end{Vmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что характеристический полином матрицы $\|\mathbf{A}\|$ равен произведению характеристических полиномов $\varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda), \ldots \ldots \varphi_s(\lambda)$ матриц $A_{k_1}, A_{k_2}, \ldots A_{k_s}$:

$$(17{,}1) \qquad \varphi(\lambda) = \varphi_1(\lambda)\,\varphi_2(\lambda) \ldots \varphi_s(\lambda).$$

Задача 1. Векторфункция задана матрицей

$$\begin{Vmatrix} 2, & 0, & -4, & 2 \\ 0, & 2, & -2, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & -1, & 2 \end{Vmatrix}.$$

Показать, что у ней имеется две инвариантных двумерных плоскости: 1) $x^3 = 0$, $x^4 = 0$, 2) $x^1 - 2x^2 = 0$, $x^2 - x^3 = 0$.

Задача 2. Если вектор $\mathbf{x}$ принадлежит к m-мерной инвариантной плоскости векторфункции $\mathbf{A}$, то m-вектор $[\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{A}^2(\mathbf{x}), \ldots \mathbf{A}^m(\mathbf{x})]$ равен нулю.

2. В основе дальнейшего исследования лежат следующие две теоремы.

Теорема 1 (Hamilton'a-Cayley). *Линейная векторфункция удовлетворяет своему характеристическому уравнению.*

Доказательство теоремы проведем в матричной терминологии. Пусть векторфункции $\mathbf{A}$ соответствует матрица A. Требуется доказать, что $\varphi(A) = 0$, где $\varphi(\lambda)$ — характеристический полином,

$$\varphi(\lambda) = \lambda^n - a_1\lambda^{n-1} + \ldots + (-1)^n a_n$$

векторфункции $\mathbf{A}$. Возьмем матрицу $\lambda E - A$ и обозначим присоединенную к ней матрицу через B. Тогда

$$\text{(a)} \qquad (\lambda E - A)B = \varphi(\lambda)E, \ \lambda B - AB = \varphi(\lambda)E.$$

Так как каждый элемент матрицы B представляет собою полином $(n-1)$-ой степени от λ, то

$$\text{(b)} \qquad B = B_0 + \lambda B_1 + \lambda^2 B_2 + \ldots + \lambda^{n-1} B_{n-1},$$

где $B_0, B_1, \ldots B_{n-1}$ — матрицы, не зависящие от λ. Подставим выражение для B из (b) в (a), получаем:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda^k B_{k-1} - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k A B_k = E(\lambda^n - a_1\lambda^{n-1} + \ldots + (-1)^n a_n).$$

Приравнивая члены в левой и правой части при одинаковых степенях, получаем:

$$\begin{aligned} B_{n-1} \qquad\qquad &= E, \\ B_{n-2} - AB_{n-1} &= -a_1 E, \\ B_{n-3} - AB_{n-2} &= a_2 E, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ -AB_0 &= (-1)^n a_n E. \end{aligned}$$

Умножая 1-ое соотношение слева на A^n, 2-ое — на A^{n-1}, 3-е — на A^{n-2} и т. д. и складывая, получаем:

$$\varphi(A) = A^n - a_1 A^{n-1} + \ldots + (-1)^n a_n E = 0.$$

Задача 3. Проверить, что матрица

$$\begin{Vmatrix} 1, & 0, & -1 \\ 0, & 2, & 1 \\ 1, & 0, & 1 \end{Vmatrix}$$

удовлетворяет своему характеристическому уравнению.

Задача 4. Если существует такой вектор $\mathbf{x}$, что

$$(\mathbf{A}^{n-1}(\mathbf{x})\,\mathbf{A}^{n-2}(\mathbf{x}) \ldots \mathbf{A}(\mathbf{x})\,\mathbf{x}) \neq 0,$$

то инварианты линейной векторфункции могут быть выражены следующим образом. Обозначим

$$\mathbf{A}^k(\mathbf{x}) = \underset{k}{\mathbf{x}},$$

$$K = (\underset{n-1}{\mathbf{x}}\ \underset{n-2}{\mathbf{x}}\ \underset{n-3}{\mathbf{x}} \ldots \underset{1}{\mathbf{x}}\mathbf{x}).$$

Тогда

$$\begin{aligned} Ka_1 &= (\underset{n}{\mathbf{x}}\ \underset{n-2}{\mathbf{x}}\ \underset{n-3}{\mathbf{x}} \ldots \underset{1}{\mathbf{x}}\mathbf{x}) \\ Ka_2 &= -(\underset{n-1}{\mathbf{x}}\ \underset{n}{\mathbf{x}}\ \underset{n-3}{\mathbf{x}} \ldots \underset{1}{\mathbf{x}}\mathbf{x}) \\ Ka_3 &= (\underset{n-1}{\mathbf{x}}\ \underset{n-2}{\mathbf{x}}\ \underset{n}{\mathbf{x}} \ldots \underset{1}{\mathbf{x}}\mathbf{x}) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Ka_n &= (-1)^{n-1}(\underset{n-1}{\mathbf{x}}\ \underset{n-2}{\mathbf{x}}\ \underset{n-3}{\mathbf{x}} \ldots \underset{1}{\mathbf{x}}\underset{n}{\mathbf{x}}). \end{aligned}$$

Решение. На основании уравнения Hamilton'a-Cayley имеем:

$$\mathbf{A}^n(\mathbf{x}) - a_1\mathbf{A}^{n-1}(\mathbf{x}) + \ldots + (-1)^n a_n \mathbf{x} = 0.$$

или

$$\underset{n}{\mathbf{x}} - a_1 \underset{n-1}{\mathbf{x}} + a_2 \underset{n-2}{\mathbf{x}} + \ldots + (-1)^n a_n \mathbf{x} = 0.$$

Обозначим левую часть этого равенства через $\mathbf{y}$. Из тождеств:

$$(\mathbf{y} \underset{n-2}{\mathbf{x}} \underset{n-3}{\mathbf{x}} \ldots \underset{1}{\mathbf{x}}\mathbf{x}) = 0$$

$$(\underset{n-1}{\mathbf{x}} \mathbf{y} \underset{n-3}{\mathbf{x}} \ldots \underset{1}{\mathbf{x}}\mathbf{x}) = 0$$

$$(\underset{n-1}{\mathbf{x}} \underset{n-2}{\mathbf{x}} \mathbf{y} \ldots \underset{1}{\mathbf{x}}\mathbf{x}) = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

выводим требуемый результат.

Задача 5. Пользуясь обозначениями и условием предыдущей задачи, показать, что характеристическое уравнение векторфункции $\mathbf{A}$ можно представить в следующем виде:[1]

$$\begin{vmatrix} \lambda^n & \underset{n}{x^{(1)}} & \underset{n}{x^{(2)}} & \ldots & \underset{n}{x^{(n)}} \\ \lambda^{n-1} & \underset{n-1}{x^{(1)}} & \underset{n-1}{x^{(2)}} & \ldots & \underset{n-1}{x^{(n)}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda & \underset{1}{x^{(1)}} & \underset{1}{x^{(2)}} & \ldots & \underset{1}{x^{(n)}} \\ 1 & x^{(1)} & x^{(2)} & \ldots & x^{(n)} \end{vmatrix} = 0.$$

Указание. Решение основывается на результате предыдущей задачи.

3. Теорема 2. *Пусть характеристический полином $\varphi(\lambda)$ векторфункции $\mathbf{A}$ разлагается на два взаимно простых множителя:*

$$\varphi(\lambda) = \varphi_1(\lambda)\,\varphi_2(\lambda),$$

причем $\varphi_1(\lambda)$ и $\varphi_2(\lambda)$ имеют коэффициенты, равные единице, при высших степенях λ.

[1] Этот вид характеристического уравнения был дан акад. А. Н. Крыловым в статье „О численном решении уравнения, которым в технических вопросах определяются частоты малых колебаний материальных систем" (Изв. Акад. Наук, № 4, 1931). Вывод этого уравнения при помощи теоремы Hamilton'a-Cayley мне был указан проф. А. М. Лопшицем.

Это разложение однозначно определяет в векторном пространстве два плоских пучка E' и E'', обладающих следующими свойствами:

1) *E' и E'' — инвариантные пучки,*
2) *E', E'' полностью определяют векторное пространство,*
3) *$\varphi_1(\lambda)$ и $\varphi_2(\lambda)$ являются характеристическими полиномами матриц преобразований, индуцированных векторфункцией $\mathbf{A}$ в плоскостях E' и E''.*

Доказательство проведем отдельно для каждого утверждения теоремы.

1) Рассмотрим уравнение

$$\varphi_1(\mathbf{A})(\mathbf{x}) = 0. \tag{17,2}$$

Оно должно иметь, по крайней мере, одно ненулевое решение. В самом деле, пусть λ_1 корень полинома $\varphi_1(\lambda)$; следовательно, $\varphi_1(\mathbf{A}) = \psi(\mathbf{A})(\lambda_1\mathbf{E} - \mathbf{A})^k$. Но мы знаем, что каждому корню характеристического уравнения векторфункции соответствует, по крайней мере, одно главное направление:

$$(\lambda_1\mathbf{E} - \mathbf{A})(\mathbf{x}) = 0,$$

которое будет удовлетворять соотношению (17,2), так как

$$\varphi_1(\mathbf{A})(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{A})(\lambda_1\mathbf{E} - \mathbf{A})^{k-1}(\lambda_1\mathbf{E} - \mathbf{A})(\mathbf{x}) = 0.$$

Совокупность решений уравнения (17,2) образует нулевую область векторфункции $\varphi_1(\mathbf{A})$, т. е. дает плоский пучок, который мы обозначим через E'. Он инвариантен при преобразовании $\mathbf{A}$, так как вектор $\mathbf{x}$ преобразуется в вектор $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, удовлетворяющий соотношению (17,2):

$$\varphi_1(\mathbf{A})\,\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\varphi_1(\mathbf{A})(\mathbf{x}) = 0.$$

Точно также, рассматривая уравнение

$$\varphi_2(\mathbf{A})(\mathbf{x}) = 0, \tag{17,3}$$

мы построим другой плоский инвариантный пучок E''. Утверждение 1-ое теоремы доказано.

2) Так как φ_1, φ_2 — взаимнопростые полиномы, то можно найти два таких полинома ψ_1 и ψ_2, что

$$\psi_1(\lambda)\,\varphi_2(\lambda) + \psi_2(\lambda)\,\varphi_1(\lambda) = 1,$$

т. е.

$$\psi_1(\mathbf{A})\,\varphi_2(\mathbf{A}) + \psi_2(\mathbf{A})\,\varphi_1(\mathbf{A}) = \mathbf{E}.$$

Применяя эту векторфункцию к любому вектору $\mathbf{x}$ пространства, находим:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} = \psi_1(\mathbf{A})\,\varphi_2(\mathbf{A})(\mathbf{x}) + \psi_2(\mathbf{A})\,\varphi_1(\mathbf{A})(\mathbf{x}). \tag{17,4}$$

Таким образом, вектор $\mathbf{x}$ разложился на два вектора: $\mathbf{x} = \underset{1}{\mathbf{x}} + \underset{2}{\mathbf{x}}$, где

$$\underset{1}{\mathbf{x}} = \psi_1(\mathbf{A})\,\varphi_2(\mathbf{A})(\mathbf{x}), \quad \underset{2}{\mathbf{x}} = \psi_2(\mathbf{A})\,\varphi_1(\mathbf{A})(\mathbf{x}).$$

Вектор $\underset{1}{\mathbf{x}}$ лежит в плоскости E', так как он удовлетворяет уравнению (17,2); в самом деле,

$$\varphi_1(\mathbf{A})(\underset{1}{\mathbf{x}}) = \varphi_1(\mathbf{A})\,\psi_1(\mathbf{A})\,\varphi_2(\mathbf{A})(\mathbf{x}) = \psi_1(\mathbf{A})\,\varphi(\mathbf{A})(\mathbf{x}),$$

а по теореме Hamilton'a-Cayley $\varphi(\mathbf{A}) \equiv 0$. Аналогично этому доказывается, что $\underset{2}{\mathbf{x}}$ лежит в пучке E''. Итак, каждый вектор пространства может быть разложен на два вектора: один в E', другой в E''. Для доказательства 2-го утверждения теоремы остается показать, что пучки E', E'' не имеют общих векторов. Пусть $\mathbf{x}$ — общий вектор; на основании (17,4)

$$\mathbf{x} = \psi_1(\mathbf{A})\,\varphi_2(\mathbf{A})(\mathbf{x}) + \psi_2(\mathbf{A})\,\varphi_1(\mathbf{A})(\mathbf{x});$$

так как $\mathbf{x}$, по предположению, лежит в E' и E'', то $\varphi_1(\mathbf{A})(\mathbf{x}) = \varphi_2(\mathbf{A})(\mathbf{x}) = 0$, т. е. $\mathbf{x} = 0$.

3) Пусть $\omega_1(\lambda)$, $\omega_2(\lambda)$—характеристические полиномы матриц тех преобразований, которые индуцирует векторфункция $\mathbf{A}$ в инвариантных плоскостях E', E''. Тогда, на основании (17,1), $\varphi(\lambda) = \omega_1(\lambda)\,\omega_2(\lambda)$. Докажем, что $\omega_1(\lambda) = \varphi_1(\lambda)$, $\omega_2(\lambda) = \varphi_2(\lambda)$. Обозначим через λ_1 один из корней полинома $\omega_1(\lambda)$. Деля $\varphi_1(\lambda)$ на $\lambda - \lambda_1$, получаем:

$$\varphi_1(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)\,\bar{\varphi}(\lambda) + \varphi_1(\lambda_1).$$

Этому числовому равенству соответствует соотношение между векторфункциями:

$$\varphi_1(\mathbf{A}) = (\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{E})\bar{\varphi}(\mathbf{A}) + \varphi_1(\lambda_1)\,\mathbf{E}.$$

Пусть $\mathbf{x}$ — главное направление, соответствующее корню λ_1. Имеем:

$$\varphi_1(\mathbf{A})(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{A})(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{E})(\mathbf{x}) + \varphi_1(\lambda_1)\,\mathbf{x}.$$

На основании (17,2), получаем $\varphi_1(\lambda_1) = 0$. Таким образом, каждый корень полинома $\omega_1(\lambda)$ является корнем полинома $\varphi_1(\lambda)$, т. е. $\omega_1(\lambda)$ не имеет общих корней с $\varphi_2(\lambda)$ и делит нацело $\varphi_1(\lambda)$; Точно также $\varphi_2(\lambda)$ делится на $\omega_2(\lambda)$. Так как коэффициенты при высших степенях полиномов φ_1, φ_2, ω_1, ω_2 равны 1, то

$$\omega_1 = \varphi_1, \quad \omega_2 = \varphi_2.$$

Теорема доказана полностью. Из этой теоремы вытекает такое следствие:

Теорема 3. *Пусть характеристический полином векторфункции* $\mathbf{A}$ *имеет вид:*

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2}\dots(\lambda - \lambda_s)^{k_s}.$$

Тогда можно выделить s инвариантных пучков $E_{k_1}, E_{k_2}, \dots E_{k_s}$, полностью определяющих векторное пространство, причем $(\lambda - \lambda_1)^{k_1}$, $(\lambda - \lambda_2)^{k_2}, \dots (\lambda - \lambda_s)^{k_s}$ являются характеристическими полиномами преобразований, индуцированных векторфункцией $\mathbf{A}$ *в плоскостях E_{k_1}, $E_{k_2}, \dots E_{k_s}$. Каждый из этих пучков определяется уравнением вида*

$$(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{E})^{k_i}(\mathbf{x}) = 0. \tag{17,5}$$

Матрица $\|\mathbf{A}\|$ *распадается на s матриц: $A_{k_1}, A_{k_2}, \dots A_{k_s}$, стоящих по главной диагонали, если за контравариантные координатные векторы взять векторы, лежащие в пучках E_{k_1}, $E_{k_2}, \dots E_{k_s}$.*

Теоремы 3 и 4 предыдущего параграфа являются частными случаями доказанного положения.

Пример. Возьмем векторфункцию $\mathbf{A}$, определяемую матрицей:

$$A = \|\mathbf{A}\| = \begin{Vmatrix} -1, & 1, & -4, & 0 \\ 0, & -1, & 3, & 0 \\ 0, & 0, & 2, & 0 \\ -3, & 1, & -4, & 2 \end{Vmatrix}$$

Характеристический полином имеет вид:

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda + 1)^2.$$

Согласно теореме 3, имеются две инвариантные двумерные плоскости E' и E'', определяемые уравнениями:

$$(2\mathbf{E} - \mathbf{A})^2(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{и} \quad (\mathbf{E} + \mathbf{A})^2(\mathbf{x}) = 0.$$

Имеем:

$$(2E - A)^2 = \begin{Vmatrix} 9, & -6, & 15, & 0 \\ 0, & 9, & -9, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \\ 9, & -6, & 15, & 0 \end{Vmatrix}$$

$$(E + A)^2 = \begin{Vmatrix} 0, & 0, & -9, & 0 \\ 0, & 0, & 9, & 0 \\ 0, & 0, & 9, & 0 \\ -9, & 0, & -9, & 9 \end{Vmatrix}$$

Следовательно, E' определяется системой уравнений:

$$3x^{(1)}-2x^{(2)}+5x^{(3)}=0,\quad x^{(2)}-x^{(3)}=0,\quad \text{или:}\quad x^{(1)}+x^{(3)}=0,$$

$x^{(2)}-x^{(3)}=0$; E'' задается уравнениями: $x^{(3)}=0,\quad x^{(1)}-x^{(4)}=0.$

Рекомендуем читателю, в качестве упражнения, убедиться, что E' и E'' действительно являются инвариантными плоскостями векторфункции $\mathbf{A}$.

4. Дальнейшее исследование линейной векторфункции 1-го рода приводится к изучению преобразований, индуцированных в тех инвариантных плоскостях $E_{k_1}, E_{k_2}, \ldots E_{k_s}$, о которых шла речь в теореме 3. Оказывается, в каждой такой плоскости, вообще говоря, можно найти более мелкие инвариантные пучки.

Выберем какой-нибудь из инвариантных пучков, например E_{k_1}, и будем изучать индуцированное в нем преобразование. Обозначим $\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{E}$ через $\mathbf{V}$:

$$\mathbf{V}=\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{E}.$$

Рассмотрим уравнения вида:

(17,6) $$\mathbf{V}^i(\mathbf{x})=0 \qquad (i=1,2,3,\ldots).$$

Для $i=k_1$ все векторы пучка E_{k_1} удовлетворяют этому уравнению. Для $i=1$ имеется, по крайней мере, одно ненулевое решение (это — главное направление векторфункции $\mathbf{A}$, соответствующее характеристическому числу λ_1). Пусть m — наименьшая из степеней, обладающих свойством, что уравнению

(17,7) $$\mathbf{V}^m(\mathbf{x})=0$$

удовлетворяют все векторы пучка E_{k_1}; m может быть меньше или равно k_1. Рассмотрим уравнения (17,6); совокупность векторов, удовлетворяющих i-му уравнению, обозначим через $E^{(i)}$; нетрудно видеть, что это — плоский пучок. Каждый вектор, принадлежащий к $E^{(i)}$, принадлежит также и к $E^{(i+1)}$, $E^{(i+2)}$, ..., так как из $\mathbf{V}^i(\mathbf{x})=0$ получаем $\mathbf{V}^{i+p}(\mathbf{x})=0$ умножением 1-го уравнения на $\mathbf{V}^p$. Таким образом, пучок E' заключается в E'' (или совпадает с ним), E'' — в E''' (или совпадает с ним) и т. д:

(17,8) $$E'\subset E''\subset E'''\subset\ldots\subset E^{(m)}.$$

$E^{(m)}$ совпадает с E_{k_1}. Числа измерений пучков $E', E'', \ldots E^{(m)}$ обозначим соответственно через:

(17,9) $$r_1,\ r_1+r_2,\ r_1+r_2+r_3,\ldots,\ r_1+r_2+\ldots+r_m=k_1.$$

Числа $r_1, r_2, \ldots r_m$ неотрицательны; последнее из них, r_m,

всегда положительно, так как, если бы r_m было равно нулю, то $E^{(m-1)}$ совпадало бы с $E^{(m)}$ т. е. все векторы пучка E_{k_1} удовлетворяли бы уравнению $\mathbf{V}^{m-1}(\mathbf{x})=0$, что противоречит условию, что m — наименьшая степень со свойством, что все векторы пучка E_{k_1} удовлетворяют уравнению $\mathbf{V}^m(\mathbf{x})=0$.

Выберем в $E^{(m)}$ r_m независимых векторов, которые бы вместе с $E^{(m-1)}$ определяли пучок E_{k_1} (значит, эти векторы не лежат в $E^{(m-1)}$); обозначим их

(17,10) $$\overset{m}{\underset{1}{\mathbf{u}}},\ \overset{m}{\underset{2}{\mathbf{u}}},\ \overset{m}{\underset{3}{\mathbf{u}}},\ldots \overset{m}{\underset{r_m}{\mathbf{u}}}$$

и будем называть их m-ой серией. Векторы m-ой серии удовлетворяют условиям

(17,11) $$\mathbf{V}^m(\overset{m}{\underset{i}{\mathbf{u}}})=0,\ \mathbf{V}^{m-1}(\overset{m}{\underset{i}{\mathbf{u}}})\neq 0 \quad (i=1,\ 2,\ldots r_m).$$

Предположим, что $m>1$ (случай $m=1$ войдет, как частный случай, в результат наших рассуждений). Применяя к векторам m-ой серии векторфункцию $\mathbf{V}$, получаем

$$\mathbf{V}(\overset{m}{\underset{i}{\mathbf{u}}})=\overset{m-1}{\underset{i}{\mathbf{u}}} \qquad (i=1,\ 2,\ldots r_m),$$

где $\overset{m-1}{\underset{i}{\mathbf{u}}}$ — новые r_m векторов. Эти векторы лежат в $E^{(m-1)}$, так как

$$\mathbf{V}^{m-1}(\overset{m-1}{\underset{i}{\mathbf{u}}})=\mathbf{V}^m(\overset{m}{\underset{i}{\mathbf{u}}})=0,$$

но не лежат в $E^{(m-2)}$, так как

$$\mathbf{V}^{m-2}(\overset{m-1}{\underset{i}{\mathbf{u}}})=\mathbf{V}^{m-1}(\overset{m}{\underset{i}{\mathbf{u}}})\neq 0,$$

на основании (17,11). Кроме того, эти векторы независимы между собой. В самом деле, если бы существовало соотношение

$$\alpha_1\overset{m-1}{\underset{1}{\mathbf{u}}}+\alpha_2\overset{m-1}{\underset{2}{\mathbf{u}}}+\ldots+\alpha_{r_m}\overset{m-1}{\underset{r_m}{\mathbf{u}}}=0,$$

то мы получили бы

$$\mathbf{V}(\alpha_1\overset{m}{\underset{1}{\mathbf{u}}}+\ldots+\alpha_{r_m}\overset{m}{\underset{r_m}{\mathbf{u}}})=0,$$

т. е. вектор $\alpha_1 \overset{m}{\mathbf{u}}_1 + \ldots + \alpha_{r_m} \overset{m}{\mathbf{u}}_{r_m}$, лежащий в $E^{(m)}$, но не лежащий в $E^{(m-1)}$, удовлетворил бы соотношению $\mathbf{V}(\mathbf{x}) = 0$, между тем как мы предположили, что $m > 1$.

Если $r_{m-1} > r_m$, то векторов $\overset{m-1}{\mathbf{u}}_1, \overset{m-1}{\mathbf{u}}_2, \ldots \overset{m-1}{\mathbf{u}}_{r_m}$ недостаточно для того, чтобы они вместе с $E^{(m-2)}$ определили $E^{(m-1)}$. Мы добавляем к этим векторам новые $\overset{m-1}{\mathbf{u}}_{r_m+1}, \overset{m-1}{\mathbf{u}}_{r_m+2}, \ldots \overset{m-1}{\mathbf{u}}_{r_{m-1}}$, лежащие в $E^{(m-1)}$, так, чтобы серия векторов

$$\overset{m-1}{\mathbf{u}}_1, \overset{m-1}{\mathbf{u}}_2, \ldots \overset{m-1}{\mathbf{u}}_{r_m}, \overset{m-1}{\mathbf{u}}_{r_m+1}, \ldots \overset{m-1}{\mathbf{u}}_{r_{m-1}}$$

(мы будем называть ее $(m-1)$-ой серией) вместе с $E^{(m-2)}$ определяла $E^{(m-1)}$.

Применяя к векторам $\overset{m-1}{\mathbf{u}}_i$ $(i = 1, 2, \ldots r_{m-1})$ векторфункцию $\mathbf{V}$, получаем (если $m > 2$) новые векторы:

$$\overset{m-2}{\mathbf{u}}_i = \mathbf{V}(\overset{m-1}{\mathbf{u}}_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots r_{m-1}).$$

Аналогично предыдущему доказываем, что эти векторы: 1) лежат в $E^{(m-2)}$, 2) не лежат в $E^{(m-3)}$, 3) линейно независимы между собой.

Если $r_{m-2} > r_{m-1}$, то к векторам $\overset{m-2}{\mathbf{u}}_i$ $(i = 1, 2, \ldots r_{m-1})$ мы дополняем новые $\overset{m-2}{\mathbf{u}}_{r_{m-1}+1}, \ldots \overset{m-2}{\mathbf{u}}_{r_{m-2}}$, лежащие в $E^{(m-2)}$, так, чтобы $(m-2)$-ая серия

$$\overset{m-2}{\mathbf{u}}_1, \overset{m-2}{\mathbf{u}}_2, \ldots \overset{m-2}{\mathbf{u}}_{r_{m-2}}$$

определяла вместе с $E^{(m-3)}$ пучок $E^{(m-2)}$.

Применяя к $(m-2)$-ой серии векторфункцию $\mathbf{V}$, получаем (для $m > 3$) $(m-3)$-ью серию, лежащую в $E^{(m-3)}$, и т. д. Мы продолжаем до тех пор, пока после $(m-1)$ операций не придем к векторам, лежащим в E'. В нем получаем векторы 1-ой серии:

$$\overset{1}{\mathbf{u}}_1, \overset{1}{\mathbf{u}}_2, \ldots \overset{1}{\mathbf{u}}_{r_1},$$

которые удовлетворяют уравнению:

$$(17{,}12) \qquad \mathbf{V}(\overset{1}{\mathbf{u}}_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots r_1).$$

Итак, мы получаем систему независимых векторов, расположенных в m сериях:

$$(17{,}13) \qquad \begin{array}{llllllll}
\overset{m}{\mathbf{u}}_1 & \overset{m}{\mathbf{u}}_2 \ldots & \overset{m}{\mathbf{u}}_{r_m} & & & & & \\
\overset{m-1}{\mathbf{u}}_1 & \overset{m-1}{\mathbf{u}}_2 \ldots & \overset{m-1}{\mathbf{u}}_{r_m} & \overset{m-1}{\mathbf{u}}_{r_m+1} \ldots & \overset{m-1}{\mathbf{u}}_{r_{m-1}} & & & \\
\overset{m-2}{\mathbf{u}}_1 & \overset{m-2}{\mathbf{u}}_2 \ldots & \overset{m-2}{\mathbf{u}}_{r_m} & \overset{m-2}{\mathbf{u}}_{r_m+1} \ldots & \overset{m-2}{\mathbf{u}}_{r_{m-1}} & \overset{m-2}{\mathbf{u}}_{r_{m-1}+1} \ldots & \overset{m-2}{\mathbf{u}}_{r_{m-2}} & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\overset{1}{\mathbf{u}}_1 & \overset{1}{\mathbf{u}}_2 \ldots & \overset{1}{\mathbf{u}}_{r_m} & \overset{1}{\mathbf{u}}_{r_m+1} \ldots & \overset{1}{\mathbf{u}}_{r_{m-1}} & \overset{1}{\mathbf{u}}_{r_{m-1}+1} \ldots & \overset{1}{\mathbf{u}}_{r_{m-2}} \ldots & \overset{1}{\mathbf{u}}_{r_1}
\end{array}$$

В m-ой серии содержится r_m векторов, в $(m-1)$-ой — r_{m-1}, в $(m-2)$-ой — $r_{m-2}, \ldots$, в 1-ой — r_1; всего:

$$r_m + r_{m-1} + r_{m-2} + \ldots + r_1 = k_1.$$

Все эти векторы, как мы уже видели выше, между собой независимы.

В схеме (17,13) рассмотрим векторы, принадлежащие к какой-нибудь i-ой колонне. Эти векторы обладают следующим свойством:

$$\mathbf{V}(\overset{k}{\mathbf{u}}_i) = \overset{k-1}{\mathbf{u}}_i, \ (k > 1), \ \ \mathbf{V}(\overset{1}{\mathbf{u}}_i) = 0,$$

т. е.

$$(17{,}14) \qquad \mathbf{A}(\overset{k}{\mathbf{u}}_i) = \lambda_1 \overset{k}{\mathbf{u}}_i + \overset{k-1}{\mathbf{u}}_i, \ (k > 1), \ \ \mathbf{A}(\overset{1}{\mathbf{u}}_i) = \lambda_1 \overset{1}{\mathbf{u}}_i.$$

Таким образом, векторфункция $\mathbf{A}$ преобразует векторы, принадлежащие к одной и той же колонне, в векторы, являющиеся линейными комбинациями векторов этой же колонны. Иными словами, каждая колонна определяет инвариантный пучок. Следовательно, в инвариантной плоскости E_{k_1} существует:

$$
(17{,}15)\qquad
\begin{array}{llll}
p_m = r_m & \text{инвариантных} & \text{пучков} & m\text{-мерных,}\\
p_{m-1} = r_{m-1} - r_m & \text{"} & \text{"} & (m-1)\text{-мерных,}\\
p_{m-2} = r_{m-2} - r_{m-1} & \text{"} & \text{"} & (m-2)\text{-мерных,}\\
\dots & \dots & \dots & \dots\\
\dots & \dots & \dots & \dots\\
p_1 = r_1 - r_2 & \text{"} & \text{"} & 1\text{-мерных.}
\end{array}
$$

Соответственно этому, матрица A_{k_1} преобразования, индуцированного векторфункцией $\mathbf{A}$ в E_{k_1}, может быть разбита на матрицы вдоль главной диагонали, причем будем иметь:

$$
\begin{array}{llll}
p_m & \text{матриц} & m\text{-го} & \text{порядка}\\
p_{m-1} & \text{"} & (m-1)\text{-го} & \text{"}\\
p_{m-2} & \text{"} & (m-2)\text{-го} & \text{"}\\
\dots & \dots & \dots & \dots\\
\dots & \dots & \dots & \dots\\
p_1 & \text{"} & 1\text{-го} & \text{"}\,.
\end{array}
$$

Каждую такую матрицу можно привести к очень простому виду, если векторы схемы (17,13) принять за контравариантные координатные векторы.

Рассмотрим плоский инвариантный пучок E_s, построенный на векторах схемы (17,13), принадлежащих к одной и той же r-ой колонне. Пусть векторфункция $\mathbf{W}_s(\mathbf{x})$ определяет преобразование, индуцированное в плоскости E_s. Обозначим векторы r-ой колонны схемы (17,13) заново через $\underset{1}{\mathbf{e}}, \underset{2}{\mathbf{e}}, \dots \underset{s}{\mathbf{e}}$, нумеруя их с нижнего конца колонны вверх, и будем считать эти векторы за контравариантные координатные векторы в E_s. Тогда из (17,14) получаем:

$$
(17{,}16)\qquad \mathbf{W}_s(\underset{k}{\mathbf{e}}) = \lambda_1 \underset{k}{\mathbf{e}} + \underset{k-1}{\mathbf{e}}\ \ (k>1),\ \ \mathbf{W}_s(\underset{1}{\mathbf{e}}) = \lambda_1 \underset{1}{\mathbf{e}},
$$

т. е.

$$
(17{,}17)\qquad \mathbf{W}_s(\mathbf{x}) = (\lambda_1 x^1 + x^2)\underset{1}{\mathbf{e}} + (\lambda_1 x^2 + x^3)\underset{2}{\mathbf{e}} + \dots + \lambda_1 x^s \underset{s}{\mathbf{e}}.
$$

Элементы соответствующей матрицы W_s будут иметь вид:

$$
w^{\alpha}_{\beta} = \overset{\alpha}{\mathbf{e}}\mathbf{W}_s(\underset{\beta}{\mathbf{e}}) = \lambda_1 \delta^{\alpha}_{\beta} + \delta^{\alpha}_{\beta-1},
$$

$$
w^{\alpha}_{1} = \overset{\alpha}{\mathbf{e}}\mathbf{W}_s(\underset{1}{\mathbf{e}})\,\lambda_1 \delta^{\alpha}_{1}
$$

Итак, матрица W_s выражается следующим образом:

$$
(17{,}18)\qquad W_s = \left\|\begin{matrix}
\lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0\\
0 & \lambda_1 & 1 & 0 \dots & 0\\
0 & 0 & \lambda_1 & 1 \dots & 0\\
\dots & & & & \\
\dots & & & & \\
0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_1
\end{matrix}\right\|
$$

Векторфункция (17,17) с соответствующей матрицей (17,18) определяет в E_s преобразование с единственным главным направлением — по вектору $\underset{1}{\mathbf{e}}$.

Матрицы вида (17,18) условимся называть э л е м е н т а р н ы м и.

Применяя указанный процесс ко всем матрицам преобразований, индуцированных в инвариантных плоскостях $\mathbf{E}_{k_1}, \mathbf{E}_{k_2}, \dots \mathbf{E}_{k_s}$, мы приводим матрицу $\|\mathbf{A}\|$ к так называемому к а н о н и ч е с к о м у в и д у J o r d a n'a.

Объединяя все вышесказанное, можем формулировать теорему:

Т е о р е м а 4. *Матрица линейной векторфункции может быть приведена к каноническому виду Jordan'a:*

$$
\left\|\begin{matrix}
W_{s_1} & & & \\
& W_{s_2} & & \\
& & \ddots & \\
& & & W_{s_t}
\end{matrix}\right\| \qquad (s_1 + s_2 + \dots + s_t = n),
$$

где W_{s_i} — элементарные матрицы вида (17,18).

Отметим, что простому корню λ_i соответствует элементарная матрица 1-го порядка: $\|\lambda_i\|$.

5. Числа (17,15) $p_m, p_{m-1}, p_{m-2}, \dots p_1$ показывают, сколько элементарных матриц различных порядков соответствует харак-

теристическому числу λ_1. Определяя соответствующие числа для других корней, получаем систему чисел:

$$
\begin{aligned}
&p'_{m_1},\ p'_{m_1-1}, \dots p'_1 \text{ для корня } \lambda_1,\\
&p''_{m_2},\ p''_{m_2-1}, \dots p''_1 \quad \text{»} \qquad \text{»} \quad \lambda_2,\\
&p'''_{m_3},\ p'''_{m_3-1}, \dots p'''_1 \quad \text{»} \qquad \text{»} \quad \lambda_3.\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\tag{17,19}
$$

Этим числам соответствуют порядки элементарных матриц

$$
\begin{aligned}
&m_1,\ m_1-1, \dots 1,\\
&m_2,\ m_2-1, \dots 1,\\
&m_3,\ m_3-1, \dots 1,\\
&\text{и т. д.}
\end{aligned}
\tag{17,20}
$$

Мы будем говорить, что числа (17,19) и (17,20) определяют **тип** тензора (векторфункции) a^{α}_{β}. Для обозначения типа тензора употребляется следующий символ: выписывают порядки матриц m_1, m_1-1, $m_1-2, \dots$, повторяя их столько раз, чему равны соответствующие числа p'_{m_1}, $p'_{m_1-1}, \dots$; круглыми скобками объединяют числа, соответствующие одному и тому же характеристическому числу:

$$[(\underbrace{m_1,\ m_1, \dots m_1}_{p'_{m_1}\text{ раз}},\ \underbrace{m_1-1,\ m_1-1, \dots m_1-1}_{p'_{m_1-1}\text{ раз}}, \dots \underbrace{1, 1, \dots 1}_{p_1'\text{ раз}})$$

$$(\underbrace{m_2,\ m_2, \dots m_2}_{p''_{m_2}\text{ раз}},\ \underbrace{m_2-1, \dots m_2-1}_{p''_{m_2-1}\text{ раз}}, \dots \underbrace{1, 1, \dots 1}_{p_1''\text{ раз}}) \dots]$$

Если в круглых скобках стоит только одно число, скобки опускаются. Этот символ называется **характеристикой** векторфункции (или соответствующего тензора, матрицы).

Пример. У следующих матриц, приведенных к каноническому виду:

$$
\begin{Vmatrix} \lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{Vmatrix},\quad
\begin{Vmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{Vmatrix},\quad
\begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{Vmatrix},\quad
\begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{Vmatrix}
$$

характеристики выражаются соответственно следующими символами:

$$[2,\ 1], \quad [2,\ 2], \quad [1,\ 1,\ 1,\ 2], \quad [(1,\ 1),\ (1,\ 3)].$$

Отметим два наиболее простые типа линейных векторфункций: 1) если все характеристические числа различны, то характеристика имеет вид: $[1,\ 1,\ 1, \dots 1]$, 2) для элементарной матрицы:

$$
\begin{Vmatrix}
\lambda & 1 & 0 & 0 \dots 0\\
0 & \lambda & 1 & 0 \dots 0\\
0 & 0 & \lambda & 1 \dots 0\\
. & . & . & . \quad . \quad .\\
0 & 0 & 0 & 0 \dots \lambda
\end{Vmatrix}
\tag{17,21}
$$

характеристика запишется символом: $[n]$, где n — порядок этой матрицы.

Векторфункцию, у которой имеется n независимых главных направлений, мы назвали векторфункцией простого типа. Очевидно, что у нее характеристика состоит исключительно из единиц: $[(1,\ 1, \dots 1)(1,\ 1, \dots 1), \dots]$. Векторфункция простого типа обладает тем свойством, что ее ранг выражается числом неравных нулю характеристических чисел. Для векторфункции непростого типа это, вообще говоря, не так: например, если в элементарной матрице n-го порядка (17,21) $\lambda = 0$, то все характеристические числа равны нулю, между тем как ранг ее равен $n-1$.

Задача 6. Выписать все типы линейных векторфункций в двумерном и трехмерном пространствах.

Ответ: (указаны характеристики и соответствующие канонические формы матриц).

В двумерном пространстве:

$$1)\ [1,\ 1],\ \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2 \end{Vmatrix}\ (\lambda_1, \lambda_2 \neq),\quad 2)\ [(1,\ 1)],\ \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_1 \end{Vmatrix},\quad 3)\ [2],\ \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 1\\ 0 & \lambda_1 \end{Vmatrix}.$$

В трехмерном пространстве:

$$1)\ [1,\ 1,\ 1],\ \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{Vmatrix}\ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq),\quad 2)\ [(1,\ 1),\ 1],\ \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{Vmatrix}\ (\lambda_1, \lambda_2 \neq),$$

$$3)\ [(1,\ 1,\ 1)],\ \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{Vmatrix},\quad 4)\ [2,\ 1],\ \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{Vmatrix}\ (\lambda_1, \lambda_2 \neq),$$

$$5)\ [(2,\ 1)],\ \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{Vmatrix},\quad 6)\ [3],\ \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1\\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{Vmatrix}.$$

Задача 7. Указать инвариантные прямые и плоскости у векторфункций различных типов в двумерном и трехмерном пространстве.

Ответ (инвариантные элементы указаны в тех системах координат, в которых даны канонические формы матриц в ответе к предыдущей задаче). В двумерном пространстве: 1) тип [1,1] — два главных направления: $\underset{1}{\mathbf{e}}, \underset{2}{\mathbf{e}}$; 2) [(1, 1)] — каждое направление инвариантно; 3) [2] — одно главное направление: $\underset{1}{\mathbf{e}}$. В трехмерном пространстве: 1) [1, 1, 1] — три главных направления: $\underset{1}{\mathbf{e}}, \underset{2}{\mathbf{e}}, \underset{3}{\mathbf{e}}$, три инвариантных плоскости: $(\underset{1}{\mathbf{e}}, \underset{2}{\mathbf{e}})$ $(\underset{2}{\mathbf{e}}, \underset{3}{\mathbf{e}})$ $(\underset{3}{\mathbf{e}}, \underset{1}{\mathbf{e}})$; 2) [(1, 1), 1] — пучок главных направлений в плоскости $(\underset{1}{\mathbf{e}}, \underset{2}{\mathbf{e}})$ и изолированное главное направление: $\underset{3}{\mathbf{e}}$; инвариантные плоскости: плоскость $(\underset{1}{\mathbf{e}}, \underset{2}{\mathbf{e}})$ и пучок плоскостей, проходящих через ось $\underset{3}{\mathbf{e}}$; 3) [(1, 1, 1)] — все направления и плоскости инвариантны; 4) [2, 1] — два изолированных инвариантных направления $\underset{1}{\mathbf{e}}, \underset{3}{\mathbf{e}}$; две инвариантные плоскости: $(\underset{1}{\mathbf{e}}, \underset{2}{\mathbf{e}}), (\underset{1}{\mathbf{e}}, \underset{3}{\mathbf{e}})$; 5) [(2, 1)] — пучок главных направлений в плоскости $(\underset{1}{\mathbf{e}}, \underset{3}{\mathbf{e}})$; пучок инвариантных плоскостей, проходящих через ось $\underset{1}{\mathbf{e}}$; 6) [3] — одно инвариантное направление: $\underset{1}{\mathbf{e}}$, одна инвариантная плоскость: $(\underset{1}{\mathbf{e}}, \underset{2}{\mathbf{e}})$.

Задача 8. Если в ряду чисел $r_1, r_2, \ldots r_m$ (17,9) число $r_i \neq 1$, $r_{i+1} = 1$, то каноническая форма матрицы A_{k_1} соответствующей инвариантному пучку E_{k_1}, содержит одну элементарную матрицу порядка $m = i + k_1 - (r_1 + r_2 + \ldots r_i)$; матрицы порядков $(m-1)$, $(m-2), \ldots$ до $(i+1)$-го включительно отсутствуют. Таким образом, если $r_1 = 1$, то A_{k_1} — элементарная матрица.

Задача 9. У двух линейных векторфункций **A** и **B** простого типа, тогда и только тогда можно найти n общих независимых главных направлений, если они перестановочны: $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

Указание. Воспользоваться результатом задачи 37 (§ 1).

Задача 10. Доказать теорему: векторфункция **A** тогда и только тогда принадлежит к простому типу, если она удовлетворяет уравнению $\psi(\mathbf{A}) = 0$, где ψ — полином, корни которого все простые и равны характеристическим числам векторфункции **A**.

Задача 11. Пользуясь канонической формой матрицы и учитывая результат задачи 35 (§ 1), дать новое решение задачи 6 (§ 16); кроме того, доказать: если корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ не являются кратными корнями функции ψ и если $\psi(\lambda_i) \neq \psi(\lambda_k)$ $(\lambda_i \neq \lambda_k)$, то характеристика векторфункции $\psi(\mathbf{A})$ та же, что и у функции **A**.

6. Принимая во внимание анализ, данный в разделе 4 настоящего параграфа, мы должны при определении типа векторфункции **A**, заданной матрицей A, поступать следующим образом. Взявши характеристическое число λ_1 кратности k_1, образуем матрицу $V = A - \lambda_1 E$, и ищем степени этой матрицы:

$$\text{(a)} \qquad V, \ V^2, \ V^3, \ldots V^i, \ldots$$

пока не дойдем до матрицы V^m, ранг которой ϱ_m равен $n - k_1$. Пусть $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_m$ — ранги матриц (a). Тогда

$$\begin{aligned} r_1 &= n - \varrho_1, \\ r_1 + r_2 &= n - \varrho_2, \\ r_1 + r_2 + r_3 &= n - \varrho_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_1 + r_2 + \ldots + r_m &= n - \varrho_m = k_1. \end{aligned}$$

Определяем $r_1, r_2, \ldots r_m$ и затем числа $p_1, p_2, \ldots p_m$:

$$\begin{aligned} p_m &= r_m \\ p_{m-1} &= r_{m-1} - r_m \\ p_{m-2} &= r_{m-2} - r_{m-1} \\ &\ldots\ldots\ldots \\ p_1 &= r_1 - r_2. \end{aligned}$$

Дальше повторяем это с другими корнями. Тип будет найден.

Для нахождения векторов, которые надо принять за координатные для того, чтобы матрица привелась к каноническому виду, поступаем так: ищем векторы, удовлетворяющие уравнению (17,11): $\overset{m}{\mathbf{V}}{}^m(\mathbf{x}) = 0$, но для которых $\overset{m}{\mathbf{V}}{}^{m-1}(\mathbf{x}) \neq 0$; это будут векторы m-ой серии: $\underset{1}{\overset{m}{\mathbf{u}}}, \underset{2}{\overset{m}{\mathbf{u}}}, \ldots \underset{r_m}{\overset{m}{\mathbf{u}}}$; образуем векторы $\underset{i}{\overset{m-1}{\mathbf{u}}} = \mathbf{V}(\underset{i}{\overset{m}{\mathbf{u}}})$ и прибавляем к ним независимые векторы, удовлетворяющие уравнению $\mathbf{V}^{m-1}(\mathbf{x}) = 0$, но для которых $\mathbf{V}^{m-2}(\mathbf{x}) \neq 0$; получаем $(m-1)$-ую серию. Затем переходим к $(m-2)$-ой и т. д. И так поступаем для каждого корня.

Пример. Векторфункция задана матрицей:

$$A = \begin{Vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 1, & 1, & 0, & 0, & -1 \\ 0, & 1, & 1, & 0, & -1 \\ 2, & 0, & 0, & -1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & -1 \end{Vmatrix}.$$

Характеристический полином: $(\lambda + 1)^2 (\lambda - 1)^3$. Берем корень 2-ой кратности $\lambda_1 = -1$. Образуем

$$V = A - \lambda_1 E = \begin{Vmatrix} 2, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 1, & 2, & 0, & 0, & -1 \\ 0, & 1, & 2, & 0, & -1 \\ 2, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{Vmatrix}.$$

Ранг ϱ_1 этой матрицы равен 3. Следовательно, $m_1 = 1$, $r_1 = 2$, $p_1 = 2$. Исследование корня λ_1 кончено.

Переходим к корню 3-ьей кратности $\lambda_2 = 1$. Образуем

$$\overline{V} = A - \lambda_2 E = \begin{Vmatrix} 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 1, & 0, & 0, & 0, & -1 \\ 0, & 1, & 0, & 0, & -1 \\ 2, & 0, & 0, & -2, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & -2 \end{Vmatrix}.$$

Ранг этой матрицы $\overline{\varrho}_1 = 4$. Образуем

$$\overline{V}^2 = \begin{Vmatrix} 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 2 \\ 1, & 0, & 0, & 0, & 1 \\ -4, & 0, & 0, & 4, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 4 \end{Vmatrix}.$$

Ранг $\overline{\varrho}_2 = 3$. Вычисляем

$$\overline{V}^3 = \begin{Vmatrix} 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & -4 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & -2 \\ 8, & 0, & 0, & -8, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & -8 \end{Vmatrix}.$$

Ранг $\overline{\varrho}_3 = 2$. Следовательно, $\overline{m} = 2$, $\overline{r}_1 = 1$, $\overline{r}_2 = 1$, $\overline{r}_3 = 1$ (при определении т и п а можно было бы ограничиться определением $\overline{\varrho}$, так как, если $\overline{r}_1 = 1$, то и все дальнейшие $\overline{r}_i = 1$). Для 2-го корня имеем: $\overline{p}_1 = \overline{p}_2 = 0$, $\overline{p}_3 = 1$. Итак, характеристика векторфункции: [(1, 1), 3], канонический вид матрицы:

$$\begin{Vmatrix} -1, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 1 \end{Vmatrix}$$

Остается указать, какие векторы надо принять за координатные, чтобы получить канонический вид матрицы. Для корня λ_1 образуем уравнения $\mathbf{V}(\mathbf{x}) = 0$; они приводятся к системе:

$$\begin{gathered} x^{(1)} = 0 \\ 2x^{(2)} - x^{(5)} = 0 \\ x^{(2)} - 2x^{(3)} = 0. \end{gathered}$$

За 1-й вектор можно принять, например, $\underset{1}{\mathbf{a}}$ (0, 0, 0, 1, 0), за

2-й: $\underset{2}{\mathbf{a}}$ (0, 2, 1, 0, 4). Переходим к корню λ_2. Уравнения: $\overline{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) = 0$, $\overline{\mathbf{V}}^2(\mathbf{x}) = 0$, $\overline{\mathbf{V}}^3(\mathbf{x}) = 0$ дают соответственно системы:

$$\text{(a)} \begin{cases} x^{(1)} = 0 \\ x^{(2)} = 0 \\ x^{(4)} = 0 \\ x^{(5)} = 0 \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} x^{(1)} = 0 \\ x^{(4)} = 0 \\ x^{(5)} = 0 \end{cases} \qquad \text{(c)} \begin{cases} x^{(1)} - x^{(4)} = 0 \\ x^{(5)} = 0. \end{cases}$$

За вектор 3-ьей серии можно принять $\overset{3}{\underset{1}{\mathbf{u}}}$ (1, 0, 0, 1, 0), удовлетворяющий системе (c), но не удовлетворяющий системе (b). Соответственный ему вектор 2-ой серии $\overset{2}{\underset{1}{\mathbf{u}}} = \mathbf{V}(\overset{3}{\underset{1}{\mathbf{u}}})$ имеет составляющими $\overset{2}{\underset{1}{\mathbf{u}}}$ (0, 1, 0, 0, 0). Образуем вектор $\overset{1}{\underset{1}{\mathbf{u}}} = \mathbf{V}(\overset{2}{\underset{1}{\mathbf{u}}})$: $\overset{1}{\underset{1}{\mathbf{u}}}$ (0, 0, 1, 0, 0). Таким образом, для приведения матрицы A к каноническому виду надо взять за контравариантные кординатные векторы: $\underset{1}{\mathbf{a}}$, $\underset{2}{\mathbf{a}}$, $\overset{1}{\underset{1}{\mathbf{u}}}$, $\overset{2}{\underset{1}{\mathbf{u}}}$, $\overset{3}{\underset{1}{\mathbf{u}}}$. Матрицы преобразования координат будут следующие:

$$X^{-1} = \begin{Vmatrix} 0, & 0, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & 2, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & 1, & 0, & 0 \\ 1, & 0, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & 4, & 0, & 0, & 0 \end{Vmatrix}, \qquad X = \begin{Vmatrix} -1, & 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \frac{1}{4} \\ 0, & 0, & 1, & 0, & -\frac{1}{4} \\ 0, & 1, & 0, & 0, & -\frac{1}{2} \\ 1, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{Vmatrix}.$$

Задача 12. Определить типы векторфункций, заданных следующими матрицами:

$$1) \begin{Vmatrix} -1, & -2, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ -2, & -2, & 1 \end{Vmatrix}, \quad 2) \begin{Vmatrix} -1, & -1, & 1 \\ 0, & 0, & 0 \\ -1, & 0, & 1 \end{Vmatrix},$$

$$3) \begin{Vmatrix} 0, & 0, & 0, & 1 \\ -1, & 1, & 0, & 1 \\ -1, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{Vmatrix}, \quad 4) \begin{Vmatrix} -1, & 0, & -1, & 0 \\ 0, & -1, & 0, & 0 \\ -1, & 0, & -1, & 1 \\ 0, & 0, & -1, & -1 \end{Vmatrix},$$

$$5) \begin{Vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 2, & -1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & -1, & 1, & 0 \end{Vmatrix}, \quad 6) \begin{Vmatrix} 1, & -1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0, & 0 \\ -1, & 1, & 1, & 0, & -1 \\ 0, & 0, & 1, & 1, & 2 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 2 \end{Vmatrix},$$

$$7)\ \begin{Vmatrix} -1, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & -1, & -1 \\ 0, & 0, & 0, & -1 \end{Vmatrix}, \quad 8)\ \begin{Vmatrix} 2, & 0, & -1, & 0, & 0 \\ 0, & 2, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 2, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 2, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 2 \end{Vmatrix}.$$

Ответ. 1) [(1, 1), 1], 2) [3], 3) [2, (1, 1)], 4) [(3, 1)], 5) [(1, 1), 1, 2], 6) [4, 1], 7) [(2, 2)], 8) [(3, 1, 1)].

Задача 13. Определить характеристику линейной векторфункции заданной матрицей:

$$\begin{Vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \ldots & \lambda_n \\ 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \ldots & \lambda_{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_{n-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_1 \end{Vmatrix}.$$

Рассмотреть случаи, когда $\lambda_2 \neq 0$ и когда $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \neq 0$.

Ответ. 1) Если $\lambda_2 \neq 0$, характеристика имеет вид $[n]$. 2) Если $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \neq 0$, то для $n = 2m$ характеристика имеет вид: $[(m, m)]$; для $n = 2m + 1$ имеем характеристику: $[(m, m+1)]$.

7. На основании теоремы 4, матрица векторфункции при приведении ее к каноническому виду Jordan'а распадается на отдельные элементарные матрицы:

$$W_s = \begin{Vmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{Vmatrix} \tag{17,21}$$

(s — порядок этой матрицы).

Каждой такой элементарной матрице сооответствует плоский пучок E_s, инвариантный при применении к его векторам векторфункции $\mathbf{A}(\mathbf{x})$. Матрица (17,21) задает как раз преобразование $\mathbf{W}_s(\mathbf{x})$, индуцированное в плоскости E_s. Нашей ближайшей задачей является изучение этого элементарного преобразования.

Возьмем те s векторов $\underset{1}{\mathbf{e}}, \underset{2}{\mathbf{e}}, \underset{3}{\mathbf{e}}, \ldots \underset{s}{\mathbf{e}}$, стоящие в одной из колонн схемы (17,13), которые мы приняли за контравариант-

ные векторы в плоскости E_s. Векторфункция $\mathbf{W}_s(\mathbf{x})$ преобразует их по следующему закону:

$$\begin{gathered} \mathbf{W}_s(\underset{k}{\mathbf{e}}) = \lambda \underset{k}{\mathbf{e}} + \underset{k-1}{\mathbf{e}}, \quad (k = 2, 3, \ldots s) \\ \mathbf{W}_s(\underset{1}{\mathbf{e}}) = \lambda \underset{1}{\mathbf{e}}, \end{gathered} \tag{17,22}$$

где λ — характеристическое число, соответствующее элементу E_s (см. формулу (17,16)).

Займемся изучением инвариантных пучков, лежащих в E_s. Обозначим через $E_k (k < s)$ k-мерный пучок, построенный на векторах $\underset{1}{\mathbf{e}}, \underset{2}{\mathbf{e}}, \ldots \underset{k}{\mathbf{e}}$. Формулы (17, 22) показывают, что E_k представляет собою инвариантный пучок. Возникает вопрос: существуют ли в E_s другие инвариантные элементы, кроме $E_1, E_2, \ldots E_{s-1}$.

Для исследования этого вопроса условимся в следующей терминологии. Обозначая через $\mathbf{V}_s$:

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{W}_s - \lambda \mathbf{E},$$

будем говорить, что вектор $\mathbf{x}$, лежащий в плоскости E_s, принадлежит к k-му классу, если

$$\mathbf{V}_s^k(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{V}_s^{k-1}(\mathbf{x}) \neq 0.$$

Так, например, вектор $\underset{1}{\mathbf{e}}$ относится к 1-му классу, вектор $\alpha \underset{1}{\mathbf{e}} + \beta \underset{2}{\mathbf{e}}$ — ко 2-му и т. д. Если вектор

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \underset{1}{\mathbf{e}} + \alpha_2 \underset{2}{\mathbf{e}} + \ldots + \alpha_s \underset{s}{\mathbf{e}}$$

принадлежит к k-му классу, то

$$\mathbf{V}_s^k(\mathbf{x}) = \alpha_{k+1} \underset{1}{\mathbf{e}} + \alpha_{k+2} \underset{2}{\mathbf{e}} + \ldots + \alpha_s \underset{s-k}{\mathbf{e}} = 0$$

$$\mathbf{V}_s^{k-1}(\mathbf{x}) = \alpha_k \underset{1}{\mathbf{e}} + \alpha_{k+1} \underset{2}{\mathbf{e}} + \ldots + \alpha_s \underset{s-k+1}{\mathbf{e}} \neq 0,$$

т. е.

$$\alpha_k \neq 0, \ \alpha_{k+1} = \alpha_{k+2} = \ldots = \alpha_s = 0.$$

Таким образом, общий вид вектора k-го класса следующий:

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \underset{1}{\mathbf{e}} + \alpha_2 \underset{2}{\mathbf{e}} + \ldots + \alpha_k \underset{k}{\mathbf{e}}, \quad (\alpha_k \neq 0).$$

Предположим, что этот вектор принадлежит к инвариантному элементу $E_m (m < s)$. Тогда и векторы $\varphi(\mathbf{W}_s)(\mathbf{x})$, где φ — некоторый полином, также лежит в этом элементе. Следовательно, векторы $\mathbf{V}_s(\mathbf{x})$, $\mathbf{V}_s^2(\mathbf{x})$, $\mathbf{V}_s^3(\mathbf{x})$, ... принадлежат элементу E_m. Так как

$$\mathbf{V}^{k-1}(\mathbf{x}) = \alpha_k \underset{1}{\mathbf{e}},$$

то $\underset{1}{\mathbf{e}}$ принадлежит к E_m; аналогично получаем:

$$\mathbf{V}^{k-2}(\mathbf{x}) = \alpha_{k-1}\underset{1}{\mathbf{e}} + \alpha_k \underset{2}{\mathbf{e}},$$

откуда мы видим, что и $\underset{2}{\mathbf{e}}$ лежит в E_m. Продолжая этот процесс дальше, мы увидим, что если вектор k-го класса принадлежит к инвариантной плоскости, то в ней лежат векторы $\underset{1}{\mathbf{e}}$, $\underset{2}{\mathbf{e}}, \ldots \underset{k}{\mathbf{e}}$. Отсюда легко обнаружить справедливость теоремы:

Теорема 5. *В инвариантной плоскости E_s, в которой индуцированное преобразование определяется элементарной матрицей:*

$$W_s = \begin{Vmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{Vmatrix},$$

существует одно инвариантное направление, определяемое вектором $\underset{1}{\mathbf{e}}$, один инвариантный двумерный пучок, определяемый векторами $\underset{1}{\mathbf{e}}, \underset{2}{\mathbf{e}}$, один инвариантный трехмерный пучок, определяемый векторами $\underset{1}{\mathbf{e}}, \underset{2}{\mathbf{e}}, \underset{3}{\mathbf{e}}$, и т. д.

8. На основании теоремы Hamilton'a-Cayley, линейная векторфункция удовлетворяет своему характеристическому уравнению. Возникает вопрос, нельзя ли подобрать уравнение более низкой степени, которому векторфункция также удовлетворяла бы.

Пусть характеристический полином векторфункции $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ имеет вид:

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2}\ldots(\lambda - \lambda_s)^{k_s} \qquad (\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_s \neq).$$

Мы видели, что каждому из множителей $(\lambda - \lambda_i)^{k_i}$ соответствует инвариантная плоскость E_i. Произвольный вектор пространства можно разложить на s составляющих:

$$\mathbf{x} = \underset{1}{\mathbf{x}} + \underset{2}{\mathbf{x}} + \ldots + \underset{s}{\mathbf{x}},$$

причем $\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \ldots \underset{s}{\mathbf{x}}$ лежат соответственно в инвариантных элементах $E_{k_1}, E_{k_2}, \ldots E_{k_s}$, и каждый вектор $\underset{i}{\mathbf{x}}$ удовлетворяет уравнению:

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E})^{k_i}(\underset{i}{\mathbf{x}}) = 0.$$

Обозначим (как это мы делали при доказательстве теоремы 4) через m_i наименьшую степень, обладающую свойством, что

(17,23) $$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E})^{m_i}(\underset{i}{\mathbf{x}}) = 0, \quad (i = 1, \ldots s)$$

для любого вектора $\underset{i}{\mathbf{x}}$, лежащего в E_{k_i}. Очевидно, что $1 \leqslant m_i \leqslant k_i$.

Полином

$$\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2}\ldots(\lambda - \lambda_s)^{m_s}$$

называется приведенным характеристическим полиномом рассматриваемой векторфункции. Уравнения (17,23) показывают, что *векторфункция удовлетворяет приведенному характеристическому полиному*

$$\psi(\mathbf{A}) = 0.$$

Покажем, что приведенный характеристический полином есть полином наименьшей степени, которому удовлетворяет соответствующая векторфункция. Пусть $\omega(\lambda)$ — многочлен, имеющий корень λ_i кратности r:

$$\omega(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^r \pi(\lambda),$$

где r — число, меньшее m_i, $\pi(\lambda_i) \neq 0$. В инвариантной плоскости E_i возьмем вектор $\underset{i}{\mathbf{x}}$, удовлетворяющий условию:

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E})^{r+1}(\underset{i}{\mathbf{x}}) = 0,$$
$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E})^{r}(\underset{i}{\mathbf{x}}) \neq 0.$$

Тогда вектор

$$\mathbf{y} = (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E})^r(\underset{i}{\mathbf{x}})$$

определяет одно из главных направлений векторфункции $\mathbf{A}$, соответствующих корню λ_i. Имеем:

$$\omega(\mathbf{A})(\underset{i}{\mathbf{x}}) = \pi(\mathbf{A})(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})^r(\underset{i}{\mathbf{x}}) = \pi(\mathbf{A})(\mathbf{y}).$$

Так как $\mathbf{A}(\mathbf{y}) = \lambda_i \mathbf{y}$, то

$$\omega(\mathbf{A})(\underset{i}{\mathbf{x}}) = \pi(\lambda_i)\mathbf{y}.$$

Но $\pi(\lambda_i) \neq 0$; значит, **A** не может удовлетворять уравнению $\omega(\mathbf{A}) = 0$, если $r < m_i$. Таким образом, доказана теорема:

Теорема 6. *Приведенный характеристический полином есть полином наименьшей степени, которому удовлетворяет соответствующая линейная векторфункция.*

При приведении матрицы векторфункции к каноническому виду Jordan'a каждому характеристическому числу λ_i соответствует ряд элементарных матриц порядков $m_i, m_i - 1, m_i - 2, \ldots$ Эти числа фигурируют в характеристике векторфункции. Получаем теорему:

Теорема 7. *Каждый показатель степени m_i в приведенном характеристическом полиноме:*

$$\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \ldots (\lambda - \lambda_s)^{m_s}$$

равен наибольшему из чисел, стоящих в характеристике линейной векторфункции и соответствующих корню λ_i.

Следствие 1. *Для того, чтобы линейная векторфункция была простого типа, необходимо и достаточно, чтобы ее приведенный характеристический полином имел простые корни.*

Следствие 2. *Для того, чтобы каждому характеристическому числу соответствовала только одна элементарная матрица в каноническом виде Jordan'a, необходимо и достаточно, чтобы приведенный характеристический полином совпадал с основным характеристическим полиномом векторфункции.*

Задача 14. Найти приведенные характеристические полиномы векторфункций, заданных матрицами:

$$\begin{Vmatrix} 0, & 0, & 0, & 1 \\ -1, & 1, & 0, & 1 \\ -1, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 2, & 0, & -1, & 0, & 0 \\ 0, & 2, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 2, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 2, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 2 \end{Vmatrix},$$

Ответ. 1) $\lambda^2(\lambda - 1)$, 2) $(\lambda - 2)^3$.

Задача 15. Показать, что метод А. Н. Крылова вычисления характеристического полинома (см. задачу 5 настоящего параграфа) приложим только в том случае, если приведенный характеристический полином совпадает с основным.

Решение. Метод А. Н. Крылова приложим только в том случае, если можно найти такой вектор **x**, для которого

$$(*) \qquad (\mathbf{A}^{n-1}(\mathbf{x})\, \mathbf{A}^{n-2}(\mathbf{x}) \ldots \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x}) \neq 0.$$

Если же существует уравнение $\psi(\mathbf{A}) = 0$ степени, меньшей n, то для каждого вектора выражение (*) равно нулю.

Задача 16. Линейная векторфункция называется идемпотентной, если она удовлетворяет уравнению:

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}.$$

Показать, что идемпотентная линейная векторфункция имеет характеристические числа, равные нулю или единице, и что она — простого типа. Если обозначить область ее существования через E_m, ее нулевую область через E_{n-m}, то она проектирует векторы пространства на плоскость E_m параллельно плоскости E_{n-m}.

Задача 17. Линейная векторфункция называется нильпотентной, если она удовлетворяет уравнению:

$$\mathbf{A}^2 = 0.$$

Нильпотентная векторфункция имеет характеристические числа равные нулю; в ее характеристике входят только двойки и единицы.

Задача 18. Если линейная векторфункция удовлетворяет уравнению $g(\mathbf{A}) = 0$, то полином $g(\lambda)$ делится на приведенный характеристический полином этой векторфункции. Если $g(\lambda)$ не имеет кратных корней, то **A** принадлежит к простому типу.

Задача 19. Линейная векторфункция **A**, удовлетворяющая уравнению: $\mathbf{A}^m = \mathbf{E}$, где m — целое положительное число, называется циклической. Векторфункция тогда и только тогда является циклической, если она — простого типа и ее характеристические числа суть корни m-ой степени из 1.

9. Существует очень простой критерий, позволяющий судить, является ли данная линейная векторфункция векторфункцией простого типа.

Теорема 8. *Линейная векторфункция* **A** *тогда и только тогда принадлежит к простому типу, если для любого ее характеристического числа λ_i каждое решение уравнения*

$$(17{,}24) \qquad (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E})^2(\mathbf{x}) = 0$$

удовлетворяет уравнению

$$(17{,}25) \qquad (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E})(\mathbf{x}) = 0.$$

Необходимость теоремы обнаруживается очень просто: если характеристическому числу λ_i соответствует инвариантный пучок E_{k_i}, то решения уравнения (17,24) дают векторы, лежащие в E_{k_i}; а так как для векторфункции простого типа все векторы, принадлежащие к E_{k_i}, определяют главные направления с характеристическим числом λ_i, то отсюда вытекает, что все решения уравнения (17,24) удовлетворяют (17,25).

Достаточность теоремы доказывается так: из условия теоремы вытекает, что для любого корня характеристического уравнения элементы E' и E'' в ряде (17,8) совпадают, т. е. $r_2 = 0$. Но числа $r_1, r_2, \dots r_m$, как это следует из формулы (17,15), образуют невозрастающую последовательность. Поэтому $r_2 = r_3 = r_4 = \dots = 0$. Но r_m должно быть больше нуля. Следовательно, $m = 1$, т. е. в канонической форме матрицы фигурируют элементарные матрицы только 1-го порядка.

10. Рассмотрим вопрос о приведении матрицы линейной векторфункции к каноническому виду в вещественном пространстве.

Если заданная векторфункция действительна (элементы соответствующей матрицы реальны), то каждому комплексному корню характеристического уравнения соответствует сопряженный комплексный корень, каждому комплексному вектору, который мы принимаем за координатный вектор для приведения матрицы к каноническому виду, соответствует сопряженный комплексный вектор в области, определяемой сопряженным корнем.

Таким образом, схеме (17, 13) векторов, соответствующей комплексному корню $\lambda = \alpha + i\beta$, отвечает аналогичная схема сопряженных векторов с корнем $\lambda = \alpha - i\beta$. Если векторы схемы (17, 13) выражаются: $\underset{i}{\overset{k}{\mathbf{u}}} = \underset{i}{\overset{k}{\mathbf{v}}} + i\underset{i}{\overset{k}{\mathbf{w}}}$, то векторы сопряженной схемы имеют вид: $\underset{i}{\overset{\overline{k}}{\mathbf{u}}} = \underset{i}{\overset{k}{\mathbf{v}}} - i\underset{i}{\overset{k}{\mathbf{w}}}$.

Выбрав i-ые колонны в двух комплексно-сопряженных схемах, определяющих два инвариантных комплексно-сопряженных пучка E_s; $\overline{E}_s$, посмотрим, как будут преобразовываться действительные векторы $\overset{k}{\mathbf{v}}, \overset{k}{\mathbf{w}}$ (индекса i под векторами мы писать не будем).[1] Формулы (17,14) дают

$$\mathbf{A}(\overset{k}{\mathbf{v}} \pm i\overset{k}{\mathbf{w}}) = (\alpha \pm i\beta)(\overset{k}{\mathbf{v}} \pm i\overset{k}{\mathbf{w}}) + \overset{k-1}{\mathbf{v}} \pm i\overset{k-1}{\mathbf{w}}, \quad (k > 1)$$

$$\mathbf{A}(\overset{1}{\mathbf{v}} \pm i\overset{1}{\mathbf{w}}) = (\alpha \pm i\beta)(\overset{1}{\mathbf{v}} \pm i\overset{1}{\mathbf{w}}).$$

[1] В дальнейшем изложении $\overset{k}{\mathbf{v}}$ и $\overset{k}{\mathbf{w}}$ обозначают контравариантные векторы.

Отсюда получаем:

$$(17,26) \qquad \left.\begin{aligned} \mathbf{A}(\overset{k}{\mathbf{v}}) &= \alpha\overset{k}{\mathbf{v}} - \beta\overset{k}{\mathbf{w}} + \overset{k-1}{\mathbf{v}} \\ \mathbf{A}(\overset{k}{\mathbf{w}}) &= \beta\overset{k}{\mathbf{v}} + \alpha\overset{k}{\mathbf{w}} + \overset{k-1}{\mathbf{w}} \end{aligned}\right\} (k > 1)$$

$$\mathbf{A}(\overset{1}{\mathbf{v}}) = \alpha\overset{1}{\mathbf{v}} - \beta\overset{1}{\mathbf{w}}$$

$$\mathbf{A}(\overset{1}{\mathbf{w}}) = \beta\overset{1}{\mathbf{v}} + \alpha\overset{1}{\mathbf{w}}$$

Эти формулы показывают, что система векторов $\overset{k}{\mathbf{v}}, \overset{k}{\mathbf{w}}$ определяет инвариантный пучок. Следовательно, двум s-мерным комплексно-сопряженным инвариантным элементам E_s, $\overline{E}_s$ в комплексном пространстве соответствует в реальном один $2s$-мерный инвариантный элемент E_{2s}. Индуцированное в нем преобразование задается матрицей $2s$-го порядка.

Посмотрим, к какому виду приведется матрица, если за координатные векторы принять $\overset{k}{\mathbf{v}}, \overset{k}{\mathbf{w}}$. Перенумеруем их заново, относя векторам $\overset{k}{\mathbf{v}}$ нечетные нумера, векторам $\overset{k}{\mathbf{w}}$ — четные:

$$\underset{1}{\mathbf{e}} = \overset{1}{\mathbf{v}}, \quad \underset{2}{\mathbf{e}} = \overset{1}{\mathbf{w}}, \quad \underset{3}{\mathbf{e}} = \overset{2}{\mathbf{v}}, \quad \underset{4}{\mathbf{e}} = \overset{2}{\mathbf{w}} \text{ и т. д.}$$

Получаем систему векторов: $\underset{1}{\mathbf{e}}, \underset{2}{\mathbf{e}} \dots \underset{2s}{\mathbf{e}}$. Формулам (17,26) будут соответствовать соотношения:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{A}(\underset{2k-1}{\mathbf{e}}) &= \alpha\underset{2k-1}{\mathbf{e}} - \beta\underset{2k}{\mathbf{e}} + \underset{2k-3}{\mathbf{e}} \\ \mathbf{A}(\underset{2k}{\mathbf{e}}) &= \beta\underset{2k-1}{\mathbf{e}} + \alpha\underset{2k}{\mathbf{e}} + \underset{2k-2}{\mathbf{e}} \end{aligned}\right\} (k > 1)$$

$$\mathbf{A}(\underset{1}{\mathbf{e}}) = \alpha\underset{1}{\mathbf{e}} - \beta\underset{2}{\mathbf{e}}$$

$$\mathbf{A}(\underset{2}{\mathbf{e}}) = \beta\underset{1}{\mathbf{e}} + \alpha\underset{2}{\mathbf{e}}.$$

Вычисляя составляющие тензора по формуле: $a^{\alpha}{}_{\beta} = \overset{\alpha}{\mathbf{e}}\mathbf{A}(\underset{\beta}{\mathbf{e}})$, получаем канонический вид матрицы преобразования, индуцированного в плоскости E_{2s}:

(17,27)
$$A_{2s} = \begin{Vmatrix} AB & & & & \\ & AB & & & \\ & & AB & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A \end{Vmatrix},$$

где
$$A = \begin{Vmatrix} \alpha, & \beta \\ -\beta, & \alpha \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{Vmatrix}.$$

Пустые поля в матрице (17,27) заполнены нулями. Матрицу вида (17,27) будем называть элементарной. Получаем теорему:

Теорема 9. *В реальном пространстве канонической формой матрицы линейной векторфункции является:*

$$\begin{Vmatrix} V_{k_1} & & & \\ & V_{k_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & V_{k_s} \end{Vmatrix},$$

где $V_{k_1}, V_{k_2}, \ldots$ — *элементарные матрицы, имеющие вид:* (17,18) *для действительных корней и* (17,27) *для комплексных.*

Если векторфункция — простого типа, то канонический вид ее матрицы в вещественном пространстве следующий:

(17,28)
$$\begin{Vmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \lambda_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & A_1 & & \\ & & & & A_2 & \\ & & & & & \ddots \end{Vmatrix},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — действительные характеристические числа, $A_1, A_2, \ldots$ — матрицы 2-го порядка вида:

$$A_i = \begin{Vmatrix} \alpha_i, & \beta_i \\ -\beta_i, & \alpha_i \end{Vmatrix}.$$

Задача 20. Исследовать характер инвариантных элементов линейной векторфункции в двумерном и трехмерном вещественном пространстве.

Ответ. К результату задачи 7 надо прибавить следующее: в двумерном пространстве тип [1,1] может дать матрицу с комплексными корнями; канонический вид ее: $\begin{Vmatrix} \alpha, & \beta \\ -\beta, & \alpha \end{Vmatrix}$; инвариантных направлений у этой векторфункции нет. В трехмерном пространстве тип [1, 1, 1] может дать матрицу с двумя комплексными корнями, имеющую канонический вид.

$$\begin{Vmatrix} \alpha, & \beta, & 0 \\ -\beta, & \alpha, & 0 \\ 0, & 0, & \lambda_3 \end{Vmatrix};$$

у этой векторфункции одно главное направление: $\underset{3}{\mathbf{e}}$ и одна инвариантная плоскость: $(\underset{1}{\mathbf{e}}, \underset{2}{\mathbf{e}})$.

Задача 21. Привести к каноническому виду в вещественном пространстве матрицы:

$$\begin{Vmatrix} -1, & 1, & 0, & -1 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & -1, & 0, & 0 \\ 2, & 1, & 1, & 1 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0, & 1, & 0, & 0 \\ -2, & 2, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & -2, & 2 \end{Vmatrix}.$$

Ответ. 1) Тип [2, 2], канонический вид:

$$\begin{Vmatrix} 0, & 1, & 1, & 0 \\ -1, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & -1, & 0 \end{Vmatrix};$$

2) Тип [(1, 1), (1, 1)], канонический вид:

$$\begin{Vmatrix} 1, & -1, & 0, & 0 \\ 1, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & -1 \\ 0, & 0, & 1, & 1 \end{Vmatrix}.$$

Задача 22. Применить теорему 4 к интегрированию системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx^i}{dt} = a^i_{\alpha} x^{\alpha}$$

с постоянными коэффициентами.

Решение. Разлагая интеграл дифференциального уравнения

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(\mathbf{x})$$

в ряд по степеням t и обозначая через $\mathbf{x}_0$ начальное значение $\mathbf{x}$ (для $t = 0$), имеем:

$$\mathbf{x} = e^{t\mathbf{A}}(\mathbf{x}_0),$$

где $e^{t\mathbf{A}}$ — линейная векторфункция, определяемая рядом:

$$e^{t\mathbf{A}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathbf{A}^n.$$

Вводя систему координат, в которой матрица $\|\mathbf{A}\|$ имеет канонический вид Jordan'а, получаем (см. задачи 35, 36, § 1)

$$\|e^{t\mathbf{A}}\| = \left\| \begin{matrix} M_{s_1} & & \\ & \ddots & \\ & & M_{s_r} \end{matrix} \right\|,$$

где

$$M_{s_i} = e^{\lambda_i t} \left\| \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{s_i} \\ & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{s_i - 1} \\ & & \dots & \dots & \dots \\ & & & \dots & \dots \\ & & & & \alpha_1 \end{matrix} \right\|, \quad \alpha_k = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$$

§ 18. Применение теории элементарных делителей к линейным векторфункциям 1-го рода.

1. При определении характеристики линейной векторфункции 1-го рода мы пользовались приемом, который заключался в определении ранга последовательных степеней матриц:

$$A - \lambda_i E,$$

где λ_i — характеристические числа векторфункции $\mathbf{A}(\mathbf{x})$. Теперь мы укажем еще один способ определения характеристики линейной векторфункции, который основывается на теории элементарных делителей λ-матриц.

Теорема. *Если у характеристической матрицы $\|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}\|$ линейной векторфункции $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ элементарные делители имеют вид:*

$$\begin{matrix} (\lambda - \alpha)^{e_1}, & (\lambda - \alpha)^{e_2}, & \dots (\lambda - \alpha)^{e_n}, \\ (\lambda - \alpha')^{e_1'}, & (\lambda - \alpha')^{e_2'}, & \dots (\lambda - \alpha')^{e_n'}, \\ (\lambda - \alpha'')^{e_1''}, & (\lambda - \alpha'')^{e_2''}, & \dots (\lambda - \alpha'')^{e_n''}, \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{matrix}$$

то характеристика этой линейной векторфункции записывается следующим образом:

$$[(e_1, e_2, \dots e_n), (e_1', e_2', \dots e_n'), (e_1'', e_2'', \dots e_n''), \dots].$$

Доказательство. Как мы видели в § 16, 3, при преобразовании координат матрица линейной векторфункции преобразуется по формуле

$$\|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}\|' = X \|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}\| X^{-1}.$$

Таким образом, обе эти матрицы эквивалентны, т. е. имеют одинаковые элементарные делители (§ 3, 2, теорема 2). Элементарные же делители λ-матрицы, соответствующей каноническому виду Jordan'а:

$$A(\lambda) = \left\| \begin{matrix} A_{k_1}(\lambda) & & & \\ & A_{k_2}(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{k_m}(\lambda) \end{matrix} \right\|,$$

где

$$A_{k_i}(\lambda) = \left\| \begin{matrix} \lambda - \alpha_i, & -1 & & & \\ & \lambda - \alpha_i, & -1 & & \\ & & \lambda - \alpha_i, & -1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda - \alpha_i \end{matrix} \right\|$$

как было установлено в § 3, 6, имеют вид:

$$(\lambda - \alpha_1)^{k_1}, (\lambda - \alpha_2)^{k_2}, \dots$$

В характеристике линейной векторфункции фигурируют числа $k_1, k_2, \dots k_m$. Таким образом, теорема доказана.

Следствие 1. *Линейная векторфункция тогда и только тогда является векторфункцией простого типа, если элементарные делители ее характеристической матрицы простые.*

Следствие 2. *Для того, чтобы каждому характеристическому числу соответствовала только одна элементарная матрица в каноническом виде Jordan'а, необходимо и достаточно, чтобы элементарные делители характеристической матрицы были взаимно-простые.*

Следствие 3. *Приведенный характеристический полином линейной векторфункции равен n-му инвариантному фактору характеристической матрицы этой векторфункции:*

$$\psi(\lambda) = E_n(\lambda) = (\lambda - \alpha)^{e_n} (\lambda - \alpha')^{e'_n} (\lambda - \alpha'')^{e''_n} \dots$$

Пример. Рассмотрим векторфункцию, разобранную в § 17, 6. Ее характеристическая матрица имеет вид:

$$\begin{Vmatrix} \lambda-1, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ -1, & \lambda-1, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & -1, & \lambda-1, & 0, & 1 \\ -2, & 0, & 0, & \lambda+1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \lambda+1 \end{Vmatrix}$$

Вычисляем элементарные делители:

$$(\lambda+1),\ (\lambda+1),\ (\lambda-1)^3.$$

Следовательно, ее характеристика имеет вид: [(1,1),3], как мы нашли это раньше,

Задача 1. Решить задачи 12 и 13 предыдущего параграфа при помощи теории элементарных делителей.

Задача 2. Метод А. Н. Крылова вычисления характеристического полинома (см. задачу 5 предыдущего параграфа) может применяться только тогда, если элементарные делители соответствующей характеристической матрицы взаимно-простые.

§ 19. Ковариантный тензор 2-го порядка.

1. Ковариантный тензор 2-го порядка a_{ik} соответствует билинейной функции

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = a_{\alpha\beta}\, x^\alpha y^\beta.$$

Он определяет линейную векторфункцию 2-го рода, относящую контравариантному вектору вектор ковариантный:

$$\dot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}),\quad y_\alpha = a_{\alpha\beta}\, x^\beta.$$

Связь между билинейной функцией $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})$ и векторфункцией $\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ следующая:

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{y}).$$

Матрица, образованная из составляющих $a_{\alpha\beta}$:

$$M = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

называется матрицей билинейной формы. При преобразовании координат составляющие рассматриваемого тензора трансформируются следующим образом:

$$a'_{\alpha\beta} = a_{\sigma\tau}\binom{\sigma}{\alpha'}\binom{\tau}{\beta'}.$$

Следовательно, матрица M преобразуется по формуле:

$$M' = X_c^{-1} M X^{-1}. \tag{19,1}$$

Отсюда вытекает, что определители матриц M и M' связаны между собою соотношением

$$|M'| = |M|\,|X|^{-2}. \tag{19,2}$$

Таким образом, *определитель $|M|$ ковариантного тензора 2-го порядка является относительным инвариантом аффинной группы.* Соотношение (19,1) показывает, что ранг матрицы M инвариантен при преобразованиях координат. Ранг матрицы M называется также рангом тензора $a_{\alpha\beta}$ (векторфункции $\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$). Если ранг векторфункции равен r, то уравнение

$$\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = 0,\qquad a_{\alpha\beta}\, x^\beta = 0$$

имеет $n-r$ независимых решений. Векторы, удовлетворяющие этому уравнению, определяют нулевые направления векторфункции $\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$. Нулевые направления образуют пучок, называемый нулевой областью векторфункции.

2. Ковариантному тензору 2-го порядка a_{ik} соответствует тензор, сопряженный с ним:

$$\underset{c}{a}_{ik} = a_{ki}.$$

Он определяет линейную векторфункцию 2-го рода, сопряженную с $\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$:

$$\dot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{A}}_c(\mathbf{x}),\quad y_\alpha = a_{\beta\alpha} x^\beta,$$

которая связана с $\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ соотношением:

$$\mathbf{z}\dot{\mathbf{A}}_c(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{z}),$$

где $\mathbf{x}$ и $\mathbf{z}$ — произвольные контравариантные векторы.

Если тензор $a_{\alpha\beta}$ симметрический: $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$, то

$$\dot{\mathbf{A}}_c(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}),$$

если же $a_{\alpha\beta}$ — антисимметричен: $a_{\alpha\beta} = -a_{\beta\alpha}$, то

$$\dot{\mathbf{A}}_c(\mathbf{x}) = -\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}).$$

Любой тензор $a_{\alpha\beta}$ можно разложить на симметрическую и антисимметрическую части:

$$a_{\alpha\beta} = a_{(\alpha\beta)} + a_{[\alpha\beta]},$$

$$\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{A}} + \dot{\mathbf{A}}_c)(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{A}} - \dot{\mathbf{A}}_c)(\mathbf{x}).$$

3. Если ранг матрицы $\| a_{\alpha\beta} \|$ равен n, то функция

$$\dot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}), \qquad y_\alpha = a_{\alpha\beta} x^\beta$$

допускает обращение:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}(\dot{\mathbf{y}}), \qquad x^\alpha = b^{\alpha\beta} y_\beta,$$

причем матрица

$$N = \begin{Vmatrix} b^{11} b^{12} & . & . & b^{1n} \\ b^{21} b^{22} & . & . & b^{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ b^{n1} b^{n2} & . & . & b^{nn} \end{Vmatrix}$$

обратна матрице M:

$$N = M^{-1}.$$

Тензор $b^{\alpha\beta}$ называется обратным по отношению к тензору $a_{\alpha\beta}$; он связан с ним соотношением:

$$\mathbf{A}^{-1}\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{E}, \qquad b^{\alpha\beta} a_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma,$$

$$\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1} = \dot{\mathbf{E}}, \qquad a_{\alpha\beta} b^{\beta\gamma} = \delta^\gamma_\alpha.$$

Теория контравариантного тензора 2-го порядка a^{ik}, определяющего контравариантную линейную векторфункцию 2-го рода

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}(\dot{\mathbf{x}}), \qquad y^\alpha = a^{\alpha\beta} x_\beta,$$

конечно, вполне аналогична теории ковариантного тензора.

4. Проведем параллель между линейными векторфункциями 1-го и 2-го рода. Если эти линейные векторфункции имеют много общих черт (как те, так и другие определяют линейные преобразования, одинаково определяется ранг векторфункции, много общего у тех и других с матричным исчислением и т. д.), то в отношении некоторых свойств они резко отличаются друг от друга.

Например, рассмотрим линейную контравариантную векторфункцию 1-го рода:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{x}), \qquad y^\alpha = a^\alpha{}_\beta x^\beta.$$

Функция, обратная ей, является также контравариантным вектором: $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{y})$, сопряженная же ей функция представляет собой ковариантный вектор: $\dot{\mathbf{A}}_c(\mathbf{x})$.

Между тем, если мы возьмем линейную контравариантную функцию 2-го рода,

$$\mathbf{y} = \mathbf{B}(\dot{\mathbf{x}}), \quad y^\alpha = b^{\alpha\beta} x_\beta,$$

то получим прямо противоположную картину: обратная ей функция уже представляет собой ковариантный вектор:

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{B}}^{-1}(\mathbf{y}),$$

а функция, сопряженная с ней, является контравариантным вектором, как и самая функция

Укажем еще на некоторые свойства, отличающие функции 1-го и 2-го рода.

В теории линейных векторфункций 1-го рода имеется единичная (тождественная) векторфункция

$$\mathbf{y} = \mathrm{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$$

с составляющими δ^α_β. В теории векторфункций 2-го рода такой функции нет, так как аргумент и функция являются векторами различной природы. Если матрица векторфункции 2-го рода в некоторой системе координат является единичной матрицей

$$\| a_{\alpha\beta} \| = \begin{Vmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{Vmatrix}$$

то этот факт представляет собой случайное явление, и это свойство вообще пропадает при переходе к другой системе координат, как это можно видеть из формулы (19,1).

Свойство симметрии и антисимметрии может принадлежать только линейным векторфункциям 2-го рода.

Векторфункции 1-го рода этим свойством обладать не могут, так как две взаимно-сопряженные векторфункции определяют векторы различной природы: векторфункция, сопряженная с контравариантной функцией $\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{x})$, является уже ковариантным вектором $\dot{\mathbf{A}}_c(\mathbf{x})$. Если матрица линейной векторфункции 1-го рода $\| a^\alpha{}_\beta \|$ в заданной системе координат обладает свойством симметрии или антисимметрии, то это свойство вообще исчезает, как только мы будем изменять координатную систему.

Но особенно резко различаются функции 1-го и 2-го рода в исчислении линейных векторфункций. Для функций 1-го рода мы построили выше алгебру, аналогичную алгебре матриц, причем эта алгебра легла в основу исследования структуры этих функций. Совершенно иначе обстоит дело у векторфункций 2-го рода: там такой алгебры развить нельзя. В самом деле, если существует действие сложения двух векторфункций 2-го рода: $\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) + \dot{\mathbf{B}}(\mathbf{x})$, которому соответствует операция сложения соответствующих тензоров: $a_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta}$, то действия умножения уже построить невозможно. Рассмотрим две ковариантных векторфункции $\dot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ и $\dot{\mathbf{z}} = \dot{\mathbf{B}}(\mathbf{x})$. Не имеет смысла здесь говорить о функции, которая представляла бы результат последовательного применения этих функций к заданному вектору; никаким действием тензорного исчисления невозможно получить из тензоров $a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$ новый ковариантный тензор 2-го порядка так, чтобы он определял „произведение“ соответствующих векторфункций. Перемножить можно две линейных векторфункции 2-го рода только в том случае, если они определяют векторы различной природы. Например, если

$$\dot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}), \quad y_\alpha = a_{\alpha\beta}x^\beta; \quad \mathbf{z} = \mathbf{B}(\dot{\mathbf{y}}), \quad z^\alpha = b^{\alpha\beta}y_\beta,$$

то

$$\mathbf{z} = \mathbf{B}\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}), \quad z^\alpha = b^{\alpha\beta}a_{\beta\gamma}x^\gamma.$$

Здесь мы получаем в результате умножения $\mathbf{B}$ на $\dot{\mathbf{A}}$ линейную векторфункцию 1-го рода $\mathbf{B}\dot{\mathbf{A}}$, соответствующую смешанному тензору $b^{\alpha\beta}a_{\beta\gamma}$.

У линейной векторфункции 2-го рода нет, таким образом, действия возвышения в степень, отсутствует понятие о полиноме от векторфункции. Следовательно, нет аналога теоремы Hamilton'a-Cayley, и тот метод исследования, который основывался на применении этой теоремы в теории функций 1-го рода, отпадает.

5. Остановимся несколько на геометрической картине того преобразования, которое определяется линейной векторфункцией 2-го рода:

$$(19,3) \qquad \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}), \quad u_\alpha = a_{\alpha\beta}x.$$

Эта функция относит каждой точке пространства, не лежащей в начале координат, определенную гиперплоскость $\dot{\mathbf{u}}$. Эту гиперплоскость (конечную гиперплоскость ковариантного вектора $\dot{\mathbf{u}}$) условимся называть *соответствующей* точке $\mathbf{x}$. Начальную гиперплоскость вектора $\dot{\mathbf{u}}$ будем называть *сопряженной* вектору $\mathbf{x}$. Если гиперплоскость, сопряженная вектору $\mathbf{x}$, проходит через этот вектор, то направление $\mathbf{x}$ называется *асимптотическим*: $\mathbf{x}\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = 0$.

Преобразования (19,3) линейны и относятся к так называемым *коррелятивным преобразованиям* аффинного пространства.

На ряду с функцией $\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ полезно параллельно рассматривать сопряженную ей функцию:

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{A}}_c(\mathbf{x}).$$

Если $\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ — несимметрическая векторфункция, то плоскость $\dot{\mathbf{v}}$ отлична от плоскости $\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$.

Два направления $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ называются взаимно-сопряженными, если

$$(19,4) \qquad \mathbf{x}\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{y}) = 0 \text{ и } \mathbf{x}\dot{\mathbf{A}}_c(\mathbf{y}) = 0,$$

т. е. если

$$\mathbf{x}\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{y}) = 0, \ \mathbf{y}\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = 0.$$

Каждому направлению $\mathbf{y}$ в общем случае соответствует $(n-2)$-мерная плоскость (19,4), в которой лежат направления, взаимно-сопряженные с вектором $\mathbf{y}$.

Асимптотические направления являются самосопряженными.

Две плоскости называются взаимно-сопряженными, если векторы одной взаимно сопряжены с векторами другой плоскости. Предположим, что существуют две независимые взаимно-сопряженные плоскости E_m и E_{n-m}. Если координатные контравариантные векторы выбрать так, чтобы первые m лежали в E_m, а остальные в E_{n-m}, то

$$\left.\begin{aligned} a_{\alpha\beta} &= \underset{\alpha}{\mathbf{e}}\dot{\mathbf{A}}(\underset{\beta}{\mathbf{e}}) = 0, \\ a_{\beta\alpha} &= \underset{\beta}{\mathbf{e}}\dot{\mathbf{A}}(\underset{\alpha}{\mathbf{e}}) = 0, \end{aligned}\right\} \quad (\alpha \leqslant m, \beta > m).$$

Таким образом матрица $\|a_{\alpha\beta}\|$ распадается на две:

$$
\left\|\begin{array}{c|c}
\begin{matrix} a_{11} \dots a_{1m} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1} \dots a_{mm} \end{matrix} & 0 \\
\hline
0 & \begin{matrix} a_{m+1,m+1} \dots a_{m+1,n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n,m+1} \quad \dots \quad a_{nn} \end{matrix}
\end{array}\right\|
$$

Вектору $(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots x^{(m)}, 0, \dots 0)$, лежащему в плоскости E_m и не принадлежащему к нулевому направлению, вектор функция $\dot{\mathbf{A}}$ относит гиперплоскость $(u_1, u_2, \dots u_m, 0, \dots 0)$, где

$$u_i = \sum_{\alpha=1}^{m} a_{i\alpha} x^{\alpha} \qquad (i = 1,\ 2, \dots m);$$

гиперплоскость эта параллельна пучку E_{n-m}. В плоскости E_m она отсекает $(m-1)$-мерную плоскость. Таким образом, в E_m устанавливается коррелятивное соответствие между точками и $(m-1)$-мерными плоскостями. Матрица

$$\left\|\begin{matrix} a_{11} \dots a_{1m} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1} \dots a_{mm} \end{matrix}\right\|$$

определяет как раз это соответствие.

Аналогично обстоит дело с плоскостью E_{n-m}: любому вектору $\mathbf{x}$, не принадлежащему к нулевому направлению, соответствует гиперплоскость, параллельная пучку E_m; она отсекает в E_{n-m} $(n-m-1)$-мерную плоскость, соответствующую вектору $\mathbf{x}$.

Обратно, если в двух взаимно-сопряженных плоскостях, полностью определяющих векторное пространство, заданы индуцированные в них коррелятивные преобразования, то этим вполне определяется соответствующая векторфункция 2-го рода в полном пространстве.

6. Изучение структуры линейной векторфункции 2-го рода приводится к определению так называемых **главных направлений**. Направление называется главным, если гиперплоскости, сопряженные с ним относительно функций $\dot{\mathbf{A}}$ и $\dot{\mathbf{A}}_c$, совпадают:

$$\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \lambda \dot{\mathbf{A}}_c(\mathbf{x}).$$

Определение главных направлений приводится к решению **характеристического уравнения**:

$$|\dot{\mathbf{A}} - \lambda \dot{\mathbf{A}}_c| = 0.$$

Если у векторфункции можно выделить n независимых главных направлений, условимся называть ее **векторфункцией простого типа**.

К векторфункциям простого типа принадлежат функции симметрические и антисимметрические. У симметрической векторфункции все корни характеристического уравнения равны единице, у антисимметрической — минус единице. У обеих этих функций все направления являются главными.

Как уже было отмечено выше, те приемы, которые были развиты при изучении линейной векторфункции 1-го рода, неприменимы к функциям 2-го рода. Изучение структуры функций 2-го рода в общем случае основывается на теории пучков билинейных форм, созданной Weierstrass'ом и углубленной работами Kronecker'a и Frobenius'a. Мы не в состоянии сколько-нибудь подробно остановиться в этом курсе на этих исследованиях. Поэтому мы ограничимся только изучением наиболее простых типов векторфункции 2-го рода.

Мы начнем с исследования симметрических и антисимметрических тензоров, как наиболее простых и наиболее важных для приложений частных случаев. В § 24 мы вернемся к функциям, не обладающим симметрией, чтобы на примере векторфункции простого типа дать читателю представление о приемах исследования в области линейных векторфункций 2-го рода.

Задача 1. Если у векторфункций 2-го рода все направления являются асимптотическими, то эта векторфункция антисимметрическая.

Задача 2. Если у векторфункции можно выделить n независимых взаимно-сопряженных направлений, то функция эта симметрическая.

§ 20. Симметрический ковариантный тензор 2-го порядка. Квадратичные формы.

1. Теория симметрического ковариантного тензора 2-го порядка тесно связана с теорией центральных гиперповерхностей 2-го порядка.

Если тензору $c_{\alpha\beta}$ соответствует симметрическая скалярная билинейная функция

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{x}) = c_{\alpha\beta}x^{\alpha}y^{\beta},$$
$$c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha},$$

то уравнение

(20,1) $$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \lambda, \; c_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta} = \lambda$$

определяет семейство гиперповерхностей 2-го порядка, имеющих центр в начале координат. Если $\lambda = 0$, мы получаем так называемый асимптотический конус

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 0,$$

принадлежащий к этому семейству. Векторы и направления, принадлежащие к этому конусу, будем называть, согласно терминологии, введенной в предыдущем параграфе, асимптотическими.

Если дискриминант $|c_{ik}|$ квадратичной формы имеет ранг, равный $r (r < n)$, то существует $n-r$ независимых нулевых направлений, удовлетворяющих уравнению

$$\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{x}) = 0, \; c_{\alpha\beta}x^{\beta} = 0.$$

В этом случае существует $(n-r)$-мерная нулевая область; она принадлежит, конечно, к асимптотическому конусу.

Различные гиперповерхности семейства (20,1) могут быть получены из одной, например,

(20,2) $$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 1$$

при помощи аффинного преобразования: $\mathbf{x}' = \alpha\mathbf{x}$, называемого лучистым расширением. Поэтому в дальнейшем мы будем иметь дело только с одной гиперповерхностью (20,2); ее мы будем обозначать буквой S.

2. Рассмотрим некоторые основные свойства гиперповерхностей 2-го порядка. Начнем с вопроса о диаметральных плоскостях.

Проведем систему хорд, параллельных вектору $\mathbf{a}$, не принадлежащему к асимптотическому конусу. В общем случае каждая из хорд будет пересекать гиперповерхность S (20,2) в двух точках. Найдем геометрическое место средин этих хорд. Обозначая вектор средины хорды через $\mathbf{x}$, пишем уравнение хорды:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + t\mathbf{a}.$$

Значения параметра t, соответствующие двум точкам пересечения с гиперповерхностью S, определятся из уравнения

$$\varphi(\mathbf{y},\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) + 2t\varphi(\mathbf{x},\mathbf{a}) + t^2\varphi(\mathbf{a},\mathbf{a}) = 1.$$

Так как $\mathbf{x}$ — средина хорды, то значения параметра t, соответствующие точкам пересечения, должны быть равны по абсолютной величине и противоположны по знаку. Следовательно, вектор $\mathbf{x}$ должен удовлетворять уравнению

$$\varphi(\mathbf{a},\mathbf{x}) = \mathbf{x}\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{a}) = 0, \quad c_{\alpha\beta}a^{\alpha}x^{\beta} = 0,$$

которое определяет диаметральную гиперплоскость, сопряженную с направлением $\mathbf{a}$.

Если вектор $\mathbf{a}$ имеет асимптотическое направление, то гиперплоскость

$$\varphi(\mathbf{a},\mathbf{x}) = 0,$$

сопряженная с направлением $\mathbf{a}$, проходит через вектор $\mathbf{a}$.

3. Возьмем точку $\mathbf{a}$, не лежащую на гиперповерхности S, и проведем через нее пучок прямых

(20,3) $$\mathbf{y} = \mathbf{a} + t\mathbf{u},$$

с переменным направляющим вектором $\mathbf{u}$. Обозначим точки пересечения прямых (20,3) с гиперповерхностью S через $\underset{1}{\mathbf{y}}, \underset{2}{\mathbf{y}}$, точку, гармонически делящую вместе с $\mathbf{a}$ пару $\underset{1}{\mathbf{y}}, \underset{2}{\mathbf{y}}$, — через $\mathbf{x}$. Если вектор $\mathbf{u}$ будет изменять свое направление, точка $\mathbf{x}$ опишет некоторую гиперповерхность. Покажем, что эта последняя является гиперплоскостью.

Обозначим значения параметра t в уравнении прямой (20,3) для точек $\underset{1}{\mathbf{y}}, \underset{2}{\mathbf{y}}, \mathbf{x}$ соответственно через $t_1, t_2, \bar{t}$. Тогда условие, что точка $\mathbf{x}$ делит с $\mathbf{a}$ гармонически пару $\underset{1}{\mathbf{y}}, \underset{2}{\mathbf{y}}$, выразится уравнением:

$$\frac{t_1 - 0}{t_2 - 0} : \frac{t_1 - \bar{t}}{t_2 - \bar{t}} = -1, \quad \text{или} \quad \bar{t} = \frac{2t_1t_2}{t_1 + t_2}.$$

Так как точки $\underset{1}{\mathbf{y}}, \underset{2}{\mathbf{y}}$ лежат на гиперповерхности S, значения t_1 и t_2 удовлетворяют уравнению

$$t^2\varphi(\mathbf{a},\mathbf{u}) + 2t\varphi(\mathbf{a},\mathbf{u}) + \varphi(\mathbf{a},\mathbf{a}) - 1 = 0,$$

откуда

$$\bar{t} = \frac{\varphi(\mathbf{a},\mathbf{a}) - 1}{\varphi(\mathbf{a},\mathbf{u})}.$$

Таким образом, точки $\mathbf{x}$ задаются формулой:

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \frac{\varphi(\mathbf{a},\mathbf{a}) - 1}{\varphi(\mathbf{a},\mathbf{u})}\,\mathbf{u}. \tag{20,4}$$

При изменении $\mathbf{u}$ точка $\mathbf{x}$ описывает гиперплоскость, которая называется *полярной* относительно точки $\mathbf{a}$; обратно, точка $\mathbf{a}$ является *полюсом* этой гиперплоскости.

Выпишем уравнение полярной гиперплоскости в неявном виде. Для исключения $\mathbf{u}$ из уравнения (20,4) стоит только рассмотреть форму $\varphi(\mathbf{a},\mathbf{x})$. Имеем:

$$\varphi(\mathbf{a},\mathbf{x}) = 1 \tag{20,5}$$

или

$$\mathbf{x}\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{a}) = 1\,. \tag{20,6}$$

Уравнение (20,6) показывает, что эта гиперплоскость является конечной гиперплоскостью ковариантного вектора:

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{C}}(\mathbf{a}); \quad u_\alpha = c_{\alpha\beta}a^\beta\,.$$

Таким образом, *линейная симметрическая векторфункция 2-го рода относит каждой точке пространства* $\mathbf{x}$, *не лежащей в начале координат, гиперплоскость* $\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{C}}(\mathbf{x})$, *полярно-сопряженную относительно гиперповерхности* $\mathbf{x}\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{x}) = 1$.

Если точка $\mathbf{a}$ лежит на гиперповерхности S, то полярная гиперплоскость $\varphi(\mathbf{a},\mathbf{x}) = 1$ касается S в точке $\mathbf{a}$. Таким образом, S является геометрическим местом точек, обладающих тем свойством, что соответствующие им гиперплоскости проходят через эти точки.

Задача 1. Если точка $\mathbf{b}$ лежит в гиперплоскости, полярной точке $\mathbf{a}$ то гиперплоскость, полярная точке $\mathbf{b}$, проходит через $\mathbf{a}$.

4. Если вектор $\mathbf{x}$ лежит в диаметральной гиперплоскости, сопряженной с вектором $\mathbf{y}$:

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{x}) = 0\,,$$

то эти векторы (и их направления) называются *сопряженными* относительно квадратичной формы $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$ (тензора $c_{\alpha\beta}$). Свойство сопряженности взаимное: вектор $\mathbf{y}$ лежит также в диаметральной гиперплоскости, сопряженной с вектором $\mathbf{x}$.

Нашей дальнейшей задачей будет доказательство предложения, что у каждого ковариантного симметрического тензора 2-го порядка можно выделить n независимых взаимно-сопряженных направлений (взаимно-сопряженных диаметров гиперповерхности $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 1$).

5. Рассмотрим плоский m-мерный пучок. Если все его направления принадлежат к асимптотическому конусу, мы будем называть этот пучок *асимптотическим*. Каждый пучок, лежащий в нулевой области, является асимптотическим, но не обратно. Например, у квадратичной формы $(n = 4)$

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 2x^{(1)}x^{(2)} + 2x^{(3)}x^{(4)}$$

двумерный пучок $x^{(1)} = 0$, $x^{(3)} = 0$ — асимптотический; между тем нулевой области у этой формы нет.

Нетрудно показать, что все направления асимптотического пучка взаимно-сопряженны. В самом деле, из уравнений

$$\varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y},\ \mathbf{x}+\mathbf{y}) = 0\,, \quad \varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 0\,, \quad \varphi(\mathbf{y},\mathbf{y}) = 0$$

вытекает, что

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0\,.$$

Обратно, если все направления пучка взаимно-сопряженны, то он — асимптотический: из соотношений:

$$\varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{x}) = 0\,, \quad \varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y},\ \mathbf{y}) = 0\,, \quad \varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$$

мы выводим:

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 0\,, \quad \varphi(\mathbf{y},\mathbf{y}) = 0\,.$$

Если пучок задан базисом $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}$, то условие его асимптотичности выражается уравнениями:

$$\varphi(\underset{i}{\mathbf{u}}, \underset{k}{\mathbf{u}}) = 0 \qquad (i,\ k = 1, \ldots m). \tag{20,7}$$

Действительно, при выполнении этих соотношений каждый вектор пучка $\lambda_1\underset{1}{\mathbf{u}} + \lambda_2\underset{2}{\mathbf{u}} + \ldots + \lambda_m\underset{m}{\mathbf{u}}$ является асимптотическим.

Теорема 1. Если тензор $c_{\alpha\beta}$ неособенный, то у него не может существовать асимптотических пучков с числом измерений большим $\frac{n}{2}$.

Доказательство. Если асимптотический пучок определяется базисом $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}$, выбираем их за первые m координатных векторов: $\underset{1}{\mathbf{e}} = \underset{1}{\mathbf{u}}$, $\underset{2}{\mathbf{e}} = \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{e}} = \underset{m}{\mathbf{u}}$. Тогда в матрице

$$\|\dot{\mathbf{C}}\| = \left\| \begin{matrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \ldots & c_{nn} \end{matrix} \right\|$$

элементы, принадлежащие к главному минору

$$\begin{vmatrix} c_{11} \dots c_{1m} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ c_{m1} \dots c_{mm} \end{vmatrix},$$

равны нулю. Если бы m было больше $\frac{n}{2}$, то дискриминант квадратичной формы $|c_{ik}|$ равнялся бы нулю.

Ниже, в разделе 9 настоящего параграфа, мы увидим, что у неособенного симметрического тензора 2-го порядка всегда существуют $\frac{n}{2}$-мерные асимптотические пучки, если n — четное, и $\frac{n-1}{2}$-мерные, если n — нечетное.

6. Выведем условие того, что заданный плоский пучок касается асимптотического конуса. Для этого получим сначала уравнение гиперплоскости, касательной к асимптотическому конусу вдоль заданного направления $\mathbf{a}$. Гиперплоскость E_{n-1}, проходящую через $\mathbf{a}$, мы будем называть касательной к асимптотическому конусу, если все двумерные пучки, проходящие через $\mathbf{a}$ и лежащие в E_{n-1}, или касаются асимптотического конуса (т. е. имеют с ним только одно общее направление) или же всецело лежат в этом конусе (являются асимптотическими). Возьмем двумерный пучок $\{\mathbf{a},\mathbf{x}\}$. Прямые пересечения его с асимптотическим конусом найдутся из уравнения:

$$\varphi(\mathbf{a}+\lambda\mathbf{x},\ \mathbf{a}+\lambda\mathbf{x})=0.$$

Учитывая, что $\varphi(\mathbf{a},\mathbf{a})=0$, получаем

$$\lambda^2\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})+2\lambda\varphi(\mathbf{a},\mathbf{x})=0.$$

Если $\{\mathbf{a},\mathbf{x}\}$ не является асимптотическим пучком, то условие того, что $\{\mathbf{a},\mathbf{x}\}$ касается асимптотического конуса, выразится уравнением:

$$\varphi(\mathbf{a},\mathbf{x})=0. \tag{20,8}$$

Отсюда уже очевидно, что (20,8) и является искомым уравнением гиперплоскости, касательной к асимптотическому конусу вдоль направления $\mathbf{a}$. Таким образом, *гиперплоскость, касательная к асимптотическому конусу вдоль* $\mathbf{a}$, *есть гиперплоскость, сопряженная направлению* $\mathbf{a}$.

Возьмем теперь плоский m-мерный пучок $\{\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{2}{\mathbf{u}},\dots\underset{m}{\mathbf{u}}\}$. Если в этом пучке есть асимптотическое направление, обладающее тем

свойством, что гиперплоскость, касательная к асимптотическому конусу вдоль этого направления, заключает в себе пучок $\{\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{2}{\mathbf{u}},\dots\underset{m}{\mathbf{u}}\}$, то мы будем называть этот пучок **касательным к асимптотическому конусу**. Пусть вектор $\mathbf{u}=\lambda_1\underset{1}{\mathbf{u}}+\lambda_2\underset{2}{\mathbf{u}}+\dots+\lambda_m\underset{m}{\mathbf{u}}$ этого пучка асимптотический и гиперплоскость, сопряженная ему:

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{u})=0,$$

заключает в себе $\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{2}{\mathbf{u}},\dots\underset{m}{\mathbf{u}}$:

$$\varphi(\underset{1}{\mathbf{u}},\mathbf{u})=0,\quad \varphi(\underset{2}{\mathbf{u}},\mathbf{u})=0,\dots\varphi(\underset{m}{\mathbf{u}},\mathbf{u})=0$$

или

$$\begin{aligned}
&\lambda_1\varphi(\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{1}{\mathbf{u}})+\lambda_2\varphi(\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{2}{\mathbf{u}})+\dots+\lambda_m\varphi(\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{m}{\mathbf{u}})=0,\\
&\lambda_1\varphi(\underset{2}{\mathbf{u}},\underset{1}{\mathbf{u}})+\lambda_2\varphi(\underset{2}{\mathbf{u}},\underset{2}{\mathbf{u}})+\dots+\lambda_m\varphi(\underset{2}{\mathbf{u}},\underset{m}{\mathbf{u}})=0.\\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
&\lambda_1\varphi(\underset{m}{\mathbf{u}},\underset{1}{\mathbf{u}})+\lambda_2\varphi(\underset{m}{\mathbf{u}},\underset{2}{\mathbf{u}})+\dots+\lambda_m\varphi(\underset{m}{\mathbf{u}},\underset{m}{\mathbf{u}})=0.
\end{aligned} \tag{20,9}$$

Отсюда мы выводим, что векторы $\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{2}{\mathbf{u}},\dots\underset{m}{\mathbf{u}}$ должны удовлетворять уравнению:

$$\begin{vmatrix}
\varphi(\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{1}{\mathbf{u}}), & \varphi(\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{2}{\mathbf{u}}), & \dots & \varphi(\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{m}{\mathbf{u}})\\
\varphi(\underset{2}{\mathbf{u}},\underset{1}{\mathbf{u}}), & \varphi(\underset{2}{\mathbf{u}},\underset{2}{\mathbf{u}}), & \dots & \varphi(\underset{2}{\mathbf{u}},\underset{m}{\mathbf{u}})\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\varphi(\underset{m}{\mathbf{u}},\underset{1}{\mathbf{u}}), & \varphi(\underset{m}{\mathbf{u}},\underset{2}{\mathbf{u}}), & \dots & \varphi(\underset{m}{\mathbf{u}},\underset{m}{\mathbf{u}})
\end{vmatrix}=0. \tag{20,10}$$

Обратно, если векторы $\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{2}{\mathbf{u}},\dots\underset{m}{\mathbf{u}}$ удовлетворяют соотношению (20,10), то существует m чисел $\lambda_1,\lambda_2,\dots\lambda_m$, удовлетворяющих уравнениям (20,9). Отсюда следует, что вектор $\mathbf{u}=\lambda_1\underset{1}{\mathbf{u}}+\lambda_2\underset{2}{\mathbf{u}}+\dots+\lambda_m\underset{m}{\mathbf{u}}$ лежит в асимптотическом конусе, причем пучок $\{\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{2}{\mathbf{u}},\dots\underset{m}{\mathbf{u}}\}$ принадлежит к гиперплоскости, касательной к асимптотическому конусу вдоль направления $\mathbf{u}$. Таким образом, имеем следующее предложение:

Теорема 2. *Пучок* $\{\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}\}$ *тогда и только тогда касается асимптотического конуса, если векторы* $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}$ *удовлетворяют уравнению* (20,10).

Следствие. *Если ранг квадратичной формы равен r, то среди любых n независимых направлений можно выделить r направлений $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{r}{\mathbf{u}}$, обладающих тем свойством, что пучок $\{\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{r}{\mathbf{u}}\}$ не касается асимптотического конуса.*

В самом деле, в § 2 мы видели, что у симметрической матрицы ранга r, по крайней мере, один главный минор r-го порядка не равен нулю. Если отличный от нуля главный минор r-го порядка включает в себе i_1-ую, i_2-ую, ... i_r-ую строки и колонны, то пучок $\{\underset{i_1}{\mathbf{e}}, \underset{i_2}{\mathbf{e}}, \ldots \underset{i_r}{\mathbf{e}}\}$ не касается асимптотического конуса.

Теорема 3. *Пучок, построенный на m взаимно-сопряженных независимых направлениях, не принадлежащих к асимптотическому конусу, не касается асимптотического конуса.*

Доказательство. Обозначая через $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}$ базис этого пучка, имеем

$$\begin{vmatrix} \varphi(\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{1}{\mathbf{u}}), & \ldots & \varphi(\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{m}{\mathbf{u}}) \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \varphi(\underset{m}{\mathbf{u}},\underset{1}{\mathbf{u}}), & \ldots & \varphi(\underset{m}{\mathbf{u}},\underset{m}{\mathbf{u}}) \end{vmatrix} = \varphi(\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{1}{\mathbf{u}})\, \varphi(\underset{2}{\mathbf{u}},\underset{2}{\mathbf{u}}) \ldots \varphi(\underset{m}{\mathbf{u}},\underset{m}{\mathbf{u}}) \neq 0,$$

что и доказывает теорему.

7. Два пучка $\{\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{r}{\mathbf{u}}\}$ и $\{\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \ldots \underset{s}{\mathbf{v}}\}$ называются **сопряженными**, если каждый вектор 1-го пучка сопряжен с каждым вектором 2-го пучка. Если $\mathbf{x} = \lambda_1 \underset{1}{\mathbf{u}} + \lambda_2 \underset{2}{\mathbf{u}} + \ldots + \lambda_r \underset{r}{\mathbf{u}}$ — вектор, принадлежащий к 1-му пучку, $\mathbf{y} = \mu_1 \underset{1}{\mathbf{v}} + \mu_2 \underset{2}{\mathbf{v}} + \ldots + \mu_s \underset{s}{\mathbf{v}}$ — вектор 2-го пучка, то из соотношения

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$$

следует

(20,11) $$\varphi(\underset{i}{\mathbf{u}},\underset{k}{\mathbf{v}}) = 0 \; (i = 1, \ldots r,\; k = 1, \ldots s)$$

и обратно. Таким образом, *для сопряженности пучков E_r и E_s необходимо и достаточно, чтобы r независимых векторов 1-го пучка были сопряженны s независимым векторам второго.*

Докажем следующее предложение:

Теорема 4. *Если m-мерный пучок не касается асимптотического конуса, то сопряженные с ним пучки независимы от него.*

Доказательство. Пусть $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}$ — m независимых векторов, являющихся базисом пучка E_m. Каждый пучок, сопряженный с E_m, лежит в плоскости, определяемой уравнениями:

(20,12) $$\varphi(\underset{1}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) = 0, \quad \varphi(\underset{2}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) = 0, \ldots \varphi(\underset{m}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) = 0.$$

Эта плоскость независима от E_m. В самом деле, если бы в E_m существовал вектор $\mathbf{x} = \lambda_1 \underset{1}{\mathbf{u}} + \ldots + \lambda_m \underset{m}{\mathbf{u}}$, удовлетворяющий уравнениям (20,12), мы получили бы

$$\begin{aligned} \lambda_1\varphi(\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{1}{\mathbf{u}}) + \lambda_2\varphi(\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{2}{\mathbf{u}}) + \ldots + \lambda_m\varphi(\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{m}{\mathbf{u}}) &= 0, \\ \lambda_1\varphi(\underset{2}{\mathbf{u}},\underset{1}{\mathbf{u}}) + \lambda_2\varphi(\underset{2}{\mathbf{u}},\underset{2}{\mathbf{u}}) + \ldots + \lambda_m\varphi(\underset{2}{\mathbf{u}},\underset{m}{\mathbf{u}}) &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \lambda_1\varphi(\underset{m}{\mathbf{u}},\underset{1}{\mathbf{u}}) + \lambda_2\varphi(\underset{m}{\mathbf{u}},\underset{2}{\mathbf{u}}) + \ldots + \lambda_m\varphi(\underset{m}{\mathbf{u}},\underset{m}{\mathbf{u}}) &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{vmatrix} \varphi(\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{1}{\mathbf{u}}), & \ldots & \varphi(\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{m}{\mathbf{u}}) \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \varphi(\underset{m}{\mathbf{u}},\underset{1}{\mathbf{u}}), & \ldots & \varphi(\underset{m}{\mathbf{u}},\underset{m}{\mathbf{u}}) \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. E_m был бы касателен и асимптотическому конусу. Таким образом, каждый сопряженный с E_m пучок, принадлежа к плоскости (20,12), не может иметь с E_m общих направлений.

Отметим, что *каждому m-мерному пучку, не касательному к асимптотическому конусу, соответствует однозначно $(n - m)$-мерная сопряженная с ним плоскость, определяемая уравнениями* (20,12).

8. Теорема 5. *В каждом m-мерном пучке $(m \leqslant n)$ можно выделить m независимых направлений, сопряженных относительно данного симметрического тензора 2-го порядка,*

Доказательство. Если заданный пучок E_m асимптотический, то все его направления являются сопряженными; в этом случае теорема, таким образом, правильна. Рассмотрим пучок, в котором есть неасимптотические направления. Выберем одно из них: $\underset{1}{\mathbf{u}}$ и рассмотрим сопряженную с ним гиперплоскость:

$$\varphi(\underset{1}{\mathbf{u}}\,\mathbf{x}) = 0.$$

Так как она не проходит через $\underset{1}{\mathbf{u}}$, то она отсекает в E_m $(m-1)$-мерную плоскость E_{m-1}. Если в этой плоскости есть неасимптотические направления, выбираем одно из них; обозначим его $\underset{2}{\mathbf{u}}$:

$$\varphi(\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{2}{\mathbf{u}}) = 0, \quad \varphi(\underset{2}{\mathbf{u}},\underset{2}{\mathbf{u}}) \neq 0.$$

Строим $(n-2)$-мерную плоскость, сопряженную пучку $\{\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}\}$. На основании теорем 3 и 4, эта плоскость независима от $\{\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}\}$. Следовательно, она пересекает E_m по $(m-2)$-мерной плоскости E_{m-2}. Если в этой последней есть неасимптотические направления, выбираем одно из них, $\underset{3}{\mathbf{u}}$, и рассматриваем $(n-3)$-мерную плоскость, сопряженную с пучком $\{\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \underset{3}{\mathbf{u}}\}$. Она отсекает в E_m $(m-3)$-мерную плоскость и т. д. Продолжаем до тех пор, пока, выделив $k (k \leqslant m)$ независимых взаимно-сопряженных векторов $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{k}{\mathbf{u}}$, мы не получим $(m-k)$-мерной плоскости в E_m, сопряженной с $\{\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{k}{\mathbf{u}}\}$, которая вся состоит из асимптотических направлений. В этой плоскости все направленния взаимно-сопряженны. Выбрав среди них $(m-k)$ независимых $\underset{k+1}{\mathbf{u}}, \underset{k+2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}$, мы получим m независимых взаимно-сопряженных векторов $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}$.

Как следствие, из этой теоремы вытекает, что *в n-мерном пространстве всегда можно построить n независимых взаимно-сопряженных диаметров гиперповерхности* $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 1$. Выделение n-эдра сопряженных направлений можно производить, конечно, бесчисленным множеством способов. Сопряженные направления связаны $\frac{n(n-1)}{2}$ уравнений

$$\varphi(\underset{i}{\mathbf{u}}, \underset{k}{\mathbf{u}}) = 0, \qquad (i \neq k).$$

Поэтому определение n-эдра сопряженных направлений зависит от выбора minimum $n(n-1) - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ произвольных параметров. Если заданная форма — особенная, то произвол в выборе сопряженных направлений увеличивается.

9. Если n независимых взаимно-сопряженных направлений $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{n}{\mathbf{u}}$ выбрать за контравариантные векторы, то матрица соответствующего тензора принимает диагональный вид:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{Vmatrix},$$

где $a_{ii} = \varphi(\underset{i}{\mathbf{u}}, \underset{i}{\mathbf{u}})$. Число неравных нулю коэффициентов среди $a_{11}, a_{22} \ldots a_{nn}$ равно рангу r тензора. Если при выделении взаимно-сопряженных направлений применять тот прием, который был указан при доказательстве теоремы 5, то неравными нулю являются r первых коэффициентов: $a_{11}, a_{22} \ldots a_{rr}$. Если контравариантные координатные векторы выбрать следующим образом:

$$\underset{i}{\mathbf{e}} = \frac{1}{\sqrt{a_{ii}}} \underset{i}{\mathbf{u}} \qquad (i = 1, \ldots r),$$
$$\underset{k}{\mathbf{e}} = \underset{k}{\mathbf{u}} \qquad (k = r+1, \ldots n),$$

то квадратичная форма, соответствующая рассматриваемому тензору, приводится к сумме r квадратов:

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = x^{(1)^2} + x^{(2)^2} + \ldots + x^{(r)^2}. \tag{20,13}$$

Таким образом, имеем теорему:

Теорема 6. *Каждая квадратичная форма при помощи аффинного преобразования координат может быть приведена к сумме r квадратов координат, где r — ранг этой формы.*

Каноническим видом квадратичной формы, кроме (20,13), считают также и следующий: если r — четное число, то вводим новые координаты:

$$x^{(k)'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x^{(k)} + i x^{(k+1)}\right), \quad x^{(k+1)'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x^{(k)} - i x^{(k+1)}\right). \qquad (k = 1, \ldots r-1)$$

Квадратичная форма (20,13) приводится к следующему виду (ударения при координатах опускаем):

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 2x^{(1)}x^{(2)} + 2x^{(3)}x^{(4)} + \ldots + 2x^{(r-1)}x^{(r)}. \tag{20,14}$$

Отметим, что в выбранной системе координат $\frac{r}{2}$-мерные пучки $\{\underset{1}{\mathbf{e}}, \underset{3}{\mathbf{e}}, \ldots \underset{r-1}{\mathbf{e}}\}$ и $\{\underset{2}{\mathbf{e}}, \underset{4}{\mathbf{e}}, \ldots \underset{r}{\mathbf{e}}\}$ — асимптотические. Если ранг тензора—нечетное число, вводим новые координаты следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} x^{(k)'} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x^{(k)} + ix^{(k+1)}\right), \\ x^{(k+1)'} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x^{(k)} - ix^{(k+1)}\right), \end{aligned}\right\} \qquad (k = 1, \ldots r-2)$$

$$x^{(r)'} = x^{(r)}.$$

Квадратичная форма (20,13) приводится к следующему виду:

(20,15) $$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 2x^{(1)}x^{(2)} + 2x^{(3)}x^{(4)} + \ldots 2x^{(r-2)}x^{(r-1)} + x^{(r)^2}.$$

$\frac{r-1}{2}$-мерные пучки $\{\underset{1}{\mathbf{e}}, \underset{3}{\mathbf{e}}, \ldots \underset{r-2}{\mathbf{e}}\}$ и $\{\underset{2}{\mathbf{e}}, \underset{4}{\mathbf{e}}, \ldots \underset{r-1}{\mathbf{e}}\}$ являются асимптотическими.

10. *Пример.* Рассмотрим квадратичную форму:

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = x^{(1)^2} + x^{(2)^2} - 4x^{(1)}x^{(4)} + 2x^{(2)}x^{(3)} - 2x^{(3)}x^{(4)}.$$

Так как $\varphi(\underset{1}{\mathbf{e}}, \underset{1}{\mathbf{e}}) \neq 0$, то за $\underset{1}{\mathbf{u}}$ принимаем вектор $\underset{1}{\mathbf{e}}$ (1, 0, 0, 0). Рассматриваем сопряженную с ним гиперплоскость:

$$\varphi(\underset{1}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) = x^{(1)} - 2x^{(4)} = 0.$$

В этой гиперплоскости лежит вектор $\underset{2}{\mathbf{e}}$ (0, 1, 0, 0), причем $\varphi(\underset{2}{\mathbf{e}}, \underset{2}{\mathbf{e}}) \neq 0$, за $\mathbf{u}$ принимаем этот вектор. Строим двумерную плоскость сопряженную пучку $\{\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}\}$:

$$\varphi(\underset{1}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) = x^{(1)} - 2x^{(4)} = 0$$
$$\varphi(\underset{2}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) = x^{(2)} + x^{(3)} = 0.$$

За $\underset{3}{\mathbf{u}}$ принимаем вектор $(0, -1, 1, 0)$, лежащий в этой плоскости: $\varphi(\underset{3}{\mathbf{u}}, \underset{3}{\mathbf{u}}) \neq 0$. Возьмем трехмерный пучок, сопряженный с $\{\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \underset{3}{\mathbf{u}}\}$:

$$\varphi(\underset{1}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) = x^{(1)} - 2x^{(4)} = 0,$$
$$\varphi(\underset{2}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) = x^{(2)} + x^{(3)} = 0,$$
$$\varphi(\underset{3}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) = -x^{(3)} - x^{(4)} = 0.$$

За $\underset{4}{\mathbf{u}}$ можно выбрать вектор $(2, 1, -1, 1)$.

Имеем:

$$\varphi(\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{1}{\mathbf{u}}) = 1,\ \varphi(\underset{2}{\mathbf{u}},\underset{2}{\mathbf{u}}) = 1,\ \varphi(\underset{3}{\mathbf{u}},\underset{3}{\mathbf{u}}) = -1,\ \varphi(\underset{4}{\mathbf{u}},\underset{4}{\mathbf{u}}) = -3.$$

Если принять за новые контравариантные координатные векторы следующие 4 вектора:

$$\underset{1}{\mathbf{e}'} = \underset{1}{\mathbf{u}},\ \underset{2}{\mathbf{e}'} = \underset{2}{\mathbf{u}},\ \underset{3}{\mathbf{e}'} = i\underset{3}{\mathbf{u}},\ \underset{4}{\mathbf{e}'} = \frac{i}{\sqrt{3}}\underset{4}{\mathbf{u}},$$

то квадратичная форма приведется к сумме 4 квадратов.

Наиболее удобным в счетном отношении является метод Lagrange'а заключающийся в постепенном выделении полных квадратов из квадратичной формы (см. например Сушкевич, Основы высшей алгебры; Каган, Основания теории определителей).

11. Укажем на одно интересное геометрическое свойство взаимно сопряженных направлений неособенного симметрического тензора 2-го порядка.

Пусть $\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \ldots \underset{n}{\mathbf{x}}$ — точки пересечения n взаимно-сопряженных направлений с гиперповерхностью $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 1$. Имеем:

$$\begin{vmatrix} \varphi(\underset{1}{\mathbf{x}},\underset{1}{\mathbf{x}}) & \ldots & \varphi(\underset{1}{\mathbf{x}},\underset{n}{\mathbf{x}}) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi(\underset{n}{\mathbf{x}},\underset{1}{\mathbf{x}}) & \ldots & \varphi(\underset{n}{\mathbf{x}},\underset{n}{\mathbf{x}}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \underset{1}{x^{(1)}} & \ldots & \underset{1}{x^{(n)}} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \underset{n}{x^{(1)}} & \ldots & \underset{n}{x^{(n)}} \end{vmatrix}^2$$

Так как $\varphi(\underset{i}{\mathbf{x}},\underset{k}{\mathbf{x}}) = \delta_k^i$, то

(20,16) $$|c_{ik}| \begin{vmatrix} \underset{1}{x^{(1)}} & \ldots & \underset{1}{x^{(n)}} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \underset{n}{x^{(1)}} & \ldots & \underset{n}{x^{(n)}} \end{vmatrix}^2 = 1.$$

Определитель

$$\begin{vmatrix} \underset{1}{x^{(1)}} & \ldots & \underset{1}{x^{(n)}} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \underset{n}{x^{(1)}} & \ldots & \underset{n}{x^{(n)}} \end{vmatrix}$$

дает с точностью до знака, отношение параллелепипеда, построенного на сопряженных полудиаметрах к параллелепипеду, построенному на координатных векторах $\underset{1}{\mathbf{e}}, \underset{2}{\mathbf{e}}, \ldots \underset{n}{\mathbf{e}}$. Таким образом, дискриминант квадратичной формы имеет интересный геометрический смысл: *он равен квадрату отношения координатного параллелепипеда* $\{\underset{1}{\mathbf{e}}, \underset{2}{\mathbf{e}}, \ldots \underset{n}{\mathbf{e}}\}$ *к параллелепипеду, построенному на любых n взаимно-сопряженных полудиаметрах.*

Соотношение (20,16) доказывает следующее положение, являющееся распространением на аффинное пространство одной из теорем Аполлония:

Теорема 7. *n-мерные параллелепипеды, построенные на сопряженных полудиаметрах невыродившейся гиперповерхности 2-го порядка, равновелики (с точностью до знака).*

12. Дальнейшие три раздела настоящего параграфа посвящены изложению метода Kronecker'a приведения квадратичной формы к каноническому виду. Полученные здесь результаты понадобятся нам при изучении квадратичных форм в области вещественных чисел.

Решим следующую задачу:

$(r+s)$-мерный пучок E_{r+s} задан базисом $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{r}{\mathbf{u}}, \underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \ldots \underset{s}{\mathbf{v}}$. Пучок $E_r\{\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{r}{\mathbf{u}}\}$ не касается асимптотического конуса квадратичной формы $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$. Построить в E_{r+s} s-мерный пучок, сопряженный пучку E_r.

Требуется, таким образом, найти базис s-мерного пучка E_s, сопряженного пучку E_r и лежащего в E_{r+s}. Задача допускает, конечно, бесчисленное множество решений в смысле выбора базиса искомого пучка. Мы укажем здесь на один очень простой способ построения искомого базиса, векторы которого обозначим через $\underset{1}{\mathbf{w}}, \underset{2}{\mathbf{w}}, \ldots \underset{s}{\mathbf{w}}$. Каждый из этих векторов $\underset{i}{\mathbf{w}}$ мы постараемся получить, прибавляя к соответствующему вектору $\underset{i}{\mathbf{v}}$ вектор, параллельный пучку E_r:

$$\underset{i}{\mathbf{w}} = \underset{i}{\mathbf{v}} + \sum_{\alpha=1}^{r} \lambda_{i\alpha} \underset{\alpha}{\mathbf{u}} \qquad (i = 1, \ldots s).$$

Из условия сопряженности пучков E_r и E_s имеем:

$$\varphi(\underset{i}{\mathbf{u}}, \underset{k}{\mathbf{w}}) = 0 \qquad (i = 1, \ldots r,\ k = 1, \ldots s), \tag{20,17}$$

т. е.

$$\varphi(\underset{i}{\mathbf{u}}, \underset{k}{\mathbf{v}}) + \sum_{\alpha=1}^{r} \lambda_{k\alpha} \varphi(\underset{i}{\mathbf{u}}, \underset{\alpha}{\mathbf{u}}) = 0.$$

Придавая индексу i значения: $1, 2, \ldots r$, получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&\lambda_{k1}\varphi(\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{1}{\mathbf{u}}) + \ldots + \lambda_{kr}\varphi(\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{r}{\mathbf{u}}) + \varphi(\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{k}{\mathbf{v}}) = 0,\\
&\lambda_{k1}\varphi(\underset{2}{\mathbf{u}}, \underset{1}{\mathbf{u}}) + \ldots + \lambda_{kr}\varphi(\underset{2}{\mathbf{u}}, \underset{r}{\mathbf{u}}) + \varphi(\underset{2}{\mathbf{u}}, \underset{k}{\mathbf{v}}) = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\lambda_{k1}\varphi(\underset{r}{\mathbf{u}}, \underset{1}{\mathbf{u}}) + \ldots + \lambda_{kr}\varphi(\underset{r}{\mathbf{u}}, \underset{r}{\mathbf{u}}) + \varphi(\underset{r}{\mathbf{u}}, \underset{k}{\mathbf{v}}) = 0.
\end{aligned}$$

Приписываем к этой системе уравнений соотношение:

$$\lambda_{k1}\underset{1}{\mathbf{u}} + \ldots + \lambda_{kr}\underset{r}{\mathbf{u}} + \underset{k}{\mathbf{v}} - \underset{k}{\mathbf{w}} = 0$$

и исключаем из этих $(r+1)$ уравнений коэффициенты $\lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \ldots \lambda_{kr}$:

$$\begin{vmatrix}
\varphi(\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{1}{\mathbf{u}}) & \ldots & \varphi(\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{r}{\mathbf{u}}) & \varphi(\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{k}{\mathbf{v}})\\
\cdot & \cdots & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdots & \cdot & \cdot\\
\varphi(\underset{r}{\mathbf{u}}, \underset{1}{\mathbf{u}}) & \ldots & \varphi(\underset{r}{\mathbf{u}}, \underset{r}{\mathbf{u}}) & \varphi(\underset{r}{\mathbf{u}}, \underset{k}{\mathbf{v}})\\
\underset{1}{\mathbf{u}} & \ldots & \underset{r}{\mathbf{u}} & \underset{k}{\mathbf{v}} - \underset{k}{\mathbf{w}}
\end{vmatrix} = 0,$$

откуда получаем:

$$\underset{k}{\mathbf{w}} = \frac{1}{\Delta_r}\begin{vmatrix}
\varphi(\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{1}{\mathbf{u}}) & \ldots & \varphi(\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{r}{\mathbf{u}}) & \varphi(\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{k}{\mathbf{v}})\\
\cdot & \cdots & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdots & \cdot & \cdot\\
\varphi(\underset{r}{\mathbf{u}}, \underset{1}{\mathbf{u}}) & \ldots & \varphi(\underset{r}{\mathbf{u}}, \underset{r}{\mathbf{u}}) & \varphi(\underset{r}{\mathbf{u}}, \underset{k}{\mathbf{v}})\\
\underset{1}{\mathbf{u}} & \ldots & \underset{r}{\mathbf{u}} & \underset{k}{\mathbf{v}}
\end{vmatrix}, \tag{20,18}$$

где

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} \varphi(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_1) & \ldots & \varphi(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_r) \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \varphi(\mathbf{u}_r,\mathbf{u}_1) & \ldots & \varphi(\mathbf{u}_r,\mathbf{u}_r) \end{vmatrix}.$$

Так как, по предположению, пучок E_r не касается асимптотического конуса, то $\Delta_r \neq 0$. Формула (20,18) решает поставленную задачу.

В дальнейшем исследовании нам потребуется выражение для $\varphi(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_k)$. Если в $\varphi(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_k)$ подставить выражения для $\mathbf{w}_i$ из формулы (20,18), то вычисление потребует длинных переделок. Мы облегчим вывод формулы следующим приемом. Так как

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{v}_i + \mathbf{v}'_i,$$

где $\mathbf{v}'_i$ — вектор, параллельный E_r, то

$$\varphi(\mathbf{w}_i,\mathbf{w}_k) = \varphi(\mathbf{v}_i,\mathbf{w}_k) + \varphi(\mathbf{v}'_i,\mathbf{w}_k) = \varphi(\mathbf{v}_i,\mathbf{w}_k),$$

на основании (20,17). Подставляя теперь в правую часть этого равенства выражение для $\mathbf{w}_k$ из (20,18), получаем:

$$\varphi(\mathbf{w}_i,\mathbf{w}_k) = \frac{\Delta_r^{(i,k)}}{\Delta_r}, \tag{20,19}$$

где

$$\Delta_r^{(i,k)} = \begin{vmatrix} \varphi(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_1) & \ldots & \varphi(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_r) & \varphi(\mathbf{u}_1,\mathbf{v}_k) \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi(\mathbf{u}_r,\mathbf{u}_1) & \ldots & \varphi(\mathbf{u}_r,\mathbf{u}_r) & \varphi(\mathbf{u}_r,\mathbf{v}_k) \\ \varphi(\mathbf{v}_i,\mathbf{u}_1) & \ldots & \varphi(\mathbf{v}_i,\mathbf{u}_r) & \varphi(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_k) \end{vmatrix}. \tag{20,20}$$

13. Применим полученные выше результаты к выводу формулы, дающей разложение квадратичной формы на сумму двух независимых форм (две квадратичные формы называются *независимыми*, если они не имеют общих переменных).

Пусть главный минор m-го порядка

$$C_m = \begin{vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1m} \\ \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\ c_{m1} & \ldots & c_{mm} \end{vmatrix}$$

дискриминанта квадратичной формы $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$ отличен от нуля, т. е. пучок $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots \mathbf{e}_m\}$ не касается асимптотического конуса. Введем новую систему координат, в которой за первые m координатных векторов примем старые векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots \mathbf{e}_m$, а за остальные — векторы $\mathbf{e}'_{m+1}, \mathbf{e}'_{m+2}, \ldots \mathbf{e}'_n$, определяющие пучок, сопряженный плоскости $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots \mathbf{e}_m\}$. Пользуясь формулой (20,18) и принимая в ней за векторы $\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_s$ координатные векторы $\mathbf{e}_{m+1}, \ldots \mathbf{e}_n$ старой координатной системы, имеем:

$$\mathbf{e}'_k = \frac{1}{C_m} \begin{vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1m} & c_{1k} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & \ldots & c_{mm} & c_{mk} \\ \mathbf{e}_1 & \ldots & \mathbf{e}_m & \mathbf{e}_k \end{vmatrix} \qquad (k = m+1, \ldots n).$$

В построенной системе координат, на основании соотношений (20,19), (20,20), коэффициенты квадратичной формы выразятся следующим образом:

$$\begin{aligned} c'_{ik} &= \varphi(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_k) = c_{ik}, \quad (i,\ k \leqslant m), \\ c'_{ik} &= 0, \quad (i \leqslant m,\ k > m), \\ c'_{ik} &= \frac{C_m^{(i,k)}}{C_m}, \quad (i > m,\ k > m), \end{aligned} \tag{20,21}$$

где

$$C_m^{(i,k)} = \begin{vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1m} & c_{1k} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & \ldots & c_{mm} & c_{mk} \\ c_{i1} & \ldots & c_{im} & c_{ik} \end{vmatrix}.$$

Установим то линейное преобразование, которое связывает новые и старые переменные при введении координатной системы $\underset{1}{\mathbf{e}}', \dots \underset{n}{\mathbf{e}}'$. Так как

$$\underset{i}{\mathbf{e}}' = \underset{i}{\mathbf{e}}, \quad (i \leqslant m),$$

$$\underset{k}{\mathbf{e}}' = \frac{1}{C_m} \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1m} & c_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & \dots & c_{mm} & c_{mk} \\ \underset{1}{\mathbf{e}} & \dots & \underset{m}{\mathbf{e}} & \underset{k}{\mathbf{e}} \end{vmatrix} \qquad (k > m),$$

то

$$\binom{\alpha}{\beta'} = \overset{\alpha}{\mathbf{e}}\underset{\beta}{\mathbf{e}}' = \delta^\alpha_\beta, \quad (\beta \leqslant m) \quad \text{или} \quad (\alpha > m,\ \beta > m),$$

$$\binom{\alpha}{\beta'} = \frac{1}{C_m} \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1m} & c_{1\beta} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & \dots & c_{mm} & c_{m\beta} \\ \delta^\alpha_1 & \dots & \delta^\alpha_m & 0 \end{vmatrix} \qquad (\alpha \leqslant m,\ \beta > m).$$

Таким образом, связь между старыми и новыми координатами устанавливается следующими формулами:

$$x^i = x^{i'} + \sum_{m+1}^{n} \lambda^i_\alpha x^{\alpha'}, \quad (i \leqslant m),$$

$$x^k = x^{k'}, \quad (k > m),$$

где

$$(20,22) \qquad \lambda^i_\alpha = \frac{1}{C_m} \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1m} & c_{1\alpha} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & \dots & c_{mm} & c_{m\alpha} \\ \delta^i_1 & \dots & \delta^i_m & 0 \end{vmatrix} \qquad (i \leqslant m,\ \alpha > m).$$

Объединяя вышесказанное, мы можем формулировать теорему:

Теорема 8. *Если главный минор*

$$C_m = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & \dots & c_{mm} \end{vmatrix}$$

дискриминанта квадратичной формы

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = c_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta$$

отличен от нуля, то при введении новых переменных:

$$(20,23) \qquad x^i = x^{i'} + \sum_{m+1}^{n} \lambda^i_\alpha x^{\alpha'} \qquad (i \leqslant m),$$

$$x^k = x^{k'} \quad (k > m),$$

где λ^i_α *определяются формулой* (20,22), *квадратичная форма разлагается на сумму двух независимых форм:* [1]

$$(20,24) \qquad \varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \sum_{1}^{m} c_{\alpha\beta} x^{\alpha'} x^{\beta'} + \frac{1}{C_m} \sum_{m+1}^{n} C_m^{(i,k)} x^{i'} x^{k'},$$

где

$$(20,25) \qquad C_m^{(i,k)} = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1m} & c_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & \dots & c_{mm} & c_{mk} \\ c_{i1} & \dots & c_{im} & c_{ik} \end{vmatrix}.$$

14. Применим формулу (20, 24) к выводу метода Kronecker'а приведения квадратичных форм к каноническому виду. Метод этот основывается на следующих теоремах.

---

[1] Формула (20,24) заимствована мною из работы И. Штаермана и Н. Ахиезера. К теории квадратичных форм (Изв. Киевск. Полит. и С.-Хоз. Ин-та, 1924, стр. 119). См. также М. Кравчук. Про квадратичні форми та лінійні перетворення (Труди Фіз.-Мат. Відділу Укр. Ак. Наук, т. I, вип. 3, 1924, стр. 85).

Теорема 9. *Если ранг формы* $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = c_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta$ *равен* r *и главный минор*

$$C_r = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1r} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{r1} & \dots & c_{rr} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, то при введении новых переменных:

$$x^i = x^{i'} + \sum_{r+1}^{n} \lambda^i_a x^{a'} \quad (i \leqslant r),$$
$$x^k = x^{k'} \quad (k > r),$$

где λ^i_a *определяются формулой* (20, 22) (*для* $m = r$), *квадратичная форма приводится к следующему виду:*

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \sum_1^r c_{\alpha\beta}x^{\alpha'}x^{\beta'}. \tag{20,26}$$

Доказательство. Так как ранг формы равен r, то в формуле (20,24) коэффициенты $C^{(i,k)}_r$, являясь минорами $(r+1)$-го порядка матрицы $\|c_{\alpha\beta}\|$, равны нулю, что и доказывает теорему.

Таким образом, квадратичную форму ранга $r<n$ можно привести к форме с r переменными, не изменяя тех коэффициентов заданной формы, которые входят в главный минор r-го порядка, отличный от нуля. В дальнейшем мы будем предполагать, что заданная форма уже приведена к наименьшему числу переменных, и будем считать, что ранг $r = n$. Условимся обозначать алгебраическое дополнение элемента $c_{\alpha\beta}$ в определителе $|c_{\alpha\beta}|$ через $C_{\alpha\beta}$, определитель $|c_{\alpha\beta}|$ — через C.

Теорема 10. *Если главный минор*

$$C_{nn} = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n-1,1} & \dots & c_{n-1,n-1} \end{vmatrix}.$$

отличен от нуля, то введением новых переменных

$$x^i = x^{i'} + \frac{C_{in}}{C_{nn}}x^{n'} \quad (i \leqslant n-1),$$
$$x^n = x^{n'}$$

квадратичная форма $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = c_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta$ *приводится к следующему виду:*

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \sum_1^{n-1} c_{\alpha\beta}x^{\alpha'}x^{\beta'} + \frac{C}{C_{nn}}x^{(n)^2}. \tag{20,27}$$

Доказательство. Теорема является следствием формул (20,24) (20,25), (20,23) и (20,22).

Теорема 11. *Если все главные миноры* $(n-1)$*-го порядка дискриминанта квадратичной формы равны нулю, но главный минор* $(n-2)$*-го порядка:*

$$C_{n-2} = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1,n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n-2,1} & \dots & c_{n-2,n-2} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, то линейным преобразованием переменных:

$$x^i = x^{i'} + \left(\lambda^i_{n-1} + \lambda^i_n\right)x^{(n-1)'} + \left(\lambda^i_{n-1} - \lambda^i_n\right)x^{n'} \quad (i \leqslant n-2),$$
$$x^{n-1} = x^{(n-1)'} + x^{n'},$$
$$x^n = x^{(n-1)'} - x^{n'},$$

где λ^i_a *определяются формулами* (20,22) (*для* $m = n-2$), *квадратичная форма приводится к следующему виду:*

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n-2} c_{\alpha\beta}x^{\alpha'}x^{\beta'} - 2\frac{C_{n-1,n}}{C_{n-2}}\left(x^{(n-1)'2} - x^{(n)'2}\right). \tag{20,28}$$

Доказательство. В формуле (20,24) полагаем $m = n-2$. Так как

$$C^{(n-1,n-1)}_{n-2} = C_{nn} = 0,$$
$$C^{(n-1,n)}_{n-2} = -C_{n-1,n},$$
$$C^{(n,n)}_{n-2} = C_{n-1,n-1} = 0,$$

получаем:

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n-2} c_{\alpha\beta}x^{\alpha'}x^{\beta'} - 2\frac{C_{n-1,n}}{C_{n-2}}x^{(n-1)}x^{(n)}.$$

Затем вводим новые переменные:

$$x^{(n-1)'} = x^{(n-1)''} + x^{(n)''},$$
$$x^{(n)'} = x^{(n-1)''} - x^{(n)''}.$$

Примечание. В формуле (20, 28) коэффициент $\frac{C_{n-1,n}}{C_{n-2}}$ может быть представлен в виде: $\frac{C}{C_{n-1,n}}$. В самом деле из соотношения

$$\begin{vmatrix} C_{n-1,n-1}, & C_{n-1,n} \\ C_{n,n-1}, & C_{nn} \end{vmatrix} = CC_{n-2}$$

следует, что

$$CC_{n-2} = -(C_{n-1,n})^2.$$

Доказанные три последние теоремы решают задачу о приведении квадратичной формы к каноническому виду по методу Kronecker'a. Если ранг формы $r < n$, то, изменяя порядок нумерации координат, мы можем всегда достигнуть того, чтобы минор

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1r} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{r1} & \dots & c_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Следовательно, на основании теоремы 9, заданная форма может быть заменена формой с r переменными:

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{r} c_{\alpha\beta} x^{\alpha} x^{\beta}.$$

Затем, применяя теоремы 10 и 11, мы выделяем постепенно по одному или двум членам с квадратами переменных, причем коэффициенты у этих членов подсчитываются по формулам (20,27) и (20,28).

Задача 2. Если главные миноры:

$$C_1 = c_{11},\ C_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}, \dots\ C_{n-1} = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n-1,1} & \dots & c_{n-1,n-1} \end{vmatrix},$$

стоящие в левом верхнем углу матрицы квадратичной формы, отличны от нуля, то, пользуясь методом Kronecker'a, можно привести квадратичную форму к следующему виду:

$$C_1 x^{(1)2} + \frac{C_2}{C_1} x^{(2)2} + \frac{C_3}{C_2} x^{(3)2} + \dots + \frac{C}{C_{n-1}} x^{(n)2}.$$

15. Рассмотрим теперь вопрос о приведении вещественных квадратичных форм к каноническому виду в реальном пространстве.

Приведение квадратичной формы к виду:

$$a_{11} x^{(1)^2} + a_{22} x^{(2)^2} + \dots + a_{rr} x^{(r)^2}$$

совершается при помощи рациональных операций (методы Lagrange'a, Kronecker'a). Только при извлечении квадратных корней для окончательного приведения к каноническому виду (20,13) могут войти мнимости. Если ограничиться действительным пространством, то при извлечении квадратного корня из a_{ii} следует брать $\sqrt{-a_{ii}}$, если a_{ii} отрицательно. В этом случае соответствующий член в форме $\sum \varepsilon_i x^{(i)^2}$, где $\varepsilon_i = \pm 1$, войдет со знаком минус.

Мы докажем теперь закон инерции квадратичных форм Jacobi-Sylvester'a, утверждающий, что при всех вещественных приведениях действительной квадратичной формы к каноническому виду:

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i x^{(i)^2} \cdot (\varepsilon_i = \pm 1)$$

число как положительных, так и отрицательных квадратов переменных остается одним и тем же.

Условимся называть направление, определяемое вектором $\mathbf{a}$, положительным или отрицательным, смотря по тому $\varphi(\mathbf{a},\mathbf{a}) > 0$ или $\varphi(\mathbf{a},\mathbf{a}) < 0$.

Теорема 12. *При различных выделениях n независимых взаимно-сопряженных действительных направлений у реальной квадратичной формы число как положительных, так и отрицательных направлений остается одним и тем же.*

Доказательство. Предположим, что мы выделили двумя различными способами взаимно сопряженные направления у некоторой квадратичной формы $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$, причем при одном выделении мы получили p положительных, q отрицательных и s нулевых направлений, при другом — p' положительных, q' отрицательных и s' нулевых. Очевидно, что $s = s'$, так как $s = n - r$, где r — ранг формы $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$. Покажем, что $p = p'$. Предполагаем обратное: например, что $p > p'$. Обозначим через E_p пучок, построенный на p положительных направлениях, выделенных первым способом; все направления, принадлежащие к этому пучку, положительные: если $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \overset{p}{\mathbf{u}}$ — его базис, $\mathbf{x} = \lambda_1 \underset{1}{\mathbf{u}} + \lambda_2 \underset{2}{\mathbf{u}} + \ldots + \lambda_p \underset{p}{\mathbf{u}}$, то $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \lambda_1^2 \varphi(\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{1}{\mathbf{u}}) + \lambda_2^2 \varphi(\underset{2}{\mathbf{u}},\underset{2}{\mathbf{u}}) + \ldots + \lambda_p^2 \varphi(\underset{p}{\mathbf{u}},\underset{p}{\mathbf{u}})$. Если же мы возьмем пучок $E_{n-p'}$, построенный на отрицательных и нулевых направлениях, выделенных по второму способу, то все его направления отрицательные или нулевые. Так как $p + n - p' > n$, то пучки E_p и $E_{n-p'}$ должны иметь общие направления $\mathbf{x}$, для которых, с одной стороны, $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) > 0$, с другой, $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) \leqslant 0$. Таким образом, предположение, что $p > p'$, приводит к противоречию.

Теорема 12 может быть формулирована также следующим образом: *числа p, q, s являются инвариантами действительной квадратичной формы при вещественных линейных неособенных преобразованиях переменных.*

Разность $p - q$ называется **сигнатурой** квадратичной формы. Если $p = n$ или $q = n$, форма называется **определенной** (в противном случае — **неопределенной**). Если $p = n$, мы имеем **положительную определенную** форму, если $q = n$ — **отрицательную определенную** форму. В первом случае форма принимает только положительные значения (для ненулевых значений аргумента), во втором — только отрицательные.

16. Метод Kronecker'а приведения квадратичной формы к каноническому виду дает возможность дать критерий, указывающий сигнатуру заданной квадратичной формы по ее коэффициентам.

Если ранг квадратичной формы $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = c_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta$ равен r, то можно так перенумеровать координатные оси, что главный минор

$$C_r = \begin{vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1r} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{r1} & \ldots & c_{rr} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Если не все главные миноры $(r-1)$-го порядка этого определителя равны нулю, то изменяем, если это нужно, нумерацию первых r индексов так, чтобы минор

$$C_{r-1} = \begin{vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1,r-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{r-1,1} & \ldots & c_{r-1,r-1} \end{vmatrix}$$

был отличен от нуля. Если же все миноры $(r-1)$-го порядка равны нулю, то существует, по крайней мере, один главный минор $(r-2)$-го порядка, отличный от нуля (на основании теоремы 6, § 2).

Тогда изменяем нумерацию координат так, чтобы

$$C_{r-2} = \begin{vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1r-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{r-2,1} & \ldots & c_{r-2,r-2} \end{vmatrix} \neq 0$$

К C_{r-1} или C_{r-2} применяем тот же процесс и продолжаем таким образом дальше. В конце концов мы получим цепь главных миноров

$$(20{,}29) \qquad C_1 = c_{11}, \quad C_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}, \ldots C_r = \begin{vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1r} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{r1} & \ldots & c_{rr} \end{vmatrix},$$

стоящих в левом верхнем углу матрицы $\|c_{\alpha\beta}\|$ и обладающих тем свойством, что два соседних члена в ряду (20,29) не могут быть равны нулю.

Полагая $C_0 = 1$, рассмотрим ряд чисел:

$$(20{,}30) \qquad C_0,\ C_1,\ C_2, \ldots C_r.$$

Крайние члены C_0 и C_r заведомо не равны нулю. Если какой-нибудь член ряда $C_m\ (0 < m < r)$ равен нулю, то C_{m-1} и C_{m+1} имеют противоположные знаки: если $m > 1$, это следует из теоремы 6, § 2; если $C_1 = 0$, то $C_2 = -c_{12}^2 < 0$, $C_0 > 0$.

Обратимся теперь к методу Kronecker'а приведения квадратичных форм к каноническому виду. Согласно теореме 10, если $C_m \neq 0$, $C_{m-1} \neq 0$, то из формы можно выделить квадрат $x^{(m)^2}$

с коэффициентом $\frac{C_m}{C_{m-1}}$. Если же $C_{m-1}=0$, то по теореме 11 мы выделяем два квадрата: $x^{(m-1)^2}$ и $x^{(m)^2}$ с противоположными знаками. В конце концов мы приведем по методу Kronecker'а квадратичную форму к виду:

$$a_{11}x^{(1)^2}+a_{22}x^{(2)^2}+\ldots+a_{rr}x^{(r)^2}.$$

Если члены C_{m-1}, C_m из ряда (20,30) оба не равны нулю, то коэффициент a_{mm} положителен или отрицателен, смотря по тому, имеют ли C_{m-1} и C_m одинаковые или разные знаки. Трем минорам C_{m-1}, C_m и C_{m+1}, из которых средний равен нулю, соответствуют два члена: $a_{mm}x^{(m)^2}+a_{m+1,m+1}x^{(m+1)^2}$ с противоположными знаками. Отметим, что в этом случае три числа C_{m-1}, C_m, C_{m+2} дают перемену знака. Таким образом, имеем теорему:

Теорема 13. *Для определения сигнатуры вещественной квадратичной формы надо так перенумеровать переменные, чтобы в ряде*

$$(20,30)\quad C_0=1,\ C_1=c_{11},\ C_2=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22}\end{vmatrix},\ \ldots\ C_r=\begin{vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1r} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{r1} & \ldots & c_{rr}\end{vmatrix},$$

никакие два соседние члена не были равны нулю. Тогда число положительных членов в каноническом виде квадратичной формы равно числу постоянств знака в ряде (20,30), *число отрицательных — числу перемен знака в этом ряде.*

Отметим, что при определении числа постоянств или перемен знака мы можем считать нуль как положительным, так и отрицательным числом.

17. Обращаясь к рассмотрению определенных форм, докажем теорему:

Теорема 14. *Главные миноры дискриминанта определенной формы не могут быть равны нулю.*

Доказательство. Предположим противное, — что какой-нибудь главный минор m-го порядка равен нулю. Не нарушая общности, можно допустить, что

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & \ldots & c_{mm}\end{vmatrix}=0.$$

Полагаем в форме $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})=c_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta$ переменные $x^{(m+1)}$, $x^{(m+2)},\ldots x^{(m)}$ равными нулю. Тогда $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$ примет вид $\sum_{\alpha,\beta=1}^{m}c_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta$. Это должна быть определенная форма, т. е. ее дискриминант должен быть отличен от нуля. Таким образом, приходим к противоречию.

В тесной связи с этой теоремой стоит следующее предложение:

Теорема 15. *Если* $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$ — *определенная форма и векторы* $\underset{1}{\mathbf{u}},\ \underset{2}{\mathbf{u}},\ldots\ \underset{m}{\mathbf{u}}$ — *вещественные, то определитель*

$$(20,31)\qquad \begin{vmatrix} \varphi(\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{1}{\mathbf{u}}) & \ldots & \varphi(\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{m}{\mathbf{u}}) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi(\underset{m}{\mathbf{u}},\underset{1}{\mathbf{u}}) & \ldots & \varphi(\underset{m}{\mathbf{u}},\underset{m}{\mathbf{u}})\end{vmatrix}$$

тогда и только тогда равен нулю, если векторы $\underset{1}{\mathbf{u}},\ \underset{2}{\mathbf{u}},\ldots\ \underset{m}{\mathbf{u}}$ — *зависимые.*

Доказательство. Если $\underset{1}{\mathbf{u}},\ \underset{2}{\mathbf{u}},\ldots\ \underset{m}{\mathbf{u}}$ — независимые векторы, то, принимая их за координатные векторы, мы приходим к предыдущей теореме. Обратное предложение доказывается так: если между векторами $\underset{1}{\mathbf{u}},\ \underset{2}{\mathbf{u}},\ldots\ \underset{m}{\mathbf{u}}$ существует линейная зависимость:

$$\lambda_1\underset{1}{\mathbf{u}}+\lambda_2\underset{2}{\mathbf{u}}+\ldots+\lambda_m\underset{m}{\mathbf{u}}=0,$$

то

$$\lambda_1\varphi(\underset{i}{\mathbf{u}},\underset{1}{\mathbf{u}})+\lambda_2\varphi(\underset{i}{\mathbf{u}},\underset{2}{\mathbf{u}})+\ldots+\lambda_m\varphi(\underset{i}{\mathbf{u}},\underset{m}{\mathbf{u}})=0\qquad(i=1,\ldots m),$$

т. е. определитель (20,31) равен нулю.

Теорема эта может быть формулирована в геометрических терминах следующим образом: *Никакой вещественный пучок не* *может касаться асимптотического конуса определенной квадратичной формы.*

Этот факт стоит, конечно, в связи с тем, что асимптотический конус в случае определенной формы — мнимый. Рекомендуем читателю дать геометрическое доказательство теоремы 15, исходя из этих соображений.

Обратимся теперь к выводу критерия определенности квадратичной формы. Раз главные миноры матрицы $\|c_{\alpha\beta}\|$ определенной формы не могут обращаться в нуль, то, как бы мы ни нумеровали переменные, ряд миноров (20,30) удовлетворяет требованиям теоремы 13. Таким образом, получаем следующее предложение:

Теорема 16. *Квадратичная форма $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = c_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta$ тогда и только тогда определенная положительная, если ее коэффициенты удовлетворяют неравенствам*

$$c_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots \begin{vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Квадратичная форма тогда и только тогда определенная отрицательная, если

$$-c_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots (-1)^n \begin{vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

18. В дальнейшем нам потребуется одно свойство асимптотических пучков определенной квадратичной формы. В этом случае асимптотические пучки, конечно, мнимые.

Предположим, что пучок E_m, определяемый базисом $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}$,— асимптотический:

$$\varphi(\underset{i}{\mathbf{u}},\underset{k}{\mathbf{u}}) = 0 \qquad (i, k = 1, \ldots m);$$

комплексно-сопряженные векторы $\underset{1}{\bar{\mathbf{u}}}, \underset{2}{\bar{\mathbf{u}}}, \ldots \underset{m}{\bar{\mathbf{u}}}$ определяют также асимптотический пучок $\bar{E}_m$. Покажем, что *в этих пучках можно построить две системы независимых векторов $\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{v}}$ и $\underset{1}{\bar{\mathbf{v}}}, \underset{2}{\bar{\mathbf{v}}}, \ldots \underset{m}{\bar{\mathbf{v}}}$, обладающих тем свойством, что действительные двумерные пучки $\{\underset{1}{\mathbf{v}},\underset{1}{\bar{\mathbf{v}}}\}, \{\underset{2}{\mathbf{v}},\underset{2}{\bar{\mathbf{v}}}\}, \ldots \{\underset{m}{\mathbf{v}},\underset{m}{\bar{\mathbf{v}}}\}$ взаимно-сопряженны относительно квадратичной формы $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$.*

Покажем прежде всего, что в E_m можно выделить m векторов $\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{v}}$, удовлетворяющих соотношениям:

$$(20,32) \qquad \varphi(\underset{i}{\mathbf{v}},\underset{k}{\bar{\mathbf{v}}}) = 0 \qquad (i \neq k).$$

Для этого поступаем следующим образом: за вектор $\underset{1}{\mathbf{v}}$ принимаем $\underset{1}{\mathbf{u}}$ и строим вектор: $\underset{2}{\mathbf{v}} = \lambda_1 \underset{1}{\mathbf{v}} + \underset{2}{\mathbf{u}}$; коэффициент λ_1 определится из уравнения:

$$\varphi(\underset{1}{\bar{\mathbf{v}}},\underset{2}{\mathbf{v}}) = \lambda_1 \varphi(\underset{1}{\bar{\mathbf{v}}},\underset{1}{\mathbf{v}}) + \varphi(\underset{1}{\bar{\mathbf{v}}},\underset{2}{\mathbf{u}}) = 0,$$

так как $\varphi(\underset{1}{\bar{\mathbf{v}}},\underset{1}{\mathbf{v}}) \neq 0$. Затем строим вектор $\underset{3}{\mathbf{v}} = \mu_1 \underset{1}{\mathbf{v}} + \mu_2 \underset{2}{\mathbf{v}} + \underset{3}{\mathbf{u}}$.

Условия

$$\varphi(\underset{1}{\bar{\mathbf{v}}},\underset{3}{\mathbf{v}}) = \mu_1 \varphi(\underset{1}{\bar{\mathbf{v}}},\underset{1}{\mathbf{v}}) + \varphi(\underset{1}{\bar{\mathbf{v}}},\underset{3}{\mathbf{u}}) = 0,$$
$$\varphi(\underset{2}{\bar{\mathbf{v}}},\underset{3}{\mathbf{v}}) = \mu_2 \varphi(\underset{2}{\bar{\mathbf{v}}},\underset{2}{\mathbf{v}}) + \varphi(\underset{2}{\bar{\mathbf{v}}},\underset{3}{\mathbf{u}}) = 0,$$

определяют μ_1 и μ_2. Затем образуем вектор $\underset{4}{\mathbf{v}} = \nu_1 \underset{1}{\mathbf{v}} + \nu_2 \underset{2}{\mathbf{v}} + \nu_3 \underset{3}{\mathbf{v}} + \underset{4}{\mathbf{u}}$, причем коэффициенты ν_1, ν_2, ν_3 определятся из уравнений: $\varphi(\underset{1}{\bar{\mathbf{v}}},\underset{4}{\mathbf{v}}) = \varphi(\underset{2}{\bar{\mathbf{v}}},\underset{4}{\mathbf{v}}) = \varphi(\underset{3}{\bar{\mathbf{v}}},\underset{4}{\mathbf{v}}) = 0$, и т. д. Построенные таким образом векторы $\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{v}}$ — линейно независимы, так как из равенства $\lambda_1 \underset{1}{\mathbf{v}} + \lambda_2 \underset{2}{\mathbf{v}} + \ldots + \lambda_m \underset{m}{\mathbf{v}} = 0$ мы получили бы

$$\lambda_1 \varphi(\underset{1}{\mathbf{v}},\underset{i}{\bar{\mathbf{v}}}) + \lambda_2 \varphi(\underset{2}{\mathbf{v}},\underset{i}{\bar{\mathbf{v}}}) + \ldots + \lambda_m \varphi(\underset{m}{\mathbf{v}},\underset{i}{\bar{\mathbf{v}}}) = \lambda_i \varphi(\underset{i}{\mathbf{v}},\underset{i}{\bar{\mathbf{v}}}) = 0,$$

т. е. $\lambda_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots m)$. Векторам $\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{v}}$ пучка E_m соответствуют в $\bar{E}_m$ комплексно-сопряженные векторы $\underset{1}{\bar{\mathbf{v}}}, \underset{2}{\bar{\mathbf{v}}}, \ldots \underset{m}{\bar{\mathbf{v}}}$.

Как мы знаем, пара комплексно-сопряженных векторов определяет в действительном пространстве двумерный пучок. Покажем, что пучки, построенные на парах комплексно-сопряженных векторов: $\{\underset{1}{\mathbf{v}},\underset{1}{\overline{\mathbf{v}}}\}, \{\underset{2}{\mathbf{v}},\underset{2}{\overline{\mathbf{v}}}\}, \ldots \{\underset{m}{\mathbf{v}},\underset{m}{\overline{\mathbf{v}}}\}$, удовлетворяющих условию (20,32), сопряженны относительно квадратичной формы $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$. В самом деле,

$$\varphi(\lambda_i \underset{i}{\mathbf{v}} + \mu_i \underset{i}{\overline{\mathbf{v}}},\ \lambda_k \underset{k}{\mathbf{v}} + \mu_k \underset{k}{\overline{\mathbf{v}}}) =$$

$$= \lambda_i\lambda_k \varphi(\underset{i}{\mathbf{v}},\underset{k}{\mathbf{v}}) + \lambda_i\mu_k\varphi(\underset{i}{\mathbf{v}},\underset{k}{\overline{\mathbf{v}}}) + \lambda_k\mu_i\varphi(\underset{i}{\overline{\mathbf{v}}},\underset{k}{\mathbf{v}}) + \mu_i\mu_k\varphi(\underset{i}{\overline{\mathbf{v}}},\underset{k}{\overline{\mathbf{v}}}) = 0.$$

19. В теории определенных квадратичных форм мы рассмотрим еще следующую задачу:

Дана определенная форма $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = c_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta$ *и действительный m-мерный пучок* $\{\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}\}$. *Построить в этом пучке m независимых направлений, взаимно-сопряженных относительно формы* $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$.

Задача допускает, конечно, бесчисленное множество решений. Мы укажем здесь на одно решение, являющееся аналогом процесса ортогонализирования системы векторов по методу E. Schmidt'a. [1] Построим систему взаимно-сопряженных векторов $\underset{1}{\mathbf{w}}, \underset{2}{\mathbf{w}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{w}}$ следующим образом: за вектор $\underset{1}{\mathbf{w}}$ выбираем $\underset{1}{\mathbf{u}}$, вектор $\underset{2}{\mathbf{w}}$ построим, прибавляя к $\underset{2}{\mathbf{u}}$ вектор, параллельный $\underset{1}{\mathbf{u}}$, $\underset{3}{\mathbf{w}}$ построим, прибавляя к $\underset{3}{\mathbf{u}}$ вектор, параллельный пучку $\{\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}\}$, и т. д.:

$$\begin{aligned}
&\underset{1}{\mathbf{w}} = \underset{1}{\mathbf{u}}\\
&\underset{2}{\mathbf{w}} = \lambda_{21}\underset{1}{\mathbf{u}} + \underset{2}{\mathbf{u}}\\
&\underset{3}{\mathbf{w}} = \lambda_{31}\underset{1}{\mathbf{u}} + \lambda_{32}\underset{2}{\mathbf{u}} + \underset{3}{\mathbf{u}}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\underset{m}{\mathbf{w}} = \lambda_{m1}\underset{1}{\mathbf{u}} + \lambda_{m2}\underset{2}{\mathbf{u}} + \ldots + \lambda_{m,\,m-1}\underset{m-1}{\mathbf{u}} + \underset{m}{\mathbf{u}}.
\end{aligned}$$

При такой постановке вопроса мы можем прямо применить результаты раздела 12 настоящего параграфа.

[1] E. Schmidt. Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. Rend. di Palermo, vol. 25 (1908), стр. 53—77.

Полагая в формуле (20,18) $r = k - 1$, $s = 1$, $\underset{1}{\mathbf{v}} = \underset{k}{\mathbf{u}}$, мы получим искомый вектор $\underset{k}{\mathbf{w}}$:

$$\underset{k}{\mathbf{w}} = \frac{1}{\Delta_{k-1}}\begin{vmatrix} \varphi(\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{1}{\mathbf{u}}) & \ldots & \varphi(\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{k}{\mathbf{u}})\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \varphi(\underset{k-1}{\mathbf{u}},\underset{1}{\mathbf{u}}) & \ldots & \varphi(\underset{k-1}{\mathbf{u}},\underset{k}{\mathbf{u}})\\ \underset{1}{\mathbf{u}} & \ldots & \underset{k}{\mathbf{u}} \end{vmatrix} \quad (k = 1, 2, \ldots m), \tag{20,33}$$

где

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} \varphi(\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{1}{\mathbf{u}}) & \ldots & \varphi(\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{i}{\mathbf{u}})\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \varphi(\underset{i}{\mathbf{u}},\underset{1}{\mathbf{u}}) & \ldots & \varphi(\underset{i}{\mathbf{u}},\underset{i}{\mathbf{u}}) \end{vmatrix}, \quad \Delta_0 = 1. \tag{20,34}$$

Предполагая форму $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$ положительной, можно нормировать найденные векторы так: $\underset{k}{\mathbf{w}} = \lambda_k \underset{k}{\mathbf{i}}$, чтобы $\varphi(\underset{k}{\mathbf{i}},\underset{k}{\mathbf{i}}) = 1$. Для этого надо разделить $\underset{k}{\mathbf{w}}$ на $\sqrt{\varphi(\underset{k}{\mathbf{w}},\underset{k}{\mathbf{w}})}$; пользуясь формулой (20,19) имеем

$$\underset{k}{\mathbf{i}} = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{k-1}\Delta_k}}\begin{vmatrix} \varphi(\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{1}{\mathbf{u}}) & \ldots & \varphi(\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{k}{\mathbf{u}})\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \varphi(\underset{k-1}{\mathbf{u}},\underset{1}{\mathbf{u}}) & \ldots & \varphi(\underset{k-1}{\mathbf{u}},\underset{k}{\mathbf{u}})\\ \underset{1}{\mathbf{u}} & \ldots & \underset{k}{\mathbf{u}} \end{vmatrix}, \quad \Delta_0 = 1. \tag{20,35}$$

20. В заключение рассмотрим вопрос о тензоре, обратном данному $c_{\alpha\beta}$ (в этом разделе мы рассматриваем тензоры снова

в комплексном пространстве). Если $|c_{\alpha\beta}| \neq 0$, то существует обратный тензор $d^{\alpha\beta}$, удовлетворяющий уравнениям:

$$d^{\alpha\beta} c_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma}.$$

Он определяет линейную векторфункцию 2-го рода $\mathbf{x} = \mathbf{C}^{-1}(\dot{\mathbf{u}})$, обратную функции $\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{C}}(\mathbf{x})$.

При помощи обратного тензора мы получаем уравнение гиперповерхности S: $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 1$ в тангенциальных координатах (составляющих ковариантного тензора, определяющего касательную плоскость к этой гиперповерхности). Если $\mathbf{x}$ — точка, лежащая на S, то ковариантный вектор

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{C}}(\mathbf{x})$$

определяет, как мы знаем, касательную гиперплоскость. Подставляя в уравнение:

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{x}) = 1$$

$\mathbf{x} = \mathbf{C}^{-1}(\dot{\mathbf{u}})$, имеем:

$$\psi(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}}) = \dot{\mathbf{u}}\mathbf{C}^{-1}(\dot{\mathbf{u}}) = 1, \qquad d^{\alpha\beta} u_{\alpha} u_{\beta} = 1.$$

Это и есть уравнение поверхности S в тангенциальных координатах.

Квадратичная форма $\psi(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}})$ называется обратной относительно формы $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$. Форма $\psi(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}})$ очень просто выражается при помощи так называемого окаймленного определителя. Рассмотрим определитель

$$D = \begin{vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} & u_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \ldots & c_{nn} & u_n \\ v_1 & \ldots & v_n & 0 \end{vmatrix}.$$

Разлагая его по элементам последней колонны и строки и обозначая через C_{ik} алгебраическое дополнение элемента c_{ik} в дискриминанте $C = |c_{ik}|$, получаем

$$D = \sum_i (-1)^{n+i+1} \begin{vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{i-1,1} & \ldots & c_{i-1,n} \\ c_{i+1,1} & \ldots & c_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \ldots & c_{nn} \\ v_1 & \ldots & v_n \end{vmatrix} u_i =$$

$$= \sum_{i,\,k} (-1)^{2n+1} C_{ik} u_i v_k = -\sum_{i,\,k} C_{ik} u_i v_k.$$

Так как $d^{ik} = \frac{C_{ik}}{C}$, получаем:

$$(20{,}36) \qquad \psi(\dot{\mathbf{u}},\dot{\mathbf{v}}) = d^{\alpha\beta} u_{\alpha} v_{\beta} = -\frac{1}{C} \begin{vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} & u_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \ldots & c_{nn} & u_n \\ v_1 & \ldots & v_n & 0 \end{vmatrix}.$$

Аналогично имеем следующую формулу

$$(20{,}37) \qquad \varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = c_{\alpha\beta} x^{\alpha} y^{\beta} = -C \begin{vmatrix} d^{11} & \ldots & d^{1n} & x^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d^{n1} & \ldots & d^{nn} & x^{(n)} \\ y^{(1)} & \ldots & y^{(n)} & 0 \end{vmatrix}.$$

§ 21. Пара квадратичных форм.

1. Возьмем две квадратичных формы:

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = a_{\alpha\beta} x^{\alpha} x^{\beta}, \quad \psi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = b_{\alpha\beta} x^{\alpha} x^{\beta}.$$

Соответствующие им линейные векторфункции 2-го рода обозначим через $\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ и $\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{x})$:

$$\dot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}); \qquad y_i = a_{i\alpha} x^{\alpha},$$
$$\dot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{B}}(\mathbf{x}); \qquad y_i = b_{i\alpha} x^{\alpha}.$$

Рассмотрим вопрос: когда можно выделить n независимых направлений $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{n}{\mathbf{u}}$, которые были бы взаимно-сопряженными для обеих форм:

$$\varphi(\underset{i}{\mathbf{u}},\underset{k}{\mathbf{u}}) = 0, \qquad \psi(\underset{i}{\mathbf{u}},\underset{k}{\mathbf{u}}) = 0 \qquad (i \neq k).$$

Решение этой задачи мы дадим только для того случая, когда одна из заданных форм, например $\psi(\mathbf{x},\mathbf{x})$,— неособенная: $|b_{ik}| \neq 0$.

2. Если вектор $\underset{1}{\mathbf{u}}$ принадлежит к системе n независимых направлений, взаимно сопряженных относительно обеих форм, то гиперплоскости $\varphi(\underset{1}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) = 0$, $\psi(\underset{1}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) = 0$ должны совпадать:

$$\varphi(\underset{1}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) = \lambda\psi(\underset{1}{\mathbf{u}},\mathbf{x}),$$

где λ некоторое число, или

$$\dot{\mathbf{A}}(\underset{1}{\mathbf{u}}) - \lambda\dot{\mathbf{B}}(\underset{1}{\mathbf{u}}) = 0.$$

Следовательно, мы должны найти решения уравнения

$$\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) - \lambda\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) = 0. \tag{21,1}$$

Исследование этого уравнения приводится к изучению линейной векторфункции 1-го рода. В самом деле, умножая уравнение (21,1) на $\mathbf{B}^{-1}$, получаем:

$$(\mathbf{B}^{-1}\dot{\mathbf{A}} - \lambda\mathbf{E})(\mathbf{x}) = 0. \tag{21,2}$$

Если ввести в рассмотрение линейную векторфункцию 1-го рода $\mathbf{K} = \mathbf{B}^{-1}\dot{\mathbf{A}}$, то уравнение (22,2) перепишется в следующем виде:

$$(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{E})(\mathbf{x}) = 0. \tag{21,3}$$

Таким образом, отыскание n-эдра взаимно-сопряженных направлений относительно квадратичных форм φ и ψ приводится к определению главных направлений линейной векторфункции 1-го рода $\mathbf{K} = \mathbf{B}^{-1}\dot{\mathbf{A}}$.

В счете с составляющими функция $\mathbf{K}$ выражается следующим образом. Если обозначить тензор, обратный b_{ik}, через c^{ik}, тензор, соответствующий векторфункции $\mathbf{K}$,—через $K^i{}_k$, то

$$K^i{}_k = c^{ia}a_{ak}.$$

3. Остановимся несколько на рассмотрении характеристического полинома векторфункции $\mathbf{K}$:

$$\varphi(\lambda) = |\lambda\mathbf{E} - \mathbf{K}|.$$

Так как $\mathbf{K} = \mathbf{B}^{-1}\dot{\mathbf{A}}$, то он отличается только числовым множителем от полинома

$$\omega(\lambda) = |\dot{\mathbf{B}}|\,\varphi(\lambda) = |\lambda\dot{\mathbf{B}} - \dot{\mathbf{A}}|;$$

более подробно полином $\omega(\lambda)$ может быть записан в следующей форме:

$$\omega(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda b_{11} - a_{11}, & \lambda b_{12} - a_{12}, & \ldots \lambda b_{1n} - a_{1n} \\ \lambda b_{21} - a_{21}, & \lambda b_{22} - a_{22}, & \ldots \lambda b_{2n} - a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda b_{n1} - a_{n1}, & \lambda b_{n2} - a_{n2}, & \ldots \lambda b_{nn} - a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sigma_0\lambda^n - \sigma_1\lambda^{n-1} + \sigma_2\lambda^{n-2} + \ldots + (-1)^n\sigma_n.$$

Коэффициенты σ_i имеют следующий вид:

$$\sigma_0 = n!\, b_{[1\,[1} \ldots b_{n]\,n]} = |b_{ik}|$$

$$\sigma_1 = n!\,(a_{[1\,[1}\, b_{22}\, b_{33} \ldots b_{n]\,n]} + b_{[1\,[1}\, a_{22}\, b_{33} \ldots b_{n]\,n]} + \\ + b_{[1\,[1}\, b_{22}\, a_{33} \ldots b_{n]\,n]} + \ldots + b_{[1\,[1}\, b_{22} \ldots b_{n-1,\,n-1}\, a_{n]n]}),$$

$$\sigma_2 = n!\,(a_{[1\,[1}\, a_{22}\, b_{33} \ldots b_{n]\,n]} + a_{[1\,[1}\, b_{22}\, a_{33} \ldots b_{n]\,n]} + \ldots + \\ + b_{[1\,[1}\, b_{22} \ldots a_{n-1,\,n-1}\, a_{n\,n]}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sigma_{n-1} = n!\,(a_{[1\,[1}\, a_{22}\, a_{33} \ldots a_{n-1,\,n-1}\, b_{n]\,n]} + \\ + a_{[1\,[1}\, a_{22}\, a_{33} \ldots b_{n-1,\,n-1}\, a_{n]\,n]} + \ldots + b_{[1\,[1}\, a_{22}\, a_{33} \ldots a_{n]\,n]},$$

$$\sigma_n = n!\, a_{[1\,[1}\, a_{22}\, a_{33} \ldots a_{n]\,n]} = |a_{ik}|.$$

Заметим, что эти коэффициенты, как и сам полином $\omega(\lambda) = |\lambda\dot{\mathbf{B}} - \dot{\mathbf{A}}|$, являются о т н о с и т е л ь н ы м и и н в а р и а н т а м и веса $= -2$. Их отношения дают абсолютные инварианты. Например, можно выделить следующие абсолютные инварианты (это— инварианты векторфункции $\mathbf{K}$):

$$\alpha_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_0},\ \alpha_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_0},\ \ldots\ \alpha_n = \frac{\sigma_n}{\sigma_0},\ \text{где}\ \sigma_0 = |b_{ik}|.$$

Инвариантность выражений $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ при преобразованиях координат может быть интересно геометрически интерпретирована. Каждый из инвариантов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ дает возможность доказать теорему, представляющую распространение теорем Аполлония на аффинное пространство. В виду сложности формулировки, мы приводим здесь только одну из этих теорем. Она принадлежит Staudt'y. [1]

Теорема 1. *Пусть S_1 и S_2—неособенные гиперповерхности 2-го порядка, имеющие общий центр O. Возьмем n взаимно сопряженных диаметров гиперповерхности S_1, не являющихся ее асимптотическими направлениями, и обозначим полудиаметры, отсекаемые на этих направлениях гиперповерхностью S_1, через Ox_1, Ox_2, . . . Ox_n, гиперповерхностью S_2 — через Oy_1, Oy_2, . . . Oy_n. Сумма квадратов отношений соответствующих полудиаметров Ox_i к Oy_i есть величина постоянная.*

Доказательство. Пусть координатные оси образуют n-эдр сопряженных диаметров гиперповерхности S_1. Тогда ее уравнение имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_i x^{(i)^2} = 1.$$

Предположим, что гиперповерхность S_2 задается в этой системе координат уравнением

$$a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 1.$$

В формулу для инварианта α_1 подставляем:

$$b_{ii} = \sigma_i, \quad b_{ik} = 0 \qquad (i \neq k)$$

Получаем:

$$\alpha_1 = \frac{a_{11}}{\sigma_1} + \frac{a_{22}}{\sigma_2} + \ldots + \frac{a_{nn}}{\sigma_n}.$$

Так как каждое из отношений $\frac{a_{ii}}{\sigma_i}$ дает квадрат отношения отрезка Ox_i к Oy_i, то теорема доказана.

4. Обращаясь теперь к вопросу о приведении двух квадратичных форм к каноническому виду, изучим основные свойства вспомогательной векторфункции $\mathbf{K}$. Докажем теорему:

Теорема 2. *Главные направления, соответствующие двум неравным характеристическим числам векторфункции $\mathbf{K}$, взаимно-сопряженны относительно квадратичных форм $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$ и $\psi(\mathbf{x},\mathbf{x})$.*

Доказательство. Из равенств

$$(\mathbf{K} - \lambda_1 \mathbf{E})(\underset{1}{\mathbf{x}}) = 0, \qquad (\mathbf{K} - \lambda_2 \mathbf{E})(\underset{2}{\mathbf{x}}) = 0$$

[1] Staudt. Von den reellen und imaginären Halbmessern der Kurven und Flächen zweiter Ordnung, Nürnberg, 1867, стр. 46.

получаем:

$$\dot{\mathbf{A}}(\underset{1}{\mathbf{x}}) - \lambda_1 \dot{\mathbf{B}}(\underset{1}{\mathbf{x}}) = 0, \qquad \dot{\mathbf{A}}(\underset{2}{\mathbf{x}}) - \lambda_2 \dot{\mathbf{B}}(\underset{2}{\mathbf{x}}) = 0.$$

Умножая первое уравнение скалярно на $\underset{2}{\mathbf{x}}$, второе — на $\underset{1}{\mathbf{x}}$, имеем:

$$\varphi(\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}) - \lambda_1 \psi(\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}) = 0,$$
$$\varphi(\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}) - \lambda_2 \psi(\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}) = 0,$$

откуда:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\, \psi(\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}) = 0,$$

что и доказывает теорему.

Теорема 3. *Если $\{\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}\}$ – инвариантный пучок линейной векторфункции $\mathbf{K}$, то сопряженная ему относительно квадратичной формы $\psi(\mathbf{x},\mathbf{x})$ плоскость, определяемая уравнениями*

(21,4) $$\psi(\underset{1}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) = 0, \ \psi(\underset{2}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) = 0 \ \ldots \ \psi(\underset{m}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) = 0,$$

также является инвариантной плоскостью векторфункции $\mathbf{K}$.

Доказательство. Векторфункция $\mathbf{K}$ удовлетворяет соотношению:

(21,5) $$\mathbf{x}\dot{\mathbf{B}}\mathbf{K}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}\dot{\mathbf{B}}\mathbf{K}(\mathbf{x}).$$

В самом деле, $\dot{\mathbf{B}}\mathbf{K} = \dot{\mathbf{A}}$, а $\dot{\mathbf{A}}$—симметрическая векторфункция. Если вектор $\mathbf{y}$ принадлежит к $\{\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}\}$, то и $\mathbf{K}(\mathbf{y})$ также лежит в этом пучке. Пусть $\mathbf{x}$ принадлежит плоскости (21,4). Тогда $\mathbf{x}\dot{\mathbf{B}}\mathbf{K}(\mathbf{y}) = 0$; на основании (21,5), имеем:

$$\mathbf{y}\dot{\mathbf{B}}\mathbf{K}(\mathbf{x}) = 0,$$

т. е. $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ лежит в плоскости (21,4). Теорема доказана.

Теорема 4. *У двух квадратичных форм $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$ и $\psi(\mathbf{x},\mathbf{x})$ тогда и только тогда существует n независимых общих взаимно-сопряженных направлений, если векторфункция $\mathbf{K} = \mathbf{B}^{-1}\dot{\mathbf{A}}$ — простого типа.*

Доказательство. Если существует n взаимно-сопряженных направлений для $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$ и $\psi(\mathbf{x},\mathbf{x})$, то, приняв их за координатные оси, мы приведем матрицы векторфункций $\dot{\mathbf{A}}$ и $\dot{\mathbf{B}}$ к диагональному виду:

$$\|\dot{\mathbf{A}}\| = \begin{Vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{Vmatrix}, \quad \|\dot{\mathbf{B}}\| = \begin{Vmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Следовательно, матрица $\|\mathbf{K}\|$ в этой системе координат имеет также диагональный вид:

$$\|\mathbf{K}\| = \|\dot{\mathbf{B}}\|^{-1}\|\dot{\mathbf{A}}\| = \begin{Vmatrix} \frac{a_{11}}{b_{11}} & & & \\ & \frac{a_{22}}{b_{22}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{a_{nn}}{b_{nn}} \end{Vmatrix},$$

т. е. $\mathbf{K}$—векторфункция простого типа.

Докажем теперь обратное предложение. У векторфункции простого типа каждому характеристическому числу кратности k соответствует k-мерная главная область (все направления которой—инвариантные). Обозначим неравные между собой характеристические числа векторфункции $\mathbf{K}$ через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$, их кратности—соответственно через $k_1, k_2, \ldots k_m$. Таким образом, у векторфункции $\mathbf{K}$ существует m главных областей: $E_{k_1}, E_{k_2}, \ldots E_{k_m}$, причем каждая из них состоит из инвариантных направлений. На основании теоремы 2, пучки $E_{k_1}, E_{k_2}, \ldots E_{k_m}$ взаимно сопряжены относительно обеих форм: $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$ и $\psi(\mathbf{x},\mathbf{x})$. Возьмем один из этих пучков, например, E_{k_1} и выделим в нем k_1 взаимно-сопряженных направлений относительно формы $\psi(\mathbf{x},\mathbf{x})$: $\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}} \ldots \underset{k_1}{\mathbf{x}}$. Они являются также взаимно-сопряженными и относительно $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$, так как из равенства

$$\mathbf{K}(\underset{i}{\mathbf{x}}) = \lambda_1 \underset{i}{\mathbf{x}}$$

вытекает:

$$\dot{\mathbf{A}}(\underset{i}{\mathbf{x}}) = \lambda_1 \dot{\mathbf{B}}(\underset{i}{\mathbf{x}}), \quad \text{т. е.} \quad \varphi(\underset{i}{\mathbf{x}},\underset{k}{\mathbf{x}}) = \lambda_1 \psi(\underset{i}{\mathbf{x}},\underset{k}{\mathbf{x}}),$$

Таким образом, выделяя для $\psi(\mathbf{x},\mathbf{x})$ n независимых взаимно-сопряженных направлений, мы получим направления, которые являются взаимно-сопряженными и относительно формы $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$.

Пользуясь терминологией теории элементарных делителей, теорему 4 можно формулировать следующим образом: *У двух квадратичных форм $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$ и $\psi(\mathbf{x},\mathbf{x})$ тогда и только тогда существует n общих взаимно-сопряженных направлений, если элементарные делители матрицы $\|\lambda\dot{\mathbf{B}}-\dot{\mathbf{A}}\|$ простые.*

5. Дальнейшее изучение пары квадратичных форм мы проведем для вещественного пространства, причем будем предполагать что $\psi(\mathbf{x},\mathbf{x})$—определенная форма.

Теорема 5. *Если $\psi(\mathbf{x},\mathbf{x})$ — определенная квадратичная форма, то характеристические числа векторфункции $\mathbf{K} = \mathbf{B}^{-1}\dot{\mathbf{A}}$ действительны.*

Доказательство. Допустим обратное,—что существует комплексное характеристическое число λ с комплексным главным направлением $\mathbf{x}$. Так как $\mathbf{K}$ — действительная векторфункция, то существует комплексно-сопряженное характеристическое число $\bar{\lambda}$ с главным направлением $\bar{\mathbf{x}}$. Согласно теореме 2, направления $\mathbf{x}$ и $\bar{\mathbf{x}}$ взаимно-сопряженны относительно квадратичной формы $\psi(\mathbf{x},\mathbf{x})$:

$$\psi(\mathbf{x},\bar{\mathbf{x}}) = 0,$$

что не может быть, так как, если $\mathbf{x} = \mathbf{u} + i\,\mathbf{v}$, то $\psi(\mathbf{x},\bar{\mathbf{x}}) = \psi(\mathbf{u},\mathbf{u}) + \psi(\mathbf{v},\mathbf{v}) \neq 0$.

Теорема 6. *Если $\psi(\mathbf{x},\mathbf{x})$—определенная форма, то векторфункция $\mathbf{K} = \mathbf{B}^{-1}\dot{\mathbf{A}}$—простого типа.*

Мы дадим два доказательства этой важной теоремы.

1) Применим теорему 8, § 17. Согласно этой последней, нам следует показать, что каждый вектор $\mathbf{x}$, являющийся корнем уравнения:

$$(\mathbf{K}-\lambda\mathbf{E})^2(\mathbf{x}) = 0, \tag{21,6}$$

где λ—характеристическое число векторфункции $\mathbf{K}$, превращает в нуль вектор:

$$\mathbf{y} = (\mathbf{K}-\lambda\mathbf{E})(\mathbf{x}).$$

Рассмотрим $\psi(\mathbf{y},\mathbf{y}) = \mathbf{y}\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{y})$. Имеем:

$$\psi(\mathbf{y},\mathbf{y}) = \mathbf{y}\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{y}) = (\mathbf{K}-\lambda\mathbf{E})(\mathbf{x})\,(\dot{\mathbf{A}}-\lambda\dot{\mathbf{B}})(\mathbf{x}).$$

Так как векторфункция $\dot{\mathbf{A}}-\lambda\dot{\mathbf{B}}$—симметрическая, то

$$(\mathbf{K}-\lambda\mathbf{E})(\mathbf{x})(\dot{\mathbf{A}}-\lambda\dot{\mathbf{B}})(\mathbf{x}) = \mathbf{x}(\dot{\mathbf{A}}-\lambda\dot{\mathbf{B}})(\mathbf{K}-\lambda\mathbf{E})(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{K}-\lambda\mathbf{E})^2(\mathbf{x}).$$

Если вектор $\mathbf{x}$ удовлетворяет уравнению (21,6), то

$$\psi(\mathbf{y},\mathbf{y}) = \mathbf{x}\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{K}-\lambda\mathbf{E})^2(\mathbf{x}) = 0.$$

Но так как $\psi(\mathbf{y},\mathbf{y})$—определенная форма, то $\mathbf{y}=0$.

2) Второй способ доказательства базируется на теореме 3. У векторфункции $\mathbf{K}$ характеристические числа, а следовательно, и главные направления—действительные. Возьмем одно из них: $\underset{1}{\mathbf{u}}$ и рассмотрим гиперплоскость E_{n-1}: $\psi(\underset{1}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) = 0$, сопряженную с $\underset{1}{\mathbf{u}}$. Она независима от $\underset{1}{\mathbf{u}}$ (так как ψ—определенная форма) и является инвариантной для векторфункции $\mathbf{K}$. Разложим $\mathbf{K}$ на две независимых векторфункции: $\mathbf{K} = \underset{1}{\mathbf{K}} + \underset{2}{\mathbf{K}}$, из которых $\underset{1}{\mathbf{K}}$ лежит в $\underset{1}{\mathbf{u}}$, $\underset{2}{\mathbf{K}}$—в E_{n-1}. Нетрудно видеть, что из соотношения

$$\mathbf{x}\dot{\mathbf{B}}\mathbf{K}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}\dot{\mathbf{B}}\mathbf{K}(\mathbf{x})$$

вытекает:

$$\mathbf{x}\dot{\mathbf{B}}\underset{2}{\mathbf{K}}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}\dot{\mathbf{B}}\underset{2}{\mathbf{K}}(\mathbf{x}),$$

где $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — векторы, лежащие в E_{n-1}. Таким образом, к векторфункции $\underset{2}{\mathbf{K}}$ можно применить тот же процесс, что и к векторфункции $\mathbf{K}$: берем одно из ее главных направлений $\underset{2}{\mathbf{u}}$ и строим плоскость E_{n-2}, сопряженную пучку $\{\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{2}{\mathbf{u}}\}$ (заметим, что направление $\underset{2}{\mathbf{u}}$— действительное, так как характеристические числа векторфункции $\underset{2}{\mathbf{K}}$ принадлежат к характеристическим числам функции $\mathbf{K}$). Плоскость E_{n-2}, будучи сопряженной с $\{\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{2}{\mathbf{u}}\}$, является инвариантной для векторфункции $\underset{2}{\mathbf{K}}$ и независимой от $\{\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{2}{\mathbf{u}}\}$. Разлагаем $\underset{2}{\mathbf{K}} = \underset{3}{\mathbf{K}} + \underset{4}{\mathbf{K}}$, причем $\underset{3}{\mathbf{K}}$ лежит в $\underset{2}{\mathbf{u}}$, $\underset{4}{\mathbf{K}}$— в E_{n-2} $\underset{4}{\mathbf{K}}$ удовлетворяет соотношению:

$$\mathbf{x}\dot{\mathbf{B}}\underset{4}{\mathbf{K}}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}\dot{\mathbf{B}}\underset{4}{\mathbf{K}}(\mathbf{x}),$$

где $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — векторы пучка $/_{n-2}$. К $\underset{4}{\mathbf{K}}$ применяем тот же процесс. Продолжая таким образом дальше, мы выделим n независимых главных направлений векторфункции $\mathbf{K}$. Все они взаимно сопряженны относительно формы $\psi(\mathbf{x},\mathbf{x})$. Теорема доказана.

Объединяя теоремы 4, 5 и 6, можем формулировать следующее предложение:

Теорема 7. *Если $\psi(\mathbf{x},\mathbf{x})$ — определенная квадратичная форма, то формы $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$ и $\psi(\mathbf{x},\mathbf{x})$ аффинным вещественным преобразованием координат могут быть приведены к виду:*

$$(21,7)\qquad \varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x^{(i)2},\quad \psi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \pm\sum_{i=1}^{n} x^{(i)2},$$

причем λ_i—действительные числа.

Задача 1. Если обе квадратичные формы $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$ и $\psi(\mathbf{x},\mathbf{x})$ — неопределенные, то векторфункция $\mathbf{K}$ может быть не простого типа. Пример:

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = x^{(1)^2} + x^{(2)^2} + x^{(1)}x^{(3)},$$
$$\psi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = x^{(1)^2} + x^{(2)^2} - x^{(3)^2}.$$

Показать, что характеристика векторфункции $\mathbf{K}$ в данном случае выражается символом [1,2]. Следовательно, указанные квадратичные формы не могут быть совместно приведены к суммам квадратов переменных.

Задача 2. Если характеристика векторфункции $\mathbf{K} = \mathbf{B}^{-1}\dot{\mathbf{A}}$ выражается символом $[n]$, то, введя систему координат, при которой матрица $\|\mathbf{K}\|$ имеет канонический вид Jordan'a.

$$(21,8)\qquad \begin{Vmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{Vmatrix},$$

можно придать матрице $\|\dot{\mathbf{B}}\|$ следующую форму:

$$(21,9)\qquad \|\dot{\mathbf{B}}\| = \begin{Vmatrix} & & & & \alpha_1 \\ & & & \alpha_1 & \alpha_2 \\ & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_n \end{Vmatrix}.$$

Преобразованием координат:

$$(21,10)\qquad \underset{k}{\mathbf{e}'} = \sigma_k \underset{1}{\mathbf{e}} + \sigma_{k-1}\underset{2}{\mathbf{e}} + \ldots + \sigma_1 \underset{k}{\mathbf{e}} \qquad (k = 1, \ldots n)$$

можно привести матрицы $\|\dot{\mathbf{A}}\|$ и $\|\dot{\mathbf{B}}\|$ к следующему виду:

$$(21{,}11)\qquad \|\dot{\mathbf{A}}\| = \begin{Vmatrix} & & & & \lambda \\ & & & \lambda & 1 \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ & \lambda\ 1 & & & \\ \lambda\ 1 & & & & \end{Vmatrix}, \qquad \|\dot{\mathbf{B}}\| = \begin{Vmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{Vmatrix}.$$

Решение. Координатные векторы той системы, в которой матрица $\|\mathbf{K}\|$ имеет вид (21,8), преобразуются векторфункцией $\mathbf{K}$ следующим образом:

$$(21{,}12)\qquad \mathbf{K}(\underset{1}{\mathbf{e}}) = \lambda \underset{1}{\mathbf{e}},\qquad \mathbf{K}(\underset{k}{\mathbf{e}}) = \lambda \underset{k}{\mathbf{e}} + \underset{k-1}{\mathbf{e}} \qquad (k = 2, \ldots n).$$

Следовательно,

$$\dot{\mathbf{A}}(\underset{1}{\mathbf{e}}) = \lambda \dot{\mathbf{B}}(\underset{1}{\mathbf{e}}),$$

$$\dot{\mathbf{A}}(\underset{k}{\mathbf{e}}) = \lambda \dot{\mathbf{B}}(\underset{k}{\mathbf{e}}) + \dot{\mathbf{B}}(\underset{k-1}{\mathbf{e}}) \qquad (k = 2, \ldots n).$$

Отсюда получаем соотношения:

$$a_{ik} = \lambda b_{ik} + b_{i,k-1},$$
$$a_{ki} = \lambda b_{ki} + b_{k,i-1},$$

причем предполагается, что $b_{os} = 0$ $(s = 1, \ldots n)$. Приравнивая a_{ik} и a_{ki}, выводим формулу:

$$b_{i,k-1} = b_{i-1,k},$$

которая показывает, что $\|\dot{\mathbf{B}}\|$ действительно имеет вид (21,9). При введении новой системы координат (21,10) матрица $\|\dot{\mathbf{B}}\|$ не меняет своей структуры, так как векторы $\underset{1}{\mathbf{e}}', \underset{2}{\mathbf{e}}', \ldots \underset{n}{\mathbf{e}}'$ удовлетворяют уравнениям (21,12). Выбором коэффициентов $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$ можно превратить в нуль $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$, а коэффициент α_1 в единицу. Так как

$$\|\dot{\mathbf{A}}\| = \|\dot{\mathbf{B}}\| \, \|\mathbf{K}\|,$$

то получаем (21,11).

§ 22. Аутоморфные преобразования квадратичной формы.

1. Пусть

$$(22{,}1)\qquad \varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \mathbf{x}\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{x}) = c_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta}$$

квадратичная форма, дискриминант которой не равен нулю. Исследуем свойства линейной векторфункции 1-го рода $\mathbf{y} = \mathbf{D}(\mathbf{x})$, определяющей однородное аффинное преобразование простран-

ства, при котором форма (22,1) остается инвариантной (так называемое **аутоморфное преобразование квадратичной формы**). Условие инвариантности запишется следующим образом:

$$(22{,}2)\qquad \mathbf{D}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{C}}\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{x}).$$

Подставляя в этом соотношении $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ вместо $\mathbf{x}$, получаем:

$$(22{,}3)\qquad \mathbf{D}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{C}}\mathbf{D}(\mathbf{y}) + \mathbf{D}(\mathbf{y})\dot{\mathbf{C}}\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{y}) + \mathbf{y}\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{x}).$$

Так как $\dot{\mathbf{C}}$—симметрическая векторфункция, то

$$\mathbf{D}(\mathbf{y})\dot{\mathbf{C}}\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \mathbf{D}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{C}}\mathbf{D}(\mathbf{y}),\quad \mathbf{y}\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{y}).$$

Таким образом, соотношение (22,3) приводится к следующему:

$$(22{,}4)\qquad \mathbf{D}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{C}}\mathbf{D}(\mathbf{y}) = \mathbf{x}\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{y}),$$

т. е. при линейном преобразовании $\mathbf{D}$ инвариантной остается не только квадратичная форма $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \mathbf{x}\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{x})$, но и **билинейная форма** $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{y})$ **также является инвариантом**. Соотношение (22,4) может быть переписано в следующем виде:

$$\mathbf{x}\dot{\mathbf{D}}_c\dot{\mathbf{C}}\mathbf{D}(\mathbf{y}) = \mathbf{x}\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{y}),$$

откуда

$$(22{,}5)\qquad \dot{\mathbf{D}}_c\dot{\mathbf{C}}\mathbf{D} = \dot{\mathbf{C}},$$

или

$$(22{,}6)\qquad \dot{\mathbf{D}}_c\dot{\mathbf{C}} = \dot{\mathbf{C}}\mathbf{D}^{-1},\quad \dot{\mathbf{C}}\mathbf{D} = \dot{\mathbf{D}}_c^{-1}\dot{\mathbf{C}}.$$

2. Теорема 1. $\mathbf{D}$—*неособенная линейная векторфункция, причем* $|\mathbf{D}| = \pm 1$.

Доказательство. Из (22,5) вытекает:

$$|\dot{\mathbf{C}}|\,|\mathbf{D}|^2 = |\dot{\mathbf{C}}|,\quad |\mathbf{D}|^2 = 1.$$

Следствие. *Векторфункция* $\mathbf{D}$ *превращает каждый n-мерный параллелепипед в равновеликий (с точностью до знака).*

В самом деле, если $\underset{1}{\mathbf{z}} = \mathbf{D}(\underset{1}{\mathbf{x}}),\ \underset{2}{\mathbf{z}} = \mathbf{D}(\underset{2}{\mathbf{x}}), \ldots \underset{n}{\mathbf{z}} = \mathbf{D}(\underset{n}{\mathbf{x}})$, то

$$(\underset{1}{\mathbf{z}}\underset{2}{\mathbf{z}}\ldots\underset{n}{\mathbf{z}}) = |\mathbf{D}|\,(\underset{1}{\mathbf{x}}\underset{2}{\mathbf{x}}\ldots\underset{n}{\mathbf{x}}).$$

Теорема 2. *Характеристическому числу векторфункции* $\mathbf{D}$, *не равному* ± 1, *соответствуют инвариантные направления, принадлежащие к асимптотическому конусу векторфункции* $\dot{\mathbf{C}}$.

Доказательство. Пусть инвариантному направлению $\mathbf{x}$ соответствует характеристическое число λ:

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}.$$

Из соотношения (22,2) выводим:

$$\lambda^2\mathbf{x}\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{x}),$$

откуда следует утверждение теоремы.

Теорема 3. *Если λ_1, λ_2—характеристические числа векторфункции $\mathbf{D}$, и $\lambda_1\lambda_2 \neq 1$, то инвариантные направления, соответствующие λ_1, сопряженны относительно квадратичной формы $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$ инвариантным направлениям, соответствующим характеристическому числу λ_2.*

Доказательство. Пусть

$$\mathbf{D}(\underset{1}{\mathbf{x}}) = \lambda_1\underset{1}{\mathbf{x}},\ \mathbf{D}(\underset{2}{\mathbf{x}}) = \lambda_2\underset{2}{\mathbf{x}}.$$

На основании (22,4) имеем:

$$\underset{2}{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{C}}(\underset{1}{\mathbf{x}}) = \lambda_1\lambda_2\underset{2}{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{C}}(\underset{1}{\mathbf{x}}), \tag{22,7}$$

что доказывает теорему.

Теорема 4. *Если векторфункция $\mathbf{D}$ имеет характеристическое число λ, не равное ± 1, то у нее существует характеристическое число $\frac{1}{\lambda}$ той же кратности, что и λ. Элементарные делители, соответствующие характеристическим числам λ и $\frac{1}{\lambda}$, имеют соответственно одинаковые показатели степеней.*

Доказательство. Достаточно показать справедливость второго утверждения теоремы. Элементарные делители векторфункции $\mathbf{D}$ ищутся из характеристической λ-матрицы:

$$M = \|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{D}\|.$$

Рассмотрим сопряженную матрицу

$$M_c = \|\lambda\dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{D}}_c\|.$$

Так как

$$\dot{\mathbf{D}}_c = \dot{\mathbf{C}}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}^{-1},$$

то

$$M_c = \|\lambda\dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{C}}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}^{-1}\| = \|\dot{\mathbf{C}}\|\|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{D}^{-1}\|\|\mathbf{C}^{-1}\| =$$
$$= \|\dot{\mathbf{C}}\|\|\lambda\mathbf{D} - \mathbf{E}\|\|\mathbf{D}^{-1}\|\|\mathbf{C}^{-1}\|.$$

Таким образом, элементарные делители у M_c те же самые, как и у λ-матрицы

$$N = \|\lambda\mathbf{D} - \mathbf{E}\|.$$

Нетрудно видеть, что каждому элементарному делителю вида $(\lambda-\alpha)^e$ матрицы M соответствует элементарный делитель вида $\left(\lambda - \frac{1}{\alpha}\right)^e$ матрицы N. Но две сопряженные λ-матрицы M и M_c имеют одинаковые элементарные делители. Теорема, таким образом, доказана.

Теорема 5. *Если $\{\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}\}$—$m$-мерный пучок, инвариантный при аффинном преобразовании $\mathbf{D}$, то сопряженная ему плоскость, определяемая уравнениями*

$$\varphi(\underset{1}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) = 0,\ \varphi(\underset{2}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) = 0,\ \ldots\varphi(\underset{m}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) = 0, \tag{22,8}$$

также инвариантна при преобразовании $\mathbf{D}$.

Доказательство. Векторфункция $\mathbf{D}$ удовлетворяет соотношению:

$$\mathbf{D}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{C}}\mathbf{D}(\mathbf{y}) = \mathbf{x}\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{y}). \tag{22,9}$$

Пусть $\mathbf{y}$—некоторый вектор, принадлежащий пучку $\{\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}\}$; тогда $\mathbf{D}(\mathbf{y})$ также лежит в этом пучке. Если $\mathbf{x}$ принадлежит к плоскости (22,8), то $\mathbf{x}\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{y}) = 0$, т. е., на основании (22,9),

$$\mathbf{D}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{C}}\mathbf{D}(\mathbf{y}) = 0;$$

отсюда следует, что $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ лежит в плоскости (22,8), что и доказывает теорему.

3. Векторфункция $\mathbf{D}$, оставляющая инвариантной заданную неособенную квадратичную форму $\mathbf{x}\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{x})$, может быть, при известных ограничениях, очень просто выражена через $\dot{\mathbf{C}}$ и некоторую антисимметрическую векторфункцию 2-го рода. Рассмотрим сначала тот случай, когда у векторфункции $\mathbf{D}$ нет характеристических чисел, равных -1, т. е. когда

$$|\mathbf{D} + \mathbf{E}| \neq 0.$$

Построим векторфункцию 2-го рода:

$$\dot{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{C}}\frac{\mathbf{D} - \mathbf{E}}{\mathbf{D} + \mathbf{E}}. \tag{22,10}$$

Покажем, что $\dot{\mathbf{A}}$ антисимметрична. Имеем:

$$\dot{\mathbf{A}}_c = \frac{\dot{\mathbf{D}}_c - \dot{\mathbf{E}}}{\dot{\mathbf{D}}_c + \dot{\mathbf{E}}}\dot{\mathbf{C}} = \frac{\dot{\mathbf{C}}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}^{-1} - \dot{\mathbf{E}}}{\dot{\mathbf{C}}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}^{-1} + \dot{\mathbf{E}}}\dot{\mathbf{C}} =$$

$$= \dot{\mathbf{C}}(\mathbf{D}^{-1} - \mathbf{E})\,\mathbf{C}^{-1}\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{D}^{-1} + \mathbf{E})^{-1}\mathbf{C}^{-1}\dot{\mathbf{C}} =$$

$$= \dot{\mathbf{C}}\,\frac{\mathbf{D}^{-1} - \mathbf{E}}{\mathbf{D}^{-1} + \mathbf{E}} = \dot{\mathbf{C}}\,\frac{\mathbf{E} - \mathbf{D}}{\mathbf{E} + \mathbf{D}} = -\dot{\mathbf{A}}.$$

Выразим теперь $\mathbf{D}$ через $\dot{\mathbf{C}}$ и $\dot{\mathbf{A}}$. Решая уравнение (22,10), получаем:

$$\mathbf{C}^{-1}\dot{\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{D} - \mathbf{E}}{\mathbf{D} + \mathbf{E}},$$

откуда:

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{E} + \mathbf{C}^{-1}\dot{\mathbf{A}}}{\mathbf{E} - \mathbf{C}^{-1}\dot{\mathbf{A}}}. \tag{22,11}$$

Это выражение может быть преобразовано следующим образом:

$$\mathbf{D} = (\mathbf{E} - \mathbf{C}^{-1}\dot{\mathbf{A}})^{-1}(\mathbf{E} + \mathbf{C}^{-1}\dot{\mathbf{A}}) = (\dot{\mathbf{C}} - \dot{\mathbf{A}})^{-1}\dot{\mathbf{C}}\,\mathbf{C}^{-1}(\dot{\mathbf{C}} + \dot{\mathbf{A}}).$$

Таким образом,

$$\mathbf{D} = (\dot{\mathbf{C}} - \dot{\mathbf{A}})^{-1}(\dot{\mathbf{C}} + \dot{\mathbf{A}}). \tag{22,12}$$

Обратно, векторфункция $\mathbf{D}$, определяемая формулой (22,12), где $\dot{\mathbf{C}}$—неособенная симметрическая векторфункция 2-го рода, $\dot{\mathbf{A}}$—некоторая антисимметрическая векторфункция 2-го рода (выбор $\dot{\mathbf{A}}$ ограничивается только тем условием, что определитель $|\dot{\mathbf{C}} - \dot{\mathbf{A}}| \neq 0$), оставляет инвариантной квадратичную форму $\mathbf{x}\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{x})$.

Докажем это последнее утверждение. Из (22,12) выводим:

$$\dot{\mathbf{D}}_c = (\dot{\mathbf{C}} - \dot{\mathbf{A}})(\dot{\mathbf{C}} + \dot{\mathbf{A}})^{-1}.$$

Следовательно,

$$\dot{\mathbf{D}}_c(\dot{\mathbf{C}} + \dot{\mathbf{A}})\,\mathbf{D} = \dot{\mathbf{C}} + \dot{\mathbf{A}},$$

$$\dot{\mathbf{D}}_c(\dot{\mathbf{C}} - \dot{\mathbf{A}})\,\mathbf{D} = \dot{\mathbf{C}} - \dot{\mathbf{A}}.$$

Складывая, получаем

$$\dot{\mathbf{D}}_c\dot{\mathbf{C}}\mathbf{D} = \dot{\mathbf{C}},$$

т. е. действительно $\mathbf{D}$ удовлетворяет уравнению (22,5).

Если у векторфункции $\mathbf{D}$ нет характеристических чисел, равных $+1$, то, аналогично предыдущему, векторфункция

$$\dot{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{C}}\,\frac{\mathbf{D} + \mathbf{E}}{\mathbf{D} - \mathbf{E}},$$

является антисимметрической. В этом случае

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{C}^{-1}\dot{\mathbf{A}} + \mathbf{E}}{\mathbf{C}^{-1}\dot{\mathbf{A}} - \mathbf{E}} = (\dot{\mathbf{A}} - \dot{\mathbf{C}})^{-1}(\dot{\mathbf{A}} + \dot{\mathbf{C}}). \tag{22,13}$$

Резюмируя вышесказанное, можем формулировать теорему:

Теорема 6 (Hermite'а). *Линейная векторфункция 1-го рода $\mathbf{D}$, оставляющая инвариантной неособенную квадратичную форму $\mathbf{x}\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{x})$, может быть выражена следующим образом:*

$$\mathbf{D} = (\dot{\mathbf{C}} - \dot{\mathbf{A}})^{-1}(\dot{\mathbf{C}} + \dot{\mathbf{A}}), \tag{22,12}$$

если у ней нет характеристических чисел, равных -1, или

$$\mathbf{D} = (\dot{\mathbf{A}} - \dot{\mathbf{C}})^{-1}(\dot{\mathbf{A}} + \dot{\mathbf{C}}), \tag{22,13}$$

если у ней нет характеристических чисел, равных $+1$. $\dot{\mathbf{A}}$ — некоторая антисимметрическая векторфункция 2-го рода.

Пример. Пользуясь формулой (22,12), выведем выражение для векторфункции $\mathbf{D}$ в двумерном пространстве, оставляющей инвариантной квадратичную форму

$$\varphi = c_{11}x^{(1)2} + 2c_{12}x^{(1)}x^{(2)} + c_{22}x^{(2)2} \tag{22,14}$$

(при условии, что у $\mathbf{D}$ нет характеристических чисел, равных -1).

Берем антисимметрический тензор $\dot{\mathbf{A}}$ с матрицей

$$\|\dot{\mathbf{A}}\| = \begin{Vmatrix} 0, & a \\ -a, & 0 \end{Vmatrix}.$$

Образуем

$$\|\dot{\mathbf{C}} - \dot{\mathbf{A}}\| = \begin{Vmatrix} c_{11}, & c_{12} - a \\ c_{21} + a, & c_{22} \end{Vmatrix}, \quad \|\dot{\mathbf{C}} + \dot{\mathbf{A}}\| = \begin{Vmatrix} c_{11}, & c_{12} + a \\ c_{21} - a, & c_{22} \end{Vmatrix}.$$

Постоянную a подчиним условно, чтобы определитель Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11}, & c_{12} - a \\ c_{21} + a, & c_{22} \end{vmatrix} = a^2 + c_{11}c_{22} - c_{12}^2 \neq 0.$$

Имеем:

$$\|\dot{\mathbf{C}} - \dot{\mathbf{A}}\|^{-1} = \begin{Vmatrix} \dfrac{c_{22}}{\Delta}, & -\dfrac{c_{12} - a}{\Delta} \\ -\dfrac{a + c_{21}}{\Delta}, & \dfrac{c_{11}}{\Delta} \end{Vmatrix}.$$

Следовательно,

$$\|\mathbf{D}\| = \|\dot{\mathbf{C}} - \dot{\mathbf{A}}\|^{-1}\|\dot{\mathbf{C}} + \dot{\mathbf{A}}\| = \begin{Vmatrix} \dfrac{c_{11}c_{22} - (c_{12} - a)^2}{\Delta}, & \dfrac{2a\,c_{22}}{\Delta} \\ -\dfrac{2a\,c_{11}}{\Delta}, & \dfrac{c_{11}c_{22} - (c_{12} + a)^2}{\Delta} \end{Vmatrix}$$

Это есть общее выражение матрицы аффинных преобразований, оставляющих инвариантной форму (22.14) и у которых характеристические числа отличны от минус единицы.

Задача 1. Вывести общее выражение для векторфункции **D** в трехмерном пространстве, оставляющей инвариантной квадратичную форму:

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \alpha_1 x^{(1)2} + \alpha_2 x^{(2)2} + \alpha_3 x^{(3)2},$$

и не имеющей характеристических чисел, равных -1.

Ответ. Вводя антисимметрический тензор $\dot{\mathbf{A}}$ с матрицей:

$$\|\dot{\mathbf{A}}\| = \left\| \begin{matrix} 0, & -r, & q \\ r, & 0, & -p \\ -q, & p, & 0 \end{matrix} \right\|,$$

получаем:

$$\|\mathbf{D}\| = \frac{1}{\varDelta} \left\| \begin{matrix} \varDelta - 2(\alpha_2 q^2 + \alpha_3 r^2), & 2\alpha_2 (pq - \alpha_3 r), & 2\alpha_3 (pr + \alpha_2 q) \\ 2\alpha_1 (qp + \alpha_3 r), & \varDelta - 2(\alpha_1 p^2 + \alpha_3 r^2), & 2\alpha_3 (qr - \alpha_1 p) \\ 2\alpha_1 (rp - \alpha_2 q), & 2\alpha_2 (rq + \alpha_1 p), & \varDelta - 2(\alpha_1 p^2 + \alpha_2 q^2) \end{matrix} \right\|,$$

где

$$\varDelta = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1 p^2 + \alpha_2 q^2 + \alpha_3 r^2.$$

Задача 2. Вычислить характеристические числа векторфункции **D**, определенной в предыдущей задаче.

Ответ:

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} - i\sqrt{\varLambda}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} + i\sqrt{\varLambda}}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}, \quad \lambda_3 = 1,$$

где

$$\varLambda = \alpha_1 p^2 + \alpha_2 q^2 + \alpha_3 r^2.$$

Решение. *1-й способ.* На основании теорем 1 и 4, одно из характеристических чисел равно 1, два других связаны соотношением: $\lambda_1\lambda_2 = 1$. Определяя след векторфункции **D**, получаем:

$$\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1} + 1 = \frac{3\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - \varLambda}{\varDelta}.$$

Отсюда определяем λ_1.

2-й способ. Вычисляем характеристические числа векторфункции $\mathbf{C}^{-1}\dot{\mathbf{A}}$:

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{\varLambda}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}}\, i, \quad \sigma_2 = -\sqrt{\frac{\varLambda}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}}\, i, \quad \sigma_3 = 0.$$

Так как

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{E} + \mathbf{C}^{-1}\dot{\mathbf{A}}}{\mathbf{E} - \mathbf{C}^{-1}\dot{\mathbf{A}}},$$

то

$$\lambda_i = \frac{1 + \sigma_i}{1 - \sigma_i}.$$

(См. задачу 6, § 16).

Задача 3. Доказать, что линейная векторфункция **D**, определяемая формулой (22,12) или (22,13), оставляет инвариантной билинейную антисимметрическую форму $\mathbf{x}\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{y})$ и вообще билинейную форму вида $\mathbf{x}(\lambda\dot{\mathbf{C}} + \mu\dot{\mathbf{A}})(\mathbf{y})$, где λ,μ—некоторые произвольные числа.

Задача 4. Пусть векторфункция **D** задана матрицей:

$$\left\| \begin{matrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{matrix} \right\|.$$

Определить те квадратичные формы, которые она оставляет инвариантными.

Ответ.

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = A(\lambda^2 x^{(1)} x^{(4)} - x^{(2)} x^{(3)}) + Bx^{(2)} x^{(4)},$$

где A и B—некоторые произвольные постоянные.

4. Дальнейшее исследование векторфункции **D** проведем для реального пространства при предположении, что $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$—определенная форма. В этом случае, на основании теоремы 2, действительные главные направления могут соответствовать только характеристическим числам, равным ± 1. Следовательно, все характеристические числа, отличные от ± 1,—комплексны.

Теорема 7. *Если квадратичная форма $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$—определенная, то характеристические числа векторфункции* **D** *по модулю равны единице.*

Доказательство. Пусть $\lambda,\bar{\lambda}$—комплексно-сопряженные характеристические числа, $\mathbf{x},\bar{\mathbf{x}}$—соответствующие им главные направления. Если бы произведение $\lambda\bar{\lambda}$ не равнялось единице, то, на основании теоремы 3, направления $\mathbf{x},\bar{\mathbf{x}}$ были бы взаимно-сопряженны относительно квадратичной формы $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$. Но этого быть не может, так как $\varphi(\mathbf{x},\bar{\mathbf{x}}) \neq 0$. Итак, $|\lambda|^2 = \lambda\bar{\lambda} = 1$.

Теорема 8. *Если квадратичная форма $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$—определенная, то векторфункция* **D**—*простого типа.*

Доказательство. На основании теоремы 8, § 17, достаточно показать, что для каждого характеристического числа λ решения уравнения

$$(\mathbf{D} - \lambda\mathbf{E})^2(\mathbf{x}) = 0$$

превращают в нуль вектор

$$\mathbf{y} = (\mathbf{D} - \lambda\mathbf{E})(\mathbf{x}).$$

Рассмотрим сопряженное характеристическое число $\bar{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$. Ему соответствует сопряженный комплексный вектор

$$\bar{\mathbf{y}} = (\mathbf{D} - \bar{\lambda}\mathbf{E})(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{1}{\lambda}(\lambda\mathbf{D} - \mathbf{E})(\bar{\mathbf{x}});$$

(если $\lambda = \pm 1$, то $\mathbf{y}$ — действительный вектор, т. е. $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{y}$). Вычислим $\bar{\mathbf{y}}\,\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{y})$:

$$\bar{\mathbf{y}}\,\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{\lambda}(\lambda\mathbf{D} - \mathbf{E})(\bar{\mathbf{x}})\,\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{D} - \lambda\mathbf{E})(\mathbf{x}) =$$
$$= \frac{1}{\lambda}\,\bar{\mathbf{x}}\,(\lambda\,\dot{\mathbf{D}}_c - \dot{\mathbf{E}})\,\dot{\mathbf{C}}\,(\mathbf{D} - \lambda\mathbf{E})(\mathbf{x}) =$$
$$= \frac{1}{\lambda}\,\bar{\mathbf{x}}\,(\lambda\,\dot{\mathbf{D}}_c\,\dot{\mathbf{C}}\mathbf{D} - \lambda^2\dot{\mathbf{D}}_c\,\dot{\mathbf{C}} - \dot{\mathbf{C}}\,\mathbf{D} + \lambda\,\dot{\mathbf{C}})(\mathbf{x}).$$

Так как

$$\dot{\mathbf{D}}_c\,\dot{\mathbf{C}}\,\mathbf{D} = \dot{\mathbf{C}}, \quad \dot{\mathbf{D}}_c\,\dot{\mathbf{C}} = \dot{\mathbf{C}}\mathbf{D}^{-1},$$

получаем:

$$\bar{\mathbf{y}}\,\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{y}) = -\frac{1}{\lambda}\,\bar{\mathbf{x}}\,(\lambda^2\dot{\mathbf{C}}\mathbf{D}^{-1} - 2\lambda\dot{\mathbf{C}} + \dot{\mathbf{C}}\mathbf{D})(\mathbf{x}) =$$
$$= -\frac{1}{\lambda}\,\bar{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{C}}\mathbf{D}^{-1}(\lambda^2\mathbf{E} - 2\lambda\mathbf{D} + \mathbf{D}^2)(\mathbf{x}) =$$
$$= -\frac{1}{\lambda}\,\bar{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{C}}\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{D} - \lambda\mathbf{E})^2(\mathbf{x}) = 0.$$

Так как $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$ — определенная форма, то из равенства нулю выражения $\bar{\mathbf{y}}\,\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{y})$ следует, что

$$\mathbf{y} = (\mathbf{D} - \lambda\mathbf{E})(\mathbf{x}) = 0.$$

Теорема доказана.

Задача 5. Дать другое доказательство теоремы 8, базируясь на теореме 5, аналогичное второму доказательству теоремы 6 § 21.

5. Займемся выделением инвариантных направлений векторфункции $\mathbf{D}$.

Так как эта векторфункция в том случае, если форма $\mathbf{x}\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{x})$ — определенная, — простого типа, то каждому ее характеристическому числу кратности k соответствует k-мерная главная область, все направления которой инвариантны.

Предположим, что у векторфункции $\mathbf{D}$ имеется характеристическое число $+1$ кратности p, -1 кратности q и комплексные корни λ_1 и $\bar{\lambda}_1$ кратности k_1, λ_2 и $\bar{\lambda}_2$ кратности k_2, . . . λ_m и $\bar{\lambda}_m$ кратности k_m.

Пусть характеристическим числам $+1$ и -1 соответствуют главные области E_p и E_q. Если корню λ_1 соответствует главная область E_{k_1}, то корню $\bar{\lambda}_1$ соответствует комплексно-сопряженный пучок $\bar{E}_{k_1}$ (E_{k_1} и $\bar{E}_{k_1}$ являются асимптотическими пучками векторфункции $\dot{\mathbf{C}}$).

На основании раздела 18 § 20, в этих двух пучках можно выделить базисы $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{k_1}{\mathbf{u}}$ и $\underset{1}{\bar{\mathbf{u}}}, \underset{2}{\bar{\mathbf{u}}}, \ldots \underset{k_1}{\bar{\mathbf{u}}}$, удовлетворяющие уравнениям

$$\varphi(\underset{i}{\mathbf{u}}, \underset{k}{\bar{\mathbf{u}}}) = 0 \qquad (i \neq k) \tag{22,15}$$

Нормируя векторы $\underset{i}{\mathbf{u}}$, мы можем достигнуть того, чтобы имели место соотношения:

$$\varphi(\underset{i}{\mathbf{u}}, \underset{k}{\bar{\mathbf{u}}}) = \pm\,\delta^i_k, \tag{22,16}$$

причем знак плюс берем для того случая, когда форма $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$ — положительная, минус, — если она отрицательная. Аналогично выделяем базисы во всех комплексно-сопряженных главных областях E_{k_2}, $\bar{E}_{k_2}$, E_{k_3}, $\bar{E}_{k_3}$, . . . , соответствующих остальным характеристическим числам. В E_p и E_q строим базисы так, чтобы их векторы $\underset{i}{\mathbf{v}}$ были взаимно-сопряженны относительно квадратичной формы $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$ и удовлетворяли условию: $\varphi(\underset{i}{\mathbf{v}}, \underset{i}{\mathbf{v}}) = \pm 1$.

Выберем теперь за направления координатных осей направления векторов построенных базисов: первые $(2k_1 + 2k_2 + \ldots + 2k_m)$ координатных векторов возьмем в комплексных областях E_{k_1}, $\bar{E}_{k_1}$, E_{k_2}, $\bar{E}_{k_2}$, . . . :

$$\underset{1}{\mathbf{e}} = \underset{1}{\mathbf{u}}, \quad \underset{2}{\mathbf{e}} = \underset{1}{\bar{\mathbf{u}}}, \quad \underset{3}{\mathbf{e}} = \underset{2}{\mathbf{u}}, \quad \underset{4}{\mathbf{e}} = \underset{2}{\bar{\mathbf{u}}}, \ldots,$$

следующие p векторов — в E_p, остальные — в E_q. Посмотрим, какой вид в этой системе координат имеют матрицы векторфункций $\mathbf{D}$ и $\dot{\mathbf{C}}$. Что касается матрицы $\|\mathbf{D}\|$, то она имеет диагональный вид, так как координатные векторы взяты нами по главным направлениям векторфункции $\mathbf{D}$:

$$\|\mathbf{D}\| = \left\| \begin{matrix} D_{2k_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & D_{2k_m} & & \\ & & & E_p & \\ & & & & -E_q \end{matrix} \right\|, \text{ где } D_{2k_i} = \left\| \begin{matrix} \lambda_i & & & & \\ & \bar{\lambda}_i & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_i & \\ & & & & \bar{\lambda}_i \end{matrix} \right\|,$$

E_p и E_q — единичные матрицы соответственно p-го и q-го порядка.

Принимая во внимание соотношение (22,16), теорему 3 и то, как мы выбирали базисы в главных областях E_p и E_q, нетрудно видеть, что матрица $\|\dot{\mathbf{C}}\|$ имеет следующий вид:

$$\|\dot{\mathbf{C}}\| = \pm \begin{Vmatrix} C & & \\ & E_p & \\ & & E_q \end{Vmatrix},$$

где C — матрица $(2k_1 + 2k_2 + \ldots + 2k_m)$-го порядка:

$$C = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 0 \end{Vmatrix},$$

E_p и E_q — единичные матрицы p-го и q-го порядка.

Заменим теперь комплексные координатные векторы вещественными:

$$\underset{1}{\mathbf{e}}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underset{1}{\mathbf{u}} + \underset{1}{\bar{\mathbf{u}}}),$$

$$(22,16) \qquad \underset{2}{\mathbf{e}}' = \frac{1}{\sqrt{2}i}(\underset{1}{\mathbf{u}} - \underset{1}{\bar{\mathbf{u}}}),$$

и т. д.

(действительные координатные векторы оставим теми же самыми). В этой новой системе координат имеем:

$$\mathbf{D}(\underset{1}{\mathbf{e}}') = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_1 \underset{1}{\mathbf{u}} + \bar{\lambda}_1 \underset{1}{\bar{\mathbf{u}}}) = \frac{\lambda_1 + \bar{\lambda}_1}{2}\underset{1}{\mathbf{e}}' + \frac{\lambda_1 - \bar{\lambda}_1}{2} i \underset{2}{\mathbf{e}}',$$

$$\mathbf{D}(\underset{2}{\mathbf{e}}') = \frac{1}{\sqrt{2}i}(\lambda_1 \underset{1}{\mathbf{u}} - \bar{\lambda}_1 \underset{1}{\bar{\mathbf{u}}}) = \frac{\lambda_1 - \bar{\lambda}_1}{2i}\underset{1}{\mathbf{e}}' + \frac{\lambda_1 + \bar{\lambda}_1}{2}\underset{2}{\mathbf{e}}',$$

и т. д.

Полагая $\lambda_1 = e^{i\alpha_1}$, получаем:

$$\mathbf{D}(\underset{1}{\mathbf{e}}') = \cos\alpha_1 \underset{1}{\mathbf{e}}' - \sin\alpha_1 \underset{2}{\mathbf{e}}',$$

$$\mathbf{D}(\underset{2}{\mathbf{e}}') = \sin\alpha_1 \underset{1}{\mathbf{e}}' + \cos\alpha_1 \underset{2}{\mathbf{e}}',$$

и т. д.

Отметим, что каждая пара комплексно-сопряженных векторов $\underset{i}{\mathbf{u}}$ и $\underset{i}{\bar{\mathbf{u}}}$ определяет в вещественном пространстве инвариантный двумерный пучок. Построенные таким образом двумерные плоскости $\{\underset{1}{\mathbf{e}}', \underset{2}{\mathbf{e}}'\}$, $\{\underset{3}{\mathbf{e}}', \underset{4}{\mathbf{e}}'\}, \ldots$ взаимно сопряженны относительно квадратичной формы $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$ (см. раздел 18, § 20).

Посмотрим, как будут выражаться в новой системе координат составляющие тензора $c_{\alpha\beta}$. Имеем:

$$\varphi(\underset{i}{\mathbf{e}}', \underset{i}{\mathbf{e}}') = \frac{1}{2}\varphi(\underset{i}{\mathbf{u}} + \underset{i}{\bar{\mathbf{u}}}, \underset{i}{\mathbf{u}} + \underset{i}{\bar{\mathbf{u}}}) = \varphi(\underset{i}{\mathbf{u}}, \underset{i}{\bar{\mathbf{u}}}) = \pm 1,$$

$$\varphi(\underset{i}{\mathbf{e}}', \underset{h}{\mathbf{e}}') = 0 \qquad (i \neq k).$$

Объединяя вышесказанное, можем формулировать теорему:

Теорема 9. *У вещественной линейной векторфункции 1-го рода* $\mathbf{D}$, *оставляющей инвариантной определенную квадратичную форму* $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$, *можно выделить:* 1) *главную p-мерную область, соответствующую характеристическому числу* $= 1$, 2) *главную q-мерную область, соответствующую характеристическому числу* -1, 3) $s = \frac{n-p-q}{2}$ *двумерных инвариантных пучков, соответствующих комплексным характеристическим числам. Все эти главные области и инвариантные пучки взаимно-сопряженны относительно квадратичной формы* $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$.

Выбирая координатные контравариантные векторы в этих областях и пучках, можно привести квадратичную форму к сумме n квадратов:

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \pm \sum_{i=1}^{n} x^{(i)2},$$

а матрицу векторфункции D к следующему виду:

$$\|\mathbf{D}\| = \begin{Vmatrix} A_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & A_s & & \\ & & & E_p & \\ & & & & -E_q \end{Vmatrix}, \text{ где } A_i = \begin{Vmatrix} \cos\alpha_i, & \sin\alpha_i \\ -\sin\alpha_i, & \cos\alpha_i \end{Vmatrix}.$$

$$(2s + p + q = n)$$

§ 23. Антисимметрический ковариантный тензор 2-го порядка.

1. Антисимметрическому тензору $a_{\alpha\beta}$ соответствует билинейная форма:

$$\psi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta = -\psi(\mathbf{y},\mathbf{x}),$$

$$a_{\alpha\beta} = -a_{\beta\alpha}$$

и антисимметрическая ковариантная векторфункция 2-го рода:

$$\dot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}), \; y_\alpha = a_{\alpha\beta} x^\beta; \; \dot{\mathbf{A}}_\sigma = -\dot{\mathbf{A}}.$$

Если ранг r тензора $a_{\alpha\beta}$ меньше n, то существует $n-r$ независимых нулевых направлений, определяющих нулевую область этого тензора:

$$\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = 0.$$

В § 2 мы видели, что ранг антисимметрической матрицы выражается всегда четным числом. Следовательно, в пространстве с нечетным числом измерений у антисимметрического тензора всегда существуют нулевые направления.

2. Два направления $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ называются сопряженными относительно тензора $a_{\alpha\beta}$, если

$$\psi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{y}) = 0.$$

Если $\mathbf{y}$—не нулевое направление, то векторы, сопряженные с ним, лежат в гиперплоскости, проходящей через вектор $\mathbf{y}$. Она называется гиперплоскостью, сопряженной с направлением $\mathbf{y}$. Две плоскости называются сопряженными, если каждый вектор одной сопряжен с каждым вектором другой.

Напомним, что каждое направление у антисимметрической векторфункции является асимптотическим:

$$\mathbf{x}\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = 0.$$

2. Приведение матрицы антисимметрического тензора к простейшему виду производится вполне аналогично тому, как это делается для квадратичных форм. Докажем теорему:

Теорема 1. *У антисимметрической векторфункции 2-го рода ранга $= r$ можно выделить $\frac{r}{2}$ независимых двумерных плоскостей, взаимно-сопряженных относительно этой функции и не лежащих в ее нулевой области.*

Доказательство. Выберем какое-нибудь ненулевое направление $\underset{1}{\mathbf{u}}$ и рассмотрим сопряженную гиперплоскость E_{n-1}:

$$\psi(\underset{1}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) = 0.$$

Возьмем вектор $\underset{2}{\mathbf{u}}$, не лежащий в E_{n-1}: $\psi(\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{2}{\mathbf{u}}) \neq 0$. E_{n-1} вместе с гиперплоскостью E'_{n-1}:

$$\psi(\underset{2}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) = 0,$$

сопряженной с вектором $\underset{2}{\mathbf{u}}$, определяет $(n-2)$-мерную плоскость E_{n-2}. В самом деле, уравнения

$$\psi(\underset{1}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) = 0, \quad \psi(\underset{2}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) = 0$$

независимы, так как в противном случае мы имели бы:

$$\lambda_1\psi(\underset{1}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) + \lambda_2\psi(\underset{2}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) = 0.$$

Полагая $\mathbf{x} = \underset{1}{\mathbf{u}}$ или $\underset{2}{\mathbf{u}}$, мы получим $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Плоскость E_{n-2} сопряженна плоскости $\{\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{2}{\mathbf{u}}\}$; если в ней все направления нулевые, задача закончена. Если же в E_{n-2} имеется ненулевое направление $\underset{3}{\mathbf{u}}$, рассматриваем $(n-3)$-мерную плоскость E_{n-3}, сопряженную с $\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{2}{\mathbf{u}},\underset{3}{\mathbf{u}}$:

$$\psi(\underset{1}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) = 0, \ \psi(\underset{2}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) = 0, \ \psi(\underset{3}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) = 0.$$

В E_{n-2} берем вектор $\underset{4}{\mathbf{u}}$, не лежащий в E_{n-3}:

$$\psi(\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{4}{\mathbf{u}}) = 0, \ \psi(\underset{2}{\mathbf{u}},\underset{4}{\mathbf{u}}) = 0, \ \psi(\underset{3}{\mathbf{u}},\underset{4}{\mathbf{u}}) \neq 0.$$

$(n-3)$-мерная плоскость E_{n-3}':

$$\psi(\underset{1}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) = 0, \ \psi(\underset{2}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) = 0, \ \psi(\underset{4}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) = 0$$

в пересечении с E_{n-3} дает $(n-4)$-мерную плоскость E_{n-4}:

$$\psi(\underset{1}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) = 0, \ \psi(\underset{2}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) = 0, \ \psi(\underset{3}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) = 0, \ \psi(\underset{4}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) = 0.$$

В самом деле, эти уравнения независимы; если бы существовало соотношение

$$\lambda_1\psi(\underset{1}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) + \lambda_2\psi(\underset{2}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) + \lambda_3\psi(\underset{3}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) + \lambda_4\psi(\underset{4}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) = 0,$$

то, полагая последовательно $\mathbf{x} = \underset{1}{\mathbf{u}},\underset{2}{\mathbf{u}},\underset{3}{\mathbf{u}},\underset{4}{\mathbf{u}}$, мы получили бы

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

Итак, мы выделили две взаимно-сопряженных двумерных плоскости $\{\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{2}{\mathbf{u}}\}$ и $\{\underset{3}{\mathbf{u}},\underset{4}{\mathbf{u}}\}$ и сопряженную с ними $(n-4)$-мерную плоскость E_{n-4}. Если эта последняя является нулевой областью тензора, задача закончена. Если же нет, то выбираем в E_{n-4} ненулевой вектор $\underset{5}{\mathbf{u}}$ и продолжаем процесс дальше, как мы это делали для E_{n-2}. В результате мы получим m взаимно-сопряженных двумерных пучков: $\{\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}\}$, $\{\underset{3}{\mathbf{u}}, \underset{4}{\mathbf{u}}\}$, ... $\{\underset{2m-1}{\mathbf{u}}, \underset{2m}{\mathbf{u}}\}$, причем плоскость E_{n-2m}, сопряженная с ними:

$$\psi(\underset{1}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) = 0, \ \psi(\underset{2}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) = 0, \ \ldots \ \psi(\underset{2m}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) = 0,$$

уже является нулевой областью тензора. Все эти пучки $\{\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}\}$, $\{\underset{3}{\mathbf{u}}, \underset{4}{\mathbf{u}}\}, \ldots \{\underset{2m-1}{\mathbf{u}}, \underset{2m}{\mathbf{u}}\}$ независимы.

Нетрудно видеть, что $2m$ равно рангу тензора. И действительно, нулевые направления все лежат в E_{n-2m}; следовательно, $n-2m=n-r$. Теорема, таким образом, доказана.

За координатные векторы примем $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{r}{\mathbf{u}}$, на которых построены взаимно-сопряженные пучки $\{\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}\}$, $\{\underset{3}{\mathbf{u}}, \underset{4}{\mathbf{u}}\}, \ldots \{\underset{r-1}{\mathbf{u}}, \underset{r}{\mathbf{u}}\}$, и любые $(n-r)$ независимых векторов, лежащих в нулевой области. Векторы $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}} \ldots \underset{r}{\mathbf{u}}$ нормируем так, чтобы

$$(23,1) \qquad \psi(\underset{2i-1}{\mathbf{u}}, \underset{2i}{\mathbf{u}}) = 1 \qquad \left(i = 1, 2, \ldots \frac{r}{2}\right).$$

В этой системе координат матрица антисимметрического тензора имеет следующий вид:

$$\left\|\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & \\ & & & -1 & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{array}\right\|$$

который и будем называть канонический.

Мы приходим, следовательно, к положению:

Теорема 2. *Антисимметрическая билинейная форма r-го ранга может быть приведена линейным преобразованием координат к каноническому виду*:

$$(23,3) \qquad \psi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (x^{(1)}y^{(2)} - x^{(2)}y^{(1)}) + (x^{(3)}y^{(4)} - x^{(4)}y^{(3)}) + \ldots + (x^{(r-1)}y^{(r)} - x^{(r)}y^{(r-1)}).$$

Пример. Рассмотрим антисимметрическую билинейную форму в 5-мерном пространстве:

$$(23,4) \qquad \psi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x^{(1)}y^{(2)} - x^{(2)}y^{(1)} + 2(x^{(1)}y^{(5)} - x^{(5)}y^{(1)}) - 3(x^{(2)}y^{(3)} - x^{(3)}y^{(2)}) + x^{(3)}y^{(4)} - x^{(4)}y^{(3)}.$$

За вектор $\underset{1}{\mathbf{u}}$ принимаем (1, 0, 0, 0, 0); сопряженная ему гиперплоскость выразится уравнением

$$\psi(\underset{1}{\mathbf{u}},\mathbf{y}) = x^{(2)} + 2x^{(5)} = 0.$$

Берем вектор $\underset{2}{\mathbf{u}}$ (0, 1, 0, 0, 0), не лежащий в этой гиперплоскости:

$$(23,5) \qquad \psi(\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}) = 1$$

и рассматриваем сопряженную ему гиперплоскость

$$\psi(\underset{2}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) = -x^{(1)} - 3x^{(3)} = 0.$$

В гиперплоскости E_3:

$$x^{(2)} + 2x^{(5)} = 0, \quad x^{(1)} + 3x^{(3)} = 0$$

выбираем вектор $\underset{3}{\mathbf{u}}$ (0, 0, 0, 1, 0) не нулевого направления и вектор $\underset{4}{\mathbf{u}}$ (— 3, 0, 1 0, 0), не лежащий в гиперплоскости

$$\psi(\underset{3}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) = x^{(3)} = 0.$$

Имеем:

$$(23,6) \qquad \psi(\underset{3}{\mathbf{u}}, \underset{4}{\mathbf{u}}) = -1.$$

Строим теперь прямую, сопряженную направлениям $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \underset{3}{\mathbf{u}}, \underset{4}{\mathbf{u}}$. Она определяется уравнениями:

$$\psi(\underset{1}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) = x^{(2)} + 2x^{(5)} = 0,$$
$$\psi(\underset{2}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) = -(x^{(1)} + 3x^{(3)}) = 0,$$
$$\psi(\underset{3}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) = x^{(3)} = 0,$$
$$\psi(\underset{4}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) = -3x^{(2)} - 6x^{(5)} + 3x^{(2)} + x^{(4)} = 0.$$

На ней лежит вектор $\underset{5}{\mathbf{u}}$ (0, — 2, 0, 6, 1), определяющий нулевое направление. Соотношения (23,5) и (23,6) показывают, что достаточно у вектора $\underset{4}{\mathbf{u}}$ изменить знак, чтобы получить 5 векторов:

(1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (3, 0, — 1, 0, 0), (0, —2, 0, 6, 1),

определяющих координатную систему, в которой билинейная форма (23,4) примет канонический вид (23,3).

3. Рассмотрим n векторов $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{n}{\mathbf{u}}$, определяющих ту координатную систему, в которой матрица антисимметрического тензора принимает канонический вид (23,2). Построим взаимую систему $\overset{1}{\mathbf{u}}, \overset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \overset{n}{\mathbf{u}}$. Выразим составляющую тензора $a_{\alpha\beta}$ через векторы $\overset{i}{\mathbf{u}}$.

Имеем:

$$a_{\alpha\beta} = \psi(\underset{\alpha}{\mathbf{e}}, \underset{\beta}{\mathbf{e}}),$$

$$\underset{\alpha}{\mathbf{e}} = \underset{\alpha}{\mathbf{e}}\overset{\sigma}{\mathbf{u}} \cdot \underset{\sigma}{\mathbf{u}} = \overset{\sigma}{u}_{\alpha}\underset{\sigma}{\mathbf{u}}.$$

Таким образом,

$$a_{\alpha\beta} = \overset{\sigma}{u}_\alpha \overset{\tau}{u}_\beta \psi(\underset{\sigma}{\mathbf{u}},\underset{\tau}{\mathbf{u}}).$$

Учитывая соотношения (23,1), получаем

$$(23,7)\qquad a_{\alpha\beta} = (\overset{1}{u}_\alpha \overset{2}{u}_\beta - \overset{1}{u}_\beta \overset{2}{u}_\alpha) + (\overset{3}{u}_\alpha \overset{4}{u}_\beta - \overset{3}{u}_\beta \overset{4}{u}_\alpha) + \ldots + (\overset{r-1}{u}_\alpha \overset{r}{u}_\beta - \overset{r-1}{u}_\beta \overset{r}{u}_\alpha).$$

Таким образом, мы приходим к следующей важной теореме:

Теорема 3. *Антисимметрический тензор 2-го порядка ранга r может быть представлен в виде суммы $\frac{r}{2}$ независимых бивекторов.*

4. Представим формулу (23,7) в следующем виде:

$$a_{\alpha\beta} = 2(\overset{1}{u}_{[\alpha} \overset{2}{u}_{\beta]} + \overset{3}{u}_{[\alpha} \overset{4}{u}_{\beta]} + \ldots + \overset{r-1}{u}_{[\alpha} \overset{r}{u}_{\beta]}).$$

Перемножая $\frac{r}{2}$ составляющих: $a_{\alpha_1\alpha_2}, a_{\alpha_3\alpha_4}, \ldots a_{\alpha_{r-1}\alpha_r}$ и альтернируя по индексам $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$, получаем

$$(23,8)\qquad a_{[\alpha_1\alpha_2} a_{\alpha_3\alpha_4} \ldots a_{\alpha_{r-1}\alpha_r]} = 2^{\frac{r}{2}} \left(\frac{r}{2}\right)! \; \overset{1}{u}_{[\alpha_1} \overset{2}{u}_{\alpha_2} \ldots \overset{r}{u}_{\alpha_r]} = r!!\, \overset{1}{u}_{[\alpha_1} \overset{2}{u}_{\alpha_2} \ldots \overset{r}{u}_{\alpha_r]},$$

где $r!!$ равно произведению четных чисел от 2 до r:

$$r!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots r.$$

Выражение

$$P_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r} = (r-1)!!\, a_{[\alpha_1\alpha_2} a_{\alpha_3\alpha_4} \ldots a_{\alpha_{r-1}\alpha_r]}$$

называется аггрегатом Pfaff'a порядка r. Здесь $(r-1)!!$ обозначает произведение нечетных чисел от 1 до $r-1$:

$$(r-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (r-1).$$

Пользуясь соотношением (23,8) выводим:

$$(23,9)\qquad P_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r} = r!\, \overset{1}{u}_{[\alpha_1} \overset{2}{u}_{\alpha_2} \ldots \overset{r}{u}_{\alpha_r]}.$$

Таким образом, имеем теорему:

Теорема 4. *Аггрегаты Pfaff'a порядка r, образованные из составляющих антисимметрического тензора r-го ранга, являются составляющими ковариантного r-вектора, построенного на тех ковариантных векторах $\overset{1}{\mathbf{u}}, \overset{2}{\mathbf{u}} \ldots \overset{r}{\mathbf{u}}$, которые фигурируют в формуле (23,7), дающей разложение антисимметрического тензора на сумму $\frac{r}{2}$ бивекторов.*

Из формулы (23,7) и (23,8) вытекает также следующая теорема:

Теорема 5. *Ранг антисимметрического тензора $a_{\alpha\beta}$ тогда и только тогда равен r, если не все аггрегаты Pfaff'a r-го порядка равны нулю, между тем как все аггрегаты $(r+2)$-го порядка равны нулю.*

5. Познакомимся более подробно с аггрегатами Pfaff'a:

$$P_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r} = (r-1)!!\, a_{[\alpha_1\alpha_2} a_{\alpha_3\alpha_4} \ldots a_{\alpha_{r-1}\alpha_r]}.$$

В антисимметрическом тензоре

$$a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r} = r!\, a_{[\alpha_1\alpha_2} a_{\alpha_3\alpha_4} \ldots a_{\alpha_{r-1}\alpha_r]}$$

входит $r!$ слагаемых вида $\varepsilon a_{i_1i_2} a_{i_3i_4} \ldots a_{i_{r-1}i_r}$, где ε равно $+1$ или -1, смотря по тому, четной или нечетной является подстановка $\begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_r \\ i_1 i_2 \ldots i_r \end{pmatrix}$. Среди этих слагаемых имеется ряд равных между собой. Заметим прежде всего, что два члена в сумме $\sum \varepsilon a_{i_1i_2} a_{i_3i_4} \ldots a_{i_{r-1}i_r}$, отличающиеся порядком сомножителей, имеют одинаковый знак; в самом деле, при перестановке двух сомножителей происходит транспозиция сразу двух индексов, не изменяющая знака члена. Следовательно, имея в сумме $\sum \varepsilon a_{i_1i_2} a_{i_3i_4} \ldots a_{i_{r-1}i_r}$ член вида $\varepsilon a_{k_1k_2} a_{k_3k_4} \ldots a_{k_{r-1}k_r}$, мы получим $\left(\frac{r}{2}\right)!$ равных ему членов, входящих с тем же самым знаком в эту сумму, если будем как угодно переставлять множители произведения. Кроме того, из каждого такого члена мы получим $2^{\frac{r}{2}}$ равных ему членов с тем же знаком, если будем переставлять индексы у каждого множителя $a_{\alpha_i\alpha_k}$. Таким образом, мы получим группу, состоящую из $2^{\frac{r}{2}}\left(\frac{r}{2}\right)! = r!!$ равных членов и с одинаковыми знаками. Число таких групп в сумме $a_{\alpha_1\ldots\alpha_r} = \sum \varepsilon a_{i_1i_2} \ldots a_{i_{r-1}i_r}$ равно

$$\frac{r!}{r!!} = (r-1)!!.$$

Так как

$$P_{a_1 a_2 \ldots a_r} = \frac{(r-1)!!}{r!} a_{a_1 a_2 \ldots a_r} = \frac{1}{r!!} a_{a_1 a_2 \ldots a_r},$$

то *в аггрегате Pfaff'а мы получим после приведения подобных членов $(r-1)!!$ слагаемых, имеющих коэффициенты, равные плюс или минус единице.*

Пример:

$$P_{a_1 a_2} = a_{[a_1 a_2]} = a_{a_1 a_2}.$$

$$P_{a_1 a_2 a_3 a_4} = 3a_{[a_1 a_2} a_{a_3 a_4]} = a_{a_1 a_2} a_{a_3 a_4} + a_{a_1 a_3} a_{a_4 a_2} + a_{a_1 a_4} a_{a_2 a_3}.$$

Задача 1. Выписать аггрегат Pfaff'a 6-го порядка: P_{123456}.
Ответ:

$$P_{123456} = a_{12}a_{34}a_{56} - a_{12}a_{35}a_{46} + a_{12}a_{36}a_{45} - a_{13}a_{16}a_{45} + a_{13}a_{25}a_{46} - a_{13}a_{24}a_{56} + \\ + a_{14}a_{23}a_{56} - a_{14}a_{25}a_{36} + a_{14}a_{26}a_{35} - a_{15}a_{26}a_{34} + a_{15}a_{24}a_{36} - a_{15}a_{23}a_{46} + \\ + a_{16}a_{23}a_{45} - a_{16}a_{24}a_{35} + a_{16}a_{25}a_{34}.$$

6. Теорема 6. *Антисимметрический определитель четного порядка n равен квадрату аггрегата Pfaff'a n-го порядка, образованного из его элементов:*

$$|a_{ik}| = (P_{123\ldots n})^2,$$

где

$$P_{123\ldots n} = (n-1)!!\, a_{[12}a_{34}\ldots a_{n-1,n]}.$$

Доказательство. Если ранг тензора $a_{\alpha\beta}$ меньше n, теорема очевидна: в этом случае равны нулю как определитель $|a_{ik}|$, так и аггрегат $P_{123\ldots n}$. Рассмотрим тот случай, когда ранг антисимметрического тензора равен n.

Возьмем n независимых ковариантных векторов $\overset{1}{\mathbf{u}}, \overset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \overset{n}{\mathbf{u}}$, которые мы построили в разделе 3 настоящего параграфа для приведения тензора к сумме бивекторов (23,7). Если эти векторы мы примем за координатные, то в этой новой системе координат матрица антисимметрического тензора примет канонический вид:

$$\| a_{ik}' \| = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & -1 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Следовательно, $|a_{ik}'| = 1$. На основании формулы (23,9) аггрегат Pfaff'a $P_{12\ldots n}$ имеет следующий вид:

$$P_{12\ldots n} = \begin{vmatrix} \overset{1}{u}_1 & \ldots & \overset{1}{u}_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \overset{n}{u}_1 & \ldots & \overset{n}{u}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \binom{1'}{1} & \ldots & \binom{1'}{n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \binom{n'}{1} & \ldots & \binom{n'}{n} \end{vmatrix} = |X|,$$

так как $\overset{i}{u}_k = \overset{i}{\mathbf{e}}{}'\underset{k}{\mathbf{e}} = \binom{i'}{k}$. Определители $|a_{ik}|$ и $|a_{ik}'|$ связаны соотношением [см. формулу (19,2)]:

$$|a_{ik}'| = |a_{ik}|\,|X|^{-2}.$$

Таким образом:

$$|a_{ik}| = |a_{ik}'|\,|X|^2 = (P_{12\ldots n})^2.$$

Пример.

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{vmatrix} = (a_{12}\,a_{34} + a_{13}\,a_{42} + a_{14}\,a_{23})^2.$$

7. В заключение рассмотрим вопрос о совместном приведении к каноническому виду квадратичной и антисимметрической билинейной формы:

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \mathbf{x}\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{x}),$$
$$\psi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -\psi(\mathbf{y},\mathbf{x}) = \mathbf{x}\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{y}).$$

На квадратичную форму наложим ограничение, чтобы она была неособенной.

Будем искать направления, которые дают одинаковые сопряженные гиперплоскости и относительно векторфункции $\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{x})$ и относительно $\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$:

$$\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) - \lambda\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{x}) = 0.$$

Так как $\dot{\mathbf{C}}$, по предположению, неособенная векторфункция, то вопрос приводится к нахождению главных направлений векторфункции 1-го рода $\mathbf{K} = \mathbf{C}^{-1}\dot{\mathbf{A}}$:

$$(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{E})(\mathbf{x}) = 0.$$

Докажем следующие теоремы:

Теорема 7. *Главные направления векторфункции $\mathbf{K} = \mathbf{C}^{-1}\dot{\mathbf{A}}$, соответствующие ненулевым характеристическим числам, принадлежат к асимптотическому конусу векторфункции $\dot{\mathbf{C}}$.*

Доказательство. Из соотношения

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x},$$

получаем

$$\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \lambda\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{x}),$$

откуда, умножая на $\mathbf{x}$, имеем

$$\lambda\mathbf{x}\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = 0.$$

Теорема 8. *Каждому ненулевому характеристическому числу λ_1 векторфункции $\mathbf{K}$ соответствует корень $-\lambda_1$ той же кратности. Показатели степеней у элементарных делителей, соответствующих этим корням, попарно равны.*

Доказательство. Элементарные делители векторфункции $\mathbf{K}$ определяются из λ-матрицы

$$\| \mathbf{K} - \lambda\mathbf{E} \|$$

или, так как $\| \mathbf{K} - \lambda\mathbf{E} \| = \| \dot{\mathbf{C}} \|^{-1} \| \dot{\mathbf{A}} - \lambda\dot{\mathbf{C}} \|$, из матрицы

$$\| \dot{\mathbf{A}} - \lambda\dot{\mathbf{C}} \|.$$

Так как сопряженные матрицы имеют одинаковые элементарные делители и так как

$$\| \dot{\mathbf{A}} - \lambda\dot{\mathbf{C}} \|_c = \| \dot{\mathbf{A}}_c - \lambda\dot{\mathbf{C}}_c \| = - \| \dot{\mathbf{A}} + \lambda\dot{\mathbf{C}} \|,$$

то каждому элементарному делителю вида $(\lambda - \alpha)^e$ соответствует делитель $(\lambda + \alpha)^e$. Теорема, таким образом, доказана.

Теорема 9. *Если λ_1 и λ_2 — характеристические числа векторфункции $\mathbf{K}$, причем $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$, то им соответствуют главные направления, сопряженные относительно векторфункции $\dot{\mathbf{C}}$.*

Доказательство. Пусть $\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}$ — главные направления, соответствующие характеристическим числам $\lambda_1, \lambda_2, (\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0)$. Умножая соотношение:

$$\dot{\mathbf{A}}(\underset{1}{\mathbf{x}}) = \lambda_1\dot{\mathbf{C}}(\underset{1}{\mathbf{x}})$$

на $\underset{2}{\mathbf{x}}$, а

$$\dot{\mathbf{A}}(\underset{2}{\mathbf{x}}) = \lambda_2\dot{\mathbf{C}}(\underset{2}{\mathbf{x}})$$

на $\underset{1}{\mathbf{x}}$ и складывая, получаем

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\underset{2}{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{C}}(\underset{1}{\mathbf{x}}) = 0.$$

Теорема 10. *Если $\{\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \dots \underset{m}{\mathbf{u}}\}$ — инвариантный m-мерный пучок векторфункции $\mathbf{K}$, то сопряженная ему относительно квадратичной формы $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$ плоскость*

$$\varphi(\underset{1}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) = 0, \quad \varphi(\underset{2}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) = 0, \dots \varphi(\underset{m}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) = 0 \tag{23,10}$$

является также инвариантной для векторфункции $\mathbf{K}$.

Доказательство. Векторфункция $\mathbf{K}$ удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{x}\dot{\mathbf{C}}\mathbf{K}(\mathbf{y}) = -\mathbf{y}\dot{\mathbf{C}}\mathbf{K}(\mathbf{x}).$$

Если $\mathbf{y}$ лежит в пучке $\{\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \dots \underset{m}{\mathbf{u}}\}$, то и вектор $\mathbf{K}(\mathbf{y})$ принадлежит этому пучку. Если $\mathbf{x}$ лежит в плоскости (23,10), то $\mathbf{x}\dot{\mathbf{C}}\mathbf{K}(\mathbf{y}) = 0$, т. е.

$$\mathbf{y}\dot{\mathbf{C}}\mathbf{K}(\mathbf{x}) = 0.$$

Следовательно, вектор $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ лежит также в плоскости (23,10).

8. Дальнейшее исследование проведем в вещественном пространстве при предположении, что квадратичная форма $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \mathbf{x}\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{x})$ определенная.

Теорема 11. *Если $\mathbf{x}\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{x})$ — определенная форма, то ненулевые характеристические числа векторфункции $\mathbf{K}$ — чисто мнимы.*

Доказательство. Так как главные направления принадлежат к асимптотическому конусу, то они определяются комплексными векторами. Пусть главному направлению $\mathbf{x}$ соответствует характеристическое число λ. Сопряженный вектор $\bar{\mathbf{x}}$ также определяет главное направление с характеристическим числом $\bar{\lambda}$. Если бы сумма $\lambda + \bar{\lambda}$ не была равна 0, то на основании теоремы 9 инвариантные направления $\mathbf{x}$ и $\bar{\mathbf{x}}$ удовлетворяли бы соотношению

$$\mathbf{x}\dot{\mathbf{C}}(\bar{\mathbf{x}}) = 0,$$

что быть не может, так как $\mathbf{x}\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{x})$ — определенная форма.

Теорема 12. *Если $\mathbf{x}\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{x})$ — определенная форма, то векторфункция $\mathbf{K}$ — простого типа.*

Доказательство. Согласно теореме 8 § 17, достаточно показать, что каждый вектор $\mathbf{x}$, удовлетворяющий уравнению

$$(\mathbf{K}-\lambda\mathbf{E})^2(\mathbf{x})=0, \tag{23,11}$$

где λ — характеристическое число векторфункции $\mathbf{K}$, обращает в нуль вектор

$$\mathbf{y}=(\mathbf{K}-\lambda\mathbf{E})(\mathbf{x}). \tag{23,12}$$

Образуем выражение $\bar{\mathbf{y}}\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{y})$. Подставляя сюда $\mathbf{y}$ из формулы (23,12) и учитывая, что $\bar{\lambda}=-\lambda$, имеем

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{y}}\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{y})&=(\mathbf{K}+\lambda\mathbf{E})(\bar{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{K}-\lambda\mathbf{E})(\mathbf{x})=\\&=\mathbf{C}^{-1}(\dot{\mathbf{A}}+\lambda\dot{\mathbf{C}})(\bar{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{K}-\lambda\mathbf{E})(\mathbf{x})=\\&=\bar{\mathbf{x}}(-\dot{\mathbf{A}}+\lambda\dot{\mathbf{C}})\mathbf{C}^{-1}\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{K}-\lambda\mathbf{E})(\mathbf{x})=\\&=-\bar{\mathbf{x}}(\dot{\mathbf{A}}-\lambda\dot{\mathbf{C}})(\mathbf{K}-\lambda\mathbf{E})(\mathbf{x})=-\bar{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{K}-\lambda\mathbf{E})^2(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Принимая во внимание уравнение (23,11), получаем

$$\bar{\mathbf{y}}\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{y})=0,$$

т. е. $\mathbf{y}=0$.

Задача 2. Базируясь на теореме 10, дать другое доказательство последней теоремы, аналогичное доказательству теоремы 6 § 21.

Задача 3. Если $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$ — неопределенная форма, то векторфункция $\mathbf{K}$ может быть не простого типа. Показать, что если

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})=x^{(1)^2}+x^{(2)^2}-x^{(3)^2},$$

$$\|\dot{\mathbf{A}}\|=\begin{Vmatrix}0, & -r, & q,\\ r, & 0, & -p,\\ -q, & p, & 0,\end{Vmatrix},\quad p^2+q^2-r^2=0,$$

то характеристика векторфункции $\mathbf{K}$ выражается символом [3].

9. Дальнейшее исследование вполне аналогично тому, которое было дано в разделе 5 предыдущего параграфа, и потому мы на нем подробно останавливаться не будем.

Предположим, что $\mathbf{K}$ имеет нулевое характеристическое число кратности p и мнимые характеристические числа λ_1 и $-\lambda_1$ кратности k_1, λ_2 и $-\lambda_2$ кратности $k_2, \ldots \lambda_m$ и $-\lambda_m$ кратности k_m. Соответствующие главные области обозначим через E_p, E_{k_1}, $\bar{E}_{k_1}, \ldots E_{k_m}$, $\bar{E}_{k_m}$.

Выделяем в инвариантных пучках E_{k_1} и $\bar{E}_{k_1}$ векторы $\underset{1}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{k}{\mathbf{u}}$ и $\underset{1}{\bar{\mathbf{u}}}, \ldots \underset{k}{\bar{\mathbf{u}}}$ так, чтобы

$$\varphi\left(\underset{i}{\mathbf{u}},\underset{k}{\bar{\mathbf{u}}}\right)=\pm\delta^i_k;$$

(знак плюс следует брать, если квадратичная форма положительная, минус, — если она отрицательная).

Аналогично поступаем с пучками E_{k_2}, $\bar{E}_{k_2}, \ldots E_{k_m}$, $\bar{E}_{k_m}$. В E_p строим p действительных векторов, сопряженных относительно $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$.

Применяя далее исследование, аналогичное приведенному в разделе 5 § 22, мы приходим к следующей теореме:

Теорема 13. *Если $\psi(\mathbf{x},\mathbf{y})$ — антисимметрическая вещественная билинейная форма ранга r, $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$ — квадратичная определенная форма, то можно выделить $\frac{r}{2}$ двумерных плоскостей, взаимно-сопряженных как относительно формы ψ, так и формы φ. Выбирая в этих плоскостях координатные векторы, можно привести эти формы к следующему виду:*

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})=\pm\sum_{i=1}^{n}x^{(i)2}, \tag{23,13}$$

$$\psi(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sum_{i=1}^{\frac{r}{2}}a_i\left(x^{(2i-1)}y^{(2i)}-x^{(2i)}y^{(2i-1)}\right), \tag{23,14}$$

где $a_1, a_2, \ldots a_r$ — вещественные числа.

10. Мы укажем здесь на оригинальный метод совместного приведения к каноническому виду билинейной антисимметрической и квадратичной форм, принадлежащий Schouten'y. [1] Мы рассмотрим вопрос в вещественном пространстве, когда квадратичная форма определенная положительная.

Будем употреблять прежние наши обозначения:

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})=\mathbf{x}\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{x})=c_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta,$$

$$\psi(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{x}\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{y})=a_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta,$$

$$\mathbf{K}=\mathbf{C}^{-1}\dot{\mathbf{A}}.$$

[1] Schouten. Der Ricci-Kalkül. Berlin, 1924, стр. 48.

Для удобства рассуждений условимся называть векторы $\mathbf{x}$, удовлетворяющие условию:

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 1,$$

ортами. Направление прямых мы будем определять лежащими на них ортами.

Метод Schouten'а заключается в исследовании на ряду с векторфункцией $\mathbf{K}$ также и ее квадрата: $\mathbf{K}^2$. Векторфункция $\mathbf{K}^2$ обладает тем свойством, что *все ее характеристические числа (а следовательно, и главные направления) действительны и что у нее можно выделить n независимых главных направлений, взаимно-сопряженных относительно квадратичной формы* $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$.

В самом деле, рассмотрим векторфункцию 2-го рода $\dot{\mathbf{M}} = \dot{\mathbf{A}}\,\mathbf{C}^{-1}\dot{\mathbf{A}}$. Она симметрическая:

$$\dot{\mathbf{M}}_c = \dot{\mathbf{A}}_c \mathbf{C}_c^{-1} \dot{\mathbf{A}}_c = \dot{\mathbf{A}}\,\mathbf{C}^{-1}\,\dot{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{M}}.$$

Так как $\mathbf{x}\mathbf{C}(\mathbf{x})$ — определенная форма, то на основании теорем 4, 5 и 6 § 21 линейная векторфункция 1-го рода

$$\mathbf{C}^{-1}\,\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{C}^{-1}\,\dot{\mathbf{A}}\,\mathbf{C}^{-1}\,\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{K}^2$$

обладает перечисленными выше свойствами.

Возьмем одно из главных ненулевых направлений векторфункции $\mathbf{K}^2$; пусть оно определяется ортом $\underset{1}{\mathbf{x}}$, и ему соответствует характеристическое число σ_1:

$$\mathbf{K}^2(\underset{1}{\mathbf{x}}) = \sigma_1 \underset{1}{\mathbf{x}}.$$

Рассмотрим вектор $\mathbf{K}(\underset{1}{\mathbf{x}})$; орт его обозначим через $\underset{2}{\mathbf{x}}$. Имеем:

$$\mathbf{K}(\underset{1}{\mathbf{x}}) = -\alpha_1 \underset{2}{\mathbf{x}} \tag{23,15}$$

(знак минус у коэффициента α_1 берем для удобства дальнейших выводов).

Выведем следующие свойства направления $\underset{2}{\mathbf{x}}$:

1) $\underset{1}{\mathbf{x}}$ *и* $\underset{2}{\mathbf{x}}$ *взаимно-сопряженны относительно* $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$:

$$\underset{1}{\mathbf{x}}\,\dot{\mathbf{C}}(\underset{2}{\mathbf{x}}) = -\frac{1}{\alpha_1}\,\underset{1}{\mathbf{x}}\,\dot{\mathbf{C}}\mathbf{K}(\underset{1}{\mathbf{x}}) = -\frac{1}{\alpha_1}\,\underset{1}{\mathbf{x}}\,\dot{\mathbf{A}}(\underset{1}{\mathbf{x}}) = 0,$$

2) $\underset{2}{\mathbf{x}}$ *является главным направлением векторфункции* $\mathbf{K}^2$ *с тем же самым характеристическим числом* σ_1:

$$\mathbf{K}^2(\underset{2}{\mathbf{x}}) = -\frac{1}{\alpha_1}\,\mathbf{K}^2\,\mathbf{K}(\underset{1}{\mathbf{x}}) = -\frac{1}{\alpha_1}\,\mathbf{K}\,\mathbf{K}^2(\underset{1}{\mathbf{x}}) = -\frac{\sigma_1}{\alpha_1}\,\mathbf{K}(\underset{1}{\mathbf{x}}) = \sigma_1 \underset{2}{\mathbf{x}}.$$

3)

$$\mathbf{K}(\underset{2}{\mathbf{x}}) = \alpha_1 \underset{1}{\mathbf{x}}. \tag{23,16}$$

В самом деле,

$$\mathbf{K}(\underset{2}{\mathbf{x}}) = -\frac{1}{\alpha_1}\,\mathbf{K}^2(\underset{1}{\mathbf{x}}) = -\frac{\sigma_1}{\alpha_1}\,\underset{1}{\mathbf{x}}. \tag{23,17}$$

Найдем теперь соотношение между σ_1 и α_1. С этой целью вычислим значение билинейной формы $\varphi(\underset{1}{\mathbf{x}},\underset{2}{\mathbf{x}})$ двумя способами:

$$\varphi(\underset{1}{\mathbf{x}},\underset{2}{\mathbf{x}}) = \underset{1}{\mathbf{x}}\,\dot{\mathbf{A}}(\underset{2}{\mathbf{x}}) = \underset{1}{\mathbf{x}}\,\dot{\mathbf{C}}\,\mathbf{K}(\underset{2}{\mathbf{x}}) = -\frac{\sigma_1}{\alpha_1}\,\underset{1}{\mathbf{x}}\,\dot{\mathbf{C}}(\underset{1}{\mathbf{x}}) = -\frac{\sigma_1}{\alpha_1};$$

$$\varphi(\underset{1}{\mathbf{x}},\underset{2}{\mathbf{x}}) = -\underset{2}{\mathbf{x}}\,\dot{\mathbf{A}}(\underset{1}{\mathbf{x}}) = -\underset{2}{\mathbf{x}}\,\dot{\mathbf{C}}\,\mathbf{K}(\underset{1}{\mathbf{x}}) = \alpha_1\,\underset{2}{\mathbf{x}}\,\dot{\mathbf{C}}(\underset{2}{\mathbf{x}}) = \alpha_1.$$

Таким образом,

$$\alpha_1^2 = -\sigma_1,$$

и из соотношения (23,17) вытекает (23,16).

Формулы (23,15) и (23,16) показывают, что пучок $\{\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}\}$ — инвариантный относительно векторфункции $\mathbf{K}$.

Если у векторфункции $\mathbf{K}^2$ есть еще ненулевые главные направления, выбираем одно из них так, чтобы оно было сопряженно пучку $\{\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}\}$ относительно $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$. Пусть оно задается ортом $\underset{3}{\mathbf{x}}$, и ему соответствует характеристическое число σ_2:

$$\varphi(\underset{1}{\mathbf{x}},\underset{3}{\mathbf{x}}) = 0, \quad \varphi(\underset{2}{\mathbf{x}},\underset{3}{\mathbf{x}}) = 0,$$

$$\mathbf{K}^2(\underset{3}{\mathbf{x}}) = \sigma_2 \underset{3}{\mathbf{x}}.$$

Рассматриваем орт $\underset{4}{\mathbf{x}}$, определяемый вектором $\mathbf{K}(\underset{3}{\mathbf{x}})$:

$$\mathbf{K}(\underset{3}{\mathbf{x}}) = -\alpha_2 \underset{4}{\mathbf{x}}.$$

Относительно $\underset{4}{\mathbf{x}}$ доказываем так же, как мы делали это выше относительно $\underset{2}{\mathbf{x}}$, что:

$$\varphi(\underset{3}{\mathbf{x}},\underset{4}{\mathbf{x}}) = 0,$$

$$\mathbf{K}^2(\underset{4}{\mathbf{x}}) = \sigma_2 \underset{4}{\mathbf{x}},$$
$$\mathbf{K}(\underset{4}{\mathbf{x}}) = \alpha_2 \underset{3}{\mathbf{x}}.$$

Покажем, кроме того, что вектор $\underset{4}{\mathbf{x}}$ сопряжен плоскости $\{\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}\}$. Имеем:

$$\underset{1}{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{C}}(\underset{4}{\mathbf{x}}) = -\frac{1}{\alpha_2}\underset{1}{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{C}}\mathbf{K}(\underset{3}{\mathbf{x}}) = \frac{1}{\alpha_2}\underset{3}{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{C}}\mathbf{K}(\underset{1}{\mathbf{x}}) = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\underset{3}{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{C}}(\underset{2}{\mathbf{x}}) = 0,$$
$$\underset{2}{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{C}}(\underset{4}{\mathbf{x}}) = -\frac{1}{\alpha_2}\underset{2}{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{C}}\mathbf{K}(\underset{3}{\mathbf{x}}) = \frac{1}{\alpha_2}\underset{3}{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{C}}\mathbf{K}(\underset{2}{\mathbf{x}}) = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\underset{3}{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{C}}(\underset{1}{\mathbf{x}}) = 0.$$

Таким образом, векторы $\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \underset{3}{\mathbf{x}}, \underset{4}{\mathbf{x}}$ взаимно-сопряженны.

Продолжаем этот процесс дальше, пока мы не исчерпаем ненулевых характеристических чисел векторфункции $\mathbf{K}^2$. Нулевая область векторфункции $\mathbf{K}^2$ является нулевой областью и функции $\mathbf{K}$ (так как из равенства нулю характеристического числа σ_i вытекает равенство нулю соответствующего коэффициента α_i). В результате мы получим r (где r — ранг векторфункций $\mathbf{K}^2$ и $\mathbf{K}$) взаимно-сопряженных ортов $\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \ldots \underset{r}{\mathbf{x}}$, удовлетворяющих соотношениям:

$$(23,18) \qquad \mathbf{K}(\underset{2s-1}{\mathbf{x}}) = -\alpha_s \underset{2s}{\mathbf{x}}, \ \mathbf{K}(\underset{2s}{\mathbf{x}}) = \alpha_s \underset{2s-1}{\mathbf{x}} \qquad \left(s = 1,\ 2, \ldots \frac{r}{2}\right).$$

Эти орты определяют $\frac{r}{2}$ взаимно-сопряженных двумерных плоскостей, инвариантных относительно векторфункции $\mathbf{K}$.

Примем орты $\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \ldots \underset{r}{\mathbf{x}}$ за координатные векторы. Остальные $(n-r)$ координатных векторов возьмем в нулевой области векторфункции $\mathbf{K}$ так, чтобы они были взаимно-сопряженны относительно формы $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$ и являлись ортами. В этой системе координат формы φ и ψ имеют вид (23,13), (23,14).

Мы приходим, таким образом, снова к теореме 13.

Задача 4. Пользуясь соотношениями (23,18), показать, что у векторфункции $\mathbf{K}$ характеристические числа равны $\pm i\alpha_s$ $\left(s = 1, 2, \ldots \frac{r}{2}\right)$, а главные направления определяются векторами

$$\underset{2s-1}{\mathbf{x}} \pm i \underset{2s}{\mathbf{x}}, \qquad \left(s = 1,\ 2, \ldots \frac{r}{2}\right).$$

Задача 5. Рассмотрим линейные векторфункции 1-го рода $\mathbf{D}$, оставляющие инвариантной определенную квадратичную форму $\mathbf{x}\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{x})$ и определители которых $|\mathbf{D}|$ равны $+1$. Как нетрудно видеть, эти векторфункции определяют конечную непрерывную группу в смысле S. Lie. Пусть векторфункция $\mathbf{K}$ определяет оператор бесконечно-малого преобразования. Показать, что

$$\dot{\mathbf{K}}_c \dot{\mathbf{C}} + \dot{\mathbf{C}}\mathbf{K} = 0.$$

Пользуясь этим соотношением, вывести из результатов разделов 7—9 настоящего параграфа теоремы § 22.

§ 24. Линейная векторфункция 2-го рода простого типа.

1. Теперь мы перейдем к изучению линейных векторфункций 2-го рода, не обладающих свойством симметрии или антисимметрии.

Линейная векторфункция 2-го рода

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}), \qquad u_\alpha = a_{\alpha\beta} x^\beta,$$

как мы уже говорили в § 19, устанавливает коррелятивное преобразование точек $\mathbf{x}$ аффинного пространства в гиперплоскости $\dot{\mathbf{u}}$. Остановимся теперь более подробно на геометрической картине этого преобразования.

Вместе с векторфункцией $\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ будем параллельно изучать сопряженную с ней векторфункцию

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{A}}_c(\mathbf{x}), \qquad v_\alpha = a_{\beta\alpha} x^\beta,$$

Гиперплоскость $\dot{\mathbf{v}}$ не совпадает вообще с плоскостью $\dot{\mathbf{u}}$.

Теорема 1. *Гиперплоскости* $\dot{\mathbf{u}}$ *и* $\dot{\mathbf{v}}$:

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}), \qquad \dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{A}}_c(\mathbf{x})$$

пересекают прямую вектора $\mathbf{x}$ *в одной и той же точке.*

Доказательство. Обозначим точки пересечения гиперплоскостей $\dot{\mathbf{u}}$ и $\dot{\mathbf{v}}$ с прямой вектора $\mathbf{x}$ через P и Q. Отношение отрезка $O\mathbf{x}$ к OP равно $\mathbf{x}\dot{\mathbf{u}}$, отношение $O\mathbf{x}$ к OQ выражается произведением $\mathbf{x}\dot{\mathbf{v}}$. Так как

$$\mathbf{x}\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{x}\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\dot{\mathbf{A}}_c(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\dot{\mathbf{v}},$$

то теорема доказана.

Найдем геометрическое место точек, обладающих тем свойством, что соответствующие им гиперплоскости проходят через эти точки. Если точка $\mathbf{x}$ лежит в гиперплоскости $\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$, то

$$(24,1) \qquad \mathbf{x}\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = 1.$$

Таким образом, искомое геометрическое место представляет собою гиперповерхность 2-го порядка. Условимся называть ее *гиперповерхностью совпадения* S.

Нетрудно видеть, что сопряженная векторфункция $\dot{\mathbf{A}}_c(\mathbf{x})$ имеет ту же самую гиперповерхность совпадения.

Гиперплоскости $\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ и $\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{A}}_c(\mathbf{x})$, если точка $\mathbf{x}$ лежит на гиперповерхности совпадения S, не касаются вообще этой гиперповерхности; гиперплоскость, касательная к S в точке $\mathbf{x}$, определяется ковариантным вектором:

$$\dot{\mathbf{w}} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) + \dot{\mathbf{A}}_c(\mathbf{x})) = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{v}}). \tag{24,2}$$

В самом деле, уравнение гиперповерхности S может быть представлено в виде

$$\frac{1}{2}\mathbf{x}(\dot{\mathbf{A}} + \dot{\mathbf{A}}_c)(\mathbf{x}) = 1;$$

функция $\frac{1}{2}(\dot{\mathbf{A}} + \dot{\mathbf{A}}_c)$, входящая в это уравнение, симметрическая. На основании § 20, гиперплоскость, касательная в точке $\mathbf{x}$ гиперповерхности S, выразится вектором $\dot{\mathbf{w}}$, определяемым формулой (24,2).

Векторы, удовлетворяющие уравнению

$$\mathbf{x}\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = 0, \tag{24,3}$$

мы условились в § 19 называть асимптотическими. Как показывает (24,3), асимптотические векторы принадлежат к асимптотическому конусу гиперповерхности совпадения S.

Рассмотрим тот случай, когда векторфункция $\dot{\mathbf{A}}$ — неособенная. Гиперплоскости

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}), \tag{24,4}$$

когда точка $\mathbf{x}$ движется по гиперповерхности совпадения S, огибают некоторую гиперповерхность Σ. Найдем ее уравнение. Исключая $\mathbf{x}$ из (24,1) и (24,4), находим уравнение в тангенциальных координатах:

$$\dot{\mathbf{u}}\mathbf{A}^{-1}(\dot{\mathbf{u}}) = 1. \tag{24,5}$$

Ту же самую гиперповерхность огибают и гиперплоскости

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{A}}_c(\mathbf{x}), \tag{24,6}$$

когда точка $\mathbf{x}$ движется по S. В самом деле, уравнение (24,1) может быть представлено в виде

$$\mathbf{x}\dot{\mathbf{A}}_c(\mathbf{x}) = 1. \tag{24,7}$$

Исключая $\mathbf{x}$ из (24,6) и (24,7), получаем снова уравнение гиперповерхности Σ:

$$\mathbf{A}_c^{-1}(\dot{\mathbf{v}})\dot{\mathbf{A}}_c\mathbf{A}_c^{-1}(\dot{\mathbf{v}}) = \mathbf{A}_c^{-1}(\dot{\mathbf{v}})\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{v}}\mathbf{A}^{-1}(\dot{\mathbf{v}}) = 1.$$

Гиперповерхность 2-го класса Σ, определяемая уравнением (24,5), является огибающей тех гиперплоскостей, на которых лежат соответствующие им точки. Ее будем называть *гиперповерхностью совпадения* Σ.

В общем случае S и Σ являются различными гиперповерхностями. Они сливаются для симметрической векторфункции. Для антисимметрической они не существуют.

Задача 1. Обобщить свойство полюсов и полярных гиперплоскостей гиперповерхностей 2-го порядка: пусть $\mathbf{a}$ — вектор ненулевого направления векторфункции $\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$; берем в гиперплоскости $\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{a})$ точку $\mathbf{b}$. Показать, что гиперплоскость $\dot{\mathbf{A}}_c(\mathbf{b})$ проходит через точку $\mathbf{a}$.

Задача 2. Пусть

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}), \qquad \dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{A}}_c(\mathbf{x});$$

если $\dot{\mathbf{w}}$ — гиперплоскость, полярная точке $\mathbf{x}$ относительно гиперповерхности совпадения S, то гиперплоскости $\dot{\mathbf{u}}$, $\dot{\mathbf{v}}$ и $\dot{\mathbf{w}}$ пересекают прямую вектора $\mathbf{x}$ в одной точке, причем

$$\dot{\mathbf{w}} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{v}}).$$

Задача 3. Если $\dot{\mathbf{A}}$ — неособенная векторфункция 2-го рода, то каждой гиперплоскости $\dot{\mathbf{u}}$, не проходящей через начало, соответствуют вообще две точки:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}(\dot{\mathbf{u}}), \qquad \mathbf{y} = \mathbf{A}_c^{-1}(\dot{\mathbf{u}}). \tag{24,8}$$

Показать, что прямая, проходящая через точки $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, параллельна гиперплоскости $\dot{\mathbf{u}}$.

Задача 4. Если гиперплоскость $\dot{\mathbf{u}}$ касается гиперповерхности совпадения Σ в точке $\mathbf{z}$, то точки $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, определяемые уравнениями (24,8), лежат на гиперповерхности совпадения S, причем

$$\mathbf{z} = \frac{1}{2}(\mathbf{x} + \mathbf{y}).$$

2. Мы уже указывали в § 19, что изучение структуры вектор-

функции 2-го рода производится при помощи исследования главных направлений, определяемых уравнением:

$$\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \lambda \dot{\mathbf{A}}_c(\mathbf{x}).$$

Для определения их поступаем так же, как мы делали при нахождении инвариантных направлений линейной векторфункции 1-го рода: характеристические числа вычисляются из уравнения:

$$|\dot{\mathbf{A}} - \lambda \dot{\mathbf{A}}_c| = 0, \tag{24,9}$$

затем ищутся главные направления из системы линейных уравнений:

$$(\dot{\mathbf{A}} - \lambda \dot{\mathbf{A}}_c)(\mathbf{x}) = 0.$$

Более подробно характеристическое уравнение (24,9) запишется так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda a_{11}, & a_{12} - \lambda a_{21}, & \ldots & a_{1n} - \lambda a_{n1} \\ a_{21} - \lambda a_{12}, & a_{22} - \lambda a_{22}, & \ldots & a_{2n} - \lambda a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} - \lambda a_{1n}, & a_{n2} - \lambda a_{2n}, & \ldots & a_{nn} - \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Отметим следующее свойство корней характеристического уравнения:

Теорема 2. *Каждому характеристическому числу λ, не равному ± 1, соответствует характеристическое число $\frac{1}{\lambda}$ той же кратности.*

Доказательство. Полином $|\dot{\mathbf{A}} - \lambda \dot{\mathbf{A}}_c|$ можно представить в следующем виде:

$$|\dot{\mathbf{A}} - \lambda \dot{\mathbf{A}}_c| = |(\dot{\mathbf{A}} - \lambda \dot{\mathbf{A}}_c)_c| = |\dot{\mathbf{A}}_c - \lambda \dot{\mathbf{A}}| = (-\lambda)^n |\dot{\mathbf{A}} - \frac{1}{\lambda} \dot{\mathbf{A}}_c|,$$

что и доказывает теорему.

Можно установить более общее положение:

Показатели степеней элементарных делителей характеристической λ-матрицы

$$\|\dot{\mathbf{A}} - \lambda \dot{\mathbf{A}}_c\|,$$

относящихся к обратным корням λ и $\frac{1}{\lambda}$ $(\lambda \neq \pm 1)$, попарно равны. Доказательство этого предложения предоставляем в качестве упражнения читателю.

Укажем на некоторые основные свойства главных направлений.

Теорема 3. *Главные направления, соответствующие характеристическому числу, отличному от 1, — асимптотические.*

Доказательство. Из уравнения

$$\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \lambda \dot{\mathbf{A}}_c(\mathbf{x}),$$

умножая скалярно на $\mathbf{x}$, получаем:

$$\mathbf{x}\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x} \dot{\mathbf{A}}_c(\mathbf{x}),$$

откуда для $\lambda \neq 1$

$$\mathbf{x}\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = 0.$$

Теорема 4. *Если λ_1, λ_2 — характеристические числа, обладающие тем свойством, что $\lambda_1\lambda_2 \neq 1$, то соответствующие им главные направления взаимно-сопряженные.*

Доказательство. Из равенств

$$\dot{\mathbf{A}}(\underset{1}{\mathbf{x}}) = \lambda_1 \dot{\mathbf{A}}_c(\underset{1}{\mathbf{x}}), \qquad \dot{\mathbf{A}}(\underset{2}{\mathbf{x}}) = \lambda_2 \dot{\mathbf{A}}_c(\underset{2}{\mathbf{x}}),$$

умножая первое на $\underset{2}{\mathbf{x}}$, второе на $\underset{1}{\mathbf{x}}$, получаем:

$$\underset{2}{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{A}}(\underset{1}{\mathbf{x}}) = \lambda_1 \underset{1}{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{A}}(\underset{2}{\mathbf{x}}), \qquad \underset{1}{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{A}}(\underset{2}{\mathbf{x}}) = \lambda_2 \underset{2}{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{A}}(\underset{1}{\mathbf{x}}),$$

откуда

$$\underset{1}{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{A}}(\underset{2}{\mathbf{x}}) = \lambda_1\lambda_2 \underset{1}{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{A}}(\underset{2}{\mathbf{x}}), \qquad \underset{2}{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{A}}(\underset{1}{\mathbf{x}}) = \lambda_1\lambda_2 \underset{2}{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{A}}(\underset{1}{\mathbf{x}}),$$

т. е.

$$\underset{1}{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{A}}(\underset{2}{\mathbf{x}}) = \underset{2}{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{A}}(\underset{1}{\mathbf{x}}) = 0.$$

3. В дальнейшем мы ограничимся исследованием неособенных линейных векторфункций. В этом случае линейной векторфункции 2-го рода $\dot{\mathbf{A}}$ можно сопоставить линейную векторфункцию 1-го рода

$$\mathbf{K} = \overset{-1}{\mathbf{A}_c}\dot{\mathbf{A}},$$

которую будем называть вспомогательной. Из соотношения

$$\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \lambda \dot{\mathbf{A}}_c(\mathbf{x})$$

вытекает

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{E})(\mathbf{x}) = 0.$$

Таким образом, главные направления векторфункции $\dot{\mathbf{A}}$ являются инвариантными направлениями вспомогательной векторфункции $\mathbf{K}$.

Мы остановимся только на случае линейной векторфункции 2-го рода простого типа, — когда можно выделить n независимых главных направлений. Вспомогательная векторфункция в этом случае также является функцией простого типа.

Предположим, что характеристический полином имеет следующие корни: λ_1 и $\frac{1}{\lambda_1}$ кратности k_1, λ_2 и $\frac{1}{\lambda_2}$ кратности $k_2, \dots \lambda_m$ и $\frac{1}{\lambda_m}$ кратности k_m ($\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m$ не равны ± 1), корень $= -1$ кратности p и корень $= +1$ кратности q. Обозначим инвариантные пучки, соответствующие у вспомогательной векторфункции $\mathbf{K}$ этим группам корней, через $E_{2k_1}, E_{2k_2}, \dots E_{2k_m}$, E_p и E_q. На основании теоремы 4, все эти плоскости взаимно-сопряженны относительно функции $\dot{\mathbf{A}}$. Следовательно, если мы выберем координатные контравариантные векторы так, чтобы первые $2k_1$ лежали в E_{2k_1}, следующие $2k_2 - E_{2k_2}$, и т. д., то матрица $\|a_{\alpha\beta}\|$ примет следующий вид:

$$\|\dot{\mathbf{A}}\| = \begin{Vmatrix} A_{2k_1} & & & & & \\ & A_{2k_2} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & A_{2k_m} & & \\ & & & & A_p & \\ & & & & & A_q \end{Vmatrix}.$$

Исследуем сначала коррелятивное преобразование, индуцированное векторфункцией $\dot{\mathbf{A}}$ в элементе E_{2k_1}.

В E_{2k_1} лежит k_1-мерный пучок E_{k_1}, инвариантный относительно векторфункции $\mathbf{K}$ и соответствующий характеристическому числу λ_1. В этом пучке мы выберем k_1 первых координатных векторов: $\underset{1}{\mathbf{e}}, \underset{2}{\mathbf{e}}, \dots \underset{k_1}{\mathbf{e}}$. Тогда

$$\mathbf{K}(\underset{\alpha}{\mathbf{e}}) = \lambda_1 \underset{\alpha}{\mathbf{e}} \qquad (\alpha \leqslant k_1),$$

т. е.

$$\dot{\mathbf{A}}(\underset{\alpha}{\mathbf{e}}) = \lambda_1 \dot{\mathbf{A}}_c(\underset{\alpha}{\mathbf{e}}) \qquad (\alpha \leqslant k_1).$$

Аналогично этому, рассмотрим k_1-мерный пучок E'_{k_1}, инвариантный относительно векторфункции $\mathbf{K}$ и соответствующий характеристическому числу $\frac{1}{\lambda_1}$. В нем мы выберем координатные векторы $\underset{k_1+1}{\mathbf{e}}, \underset{k_1+2}{\mathbf{e}}, \dots \underset{2k_1}{\mathbf{e}}$. На основании теоремы 3 и 4,

$$a_{\alpha\beta} = \underset{\alpha}{\mathbf{e}} \dot{\mathbf{A}}(\underset{\beta}{\mathbf{e}}) = 0,$$

если α и $\beta \leqslant k_1$ или если α и $\beta > k_1$. Так как

$$a_{\alpha\beta} = \underset{\alpha}{\mathbf{e}} \dot{\mathbf{A}}(\underset{\beta}{\mathbf{e}}) = \lambda_1 \underset{\alpha}{\mathbf{e}} \dot{\mathbf{A}}_c(\underset{\beta}{\mathbf{e}}) = \lambda_1 a_{\beta\alpha}$$

при $\beta \leqslant k_1$, $\alpha > k_1$, то матрица A_{2k_1} имеет следующий вид:

$$A_{2k_1} = \begin{Vmatrix} 0 & A_{k_1} \\ B_{k_1} & 0 \end{Vmatrix},$$

где $B_{k_1} = \lambda_1 A_{k_1}$, а A_{k_1} — некоторая матрица k_1-го порядка.

Покажем, что соответствующим выбором координатных векторов матрице A_{k_1} можно придать очень простой вид.

Векторы $\underset{1}{\mathbf{e}}, \underset{2}{\mathbf{e}}, \dots \underset{k_1}{\mathbf{e}}$ выбираем в E_{k_1} по произволу, лишь бы они были независимы. Рассмотрим систему уравнений

(24,10) $$\mathbf{x} \dot{\mathbf{A}}(\underset{2}{\mathbf{e}}) = 0, \ \mathbf{x} \dot{\mathbf{A}}(\underset{3}{\mathbf{e}}) = 0, \dots \mathbf{x} \dot{\mathbf{A}}(\underset{k_1}{\mathbf{e}}) = 0.$$

Уравнения эти независимы и определяют в E'_{k_1} одно определенное направление. В самом деле, если $\mathbf{x} = \sigma_1 \underset{k_1+1}{\mathbf{e}} + \dots + \sigma_{k_1} \underset{2k_1}{\mathbf{e}}$, то коэффициенты σ_i найдутся из уравнений:

$$\begin{gathered} \sigma_1 a_{k_1+1,\,2} + \dots + \sigma_{k_1} a_{2k_1,\,2} = 0, \\ \sigma_1 a_{k_1+1,\,3} + \dots + \sigma_{k_1} a_{2k_1,\,3} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sigma_1 a_{k_1+1,\,k_1} + \dots + \sigma_{k_1} a_{2k_1,\,k_1} = 0. \end{gathered}$$

Если бы эта система определяла не одно направление, то все миноры $(k_1 - 1)$-го порядка матрицы

$$\left\| \begin{matrix} a_{k_1+1,\,2} \ldots a_{2k_1,\,2} \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ a_{k_1+1,\,k_1} \ldots a_{2k_1,\,k_1} \end{matrix} \right\|$$

были бы равны нулю, т. е. определитель $|B_{k_1}|$ также был равен нулю и векторфункция $\dot{\mathbf{A}}$ была бы особенной.

Вектор, удовлетворяющий уравнениям (24,10), обозначим через $\underset{1}{\mathbf{x}}$.

Аналогично найдем вектор $\underset{2}{\mathbf{x}}$, определяемый уравнениями:

$$\mathbf{x}\dot{\mathbf{A}}(\underset{1}{\mathbf{e}}) = 0,\ \mathbf{x}\dot{\mathbf{A}}(\underset{3}{\mathbf{e}}) = 0, \ldots \mathbf{x}\dot{\mathbf{A}}(\underset{k_1}{\mathbf{e}}) = 0.$$

Продолжая таким образом дальше, мы получаем k_1 векторов: $\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \ldots \underset{k_1}{\mathbf{x}}$, удовлетворяющих уравнениям:

$$\underset{i}{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{A}}(\underset{k}{\mathbf{e}}) = 0 \qquad (i \neq k;\ i,\ k \leqslant k_1). \tag{24,11}$$

Отметим, что

$$\underset{i}{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{A}}(\underset{i}{\mathbf{e}}) \neq 0 \qquad (i \leqslant k_1), \tag{24,12}$$

так как в противном случае определитель $|B_{k_1}|$ был бы равен нулю.

Построенные нами векторы $\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \ldots \underset{k_1}{\mathbf{x}}$ н е з а в и с и м ы. В самом деле, если бы существовало соотношение

$$\lambda_1\underset{1}{\mathbf{x}} + \lambda_2\underset{2}{\mathbf{x}} + \ldots + \lambda_{k_1}\underset{k_1}{\mathbf{x}} = 0,$$

то из него мы получили бы

$$\lambda_1\underset{i}{\mathbf{e}}\dot{\mathbf{A}}_c(\underset{1}{\mathbf{x}}) + \lambda_2\underset{i}{\mathbf{e}}\dot{\mathbf{A}}_c(\underset{2}{\mathbf{x}}) + \ldots + \lambda_{k_1}\underset{i}{\mathbf{e}}\dot{\mathbf{A}}_c(\underset{k_1}{\mathbf{x}}) = 0 \qquad (i = 1,\ 2 \ldots k_1),$$

т. е., на основании (24,11),

$$\lambda_i\underset{i}{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{A}}(\underset{i}{\mathbf{e}}) = 0 \qquad (i = 1,\ 2 \ldots k_1).$$

Отсюда следовало бы, что

$$\lambda_i = 0 \qquad (i = 1,\ 2, \ldots k_1),$$

так как $\underset{i}{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{A}}(\underset{i}{\mathbf{e}}) \neq 0$ [формула (24,12)].

Введем теперь новую координатную систему:

$$\underset{1}{\mathbf{e}'} = \underset{1}{\mathbf{e}},\ \underset{2}{\mathbf{e}'} = \underset{2}{\mathbf{e}}, \ldots \underset{k_1}{\mathbf{e}'} = \underset{k_1}{\mathbf{e}},\quad \underset{k_1+1}{\mathbf{e}'} = \underset{1}{\mathbf{x}}, \ldots \underset{2k_1}{\mathbf{e}'} = \underset{k_1}{\mathbf{x}}.$$

Матрица B_{k_1} примет следующий вид: на основании (24,11), превратятся в нуль все члены, не стоящие в главной диагонали. Нормируя векторы $\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \ldots \underset{k_1}{\mathbf{x}}$, мы можем достигнуть того, чтобы

$$a_{k_1+s,\,s} = \underset{s}{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{A}}(\underset{s}{\mathbf{e}}) = \lambda_1 \qquad (s = 1,\ 2, \ldots k_1).$$

Таким образом

$$B_{k_1} = \lambda_1 E_{k_1},\quad A_{k_1} = E_{k_1},$$

где E_{k_1} — единичная матрица порядка k_1. Матрица A_{2k_1} в новой системе координат выражается следующим образом:

$$A_{2k_1} = \left\| \begin{matrix} 0 & E_{k_1} \\ \lambda_1 E_{k_1} & 0 \end{matrix} \right\|.$$

В качестве канонического вида удобнее выбрать несколько иную форму матрицы. Вводя координатные векторы следующим образом

$$\underset{1}{\mathbf{e}''} = \underset{1}{\mathbf{e}'},\ \underset{2}{\mathbf{e}''} = \underset{k_1+1}{\mathbf{e}'},\ \underset{3}{\mathbf{e}''} = \underset{2}{\mathbf{e}'},\ \underset{4}{\mathbf{e}''} = \underset{k_1+2}{\mathbf{e}'}, \ldots \underset{2k_1-1}{\mathbf{e}''} = \underset{k_1}{\mathbf{e}'},\ \underset{2k_1}{\mathbf{e}''} = \underset{2k_1}{\mathbf{e}'},$$

мы приведем матрицу A_{2k_1} к следующему виду:

$$\left\| \begin{matrix} 0 & 1 & & & \\ \lambda_1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & \lambda_1 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Аналогично поступаем, конечно, с матрицами A_{2k_2}, $A_{2k_3}, \ldots A_{2k_m}$.

Возьмем теперь главную область E_p, соответствующую характеристическому числу, равному — 1. Матрица A_p — антисимметрическая. В самом деле, для каждого вектора, принадлежащего к этой главной области, мы имеем:

$$\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = -\dot{\mathbf{A}}_c(\mathbf{x});$$

следовательно, если векторы $\underset{i}{\mathbf{x}}$ и $\underset{k}{\mathbf{x}}$ лежат в E_p, то

$$\underset{i}{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{A}}(\underset{k}{\mathbf{x}}) = -\underset{k}{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{A}}(\underset{i}{\mathbf{x}}).$$

Так как определитель $|A_p|$ не может быть равен нулю, то p должно быть четным числом.

В E_p мы имеем, таким образом, индуцированную антисимметрическую векторфункцию. Поступая с ней так, как было изложено в § 23, мы выделим систему p координатных векторов, при которой матрица A_p примет вид:

$$A_p = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & -1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Наконец, матрица A_q, соответствующая характеристическому числу, равному 1, — симметрическая. В элементе A_q можно выделить q координатных векторов, при которых матрица A_q примет вид

$$A_q = E_q = \begin{Vmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{Vmatrix}.$$

Резюмируя вышесказанное, можно формулировать теорему:

Теорема 4. *Пусть* $\dot{\mathbf{A}}$ — *неособенная линейная векторфункция простого типа. Если ее характеристический полином имеет корни:*[1] $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_s, \frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \ldots \frac{1}{\lambda_s}$, *отличные от 1,*

[1] Некоторые из чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_s$ могут быть равными.

и корень = 1 кратности q, то у этой векторфункции можно выделить s взаимно-сопряженных двумерных элементов и q взаимно с ними сопряженных направлений. Матрица этой векторфункции может быть приведена к виду:

$$(24{,}13)\qquad \begin{Vmatrix} A_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & A_s & \\ & & & E_q \end{Vmatrix}, \text{ где } A_k = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ \lambda_k & 0 \end{Vmatrix}.$$

4. Рассмотрим гиперповерхности совпадения. В той системе координат, которая дает канонический вид (24,13) матрицы векторфункции, гиперповерхность совпадения S определяется следующим уравнением:

$$\sum_{1}^{s}(1+\lambda_k)\,x^{(2k-1)}x^{(2k)} + \sum_{2s+1}^{n} x^{(k)2} = 1.$$

Гиперповерхность совпадения Σ выражается в тангенциальных координатах следующим уравнением

$$\sum_{1}^{s}\frac{1+\lambda_k}{\lambda_k}\,u_{2k-1}u_{2k} + \sum_{2s+1}^{n} u_k{}^2 = 1.$$

Если векторфункция $\dot{\mathbf{A}}$ не имеет характеристических чисел, равных -1, гиперповерхность Σ выражается следующим уравнением в точечных координатах:

$$\sum_{1}^{s}\frac{4\lambda_k}{1+\lambda_k}\,x^{(2k-1)}x^{(2k)} + \sum_{2s+1}^{n} x^{(k)2} = 1.$$

В этом случае главные направления $\underset{1}{\mathbf{e}}, \underset{2}{\mathbf{e}}, \ldots \underset{2s}{\mathbf{e}}$ являются асимптотическими для обеих поверхностей. Главные же направления $\underset{2s+1}{\mathbf{e}}, \ldots \underset{n}{\mathbf{e}}$, соответствующие характеристическим числам, равным 1, определяют q-мерную плоскость, в которой S и Σ отсекают одну и ту же $(q-1)$-мерную поверхность 2-го порядка:

$$\sum_{2s+1}^{n} x^{(k)2} = 1.$$

Пример. Рассмотрим неособенную линейную векторфункцию 2-го рода в трехмерном пространстве Если она имеет характеристическое число $\lambda \neq \pm 1$, то два других равны $\frac{1}{\lambda}$ и 1. Канонический вид матрицы следующий:

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Поверхность совпадения S определяется уравнением

$$(1+\lambda)\, x^{(1)} x^{(2)} + x^{(3)^2} = 1.$$

Поверхность совпадения Σ задается уравнением в тангенциальных координатах:

$$\frac{1+\lambda}{\lambda} u_1 u_2 + u_3^2 = 1,$$

или в точечных

$$\frac{4\lambda}{1+\lambda} x^{(1)} x^{(2)} + x^{(3)^2} = 1.$$

Если векторфункция имеет два корня, равных -1, то поверхность S представляет собою пару плоскостей:

$$x^{(3)^2} = 1,$$

поверхность Σ — пару точек

$$u_3^2 = 1.$$

Наконец, если все три корня равны 1, получаем симметрическую векторфункцию. Поверхности S и Σ сливаются в одну:

$$2x^{(1)} x^{(2)} + x^{(3)^2} = 1.$$

Задача 5. Исследовать линейную неособенную векторфункцию 2-го рода в реальном трехмерном пространстве. Разобрать случай, когда имеются комплексные характеристические числа.

Ответ. Если одно из характеристических чисел равно $e^{i\alpha}$, то матрица $\| \dot{\mathbf{A}} \|$ может быть приведена к следующему виду:

$$(24,14)\qquad \begin{Vmatrix} \varepsilon \cos\frac{\alpha}{2}, & \varepsilon \sin\frac{\alpha}{2}, & 0 \\ -\varepsilon \sin\frac{\alpha}{2}, & \varepsilon\cos\frac{\alpha}{2}, & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{Vmatrix},$$

где $\varepsilon = \pm 1$.

Решение. Пусть характеристическому числу $e^{\alpha i}$ соответствует главное направление $\mathbf{u} + i\mathbf{v}$. Примем векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ за координатные и будем обозначать их через $\underset{1}{\mathbf{e}}, \underset{2}{\mathbf{e}}$. Имеем:

$$\dot{\mathbf{A}}(\underset{1}{\mathbf{e}} + i\underset{2}{\mathbf{e}}) = e^{i\alpha} \dot{\mathbf{A}}_c (\underset{1}{\mathbf{e}} + i\underset{2}{\mathbf{e}}),$$

или

$$\dot{\mathbf{A}}(\underset{1}{\mathbf{e}}) = \cos\alpha \dot{\mathbf{A}}_c(\underset{1}{\mathbf{e}}) - \sin\alpha \dot{\mathbf{A}}_c(\underset{2}{\mathbf{e}}),$$
$$\dot{\mathbf{A}}(\underset{2}{\mathbf{e}}) = \sin\alpha \dot{\mathbf{A}}_c(\underset{1}{\mathbf{e}}) + \cos\alpha \dot{\mathbf{A}}_c(\underset{2}{\mathbf{e}}).$$

Умножая эти соотношения на $\underset{1}{\mathbf{e}}, \underset{2}{\mathbf{e}}$, получаем:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos\alpha a_{11} - \sin\alpha a_{21}, \\ a_{12} &= \sin\alpha a_{11} + \cos\alpha a_{21}, \\ a_{21} &= \cos\alpha a_{12} - \sin\alpha a_{22}, \\ a_{22} &= \sin\alpha a_{12} + \cos\alpha a_{22}, \end{aligned}$$

откуда:

$$a_{11} = a_{22},$$
$$a_{12} = a_{11} \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$
$$a_{21} = -a_{11} \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Координатный вектор $\underset{3}{\mathbf{e}}$ берем на главном направлении, соответствующем характеристическому числу $=1$. Нормируя координатные векторы, приводим матрицу $\|\dot{\mathbf{A}}\|$ к виду (24,14).

§ 25. Формы Hermite'а.

1. На ряду с квадратичными формами в анализе и прикладной математике значительную роль играют так называемые формы Hermite'а:

$$(25,1)\qquad \omega(\mathbf{x},\mathbf{x}) = h_{\alpha\beta}\bar{x}^{\alpha} x^{\beta},$$

$$(25,2)\qquad h_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\beta\alpha}.$$

Форма Hermite'а представляет собою частный случай билинейных форм, у которых коэффициенты связаны соотношением (25,2), а в качестве одного аргумента стоит вектор, комплексно-сопряженный другому аргументу.

Теория форм Hermite'а очень сходна с теорией квадратичных форм: большинство теорем этой последней могут быть без существенных изменений прямо перенесены в теорию эрмитовых форм. В то же время теория форм Hermite'а является гораздо более сильным аналитическим инструментом, чем теория квадратичных форм. Мы иллюстрируем это на одном простом примере.

В вещественном пространстве особенно важную роль играют определенные формы. На ряде примеров (§ 21, 22, 23) мы видели, что исследование некоторых вопросов значительно упрощается, если рассматриваемую форму считать определенной. Однако понятие определенности формы теряется, как только мы переходим в комплексную область: здесь при всевозможном изменении аргумента не имеет даже смысла говорить о знаке формы. Таким образом, те свойства, которые исследуются в вещественном пространстве при помощи определенных квадратичных форм, уже не могут проводиться этим методом в комплексной области. Например в § 20 мы имели такую теорему: если $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$ — определенная форма и векторы $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}$ вещественны, то определитель

$$(25,3) \qquad \begin{vmatrix} \varphi(\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{1}{\mathbf{u}}) & \ldots & \varphi(\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{m}{\mathbf{u}}) \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \varphi(\underset{m}{\mathbf{u}},\underset{1}{\mathbf{u}}) & \ldots & \varphi(\underset{m}{\mathbf{u}},\underset{m}{\mathbf{u}}) \end{vmatrix}$$

обращается в нуль тогда и только тогда, если векторы $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}$ — зависимые. Эта теорема дает очень удобный в счетном отношении критерий для выяснения вопроса о независимости вещественных векторов; за форму $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$ можно принять для простоты например сумму квадратов координат: $x^{(1)^2} + x^{(2)^2} + \ldots + x^{(n)^2}$. Но этот критерий неприложим, как только мы возьмем векторы $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}$ в комплексной области. Этот пробел можно восполнить, вводя в рассмотрение формы Hermite'а. Оказывается, как мы увидим ниже, существуют так называемые определенные эрмитовы формы, не меняющие знака, как бы мы ни изменяли их аргумент. Если в определителе (25,3), вместо квадратичной формы φ, вставить определенную форму Hermite'а, например $\omega(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \bar{x}^{(1)}x^{(1)} + \bar{x}^{(2)}x^{(2)} + \ldots + \bar{x}^{(n)}x^{(n)}$, критерий независимости m векторов распространится и на комплексную область.

Теория эрмитовых форм приобрела особенно большое значение в XX столетии, в связи с развитием теории интегральных уравнений и квантовой механики.

2. Развитие теории форм Hermite'а и смежных с нею вопросов за последнее время оказало влияние на тензорный анализ. Понятие о тензоре было обобщено Schouten'ом и, кроме обычных тензоров, в настоящее время изучаются геометрические величины более общей природы. Мы не в состоянии в настоящем курсе остановиться на этой теории и затронем этот вопрос только в применении к формам Hermite'а.

В основу определения понятия тензора выше была положена скалярная многолинейная функция от векторных аргументов. Можно несколько видоизменить понятие о многолинейной функции.

Условимся называть скалярную функцию $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \ldots \mathbf{w})$ quasi-линейной относительно аргумента $\mathbf{x}$, если она удовлетворяет соотношениям:

$$\varphi(\underset{1}{\mathbf{x}} + \underset{2}{\mathbf{x}}, \mathbf{y}, \ldots \mathbf{w}) = \varphi(\underset{1}{\mathbf{x}}, \mathbf{y}, \ldots \mathbf{w}) + \varphi(\underset{2}{\mathbf{x}}, \mathbf{y}, \ldots \mathbf{w})$$

$$\varphi(\alpha\mathbf{x}, \mathbf{y}, \ldots \mathbf{w}) = \bar{\alpha}\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \ldots \mathbf{w}).$$

Если функция quasi-линейна относительно всех своих аргументов, то ей соответствует форма

$$\varphi(\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{x}}) = a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m} \underset{1}{\bar{x}}{}^{\alpha_1} \underset{2}{\bar{x}}{}^{\alpha_2} \ldots \underset{m}{\bar{x}}{}^{\alpha_m},$$

где

$$a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m} = \varphi(\mathbf{e}_{\alpha_1}, \mathbf{e}_{\alpha_2}, \ldots \mathbf{e}_{\alpha_m}).$$

При аффинных преобразованиях координат коэффициенты $a_{\alpha_1\ldots\alpha_m}$ преобразуются по следующему закону

$$(25,4) \qquad a'_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m} = a_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_m} \overline{\binom{\sigma_1}{\alpha_1'}}\, \overline{\binom{\sigma_2}{\alpha_2'}} \cdots \overline{\binom{\sigma_m}{\alpha_m'}}.$$

Ковариантную величину, определяемую составляющими $a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}$ с законом преобразования (25,4), будем называть тензором 2-го класса в отличие от обычных тензоров (тензоров 1-го класса).[1] Конечно, введенное обобщение распространяется на тензоры контравариантные и смешанные.

Если порядок тензора 2-го класса равен единице, мы получаем так называемые векторы 2-го класса, составляющие которых преобразуются по следующему закону:

$$u'_{\alpha} = u_{\sigma}\overline{\binom{\sigma}{\alpha'}},$$
$$v^{\alpha'} = v^{\sigma}\overline{\binom{\alpha'}{\sigma}}.$$

Если многолинейная форма относительно некоторых аргументов

[1] Мы несколько изменяем терминологию Schouten'а, который тензоры 1-го и 2-го класса называет соответственно Grössen erster Art и Grössen zweiter Art, эрмитовы тензоры (см. ниже) — Hermitesche Grössen.

линейна, а относительно других quasi-линейна, то соответствующую ей ковариантную величину будем называть эрмитовым тензором. Индексы, соответствующие тем аргументам, относительно которых форма линейна, условимся называть индексами 1-го класса, остальные — 2-го класса.

3. Рассмотрим ковариантный тензор Hermite'a 2-го порядка $h_{\alpha\beta}$, соответствующий функции $\omega(\mathbf{x},\mathbf{y})$, которая quasi-линейна относительно 1-го аргумента и линейна относительно второго:

$$\omega(\alpha\mathbf{x},\beta\mathbf{y}) = \bar{\alpha}\beta\omega(\mathbf{x},\mathbf{y}),$$

$$\omega(\mathbf{x},\mathbf{y}) = h_{\alpha\beta}\bar{x}^{\alpha}y^{\beta}, \quad h_{\alpha\beta} = \omega(\underset{\alpha}{\mathbf{e}},\underset{\beta}{\mathbf{e}}).$$

При преобразовании координат составляющие $h_{\alpha\beta}$ преобразуются по следующему закону:

$$h'_{\alpha\beta} = h_{\sigma\tau}\overline{\binom{\sigma}{\alpha'}}\binom{\tau}{\beta'}.$$

Следовательно

$$\|h'_{\alpha\beta}\| = \bar{X}_c^{-1}\|h_{\alpha\beta}\|X^{-1},$$

$$|h'_{\alpha\beta}| = |h_{\alpha\beta}|\,|X|^{-1}\,|\bar{X}|^{-1}.$$

Введем в рассмотрение линейную векторфункцию 2-го рода

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{x}), \quad u_{\alpha} = h_{\alpha\beta}x^{\beta}.$$

Необходимо отметить, что эта векторфункция определяет вектор 2-го класса:

$$u'_{\alpha} = h'_{\alpha\beta}x^{\beta'} = h_{\sigma\tau}x^{\omega}\overline{\binom{\sigma}{\alpha'}}\binom{\tau}{\beta'}\binom{\beta'}{\omega} = u_{\sigma}\overline{\binom{\sigma}{\alpha'}}.$$

Быть может, следовало бы ввести для векторов 2-го класса особые обозначения, отличающие их от векторов 1-го класса. Однако, делать этого мы не будем. Следует только помнить, что вектор $\dot{\mathbf{H}}$ принадлежит ко 2-му классу.

При помощи векторфункции $\dot{\mathbf{H}}$ форма $\omega(\mathbf{x},\mathbf{y})$ запишется в следующем виде:

$$\omega(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \bar{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{y}).$$

Ограничим для дальнейшего изучения область функций $\omega(\mathbf{x},\mathbf{y})$ требованием симметрии, аналогичным тому, какое вводится при переходе от ковариантного тензора 2-го порядка общего вида к симметрическому. Нетрудно видеть, что изучаемые функции не могут удовлетворять обычным соотношениям симметрии или антисимметрии:

$$\omega(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \omega(\mathbf{y},\mathbf{x}) \quad \text{или} \quad \omega(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -\omega(\mathbf{y},\mathbf{x}).$$

В самом деле, применяя соотношение (25,5), мы пришли бы к противоречию:

$$\omega(\alpha\mathbf{x},\beta\mathbf{y}) = \bar{\alpha}\beta\omega(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \omega(\beta\mathbf{y},\alpha\mathbf{x}) = \alpha\bar{\beta}\omega(\mathbf{x},\mathbf{y}),$$

или для антисимметрии

$$\omega(\alpha\mathbf{x},\beta\mathbf{y}) = \bar{\alpha}\beta\omega(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -\omega(\beta\mathbf{y},\alpha\mathbf{x}) = \alpha\bar{\beta}\omega(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

Следовательно, если матрица эрмитова тензора 2-го порядка обладает свойством обычной симметрии или антисимметрии, то это является случайным фактом, и свойство это исчезает при преобразовании координат. В области эрмитовых тензоров симметрия выражается несколько более сложным соотношением, нежели в области обычных тензоров; соотношение это имеет вид:

$$\omega(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \overline{\omega(\mathbf{y},\mathbf{x})}, \quad h_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\beta\alpha}.$$

Если поставить аналогичный вопрос относительно антисимметрии, мы не получим ничего существенно нового. В самом деле, если

$$\pi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -\overline{\pi(\mathbf{y},\mathbf{x})},$$

то функция $i\pi(\mathbf{x},\mathbf{y})$ обладает свойством обобщенной симметрии:

$$i\pi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \overline{i\pi(\mathbf{y},\mathbf{x})}.$$

4. Будем изучать тензор Hermite'a 2-го порядка, обладающий симметрией:

$$(25,6) \qquad \omega(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \overline{\omega(\mathbf{y},\mathbf{x})}.$$

В этом случае введенная выше векторфункция $\dot{\mathbf{H}}$ удовлетворяет зависимости:

$$(25,7) \qquad \bar{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{y}) = \overline{\bar{\mathbf{y}}\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{x})} = \mathbf{y}\dot{\bar{\mathbf{H}}}(\bar{\mathbf{x}})$$

(символом $\dot{\mathbf{u}} = \dot{\bar{\mathbf{A}}}(\mathbf{x})$ условимся обозначать векторфункцию, комплексно-сопряженную с $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$: если $v_{\alpha} = a_{\alpha\beta}x^{\beta}$, то $u_{\alpha} = \bar{a}_{\alpha\beta}x^{\beta}$). На ряду с соотношением (25,7) имеем также:

$$\bar{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}\dot{\mathbf{H}}_c(\bar{\mathbf{x}}).$$

Таким образом, $\mathbf{y}\dot{\bar{\mathbf{H}}}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{y}\dot{\mathbf{H}}_c(\bar{\mathbf{x}})$, откуда $\dot{\bar{\mathbf{H}}} = \dot{\mathbf{H}}_c$, или

$$(25,8) \qquad \dot{\bar{\mathbf{H}}}_c = \dot{\mathbf{H}}.$$

Результат применения двух операций: перехода к сопряженной функции и перехода к комплексно-сопряженной векторфункции будем обозначать, как и в теории матриц, звездочкой: $\bar{\dot{\mathbf{H}}}_c = \dot{\mathbf{H}}^*$. Таким образом, функция $\dot{\mathbf{H}}$ подчинена следующему условию:

$$\dot{\mathbf{H}}^* = \dot{\mathbf{H}}, \quad \bar{h}_{\beta\alpha} = h_{\alpha\beta}.$$

Если в функции $\omega(\mathbf{x},\mathbf{y})$ положить $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, мы получаем форму Hermite'a. На основании (25,6) выводим важное свойство эрмитовых форм: $\omega(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \overline{\omega(\mathbf{x},\mathbf{x})}$, т. е. форма Hermite'a имеет всегда действительное значение.

5. В теории форм Hermite'a мы будем пользоваться геометрической терминологией, аналогичной той, которую мы употребляли в теории квадратичных форм. Однако следует заметить, что в отношении эрмитовых форм аналогиями с теорией гиперповерхностей 2-го порядка надо пользоваться с осторожностью. Прежде всего заметим, что уравнение

$$\omega(\mathbf{x},\mathbf{x}) = h_{\alpha\beta}\bar{x}^\alpha x^\beta = \lambda \tag{25,9}$$

дает неаналитическую гиперповерхность, и не при всяком λ такая поверхность существует. Например, если

$$\omega(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \bar{x}^{(1)}x^{(1)} + \bar{x}^{(2)}x^{(2)} + \ldots + \bar{x}^{(n)}x^{(n)}.$$

то при $\lambda < 0$ гиперповерхность (25,9) не существует. Аналог асимптотического конуса:

$$\omega(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 0$$

вырождается в данном случае в точку.

Геометрическая терминология имеет здесь, следовательно, формальное значение и вводится нами только для того, чтобы удобнее было переносить теоремы из теории квадратичных форм в теорию форм Hermite'a.

6. Два вектора $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ будем называть сопряженными относительно формы $\omega(\mathbf{x},\mathbf{x})$ (векторфункции $\dot{\mathbf{H}}$), если

$$\omega(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0. \tag{25,10}$$

Понятие о сопряженности взаимное, т. к. из (25,10) следует, на основании (25,6): $\omega(\mathbf{y},\mathbf{x}) = 0$. Вектор, сопряженный самому себе: $\omega(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 0$, будем называть, как и в теории квадратичных форм, асимптотическим.

Гиперплоскость, определяемая уравнением

$$\omega(\mathbf{a},\mathbf{x}) = 0,$$

или, что то же, $\omega(\mathbf{x},\mathbf{a}) = 0$, называется сопряженной вектору $\mathbf{a}$.

Два пучка $\{\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{r}{\mathbf{u}}\}$ и $\{\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \ldots \underset{s}{\mathbf{v}}\}$ называются сопряженными, если каждый вектор 1-го пучка сопряжен с каждым вектором 2-го пучка. Для сопряженности этих пучков необходимо и достаточно выполнение соотношений:

$$\omega(\underset{i}{\mathbf{u}},\underset{k}{\mathbf{v}}) = 0 \qquad (i = 1, \ldots r; \quad k = 1, \ldots s).$$

Если все векторы пучка $\{\underset{1}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}\}$ принадлежат к асимптотическому конусу, будем называть его асимптотическим. Тогда

$$\omega(\underset{i}{\mathbf{u}},\underset{k}{\mathbf{u}}) = 0 \qquad (i,k = 1, \ldots m).$$

Если в пучке $\{\underset{1}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}\}$ имеется асимптотический вектор $\mathbf{v}$, причем $\{\underset{1}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}\}$, лежит в гиперплоскости, сопряженной вектору $\mathbf{v}$, будем говорить, что пучок касается асимптотического конуса.

Совершенно так же, как в теории квадратичных форм, вводится понятие о ранге. Если ранг формы Hermite'a равен r, уравнение

$$\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{x}) = 0 \tag{25,11}$$

имеет $n - r$ независимых решений, определяющих нулевую область E_{n-r} векторфункции $\dot{\mathbf{H}}$. Отметим, что сопряженная векторфункция $\dot{\mathbf{H}}_c$ имеет также $(n - r)$-мерную нулевую область $\bar{E}_{n-r}$, причем E_{n-r} и $\bar{E}_{n-r}$ комплексно-сопряженны. В самом деле, из уравнения (25,11) вытекает:

$$\dot{\mathbf{H}}_c(\bar{\mathbf{x}}) = 0.$$

7. В теории эрмитовых форм имеют место теоремы, аналогичные теоремам 1 — 5 § 20. Доказательство их совершенно такое же, и потому мы приведем здесь только их формулировку предоставляя читателю возобновить в памяти прежние доказательства.

Теорема 1. *Если форма Hermite'a неособенная, то у нее не может существовать асимптотических пучков с числом измерений, большим* $\frac{n}{2}$.

Теорема 2. *Пучок* $\{\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}\}$ *тогда и только тогда* *касается асимптотического конуса, если векторы* $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}$ *удовлетворяют уравнению*:

$$\begin{vmatrix} \omega(\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{1}{\mathbf{u}}) & \ldots & \omega(\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{m}{\mathbf{u}}) \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \omega(\underset{m}{\mathbf{u}},\underset{1}{\mathbf{u}}) & \ldots & \omega(\underset{m}{\mathbf{u}},\underset{m}{\mathbf{u}}) \end{vmatrix} = 0.$$

Теорема 3. *Пучок, построенный на m взаимно-сопряженных независимых направлениях, не принадлежащих к асимптотическому конусу, не касается асимптотического конуса.*

Теорема 4. *Если m-мерный пучок не касается асимптотического конуса, то сопряженные с ним пучки независимы от него.*

Теорема 5. *В каждом m-мерном пучке ($m \leqslant n$) можно выделить m независимых направлений, сопряженных относительно данной формы Hermite'а.*

Из последней теоремы непосредственно вытекает следующее фундаментальное предложение:

Теорема 6. *Каждая эрмитова форма при помощи аффинного преобразования координат может быть приведена к каноническому виду*:

$$\omega(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i \bar{x}^{(i)} x^{(i)}, \tag{25,12}$$

где r — ранг формы, $\varepsilon_i = \pm 1$.

Отметим существенное отличие в этом пункте от теории квадратичных форм: там все коэффициенты при квадратах переменных в форме:

$$\sum a_{ii} x^{(i)2}$$

могут быть сделаны равными $+1$ при помощи нормирования координатных векторов. Здесь этого сделать в общем случае нельзя: если для вектора $\mathbf{a}$ форма Hermite'а имеет ненулевое значение, то для любого вектора $\sigma\mathbf{a}$ той же прямой она будет иметь значение того же знака, так как

$$\omega(\sigma\mathbf{a},\sigma\mathbf{a}) = \sigma\bar{\sigma}\omega(\mathbf{a},\mathbf{a}).$$

Следовательно, каждому ненулевому направлению можно приписать определенный знак, чего нельзя сделать для квадратичной формы в комплексном пространстве. Может возникнуть, конечно, вопрос: нельзя ли достигнуть положительности членов в форме не нормированием координатных векторов, а путем изменения направлений координатных осей. На этот вопрос ответ должен быть отрицательным: оказывается, как и в теории вещественных квадратичных форм, имеет место закон инерции, установленный Hermite'ом:

Теорема 7. *При различных выделениях n независимых взаимно-сопряженных направлений число как положительных, так и отрицательных направлений остается одним и тем же.*

Доказательство этой теоремы вполне аналогично доказательству теоремы 12 § 20. Подчеркнем то обстоятельство, что закон инерции форм Hermite'а не ограничивается только вещественным пространством.

Итак, *число положительных и число отрицательных членов в каноническом виде эрмитовой формы являются инвариантами.*

Разность между числом положительных и числом отрицательных членов называется сигнатурой формы. Если сигнатура равна $\pm n$, форма называется определенной. Такая форма может обращаться в нуль только при нулевых значениях аргумента. Если определенная форма сохраняет положительные значения (т. е. если сигнатура равна $+n$), она называется положительной, в противном случае — отрицательной.

8. Определение сигнатуры эрмитовой формы по ее коэффициентам базируется на приведении к каноническому виду по методу Kronecker'а. Все выводы и доказательства, изложенные в разделах 12, 13 и 14 § 20, переносятся без существенного изменения в теорию форм Hermite'а. В виду сложности формулировки теорем 8, 9, 10 и 11, мы приводить их в применении к теории эрмитовых форм не будем. Ограничимся только указанием на то, что в теорему 11 следует внести следующее изменение (мы будем обозначать алгебраическое дополнение элемента h_{ik} в дискриминанте $|h_{ik}|$ через H_{ik}, минор

$$\begin{vmatrix} h_{11} & \ldots & h_{1,n-2} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ h_{n-2,1} & \ldots & h_{n-2,n-2} \end{vmatrix}$$

через H_{n-2}). Линейное преобразование

$$x^i = x^{i'} + (\lambda^i_{n-1} + \lambda^i_n)\, x^{(n-1)'} + (\lambda^i_{n-1} - \lambda^i_n)\, x^n$$

следует заменить таким:

$$x^i = x^{i'} + \left(\lambda^i_{n-1} - \lambda^i_n \frac{H_{n-2}}{H_{n,\,n-1}}\right) x^{(n-1)'} + $$
$$+ \left(\lambda^i_{n-1} \frac{H_{n,\,n-1}}{H_{n-2}} + \lambda^i_n\right) x^{(n)'},$$

а формулу (20,28) — следующей:

$$\omega(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n-2} h_{\alpha\beta}\overline{x}^{\alpha'} x^{\beta'} +$$
$$+ 2\left(\overline{x}^{(n-1)'} x^{(n-1)'} - \frac{H_{n,\,n-1}\overline{H}_{n,\,n-1}}{H^2_{n-2}}\, \overline{x}^{n'} x^{n'}\right).$$

Вывод этих измененных формул мы предоставляем, в качестве упражнения, читателю.

Совершенно так же, как и в теории квадратичных форм, получим следующие полож ния (аналоги теорем 13, 15 и 16):

Теорема 7. *Для определения сигнатуры эрмитовой формы надо перенумеровать переменные так, чтобы в ряде*

$$(25{,}13)\quad H_0 = 1,\ H_1 = h_{11},\ H_2 = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix}, \ldots H_n = \begin{vmatrix} h_{11} & \ldots & h_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{n1} & \ldots & h_{nn} \end{vmatrix}$$

никакие два соседних члена не были равны нулю. Тогда число положительных членов в каноническом виде формы равно числу постоянств знака в ряде (25,13), число отрицательных — числу перемен знака в этом ряде.

Теорема 8. *Если $\omega(\mathbf{x},\mathbf{x})$ — определенная форма, то определитель*

$$\begin{vmatrix} \omega(\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{1}{\mathbf{u}}) & \ldots & \omega(\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{m}{\mathbf{u}}) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega(\underset{m}{\mathbf{u}},\underset{1}{\mathbf{u}}) & \ldots & \omega(\underset{m}{\mathbf{u}},\underset{m}{\mathbf{u}}) \end{vmatrix}$$

тогда и только тогда обращается в нуль, если векторы $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots, \underset{m}{\mathbf{u}}$ зависимы.

Теорема 9. *Форма $\omega(\mathbf{x},\mathbf{x}) = h_{\alpha\beta}\overline{x}^\alpha x^\beta$ тогда и только тогда определенная положительная, если ее коэффициенты удовлетворяют неравенствам:*

$$h_{11} > 0,\quad \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix} > 0,\quad \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{vmatrix} > 0, \ldots \begin{vmatrix} h_{11} & \ldots & h_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{n1} & \ldots & h_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Форма $\omega(\mathbf{x},\mathbf{x}) = h_{\alpha\beta}\overline{x}^\alpha x^\beta$ тогда и только тогда определенная отрицательная, если:

$$-h_{11} > 0,\quad \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots (-1)^n \begin{vmatrix} h_{11} & \ldots & h_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{n1} & \ldots & h_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Отметим также, что формулы (20,35) совершенно одинаково пишутся и в теории эрмитовых форм.

9. Перейдем теперь к р ссмотрению вопроса о совместном приведении двух эрмитовых форм к простейшему виду. Здесь уже исследование довольно значительно отличается от того, которое было дано в теории квадратичных форм, и потому мы оста овимся на нем подробнее.

Возьмем две эрмитовых формы:

$$\omega(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \overline{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = a_{\alpha\beta}\overline{x}^\alpha x^\beta;\quad \dot{\mathbf{A}}^* = \dot{\mathbf{A}};$$
$$\pi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \overline{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) = b_{\alpha\beta}\overline{x}^\alpha x^\beta;\quad \dot{\mathbf{B}}^* = \dot{\mathbf{B}};$$

и так же, как и в теории квадратичных форм, будем искать направления

$$\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \lambda\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{x}),$$

для которых сопряженные гиперплоскости относительно обеих форм совпадают.

Предполагая векторфункцию $\dot{\mathbf{B}}$ неособенной, вводим в рассмотрение вспомогательную векторфункцию

$$\mathbf{K} = \mathbf{B}^{-1}\dot{\mathbf{A}}.$$

Векторфункции $\dot{\mathbf{A}}$ и $\dot{\mathbf{B}}$ определяют векторы 2-го класса (см. раздел 3 настоящего параграфа). Вспомогательная же векторфункция $\mathbf{K}$ является, как нетрудно видеть, обычным вектором (1-го класса), и ей соответствует тензор 1-го класса. Исследуем основные свойства этой векторфункции.

Теорема 10. *Каждому комплексному характеристическому числу λ векторфункции $\mathbf{K} = \dot{\mathbf{B}}^{-1}\dot{\mathbf{A}}$ соответствует комплексно-сопряженное характеристическое число $\bar{\lambda}$ той же кратности. Элементарные делители, соответствующие этим корням, имеют одинаковые показатели степеней.*

Доказательство вполне аналогично доказательству теорем 4, § 22 и 8, § 23. Справедливость теоремы вытекает из соотношения:

$$\|\dot{\mathbf{A}} - \lambda\dot{\mathbf{B}}\|_c = \|\bar{\dot{\mathbf{A}}} - \lambda\bar{\dot{\mathbf{B}}}\|.$$

Теорема 11. *Каждому комплексному характеристическому числу векторфункции $\mathbf{K}$ соответствует направление, асимптотическое относительно форм $\omega(\mathbf{x},\mathbf{x})$ и $\pi(\mathbf{x},\mathbf{x})$.*

Доказательство. Если λ — комплексное характеристическое число, $\mathbf{x}$ — соответствующее главное направление, то из равенства

$$\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \lambda\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{x})$$

вытекает

$$\bar{\dot{\mathbf{A}}}(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\lambda}\bar{\dot{\mathbf{B}}}(\bar{\mathbf{x}}).$$

Умножая первое из этих соотношений на $\bar{\mathbf{x}}$, второе — на $\mathbf{x}$, получаем

$$\bar{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \lambda\bar{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{x}),$$
$$\bar{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{x}),$$

т. е.

$$(\lambda - \bar{\lambda})\bar{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) = 0.$$

Теорема 12. *Если λ_1 и λ_2 — характеристические числа векторфункции $\mathbf{K}$, и $\bar{\lambda}_1 \neq \lambda_2$, то соответствующие им главные направления сопряженны относительно форм $\omega(\mathbf{x},\mathbf{x})$ и $\pi(\mathbf{x},\mathbf{x})$.*

Доказательство. Имеем соотношения:

$$\dot{\mathbf{A}}(\underset{1}{\mathbf{x}}) = \lambda_1\dot{\mathbf{B}}(\underset{1}{\mathbf{x}})$$
$$\dot{\mathbf{A}}(\underset{2}{\mathbf{x}}) = \lambda_2\dot{\mathbf{B}}(\underset{2}{\mathbf{x}}), \tag{25,14}$$

откуда выводим

$$\bar{\dot{\mathbf{A}}}(\underset{1}{\bar{\mathbf{x}}}) = \bar{\lambda}_1\bar{\dot{\mathbf{B}}}(\underset{1}{\bar{\mathbf{x}}}).$$

Умножая это равенство на $\underset{2}{\mathbf{x}}$, а 2-ое из соотношений (25,14) на $\underset{1}{\bar{\mathbf{x}}}$ и вычитая, получаем

$$(\lambda_2 - \bar{\lambda}_1)\underset{1}{\bar{\mathbf{x}}}\dot{\mathbf{B}}(\underset{2}{\mathbf{x}}) = 0.$$

Подчеркнем здесь довольно существенное отличие от теории квадратичные форм: мы не имели там аналогов теорем 10 и 11; существование комплексного характеристического числа не накладывает какого-либо ограничения на соответствующее главное направление. Но особенно резкое различие дает теорема 12. В теории квадратичных форм двум неравным характеристическим числам отвечают сопряженные главные направления; здесь главные направления, относящиеся к комплексно-сопряженным корням, могут быть и не сопряженными относительно формы $\omega(\mathbf{x},\mathbf{x})$ и $\pi(\mathbf{x},\mathbf{x})$. Мы иллюстрируем этот факт следующим простым примером. Пусть

$$\omega(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \bar{x}^{(1)}x^{(2)} + \bar{x}^{(2)}x^{(1)}$$
$$\pi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \bar{x}^{(1)}x^{(1)} - \bar{x}^{(2)}x^{(2)}. \tag{25,15}$$

Характеристические числа векторфункции $\mathbf{K}$ для этого случая равны $+i$ и $-i$. Им соответствуют главные направления $(1, i)$ и $(1, -i)$, которые не сопряженны относительно этих форм.

Таким образом, если даже векторфункция $\mathbf{K}$ имеет различные характеристические числа, но если они не все вещественны, то мы не можем быть уверены, что соответствующие эрмитовы формы можно совместно привести к каноническому виду.

Вопрос решает следующая теорема, соответствующая теореме 4 § 21.

Теорема 13. *У двух эрмитовых форм тогда и только тогда существует n независимых взаимно-сопряженных на-*

правлений, если векторфункция **K** *простого типа и все ее характеристические числа действительны.*

Доказательство. Если существует n-эдр взаимно-сопряженных направлений, то, выбирая его за координатный n-эдр, мы приведем матрицы форм к диагональному виду:

$$\|\dot{\mathbf{A}}\| = \left\| \begin{matrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{matrix} \right\|, \quad \|\dot{\mathbf{B}}\| = \left\| \begin{matrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{matrix} \right\|$$

причем все a_{ii} и b_{ii}—действительные числа; следовательно, и матрица $\|\mathbf{K}\| = \|\dot{\mathbf{B}}\|^{-1}\|\mathbf{A}\|$ имеет диагональный вид, т. е. векторфункция **K** простого типа и все ее характеристические числа вещественны.

Обратно, если **K** обладает указанными в теореме свойствами, то каждому характеристическому числу кратности k соответствует k-мерная главная область. На основании теоремы 12, эти главные области взаимно-сопряженны относительно $\omega(\mathbf{x},\mathbf{x})$ и $\pi(\mathbf{x},\mathbf{x})$. Выбирая в этих главных областях сопряженные направления, мы получим таким образом n независимых взаимно-сопряженных прямых.

Необходимо обратить внимание на требование теоремы о вещественности характеристических чисел векторфункции **K**. Например, матрицы рассмотренных выше (25,15) эрмитовых форм не могут быть приведены совместно к диагональному виду, несмотря на то, что векторфункция **K** в этом случае простого типа. Между тем, если мы возьмем аналогичные квадратичные формы,

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 2x^{(1)}x^{(2)}$$
$$\psi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = x^{(1)^2} - x^{(2)^2},$$

то они могут быть совместно приведены к суммам квадратов переменных; здесь вполне достаточно того, что **K** — простого типа. Инвариантные направления этой векторфункции определяются векторами $(1, i)$ и $(1, -i)$. Если эти векторы принять за координатные, то рассматриваемые формы приведутся к следующему виду:

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 2i\,(x^{(1)^2} - x^{(2)^2}),$$
$$\psi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 2\,(x^{(1)^2} + x^{(2)^2}).$$

10. В дальнейшем исследовании будем предполагать, что форма $\pi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{x})$ — определенная. Здесь как и в теории квадратичных форм, имеем две следующие теоремы:

Теорема 14. *Если форма $\pi(\mathbf{x},\mathbf{x})$ — определенная, то характеристические числа векторфункции* **K** *вещественны.*

Доказательство. Теорема непосредственно следует из предложения 11.

Теорема 15. *Если форма $\pi(\mathbf{x},\mathbf{x})$ — определенная, то векторфункция* **K** *простого типа.*

Доказательство вполне аналогично доказательству соответствующей теоремы квадратичных форм: если

$$(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{E})^2(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{y} = (\mathbf{K} - \lambda\mathbf{E})(\mathbf{x}),$$

то

$$\bar{\mathbf{y}}\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{y}) = (\bar{\mathbf{K}} - \lambda\mathbf{E})(\bar{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{E})(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{x}}(\dot{\mathbf{K}}^* - \lambda\dot{\mathbf{E}})\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{E})(\mathbf{x}).$$

Но $\mathbf{K} = \mathbf{B}^{-1}\dot{\mathbf{A}}$, $\dot{\mathbf{K}}^* = \dot{\mathbf{A}}\mathbf{B}^{-1}$; поэтому

$$\bar{\mathbf{y}}\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{y}) = \bar{\mathbf{x}}(\dot{\mathbf{A}}\mathbf{B}^{-1} - \lambda\mathbf{E})\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{E})(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{x}}(\dot{\mathbf{A}} - \lambda\dot{\mathbf{B}})(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{E})(\mathbf{x}) =$$
$$= \bar{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{E})^2(\mathbf{x}) = 0.$$

Отсюда

$$\mathbf{y} = (\mathbf{K} - \lambda\mathbf{E})(\mathbf{x}) = 0.$$

Объединяя теоремы 13, 14 и 15, имеем следующее предложение:

Теорема 16. *Если $\pi(\mathbf{x},\mathbf{x})$ — определенная форма, то преобразованием координат эрмитовы формы могут быть совместно приведены к следующему виду:*

$$\omega(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \sum a_i \bar{x}^{(i)} x^{(i)},$$
$$\pi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \pm \sum \bar{x}^{(i)} x^{(i)},$$

где a_i — действительные числа.

11. Рассмотрим теперь вопрос об однородных аффинных преобразованиях пространства, оставляющих инвариантной неособенную форму Эрмита:

$$\omega(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{x})$$

(аутоморфных преобразованиях эрмитовой формы).

Пусть изучаемое преобразование определяется векторфункцией

$$\mathbf{y} = \mathbf{U}(\mathbf{x}); \quad y^{\alpha} = U^{\alpha}{}_{\beta}\, x^{\beta}.$$

($U^{\alpha}{}_{\beta}$—обычный тензор 1-го класса). Требование инвариантности формы $\omega(\mathbf{x},\mathbf{x})$ дает соотношение:

$$\bar{\mathbf{U}}(\bar{\mathbf{x}})\,\dot{\mathbf{H}}\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{x}).$$

Полагая в нем $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ вместо $\mathbf{x}$, получаем

$$\bar{\mathbf{U}}(\bar{\mathbf{x}})\,\dot{\mathbf{H}}\mathbf{U}(\mathbf{y}) + \bar{\mathbf{U}}(\bar{\mathbf{y}})\,\dot{\mathbf{H}}\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{y}) + \bar{\mathbf{y}}\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{x}).$$

Подставляя в этом соотношении сначала $\mathbf{x}=\mathbf{u}$, $\mathbf{y}=\mathbf{v}$, затем $\mathbf{x}=\mathbf{u}$, $\mathbf{y}=i\mathbf{v}$, где $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ — действительные векторы, получаем:

$$\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{u})\,\dot{\mathbf{H}}\mathbf{U}(\mathbf{v}) + \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{v})\,\dot{\mathbf{H}}\mathbf{U}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{v}) + \mathbf{v}\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{u})$$

$$\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{u})\,\dot{\mathbf{H}}\mathbf{U}(\mathbf{v}) - \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{v})\,\dot{\mathbf{H}}\mathbf{U}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{v}) - \mathbf{v}\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{u}).$$

Складывая, имеем соотношение

$$\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{u})\,\dot{\mathbf{H}}\mathbf{U}(\mathbf{v}) = \mathbf{u}\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{v}),$$

или

$$\mathbf{u}\dot{\mathbf{U}}^{*}\dot{\mathbf{H}}\mathbf{U}(\mathbf{v}) = \mathbf{u}\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{v}),$$

откуда

$$\dot{\mathbf{U}}^{*}\dot{\mathbf{H}}\mathbf{U} = \dot{\mathbf{H}}.$$

Дальше следуют теоремы, аналогичные теоремам 1—6 (§ 22). Доказательство их совершенно такое же, поэтому мы ограничимся только их формулировкой:

Теорема 17. *Векторфункция* $\mathbf{U}$ — *неособенная, и ее определитель по модулю равен* 1.

Теорема 18. *Инвариантные направления, соответствующие характеристическому числу векторфункции* $\mathbf{U}$, *не равному по модулю* 1, — *асимптотические.*

Теорема 19. *Если* λ_1, λ_2 — *характеристические числа векторфункции* $\mathbf{U}$ *и* $\lambda_1\bar{\lambda}_2 \neq 1$, *то соответствующие им главные направления сопряженны относительно эрмитовой формы* $\omega(\mathbf{x},\mathbf{x})$.

Теорема 20. *Каждому характеристическому числу* λ *векторфункции* $\mathbf{U}$, *не равному по модулю единице, соответствует характеристическое число* $\frac{1}{\bar{\lambda}}$ *той же кратности. Элементарные делители, относящиеся к этим характеристическим числам, имеют попарно одинаковые показатели степени.*

Теорема 21. *Линейная векторфункция 1-го рода* $\mathbf{U}$, *оставляющая инвариантной неособенную эрмитову форму* $\bar{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{x})$, *может быть выражена следующим образом:*

$$\mathbf{U} = (\dot{\mathbf{H}} - i\dot{\mathbf{N}})^{-1}(\dot{\mathbf{H}} + i\dot{\mathbf{N}}),$$

если у ней нет характеристических чисел, равных -1, *или*

$$\mathbf{U} = (i\dot{\mathbf{N}} - \dot{\mathbf{H}})^{-1}(i\dot{\mathbf{N}} + \dot{\mathbf{H}}),$$

если у ней нет характеристических чисел, равных $+1$. $\dot{\mathbf{N}}$ — *некоторая векторфункция, обладающая симметрией:*

$$\dot{\mathbf{N}}^{*} = \dot{\mathbf{N}}.$$

Рассмотрим тот случай, когда форма $\omega(\mathbf{x},\mathbf{x})$ — определенная; имеем теоремы:

Теорема 22. *Если* $\omega(\mathbf{x},\mathbf{x})$ — *определенная форма, то все характеристические числа векторфункции* $\mathbf{U}$ *по модулю равны единице.*

Теорема 23. *Если* $\omega(\mathbf{x},\mathbf{x})$ — *определенная форма, то* $\mathbf{U}$ — *векторфункция простого типа.*

Обозначим характеристические числа векторфункции $\mathbf{U}$ через $\lambda_1 = e^{i\alpha_1}$, $\lambda_2 = e^{i\alpha_2}, \ldots, \lambda_n = e^{i\alpha_n}$. Каждому простому корню соответствует изолированное инвариантное направление, группе равных корней — главная область. Все эти главные области взаимно-сопряженны относительно формы $\omega(\mathbf{x},\mathbf{x})$. В каждой k-мерной главной области можно выделить k взаимно-сопряженных направлений. Таким образом получим n направлений, взаимно-сопряженных относительно $\omega(\mathbf{x},\mathbf{x})$. Если мы их выберем за координатные оси, то приведем матрицу $\|\mathbf{U}\|$ к диагональному виду, а форму $\omega(\mathbf{x},\mathbf{x})$ — к каноническому. Таким образом, имеем теорему:

Теорема 24. *У векторфункции* $\mathbf{U}$, *оставляющей инвариантной определенную форму Hermite'а* $\omega(\mathbf{x},\mathbf{x})$, *можно выделить* n *главных направлений, взаимно-сопряженных относительно* $\omega(\mathbf{x},\mathbf{x})$. *Выбирая координатные векторы на этих пря-*

мых, можно привести форму $\omega(\mathbf{x},\mathbf{x})$ *и матрицу* $\|\mathbf{U}\|$ *к следующему виду*:

$$\omega(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \pm \sum \bar{x}^{(i)} x^{(i)},$$

$$\|\mathbf{U}\| = \left\| \begin{matrix} e^{i\alpha_1} & & & \\ & e^{i\alpha_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{i\alpha_n} \end{matrix} \right\|$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ — *действительные числа.*

§ 26. Мультивекторы.

1. На ряду с тензорами 2-го порядка в тензорном анализе большую роль играют мультивекторы. В § 6 мы уже рассматривали контравариантные мультивекторы. Контравариантный m-вектор определяет тот m-мерный параллелепипед, который может быть построен на m независимых векторах, являющихся базисом этого мультивектора. Мультивектор является антисимметрическим тензором m-го порядка; его составляющие могут быть выражены следующим образом через составляющие векторов его базиса $\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{v}}$:

$$v^{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_m} = m!\, \underset{1}{v}^{[\alpha_1} \underset{2}{v}^{\alpha_2} \ldots \underset{m}{v}^{\alpha_m]}.$$

Совершенно аналогично вводится ковариантный m-вектор, определяющий геометрический образ, который состоит из m независимых ковариантных векторов: $\overset{1}{\mathbf{u}}, \overset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \overset{m}{\mathbf{u}}$:

$$u_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_m} = m!\, \overset{1}{u}_{[\alpha_1} \overset{2}{u}_{\alpha_2} \ldots \overset{m}{u}_{\alpha_m]}.$$

2. Составляющие контравариантного мультивектора могут быть приняты за однородные координаты того m-мерного пучка $\{\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{v}}\}$, который определяется базисом этого мультивектора. В самом деле, в § 6 мы видели, что по составляющим мультивектора мы можем определить ту плоскость, в которой он лежит.

Аналогично этому, составляющие ковариантного m-вектора могут служить однородными координатами того $(n-m)$-мерного пучка E_{n-m}, который определяется пересечением начальных гиперплоскостей m ковариантных векторов, являющихся базисом этого мультивектора: если

$$u_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_m} = m!\, \overset{1}{u}_{[\alpha_1} \overset{2}{u}_{\alpha_2} \ldots \overset{m}{u}_{\alpha_m]},$$

то пучок E_{n-m} определяется уравнениями:

$$\overset{1}{\mathbf{u}}\mathbf{x} = 0, \quad \overset{2}{\mathbf{u}}\mathbf{x} = 0, \ldots \overset{m}{\mathbf{u}}\mathbf{x} = 0.$$

Однородные координаты плоского пучка векторов, являющиеся составляющими контравариантного или ковариантного мультивектора, называются к о о р д и н а т а м и P l ü c k e r'а этого пучка (некоторые авторы называют их координатами Grassmann'а).

3. Не каждый антисимметрический тензор является мультивектором. Например, в теории антисимметрического тензора 2-го порядка мы видели, что антисимметрический тензор ранга $= r$ может быть представлен в виде суммы $\frac{r}{2}$ бивекторов. Только в том случае, если $r = 2$, антисимметрический тензор 2-го порядка является бивектором.

Таким образом, возникает важный вопрос: какому условию должны удовлетворять составляющие антисимметрического тензора для того, чтобы этот тензор являлся мультивектором. Решению этой задачи посвящены следующие три раздела настоящего параграфа.

4. Возьмем контравариантный m-вектор $u^{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_m}$ и некоторый ковариантный тензор $(m-1)$-го порядка $b_{\beta_1\beta_2 \ldots \beta_{m-1}}$. Внутреннее произведение

(26,1) $$v^{\alpha} = u^{\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_{m-1}} b_{\alpha_1 \ldots \alpha_{m-1}}$$

определяет контравариантный вектор $\mathbf{v}$. Покажем, что о н п р и н а д л е ж и т к п у ч к у, о п р е д е л я е м о м у м у л ь т и в е к т о р о м $u_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$.

В самом деле, пусть $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}$ — базис мультивектора $u^{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_m}$. Выражение (26,1) может быть представлено в следующем виде:

(26,2) $$v^{\alpha} = (m-1)! \Big(\underset{1}{u}^{\alpha} \underset{2}{u}^{[\alpha_1} \ldots \underset{m}{u}^{\alpha_{m-1}]} b_{\alpha_1 \ldots \alpha_{m-1}} -$$

$$-\underset{2}{u}^{\alpha}\underset{1}{u}^{[\alpha_1}\dots\underset{m}{u}^{\alpha_{m-1}]}b_{\alpha_1\dots\alpha_{m-1}}+$$

$$+\underset{3}{u}^{\alpha}\underset{1}{u}^{[\alpha_1}\dots\underset{m}{u}^{\alpha_{m-1}]}b_{\alpha_1\dots\alpha_{m-1}}-\dots\Big).$$

Таким образом, вектор $\mathbf{v}$ линейно выражается через векторы $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \dots \underset{m}{\mathbf{u}}$.

Лемма 1. *Выбирая соответствующим образом тензор $b_{\alpha_1\dots\alpha_{m-1}}$ в формуле*

$$v^{\alpha}=u^{\alpha\alpha_1\dots\alpha_{m-1}}b_{\alpha_1\dots\alpha_{m-1}}, \tag{26,1}$$

мы можем получить любой из векторов, лежащих в плоскости мультивектора $u^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}$.

Доказательство. Пусть

$$u^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}=m!\,\underset{1}{u}^{[\alpha_1}\underset{2}{u}^{\alpha_2}\dots\underset{m}{u}^{\alpha_m]},$$

где $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \dots \underset{m}{\mathbf{u}}$ — базис рассматриваемого m-вектора. Рассмотрим пучок E_{m-1}, построенный на векторах $\underset{2}{\mathbf{u}}, \underset{3}{\mathbf{u}}, \dots \underset{m}{\mathbf{u}}$, и независимый от него пучок E_{n-m+1}, заключающий в себе вектор $\underset{1}{\mathbf{u}}$. Пусть этот последний пучок определяется $(m-1)$ независимыми уравнениями:

$$\overset{1}{\mathbf{a}}\mathbf{x}=0,\quad \overset{2}{\mathbf{a}}\mathbf{x}=0,\dots \overset{m-1}{\mathbf{a}}\,\mathbf{x}=0.$$

Подставим в формулу (26,1) в качестве тензора $b_{\alpha_1,\dots\alpha_{m-1}}$ произведение $\overset{1}{a}_{\alpha_1}\overset{2}{a}_{\alpha_2}\dots\overset{m-1}{a}_{\alpha_{m-1}}$. Так как

$$\overset{1}{\mathbf{a}}\underset{1}{\mathbf{u}}=0,\quad \overset{2}{\mathbf{a}}\underset{1}{\mathbf{u}}=0,\dots \overset{m-1}{\mathbf{a}}\,\underset{1}{\mathbf{u}}=0,$$

то все члены, кроме первого, в правой части формулы (26,2) превратятся в нуль.

Получаем

$$v^{\alpha}=(m-1)!\,\underset{1}{u}^{\alpha}\underset{2}{u}^{[\alpha_1}\dots\underset{m}{u}^{\alpha_{m-1}]}\overset{1}{a}_{\alpha_1}\overset{2}{a}_{\alpha_2}\dots\overset{m-1}{a}_{\alpha_{m-1}}=$$

$$=(m-1)!\,\underset{1}{u}^{\alpha}\underset{2}{u}^{[\alpha_1}\dots\underset{m}{u}^{\alpha_{m-1}]}\overset{1}{a}_{[\alpha_1}\overset{2}{a}_{\alpha_2}\dots\overset{m-1}{a}_{\alpha_{m-1}]}$$

Выражение $\underset{2}{u}^{[\alpha_1}\dots\underset{m}{u}^{\alpha_{m-1}]}\overset{1}{a}_{[\alpha_1}\dots\overset{m-1}{a}_{\alpha_{m-1}]}$ представляет собою скалярное произведение двух мультивекторов, из которых первый определяет пучок E_{m-1}, второй — E_{n-m+1}. Так как пучки E_{m-1} и E_{n-m+1} независимы, то, на основании § 8, 4, это произведение не равно нулю.

Таким образом мы получили вектор $\mathbf{v}$, совпадающий по направлению с вектором $\underset{1}{\mathbf{u}}$. Аналогично поступая, мы получим векторы, имеющие направления, $\underset{2}{\mathbf{u}}, \underset{3}{\mathbf{u}}, \dots, \underset{m}{\mathbf{u}}$. Так как каждый вектор пучка, в котором лежит мультивектор, может быть включен в базис этого мультивектора, то лемма, таким образом, доказана.

Определение векторов базиса заданного мультивектора может быть произведено очень просто. Для удобства рассуждений предположим, что $u^{123\dots m}\neq 0$. Это предположение нисколько не ограничивает общности дальнейших выводов, так как, изменяя нумерацию координатных осей, мы всегда можем приписать неравной нулю составляющей мультивектора индексы $1, 2, \dots m$.

Возьмем в формуле (26,1) в качестве тензора $b_{\alpha_1\dots\alpha_{m-1}}$ произведение $\overset{2}{e}_{\alpha_1}\overset{3}{e}_{\alpha_2}\dots\overset{m}{e}_{\alpha_{m-1}}$ и рассмотрим вектор

$$\underset{1}{v}^{i}=u^{i\alpha_1\dots\alpha_{m-1}}\overset{2}{e}_{\alpha_1}\overset{3}{e}_{\alpha_2}\dots\overset{m}{e}_{\alpha_{m-1}}.$$

Так как $\overset{i}{e}_k=\delta^i_k$, то

$$\underset{1}{v}^{i}=u^{i23\dots m}.$$

Затем полагаем $b_{\alpha_1\dots\alpha_{m-1}}=\overset{1}{e}_{\alpha_1}\overset{3}{e}_{\alpha_2}\dots\overset{m}{e}_{\alpha_{m-1}}$. Получаем вектор

$$\underset{2}{v}^{i}=u^{1i3\dots m}.$$

Аналогично рассматриваем векторы с составляющими:

$$\underset{3}{v}^{i}=u^{12i4\dots m},\quad \underset{4}{v}^{i}=u^{123i5\dots m},\dots \underset{m}{v}^{i}=u^{12\dots m-1,i}.$$

Построенные таким образом векторы все лежат в плоскости мультивектора и независимы между собой. В самом деле, минор

$$\begin{vmatrix} \underset{1}{v^1}, \dots \underset{1}{v^m} \\ \dots\dots \\ \underset{m}{v^1}, \dots \underset{m}{v^m} \end{vmatrix} = (u^{12\dots m})^m \neq 0.$$

Отметим, что построенные векторы $\underset{1}{\mathbf{v}}$, $\underset{2}{\mathbf{v}}, \dots \underset{m}{\mathbf{v}}$ зависят от выбора системы координат: рассмотренный нами процесс построения этих векторов даст вообще другие векторы той же самой плоскости мультивектора, если мы изменим координатную систему.

Полученные нами векторы $\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \dots \underset{m}{\mathbf{v}}$ остается только нормировать так, чтобы их знакопеременное произведение давало рассматриваемый мультивектор. Сделать это можно, например, следующим образом: 1-ый вектор оставляем без изменения, векторы $\underset{2}{\mathbf{v}}, \dots \underset{m}{\mathbf{v}}$ делим на $u^{12\dots m}$.

Рассмотренный процесс определения базиса мультивектора применяется, конечно, вполне аналогично и к ковариантным мультивекторам.

Пример 1. Рассмотрим контравариантный тривектор в 5-мерном пространстве, заданный составляющими:

$$v^{123} = 2,\ v^{124} = 0,\ v^{125} = 3,\ v^{134} = 0,\ v^{135} = -1.$$
$$v^{145} = 0,\ v^{234} = 2,\ v^{235} = 0,\ v^{245} = -3,\ v^{345} = 1.$$

Так как $v^{123} \neq 0$, то за составляющие вектора $\underset{1}{\mathbf{v}}$ принимаем следующие числа:

$$v^{123} = 2,\ v^{223} = 0,\ v^{323} = 0,\ v^{423} = 2,\ v^{523} = 0.$$

Вектор $\underset{2}{\mathbf{v}}$ определяется следующими составляющими:

$$v^{113} = 0,\ v^{123} = 2,\ v^{133} = 0,\ v^{143} = 0,\ v^{153} = 1.$$

Наконец, за составляющие $\underset{3}{\mathbf{v}}$ можно принять:

$$v^{121} = 0,\ v^{122} = 0,\ v^{123} = 2,\ v^{124} = 0,\ v^{125} = 3.$$

Таким образом, базис заданного мультивектора может быть определен следующими тремя векторами (векторы $\underset{2}{\mathbf{v}}$ и $\underset{3}{\mathbf{v}}$ делим на 2).

$$(2,\ 0,\ 0,\ 2,\ 0),\ \left(0,\ 1,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{2}\right),\ \left(0,\ 0,\ 1,\ 0,\ \frac{3}{2}\right).$$

Пример 2. Рассмотрим ковариантный бивектор в 5-мерном пространстве

$$u_{12} = 0,\ u_{13} = 0,\ u_{14} = 0,\ u_{15} = 0,\ u_{23} = 0,$$
$$u_{24} = 0,\ u_{25} = 0,\ u_{34} = -4,\ u_{35} = -1,\ u_{45} = -2,$$

Так как $u_{34} \neq 0$, то за составляющие вектора $\underset{1}{\mathbf{v}}$ можно принять следующие числа:

$$u_{14} = 0,\ u_{24} = 0,\ u_{34} = -4,\ u_{44} = 0,\ u_{54} = 2.$$

Вектор $\underset{2}{\mathbf{v}}$ может быть выбран следующим образом:

$$u_{31} = 0,\ u_{32} = 0,\ u_{33} = 0,\ u_{34} = -4,\ u_{35} = -1.$$

Деля вектор $\underset{2}{\mathbf{v}}$ на -4, получаем базис:

$$(0,\ 0,\ -4,\ 0,\ 2),\ \left(0,\ 0,\ 0,\ 1,\ \frac{1}{4}\right).$$

Задача 1. Определить базис ковариантного тривектора в 5-мерном пространстве

$$u_{123} = -5,\quad u_{124} = 5,\quad u_{125} = -3,\quad u_{134} = 15,\quad u_{135} = -4,$$
$$u_{145} = -5,\quad u_{234} = 10,\quad u_{235} = -7,\quad u_{245} = 1,\quad u_{345} = 13.$$

Ответ. $(-5,\ 0,\ 0,\ 10,\ -7),\ \left(0,\ 1,\ 0,\ 3,\ -\frac{4}{5}\right),\ \left(0,\ 0,\ 1,\ -1,\ \frac{3}{5}\right).$

5. Предыдущее исследование показывает, что для определения мультивектора достаточно задать: 1) какую-нибудь отличную от нуля составляющую, например, $v^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}$, 2) все те составляющие, которые отличаются от $v^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}$ каким-нибудь индексом:

$$v^{\beta_1\alpha_2\dots\alpha_m},\ v^{\beta_2\alpha_2\dots\alpha_m}, \dots v^{\beta_{n-m}\alpha_2\dots\alpha_m},$$
$$v^{\alpha_1\beta_1\alpha_3\dots\alpha_m},\ v^{\alpha_1\beta_2\alpha_3\dots\alpha_m}, \dots v^{\alpha_1\beta_{n-m}\alpha_3\dots\alpha_m},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$v^{\alpha_1\dots\alpha_{m-1}\beta_1},\ v^{\alpha_1\dots\alpha_{m-1}\beta_2}, \dots v^{\alpha_1\dots\alpha_{m-1}\beta_{n-m}}.$$

Здесь $\beta_1\beta_2, \dots \beta_{n-m}$ обозначают те числа, которые входят в ряд натуральных чисел от 1 до n и отличны от индексов $\alpha_1,\ \alpha_2, \dots \alpha_m$. Эти $(n-m)m+1$ составляющих могут быть заданы по произволу. Все остальные $\binom{n}{m} - (n-m)m - 1$ составляющих могут быть уже легко вычислены, как только будет определен базис этого мультивектора.

Таким образом, *мультивектор определяется заданием $(n-m)m+1$ чисел.*

6. Перейдем теперь к выводу тех зависимостей, которые связывают между собой составляющие мультивектора.

Выведем сначала условие, что контравариантный вектор $\mathbf{v}$ лежит в плоскости m-вектора $u^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}$. Если $\{\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \dots \underset{m}{\mathbf{u}}\}$ —

базис этого мультивектора, то векторы $\mathbf{v}, \underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}$ — зависимы Следовательно,

$$v^{[\alpha} \underset{1}{u}^{\alpha_1} \ldots \underset{m}{u}^{\alpha_m]} = 0,$$

или

$$v^{[\alpha} u^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]} = 0.$$

Более подробно эти уравнения запишутся в следующем виде:

$$v^\alpha u^{\alpha_1\ldots\alpha_m} - v^{\alpha_1} u^{\alpha\alpha_2\ldots\alpha_m} + v^{\alpha_2} u^{\alpha\alpha_1\alpha_3\ldots\alpha_m} - v^{\alpha_3} u^{\alpha\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m} + \ldots + (-1)^m v^{\alpha_m} u^{\alpha\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m-1}} = 0.$$

Это — формула (6,1), которую мы получили в § 6.

Рассмотрим теперь контравариантный m-вектор $u^{\alpha_1\ldots\alpha_m}$. Умножая его внутренне на некоторый ковариантный тензор $(m-1)$-го порядка $b_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m-1}}$, получаем контравариантный вектор

$$v^{\alpha_m} = b_{\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}} u^{\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}\alpha_m},$$

лежащий в плоскости мультивектора $u^{\alpha_1\ldots\alpha_m}$. Следовательно,

$$b_{\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}} u^{\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}[\alpha_m} u^{\beta_1\ldots\beta_m]} = 0.$$

Так как $b_{\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}}$ — произвольный тензор, то отсюда получаем уравнения:

(26,3) $$u^{\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}[\alpha_m} u^{\beta_1\ldots\beta_m]} = 0.$$

Этим уравнениям можно придать следующий вид:

(26,4) $$u^{\alpha_1\ldots\alpha_m} u^{\beta_1\ldots\beta_m} - m\, u^{\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}[\beta_1} u^{|\alpha_m|\beta_2\ldots\beta_m]} = 0.$$

Покажем, что соотношения (26,3) являются не только необходимыми, но и достаточными для того, чтобы антисимметрический тензор $u^{\alpha_1\ldots\alpha_m}$ представлял собою мультивектор.

Теорема 1. *Антисимметрический тензор $u^{\alpha_1\ldots\alpha_m}$ тогда и только тогда является m-вектором, если его составляющие удовлетворяют уравнениям:*

(26,3) $$u^{\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}[\alpha_m} u^{\beta_1\ldots\beta_m]} = 0.$$

Доказательство. Необходимость уравнений (26,3) уже доказана выше. Доказательство достаточности проведем методом полной индукции. Для $m = 1$ положение очевидно. Предположим, что оно справедливо для $m = k - 1$: если составляющие

антисимметрического тензора $v^{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}}$ удовлетворяют соотношениям

(26,5) $$v^{\alpha_1\ldots[\alpha_{k-1}} v^{\beta_1\ldots\beta_{k-1}]} = 0,$$

то тензор этот представляет собой мультивектор. Докажем теперь справедливость положения для $m = k$.

Рассмотрим антисимметрический тензор k-го порядка $u^{\alpha_1\ldots\alpha_k}$, удовлетворяющий соотношениям (26,3). Берем некоторый ковариантный вектор v_α и образуем антисимметрический тензор $(k-1)$-го порядка.

(26,6) $$v^{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}} = v_\alpha u^{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}}.$$

Покажем, что этот тензор удовлетворяет соотношениям (26,5). В самом деле,

$$v^{\alpha_1\ldots[\alpha_{k-1}} v^{\beta_1\ldots\beta_{k-1}]} = v_\alpha v_\beta u^{\alpha\alpha_1\ldots[\alpha_{k-1}} u^{|\beta|\beta_1\ldots\beta_{k-1}]}.$$

На основании уравнений (26,4) имеем

$$v^{\alpha_1\ldots[\alpha_{k-1}} v^{\beta_1\ldots\beta_{k-1}]} = \frac{1}{k} v_\alpha v_\beta u^{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_{k-2}\beta} u^{\alpha_{k-1}\beta_1\ldots\beta_{k-1}} = 0.$$

Таким образом, тензор $v^{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}}$, удовлетворяя уравнениям (26,5), является, согласно предположению, мультивектором:

(26,7) $$v^{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}} = (k-1)!\, \underset{1}{v}^{[\alpha_1} \cdots \underset{k-1}{v}^{\alpha_{k-1}]}.$$

Теперь рассмотрим вектор

(26,8) $$w^\alpha = w_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}} u^{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}\alpha}$$

где $w_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}}$ — произвольно выбранный тензор $(k-1)$-го порядка. Образуем тензор

(26,9) $$w^{[\alpha_1} v^{\alpha_2\ldots\alpha_k]} = (k-1)!\, w^{[\alpha_1} \underset{1}{v}^{\alpha_2} \ldots \underset{k-1}{v}^{\alpha_k]}.$$

Этот тензор может быть выражен через $u_{\alpha_1\ldots\alpha_k}$: подставляя выражение для w^α из формулы (26,8) и выражение для $v^{\alpha_2\ldots\alpha_k}$ из (26,6), имеем

$$w^{[\alpha_1} v^{\alpha_2\ldots\alpha_k]} = u^{\sigma_1\ldots\sigma_{k-1}[\alpha_1} u^{|\sigma|\alpha_2\ldots\alpha_k]} w_{\sigma_1\ldots\sigma_{k-1}} v_\sigma.$$

На основании соотношений (26,4) получаем:

$$w^{[\alpha_1} v^{\alpha_2\ldots\alpha_k]} = \frac{1}{k} u^{\sigma_1\ldots\sigma_{k-1}\sigma} u^{\alpha_1\ldots\alpha_k} w_{\sigma_1\ldots\sigma_{k-1}} v_\sigma.$$

Тензор $w_{\sigma_1 \dots \sigma_{k-1}}$ и вектор v_σ могут быть всегда выбраны так, чтобы $u^{\sigma_1 \dots \sigma_{k-1}\sigma} w_{\sigma_1 \dots \sigma_{k-1}} v_\sigma \neq 0$. Обозначая через ω:

$$\omega = u^{\sigma_1 \dots \sigma_{k-1}\sigma} w_{\sigma_1 \dots \sigma_{k-1}} v_\sigma,$$

имеем:

$$u^{\alpha_1 \dots \alpha_k} = \frac{k}{\omega} w^{[\alpha_1} v^{\alpha_2 \dots \alpha_k]}.$$

Применяя формулу (26,9), получаем:

$$u^{\alpha_1 \dots \alpha_k} = \frac{k!}{\omega} w^{[\alpha_1} \underset{1}{v}^{\alpha_2} \dots \underset{k-1}{v}^{\alpha_k]}.$$

Таким образом, действительно антисимметрический тензор $u^{\alpha_1 \dots \alpha_k}$ является мультивектором.

Среди соотношений (26,3) независимых только

$$\binom{n}{m} - (n-m)m - 1,$$

так как мы видели выше, что у m-вектора $(n-m)m+1$ составляющих могут быть заданы по произволу.

Отметим наиболее простые из соотношений (26,3). Если положить

$$\beta_1 = \alpha_1,\ \beta_2 = \alpha_2, \dots \beta_{m-2} = \alpha_{m-2},$$
$$\alpha_{m-1} = \nu,\ \alpha_m = \nu_1,\ \beta_{m-1} = \nu_2,\ \beta_m = \nu_3,$$

то мы получим

$$u^{\alpha_1 \dots \alpha_{m-2}\nu\nu_1} u^{\alpha_1 \dots \alpha_{m-2}\nu_2\nu_3} +$$
$$+ (-1)^{m-1} u^{\alpha_1 \dots \alpha_{m-2}\nu\nu_2} u^{\nu_1\alpha_1 \dots \alpha_{m-2}\nu_3} +$$
$$+ (-1)^m u^{\alpha_1 \dots \alpha_{m-2}\nu\nu_3} u^{\nu_1\alpha_1 \dots \alpha_{m-2}\nu_2} = 0.$$

Переставляя индексы, приходим к уравнениям:

$$u^{\alpha_1 \dots \alpha_{m-2}\nu\nu_1} u^{\alpha_1 \dots \alpha_{m-2}\nu_2\nu_3} +$$
$$+ u^{\alpha_1 \dots \alpha_{m-2}\nu\nu_2} u^{\alpha_1 \dots \alpha_{m-2}\nu_3\nu_1} + \tag{26,10}$$
$$+ u^{\alpha_1 \dots \alpha_{m-2}\nu\nu_3} u^{\alpha_1 \dots \alpha_{m-2}\nu_1\nu_2} = 0.$$

Задача 2. Выписать соотношения (26,3) связывающие между собо составляющие тривектора в 5-мерном пространстве.

Ответ.

$$v^{123}v^{145} + v^{124}v^{153} + v^{125}v^{134} = 0,$$
$$v^{234}v^{215} + v^{231}v^{254} + v^{235}v^{241} = 0,$$
$$v^{345}v^{312} + v^{341}v^{325} + v^{342}v^{351} = 0.$$

Остальные соотношения являются следствием этих трех.

Задача 3. Показать, что условия (26,3) для бив ктора сводятся к тому, чтобы аггрегаты Pfaff'а

$$P_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} = 3a_{[\alpha_1\alpha_2} a_{\alpha_3\alpha_4]} = a_{\alpha_1\alpha_2}a_{\alpha_3\alpha_4} + a_{\alpha_1\alpha_3}a_{\alpha_4\alpha_2} + a_{\alpha_1\alpha_4}a_{\alpha_2\alpha_3}$$

были равны нулю, т. е. чтобы ранг тензора $a_{\alpha\beta}$ был не выше 2.

З дача 4. Выписать независимые соотношения между составляющими бивектора u_{ik} в э-мерном пространстве и показать, что остальные могут быть получены из них.

Ответ. Независимых соотношений три, например

$$u_{12}u_{34} + u_{13}u_{42} + u_{14}u_{23} = 0$$
$$u_{13}u_{45} + u_{14}u_{53} + u_{15}u_{34} = 0$$
$$u_{23}u_{45} + u_{24}u_{53} + u_{25}u_{34} = 0.$$

Задача 5. Показать, что антисимметрические тензоры n-го и $(n-1)$-го порядка всегда являются мульти екторами.

Задача 6. Пусть у антисимметрического тензора $(n-1)$-го порядка $u_{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{n-1}}$ составляющая $u_{12 \dots n-1}$ не равн нулю. Показать, что за базис этого мультивектора можно принять следующие $(n-1)$ векторов (составляющую $u_{12 \dots n-1}$ обозначим через α).

$$\overset{1}{\mathbf{u}}\ (\alpha,\ 0,\ 0, \dots 0,\ u_{n23 \dots n-1})$$
$$\overset{2}{\mathbf{u}}\ \left(0,\ 1,\ 0, \dots 0,\ \frac{1}{\alpha} u_{1n3 \dots n-1}\right)$$
$$\overset{3}{\mathbf{u}}\ \left(0,\ 0,\ 1, \dots 0,\ \frac{1}{\alpha} u_{12n \dots n-1}\right)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\overset{n-1}{\mathbf{u}}\ \left(0,\ 0,\ 0, \dots, 1,\ \frac{1}{\alpha} u_{12 \dots n-2,\, n}\right)$$

Задача 7. Кроме квадратичных соотношений (26,3) между координатами мульнивектора можно получить и более сложные. Вывести соотношения Vahlen'a [1]: пусть $u_{123 \dots m} \neq 0$; тогда

$$u_{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_m} (u_{12 \dots m})^{m-1} = \begin{vmatrix} u_{\alpha_1 23 \dots m} & u_{1\alpha_1 \dots m} & \cdots & u_{123 \dots \alpha_1} \\ u_{\alpha_2 23 \dots m} & u_{1\alpha_2 3 \dots m} & \cdots & u_{123 \dots \alpha_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{\alpha_m 23 \dots m} & u_{1\alpha_m 3 \dots m} & \cdots & u_{123 \dots \alpha_m} \end{vmatrix}.$$

Указание. Воспользоваться базисом мультивектора, указанным в разделе 4 настоящего параграфа.

8. Теперь мы перейдем к решению задачи об определении степени параллелизма двух плоских пучков, в которых лежат данные мультивекторы.

[1] Journ. f. Math. B. 112 (1893), S. 306.

Начнем с наиболее простого случая полного параллелизма. Пусть пучки E_r, E_s $(r \leqslant s)$ полностью параллельны (все векторы 1-го пучка лежат во втором). Пусть E_r задается контравариантным мультивектором $u^{\alpha_1\dots\alpha_r}$, E_s — мультивектором $v^{\beta_1\dots\beta_s}$. Докажем теорему:

Теорема 2. *Две плоскости E_r и E_s $(r \leqslant s)$, в которых лежат мультивекторы $u^{\alpha_1\dots\alpha_r}$ и $v^{\beta_1\dots\beta_s}$, тогда и только тогда полностью параллельны, если*

$$u^{\alpha_1\dots[\alpha_r}v^{\beta_1\dots\beta_s]} = 0. \tag{26,11}$$

Доказательство. Образуем вектор

$$u^{\alpha} = a_{\alpha_1\dots\alpha_{r-1}}u^{\alpha_1\dots\alpha_{r-1}\alpha},$$

лежащий в E_r. Изменяя тензор $a_{\alpha_1\dots\alpha_{r-1}}$, мы можем, на основании леммы 1, получить r независимых векторов, принадлежащих к E_r. Условие, что $\mathbf{u}$ лежит в E_s, выражается соотношениями:

$$u^{[\alpha}v^{\beta_1\dots\beta_s]} = 0,$$

т. е. из (26,11) следует, что E_r и E_s полностью параллельны. Обратно, если любой вектор плоскости E_r принадлежит к E_s, то

$$a_{\alpha_1\dots\alpha_{r-1}}u^{\alpha_1\dots\alpha_{r-1}[\alpha}v^{\beta_1\dots\beta_s]} = 0.$$

В виду произвольности тензора $a_{\alpha_1\dots\alpha_{r-1}}$, получаем (26,11).

Задача 8. Доказать, что две r-мерных плоскости, в которых лежат мультивекторы $u^{\alpha_1\dots\alpha_r}$ и $v^{\alpha_1\dots\alpha_r}$, тогда и только тогда полностью параллельны, если эти мультивекторы имеют попарно пропорциональные составляющие:

$$\frac{u^{\alpha_1\dots\alpha_r}}{v^{\alpha_1\dots\alpha_r}} = C.$$

9. Займемся теперь о щим случаем,— огда степень параллельности выражается др бным числом.

Докажем предварительно следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть $u^{\alpha_1\dots\alpha_m}$ — контравариантный m-вектор. Выбирая соответствующим образом тензор $a_{\sigma_1\dots\sigma_{m-k}}$ в формуле:*

$$v^{\alpha_1\dots\alpha_k} = u^{\alpha_1\dots\alpha_k\sigma_1\dots\sigma_{m-k}}a_{\sigma_1\dots\sigma_{m-k}}, \tag{26,12}$$

мы можем получить любой контравариантный k-вектор, лежащий в плоскости мультивектора $u^{\alpha_1\dots\alpha_m}$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 1. Пусть $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \dots \underset{m}{\mathbf{u}}$ — базис m-вектора $u^{\alpha_1\dots\alpha_m}$:

$$u^{\alpha_1\dots\alpha_m} = m!\,\underset{1}{u}^{[\alpha_1}\dots\underset{m}{u}^{\alpha_m]}.$$

Рассмотрим пучок E_{m-k}, построенный на векторах $\underset{k+1}{\mathbf{u}}, \underset{k+2}{\mathbf{u}}, \dots \underset{m}{\mathbf{u}}$, и независимый от него пучок E_{n-m+k}, заключающий в себе векторы $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \dots \underset{k}{\mathbf{u}}$. Пусть этот последний пучок определяется системой $(m-k)$ независимых уравнений:

$$\overset{1}{\mathbf{a}}\mathbf{x} = 0,\ \overset{2}{\mathbf{a}}\mathbf{x} = 0, \dots \overset{m-k}{\mathbf{a}}\mathbf{x} = 0.$$

Следовательно,

$$\overset{i}{\mathbf{a}}\underset{j}{\mathbf{u}} = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \dots m-k \\ j = 1, \dots k \end{pmatrix}. \tag{26,13}$$

Подставим в формулу (26,12) в качестве тензора $a_{\sigma_1\dots\sigma_{m-k}}$ произведение $\overset{1}{a}_{\sigma_1}\overset{2}{a}_{\sigma_2}\dots\overset{m-k}{a}_{\sigma_{m-k}}$. Получаем

$$v^{\alpha_1\dots\alpha_k} = u^{\alpha_1\dots\alpha_k\sigma_1\dots\sigma_{m-k}}\overset{1}{a}_{\sigma_1}\overset{2}{a}_{\sigma_2}\dots\overset{m-k}{a}_{\sigma_{m-k}} =$$

$$= \begin{vmatrix} \underset{1}{u}^{\alpha_1} \dots \underset{1}{u}^{\alpha_k} & \underset{1}{u}^{\sigma_1} \dots \underset{1}{u}^{\sigma_{m-k}} \\ \underset{2}{u}^{\alpha_1} \dots \underset{2}{u}^{\alpha_k} & \underset{2}{u}^{\sigma_1} \dots \underset{2}{u}^{\sigma_{m-k}} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \underset{m}{u}^{\alpha_1} \dots \underset{m}{u}^{\alpha_k} & \underset{m}{u}^{\sigma_1} \dots \underset{m}{u}^{\sigma_{m-k}} \end{vmatrix} \overset{1}{a}_{\sigma_1}\overset{2}{a}_{\sigma_2}\dots\overset{m-k}{a}_{\sigma_{m-k}}.$$

Разложим теперь входящие в эту формулу определители по минорам первых k колонн. В виду соотношений (26,13) из всех членов этой суммы останутся только те, которые содержат левый верхний минор k-го порядка. Таким образом,

$$v^{\alpha_1\dots\alpha_k} =$$

$$= k!\,(m-k)!\,\underset{1}{u}^{[\alpha_1}\dots\underset{k}{u}^{\alpha_k]}\,\underset{k+1}{u}^{[\sigma_1}\dots\underset{m}{u}^{\sigma_{m-k}]}\overset{1}{a}_{\sigma_1}\overset{2}{a}_{\sigma_2}\dots\overset{m-k}{a}_{\sigma_{m-k}} =$$

$$= k!\,(m-k)!\,\underset{1}{u}^{[\alpha_1}\dots\underset{k}{u}^{\alpha_k]}\,\underset{k+1}{u}^{[\sigma_1}\dots\underset{m}{u}^{\sigma_{m-k}]}\overset{1}{a}_{[\sigma_1}\overset{2}{a}_{\sigma_2}\dots\overset{m-k}{a}_{\sigma_{m-k}]}.$$

В этой формуле мы имеем скалярное произведение двух $(m-k)$-векторов:

$$\underset{k+1}{u}^{[\sigma_1}\dots\underset{m}{u}^{\sigma_{m-k}]}\overset{1}{a}_{[\sigma_1}\overset{2}{a}_{\sigma_2}\dots\overset{m-k}{a}_{\sigma_{m-k}]}.$$

Оно не равно нулю, так как пучки E_{m-k} и E_{n-m+k} независимы (см. § 8,4). Таким образом,

$$v^{a_1\dots a_k}=A\underset{1}{u}^{[a_1}\dots\underset{k}{u}^{a_k]},$$

где A — некоторое число, не равное нулю. Следовательно, выбирая так, как было указано, тензор $a_{\sigma_1\dots\sigma_{m-k}}$, мы получили в формуле (26,12) k-вектор, построенный на базисе $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \dots \underset{k}{\mathbf{u}}$. Совершенно таким же образом мы можем получить любой k-вектор пучка, в котором лежит m-вектор $u^{a_1\dots a_m}$.

Обратимся теперь к выводу критерия, определяющего степень параллельности двух пучков. Если мы имеем пучки E_r и E_s $(r\leqslant s)$ с базисами $\{\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \dots \underset{r}{\mathbf{u}}\}$ и $\{\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \dots \underset{s}{\mathbf{v}}\}$, то степень параллельности, как мы уже разбирали в § 5, выражается при помощи ранга системы векторов $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \dots \underset{r}{\mathbf{u}}, \underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \dots \underset{s}{\mathbf{v}}$, т. е. ранга матрицы:

$$(26,14)\qquad \begin{Vmatrix} \underset{1}{u}^{(1)} & \underset{1}{u}^{(2)} & \dots & \underset{1}{u}^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underset{r}{u}^{(1)} & \underset{r}{u}^{(2)} & \dots & \underset{r}{u}^{(n)} \\ \underset{1}{v}^{(1)} & \underset{1}{v}^{(2)} & \dots & \underset{1}{v}^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underset{s}{v}^{(1)} & \underset{s}{v}^{(2)} & \dots & \underset{s}{v}^{(n)} \end{Vmatrix}.$$

Если этот ранг равен ϱ, то E_r и E_s имеют $r+s-\varrho$ общих независимых направлений, т. е. степень параллельности равна $\frac{r+s-\varrho}{r}$.

Докажем теперь теорему:

Теорема 3. *Пучки E_r и E_s $(r\leqslant s)$, в которых лежат мультивекторы $u^{a_1\dots a_r}$ и $v^{\beta_1\dots\beta_s}$, тогда и только тогда имеют степень параллельности, равную $\frac{p}{r}$, если*

$$(26,15)\qquad u^{a_1\dots a_{r-u}[\beta_1\dots\beta_u}v^{\gamma_1\dots\gamma_s]}=\begin{cases}\neq 0 & \textit{для}\ u=r-p\\ =0 & \textit{для}\ u=r-p+1.\end{cases}$$

Доказательство. Если соотношения (26,15) имеют место, то, умножая их внутренне на некоторый тензор $a_{a_1\dots a_{r-u}}$, получаем

$$a_{a_1\dots a_{r-u}}u^{a_1\dots a_{r-u}[\beta_1\dots\beta_u}v^{\gamma_1\dots\gamma_s]}=$$

$$(26,16)\qquad =\begin{cases}\neq 0 & \text{для}\ u=r-p\\ =0 & \text{для}\ u=r-p+1.\end{cases}$$

На основании доказанной выше леммы, мы можем, выбирая соответствующим образом тензор $a_{a_1\dots a_{r-u}}$, получить:

$$a_{a_1\dots a_{r-u}}u^{a_1\dots a_{r-u}\beta_1\dots\beta_u}=\underset{i_1}{u}^{[\beta_1}\dots\underset{i_u}{u}^{\beta_u]},$$

где $\underset{i_1}{\mathbf{u}}, \underset{i_2}{\mathbf{u}}, \dots \underset{i_u}{\mathbf{u}}$ — любые u векторов из базиса $\{\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \dots \underset{r}{\mathbf{u}}\}$. Таким образом, соотношение (26,16) имеет вид:

$$\underset{i_1}{u}^{[\beta_1}\dots\underset{i_u}{u}^{\beta_u}\underset{1}{v}^{\gamma_1}\dots\underset{s}{v}^{\gamma_s]}=\begin{cases}\neq 0 & \text{для}\ u=r-p\\ =0 & \text{для}\ u=r-p+1.\end{cases}$$

Следовательно, ранг матрицы (26,14) равен $r+s-p$, т. е. степень параллельности выражается дробью $\frac{p}{r}$.

Обратно, пусть E_r и E_s $\frac{p}{r}$-параллельны. Тогда, каков бы ни был тензор $a_{a_1\dots a_{r-u}}$, выражение

$$a_{a_1\dots a_{r-u}}u^{a_1\dots a_{r-u}[\beta_1\dots\beta_u}v^{\gamma_1\dots\gamma_s]}$$

можно представить в виде суммы, каждый член которой содержит минор $(u+s)$-го порядка матрицы (26,13), включающий в себя элементы s последних строк этой матрицы. Так как ранг матрицы (26,13) равен $r+s-p$, то

$$a_{a_1\dots a_{r-u}}u^{a_1\dots a_{r-u}[\beta_1\dots\beta_u}v^{\gamma_1\dots\gamma_s]}=0$$

при $u=r-p+1$. В виду произвольности тензора $a_{a_1\dots a_{r-u}}$, получаем: $u^{\alpha_1 \ldots \alpha_{r-u}[\beta_1 \ldots \beta_u} v^{\gamma_1 \ldots \gamma_s]} = 0$, для $u = r - p + 1$.

Но в то же время выражение

$$u^{\alpha_1 \ldots \alpha_{r-u}[\beta_1 \ldots \beta_u} v^{\gamma_1 \ldots \gamma_s]} \tag{26,17}$$

не может быть равным нулю при $u = r - p$, так как тогда, на основании доказанной выше 1-ой половины теоремы, степень параллельности была бы больше $\frac{p}{r}$.

Задача 9. Показать, что условие $\frac{1}{2}$-параллельности двух бивекторов $u^{\alpha\beta}$, $v^{\alpha\beta}$ выражается следующим образом:

1) $u^{\alpha\beta}$ и $v^{\alpha\beta}$ не пропорциональны,

2) $u^{\alpha_1\alpha_2} v^{\alpha_3\alpha_4} + u^{\alpha_2\alpha_3} v^{\alpha_1\alpha_4} + u^{\alpha_3\alpha_1} v^{\alpha_2\alpha_4} + v^{\alpha_1\alpha_2} u^{\alpha_3\alpha_4} + v^{\alpha_2\alpha_3} u^{\alpha_1\alpha_4} + v^{\alpha_3\alpha_1} u^{\alpha_2\alpha_4} = 0.$

Задача 10. Если мультивекторы $u^{\alpha_1 \ldots \alpha_r}$ и $v^{\beta_1 \ldots \beta_s}$ связаны соотношением

$$u^{\alpha_1 \ldots [\alpha_r} v^{\beta_1 \ldots \beta_s]} = 0 \tag{a}$$

и $r > s$, то, по крайней мере, один из этих мультивекторов равен нулю

Указание. Из соотношения (a) вытекает, что каждый вектор базиса мультивектора $u^{\alpha_1 \ldots \alpha_r}$ лежит в плоскости мультивектора $v^{\beta_1 \ldots \beta_s}$.

10. Мы уже говорили, что m-мерный пучок может быть задан или составляющими контравариантного m-вектора или составляющими ковариантного $(n-m)$-вектора. Составляющие этих мультивекторов могут быть рассматриваемы, как однородные координаты, определяющие этот пучок.

Пусть пучки E_{n-r} и E_{n-s} заданы при помощи двух ковариантных мультивекторов, $u_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}$ и $v_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}$. Определим степень параллельности этих пучков. Если

$$u_{\alpha_1 \ldots \alpha_r} = r!\, \overset{1}{u}_{[\alpha_1} \overset{2}{u}_{\alpha_2} \ldots \overset{r}{u}_{\alpha_r]},$$

$$v_{\alpha_1 \ldots \alpha_s} = s!\, \overset{1}{v}_{[\alpha_1} \overset{2}{v}_{\alpha_2} \ldots \overset{s}{v}_{\alpha_s]}$$

то пучок E_{n-r} определяется системой линейных уравнений:

$$\overset{1}{\mathbf{u}}\mathbf{x} = 0,\ \overset{2}{\mathbf{u}}\mathbf{x} = 0, \ldots \overset{r}{\mathbf{u}}\mathbf{x} = 0, \tag{26,18}$$

пучок E_{n-s} — системой уравнений:

$$\overset{1}{\mathbf{v}}\mathbf{x} = 0,\ \overset{2}{\mathbf{v}}\mathbf{x} = 0, \ldots \overset{s}{\mathbf{v}}\mathbf{x} = 0. \tag{26,19}$$

Если ранг системы ковариантных векторов $\overset{1}{\mathbf{u}}, \ldots \overset{r}{\mathbf{u}},\ \overset{1}{\mathbf{v}}, \ldots \overset{s}{\mathbf{v}}$ равен ϱ, то уравнения (26,18) и (26,19) имеют $n-\varrho$ независимых общих решений. Следовательно, при $r \leqslant s$ степень параллельности пучков E_{n-r} и E_{n-s} равна $\frac{n-\varrho}{n-s}$.

Ранг матрицы

$$\left\| \begin{matrix} \overset{1}{u}_1 & \overset{1}{u}_2 & \ldots & \overset{1}{u}_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \overset{r}{u}_1 & \overset{r}{u}_2 & \ldots & \overset{r}{u}_n \\ \overset{1}{v}_1 & \overset{1}{v}_2 & \ldots & \overset{1}{v}_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \overset{s}{v}_1 & \overset{s}{v}_2 & \ldots & \overset{s}{v}_n \end{matrix} \right\|$$

оценивается при помощи составляющих мультивекторов $u_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}$ и $v_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}$ совершенно так же, как это мы делали выше для контравариантных мультивекторов. Таким образом, получаем теорему:

Теорема 4. *Пучки E_{n-r} и E_{n-s} $(r \leqslant s)$, определяемые ковариантными мультивекторами $u_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}$ и $v_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}$, тогда и только тогда имеют степень параллельности, равную $\frac{p}{n-s}$, если*

$$u_{\alpha_1 \ldots \alpha_{r-u}[\beta_1 \ldots \beta_u} v_{\gamma_1 \ldots \gamma_s]} \begin{cases} \neq 0 & \text{для } u = n - s - p, \\ = 0 & \text{для } u = n - s - p + 1. \end{cases}$$

11. Рассмотрим теперь случай, когда один пучок задан контравариантным мультивектором, другой — ковариантным.

Пусть пучок E_r определен своим базисом $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{r}{\mathbf{u}}$, пучок E_{n-s} — системой уравнений

$$\overset{1}{\mathbf{a}}\mathbf{x} = 0,\ \overset{2}{\mathbf{a}}\mathbf{x} = 0, \ldots \overset{s}{\mathbf{a}}\mathbf{x} = 0.$$

Если вектор

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \underset{1}{\mathbf{u}} + \lambda_2 \underset{2}{\mathbf{u}} + \ldots + \lambda_r \underset{r}{\mathbf{u}},$$

лежащий в E_r, принадлежит также E_{n-s}, то коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r$ должны удовлетворять системе уравнений:

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1\overset{1}{a}\underset{1}{u}+\lambda_2\overset{1}{a}\underset{2}{u}+\ldots+\lambda_r\overset{1}{a}\underset{r}{u}=0,\\
&\lambda_1\overset{2}{a}\underset{1}{u}+\lambda_2\overset{2}{a}\underset{2}{u}+\ldots+\lambda_r\overset{2}{a}\underset{r}{u}=0,\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&\lambda_1\overset{s}{a}\underset{1}{u}+\lambda_2\overset{s}{a}\underset{2}{u}+\ldots+\lambda_r\overset{s}{a}\underset{r}{u}=0.
\end{aligned}
$$

Если обозначить через ϱ ранг матрицы

$$
(26{,}20)\qquad
\left\|\begin{matrix}
\overset{1}{a}\underset{1}{u} & \overset{1}{a}\underset{2}{u} & \ldots\ldots & \overset{1}{a}\underset{r}{u}\\
\overset{2}{a}\underset{1}{u} & \overset{2}{a}\underset{2}{u} & \ldots\ldots & \overset{2}{a}\underset{r}{u}\\
\cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\\
\overset{s}{a}\underset{1}{u} & \overset{s}{a}\underset{2}{u} & \ldots\ldots & \overset{s}{a}\underset{r}{u}
\end{matrix}\right\|,
$$

то число независимых векторов, лежащих в E_r и E_{n-s}, равно $p=r-\varrho$. Следовательно, если $r\leqslant n-s$, то степень параллельности равна $\frac{r-\varrho}{r}$, если же $r\geqslant n-s$, то степень параллельности выражается дробью $\frac{r-\varrho}{n-s}$.

Обозначим контравариантный мультивектор, определяющий E_r, через $u^{\alpha_1\ldots\alpha_r}$, ковариантный мультивектор, задающий пучок E_{n-s}, — через $v_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$. На основании леммы 2, выбором тензора $a_{\alpha_1\ldots\alpha_{r-m}}$ мы можем получить любой m-вектор, лежащий в E_r:

$$
a_{\alpha_1\ldots\alpha_{r-m}}u^{\alpha_1\ldots\alpha_{r-m}\beta_1\ldots\beta_m}=m!\,\underset{i_1}{u}^{[\beta_1}\underset{i_2}{u}^{\beta_2}\ldots\underset{i_m}{u}^{\beta_m]}.
$$

Аналогично мы имеем для мультивектора $v_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$:

$$
b^{\alpha_1\ldots\alpha_{s-m}}v_{\beta_1\ldots\beta_m\alpha_1\ldots\alpha_{s-m}}=m!\,\overset{k_1}{a}_{[\beta_1}\overset{k_2}{a}_{\beta_2}\ldots\overset{k_m}{a}_{\beta_m]}.
$$

Следовательно, внутренние произведения

$$
a_{\alpha_1\ldots\alpha_{r-m}}u^{\alpha_1\ldots\alpha_{r-m}\beta_1\ldots\beta_m}v_{\beta_1\ldots\beta_m\gamma_1\ldots\gamma_{s-m}}b^{\gamma_1\ldots\gamma_{s-m}}=
$$

$$
=(m!)^2\,\underset{i_1}{u}^{[\beta_1}\underset{i_2}{u}^{\beta_2}\ldots\underset{i_m}{u}^{\beta_m]}\overset{k_1}{a}_{[\beta_1}\overset{k_2}{a}_{\beta_2}\ldots\overset{k_m}{a}_{\beta_m]}=m!\left|\begin{matrix}
\overset{k_1}{a}\underset{i_1}{u} & \ldots\ldots & \overset{k_1}{a}\underset{i_m}{u}\\
\cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\\
\overset{k_m}{a}\underset{i_1}{u} & \ldots\ldots & \overset{k_m}{a}\underset{i_m}{u}
\end{matrix}\right|
$$

при соответствующем выборе тензоров $a_{\alpha_1\ldots\alpha_{r-m}}$ и $b^{\alpha_1\ldots\alpha_{s-m}}$ дадут нам любые миноры матрицы (26,20). Применяя рассуждение, аналогичное тому, которое было дано при доказательстве теоремы 3, мы приходим к следующему положению:

Теорема 5. *Предположим, что пучки E_r и E_{n-s} заданы мультивекторами $u^{\alpha_1\ldots\alpha_r}$ и $v_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$. Степень параллельности E_r и E_{n-s} тогда и только тогда равна $\frac{p}{r}$ (при $r\leqslant n-s$) или $\frac{p}{n-s}$ (при $r\geqslant n-s$), если*

$$
u^{\alpha_1\ldots\alpha_{r-m}\sigma_1\ldots\sigma_m}v_{\sigma_1\ldots\sigma_m\beta_1\ldots\beta_{s-m}}\ \begin{cases}\neq 0 & \text{для } m=r-p\\ =0 & \text{для } m=r-p+1.\end{cases}
$$

Задача 11. Выписать условие полной параллельности и ${}^1/_2$-параллельности в 4-мерном пространстве двух двумерных плоскостей, из которых одна задана контравариантным бивектором $u^{\alpha\beta}$, другая — ковариантным $v_{\alpha\beta}$.

Ответ: 1) Условие полной параллельности:

$$
\frac{u^{12}}{v_{34}}=\frac{u^{13}}{v_{42}}=\frac{u^{14}}{v_{23}}=\frac{u^{23}}{v_{14}}=\frac{u^{24}}{v_{31}}=\frac{u^{34}}{v_{12}}.
$$

2) Условие ${}^1/_2$-параллельности:

$$
u^{12}v_{12}+u^{13}v_{13}+u^{14}v_{14}+u^{23}v_{23}+u^{24}v_{24}+u^{34}v_{34}=0.
$$

12. Предположим, что один и тот же пучок E_m задан как составляющими контравариантного m-вектора $u^{\alpha_1\ldots\alpha_m}$, так и составляющими ковариантного $(n-m)$-вектора $v_{\beta_1\ldots\beta_{n-m}}$.

Возникает вопрос, какими соотношениями связаны между собою числа $u^{\alpha_1\ldots\alpha_m}$ и $v_{\beta_1\ldots\beta_{n-m}}$. Ответ на этот вопрос дает теорема 5. В самом деле, нам надо только выписать условие полной параллельности пучков, определяемых мультивекторами $u^{\alpha_1\ldots\alpha_m}$ и $v_{\beta_1\ldots\beta_{n-m}}$.

Условие полной параллельности выразится соотношениями:

$$
(26{,}21)\qquad u^{\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}\sigma}v_{\sigma\beta_2\ldots\beta_{n-m}}=0.
$$

Возьмем те уравнения, в которых индексы

$$
(26{,}22)\qquad \alpha_1,\ \alpha_2,\ldots\alpha_{m-1},\ \beta_2,\ldots,\beta_{n-m}
$$

различны между собой. Пусть α_m и β_1 дополняют ряд (26,22) до последовательности 1, 2, 3, ... n. Тогда из уравнений (26,21) получаем

$$u^{\alpha_1 \ldots \alpha_{m-1}\alpha_m} v_{\alpha_m \beta_2 \ldots \beta_{n-m}} + u^{\alpha_1 \ldots \alpha_{m-1}\beta_1} v_{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_{n-m}} = 0$$

(не суммировать в этой формуле по α_m и β_1!), т. е.

$$\frac{u^{\alpha_1 \ldots \alpha_m}}{v_{\beta_1 \ldots \beta_{n-m}}} = \frac{u^{\alpha_1 \ldots \alpha_{m-1}\beta_1}}{-v_{\alpha_m \beta_2 \ldots \beta_{n-m}}}. \tag{26,23}$$

Таким образом, между теми составляющими $u^{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ контравариантного мультивектора и составляющими $v_{\beta_1 \ldots \beta_{n-m}}$ ковариантного, у которых индексы $\beta_1 \ldots \beta_{n-m}$ дополняют ряд $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ до совокупности натуральных чисел 1, 2 ... n, существует пропорциональность. Необходимо только уточнить вопрос о выборе знака при составляющих тензора $v_{i_1 \ldots i_{n-m}}$ в пропорции (26,23).

Если принять во внимание, что подстановки

$$\begin{pmatrix} 1\,2 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots n \\ \alpha_1 \ldots \alpha_m \beta_1 \ldots \beta_{n-m} \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots n \\ \alpha_1 \ldots \alpha_{m-1} \beta_1 \alpha_m \beta_2 \ldots \beta_{n-m} \end{pmatrix}$$

принадлежат к разным классам, то нетрудно прийти к следующему правилу.

Условимся обозначать через ε плюс или минус единицу смотря по тому, является ли подстановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & m & m+1 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_m & \beta_1 & \ldots & \beta_n \end{pmatrix}$ четной или нечетной. Тогда пропорциональность (26,23) может быть выражена следующим образом:

$$u^{\alpha_1 \ldots \alpha_m} = \varepsilon \tau v_{\beta_1 \ldots \beta_{n-m}}, \tag{26,24}$$

где τ — коэффициент пропорциональности. Следует заметить, что формула (26,24) выражает не тензорную зависимость (т. е. она не является инвариантной при преобразованиях координат), а лишь соотношение между однородными координатами одного и того же пучка. Коэффициент τ зависит от выбора координатной системы.

Можно придать формуле (26,4) тензорный вид, если воспользоваться относительным контравариантным тензором $i^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ веса $= -1$ (см. указание к задаче 2 § 15). В самом деле, при помощи этого тензора зависимость (26,24) может быть представлена в следующем виде:

$$u^{\alpha_1 \ldots \alpha_m} = \frac{\tau}{(n-m)!}\, i^{\alpha_1 \ldots \alpha_m \sigma_1 \ldots \sigma_{n-m}} v_{\sigma_1 \ldots \sigma_{n-m}}.$$

Таким образом, τ является не абсолютным, а относительным скаляром веса $+1$.

Пример 1. Возьмем $(n-1)$-мерный пучок, заданный контравариантным $(n-1)$-вектором $u^{\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}}$. Однородные координаты v_α, определяющие этот пучок, связаны с $u^{\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}}$ следующей пропорцией:

$$\frac{v_1}{u^{23 \ldots n}} = \frac{v_2}{-u^{13 \ldots n}} = \frac{v_3}{u^{124 \ldots n}} = \ldots = \frac{v_n}{(-1)^{n-1} u^{12 \ldots n-1}}.$$

Пример 2. Двумерная плоскость задана в пятимерном пространстве координатами $v_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$ ковариантного тривектора. Вычислим координаты $u^{\alpha\beta}$ контравариантного бивектора, лежащего в этой плоскости; имеем пропорцию:

$$\frac{u^{12}}{v_{345}} = \frac{u^{13}}{-v_{245}} = \frac{u^{14}}{v_{235}} = \frac{u^{15}}{-v_{234}} = \frac{u^{23}}{v_{145}} = \frac{u^{24}}{-v_{135}} = \frac{u^{25}}{v_{134}} =$$
$$= \frac{u^{34}}{v_{125}} = \frac{u^{35}}{-v_{124}} = \frac{u^{45}}{v_{123}}.$$

13. В предыдущих разделах настоящего параграфа мы занимались вопросами или связанными с самим мультивектором, как разновидностью антисимметрического тензора (мы вывели условия необходимые и достаточные для того, чтобы антисимметрический тензор являлся мультивектором), или же относящимися к двум мультивекторам, — именно исследовали условия параллельности пучков, определяемых этими мультивекторами; мы видели, что операциями алгебры тензоров, которые решают эти вопросы, является альтернирование и внутреннее перемножение тензоров.

Теперь мы перейдем к изучению ряда вопросов, которые связаны с рассмотрением мультивекторов совместно с тензорами 2-го порядка.

14. Возьмем смешанный тензор 2-го порядка $a^\alpha_{\ \beta}$. Этому тензору соответствует линейная векторфункция 1-го рода:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{x}); \quad y^i = a^i_{\ \alpha} x^\alpha,$$

которая определенным образом преобразует контравариантные векторы пространства. Вместе с векторами преобразуются и контравариантные мультивекторы. В § 12 мы уже затрагивали этот вопрос; в разделе 3 этого параграфа были выведены формулы (12,5), (12,6) и (12,7), определяющие линейное преобразование составляющих контравариантного мультивектора:

$$u'^{i_1 i_2 \ldots i_m} = \sum_{(\alpha_1 \ldots \alpha_m)} a^{i_1 \ldots i_m}_{\ \ \alpha_1 \ldots \alpha_m} u^{\alpha_1 \ldots \alpha_m} \tag{26,25}$$

где

$$a^{i_1 \dots i_m}_{\ \ k_1 \dots k_m} = \begin{vmatrix} a^{i_1}_{\ k_1} \dots a^{i_1}_{\ k_m} \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ a^{i_m}_{\ k_1} \dots a^{i_m}_{\ k_m} \end{vmatrix} = m!\, a^{[i_1}_{\ [k_1} a^{i_2}_{\ k_2} \dots a^{i_m]}_{\ k_m]}.$$

Тензор $a^{i_1 \dots i_m}_{\ \ k_1 \dots k_m}$ играет в теории мультивекторов ту же роль, какую играет смешанный тензор 2-го порядка $a^i_{\ k}$ в теории векторов.

Если расположить сочетания индексов по m в каждом, как это было сделано в § 6, и перенумеровать таким образом составляющие мультивектора и коэффициенты линейного преобразования (26,25) то формулы (26,25) перепишутся в сжатом виде:

(26,26)
$$U^{i'} = \sum_{a=1}^{N} A^i_{\ a} U^a,$$

где $N = \binom{n}{m}$.

Матрица

$$\begin{Vmatrix} A^1_{\ 1} A^1_{\ 2} \dots A^1_{\ N} \\ A^2_{\ 1} A^2_{\ 2} \dots A^2_{\ N} \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ A^N_{\ 1} A^N_{\ 2} \dots A^N_{\ N} \end{Vmatrix}$$

называется m-ой производной матрицей от матрицы $\| a^i_{\ k} \|$ (векторфункции **A**).[1] Мы будем обозначать ее $C_m(\| \mathbf{A} \|)$ или просто $C_m(\mathbf{A})$.

Нашей ближайшей задачей является вывод основных свойств линейного преобразования (26,25) составляющих мультивектора.

В разделе 3 § 12 было установлено следующее положение:

Теорема 6. *Если $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ — две линейные векторфункции, то произведение $C_m(\mathbf{A}_1)$ и $C_m(\mathbf{A}_2)$ равно m-ой производной матрицы произведения $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$:*

$$C_m(\mathbf{A}_1)\, C_m(\mathbf{A}_2) = C_m(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2).$$

[1] Das m-te abgeleitete System der Matrix $\| a^i_{\ k} \|$. Kronecker. Vorl. über Determinanten, S. 320.

Легко доказывается такая теорема:

Теорема 7. *Если **A** — единичная векторфункция, то $C_m(\mathbf{A})$ — единичная матрица.*

Комбинируя две последние теоремы, получаем:

Теорема 8. *m-ая производная матрица обратной линейной векторфункции $\mathbf{A}^{-1}$ равна обратной матрице m-ой производной от **A**:*

$$C_m(\mathbf{A}^{-1}) = [C_m(\mathbf{A})]^{-1}.$$

Рассмотрим теперь вопрос: как преобразуется производная матрица при изменении системы координат. Так как при переходе от одной системы координат к другой матрица векторфункции **A** преобразуется по следующему закону:

$$\| \mathbf{A} \|' = X \| \mathbf{A} \| X^{-1},$$

то

$$C_m(\| \mathbf{A} \|') = C_m(X)\, C_m(\| \mathbf{A} \|)\, C_m(X^{-1}) = C_m(X)\, C_m(\| \mathbf{A} \|)\, C_m(X)^{-1},$$

на основании теорем 6 и 8. Отсюда вытекает, что определитель производной матрицы является инвариантом при преобразованиях координат:

$$| C_m(\mathbf{A})' | = | C_m(\mathbf{A}) |.$$

Этим обстоятельством мы и воспользуемся для вычисления характеристических чисел производной матрицы (из инвариантности определителя матрицы вытекает инвариантность характеристического полинома).

Выберем систему координат, при которой матрица $\| \mathbf{A} \|$ приводится к каноническому виду Jordan'a. Так как в этой системе координат все элементы матрицы $\| \mathbf{A} \|$, стоящие слева от главной диагонали, равны нулю

$$a^i_{\ k} = 0 \qquad (i > k),$$

то и все $A^i_{\ k}$, стоящие слева от главной диагонали производной матрицы, также равны нулю (для доказательства следует только принять во внимание тот способ, каким мы условились в § 6 упорядочивать сочетания индексов по m в каждом).

Следовательно, обозначая характеристические числа векторфункции **A** через $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$, характеристические числа матрицы $C_m(\mathbf{A})$ через $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots \Lambda_N$, имеем

$$\Lambda_1 = A^1_{\ 1} = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{m-1} \lambda_m,$$
$$\Lambda_2 = A^2_{\ 2} = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{m-1} \lambda_{m+1},$$

$$\Lambda_3 = A^3{}_3 = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{m-1} \lambda_{m+2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Lambda_N = A^N{}_N = \lambda_{n-m+1} \lambda_{n-m+2} \ldots \lambda_n.$$

Таким образом, получаем теорему:

Теорема 9. *Для того, чтобы получить характеристические числа производной матрицы $C_m(\mathbf{A})$, следует составить все сочетания из характеристических чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ векторфункции* **A** *по m в каждом и в каждом таком сочетании перемножить входящие в него λ_i.*

Так как определитель линейного преобразования равен произведению характеристических чисел соответствующей матрицы, то

$$|C_m(\mathbf{A})| = \Lambda_1 \Lambda_2 \ldots \Lambda_N = \lambda_1^a \lambda_2^a \ldots \lambda_n^a = |\mathbf{A}|^a,$$

где

$$a = \binom{n-1}{m-1}.$$

Таким образом, доказана теорема:

Теорема 10. (Sylvester'a-Franke). *Определитель m-ой производной матрицы $C_m(\mathbf{A})$ равен $\binom{n-1}{m-1}$-ой степени определителя матрицы $\|\mathbf{A}\|$.*

Задача 12. Доказать, что, если линейная векторфункция **A** — простого типа, то и линейное преобразование составляющих m-вектора, определяемое производной матрицей $C_m(\mathbf{A})$, — также простого типа.

Задача 13. Показать, что составляющие тензора $a^{i_1 \ldots i_m}{}_{k_1 \ldots k_m}$ связаны между собою следующими соотношениями:

$$a^{\alpha_1 \ldots [\alpha_m}{}_{\gamma_1 \ldots \gamma_m} a^{\beta_1 \ldots \beta_m]}{}_{\gamma_1 \ldots \gamma_m} = 0$$
$$a^{\alpha_1 \ldots [\alpha_{m-1} \alpha_m}{}_{\lambda_1 \gamma_2 \ldots \gamma_m} a^{\beta_1 \ldots \beta_m]}{}_{\mu_1 \gamma_2 \ldots \gamma_m} = 0$$
$$a^{\alpha_1 \ldots [\alpha_{m-2} \alpha_{m-1} \alpha_m}{}_{\lambda_1 \lambda_2 \gamma_3 \ldots \gamma_m} a^{\beta_1 \ldots \beta_m]}{}_{\mu_1 \mu_2 \gamma_3 \ldots \gamma_m} = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a^{[\alpha_1 \ldots \alpha_m}{}_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{m-1} \gamma_m} a^{\beta_1 \ldots \beta_m]}{}_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_{m-1} \gamma_m} = 0.$$

15. Перейдем теперь к рассмотрению мультивекторов в связи с симметрическим тензором 2-го порядка.

Как мы знаем, симметрический тензор 2-го порядка $c_{\alpha\beta}$ определяет линейную векторфункцию 2-го рода:

$$\text{(26,27)} \qquad \dot{\mathbf{w}} = \dot{\mathbf{C}}(\mathbf{u}), \quad w_\alpha = c_{\alpha\beta} u^\beta,$$

которая относит точке $\mathbf{u}$ гиперплоскость, полярно сопряженную относительно гиперповерхности 2-го порядка:

$$c_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 1.$$

Возьмем m контравариантных векторов: $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}$; им соответствует в преобразовании (26, 27) m ковариантных векторов:

$$\overset{1}{w}_\alpha = c_{\alpha\beta} \underset{1}{u}^\beta, \quad \overset{2}{w}_\alpha = c_{\alpha\beta} \underset{2}{u}^\beta, \ldots \overset{m}{w}_\alpha = c_{\alpha\beta} \underset{m}{u}^\beta.$$

Контравариантному мультивектору

$$u^{\alpha_1 \ldots \alpha_m} = m!\, \underset{1}{u}^{[\alpha_1} \underset{2}{u}^{\alpha_2} \ldots \underset{m}{u}^{\alpha_m]}$$

отвечает ковариантный мультивектор

$$w_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} = m!\, \overset{1}{w}_{[\alpha_1} \overset{2}{w}_{\alpha_2} \ldots \overset{m}{w}_{\alpha_m]},$$

связанный с $u^{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ следующими соотношениями:

$$\text{(26,28)} \qquad w_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} = \sum_{(\alpha_1 \ldots \alpha_m)} \begin{vmatrix} c_{\alpha_1 \sigma_1} & \ldots & c_{\alpha_1 \sigma_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{\alpha_m \sigma_1} & \ldots & c_{\alpha_m \sigma_m} \end{vmatrix} u^{\sigma_1 \ldots \sigma_m}.$$

Введем в рассмотрение ковариантный тензор

$$\text{(26,29)} \qquad c_{\alpha_1 \ldots \alpha_m,\, \beta_1 \ldots \beta_m} = m!\, c_{[\alpha_1 [\beta_1} c_{\alpha_2 \beta_2} \ldots c_{\alpha_m] \beta_m]}.$$

При помощи него соотношение (26,28) перепишется в следующем виде:

$$\text{(26,30)} \qquad w_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} = \sum_{(\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_m)} c_{\alpha_1 \ldots \alpha_m,\, \beta_1 \ldots \beta_m} u^{\beta_1 \ldots \beta_m} = \frac{1}{m!} c_{\alpha_1 \ldots \alpha_m,\, \beta_1 \ldots \beta_m} u^{\beta_1 \ldots \beta_m}.$$

Если ввести в рассмотрение упорядоченные в ряд сочетания по m индексов в каждом (например так, как это было сделано в § 6), то составляющим тензора $c_{\alpha_1 \ldots \alpha_m, \beta_1 \ldots \beta_m}$ можно приписать по два индекса: $C_{\alpha\beta}$. Формула (26, 30) получит следующий вид:

$$W_\alpha = \sum_{\beta=1}^{N} C_{\alpha\beta} U^\beta.$$

16. Укажем некоторые основные свойства тензора

$$c_{\alpha_1 \ldots \alpha_m, \beta_1 \ldots \beta_m}:$$

1) *Тензор* $c_{\alpha_1 \ldots \alpha_m, \beta_1 \ldots \beta_m}$ *антисимметричен как относительно индексов* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$, *так и относительно индексов* $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$.

2) *В тензоре* $c_{\alpha_1 \ldots \alpha_m, \beta_1 \ldots \beta_m}$ *можно переставлять ряды индексов* $\alpha_1, \ldots \alpha_m$ *и* $\beta_1, \ldots \beta_m$ *один на место другого*:

$$c_{\alpha_1 \ldots \alpha_m, \beta_1 \ldots \beta_m} = c_{\beta_1 \ldots \beta_m, \alpha_1 \ldots \alpha_m}$$

3)

(26,31) $$c_{\alpha_1 \ldots [\alpha_m, \beta_1 \ldots \beta_m]} = 0,$$

или, более подробно:

$$c_{\alpha_1 \ldots \alpha_m, \beta_1 \ldots \beta_m} - c_{\alpha_1 \ldots \beta_1, \alpha_m \beta_2 \ldots \beta_m} + \\ + c_{\alpha_1 \ldots \beta_2, \alpha_m \beta_1 \beta_3 \ldots \beta_m} - c_{\alpha_1 \ldots \beta_3, \alpha_m \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_m} + \\ + \ldots + (-1)^m c_{\alpha_1 \ldots \beta_m, \alpha_m \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_{m-1}} = 0.$$

Последнее свойство нуждается в доказательстве. Так как

$$c_{\alpha_1 \ldots \alpha_m, \beta_1 \ldots \beta_m} = \begin{vmatrix} c_{\alpha_1\beta_1} & \ldots & c_{\alpha_1\beta_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{\alpha_m\beta_1} & \ldots & c_{\alpha_m\beta_m} \end{vmatrix},$$

то, развертывая этот определитель по элементам последней строки, мы представим тензор $c_{\alpha_1 \ldots \alpha_m, \beta_1 \ldots \beta_m}$ в следующем виде:

$$c_{\alpha_1 \ldots \alpha_m, \beta_1 \ldots \beta_m} = \\ = (-1)^{m-1} (c_{\alpha_m\beta_1} c_{\alpha_1 \ldots \alpha_{m-1}, \beta_2 \ldots \beta_m} - c_{\alpha_m\beta_2} c_{\alpha_1 \ldots \alpha_{m-1}, \beta_1\beta_3 \ldots \beta_m} + \\ \ldots + (-1)^{m-1} c_{\alpha_m\beta_m} c_{\alpha_1 \ldots \alpha_{m-1}, \beta_1 \ldots \beta_{m-1}}).$$

Для того, чтобы проальтернировать тензор $c_{\alpha_1 \ldots \alpha_m, \beta_1 \ldots \beta_m}$ по индексам $\alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$, достаточно проальтернировать по этим индексам каждый член, стоящий в написанной сумме. Но первый член симметричен относительно α_m, β_1, второй — относительно α_m, β_2, третий — относительно α_m, β_3, и т. д. Следовательно, в результате альтернирования каждый из членов даст нуль.

17. Для того, чтобы иллюстрировать роль тензора

$$c_{\alpha_1 \ldots \alpha_m, \beta_1 \ldots \beta_m}$$

в геометрических исследованиях, рассмотрим следующий вопрос.

Пусть два m-мерных пучка E_m и E'_m заданы своими базисами $\{\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}\}$ и $\{\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{v}}\}$. Требуется указать критерий того, что в одном из этих пучков существует, по крайней мере, одно направление, сопряженное относительно квадратичной формы $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = c_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta$ со всеми направлениями другого пучка.

Пусть в E'_m вектор $\mathbf{x} = \lambda_1 \underset{1}{\mathbf{v}} + \lambda_2 \underset{2}{\mathbf{v}} + \ldots + \lambda_m \underset{m}{\mathbf{v}}$ сопряжен с пучком E_m:

(26,32) $$\varphi(\underset{1}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) = 0, \ \varphi(\underset{2}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) = 0, \ \ldots \ \varphi(\underset{m}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) = 0.$$

Получаем систему уравнений:

(26,33) $$\begin{gathered} \lambda_1 \varphi(\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{1}{\mathbf{v}}) + \ldots + \lambda_m \varphi(\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{m}{\mathbf{v}}) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1 \varphi(\underset{m}{\mathbf{u}},\underset{1}{\mathbf{v}}) + \ldots + \lambda_m \varphi(\underset{m}{\mathbf{u}},\underset{m}{\mathbf{v}}) = 0, \end{gathered}$$

из которой выводим условие:

(26,34) $$\begin{vmatrix} \varphi(\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{1}{\mathbf{v}}) \ldots \varphi(\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{m}{\mathbf{v}}) \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \varphi(\underset{m}{\mathbf{u}},\underset{1}{\mathbf{v}}) \ldots \varphi(\underset{m}{\mathbf{u}},\underset{m}{\mathbf{v}}) \end{vmatrix} = 0.$$

Обратно, если соотношение (26,34) выполнено, то имеют место уравнения (26,33) и (26,32), т. е. в E'_m существует, по крайней мере, одно направление, сопряженное с пучком E_m.

В то же время из (26,34) следует также, что существует m чисел $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_m$ (из которых не все равны нулю) таких, что имеют место соотношения:

$$\mu_1\varphi(\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{1}{\mathbf{v}}) + \dots + \mu_m\varphi(\underset{m}{\mathbf{u}},\underset{1}{\mathbf{v}}) = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\mu_1\varphi(\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{m}{\mathbf{v}}) + \dots + \mu_m\varphi(\underset{m}{\mathbf{u}},\underset{m}{\mathbf{v}}) = 0.$$

Таким образом, вектор $\mathbf{y} = \mu_1\underset{1}{\mathbf{u}} + \mu_2\underset{2}{\mathbf{u}} + \dots + \mu_m\underset{m}{\mathbf{u}}$ удовлетворяет уравнениям:

$$\varphi(\mathbf{y},\underset{1}{\mathbf{v}}) = 0,\ \varphi(\mathbf{y},\underset{2}{\mathbf{v}}) = 0, \dots \varphi(\mathbf{y},\underset{m}{\mathbf{v}}) = 0,$$

т. е. сопряжен с пучком E'_m.

Следовательно, если в E'_m существуют направления, сопряженные с пучком E_m, то в E_m также существуют направления, сопряженные с E'_m.

Определитель (26,34) может быть представлен в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} \varphi(\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{1}{\mathbf{v}}), & \dots & \varphi(\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{m}{\mathbf{v}}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi(\underset{m}{\mathbf{u}},\underset{1}{\mathbf{v}}), & \dots & \varphi(\underset{m}{\mathbf{u}},\underset{m}{\mathbf{v}}) \end{vmatrix} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} C_{\alpha\beta}U^\alpha V^\beta. \tag{26,35}$$

Таким образом, приходим к следующей теореме:

Теорема 11. *Билинейная форма*

$$\Phi(\mathbf{U},\mathbf{V}) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} C_{\alpha\beta}U^\alpha V^\beta = \sum_{\substack{(\alpha_1 \dots \alpha_m) \\ (\beta_1 \dots \beta_m)}} c_{\alpha_1\dots\alpha_m,\,\beta_1\dots\beta_m} u^{\alpha_1\dots\alpha_m} v^{\beta_1\dots\beta_m}$$

от составляющих двух m-векторов тогда и только тогда равна нулю, если в каждом из m-мерных пучков, определяемых мультивекторами $u^{\alpha_1\dots\alpha_m}$ и $v^{\alpha_1\dots\alpha_m}$, существуют направления, сопряженные с другим пучком относительно квадратичной формы $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = c_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta$.

Следствие. *Пучок, определяемый мультивектором $u^{\alpha_1\dots\alpha_m}$, тогда и только тогда касается асимптотического конуса $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 0$, если*

$$\Phi(\mathbf{U},\mathbf{U}) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} C_{\alpha\beta}U^\alpha U^\beta = 0.$$

Таким образом, в теории мультивекторов тензор $c_{\alpha_1\dots\alpha_m,\,\beta_1\dots\beta_m}$ играет ту же роль, что симметрический тензор $c_{\alpha\beta}$ в теории векторов.

Задача 14. Если в m-мерном пучке E_m существует k независимых векторов, сопряженных относительно квадратичной формы $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$ с m-мерным пучком E_m', то в E_m' также существует k независимых направлений, сопряженных пучку E_m.

Указание. Пусть пучки E_m и E_m' заданы базисами $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \dots \underset{m}{\mathbf{u}}$ и $\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \dots \underset{m}{\mathbf{v}}$. Рассмотреть ранг матрицы:

$$\begin{Vmatrix} \varphi(\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{1}{\mathbf{v}}) & \dots & \varphi(\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{m}{\mathbf{v}}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi(\underset{m}{\mathbf{u}},\underset{1}{\mathbf{v}}) & \dots & \varphi(\underset{m}{\mathbf{u}},\underset{m}{\mathbf{v}}) \end{Vmatrix}.$$

18. Если ранг тензора $c_{\alpha\beta}$ равен n, то существует обратный тензор $d^{\alpha\beta}$. Введем в рассмотрение тензор

$$d^{\alpha_1\dots\alpha_m,\,\beta_1\dots\beta_m} = m!\, d^{[\alpha_1[\beta_1} d^{\alpha_2\beta_2} \dots d^{\alpha_m]\beta_m]}.$$

Относя составляющим по два индекса, как это мы сделали выше для $c_{\alpha_1\dots\alpha_m,\,\beta_1\dots\beta_m}$, мы получим матрицу N-го порядка,

$$\begin{Vmatrix} D^{11} & D^{12} & \dots & D^{1N} \\ D^{21} & D^{22} & \dots & D^{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D^{N1} & D^{N2} & \dots & D^{NN} \end{Vmatrix},$$

которая, как нетрудно видеть, обратна матрице, составленной из элементов $C_{\alpha\beta}$:

$$\|D^{\alpha\beta}\| = \|C_{\alpha\beta}\|^{-1}.$$

В § 20 мы установили связь между формой $a^{\alpha\beta}u_\alpha v_\beta$ и окаймленным определителем. Аналогичную задачу нам предстоит решить для мультивекторов.

Рассмотрим окаймленный определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} \ldots c_{1n} & \overset{1}{u}_1 \ldots \overset{m}{u}_1 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ c_{n1} \ldots c_{nn} & \overset{1}{u}_n \ldots \overset{m}{u}_n \\ \overset{1}{v}_1 \ldots \overset{1}{v}_n & 0 \ldots 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \overset{m}{v}_1 \ldots \overset{m}{v}_n & 0 \ldots 0 \end{vmatrix} \qquad (m \leq n).$$

Разлагая его по минорам m-го порядка, образованным из элементов последних m колонн и обозначая $m!\,\overset{1}{u}_{[\alpha_1} \ldots \overset{m}{u}_{\alpha_m]}$ через $u_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$, имеем

$$(26{,}36) \qquad \Delta = \sum_{(\alpha_1 \ldots \alpha_m)} (-1)^{\omega} \begin{vmatrix} c_{\varrho_1 1} & \ldots & c_{\varrho_1 n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{\varrho_{n-m} 1} & \ldots & c_{\varrho_{n-m} n} \\ \overset{1}{v}_1 & \ldots & \overset{1}{v}_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \overset{m}{v}_1 & \ldots & \overset{m}{v}_n \end{vmatrix} u_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}.$$

В этой формуле индексы $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_{n-m}$ обозначают те числа, которые получатся, если из совокупности натуральных чисел $1, 2, \ldots n$ вычеркнуть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$. Как числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$, так и $\varrho_1, \varrho_2 \ldots \varrho_{n-m}$ берутся в возрастающем порядке:

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_m$$
$$\varrho_1 < \varrho_2 < \ldots < \varrho_{n-m}.$$

Показатель степени ω равен:

$$\omega = (n+1) + (n+2) + \ldots + (n+m) + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m.$$

Развернем теперь определители n-го порядка, стоящие в сумме (26,36) по минорам m-го порядка, составленным из элементов последних m строк. Обозначая $m!\,\overset{1}{v}_{[\alpha_1} \ldots \overset{m}{v}_{\alpha_m]}$ через $v_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$, получаем

$$\Delta = \sum_{\substack{(\alpha_1, \ldots \alpha_m) \\ (\beta_1 \ldots \beta_m)}} (-1)^{\omega + \pi} c_{\varrho_1 \ldots \varrho_{n-m},\, \sigma_1 \ldots \sigma_{n-m}} u_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} v_{\beta_1 \ldots \beta_m},$$

где $c_{\varrho_1 \ldots \varrho_{n-m}, \sigma_1 \ldots \sigma_{n-m}} = m!\; c_{[\varrho_1[\sigma_1} \ldots c_{\varrho_{n-m}]\sigma_{n-m}]}$.

Индексы $\sigma_1 < \sigma_2 < \ldots < \sigma_{n-m}$ обозначают те числа, которые получатся, если из ряда $1, 2 \ldots n$ вычеркнуть $\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_m$. Показатель π выражается следующим образом

$$\pi = (n-m+1) + (n-m+2) + \ldots + n + \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_m.$$

Следовательно,

$$\omega + \pi = (n-m+1) + (n-m+2) + \ldots + (n+m) + \\ + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i + \sum_{i=1}^{m} \beta_i = (2n+1)\,m + \sum \alpha_i + \sum \beta_i.$$

Минор

$$(-1)^{\sum \alpha_i + \sum \beta_i} c_{\varrho_1 \ldots \varrho_{n-m}, \sigma_1 \ldots \sigma_{n-m}}$$

является алгебраическим дополнением минора

$$\begin{vmatrix} c_{\alpha_1\beta_1} & \ldots & c_{\alpha_1\beta_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{\alpha_m\beta_1} & \ldots & c_{\alpha_m\beta_m} \end{vmatrix}$$

в определителе $C = |c_{ik}|$. Следовательно, [1] он равен

[1] Напомним следующую теорему из теории определителей:

Если Δ — определитель, взаимный с D, если M — минор m-го порядка определителя Δ, $\mathcal{M}$ — соответствующий минор определителя D, то

$$M = D^{m-1}\,\overline{\mathcal{M}},$$

где $\overline{\mathcal{M}}$ — алгебраическое дополнение минора $\mathcal{M}$ в определителе D.

$$C\begin{vmatrix} d^{\alpha_1\beta_1} & \dots & d^{\alpha_1\beta_m}\\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ d^{\alpha_m\beta_1} & \dots & d^{\alpha_m\beta_m}\end{vmatrix},$$

где $C=|c_{ik}|$, $d^{\alpha\beta}$ — тензор, обратный тензору $c_{\alpha\beta}$.

Таким образом, мы приходим к следующей формуле:

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} & \overset{1}{u}_1 & \dots & \overset{m}{u}_1 \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} & \overset{1}{u}_n & \dots & \overset{m}{u}_n \\ \overset{1}{v}_1 & \dots & \overset{1}{v}_n & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \overset{m}{v}_1 & \dots & \overset{m}{v}_n & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^m C\sum_1^N D^{\alpha\beta}U_\alpha V_\beta. \tag{26,37}$$

В этой формуле U_α, V_β обозначают упорядоченные координаты мультивекторов $u_{\alpha_1\dots\alpha_m}$, $v_{\beta_1\dots\beta_m}$.

Аналогично, имеем дуальную формулу:

$$\begin{vmatrix} d^{11} & \dots & d^{1n} & \underset{1}{u}^{(1)} & \dots & \underset{m}{u}^{(1)} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ d^{n1} & \dots & d^{nn} & \underset{1}{u}^{(n)} & \dots & \underset{m}{u}^{(n)} \\ \underset{1}{v}^{(1)} & \dots & \underset{1}{v}^{(n)} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \underset{m}{v}^{(1)} & \dots & \underset{m}{v}^{(n)} & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^m \frac{1}{C}\sum_1^N C_{\alpha\beta}U^\alpha V^\beta. \tag{26,38}$$

19. В заключение рассмотрим тензор $c_{\alpha_1\dots\alpha_m,\,\beta_1\dots\beta_m}$ в вещественном пространстве, — когда лежащая в основе квадратичная форма

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = c_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta$$

Отсюда вытекает следующее предложение, которым мы и пользуемся в тексте:

Если Δ — определитель матрицы, обратной матрице определителя D:

$$\Delta = D^{-1},$$

если M — минор m-го порядка определителя Δ, $\mathit{м}$ — соответствующий ему минор определителя D, то

$$M = D^{-1}\bar{\mathit{м}},$$

где $\bar{\mathit{м}}$ — алгебраическое дополнение минора $\mathit{м}$ в определителе D.

имеет вещественные коэффициенты.

Докажем теорему:

Теорема 11. *Если квадратичная форма $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = c_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta$ — определенная положительная, то m-ая производная форма*

$$\Phi(\mathbf{U},\mathbf{U}) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} C_{\alpha\beta}U^\alpha U^\beta =$$

$$= \sum_{\substack{(\alpha_1\dots\alpha_m)\\(\beta_1\dots\beta_m)}} c_{\alpha_1\dots\alpha_m,\,\beta_1\dots\beta_m}u^{\alpha_1\dots\alpha_m}u^{\beta_1\dots\beta_m}$$

также является положительной определенной формой.

Доказательство. Введем систему координат, при которой квадратичная форма $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$ выражается как сумма квадратов:

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = x^{(1)^2} + x^{(2)^2} + \dots + x^{(n)^2}.$$

В этой координатной системе форма $\Phi(\mathbf{U},\mathbf{U})$ имеет вид:

$$\Phi(\mathbf{U},\mathbf{U}) = \sum_{(\alpha_1\dots\alpha_m)}\begin{vmatrix} \underset{1}{u}^{\alpha_1} & \dots & \underset{1}{u}^{\alpha_m} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \underset{m}{u}^{\alpha_1} & \dots & \underset{m}{u}^{\alpha_m}\end{vmatrix}^2 = \sum_{i=1}^{N} U^{(i)^2}.$$

ГЛАВА IV.

АЛГЕБРА ТЕНЗОРОВ В МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЕВКЛИДА.

§ 27. Метрическое пространство Евклида. Группа движений.

1. В § 5 было введено понятие об отношении двух параллельных отрезков в аффинном пространстве. Приняв на заданной прямой произвольный отрезок за единицу, мы можем любой отрезок, лежащий на этой прямой или параллельной ей, „измерить" при помощи этой единицы. Но в то же время в аффинной геометрии невозможно ввести понятие о равенстве двух отрезков, лежащих на непараллельных прямых так, как это делается в метрической геометрии: это понятие разрушается при аффинных преобразованиях. В самом деле, проведем две прямых через начало координат, отложим на них отрезки OP и OQ и условимся считать их равными. Если мы применим линейную векторфункцию, у которой прямые OP и OQ являются главными направлениями с характеристическими числами 1 и σ, ($\sigma \neq 1$), то отрезки OP и OQ преобразуются в OP и $OQ' = \sigma OQ$; таким образом, из равных отрезков в результате аффинного преобразования мы получим неравные.

Введение понятия о равенстве двух непараллельных отрезков должно, следовательно, специализировать аффинное пространство, налагая ограничение на группу аффинных преобразований.

Мы не в состоянии в этом курсе остановиться на анализе понятия мероопределения; поэтому мы прямо введем формулу для длины по аналогии с трехмерным пространством Евклида, где квадрат длины отрезка в косоугольных координатах выражается при помощи квадратичной формы от разностей координат конечных точек.

Пусть

$$g(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \mathbf{x}\dot{\mathrm{G}}(\mathbf{x}) = g_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta \tag{27,1}$$

является неособенной квадратичной формой. За квадрат длины s отрезка между точками $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ будем считать следующее выражение:

$$s^2 = g(\mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{x}-\mathbf{y}) = g_{\alpha\beta}(x^\alpha - y^\alpha)(x^\beta - y^\beta).$$

Таким образом, длина вектора (его модуль) выражается формулой:

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{g_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta}.$$

Векторы единичной длины называются *ортами*; условимся обозначать их буквой $\mathbf{i}$.

Тензор $g_{\alpha\beta}$, определяющий метрику пространства, называется *фундаментальным*.

2. При изучении геометрии метрического пространства мы будем предполагать его вещественным; квадратичную форму (27,1) выберем *определенной положительной*. Мы будем пользоваться, конечно, и комплексным пространством, как вспомогательным инструментом для исследования. Комплексные векторы и пучки, принадлежащие к асимптотическому конусу квадратичной формы $g(\mathbf{x},\mathbf{x})$, называются *изотропными*. Отметим, что длины изотропных векторов равны нулю.

Пространство, в основу мероопределения которого положена определенная положительная квадратичная форма, называется *евклидовым*. Следует заметить, что теоретическая физика пользуется и иными типами метрических многообразий. Так например, при построении принципа относительности физики оперируют с четырехмерным пространством, в основу мероопределения которого кладется неопределенная квадратичная форма с сигнатурой $= 2$ (так называемое *пространство Минковского*). Во многих отношениях геометрия с неопределенной формой мероопределения аналогична обычной геометрии Евклида. Однако исследование некоторых вопросов (например, связанных с теорией пары квадратичных форм, теорией линейных преобразований, оставляющих инвариантной квадратичную форму), значительно усложняется в геометрии с неевклидовым мероопределением. Читателей, интересующихся этими вопросами в геометрии неопределенной формы, мы отсылаем к специальной литературе (см. указатель литературы в конце книги).

3. При специализации пространства введением понятия длины необходимо внести ограничение в ту группу линейных преобразований, которая лежит в основе аффинной геометрии, если мы

хотим построить группу таких преобразований, которые не меняли бы расстояний. Подгруппа параллельного переноса

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{a},\ x^{\alpha'} = x^\alpha + a^\alpha$$

непосредственно переносится в метрическую геометрию, так как при ее преобразованиях длины остаются инвариантными. Подгруппа же однородных аффинных преобразований

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(\mathbf{x}),\ x^{\alpha'} = a^\alpha{}_\beta x^\beta \tag{27,2}$$

должна быть значительно сужена. И действительно, выражая инвариантность расстояний:

$$(\mathbf{x}' - \mathbf{y}')\,\dot{\mathbf{G}}\,(\mathbf{x}' - \mathbf{y}') = (\mathbf{x} - \mathbf{y})\,\dot{\mathbf{G}}\,(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

мы приходим к соотношению:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\,\dot{\mathbf{G}}\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = (\mathbf{x} - \mathbf{y})\,\dot{\mathbf{G}}\,(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

которое выражает условие того, что векторфункция $\mathbf{A}$ должна оставлять инвариантной квадратичную форму $g(\mathbf{x}, \mathbf{x})$. Таким образом (см. § 23),

$$\dot{\mathbf{A}}_c\dot{\mathbf{G}}\mathbf{A} = \dot{\mathbf{G}},\quad g_{\sigma\tau}a^\sigma{}_\alpha a^\tau{}_\beta = g_{\alpha\beta}. \tag{27,3}$$

Те преобразования $\mathbf{A}$, у которых определитель $|\mathbf{A}|$ равен $+1$, называются *вращениями*, те же, у которых соответствующий определитель равен -1, — *несобственными вращениями*. Подгруппа параллельных переносов и подгруппа вращений образуют *группу движений пространства*.

4. В § 23 было указано, что у линейных однородных преобразований, оставляющих инвариантной квадратичную форму $\mathbf{x}\dot{\mathbf{G}}(\mathbf{x})$, имеется инвариант — билинейная форма:

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}\dot{\mathbf{G}}(\mathbf{y}) = g_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta. \tag{27,4}$$

Этот инвариант называется *скалярным произведением* векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ и обозначается символом $\mathbf{xy}$. Отметим следующие его свойства:

$$(\alpha\mathbf{x})\,\mathbf{y} = \mathbf{x}\,(\alpha\mathbf{y}) = \alpha\mathbf{xy},$$
$$(\underset{1}{\mathbf{x}} + \underset{2}{\mathbf{x}})\,\mathbf{y} = \underset{1}{\mathbf{x}}\mathbf{y} + \underset{2}{\mathbf{x}}\mathbf{y},$$
$$\mathbf{xy} = \mathbf{yx}.$$

В частности, квадрат длины вектора записывается следующим образом:

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^2.$$

При помощи скалярного произведения вводится понятие об угле между двумя векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$:

$$\cos(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathbf{xy}}{\sqrt{\mathbf{x}^2\mathbf{y}^2}}.$$

Угол — вещественная величина, так как $|\cos(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leqslant 1$. В самом деле, форма $g(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ — определенная положительная и потому

$$(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y})^2 = \lambda^2\mathbf{x}^2 + 2\lambda\mu\mathbf{xy} + \mu^2\mathbf{y}^2 \geqslant 0$$

при любом выборе λ и μ. Следовательно,

$$(\mathbf{xy})^2 - \mathbf{x}^2\mathbf{y}^2 \leqslant 0.$$

Понятие о проекции вектора на ось совершенно аналогично соответствующему понятию в трехмерном евклидовом пространстве: если ось определяется ортом $\mathbf{i}$, то

$$np_i\mathbf{x} = \mathbf{xi} = |\mathbf{x}|\cos(\mathbf{x}, \mathbf{i}).$$

Отметим следующую формулу, выражающую составляющие фундаментального тензора через скалярные произведения координатных векторов:

$$g_{\alpha\beta} = g(\underset{\alpha}{\mathbf{e}}, \underset{\beta}{\mathbf{e}}) = \underset{\alpha\beta}{\mathbf{ee}}.$$

Два направления $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ называются *взаимно-перпендикулярными*, если $\mathbf{xy} = g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Таким образом, эти направления взаимно-сопряженны относительно квадратичной формы $g(\mathbf{x}, \mathbf{x})$.

Вообще *два пучка* $\{\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{r}{\mathbf{u}}\}$ и $\{\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \ldots \underset{s}{\mathbf{v}}\}$ *называются взаимно-перпендикулярными, если они сопряжены относительно формы* $g(\mathbf{x}, \mathbf{x})$:

$$\underset{i}{\mathbf{u}}\underset{k}{\mathbf{v}} = 0, \qquad (i = 1, \ldots r;\ k = 1, \ldots s)$$

т. е. *если каждый вектор одного пучка перпендикулярен каждому вектору другого.*

Взаимно-перпендикулярные пучки независимы; это вытекает из теоремы 4 (§ 20). Отсюда следует, что *взаимно-перпендикулярные векторы образуют независимую систему.* Подчеркнем, что это справедливо только по отношению к *вещественым* векторам в пространстве, в основу мероопределения которого положена *определенная* квадратичная форма. В комплексном же пространстве из того факта, что векторы взаимно-перпендикулярны, нельзя сделать вывода, что они независимы; например, все векторы, принадлежащие к изотропному пучку, взаимно-перпендикулярны.

5. В метрическом пространстве можно установить соответствие между ковариантными и контравариантными векторами, базируясь на той квадратичной форме, которую мы положили в основу мероопределения. Линейная векторфункция 2-го рода:

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{G}(\mathbf{x}), \qquad u_\alpha = g_{\alpha\beta} x^\beta \tag{27,5}$$

относит, как мы знаем, каждой точке пространства $\mathbf{x}$ гиперплоскость $\dot{\mathbf{u}}$, полярно-сопряженную относительно единичной гиперсферы

$$g(\mathbf{x},\mathbf{x}) = g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 1.$$

Гиперплоскость $\dot{\mathbf{u}}$ перпендикулярна к вектору $\mathbf{x}$ и расстояние λ от начала координат до $\dot{\mathbf{u}}$ равно

$$\lambda = \frac{\sqrt{\mathbf{x}^2}}{\dot{\mathbf{u}}\mathbf{x}} = \frac{\sqrt{\mathbf{x}^2}}{\mathbf{x}\,\dot{G}(\mathbf{x})} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{x}^2}}.$$

Таким образом, каждому контравариантному вектору однозначно относится вектор ковариантный и обратно. Векторы одного рода могут быть заменены при исследовании векторами другого рода. Поэтому является целесообразным слить оба понятия о векторах в одно, понимая под ним или пару точек или пару плоскостей. При изучении метрического пространства мы будем интерпретировать вектор парой точек (направленным отрезком прямой), обозначая его латинской буквой жирного шрифта. Точек над векторами ставить, конечно, не будем. Порядковый номер вектора будем ставить как над буквой, так и под буквой, обозначающей этот вектор. Так например, векторы системы, взаимной с $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \dots \underset{n}{\mathbf{u}}$, будем обозначать попрежнему $\overset{1}{\mathbf{u}}, \overset{2}{\mathbf{u}}, \dots \overset{n}{\mathbf{u}}$.

Векторы $\dot{\mathbf{u}}$ и $\mathbf{x}$, связанные соотношением (27,5), мы будем считать таким образом за одну и ту же геометричеекую величину, и поэтому будем обозначать их одной и той же буквой. Соотношение

$$x_\alpha = g_{\alpha\beta} x^\beta \tag{27,6}$$

устанавливает зависимость между двумя системами составляющих (ковариантными и контравариантными) *одного и того же вектора*. Тензор $g_{\alpha\beta}$ играет таким образом роль единичной линейной векторфункции, относящей вектору *тот же самый вектор*. Поэтому целесообразно тензор, обратный $g_{\alpha\beta}$, считать за тот же самый тензор, выраженный только при помощи си-

стемы контравариантных составляющих, которые мы будем обозначать символом $g^{\alpha\beta}$:

$$g_{\alpha\sigma} g^{\sigma\beta} = \delta_\alpha^\beta.$$

$g^{\alpha\beta}$ называются *контравариантными составляющими фундаментального тензора*. Умножая обе части равенства (27,6) на $g^{\alpha\gamma}$ и контрактируя по индексу α, получаем соотношение:

$$x^\gamma = g^{\gamma\alpha} x_\alpha. \tag{27,7}$$

Формулы (27,6) и (27,7) определяют так называемую *операцию понижения и повышения индекса у составляющих вектора*.

Единичная линейная векторфункция определяется в аффинном пространстве при помощи смешанных составляющих δ_β^α. В метрическом пространстве δ_β^α считаются *смешанными составляющими фундаментального тензора*, устанавливающего, как мы говорили выше, единичное преобразование векторов. Обозначаются эти составляющие следующим образом:

$$g_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta.$$

С первого взгляда может показаться странным, что вводятся три различных вида составляющих одного и того же тензора, между тем как в аффинном пространстве тензор определяется одной системой составляющих. Ниже мы увидим, что в метрической геометрии понятия о ковариантном, контравариантном и смешанном тензорах аффинного пространства сливаются в одно, причем каждому тензору соответствуют три различных вида составляющих.

6. При слиянии понятий о ковариантном и контравариантном векторах скалярное произведение двух векторов $\dot{\mathbf{u}}\mathbf{x}$, введенное в аффинной геометрии, переходит в построенное выше произведение (27,4). В самом деле,

$$u^\alpha x_\alpha = g_{\alpha\beta} u^\alpha x^\beta.$$

Отметим, что скалярное произведение двух векторов может быть выражено при помощи любого из 4 следующих выражений:

$$\mathbf{xy} = g_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta = g^{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta = x_\alpha y^\alpha = x^\alpha y_\alpha.$$

7. Мы условились отождествить понятие ковариантного век-

тора с контравариантным. Таким образом, координатные векторы $\overset{1}{\mathbf e}, \overset{2}{\mathbf e}, \dots \overset{n}{\mathbf e}$ мы будем считать также направленными отрезками. Каждый такой вектор, например $\overset{k}{\mathbf e}$, перпендикулярен к гиперплоскости $\{\underset{1}{\mathbf e}, \dots \underset{k-1}{\mathbf e}, \underset{k+1}{\mathbf e}, \dots \underset{n}{\mathbf e}\}$. Таким образом, мы имеем два координатных n-эдра: $\underset{1}{\mathbf e}, \underset{2}{\mathbf e}, \dots \underset{n}{\mathbf e}$ и $\overset{1}{\mathbf e}, \overset{2}{\mathbf e}, \dots \overset{n}{\mathbf e}$. Условимся называть их соответственно контравариантным и ковариантным n-эдрами. Связь между ними устанавливается при помощи составляющих фундаментального тензора. В самом деле, формулы (27,6) и (27,7) могут быть переписаны в следующем виде:

$$\mathbf{x}\underset{\alpha}{\mathbf e} = g_{\alpha\beta}\mathbf{x}\overset{\beta}{\mathbf e};\quad \mathbf{x}\overset{\alpha}{\mathbf e} = g^{\alpha\beta}\mathbf{x}\underset{\beta}{\mathbf e}.$$

В виду произвольности вектора **x**, получаем:

$$\underset{\alpha}{\mathbf e} = g_{\alpha\beta}\overset{\beta}{\mathbf e},\ \overset{\alpha}{\mathbf e} = g^{\alpha\beta}\underset{\beta}{\mathbf e}.$$

Составляющие фундаментального тензора могут быть выражены при помощи скалярных произведений координатных векторов. Выше мы видели, что

$$g_{\alpha\beta} = g(\underset{\alpha}{\mathbf e},\underset{\beta}{\mathbf e}) = \underset{\alpha\beta}{\mathbf{ee}}.$$

Рассмотрим скалярное произведение $\overset{\alpha\beta}{\mathbf{ee}}$:

$$\overset{\alpha\beta}{\mathbf{ee}} = g^{\alpha\sigma}g^{\beta\tau}\underset{\sigma\tau}{\mathbf{ee}} = g^{\alpha\sigma}g^{\beta\tau}g_{\sigma\tau} = g^{\alpha\sigma}g^{\beta}_{\sigma} = g^{\alpha\beta}.$$

Учитывая, кроме того, соотношение $\overset{\alpha}{\underset{\beta}{\mathbf{ee}}} = \delta^{\alpha}_{\beta}$, имеем следующие три формулы:

$$g_{\alpha\beta} = \underset{\alpha\beta}{\mathbf{ee}},\ g^{\alpha\beta} = \overset{\alpha\beta}{\mathbf{ee}},\ g^{\alpha}_{\beta} = \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\mathbf{ee}}}.$$

Эти формулы позволяют выразить составляющие фундаментального тензора через векторы двух взаимных систем: $\underset{1}{\mathbf u}, \underset{2}{\mathbf u}, \dots \underset{n}{\mathbf u}$ и $\overset{1}{\mathbf u}, \overset{2}{\mathbf u}, \dots \overset{n}{\mathbf u}$. Так как

$$\underset{\alpha}{\mathbf e} = \underset{\alpha}{\mathbf e}\overset{\sigma}{\mathbf u}\cdot\underset{\sigma}{\mathbf u} = \overset{\sigma}{u}_{\alpha}\cdot\underset{\sigma}{\mathbf u},\quad \underset{\alpha}{\mathbf e} = \underset{\alpha}{\mathbf e}\underset{\sigma}{\mathbf u}\cdot\overset{\sigma}{\mathbf u} = \underset{\sigma}{u}_{\alpha}\cdot\overset{\sigma}{\mathbf u},$$

$$\overset{\alpha}{\mathbf e} = \overset{\alpha}{\mathbf e}\overset{\sigma}{\mathbf u}\cdot\underset{\sigma}{\mathbf u} = \overset{\sigma}{u}{}^{\alpha}\cdot\underset{\sigma}{\mathbf u},\ \overset{\alpha}{\mathbf e} = \overset{\alpha}{\mathbf e}\underset{\sigma}{\mathbf u}\cdot\overset{\sigma}{\mathbf u} = \underset{\sigma}{u}{}^{\alpha}\cdot\overset{\sigma}{\mathbf u},$$

то

$$(27,8)\quad g_{\alpha\beta} = \underset{\sigma}{u}_{\alpha}\overset{\sigma}{u}_{\beta} = \overset{\sigma}{u}_{\alpha}\underset{\sigma}{u}_{\beta},\ g^{\alpha\beta} = \underset{\sigma}{u}{}^{\alpha}\overset{\sigma}{u}{}^{\beta} = \overset{\sigma}{u}{}^{\alpha}\underset{\sigma}{u}{}^{\beta},\ g^{\alpha}_{\beta} = \underset{\sigma}{u}{}^{\alpha}\overset{\sigma}{u}_{\beta} = \overset{\sigma}{u}{}^{\alpha}\underset{\sigma}{u}_{\beta}.$$

8. Установим геометрическую интерпретацию ковариантных и контравариантных составляющих вектора. Обозначим орт координатного вектора $\underset{\alpha}{\mathbf e}$ через $\underset{\alpha}{\mathbf i}$:

$$\underset{\alpha}{\mathbf i} = \frac{1}{\sqrt{\underset{\alpha}{\mathbf e}^2}}\underset{\alpha}{\mathbf e} = \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}}\underset{\alpha}{\mathbf e}.$$

Так как

$$\mathbf x = x^{\alpha}\underset{\alpha}{\mathbf e},\quad x_{\alpha} = \mathbf x\underset{\alpha}{\mathbf e},$$

то

$$\mathbf x = \sum_{\alpha=1}^{n} x^{\alpha}\sqrt{g_{\alpha\alpha}}\,\underset{\alpha}{\mathbf i},\quad x_{\alpha} = \sqrt{g_{\alpha\alpha}}\cdot\mathbf x\underset{\alpha}{\mathbf i}.$$

Первая из этих формул показывает, что $x^{\alpha}\sqrt{g_{\alpha\alpha}}$ представляют собою обычные косоугольные составляющие вектора **x** по координатным осям $\underset{1}{\mathbf e}, \underset{2}{\mathbf e}, \dots \underset{n}{\mathbf e}$; вторая говорит о том, что $\frac{x_{\alpha}}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}}$ являются проекциями вектора **x** на те же координатные оси.

Задача 1. Вычислить углы между осями координатных n-эдров.

Ответ:

$$\cos(\underset{\alpha}{\mathbf e},\underset{\beta}{\mathbf e}) = \frac{g_{\alpha\beta}}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}\cdot g_{\beta\beta}}}\qquad \cos(\overset{\alpha}{\mathbf e},\overset{\beta}{\mathbf e}) = \frac{g^{\alpha\beta}}{\sqrt{g^{\alpha\alpha}\cdot g^{\beta\beta}}}.$$

Задача 2. Показать что обычные составляющие вектора **x** по осям $\overset{1}{\mathbf e}, \overset{2}{\mathbf e}, \dots \overset{n}{\mathbf e}$ выражаются формулой $x_{\alpha}\sqrt{g^{\alpha\alpha}}$; проекции вектора **x** на эти оси — формулой $\frac{x^{\alpha}}{\sqrt{g^{\alpha\alpha}}}$.

Задача 3. Показать, что между составляющими координатных векторов и составляющими фундаментального тензора существуют следующие зависимости:

$$\underset{\alpha}{e}_{\beta} = g_{\alpha\beta},\quad \underset{\alpha}{e}{}^{\beta} = g^{\beta}_{\alpha},\quad \overset{\alpha}{e}_{\beta} = g^{\alpha}_{\beta},\quad \overset{\alpha}{e}{}^{\beta} = g^{\alpha\beta}.$$

9. В метрическом пространстве можно ввести очень простую систему координат, если за векторы $\underset{1}{\mathbf{e}}, \underset{2}{\mathbf{e}}, \ldots \underset{n}{\mathbf{e}}$ выбрать n взаимно-перпендикулярных ортов. Получаем так называемую прямоугольную декартову систему координат: в этом случае

$$g_{\alpha\beta} = \underset{\alpha}{\mathbf{i}}\,\underset{\beta}{\mathbf{i}} = \delta^{\alpha}_{\beta}\,.$$

Следовательно, ковариантный n-эдр совпадает с контравариантным: $\overset{\alpha}{\mathbf{e}} = \underset{\alpha}{\mathbf{e}} = \underset{\alpha}{\mathbf{i}}$.

Ковариантные и контравариантные составляющие вектора выражаются одинаково: $x^{\alpha} = x_{\alpha} = \mathbf{x}\underset{\alpha}{\mathbf{i}}$. Поэтому условимся в прямоугольной системе координат употреблять индексы только одного рода, например, нижние. Обозначать их будем латинскими буквами.

10. Вернемся снова к группе линейных однородных преобразований, не меняющих длин отрезков, причем изучим ее в прямоугольной системе координат. Формулы (27,2) и (27,3) перепишутся в следующем виде:

$$x_i' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k, \tag{27,9}$$

$$\sum a_{ir} a_{kr} = \delta^i_k\,. \tag{27,10}$$

Линейные преобразования (27,9), коэффициенты которых связаны соотношениями (27,10), называются *ортогональными*. Обозначим матрицу $\|a_{ik}\|$ через A; имеем

$$AA_c = E. \tag{27,11}$$

Отсюда вытекает также, что

$$A_c A = E,$$

т. е.

$$\sum a_{ri} a_{rk} = \delta^i_k\,.$$

Подтвердим возможность слияния понятий о ковариантном и контравариантном векторах с точки зрения теории групп. В § 12 мы установили, что при применении к контравариантным векторам аффинного преобразования **A** ковариантные векторы преобразуются контрагредиентно:

$$\dot{\mathbf{u}}' = \mathbf{A}_c^{-1}(\dot{\mathbf{u}})\,.$$

В рассматриваемом случае ортогональных преобразований

$$A_c^{-1} = A\,;$$

следовательно, оба вида векторов преобразуются одинаково, т. е. с точки зрения теории групп действительно определяют одну и ту же геометрическую величину.

Мы уже говорили выше, что те преобразования, у которых определитель $|a_{ik}|$ равен $+1$, называются вращениями; преобразования же с определителем $|a_{ik}|$, равным -1, носят название несобственных ортогональных преобразований (несобственных вращений).

К числу несобственных ортогональных преобразований относятся так называемые зеркальные отражения относительно гиперплоскостей. Например, отражение относительно 1-ой координатной гиперплоскости (построенной на ортах $\underset{2}{\mathbf{i}}, \underset{3}{\mathbf{i}}, \ldots \underset{n}{\mathbf{i}}$) определяется соотношениями:

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1 \\ x_2' &= x_2 \\ &\;\ldots \\ x_n' &= x_n\,. \end{aligned}$$

Можно показать, что каждое несобственное ортогональное преобразование может быть осуществлено, если выполнить некоторое вращение, а затем применить зеркальное отражение относительно некоторой гиперплоскости (или обратно); такое разложение несобственного преобразования на вращение и отражение может быть выполнено бесконечным числом способов. Например, пусть дано несобственное ортогональное преобразование:

$$x_i' = \sum a_{ik} x_k, \quad \Delta = |a_{ik}| = -1\,. \tag{27,12}$$

Рассмотрим сначала преобразование вида:

$$\begin{aligned} x_1' &= -\sum a_{1k} x_k, \\ x_2' &= \sum a_{2k} x_k\,, \\ &\;\ldots\ldots \\ x_n' &= \sum a_{nk} x_k\,. \end{aligned}$$

Оно представляет собой вращение, так как его коэффициенты удовлетворяют уравнениям (27,9), а его определитель равен: $-\Delta = 1$. Применим затем зеркальное отражение

$$\begin{aligned} x_1'' &= -x_1', \\ x_2'' &= x_2', \\ &\cdots\cdots \\ x_n'' &= x_n'. \end{aligned}$$

В результате применения построенного выше вращения и зеркального отражения получается несобственное ортогональное преобразование (27,12).

11. Нетрудно видеть, что группа вращений оставляет инвариантной многолинейную скалярную функцию от n векторов:

$$(\underset{1}{\mathbf{x}}\underset{2}{\mathbf{x}}\ldots\underset{n}{\mathbf{x}}) = \begin{vmatrix} \underset{1}{x}_1 & \cdots & \underset{1}{x}_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \underset{n}{x}_1 & \cdots & \underset{n}{x}_n \end{vmatrix}.$$

Эта функция называется знакопеременным скалярным произведением n векторов. При несобственных ортогональных преобразованиях это произведение меняет знак, оставаясь инвариантным по абсолютной величине.

Скалярное знакопеременное произведение n векторов равно нулю в том и только том случае, если эти векторы зависимы между собою. Если произведение $(\underset{1}{\mathbf{x}}\,\underset{2}{\mathbf{x}}\ldots\underset{n}{\mathbf{x}})$ положительно, то мы будем говорить, что векторы $\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \ldots \underset{n}{\mathbf{x}}$ образуют положительную систему; если отрицательно, — то такую систему будем называть отрицательной. Такое подразделение систем n векторов зависит, конечно, от того порядка, в котором мы берем в каждой системе входящие в нее векторы: стоит только в выбранной системе изменить порядок двух векторов — и система переходит в противоположную. Точно также это определение зависит от выбора системы координат; если, например, изменить направление одной из координатных осей на противоположное, то положительные системы в старой координатной системе сделаются отрицательными в новой и обратно. Координатные орты образуют положительную систему для той системы координат, которую они определяют.

Отметим следующую формулу:

$$(27{,}13)\qquad (\underset{1}{\mathbf{u}}\underset{2}{\mathbf{u}}\ldots\underset{n}{\mathbf{u}})\,(\underset{1}{\mathbf{v}}\underset{2}{\mathbf{v}}\ldots\underset{n}{\mathbf{v}}) = \begin{vmatrix} \underset{1\,1}{\mathbf{uv}} & \cdots & \underset{1\,n}{\mathbf{uv}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \underset{n\,1}{\mathbf{uv}} & \cdots & \underset{n\,n}{\mathbf{uv}} \end{vmatrix}$$

Как частный случай, получаем

$$(27{,}14)\qquad (\underset{1}{\mathbf{u}}\underset{2}{\mathbf{u}}\ldots\underset{n}{\mathbf{u}})^2 = \begin{vmatrix} \underset{1}{\mathbf{u}}^2 & \cdots & \underset{1\,n}{\mathbf{uu}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \underset{n\,1}{\mathbf{uu}} & \cdots & \underset{n}{\mathbf{u}}^2 \end{vmatrix}.$$

12. Посмотрим, как преобразуются составляющие мультивекторов при вращениях пространства. В § 26 мы видели, что преобразования составляющих m-вектора определяются производными матрицами m-го порядка. Нетрудно показать, что производная матрица от ортогональной является также ортогональной матрицей. В самом деле, из соотношения (27,11) получаем:

$$C_m(A)\,C_m(A_c) = E,$$

т. е.

$$C_m(A)\,C_m(A)_c = E.$$

Таким образом, у мультивекторов имеются инварианты, аналогичные инвариантам векторов: модуль мультивектора и скалярное произведение двух мультивекторов. Если мультивектор $\mathbf{U}$ определяется составляющими $u_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ или U_i, то

$$|\mathbf{U}|^2 = \sum U_i^2 = \sum_{(i_1 \ldots i_m)} (u_{i_1 \ldots i_m})^2.$$

Если модуль мультивектора равен единице, условимся называть такой мультивектор единичным. Скалярное произведение будем обозначать следующим образом

$$\mathbf{UV} = \sum U_i V_i = \sum_{(i_1 \ldots i_m)} u_{i_1 i_2 \ldots i_m} v_{i_1 i_2 \ldots i_m}.$$

Если мультивекторы $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ заданы базисами $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}$ и

$\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \dots \underset{m}{\mathbf{v}}$, то их скалярное произведение может быть выражено через скалярные произведения векторов их базисов:

$$(27{,}15) \qquad \mathbf{UV} = \begin{vmatrix} \underset{1}{\mathbf{u}}\underset{1}{\mathbf{v}} & \dots & \underset{1}{\mathbf{u}}\underset{m}{\mathbf{v}} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \underset{m}{\mathbf{u}}\underset{1}{\mathbf{v}} & \dots & \underset{m}{\mathbf{u}}\underset{m}{\mathbf{v}} \end{vmatrix}.$$

Условимся обозначать $2m$-линейную функцию от $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \dots \underset{m}{\mathbf{u}}, \underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \dots \underset{m}{\mathbf{v}}$, стоящую в правой части этой формулы, через

$$(27{,}16) \qquad g(\underset{1}{\mathbf{u}}, \dots \underset{m}{\mathbf{u}}; \underset{1}{\mathbf{v}}, \dots \underset{m}{\mathbf{v}}) = \begin{vmatrix} \underset{1}{\mathbf{u}}\underset{1}{\mathbf{v}} & \dots & \underset{1}{\mathbf{u}}\underset{m}{\mathbf{v}} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \underset{m}{\mathbf{u}}\underset{1}{\mathbf{v}} & \dots & \underset{m}{\mathbf{u}}\underset{m}{\mathbf{v}} \end{vmatrix}.$$

Если $\underset{1}{\mathbf{v}} = \underset{1}{\mathbf{u}}, \dots \underset{m}{\mathbf{v}} = \underset{m}{\mathbf{u}}$, то определитель, стоящий в правой части последней формулы, называется о п р е д е л и т е л е м G r a m'a. Мы будем обозначать его символом

$$(27{,}17) \qquad G(\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \dots \underset{m}{\mathbf{u}}) = g(\underset{1}{\mathbf{u}}, \dots \underset{m}{\mathbf{u}}; \underset{1}{\mathbf{u}}, \dots \underset{m}{\mathbf{u}}) = \begin{vmatrix} \underset{1}{\mathbf{u}}^2 & \dots & \underset{1}{\mathbf{u}}\underset{m}{\mathbf{u}} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \underset{m}{\mathbf{u}}\underset{1}{\mathbf{u}} & \dots & \underset{m}{\mathbf{u}}^2 \end{vmatrix}.$$

Отметим важное свойство определителя Gram'a:

Определитель Gram'a $G(\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \dots \underset{m}{\mathbf{u}})$ *тогда и только тогда равен нулю, если векторы* $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \dots \underset{m}{\mathbf{u}}$ *зависимы.*

Некоторые авторы (Grassmann, Schläfli, Kronecker, Kühne) вводят понятие об „угле" между двумя m-мерными плоскостями, пользуясь скалярным произведением соответствующих m-векторов. Если плоскости определяются m-векторами $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$, то косинус „угла" вводится при помощи формулы:

$$(27{,}18) \qquad \cos(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \frac{\mathbf{UV}}{\sqrt{\mathbf{U}^2\mathbf{V}^2}}.$$

Следует отметить, что этот „угол" не характеризует полностью степени наклона соответствующих плоскостей: для этого необходимо задание большего числа инвариантов. Этот вопрос будет разобран подробнее в дальнейшем.

Задача 4. Доказать следующие свойства определителя Gram'a:

1) Определитель Gram'a $G(\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \dots \underset{m}{\mathbf{u}})$ есть симметрическая функция его аргументов $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \dots \underset{m}{\mathbf{u}}$.

2) Если к какому-нибудь аргументу прибавить любой другой аргумент, умноженный на произвольное число, то определитель Gram'a не меняется.

3) При умножении аргумента на скаляр, определитель Gram'a умножается на квадрат этого скаляра.

Задача 5. Показать, что

$$\begin{vmatrix} \underset{1}{\mathbf{u}}^2 & \dots & \underset{1}{\mathbf{u}}\underset{m}{\mathbf{u}} & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \underset{m}{\mathbf{u}}\underset{1}{\mathbf{u}} & \dots & \underset{m}{\mathbf{u}}^2 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = -G(\underset{1}{\mathbf{u}} - \underset{m}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}} - \underset{m}{\mathbf{u}}, \dots \underset{m-1}{\mathbf{u}} - \underset{m}{\mathbf{u}}).$$

Задача 6. Доказать соотношение:

$$G(\underset{1}{\mathbf{u}} + \underset{1}{\mathbf{u}'}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \dots \underset{m}{\mathbf{u}}) = G(\underset{1}{\mathbf{u}}, \dots \underset{m}{\mathbf{u}}) + G(\underset{1}{\mathbf{u}'}, \dots \underset{m}{\mathbf{u}}) + 2g(\underset{1}{\mathbf{u}}, \dots \underset{m}{\mathbf{u}}; \underset{1}{\mathbf{u}'}, \dots \underset{m}{\mathbf{u}}).$$

Задача 7. Если вектор $\underset{1}{\mathbf{u}'}$ лежит в пучке $\{\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \dots \underset{m}{\mathbf{u}}\}$, то

$$\sqrt{G(\underset{1}{\mathbf{u}} + \underset{1}{\mathbf{u}'}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \dots \underset{m}{\mathbf{u}})} = \pm\sqrt{G(\underset{1}{\mathbf{u}}, \dots \underset{m}{\mathbf{u}})} \pm \sqrt{G(\underset{1}{\mathbf{u}'}, \dots \underset{m}{\mathbf{u}})}.$$

Задача 8. Если

$$\underset{i}{\mathbf{u}'} = \sum_{p=1}^{r} \lambda_{ip} \underset{p}{\mathbf{u}}, \qquad \underset{i}{\mathbf{v}'} = \sum_{p=1}^{r} \mu_{ip} \underset{p}{\mathbf{v}}, \qquad \begin{matrix}(i = 1, \dots m) \\ (r \geqslant m)\end{matrix}$$

то

$$g(\underset{1}{\mathbf{u}'}, \dots \underset{m}{\mathbf{u}'}; \underset{1}{\mathbf{v}'}, \dots \underset{m}{\mathbf{v}'}) =$$

$$= \sum_{\substack{(i_1 \dots i_m) \\ (k_1 \dots k_m)}} \begin{vmatrix} \lambda_{1i_1} & \dots & \lambda_{1i_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{mi_1} & \dots & \lambda_{mi_m} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mu_{1k_1} & \dots & \mu_{1k_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_{mk_1} & \dots & \mu_{mk_m} \end{vmatrix} g(\underset{i_1}{\mathbf{u}}, \dots \underset{i_m}{\mathbf{u}}; \underset{k_1}{\mathbf{v}}, \dots \underset{k_m}{\mathbf{v}}).$$

Задача 9. Если

$$\underset{i}{\mathbf{u}} = \sum_{k=1}^{m} \lambda_{ik} \underset{k}{\mathbf{v}}, \qquad (i = 1, \dots m)$$

то

$$G(\underset{1}{\mathbf{u}}, \dots \underset{m}{\mathbf{u}}) = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{m1} & \dots & \lambda_{mm} \end{vmatrix} G(\underset{1}{\mathbf{v}}, \dots \underset{m}{\mathbf{v}}).$$

13. В том случае, если число измерений пространства четное, и $m = \frac{n}{2}$, два m-вектора имеют билинейный инвариант, отличный от скалярного произведения $\mathbf{UV} = \sum U_i V_i$. В самом деле, пусть плоскости m-векторов $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ задаются базисами $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \dots \underset{m}{\mathbf{u}}$ и $\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \dots \underset{m}{\mathbf{v}}$; рассмотрим скалярное знакопеременное произведение n векторов:

$$(\underset{1}{\mathbf{u}} \dots \underset{m}{\mathbf{u}}\ \underset{1}{\mathbf{v}} \dots \underset{m}{\mathbf{v}}) = \begin{vmatrix} \underset{1}{u_1} & \dots & \underset{1}{u_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \underset{m}{u_1} & \dots & \underset{m}{u_n} \\ \underset{1}{v_1} & \dots & \underset{1}{v_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \underset{m}{v_1} & \dots & \underset{m}{v_n} \end{vmatrix}.$$

Разлагая этот определитель по минорам m-го порядка, состоящим из элементов m первых строк, получаем

$$(\underset{1}{\mathbf{u}} \dots \underset{m}{\mathbf{u}}\ \underset{1}{\mathbf{v}} \dots \underset{m}{\mathbf{v}}) = \sum_{\substack{(i_1 \dots i_m) \\ (k_1 \dots k_m)}} i_{i_1 \dots i_m\, k_1 \dots k_m}\, u_{i_1 \dots i_m}\, v_{k_1 \dots k_m},$$

где $i_{i_1 \dots i_m k_1 \dots k_m}$ равно: 1) $+1$, если подстановка $\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & k_m \end{pmatrix}$ четная; 2) -1, если она нечетная; 3) нулю, если среди индексов $i_1, \dots i_m, k_1, \dots k_m$ есть одинаковые. Условимся обозначать это скалярное произведение следующим символом:

$$(\mathbf{U} \mid \mathbf{V}) = (\underset{1}{\mathbf{u}} \dots \underset{m}{\mathbf{u}}\ \underset{1}{\mathbf{v}} \dots \underset{m}{\mathbf{v}}) = \tag{27,19}$$

$$= \sum_{\substack{(i_1 \dots i_m) \\ (k_1 \dots k_m)}} i_{i_1 \dots i_m\, k_1 \dots k_m}\, u_{i_1 \dots i_m}\, v_{k_1 \dots k_m}.$$

Отметим следующие свойства этого скалярного произведения:

$$(\mathbf{U} \mid \mathbf{U}) = 0,$$

$$(\mathbf{U} \mid \mathbf{V}) = (-1)^m (\mathbf{V} \mid \mathbf{U}).$$

Пример. В двумерном пространстве произведение (27,19) дает знакопеременное произведение двух векторов:

$$(\mathbf{uv}) = u_1 v_2 - u_2 v_1.$$

В четырехмерном пространстве скалярное произведение двух бивекторов $(\mathbf{U} \mid \mathbf{V})$ имеет следующий вид

$$(\mathbf{U} \mid \mathbf{V}) = u_{12} v_{34} + u_{23} v_{14} + u_{31} v_{24} + u_{34} v_{12} + u_{14} v_{23} + u_{24} v_{31}.$$

Задача 10. Показать, что произведение $(\mathbf{U} | \mathbf{V})$ тогда и только тогда равно нулю, если плоскости мультивекторов $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ имеют общие направления.

14. На ряду с понятиями длины и угла в геометрии метрического пространства большую роль играет понятие объема. Измерение объемов в n-мерном пространстве производится вполне аналогично тому, как это делается в трехмерном евклидовом пространстве. Мы не в состоянии в настоящем курсе остановиться на анализе самого понятия объема и на элементарном выводе формул для объема тех простейших многогранных тел, которые являются аналогами параллелепипеда и тетраэдра в пространстве трех измерений; мы ограничимся только тем, что выведем необходимые формулы, пользуясь для быстроты вывода анализом бесконечно-малых.

Рассмотрим m-мерный параллелепипед, построенный на m векторах. Определим объем этого тела как m-кратный интеграл

$$V = \int \dots \int dx_1 \dots dx_m,$$

распространенный на внутреннюю его часть, где $x_1, x_2, \dots x_m$ — прямоугольные декартовы координаты в плоскости E_m: $\{\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \dots \underset{m}{\mathbf{v}}\}$. Для введения прямоугольных координат строим в этой плоскости m взаимно-ортогональных ортов $\underset{1}{\mathbf{i}}, \underset{2}{\mathbf{i}}, \dots \underset{m}{\mathbf{i}}$. Тогда каждая точка плоскости определится вектором:

$$\mathbf{x} = x_1 \underset{1}{\mathbf{i}} + x_2 \underset{2}{\mathbf{i}} + \dots + x_m \underset{m}{\mathbf{i}}. \tag{27,20}$$

На ряду с прямоугольными вводим косоугольные координаты $y_1, y_2, \dots y_m$ точки $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} = y_1 \underset{1}{\mathbf{v}} + y_2 \underset{2}{\mathbf{v}} + \dots + y_m \underset{m}{\mathbf{v}}. \tag{27,21}$$

Точкам, лежащим внутри параллелепипеда, соответствуют значения координат $y_1, \dots y_m$, удовлетворяющие неравенствам:

$$0 < y_i < 1 \qquad (i = 1, \dots m). \tag{27,22}$$

Таким образом, объем выразится интегралом

$$V = \int \dots \int \left| \frac{\partial (x_1, \dots x_m)}{\partial (y_1, \dots y_m)} \right| dy_1 \dots dy_m,$$

распространенным на область (27,22). Из сопоставления формул (27,20) и (27,21) вытекает, что

$$x_1 \underset{1}{\mathbf{i}} + \dots + x_m \underset{m}{\mathbf{i}} = y_1 \underset{1}{\mathbf{v}} + \dots + y_m \underset{m}{\mathbf{v}},$$

откуда

$$x_i = y_1 \underset{1}{\mathbf{v}} \underset{i}{\mathbf{i}} + y_2 \underset{2}{\mathbf{v}} \underset{i}{\mathbf{i}} + \dots + y_m \underset{m}{\mathbf{v}} \underset{i}{\mathbf{i}},$$

т. е.

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_k} = \underset{k}{\mathbf{v}} \underset{i}{\mathbf{i}} = \underset{k}{v_i}; \quad \frac{\partial (x_1, \dots x_m)}{\partial (y_1, \dots y_m)} = \begin{vmatrix} \underset{1}{v_1} & \dots & \underset{1}{v_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \underset{m}{v_1} & \dots & \underset{m}{v_m} \end{vmatrix}.$$

Якобиан $\dfrac{\partial (x_1, \dots x_m)}{\partial (y_1, \dots y_m)}$ может быть выражен через скалярные произведения векторов $\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}} \dots \underset{m}{\mathbf{v}}$. Так как эти векторы лежат в плоскости E_m, то $\underset{i}{\mathbf{v}} \underset{k}{\mathbf{v}} = \sum_{r=1}^{m} \underset{i}{v_r} \underset{k}{v_r}$. Таким образом

$$\left(\frac{\partial (x_1, \dots x_m)}{\partial (y_1, \dots y_m)} \right)^2 = \begin{vmatrix} \underset{1}{\mathbf{v}}^2 & \dots & \underset{1}{\mathbf{v}} \underset{m}{\mathbf{v}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \underset{m}{\mathbf{v}} \underset{1}{\mathbf{v}} & \dots & \underset{m}{\mathbf{v}}^2 \end{vmatrix} = G(\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \dots \underset{m}{\mathbf{v}}).$$

Вычисляем объем V:

$$V = \sqrt{G(\underset{1}{\mathbf{v}}, \dots \underset{m}{\mathbf{v}})} \int_0^1 dy_1 \int_0^1 dy_2 \dots \int_0^1 dy_m = \sqrt{G(\underset{1}{\mathbf{v}}, \dots \underset{m}{\mathbf{v}})}. \tag{27,23}$$

Отметим, что объем n-мерного параллелепипеда, построенного на векторах $\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \dots \underset{n}{\mathbf{v}}$, выразится следующей формулой:

$$V = \sqrt{G(\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \dots \underset{n}{\mathbf{v}})} = \pm (\underset{1}{\mathbf{v}} \underset{2}{\mathbf{v}} \dots \underset{n}{\mathbf{v}}). \tag{27,24}$$

Рассмотрим теперь аналог трехмерного тетраэдра, так называемый m-мерный симплекс. Он имеет $(m+1)$ вершин, не лежащих в одной $(m-1)$-мерной плоскости. Если одну вершину мы поместим в начале координат, остальные m зададим векторами $\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \dots \underset{m}{\mathbf{v}}$, то внутренняя точка симплекса определится вектором:

$$\begin{gathered} \mathbf{x} = y_1 \underset{1}{\mathbf{v}} + y_2 \underset{2}{\mathbf{v}} + \dots + y_m \underset{m}{\mathbf{v}}, \\ y_1 > 0, \ y_2 > 0, \dots y_m > 0, \\ y_1 + y_2 + \dots + y_m < 0. \end{gathered} \tag{27,25}$$

Аналогично предыдущему, получаем для объема симплекса формулу:

$$V = \sqrt{G(\underset{1}{\mathbf{v}}, \dots \underset{m}{\mathbf{v}})} \int \dots \int dy_1 \dots dy_m,$$

где интеграл распространен на область (27,25). Имеем:

$$\int \dots \int dy_1 \dots dy_m = \int_0^1 dy_1 \int_0^{1-y_1} dy_2 \dots \int_0^{1-y_1-\dots-y_{m-1}} dy_m = \frac{1}{m!}.$$

Таким образом,

$$V = \frac{1}{m!} \sqrt{G(\underset{1}{\mathbf{v}} \dots \underset{m}{\mathbf{v}})}. \tag{27,26}$$

Задача 11. Определить объем m-мерного параллелепипеда, построенного на координатных векторах $\underset{\alpha_1}{\mathbf{e}}, \underset{\alpha_2}{\mathbf{e}}, \dots \underset{\alpha_m}{\mathbf{e}}$.

Ответ:

$$V = \sqrt{\begin{vmatrix} g_{\alpha_1 \alpha_1} & \dots & g_{\alpha_1 \alpha_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{\alpha_m \alpha_1} & \dots & g_{\alpha_m \alpha_m} \end{vmatrix}}.$$

Задача 12. В § 5 было введено понятие об отношении двух m-мерных параллелепипедов, лежащих в параллельных m-мерных плоскостях. Показать, что в метрическом пространстве это отношение равно $\pm$ отношению объемов этих параллелепипедов.

15. В § 12 была доказана теорема об единственности скалярного произведения контравариантного и ковариантного векторов в аффинной геометрии. Теперь мы дадим аналогичные

теоремы относительно основных скалярных произведений векторов и мультивекторов в метрическом пространстве.

Теорема 1. *Если число измерений пространства больше 2, то билинейная функция, инвариантная при группе вращений пространства, имеет вид:*

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \alpha \mathbf{x}\mathbf{y},$$

где α — некоторая постоянная. В двумерном пространстве билинейная инвариантная функция выражается следующим образом:

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \alpha\,\mathbf{x}\mathbf{y} + \beta\,(\mathbf{x}\mathbf{y});$$

α, β — некоторые постоянные.

Доказательство. При доказательстве этой и следующих теорем будем употреблять прямоугольные декартовы координаты. Пусть

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum A_{ik} x_i y_k,$$
$$A_{ik} = \varphi(\underset{i}{\mathbf{i}}, \underset{k}{\mathbf{i}}).$$

Рассмотрим частный случай вращения, когда поворот происходит в двумерной плоскости $\{\underset{p}{\mathbf{i}}, \underset{q}{\mathbf{i}}\}$, все же остальные орты неподвижны. Возьмем поворот на прямой угол:

$$(27,27) \qquad \left.\begin{aligned} &\underset{p}{\mathbf{i}} \longrightarrow \underset{q}{\mathbf{i}} \\ &\underset{q}{\mathbf{i}} \rightarrow -\underset{p}{\mathbf{i}} \end{aligned}\right\} (p \neq q),$$
$$\underset{r}{\mathbf{i}} \rightarrow \underset{r}{\mathbf{i}} \qquad (r \neq p,\ q).$$

Получаем:

$$\left.\begin{aligned} A_{pp} &= \varphi(\underset{p}{\mathbf{i}}, \underset{p}{\mathbf{i}}) \rightarrow \varphi(\underset{q}{\mathbf{i}}, \underset{q}{\mathbf{i}}) = A_{qq}, \\ A_{pq} &= \varphi(\underset{p}{\mathbf{i}}, \underset{q}{\mathbf{i}}) \rightarrow -\varphi(\underset{q}{\mathbf{i}}, \underset{p}{\mathbf{i}}) = -A_{qp} \end{aligned}\right\} (p \neq q).$$

$$\left.\begin{aligned} A_{pr} &= \varphi(\underset{p}{\mathbf{i}}, \underset{r}{\mathbf{i}}) \rightarrow \varphi(\underset{q}{\mathbf{i}}, \underset{r}{\mathbf{i}}) = A_{qr}, \\ A_{qr} &= \varphi(\underset{q}{\mathbf{i}}, \underset{r}{\mathbf{i}}) \rightarrow -\varphi(\underset{p}{\mathbf{i}}, \underset{r}{\mathbf{i}}) = -A_{pr} \end{aligned}\right\} (r \neq p,\ q).$$

Вследствие инвариантности функции $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})$, имеем:

$$\left.\begin{aligned} &(a) \qquad A_{pp} = A_{qq} \\ &(b) \qquad A_{pq} = -A_{qp} \end{aligned}\right\} (p \neq q).$$

$$\left.\begin{aligned} &(c) \qquad A_{pr} = A_{qr} \\ &(d) \qquad A_{qr} = -A_{pr} \end{aligned}\right\} (r \neq p,\ q).$$

Соотношение (a) показывает, что

$$A_{11} = A_{22} = \ldots = A_{nn}.$$

Из (c) и (d) для $n > 2$ следует, что

$$A_{ik} = 0\ (i \neq k).$$

Для $n = 2$ из (b) получаем, что

$$A_{12} = -A_{21}.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *n-линейная скалярная функция, инвариантная при группе вращений и меняющая знак при несобственных вращениях, имеет следующий вид:*

$$\varphi(\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \ldots \underset{n}{\mathbf{x}}) = \alpha\,(\underset{1}{\mathbf{x}}\underset{2}{\mathbf{x}} \ldots \underset{n}{\mathbf{x}}),$$

где α — некоторое постоянное.

Доказательство. Пусть

$$(27,28) \qquad \varphi(\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \ldots \underset{n}{\mathbf{x}}) = \sum A_{k_1 k_2 \ldots k_n} \underset{1}{x}_{k_1} \underset{2}{x}_{k_2} \ldots \underset{n}{x}_{k_n},$$
$$A_{k_1 k_2 \ldots k_n} = \varphi(\underset{k_1}{\mathbf{i}}, \underset{k_2}{\mathbf{i}}, \ldots \underset{k_n}{\mathbf{i}}).$$

Для удобства исследования введем следующую терминологию: если индексы $k_1, k_2, \ldots k_n$ коэффициента $A_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ все различны, то такой коэффициент будем называть коэффициентом 1-го класса, а соответствующий член в форме (27,28) — членом 1-го класса; остальные коэффициенты и члены отнесем ко 2-му классу.

Начнем с коэффициентов 1-го класса. Возьмем частный случай вращения, определяемый формулами (27,27). Получаем

$$A_{\ldots p \ldots q \ldots} =$$
$$= \varphi(\ldots \underset{p}{\mathbf{i}} \ldots \underset{q}{\mathbf{i}} \ldots) \rightarrow -\varphi(\ldots \underset{q}{\mathbf{i}} \ldots \underset{p}{\mathbf{i}} \ldots) = -A_{\ldots q \ldots p \ldots}$$

Отсюда следует, что все коэффициенты 1-го класса обладают тем свойством, что они при перестановке любых двух индексов меняют знак, оставаясь неизменными по абсолютной величине. Следовательно:

Члены 1-го класса дают скалярное знакопеременное произведение n векторов, умноженное на некоторое число:

$$\alpha\,(\underset{1}{\mathbf{x}}\underset{2}{\mathbf{x}} \ldots \underset{n}{\mathbf{x}}).$$

Перейдем к анализу коэффициентов 2-го класса. Возьмем случай вращения в плоскости $\{\underset{p}{\mathbf{i}}\underset{q}{\mathbf{i}}\}$ на угол $=\pi$. Координатные орты преобразуются при этом следующим образом:

$$\underset{p}{\mathbf{i}} \to -\underset{p}{\mathbf{i}},$$
$$\underset{q}{\mathbf{i}} \to -\underset{q}{\mathbf{i}},$$
$$\underset{r}{\mathbf{i}} \longrightarrow \underset{r}{\mathbf{i}}, \quad (r \neq p,\ q).$$

Если в коэффициенте $A_{k_1 \ldots, k_n}$ индекс p входит m раз, а индекс q вовсе не входит, то

$$A_{k_1 \ldots k_n} = \varphi(\underset{k_1}{\mathbf{i}}, \ldots \underset{k_n}{\mathbf{i}}) \to (-1)^m \varphi(\underset{k_1}{\mathbf{i}}, \ldots \underset{k_n}{\mathbf{i}}) = (-1)^m A_{k_1 \ldots k_n}.$$

Отсюда вытекает, что только те *коэффициенты 2-го класса не равны нулю, в которых каждый из принадлежащих к нему индексов повторяется четное число раз.* Следовательно, *в пространстве нечетного числа измерений n-линейная скалярная функция, инвариантная при группе вращений, отличается от обычного скалярного знакопеременного произведения n векторов только числовым множителем.*

В пространстве же четного числа измерений одного требования инвариантности при группе вращений недостаточно для того, чтобы выделить знакопеременное произведение n векторов. Так например, для $n=4$ мы имеем 4-линейную функцию следующего вида:

$$A_1(\mathbf{xyzw}) + A_2\,\mathbf{xy}\cdot\mathbf{zw} + A_3\,\mathbf{xz}\cdot\mathbf{yw} + A_4\,\mathbf{xw}\cdot\mathbf{yz}.$$

Для выделения знакопеременной части необходимо еще дополнительное требование, например, о перемене знака при несобственных вращениях.

Возьмем частный случай несобственного ортогонального преобразования — отражение

$$\underset{p}{\mathbf{i}} \to -\underset{p}{\mathbf{i}},$$
$$\underset{q}{\mathbf{i}} \longrightarrow \underset{q}{\mathbf{i}}, \quad (q \neq p).$$

Рассмотрим неравный нулю коэффициент 2-го класса $A_{k_1, \ldots k_n}$. Если в него входит индекс p, то он повторяется, как мы видели выше, четное число раз. Так как функция φ должна

при несобственном ортогональном преобразовании менять знак, получаем:

$$A_{k_1 \ldots k_n} = \varphi(\underset{k_1}{\mathbf{i}}, \ldots \underset{k_n}{\mathbf{i}}) \to -\varphi(\underset{k_1}{\mathbf{i}}, \ldots \underset{k_n}{\mathbf{i}}) = -A_{k_1 \ldots k_n}.$$

Следовательно, все члены 2-го класса равны нулю и в функции $\varphi(\underset{1}{\mathbf{x}}, \ldots \underset{n}{\mathbf{x}})$ остается одна знакопеременная часть. Теорема, таким образом, доказана.

Естественно поставить вопрос об общем виде многолинейной функции, инвариантной при группе движений. Те приемы доказательства, которые мы применяли выше, приводят к слишком громоздким выкладкам. Поэтому мы ограничимся только ссылкой на теорему из теории инвариантов:

Каждый целый рациональный инвариант группы вращений, зависящий от системы векторов, есть целая рациональная функция от основных инвариантов — скалярных коммутативных произведений с двумя векторными множителями и скалярных знакопеременных произведений с n множителями.

Из этой основной теоремы вытекает следующее положение:

Скалярная функция, линейно зависящая от векторных аргументов и инвариантная при группе вращений пространства, есть линейная функция от основных скалярных произведений входящих в нее векторов.

16. При анализе скалярных произведений мультивекторов мы затронем только произведения двух множителей. Докажем теорему:

Теорема 3. *Если $m \neq \frac{n}{2}$, то билинейная функция двух m-векторов, инвариантная при группе вращений, имеет следующий вид:*

$$\varphi(\mathbf{U},\mathbf{V}) = \alpha\,\mathbf{UV},$$

где α — некоторая постоянная; при $m = \frac{n}{2}$ инвариантная билинейная функция выражается следующим образом:

$$\varphi(\mathbf{U},\mathbf{V}) = \alpha\,\mathbf{UV} + \beta\,(\mathbf{U}\,|\,\mathbf{V});$$

α, β — некоторые постоянные.

Доказательство. Исследуем, при каком выборе коэффициентов A_{ik} билинейная функция от двух m-векторов:

$$(27{,}29) \qquad \varphi(\mathbf{U},\mathbf{V}) = \sum A_{ik}\,U_i\,V_k$$

является инвариантом при группе вращений. Рассмотрим поворот на 180° в двумерной плоскости $\{\underset{p}{\mathbf{i}}, \underset{q}{\mathbf{i}}\}$:

$$x_p' = -x_p$$
$$x_q' = -x_q \qquad (27,30)$$
$$x_r' = x_r \ (r \neq p, q).$$

При этом вращении те составляющие m-векторов $u_{i_1 \dots i_m}$, $v_{k_1 \dots k_m}$, среди индексов которых входит или p или q, изменят знак на обратный; остальные остаются неизменными. Для инвариантности формы (27,29) необходимо, чтобы ее члены не меняли знака при вращении (27,30); следовательно, в (27,29) могут входить: 1) члены, в которых индексы у составляющих m-векторов $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ одни и те же: $u_{k_1 \dots k_m}$, $v_{k_1 \dots k_m}$, 2) члены с произведениями $u_{i_1 \dots i_m} v_{k_1 \dots k_m}$, у которых ряд индексов $i_1, \dots i_m$, $k_1 \dots k_m$ исчерпывает все числа: $1, 2, \dots n$.

Займемся сначала членами 1-го типа:

$$A_{11} U_1 V_1 + A_{22} U_2 V_2 + \dots + A_{NN} U_N V_N.$$

Применим поворот на 90° в плоскости $\{\underset{p}{\mathbf{i}}, \underset{q}{\mathbf{i}}\}$:

$$x_p' = x_q$$
$$x_q' = -x_p \qquad (27,31)$$
$$x_r' = x_r, \ (r \neq p, q).$$

Пусть через U_i обозначена одна из составляющих $u_{i_1 \dots i_m}$, в которые входит индекс p, но не входит q, а через U_k — составляющая $u_{k_1 \dots k_m}$, у которой индексы $k_1, \dots k_m$ — те же, что и $i_1, \dots i_m$, за исключением только одного: вместо p входит q. При применении вращения (27,31) составляющие U_i, U_k преобразуются следующим образом:

$$U_i' = \pm U_k$$
$$U_k' = \mp U_i.$$

Рассмотрим в билинейной форме два члена:

$$A_{ii} U_i V_i + A_{kk} U_k V_k.$$

При вращении (27,31) они переходят в:

$$A_{ii} U_k V_k + A_{kk} U_i V_i.$$

Для инвариантности функции φ необходимо, чтобы $A_{ii} = A_{kk}$. Таким образом, члены 1-го типа дают скалярное произведение вида

$$a \sum_{i=1}^{N} U_i V_i. \qquad (27,32)$$

Перейдем к рассмотрению оставшихся членов. Как мы уже говорили выше, в инвариантную билинейную форму могут входить только те из оставшихся членов $u_{i_1 \dots i_m} v_{k_1 \dots k_m}$, у которых ряд индексов $i_1, \dots i_m$, $k_1, \dots k_m$ исчерпывает все числа ряда: $1, 2, \dots n$. Следовательно, если $m < \frac{n}{2}$, то инвариантной билинейной формы, включающей члены 2-го типа, не существует. Нетрудно показать, что при $m > \frac{n}{2}$ также инвариантной билинейной формы рассматриваемого вида не существует. В самом деле, пусть $m > \frac{n}{2}$ и пусть в произведении $u_{i_1 \dots i_m} v_{k_1 \dots k_m}$ индексы $i_{\alpha_1}, i_{\alpha_2}, \dots k_{\alpha_l} \dots k_{\alpha_n}$ исчерпывают числа $1, 2, \dots n$. Оставшиеся индексы при $m < n$ исчерпать снова ряд $1, 2, \dots n$ уже не могут (при $m = n$ мы получаем тривиальный случай, который входит в рассмотренный выше (27,32)); следовательно, для того, чтобы произведение $u_{i_1 \dots i_m} v_{k_1 \dots k_m}$ не изменило знака при вращении (27,31), необходимо, чтобы оставшиеся индексы давали повторения, но тогда или $u_{i_1 \dots i_m} = 0$ или $v_{k_1 \dots k_m} = 0$.

Таким образом, только при $m = \frac{n}{2}$ (т. е. в пространстве с четным числом измерений) существует скалярное произведение двух m-векторов, отличное от (27,32). В каждом его члене входит произведение $u_{i_1 \dots i_m} v_{k_1 \dots k_m}$, причем индексы $i_1, \dots i_m$, $k_1, \dots k_m$ исчерпывают все числа: $1, 2, \dots n$.

Для того, чтобы установить вид этого нового произведения $\psi(\mathbf{U}, \mathbf{V})$, выразим его через базисы $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \dots \underset{m}{\mathbf{u}}$; $\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \dots \underset{m}{\mathbf{v}}$, на которых построены m-векторы $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$. $\psi(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ является многолинейной функцией от $\underset{1}{\mathbf{u}}, \dots \underset{m}{\mathbf{u}}$, $\underset{1}{\mathbf{v}}, \dots \underset{m}{\mathbf{v}}$, инвариантной при группе вращений. Покажем, что эта функция меняет знак при несобственных ортогональных преобразованиях. При применении зеркального отражения:

$$x_p{}' = -x_p$$
$$x_q{}' = x_q \quad (q \neq p)$$

все составляющие $u_{i_1 \dots i_m}$, $v_{k_1 \dots k_m}$, в которые входит индекс p, изменяют знак на обратный. Следовательно, и $\psi(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ при этом зеркальном отражении меняет свой знак. Но мы знаем, что скалярная n-линейная функция, инвариантная при группе вращений и меняющая знак при несобственных ортогональных преобразованиях, отличается от знакопеременного произведения n векторов только численным множителем. Итак, оставшиеся члены дают произведение вида

$$\psi(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \alpha\,(\mathbf{U} \mid \mathbf{V}).$$

Теорема доказана.

§ 28. Тензоры в метрическом пространстве Евклида.

1. Слияние понятий ковариантного и контравариантного вектора в общее понятие о векторе в метрическом пространстве влечет за собой аналогичное слияние понятий тензоров различной природы. В основе определения тензора лежит многолинейная функция от векторных аргументов. Раз векторы в метрическом пространстве мы считаем геометрическими величинами одной и той же природы, то не имеет никакого смысла делать различие между ковариантыми, контравариантными и смешанными тензорами. Можно только говорить о различных видах составляющих тензора.

Если мы имеем m-линейную функцию $\varphi(\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \dots \underset{m}{\mathbf{x}})$, то ей соответствует тензор m-го порядка. Ковариантные, контравариантные и смешанные составляющие его определяются следующим образом:

$$A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m} = \varphi(\underset{\alpha_1}{\mathbf{e}}, \underset{\alpha_2}{\mathbf{e}}, \dots \underset{\alpha_m}{\mathbf{e}}) \tag{28,1}$$

$$A^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m} = \varphi(\overset{\alpha_1}{\mathbf{e}}, \overset{\alpha_2}{\mathbf{e}}, \dots \overset{\alpha_m}{\mathbf{e}}) \tag{28,2}$$

$$A_{\alpha_1 \dots \alpha_r}{}^{\beta_1 \dots \beta_s} = \varphi(\underset{\alpha_1}{\mathbf{e}}, \dots \underset{\alpha_r}{\mathbf{e}}, \overset{\beta_1}{\mathbf{e}}, \dots \overset{\beta_s}{\mathbf{e}}) \quad (r + s = m). \tag{28,3}$$

Переход от одних составляющих к другим совершается при помощи фундаментального тензора. Так например, если мы подставим в (28,1) выражения контравариантных координатных векторов через ковариантные

$$\underset{\alpha_k}{\mathbf{e}} = g_{\alpha_k \sigma_k} \overset{\sigma_k}{\mathbf{e}},$$

то получим

$$A_{\alpha_1 \dots \alpha_m} = g_{\alpha_1 \sigma_1} \dots g_{\alpha_m \sigma_m} A^{\sigma_1 \dots \sigma_m}.$$

Обратно

$$A^{\alpha_1 \dots \alpha_m} = g^{\alpha_1 \sigma_1} \dots g^{\alpha_m \sigma_m} A_{\sigma_1 \dots \sigma_m}.$$

Любой индекс тензора мы можем поднять или опустить при помощи составляющих фундаментального тензора. Действие это носит название **операции поднятия и опускания индекса.**

Отметим, что при помощи фундаментального тензора очень просто выражается операция контрактирования:

$$A_{\dots \sigma}{}^{\sigma}{}_{\dots} = g^{\sigma\tau} A_{\dots \sigma \dots \tau \dots} = g_{\sigma\tau} A_{\dots}{}^{\sigma \dots \tau}{}_{\dots} = A_{\dots}{}^{\sigma}{}_{\sigma \dots}$$

В прямоугольной декартовой системе координат разница между различными видами составляющих тензора пропадает. Мы будем употреблять в этом случае нижние индексы, записывая их латинскими буквами.

2. Перейдем к рассмотрению тензоров, играющих основную роль в геометрии метрического пространства.

1) **Фундаментальный тензор.** О нем мы уже говорили в предыдущем параграфе; поэтому только кратко формулируем его свойства. Он определяет метрику пространства и устанавливает связь между различными составляющими одной и той же геометрической величины; при помощи него производится слияние контравариантных и ковариантных векторов в одно общее понятие. Билинейная форма $g_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$ дает скалярное произведение двух векторов. Линейная векторфункция

$$y_\alpha = g_{\alpha\sigma} x^\sigma, \quad y^\alpha = g^{\alpha\sigma} x_\sigma,$$

определяемая им, есть единичная векторфункция: $\mathbf{y} = \mathbf{x}$. Формула (27,8) выражает фундаментальный тензор через векторы двух взаимных систем:

$$g_{\alpha\beta} = \overset{\sigma}{u}_\alpha \underset{\sigma}{u}_\beta.$$

Как частный случай, если за векторы $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{n}{\mathbf{u}}$ принять взаимно-ортогональные орты, получаем

$$(28,4) \qquad g_{\alpha\beta} = \sum_{k=1}^{n} \underset{k}{i}_{\alpha}\, \underset{k}{i}_{\beta}.$$

Отметим также следующие соотношения, часто встречающиеся в геометрии и вытекающие непосредственно из формул (20,36), (20,37):

$$(28,5) \qquad \mathbf{xy} = -\frac{1}{g}\begin{vmatrix} g_{11} & \ldots & g_{1n} & x_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{n1} & \ldots & g_{nn} & x_n \\ y_1 & \ldots & y_n & 0 \end{vmatrix} = -g\begin{vmatrix} g^{11} & \ldots & g^{1n} & x^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g^{n1} & \ldots & g^{nn} & x^{(n)} \\ y^{(1)} & \ldots & y^{(n)} & 0 \end{vmatrix},$$

где g — дискриминант фундаментального тензора:

$$g = |g_{ik}|.$$

2) Дискриминантный тензор. Он соответствует той n-линейной функции, которая определяет скалярное знакопеременное произведение n векторов. Следовательно, его составляющие выражаются следующим образом:

$$(28,6) \qquad \varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = (\underset{\alpha_1}{\mathbf{e}}\,\underset{\alpha_2}{\mathbf{e}} \ldots \underset{\alpha_n}{\mathbf{e}}).$$

На основании формулы (27,14), имеем

$$(\underset{\alpha_1}{\mathbf{e}}\,\underset{\alpha_2}{\mathbf{e}} \ldots \underset{\alpha_n}{\mathbf{e}})^2 = g,$$

где g — дискриминант фундаментального тензора. Таким образом [1].

$$(28,7) \qquad \varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = \sqrt{g}\; i_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n},$$

где $i_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ равно: 1) $+1$, если подстановка $\begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$ четная, 2) -1, если она нечетная, 3) нулю, если среди индексов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ имеются равные. Аналогично выводим выражения для контравариантных составляющих этого тензора:

$$(28,8) \qquad \varepsilon^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = \frac{1}{\sqrt{g}}\, i_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}.$$

[1] Условимся системы координатных векторов $\underset{1}{\mathbf{e}}, \underset{2}{\mathbf{e}}, \ldots \underset{n}{\mathbf{e}}$ выбирать положительными.

Дискриминантный тензор может быть выражен при помощи n взаимно-перпендикулярных ортов. В самом деле, формулу (28,6) можно переписать в следующем виде:

$$\varepsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_n} = \begin{vmatrix} \underset{\alpha_1}{e}_1 & \ldots & \underset{\alpha_1}{e}_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \underset{\alpha_n}{e}_1 & \ldots & \underset{\alpha_n}{e}_n \end{vmatrix},$$

где через $\underset{\alpha_i}{e}_k$ обозначены составляющие вектора $\underset{\alpha_i}{\mathbf{e}}$ в прямоугольной системе координат. Пусть эта система определяется ортами $\underset{1}{\mathbf{i}}, \underset{2}{\mathbf{i}}, \ldots \underset{n}{\mathbf{i}}$ (предполагается, что это — положительная система).

Так как

$$\underset{\alpha_i}{e}_k = \underset{\alpha_i}{\mathbf{e}}\,\underset{k}{\mathbf{i}} = \underset{k}{i}_{\alpha_i},$$

то

$$(28,9) \qquad \varepsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_n} = \begin{vmatrix} \underset{1}{i}_{\alpha_1} & \ldots & \underset{1}{i}_{\alpha_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \underset{n}{i}_{\alpha_1} & \ldots & \underset{n}{i}_{\alpha_n} \end{vmatrix}, \quad \varepsilon^{\alpha_1\ldots\alpha_n} = \begin{vmatrix} \underset{1}{i}^{\alpha_1} & \ldots & \underset{1}{i}^{\alpha_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \underset{n}{i}^{\alpha_1} & \ldots & \underset{n}{i}^{\alpha_n} \end{vmatrix}.$$

Перемножая $\varepsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_n} = (\underset{\alpha_1}{\mathbf{e}} \ldots \underset{\alpha_n}{\mathbf{e}})$ и $\varepsilon_{\beta_1\ldots\beta_n} = (\underset{\beta_1}{\mathbf{e}} \ldots \underset{\beta_n}{\mathbf{e}})$, получаем

$$(28,10) \qquad \varepsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_n}\varepsilon_{\beta_1\ldots\beta_n} = \begin{vmatrix} g_{\alpha_1\beta_1} & \ldots & g_{\alpha_1\beta_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{\alpha_n\beta_1} & \ldots & g_{\alpha_n\beta_n} \end{vmatrix}.$$

Аналогично выводим формулу (она может быть также получена из (28,10) простым повышением индексов):

$$\varepsilon^{\alpha_1\ldots\alpha_n}\varepsilon_{\beta_1\ldots\beta_n} = \begin{vmatrix} g^{\alpha_1}_{\beta_1} & \ldots & g^{\alpha_1}_{\beta_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ g^{\alpha_n}_{\beta_1} & \ldots & g^{\alpha_n}_{\beta_n} \end{vmatrix} = \delta^{\alpha_1\ldots\alpha_n}_{\beta_1\ldots\beta_n},$$

где $\delta^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{\beta_1 \dots \beta_n}$ — тензор, введенный нами в § 14 $\left(\delta^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{\beta_1 \dots \beta_n}\right.$ — обобщенный символ Kronecker'а$\left.\right)$. Учитывая, что

$$\delta^{\sigma_1 \dots \sigma_m\, \alpha_1 \dots \alpha_{n-m}}_{\sigma_1 \dots \sigma_m\, \beta_1 \dots \beta_{n-m}} = m!\, \delta^{\alpha_1 \dots \alpha_{n-m}}_{\beta_1 \dots \beta_{n-m}},$$

получаем следующую формулу:

$$\varepsilon^{\sigma_1 \dots \sigma_m\, \alpha_1 \dots \alpha_{n-m}}\, \varepsilon_{\sigma_1 \dots \sigma_m\, \beta_1 \dots \beta_{n-m}} = \tag{28,11}$$
$$= m!\, \delta^{\alpha_1 \dots \alpha_{n-m}}_{\beta_1 \dots \beta_{n-m}}.$$

При помощи дискриминантного тензора очень просто выписывается выражение для скалярного знакопеременного произведения n векторов в косоугольной системе координат:

$$(\underset{1}{\mathbf{x}}\, \underset{2}{\mathbf{x}} \dots \underset{n}{\mathbf{x}}) = \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n}\, \underset{1}{x}^{\alpha_1} \dots \underset{n}{x}^{\alpha_n} = \sqrt{g} \begin{vmatrix} \underset{1}{x}^{(1)} & \dots & \underset{1}{x}^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \underset{n}{x}^{(1)} & \dots & \underset{n}{x}^{(n)} \end{vmatrix}, \tag{28,12}$$

$$(\underset{1}{\mathbf{x}}\, \underset{2}{\mathbf{x}} \dots \underset{n}{\mathbf{x}}) = \varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_n}\, \underset{1}{x}_{\alpha_1} \dots \underset{n}{x}_{\alpha_n} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} \underset{1}{x}_1 & \dots & \underset{1}{x}_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \underset{n}{x}_1 & \dots & \underset{n}{x}_n \end{vmatrix}.$$

Дискриминантный тензор определяет $(n-1)$-линейную знакопеременную векторфункцию $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}} \dots \underset{n-1}{\mathbf{x}})$:

$$y_\alpha = \varepsilon_{\alpha \alpha_1 \dots \alpha_{n-1}}\, \underset{1}{x}^{\alpha_1} \dots \underset{n-1}{x}^{\alpha_{n-1}},\quad y^\alpha = \varepsilon^{\alpha \alpha_1 \dots \alpha_{n-1}}\, \underset{1}{x}_{\alpha_1} \dots \underset{1}{x}_{\alpha_{n-1}},$$

называемую **векторным произведением** векторов $\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \dots \underset{n-1}{\mathbf{x}}$. В прямых обозначениях она записывается следующим образом:[1]

$$\mathbf{y} = [\underset{1}{\mathbf{x}}\, \underset{2}{\mathbf{x}} \dots \underset{n-1}{\mathbf{x}}].$$

[1] В этой главе квадратными скобками условимся обозначать исключительно векторное произведение $(n-1)$ векторов, а не мультивекторы, как это было принято в предыдущих главах.

Отметим следующую формулу, связывающую векторное произведение со скалярным знакопеременным произведением n векторов:

$$\underset{1}{\mathbf{x}}\,[\underset{2}{\mathbf{x}}\, \underset{3}{\mathbf{x}} \dots \underset{n}{\mathbf{x}}] = (\underset{1}{\mathbf{x}}\, \underset{2}{\mathbf{x}} \dots \underset{n}{\mathbf{x}}). \tag{28,13}$$

Векторное произведение $(n-1)$ векторов обладает следующими свойствами:

1) оно перпендикулярно к каждому своему множителю:

$$\underset{k}{\mathbf{x}}\,[\underset{1}{\mathbf{x}}\, \underset{2}{\mathbf{x}} \dots \underset{n-1}{\mathbf{x}}] = (\underset{k}{\mathbf{x}}\, \underset{1}{\mathbf{x}}\, \underset{2}{\mathbf{x}} \dots \underset{n-1}{\mathbf{x}}) = 0,\quad (k = 1, \dots n-1);$$

2) система векторов $[\underset{1}{\mathbf{x}}\, \underset{2}{\mathbf{x}} \dots \underset{n-1}{\mathbf{x}}], \underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \dots \underset{n-1}{\mathbf{x}}$ положительна, если векторы $\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \dots \underset{n-1}{\mathbf{x}}$ независимы (в противном случае $[\underset{1}{\mathbf{x}}\, \underset{2}{\mathbf{x}} \dots \underset{n-1}{\mathbf{x}}] = 0$); в самом деле,

$$([\underset{1}{\mathbf{x}}\, \underset{2}{\mathbf{x}} \dots \underset{n-1}{\mathbf{x}}]\, \underset{1}{\mathbf{x}}\, \underset{2}{\mathbf{x}} \dots \underset{n-1}{\mathbf{x}}) = [\underset{1}{\mathbf{x}}\, \underset{2}{\mathbf{x}} \dots \underset{n-1}{\mathbf{x}}]\, [\underset{1}{\mathbf{x}}\, \underset{2}{\mathbf{x}} \dots \underset{n-1}{\mathbf{x}}] > 0;$$

3) вектор $[\underset{1}{\mathbf{x}}\, \underset{2}{\mathbf{x}} \dots \underset{n-1}{\mathbf{x}}]$ по модулю равен объему параллелепипеда, построенного на векторах $\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}} \dots \underset{n-1}{\mathbf{x}}$. Доказывается это следующим образом: если

$$y_\alpha = \varepsilon_{\alpha \sigma_1 \dots \sigma_{n-1}}\, \underset{1}{x}^{\sigma_1} \dots \underset{n-1}{x}^{\sigma_{n-1}},$$

то

$$\mathbf{y}^2 = y_\alpha y^\alpha = \varepsilon_{\alpha \sigma_1 \dots \sigma_{n-1}}\, \varepsilon^{\alpha \tau_1 \dots \tau_{n-1}}\, \underset{1}{x}^{\sigma_1} \dots \underset{n-1}{x}^{\sigma_{n-1}}\, \underset{1}{x}_{\tau_1} \dots \underset{n-1}{x}_{\tau_{n-1}} =$$
$$= \delta^{\tau_1 \dots \tau_{n-1}}_{\sigma_1 \dots \sigma_{n-1}}\, \underset{1}{x}^{\sigma_1} \dots \underset{n-1}{x}^{\sigma_{n-1}}\, \underset{1}{x}_{\tau_1} \dots \underset{n-1}{x}_{\tau_{n-1}} = G(\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}} \dots \underset{n-1}{\mathbf{x}}).$$

При помощи дискриминантного тензора очень просто выражается также то скалярное произведение двух m-векторов, которое мы обозначили символом $(\mathbf{U}\,|\,\mathbf{V})$, $\left(m = \frac{n}{2}\right)$. Если $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \dots \underset{m}{\mathbf{u}}$ и $\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \dots \underset{m}{\mathbf{v}}$ — базисы этих мультивекторов, $u^{\alpha_1 \dots \alpha_m}$ и $v^{\alpha_1 \dots \alpha_m}$ — их составляющие, то

$$(\mathbf{U}\,|\,\mathbf{V}) = (\underset{1}{\mathbf{u}} \dots \underset{m}{\mathbf{u}}\, \underset{1}{\mathbf{v}} \dots \underset{m}{\mathbf{v}}) =$$
$$= \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_m \beta_1 \dots \beta_m}\, \underset{1}{u}^{\alpha_1} \dots \underset{m}{u}^{\alpha_m}\, \underset{1}{v}^{\beta_1} \dots \underset{m}{v}^{\beta_m}.$$

Итак,

$$(28,14)\qquad (\mathbf{U}\,|\,\mathbf{V}) = \sum_{\substack{(\alpha_1\ldots\alpha_m)\\(\beta_1\ldots\beta_m)}} \varepsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_m\beta_1\ldots\beta_m}\, u^{\alpha_1\ldots\alpha_m} v^{\beta_1\ldots\beta_m} = \frac{1}{(m!)^2}\,\varepsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_m\beta_1\ldots\beta_m}\, u^{\alpha_1\ldots\alpha_m} v^{\beta_1\ldots\beta_m}.$$

Задача 1. Показать, что в 4-мерном пространстве взаимно-перпендикулярные орты $\underset{1}{\mathbf{i}}, \underset{2}{\mathbf{i}}, \underset{3}{\mathbf{i}}, \underset{4}{\mathbf{i}}$, образующие положительную систему, удовлетворяют соотношениям:

$$[\underset{2}{\mathbf{i}}\,\underset{3}{\mathbf{i}}\,\underset{4}{\mathbf{i}}] = \underset{1}{\mathbf{i}},\quad [\underset{1}{\mathbf{i}}\,\underset{3}{\mathbf{i}}\,\underset{4}{\mathbf{i}}] = -\underset{2}{\mathbf{i}},\quad [\underset{1}{\mathbf{i}}\,\underset{2}{\mathbf{i}}\,\underset{4}{\mathbf{i}}] = \underset{3}{\mathbf{i}},\quad [\underset{1}{\mathbf{i}}\,\underset{2}{\mathbf{i}}\,\underset{3}{\mathbf{i}}] = -\underset{4}{\mathbf{i}}.$$

Задача 2. Показать, что векторы системы, взаимной с $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{n}{\mathbf{u}}$, могут быть выражены следующим образом:

$$\overset{1}{\mathbf{u}} = \frac{[\underset{2}{\mathbf{u}}\,\underset{3}{\mathbf{u}}\ldots\underset{n}{\mathbf{u}}]}{(\underset{1}{\mathbf{u}}\,\underset{2}{\mathbf{u}}\ldots\underset{n}{\mathbf{u}})},\quad \overset{2}{\mathbf{u}} = -\frac{[\underset{1}{\mathbf{u}}\,\underset{3}{\mathbf{u}}\ldots\underset{n}{\mathbf{u}}]}{(\underset{1}{\mathbf{u}}\,\underset{2}{\mathbf{u}}\ldots\underset{n}{\mathbf{u}})},\ \ldots\ \overset{n}{\mathbf{u}} = (-1)^{n-1}\frac{[\underset{1}{\mathbf{u}}\,\underset{2}{\mathbf{u}}\ldots\underset{n-1}{\mathbf{u}}]}{(\underset{1}{\mathbf{u}}\,\underset{2}{\mathbf{u}}\ldots\underset{n}{\mathbf{u}})}.$$

Задача 3. Доказать следующие формулы:

$$[\underset{1}{\mathbf{u}}\,\underset{2}{\mathbf{u}}\ldots\underset{n-1}{\mathbf{u}}]\ [\underset{1}{\mathbf{v}}\,\underset{2}{\mathbf{v}}\ldots\underset{n-1}{\mathbf{v}}] = g(\underset{1}{\mathbf{u}},\ldots\underset{n-1}{\mathbf{u}};\ \underset{1}{\mathbf{v}},\ldots\underset{n-1}{\mathbf{v}})$$

$$[\underset{1}{\mathbf{u}}\,\underset{2}{\mathbf{u}}\ldots\underset{n-2}{\mathbf{u}}\,[\underset{1}{\mathbf{v}}\,\underset{2}{\mathbf{v}}\ldots\underset{n-1}{\mathbf{v}}]] = (-1)^{n-1}\begin{vmatrix} \underset{1}{\mathbf{v}} & \underset{2}{\mathbf{v}} & \ldots & \underset{n-1}{\mathbf{v}} \\ \underset{1}{\mathbf{u}}\,\underset{1}{\mathbf{v}}, & \underset{1}{\mathbf{u}}\,\underset{2}{\mathbf{v}}, & \ldots & \underset{1}{\mathbf{u}}\,\underset{n-1}{\mathbf{v}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \underset{n-2}{\mathbf{u}}\,\underset{1}{\mathbf{v}}, & \underset{n-2}{\mathbf{u}}\,\underset{2}{\mathbf{v}}, & \ldots & \underset{n-2}{\mathbf{u}}\,\underset{n-1}{\mathbf{v}} \end{vmatrix}.$$

Задача 4. Даны n независимых векторов $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{n}{\mathbf{u}}$. Обозначим

$$\underset{1}{\mathbf{v}} = [\underset{2}{\mathbf{u}}\,\underset{3}{\mathbf{u}}\ldots\underset{n}{\mathbf{u}}],\quad \underset{2}{\mathbf{v}} = -[\underset{1}{\mathbf{u}}\,\underset{3}{\mathbf{u}}\ldots\underset{n}{\mathbf{u}}],\ \ldots\ \underset{n}{\mathbf{v}} = (-1)^{n-1}[\underset{1}{\mathbf{u}}\,\underset{2}{\mathbf{u}}\ldots\underset{n-1}{\mathbf{u}}].$$

Показать, что

$$(\underset{1}{\mathbf{v}}\,\underset{2}{\mathbf{v}}\ldots\underset{n}{\mathbf{v}}) = (\underset{1}{\mathbf{u}}\,\underset{2}{\mathbf{u}}\ldots\underset{n}{\mathbf{u}})^{n-1}.$$

3) Тензор, лежащий в основе скалярного произведения двух m-векторов: $\mathbf{UV} = \sum U_i V_i$. Этот тензор выражается при помощи операции альтернирования через фундаментальный, а при помощи операции контрактирования — через дискриминантный.

Пусть мультивекторы $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ определяются базисами $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}},\ldots\underset{m}{\mathbf{u}}$ и $\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}},\ldots\underset{m}{\mathbf{v}}$. Имеем

$$\mathbf{UV} \doteq \begin{vmatrix} \underset{1}{\mathbf{u}}\,\underset{1}{\mathbf{v}} & \ldots & \underset{1}{\mathbf{u}}\,\underset{m}{\mathbf{v}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \underset{m}{\mathbf{u}}\,\underset{1}{\mathbf{v}} & \ldots & \underset{m}{\mathbf{u}}\,\underset{m}{\mathbf{v}} \end{vmatrix} = g(\underset{1}{\mathbf{u}},\ldots\underset{m}{\mathbf{u}},\ \underset{1}{\mathbf{v}},\ldots\underset{m}{\mathbf{v}}).$$

Обозначим составляющие тензора, соответствующего функции $g(\underset{1}{\mathbf{u}},\ldots\underset{m}{\mathbf{u}},\ \underset{1}{\mathbf{v}},\ldots\underset{m}{\mathbf{v}})$, через $g_{\alpha_1\ldots\alpha_m,\,\beta_1\ldots\beta_m}$. Имеем

$$g_{\alpha_1\ldots\alpha_m,\,\beta_1\ldots\beta_m} = m!\,g_{[\alpha_1[\beta_1}g_{\alpha_2\beta_2}\ldots g_{\alpha_m]\beta_m]},$$

$$(28,15)\qquad g^{\alpha_1\ldots\alpha_m}{}_{\beta_1\ldots\beta_m} = m!\,g^{[\alpha_1}_{[\beta_1}g^{\alpha_2}_{\beta_2}\ldots g^{\alpha_m]}_{\beta_m]} = \delta^{\alpha_1\ldots\alpha_m}_{\beta_1\ldots\beta_m},$$

$$g^{\alpha_1\ldots\alpha_m,\,\beta_1\ldots\beta_m} = m!\,g^{[\alpha_1[\beta_1}g^{\alpha_2\beta_2}\ldots g^{\alpha_m]\beta_m]}.$$

Тензор этот обладает теми свойствами, которые были указаны относительно тензора $c_{\alpha_1\ldots\alpha_m\beta_1\ldots\beta_m}$ в § 26:

1) он антисимметричен как относительно индексов α_1, $\alpha_2,\ldots\alpha_m$, так и относительно $\beta_1, \beta_2,\ldots\beta_m$.

2) $$g_{\alpha_1\ldots\alpha_m,\beta_1\ldots\beta_m} = g_{\beta_1\ldots\beta_m,\,\alpha_1\ldots\alpha_m}.$$

3) $$g_{\alpha_1\ldots[\alpha_m,\beta_1\ldots\beta_m]} = 0.$$

Связь между тензором $g_{\alpha_1\ldots\alpha_m,\,\beta_1\ldots\beta_m}$ и дискриминантным устанавливает формула (28,11):

$$\varepsilon^{\sigma_1\ldots\sigma_m\alpha_1\ldots\alpha_{n-m}}\varepsilon_{\sigma_1\ldots\sigma_m\beta_1\ldots\beta_{n-m}} = m!\ \delta^{\alpha_1\ldots\alpha_{n-m}}_{\beta_1\ldots\beta_{n-m}} = m!\ g^{\alpha_1\ldots\alpha_{n-m}}{}_{\beta_1\ldots\beta_{n-m}}.$$

При помощи тензора $g_{\alpha_1\ldots\alpha_m,\,\beta_1\ldots\beta_m}$ очень просто записывается скалярное произведение двух m-векторов в косоугольной системе координат. Имеем:

$$\mathbf{UV} = g_{\alpha_1\ldots\alpha_m,\beta_1\ldots\beta_m}\,\underset{1}{u}^{\alpha_1}\ldots\underset{m}{u}^{\alpha_m}\,\underset{1}{v}^{\beta_1}\ldots\underset{m}{v}^{\beta_m} =$$

$$(28,16)\qquad = \sum_{\substack{(\alpha_1\ldots\alpha_m)\\(\beta_1\ldots\beta_m)}} g_{\alpha_1\ldots\alpha_m,\,\beta_1\ldots\beta_m}\,u^{\alpha_1\ldots\alpha_m}v^{\beta_1\ldots\beta_m}$$

и т. д. Эти формулы, а также соотношения:

$$u_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} = g_{\alpha_1 \sigma_1} \ldots g_{\alpha_m \sigma_m} u^{\sigma_1 \ldots \sigma_m} =$$

$$(28,17) \qquad = \sum_{(\sigma_1 \ldots \sigma_m)} g_{\alpha_1 \ldots \alpha_m,\, \sigma_1 \ldots \sigma_m} u^{\sigma_1 \ldots \sigma_m},$$

$$u^{\alpha_1 \ldots \alpha_m} = \sum_{(\sigma_1 \ldots \sigma_m)} g^{\alpha_1 \ldots \alpha_m}{}_{\sigma_1 \ldots \sigma_m} u^{\sigma_1 \ldots \sigma_m}$$

показывают, что тензор $g_{\alpha_1 \ldots \alpha_m,\, \beta_1 \ldots \beta_m}$ в теории мультивекторов играет ту же самую роль, какую фундаментальный тензор играет в теории векторов.

Задача 5. Показать справедливость соотношений:

$$\sum_{(\sigma_1 \ldots \sigma_m)} g^{\alpha_1 \ldots \alpha_m,\, \sigma_1 \ldots \sigma_m} g_{\sigma_1 \ldots \sigma_m,\, \beta_1 \ldots \beta_m} = g^{\alpha_1 \ldots \alpha_m}{}_{\beta_1 \ldots \beta_m}.$$

§ 29. Тензор 2-го порядка.

1. В аффинном пространстве линейные векторфункции делятся на две категории (векторфункции 1-го и 2-го рода), смотря по тому, являются ли аргумент и функция векторами одной и той же природы или нет. В метрическом пространстве такого подразделения, конечно, нет. Каждой линейной векторфункции

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{x}),\ y_\alpha = a_\alpha{}^\sigma x_\sigma = a_{\alpha\sigma} x^\sigma,\ y^\alpha = a^\alpha{}_\sigma x^\sigma = a^{\alpha\sigma} x_\sigma$$

можно сопоставить четыре различных матрицы составляющих соответствующего тензора:

$$(29,1) \qquad \| a^\alpha{}_\beta \|,\ \| a_\alpha{}^\beta \|,\ \| a_{\alpha\beta} \|,\ \| a^{\alpha\beta} \|.$$

Линейная векторфункция определяется заданием одной из этих матриц. Матрицы (29,1) связаны между собою при помощи матрицы составляющих фундаментального тензора. Если обозначить

$$G = \| g_{\alpha\beta} \|,$$

то

$$\| a^\alpha{}_\beta \| = G^{-1} \| a_{\alpha\beta} \|,\quad \| a_\alpha{}^\beta \| = \| a_{\alpha\beta} \| G^{-1},$$
$$\| a^{\alpha\beta} \| = G^{-1} \| a_{\alpha\beta} \| G^{-1}.$$

В прямоугольной декартовой системе координат все 4 матрицы сливаются в одну. То, что было изложено в § 16 и 17

относительно линейных векторфункций 1-го рода, непосредственно переносится, конечно, в геометрию метрического пространства. Отметим, что характеристический полином может быть представлен в одном из следующих видов:

$$\varphi(\lambda) = | \lambda g^\alpha_\beta - a^\alpha{}_\beta | = | \lambda g^\alpha_\beta - a_\beta{}^\alpha | =$$
$$= \frac{1}{g} | \lambda g_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta} | = g\, | \lambda g^{\alpha\beta} - a^{\alpha\beta} |,$$

где g — дискриминант фундаментального тензора. Элементарные делители линейной векторфункции определяются любой из следующих матриц:

$$\| \lambda g^\alpha_\beta - a^\alpha{}_\beta \|,\ \| \lambda g^\alpha_\beta - a_\beta{}^\alpha \|,\ \| \lambda g_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta} \|,\ \| \lambda g^{\alpha\beta} - a^{\alpha\beta} \|.$$

При алгебраических операциях над линейными векторфункциями вычисления удобнее всего производить с матрицами смешанных составляющих: $\|a^\alpha{}_\beta\|$ или $\|a_\alpha{}^\beta\|$.

2. Понятие о линейной векторфункции, сопряженной с данной, вводится при помощи уравнения

$$\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}\mathbf{A}_c(\mathbf{x}),$$

где $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — произвольные векторы. Отсюда получаются следующие соотношения между составляющими двух сопряженных векторфункций

$$\underset{c}{a}_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha},\ \underset{c}{a}^{\alpha\beta} = a^{\beta\alpha},\ \underset{c}{a}_\alpha{}^\beta = a^\beta{}_\alpha,\ \underset{c}{a}^\alpha{}_\beta = a_\beta{}^\alpha.$$

Если векторфункция совпадает со своей сопряженной, она называется **симметрической**. Если же она противоположна по знаку своей сопряженной, то называется **антисимметрической**.

По отношению к векторфункциям, не обладающим свойством симметрии или антисимметрии, мы не будем добавлять ничего к тому, что было изложено в §§ 16 и 17.

Задача 1. Если E_m является инвариантной плоскостью линейной векторфункции $\mathbf{A}$, то плоскость E_{n-m}, перпендикулярная к E_m, инвариантна для векторфункции $\mathbf{A}_c$.

Задача 2. Если у линейной векторфункции $\mathbf{A}$ имеется n независимых главных направлений, определяемых векторами $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{n}{\mathbf{u}}$, с характеристическими числами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$, то у векторфункции $\mathbf{A}_c$ главные направления определяются векторами взаимной системы $\overset{1}{\mathbf{u}}, \overset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \overset{n}{\mathbf{u}}$, причем направлению $\overset{i}{\mathbf{u}}$ соответствует характеристическое число λ_i.

Задача 3. Если $\mathbf{A}$ — линейная векторфункция, то $\mathbf{A}_c\mathbf{A}$ является симметрической векторфункцией с неотрицательными характеристическими числами. $\mathbf{A}(\mathbf{i})^2$, где $\mathbf{i}$ — произвольный орт, не превышает по величине наибольшего из характеристических чисел функции $\mathbf{A}_c\mathbf{A}$.

Задача 4. Если векторфункция $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{y} = a\mathbf{x}\mathbf{f}(\mathbf{y}),$$

то она линейна и симметрична или антисимметрична.

Задача 5. Однооднозначная векторфункция $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, удовлетворяющая условию

$$\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{x}\mathbf{y},$$

есть линейная функция.

3. Симметрическая векторфункция. Ее теория представляет собою непосредственное приложение теории пары квадратичных форм, когда одна из этих форм считается фундаментальным тензором пространства. Из теорем 3—5 (§ 21) вытекают следующие основные свойства симметрической векторфункции: [1]

1) Симметрическая векторфункция простого типа и все ее характеристические числа действительны.

2) Можно выделить n взаимно-перпендикулярных главных направлений симметрической линейной векторфункции.

Эти n взаимно-перпендикулярных главных направлений дают оси гиперповерхности:

$$c_{\alpha\beta}\, x^\alpha x^\beta = \text{const.},$$

соответствующих симметрическому тензору $c_{\alpha\beta}$. Следует отметить, что в пространстве, в основу мероопределения которого положена неопределенная квадратичная форма, вопрос об осях гиперповерхностей 2-го порядка значительно усложняется.

Докажем обратное предложение:

Теорема 1. *Линейная векторфункция, у которой можно построить n взаимно-перпендикулярных главных направлений, — симметрическая.*

---

[1] Мы рекомендуем читателю заново провести доказательство этих теорем, так как в метрическом пространстве соответствующие выкладки упрощаются. То же относится к разбираемому ниже антисимметрическому тензору и тензору вращения.

Доказательство. В самом деле, обозначая векторы главных направлений через $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \dots \underset{n}{\mathbf{u}}$, векторы взаимной системы — через $\overset{1}{\mathbf{u}}, \overset{2}{\mathbf{u}}, \dots \overset{n}{\mathbf{u}}$, характеристические числа — через $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$, имеем [см. формулу (16,9)]

$$a_{\alpha\beta} = \sum_k \lambda_k \underset{k}{u}_\alpha \overset{k}{u}_\beta. \tag{29,2}$$

Если за $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \dots \underset{n}{\mathbf{u}}$ выбрать орты $(\underset{k}{\mathbf{u}} = \underset{k}{\mathbf{i}})$, то $\overset{k}{\mathbf{u}} = \underset{k}{\mathbf{i}}$, т. е.

$$a_{\alpha\beta} = \sum \lambda_k \underset{k}{i}_\alpha \underset{k}{i}_\beta = a_{\beta\alpha}.$$

Инварианты симметрической линейной векторфункции позволяют очень просто доказать теоремы Аполлония для центральных гиперповерхностей 2-го порядка. Для простоты формулировки этих теорем в качестве гиперповерхности возьмем аналог эллипсоида. За координатные контравариантные векторы выберем полудиаметры этой гиперповерхности; тогда ее уравнение будет иметь следующий вид:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} x^{(\alpha)^2} = 1,$$

т. е. матрица соответствующего тензора $c_{\alpha\beta}$ — единичная.

Характеристический полином возьмем в форме:

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{g}\, |g_{\alpha\beta}\lambda - c_{\alpha\beta}|.$$

Учитывая, что

$$\begin{vmatrix} g_{\alpha_1\alpha_1} & \dots & g_{\alpha_1\alpha_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{\alpha_m\alpha_1} & \dots & g_{\alpha_m\alpha_m} \end{vmatrix} = G(\underset{\alpha_1}{\mathbf{e}}, \dots \underset{\alpha_m}{\mathbf{e}}),$$

мы можем выразить инварианты следующими формулами:

$$a_m = \frac{1}{g} \sum_{(\alpha_1 \dots \alpha_{n-m})} G(\underset{\alpha_1}{\mathbf{e}}, \underset{\alpha_2}{\mathbf{e}}, \dots \underset{\alpha_{n-m}}{\mathbf{e}}),\ (m = 1, 2, \dots n-1)$$

$$a_n = \frac{1}{g}.$$

Последнее из этих соотношений показывает, что объем n-мерного параллелепипеда, построенного на n взаимно-сопряженных полудиаметрах, есть величина постоянная. Принимая во внимание, что $G(\underset{a_1}{\mathbf{e}}, \underset{a_2}{\mathbf{e}}, \ldots \underset{a_m}{\mathbf{e}})$ определяет квадрат объема m-мерного параллелепипеда, построенного на m полудиаметрах $\underset{a_1}{\mathbf{e}}, \underset{a_2}{\mathbf{e}}, \ldots \underset{a_m}{\mathbf{e}}$, мы приходим к следующему предложению:

Теорема 2 (Аполлония). *Сумма квадратов объемов m-мерных параллелепипедов, построенных на взаимно-сопряженных осях гиперэллипсоида, есть величина постоянная.*

Теорема 3. *Сумма квадратов величин, обратных и взаимно-перпендикулярным полудиаметрам центральной гиперповерхности 2-го порядка, есть величина постоянная.*[1]

Доказательство. Примем n взаимно-перпендикулярных диаметров за координатные оси декартовой системы координат. Пусть поверхность определяется уравнением

$$\sum_{i,k=1}^{n} c_{ik} x_i x_k = 1.$$

Так как квадрат полудиаметра, лежащего на k-ой координатной оси, равен $\frac{1}{c_{kk}}$ и так как $\sum c_{kk}$ является инвариантом α_1, то теорема доказана.

4. Наиболее простыми симметрическими линейными векторфункциями являются единичная и ортогонально проектирующая. Единичная соответствует фундаментальному тензору; все ее характеристические числа равны единице и все направления в пространстве являются инвариантными.

В аффинном пространстве операция проектирования определяется заданием двух пучков, полностью определяющих векторное пространство; один из этих пучков — это тот, на который проектируются векторы пространства, другой — параллельно которому происходит процесс проектирования. В метрическом пространстве особенно большое значение имеет ортогональное проектирование, характеризуемое тем, что пучок, параллельно которому происходит процесс проектирования, перпендикулярен к плоскости, на которую векторы проектируются. Термин „ортогональный" мы будем пропускать; условимся называть два взаимно-перпендикулярных пучка E_m и E_{n-m} взаимно дополнительными.

[1] Следует заметить, что длины полудиаметров могут быть мнимыми.

Нетрудно видеть, что ортогонально проектирующая линейная векторфункция $\overline{\mathbf{E}}(\mathbf{x})$ симметрическая. В самом деле, в той плоскости E_m, на которую проектируются векторы, все направления — главные (с характеристическим числом $=1$), в дополнительном пучке — все направления нулевые. Таким образом, можно выделить n взаимно-перпендикулярных главных направлений, т. е., на основании теоремы 1, $\overline{\mathbf{E}}$ — симметрическая векторфункция. Соответствующий ей тензор называется фундаментальным тензором плоскости E_m, так как он соответствует единичному преобразованию векторов, лежащих в этой плоскости.

Построим n взаимно-перпендикулярных ортов $\underset{1}{\mathbf{i}}, \underset{2}{\mathbf{i}}, \ldots \underset{n}{\mathbf{i}}$, из которых первые m возьмем в плоскости E_m, остальные $(n-m)$ — в дополнительном пучке E_{n-m}. Обозначим проектирующие векторфункции на E_m и E_{n-m} через $\overline{\mathbf{E}}$ и $\overline{\overline{\mathbf{E}}}$, соответствующие фундаментальные тензоры — через $\overline{g}_{\alpha\beta}$ и $\overline{\overline{g}}_{\alpha\beta}$. На основании формулы (29,2), имеем:

$$(29,3) \qquad \overline{g}_{\alpha\beta} = \sum_{k=1}^{m} \underset{k}{i}_{\alpha} \underset{k}{i}_{\beta}, \quad \overline{\overline{g}}_{\alpha\beta} = \sum_{k=m+1}^{n} \underset{k}{i}_{\alpha} \underset{k}{i}_{\beta};$$

таким образом

$$(29,4) \qquad \overline{\mathbf{E}} + \overline{\overline{\mathbf{E}}} = \mathbf{E}, \quad \overline{g}_{\alpha\beta} + \overline{\overline{g}}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}.$$

Как у всякого тензора в метрическом пространстве, у $\overline{g}_{\alpha\beta}$ есть контравариантные и смешанные составляющие:

$$(29,5) \qquad \overline{g}^{\alpha\beta} = g^{\alpha\sigma} g^{\beta\tau} \overline{g}_{\sigma\tau} = \sum_{k=1}^{m} \underset{k}{i}^{\alpha} \underset{k}{i}^{\beta}$$

$$(29,6) \qquad \overline{g}^{\alpha}_{\beta} = g^{\alpha\sigma} \overline{g}_{\sigma\beta} = \sum_{k=1}^{m} \underset{k}{i}^{\alpha} \underset{k}{i}_{\beta}.$$

Обращаем внимание, что $\|\overline{g}^{\alpha\beta}\|$ не является матрицей обратной матрице $\|\overline{g}_{\alpha\beta}\|$, как это имеет место для фундаментального тензора полного пространства; матрица $\|\overline{g}_{\alpha\beta}\|$ даже не имеет обратной, так как ее ранг равен m.

Отметим следующее соотношение, вытекающее из (29,6).

(29,7) $$\bar{g}_\alpha^\alpha = m, \quad \bar{\bar{g}}_\alpha^\alpha = n - m.$$

В вопросах метрики тензор $\bar{g}_{\alpha\beta}$ играет в плоскости E_m ту же самую роль, какую тензор $g_{\alpha\beta}$ играет в полном пространстве. Так например, если **x** и **y** лежат в E_m, то

$$\mathbf{xy} = g_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta = \bar{g}^{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta = \bar{g}_\beta^\alpha x_\alpha y^\beta = \bar{g}_\beta^\alpha x^\beta y_\alpha.$$

В самом деле,

$$\bar{g}_{\alpha\beta} y^\beta = y_\alpha,$$

т. е. $\bar{g}_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta = x^\alpha y_\alpha = \mathbf{xy}$. Если **x** и **y** не лежат в E_m, то $\bar{g}_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$ дает скалярное произведение проекций **x** и **y** на E_m.

5. При помощи проектирующей векторфункции вводится операция проектирования не только векторов, но и тензоров любого порядка.

Пусть многолинейная функция φ (**x**, **y**, ... **w**) обращается в нуль, если вектор **x** перпендикулярен к некоторой плоскости E_m; мы будем говорить, что функция принадлежит своим первым аргументом к этой плоскости. Если φ (**x**, **y**, ... **w**) не принадлежит аргументом **x** к плоскости E_m, то из нее можно получить новую многолинейную функцию, которая будет уже обладать этим свойством: для этого достаточно вместо **x** вставить $\bar{\mathrm{E}}(\mathbf{x})$, где $\bar{\mathrm{E}}$ — векторфункция, проектирующая на плоскость E_m.

Соответствующую терминологию будем употреблять в отношении к тензорам: если

$$a_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m} u^{\alpha_1} = 0.$$

всякий раз, как вектор **u** перпендикулярен к E_m, будем говорить, что тензор $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ принадлежит своим первым индексом к плоскости E_m, что он лежит этим индексом в E_m. Если тензор всеми своими индексами принадлежит к некоторой плоскости, мы будем говорить просто, что он в э т о й п л о с к о с т и л е ж и т, что эта плоскость является его о б л а с т ь ю с у щ е с т в о в а н и я.

Каждый тензор можно спроектировать относительно любого индекса на заданную плоскость, например

$$\bar{g}_{\alpha_1}^\sigma a_{\sigma\alpha_2 \ldots \alpha_m}, \quad \bar{g}_{\alpha_2}^\sigma a_{\alpha_1 \sigma \ldots \alpha_m}, \ldots$$

где $\bar{g}_\alpha^\beta$ — фундаментальный тензор этой плоскости. Пользуясь фундаментальным тензором плоскости, мы можем разложить каждый тензор на такие слагаемые, что у каждого из них индексы будут принадлежать двум взаимно-дополнительным плоскостям. Например, если $\bar{g}_{\alpha\beta}$ и $\bar{\bar{g}}_{\alpha\beta}$ — фундаментальные тензоры двух взаимно-дополнительных пучков E_m и E_{n-m}, то

$$u_{\alpha\beta} = g_\alpha^\sigma g_\beta^\tau u_{\sigma\tau} = (\bar{g}_\alpha^\sigma + \bar{\bar{g}}_\alpha^\sigma)(\bar{g}_\beta^\tau + \bar{\bar{g}}_\beta^\tau) u_{\sigma\tau} =$$
$$= \bar{g}_\alpha^\sigma \bar{g}_\beta^\tau u_{\sigma\tau} + \bar{g}_\alpha^\sigma \bar{\bar{g}}_\beta^\tau u_{\sigma\tau} + \bar{\bar{g}}_\alpha^\sigma \bar{g}_\beta^\tau u_{\sigma\tau} + \bar{\bar{g}}_\alpha^\sigma \bar{\bar{g}}_\beta^\tau u_{\sigma\tau}.$$

Первое слагаемое лежит в E_m, второе принадлежит первым индексом к E_m, вторым к E_{n-m}, третье — наоборот, наконец, четвертое лежит в E_{n-m}. Тензор m-го порядка дает в общем случае 2^m таких слагаемых.

6. Как единичная, так и проектирующая векторфункции являются и д е м п о т е н т н ы м и, т. е. они удовлетворяют уравнению вида

(29,8) $$\mathbf{X}^2 = \mathbf{X}.$$

Обратно, если не единичная симметрическая векторфункция удовлетворяет уравнению (29,8), то она проектирующая. В самом деле, ее приведенный характеристический полином имеет вид

$$\psi(\lambda) = \lambda(\lambda - 1).$$

Следовательно, эта векторфункция простого типа и имеет характеристические числа, равные 0 и 1. Так как она, кроме того, симметрическая, то у нее можно выделить n взаимно-перпендикулярных главных направлений. Таким образом, мы приходим к следующей теореме:

Т е о р е м а 4. *Линейная не единичная векторфункция тогда и только тогда является ортогонально проектирующей, если она симметрическая идемпотентная функция.*

Формула (29,8) дает следующие соотношения для фундаментального тензора плоскости

$$\bar{g}^{\sigma}_{\alpha}\,\bar{g}^{\beta}_{\sigma}=\bar{g}^{\beta}_{\alpha},\quad \bar{g}^{\sigma}_{\alpha}\,\bar{g}_{\sigma\beta}=\bar{g}_{\alpha\beta},\quad \bar{g}^{\alpha\sigma}\,\bar{g}^{\beta}_{\sigma}=\bar{g}^{\alpha\beta},\quad \bar{g}^{\alpha\sigma}\bar{g}_{\sigma\beta}=\bar{g}^{\alpha}_{\beta},$$

аналогичные соотношениям для фундаментального тензора пространства.

Задача 6. В трехмерном пространстве с фундаментальным тензором:

$$\|g_{\alpha\beta}\|=\begin{Vmatrix}2, & 0, & 1\\ 0, & 1, & 0\\ 1, & 0, & 1\end{Vmatrix}$$

задана векторфункция **A** матрицей смешанных составляющих:

$$\|a_{\alpha}^{\ \beta}\|=\begin{Vmatrix}\frac{1}{3}, & -\frac{2}{3}, & 0\\ -\frac{1}{3}, & \frac{2}{3}, & 0\\ -\frac{1}{3}, & -\frac{1}{3}, & 1\end{Vmatrix}.$$

Показать, что **A** — проектирующая векторфункция и определить область ее существования.

Ответ. Область существования определяется уравнением

$$x_1+x_2=0.$$

7. Антисимметрическая векторфункция. Результаты, полученные нами в разделах 7—9 § 23, дают следующие основные свойства антисимметрического тензора в метрическом пространстве:

1) *Антисимметрическая векторфункция — простого типа; ее характеристические числа или равны нулю или чисто мнимы; ненулевые главные направления изотропны.*

2) *У антисимметрического тензора ранга $= r$ можно выделить $\frac{r}{2}$ инвариантных двумерных плоскостей, взаимно-перпендикулярных и перпендикулярных к нулевой области тензора. Выделяя n взаимно-перпендикулярных ортов, лежащих в инвариантных плоскостях и нулевой области, мы можем представить антисимметрический тензор в следующем виде:*

$$(29,9)\quad a_{\alpha\beta}=\alpha_1(\underset{1}{i}_{\alpha}\underset{2}{i}_{\beta}-\underset{1}{i}_{\beta}\underset{2}{i}_{\alpha})+\alpha_2(\underset{3}{i}_{\alpha}\underset{4}{i}_{\beta}-\underset{3}{i}_{\beta}\underset{4}{i}_{\alpha})+\ldots+$$
$$+\alpha_{\frac{r}{2}}(\underset{r-1}{i}_{\alpha}\underset{r}{i}_{\beta}-\underset{r-1}{i}_{\beta}\underset{r}{i}_{\alpha}).$$

Принимая во внимание последнюю формулу, можно охарактеризовать воздействие антисимметрической линейной векторфункции на преобразуемый ею вектор следующим образом: проекцию этого вектора в нулевой области она превращает в нуль, а проекции на инвариантные двумерные плоскости она поворачивает в этих плоскостях на прямой угол, умножая их на коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{\frac{r}{2}}$.

8. Каждая линейная векторфункция может быть разложена на симметрическую и антисимметрическую части

$$\mathbf{A}=\frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{A}_c)+\frac{1}{2}(\mathbf{A}-\mathbf{A}_c),\quad a_{\alpha\beta}=a_{(\alpha\beta)}+a_{[\alpha\beta]}.$$

Тензор $a_{[\alpha\beta]}$ называется вихрем векторфункции **A**. В трехмерном пространстве вихрь векторфункции можно отождествить с вектором при помощи дискриминантного тензора. Вихрем линейной векторфункции, соответствующей тензору $a_{\alpha\beta}$, называется вектор **w**, определяемый равенством

$$(29,10)\qquad w^{\alpha}=-\varepsilon^{\alpha\sigma\tau}a_{\sigma\tau},$$

или, более подробно,

$$(29,11)\qquad w^{(1)}=\frac{1}{\sqrt{g}}(a_{32}-a_{23}),$$
$$w^{(2)}=\frac{1}{\sqrt{g}}(a_{13}-a_{31}),\quad w^{(3)}=\frac{1}{\sqrt{g}}(a_{21}-a_{12}).$$

При помощи вектора вихря линейная антисимметрическая векторфункция может быть представлена в следующем виде:

$$(29,12)\qquad \mathbf{y}=\frac{1}{2}[\mathbf{wx}].$$

В самом деле,

$$y_{\alpha}=\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\sigma\tau}w^{\sigma}x^{\tau}=-\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\sigma\tau}\varepsilon^{\sigma\mu\nu}x^{\tau}a_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\delta^{\mu\nu}_{\alpha\tau}a_{\mu\nu}x^{\tau}=a_{\alpha\tau}x^{\tau}.$$

В двумерном пространстве вихрь линейной векторфункции может быть отождествлен со скаляром:

$$\omega = -\varepsilon^{\sigma\tau} a_{\sigma\tau} = \frac{1}{\sqrt{g}}(a_{21} - a_{12}). \tag{29,13}$$

9. Векторфункция вращения. Вращениями (собственными и несобственными) мы назвали выше такие однородные линейные преобразования, которые не изменяют квадратичную форму, лежащую в основе мероопределения пространства. Принимая во внимание результат исследования, данного в § 22, можем формулировать следующие основные свойства рассматриваемой векторфункции:

1) *Векторфункция вращения* $\mathbf{D}$ *удовлетворяет уравнению*

$$\mathbf{D}\mathbf{D}_c = \mathbf{E}. \tag{29,14}$$

2) *Векторфункция вращения простого типа; ее характеристические числа по модулю равны единице; главные направления, соответствующие комплексным корням, изотропны.*

3) *Если векторфункция вращения имеет характеристические числа* $= \pm 1$, *то им соответствуют 2 взаимно-перпендикулярных главных области* E_p *и* E_q. *В плоскости, ортогональной к* E_p *и* E_q, *можно выделить ряд взаимно-перпендикулярных инвариантных двумерных плоскостей, соответствующих комплексным характеристическим числам. Выделяя в этих инвариантных плоскостях и главных областях* n *взаимно-перпендикулярных прямых, мы получим координатную систему, в которой матрица векторфункции имеет следующий вид*:

$$\left\| \begin{array}{cccccc} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 & & & & \\ -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \begin{array}{cc} \cos\alpha_m & \sin\alpha_m \\ -\sin\alpha_m & \cos\alpha_m \end{array} & & \\ & & & & E_p & \\ & & & & & E_q \end{array} \right\| \quad (2m + p + q = n). \tag{29,15}$$

Векторфункция вращения преобразует каждый вектор пространства следующим образом: проекцию его в область с характеристическим числом $= 1$ оставляет без изменения, проекцию

в область с характеристическим числом $= -1$ заменяет прямо противоположным вектором; проекции на инвариантные двумерные плоскости поворачивает соответственно на углы α_1, $\alpha_2, \ldots \alpha_m$.

Применяя теорему Hermite'a, получаем формулу Cayley: если у векторфункции вращения $\mathbf{D}$ нет характеристических чисел, равных -1, то

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{E} + \mathbf{A}}{\mathbf{E} - \mathbf{A}}; \tag{29,16}$$

если же у нее нет характеристических чисел, равных 1, то

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{A} + \mathbf{E}}{\mathbf{A} - \mathbf{E}}, \tag{29,17}$$

где $\mathbf{A}$ — антисимметрическая линейная векторфункция.

К несобственным вращениям принадлежат зеркальные отражения относительно гиперплоскостей. Обозначим векторфункцию, проектирующую на ту плоскость, относительно которой происходит отражение, через $\bar{\mathbf{E}}$, функцию, проектирующую на прямую, перпендикулярную к этой гиперплоскости, через $\bar{\bar{\mathbf{E}}}$. Тогда векторфункция $\mathbf{D}$ зеркального отражения выразится следующим образом:

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} - 2\bar{\bar{\mathbf{E}}} = 2\bar{\mathbf{E}} - \mathbf{E} = \bar{\mathbf{E}} - \bar{\bar{\mathbf{E}}}. \tag{29,18}$$

Пример. Рассмотрим вращение в трехмерном пространстве. Пусть оно задается ортогональной матрицей $\| a_{ik} \|$ (система координат предполагается прямоугольной декартовой). Требуется определить угол поворота и ось вращения.

Если α — угол поворота, то характеристические числа рассматриваемой векторфункции равны 1, $e^{i\alpha}$, $e^{-i\alpha}$. Поэтому

$$2\cos\alpha = a_{11} + a_{22} + a_{33} - 1.$$

Ось вращения пусть определяется направляющими косинусами x_1, x_2, x_3. Так как это — инвариантное направление, соответствующее характеристическому числу 1, то

$$(a_{11} - 1)\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 = 0;$$

$$a_{21}\, x_1 + (a_{22} - 1)\, x_2 + a_{23}\, x_3 = 0,$$

т. е.

$$\frac{x_1}{a_{13} + a_{31}} = \frac{x_2}{a_{23} + a_{32}} = \frac{x_3}{1 - a_{11} - a_{22} + a_{33}}.$$

Задача 7. Пользуясь обозначениями, введенными в рассмотренном выше примере, доказать соотношения

$$4\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

$$4x_1^2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 + a_{11} - a_{22} - a_{33},$$

$$4x_2^2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - a_{11} + a_{22} - a_{33},$$

$$4x_3^2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - a_{11} - a_{22} + a_{33}.$$

Задача 8. Если векторфункция вращения симметрическая, то ее характеристические числа равны ± 1; если она антисимметрическая, то характеристические числа $= \pm i$. В обоих случаях она — простого типа, даже если она и не вещественна.

Если в формуле (29,18) за $\overline{\mathrm{E}}$ принять векторфункцию, проектирующую на m-мерную плоскость E_m, то D определяет зеркальное отражение относительно E_m. D принадлежит к собственным или несобственным вращениям, смотря по тому, четным или нечетным является число $(n - m)$.

§ 30. Мультивекторы.

1. В § 26 мы изучали основные свойства мультивекторов в аффинном пространстве. Здесь мы остановимся на тех вопросах, которые возникают относительно мультивекторов в связи с введением метрических понятий.

Прежде всего отметим, что, согласно терминологии, введенной в § 29, мультивектор принадлежит той плоскости E_m, в которой лежит его базис, т. е. какой бы вектор $\mathbf{u}$, перпендикулярный к E_m, мы ни взяли, будем иметь соотношения:

$$(30,1) \qquad u_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m} u^{\alpha_k} = 0.$$

2. В § 27 было введено понятие о модуле мультивектора

$$|\mathbf{U}|^2 = \mathbf{U}^2 = \sum_{(\alpha_1\ldots\alpha_m)} u_{\alpha_1\ldots\alpha_m} u^{\alpha_1\ldots\alpha_m} = \frac{1}{m!} u_{\alpha_1\ldots\alpha_m} u^{\alpha_1\ldots\alpha_m}.$$

Модуль мультивектора равен объему того m-мерного параллелепипеда, который построен на векторах его базиса. В самом деле, если $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}$ — базис рассматриваемого m-вектора, то

$$|\mathbf{U}|^2 = G(\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}).$$

Единичный мультивектор (т. е. равный по модулю единице) называется дискриминантным тензором той m-мерной плоскости E_m, в которой он лежит. Построить дискриминантный тензор плоскости очень просто: стоит только за его базис взять m взаимно-перпендикулярных ортов: $\underset{1}{\mathbf{i}}, \underset{2}{\mathbf{i}}, \ldots, \underset{m}{\mathbf{i}}$; получаем

$$(30,2) \qquad \varepsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_m} = m!\, \underset{1}{i}_{[\alpha_1} \cdots \underset{m}{i}_{\alpha_m]}.$$

Установим связь между фундаментальным и дискриминантным тензором одного и того же пучка. Имеем:

$$\varepsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_m}\varepsilon_{\beta_1\ldots\beta_m} = \begin{vmatrix} \sum_k \underset{k}{i}_{\alpha_1} \underset{k}{i}_{\beta_1} & \ldots & \sum_k \underset{k}{i}_{\alpha_m} \underset{k}{i}_{\beta_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum_k \underset{k}{i}_{\alpha_m} \underset{k}{i}_{\beta_1} & \ldots & \sum_k \underset{k}{i}_{\alpha_m} \underset{k}{i}_{\beta_m} \end{vmatrix}.$$

Таким образом:

$$(30,3) \qquad \varepsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_m}\varepsilon_{\beta_1\ldots\beta_m} = m!\, \overline{g}_{[\alpha_1[\beta_1}\overline{g}_{\alpha_2\beta_2}\cdots\overline{g}_{\alpha_m]\beta_m]}.$$

Условимся обозначать через $\overline{g}_{\alpha_1\ldots\alpha_r,\,\beta_1\ldots\beta_r}$ следующий тензор, образованный из $\overline{g}_{\alpha\beta}$ операцией альтернирования:

$$(30,4) \qquad \overline{g}_{\alpha_1\ldots\alpha_r\beta_1\ldots\beta_r} = r!\,\overline{g}_{[\alpha_1[\beta_1}\cdots\overline{g}_{\alpha_r]\beta_r]}, \qquad (r \leqslant m).$$

Формула (30,3) перепишется в следующем виде:

$$(30,5) \qquad \varepsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_m}\varepsilon_{\beta_1\ldots\beta_m} = \overline{g}_{\alpha_1\ldots\alpha_m,\,\beta_1\ldots\beta_m}.$$

Выведем формулу, выражающую результат контрактирования тензора $\overline{g}_{\alpha_1\ldots\alpha_r,\,\beta_1\ldots\beta_r}$. Для этого разложим определитель:

$$\overline{g}^{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}_{\beta_1\ldots\beta_r} = \begin{vmatrix} \overline{g}^{\alpha_1}_{\beta_1} & \ldots & \overline{g}^{\alpha_1}_{\beta_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \overline{g}^{\alpha_r}_{\beta_1} & \ldots & \overline{g}^{\alpha_r}_{\beta_r} \end{vmatrix}$$

по элементам 1-й строки:

$$\overline{g}^{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}_{\beta_1\ldots\beta_r} = \overline{g}^{\alpha_1}_{\beta_1}\overline{g}^{\alpha_2\ldots\alpha_r}{}_{\beta_2\ldots\beta_r} +$$

$$+ \sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1-1}\,\overline{g}^{\alpha_1}_{\beta_k}\,\overline{g}^{\alpha_2\ldots\alpha_r}{}_{\beta_1\ldots\beta_{k-1}\beta_{k+1}\ldots\beta_r}.$$

Теперь контрактируем $\bar g^{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}_{\beta_1\ldots\beta_r}$ по индексам α_1 и β_1:

$$\bar g^{\alpha\alpha_2\ldots\alpha_r}{}_{\alpha\beta_2\ldots\beta_r} = m\,\bar g^{\alpha_2\ldots\alpha_r}{}_{\beta_2\ldots\beta_r} - (r-1)\,\bar g^{\alpha_2\ldots\alpha_r}{}_{\beta_2\ldots\beta_r},$$

т. е.

(30,6) $$\bar g^{\alpha\alpha_2\ldots\alpha_r}{}_{\alpha\beta_2\ldots\beta_r} = (m-r+1)\,\bar g^{\alpha_2\ldots\alpha_r}{}_{\beta_2\ldots\beta_r}.$$

Применяя последовательно эту формулу, находим:

(30,7) $$\bar g^{\sigma_1\ldots\sigma_k\alpha_1\ldots\alpha_{r-k}}{}_{\sigma_1\ldots\sigma_k\beta_1\ldots\beta_{r-k}} = \frac{(m-r+k)!}{(m-r)!}\,\bar g^{\alpha_1\ldots\alpha_{r-k}}{}_{\beta_1\ldots\beta_{r-k}}.$$

Учитывая соотношение (30,5), получаем формулу:

(30,8) $$\varepsilon^{\sigma_1\ldots\sigma_k\alpha_1\ldots\alpha_{m-k}}\varepsilon_{\sigma_1\ldots\sigma_k\beta_1\ldots\beta_{m-k}} = k!\,\bar g^{\alpha_1\ldots\alpha_{m-k}}{}_{\beta_1\ldots\beta_{m-k}},$$

аналогичную (28,11) для дискриминантного тензора пространства. Между прочим, полагая в (30,8) $k=m-1$, получаем выражение фундаментального тензора плоскости через ее дискриминантный тензор

(30,9) $$\bar g^{\alpha}_{\beta} = \frac{1}{(m-1)!}\,\varepsilon^{\sigma_1\ldots\sigma_{m-1}\alpha}\varepsilon_{\sigma_1\ldots\sigma_{m-1}\beta}.$$

Обратную задачу определения дискриминантного тензора плоскости по ее фундаментальному тензору решают формулы (30,3).

Задача 1. Показать, что тензор $\bar g_{\alpha_1\ldots\alpha_r,\beta_1\ldots\beta_r}$, определяемый соотношением (30,4), равен нулю, если $r > m$.

Задача 2. Пользуясь формулами (30,3), определить дискриминантный тензор двумерной плоскости, фундаментальный тензор которой дан в задаче 6, § 29.

Ответ:

$$\varepsilon_{12}=0,\quad \varepsilon_{13}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \varepsilon_{23}=\mp\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

3. Покажем, что дискриминантный тензор плоскости играет ту же самую роль в геометрии этой плоскости, какую дискриминантный тензор пространства в полном пространстве. Возьмем в плоскости E_m, определяемой дискриминантным тензором $\varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}$, m векторов $\underset{1}{\mathbf{v}},\underset{2}{\mathbf{v}},\ldots\underset{m}{\mathbf{v}}$ и образуем произведение:

(30,10) $$\varphi = \varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}\underset{1}{v}^{\alpha_1}\underset{2}{v}^{\alpha_2}\ldots\underset{m}{v}^{\alpha_m}.$$

Возвышая φ в квадрат, получим:

$$\varphi^2 = \varepsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_m}\varepsilon_{\beta_1\ldots\beta_m}\underset{1}{v}^{\alpha_1}\ldots\underset{m}{v}^{\alpha_m}\underset{1}{v}^{\beta_1}\ldots\underset{m}{v}^{\beta_m} =$$

$$= g_{\alpha_1\ldots\alpha_m,\beta_1\ldots\beta_m}\underset{1}{v}^{\alpha_1}\ldots\underset{m}{v}^{\alpha_m}\underset{1}{v}^{\beta_1}\ldots\underset{m}{v}^{\beta_m} = G(\underset{1}{\mathbf{v}},\underset{2}{\mathbf{v}}\ldots\underset{m}{\mathbf{v}}).$$

Таким образом, произведение $\varphi = \varepsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_m}\underset{1}{v}^{\alpha_1}\ldots\underset{m}{v}^{\alpha_m}$ равно $\pm$ объему параллелепипеда, построенного на векторах $\underset{1}{\mathbf{v}},\underset{2}{\mathbf{v}},\ldots\underset{m}{\mathbf{v}}$, т. е. является скалярным знакопеременным произведением векторов $\underset{1}{\mathbf{v}},\ldots\underset{m}{\mathbf{v}}$ с точки зрения геометрии плоскости E_m, как самостоятельного m-мерного пространства. Знак скалярного произведения (30,10) зависит как от порядка векторов $\underset{1}{\mathbf{v}},\ldots\underset{m}{\mathbf{v}}$, так и от порядка, в котором выбраны орты базиса $\underset{1}{\mathbf{i}},\underset{2}{\mathbf{i}},\ldots\underset{m}{\mathbf{i}}$ дискриминантного тензора. Таким образом, мы можем говорить о положительных и отрицательных системах векторов в E_m относительно заданного базиса этой плоскости.

При помощи тензора $\varepsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_m}$ можно построить в E_m векторное произведение $(m-1)$ векторов.

Образуем вектор

(30,10) $$y_\alpha = \varepsilon_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}}\underset{1}{v}^{\alpha_1}\ldots\underset{m-1}{v}^{\alpha_{m-1}}.$$

Эта векторфункция обладает следующими свойствами:

1) $\mathbf{y}$ лежит в E_m;

2) $\mathbf{y}$ перпендикулярен к $\underset{1}{\mathbf{v}},\underset{2}{\mathbf{v}},\ldots\underset{m-1}{\mathbf{v}}$;

3) система векторов $\mathbf{y}$, $\underset{1}{\mathbf{v}},\underset{2}{\mathbf{v}},\ldots\underset{m-1}{\mathbf{v}}$ положительная;

4) $\mathbf{y}$ по модулю равен объему параллелепипеда, построенного на $\underset{1}{\mathbf{v}},\underset{2}{\mathbf{v}},\ldots\underset{m-1}{\mathbf{v}}$.

Первое из указанных свойств есть следствие (30,1); остальные доказываются так же, как были установлены аналогичные свойства для векторного произведения $(n-1)$ векторов в § 28.

4. Имея дискриминантный тензор $\varepsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_m}$ плоскости E_m, можно очень просто построить единичный мультивектор дополнительного пучка E_{n-m}. Покажем, что тензор

$$(30,11)\qquad \bar{\varepsilon}_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-m}} = \sum_{(\sigma_1\ldots\sigma_m)} \varepsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-m}\sigma_1\ldots\sigma_m}\,\varepsilon^{\sigma_1\ldots\sigma_m} = \frac{1}{m!}\,\varepsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-m}\sigma_1\ldots\sigma_m}\,\varepsilon^{\sigma_1\ldots\sigma_m}$$

является дискриминантным тензором для плоскости E_{n-m}.

Выберем n взаимно-перпендикулярных ортов $\underset{1}{\mathbf{i}},\underset{2}{\mathbf{i}},\ldots\underset{n}{\mathbf{i}}$ (образующих положительную систему), из которых последние m лежат в E_m; пусть

$$\varepsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_m} = m!\,\underset{n-m+1}{i}{}_{[\alpha_1}\ldots\underset{n}{i}{}_{\alpha_m]}.$$

Тогда

$$\bar{\varepsilon}_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-m}} = \sum_{(\sigma_1\ldots\sigma_m)} \begin{vmatrix} \underset{1}{i}_{\alpha_1} & \ldots & \underset{1}{i}_{\alpha_{n-m}} & \underset{1}{i}_{\sigma_1} & \ldots & \underset{1}{i}_{\sigma_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \underset{n}{i}_{\alpha_1} & \ldots & \underset{n}{i}_{\alpha_{n-m}} & \underset{n}{i}_{\sigma_1} & \ldots & \underset{n}{i}_{\sigma_m} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \underset{n-m+1}{i}_{\sigma_1} & \ldots & \underset{n-m+1}{i}_{\sigma_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \underset{n}{i}_{\sigma_1} & \ldots & \underset{n}{i}_{\sigma_m} \end{vmatrix}.$$

Разлагая определитель n-го порядка, стоящий в этой сумме по минорам, заключающим элементы первых $(n-m)$ столбцов, получаем:

$$\bar{\varepsilon}_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-m}} = \begin{vmatrix} \underset{1}{i}_{\alpha_1} & \ldots & \underset{1}{i}_{\alpha_{n-m}} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \underset{n-m}{i}_{\alpha_1} & \ldots & \underset{n-m}{i}_{\alpha_{n-m}} \end{vmatrix},$$

т. е., действительно, $\bar{\varepsilon}_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-m}}$ является дискриминантным тензором плоскости E_{n-m}. Чтобы выразить обратно $\varepsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_m}$ через $\bar{\varepsilon}_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-m}}$, умножим соотношение (30,11) внутренне на $\varepsilon^{\beta_1\ldots\beta_m\alpha_1\ldots\alpha_{n-m}}$; получаем:

$$\varepsilon^{\beta_1\ldots\beta_m\alpha_1\ldots\alpha_{n-m}}\,\bar{\varepsilon}_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-m}} = \frac{1}{m!}\,\varepsilon^{\beta_1\ldots\beta_m\alpha_1\ldots\alpha_{n-m}}\,\varepsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-m}\sigma_1\ldots\sigma_m}\,\varepsilon^{\sigma_1\ldots\sigma_m} =$$

$$= (-1)^{m(n-m)}\frac{(n-m)!}{m!}\,\delta^{\beta_1\ldots\beta_m}_{\sigma_1\ldots\sigma_m}\,\varepsilon^{\sigma_1\ldots\sigma_m} = (-1)^{m(n-m)}(n-m)!\,\varepsilon^{\beta_1\ldots\beta_m}.$$

Таким образом, получаем две взаимных формулы:

$$(30,11)\qquad \bar{\varepsilon}_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-m}} = \frac{1}{m!}\,\varepsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-m}\sigma_1\ldots\sigma_m}\,\varepsilon^{\sigma_1\ldots\sigma_m}.$$

$$(30,12)\qquad \varepsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_m} = (-1)^{m(n-m)}\frac{1}{(n-m)!}\,\varepsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_m\sigma_1\ldots\sigma_{n-m}}\,\bar{\varepsilon}^{\sigma_1\ldots\sigma_{n-m}}.$$

Отметим, что формула (30,12) *является следствием* (30,11) *и в том случае, когда тензоры* $\varepsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_m}$ и $\bar{\varepsilon}_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-m}}$ *не являются мультивекторами, а вообще антисимметрическими тензорами.*

5. В § 26 мы определяли при помощи мультивекторов степень параллельности плоскостей. В метрическом пространстве можно поставить аналогичную задачу относительно *степени перпендикулярности* многомерных пучков.

Остановимся сначала на определении этого нового понятия. Рассмотрим две плоскости E_p и E_q $(p \leqslant q)$. Если в E_p существует s независимых направлений, перпендикулярных к E_q, то будем говорить, что степень перпендикулярности этих плоскостей равна $\frac{s}{p}$. Если $s = p$, то все направления, лежащие в E_p, перпендикулярны к E_q и обратно. В этом случае говорят, что пучки *полностью взаимно-перпендикулярны* (или просто взаимно-перпендикулярны).

Пусть E_p задана базисом $\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{2}{\mathbf{u}},\ldots\underset{p}{\mathbf{u}}$, E_q — базисом $\underset{1}{\mathbf{v}},\underset{2}{\mathbf{v}},\ldots\underset{q}{\mathbf{v}}$.

Условие перпендикулярности вектора $\mathbf{x} = \lambda_1 \underset{1}{\mathbf{u}} + \lambda_2 \underset{2}{\mathbf{u}} + \ldots + \lambda_p \underset{p}{\mathbf{u}}$ к E_q запишется системой уравнений:

$$\begin{aligned}
\underset{1}{\mathbf{v}}\mathbf{x} &= \lambda_1 \underset{1}{\mathbf{v}}\underset{1}{\mathbf{u}} + \lambda_2 \underset{1}{\mathbf{v}}\underset{2}{\mathbf{u}} + \ldots + \lambda_p \underset{1}{\mathbf{v}}\underset{p}{\mathbf{u}} = 0,\\
\underset{2}{\mathbf{v}}\mathbf{x} &= \lambda_1 \underset{2}{\mathbf{v}}\underset{1}{\mathbf{u}} + \lambda_2 \underset{2}{\mathbf{v}}\underset{2}{\mathbf{u}} + \ldots + \lambda_p \underset{2}{\mathbf{v}}\underset{p}{\mathbf{u}} = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\underset{q}{\mathbf{v}}\mathbf{x} &= \lambda_1 \underset{q}{\mathbf{v}}\underset{1}{\mathbf{u}} + \lambda_2 \underset{q}{\mathbf{v}}\underset{2}{\mathbf{u}} + \ldots + \lambda_p \underset{q}{\mathbf{v}}\underset{p}{\mathbf{u}} = 0.
\end{aligned}$$

Если ранг матрицы

$$\left\| \begin{matrix} \underset{1}{\mathbf{v}}\underset{1}{\mathbf{u}}, & \ldots & \underset{1}{\mathbf{v}}\underset{p}{\mathbf{u}} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ \underset{q}{\mathbf{v}}\underset{1}{\mathbf{u}}, & \ldots & \underset{q}{\mathbf{v}}\underset{p}{\mathbf{u}} \end{matrix} \right\| \tag{30,13}$$

равен r, то в E_p существует $s = p - r$ независимых прямых, перпендикулярных к E_q. Степень перпендикулярности равна, таким образом, $\frac{p-r}{p}$. Отметим, что система уравнений

$$\begin{aligned}
&\mu_1 \underset{1}{\mathbf{u}}\underset{1}{\mathbf{v}} + \mu_2 \underset{1}{\mathbf{u}}\underset{2}{\mathbf{v}} + \ldots + \mu_q \underset{1}{\mathbf{u}}\underset{q}{\mathbf{v}} = 0,\\
&\mu_1 \underset{2}{\mathbf{u}}\underset{1}{\mathbf{v}} + \mu_2 \underset{2}{\mathbf{u}}\underset{2}{\mathbf{v}} + \ldots + \mu_q \underset{2}{\mathbf{u}}\underset{q}{\mathbf{v}} = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\mu_1 \underset{p}{\mathbf{u}}\underset{1}{\mathbf{v}} + \mu_2 \underset{p}{\mathbf{u}}\underset{2}{\mathbf{v}} + \ldots + \mu_q \underset{p}{\mathbf{u}}\underset{q}{\mathbf{v}} = 0
\end{aligned}$$

имеет тогда $q-r$ независимых решений, т. е. в E_q имеется $q-r$ независимых направлений, перпендикулярных к E_p. Таким образом, если $p < q$, то в E_q всегда существуют прямые, перпендикулярные к E_p.

Так как $p - r + q - r$ должно быть $\leqslant n$, то полная перпендикулярность $(r = 0)$ может быть только в том случае, если

$$p + q \leqslant n.$$

В § 26 мы видели, что ранг матрицы (30,13) оценивается при помощи выражений вида:

$$u_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-s}\sigma_1 \ldots \sigma_s} v^{\beta_1 \ldots \beta_{q-s}\sigma_1 \ldots \sigma_s},$$

где $u_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}$ и $v_{\alpha_1 \ldots \alpha_q}$ — мультивекторы, определяющие плоскости E_p и E_q. Совершенно так же, как в § 26, можно доказать теорему:

Теорема 1. *Плоскости E_p и E_q $(p \leqslant q)$ тогда и только тогда $\frac{s}{p}$-перпендикулярны, если*

$$u_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-k}\sigma_1 \ldots \sigma_k} v^{\beta_1 \ldots \beta_{q-k}\sigma_1 \ldots \sigma_k} = \begin{cases} \neq 0 & \text{для } k = p - s, \\ = 0 & \text{для } k = p - s + 1. \end{cases} \tag{30,14}$$

Как частный случай, отметим, что *условие полной перпендикулярности выражается уравнением:*

$$u_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}\sigma} v^{\beta_1 \ldots \beta_{r-1}\sigma} = 0. \tag{30,15}$$

Задача 3. В четырехмерном пространстве заданы:

1) две двумерных плоскости их базисами: $\underset{1}{\mathbf{u}}(1,0,-1,0)$, $\underset{2}{\mathbf{u}}(0,1,1,0)$; $\underset{1}{\mathbf{v}}(0,4,2,1)$, $\underset{2}{\mathbf{v}}(1,3,3,1)$;

2) трехмерная плоскость и двумерная уравнениями:

a) $x_1 - x_2 = 0$,

b) $x_1 + x_2 - x_4 = 0$, $x_2 + 2x_3 - x_4 = 0$.

Система координат прямоугольная. Определить степень перпендикулярности этих плоскостей.

Ответ: 1) $^1/_2$-перпендикулярны, 2) 0-перпендикулярны.

Задача 4. Для того, чтобы степень перпендикулярности плоскостей двух m-векторов $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ была отлична от нуля, необходимо и достаточно, чтобы их скалярное произведение $\mathbf{UV}$ было равно нулю.

Задача 5. Плоскость E_r задана базисом $\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{2}{\mathbf{u}},\ldots\underset{r}{\mathbf{u}}$, плоскость E_s — системой уравнений

$$\underset{1}{\mathbf{a}}\mathbf{x} = 0,\ \underset{2}{\mathbf{a}}\mathbf{x} = 0,\ \ldots\ \underset{n-s}{\mathbf{a}}\mathbf{x} = 0.$$

Определить степень их перпендикулярности.

Ответ. Обозначим ранг системы векторов $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{r}{\mathbf{u}}, \underset{1}{\mathbf{a}} \ldots \underset{n-s}{\mathbf{a}}$ через ϱ. При $r \leqslant s$ степень перпендикулярности равна $\frac{n+r-s-\varrho}{r}$; если $r \geqslant s$, то степень перпендикулярности равна $\frac{n-\varrho}{s}$.

Задача 6. Даны две плоскости E_r и E_s $(r \leqslant s)$. Строим плоскость E_{n-s}, дополнительную к E_s (т. е. полностью к ней перпендикулярную). Если степень перпендикулярности плоскостей E_r и E_s равна $\frac{t}{r}$, то степень параллельности E_r и E_{n-s} равна $\frac{t}{r}$ (если $r \leqslant n-s$) или $\frac{t}{n-s}$ (если $r \geqslant n-s$).

6. В качестве примера, иллюстрирующего изложенное выше, изучим антисимметрический тензор 2-го порядка в четырехмерном пространстве.

Возьмем антисимметрический тензор $a_{\alpha\beta}$ и построим новый антисимметрический тензор:

$$\bar{a}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}a^{\gamma\delta}. \tag{30,16}$$

На основании замечания, сделанного в конце раздела 4, связь между $a_{\alpha\beta}$ и $\bar{a}_{\alpha\beta}$ взаимная:

$$a_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\bar{a}^{\gamma\delta}. \tag{30,17}$$

Более подробно соотношения (30,16) и (30,17) перепишутся так:

$$\bar{a}_{14} = \sqrt{g}\,a^{23},\ \bar{a}_{24} = \sqrt{g}\,a^{31},\ \bar{a}_{34} = \sqrt{g}\,a^{12},\ \bar{a}_{23} = \sqrt{g}\,a^{14},$$
$$\bar{a}_{31} = \sqrt{g}\,a^{24},\ \bar{a}_{12} = \sqrt{g}\,a^{34},$$
$$a_{14} = \sqrt{g}\,\bar{a}^{23},\ a_{24} = \sqrt{g}\,\bar{a}^{31},\ a_{34} = \sqrt{g}\,\bar{a}^{12},\ a_{23} = \sqrt{g}\,\bar{a}^{14},$$
$$a_{31} = \sqrt{g}\,\bar{a}^{24},\ a_{12} = \sqrt{g}\,\bar{a}^{34}.$$

Тензоры $a_{\alpha\beta}$ и $\bar{a}_{\alpha\beta}$ будем называть **взаимно дуальными**. Мы знаем, что каждый антисимметрический тензор может быть разложен на сумму бивекторов. Пусть

$$a_{\alpha\beta} = \alpha_1\left(\underset{1}{i}_\alpha \underset{2}{i}_\beta - \underset{1}{i}_\beta \underset{2}{i}_\alpha\right) + \alpha_2\left(\underset{3}{i}_\alpha \underset{4}{i}_\beta - \underset{3}{i}_\beta \underset{4}{i}_\alpha\right).$$

Будем считать, что орты $\underset{1}{\mathbf{i}}, \underset{2}{\mathbf{i}}, \underset{3}{\mathbf{i}}, \underset{4}{\mathbf{i}}$ образуют положительную систему. Обозначая дискриминантные тензоры инвариантных двумерных плоскостей через

$$\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \underset{1}{i}_\alpha \underset{2}{i}_\beta - \underset{1}{i}_\beta \underset{2}{i}_\alpha \quad \text{и} \quad \bar{\bar{\varepsilon}}_{\alpha\beta} = \underset{3}{i}_\alpha \underset{4}{i}_\beta - \underset{3}{i}_\beta \underset{4}{i}_\alpha,$$

имеем

$$\bar{\bar{\varepsilon}}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\bar{\varepsilon}^{\gamma\delta},\quad \bar{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\bar{\bar{\varepsilon}}^{\gamma\delta}.$$

Таким образом, получаем два уравнения:

$$\begin{aligned} a_{\alpha\beta} &= \alpha_1\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta} + \alpha_2\bar{\bar{\varepsilon}}_{\alpha\beta} \\ \bar{a}_{\alpha\beta} &= \alpha_2\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta} + \alpha_1\bar{\bar{\varepsilon}}_{\alpha\beta}, \end{aligned} \tag{30,18}$$

из которых можно определить α_1, α_2, $\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}$ и $\bar{\bar{\varepsilon}}_{\alpha\beta}$. Складывая и вычитая, получаем

$$a_{\alpha\beta} + \bar{a}_{\alpha\beta} = (\alpha_1 + \alpha_2)\,(\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta} + \bar{\bar{\varepsilon}}_{\alpha\beta}),$$
$$a_{\alpha\beta} - \bar{a}_{\alpha\beta} = (\alpha_1 - \alpha_2)\,(\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta} - \bar{\bar{\varepsilon}}_{\alpha\beta}).$$

Отсюда:

$$\begin{aligned} (\alpha_1 + \alpha_2)^2 &= \frac{1}{4}(a_{\alpha\beta} + \bar{a}_{\alpha\beta})\,(a^{\alpha\beta} + \bar{a}^{\alpha\beta}) = \\ &= \frac{1}{2}(a_{\alpha\beta}a^{\alpha\beta} + a_{\alpha\beta}\bar{a}^{\alpha\beta}), \\ (\alpha_1 - \alpha_2)^2 &= \frac{1}{4}(a_{\alpha\beta} - \bar{a}_{\alpha\beta})\,(a^{\alpha\beta} - \bar{a}^{\alpha\beta}) = \\ &= \frac{1}{2}(a_{\alpha\beta}a^{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}\bar{a}^{\alpha\beta}). \end{aligned} \tag{30,19}$$

Вычислив α_1 и α_2, мы можем из уравнений (30,18) определить $\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}$ и $\bar{\bar{\varepsilon}}_{\alpha\beta}$. Получаем:

$$\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{\alpha_1 a_{\alpha\beta} - \alpha_2\bar{a}_{\alpha\beta}}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2},\quad \bar{\bar{\varepsilon}}_{\alpha\beta} = \frac{\alpha_1\bar{a}_{\alpha\beta} - \alpha_2 a_{\alpha\beta}}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}. \tag{30,20}$$

Если $\alpha_1 \neq \pm\alpha_2$, мы получаем для $\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}$ и $\bar{\bar{\varepsilon}}_{\alpha\beta}$ определенные значения (с точностью до знака), т. е. инвариантные двумерные плоскости тензора определяются однозначно. Если же $\alpha_1 = \pm\alpha_2$, то выбор инвариантных плоскостей заключает в себе неопределенность: в этом случае у тензора имеется пара равных характеристических чисел. Как показывают формулы (30,20), случай неопределенности в выборе инвариантных плоскостей имеет место тогда и только тогда, если составляющие тензора удовлетворяют соотношению:

$$a_{\alpha\beta} = \pm\bar{a}_{\alpha\beta}. \tag{30,21}$$

Задача 7. Вывести из формул (30,19), что антисимметрический тензор $a_{\alpha\beta}$ тогда и только тогда является бивектором, если аггрегат Pfaff'a

$$a_{14}a_{23} + a_{24}a_{31} + a_{34}a_{12}$$

равен нулю.

Задача 8. Доказать соотношение:

$$a_\alpha{}^\sigma \bar a_{\sigma\beta} = -\alpha_1\alpha_2 g_{\alpha\beta}.$$

Если ранг тензора $a_{\alpha\beta}$ равен 4 и если обозначить линейные векторфункции, соответствующие тензорам $a_{\alpha\beta}$ и $\bar a_{\alpha\beta}$, через **A** и $\bar{\mathbf{A}}$, то

$$\bar{\mathbf{A}} = -\alpha_1\alpha_2\mathbf{A}^{-1}.$$

Задача 9.[1] Пусть $a_{\alpha\beta}$ — антисимметрический тензор в четырехмерном пространстве, $\bar a_{\alpha\beta}$ — дуальный ему тензор. Показать, что тензор

$$m_{\alpha\beta} = a_{\alpha\sigma}a^\sigma{}_\beta - \bar a_{\alpha\sigma}\bar a^\sigma{}_\beta$$

симметрический и что его можно выразить следующим образом:

$$m_{\alpha\beta} = (\alpha_2^2-\alpha_1^2)(\bar g_{\alpha\beta}-\bar{\bar g}_{\alpha\beta}),$$

где $\bar g_{\alpha\beta}$ и $\bar{\bar g}_{\alpha\beta}$ — фундаментальные тензоры инвариантных плоскостей тензора $a_{\alpha\beta}$, определяемых в формулах (30,18) дискриминантными тензорами $\bar\varepsilon_{\alpha\beta}$ и $\bar{\bar\varepsilon}_{\alpha\beta}$. Тензор $m_{\alpha\beta}$ имеет 2 двумерных главных области с характеристическими числами $\pm(\alpha_1^2-\alpha_2^2)$; эти главные области определяются фундаментальными тензорами $\bar g_{\alpha\beta}$ и $\bar{\bar g}_{\alpha\beta}$.

7. В качестве второго примера рассмотрим векторфункцию вращения в четырехмерном пространстве. Как мы знаем, выбором прямоугольной координатной системы мы можем привести матрицу составляющих d_{ik} этой векторфункции к следующему виду:

$$\|d_{ik}\| = \left\|\begin{matrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 & & \\ -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & & \\ & & \cos\alpha_2 & \sin\alpha_2 \\ & & -\sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{matrix}\right\|.$$

Обозначим орты этой прямоугольной системы координат через $\underset{1}{\mathbf{i}}, \underset{2}{\mathbf{i}}, \underset{3}{\mathbf{i}}, \underset{4}{\mathbf{i}}$ (предполагаем, что это — положительная система). Выражаем составляющие $d_{\alpha\beta}$ в любой координатной системе:

$$d_{\alpha\beta} = \cos\alpha_1\,(\underset{1}{i}_\alpha\underset{1}{i}_\beta + \underset{2}{i}_\alpha\underset{2}{i}_\beta) + \sin\alpha_1(\underset{1}{i}_\alpha\underset{2}{i}_\beta - \underset{1}{i}_\beta\underset{2}{i}_\alpha) +$$
$$+\cos\alpha_2(\underset{3}{i}_\alpha\underset{3}{i}_\beta + \underset{4}{i}_\alpha\underset{4}{i}_\beta) + \sin\alpha_2(\underset{3}{i}_\alpha\underset{4}{i}_\beta - \underset{3}{i}_\beta\underset{4}{i}_\alpha).$$

[1] Содержание этой задачи заимствовано из работы G. Rainich. Electrodynamics in the General Relativity Theory. (Trans. Amer. Math. Soc., V. 27, 1925, стр. 106—136).

Вводя фундаментальные и дискриминантные тензоры инвариантных плоскостей $\{\underset{1}{\mathbf{i}}, \underset{2}{\mathbf{i}}\}$ и $\{\underset{3}{\mathbf{i}}, \underset{4}{\mathbf{i}}\}$:

$$\bar g_{\alpha\beta} = \underset{1}{i}_\alpha\underset{1}{i}_\beta + \underset{2}{i}_\alpha\underset{2}{i}_\beta, \quad \bar\varepsilon_{\alpha\beta} = \underset{1}{i}_\alpha\underset{2}{i}_\beta - \underset{1}{i}_\beta\underset{2}{i}_\alpha,$$
$$\bar{\bar g}_{\alpha\beta} = \underset{3}{i}_\alpha\underset{3}{i}_\beta + \underset{4}{i}_\alpha\underset{4}{i}_\beta, \quad \bar{\bar\varepsilon}_{\alpha\beta} = \underset{3}{i}_\alpha\underset{4}{i}_\beta - \underset{3}{i}_\beta\underset{4}{i}_\alpha,$$

получаем

(30,22) $$d_{\alpha\beta} = \cos\alpha_1\bar g_{\alpha\beta} + \sin\alpha_1\bar\varepsilon_{\alpha\beta} + \cos\alpha_2\bar{\bar g}_{\alpha\beta} + \sin\alpha_2\bar{\bar\varepsilon}_{\alpha\beta}$$

Рассмотрим антисимметрический тензор $a_{\alpha\beta} = d_{[\alpha\beta]}$; имеем:

(30,23) $$a_{\alpha\beta} = \sin\alpha_1\bar\varepsilon_{\alpha\beta} + \sin\alpha_2\bar{\bar\varepsilon}_{\alpha\beta}.$$

Теперь можно применить формулы (30,19) и (30,20). Получаем

(30,24) $$(\sin\alpha_1+\sin\alpha_2)^2 = \frac{1}{2}(a_{\alpha\beta}a^{\alpha\beta} + a_{\alpha\beta}\bar a^{\alpha\beta}),$$
$$(\sin\alpha_1-\sin\alpha_2)^2 = \frac{1}{2}(a_{\alpha\beta}a^{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}\bar a^{\alpha\beta}),$$

$$\bar\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{\sin\alpha_1 a_{\alpha\beta} - \sin\alpha_2\bar a_{\alpha\beta}}{\sin^2\alpha_1 - \sin^2\alpha_2}, \quad \bar{\bar\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{\sin\alpha_1\bar a_{\alpha\beta} - \sin\alpha_2 a_{\alpha\beta}}{\sin^2\alpha_1-\sin^2\alpha_2}.$$

Таким образом, определены синусы углов α_1, α_2 и дискриминантные тензоры инвариантных плоскостей.

Для вычисления углов α_1, α_2 необходимо, кроме синусов, определить из (30,22) их косинусы. Имеем:

$$\cos\alpha_1 = \frac{1}{2}d_{\alpha\beta}\bar\varepsilon^{\alpha\sigma}\bar\varepsilon^\beta{}_\sigma, \quad \cos\alpha_2 = \frac{1}{2}d_{\alpha\beta}\bar{\bar\varepsilon}^{\alpha\sigma}\bar{\bar\varepsilon}^\beta{}_\sigma.$$

Отметим, что выбор знака у углов α_1, α_2 связан с выбором знака у дискриминантных тензоров $\bar\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\bar{\bar\varepsilon}_{\alpha\beta}$.

Задача 10. Рассмотрим симметрическую векторфункцию $c_{\alpha\beta} = d_{(\alpha\beta)}$. Показать, что она имеет две главных области, совпадающих с инвариантными плоскостями тензора $d_{\alpha\beta}$; этим главным областям соответствуют характеристические числа $\cos\alpha_1$ и $\cos\alpha_2$.

Задача 11. Применить аналогичный прием исследования к векторфункции вращения в трехмерном пространстве. Если $a_{\alpha\beta} = d_{[\alpha\beta]}$, α—угол поворота, $\varepsilon_{\alpha\beta}$—дискриминантный тензор инвариантной плоскости, то

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}a_{\alpha\beta}a^{\alpha\beta}, \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sin\alpha}a_{\alpha\beta}.$$

§ 31. Применение алгебры тензоров к решению некоторых задач аналитической геометрии метрического пространства.

1. Определить фундаментальный тензор m-мерной плоскости, если она задана своим базисом $\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \dots \underset{m}{\mathbf{v}}$ *или системой уравнений:*

$$\underset{1}{\mathbf{a}}\mathbf{x}=0,\quad \underset{2}{\mathbf{a}}\mathbf{x}=0,\quad \dots \underset{n-m}{\mathbf{a}}\mathbf{x}=0.$$

Рассмотрим сначала тот случай, когда плоскость E_m задана базисом $\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \dots \underset{m}{\mathbf{v}}$. Построим в E_m взаимную систему векторов $\overset{1}{\mathbf{v}}, \overset{2}{\mathbf{v}}, \dots \overset{m}{\mathbf{v}}$, удовлетворяющих уравнениям

$$\overset{i}{\mathbf{v}}\underset{k}{\mathbf{v}}=\delta^i_k\,,\quad (i,\ k=1,\ \dots m).$$

Каждый вектор, принадлежащий плоскости E_m, может быть разложен по векторам $\underset{i}{\mathbf{v}}$ или $\overset{i}{\mathbf{v}}$ следующим образом

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}\overset{1}{\mathbf{v}}\cdot\underset{1}{\mathbf{v}}+\mathbf{x}\overset{2}{\mathbf{v}}\cdot\underset{2}{\mathbf{v}}+\dots+\mathbf{x}\overset{m}{\mathbf{v}}\cdot\underset{m}{\mathbf{v}}=\mathbf{x}\underset{1}{\mathbf{v}}\cdot\overset{1}{\mathbf{v}}+\mathbf{x}\underset{2}{\mathbf{v}}\cdot\overset{2}{\mathbf{v}}+\dots+\mathbf{x}\underset{m}{\mathbf{v}}\cdot\overset{m}{\mathbf{v}}.$$

Применяя вторую из этих формул к векторам $\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}} \dots \underset{m}{\mathbf{v}}$, получаем:

$$\begin{aligned}
\underset{1}{\mathbf{v}}&=\underset{1}{\mathbf{v}}^2\cdot\overset{1}{\mathbf{v}}+\underset{1}{\mathbf{v}}\underset{2}{\mathbf{v}}\cdot\overset{2}{\mathbf{v}}+\dots+\underset{1}{\mathbf{v}}\underset{m}{\mathbf{v}}\cdot\overset{m}{\mathbf{v}},\\
\underset{2}{\mathbf{v}}&=\underset{2}{\mathbf{v}}\underset{1}{\mathbf{v}}\cdot\overset{1}{\mathbf{v}}+\underset{2}{\mathbf{v}}^2\cdot\overset{2}{\mathbf{v}}+\dots+\underset{2}{\mathbf{v}}\underset{m}{\mathbf{v}}\cdot\overset{m}{\mathbf{v}},\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
\underset{m}{\mathbf{v}}&=\underset{m}{\mathbf{v}}\underset{1}{\mathbf{v}}\cdot\overset{1}{\mathbf{v}}+\underset{m}{\mathbf{v}}\underset{2}{\mathbf{v}}\cdot\overset{2}{\mathbf{v}}+\dots+\underset{m}{\mathbf{v}}^2\cdot\overset{m}{\mathbf{v}},
\end{aligned}\tag{31,1}$$

откуда выводим выражения для $\overset{1}{\mathbf{v}}, \overset{2}{\mathbf{v}}, \dots \overset{m}{\mathbf{v}}$:

$$\overset{k}{\mathbf{v}}=\frac{1}{G(\underset{1}{\mathbf{v}},\dots\underset{m}{\mathbf{v}})}\begin{vmatrix}
\underset{1}{\mathbf{v}}^2 & \dots & \underset{1}{\mathbf{v}} & \dots & \underset{1}{\mathbf{v}}\underset{m}{\mathbf{v}}\\
\underset{2}{\mathbf{v}}\underset{1}{\mathbf{v}} & \dots & \underset{2}{\mathbf{v}} & \dots & \underset{2}{\mathbf{v}}\underset{m}{\mathbf{v}}\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\underset{m}{\mathbf{v}}\underset{1}{\mathbf{v}} & \dots & \underset{m}{\mathbf{v}} & \dots & \underset{m}{\mathbf{v}}^2
\end{vmatrix},\quad (k=1,..m)\tag{31,2}$$

Имея в плоскости E_m две взаимных системы, нетрудно построить ее фундаментальный тензор. Рассмотрим тензор

$$\bar{g}_{\alpha\beta}=\sum_{k=1}^{m}\underset{k}{v}_\alpha\overset{k}{v}_\beta.\tag{31,3}$$

Он определяет линейную векторфункцию, которая любой вектор, перпендикулярный к E_m, превращает в нуль, а вектор, лежащий в E_m, оставляет без изменения. Следовательно, формула (31,3) определяет фундаментальный тензор плоскости E_m. Подставляя выражения для $\underset{i}{\mathbf{v}}$ и $\overset{i}{\mathbf{v}}$ из формул (31,1) и (31,2), получаем:

$$\bar{g}_{\alpha\beta}=\sum_{i,k=1}^{m}\underset{i}{\mathbf{v}}\underset{k}{\mathbf{v}}\cdot\overset{i}{v}_\alpha\overset{k}{v}_\beta.\tag{31,4}$$

$$\bar{g}_{\alpha\beta}=-\frac{1}{G(\underset{1}{\mathbf{v}},\dots\underset{m}{\mathbf{v}})}\begin{vmatrix}
\underset{1}{\mathbf{v}}^2 & \dots & \underset{1}{\mathbf{v}}\underset{m}{\mathbf{v}} & \underset{1}{v}_\beta\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\underset{m}{\mathbf{v}}\underset{1}{\mathbf{v}} & \dots & \underset{m}{\mathbf{v}}^2 & \underset{m}{v}_\beta\\
\underset{1}{v}_\alpha & \dots & \underset{m}{v}_\alpha & 0
\end{vmatrix}.\tag{315}$$

Вторая из этих формул более громоздка, но зато удобна для вычислений, так как для ее применения не надо первоначально находить векторы $\overset{i}{\mathbf{v}}$ взаимной системы.

Фундаментальный тензор плоскости E_{n-m}, дополнительной к E_m, выразится следующим образом:

$$\bar{\bar{g}}_{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta}-\sum\underset{k}{v}_\alpha\overset{k}{v}_\beta=g_{\alpha\beta}-\sum\underset{i}{\mathbf{v}}\underset{k}{\mathbf{v}}\cdot\overset{i}{v}_\alpha\overset{k}{v}_\beta.\tag{31,6}$$

$$\bar{\bar{g}}_{\alpha\beta}=\frac{1}{G(\underset{1}{\mathbf{v}},\dots\underset{m}{\mathbf{v}})}\begin{vmatrix}
\underset{1}{\mathbf{v}}^2 & \dots & \underset{1}{\mathbf{v}}\underset{m}{\mathbf{v}} & \underset{1}{v}_\beta\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\underset{m}{\mathbf{v}}\underset{1}{\mathbf{v}} & \dots & \underset{m}{\mathbf{v}}^2 & \underset{m}{v}_\beta\\
\underset{1}{v}_\alpha & \dots & \underset{m}{v}_\alpha & g_{\alpha\beta}
\end{vmatrix}\tag{31,7}$$

Рассмотрим теперь случай, когда плоскость E_m задана системой уравнений:

$$\underset{1}{\mathbf{a}}\mathbf{x} = 0, \ \underset{2}{\mathbf{a}}\mathbf{x} = 0, \ \dots \ \underset{r}{\mathbf{a}}\mathbf{x} = 0, \quad (r = n - m).$$

Так как векторы $\underset{1}{\mathbf{a}}, \underset{2}{\mathbf{a}}, \dots \underset{r}{\mathbf{a}}$ лежат в дополнительном пучке E_{n-m}, то тензор $\overline{g}_{\alpha\beta}$, согласно формуле (31,7), выразится следующим образом:

$$(31{,}8) \qquad \overline{g}_{\alpha\beta} = \frac{1}{G(\underset{1}{\mathbf{a}}, \dots \underset{r}{\mathbf{a}})} \begin{vmatrix} \underset{1}{\mathbf{a}}^2 & \dots & \underset{1}{\mathbf{a}}\underset{r}{\mathbf{a}} & \underset{1}{a}_\beta \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \underset{r}{\mathbf{a}}\underset{1}{\mathbf{a}} & \dots & \underset{r}{\mathbf{a}}^2 & \underset{r}{a}_\beta \\ \underset{1}{a}_\alpha & \dots & \underset{r}{a}_\alpha & g_{\alpha\beta} \end{vmatrix}.$$

Задача 1. Фундаментальный тензор плоскости $\{\underset{\alpha_1}{\mathbf{e}}, \underset{\alpha_2}{\mathbf{e}}, \dots \underset{\alpha_m}{\mathbf{e}}\}$ выражается следующей формулой

$$\overline{g}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{\begin{vmatrix} g_{\alpha_1\alpha_1} & \dots & g_{\alpha_1\alpha_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{\alpha_m\alpha_1} & \dots & g_{\alpha_m\alpha_m} \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} g_{\alpha_1\alpha_1} & \dots & g_{\alpha_1\alpha_m} & g_{\alpha_1\beta} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{\alpha_m\alpha_1} & \dots & g_{\alpha_m\alpha_m} & g_{\alpha_m\beta} \\ g_{\alpha\alpha_1} & \dots & g_{\alpha\alpha_m} & 0 \end{vmatrix}.$$

Задача 2. Вывести формулу (31,5) для фундаментального тензора, пользуясь соотношением (30,9) между фундаментальным и дискриминантным тензорами плоскости.

2. Определить угол между прямой и плоскостью.

Углом между прямой и плоскостью называется угол между этой прямой и ее проекцией на плоскость. Пусть направление прямой задается вектором $\mathbf{u}$, плоскость E_m — базисом $\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \dots \underset{m}{\mathbf{v}}$.

Обозначая проекцию вектора $\mathbf{u}$ на E_m через $\mathbf{u}'$, имеем

$$u_\alpha' = \overline{g}_{\alpha\beta} u^\beta.$$

Обозначая через φ искомый угол между $\mathbf{u}$ и E_m, получаем:

$$(31{,}9) \qquad \cos^2\varphi = \frac{1}{\mathbf{u}^2}\mathbf{u}\mathbf{u}' = -\frac{1}{\mathbf{u}^2 G(\underset{1}{\mathbf{v}}, \dots \underset{m}{\mathbf{v}})} \begin{vmatrix} \underset{1}{\mathbf{v}}^2 & \dots & \underset{1}{\mathbf{v}}\underset{m}{\mathbf{v}} & \underset{1}{\mathbf{v}}\mathbf{u} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \underset{m}{\mathbf{v}}\underset{1}{\mathbf{v}} & \dots & \underset{m}{\mathbf{v}}^2 & \underset{m}{\mathbf{v}}\mathbf{u} \\ \mathbf{u}\underset{1}{\mathbf{v}} & \dots & \mathbf{u}\underset{m}{\mathbf{v}} & 0 \end{vmatrix}$$

или

$$(31{,}10) \qquad \sin^2\varphi = \frac{G(\mathbf{u}, \underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \dots \underset{m}{\mathbf{v}})}{\mathbf{u}^2 G(\underset{1}{\mathbf{v}}, \dots, \underset{m}{\mathbf{v}})}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда плоскость E_m задана системой уравнений:

$$\underset{1}{\mathbf{a}}\mathbf{x} = 0, \quad \underset{2}{\mathbf{a}}\mathbf{x} = 0, \dots \underset{r}{\mathbf{a}}\mathbf{x} = 0, \quad (r = n - m).$$

Пользуясь формулой (31,8), получаем:

$$(31{,}11) \qquad \cos^2\varphi = \frac{G(\mathbf{u}, \underset{1}{\mathbf{a}}, \underset{2}{\mathbf{a}}, \dots \underset{r}{\mathbf{a}})}{\mathbf{u}^2 G(\underset{1}{\mathbf{a}}, \dots \underset{r}{\mathbf{a}})}.$$

Задача 3. В четырехмерном пространстве угол между вектором $\mathbf{u}$ и двумерной плоскостью, определяемой бивектором v_{ik}, вычисляется в прямоугольной системе координат по формуле:

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{\sum u_i^2 \sum\limits_{(i,k)} v_{ik}^2} \left\{(u_1 v_{23} + u_2 v_{31} + u_3 v_{12})^2 + (u_1 v_{24} + u_2 v_{41} + u_4 v_{12})^2 + \right.$$
$$\left. + (u_1 v_{34} + u_3 v_{41} + u_4 v_{13})^2 + (u_2 v_{34} + u_3 v_{42} + u_4 v_{23})^2\right\}.$$

3. Определить расстояние от точки до плоскости.

Из точки P, не лежащей на плоскости, можно опустить на нее только один перпендикуляр, который является кратчайшим расстоянием от точки до плоскости (доказательство — совершенно такое же, как для трехмерного пространства). Проводя из какой-нибудь точки плоскости E_m в точку P вектор $\mathbf{u}$ и проектируя его на плоскость, мы получим прямоугольный треугольник, у которого гипотенузой является вектор $\mathbf{u}$, одним из катетов — проекция $\mathbf{u}'$ вектора $\mathbf{u}$ на E_m, другим катетом — перпендикуляр из P на E_m. Таким образом, расстояние от точки до плоскости выразится формулой

$$\delta^2 = \mathbf{u}^2 \sin^2\varphi,$$

где φ — угол между вектором $\mathbf{u}$ и плоскостью E_m.

Пусть точка P задана вектором $\mathbf{a}$, плоскость E_m — уравнением в параметрическом виде:

$$\underset{1}{\mathbf{x}} = \mathbf{b} + \lambda_1 \underset{1}{\mathbf{v}} + \ldots + \lambda_m \underset{m}{\mathbf{v}}.$$

В данном случае за вектор $\mathbf{u}$ можно принять $\mathbf{a} - \mathbf{b}$. Пользуясь формулой (31,10), получаем:

(31,12)
$$\delta^2 = \frac{G(\mathbf{a}-\mathbf{b}, \underset{1}{\mathbf{v}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{v}})}{G(\underset{1}{\mathbf{v}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{v}})}.$$

Если плоскость E_m задана системой уравнений

$$\underset{1}{\mathbf{a}}\mathbf{x} = 0,\ \underset{2}{\mathbf{a}}\mathbf{x} = 0,\ \ldots\ \underset{r}{\mathbf{a}}\mathbf{x} = 0,\ (r = n - m),$$

то, пользуясь формулой (31,11), получаем

$$\delta^2 = -\frac{1}{G(\underset{1}{\mathbf{a}}, \ldots \underset{r}{\mathbf{a}})} \begin{vmatrix} \underset{1}{\mathbf{a}}^2 \ldots \underset{1}{\mathbf{a}}\underset{r}{\mathbf{a}} & \underset{1}{\mathbf{a}}\mathbf{u} \\ \cdots\cdots & \cdot \\ \cdots\cdots & \cdot \\ \underset{r}{\mathbf{a}}\underset{1}{\mathbf{a}} \ldots \underset{r}{\mathbf{a}}^2 & \underset{r}{\mathbf{a}}\mathbf{u} \\ \mathbf{u}\underset{1}{\mathbf{a}} \ldots \mathbf{u}\underset{r}{\mathbf{a}} & 0 \end{vmatrix}.$$

В этой формуле $\mathbf{u} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, где $\mathbf{b}$ — некоторая точка на плоскости E_m. Учитывая, что

$$\underset{i}{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \alpha_i,\ (i = 1, \ldots r)$$

и вводя обозначения

(31,13)
$$\mathbf{a}\underset{i}{\mathbf{a}} - \alpha_i = \varphi_i,$$

имеем:

(31,14)
$$\delta^2 = -\frac{1}{G(\underset{1}{\mathbf{a}}, \ldots \underset{r}{\mathbf{a}})} \begin{vmatrix} \underset{1}{\mathbf{a}}^2 \ldots \underset{1}{\mathbf{a}}\underset{r}{\mathbf{a}} & \varphi_1 \\ \cdots\cdots & \cdot \\ \cdots\cdots & \cdot \\ \underset{r}{\mathbf{a}}\underset{1}{\mathbf{a}} \ldots \underset{r}{\mathbf{a}}^2 & \varphi_r \\ \varphi_1 \ldots \varphi_r & 0 \end{vmatrix}$$

Задача 4. Обозначим объем m-мерного параллелепипеда, построенного на векторах $\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{v}}$ через V_m; объем $(m-1)$-мерного основания (параллелепипеда, построенного на $\underset{1}{\mathbf{v}}, \ldots \underset{m-1}{\mathbf{v}}$) через V_{m-1}; через h обозначим высоту,— расстояние от точки $\underset{m}{\mathbf{v}}$ до плоскости основания. Показать, что

$$V_m = hV_{m-1}.$$

Если через V'_m обозначить объем m-мерного симплекса, через V'_{m-1} — объем его $(m-1)$-мерного основания, через h — соответствующую высоту, то

$$V'_m = \frac{1}{m} hV'_{m-1}.$$

Задача 5. Найти зеркальное отражение вектора $\mathbf{x}$ относительно m-мерной плоскости, заданной: 1) базисом $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}$, 2) системой уравнений

$$\underset{1}{\mathbf{a}}\mathbf{x} = 0,\quad \underset{2}{\mathbf{a}}\mathbf{x} = 0, \ldots \underset{r}{\mathbf{a}}\mathbf{x} = 0,\quad (r = n - m).$$

Ответ. Обозначая через $\mathbf{y}$ искомое отражение, имеем:

$$\mathbf{y} = -\frac{2}{G(\underset{1}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}})} \begin{vmatrix} \frac{\mathbf{x}}{2} & \underset{1}{\mathbf{u}} \ldots \underset{m}{\mathbf{u}} \\ \underset{1}{\mathbf{u}}\mathbf{x} & \underset{1}{\mathbf{u}}^2 \ldots \underset{1}{\mathbf{u}}\underset{m}{\mathbf{u}} \\ \cdot & \cdots\cdots \\ \underset{m}{\mathbf{u}}\mathbf{x} & \underset{m}{\mathbf{u}}\underset{1}{\mathbf{u}} \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}^2 \end{vmatrix} = \frac{2}{G(\underset{1}{\mathbf{a}}, \ldots \underset{r}{\mathbf{a}})} \begin{vmatrix} \frac{\mathbf{x}}{2} & \underset{1}{\mathbf{a}} \ldots \underset{r}{\mathbf{a}} \\ \underset{1}{\mathbf{a}}\mathbf{x} & \underset{1}{\mathbf{a}}^2 \ldots \underset{1}{\mathbf{a}}\underset{r}{\mathbf{a}} \\ \cdot & \cdots\cdots \\ \underset{r}{\mathbf{a}}\mathbf{x} & \underset{r}{\mathbf{a}}\underset{1}{\mathbf{a}} \ldots \underset{r}{\mathbf{a}}^2 \end{vmatrix}.$$

4. Определить кратчайшее расстояние между двумя плоскостями.

Рассмотрим r-мерную плоскость E_r и s-мерную E_s $(r \leqslant s)$. Если PQ — кратчайшее расстояние между ними (P лежит в E_r, Q — в E_s), то прямая PQ перпендикулярна к обеим плоскостям. В самом деле, кратчайшее расстояние от P до E_s является перпендикуляром к E_s, кратчайшее расстояние от Q до E_r — должно быть перпендикулярно к E_r.

Рассмотрим сначала случай, когда плоскости заданы уравнениями в параметрической форме:

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \lambda_1 \underset{1}{\mathbf{u}} + \lambda_2 \underset{2}{\mathbf{u}} + \ldots + \lambda_r \underset{r}{\mathbf{u}},$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{b} + \mu_1 \underset{1}{\mathbf{v}} + \mu_2 \underset{2}{\mathbf{v}} + \ldots + \mu_s \underset{s}{\mathbf{v}}.$$

Если эти плоскости $\frac{p}{r}$-параллельны, то в системе векторов $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \dots \underset{r}{\mathbf{u}}, \underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \dots \underset{s}{\mathbf{v}}$ имеется только $m = r + s - p$ независимых. Обозначим их через $\underset{1}{\mathbf{w}}, \underset{2}{\mathbf{w}}, \dots \underset{m}{\mathbf{w}}$.

Обозначим вектор кратчайшего расстояния $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ через $\mathbf{z}$:

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y},$$

модуль его — через δ, вектор $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ — через $\mathbf{c}$. Мы уже говорили, что $\mathbf{z}$ должен быть перпендикулярен к E_r и E_s, т. е.

$$\mathbf{z}\underset{i}{\mathbf{w}} = 0, \ (i = 1, 2, \dots m).$$

Так как

$$\mathbf{z} - \mathbf{c} = \lambda_1 \underset{1}{\mathbf{u}} + \dots + \lambda_r \underset{r}{\mathbf{u}} + \mu_1 \underset{1}{\mathbf{v}} + \dots + \mu_s \underset{s}{\mathbf{v}}, \tag{31,15}$$

то векторы $\mathbf{z} - \mathbf{c}, \underset{1}{\mathbf{w}}, \underset{2}{\mathbf{w}}, \dots \underset{m}{\mathbf{w}}$ зависимы, т. е. определитель Gram'a $G(\mathbf{z} - \mathbf{c}, \underset{1}{\mathbf{w}}, \dots \underset{m}{\mathbf{w}})$ равен нулю:

$$\begin{vmatrix} (\mathbf{z}-\mathbf{c})^2, & (\mathbf{z}-\mathbf{c})\underset{1}{\mathbf{w}}, & \dots & (\mathbf{z}-\mathbf{c})\underset{m}{\mathbf{w}} \\ \underset{1}{\mathbf{w}}(\mathbf{z}-\mathbf{c}), & \underset{1}{\mathbf{w}}^2, & \dots & \underset{1\,m}{\mathbf{ww}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underset{m}{\mathbf{w}}(\mathbf{z}-\mathbf{c}), & \underset{m\,1}{\mathbf{ww}}, & \dots & \underset{m}{\mathbf{w}}^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{31,16}$$

Из соотношения (31,15) выводим, что

$$\mathbf{z}(\mathbf{z} - \mathbf{c}) = \mathbf{z}^2 - \mathbf{zc} = 0.$$

Следовательно, уравнение (31,16) может быть переписано в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{c}^2 - \delta^2, & -\mathbf{c}\underset{1}{\mathbf{w}}, & \dots & -\mathbf{c}\underset{m}{\mathbf{w}} \\ -\underset{1}{\mathbf{w}}\mathbf{c}, & \underset{1}{\mathbf{w}}^2 & \dots & \underset{1\,m}{\mathbf{ww}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\underset{m}{\mathbf{w}}\mathbf{c}, & \underset{m\,1}{\mathbf{ww}}, & \dots & \underset{m}{\mathbf{w}}^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда получаем

$$\delta^2 = \frac{G(\mathbf{c}, \underset{1}{\mathbf{w}}, \underset{2}{\mathbf{w}}, \dots \underset{m}{\mathbf{w}})}{G(\underset{1}{\mathbf{w}}, \underset{2}{\mathbf{w}}, \dots \underset{m}{\mathbf{w}})}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}. \tag{31,17}$$

Разберем, в качестве примера несколько случаев применения этой формулы.

Две двумерных плоскости:

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \lambda_1 \underset{1}{\mathbf{u}} + \lambda_2 \underset{2}{\mathbf{u}},$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{b} + \mu_1 \underset{1}{\mathbf{v}} + \mu_2 \underset{2}{\mathbf{v}}.$$

Могут представиться следующие случаи:

a) Плоскости 0-параллельны, векторы $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}$ независимы:

$$\delta^2 = \frac{G(\mathbf{c}, \underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}})}{G(\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}})}.$$

В трехмерном пространстве этого случая представиться не может.

В четырехмерном $\delta = 0$: плоскости всегда в этом случае имеют одну общую точку.

b) Плоскости $\frac{1}{2}$-параллельны; пусть $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \underset{1}{\mathbf{v}}$ — независимые векторы; тогда

$$\delta^2 = \frac{G(\mathbf{c}, \underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \underset{1}{\mathbf{v}})}{G(\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \underset{1}{\mathbf{v}})}.$$

В трехмерном пространстве всегда $\delta = 0$: плоскости пересекаются.

c) Плоскости полностью параллельны: $\underset{1}{\mathbf{v}} = \alpha \underset{1}{\mathbf{u}} + \beta \underset{2}{\mathbf{u}}, \ \underset{2}{\mathbf{v}} = \gamma \underset{1}{\mathbf{u}} + \delta \underset{2}{\mathbf{u}}$.

$$\delta^2 = \frac{G(\mathbf{c}, \underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}})}{G(\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}})}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда плоскости E_{n-r} и E_{n-s} заданы системами уравнений:

$$\underset{1}{\mathbf{a}}\mathbf{x} = \alpha_1 \ldots \underset{r}{\mathbf{a}}\mathbf{x} = \alpha_r, \tag{31,18}$$

$$\underset{1}{\mathbf{b}}\mathbf{x} = \beta_1, \ldots \underset{s}{\mathbf{b}}\mathbf{x} = \beta_s. \tag{31,19}$$

Пусть $r \leqslant s$. Если ранг системы векторов $\underset{1}{\mathbf{a}}, \underset{2}{\mathbf{a}}, \ldots \underset{r}{\mathbf{a}};$ $\underset{1}{\mathbf{b}}, \underset{2}{\mathbf{b}}, \ldots \underset{s}{\mathbf{b}}$ равен ϱ, т. е. степень параллельности E_{n-r} и E_{n-s} равна $\frac{n-\varrho}{n-s}$, то в плоскостях $\{\underset{1}{\mathbf{a}}, \ldots \underset{r}{\mathbf{a}}\}$ и $\{\underset{1}{\mathbf{b}}, \ldots \underset{s}{\mathbf{b}}\}$ имеется $m = r + s - \varrho$ независимых общих векторов; обозначим их через $\underset{1}{\mathbf{c}}, \underset{2}{\mathbf{c}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{c}}$. Комбинируя между собою уравнения каждой из систем (31,18) и (31,19), мы можем выделить из системы (31,18) m уравнений вида

$$\underset{1}{\mathbf{c}}\mathbf{x} = \sigma_1, \ \underset{2}{\mathbf{c}}\mathbf{x} = \sigma_2, \ \ldots \ \underset{m}{\mathbf{c}}\mathbf{x} = \sigma_m,$$

а в системе (31,19) m уравнений:

$$\underset{1}{\mathbf{c}}\mathbf{x} = \tau_1, \ \underset{2}{\mathbf{c}}\mathbf{x} = \tau_2, \ \ldots \ \underset{m}{\mathbf{c}}\mathbf{x} = \tau_m;$$

σ_i линейно составлены из $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_r$, τ_i — из $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_s$.

Пусть $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ — вектор кратчайшего расстояния (точка $\mathbf{x}$ лежит в E_{n-r}, точка $\mathbf{y}$ — в E_{n-s}). Так как $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ перпендикулярен к E_{n-r} и E_{n-s}, то система векторов $\underset{1}{\mathbf{c}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{c}}, \mathbf{x} - \mathbf{y}$ зависимая, т. е.

$$G(\underset{1}{\mathbf{c}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{c}}, \mathbf{x}-\mathbf{y}) = \begin{vmatrix} \underset{1}{\mathbf{c}}^2, & \ldots & \underset{1}{\mathbf{c}}\underset{m}{\mathbf{c}}, & \underset{1}{\mathbf{c}}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \underset{m}{\mathbf{c}}\underset{1}{\mathbf{c}}, & \ldots & \underset{m}{\mathbf{c}}^2, & \underset{m}{\mathbf{c}}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\ (\mathbf{x}-\mathbf{y})\underset{1}{\mathbf{c}}, & \ldots & (\mathbf{x}-\mathbf{y})\underset{m}{\mathbf{c}}, & (\mathbf{x}-\mathbf{y})^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Обозначая через

$$\varphi_i = \underset{i}{\mathbf{c}}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \sigma_i - \tau_i,$$

получаем

$$\begin{vmatrix} \underset{1}{\mathbf{c}}^2 & \ldots & \underset{1}{\mathbf{c}}\underset{m}{\mathbf{c}} & \varphi_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \underset{m}{\mathbf{c}}\underset{1}{\mathbf{c}} & \ldots & \underset{m}{\mathbf{c}}^2 & \varphi_m \\ \varphi_1 & \ldots & \varphi_m & \delta^2 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$\delta^2 = -\frac{1}{G(\underset{1}{\mathbf{c}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{c}})} \begin{vmatrix} \underset{1}{\mathbf{c}}^2 & \ldots & \underset{1}{\mathbf{c}}\underset{m}{\mathbf{c}} & \varphi_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \underset{m}{\mathbf{c}}\underset{1}{\mathbf{c}} & \ldots & \underset{m}{\mathbf{c}}^2 & \varphi_m \\ \varphi_1 & \ldots & \varphi_m & 0 \end{vmatrix} \tag{31,20}$$

Задача 6. Пользуясь формулой (31,20), определить кратчайшее расстояние между двумя прямыми в трехмерном пространстве, заданными двумя системами уравнений:

$$\underset{1}{\mathbf{u}}\mathbf{x} = \alpha_1, \ \underset{2}{\mathbf{u}}\mathbf{x} = \alpha_2,$$
$$\underset{1}{\mathbf{v}}\mathbf{x} = \beta_1, \ \underset{2}{\mathbf{v}}\mathbf{x} = \beta_2.$$

Ответ. Если прямые не параллельны, то

$$\delta^2 = \frac{D^2}{[[\underset{1}{\mathbf{u}}\underset{2}{\mathbf{u}}][\underset{1}{\mathbf{v}}\underset{2}{\mathbf{v}}]]^2},$$

где[1]

$$D = \begin{vmatrix} \underset{1}{u_1} & \underset{1}{u_2} & \underset{1}{u_3} & \alpha_1 \\ \underset{2}{u_1} & \underset{2}{u_2} & \underset{2}{u_3} & \alpha_2 \\ \underset{1}{v_1} & \underset{1}{v_2} & \underset{1}{v_3} & \beta_1 \\ \underset{2}{v_1} & \underset{2}{v_2} & \underset{2}{v_3} & \beta_2 \end{vmatrix}.$$

Если же прямые параллельны, то

$$\delta^2 = -\frac{1}{G(\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}})} \begin{vmatrix} \underset{1}{\mathbf{u}}^2 & \underset{1}{\mathbf{u}}\underset{2}{\mathbf{u}} & \varphi_1 \\ \underset{2}{\mathbf{u}}\underset{1}{\mathbf{u}} & \underset{2}{\mathbf{u}}^2 & \varphi_2 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & 0 \end{vmatrix},$$

[1] В формуле для D система координат считается прямоугольной.

где

$$\varphi_1 = \frac{1}{G(\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}})} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \underset{11}{\mathbf{uv}} & \underset{12}{\mathbf{uv}} \\ \beta_1 & \underset{1}{\mathbf{v}^2} & \underset{12}{\mathbf{vv}} \\ \beta_2 & \underset{21}{\mathbf{vv}} & \underset{2}{\mathbf{v}^2} \end{vmatrix}, \quad \varphi_2 = \frac{1}{G(\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}})} \begin{vmatrix} \alpha_2 & \underset{21}{\mathbf{uv}} & \underset{22}{\mathbf{uv}} \\ \beta_1 & \underset{1}{\mathbf{v}^2} & \underset{12}{\mathbf{vv}} \\ \beta_2 & \underset{21}{\mathbf{vv}} & \underset{2}{\mathbf{v}^2} \end{vmatrix}.$$

5. *Угол между двумя плоскостями.* Возьмем две плоскости E_r и E_s $(r \leqslant s)$ и определим стационарные значения [1] косинуса угла между направлением, лежащим в E_r, и направлением, принадлежащим к E_s.

Пусть E_r и E_s заданы соответственно базисами $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{r}{\mathbf{u}}$ и $\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \ldots \underset{s}{\mathbf{v}}$. Обозначим через $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ орты, лежащие в E_r и E_s:

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \underset{1}{\mathbf{u}} + \lambda_2 \underset{2}{\mathbf{u}} + \ldots + \lambda_r \underset{r}{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{x}^2 = 1,$$

$$\mathbf{y} = \mu_1 \underset{1}{\mathbf{v}} + \mu_2 \underset{2}{\mathbf{v}} + \ldots + \mu_s \underset{s}{\mathbf{v}}, \quad \mathbf{y}^2 = 1,$$

через σ — косинус угла между $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$:

$$\sigma = \mathbf{xy}.$$

Определим стационарные значения для σ при условии $\mathbf{x}^2 = 1$, $\mathbf{y}^2 = 1$. Приравнивая нулю производные от вспомогательной функции Lagrange'a:

$$U = \mathbf{xy} + \frac{\lambda}{2}\mathbf{x}^2 + \frac{\mu}{2}\mathbf{y}^2,$$

получаем

$$(31,21) \qquad \frac{\partial U}{\partial \lambda_i} = \underset{i}{\mathbf{u}}\mathbf{y} + \lambda \underset{i}{\mathbf{u}}\mathbf{x} = 0, \quad (i = 1, \ldots r)$$

$$(31,22) \qquad \frac{\partial U}{\partial \mu_k} = \underset{k}{\mathbf{v}}\mathbf{x} + \mu \underset{k}{\mathbf{v}}\mathbf{y} = 0, \quad (k = 1, \ldots s).$$

Умножая уравнения (31,21) на λ_i и суммируя по i, уравнения (31,22) на μ_k и суммируя их по k, выводим:

$$\mathbf{xy} + \lambda = 0, \quad \mathbf{xy} + \mu = 0.$$

[1] Стационарными значениями функции называются те значения, которые она принимает в точках, где производные 1-го порядка по независимым переменным равны нулю.

Таким образом $\sigma = -\lambda = -\mu$. Соотношения (31,21) и (31,22) принимают вид:

$$(31,23) \qquad \underset{i}{\mathbf{u}}(\mathbf{y} - \sigma\mathbf{x}) = 0, \quad (i = 1, \ldots r)$$

$$(31,24) \qquad \underset{k}{\mathbf{v}}(\mathbf{x} - \sigma\mathbf{y}) = 0, \quad (k = 1, \ldots s).$$

Уравнения (31,23) показывают, что вектор $\mathbf{y} - \sigma\mathbf{x}$ перпендикулярен к плоскости E_r, т. е. $\sigma\mathbf{x}$ является проекцией $\mathbf{y}$ на E_r. Аналогично, из (31,24), выводим, что $\sigma\mathbf{y}$ является проекцией $\mathbf{x}$ на плоскость E_s. Условимся называть те направления, которые дают стационарные значения σ, стационарными направлениями. Мы получаем из уравнений (31,23), (31,24) следующий результат: *если стационарное значение σ не равно нулю, то соответствующие ему стационарные направления в E_r и E_s связаны взаимно: каждое из них является проекцией другого на свою плоскость; если же стационарное значение σ равно нулю, то соответствующее стационарное направление в E_r перпендикулярно к E_s, а стационарное направление, лежащее в E_s, перпендикулярно к E_r.* Нетрудно видеть, что обратно, если в E_r и E_s можно выделить такие два направления, из которых каждое является проекцией другого, то они являются стационарными.

Покажем, что в плоскостях E_r и E_s можно выделить соответственно r и s взаимно-перпендикулярных стационарных направлений. Для этого лучше всего воспользоваться теорией симметрических линейных векторфункций, именно показать, что стационарные направления являются главными направлениями некоторой симметрической векторфункции.

Обозначим линейную векторфункцию, ортогонально проектирующую на E_r, через $\overline{\overline{\mathbf{E}}}$, векторфункцию, проектирующую на E_s, — через $\overline{\overline{\overline{\mathbf{E}}}}$. Рассмотрим линейные векторфункции:

$$\overline{\mathbf{N}} = \overline{\overline{\mathbf{E}}}\,\overline{\overline{\overline{\mathbf{E}}}}\,\overline{\overline{\mathbf{E}}}, \quad \overline{\overline{\mathbf{N}}} = \overline{\overline{\overline{\mathbf{E}}}}\,\overline{\overline{\mathbf{E}}}\,\overline{\overline{\overline{\mathbf{E}}}}.$$

Обе они симметрические. Векторфункция $\overline{\mathbf{N}}$ любой вектор пространства проектирует сначала на E_r, затем на E_s, потом снова на E_r. Рассмотрим главные направления этой векторфункции. Так как плоскость E_{n-r}, дополнительная к E_r, является нулевой ее областью, то остальные r главных направлений лежат в

E_r. Пусть $\underset{1}{\mathbf{x}}$ — одно из этих главных направлений, λ_1 — соответствующее характеристическое число. Имеем:

$$\overline{\mathbf{N}}(\underset{1}{\mathbf{x}}) = \lambda_1 \underset{1}{\mathbf{x}},$$

т. е.

$$\overline{\mathbf{E}}\overline{\overline{\mathbf{E}}}(\underset{1}{\mathbf{x}}) = \lambda_1 \underset{1}{\mathbf{x}}.$$

Покажем, что проекция $\underset{1}{\mathbf{x}}$ на E_s является главным направлением функции $\overline{\overline{\mathbf{N}}}$ с тем же характеристическим числом. В самом деле

$$\overline{\overline{\mathbf{N}}}(\overline{\overline{\mathbf{E}}}(\underset{1}{\mathbf{x}})) = \overline{\overline{\mathbf{E}}}\overline{\mathbf{E}}\overline{\overline{\mathbf{E}}}(\underset{1}{\mathbf{x}}) = \overline{\overline{\mathbf{E}}}(\lambda_1 \underset{1}{\mathbf{x}}) = \lambda_1 \overline{\overline{\mathbf{E}}}(\underset{1}{\mathbf{x}}).$$

Если $\lambda = 0$, то соответствующее направление $\mathbf{x}$ перпендикулярно к E_s. Таким образом, каждому ненулевому главному направлению $\underset{1}{\mathbf{x}}$ векторфункции $\overline{\mathbf{N}}$ соответствует ненулевое главное направление $\underset{1}{\mathbf{y}}$ функции $\overline{\overline{\mathbf{N}}}$, являющееся проекцией $\underset{1}{\mathbf{x}}$ на плоскость E_s, и обратно. Отсюда уже нетрудно вывести, что главные направления функций $\overline{\mathbf{N}}$ и $\overline{\overline{\mathbf{N}}}$ являются стационарными. Выделим в E_r r взаимно перпендикулярных главных направлений функции $\overline{\mathbf{N}}$. Если ранг этой функции $= \varrho$, то среди выделенных направлений имеется ϱ ненулевых, т. е. не перпендикулярных к плоскости E_s. Обозначим эти направления через $\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \ldots \underset{\varrho}{\mathbf{x}}$, а их проекции на E_s — через $\underset{1}{\mathbf{y}}, \underset{2}{\mathbf{y}}, \ldots \underset{\varrho}{\mathbf{y}}$. Обозначим через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\varrho$ острые углы между $\underset{1}{\mathbf{x}}$ и $\underset{1}{\mathbf{y}}$, $\underset{2}{\mathbf{x}}$ и $\underset{2}{\mathbf{y}}$, $\ldots \underset{\varrho}{\mathbf{x}}$ и $\underset{\varrho}{\mathbf{y}}$ и положим $\alpha_{\varrho+1} = \alpha_{\varrho+2} = \ldots = \alpha_r = \frac{\pi}{2}$. Углы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ называются **углами между плоскостями** E_r и E_s. Их косинусы представляют собой стационарные значения σ.

Углы $\alpha_1, \ldots \alpha_r$ могут быть вычислены из характеристического уравнения векторфункции $\overline{\mathbf{N}}$ или $\overline{\overline{\mathbf{N}}}$, так как квадраты косинусов этих углов являются характеристическими числами этих функций.

6. Мы займемся теперь выводом уравнения для стационарных значений σ, не прибегая к векторфункциям $\overline{\mathbf{N}}$ и $\overline{\overline{\mathbf{N}}}$, так

как полученное уравнение позволит очень просто сделать ряд интересных выводов. Умножая уравнения (31,23) на σ и подставляя в (31,23) и (31,24)

$$\mathbf{x} = \sum_{p=1}^{r} \lambda_p \underset{p}{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{y} = \sum_{q=1}^{s} \mu_q \underset{q}{\mathbf{v}},$$

получаем систему уравнений

$$(31{,}25) \qquad \begin{aligned} \sigma^2 \sum \underset{i\,p}{\mathbf{uu}}\lambda_p - \sum \underset{i\,q}{\mathbf{uv}}\sigma\mu_q &= 0, \quad (i = 1, \ldots r) \\ \sum \underset{k\,p}{\mathbf{vu}}\lambda_p - \sum \underset{k\,q}{\mathbf{vv}}\sigma\mu_q &= 0, \quad (k = 1, \ldots s). \end{aligned}$$

Исключая из них λ_p и $\sigma\mu_q$ и вводя обозначения

$$(31{,}26) \qquad \underset{i\,k}{\mathbf{uu}} = a_{ik}, \quad \underset{i\,k}{\mathbf{uv}} = b_{ik}, \quad \underset{i\,k}{\mathbf{vv}} = c_{ik},$$

имеем

$$(31{,}27) \qquad \begin{vmatrix} \sigma^2 a_{11} \ldots \sigma^2 a_{1r} & b_{11} \ldots b_{1s} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \sigma^2 a_{r1} \ldots \sigma^2 a_{rr} & b_{r1} \ldots b_{rs} \\ b_{11} \ldots b_{r1} & c_{11} \ldots c_{1s} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ b_{1s} \ldots b_{rs} & c_{s1} \ldots c_{ss} \end{vmatrix} = 0.$$

Из этого уравнения получаем произведение корней

$$(31{,}28) \qquad \cos^2\alpha_1 \cos^2\alpha_2 \ldots \cos^2\alpha_r = \frac{(-1)^r}{|a_{ik}| \cdot |c_{ik}|} \begin{vmatrix} 0 \ldots 0 & b_{11} \ldots b_{1s} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0 \ldots 0 & b_{r1} \ldots b_{rs} \\ b_{11} \ldots b_{r1} & c_{11} \ldots c_{1s} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ b_{1s} \ldots b_{rs} & c_{s1} \ldots c_{ss} \end{vmatrix}$$

Выражая в уравнении (31,27) σ^2 через синус стационарного угла, получаем

$$\sin^2\alpha_1 \sin^2\alpha_2 \ldots \sin^2\alpha_r = \frac{1}{|a_{ik}|\,|c_{ik}|}\begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1r} & b_{11}\ldots b_{1s} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{r1}\ldots a_{rr} & b_{r1}\ldots b_{rs} \\ b_{11}\ldots b_{r1} & c_{11}\ldots c_{1s} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ b_{1s}\ldots b_{rs} & c_{s1}\ldots c_{ss} \end{vmatrix}.$$

Учитывая обозначения (31,26), имеем

$$(31,29)\qquad \sin^2\alpha_1 \sin^2\alpha_2 \ldots \sin^2\alpha_r = \frac{G(\underset{1}{\mathbf{u}},\ldots \underset{r}{\mathbf{u}},\ \underset{1}{\mathbf{v}},\ldots \underset{s}{\mathbf{v}})}{G(\underset{1}{\mathbf{u}},\ldots \underset{r}{\mathbf{u}})\,G(\underset{1}{\mathbf{v}},\ldots \underset{s}{\mathbf{v}})}.$$

Если $r = s$, из формулы (31,28) вытекает следующая зависимость

$$(31,30)\qquad \begin{aligned} &g(\underset{1}{\mathbf{u}},\ldots \underset{r}{\mathbf{u}};\ \underset{1}{\mathbf{v}},\ldots \underset{r}{\mathbf{v}}) = \\ &= G(\underset{1}{\mathbf{u}},\ldots \underset{r}{\mathbf{u}})\,G(\underset{1}{\mathbf{v}},\ldots \underset{r}{\mathbf{v}}) \cos^2\alpha_1 \cos^2\alpha_2 \ldots \cos^2\alpha_r. \end{aligned}$$

Отсюда получаем геометрическую интерпретацию скалярного произведения двух мультивекторов.

Обозначая r-векторы, построенные на базисах $\underset{1}{\mathbf{u}},\ldots \underset{r}{\mathbf{u}}$ и $\underset{1}{\mathbf{v}},\ldots \underset{r}{\mathbf{v}}$, через $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$, имеем:

$$(31,31)\qquad \mathbf{UV} = \pm|\mathbf{U}|\,|\mathbf{V}| \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \ldots \cos\alpha_r.$$

Следовательно, косинус „угла" между двумя мультивекторами, о котором мы говорили в § 27, выражается следующим образом через косинусы углов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$:

$$(31,32)\qquad \cos(\mathbf{U},\mathbf{V}) = \frac{\mathbf{UV}}{\sqrt{\mathbf{U}^2\mathbf{V}^2}} = \pm\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \ldots \cos\alpha_r.$$

Формула (31,29) дает геометрическую интерпретацию скалярного произведения двух мультивекторов типа $(\mathbf{U}|\mathbf{V})$. Если $r = s = \frac{n}{2}$, то

$$(31,33)\qquad (\mathbf{U}|\mathbf{V}) = \pm|\mathbf{U}|\cdot|\mathbf{V}| \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \ldots \sin\alpha_r.$$

7. Мы укажем еще на одно интересное применение углов $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_r$. Для этого выведем уравнение для σ, отличное от (31,27).

Возьмем уравнения (31,23). Умножая их на σ и принимая во внимание, что $\sigma\mathbf{y}$ есть проекция вектора $\mathbf{x}$ на E_s (которую мы будем обозначать через $\mathbf{x}'$), получаем:

$$\underset{i}{\mathbf{u}}\mathbf{x}' - \sigma^2 \underset{i}{\mathbf{u}}\mathbf{x} = 0.$$

Если через $\underset{i}{\mathbf{u}}'$ обозначим проекцию вектора $\underset{i}{\mathbf{u}}$ на E_s, то $\underset{i}{\mathbf{u}}\mathbf{x}' = \underset{i}{\mathbf{u}}'\mathbf{x}'$. Таким образом,

$$\underset{i}{\mathbf{u}}'\mathbf{x}' - \sigma^2 \underset{i}{\mathbf{u}}\mathbf{x} = 0.$$

Вставляя здесь $\mathbf{x} = \lambda_1\underset{1}{\mathbf{u}} + \ldots + \lambda_r\underset{r}{\mathbf{u}}$, $\mathbf{x}' = \lambda_1\underset{1}{\mathbf{u}}' + \ldots + \lambda_r\underset{r}{\mathbf{u}}'$, имеем:

$$\sum (\underset{i}{\mathbf{u}}'\underset{k}{\mathbf{u}}' - \sigma^2 \underset{i}{\mathbf{u}}\underset{k}{\mathbf{u}})\,\lambda_k = 0.$$

Исключая отсюда λ_k и вводя обозначения:

$$\underset{i}{\mathbf{u}}\underset{k}{\mathbf{u}} = a_{ik},\quad \underset{i}{\mathbf{u}}'\underset{k}{\mathbf{u}}' = m_{ik},$$

получаем уравнение

$$|m_{ik} - \sigma^2 a_{ik}| = 0.$$

Отсюда

$$(31,34)\qquad \cos^2\alpha_1 \cos^2\alpha_2 \ldots \cos^2\alpha_r = \frac{|m_{ik}|}{|a_{ik}|} = \frac{G(\underset{1}{\mathbf{u}}',\ \underset{2}{\mathbf{u}}',\ldots \underset{r}{\mathbf{u}}')}{G(\underset{1}{\mathbf{u}},\ \underset{2}{\mathbf{u}},\ldots \underset{r}{\mathbf{u}})}.$$

Эта формула позволяет сделать интересный вывод. Возьмем r-мерный параллелепипед P_r, построенный на векторах $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{r}{\mathbf{u}}$, и спроектируем его ортогонально на плоскость E_s; получаем параллелепипед P_r', построенный на векторах $\underset{1}{\mathbf{u}}' \ldots \underset{r}{\mathbf{u}}'$. Формула

(31,34) показывает, что объем V_r' параллелепипеда P_r' зависит только от объема V_r параллелепипеда P_r и углов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$:

$$V_r' = V_r \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \ldots \cos\alpha_r. \tag{31,35}$$

Получается обобщение известной теоремы геометрии трехмерного пространства о площади проекции и проектируемой фигуры. Соотношение (31,35) может быть распространено на объемы любых тел. При $r = s$ получаем:

$$V_r' = \pm V_r \cos(\mathbf{U}, \mathbf{V}).$$

Приведем два простых примера, иллюстрирующих изложенную выше теорию.

1) *Прямая и m-мерная плоскость.* Имеется минимальный угол α_1 (между прямой и ее проекцией на плоскость). Из (31,28) и (31,29) вытекают формулы (31,9) и (31,10).

2) *Две гиперплоскости.* Если гиперплоскости E_{n-1} и E'_{n-1} не параллельны, то имеется $(n-2)$-мерный пучок E_{n-2} общих направлений. Он дает минимальные углы $\alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0$. Кроме того, имеется стационарное значение α_1 угла между двумя перпендикулярами к E_{n-2}, лежащими в E_{n-1} и E'_{n-1}. Применяя формулу (31,30), получаем:

$$\cos\alpha_1 = \pm \frac{g(\underset{1}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{n-1}{\mathbf{u}};\ \underset{1}{\mathbf{v}}, \ldots \underset{n-1}{\mathbf{v}})}{\sqrt{G(\underset{1}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{n-1}{\mathbf{u}})\, G(\underset{1}{\mathbf{v}}, \ldots \underset{n-1}{\mathbf{v}})}} = \pm \frac{[\underset{1}{\mathbf{u}} \ldots \underset{n-1}{\mathbf{u}}][\underset{1}{\mathbf{v}} \ldots \underset{n-1}{\mathbf{v}}]}{\sqrt{[\underset{1}{\mathbf{u}} \ldots \underset{n-1}{\mathbf{u}}]^2 [\underset{1}{\mathbf{v}} \ldots \underset{n-1}{\mathbf{v}}]^2}}. \tag{31,36}$$

Таким образом, за угол между гиперплоскостями можно принять угол между перпендикулярами к ним.

Если гиперплоскости задаются уравнениями:

$$\underset{1}{\mathbf{a}}\mathbf{x} = \varphi_1, \quad \underset{2}{\mathbf{a}}\mathbf{x} = \varphi_2,$$

то

$$\cos\alpha_1 = \pm \frac{\underset{1}{\mathbf{a}}\underset{2}{\mathbf{a}}}{\sqrt{\underset{1}{\mathbf{a}}^2 \underset{2}{\mathbf{a}}^2}}. \tag{31,37}$$

Задача 7. Если среди углов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ число равных нулю равно p, число прямых углов равно q, то плоскости E_r и E_s $\frac{p}{r}$ - параллельны и $\frac{q}{r}$ - перпендикулярны.

Задача 8. Пусть V_r, V_s, V_{r+s} — объемы r-, s- и $(r+s)$-мерных параллелепипедов, построенных соответственно на векторах $\underset{1}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{r}{\mathbf{u}}$; $\underset{1}{\mathbf{v}}, \ldots \underset{s}{\mathbf{v}}$ и $\underset{1}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{r}{\mathbf{u}}, \underset{1}{\mathbf{v}}, \ldots \underset{s}{\mathbf{v}}$. Предполагая $r \leqslant s$, показать, что

$$V_{r+s} = V_r V_s \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \ldots \sin\alpha_r,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ — углы между плоскостями $\{\underset{1}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{r}{\mathbf{u}}\}$ и $\{\underset{1}{\mathbf{v}}, \ldots \underset{s}{\mathbf{v}}\}$.

Задача 9. В m-мерном симплексе S_m выделяем $(r+1)$ вершин и строим на них r-мерный симплекс S_r; на остальных $(s+1)$ вершинах $(s = m - r - 1)$ строим s-мерный симплекс S_s. Обозначая объемы этих симплексов соответственно через V_m, V_r, V_s, имеем

$$V_m = \frac{r!s!}{m!} V_r V_s d \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \ldots \sin\alpha_t,$$

где d — кратчайшее расстояние между плоскостями симплексов S_r и S_s, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_t$ — углы между этими плоскостями (t обозначает наименьшее из двух чисел: r и s).

Задача 10. Рассмотрим две двумерные плоскости в четырехмерном пространстве, определяемые бивекторами u_{ik} и v_{ik}; пусть α_1, α_2 — углы между этими плоскостями. Вывести формулы (система координат предполагается прямоугольной):

$$\cos(\alpha_1 + \varepsilon_1\alpha_2) = \varepsilon_2 \frac{p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3}{\sqrt{(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)}}$$

$$\cos(\alpha_1 - \varepsilon_1\alpha_2) = \varepsilon_2 \frac{\bar p_1 \bar q_1 + \bar p_2 \bar q_2 + \bar p_3 \bar q_3}{\sqrt{(\bar p_1^2 + \bar p_2^2 + \bar p_3^2)(\bar q_1^2 + \bar q_2^2 + \bar q_3^3)}},$$

$$\varepsilon_1 = \pm 1, \quad \varepsilon_2 = \pm 1,$$

$$p_1 = u_{14} + u_{23}, \quad p_2 = u_{24} + u_{31}, \quad p_3 = u_{34} + u_{12},$$

$$q_1 = v_{14} + v_{23}, \quad q_2 = v_{24} + v_{31}, \quad q_3 = v_{34} + v_{12},$$

$$\bar p_1 = u_{14} - u_{23}, \quad \bar p_2 = u_{24} - u_{31}, \quad \bar p_3 = u_{34} - u_{12},$$

$$\bar q_1 = v_{14} - v_{23}, \quad \bar q_2 = v_{24} - v_{31}, \quad \bar q_3 = v_{34} - v_{12}.$$

Указание. Воспользоваться формулами:

$$\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 = \pm \frac{\mathbf{U}\mathbf{V}}{\sqrt{\mathbf{U}^2\mathbf{V}^2}}; \quad \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 = \pm \frac{(\mathbf{U}\,\mathbf{V})}{\sqrt{\mathbf{U}^2\mathbf{V}^2}}.$$

§ 32. Комплексное метрическое пространство. Геометрия Hermite'а.

1. При изучении основных вопросов метрической геометрии Евклида мы имели дело с реальным пространством, прибегая изредка к комплексным элементам только как к вспомогательному инструменту для исследования вопросов вещественного пространства; теперь мы затронем некоторые вопросы метрической геометрии в комплексном многообразии.

Расширение пространства при помощи присоединения комплексных элементов в проективной геометрии приносит значительные выгоды, упрощая изучение вопросов, связанных с теорией пересечения кривых и поверхностей. Здесь мы имеем те же преимущества, что и в алгебре при рассмотрении не только реальных, но и комплексных корней вещественного полинома. Так например, две алгебраических кривых порядка m и n в комплексной проективной плоскости имеют всегда mn точек пересечения, из которых некоторые, конечно, могут быть слившимися (точки соприкосновения). При изучении аффинной геометрии мы видели, какие значительные выгоды приносит рассмотрение комплексных векторов при исследовании линейных векторфункций. Наконец, в метрической геометрии введение комплексных элементов пространства, кроме тех выгод, которые оно дает для проективной и аффинной геометрии, позволяет сводить метрические понятия и соотношения к более общим понятиям и соотношениям проективной геометрии.

Иллюстрируем это на примере понятия угла между двумя направлениями. Рассмотрим 2 изотропных вектора, лежащих в 2-мерной плоскости, определяемой ортами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$. Если вектор $\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}$ принадлежит к изотропному конусу, то коэффициенты λ и μ связаны соотношением:

$$(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b})^2=\lambda^2+2\lambda\mu\cos\varphi+\mu^2=0,$$

где φ — угол между прямыми $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Отсюда выводим, что изотропные направления $\underset{1}{\mathbf{u}}$, $\underset{2}{\mathbf{u}}$ плоскости $\{\mathbf{a},\mathbf{b}\}$ определяются отношениями:

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)_1=-e^{i\varphi},\quad \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)_2=-e^{-i\varphi}.$$

Ангармоническое отношение $[\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{2}{\mathbf{u}};\mathbf{a},\mathbf{b}]$ задается формулой:

$$[\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{2}{\mathbf{u}};\mathbf{a},\mathbf{b}]=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)_1:\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)_2=e^{2i\varphi}.$$

Следовательно:

$$\varphi=\frac{1}{2i}\ln[\underset{1}{\mathbf{u}},\underset{2}{\mathbf{u}};\mathbf{a},\mathbf{b}].$$

Таким образом, метрическое понятие угла сводится к понятию проективной геометрии об ангармоническом отношении 4 лучей путем введения в проективном пространстве семейства мнимых конусов 2-го порядка, имеющих для метрической геометрии фундаментальное значение (изотропные конусы).

Как на интересный пример сведения теорем метрической геометрии к проективным свойствам фигур путем введения в пространство комплексных элементов, можно указать на исследование фокальных свойств гиперповерхностей 2-го порядка. Мы ограничимся здесь только указанием на то, что фокусы центральной кривой 2-го порядка являются двумя вершинами (вещественными) четырехсторонника с изотропными сторонами, описанного около этой кривой, что софокусные конические сечения могут быть охарактеризованы как кривые, вписанные в четырехсторонник с изотропными сторонами.

2. Введение комплексных элементов пространства, давая значительные выгоды для исследования, вносит в отдельные вопросы некоторые осложнения. Так например, в комплексной проективной геометрии теряет смысл понятие о разделении двух пар точек, лежащих на одной прямой. В аффинной геометрии исчезает понятие „между" (точка C лежит на прямой AB „между" A и B), понятие отрезка и все связанные с ними геометрические свойства. Контравариантный вектор в комплексном пространстве уже не может быть понимаем как отрезок прямой, но как пара точек. Но особенно большие искажения получаются в метрической геометрии: все те теоремы, которые связаны с положительностью квадратичной формы, определяющей метрику, теряют свое значение в геометрии комплексного пространства. Так например, $m\ (m\leqslant n)$ взаимно-перпендикулярных векторов могут быть зависимыми; становится неприменимым такой интересный критерий зависимости векторов, как равенство нулю определителя Gram'а; симметрическая линейная векторфункция может быть непростого типа, т. е. у центральной гиперповерхности 2-го порядка иногда нельзя выделить n взаимно-перпендикулярных осей и т. д. В изучении комплексного метрического пространства приобретает особенное значение теория пучков билинейных и квадратичных форм, созданная работами Weierstrass'а и Kronecker'а.

Для того, чтобы сохранить при расширении пространства основные свойства систем взаимно-перпендикулярных векторов, свойства линейных векторфункций, аналогичных симметрическим, и т. д., можно поступить следующим образом: в основу определения метрики положить не квадратичную, а положительную эрмитову форму:

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = h_{\alpha\beta}\bar{x}^{\alpha}x^{\beta}, \quad h_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\beta\alpha}.$$

При этом, правда, теряется аналитический характер вопросов метрической геометрии (например, аналог „сферы"

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = R^2$$

является неаналитической поверхностью; если прямая пересекает ее, то имеет с ней ∞^1 общих точек); но зато вопросы, связанные с теорией линейных векторфункций, имеют много общего с теми, которые изучались нами в геометрии вещественного пространства. Пространство, в основу мероопределения которого положена положительная форма Hermite'а, называется эрмитовым или унитарным.[1] Геометрия пространства Hermite'а приобрела за последнее время большое значение для математической физики, и потому на ней мы остановимся несколько подробнее. Систематического изложения основ этой геометрии мы давать не будем, а ограничимся только исследованием наиболее простых вопросов, связанных с теорией линейных векторфункций в унитарном пространстве.

3. Чтобы не усложнять изложения, мы будем рассматривать в унитарном пространстве исключительно контравариантные векторы 1-го класса (которые будем просто называть векторами). Квадрат длины вектора $\mathbf{x}$ (его „норму") зададим положительной формой Hermite'а:

$$(\mathbf{x},\mathbf{x}) = g(\mathbf{x},\mathbf{x}) = g_{\alpha\beta}\bar{x}^{\alpha}x^{\beta}; \; g_{\alpha\beta} = \bar{g}_{\beta\alpha}.$$

Отметим следующую особенность понятия длины в унитарной геометрии: если вектор умножить на некоторый скаляр, то его длина умножается на модуль этого скаляра:

$$(a\mathbf{x},a\mathbf{x}) = a\bar{a}(\mathbf{x},\mathbf{x}).$$

[1] Отметим, что при введении метрики в комплексном пространстве можно и не требовать, чтобы форма Hermite'а, лежащая в основе мероопределения, была определенной. Следует подчеркнуть, что в построенной таким образом геометрии некоторые вопросы решаются сложнее, нежели в геометрии с положительной формой, кроме того, теряются многие аналогии с геометрией вещественного пространства Евклида.

В связи с этим прямая имеет не два прямо-противоположных, как в геометрии Евклида, орта, а бесконечное множество: если $\mathbf{a}$ — орт, то и все векторы $e^{i\alpha}\mathbf{a}$, где α — вещественное число, являются также ортами.

Кроме того, длины векторов, лежащих на одной прямой, не подчиняются закону сложения: если $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ — векторы, принадлежащие одной и той же прямой, причем $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, то в общем случае $\sqrt{(\mathbf{c},\mathbf{c})} \neq \left|\sqrt{(\mathbf{a},\mathbf{a})} \pm \sqrt{(\mathbf{b},\mathbf{b})}\right|$. В самом деле, если $\mathbf{b} = \sigma\mathbf{a}$, то:

$$(\mathbf{c},\mathbf{c}) = (1+\sigma)(1+\bar{\sigma})(\mathbf{a},\mathbf{a}).$$

Сравнивая эту величину с

$$\sqrt{(\mathbf{a},\mathbf{a})} \pm \sqrt{(\mathbf{b},\mathbf{b})} = \sqrt{(\mathbf{a},\mathbf{a})}\left(1 \pm \sqrt{\sigma\bar{\sigma}}\right),$$

мы получаем:

$$\left(\sqrt{(\mathbf{a},\mathbf{a})} - \sqrt{(\mathbf{b},\mathbf{b})}\right)^2 \leqslant (\mathbf{c},\mathbf{c}) \leqslant \left(\sqrt{(\mathbf{a},\mathbf{a})} + \sqrt{(\mathbf{b},\mathbf{b})}\right)^2.$$

Знаки равенства в этом соотношении имеют место только в том случае, если σ — действительное число: если $\sigma > 0$, то:

$$\sqrt{(\mathbf{c},\mathbf{c})} = \sqrt{(\mathbf{a},\mathbf{a})} + \sqrt{(\mathbf{b},\mathbf{b})},$$

если $\sigma < 0$, то:

$$\sqrt{(\mathbf{c},\mathbf{c})} = \left|\sqrt{(\mathbf{a},\mathbf{a})} - \sqrt{(\mathbf{b},\mathbf{b})}\right|.$$

Скалярное произведение двух векторов определим формулой:

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) = g(\mathbf{x},\mathbf{y}) = g_{\alpha\beta}\bar{x}^{\alpha}y^{\beta}.$$

Отметим следующие свойства скалярного произведения:

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \overline{(\mathbf{y},\mathbf{x})};$$

$$(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{z}) = (\mathbf{x},\mathbf{z}) + (\mathbf{y},\mathbf{z}); \; (\mathbf{x},\mathbf{y}+\mathbf{z}) = (\mathbf{x},\mathbf{y}) + (\mathbf{x},\mathbf{z})$$

$$(a\mathbf{x},\mathbf{y}) = \bar{a}(\mathbf{x},\mathbf{y}); \; (\mathbf{x},a\mathbf{y}) = a(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

Два вектора $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, сопряженные относительно фундаментальной формы Hermite'а $g(\mathbf{x},\mathbf{x})$, называются взаимно-ортогональными (перпендикулярными); их скалярное произведение равно нулю: $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$. Две плоскости называются полностью взаимно-ортогональными (или просто взаимно-

ортогональными), если каждый вектор одной ортогонален к каждому вектору другой.

На основании свойств положительной формы Hermite'а (§ 25), можно формулировать следующие предложения:

1) *система m взаимно-ортогональных векторов независима*,

2) *в любой m-мерной плоскости можно выделить m взаимно-ортогональных направлений*,

3) *каждый m-мерный плоский пучок E_m однозначно определяет $(n-m)$-мерный („дополнительный") пучок E_{n-m}, полностью ортогональный к E_m*,

4) *m векторов $\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{x}}$ тогда и только тогда зависимы, если определитель Gram'a*:

$$\Gamma(\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{x}}) = \begin{vmatrix} (\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{1}{\mathbf{x}}) & \ldots & (\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{m}{\mathbf{x}}) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ (\underset{m}{\mathbf{x}}, \underset{1}{\mathbf{x}}) & \ldots & (\underset{m}{\mathbf{x}}, \underset{m}{\mathbf{x}}) \end{vmatrix} \tag{32,1}$$

равен нулю. Для независимых векторов определитель Gram'a всегда положителен.

Построив n взаимно-ортогональных ортов, можно ввести ортогональную систему координат, в которой скалярное произведение двух векторов имеет следующий вид:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum \bar{x}_i y_i .$$

Ортогональным преобразованиям пространства Евклида соответствуют унитарные преобразования, не меняющие длин векторов (пользуемся ортогональной системой координат):

$$x'_i = \sum u_{ik} x_k ,$$

$$\sum_i \bar{u}_{ip} u_{iq} = \delta^p_q .$$

Обозначая матрицу унитарных преобразований через U, имеем:

$$U^* U = U U^* = E.$$

В отличие от пространства Евклида, в унитарном пространстве не существует склярного знакопеременного произведения n векторов (а следовательно, и векторного произведения $(n-1)$ векторов). В самом деле, применяя унитарное преобразование к множителям знакопеременной скалярной функции:

$$(\underset{1}{\mathbf{x}} \underset{2}{\mathbf{x}} \ldots \underset{n}{\mathbf{x}}) = \begin{vmatrix} \underset{1}{x_1} & \ldots & \underset{1}{x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \underset{n}{x_1} & \ldots & \underset{n}{x_n} \end{vmatrix}$$

получим:

$$(\underset{1}{\mathbf{x}'} \underset{2}{\mathbf{x}'} \ldots \underset{n}{\mathbf{x}'}) = |U| (\underset{1}{\mathbf{x}} \underset{2}{\mathbf{x}} \ldots \underset{n}{\mathbf{x}}).$$

Так как определитель $|U|$ унитарной матрицы вообще не равен единице, то функция $(\underset{1}{\mathbf{x}} \underset{2}{\mathbf{x}} \ldots \underset{n}{\mathbf{x}})$ не является абсолютным инвариантом.

Отметим, что, если ограничиться подгруппой унитарных преобразований с определителями равными единице (унитарные унимодулярные преобразования), то в геометрии, в основу которой будет положена эта подгруппа, скалярное знакопеременное произведение n векторов будет существовать.

4. В унитарном пространстве можно построить так же, как и в геометрии Евклида, понятие о проекции вектора на m-мерную плоскость. Рассмотрим вектор $\mathbf{x}$ и m-мерный пучок E_m; строим дополнительный пучок E_{n-m} и разлагаем $\mathbf{x}$ на два вектора $\underset{1}{\mathbf{x}}$ и $\underset{2}{\mathbf{x}}$, из которых один, например $\underset{1}{\mathbf{x}}$, лежит в E_m, другой — в E_{n-m}; $\underset{1}{\mathbf{x}}$ называется *проекцией* вектора $\mathbf{x}$ на E_m Так как $\underset{1}{\mathbf{x}}$ и $\underset{2}{\mathbf{x}}$ взаимно-ортогональны, то:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{1}{\mathbf{x}}) + (\underset{2}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}).$$

Следовательно, в геометрии Hermite'а имеет место теорема Пифагора. Отсюда вытекает, что длина наклонной больше длины перпендикуляра и ее проекции, и что на m-мерную плоскость можно опустить только один перпендикуляр из точки, не лежащей в этой плоскости.

Пользуясь понятием о проекции, можно ввести угол между двумя прямыми. Рассмотрим два вектора $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Спроектируем вектор $\mathbf{x}$ на $\mathbf{y}$; пусть $\sigma\mathbf{y}$ — эта проекция. Коэффициент σ вычислится из уравнения:

$$(\mathbf{y}, \mathbf{x} - \sigma\mathbf{y}) = 0,$$

т. е. $\sigma = \frac{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{(\mathbf{y}, \mathbf{y})}$. Таким образом, квадрат длины проекции равен:

$$\frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{(\mathbf{y}, \mathbf{y})}.$$

Аналогично геометрии Евклида вводим угол между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, определяя его косинус как отношение длины проекции к длине перпендикуляра:

$$\cos^2\alpha = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{(\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y})}.$$

Не останавливаясь дольше на понятии о проектировании, укажем, что задачи, разобранные в предыдущем параграфе для пространства Евклида, решаются вполне аналогично и в унитарной геометрии. Рекомендуем читателю пересмотреть их заново для пространства Hermite'a. При отыскании экстремальных значений функций следует иметь в виду следующее: независимые переменные, от которых зависит extremum, являются комплексными величинами; поэтому приравнивать нулю следует производные и по действительным и по мнимым частям независимых переменных (как нетрудно видеть, можно приравнивать нулю производные по самим независимым переменным и по сопряженным им величинам; это иногда значительно облегчает счет).

Приведем для ориентировки некоторые результаты:

1) Расстояние δ от точки $\mathbf{a}$ до m-мерной плоскости:

$$\mathbf{x} = \mathbf{b} + \lambda_1 \underset{1}{\mathbf{u}} + \lambda_2 \underset{2}{\mathbf{u}} + \ldots + \lambda_m \underset{m}{\mathbf{u}}$$

определяется по формуле:

$$\delta^2 = \frac{\Gamma(\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}}, \mathbf{b} - \mathbf{a})}{\Gamma(\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}})},$$

где через $\Gamma(\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{u}})$ обозначен определитель Gram'a в унитарном пространстве (32,1).

2) Если $(n - m)$-мерная плоскость задана системой уравнений:

$$(\underset{1}{\mathbf{a}}, \mathbf{x}) = \alpha_1,\ (\underset{2}{\mathbf{a}}, \mathbf{x}) = \alpha_2, \ldots (\underset{m}{\mathbf{a}}, \mathbf{x}) = \alpha_m,$$

то для расстояния δ от точки $\mathbf{a}$ до этой плоскости имеем формулу:

$$\delta^2 = -\frac{1}{\Gamma(\underset{1}{\mathbf{a}}, \underset{2}{\mathbf{a}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{a}})} \begin{vmatrix} (\underset{1}{\mathbf{a}}, \underset{1}{\mathbf{a}}) \ldots (\underset{1}{\mathbf{a}}, \underset{m}{\mathbf{a}}), \varphi_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ (\underset{m}{\mathbf{a}}, \underset{1}{\mathbf{a}}) \ldots (\underset{m}{\mathbf{a}}, \underset{m}{\mathbf{a}}), \varphi_m \\ \bar{\varphi}_1 \ \ldots \ \bar{\varphi}_m \quad 0 \end{vmatrix},$$

где

$$\varphi_i = (\underset{i}{\mathbf{a}}, \mathbf{a}) - \alpha_i.$$

3) Обозначим через σ квадрат косинуса стационарных углов между векторами, лежащими в r-мерной и s-мерной плоскостях, заданных базисами $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{r}{\mathbf{u}}$ и $\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}} \ldots \underset{s}{\mathbf{v}}$ $(r \leqslant s)$. Для σ имеем уравнение:

$$\begin{vmatrix} \sigma(\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{1}{\mathbf{u}}) \ldots \sigma(\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{r}{\mathbf{u}}), (\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{1}{\mathbf{v}}) \ldots (\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{s}{\mathbf{v}}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sigma(\underset{r}{\mathbf{u}}, \underset{1}{\mathbf{u}}) \ldots \sigma(\underset{r}{\mathbf{u}}, \underset{r}{\mathbf{u}}), (\underset{r}{\mathbf{u}}, \underset{1}{\mathbf{v}}) \ldots (\underset{r}{\mathbf{u}}, \underset{s}{\mathbf{v}}) \\ (\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{1}{\mathbf{u}}) \ldots \quad (\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{r}{\mathbf{u}}), (\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{1}{\mathbf{v}}) \ldots (\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{s}{\mathbf{v}}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (\underset{s}{\mathbf{v}}, \underset{1}{\mathbf{u}}) \ldots \quad (\underset{s}{\mathbf{v}}, \underset{r}{\mathbf{u}}), (\underset{s}{\mathbf{v}}, \underset{1}{\mathbf{v}}) \ldots (\underset{s}{\mathbf{v}}, \underset{s}{\mathbf{v}}) \end{vmatrix} = 0.$$

5. Наметим основные моменты алгебры векторов и тензоров в унитарной геометрии.

Взаимные системы векторов. Так как при изучении унитарной геометрии мы не пользуемся ковариантными векторами, то понятие о взаимных системах необходимо построить независимо от того, которое мы имели в аффинном пространстве.

Пусть $\underset{1}{\mathbf{u}}, \underset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \underset{n}{\mathbf{u}}$ — n независимых векторов. Система векторов $\overset{1}{\mathbf{u}}, \overset{2}{\mathbf{u}}, \ldots \overset{n}{\mathbf{u}}$, удовлетворяющая соотношениям:

$$(32,2) \qquad (\underset{\alpha}{\mathbf{u}}, \overset{\beta}{\mathbf{u}}) = \delta_\alpha^\beta,$$

называется взаимной с данной. Она определяется следующим образом: обозначим через U и U' матрицы, образованные из составляющих заданных и искомых векторов:

$$U = \begin{Vmatrix} \underset{1}{u}^1 & \dots & \underset{1}{u}^n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \underset{n}{u}^1 & \dots & \underset{n}{u}^n \end{Vmatrix}, \quad U' = \begin{Vmatrix} \overset{1}{u}^1 & \dots & \overset{1}{u}^n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \overset{n}{u}^1 & \dots & \overset{n}{u}^n \end{Vmatrix},$$

через G-матрицу составляющих фундаментального тензора:

$$G = \begin{Vmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{n1} & \dots & g_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Соотношения (32,2) перепишутся следующим образом:

$$\overline{U}GU'_c = E,$$

откуда определяем искомую матрицу U':

$$U' = G_c^{-1}\,\overline{U}_c^{-1} = \overline{G}^{-1}\,U^{*-1}.$$

Разложение вектора. Ковариантные и контравариантные составляющие векторов. Пользуясь взаимными системами векторов, можно каждый вектор разложить по n независимым заданным векторам. Получаем следующие формулы:

$$\mathbf{x} = \sum \lambda^\sigma \underset{\sigma}{\mathbf{u}} = \sum \mu_\sigma \overset{\sigma}{\mathbf{u}},$$

где:

$$\lambda^\sigma = (\overset{\sigma}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) = \overline{(\mathbf{x},\overset{\sigma}{\mathbf{u}})}; \quad \mu_\sigma = (\underset{\sigma}{\mathbf{u}},\mathbf{x}) = \overline{(\mathbf{x},\underset{\sigma}{\mathbf{u}})}.$$

Таким образом:

(32,3) $$\mathbf{x} = (\overset{\sigma}{\mathbf{u}},\mathbf{x})\,\underset{\sigma}{\mathbf{u}}; \quad \mathbf{x} = (\underset{\sigma}{\mathbf{u}},\mathbf{x})\,\overset{\sigma}{\mathbf{u}}.$$

Пусть $\underset{1}{\mathbf{e}}, \underset{2}{\mathbf{e}}, \dots \underset{n}{\mathbf{e}}$ — векторы, определяющие систему координат, в которой вектор $\mathbf{x}$ имеет составляющими x^α: $\mathbf{x} = x^\sigma \underset{\sigma}{\mathbf{e}}$.

Построив взаимную систему $\overset{1}{\mathbf{e}}, \overset{2}{\mathbf{e}}, \dots \overset{n}{\mathbf{e}}$, имеем:

$$x^\alpha = (\overset{\alpha}{\mathbf{e}},\mathbf{x}).$$

Аналогично можно ввести ковариантные составляющие:

$$x_\alpha = (\underset{\alpha}{\mathbf{e}},\mathbf{x}); \quad \mathbf{x} = x_\sigma \overset{\sigma}{\mathbf{e}}.$$

Составляющие фундаментального тензора $g_{\alpha\beta}$ выражаются следующим образом через координатные векторы:

$$g_{\sigma\beta} = (\underset{\alpha}{\mathbf{e}},\underset{\beta}{\mathbf{e}}).$$

Аналогично вводим контравариантные составляющие фундаментального тензора:

$$g^{\alpha\beta} = (\overset{\alpha}{\mathbf{e}},\overset{\beta}{\mathbf{e}}) = \overline{g}^{\beta\alpha}.$$

Нетрудно показать, что матрица:

$$G' = \begin{Vmatrix} g^{11} & \dots & g^{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ g^{n1} & \dots & g^{nn} \end{Vmatrix}$$

обратна матрице:

$$G = \begin{Vmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{n1} & \dots & g_{nn} \end{Vmatrix}.$$

В самом деле:

$$g^{\alpha\sigma}g_{\sigma\beta} = (\overset{\alpha}{\mathbf{e}},\overset{\sigma}{\mathbf{e}})\,(\underset{\sigma}{\mathbf{e}},\underset{\beta}{\mathbf{e}}) = (\overset{\alpha}{\mathbf{e}},\overset{\sigma}{\mathbf{e}}(\underset{\sigma}{\mathbf{e}},\underset{\beta}{\mathbf{e}})) = (\overset{\alpha}{\mathbf{e}},\underset{\beta}{\mathbf{e}}),$$

т. е.

$$g^{\alpha\sigma}g_{\sigma\beta} = \delta^\alpha_\beta, \quad G'G = E.$$

При помощи составляющих фундаментального тензора устанавливается зависимость между ковариантными и контравариантными составляющими вектора. Так как:

$$\overset{\alpha}{\mathbf{e}} = (\overset{\sigma}{\mathbf{e}},\overset{\alpha}{\mathbf{e}})\,\underset{\sigma}{\mathbf{e}} = g^{\sigma\alpha}\underset{\sigma}{\mathbf{e}}, \quad \underset{\alpha}{\mathbf{e}} = (\underset{\sigma}{\mathbf{e}},\underset{\alpha}{\mathbf{e}})\,\overset{\sigma}{\mathbf{e}} = g_{\sigma\alpha}\overset{\sigma}{\mathbf{e}},$$

то

$$x^\alpha = g^{\alpha\sigma}x_\sigma, \quad x_\alpha = g_{\alpha\sigma}x^\sigma.$$

Скалярное произведение двух векторов при помощи различных составляющих входящих в него множителей может быть выражено следующим образом:

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) = g_{\alpha\beta}\bar{x}^{\alpha}y^{\beta} = g^{\alpha\beta}\bar{x}_{\alpha}y_{\beta} = \bar{x}^{\alpha}y_{\alpha} = \bar{x}_{\alpha}y^{\alpha}.$$

Установленные выше формулы показывают, что основные действия векторной алгебры совершаются в унитарном пространстве вполне аналогично тому, как это мы имели в метрическом пространстве Евклида. Некоторые осложнения вносит вопрос о преобразовании координат в связи с тем, что индексы составляющих тензоров могут принадлежать к различным классам.

П р е о б р а з о в а н и е к о о р д и н а т. Введем новые координатные векторы:

$$\underset{\alpha}{\mathbf{e}}' = \underset{\sigma}{\mathbf{e}}\binom{\sigma}{\alpha'},$$

где

$$\binom{\sigma}{\alpha'} = (\overset{\sigma}{\mathbf{e}}, \underset{\alpha}{\mathbf{e}}'),$$

и построим систему $\overset{1}{\mathbf{e}}{}', \overset{2}{\mathbf{e}}{}', \ldots \overset{n}{\mathbf{e}}{}'$, взаимную с $\underset{1}{\mathbf{e}}', \underset{2}{\mathbf{e}}', \ldots \underset{n}{\mathbf{e}}'$. Пользуясь формулами (32,3), нетрудно установить соотношения:

$$\begin{aligned} &\underset{\alpha}{\mathbf{e}}' = \underset{\sigma}{\mathbf{e}}\binom{\sigma}{\alpha'}, \quad \underset{\alpha}{\mathbf{e}} = \underset{\sigma}{\mathbf{e}}'\binom{\sigma'}{\alpha}, \\ &\overset{\alpha}{\mathbf{e}}{}' = \overset{\sigma}{\mathbf{e}}\overline{\binom{\alpha'}{\sigma}}, \quad \overset{\alpha}{\mathbf{e}} = \overset{\sigma}{\mathbf{e}}{}'\overline{\binom{\alpha}{\sigma'}}, \end{aligned} \tag{32,4}$$

где

$$\binom{\sigma'}{\alpha} = (\overset{\sigma}{\mathbf{e}}{}', \underset{\alpha}{\mathbf{e}}).$$

Из (32,4) выводим следующие формулы преобразования составляющих вектора:

$$x^{\alpha'} = x^{\sigma}\binom{\alpha'}{\sigma}, \quad x^{\alpha} = x^{\sigma'}\binom{\alpha}{\sigma'},$$

$$x'_{\alpha} = x_{\sigma}\overline{\binom{\sigma}{\alpha'}}, \quad x_{\alpha} = x'_{\sigma}\overline{\binom{\sigma'}{\alpha}}.$$

Последние два соотношения показывают, что и н д е к с ы у к о в а р и а н т н ы х с о с т а в л я ю щ и х в е к т о р а п р и н а д л е ж а т к о в т о р о м у к л а с с у.

Аналогично выводим формулы преобразования составляющих фундаментального тензора:

$$g'_{\alpha\beta} = (\underset{\alpha}{\mathbf{e}}', \underset{\beta}{\mathbf{e}}') = \left(\binom{\sigma}{\alpha'}\underset{\sigma}{\mathbf{e}}, \binom{\tau}{\beta'}\underset{\tau}{\mathbf{e}}\right) = g_{\sigma\tau}\overline{\binom{\sigma}{\alpha'}}\binom{\tau}{\beta'},$$

$$g^{\alpha\beta'} = (\overset{\alpha}{\mathbf{e}}{}', \overset{\beta}{\mathbf{e}}{}') = \left(\overline{\binom{\alpha'}{\sigma}}\overset{\sigma}{\mathbf{e}}, \overline{\binom{\beta'}{\tau}}\overset{\tau}{\mathbf{e}}\right) = g^{\sigma\tau}\binom{\alpha'}{\sigma}\overline{\binom{\beta'}{\tau}}.$$

Первое соотношение показывает, что первый индекс составляющей $g_{\alpha\beta}$ принадлежит ко 2-му классу, второй — к 1-му (это вполне согласуется с тем, что $g_{\alpha\beta}$ были введены как коэффициенты формы Hermite'a); у контравариантных же составляющих $g^{\alpha\beta}$ имеем обратную картину: 1-ый индекс относится к 1-му классу, 2-ой — ко 2-му.

5. В тензорной алгебре унитарного пространства мы затронем только вопросы, связанные с теорией тензоров 2-го порядка (линейных векторфункций), причем будем рассматривать только векторфункции, которые относят вектору 1-го класса также вектор 1-го класса:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{x}), \quad y^{\alpha} = a^{\alpha}{}_{\sigma}x^{\sigma}.$$

Таким образом, у смешанных составляющих $a^{\alpha}{}_{\sigma}$ оба индекса относятся к 1-му классу. У ковариантных составляющих:

$$a_{\alpha\beta} = g_{\alpha\sigma}a^{\sigma}{}_{\beta}$$

первый индекс относится ко 2-му классу, второй — к 1-му. Составляющие тензора, соответствующего линейной векторфункции $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, выражаются следующим образом при помощи координатных векторов:

$$a^{\alpha}{}_{\beta} = (\overset{\alpha}{\mathbf{e}}, \mathbf{A}(\underset{\beta}{\mathbf{e}})), \quad a_{\alpha\beta} = (\underset{\alpha}{\mathbf{e}}, \mathbf{A}(\underset{\beta}{\mathbf{e}})) \text{ и т. д.}$$

Вся теория линейных векторфункций 1-го рода, изложенная в главе III для аффинного пространства, переносится, конечно, непосредственно в унитарную геометрию; нам остается только лишь произвести дополнительные исследования, связанные с введением метрических понятий.

Задача 1. Пусть тензор $a_{\alpha\beta}$ определяет векторфункцию простого типа. Если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ — ее характеристические числа, $\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \ldots \underset{n}{\mathbf{x}}$ — векторы главных направлений, $\overset{1}{\mathbf{x}}, \overset{2}{\mathbf{x}}, \ldots \overset{n}{\mathbf{x}}$ — взаимная с ними система, то:

$$a_{\alpha\beta} = \sum_{\sigma=1}^{n} \lambda_{\sigma}\underset{\sigma}{x}_{\alpha}\overline{\overset{\sigma}{x}}_{\beta}.$$

Отсюда получается следующая формула для составляющих фундаментального тензора:

$$g_{\alpha\beta} = \sum_{\sigma=1}^{n} \underset{\sigma}{i}_{\alpha} \overline{\underset{\sigma}{i}}_{\beta},$$

где $\underset{1}{\mathbf{i}}, \underset{2}{\mathbf{i}}, \ldots \underset{n}{\mathbf{i}}$ — система взаимно-перпендикулярных ортов.

6. В метрической геометрии Евклида каждой линейной векторфункции соответствует сопряженная векторфункция. В пространстве Hermite'a вводится совершенно аналогично понятие об H-сопряженной векторфункции с данной следующим соотношением:

$$(\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}^*(\mathbf{y})).$$

Подставляя в этой формуле $\mathbf{x} = \underset{\alpha}{\mathbf{e}}$, $\mathbf{y} = \underset{\beta}{\mathbf{e}}$, получаем:

$$a^*_{\alpha\beta} = \overline{a}_{\beta\alpha}.$$

Задача 2. Если векторфункция $\mathbf{A}$ имеет инвариантный пучок E_m, то дополнительный ему пучок E_{n-m} является инвариантным для функции $\mathbf{A}^*$.

7. Линейная векторфункция $\mathbf{H}$, совпадающая со своей H-сопряженной, называется эрмитовой. Ковариантные составляющие соответствующего тензора обладают следующим свойством:

$$h_{\alpha\beta} = \overline{h}_{\beta\alpha}.$$

Таким образом, билинейная форма:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{H}(\mathbf{x})) = h_{\alpha\beta} \overline{x}^{\alpha} x^{\beta}$$

является эрмитовой. Пользуясь теоремой 16, § 25, имеем следующее предложение:

Теорема 1. *У эрмитовой линейной векторфункции можно выделить n взаимно-ортогональных главных направлений; ее характеристические числа вещественны.*

Векторфункция Hermite'a аналогична симметрической векторфункция евклидовой геометрии. Аналог антисимметрической векторфункции приводится к эрмитовой. В самом деле, если $\mathbf{A}^* = -\mathbf{A}$, то $(i\mathbf{A})^* = i\mathbf{A}$; таким образом, $\mathbf{A} = i\mathbf{H}$, где $\mathbf{H}$—векторфункция Hermite'a.

Линейная векторфункция общего вида может быть разложена следующим образом:

$$\mathbf{A} = \mathbf{H}_1 + i\mathbf{H}_2, \tag{32,5}$$

где $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$ — эрмитовы векторфункции, называющиеся эрмитовыми компонентами функции $\mathbf{A}$. В самом деле, из (32,5) выводим:

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{H}_1 - i\mathbf{H}_2,$$

откуда компоненты $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$ определяются однозначно:

$$\mathbf{H}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^*), \quad \mathbf{H}_2 = \frac{1}{2i}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^*).$$

8. Линейная векторфункция $\mathbf{U}$, не меняющая длин преобразуемых векторов, называется унитарной. Из соотношения:

$$(\mathbf{U}(\mathbf{x}), \mathbf{U}(\mathbf{x})) = (\mathbf{x}, \mathbf{x})$$

выводим (см. § 25,11):

$$\mathbf{U}\mathbf{U}^* = \mathbf{E}.$$

Теорема 24 § 25 дает следующее предложение:

Теорема 2. *У унитарной линейной векторфункции можно выделить n взаимно-ортогональных главных направлений; характеристические ее числа по модулю равны 1.*

Таким образом, можно ввести такую ортогональную систему координат, в которой матрица унитарной векторфункции имеет следующий вид:

$$\begin{Vmatrix} e^{i\alpha_1}, & 0 & , \ldots 0 \\ 0, & e^{i\alpha_2}, & \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, \ldots & e^{i\alpha_n} \end{Vmatrix},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ — действительные числа.

Если линейная векторфункция $\mathbf{A}$ может быть получена из $\mathbf{B}$ путем некоторого унитарного преобразования пространства, то $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ называются унитарно эквивалентными, или конгруэнтными; в этом случае:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{B}\mathbf{U}^{-1}.$$

Например, две эрмитовых векторфункции, имеющие попарно равные характеристические числа, конгруэнтны.

9. Пусть $\mathbf{A}$ — линейная векторфункция общего вида. В § 17 мы видели, что ее матрица может быть приведена к каноническому виду Jordan'a, если соответствующим образом выбрать координатные векторы. Построенная таким образом координатная

система не является в общем случае ортогональной. Спрашивается, нельзя ли подобрать так ортогональную систему координат, чтобы матрица линейной векторфункции приняла наиболее простой вид (канонический вид в ортогональной системе координат). Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 3 (I. Schur'a). *В унитарном пространстве можно всегда так построить n взаимно-ортогональных ортов, чтобы в определяемой ими ортогональной системе координат матрица заданной линейной векторфункции имела следующий канонический вид*:

$$(32,6)\qquad \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

Доказательство. Обозначим через $\underset{1}{\mathbf{e}}, \underset{2}{\mathbf{e}}, \dots \underset{n}{\mathbf{e}}$ координатные векторы той системы координат, в которой матрица рассматриваемой векторфункции имеет канонический вид Jordan'a. Тогда, как нетрудно видеть, плоские пучки $\underset{1}{\mathbf{e}}, \{\underset{1}{\mathbf{e}}, \underset{2}{\mathbf{e}}\}, \{\underset{1}{\mathbf{e}}, \underset{2}{\mathbf{e}}, \underset{3}{\mathbf{e}}\}, \dots \{\underset{1}{\mathbf{e}}, \underset{2}{\mathbf{e}}, \dots \underset{n-1}{\mathbf{e}}\}$ являются инвариантными элементами этой векторфункции. Применяя к векторам $\underset{1}{\mathbf{e}}, \underset{2}{\mathbf{e}}, \dots \underset{n}{\mathbf{e}}$ метод ортогонализирования E. Schmidt'a, строим систему n взаимно-ортогональных ортов $\underset{1}{\mathbf{i}}, \underset{2}{\mathbf{i}}, \dots \underset{n}{\mathbf{i}}$: $\underset{1}{\mathbf{i}}$ выбираем в направлении $\underset{1}{\mathbf{e}}$, орт $\underset{2}{\mathbf{i}}$ в плоскости $\{\underset{1}{\mathbf{e}}, \underset{2}{\mathbf{e}}\}$, $\underset{3}{\mathbf{i}}$ — в плоскости $\{\underset{1}{\mathbf{e}}, \underset{2}{\mathbf{e}}, \underset{3}{\mathbf{e}}\}$ и т. д. Так как плоские пучки $\underset{1}{\mathbf{i}}, \{\underset{1}{\mathbf{i}}, \underset{2}{\mathbf{i}}\}, \{\underset{1}{\mathbf{i}}, \underset{2}{\mathbf{i}}, \underset{3}{\mathbf{i}}\}, \dots \{\underset{1}{\mathbf{i}}, \underset{2}{\mathbf{i}}, \dots \underset{n-1}{\mathbf{i}}\}$ также являются инвариантными, то элементы, стоящие левее главной диагонали в матрице, отнесенной к системе координат $\{\underset{1}{\mathbf{i}}, \underset{2}{\mathbf{i}}, \dots \underset{n}{\mathbf{i}}\}$, равны нулю. В самом деле, так как вектор $(1, 0, 0, \dots 0)$ принадлежит к инвариантному направлению, то у преобразований:

$$x_i' = \sum a_{ik} x_k$$

коэффициенты a_{i1} для $i > 1$ равны нулю. Далее, так как векторы $(\alpha, \beta, 0, 0, \dots 0)$ лежат в инвариантном двумерном пучке, то a_{k2} при $k > 2$ также равны нулю. Продолжая таким образом дальше, мы обнаружим, что все коэффициенты a_{ik}, у которых $i > k$, равны нулю. Теорема, следовательно, доказана.

Нетрудно видеть, что элементы, принадлежащие к главной диагонали канонической матрицы, являются ее характеристическими числами.

Рассматривая матрицы составляющих линейных векторфункций в ортогональной системе координат, мы можем формулировать теорему I. Schur'a следующим образом:

Для каждой матрицы A можно подобрать унитарную матрицу U таким образом, чтобы матрица UAU^{-1} имела канонический вид (32,6).

Нетрудно видеть, что выбором ортогональной системы координат невозможно превратить в нуль (или наперед заданные числа) больше элементов матрицы общего вида, чем в каноническом виде (32,6). В самом деле, так как n взаимно-ортогональных ортов связаны системой $\frac{n(n+1)}{2}$ уравнений:

$$(\underset{p}{\mathbf{i}}, \underset{q}{\mathbf{i}}) = \delta_q^p \qquad (p, q = 1, 2, \dots n),$$

то мы располагаем $\frac{n(n-1)}{2}$ независимыми параметрами, и как раз число нулей в каноническом виде (32,6) равно $\frac{n(n-1)}{2}$.

11. Рассмотрим линейную векторфункцию общего вида $\mathbf{A}$. Векторфункции:

$$\mathbf{N}_1 = \mathbf{A}^*\mathbf{A}, \quad \mathbf{N}_2 = \mathbf{A}\mathbf{A}^*$$

называются первой и второй нормами функции $\mathbf{A}$.

Теорема 4. *Нормы линейной векторфункции являются эрмитовыми функциями с неотрицательными характеристическими числами.*

Доказательство. Рассмотрим первую норму: $\mathbf{N}_1 = \mathbf{A}^*\mathbf{A}$. Так как:

$$\mathbf{N}_1^* = (\mathbf{A}^*\mathbf{A})^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{N}_1,$$

то $\mathbf{N}_1$ — эрмитова векторфункция. Для доказательства того, что у $\mathbf{N}_1$ нет отрицательных характеристических чисел, покажем, что форма Hermite'a $(\mathbf{x}, \mathbf{N}_1(\mathbf{x}))$ не может принимать отрицательных значений. В самом деле,

$$(\mathbf{x}, \mathbf{N}_1(\mathbf{x})) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}^*\mathbf{A}(\mathbf{x})) = (\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x})) \geqslant 0.$$

Совершенно так же доказывается теорема для второй нормы.

Лемма 1. *Линейные векторфункции* $\mathbf{AB}$ *и* $\mathbf{BA}$ (*где* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ — *произвольные линейные векторфункции*) *имеют одинаковые характеристические полиномы.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда по крайней мере одна из векторфункций $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — неособенная. Пусть, например, $|\mathbf{A}| \neq 0$. В этом случае функции $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{BA}$ связаны соотношением:

$$\mathbf{BA} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AB})\,\mathbf{A}.$$

Следовательно,

$$|\mathbf{BA} - \lambda\,\mathbf{E}| = |\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AB} - \lambda\,\mathbf{E})\,\mathbf{A}| = |\mathbf{AB} - \lambda\,\mathbf{E}|.$$

Если $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}| = 0$, то лемму можно доказать путем предельного перехода. Если α не равно ни одному из характеристических чисел векторфункции $\mathbf{A}$, то $|\mathbf{A} - \alpha\,\mathbf{E}| \neq 0$. Векторфункции $(\mathbf{A} - \alpha\,\mathbf{E})\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}(\mathbf{A} - \alpha\,\mathbf{E})$ имеют, как мы видели выше, одинаковый характеристический полином $f(\lambda, \alpha)$. Приближая α к нулю, мы получаем общий характеристический полином векторфункций $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{BA}$.

Из этой леммы непосредственно вытекает следующая

Теорема 5. *Нормы линейной векторфункции имеют одинаковые характеристические полиномы.*

Следствие. *Унитарным преобразованием пространства можно из одной нормы получить другую.*

Лемма 2. *Если* $\underset{1}{\mathbf{i}}, \underset{2}{\mathbf{i}}, \dots \underset{n}{\mathbf{i}}$ — *орты главных направлений нормы* $\mathbf{N}_1$, $\varkappa_1^2, \varkappa_2^2, \dots \varkappa_n^2$ — *ее характеристические числа, то у нормы* $\mathbf{N}_2$ *можно выделить орты главных направлений* $\underset{1}{\mathbf{j}}, \underset{2}{\mathbf{j}}, \dots \underset{n}{\mathbf{j}}$ *таким образом, чтобы имели место следующие соотношения:*

$$\mathbf{A}(\underset{s}{\mathbf{i}}) = \varkappa_s \underset{s}{\mathbf{j}}, \tag{32,7}$$

$$(s = 1, 2 \dots n)$$

$$\mathbf{A}^*(\underset{s}{\mathbf{j}}) = \varkappa_s \underset{s}{\mathbf{i}}. \tag{32,8}$$

Доказательство. Обозначим вектор $\mathbf{A}(\underset{s}{\mathbf{i}})$ через $\underset{s}{\mathbf{x}}$:

$$\underset{s}{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\underset{s}{\mathbf{i}}). \tag{32,9}$$

Покажем, что $\underset{s}{\mathbf{x}}$ является вектором главного направления нормы $\mathbf{N}_2$. В самом деле, применяя к обеим частям соотношения (32,9) векторфункцию $\mathbf{A}^*$, получаем

$$\mathbf{A}^*(\underset{s}{\mathbf{x}}) = \mathbf{N}_1(\underset{s}{\mathbf{i}}) = \varkappa_s^2 \underset{s}{\mathbf{i}}.$$

Отсюда выводим:

$$\mathbf{AA}^*(\underset{s}{\mathbf{x}}) = \varkappa_s^2\,\mathbf{A}(\underset{s}{\mathbf{i}}),$$

т. е.

$$\mathbf{N}_2(\underset{s}{\mathbf{x}}) = \varkappa_s^2\,\underset{s}{\mathbf{x}}.$$

Таким образом, $\underset{s}{\mathbf{x}}$ действительно принадлежит к главному направлению функции $\mathbf{N}_2$. Длина вектора $\underset{s}{\mathbf{x}}$ определяется следующим образом:

$$(\underset{s}{\mathbf{x}}, \underset{s}{\mathbf{x}}) = (\mathbf{A}(\underset{s}{\mathbf{i}}), \mathbf{A}(\underset{s}{\mathbf{i}})) = (\underset{s}{\mathbf{i}}, \mathbf{A}^*\mathbf{A}(\underset{s}{\mathbf{i}})) = \varkappa_s^2 (\underset{s}{\mathbf{i}}, \underset{s}{\mathbf{i}}) = \varkappa_s^2.$$

Итак, вектор $\underset{s}{\mathbf{x}}$ равен $\varkappa_s \underset{s}{\mathbf{j}}$, где $\underset{s}{\mathbf{j}}$ — орт, т. е. соотношение (32,7) доказано.[1] Применяя его к векторфункции $\mathbf{A}^*$ и учитывая, что второй нормой этой векторфункции является $\mathbf{N}_1$, получаем

$$\mathbf{A}^*(\underset{s}{\mathbf{j}}) = \varkappa_s \underset{s}{\mathbf{i}}', \tag{32,10}$$

где $\underset{s}{\mathbf{i}}'$ — орт главного направления нормы $\mathbf{N}_1$. Требуется доказать, что орты $\underset{1}{\mathbf{i}}', \underset{2}{\mathbf{i}}', \dots \underset{n}{\mathbf{i}}'$ совпадают с выделенными раньше ортами $\underset{1}{\mathbf{i}}, \underset{2}{\mathbf{i}}, \dots \underset{n}{\mathbf{i}}$. Достаточно исследовать случай $\varkappa_s \neq 0$. Подставляя в равенство (32,10) выражение для $\underset{s}{\mathbf{j}} = \frac{1}{\varkappa_s}\mathbf{A}(\underset{s}{\mathbf{i}})$, получаем:

$$\varkappa_s \underset{s}{\mathbf{i}}' = \frac{1}{\varkappa_s}\,\mathbf{A}^*\mathbf{A}\,(\underset{s}{\mathbf{i}}) = \frac{1}{\varkappa_s}\,\mathbf{N}_1(\underset{s}{\mathbf{i}}) = \varkappa_s \underset{s}{\mathbf{i}}.$$

Таким образом, $\underset{s}{\mathbf{i}}' = \underset{s}{\mathbf{i}}$, т. е. соотношение (32,8) доказано.

Из леммы 2 можно очень просто получить интересные следствия. Обозначим через $\mathbf{U}$ унитарную векторфункцию, которая

[1] В том случае, если $\varkappa_s = 0$ в качестве $\underset{s}{\mathbf{j}}$ выбираем один из взаимно-ортогональных ортов, лежащих в нулевой области нормы $\mathbf{N}_2$.

переводит систему взаимно-ортогональных ортов $\underset{1}{\mathbf{i}}, \underset{2}{\mathbf{i}}, \ldots \underset{n}{\mathbf{i}}$ в систему $\underset{1}{\mathbf{j}}, \underset{2}{\mathbf{j}}, \ldots \underset{n}{\mathbf{j}}$:

$$\mathbf{U}(\underset{s}{\mathbf{i}}) = \underset{s}{\mathbf{j}} \qquad (s = 1, 2, \ldots n). \tag{32,11}$$

Обозначим через $\mathbf{G}_1$ и $\mathbf{G}_2$ векторфункции Hermite'a, у которых характеристическими числами является $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_n$, а главные направления определяются соответственно ортами $\underset{1}{\mathbf{i}}, \underset{2}{\mathbf{i}}, \ldots \underset{n}{\mathbf{i}}$ и $\underset{1}{\mathbf{j}}, \underset{2}{\mathbf{j}}, \ldots \underset{n}{\mathbf{j}}$:

$$\mathbf{G}_1(\underset{s}{\mathbf{i}}) = \varkappa_s \underset{s}{\mathbf{i}}, \qquad \mathbf{G}_2(\underset{s}{\mathbf{j}}) = \varkappa_s \underset{s}{\mathbf{j}}. \tag{32,12}$$

Таким образом квадраты векторфункций $\mathbf{G}_1$ и $\mathbf{G}_2$ равны соответственно нормам $\mathbf{N}_1$ и $\mathbf{N}_2$:

$$\mathbf{G}_1^2 = \mathbf{N}_1, \quad \mathbf{G}_2^2 = \mathbf{N}_2.$$

Комбинируя соотношения (32,7), (32,8), (32,11), (32,12), имеем:

$$\mathbf{A}(\underset{s}{\mathbf{i}}) = \mathbf{G}_2(\underset{s}{\mathbf{j}}) = \mathbf{G}_2\mathbf{U}(\underset{s}{\mathbf{i}}); \qquad \mathbf{A}^*(\underset{s}{\mathbf{j}}) = \mathbf{G}_1(\underset{s}{\mathbf{i}}) = \mathbf{G}_1\mathbf{U}^{-1}(\underset{s}{\mathbf{j}}).$$

Следовательно,

$$\mathbf{A} = \mathbf{G}_2\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{G}_1.$$

Таким образом доказана

Теорема 6. *Линейная векторфункция общего вида* $\mathbf{A}$ *может быть представлена в виде произведения функции Hermite'a и унитарной векторфункции*

$$\mathbf{A} = \mathbf{G}_2\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{G}_1,$$

причем эрмитовы векторфункции $\mathbf{G}_1$ *и* $\mathbf{G}_2$ *определяются из соотношений:*

$$\mathbf{G}_1^2 = \mathbf{N}_1, \quad \mathbf{G}_2^2 = \mathbf{N}_2.$$

Доказанная теорема позволяет решить вопрос об определении линейной векторфункции по ее нормам.

Если у искомой векторфункции $\mathbf{A}$ задана только первая норма $\mathbf{N}_1 = \mathbf{A}^*\mathbf{A}$, то решение ищется следующим образом: строим эрмитову функцию $\mathbf{G}_1$, удовлетворяющую соотношению:

$$\mathbf{G}_1^2 = \mathbf{N}_1 \tag{32,13}$$

(ее главные направления те же, что и у функции $\mathbf{N}_1$, и квадраты ее характеристических чисел равны характеристическим числам $\mathbf{N}$). Тогда

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{G}_1, \tag{32,14}$$

где $\mathbf{U}$ — произвольная унитарная функция.

При построении функции $\mathbf{G}_1$ неопределенным является выбор знаков у ее характеристических чисел. Нетрудно видеть, что все эрмитовы векторфункции, удовлетворяющие уравнению (32,13), могут быть получены из одной умножением на унитарную векторфункцию, у которой главные направления те же, что и у $\mathbf{N}_1$, а характеристические числа равны ± 1.

Если у искомой векторфункции задана и вторая норма $\mathbf{N}_2 = \mathbf{A}\mathbf{A}^*$, то на $\mathbf{U}$ налагается ограничение:

$$\mathbf{N}_2 = \mathbf{U}\mathbf{G}_1\mathbf{G}_1\mathbf{U}^* = \mathbf{U}\mathbf{N}_1\mathbf{U}^{-1}.$$

Таким образом $\mathbf{U}$ — одно из унитарных преобразований пространства, при котором норма $\mathbf{N}_1$ преобразуется в $\mathbf{N}_2$.

12. Выше уже указывалось, что эрмитова векторфункция в унитарном пространстве является аналогом симметрической в пространстве Евклида. Однако аналогия эта не является полной; в пространстве Евклида каждая функция с n взаимно перпендикулярными главными направлениями является симметрической, в то время как в унитарном пространстве взаимной ортогональности главных направлений недостаточно для того, чтобы соответствующая векторфункция была эрмитовой, — для этого необходима еще вещественность характеристических чисел. Таким образом, класс векторфункций, имеющих n взаимно-ортогональных главных направлений, шире, чем класс эрмитовых функций; эти векторфункции называются *нормальными*. Нормальные векторфункции исчерпывают собою те, у которых канонический вид матриц в ортогональной системе координат — диагональный.

К классу нормальных векторфункций принадлежат как эрмитовы, так и унитарные.

Для исследования основных свойств нормальных векторфункций нам потребуется следующая

Лемма 3. *Две линейных векторфункции простого типа перестановочны тогда и только тогда, если у них можно выделить n общих инвариантных направлений.*

Доказательство. Если у векторфункций **A** и **B** можно выделить n общих главных направлений $\underset{1}{\mathbf{x}}, \underset{2}{\mathbf{x}}, \ldots \underset{n}{\mathbf{x}}$:

$$\mathbf{A}(\underset{i}{\mathbf{x}}) = \lambda_i \underset{i}{\mathbf{x}}, \qquad \mathbf{B}(\underset{i}{\mathbf{x}}) = \mu_i \underset{i}{\mathbf{x}},$$

то

$$\mathbf{A}\,\mathbf{B}(\underset{i}{\mathbf{x}}) = \lambda_i \mu_i \underset{i}{\mathbf{x}}, \qquad \mathbf{B}\,\mathbf{A}(\underset{i}{\mathbf{x}}) = \lambda_i \mu_i \underset{i}{\mathbf{x}},$$

$$\mathbf{AB}(\underset{i}{\mathbf{x}}) = \mathbf{BA}(\underset{i}{\mathbf{x}}),$$

т. е.

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA}. \tag{32,15}$$

Обратно, предположим, что имеет место соотношение (32,15). Пусть **x** принадлежит к главной области E_m векторфункции **A**, относящейся к характеристическому числу λ. Имеем:

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}(\mathbf{x})) = \mathbf{BA}(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{B}(\mathbf{x}).$$

Это соотношение показывает, что вектор $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ лежит в E_m, т. е. E_m является инвариантной плоскостью для **B**. Итак, каждой главной области функции **A** соответствует инвариантный пучок векторфункции **B**. Так как **B** простого типа, то в E_m лежит m главных направлений функции **B**. Применяя это рассуждение ко всем главным областям функции **A**, мы выделим n главных направлений, общих для **A** и **B**.

Теорема 7. *Линейная векторфункция* **A** *тогда и только тогда нормальна, если обе ее нормы равны между собой:*

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{A}^*\mathbf{A}. \tag{32,16}$$

Доказательство. Пусть **A** — нормальная векторфункция. Так как ее главные направления взаимно-ортогональны, то $\mathbf{A}^*$ имеет те же самые главные направления (это следует хотя бы из того, что канонический вид матрицы нормальной векторфункции в ортогональной системе координат — диагональный). Следовательно, на основании только-что доказанной леммы, $\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^*$. Обратно, пусть имеет место соотношение (32,16). Из него вытекает, что эрмитовы составляющие функции **A**:

$$\mathbf{H}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^*), \mathbf{H}_2 = \frac{1}{2i}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^*)$$

перестановочны между собой:

$$\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_2\mathbf{H}_1 = \frac{1}{4}(\mathbf{A}^2 - \mathbf{A}^{*2}).$$

Следовательно, $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$ имеют n общих взаимно-ортогональных главных направлений, которые являются инвариантными прямыми векторфункции **A**, что и требовалось доказать.

Критерий нормальности, даваемый этой теоремой, может быть заменен следующим:

Теорема 8. *Векторфункция* **A** *нормальна тогда и только тогда, если каждое ее главное направление является инвариантным для функции* $\mathbf{A}^*$.

Доказательство. О том, что нормальная векторфункция имеет со своей H-сопряженной общие главные направления, уже говорилось при доказательстве предыдущей теоремы. Рассмотрим другую половину теоремы 8. Пусть **A** имеет главное направление $\underset{1}{\mathbf{x}}$, являющееся также инвариантным и для $\mathbf{A}^*$. Из соотношения

$$(\underset{1}{\mathbf{x}}, \mathbf{A}(\mathbf{y})) = (\mathbf{A}^*(\underset{1}{\mathbf{x}}), \mathbf{y})$$

вытекает, что любой вектор **y**, ортогональный к $\underset{1}{\mathbf{x}}$, принадлежит к инвариантной плоскости E_{n-1} векторфункции **A**. Берем следующее главное направление $\underset{2}{\mathbf{x}}$ в E_{n-1}; применяя аналогичное рассуждение, устанавливаем, что $(n-2)$-мерная плоскость, ортогональная к $\underset{1}{\mathbf{x}}$ и $\underset{2}{\mathbf{x}}$, является инвариантной для **A**. Продолжая таким образом, мы выделим у **A** n взаимно-ортогональных направлений.

Согласно теореме 6, каждая линейная векторфункция **A** может быть представлена в виде произведения унитарной **U** и эрмитовой **H** векторфункции: $\mathbf{A} = \mathbf{UH}$. Возникает вопрос: в каком взаимоотношении находятся функции **U** и **H**, если **A** — нормальная векторфункция. Ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема 9. *Пусть векторфункция* $\mathbf{A} = \mathbf{UH}$, *где* **U** — *унитарная*, **H** — *эрмитова функции. Векторфункция* **A** *тогда и только тогда является нормальной, если* **U** *и* **H** *перестановочны.*

Доказательство. Если **U** и **H** перестановочны, то они имеют общие главные направления, взаимно-ортогональные, которые служат инвариантными прямыми и для **A**; эта последняя является, таким образом, нормальной. Обратно, из нормальности векторфункции **A** вытекает:

$$\mathbf{UH}(\mathbf{UH})^* = (\mathbf{UH})^*\mathbf{UH},$$

т. е.

$$\mathbf{U}\,\mathbf{H}^2\,\mathbf{U}^* = \mathbf{H}^2,$$

или

$$\mathbf{U}\mathbf{H}^2 = \mathbf{H}^2\mathbf{U}.$$

Таким образом, функции $\mathbf{H}^2$ и $\mathbf{U}$ имеют общие главные направления; те же главные направления имеет и $\mathbf{H}$, т. е. $\mathbf{U}$ и $\mathbf{H}$ перестановочны.

Совершенно так же доказывается анологичная теорема для разложения векторфункции $\mathbf{A}$ в произведение вида $\mathbf{HU}$.

Задача 3. Если $\mathbf{A}$ — нормальная неособенная векторфункция, то $\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A}^*$ является унитарной.

Задача 4. Произведение перестановочных нормальных векторфункций $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots$ есть нормальная векторфункция.

Задача 5. Если $\mathbf{A}$ — нормальная векторфункция, то характеристические числа ее норм равны квадратам модулей характеристических чисел функции $\mathbf{A}$.

Задача 6. Пусть $\mathbf{A}$—некоторая линейная векторфункция. В любой m-мерной плоскости можно выбрать m взаимно-ортогональных векторов $\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{v}}$ таким образом, что функция $\mathbf{A}$ преобразует их снова во взаимно-ортогональные векторы (может, конечно, случиться, что все эти векторы преобразуются в нуль). Если $\mathbf{A}$ — нормальная векторфункция, то $\mathbf{A}^*$ преобразует $\underset{1}{\mathbf{v}}, \underset{2}{\mathbf{v}}, \ldots \underset{m}{\mathbf{v}}$ также во взаимно-ортогональные векторы.

13. В унитарном пространстве можно построить, как и в геометрии Евклида векторфункции, ортогонально проектирующие векторы пространства на заданную плоскость (в дальнейшем мы будем называть их просто п р о е к т и р у ю щ и м и ф у н к ц и я м и). Эти векторфункции могут быть охарактеризованы как идемпотентные нормальные функции. В самом деле, если

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A},$$

то у $\mathbf{A}$ характеристические числа равны 0 или 1; так как кроме того, у $\mathbf{A}$ можно выделить n взаимно-ортогональных главных направлений, то эта функция ортогонально проектирует векторы пространства на ту плоскость, в которой лежат главные направления с характеристическими числами, равными единице. Соответствующим выбором ортогональной системы координат мы можем привести матрицу $\|\mathbf{A}\|$ к виду:

$$\left\|\begin{matrix} E_m & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\|,$$

где E_m — единичная матрица m-го порядка. Условимся обозначать проектирующую векторфункцию через $\mathbf{E}'$. Отметим, что проектирующая векторфункция является эрмитовой.

Задача 7. Пусть $\mathbf{E}', \mathbf{E}''$ — линейные векторфункции, проектирующие на плоскости E_r и E_s $(r \leqslant s)$. Доказать следующие теоремы:

1) Пусть степень параллельности плоскостей E_r и E_s равна $\frac{p}{r}$; векторфункции $\mathbf{E}', \mathbf{E}''$ тогда и только тогда перестановочны, если эти плоскости $\frac{r-p}{r}$ - ортогональны.

2) Произведение $\mathbf{E}'\mathbf{E}''$ тогда и только тогда является проектирующей функцией, если $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{E}''$ перестановочны. В этом случае $\mathbf{E}'\mathbf{E}''$ проектирует векторы на плоскость, являющуюся пересечением плоскостей E_r и E_s.

3) Произведение $\mathbf{E}'\mathbf{E}''$ тогда и только тогда равно нулю, если плоскости E_r и E_s полностью взаимно-ортогональны. В этом случае $\mathbf{E}' + \mathbf{E}''$ является функцией, проектирующей векторы пространства на $(r+s)$-мерную плоскость, проходящую через E_r и E_s.

14. Векторфункция $\mathbf{A}$ называется *лево-полуунитарной*, если ее первая норма равна проектирующей функции:

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{E}'.$$

Соответственно, векторфункция $\mathbf{B}$ называется *право-полуунитарной*, если ее вторая норма есть проектирующая функция:

$$\mathbf{B}\mathbf{B}^* = \mathbf{E}'.$$

Если у векторфункции $\mathbf{C}$ обе нормы равны $\mathbf{E}'$: $\mathbf{C}^*\mathbf{C} = \mathbf{C}\mathbf{C}^* = \mathbf{E}'$, условимся называть ее просто *полуунитарной*.

Займемся исследованием лево-полуунитарной векторфункции. На основании (32,14), она имеет следующий вид:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{H},$$

где $\mathbf{U}$ — некоторая унитарная функция, а $\mathbf{H}$ определяется из соотношения:

$$\mathbf{H}^2 = \mathbf{E}'.$$

Выбирая среди решений этого уравнения эрмитову функцию с неотрицательными характеристическими числами, имеем:

$$\mathbf{H} = \mathbf{E}'.$$

Аналогичный результат получаем для право-полуунитарных векторфункций. Таким образом, имеем следующее предложение:

Т е о р е м а 10. *Лево- и право-полуунитарные векторфункции* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$, *удовлетворяющие соотношениям:*

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{E}', \qquad \mathbf{B}\mathbf{B}^* = \mathbf{E}',$$

могут быть представлены в следующем виде:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{E}', \qquad \mathbf{B} = \mathbf{E}'\mathbf{U}, \tag{32,17}$$

где $\mathbf{U}$ — *некоторая унитарная векторфункция*.

Доказанная теорема позволяет выяснить, как преобразуют полуунитарные функции векторы пространства. Рассмотрим сначала лево-полуунитарную функцию: обозначим m-мерную плоскость, на которую проектирует функция $\mathbf{E}'$, через E_m, дополнительный пучок — через E_{n-m}. Формула (32,17) показывает, что функция $\mathbf{A}$ сначала ортогонально проектирует векторы пространства на E_m, а затем поворачивает E_m в некоторое новое положение E_m', не изменяя при этом длин и скалярных произведений тех векторов, которые лежат в E_m. Следовательно, плоскость E_{n-m} является *нулевой областью* векторфункции $\mathbf{A}$, а E_m' — *инвариантной плоскостью*. Далее, так как длина проекции не больше длины проектируемого вектора, то характеристические числа тех главных направлений, которые не лежат в E_m, по модулю меньше единицы, а тех направлений, которые принадлежат к E_m, равны по модулю единице. Так как все главные ненулевые направления лежат в E_m', то характеристические числа могут быть равны по модулю единице только в том случае, если E_m и E_m' пересекаются. Возникает вопрос: является ли лево-полуунитарная функция всегда функцией простого типа, как унитарная? На этот вопрос следует ответить отрицательно. В самом деле, у векторфункции простого типа наряду с любой m-мерной инвариантной плоскостью существует независимая от нее $(n-m)$-мерная инвариантная плоскость. Между тем как, если векторфункция $\mathbf{U}$ так поворачивает пучок E_m, что E_m' пересекается с E_{n-m}, то у векторфункции $\mathbf{A}$ наряду с нулевой областью E_{n-m}' не существует m-мерной инвариантной плоскости, независимой от E_{n-m}. Таким образом, лево-полуунитарные функции могут быть и не простого типа.

Перейдем к право-полуунитарной функции $\mathbf{B}$. Она сначала унитарно преобразует пространство, а затем проектирует его на E_m. Следовательно, E_m является инвариантной плоскостью функции $\mathbf{B}$. Нулевой областью является та плоскость E'_{n-m}, которая переводится унитарным преобразованием $\mathbf{U}$ в плоскость E_{n-m}. Все ненулевые главные направления лежат в E_m. Характеристические числа равны по модулю единице только в том случае, если осостветствующие им главные направления лежат в плоскости

пересечения E_m и E_m'. Остальные характеристические числа по модулю меньше единицы. Право-полуунитарная векторфункция заведомо не простого типа, если E'_{n-m} и E_m пересекаются.

Иллюстрируем вышесказанное двумя примерами.

1) Пусть $\mathbf{E}'$ ортогонально проектирует плоскость на ось x_1 (система координат ортогональная):

$$\|\mathbf{E}'\| = \begin{Vmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 0 \end{Vmatrix}.$$

Векторфункцию $\mathbf{U}$ зададим матрицей:

$$\|\mathbf{U}\| = \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}, & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}, & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix}$$

(она поворачивает плоскость на угол в 45°). Полуунитарные векторфункции $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ определяются матрицами:

$$\|\mathbf{A}\| = \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}, & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}, & 0 \end{Vmatrix}, \qquad \|\mathbf{B}\| = \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}, & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0, & 0 \end{Vmatrix}.$$

Характеристические их числа равны 0 и $\frac{1}{\sqrt{2}}$. У первой инвариантные направления: 1) нулевое — ось x_2, 2) с характеристическим числом $\frac{1}{\sqrt{2}}$ — биссектриса $x_1 - x_2 = 0$. У векторфункции $\mathbf{B}$ нулевым направлением является биссектриса $x_1 - x_2 = 0$, характеристическому числу $\frac{1}{\sqrt{2}}$ соответствует ось x_1. Обе векторфункции простого типа.

2) Пусть, как и в примере 1,

$$\|\mathbf{E}'\| = \begin{Vmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 0 \end{Vmatrix},$$

векторфункция же $\mathbf{U}$ поворачивает плоскость на прямой угол

$$\|\mathbf{U}\| = \begin{Vmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{Vmatrix}.$$

Тогда

$$\|\mathbf{A}\| = \begin{Vmatrix} 0, & 0 \\ 1, & 0 \end{Vmatrix}, \quad \|\mathbf{B}\| = \begin{Vmatrix} 0, & -1 \\ 0, & 0 \end{Vmatrix}.$$

У функции **A** одно инвариантное направление (нулевое) — ось x_2, у **B** главным направлением (также нулевым) является ось x_1.

У обеих функций характеристики выражаются символом [2].

Отметим еще одно следствие из теоремы 10. Для того, чтобы написать общий вид матрицы лево- или право-полуунитарной векторфункции в той ортогональной системе координат, в которой матрица $\|\mathbf{E}'\|$ имеет канонический вид:

$$(32,18) \qquad \begin{Vmatrix} E_m & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

следует поступить следующим образом: выписать произвольную унитарную матрицу

$$\begin{Vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{Vmatrix}, \quad \sum \bar{a}_{ip} a_{iq} = \delta^p_q,$$

и затем заменить элементы последних $(n-m)$ колонн или строк нулями. В первом случае мы получим лево-полуунитарную матрицу, во втором — право-полуунитарную.

Структура полуунитарных векторфункций очень проста. Так как эти функции нормальны (обе их нормы совпадают), то, на основании теоремы 9, векторфункции **U** и **E**′ в формуле $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{E}'$ перестановочны. Поэтому **U** имеет в E_m m главных взаимно-ортогональных направлений. Таким образом, полуунитарная векторфункция проектирует все векторы пространства на E_m и затем преобразует унитарно плоскость E_m, не меняя ее положения в пространстве. Все ее ненулевые характеристические числа по модулю равны единице. В той ортогональной системе координат, в которой матрица векторфункции **E**′ имеет вид (32,18), матрица $\|\mathbf{A}\|$ выразится следующим образом:

$$\begin{Vmatrix} U_m & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

где U_m — унитарная матрица m-го порядка.

15. Интересные исследования O. Toeplitz'a и F. Hausdorff'a связаны с изучением формы

$$(32,19) \qquad \Phi(\mathbf{A}) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}(\mathbf{x})) = a_{\alpha\beta} \bar{x}^\alpha x^\beta,$$

(где **A** — некоторая линейная векторфункция), причем значения аргумента **x** берутся на „единичной сфере":

$$(32,20) \qquad (\mathbf{x},\mathbf{x}) = 1.$$

Форму (32,19) условимся называть *присоединенной* к данной векторфункции (в немецкой литературе она называется „Kopplungsform"). Когда точка **x** движется по сфере (32,20), форма $\Phi(\mathbf{A})$ принимает различные значения (вообще говоря, комплексные) Отметив эти комплексные значения точками на плоскости (x, y), мы получим множество точек, которые будем называть *областью значений присоединенной формы* и обозначать символом $W(\mathbf{A})$. Например, если **A** — векторфункция Hermite'а, то присоединенная форма $\Phi(\mathbf{A})$ принимает только действительные значения; таким образом, $W(\mathbf{A})$ в этом случае лежит на действительной оси.

Теорема 11. *Характеристические числа векторфункции* **A** *принадлежат к области значений* $W(\mathbf{A})$.

Доказательство. Пусть **x**—орт главного направления, соответствующего характеристическому числу λ векторфункции **A**. Для этого вектора **x** присоединенная форма имеет значение:

$$\Phi(\mathbf{A}) = (\mathbf{x},\mathbf{A}(\mathbf{x})) = \lambda(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \lambda.$$

Теорема доказана.

Так как $(\mathbf{x},\mathbf{A}(\mathbf{x}))$ является непрерывной функцией от **x**, и поверхность (32,20) — замкнутая, то $W(\mathbf{A})$ *представляет ограниченное замкнутое множество.* [1]

Верхнюю границу модулей комплексных чисел, принадлежащих к $W(\mathbf{A})$, обозначим через $M(\mathbf{A})$; $M(\mathbf{A})$ является таким образом радиусом наименьшей окружности, описанной около начала координат и заключающей в себе множество $W(\mathbf{A})$. Так как $W(\mathbf{A})$— замкнутое множество, то $M(\mathbf{A})$ представляет собою maximum модулей комплексных чисел, принадлежащих к $W(\mathbf{A})$.

Задача 8. Показать, что $W(\mathbf{A}^*)$ получается из $W(\mathbf{A})$ зеркальным отражением относительно действительной оси.

[1] Множество называется замкнутым, если оно содержит в себе все свои предельные точки.

16. Теорема 12 (Hausdorff'a). *$W(\mathbf{A})$ является выпуклой областью.* [1]

Доказательство. Достаточно доказать, что каждая прямая, параллельная мнимой оси той плоскости комплексного переменного (x, y), в которой лежит множество $W(\mathbf{A})$, или вовсе не встречает $W(\mathbf{A})$, или имеет с ним одну общую точку, или же пересекает это множество по одному интервалу. В самом деле, для того, чтобы распространить доказанное предложение на прямые любого направления, достаточно повернуть плоскость комплексного переменного на некоторый угол α, что соответствует умножению векторфункции $\mathbf{A}$ на множитель $e^{i\alpha}$.

Разложим рассматриваемую векторфункцию $\mathbf{A}$ на эрмитовы компоненты:

$$\mathbf{A} = \mathbf{H}_1 + i\mathbf{H}_2.$$

Так как

$$\Phi(\mathbf{A}) = \Phi(\mathbf{H}_1) + i\Phi(\mathbf{H}_2),$$

и так как присоединенная форма для эрмитовой векторфункции дает действительные значения, то $\Phi(\mathbf{H}_1)$ и $\Phi(\mathbf{H}_2)$ являются действительной и мнимой частями чисел $\Phi(\mathbf{A})$.

Пусть c — одно из значений, которые принимает действительная часть $\Phi(\mathbf{H}_1)$. Прямая $x = c$ имеет с $W(\mathbf{A})$ общие точки (по крайней мере, одну). Обозначим множество точек $\mathbf{x}$ на сфере $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 1$, для которых $\Phi(\mathbf{H}_1) = c$, через A. Ближайшей нашей задачей является доказательство того, что A является *связным множеством* (т. е. любые две его точки могут быть соединены непрерывной кривой, принадлежащей к A).

Пусть $\mathbf{u}(u_1, u_2, \ldots u_n)$ и $\mathbf{v}(v_1, v_2, \ldots v_n)$ — две точки, принадлежащие к A. Ортогональную систему координат, в которой берутся составляющие u_i и v_i, выберем таким образом, чтобы

[1] Выпуклой областью называется множество, обладающее следующими свойствами:
1) оно замкнуто,
2) если две точки P и Q принадлежат к этому множеству, то оно содержит все точки отрезка PQ.

Из этих двух основных свойств выпуклой области вытекает, что она является: 1) совершенным множеством, т. е. каждая ее точка является предельной (если только эта область не состоит из одной точки), 2) ограниченным множеством. Любая прямая плоскости или вовсе не имеет с выпуклой областью общих точек, или только одну точку, или же общие точки образуют на этой прямой один интервал.

ее оси совпадали с главными направлениями эрмитовой векторфункции $\mathbf{H}_1$, т. е. чтобы

$$\Phi(\mathbf{H}_1) = \sum a_i \bar{x}_i x_i,$$

где a_i — действительные числа. Введем в рассмотрение две новых точки на сфере $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 1$:

$$\mathbf{s}(|u_1|, |u_2|, \ldots |u_n|) \quad \text{и} \quad \mathbf{t}(|v_1|, |v_2|, \ldots |v_n|).$$

Обе они принадлежат к A, так как

$$\sum a_i \bar{u}_i u_i = \sum a_i |u_i|^2 = c,$$
$$\sum a_i \bar{v}_i v_i = \sum a_i |v_i|^2 = c.$$

Покажем теперь, что можно построить три кривых K_1, K_2, K_3, соединяющих соответственно точки: $\mathbf{u}$ и $\mathbf{s}$, $\mathbf{s}$ и $\mathbf{t}$, $\mathbf{t}$ и $\mathbf{v}$ и принадлежащих к A. Пусть

$$u_k = |u_k| e^{i\alpha_k}, \quad v_k = |v_k| e^{i\beta_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots n).$$

Точки кривых K_1, K_2, K_3 зададим соответственно следующими формулами:

$$(K_1) \qquad \underset{1}{x}_k = |u_k| e^{i(1-t)\alpha_k}$$

$$(K_2) \qquad \underset{2}{x}_k = \sqrt{(1-t)|u_k|^2 + t|v_k|^2},$$

$$(K_3) \qquad \underset{3}{x}_k = |v_k| e^{it\beta_k},$$

где параметр t изменяется от 0 до 1. Если $t = 0$, получаем начальные точки этих кривых: $\mathbf{u}$, $\mathbf{s}$, $\mathbf{t}$; для $t = 1$ — конечные точки: $\mathbf{s}$, $\mathbf{t}$, $\mathbf{v}$. Обнаружим, что эти кривые принадлежат к множеству A.

Для точек кривой K_1 имеем:

$$\Phi(\mathbf{H}_1) = \sum a_i |\underset{1}{x}_i|^2 = \sum a_i |u_i|^2 = c.$$

Для кривой K_2 также

$$\Phi(\mathbf{H}_1) = \sum a_i |\underset{2}{x}_i|^2 = (1-t) \sum a_i |u_i|^2 + t \sum a_i |v_i|^2 = (1-t)c + tc = c.$$

Наконец для K_3

$$\Phi(\mathbf{H}_1) = \sum a_i |\underset{3}{x}_i|^2 = \sum a_i |v_i|^2 = c.$$

Таким образом, все три кривые состоят из точек множества A. Кривая $K_1 + K_2 + K_3$, соединяющая точки $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, также, разумеется, принадлежит к A. Таким образом, доказано, что множество A является связным. Так как $\Phi(\mathbf{H}_1)$ — непрерывная функция от $x_1, x_2, \ldots x_n$, а сфера $(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 1$ — замкнутая поверхность, то множество A является *замкнутым и ограниченным*.

Рассмотрим теперь вещественную функцию $\Phi(\mathbf{H}_2)$ на A. На основании теоремы Weierstrass'a, она имеет на A maximum M и minimum m и пробегает все значения, заключающиеся между M и m. Следовательно, на прямой $x = c$ значения присоединенной формы $\Phi(\mathbf{A})$ или образуют один замкнутый интервал (m,M) или дают одну точку (если $m = M$).

Теорема Hausdorff'a таким образом доказана.

17. Выше уже было указано, что характеристические числа линейной векторфункции принадлежат к области значений присоединенной формы. Toeplitz показал, что для нормальной векторфункции значения ее характеристических чисел вполне определяет область $W(\mathbf{A})$. Для построения этой области следует поступить следующим образом („правило многоугольника" Toeplitz'a): отмечаем на плоскости точки $P_1, P_2, \ldots P_n$, соответствующие характеристическим числам векторфункции; затем строим наименьший выпуклый многоугольник, заключающий внутри себя и на своей границе точки $P_1, P_2, \ldots P_n$. Этот многоугольник и является областью $W(\mathbf{A})$. Наглядно это построение можно пояснить следующим образом: втыкаем в точки $P_1, P_2, \ldots P_n$ булавки и набрасываем на плоскость нитяную петлю так, чтобы все точки $P_1, P_2, \ldots P_n$ были внутри нее; затем стягиваем петлю до тех пор, пока она не примет вид выпуклого многоугольника. Докажем справедливость этого построения.

Теорема 13 (Toeplitz'a). *Для нормальной векторфункции* $\mathbf{A}$ *область* $W(\mathbf{A})$ *является наименьшим выпуклым многоугольником, заключающим внутри себя характеристические числа векторфункции* $\mathbf{A}$.

Доказательство. Вводя ортогональную систему координат, у которой оси являются главными направлениями векторфункции $\mathbf{A}$, имеем:

$$\Phi(\mathbf{A}) = \sum \lambda_i \bar{x}_i x_i = \sum \lambda_i |x_i|^2.$$

Так как

$$(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \sum |x_i|^2 = 1,$$

то точку $\Phi(\mathbf{A})$ можно рассматривать как центр тяжести точек $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$, в которых сосредоточены массы $|x_1|^2, |x_2|^2, \ldots |x_n|^2$. Интуитивно очевидно, что, меняя распределение масс в точках $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$, мы можем совместить точку $\Phi(\mathbf{A})$ с любой точкой выпуклого многоугольника Toeplitz'a, построенного по указанному выше правилу. (Строгое доказательство этому факту можно дать, основываясь на исследованиях Weierstrass'a и Минковского;[1] останавливаться на этом не будем).

Из доказанной теоремы следует, что $W(\mathbf{U})$ для унитарной функции $\mathbf{U}$ является выпуклым многоугольником, вершины которого лежат на единичном круге с центром в начале координат. Если векторфункция $\mathbf{U}$ имеет только два различных характеристических числа, то $W(\mathbf{U})$ совпадает с хордой, соединяющей соответствующие точки; наконец, если $\mathbf{U} = \mathbf{E}$, то $W(\mathbf{U})$ вырождается в точку.

Для эрмитовых векторфункций $W(\mathbf{A})$ является интервалом на действительной оси, ограниченным наибольшим и наименьшим из характеристических чисел.

Если у нормальных векторфункций на границе $W(\mathbf{A})$ обязательно должны лежать характеристические числа, то для функций более сложной природы это уже вообще не имеет места.

18. Нетрудно указать те границы, внутри которых лежит область значений $W(\mathbf{A})$ для векторфункции общего типа. Так как

$$\Phi(\mathbf{A}) = \Phi(\mathbf{H}_1) + i\Phi(\mathbf{H}_2)$$

($\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$ — эрмитовы компоненты векторфункции $\mathbf{A}$), и так как $\Phi(\mathbf{H}_1)$ и $\Phi(\mathbf{H}_2)$ — действительные числа, то $W(\mathbf{A})$ лежит внутри прямоугольника, ограниченного прямыми:

$$x = a_1, \quad x = a_2,$$
$$y = b_1, \quad y = b_2, \tag{32,21}$$

где a_1 и a_2, b_1 и b_2 — наименьшие и наибольшие характеристические числа соответственно функций $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$. Отсюда, как следствие, вытекает следующее предложение:

[1] См. напр., *C. Carathéodory.* Über den Variabilitätsbereich der Fourier'schen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen. Rend. Palermo, T. 32 (1911), стр. 193. Carathéodory доказывает следующую теорему: Точки наименьшей выпуклой области, содержащей замкнутое множество M, могут быть рассматриваемы как центры тяжести материальных масс, сосредоточенных в точках множества M, причем все массы берутся положительными, и их сумма равна единице.

Теорема 14 (Bendixson'a — Hirsch'a). *Характеристические числа линейной векторфункции лежат внутри прямоугольника:*

$$a_1 \leqslant x \leqslant a_2,$$
$$b_1 \leqslant y \leqslant b_2,$$

где a_1 и a_2, b_1 и b_2 — наименьшие и наибольшие характеристические числа эрмитовых компонентов этой векторфункции.

На основании этой теоремы можно дать верхний предел модулей характеристических чисел и их действительных и мнимых частей. Пусть линейная векторфункция и ее эрмитовы компоненты в некоторой ортогональной системе координат задаются матрицами:

$$\|a_{ik}\|, \quad \|\underset{1}{h}_{ik}\|, \quad \|\underset{2}{h}_{ik}\|,$$

$$\underset{1}{h}_{ik} = \frac{1}{2}(a_{ik} + \bar{a}_{ki}), \quad \underset{2}{h}_{ik} = \frac{1}{2i}(a_{ik} - \bar{a}_{ki}).$$

Пусть $\lambda_i = \alpha_i + i\beta_i$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ — характеристические числа векторфункции $\mathbf{A}$, μ_i и ν_i — характеристические числа соответственно эрмитовых компонентов $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$. Так как

$$\sum \mu_i = \sum \underset{1}{h}_{ii}, \quad \sum \mu_i\mu_k = \sum (\underset{1}{h}_{ii}\underset{1}{h}_{kk} - \underset{1}{h}_{ik}\underset{1}{h}_{ki}), \qquad (i \neq k)$$

то

(32,22) $$\sum \mu_i^2 = \sum \underset{1}{h}{}_{ii}^2 + \sum \underset{1}{h}_{ik}\underset{1}{h}_{ki}. \qquad (i \neq k)$$

Если H_1 — наибольший модуль элементов матрицы $\|\underset{1}{h}_{ik}\|$, то

$$\sum \mu_i^2 \leqslant nH_1^2 + n(n-1)H_1^2 = n^2H_1^2.$$

Принимая во внимание теорему Bendixson'a — Hirsch'a, получаем неравенство для действительных частей характеристических чисел $\lambda_i = \alpha_i + i\beta_i$:

$$|\alpha_i| \leqslant nH_1.$$

Аналогично выводится неравенство:

$$\sum \nu_i^2 \leqslant n^2H_2^2,$$

т. е.

$$|\beta_i| \leqslant nH_2,$$

где H_2 — наибольший из модулей элементов матрицы $\|\underset{2}{h}_{ik}\|$.

На основании соотношения (32,22), имеем:

$$\alpha_i^2 \leqslant \sum \underset{1}{h}{}_{ii}^2 + \sum \underset{1}{h}_{ik}\underset{1}{h}_{ki}.$$

Аналогично: $(i \neq k)$

$$\beta_i^2 \leqslant \sum \underset{2}{h}{}_{ii}^2 + \sum \underset{2}{h}_{ik}\underset{2}{h}_{ki},$$

откуда:

$$\alpha_i^2 + \beta_i^2 \leqslant \sum (\underset{1}{h}{}_{ii}^2 + \underset{2}{h}{}_{ii}^2) + \sum (\underset{1}{h}_{ik}\underset{1}{h}_{ki} + \underset{2}{h}_{ik}\underset{2}{h}_{ki}).$$

Но

$$\underset{1}{h}{}_{ii}^2 + \underset{2}{h}{}_{ii}^2 = a_{ii}\bar{a}_{ii}$$

$$\underset{1}{h}_{ik}\underset{1}{h}_{ki} + \underset{2}{h}_{ik}\underset{2}{h}_{ki} = \frac{1}{2}(a_{ik}\bar{a}_{ik} + a_{ki}\bar{a}_{ki}),$$

т. е.

$$\alpha_i^2 + \beta_i^2 \leqslant \sum a_{ii}\bar{a}_{ii} + \sum a_{ik}\bar{a}_{ik}. \qquad (i \neq$$

Обозначая через A наибольший из модулей элементов матрицы $\|a_{ik}\|$, получаем:

$$\alpha_i^2 + \beta_i^2 \leqslant nA^2 + n(n-1)A^2 = n^2A^2.$$

Объединяя вышесказанное, имеем теорему:

Теорема 15 (Hirsch'a). *Если линейная векторфункция и ее эрмитовы компоненты определяются в ортогональной системе координат матрицами $\|a_{ik}\|$, $\|\underset{1}{h}_{ik}\|$, $\|\underset{2}{h}_{ik}\|$, то модули характеристических чисел $\lambda_i = \alpha_i + i\beta_i$ и их действительных и мнимых частей удовлетворяют неравенствам*

$$|\lambda_i| \leqslant nA, \quad |\alpha_i| \leqslant nH_1, \quad |\beta_i| \leqslant nH_2,$$

где A, H_1, H_2 — соответственно наибольшие модули элементов матриц $\|a_{ik}\|$, $\|\underset{1}{h}_{ik}\|$, $\|\underset{2}{h}_{ik}\|$.

19. В качестве примера рассмотрим линейную векторфункцию в 2-мерном пространстве. Как мы знаем, выбором ортогональной системы координат можно матрицу любой векторфункции привести к каноническому виду:

$$\|\mathbf{A}\| = \begin{Vmatrix} \lambda_1, & \mu \\ 0, & \lambda_2 \end{Vmatrix},$$

где λ_1, λ_2 — характеристические числа этой функции. В этой системе координат присоединенная форма имеет следующий вид:

$$\Phi(\mathrm{A}) = \lambda_1 \bar{x}_1 x_1 + \lambda_2 \bar{x}_2 x_2 + \mu \bar{x}_1 x_2.$$

Введем модули и аргументы комплексных чисел x_1, x_2 μ:

$$x_1 = \varrho_1 e^{i\theta_1}, \quad x_2 = \varrho_2 e^{i\theta_2},$$
$$\mu = \varrho e^{i\theta}.$$

Тогда

$$\Phi(\mathrm{A}) = \lambda_1 \varrho_1^2 + \lambda_2 \varrho_2^2 + \varrho \varrho_1 \varrho_2 e^{i(\theta_2 - \theta_1 + \theta)}.$$

Так как $(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \varrho_1^2 + \varrho_2^2 = 1$, то можно положить:

$$\varrho_1 = \cos\omega, \quad \varrho_2 = \sin\omega,$$

причем угол ω будем брать в следующих пределах: $0 \leqslant \omega \leqslant \frac{\pi}{2}$. Обозначая

$$\theta_2 - \theta_1 + \theta = \varphi, \quad \lambda_1 - \lambda_2 = \nu,$$

получаем для $\Phi(\mathrm{A})$ следующий вид:

$$\Phi(\mathrm{A}) = \lambda_1 \cos^2\omega + \lambda_2 \sin^2\omega + \varrho \sin\omega \cos\omega e^{i\varphi} =$$
$$= \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 + \nu\cos 2\omega + \varrho \sin 2\omega e^{i\varphi}).$$

Нашей целью является исследовать, какую область опишет точка $z = \Phi(\mathrm{A})$, когда ω и φ изменяются в следующих пределах:

$$0 \leqslant \omega \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Фиксируя ω и меняя φ, мы получим окружность радиуса $\varrho \sin\omega\cos\omega$, центр которой: $\lambda_1\cos^2\omega + \lambda_2\sin^2\omega$ лежит внутри отрезка λ_1, λ_2, а радиус меняется от 0 до $\frac{\varrho}{2}$. Принимая во внимание теорему Hausdorff'a, мы убеждаемся, что граница области $W(\mathrm{A})$ является огибающей этих окружностей, разысканием которой мы и займемся. Считая в уравнении:

$$(32{,}23) \qquad z = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 + \nu\cos 2\omega + \varrho\sin 2\omega e^{i\varphi})$$

ω за параметр кривых семейства и дифференцируя по нему, находим:

$$-\nu\sin 2\omega + \varrho\cos 2\omega e^{i\varphi} + i\frac{\varrho}{2}\sin 2\omega e^{i\varphi}\frac{d\varphi}{d\omega} = 0.$$

Для исключения $\frac{d\varphi}{d\omega}$ берем комплексно-сопряженное уравнение:

$$-\bar{\nu}\sin 2\omega + \varrho\cos 2\omega e^{-i\varphi} - i\frac{\varrho}{2}\sin 2\omega e^{-i\varphi}\frac{d\varphi}{d\omega} = 0.$$

Исключая $\frac{d\varphi}{d\omega}$, имеем:

$$(32{,}24) \qquad (\nu e^{-i\varphi} + \bar{\nu} e^{i\varphi})\sin 2\omega - 2\varrho\cos 2\omega = 0.$$

Не выводя уравнения искомой огибающей, покажем, что она является эллипсом с фокусами в точках λ_1 и λ_2. Обозначим расстояния от точки этой кривой до λ_1, λ_2 соответственно через r_1, r_2; имеем:

$$r_1^2 = (z - \lambda_1)(\bar{z} - \bar{\lambda}_1) = \frac{1}{4}(-2\nu\sin^2\omega + \varrho\sin 2\omega e^{i\varphi})(-2\bar{\nu}\sin^2\omega +$$
$$+ \varrho\sin 2\omega e^{-i\varphi}) = \frac{1}{4}(4\nu\bar{\nu}\sin^4\omega - 2\varrho\sin^2\omega\sin 2\omega(\nu e^{-i\varphi} + \bar{\nu}e^{i\varphi}) +$$
$$+ \varrho^2\sin^2 2\omega).$$

Исключая в этом соотношении выражение $(\nu e^{-i\varphi} + \bar{\nu} e^{i\varphi})$ при помощи (32,24), получаем:

$$r_1 = \sqrt{\nu\bar{\nu} + \varrho^2}\sin^2\omega.$$

Аналогично выводим:

$$r_2 = \sqrt{\nu\bar{\nu} + \varrho^2}\cos^2\omega.$$

Таким образом,

$$(32{,}25) \qquad r_1 + r_2 = \sqrt{\nu\bar{\nu} + \varrho^2},$$

т. е. огибающая, действительно, является эллипсом с большой осью, равной $\sqrt{\nu\bar{\nu} + \varrho^2}$. Так как расстояние между фокусами равно $\sqrt{\nu\bar{\nu}}$, то малая ось равна ϱ. Объединяя вышесказанное, имеем:

Область значений $W(\mathrm{A})$ присоединенной формы линейной векторфункции A в 2-мерном пространстве ограничена эллипсом, в фокусах которого лежат характеристические числа этой векторфункции и малая ось которого равна $|\mu|$, где μ — элемент матрицы $\|\mathrm{A}\|$, приведенной к каноническому виду:

$$\begin{Vmatrix} \lambda_1, & \mu \\ 0, & \lambda_2 \end{Vmatrix}.$$

Если функция нормальна ($\mu = 0$), эллипс вырождается в отрезок прямой между λ_1 и λ_2.

Задача 9. Показать, что эксцентриситет эллипса (32,25) равен синусу угла между главными направлениями векторфункции **A**.

20. На ряду с присоединенной формой

$$\Phi(\mathbf{A}) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}(\mathbf{x})) = a_{\alpha\beta}\bar{x}^\alpha x^\beta; \ (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 1$$

Toeplitz в своих исследованиях рассматривает билинейную форму:

$$\Psi(\mathbf{A}) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}(\mathbf{y})) = a_{\alpha\beta}\bar{x}^\alpha y^\beta;$$

аргументами которой являются также орты:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 1, \quad (\mathbf{y}, \mathbf{y}) = 1.$$

При изменениях аргументов форма Ψ принимает ряд комплексных значений, изображением которых на плоскости комплексного переменного является некоторое множество точек $V(\mathbf{A})$.

Теорема 16. *$V(\mathbf{A})$ является круговой областью с центром в начале координат.*

Доказательство. Если множество $V(\mathbf{A})$ содержит точку P, то оно включает в себя и всю окружность, проходящую через P и имеющую центр в начале координат. В самом деле, при умножении аргумента $\mathbf{x}$ на $e^{i\alpha}$ (где α — действительное число), что не меняет длины этого вектора, форма $\Psi(\mathbf{A})$ умножается на $e^{-i\alpha}$. Изменяя α от 0 до 2π, мы заставим точку P описать окружность с центром в начале координат, не покидая множества $V(\mathbf{A})$. Если $V(\mathbf{A})$ содержит окружность радиусов R_1 и R_2 с центрами в начале, то и все окружности промежуточных радиусов, концентрические им, также принадлежат к этому множеству. В самом деле, вещественная функция $|\Psi(\mathbf{A})|$ непрерывна, а область изменения аргументов образует связное множество. Остается показать, что начало координат также принадлежит к $V(\mathbf{A})$. Для этого достаточно, выбрав вектор $\mathbf{y}$, взять $\mathbf{x}$ ортогонально к $\mathbf{A}(\mathbf{y})$. Теорема доказана.

Обозначим радиус круга $V(\mathbf{A})$ через $R(\mathbf{A})$. Присоединенная форма $\Phi(\mathbf{A})$ является частным случаем билинейной (когда в этой последней оба аргумента равны между собой). Следовательно, $W(\mathbf{A})$ является частью $V(\mathbf{A})$. Выше мы обозначили радиус наименьшего круга с центром в начале, содержащего внутри $W(\mathbf{A})$ через $M(\mathbf{A})$. Очевидно, что

$$M(\mathbf{A}) \leqslant R(\mathbf{A}).$$

Теорема 17. *Для нормальных векторфункций $M(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A})$.*

Доказательство. Выберем ту ортогональную систему координат, в которой оси являются главными направлениями нормальной векторфункции **A**; тогда

$$(\mathbf{x}, \mathbf{A}(\mathbf{y})) = \sum \lambda_i \bar{x}_i y_i.$$

Так как

$$\left|\sum \lambda_i \bar{x}_i y_i\right| \leqslant \sum |\lambda_i||x_i||y_i| \leqslant \Lambda \sum |x_i||y_i|,$$

где через Λ обозначен наибольший из модулей $|\lambda_1|, |\lambda_2|, \ldots |\lambda_n|$, то

$$|\Psi(\mathbf{A})| \leqslant \Lambda \sqrt{\sum |x_i|^2 \sum |y_i|^2} = \Lambda.$$

На основании теоремы Toeplitz'а, $M(\mathbf{A}) = \Lambda$, т. е. $R(\mathbf{A}) \leqslant M(\mathbf{A})$. Так как в то же время имеет место соотношение $R(\mathbf{A}) \geqslant M(\mathbf{A})$, то $M(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A})$.

Теорема 18 (Toeplitz'a). *Для векторфункции общего вида радиус $R(\mathbf{A})$ области $V(\mathbf{A})$ и радиус $M(\mathbf{A})$ наименьшего круга с центром в начале координат, заключающего в себе $W(\mathbf{A})$, удовлетворяют следующим неравенствам:*

$$M(\mathbf{A}) \leqslant R(\mathbf{A}) \leqslant 2M(\mathbf{A}). \tag{32,26}$$

Доказательство. Необходимо доказать только второе неравенство. Введем эрмитовы компоненты векторфункции **A**:

$$\mathbf{A} = \mathbf{H}_1 + i\mathbf{H}_2.$$

Так как

$$\Psi(\mathbf{A}) = \Psi(\mathbf{H}_1) + i\Psi(\mathbf{H}_2),$$

то

$$|\Psi(\mathbf{A})| \leqslant |\Psi(\mathbf{H}_1)| + |\Psi(\mathbf{H}_2)|,$$

т. е. $R(\mathbf{A}) \leqslant R(\mathbf{H}_1) + R(\mathbf{H}_2)$. На основании предыдущей теоремы $R(\mathbf{H}_1) = M(\mathbf{H}_1)$, $R(\mathbf{H}_2) = M(\mathbf{H}_2)$. Но $M(\mathbf{H}_1) \leqslant M(\mathbf{A})$, $M(\mathbf{H}_2) \leqslant M(\mathbf{A})$, т. е. $R(\mathbf{A}) \leqslant 2M(\mathbf{A})$; теорема доказана.

Возникает вопрос, нельзя ли заменить неравенства (32,26) более сильными. Как нетрудно показать, этого сделать нельзя. В самом деле, на основании теоремы 17, равенство $M = R$ осуществляется для нормальных функций. В то же время существуют функции, для которых $R = 2M$, как это показал Toeplitz на следующем примере.

Рассмотрим право-полуунитарную векторфункцию, определяемую следующей матрицей в ортогональной системе координат:

$$\begin{Vmatrix} 0, & 1 \\ 0, & 0 \end{Vmatrix}.$$

Пользуясь предложением, доказанным в предыдущем разделе, мы видим, что для нее $W(\mathrm{A})$ является кругом радиуса $= \frac{1}{2}$ с центром в начале координат. Следовательно, $M(\mathrm{A}) = \frac{1}{2}$. Определим для нее $R(\mathrm{A})$. Так как $|\Psi(\mathrm{A})| = |x_1||y_2|$ и

$$|x_1|^2 + |x_2|^2 = 1, \quad |y_1|^2 + |y_2|^2 = 1,$$

то $R(\mathrm{A}) = Max.\ |\Psi(\mathrm{A})| = 1$. Таким образом, в рассматриваемом случае $R(\mathrm{A}) = 2M(\mathrm{A})$.

Задача 10. Показать, что

$$[R(\mathrm{A})]^2 = [R(\mathrm{A}^*)]^2 = M(\mathrm{A}^*\mathrm{A}) = M(\mathrm{AA}^*).$$

УКАЗАТЕЛЬ ЛИТЕРАТУРЫ.

Тензорному анализу посвящен целый ряд курсов и монографий. Главнейшие из них следующие:

1) R. Weitzenböck. Invariantentheorie. Groningen, 1923.
2) J. Schouten. Der Ricci-Kalkül. Berlin, 1924.
3) T. Levi-Civita. Lezioni di calcolo differenziale assoluto. Roma, 1925. Есть немецкий перевод:
T. Levi-Civita. Der absolute Differentialkalkül. Berlin, 1928.
4) R. Lagrange. Calcul différentiel absolu. (Mém. des Sc. Math., fasc. 19). Paris, 1926.
5) Pomey. Principes de calcul vectoriel et tensoriel. Paris, 1923.
6) E. Study. Einleitung in die Theorie der Invarianten linearer Transformationen auf Grund der Vektorrechnung. Braunschweig, 1923.
7) T. Thomas. The Elementary Theory of Tensors. 1931.
8) O. Veblen. Invariants of Quadratic Differential Forms. Cambridge. 1927.
9) В. Фредерикс, А. Фридман. Основы теории относительности. Вып. I. Тензориальное исчисление. Ленинград, 1924.

Кроме того, изложение основных элементов тензорного анализа можно найти в курсах, посвященных дифференциальной геометрии, принципу относительности и математической физике, например:

1) E. Cartan. Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann. Paris, 1928.
2) E. Cartan. La géométrie des espaces de Riemann. (Mém. des Sc. Math, fasc. 9). Paris, 1925.
3) L. Eisenhart. Riemannian Geometry. Princeton, 1926.
4) L. Eisenhart. Non-Riemannian Geometry. New-York, 1927.
5) A. Duschek — W. Mayer. Lehrbuch der Differentialgeometrie. B. I, II. Leipzig — Berlin, 1930.
6) D. Struik. Grundzüge der mehrdimensionalen Differentialgeometrie in direkter Darstellung. Berlin, 1922.
7) H. Weyl. Raum, Zeit, Materie. 5 Auflage. Berlin, 1923.
8) H. Weyl. Gruppentheorie und Quantenmechanik. Leipzig, 1928.
9) A. Eddington. The Mathematical Theory of Relativity. Cambridge, 1923. Есть немецкий перевод:
A. Eddington. Relativitätstheorie in mathematischer Behandlung. Berlin, 1925.
10) H. Galbrun. Introduction à la théorie de la Relativité, calcul différentiel absolu et géométrie. Paris, 1923.
11) А. Эйхенвальд. Теоретическая физика. Ч. I, Теория поля. Москва — Ленинград, 1932.

Из перечисленных книг наиболее глубоким является курс Weitzenböck'а; он дает подробное изложение основ теории инвариантов линейных преобразований и потому подводит под основные факты тензорного анализа солидный фундамент. Книга эта должна быть особенно рекомендована лицам, желающим специализироваться по тензорному анализу, но начинать изучение лучше с более элементарных курсов, напр., Levi-Civita или Schouten'а.

Следует отметить, что в указанных выше курсах и монографиях наибольшее внимание уделено приложениям тензорного анализа к дифференциальной геометрии и физике. Вопросы тензорной алгебры более или менее подробно изложены только в книгах Weitzenböck'а, Study и Schouten'а. В этой последней особенно интересной является 7-я глава: Die invarianten Zerlegungen einer Grösse höheren Grades. Этому же вопросу посвящена 5-я глава книги H. Weyl'я: Gruppentheorie und Quantenmechanik.

Подробные литературные указания можно найти в цитированных выше монографиях Eisenhart'а, Schouten'а и Struik'а, в статьях:

1) R. Weitzenböck. Neuere Arbeiten der algebraischen Invariantentheorie. Differentialinvarianten. Encykl. der math. Wissensch. B. III_3, H. 6, Leipzig, 1922.

2) L. Berwald. Different'alinvarianten in der Geometrie. Riemannsche Mannigfaltigkeiten und ihre Verallgemeinerungen, Encykl. der math. Wissensch. B. III_3, H. 7. Leipzig, 1927,

а также в книге:

D. Sommerville. Bibliography of Non-Euclidean Geometry. London, 1911.

Исторический очерк развития тензорного анализа:

1) F. Klein. Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. T. II: Die Grundbegriffe der Invariantentheorie und ihr Eindringen in die mathematische Physik. Berlin, 1927.

2) В. Каган. Геометрические идеи Римана и их современное развитие. Труды Всеросс. Съезда математиков в Москве. Москва, 1928.

В дальнейшем ссылки на литературу даются в связи с отдельными параграфами настоящей книги.

Глава I. Элементарная теория матриц.

§§ 1—3. Матрицы были введены впервые в алгебру Cayley (Phil. Trans. (1858), Coll. math. papers., II, 475).

Систематическое обоснование исчисления матриц принадлежит Frobenius'у:

G. Frobenius. Über lineare Substitutionen und bilineare Formen, Journ. f. Math. B. 84 (1878), S. 1.

Основы теории матриц можно найти в некоторых курсах высшей алгебры, напр.,

1) H. Weber. Lehrbuch der Algebra. 2. Auflage. B. II Braunschweig, 1899.

2) M. Bôcher. Einführung in die höhere Algebra. Leipzig — Berlin, 1910.

3) L. Dickson. Modern Algebraic Theories. Chicago — New-York — Boston, 1926.

4) H. Turnbull. The Theory of Determinants, Matrices and Invariants. London — Glasgow 1928.

Для начинающего особенно может быть рекомендована книга M. Bôcher'а, дающая прекрасную геометрическую интерпретацию вопросам алгебры. Подробное изложение теории элементарных делителей содержится в книге:

P. Muth. Theorie und Anwendung der Elementartheiler. Leipzig, 1899.

Глава II. Алгебра тензоров в аффинном пространстве.

§ 4. По геометрии многомерных пространств существует обширная литература, по преимуществу журнальная. Главнейшие монографии следующие:

1) E. Bertini. Introduzione alla geometria projettiva degli iperspazi, con appendice sulle curve algebriche e loro singolarità. Pisa, 1907. Есть немецкий перевод:

E. Bertini. Einführung in die projektive Geometrie mehrdimensionaler Räume. Wien, 1924.

2) H. Grassmann. Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik. Leipzig, 1844. Ges. Werke, B. I.

3) H. Grassmann. Die Ausdehnungslehre. Berlin, 1862. Ges. Werke, B. I.

4) W. Killing. Die nicht-Euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung. Leipzig, 1885.

5) W. Killing. Einführung in die Grundlagen der Geometrie. Padeborn. B. I, 1893; B. II, 1898.

6) P. Schoute. Mehrdimensionale Geometrie. Leipzig. 1. Teil, 1902; 2. Teil, 1905.

7) G. Veronese. Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee, esposti in forma elementare. Padova, 1891. Есть немецкий перевод:

G. Veronese. Grundzüge der Geometrie. Leipzig, 1894.

Указания на журнальную литературу можно найти в книге:

D. Sommerville. Bibliography of Non-Euclidean Geometry. London, 1911, а также в статье:

G. Segre. Mehrdimensionale Räume. Encykl. der math. Wiss. B. III_2, H. 7. Leipzig, 1920.

§ 5. Аксиоматическое обоснование аффинной векторной алгебры можно найти в следующих монографиях:

1) H. Weyl. Raum. Zeit, Materie. Berlin, 1923, § 2.

2) H. Weyl. Gruppentheorie und Quantenmechanik. Leipzig, 1928, § 1.

§ 11. Краткое изложение основных понятий теории групп и приложения к геометрии содержатся, напр., в следующих монографиях:

1) H. Weyl, Gruppentheorie und Quantenmechanik. Leipzig,1928.

2) K. Reidemeister. Vorlesungen über Grundlagen der Geometrie. Berlin, 1930.

Эрлангеновская программа Klein'а:

1) F. Klein. Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Programm zum Eintritt in die philosophische Fakultät und den Senat Erlangen. 1872. Перепечатана в Mathem. Ann., B. 43 (1893). Есть русский перевод:

Ф. Клейн. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований. Изв. Казанского Физ.-мат. о-ва. Т. 5, 6 (1895 — 96).

2) F. Klein. Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. B. II. Geometrie. 3. Aufl. Berlin, 1925.

Систематическое изложение аналитической и дифференциальной геометрии различных групп преобразований:

1) L. Heffter und C. Koehler. Lehrbuch der analytischen Geometrie. Leipzig — Berlin. B. I, 1905. B. II, 1923.

2) H. Beck. Koordinatengeometrie. B. I. Die Ebene. Berlin, 1919.

3) W. Blaschke. Vorlesungen über Differentialgeometrie. Berlin. B. I, 2. Aufl., 1924; B. II, 1923; B. III, 1929.

4) G. Kowalewski. Vorlesungen über allgemeine natürliche Geometrie und Liesche Transformationsgruppen. Berlin — Leipzig. 1931.

Обоснование векторного анализа на основе идей Klein'a:

J. Schouten. Grundlagen der Vektor- und Affinoranalysis. Leipzig — Berlin, 1914.

§ 12. Относительно определения ковариантной величины ср.: Klein. Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. B. II, S. 27 — 28; 162 — 164; H. Weyl. Gruppentheorie und Quantenmechanik, S. 114.

Глава III. Исследование некоторых специальных видов тензоров в аффинном пространстве.

§§ 16 — 18. Метод Weyl'я в исследовании линейных векторфункций 1-го рода:

1) H. Weyl. Mathematische Analyse des Raumproblems. Berlin, 1923. Anhang 12: Theorie der einzelnen Matrix (Elementarteiler). S. 88 — 100.

2) F. Klein. Vorlesungen über höhere Geometrie. Berlin, 1926. §§ 96 — 98. Einleitung in die Elementarteilertheorie.

Классическое изложение теории элементарных делителей и ее приложения к линейным векторфункциям можно найти в цитированных выше курсах Bôcher'a, Dickson'a и Muth'a. Элементарным введением в теорию линейных векторфункций (в метрическом 3-мерном пространстве) может служить книга

Ю. Рабинович. Теория линейных векторфункций. Одесса, 1911.

§§ 20 — 25. Теорию квадратичных, билинейных и эрмитовых форм можно найти в курсах алгебры, перечисленных в указаниях к гл. I, а также в монографии

G. Kowalewski. Einführung in die Determinantentheorie. Leipzig, 1909.

Подробное изложение теории пучков билинейных и квадратичных форм, необходимой для полного исследования вопросов, затронутых в §§ 21—25, содержится в книге Muth'a.

Вспомогательная векторфункция K (см. §§ 21, 23, 24) была введена в исследовании этих вопросов G. Kowalewsk'им (Leipz.Ber., 1917, S. 333).

§ 25. Обобщение понятия о тензоре (тензоры 2-го класса):

1) J. Schouten, D. van Dantzig. Über die Differentialgeometrie einer Hermiteschen Differentialform und ihre Beziehungen zu den Feldgleichungen der Physik. Proc. Akad. v. Wet. Amsterdam, 32 (1929), S. 60 - 64.

2) J. Schouten. Über unitäre Geometrie. Ibid. 457—465.

3) J. Schouten, D. van Dantzig. Über unitäre Geometrie. Math. Ann. 103, (1930), S. 319—346.

§ 26. Различные виды соотношений между составляющими мультивектора:

1) E. D'Ovidio. Le funzioni metriche fondamentali negli spazi di quante si vogliano dimensioni e di curvatura costante. Mem. Acc. Lincei (3) 1 (1887), p. 929.

2) W. H. Joung. On flat space coordinates. Proc. London. Math. Soc. 30 (1899), p. 54.

3) E. Noether. Zur Invariantentheorie der Formen von n Variabeln. Crelle, 139 (1910), S. 118.

4) Th. Vahlen. Über die Relationen zwischen den Determinanten einer Matrix. Crelle, 112 (1893), S. 306.

5) R. Weitzenböck. Invariantentheorie. Groningen, 1923.

Производные матрицы:

1) L. Kronecker. Vorlesungen über Determinanten.

2) C. Stephanos. Sur une extension du calcul des substitutions linéaires. Journ. de Math. (5), 6 (1900), p. 73.

3) I. Schur. Über eine Klasse von Matrizen, die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen. Berlin, 1901.

4) A. Loewy. Zur Gruppentheorie mit Anwendungen auf die Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen. Trans. Am. M. Soc. 5 (1904), p. 3.

Окаймленные определители:

G. Kowalewski. Einführung in die Determinantentheorie. Leipzig, 1909.

Глава IV. Алгебра тензоров в метрическом пространстве Евклида.

§ 27. Примером построения геометрии (Riemann'овых пространств), в основу мероопределения которой положена неопределенная квадратичная форма, может служить книга Eisenhart. Riemannian Geometry.

§ 31. Решение основных задач аналитической геометрии в n-мерном метрическом пространстве:

C. Jordan. Essai sur la géométrie à n dimensions. Bull. de la Soc. Math. de France. T. III (1874 — 75), p. 103.

§ 32. Введение комплексных элементов пространства относится к началу 19 века (Poncelet. Traité des propriétés projectives des figures, 1822). Систематическое построение геометрии комплексного проективного пространства принадлежит Staudt'y:

1) G. Staudt. Geometrie der Lage. Nürnberg, 1846.

2) G. Staudt. Beiträgen zur Geometrie der Lage. Nürnberg, 1856 — 60.

Аксиоматическое обоснование комплексной проективной геометрии содержится в мемуаре:

O. Veblen, W. Joung. A Set of Assumptions for Projective Geometry. Amer. Journ. of Math. 30 (1908).

Элементарным введением в геометрию комплексных пространств могут служить монографии:

1) J. Coolidge. The Geometry of the Complex Domain. Oxford, 192

2) E. Cartan. Leçons sur la géométrie projective complexe. Paris, 1931.

Систематическое изучение алгебраических кривых в комплексном проективном пространстве является предметом большой ветви геометрии — так называемой алгебраической геометрии. См., напр.,

F. Severi. Vorlesungen über algebraische Geometrie. Leipzig — Berlin, 1921.

Основы геометрии Hermite'a и теории линейных векторфункций в унитарном пространстве можно найти в книгах:

1) H. Weyl. Gruppentheorie und Quantenmechanik. Kap. I.

2) A. Wintner. Spektraltheorie der unendlichen Matrizen. Leipzig, 1929. Kap. I.

Отметим интересную статью:

М. Крейн, Ф. Гантмахер. О нормальных операторах в эрмитовом пространстве. Изв. Каз. физ.-мат. об-ва, (3), 4 (1929 — 30),

которой мы пользовались при составлении § 32.

Литература по области значений присоединенной формы:

1) O. Toeplitz. Das algebraische Analogon zu einem Satze von Fejér. Math. Ztschr. 2 (1918), S. 187.

2) F. Hausdorff. Der Wertevorrat einer Bilinearform. Math. Ztschr. 3 (1919). S. 314.

3) I. Bendixson. Sur les racines d'une équation fondamentale. Acta Math., 25 (1902), p. 359.

4) A. Hirsch. Sur les racines d'une équation fondamentale. Acta Math., 25 (1902), p. 367.

5) T. Bromwich. On the roots of the characteristic equation of a linear substitution. Acta Math., 30 (1906), p. 297.

6) A. Wintner. Spektraltheorie der unendlichen Matrizen. § 17—21.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

(Числа указывают страницы).

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Глава IV. Алгебра тензоров в метрическом пространстве Евклида.

Сдано в набор 20 июня 1933 г.
Поступило к печати 10 мая 1934
Формат бумаги 82×110.
Количество бумажных листов 14³/₄.
Авторских листов 31.
Количество печ. знак. в 1 бум. листе 46400.
Ленинградский Облгорлит № 5860.

Ответств. редактор Е. В. Пулькина.
Технический редактор Б. Д. Финити.
Заказ № 2794.
Тираж 4000.
Изд. № 234.

4-я типография ОНТИ НКТП СССР „Красный Печатник", Ленинград, Международный, 75в