М. Д. О. СТРЕТТ

ФУНКЦИИ ЛЯМЕ, МАТЬЕ И РОДСТВЕННЫЕ ИМ В ФИЗИКЕ И ТЕХНИКЕ

ОНТИ ГОСУДАРСТВЕННОЕ НКТП
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО [У]КРАИНЫ

LAMÉSCHE-MATHIEUSCHE UND VERWANDTE FUNKTIONEN IN PHYSIK UND TECHNIK

VON

M. J. O. STRUTT

M. Д. О. СТРЕТТ

ФУНКЦИИ ЛЯМЕ, МАТЬЕ И РОДСТВЕННЫЕ ИМ В ФИЗИКЕ И ТЕХНИКЕ

С ПРИЛОЖЕНИЕМ ТАБЛИЦ ФУНКЦИЙ МАТЬЕ, СОСТАВЛЕННЫХ АИНСОМ

ПЕРЕВОД С НЕМЕЦКОГО ПОД РЕДАКЦИЕЙ И С ДОПОЛНЕНИЯМИ
ИНЖ. А. М. ЭФРОС

ОНТИ ГОСУДАРСТВЕННОЕ НКТП
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО УКРАИНЫ
Харьков 1935 Киев

Библиографическое описание этого издания помещено в „Летописи Укр. печати" „Карточном реперт," и других указателях Укр. Книжн. Палаты.

21 — 5 — 4

Ответственный редактор *К. Р. Иршенко*

Техоформление *Л. М. Бухбиндер*

Корректор *А. И. Драгоманова*

Типография Государственного научно-технического издательства Украины. Киев, ул. Воровского, 42.

Уполномоч. Главлита № 1532. Зак. № 94. Тираж 3000 — 15 лист.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Во многих вопросах математической физики и ее практических приложений встречаются функции Матье и Ляме. В нашей литературе отсутствует сколько-нибудь полное изложение теории этих функций. В известном курсе „Современного анализа" Уиттекера-Ватсона в отделе, посвященном функциям Матье, сказано, что это „отдел анализа, который пока исследован весьма неглубоко". Действительно, в мировой литературе не имеется полного изложения теории указанных функций. Предлагаемая книга Стретта является кратким, местами конспективным изложением теории функций Матье и Ляме и некоторых их приложений. В настоящее время она является наиболее полной из имеющихся монографий, в которой нашли освещение основные вопросы теории и приложений излагаемых функций. Мы дополнили книгу главой VIII, отсутствующей в оригинале и содержащей ряд технических применений. В конце книги мы поместили весьма полные таблицы функций Матье, вычисленные Айнсом (Proc. R. Soc. of. Edinburgh 1932 г.). С появлением этих таблиц вопрос о практическом применении функций Матье может считаться решенным, как и для всякой системы табулированных функций. Прилагаемый в конце книги литературный указатель доведен до 1935 года.

Май 1935 г.

А. М. Эфрос

I. Возникновение уравнений Матье, Ляме и родственных им в физико-технических проблемах

1. Преобразование уравнения $\Delta u+k^2u=0$ к эллиптическим координатам

Дифференциальное уравнение в частных производных $\Delta u+k^2u=0$ имеет огромное значение в математической физике, в частности в проблемах распространения волн и в задачах о собственных колебаниях (*20*; *106*; *116*)[1]. В некоторых случаях для решения задач целесообразно введение эллиптических координат. Мы введем их для вытянутого и сплюснутого эллипсоидов вращения, для трехосного эллипсоида и для эллиптического цилиндра. Прежде чем производить преобразования для каждого случая отдельно, укажем общий метод расчета (*20*, стр. 194). Старые координаты обозначим x_1, x_2, x_3, новые ξ_1, ξ_2, ξ_3. При ортогональности обеих координатных систем:

$$dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2=\sum_i g_{ii}\,d\xi_i^2; \quad i=1,\ 2,\ 3,$$

где

$$g_{ii}=\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_i}\right)^2+\left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi_i}\right)^2+\left(\frac{\partial x_3}{\partial \xi_i}\right)^2.$$

Из этих выражений следует затем формула:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}=\frac{1}{\sqrt{g_{11}\cdot g_{22}\cdot g_{33}}}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi_1}\cdot\frac{\sqrt{g_{22}\cdot g_{33}}}{\sqrt{g_{11}}}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial \xi_2}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi_2}\cdot\frac{\sqrt{g_{11}g_{33}}}{\sqrt{g_{22}}}\right)+\frac{\partial}{\partial \xi_3}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi_3}\cdot\frac{\sqrt{g_{11}g_{22}}}{\sqrt{g_{33}}}\right)\right\}.$$

Применение полученных формул весьма облегчает трудный расчет второго дифференциального параметра. Элемент объема в новых координатах будет:

$$\sqrt{g_{11}\cdot g_{22}\cdot g_{33}}\cdot d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3.$$

[1] Цифры курсивом означают ссылки на литературный указатель, помещенный в конце книги.

а) Вытянутый эллипсоид вращения (*78*, стр. 163)

Большая ось направлена вдоль оси x-ов декартовой системы координат. Новые координаты можно ввести посредством:

$$x=c\cdot\cos\Theta\cdot\operatorname{ch}\eta=c\cdot\mu\cdot\xi;$$

$$y=c\cdot\sin\Theta\cdot\operatorname{sh}\eta\cdot\sin\varphi=c\,(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}}(\xi^2-1)^{\frac{1}{2}}\sin\varphi;$$

$$z=c\cdot\sin\Theta\cdot\operatorname{sh}\eta\cdot\cos\varphi=c\,(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}}(\xi^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi.$$

Поверхности $\xi=\text{const}$ являются конфокальными эллипсоидами вращения с фокусами $y=0$, $z=0$, $x=\pm c$; поверхности $\mu=\text{const}$ — двуполыми гиперболоидами вращения с теми же фокусами. Значения ξ меняются в пределах между 1 и ∞. В первом случае эллипсоид вращения превращается в линию, соединяющую фокусы; во втором случае, при условии, что c стремится к нулю так, чтобы $\lim c\xi\to r$ оставалось конечным, эллипсоид превращается в шар радиуса r. Величина μ лежит между -1 и $+1$. Преобразование к новым координатам производится непосредственно. Расчет дает:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial u}{\partial\mu}\right\}+\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{(\xi^2-1)\frac{\partial u}{\partial\xi}\right\}+\left(\frac{1}{1-\mu^2}+\frac{1}{\xi^2-1}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\\&+k^2c^2(\xi^2-\mu^2)\,u=0.\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Следуя Бернулли, отделяем переменные:

$$u=M(\mu)\cdot X(\xi)\cdot\Phi(\varphi)$$

и получаем:

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=-m^2\Phi; \tag{2a}$$

$$\frac{d}{d\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{dM}{d\mu}\right\}+M\left(\frac{-m^2}{1-\mu^2}-k^2c^2\mu^2+\Delta\right)=0; \tag{2b}$$

$$-\frac{d}{d\xi}\left\{(\xi^2-1)\frac{dX}{d\xi}\right\}+X\left(\frac{-m^2}{1-\xi^2}-k^2c^2\xi^2+\Delta\right)=0; \tag{2c}$$

m^2 и Δ являются постоянными, значение которых будет выяснено в разделе IV.

Решением дифференциальных уравнений Ляме (2b) и (2c) мы займемся ниже. Отметим только, что оба эти уравнения в двух случаях: 1) при $k=0$ задача теории потенциала (уравнение Лапласа), 2) при вышеуказанном граничном случае шара превращаются в простые разрешимые дифференциальные уравнения.

В самом деле в случае 1 из (2b) и (2c), которые идентичны, получаем дифференциальное уравнение полиномов Лежандра высшего порядка (присоединенные полиномы Лежандра) (*20*, стр. 307):

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dP}{dx}\right\}+P\left(\frac{-m^2}{1-x^2}+\Delta\right)=0. \tag{3}$$

Во втором случае, при μ конечном и c исчезающем, уравнение (2b) опять сводится к (3). Из (2c) получаем при этом дифференциальное уравнение:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dX}{dr}\right)+X(k^2r^2-\Delta)=0, \tag{4}$$

где r означает радиальное расстояние от начала декартовой системы координат. Решение (4) известно (*20*, стр. 297):

$$\frac{Z_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}},$$

где Z является функцией Бесселя или Ганкеля и $\Delta=n(n+1)$.

b) Сплюснутый эллипсоид вращения (*78*, стр. 167)

Малая ось эллипсоида направлена вдоль оси x-ов декартовой системы:

$$x=c\cdot\cos\Theta\cdot\operatorname{sh}\eta=c\cdot\mu\cdot\xi;$$

$$y=c\cdot\sin\Theta\cdot\operatorname{ch}\eta\cdot\sin\varphi=c(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}}(\xi^2+1)^{\frac{1}{2}}\sin\varphi;$$

$$z=c\cdot\sin\Theta\cdot\operatorname{ch}\eta\cdot\cos\varphi=c(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}}(\xi^2+1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi.$$

Здесь, так же как и в предыдущем случае, μ лежит между -1 и $+1$; ξ меняется иначе, именно между 0 и ∞.

В первом случае эллипсоид превратится в круглую пластинку в плоскости yz. Конфокальные эллипсоиды $\xi=\mathrm{const}$ и однополые гиперболоиды $\mu=\mathrm{const}$ обладают совместными фокальными кругами $z=0$; $x^2+y^2=c^2$. Волновое уравнение будет в этих координатах:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial u}{\partial\mu}\right\}+\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{(\xi^2+1)\frac{\partial u}{\partial\xi}\right\}+\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}\left(\frac{1}{1-\mu^2}-\frac{1}{\xi^2+1}\right)+\\&\qquad+k^2c^2(\xi^2+\mu^2)u=0.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Разделяя переменные

$$u=X(\xi)\cdot M(\mu)\cdot\Phi(\varphi),$$

получаем:

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=-m^2\Phi; \tag{2a}$$

$$\frac{d}{d\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{dM}{d\mu}\right\}+M\left(\frac{-m^2}{1-\mu^2}+k^2c^2\mu^2+\Delta\right)=0; \tag{2b}$$

$$\frac{d}{d\xi}\left\{(\xi^2+1)\frac{dX}{d\xi}\right\}+X\left(\frac{m^2}{\xi^2+1}+k^2c^2\xi^2-\Delta\right)=0; \tag{2c}$$

m^2 и Δ, так же как и в предыдущем разделе,—постоянные разделения, которые будут определены позднее.

В случае $k=0$, т. е. в случае задачи теории потенциала, (2b) переходит в уравнение присоединенных полиномов Лежандра. Дифференциальное уравнение (2c) переходит в этом предельном случае в простое уравнение, легко разрешимое посредством степенных рядов. Впрочем (2c) можно получить из (2b), заменив в последнем уравнении μ на $i\xi$. В предельном случае $c\to0$ и $\xi\to\infty$, когда $\lim c\xi\to r$ остается конечным, сплюснутый эллипсоид переходит в шар, причем из уравнений (2b) и (2c) возникают такие же дифференциальные уравнения, как и в предыдущем разделе, что легко проверить вычислением.

c) Трехосный эллипсоид (*62, 63, 80, 81, 82, 42, 98, 49, 96*)

Мы исходим из уравнения:

$$\frac{x^2}{\lambda^2-a^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-b^2}+\frac{z^2}{\lambda^2-c^2}-1=0,$$

представляющего семейство конфокальных поверхностей второго порядка. Рассматриваемое как уравнение третьего порядка относительно λ^2, оно имеет три корня: ρ^2, μ^2, ν^2, которые должны удовлетворять неравенству:

$$\rho^2>a^2>\mu^2>b^2>\nu^2>c^2.$$

Поверхность $\rho^2=\mathrm{const}$ представляет эллипсоид, $\mu^2=\mathrm{const}$— однополый и $\nu^2=\mathrm{const}$ — двуполый гиперболоиды.

Мы рассмотрим сначала точки x, y, z, расположенные в одном октанте. Трем величинам ρ, μ, ν соответствует в этом октанте точка пересечения трех поверхностей второго порядка. Мы имеем (*109*, стр. 114; *2*, стр. 119):

$$x^2=\frac{(\rho^2-a^2)(\mu^2-a^2)(\nu^2-a^2)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)};$$

$$y^2=\frac{(\rho^2-b^2)(\mu^2-b^2)(\nu^2-b^2)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)};$$

$$z^2=\frac{(\rho^2-c^2)(\mu^2-c^2)(\nu^2-c^2)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}.$$

В данном октанте знаки перед корнями x, y, z одинаковы.

В новых эллиптических координатах волновое уравнение будет иметь вид:

$$\frac{1}{\alpha\beta\gamma}\left\{\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\beta\gamma}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{\gamma\alpha}{\beta}\frac{\partial u}{\partial\mu}\right)+\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{\alpha\beta}{\gamma}\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)\right\}+k^2u=0, \qquad (1)$$

где

$$-(\mu^2-\nu^2)\alpha^2=\frac{(\rho^2-\mu^2)\,(\mu^2-\nu^2)\,(\nu^2-\rho^2)}{(\rho^2-a^2)\,(\rho^2-b^2)\,(\rho^2-c^2)}\cdot\rho^2;$$

$$-(\nu^2-\rho^2)\beta^2=\frac{(\rho^2-\mu^2)\,(\mu^2-\nu^2)\,(\nu^2-\rho^2)}{(\mu^2-a^2)\,(\mu^2-b^2)\,(\mu^2-c^2)}\cdot\mu^2;$$

$$-(\rho^2-\mu^2)\gamma^2=\frac{(\rho^2-\mu^2)\,(\mu^2-\nu^2)\,(\nu^2-\rho^2)}{(\nu^2-a^2)\,(\nu^2-b^2)\,(\nu^2-c^2)}\cdot\nu^2.$$

Умножив на $\alpha\beta\gamma$ и затем введя ABC (см. ниже), мы получим (1) в виде:

$$\sum(\mu^2-\nu^2)\,A\,\frac{\partial}{\partial\rho}\left(A\,\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)=H(\rho^2-\mu^2)(\mu^2-\nu^2)(\nu^2-\rho^2)\,u, \qquad (2)$$

где

$$A^2\rho^2=(\rho^2-a^2)(\rho^2-b^2)\,(\rho^2-c^2);$$
$$B^2\mu^2=(\mu^2-a^2)(\mu^2-b^2)\,(\mu^2-c^2);$$
$$C^2\nu^2=(\nu^2-a^2)(\nu^2-b^2)\,(\nu^2-c^2);$$
$$H=k^2,$$

где $\sum$ означает циклическую перестановку ρ, μ, ν с последующим суммированием. Отделяя в уравнении (2) переменные

$$u=R(\rho)\cdot M(\mu)\cdot N(\nu),$$

считаем сначала μ и ν постоянными; затем ρ и ν и наконец ρ и μ. Окончательно получаем уравнения (*106*, стр. 134, уравнение 42):

$$A\,\frac{d}{d\rho}\left(A\,\frac{dR}{d\rho}\right)+(H\rho^4+K\rho^2+L)\,R=0; \qquad (3a)$$

$$B\,\frac{d}{d\mu}\left(B\,\frac{dM}{d\mu}\right)+(H\mu^4+K\mu^2+L)\,M=0; \qquad (3b)$$

$$C\,\frac{d}{d\nu}\left(C\,\frac{dN}{d\nu}\right)+(H\nu^4+K\nu^2+L)\,N=0 \qquad (3c)$$

(простые соображения к этим преобразованиям указаны в *98* стр. 627).

Система дифференциальных уравнений (3) фактически переходит в (2), если (3a) умножить на $(\mu^2-\nu^2)\,MN$, а (3b) на $(\nu^2-\rho^2)\,RN$ и (3c) на $(\rho^2-\mu^2)\,RM$; затем сложить и воспользоваться тождествами:

$$L\left\{(\mu^2-\nu^2)+(\nu^2-\rho^2)+(\rho^2-\mu^2)\right\}=0;$$
$$K\left\{\rho^2(\mu^2-\nu^2)+\mu^2(\nu^2-\rho^2)+\nu^2(\rho^2-\mu^2)\right\}=0.$$

Таким образом получается уравнение Ляме в его наиболее общей форме.

d) Эллиптический цилиндр

Ось цилиндра направлена вдоль z-оси. Формулы преобразования следующие:

$$x=c\cdot\operatorname{ch}\xi\cdot\cos\eta;$$
$$y=c\cdot\operatorname{sh}\xi\cdot\sin\eta. \qquad (1)$$

Здесь c—линейный эксцентриситет эллиптического сечения; η—меняется от $-\pi$ до $+\pi$, ξ—от 0 до ∞. В предельном случае $\xi\to\infty$ и одновременно $c\to 0$, при чем $\frac{1}{2}\,c\cdot e^{\xi}\to r$ (остается конечным), мы получаем обычные цилиндрические координаты:

$$x=r\cos\varphi;$$
$$y=r\sin\varphi.$$

Посредством уравнения (1) приведем „двухмерное" волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+k^2u=0$$

к виду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=-u\cdot 2h^2(\operatorname{ch}2\xi-\cos 2\eta);\quad 2h^2=k^2\,\frac{c^2}{2},$$

которое после разделения переменных

$$u=\Xi(\xi)\cdot H(\eta)$$

переходит в два дифференциальных уравнения:

$$\frac{d^2\Xi}{d\xi^2}+\Xi\,(-\Delta+2h^2\operatorname{ch}2\xi)=0, \qquad (2a)$$

$$\frac{d^2H}{d\eta^2}+H\,(\Delta-2h^2\cos 2\eta)=0. \qquad (2b)$$

Значение постоянной Δ будет определено ниже. Заметим предварительно, что (2b) переходит в (2a), если в последнем заменить η на $i\xi$ $(i=\sqrt{-1})$. Оба эти уравнения называются уравнениями Матье. В вышеприведенном предельном случае цилиндрических координат $h=0$ уравнения Матье переходят в уравнение Бесселя и уравнение экспоненциальных функций (см. III, 6b).

e) Замечание к наименованиям: дифференциальные уравнения Ляме и Матье

Дифференциальные уравнения 1 (2) и (3) раздела I, 1c с $k^2=0$ получены впервые Г. Ляме [J. math. (Liouville), vol 2 (1837), стр. 147—183], откуда взяты их названия. Дифференциальное уравнение с $k\neq 0$, так называемое волновое уравнение, было вначале мало исследовано. Так как оно одинаково по типу с случаем $k=0$, мы называем его также уравнением Ляме; функции, ему удовлетворяющие,—функциями Ляме, хотя в литературе это название прилагается к случаю $k=0$. Отметим оба случая ($k=0$ и $k\neq 0$) названиями: „Потенциальная функция Ляме" и „Волновая функция Ляме". В случае вращательной симметрии (раздел I, 1a и I, 1b) мы будем всегда говорить — уравнение Ляме, хотя (напр. при $k=0$) уравнения переходят в уравнения шаровых функций. Уравнения (2) (раздел I, 1d) получены впервые Э. Матье [J. Math. (Liouville), vol. 13 (1868) стр. 137—203] и решены им при помощи рядов.

2. Проблемы волновой механики

Уравнения типа Ляме и Матье и родственные им появляются в волновой механике в двух случаях: 1) в случае, аналогичном задаче распространения волн в среде с периодической структурой; в частности, при расчете движения электронов в атомной решетке; 2) при квантовании асимметричного волчка.

a) Движение электронов в одномерной атомной решетке

Одномерное движение электрона с кинетической энергией T описывается в волновой механике дифференциальным уравнением (*118*, стр. 42):

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{8\pi^2 m}{h^2}\,T\psi=0$$

(h — постоянная Планка; m—масса электрона).

Общую энергию электрона E считаем постоянной, в то время как потенциальная энергия V определяется полем вначале неподвижного остатка атомной решетки, так что $T=E-V$. Поле атома решетки является периодическим, следовательно функция V периодична с основным периодом, равным удвоенному расстоянию между двумя соседними атомами. При соответствующем выборе единицы длины x уравнение переходит в (*130*; *7*; *8*; *9*; *10*; *99*; *76*; *77*; *137*; *14*)

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+(A-\Phi)\,\psi=0. \qquad (1)$$

В уравнении (1) Φ—периодическая функция x с периодом 2π, A—постоянная. Мы получаем дифференциальное уравнение более

общего типа, нежели уравнения Ляме и Матье. Последнее получается при $\Phi=a\cos x$. Уравнение типа (1) назовем уравнением Хилла (*46*, см. II).

Заметим, что уравнение типа (1) встречается при рассмотрении процессов распространения волн в одномерной среде с периодической структурой. Практически важен случай распространения электромагнитных волн вдоль проводника с периодической структурой (*113*; *12*; *105*; *136*); уравнение (1) встречается в теории волновых фильтров и цепочечных проводников. Как пример такого процесса распространения волн, мы рассмотрели собственные колебания струны (*127a*) с периодической структурой, которые также описываются уравнением (1).

b) Квантование асимметричного волчка (*60*; *61*; *73*; *74*; *75*)

По Э. Шредингеру волновое уравнение асимметричного волчка может быть получено нижеследующим путем. Волновое уравнение в координатах x, y, z таково:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}+\frac{8\pi^2E}{h^2}\,\Psi=0,$$

где E — енергия в стационарном состоянии, h — постоянная Планка.

В новых координатах волновое уравнение примет вид, указанный в I, 1.

Преобразуем уравнение к эллиптическим поверхностным координатам μ, ν:

$$a\geqslant\mu\geqslant b\geqslant\nu\geqslant c,$$

где $1/a$, $1/b$ и $1/c$—моменты инерции волчка; после отделения переменных

$$\Psi(\mu\nu)=M(\mu)\cdot N(\nu)$$

получаем:

$$\sqrt{-4f(\mu)}\,\frac{d}{d\mu}\left(\sqrt{-4f}\,\frac{dM}{d\mu}\right)=\left(-\frac{8\pi^2E}{h^2}+L\mu\right)M;$$

$$\sqrt{-4f(\nu)}\,\frac{d}{d\nu}\left(\sqrt{-4f}\,\frac{dN}{d\nu}\right)=\left(+\frac{8\pi^2E}{h^2}-L\nu\right)N,$$

где $f(\nu)=(a-\nu)(b-\nu)(c-\nu)$.

Заметим, что эти уравнения аналогичны уравнениям (3a), (3b) и (3c) раздела I, 1c, если положить в них $H=0$ и заменить a^2, b^2, c^2 через a, b, c и μ^2, ν^2,—через μ, ν. Определение L и E является задачей, разрешимой при помощи теории потенциального уравнения Ляме (см. VII, 2) ($k=0$).

3. Гидродинамические проблемы

Проблемы гидродинамики, приводящие к уравнениям Ляме, Матье или к более общему Хилла, делятся на три группы. Первая охватывает движение эллипсоида и эллиптического цилиндра в идеальной жидкости (*78*). Близкими являются вопросы распределения электрического или магнитного поля вокруг проводящих или намагничиваемых тел указанной формы (*29*, стр. 357, 128, 133, 134). Вторая группа — это вопросы космогонии, охватывающие вид и равновесие неподвижных или вращающихся небесных тел, полностью или частично жидких, частицы которых притягиваются согласно законам Ньютона (*78*, *65*, *83*, *84*, *2*, *109*). Третья группа проблем аналогична проблемам, указанным в разделе I, 1, охватывая вопросы распространения волн в идеальной жидкости (также в газообразных средах) (*78*; *115*, II), например при акустическом возбуждении посредством плоской, свободно колеблющейся круглой пластинки в бесконечной окружающей ее атмосфере (V, 3). Весьма близкими к последней группе проблем являются исследования о распространении электромагнитных волн при целесообразно выбранной эллиптической системе координат (ср. V и VI). Сюда же относится вопрос о собственных колебаниях воды в каналах эллиптической формы.

а) Движение эллипсоида и эллиптического цилиндра в идеальной жидкости

При расчете движения идеальной жидкости вводят потенциальную функцию так, что скорость в любой точке является нормальной производной от нее. Этим векторная проблема (скорости) сводится к скалярной. Потенциал скоростей удовлетворяет при стационарном движении уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0.$$

Если это движение связано с эллипсоидом или эллиптическим цилиндром, то целесообразно ввести эллиптические координаты. Относящиеся сюда формулы указаны в разделе I, 1, где нужно положить $k^2=0$. Как пример можно указать также на течение жидкости через круглое или эллиптическое отверстие в бесконечной плоской стене. Решение этой гидродинамической проблемы может быть использовано в электрической и магнитной задачах. Например, поляризация проводящего эллипсоида в однородном (до внесения тела) поле; распределение магнитных силовых линий вокруг эллипсоида с бесконечно большой проницаемостью, внесенного в однородное поле; экранирование однородного электрического поля посредством тонкой плоской проводящей пластинки с круговым отверстием и т. д.

b) Фигуры равновесия жидких масс

Потенциал V внутри однородного эллипсоида может быть рассчитан при помощи функций Ляме. Если эллипсоид вращается вокруг оси x с угловой скоростью ω, то его поверхность удовлетворяет уравнению

$$V+\frac{1}{2}\,\omega^2(y^2-z^2)=\text{const}.$$

Решениями этого уравнения являются поверхности, ограничивающие находящиеся в равновесии жидкие массы. А. Пуанкаре исследовал, при каких малых возмущениях полученные поверхности стабильны. При этом были применены функции Ляме. Джинс уклонился от применения функций Ляме и воспользовался прямоугольной системой координат. О применении уравнения Ляме в астрономии и космогонии даются указания в литературе (*2*; *109*; *65*).

с) Собственные колебания воды в эллиптическом сосуде

Мы рассмотрим сосуд (*78*; *111*, III) постоянной глубины D и эллиптического сечения. Ограничивающий эллипс является конфокальным эллипсом (I, 1d) с $\xi=\xi_0$. ζ является местным возвышением водяной поверхности над уровнем в состоянии равновесия, ω — угловая скорость вращения земли, g — земное ускорение, t — время. Тогда ζ определяется уравнением (*78*, стр. 329, уравнение 3)

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}-\frac{4\omega^2}{gD}\,\zeta=\frac{1}{gD}\,\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}. \tag{1}$$

Это уравнение дает при подстановке $\zeta=u(x,y)\,e^{i\omega t}$ и преобразовании к эллиптическим координатам по (I, 1d) оба уравнения Матье.

4. Механические и электрические проблемы

Дифференциальные уравнения Хилла, Ляме и Матье встречаются в различных проблемах механики. Мы рассмотрим здесь задачи с начальными условиями, т. е. такие задачи, в которых в определенный момент времени дано состояние и ищется движение в последующие моменты времени. При этом чрезвычайно важно знать, стабильно ли (устойчиво) движение, т. е. остаются амплитуды конечными с течением времени, или лабильно (неустойчиво), т. е. теоретически амплитуда неограниченно возрастает. Здесь же отметим, что механические (а также электрические) задачи с начальными условиями делятся на два типа; первый отвечает движению в периодическом, со временем меняющемся силовом поле, второй тип приводит к теории нелинейных колебаний.

a) Движение материальной точки в периодически меняющемся во времени силовом поле

Масса m движется под влиянием силы K:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=K.$$

Полагаем силу K пропорциональной x и, кроме того, периодической функцией времени. Приходим к дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{1}{m}[a+\Phi(t)]\,x=0, \qquad (1)$$

где Φ—периодическая функция t. Физически (*140, 141, 125, 122, 48, 40, 41, 120, 97, 101, 25, 21, 113, 115*, I, стр. 82) это может быть осуществлено в виде маятника (масса на невесомом твердом стержне), подвешенного к колеблющейся точке. Периодическое силовое поле осуществляется маленьким перемещением вверх и вниз точки подвеса. Этим же уравнением (1) описывается движение каждой точки струны, напряжение которой периодически меняется (*113, 125*). Движение луны вокруг земли с учетом вторичного действия солнца (*110, 111*) может быть рассмотрено, как движение в периодически меняющемся силовом поле.

Расчет движения перигелия лунной орбиты приводит фактически к уравнению (1) (*46*).

b) Электрические колебания в колебательном контуре, элементы которого периодически меняются во времени

Все сказанное выше о движении материальной точки легко переносится на случай электрических колебаний в колебательном контуре. Заряд Q конденсатора с емкостью C, замкнутого на сопротивление R и самоиндукцию L, зависит от времени t по уравнению:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{C}Q=0.$$

Если какая-либо из величин L, C или R меняется во времени t, то полученное дифференциальное уравнение после несложных преобразований переходит в уравнение типа Хилла (следует избавиться от $\frac{dQ}{dt}$). В специальном случае получаем уравнение Ляме или Матье, например при

$$R=0;\ C=C_0+C_1\sin\omega t;\quad C_1\ll C_0.$$

Контуры с периодически меняющимися во времени L, C или R встречаются во многих случаях, например, динамомашины, зуммеры (*18*; *3*; *5*), регулятор Тирилля. Постановка задач во всех

этих проблемах аналогична. Вопрос устойчивости или неустойчивости контура тока играет в динамомашинах и регуляторах определенную роль. При изменении C (*113*, стр. 10, *27*), особенно важно знание Q в функции t.

c) Исследование устойчивости нелинейных колебательных процессов

При задачах с начальными условиями и дифференциальными уравнениямм типа Хилла, Ляме или Матье вводится исследование устойчивости определенных нелинейных колебательных процессов в таком виде (*26, 91, 85*): колебательный контур с нелинейной упругостью под действием синусоидальной во времени силы приводит к уравнению:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\alpha x-\gamma x^3=k\sin\omega t.$$

Решение его $x(t)$. Возьмем близкое решение

$$x(t)+z(t);\quad |z|\ll|x|.$$

$z(t)$ удовлетворяет в первом приближении дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2z}{dt^2}+(\alpha-3\gamma x^3)\,z=0. \qquad (1)$$

Разложим решение x в ряд Фурье

$$x=a_1\sin\omega t+a_3\sin 3\omega t+\ldots,$$

тогда очевидно уравнение (1) приводится к уравнению с периодическими коэффициентами типа Хилла. Вопрос об устойчивости нелинейного решения x выяснится исследованием уравнения Хилла.

II. Дифференциальное уравнение Хилла

(*46*; *151*, стр. 414)

1. Дифференциальные уравнения математической физики, как частные случаи уравнения Хилла

Мы рассматриваем в настоящем разделе уравнение

$$\frac{d^2u}{dx^2}+[\lambda+\Phi(x)]\,u=0, \qquad (1)$$

где λ—параметр, а Φ—периодическая функция x с периодом 2π. Это уравнение было применено Хиллом (*46*) при расчете лунной траектории. Уравнение (1) содержит как частный случай уравнения Матье. В разделе IV, 1a, и IV, 6 мы покажем, что упомянутые в разделе I уравнения Ляме являются также частным случаем (1). Вообще, можно показать, что уравнение (1) содержит многие уравнения математической физики, как частный случай: 1) дифференциальное уравнение простых и присоединенных полиномов Лежандра; 2) гипергеометрическое дифференциальное уравнение с уравнениями Бесселя, Стокса, Лягерра, Эрмита и Шредингера, как частные случаи.

а) Дифференциальное уравнение полиномов Лежандра

Это уравнение гласит [*116*, I стр. 309 (14)]:

$$\frac{1}{\sin x}\frac{d}{dx}\left(\sin x\frac{dz}{dx}\right)-\frac{h^2z}{\sin^2 x}+\lambda z=0.$$

При подстановке:

$$z=ue^{-\frac{1}{2}\int^{x}\operatorname{ctg} x\cdot dx}=\frac{u}{\sqrt{\sin x}}$$

оно переходит в:

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\left(\lambda-\frac{h^2-\frac{1}{2}}{\sin^2 x}-\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^2 x\right)u=0,$$

которое, очевидно, является уравнением Хилла.

b) Гипергеометрическое дифференциальное уравнение

Это уравнение [*151*, стр. 337 (*B*)]

$$\frac{d^2w}{dz^2}+\left(l+\frac{k}{z}+\frac{\frac{1}{4}+\lambda}{z^2}\right)w=0, \qquad (1)$$

где k и l постоянные, является обобщением дифференциальных уравнений Бесселя, Стокса, Лягерра (*20*, стр. 261), Эрмита (*20*, стр. 261) и Шредингера [*118*, стр. 3, уравнение (7)]. Все эти уравнения простыми преобразованиями приводятся к (1). Мы полагаем в (1)

$$z=e^x;\quad u\,e^{\frac{x}{2}}=w$$

и получаем

$$\frac{d^2u}{dx^2}+u\,(\lambda+l\,e^{2x}+k\,e^x)=0. \qquad (2)$$

Это, очевидно, уравнение Хилла с чисто мнимым периодом $2\pi i$. Многочисленные физические и технические приложения ограничиваются рассмотрением уравнения Хилла с вещественными переменными, функциями, периодами и параметрами. Случай комплексных параметров и переменных рассмотрен еще далеко неисчерпывающе.

2. Общие теоремы об уравнении Хилла

Флоке показал, что может быть построено решение $u(x)$ уравнения Хилла такого рода, что

$$u(x+2\pi)=\sigma u(x), \qquad (1)$$

где σ в общем случае—комплексная постоянная. Это так называемая теорема Флоке (*28*). Если u_1 и u_2 два линейно независимых решения (1), II, 1, удовлетворяющих условиям:

$$u_1(0)=1;\quad u_2(0)=0,$$

$$u_1'(0)=0;\quad u_2'(0)=1,$$

то

$$\sigma^2-\sigma\left\{u_1(2\pi)+u_2'(2\pi)\right\}+1=0. \qquad (2)$$

Можно показать, что каждому выбору u_1 и u_2 соответствуют одни и те же значения σ. Для этого нужно новые функции u_1 и u_2 выразить через старые.

а) Устойчивые и неустойчивые решения уравнения Хилла

Полагая

$$\sigma=e^{\pm 2\pi\mu},$$

мы получим:

$$\operatorname{ch} 2\pi\mu=\frac{1}{2}\left\{u_1(2\pi)+u_2'(2\pi)\right\}. \qquad (1)$$

μ называется характеристическим показателем уравнения Хилла. Ограничиваясь реальными решениями u_1 и u_2, получаем из уравнения (1) значения для $2\pi\mu$: реальное, чисто мнимое, комплексное с мнимой частью, равной $n\pi\sqrt{-1}$ (n — целое число). Двум возможным знакам перед μ соответствуют два возможных значения σ из уравнения (2) предыдущего раздела. Очевидно, что $|\sigma|=1$, когда μ — чисто мнимое. Напротив $|\sigma|\gtrless 1$, когда μ реальное или комплексное число. В первом случае решение уравнения Хилла, ограниченное при каком-либо значении x, остается ограниченным для всех x. Такое решение мы назовем устойчивым (стабильным). Во втором случае, наоборот, дается решение u, которое хотя для некоторого x ограничено, но при изменении x растет по абсолютной величине выше всякого предела. Такое решение уравнения Хилла называется неустойчивым (лабильным). Характеристический показатель зависит только от параметров уравнения Хилла [от λ и $\Phi(x)$]; можно при заданной функции $\Phi(x)$ так выбрать λ, что решения уравнения Хилла получаются устойчивыми или неустойчивыми.

Мы будем для краткости называть их устойчивые или неустойчивые λ-значения.

b) Теорема Гаупта об устойчивых и неустойчивых значениях

Дискриминант квадратного уравнения (2) из II, 2 для σ гласит:

$$\Delta \equiv F_1(\lambda)\cdot F_2(\lambda)=\left\{u_1(2\pi)+u_2'(2\pi)-2\right\}\left\{u_1(2\pi)+u_2'(2\pi)+2\right\}. \quad (1)$$

F_1 и F_2 не могут одновременно обратиться в нуль; мы имеем для $F_1=0$: $\sigma=1$ и для $F_2=0$: $\sigma=-1$. Решения, отвечающие первому значению σ, называются целопериодическими; решения, отвечающие второму значению σ, — полупериодическими (период 2π и 4π). Назовем через λ параметрическое значение (собственное значение), которое отвечает целопериодическому решению, и $\overline{\lambda}$ то же самое, только отвечающее полупериодическому решению; можно показать, что λ и $\overline{\lambda}$ образуют счетное множество.

Мы обозначим ряды через $\lambda_0\lambda_1\ldots$; $\overline{\lambda}_0\overline{\lambda}_1\ldots$ Теорема осцилляции гласит: решения (собственные функции), соответствующие λ_{2i-1} и λ_{2i}, имеют в интервале $0\leqslant x<2\pi$ все $2i$ нулей; каждая собственная функция, соответствующая $\overline{\lambda}_{2i-1}$ и $\overline{\lambda}_{2i}$, наоборот, $2i-1$ нулей. Следовательно имеем:

$$\lambda_0<\overline{\lambda}_1\leqslant\overline{\lambda}_2<\lambda_1\leqslant\lambda_2<\ldots.<\overline{\lambda}_{2i-1}\leqslant\overline{\lambda}_{2i}<\lambda_{2i-1}\leqslant\lambda_{2i}.$$

Выскажем это: если параметр λ уравнения Хилла пробегает все значения, то после двух полу- или целопериодических собственных чисел следует два цело- или полупериодических собственных числа. Наименьшим по абсолютной величине является целопериодическое собственное число. Трансцендентные уравнения для λ: ($F_1=0$ или $F_2=0$) обладают максимум двойными нулями, которым соответствует двукратное собственное число; F_1 и F_2 меняют знак только при простых собственных значениях. Далее, для очень больших отрицательных значений λ, F_1 и F_2 остаются положительными. Следовательно, имеем:

$$\begin{array}{lll} F_1>0 & \text{для} & \lambda<\lambda_0 \\ F_1<0 & \text{„} & \lambda_{2i}<\lambda<\lambda_{2i+1} \\ F_1>0 & \text{„} & \lambda_{2i+1}<\lambda<\lambda_{2i+2} \end{array}\Bigg\}\ i=0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots$$

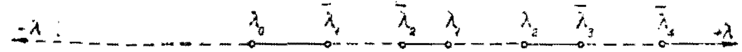
. . . .

$$\begin{array}{lll} F_2>0 & \text{для} & \lambda<\overline{\lambda}_1 \\ F_2<0 & \text{„} & \overline{\lambda}_{2i-1}<\lambda<\overline{\lambda}_{2i} \\ F_2>0 & \text{„} & \overline{\lambda}_{2i}<\lambda<\overline{\lambda}_{2i+1} \end{array}\Bigg\}\ i=1,\ 2,\ 3\ldots$$

Если $\lambda_{2i}=\lambda_{2i+1}$, или $\lambda_{2i-1}=\lambda_{2i}$, то соответствующее неравенство отпадает.

Из предыдущего следует: I. Два независимых решения уравнения Хилла только тогда оба устойчивы, когда параметр λ меняется вдоль реальной оси λ в интервале, лишенном фундаментальных значений, и границами которого являются два фундаментальных числа „неодинакового рода“ (полу-или целопериодических). Если одна из граничных точек является двойным фундаментальным числом, то в ней устойчивость сохраняется.

II. Решение неустойчиво, когда: a) λ меньше упомянутого выше наименьшего собственного числа λ_0, b) λ меняется в интервале реальной оси λ, ограниченном двумя фундаментальными числами одинакового рода (оба полу- или оба целопериодические). В случае предложения I все решения уравнения Хилла устойчивы; это следует из того факта, что оба значения μ являются здесь мнимыми и сопряженными. В случае предложения II дается одно решение неустойчивое и одно устойчивое, если оба значения μ имеют реальные части с разными знаками. Для границ между устойчивыми и неустойчивыми λ-интервалами мы далее докажем, когда здесь имеет место устойчивое или неустойчивое решение. Только в том случае, когда граничная точка является двойным собственным значением, все решения будут устойчивы.



Фиг. 1.

λ — интервалы, отвечающие устойчивым и неустойчивым решениям, даны на фиг. 1, при чем области неустойчивости даны пунктиром, области устойчивости—жирной линией.

c) Дальнейшие вопросы об уравнении Хилла

Упомянутые выше общие предложения относятся к случаю реальной функции Φ и реального параметра λ. В разделе II,1 показано, что появляющиеся в прикладной математике дифференциальные уравнения этому условию не удовлетворяют. Ряд проблем, удовлетворяющих этому условию, будет рассмотрен ниже. Пусть аргумент x пробегает непрерывную кривую в комплексной плоскости x. Однозначная функция Φ пробегает при этом непрерывную кривую в плоскости Φ. Для каждого значения λ ищутся все (комплексные) значения, при которых решение уравнения Хилла устойчиво или неустойчиво. В литературе этому вопросу посвящено мало работ. Нам кажется, что дальнейшее развитие работ Ф. Клейна (*71*) и Е. Хилба (*44*, *45*) может дать ряд указаний по этому вопросу.

3. Дифференциальное уравнение Хилла с ограниченной функцией Ф и двумя параметрами

При рассмотрении вопросов, относящихся к уравнению Матье, рекомендуется уравнение Хилла написать в форме:

$$\frac{d^2u}{dx^2}+[\lambda+\gamma\Phi(x)]\,u=0, \qquad (1)$$

где $\Phi(x)$ ограниченная, дважды дифференцируемая, вещественная периодическая функция с периодом 2π и с $\int\limits_0^{2\pi}\Phi(x)\,dx = 0$.

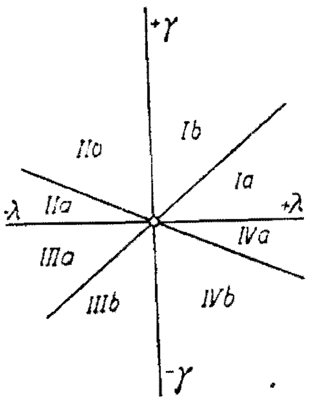
Обозначим через Φ_{max} абсолютное значение наибольшего, через Φ_{min}—абсолютное значение наименьшего значения Φ. Если оба параметра λ и γ, или меньший из них, велики по абсолютной величине в сравнении с (1), то удается без $\Phi(x)$ дать такую специальную форму, введение которой, в зависимости от λ и γ, дает устойчивое или неустойчивое решение. Представим λ и γ в плоскости как прямоугольные координаты. В этой плоскости будем различать восемь различных областей (фиг. 2):

λ и γ положит., (Ia) $\lambda \geqslant \gamma\Phi_{min}$	λ и γ положит., (Ib) $\lambda \leqslant \gamma\Phi_{min}$
λ отриц., γ полож., (IIa) $\lvert\lambda\rvert \geqslant \gamma\Phi_{max}$	λ отриц., γ положит., (IIb) $\lvert\lambda\rvert \leqslant \gamma\Phi_{max}$
λ и γ отриц., (IIIa) $\lvert\lambda\rvert \geqslant \lvert\gamma\rvert\Phi_{min}$	λ и γ отриц., (IIIb) $\lvert\lambda\rvert \leqslant \lvert\gamma\rvert\Phi_{min}$
λ полож., γ отриц., (IV*a*) $\lvert\lambda\rvert \geqslant \lvert\gamma\rvert\Phi_{max}$	λ полож., γ отриц., (IVb) $\lambda \leqslant \lvert\gamma\rvert\Phi_{max}$.

Мы рассмотрим случай: $|\lambda|+|\gamma| \gg 1$, что в области (а) равнозначно с $|\lambda| \gg 1$; $|\gamma|$ конечно или нуль; в области (b) наоборот

$$|\gamma| \gg 1;$$

$|\lambda|$ конечно или нуль. Мы рассчитаем теперь для различных областей асимптотические значения характеристического показателя μ.



Фиг. 2.

a) Асимптотический расчет характеристических показателей

В области (а) можно асимптотически рассчитать *(132)* характеристический показатель посредством преобразования (*86а*, стр. 22, *20*, стр. 276, 316).

$$z=u\left(1+\frac{\gamma}{\lambda}\Phi\right)^{\frac{1}{4}};\quad t=\int\limits_0^x\left(1+\frac{\gamma}{\lambda}\Phi\right)^{\frac{1}{2}}dx,$$

откуда следует:

в областях (Ia) и (IVa):

$$\mathrm{ch}\,2\pi\mu=\cos\int\limits_0^{2\pi}(\lambda+\gamma\Phi)^{\frac{1}{2}}\,dx+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}; \qquad (1)$$

в областях (IIa) и (IIIa):

$$\mathrm{ch}\,2\pi\mu=\mathrm{ch}\int\limits_0^{2\pi}(|\lambda|\mp|\gamma|\Phi)^{\frac{1}{2}}dx\left\{1+O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}. \qquad (2)$$

В области (b) асимптотически рассчитать μ можно посредством преобразования:

$$z=u\left(\frac{\lambda}{\gamma}+\Phi\right)^{\frac{1}{4}};\quad t=\int\limits_0^x\left(\frac{\lambda}{\gamma}+\Phi\right)^{\frac{1}{2}}dx.$$

В областях (Ib), (IIb), (IIIb) и (IVb) находим:

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{ch}\,2\pi\mu=\mathrm{ch}\left\{\mathrm{Im}\left(\int\limits_0^{2\pi}(\lambda+\gamma\Phi)^{\frac{1}{2}}dx\right)\right\}\cdot\cos\left\{\mathrm{Re}\left(\int\limits_0^{2\pi}(\lambda+\gamma\Phi)^{\frac{1}{2}}dx\right)\right\}\cdot\\ \cdot\left\{1+O\left(\frac{1}{|\gamma|}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}.\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Из этих формул следует, что в областях (Ia) и (IVa) получаются для каждого данного мнимого значения μ_0 и вещественных γ счетное множество значений λ такого рода, которые дают решение уравнения Хилла с характеристическим показателем μ_0. В областях (Ib), (IIb), (IIIb) и (IVb) получаются для каждого данного вещественного или мнимого значения μ_0 и вещественных λ счетное множество значений γ, дающих решение уравнения Хилла с характеристическим показателем μ_0. Если относящиеся к данному μ значения λ или γ лежат дискретно, то может быть применена теорема об осцилляции Клейна. Легко провести также асимптотический расчет.

b) Предложение о параметрах, относящихся к устойчивым и неустойчивым решениям

Мы можем в плоскости λ, γ различать области, в которых находятся параметры, дающие только устойчивые или только неустойчивые решения. Основная цель рассматриваемого здесь предложения — распределить области по значениям абсолютных величин параметров. Сначала легче всего из уравнений (1) и (2) разд. II, 3а доказать справедливость предложений Гаупта I и II из II, 2b. Мы полагаем, что в области устойчивости $2\pi\mu$ мнимо $\neq n\pi\sqrt{-1}$ (n—целое число), в области неустойчивости—реально (возможно с мнимой частью, равной $n\pi\sqrt{-1}$); для целопериодических решений $2\pi\mu$ равно $2n\pi\sqrt{-1}$ и для полупериодических решений равно $(2n+1)\pi\sqrt{-1}$. Мы можем теперь сказать: области (Ia) и (IVa) являются асимптотически областями устойчивых решений с узкими полосами неустойчивости, начинающимися в точках положительной λ-оси: $\lambda=n^2$. Области (b) являются асимптотически областями неустойчивых решений, пересекаемые узкими полосами устойчивости. Области (IIa) и (IIIa) являются асимптотически областями неустойчивых решений. Из (3) раздела II, 3a следует, что в области (b) два полупериодических значения λ (или γ) или два целопериодических значения λ (или γ) не совпадают. Поэтому можно в области b асимптотически исключить возможность появления двойных точек граничных кривых между областями устойчивых и неустойчивых решений. Из уравнения (3) II, 3a следует, что каждому данному $|\lambda|$ может соответствовать два (одно положительное и одно отрицательное) значения γ_0 такого рода, что для всех $|\gamma|$, больших нежели $|\gamma_0|$, устойчивые интервалы γ обладают шириной, меньшей любого произвольного маленького положительного числа. С другой стороны, из (1) II, 3a следует данное О. Гауптом предложение, которое можно формулировать так: каждому данному $|\gamma|$ можно сопоставить одно положительное значение λ такого рода, что для всех λ, больших этого значения, неустойчивые λ-интервалы обладают шириной, меньшей любого малого положительного числа. Из рассмотрения формулы (3), II, 3a следует *(132)*, что в области (b) при заданном $|\gamma|$ λ-интервалы, соответствующие мнимому μ (интервалы устойчивости), становятся меньше, когда λ переходит от положительных к отрицательным значениям.

Мы получаем отсюда наименьшие устойчивые λ-интервалы в областях (IIb), (IIIb).

c) Асимптотический расчет цело- и полупериодических фундаментальных значений (чисел)

Можно выведенные выше заключения применить к асимптотическому расчету цело- и полупериодических фундаментальных чисел в областях (IIb) и (IIIb) плоскости $\lambda\gamma$ *(132)*. Этот расчет исходит из того, что граничные кривые между областями устойчивых и неустойчивых решений попарно асимптотически совпадают с кривыми, определяемыми уравнением:

$$\operatorname{ch} 2\pi\mu=0. \qquad (1)$$

Отсюда следует, что в области (IIb) асимптотический ход граничных кривых между областями устойчивых и неустойчивых решений уравнения Хилла дается посредством:

$$\frac{\lambda}{\gamma}=-\Phi_{max}+O\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right); \quad (O \text{ полож.}) \qquad (2)$$

в области (IIIb) посредством:

$$\frac{\lambda}{\gamma}=+\Phi_{min}-O\left(\frac{1}{\sqrt{|\gamma|}}\right); \quad (O \text{ полож.}). \qquad (3)$$

Граничные кривые в этой области имеют все более прямолинейный характер при возрастающем $|\gamma|$, но асимптотой все же не обладают. В некоторых случаях в ряде, представляемом символом O, может отсутствовать член $(\sqrt{|\gamma|})^{-1}$; этот случай дает асимптоты граничной кривой *(54)*. Уравнения (2), (3) действительны только в областях (IIb) и (IIIb). Пользуясь упомянутой ранее связью граничных кривых между областями устойчивых и неустойчивых решений с цело- или полупериодическими собственными значениями уравнения Хилла, мы можем сформулировать следующее предложение: в областях (IIb) и (IIIb) при $|\gamma|\rightarrow\infty$ целопериодические собственные значения λ уравнения Хилла совпадают с соседними полупериодическими. В области (IIb) совпадающие собственные значения даны посредством (2), в области (IIIb)—посредством (3). Интересно эти соотношения сравнить с таковыми же при $|\gamma|\rightarrow 0$. В последнем случае совпадают два соседние целопериодические собственные значения и также оба полупериодические.

4. Решение дифференциального уравнения Хилла

В разделе II, 3a мы занимались решением уравнения Хилла в том случае, когда наименьший параметр был очень велик по абсолютной величине. Легко обратиться к случаю, когда γ или γ и λ очень малы. В первом из названных случаев решение можно разложить по степеням γ; во втором случае по степеням λ и γ. Из работ Пуанкаре *(107)* известно, что решения уравнения Хилла являются целой функцией λ и γ и что полученные ряды при малых значениях параметров, наверное, сходятся. Мы применим в разделе III подобное разложение в ряд к уравнению Матье. Хилл *(46)* применил к уравнению, названному его именем, метод, весьма успешно примененный в ряде практических случаеb. Строгое обоснование этого метода дано А. Пуанкаре.

a) Метод Хилла

Разлагаем функцию $\Phi(x)$ уравнения Хилла в ряд Фурье и пишем:

$$\frac{d^2u}{dx^2}+u\left(\lambda+\gamma\sum_{m=-\infty}^{m=\infty}{}^{*} a_m e^{imx}\right)=0. \qquad (1)$$

На основании теоремы Флоке мы знаем, что это уравнение имеет решение вида:

$$u=e^{\mu x}\sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m e^{imx}. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1), мы получаем для бесконечно большого числа неизвестных коэффициентов b_n равное количество линейных однородных определяющих уравнений:

$$b_n(\mu^2+2\mu in-n^2+\lambda)+\gamma\sum_{m=-\infty}^{m=\infty}{}^{*}b_{n-m}\,a_m=0; \tag{3}$$

$$\ldots -3,\ -2,\ -1=n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots$$

Звездочка при знаке суммы в (1) и (3) означает, что член $m=0$ должен быть пропущен. Однородная система уравнений (3) имеет решение, аналогичное решению конечной системы однородных линейных уравнений с конечным числом неизвестных; ставится требование, чтобы детерминант, образованный из коэффициентов b_n, обращался в нуль:

$$\begin{vmatrix}
- & - & - & - & - & - & -\\
- & 1 & \frac{\gamma a_{-1}}{(\mu+2i)^2+\lambda} & \frac{\gamma a_{-2}}{(\mu+2i)^2+\lambda} & \frac{\gamma a_{-3}}{(\mu+2i)^2+\lambda} & \frac{\gamma a_{-4}}{(\mu+2i)^2+\lambda} & -\\
- & \frac{\gamma a_{+1}}{(\mu+i)^2+\lambda} & 1 & \frac{\gamma a_{-1}}{(\mu+i)^2+\lambda} & \frac{\gamma a_{-2}}{(\mu+i)^2+\lambda} & \frac{\gamma a_{-3}}{(\mu+i)^2+\lambda} & -\\
- & \frac{\gamma a_{+2}}{\mu^2+\lambda} & \frac{\gamma a_{+1}}{\mu^2+\lambda} & 1 & \frac{\gamma a_{-1}}{\mu^2+\lambda} & \frac{\gamma a_{-2}}{\mu^2+\lambda} & -\\
- & \frac{\gamma a_{+3}}{(\mu-i)^2+\lambda} & \frac{\gamma a_{+2}}{(\mu-i)^2+\lambda} & \frac{\gamma a_{+1}}{(\mu-i)^2+\lambda} & 1 & \frac{\gamma a_{-1}}{(\mu-i)^2+\lambda} & -\\
- & \frac{\gamma a_{+4}}{(\mu-2i)^2+\lambda} & \frac{\gamma a_{+3}}{(\mu-2i)^2+\lambda} & \frac{\gamma a_{+2}}{(\mu-2i)^2+\lambda} & \frac{\gamma a_{+1}}{(\mu-2i)^2+\lambda} & 1 & -\\
- & - & - & - & - & - & -
\end{vmatrix} \equiv$$

$$\equiv \Delta(\mu,\ \lambda,\ \gamma)=0. \tag{4}$$

При этом из соображений сходимости каждая строка детерминанта (4) должна быть разделена на $(\mu+in)^2+\lambda$; $n=0, \pm1, \pm2, \pm3\ldots$ Абсолютная сходимость детерминанта (4) следует из абсолютной сходимости $\sum a_m$ (*151*), стр. 415. Это уравнение дает при заданных λ и γ характеристический показатель μ. С другой стороны, из уравнения (4) следует величина λ (или γ) при заданном λ (или γ) и μ. В обоих случаях из уравнения (3) можно рассчитать коэффициенты b_n, как только μ, λ и γ определены из уравнения (4). Полное решение уравнения Хилла зависит только от расчета детерминанта Хилла (4). Можно показать (*151*, стр. 415), что расчет этого детерминанта (4) может быть произведен из расчета более простого детерминанта $\Delta(0)$, в котором положено $\mu=0$. Из (*151*, стр. 416; *111*, том II, 2-ая часть, стр. 52; *12*) имеем:

$$\Delta(0)=\frac{\sin^2\pi i\mu}{\sin^2\pi\sqrt{\lambda}}. \tag{5}$$

b) Функции Хилла

Назовем решения уравнения Хилла при чисто мнимом μ функцией Хилла. Согласно уравнению (2) раздела II, 4а, эти функции периодические с периодом $\frac{2\pi}{i\mu}$, если только $i\mu=\frac{1}{\mu_0}$, где μ_0 — целое число. Если $i\mu$ имеет форму $\frac{a}{b}$, где a и b целые числа (дробь не сократима), то период решения — $2\pi b$. Мы рассмотрим два частных случая: в первом $i\mu$ может быть целым числом, тогда период решения будет 2π, т. е. целопериодическое решение; во втором случае $i\mu=\frac{1}{2}+$целое число; в этом случае имеем полупериодическое решение (период 4π). В обоих случаях $e^{2\pi\mu}=\sigma=\pm1$. Данному μ соответствуют согласно уравнения (5) раздела II, 4а кривые в плоскости $\lambda\,\gamma$. Кривые, соответствующие чисто мнимым значениям μ, покрывают области устойчивости в плоскости $\lambda\gamma$. Решения уравнения Хилла в области устойчивости мы назвали выше функциями Хилла.

Отметим теперь, что для всех точек области устойчивости плоскости $\lambda\gamma$, которым соответствуют значения μ, дающие периодические функции Хилла, имеют место две линейно независимые функции Хилла. Исключением являются такие точки плоскости, для которых $i\mu$ целое число или $\frac{1}{2}+$целое число. Эти точки мы особо рассмотрим ниже.

Чтобы доказать упомянутое предложение, достаточно заметить, что точкам плоскости $\lambda\gamma$ соответствуют два сопряженных мнимых значения μ. Это следует из (2) раздела II, 2. Эти два значения μ дают согласно (3) II, 4а существование двум независимым решениям уравнения Хилла, обладающим этими периодами.

Перейдем теперь к случаям $i\mu$, равного целому числу или целому$+\frac{1}{2}$, и покажем, что в общем второе решение, линейно независимое от первого периодического решения, является непериодическим. Обозначим оба решения через u и v. Эти решения удовлетворяют уравнению:

$$u\frac{dv}{dx}-v\frac{du}{dx}=c,$$

где c — постоянная. Очевидно, что

$$v=Au+cu\int\limits_0^x\frac{dx}{u^2},$$

где A — постоянная интегрирования и путь интегрирования обходит нулевое значение (u).

Полагаем $A=0$ и придаем x слагаемое 2π:

$$v(x+2\pi)=cu(x+2\pi)\int\limits_0^{x+2\pi}\frac{dx}{u^2}=cu(x)\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{u^2}+cu(x)\int\limits_{2\pi}^{2\pi+x}\frac{dx}{u^2}.$$

Полагая ради сокращения $c\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{u^2}=b$, имеем:

$$v(x+2\pi)=bu(x)+cu(x)\int\limits_0^x\frac{dx}{u^2}=bu(x)+v(x).$$

Полагаем (*11*, стр. 145)

$$v(x)=\frac{b}{2\pi}xu(x)+w(x), \tag{1}$$

тогда

$$bu(x)+v(x)=\frac{b}{2\pi}xu(x)+bu(x)+w(x+2\pi)$$

или

$$w(x+2\pi)=w(x).$$

Второе, линейно независимое от первого, решение дифференциального уравнения имеет следовательно форму (1), где w — функция с периодом 2π; в общем случае оно не периодическое. Аналогичное происходит с полупериодическим случаем.

Особый случай имеет место, когда две кривые плоскости $\lambda\gamma$, принадлежащие цело- и полупериодическим решениям, пересекаются. В этом случае мы имеем в смысле II, 2b два совпадающих собственных значения; в рассматриваемой точке согласно предложению I раздела II, 2b имеем два устойчивых полу- или целопериодических линейно независимых решения (III, 3d). Из дифференциального уравнения можно усмотреть, что точки $\gamma=0$; $\lambda=n^2$ (n — целое число) плоскости $\lambda\gamma$ принадлежат к разбираемому роду, потому что они дают два линейно независимых периодических решения: $\sin nx$ и $\cos nx$.

III. Дифференциальное уравнение Матье

1. Общее решение уравнения Матье

При данных значениях параметров λ и h в дифференциальном уравнении Матье:

$$\frac{d^2u}{dx^2}+(\lambda-2h^2\cos 2x)u=0 \tag{1}$$

свойства двух линейно независимых решений вполне определены. Они определяются согласно раздела II, 4; расчет начинается с определения характеристического показателя μ. Если он определен, можно последовательно рассчитать коэффициенты разрешающего ряда. Заметим, что мы в уравнении (1) пишем

$\cos 2x$ в согласии с I, 1d, но уклоняясь от (1) раздела II, 1 для уравнения Хилла, где $\Phi(x)$ обладает периодом 2π. В уравнении Матье функция $\cos 2x$ обладает периодом π.

При такой записи (1) уравнения Матье мы получаем, например, целопериодические решения периода π и полупериодические решения периода 2π; соответствующие значения $i\mu\pi$ являются четным или нечетным целым числом, умноженным на π. Дальнейшие небольшие изменения при применении результатов раздела II к уравнению Матье (1) читатель легко поймет сам.

а) Свойства решений при заданных λ и h

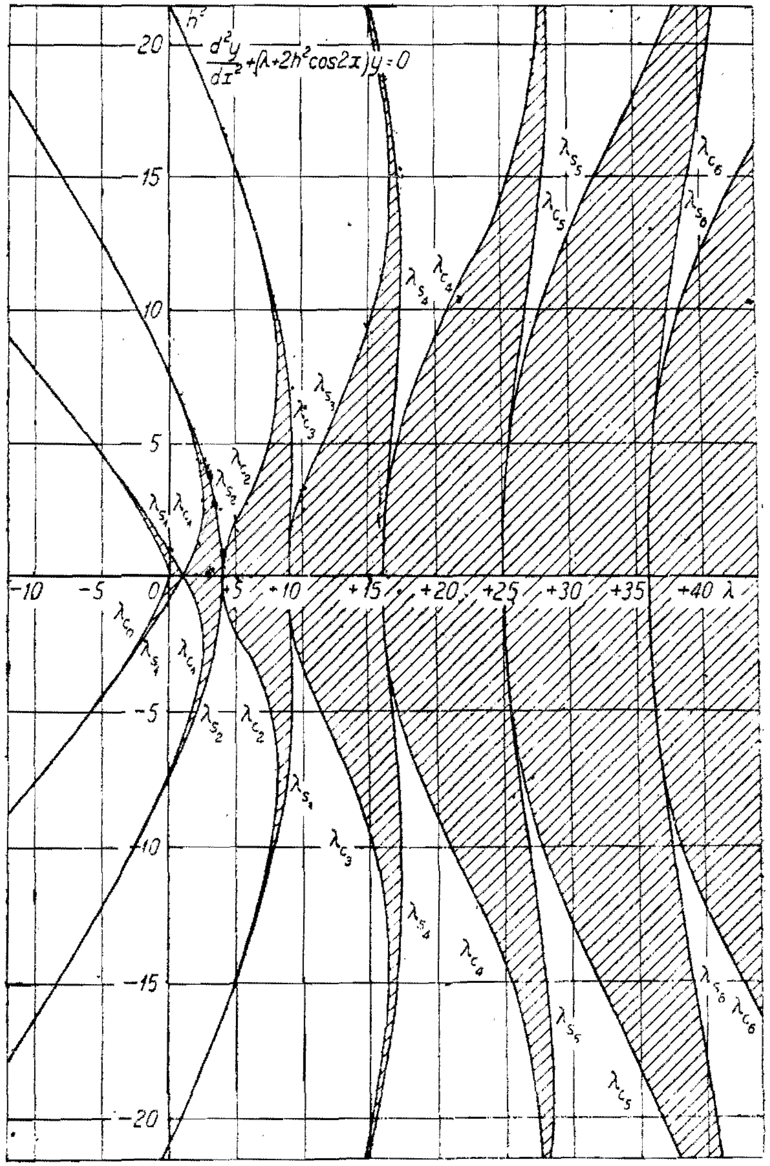
Общие свойства решений мы разберем на примере фиг. 3. Расчет этой фигуры приведен в разделах III, 2 и III, 3.

В заштрихованных областях фиг. 3 оба линейно независимых решения уравнения Матье устойчивы (область устойчивых решений); области, оставленные незаштрихованными, дают решение, которое при конечных начальных условиях при изменении x неограниченно возрастает по абсолютной величине (область неустойчивых решений). Вдоль граничных кривых, между областями устойчивых и неустойчивых решений имеем решения уравнения Матье с периодом π (целопериодическое решение) или 2π (полупериодическое решение). Предложение II, 2b дает при заданном h и λ, меняющемся в интервале (от ∞ до $+\infty$, сначала целопериодическое собственное значение λ, затем два полупериодических собственных числа, затем опять два целопериодических и т. д. Между двумя разноименными значениями λ лежит область устойчивых решений, между двумя одноименными — область неустойчивых решений. В разделах II, 3b и II, 4b мы уже упоминали, что области неустойчивых решений берут начало в точках $h=0$, $\lambda=n^2$. Это—двойные точки для граничных кривых между областями устойчивых и неустойчивых решений. Далее из фиг. 3 видно, в соответствии с предложениями разделов II, 3b и II, 3c, что в области (b) для больших значений h области устойчивых решений становятся очень узкими, тем уже, чем меньше λ, при заданном значении h.

b) Расчет характеристического показателя из детерминанта Хилла

Для каждой данной пары λ, h легко найти численное решение уравнения Матье, если только известно μ. Первый путь здесь—детерминант Хилла; из него следует:

$$\left.\begin{aligned}&\sin^2\left(\frac{i\pi\mu}{2}\right)=\Delta(0)\cdot\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right)\\ &\text{или}\\ &\operatorname{ch}\pi\mu=1+2\Delta(0)\cdot\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right),\end{aligned}\right\} \tag{1}$$



Фиг. 3.

где

$$\Delta(0)\equiv\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \frac{-2h^2}{\lambda-4} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 1 & \frac{-2h^2}{\lambda-1} & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \frac{-2h^2}{\lambda} & 1 & \frac{-2h^2}{\lambda} & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \frac{-2h^2}{\lambda-1} & 1 & \frac{-2h^2}{\lambda-1} & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & \frac{-2h^2}{\lambda-4} & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Для малых значений h можно ограничиться тремя центральными строками и столбцами бесконечного детерминанта (2). Детерминант $\Delta(0)$ содержит в этом случае только член 1 и один член с h^4. При учете многих столбцов и строк $\Delta(0)$ содержит всегда только четные степени h^2. Следовательно $\operatorname{ch}\pi\mu$ является целой функцией h^4. Мы суммируем вместе члены $\Delta(0)$, содержащие только h^4, и находим по Г. Бремекампу (*12*, стр. 143):

$$\Delta(0)=1-2\cdot(2h^2)^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda-(2k)^2}\cdot\frac{1}{\lambda-(2k+2)^2}+O(h^8).$$

Последний ряд может быть просуммирован с помощью формулы:

$$\frac{2}{\alpha}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha}{\frac{\alpha^2}{4}-k^2}=\pi\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}\alpha.$$

Получаем тогда:

$$\Delta(0)=1+2\cdot(2h^2)^2\cdot\frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}(1-\lambda)}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}+O(h^8). \qquad (3)$$

Из уравнений (3) и (1) получаем характеристический показатель μ.

c) Расчет характеристического показателя по Е. Т. Уиттекеру (*149, 151*, стр. 424)

Уиттекер ввел новый параметр σ. Он полагает решение уравнения Матье в виде:

$$u=e^{\mu x}F(x), \qquad (1)$$

где

$$F(x)=\sin(x-\sigma)+a_3\cos(3x-\sigma)+b_3\sin(3x-\sigma)+ \qquad (2)$$
$$+a_5\cos(5x-\sigma)+b_5\sin(5x-\sigma)+\ldots,$$

причем параметр σ определяется условием, что в $F(x)$ должен отсутствовать член с $\cos(x-\sigma)$.

Подстановка выражений (1) и (2) в уравнение Матье и разложение по степеням h^2 дает:

$$\left.\begin{aligned}\lambda=1-h^2\cos 2\sigma+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\cos 4\sigma\right)h^4+\frac{h^6}{64}\cos 2\sigma+\\ +\left(\frac{1}{48}-\frac{11}{512}\right)h^8+O(h^{10}).\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Из трансцендентного уравнения (3) при заданных λ и h^2 можно определить величину σ. Вместе с этим из (2) определится $F(x)$. Остается определить μ из

$$\mu=-\frac{h^2}{2}\sin 2\sigma+\frac{3h^6}{128}\sin 2\sigma-\frac{3h^8}{1024}\sin 4\sigma+O(h^{10}), \qquad (4)$$

после чего из (4), (2) и (1) решение уравнения Матье известно. Второе линейно независимое решение напишем в виде:

$$e^{-\mu x}F(-x).$$

Следует заметить, что Уиттекер пишет уравнение Матье в форме:

$$\frac{d^2u}{dx^2}+(a+16q\cos 2x)u=0,$$

откуда следует:

Уиттекер		Стретт
a	$=$	λ
$16q$	$=$	$-2h^2$.

Хотя метод Уиттекера был применен весьма успешно Айнсом (*52*) для расчета лунной траектории, он неудобен в применении к областям устойчивых решений, так как здесь σ или чисто мнимое, или комплексное число в форме $\sigma=\frac{1}{2}\pi+\tau i$. Из фиг. 3 (см. также III, 2 и III, 3) можно определить, находимся ли мы в области устойчивых или неустойчивых решений плоскости (λ, h^2).

d) Расчет характеристического показателя по Е. Айнсу (*59*)

Айнс дал метод, позволяющий найти μ при произвольных λ и h^2 в области устойчивых решений. Мы смыкаем граничные кривые в плоскости (h^2, λ) между областями устойчивых и неустойчивых решений. Расчет решения вдоль этих кривых приведен в разделе III, 2. Решение уравнения Матье в области устойчивых решений будет:

$$u=\sum_{r=-\infty}^{\infty} e_r\cos(2r+\rho)x \qquad (1)$$

и второе линейно независимое решение:

$$u=\sum_{r=-\infty}^{\infty} e_r\sin(2r+\rho)x. \qquad (2)$$

Так как уравнение Матье не меняется при замене x на $\pi-x$, то замена x в (1) ведет с точностью до постоянного множителя к линейной комбинации (1) и (2).

Подстановка (1) в уравнение Матье дает:

$$[\lambda-(2r+\rho)^2]e_r=h^2(e_{r-1}+e_{r+1})$$

или

$$\frac{e_r}{e_{r-1}}=\frac{h^2}{\lambda-(2r+\rho)^2-h^2\frac{e_{r+1}}{e_r}}=\frac{-h^2(2r+\rho)^{-2}}{1-\lambda(2r+\rho)^{-2}+h^2(2r+\rho)^{-2}\frac{e_{r+1}}{e_r}}. \qquad (3)$$

Очевидно, что (3) дает бесконечную непрерывную дробь для коэффициентов e_r. Сходимость дроби может быть доказана. С другой стороны, мы получаем, подставляя (1) в уравнение Матье, выражение:

$$\frac{e_{r-1}}{e_r}=\frac{h^2}{\lambda-(2r+\rho-2)^2-h^2\frac{e_{r-2}}{e_{r-1}}}=\frac{-h^2(2r+\rho-2)^{-2}}{1-\lambda(2r+\rho-2)^{-2}+h^2(2r+\rho-2)^{-2}\frac{e_{r-2}}{e_{r-1}}}. \qquad (4)$$

Условия (4) и (3) для $\frac{e_r}{e_{r-1}}$ дают определяющее уравнение для ρ. Например: $\frac{e_1}{e_0}=L$ (из 3) и $\frac{e_1}{e_0}=R$ (из 4) должно быть: $L=R$. В приложениях берут значение ρ и подсчитывают для него L и R из быстросходящихся непрерывных дробей (3) и (4). Полагаем L и R функциями ρ, и точки пересечения (в общем случае две) дают искомое значение ρ. При этом принципиально все равно, какое значение ρ применить. Второе значение ρ принадлежит к решению, линейно независимому от (1), и является линейной комбинацией (1) и (2). Как численно показано Айнсом, получают его методом не только ρ, но одновременно и e_r, т. е. полное решение. Метод Айнса приложим также в области неустойчивых решений, где характеристический показатель, как известно, должен быть вещественным. Вместо (1) следует подставить в уравнение Матье

$$e^{\mu x}\cdot\sum_{-\infty}^{\infty}\cos 2rx.$$

е) Асимптотический расчет характеристических показателей (*132*)

Если один из параметров λ и h или оба по абсолютной величине больше единицы, можно получить приближенные значения характеристического показателя из асимптотических выражений раздела III, 3а.

Имеем:

$$\operatorname{ch}\pi\mu=\operatorname{ch}\left\{\operatorname{Im}\left(\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi(\lambda-2h^2\cos 2x)^{\frac{1}{2}}dx\right)\right\}\cdot$$
$$\cdot\cos\left\{\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi(\lambda-2h^2\cos 2x)^{\frac{1}{2}}dx\right)\right\}. \qquad (1)$$

Заметим, что уравнение (1) может быть применено, если λ и h не очень велики.

Мы выбираем $\lambda=0$ и $2h^2$ отрицательным. Из (1) получаем:

$$\operatorname{ch}\pi\mu=\operatorname{ch}E\sqrt{|2h^2|}\cdot\cos E\sqrt{|2h^2|}, \qquad (2)$$

где

$$E=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos 2x}\,dx=\frac{4}{3}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}=\frac{\pi}{2}\cdot 0{,}762\ldots$$

Посредством (2) мы можем рассчитать второе полупериодическое собственное значение h и второе целопериодическое при $\lambda=0$.

Полагаем

$$E\sqrt{2h^2}\cong\frac{3\pi}{2}$$

и находим

$$-\frac{1}{2}h^2=\frac{9}{4(0{,}762\ldots)^2}=3{,}86\ldots$$

Интерполированием из фиг. 3 находим 3,77, что достаточно точно. При $\lambda\neq 0$ формула (1) трудно приложима. Наконец мы можем из (1) получить высшее полу- или целопериодическое собственное значение $2h^2$ уравнения Матье для $\lambda=0$; приближенно:

$$|2h^2|=\frac{(n+0{,}5)^2}{E^2}\pi^2,$$

которое справедливо уже при $n=2$.

2. Периодические решения функций Матье

Как указано в разделах II, 4b и III, 1d, мы получаем в области устойчивых решений, заштрихованных на фиг. 3, для подходящих значений λ и h^2 периодические решения уравнения Матье. Указанным значениям λ (или h) соответствуют кривые в плоскости (λ, h^2). Эти кривые, не оканчиваясь в конечной области, протекают целиком в области устойчивых решений, пересекают положительную ось λ, положительную и отрицательную ось h^2; они имеют тот же характер изменения, как означенные на фиг. 3 кривые, между областями устойчивых и неустойчивых решений. Это положение можно доказать, пользуясь теоремой осцилляции, аналогично разделу II, 2b.

Для приложений большой интерес представляют периодические решения уравнения Матье. Эти решения называются функциями Матье первого рода. Соответствующие им значения λ и h^2 лежат на пограничных кривых между областями устойчивых и неустойчивых решений. Существование этих функций исследовано недавно Куртисом (*22*).

а) Четыре типа функций Матье первого рода

Функции Матье первого рода являются везде регулярными функциями x; можно разложить их в ряды Фурье:

$$\sum_{m=1}^{\infty}B_{n,m}\sin mx;\quad \sum_{m=0}^{\infty}A_{n,m}\cos mx.$$

Подстановка в уравнение Матье дает, что функция, в которой низший член Фурье четный относительно m, обладает только членами с четными m. Аналогично для нечетных m.

Мы приходим таким образом к четырем типам функций Матье [1]:

$$C_n=ce_n=\sum_{m=0}^{\infty}A_{n,2m+1}\cos(2m+1)x;\qquad n=1,3,5,\ldots \qquad (1)$$

$$C_n=ce_n=\sum_{m=0}^{\infty}A_{n,2m}\cos 2mx;\qquad n=0,2,4\ldots \qquad (2)$$

$$S_n=se_n=\sum_{m=1}^{\infty}B_{n,2m+1}\sin(2m+1)x;\qquad n=1,3,5\ldots \qquad (3)$$

$$S_n=se_n=\sum_{m=1}^{\infty}B_{n,2m}\sin 2mx;\qquad n=2,4\ldots \qquad (4)$$

---

[1] Вопрос о принятых обозначениях для функции Матье разного рода освещен в разделе III, 6а. Пока что укажем, что для функции Матье первого рода приняты обозначения C_n или ce_n и S_n или se_n. *Прим. ред.*

Мы назовем функцией Матье первого рода ce_0 всякое четное решение уравнения Матье, соответствующее низшему целопериодическому собственному числу; функцией se_1 — нечетное решение с низшим полупериодическим собственным числом; функцией ce_1 — четное решение с низшим полупериодическим собственным числом; функцией se_2 — нечетное решение со вторым низшим целопериодическим собственным числом и т. д.

Очевидно, что эти функции определены рядами (1), (2), (3), (4) только с точностью до произвольного множителя. Этот множитель мы определяем так, что:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}[ce_0]^2dx=2\pi\\
&\left.\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}[ce_n]^2\,dx=\pi\\ &\int_0^{2\pi}[se_n]^2dx=\pi\end{aligned}\right\}\ n\neq 0
\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

Благодаря этим соотношениям функции Матье se_n и ce_n вырождаются при $h=0$ в функции $\sin nx$ и $\cos nx$. В ранних работах было принято принимать последние факты в основание построения функций Матье первого рода вместо применения формул (5). Как показал Гольдштейн (*33*, стр. 303), если h не мало, но принимает любые значения, то это приводит к огромным затруднениям. Если следовать все же указанному пути, то, как показывает расчет, значения всех коэффициентов Фурье в функции от h^2 становятся бесконечно большими, за исключением коэффициентов при $\sin nx$ и $\cos nx$ в se_n и ce_n. При условии (5) для этих значений h^2 коэффициенты при $\sin nx$ и $\cos nx$ равны нулю, остальные коэффициенты Фурье se_n и ce_n остаются конечными.

Для определения соотношений между функциями Матье, различных типов следует обратиться к литературе (*33*, стр. 304).

b) Расчет функций первого рода по Матье (*96*)

Расчет функций Матье, произведенный самим Матье, применим только при малых значениях h^2. Согласно известной теореме А. Пуанкаре (*107*) коэффициенты A_{nm} и B_{nm} функций Матье являются целыми функциями h^2, разлагаемыми в ряд по возрастающим степеням h^2. На эти малые значения h^2 не распространяется указание предыдущего раздела, что для некоторых значений h^2 все коэффициенты функций Матье первого рода обращаются в бесконечность, за исключением коэффициентов при $\cos nx$ и $\sin nx$ в ce_n и se_n, которые при $h^2\to 0$

равны 1. Мы приведем более простой метод расчета Матье, вместо более сложного, но зато более общего, пригодного для любых значений h^2, применяя формулы (5) III, 2а.

Полагая

$$\lambda_{C_n}=n^2+\alpha h^2+\beta h^4+\gamma h^6+\delta h^8+\cdots,\qquad(1)$$

$$C_n=\cos nx+h^2F_1+h^4F_2+h^6F_3+\cdots\qquad(2)$$

подставляем их в уравнение Матье, которое решаем методом последовательных приближений. Получаем тогда:

$$\lambda_{C_n}=n^2+\frac{h^4}{2(n^2-1)}+\frac{(5n^2+7)h^8}{32(n^2-1)^3(n^2-4)}+\frac{(9n^6+22n^4-203n^2-116)h^{12}}{64(n^2-1)^5(n^2-4)^3(n^2-9)}+\cdots,\qquad(3)$$

$$\left.\begin{aligned}
C_n=ce_n=\cos nx&+h^2\left[\frac{-\cos(n+2)x}{4(n+1)}+\frac{\cos(n-2)x}{4(n-1)}\right]+\\
&+h^4\left[\frac{\cos(n+4)x}{32(n+1)(n+2)}+\frac{\cos(n-4)x}{32(n-1)(n-2)}\right]+h^6\left[\frac{-\cos(n+6)x}{2^7\cdot3(n+1)(n+2)(n+3)}-\right.\\
&-\frac{(n^2+4n+7)\cos(n+2)x}{2^7(n+1)^3(n-1)(n+2)}+\frac{(n^2-4n+7)\cos(n-2)x}{2^7(n-1)^3(n+1)(n-2)}+\\
&\left.+\frac{\cos(n-6)x}{2^7\cdot3(n-1)(n-2)(n-3)}\right]+h^8\left[\frac{\cos(n+8)x}{2^{11}\cdot3(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}+\right.\\
&+\frac{(n^3+7n^2+20n+20)\cos(n+4)x}{2^8\cdot3(n+1)^3(n-1)(n+2)^3(n+3)}+\frac{(n^3-7n^2+20n-20)\cos(n-4)x}{2^8\cdot3(n-1)^3(n+1)(n-2)^3(n-3)}+\\
&\left.+\frac{\cos(n-8)x}{2^{11}\cdot3(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}\right]+O(h^{10}).
\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

Можно найти: $\lambda_{C_n}=\lambda_{S_n}$ так что ce_n простейшим образом переходит в se_n (*33*, стр. 304). Очевидно, выражение (4) неприменимо при n целом, в первую очередь при $n=1$.

В этом случае, следуя Матье (*96*), нужно применить специальный расчет, показанный здесь для $n=1$. Подстановка (1) и (2) в уравнении Матье дает:

$$\frac{d^2F_1}{dx^2}+n^2F_1-2\cos 2x\cdot\cos nx+\alpha\cos nx=0.$$

Пишем:

$$2\cos 2x\cdot\cos nx=\cos(n+2)x+\cos(n-2)x$$

и полагаем

$$F_2=a\cos(n+2)x+c\cos(n-2)x.$$

Получаем тогда:

$$a=\frac{-1}{4(n+1)};\ c=\frac{1}{4(n-1)}\ \text{ и }\alpha=0.$$

Так как $n=1$, мы выбираем $c=0$ и получаем $\alpha=1$; в первом приближении получаем

$$C_1=ce_1=\cos x-\frac{h^2}{8}\cos 3x+O(h^4)$$

$$\lambda_{C_1}=\lambda_{ce_1}=1+h^2+O(h^4).$$

Аналогично производится расчет при $n=2,\ 3\ldots$ Расчет для S_1 дает

$$S_1=se_1=\sin x-\frac{h^2}{8}\sin 3x+O(h^4)$$

$$\lambda_{S_1}=\lambda_{se_1}=1-h^2+O(h^4).$$

Сходимость вышеуказанных степенных рядов исследована Уатсоном (*146*).

c) Численные результаты Матье

Мы применим указанную в формулах (1), (2), (3) и (4) раздела III, 2a запись для коэффициентов четырех типов функций Матье и даем для них следующие выражения:

$$A_{0,0}=1,$$

$$A_{0,2}=-\frac{h^2}{2}+\frac{7h^6}{2^7}+O(h^{10}),$$

$$A_{0,4}=\frac{h^4}{32}-\frac{10h^8}{2^8\cdot 3^2}+O(h^{12}),$$

$$A_{0,6}=-\frac{h^6}{2^7\cdot 3^2}+O(h^{10}),$$

$$A_{0,8}=\frac{h^8}{2^{13}\cdot 3^2}+O(h^{12}),$$

. . . .

$$A_{2,0}=\frac{h^2}{4}-\frac{5h^6}{192}+\frac{1363\cdot h^{10}}{221\,184}+O(h^{14}),$$

$$A_{2,2}=1,$$

$$A_{2,4}=-\frac{h^2}{12}-\frac{43h^6}{13\,824}+\frac{21\,059}{79\,626\,240}h^{10}+O(h^{14}),$$

$$A_{2,6}=\frac{h^4}{384}+\frac{287\,h^8}{2\,211\,840}+O(h^{12}),$$

$$A_{2,8}=-\frac{h^6}{23\,040}-\frac{41\,h^{10}}{16\,588\,800}+O(h^{14}),$$

$$A_{2,10}=\frac{h^8}{2\,211\,840}+O(h^{12}),$$

$$A_{2,12}=-\frac{h^{10}}{309\,657\,600}+O(h^{14}),$$

. . . .

$$A_{4,0}=\frac{h^4}{192}-\frac{h^8}{92\,160}+O(h^{12}),$$

$$A_{4,2}=\frac{h^2}{12}+\frac{11h^6}{17\,280}-\frac{439\,h^{10}}{62\,208\,000}+O(h^{14}),$$

$$A_{4,4}=1,$$

$$A_{4,6}=-\frac{h^2}{20}-\frac{13\,h^6}{96\,000}-\frac{4037h^{10}}{2\,419\,200\,000}+O(h^{14}),$$

$$A_{4,8}=\frac{h^4}{960}+\frac{23\,h^8}{6\,048\,000}+O(h^{12}),$$

$$A_{4,10}=-\frac{h^6}{80\,640}-\frac{53\,h^{10}}{1\,032\,192\,000}+O(h^{14}),$$

$$A_{4,12}=\frac{h^8}{10\,321\,920}+O(h^{12}),$$

$$A_{4,14}=-\frac{h^{10}}{1\,857\,945\,600}+O(h^{14}),$$

. . . .

$$A_{1,1}=1,$$

$$A_{1,3}=-\frac{h^2}{8}-\frac{h^4}{64}-\frac{h^6}{1\,536}+\frac{11h^8}{36\,864}+O(h^{10}),$$

$$A_{1,5}=\frac{h^4}{192}+\frac{h^6}{1\,152}+\frac{h^8}{24\,576}+O(h^{10}),$$

$$A_{1,7}=-\frac{h^6}{9\,216}-\frac{h^8}{49\,152}+O(h^{10}),$$

. . . .

$$A_{3,1}=\frac{h^2}{8}+\frac{h^4}{64}+\frac{h^6}{1024}-\frac{h^8}{2^{12}}+O(h^{10})$$

$$A_{3,3}=1,$$

$$A_{3,5}=-\frac{h^2}{16}-\frac{7h^6}{20\,480}-\frac{h^8}{2^{14}}+O(h^{10}),$$

$$A_{3,7}=\frac{h^4}{640}+\frac{17h^8}{2^{15}\cdot 3^2\cdot 5}+O(h^{10}),$$

$$A_{3,9}=-\frac{h^6}{46\,080}+O(h^{10}),$$

. . . .

$$A_{5,1}=\frac{h^4}{2^5\cdot 12}+\frac{h^6}{2^{10}\cdot 3^2}+\frac{30h^8}{2^{10}\cdot 4^2\cdot 3^4}+O(h^{10}),$$

$$A_{5,3}=\frac{h^2}{16}+\frac{12h^6}{2^7\cdot 4^2\cdot 18}+\frac{h^8}{2^{12}\cdot 36}+O(h^{10})\text{ и т. д.}$$

Аналогичные выражения мы получаем для коэффициентов B. Таблицы этих коэффициентов имеются в литературе (*55, 56, 57, 33*).

d) Расчет функций Матье по Айнсу[1] (*55, 56, 57*) и С. Гольдштейну (*33*)

В то время как метод Матье применим только для малых значений h^2, Айнс и Гольдштейн дали прием, позволяющий определить $A_{m,n}$ и $B_{m,n}$ для любых численных значений h^2. Мы разберем этот расчетный прием на примере ce_0 (*55*, стр. 21). Подставляем ряд Фурье для этой функции в дифференциальное уравнение Матье.

Имеем тогда формулы:

$$\begin{aligned}
&\lambda A_{00}-h^2A_{02}=0,\\
&-2h^2A_{00}+(\lambda-4)A_{02}-h^2A_{04}=0, \qquad (1)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&-h^2A_{0,r-2}+(\lambda-r^2)A_{0,r}-h^2A_{0,r+2}=0;\ r=4,6,8\ldots
\end{aligned}$$

Для разрешимости уравнений их определитель должен обратиться в 0:

$$\Delta\equiv\begin{vmatrix}
\lambda & -h^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\\
-2h^2 & \lambda-4 & -h^2 & 0 & 0 & 0 & -\\
0 & -h^2 & \lambda-16 & -h^2 & 0 & 0 & -\\
0 & 0 & -h^2 & \lambda-36 & -h^2 & 0 & -\\
0 & 0 & 0 & -h^2 & \lambda-64 & -h^2 & 0\\
- & - & - & - & - & - & -
\end{vmatrix}=0.$$

Через Δ_1 и Δ_2 мы обозначим определители, получающиеся из Δ зачеркиванием первой строки и столбца или двух первых строк и столбцов. Имеем

$$\Delta=\lambda\Delta_1-2h^4\Delta_2=0 \qquad \text{или} \qquad \lambda=2h^4\frac{\Delta_2}{\Delta_1}.$$

[1] Этот метод расчета особенно удобен. Пользуясь им, Айнс составил таблицы функций Матье, приложенные нами в конце книги. Заметим, что Айнс писал уравнение Матье в виде: $y''+(a-2\Theta\cos 2x)\,y=0$.

Прим. ред.

Аналогично

$$\Delta_1=(\lambda-4)\,\Delta_2-h^4\,\Delta_3,$$

откуда

$$\frac{\Delta_2}{\Delta_1}=\frac{1}{\lambda-4-h^4\dfrac{\Delta_3}{\Delta_2}}.$$

Далее получаем:

$$\Delta_2=(\lambda-16)\,\Delta_3-h^4\,\Delta_4\ \text{и т. д.}$$

Мы получаем таким образом выражение для λ в виде бесконечной дроби:

$$\lambda=\frac{2h^4}{\lambda-4-}\,\frac{h^4}{\lambda-16-}\,\frac{h^4}{\lambda-36-}\ldots, \qquad (2)$$

сходимость которой может быть доказана.

Для действительного расчета λ при данном h^2 находят приближенное значение λ, затем рассчитывают из уравнения (2) второе приближение и т. д. Получив таким путем λ, мы определяем последовательно из уравнения (1) коэффициенты $A_{0,m}$ $(m=0, 2, 4\ldots)$[1]. Указанные на фиг. 3 значения λ Айнс и Гольдштейн вычислили этим приемом. Заметим еще, что подобное разложение на непрерывные дроби, примененное, как указано выше, Айнсом и Гольдштейном, было указано еще Гейне (*42*, I, стр. 407), однако не для численного расчета функций Матье (см. также *15*).

e) Свойства ортогональности функций Матье первого рода

Пусть u_1 и u_2 являются двумя различными функциями Матье первого рода, удовлетворяющие уравнениям:

$$\frac{d^2u_1}{dx^2}+u_1(\lambda_{u_1}-2h^2\cos 2x)=0, \qquad (1)$$

$$\frac{d^2u_2}{dx^2}+u_2(\lambda_{u_2}-2h^2\cos 2x)=0. \qquad (2)$$

Умножим (1) на u_2 и (2) на u_1, вычтем и проинтегрируем от 0 до 2π по x, тогда:

$$\left[\frac{du_1}{dx}u_2-\frac{du_2}{dx}u_1\right]_0^{\pi}=(\lambda_{u_1}-\lambda_{u_2})\int_0^{2\pi}u_1u_2\,dx.$$

Вследствие периодичности u_1 и u_2 левая часть обращается в нуль и мы получаем соотношения:

$$\int_0^{2\pi}se_n\cdot ce_m\,dx=0; \qquad (3)$$

[1] Смотри таблицы в конце книги. *Прим. ред.*

$$\int_0^{2\pi} se_n se_m dx = 0 \qquad (m \neq n); \tag{4}$$

$$\int_0^{2\pi} ce_n ce_m dx = 0 \qquad (m \neq n); \tag{5}$$

можно показать, что функции Матье ортогональны также в промежутке $0, \pi$.

Заметим, что аналогичные условия ортогональности имеют место для функций Матье дробных порядков (*112*) (ср. II, 4b).

3. Ход граничных кривых между областями устойчивых и неустойчивых решений уравнения Матье

В разделах III, 1 и III, 2 указывалось, что ход граничных кривых между областями устойчивых и неустойчивых решений в плоскости (λ, h^2) имеет основное значение. Во-первых, знание их хода существенно для выбора пригодного метода расчета характеристических показателей (III, 1); с другой стороны, эти граничные кривые дают собственные значения, принадлежащие различным функциям Матье. В основание расчетов предыдущих разделов мы положим некоторые общие предложения об их протекании.

a) Касание граничных кривых для $h=0$ и $\lambda=n^2$ (*127*)

Как это следует из раздела II, 3с, рассматриваемые здесь точки являются двойными точками граничных кривых. Только точка $h=0$; $\lambda=0$ является исключением, так как функция se_0 обращается в ней в нуль. Через последнюю точку проходит только одна граничная кривая (принадлежащая ce_0), имеющая с осью h^2 точку касания первого рода, как это следует из III, 2b.

А. Пуанкаре доказал (*110*, II, стр. 229), что две граничные кривые, проходящие через точку $\lambda=1$; $h^2=0$, имеют в этой двойной точке касание нулевого порядка; кривые, проходящие через $\lambda=4$; $h^2=0$, имеют касание первого порядка; в точке $\lambda=9$; $h^2=0$—второго порядка; в точке $\lambda=16$; $h^2=0$—третьего порядка. Сказанное дает основание предполагать, что граничные кривые имеют в точке $\lambda=n^2$; $h^2=0$ касание $(n-1)$-го порядка. Справедливость этого предложения легко доказать, следуя расчетам Матье. Разлагая формально по методу Матье ce_n и se_n в ряд по степеням h^2, заметим, что в этом разложении коэффициент при h^{2n} содержит знаменатель, обращающийся в нуль. Начиная с члена h^{2n}, нужно применить специальный расчет для рассматриваемых функций. Отсюда получаем, что λ_{C_n} и λ_{S_n} до члена $h^{2(n-1)}$ совпадают, начиная с него,—отличны. Следовательно граничные кривые имеют касание $(n-1)$-го порядка.

Из этого предложения является правдоподобным, что при данном h и увеличивающихся положительных λ интервалы неустойчивости становятся все уже в соответствии с формулировками нашего асимптотического расчетного приема в II, 3b.

b) Асимптотический ход граничных кривых

Наши расчеты для уравнения Хилла в разделе II, 3 можно перенести на специальный случай уравнения Матье и получить следующие результаты:

для $\quad |\lambda| < |2h^2|$ и λ отрицательного при $h^2 \to \pm\infty$

$$\lambda_{ce_n} \cong \lambda_{se_n} = \mp 2h^2 + O(h) \qquad \text{(раздел II, 3c).} \tag{1}$$

Это уравнение получено Джеффрисом (*67*), Айнсом (*55*, стр. 29) и Гольдштейном (*33*, стр. 321) разными путями. Уравнение (1) содержит справа первый член асимптотического разложения:

$$\lambda = \mp 2h^2 + ah + a_0 + \frac{a_1}{h} + \frac{a_2}{h^2} + \cdots \tag{2}$$

Для нахождения коэффициентов a, a_0, a_1 и т. д. применяется расчетный прием Джеффриса (*66*; *67*) и Гольдштейна (*33*, стр. 321).

Для этого возьмем решение уравнения Матье в форме:

$$u = e^{h\Phi} \cdot \Psi \cdot \left(1 + \frac{f_1}{h} + \frac{f_2}{h^2} + \cdots\right). \tag{3}$$

Подставляем (2) и (3) в уравнение Матье:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u(\lambda - 2h^2 \cos 2x) = 0,$$

собираем члены с равными степенями h и полагаем их сумму равной нулю. Мы полагаем в формулах этого раздела, что $h^2 > 0$. После длинных расчетов получаем (*33*, стр. 322):

$$\begin{aligned} \lambda = &-2h^2 + 2m_1 h - \frac{(m_1^2+1)}{8} - \frac{m_1^3 + 3m_1}{2^7 \cdot h} - \frac{5m_1^4 + 34m_1^2 + 9}{2^{12} \cdot h^2} - \\ &- \frac{33m_1^5 + 410m_1^3 + 405m_1}{2^{17} \cdot h^3} - \frac{63m_1^6 + 1260m_1^4 + 2943m_1^2 + 486}{2^{20} \cdot h^4} - \\ &- \frac{2109m_1^7 + 62468m_1^5 + 270\,379m_1^3 + 149\,553m_2}{2^{23} \cdot h^5} + \cdots \end{aligned} \tag{4}$$

При рассмотрении формулы Гольдштейна нужно иметь в виду, что он пишет уравнение Матье в форме:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + (4\alpha - 16q \cos 2x) u = 0;$$

следовательно:

Гольдштейн		Стретт
4α	$=$	λ
$16q$	$=$	$2h^2$.

В формуле (4), полагая $m_1=1$, получаем собственные числа λ_{C_0} и λ_{S_1}, $m_1=3$ — собственные числа λ_{C_1} и λ_{S_2}; $m_1=5$ — собственные числа λ_{C_2} и λ_{S_3} и т. д. (ср. фиг. 3). В этих приближениях целопериодические и соседние полупериодические собственные числа совпадают. Формула разложения (4) сходится лучше при малых m_1 и заданных h; если m_1 становится большим, то должны возрасти для достаточно удовлетворительной сходимости h. Нужно, чтобы $\frac{m_1}{h}$ не становилось большим. В прилагаемой таблице даны рассчитанные Гольдштейном по формуле (4) собственные числа. Приложения формулы (4) и таблицы очень полезны в первом приближении при расчете функций Матье по Айнсу-Гольдштейну.

Таблица Гольдштейна

$h^2/_k$	$-\lambda_{C_0}; -\lambda_{S_1}$	$-\lambda_{C_1}; -\lambda_{S_2}$	$-\lambda_{C_2}; -\lambda_{S_3}$
1,0	2,65151	0,10286	— 2,10738
1,2	3,31620	0,49413	— 2,00251
1,4	3,99183	0,91896	— 1,83829
1,6	4,67610	1,37021	— 1,62610
1,8	5,36743	1,84296	— 1,37687
2,0	6,06467	2,33364	— 1,09684
2,2	6,76694	2,83960	— 0,79057
2,4	7,47357	3,35877	— 0,46169

с) Асимптотическое поведение функций Матье

Из упомянутых в предыдущих разделах асимптотических расчетов собственных чисел можно получить асимптотические формулы для функций Матье первого рода. В первом приближении получаем по Айнсу и Гольдштейну (*33*, стр. 323):

$$\left.\begin{array}{l}\left\{e^{2h\sin x}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right]^{2m+1}\pm\right.\\ \left.\mp e^{-2h\sin x}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right]^{2m+1}\right\}\Big/(\cos x)^{m+1};\\ \left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi\right).\\ \left\{e^{2h\sin x}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right]^{2m+1}\mp\right.\\ \left.\mp e^{-2h\sin x}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right]^{2m+1}\right\}\Big/(\cos x)^{m+1};\\ \left(\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right).\end{array}\right\}\quad(1)$$

Эти формулы неприменимы при $x=\mp(2n+1)\frac{\pi}{2}$ и $n=0, 1, 2, 3\ldots$ Верхний и нижний знаки отвечают функциям ce и se; $m=0$ дает ce_0 и se_1; $m=1$ дает ce_1 и se_2; $m=2$,—ce_2 и se_3 и т. д. Удивительно то, что асимптотическое решение (1), как обстоятельно показал Гольдштейн (*37*), обладает периодом 4π, тем же периодом, что и функция Матье порядка $\frac{1}{2}$ (*112*), т. е. каждое периодическое решение уравнения Матье, которое сводится при $h\to 0$ к $\sin(2n+1)\frac{x}{2}$ или $\cos(2n+1)\frac{x}{2}$ при $=0, 1, 2,\ldots$ Упомянутые только что функции Матье относятся к $\operatorname{ch}\pi\mu=0$, а также к значениям $\operatorname{ch}\pi\mu$, которые были применены в разделе II, 3с для асимптотического расчета полу- или целопериодических собственных чисел. Кривые плоскости λ, h^2, соответствующие $\operatorname{ch}\pi\mu=0$, лежат приблизительно между кривыми для $\operatorname{ch}\pi\mu=\pm 1$, т. е. между кривыми λ, h^2 для функций Матье первого рода. Правдоподобно, что последние кривые стремятся (попарно) слиться асимптотически с первыми, что обнаруживается при асимптотическом расчете собственных чисел, относящихся к функциям Матье порядка $\frac{1}{2}$.

Полученные таким образом формулы неприменимы вблизи $\cos 2x=\frac{\lambda}{2h^2}$.

d) Заметка о родственном дифференциальном уравнении

Прежде чем с помощью теоремы О. Гаупта (II, 2b) и предложения о дифференциальном уравнении Хилла с двумя параметрами (II, 3) был показан общий характер решения дифференциального уравнения Хилла при различных значениях λ и h, Мейснер (*97*) рассмотрел частный случай дифференциального уравнения Хилла, обладающий тем преимуществом, что характеристический показатель и решение при всех λ и h могут быть легко рассчитаны. В этом уравнении Мейснера:

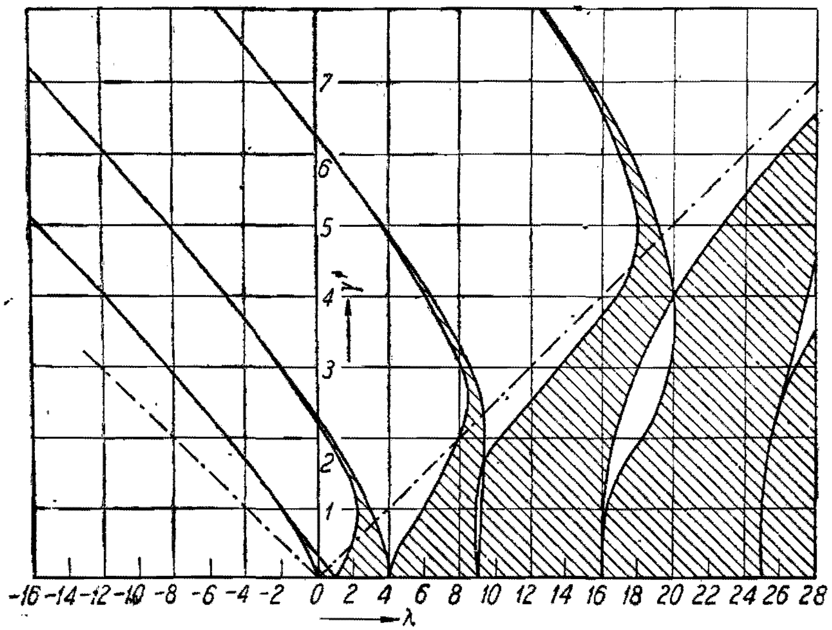
$$\frac{d^2u}{dx^2}+[\lambda+\gamma\Phi(x)]\,u=0 \tag{1}$$

функция $\Phi(x)$ имеет в части интервала длины 2π постоянное значение Φ_1 и в остальной части этого интервала значение Φ_2. Упростим вопрос, предположив, что оба частичных интервала равны по длине и полагаем $\Phi_1=\Phi=-\Phi_2$. Для дальнейших расчетов удобно, чтобы $\Phi(x)=\Phi$ для $-\pi\leqslant x<0$ и $\Phi(x)=-\Phi$ для $0\leqslant x<\pi$. Уравнение (1) решается в каждом частичном интервале в функциях sin и cos. Мы требуем непрерывность u и u'

при $x=0$ и далее $u(+\pi)=\sigma u(-\pi)$, также $u'(\pi)=\sigma u'(-\pi)$ (штрих означает дифференцирование по x). Мы получаем для $\mathrm{ch}2\pi\mu$ с $\sigma=e^{-2\pi\mu}$ формулы:

$$\mathrm{ch}2\pi\mu=\begin{cases}\cos x_1\cdot\cos x_2-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}\right)\sin x_1\cdot\sin x_2;\\ x_1^2=\pi^2(\lambda+\gamma\Phi);\ x_2^2=\pi^2(\lambda-\gamma\Phi)>0;\\ \cos x_1\cdot\mathrm{ch}x_3-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{x_3}-\frac{x_3}{x_1}\right)\sin x_1\cdot\mathrm{sh}x_3;\\ x_3^2=\pi^2(\gamma\Phi-\lambda)>0.\end{cases}\qquad(2)$$

С помощью этого уравнения легко рассчитать граничные кривые между областями устойчивых и неустойчивых решений, в то время как $\mathrm{ch}\,2\pi\mu=\pm1$. Мы получаем фиг. 4. Большое сходство между



Фиг. 4.

фиг. 4 и фиг. 3 совершенно очевидно. Обратим внимание, например, на ход кривых при больших λ и γ; имеются также интересные отличия. В то время как граничные кривые на фиг. 3 не имеют точек соприкосновения граничных кривых кроме $h=0$ и $\lambda=n^2$ (мы точно доказали этот факт в разделе III, 4а), на фиг. 4 мы видим множество таких точек соприкосновения. Согласно предложения О. Гаупта (II, 2b) в этих точках оба линейно независимых решения периодичны и устойчивы, в то время как вдоль кривых решение неустойчиво (II, 4b).

4. Функции Матье второго рода

Долгое время стоял открытым вопрос об одновременном существовании двух линейно независимых периодических решений уравнения Матье при фиксированном значении λ и h^2. В такой точке (λ, h^2) граничных кривых между областями устойчивых и неустойчивых решений должны исчезать два непериодических решения II, 4b, существующие везде вдоль этих кривых. Эти решения носят название функций Матье второго рода. Из предложения О. Гаупта следует, что этот случай появляется тогда, когда два полу- или два целопериодических собственных числа совпадают. Это бывает, когда граничные кривые между областями устойчивых и неустойчивых решений обладают двойной точкой. Из предыдущего раздела III, 3d, где исследован пример уравнения, родственного уравнению Матье, следует, что в общем случае дифференциального уравнения Хилла такие двойные точки могут появляться. Доказательство несуществования таких двойных точек граничных кривых кроме тривиальных $\lambda=n^2$, $h=0$ дано Айнсом, (*53*), Хиллом (*47*), Бремекампом (*11*) и Марковичем (*92*).

а) Каждому целопериодическому (полупериодическому) собственному числу соответствует только одна полу- или целопериодическая собственная функция

Мы даем здесь доказательство Айнса. Положим, что существуют две линейно независимых функции Матье первого рода. Эти функции таковы:

$$\left.\begin{aligned}C&=\sum_{r=0}^{\infty}a_r\cos 2rx\\ S&=\sum_{r=1}^{\infty}b_r\sin 2rx\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

и удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению Матье. Подставив эти выражения в уравнение Матье, мы получим соотношения:

$$\lambda a_0-h^2a_1=0;$$
$$(4n^2-\lambda)a_n=-h^2(a_{n+1}+a_{n-1});$$
$$(\lambda-4)b_1-h^2b_2=0;$$
$$(4n^2-\lambda)b_n=-h^2(b_{n+1}+b_{n-1}).$$

Из этих уравнений следуют, если рассмотреть тривиальный случай $h=0$ и $\lambda=n^2$, следующие формулы:

$$\begin{vmatrix}a_na_{n+1}\\ b_nb_{n+1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{n-1}&a_n\\ b_{n-1}&b_n\end{vmatrix}=\cdots\begin{vmatrix}a_1a_2\\ b_1b_2\end{vmatrix}=2a_0\,b_1\qquad(2)$$

Следовательно определители (2) для каждого n обладают неисчезающим значением. Для сходимости рядов Фурье (1) необходимо, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$. Из этого противоречия следует невозможность введения двух решений в форме (1). Отсюда строго доказана (это видно на фиг. 3) невозможность существования двойных точек на граничных кривых между областями устойчивых и неустойчивых решений уравнения Матье. Исключение составляет тривиальный случай $\lambda=n^2$, $h=0$.

b) Расчет функций Матье второго рода по Айнсу и Зигеру

В то время как функции Матье первого рода представлены в форме степенных рядов, расположенных по h^2 (III, 2b; III, 2c), каждая из функций второго рода рассчитывается по формулам (II, 4 b):

$$S_n^{(2)}=S_n^{(1)}\int\limits^x \frac{dx}{[S_n^{(1)}]^2}; \qquad C_n^{(2)}=C_n^{(1)}\int\limits^x \frac{dx}{[C_n^{(1)}]^2}. \tag{1}$$

Целесообразно разложить выражение, стоящее под знаком интеграла, по положительным степеням h^2. Этот путь был принят Айнсом (*51*).

Иной путь расчета функций Матье второго рода при малых h^2 указан Зигером (*121*).

c) Расчет функций Матье второго рода по Гольдштейну

Гольдштейн дал прием для расчета функций Матье второго рода, применимый для любых h^2 (*36*). В виде примера рассчитаем $C_{2n+1}^{(2)}$. Согласно II, 4b.

$$C_{2n+1}^{(2)}(x)=F\cdot x\cdot C_{2n+1}^{(1)}(x)+Q_{2n+1}(x), \tag{1}$$

где Q — периодическая функция x с тем же периодом, что и $C_{2n+1}^{(1)}$. Имеем

$$Q_{2n+1}=\sum_{r=0}^{\infty} b_{2r+1}\sin(2r+1)x. \tag{2}$$

Подставим (2) и (1) в дифференциальное уравнение Матье (1) из III, 1 и воспользуемся рядом (1) из III, 2a; мы получим тогда для определения коэффициентов (b) уравнения:

$$\left(\frac{\lambda}{4}-\frac{1}{4}+\frac{h^2}{4}\right)b_1-\frac{h^2}{4}b_3=\frac{1}{2}FA_{2n+1,1}; \tag{3}$$

$$\left[\frac{\lambda}{4}-\left(r+\frac{1}{2}\right)^2\right]b_{2r+1}-\frac{h^2}{4}(b_{2r-1}+b_{2r+3})=F\left(r+\frac{1}{2}\right)A_{2n+1,\,2r+1}. \tag{4}$$

За исключением b в этом уравнении известны все величины; λ, h^2 и A_{2n+1} определены уже в III, 2b или III, 2d.

Для решения (3) и (4) мы полагаем сначала все A равными нулю, кроме $A_{2n+1,\,2m+1}$. Полученные так значения b назовем $b_{2r+1}^{(2m+1)}$, при чем имеем:

$$b_{2r+1}=\sum_{m=0}^{\infty} b_{2r+1}^{(2m+1)}; \tag{5}$$

можно показать, что (5) сходится абсолютно и что полученные из (5) значения b_{2r+1} обладают тем свойством, что

$$\sum_{r=0}^{\infty}(2r+1)^2\, b_{2r+1}$$

сходится абсолютно. Другие методы расчета изложены в различных статьях, упомянутых в литературном указателе. Асимптотическое значение этих функций может быть рассчитано аналогично III, 3c.

5. Уравнение Матье с чисто мнимым аргументом

При преобразовании двухразмерного волнового уравнения к эллиптическим координатам (I, 1d) кроме уже рассмотренного в предыдущих разделах III, 1 до III, 4 дифференциального уравнения Матье

$$\frac{d^2u}{dx^2}+u(\lambda-2h^2\cos 2x)=0 \tag{1}$$

появляется уравнение

$$\frac{d^2u}{dx^2}+u(-\lambda+2h^2\operatorname{ch} 2x)=0, \tag{2}$$

которое получается непосредственно из уравнения (1) подстановкой ix вместо x. Мы займемся здесь интегрированием (2), при чем воспользуемся всеми результатами предыдущих разделов. Ясно, что решения, данные в разделах III, 2 и III, 4 для уравнения (1), могут быть применены к уравнению (2) путем замены x на ix. Однако появившиеся гиперболические функции велики по модулю уже при не особенно больших значениях x; поэтому, для числовых расчетов полученные выше разложения не очень применимы.

a) Присоединенные функции Матье первого, второго и третьего рода

Соответственно четырем типам функций Матье первого рода мы имеем также четыре типа присоединенных функций Матье первого рода, которые удовлетворяют уравнению (2) III, 5 и с точностью до произвольного постоянного множителя переходят в функции Матье первого рода, если заменить в них x на ix.

То же можно сказать о присоединенных функциях второго рода. Присоединенные функции Матье третьего рода являются линейными комбинациями функций первого и второго рода, которые выбраны так, что при $x \to \infty$ функции третьего рода с точностью до постоянных переходят в

$$\frac{e^{-ikr}}{\sqrt{r}}, \text{ где } r=\frac{c}{2}e^x \text{ и } 2h^2=k^2\frac{c^2}{2}.$$

Посредством этих определений можно из формул III, 3c и III, 1e получить асимптотические выражения для присоединенных функций первого и второго рода при $x \to \infty$. В разделах III, 3c и III, 1e было предположено, что $2h^2 \cos 2x$ велико. Здесь мы не принимаем h вначале большим, а принимаем $2h^2 \operatorname{ch} 2x$ большим, что ведет к тем же следствиям (*33*, стр. 316; *89*; *93*; *94*; *66*; *68*).

Мы выбираем здесь путь, при котором исходим из того, что в (2) III, 5 полагаем

$$2h^2 \operatorname{ch} 2x \backsim h^2e^{2x}=y^2.$$

Мы получаем (*24*) тогда:

$$\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{1}{y}\frac{du}{dy}+u\left(1-\frac{\lambda}{y^2}+1\right)=0. \tag{1}$$

Двумя линейно независимыми интегралами этого уравнения будут:

$$J_{\sqrt{\lambda}}(y) \quad \text{и} \quad N_{\sqrt{\lambda}}(y),$$

где J и N являются функциями Бесселя первого и второго рода (последняя определена по К. Нейману). При больших значениях y мы имеем для этих функций выражения:

$$\frac{\cos(y+\alpha)}{\sqrt{y}} \text{ и } \frac{\sin(y+\alpha)}{\sqrt{y}},$$

где опущены постоянные множители. Фазовая постоянная α зависит весьма просто от λ (*20*, стр. 313). В виде функций третьего рода, мы вводим

$$J-iN.$$

Эта функция Ганкеля (*64*, стр. 95 и 102) ведет себя при $y \to \infty$, как

$$\frac{e^{-i(y+\alpha)}}{\sqrt{y}};$$

при чем опять постоянный множитель не написан. Полученные таким образом функции третьего рода обладают указанным выше асимптотическим поведением. Присоединенные функции первого и второго рода, образуемые из обыкновенных функций

Матье путем замены независимого переменного на ix, в общем случае не идентичны с прямо введенными, а состоят из линейной комбинации этих функций. Определение постоянного множителя при функциях второго рода является сложной задачей (*33*, *94*).

Введем для присоединенных функций первого рода обозначения $Ce^{(1)}$ и $Se^{(1)}$; для функций второго рода (четной и нечетной) $Ce^{(2)}$ и $Se^{(2)}$; для функций третьего рода, поведение которых при большом значении аргумента аналогично $e^{-iy}\sqrt{y}$, $Ce^{(3)}$ и $Se^{(3)}$. Благодаря введению индексов и аргументов обозначение становится вполне определенным.

b) Разложение присоединенных функций в ряды по Е. Гейне

Для практического расчета присоединенных функций удобны разложения, данные Е. Гейне (*42*, I, стр. 414). Эти разложения легко получить, если разложить непрерывную функцию $F(\xi, \eta)$ по произведениям $Ce_n^{(1)}(\xi)\cdot ce_n(\eta)$ или по нечетным функциям $Se^{(1)}\cdot se$ (двухразмерное разложение Фурье), при чем функции разложения $Ce_n^{(1)}$ и ce_n являются присоединенной функцией Матье и функцией Матье первого рода n-го порядка, и удовлетворяют дифференциальным уравнениям (2a) и (2b) из I 1, d. В качестве разлагаемой функции выбираем

$$\cos kx=\cos(kc \operatorname{ch}\xi\cdot\cos\eta),$$

[уравнение (1) из I, 1d],

$$\cos(kc\cdot\operatorname{ch}\xi\cdot\cos\eta)=\sum a_n\cdot Ce_{2n}^{(1)}(\xi)\cdot ce_{2n}(\eta). \tag{1}$$

Мы умножим правую и левую части уравнения (1) на $ce_{2n}(\eta)$ и интегрируем по η от 0 до 2π. Это дает:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ce_{2n}\cdot\cos(kc\cdot\operatorname{ch}\xi\cdot\cos\eta)\,d\eta=a_n\,p_n\,Ce_{2n}^{(1)}(\xi), \tag{1a}$$

где a_n и p_n являются постоянными, величина которых не важна для дальнейшего. Интеграл слева (1a) мы преобразуем, применив формулу:

$$ce_{2n}=\sum_{m=0}^{\infty} A_{2n,\,2m}\cos 2m\eta$$

и (*102*, стр. 60):

$$J_{2n}(u)=\frac{(-1)^n}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(u\cos\eta)\cdot\cos 2n\eta\cdot d\eta.$$

$$Ce_{2n}^{(1)}(\xi)=\sum_{m=0}^{\infty} A_{2n,2m}(-1)^m J_{2m}(kc \operatorname{ch}\xi). \tag{2}$$

Коэффициенты $A_{2n,2m}$ из (2) раздела (III, 2a) известны. При $\xi \to \infty$ получаем с точностью до постоянного множителя C:

$$\lim_{\xi\to\infty} Ce_n^{(1)}(\xi) = C\frac{\cos\left(k\frac{c}{2}e^{\xi}\right)}{\sqrt{k\frac{c}{2}e^{\xi}}} = C\frac{\cos kr}{\sqrt{kr}}, \tag{3}$$

где

$$r = \frac{c}{2}e^{\xi} \text{ (ср. III, 5a),}$$

при чем (2) согласно определению предыдущего параграфа является присоединенной функцией первого рода. Остальные три типа присоединенных функций первого рода могут быть получены путем разложения в ряды следующих выражений:

$$\sin(kc\cdot\mathrm{sh}\,\xi\cdot\sin\eta);\ \sin(kc\cdot\mathrm{ch}\,\xi\cdot\cos\eta);\ \cos(kc\cdot\mathrm{sh}\,\xi\cdot\sin\eta).$$

Полученные таким образом ряды были получены Зершингером (*117*) непосредственно из дифференциального уравнения. При этом были применены соотношения, справедливые кроме функций Бесселя первого рода J_n также и для функций второго рода N_n и для функций Ганкеля $H_n^{(2)}$. Мы должны подставить обе последние функции на место J_n в рядах (1), (2) и получим тогда присоединенные функции второго и третьего рода. Определенные таким образом функции (относительно сходимости рядов мы отсылаем к III, 5d) являются линейными комбинациями присоединенных функций второго и третьего рода, они получаются, если в обыкновенных функциях Матье первого и второго рода (III, 4 и III, 2) подставить чисто мнимое независимое переменное. Определение постоянных множителей этих линейных комбинаций является весьма трудной задачей. Однако, для многих практических приложений, знание этих множителей необязательно.

c) Разложение присоединенных функций по В. Зигеру

Для четырех типов присоединенных функций Матье первого рода Зигер (*121*) дал ряды, полученные путем разложений Фурье для выражений:

$$J_0(kr);\ J_1(kr)\sin\vartheta;\ J_1(kr)\cos\vartheta;\ J_2(kr)\sin 2\vartheta,$$

где

$$r\cos\vartheta = c\cdot\mathrm{ch}\,\xi\cdot\cos\eta \text{ и } r\sin\vartheta = c\cdot\mathrm{sh}\,\xi\cdot\sin\eta.$$

Мы приведем здесь вывод двух разложений, не данных Зигером. Мы имеем [(*102*, стр. 280; *147*, стр. 363) (1)]:

$$\begin{aligned}\frac{kc}{8r}J_1(kr)\cos\vartheta = \cos\vartheta\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\cdot m\cdot J_m\left(\frac{kc}{2}e^{\xi}\right)\times\\ \times J_m\left(\frac{kc}{2}e^{-\xi}\right)\cdot K_{1m}(\cos 2\eta)\end{aligned} \tag{1}$$

и

$$\left.\begin{aligned}Ce_{2n+1}^{(1)} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{k}{8}\cdot J_1(kr)\cdot\cos\vartheta\cdot ce_{2n+1}\,d\eta =\\ &= \frac{\mathrm{ch}\,\xi}{\pi}\,\frac{kc}{8r}\int_0^{2\pi}J_1(kr)\cdot\cos\eta\cdot ce_{2n+1}\,d\eta =\\ &= \mathrm{ch}\,\xi\cdot\sum_{m=1}^{\infty}a_{2n+1,\,m}\cdot J_m(he^{\xi})\cdot J_m(he^{-\xi}).\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Далее:

$$ce_{2n+1} = \sum_{l=0}^{\infty}A_{2n+1,\,2l+1}\cdot\cos(2l+1)\eta.$$

Таким образом

$$\begin{aligned}a_{2n+1,\,m} = (-1)^{m-1}\cdot m\cdot\sum_{l=0}^{\infty}A_{2n+1,\,2l+1}\times\\ \times\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}K_{1m}(\cos 2\eta)\cdot\cos\eta\cdot\cos(2l+1)\,\eta\cdot d\eta.\end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned}\cos\eta\cdot K_{1m}(\cos 2\eta) = \cos\eta\cdot\frac{\sin(2m+2)\,\eta}{\sin 2\eta} = \cos(2m+1)\,\eta +\\ +\cos(2m-1)\,\eta + \ldots,\end{aligned}$$

$$a_{2n+1,\,m} = (-1)^m\cdot m\cdot[A_{2n+1,\,1} + A_{2n+1,\,3} + \cdots + A_{2n+1,\,2m-1}]. \tag{3}$$

Формулы (2) и (3) дают искомые разложения в ряды. Мы получим ряд для $Ce_{2n+1}^{(3)}$, если вместо (1) разложим функцию Ганкеля второго рода первого порядка.

Получаем:

$$Ce_{2n+1}^{(3)} = \sum_{m=1}^{\infty}a_{2n+1,\,m}\cdot H_m^{(2)}(he^{\xi})\cdot J_m(he^{-\xi}), \tag{4}$$

где опять a дано выражением (3). Аналогично мы получим формулу:

$$Se_{2n}^{(1)} = \mathrm{sh}\,\xi\cdot\mathrm{ch}\,\xi\cdot\sum_{m=1}^{\infty}b_{2n,\,m}\cdot J_{m+1}(he^{\xi})\cdot J_{m+1}(he^{-\xi}) \tag{5}$$

путем разложения выражений [*102*, стр. 280; *147*, стр. 362 (1)].

$$J_2(kr)\sin 2\vartheta = k^2r^2\,\frac{J_2(kr)}{(kr)^2}\sin 2\vartheta =$$

$$= k^2r^2\sin 2\vartheta\,\frac{4\cdot 16}{k^2c^2}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\cdot(2+m)\,J_{2+m}(he^{\xi})\times$$

$$\times J_{2+m}(he^{-\xi})\cdot K_{2,\,m}(\cos 2\eta),$$

по произведениям Матье. Отсюда имеем:

$$2K_{2,m}(\cos 2\eta)=\frac{dK_{1,m+1}(\cos 2\eta)}{d(\cos 2\eta)}=-\frac{(m+2)\cos(2m+4)\eta}{\sin^2 2\eta}+$$
$$+\frac{\sin(2m+4)\eta}{\sin^3 2\eta}\cdot\cos 2\eta.$$

После простого расчета находим:

$$b_{2n,m}=64\cdot(-1)^m\cdot(2+m)\times$$
$$\times\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{l=1}^{\infty}A_{2n,2l}\cdot\sin 2l\eta\cdot\sin 2\eta\cdot K_{2,m}\cdot d\eta, \qquad (6)$$

при чем $A_{2n,2l}$ известно из раздела (III, 2a). Эта сумма содержит после интегрирования только конечное количество членов. Вместе с рядами (*121*):

$$Ce_{2n}^{(1)}=\sum_{m=0}^{\infty}A_{2n,2m}\cdot J_m(he^{\xi})\cdot J_m(he^{-\xi});$$

$$Se_{2n+1}^{(1)}=\operatorname{sh}\xi\cdot\sum_{m=1}^{\infty}b_{2n+1,m}\cdot J_m(he^{\xi})\cdot J_m(he^{-\xi});$$

$$b_{2n+1,m}=m\,[B_{2n+1,1}-B_{2n+1,3}+\cdots(-1)^{m+1}B_{2n+1,2m-1}]$$

и соответствующими рядами для функций второго и третьего рода (4) мы получим (по Зигеру) разложение присоединенных функций в ряды по функциям Бесселя и Ганкеля.

d) Сходимость приведенных разложений

Для приложений (*121*; *135*) важно знать сходимость разложений разделов III, 5b и III, 5c для функций $Ce^{(3)}$ и $Se^{(3)}$, определенных в разделе III, 5a.

Мы рассмотрим непосредственно представление $Ce_{2n}^{(3)}$, по Е. Гейне:

$$Ce_{2n}^{(3)}=\sum_{m=0}^{\infty}A_{2n,2m}\cdot(-1)^m\cdot H_{2m}^{(2)}(2h\operatorname{ch}\xi), \qquad (1)$$

или

$$Ce_{2n}^{(3)}=\sum_{m=0}^{\infty}A_{2n,2m}\cdot H_{2m}^{(2)}(2h\operatorname{sh}\xi). \qquad (2)$$

И. Шуберт (*119*) показал, что ряд (1) при $i\xi=\varphi$ сходится, если $|\cos\varphi|<1$, и ряд (2), если $|\sin\varphi|<1$. Оба ряда неприменимы при $\xi=0$. С другой стороны, пользуясь критерием сходимости Коши, легко показать, что разложение Б. Зигера:

$$Ce_{2n}^{(3)}=\sum_{m=0}^{\infty}A_{2n,2m}(-1)^m H_{2m}^{(2)}(he^{\xi})\cdot J_{2m}(he^{-\xi}) \qquad (3)$$

сходится при всех ξ, в частности, при $\xi=0$. Приложения будут даны в разделе V, 1d.

Остальные разложения Зигера сходятся при $\xi>0$.

6. Общие соображения о функциях Матье

Данный в дальнейших разделах обзор решений дифференциального уравнения Матье содержит большей частью формальное описание известных в литературе положений. Здесь уместно сделать замечания относительно обозначений функций Матье. В обзоре намечен также ряд проблем, представляющих практический интерес.

а) Замечания относительно обозначений функций Матье[1]

В разделах III, 2 и III, 5 мы занимались решением дифференциальных уравнений Матье:

$$\frac{d^2u}{d\eta^2}+u(\lambda-2h^2\cos 2\eta)=0; \qquad (1)$$

$$\frac{d^2u}{d\xi^2}+u(-\lambda+2h^2\operatorname{ch}2\xi)=0, \qquad (2)$$

соответствующих тем значениям λ и h, которые лежат на граничных кривых между областями устойчивых и неустойчивых решений (III, 3) дифференциального уравнения Матье, т. е. на кривых фиг. 3. Эти решения мы назвали функциями Матье. Периодические решения (1) вдоль этих кривых называются функциями Матье первого рода $S_n^{(1)}$ и $C_n^{(1)}$. В литературе (*33*) весьма употребительны обозначения se_n и ce_n. Решения уравнения (2), которые образуются из функций Матье первого рода (с точностью до постоянного множителя) путем замены η на $i\xi$, называются присоединенными функциями Матье первого рода $Ce_n^{(1)}$ и $Se_n^{(1)}$. В литературе эти функции обозначаются также Ce_n и Se_n. Непериодические решения (1) вдоль граничных кривых называются функциями Матье второго рода $S_n^{(2)}$ и $C_n^{(2)}$. Заметим, что $S_n^{(1)}$ и $S_n^{(2)}$ или $C_n^{(1)}$ и $C_n^{(2)}$ образуют фундаментальную пару решений. $S_n^{(2)}$ является четной, $C_n^{(2)}$ нечетной функцией η. В литературе их обозначают иногда *jn* и *in*. Присоединенными функциями Матье второго рода $C_n^{(2)}$ и $S_n^{(2)}$ называют функции, образуемые путем замены η на $i\xi$ в функциях второго рода. В литературе (*33*) их обозначают иногда *In* и *Jn*.

Мы характеризовали присоединенные функции первого и второго рода их асимптотическими выражениями (III, 5a). Точно также мы дали в (III, 5a) асимптотические выражения для присоединенных функций Матье третьего рода, являющихся линейной комбинацией присоединенных функций первого и второго рода. Для этих функций еще не имеется установленных обозначений. Остается заметить, что каждому из введенных классов функций (всего 5) соответствует четыре типа функций Матье первого рода (III, 2a).

[1] Во всей этой книге нами проведены, в отличие от Стретта, следующие обозначения для функций Матье: *se*, *ce* — вместо *S* и *C*; *Se*, *Ce* — вместо готических обозначений Стретта. *Прим. ред.*

b) Вырождение функций Матье: функции Вебера-Эрмита и Бесселя

Рассмотрим вырождение функций Матье (функции эллиптического цилиндра) в функции Вебера-Эрмита (функции параболического цилиндра). Дифференциальное уравнение Матье:

$$\frac{d^2u}{dx^2}+(\lambda+2h^2\cos 2x)\,u=\frac{d^2u}{dx^2}+\left[\lambda+2h^2\left(1-2x^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{2}{3}x^4+\cdots\right)\right]u=0$$

переходит после подстановки

$$x=\frac{\xi}{\sqrt{2h}}$$

в

$$\frac{d^2u}{d\xi^2}+\left[\frac{\lambda+2h^2}{2h}-\xi^2+\frac{\xi^4}{6h}+O\left(\frac{1}{h^2}\right)\right]u=0. \quad (1)$$

Предполагая, что h становится бесконечно большим, уравнение (1) переходит в:

$$\frac{d^2u}{d\xi^2}+[\Lambda-\xi^2]\,u=0, \quad (2)$$

т. е. в уравнение функций параболического цилиндра (*20*, стр. 261; *151*, стр. 347; *148*), решение которого образуется полиномами Эрмита (*20*, стр. 76).

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

при собственных значениях

$$\Lambda-1=0,\,2,\,4,\,6\ldots.$$

Пользуясь уравнением (2), можно высказать некоторые соображения о нулях, а также об асимптотическом поведении собственных чисел функций Матье (*58*); в частности, можно получить для дифференциального уравнения Матье формулы, аналогичные уравнениям (2) и (3) раздела II, 3c. Очевидно, что, применив к дифференциальному уравнению присоединенных функций Матье указанное выше преобразование, мы получим уравнение, идентичное (2).

Если перейти от эллиптических координат:

$$x=c\cdot\operatorname{ch}\xi\cdot\cos\eta$$
$$y=c\cdot\operatorname{sh}\xi\cdot\sin\eta$$

к цилиндрическим координатам

$$x=r\cos\varphi$$
$$y=r\sin\varphi$$

при $c\to 0$; $\xi\to\infty$; $\frac{c}{2}e^{\xi}\to r$, то получим из

$$\frac{d^2u}{dx^2}+u\,(-\lambda+2h^2\operatorname{ch}2x)=0, \text{ с } 2h^2\operatorname{ch}2x\backsim h^2e^{2x}=y^2$$

дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{1}{y}\frac{du}{dy}+u\left(-\frac{\lambda}{y^2}+1\right)=0,$$

которое решается в функциях Бесселя (Ганкеля).

Дифференциальное уравнение обыкновенных функций Матье переходит при этом в уравнение круговых функций.

Особенно нагляден переход от присоединенных функций Матье к функциям Бесселя в разложениях (представлениях) Е. Гейне из III, 5b:

$$Ce_{2n}^{(1)}(\xi)=\sum_{m=0}^{\infty}A_{2n,\,2m}(-1)^m\cdot J_{2m}(2h\operatorname{ch}\xi).$$

При вышеупомянутых условиях, $c\to 0$ и $h\to 0$, все $A_{2n,\,2m}$ при $m\neq n$ равны нулю (III, 2c).

Следовательно:

$$\lim Ce_{2n}^{(1)}=(-1)^nJ_{2n}(kr),\quad \text{откуда } h=\frac{kc}{2}.$$

c) Дальнейшие вопросы относительно дифференциального уравнения Матье

Хотя новые исследования пролили свет на некоторые важнейшие свойства функций Матье, в знании этих функций имеются огромные пробелы, этот отдел анализа исследован весьма не глубоко.

Чрезвычайно интересно исследование асимптотического поведения функций Матье второго рода, применение асимптотических выражений к практическим расчетам, применение асимптотических выражнеий к присоединенным функциям Матье; определение постоянных множителей в различных представлениях присоединенных функций Матье. Некоторые шаги в решении этих вопросов были предприняты Р. Маклореном (*89*) и С. Гольдштейном (*33*).

Весьма интересен вопрос о соотношениях между различными функциями Матье. Недавно Уиттекером (*150*) дана рекурсионная формула, которую Р. С. Варма (*144*) применил к вычислению некоторых интегралов.

В соответствии с постановкой вопроса в разделе II, 2c интересно рассмотреть дифференциальное уравнение Матье при комплексных, и, главным образом, мнимых h^2 и соответствующие λ, ведущие к периодическим решениям. Случай чисто мнимого h^2 представляет практический интерес, так как он встречается в задаче о скин-эффекте в эллиптическом цилиндре (*126*; *89*) (см. раздел VII).

Мюльхоланд и С. Гольдштейн (*100*) применили к последнему случаю (мнимого h^2) расчетный прием, указанный в III, 2d.

IV. Дифференциальное уравнение Ляме

Как указано в I, 1е, мы называем дифференциальным уравнением Ляме выражение:

$$C\frac{d}{d\nu}\left(C\,\frac{dN}{d\nu}\right)+(H\nu^4+K\nu^2+L)\,N=0, \tag{1}$$

где

$$C^2=\frac{(\nu^2-a^2)\,(\nu^2-b^2)\,(\nu^2-c^2)}{\nu^2},$$

или одно из уравнений, образующихся из (1), если $a=b$ (сплюснутый) или $b=c$ (вытянутый эллипсоид вращения) (ср. IV, 6b). В литературе до сих пор чаще всего рассматривали уравнения, образующиеся из (1) при $H=0$. Как указано в разделе I, 1с, последнее уравнение (при $H=0$) получается в результате преобразования уравнения Лапласа:

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}=0$$

к эллиптической системе координат. Мы будем называть уравнения Ляме, образующиеся из (1) при $H=0$, или в случае эллипсоида вращения ($a=b$; $b=c$), потенциальными уравнениями Ляме.

1. Потенциальные функции Ляме на поверхности эллипсоида

Функции Ляме на поверхности эллипсоида определяются как решения дифференциального уравнения (1) раздела IV, при чем аргумент (независимая переменная) лежит в интервале $a>\nu>b$ или $b>\nu>c$. Мы рассматриваем, следовательно, решения уравнений (3b) и (3с) из I, 1с. Если ρ из раздела I, 1с считать постоянным и менять только ν и μ, то движение происходит на поверхности эллипсоида. Поэтому мы называем рассматриваемые в этом разделе функции функциями поверхности эллипсоида.

а) Перечисление четырех типов потенциальных функций Ляме на поверхности эллипсоида

Определим потенциальные функции Ляме на поверхности эллипсоида как решения дифференциального уравнения:

$$C\,\frac{d}{d\nu}\left(C\,\frac{dN}{d\nu}\right)+(K\nu^2+L)\,N=0, \tag{1}$$

являющиеся полиномами от ν^2 и умноженные на один или несколько множителей вида $1, \sqrt{\nu^2-a^2}$, $\sqrt{\nu^2-b^2}$, $\sqrt{\nu^2-c^2}$.

Мы получаем, следовательно, следующие четыре рода функций:

1. Род $\quad N=\Pi\,(\nu^2)$;

2. Род $\quad \begin{cases} N=\Pi\,(\nu^2)\cdot\sqrt{\nu^2-a^2}; \\ N=\Pi\,(\nu^2)\cdot\sqrt{\nu^2-b^2}; \\ N=\Pi\,(\nu^2)\cdot\sqrt{\nu^2-c^2}; \end{cases}$

3. Род $\quad \begin{cases} N=\Pi\,(\nu^2)\cdot\sqrt{(\nu^2-c^2)\,(\nu^2-b^2)}; \\ N=\Pi\,(\nu^2)\cdot\sqrt{(\nu^2-a^2)\,(\nu^2-b^2)}; \\ N=\Pi\,(\nu^2)\cdot\sqrt{(\nu^2-a^2)\,(\nu^2-c^2)}; \end{cases}$

4. Род $\quad N=\Pi\,(\nu^2)\cdot\sqrt{(\nu^2-a^2)\cdot(\nu^2-b^2)\,(\nu^2-c^2)},$

т. е. один тип первого рода, три типа второго рода, три типа третьего рода и один тип четвертого рода. При этом $\Pi\,(\nu^2)$ означает полином. Посредством введения новой независимой переменной u, при помощи $\wp$-функции Вейерштрассе (*50*, стр. 162; *151*, стр. 443):

$$\frac{d\wp}{du}=2\sqrt{(\wp-e_1)\,(\wp-e_2)\,(\wp-e_3)}=2\sqrt{(\nu^2-a^2)\,(\nu^2-b^2)\,(\nu^2-c^2)}=2C\nu;$$

$$3e_1=2a^2-b^2-c^2;$$

$$3e_2=2b^2-c^2-a^2;$$

$$3e_3=2c^2-a^2-b^2;$$

$$\nu^2\wp=+\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

уравнение Ляме (1) переходит в (*109*, стр. 118):

$$\frac{d^2N}{du^2}+[K\wp\,(u)+L']\,N=0; \tag{2}$$

$$L'=K\frac{a^2+b^2+c^2}{3}+L.$$

Так как $\wp\,(u)$ двоякопериодическая функция u, то уравнение (2) является общей формой дифференциального уравнения Хилла (1) из (II, 1) и обладает двумя, в общем случае, комплексными периодами. Эти соотношения аналогичны возникающим при преобразовании гипергеометрического уравнения к форме Хилла (II, 1*a*), при которой появляется один комплексный период. Легко заметить, что дифференциальные уравнения разделов I, 1*a* и I, 1*b*, образующиеся из (2) как частные случаи эллипсоидов вращения, обладают формой Хилла. Достаточно положить $\cos\Theta=\mu$, как полученное уравнение преобразуется к форме Хилла (относительно формул преобразования см. *116*, I, 246). Потенциальные функции Ляме на поверхности эллипсоида являются, следовательно, полиномами от $\wp(u)$, умноженными на один или несколько множителей вида $1, \sqrt{\nu^2-a^2}, \sqrt{\nu^2-b^2}, \sqrt{\nu^2-c^2}$, т. е. двоякопериодическими функциями u.

b) Собственные значения поверхностных эллипсоидальных функций; перечисление различных функций заданного порядка

Пусть N является полиномом степени $\frac{n}{2}$ от ν^2 и, следовательно, от $\wp(u)$; напишем разложение для N

$$\wp(u)=\frac{1}{u^2}+\alpha u^2+\ldots$$

$$N=\frac{a_0}{u^n}+\frac{a_1}{u^{n-2}}+\frac{a_2}{u^{n-4}}+\ldots$$

Подставив эти разложения в уравнение (2) раздела IV, 1a, находим:

$$\left[\frac{n(n+1)a_0}{u^{n+2}}+\frac{(n-1)(n-2)a_1}{u^n}+\ldots\right]+$$
$$+\left[K\left(\frac{1}{u^2}+\alpha u^2+\ldots\right)+L'\right]\cdot\left[\frac{a_0}{u^n}+\frac{a_1}{u^{n-2}}+\ldots\right]=0.$$

Полагая коэффициент при высшей степени $\frac{1}{u}$ равным нулю, получим:

$$K=-n(n+1). \tag{1}$$

Перейдем к определению L'. Если n означает порядок функции Ляме на поверхности эллипсоида, то степени полинома $\Pi(\nu^2)$ при четырех родах функций таковы:

$$\frac{n}{2},\ \frac{n-1}{2},\ \frac{n-2}{2},\ \frac{n-3}{2}.$$

Для функций первого рода нужно определить $\frac{n}{2}+1$ коэффициентов полинома степени $\frac{n}{2}$. Подстановка этого полинома в дифференциальное уравнение дает $\frac{n}{2}+1$ линейных однородных уравнений для определения коэффициентов. Исключение этих $\frac{n}{2}+1$ коэффициентов дает определяющее уравнение степени $\frac{n}{2}+1$ для L'. Совершенно аналогично мы получим для функций второго, третьего и четвертого рода уравнения степени $\frac{n+1}{2}$, $\frac{n}{2}$ и $\frac{n-1}{2}$, определяющие L'.

Каждому полученному таким образом значению L' соответствует поверхностная функция Ляме.

Все корни L' различны и вещественны (это легко показать; см. *109*, стр. 127; *2*, стр. 151).

Если n — четное, то мы получим функции первого и третьего рода. Их число равно $\frac{n}{2}+1+3\frac{n}{2}=2n+1$. При нечетных n мы получаем только полиномы второго и четвертого рода. Их число равно $\frac{n-1}{2}+3\frac{n+1}{2}=2n+1$. Таким образом существует $2n+1$ различных поверхностных функций Ляме n-го порядка. Можно показать, что все они будут линейно независимы (*151*, стр. 559).

c) Свойства ортогональности поверхностных эллипсоидальных функций

Пусть M будет поверхностная функция эллипсоида, удовлетворяющая тому же дифференциальному уравнению, что и N, только с независимой переменной μ вместо ν. Возьмем два произведения поверхностных функций эллипсоида: M_nN_n и M_mN_m, причем индекс внизу означает порядок. Можно показать (*109*, стр. 131; *2*, стр. 153), что на эллипсоиде $\rho=\text{const}$ справедливо

$$\int l\cdot M_nN_n\cdot M_mN_m\cdot d\sigma=0, \tag{1}$$

где

$$l=\frac{1}{\sqrt{(\rho-\mu^2)(\rho-\nu^2)}}$$

и $d\sigma$ является элементом поверхности эллипсоида. Интегрирование производится по всей поверхности эллипсоида. Интеграл (1) не зависит от ρ. Зависимость l от ρ компенсируется зависимостью $d\sigma$ от ρ. Если разложение заданной функции $\Phi(\nu,\mu)$ по поверхностным эллипсоидальным функциям возможно (*20*, стр. 303; *144* b), то с помощью соотношения (1) оно легко может быть проведено. Для действительных расчетов необходимы еще некоторые формулы. Интеграл (1) может быть приведен с помощью переменных:

$$\wp(u)=\nu^2-\frac{a^2+b^2+c^2}{3};$$
$$\wp(v)=\mu^2-\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

к форме:

$$\iint[\wp(u)-\wp(v)]\cdot M_n(u)\cdot N_n(u)\cdot M_m(v)\,N_m(v)\cdot du\cdot dv$$

(*49*, стр. 14). При $m=n$ этот интеграл превращается в $8i\pi\cdot(\alpha\beta_1-\beta\alpha_1)$, при чем $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1$ являются постоянными разложения

$$[N(\nu^2)]^2=\alpha+\beta\,\wp(\nu)+\ldots$$
$$[\wp(\nu)\cdot N(\nu^2)]^2=\alpha_1+\beta_1\,\wp(\nu)+\ldots$$

Относительно сходимости разложений заданной функции по поверхностным эллипсоидальным функциям мы не делаем никаких замечаний.

Теоремы о симметричности и о нулях поверхностных функций Ляме можно найти в литературе (*49*, стр. 13; *109*, стр. 120—131; *151*, стр. 560; *70*; *124*).

Весьма интересные соотношения между потенциальными функциями Ляме на поверхности эллипсоида и шаровыми функциями Лапласа можно получить, проектируя поверхность эллипсоида на поверхность единичного шара (*49*, стр. 9; *2*, стр. 141; *20*, стр. 301).

2. Потенциальные функции Ляме в пространстве

Если до сих пор мы ограничивались функциями Ляме на поверхности эллипсоида, то теперь мы перейдем к интегрированию уравнения Лапласа в пространстве при помощи произведений Ляме.

а) Произведения Ляме

Если в (I, 1c) положить $H=0$, то три дифференциальных уравнения, на которые расщепляется преобразованное к эллиптическим координатам уравнение Лапласа, обладают одинаковой формой. Выражение

$$R_n(\rho^2)\cdot M_n(\mu^2)\cdot N_n(\nu^2) \qquad (1)$$

представляет интеграл уравнения Лапласа, n попрежнему означает порядок функции Ляме. Уравнение Лапласа (дифференциальное уравнение в частных произведениях) интегрируется посредством бесконечного ряда произведений вида (1). Сходимость этого решения внутри эллипсоида может быть доказана при следующих предположениях: а) область ρ ограничена, b) решение на поверхности эллипсоида (верхняя граница ρ) переходит в функцию μ и ν, которая раскладывается в сходящийся ряд по функциям поверхности эллипсоида (*144*b). Таким образом решается проблема Дирихле для внутренней части эллипсоида.

Функции $R_n(\rho^2)$ неограниченно возрастают при $\rho\to\infty$. В этом легко убедиться, так как $R_n(\rho^2)$, являясь полиномом степени n, может быть записано в виде:

$$A\rho^n\left[1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right].$$

Здесь A — некоторая постоянная. Указанные свойства R_n показывают, что решение уравнения Лапласа для внешнего по отношению к эллипсоиду пространства не может быть представлено рядом произведений вида (1).

b) Присоединенные функции Ляме

Согласно разделу II, 4b, выражение

$$T_n=R_n\int\limits_0^u \frac{2n+1}{R_n^2}\,du \qquad (1)$$

является вторым решением дифференциального уравнения Ляме, линейно независимого относительно R. Это решение при $\rho\to\infty$ ведет себя, как ρ^{-n-1}, и, следовательно, может быть применено при неограниченном ρ. Мы назовем его присоединенной функцией Ляме (*109*, стр. 134; *2*, стр. 159, *151*, стр. 562; *49*, стр. 15; *16*, стр. 258). Во внешнем относительно эллипсоида пространстве дифференциальное уравнение Лапласа интегрируется посредством бесконечного ряда произведений вида:

$$T_n(\rho)\cdot M_n(\mu)\cdot N_n(\nu), \qquad (2)$$

при чем опять сходимость введенного ряда доказывается в предположении, что решение на поверхности эллипсоида раскладывается по поверхностным эллипсоидальным функциям Ляме (*16*, стр. 262).

Относительно проблем теории потенциала, решаемых посредством функций R_n и T_n, можно прочесть в (*20*, стр. 301).

3. Представление потенциальных функций Ляме

Различные представления потенциальных функций Ляме основываются на возможности выбора различных независимых переменных. В качестве последних мы выберем ν и u, введенные в разделе IV, 1а.

а) Выражения для потенциальных функций Ляме до порядка $n=3$

Выражения для потенциальных функций Ляме до порядка 10 включительно даны Гериторе (*32*); при этом он допустил ошибку при $n>3$ (*75*, стр. 673). Мы дадим формулы до $n=3$.

$n=0$:

$N_0=1$; (функция первого рода)

$T_0=u$ (*109*, стр. 138);

$n=1$: всего три функции:

$$N_1=\sqrt{\wp(u)-e_1};\quad N_1=\sqrt{\wp(u)-e_2};\quad N_1=\sqrt{\wp(u)-e_3};$$

или

$$N_1=\sqrt{\nu^2-a^2};\quad N_1=\sqrt{\nu^2-b^2};\quad N_1=\sqrt{\nu^2-c^2};$$

(три функции второго рода).

При этом

$$R_1(\rho)\cdot N_1(\nu)\cdot M_1(\mu)=\frac{x}{h_1} \text{ или } \frac{y}{h_2} \text{ или } \frac{z}{h_3},$$

где

$$h_1=[(a^2-b^2)\ (a^2-c^2)]^{-\frac{1}{2}};$$

$$h_2=[(b^2-c^2)\ (b^2-a^2)]^{-\frac{1}{2}};$$

$$h_3=[(c^2-a^2)\ (c^2-b^2)]^{-\frac{1}{2}};$$

$n=2$: всего пять функций:

$$N_2=\wp(u)-\frac{L_1}{6};\ N_2=\wp(u)-\frac{L_2}{6},$$

при чем $L_{1,2}^2=3g_2$, где g_2 и g_3 являются инвариантами функции Вейерштрасса $\wp(u)$ (*50*, стр. 169; *64*, стр. 49).

$R_2 M_2 N_2$ являются полиномами второй степени x, y, z;

$$N_2=\sqrt{(\wp(u)-e_\alpha)(\wp(u)-e_\beta)};\ \alpha, \beta=1,\ 2,\ 3$$

или

$$N_2=\sqrt{(\nu^2-a^2)(\nu^2-b^2)}$$

и соответственно еще два выражения, получаемые перестановкой a, b и c (три функции второго рода).

$R_2 M_2 N_2$ с точностью до множителя являются произведениями xy, yz и xz.

$n=3$: всего семь функций:

$$N_3=\wp'(u)=2\sqrt{(\nu^2-a^2)(\nu^2-b^2)(\nu^2-c^2)}$$

(одна функция четвертого рода).

$R_3N_3M_3$ является с точностью до множителя произведением xyz.

$$N_3=\left[\wp(u)+\frac{e_\alpha}{2}-\frac{L_{1,2}}{2}\right]\sqrt{\wp(u)-e_\alpha};\quad \alpha=1, 2, 3;$$

$$L_{1,2}^2-6L_{1,2}\,e_1+45e_1^2-15\,g_2=0$$

(шесть функций второго рода).

Совершенно отличное представление о функции Ляме проведено Д. Дарвином (*23*), который применил для этого иную систему координат.

b) Случай симметрии вращения

Мы займемся сейчас случаями $b=c$ (вытянутый эллипсоид вращения),

$a=b$ (сплюснутый эллипсоид вращения) и

$a=b=c$ (шар).

Для вытянутого эллипсоида вращения из уравнения (2b) раздела I, 1a видно, что в случае потенциального уравнения ($k^2=0$) мы получим дифференциальное уравнение присоединенных полиномов Лежандра для M. Переход к введенным эллиптическим координатам может быть проведен довольно просто. Во внутренней проблеме эллипсоида дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial u}{\partial\mu}\right\}+\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{(\xi^2-1)\frac{\partial u}{\partial\xi}\right\}+\left(\frac{1}{1-\mu^2}+\frac{1}{\xi^2-1}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0 \qquad (1)$$

может интегрироваться с помощью произведений:

$$P_n^m(\xi)\cdot P_n^m(\mu)\cdot\begin{cases}\cos m\varphi,\\ \sin m\varphi,\end{cases} \qquad (2)$$

где P_n^m является m-ым присоединенным полиномом Лежандра n-го порядка (*151*, стр. 316; *20*, стр. 309):

$$P_n^m(\xi)=(1-\xi^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{d\xi^m}P_n(\xi).$$

Постоянная Δ в (2b) и (2c) раздела I, 1a равна при этом $n(n+1)$.

В случае внешней задачи относительно эллипсоида интеграл уравнения (1) будет дан (вместо 2) в виде:

$$Q_n^m(\xi)\cdot P_n^m(\mu)\begin{cases}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{cases}, \qquad (3)$$

при чем Q_n^m является m-ым присоединенным полиномом Лежандра n-го порядка, второго рода:

$$Q_n^m(\xi)=(1-\xi^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{d\xi^m}Q_n(\xi).$$

Функции Q_n^m могут быть выражены через P_n^m (*78*, стр. 164; *143*; *20*, стр. 481):

$$Q_n^m(x)=(-1)^m\frac{(n+m)!}{(n-m)!}P_n^m(x)\int\limits_x^\infty\frac{dx}{(x^2-1)\left\{P_n^m(x)\right\}^2}.$$

Мы имеем:

$$Q_0(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1};$$

$$Q_1(x)=\frac{1}{2}x\ln\frac{x+1}{x-1}-1;$$

$$Q_2(x)=\frac{1}{4}(3x^2-1)\ln\frac{x+1}{x-1}-\frac{3}{2}x \text{ и т. д.}$$

С помощью рядов произведений вида (2) или (3) задача теории потенциала решается для вытянутого эллипсоида вращения аналогично такой же задаче для трехосного эллипсоида (раздел IV, 2b).

В случае сплюснутого эллипсоида вращения уравнение (2с) раздела I. 1b образуется из уравнения (2b) того же раздела путем замены μ на $i\xi$. Мы имеем следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial u}{\partial\mu}\right\}+\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{(\xi^2+1)\frac{\partial u}{\partial\xi}\right\}+\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\left\{\frac{1}{1-\mu^2}-\frac{1}{\xi^2+1}\right\}=0,$$

которое в случае внутренней задачи интегрируется с помощью произведений:

$$P_n^m(i\xi)\cdot P_n^m(\mu)\begin{cases}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{cases}$$

и в случае внешней задачи с помощью произведений:

$$Q_n^m(i\xi)\cdot P_n^m(\mu)\begin{cases}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{cases}.$$

Постоянная Λ в уравнениях (2b) и (2с) раздела I, 1b равна $n(n+1)$. Простейшими функциями $Q_n^m(i\xi)$ являются:

$$Q_0(i\xi)=\operatorname{arc\,ctg}\xi;$$
$$Q_1(i\xi)=1-\xi\operatorname{arc\,ctg}\xi;$$
$$Q_2(i\xi)=\frac{1}{2}(3\xi^2+1)\operatorname{arc\,ctg}\xi-\frac{3}{2}\xi \text{ и т. д.}$$

Ряды и таблицы для функций P_n^m и Q_n^m известны (*64*, стр. 79—89; *151*, стр. 317 и 281; *16*; *143*; *144 a*); таким образом численное решение задачи потенциала в случае эллипсоида вращения трудностей не представляет. Случай вырождения эллипсоида вращения в шар уже рассмотрен в разделе I, 1a и I, 1b (см. также *20*, стр. 303). Совершенно отличное от приведенного представление потенциальных функций Ляме для эллипсоидов вращения приведено D. M. Wrinch (*151a*).

4. Волновые функции Ляме для трехосного эллипсоида

Под термином волновая функция Ляме понимают решение дифференциального уравнения в частных производных:

$$(\mu^2-\nu^2)A\frac{\partial}{\partial\rho}\left(A\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+(\nu^2-\rho^2)B\frac{\partial}{\partial\mu}\left(B\frac{\partial u}{\partial\mu}\right)+$$
$$+(\rho^2-\mu^2)C\frac{\partial}{\partial\nu}\left(C\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)=-H(\mu^2-\rho^2)(\rho^2-\nu^2)(\nu^2-\mu^2)u, \quad (1)$$

где A, B и C имеют значение, указанное в (2) раздела I, 1c; мы ищем его решение в виде произведения одной функции только от ρ и одной функции только от μ и ν. Мы получим:

$$R(\rho)\cdot S(\mu,\nu). \quad (2)$$

Функция $S(\mu,\nu)$ называется волновой функцией Ляме на поверхности эллипсоида.

а) Волновые функции Ляме на поверхности эллипсоида

Мы сконструируем функции S для малых значений параметра H в форме рядов по целиком положительным степеням H; для достаточно малых значений H эти ряды сходятся. Существование волновых функций Ляме будет таким образом доказано для таких H, при которых ряды сходятся. Мы получим для $S(\mu,\nu)$ дифференциальное уравнение в частных производных, представив уравнения (3b) и (3с) из I, 1с, при помощи введенной в разделе IV, 1a $\wp$-функции Вейерштрасса в форме:

$$\frac{d^2M}{du^2}+[H\wp^2(u)+K'\wp(u)+L']M=0; \quad (1)$$

$$\frac{d^2N}{dw^2}+[H\wp^2(w)+K'\wp(w)+L']N=0. \quad (2)$$

Напишем в (1) iv вместо u; затем умножим (1) на N и (2) на M и сложим (1) и (2). Тогда для $S=MN$ получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial v^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial w^2}+S\{H[-\wp^2(iv)+\wp^2(w)]+K'[-\wp(iv)+\wp(w)]\}=0. \quad (3)$$

Если $H=0$, то (3) решается в потенциальных функциях Ляме на поверхности эллипсоида и K' принимает значение $K_0'=-n(n+1)$. Для решения задачи о собственных функциях уравнения (3) применяется граничное условие, аналогичное условию, определяющему потенциальные функции Ляме, именно: регулярность на всей поверхности эллипсоида. Для малых H мы можем рассматривать первый член в фигурных скобках, как малое возмущение.

Теория возмущения в задачах о собственных функциях учит, что новые собственные значения K' и новые собственные функции S могут быть рассчитаны из невозмущенных K_0' и $S_0=MN$, полученных при $H=0$ (*118*, стр. 440).

Полагаем:

$$K'=K_0'+HK_1'+H^2K_2'+\ldots; \quad (4)$$

$$S=S_0+HS_1+H^2S_2+\ldots. \quad (5)$$

В настоящем случае имеется некоторое усложнение такого рода: n-му невозмущенному собственному числу K_0' всегда соответствует $2n+1$ линейно независимых собственных функций (см. IV, 1b): это собственное значение вырождено. Таким образом, благодаря возмущению невозмущенное собственное значение распадается максимум на $2n+1$ новых (возмущенных) собственных числа, из которых каждое соответствует собственной функции (*118*, стр. 453). Какой — показывает подстановка в дифференциальное уравнение. В этом случае можно рассчитать

K_1', K_2', S_1, S_2 и т. д. из уравнений (4) и (5) методом последовательных приближений. Таким образом, хотя бы для малых H, мы получим волновую функцию Ляме на поверхности эллипсоида.

b) Ортогональность волновых функций Ляме на поверхности эллипсоида

Докажем следующее предложение: если S_i и S_k означают две волновые функции Ляме на поверхности эллипсоида, которые при $H=0$ переходят в потенциальные функции Ляме на поверхности эллипсоида M_iN_i и M_kN_k, то имеет место соотношение:

$$\iint l\cdot S_i\cdot S_k\cdot d\sigma=0, \tag{1}$$

где

$$l=\frac{1}{\sqrt{(\rho^2-\mu^2)(\rho^2-\nu^2)}}, \tag{2}$$

при чем интеграл распространен на всю поверхность эллипсоида.

Доказательство (1) проводится способом, который был применен для случая потенциальных функций Ляме (IV, 1c).

Пусть $V_i=R_iS_i$ и $V_k=R_kS_k$ являются двумя решениями уравнения

$$\Delta V+k^2V=0. \tag{3}$$

Для области G, ограниченной поверхностью F, которую мы позже отождествим с эллипсоидом нашего конфокального семейства, справедливо следующее интегральное преобразование (формула Грина):

$$\iiint\limits_G (V_i\Delta V_k-V_k\Delta V_i)\,dg=\iint\limits_F\left(V_i\frac{\partial V_k}{\partial n}-V_k\frac{\partial V_i}{\partial n}\right)df, \tag{4}$$

при чем n означает внешнюю нормаль в каждой точке F. Так как V_i и V_k удовлетворяют уравнению (3), то левая сторона выражения (4) равна нулю. Далее имеем:

$$\frac{\partial V}{\partial n}=\frac{\partial V}{\partial\rho}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial n}=\frac{\partial V}{\partial u}\cdot\frac{du}{d\rho}\cdot\frac{d\rho}{dn}=\frac{\partial V}{\partial u}\cdot\frac{du}{dn}=S\cdot\frac{dR}{du}\cdot\frac{du}{dn}.$$

Интеграл в правой части (4) перепишется в виде:

$$\iint S_i\cdot S_k(R_i\cdot R_k'-R_k\cdot R_i')\frac{du}{dn}df=0$$

(штрихи означают дифференцирование по u). Наконец, согласно *109*, стр. 132:

$$\frac{du}{dn}=\frac{1}{\sqrt{(\rho^2-\mu^2)(\rho^2-\nu^2)}}=l$$

и уравнение (1) доказано.

Для некоторых приложений пользуются формулой (1) для специального случая эллипсоида вращения, когда на поверхности этого эллипсоида функции S_i и S_k зависят только от угла, составляемого с осью вращения, и не зависят от угла вокруг этой оси. Применяя обозначения разделов I, 1a и I, 1b, функции S_i и S_k зависят при этом только от μ. Формула (1) переходит в

$$\int\limits_{-1}^{+1} S_i\cdot S_k\cdot d\mu=0. \tag{1a}$$

Разложение „произвольной“ функции по волновым функциям Ляме на поверхности эллипсоида может быть проведено аналогично разложению по потенциальным функциям Ляме на поверхности эллипсоида, как только доказано существование такой функции (*20*, стр. 303).

c) Волновые функции Ляме в пространстве

После данных выше определений волновых поверхностных функций и соответствующих значений K' можно определить волновую функцию Ляме $R(\rho)$ из дифференциального уравнения

$$\frac{d^2R}{du^2}+[H\wp^2(u)+K'\wp(u)+L']\,R=0. \tag{1}$$

К обыкновенному дифференциальному уравнению (1) также прилагается метод возмущений. Заметим также, что $b^2\leqslant\rho^2\leqslant a^2$. Решение уравнения (1) производится при тех же граничных условиях, что и в случае уравнения потенциала, т. е. регулярности при $\rho=a$ и $\rho=b$. При малых возмущениях мы можем отбросить член в скобках $H\wp^2(u)$. Вместо K' мы подставляем значение $K_0'+HK_1'$, при чем K_1' известно из расчетов предыдущего параграфа. Затем полагаем $L'=L_0+HL_1'$, причем L_0 соответствует R_0, т. е. решению (1) при $H=0$ и $R=R_0+HR_1$. Подставив эти значения в (1), мы получим формулы для R_1 и L'_1. Этот процесс продолжается, при чем L' и R выражаются в виде рядов, расположенных по целым и положительным степеням H. Каждый член разложения R содержит ряд для невозмущенной функции $R_0(1)$ при $H=0$.

Таким образом мы получим решение уравнения Ляме (1), конечное в конечной области. В практических приложениях применяются также вторые решения (1), которые при $\rho\to\infty$ удовлетворяют определенным требованиям. Второе линейно независимое решение употребляется также в задачах в пространстве, ограниченном двумя конфокальными эллипсоидами. Мы можем сконструировать второе решение из первого посредством соответствующего интегрирования (см. II, 4b). Мы можем также в полученных выше рядах заменить функции R_0 на функции T

раздела IV, 2 b. T удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению, что и R_0. Если ряд для функции R_0 удовлетворяет уравнению (1) с точностью до определенной степени H, то точно такой же ряд мы получили для функции T.

Мы имеем в этом случае присоединенные волновые функции Ляме в пространстве, аналогично присоединенным потенциальным функциям Ляме.

Заметим еще раз, что при построении R [решения (1)] при малых H, принято, что $b^2 \leqslant \rho^2 \leqslant a^2$; введенное произведение $S(\mu, \nu)$ распадается на функцию M от μ и функцию N от ν, причем M и N удовлетворяют дифференциальным уравнениям (3b) и (3c) раздела I, 1c. Значения L и K вычисляются непосредственно из вычисленных значений L' и K' (см. IV, 1a). Ряды для M и N образуются из ряда для R, причем ρ заменяется на μ и ν.

d) Асимптотическое поведение волновых функций Ляме в пространстве

Асимптотическое поведение волновых функций Ляме в пространстве при $\rho \to \infty$ может быть легко определено. При больших значениях ρ дифференциальное уравнение (3 a) раздела I, 1 c для R переходит в:

$$\rho^2 \frac{d}{d\rho}\left(\rho^2 \frac{dR}{d\rho}\right) + H\rho^4 R = 0, \qquad (1)$$

которое интегрируется в функциях

$$\frac{\sin \sqrt{H}\rho}{\rho}, \quad \frac{\cos \sqrt{H}\rho}{\rho} \quad \text{и} \quad \frac{e^{\pm i\sqrt{H}\rho}}{\rho}.$$

Эти асимптотические соотношения отвечают трем классам волновых функций Ляме в пространстве. Функции первого и второго класса ведут себя в соответствии с первыми двумя функциями приведенных выражений; функции третьего класса ведут себя при $\rho \to \infty$, как $\frac{e^{-i\sqrt{H}\rho}}{\rho}$.

e) Иные виды волновых функций Ляме

Приведенные выше виды волновых функций Ляме для трехосного эллипсоида имеют численное представление, но их конструкция такова, что существование может быть доказано только для малых значений H, при которых сходятся указанные ранее степенные ряды. F. Möglich'у (*98*) удалось на основании выводов из работ S. Banerji (*138*; *139*) доказать их существование в общем виде.

При этом, вместо примененных ранее эллиптических координат или координат, полученных при помощи $\wp$-функции Вейерштрасса (IV, 1a), введена новая система ϑ, φ, которая обозначает полюсное расстояние и азимут на поверхности эллипсоида.

В этих координатах удается установить линейные интегральные уравнения для волновых функций на поверхности эллипсоида, обозначенных выше через S_i. При помощи этих интегральных уравнений можно показать существование функций S_i, и одновременно разложить их по шаровым функциям Лапласа.

При представлении этих рядов F. Möglich нашел восемь различных типов функций. Можно утверждать, что они соответствуют перечисленным в разделе IV, 1a типам потенциальных функций Ляме. F. Möglich применил также метод Ритца непосредственно к дифференциальному уравнению в частных производных для функции S_i, причем ϑ и φ были независимыми переменными. При этом удалось показать, что все собственные значения этого уравнения, соответствующие собственным значениям K' из (4) IV, 4a, являются простыми. Также показано, что вырождение этих собственных значений в случае потенциального уравнения (IV, 1b) полностью переносится на случай волнового уравнения.

Наконец, F. Möglich дал в случае эллипсоида вращения численные расчеты и решение задачи о диффракции электромагнитных волн около тонкой, идеально проводящей, круглой пластины. Мы будем пользоваться вместо расчетов F. Möglich'а методами, данными C. Niven'ом (*103*) и P. Маклореном (*89*) для случая симметрии вращения. Таким образом мы получим более простые методы для численных расчетов в практических задачах, хотя формулы Möglich'а заслуживают предпочтения, как более строгие.

5. Волновые функции Ляме в случае эллипсоида вращения

Изложенные выше принципы построения волновых функций Ляме в случае трехосного эллипсоида могут быть легко применены к случаю эллипсоида вращения. Соотношения получаются в этом случае настолько проще, что расчеты могут быть доведены до чисел.

a) Волновые функции Ляме на поверхности эллипсоида вращения

Относительно проще всего рассчитать волновые функции Ляме в случае вращательной (аксиальной) симметрии при помощи метода возмущений в задаче о собственных значениях. Мы исходим из уравнения (2b) раздела I, 1a для вытянутого эллипсоида:

$$\frac{d}{d\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{dM}{d\mu}\right\} + M\left[\frac{-m^2}{1-\mu^2} - k^2c^2\mu^2 + \Lambda\right] = 0. \qquad (1)$$

Это уравнение (1) при $k=0$ удовлетворяет m-м присоединенным полиномам Лежандра n-го порядка, причем $\Lambda = n(n+1)$. Согласно теореме А. Пуанкаре (*107*) мы знаем, что решение (1) при $k \neq 0$

является целой функцией kc. Следовательно, мы можем M и соответствующее собственное значение Λ при малых kc разложить по целым положительным степеням этой величины:

$$M = P_n^m(\mu) + (kc)^2 M^{(1)} + (kc)^4 M^{(2)} + \cdots;$$

$$\Lambda = n(n+1) + (kc)^2 \Lambda_1 + (kc)^4 \Lambda_2 + \cdots.$$

Теория возмущения позволяет (*118*, стр. 442) в упомянутом случае, когда нет вырождения [например, $\Lambda = n(n+1)$ и $kc=0$ принадлежит только одна собственная функция $P_n^m(\mu)$], рассчитать Λ_1 и M_1:

$$\Lambda_1 = -\frac{\int_{-1}^{+1} \mu^2 [P_n^m(\mu)]^2 d\mu}{\int_{-1}^{+1} [P_n^m(\mu)]^2 d\mu} = -\frac{2n+1}{2} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_{-1}^{+1} \mu^2 [P_n^m(\mu)]^2 d\mu; \quad (2)$$

$$M^{(1)} = \sum_{k=m}^{k=\infty} \gamma_{n,k} P_k^m; \quad (3)$$

$$\gamma_{n,k} = \frac{-\int_{-1}^{+1} \mu^2 \cdot P_n^m \cdot P_k^m(\mu)\, d\mu}{n(n+1) - k(k+1)}. \quad (4)$$

При этом в (3) член $k=n$ пропускается[1]. Формула (3) упрощается при $m=0$. Чтобы это проделать, применим формулу:

$$\int_{-1}^{+1} P_n \cdot g(x)\, dx = 0, \quad (5)$$

причем $g(x)$ является полиномом степени не выше $(n-1)$. Мы полагаем k в формуле (4) уменьшающимся до нуля.

Первый отличный от нуля член ряда (3) получается при:

$$k+2=n.$$

Дальнейшими отличными от нуля членами являются: $k+2=n+1$; $k+2=n+2$; $k+2=n+3$; $k+2=n+4$. Ближайший член: $k+2=n+5$ или $n+2=k-1$ опять равен нулю (5). Следовательно бесконечный ряд (3) сводится здесь максимум к пяти членам. Легко видеть, что $M^{(2)}$ содержит максимум $5+2+2=9$ членов, $M^{(3)}$ — максимум 13 членов и т. д.

Случай сплюснутого эллипсоида вращения отличается согласно (2b) раздела I, 1a и (2b) I, (1b) от случая вытянутого эллипсоида тем, что знак перед $k^2c^2\mu^2$ в дифференциальном уравнении положителен. При введенном выше условии, что волновая функция Ляме заданного порядка при $kc=0$ переходит в соответствующую потенциальную функцию, не исключается возможность, аналогичная той, какую мы имели для функций Матье; именно, что один или несколько коэффициентов (3) при определенных значениях kc обращаются в бесконечность.

[1] Не следует смешивать k — параметр волнового уравнения (1) с k — индексом

b) Волновые функции Ляме в пространстве в случае симметрии вращения

Мы нашли в предыдущем разделе с помощью теории возмущений решение (1) IV, 5a, которое удовлетворяет этому уравнению при малых значениях kc. Как следует из раздела I, 1a, функция $R(\xi)$ удовлетворяет в случае вытянутого эллипсоида вращения уравнению (1). Следовательно, мы получим для $R(\xi)$ выражение, разложенное по целым степеням k^2c^2, как только в ряд для M подставим ξ вместо μ. Выражение для коэффициентов ряда мы можем заимствовать из (4) IV, 5a. Второе решение (2c) в разделе I, 1a, мы получим, если в (3) раздела IV, 5a заменим функции P_k^m на Q_k^m, причем Q_k^m опять означает присоединенную шаровую функцию (IV, 3b).

Напомним, что функции Q_k^m и P_k^m удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению, что делает очевидным предыдущее указание о решении уравнения (2c) I, 1a. Комбинируя два линейно независимых решения, можно сконструировать для случая симметрии вращения волновые функции Ляме в пространстве, дающие решение уравнения Ляме (1) I, 1a и удовлетворяющие при $\xi \to \infty$ определенным условиям. Задачи в пространстве между двумя конфокальными эллипсоидами вращения могут быть решены указанной комбинацией двух решений. Пространственные функции $R(\xi)$ удовлетворяют на бесконечности дифференциальному уравнению:

$$\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2 \frac{dR}{d\xi}\right) + R\xi^2 k^2 c^2 = 0, \quad (1)$$

которое получается из (2c) I, 1a при $\xi \to \infty$. Решениями (1) являются:

$$\frac{\cos kc\xi}{\xi}; \quad \frac{\sin kc\xi}{\xi}; \quad \frac{e^{\pm ikc\xi}}{\xi}.$$

Пространственные функции первого и второго классов ведут себя как первые две функции (1a); функции третьего класса — как третья функция (1a); второй класс отличается от первого тем, что рассматриваемые функции (второго класса) регулярны при всех ξ (аналогичное имеем в разделе IV, 4d). Весьма интересна задача: посредством функций, характеризуемых их асимптотическим поведением, как указано выше, сконструировать для малых kc две линейно независимые волновые функции Ляме в пространстве. Те же асимптотические выражения имеют место в случае сплюснутого эллипсоида вращения, если от уравнения (2c), I, 1b перейти к (1) при $\xi \to \infty$.

c) Расчет волновых функций в случае симметрии вращения по C. Niven'y (*103*)

Вместо полученных выше при помощи метода возмущений степенных рядов C. Niven прямо решил дифференциальное уравнение (1) раздела IV, 5а, применив ряды, расположенные по шаровым функциям. При этом он применил формулу:

$$\mu^2 P_n^m(\mu) = P_{n+2}^m + \frac{2n^2+2n-2m^2-1}{(2n-1)(2n+3)} P_n^m + \frac{(n^2-m^2)[(n-1)^2-m^2]}{(4n^2-1)[4(n-1)^2-1]} P_{n-2}^m. \qquad (1)$$

Функции P_n^m определены, так же как и в разделах IV, 5а и IV, 3b через:

$$P_n^m = (1-\mu^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{d\mu^m} P_n(\mu).$$

Заметим здесь, что C. Niven поменял индексы m и n их ролями, поставив n внизу, m вверху. Из (1) подставляют выражения:

$$a_0 P_m^m - a_1 P_{m+2}^m + a_2 P_{m+4}^m + \dots \pm a_r P_{m+2r}^m + \dots \qquad (2)$$

и

$$b_0 P_{m+1}^m - b_1 P_{m+3}^m + \dots \pm b_s P_{m+2s+1}^m + \dots, \qquad (3)$$

в дифференциальное уравнение (1) раздела IV, 5а. Приравнивая к нулю коэффициенты каждой присоединенной функции Лежандра, мы получим:

$$p_1 a_1 = \frac{1}{\varepsilon}(k_0 - \Lambda) a_0, \qquad p_1' b_1 = \frac{1}{\varepsilon}(k_0' - \Lambda) b_0,$$

$$p_2 a_2 = \frac{1}{\varepsilon}(k_1 - \Lambda) a_1 - a_0, \qquad p_2' b_2 = \frac{1}{\varepsilon}(k_1' - \Lambda) b_1 - b_0,$$

$$p_3 a_3 = \frac{1}{\varepsilon}(k_2 - \Lambda) a_2 - a_1$$

. . . .

$$p_{r+1} \cdot a_{r+1} = \frac{1}{\varepsilon}(k_r - \Lambda) a_r - a_{r-1}, \qquad p_{s+1}' b_{s+1} = \frac{1}{\varepsilon}(k_s' - \Lambda) b_s - b_{s-1},$$

где $\varepsilon = k^2 c^2$;

$$k_r = \frac{2n^2+2n-2m^2-1}{(2n-1)(2n+3)}\varepsilon + n(n+1);$$

$$p_r = \frac{(n^2-m^2)[(n-1)^2-m^2]}{(4n^2-1)[4(n-1)^2-1]}; \quad n = m+2r;$$

$$k_s' = \frac{2n^2+2n-2m^2-1}{(2n-1)(2n+3)}\varepsilon + n(n+1);$$

$$p_s' = \frac{(n^2-m^2)[(n-1)^2-m^2]}{(4n^2-1)[4(n-1)^2-1]}; \quad n = m+2s+1.$$

Полученные ряды (2) и (3) должны сходиться, когда Λ принимает определенные значения собственных чисел проблемы.

Во всех этих выводах, полученных из рекурсионной формулы (1), можно присоединенные функции Лежандра первого рода P_n^m в (1), (2) и (3) заменить присоединенными функциями второго рода Q_n^m. Полученное таким путем решение имеет при $\mu = \pm 1$ особенность.

d) Расчет собственного числа Λ по C. Niven'y и R. Maclaurin'y

Для расчета собственного числа мы полагаем (*103*), стр. 135):

$$\Lambda = n(n+1) + \Lambda_1\varepsilon + \Lambda_2\varepsilon^2 + \Lambda_3\varepsilon^3 + \dots$$

и пишем Φ_r вместо $k_r - \Lambda$. На основании формул предыдущих разделов получаем:

$$\varepsilon p_1 \frac{a_1}{a_0} = \Phi_0; \quad \varepsilon^2 p_1 p_2 \frac{a_2}{a_0} = \Phi_0\Phi_1\left(1 - \varepsilon^2 \frac{p_1}{\Phi_0\Phi_1}\right);$$

$$\varepsilon^3 p_1 p_2 p_3 \frac{a_3}{a_0} = \Phi_0\Phi_1\Phi_2\left[1 - \varepsilon^2\left(\frac{p_1}{\Phi_0\Phi_1} + \frac{p_2}{\Phi_1\Phi_2}\right)\right];$$

$$\varepsilon^4 p_1 p_2 p_3 p_4 \frac{a_4}{a_0} = \Phi_0\Phi_1\Phi_2\Phi_3\left[1 - \varepsilon^2\left(\frac{p_1}{\Phi_0\Phi_1} + \frac{p_2}{\Phi_1\Phi_2} + \frac{p_3}{\Phi_2\Phi_3}\right) + \varepsilon^4 \frac{p_1 p_2}{\Phi_0\Phi_1\Phi_2\Phi_3}\right] \text{ и т. д.}$$

Для сходимости ряда (2) раздела IV, 5с необходимо, чтобы $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{a_r}{a_0} = 0$. Мы применим это условие для приближенного расчета собственных значений Λ. В виде первого приближения полагаем $\frac{a_1}{a_0}$ равным нулю, затем второе приближение $\frac{a_2}{a_0}$ и т. д. Мы получим тогда, согласно C. Niven'y, выражения (*103*, стр. 138—139):

$$\Lambda_1 = \frac{2n^2+2n-2m^2-1}{(2n-1)(2n+3)};$$

$$2\Lambda_2 = \frac{(n-m+2)(n-m+1)(n+m+2)(n+m+1)}{(2n+1)(2n+3)^3(2n+5)} - \frac{(n-m)(n-m-1)(n+m)(n+m-1)}{(2n-3)(2n-1)^3(2n+1)};$$

$$(4m^2-1)^{-1}\Lambda_3 = \frac{(n-m+2)(n-m+1)(n+m+2)(n+m+1)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)^5(2n+5)(2n+7)} - \frac{(n-m)(n-m-1)(n+m)(n+m-1)}{(2n-5)(2n-3)(2n-1)^5\cdot(2n+1)(2n+3)}$$

т. д.

Р. Маклорен (*89*, стр. 82) нашел эти собственные значения иным путем, который применим также для приближенного решения дифференциального уравнения. Полагая $y=M(1-\mu^2)^{-\frac{m}{2}}$, мы пишем (1) раздел IV, 5а:

$$(1-\mu^2)y''-2(m+1)\mu y'+(\Lambda-m^2-k^2c^2\mu^2)y=0$$

(штрихи означают дифференцирование по μ).

[Заметим, что дифференциальное уравнение Матье

$$\frac{d^2y}{dx^2}+(4\alpha-16\beta\cos 2x)y=0$$

переходит после преобразований

$$\cos x=\mu;\quad y=y_1\sin x$$

в

$$(1-\mu^2)y_1''-3\mu y_1'+(4\alpha+16\beta-1-32\beta\mu^2)y_1=0.$$

Это уравнение совпадает с уравнением Ляме в форме, данной Маклореном, если положить:

$$m=\frac{1}{2};\quad k^2c^2=32\beta;\quad 4\alpha+16\beta-1=\Lambda-\frac{1}{4}\Big].$$

В виде решения мы полагаем

$$y=a_0+a_1\mu^2+\cdots+a_r\mu^{2r}.$$

Выражения для коэффициентов a_r похожи на данные выше C. Niven'ом.

Можно получить также собственные числа, которые совпадают с данными выше формулами C. Niven'a. В разделе VI, 1а будет дано применение решения Маклорена.

е) Расчет коэфициентов a_r и b_r по C. Niven'у

После того, как найдем собственные числа Λ с точностью до ε^4, можно в формулах предыдущего параграфа, подставив значения Λ и Φ, определить коэффициенты a_r.

C. Niven нашел (*103*, стр. 138—139):

$m=0;\ r=0;\ n=0;\ a_0=1;$

$$\Lambda=\frac{\varepsilon}{3}-\frac{2}{135}\varepsilon^2+\frac{4\varepsilon^3}{3^5\cdot 5\cdot 7}+\frac{182\varepsilon^4}{3^7\cdot 5^3\cdot 7^3}+\cdots,$$

$$a_1=\frac{\varepsilon}{6}-\frac{\varepsilon^2}{189}+\frac{91\varepsilon^3}{2\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7^2}+\cdots,$$

$$a_2=\frac{\varepsilon^2}{120}-\frac{\varepsilon^3}{2\cdot 3^3\cdot 5\cdot 11}+\cdots,$$

$$a_3=\frac{\varepsilon^3}{4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7}+\cdots,$$

$m=0;\ r=1;\ n=2;\ a_1=1;$

$$\Lambda=6+\frac{11}{21}\varepsilon+\frac{94}{3^3\cdot 7^3}\varepsilon^2-\frac{21\,388}{3^2\cdot 7^5\cdot 11}\varepsilon^3+\cdots,$$

$$a_2=\frac{\varepsilon}{14}+\frac{\varepsilon^2}{3\cdot 7^3\cdot 11}+\cdots,$$

$$a_3=\frac{\varepsilon^2}{504}+\frac{\varepsilon^3}{2\cdot 3\cdot 7^3\cdot 9\cdot 15}+\cdots,$$

$$a_0=-\frac{2\varepsilon}{135}+\frac{4\varepsilon^2}{3^5\cdot 5\cdot 7}+\cdots.$$

$m=0;\ r=2;\ n=4;\ a_2=1;$

$$\Lambda=20+\frac{39}{77}\varepsilon+\frac{77\,674}{5\cdot 7^3\cdot 11^3\cdot 13}\varepsilon^2-\frac{2\,805\,228}{7^5\cdot 11^5\cdot 13\cdot 15}\varepsilon^3+\cdots,$$

$$a_3=\frac{\varepsilon}{22}+\frac{\varepsilon^2}{7\cdot 11^3\cdot 13}+\cdots,$$

$$a_4=\frac{\varepsilon^2}{1144}+\frac{\varepsilon^3}{2\cdot 7\cdot 11^3\cdot 13\cdot 19}+\cdots,$$

$$a_1=-\frac{8\varepsilon}{1715}-\frac{16\varepsilon^2}{3\cdot 5\cdot 7^5\cdot 11}+\cdots,$$

$$a_0=\frac{8\varepsilon^2}{3^2\cdot 5^3\cdot 7^3}-\frac{32\varepsilon^3}{3^2\cdot 5^3\cdot 7^5\cdot 11}+\cdots.$$

$m=1;\ r=0;\ n=1;\ a_0=1.$

$$\Lambda=2+\frac{\varepsilon}{5}-\frac{4\varepsilon^2}{5^3\cdot 7}+\frac{24\varepsilon^3}{5^5\cdot 7\cdot 9}.$$

$$a_1=\frac{\varepsilon}{10}-\frac{\varepsilon^2}{375}+\frac{31\varepsilon^3}{5^3\cdot 7^2\cdot 10\cdot 11}+\cdots,$$

$$a_2=\frac{\varepsilon^2}{70}-\frac{3\varepsilon^3}{2\cdot 5^3\cdot 7\cdot 13}+\cdots,$$

$m=1;\ r=1;\ n=3;\ a_1=1;$

$$\Lambda=12+\frac{7}{15}\varepsilon+\frac{1064}{3^4\cdot 5^3\cdot 7\cdot 11}\varepsilon^2-\frac{808\,976}{3^7\cdot 5^5\cdot 7\cdot 11\cdot 13}\varepsilon^3+\cdots,$$

$$a_2=\frac{\varepsilon}{18}-\frac{\varepsilon^2}{5\cdot 3^5\cdot 13}+\cdots,$$

$$a_3=\frac{\varepsilon^2}{792}-\frac{3\varepsilon^3}{9^3\cdot 10\cdot 11\cdot 15}+\cdots,$$

$$a_0=-\frac{4\varepsilon}{7\cdot 5^3}+\frac{8\varepsilon^2}{3\cdot 5^6\cdot 7}+\cdots.$$

и т. д.

f) Выражение волновых функций Ляме в случае симметрии вращения через ряды функций Бесселя и Ганкеля

Аналогично формулам разделов III, 5b и III, 5c можно в случае симметрии вращения представить волновые функции Ляме в виде рядов, составленных из функций Бесселя и Ганкеля.

Мы рассмотрим вытянутый эллипсоид вращения с $m=0$ и разложим

$$e^{ikx}=e^{ikc\xi\mu}$$

в ряд, по волновым функциям Ляме:

$$e^{ikc\xi\mu}=\sum A_n\cdot R_n(\xi)\cdot M_n(\mu). \tag{1}$$

Согласно разделам IV, 5b и IV, 5c:

$$M_n(\mu)=\sum_{m=0}^{\infty} a_m P_m(\mu).$$

Во избежание путаницы, мы пишем коэффициенты a_m только с одним индексом соответственно разделу IV, 5c. Далее мы пользуемся формулой (*6, 147*, стр. 368):

$$e^{ikc\xi\mu}=\sqrt{\frac{2\pi}{kc\xi}}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\cdot i^l\cdot J_{l+\frac{1}{2}}(kc\xi)\cdot P_l(\mu). \tag{2}$$

Умножив правую и левую части формулы (1) на $M_n(\mu)$ и проинтегрировав по μ от -1 до $+1$, мы получим, приняв во внимание (2):

$$\sqrt{\frac{2\pi}{kc\xi}}\sum_{m-0}^{\infty} a_m(2m+1)\cdot i^m\cdot J_{m+\frac{1}{2}}=A_n q_n R_n(\xi). \tag{3}$$

Величины A_n и q_n являются постоянными множителями, которые мы опустим в дальнейшем, и определим R_n с точностью до постоянного множителя. Мы получаем таким образом в (3) разложение функции $R_n(\xi)$ в ряд. Рассматривая асимптотическое выражение для $J_{m+\frac{1}{2}}$, легко заметить, к какому роду относится волновая функция Ляме в пространстве, представленная рядом (3). Имеем:

$$\lim_{\xi\to\infty} J_{m+\frac{1}{2}}(kc\xi)\backsim\frac{\sin kc\xi}{\sqrt{kc\xi}}\quad\text{или}\backsim\frac{\cos kc\xi}{\sqrt{kc\xi}},$$

при чем постоянный множитель опущен.

Мы имеем, следовательно, в (3) функцию, являющуюся линейной комбинацией определенных в разделе IV, 5b функций первого и второго класса. Функцию третьего класса (определение которой дано в IV, 5b) мы найдем после следующих рассуждений.

Функции R_n, представленные рядом (3), должны удовлетворять дифференциальному уравнению (2c) раздела I, 1a. Для этого функции $J_{m+\frac{1}{2}}$ должны удовлетворять определенным рекурсионным и дифференциальным уравнениям. Функции $H^{(2)}_{m+\frac{1}{2}}$ удовлетворяют тем же рекурсионным и дифференциальным соотношениям, что и функции $J_{m+\frac{1}{2}}$. Следовательно мы можем подставить функцию $H^{(2)}_{m+\frac{1}{2}}$ вместо $J_{m+\frac{1}{2}}$ в (3), при чем полученный ряд будет также удовлетворять уравнению (2c) в разделе I, 1a, как ряд (3). Мы имеем, следовательно:

$$R_n^{(3)}=\sqrt{\frac{2\pi}{kc\xi}}\sum a_m\cdot(2m+1)\cdot i^m\cdot H^{(2)}_{m+\frac{1}{2}}(kc\xi). \tag{4}$$

Легко видеть, что (4) представляет функцию третьего класса, определенную согласно IV, 5b. Для этого достаточно рассмотреть асимптотическое поведение функций Ганкеля второго рода $H^{(2)}_{m+\frac{1}{2}}$ при больших значениях аргумента. В разделе VI, 2a мы применим разложение $R_n(\xi)$ при m [из (2c) раздела I, 1a равном единице. Дифференцируем (2) по μ и умножим на $\sqrt{1-\mu^2}$, тогда:

$$\sqrt{1-\mu^2}\cdot ikc\xi\cdot e^{ikc\xi\mu}=\sum_{l=0}^{\infty}\sqrt{\frac{2\pi}{kc\xi}}(2l+1)\cdot i^l\cdot J_{l+\frac{1}{2}}\cdot P_l^1(\mu). \tag{5}$$

Применим также соотношение

$$\int_{-1}^{+} P^1\cdot P_k^1\cdot d\mu=0\quad\text{при}\quad l\neq k.$$

Тогда, благодаря соотношению:

$$M_n(m=1)=\sum_{r=0}^{\infty} a_r(m=1)\cdot P_r^1(\mu),$$

мы получим, раскладывая левую часть (5) по произведениям

$$R_n M_n,$$

формулу:

$$R_n^{(3)}\binom{\xi}{m=1}=\sqrt{\frac{2\pi}{kc\xi}}\sum_{l=0}^{\infty} a_l(m=1)\cdot(2l+1)\cdot i^l\cdot H^{(2)}_{l+\frac{1}{2}}(kc\xi). \tag{6}$$

g) Замечания относительно вышеприведенных разложений

Приведем некоторые замечания относительно сходимости рядов (3), (4) и (6). Для их получения необходимо предположить равномерную сходимость рядов (1) и (2). Если это считать доказанным, то немедленно следует равномерная сходимость (3), (4) и (6). Предположим, что равномерная сходимость (1) и (2) не доказана, тогда необходимо непосредственно рассмотреть сходимость (3) и (4) и проверить, удовлетворяют ли они дифференциальному уравнению (2c) I, 1a.

Эти расчеты аналогичны тем, которые провели Зершингер (*117*) и Шуберт (*119*) в связи с разложениями Гейне для присоединенных функций Матье III, 5b.

При вытянутом эллипсоиде вращения $\xi \geqslant 1$, так что разложения (3) и (4) сходятся здесь также на поверхности эллипсоида. Разложения (3), (4) и (6) удаются также для решения $R_n(\xi)$ уравнения (2c) I, 1b при сплюснутом эллипсоиде вращения. Нужно только заменить коэффициенты a_m на a'_m. Эти коэффициенты a'_m проще всего получить, пользуясь указанными в конце раздела IV, 5a замечаниями. (2b) раздела I, 1b переходит в (2b) I, 1a, если заменить знак перед $k^2c^2=\varepsilon$ на обратный. Следовательно для получения a'_m необходимо во всех формулах разделов IV, 5c; IV, 5d и IV, 5e, произвести для a_m замену знака перед ε. В случае круглой пластины, которая является предельным случаем сплюснутого эллипсоида вращения, $\xi=0$. Ряд (3) IV, 5f здесь применим, ряд (4) расходится как ξ^{-1}.

h) Другие представления волновых функций Ляме через ряды функций Бесселя

В конце предыдущего параграфа указано, что ряд (4) раздела IV, 5f в случае сплюснутого эллипсоида вращения при $\xi=0$ (круглая шайба) ведет себя как ξ^{-1}. Рассмотрим теперь вопрос о том, является ли поведение волновых функций Ляме третьего рода $R_n^{(3)}(\xi)$ при сплюснутом эллипсоиде вращения внутренним свойством этих функций или оно определяется примененным разложением (4) раздела IV, 5f. Для ответа на этот вопрос заметим, что $R_n^{(3)}$ является линейной комбинацией $R_n^{(1)}$ и $R_n^{(2)}$. Для получения этих функций первого и второго рода в случае эллипсоида вращения необходимо в рядах IV, 5c подставить на место функций $P_n^m(\xi)$ функции $P_n^m(i\xi)$, аналогично $Q_n^m(i\xi)$ вместо $Q_n^m(\xi)$. Из раздела IV, 3b видно, что ни $P_n^m(i\xi)$, ни $Q_n^m(i\xi)$ при $\xi\to 0$ не становятся бесконечно большими.

Следовательно, нет указаний на то, что волновые функции Ляме первого и второго рода для случая сплюснутого эллипсоида вращения ведут себя при $\xi\to 0$ как ξ^{-1}. То же самое относится к линейным комбинациям функций первого и второго рода, т. е. к функциям третьего рода. Для некоторых приложений в разделе V укажем разложения для $R_n^{(3)}(\xi)$ в случае сплюснутого эллипсоида, регулярные при $\xi\to 0$. Мы исходим из формулы [*147*, стр. 365 (4)]:

$$\left.\begin{aligned} L=\frac{H^{(2)}_{3/2}(\omega)}{\omega^{3/2}}\cdot P_1(\cos\theta)=\sqrt{2}\pi\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2}+m\right)\frac{H^{(2)}_{m+\frac{3}{2}}(Z)}{\sqrt{Z}}\cdot\\ \cdot\frac{J_{m+\frac{3}{2}}(z)}{\sqrt{z}}\cdot P_1(\cos\theta)\cdot C_m^{3/2}(\cos\Phi),\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

где

$$\omega^2=Z^2+z^2-2zZ\cos\Phi.$$

Положим, согласно I, 1b

$$\omega^2=k^2r^2=k^2(x^2+y^2+z^2)=k^2c^2[\mathrm{ch}^2\eta-\cos^2\theta]$$

или

$$\omega^2=k^2c^2\left[\frac{1}{4}e^{2\eta}+\frac{1}{4}e^{-2\eta}-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right],$$

таким образом:

$$Z=\frac{kc}{2}e^{\eta};\quad z=\frac{kc}{2}e^{-\eta};\quad \Phi=2\theta.$$

Далее:

$$L=\sum A_nR_n^{(3)}(\xi)\cdot M_n(\mu),\ \text{где}\ \mu=\cos\theta.\qquad(2)$$

Очевидно, в разложение (2) входят только нечетные функции $M(\mu)$, так как согласно (1) L является нечетной функцией μ. Полагаем

$$M_n(\mu)=\sum_l a_l'P_l(\mu),\qquad(3)$$

при чем a_l' образовано из a_l путем замены ε на $-\varepsilon$ (разделы IV, 5e и IV, 5d). Мы получим для $R_n^{(3)}$ из (2) с учетом (1) следующие формулы:

$$R_n^{(3)}=\int_{-1}^{+1}\frac{H^{(2)}_{3/2}}{\omega^{3/2}}\cdot P_1(\mu)\cdot M_n(\mu)\,d\mu=\qquad(4)$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}A'_m\left(\frac{3}{2}+m\right)\cdot H^{(2)}_{m+\frac{3}{2}}\left(\frac{kc}{2}e^{\eta}\right)\cdot J_{m+\frac{3}{2}}\left(\frac{kc}{2}e^{-\eta}\right),\qquad(5)$$

с

$$A'_m=\int_{-1}^{+1}C_m^{3/2}(\cos 2\theta)\cdot\sum_{l=0}^{\infty}a_l'\cdot P_l(\mu)\cdot d\mu,\qquad(6)$$

где

$$\mu=\cos\theta.$$

Функции $C_m^{3/2}$ определены через:

$$(1-2\alpha t+\alpha^2)^{-3/2}=\sum_{m=0}^{\infty} C_m^{3/2}(t)\cdot\alpha^m.$$

Без труда находим:

$$C_m^{3/2}\cdot(\cos 2\theta)=-\frac{1}{2}\cdot\cos 2\theta\cdot\frac{d}{d(\cos 2\theta)}\cdot P_{m+1}(\cos 2\theta).$$

Следовательно $C_m^{3/2}(\cos 2\theta)$ является полиномом степени $2m+2$ от μ. Каждый из коэффициентов A'_m из (6) содержит конечное число коэффициентов a_l', именно только те, у которых:

$$l=0,\ 1,\ 2,\ldots 2m+2.$$

Из того факта, что $R_n^{(3)}$ из (4) и (5) удовлетворяет дифференциальному уравнению (2c) раздела I, 1b следует, что:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2\right)L=0.$$

Кроме того $R_n^{(3)}$ ведет себя на бесконечности ($\xi=\operatorname{sh}\eta\to\infty$) подобно функции

$$\frac{e^{-ikr}}{r}.$$

Это следует из свойств функций Бесселя и Ганкеля. Аналогичные разложения имеют место также тогда, когда M_n является четной функцией μ.

6. Общие замечания о функциях Ляме

Читатель, вероятно, заметил, что наши познания о потенциальных и волновых функциях Ляме никоим образом не имеют законченного характера, как это имеет место в случае дифференциального уравнения Матье. Ниже кроме определенных вопросов о вырождении функции Ляме в функции Матье, Бесселя и шаровые будут рассмотрены основные положения, которые могут расширить наши знания о функциях Ляме.

a) Функции Матье, рассматриваемые как вырождение функций Ляме

В разделах IV, 1a и IV, 4a потенциальные и волновые уравнения Ляме представлены при помощи $\wp$-функции Вейерштрасса в форме дифференциальных уравнений с двояко-периодическими коэффициентами. Волновое уравнение Ляме в форме Вейерштрасса имеет вид:

$$\frac{d^2M}{du^2}+[A\wp^2(u)+B\wp(u)+C]\cdot M=0, \tag{1}$$

причем постоянные A, B и C просто связаны с постоянными раздела I, 1c. Периодами $\wp$-функции Вейерштрасса являются $2\omega_1$ и $2\omega_2$ (*50*, стр. 165; *64*, стр. 49):

$$e_1=\wp(\omega_1);\quad e_2=\wp(\omega_1+\omega_2);\quad e_3=\wp(\omega_2);\quad (\text{см. IV, 1a}).$$

Уравнение (1) легко написать при помощи эллиптических функций Якоби (*151*, стр. 555; *49*, стр. 7; *98*, стр. 622):

$$\frac{d^2M}{d\alpha^2}=-[a\,dn^4(\alpha)+b\,sn^2(\alpha)+c]\cdot M. \tag{2}$$

Эта форма (2) весьма удобна для рассмотрения предельного перехода к дифференциальному уравнению Матье. Заметим теперь, что уравнение Матье, относящееся к эллиптическому цилиндру, может быть получено из уравнения Ляме для трехосного эллипсоида, если положить одну из осей эллипсоида бесконечно большой. В форме Вейерштрасса (1) мы должны положить, что один из периодов становится бесконечно большим: $\omega_2=i\infty$, в то время как второй, реальный, период остается конечным. В этих предположениях мы получаем упрощения (*64*, стр. 51):

$$dn(\alpha)=1 \quad\text{и}\quad sn(\alpha)=\sin\alpha.$$

Следовательно (2) переходит в уравнение:

$$\frac{d^2M}{d\alpha^2}=-(b'\sin^2\alpha+c')\cdot M, \tag{3}$$

которое является дифференциальным уравнением Матье. Другие предельные переходы к дифференциальному уравнению Матье нашел Гейне (*42*, I, стр. 403).

b) Шаровые и Бесселевы функции как вырожденные

Вырождение потенциальных функций Ляме в шаровые функции рассматривалось нами много раз; в первый раз этот вопрос был затронут в разделе I, 1a, в случае вытянутого эллипсоида вращения. Это вырождение рассматривалось в литературе (49, стр. 5—6, *2*, стр. 145—148; *109*, стр. 124—126). В случае трехосного эллипсоида мы полагаем для перехода к эллипсоиду вращения $b=c$ (раздел I, 1c). Сначала полагаем

$$b^2=c^2+\varepsilon;\quad \nu^2=c^2+\varepsilon\nu_1^2,$$

при чем ν_1 меняется от 0 до 1, а ε является малым параметром, который при предельном переходе исчезает. Получаем:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} x=\sqrt{\rho^2-a^2}\sqrt{\frac{(\mu^2-a^2)(\nu^2-a^2)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}}=\sqrt{\rho^2-a^2}\sqrt{\frac{\mu^2-a^2}{b^2-a^2}};$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} y = \sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\frac{(\mu^2 - b^2)(\nu^2 - b^2)}{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)}} = \sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\frac{b^2 - \mu^2}{b^2 - a^2}}\sqrt{\nu_1^2 - 1};$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} z = \sqrt{\rho^2 - c^2}\sqrt{\frac{(\mu^2 - c^2)(\nu^2 - c^2)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}} = \sqrt{\rho^2 - c^2}\sqrt{\frac{b^2 - \mu^2}{b^2 - a^2}}\,\nu_1.$$

Наконец, полагаем:

$$\rho = c\xi, \quad \mu = c\cos\theta, \quad \nu_1 = \cos\varphi, \quad a = 0,$$

после чего получим формулы:

$$x = c\,\xi\cos\theta,$$

$$y = c\sqrt{\xi^2 - 1}\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi,$$

$$z = c\sqrt{\xi^2 - 1}\,\sin\theta\cdot\cos\varphi,$$

совпадающие с формулами раздела I, 1 а. Следовательно, дифференциальное уравнение Ляме переходит в уравнения (2a), (2b) и (2c) раздела I, 1a. В потенциальном случае (Лапласов потенциал) $H=0$, уравнения (2b) и (2c) раздела I, 1a могут быть решены посредством присоединенных функций Лежандра, как уже отмечалось в разделе IV, 3b. Далее, в разделе I, 1a было показано, что для шара в случае волнового уравнения дифференциальное уравнение шаровых функций совпадает с уравнением цилиндрических функций.

c) Дальнейшие вопросы относительно дифференциального уравнения Ляме

В разделе IV, 4a было показано, что общее дифференциальное уравнение Ляме является уравнением типа Хилла, поэтому общие предложения относительно дифференциального уравнения Хилла (II, 2) могут быть применены к уравнению Ляме. Заметим, что все эти предложения, за исключением теоремы Флоке (II, 2), относятся к дифференциальным уравнениям с вещественными параметрами, коэффициентами и периодами. Для их применения необходимо один из периодов ω_1 или ω_2 выбрать вещественным. При этих условиях теорема Гаупта показывает, что при заданных A и B (1) IV, 6a обладает счетным множеством C-значений такого рода, что M является цело- или полупериодической функцией u. Далее, эти предложения дают указания о распределении устойчивых и неустойчивых C-значений на вещественной оси C. Отсюда следует, что волновые функции Ляме не образуют совокупности периодических решений. Так как функция $\wp(u)$ обладает вещественным двойным полюсом $u=0$, то предложения раздела II, 3, относящиеся к уравнениям с ограниченными коэффициентами, здесь неприменимы. Общим решением дифференциальных уравнений (1) и (2) разделов IV, 6a занимались многие авторы (*151*, стр. 570—576; *49*, стр. 17—18; *30*, стр. 464—477). Уравнениями с двоякопериодическими коэффициентами занимались единичные авторы (*90*). Мы отсылаем по этим вопросам к литературе (*30*, стр. 441—464; *151*, стр. 570; 49, стр. 22—26).

V. Проблемы распространения волн в физике и технике

Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{1}{C_0^2}\,\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

(C_0 — скорость распространения, t — время), после подстановки:

$$U(x, y, z, t) = u(x, y, z)\, e^{i\omega t}$$

примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -k^2 u, \qquad \left[k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2;\ \lambda \text{ — длина волны}\right].$$

Это уравнение, преобразованное к эллиптическим координатам, может быть решено во многих практически важных случаях. Некоторые эти случаи мы рассмотрим ниже.

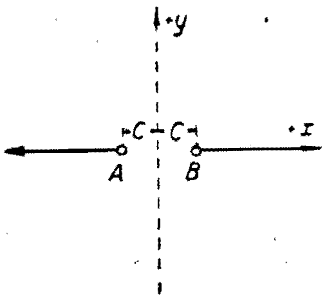
1. Диффракция плоских электромагнитных и акустических волн у эллиптического отверстия в тонком плоском экране (ширме)

Диффракция у щелей играет в оптике огромную роль; щель является ничем иным, как эллиптическим отверстием, одна из осей которого чрезвычайно велика. Щели, применяемые в оптике, обладают шириной, на много превышающей длину волны. Большой практический интерес представляет случай очень узкой и длинной щели. В акустике сравнивают затухание, вызываемое различными материалами в пространстве, с поглощающей способностью открытого окна. Большей частью размеры окна одного порядка с длиной используемой волны звука. Мы имеем здесь опять явление диффракции около идеализированного эллиптического отверстия. В акустике легко осуществить граничный случай, при котором длина волны велика по сравнению с диффракционным отверстием.

a) Математическая формулировка задачи для электромагнитных и акустических волн

Ширма лежит в плоскости (xz); на фиг. 5 представлено сечение, параллельное плоскости (xy) через самую широкую часть диффракционного отверстия. Оси этого отверстия совпадают с осями x и z. Плоский волновой ряд падает на ширму в направлении оси y-ов от $+\infty$. Волновая нормаль образует с осями y и z углы, cos которых равны соответственно β и 0.

В случае электромагнитных волн мы предположим, что преграда (ширма) бесконечно тонка и проводимость ее бесконечно велика. Будем различать два случая: 1) электрический вектор параллелен оси z; 2) магнитный вектор параллелен оси z. Другой вектор лежит при этом в плоскости фронта волны, перпендикулярно к вышеназванным векторам. В первом случае мы обозначим электрический вектор как зависимую переменную u. На плоскости ширмы $u=0$. Во втором случае мы выбираем магнитный вектор в качестве зависимой переменной u. Электрический вектор пропорционален при этом $\frac{\partial u}{\partial n}$, где n — направление нормали к плоскости фронта волны. Компонента напряженности электрического поля, параллельная плоскости ширмы, пропорциональна $\frac{\partial u}{\partial y}$. Это выражение должно на поверхности ширмы исчезать. В обоих случаях электрический и магнитный векторы остаются у диффракционного отверстия непрерывными (непрерывно проходят его). Это означает, что u, $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial x}$ остаются непрерывными.



Фиг. 5.

Перейдем теперь к случаю акустических волн и будем считать потенциал скорости независимой переменной u. У самой ширмы, которую считаем абсолютно неподвижной, скорость частиц воздуха перпендикулярно к плоскости ширмы исчезает, поэтому в этом месте $\frac{\partial u}{\partial y}=0$. В диффракционном отверстии мы требуем непрерывности давления и скорости воздуха. Это требование выполняется, если u и $\frac{\partial u}{\partial y}$ здесь непрерывны. Из вышеприведенных рассуждений следует, что в случаях электрических и акустических волн мы полностью выясним диффракционную проблему, если решим следующие две математические задачи:

1. $u=0$ на ширме; u и $\frac{\partial u}{\partial y}$ непрерывны в диффракционном отверстии,

2. $\frac{\partial u}{\partial y}=0$ на ширме; u и $\frac{\partial u}{\partial y}$ непрерывны в диффракционном отверстии.

Кроме этих условий на ширме и в диффракционном отверстии математическое решение, соответствующее физически задаче о плоской, падающей, отраженной и диффрагированной

волне, должно удовлетворять „условиям на бесконечности". В качестве падающей волны мы берем:

$$\left.\begin{aligned} &e^{ik\beta y-ik\alpha x}; \quad (i=\sqrt{-1});\\ &\alpha^2+\beta^2=1;\\ &k=\frac{2\pi}{\lambda}; \quad \lambda \text{ — длина волны}\end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

В аналогичной трехразмерной проблеме волна позади ширмы на большем расстоянии от нее зависит от расстояния, как функция

$$\frac{e^{-ikr}}{r}.$$

То же самое мы должны потребовать в нашей задаче. Отраженные волны в I и II случаях различны. Легко находим, что амплитуда отраженной от ширмы волны ведет себя на бесконечности, как:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Случай I: } -e^{-ik\beta y-ik\alpha x}\\ &\text{Случай II: } e^{-ik\beta y-ik\alpha x}\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Равенства (1) и (2) обеспечивают исчезновение u и $\frac{\partial u}{\partial y}$ на ширме.

К формулам (1), (2) мы должны добавить еще одно выражение, зависящее от диффракции в отверстии. Перед ширмой (y — положительно) мы обозначим указанное выражение через ψ, позади ширмы (y — отрицательно) через χ. Эти диффракционные функции должны в совокупности с выражениями (1) и (2) удовлетворять следующим условиям:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Случай I: } \psi=0 \text{ и } \chi=0 \text{ на ширме}\\ &\text{в отверстии: } \psi=\chi, \ \frac{\partial\psi}{\partial y}+2ik\beta e^{-ik\alpha x}=\frac{\partial\chi}{\partial y};\\ &\text{Случай II: } \frac{\partial\psi}{\partial y}=0 \text{ и } \frac{\partial\chi}{\partial y}=0 \text{ на ширме,}\\ &\text{в отверстии: } \frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial\chi}{\partial y}; \ \psi=\chi-2e^{-ik\alpha x}.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

b) Разложение функции диффракции для эллиптического отверстия по функциям Ляме

Введем эллиптическую систему координат с одним из фокусов, совпадающим с фокусом диффракционного отверстия. Другие фокусы эллиптической координатной системы совпадают с точками A и B фиг. 5 и с конечными точками большей оси отверстия. Разложения I, 1c и III несколько упростятся, поскольку совпадающая с осью z ось эллипса $2a$ значительно больше, нежели $2c$

$2a > 2c > 2b$, при чем $2b$ и $2c$ означают оси, совпадающие с осями y и x. Основной эллипсоид нашей координатной системы, совпадающий с диффракционным отверстием, имеет $b=0$. Мы полагаем:

$$\psi = -\chi = \sum A_n \cdot S_n(\mu\nu) \cdot R_n^{(3)}(\rho) \tag{1}$$

и должны взять A_n в случаях I и II из уравнений V, 1a. При этом $R_n^{(3)}$ является пространственной волновой функцией Ляме третьего рода, определенной в разделе IV, 4d. Таким образом, решение диффракционной задачи удовлетворит условиям на бесконечности раздела V, 1a. Численное развитие выражения (1) возможно в настоящее время в двух случаях: a) когда размеры диффракционного отверстия очень малы по сравнению с длиной волны; b) размеры диффракционного отверстия очень велики по сравнению с длиной волны.

c) Размеры диффракционного отверстия очень малы по сравнению с длиной волны; диффракция звуковых волн

В этом частном случае во всех точках диффракционного отверстия волновое уравнение должно быть заменено потенциальным уравнением. В первом приближении диффракционные функции удовлетворяют указанному уравнению, пока рассматривается контур щелевого отверстия. Мы рассматриваем диффракцию звуковых волн в эллиптическом отверстии, как задачу II раздела V, 1a. При этом приближенно:

$$\psi + 2 = \chi$$

или с

$$\psi = -\chi; \quad \chi = 1$$

в диффракционном отверстии и $\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0$ на плоскости ширмы. Эта проблема разрешается через

$$\psi = M_0(\mu) \cdot N_0(\nu) \cdot T_0(\rho),$$

при чем M_0 и N_0 являются потенциальными функциями Ляме нулевого порядка на поверхности эллипсоида; T_0 — присоединенная потенциальная функция Ляме в пространстве также нулевого порядка (IV, 2b).

Согласно IV, 3a $M_0 = N_0 = 1$ и далее:

$$T_0 = u \text{ с } \rho^2 = \wp(u) + h; \quad h = \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

по IV, 1a и IV, 3a. Следует отметить, что при малом диффракционном отверстии направление падающей волны не влияет на функцию диффракции.

Диффракционная проблема II имеет в данном потенциальном случае далеко идущую аналогию с электрическими проблемами.

Представим себе два бесконечно протяженных металлических полупространства, разделенных тонким непроводящим слоем на две части. В одном месте имеется контакт, который играет роль диффракционного отверстия; по обеим сторонам слоя изоляции справедливо уравнение Лапласа (*115*, II, стр. 177; *79*, стр. 249). Течение электричества через проводящую часть внутри изоляционного слоя является задачей, полностью эквивалентной диффракционной проблеме в потенциальном случае. Вторую электрическую аналогию к проблеме диффракции звуковых волн мы получим после следующих рассуждений.

Диффракционное отверстие является поверхностью постоянного потенциала. Рассматривая его, как вырождение трехосного эллипсоида, мы получим задачу о распределении зарядов на эллипсоидальном проводнике (*115*, 1c; *79*, 1c). Для первой из названных электрических аналогий целесообразно ввести понятие „проводимости" диффракционного отверстия. Эта проводимость K весьма просто определяется. Пусть $\Phi_1 - \Phi_2$ — разность потенциалов по обе стороны диффракционного отверстия. Тогда ток через отверстие равен $K(\Phi_1 - \Phi_2)$. Поглощающая способность A отверстия для звуковых волн, определяемая как отношение прошедшей сквозь отверстие звуковой энергии к подведенной энергии, равна также, как легко показать (*79*, стр. 250),

$$A = \frac{2K^2}{\pi}.$$

При малом отверстии A не зависит от длины волны. Лорд Релей произвел сравнение поглощающей способности круглого отверстия с поглощающей способностью эллиптического отверстия равной площади. Для этого введем эксцентриситет эллиптического отверстия:

$$e = \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{a^2}} = \sin\varphi.$$

Мы имеем (*115*, II, стр. 179):

$\varphi = \arcsin e$	0°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\frac{A}{A_0}$	1;	1,0004;	1,0026;	1,0088;	1,0244;	1,0602;	1,14;	1,43;	∞

Для эллипса с соотношением осей 2:1 поглощающая способность всего на 3% больше, нежели для круга. Рассмотрение случая кругового отверстия можно найти в литературе (*78*).

d) Разложение по функциям Матье в частном случае щели

Если в эллиптическом отверстии $2a \to \infty$, мы получаем прямую щель. В этом случае задача диффракции решается посредством функций Матье (*135*). Мы полагаем (I, 1d):

$$x = c \cdot \operatorname{ch}\xi \cdot \cos\eta;$$
$$y = c \cdot \operatorname{sh}\xi \cdot \sin\eta.$$

Займемся сначала проблемой I. Решение мы получим в форме

для положит. y: $u = e^{+ik\beta y - ik\alpha x} - e^{-ik\beta y - ik\alpha x} + \psi$

для отрицат. y: $\chi = u$.

Это решение удовлетворяет граничным условиям:

$u=0$ на ширме: $u, \frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ непрерывны у щели, как только ψ и χ удовлетворяют первым трем уравнениям (3) V, 1a. Мы полагаем:

$$\psi = -\chi = \sum_{n=1}^{\infty} D_{2n} \cdot Se_{2n}^{(3)}(\xi) \cdot se_{2n}(\eta) + \sum_{n=0}^{\infty} E_{2n+1} Se_{2n+1}^{(3)}(\xi) \cdot se_{2n+1}(\eta) \qquad (1)$$

и определяем постоянные коэффициенты D_{2n} и E_{2n+1} при помощи граничных условий. Сначала заметим, что ψ и χ исчезают при $\eta=0$ и $\eta=\pi$, благодаря чему $u=0$ на ширме. Для определения D и E остается уравнение:

$$\left\{\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\chi}{\partial y}\right\}_{\xi=0} = \left\{\frac{2}{c\sqrt{1-\cos^2\eta}} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right\}_{\xi=0} = -2ik\beta e^{-ik\alpha x}. \qquad (2)$$

При помощи формулы:

$$(e^{-ik\alpha x})_{\xi=0} = e^{-ikc\alpha\cos\eta} = J_0(kc\alpha) + 2\sum_{s=1}^{\infty} (-i)^s \cdot J_s(kc\alpha) \cdot \cos s\eta. \qquad (3)$$

Это определение легко провести; нужно воспользоваться условиями ортогональности (3), (4), (5) раздела III, 2e для примененных в (1) функций Матье se_{2n} и se_{2n+1}. Умножим сначала правую и левую части уравнения (2) на $c \cdot \sin\eta \cdot se_{2n}(\eta)$ и интегрируем по η от 0 до π. При этом останутся члены ряда (3) с нечетным s, после чего получаем:

$$D_{2n} = \frac{-ikc\beta}{N_{2n} \cdot Se_{2n}^{(3)\prime}(\xi=0)} \cdot \int_0^{\pi} d\eta \sin\eta \cdot se_{2n}(\eta) \cdot \left\{2\sum_{s=0}^{\infty} (-i)^{2s+1} J_{2s+1}(kc\alpha) \cdot \cos(2s+1)\eta\right\}. \qquad (4)$$

Здесь

$$N_{2n} = \int_0^{\pi} [(se_{2n}(\eta))]^2 \, d\eta;$$

$$Se_{2n}^{(3)\prime}(\xi=0) = \left\{\frac{dSe_{2n}^{(3)}}{d\xi}\right\}_{\xi=0}.$$

Аналогично мы найдем коэффициент E_{2n+1}; для этого умножим левую и правую части (2) на $c \cdot \sin\eta \cdot se_{2n+1}(\eta)$ и интегрируем от нуля до π:

$$E_{2n+1} = \frac{-ikc\beta}{N_{2n+1} \cdot Se_{2n+1}^{(3)\prime}(\xi=0)} \int_0^{\pi} d\eta \cdot \sin\eta \cdot se_{2n+1}(\eta) \cdot \left\{J_0(kc\alpha) + 2\sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \cdot J_{2s}(kc\alpha) \cdot \cos 2s\eta\right\}. \qquad (5)$$

Значение символа аналогично указанному в формуле (4). При помощи формул (1), (4) и (5) диффракционная проблема I строго решена. Равномерная сходимость ряда (1) следует из предложения о разложимости произвольных функций по Штури-Лиувилевским собственным функциям, если заметим, что абсолютное значение $Se_{2n}^{(3)}$ и $Se^{(3)}_{2n+1}$ конечно при всех ξ. Кроме того, наше решение удовлетворяет условиям на бесконечности, так как $Se_{2n}^{(3)}$ и $Se^{(3)}_{2n+1}$ при $\xi \to \infty$ ведут себя как:

$$\frac{\text{const}}{\sqrt{r}} \cdot e^{-ikr}.$$

Решение проблемы II может быть проведено аналогично проблеме I. Имеем:

для положит. y: $u = e^{ik\beta y - ik\alpha x} + e^{-ik\beta y - ik\alpha x} + \psi$;

для отрицат. y: $u = \chi$.

Граничные условия: $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ на ширме, u, $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ непрерывны в щели; удовлетворяются, если ψ и χ удовлетворяют последним уравнениям (3) V, 1a. Имеем:

$$\psi = -\chi = \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n} Ce_{2n}^{(3)}(\xi) \cdot ce_{2n}(\eta) + \sum_{n=0}^{\infty} G_{2n+1} Ce^{(3)}_{2n+1}(\xi) \cdot ce_{2n+1}(\eta). \qquad (6)$$

Очевидно, что $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ и $\frac{\partial\chi}{\partial y}$ исчезают на ширме при $\eta=0$. Таким образом условие: $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ на ширме удовлетворено. Остаются условия непрерывности в щели. Производная $\frac{\partial u}{\partial y}$ непрерывна, так как:

для положит. y: $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\xi=0} = +\frac{\partial u}{\partial\xi} \cdot \frac{1}{c\sqrt{1-\cos^2\eta}}$;

для отрицат. y: $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\xi=0} = -\frac{\partial u}{\partial\xi} \cdot \frac{1}{c\sqrt{1-\cos^2\eta}}$.

В силу условия (6):

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial\chi}{\partial y}.$$

Другое условие непрерывности в щели (u — непрерывно) дает возможность определить коэффициенты F и G из (6). Для этого мы умножим обе стороны уравнения:

$$(\psi-\chi)_{\xi=0}=2\psi\,|_{\xi=0}=-2e^{-ikav}=-2e^{-ikca\cos\eta}=$$

$$=-2\left\{J_0(kca)+\sum_{s=1}^{\infty}(-i)^s\cdot J_s(kca)\cdot\cos s\eta\right\} \qquad (7)$$

на $ce_{2n}(\eta)$ и интегрируем по η от 0 до π. Все члены в рядах (7) с нечетным индексом пропадают, и мы получаем:

$$\left.\begin{aligned} F_{2n}&=\frac{1}{N_{2n}Ce_{2n}^{(3)}(\xi=0)}\cdot\int_0^{\pi}d\eta\cdot ce_{2n}(\eta)\cdot\\ &\cdot\left\{J_0(kca)+\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^sJ_{2s}(kca)\cdot\cos 2s\eta\right\};\\ N_{2n}&=\int_0^{\pi}[ce_{2n}(\eta)]^2d\eta. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Аналогично умножим опять обе части (7) на ce_{2n+1} и интегрируем опять по η от 0 до π. При этом пропадут все четные члены ряда, и мы получим:

$$\left.\begin{aligned} G_{2n+1}&=\frac{-1}{N_{2n+1}\cdot Ce_{2n+1}^{(3)}(\xi=0)}\cdot\int_0^{\pi}d\eta\cdot ce_{2n+1}(\eta)\cdot\\ &\cdot\left\{\sum_{s=0}^{\infty}(-i)^{2s+1}\cdot J_{2s+1}(kca)\cdot\cos(2s+1)\eta\right\} \end{aligned}\right\}. \qquad (9)$$

Таким образом диффракционная проблема II полностью решена уравнениями (6), (8) и (9). Относительно сходимости разрешающих рядов справедливо все сказанное выше. Укажем, что наше решение для узкой щели ($h\to 0$) переходит для этого случая в формулу Релея (*114*), (*135*). Практически весьма интересно численно рассчитать коэффициент поглощения щели в случае звуковых волн. Таким образом, окажется отчасти решенным вопрос о поглощении звука открытым окном. Мы получаем также, что теория Кирхгофа, базирующаяся на принципе Гюйгенса, дает уже для щелей шириной порядка $\frac{2}{3}$ длины волны более точное решение, нежели приближение Релея, относящееся к щелям исчезающе малой ширины, $h\to 0$ (*135*).

е) Замечания относительно принципа Гюйгенса

Когда диффракционное отверстие велико по сравнению с длиной волны, приближенный расчет диффракционного излучения можно провести для большого расстояния от отверстия, заменяя последнее слоем равномерно распределенных источников. Из этого распределения источников функция диффракции определится непосредственным интегрированием. Для данного случая это является выражением принципа Гюйгенса (*88*, стр. 7) Этот принцип в упомянутом выше случае, даже когда диффракционное отверстие не очень велико относительно длины волны, дает достаточно точное решение проблем (приближение Кирхгофа). Отсюда следует еще одно техническое приложение. При расчете излучения так называемых направляющих антен в некоторых случаях заменяют комбинацию линейных антен, лежащих в плоскости, излучающей антенной поверхностью (зеркалом). Как показано в литературе (*10а*), направляющий эффект такой антенной поверхности полностью аналогичен Фраунгоферовым диффракционным явлениям отверстия. На основании принципа Гюйгенса это очевидно для размеров больших, сравнительно с длиной волны. Выше мы видели, что принцип Гюйгенса применим также к отверстиям небольших размеров. Следовательно, принцип антенных поверхностей может быть применен и при размерах порядка длины волны.

2. Диффракция плоских электромагнитных или акустических волн у эллипсоида или у эллиптического цилиндра

При изучении диффракции электромагнитных волн у эллипсоидальных тел мы полагаем проводимость последних идеальной. Общий случай не идеальной проводимости рассматривался в литературе (*98*, стр. 716—727; *89*, стр. 101—104), но расчеты не были доведены до конца. При акустических волнах мы считаем тело абсолютно жестким.

а) Математическая формулировка проблемы диффракции в электрическом и акустическом случае

В акустическом случае мы воспользуемся потенциалом скоростей Φ, как зависимой переменной. На поверхности тела скорость воздуха в направлении нормали к поверхности равна нулю ($v_n=0$). Введем, как в разделе V, 1 дополнительное условие, что функция диффракции, которая прибавляется к невозмущенной функции падающей волны, исчезает на бесконечности и ведет себя в пространственном случае, как e^{-ikr}/r, где r — расстояние до тела.

В электрическом случае мы принимаем в качестве зависимой переменной вектор-потенциал Герца Π. Этот потенциал удовлетворяет волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Pi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Pi}{\partial z^2}=-k^2\Pi.$$

Напряженность электрического поля E и магнитного поля H может быть выражена через П по формулам:

$$E = -ik[\operatorname{grad}\operatorname{div}\Pi + k^2\Pi], \tag{1}$$
$$H = \operatorname{rot}\Pi.$$

При этом E, H и П зависят от времени через множитель $e^{i\omega}$ (ω — круговая частота). На поверхности проводника, благодаря бесконечной проводимости, имеют место следующие граничные условия: тангенциальная слагающая E и нормальная слагающая H исчезают. Оба эти условия не независимы, а эквивалентны; мы должны пользоваться одним или другим. В качестве дополнительного условия опять имеем: исчезание функции диффракции на бесконечности как e^{-ikr}/r.

b) Разложение функции диффракции в случае эллипсоида по волновым функциям Ляме

Мы полагаем, что для падающей плоской электромагнитной волны П обладает только одной слагающей в направлении оси z, Π_z, которую для сокращения обозначим просто П. П равно e^{-ikx}. Центр эллипсоида лежит, как в I, 1c в начале координат, оси его совпадают с направлениями осей x, y, z. Диффракционный потенциал Π_1, зависящий от диффракции П у эллипсоида, обладает в общем случае тремя компонентами (*98*, стр. 726—727). Полный вектор-потенциал Герца, решающий нашу диффракционную задачу, равен $\Pi+\Pi_1$. Мы разложим компоненты Π_1 по произведениям Ляме:

$$\left.\begin{aligned} \Pi_{1x} &= \sum A_n \cdot R_n^{(3)}(\rho)\cdot S_n(\mu,\nu),\\ \Pi_{1y} &= \sum B_n \cdot R_n^{(3)}(\rho)\cdot S_n(\mu,\nu),\\ \Pi_{1z} &= \sum C_n \cdot R_n^{(3)}(\rho)\cdot S_n(\mu,\nu). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Здесь $R_n^{(3)}$ волновые функции Ляме в пространстве, ведущие себя при $\rho\to\infty$ как

$$\frac{e^{-ikr}}{r}.$$

В разделах IV, 4c и IV, 4d они названы функциями третьего рода. Условия на поверхности, в случае эллипсоида, гласят: H_n исчезает (n — внешняя нормаль). Мы рассчитаем H из $\Pi+\Pi_1$ по формуле (1) раздела V, 2a и получим, расщепляя x-, y-, z- компоненты $\Pi+\Pi_1$, три уравнения. Таким образом, задача диффракции решена. В случае звуковых волн решение получается несколько более простым.

c) Диффракция у сплюснутого эллипсоида вращения, в частности у круглой пластинки

Займемся диффракцией звуковых волн у сплюснутого эллипсоида вращения. Относительно вытянутого эллипсоида вращения отсылаем к работам Р. Маклорена (*89*, стр. 101) и Герцфельда (*43*). Оси эллипсоида направлены так, как указано в разделе I, 1b. Потенциал скоростей для падающей плоской волны равен $\Phi_0 = e^{-ikx}$, для диффрагированной волны Φ_1; решение задачи пишем в виде

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1.$$

Мы разложим:

$$\Phi_1 = \sum A_s R_s^{(3)}(\xi)\cdot M_s(\mu),$$

причем волновые функции Ляме в случае симметрии вращения определены в разделе IV, 5. Под $R_s^{(3)}(\xi)$ мы понимаем волновую функцию Ляме третьего класса в пространстве, определенную для случая симметрии вращения в разделе IV, 5b. На поверхности эллипсоида $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ (n — внешняя нормаль) исчезает. Мы имеем

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\left[c\sqrt{\frac{\xi^2+\mu^2}{\xi^2+1}}\right]^{-1} =$$
$$= \left[-ikc\mu e^{-ikc\mu\xi} + \sum A_s\cdot R_s^{(3)\prime}\cdot M_s\right]\cdot\left[c\sqrt{\frac{\xi^2+\mu^2}{\xi^2+1}}\right]^{-1}.$$

Следовательно:

$$\sum A_s\cdot R_s^{(3)\prime}(\xi=\xi_0)\cdot M_s(\mu) = ikc\mu e^{-ikc\mu\xi}, \tag{1}$$

где ξ_0 означает поверхность эллипсоида.

Умножим правую и левую части (1) на $M_s(\mu)$ и интегрируем по μ от -1 до $+1$. В силу условий ортогональности M_s (IV, 4b) мы получаем:

$$A_s = \frac{ikc\int\limits_{-1}^{+} M_s(\mu)\cdot\mu\cdot e^{-ikc\xi_0\mu}\cdot d\mu}{R_s^{(3)\prime}(\xi=\xi_0)\cdot\int\limits_{-1}^{+1} M_s^2(\mu)\cdot d\mu}. \tag{2}$$

Этим наша задача полностью решена. В случае круглой пластины нужно положить $\xi_0=0$ (см. IV, 5h). Численные решения задачи можно найти у E. Lommel (*87*) и F. Möglich'а (*98*, стр. 730—734). Для акустических исследований (шайба Релея) большой практический интерес представляет предельный случай шайбы, очень малой в сравнении с длиной волны. Эту проблему решил W. König (*72*) (*39*, стр. 148—150). Относительно диффракции электромагнитных волн у проводящего эллиптического цилиндра мы отсылаем к литературе (*121*, стр. 657—664).

d) Замечания относительно принципа Бабине

Сопоставим две задачи: а) тонкую конечную ширму, б) отверстие в бесконечно тонкой плоской ширме. Принцип Бабине (*31*, II, стр. 343, *114*, стр. 286) гласит, что проблема I (см. V, 1а) в случае (а) эквивалентна проблеме II в случае (b); проблема II в случае (а) эквивалентна проблеме I в случае (b). Доказательство может быть приведено следующее. Возьмем сначала в случае (а) невозмущенную волну. Функция диффракции должна обращать в проблеме II скорость $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ у ширмы в нуль (а). Это может быть достигнуто, если заменить ширму распределением скоростей, полностью противоположным тому, которое создает невозмущенная падающая волна на месте ширмы. В случае проблемы I и (b) эти условия согласно V, Ia выполняются. Аналогично имеем в других случаях. При помощи этого принципа, зная решение задачи диффракции для конечной ширмы, можно найти решение дополнительной задачи для отверстия в плоской стене.

3. Проблема излучения звука жесткой круглой пластинкой

В акустике имеется много проблем, которые разрешимы при помощи волновых функций Ляме для эллипсоида вращения, в частности круглой пластинки. Во-первых, излучение звука аксиально колеблющейся изолированной пластинкой; затем излучение звука, когда часть круглой пластинки аксиально колеблется, в то время как остальная часть служит экраном. Предельным случаем второй проблемы является расширение экрана до бесконечных размеров.

а) Излучение звука свободно колеблющейся в аксиальном направлении круглой жесткой пластинкой

Во всех проблемах раздела V, 3 движение симметрично относительно оси круглой пластинки. Мы рассматриваем круглую пластинку, как предельный случай сплюснутого эллипсоида вращения; произведя расчеты для эллипсоида конечных размеров, мы переходим затем к пределу, полагая малую ось стремящейся к нулю. На поверхности эллипсоида вращения скорость задана в виде $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ (n — внешняя нормаль). $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ обладает по обе стороны от средней плоскости разными знаками. Отсюда следует, что для решения задачи следует применить волновые функции Ляме для поверхности эллипсоида (IV, 5*a*), которые разлагаются по шаровым функциям P_{2n+1} нечетного порядка. В обозначениях IV, 5с и IV, 5е имеем: $m=0$ и $n=1, 3, 5\ldots$ Мы обозначим соответствующие функции Ляме через:

$$M_{2n+1}=b_0P_1-b_1P_3+b_2P_5\ldots\pm b_s P_{2s+1};\quad n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots$$

Соответствующими пространственными функциями третьего класса являются $R_{2n+1}(\xi)$; таким образом решение волнового уравнения гласит:

$$\Phi=\sum_{0}^{\infty} A_{2n+1}\cdot R_{2n+1}(\xi)\cdot M_{2n+1}(\mu). \qquad (1$$

Коэффициенты A_{2n+1} определяются так, что $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ принимает на поверхности эллипсоида заданные значения. В данном случае — полностью колеблющейся пластинки — $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ постоянно во всех точках пластинки и равно v. Далее, на основании I, 1 и I, 1b:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n}=\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\cdot\frac{1}{g_{11}}=\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\cdot\frac{1}{c}\sqrt{\frac{\xi^2+1}{\xi^2+\mu^2}}.$$

Следовательно:

$$v=\sum_{n=0,1,\ldots}^{\infty}A_{2n+1}\left\{\frac{1}{c}\sqrt{\frac{\xi^2+1}{\xi^2+\mu^2}}\cdot\frac{dR_{2n+1}}{d\xi}\right\}_{\xi=\xi_0}\cdot M_{2n+1}(\mu), \qquad (2)$$

при чем ξ_0 соответствует поверхности эллипсоида. Умножим правую и левую части (2) на

$$c\sqrt{\frac{\xi_0^2+\mu^2}{\xi_0^2+1}}\cdot M_{2n+1}$$

и интегрируем по μ от 0 до 1. Вследствие ортогональности M_{2n+1}, получаем:

$$A_{2n+1}\cdot Q_{2n+1}\cdot\left(\frac{dR_{2n+1}}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_0}=\int_0^1 d\mu\cdot c\cdot\sqrt{\frac{\xi_0^2+\mu^2}{\xi_0^2+1}}\cdot v\cdot M_{2n+1}(\mu);$$

$$Q_{2n+1}=\int_0^1 M_{2n+1}^2 d\mu. \qquad (3)$$

Посредством (1) и (3) поставленная задача полностью решена. При переходе к круглой пластинке полагаем $\xi_0=0$ (см. IV, 5h).

b) Частные случаи очень большой и очень малой длины волны

Когда потенциал скорости определен согласно (1) раздела V, 3а, легко найти реактивное действие излучения звука на колеблющуюся пластинку. Сила, с которой излучение действует на шайбу, равна (*115*, II, стр. 162):

$$K=-i\omega\sigma\iint\Phi df, \qquad (1)$$

где σ—плотность воздуха, ω — круговая частота, определяющая зависимость Ф от времени через множитель $e^{i\omega t}$. Интегрирование производится по всей поверхности эллипсоида. Для рассматриваемого реактивного действия вводят понятия импеданца Z. Последний определяется, как отношение силы K по (1) к скорости движущейся точки шайбы (в нашем случае v):

$$Z=\frac{K}{v}.$$

Импеданц обладает вещественной и мнимой частью. Вещественная часть Z пропорциональна полной энергии излучения, мнимая часть Z может быть приравнена ωm, при чем через m обозначена масса, которая вследствие колебания воздуха должна быть добавлена к массе шайбы. Проще всего рассмотреть два частных случая проблемы:

а) длина волны звука в воздухе очень велика по сравнению с размерами шайбы;

б) длина волны звука в воздухе очень мала по сравнению с размерами шайбы.

В случае (а) волновое уравнение переходит в потенциальное и мы получаем задачу поступательного перемещения шайбы в покоящейся идеальной жидкости. Эта задача легко решается при помощи потенциальных функций Ляме (*78*). Для добавочной массы мы получаем в данном случае:

$$m=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{4}{3}\pi a^3\cdot\sigma,$$

где a—радиус шайбы. Для очень малых длин волн мы получаем $m=0$. В случае (b) мы должны воспользоваться принципом Гюйгенса, и постоянное распределение скорости на поверхности шайбы заменить приближенно постоянным распределением источников. Так как можно пренебречь потоками воздуха с передней стороны на обратную, будем рассматривать шайбу, как бы окруженной бесконечно протяженным плоским экраном; потенциал скоростей определится после интегрирования (*115*, II, стр. 162):

$$\Phi=-\frac{1}{2\pi}\int\int v\,\frac{e^{-ikr}}{r}\,df.$$

Здесь r есть расстояние от точки наблюдения до точки на шайбе, и интеграл распространен по всей поверхности шайбы.

с) Колеблющаяся круглая шайба в плоской кругообразной ширме

Эта проблема отличается математически от предыдущей тем, что v не постоянно на поверхности шайбы (v равно нулю на части шайбы).

Решение задачи может быть получено при помощи формул V, 3a, если интеграл в (3) V, 3a распространить только на ту часть поверхности шайбы, на которой v отлично от нуля. Мы можем в данном случае провести расчет тогда, когда (а) — радиус колеблющейся части шайбы мал по сравнению с длиной волны, или (b) — этот радиус велик. В случае (а) мы должны провести различие между ширмой, которая мала по сравнению с длиной волны или велика. В последнем случае мы имеем, как и в (b), с большим приближением задачу о колеблющейся круглой шайбе в бесконечно большой ширме. Эта задача частично рассмотрена в литературе (*115*, II, стр. 162; *4*).

Случай, когда колеблющиеся и неподвижные части круговой шайбы малы по сравнению с длиной волны, приводит к потенциальной проблеме. Мы можем разложить потенциал скорости вокруг шайбы по потенциальным функциям Ляме. v исчезает при $\mu>\mu_0$. Мы полагаем

$$\Phi=\sum_{n=0,1,2,\dots}^{\infty}A_{2n+1}\cdot P_{2n+1}(\mu)\cdot Q_{2n+1}^{*}(i\xi),$$

при чем сохранены обозначения раздела IV, 3b. Для коэффициента A_{2n+1} мы находим выражение:

$$A_{2n+1}\cdot p_{2n+1}\cdot\left(\frac{dQ_{2n+1}}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_0}=\int_1^{\mu_0}c\sqrt{\frac{\xi_0^2+\mu^2}{\xi_0^2+1}}\cdot v\cdot P_{2n+1}(\mu)\cdot d\mu;$$

$$p_{2n+1}=\int_0^1 P_{2n+1}^2\,d\mu.$$

Масса m колеблющегося воздуха рассчитывается через Ф по формуле [*78*, стр. 57 (4)]:

$$m=\left|\frac{\sigma}{v}\int\int\Phi df\right|,$$

при чем интеграл распространен на колеблющуюся часть шайбы. Мы имеем:

$$m=\sum_{n=0,1,2,\dots}^{\infty}2\pi\frac{\sigma\cdot k_{2n+1}^2\cdot Q_{2n+1}(i\xi_0)}{p_{2n+1}\cdot Q'_{2n+1}(i\xi_0)},\tag{1}$$

где

$$k_{2n+1}=\int_1^{\mu_0}c\cdot\mu\cdot P_{2n+1}(\mu)\cdot d\mu$$

и штрих означает дифференцирование по ξ ($\xi_0=0$).

d) Частный случай бесконечно большой плоской ширмы

Хотя случай бесконечно большой плоской ширмы, в которой колеблется жесткая круглая шайба, много раз рассматривался [*115*, II, стр. 162 *4*], однако до сих пор не дано выражения для потенциала скорости, пригодного для любой точки пространства. Такое выражение можно дать при помощи волновых функций Ляме для сплюснутого эллипсоида вращения.

Сначала заметим, что в случае бесконечно большой ширмы задача распадается на две полностью независимых части, относящиеся к области впереди и позади мембраны. Мы можем при решении не принимать во внимание разности фаз колебаний на передней и оборотной стороне. Решение строится из волновых функций Ляме для сплюснутого эллипсоида четного порядка и для одной из сторон, при чем $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ на поверхности равно 0.

Эти волновые функции равны согласно IV, 5c и IV, 5e при $m=0$:

$$M_{2n}=a_0P_0-a_1P_2+\ldots\pm a_rP_{2r}+\cdots,$$

и мы получаем:

$$\Phi=\sum_{n=0,1,2,\ldots}^{\infty} A_{2n}\cdot R_{2n}^{(3)}(\xi)\cdot M_{2n}(\mu) \tag{1}$$

точно так же, как в V, 3a скорость шайбы задана и равна v, поэтому мы получаем для A_{2n} выражение:

$$A_{2n}=[Q_{2n}\cdot R_{2n}^{(3)\prime}(\xi_0)]^{-1}\cdot\int_0^1 c\sqrt{\frac{\xi_0^2+\mu^2}{\xi_0^2+1}}\cdot v\cdot M_{2n}\cdot d\mu; \tag{2}$$

$$Q_{2n}=\int_0^1 M_{2n}^2\,d\mu,$$

где опять для поверхности шайбы $\xi_0=0$ (см. IV, 5h). Формулами (1) и (2) настоящая задача полностью решена.

e) Задача об излучении звука рупором гиперболоидальной формы

Вместо многократно упомянутой экранирующей пластинки конечной или бесконечной протяженности, на практике часто встречается случай, когда колеблющаяся шайба лежит в основании рупора. Формы рупоров весьма разнообразны; если мы положим, что рупор совпадает с однополым гиперболоидом вращения, то получим задачу, решаемую при помощи волновых функций Ляме. При этом мы полагаем, что круговая шайба находится в горловом сечении гиперболоида. Мы приходим тогда к определению выражения для потенциала скорости, удовлетворяющего следующим условиям: (a) $\frac{\partial \Phi}{\partial n}=v$ на шайбе; (b) $\frac{\partial \Phi}{\partial n}=0$ на поверхности идеально жесткого рупора (однополого гиперболоида). Чтобы удовлетворить этим условиям, мы применим

волновые функции Ляме $M(\mu)$, которые при $\mu=\mu_0$ где μ_0—угол растворения гиперболоида, обладают исчезающей производной. Так как мы для наших расчетов применяем разложение функций Ляме по полиномам Лежандра (IV, 5c и IV, 5e), то требуем от последних выполнения указанных свойств. Известно, что полином $P_n(\mu)$ обладает при $\mu=\mu_0$ исчезающей производной по $\Theta=\arccos\mu$ тогда, когда $n=\frac{\pi l}{\arccos\mu}$ (*64*, стр. 80), где $l=1, 2, 3,\ldots$; иными словами, когда n—дробное число. Мы вводим таким образом функции Лежандра дробного порядка. Соответственно функциям Лежандра дробного порядка мы получаем при указанном выборе n в формулах разделов IV, 5c; IV, 5d и IV, 5e волновые функции Ляме дробных порядков, удовлетворяющих условию ортогональности:

$$\int_1^{\mu_0} M_n(\mu)\cdot M_m(\mu)\cdot d\mu=0; \tag{1}$$

$$n=\frac{\pi l}{\arccos\mu_0};\quad m=\frac{\pi k}{\arccos\mu_0}$$

$$l=1, 2, 3\ldots;\quad k=1, 2, 3\ldots;\quad l\neq k.$$

Мы можем теперь разложить решение поставленной проблемы по этим основным функциям Ляме:

$$\Phi=\sum A_nM_n(\mu)\cdot R_n^{(3)}(\xi), \tag{2}$$

при чем n пробегает указанные выше значения, когда l меняется от 1 до ∞. Из (1) и (2) мы получаем для A_n выражение:

$$A_n=\frac{v\cdot c\int_1^{\mu_0}\sqrt{\frac{\xi_0^2+\mu^2}{\xi_0^2+1}}\cdot M_n(\mu)\cdot d\mu}{R_n^{(3)\prime}(\xi_0)\cdot\int_1^{\mu_0}M_n^2d\mu}. \tag{3}$$

Если мы рассматриваем шайбу, колеблющуюся в средней плоскости гиперболоида $\mu=\mu_0$, то полагаем в (3) $\xi_0=0$. Если колеблется мембрана, имеющая форму конфокального гиперболоида эллипсоида вращения, то нужно вместо ξ_0 подставить соответствующее значение. Формулы (2) и (3) полностью решают задачу.

f) Замечание относительно плоской задачи, аналогичной вышеуказанной

При помощи функций Матье можно решать целый ряд проблем, являющихся плоской аналогией задач, рассмотренных выше. Отметим сначала излучение звука бесконечно длинной, жесткой свободно колеблющейся полосой. Мы полагаем здесь для потенциала скоростей:

$$\Phi = \sum_{n=0,1,2..}^{\infty} A_{2n+1} \cdot Se_{2n+1}^{(3)}(\xi) \cdot se_{2n+1}(\eta), \tag{1}$$

где se_{2n+1} и $Se_{2n+1}^{(3)}$ являются функцией Матье и присоединенной функцией Матье третьего рода по разделам III, 2a и III, 5a.

На полосе $\left|\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right| = v$ · Тогда A_{2n+1} рассчитывается из

$$A_{2n+1} = \frac{1}{N_{2n+1} Se_{2n+1}^{(3)\prime}(\xi_0)} \cdot c \cdot v \cdot \int_0^{\pi} \sin\eta \cdot se_{2n+1}(\eta)\, d\eta, \tag{2}$$

где

$$N_{2n+1} = \int_0^{\pi} [se_{2n+1}(\eta)]^2 d\eta.$$

Подобным же образом при помощи выражения (1), но с отличными коэффициентами, можно решать задачу, когда колеблющаяся полоска снабжена справа и слева ширмами конечной ширины.

В случае, когда ширмы бесконечно широки, мы заменяем выражение (1) выражением:

$$\Phi = \sum_{n=0,1,2..}^{\infty} A_{2n} \cdot ce_{2n}(\eta) \cdot Ce_{2n}^{(3)}(\xi), \tag{3}$$

которое аналогично (1) раздела V, 3d. В остальном решение аналогично приведенному выше. Наконец, мы можем рассмотреть случай, соответствующий рассмотренной задаче о рупоре; колеблющаяся полоса находится в основании „двухразмерного рупора", имеющего в сечении форму эллипса. В этой задаче мы опять должны обратиться к формуле (3), при чем n не пробегает целые значения, а является дробным числом, определяемым расстворением рупора.

VI. Проблемы собственных колебаний

Задачи собственных колебаний разделяются при рассмотрении пространственных областей на две группы: внешняя и внутренняя пространственные проблемы. В качестве проблем различных родов мы имеем множество примеров из области математической акустики и Максвелловой теории электричества. В качестве плоской задачи мы укажем на собственные колебания мембраны и пластинки с эллиптическим контуром (*95*, *96*, *89*, стр. 72—73; *116*, II, стр. 728).

1. Внутренняя пространственная задача

Рассмотрим область, ограниченную эллипсоидом. Воздух в этом полом пространстве обладает определенной частотой собственных колебаний. Электромагнитное поле в полом пространстве также обладает счетным множеством собственных частот. Далее мы рассмотрим электрический проводник, ограниченный эллипсоидом. Этот проводник находится в стационарном, внешнем магнитном поле. Если это поле внезапно исчезает, то в толще проводника возникают вихревые токи, затухающие с определенными постоянными времени. Подобные постоянные времени играют огромную роль при расчетах нагревания и охлаждения тел, находящихся в переменном температурном поле, и при расчете процессов диффузии. Рассмотрим примеры, относящееся к указанным случаям.

а) Собственные колебания воздуха в объеме, ограниченном эллипсоидом

В качестве зависимой переменной мы применим потенциал скорости Ф. У внутренней поверхности эллипсоида, которую полагаем жесткой с внутренней нормалью n имеем:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0.$$

В случае трехосного эллипсоида это приводит к собственному решению

$$R_i(\rho) \cdot S_i(\mu, \nu)$$

и условию

$$\left(\frac{dR_i}{d\rho}\right)_{\rho=\rho_0} = 0. \tag{1}$$

Из уравнения (1), представляющего трансцендентное уравнение, определяющее коэффициент k волнового уравнения (I, 1c) рассчитываются собственные частоты. Рассмотрим вытянутый эллипсоид вращения (*89*). Собственное решение гласит:

$$R_n^{(1)}(\xi) \cdot M_n(\mu) \cdot \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases},$$

при чем $R_n^{(1)}$ и M_n известны из IV, 5. Поверхностные условия дают здесь уравнение для собственных частот:

$$\left(\frac{dR_n}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_0} = 0. \tag{2}$$

При небольших значениях $k c \xi_0 = z$ мы можем ряды (раздел IV, 5d), расположенные по возрастающим степеням z, подставить в (2). Вводя эксцентриситет эллипсоида вращения e, мы найдем, что (2) при $m=0$ и $n=1$ переходит в (*89*, стр. 88):

$$\left(e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}};\ a \text{ и } b \text{ — полуоси эллипсоида}\right),$$

$$1-0{,}3z^2+(0{,}017857+0{,}0034285e^2)\,z^4-(0{,}00059524+0{,}00031747e^2-$$
$$-0{,}00003047e^4)\,z^6+(0{,}00006764+0{,}0000111e^2-$$
$$-0{,}0000010885e^4)\,z^8+\cdots=0.$$

Наименьшими корнями являются:

e	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
	2,0815	2,0825	2,0848	2,0865	2,0902	2,0961	2,1035

0,7	0,8	0,9
2,1124	2,1233	2,1364.

Отсюда мы можем определить частоту основных колебаний воздуха в вытянутом эллипсоиде вращения; вместо $c\xi_0$ мы должны подставить соответствующее значение. Любопытно отметить факт, очевидный из приведенной таблицы, что низшая собственная частота эллипсоида с $e=0{,}9$ относится к частоте шара ($e=0$) с радиусом, равным большой полуоси эллипса, как 2,13 к 2,08, т. е. меняется всего на $3^0/_0$. Совершенно аналогично подсчитываются частоты собственных колебаний воздуха, заключенного между двумя конфокальными эллипсоидами (*89*, стр.91–96).

b) Собственные постоянные времени эллипсоидального проводника (*89*, стр. 104—105; *129*)

Поместим проводящий эллипсоид вращения в однородное, внешнее магнитное поле, направленное вдоль большой оси эллипсоида. Внезапно это поле исчезает. В проводнике появятся вихревые токи, при чем направление токов концентрично кругам на поверхности эллипсоида (вокруг большой оси). Положим, что ток, а также магнитное поле внутри проводника, зависят от времени по закону e^{-pt}, тогда сила поля H удовлетворяет в проводнике дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}=-k^2 H, \tag{1}$$

с

$$k^2=p\,\frac{4\pi\mu}{V^2\rho},$$

где μ — проницаемость;

ρ — удельное электрическое сопротивление (в единицах Гаусса);

V — скорость света.

Мы считаем μ очень большим. На поверхности провода H направлено параллельно поверхности проводника. Вне — H исчезает. Следовательно, на поверхности проводника H обращается в нуль. Эта однородная граничная задача может быть решена только при определенных значениях p, которые мы найдем ниже. Компоненты H удовлетворяют уравнению (1) в координатах вытянутого эллипсоида вращения; решение положим в форме:

$$R_n^{(1)}(\xi)\cdot M_n(\mu).$$

Из симметрии задачи следует, что сила магнитного поля не зависит от азимута φ. Поверхностные условия удовлетворяются, если положим:

$$R_n^{(1)}(\xi)=0, \tag{2}$$

что является определяющим уравнением для p. Наименьшими постоянными времени являются наименьшие корни (2) при $n=0$. Мы находим следующие значения:

e	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\frac{p}{p_0}$	1	0,9877	0,9701	0,9328	0,8810	0,8166

p_0 — это значение p при $e=0$, т. е. в случае шара. В этом случае уклонения собственных частот вытянутого эллипсоида вращения от частот шара большие, нежели в случае колебаний воздуха.

Аналогичным путем решается задача в случае трехосного эллипсоида (*139*) и эллиптического цилиндра (*129*). То же относится к задачам движения теплоты для тел эллипсоидальной формы (*89*, стр. 105—108) и к определенным проблемам диффузии (*116*, II).

2. Внешняя пространственная задача

Мы займемся здесь электромагнитными собственными колебаниями, имеющими место в эллипсоидальном проводнике, окруженном однородным бесконечно протяженным диэлектриком. Непосредственно мы рассмотрим вытянутый эллипсоид вращения и эллиптический цилиндр.

а) Собственные электромагнитные колебания проводящего вытянутого эллипсоида вращения

Ось эллипсоида совпадает с осью x, как в разделе I, 1*a*. Мы рассмотрим симметричное относительно оси распределение зарядов на поверхности эллипсоида, удерживаемое в равновесии некоторой силой. При внезапном исчезновении указанной силы распределение зарядов, которое первоначально не совпадало с распределением зарядов в состоянии равновесия, начинает осциллировать около равновесного состояния. Эти колебания постепенно затухают и приближаются к равновесному положению. Мы ищем наименьшую собственную частоту возникающего колебательного процесса. Вследствие симметричного, относительно оси характера первоначального распределения зарядов, уравнительные токи протекают только в меридиональных плоскостях. Линии магнитного поля имеют вид замкнутых параллельных кругов.

Назовем через H_x, H_y и H_z компоненты напряженности поля (зависимость от времени, определяемую множителем $e^{i\omega t}$ не пишем) и представим их выражениями:

$$H_y = y\chi(\xi, \mu);$$
$$H_z = -x\chi(\xi, \mu);$$
$$H_x = 0.$$

$\chi(\xi\mu)$—функция от ξ и μ, определяемая так, что компоненты силы поля удовлетворяют волновому уравнению. Эти условия легче всего выполнить соответствующим выбором:

$$\left.\begin{aligned} H_y &= \sin\varphi \cdot R_1(\xi) \cdot M_1(\mu); \\ H_z &= -\cos\varphi \cdot R_1(\xi) \cdot M_1(\mu); \\ H_x &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Обе функции R_1 и M_1 удовлетворяют дифференциальному уравнению:

$$\frac{d}{d\xi}\left\{(1-\xi^2)\frac{dR_1}{d\xi}\right\} + R_1\left(\frac{-1}{1-\xi^2} + k^2c^2\xi^2 + {}_0\Delta\right) = 0. \quad (2)$$

где Λ_0 означает наименьшее собственное число. Мы должны выбрать также класс функции $R_1(\xi)$. Этот выбор различен для внутренней части проводящего эллипсоида и для диэлектрика (внешнее пространство). Внутри мы применяем функции, которые для всех ξ с

$$1 \leqslant \xi \leqslant \xi_0,$$

где ξ_0 отвечает поверхности эллипсоида, остаются конечными, т. е. функции первого класса; во внешнем пространстве, наоборот, при $\xi \to \infty$ решение должно исчезать, как

$$\frac{e^{-ikr}}{r},$$

и мы применяем функции третьего класса. Так как мы займемся далее случаем бесконечно большой проводимости эллипсоида, то применим решение (1) только к внешнему пространству; внутри эллипсоида магнитная сила в этом случае исчезает. Относительно функций $R_1^{(3)}$ смотрите раздел IV, 5f.

b) Уравнение для собственных частот в случае бесконечно хорошей проводимости

При бесконечно большой проводимости проводника исчезает тангенциальная составляющая напряженности электрического поля E на его поверхности. В силу симметрии тангенциально направленное электрическое поле обладает компонентой только в направлении координаты μ. Мы рассчитаем ее из напряженности магнитного поля при помощи первого уравнения Максвелла:

$$\operatorname{rot} H = \frac{4\pi}{c_0}\left(\sigma E + \frac{i\omega\varepsilon}{4\pi} E\right),$$

где c_0 — скорость света;
σ — проводимость;
ω — круговая частота;
ε — диэлектрическая постоянная (Гауссовы единицы).

Во внешнем пространстве $\sigma = 0$ и

$$\operatorname{rot}_\mu H = \frac{i\omega\varepsilon}{c_0} E_\mu = \frac{-1}{\sqrt{g_{11} g_{33}}} \frac{d}{d\xi}(\sqrt{g_{33}} \cdot H_\varphi),$$

с

$$g_{11} = \frac{c^2(\xi^2+\mu^2)}{\xi^2-1};$$

$$g_{33} = c^2(1-\mu^2)(\xi^2-1) \text{ согласно I, 1}$$

и

$$H_\varphi^2 = H_x^2 + H_y^2.$$

Исчезание E_μ на поверхности проводника приводит к уравнению:

$$\left[\frac{d}{d\xi}\{(\xi^2-1)^{\frac{1}{2}} R_1^{(3)}(\xi)\}\right]_{\xi=\xi_0} = 0, \quad (1)$$

т. е. трансцендентному уравнению для k^2 из уравнения (2) раздела VI, 2a. Получаем, что

$$k^2 = \frac{\varepsilon\omega^2}{c_0^2} \quad (2)$$

дает из уравнения (1) значения собственных частот для рассматриваемых собственных колебаний. Первый корень (1) дает значение первой собственной частоты. Покажем, что в случае шара уравнение (1) совпадает с известным в литературе (*31*, стр. 497) уравнением. Для шара (I, 1a) $\xi \to \infty$ и

$$R_1^{(3)} = \frac{H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{kr}},$$

где $H^{(2)}$— функция Ганкеля второго рода. Далее фокальное расстояние (c) стремится к нулю таким образом, что $\lim \xi c \to r$ (конечно). Следовательно из (1):

$$\left[\frac{d}{dr}\left(r\frac{H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{kr}}\right)\right]=0, \tag{3}$$

что является известным уравнением Дж. Томсона [(*142*, стр. 368 (108)].

c) Частный случай шара и стержнеобразного проводника

Двумя рассмотренными в литературе предельными случаями вытянутого эллипсоида вращения являются шар и стержень. Последний получается из наших формул при $\xi_0=1$, при чем эллипсоид вращения совпадает с линией, соединяющей фокусы. Томсон нашел для первой собственной частоты шара (*142*, стр. 369) из (3) VI, 2b с $n=0$.

$$k_0 r_0=\frac{i}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

С другой стороны, для стержнеобразного проводника [*31*, стр. 329 (50 d)] в первом приближении:

$$k_0 c=\frac{\pi}{2},$$

(kc) реально. Стержень, равный по длине диаметру шара, обладает вдвое большей частотой, нежели шар.

Несколько отличный от приведенного расчет собственных частот вытянутого, проводящего эллипсоида вращения был проведен М. Абрагамом (*1*) и Е. Галленом (*38*). Оба автора рассматривали предельный случай очень вытянутого эллипсоида (провод).

d) Собственные электромагнитные колебания эллиптического цилиндра

Так же, как и выше, мы предположим некоторое распределение зарядов на эллиптическом цилиндре, не совпадающее с равновесным состоянием и постоянным вдоль образующей. Нас интересует собственная частота колебаний, возникающих при внезапном исчезновении внешней силы. В силу симметрии напряженность электрического поля обладает только одной компонентой, направленной нормально к поверхности цилиндра; магнитное поле обладает компонентой H, параллельной оси цилиндра. Компонента H удовлетворяет во внешнем пространстве волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}+k^2 H=0$$

и решениями для внешнего пространства являются:

$$H=Ce^{(3)}_n(\xi)\cdot ce_n(\eta)$$

или

$$H=Se^{(3)}_n(\xi)\quad se_n(\eta).$$

Относительно функции Se^3 и Ce^3 смотрите разделы III, 5a и III, 5c. Тангенциально направленная электрическая сила E на поверхности проводника определяется из первого уравнения Максвелла. Примем опять проводимость материала цилиндра бесконечно большой, тогда на поверхности проводника тангенциальная компонента электрического поля исчезает. Мы получаем отсюда два уравнения:

$$\frac{d}{d\xi_0}[Ce^{(3)}_n(\xi_0)]=0; \tag{1}$$

$$\frac{d}{d\xi_0}[Se^{(3)}_n(\xi_0)]=0. \tag{2}$$

При этом первая собственная частота определяется из (1) при $n=0$. Легко показать, что (1) и (2) переходят в случае кругового цилиндра в известные в литературе уравнения. Заметим, что в предельном случае кругового цилиндра: $\xi\to\infty$ и $c\to 0$ (см. I, 1d) и $\frac{1}{2}ce^{\xi}\to r$. При этом соединенные функции Матье третьего рода переходят из (1) и (2), как показано в разделе III, 5a, в функции Ганкеля второго рода порядка n, так что имеем:

$$\frac{d}{dr_0}[H^{(2)}_n(kr_0)]=0.$$

Заметим, что Д. Д. Томсон в цитируемой работе [*142*, стр. 348 (88)] пишет K вместо $H^{(2)}$. Мы пишем, что

$$H^{(2)}_n=J_n-iN_n,$$

где J_n и N_n функции Бесселя и Неймана. $H^{(2)}$ отличается множителем $\frac{i\pi}{2}$ от Q-функций Игнатовского (*64*, стр. 173; 95; 20 стр. 410).

VII. Проблемы волновой механики

Мы займемся здесь упомянутыми в разделе I, 2 проблемами волновой механики, которые приводят к дифференциальным уравнениям Хилла и Ляме. Сначала рассмотрим движение электронов в одномерной кристаллической решетке.

1. Движение электронов в неподвижной кристаллической решетке

Мы исходим из уравнения (1) раздела I, 2a:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{8\pi^2 m}{h^2}[E-V(x)]\psi=0, \tag{1}$$

описывающее движение электронов в одномерном потенциальном поле $V(x)$. Мы идеализируем задачу, полагая, что атомы рассматриваемой кристаллической решетки неподвижны; в действительности это может быть только при температуре абсолютного нуля. Далее мы полагаем, что кристалл бесконечно протяженный в одном измерении, и $V(x)$ является периодической функцией a, где a есть расстояние между двумя соседними атомами. Действительный расчет функции $V(x)$ чрезвычайно сложен, мы ограничимся простейшими предположениями относительно этой функции.

а) Модель для одномерной кристаллической решетки

Мы примем, следуя R de L Kronig'y и W. G. Penney (77), что функция V равна нулю в интервале от $x=0$ до $x=a$, далее равна V_0 в интервале от $x=a$ до $x=a+b$; далее опять от $x=a+b$ до $x=2a+b$ и т. д. Решение уравнения (1) VII, 1, в соответствии с теоремой Флоке II, 2, напишется в виде

$$\psi=u(x)\cdot e^{i\alpha x},$$

при чем для α из (2), III 3d имеем формулу:

$$\cos\alpha(a+b)=\cos\beta a\cdot\operatorname{ch}\gamma b+\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\beta}-\frac{\beta}{\gamma}\right)\sin\beta a\cdot\operatorname{sh}\gamma b, \qquad (1)$$

где

$$\beta^2=\frac{8\pi^2 m}{h^2}E \quad \text{и} \quad \gamma^2=\frac{8\pi^2 m}{h^2}(V_0-E).$$

Физически γ^2 должно быть положительно. Условиями перехода при скачке потенциала будет непрерывность ψ и $\frac{d\psi}{dx}$, аналогично сказанному в разделе III, 3d при получении формулы (2). Для каждого значения энергии E, которое физически можно допустить для движущейся вперед без затухания электронной волны, $|\cos\alpha(a+b)|\leqslant 1$ и, следовательно, α реально. Для дальнейшего упрощения (1) положим, что:

$$V_0\to\infty;\ b\to 0$$

и

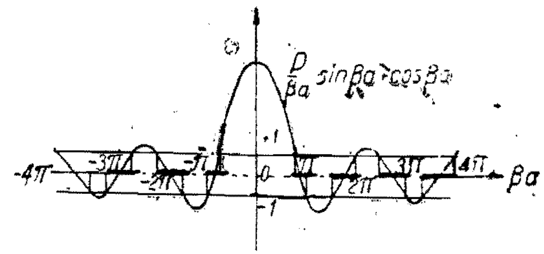
$$\lim_{\substack{b\to 0\\ V_0\to\infty}}\frac{\gamma^2 ab}{2}=P \text{ (конечно).}$$

Мы получаем тогда вместо (1)

$$P\cdot\frac{\sin\beta a}{\beta a}+\cos\beta a=\cos\alpha a. \qquad (1a)$$

На фиг. 5а изображена левая часть уравнения (1а) в функции от βa. На оси βa допустимые значения подчеркнуты жирно. Из

рисунка следует, что эти допустимые значения βa и E образуют кусочно непрерывный спектр. Интересно рассмотреть предельный случай (1а). Когда $P=0$, кристаллическая решетка перестает существовать. Уравнение (1) VII, 1 описывает тогда движение полностью свободных электронов. Спектр E становится непрерывным; это следует из (1а) и фигуры 5а. Положим теперь, что P неограниченно возрастает ($P\to\infty$), тогда электроны в интервале шириною a полностью замкнуты между твердыми, непроницаемыми стенками. Решение проблемы о собственных значениях в этом случае эквивалентно задаче об однородной натянутой струне и гласит:



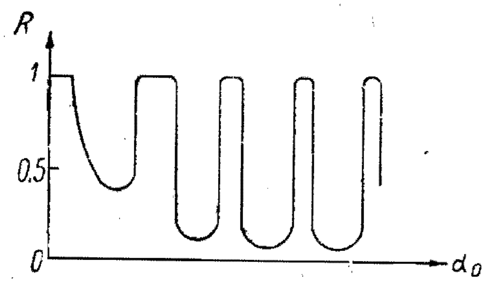
Фиг. 5а

$$\beta a=n\pi;\ n=1,\ 2,\ 3\ldots \qquad (2)$$

Это следует также из (1а) и фиг. 5а, на которой жирно начерченные интервалы стянутся в точки (2).

b) Расчет отражения электронной волны на границе решетки

В виде применения введенной выше модели рассчитаем отражение электронной волны на границе одномерной решетки (77). Движение электронов опять определяется уравнением (1) раздела VII,1.



Фиг. 5в.

$V=V_1$ для $-\infty<x<0$;
$V=0$ для $0\leqslant x\leqslant a$;
$V=V_0$ для $x=a$ и т. д.

Мы имеем для $x<0$ решение:

$$\psi=e^{i\alpha_0 x}+Ae_{-\alpha i_0 x}$$

и для $x>0$ решение VII, 1а. При этом:

$$\alpha_0^2+\frac{8\pi^2 m}{h^2}\cdot V_1=\beta^2.$$

Условиями перехода в точках прерывности потенциала являются непрерывность ψ и $\frac{d\psi}{dx}$.

Обозначим через A^* комплексно сопряженное A значение, тогда согласно правилам волновой механики

$$R=AA^*=\frac{(\cos\alpha a-\cos\beta a)^2+(\sin\alpha a-\frac{\alpha_0}{\beta}\sin\beta a)^2}{(\cos\alpha a-\cos\beta a)^2+(\sin\alpha a+\frac{\alpha_0}{\beta}\sin\beta a)^2}$$

есть коэффициент отражения электронной волны на границе решетки $x=0$, при чем βa лежит в „допустимом“ интервале оси βa, (1a) раздела VII, 1a и фиг. 5a. Для недопустимых значений βa $R=1$. На фиг. 5b R дано в функции от α_0; α_0 пропорционально корню из кинетической энергии падающих на границу решетки электронов.

2. Квантование асимметричного волчка

Квантование асимметричного волчка является проблемой, которая в волновой механике может быть решена для некоторых простых случаев с помощью потенциальных функций Ляме; это было показано H. A. Kramers'ом и Ittmann'ом (*60*; *61*; *73*; *74*; *75*). Асимметричный волчок служит в волновой механике моделью многоатомной молекулы.

a) Введение эллиптических координат; функции Ляме

Оси волчка совпадают с направлениями осей x, y, z связанной с телом координатной системы.

Положение этих осей в пространстве X, Y, Z (неподвижная в пространстве система) определяется углами ϑ, ψ и φ. При этом φ и ϑ являются полярными координатами оси Z в системе x, y, z. Моменты инерции волчка относительно трех главных осей инерции, совпадающих с осями x, y, z, равны $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$ и $\frac{1}{c^2}$.

Введем новые „эллиптические координаты на шаровой поверхности“, посредством:

$$\cos^2\vartheta=\frac{(\mu^2-c^2)\,(\nu^2-c^2)}{(a^2-c^2)\,(b^2-c^2)};\quad \sin^2\vartheta\cdot\sin^2\varphi=\frac{(a^2-\mu^2)\,(a^2-\nu^2)}{(a^2-c^2)\,(a^2-b^2)};$$

$$\sin^2\vartheta\cdot\cos^2\varphi=\frac{(b^2-\mu^2)\,(\nu^2-b^2)}{(a^2-b^2)\,(b^2-c^2)};$$

$$a^2\geqslant\mu^2\geqslant b^2\geqslant\nu^2\geqslant c^2.$$

Если мы ищем решение U волнового уравнения Шредингера, не содержащее угловой координаты ψ (волчок, который обладает относительно полярной оси импульсным моментом, равным нулю), то получаем для U уравнение:

$$\frac{\nu^2}{\nu^2-\mu^2}\left[\sqrt{-4f(\mu^2)}\,\frac{\partial}{\partial\mu}\right]^2 U+\frac{\mu^2}{\nu^2-\mu^2}\left[\sqrt{4f(\nu^2)}\,\frac{\partial}{\partial\nu}\right]^2 U+\frac{8\pi^2 E}{h^2}\,U=0. \quad (1)$$

После расщепления этого дифференциального уравнения получаем:

$$U=M(\mu)\cdot N(\nu);$$

$$\sqrt{-f(\mu^2)}\,\frac{d}{d\mu}\left[\sqrt{-f(\mu^2)}\,\frac{dM}{d\mu}\right]+M\left[\frac{8\pi^2 E}{h^2}-K\mu^2\right]=0; \quad (2)$$

$$\sqrt{f(\nu^2)}\,\frac{d}{d\nu}\left[\sqrt{f(\nu^2)}\,\frac{dN}{d\nu}\right]+N\left[\frac{-8\pi^2 E}{h^2}+K\nu^2\right]=0; \quad (3)$$

с

$$\mu^2 f(\mu^2)=(a^2-\mu^2)\,(b^2-\mu^2)\,(c^2-\mu^2)$$

и соответственно для ν. Сравнивая полученные формулы с данными цитированной литературы, следует иметь в виду проведенное нами в соответствии с разделом IV изменение обозначений:

Kramers		Ittman	Здесь		
$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{b}$	$\frac{1}{c}$	$\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{b^2}$	$\frac{1}{c^2}$
	λ			μ^2	
	μ			ν^2	

Легко заметить, что уравнения (2) и (3) идентичны с уравнениями (3b) и (3c) раздела I, 1c, как только положить в последних уравнениях $H=0$.

b) Значения энергии как собственные значения уравнения Ляме

Условия, при которых находится решение U раздела VII, 2a, гласят: единственность, конечность и непрерывность на всей поверхности эллипсоида, т. е. для всех значений μ и ν:

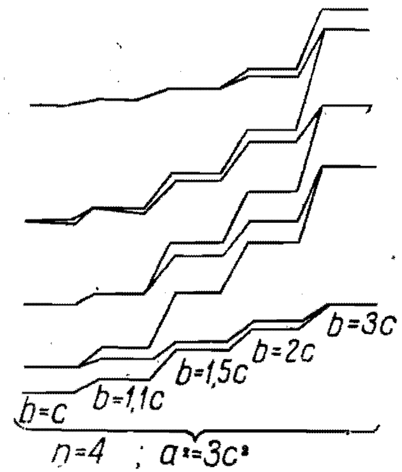
$$a^2\geqslant\mu^2\geqslant b^2\geqslant\nu^2\geqslant c^2.$$

Из раздела IV известно, что потенциальные функции Ляме удовлетворяют этим условиям. Они образуют, следовательно, применимое решение настоящей проблемы волновой механики. Значения постоянной K равны

$$K=n\,(n+1);\quad n\text{ — целое число.}$$

Значения

$$L=\frac{8\pi^2 E}{h^2}$$



Фиг. 5c.

определяются алгебраическим уравнением. Этим самым определяются уровни энергии E асимметричного волчка. Можно показать, что n является квантовым числом полного импульсного момента волчка. Каждому значению n соответствует $2n+1$ различных решений M_n или N_n и следовательно $U_n=M_n\cdot N_n$. Каждому такому решению соответствует значение энергии E, так что в общем случае имеем максимум $2n+1$ различных E-значений, соответствующих заданному n. В некоторых случаях отдельные значения энергии совпадают.

Это иллюстрируется фиг. 5с (*73*, стр. 562), где с точностью до произвольного слагаемого и в некотором масштабе даны E-значения для $n=4$ и $a^2=3c^2$.

Можно видеть, что для $b=2c$ (обозначения Kramers-Ittmann'a) полное число уровней энергии равно:

$$2\cdot 4+1=9.$$

На фиг. 5с применены обозначения Kramers-Ittmann'a.

VIII. Некоторые технические приложения[1]

1. Общие соображения

В настоящем разделе указаны задачи, приводящие к уравнениям типа Хилла и Матье. Решение их проведено более подробно, нежели в предыдущих разделах.

Прежде всего мы несколько дополним разделы (II, 3), (II, 4), напомнив основные соотношения в уравнениях с периодическими коэффициентами и указав прием нахождения асимптотических решений уравнения Матье (*153*).

а) Общие соображения об интегралах уравнений с периодическими коэффициентами

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\theta(t)\cdot x=0, \tag{1}$$

где $\theta(t)$ — заданная периодическая функция времени. Не нарушая общности, полагаем период функции θ равным 2π. Предположим, что нами определены два линейно независимых частных решения (1) $x_1(t)$ и $x_2(t)$, удовлетворяющих условиям

$$\left.\begin{aligned} x_1(0)=1;\quad x_1'(0)=0,\\ x_2(0)=0;\quad x_2'(0)=1.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Общее решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям более общего вида

$$x(0)=x_0 \quad \text{и} \quad x'(0)=x_0', \tag{3}$$

может быть, очевидно, выражено через x_1 и x_2 при помощи соотношения:

$$x(t)=x_0\,x_1(t)+x_0'\,x_2(t). \tag{4}$$

В разделе II, 2а указаны те условия, при соблюдении которых можно утверждать, что $x(t)$ останется при любом t ограниченным, каковы бы ни были x_0 и x_0'. Движение системы будет

[1] Раздел VIII этой книги составлен редактором, за исключением 7—„Теория волновых фильтров".

в этом случае устойчивым, каковы бы ни были начальные условия. То же относительно случая неустойчивости. Решение этой задачи (определение условий устойчивости и неустойчивости) зависит от построения решений дифференциального уравнения (1), $x(t)$, которые при изменении аргумента на 2π приобретали бы множитель σ:

$$X(t+2\pi)=\sigma X(t). \tag{5}$$

Такие решения могут быть построены. Прежде всего, поскольку $X(t)$ является решением (1), оно может быть линейно выражено через $x_1(t)$ и $x_2(t)$:

$$X(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t) \tag{6}$$

и следовательно:

$$X(t+2\pi)=c_1\,x_1(t+2\pi)+c_2\,x_2(t+2\pi). \tag{7}$$

Выразим теперь $x_k(t+2\pi)$ через x_1 и x_2. Для этого отметим, что уравнение (1) не меняет своего вида при замене t на $t+2\pi$. Поэтому $x_k(t+2\pi)$ также является его решением и линейно выражается через $x_1(t)$ и $x_2(t)$:

$$\left.\begin{aligned} x_1(t+2\pi)=ax_1(t)+bx_2(t)\\ x_2(t+2\pi)=cx_1(t)+dx_2(t).\end{aligned}\right\}. \tag{8}$$

Не трудно убедиться, полагая $t=0$ и пользуясь (2), что $a=x_1(2\pi)$, $c=x_2(2\pi)$, точно так же найдем, дифференцируя (8), $b=x_1'(2\pi)$, $d=x_2'(2\pi)$. Итак:

$$\left.\begin{aligned} x_1(t+2\pi)=x_1(2\pi)\cdot x_1(t)+x_1'(2\pi)\cdot x_2(t)\\ x_2(t+2\pi)=x_2(2\pi)\cdot x_1(t)+x_2'(2\pi)\cdot x_2(t)\end{aligned}\right\}. \tag{9}$$

Теперь получаем:

$$X(t+2\pi)=c_1[x_1(2\pi)\cdot x_1(t)+x_1'(2\pi)\cdot x_2(t)]+$$
$$+c_2[x_2(2\pi)\cdot x_1(t)+x_2'(2\pi)\cdot x_2(t)],$$

и в силу (5) и (7)

$$c_1[x_1(2\pi)\cdot x_1(t)+x_1'(2\pi)\cdot x_2(t)]+c_2[x_2(2\pi)\cdot x_1(t)+x_2'(2\pi)\cdot x_2(t)]=$$
$$=\sigma[c_1x_1(t)+c_2x_2(t)],$$

или

$$\{c_1[x_1(2\pi)-\sigma]+c_2x_2(2\pi)\}\,x_1(t)+\{c_1x_1'(2\pi)+c_2[x_2'(2\pi)-\sigma]\}\,x_2(t)=0.$$

Но решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ линейно независимы; поэтому коэффициенты при них в этом отношении должны порознь обращаться в нуль. Мы переходим к двум уравнениям

$$\left.\begin{aligned} c_1[x_1(2\pi)-\sigma]+c_2x_2(2\pi)=0\\ c_1x_1'(2\pi)+c_2[x_2'(2\pi)-\sigma]=0\end{aligned}\right\}. \tag{10}$$

Условием существования отличных от нуля решений c_1 и c_2 этой системы является равенство нулю ее определителя:

$$\begin{vmatrix} x_1(2\pi)-\sigma, & x_2(2\pi) \\ x_1'(2\pi), & x_2'(2\pi)-\sigma \end{vmatrix} = \sigma^2 - [x_1(2\pi)+x_2'(2\pi)]\,\sigma + \qquad (11)$$

$$+ x_1(2\pi)\cdot x_2'(2\pi) - x_1'(2\pi)\cdot x_2(2\pi) = 0.$$

Уравнение (11) можно упростить.

Определитель Вронского уравнения (1)

$$\begin{vmatrix} x_1(t), & x_2(t) \\ x_1'(t), & x_2'(t) \end{vmatrix} = x_1(t)\cdot x_2'(t) - x_2(t)\cdot x_1'(t)$$

сохраняет при любом t постоянное значение, равное в данном случае единице. Поэтому разрешающее уравнение обращается в

$$\sigma^2 - [x_1(2\pi)+x_2'(2\pi)]\,\sigma + 1 = 0. \qquad (12)$$

Значение корней этого уравнения определяет характер движения. Следует различать три случая:

$$|A| > 2, \qquad (13)$$

$$|A| < 2, \qquad (14)$$

$$|A| = 2, \qquad (15)$$

где

$$A = x_1(2\pi)+x_2'(2\pi).$$

В (13) движение неустойчиво. В (14)—устойчиво, в (15), вообще говоря,—неустойчиво.

b) Изменения тока в цепи L и C с периодически изменяющейся емкостью

Пусть L будет самоиндукция контура, 2π — период изменения емкости; в течение полупериода π емкость постоянна и равна c, в течение второй половины периода емкость равна нулю. Изменения емкости могут быть достигнуты периодическим коротким замыканием ее. Уравнение изменения заряда Q будет:

$$\left.\begin{aligned} &Q''+\frac{1}{LC}Q=0 \text{ при } 2n\pi < t < (2n+1)\pi,\ n=0,\ 1,\ 2\ldots \\ &Q''=0 \text{ при } (2n+1)\pi < t < (2n+2)\pi,\ n=0,\ 1,\ 2\ldots \end{aligned}\right| \qquad (1)$$

Это уравнение можно представить в виде

$$x''+\theta(t)\cdot x=0,$$

где периодическая функция времени $\theta(t)$ определяется уравнениями $\left(\frac{1}{LC}=k^2\right)$:

$$\theta(t)=k^2 \text{ при } 2n\pi < t < (2n+1)\pi, \qquad n=0,\ 1,\ 2\ldots$$

$$\theta(t)=0 \text{ при } (2n+1)\pi < t < (2n+2)\pi,\ n=0,\ 1,\ 2\ldots$$

Начнем с построения решений этого уравнения x_1, x_2 при начальных условиях:

$$x_1(0)=1 \qquad x_1'(0)=0$$

$$x_2(0)=1 \qquad x_2'(0)=1.$$

При $0<t<\pi$ имеем:

$$x_1=\cos kt.$$

Решения при $\pi<t<2\pi$ определяются вторым уравнением (1) и требованием непрерывности функции $x_1(t)$ и ее производной во всем промежутке $(0,\ 2\pi)$. Имеем:

$$x_1(t)=at+b,\ x_1(\pi)=\cos k\pi,\ x_1'(\pi)=-k\sin k\pi,$$

откуда находим (a) и (b). Получаем:

$$x_1(t)=\cos kt \text{ при } 0<t<\pi$$

$$=\cos k\pi+(\pi-t)\,k\sin k\pi \text{ при } \pi<t<2\pi.$$

Аналогично найдем:

$$x_2=\frac{\sin kt}{k} \quad \text{при } 0<t<\pi$$

$$=\frac{\sin k\pi}{k}+(t-\pi)\cos k\pi, \text{ при } \pi<t<2\pi.$$

Теперь составляем выражение:

$$A(k\pi)=x_1(2\pi)+x_2'(2\pi)=2\cos k\pi-k\pi\sin k\pi.$$

Значения параметра $k\pi=\lambda$, определяющие границы устойчивости и неустойчивости, находятся из уравнений:

$$\left.\begin{aligned} A_1(\lambda)=2\cos\lambda-\lambda\sin\lambda=+2 \\ A_2(\lambda)=2\cos\lambda-\lambda\sin\lambda=-2 \end{aligned}\right\}. \qquad (2)$$

Первое уравнение преобразуется к виду:

$$-\frac{\lambda}{2}\sin\frac{\lambda}{2}\cdot\cos\frac{\lambda}{2}=\sin^2\frac{\lambda}{2}.$$

Корнями этого уравнения служат, во-первых, корни уравнения:

$$\sin\frac{\lambda}{2}=0, \text{ т. е. } \lambda=2n\pi \quad (n=0,\ 1,\ 2\ldots),$$

во-вторых корни уравнения:

$$\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda}{2}=0. \qquad (3)$$

Решение уравнений (2) можно провести хотя бы графически. Нумеруя корни их в порядке возрастания, имеем:

$$\lambda_1=0;\ \ \lambda_2=1,72;\ \ \lambda_3=\pi;\ \ \lambda_4=4,06;\ \ \lambda_5=2\pi;\ \ \lambda_6=6,90;\ \ \lambda_7=3\pi;\ \ \lambda_8=9,82;$$

$$\lambda_9=4\pi \text{ и т. д.}$$

Можно проверить, что в промежутках

$$(\lambda_1,\ \lambda_2),\ (\lambda_3,\ \lambda_4),\ (\lambda_5,\ \lambda_6),\ (\lambda_7,\ \lambda_8)\ldots$$

имеем:

$$|A(\lambda)|\leqslant 2,$$

тогда как для значений λ в промежутках —

$$(\lambda_2,\ \lambda_3),\ (\lambda_4,\ \lambda_5),\ (\lambda_6,\ \lambda_7),\ (\lambda_8,\ \lambda_9) \text{ и т. д.}$$

$$|A(\lambda)|>2.$$

В первом случае движение системы устойчиво, во втором—неустойчиво. При достаточно большом n, λ_{2n} весьма мало отличается от $(n-1)\pi=\lambda_{2n-1}$, т. е. размеры устойчивых областей уменьшаются по мере увеличения параметра. Можно построением проверить, что:

$$A(\lambda)=2 \text{ при } \lambda=\lambda_1,\ \lambda_4,\ \lambda_5,\ \lambda_8,\ \lambda_9 \text{ и т. д.}$$

$$A(\lambda)=-2 \text{ при } \lambda=\lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_6,\ \lambda_7,\ \lambda_{10} \text{ и т. д.}$$

В первом случае корни разрешающего уравнения $\sigma_1=\sigma_2$ и наше дифференциальное уравнение имеет периодическое решение вида:

$$x(t+2\pi)=x(t).$$

Во втором случае $\sigma_1=\sigma_2=-1$ и уравнение (1) имеет решение типа

$$x(t+2\pi)=-x(t).$$

с) Асимптотические выражения для решений уравнений Матье

Укажем прием, аналогичный примененному Стреттом для определения асимптотических решений уравнений с периодическими коэффициентами (*153*). Общая теория этого вопроса указана в (*20*). Рассмотрим маятник, колеблющийся в поле тяжести, меняющемся в зависимости от времени по закону:

$$g=g_0\cdot(1+q\cos\omega t).$$

Ограничиваясь случаем малых колебаний, будем иметь при подходящем выборе единиц времени для угла отклонения y уравнение движения вида:

$$y''_t+(1+q\cos\bar{\omega}t)\,y=0. \tag{1}$$

Для исследования уравнения (1) вводим новое переменное:

$$x=\frac{\omega t}{2}=\frac{t}{\mu}, \tag{1a}$$

где

$$\mu=\frac{2}{\omega}.$$

Уравнение движения (1) преобразуется в такое:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\mu^2(1+q\cos 2x)\,y=0. \tag{2}$$

Более общее, нежели (1) уравнение:

$$\frac{d^2y}{d\tau^2}+g(\tau)\,y=0, \tag{1'}$$

подстановкой (1a) преобразуется к виду:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\mu^2 g(x)\,y=0. \tag{2'}$$

[ω — частота колебаний $g(\tau)$, $g(x)$—непрерывная периодическая функция (с периодом 2π)].

Найдем асимптотические выражения для решений уравнения (2) при $\mu\to\infty$. Воспользуемся методом Лиувилля (*20*).

Вводим новые переменные:

$$z=yg^{\frac{1}{4}},\ \ s=\int\limits_0^x g^{\frac{1}{2}}\,dx$$

[для частного случая уравнения (2) $g=1+q\cos 2x$].

Новое независимое переменное s монотонно растет вместе с x. В этих переменных уравнение (2) примет вид:

$$\frac{d^2z}{ds^2}-rz+\mu^2z=0,$$

где r—непрерывная функция s.

Рассматривая в этом уравнении rz как правую часть и написав по известной формуле решение, имеем:

$$z(s)=c\cdot\cos(\mu s+b)+\frac{1}{\mu}\int\limits_0^s r(\sigma)\,z(\sigma)\sin\mu(s-\sigma)\,d\sigma. \tag{A}$$

Здесь c и b — произвольные постоянные. Это соотношение представляет собой интегральное уравнение типа Вольтерра с ядром:

$$K(s,\ \sigma)=\frac{r(\sigma)\sin\mu(s-\sigma)}{\mu}.$$

Составляя для него ряд Неймана, имеем [обозначая для сокращения $c \cdot \cos(\mu s+b)$ через $v(s)$]:

$$z(s)=v(s)+\int_0^s v(\sigma_1)K(s,\sigma_1)\,d\sigma_1+\int_0^{\sigma_1} v(\sigma_1)\cdot K(s,\sigma_1)\cdot K(\sigma_1,\ \sigma_2)\ d\sigma_1 d\sigma_2+$$

$$+\ldots+\int_0^s\int_0^{\sigma_1}\ldots\int_0^{\sigma_{n-1}} v(\sigma_1)K(s,\sigma_1)\ldots K(\sigma_{n-1},\ \sigma_n)\,d\sigma_1\ldots d\sigma_n+\ldots$$

мы имеем:

$$\left|K(s,\ \sigma)\right|=\left|\frac{r\sin\mu(s-\sigma)}{\mu}\right|<\frac{R}{\mu},$$

где $R=\text{maximum}\ |r|$. Принимая это во внимание, мы найдем, что n-ый член ряда Неймана по абсолютной величине меньше, чем $c\left(\frac{R}{\mu}\right)^n\frac{s^n}{n!}$. Отсюда, суммируя, легко найти:

$$|z(s)-c\cdot\cos(\mu s+b)|<c\left[e^{\frac{RS}{\mu}}-1\right].$$

Мы видим, что для s, взятого в любом заданном интервале $(0,\ S)$, всегда можно найти столь большое μ, чтобы $z(s)$ как угодно мало отличалось от $c\cdot\cos(\mu s+b)$. Функция $c\cdot\cos(\mu s+b)$ представляет собой асимптотическое (при $\mu\to\infty$) выражение для решения $z(s)$ нашего дифференциального уравнения. Переходя к прежним переменным, имеем асимптотически:

$$y(x)=cg^{-\frac{1}{4}}\cdot\cos\left[\mu\int_0^x g^{\frac{1}{2}}dx+b\right]+O\left(\frac{1}{\mu}\right). \qquad (3)$$

Дифференцируя интегральное уравнение (A), легко найти, что асимптотическим выражением производной по времени

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{\mu}\,y'(x)$$

является следующее выражение:

$$\frac{y'(x)}{\mu}=-cg^{\frac{1}{4}}\sin\left[\mu\int_0^x g^{\frac{1}{2}}dx+b\right]+O\left(\frac{1}{\mu}\right). \qquad (3')$$

Для любого интервала $(0,\ x)$ значений x, т. е. для любого числа периодов функции $g(x)$, мы всегда можем найти столь большое μ (такую малую частоту колебаний поля), что в этом интервале эти асимптотические выражения как угодно точно аппроксимируют решение. Нельзя, однако, утверждать, что они аппроксимируют решение равномерно для всех x от 0 до ∞.

Воспользуемся полученным асимптотическим выражением (3) для выяснения асимптотического поведения характеристического показателя h в случае дифференциального уравнения (2).

Мы имеем на основании (3):

$$y_1(x,\mu)=y_2'(x,\mu)=\left[\frac{1+q}{1+q\cos 2x}\right]^{\frac{1}{4}}\cos\left[\mu\int_0^x(1+\cos 2x)^{\frac{1}{2}}dx\right]+O\left(\frac{1}{\mu}\right),$$

и в частности для $x=\pi$

$$y_1(\pi,\mu)=y_2'(\pi,\mu)=\cos\mu L+O\left(\frac{1}{\mu}\right),$$

где

$$L=\int_0^\pi(1+q\cos 2x)^{\frac{1}{2}}dx.$$

Вставляем эти выражения в формулу (II, 2):

$$\cos\pi h=\frac{1}{2}\left[y_1(\pi,\mu)+y_2'(\pi,\mu)\right]. \qquad (4)$$

Тогда это уравнение, определяющее h, принимает вид:

$$\cos\pi h=\cos\mu L+O\left(\frac{1}{\mu}\right).$$

Отсюда получаем такое асимптотическое выражение для характеристического показателя:

$$h=\frac{\mu L}{\pi}-n+O\left(\frac{1}{\mu}\right).$$

Здесь n — целая часть $\frac{\mu L}{\pi}$. Величина $O\left(\frac{1}{\mu}\right)$ может иметь в этом равенстве и комплексные значения (для нестабильных μ). Из соотношений (4), (5) легко вывести, что при безгранично увеличивающемся μ интервалы нестабильных значений μ безгранично сужаются, и оба ограничивающих их значения μ (которым соответствует решение с периодом π или 2π) имеют асимптотически значения:

$$\mu=\frac{n\pi}{L}+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

где n — целое число.

Для нестабильных решений имеем $h=ik$ или $h=1+ik$ и $|\cos\pi h|=\text{ch}\,\pi k$.

$$\text{ch}\,\pi k=\left|\cos\mu L+O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right|\leqslant 1+\left|O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right|,$$

т. е.

$$\text{ch}\,\pi k-1\leqslant\left|O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right|.$$

Отсюда заключаем, что $\lim\limits_{\mu\to\infty}k=0$.

d) Колебания маятника переменной длины

Обозначим через g — ускорение силы тяжести; $l=f(t)$ — закон изменения длины нити, φ — угол отклонения от вертикали.

Рассматривая малые колебания маятника, получим уравнение:

$$\varphi''\cdot f(t)+2f'(t)\cdot\varphi'+g\varphi=0. \tag{1}$$

Положим, что длина нити изменяется по закону:

$$l=l_0+\Delta l\cos\omega t; \tag{2}$$

подставив в (1), мы получим уравнение движения вида:

$$\varphi''+\varphi'\frac{-2\omega\cdot\Delta l\sin\omega t}{l_0+\Delta l\cos\omega t}+\frac{g}{l_0+\Delta l\cos\omega t}\varphi=0. \tag{3}$$

Приняв, что

$$\Delta l\ll l,$$

мы сможем, избавившись от φ', привести (3) к виду уравнения Матье.

2. Устойчивость призматических стержней под действием переменных продольных сил

1) Устойчивость призматических стержней, сжимаемых продольными силами, изучена весьма обстоятельно. Подробно изучена задача о поперечных колебаниях стержней под действием периодических сил, перпендикулярных к оси стержня и об условиях появления резонанса. Значительно менее подробно изучена задача о поперечных колебаниях стержня при действии продольных периодических сил и о неустойчивости движения в этом случае. Однако этот вопрос имеет большое практическое значение при расчете шатунов быстроходных поршневых машин, при проектировании сжатых стержней в сооружениях, подвергающихся динамической переменной нагрузке, и т. п. Рассмотрим простейший случай действия переменных продольных сил *(160)*. Возьмем (фиг. 6) стержень, закрепленный шарнирно по концам длиной l, площадью сечения F, жесткостью EI и плотностью γ. По оси стержня действует продольная сила:

$$P=P_0\cos\omega t, \tag{1}$$

где P_0 — наибольшее значение продольной силы, ω — круговая частота изменения продольных сил.

Рассмотрим поперечные колебания стержня при действии указанных сил и выясним вопрос, когда это движение делается неустойчивым. Если стержень был идеально прямым и находился в покое, то под действием сил $P=P_0\cos\omega t$ в нем будут возникать переменные напряжения сжатия и растяжения; если же какой-либо импульс искривит ось стержня, то начнутся поперечные колебания. Составим дифференциальное уравнение движения стержня. Выделим сечениями 1 и 2, нормальными к оси

стержня, элемент длины ds; в виду малости деформаций $ds=dx$. Дифференциальное уравнение изогнутой оси напишется так:

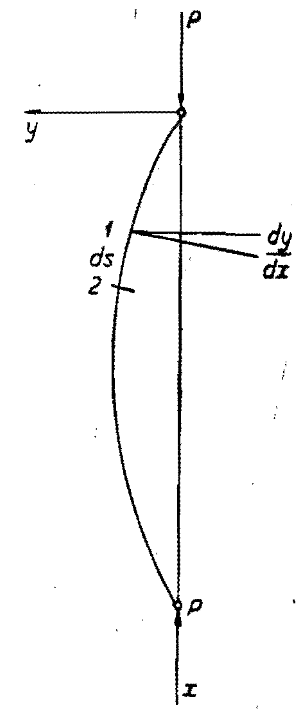
$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=-M, \tag{2}$$

откуда:

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}=q, \tag{3}$$

где q — сплошная нагрузка на единицу длины. Она состоит из силы инерции, равной

$$-\frac{\gamma F}{g}\frac{d^2y}{dt^2}$$ (g — ускорение силы тяжести),



Фиг. 6.

и из разницы перерезывающих сил по концам элемента, отнесенной к единице длины стержня.

Перерезывающая сила в сечении 1, —Q, равна:

$$Q_1=P\frac{dy}{dx},$$

а в сечении (2)

$$Q_2=P\left(\frac{dy}{dx}-\frac{d^2y}{dx^2}dx\right).$$

Разность перерезывающих сил на элемент

$$-P\frac{d^2y}{dx^2}dx$$

и на единицу длины

$$-P\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Теперь дифференциальное уравнение движения напишется так:

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}=-\frac{\gamma F}{g}\frac{d^2y}{dt^2}-P\frac{d^2y}{dx^2}. \tag{4}$$

Деля обе части уравнения (4) на EI и обозначая:

$$\frac{\gamma F}{gEI}=a^2 \text{ и } \frac{P_0}{EI}=K_0^2,$$

окончательно получаем:

$$\frac{d^4y}{dx^4}+a^2\frac{d^2y}{dt^2}+K_0^2\sin\omega t\,\frac{d^2y}{dx^2}=0. \tag{5}$$

2) Для интегрирования полученного уравнения полагаем:

$$y=X(x)\cdot T(t). \tag{6}$$

Подставляя (6) в (5), получаем:

$$T\frac{d^4X}{dx^2}+a^2X\frac{d^2T}{dt^2}+K_0^2\cos\omega t\cdot T\cdot\frac{d^2X}{dx^2}=0$$

или

$$\frac{1}{X}\left[\frac{d^4X}{dx^4}+K_0^2\cos\omega t\frac{d^2X}{ax^2}\right]+\frac{1}{T}a^2\frac{d^2T}{dt^2}=0. \tag{7}$$

Уравнение (7) распадается на два уравнения:

$$\frac{1}{X}\left[\frac{d^4y}{dx^4}+K_0^2\cos\omega t\frac{d^2X}{dx^2}\right]=\alpha+\beta K_0^2\cos\omega t \tag{8}$$

и

$$\frac{a^2}{T}\frac{d^2T}{dt^2}=-\alpha-\beta K_0^2\cos\omega t, \tag{9}$$

где α и β неизвестные пока постоянные расщепления уравнения (7). Займемся уравнением (8). При его интегрировании придется t рассматривать как постоянное. Ищем его частное решение в форме:

$$X=e^{qx}; \tag{10}$$

подставляя (10) в (8), получаем:

$$e^{qx}q^4+K_0^2\cos\omega t\, e^{qx}\cdot q^2=e^{qx}[\alpha+\beta K_0^2\cos\omega t],$$

или

$$q^4+K_0^2\cos\omega t\, q^2=\alpha+\beta K_0^2\cos\omega t.$$

Отсюда

$$q^2=-\frac{K_0^2\cos\omega t}{2}\pm\sqrt{\frac{K_0^4\cos^2\omega t}{4}+(\alpha+\beta K_0^2\cos\omega t)}=-\Omega_1\pm\Omega_2.$$

Называя

$$z_1^2=-\Omega_1+\Omega_2$$
$$z_2^2=-\Omega_1-\Omega_2,$$

получаем интеграл уравнения (8) в виде:

$$X=A_1e^{z_1x}+B_1e^{-z_1x}+C_1\cos z_2x+D_1\sin z_2x. \tag{11}$$

Из устройства опорных закреплений имеем условия на концах:

при $x=0$ и $x=l$

должно быть

$$X=0 \text{ и } \frac{d^2X}{dx^2}=0.$$

Эти четыре условия дают:

$$\left.\begin{aligned}
&A_1+B_1+C_1 &&=0\\
&A_1e^{z_1l}+B_1e^{-z_1l}+C_1\cos z_2l+D_1\sin z_2l &&=0\\
&z_1^2(A_1+B_1)-z_2^2C_1 &&=0\\
&z_1^2(A_1e^{z_1l}+B_1e^{-z_1l})-z_2^2(C_1\cos z_2l+D_1\sin z_2l) &&=0.
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Из этих уравнений следует:

$$A_1=B_1=C_1=0;\ D_1\sin z_2l=0 \tag{12a}$$

или

$$z_2l=\pi n;\ (n=1,\ 2,\ 3\ldots). \tag{12b}$$

Отсюда

$$\frac{K_0^4\cos^2\omega t}{4}+[\alpha+\beta K_0^2\cos\omega t]=\left[\frac{n^2\pi^2}{l^2}-\frac{K_0^2\cos\omega t}{2}\right]^2$$

или

$$\frac{K_0^4\cos^2\omega t}{4}+\alpha+\beta K_0^2\cos^2\omega t=\frac{n^4\pi^4}{l^4}-\frac{n^2\pi^2}{l^2}K_0^2\cos\omega t+\frac{K_0^4\cos^2\omega t}{4},$$

и

$$\alpha+\beta K_0^4\cos^2\omega t=\frac{n^4\pi^4}{l^4}-\frac{n^2\pi^2}{l^2}K_0^2\cos\omega t. \tag{13}$$

Чтобы это равенство было справедливо при всяком t, необходимо соблюдение условий:

$$\alpha=\frac{n^4\pi^4}{l^4} \text{ и } \beta=-\frac{n^2\pi^2}{l^2}. \tag{14}$$

Эти значения величин α и β следует подставить в уравнение (9). Каждому решению уравнения (8)

$$X_n=D_n\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{15}$$

будет соответствовать определенное решение T_n уравнения (9), и общий интеграл нашего уравнения (6) выразится суммой:

$$y=\sum_n X_nT_n. \tag{16}$$

Обратимся теперь к интегрированию уравнения (9). Оно принимает вид:

$$\frac{a^2}{T}\frac{d^2T}{dt^2}=-\frac{n^4\pi^4}{l^4}+\frac{n^2\pi^2}{l^2}K_0^2\cos\omega t \tag{17}$$

или

$$\frac{d^2T}{dt^2}+\frac{n^4\pi^4}{l^4a^2}\left[1-\frac{l^2K_0^2}{n^2\pi^2}\cos\omega t\right]T=0,$$

и окончательно

$$\frac{d^2T}{dt^2}+p_n^2(1-b_n^2\cos\omega t)T=0, \tag{18}$$

где

$p_n=\frac{n^2\pi^2}{l^2a}$ — частота собственных колебаний порядка n стержня и

$$b_n^2=\frac{l^2K_0^2}{n^2\pi^2}=\frac{l^2P_0}{n^2\pi^2EI}=\frac{P_0}{P_{n\,эйл}}$$

— отношение наибольшего значения продольной силы к Эйлеровой нагрузке порядка n для изучаемого стержня. Полученное уравнение является изучаемым в настоящей книге уравнением Матье.

3) Прежде нежели переходить к исследованию и решению уравнения (18), которое мы проведем методом Хилла, рассмотрим вопрос об устойчивости движения, определяемого уравнением (18). Для этого приведем его к виду раздела III, 1. Из (18) имеем:

$$\frac{d^2T}{dt^2}=(p_n^2-p_n^2 b_n^2\cos\omega t)\,T=0. \qquad (18_1)$$

Введем новую независимую переменную по формуле:

$$2x=\omega t.$$

Тогда

$$\frac{d^2T}{dt^2}=\frac{\omega^2}{4}\frac{d^2T}{dx^2}$$

и (18_1) перепишется в виде:

$$\frac{d^2T}{dx^2}+\left(\frac{4p_n^2}{\omega^2}-\frac{4p_n^2}{\omega^2}\,b_n^2\cos 2x\right)T=0. \qquad (18_2)$$

Выражение

$$\frac{4p_n^2}{\omega^2}\cdot b_n^2=\frac{4}{\omega^2}\cdot\frac{n^2\pi^2}{al^2}\cdot\frac{l^2P_0}{n^2\pi^2EI}=\frac{4}{\omega^2}\,\frac{P_0\sqrt{g}}{\sqrt{\gamma EIF}}=+2h^2 \qquad (19)$$

и $\frac{4p_n^2}{\omega^2}=\lambda$, тогда (18_2) примет обычный вид:

$$\frac{d^2T}{dx^2}+(\lambda-2h^2\cos 2x)\,T=0 \qquad (18_3)$$

или в форме Айнса

$$\frac{d^2T}{dx^2}+(a-2\theta\cos 2x)\,T=0. \qquad (18_4)$$

Пользуясь кривыми в плоскости (λ, h^2) или (a, θ), ограничивающими области устойчивости [см. раздел III, VIII или таблицу Айнса I, значений (a)], легко ответить на интересующий нас вопрос. Для данного значения $h^2(\theta)$, которое нетрудно рассчитать по выражению (19), движение будет устойчиво тогда, когда значение $\lambda(a)$ попадет в область устойчивых (стабильных) решений уравнения Матье. В том случае, когда λ попадет на границу между областями устойчивых и неустойчивых решений, мы имеем периодическое решение уравнения (18_4). Вообще же при данном $h^2(\theta)$ мы имеем некоторую область устойчивости, ограниченную двумя кривыми. Проведем через точку $h^2(\theta)$ на оси h^2 горизонтальную прямую; эта прямая пересечет граничные кривые (λ, h^2) в точках $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_i, \lambda_{i+1}\ldots$. Очевидно, что все λ, заключающиеся между $\lambda_1-\lambda_2$, $\lambda_3-\lambda_4$ и т. д., в области устойчивости дадут устойчивую область λ, иначе говоря—область частот. В самом деле:

$$\frac{\omega}{p_n}=\frac{2}{\sqrt{\lambda}},\ \text{устойчивая часть будет:}$$

$$2\left[\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}-\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\right].$$

При наличии указанных выше кривых, или таблиц Айнса, вопрос об определении характера движения решается весьма просто.

Обратимся теперь к методу Хилла в изложении Релея. В разделе III приведена сущность метода Хилла. Укажем теперь его применение к данной задаче, проведенное И. М. Беляевым. Хилл рассматривал уравнение:

$$\frac{d^2w}{dt^2}+(\theta+2\theta_1\cos 2t+2\theta_2\cos 4t+\cdots)\,w=0, \qquad (20)$$

где $\theta_1, \theta_2\ldots$ постоянные.

Общее решение Хилл искал в форме:

$$w=\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b_k e^{ict+2ikt}, \qquad (21)$$

где b_k — постоянные коэффициенты, $i=\sqrt{-1}$ и c — функция от $\theta_0, \theta_1, \ldots$ В дальнейшем изложении ограничиваемся случаем, когда из коэффициентов $\theta_0, \theta_1, \theta_2 \ldots$ неравны нулю лишь θ_0 и θ_1. Тогда основное уравнение можно переписать в виде:

$$\frac{d^2w}{dt^2}+(\theta_0+2\theta_1\cos 2t)\,w=0 \qquad (22)$$

или

$$\frac{d^2w}{dt^2}+[\theta_0+\theta_1(e^{2it}+e^{-2it})]\,w=0. \qquad (23)$$

Подставив в (23) вышенаписанное (21) выражение для w, получаем:

$$-\sum_k b_m(c+2m)^2\cdot e^{ict+2imt}+[\theta_0+\theta_1(e^{2it}+e^{-2it})\,w]\cdot\left[\sum b_m e^{ict+2imt}\right]=0. \qquad (24)$$

Отсюда получаем ряд уравнений, общий вид которых:

$$b_m[(c+2m)^2-\theta_0]-\theta_1[b_{m-1}+b_{m+1}]=0. \qquad (25)$$

Обозначив по Хиллу

$$[m]=[(c+2m)^2-\theta_0],$$

развернем эту систему:

. . . .

$$\left.\begin{aligned}
-\theta_1 b_{-3}+b_{-2}[-2]-\theta_1 b_{-1}&=0\\
-\theta_1\ b_{-2}+[-1]-\theta_1 b_0&=0\\
-\theta_1\ b_{-1}+b_0[0]-\theta_1 b_1&=0\\
-\theta_1 b_0+b_1[1]-\theta_1 b_2&=0\\
-\theta_1 b_1+b_2[2]-\theta_1 b_3&=0
\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

. . . .

. . . .

Исключая отсюда b, получаем определитель:

$$D(c)=0. \tag{27}$$

Так как уравнения (25) не меняются при замене c на $c+2s$, где s — целое число, и при замене c на $-c$, по Хиллу, все корни уравнения заключаются в выражении:

$$\pm c_0+2r,$$

где r — целое число, положительное или отрицательное. Отсюда можно заключить, что $D(c)$ имеет вид:

$$D(c)=A[\cos(\pi c)-\cos(\pi c_0)], \tag{28}$$

где A постоянное.

Подставляя сюда $c=0$, получаем:

$$D(0)=A[1-\cos(\pi c_0)].$$

Здесь c_0 можно заменить на c (благодаря общему виду выражения для c):

$$D(0)=A[1-\cos(\pi c)]. \tag{29}$$

Если знать величину A и вычислить $D(0)$, то из (29) можно найти $\cos(\pi c)$.

Для нахождения A рассматриваем частный случай — $\theta_1=0$; тогда $c=\sqrt{\theta_0}$ и $D(0)$ переходит в $D'(0)$ (остается лишь произведение диагональных элементов)

$$D'(0)=A[1-\cos(\pi\sqrt{\theta_0})].$$

Отсюда

$$\frac{1-\cos(\pi c)}{1-\cos(\pi\sqrt{\theta_0})}=\frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi c\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\theta_0}\right)}=\frac{D(0)}{D'(0)}.$$

Отношение $\frac{D(0)}{D'(0)}$ Хилл обозначает $\square(0)$, где $\square(0)$ имеет вид

$$\square(0)=\begin{vmatrix}
+1 & -\frac{\theta_1}{4^2-\theta_0} & 0 & 0 & 0 & \dots\\
-\frac{\theta_1}{2^2-\theta_0} & +1 & -\frac{\theta_1}{2^2-\theta_0} & 0 & 0 & \dots\\
0 & -\frac{\theta_1}{0^2-\theta_0} & +1 & -\frac{\theta_1}{0^2-\theta_0} & 0 & \dots\\
0 & 0 & -\frac{\theta_1}{2^2-\theta_0} & +1 & -\frac{\theta_1}{2^2-\theta_0} & \dots\\
0 & 0 & 0 & -\frac{\theta_1}{4^2-\theta^0} & +1 & \dots
\end{vmatrix}$$

$$1-\cos(\pi c)=\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\theta}\right)\square(0)=\nabla(0). \tag{30}$$

Отсюда

$$\cos(\pi c)=1-\nabla(0). \tag{31}$$

Таким образом вопрос об устойчивости и неустойчивости движения сводится в каждом частном случае к вычислению $\nabla\cdot(0)$. При

$$-1\leqslant 1-\nabla(0)\leqslant 1 \tag{32}$$

c — вещественно и движение устойчиво; при нарушении этого условия c оказывается мнимым и движение делается неустойчивым.

Релей указал, что дла акустики случай мнимого c представляет большой интерес.

Пусть c будет комплексным:

$$c=\alpha+i\beta, \tag{33}$$

где α и β вещественны.

Тогда

$$\cos(\pi c)=\cos\pi\alpha\cdot\cos i\pi\beta-\sin\pi\alpha\cdot\sin i\pi\beta;$$

так как $\cos(\pi c)$ величина по существу всегда вещественная, то должно быть или $\beta=0$, или $\alpha=s$, где s — целое число. В первом случае c вещественно, во втором

$$\cos(\pi c)=\pm\cos i\pi\beta=1-\nabla(0). \tag{34}$$

Это уравнение дает в каждом частном случае лишь одно вещественное значение β.

Если $1-\nabla(0)$ положительно, то

$$c=\pm i\beta+2s \tag{35}$$

если же $1-\nabla(0)$ отрицательно, то

$$\cos(\pi c)=-\cos i\pi\beta,$$

и

$$c=i\beta+2s+1. \tag{36}$$

В последнем случае общее выражение для w получает вид:

$$w=e^{\beta t}\sum b_s e^{it(1+2s)}+e^{-\beta t}\sum b_s' e^{it(1+2s)}. \tag{37}$$

Важно установить зависимость между коэффициентами θ_0 и θ_1, соответствующую как раз переходу от мнимых к вещественным значениям c.

Из равенства (28) легко получаем:

$$\frac{1+\cos(\pi c)}{1+\cos(\pi\sqrt{\theta_0})}=\frac{D(1)}{D'(1)}. \tag{38}$$

Релей указывал на основании (36), что величина c, разграничивающая мнимые и вещественные значения, это $c=1$; подставив это значение (38), получаем искомое условие:

$$D(1)=0. \tag{39}$$

Если этот бесконечный определитель развернуть, то получим:

$$D(1)=\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}=0, \tag{40}$$

где

$$a_1=\frac{\theta_0-1}{\theta_1}$$

$$a_2=\frac{\theta_0-9}{\theta_1}$$

$$a_3=\frac{\theta_0-25}{\theta_1}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots$$

Развертывая этот определитель и приравнивая его нулю, получим уравнение для нахождения критического соотношения между θ_0 и θ_1.

Решение придется получить методом последовательных приближений. Первое приближение получаем, удержав лишь четыре центральных элемента определителя:

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & a_1 \end{vmatrix}=0$$

или

$$a_1^2-1=0$$

и

$$a_1=\pm 1. \tag{41}$$

Второе приближение дает уравнение:

$$a_2^2\left\{\left(a_1-\frac{1}{a_2}\right)^2-1\right\}=0$$

или

$$a_1-\frac{1}{a_2}=\pm 1. \tag{42}$$

Третье приближение тем же путем дает:

$$\left[a_1-\cfrac{1}{a_2-\cfrac{1}{a_3}}\right]=\pm 1 \tag{43}$$

и т. д.

Таким образом „критическое“ уравнение (40) принимает вид:

$$a_1-\cfrac{1}{a_2-\cfrac{1}{a_3-\cfrac{1}{a_4\ldots}}}=\pm 1. \tag{44}$$

В левой части стоит непрерывная дробь; последовательные приближения эквивалентны уравнениям:

$$N_1=\pm D_1;\qquad N_2=\pm D_2;\qquad N_3=\pm D_3, \tag{45}$$

где

$$\frac{N_1}{D_1};\quad \frac{N_2}{D_2};\quad \frac{N_3}{D_3}$$

являются последовательными непрерывными дробями. Это замечание облегчает вычисление последовательных приближений.

4) Применяя описанный метод к уравнению:

$$\frac{d^2T}{dt^2}+p_n^2(1-b_n^2\cos\omega t)\,T=0, \tag{18}$$

мы должны провести некоторые преобразования. Подставим:

$$\omega t=2t_1,$$

тогда

$$\frac{d^2T}{dt_1^2}=\frac{d^2T}{dt^2}\cdot\frac{4}{\omega^2}.$$

Уравнение (18) принимает вид:

$$\frac{d^2T}{dt_1^2}\cdot\frac{\omega^2}{4}+p_n^2(1-b_n^2\cos 2t_1)\,T=0$$

или

$$\frac{d^2T}{dt_1^2}+\frac{4p_n^2}{\omega^2}(1-b_n^2\cos 2t_1)\,T=0. \tag{46}$$

Полагая

$$\theta_0=\frac{4p_n^2}{\omega^2}\quad\text{и}\quad 2\theta_1=-\frac{4p_n^2}{\omega^2}\,b_n^2,$$

приводим наше уравнение к форме уравнения, исследованного Хиллом:

$$\frac{d^2T}{dt_1^2}+T(\theta_0+2\theta_1\cos 2t_1)=0; \tag{47}$$

здесь

$$\theta=\frac{4p_n^2}{\omega^2};\quad \theta_1=-\frac{2p_n^2}{\omega^2}\cdot b_n^2=-\theta_0\ \frac{b_n^2}{2};$$

$$b_n^2=\frac{P_0}{P_{n\ \text{эйл.}}};\quad p_n=\frac{n^2\pi^2}{l^2a}.$$

Величины $a_1, a_2, a_3\ldots$, которые необходимы ниже, выразятся так:

$$a_1=\frac{\theta_0-1}{\theta_1}=-\frac{2(\theta_0-1)}{\theta_0 b_n^2};\quad a_2=-\frac{2(\theta_0-9)}{b_n^2\theta_0};\quad a_3=-\frac{2(\theta_0-25)}{b_n^2\theta_0}\ \text{и т. д.}$$

Уравнение, устанавливающее связь между b_n^2 и $\theta_0=\frac{4p_n^2}{\omega^2}$, написано выше (44):

$$a_1-\cfrac{1}{a_2-\cfrac{1}{a_3}\ldots}=\pm 1. \tag{44}$$

Давая b_n^2 определенные значения, мы можем для каждого из них вычислить с известным приближением отношение $\theta_0=\frac{4p_n}{\omega^2}$.

Так как правая часть (44) имеет два знака, то она для каждого значения b_n^2 распадается на два уравнения, дающих по два корня для каждого b_n^2:

Лишь при $b_n^2=0$ оба уравнения совпадают, и уже первое приближение дает точное значение для искомого критического соотношения $\frac{p_n^2}{\omega^2}$.

В самом деле, первое приближение напишется по формуле (41):

$$a_1=\pm 1 \tag{41}$$

или

$$-\frac{2\theta(_0-1)}{\theta_0 b_n^2}=\pm 1.$$

Далее:

$$2(\theta_0-1)=\mp {}_0\theta b_n^2.$$

При $b_n^2\to 0$ мы получаем:

$$\theta_0=\frac{4p_n^2}{\omega^2}=1, \tag{48}$$

т. е., при очень малых значениях отношения

$$\frac{P_0}{P_{n\ \text{эйл.}}}$$

резонанс наступает, когда

$$\omega=2p_n, \tag{49}$$

т. е когда частота изменения силы P вдвое превышает одну из частот собственных колебаний (поперечных) стержня.

Отсылая за дальнейшими деталями к соответствующей литературе (*159, 160*), заметим, что для значений $\frac{\omega}{p_n}$, лежащих между прямыми

$$2\left[1\pm\frac{1}{4}\frac{P_0}{P_{n\ \text{эйл.}}}\right] \tag{50}$$

движение неустойчиво:

$$\frac{\omega}{p_n}=2\left[1\pm\frac{1}{4}\frac{P_0}{P_{n\ \text{эйл.}}}\right].$$

5) Выше мы рассматривали вибрации стержня при продольных силах, имеющих форму:

$$P=P_0\cos\omega t,$$

т. е. то сжимающие, то растягивающие стержень. В некоторых конструкциях, например, элементы мостовых ферм, периодически меняется не вся продольная сила, действующая на стержень, а часть ее.

Исследуем в этом случае устойчивость стержня. Пусть сила меняется по закону:

$$P=Q_0+P_0\cos\omega t=Q_0\left(1+\frac{P_0}{Q_0}\cos\omega t\right)=Q_0(1+\vartheta\cos\omega t), \tag{51}$$

где Q_0— постоянная сила, сжимающая стержень; тогда основное уравнение (5) напишется в виде:

$$\frac{d^4y}{dx^4}+a^2\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{Q_0}{EI}(1+\vartheta\cos\omega t)\frac{d^2y}{dx^2}=0. \tag{52}$$

Применим общий метод, изложенный выше. Полагаем:

$$y=\sum X_nT_n.$$

Уравнение (52) распадается на два:

$$\frac{1}{X_n}\left[\frac{d^4y}{dx^4}+\frac{Q_0}{EI}(1+\vartheta\cos\omega t)\frac{d^2X_n}{dx^2}\right]=\alpha+\beta(1+\vartheta\cos\omega t)\frac{Q_0}{EI} \tag{53}$$

и

$$\frac{a^2}{T_n}\frac{d^2T}{dt^2}=-\alpha-\beta(1+\vartheta\cos\omega t)\frac{Q_0}{EI}. \tag{54}$$

Путем изложенных рассуждений опять находим, что:

$$\alpha=\frac{n^4\pi^4}{l^4},\quad \beta=-\frac{n^2\pi^2}{l^2},\quad X_n=D_n\sin\frac{n\pi X}{l}.$$

Для определения T_n находим уравнение:

$$\frac{d^2T_n}{dt^2}+\frac{n^4\pi^4}{l^4a^2}\left[1-\frac{Q_0l^2}{n^2\pi^2EI}\,(1+\vartheta\cos\omega t)\right]T_n=0. \tag{55}$$

Называя

$$p_n^2=\frac{n^4\pi^4}{l^4a^2},\qquad q_n^2=\frac{Q_0}{P_{n\ \text{эйл.}}}=\frac{Q_0l^2}{n^2\pi^2EI}\ \text{и}\ b_n^2=\frac{P_0}{P_{n\ \text{эйл.}}},$$

получаем:

$$\frac{d^2T_n}{dt^2}+p_n^2\left[(1-q_n^2)-b_n^2\cos\omega t\right]T_n=0. \tag{56}$$

Полученное уравнение легко привести опять к типу уравнения Хилла

$$\frac{d^2T_n}{dt^2}+p_n^2(1-q_n^2)\left[1-\frac{b_n^2}{1-q_n^2}\cos\omega t\right]T_n=0$$

или

$$\frac{d^2T_n}{dt^2}+p_n^2\left(1-\frac{Q_0}{P_{n\ \text{эйл.}}}\right)\left[1-\frac{P_0}{P_n-Q_0}\cos\omega t\right]T_n=0. \tag{57}$$

Область неустойчивости ограничена прямыми:

$$\frac{\omega}{P_n}=2\sqrt{1-\frac{Q_0}{P_n}}\left[1\pm\frac{1}{4}\,\frac{P_0}{P_n-Q_0}\right]. \tag{58}$$

3. Скин-эффект в эллиптическом цилиндре

При прохождении переменного тока в проводниках плотность тока распределяется по его поперечному сечению неравномерно. Плотность тока увеличивается в направлении от центральной части сечения к поверхности провода. Это явление получило название поверхностного эффекта или скин-эффекта (*skin* — означает кожа или поверхностный слой). При токах высокой частоты неравномерность распределения тока так велика, что части проводника, более близкие к его оси, оказываются практически лишенными тока; ток проходит через слой, толщина которого составляет малую долю поперечных размеров провода. Очевидно, что уменьшение активной части сечения проводника эквивалентно увеличению его омического сопротивления. Причина этого явления заключается в индукционном действии переменных токов (см. *161*). Заметим также, что, вследствие ослабления плотности тока в центральных частях сечения, магнитный поток внутри провода уменьшается; при высоких частотах поток внутри провода можно считать равным нулю. Поэтому

коэффициент самоиндукции провода при переменном токе меньше, чем при постоянном. Аналогичное явление имеет место, когда проводник находится в переменном магнитном потоке; возникающие в толще металла вихревые токи создают магнитное поле, которое, действуя противоположно внешнему полю, ослабляет его и вызывает неравномерное распределение потока по магнитопроводу. Мы получаем явление магнитного скин-эффекта.

Математически задачи электрического и магнитного скин-эффекта совершенно идентичны. В случае електрического скин-эффекта нас будет интересовать величина плотности тока, коэффициент увеличения сопротивления и коэффициент уменьшения самоиндукции. В магнитном случае нужно определить индукцию по сечению и потери на Джоулево тепло. Мы рассмотрим очень длинный цилиндрический проводник эллиптического сечения, находящийся в переменном электрическом (магнитном) поле. Мы будем рассматривать квазистационарные поля; это означает, что размеры рассматриваемых тел малы по сравнению с длиной волны поля. Мы не должны при этом учитывать явление запаздывания, заключающееся в том, что действие, проявляющееся в момент t в некоторой точке пространства, возникло в момент $t-\frac{r}{c_0}$ в точке, отстоящей от первой на расстоянии r, при чем $c_0=3\cdot10^{10}\,\frac{\text{см}}{\text{сек}}$. В подавляющем числе практически интересных случаев скин-эффекта сказанное выше оправдывается.

а) Вывод основных уравнений

Исходим из уравнений Максвелла и полагаем, что материал проводника однороден и величины: σ (проводимость), ε (диэлектрический коэффициент) и μ (магнитная проницаемость) — постоянны. Кроме того, пренебрегаем токами смещения. Обозначив через E напряженность электрического поля и через H — напряженность магнитного поля, запишем уравнения Максвелла в виде:

$$\operatorname{rot}H=\sigma E;\qquad \operatorname{rot}E=-\mu_0\mu\frac{\partial H}{\partial t}, \tag{a}$$

где μ_0 — проницаемость вакуума, равная $4\pi\cdot10^{-9}\,\frac{\text{генри}}{\text{см}}$. Ниже применяются практические единицы. Плотность тока равна $i=\sigma E$. Образовав вихрь (ротор) второго из уравнений (a), получим:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}E=-\mu_0\mu\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot}H)=-\mu_0\mu\sigma\frac{\partial E}{\partial t}; \tag{b}$$

известно, что

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}E=\operatorname{grad}\operatorname{div}E-\Delta E, \tag{c}$$

при чем, если внутри проводника нет объемных зарядов, то

$$\operatorname{div}E=0. \tag{d}$$

Поэтому дифференциальное уравнение электрического поля может быть записано в форме:

$$\Delta E=\mu_0\mu\sigma\frac{\partial H}{\partial t}. \qquad (e)$$

Аналогично для магнитного поля получаем:

$$\Delta H=\mu_0\mu\frac{\partial H}{\partial t}. \qquad (f)$$

Как видим, уравнения (e) и (f) идентичны. Изменения поля во времени полагаем гармоничными, что выражается множителем

$$e^{j\omega t},\ j=\sqrt{-1}$$

(ω — круговая частота).[1] Вводя этот множитель в уравнение (e) и (f), мы получим уравнение:

$$\Delta\psi=j\omega\mu_0\mu\sigma\psi, \qquad (g)$$

где ψ равно или E или H. Ось цилиндра направим вдоль оси z; полагаем $\frac{\partial}{\partial z}=0$, тогда ψ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=j\omega\mu_0\mu\sigma\,\psi. \qquad (k)$$

Дальнейшая задача заключается в решении уравнения (k) при определенных, указанных ниже граничных условиях. Прежде чем приступить к решению задачи, мы дополним выражения разделов I, 1 и I, $1d$ выражением ротора в ортогональной системе координат и уравнениями Максвелла в эллиптическо системе координат. Ротор запишется в виде:

$$\operatorname{rot} A=i_1\frac{1}{\sqrt{g_{22}\cdot g_{33}}}\left[\frac{\partial}{\partial\xi_2}(A_3\sqrt{g_{33}})-\frac{\partial}{\partial\xi_3}(A_2\sqrt{g_{22}})\right]+$$
$$+i_2\frac{1}{\sqrt{g_{33}\cdot g_{11}}}\left[\frac{\partial}{\partial\xi_3}(A_1\sqrt{g_{11}})-\frac{\partial}{\partial\xi_1}(A_3\sqrt{g_{33}})\right]+$$
$$+i_3\frac{1}{\sqrt{g_{11}\cdot g_{22}}}\left[\frac{\partial}{\partial\xi_1}(A_2\sqrt{g_{22}})-\frac{\partial}{\partial\xi_2}(A_1\sqrt{g_{11}})\right].$$

Уравнения Максвелла в эллиптической системе координат запишутся в виде (пренебрегая токами смещения):

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{\delta^2}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(\delta H_\eta)-\frac{\partial}{\partial\eta}(\delta H_\xi)\right]=\sigma E_z && 1\\ &\frac{1}{\delta}\frac{\partial H_z}{\partial\eta}-\frac{\partial H_\eta}{\partial z}=\sigma E_\xi && 2\\ &\frac{\partial H_\xi}{\partial z}-\frac{1}{\delta}\frac{\partial H_z}{\partial\xi}=\sigma E_\eta && 3\end{aligned}\right\} \qquad (m$$

[1] В электротехнике мнимая единица обозначается через j, в отличие от тока, который обозначают буквой i. *Прим. ред.*

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{\delta^2}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(\delta E_\eta)-\frac{\partial}{\partial\eta}(\delta E_\xi)\right]=-\mu_0\mu\frac{\partial H_z}{\partial t} && 1\\ &\frac{1}{\delta}\frac{\partial E_z}{\partial\eta}-\frac{\partial E_\eta}{\partial z}=-\mu_0\mu\frac{\partial H_\xi}{\partial t} && 2\\ &\frac{\partial E_\xi}{\partial z}-\frac{1}{\delta}\frac{\partial E_z}{\partial\xi}=-\mu_0\mu\frac{\partial H_\eta}{\partial t} && 3\end{aligned}\right\} \qquad (n)$$

где

$$\delta=c\sqrt{\operatorname{ch}^2\xi-\cos^2\eta}.$$

Заметим, что осуществление однородного электрического и магнитного полей может быть проведено так: в случае электрического поля к концам проводника подсоединены пластины, к которым подведено напряжение; в случае магнитного поля проводник помещен в длинной намагничивающей катушке с числом витков на единицу длины w_0 и обтекаемую током I.

b) Преобразование уравнения (k) и граничные условия

Уравнение (k) мы напишем в форме:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+k^2\psi=0;\quad k^2=-j\omega\mu_0\mu\sigma. \qquad (1)$$

Прежде чем преобразовать это уравнение, дополним несколько выводы раздела I, $1d$.

Пусть фокусы сечения цилиндра (эллипс) будут $\pm c, 0$; введем новые вещественные переменные ξ, η, определяемые комплексным уравнением:

$$x+jy=c\cdot\operatorname{ch}(\xi+j\eta) \qquad (2)$$

так что:

$$x=c\cdot\operatorname{ch}\xi\cdot\cos\eta;\quad y=c\cdot\operatorname{sh}\xi\cdot\sin\eta. \qquad (3)$$

Когда ξ и η меняются в промежутках:

$$\xi\geqslant 0,\qquad -\pi\leqslant\eta\leqslant\pi, \qquad (4)$$

вся плоскость $\xi\eta$ покроется семейством конфокальных эллипсов и гипербол:

$$\frac{x^2}{(c\cdot\operatorname{ch}\xi)^2}+\frac{y^2}{(c\cdot\operatorname{sh}\xi)^2}=1;\qquad \frac{x^2}{(c\cdot\cos\eta)^2}-\frac{y^2}{(c\cdot\sin\eta)^2}=1. \qquad (5)$$

Кривые $\xi=\mathrm{const}$ и $\eta=\mathrm{const}$ взаимно ортогональны и образуют изотермическую сеть. Контур сечения эллиптического цилиндра принадлежит к этой сети. Контур получается при

$$\xi=\xi_0. \qquad (6)$$

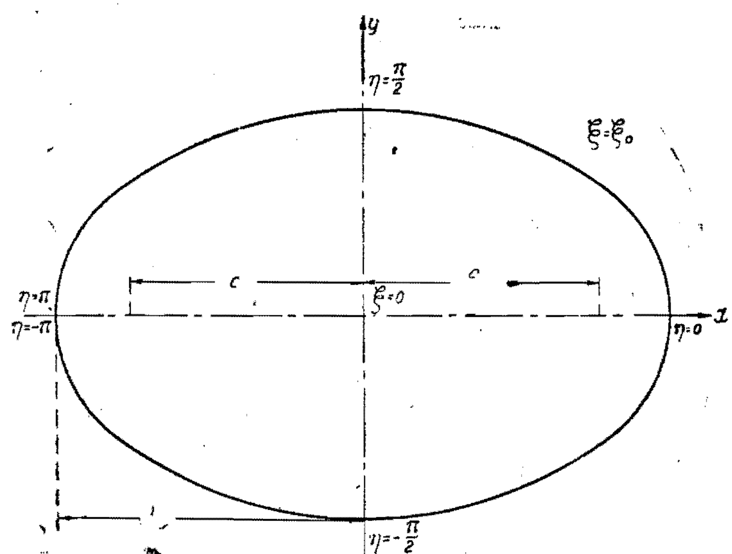
Значению $\xi=0$ соответствует фокальное расстояние $(-c,+c)$. В предельном случае ($\xi\to\infty$ при одновременно $c\to 0$) и при условии, что

$$\frac{1}{2}ce^{\xi}\to r \tag{7}$$

остается конечным, мы получим полярную систему координат:

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi.$$

Таким образом, при больших значениях ξ изотермическая сеть приближается к полярной сети концентрических окружностей



Фиг. 7.

и лучей, выходящих из начала координат. Условие (7) легко обосновать. Обозначим расстояние от начала координат до произвольной точки (ξ,η) через r. Тогда:

$$r=c\sqrt{\mathrm{ch}^2\xi-\cos^2\eta}=\frac{c}{\sqrt{2}}\sqrt{e^{2\xi}+2\cos 2\eta+e^{-2\xi}}. \tag{8}$$

При больших ξ:

$$\left.\begin{aligned}\lim_{\xi\to\infty}(r-c\cdot\mathrm{ch}\,\xi)&=\lim_{\xi\to\infty}\left(r-\frac{1}{2}ce^{\xi}\right)=0.\\ \lim_{\xi\to\infty}(r-c\cdot\mathrm{sh}\,\xi)&=\lim_{\xi\to\infty}\left(r-\frac{1}{2}ce^{\xi}\right)=0.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

При помощи (3) уравнение (1) преобразуется в:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}=-\psi 2h^2[\mathrm{ch}2\xi-\cos 2\eta], \tag{10}$$

где

$$2h^2=k^2\frac{c^2}{2}. \tag{10$_1$}$$

Решение уравнения (10) ищем в виде:

$$\psi=F(\xi)\cdot H(\eta), \tag{11}$$

где множители будут соответственно функциями только ξ и только η. После подстановки (11) в (10) мы получим для H и F следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial\eta^2}+(\lambda-2h^2\cos 2\eta)H=0 \tag{12}$$

и

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\xi^2}+(-\lambda+2h^2\,\mathrm{ch}\,2\xi)F=0. \tag{13}$$

Легко заметить, что уравнение (12) переходит в (13) при замене в нем η на $i\xi$. Уравнения (12), (13) известны под названием уравнений Матье и при определенных обстоятельствах, имеющих место в данной задаче, частные их решения называются функциями Матье. В задаче о скин-эффекте, так же как и в некоторых других физических задачах, которые приводят к уравнению Матье, постоянная λ не дается a priori; в главе III рассмотрен вопрос об ее определении. Из физических соображений очевидно, что $\psi(\xi,\eta)$ является однозначной функцией точки и, следовательно, остается без изменений при увеличении η на 2π. Условия

$$H(\eta+2\pi)=H(\eta) \tag{14}$$

достаточно для определения совокупности значений λ при известном h^2. Граничным условием мы выберем то обстоятельство, что на контуре сечения плотность тока (или напряженность поля) принимает постоянное значение при

$$\xi=\xi_0,\quad \psi=\mathrm{const}=K. \tag{15}$$

Указанная выше связь между уравнениями (12) и (13) освобождает от необходимости отдельно исследовать эти два уравнения. В самом деле, если будет построено общее решение $H(\eta)$ уравнения (12), то, заменив η на $i\xi$, мы найдем общее решение (13):

$$F(\xi)=H(i\xi) \tag{16}$$

и, следовательно, будет найдено общее решение вида (11).

c) Построение функций Матье

При малых значениях h^2 в разделе III, 2b, 2c даны ряды, полученные Матье для своих функций. Приведем метод построения функций Матье, отличный от рассмотренного выше. Так как ниже нам будут нужны только четные функции аргумента $2n\eta$, то приведем построение для функции $ce_0(h^2,\eta)$.

Уиттекером даны интегральные уравнения для функций Матье. В частности, для четных функций справедливо уравнение (*151*).

$$ce_n(h^2, \eta) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} e^{\nu \cos\eta \cdot \cos\theta} \cdot ce_n(h^2, \theta)\, d\theta; \qquad \nu = 2jh. \tag{I}$$

Из раздела III, 2а, 2с очевидно, что:

$$ce_0(h^2, \eta) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} A_{0,2m} \cos 2m\eta. \tag{II}$$

Подставив это разложение в (I) и положив $\eta = \frac{\pi}{2}$, получим:

$$ce_0\left(h^2, \frac{\pi}{2}\right) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} ce_0(h^2, \theta)\, d\theta = 2\pi\lambda, \tag{III}$$

откуда

$$\lambda = \frac{1}{2\pi} ce_0\left(h^2, \frac{\pi}{2}\right). \tag{IV}$$

Тогда (I) запишется так:

$$ce_0(h^2, \eta) = \frac{1}{2\pi} ce_0\left(h^2, \frac{\pi}{2}\right) \int_{-\pi}^{\pi} e^{\nu \cos\eta \cdot \cos\theta} \cdot ce_0(h^2, \theta)\, d\theta, \tag{V}$$

но

$$e^{\nu \cos\eta \cdot \cos\theta} = J_0(j\nu\cos\theta) - 2\sum_{n=1}^{\infty} J_n(jk\cos\theta)\cos n\eta. \tag{VI}$$

Подставив это выражение в (V) и сравнивая коэффициенты при $\cos 2m\eta$, находим:

$$A_{0,2m} = (-1)^m \frac{ce_0\left(h^2, \frac{\pi}{2}\right)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} J_{2m}(j\nu\cos\theta) \cdot ce_0(h^2, \theta)\, d\theta. \tag{VII}$$

Если воспользоваться теперь известным равенством

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2m}\theta \cdot \cos 2n\theta\, d\theta = \frac{\pi \cdot (2m)!}{2^{2m-1}(m+n)!\,(m-n)!} \tag{VIII}$$

и разложением

$$J_{2m}(jx) = (-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{k!\,(2m+k)!}, \tag{IX}$$

получим из (VII)

$$A_{0,2m} = \frac{\nu^{2m}}{2^{4m-1}\, m!^2} - \frac{m(3m+4)\,\nu^{2m+4}}{2^{4m+7}\,(m+1)!^2} + \dots \tag{X}$$

Аналогично можно построить функции высшего порядка.

Укажем также на следующие соотношения, легко получаемые из формул (1), (2), (3), (4) раздела III, 2а. Именно:

$$\int_{-\pi}^{\pi} ce_{2n+1}(h^2, \eta)\, d\eta = 0, \tag{XI}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} se_n(h^2, \eta)\, d\eta = 0, \tag{XII}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} ce_{2n}^{(p)}(h^2, \eta)\, d\eta = 0, \qquad p > 0 \tag{XIII}$$

где p означает p-кратное дифференцирование по η. Решения уравнения (13) мы обозначим символами:

$$Ce_n(h^2, \xi) \quad \text{и} \quad Se_n(h^2, \xi).$$

При равных индексах (n) этим функциям соответствует то же значение $\lambda = f(h^2)$, что и функциям $ce_n(h^2, \eta)$ и $se_n(h^2, \eta)$.

d) Решение граничной задачи

Согласно сказанному выше, мы ищем решение уравнения (10) в виде:

$$\psi = \sum_0^{\infty} A_n Ce_n(h^2, \xi) \cdot ce_n(h^2, \eta) + \sum_0^{\infty} B_n Se_n(h^2, \xi) \cdot se_n(h^2, \eta). \tag{17}$$

Для определения постоянных A_n и B_n мы воспользуемся условием (15), применение которого дает:

$$\psi|_{\xi=\xi_0} = K = \sum_0^{\infty} A_n Ce_n(h^2, \xi_0) \cdot ce_n(h^2, \eta) + \sum_0^{\infty} B_n Se_n(h^2, \xi_0) \cdot se_n(h^2, \eta). \tag{18}$$

Умножим обе части (18) на $se_n(h^2, \eta)$ и проинтегрируем по η от $-\pi$ до $+\pi$. Тогда из условия (XII) и того, что:

$$\int_{-\pi}^{\pi} [se_n(h^2, \eta)]^2\, d\eta = \text{const}, \tag{19}$$

получим все $B_n = 0$. Аналогично (19) имеем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} [ce_n(h^2, \eta)]^2\, d\eta = \text{const}. \tag{19$_1$}$$

Умножив (18) на $ce_n(h^2, \eta)$ и, интегрируя от $-\pi$ до $+\pi$, при условии (XI), получим, что все A_n с нечетными индексами равны нулю. Остаются только члены с четными индексами, которые равны:

$$A_{2n} = K\frac{\int_{-\pi}^{\pi} ce_{2n}(h^2, \eta)\,d\eta}{Ce_{2n}(h^2, \xi_0)\cdot\int_{-\pi}^{\pi}[ce_{2n}(h^2, \eta)]^2\,d\eta}; \qquad n=0, 1, 2, 3\ldots \tag{20}$$

Окончательное решение задачи об определении ψ мы получим в форме:

$$\psi = K\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\int_{-\pi}^{\pi} ce_{2n}(h^2, \eta)\,d\eta}{Ce_{2n}(h^2, \xi_0)\cdot\int_{-\pi}^{\pi}[ce_{2n}(h^2, \eta)]^2\,d\eta}\cdot Ce_{2n}(h^2, \xi)\cdot ce_{2n}(h^2, \eta). \tag{21}$$

Применение формулы (21) крайне затруднительно. Для упрощения мы воспользуемся формулами (XI, XII). Однако, прежде чем перейти к упрощениям, мы постараемся получить из (21) формулу для скин-эффекта в круговом цилиндре. Очевидно, что для круга $c=0$; следовательно, при переходе от эллипса к кругу мы должны положить, что h стремится к нулю.

е) Сравнение с круговым сечением

Укажем формулы, имеющие место при $h\to 0$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} ce_{2n}(h^2, \eta)\,d\eta \to 0, \qquad n\neq 0 \tag{22}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[ce_{2n}(h^2, \eta)]^2\,d\eta \to \frac{1}{2}, \qquad n\neq 0 \tag{23}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} ce_0(h^2, \eta)\,d\eta \to 1, \tag{24}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[ce_0(h^2, \eta)]^2\,d\eta \to 1. \tag{25}$$

Для проведения перехода от эллипса к кругу мы воспользуемся разложением четной функции $u(\xi, \eta)$ по четным функциям Матье:

$$u(\xi, \eta) = \sum_0^{\infty} a_n Ce_n(h^2, \xi)\cdot ce_n(h^2, \eta). \tag{26}$$

В качестве разлагаемой функции выберем:

$$\cos kx = \cos(kc\cdot \operatorname{ch}\xi\cdot\cos\eta) \tag{27}$$

и положим

$$\cos(kc\cdot\operatorname{ch}\xi\cdot\cos\eta) = \sum_0^{\infty} a_{2n} Ce_{2n}(h^2, \xi)\cdot ce_{2n}(h^2, \eta). \tag{28}$$

Умножив обе части (28) на $ce_{2n}(h^2, \eta)$ и интегрируя от 0 до 2π, получим:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ce_{2n}(h^2, \eta)\cdot\cos(kc\cdot\operatorname{ch}\xi\cdot\cos\eta)\,d\eta = a_{2n}\,p_{2n}\,Ce_{2n}(h^2, \xi), \tag{29}$$

где a_{2n} и p_{2n} постоянные. Для вычисления интеграла в левой части (29) мы воспользуемся разложением (2), III, 2a и формулой:

$$J_{2n}(u) = \frac{(-1)^n}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(u\cdot\cos\eta)\cdot\cos 2n\eta\,d\eta. \tag{30}$$

Подставив (2) III, 2a в (29) и последовательно вычисляя по формуле (30), мы получим:

$$a_{2n}\,p_{2n}\,Ce_{2n}(h^2, \xi) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{2n,2m}(-1)^m J_{2m}(kc\cdot ch\,\xi). \tag{31}$$

Произведя замену ξ на $-j\eta$, мы получим разложение:

$$a_{2n}\,p_{2n}\,ce_{2n}(\eta) = \sum_0^{\infty} A_{2n,2m}(-1)^m J_{2m}(kc\cdot\cos\eta). \tag{32}$$

Предположим, что эксцентриситет эллипса уменьшается, а ξ возрастает, при чем имеют место условия (7), (9) $h^2\to 0$. Поэтому согласно формулам (22), (25) мы перепишем (21) в виде:

$$\psi\Big|_{\substack{\text{при } h^2\to 0\\ \xi\to\infty}} = \frac{Ce_0(h^2, \xi)\cdot ce_0(h^2, \eta)}{Ce_0(h^2, \xi)}\Bigg|_{\substack{h^2\to 0\\ \xi\to\infty.}} \tag{33}$$

Из (32) имеем:

$$a_0\,p_0\,ce_0(h^2, \eta) = A_{0,0}\,J_0(kc\cdot\cos\eta) - A_{0,2}\,J_2(kc\cdot\cos\eta) + \ldots \tag{34}$$

Очевидно, что

$$a_0\,p_0\,ce_0(h^2, \eta)\big|_{h^2\to 0} = 1, \tag{35}$$

откуда на основании (III, 2b) следует, что $a_0\,p_0 = 1$. Из (31) имеем

$$Ce_0(h^2, \xi) = A_{0,0}\,I_0(kc\cdot\operatorname{ch}\xi) - A_{0,2}\,J_2(kc\cdot\operatorname{ch}\xi) + \ldots \tag{36}$$

Так как при $h^2 \to 0$ все $A_{0,\,2m}$ $(m \neq 0)$ стремятся к нулю, а функции Бесселя остаются конечными, мы получим:

$$Ce_0(h^2,\ \xi)\Big|_{\substack{h^2 \to 0 \\ \xi \to \infty}} = J_0(kr) \tag{37}$$

и наконец

$$Ce_0(h^2,\ \xi_0)\Big|_{\substack{h^2 \to 0 \\ \xi_0 \to \infty}} = J_0(kR), \tag{38}$$

где

$$R = \lim_{\xi_0 \to \infty,\ h^2 \to 0} c \cdot \operatorname{ch} \xi_0 \tag{39}$$

является радиусом сечения цилиндра. Окончательно при $h^2 \to 0$ мы получаем известную формулу:

$$\psi = K \frac{J_0(kr)}{J_0(kR)}. \tag{40}$$

g) Разложение ψ при малых h^2 $(c \to 0)$

Случай эллипса с малым эксцентриситетом. При этом мы ограничиваемся двумя первыми членами формулы (21), ибо очевидно, что при членах более высокого порядка появляется h в степени выше второй. Ограничиваясь только h^2, получим:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} ce_0(h^2,\ \eta)\, d\eta = 1 + O(h^4), \tag{41}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} ce_2(h^2,\ \eta)\, d\eta = \frac{h^2}{4} + O(h^6), \tag{42}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [ce_0(h^2,\ \eta)]^2\, d\eta = 1, \tag{43}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [ce_2(h^2,\ \eta)]^2\, d\eta = \frac{1}{2} \tag{44}$$

и т. д. Из (31) легко получить при условии, что h^2 весьма мало, что:

$$a_2 p_2 Ce_2(h^2,\ \xi) = -J_2(kr) + O(h^2), \tag{45}$$

$$a_2 p_2 Ce_2(h^2, \xi_0) = -J_2(kR) + O(h^2), \tag{46}$$

$$a_0 p_0 Ce_0(h^2,\ \xi) = -J_0(kr) - \frac{h^2}{2} J_2(kr) + O(h^6), \tag{47}$$

$$a_0 p_0 Ce_0(h^2, \xi_0) = J_0(kR) - \frac{h^2}{2} J_2(kR) + O(h^6). \tag{48}$$

Из формул (31), (32) мы получаем:

$$ce_0(h^2,\ \eta) = 1 - \frac{h^2}{2}\cos 2\varphi + O(h^4), \tag{49}$$

$$ce_2(h^2,\ \eta) = \cos 2\varphi + O(h^2). \tag{50}$$

Подставив в формулу (21), мы получим, ограничиваясь двумя членами:

$$\psi = K \left\{ \frac{J_0(kr)\left[1 - \frac{h^2}{2}\cos 2\varphi\right]}{J_0(kR) - \frac{h^2}{2} J_2(kR)} - \frac{h^2 J_2(kr)}{2\left[J_0(kR) - \frac{h^2}{2} J_2(kR)\right]} + \right.$$
$$\left. + \frac{h^2 J_2(kr)\cos 2\varphi}{2J_2(kR)} - \ldots \right\} \tag{51}$$

l) Разложение ψ при малых h^2 ($\mu_0 \mu\omega\sigma$ — мало, c — конечно)

В этом случае мы не делаем никаких предположений об эксцентриситете эллипса и получим формулы для случая, когда $\mu_0\mu\omega\sigma$ мало; практически это соответствует случаю низкой частоты. Тогда, применяя формулы (4), (44) и (31) и ограничиваясь членами, содержащими h^4, мы получим весьма удобную для расчетов формулу:

$$\psi = K \left\{ \frac{\left[J_0(kc \cdot \operatorname{ch}\xi) - \frac{h^2}{2} J_2(kc \cdot \operatorname{ch}\xi)\right]\left[1 - \frac{h^2}{2}\cos 2\eta\right]}{J_0(kc \cdot \operatorname{ch}\xi_0) - \frac{h^2}{2} J_2(kc \cdot \operatorname{ch}\xi_0)} + \right.$$
$$\left. + \frac{h^2\left[\frac{h^2}{4} J_0(kc \cdot \operatorname{ch}\xi) - J_2(kc \cdot \operatorname{ch}\xi)\right]\cos 2\eta}{2\left[\frac{h^2}{4} J_0(kc \cdot \operatorname{ch}\xi_0) - J_2(kc \cdot \operatorname{ch}\xi_0)\right]} + \ldots \right\} \tag{52}$$

Случай, когда h^2 велико (практически $\omega \gg 1$), представляет значительно больше трудностей. Сколько-нибудь удовлетворительные асимптотические выражения для функций Матье пока не известны. Поэтому в тех случаях, когда приближенными формулами нельзя пользоваться, следует обратиться к точной формуле (21).

m) Расчет интеграла от ψ, взятого по площади эллипса

При расчете импеданса провода нам нужно будет знать величину интеграла:

$$\int dx \int \psi\, dy = M. \tag{53}$$

Для элемента поверхности в эллиптических координатах мы имеем:

$$dx\,dy = c^2(\operatorname{ch}^2\xi - \cos^2\eta)\,d\xi\cdot d\eta, \tag{54}$$

после чего (53) примет вид:

$$M = \int_0^{\xi_0} d\xi\cdot\int_{-\pi}^{\pi} d\eta\cdot c^2(\operatorname{ch}^2\xi - \cos^2\eta)\cdot\psi, \tag{55}$$

из уравнения (10):

$$\psi = \left[-k^2c^2(\operatorname{ch}^2\xi - \cos^2\eta)\right]^{-1}\left\{\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}\right\}. \tag{56}$$

Подставив (56) в (55), получим:

$$M = \int_0^{\xi_0} d\xi\cdot\int_{-\pi}^{\pi} d\eta\cdot\frac{1}{k^2}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}\right]. \tag{57}$$

Обозначив для сокращения коэффициент под знаком суммы в формуле (21) через $\overline{A}_{2n}$, мы получим:

$$M = -\frac{K}{k^2}\int_0^{\xi_0} d\xi\cdot\int_{-\pi}^{\pi} d\eta\sum_0^{\infty}\overline{A}_{2n}\Big\{Ce''_{2n}(h^2,\xi)\cdot ce_{2n}(h^2,\eta) + {} + Ce_{2n}(h^2,\xi)\cdot ce''_{2n}(h^2,\eta)\Big\}, \tag{58}$$

где штрихи означают дифференцирование по ξ и по η. На основании вышеизложенного:

$$\int_{-\pi}^{\pi} ce''_{2n}(h^2,\eta)\,d\eta = 0 \tag{59}$$

и

$$Ce'(h^2, 0) = 0. \tag{60}$$

Поэтому интеграл (58) даст:

$$M = -\frac{K}{k^2}\sum_0^{\infty}\overline{A}_{2n}Ce'_{2n}(h^2,\xi_0)\cdot\int_{-\pi}^{\pi} ce_{2n}(h^2,\eta)\,d\eta, \tag{61}$$

или, введя значение $\overline{A}_{2n}$:

$$M = -\frac{K}{k^2}\sum_0^{\infty}\frac{Ce'_{2n}(h^2,\xi_0)\cdot\left\{\int_{-\pi}^{\pi} ce_{2n}(h^2,\eta)\,d\eta\right\}^2}{Ce_{2n}(h^2,\xi_0)\cdot\int_{-\pi}^{\pi}[ce_{2n}(h^2,\eta)]^2\,d\eta}, \tag{62}$$

мы разложим (62) для малых значений h^2.

n) Разложение M

Мы проведем разложение M опять в двух случаях: a) в случае, когда $c\to 0$ и $\xi\to\infty$; b) $h\to 0$, так как $k\to 0$. В обоих случаях разложение основывается на выводах разделов d, g, k. В обоих случаях мы ограничимся первым членом формулы (62), который равен:

$$M = -\frac{K}{k^2}\cdot\frac{\left|Ce\cdot(h^2,\xi)\right|'_{\xi=\xi_0}\cdot\left\{\int_{-\pi}^{\pi} ce_0(h^2,\eta)\,d\eta\right\}^2}{Ce_0(h^2,\xi_0)\cdot\int_{-\pi}^{\pi}[ce_0(h^2,\eta)]^2\,d\eta}. \tag{63}$$

1) Вычислим производную по ξ от $Ce_0(h^2,\xi)$. Можем написать

$$\frac{d}{d\xi} = \frac{d}{d(c\cdot\operatorname{ch}\xi)}\cdot c\cdot\operatorname{sh}\xi, \tag{64}$$

следовательно, на основании формул (9) имеем при $h\to 0$, $\xi\to\infty$:

$$\frac{d}{d\xi} = r\frac{d}{dr}. \tag{64_1}$$

Мы имели выше разложение (47); на основании этой формулы мы получим:

$$\left.\begin{aligned}\left|Ce_0(h^2,\xi)\right|'_{\xi=\xi_0} &= \left|r\frac{d}{dr}\left[J_0(kr) - \frac{h^2}{2}J_2(kr)\right]\right|_{r=R} = \\ &= -kR\left[J_1(kR) - \frac{h^2}{kR}J_2(kR) + \frac{h^2}{2}J_1(kR)\right].\end{aligned}\right\} \tag{65}$$

Далее, применяя формулы (41), (43) и (48), мы получим для M следующее выражение:

$$M = \frac{K}{k}2\pi R\,\frac{J_1(kR) - \frac{h^2}{2R}J_2(kR) + \frac{h^2}{2}J_1(kR)}{J_0(kR) - \frac{h^2}{2}J_2(kR)}. \tag{66}$$

Эту же формулу мы получим, рассчитав M из выражения:

$$M = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi\int_0^R r\psi\,dr, \tag{67}$$

где вместо ψ подставлено его значение из (51).

2) По формуле (36) мы имеем:

$$Ce_0(h^2,\xi) = J_0(kc\cdot\operatorname{ch}\xi) - \frac{h^2}{2}J_2(kc\cdot\operatorname{ch}\xi) + \ldots \tag{68}$$

$$\left.\begin{aligned}\left|Ce_0(h^2,\xi)\right|'_{\xi=\xi_0} &= -kc\cdot\operatorname{sh}\xi_0\Big\{J_1(kc\cdot\operatorname{ch}\xi_0) + \\ &+ \frac{h^2}{kc\cdot\operatorname{ch}\xi_0}J_2(kc\cdot\operatorname{ch}\xi_0) - \frac{h^2}{2}J_1(kc\cdot\operatorname{ch}\xi_0) + \ldots\Big\}\end{aligned}\right\} \tag{68_1}$$

Подставив эти значения в (63), мы получим:

$$M=\frac{K}{k}2\pi c\operatorname{sh}\xi_0\times$$

$$\times\frac{\left[J_1(kc\cdot\operatorname{ch}\xi_0)-\frac{h^2}{kc\cdot\operatorname{ch}\xi_0}J_2(kc\cdot\operatorname{ch}\xi_0)+\frac{h^2}{2}J_1(kc\cdot\operatorname{ch}\xi_0)\right]}{J_0(kc\cdot\operatorname{ch}\xi_0)-\frac{h^2}{2}J_2(kc\cdot\operatorname{ch}\xi_0)}. \qquad (69)$$

После этих замечаний мы можем перейти к интересующим нас электрическим величинам.

г) Импеданц электрического цилиндра; скин-эффект

В случае электрического скин-эффекта электрическое поле направлено параллельно оси провода. Полагаем ϕ равным плотности тока i. Величина M из формул (53), (66) и (69) соответствует полному току, протекающему через провод:

$$M=I. \qquad (70)$$

Для определения импеданца применим следующий метод. Обозначим через R_ω активное сопротивление провода и через $L_{i\omega}$ —внутренний коэффициент самоиндукции. Как известно, коэффициент самоиндукции провода состоит из двух частей:

$$L=L_i+L_a$$

внутреннего и внешнего коэффициента самоиндукции соответственно внутренней и внешней энергии магнитного поля. От распределения тока зависит только внутренняя часть. Импеданц равен

$$Z=R_\omega+j\omega L_{i\omega}.$$

Падение напряжения на единицу длины провода равно удельному сопротивлению, умноженному на плотность тока на поверхности провода, или равно импеданцу, умноженному на полный ток:

$$ZI=\sigma^{-1}i\,|_{\xi=\xi_0}=\sigma^{-1}K. \qquad (71)$$

Сопротивление постоянному току равно:

$$R_0=\frac{1}{\sigma\pi\, a\cdot b}, \qquad (72)$$

где (a) и (b)—большая и малая полуоси эллипса, величина которых указана в формуле (5). Подставляя их значение из (5), мы получим:

$$R_0=\frac{1}{\pi\sigma c^2\operatorname{ch}\xi_0\cdot\operatorname{sh}\xi_0}. \qquad (73)$$

Из (71)

$$Z=\frac{K}{M\sigma}.$$

Из (71) и (73) получаем:

$$\frac{Z}{R_0}=\frac{K\cdot\pi c^2\cdot\operatorname{ch}\xi_0\cdot\operatorname{sh}\xi_0}{M}; \qquad (I=M), \qquad (74)$$

где M определяется точной формулой (53). Приближенные решения мы получим, взяв M по формулам (66) и (69). На практике важно знать отношение активного сопротивления при переменном токе R_ω к сопротивлению при постоянном токе. Это отношение называется коэффициентом увеличения сопротивления:

$$k_r=\frac{R_\omega}{R_0}.$$

Ясно, что

$$k_r=\operatorname{Reel}\left\{\frac{Z}{R_0}\right\}. \qquad (74_1)$$

Из (74) определяется также отношение:

$$\frac{\omega L_{i\omega}}{R_0}=\operatorname{Imag}\left\{\frac{Z}{R_0}\right\}. \qquad (74_2)$$

Из (74_2) мы определим $L_{i\omega}$:

$$L_{i\omega}=\frac{R_0}{\omega}\operatorname{Imag}\left\{\frac{Z}{R_0}\right\}. \qquad (74_3)$$

Переходя к пределу, полагая $\omega\to 0$, мы получим внутренний коэффициент самоиндукции при постоянном токе:

$$L_{i0}=R_0\lim_{\omega\to 0}\left[\frac{1}{\omega}\operatorname{Imag}\left\{\frac{Z}{R_0}\right\}\right]. \qquad (74_4)$$

Отношение

$$k_L=\frac{L_{i\omega}}{L_{i0}} \qquad (74_5)$$

называется коэффициентом уменьшения самоиндукции. Все эти величины будут ниже определены.

Для случая малого эксцентриситета мы по (66) получим:

$$\frac{Z}{R_0}=\frac{kR}{2}\,\frac{J_0(kR)-\frac{h^2}{2}J_2(kR)}{J_1(kR)-\frac{h^2}{kR}J_2(kR)+\frac{h^2}{2}J_1(kR)}. \qquad (75)$$

Заметим, что в формуле (74) мы для случая малого эксцентриситета полагаем

$$c^2\cdot\operatorname{ch}\xi_0\cdot\operatorname{sh}\xi_0=R^2.$$

При $h=0$ формула (75) переходит в известную формулу для кругового цилиндра:

$$\frac{Z}{R_0}=\frac{kR}{2}\,\frac{J_0(kR)}{J_1(kR)}. \qquad (76)$$

Для случая малой частоты имеем по (69) следующую формулу:

$$\frac{Z}{R_0}=\frac{kc\ \mathrm{ch}\,\xi_0}{2}\times$$

$$\times\frac{J_0(kc\cdot\mathrm{ch}\,\xi_0)-\frac{h^2}{2}J_2(kc\cdot\mathrm{ch}\,\xi_0)}{J_1(kc\cdot\mathrm{ch}\,\xi_0)-\frac{h^2}{kc\cdot\mathrm{ch}\,\xi_0}J_2(kc\cdot\mathrm{ch}\,\xi_0)+\frac{h^2}{2}J_1(kc\cdot\mathrm{ch}\,\xi_0)}. \qquad (77)$$

р) Магнитный скин-эффект

В случае магнитного скин-эффекта магнитное поле направлено вдоль оси, и мы полагаем ψ равным напряженности поля H. В этом случае важно определить величину потерь на Джоулево тепло и величину энергии магнитного поля в объеме провода. Напряженность магнитного поля на поверхности провода равна H_0; полагая, что поле создано катушкой с w_0 витками на единицу длины, обтекаемой током I, получим:

$$K=H_0=w_0 I. \qquad (78)$$

Полный магнитный поток сквозь эллиптический цилиндр равен:

$$\Phi=\mu_0\mu M, \qquad (79)$$

где M определяется формулой (53). Определим Джоулевы потери следующим образом. Поток (79) индуктирует в витках, расположенных на единицу длины э. д. с., равную:

$$E=-w_0\frac{\partial\Phi}{\partial t}=-j\omega w_0\Phi=-j\omega w_0\mu\mu_0 M. \qquad (80)$$

Очевидно, что M определено через I по формулам (53), (78) Реальная часть выражения (80) дает (умноженная на -1) слагающую напряжения, направленную противоположно току I; потери на Джоулево тепло определяются по формуле:

$$Q=-\mathrm{Reel}\,(E)\cdot I=-I\,\mathrm{Reel}\,(-j\omega w_0\mu_0\mu M). \qquad (81)$$

Подставив M из (62), получим:

$$Q=\sigma^{-1}w_0^2 I^2\,\mathrm{Reel}\left\{\sum_0^\infty\frac{Ce'_{2n}(h^2,\ \xi_0)\left\{\int\limits_{-\pi}^{+\pi}ce_{2n}(h^2,\ \eta)\,d\eta\right\}^2}{Ce_{2n}(h^2,\ \xi_0)\cdot\int\limits_{-\pi}^{+\pi}[ce_{2n}(h^2,\ \eta)]^2\,d\eta}\right\}. \qquad (82)$$

Мнимая часть выражения (80) дает (умноженная на -1) слагающую напряжения, составляющую с током угол в 90°. Эта слагающая, умноженная на I, дает сосредоточенную в объеме эллиптического цилиндра высотой 1 см магнитную энергию:

$$W=\sigma^{-1}w\ I^2\,\mathrm{Imag}\left\{\sum\frac{Ce_{2n}(h^2,\ \xi_0)\left\{\int\limits_{-\pi}^{\pi}ce_{2n}(h^2,\ \eta)\,d\eta\right\}^2}{Ce_{2n}(h^2,\ \xi_0)\int\limits_{-\pi}^{\pi}[ce_{2n}(h^2,\ \eta)]^2\,d\eta}\right\}. \qquad (83)$$

Приближенные формулы мы получим, пользуясь для M выражениями (66, 69). Читатель легко выпишет их. Заметим, что все формулы, относящиеся к эллиптическому цилиндру, весьма сложны, и даже расчет по приближенным формулам требует большого труда и навыка. Формулы (82), (83) удобно написать в виде:

$$Q=\sigma^{-1}w_0^2 I^2\,\mathrm{Reel}\,\{\overline{M}\};\qquad W=\sigma^{-1}w_0^2 I^2\,\mathrm{Imag}\,\{\overline{M}\}, \qquad (84)$$

где значение $\overline{M}$ очевидно.

Приведем теперь соотношения, получаемые при постоянном токе ($\omega=0$). В первую очередь определим отношение Z к R_0. Для этого мы несколько преобразуем приближенное выражение для M в случае формулы (69). Найдем производную от выражения (68), полагая, что:

$$\frac{dI_2(x)}{dx}=\frac{1}{2}[J_1(x)-J_3(x)]. \qquad (85)$$

Тогда

$$\left|Ce_0(h^2,\ \xi)\right|'_{\xi=\xi_0}=-kc\,\mathrm{sh}\,\xi_0\left\{J_1(kc\cdot\mathrm{ch}\,\xi_0)+\right.$$

$$\left.+\frac{h^2}{4}J_1(kc\cdot\mathrm{ch}\,\xi_0)-\frac{h^2}{4}J_3(kc\cdot\mathrm{ch}\,\xi_0)\right\} \qquad (85_1)$$

и

$$M=\frac{K}{k}2\pi c\,\mathrm{sh}\,\xi_0\times$$

$$\times\frac{J_1(kc\cdot\mathrm{ch}\,\xi_0)+\frac{h^2}{4}J_1(kc\cdot\mathrm{ch}\,\xi_0)-\frac{h^2}{4}J_3(kc\cdot\mathrm{ch}\,\xi_0)}{J_0(kc\cdot\mathrm{ch}\,\xi_0)-\frac{h^2}{4}J_2(kc\cdot\mathrm{ch}\,\xi_0)}. \qquad (86)$$

Подставив (86) в (74) получим:

$$\frac{Z}{R_0}=\frac{kc\cdot\mathrm{ch}\,\xi_0}{2}\cdot\frac{J_0(kc\cdot\mathrm{ch}\,\xi_0)-\frac{h^2}{2}J_2(kc\cdot\mathrm{ch}\,\xi_0)}{\left(1+\frac{h^2}{4}\right)J_1(kc\cdot\mathrm{ch}\,\xi_0)-\frac{h^2}{4}J_3(kc\cdot\mathrm{ch}\,\xi_0)}. \qquad (87)$$

Ограничиваясь только второй степенью h, мы получим весьма простую (по сравнению с предыдущими) формулу:

$$\frac{Z}{R_0}=\frac{kc\cdot\mathrm{ch}\,\xi_0}{2}\,\frac{J_0(kc\cdot\mathrm{ch}\,\xi_0)}{\left(1+\frac{h^2}{4}\right)J_1(kc\cdot\mathrm{ch}\,\xi_0)}. \qquad (88)$$

Перейдем, исходя из формулы (88), к пределу $(\omega \to 0)$. Мы получим:

$$\frac{Z}{R_0} = \frac{R_\omega + j\omega L i\omega}{R_0} = \frac{J_0(kc \cdot \operatorname{ch}\xi_0)}{\left(1+\frac{h^2}{4}\right)\frac{2J_1(kc \cdot \operatorname{ch}\xi_0)}{kc \cdot \operatorname{ch}\xi_0}} \cong$$

$$\cong \frac{1-\frac{k^2c^2\operatorname{ch}^2\xi_0}{4}}{\left(1+\frac{h^2}{4}\right)\left(1-\frac{k^2c^2\operatorname{ch}^2\xi_0}{8}\right)} = \frac{1-\frac{k^2c^2\operatorname{ch}^2\xi_0}{4}}{\left(1+\frac{k^2c^2}{16}\right)\left(1-\frac{k^2c^2\operatorname{ch}^2\xi_0}{8}\right)} \cong$$

$$\cong \frac{1-\frac{k^2c^2\operatorname{ch}^2\xi_0}{4}}{1+\frac{k^2c^2}{16}-\frac{k^2c^2\operatorname{ch}^2\xi_0}{8}} = \frac{1-\frac{k^2c^2\operatorname{ch}^2\xi_0}{4}}{1-\frac{k^2c^2}{16}(2\operatorname{ch}^2\xi_0-1)} \cong$$

$$\cong \left(1-\frac{k^2c^2\operatorname{ch}^2\xi_0}{4}\right)\left(1+\frac{k^2c^2\operatorname{ch}2\xi_0}{16}\right) \cong$$

$$\cong 1-\frac{k^2c^2\operatorname{ch}^2\xi_0}{4}+\frac{k^2c^2}{16}\operatorname{ch}2\xi_0 =$$

$$= 1-\frac{k^2c^2}{16}(2+\operatorname{ch}2\xi_0) = 1+j\frac{q^2c^2}{16}(2+\operatorname{ch}2\xi_0). \qquad (89)$$

Из (89) при $\omega \to 0$ получаем:

$$R_\omega = R_0; \qquad L_i = \frac{q^2c^2R_0}{16\omega}(2+\operatorname{ch}2\xi_0)\Big|_{\omega\to 0} \qquad (90)$$

и наконец

$$L_i = \frac{\mu_0\mu}{8\pi}\left(1+\frac{2}{\operatorname{ch}2\xi_0}\right). \qquad (91)$$

При $\xi_0 = 0$ мы получим бесконечную тонкую ленту шириною $2c$, по которой течет ток I. Полагая временно ширину пластинки $2b$, получим плотность постоянного тока:

$$i = \frac{I}{2b \cdot 2c}. \qquad (92)$$

Ток на единицу ширины пластины составит:

$$\frac{I}{2c} = i \cdot 2b. \qquad (93)$$

Таким образом, если I и c — конечные величины, i бесконечно возрастает с уменьшением толщины пластины, но так, что $i \cdot 2b$ остается конечной величиной. Внутренний коэффициент самоиндукции такой пластины из (91) равен:

$$L_i = \frac{3}{8\pi}\mu\mu_0. \qquad (94)$$

Из (91) в связи с формулой (5) можно записать для эллипса:

$$L_i = \frac{\mu_0\mu}{8\pi}\left[1+2\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right] = \frac{\mu}{2}\left[1+2\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right]10^{-9} \text{ генри}, \qquad (95)$$

где a и b — полуоси эллипса. При $a=b$, мы получаем

$$L_i = \frac{\mu_0\mu}{8\pi}$$

т. е. формулу для кругового цилиндра.

q) Определение напряженности магнитного поля

Зная величину плотности тока (случай электрического скин-эффекта), не трудно найти слагающие напряженности магнитного поля H_ξ и H_η. Применяя последние два уравнения (n), получим:

$$H_\xi = \frac{1}{k^2c\sqrt{\operatorname{ch}^2\xi-\cos^2\eta}} \cdot \frac{\partial i}{\partial\eta}; \qquad (96_1)$$

$$H_\eta = -\frac{1}{k^2c\sqrt{\operatorname{ch}^2\xi-\cos^2\eta}} \cdot \frac{\partial i}{\partial\xi}. \qquad (96_2)$$

i мы определим по формуле (52), предварительно выразив K через M по формуле (86); полагая $M=I$ имеем:

$$K = \frac{kI \cdot c \cdot \operatorname{ch}\xi_0}{2\pi \cdot a \cdot b} \cdot \frac{J_0(kc \cdot \operatorname{ch}\xi_0) - \frac{h^2}{2}J_2(kc \cdot \operatorname{ch}\xi_0)}{J_1(kc \cdot \operatorname{ch}\xi_0)\left(1+\frac{h^2}{4}\right) - \frac{h^2}{4}J_3(kc \cdot \operatorname{ch}\xi_0)}. \qquad (97)$$

По формулам (96_1) и (52)

$$H_\xi = K\frac{c}{4\sqrt{\operatorname{ch}^2\xi-\cos^2\eta}}\left\{\frac{J_0(kc \cdot \operatorname{ch}\xi) - \frac{h^2}{4}J_2(kc \cdot \operatorname{ch}\xi)}{J_0(kc \cdot \operatorname{ch}\xi_0) - \frac{h^2}{2}J_2(kc \cdot \operatorname{ch}\xi_0)}\sin 2\eta - \right.$$

$$\left. - \frac{\frac{h^2}{4}J_0(kc \cdot \operatorname{ch}\xi) - J_2(kc \cdot \operatorname{ch}\xi)}{\frac{h^2}{4}J_0(kc \cdot \operatorname{ch}\xi_0) - J_2(kc \cdot \operatorname{ch}\xi_0)}\sin 2\eta\right\}. \qquad (98)$$

Очевидно, что при $\xi \to \xi_0$ $H_\xi \to 0$. Аналогично при помощи формул (52) и (97) получим:

$$H_\eta = \frac{Ic \cdot \operatorname{ch}\xi_0 \cdot \operatorname{sh}\xi}{2\pi ab\sqrt{\operatorname{ch}^2\xi-\cos^2\eta}} \times$$

$$\times \left\{\frac{J_1(kc \cdot \operatorname{ch}\xi)\left(1+\frac{h^2}{4}\right) - \frac{h^2}{4}J_3(kc \cdot \operatorname{ch}\xi)}{J_1(kc \cdot \operatorname{ch}\xi_0)\left(1+\frac{h^2}{4}\right) - \frac{h^2}{4}J_3(kc \cdot \operatorname{ch}\xi_0)}\left[1-\frac{h^2}{2}\cos 2\eta\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\left\{J_1(kc \cdot \operatorname{ch}\xi)\left(1+\frac{h}{4}\right) - I_3(kc \cdot \operatorname{ch}\xi)\right\} \cdot \left\{J_0(kc \cdot \operatorname{ch}\xi_0) - \frac{h^2}{2}J_2(kc \cdot \operatorname{ch}\xi_0)\right\}}{\left\{J_0(kc \cdot \operatorname{ch}\xi_0) - \frac{4}{h^2}J_2(kc \cdot \operatorname{ch}\xi_0)\right\} \cdot \left\{J_1(kc \cdot \operatorname{ch}\xi_0)\left(1+\frac{h^2}{4}\right) - \frac{h^2}{4}J_3(kc \cdot \operatorname{ch}\xi_0)\right\}}\right\}. \qquad (99)$$

Перейдем в формуле (99) к пределу, полагая, что $\omega(k)$ стремится к нулю, мы получим тогда формулу справедливую для постоянного тока:

$$H_\eta = \frac{Ic \operatorname{sh}\xi \cdot \operatorname{ch}\xi}{2\pi ab \sqrt{\operatorname{ch}^2\xi - \cos^2\eta}} \left\{1 - \frac{\cos 2\eta}{2\operatorname{ch}^2\xi_0 - 1}\right\}. \tag{100}$$

$$i_{пост.} = \frac{I}{\pi \cdot a \cdot b}. \tag{101}$$

Определим по формуле (100) напряженность поля в двух точках на контуре эллипса при $\eta = 0$, $\eta = \frac{\pi}{2}$:

1) $\xi = \xi_0$; $\eta = 0$

$$H_\eta = \frac{Ic \cdot \operatorname{sh}\xi_0 \cdot \operatorname{ch}\xi_0}{2\pi \cdot ab \cdot \operatorname{sh}\xi_0} \left\{1 - \frac{1}{2\operatorname{ch}^2\xi_0 - 1}\right\} = \frac{I}{\pi \cdot ab} \frac{ab^2}{a^2+b^2}; \tag{102}$$

2) $\xi = \xi_0$; $\eta = \frac{\pi}{2}$

$$H_\eta = \frac{Ic \cdot \operatorname{sh}\xi_0 \cdot \operatorname{ch}\xi_0}{2\pi ab \cdot \operatorname{ch}\xi_0} \left\{1 - \frac{1}{2\operatorname{ch}^2\xi_0 - 1}\right\} = \frac{I}{\pi ab} \frac{a^2 b}{a^2+b^2}. \tag{103}$$

4. Распределение температуры в эллиптическом цилиндре, находящемся в гармоническом меняющемся температурном поле

Значительное количество рабочих процессов в технике состоит в периодическом повторении неизменного рабочего цикла, вследствие чего все величины, определяющие состояние, в том числе температура, подвергаются периодическим колебаниям. Мы рассмотрим изменения и распределение температуры внутри эллиптического цилиндра неограниченной длины. Введем следующие обозначения (при чем считаем все физические константы независимыми от времени, места и температуры):

ϑ — температура в °C,
ϑ_0 — амплитуда температуры на поверхности,
t — время,
λ — коэффициент теплопроводности,
c — удельная теплоемкость,
γ — плотность,
$a = \frac{\lambda}{c\gamma}$ — постоянная уравнения теплопроводности,
ω — круговая частота температурных колебаний,
$j = \sqrt{-1}$ мнимая единица.

Искомая температура удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t} = a\,\Delta\vartheta, \qquad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right). \tag{1}$$

Поставленное выше условие неограниченной длины тела приводит данную задачу к плоской задаче, в связи с чем $\frac{\partial}{\partial z} = 0$. Изменения температуры на поверхности тела (окружающей среды) мы полагаем происходящими по закону:

$$\vartheta_{пов.} = \vartheta_0 e^{j\omega t} \tag{2}$$

(не нарушая общности, можно положить $\vartheta_0 = 1$). Решение уравнения (1) мы ищем в форме:

$$\vartheta = \psi(x, y) e^{j\omega t}; \tag{3}$$

тогда

$$\Delta\psi = j\frac{\omega}{a}\psi \tag{4}$$

или

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0; \qquad k^2 = -j\frac{\omega}{a}; \tag{4$_1$}$$

$$k = \sqrt{\frac{\omega}{a}}\sqrt{-j} = \sqrt{\frac{\omega}{a}}\, j^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{\omega}{a}}\,\frac{-1+j}{\sqrt{2}}. \tag{5}$$

Уравнение (4_1) по форме аналогично уравнению (1) предыдущего параграфа. Поэтому все выводы предыдущего раздела, вплоть до формулы (52), полностью применимы в данном случае. Нужно только считать $\psi(\xi, \eta)$ температурой и в граничном условии (15) раздела VII, 3 положить при:

$$\xi = \xi_0, \qquad \psi = \vartheta_0. \tag{6}$$

Для кругового цилиндра справедлива формула (40) раздела VII, 3. Введя функции Кельвина по формуле:

$$J_0(kr) = J_0\left(qr\, j^{\frac{3}{2}}\right) = ber\, qr + j\, bei\, qr, \tag{7}$$

получим температуру внутри цилиндра в виде:

$$\vartheta = \sqrt{\frac{ber^2 qr + bei^2 qr}{ber^2 qR + bei^2 qR}} \cos\left(\omega t + \operatorname{arctg} \frac{bei\, qr \cdot ber\, qR - ber\, qr \cdot bei\, qR}{ber\, qr \cdot ber\, qR + bei\, qr \cdot bei\, qR}\right). \tag{8}$$

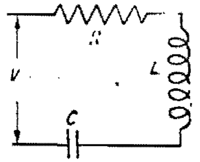
5. Возникновение колебаний при параметрическом возбуждении

Обратимся к более детальному рассмотрению колебательного контура с переменными параметрами, основное уравнение которого приведено в разделе I, 4b. Пусть в колебательной системе (фиг. 8), состоящей из емкости C, сопротивления R и самоиндукции L, в некоторый момент времени, который принимается за исходный, имеется ток i. Произведем в этот момент изменение самоиндукции на величину ΔL, что равносильно увеличению энергии, равному $\frac{1}{2}\Delta L \cdot i^2$. Предоставим теперь систему самой себе. Через промежуток времени, равный $\frac{1}{4}$ периода собственных колебаний системы, вся энергия системы перейдет из магнитной в электростатическую. В этот момент, когда ток будет равен нулю, возвратим самоиндукцию к ее первоначальной величине, что, очевидно, можно сделать, не затрачивая работы, и затем снова предоставим систему самой себе. Через следующие $\frac{1}{4}$ периода собственных колебаний электростатическая энергия снова целиком перейдет в магнитную, и мы сможем опять начать новый цикл изменения самоиндукции. Если вложенная в начале цикла энергия будет больше потерь за время цикла, т. е. если

$$\frac{1}{2}\Delta L \cdot i^2 > \frac{1}{2} R i^2 \frac{T}{2}, \quad \text{или} \quad \frac{\Delta L}{L} > \varepsilon,$$

где ε — логарифмический декремент собственных колебаний системы, тогда ток в конце каждого цикла будет больше, чем в начале его. Таким образом, повторяя эти циклы, т. е. изменяя самоиндукцию с частотой в два раза бо́льшей средней собственной частоты системы так, чтобы $\frac{\Delta L}{L} > \varepsilon$, можно возбудить в системе колебания, не воздействуя на нее никакой электродвижущей силой, как бы мал ни был начальный случайный заряд. То же самое мы получим, изменяя емкость системы C.

Хорошей механической аналогией рассматриваемого здесь явления будет движение качелей, раскачиваемых ритмическими движениями качающегося человека. Здесь ритмически меняется момент инерции. Уже при таком неполном, скорее качественном, рассмотрении явлений возбуждения можно вывести две основные предпосылки для его возникновения: 1) необходимость выполнения определенной зависимости между частотой изменения параметра и „средней“ собственной частотой системы и 2) необходимость соблюдения определенного соотношения между величиной относительного изменения параметра, так называемой глубиной модуляции его, и величиной среднего логарифмического декремента системы.



Фиг. 8.

Перейдем к дифференциальному уравнению задачи. Пусть емкость меняется по закону:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_0}(1 + m \sin \omega t); \tag{1}$$

мы имеем следующее уравнение для $q = \int i dt$:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C_0}(1 + m \sin \omega t) q = 0, \tag{2}$$

которое с помощью преобразования:

$$q = x \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \tag{3}$$

можно привести к виду:

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + \lambda^2 (1 + m_1 \sin 2\tau) x = 0, \tag{4}$$

где

$$\tau = \frac{\omega t}{2}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC_0}, \quad 2\delta = \frac{R}{L}, \quad \omega_1^2 = \omega_0^2 - \delta^2,$$
$$m_1 = \frac{m\omega_0^2}{\omega_1^2}, \quad \vartheta = \frac{2\delta}{\omega}, \quad \lambda^2 = \frac{4\omega_1^2}{\omega^2}. \tag{5}$$

Найдем решение уравнения (4). Пусть $x_1(\tau)$ и $x_2(\tau)$ будут два линейно независимых интеграла уравнения (4), удовлетворяющих таким начальным условиям:

$$x_1(0) = 1; \qquad x_1'(0) = 0,$$
$$x_2(0) = 0; \qquad x_2'(0) = 1.$$

Тогда любые другие начальные условия

$$x(0) = \beta_1 \quad \text{и} \quad x'(0) = \beta_2$$

приведут к требованию

$$x = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2.$$

Составим определитель Вронского. Так как

$$\Delta_0 = x_1(0) \cdot x_2'(0) - x_1'(0) \cdot x_2(0) = 1$$

и

$$e^{-\int_{\tau_0}^{\tau} p(t)\, dt} = 1$$

(ибо $p(t)$ в нашем случае равно нулю), то:

$$\Delta = \Delta e^{-\int_{\tau_0}^{\tau} p(t)\, dt} = 1 = x_1(\tau) \cdot x_2'(\tau) - x_2(\tau) x_1'(\tau). \tag{6}$$

Из общего исследования уравнений с периодическими коэффициентами известно, что один интеграл такого уравнения всегда можно представить в виде *(151)*:

$$x = e^{h\tau} \varphi(\tau), \tag{7}$$

где $\varphi(\tau)$ периодическая функция с периодом π, h — характеристический показатель. Следовательно, это решение должно линейно выражаться через $x_1(\tau)$ и $x_2(\tau)$, т. е. должны написать:

$$\left.\begin{aligned} x(\tau) &= e^{h\tau} \varphi(\tau) = \beta_1 x_1(\tau) + \beta_2 x_2(\tau) \\ x'(\tau) &= e^{h\tau} [\varphi'(\tau) + h\varphi(\tau)] = \beta_1 x_1'(\tau) + \beta_2 x_2'(\tau). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Кроме того, так как при $\tau=0$, $e^{h\tau}=1$, то

$$\varphi(0)=\beta_1; \qquad \varphi'(0)+h\varphi(0)=\beta_2. \tag{9}$$

Так как функция $\varphi(\tau)$ — периодическая с периодом π, то очевидно:

$$\left.\begin{aligned} x(\pi) &= e^{h\pi}\varphi(0)=e^{h\pi}\beta_1=\beta_1 x_1(\pi)+\beta_2 x_2(\pi)\\ x'(\pi) &= e^{h\pi}[\varphi'(0)+h\varphi(0)]=e^{h\pi}\beta_2=\beta_1 x_1'(\pi)+\beta_2 x_2'(\pi).\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Исключая из этих уравнений β_1 и β_2, учитывая (6), получим:

$$\operatorname{ch}(h\pi)=\frac{1}{2}[x_1(\pi)+x_2'(\pi)]. \tag{11}$$

Из уравнения (11) следует: если $+h$ его решение, то $-h$ есть также его решение в силу четности $\operatorname{ch}(h\pi)$. Поэтому в общем виде решение (*124*) напишется в форме:

$$x=A_1 e^{h\tau}\varphi_1(\tau)+A_2 e^{-h\tau}\varphi_2(\tau), \tag{12}$$

где A_1, A_2 постоянные, определяемые из начальных условий. Легко заметить, что мы можем положить:

$$\varphi_2(\tau)=\varphi_1(-\tau).$$

В самом деле, выражение $A_2 e^{-h\tau}\varphi_1(-\tau)$ будет также интегралом (4) [так как полагаем решение (7) верным и для отрицательных τ]. Это решение линейно независимое от первого, определитель Вронского не обращается в нуль. Полное решение напишем в виде:

$$x=A_1 e^{h\tau}\varphi_1(\tau)+A_2 e^{-h\tau}\varphi_1(-\tau). \tag{13}$$

Подставляя это решение в (3), получаем для q:

$$q=A_1 e^{(h-\vartheta)\tau}\varphi_1(\tau)+A_2 e^{-(h+\vartheta)\tau}\varphi_1(-\tau). \tag{14}$$

Из этого выражения следует, что вопрос о возбуждении колебаний приводится к нахождению условий, при которых амплитуда q будет постоянно возрастать. Из (14) видно, что это будет тогда, когда вещественная часть h будет абсолютно больше ϑ. Условие параметрического возбуждения, как видим, тесно связано с величиной (h), т. е. с характеристическим показателем уравнения Матье (4). Зависимость (h) от параметров уравнения m и $\lambda=\frac{2\omega_1}{\omega}$ можно, как это сделали Андронов и Леонтович (*158*), качественно изобразить, графически выделив на плоскости $\left(m, \frac{2\omega_1}{\omega}\right)$ отдельно области, внутри которых (h) имеет реальную часть. Построение показывает (*157*), что эти области, являющиеся областями „неустойчивых“ решений уравнения (4), расположены около значений $\frac{2\omega_1}{\omega}=1, 2, 3\ldots$ При наличии затухания, т. е. для уравнения (2), эти области неустойчивости весьма уменьшаются. Релей (*115*, I) указал метод приближенного построения границ областей неустойчивости. Так, границы первой области неустойчивости $\left(\text{около значения } \frac{2\omega_1}{\omega}=1\right)$ даются с точностью до m^2 кривыми:

$$\frac{2\omega_1}{\omega}=\sqrt{1+\sqrt{\frac{m^2}{4}-4\vartheta^2}} \quad \text{и} \quad \frac{2\omega_1}{\omega}=\sqrt{1-\sqrt{\frac{m^2}{4}-4\vartheta^2}}. \tag{15}$$

Это значит, что при заданных m и ϑ и значениях $\frac{2\omega_1}{\omega}$, удовлетворяющих неравенствам:

$$\sqrt{1+\sqrt{\frac{m^2}{4}-4\vartheta^2}} \geqslant \frac{2\omega_1}{\omega} \geqslant \sqrt{1-\sqrt{\frac{m^2}{4}-4\vartheta^2}} \tag{16}$$

решение уравнения (2) „неустойчиво“. Для определения второй области неустойчивости $\left(\text{около } \frac{2\omega_1}{\omega}=2\right)$ необходимо учесть члены m^4. Как показали Андронов и Леонтович, в этом случае имеем:

$$\sqrt{4+\frac{2}{3}m^2+\sqrt{m^4-64\vartheta^2}} \geqslant \frac{2\omega_1}{\omega} > \sqrt{4+\frac{2}{3}m^2-\sqrt{m^4-64\vartheta^2}}. \tag{17}$$

6. Поперечные колебания эллиптической пластинки

В разделе VI указано, что задача о колебании эллиптической мембраны впервые была решена Э. Матье (*95, 96*) в 1869 г. Рассмотрим здесь задачу о колебании эллиптической пластинки. При дальнейшем рассмотрении допущено, что пластинка состоит из совершенно упругого, однородного материала, и что она имеет однообразную толщину $2h$, рассматриваемую как малая сравнительно с другими ее измерениями.

а) Уравнение движения и его решение

Пусть толщина пластинки $2h$, плотность материала ρ и коэффициент Пуассона σ_1. Если w представляет поперечный прогиб, то уравнение движения будет (*115*, I):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{Eh^2}{3\rho(1-\sigma_1^2)}\cdot\nabla^4 w=0, \tag{1}$$

где

$$\nabla^4=\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

Если $\frac{2}{\omega}$ — период колебаний, и w меняется в зависимости от времени, как $\cos(\omega t+\varepsilon)$, то уравнение (1) примет вид:

$$\nabla^4 w-k^4 w=0, \tag{2}$$

где

$$k^4=\frac{\omega^2}{m^2};\quad m^2=\frac{Eh^2}{3\rho(1-\sigma_1^2)}. \tag{3}$$

Из (2) мы имеем:

$$(\nabla^2+k^2)\ (\nabla^2-k^2)\,w=0.$$

w_1 и w_2 являются соответственно решениями уравнений:

$$(\nabla^2+k^2)\,w_1=0, \tag{4}$$

$$(\nabla^2-k^2)\,w_2=0. \tag{5}$$

Тогда $w=Aw_1+Bw_2$ является решением $(\nabla^4-k^4)\cdot w=0$. Полное решение (1) гласит:

$$w=(Aw_1+Bw_2)\cos(wt+\varepsilon). \tag{6}$$

Положим $x+iy=c\cdot\mathrm{ch}\,(\xi+i\eta)$, где c — фокальное расстояние, тогда уравнение (4) перепишется в виде:

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 w_1}{\partial\eta^2}+k^2c^2(\mathrm{ch}^2\xi-\cos^2\eta)\,w_1=0. \tag{7}$$

Полагаем $w_1=F(\xi)\cdot G(\eta)$, где $F(\xi)$—функция только ξ, а $G(\eta)$—функция только η. Мы получаем:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 F}{\partial\xi^2}+(16q\,\mathrm{ch}\,2\xi-N)\,F=0\\ &\frac{\partial^2 G}{\partial\eta^2}-(16\,q\cos 2\eta-N)\,G=0\end{aligned}\right\}, \tag{8}$$

где

$$a=N-\frac{1}{2}c^2k^2;\quad q=\frac{1}{32}c^2k^2. \tag{9}$$

Положим $\xi=i\left(z+\frac{\pi}{2}\right)$ и $\eta=z+\frac{\pi}{2}$, тогда уравнения (8) сведутся к линейному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\frac{d^2u}{dz^2}+(a+16\,q\cos 2z)\,u=0. \tag{10}$$

Решение этого уравнения дано Уиттекером (*151*) в форме:

$$w=\Delta(z)=e^{\mu z}\cdot u(z) \tag{11}$$

(см. раздел III, Iс), где $u(z)$ периодическая функция z и μ определяется рядом (4) III, 1 с.

$$\mu=4q\sin 2\sigma-12q^3\sin 2\sigma-12q^4\sin 4\sigma+\ldots; \tag{12}$$

σ является параметром, связанным с параметрами a и q дифференциального уравнения соотношением:

$$a=1+8q\cos 2\sigma+(-16q+8\cos 4\sigma)\,q^2-8q^3\cos 2\sigma+\ldots \tag{13}$$

и $u(z)$ определяется рядом Фурье (2), III, 1 с:

$$u(z)=\sin(z-\sigma)+a_3\cos(3z-\sigma)+b_3\sin(3z-\sigma)+a_5\cos(5z-\sigma)+\\+b_5\sin(5z-\sigma)+a_7\cos(7z-\sigma)+\ldots, \tag{14}$$

коэффициенты которого, в свою очередь, определяются рядами:

$$b_3=q+q^2\cos 2\sigma+\left(-\frac{14}{3}+5\cos 4\sigma\right)q^3+\left(-\frac{74}{4}\cos 2\sigma+7\cos 6\sigma\right)q^4+\cdots$$

$$a_3=3q^2\sin 2\sigma+3q^3\sin 4\sigma+\left(-\frac{279}{9}\sin 2\sigma+q\sin 6\sigma\right)q^4+\cdots$$

$$b_5=\frac{1}{3}q^2+\frac{4}{9}q^3\cos 2\sigma+\left(-\frac{155}{54}+\frac{82}{27}\cos 4\sigma\right)q^4+\cdots$$

$$a_5=\frac{14}{9}q^3\sin 2\sigma+\frac{44}{27}q^4\sin 4\sigma+\cdots$$

$$b_7=\frac{1}{18}q^3+\frac{1}{12}q^4\cos 2\sigma+\cdots,\ \text{и т. д.} \tag{15}$$

Второе решение получается путем замены σ на $-\sigma$. Полное решение будет:

$$u=A\,\Lambda(z,\ \sigma,\ q)+B\,\Delta(z,-\sigma,\ q). \tag{16}$$

Решение будет чисто периодическим, если $\mu=0$. Обозначим через $\sigma=s$ значение σ, соответствующее $\mu=0$.

Общее решение (16) преобразуется в этом случае в:

$$u=A\,\Delta(z,\ s,\ q)+B\,\Lambda_1(z,\ s,\ q), \tag{17}$$

где $\Lambda_1(z, s, q)$ означаем функцию эллиптического цилиндра второго рода (см. III, 4b). В нашем случае $G(\eta)$ должна быть чисто периодической функцией, следовательно имеем:

$$G(\eta)=\Lambda\left(\eta-\frac{\pi}{2},\ s, q\right),$$

так как функция второго рода не периодическая.

Далее:

$$F(\xi)=A\Lambda\left[-i\xi-\frac{\pi}{2},\ s, q\right]+B\Lambda_1\left[-i\xi-\frac{\pi}{2},\ s, q\right]=\\=AF_1(\xi)+BF_2(\xi),$$

где, для сокращения, положено:

$$\Lambda\left[-i\xi-\frac{\pi}{2},\ s, q\right]=F_1(\xi)$$

$$\Lambda_1\left[-i\xi_1-\frac{\pi}{2},\ s, q\right]=F_2(\xi).$$

Окончательно

$$w_1 = G(\eta)\left\{AF_1(\xi)+BF_2(\xi)\right\}. \tag{18}$$

Для получения решения уравнения (5) полагаем: $w_2=P(\xi)Q(\eta)$, где $P(\xi)$ является функцией только ξ, а $Q(\eta)$ функцией только η. Полагаем также:

$$a=N+\frac{1}{2}c^2k^2, \quad q=\frac{1}{32}c^2k^2$$

[взамен (9)], и получаем

$$P(\xi)=C\Lambda(i\xi, s, q)+D\Lambda_1(i\xi, s, q)$$

$$Q(\eta)=\Lambda(\eta, s, q),$$

так как $Q(\eta)$ должна быть периодической функцией. Полагаем для сокращения:

$$\Lambda(i\xi, s, q)=P_1(\xi)$$

$$\Lambda_1(i\xi, s, q)=P_2(\xi)$$

и получим:

$$w_2=Q(\eta)\cdot\{CP_1(\xi)+DP_2(\xi)\}. \tag{19}$$

Окончательным решением является:

$$w=[G(\eta)\{AF_1(\xi)+BF_2(\xi)\}+$$

$$+Q(\eta)\{CP_1(\xi)+DP_2(\xi)\}]\cos(\omega t+\varepsilon). \tag{20}$$

b) Случай сплошной эллиптической пластинки

Решение (20), полученное для уравнения (1) в эллиптических координатах, мы применим к частному случаю сплошного диска. Пусть $\xi=\xi_0$ соответствует контуру эллипса; мы получаем тогда при жестком закреплении контура граничные условия: при

$$\xi=\xi_0, \quad w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial \xi}=0.$$

Следовательно, из (20) имеем:

$$\left.\begin{aligned} G(\eta)\{AF_1(\xi_0)+BF_2(\xi_0)\}+Q(\eta)\{CP_1(\xi_0)+DP_2(\xi_0)\}=0\\ G(\eta)\{AF_1'(\xi_0)+BF_2'(\xi_0)\}+Q(\eta)\{CP_1'(\xi_0)+DP_2'(\xi_0)\}=0\end{aligned}\right\}, \tag{21}$$

где $F_1'(\xi_0),\ldots$ значения $\frac{\partial F_1(\xi)}{\partial \xi},\ldots$ при $\xi=\xi_0$.

Так как уравнение (21) должно выполняться при всех значениях μ, то коэффициенты при G и Q должны обращаться в нуль. Исключая A, B, C и D, мы получаем два уравнения:

$$\begin{vmatrix} F_1(\xi_0), & F_2(\xi_0)\\ F_1'(\xi_0), & F_2'(\xi_0)\end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix} P_1(\xi_0) & P_2(\xi_0)\\ P_1'(\xi_0) & P_2'(\xi_0)\end{vmatrix}=0. \tag{22}$$

Эти уравнения дают два типа вибраций.

c) Случай эллиптического кольца

Пусть границами будут два конфокальных эллипса $\xi=\xi_0$ и $\xi=\xi_1$, мы получаем $w=0$ и $\frac{\partial w}{\partial \xi}=0$ для этих значений ξ. Следовательно, к уравнениям (22) мы должны добавить еще следующие соотношения:

$$G(\eta)\{AF_1(\xi_1)+BF_2(\xi_1)\}+Q(\eta)\{CP_1(\xi_1)+DP_2(\xi_1)\}=0,$$

$$G(\eta)\{AF_1'(\xi_1)+BF_2'(\xi_1)\}+Q(\eta)\{CP_1'(\xi_1)+DP_2'(\xi_1)\}=0.$$

Эти четыре уравнения справедливы при любых значениях η. Поэтому восемь коэффициентов при $G(\eta)$ и $Q(\eta)$ должны исчезать.

Исключая A, B, C и D, мы приходим к уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} \begin{Vmatrix} F_1(\xi_0) & F_2(\xi_0) & F_1(\xi_1) & F_2(\xi_1)\\ F_1'(\xi_0) & F_2'(\xi_0) & F_1'(\xi_1) & F_2'(\xi_1)\end{Vmatrix}=0\\ \begin{Vmatrix} P_1(\xi_0) & P_2(\xi_0) & P_1(\xi_1) & P_2(\xi_1)\\ P_1'(\xi_0) & P_2'(\xi_0) & P_1'(\xi_1) & P_2'(\xi_1)\end{Vmatrix}=0.\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

(23) определяет частоты. Расчеты проще всего провести при помощи формул (12), (13), (14) и (15).

d) Важный специальный случай

Имеется бесконечное множество значений σ, соответствующих $\mu=0(s)$. И соответственно каждому значению s мы получим множество уравнений частот типа (22), (23).

Так как:

$$q=\pm\frac{c^2}{32}\sqrt{\frac{3\rho(1-\sigma_1^2)}{Eh^2}}\cdot P, \tag{24}$$

то очевидно, что для обычных материалов q — небольшая величина, поэтому в приближенных подсчетах степени q выше второй могут быть опущены. В этом случае мы имеем $\mu=q\sin 2\sigma$ и для $\mu=0$ мы получаем $s=0$ или $\frac{\pi}{2}$. Решения $\Lambda(z, s, q)$ и $\Lambda_1(z, s, q)$ принимают простую форму.

Отбрасывая степени q выше второй, имеем:

$$\Lambda(z, o, q)=\sin z+(q+q^2)\sin 3z+\frac{1}{2}q^2\sin 5z$$

$$\Lambda_1(z, o, q)=-8qz\Lambda(z, o, q)+\cos z+q\cos 3z+$$

$$+q^2\left(\frac{1}{3}\cos 5z-5\cos 3z\right)$$

$$\Lambda(iz,\ o,\ q) = -i\left[\operatorname{sh} z + (q+q^2)\operatorname{sh} 3z + \frac{1}{2}q^2 \operatorname{sh} 5z\right]$$

$$\Lambda_1(iz,\ o,\ q) = -8qiz\cdot\Lambda(iz,\ o,\ q) + \operatorname{ch} z + q\operatorname{ch} 3z + $$
$$+ q^2\left(\frac{1}{3}\operatorname{ch} 5z - 5\operatorname{ch} 3z\right).$$

В первом приближении имеем:

$$\Lambda\ (z,\ o,\ q) = \sin z + q\sin 3z$$

$$\Lambda_1(z,\ o,\ q) = -8qz\sin z + \cos z + q\cos 3z$$

$$\Lambda\ (iz,\ o,\ q) = -i(\operatorname{sh} z + q\operatorname{sh} 3z)$$

$$\Lambda_1(iz,\ o,\ q) = -8qz\operatorname{sh} z + \operatorname{ch} z + q\operatorname{ch} 3z.$$

Рассмотрим теперь уравнение частот. Простейший случай для сплошного диска $\xi = \xi_0$ определяется уравнением:

$$P_1(\xi_0)\cdot P_2'(\xi_0) - P_1'(\xi_0)\cdot P_2(\xi_0) = 0.$$

Подставляя вместо $P_1(\xi_0)$, $P_1'(\xi_0)$, $P_2(\xi_0)$, $P_2'(\xi_0)$ их значения сверху и удерживая первые степени q, мы получим:

$$q = \frac{1}{4(1 - 2\operatorname{ch} 2\xi_0)}. \tag{25}$$

Следовательно, для n (частоты) из (24) и (25) имеем:

$$n = \frac{4h}{\pi c^2}\sqrt{\frac{E}{3\rho(1-\sigma_1^2)}\,\frac{1}{4\operatorname{ch}^2\xi_0 - 3}}. \tag{26}$$

В заключение приведем численные значения для n, рассчитанные для следующих данных:

Материал	Плотность ρ	Модуль Юнга E	Отношение Пауссона σ_1	Толщина $2h$	Фокальное расстояние $2c$	Эксцентриситет e	Частота n
Сталь	7,70	$2{,}14\cdot10^6$	0,31	0,2	2,00	0,5	314
„	7,70	$2{,}14\cdot10^6$	0,31	0,2	2,00	0,3	124
Катаное железо	7,85	$1{,}96\cdot10^6$	0,28	0,2	2,00	0,5	295
„	7,85	$1{,}96\cdot10^6$	0,28	0,2	2,00	0,3	116
Медь	8,90	$1{,}23\cdot10^6$	0,39	0,2	2,00	0,5	229
„	8,90	$1{,}23\cdot10^6$	0,39	0,2	2,00	0,3	90
Стекло	2,60	$6{,}77\cdot10^5$	0,25	0,2	2,00	0,5	298
„	2,60	$6{,}77\cdot10^5$	0,25	0,2	2,00	0,3	118

7. Теория волновых фильтров с непрерывными элементами

Рассмотрим распространение электромагнитных колебаний вдоль провода с периодической структурой, рассматриваемого как волновой фильтр (сеть) (*136*).

Электрический провод обладает следующими постоянными
L_s — последовательная самоиндукция на единицу длины.
C_p — параллельная емкость на единицу длины.
L_p — параллельная самоиндукция на единицу длины.
C_s — последовательная емкость на единицу длины.

В большинстве учебников рассматривают только первые две величины. Потерями провода мы пренебрегаем. На основании телеграфного уравнения легко показать, что ток I в проводе с этими постоянными удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d^2I}{dx^2} + \frac{\left(\omega^2L_s - \frac{1}{C_s}\right)\left(\omega^2C_p - \frac{1}{L_p}\right)}{\omega^2}I = 0, \tag{1}$$

пока ток гармонически меняется в зависимости от времени с частотой ω. Так как коэффициент при I является периодической функцией, то мы получаем дифференциальное уравнение типа Хилла, решение которого гласит:

$$I = e^{\mu x}\cdot I_0(x), \tag{2}$$

при чем $I_0(x)$ является периодической функцией x (теорема Флоке, II, 2). Одновременно теорема Гаупта (II, 2b) указывает, что в функции от постоянных провода имеется в общем бесконечно большое количество областей пропускания и задерживания. В области пропускания μ — чисто мнимое; в области задерживания — комплексное или реальное.

Как особый случай, мы выберем:

$$-a \leqslant x \leqslant 0:\ \frac{\left(\omega^2L_s - \frac{1}{C_s}\right)\left(\omega^2C_p - \frac{1}{L_p}\right)}{\omega^2} = A^2;$$

$$0 \leqslant x \leqslant b:\ \frac{\left(\omega^2L_s - \frac{1}{C_s}\right)\left(\omega^2C_p - \frac{1}{L_p}\right)}{\omega^2} = B^2,$$

при чем для всех других значений x это должно повторяться В отличие от III, 3d, I в точках скачкообразного изменения постоянных провода вместе с своей первой производной не непрерывно, а удовлетворяет условиям:

$$I_{\mathrm{I}} = I_{\mathrm{II}}$$

$$\left(\frac{dI}{dx}\right)_{\mathrm{I}} = \frac{-\frac{1}{L_{p\mathrm{I}}} + \omega^2C_{p\mathrm{I}}}{-\frac{1}{L_{p\mathrm{II}}} + \omega^2C_{p\mathrm{II}}}\cdot\left(\frac{dI}{dx}\right)_{\mathrm{II}} = \frac{1}{k}\left(\frac{dI}{dx}\right)_{\mathrm{II}}.$$

Индексы I и II характеризуют значения рассматриваемых величин непосредственно до и после скачка. При помощи вышеуказанных условий можно для μ из (2) получить простейшим путем уравнение фильтра:

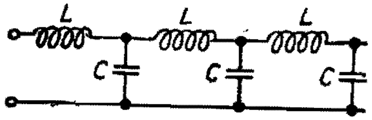
$$\operatorname{ch}\mu(a+b)=\cos Aa\cdot\cos bB-\frac{1}{2}\left(\frac{kB}{A}+\frac{A}{kB}\right)\cdot\sin Aa\cdot\sin Bb. \qquad (3)$$

a) Исследование уравнения фильтра: классические формулы для цепочечных проводников как частные случаи

Если выбрать $a=b$ и $k=1$, то (3) переходит в уравнение (2) раздела III, 3d. Можно также найти зависимость $\operatorname{ch} 2a\mu$ от aA или aB из рис. 4, III, 3d.

В электротехнике употребляются так называемые цепочечные проводники или волновые фильтры, которые применяются для разделения электромагнитных волн различной частоты.

От рассмотренных в предыдущем разделе проводников с периодической структурой цепочечные проводники отличаются следующими особенностями:



Фиг. 9.

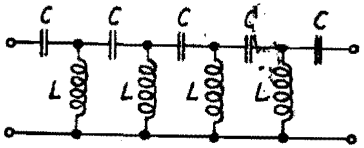
a) Провод имеет на данном отрезке или только самоиндукцию или только емкость.

b) Длина ячейки (период) проводника очень мала по сравнению с длиной волны наблюдаемых электромагнитных колебаний.

Последнее условие в нашей записи приводит к $aA \ll 1$ и $aB \ll 1$.

Четыре известных в литературе основных типа цепочечных проводников образуются из (3) при условиях (a) и (b) следующим образом:

Для цепочечного проводника с областью пропускания низкой частоты (фиг. 9) мы полагаем:



Фиг. 10.

в интервале I: $C_s=\infty$; $L_p=\infty$; $L_s=\frac{L}{\varepsilon}$; $C_p=\varepsilon C$; $a\sqrt{L_sC_p}=\frac{\varepsilon}{\omega_0}$;

в интервале II: $C_s=\infty$; $L_p=\infty$; $L_s=\varepsilon L$; $C_p=\frac{C}{\varepsilon}$; $a\sqrt{L_sC_p}=\frac{\varepsilon}{\omega_0}$.

Отсюда из (3) для $\varepsilon\to 0$, имеем:

$$\operatorname{ch}2a\mu=1-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2;\quad \frac{1}{\omega_0}=\sqrt{LC}$$

известное уравнение для этого цепочечного проводника.

В случае цепочечного проводника с областью пропускания высокой частоты (фиг. 10) мы полагаем:

в интервале I: $L_s=0$; $C_p=0$; $L_p=\varepsilon L$; $C_s=\frac{C}{\varepsilon}$; $\frac{a}{\sqrt{L_pC_s}}=\varepsilon\omega_0$;

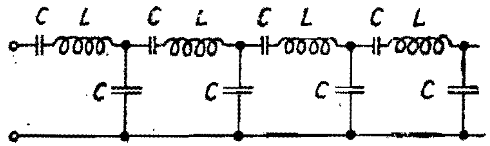
в интервале II: $L_s=0$; $C_p=0$; $L_p=\frac{L}{\varepsilon}$; $C_s=\varepsilon C$; $\frac{a}{\sqrt{L_pC_s}}=\varepsilon\omega_0$.

Отсюда получаем (3) для $\varepsilon\to 0$

$$\operatorname{ch}2a\mu=1-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2;\quad \frac{1}{\omega_0}=\sqrt{LC}.$$

Фильтры первого рода (фиг. 11) получаются из (3) в предположении:

в интервале I: $L_p=\infty$; $C_s=\varepsilon c$; $L_s=\frac{L}{\varepsilon}$; $C_p=\varepsilon C$; $Aa=\varepsilon\left(-\frac{C}{c}+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}$,



Фиг. 11.

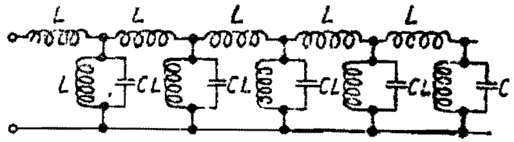
в интервале II: $L_s=\infty$; $C_s=\frac{c}{\varepsilon}$; $L_s=\varepsilon L$; $C_p=\frac{C}{\varepsilon}$; $Ba=\varepsilon\left(-\frac{C}{c}+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}$,

и из (3) при $\varepsilon\to 0$ имеем:

$$\operatorname{ch}2a\mu=1+\frac{1}{2}\frac{C}{c}-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2;\quad \frac{1}{\omega_0}=\sqrt{LC}.$$

Фильтры второго рода (фиг. 12) получаются в предположении:

в интервале I: $C_s=\infty$; $L_s=\varepsilon L$; $L_p=\varepsilon l$; $C_p=\frac{C}{\varepsilon}$; $Aa=\varepsilon\left(-\frac{L}{l}+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}$;



Фиг. 12.

в интервале II: $C_s=\infty$; $L_s=\frac{L}{\varepsilon}$; $L_p=\frac{l}{\varepsilon}$; $C_p=\varepsilon C$; $Ba=\varepsilon\left(-\frac{L}{l}+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

и из (3) при $\varepsilon\to 0$:

$$\operatorname{ch}2a\mu=1+\frac{1}{2}\frac{L}{l}-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2;\quad \frac{1}{\omega_0}=\sqrt{LC}.$$

IX. Таблицы функций эллиптического цилиндра Е. Л. Айнса

Прилагаемые ниже таблицы составлены Айнсом (частично Гольдштейном) и опубликованы в журнале: „Proceedings of the Royal Society of Edinburgh". 1931—1932. Vol. L II — part IV — (Nos 22, 23).

1. Определения и обозначения

Уравнение Матье Айнс пишет в форме:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+(a-2\theta\cos 2x)\,y=0.$$

Присоединенное уравнение, получаемое заменой x на ix, пишется в виде:

$$\frac{d^2y}{dx^2}-(a-2\,\theta\cos 2x)\,y=0.$$

Для функций Матье приняты обозначения:

$$ce_{2n}(x,\ \Theta)=\sum_{r=0}^{\infty}A_{2r}(\theta)\cdot\cos 2rx,$$

$$se_{2n+1}(x,\ \Theta)=\sum_{r=0}^{\infty}B_{2r+1}(\theta)\cdot\sin(2r+1)\,x,$$

$$ce_{2n+1}(x,\ \Theta)=\sum_{r=0}^{\infty}A_{2r+1}(\theta)\cdot\cos(2r+1)\,x,$$

$$se_{2n+2}(x,\theta)=\sum_{r=1}^{\infty}B_{2r}(\theta)\cdot\sin 2rx,$$

где n — положительное целое число или нуль. Соответствующие собственные числа будут:

$$a_{2n}(\theta),\quad b_{2n+1}(\theta),\quad a_{2n+1}(\theta),\quad b_{2n+2}(\theta).$$

Таким образом функции определены с точностью до постоянного множителя. Для полного определения функции необходимо ввести дополнительные условия. При составлении таблиц было принято условие:

$$\int_0^{2\pi}y^2dx=\pi,$$

кроме того при $x=0$

$$ce_m(x,\ \theta)>0\ \ (m=0,\ 1,\ 2\ldots);\ \ \frac{d}{dx}se_m(x,\ \theta)>0\,(m=1,\ 2\ldots).$$

Заменив θ на $-\theta$ и x на $\frac{1}{2}\pi-x$, мы не изменим уравнения Матье.

Таблицы функций эллиптического цилиндра составлены для положительных значений θ; их значения, соответствующие отрицательным значениям θ, определяются из соотношений:

$$ce_{2n}(x,-\theta)=(-1)^n ce_{2n}\left(\frac{\pi}{2}-x,\ \theta\right);$$

$$se_{2n+2}\ (x,\ -\theta)=(-1)^n se_{2n+2}\left(\frac{\pi}{2}-x,\ \theta\right);$$

$$ce_{2n+1}(x,\ -\theta)=(-1)^n se_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}-x,\ \theta\right);$$

$$se_{2n+1}(x,\ -\theta)=(-1)^n ce_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}-x,\ \theta\right).$$

Соответствующие собственные числа будут:

$$a_{2n}(-\theta)=a_{2n}(\theta);\qquad b_{2n+2}(-\theta)=b_{2n+2}(\theta);$$

$$a_{2n+1}(-\theta)=b_{2n+1}(\theta);\qquad b_{2n+1}(-\theta)=a_{2n+1}(\theta).$$

Расчет таблиц проводился по методу, указанному в общих чертах в разделе III, 2d.

2. Пояснение к таблицам

Таблица 1 содержит семизначные значения собственных чисел от a_0 до a_5 и от b_1 до b_6 (в принятых в этой книге обозначениях от λ_{c_0} до λ_{c_5} и λ_{s_1} до λ_{s_6}), для сорока значений θ (в принятых обозначениях h^2): $\theta=0,\ 1,\ 2\ldots\ 20\ldots\ 30\ldots\ 40$. Таблицы II — XIII содержат семизначные значения коэффициентов двенадцати функций: $ce_0(x,\ \theta)$, $se_1(x,\ \theta),\ldots$, $ce_5(x,\ \theta)$, $se_6(x,\ \theta)$.

Таблицы XIV — XXV содержат пятизначные значения двенадцати функций $ce_0(x,\ \theta)$, $se_1(x,\ \theta)\ldots$ $ce_5(x,\ \theta)$, $se_6(x,\ \theta)$, для десяти значений θ;

$$\theta=1,\ 2\ldots\ 10.$$

Каждая функция занимает четыре страницы. Первая страница дает значение функций от $x=0°$ до $x=45°$ при $\theta=1,2\ldots 5$, через 1°. Вторая страница — от $x=45°$ до $x=90°$. Третья и четвертая страницы дают соответствующие значения для $\theta=6,\ 7\ldots\ 10$.

Вторые разности Δ^2 напечатаны с целью облегчить интерполирование по x при помощи формулы Лапласа-Эверетта.

Таблица I. Собственные числа

θ	a_0	b_1	a_1	b_2	a_2	b_3
0	0·0000000	1·0000000	1·0000000	4·0000000	4·0000000	9·0000000
1	−0·4551386	−0·1102488	1·8591081	3·9170248	4·3713010	9·0477393
2	−1·5139569	−1·3906765	2·3791999	3·6722327	5·1726651	9·1406277
3	−2·8343919	−2·7853797	2·5190391	3·2769220	6·0451969	9·2231328
4	−4·2805188	−4·2591829	2·3180082	2·7468810	6·8290748	9·2614461
5	−5·8000460	−5·7900806	1·8581875	2·0994604	7·4491097	9·2363277
6	−7·3688308	−7·3639110	1·2142782	1·3513812	7·8700645	9·1379058
7	−8·9737425	−8·9712024	0·4383491	0·5 75454	8·0866231	8·9623855
8	−10·6067292	−10·6053681	−0·4359436	−0·3893618	8·1152388	8·7099144
9	−12·2624142	−12·2616617	−1·38670 6	−1·3588 01	7·9828432	8·3831192
10	−13·9369800	−13·9365525	−2·3991424	−2·3821582	7·7173698	7·9860691
12	−17·3320660	−17·3319184	−4·5701329	−4·5635399	6·8787369	7·0005668
14	−20·7760553	−20·7760004	−6·8934005	−6·8907007	5·7363123	5·7926295
16	−24·2586795	−24·2586578	−9·3352671	−9·3341097	4·3712326	4·3978962
18	−27·7728422	−27·7728332	−11·8732425	−11·8727265	2·8330567	2·8459917
20	−31·3133901	−31·3133862	−14·4913014	−14·4910633	1·1542829	1·1607057
24	−38·4589732	−38·4589724	−19·9225956	−19·9225403	−2·5397657	−2·5380779
28	−45·6733696	−45·6733694	−25·5617471	−25·5617329	−6·5880630	−6·5875850
32	−52·9422230	−52·9422229	−31·365 544	−31·365 505	−10·9143534	−10·9 42090
36	−60·2555679	−60·2555679	−37·3026391	−37·3026380	−15·4667703	−15·4667243
40	−67·6061522	−67·6061522	−43·3522753	−43·3522749	−20·2079408	−20·2079254

θ	a_3	b_4	a_4	b_5	a_5	b_6
0	9·0000000	16·0000000	16·0000000	25·0000000	25·0000000	36·0000000
1	9·0783688	16·0329701	16·0338323	25·0208408	25·0208543	36·0142899
2	9·3703225	16·1276880	16·1412038	25·0833490	25·0837778	36·0572070
3	9·9 55063	16·2727012	16·3387207	25·1870798	25·1902855	36·1288712
4	10·6710271	16·4520353	16·6498 89	25·3305449	25·3437576	36·2294114
5	11·5488320	16·6482199	17·0965817	25·5108160	25·5499717	36·3588668
6	12·4656007	16·8446016	17·6887830	25·7234107	25·8172720	36·5170667
7	13·3584213	17·0266608	18·4166087	25·9624472	26· 56 202	36·7035027
8	14·1818804	17·1825278	19·2527051	26·2209995	26·5777533	36·9172 31
9	14·9036797	17·3030110	20·1609264	26·4915472	27·09 8661	37·1566950
10	15·5027844	17·3813807	21·1046337	26·7664264	27·7037687	37·4198588
12	16·3015349	17·3952497	22·9721275	27·3000124	29·2080550	38·0060087
14	16·5985405	17·2071153	24·65 5951	27·7697667	31·0000508	38·6484719
16	16·4868843	16·8 86837	26·0086783	28·1363559	32·9308951	39·3 50108
18	16·0619754	16·2420804	26·9877664	28·3738582	34·8530587	39·9723511
20	15·3958109	15·4939776	27·5945782	28·4682213	36·6449897	40·5896641
24	13·5228427	13·5527965	27·8854408	28·2153594	39·5125519	41·6057099
28	11·1110798	11·1206227	27·2833082	27·4057488	41·2349503	42·2248415
32	8·2914962	8·2946721	26·0624482	26·1083526	41·9535112	42·3939428
36	5·1456363	5·1467375	24·3785094	24·3960665	41·9266646	42·1183561
40	1·7296491	1·7300456	22·3252763	22·3321485	41·3497544	41·4330052

Таблица II. Коэффициенты $ce_0(x, \theta)$

$$ce_0(x,\theta)=A_0(\theta)+\sum_{r=1}^{\infty}A_{2r}(\theta)\cos 2rx$$

θ =	1	2	3	4	5
A_0	0·6729897	0·6225002	0·5856071	0·5597172	0·5406124
A_2	−·3063036	−4712192	−5532800	−5989700	−6271154
A_4	186456	541409	892299	1205112	1479271
A_6	−5117	−28911	−69171	−120374	−178481
A_8	79	883	3109	7068	12829
A_{10}	−1	−17	−91	−271	−607
A_{12}			2	7	20
A_{14}					−1

θ =	6	7	8	9	10
A_0	0·5257758	0·5137771	0·5037681	0·4952174	0·4877754
A_2	−·6457255	−·6586433	−·6679 64	−·6747290	−·6798115
A_4	·1719724	·1931700	·2119732	·2287566	·2438259
A_6	−240734	−305248	−370727	−436280	−501295
A_8	20334	29463	40065	51981	65057
A_{10}	−1139	−1898	−2909	−4187	−5742
A_{12}	45	87	151	242	365
A_{14}	−1	−3	−6	−10	−17
A_{16}					1

θ =	12	14	16	18	20
A_0	0·4753235	0·4651824	0·4566602	0·4493312	0·4429163
A_2	−·6865282	−·6903326	−·6923733	−·6932892	−·6934605
A_4	·2697750	·2913293	·3095268	·325 024	·3385895
A_6	−628185	−749490	−864481	−973029	−·1075304
A_8	94116	126212	160511	196354	233222
A_{10}	−9700	−14776	−20926	−28079	−36156
A_{12}	725	1262	2004	2968	4167
A_{14}	−41	−82	−146	−240	−369
A_{16}	2	4	8	15	26
A_{18}					−1

θ =	24	28	32	36	40
A_0	0·4321113	0·4232506	0·4157666	0·4093056	0·4036330
A_2	−·6924398	−·6904030	−·6878627	−·6850817	−·6822019
A_4	·3607893	·3783073	·3924804	·4041753	·4139802
A_6	−·1262358	−·1428645	−·1577144	−·1710465	−·1830805
A_8	308518	384150	458781	531631	602265
A_{10}	−54743	−76033	−99444	−124482	−150738
A_{12}	7300	11422	16508	22506	29352
A_{14}	−754	−1338	−2151	−3214	−4540
A_{16}	62	125	225	370	568
A_{18}	−4	−10	−19	−35	−59
A_{20}		1	1	3	5

Таблица III. Коэффициенты $se_1(x, \theta)$

$$se_1(x, \theta)=\sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}(\theta) \sin (2r+1)x$$

$\theta=$	1	2	3	4	5
B_1	0·9939680	0·9813463	0·9670314	0·9530304	0.9400190
B_3	−·1095838	−·1916945	−·2531623	−·3000099	−·3365420
B_5	43676	145713	275065	414411	554775
B_7	−890	−5789	−15968	−31234	−50896
B_9	11	141	572	1468	2939
B_{11}		−2	−14	−47	−116
B_{13}				1	3

$\theta=$	6	7	8	9	10
B_1	0·9281398	0·9173411	0.9075112	0·8985300	0·8902865
B_3	−·3656733	−·3893723	−·4089890	−·4254701	−·4394946
B_5	691678	823001	947863	·1066035	·1177626
B_7	−74168	100323	−128735	−158879	−190324
B_9	5052	7838	11303	15433	20206
B_{11}	−237	−423	−689	−1046	−1504
B_{13}	8	17	31	52	82
B_{15}			−1	−2	−3

$\theta=$	12	14	16	18	20
B_1	0·8756412	0·8629656	0 8518254	0·8419080	0·8329838
B_3	−·4620407	−·4793 58	−·4929225	−·5038741	−·5128425
B_5	·1382270	·1564706	·1727959	·1874742	·2007372
B_7	−255772	−322984	−390583	−457672	−523670
B_9	31549	45045	60392	77302	95515
B_{11}	−2752	−4481	−6714	−9458	−12710
B_{13}	178	332	559	871	1279
B_{15}	−9	−19	−36	−62	−100
B_{17}		1	2	3	6

$\theta=$	24	28	32	36	40
B_1	0·8174660	0·8043114	0·7929177	0.7828839	0·7739305
B_3	−·5265493	−·5364002	−·5436993	−·5492271	−·5534793
B_5	·2237628	·2430744	·2595180	·2737005	·2860676
B_7	−651072	−771316	−884072	−989532	−·1088111
B_9	134958	177223	221205	266102	311335
B_{11}	−20676	−30449	−41823	−54589	−68545
B_{13}	2418	4026	6133	8748	11867
B_{15}	−222	−420	−714	−1119	−1648
B_{17}	16	35	67	116	187
B_{19}	−1	−2	−5	−10	−18
B_{21}				1	1

Таблица IV. Коэффициенты $ce_1(x, \theta)$

$$ce_1(x, \theta)=\sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}(\theta) \cos (2r+1)x$$

$\theta=$	1	2	3	4	5
A_1	0·9902021	0·9547182	0·8950977	0·8264490	0·7624637
A_3	−·1395115	−·2963446	−·4418682	−·5541324	−·6315963
A_5	60343	263009	594792	992280	·1396848
A_7	−1280	−11295	−38484	−85397	−149156
A_9	16	287	1473	4349	9448
A_{11}		−5	−37	−147	−397
A_{13}			1	4	12

$\theta=$	6	7	8	9	10
A_1	0·7081680	0·6633854	0·6264179	0·5955405	0·5693674
A_3	−·6828771	−·7166126	−·7388555	−·7534713	−·7629036
A_5	·1779473	·2130985	·2450570	·2740242	·3002772
A_7	−225569	−311091	−403013	−499279	−598302
A_9	17027	27168	39849	54985	72447
A_{11}	−854	−1581	−2633	−4059	−5899
A_{13}	31	66	125	215	345
A_{15}	−1	−2	−4	−9	−15

$\theta=$	12	14	16	18	20
A_1	0·5272423	0·4945478	0·4681857	0·4463064	0·4277390
A_3	−·7719764	−·7733810	−·7706122	−·7654959	−·7590507
A_5	·3457429	·3834274	·4149006	·4413814	·4638155
A_7	−799956	−·1001051	−·1197455	−·1386799	−·1567831
A_9	113717	162306	216859	276129	339026
A_{11}	−10940	−17924	−26920	−37922	−50870
A_{13}	759	1434	2430	3803	5596
A_{15}	−40	−87	−167	−290	−470
A_{17}	2	4	9	17	31
A_{19}				−1	−2

$\theta=$	24	28	32	36	40
A_1	0·3976564	0·3740668	0·3548770	0·3388395	0·3251558
A_3	−·7443232	−·7289191	−·7138036	−·6993518	−·6856909
A_5	·4993336	·5256732	·5455227	·5606560	·5722811
A_7	−·1903168	−·2203293	−·2470862	−·2709356	−·2922270
A_9	472135	610459	750122	883567	·1024146
A_{11}	−82209	−119979	−163126	−210638	−261602
A_{13}	10576	17552	26589	37673	50728
A_{15}	−1044	−1981	−3361	−5251	−7701
A_{17}	82	178	339	585	938
A_{19}	−5	−13	−28	−53	−94
A_{21}		1	2	4	8

Таблица V. Коэффициенты $se_2(x, \theta)$

$$se_2(x,\theta)=\sum_{r=1}^{\infty} B_{2r}(\theta)\sin 2rx.$$

θ=	1	2	3	4	5
B_2	0·9965719	0·9867860	0·9719337	0·9536390	0·9334294
B_4	−826908	−·1617181	−·2342613	−·2987558	−·3548039
B_6	25787	100255	215746	362225	529637
B_8	−429	−3326	−10675	−23718	−42959
B_{10}	4	69	331	977	2198
B_{12}		−1	−7	−28	−77
B_{14}					2

θ=	6	7	8	9	10
B_2	0·9125038	0·8916871	0·8714883	0·8521861	0·8339074
B_4	−·4028125	−·4436086	−·4781597	−·5074115	−·5322129
B_6	709372	894771	·1081032	·1264872	·1444148
B_8	−68337	−99438	−135661	−176343	−220822
B_{10}	4167	7021	10859	15745	21714
B_{12}	−175	−343	−603	−978	−1488
B_{14}	5	12	25	45	75
B_{16}			−1	−2	−3

θ=	12	14	16	18	20
B_2	0·8004987	0·7710182	0·7449519	0·7217741	0·7010247
B_4	−·5712585	−·5997806	−·6208294	−·6364735	−·6481346
B_6	·1784261	·2096531	·2380581	·2637954	·2870910
B_8	−318744	−425171	−536801	−651158	−766418
B_{10}	36924	56376	79784	106773	136938
B_{12}	−2997	−5265	−8394	−12455	−17491
B_{14}	180	365	657	1085	1674
B_{16}	−8	−19	−40	−73	−124
B_{18}		1	2	4	7

θ=	24	28	32	36	40
B_2	0·6653541	0·6356586	0·6104189	0·5885991	0·5694704
B_4	−·6632067	−·6711132	−·6746112	−·6752971	−·6741430
B_6	·3273154	·3605067	·3881142	·4112652	·4308276
B_8	−994729	−·1215088	−·1424317	−·1621148	−·1805357
B_{10}	205187	281554	363551	449196	536955
B_{12}	−30543	−47497	−68117	−92070	−118984
B_{14}	3428	6080	9741	14485	20346
B_{16}	−300	−609	−1096	−1800	−2759
B_{18}	21	49	99	181	303
B_{20}	−1	−3	−7	−15	−28
B_{22}					2

Таблица VI. Коэффициенты $ce_2(x, \theta)$

$$ce_2(x,\theta)=A_0(\theta)+\sum_{r=1}^{\infty} A_{2r}(\theta)\cos 2rx$$

θ=	1	2	3	4	5
A_0	0·2169279	0·3347511	0·3935458	0·4242881	0·4387372
A_2	·9482573	·8657777	·7930206	·7243738	·6536403
A_4	−817670	−·1618686	−·2464638	−·3362493	−·4265789
A_6	25866	105249	248124	465555	758857
A_8	−434	−3581	−12865	−32671	−67418
A_{10}	5	76	411	1404	3649
A_{12}		−1	−9	−41	−134
A_{14}				1	4

θ=	6	7	8	9	10
A_0	0·4421011	0·4380469	0·4297751	0·4197503	0·4095096
A_2	·5798941	5060457	·4359660	·3723112	·3160337
A_4	−·5101644	−·5806626	−·6352872	−·6747388	−·7015377
A_6	·1113732	·1503831	·1901700	·2287428	·2650241
A_8	−119889	−190090	−275685	−373416	−480201
A_{10}	7830	14534	24127	36762	52455
A_{12}	−346	−750	−1424	−2440	−3864
A_{14}	11	28	61	117	206
A_{16}		−1	−2	−4	−8

θ=	12	14	16	18	20
A_0	0·3910054	0·3760320	0·3640737	0·3543635	0·3462987
A_2	·2241353	·1540741	·0994657	·0557740	·0199863
A_4	−·7282419	−·7329554	−·7258396	−·7123429	−·6954411
A_6	·3294052	·3832706	·4280731	·4653026	·4962297
A_8	−711495	−955576	−·1203744	−·1450274	−·1691330
A_{10}	92738	144105	205379	275241	352345
A_{12}	−8161	−14701	−23763	−35520	−50057
A_{14}	519	1086	1995	3332	5180
A_{16}	−25	−61	−127	−238	−409
A_{18}	1	3	6	13	25
A_{20}				−1	−1

θ=	24	28	32	36	40
A_0	0·3335412	0·3237374	0·3158373	0·3092551	0·3036350
A_2	−·0352965	−·0761715	−·1077238	−·1328661	−·1533959
A_4	−·6574644	−·6186709	−·5814674	−·5466638	−·5144349
A_6	·5431814	·5752635	·5967806	6106922	·6190617
A_8	−·2147890	−·2563062	−·2934569	−·3264017	−·3554696
A_{10}	523191	708851	902235	·1098103	·1292724
A_{12}	−87438	−135333	−192643	−258049	−330197
A_{14}	10691	18987	30362	44960	62801
A_{16}	−999	−2043	−3683	−6048	−9252
A_{18}	74	174	355	647	1087
A_{20}	−4	−12	−28	−56	−104
A_{22}		1	2	4	8

Таблица VII. Коэффициенты $se_3(x, \theta)$

$$se_3(x,\theta)=\sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}(\theta)\sin(2r+1)x$$

θ =	1	2	3	4	5
B_1	0·1096425	0·1920125	0·2538421	0.3009313	0·3373722
B_3	·9920165	·9735636	.9496345	·9224633	·8931139
B_5	— 622843	— ·1235575	— ·1832105	— ·2406377	— ·2951587
B_7	15595	62083	138616	243591	374432
B_9	— 217	— 1729	— 5800	— 13609	— 26170
B_{11}	2	31	156	488	1172
B_{13}			— 3	— 12	— 37
B_{15}					1

θ =	6	7	8	9	10
B_1	0·3659351	0·3885254	0·4065020	0·4208701	0·4323950
B_3	·8622593	·8304668	·7982640	·7661295	·7344692
B_5	— ·3461167	— ·3929880	— ·4354476	— ·4733824	— ·5068651
B_7	527632	699031	884209	·1078860	·1279076
B_9	— 44252	— 68342	— 98632	— 135056	— 177344
B_{11}	2378	4282	7052	10842	15779
B_{13}	— 89	— 188	— 353	— 609	— 983
B_{15}	2	6	13	25	45
B_{17}				— 1	— 2

θ =	12	14	16	18	20
B_1	0·4491570	0·4601475	0·4674373	0·4723093	0·4755659
B_3	·6737567	·6176701	·5667063	·5207471	·4793872
B_5	— ·5614179	— ·6016544	— ·6304399	— ·6503472	— ·6634687
B_7	·1683437	·2077727	·2450680	·2796861	·3114441
B_9	— 277771	— 395822	— 527193	— 667992	— 814947
B_{11}	29470	48610	73326	103487	138797
B_{13}	— 2192	— 4193	— 7178	— 11311	— 16718
B_{15}	121	269	523	921	1503
B_{17}	— 5	— 13	— 29	— 58	— 105
B_{19}		1	1	3	6

θ =	24	28	32	36	40
B_1	0·4790943	0·4803388	0·4803597	0·4796887	0·4786131
B_3	·4084662	·3501741	·3015127	·2602747	·2248533
B_5	— ·6754658	— ·6752805	— ·6679968	— ·6565795	— ·6428005
B_7	·3665766	·4116288	·4481929	·4777703	·5016386
B_9	— ·1117282	— ·1419141	— ·1711632	— ·1989840	— ·2251337
B_{11}	223215	322968	434425	554335	679943
B_{13}	— 31702	— 52526	— 79207	— 111499	— 148996
B_{15}	3373	6425	10903	16997	24837
B_{17}	— 279	— 613	— 1174	— 2033	— 3258
B_{19}	18	47	102	196	345
B_{21}	— 1	— 3	— 7	— 16	— 30
B_{23}				1	2

Таблица VIII. Коэффициенты $ce_3(x, \theta)$

$$ce_3(x,\theta)=\sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}(\theta)\cos(2r+1)x$$

θ =	1	2	3	4	5
A_1	0·1396157	0·2972983	0·4450961	0·5609389	0·6423435
A_3	·9882511	·9469431	·8776563	·7952749	·7128512
A_5	— 621676	— ·1219612	— ·1772628	— ·2287074	— ·2789559
A_7	15578	61637	136504	240106	376053
A_9	— 217	— 1722	— 5767	— 13684	— 27163
A_{11}	2	31	156	497	1243
A_{13}			— 3	— 13	— 39
A_{15}					1

θ =	6	7	8	9	10
A_1	0·6966296	0·7310702	0·7504676	0·7577999	0·7552689
A_3	·6345832	·5596260	·4861042	·4128898	·3400813
A_5	— ·3300943	— ·3826293	— ·4356009	— ·4869589	— ·5341214
A_7	550057	767182	·1029437	·1333872	·1671853
A_9	— 48391	— 79933	— 124372	— 183760	— 259028
A_{11}	2681	5213	9351	15666	24706
A_{13}	— 103	— 235	— 484	— 917	— 1615
A_{15}	3	8	18	39	77
A_{17}				— 1	— 3

θ =	12	14	16	18	20
A_1	0·7291928	0·6893133	0·6480800	0·6109664	0.5791210
A_3	·2006213	·0787068	— ·0207838	— ·0997241	— ·1622752
A_5	— ·6071225	— ·6465950	— ·6578054	— ·6500914	— ·6310151
A_7	·2394649	·3093176	·3707821	·4225315	·4652946
A_9	— 453886	— 692866	— 956497	— ·1230949	— ·1507773
A_{11}	52497	94078	148841	215541	292865
A_{13}	— 4144	— 8696	— 15742	— 25629	— 38616
A_{15}	239	586	1213	2221	3711
A_{17}	— 11	— 30	— 71	— 147	— 272
A_{19}		1	3	8	16
A_{21}					— 1

θ =	24	28	32	36	40
A_1	0·5289289	0·4914763	0·4622401	0·4385408	0·4187706
A_3	— ·2529417	— ·3139993	— ·3569144	— ·3880399	— ·4111317
A_5	— ·5765962	— ·5151505	— ·4543378	— ·3969950	— ·3440438
A_7	.5286785	·5695309	·5941427	·6069867	·6112823
A_9	— ·2049043	— ·2555249	— ·3014954	— ·3424220	— ·3783443
A_{11}	474198	682676	908972	·1145191	·1385050
A_{13}	— 74517	— 123983	— 186574	— 261206	— 346440
A_{15}	8542	16449	28027	43690	63680
A_{17}	— 749	— 1671	— 3229	— 5614	— 9008
A_{19}	52	134	295	573	1013
A_{21}	— 3	— 9	— 22	— 48	— 93
A_{23}			1	3	7

Стретт --94 --12

Таблица IX. Коэффициенты $se_4(x, \theta)$

$$se_4(x, \theta) = \sum_{r=1}^{\infty} B_{2r}(\theta) \sin 2rx$$

$\theta=$	1	2	3	4	5
B_2	0·0827163	0·1619097	0·2348454	0·2999611	0·3567821
B_4	·9953225	·9817952	·9607292	·9337815	·9025316
B_6	− 499004	− 992280	− ·1475147	− ·1944355	− ·2397743
B_8	10406	41497	92933	164232	254802
B_{10}	− 124	− 990	− 3333	− 7875	− 15321
B_{12}	1	15	78	247	602
B_{14}			− 1	− 6	− 17

$\theta=$	6	7	8	9	10
B_2	0·4055840	0·4470398	0·4819673	0·5111862	0·5354554
B_4	·8682607	·8319194	·7941934	·7555906	·7165133
B_6	− ·2833616	− ·3250257	− ·3645728	− ·4017926	− ·4364777
B_8	363898	490552	633490	791106	961479
B_{10}	− 26347	− 41579	− 61570	− 86770	− 117504
B_{12}	1245	2297	3895	6186	9321
B_{14}	− 42	− 90	− 175	− 312	− 523
B_{16}	1	3	6	12	22
B_{18}					− 1

$\theta=$	12	14	16	18	20
B_2	0·5717781	0·5954508	0·6099571	0·6179506	0·6214050
B_4	·6382592	·5617277	·4886779	·4202778	·3571208
B_6	− ·4975672	− ·5470172	− ·5849525	− ·6122983	− ·6304406
B_8	·1331669	·1725603	·2125820	·2518189	·2892707
B_{10}	− 196170	− 297395	− 419163	− 558320	− 711279
B_{12}	18713	33125	53335	79797	112661
B_{14}	− 1262	− 2606	− 4791	− 8051	− 12599
B_{16}	64	153	322	607	1053
B_{18}	− 2	− 7	− 17	− 36	− 68
B_{20}				2	4

$\theta=$	24	28	32	36	40
B_2	0·6199872	0·6127401	0·6030315	0·5924486	0·5817421
B_4	·2467755	·1558247	·0809320	·0188717	− ·0330132
B_6	− ·6451501	− ·6398947	− ·6225193	− ·5981380	− ·5699647
B_8	·3566335	·4127532	·4580399	·4937535	·5213298
B_{10}	− ·1044817	− ·1396101	− ·1748327	− ·2090565	− ·2416149
B_{12}	197061	304059	429943	570714	722573
B_{14}	− 26267	− 46870	− 74970	− 110698	− 153861
B_{16}	2620	5415	9815	16151	24693
B_{18}	− 204	− 488	− 1003	− 1843	− 3104
B_{20}	13	35	82	169	314
B_{22}		− 2	− 6	− 13	− 26
B_{24}				1	2

Таблица X. Коэффициенты $ce_4(x, \theta)$

$$ce_4(x, \theta) = A_0(\theta) + \sum_{r=1}^{\infty} A_{2r}(\theta) \cos 2rx$$

$\theta=$	1	2	3	4	5
A_0	0·0052120	0·0208599	0·0467405	0·0817838	0·1233638
A_2	·0835684	·1683516	·2545600	·3404212	·4218199
A_4	·9952242	·9802760	·9535006	·9129992	·8581521
A_6	− 498976	− 991423	− ·1469032	− ·1921002	− ·2336131
A_8	10405	41473	92676	162942	250652
A_{10}	− 124	− 989	− 3326	− 7831	− 15153
A_{12}	1	15	78	246	598
A_{14}			− 1	− 6	− 17

$\theta=$	6	7	8	9	10
A_0	0·1673896	0·2095928	0·2470339	0·2785543	0·3042351
A_2	·4934863	·5514268	·5945088	·6239903	·6420769
A_4	·7910919	·7164866	·6394157	·5633649	·4897790
A_6	− ·2708225	− ·3040743	− ·3345300	− ·3635326	− ·3920627
A_8	354230	473216	608934	764150	942128
A_{10}	− 25911	− 40798	− 60717	− 86854	− 120665
A_{12}	1233	2279	3905	6336	9865
A_{14}	− 42	− 90	− 177	− 325	− 565
A_{16}	1	3	6	12	24
A_{18}					− 1

$\theta=$	12	14	16	18	20
A_0	0·3405440	0·3606977	0·3681547	0·3662513	0·3587450
A_2	·6519183	·6351009	·5984510	·5491281	·4949709
A_4	·3496018	·2154054	·0868854	− ·0312122	− ·1335586
A_6	− ·4487959	− ·5020019	− ·5441005	− ·5681810	− ·5723987
A_8	·1376362	·1915534	·2528823	·3156889	·3741212
A_{10}	− 217808	− 363917	− 563578	− 809496	− ·1086034
A_{12}	21746	43104	77418	126617	190524
A_{14}	− 1514	− 3539	− 7335	− 13599	− 22866
A_{16}	78	215	512	1074	2014
A_{18}	− 3	− 10	− 28	− 65	− 136
A_{20}			1	3	7

$\theta=$	24	28	32	36	40
A_0	0·3388323	0·3211298	0·3074120	0·2967922	0·2883296
A_2	·3936870	·3129101	·2503722	·2009820	·1609259
A_4	− ·2858568	− ·3820602	− ·4422045	− ·4798147	− ·5029338
A_6	− ·5352509	− ·4668709	− ·3894241	− ·3126523	− ·2404558
A_8	·4668287	·5274020	·5631396	·5807448	·5851380
A_{10}	− ·1672204	− ·2247168	− ·2782052	− ·3265137	− ·3691808
A_{12}	356307	561931	796671	·1051288	·1317625
A_{14}	− 51649	− 95215	− 154117	− 228102	− 316231
A_{16}	5481	11794	21777	36136	55407
A_{18}	− 447	− 1121	− 2361	− 4393	− 7452
A_{20}	29	85	203	424	797
A_{22}	− 2	− 5	− 14	− 33	− 69
A_{24}			1	2	5

Таблица XI. Коэффициенты $se_5(x,\theta)$

$$se_5(x,\theta)=\sum_{r=0} B_{2r+1}(\theta)\sin(2r+1)\,x$$

θ =	1	2	3	4	5
B_1	0 0024939	0·0095184	0·0203517	0 0342316	0·0503825
B_3	·0623983	·1241361	·1844346	·2424503	·2973655
B_5	·9971799	·9887433	·9748010	·9556047	·9315670
B_7	− 416163	− 829307	− .1236461	− ·1634827	− ·2021936
B_9	7436	29684	66573	117821	183057
B_{11}	− 77	− 619	− 2086	− 4932	− 9603
B_{13}	1	9	44	137	335
B_{15}			− 1	− 3	− 8

θ =	6	7	8	9	10
B_1	0·0680550	0·0865685	0·1053436	0·1239178	0·1419460
B_3	·3484801	·3952774	·4374524	·4749018	·5076902
B_5	·9032410	·8712704	·8363273	·7990564	·7600380
B_7	− ·2395777	− ·2754843	− ·3098080	− ·3424762	− ·3734350
B_9	261844	353703	458122	574558	702416
B_{11}	− 16533	− 26146	− 38853	− 55047	− 75102
B_{13}	693	1282	2182	3486	5299
B_{15}	− 21	− 45	− 88	− 158	− 268
B_{17}		1	3	5	10

θ =	12	14	16	18	20
B_1	0·1754907	0·2049832	0·2302493	0·2515296	0·2692495
B_3	·5601081	·5969369	·6207572	·6340483	·6390398
B_5	·6786748	·5953287	·5121901	·4309127	·3527989
B_7	− ·4300281	− ·4791568	− ·5203565	− ·5532795	− ·5778606
B_9	989590	·1312863	·1663432	·2030885	·2404264
B_{11}	− 128132	− 200148	− 292378	− 404851	− 536407
B_{13}	10907	19982	33521	52439	77470
B_{15}	− 664	− 1424	− 2738	− 4831	− 7946
B_{17}	30	76	168	335	613
B_{19}	− 1	− 3	− 8	− 18	− 37
B_{21}				1	2

θ =	24	28	32	36	40
B_1	0·2959659	0·3141014	0·3265576	0·3353093	0·3416141
B_3	·6315833	·6103186	·5827865	·5532237	·5237981
B_5	·2097049	·0870904	− ·0149790	− ·0987129	− ·1670302
B_7	− ·6034884	− ·6028358	− ·5833053	− ·5515677	− ·5126578
B_9	·3129321	·3778306	·4322546	·4756778	·5088173
B_{11}	− 847620	− ·1203623	− ·1581686	− ·1963555	− ·2336226
B_{13}	147600	244986	367730	512309	674587
B_{15}	− 18207	− 35255	− 60361	− 94274	− 137280
B_{17}	1687	3808	7434	13017	20968
B_{19}	− 122	− 321	− 716	− 1405	− 2505
B_{21}	7	22	55	122	241
B_{23}		− 1	− 4	− 9	− 19
B_{25}					1

Таблица XII. Коэффициенты $ce_5(x,\theta)$

$$ce_5(x,\theta)=\sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}(\theta)\cos(2r+1)\,x$$

θ =	1	2	3	4	5
A_1	0·0027111	0·0112611	0·0262522	0·0482426	0·0776858
A_3	·0624118	·1243439	·1854309	·2453591	·3037510
A_5	·9971785	·9886991	·9744740	·9542797	·9277284
A_7	− 416162	− 829284	− ·1236214	− ·1633489	− ·2017061
A_9	7436	29684	66564	117753	182746
A_{11}	− 77	− 619	− 2086	− 4930	− 9590
A_{13}	1	9	44	137	335
A_{15}				− 3	− 8

θ =	6	7	8	9	10
A_1	0·1147954	0·1593268	0.2103223	0·2659504	0·3236196
A_3	·3600226	·4132509	·4621241	·5050654	·5405667
A_5	·8943042	·8534992	·8050657	·7493358	·6874439
A_7	− ·2382076	− ·2722869	− ·3033497	− ·3308976	− ·3546978
A_9	260795	350851	451571	561475	679287
A_{11}	− 16483	− 25989	− 38443	− 54141	− 73368
A_{13}	692	1276	2164	3444	5211
A_{15}	− 21	− 45	− 87	− 157	− 265
A_{17}		1	3	5	10

θ =	12	14	16	18	20
A_1	0·4338421	0·5242150	0·5900856	0·6337428	0·6584944
A_3	·5859780	·5991047	·5875370	·5581534	·5151069
A_5	·5529476	·4172375	·2886823	·1679224	·0535119
A_7	− ·3920752	− ·4202871	− ·4444427	− ·4662340	− ·4839496
A_9	937133	·1231302	·1576800	·1985101	·2454483
A_{11}	− 123910	− 194630	− 292783	− 426902	− 603934
A_{13}	10693	19891	34770	58024	92761
A_{15}	− 657	− 1441	− 2912	− 5530	− 9934
A_{17}	30	78	182	393	791
A_{19}	− 1	− 3	− 9	− 22	− 49
A_{21}					2

θ =	24	28	32	36	40
A_1	0·6626349	0·6292498	0·5860324	0·5468653	0 5144765
A_3	·4006885	·2749586	·1639702	·0748395	·0044985
A_5	− ·1532171	− ·3127042	− ·4171763	− ·4784149	− ·5108384
A_7	− ·4933373	− ·4562706	− ·3849891	− ·2997831	− ·2133006
A_9	·3482384	·4392387	·5019520	·5373167	·5516334
A_{11}	− ·1086428	− ·1675275	− ·2274941	− ·2834046	− ·3335094
A_{13}	206377	380056	600046	851763	·1124693
A_{15}	− 27042	− 58933	− 107363	− 172519	− 254090
A_{17}	2620	6727	14091	25562	41898
A_{19}	− 196	− 593	− 1425	− 2914	− 5310
A_{21}	12	42	115	265	536
A_{23}		− 2	− 8	− 20	− 44
A_{25}				1	3

Таблица XIII. Коэффициенты $se_6(x, \theta)$

$$se_6(x, \theta) = \sum_{r=1} B_{2r}(\theta) \sin 2rx$$

$\theta=$	1	2	3	4	5
B_2	0·0015602	0·0062128	0·0138737	0·0244018	0·0375992
B_4	·0499480	·0995822	·1485817	·1966140	·2433333
B_6	·9981127	·9924571	·9830539	·9699444	·9531988
B_8	— 356850	— 711944	— ·1063526	— ·1409849	— ·1749190
B_{10}	5578	22281	50019	88639	137930
B_{12}	— 52	— 413	— 1392	— 3293	— 6416
B_{14}		5	26	82	201
B_{16}				— 1	— 5

$\theta=$	6	7	8	9	10
B_2	0·0532125	0·0709384	0·0904323	0·1113210	0·1332192
B_4	·2883858	·3314194	·3720973	·4101152	·4452167
B_6	·9329261	·9092819	·8824725	·8527547	·8204286
B_8	— ·2079883	— ·2400362	— ·2709204	— ·3005177	— ·3287274
B_{10}	197622	267392	346873	435662	533334
B_{12}	— 11055	— 17495	— 26012	— 36875	— 50339
B_{14}	416	770	1311	2094	3184
B_{16}	— 11	— 25	— 48	— 86	— 146
B_{18}			1	3	5

$\theta=$	12	14	16	18	20
B_2	0·1785411	0·2236735	0·2665419	0·3058132	0·3407965
B_4	·5059560	·5535676	·5883081	·6111567	·6234816
B_6	·7492982	·6718593	·5907338	·5081236	·4257636
B_8	— ·3806978	— ·4264676	— ·4659151	— ·4990208	— ·5257760
B_{10}	753564	·1003981	·1280856	·1580040	·1896661
B_{12}	— 86057	— 135023	— 198893	— 279020	— 376302
B_{14}	6564	12083	20465	32503	49016
B_{16}	— 362	— 781	— 1517	— 2723	— 4581
B_{18}	15	38	85	173	325
B_{20}		— 1	— 4	— 9	— 18
B_{22}					1

$\theta=$	24	28	32	36	40
B_2	0·3973269	0·4374027	0·4642172	0·4812296	0·4913961
B_4	·6225734	·5971304	·5569728	·5095467	·4598608
B_6	·2668995	·1218704	— ·0048201	— ·1115484	— ·1990050
B_8	— ·5602833	— ·5700366	— ·5579359	— ·5285048	— ·4868907
B_{10}	·2558517	·3214381	·3815324	·4327860	·4736965
B_{12}	— 622783	— 932182	— ·1288947	— ·1673387	— ·2066839
B_{14}	98540	173939	277327	407902	562770
B_{16}	— 11138	— 23085	— 42273	— 70186	— 107804
B_{18}	952	2312	4853	9081	15508
B_{20}	— 64	— 182	— 437	— 921	— 1748
B_{22}	3	12	32	75	159
B_{24}			— 2	— 5	— 12
B_{26}					1

Таблица XIV

$ce_0(x, \theta)$. $\theta=1$ до $\theta=5$

x	$\theta=1$ $a_0=-0·45514$		$\theta=2$ $a_0=-1·51396$		$\theta=3$ $a_0=-2·83439$		$\theta=4$ $a_0=-4·28052$		$\theta=5$ $a_0=-5·80005$	
°		Δ^2		Δ^2		Δ^2		Δ^2		Δ^2
0	0·38483	29	0·20262	34	0·11494	31	0·06990	26	0·04480	22
1	·38497	29	·20279	34	·11510	31	·07003	26	·04491	22
2	·38540	29	·20330		·11556	31	·07042	26	·04523	22
3	·38612	29	·20415		·11634	31	·07108	27	·04577	22
4	·38713	29	·20534		·11742	31	·07200	27	·04653	22
5	·38842	29	·20688		·11882	32	·07319	27	·04752	23
6	·39000	29	·20876		·12054	32	·07465	28	·04873	23
7	·39187	29	·21098		·12258	32	·07638	28	·05017	24
8	·39403	29	·21355	35	·12494	33	·07840	29	·05185	24
9	·39646	28	·21647	35	·12763	33	·08070	29	·05377	25
10	·39919	28	·21974	35	·13064	34	·08329	30	·05594	26
11	·40219	28	·22337	36	·13400	34	·08619	31	·05838	27
12	·40548	28	·22735	36	·13770	35	·08939	32	·06108	28
13	·40906	28	·23168	36	·14175	36	·09290	32	·06405	29
14	·41291	28	·23638	36	·14615	36	·09674	33	·06732	30
15	·41704	28	·24144	37	·15092	37	·10092	34	·07089	31
16	·42145	28	·24687	37	·15605	38	·10544	36	·07477	33
17	·42614	27	·25266	37	·16157	38	·11031	37	·07897	34
18	·43110	27	·25883	37	·16746	39	·11555	38	·08351	35
19	·43633	27	·26537	38	·17375	40	·12117	39	·08841	37
20	·44183	27	·27229	38	·18044	41	·12719	40	·09368	38
21	·44760	26	·27959	38	·18754	42	·13360	42	·09933	40
22	·45364	26	·28727	38	·19505	42	·14043	43	·10538	42
23	·45993	26	·29534	39	·20299	43	·14769	44	·11184	43
24	·46649	25	·30379	39	·21136	44	·15539	46	·11874	45
25	·47330	25	·31263	39	·22017	45	·16355	47	·12610	47
26	·48036	25	·32185	39	·22943	46	·17218	48	·13392	49
27	·48767	24	·33147	39	·23915	46	·18129	50	·14223	51
28	·49522	24	·34148	39	·24933	47	·19090	51	·15105	52
29	·50300	23	·35188	39	·25998	48	·20101	52	·16039	54
30	·51102	23	·36267	39	·27111	48	·21165	53	·17027	56
31	·51927	22	·37384	39	·28272	49	·22282	55	·18071	58
32	·52773	21	·38540	38	·29481	49	·23454	56	·19173	59
33	·53641	21	·39735	38	·30740	49	·24681	57	·20335	61
34	·54530	20	·40968	38	·32048	50	·25965	58	·21558	63
35	·55439	19	·42238	37	·33406	50	·27306	58	·22843	64
36	·56367	18	·43545	36	·34813	50	·28706	59	·24192	66
37	·57313	18	·44889	36	·36270	50	·30165	60	·25607	67
38	·58277	17	·46268	35	·37776	49	·31683	60	·27089	68
39	·59258	16	·47682	34	·39332	49	·33262	60	·28639	69
40	·60254	15	·49131	33	·40937	48	·34900	60	·30257	69
41	·61265	14	·50613	32	·42590	48	·36599	60	·31945	70
42	·62290	13	·52126	31	·44291	47	·38358	60	·33702	70
43	·63327	11	·53670	29	·46038	46	·40177	59	·35530	70
44	·64376	10	·55244	28	·47831	44	·42055	58	·37428	70
45	0·65435	9	0·56845	26	0·49669	43	0·43991	57	0·39397	70

Таблица XIV — продолжение

$ce_0(x, \theta)$, $\theta=1$ до $\theta=5$

x	$\theta=1$, $a_0=-0{\cdot}45514$	Δ^2	$\theta=2$, $a=-1{\cdot}51396$	Δ^2	$\theta=3$, $a_0=-2{\cdot}83439$	Δ^2	$\theta=4$, $a_0=-4{\cdot}28052$	Δ^2	$\theta=5$, $a_0=-5{\cdot}80005$	Δ^2
°										
45	0·65435	9	0·56845	26	0·49669	43	0·43991	57	0·39397	70
46	·66503	8	·58472	24	·51549	41	·45985	56	·41435	69
47	·67579	6	·60124	23	·53470	39	·48035	54	·43541	68
48	·68662	5	·61799	21	·55431	37	·50139	53	·45715	66
49	·69749	4	·63494	19	·57429	35	·52296	50	·47956	64
50	·70841	2	·65207	16	·59462	32	·54503	48	·50261	62
51	·71934	1	·66937	14	·61527	30	·56758	45	·52628	60
52	·73029	−1	·68681	11	·63623	27	·59058	42	·55055	57
53	·74123	−2	·70436	9	·65745	24	·61401	39	·57538	53
54	·75215	−4	·72200	6	·67890	20	·63782	35	·60074	50
55	·76303	−5	·73971	3	·70056	17	·66199	31	·62661	45
56	·77385	−7	·75744	0	·72238	13	·68646	27	·65292	41
57	·78461	−9	·77518	−3	·74434	9	·71120	22	·67965	36
58	·79528	−10	·79289	−6	·76638	5	·73617	17	·70673	30
59	·80585	−12	·81054	−9	·78847	0	·76131	12	·73412	25
60	·81630	−14	·82810	−12	·81056	−4	·78657	7	·76175	19
61	·82662	−15	·84555	−16	·83262	−9	·81190	1	·78957	12
62	·83678	−17	·86283	−19	·85458	−14	·83724	−5	·81751	5
63	·84678	−19	·87992	−22	·87641	−18	·86252	−11	·84550	−2
64	·85658	−20	·89679	−26	·89806	−24	·88770	−17	·87347	−10
65	·86619	−22	·91340	−29	·91947	−29	·91270	−24	·90135	−17
66	·87558	−24	·92972	−33	·94059	−34	·93747	−31	·92905	−25
67	·88473	−25	·94571	−36	·96138	−39	·96192	−37	·95650	−33
68	·89363	−27	·96133	−40	0·98177	−44	0·98601	−44	0·98362	−42
69	·90226	−28	·97656	−43	1·00172	−50	1·00965	−51	1·0[illegible]031	−50
70	·91061	−30	0·99135	−47	1·02118	−55	1·03277	−58	1·03651	−59
71	·91866	−31	1·00567	−50	1·04009	−60	1·05532	−65	1·06212	−67
72	·92639	−33	1·0[illegible]949	−53	1·05840	−65	1·07721	−72	1·08706	−76
73	·93380	−34	1·03277	−57	1·07605	−70	1·09839	−79	1·11123	−84
74	·94087	−36	1·04549	−60	1·09301	−75	1·11878	−85	1·13457	−93
75	·94758	−37	1·05761	−63	1·10921	−80	1·13832	−92	1·15698	−101
76	·95392	−38	1·06910	−66	1·12462	−84	1·15694	−98	1·17838	−109
77	·95988	−39	1·07994	−68	1·13918	−89	1·17458	−104	1·19869	−116
78	·96545	−40	1·09009	−71	1·15286	−93	1·19117	−110	1·21784	−124
79	·97061	−41	1·09953	−73	1·16561	−97	1·20667	−115	1·23576	−131
80	·97536	−42	1·10824	−76	1·17739	−101	1·22102	−120	1·25236	−137
81	·97969	−43	1·11618	−78	1·18816	−104	1·23416	−125	1·26760	−143
82	·98359	−44	1·12335	−80	1·19789	−107	1·24605	−129	1·28140	−149
83	·98704	−45	1·12972	−81	1·20656	−110	1·25665	−133	1·29371	−154
84	·99005	−45	1·13528	−83	1·21412	−112	1·26592	−137	1·30449	−158
85	·99261	−46	1·14001	−84	1·22056	−114	1·27381	−140	1·31369	−162
86	·99471	−46	1·14389	−85	1·22587	−116	1·28032	−142	1·32126	−165
87	·99635	−47	1·14693	−86	1·23001	−117	1·28540	−144	1·32719	−168
88	·99752	−47	1·14910	−87	1·23297	−118	1·28905	−145	1·33144	−169
89	·99822	−47	1·15041	−87	1·23476	−119	1·29124	−146	1·33400	−170
90	0·99846	−47	1·15084	−87	1·23535	−119	1·29197	−146	1·33485	−171

Таблица XIV — продолжение

$ce_0(x, \theta)$. $\theta=6$ до $\theta=10$

x	$\theta=6$, $a_0=-7{\cdot}36883$	Δ^2	$\theta=7$, $a_0=-8{\cdot}97374$	Δ^2	$\theta=8$, $a_0=-10{\cdot}60673$	Δ^2	$\theta=9$, $a_0=-12{\cdot}26241$	Δ^2	$\theta=10$, $a_0=-13{\cdot}93698$	Δ^2
°										
0	0·02987	18	0·02054	14	0·01448	12	0·01042	10	0·00763	8
1	·02996	18	·02062	14	·01454	12	·01047	10	·00767	8
2	·03023	18	·02083	15	·01472	12	·01061	10	·00778	8
3	·03067	18	·02119	15	·01501	12	·01085	10	·00798	8
4	·03129	18	·02170	15	·01543	12	·01120	10	·00827	9
5	·03210	19	·02236	16	·01597	13	·01164	11	·00863	9
6	·03309	19	·02318	16	·01664	13	·01219	11	·00909	9
7	·03428	20	·02416	17	·01744	14	·01286	12	·00963	10
8	·03567	21	·02530	17	·01839	15	·01363	12	·01028	10
9	·03726	21	·02661	18	·01947	15	·01454	13	·01103	11
10	·03906	22	·02811	19	·02072	16	·01557	14	·01189	12
11	·04109	23	·02980	20	·02211	17	·01674	15	·01287	13
12	·04335	24	·03168	21	·02369	18	·01806	16	·01398	14
13	·04585	25	·03377	22	·02544	19	·01953	17	·01522	15
14	·04860	27	·03609	23	·02740	21	·02118	18	·01661	16
15	·05162	28	·03864	25	·02956	22	·02300	20	·01816	17
16	·05492	29	·04144	26	·03193	24	·02503	21	·01989	19
17	·05852	31	·04451	28	·03455	25	·02726	23	·02180	20
18	·06242	32	·04785	30	·03741	27	·02972	24	·02392	22
19	·06665	34	·05149	31	·04054	29	·03242	26	·02625	24
20	·07121	36	·05544	33	·04396	31	·03538	28	·02882	26
21	·07614	38	·05972	35	·04769	33	·03862	30	·03165	28
22	·08145	40	·06436	37	·05174	35	·04217	32	·03476	30
23	·08715	42	·06937	40	·05614	37	·04604	35	·03816	32
24	·09327	44	·07478	42	·06091	40	·05025	37	·04189	35
25	·09983	46	·08060	44	·06608	42	·05484	40	·04597	37
26	·10684	48	·08687	47	·07167	45	·05983	43	·05043	40
27	·11434	50	·09360	49	·07770	47	·06524	45	·05529	43
28	·12234	52	·10082	52	·08421	50	·07110	48	·06058	46
29	·13086	55	·10856	54	·09122	53	·07745	51	·06633	50
30	·13993	57	·11684	57	·09876	56	·08432	55	·07258	53
31	·14957	59	·12568	60	·10686	59	·09173	58	·07936	56
32	·15980	61	·13513	62	·11555	62	·09972	61	·08670	60
33	·17065	64	·14519	65	·12486	65	·10832	65	·09465	64
34	·18214	66	·15591	68	·13483	68	·11757	68	·10323	67
35	·19428	68	·16730	70	·14547	71	·12749	72	·11248	71
36	·20710	70	·17939	73	·15683	74	·13814	75	·12245	75
37	·22062	72	·19220	75	·16892	77	·14953	78	·13316	79
38	·23486	73	·20577	77	·18[illegible]80	80	·16171	82	·14467	83
39	·24983	75	·22011	80	·19547	83	·17471	85	·15700	87
40	·26555	76	·23525	82	·20997	86	·18856	88	·17020	90
41	·28204	78	·25121	84	·22533	88	·20329	91	·18430	94
42	·29930	79	·26800	85	·24157	90	·21893	94	·19934	97
43	·31735	79	·28565	87	·25871	92	·23552	97	·21535	101
44	·33619	80	·30416	88	·27678	94	·25308	99	·23237	104
45	0·35583	80	0·32354	88	0·29579	96	0·27163	101	0·25042	106

Таблица XIV — продолжение

$ce_0(x, \theta)$. $\theta=6$ до $\theta=10$

x	$\theta=6$ $a_0=-7\cdot36883$	Δ^2	$\theta=7$ $a_0=-8\cdot97374$	Δ^2	$\theta=8$ $a_0=-10\cdot60673$	Δ^2	$\theta=9$ $a_0=-12\cdot26241$	Δ^2	$\theta=10$ $a_0=-13\cdot93698$	Δ^2
°										
45	0·35583	80	0·32354	88	0·29579	96	0·27163	101	0·25042	106
46	·37627	80	·34382	89	·31575	97	·29120	103	·26953	109
47	·39750	79	·36497	89	·33668	97	·31180	105	·28974	111
48	·41953	78	·38702	89	·35858	98	·33344	105	·31105	112
49	·44234	77	·40995	88	·38146	97	·35614	106	·33348	113
50	·46591	75	·43376	86	·40531	97	·37990	106	·35704	114
51	·49023	73	·45844	85	·43013	95	·40471	105	·38174	114
52	·51528	70	·48396	82	·45590	93	·43057	104	·40758	113
53	·54103	67	·51030	79	·48260	91	·45747	102	·43455	111
54	·56746	63	·53744	76	·51022	88	·48539	99	·46263	109
55	·59451	59	·56534	72	·53871	84	·51429	96	·49180	106
56	·62215	54	·59396	67	·56805	80	·54416	91	·52204	102
57	·65034	49	·62325	62	·59818	75	·57493	86	·55330	98
58	·67902	44	·65316	56	·62906	69	·60657	81	·58554	92
59	·70813	37	·68364	50	·66063	62	·63902	74	·61870	86
60	·73762	31	·71462	43	·69282	55	·67221	67	·65271	78
61	·76742	24	·74603	35	·72557	47	·70607	59	·68751	70
62	·79745	16	·77779	27	·75878	38	·74051	50	·72300	61
63	·82764	8	·80982	18	·79237	29	·77545	40	·75910	50
64	·85792	−1	·84203	9	·82625	19	·81078	29	·79571	39
65	·88818	−9	·87434	−1	·86033	8	·84640	18	·83271	27
66	·91835	−19	·90663	−11	·89448	−3	·88221	6	·86998	15
67	·94834	−28	·93882	−22	·92861	−14	·91807	−7	·90740	1
68	0·97805	−38	0·97080	−32	·96260	−27	·95386	−20	·94482	−13
69	1·00738	−48	1·00245	−44	0·99632	−39	0·98945	−34	0·98212	−28
70	1·03624	−58	1·03366	−55	1·02965	−52	1·02471	−48	1·01915	−43
71	1·06452	−68	1·06432	−67	1·06246	−65	1·05949	−62	1·05574	−59
72	1·09212	−78	1·09431	−78	1·09463	−78	1·09365	−77	1·09174	−75
73	1·11894	−88	1·12352	−90	1·12601	−91	1·12704	−91	1·12700	−91
74	1·14489	−98	1·15183	−102	1·15649	−104	1·15952	−106	1·16135	−107
75	1·16986	−108	1·17912	−113	1·18592	−117	1·19094	−121	1·19463	−123
76	1·19375	−117	1·20528	−124	1·21417	−130	1·22115	−135	1·22668	−139
77	1·21646	−127	1·23019	−135	1·24113	−143	1·25002	−149	1·25734	−155
78	1·23791	−135	1·25376	−146	1·26666	−155	1·27739	−163	1·28646	−170
79	1·25801	−144	1·27586	−155	1·29064	−166	1·30314	−176	1·31387	−184
80	1·27667	−152	1·29641	−165	1·31296	−177	1·32712	−188	1·33945	−198
81	1·29380	−159	1·31531	−174	1·33351	−187	1·34923	−200	1·36304	−211
82	1·30935	−166	1·33247	−182	1·35219	−197	1·36935	−210	1·38452	−223
83	1·32323	−172	1·34781	−189	1·36890	−205	1·38736	−220	1·40377	−234
84	1·33539	−178	1·36126	−196	1·38356	−212	1·40317	−228	1·42068	−243
85	1·34577	−182	1·37275	−201	1·39610	−219	1·41670	−236	1·43517	−252
86	1·35433	−186	1·38223	−206	1·40644	−224	1·42788	−242	1·44713	−259
87	1·36103	−189	1·38966	−209	1·41455	−229	1·43663	−247	1·45651	−264
88	1·36584	−191	1·39498	−212	1·42037	−232	1·44292	−250	1·46325	−268
89	1·36873	−193	1·39819	−214	1·42387	−233	1·44671	−252	1·46730	−270
90	1·36970	−193	1·39926	−214	1·42504	−234	1·44797	−253	1·46866	−271

Таблица XV

$se_1(x, \theta)$. $\theta=1$ до $\theta=5$

x	$\theta=1$ $b_1=-0\cdot11025$	Δ^2	$\theta=2$ $b_1=-1\cdot39068$	Δ^2	$\theta=3$ $b_1=-2\cdot78538$	Δ^2	$\theta=4$ $b_1=-4\cdot25918$	Δ^2	$\theta=5$ $b_1=-5\cdot79008$	Δ^2
°										
0	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0
1	·01198	1	·00830	1	·00584	2	·00418	2	·00305	1
2	·02397	2	·01661	3	·01169	3	·00838	3	·00612	3
3	·03598	2	·02494	4	·01758	5	·01262	5	·00921	4
4	·04800	3	·03332	5	·02351	6	·01689	6	·01235	6
5	·06006	4	·04175	7	·02951	8	·02124	8	·01555	7
6	·07216	5	·05025	8	·03558	9	·02566	9	·01882	9
7	·08430	5	·05883	9	·04175	11	·03017	11	·02218	10
8	·09650	6	·06751	11	·04802	13	·03479	13	·02565	12
9	·10875	7	·07629	12	·05443	14	·03955	14	·02924	14
10	·12107	7	·08519	13	·06097	16	·04444	16	·03296	15
11	·13347	8	·09423	15	·06767	17	·04949	18	·03684	17
12	·14594	9	·10341	16	·07454	19	·05472	19	·04088	19
13	·15850	9	·11276	17	·08160	20	·06015	21	·04511	20
14	·17115	10	·12227	18	·08886	22	·06578	23	·04955	22
15	·18390	10	·13197	20	·09634	23	·07164	24	·05420	24
16	·19676	11	·14186	21	·10406	25	·07774	26	·05909	26
17	·20972	11	·15196	22	·11202	26	·08411	28	·06424	28
18	·22279	12	·16228	23	·12025	28	·09075	30	·06967	29
19	·23599	12	·17282	24	·12876	29	·09769	31	·07539	31
20	·24930	12	·18361	25	·13756	31	·10495	33	·08142	33
21	·26274	13	·19464	26	·14668	32	·11253	35	·08779	35
22	·27630	13	·20593	27	·15611	34	·12047	37	·09451	37
23	·29000	13	·21749	28	·16589	35	·12877	39	·10161	39
24	·30383	13	·22933	28	·17601	36	·13746	40	·10910	41
25	·31779	14	·24145	29	·18650	38	·14656	42	·11700	44
26	·33189	14	·25386	30	·19737	39	·15607	44	·12534	46
27	·34612	14	·26657	30	·20863	40	·16602	45	·13413	48
28	·36049	13	·27958	31	·22029	41	·17642	47	·14341	50
29	·37499	13	·29290	31	·23236	42	·18729	48	·15318	52
30	·38963	13	·30654	32	·24485	43	·19864	50	·16346	54
31	·40440	13	·32049	32	·25777	44	·21050	51	·17429	56
32	·41929	13	·33476	32	·27114	45	·22287	53	·18567	58
33	·43432	12	·34935	32	·28495	45	·23576	54	·19762	59
34	·44946	12	·36427	32	·29921	46	·24920	55	·21017	61
35	·46473	11	·37950	32	·31393	46	·26319	56	·22333	63
36	·48010	11	·39505	32	·32912	47	·27773	57	·23712	64
37	·49559	10	·41092	31	·34477	47	·29285	58	·25155	65
38	·51117	9	·42710	31	·36089	47	·30854	58	·26663	67
39	·52684	8	·44358	30	·37747	46	·32482	59	·28238	68
40	·54260	8	·46037	29	·39451	46	·34168	59	·29881	68
41	·55844	7	·47745	28	·41202	45	·35913	59	·31592	69
42	·57434	6	·49481	27	·42998	45	·37716	59	·33372	69
43	·59029	4	·51245	26	·44839	44	·39578	58	·35221	70
44	·60629	3	·53034	25	·46723	43	·41499	57	·37141	69
45	0·62233	2	0·54848	23	0·48650	41	0·43476	56	0·39129	69

Таблица XV—продолжение

$se_1(x, \theta)$. $\theta=1$ до $\theta=5$

x	$\theta=1$, $b_1=-0·11025$	Δ^2	$\theta=2$, $b_1=-1·39068$	Δ^2	$\theta=3$, $b_1=-2·78538$	Δ^2	$\theta=4$, $b_1=-4·25918$	Δ^2	$\theta=5$, $b_1=-5·79008$	Δ^2
°										
45	0·62233	2	0·54848	23	0·48650	41	0·43476	56	0·39129	69
46	·63838	1	·56686	22	·50618	40	·45510	55	·41187	68
47	·65445	—1	·58545	20	·52626	36	·47599	54	·43313	67
48	·67051	—2	·60424	18	·54672	38	·49742	52	·45506	66
49	·68654	—4	·62320	16	·56754	34	·51936	50	·47765	64
50	·70254	—5	·64233	14	·58869	31	·54181	47	·50087	62
51	·71850	—7	·66159	11	·61016	29	·56472	45	·52472	59
52	·73438	—8	·68097	9	·63192	26	·58809	42	·54916	56
53	·75018	—10	·70043	6	·65393	23	·61186	38	·57416	53
54	·76588	—12	·71995	3	·67616	19	·63603	35	·59969	49
55	·78146	—14	·73951	0	·69859	16	·66053	31	·62572	45
56	·79691	—16	·75907	—3	·72117	12	·68535	26	·65219	41
57	·81219	—17	·77861	—6	·74387	8	·71042	22	·67907	36
58	·82731	—19	·79809	—9	·76665	4	·73572	17	·70631	30
59	·84223	—21	·81748	—12	·78946	—1	·76118	12	·73385	24
60	·85694	—23	·83675	—16	·81227	—5	·78676	6	·76164	18
61	·87142	—25	·85587	—19	·83502	—10	·81240	0	·78961	12
62	·88564	—27	·87479	—23	·85768	—15	·83804	5	·81769	—5
63	·89960	—29	·89349	—26	·88018	—20	·86364	—12	·84583	—2
64	·91326	—31	·91193	—30	·90249	—25	·88911	—18	·87394	—10
65	·92661	—33	·93007	—33	·92454	—30	·91440	—25	·90195	—18
66	·93963	—35	·94788	—37	·94630	—35	·93945	—31	·92979	—26
67	·95229	—37	·96531	—41	·96770	—41	·96418	—38	·95737	—34
68	·96459	—39	·98234	—44	0·98869	—46	0·98854	—45	0·98462	—42
69	·97649	—41	0·99892	—48	1·00922	—51	1·01244	—52	1·01145	—51
70	·98799	—43	1·01502	—52	1·02924	—57	1·03582	—59	1·03776	—59
71	0·99906	—45	1·03061	—55	1·04868	—62	1·05861	—66	1·06349	—67
72	1·00968	—46	1·04564	—59	1·06751	—67	1·08075	—73	1·08854	—76
73	1·01984	—48	1·06008	—62	1·08567	—72	1·10215	—80	1·11283	—85
74	1·02951	—50	1·07390	—65	1·10310	—77	1·12276	—86	1·13627	—93
75	1·03869	—51	1·08707	—69	1·11976	—82	1·14250	—93	1·15878	—101
76	1·04736	—53	1·09955	—72	1·13559	—87	1·16132	—99	1·18028	—109
77	1·05550	—54	1·11131	—75	1·15056	—91	1·17914	—105	1·20068	—117
78	1·06310	—56	1·12233	—77	1·16461	—96	1·19592	—111	1·21992	—124
79	1·07014	—57	1·13257	—80	1·17771	—100	1·21158	—117	1·23791	—131
80	1·07661	—58	1·14201	—82	1·18981	—103	1·22607	—122	1·25459	—138
81	1·08250	—59	1·15063	—85	1·20088	—107	1·23935	—126	1·26989	—144
82	1·08780	—60	1·15841	—87	1·21088	—110	1·25137	—131	1·28375	—149
83	1·09250	—61	1.16532	—88	1·21978	—113	1·26207	—135	1·29612	—154
84	1·09659	—62	1·17134	—90	1·22755	—115	1·27143	—138	1·30694	—159
85	1·10007	—62	1·17647	—91	1·23417	—117	1·27941	—141	1·31618	—163
86	1·10292	—63	1·18068	—92	1·23961	—119	1·28598	—143	1·32379	—166
87	1·10514	—63	1·18396	—93	1·24386	—121	1·29112	—145	1·32974	—168
88	1·10673	—64	1.18632	—94	1·24691	—122	1·29480	—147	1·33401	—170
89	1·10769	—64	1·18773	—94	1·24874	—122	1·29702	—148	1·33658	—171
90	1·10801	—64	1·18821	—94	1·24936	—122	1·29776	—148	1·33743	—171

Таблица XV—продолжение

$se_1(x, \theta)$. $\theta=6$ до $\theta=10$

x	$\theta=6$, $b_1=-7·36391$	Δ^2	$\theta=7$, $b_1=-8·97120$	Δ^2	$\theta=8$, $b_1=-10·60537$	Δ^2	$\theta=9$, $b_1=-12·26166$	Δ^2	$\theta=10$, $b_1=-13·93655$	Δ^2
°										
0	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0
1	·00226	1	·00170	1	·00129	1	·00099	1	·00077	1
2	·00453	3	·00341	2	·00259	2	·00199	2	·00155	2
3	·00683	4	·00514	4	·00391	3	·00301	3	·00234	2
4	·00917	5	·00691	5	·00527	4	·00406	4	·00316	3
5	·01157	7	·00872	6	·00666	5	·00514	5	·00401	4
6	·01403	8	·01060	7	·00811	6	·00627	6	·00490	5
7	·01657	10	·01255	9	·00962	8	·00746	7	·00584	6
8	,01921	11	·01459	10	·01121	9	·00872	8	·00684	7
9	·02196	13	·01672	11	·01289	10	·01005	9	·00791	8
10	·02483	14	·01897	13	·01467	11	·01148	10	·00906	9
11	·02785	16	·02135	14	·01657	13	·01300	11	·01030	10
12	·03102	17	·02387	16	·01859	14	·01464	13	·01164	11
13	·03437	19	·02655	17	·02076	16	·01641	14	·01310	13
14	·03790	21	·02940	19	·02309	17	·01832	16	·01468	14
15	·04165	23	·03245	21	·02558	19	·02039	17	·01641	16
16	·04562	24	·03570	23	·02827	21	·02263	19	·01829	17
17	·04983	26	·03918	25	·03117	23	·02506	21	·02034	19
18	·05431	28	·04290	27	·03430	25	·02770	23	·02258	21
19	·05906	30	·04689	29	·03767	27	·03057	25	·02503	23
20	·06412	32	·05117	31	·04130	29	·03368	27	·02771	25
21	·06951	34	·05575	33	·04523	31	·03706	29	·03063	27
22	·07524	37	·06067	35	·04946	33	·04073	31	·03383	29
23	·08133	39	·06593	38	·05403	36	·04471	34	·03731	32
24	·08782	41	·07151	40	·05896	38	·04903	36	·04111	34
25	·09471	44	·07761	42	·06427	41	·05371	39	·04526	37
26	·10205	46	·08407	45	·06999	44	·05878	42	·04977	40
27	·10984	48	·09099	48	·07614	46	·06427	45	·05468	43
28	·11811	51	·09838	50	·08276	49	·07021	48	·06002	46
29	·12689	53	·10628	53	·08987	52	,07663	51	·06581	49
30	·13620	55	·11470	56	·09750	55	,08355	54	·07210	53
31	·14606	58	·12369	59	·10569	58	·09102	57	·07892	56
32	·15650	60	·13326	61	·11446	61	·09906	61	·08630	60
33	·16755	62	·14344	64	·12384	65	·10771	64	·09427	63
34	·17921	65	.15426	67	·13387	68	·11700	68	·10288	67
35	·19153	67	·16576	69	·14458	71	·12696	71	·11216	71
36	·20451	69	·17794	72	·15599	74	·13764	75	·12215	75
37	·21819	71	·19085	75	·16814	77	·14907	78	·13288	79
38	·23257	73	·20450	77	·18107	80	·16128	82	·14441	83
39	·24768	74	.21892	79	·19479	83	·17431	85	·15676	86
40	·26354	76	.23414	81	·20933	85	·18818	88	·16997	90
41	·28015	77	·25017	83	·22473	88	·20294	91	·18409	94
42	·29754	78	·26703	85	·24101	90	·21861	94	·19914	97
43	·31570	79	·28474	86	·25819	92	·23522	97	·21517	100
44	·33465	79	·30331	87	·27629	94	·25280	99	·23220	103
45	0·35440	79	0·32275	88	0 29534	95	0·27137	101	0·25026	106

Таблица XV—продолжение

$se_1(x, \theta)$. $\theta=6$ до $\theta=10$

x	$\theta=6$ $b_1=-7·36391$	Δ^2	$\theta=7$ $b_1=-8·97120$	Δ^2	$\theta=8$ $b_1=-10·60537$	Δ^2	$\theta=9$ $b_1=-12·26166$	Δ^2	$\theta=10$ $b_1=-13·93655$	Δ^2
°										
45	0·35440	79	0·32275	88	0·29534	95	0·27137	101	0·25026	106
46	·37494	79	·34308	89	·31533	96	·29096	103	·26939	109
47	·39627	79	·36429	89	·33629	97	·31157	104	·28960	111
48	·41840	78	·38639	88	·35822	97	·33323	105	·31092	112
49	·44129	77	·40937	88	·38113	97	·35595	106	·33336	113
50	·46496	75	·43323	86	·40500	97	·37972	106	·35693	114
51	·48937	73	·45795	84	·42985	95	·40455	105	·38164	114
52	·51451	70	·48352	82	·45564	93	·43042	104	·40749	113
53	·54035	67	·50991	79	·48237	91	·45734	102	·43447	111
54	·56685	63	·53709	76	·51001	88	·48527	99	·46256	109
55	·59398	59	·56503	72	·53853	84	·51419	96	·49174	106
56	·62171	54	·59369	67	·56789	80	·54406	91	·52198	102
57	·64997	49	·62303	62	·59805	75	·57485	86	·55325	98
58	·67873	43	·65298	56	·62895	69	·60650	81	·58549	92
59	·70792	37	·68350	50	·66054	62	·63896	74	·61866	86
60	·73749	31	·71452	43	·69275	55	·67216	67	·65268	78
61	·76736	24	·74596	35	·72552	47	·70603	58	·68748	70
62	·79747	16	·77776	27	·75875	38	·74049	49	·72299	61
63	·82773	8	·80983	18	·79236	29	·77543	40	·75909	50
64	·85807	−1	·84208	9	·82626	19	·81078	29	·79570	39
65	·88841	−9	·87442	−1	·86036	8	·84641	18	·83271	27
66	·91865	−19	·90675	−11	·89453	−3	·88223	6	·86999	15
67	·94870	−28	·93898	−22	·92868	−14	·91810	−7	·90741	1
68	0·97847	−38	0·97099	−33	·96268	−27	·95390	−20	·94484	−13
69	1·00787	−48	1·00266	−44	0·99642	−39	0·98950	−34	0·98215	−28
70	1·03679	−58	1·03391	−55	1·02977	−52	1·02477	−48	1·01918	−43
71	1·06513	−[illegible]	1·06460	−67	1·06260	−65	1·05956	−62	1·05577	−59
72	1·09279	−78	1·09463	−79	1·09478	−78	1·09373	−77	1·09178	−75
73	1·11967	−88	1·12387	−90	1·12618	−91	1·12713	−91	1·12705	−91
74	1·14567	−98	1·15220	−102	1·15667	−104	1·15962	−106	1·16141	−107
75	1·17069	−108	1·17952	−113	1·18612	−117	1·19105	−121	1·19469	−123
76	1·19462	−118	1·20570	−124	1·21439	−130	1·22127	−135	1·22675	−139
77	1·21739	−127	1·23064	−135	1·24136	−143	1·25014	−149	1·25741	−155
78	1·23888	−136	1·25423	−146	1·26690	−155	1·27752	−163	1·28653	−170
79	1·25902	−144	1·27636	−156	1·29089	−166	1·30327	−176	1·31395	−184
80	1·27771	−152	1·29693	−165	1·31322	−177	1·32727	−188	1·33952	−198
81	1·29488	−160	1·31585	−174	1·33378	−187	1·34938	−200	1·36312	−211
82	1·31046	−166	1·33302	−182	1·35247	−197	1·36950	−210	1·38460	−223
83	1·32437	−173	1·34838	−189	1·36919	−205	1·38751	−220	1·40386	−234
84	1·33655	−178	1·36184	−196	1·38386	−213	1·40333	−228	1·42077	−243
85	1·34696	−183	1·37334	−201	1·39640	−219	1·41687	−236	1·43526	−252
86	1·35553	−187	1·38283	−206	1·40675	−224	1·42804	−242	1·44722	−259
87	1·36224	−190	1·39026	−210	1·41486	−229	1·43680	−247	1·45660	−264
88	1·36706	−192	1·39559	−212	1·42069	−232	1·44309	−250	1·46334	−268
89	1·36996	−193	1·39880	−214	1·42419	−234	1·44688	−252	1·46740	−270
90	1·37093	−194	1·39987	−214	1·42536	−234	1·44814	−253	1·46876	−271

Таблица XVI

$ce_1(x, \theta)$. $\theta=1$ до $\theta=5$

x	$\theta=1$ $a_1=1·85911$	Δ^2	$\theta=2$ $a_1=2·37920$	Δ^2	$\theta=3$ $a_1=2·51904$	Δ^2	$\theta=4$ $a_1=2·31801$	Δ^2	$\theta=5$ $a_1=1·85819$	Δ^2
°										
0	0·85660	4	0·68357	34	0·50900	54	0·36343	63	0·25654	64
1	·85662	4	·68374	34	·50927	54	·36374	63	·25686	64
2	·85667	4	·68425	34	·51008	54	·36468	63	·25782	64
3	·85676	3	·68509	33	·51143	54	·36626	63	·25941	64
4	·85689	3	·68626	33	·51332	54	·36846	63	·26164	64
5	·85704	3	·68777	33	·51574	53	·37129	63	·26451	64
6	·85723	3	·68960	32	·51869	53	·37475	63	·26803	65
7	·85744	2	·69176	32	·52217	53	·37884	63	·27219	65
8	·85767	2	·69423	31	·52618	52	·38355	63	·27701	65
9	·85791	1	·69701	30	·53070	52	·38890	63	·28247	66
10	·85817	1	·70009	29	·53575	51	·39487	63	·28860	66
11	·85844	0	·70347	28	·54130	50	·40146	62	·29539	67
12	·85870	−1	·70713	27	·54735	49	·40868	62	·30285	67
13	·85895	−2	·71107	26	·55390	48	·41652	62	·31097	68
14	·85919	−2	·71527	25	·56093	47	·42498	61	·31978	68
15	·85941	−3	·71972	24	·56844	46	·43406	61	·32926	68
16	·85959	−4	·72441	22	·57641	45	·44374	60	·33942	68
17	·85972	−5	·72932	21	·58483	44	·45403	60	·35027	69
18	·85981	−6	·73444	19	·59369	42	·46491	59	·36181	69
19	·85983	−7	·73975	17	·60297	41	·47638	58	·37403	69
20	·85978	−9	·74524	16	·61266	39	·48843	57	·38694	68
21	·85964	−10	·75088	14	·62273	37	·50105	55	·40053	68
22	·85940	−11	·75666	11	·63317	35	·51422	54	·41480	67
23	·85906	−12	·76255	9	·64396	32	·52792	52	·42975	67
24	·85859	−14	·76853	7	·65507	30	·54215	50	·44536	66
25	·85798	−15	·77459	5	·66648	27	·55688	48	·46163	64
26	·85723	−16	·78069	2	·67816	24	·57209	45	·47854	63
27	·85631	−18	·78681	−1	·69009	21	·58775	43	·49607	61
28	·85521	−19	·79292	−3	·70222	18	·60384	40	·51421	58
29	·85392	−21	·79900	−6	·71454	14	·62033	36	·53294	56
30	·85243	−22	·80501	−9	·72700	11	·63718	33	·55223	53
31	·85070	−24	·81093	−12	·73956	7	·65435	29	·57204	49
32	·84874	−25	·81673	−16	·75219	3	·67181	24	·59235	46
33	·84653	−27	·82237	−19	·76485	−2	·68951	20	·61311	41
34	·84405	−29	·82782	−22	·77749	−6	·70741	15	·63429	36
35	·84128	−30	·83306	−26	·79006	−11	·72546	9	·65583	31
36	·83821	−32	·83803	−29	·80252	−16	·74360	3	·67768	25
37	·83482	−33	·84271	−33	·81482	−21	·76177	−3	·69978	19
38	·83110	−35	·84707	−36	·82690	−27	·77992	−9	·72208	12
39	·82703	−36	·85106	−40	·83872	−32	·79797	−16	·74450	5
40	·82260	−38	·85465	−44	·85020	−38	·81587	−23	·76697	−3
41	·81779	−39	·85780	−48	·86131	−44	·83353	−31	·78941	−11
42	·81259	−41	·86047	−51	·87198	−50	·85089	−38	·81173	−20
43	·80698	−42	·86263	−55	·88214	−56	·86787	−47	·83386	−30
44	·80094	−44	·86424	−59	·89174	−63	·88437	−55	·85569	−39
45	0·79447	−45	0·86526	−63	0·90070	−69	0·90033	−64	0·87713	−50

$ce_1(x, \theta)$. $\theta=1$ до $\theta=5$

x	$\theta=1$ $a_1=1\cdot85911$	Δ^2	$\theta=2$ $a_1=2\cdot37920$	Δ^2	$\theta=3$ $a=2\cdot51904$	Δ^2	$\theta=4$ $a_1=2\cdot31801$	Δ^2	$\theta=5$ $a=1\cdot85819$	Δ^2
°										
45	0·79447	−45	0·86526	−63	0·90070	−69	0·90033	−64	0·87713	−50
46	·78755	−46	·86565	−66	·90898	−76	·91566	−72	·89807	−60
47	·78017	−47	·86538	−70	·91651	−82	·93025	−82	·91840	−72
48	·77231	−49	·86441	−74	·92321	−88	·94404	−91	·93802	−83
49	·76396	−50	·86270	−77	·92903	−95	·95691	−100	·95681	−95
50	·75512	−51	·86022	−81	·93390	−101	·96879	−109	·97466	−107
51	·74577	−52	·85693	−84	·93775	−108	·97957	−119	0·99143	−119
52	·73590	−53	·85281	−87	·94053	−114	·98917	−128	1·00702	−131
53	·72551	−53	·84781	−90	·94218	−120	0·99748	−137	1·02129	−144
54	·71459	−54	·84192	−93	·94262	−126	1·00442	−147	1·03413	−156
55	·70312	−54	·83510	−95	·94181	−131	1·00989	−155	1·04541	−168
56	·69111	−55	·82733	−98	·93969	−136	1·01381	−164	1·05501	−180
57	·67856	−55	·81858	−100	·93621	−141	1·01609	−172	1·06281	−192
58	·66545	−55	·80883	−102	·93131	−146	1·01664	−180	1·06869	−203
59	·65178	−56	·79806	−103	·92495	−150	1·01539	−188	1·07254	−214
60	·63756	−56	·78626	−105	·91708	−154	1·01226	−195	1·07425	−224
61	·62279	−55	·77341	−106	·90768	−158	1·00718	−201	1·07371	−234
62	·60746	−55	·75950	−107	·89670	−160	1·00009	−207	1·07084	−243
63	·59158	−55	·74452	−107	·88412	−163	0·99094	−212	1·06553	−251
64	·57516	−54	·72847	−107	·86990	−165	·97966	−216	1·05772	−258
65	·55819	−53	·71135	−107	·85405	−166	·96623	−220	1·04732	−264
66	·54069	−53	·69315	−107	·83653	−166	·95060	−222	1·03428	−269
67	·52266	−52	·67389	−106	·81735	−166	·93275	−224	1·01855	−273
68	·50411	−51	·65357	−105	·79651	−166	·91266	−224	1·00009	−276
69	·48506	−49	·63220	−103	·77400	−164	·89033	−224	0·97887	−277
70	·46551	−48	·60980	−101	·74986	−162	·86575	−222	·95488	−277
71	·44549	−47	·58639	−99	·72409	−160	·83896	−220	·92812	−275
72	·42499	−45	·56200	−96	·69672	−156	·80996	−217	·89862	−272
73	·40405	−43	·53664	−93	·66778	−152	·77879	−212	·86639	−268
74	·38268	−41	·51035	−90	·63733	−148	·74550	−207	·83148	−262
75	·36089	−39	·48316	−86	·60539	−142	·71014	−200	·79396	−254
76	·33870	−37	·45512	−82	·57204	−136	·67278	−192	·75389	−245
77	·31614	−35	·42625	−78	·53732	−129	·63350	−183	·71137	−235
78	·29323	−33	·39661	−73	·50131	−122	·59239	−174	·66650	−223
79	·26999	−31	·36624	−68	·46407	−114	·54954	−163	·61940	−210
80	·24645	−28	·33520	−63	·42570	−106	·50506	−151	·57020	−195
81	·22262	−26	·30352	−57	·38626	−97	·45907	−139	·51905	−180
82	·19854	−23	·27128	−51	·34586	−87	·41170	−125	·46610	−163
83	·17423	−20	·23852	−45	·30459	−77	·36306	−111	·41152	−145
84	·14972	−17	·20530	−39	·26255	−67	·31332	−97	·35550	−126
85	·12503	−15	·17169	−33	·21983	−56	·26260	−82	·29821	−106
86	·10020	−12	·13775	−27	·17655	−45	·21107	−66	·23986	−86
87	·07526	−9	·10355	−20	·13281	−34	·15889	−50	·18066	−65
88	·05022	−6	·06915	−13	·08873	−23	·10620	−33	·12080	−44
89	·02512	−3	·03461	−7	·04442	−12	·05318	−17	·06051	−22
90	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0

$ce_1(x, \theta)$. $\theta=6$ до $\theta=10$

x	$\theta=6$ $a_1=1\cdot21428$	Δ^2	$\theta=7$ $a_1=0\cdot43835$	Δ^2	$\theta=8$ $a_1=-0\cdot43594$	Δ^2	$\theta=9$ $a_1=-1\cdot38670$	Δ^2	$\theta=10$ $a_1=-2\cdot39914$	Δ^2
°										
0	0·18230	60	0·13133	54	0·09605	48	0·07128	42	0·05360	37
1	·18260	60	·13160	54	·09629	48	·07149	42	·05378	37
2	·18350	60	·13241	55	·09701	48	·07212	43	·05433	37
3	·18500	60	·13377	55	·09822	49	·07318	43	·05525	38
4	·18711	61	·13568	56	·09992	49	·07467	44	·05655	38
5	·18982	61	·13815	56	·10211	50	·07659	45	·05822	39
6	·19314	62	·14118	57	·10481	51	·07896	46	·06029	40
7	·19709	63	·14477	58	·10802	53	·08179	47	·06277	42
8	·20166	63	·14895	59	·11175	54	·08509	48	·06566	43
9	·20687	64	·15372	60	·11602	55	·08887	50	·06898	45
10	·21272	65	·15909	62	·12085	57	·09316	52	·07276	47
11	·21922	66	·16508	63	·12625	59	·09796	54	·07700	49
12	·22638	67	·17169	65	·13223	61	·10330	56	·08173	51
13	·23421	68	·17896	66	·13882	63	·10921	58	·08698	54
14	·24273	69	·18689	68	·14604	65	·11569	61	·09277	57
15	·25194	70	·19549	70	·15390	67	·12279	64	·09913	60
16	·26186	71	·20479	71	·16244	69	·13052	66	·10608	63
17	·27249	72	·21481	73	·17167	72	·13892	69	·11366	66
18	·28384	73	·22555	75	·18161	74	·14800	72	·12190	69
19	·29593	74	·23704	76	·19230	76	·15781	75	·13082	72
20	·30876	75	·24930	78	·20375	79	·16836	78	·14047	76
21	·32235	76	·26234	80	·21598	81	·17969	81	·15088	79
22	·33668	76	·27618	81	·22903	83	·19183	84	·16208	83
23	·35178	76	·29082	82	·24291	85	·20481	87	·17411	86
24	·36765	76	·30629	83	·25765	87	·21865	89	·18700	90
25	·38427	76	·32259	84	·27326	89	·23339	92	·20079	93
26	·40166	76	·33973	85	·28976	91	·24905	95	·21552	97
27	·41980	75	·35772	85	·30717	92	·26565	97	·23121	100
28	·43869	73	·37656	85	·32550	93	·28322	99	·24789	103
29	·45831	72	·39624	84	·34476	94	·30178	100	·26561	105
30	·47865	70	·41677	83	·36495	94	·32135	102	·28437	107
31	·49969	67	·43813	82	·38609	93	·34193	102	·30421	109
32	·52139	64	·46031	80	·40815	93	·36353	103	·32514	111
33	·54375	61	·48328	77	·43115	91	·38616	102	·34718	111
34	·56670	57	·50703	74	·45505	89	·40982	101	·37033	112
35	·59023	52	·53152	70	·47985	86	·43449	100	·39459	111
36	·61427	47	·55672	66	·50551	83	·46016	97	·41996	110
37	·63878	41	·58257	61	·53199	78	·48680	94	·44644	108
38	·66370	34	·60903	55	·55926	73	·51438	90	·47398	104
39	·68895	27	·63604	48	·58727	67	·54286	85	·50257	100
40	·71448	19	·66352	40	·61594	60	·57219	79	·53217	95
41	·74019	10	·69141	32	·64522	52	·60230	71	·56271	89
42	·76601	1	·71961	22	·67502	43	·63313	63	·59414	81
43	·79183	−9	·74804	12	·70526	33	·66458	53	·62638	72
44	·81757	−20	·77659	1	·73582	22	·69657	43	·65935	62
45	0·84310	−31	0·80515	−11	0·76661	10	0·72899	31	0·69294	51

Таблица XVI — продолжение

$ce_1(x, \theta)$. $\theta=6$ до $\theta=10$

x	$\theta=6$, $a_1=1\cdot21428$	Δ^2	$\theta=7$, $a_1=0\cdot43835$	Δ^2	$\theta=8$, $a_1=-0\cdot43594$	Δ^2	$\theta=9$, $a_1=-1\cdot38670$	Δ^2	$\theta=10$, $a_1=-2\cdot39914$	Δ^2
°										
45	0·84310	−31	0·80515	−11	0·76661	10	0·72899	31	0·69294	51
46	·86832	−43	·83361	−24	·79750	−3	·76171	17	·72703	38
47	·89311	−56	·86182	−37	·82836	−17	·79461	3	·76150	23
48	·91734	−69	·88967	−52	·85904	−32	·82754	−13	·79620	7
49	·94089	−83	·91700	−67	·88941	−49	·86034	−29	·83097	−10
50	·96360	−97	·94366	−83	·91928	−66	·89285	−47	·86565	−29
51	0·98535	−111	·96949	−99	·94850	−84	·92488	−66	·90004	−48
52	1·00598	−126	0·99434	−116	·97688	−102	·95625	−87	·93394	−69
53	1·02535	−141	1·01803	−133	1·00424	−122	0·98676	−108	·96716	−92
54	1·04330	−156	1·04038	−151	1·03039	−142	1·01619	−129	0·99945	−115
55	1·05970	−172	1·06123	−169	1·05512	−162	1·04432	−152	1·03059	−139
56	1·07437	−187	1·08038	−187	1·07823	−183	1·07094	−175	1·06034	−165
57	1·08718	−202	1·09767	−205	1·09951	−203	1·09581	−198	1·08844	−190
58	1·09797	−217	1·11290	−223	1·11876	−224	1·11870	−222	1·11464	−216
59	1·10660	−231	1·12591	−240	1·13577	−245	1·13938	−245	1·13868	−242
60	1·11291	−245	1·13651	−257	1·15033	−265	1·15760	−268	1·16029	−269
61	1·11678	−258	1·14453	−274	1·16224	−285	1·17314	−291	1·17922	−294
62	1·11808	−270	1·14982	−289	1·17131	−304	1·18576	−313	1·19520	−320
63	1·11668	−281	1·15222	−304	1·17734	−322	1·19525	−335	1·20798	−344
64	1.11246	−291	1·15157	−318	1·18015	−338	1·20140	−355	1·21732	−367
65	1·10533	−300	1·14774	−330	1·17958	−354	1·20400	−373	1·22299	−389
66	1·09520	−308	1·14062	−341	1·17547	−368	1·20286	−390	1·22476	−410
67	1·08199	−315	1·13009	−350	1·16769	−380	1·19782	−405	1·22244	−428
68	1·06562	−319	1·11607	−357	1·15611	−390	1·18873	−418	1·21584	−444
69	1·04607	−323	1·09847	−363	1·14063	−398	1·17545	−429	1·20480	−457
70	1·02328	−324	1·07725	−366	1·12117	−404	1·15788	−437	1·18919	−468
71	0·99726	−324	1·05236	−368	1·09768	−407	1·13594	−443	1·16890	−475
72	·96799	−322	1.02380	−367	1·07012	−408	1·10958	−445	1·14385	−480
73	·93550	−318	0·99157	−364	1·03849	−406	1·07876	−445	1·11401	−481
74	·89984	−312	·95571	−358	1,00280	−401	1·04349	−441	1·07936	−478
75	·86105	−304	·91627	−350	0,96310	−393	1·00382	−434	1·03992	−472
76	·81922	−295	·87332	−340	·91946	−383	0·95981	−424	0·99576	−463
77	·77445	−283	·82696	−328	·87199	−371	·91156	−410	·94697	−449
78	·72685	−269	·77733	−313	·82082	−354	·85921	−394	·89369	−432
79	·67655	−254	·72457	−296	·76611	−336	·80291	−374	·83610	−411
80	·62371	−237	·66885	−277	·70804	−315	·74288	−351	·77440	−386
81	·56850	−219	·61036	−256	·64682	−291	·67933	−325	·70883	−359
82	·51110	−198	·54931	−232	·58270	−265	·61254	−297	·63967	−328
83	·45172	−177	·48595	−207	·51592	−237	·54277	−266	·56724	−294
84	·39057	−154	·42050	−181	·44677	−207	·47035	−232	·49187	−257
85	·32788	−130	·35325	−153	·37555	−175	·39560	−197	·41394	−218
86	.26389	−105	·28447	−124	·30258	−142	·31889	−160	·33382	−177
87	·19885	−80	·21445	−94	·22820	−108	·24058	−121	·25193	−134
88	·13301	−53	·14349	−63	·15273	−72	·16107	−81	·16871	−90
89	·06664	−27	·07190	−32	·07655	−36	·08074	−41	·08458	−45
90	0·00000	0	0 00000	0	0·00000	0	0·00000	0	0 00000	0

Таблица XVII

$se_2(x, \theta)$. $\theta=1$ до $\theta=5$

x	$\theta=1$, $b_2=3\cdot91702$	Δ^2	$\theta=2$, $b_2=3\cdot67223$	Δ^2	$\theta=3$, $b_2=3\cdot27692$	Δ^2	$\theta=4$, $b_2=2\cdot74688$	Δ^2	$\theta=5$, $b_2=2\cdot09946$	Δ^2
°										
0	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0
1	·02928	−2	·02416	0	·01969	2	·01591	3	·01280	3
2	·05853	−3	·04832	0	·03940	3	·03185	5	·02563	6
3	·08776	−5	·07249	1	·05914	5	·04784	8	·03853	9
4	·11693	−7	·09666	1	·07893	6	·06391	10	·05151	12
5	·14603	−9	·12085	1	·09878	8	·08008	13	·06462	15
6	·17505	−10	·14504	1	·11871	9	·09637	15	.07788	18
7	·20396	−12	·16924	1	·13873	11	·11281	17	·09132	21
8	·23275	−14	·19346	1	·15887	12	·12942	19	·10498	24
9	·26140	−16	·21768	1	·17912	13	·14623	22	·11887	27
10	·28989	−18	·24191	1	·19951	14	·16325	24	·13304	30
11	·31819	−20	·26615	0	·22003	15	·18052	26	·14749	32
12	·34630	−22	·29039	0	·24072	16	·19803	28	·16227	35
13	·37419	−24	·31463	−1	·26156	17	·21583	29	.17740	37
14	·40183	−26	·33886	−1	·28257	17	·23391	31	·19290	40
15	·42922	−29	·36308	−2	·30376	18	·25231	32	·20880	42
16	·45631	−31	·38728	−3	·32512	18	·27102	33	·22511	44
17	·48310	−33	·41144	−4	·34666	18	·29007	34	·24186	46
18	·50955	−36	·43555	−6	·36838	18	·30946	35	·25907	47
19	·53565	−38	·45961	−7	·39028	17	·32920	36	·27675	49
20	·56137	−41	·48360	−9	·41235	17	·34930	36	·29491	50
21	·58668	−43	·50749	−11	·43459	16	·36976	36	·31358	51
22	·61155	−46	·53128	−13	·45698	14	·39057	36	·33275	52
23	·63596	−49	·55494	−15	·47952	13	·41175	35	·35244	52
24	·65988	−52	·57845	−18	·50218	11	·43327	34	·37265	52
25	·68329	−55	·60178	−20	·52496	9	·45515	33	·39339	52
26	·70614	−58	·62491	−23	·54784	7	·47735	32	·41464	51
27	·72842	−61	·64781	−26	·57078	4	·49987	30	·43640	50
28	·75009	−64	·67045	−29	·59376	1	·52268	27	·45866	49
29	·77112	−67	·69279	−33	·61676	−2	·54578	25	·48141	47
30	·79148	−70	·71481	−36	·63974	−5	·56911	22	·50463	45
31	·81114	−74	·73647	−40	·66266	−9	·59267	18	.52830	42
32	·83006	−77	·75772	−44	·68550	−14	·61641	14	·55238	38
33	·84821	−80	·77852	−49	·70819	−18	·64029	10	·57685	34
34	·86556	−84	·79885	−53	·73071	−23	·66427	5	·60166	30
35	·88207	−87	·81864	−57	·75300	−28	·68830	0	·62678	25
36	·89772	−90	·83786	−62	·77500	−34	·71232	−6	·65214	20
37	·91246	−94	·85645	−67	·79667	−39	·73629	−12	·67770	14
38	·92627	−97	·87438	−72	·81795	−46	·76013	−19	·70340	7
39	·93911	−100	·89159	−77	·83877	−52	·78379	−26	·72917	0
40	·95094	−103	·90802	−82	·85907	−59	·80719	−33	·75493	−8
41	·96175	−107	·92363	−88	·87878	−65	·83025	−41	·78060	−17
42	·97149	−110	·93836	−93	·89785	−72	·85290	−50	·80611	−26
43	·98013	−113	·95217	−98	·91619	−80	·87505	−58	·83136	−36
44	·98764	−116	·96499	−104	·93373	−87	·89662	−67	·85625	−46
45	0·99399	−119	0·97677	−109	0·95039	−95	0 91751	−77	0·88069	−56

Таблица XVII — продолжение

$se_2(x,\ \theta)$. $\theta=1$ до $\theta=5$

x	$\theta=1$, $b_2=3{\cdot}91702$	Δ^2	$\theta=2$, $b_2=3{\cdot}67223$	Δ^2	$\theta=3$, $b_2=3{\cdot}27692$	Δ^2	$\theta=4$, $b_2=2{\cdot}74688$	Δ^2	$\theta=5$, $b_2=2{\cdot}09946$	Δ^2
°										
45	0·99399	−119	0·97677	−109	0·95039	−95	0·91751	−77	0·88069	−56
46	0·99916	−121	·98746	−115	·96611	−103	·93764	−86	·90456	−68
47	1·00312	−124	0·99700	−120	·98080	−110	·95690	−96	·92775	−79
48	1·00584	−126	1·00534	−125	0·99439	−118	·97520	−106	·95016	−91
49	1·00729	−129	1·01243	−130	1·00680	−126	0·99244	−117	·97166	−103
50	1·00745	−131	1·01821	−135	1·01794	−134	1·00850	−127	0·99212	−116
51	1·00631	−133	1·02264	−140	1·02775	−142	1·02330	−137	1·01142	−129
52	1·00384	−135	1·02567	−145	1·03614	−149	1·03672	−148	1·02943	−142
53	1·00002	−136	1·02725	−149	1·04303	−157	1·04866	−158	1·04603	−155
54	0·99484	−137	1·02734	−154	1·04836	−164	1·05902	−168	1·06108	−168
55	·98829	−138	1·02588	−157	1·05206	−171	1·06770	−178	1·07446	−181
56	·98036	−139	1·02286	−161	1·05404	−177	1·07460	−188	1·08602	−193
57	·97103	−140	1·01822	−164	1·05425	−184	1·07961	−197	1·09566	−206
58	·96030	−140	1·01194	−167	1.05263	−189	1·08265	−206	1·10323	−218
59	·94816	−140	1·00399	−170	1·04911	−195	1·08363	−215	1·10863	−229
60	·93463	−140	0·99434	−172	1·04364	−200	1·08247	−222	1·11173	−240
61	·91970	−139	·98297	−173	1·03618	−204	1·07908	−230	1·11243	−251
62	·90337	−139	·96987	−175	1·02668	−207	1·07339	−236	1·11062	−260
63	·88566	−137	·95503	−175	1·01511	−210	1·06534	−242	1·10622	−269
64	·86657	−136	·93843	−175	1·00144	−213	1·05488	−246	1·09912	−276
65	·84613	−134	·92008	−175	0·98564	−214	1·04195	−250	1·08926	−283
66	·82434	−132	·89997	−174	·96770	−215	1·02652	−253	1·07657	−288
67	·80124	−129	·87813	−173	·94760	−215	1·00856	−255	1·06100	−292
68	·77684	−127	·85457	−170	·92537	−214	0·98805	−256	1·04251	−295
69	·75117	−124	·82930	−168	·90099	−212	·96497	−255	1·02107	−296
70	·72427	−120	·80235	−165	·87449	−210	·93935	−254	0·99667	−296
71	·69616	−116	·77375	−161	·84589	−206	·91119	−251	·96930	−295
72	·66689	−112	·74355	−156	·81523	−202	·88051	−247	·93899	−291
73	·63650	−108	·71178	−151	·78255	−197	·84736	−242	·90576	−287
74	·60502	−103	·67850	−146	·74791	−191	·81180	−236	·86967	−280
75	·57251	−98	·64376	−140	·71136	−184	·77387	−228	·83078	−272
76	·53902	−93	·60762	−133	·67297	−176	·73367	−219	·78916	−263
77	·50459	−88	·57015	−126	·63283	−167	·69128	−209	·74492	−251
78	·46929	−82	·53141	−119	·59102	−158	·64679	−198	·69817	−239
79	·43316	−76	·49149	−110	·54763	−147	·60033	−186	·64903	−225
80	·39627	−69	·45047	−102	·50277	−136	·55200	−173	·59764	−209
81	·35869	−64	·40842	−93	·45654	−125	·50196	−158	·54416	−192
82	·32047	−57	·36545	−84	·40907	−113	·45032	−143	·48875	−174
83	·28168	−50	·32164	−74	·36046	−100	·39726	−127	·43160	−155
84	·24238	−43	·27709	−64	·31086	−87	·34293	−110	·37290	−135
85	·20265	−36	·23190	−54	·26040	−73	·28749	−93	·31286	−114
86	·16256	−29	·18617	−43	·20920	−59	·23112	−75	·25167	−92
87	·12218	−22	·14001	−33	·15742	−44	·17401	−57	·18957	−70
88	·08157	−15	·09352	−22	·10519	−30	·11632	−38	·12677	−47
89	·04082	−7	·04681	−11	·05267	−15	·05826	−19	·06350	−23
90	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0

Таблица XVII — продолжение

$se_2(x,\ \theta)$. $\theta=6$ до $\theta=10$

x	$\theta=6$, $b_2=1{\cdot}35138$	Δ^2	$\theta=7$, $b_2=0{\cdot}51755$	Δ^2	$\theta=8$, $b_2=-0{\cdot}38936$	Δ^2	$\theta=9$, $b_2=-1{\cdot}35881$	Δ^2	$\theta=10$, $b_2=-2{\cdot}38216$	Δ^2
°										
0	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0
1	·01028	3	·00826	3	·00665	3	·00537	3	·00435	3
2	·02059	7	·01655	7	·01333	7	·01077	6	·00873	6
3	·03097	10	·02491	10	·02008	10	·01623	10	·01316	9
4	·04145	13	·03337	14	·02692	13	·02179	13	·01769	12
5	·05207	17	·04197	17	·03391	17	·02747	16	·02233	15
6	·06284	20	·05074	20	·04105	20	·03331	19	·02713	18
7	·07382	23	·05971	24	·04840	23	·03935	23	·03211	21
8	·08503	26	·06892	27	·05598	27	·04561	26	·03730	25
9	·09650	30	·07840	31	·06384	30	·05214	29	·04273	28
10	·10827	33	·08819	34	·07199	34	·05895	33	·04845	31
11	·12037	36	·09831	37	·08048	37	·06609	36	·05447	35
12	·13282	39	·10881	41	·08935	41	·07360	40	·06085	38
13	·14566	42	.11972	44	·09863	44	·08151	44	·06761	42
14	·15892	45	·13106	47	·10834	48	·08985	47	·07478	46
15	·17263	48	·14288	51	·11854	51	·09866	51	·08242	49
16	·18682	50	·15521	54	·12925	55	·10799	55	·09055	53
17	·20150	53	·16807	57	·14052	58	·11786	58	·09921	57
18	·21672	55	·18150	60	·15236	62	·12831	62	·10844	61
19	·23248	57	·19552	63	·16483	65	·13939	66	·11829	65
20	·24882	59	·21017	65	·17795	69	·15112	70	·12879	69
21	·26575	61	·22548	68	·19175	72	·16356	73	·13999	74
22	·28330	63	·24146	70	·20627	75	·17673	77	·15192	78
23	·30147	64	·25815	72	.22154	78	·19066	81	·16463	82
24	·32029	65	·27556	74	·23758	80	·20541	84	·17815	86
25	·33976	66	·29371	76	·25443	83	·22099	87	·19253	89
26	·35988	66	·31262	77	·27210	85	·23744	90	·20780	93
27	·38067	66	·33231	78	·29062	87	·25479	93	·22401	96
28	·40211	66	·35277	79	·31001	88	·27307	95	·24117	100
29	·42421	65	·37402	79	·33028	89	·29230	97	·25934	103
30	.44696	63	·39605	78	·35144	90	·31250	99	·27852	105
31	·47035	61	·41887	77	·37350	90	·33368	100	·29876	107
32	·49434	59	·44246	76	·39646	89	·35586	100	·32007	109
33	·51892	56	·46680	74	·42031	88	·37904	100	·34247	110
34	·54406	52	·49188	71	·44505	86	·40322	99	·36596	110
35	·56972	48	·51767	67	·47065	84	·42840	98	·39056	110
36	·59586	43	·54413	63	·49708	81	·45456	96	·41625	108
37	·62243	37	·57122	58	·52433	77	·48168	93	·44302	106
38	·64936	31	·59889	52	·55234	72	·50972	89	·47086	103
39	·67661	24	·62709	46	·58107	66	·53865	84	·49973	99
40	·70408	16	·65574	38	·61045	59	·56841	78	·52960	94
41	·73172	7	·68477	30	·64043	51	·59896	70	·56042	88
42	·75942	−2	·71410	21	·67091	42	·63020	62	·59211	81
43	·78710	−12	·74364	10	·70181	32	.66207	53	·62461	72
44	·81466	−23	·77328	−1	·73303	21	·69446	42	·65782	62
45	0·84198	−35	0·80291	−13	0·76447	9	0·72727	30	0·69166	50

Таблица XVII — продолжение

$se_2(x, \theta)$. $\theta=6$ до $\theta=10$

x	$\theta=6$, $b_2=1·35138$	Δ^2	$\theta=7$, $b_2=0·51755$	Δ^2	$\theta=8$, $b_2=-0·38936$	Δ^2	$\theta=9$, $b_2=-1·35881$	Δ^2	$\theta=10$, $b_2=-2·38216$	Δ^2
°										
45	0·84198	−35	0·80291	−13	0·76447	9	0·72727	30	0·69166	50
46	·86896	−47	·83242	−26	·79599	−4	·76038	17	·72599	37
47	·89547	−60	·86166	−39	·82747	−18	·79366	2	·76069	23
48	·92138	−73	·89052	−54	·85877	−34	·82696	−13	·79563	7
49	·94656	−87	·91884	−69	·88973	−50	·86013	−30	·83063	−10
50	·97087	−102	·94646	−85	·92020	−67	·89300	−48	·86553	−29
51	0·99416	−117	·97324	−102	·94999	−85	92539	−67	·90014	−49
52	1·01629	−132	0·99900	−119	0·97893	−104	·95711	−87	·93426	−70
53	1·03709	−147	1·02357	−136	1·00684	−123	0·98795	−108	0·96768	−92
54	1·05643	−163	1·04677	−154	1·03350	−143	1·01770	−130	1 00018	−116
55	1·07414	−178	1·06844	−173	1·05874	−164	1·04616	−153	1·03152	−140
56	1·09006	−194	1·08837	−191	1·08234	−185	1·07308	−176	1·06146	−165
57	1·10405	−210	1·10639	−209	1·10408	−206	1·09824	−199	1·08974	−191
58	1·11593	−225	1·12232	−227	1·12377	−227	1·12141	−223	1·11612	−217
59	1·12557	−239	1·13598	−245	1·14120	−248	1·14235	−247	1·14033	−243
60	1·13282	−254	1·14718	−263	1·15614	−268	1·16081	−270	1·16210	−270
61	1·13753	−267	1·15576	−279	1·16841	−288	1.17658	−293	1·18117	−296
62	1·13957	−280	1·16154	−295	1·17780	−307	1·18942	−315	1·19729	−321
63	1·13881	−291	1·16437	−310	1·18412	−325	1·19910	−337	1·21020	−345
64	1·13513	−302	1·16410	−324	1·18719	−342	1·20542	−357	1·21966	−369
65	1·12844	−311	1·16059	−336	1·18683	−358	1·20816	−376	1·22542	−391
66	1·11863	−320	1·15372	−347	1·18290	−372	1·20715	−393	1·22728	−411
67	1·10562	−326	1·14337	−357	1·17526	−384	1·20221	−408	1·22503	−429
68	1·08935	−331	1·12946	−364	1·16378	−394	1·19320	−421	1·21848	−445
69	1·06977	−334	1·11191	−370	1.14836	−402	1·17997	−432	1·20748	−459
70	1·04685	−336	1·09065	−373	1·12891	−408	1·16242	−440	1·19189	−470
71	1·02057	−336	1·06567	−375	1·10539	−411	1·14048	−445	1·17161	−477
72	0·99092	−334	1·03694	−374	1·07775	−412	1·11408	−448	1·14655	−482
73	·95795	−330	1·00447	−371	1·04600	−410	1·08320	−447	1·11668	−483
74	·92167	−323	0·96829	−365	1·01014	−405	1·04785	−444	1·08198	−480
75	·88216	−315	·92846	−357	0 97024	−398	1·00807	−437	1·04248	−474
76	·83950	−305	·88505	−347	·92635	−387	0·96392	−426	0·99824	−464
77	·79378	−293	·83818	−334	·87859	−374	·91550	−413	·94936	−450
78	·74513	−279	.78796	−319	·82709	−358	86295	−396	·89597	−433
79	·69369	−264	·73455	−302	·77200	−339	·80644	−376	·83825	−412
80	·63961	−246	·67813	−282	·71352	−318	·74617	−353	·77640	−388
81	·58307	−227	·61887	−261	·65186	−294	·68236	−327	·71067	−360
82	·52427	−206	·55702	−237	·58726	−268	·61528	−299	·64135	−329
83	·46340	−183	·49279	−212	·51998	−240	·54522	−267	·56873	−295
84	·40071	−160	·42645	−184	·45030	−209	·47248	−234	·49317	−258
85	·33642	−135	·35826	−156	·37853	−177	·39740	−198	·41504	−219
86	·27078	−109	·28851	−126	·30499	−143	·32034	−161	·33471	−177
87	·20405	−83	·21750	−90	·23001	−109	.24168	−122	·25261	−135
88	·13650	−55	·14554	−64	·15395	−73	·16180	−82	·16916	−90
89	·06839	−28	·07293	−32	·07716	−37	.08111	−41	·08481	−45
90	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0

Таблица XVIII

$ce_2(x, \theta)$. $\theta=1$ до $\theta=5$

x	$\theta=1$, $a_2=4·37130$	Δ^2	$\theta=2$, $a_2=5·17267$	Δ^2	$\theta=3$, $a_2=6·04520$	Δ^2	$\theta=4$, $a_2=6·82907$	Δ^2	$\theta=5$, $a_2=7·44911$	Δ^2
°										
0	1·08596	−78	1·04883	−37	0·96367	−1	0·85584	31	0·73529	57
1	1·08557	−78	1·04865	−38	·96366	−1	·85599	30	·73558	57
2	1·08439	−78	1·04808	−38	·96364	−2	·85645	30	·73644	57
3	1·08243	−79	1·04714	−38	·96360	−2	·85720	29	·73786	56
4	1·07968	−79	1·04582	−39	·96354	−3	·85825	29	·73984	55
5	1·07615	−79	1·04411	−39	·96345	−4	·85959	27	·74238	54
6	1·07183	−79	1·04201	−40	·96331	−5	·86120	26	·74545	53
7	1·06672	−79	1·03951	−41	·96313	−7	·86307	25	.74906	51
8	1.06082	−79	1·03660	−42	·96288	−8	·86519	23	·75318	50
9	1·05413	−79	1·03328	−43	·96255	−10	·86753	21	·75780	48
10	1·04665	−79	1·02952	−44	·96212	−12	·87008	18	·76289	54
11	1·03837	−80	1·02531	−46	·96156	−14	·87281	16	·76844	43
12	1·02929	−80	1·02065	−47	·96087	−17	·87570	13	·77441	40
13	1·01942	−80	1·01552	−49	·96001	−19	·87872	10	·78078	37
14	1·00875	−80	1·00990	−50	·95897	−22	·88183	6	·78752	33
15	·99728	−80	1·00377	−52	·95770	−25	·88501	3	·79458	29
16	·98501	−80	0·99713	−54	·95618	−28	·88821	−1	·80194	25
17	·97193	−80	·98994	−56	·95439	−31	·89140	−5	·80955	21
18	·95805	−80	·98219	−58	·95228	−35	·89453	−10	·81737	16
19	·94337	−80	·97386	−60	·94983	−38	·89757	−14	·82535	11
20	·92788	−80	·96493	−62	·94700	−42	·90046	−19	·83344	5
21	·91160	−80	·95539	−64	·94375	−46	·90317	−24	·84158	−1
22	·89451	−80	·94520	−66	·94004	−50	·90562	−30	·84971	−7
23	·87662	−80	·93435	−68	·93584	−54	·90779	−35	·85778	−13
24	·85793	−79	·92282	−70	·93111	−58	·90960	−41	·86571	−20
25	·83846	−79	·91059	−72	·92579	−62	·91100	−47	·87345	−27
26	·81819	−78	·89764	−74	·91986	−66	·91193	−53	·88091	−35
27	·79714	−78	·88394	−76	·91328	−70	·91233	−59	·88803	−43
28	·77532	−77	·86949	−78	·90599	−74	·91215	−65	·89472	−51
29	·75273	−76	·85426	−79	·89795	−78	·91130	−72	·90091	−59
30	·72938	−75	·83823	−81	·88914	−82	·90974	−78	·90650	−68
31	·70528	−74	·82140	−82	·87950	−86	·90740	−85	·91142	−76
32	·68044	−72	·80374	−84	·86899	−90	·90420	−91	·91557	−86
33	·65488	−71	·78524	−85	·85758	−94	·90010	−98	·91887	−95
34	·62861	−69	.76590	−86	·84523	−98	·89501	−104	·92122	−104
35	·60164	−68	·74569	−86	·83191	−101	·88887	−111	·92254	−113
36	·57400	−66	·72463	−87	·81757	−104	·88163	−117	·92272	−123
37	·54570	−63	·70269	−87	·80218	−107	·87322	−123	·92167	−132
38	·51677	−61	·67989	−87	·78573	−110	·86357	−129	·91931	−141
39	·48723	−59	·65621	−87	·76817	−112	·85265	−134	·91554	−150
40	·45710	−56	·63167	−86	·74949	−114	·84037	−139	·91027	−158
41	·42641	−53	·60626	−85	·72967	−116	·82671	−144	·90342	−167
42	·39519	−50	·58001	−84	·70870	−117	·81161	−148	·89490	−175
43	·36347	−47	·55291	−82	·68655	−118	·79503	−152	·88464	−182
44	·33128	−43	·52499	−80	·66323	−118	·77693	−155	·87256	−189
45	0·29865	−40	0·49626	−78	0·63872	−118	0.75727	−157	0·85859	−195

Таблица XVIII — продолжение

$ce_2(x, \theta)$. $\theta=1$ до $\theta=5$

x	$\theta=1$, $a_2=4{\cdot}37130$	Δ^2	$\theta=2$, $a_2=5{\cdot}17267$	Δ^2	$\theta=3$, $a_2=6{\cdot}04520$	Δ^2	$\theta=4$, $a_2=6{\cdot}82907$	Δ^2	$\theta=5$, $a_2=7{\cdot}44911$	Δ^2
45°	0·29865	−40	0·49626	−78	0·63872	−118	0·75727	−157	0·85859	−195
46	·26563	−36	·46675	−75	·61305	−117	·73605	−159	·84267	−200
47	·23225	−32	·43649	−72	·58620	−115	·71323	−160	·82475	−205
48	·19855	−28	·40551	−69	·55820	−113	·68881	−161	·80479	−208
49	·16457	−23	·37383	−65	·52907	−111	·66278	−160	·78274	−211
50	·13036	−19	·34150	−61	·49883	−108	·63514	−159	·75859	−212
51	·09596	−14	·30856	−56	·46751	−104	·60592	−157	·73232	−212
52	·06143	−9	·27506	−51	·43516	−99	·57513	−153	·70392	−211
53	·02680	−4	·24104	−46	·40181	−94	·54281	−149	·67341	−209
54	−·00787	1	·20656	−40	·36752	−88	·50899	−144	·64080	−206
55	−·04253	7	·17168	−34	·33234	−82	·47373	−138	·60614	−201
56	−·07712	12	·13646	−28	·29635	−75	·43709	−131	·56947	−194
57	−·11159	18	·10096	−21	·25961	−67	·39915	−123	·53086	−186
58	−·14588	23	·06525	−14	·22220	−59	·35998	−113	·49039	−177
59	−·17994	28	·02941	−6	·18420	−50	·31967	−103	·44816	−166
60	−·21371	35	−·00650	1	·14570	−40	·27834	−92	·40427	−153
61	−·24713	41	−·04240	9	·10681	−30	·23609	−80	·35884	−139
62	−·28014	47	−·07820	18	·06761	−19	·19304	−66	·31203	−124
63	−·31268	53	−·11382	26	·02822	−8	·14934	−52	·26397	−107
64	−·34469	59	−·14918	35	−·01125	3	·10510	−38	·21485	−89
65	−·37612	65	−·18420	43	−·05069	15	·06049	−22	·16483	−70
66	−·40690	71	−·21878	52	−·08997	28	·01566	−6	·11412	−49
67	−·43697	77	−·25284	61	−·12898	40	−·02922	11	·06292	−28
68	−·46627	83	−·28628	70	−·16759	53	−·07400	28	·01144	−5
69	−·49475	88	−·31902	79	−·20567	66	−·11849	46	−·04008	18
70	−·52234	94	−·35098	88	−·24309	79	−·16252	64	−·09143	42
71	−·54900	99	−·38205	97	−·27972	92	−·20591	82	−·14235	66
72	−·57466	105	−·41215	106	−·31543	105	−·24848	101	−·19261	91
73	−·59927	110	−·44119	114	−·35010	118	−·29003	119	−·24196	116
74	−·62279	115	−·46910	122	−·38359	130	−·33040	137	−·29014	141
75	−·64515	120	−·49578	130	−·41578	142	−·36940	155	−·33692	165
76	−·66631	125	−·52116	138	−·44655	154	−·40686	172	−·38205	189
77	−·68623	129	−·54516	146	−·47577	166	−·44259	189	−·42528	213
78	−·70486	133	−·56770	153	−·50334	177	−·47643	205	−·46638	236
79	−·72215	137	−·58871	159	−·52914	187	−·50822	220	−·50513	257
80	−·73808	141	−·60814	165	−·55307	197	−·53780	235	−·54131	278
81	−·75260	144	−·62590	171	−·57504	206	−·56504	248	−·57470	297
82	−·76569	147	−·64196	176	−·59494	214	−·58979	261	−·60514	314
83	−·77730	149	−·65626	181	−·61271	221	−·61193	272	−·63242	330
84	−·78743	152	−·66874	185	−·62826	228	−·63136	282	−·65641	344
85	−·79603	154	−·67937	188	−·64153	234	−·64797	290	−·67695	357
86	−·80310	155	−·68812	191	−·65246	238	−·66167	297	−·69393	367
87	−·80861	157	−·69496	194	−·66102	242	−·67241	303	−·70724	375
88	−·81256	158	−·69986	195	−·66715	244	−·68011	307	−·71680	380
89	−·81494	158	−·70280	196	−·67085	246	−·68475	309	−·72256	384
90	−0·81573	158	−0·70379	197	−0·67208	247	−·68630	310	−0·72449	385

Таблица XVIII — продолжение

$ce_2(x, \theta)$. $\theta=6$ до $\theta=10$

x	$\theta=6$, $a_2=7{\cdot}87006$	Δ^2	$\theta=7$, $a_2=8{\cdot}08662$	Δ^2	$\theta=8$, $a_2=8{\cdot}11524$	Δ^2	$\theta=9$, $a_2=7{\cdot}98284$	Δ^2	$\theta=10$, $a_2=7{\cdot}71737$	Δ^2
0°	0·61196	77	0·49619	89	0·39533	95	0·31217	95	0·24589	92
1	·61235	77	·49663	89	·39581	95	·31264	95	·24635	92
2	·61350	77	·49797	89	·39723	95	·31407	95	·24773	92
3	·61542	76	·50020	89	·39960	95	·31646	96	·25003	93
4	·61810	76	·50333	89	·40293	95	·31980	96	·25327	93
5	·62154	75	·50733	88	·40720	95	·32409	96	·25743	94
6	·62573	74	·51222	87	·41242	95	·32936	97	·26253	95
7	·63065	72	·51798	87	·41858	94	·33558	97	·26858	96
8	·63629	71	·52461	86	·42569	94	·34278	97	·27559	97
9	·64265	69	·53210	85	·43375	94	·35095	98	·28357	98
10	·64970	67	·54043	83	·44274	93	·36009	98	·29252	99
11	·65742	65	·54960	82	·45266	93	·37022	98	·30245	100
12	·66580	63	·55959	80	·46351	92	·38132	98	·31339	101
13	·67480	60	·57038	78	·47528	91	·39341	98	·32533	102
14	·68440	57	·58195	76	·48795	89	·40648	98	·33829	102
15	·69457	53	·59428	73	·50152	88	·42053	97	·35227	103
16	·70527	50	·60734	70	·51597	86	·43556	97	·36728	103
17	·71647	45	·62110	67	·53127	83	·45155	95	·38333	103
18	·72812	41	·63553	63	·54740	80	·46849	94	·40041	103
19	·74018	36	·65058	58	·56434	77	·48638	92	·41853	102
20	·75260	30	·66621	53	·58205	73	·50518	89	·43766	101
21	·76532	24	·68238	48	·60050	69	·52487	86	·45782	100
22	·77828	18	·69903	42	·61963	64	·54543	82	·47896	97
23	·79142	11	·71611	36	·63941	58	·56681	78	·50108	94
24	·80468	4	·73354	29	·65977	52	·58897	73	·52415	90
25	·81797	−4	·75125	21	·68065	45	·61186	67	·54811	86
26	·83122	−12	·76918	12	·70198	37	·63542	60	·57293	80
27	·84435	−21	·78723	3	·72368	28	·65957	52	·59856	74
28	·85727	−30	·80531	−6	·74566	19	·68425	43	·62492	66
29	·86989	−40	·82333	−17	·76783	8	·70936	34	·65194	57
30	·88211	−50	·84118	−28	·79008	−3	·73480	23	·67953	47
31	·89382	−61	·85875	−40	·81231	−15	·76048	11	·70759	36
32	·90493	−72	·87592	−52	·83439	−28	·78625	−2	·73601	23
33	·91531	−83	·89257	−65	·85618	−42	·81201	−16	·76467	10
34	·92486	−95	·90858	−79	·87756	−57	·83760	−32	·79342	−6
35	·93346	−107	·92379	−93	·89836	−72	·86288	−48	·82211	−22
36	·94099	−119	·93808	−107	·91845	−89	·88767	−66	·85059	−40
37	·94733	−132	·95129	−123	·93764	−106	·91181	−84	·87866	−59
38	·95235	−144	·96328	−138	·95578	−124	·93511	−103	·90615	−80
39	·95593	−157	·97389	−154	·97268	−142	·95737	−124	·93284	−101
40	·95794	−169	·98296	−169	0·98816	−161	·97840	−145	·95851	−124
41	·95827	−181	·99034	−185	1·00204	−180	0·99798	−167	0·98295	−148
42	·95678	−193	·99587	−201	1·01412	−199	1·01589	−189	1·00591	−172
43	·95337	−204	0·99938	−216	1·02420	−218	1·03191	−211	1·02714	−198
44	·94792	−215	1·00074	−232	1·03211	−238	1·04582	−234	1·04640	−224
45	0·94031	−225	0·99978	−246	1·03764	−256	1·05739	−257	1·06341	−250

Таблица XVIII—продолжение

$ce_2(x, \theta)$. $\theta=6$ до $\theta=10$

x	$\theta=6$, $a_2=7{\cdot}87006$	Δ^2	$\theta=7$, $a_2=8{\cdot}08662$	Δ^2	$\theta=8$, $a_2=8{\cdot}11524$	Δ^2	$\theta=9$, $a_2=7{\cdot}98284$	Δ^2	$\theta=10$, $a_2=7{\cdot}71737$	Δ^2
45°	0·94031	−225	0·99978	−246	1·03764	−256	1·05739	−257	1·06341	−250
46	·93045	−235	·99635	−260	1·04060	−275	1·06639	−280	1·07793	−276
47	·91824	−243	·99033	−273	1·04081	−293	1·07259	−302	1·08968	−302
48	·90360	−251	·98157	−285	1·03810	−309	1·07577	−323	1·09841	−328
49	·88645	−258	·96995	−296	1·03230	−325	1·07572	−344	1·10386	−353
50	·86672	−263	·95537	−306	1·02324	−339	1·07223	−363	1·10578	−377
51	·84437	−266	·93774	−314	1·01079	−352	1·06512	−380	1·10393	−399
52	·81935	−269	·91696	−320	0·99482	−363	1·05420	−396	1·09809	−420
53	·79164	−269	·89298	−325	·97521	−372	1·03932	−410	1·08805	−438
54	·76124	−268	·86575	−327	·95189	−378	1·02035	−421	1·07363	−454
55	·72816	−265	·83525	−327	·92479	−383	0·99717	−429	1·05466	−467
56	·69242	−261	·80148	−325	·89385	−384	·96970	−435	1·03102	−477
57	·65407	−254	·76445	−321	·85908	−382	·93788	−437	1·00261	−484
58	·61319	−245	·72422	−314	·82049	−378	·90169	−436	0·96936	−486
59	·56985	−234	·68085	−304	·77811	−370	·86114	−431	·93124	−485
60	·52418	−221	·63444	−291	·73204	−359	·81629	−422	·88828	−479
61	·47629	−206	·58512	−276	·68237	−345	·76722	−409	·84052	−469
62	·42633	−189	·53304	−258	·62926	−327	·71405	−392	·78808	−453
63	·37449	−170	·47837	−238	·57288	−305	·65697	−371	·73111	−433
64	·32094	−149	·42133	−214	·51345	−281	·59617	−346	·66980	−408
65	·26591	−126	·36215	−188	·45120	−253	·53191	−316	·60441	−378
66	·20961	−101	·30109	−160	·38644	−221	·46449	−283	·53524	−344
67	·15230	−75	·23843	−129	·31946	−187	·39424	−246	·46263	−304
68	·09424	−47	·17447	−96	·25061	−150	·32153	−205	·38697	−260
69	·03571	−18	·10955	−62	·18026	−110	·24677	−160	·30872	−212
70	−·02301	12	·04402	−25	·10882	−67	·17041	−113	·22835	−160
71	−·08160	43	−·02177	13	·03670	−23	·09292	−63	·14637	−104
72	−·13977	75	−·08742	52	−·03564	23	·01481	−10	·06336	−46
73	−·19718	107	−·15256	92	−·10776	70	−·06340	44	−·02012	15
74	−·25353	139	−·21679	132	−·17917	118	−·14117	100	−·10345	78
75	−·30848	172	−·27969	172	−·24940	167	−·21794	157	−·18600	142
76	−·36171	203	−·34088	212	−·31797	215	−·29315	213	−·26712	206
77	−·41291	235	−·39994	252	−·38437	263	−·36622	269	−·34619	271
78	−·46177	265	−·45648	290	−·44815	310	−·43660	325	−·42254	334
79	−·50797	294	−·51012	327	−·50882	356	−·50373	378	−·49555	396
80	−·55124	321	−·56049	363	−·56593	399	−·56707	430	−·56460	456
81	−·59130	347	−·60724	396	−·61906	440	−·62612	478	−·62910	512
82	−·62788	371	−·65003	426	−·66779	478	−·68039	524	−·68847	565
83	−·66076	393	−·68855	454	−·71175	512	−·72941	565	−·74219	613
84	−·68971	412	−·72253	479	−·75058	543	−·77279	602	−·78979	656
85	−·71454	428	−·75173	501	−·78398	570	−·81014	634	−·83083	693
86	−·73509	442	−·77591	518	−·81168	592	−·84116	661	−·86493	725
87	−·75121	453	−·79491	533	−·83346	610	−·86557	682	−·89179	749
88	−·76281	461	−·80858	543	−·84915	622	−·88315	697	−·91116	767
89	−·76980	465	−·81683	549	−·85861	630	−·89377	707	−·92285	778
90	−0·77214	467	−0·81958	551	−0·86178	633	−0·89732	710	−0·92676	782

Таблица XIX

$se_3(x, \theta)$ $\theta=1$ до $\theta=5$

x	$\theta=1$, $b_3=9{\cdot}04774$	Δ^2	$\theta=2$, $b_3=9{\cdot}14063$	Δ^2	$\theta=3$, $b_3=9{\cdot}22313$	Δ^2	$\theta=4$, $b_3=9{\cdot}26145$	Δ^2	$\theta=5$, $b_3=9{\cdot}23633$	Δ^2
0°	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0
1	·04859	−10	·04426	−7	·03976	−4	·03532	−1	·03108	1
2	·09708	−21	·08846	−14	·07949	−8	·07063	−3	·06217	1
3	·14535	−31	·13252	−21	·11913	−12	·10591	−4	·09327	2
4	·19332	−42	·17637	−28	·15866	−16	·14115	−6	·12439	3
5	·24087	−52	·21994	−35	·19803	−20	·17633	−7	·15554	3
6	·28789	−62	·26316	−42	·23720	−24	·21144	−9	·18671	3
7	·33430	−72	·30596	−49	·27613	−29	·24645	−11	·21792	3
8	·37999	−82	·34827	−56	·31477	−33	·28135	−13	·24916	3
9	·42484	−92	·39002	−63	·35308	−38	·31612	−16	·28042	2
10	·46878	−102	·43114	−71	·39101	−43	·35072	−19	·31171	1
11	·51169	−112	·47155	−78	·42851	−48	·38514	−22	·34302	0
12	·55348	−122	·51118	−85	·46554	−53	·41935	−25	·37432	−1
13	·59405	−131	·54995	−93	·50203	−59	·45330	−29	·40562	−3
14	·63331	−140	·58780	−100	·53794	−64	·48697	−33	·43688	−5
15	·67117	−150	·62464	−108	·57321	−70	·52031	−37	·46809	−8
16	·70753	−158	·66040	−116	·60777	−77	·55328	−42	·49922	−12
17	·74230	−167	·69500	−123	·64157	−83	·58583	−47	·53023	−15
18	·77541	−175	·72838	−131	·67453	−90	·61792	−53	·56109	−20
19	·80676	−184	·76044	−139	·70660	−97	·64947	−59	·59175	−24
20	·83628	−191	·79111	−146	·73770	−104	·68045	−65	·62217	−30
21	·86388	−199	·82032	−154	·76776	−111	·71077	−72	·65229	−36
22	·88949	−206	·84799	−162	·79671	−119	·74037	−79	·68205	−42
23	·91304	−213	·87404	−169	·82446	−127	·76919	−87	·71138	−50
24	·93446	−219	·89840	−177	·85095	−135	·79713	−95	·74022	−57
25	·95368	−225	·92099	−184	·87608	−143	·82413	−103	·76848	−66
26	·97065	−231	·94173	−192	·89978	−152	·85009	−112	·79609	−75
27	·98531	−236	·96056	−199	·92197	−160	·87493	−122	·82294	−84
28	0·99761	−241	·97740	−206	·94256	−168	·89855	−131	·84896	−94
29	1·00750	−245	0·99219	−212	·96146	−177	·92086	−141	·87403	−105
30	1·01494	−249	1·00486	−219	·97859	−185	·94177	−151	·89806	−116
31	1·01989	−252	1·01534	−225	0·99387	−194	·96116	−161	·92092	−127
32	1·02232	−254	1·02357	−230	1·00721	−202	·97894	−172	·94251	−139
33	1·02221	−256	1·02951	−236	1·01852	−210	0·99501	−182	·96271	−152
34	1·01953	−258	1·03308	−240	1·02773	−218	1·00925	−193	·98139	−164
35	1·01428	−258	1·03425	−245	1·03476	−226	1·02157	−203	0·99843	−177
36	1·00644	−258	1·03298	−249	1·03953	−233	1·03186	−213	1·01370	−190
37	0·99602	−258	1·02921	−252	1·04196	−240	1·04001	−224	1·02707	−203
38	·98302	−256	1·02293	−255	1·04199	−247	1·04593	−233	1·03841	−216
39	·96746	−254	1·01410	−257	1·03956	−253	1·04952	−243	1·04760	−228
40	·94936	−252	1·00270	−258	1·03460	−258	1·05067	−252	1·05451	−241
41	·92873	−248	0·98873	−258	1·02706	−262	1·04931	−260	1·05900	−253
42	·90563	−244	·97217	−258	1·01690	−266	1·04534	−268	1·06097	−265
43	·88010	−239	·95303	−257	1·00408	−269	1·03870	−275	1·06029	−276
44	·85217	−233	·93131	−255	0·98856	−271	1·02929	−282	1·05685	−286
45	0·82191	−226	0·90705	−252	0·97034	−273	1·01708	−287	1·05055	−295

Таблица XIX—продолжение

$se_3(x, \theta)$ $\theta=1$ до $\theta=5$

x	$\theta=1$, $b_3=9{\cdot}04774$	Δ^2	$\theta=2$, $b_3=9{\cdot}14063$	Δ^2	$\theta=3$, $b_3=9{\cdot}22313$	Δ^2	$\theta=4$, $b_3=9{\cdot}26145$	Δ^2	$\theta=5$, $b_3=9{\cdot}23633$	Δ^2
45°	0·82191	−226	0·90705	−252	0·97034	−273	1·01708	−287	1·05055	−295
46	·78939	−219	·88025	−249	·94938	−273	1·00199	−291	1·04130	−304
47	·75468	−211	·85097	−244	·92570	−272	0·98399	−294	1·02901	−311
48	·71786	−202	·81925	−238	·89930	−270	·96305	−296	1·01360	−317
49	·67901	−193	·78515	−232	·87021	−267	·93915	−297	0·99502	−322
50	·63823	−183	·74873	−224	·83844	−262	·91229	−296	·97322	−325
51	·59563	−172	·71006	−216	·80406	−256	·88246	−294	·94817	−327
52	·55132	−160	·66924	−206	·76712	−249	·84970	−290	·91985	−326
53	·50540	−148	·62636	−195	·72768	−241	·81404	−284	·88827	−324
54	·45800	−135	·58152	−184	·68583	−231	·77554	−277	·85345	−320
55	·40926	−121	·53485	−171	·64167	−220	·73427	−268	·81542	−314
56	·35930	−107	·48647	−158	·59530	−208	·69032	−258	·77425	−306
57	·30827	−93	·43651	−143	·54686	−194	·64379	−245	·73002	−296
58	·25632	−77	·38512	−128	·49647	−179	·59481	−231	·68283	−283
59	·20359	−62	·33245	−112	·44430	−163	·54351	−215	·63281	−268
60	·15024	−46	·27867	−95	·39049	−145	·49006	−198	·58011	−251
61	·09644	−30	·22394	−77	·33523	−127	·43464	−179	·52489	−232
62	·04233	−13	·16844	−58	·27871	−107	·37743	−158	·46736	−211
63	−·01190	4	·11236	−39	·22112	−86	·31864	−135	·40771	−188
64	−·06610	21	·05589	−20	·16267	−64	·25849	−112	·34619	−162
65	−·12009	38	−·00078	0	·10358	−41	·19723	−86	·28304	−135
66	−·17370	55	−·05744	21	·04408	−18	·13511	−60	·21855	−106
67	−·22676	72	−·11390	41	−·01560	6	·07238	−33	·15300	−75
68	−·27911	89	−·16995	62	−·07521	31	·00933	−4	·08669	−43
69	−·33056	106	−·22537	83	−·13452	56	−·05376	25	·01995	−10
70	−·38095	123	−·27996	104	−·19326	81	−·11660	55	−·04689	24
71	−·43011	139	−·33351	124	−·25119	107	−·17890	85	−·11348	59
72	−·47788	155	−·38582	145	−·30805	132	−·24035	115	−·17949	95
73	−·52410	171	−·43666	166	−·36359	157	−·30064	146	−·24455	131
74	−·56861	186	−·48585	185	−·41756	182	−·35949	176	−·30830	166
75	−·61126	201	−·53319	205	−·46971	206	−·41657	205	−·37038	202
76	−·65190	215	−·57848	223	−·51979	230	−·47160	234	−·43045	237
77	−·69039	228	−·62154	241	−·56758	253	−·52428	263	−·48816	271
78	−·72661	241	−·66219	258	−·61284	274	−·57434	290	−·54315	304
79	−·76042	252	−·70025	274	−·65536	295	−·62151	316	−·59510	335
80	−·79170	263	−·73558	289	−·69492	314	−·66551	340	−·64370	365
81	−·82035	274	−·76802	303	−·73134	332	−·70611	363	−·68865	393
82	−·84627	283	−·79743	315	−·76444	349	−·74309	384	−·72967	419
83	−·86936	291	−·82368	327	−·79405	364	−·77623	402	−·76650	442
84	−·88953	298	−·84668	337	−·82002	377	−·80535	419	−·79891	463
85	−·90673	304	−·86630	345	−·84222	388	−·83028	433	−·82669	480
86	−·92089	309	−·88247	352	−·86054	397	−·85088	445	−·84967	495
87	−·93195	313	−·89513	358	−·87489	405	−·86702	455	−·86770	507
88	−·93988	316	−·90421	362	−·88519	410	−·87862	461	−·88066	515
89	−·94465	318	−·90967	364	−·89139	413	−·88561	465	−·88847	520
90	−0·94624	318	−0·91149	365	−0·89346	414	−0·88794	467	−0·89108	522

Таблица XIX—продолжение

$se_3(x, \theta)$. $\theta=6$ до $\theta=10$

x	$\theta=6$, $b_3=9{\cdot}13791$	Δ^2	$\theta=7$, $b_3=8{\cdot}96239$	Δ^2	$\theta=8$, $b_3=8{\cdot}70991$	Δ^2	$\theta=9$, $b_3=8{\cdot}38312$	Δ^2	$\theta=10$, $b_3=7{\cdot}98607$	Δ^2
0°	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0
1	·02713	2	·02352	4	·02028	4	·01741	5	·01490	5
2	·05428	5	·04708	7	·04061	9	·03488	10	·02986	11
3	·08148	7	·07070	11	·06102	13	·05244	15	·04493	16
4	·10875	9	·09444	14	·08157	18	·07016	20	·06016	22
5	·13611	11	·11832	17	·10230	22	·08808	25	·07560	27
6	·16358	13	·14237	20	·12324	26	·10625	30	·09132	32
7	·19118	15	·16662	23	·14445	30	·12471	34	·10736	37
8	·21892	16	·19111	26	·16595	34	·14353	39	·12377	42
9	·24683	17	·21586	29	·18780	37	·16273	43	·14060	47
10	·27491	18	·24090	31	·21001	40	·18236	47	·15791	52
11	·30316	18	·26624	33	·23263	43	·20247	51	·17573	56
12	·33160	18	·29191	34	·25568	46	·22309	55	·19413	61
13	·36022	18	·31792	35	·27919	48	·24426	58	·21312	65
14	·38902	17	·34428	36	·30319	50	·26601	61	·23277	69
15	·41800	16	·37099	36	·32768	51	·28837	63	·25311	72
16	·44713	14	·39807	35	·35269	52	·31136	65	·27416	75
17	·47641	12	·42549	34	·37822	52	·33500	67	·29596	77
18	·50580	9	·45326	33	·40427	52	·35931	68	·31854	79
19	·53528	5	·48135	30	·43085	51	·38429	68	·34191	81
20	·56481	1	·50975	27	·45793	49	·40995	67	·36609	82
21	·59435	−4	·53842	24	·48551	47	·43629	66	·39109	82
22	·62385	−10	·56732	19	·51356	44	·46329	64	·41690	81
23	·65325	−16	.59642	14	·54205	40	·49093	62	·44353	80
24	·68249	−23	·62565	8	·57093	35	·51919	58	·47096	77
25	·71150	−31	·65496	1	·60016	29	·54803	53	·49915	74
26	·74021	−40	·68428	−7	·62968	22	·57740	47	·52809	70
27	·76851	−49	·71352	−16	·65941	14	·60724	41	·55773	64
28	·79633	−59	·74260	−26	·68928	5	·63749	33	·58800	57
29	·82356	−70	·77143	−36	·71920	−5	·66806	23	·61884	49
30	·85009	−81	·79990	−48	·74907	−16	·69887	13	·65018	40
31	·87581	−94	·82788	−60	·77878	−29	·72980	1	·68191	29
32	·90059	−106	·85526	−74	·80820	−42	·76075	−12	·71394	17
33	·92431	−120	·88191	−88	·83721	−56	·79159	−26	·74613	3
34	·94683	−134	·90767	−103	·86565	−72	·82217	−41	·77836	−12
35	·96801	−148	·93241	−119	·89337	−88	·85234	−58	·81046	−28
36	0·98770	−163	·95596	−135	·92022	−106	·88193	−76	·84229	−46
37	1·00576	−179	·97816	−152	·94600	−124	·91076	−95	·87365	−66
38	1·02204	−194	0·99884	−170	·97055	−143	·93863	−115	·90435	−87
39	1·03637	−210	1·01782	−188	0·99366	−163	·96536	−137	·93418	−109
40	1·04861	−125	1·03493	−206	1·01515	−183	0·99072	−159	·96292	−132
41	1·05859	−241	1·04997	−224	1·03480	−204	1·01450	−182	0·99033	−157
42	1·06616	−256	1·06278	−243	1·05240	−226	1·03645	−205	1·01618	−183
43	1·07118	−271	1·07315	−261	1·06775	−247	1·05636	−229	1·04020	−209
44	1·07349	−285	1·08092	−279	1·08063	−268	1·07397	−254	1·06213	−236
45	1·07294	−299	1·08590	−296	1·09083	−289	1·08904	−278	1·08170	−263

Таблица XIX—продолжение

$se_3(x, \theta)$. $\theta=6$ до $\theta=10$

x	$\theta=6$, $b_3=9{\cdot}13791$	Δ^2	$\theta=7$, $b_3=8{\cdot}96239$	Δ^2	$\theta=8$, $b_3=8{\cdot}70991$	Δ^2	$\theta=9$, $b_3=8{\cdot}38312$	Δ^2	$\theta=10$, $b_3=7{\cdot}98607$	Δ^2
45°	1·07294	299	1·08590	296	1·09083	289	1·08904	278	1·08170	263
46	1·06941	311	1·08791	313	1·09813	310	1·10133	302	1·09864	291
47	1·06277	323	1·08679	329	1·10234	330	1·11060	326	1·11268	318
48	1·05290	333	1·08238	344	1·10324	349	1·11661	349	1·12353	345
49	1·03970	342	1·07454	357	1·10066	367	1·11913	371	1·13094	371
50	1·02308	350	1·06312	369	1·09441	383	1·11793	392	1·13464	396
51	1·00296	355	1·04802	379	1·08433	397	1·11282	411	1·13438	419
52	0·97928	359	1·02912	387	1·07028	410	1·10360	428	1·12992	441
53	·95202	361	1·00636	393	1·05213	420	1·09011	443	1·12106	461
54	·92115	360	0·97967	396	1·02978	428	1·07218	455	1·1[illegible]758	478
55	·88668	357	·94902	397	1·00314	433	1·04970	465	1·08933	492
56	·84863	352	·91439	395	0·97218	435	1·02257	471	1·06616	502
57	·80706	344	·87581	391	·93686	434	0·99073	474	1·03796	509
58	·76205	334	·83332	383	·89720	429	·95416	473	1·00468	512
59	·71370	321	·78700	372	·85325	421	·91286	468	0·96626	511
60	·66214	305	·73696	358	·80508	409	·86689	459	·92274	505
61	·60752	287	·68334	341	·75282	394	·81632	445	·87417	494
62	·55004	265	·62631	320	·69662	374	·76131	427	·82065	479
63	·48991	241	·56608	296	·63668	351	·70202	405	·76235	458
64	·42736	215	·50289	269	·57323	324	·63867	378	·69946	432
65	·36267	186	·43701	239	·50654	293	·57155	347	·63225	401
66	·29611	155	·36874	206	·43692	258	·50095	311	·56104	365
67	·22801	121	·29841	170	·36472	220	·42724	272	·48617	324
68	·15870	86	·22639	131	·29032	179	·35082	228	·40807	278
69	·08852	49	·15305	90	·21414	134	·27212	180	·32719	227
70	·01787	10	·07882	47	·13661	87	·19162	129	·24404	173
71	−·05289	30	·00411	2	·05822	38	·10982	75	·15916	115
72	−·12334	71	−·07062	44	−·02056	14	·02728	19	·07313	54
73	−·19309	112	−·14491	91	−·09919	66	−·05546	39	−·01344	10
74	−·26172	154	−·21830	139	−·17716	120	−·13780	99	−·09990	76
75	−·32880	196	−·29030	186	−·25393	175	−·21915	160	−·18561	143
76	−·39393	237	−·36043	234	−·32896	229	−·29889	221	−·26988	211
77	−·45669	277	−·42823	281	−·40169	282	−·37643	282	−·35204	278
78	−·51668	316	−·49321	327	−·47160	335	−·45115	341	−·43142	345
79	−·57351	354	−·55493	371	−·53816	386	−·52246	399	−·50736	410
80	−·62680	390	−·61294	413	−·60087	434	−·58978	454	−·57919	472
81	−·67620	423	−·66682	452	−·65923	480	−·65256	507	−·64630	531
82	−·72136	454	−·71618	489	−·71278	523	−·71028	555	−·70810	587
83	−·76198	482	−·76065	522	−·76111	562	−·76244	600	−·76403	637
84	−·79778	507	−·79990	552	−·80383	596	−·80860	640	−·81359	682
85	−·82851	529	−·83364	577	−·84058	626	−·84836	674	−·85633	722
86	−·85396	547	−·86160	599	−·87108	651	−·88138	703	−·89186	754
87	−·87394	561	−·88357	616	−·89506	671	−·90737	726	−·91983	780
88	−·88832	571	−·89939	628	−·91233	685	−·92610	743	−·94001	799
89	−·89698	577	−·90893	635	−·92275	693	−·93740	752	−·95219	811
90	−0·89988	579	−0·91211	638	−0·92624	697	−0·94118	756	−0·95626	815

Таблица XX

$ce_3(x, \theta)$. $\theta=1$ до $\theta=5$

x	$\theta=1$, $a_3=9{\cdot}07837$	Δ^2	$\theta=2$, $a_3=9{\cdot}37032$	Δ^2	$\theta=3$, $a_3=9{\cdot}91551$	Δ^2	$\theta=4$, $a_3=10{\cdot}67103$	Δ^2	$\theta=5$, $a_3=11{\cdot}54883$	Δ
0°	1·06724	230	1·12827	185	1·15858	138	1·15020	94	1·11125	52
1	1·06609	230	1·12735	185	1·15789	138	1·14973	94	1·11099	
2	1·06264	229	1·12458	184	1·15581	138	1·14832	94	1·11020	53
3	1·05689	228	1·11997	184	1·15236	139	1·14598	95	1·10888	54
4	1·04887	227	1·11352	183	1·14751	139	1·14268	96	1·10701	56
5	1·03858	225	1·10524	183	1·14128	139	1·13843	97	1·10459	57
6	1·02604	223	1·09513	182	1·13366	140	1·13321	98	1·10160	59
7	1·01127	220	1·08319	181	1·12463	140	1·12701	100	1·09802	62
8	0·99431	217	1·06945	180	1·11421	141	1·11981	102	1·09382	65
9	·97518	213	1·05390	179	1·10237	141	1·11159	104	1·08897	68
10	·95392	209	1·03657	177	1·08913	142	1·10233	106	1·08344	71
11	·93056	205	1·01747	175	1·07446	142	1·09202	108	1·07721	75
12	·90516	200	·99661	174	1·05837	143	1·08062	111	1·07023	79
13	·87776	195	·97402	171	1·04085	143	1·06811	113	1·06246	83
14	·84842	189	·94971	169	1·02190	144	1·05448	116	1·05386	87
15	·81718	183	·92372	166	1·00151	144	1·03968	119	1·04439	92
16	·78411	176	·89606	163	0·97968	144	1·02370	121	1·03400	97
17	·74929	169	·86677	160	·95641	144	1·00651	124	1·02264	102
18	·71277	162	·83588	156	·93170	144	0·98808	126	1·01027	106
19	·67463	154	·80344	152	·90555	143	·96838	129	0·99684	111
20	·63494	146	·76947	148	·87797	142	·94740	131	0·98229	116
21	·59380	137	·73402	143	·84897	141	·92511	133	·96657	121
22	·55129	128	·69714	138	·81856	140	·90148	135	·94965	126
23	·50749	119	·65889	132	·78675	138	·87651	137	·93146	131
24	·46251	109	·61931	126	·75357	135	·85017	138	·91197	135
25	·41643	99	·57847	120	·71903	133	·82245	138	·89113	139
26	·36937	88	·53643	113	·68317	129	·79335	139	·86890	143
27	·32143	77	·49326	105	·64601	126	·76286	139	·84524	146
28	·27271	66	·44904	98	·60759	121	·73098	138	·82012	149
29	·22333	55	·40384	89	·56796	116	·69772	137	·79352	151
30	·17340	43	·35775	80	·52717	111	·66310	135	·76541	153
31	·12305	30	·31086	71	·48527	105	·62713	132	·73576	154
32	·07239	18	·26326	61	·44231	98	·58984	129	·70459	154
33	·02155	5	·21505	51	·39838	91	·55127	124	·67187	153
34	−·02934	7	·16633	40	·35354	83	·5114[illegible]	119	·63763	151
35	−·08015	21	·11722	29	·30787	74	·47043	114	·60187	149
36	−·13077	34	·06782	17	·26147	64	·42828	107	·56462	145
37	−·18104	47	·01825	5	·21443	54	·38506	99	·52592	141
38	−·23085	60	−·03137	8	·16684	43	·34084	91	·48581	135
39	−·28005	74	−·08[illegible]9[illegible]	21	·11883	31	·29572	81	·44435	128
40	−·32851	87	−·13022	34	·07050	19	·24979	71	·40161	120
41	−·37609	101	−·17920	48	·02199	6	·20316	59	·35767	111
42	−·42267	114	−·22770	62	−·02659	8	·15593	47	·31262	100
43	−·46811	127	−·27558	76	−·07509	22	·10824	34	·26658	88
44	−·51227	141	−·32269	91	−·12337	36	·06021	19	·21965	75
45	−0·55503	153	−0·36889	105	−0·17129	52	0·01200	4	0·17198	60

Таблица XX—продолжение

$ce_3(x, \theta)$. $\theta=1$ до $\theta=5$

x	$\theta=1$ $a_3=9{\cdot}07837$	Δ^2	$\theta=2$ $a_3=9{\cdot}37032$	Δ^2	$\theta=3$ $a_3=9{\cdot}91551$	Δ^2	$\theta=4$ $a_3=10{\cdot}67103$	Δ^2	$\theta=5$ $a_3=11{\cdot}54883$	Δ^2
45°	—0·55503	153	—0·36889	105	—0·17129	52	0·01200	— 4	0·17198	— 60
46	— ·59625	166	— ·41405	120	— ·21869	67	— ·03626	12	·12370	— 45
47	— ·63581	179	— ·45800	135	— ·26541	84	— ·08439	29	·07498	— 28
48	— ·67359	191	— ·50061	149	— ·31130	100	— ·13223	46	·02597	— 10
49	— ·70946	202	— ·54172	164	— ·35619	117	— ·17961	65	— ·02313	9
50	— ·74331	213	— ·58120	178	— ·39992	133	— ·22634	83	— ·07214	29
51	— ·77503	224	— ·61889	192	— ·44230	150	— ·27225	102	— ·12086	50
52	— ·80450	234	— ·65466	206	— ·48319	167	— ·31712	122	— ·16907	72
53	— ·83163	244	— ·68837	220	— ·52240	184	— ·36079	142	— ·21657	94
54	— ·85632	253	— ·71989	233	— ·55977	201	— ·40303	161	— ·26312	117
55	— ·87849	261	— ·74908	245	— ·59513	217	— ·44366	181	— ·30849	141
56	— ·89804	269	— ·77582	257	— ·62833	233	— ·48248	201	— ·35247	164
57	— ·91490	276	— ·79999	268	— ·65919	248	— ·51929	220	— ·39479	188
58	— ·92901	282	— ·82148	278	— ·68758	263	— ·55390	239	— ·43524	211
59	— ·94030	287	— ·84019	288	— ·71334	277	— ·58612	258	— ·47358	234
60	— ·94873	291	— ·85602	296	— ·73633	290	— ·61576	275	— ·50958	257
61	— ·95424	295	— ·86889	304	— ·75643	302	— ·64265	292	— ·54301	279
62	— ·95680	297	— ·87871	311	— ·77351	313	— ·66662	307	— ·57365	299
63	— ·95640	299	— ·88543	316	— ·78746	322	— ·68752	322	— ·60129	319
64	— ·95300	299	— ·88899	320	— ·79819	331	— ·70520	335	— ·62575	337
65	— ·94662	299	— ·88935	323	— ·80562	338	— ·71953	346	— ·64683	354
66	— ·93725	297	— ·88647	325	— ·80966	343	— ·73040	356	— ·66438	369
67	— ·92490	295	— ·88034	326	— ·81027	347	— ·73770	365	— ·67823	382
68	— ·90961	291	— ·87096	325	— ·80741	350	— ·74136	371	— ·68826	393
69	— ·89140	287	— ·85832	323	— ·80104	351	— ·74131	375	— ·69437	401
70	— ·87032	281	— ·84246	319	— ·79117	350	— ·73751	377	— ·69646	407
71	— ·84644	275	— ·82341	314	— ·77781	347	— ·72994	377	— ·69448	411
72	— ·81980	267	— ·80122	308	— ·76098	342	— ·71859	375	— ·68839	412
73	— ·79050	258	— ·77596	300	— ·74072	336	— ·70349	371	— ·67819	410
74	— ·75861	249	— ·74769	291	— ·71711	328	— ·68469	364	— ·66389	405
75	— ·72423	238	— ·71653	280	— ·69022	318	— ·66225	355	— ·64554	397
76	— ·68747	227	— ·68256	268	— ·66015	306	— ·63626	344	— ·62322	387
77	— ·64844	215	— ·64591	255	— ·62703	292	— ·60683	330	— ·59703	373
78	— ·60726	202	— ·60670	241	— ·59098	277	— ·57411	314	— ·56711	357
79	— ·56406	188	— ·56510	225	— ·55217	260	— ·53824	296	— ·53362	338
80	— ·51899	173	— ·52124	208	— ·51075	242	— ·49941	277	— ·49675	317
81	— ·47218	158	— ·47530	191	— ·46691	222	— ·45781	255	— ·45671	293
82	— ·42380	142	— ·42745	172	— ·42085	201	— ·41367	231	— ·41374	267
83	— ·37400	125	— ·37788	152	— ·37279	179	— ·36721	206	— ·36811	238
84	— ·32294	109	— ·32679	132	— ·32293	155	— ·31869	179	— ·32010	208
85	— ·27079	91	— ·27438	111	— ·27153	131	— ·26838	152	— ·27000	176
86	— ·21774	73	— ·22085	90	— ·21881	106	— ·21655	123	— ·21815	142
87	— ·16395	55	— ·16643	68	— ·16504	80	— ·16350	93	— ·16488	108
88	— ·10961	37	— ·11133	45	— ·11047	53	— ·10952	62	— ·11052	72
89	— ·05490	19	— ·05578	23	— ·05537	27	— ·05491	31	— ·05544	36
90	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0

Таблица XX—продолжение

$ce_3(x, \theta)$. $\theta=6$ до $\theta=10$

x	$\theta=6$ $a_3=12{\cdot}46560$	Δ^2	$\theta=7$ $a_3=13{\cdot}35842$	Δ^2	$\theta=8$ $a_3=14{\cdot}18188$	Δ^2	$\theta=9$ $a_3=14{\cdot}90368$	Δ^2	$\theta=10$ $a_3=15{\cdot}50278$	Δ^2
0°	1·05154	— 15	0·97729	19	0·89237	49	0·80022	75	0·70483	97
1	1·05147	— 15	·97739	19	·89261	49	·80060	75	·70531	96
2	1·05124	— 16	·97767	18	·89335	48	·80173	74	·70676	96
3	1·05086	— 17	·97813	17	·89457	47	·80360	73	·70916	95
4	1·05030	— 19	·97876	15	·89627	45	·80621	72	·71251	93
5	1·04956	— 21	·97955	13	·89841	43	·80953	70	·71679	92
6	1·04861	— 23	·98046	10	·90099	40	·81355	67	·72199	89
7	1·04742	— 26	·98147	7	·90397	37	·81824	64	·72809	87
8	1·04598	— 30	·98254	3	·90732	33	·82357	60	·73504	83
9	1·04424	— 34	·98365	— 1	·91100	29	·82950	56	·74283	80
10	1·04216	— 38	·98474	— 6	·91496	24	·83599	51	·75142	75
11	1·03970	— 42	·98577	— 11	·91917	18	·84299	46	·76076	70
12	1·03682	— 48	·98669	— 17	·92355	12	·85045	40	·77080	65
13	1·03347	— 53	·98743	— 23	·92806	6	·85831	33	·78149	59
14	1·02958	— 59	·98795	— 30	·93263	— 2	·86649	26	·79278	52
15	1·02511	— 65	·98816	— 37	·93717	— 9	·87494	18	·80458	44
16	1·01999	— 71	·98800	— 45	·94163	— 18	·88358	10	·81682	36
17	1·01416	— 78	·98739	— 53	·94591	— 26	·89231	0	·82943	27
18	1·00755	— 85	·98626	— 61	·94992	— 36	·90104	— 9	·84231	17
19	1·00010	— 92	·98451	— 70	·95358	— 46	·90968	— 20	·85536	7
20	0·99173	— 99	·98207	— 79	·95677	— 56	·91812	— 31	·86848	— 5
21	·98237	—106	·97883	— 88	·95941	— 67	·92624	— 43	·88155	— 17
22	·97195	—114	·97472	— 98	·96137	— 78	·93394	— 56	·89445	— 30
23	·96039	—121	·96963	—107	·96256	— 90	·94108	— 69	·90704	— 45
24	·94762	—128	·96347	—117	·96284	—102	·94753	— 83	·91919	— 59
25	·93358	—135	·95614	—127	·96210	—114	·95315	— 97	·93074	— 75
26	·91818	—142	·94753	—137	·96023	—127	·95781	—112	·94154	— 92
27	·90136	—149	·93756	—146	·95708	—139	·96135	—127	·95143	—109
28	·88306	—155	·92613	—156	·95254	—152	·96362	—142	·96023	—126
29	·86321	—161	·91313	—165	·94648	—164	·96448	—158	·96777	—145
30	·84176	—166	·89848	—174	·93878	—177	·96375	—173	·97386	—163
31	·81864	—170	·88210	—182	·92931	—189	·96130	—189	·97832	—182
32	·79383	—174	·86389	—190	·91796	—200	·95695	—204	·98095	—201
33	·76727	—177	·84378	—197	·90459	—211	·95056	—220	·98157	—220
34	·73894	—179	·82170	—203	·88912	—222	·94198	—234	·97999	—239
35	·70882	—180	·79759	—208	·87143	—231	·93105	—248	·97602	—257
36	·67689	—180	·77140	—212	·85142	—239	·91765	—261	·96948	—275
37	·64316	—179	·74309	—215	·82903	—247	·90163	—273	·96018	—292
38	·60763	—177	·71263	—216	·80416	—252	·88289	—284	·94796	—308
39	·57034	—173	·68000	—216	·77677	—257	·86131	—293	·93266	—322
40	·53131	—168	·64521	—215	·74682	—259	·83680	—300	·91414	—335
41	·49061	—161	·60828	—211	·71427	—260	·80929	—305	·89228	—346
42	·44829	—153	·56923	—206	·67912	—259	·77873	—309	·86695	—354
43	·40445	—143	·52813	—199	·64138	—255	·74508	—310	·83809	—360
44	·35917	—132	·48503	—190	·60110	—249	·70833	—308	·80563	—363
45	0·31258	—119	0·44003	—179	0·55832	—241	0·66851	—303	0·76954	—363

Таблица XX—продолжение

$ce_3(x, \theta)$. $\theta=6$ до $\theta=10$

x	$\theta=6$, $a_3=12{\cdot}46560$	Δ^2	$\theta=7$, $a_3=13{\cdot}35842$	Δ^2	$\theta=8$, $a_3=14{\cdot}18188$	Δ^2	$\theta=9$, $a_3=14{\cdot}90368$	Δ^2	$\theta=10$, $a_3=15{\cdot}50278$	Δ^2
°										
45	0·31258	—119	0·44003	—179	0·55832	—241	0·66851	—303	0·76954	—363
46	·26480	—104	·39325	—166	·51313	—230	·62565	—296	·72981	—360
47	·21598	— 87	·34480	—150	·46564	—217	·57984	—285	·68649	—353
48	·16629	— 69	·29486	—133	·41599	—201	·53117	—271	·63964	—342
49	·11590	— 50	·24358	—113	·36432	—182	·47979	—254	·58936	—328
50	·06502	— 29	·19117	— 92	·31084	—160	·42587	—234	·53580	—309
51	·01385	— 6	·13784	— 68	·25575	—136	·36962	—210	·47915	—287
52	— ·03738	18	·08383	— 43	·19931	—109	·31126	—182	·41963	—260
53	— ·08844	43	·02940	— 15	·14176	— 80	·25109	—152	·35752	—229
54	— ·13907	69	— ·02519	14	·08342	— 48	·18939	—118	·29312	—193
55	— ·18901	95	— ·07964	44	·02459	— 15	·12652	— 81	·22679	—154
56	— ·23800	123	— ·13365	76	— ·03438	21	·06284	— 41	·15892	—111
57	— ·28576	151	— ·18690	109	— ·09314	59	— ·00125	1	·08994	— 64
58	— ·33201	179	— ·23907	142	— ·15131	98	— ·06533	46	·02031	— 15
59	— ·37646	208	— ·28982	176	— ·20850	138	— ·12896	92	— ·04947	38
60	— ·41885	236	— ·33881	210	— ·26432	179	— ·19167	140	— ·11887	93
61	— ·45887	263	— ·38569	244	— ·31835	220	— ·25298	188	— ·18734	149
62	— ·49627	290	— ·43014	278	— ·37018	261	— ·31241	238	— ·25432	207
63	— ·53076	315	— ·47181	310	— ·41941	301	— ·36946	287	— ·31924	265
64	— ·56210	340	— ·51037	342	— ·46562	341	— ·42364	335	— ·38150	323
65	— ·59005	363	— ·54553	371	— ·50842	379	— ·47447	382	— ·44053	380
66	— ·61437	383	— ·57697	399	— ·54744	415	— ·52148	428	— ·49576	436
67	— ·63485	402	— ·60441	425	— ·58231	448	— ·56421	471	— ·54663	489
68	— ·65132	418	— ·62761	448	— ·61269	479	— ·60223	511	— ·59261	539
69	— ·66360	432	— ·64633	468	— ·63828	507	— ·63514	547	— ·63319	585
70	— ·67156	443	— ·66038	484	— ·65881	530	— ·66259	579	— ·66792	627
71	— ·67509	451	— ·66959	497	— ·67403	550	— ·68425	606	— ·69638	663
72	— ·67412	455	— ·67382	506	— ·68376	565	— ·69985	628	— ·71822	693
73	— ·66859	456	— ·67299	511	— ·68784	575	— ·70917	644	— ·73313	716
74	— ·65851	454	— ·66704	512	— ·68617	580	— ·71206	654	— ·74088	732
75	— ·64388	448	— ·65598	509	— ·67871	579	— ·70841	657	— ·74131	741
76	— ·62478	439	— ·63982	501	— ·66545	573	— ·69818	654	— ·73434	741
77	— ·60129	426	— ·61866	489	— ·64647	562	— ·68141	645	— ·71995	734
78	— ·57354	409	— ·59261	472	— ·62186	545	— ·65819	628	— ·69823	718
79	— ·54170	389	— ·56184	450	— ·59180	523	— ·62869	604	— ·66934	693
80	— ·50598	366	— ·52657	425	— ·55651	495	— ·59315	574	— ·63351	661
81	— ·46659	339	— ·48705	395	— ·51628	462	— ·55186	538	— ·59106	621
82	— ·42382	310	— ·44357	362	— ·47143	424	— ·50520	495	— ·54241	573
83	— ·37795	277	— ·39648	325	— ·42233	382	— ·45359	447	— ·48802	518
84	— ·32930	243	— ·34613	285	— ·36942	335	— ·39750	393	— ·42845	457
85	— ·27823	206	— ·29294	242	— ·31315	285	— ·33749	335	— ·36431	390
86	— ·22510	167	— ·23732	197	— ·25403	232	— ·27412	273	— ·29627	318
87	— ·17031	126	— ·17974	149	— ·19259	176	— ·20802	208	— ·22504	242
88	— ·11425	85	— ·12066	100	— ·12938	119	— ·13985	140	— ·15139	163
89	— ·05734	43	— ·06058	51	— ·06499	60	— ·07028	70	— ·07611	82
90	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0

Таблица XXI

$se_4(x, \theta)$. $\theta=1$ до $\theta=5$

x	$\theta=1$, $b_4=16{\cdot}03297$	Δ^2	$\theta=2$, $b_4=16{\cdot}12769$	Δ^2	$\theta=3$, $b_4=16{\cdot}27270$	Δ^2	$\theta=4$, $b_4=16{\cdot}45204$	Δ^2	$\theta=5$, $b_4=16{\cdot}64822$	Δ^2
°										
0	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0
1	·06724	— 29	·06433	— 24	·06103	— 19	·05744	— 15	·05364	— 11
2	·13420	— 57	·12841	— 47	·12187	— 38	·11472	— 30	·10717	— 22
3	·20058	— 86	·19203	— 71	·18233	— 57	·17172	— 44	·16048	— 33
4	·26611	—114	·25493	— 94	·24221	— 76	·22826	— 59	·21346	— 44
5	·33049	—142	·31689	—118	·30134	— 95	·28422	— 74	·26601	— 55
6	·39346	—169	·37767	—140	·35951	—114	·33943	— 89	·31800	— 67
7	·45475	—195	·43705	—163	·41654	—133	·39375	—104	·36933	— 78
8	·51408	—221	·49479	—185	·47225	—151	·44703	—119	·41988	— 90
9	·57120	—246	·55069	—207	·52644	—169	·49911	—134	·46952	—102
10	·62587	—270	·60452	—228	·57895	—188	·54985	—150	·51815	—114
11	·67784	—293	·65607	—248	·62957	—205	·59909	—165	·56563	—127
12	·72688	—314	·70514	—268	·67814	—223	·64669	—180	·61184	—140
13	·77278	—335	·75153	—287	·72449	—240	·69248	—195	·65665	—153
14	·81532	—354	·79506	—305	·76843	—257	·73632	—211	·69992	—167
15	·85433	—372	·83553	—322	·80981	—273	·77805	—226	·74153	—180
16	·88961	—388	·87278	—339	·84845	—289	·81753	—241	·78134	—194
17	·92101	—403	·90665	—354	·88420	—304	·85460	—256	·81920	—209
18	·94838	—416	·93698	—368	·91691	—319	·88911	—270	·85497	—223
19	·97159	—428	·96363	—381	·94643	—333	·92092	—285	·88852	—237
20	0·99052	—437	0·98647	—392	·97262	—346	·94989	—299	·91969	—252
21	1·00507	—445	1·00539	—403	0·99536	—358	·97586	—312	·94835	—266
22	1·01517	—451	1·02028	—412	1·01451	—369	0·99872	—325	·97434	—281
23	1·02076	—455	1·03105	—419	1·02997	—380	1·01832	—338	0·99753	—295
24	1·02180	—457	1·03764	—425	1·04163	—389	1·03454	—350	1·01777	—309
25	1·01827	—457	1·03997	—429	1·04941	—397	1·04726	—361	1·03492	—322
26	1·01017	—455	1·03801	—432	1·05321	—403	1·05638	—371	1·04885	—335
27	0·99751	—451	1·03173	—433	1·05298	—409	1·06179	—380	1·05943	—348
28	·98034	—445	1·02112	—432	1·04867	—413	1·06340	—388	1·06653	—359
29	·95871	—437	1·00619	—429	1·04023	—415	1·06113	—395	1·07004	—370
30	·93272	—427	0·98697	—425	1·02764	—415	1·05491	—400	1·06986	—380
31	·90245	—415	·96350	—418	1·01090	—414	1·04469	—404	1·06588	—388
32	·86804	—401	·93586	—410	0·99001	—411	1·03044	—406	1·05801	—395
33	·82963	—384	·90411	—399	·96502	—406	1·01212	—407	1·04620	—401
34	·78736	—366	·86838	—387	·93596	—400	0·98974	—405	1·03038	—405
35	·74144	—347	·82878	—372	·90290	—391	·96330	—402	1·01051	—407
36	·69204	—325	·78545	—356	·86593	—380	·93283	—397	0·98657	—407
37	·63941	—301	·73856	—338	·82516	—367	·89840	—390	·95856	—405
38	·58375	—276	·68829	—318	·78072	—352	·86007	—380	·92650	—401
39	·52533	—250	·63485	—296	·73275	—335	·81794	—368	·89042	—395
40	·46442	—222	·57845	—272	·68144	—316	·77212	—354	·85039	—386
41	·40128	—192	·51933	—246	·62696	—295	·72277	—338	·80650	—375
42	·33623	—162	·45775	—219	·56954	—271	·67003	—319	·75886	—360
43	·26955	—130	·39398	—190	·50940	—246	·61412	—297	·70762	—344
44	·20157	— 98	·32831	—160	·44681	—218	·55523	—273	·65294	—324
45	0·13260	— 65	0·26104	—128	0·38203	—189	0·49361	—247	0·59503	—302

Таблица XXI — продолжение

$se_4(x, \theta)$. $\theta=1$ до $\theta=5$

x°	$\theta=1$, $b_4=16·03297$	Δ^2	$\theta=2$, $b_4=16·12769$	Δ^2	$\theta=3$, $b_4=16·27270$	Δ^2	$\theta=4$, $b_4=16·45204$	Δ^2	$\theta=5$, $b_4=16·64822$	Δ^2
45	0·13260	−65	0·26104	−128	0·38203	−189	0·49361	−247	0·59503	−302
46	·06300	−31	·19249	−95	·31536	−158	·42952	−219	·53409	−276
47	−·00692	3	·12299	−61	·24710	−126	·36324	−188	·47040	−248
48	−·07681	38	·05287	−27	.17759	−91	·29508	−155	·40422	−218
49	−·14631	73	−·01751	9	·10717	−56	·22536	−120	·33587	−184
50	−·21508	107	−·08781	45	·03619	−19	·15445	−84	·26567	−149
51	−·28279	142	−·15765	81	−.03498	19	·08269	−46	·19399	−110
52	−·34907	176	−·22668	118	−·10596	57	·01048	−6	·12120	−70
53	−·41361	209	−29453	155	−·17637	96	−·06179	35	·04771	−28
54	−·47605	241	−·36083	191	−·24581	136	−·13370	77	−·02606	16
55	−·53608	273	−·42522	227	−·31390	175	−·20485	120	−·09968	61
56	−·59338	303	−·48735	262	−·38024	214	−·27479	163	−·17268	107
57	−·64764	332	−·54687	296	−·44443	253	−·34311	206	−·24461	154
58	−·69859	360	−·60342	329	−·50609	291	−·40937	249	−·31500	202
59	−·74594	385	−·65669	360	−·56483	328	−·47314	291	−·38337	249
60	−·78943	409	−·70636	390	−·62030	364	−·53400	333	−·44924	296
61	−·82883	431	−·75213	418	−·67212	398	−·59153	373	−·51216	342
62	−·86391	451	−·79373	444	−·71996	430	−·64534	411	−·57165	387
63	−·89449	469	−·83088	467	−·76350	460	−·69503	448	−·62727	430
64	−·92037	484	−·86336	489	−·80243	488	−·74025	482	−·67858	471
65	−·94142	495	−·89095	507	−.83649	513	−·78065	513	−·72519	510
66	−·95750	506	−·91347	523	−·86542	535	−·81592	542	−·76670	545
67	−·96852	514	−·93076	536	−·88901	553	−·84577	567	−·80276	577
68	−·97440	518	−·94269	545	−.90706	569	−·86995	588	−·83306	605
69	−·97510	520	−·94917	552	−·91942	580	−·88825	606	−·85731	628
70	−·97060	519	−·95012	555	−·92599	588	−·90050	619	−·87527	648
71	−·96090	515	−·94553	555	−·92667	592	−·90655	628	−·88676	662
72	−·94606	508	−·93538	551	−.92142	593	−·90632	633	−·89163	671
73	−·92613	499	−·91972	544	−·91025	589	−·89977	632	−·88978	675
74	−·90121	486	−·89862	534	−.89319	581	−·88690	627	−·88117	674
75	−·87142	471	−·87218	520	−·87032	569	−·86775	618	−·86583	667
76	−·83693	454	−·84053	503	−·84177	553	−·84243	603	−·84382	654
77	−·79789	433	−·80385	483	−·80768	533	−·81107	584	−·81526	636
78	−·75453	410	−·76235	459	−·76827	509	−·77388	560	−·78034	612
79	−·70706	385	−·71625	433	−·72377	481	−·73109	531	−·73929	583
80	−·65574	358	−·66583	403	−·67446	450	−·68299	498	−·69242	549
81	−·60085	328	−·61138	371	−·62065	415	−·62990	461	−·64005	510
82	−·54267	297	−·55321	336	−·56269	378	−·57220	420	−·58259	466
83	−·48153	264	−·49169	300	−·50095	337	−·51030	376	−·52047	417
84	−·41775	229	−.42716	261	−·43585	294	−·44463	329	−·45417	365
85	−·35169	193	−·36004	220	−·36780	248	−·37568	278	−·38422	310
86	−·28369	156	−·29071	178	−·29727	201	−·30395	226	−·31118	251
87	−·21414	117	−.21960	134	−·22473	152	−·22996	171	−·23561	191
88	−·14342	79	−·14715	90	−·15067	102	−·15426	115	−·15814	128
89	−·07191	39	−·07380	45	−·07559	51	−·07742	58	−·07939	64
90	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0

Таблица XXI—продолжение

$se_4(x, \theta)$. $\theta=6$ до $\theta=10$

x°	$\theta=6$, $b_4=16·84460$	Δ^2	$\theta=7$, $b_4=17·02666$	Δ^2	$\theta=8$, $b_4=17·18253$	Δ^2	$\theta=9$, $b_4=17·30301$	Δ^2	$\theta=10$, $b_4=17·38138$	Δ^2
0	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0
1	·04973	−7	·04581	−4	·04194	−2	·03817	1	·03457	3
2	·09939	−15	·09158	−9	·08386	−3	·07635	2	·06916	5
3	·14891	−22	·13726	−13	·12575	−5	·11455	2	·10381	8
4	·19820	−30	·18281	−18	·16759	−7	·15277	2	·13854	10
5	·24719	−38	·22819	−23	·20936	−9	·19101	2	·17337	12
6	·29580	−46	·27334	−28	.25104	−12	·22927	2	·20832	14
7	·34395	−55	·31821	−33	·29261	−15	·26756	1	·24341	15
8	·39156	−63	·36275	−39	·33402	−18	·30586	0	·27865	16
9	·43853	−73	·40689	−46	·37525	−22	·34416	−2	·31404	16
10	·48477	−82	·45057	−53	·41626	−27	·38244	−5	·34959	15
11	·53020	−92	·49372	−61	·45699	−33	.42067	−8	·38529	14
12	·57470	−103	·53627	−69	·49740	−39	·45882	−12	·42113	11
13	·61817	−114	·57811	−78	·53742	−46	·49686	−17	·45708	8
14	·66050	−126	·61918	−88	·57697	−54	·53472	−23	·49311	4
15	·70157	−138	·65937	−99	·61599	−62	·57235	−30	·52918	−1
16	·74126	−151	·69857	−110	·65439	−72	·60968	−38	·56525	−7
17	·77944	−164	·73667	−122	·69206	−83	·64663	−47	·60124	−15
18	·81599	−177	·77356	−134	·72891	−94	·68311	−57	·63708	−23
19	·85076	−192	·80910	−148	·76481	−107	·71903	−68	·67268	−33
20	·88362	−206	·84316	−162	·79965	−120	·75425	−81	·70796	−45
21	·91442	−221	·87561	−177	·83329	−134	·78867	−94	·74279	−57
22	·94301	−236	·90629	−192	·86558	−150	·82215	−109	·77704	−71
23	·96924	−251	·93504	−208	·89638	−166	·85453	−125	·81059	−86
24	0·99296	−267	.96172	−224	·92552	−183	·88566	−142	·84328	−103
25	1·01401	−282	0 98615	−241	·95283	−200	·91537	−160	·87493	−121
26	1·03224	−297	1·00817	−258	0·97815	−219	·94349	−179	·90538	−140
27	1·04750	−312	1·02761	−275	1 00127	−237	·96981	−199	·93443	−160
28	1·05963	−327	1·04430	−293	1·02202	−256	0 99415	−219	·96188	−182
29	1·06849	−341	1·05806	−310	1·04021	−276	1·01630	−240	0·98751	−204
30	1·07395	−355	1·06872	−326	1·05564	−295	1·03604	−262	1·01110	−227
31	1·07585	−367	1·07612	−343	1·06812	−315	1·05316	−284	1·03242	−251
32	1·07408	−379	1·08009	−358	1·07745	−334	1·06744	−306	1·05122	−276
33	1·06852	−389	1·08049	−373	1·08345	−352	1·07866	−328	1·06727	−301
34	1·05907	−398	1·07715	−386	1·08592	−370	1·08660	−349	1·08030	−325
35	1·04564	−406	1·06994	−399	1·08469	−387	1·09105	−370	1·09009	−350
36	1·02815	−411	1·05875	−409	1·07960	−402	1·09179	−390	1·09637	−374
37	1·00654	−415	1·04347	−418	1·07048	−416	1·08863	−409	1·09892	−397
38	0·98079	−416	1·02400	−425	1·05719	−429	1·08138	−426	1·09749	−419
39	·95088	−415	1·00028	−430	1·03962	−439	1·06986	−442	1·09187	−440
40	·91681	−412	1 97226	−432	1·01767	−446	1·05393	−455	1·08185	−458
41	·87862	−406	·93992	−431	0 99125	−451	1·03344	−466	1·06725	−474
42	·83637	−397	·90326	−428	·96032	−453	1·00830	−473	1·04791	−488
43	·79015	−385	·86233	−421	·92486	−452	0 97843	−478	1·02369	−498
44	·74008	−370	·81718	−411	·88487	−448	·94378	−479	0 99449	−505
45	0·68632	−352	0·76792	−398	0·84040	−440	0·90433	−476	0·96023	−508

Таблица XXI—продолжение

$se_4(x, \theta)$. $\theta=6$ до $\theta=10$.

x	θ=6 $b_4=16·84460$	Δ²	θ=7 $b_4=17·02666$	Δ²	θ=8 $b_4=17·18253$	Δ²	θ=9 $b_4=17·30301$	Δ²	θ=10 $b_4=17·38138$	Δ²
°										
45	0·68632	—352	0·76792	—398	0.84040	—440	0·90433	—476	0 96023	—508
46	·62903	—331	·71467	—381	·79154	—427	·86013	—469	·92090	—507
47	·56843	—306	·65762	—360	·73840	—411	·81122	—458	·87650	—501
48	·50478	—278	·59697	—336	·68115	—391	·75774	—442	·82709	—490
49	·43835	—247	·53295	—308	·62000	—366	·69983	—422	·77278	—474
50	·36945	—213	·46586	—276	·55518	—337	·63771	—396	·71372	—453
51	·29842	—176	·39601	—240	·48698	—304	·57161	—366	·65014	—426
52	·22563	—136	·32376	—201	·41575	—266	·50186	—331	·58229	—394
53	·15149	— 93	·24949	—158	·34186	—225	·42880	—290	·51051	—356
54	·07643	— 48	·17365	—113	·26572	—179	·35284	—245	·43517	—312
55	·00088	0	·09667	— 64	·18780	—129	·27443	—196	·35672	—263
56	— ·07467	49	·01906	— 13	·10858	— 76	·19405	—142	·27563	—208
57	— ·14973	99	— ·05869	41	·02859	— 20	·11226	— 84	·19247	—149
58	— ·22380	151	— ·13602	96	— ·05160	38	·02963	— 22	·10781	— 86
59	— ·29636	203	— ·21239	153	— ·13140	99	— ·05323	42	·02229	— 18
60	— ·36690	255	— ·28724	210	— ·21022	161	— ·13566	109	— ·06341	53
61	— ·43488	307	— ·35998	268	— ·28742	225	— ·21701	178	— ·14857	127
62	— ·49979	358	— ·43005	326	— ·36238	288	— ·29658	247	— ·23246	202
63	— ·56111	408	— ·49685	382	— ·43445	352	— ·37368	317	— ·31434	279
64	— ·61835	456	— ·55984	437	— ·50300	414	— ·44761	387	— ·39342	356
65	— ·67103	502	— ·61846	490	— ·56741	475	— ·51766	455	— ·46894	432
66	— ·71868	544	— ·67217	540	— ·62708	532	— ·58317	521	— ·54015	506
67	— ·76090	583	— ·72048	587	— ·68142	587	— ·64347	584	— ·60630	577
68	— ·79729	618	— ·76293	629	— ·72990	638	— ·69792	643	— ·66667	645
69	— ·82749	649	— ·79908	667	— ·77200	683	— ·74595	697	— ·27060	707
70	— ·85120	675	— ·82856	700	— ·80726	723	— ·78701	745	— ·76745	764
71	— ·86816	695	— ·85104	727	— ·83529	757	— ·82063	787	— ·80666	814
72	— ·87817	710	— ·86625	748	— ·85575	785	— ·84637	821	— ·83774	856
73	— ·88109	719	— ·87398	762	— ·86836	805	— ·86391	847	— ·86026	889
74	— ·87682	721	— ·87410	769	— ·87292	817	— ·87298	865	— ·87389	913
75	— ·86534	717	— ·86653	769	— ·86931	821	— ·87339	874	— ·87838	928
76	— ·84668	707	— ·85127	761	— ·85749	817	— ·86506	874	— ·87360	932
77	— ·82095	690	— ·82839	747	— ·83750	805	— ·84799	864	— ·85950	925
78	— ·78832	667	— ·79805	724	— ·80946	783	— ·82228	844	— ·83615	907
79	— ·74901	638	— ·76047	695	— ·77359	754	— ·78813	815	— ·80374	879
80	— ·70333	602	— ·71594	658	— ·73018	716	— ·74582	777	— ·76253	839
81	— ·65163	560	— ·66484	614	— ·67962	670	— ·69575	729	— ·71293	790
82	— ·59432	513	— ·60759	564	— ·62235	617	— ·63838	672	— ·65544	730
83	— ·53188	461	— ·54471	507	— ·55891	556	— ·57430	608	— ·59064	661
84	— ·46483	404	— ·47676	446	— ·48991	490	— ·50414	536	— ·51923	584
85	— ·39374	343	— ·40434	379	— ·41601	417	— ·42862	457	— ·44198	499
86	— ·31921	279	— ·32814	308	— ·33795	340	— ·34854	373	— ·35975	407
87	— ·24188	212	— ·24885	234	— ·25649	258	— ·26472	283	— ·27345	310
88	— ·16244	142	— ·16721	158	— ·17244	174	— ·17808	191	— ·18404	209
89	— ·08158	72	— ·08400	79	— ·08666	87	— ·08952	96	— ·09255	105
90	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0	0 00000	0	0·00000	0

Таблица XXII

$ce_4(x, \theta)$. $\theta=1$ t до $\theta=5$

x	θ=1 $a_4=16·03383$	Δ²	θ=2 $a_4=16·14120$	Δ²	θ=3 $a_4=16·33872$	Δ²	θ=4 $a_4=16·64982$	Δ²	θ=5 $a_4=17·09658$	Δ²
°										
0	1·03514	—442	1·07440	—397	1·11684	—352	1·15864	—305	1·19333	—258
1	1·03292	—441	1·07241	—397	1·11508	—351	1·15711	—305	1·19204	—258
2	1·02630	—439	1·06646	—395	1·10981	—350	1·15254	—304	1·18817	—258
3	1·01528	—434	1·05656	—391	1·10104	—348	1·14492	—303	1·18173	—257
4	0·99993	—428	1·04275	—387	1·08879	—345	1·13427	—302	1·17271	—257
5	·98029	—420	1·02507	—381	1·07310	—341	1·12060	—299	1·16112	—256
6	·95646	—410	1·00358	—374	1·05399	—336	1·10394	—297	1·14696	—256
7	·92853	—398	0·97835	—365	1·03153	—330	1·08431	—293	1·13025	—255
8	·89661	—385	·94947	—356	1·00576	—324	1·06175	—290	1·11100	—253
9	·86084	—370	·91704	—345	0 97675	—316	1·03629	—285	1·08921	—252
·10	·82136	—354	·88116	—332	·94458	—308	1·00798	—280	1·06491	—250
11	·77834	—336	·84196	—319	·90934	—298	0·97686	—275	1·03811	—247
12	·73197	—317	·79957	—304	·87110	—288	·94300	—268	1·00883	—245
13	·68243	—296	·75414	—288	·82999	—277	·90645	—261	0·97711	—241
14	·62992	—274	·70583	—271	·78611	—264	·86729	—253	·94298	—237
15	·57469	—250	·65481	—253	·73959	—251	·82560	—244	·90647	—233
16	·51695	—226	·60126	—233	·69056	—237	·78147	—235	·86763	—228
17	·45695	—200	·54537	—213	·63916	—221	·73499	—224	·82652	—222
18	·39495	—173	·48736	—192	·58556	—205	·68627	—213	·78319	—215
19	·33122	—146	·42743	—169	·52990	—187	·63542	—200	·73771	—207
20	·26603	—117	·36581	—146	·47237	—169	·58256	—187	·69016	—198
21	·19967	— 88	·30274	—121	·41315	—149	·52785	—172	·64063	—189
22	·13242	— 59	·23845	— 96	·35244	—129	·47141	—156	·58921	—178
23	·06458	— 29	·17320	— 70	·29044	—108	·41341	—140	·53602	—166
24	— ·00354	2	·10724	— 44	·22736	— 85	·35401	—122	·48117	—152
25	— ·07165	32	·04085	— 17	·16343	— 62	·29339	—103	·42480	—138
26	— ·13944	63	— ·02572	11	·09887	— 38	·23175	— 83	·36704	—122
27	— ·20660	93	— ·09217	39	·03394	— 13	·16928	— 62	·30807	—105
28	— ·27282	124	— ·15824	67	— ·03112	12	·10620	— 39	·24804	— 87
29	— ·33780	154	— ·22364	96	— ·09606	39	·04272	— 16	·18715	— 67
30	— ·40124	184	— ·28808	124	— ·16062	65	— ·02092	8	·12558	— 46
31	— ·46285	213	— ·35128	153	— ·22452	93	— ·08448	33	·06355	— 24
32	— ·52233	241	— ·41296	181	— ·28750	120	— ·14770	59	·00128	0
33	— ·57940	269	— ·47283	209	— ·34927	148	— ·21033	86	— ·06099	24
34	— ·63378	295	— ·53060	237	— ·40957	176	— ·27211	113	— ·12301	50
35	— ·68521	320	— ·58601	264	— ·46811	204	— ·33275	141	— ·18454	77
36	— ·73344	344	— ·63879	290	— ·52461	231	— ·39198	169	— ·24530	105
37	— ·77823	367	— ·68866	315	— ·57880	259	— ·44952	198	— ·30501	133
38	— ·81934	388	— ·73538	340	— ·63040	286	— ·50508	226	— ·36339	163
39	— ·85658	407	— ·77870	363	— ·62914	312	— ·55837	255	— ·42014	192
40	— ·88974	425	— ·81839	385	— ·72476	338	— ·60912	283	— ·47497	222
41	— ·91866	441	— ·85423	405	— ·76700	362	— ·65704	311	— ·52758	252
42	— ·94317	454	— ·88602	424	— ·80563	385	— ·70184	338	— ·57766	282
43	— 96313	466	— ·91357	441	— ·84039	407	— ·74327	364	— ·62492	312
44	— ·97843	476	— ·93670	456	— ·87109	428	— ·78106	389	— ·66906	341
45	—0·98897	483	—0·95527	470	— 0·89750	447	— 0·81495	413	— ·70978	370

Таблица XXII—продолжение

$ce_4(x, \theta)$. $\theta=1$ t до $\theta=5$.

x	$\theta=1$, $a_4=16{\cdot}03383$	Δ^2	$\theta=2$, $a_4=16{\cdot}14120$	Δ^2	$\theta=3$, $a_4=16{\cdot}33872$	Δ^2	$\theta=4$, $a_4=16{\cdot}64982$	Δ^2	$\theta=5$, $a_4=17{\cdot}09658$	Δ^2
°										
45	−0·98897	483	−0·95527	470	−0·89750	447	−0·81495	413	−0·70978	370
46	−·99469	488	−·96914	480	−·91945	463	−·84470	435	−·74681	397
47	−·99553	490	−·97821	489	−·93677	478	−·87011	456	−·77988	423
48	−·99146	490	−·98239	495	−·94930	490	−·89095	474	−·80871	447
49	−·98249	488	−·98162	499	−·95693	500	−·90705	491	−·83308	469
50	−·96865	483	−·97585	500	−·95956	508	−·91825	504	−·85276	489
51	−·94997	476	−·96508	499	−·95711	512	−·92440	515	−·86755	507
52	−·92653	466	−·94933	495	−·94954	514	−·92540	524	−·87727	521
53	−·89843	454	−·92863	488	−·93682	513	−·92116	529	−·88178	533
54	−·86580	439	−·90305	478	−·91897	509	−·91163	531	−·88096	541
55	−·82878	422	·87270	465	−·89603	502	−·89680	529	−·87473	546
56	−·78753	402	−·83769	450	−·86807	491	−·87667	524	−·86303	548
57	−·74227	381	−·79818	432	−·83520	478	−·85130	516	−·84586	545
58	−·69319	357	−·75436	411	−·79756	461	−·82077	504	−·82324	538
59	−·64055	331	−·70643	388	−·75531	440	−·78520	488	−·79523	528
60	−·58460	303	−·65462	362	−·70865	417	−·74476	468	−·76195	513
61	−·52561	274	−·59919	333	−·65783	391	−·69963	445	−·72354	493
62	−·46389	242	−·54044	302	−·60309	362	−·65006	418	−·68020	470
63	−·39975	209	−·47866	269	−·54474	329	−·59630	388	−·63217	442
64	−·33351	175	−·41419	235	−·48309	295	−·53867	354	−·57971	410
65	−·26552	140	−·34737	198	−·41850	257	−·47751	317	−·52315	375
66	−·19613	104	−·27857	160	−·35134	218	−·41317	277	−·46284	335
67	−·12570	67	−·20818	120	−·28200	176	−·34607	234	−·39918	292
68	−·05460	29	−·13658	79	−·21090	133	−·27663	189	−·33261	246
69	·01678	−9	−·06420	37	−·13847	88	−·20530	141	−·26357	197
70	·08808	−47	·00856	−5	−·06517	41	−·13256	92	−·19257	145
71	·15890	−85	·08126	−48	·00855	−6	−·05891	41	−·12011	91
72	·22887	−123	·15349	−91	·08221	−53	·01516	−11	−·04674	36
73	·29761	−160	·22481	−133	·15534	−101	·08912	−63	·02698	−21
74	·36475	−197	·29480	−175	·22747	−148	·16245	−116	·10049	−78
75	·42992	−233	·36304	−217	·29811	−195	·23462	−168	·17323	−136
76	·49276	−267	·42911	−257	·36679	−242	·30510	−220	·24460	−193
77	·55294	−300	·49261	−296	·43306	−287	·37339	−271	·31404	−249
78	·61011	−332	·55315	−333	·49646	−330	·43896	−320	·38099	−307
79	·66396	−362	·61035	−369	55656	−371	·50133	−367	·44490	−359
80	·71420	−390	·66387	−402	·61296	−410	·56002	−412	·50523	−407
81	·76054	−415	·71336	−433	·66525	−446	·61460	−454	·56149	−455
82	·80273	−439	·75853	−462	·71307	−480	·66463	−492	·61320	−499
83	·84052	−460	·79907	−487	·75610	−510	·70975	−527	·65993	−538
84	·87372	−479	·83475	−510	·79403	−537	·74958	−558	·70127	−574
85	·90214	−495	·86533	−529	·82658	−560	·78383	−585	·73687	−604
86	·92560	−508	·89061	−545	·85354	−579	·81223	−608	·76643	−630
87	·94399	−518	·91045	−558	·87471	−594	·83456	−625	·78969	−650
88	·95721	−525	·92471	−567	·88994	−605	·85063	−638	·80645	−665
89	·96516	−530	·93330	−572	·89912	−611	·86032	−645	·81657	−673
90	0·96782	−531	0·93617	−574	0·90219	−614	0·86356	−648	0.81995	−676

Таблица XXII — продолжение

$ce_4(x, \theta)$. $\theta=6$ до $\theta=10$

x	$\theta=6$, $a_4=17.68878$	Δ^2	$\theta=7$, $a_4=18.41661$	Δ^2	$\theta=8$, $a_4=19.25271$	Δ^2	$\theta=9$, $a_4=20.16093$	Δ^2	$\theta=10$, $a_4=21.10463$	Δ^2
°										
0	1·21410	−210	1·21689	−164	1.20162	−119	1·17071	−77	1·12711	−38
1	1·21304	−210	1·21607	−164	1·20103	−119	1·17032	−77	1·12692	−38
2	1·20989	−211	1·21362	−165	1·19924	−120	1·16916	−79	1·12634	−40
3	1·20462	−211	1·20951	−166	1·19625	−122	1·16722	−80	1·12537	−42
4	1·19725	−212	1·20375	−167	1·19204	−124	1·16447	−83	1·12398	−44
5	1·18775	−212	1·19632	−169	1 18659	−126	1·16089	−86	1·12215	−48
6	1·17614	−213	1·18721	−171	1·17987	−130	1·15645	−90	1·11984	−53
7	1·16239	−214	1·17638	−173	1·17187	−133	1·15110	−95	1·11700	−58
8	1·14649	−215	1·16382	−176	1·16253	−137	1·14482	−100	1·11358	−64
9	1·12845	−216	1·14951	−179	1·15182	−142	1·13753	−105	1·10952	−70
10	1·10826	−216	1·13341	−182	1·13969	−146	1·12919	−112	1·10475	−78
11	1·08590	−217	1·11549	−185	1·12610	−152	1·11974	−118	1·09921	−86
12	1·06136	−217	1·09572	−188	1·11099	−157	1·10910	−126	1·09281	−94
13	1·03466	−218	1·07408	−191	1·09432	−162	1·09720	−133	1·08547	−103
14	1·00577	−217	1·05053	−194	1·07602	−168	1·08397	−141	1·07709	−113
15	0 97472	−217	1·02504	−196	1·05604	−174	1·06934	−149	1·06758	−123
16	·94150	−215	0.99758	−199	1·03432	−179	1·05321	−157	1·05684	−133
17	·90612	−214	·96814	−201	1·01082	−184	1·03551	−165	1·04477	−144
18	·86861	−211	·93669	−202	0·98547	−189	0·01616	−173	1·03126	−155
19	·82899	−208	·90322	−203	·95822	−194	0·99508	−181	1·01620	−165
20	·78729	−204	·86771	−203	·92904	−198	·97219	−189	0·99948	−176
21	·74355	−199	·83018	−203	·89788	−201	·94741	−196	·98101	−186
22	·69783	−192	·79062	−201	·86470	−204	·92067	−202	·96067	−197
23	·65018	−185	·74905	−198	·82949	−206	·89191	−208	·93836	−206
24	,60099	−177	·70549	−194	·79222	−206	·86107	−213	·91399	−215
25	·54942	−167	·66000	−189	·75289	−206	·82810	−217	·88748	−223
26	·49649	−156	·61261	−183	·71150	−204	·79296	−219	·85873	−230
27	·44200	−143	·56339	−175	·66808	−200	·75564	−220	·82769	−236
28	·38608	−129	·51243	−165	·62265	−195	·71611	−220	·79429	−240
29	·32887	−113	·45981	−154	·57527	−189	·67438	−218	·75849	−243
30	·27052	−96	·40566	−141	·52601	−180	·63047	−214	·72026	−243
31	·21122	−77	·35010	−126	·47494	−170	·58441	−208	·67960	−242
32	·15114	−57	·29327	−110	·42218	−157	·53628	−200	·63652	−239
33	·09049	−35	·23535	−91	·36784	−143	·48614	−190	·59105	−233
34	·02948	−12	·17652	−71	·31208	−126	·43410	−177	·54324	−225
35	−·03164	13	·11699	−48	·25506	−107	·38029	−162	·49319	−214
36	−·09263	40	·05697	−24	·19697	−86	32486	−144	·44099	−200
37	−·15322	67	−·00330	2	·13802	−62	·26799	−124	·38679	−183
38	−·21314	96	−·06355	29	·07845	−37	·20987	−101	·33076	−164
39	−·27210	126	−·12350	58	·01852	−9	·15075	−75	·27309	−141
40	−·32980	157	−·18287	89	−·04150	21	·09088	−47	·21401	−115
41	−·38593	188	−·24135	121	−·10132	53	·03054	−16	·15378	−86
42	−·44017	220	−·29862	154	−·16060	86	−·02996	17	·09270	−53
43	−·49222	253	−·35435	188	−·21903	121	−·09030	52	·03109	−18
44	−·54174	285	−·40819	223	−·27624	157	−·15011	89	−·03071	19
45	−0·58840	317	−0·45980	258	−0·33188	195	−0·20903	128	−0·09232	60

Таблица XXII — продолжение

$ce_4(x, \theta)$. $\theta=6$ до $\theta=10$

x	$\theta=6$ $a_4=17{\cdot}68878$	Δ^2	$\theta=7$ $a_4=18{\cdot}41661$	Δ^2	$\theta=8$ $a_4=19{\cdot}25271$	Δ^2	$\theta=9$ $a_4=20{\cdot}16093$	Δ^2	$\theta=10$ $a_4=21{\cdot}10463$	Δ^2
°										
45	—0·58840	317	—0·45980	258	—0·33188	195	—0·20903	128	—0·09232	60
46	—·63190	348	—·50883	293	—·38557	233	—·26666	169	—·15333	102
47	—·67191	379	—·55494	328	—·43694	271	—·32261	211	—·21332	146
48	—·70813	408	—·59776	362	—·48559	309	—·37644	253	—·27184	192
49	—·74027	436	—·63697	395	—·53115	347	—·42776	295	—·32845	239
50	—·76804	462	—·67222	427	—·57323	385	—·47611	338	—·38266	287
51	—·79119	486	—·70321	457	—·61147	420	—·52109	379	—·43401	334
52	—·80948	508	—·72963	484	—·64551	454	—·56228	420	—·48203	381
53	—·82269	526	—·75121	509	—·67500	486	—·59927	458	—·52623	427
54	—·83064	541	—·76769	532	—·69962	515	—·63168	495	—·56617	470
55	—·83318	553	—·77886	550	—·71910	541	—·65914	528	—·60140	512
56	—·83019	561	—·78452	565	—·73315	563	—·68131	558	—·63152	550
57	—·82160	565	—·78454	576	—·74158	582	—·69791	585	—·65614	584
58	—·80736	564	—·77879	582	—·74419	595	—·70867	605	—·67491	614
59	—·78748	559	—·76723	584	—·74085	604	—·71338	621	—·68756	638
60	—·76201	549	—·74983	580	—·73147	607	—·71187	632	—·69382	657
61	—·73105	535	—·72662	571	—·71603	604	—·70405	636	—·69351	669
62	—·69473	516	—·69771	557	—·69454	596	—·68986	635	—·68651	675
63	—·65326	492	—·66322	538	—·66709	582	—·66932	626	—·67276	673
64	—·60686	463	—·62335	513	—·63382	561	—·64253	611	—·65228	663
65	—·55584	430	—·57835	483	—·59494	535	—·60962	589	—·62518	646
66	—·50051	392	—·52853	447	—·55071	502	—·57083	559	—·59161	621
67	—·44127	349	—·47423	406	—·50146	463	—·52644	523	—·55183	588
68	—·37853	303	—·41588	361	—·44757	419	—·47682	480	—·50618	547
69	—·31277	253	—·35392	310	—·38950	369	—·42240	431	—·45506	498
70	—.24446	200	—·28886	256	—·32774	314	—·36367	376	—·39896	442
71	—·17417	144	—·22124	198	—·26283	255	—·30118	315	—·33844	380
72	—·10243	85	—·15163	137	—·19538	191	—·23554	249	—·27412	311
73	—·02984	25	—·08065	74	—·12601	125	—·16742	179	—·20670	237
74	·04301	—37	—·00894	8	—·05539	55	—·09751	105	—·13690	158
75	·11548	—99	·06286	—58	·01577	—16	—·02655	29	—·06552	76
76	·18697	—161	·13407	—126	·08678	—88	·04470	—49	·00662	—8
77	·25685	—223	·20402	—193	·15690	—161	·11546	—128	·07868	—94
78	·32450	—283	·27205	—258	·22542	—232	·18494	—206	·14981	—180
79	·38932	—342	·33749	—323	·29161	—303	·25236	—283	·21914	—264
80	·45072	—397	·39971	—384	·35477	—370	·31694	—358	·28583	—347
81	·50815	—450	·45808	—442	·41424	—435	·37795	—429	·34905	—426
82	·56108	—499	·51203	—497	·46936	—495	·43467	—496	·40800	—501
83	·60902	—544	·56102	—546	·51953	—550	·48644	—557	·46194	—569
84	·65152	—584	·60454	—591	·56420	—599	·53264	—612	·51019	—631
85	·68819	—618	·64215	—629	·60287	—642	·57271	—660	·55213	—686
86	·71867	—647	·67346	—662	·63513	—678	·60618	—701	·58721	—731
87	·74269	—670	·69816	—687	·66060	—707	·63264	—733	·61498	—767
88	·76000	—686	·71599	—706	·67900	—728	·65178	—756	·63509	—793
89	·77046	—696	·72676	—717	·69012	—740	·66336	—770	·64725	—809
90	0·77396	—699	0·73037	—721	0·69384	—744	0·66723	—775	0·65132	—815

Таблица XXIII

$se_5(x, \theta)$. $\theta=1$ до $\theta=5$

x	$\theta=1$ $b_5=25{\cdot}02084$	Δ^2	$\theta=2$ $b_5=25{\cdot}08335$	Δ^2	$\theta=3$ $b_5=25{\cdot}18708$	Δ^2	$\theta=4$ $b_5=25{\cdot}33054$	Δ^2	$\theta=5$ $b_5=25{\cdot}51082$	Δ^2
°										
0	0.00000	0	0.00000	0	0,00000	0	0 00000	0	0.00000	0
1	·08526	—60	·08318	—53	·08090	—47	·07840	—41	·07568	—36
2	·16993	—119	·16583	—106	·16133	—94	·15639	—83	·15100	—71
3	·25340	—178	·24742	—159	·24081	—141	·23355	—124	·22561	—107
4	·33510	—235	·32741	—211	·31889	—187	·30948	—164	·29915	—142
5	·41444	—291	·40530	—261	·39510	—232	·38376	—204	·37127	—177
6	·49088	—345	·48058	—310	·46899	—276	·45601	—243	·44161	—212
7	·56387	—396	·55276	—357	·54011	—318	·52582	—281	·50984	—245
8	·63290	—445	·62138	—402	·60806	—360	·59282	—318	·57562	—279
9	·69748	—491	·68597	—444	·67241	—399	·65664	—354	·63861	—311
10	·75715	—533	·74612	—484	·73277	—436	·71691	—389	·69848	—343
11	·81148	—572	·80143	—522	·78877	—471	·77329	—422	·75493	—373
12	·86009	—607	·85152	—556	·84005	—504	·82546	—453	·80765	—403
13	·90263	—638	·89606	—586	·88630	—534	·87310	—482	·85633	—431
14	·93879	—665	·93473	—613	·92720	—562	·91591	—509	·90071	—458
15	·96830	—687	·96727	—637	·96249	—586	·95363	—534	·94052	—483
16	0·99094	—704	0·99344	—656	0·99192	—607	0 98600	—557	0 97549	—506
17	1·00655	—716	1·01306	—671	1·01528	—625	1·01281	—577	1·00541	—527
18	1·01500	—723	1·02596	—682	1·03239	—639	1·03385	—594	1·03006	—546
19	1·01621	—725	1·03203	—689	1 04311	—650	1·04896	—608	1·04924	—563
20	1·01018	—722	1·03121	—691	1·04733	—657	1·05798	—619	1·06279	—578
21	0·99692	—714	1·02349	—689	1·04499	—659	1·06082	—626	1 07056	—589
22	·97651	—701	1·00887	—682	1·03605	—658	1·05740	—630	1·07244	—598
23	·94910	—683	0·98743	—671	1·02052	—653	1·04768	—631	1·06834	—604
24	·91486	—660	·95928	—654	0·99847	—644	1·03165	—627	1·05820	—606
25	·87402	—632	·92459	—634	·96998	—630	1·00935	—620	1·04199	—605
26	·82687	—599	·88357	—608	·93519	—612	0·98084	—609	1·01973	—601
27	.77373	—562	·83646	—579	·89429	—590	·94623	—594	0·99146	—593
28	·71497	—520	·78356	—545	·84748	—563	·90569	—575	·95727	—581
29	·65101	—475	·72521	—507	·79505	—533	·85939	—552	·91727	—564
30	·58230	—426	·66180	—465	·73728	—498	·80758	—524	·87163	—544
31	·50934	—373	·59373	—419	·67454	—459	·75052	—493	·82054	—520
32	·43264	—318	·52146	—370	·60720	—417	·68854	—457	·76426	—492
33	·35276	—260	·44550	—318	·53570	—371	·62198	—418	·70306	—459
34	·27028	—200	·36635	—263	·46048	—322	·55124	—375	·63727	—422
35	·18580	—138	·28458	—205	·38205	—269	·47675	—328	·56726	—381
36	·09995	—74	·20075	—146	·30093	—214	·39898	—278	·49343	—337
37	·01335	—10	·11546	—84	·21768	—156	·31844	—224	·41624	—288
38	— 07334	55	·02933	—21	·13286	—96	·23566	—168	·33617	—236
39	—·15949	119	—·05701	42	·04709	—34	·15120	—109	·25373	—181
40	—·24444	184	—·14294	106	—·03903	29	·06565	—48	·16948	—123
41	—·32755	247	—·22780	170	—·12486	93	—·02037	15	·08402	—62
42	—·40820	308	—·31096	234	—·20976	157	—·10624	79	—·00207	2
43	—·48576	368	—·39178	296	—·29310	221	—·19132	144	—·08814	67
44	—·55965	425	—·46965	357	—·37422	285	—·27496	210	—·17354	133
45	—0·62928	479	—0·54394	415	—0·95249	347	—0·35650	275	—0 25761	200

Таблица XXIII—продолжение

$se_5(x,\theta)$. $\theta=1$ до $\theta=5$

x	$\theta=1$ $b_5=25{\cdot}02084$	Δ^2	$\theta=2$ $b_5=25{\cdot}08335$	Δ^2	$\theta=3$ $b_5=25{\cdot}18708$	Δ^2	$\theta=4$ $b_5=25{\cdot}33054$	Δ^2	$\theta=5$ $b_5=25{\cdot}51082$	Δ^2
°										
45	−0·62928	479	−0·54394	415	−0·45249	347	−0·35650	275	−0·25761	200
46	−·69412	530	−·61409	472	−·52730	408	−·43529	339	−·33968	268
47	−·75366	577	−·67952	525	−·59803	466	−·51068	403	−·41907	334
48	−·80742	620	−·73970	574	−·66409	522	−·58205	464	−·49512	400
49	−·85498	658	−·79414	620	−·72494	574	−·64878	522	−·56716	475
50	−·89596	692	−·84238	661	−·78005	623	−·71028	578	−·63456	526
51	−·93002	720	−·88401	697	−·82892	668	−·76601	630	−·69669	585
52	−·95688	743	−·91866	729	−·87112	706	−·81545	677	−·75297	640
53	−·97631	760	−·94603	754	−·90626	741	−·85811	719	−·80285	691
54	−·98813	771	−·96586	774	−·93400	769	−·89358	756	−·84582	736
55	−·99225	776	−·97795	787	−·95404	791	−·92149	787	−·88143	776
56	−·98860	775	−·98216	795	−·96618	807	−·94153	812	−·90927	810
57	−·97719	768	−·97843	796	−·97025	816	−·95344	830	−·92902	836
58	−·95810	755	−·96674	790	−·96615	818	−·95706	840	−·94040	856
59	−·93146	736	−·94716	777	−·95388	813	−·95228	843	−·94322	867
60	−·89746	711	−·91980	758	−·93347	801	−·93907	838	−·93737	871
61	−·85634	680	−·88486	733	−·90506	781	−·91748	826	−·92282	865
62	−·80843	643	−·84259	701	−·86883	755	−·88763	805	−·89961	852
63	−·75409	601	−·79331	662	−·82505	721	−·84972	777	−·86789	829
64	−·69373	554	−·73741	618	−·77407	680	−·80405	740	−·82788	798
65	−·62783	503	−·67533	568	−·71627	633	−·75098	696	−·77988	758
66	−·55690	447	−·60756	513	−·65215	580	−·69094	645	−·72431	710
67	−·48151	387	−·53466	453	−·58223	520	−·62444	587	−·66164	654
68	−·40224	324	−·45723	389	−·50711	455	−·55208	422	−·59243	590
69	−·31973	258	−·37590	321	−·42743	386	−·47450	452	−·51733	519
70	−·23464	190	−·29136	250	−·34390	312	−·39239	376	−·43704	441
71	−·14766	120	−·20433	176	−·25725	234	−·30654	295	−·35234	358
72	−·05948	48	−·11554	100	−·16826	154	−·21773	211	−·26406	270
73	·02918	−24	−·02576	22	−·07773	71	−·12681	123	−·17308	178
74	·11760	−96	·06425	−56	·01351	−12	−·03466	34	−·08032	83
75	·20507	−167	·15370	−134	10463	−97	·05782	−57	·01327	−14
76	·29087	−237	·24181	−211	·19477	−181	·14974	−148	·10672	−112
77	·37429	−306	·32782	−286	·28311	−264	·24018	−238	·19905	−209
78	·45466	−372	·41096	−360	·36882	−344	·32824	−326	·28930	−305
79	·53132	−435	·49051	−430	·45108	−422	·41305	−412	·37649	−399
80	·60362	−494	·56576	−497	·52912	−496	·49373	−494	·45969	−488
81	·67099	−550	·63605	−559	·60220	−566	·56948	−571	·53802	−573
82	·73285	−601	·70074	−617	·66961	−631	·63952	−643	·61060	−653
83	·78871	−647	·75926	−669	·73071	−690	·70313	−708	·67666	−725
84	·83809	−688	·81108	−716	·78492	−742	·75966	−767	·73547	−790
85	·88058	−723	·85575	−756	·83171	−787	·80852	−817	·78638	−846
86	·91585	−753	·89286	−789	·87062	−825	·84921	−859	·82883	−893
87	·94358	−776	·92207	−816	·90129	−855	·88131	−893	·86234	−931
88	·96356	−792	·94313	−835	·92341	−876	·90448	−917	·88655	−957
89	·97561	−802	·95584	−846	·93677	−889	·91848	−932	·90118	−974
90	0·97964	−806	0·96009	−850	0·94123	−893	0·92316	−936	0·90608	−979

Таблица XXIII — продолжение

$se_6(x,\theta)$. $\theta=6$ до $\theta=10$

x	$\theta=6$ $b_6=25{\cdot}72341$	Δ^2	$\theta=7$ $b_6=25{\cdot}96245$	Δ^2	$\theta=8$ $b_6=26{\cdot}22100$	Δ^2	$\theta=9$ $b_6=26{\cdot}49155$	Δ^2	$\theta=10$ $b_6=26{\cdot}76643$	Δ^2
°										
0	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0
1	·07275	−30	·06962	−25	·06634	−21	·06293	−16	·05945	−12
2	·14519	−61	·13899	−51	·13247	−41	·12571	−33	·11877	−25
3	·21702	−91	·20785	−76	·19819	−62	·18815	−49	·17785	−37
4	·28795	−121	·27595	−102	·26329	−83	·25010	−66	·23655	−50
5	·35766	−151	·34303	−127	·32755	−104	·31139	−83	·29476	−64
6	·42585	−181	·40884	−153	·39077	−126	·37185	−101	·35232	−77
7	·49223	−211	·47313	−178	·45273	−148	·43130	−119	·40912	−92
8	·55650	−240	·53562	−204	·51322	−170	·48957	−137	·46499	−107
9	·61836	−270	·59608	−230	·57201	−192	·54647	−156	·51980	−123
10	·67753	−298	·65424	−255	·62888	−214	·60181	−176	·57338	−139
11	·73372	−326	·70985	−281	·68361	−237	·65538	−196	·62557	−157
12	·78665	−354	·76265	−306	·73597	−260	·70700	−216	·67619	−175
13	·83604	−380	·81239	−331	·78573	−283	·75646	−238	·72505	−194
14	·88162	−406	·85882	−356	·83265	−307	·80354	−259	·77198	−214
15	·92315	−431	·90170	−380	·87651	−330	·84802	−282	·81676	−235
16	·96036	−455	·94077	−404	·91706	−353	·88969	−304	·85920	−257
17	0·99303	−477	0·97581	−427	·95408	−377	·92832	−327	·89906	−279
18	1·02092	−498	1·00657	−449	0·98734	−399	·96367	−350	·93614	−302
19	1·04384	−517	1·03286	−470	1·01660	−421	0·99553	−373	0·97020	−325
20	1·06159	−534	1·05444	−489	1·04165	−443	1·02365	−396	1·00100	−349
21	1·07399	−550	1·07114	−508	1·06226	−464	1·04780	−419	1·02832	−373
22	1·08089	−563	1·08275	−524	1·07824	−483	1·06778	−440	1·05190	−397
23	1·08217	−573	1·08913	−539	1·08939	−501	1·08335	−462	1·07152	−420
24	1·07773	−581	1·09012	−551	1·09553	−518	1·09430	−481	1·08694	−443
25	1·06747	−585	1·08561	−561	1·09649	−532	1·10044	−500	1·09792	−465
26	1·05136	−587	1·07548	−568	1·09213	−544	1·10158	−517	1·10426	−486
27	1·02938	−585	1·05968	−572	1·08233	−554	1·09755	−532	1·10573	−505
28	1·00155	−580	1·03816	−573	1·06699	−561	1·08820	−544	1·10215	−523
29	0·96793	−571	1·01090	−571	1·04603	−565	1·07341	−554	1·09334	−538
30	·92859	−558	0·97794	−565	1·01942	−566	1·05308	−561	1·07915	−551
31	·88368	−540	·93933	−555	0·98716	−562	1·02714	−564	1·05945	−561
32	·83337	−519	·89517	−540	·94928	−555	0·99556	−564	1·03414	−567
33	·77786	−494	·84562	−522	·90584	−544	·95834	−559	1·00317	−569
34	·71742	−464	·79084	−499	·85697	−528	·91553	−550	0·96651	−567
35	·65235	−429	·73108	−471	·80282	−507	·86722	−537	·92417	−561
36	·58298	−391	·66661	−439	·74360	−482	·81353	−518	·87624	−549
37	·50971	−348	·59775	−402	·67957	−451	·75467	−494	·82281	−532
38	·43296	−301	·52487	−361	·61102	−416	·69086	−465	·76405	−510
39	·35320	−250	·44838	−314	·53832	−375	·62239	−431	·70020	−482
40	·27095	−195	·36875	−264	·46187	−329	·54962	−391	·63153	−448
41	·18674	−137	·28647	−209	·38213	−279	·47294	−345	·55839	−407
42	·10118	−75	·20211	−151	·29960	−224	·39281	−294	·48117	−361
43	·01486	−11	·11624	−89	·21483	−164	·30974	−238	·40034	−309
44	−·07157	55	·02949	−23	·12842	−100	·22429	−176	·31642	−251
45	−0·15745	123	−0·05749	46	0·04101	−32	0·13708	−110	0·23000	−187

Таблица XXIII — продолжение

$se_5(x, \theta)$ $\theta=6$ до $\theta=10$

x	$\theta=6$ $b_5=25{\cdot}72341$	Δ^2	$\theta=7$ $b_5=25{\cdot}96245$	Δ^2	$\theta=8$ $b_5=26{\cdot}22100$	Δ^2	$\theta=9$ $b_5=26{\cdot}49155$	Δ^2	$\theta=10$ $b_5=26{\cdot}76643$	Δ^2
°										
45	−0·15745	123	−0·05749	46	0·04101	−32	0·13708	−110	0·23000	−187
46	−·24209	193	−·14402	116	−·04673	38	·04876	−40	·14170	−118
47	−·32480	263	−·22938	188	−·13408	112	−·03995	34	·05222	−44
48	−·40489	333	−·31285	261	−·22031	187	−·12832	111	−·03771	33
49	−·48165	402	−·39372	335	−·30467	264	−·21559	191	−·12730	115
50	−·55439	469	−·47123	407	−·38639	341	−·30094	272	−·21574	199
51	−·62244	535	−·54468	479	−·46470	418	−·38358	353	−·30219	285
52	−·68513	597	−·61333	548	−·53882	494	−·46269	435	−·38580	371
53	−·74186	656	−·67650	614	−·60801	567	−·53746	515	−·46569	458
54	−·79203	710	−·73353	676	−·67153	637	−·60707	592	−·54100	543
55	−·83511	758	−·78380	734	−·72867	703	−·67076	667	−·61089	625
56	−·87060	801	−·82673	785	−·77879	764	−·72778	736	−·67452	703
57	−·89808	837	−·86180	830	−·82127	818	−·77744	800	−·73113	777
58	−·91720	865	−·88857	868	−·85556	865	−·81910	857	−·77996	844
59	−·92767	885	−·90666	898	−·88120	905	−·85219	906	−·82036	903
60	−·92928	897	−·91577	919	−·89780	935	−·87621	946	−·85173	953
61	−·92192	900	−·91570	930	−·90504	956	−·89077	977	−·87356	993
62	−·90556	894	−·90632	932	−·90273	966	−·89556	996	−·88547	1023
63	−·88026	878	−·88762	924	−·89075	966	−·89039	1004	−·88715	1040
64	−·84618	853	−·85968	905	−·86912	954	−·87517	1001	−·87843	1045
65	−·80357	818	−·82270	875	−·83794	931	−·84995	984	−·85926	1036
66	−·75279	773	−·77696	835	−·79746	896	−·81488	956	−·82973	1014
67	−·69427	720	−·72287	785	−·74802	850	−·77025	914	−·79007	977
68	−·62856	657	−·66093	725	−·69008	792	−·71649	860	−·74063	927
69	−·55627	586	−·59175	655	−·62421	724	−·65413	793	−·68193	864
70	−·47812	508	−·51601	576	−·55111	645	−·58384	715	−·61458	787
71	−·39490	423	−·43452	489	−·47156	557	−·50639	627	−·53936	698
72	−·30744	331	−·34813	395	−·38643	460	−·42267	528	−·45717	597
73	−·21668	235	−·25780	295	−·29671	356	−·33368	420	−·36901	487
74	−·12356	135	−·16452	189	−·20342	246	−·24048	305	−·27598	367
75	−·02909	32	−·06935	80	−·10766	131	−·14423	185	−·17928	240
76	·06570	−73	·02663	−31	−·01060	13	−·04614	59	−·08017	108
77	·15976	−178	·12229	−144	·08660	−107	·05255	−68	·02001	−27
78	·25204	−281	·21652	−255	·18272	−227	·15056	−197	·11992	−164
79	·34151	−383	·30819	−365	·27657	−346	·24660	−324	·21819	−301
80	·42715	−481	·39622	−472	·36696	−461	·33939	−448	·31345	−435
81	·50798	−574	·47952	−573	·45275	−571	·42771	−568	·40436	−563
82	·58306	−661	·55709	−668	·53283	−675	·51034	−680	·48964	−685
83	·65154	−741	·62798	−756	·60616	−770	·58618	−784	·56806	−798
84	·71261	−812	·69131	−834	·67179	−856	·65418	−878	·63851	−900
85	·76555	−875	·74630	−903	·72886	−931	·71339	−960	·69995	−989
86	·80974	−927	·79226	−960	·77663	−994	·76301	−1029	·75150	−1065
87	·84467	−968	·82862	−1006	·81445	−1044	·80234	−1084	·79240	−1125
88	·86992	−998	·85492	−1039	·84183	−1081	·83084	−1124	·82205	−1168
89	·88519	−1016	·87084	−1059	·85840	−1103	·84809	−1148	·84002	−1195
90	0·89030	−1022	0·87616	−1065	0·86395	−1110	0·85387	−1156	0·84604	−1204

Таблица XXIV

$ce_5(x, \theta)$. $\theta=1$ до $\theta=5$

x	$\theta=1$ $a_5=25{\cdot}02085$	Δ^2	$\theta=2$ $a_5=25{\cdot}08378$	Δ^2	$\theta=3$ $a_5=25{\cdot}19029$	Δ^2	$\theta=4$ $a_5=25{\cdot}34376$	Δ^2	$\theta=5$ $a_5=25{\cdot}54997$	Δ^2
°										
0	1·02142	−716	1·04428	−670	1·06899	−625	1·09583	−579	1·12481	−533
1	1·01784	−713	1·04093	−668	1·06586	−623	1·09293	−577	1·12214	−532
2	1·00713	−706	1·03090	−662	1·05651	−618	1·08427	−573	1·11417	−528
3	0·98936	−694	1·01424	−652	1·04098	−609	1·06987	−566	1·10090	−523
4	·96464	−677	0·99107	−637	1·01936	−597	1·04980	−557	1·08241	−516
5	·93317	−655	·96152	−619	0·99176	−582	1·02417	−545	1·05876	−506
6	·89514	−629	·92579	−597	·95834	−564	0·99309	−530	1·03004	−495
7	·85083	−598	·88408	−571	·91929	−542	·95671	−512	0·99638	−481
8	·80054	−563	·83667	−541	·87481	−517	·91522	−492	·95791	−465
9	·74462	−524	·78385	−508	·82516	−489	·86880	−469	·91480	−447
10	·68346	−482	·72596	−471	·77061	−459	·81769	−444	·86721	−427
11	·61749	−435	·66334	−432	·71147	−425	·76214	−416	·81536	−404
12	·54716	−386	·59642	−389	·64809	−389	·70243	−386	·75947	−380
13	·47297	−334	·52560	−344	·58081	−350	·63887	−353	·69979	−353
14	·39543	−280	·45134	−296	·51004	−309	·57177	−318	·63657	−324
15	·31509	−223	·37412	−246	·43618	−265	·50149	−281	·57011	−293
16	·23252	−165	·29444	−194	·35966	−220	·42840	−242	·50073	−260
17	·14830	−105	·21281	−141	·28094	−173	·35290	−201	·42874	−225
18	·06302	−45	·12978	−86	·20049	−124	·27538	−158	·35450	−188
19	−·02270	16	·04588	−31	·11880	−74	·19627	−114	·27837	−150
20	−·10826	77	−·03833	26	·03637	−23	·11604	−68	·20075	−109
21	−·19305	138	−·12227	82	−·04629	29	·03512	−21	·12203	−67
22	−·27646	198	−·20540	139	−·12865	82	−·04600	28	·04264	−24
23	−·35788	257	−·28713	195	−·21019	135	−·12685	77	−·03698	21
24	−·43672	315	−·36692	250	−·29039	187	−·20693	126	−·11639	67
25	−·51242	370	−·44420	304	−·36872	240	−·28576	176	−·19514	114
26	−·58441	423	−·51843	357	−·44465	291	−·36282	226	−·27275	161
27	−·65217	473	−·58910	408	−·51767	341	−·43763	275	−·34874	209
28	−·71520	520	−·65569	456	−·58728	390	−·50969	324	−·42265	257
29	−·77302	564	−·71771	502	−·65298	438	−·57850	372	−·49399	305
30	−·82520	603	−·77472	544	−·71430	483	−·64360	418	−·56228	352
31	−·87135	639	−·82628	584	−·77080	525	−·70452	463	−·62705	398
32	−·91111	670	−·87201	619	−·82205	565	−·76080	506	−·68784	443
33	−·94417	696	−·91154	651	−·86765	601	−·81203	546	−·74419	487
34	−·97027	717	−·94456	678	−·90724	634	−·85779	584	−·79568	528
35	−0·98921	733	−·97080	701	−·94049	663	−·89772	618	−·84188	567
36	−1·00082	744	−0·99004	719	−·96712	687	−·93147	649	−·88241	603
37	−1·00499	749	−1·00208	732	−·98688	707	−·95873	675	−·91691	636
38	−1·00167	748	−1·00681	739	−0·99956	722	−·97924	698	−·94504	666
39	−0·99087	742	−1·00414	741	−1·00503	733	−·99277	716	−·96652	691
40	−·97265	731	−0·99406	738	−1·00316	737	−·99914	729	−·98109	711
41	−·94713	713	−·97660	729	−0·99392	737	−·99823	736	−·98855	727
42	−·91447	691	−·95185	715	−·97732	731	−·98995	739	−·98874	738
43	−·87490	663	−·91995	695	−·95340	719	−·97429	735	−·98155	743
44	−·82871	629	−·88111	669	−·92229	701	−·95127	726	−·96694	742
45	−0·77622	591	−0·83557	638	−0·88418	678	−0·92100	711	−0·94491	735

$ce_5(x, \theta)$. θ=1 до θ=5

x	θ=1, a_5=25·02085	Δ^2	θ=2, a_5=25·08378	Δ^2	θ=3, a_5=25·19029	Δ^2	θ=4, a_5=25·34376	Δ^2	θ=5, a_5=25·54997	Δ^2
45°	−0·77622	591	−0·83557	638	−0·88418	678	−0·92100	711	−0·94491	735
46	−·71782	548	−·78366	602	−·83928	649	−·88362	689	−·91553	722
47	−·65394	501	−·72573	560	−·78789	614	−·83935	662	−·87893	702
48	−·58505	449	−·66219	514	−·73036	574	−·78847	628	−·83531	676
49	−·51166	394	−·59352	463	−·66709	528	−·73130	589	−·78493	644
50	−·43434	335	−·52021	408	−·59854	478	−·66824	544	−·72811	605
51	−·35366	274	−·44282	349	−·52521	423	−·59974	493	−·66524	559
52	−·27024	210	−·36194	287	−·44765	363	−·52632	437	−·59679	508
53	−·18473	144	−·27819	222	−·36646	299	−·44852	376	−·52325	451
54	−·09778	76	−·19222	154	−·28228	232	−·36697	311	−·44520	388
55	−·01006	8	−·10471	84	−·19578	162	−·28231	241	−·36328	320
56	·07773	−61	−·01636	13	−·10765	90	−·19523	168	−·27815	248
57	·16492	−130	·07213	−59	−·01863	16	−·10648	93	−·19054	172
58	·25080	−198	·16002	−131	·07056	−60	−·01679	15	−·10122	92
59	·33471	−265	·24661	−202	·15914	−136	·07303	−65	−·01098	10
60	·41598	−330	·33117	−273	·24636	−211	·16221	−145	·07937	−74
61	·49395	−392	·41301	−342	·33147	−286	·24994	−225	·16897	−159
62	·56799	−452	·49142	−409	·41372	−360	·33542	−305	·25699	−244
63	·63752	−508	·56574	−473	·49237	−430	·41785	−382	·34256	−328
64	·70196	−561	·63534	−533	·56672	−498	·49647	−457	·42487	−410
65	·76080	−609	·69961	−589	·63608	−562	·57050	−529	·50306	−490
66	·81354	−653	·75800	−641	·69982	−622	·63924	−597	·57637	−566
67	·85975	−691	·80997	−687	·75734	−677	·70201	−660	·64401	−637
68	·89905	−724	·85508	−728	·80809	−726	·75818	−718	·70529	−703
69	·93111	−751	·89291	−763	·85158	−769	·80716	−769	·75953	−762
70	·95565	−772	·92311	−791	·88738	−805	·84846	−813	·80615	−815
71	·97247	−787	·94540	−813	·91514	−833	·88164	−849	·84462	−859
72	·98142	−796	·95957	−827	·93457	−855	·90631	−878	·87450	−895
73	·98241	−798	·96547	−835	·94547	−868	·92222	−898	·89543	−922
74	·97542	−793	·96302	−835	·94765	−873	·92915	−909	·90713	−940
75	·96050	−782	·95222	−827	·94111	−870	·92699	−911	·90943	−947
76	·93775	−765	·93315	−813	·92587	−859	·91572	−903	·90227	−944
77	·90736	−741	·90594	−791	·90204	−840	·89543	−887	·88567	−931
78	·86956	−711	·87084	−762	·86982	−812	·86627	−861	·85976	−908
79	·82466	−675	·82811	−726	·82947	−776	·82850	−826	·82477	−874
80	·77301	−633	·77813	−683	·78136	−733	·78247	−783	·78104	−831
81	·71502	−586	·72131	−634	·72591	−683	·72861	−731	·72900	−778
82	·65118	−534	·65815	−580	·66364	−625	·66744	−671	·66919	−716
83	·58200	−478	·58920	−519	·59512	−562	·59957	−604	·60222	−646
84	·50804	−417	·51505	−455	·52098	−492	·52565	−531	·52878	−569
85	·42991	−353	·43636	−385	·44191	−418	·44643	−451	·44966	−484
86	·34825	−286	·35381	−313	·35867	−340	·36270	−367	·36570	−395
87	·26372	−217	·26813	−237	·27202	−258	·27529	−279	·27779	−300
88	·17703	−146	·18008	−159	·18279	−173	·18509	−188	·18688	−202
89	·08888	−73	·09044	−80	·09183	−87	·09302	−94	·09395	−102
90	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0

$ce_5(x, \theta)$. θ=6 до θ=10

x	θ=6, a_5=25·81727	Δ^2	θ=7, a_5=26·15612	Δ^2	θ=8, a_5=26·57775	Δ^2	θ=9, a_5=27·09187	Δ^2	θ=10, a_5=27·70377	Δ^2
0°	1·15541	−486	1·18640	−439	1·21568	−392	1·24052	−344	1·25802	−295
1	1·15298	−485	1·18420	−439	1·21372	−391	1·23880	−343	1·25654	−295
2	1·14570	−483	1·17762	−437	1·20785	−391	1·23365	−343	1·25211	−296
3	1·13358	−479	1·16666	−435	1·19807	−389	1·22506	−343	1·24473	−296
4	1·11667	−474	1·15136	−431	1·18440	−387	1·21305	−342	1·23438	−297
5	1·09502	−467	1·13175	−426	1·16686	−385	1·19761	−342	1·22106	−298
6	1·06871	−458	1·10787	−420	1·14547	−381	1·17875	−341	1·20476	−299
7	1·03781	−448	1·07979	−413	1·12027	−377	1·15649	−339	1·18547	−300
8	1·00243	−436	1·04758	−405	1·09130	−372	1·13084	−337	1·16319	−300
9	0·96270	−422	1·01131	−395	1·05861	−366	1·10181	−335	1·13791	−301
10	·91874	−407	0·97109	−384	1·02226	−359	1·06944	−331	1·10961	−301
11	·87071	−390	·92703	−372	0·98231	−351	1·03376	−327	1·07830	−301
12	·81879	−370	·87924	−358	·93885	−342	0·99480	−323	1·04399	−300
13	·76316	−349	·82788	−342	·89196	−331	·95261	−317	1·00667	−298
14	·70404	−326	·77310	−325	·84177	−319	·90726	−309	0·96638	−296
15	·64166	−301	·71507	−305	·78839	−306	·85881	−301	·92313	−292
16	·57626	−274	·65398	−284	·73195	−290	·80736	−291	·87695	−287
17	·50813	−245	·59005	−261	·67261	−273	·75300	−279	·82792	−280
18	·43753	−214	·52351	−236	·61054	−253	·69585	−265	·77607	−272
19	·36479	−182	·45460	−209	·54595	−232	·63604	−250	·72151	−262
20	·29024	−147	·38360	−180	·47903	−209	·57374	−232	·66432	−250
21	·21421	−110	·31080	−149	·41002	−183	·50911	−213	·60462	−236
22	·13709	−72	·23651	−116	·33918	−155	·44236	−190	·54257	−220
23	·05925	−31	·16106	−80	·26679	−125	·37370	−166	·47831	−201
24	−·01891	10	·08481	−43	·19314	−93	·30339	−139	·41204	−180
25	−·09696	54	·00812	−4	·11855	−59	·23168	−109	·34398	−155
26	−·17448	98	−·06860	37	·04339	−22	·15889	−77	·27437	−128
27	−·25101	144	−·14496	79	−·03200	17	·08532	−43	·20347	−99
28	−·32611	190	−·22052	123	−·10722	58	·01132	−6	·13159	−66
29	−·39931	237	−·29486	168	−·18186	100	−·06273	34	·05904	−31
30	−·47015	284	−·36750	215	−·25550	145	−·13645	75	−·01381	8
31	−·53814	331	−·43801	261	−·32769	190	−·20941	119	−·08658	49
32	−·60283	377	−·50590	309	−·39797	237	−·28118	165	−·15887	92
33	−·66375	423	−·57070	356	−·46589	285	−·35131	212	−·23024	137
34	−·72043	468	−·63195	402	−·53095	333	−·41932	260	−·30023	185
35	−·77243	511	−·68918	448	−·59269	381	−·48473	309	−·36838	234
36	−·81933	552	−·74191	493	−·65061	429	−·54704	359	−·43418	285
37	−·86071	590	−·78972	536	−·70425	475	−·60577	408	−·49714	336
38	−·89619	625	−·83217	577	−·75313	521	−·66042	457	−·55673	388
39	−·92542	657	−·86884	615	−·79681	564	−·71049	505	−·61245	439
40	−·94808	685	−·89937	650	−·83485	605	−·75552	551	−·66378	490
41	−·96389	709	−·92340	681	−·86683	643	−·79502	595	−·71020	539
42	−·97261	727	−·94062	707	−·89239	677	−·82858	636	−·75124	586
43	−·97406	741	−·95077	729	−·91118	706	−·85577	673	−·78642	630
44	−·96810	748	−·95364	745	−·92291	731	−·87624	706	−·81530	670
45	−0·95465	750	−0·94905	756	−0·92733	750	−0·88964	734	−0·83748	706

Таблица XXIV — продолжение

$ce_5(x, \theta)$. $\theta=6$ до $\theta=10$

x	$\theta=6$, $a_5=25{\cdot}81727$	Δ^2	$\theta=7$, $a_5=26{\cdot}15612$	Δ^2	$\theta=8$, $a_5=26{\cdot}57775$	Δ^2	$\theta=9$, $a_5=27{\cdot}09187$	Δ^2	$\theta=10$, $a_5=27{\cdot}70377$	Δ^2
45°	−0·95465	750	−0·94905	756	−0·92733	750	−0·88964	734	−0·83748	706
46	−·93371	746	−·93691	760	−·92424	763	−·89571	756	−·85259	737
47	−·90530	735	−·91716	757	−·91353	770	−·89422	772	−·86033	762
48	−·86955	716	−·88985	748	−·89511	770	−·88501	780	−·86045	780
49	−·82664	692	−·85505	731	−·86899	762	−·86800	782	−·85277	791
50	−·77681	660	−·81294	707	−·83526	746	−·84317	775	−·83717	794
51	−·72039	621	−·76375	676	−·79406	723	−·81059	761	−·81364	789
52	−·65776	575	−·70781	636	−·74564	691	−·77040	737	−·78221	775
53	−·58937	522	−·64551	590	−·69030	651	−·72283	705	−·74303	751
54	−·51577	463	−·57731	535	−·62846	603	−·66822	664	−·69535	718
55	−·43753	398	−·50375	474	−·56059	547	−·60697	614	−·64248	675
56	−·35531	328	−·42546	406	−·48726	483	−·53957	555	−·58187	623
57	−·26981	252	−·34310	332	−·40909	412	−·46663	488	−·51502	561
58	−·18179	172	−·25741	253	−·32681	334	−·38879	414	−·44256	491
59	−·09206	88	−·16920	168	−·24119	250	−·30682	332	−·36519	412
60	−·00144	1	−·07930	80	−·15307	161	−·22154	243	−·28369	325
61	·08918	−88	·01140	−12	−·06334	67	−·13382	149	−·19895	232
62	·17894	−177	·10198	−106	·02707	−29	−·04461	50	−·11189	132
63	·26692	−267	·19150	−201	·11717	−129	·04509	−52	−·02351	28
64	·35222	−356	·27901	−295	·20600	−229	·13428	−156	·06516	−80
65	·43397	−443	·36357	−389	·29254	−328	·22191	−261	·15302	−189
66	·51129	−527	·44424	−480	·37579	−427	·30692	−366	·23900	−299
67	·58333	−606	·52011	−568	·45478	−522	·38828	−468	·32198	−408
68	·64932	−681	·59029	−651	·52855	−613	·46496	−567	·40089	−514
69	·70849	−749	·65396	−728	·59619	−698	·53597	−660	·47466	−615
70	·76018	−810	·71036	−797	·65686	−776	·60038	−747	·54228	−710
71	·80376	−863	·75879	−859	·70976	−846	·65732	−826	·60280	−797
72	·83872	−907	·79862	−911	·75419	−907	·70600	−895	·65535	−875
73	·86461	−941	·82935	−953	·78955	−957	·74573	−953	·69915	−942
74	·88108	−965	·85054	−984	·81534	−996	·77593	−1000	·73352	−997
75	·88791	−978	·86190	−1004	·83117	−1023	·79613	−1034	·75793	−1038
76	·88495	−981	·86321	−1012	·83678	−1036	·80598	−1054	·77195	−1065
77	·87218	−972	·85440	−1007	·83202	−1037	·80530	−1060	·77532	−1078
78	·84970	−951	·83552	−990	·81689	−1024	·79402	−1052	·76791	−1074
79	·81771	−919	·80674	−961	·79152	−997	·77221	−1029	·74977	−1055
80	·77652	−877	·76835	−919	·75617	−957	·74012	−991	·72107	−1020
81	·72657	−823	·72077	−866	·71125	−904	·69812	−939	·68217	−970
82	·66839	−760	·66454	−801	·65729	−839	·64673	−874	·63357	−905
83	·60261	−687	·60029	−726	·59494	−762	·58661	−795	·57593	−825
84	·52996	−606	·52879	−641	·52496	−674	·51853	−705	·51004	−733
85	·45126	−517	·45087	−548	·44824	−577	·44340	−605	·43681	−630
86	·36739	−421	·36747	−447	·36574	−472	·36223	−495	·35728	−516
87	·27930	−321	·27950	−341	·27853	−360	·27610	−378	·27259	−395
88	·18800	−216	·18832	−230	·18771	−243	·18620	−255	·18395	−267
89	·09455	−109	·09474	−116	·09447	−122	·09374	−129	·09265	−134
90	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0

Таблица XXV

$se_6(x, \theta)$. $\theta=1$ до $\theta=5$.

x	$\theta=1$, $b_6=36{\cdot}01429$	Δ^2	$\theta=2$, $b_6=36{\cdot}05721$	Δ^2	$\theta=3$, $b_6=36{\cdot}12887$	Δ^2	$\theta=4$, $b_6=36{\cdot}22941$	Δ^2	$\theta=5$, $b_6=36{\cdot}35887$	Δ^2
0°	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0
1	·10300	−107	·10138	−99	·09964	−91	·09780	−84	·09585	−77
2	·20493	−212	·20176	−197	·19838	−182	·19477	−167	·19092	−153
3	·30474	−316	·30017	−293	·29529	271	·29006	−250	·28446	−229
4	·40140	−416	·39566	−387	·38949	−358	·38285	−330	·37572	−303
5	·49390	−512	·48728	−476	·48011	−442	·47234	−408	·46395	−374
6	·58128	−603	·57413	−562	·56631	−522	·55776	−482	·54843	−444
7	·66263	−687	·65537	−642	·64730	−597	·63836	−553	·62848	−510
8	·73711	−765	·73019	−716	·72231	−668	·71342	−620	·70342	−573
9	·80395	−835	·79785	−783	·79065	−732	·78228	−682	·77264	−632
10	·86213	−896	·85767	−843	·85167	−790	·84433	−738	·83554	−686
11	·91196	−948	·90907	−895	·90479	−842	·89900	−788	·89159	−735
12	·95201	−991	·95151	−938	·94948	−886	·94578	−833	·94028	−779
13	0·98215	−1023	0·98458	−973	0·98532	−922	0·98424	−870	0·98118	−818
14	1·00206	−1045	1·00791	−998	1·01194	−950	1·01400	−900	1·01391	−850
15	1·01152	−1055	1·02126	−1013	1·02906	−969	1·03475	−923	1·03813	−875
16	1·01044	−1055	1·02448	−1019	1·03650	−979	1·04627	−938	1·05361	−894
17	0·99879	−1044	1·01752	−1014	1·03414	−981	1·04842	−945	1·06014	−906
18	·97671	−1022	1·00042	−999	1·02197	−973	1·04112	−943	1·05761	−910
19	·94440	−990	0·97332	−975	1·00008	−956	1·02439	−933	1·04599	−907
20	·90219	−947	·93648	−940	0·96862	−930	0·99833	−915	1·02529	−896
21	·85052	−894	·89023	−896	·92788	−894	·96313	−888	0·99564	−877
22	·78990	−831	·83502	−843	·87818	−850	·91904	−852	·95722	−850
23	·72097	−760	·77137	−781	·81999	−798	·86643	−809	·91031	−815
24	·64445	−680	·69992	−711	·75381	−737	·80574	−757	·85524	−772
25	·56113	−593	·62135	−633	·68027	−668	·73747	−698	·79246	−722
26	·47187	−500	·53645	−548	·60005	−592	·66222	−631	·72245	−664
27	·37762	−400	·44606	−458	·51391	−510	·58066	−557	·64580	−599
28	·27937	−297	·35110	−361	·42266	−422	·49354	−477	·56316	−527
29	·17814	−189	·25253	−261	·32720	−328	·40164	−391	·47525	−449
30	·07503	−80	·15135	−157	·22847	−230	·30583	−300	·38285	−365
31	−·02889	31	·04860	−50	·12742	−129	·20703	−205	·28680	−276
32	−·13249	142	−·05466	57	·02509	−25	·10618	−106	·18798	−183
33	−·23468	251	−·15734	165	−·07750	80	·00427	−4	·08733	−86
34	−·33436	359	−·25837	272	−·17929	185	−·09768	99	−·01417	14
35	−·43044	463	−·35669	377	−·27923	290	−·19864	203	−·11553	116
36	−·52190	562	−·45124	478	−·37628	393	−·29757	306	−·21573	219
37	−·60773	656	−·54101	576	−·46940	493	−·39344	408	−·31374	321
38	−·68701	743	−·62502	668	−·55759	589	−·48524	507	−·40855	422
39	−·75886	822	−·70235	753	−·63990	679	−·57197	602	−·49913	521
40	−·82248	893	−·77216	831	−·71541	764	−·65269	692	−·58450	616
41	−·87718	954	−·83365	901	−·78329	841	−·72648	777	−·66371	706
42	−·92233	1005	−·88614	961	−·84274	911	−·79250	854	−·73586	791
43	−·95744	1045	−·92901	1012	−·89310	971	−·84999	923	−·80010	868
44	−·98209	1074	−·96177	1051	−·93374	1021	−·89825	983	−·85565	938
45	−0·99599	1092	−0·98402	1080	−0·96418	1060	−0·93669	1033	−0·90183	998

Таблица XXV — продолжение

$se_6(x, \theta)$. $\theta=1$ до $\theta=5$

x	θ=1 $b_6=36{\cdot}01429$	Δ²	θ=2 $b_6=36{\cdot}05721$	Δ²	θ=3 $b_6=36{\cdot}12887$	Δ²	θ=4 $b_6=36{\cdot}22941$	Δ²	θ=5 $b_6=36{\cdot}35887$	Δ²
°										
45	−0·99599	1092	−0·98402	1080	−0·96418	1060	−0·93669	1033	−0·90183	998
46	−·99899	1097	−·99546	1097	−·98402	1088	−·96479	1072	−·93802	1048
47	−·99101	1090	−·99594	1101	−·99297	1104	−·98217	1100	−·96374	1087
48	−·97212	1072	−·98541	1094	−·99088	1108	−·98856	1115	−·97858	1114
49	−·94252	1041	−·96394	1074	−·97771	1100	−·98380	1118	−·98229	1128
50	−·90251	999	−·93173	1042	−·95353	1079	−·96785	1108	−·97471	1130
51	−·85252	945	−·88910	998	−·91857	1045	−·94083	1085	−·95584	1118
52	−·79307	881	−·83648	942	−·87317	999	−·90296	1049	−·92578	1092
53	−·72481	807	−·77444	876	−·81777	940	−·85460	999	−·88479	1053
54	−·64848	723	−·70365	799	−·75298	870	−·79624	938	−·83328	1000
55	−·56493	631	−·62486	712	−·67948	789	−·72851	864	−·77177	934
56	−·47507	531	−·53897	616	−·59809	698	−·65215	778	−·70091	855
57	−·37989	426	−·44691	512	−·50971	598	−·56799	682	−·62150	764
58	−·28046	315	−·34973	402	−·41535	490	−·47702	577	−·53444	662
59	−·17788	200	−·24852	287	−·31610	375	−·38027	463	−·44077	550
60	−·07329	83	−·14445	167	−·21309	254	−·27891	341	−·34158	430
61	·03212	−36	−·03870	45	−·10756	129	−·17412	214	−·23810	302
62	·13716	−155	·06750	−79	−·00073	1	−·06720	83	−·13160	168
63	·24066	−272	·17290	−202	·10610	−128	·04056	−51	−·02343	30
64	·34143	−387	·27629	−324	·21165	−257	·14781	−185	·08505	−110
65	·43833	−498	·37644	−443	·31463	−383	·25320	−319	·19242	−251
66	·53025	−603	·47216	−557	·41379	−506	·35541	−450	·29729	−390
67	·61615	−701	·56232	−665	·50789	−623	·45312	−576	·39826	−525
68	·69503	−792	·64583	−765	·59576	−733	·54507	−696	·49398	−655
69	·76600	874	·72168	−857	·67630	−835	·63005	−809	·58315	−777
70	·82821	−946	·78897	−939	·74848	−928	·70695	−911	·66456	−890
71	·88097	−1008	·84686	−1010	·81139	−1009	·77473	−1003	·73706	−992
72	·92365	−1058	·89465	−1070	·86421	−1078	·83249	−1082	·79964	−1082
73	·95575	−1096	·93174	−1116	·90626	−1134	·87943	−1147	·85141	−1157
74	·97689	−1121	·95766	−1150	·93696	−1175	·91490	−1197	·89160	−1216
75	·98682	−1134	·97209	−1169	·95592	−1202	·93840	−1232	·91964	−1260
76	·98541	−1133	·97483	−1174	·96285	−1214	·94957	−1251	·93507	−1286
77	·97268	−1119	·96582	−1165	·95765	−1210	·94823	−1253	·93765	−1294
78	·94875	−1093	·94516	−1142	·94035	−1191	·93437	−1238	·92729	−1284
79	·91390	−1053	·91308	−1105	·91114	−1156	·90813	−1206	·90410	−1255
80	·86852	−1002	·86995	−1054	·87037	−1106	·86982	−1158	·86836	−1209
81	·81311	−938	·81628	−990	·81854	−1042	·81994	−1094	·82052	−1145
82	·74833	−864	·75271	−914	·75630	−964	·75913	−1014	·76124	−1065
83	·67491	−780	·67999	−826	·68440	−874	·68817	−921	·69131	−969
84	·59369	−686	·59902	−729	·60378	−772	·60799	−815	·61169	−859
85	·50561	−584	·51075	−622	·51543	−659	·51967	−697	·52348	−736
86	·41169	−476	·41628	−507	·42050	−538	·42437	−570	·42791	−602
87	·31301	−362	·31673	−386	·32018	−410	·32338	−435	·32633	−460
88	·21071	−244	·21332	−260	·21576	−276	·21803	−293	·22014	−310
89	·10597	−123	·10731	−131	·10858	−139	·10975	−148	·11085	−156
90	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0

Таблица XXV — продолжение

$se_6(x, \theta)$. $\theta=6$ до $\theta=10$

x	θ=6 $b_6=36{\cdot}51707$	Δ²	θ=7 $b_6=36{\cdot}70350$	Δ²	θ=8 $b_6=36{\cdot}91721$	Δ²	θ=9 $b_6=37{\cdot}15669$	Δ²	θ=10 $b_6=37{\cdot}41986$	Δ²
°										
0	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0
1	·09376	−70	·09153	−63	·08916	−57	·08665	−51	·08400	−45
2	·18681	−140	·18243	−126	·17776	−113	·17280	−101	·16756	−89
3	·27847	−208	·27205	−189	·26522	−170	·25794	−151	·25022	−134
4	·36805	−276	·35981	−250	·35099	−225	·34156	−201	·33155	−178
5	·45486	−342	·44506	−311	·43450	−280	·42318	−250	·41110	−222
6	·53826	−406	·52720	−369	·51521	−334	·50228	−299	·48843	−266
7	·61759	−468	·60564	−426	·59259	−386	·57840	−347	·56310	−309
8	·69225	−527	·67983	−481	·66610	−437	·65105	−394	·63469	−352
9	·76164	−582	·74920	−534	·73525	−486	·71977	−439	·70276	−394
10	·82521	−634	·81323	−583	·79954	−533	·78409	−483	·76689	−435
11	·88244	−682	·87144	−629	·85850	−577	·84358	−526	·82666	−475
12	·93285	−726	·92335	−672	·91169	−619	·89781	−566	·88169	−514
13	0·97600	−765	0·96854	−711	·95869	−658	·94637	−605	·93158	−552
14	1·01150	−798	1·00661	−746	0·99911	−693	0·98890	−640	0·97594	−587
15	1·03902	−826	1·03722	−776	1·03259	−725	1·02502	−673	1·01444	−621
16	1·05828	−849	1·06008	−801	1·05883	−753	1·05440	−703	1·04673	−652
17	1·06905	−865	1·07492	−821	1·07754	−776	1·07676	−729	1·07249	−681
18	1·07117	−874	1·08154	−836	1·08849	−794	1·09183	−751	1·09145	−706
19	1·06456	−877	1·07981	−844	1·09149	−808	1·09939	−769	1·10335	−728
20	1·04917	−873	1·06964	−846	1·08642	−816	1·09926	−782	1·10798	−745
21	1·02505	−861	1·05101	−841	1·07319	−818	1·09130	−790	1·10515	−759
22	0·99233	−842	1·02397	−830	1·05178	−814	1·07545	−793	1·09473	−768
23	·95118	−816	0·98863	−812	1·02224	−803	1·05167	−789	1·07663	−771
24	·90187	−782	·94516	−786	0·98467	−786	1·02000	−780	1·05083	−769
25	·84475	−741	·89384	−754	·93925	−761	0·98053	−764	1·01733	−761
26	·78021	−692	·83497	−714	·88521	−730	·93343	−741	0·97622	−746
27	·70876	−636	·76897	−666	·82587	−692	·87892	−711	·92766	−725
28	·63096	−572	·69631	−612	·75851	−646	·81729	−674	·87185	−696
29	·54743	−502	·61752	−550	·68490	−593	·74893	−629	·80908	−660
30	·45888	−426	·53324	−482	·60526	−533	·67428	−578	·73970	−617
31	·36606	−344	·44413	−407	·52029	−465	·59384	−519	·66415	−566
32	·26981	−257	·35095	−326	·43067	−392	·50322	−453	·58294	−508
33	·17099	−164	·25451	−240	·33713	−312	·41808	−379	·49664	−442
34	·07053	−69	·15567	−149	·24047	−226	·32414	−300	·40593	−369
35	−·03062	30	·05534	−54	·14155	−135	·22720	−214	·31151	−290
36	−·13146	131	−·04552	45	·04128	−40	·12813	−123	·21420	−203
37	−·23099	234	−·14594	146	−·05939	59	·02782	−27	·11486	−111
38	−·32818	336	−·24489	249	−·15947	161	−·07276	73	·01440	−14
39	−·42201	437	−·34135	351	−·25794	264	−·17260	176	−·08619	88
40	−·51148	536	−·43431	453	−·35377	368	−·27069	281	−·18591	192
41	−·59557	632	−·52273	553	−·44593	471	−·36598	386	−·28371	299
42	−·67335	723	−·60562	650	−·53337	572	−·45739	491	−·37851	407
43	−·74391	808	−·68201	742	−·61509	670	−·54390	595	−·46924	515
44	−·80638	886	−·75098	828	−·69011	764	−·62446	694	−·55482	620
45	−0·85999	956	−0·81168	907	−0·75748	851	−0·69808	790	−0·63419	722

Таблица XXV — продолжение

$se_6(x, \theta)$ $\theta=6$ до $\theta=10$

x	$\theta=6$ $b_6=36{\cdot}51707$	Δ^2	$\theta=7$ $b_6=36{\cdot}70350$	Δ^2	$\theta=8$ $b_6=36{\cdot}91721$	Δ^2	$\theta=9$ $b_6=37{\cdot}15669$	Δ^2	$\theta=10$ $b_6=37{\cdot}41986$	Δ^2
°										
45	−0·85999	956	−0·81168	907	−0·75748	851	−0·69808	790	−0 63419	722
46	−·90405	1016	−·86331	977	−·81635	931	−·76380	878	−·70635	820
47	−·93794	1066	−·90516	1038	−·86590	1002	−·82073	960	−·77030	910
48	−·96117	1105	−·93664	1088	−·90543	1063	−·86807	1031	−·82516	992
49	−·97335	1131	−·95724	1126	−·93433	1113	−·90510	1093	−·87009	1065
50	−·97421	1144	−·96657	1151	−·95209	1150	−·93120	1142	−·90437	1125
51	−·96364	1144	−·96440	1163	−·95836	1174	−·94588	1177	−·92740	1173
52	−·94162	1130	−·95059	1160	−·95289	1183	−·94880	1198	−·93870	1207
53	−·90831	1101	−·92520	1142	−·93559	1177	−·93972	1204	−·93793	1225
54	−·86399	1057	−·88838	1109	−·90652	1155	− 91861	1194	−·92490	1 227
55	−·80910	1000	−·84047	1061	−·86591	1117	−·88555	1167	− 89961	1 211
56	−·74421	929	−·78195	998	−·81414	1063	−·84083	1123	−·86220	1178
57	−·67003	844	−·71346	920	−·75173	993	−·78487	1062	−·81301	1127
58	−·58741	747	−·63576	829	−·67939	908	−·71830	984	−·75255	1057
59	−·49733	638	−·54977	724	−·59797	808	−·64188	890	−·68152	970
60	−·40087	518	−·45655	607	−·50848	695	−·55656	781	−·60078	867
61	−·29922	390	−·35726	479	−·41203	569	−·46342	658	−·51138	747
62	−·19367	255	−·25317	343	−·30990	432	−·36371	522	−·41452	613
63	−·08558	113	−·14566	199	−·20344	286	−·25877	376	−·31152	466
64	·02364	−32	−·03615	50	−·09412	134	−·15007	220	−·20387	308
65	·13255	−179	·07385	−103	·01654	−24	−·03918	58	−·09314	142
66	·23967	−325	·18282	−256	·12696	−184	·07230	−108	·01901	−30
67	·34354	−469	·28923	−409	·23553	−344	·18269	−276	·13087	−205
68	·44273	−608	·39154	−557	·34066	−502	·29031	−443	·24068	−380
69	·53583	−741	·48829	−700	·44078	−655	·39351	−605	·34670	−552
70	·62152	−864	·57803	−834	·53434	−800	·49066	−761	·44720	−718
71	·69856	−977	·65944	−958	·61991	−934	·58020	−906	·54052	−875
72	·76583	−1077	·73126	−1069	·69614	−1056	·66067	−1040	·62510	−1019
73	·82234	−1163	·79240	−1165	·76180	−1163	·73075	−1158	·69948	−1149
74	·86721	−1232	·84189	−1244	·81584	−1253	·78926	−1259	·76237	−1261
75	·89977	−1284	·87894	−1306	·85734	−1324	·83517	−1340	·81265	−1353
76	·91948	−1318	·90293	−1348	·88560	−1375	·86769	−1400	·84940	−1423
77	·92601	−1333	·91344	−1370	·90011	−1405	·88620	−1438	·87191	−1469
78	·91922	−1328	·91026	−1371	·90057	−1412	·89033	−1452	·87974	−1490
79	·89915	−1303	·89337	−1350	·88692	−1396	·87995	−1441	·87266	−1485
80	·86604	−1259	·86298	−1309	·85930	−1358	·85515	−1407	·85072	−1455
81	·82034	−1196	·81950	−1247	·81810	−1297	·81629	−1348	·81424	−1398
82	·76268	−1115	·76355	−1165	·76392	−1215	·76395	−1265	·76378	−1316
83	·69388	−1017	·69594	−1065	·69760	−1113	·69896	−1161	·70017	−1210
84	·61490	−903	·61769	−947	·62014	−992	·62235	−1037	·62445	−1082
85	·52690	−775	·52997	−814	·53277	−854	·53538	−894	·53791	−934
86	·43115	−635	·43411	−668	·43686	−701	·43947	−735	·44202	−769
87	·32905	−485	·33158	−511	·33395	−537	·33621	−563	·33844	−590
88	·22210	−328	·22393	−345	·22566	−363	·22732	−381	·22896	−400
89	·11188	−165	·11284	−174	·11375	−183	·11462	−192	·11549	−202
90	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0	0·00000	0

Литературный указатель[1]

1. *Abraham M.*, Elektromagnetische Schwingungen in einem frei endigenden Draht, Ann. Physik, Bd 2 (1900), S. 32—61.

1a. *Aichi K.*, Proc. Tokyo, Math., and. Physic. Soc., (2) IV (1908), S. 266—278.

2. *Appell P.*, Traité de mécanique rationelle; tome 4: Figures d'équilibre d'une masse liquide homogène en rotation sous l'attraction Newtonienne de ses particules, Paris, Gauthier-Villars 1921.

3. *Armstrong E. H.*, Some recent developments of regenerative circuits, Proc. Inst. Radio Engr. New York, Bd. 10 (1922), S. 244—260.

4. *Backhaus H.*, Das Schallfeld der kreisförmigen Kolbenmembran, Ann. Physik, Bd. 5 (1930), S. 1—35.

5. *Barrow W. L.*, Untersuchungen über den Heulsummer, Ann. Physik, Bd. 11 (1931), S. 147—176.

6. *Bauer G.*, Von den Koeffizienten der Reihen von Kugelfunktionen einer Variablen, J. Math. (Grelle), Bd. 56 (1859), S. 101—121.

7. *Bloch F.*, Über die Quantenmechanik der Elektronen in Kristallgittern, Z. Physik, Bd. 52 (1929), S. 555—600.

8.—Bemerkung zur Elektronentheorie des Ferromagnetismus. Z. Physik, Bd. 57 (1929), S. 545—555.

9.—Zum elektrischen Widerstandsgesetz bei tiefen Temperaturen, Z. Physik, Bd. 59 (1930), S. 208—214.

10.—Zur Theorie des Ferromagnetismus, Z. Physik Bd. 61 (1930), S. 206—219.

10a. *Bouthillon L.*, Optique et radioélectricité, L'Onde électrique, Bd. 4 (1925), S. 287—296.

11. *Bremekamp H.*, Over de periodieke oplossingen der vergelijking van *Mathieu*, Nieuw Arch. Wiskde, Bd 15 (1925), S. 138—146.

12.—Over de voortplanting van een golfbeweging in een medium van periodieke structuur, Physika, Bd. 6 (1926), S. 136—144.

13—On the solution of *Mathieu's* equation. Nieuw. Arch. Wiskonde, Bd. 15 (1927), S. 292—301.

14. *Brillouin L.*, Les statistiques quantiques et leurs applications. Presses universitaires de France 1930, 2 Bände, namentlich Bd. 2, S. 258—266.—Deutsche Ausgabe, Die Quantenstatistik und ihre Anwendung auf die Elekronentheorie der Metalle, S. 259 ff., Berlin, Julius Springer 1931.

14a. *Bruns H.*, Astr. Nach. (1883, 1884) CVI, CVII.

15. *Burgess A. G.*, Determinants connected with the periodic solutions of *Mathieu's* equation, Proc. Edinburgh Math. Soc., Bd. 33. (1915), S. 122—138.

16. *Byerly W. E.*, An elementary treatise on Fourier's series and spherical, cylindrical und ellipsoidal harmonics, London, Ginn & C° 1893.

17. *Campbell G. A.*, Physical theory of the electric wave filter, Bell. Syst. Techn. J., Bd. 1 (Nov 1922), S. 1—32.

18 *Carson J. R.*, Notes on the theory of modulation, Proc. Inst. Radio Engr., New York, Bd. 10 (1922), S. 57—64.

19. *Cockroft J. D.*, Skin effect in rectangular conductors at high frequencies, Proc. Roy. Soc., A Bd. 122 (1922), S. 533—542.

[1] Ссылки в тексте, например, [*89*, 9 (52)] означает: 89 номер литературного указателя, 9 страницу, 52-ую формулу.

20. *Courant R.* u. *Hilbert D.*, Methoden der math. Physik I. 1. Aufl. 1924, 2. Aufl. 1931—Vgl. auch A. Hurwitz. Есть русское издание 1934 г. Цитировано по нему.
21. *Couwenhoven A.*, Über die Schüttelerscheinungen elektrischer Lokomotiven mit Kurbelantrieb. Forschungsarbeiten VDI. Heft 218, Berlin 1919.
22. *Curtis M T.*, The existence of the functions of the elliptic cylinder, Ann. of Math (2), Bd. 20 (1917), S. 23—34.
23. *Darwin G. H.*, Ellipsoidal harmonic analysis, Trans. Roy. Soc. London A, Bd. 197. (1901), S. 461—557.
24. *Dougall J.*, The solution of Mathieu's differential equation, representation by contour integrals and asymptotic expansions, Proc Edinburgh Math. Soc., Bd. 44 (1925—1926), S. 57—71.
—The solution of Mathieu's differential equation, Proc. Ed. Math. Soc., Bd. 34 (1915), S. 176—196.
—On the solutions of Mathieu's differential equation, and their asymptotic expansions, Proc. Ed. M. Soc., Bd. 41 (1922), S. 26—48.
25. *Dreyfus L.*, Eigenschwingungen von Systemen mit periodisch veränderlicher Elastizität, Arch. Elektrotechn. Bd. 12 (1923). S. 238
26. *Duffing G.*, Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung, Sammlung Vieweg 1918, Heft 41/42.
Emde F., vgl. *Jahnke-Emde.*
27. *Emersleben O.*, Freie Schwingungen in Kondensatorkreisen, Physik. Z., Bd. 22. (1921), S. 393—400.
28. *Floquet G.*, Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques, Ann. Ecole norm., Bd. 12. (1883), S. 47—88.
29. *Föppl A.*, Vorlesungen über technische Mechanik, Bd. 6, 4, Aufl. Leipzig, *B. G.* Teubner 1921.
30. *Forsyth A. R.*, Theory of differential equations, Vol. 4. Camb. univers. Press. 1902.
31. *Frenkel J.*, Lehrbuch der Elektrodynamik, Bd. 2., Berlin, Julius Springer 1928.
32. *Guerritore G.*, Calcolo delle funzioni di Lamé fino a quelle di grado 10. Giorn. mat. Napoli. Bd. 47 (1909), S. 164—172.
33. *Goldstein S.*, Mathieu functions, Trans. Camb. Phil. Soc., Bd. 23. (1927), S. 303—336.
34.—A note on certain approximate solutions of linear differential equations of the second order, with an application to the Mathieu equation. Proc. London. Math. Soc. (2), Bd. 28 (1928), S. 81—90.
35.—The free oscillations of water in a canal of elliptic plan. Proc. London Math. Soc. (2), Bd. 28 (1928), S. 91—101.
36.—The second solution of Mathieu's differential equation, Proc. Camb. Phil. Soc., Bd. 24. (1928), S. 223—230.
37.—On the asymptotic expansion of the characteristic numbers of the Mathieu equation, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Bd. 49 (1929), S. 210—223. Vgl. auch *H. P. Mulholland.*
38. *Hallèn E.*, Über die elektrischen Schwingungen in drahtförmigen Leitern, Uppsala Univ. Årsskr. 1930, Math. Naturw., S. 102.
39. Handbuch der Physik, Bd. 8, Akustik, Berlin, Julius Springer, 1927.
40. *Hamel G.*, Über lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten. Math Ann. Bd. 73 (1912), S. 371.
41. *Haupt O.*, Über lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten; Bemerkung zur Arbeit gleichen Titels von Herrn Hamel, Math. Ann., Bd. 79 (1919), S. 278—285.
42. *Heine E.*, Handbuch der Kugelfunktionen, 2 Bände. Berlin, Reimer 1878 u. 1881.
43. *Herzfeld K. F.*, Über die Beugung von elektromagnetischen Wellen an gestreckten, vollkommen leitenden Rotationsellipsoiden. S.-B. Akad. Wiss. Wien. Bd. 120 (1911), S. 1587—1615.
44. *Hilb E.*, Über Kleinsche Theoreme in der Theorie der linearen Differentialgleichungen, 1. Mitt, Math. Ann. Bd. 66 (1908), S. 215—257: 2. Mitt. ibid. Bd. 68 (1909), S. 24—74.
45.—Über Reihenentwicklungen nach den Eigenfunktionen linearer Differentialgleichungen 2 Ordnung, Math. Ann, Bd 71 (1909), S. 76—87.
Hilbert D. vgl, *R. Courant.*

46. *Hill G. W.*, On the part of the motion of the lunar perigee. Acta math., Bd. 8 (1886), S. 1.
47. *Hille, E.*; On the zeros of Mathieu functions, Proc. London Math. Soc., Bd. 23. (1924), S. 224.
48. *Hirsch P.*, Das Pendel mit oszillierendem Aufhängepunkt, Z. angew. Math. Mech., Bd. 10 (1930), S. 41—52.
49. *Humbert P.*, Fonctions de Lamé et fonctions de Mathieu. Fascicule X du Mémorial des sciences mathématiques, Paris, Gauthier-Villars 1926.
49a.—Matieu function of higher order Proc. Ed. M. Soc. Bd. 40 (1921) S. 27—33.
50. *Hurwitz A.* u. *Courant R.*, Funktionentheorie, 2. Aufl. Berlin, Julius Springer 1925.
51. *Ince E. L.*, The elliptic cylinder functions of the second kind. Proc. Edinburgh Math. Soc., Bd. 33. (1914—1915), S. 2—13.
52.—On a general solution of Hill's equation, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. Bd. 75 (1915), S. 436—448.
53.—A proof of the impossibility of the coexistence of two Mathieu functions, Proc. Camb. Phil. Soc. Bd. 21 (1922), S. 117.
54.—A linear differential equation of the second order, Proc. London Math. soc., Bd. 23 (1923), S. 56.
55.—Researches into the characteristic numbers of the Mathieu equation, first paper, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Bd. 46 (1925), S. 20—29.
56.—Researches into the characteristic numbers of the Mathieu equation, second paper. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Bd. 46 (1926). S. 316—322.
57.—Researches into the characteristics numbers of the Mathieu equation, third paper. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Bd. 47 (1927) S. 294—301.
58.—The Mathieu equation with numerically large parameters. J. London Math. Soc., Bd. 2 (1927) S. 46—50
59.—Mathieu functions of stable type, Philos. Mag. (7) Bd. 6 (1928), S. 547—558.
60. *Ittmann G. P.*, De rotatie van onsymetrische moleculen. Physica, Bd. 9. (1929), S. 305—314.
61.—Zur Theorie der Störungen in Bandenspektren Z. Physik, Bd. 71 (1931), S. 616—626, Vgl. auch. *H. A. Kramers.*
62. *Jacobi C. G. J.*, Über eine partikuläre Lösung der partiellen Differentialgleichung, J. Math. (Crelle), Bd. 36 (1847); Werke II, S. 198
63.—Vorlesungen über Dynamik, Wintersem. 1842/43 Königsberg, Werke Suppl.-Band. Vorl. 26.
64. *Jahnke E.* u. *Emde F.*, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven, Leipzig, B. G. Teubner 1923.
65. *Jeans J. H.*, Astronomy & Cosmogony, Camb. univ. press. 1928.
66. *Jeffreys H.*, On certain approximate solutions of linear differential equations of the second order. Proc. London Math. Soc., Bd. 23 (1923), S. 428—436.
67. *Jeffreys H.*, On certain approximate solutions of Mathieu's equations, Proc. London Math. Soc., Bd 23 (1924), S. 437—448.
68.—On the modified Mathieu equation, Proc. London Math. Soc., Bd. 23 (1924) S. 448—454.
69.—The free oscillations of water in an elliptic lake, Proc. London Math. Soc., Bd. 23 (1924), S. 455—476.
70. *Klein F.*, Über Lamésche Funktionen, Math Ann. Bd. 18 (1881), S. 237—246.
71.—Bemerkungen zur Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Math. Ann. Bd. 64 (1907), S. 175—196.
72. *Koenig W.*—Hydrodynamisch-akustische Untersuchungen, Wied. Ann., Bd. 43 (1891), S. 51.
73. *Kramers H. A.* u. *G. P. Ittmann*, Zur Quantelung des asymmetrischen Kreisels, I. Z. Physik Bd. 53 (1929), S, 553—565.
74. Zur Quantelung des asymmetrischen Kreisels, II. Z. Physik, Bd. 58. (1929), S. 217—231.
75.—Zur Quantelung des asymmetrischen Kreisels, III. Z. Physik, Bd. 60. (1930), S. 663—681.
76. *Kronig R.* de *L*, The quantum theory of dispersion in metallic conductors, Proc. Roy. Soc. London A., Bd. 133 (1931), S. 255—265.
77. *Kronig R.* de *L.* u. *Penney W. G.*, Quantum mechanics in crystal lattices, Proc. Roy. Soc. London A., Bd. 130 (1931), S. 499—513.

78. *Lamb H.*, Lehrbuch der Hydrodynamik, Leipzig, B. G. Teubner 1907.
79.—The dynamical theory of sound, London, Edward Arnold 1925.
80. *Lamé G.*, Sur les lois de l'équilibre du fluide éthéré. J. Ecole poly echn, Bd. 14 (1834).
81.—Mémoire sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température, J. Math. (Liouville), Bd. 2 (1837), S. 147—183.
82.—Leçons sur les coordonnées curvilignes, Paris 1859.
83. *Lic tenstein L.*, Grundlagen der Hydromechanik S. 507, Berlin, Julius Springer 1929.
84.—Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integrodifferentialgleichungen, Berlin, Julius Springer 1931, S. 164.
85 *Liénard A. M.*, Oscillations auto-entretenues, Proc. third. internat. congress applied mech, Bd. 3. (1930), S. 173—177.
86. *Lindemann F.*, Über die Differentialgleichung der Funktionen des elliptischen Zylinders. Math Ann., Bd. 22 (1883), S. 117.
86-a. *Liouville J.*, Second mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en série dont les divers termes sont assujetis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre, contenant un paramètre variable, J. Math. (Liouville), Bd. 2 (1837), S. 16—35.
86-b. *Lindstedt. D.*, Astr. Nachr. (1882), (1883) C III, CIV, CV.
87. *Lommel E.*, Die Beugungserscheinungen einer kreisrunden Öffnung und eines kreisrunden Schirmchens theoretisch und experimentell bearbeitet, Abh. bayer. Akad. Wiss. Math. Phys. Klasse, Bd. 15 (1886), S. 229—329.
88. *Lorentz H. A.*, Problems of modern physics, New York, Ginn & C^0, 1927.
89. *Maclaurin R.*, On the solutions of the equation $(V^2+K^2)\ \psi=0$ in elliptic coordinates and their physical applications. Trans. Camb. Phil. Soc., Bd. 17 (1898), S. 41—108.
90. *Malmborg M.*, Om integrationem af en klass af lineäre differentialekvationer med dubbelperiodiska koefficienter, analog med de s. k. Hermite'ska differentialekvationerna, Uppsala Univ. Årsskr. Mat. Natur. (1897), S. 1—33.
91. *Mandelstam L.* u. *N. Papalexi*, Über Resonanzerscheinungen bei Frequenzteilung, Z. Physik Bd. 73 (1931), S. 223—248.
92. *Markovic Z.*, Sur la non-existence simultanée de deux fonctions de Mathieu, Proc. Camb. Phil. Soc., Bd. 23. (1926), S. 203.
93. *Marshall W.*, The asymptotic representation of the elliptic cylinder functions. Amer. J. Math. Bd. 31 (1909).
94.—Determination of the arbitrary constants which appear in the asymptotic expansions for the functions of the elliptic cylinder, Proc. Edinburgh Math. Soc., Bd. 40 (1921—1922), S. 2—8.
95. *Mathieu E.*, Mémoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique, J. Math. (Liouville) (2), Bd. 13 (1868), S. 137—203.
96.—Cours de physique mathématique, Paris, Gauthier-Villars 1873.
97. *Meissner E.*, Über Schüttelschwingungen in Systemen mit periodisch veränderlicher Elästizität. Schweizer Bauzeitung Bd. 72 (1918), S. 95—99.
98. *Möglich F.* Beugungserscheinungen an Körpern von ellipsoidischer Gestalt. Ann. Physik, Bd. 83 (1927), S. 609—734.
99. *Morse P. E.*, Quantummechanics of electrons in crystals, Physic. Rev, Bd. 35 (1930), S. 1310—1324. Vgl. auch *E. C. G. Stueckelberg*.
100. *Mulholland H. P.* u. *Goldstein, S.* The characteristic numbers of the Mathieu equation with purely imaginary parameter, Philos. Mag., Bd. 8. 1929), S—834—840.
101. *Müller K. E.*, Über die Schüttelschwingungen des Kuppelstangenantriebes, Dissert. Zürich 1919.
102. *Nielsen N.*, Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen, Leipzig, B. G. Teubner 1904.
103. *Niven C.*, On the conduction of heat in ellipsoids of revolution, Philos. Trans. Roy. Soc. London Bd. 171 (1881), S. 117—151.
104. *Niven W. D.*, On ellipsoidal harmonics, Philos. Trans. Roy, Soc., London A, Bd. 182 (1892), S. 231—278.
105. *Noether F.*, Anwendung der Hillschen Differentialgleichung auf die Wellenfortpflanzung in elektrischen oder akustischen Kettenleitern. Verh. 3. internat.

Kongress techn. Mech. Stockholm Bd. 3 (1931), S. 143—149.
Papalexi, N., vgl. *L. Mandelstam.*
Penney W. G., vgl. *R. de L. Kronig.*
106. *Pockels F.*, Über die partielle Differentialgleichung $\Delta u+K^2u=0$ und deren Auftreten in der mathematischen Physik. Leipzig, Teubner 1891.
107. *Poincaré H.*, Sur les groupes d'équations linéaires, Acta math., Bd. 4. (1884), S. 201—312.
108.—Sur les déterminants d'ordre infini, Bull. Soc. Math. France, Bd. 14 (1886), S. 77—90.
109.—Figures d'équilibre d'une masse fluide, Paris, Naud 1902.
110.—Méthodes nouvelles de la mécanique céleste, 3. Bände, Paris, Gauthier-Villars.
111. Leçons de mécanique céleste, 3 Bände, Paris, Gauthier-Villars 1907 bis 1910.
112. *Poole E. C. G.*, On certain classe of Mathieu functions, Proc., London Math. Soc. Bd. 20 (1921), S. 374—388.
113. *Rayleigh Lord (J. W. Strutt)*, On the maintenance of vibrations of double frequency and on the propagation of waves through a medium endowed with a periodic structure, Sci. Pap. Bd. 3 (1887), S. 1—14.
114.—On the passage of waves through apertures in plane screens and allied problems, Sci. Pap, Bd. 4 (1897) S. 283—296.
115.—Theory of sound, 2. Bände, London, Mac Millan 1926.
116. *Riemann · Weber*, Differentialgleichungen der Physik. Herausgeg. von Ph. Frank u. R. v. Mises 2. Bände, I Aufl. Braunschweig, Vieweg 1925, II Aufl. 1930—1934.
117. *Särchinger E.*, Beitrag zur Theorie der Funktionen des elliptischen Zylinders, 28 S, Dissert, Leipzig 1894.
118. *Schrödinger E.*, Abhandlungen zur Wellenmechanik, I. Aufl. Leipzig, Barth 1927.
119. *Schubert J.*, Über die Integration der Differentialgleichung $\Delta u+K^2u=0$ für Flächenstücke, die von konfokalen Ellipsen und Hyperbeln begrenzt werden, 52 S. Dissert, Königsberg 1886.
120. *Schwerin E.*, Über Schüttelschwingungen, gekoppelter Systeme, Z. techn. Physik Bd. 10 (1929), S. 37—46.
121. *Sieger B.*, Die Beugung einer ebenen elektrischen Welle an einem Schirm von elliptischem Querschnitt, Ann. Physik. Bd. 27 (1908), S. 626—664.
122. *Stephenson A.*, On a new type of dynamical stability, Mem. and Proc. Manchester Literary & Phil. Soc., Bd. 52 (1908), Nr. 8.
123. *Stieltjes T. J.*, Quelques remarques sur l'intégration d'une équation différentielle, Astron. Nachr. Bd. 109 (1884), S. 145—152, 261—266.
124.—Sur certains polynomes qui vérifient une équation différentielle linéaire du second ordre et sur la théorie des fonctions de Lamé, Acta math., Bd. 6 (1885), S. 321—326.
125. *Strutt M. J. O.*, Stabiliseering en labiliseering door trillingen, Physica, Bd. 7 (1927), S. 265—271.
126.—Wirbelströme im elliptischen Zilinder., Ann. Physik, Bd. 84 (1927), S. 485—506
127.—Der Verlauf der Grenzkurven zwischen labilen und stabilen Lösungsgebieten der Mathieuschen Differentialgleichung, Math. Ann. Bd. 99 (1928), S. 625—628.
127a.—Eigenschwingungen einer Saite mit sinusförmiger Massenverteilung, Ann. Physik, Bd. 85 (1928), S. 129—136.
128.—Skineffekt in zylindrischen Leitern, Ann. Physik., Bd. 85 (1928), S. 781 bis 793.
129.—Magnetische Feldverdrängung und Eigenzeitkonstanten. Ann. Physik, Bd. 85. (1928), S. 866—880.
130.—Zur Wellenmechanik des Atomgitters, Ann. Physik, Bd. 86 (1928), S. 319 bis 324.
131.—The effect of a finite baffle on the emission of sound by a double source. Philos. Mag. Bd. 7 (1929), S. 537—548.
132.—Der charakteristische Exponent der Hillschen Differentialgleichung. Math. Ann., Bd. 101 (1929), S. 559—569.

133.—Hydrodynamische Behandlung hochfrequenter elektromagnetischer Aufgaben. Arch. Elektrotechn, Bd. 21 (1929), S. 526–528.
134.—Skineffekt, Ann. Physik, Bd. 8, (1931), S. 777–793.
135.—Beugung einer ebenen Welle an einem Spalt von endlicher Breite, Z. Physik, Bd. 69. (93), S. 597—617.
136.—Erweiterung der Kettenleitertheorie, Arch. Elektrotechn. (1932), im Erscheinen.
137. *Stueckelberg E. C. G.* u *Morse P. M.*, Die Spezifische Wärme von quasifreien Elektronen, Z. Physik, Bd. 69 (1931), S. 666—677.
138. *Sudhansukumar Banerji*, On a class of ellipsoidal harmonics and a method of solving the wave equation in ellipsoidal coordinates, Bull. Calcutta Math Soc., Bd. 10 (1918—1919), S. 95—104.
139.—On the wave equation in ellipsoidal coordinates, Bull Calcutta Math. Soc., Bd 10 (1918—1919), S. 179—186.
140. *Thomson W.* (*Lord Kelvin*), On the stability of periodic motion, Nature (Aug. 1892), S. 384.
141. *Thomson W.* (*Lord Kelvin*), On instability of periodic motion, Proc. Roy. Soc. A. Bd. 50 (1892), S. 194—200.
142. *Thomson J. J.*, Recent researches in electricity and magnetism, Clarendon Press Oxford, 1893.
143. *Todhunter J.*, An elementary treatise on Laplace's functions, Lamé's functions and Bessel's functions, London 1875.
144. *Varma R. S.*, On Mathieu functions, J. Indian Math. Soc. Bd. 19 (1931), S. 49—53.
144a. Verzeichnis berechneter Funktionstafeln; Erster Teil; Besselsche, Kugel- und elliptische Funktionen. Herausgegeben vom Institut für angew. Math. an der Universität Berlin. VDI-Verlag 1928.
144b. *Volk O.*, Über die Entwicklung von Funktionen zweier komplexer Veränderlicher nach Laméschen Funktionen, Math. ZS, Bd. 23 (1925), S. 224–237.
145. *Wagner K. W*, Spulen-und Kondensatorleitungen, Arch. Elektrotechn. Bd. 8. (1919). S. 61—92, E. N. T. Bd. 5 (1928), S. 1.
146. *Watson G. N.*, The convergence of the series in Mathieu's functions, Proc. Edinburgh Math. Soc., Bd. 33. (1914), S. 25—30.
147.—Theory of Bessel functions, Camb. Un. Press. 1922, Vgl. auch *E. T. Whittaker*.
148. *Weber H.*, Über die Integration der partiellen Differentialgleichung $\Delta u+K^2u=0$, Math. Ann. Bd. 1 (1869), S. 1—36.
149. *Whittaker E. T.*, On the general solution of Mathieu's equation, Proc. Edinburgh Math. Soc., Bd. 32 (1914), S. 75—80.
150.—On the recurrence formulae of the Mathieu functions, J. London Math. Soc. Bd. 4 (1929), S. 88—96.
151. *Whittaker E. T.* u *Watson G. N.*, A course of modern analysis, Camb. Un. Press. 4. Aufl. 1927.
151a. *Wrinch D. M.*, On spheroidal harmonics as hypergeometric functions, Philos. Mag. (7), Bd. 6 (1928), S. 1117—1122.
152. *Young A. W.*, On the quasi-periodic solutions of Mathieu's differential equation. Proc. Edinburgh Math. Soc. Bd. 33 (1914), S. 81—90.
153. *Андронов-Витт*, Журнал Р. Физико-Химич. О-ва, 59 том.
154. *Вебстер-Сеге*, Дифференциальное уравнение в частных производных математической физики 1934, том I и II.
155. *Купрадзе*, Известия Академии Наук, IV, V 1934 г.
156. *Лойцянский-Лурье*, Теоретическая механика, том III.
157. *Мандельштам-Папалекси*, Журнал технической физики, 1934.
158. *Смирнов*, Курс высшей математики, том III.
159. *Тимошенко*, Теория колебаний в инженерном деле.
160. *Беляев*, Инженерные сооружения и строительная механика, статья, на стр. 149.
161. *Френкель*, Теория переменных токов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ДНТВУ. Сдано в набор 8 V-1935 г. Подписано к печати 19/X-1935 г. Формат бумаги $^1/_{16}$ 62×44 см. Вес метр. стопы 35 кг. На печатном листе 45.000 знаков.

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
8	3 св.	порядка	рода
11	14 св.	уравнения	формул
20	2 св.	значениях	значениях λ
53	10 св.	Отсюда следует	Отсюда следует, при
54	3 сн.	при всех ξ	при всех конечных ξ
59	13 сн.	$\nu^2 \wp = + \ldots$	$\nu^2 = \wp + \ldots$
60	12 св.	$\widehat{p}(u) = \ldots$	$\wp(u) = \ldots$
99	Формула 1	$\overline{\ldots Q^1_{2n+1}}$	$\overline{\ldots Q^1}_{2n+1}$
106	Формула 2	$\ldots + {}_0\lambda) = 0$	$\ldots + \lambda_0) = 0$
111	9 сн.	$\ldots Ae_{-ai\,x}$	$\ldots Ae^{-ai_0x}$
116	11 сн.	равна нулю	равна бесконечности
127	Формула 23	$\ldots(e^{it}\ldots$	$\ldots(e^{2it}$
129	11 св.	$\nabla\cdot(0)$	$\nabla(0)$
132	3 сн.	$\ldots \pm_0 \ldots$	$\ldots \pm k_0 \ldots$
143	1 сн.	$\ldots I_6(kc\cdot \mathrm{ch}\,\xi)\ldots$	$\ldots J_0(kc\cdot \mathrm{ch}\,\xi)\ldots$
146	Формула 57	$M = \int\limits_0^{\xi_0}\ldots$	$M = -\int\limits_0^{\xi_0}\ldots$
148	6 св.	электрического	эллиптического
151	Формула 85	$\frac{dI_2(x)}{dx}\ldots$	$\frac{dJ_2(x)}{dx}\ldots$
152 153	Формула 91,94 Формула 95	$L_i = \ldots$	$L_{i_0} = \ldots$
153	2 сн.	$\ldots - I_3\ldots$	$\ldots - J_3\ldots$
167	3 сн.	$\ldots + \frac{\omega_2}{\omega_0^2}\Big)$	$\ldots + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\Big)$
167 167	8 сн. 8 св.	$\ldots + \frac{\omega^2}{\omega_2^0}\Big)$	$\ldots + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\Big)$
170	Графа b_3, 5 св.	9 26 4461	9·2614461
170	Графа a_3, 4 св.	9·9 55063	9·9155063
170	Графа a_4, 5 св.	16·6498 89	16·6498189
170	Графа a_4, 8 св.	18·466087	18·4166087
170	Графа a_5, 8 св.	26·561202	26·1561202
188	5 графа, 29 сн.	5	—5
188	6 графа, 29 сн.	—5	5
190	6 графа, 15 св.	·6 866	·61866