

# **Rohrhydraulik**

Von

**Dr.-Ing.H, Richter**

# R o h r h y d r a u l i k

Allgemeine Grundlagen, Forschung, Praktische  
Berechnung und Ausführung  
von Rohrleitungen

von

**Dr.-Ing. Hugo Richter, VDI.**

Berlin-Mariendorf  
Privatdozent an der Bergakademie Freiberg

Mit 192 Textabbildungen  
und 44 Zahlentafeln



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH 1934

ISBN 978-3-662-40582-6      ISBN 978-3-662-41060-8 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-662-41060-8

**Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung  
in fremde Sprachen, vorbehalten.**

Copyright 1934 by Springer-Verlag Berlin Heidelberg  
Ursprünglich erschienen bei Julius Springer in Berlin 1934  
Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1934

## Vorwort.

Nachdem in den letzten Jahren so überaus eifrig und erfolgreich an der Erforschung der Strömungsvorgänge in Flüssigkeiten gearbeitet wurde, ist es notwendig, interessante und technisch bedeutungsvolle Erfahrungen auch dem praktischen Ingenieur zu vermitteln. Ich habe in diesem Buche alle erreichbaren und für die praktische Hydraulik bemerkenswerten theoretischen und praktischen Arbeiten über das technisch wichtige Gebiet der Rohrströmung, die in deutschen und fremdsprachigen Zeitschriften und Büchern verstreut zu finden sind, zu einem Gesamtüberblick verarbeitet.

Nach einem kurzen Abriß über die physikalischen Grundlagen der Flüssigkeitsströmung, in dem ich bemüht war, die heute gemessenen Zähigkeitswerte von technischen Flüssigkeiten und Flüssigkeitsgemischen möglichst vollständig wiederzugeben und das allgemeine Ähnlichkeitsgesetz für Strömungsvorgänge leichtverständlich zu entwickeln, habe ich in einem zweiten Abschnitt die Ansätze der Hydraulik und die wichtigsten Forschungsergebnisse der Strömung von tropfbaren und gasförmigen Flüssigkeiten in geschlossenen Rohrleitungen dargestellt. Zur Lösung hydrodynamischer Aufgaben gibt die exakte theoretische Hydromechanik zweierlei Ansätze: die Gleichungen von Bernoulli und Euler für reibungsfrei gedachte und die Gleichungen von Navier und Stokes für natürliche reibungsbehaftete Flüssigkeiten. Zur Berechnung der meisten technischen Flüssigkeitsströmungen versagen diese Ansätze. Die Aufgabe dieses zweiten Abschnitts ist daher, die Näherungsverfahren der praktischen Hydraulik darzulegen, mit welchen man die technisch vorkommenden Strömungsfälle in Rohrleitungen mit ausreichender Genauigkeit beherrschen kann. Ganz allgemein versteht man unter Hydraulik die praktische Lehre von den Vorgängen in bewegten Flüssigkeiten. Sie umfaßt die Strömung in offenen Gerinnen und geschlossenen Rohrleitungen und Kanälen, die Grundwasserbewegung und die Strömung um feste Körper. Die Rohrströmung ist also nur ein Teilgebiet der Hydraulik.

Der dritte Teil des Buches bringt eine Reihe der vom heutigen Standpunkt aus empfehlenswerten Formeln zur praktischen Berechnung der besonderen Strömungsfälle und praktische Rechen-

beispiele. Da es außerordentlich viele Formeln gibt und diese untereinander häufig stark abweichen, war die Auswahl zuverlässiger nicht leicht. Von brauchbar und als gleichwertig befundenen Formeln wurden nur eine oder wenige zur Rechnung empfohlen, um dem Leser die Auswahl zu ersparen. Verschiedentlich wurde zur Klarheit die frühere Bezeichnung „Schmiedeisen“ an Stelle der genormten „Stahl“, wie man heute alle ohne Nachbehandlung schmiedbaren Eisensorten nennt, beibehalten.

Das technische Maßsystem (Meter, Kilogramm, Sekunden) wurde überall streng durchgeführt und eine einmal gebrauchte Bezeichnung ständig beibehalten.

Meine Ausführungen sind für alle diejenigen gedacht, die dieses Fachgebiet studieren wollen oder beruflich hydraulische Rechnungen an Rohrleitungen ausführen müssen. Ich hoffe, daß mein Buch ein brauchbares Bindeglied zwischen Theorie und Praxis wird. Möge es eine gute Aufnahme finden!

Berlin, November 1933.

**Hugo Richter.**

# Inhaltsverzeichnis.

	Seite
<b>Bedeutung häufig gebrauchter Bezeichnungen . . . . .</b>	<b>VIII</b>
<b>I. Mechanische und wärmetechnische Grundlagen . . . . .</b>	<b>1</b>
1. Stoffeigenschaften . . . . .	1
a) Begriff der Flüssigkeit . . . . .	1
b) Spezifisches Gewicht . . . . .	2
c) Innere und äußere Reibung, Zähigkeit . . . . .	3
d) Zahlentafeln für das spezifische Gewicht und die Zähigkeit von Flüssigkeiten . . . . .	6
Allgemeines S. 6. — Tropfbare Flüssigkeiten S. 9. — Gas- und dampfförmige Flüssigkeiten S. 16. — Gasmische S. 22.	
2. Kontinuitätsgesetz . . . . .	27
3. Energieformen . . . . .	29
I. Potentielle Energie . . . . .	29
a) Gewichtsenegie oder Energie der Lage S. 29. — b) Druck- oder Spannungsenergie S. 29.	
II. Innere Energie . . . . .	29
a) Wärme- oder innere Energie S. 29. — b) Wärmehalt S. 29.	
III. Kinetische Energie . . . . .	30
4. Energiesätze für reibungslose Flüssigkeiten . . . . .	30
a) Begriff der reibungslosen Flüssigkeit . . . . .	30
b) Energiegleichungen . . . . .	30
c) Druck/Volumen-Diagramme . . . . .	32
Tropfbare Flüssigkeiten S. 32. — Gasförmige Flüssigkeiten S. 33.	
d) Arbeitsaufwand bei kleinen Druckänderungen . . . . .	35
e) Statischer und dynamischer Druck . . . . .	36
5. Allgemeine Energiesätze für natürliche Flüssigkeiten . . . . .	40
a) Energiegleichungen S. 40. — b) Leitungsgefälle S. 42.	
6. Mechanische Ähnlichkeit von Strömungsvorgängen . . . . .	43
a) Begriff der mechanischen Ähnlichkeit . . . . .	43
b) Ableitung des Ähnlichkeitsgesetzes aus den Kräftebedingungen. . . . .	45
c) Ableitung des Ähnlichkeitsgesetzes aus der Navier-Stokesschen Gleichung . . . . .	47
d) Beziehungen für die Reynoldssche Zahl . . . . .	48
e) Sonderfälle . . . . .	48
<b>II. Theoretische Überlegungen und Versuchserfahrungen . . . . .</b>	<b>50</b>
Einleitung . . . . .	50
<b>A. Strömung in geraden Röhren mit unveränderlichem Querschnitt . . . . .</b>	<b>51</b>
1. Beziehungen für den Druckabfall in geraden Röhren . . . . .	51
a) Allgemeine Bemerkungen zur Geschwindigkeits- und Druckverteilung im Leitungsquerschnitt . . . . .	51

	Seite
b) Energieverteilung im Querschnitt . . . . .	52
c) Allgemeine Druckabfallgleichung . . . . .	55
d) Druckverlust und Ähnlichkeitsgesetz . . . . .	58
e) Druckabfallgleichung für tropfbare Flüssigkeiten . . . . .	60
f) Druckabfallgleichung für gasförmige Flüssigkeiten . . . . .	61
$\alpha$ ) Fortleitung ohne Wärmeaustausch, adiabatische Strömung S. 62. — $\beta$ ) Fortleitung bei unveränderlicher Temperatur und vernachlässigbarer Änderung der Lagenenergie S. 65. — $\gamma$ ) Ver- einfachung der Formeln für isothermische Strömung S. 66. — $\delta$ ) Fortleitung bei unveränderlicher Temperatur mit Rücksicht auf die Höhenänderung S. 68.	
2. Laminarströmung im geraden Kreisrohr . . . . .	69
a) Vollkommen ausgebildete Strömung . . . . .	69
b) Vorgänge bei der Ausbildung der laminaren Strömung . . . . .	78
3. Übergangsbereich zwischen laminarer und turbulenter Strömung . . . . .	84
4. Turbulente Strömung im glatten geraden Kreisrohr . . . . .	91
a) Vollkommen ausgebildete Strömung . . . . .	91
$\alpha$ ) Strömungswiderstand bei turbulenter Bewegung im geraden glatten Kreisrohr S. 92. — $\beta$ ) Messung des Geschwindigkeitspro- fils S. 97. — $\gamma$ ) Versuch einer näherungsweise rechnerischen Erfassung der Geschwindigkeitsverteilung S. 99. — $\delta$ ) Rech- nerische Form des Widerstandsgesetzes für glattes Rohr S. 106.	
b) Vorgänge bei der Ausbildung der turbulenten Strömung . . . . .	110
5. Turbulente Strömung im rauhen geraden Kreisrohr . . . . .	113
a) Allgemeingültige Erfahrungen und Gesetze . . . . .	113
b) Geschwindigkeitsverteilung im Rohrquerschnitt . . . . .	122
6. Strömung in geraden Rohren mit anderem als Kreisquerschnitt . . . . .	123
a) Turbulente Strömung . . . . .	123
b) Laminarströmung in Rohren mit Kreisringquerschnitt . . . . .	127
c) Laminarströmung in Rohren mit Rechteckquerschnitt . . . . .	130
B. Strömung in geraden Rohren mit veränderlichem Quer- schnitt . . . . .	133
1. Leitungen mit stetig veränderlichem Querschnitt . . . . .	133
a) Laminarströmung . . . . .	133
b) Übergangsbereich zwischen laminarer und turbulenter Strömung . . . . .	136
c) Turbulente Strömung . . . . .	136
2. Leitungen mit unstetig veränderlichem Querschnitt . . . . .	141
C. Strömung in anderen als geraden Rohren . . . . .	143
1. Richtungsänderungen . . . . .	143
a) Strömung in gekrümmten Rohren . . . . .	143
$\alpha$ ) Einwirkung der Krümmung auf die Strömungsform, Druck- und Geschwindigkeitsverteilung in gekrümmten Rohren S. 143. $\beta$ ) Druckabfall in gekrümmten Rohren S. 148. — 1. Turbulente Strömung in Krümmern S. 148. — 2. Turbulente Strömung in Rohrschlangen S. 154. — 3. Strömung bei kleinen Reynoldsschen Zahlen S. 156.	
b) Strömung in Knierohren . . . . .	159
2. Abzweige . . . . .	161
Strömung in T-Stücken . . . . .	161

	Seite
<b>III. Praktische Berechnung und Ausführung von Rohrleitungen . . .</b>	<b>163</b>
A. Allgemeine Richtlinien und Gesichtspunkte . . . . .	163
1. Formeln für gerades Rohr . . . . .	163
Allgemeines S. 163. — Stahlrohre S. 165. — Glatte Rohre S. 176.	
— Holzrohre S. 176. — Betonrohre S. 176. — Eternitrohre S. 176.	
— Schläuche S. 177. — Überschlagsformeln S. 178.	
2. Widerstandszahlen von Krümmern und anderen Leitungsteilen . .	181
Krümmer S. 182. — Kniee S. 184. — T-Stücke S. 186. — Ven-	
tile S. 187. — Äquivalente Rohrlängen S. 189. — Eckenrechte	
Leitung S. 190.	
3. Widerstand von Leitungen mit vielen Abzweigungen . . . . .	191
4. Förderung von pulsierenden Stoffströmen (nichtstationäre Strömung)	191
5. Wirkungsgrad einer Rohrleitung . . . . .	192
6. Größtmögliche Energieentnahme aus einer Leitung . . . . .	193
7. Ablagerungen an Rohrleitungen im Betrieb . . . . .	195
8. Über die Genauigkeit der Formeln . . . . .	199
9. Richtlinien für die Anlage von Leitungen . . . . .	201
10. Nennweiten handelsüblicher Rohre nach DIN 2402 . . . . .	203
B. Leitung tropfbarer Flüssigkeiten, besondere Strömungs-	
fälle . . . . .	204
1. Wasserleitungen . . . . .	204
a) Leitungen für Trink- und Nutzwasserversorgung . . . . .	204
Aufgabe 1 bis 8 . . . . .	205
b) Leitungen für Wasserkraftwerke . . . . .	210
Aufgabe 9 bis 11 . . . . .	212
c) Freispiegelleitungen . . . . .	214
2. Soleleitungen . . . . .	216
Aufgabe 12 . . . . .	216
3. Ölleitungen . . . . .	217
a) Entwurf von Fernölleitungen . . . . .	217
b) Ermittlung des Druckverlustes in Ölleitungen . . . . .	220
Aufgabe 13 bis 14 . . . . .	221
C. Leitung gasförmiger Flüssigkeiten, besondere Strömungs-	
fälle . . . . .	222
1. Luftleitungen . . . . .	222
Aufgabe 15 bis 20 . . . . .	224
2. Gasleitungen . . . . .	227
a) Allgemeine Bemerkungen . . . . .	227
b) Nachprüfung von Biels Formel für Stahlrohr . . . . .	228
c) Zum Entwurf von Gasfernleitungen . . . . .	229
Aufgabe 21 . . . . .	231
d) Leuchtgas-Niederdruckleitungen . . . . .	234
Aufgabe 22 bis 26 . . . . .	235
3. Dampfleitungen . . . . .	237
Aufgabe 27 bis 30 . . . . .	244
4. Gerades glattes Rohr als Mengenmeßgerät . . . . .	245
Zur weiteren Vertiefung empfehlenswerte Bücher . . . . .	249
Namenverzeichnis . . . . .	250
Sachverzeichnis . . . . .	252



## Bedeutung häufig gebrachter Bezeichnungen.

Im allgemeinen werden nur die Benennungen m, kg, s und kcal gebraucht. Mit Rücksicht auf die technische Praxis müssen aber gelegentlich auch die Einheiten mm, cm, dm, km, l, g, t, at und h verwendet werden.

$l$	Länge in m,	$\gamma$	spezifisches Gewicht in $\text{kg/m}^3$ ,
$L$	Länge in km,	$\gamma'$	spezifisches Gewicht in $\text{g/cm}^3$
$l$	Mischungsweg in m,		oder $\text{kg/dm}^3$ oder $\text{kg/l}$ oder $\text{t/m}^3$ ,
$x, y$	Abstand in m,	$s$	relatives Gewicht bezogen auf
$H, h$	örtliche Höhe in m,		Luft = 1,
$h$	Druckhöhe in m,	$v$	spezifisches Volumen in $\text{m}^3/\text{kg}$ ,
$U$	Umfang in m,	$z$	Zeit in s,
$d$	Durchmesser in m,	$w_{\text{Zeitger}}$	Einzelgeschwindigkeit in m/s,
$r$	Rohrhalbmesser in m,	$w$	mittlere Strömungsgeschwindigkeit
$D$	Rohrdurchmesser in mm,		in m/s,
$\rho$	Krümmungshalbmesser in m,	$\bar{w}$	Schubspannungsgeschwindigkeit
$b$	Breite in m,		in m/s,
$s$	Spaltbreite in m,	$g$	Erdbeschleunigung in $\text{m/s}^2$ ,
$\delta$	Dicke der laminaren Grenz-	$N$	Leistung in PS = 75 mkg/s,
	schicht in m,	$M$	Masse in $\text{kg s}^2/\text{m}$ ,
$\Delta$	Ablagerungsdicke in m,	$\mu$	(dynamische) Zähigkeit in
$E$	Exzentrizität in m,		$\text{kg s/m}^2$ ,
$e$	mittlere Höhe der Rauigkeits-	$\eta = \mu g$	Zähigkeit in $\text{kg/ms}$ ,
	erhebungen einer Wand in m,	$\nu$	kinematische Zähigkeit in $\text{m}^2/\text{s}$ ,
$e' = \text{konst} \cdot e$	Hilfsgröße in m,	$\varepsilon$	Austauschgröße in $\text{m}^2/\text{s}$ ,
$f$	Entfernung der Rauigkeits-	$E$	Zähigkeit in Englergrad,
	erhebungen voneinander bei	$t$	Temperatur in $^{\circ}\text{C}$ ,
	gleichförmiger Rauigkeit in m,	$T = 273 + t$	absolute Temperatur in
$\varepsilon = \frac{e}{r}$	relative Rauigkeit (unbenannt),		Grad,
$F$	Fläche in $\text{m}^2$ ,	$R$	Gaskonstante in $\text{m/Grad}$ ,
$F/U$	hydraulischer Halbmesser in m,	$Q'$	Wärmemenge in $\text{kcal/kg}$ ,
$O$	Oberfläche in $\text{m}^2$ ,	$u$	innere Energie in $\text{kcal/kg}$ ,
$V$	Rauminhalt in $\text{m}^3$ ,	$i$	Wärmeinhalt in $\text{kcal/kg}$ ,
$Q$	Durchflußmenge in $\text{m}^3$ ,	$r$	Verdampfungswärme in $\text{kcal/kg}$ ,
$K$	Kraft in kg,	$\kappa = \frac{c_p}{c_v}$	Adiabatexponent,
$G$	Gewicht in kg,	$A = \frac{1}{427}$	$\text{kcal/mkg}$ mechanisches
$W$	Widerstand in kg,		Wärmeäquivalent,
$L$	Arbeit in $\text{mkg/kg}$ ,	$k$	Wärmedurchgangszahl in
$E$	Energiegehalt in $\text{mkg/kg}$ ,		$\text{kcal/m}^2\text{h Grad}$ ,
$P$	Druck in $\text{kg/m}^2$ oder mm WS,	$\varphi$	Winkel in Grad- oder Bogenmaß,
$P_0$	atmosphärischer Druck in $\text{kg/m}^2$ ,	$\delta$	Ablenkungswinkel in Grad,
$p$	Druck in $\text{kg/cm}^2$ oder at,	$\alpha$	Neigungswinkel in Grad,
$\tau$	Schubspannung in $\text{kg/m}^2$ ,		

$\alpha$	Erweiterungswinkel in Grad,	$e$	Ende (bei $P, p$ ),
$\eta$	Wirkungsgrad,	$gem$	Gemisch (bei $\eta, v$ ),
$\xi$	Energiebeiwert,	$ges$	gesamt (bei $P, \gamma, \lambda, \zeta$ ),
$\chi$	relative Verlustleistung,	$G$	Gas (bei $\gamma, \eta$ ),
$\varphi$	Beiwert des Gesetzes der Laminarströmung,	$G$	Gußeisen (bei $\lambda, C$ ),
$J$	Leitungsgefälle,	$h$	stündlich (bei $Q, G$ ),
$\lambda$	Widerstandszahl,	$i$	innen (bei $Q, P, r$ ),
$\zeta = \lambda \frac{l}{d}$	Widerstandszahl bei Geschwindigkeitshöhe allein,	$is$	isothermisch (bei $L, N$ ),
$\beta$	Widerstandszahl = $51\lambda$ ,	$k$	Krümmen (bei $l, \lambda$ ),
$Re$	Reynoldssche Zahl = $\frac{wd}{\nu}$ ,	$krit$	kritisch (bei $w, Re$ ),
$\eta$	unbenannter Randabstand,	$l$	in $l$ -Richtung (bei $w$ ),
$\varphi$	unbenannte Geschwindigkeit,	$L$	Luft (bei $\gamma, t, \eta, R$ ),
$\mu$	Kontraktionskoeffizient,	$m$	Mittel (bei $P, p, \gamma, t, T, r, v, d$ ),
$C, K$	Konstante,	max	maximal (bei $w, w_i, x, N, Re$ ),
$A, B \dots$	Hilfsgrößen,	min	minimal (bei $w$ ),
$a, b \dots$	Hilfsgrößen,	$n$	normal ( $15^\circ, 760 \text{ mm QS}$ ) (bei $P, p, \gamma, w, Q, t, T, v$ ),
$\alpha, \beta \dots$	Hilfsgrößen,	$O$	Oberfläche (bei $\tau$ ),
$b, c, m, n, q, x, y, z$	Exponenten,	$P$	Pumpe (bei $H, \eta, N$ ),
Zahl	Zusammenziehung von unbenannten Größen,	$pol$	polytropisch (bei $L, N$ ),
$f_{zeiger}$	Verhältniszahlen.	$Qu$	Querströmung (bei $\zeta$ ),
Zeiger		$R$	Reibung (bei $K, L, \lambda, P$ ),
$a$	außerhalb, Außenseite (bei $Q, P, r$ ),	$s$	sekundlich (bei $Q, G$ ),
$a$	Anlaufänge (bei $C, l, \delta$ ),	$s$	für das relative Gewicht (bei $C$ ),
$a$	Abzweig (bei $d, Q, w, \zeta$ ),	$s$	Schallgeschwindigkeit (bei $w$ ),
$a$	Anfang (bei $P, p$ ),	$s$	in der Saugleitung (bei $w$ ),
$ad$	adiabatisch (bei $L, N$ ),	$St$	Stahl (bei $\lambda$ ),
$Abl$	Ablösung (bei $\zeta$ ),	$t$	bei $t$ Grad (bei $\eta, v$ ),
$B$	Beschleunigung (bei $\lambda, P$ ),	$t$	für die Temperatur (bei $C$ ),
$d$	Durchgang (bei $Q, w, \zeta$ ),	$T$	Trägheit (bei $K$ ),
$d$	in der Druckleitung (bei $w$ ),	$U$	Undichtigkeit (bei $C$ ),
$d$	Dampf (bei $C$ ),	$u$	Umlenkung (bei $P, \zeta, \lambda$ ),
$dyn$	dynamisch (bei $P$ ),	$\ddot{u}$	überhitzt (bei $C$ ),
$\delta$	Grenzschicht (bei $w_i$ ),	$x$	in der Entfernung $x$ (bei $l, Q$ ),
$e$	eckenrecht (bei $l$ ),	$x, y$	in $x, y$ -Richtung (bei $w, \tau, l, K_R, K_T$ ),
		$z$	zusammen (bei $Q, d, w, \zeta$ ),
		$0$	Null Grad (bei $\eta, v$ ),
		1, 2,	3... an Stelle 1, 2, 3... (bei $l, d, H, F, K, G, Q, E, N, w, P, p, \gamma, v, t, T, Q', \mu, \eta, v, i, u, \lambda, \zeta, Re$ ),

$m_1, m_2, m_3 \dots$  Maßstabsbezeichnung,

QS in mm Quecksilbersäule,

WS in mm Wassersäule.

# I. Mechanische und wärmetechnische Grundlagen.

## 1. Stoffeigenschaften.

### a) Begriff der Flüssigkeit.

Flüssigkeiten nennt man ganz allgemein Körper von nicht festem Zustand. Die Lehre von der strömenden Bewegung der Flüssigkeiten ist ein Teilgebiet der Flüssigkeitsmechanik. Man kann die ganze Gruppe der flüssigen Körper in tropfbare und gasförmige unterteilen. Diese beiden Zustandsarten unterscheiden sich vornehmlich im Grad der Zusammendrückbarkeit und in der Dichte. Während gasförmige Körper, z. B. Luft, leicht auf einen kleineren Raum gebracht werden können, ist bei tropfbaren Flüssigkeiten, z. B. Wasser, selbst unter Anwendung sehr hoher Drücke nur eine geringfügige Raumverminderung zu erreichen. In technischen Rechnungen ist es fast immer statthaft, die Zusammendrückbarkeit der tropfbaren Flüssigkeiten zu vernachlässigen. Daher pflegt man rundweg gasförmige Körper als zusammendrückbare und tropfbare Körper als raumbeständige zu bezeichnen. Die Bewegung gasförmiger Flüssigkeiten richtet sich nach ähnlichen Gesetzen wie die der tropfbaren, solange die Fördergeschwindigkeit unter der Schallgeschwindigkeit bleibt.

Die verschiedenen Arten der tropfbaren Flüssigkeiten kann man weiter in zähflüssige und dünnflüssige ordnen, je nachdem ob sie ihrer Gestaltänderung einen großen oder kleinen Widerstand entgegensetzen. Auch Gase können mehr oder weniger zähflüssig sein. Unter der Wirkung eines bestimmten Druckes verformen sich die Körper mit verschiedener Geschwindigkeit.

Man denke sich z. B. ein Becherglas, Abb. 1, das zum Teil mit Wasser gefüllt ist. In dieses Gefäß möge unter Wirkung ihres Eigengewichts  $G$  (kg) eine Steinkugel mit Durchmesser  $d$  (m), also unter einem Drucke  $P = \frac{4G}{\pi d^2}$  (kg/m<sup>2</sup>) gesenkt werden. Die Kugel muß beim Absinken die Gestalt der Wassermasse dauernd ändern und wird eine gewisse Zeit brauchen, um auf den Boden des Gefäßes zu gelangen. Man wiederholt nun den Versuch z. B. mit Rizinusöl von annähernd demselben Gewicht je Raumeinheit wie Wasser (damit der Auftrieb ungeändert bleibt). Die Kugel braucht jetzt bedeutend mehr Zeit zum Absinken, weil das

zähe Rizinusöl seiner Gestaltänderung einen viel größeren Widerstand bietet und damit eine geringere Formänderungsgeschwindigkeit zuläßt als das dünnflüssige Wasser. Solche Körper, bei denen diese Formänderungsgeschwindigkeit sehr klein ist, wie z. B. Pech, sollen aus den Betrachtungen ausscheiden.

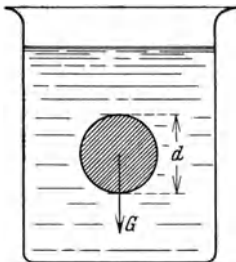


Abb. 1. Beispiel zur Erklärung der Formänderungsgeschwindigkeit. Eine Kugel fällt durch eine tropfbare Flüssigkeit.

Für die Flüssigkeiten, deren Strömungsgesetze untersucht werden sollen, müssen noch besondere Verabredungen getroffen werden: Sie sollen sich, wenn nicht anders bemerkt, während des Bewegungszustandes in reiner Phase befinden. Tropfbare Flüssigkeiten dürfen also nur Gase in gelöstem Zustand enthalten. Dampfausscheidung soll nicht vorkommen, ebenso darf bei Dämpfen im allgemeinen keine Kondensation während der Fortleitung eintreten. Die Flüssigkeiten sollen keine festen Körper mit sich führen. Die strömende Flüssigkeit soll im allgemeinen alle Leitungsquerschnitte voll ausfüllen.

### b) Spezifisches Gewicht.

Unter dem spezifischen Gewicht  $\gamma$  eines Körpers versteht man das Gewicht der Raumeinheit des Körpers

$$\gamma = \frac{G}{V} \text{ in kg/m}^3.$$

Dabei bedeutet  $G$  das Gewicht in kg des Raumes  $V$  in  $\text{m}^3$ . Das spezifische Gewicht  $\gamma$  ist abhängig vom Zustand des Stoffes, d. h. von Temperatur und Druck.

Bei tropfbaren Flüssigkeiten ist das spezifische Gewicht nur von der Temperatur abhängig, wenn man sie als raumbeständig ansehen kann.

Bei gasförmigen Stoffen wird die Beziehung zwischen Raum, Druck und Temperatur durch die allgemeine Gasgleichung

$$P V = G R T \quad (1)$$

geregelt. Dabei ist  $P$  der Druck in  $\text{kg/m}^2$ ,  $T$  die absolute Temperatur in Grad ( $T = 273 + t$  mit  $t$  in  $^\circ\text{C}$ ).  $R$  in  $\text{m/Grad}$  ist eine Größe, die die Art der Flüssigkeit kennzeichnet.

Bei Stoffen, die sich wie vollkommene Gase verhalten, d. h. für die die Gesetze von Gay-Lussac und Boyle/Mariotte streng gelten, ist  $R$  eine Konstante (Gaskonstante). Zeigen die Stoffe ein abweichendes Verhalten, wie z. B. Dämpfe bei schwacher Überhitzung, so ist  $R$  von  $P$  und  $T$  abhängig. Die wirklichen Gase, wie Luft, Kohlenoxyd u. a. weichen in ihrem Verhalten nur sehr wenig von dem der vollkommenen Gase ab, so daß man bei den folgenden Überlegungen alle technisch wichtigen Gase wie vollkommene Gase behandeln kann. Dasselbe gilt für Dämpfe, wenn sie genügend hoch überhitzt sind, d. h. wenn sie sich in einem Zustand befinden, der möglichst weit vom Sättigungsgebiet entfernt ist. Tatsächlich sind ja auch die natürlichen Gase, wie Luft u. a. nichts weiter als

hochüberhitzte Dämpfe. (Unter Überhitzung versteht man Wärmezufuhr bei unveränderlichem Druck außerhalb des Sättigungsgebietes.)

Mit  $\gamma = \frac{G}{V}$  heißt die Gasgleichung

$$P = \gamma R T = \gamma R(273 + t)$$

und mit  $p$  als Druck in at oder kg/cm<sup>2</sup>

$$\gamma = \frac{P}{R T} = 10\,000 \frac{p}{R(273 + t)}. \quad (2)$$

Die drei Größen  $\gamma$ ,  $P$  und  $t$  bestimmen den Zustand des Gases. Durch zwei dieser Größen ist auch die dritte festgelegt. Um das spezifische Gewicht eines Gases bestimmen zu können, muß man also die Gaskonstante  $R$  des betreffenden Gases, ferner Druck und Temperatur kennen.

Mit Vorteil setzt man das spezifische Gewicht eines Gases  $\gamma$  ins Verhältnis zum spezifischen Gewicht der Luft  $\gamma_L$  von gleicher Temperatur und gleichem Druck

$$s = \frac{\gamma}{\gamma_L} = \frac{R_L}{R} = \frac{29,27}{R}. \quad (3)$$

Man spricht dann von der Dichte des Gases bezogen auf Luft gleich 1. Unter der Dichte eines Stoffes versteht man die Masse der Raumeinheit, d. i. Gewicht der Raumeinheit durch Erdbeschleunigung  $g$

$$\frac{\gamma}{g} \text{ in kg s}^2/\text{m}^4.$$

Das Verhältnis der spezifischen Gewichte  $\gamma/\gamma_L$  oder Dichteverhältnis hat ebenso wie die Gaskonstante für jedes (vollkommene) Gas einen festen Wert. Wenn man daher das spezifische Gewicht der Luft  $\gamma_L$  bei irgendeinem Zustand kennt, so ist das spezifische Gewicht eines anderen Gases  $\gamma$  bei demselben Zustand einfach  $s\gamma_L$ . Im Abschnitt I d folgen Zahlentafeln für die wichtigsten technischen Flüssigkeiten.

### e) Innere und äußere Reibung, Zähigkeit.

Bei der Bestimmung des Begriffes der Flüssigkeit wurden dünnflüssige und zähflüssige Körper unterschieden. Diese Eigenschaft der Flüssigkeiten muß näher untersucht werden.

Zu diesem Zwecke denkt man sich eine Flüssigkeitsmenge zwischen zwei sehr große ebene Platten eingeschlossen, die sich parallel und relativ zueinander mit einer Geschwindigkeit  $w_1$  verschieben; siehe Abb. 2, untere Platte ruhend, obere mit Geschwindigkeit  $w_1$  bewegt.

Die Erfahrung zeigt nun, daß die Flüssigkeit an den Plattenwänden haftet, also daß die äußersten Flüssigkeitsschichten die Geschwindigkeiten der Platten annehmen. Zerlegt man die ganze Flüssigkeitsmenge in einzelne Schichten parallel zu den Platten, so findet man, daß die

Schichtgeschwindigkeit mit wachsendem Abstand von der ruhenden Platte linear bis zur Geschwindigkeit der bewegten Platte zunimmt. Daraus kann man schließen, daß die einzelnen Schichten aufeinander gleich große Schubkräfte ausüben, und daß diese Schubkräfte durch Reibung der Schichten aneinander entstehen. Die Reibungswirkungen in der Flüssigkeit selbst bezeichnet man als innere Reibung<sup>1</sup>. Unter äußerer Reibung versteht man sinngemäß die Reibung der strömenden Flüssigkeit an der Leitungswand. Da die Flüssigkeit an der Wand haftet, ist bei vollkommen glatter Wand keine äußere Reibung vorhanden. Ragen jedoch Unebenheiten der Rohrwand (Rauheits-

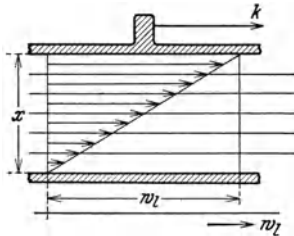


Abb. 2. Zwei ebene glatte Platten bewegen sich parallel zueinander. Geschwindigkeitsverteilung in der eingeschlossenen Flüssigkeitsschicht.

erhebungen) durch die haftende Flüssigkeitsschicht, dann kann auch die äußere Reibung eine gewisse Rolle spielen; mit ihr wollen wir uns aber erst später befassen. Es gehört eine gewisse Kraft dazu, die eine Platte über der anderen wegzuziehen, sie ist um so größer, je zäher die Flüssigkeit ist (z. B. Wasser oder dickes Öl). Auch gasförmige Stoffe besitzen eine wenn auch geringe Schubfestigkeit. Auf Grund dieser Erscheinung gelangt man zu einem Maß für die Zähigkeit. Wie die Erfahrung lehrt, ist die Gesamtschubkraft  $K$  proportional dem Geschwindigkeitsgefälle  $w_1/x$  und der Oberfläche der Platten  $F$ , wobei  $x$  den Abstand und  $w_1$  die Relativgeschwindigkeit der Platten bedeutet. Dieses Gesetz wurde zuerst von Newton erkannt<sup>2</sup>.

$$K = F \cdot \tau = \mu F \frac{w_1}{x}. \quad (4)$$

Das Geschwindigkeitsgefälle  $dw_1/dx$  ist für alle Schichten gleich groß. Ist bei irgendeinem anderen Strömungsfall  $dw_1/dx$  nicht unveränderlich, so ist auch die Schubkraft zwischen den einzelnen Schichten verschieden groß und die veränderliche Schubspannung

$$\tau = \mu \frac{dw_1}{dx}. \quad (5)$$

Die Wirkung der Schubkräfte kann man deutlich spüren, wenn man eine Blechtafel parallel zur Tafelebene in einer zähen Flüssigkeit mit verschiedener Geschwindigkeit bewegt. Die zur Bewegung erforderliche Kraft ist um so größer,

<sup>1</sup> Die Begriffe innere Reibung, Dickflüssigkeit, Dünnflüssigkeit, Zähigkeit, Viskosität und Klebrigkeit bedeuten dasselbe.

<sup>2</sup> Newton, J.: Philosophiae naturalis principia mathematica. 2. Buch 1723. Deutsch: J. Ph. Wolfers. Berlin 1872.

je zäher die Flüssigkeit, je größer die Geschwindigkeit und je größer die Oberfläche des Bleches ist.

Mißt man  $K$  in kg,  $F$  in  $m^2$ ,  $w_l$  in m/s und  $x$  in m, so hat der Proportionalitätsfaktor  $\mu$  die Dimension  $kg/m^2$ .  $\mu$  stellt das gesuchte Zähigkeitsmaß dar; es wird dynamische Zähigkeit oder kurz Zähigkeit der betreffenden Flüssigkeit genannt. Die Zähigkeit  $\mu$  gibt diejenige Kraft an, die zwei Flüssigkeitsschichten im Abstand 1 m und von der Fläche 1  $m^2$  aufeinander ausüben, wenn sie sich relativ zueinander mit einer Geschwindigkeit von 1 m/s bewegen. Die Zähigkeit  $\mu$  ist in starkem Maße von der Temperatur der Flüssigkeit abhängig, eine uns bei Ölen ganz geläufige Erscheinung. Außerdem hat auch der Druck einen geringen Einfluß auf die Größe der Zähigkeit, der aber in den meisten praktischen Fällen vernachlässigt werden kann.

Wenn man die Flüssigkeitsreibung mit der Reibung zwischen festen Körpern vergleicht, so kommt man zu folgender Gegenüberstellung: Zwischen

festen Körpern (gleitende Reibung)	ist die Reibung	flüssigen Körpern
proportional der Anpressung, unabhängig von der Größe der Berührungsfäche, unabhängig von der Geschwindigkeit.		nahezu unabhängig von der Anpressung, proportional der Größe der Berührungsfäche, abhängig von der Geschwindigkeit.

In beiden Fällen richtet sich die Größe der Reibung nach der Natur der reibenden Körper<sup>1</sup>.

Später wird weniger mit der Zähigkeit  $\mu$ , sondern viel mehr mit dem Verhältnis der Zähigkeit zur Dichte gerechnet werden. Diese bezogene Größe pflegt man kinematische Zähigkeit zu nennen

$$v = \frac{\mu g}{\gamma} \text{ in } m^2/s. \tag{6}$$

Gemäß der Veränderlichkeit von  $\gamma$  ist die kinematische Zähigkeit von tropfbaren Flüssigkeiten fast nicht, von gasförmigen Körpern dagegen stark vom Drucke abhängig. Eine Bewegung in einer Flüssigkeit klingt um so eher ab, je größer die innere Reibung und kleiner die Dichte ist, woraus folgt, daß eine Bewegung in Gasen schneller als in tropfbaren Flüssigkeiten abgebremst wird (obwohl der Reibungskoeffizient  $\mu$  von tropfbaren Flüssigkeiten größer als von Gasen ist). Bei Bewegungsvorgängen in Flüssigkeiten spielt die Trägheit und damit immer die kinematische Zähigkeit eine Rolle.

<sup>1</sup> Während bei festen Körpern zu Beginn einer Bewegung ein besonders großer Widerstand auftritt, gibt es bei flüssigen Körpern keine „Reibung der Ruhe“; jede noch so kleine Kraft kann eine Bewegung einleiten. So kann man z. B. in ein senkrecht stehendes U-Rohr noch so langsam und noch so wenig Flüssigkeit gießen, die Spiegel der Flüssigkeit in beiden Schenkeln werden immer auf gleicher Höhe stehen. (Bei verschiedenen engen Schenkeln stören gegebenenfalls Adhäsionserscheinungen das Bild.)

### d) Zahlentafeln für das spezifische Gewicht und die Zähigkeit von Flüssigkeiten.

Im folgenden wurden Zahlentafeln, deren Herkunft nicht aus besonderen Angaben hervorgeht, nach dem Handbuch von Landolt und Börnstein<sup>1</sup> aufgestellt. Alle Einzelwerte wurden im technischen Maßsystem angegeben<sup>2</sup>. Die besonders bei Gasen häufig erheblich streuenden Versuchspunkte wurden durch Kurven ausgeglichen und die nicht mit diesen Versuchspunkten zusammenfallenden Temperaturen oder Drücke durch Kurven interpoliert. Die Zahlenwerte für das spezifische Gewicht und die Zähigkeit gelten, wenn nicht anders bemerkt, für einen Druck von 760 mm QS. Bei raumbeständigen Flüssigkeiten kann die Zähigkeit sofort für alle Drücke durch die kinematische Zähigkeit, die dabei nur unter dem Einfluß der Flüssigkeitstemperatur steht, angegeben werden. Dagegen enthalten die Zahlentafeln für zusammendrückbare Flüssigkeiten, also Gase und Dämpfe, deren kinematische Zähigkeit außer von der Temperatur linear vom Druck abhängt, die Größen  $\mu g = \eta$  in kg/ms. Für technische Rechnungen kann die Abhängigkeit der Zähigkeit  $\eta$  vom Drucke meist vernachlässigt werden. Dann ist  $\eta$  nur noch von der Temperatur der Flüssigkeit abhängig. Die kinematische Zähigkeit zu den Zahlentafelwerten  $\eta$  findet man, indem man  $\eta$  durch das spezifische Gewicht  $\gamma$  teilt.

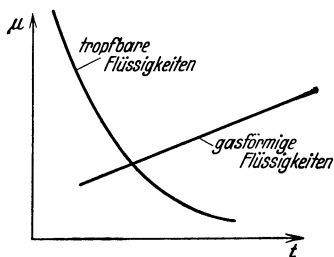


Abb. 3. Grundsätzlicher Zusammenhang zwischen Zähigkeit und Temperatur von Flüssigkeiten.

Zur Übersichtlichkeit wurden alle Zahlentafelwerte von  $\nu$  und  $\eta$  mit  $10^6$  vervielfacht. Die Benennungen der Werte sind:

$\gamma$  (kg/m<sup>3</sup>);  $\eta$  (kg/ms);  $\nu$  (m<sup>2</sup>/s) und  $R$  (m/Grad).

Die Zähigkeit der gasförmigen und der tropfbaren Flüssigkeiten hängt grundsätzlich in verschiedenem Sinne von der Temperatur ab. Während bei tropfbaren Flüssigkeiten die Zähigkeit ( $\mu$ ,  $\eta$  und  $\nu$ ) mit wachsender Temperatur stark abnimmt (siehe z. B. Öle), werden Gase und Dämpfe bei Erwärmung zäher (siehe Abb. 3, 5, 11, 12).

<sup>1</sup> Landolt-Börnstein: Physikalisch-Chemische Tabellen. Berlin 1923, 1927, 1931.

<sup>2</sup> Die Physiker pflegen mit  $\mu$  diejenige (Schub-)Kraft in Dyn zu bezeichnen, die nötig ist, um zwei (parallele) Platten, zwischen welchen sich irgendeine Flüssigkeit befindet, von 1 cm<sup>2</sup> Oberfläche und 1 cm Abstand relativ zueinander mit einer Geschwindigkeit von 1 cm/s zu bewegen. Diese Einheit wird mit dem international bereits ziemlich gebräuchlichen Namen „Poise“ (abgekürzt Po) zur Erinnerung an Poiseuille (s. u.) belegt. Die Umrechnung vom absoluten Maßsystem ins Technische ist sehr einfach:

$$\mu_{\text{techn}} = \frac{\mu_{\text{abs}}}{98,1}, \quad \text{wobei } \mu_{\text{techn}} \text{ in kgs/m}^2 \text{ und } \mu_{\text{abs}} \text{ in g/cms,}$$

$$\mu_{\text{techn}} \cdot g = \eta_{\text{techn}} = \frac{\mu_{\text{abs}}}{10}, \quad \text{wobei } \eta_{\text{techn}} \text{ in kg/ms}$$

und endlich

$$\frac{\mu_{\text{techn}} \cdot g}{\gamma_{\text{techn}}} = \nu_{\text{techn}} = \frac{\mu_{\text{abs}}}{10 \gamma_{\text{techn}}}, \quad \text{wobei } \nu_{\text{techn}} \text{ in m}^2/\text{s} \text{ und } \gamma_{\text{techn}} \text{ in kg/m}^3.$$

Den reziproken Wert der dynamischen Zähigkeit  $\mu$  findet man auch häufig angegeben und Fluidität genannt.



Die Zahlentafeln 4, 5 und 18 geben Aufschluß über die Stärke, mit der  $\mu$  (oder  $\eta$ ) vom Druck abhängt. Man erkennt, daß sich die Zähigkeit von Wasser praktisch nicht nach dem Drucke richtet. Andere tropfbare Flüssigkeiten verhalten sich ähnlich. Bei Gasen ist diese Änderung bei größeren Drücken nicht mehr ohne weiteres zu vernachlässigen, nimmt doch z. B. die Zähigkeit von Luft bei Drucksteigerung von 1 at auf

40	80	120	160	200 at um rd.
6	15	35	60	90 vH zu.

Bei Dämpfen, besonders in der Nähe des Sättigungsgebietes, ist die Veränderlichkeit von  $\mu$  (oder  $\eta$ ) mit dem Drucke noch erheblich größer, wie Zahlentafel 20 zeigt. Nach Abb. 12 wird  $\eta$  mit zunehmender Überhitzung immer weniger vom Drucke abhängig (Annäherung an das Verhalten der Gase).

Zur formelmäßigen Erfassung des Zusammenhanges zwischen  $\mu$  und der Temperatur  $t$  wurden zahlreiche Ansätze entwickelt:

Für tropfbare Flüssigkeiten eignet sich die Form

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 + \alpha t + \beta t^2} \text{ m}^2/\text{s}; \quad (7)$$

für gasförmige Flüssigkeiten kann man u. a. folgende Gleichungen ansetzen:

$$\eta_t = \eta_1 (1 + \alpha_1 t) = \eta_0 (1 + \alpha_0 t), \quad (8)$$

$$\eta_t = \eta_1 (1 + \beta_1 t)^n = \eta_0 (1 + \beta_0 t)^n, \quad (9)$$

$$\eta_t = \eta_1 \sqrt{\frac{T}{T_1}} \frac{1 + C/T_1}{1 + C/T} = \eta_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}} \frac{1 + C/T_0}{1 + C/T}. \quad (10)$$

Dabei gehören  $\eta_0, \nu_0, \alpha_0, \beta_0, T_0$  zu  $t_0 = 0^\circ$  und  $\eta_1, \nu_1, \alpha_1, \beta_1, T_1$  zu einer bestimmten Temperatur  $t_1^\circ$ . Während Gl. (8) u. (9) im allgemeinen nur für einen engen Temperaturbereich brauchbare Annäherungen darstellen, gibt Form (10) für sehr verschiedene Temperaturen brauchbare Zähigkeitswerte. Andere Formeln sind für die Rechnung meist ziemlich unbequem.

Zur Bestimmung der Zähigkeit von Flüssigkeiten gibt es zahlreiche Möglichkeiten, die grundsätzlich auf zwei Meßverfahren beruhen:

1. Durchflußmethode,
2. Beobachtung der Dämpfungswirkung der Flüssigkeitsreibung.

Ein vorzügliches Mittel hat man in der Untersuchung des Ausflusses durch Haarröhrchen. Verschieden zähe Flüssigkeiten strömen durch dasselbe Rohr verschieden schnell aus. Bei anderen Meßanordnungen befindet sich die zu untersuchende Flüssigkeit im wesentlichen in Ruhe; in ihr werden feste Körper bewegt. Entweder läßt man einen Körper in der Flüssigkeit schwingen oder sich drehen, oder man läßt einen Körper durch die Flüssigkeit fallen. Dabei gibt die Bremsung des schwingenden, umlaufenden oder fallenden Körpers ein Maß für die Zähigkeit. Nach einem anderen Verfahren beobachtet man die Schwingung der zu untersuchenden (tropfbaren) Flüssigkeit in einem U-Rohr. Auch aus der Schallgeschwindigkeit in der Flüssigkeit oder der Deformationsgeschwindigkeit unter Druck kann man auf die Größe der Zähigkeit schließen. Ganz allgemein dürfen bei Zähigkeitsmessungen nicht turbulente Strömungen (s. u.) auftreten<sup>1</sup>.

Am häufigsten benutzt man das einfache Ausflußverfahren. In der Technik pflegt man die Zähigkeit von tropfbaren Flüssigkeiten mit dem auf der Ausflußmethode beruhenden Englerschen Viskosimeter zu bestimmen und in Engler-

<sup>1</sup> Siehe hierzu S. Erk: Nr. 7, S. 464ff.

graden anzugeben. Es besteht aus einem Gefäß (Abb. 4), aus dem die zu untersuchende Flüssigkeit  $F$ , die anfangs bis zu den Marken  $M$  stand, durch ein Haarröhrchen  $A$  in ein Auffanggefäß tropft. Bei Füllung bis  $M$  wirkt eine Druckhöhe von 52 mm, die während des Ausflusses ständig kleiner wird. Nach Engler gilt die Zahl als Zähigkeit, die angibt, um wieviel mal größer die Ausflußzeit der Versuchsflüssigkeit als die der gleichen Menge Wasser von 20°C ist. Die Ausflußzeit von 200 cm<sup>3</sup> Wasser von 20° wurde als Zähigkeit von 1 Englergrad verabredet. Normalerweise ist das Haarröhrchen  $A$  20 mm lang und am Ausflußende 2,8 mm

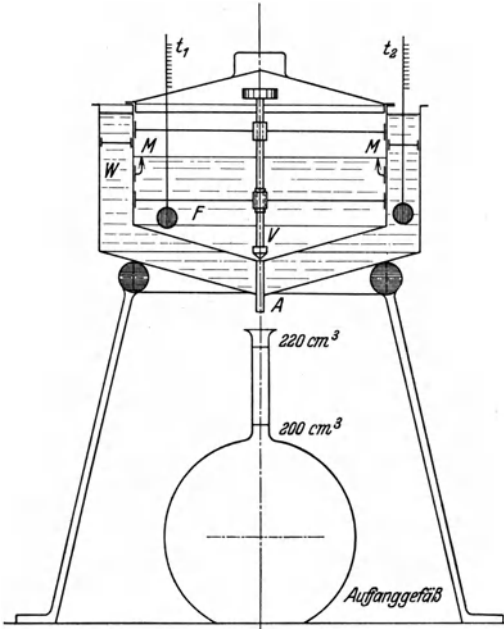


Abb. 4. Englerscher Zähigkeitsmesser.  $A$  Ausflußröhrchen,  $F$  zu untersuchende Flüssigkeit,  $M$  Füllmarken,  $V$  Ventilschneidung und Ventil,  $W$  Wasserbad,  $t_1$  Thermometer für die Versuchsflüssigkeit,  $t_2$  Thermometer für das Wasserbad.

im Lichten. Beim vorschriftsmäßigen Instrument fließen 200 cm<sup>3</sup> Wasser in 50 bis 52 Sekunden aus; es ist mit Fehlern bis  $\pm 2$  vH zu rechnen. Daher sind mehrere Versuche anzustellen und auszumitteln. Das Viskosimeter ist in der Praxis wegen seiner Einfachheit (vornehmlich in Deutschland — in anderen Ländern benutzt man ähnliche Instrumente) sehr beliebt. Besonders gern wird die Zähigkeit von zähen tropfbaren Flüssigkeiten (Ölen) in Englergraden angegeben. Da die Flüssigkeit unter Wirkung ihres eigenen Gewichts ausfließt, handelt es sich hier um eine kinematische Zähigkeit. Flüssigkeiten von gleicher dynamischer Zähigkeit  $\mu$ , aber verschiedenem spezifischen Gewicht  $\gamma$  haben Zähigkeiten von verschiedenem Englergrad.

Man kann die Englergrade in kinematische Zähigkeiten umrechnen. Dazu wurden zahlreiche mehr oder weniger genaue Umrechnungsformeln aufgestellt<sup>1, 2</sup> und als brauchbarste<sup>3</sup>

$$10^6 \nu \approx E \cdot 7,60^{(1-1/E^3)} \text{ in m}^2/\text{s} \quad (11)$$

gefunden ( $E$  Englergrade). Zahlentafel 1 gibt Werte dieser Gleichung. Für höhere  $E$ -Werte gilt genügend genau<sup>4</sup>  $10^6 \nu = 7,6 E \text{ m}^2/\text{s}$ . Unter  $10^6 \nu = 1$  oder  $E = 1$  gibt der Zähigkeitsmesser von Engler keine zuverlässigen Werte an.

<sup>1</sup> Siehe S. Erk: Zähigkeitsmessungen an Flüssigkeiten und Untersuchungen von Viskosimetern. VDI-Forsch.-Heft 1927, Nr. 288.

<sup>2</sup> Ubbelohde, L.: Tabellen zum Englerschen Viskosimeter S. 37. Leipzig 1907.

<sup>3</sup> Vogel, H.: Bedeutung der Temperaturabhängigkeit der Viskosität. Z. angew. Chem. Bd. 35 (1922) S. 561.

<sup>4</sup> Ab  $E = 3,4$  auf  $\leq 5$  vH, ab  $E = 6$  auf  $\leq 1$  vH und ab  $E = 8$  auf  $\leq \frac{1}{2}$  vH genau.

Zahlentafel 1.  
Englergrade und kinematische Zähigkeit.

<i>E</i>	$10^6 \nu \text{ m}^2/\text{s}$	<i>E</i>	$10^6 \nu \text{ m}^2/\text{s}$	<i>E</i>	$10^6 \nu \text{ m}^2/\text{s}$
1,00	1,00	2,00	11,8	4,00	29,3
1,05	1,40	2,10	12,8	4,20	30,9
1,10	1,80	2,20	13,8	4,40	32,5
1,15	2,30	2,30	14,8	4,60	34,1
1,20	2,80	2,40	15,7	4,80	35,7
1,25	3,30	2,50	16,6	5,00	37,3
1,30	3,90	2,60	17,5	5,50	41,2
1,35	4,50	2,70	18,4	6,00	45,1
1,40	5,00	2,80	19,3	6,50	49,0
1,45	5,60	2,90	20,2	7,00	52,9
1,50	6,25	3,00	21,1	7,50	56,8
1,60	7,45	3,20	22,8	8,00	60,6
1,70	8,50	3,40	24,5	8,50	64,5
1,80	9,60	3,60	26,1	9,00	68,4
1,90	10,70	3,80	27,7	10,00	76,0

Die folgenden Zahlentafeln enthalten Angaben, die für die technische Rohrströmung von Bedeutung sind. Sie geben die vom heutigen Standpunkt zuverlässigsten Messungen wieder. Die einzelnen Werte sind bei Flüssigkeitsgemischen nur Mittelwerte, weil deren Zusammensetzung stark verschieden sein kann (z. B. bei Erdölen oder Schmierölen). Auf die Zähigkeit von Gasgemischen werden wir in einem besonderen Abschnitt zurückkommen.

Zahlentafel 2. Spezifisches Gewicht und kinematische Zähigkeit verschiedener tropfbarer Flüssigkeiten bei  $t = 15^\circ$ .

Stoff	$\gamma \text{ kg/m}^3$	$10^6 \nu \text{ m}^2/\text{s}$
Äthylalkohol . . . . .	794	1,67
Spiritus 95 vH . . . . .	809	1,94
„ 90 „ . . . . .	823	2,19
„ 85 „ . . . . .	836	2,46
Benzol rein . . . . .	884	0,796
Toluol rein . . . . .	870	0,717
Xylol rein . . . . .	868	0,786
Handelsbenzol I . . . . .	882	~ 0,792 (0,84 Benzol, 0,03 Xylol, 0,13 Toluol)
Handelsbenzol II . . . . .	876	~ 0,790 (0,43 Benzol, 0,46 Toluol, 0,11 Xylol)
Naphthalin rein . . . . .	977	0,907 (bei 80°)
Tetralin . . . . .	975	2,36
Pentan } . . . . .	627	0,373
Hexan } <sub>1</sub> . . . . .	658	0,512
Heptan } . . . . .	683	0,640
Oktan } . . . . .	700	0,827
Benzin . . . . .	700 bis 740	0,80 bis 0,76
Olivenöl . . . . .	920	107,5
Rizinusöl . . . . .	970	1480
Terpentinöl . . . . .	875	1,86
Salpetersäure 25 vH . . . . .	1150	1,16
„ 40 „ . . . . .	1250	1,31
„ 91 „ . . . . .	1500	0,95

<sup>1</sup> Diese und weitere Glieder der Methanreihe bilden die Hauptbestandteile des amerikanischen und galizischen Benzins.

Zahlentafel 2 (Fortsetzung).

Stoff	$\gamma$ kg/m <sup>3</sup>	$10^6 \nu$ m <sup>2</sup> /s
Schwefelsäure 25 vH . . . .	1182	1,66
„ 50 „ . . . .	1399	3,06
„ 75 „ . . . .	1674	10,00
„ 100 „ . . . .	1836	14,66
Bier. . . . .	1020 bis 1040	~ 1,15
Milch . . . . .	1030	~ 2,90
Wein . . . . .	990 bis 1000	~ 1,15

Zahlentafel 3. Spezifisches Gewicht und kinematische Zähigkeit von reinem luftfreiem Wasser.

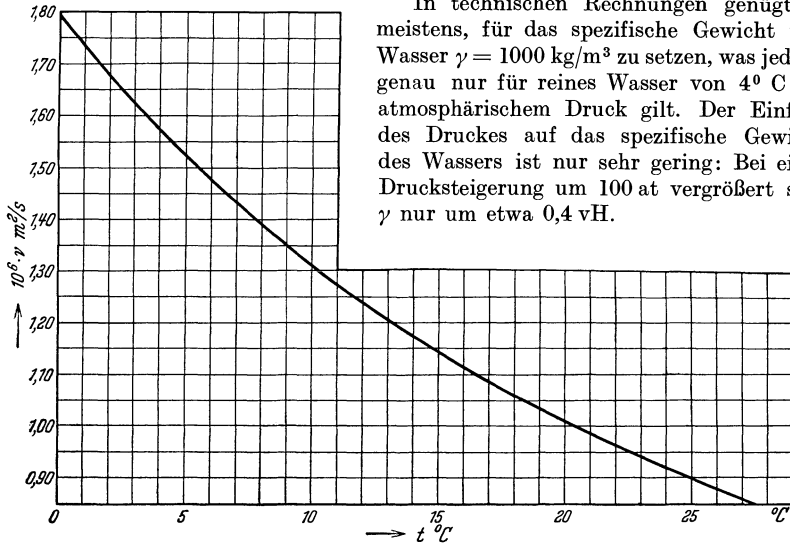
$t^0$	$\gamma$ kg/m <sup>3</sup>	$10^6 \nu$ m <sup>2</sup> /s	$t^0$	$\gamma$ kg/m <sup>3</sup>	$10^6 \nu$ m <sup>2</sup> /s
0	999,9	1,789	25	997,1	0,8986
1	1000,0	1,725	26	996,8	0,8785
2	1000,0	1,670	27	996,6	0,8602
3	1000,0	1,615	28	996,3	0,8419
4	1000,0	1,565	29	996,0	0,8236
5	1000,0	1,516	30	995,7	0,8054
6	1000,0	1,468	32,5	994,9	0,7650
7	999,9	1,425	35	994,1	0,7248
8	999,9	1,385	40	992,2	0,6584
9	999,8	1,345	45	990,0	0,6017
10	999,7	1,306	50	988,1	0,5563
11	999,6	1,272	55	985,7	0,5146
12	999,5	1,235	60	983,2	0,4781
13	999,4	1,206	65	980,6	0,4445
14	999,3	1,172	70	977,8	0,4154
15	999,1	1,142	75	974,9	0,3892
16	999,0	1,112	80	971,8	0,3659
17	998,8	1,085	85	968,7	0,3449
18	998,6	1,060	90	965,3	0,3274
19	998,4	1,033	95	961,9	0,3099
20	998,2	1,007	100	958,4	0,2943
21	998,0	0,9850	150	917,2	—
22	997,8	0,9650	200	862,8	—
23	997,6	0,9350	250	794	—
24	997,3	0,9160	300	700	—

Die Zähigkeitswerte entstammen einer kritischen Bearbeitung von E. C. Bingham u. R. F. Jackson: Standard Substances for the calibration of viscosimeters, Bur. of Stand. Scient. Papers 298 (1917), der Messungen von Poiseuille, Sprung, Slotte, Thorpe und Rodger, Hosking, Bingham und White.

Zahlentafel 4. Abhängigkeit der Zähigkeit  $\mu$  des Wassers vom Druck bei verschiedenen Temperaturen.

$t^0$	$\frac{\mu_{400 \text{ at}} - \mu_{1 \text{ at}}}{\mu_{1 \text{ at}}} \cdot 100$	$t^0$	$\frac{\mu_{400 \text{ at}} - \mu_{1 \text{ at}}}{\mu_{1 \text{ at}}} \cdot 100$	$t^0$	$\frac{\mu_{400 \text{ at}} - \mu_{1 \text{ at}}}{\mu_{2 \text{ at}}} \cdot 100$
18	- 1,6	36	0,0	70	+ 2,5
29	- 0,3	40	+ 0,7	80	+ 2,6
31	0,0	51	+ 1,6	90	+ 3,4
32	0,0	56	+ 2,1	98	+ 3,6
33	0,0				

Diese Zahlentafel enthält die prozentische Änderung der Zähigkeit  $\mu$  bei einem Überdruck von 400 at. In der Nähe von  $32^\circ$  wird  $\mu$  durch eine Drucksteigerung um 400 at nicht geändert. Unterhalb  $32^\circ$  wird  $\mu$  durch Drucksteigerung verkleinert, oberhalb vergrößert.



In technischen Rechnungen genügt es meistens, für das spezifische Gewicht von Wasser  $\gamma = 1000 \text{ kg/m}^3$  zu setzen, was jedoch genau nur für reines Wasser von  $4^\circ \text{C}$  bei atmosphärischem Druck gilt. Der Einfluß des Druckes auf das spezifische Gewicht des Wassers ist nur sehr gering: Bei einer Drucksteigerung um 100 at vergrößert sich  $\gamma$  nur um etwa 0,4 vH.

Abb. 5. Kinematische Zähigkeit von Wasser in Abhängigkeit von der Temperatur nach Zahlentafel 3.

Flußwasser oder verschmutztes Wasser ist meist etwas zäher als reines und luftfreies Wasser. Die Frage des Luftgehaltes im Wasser ist für die Beurteilung der Strömungsvorgänge oft sehr wichtig. Steht Wasser (oder irgendeine andere tropfbare Flüssigkeit) mit Luft oder einem anderen löslichen Gas durch freie

Zahlentafel 5. Relative dynamische Zähigkeit  $\mu$  oder  $\eta$  des Wassers bez. auf 1 at und  $0^\circ$  in Abhängigkeit von Temperatur und Druck.

$t^\circ$	$0^\circ$	$30^\circ$	$75^\circ$
Druck 1 at	1,000	0,488	0,222
1000 „	0,921	0,514	0,239
2000 „	0,957	0,550	0,258
5000 „	1,218	0,720	0,333
8000 „	—	0,923	0,445
10000 „	—	1,058	—

Oberfläche genügend lange Zeit in Verbindung, so löst sich ein gewisses Gasvolumen im Wasser. Da bei Gasen, gleichbleibende Temperatur vorausgesetzt, das Volumen mit abnehmendem Druck anwächst, vermindert sich gleichzeitig das Lösungsvermögen des Wassers, d. h. es kann nur ein kleineres Gasgewicht gelöst werden. Der Überschuß wird in Form von Gasblasen abgegeben. Bei unveränderlichem Druck nimmt das Volumen eines Gases mit abnehmender Temperatur ab, daraus folgt größere Lösungsfähigkeit dem Gewicht nach bei geringerer Temperatur. Wasser kann bei einem Druck von 760 mm QS im  $\text{m}^3$  folgende Luftmengen in  $\text{m}^3$  (auf  $0^\circ$  und 760 mm QS umgerechnet) aufnehmen:

$t$ Grad	0	10	20	30	50	70	100
$V \text{ m}^3/\text{m}^3$	0,029	0,023	0,019	0,016	0,013	0,012	0,011

Gelöste Luft beeinflusst den Strömungsvorgang nur unerheblich, dagegen wirken ausperlende oder mitgerissene Luftmengen und Luftsäcke außerordentlich störend.

Zahlentafel 6. Spezifisches Gewicht des Meerwassers  $\gamma$  kg/m<sup>3</sup>.

Wenn das spez. Gewicht $\gamma$ bei 15° beträgt kg/m <sup>3</sup>	dann ist das spezifische Gewicht bei $t^{\circ}$					
	0°	5°	10°	20°	25°	30°
1000,0	1000,8	1000,9	1000,6	999,1	998,0	996,6
1010,0	1011,3	1011,2	1010,8	1009,0	1007,7	1006,3
1020,0	1021,8	1021,5	1020,9	1018,9	1017,5	1016,0
1030,0	1032,3	1031,8	1031,0	1028,8	1027,3	1025,7

Zahlentafel 7. Kinematische Zähigkeit des Meerwassers  $10^6 \nu$  m<sup>2</sup>/s.

$t^{\circ}$	Salzgehalt in Gewichtsteilen				
	0 vT	10 vT	20 vT	30 vT	40 vT
0	1,789	1,804	1,815	1,825	1,834
1	1,725	1,732	1,742	1,752	1,763
2	1,670	1,674	1,688	1,700	1,709
3	1,615	1,621	1,635	1,647	1,656
4	1,565	1,575	1,589	1,601	1,611
5	1,516	1,530	1,544	1,556	1,566
10	1,306	1,320	1,334	1,348	1,360
15	1,142	1,152	1,165	1,179	1,192
20	1,007	1,019	1,032	1,045	1,058
25	0,897	0,905	0,917	0,930	0,944
30	0,805	0,816	0,827	0,838	0,849

Zahlentafel 8. Spezifisches Gewicht und kinematische Zähigkeit von Kochsalzlösungen in Wasser.

$t^{\circ}$	5 vH NaCl		10 vH NaCl		20 vH NaCl	
	$\gamma$	$10^6 \nu$	$\gamma$	$10^6 \nu$	$\gamma$	$10^6 \nu$
-10	—	—	—	—	1160	3,25
-5	—	—	1078	2,20	1158	2,71
0	1038	1,79	1077	1,87	1156	2,31
5	1038	1,54	1076	1,62	1154	1,98
10	1037	1,31	1074	1,41	1152	1,73
15	1036	1,17	1073	1,25	1150	1,64
20	1034	1,05	1071	1,11	1147	1,36
25	1032	0,98	1069	1,01	1145	1,21

Zahlentafel 9. Spezifisches Gewicht und kinematische Zähigkeit von Petroleum verschiedener Herkunft.

Benennung des Petroleums	$\gamma$ (15,6°) kg/m <sup>3</sup>	$10^6 \nu$ (20°) m <sup>2</sup> /s
Deutsches Petroleum . . . . .	816	1,790
Desgl. . . . .	810	2,831
Amerikanisches wasserhelles Petroleum . . . . .	790	2,566
Amerikanisches Standard White Petroleum . . . . .	800	2,970
Russisches Meteor Petroleum. . . . .	800	2,094
Russisches Nobel Petroleum . . . . .	824	2,568
Nobelpetroleum . . . . .	823	2,199
Galizisches Petroleum . . . . .	809	2,789

Zahlentafel 9 (Fortsetzung).

Benennung des Petroleums	$\gamma$ (15,6°) kg/m <sup>3</sup>	10 <sup>6</sup> $\nu$ (20°) m <sup>2</sup> /s
Petroleum verschiedener Art		
Benennung	A . . . . .	1,305
	B . . . . .	1,765
	C . . . . .	2,031
	D . . . . .	2,341
	E . . . . .	2,371
	F . . . . .	2,771
	$\gamma$ (15,0°)	10 <sup>6</sup> $\nu$ (20°)
St. W. Kerosin — Texas Co. . . . .	801	1,935
W. W. Kerosin — Texas Co. . . . .	802	1,925
W. W. Kerosin — Standard Oil Co. . . . .	807	1,896
Kerosin — The Kanotex Ref. Co. . . . .	824	2,858
Russisches Baku-Kerosin . . . . .	825	2,170
Export Baku-Kerosin . . . . .	822	2,260
Emba-Kerosin . . . . .	826	2,390
Grosny-Kerosin . . . . .	813	2,380

Zahlentafel 10. Spezifisches Gewicht und kinematische Zähigkeit (Werte 10<sup>6</sup>  $\nu$  m<sup>2</sup>/s) von Gasolin verschiedener Art und von Petroleum.

Gasolin Nr.	$\gamma$ 15,6° kg/m <sup>3</sup>	Temperatur					
		5°	15°	25°	35°	45°	55°
1	737	0,936	0,818	0,703	0,640	0,578	0,518
2	748	1,029	0,887	0,787	0,690	0,625	0,551
3	743	1,044	0,863	0,728	0,664	0,594	—
4	726	0,682	0,591	0,522	0,470	0,426	0,383
5	722	0,733	0,633	0,568	0,499	0,450	0,406
6	717	0,792	0,671	0,583	0,504	0,473	—
7	716	0,710	0,644	0,546	0,483	0,436	0,410
8	708	0,697	0,614	0,550	0,475	0,425	0,393
9	702	0,611	0,546	0,481	0,445	0,398	0,356
10	701	0,620	0,545	0,498	0,428	0,382	0,358
11	699	0,614	0,532	0,468	0,428	0,385	0,338
12	694	0,575	0,504	0,457	0,408	0,373	0,337
13	680	0,510	0,456	0,403	0,356	0,334	0,310
Petroleum	813	3,16	2,62	2,02	1,74	1,47	—

Rohe Erdöle. In ganz besonders starkem Maße hängt die Zähigkeit der technischen rohen Erdöle von der Temperatur ab. Nach Watkins<sup>1</sup> nimmt die Zähigkeit bei

Mexikanischem Öl zwischen 10 und 50° von 100 vH auf 3 vH (!)  
 Trinidadöl „ 10 „ 50° „ 100 „ „ 9 „  
 Persischem Öl „ 10 „ 50° „ 100 „ „ 2 „ (!)

<sup>1</sup> Watkins, W. G.: The design of oil fuel pipe lines. Engineering Bd. 118 (1924) S. 793.

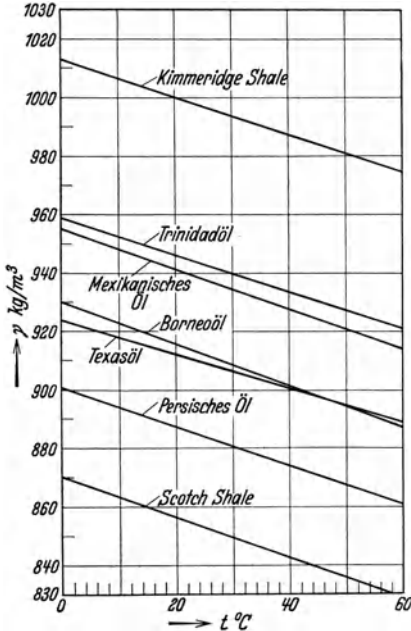


Abb. 6. Spezifisches Gewicht von rohen Erdölen. (Nach Watkins.)

Kimmeridge Shale zwischen 10 und 50°  
 von 100 vH auf 8 vH  
 Texasöl zwischen 10 und 50°  
 von 100 vH auf 10 vH  
 Borneoöl zwischen 10 und 50°  
 von 100 vH auf 25 vH  
 Scotch Shale zwischen 10 und 50°  
 von 100 vH auf 38 vH  
 (Zum Vergl. Wasser zwischen 10 und 50°  
 von 100 vH auf 43 vH)

ab. Aus Abb. 6 kann das spezifische Gewicht und aus Abb. 7 die kinematische Zähigkeit dieser Öle entnommen werden. Wegen der sehr verschiedenen Absolutwerte der Zähigkeit und der starken Temperaturabhängigkeit mußte ein logarithmisches Diagramm angelegt werden.

Nach anderen gilt für dunkelbraunes Erdöl aus Burma und schwarzes Erdöl aus Rumänien für die kinematische Zähigkeit  $10^6 \nu$  in  $m^2/s$ :

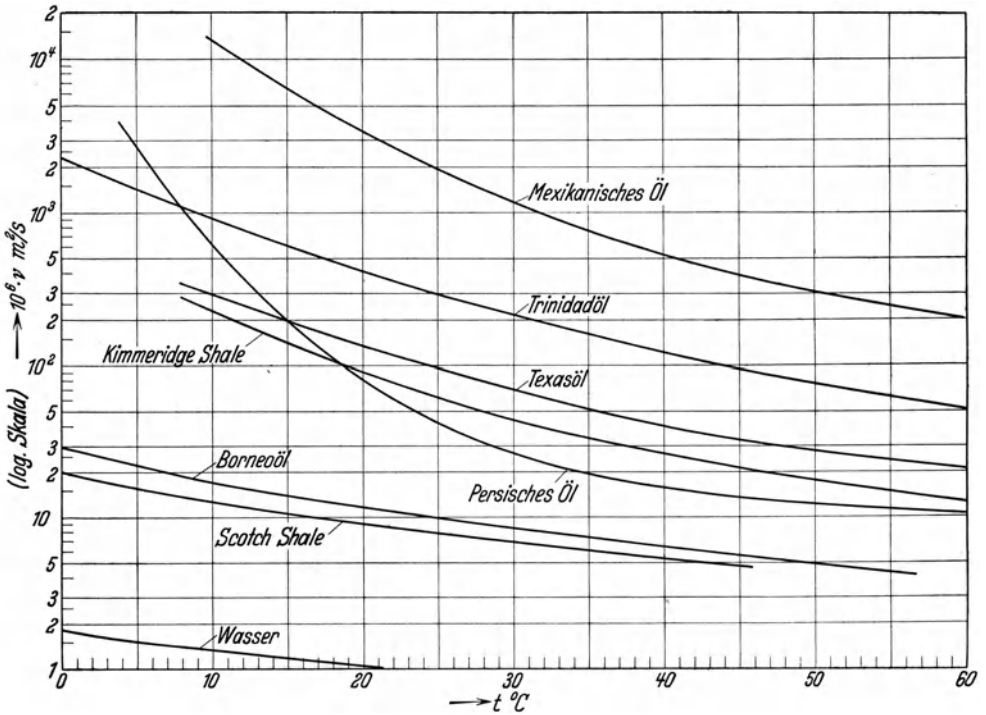


Abb. 7. Kinematische Zähigkeit von rohen Erdölen. (Nach Watkins.)



Zahlentafel 11.

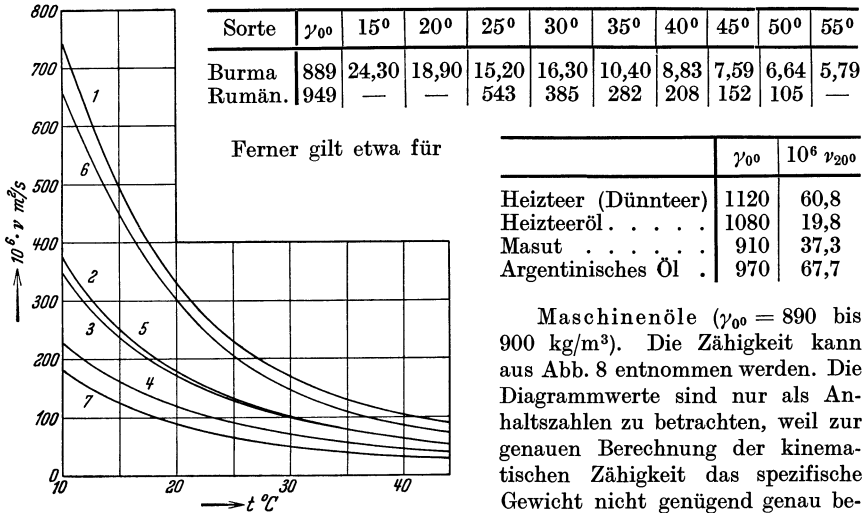


Abb. 8. Kinematische Zähigkeit von handelsüblichen Maschinenölen. 1 Maschinenöl Deutz, 2 Valvolöl (wie 5), 3 Vakuumöl, 4 Championöl, 5 Championöl extra (wie 2), 6 helles Maschinenöl, 7 helles dünnes Maschinenöl. (Nach Angaben des Handbuches von Landolt und Börnstein.)

Maschinenöle ( $\gamma_{0^\circ} = 890$  bis  $900 \text{ kg/m}^3$ ). Die Zähigkeit kann aus Abb. 8 entnommen werden. Die Diagrammwerte sind nur als Anhaltzahlen zu betrachten, weil zur genauen Berechnung der kinematischen Zähigkeit das spezifische Gewicht nicht genügend genau bekannt war.

Chlorkalziumsole ( $\gamma_{0^\circ} = 1000$  bis  $1200 \text{ kg/m}^3$ ). Die Kehrwerte der kinematischen Zähigkeit von Chlorkalziumsole können aus Abb. 9 ermittelt werden — reine Sole nach

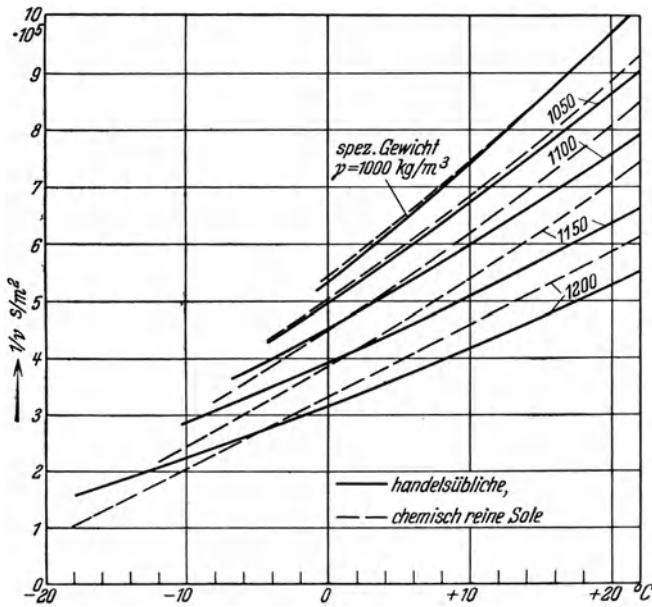


Abb. 9. Kehrwerte der kinematischen Zähigkeit von chemisch reiner und handelsüblicher Chlorkalziumsole. (Nach Simeon, Walker, Gould und Levy.)

Simeon und Walker<sup>1</sup>, handelsübliche nach Gould und Levy<sup>2,3</sup>. Die Zusammensetzung der handelsüblichen Sole war: CaCl<sub>2</sub> 98,09 vH; NaCl 1,68 vH; CaSO<sub>4</sub> 0,08 vH; Ca(OH)<sub>2</sub> 0,09 vH; H<sub>2</sub>O 0,06 vH. Die Zähigkeit von handelsüblicher weicht bis 60 vH von der der reinen Sole ab.

Zahlentafel 12. Spezifisches Gewicht, Dichteverhältnis und Gaskonstante von gasförmigen Flüssigkeiten.

Stoff	$\gamma^{00, 760 \text{ mm Q S}}$	$s = \frac{\gamma}{\gamma_L}$ Dichte	Gaskonstante <i>R</i> m/Grad
	kg/m <sup>3</sup>	(Luft = 1)	
Sauerstoff . . . . .	1,429	1,106	26,50
Stickstoff . . . . .	1,251	0,9674	30,26
Wasserstoff . . . . .	0,08987	0,06951	420,6
Luft . . . . .	1,293	1,0000	29,27
Kohlenoxyd . . . . .	1,250	0,967	30,29
Kohlensäure . . . . .	1,977	1,529	19,27
Methan . . . . .	0,717	0,554	52,90
Azetylen . . . . .	1,171	0,912	32,59
Äthylen . . . . .	1,261	0,975	30,25
Äthyläther . . . . .	3,300	2,586	30,1
Wasserdampf <sup>4</sup> . . . . .	—	—	47,1
Benzoldampf . . . . .	3,480	2,690	10,9
Ammoniakdampf . . . . .	0,771	0,596	49,8
Schmelgas von Steinkohlen	0,698	0,542	54,0
Leuchtgas I <sup>5</sup> . . . . .	0,504	0,387	75,7
Leuchtgas II <sup>5</sup> . . . . .	0,491	0,380	77,1
Koksofengas . . . . .	0,530	0,409	71,6
Wassergas . . . . .	0,711	0,549	53,3
Mischgas . . . . .	1,125	0,866	33,8
Luftgas . . . . .	1,190	0,917	35,8
Gichtgas . . . . .	1,255	0,972	31,9
Mondgas . . . . .	1,060	0,817	30,1
Schwefelwasserstoff . . . . .	1,540	1,190	25,08

<sup>1</sup> Simeon, F.: On the viscosity of Calcium Chloride solutions. Philos. Mag. Bd. 27 (1914) S. 95. Walker, J. W.: On the relationship between the viscosity, density and temperature of salt solutions. Philos. Mag. Bd. 27 (1914) S. 288.

<sup>2</sup> Gould, E. R., u. M. J. Levy: Flow of brine in pipes. Univ. Illinois Bull. Engng. Exp. Stat. 1928 Nr. 182 S. 2.

<sup>3</sup> Siehe ferner: H. Stakelbeck u. R. Plank: Über die Zähigkeit von Chlormagnesium-, Chlorkalzium-, Chlornatriumlösungen in Abh. v. d. Temperatur und Konzentration. Z. ges. Kälteind. Bd. 36 (1929) S. 105, 133. Walter Büche: Die Zähigkeit von Salzlösungen in Abh. v. d. Temperatur und Konzentration. Z. ges. Kälteind. Bd. 34 (1927) S. 143.

<sup>4</sup> Hoch überhitzt.

<sup>5</sup> Nach Hütte, des Ingenieurs Taschenb. Bd. 2 26. Aufl. (1931) S. 576.

Zahlentafel 13. Zähigkeit verschiedener Gase und Dämpfe nach der Formel von Sutherland<sup>1</sup>.

$$\eta_t = \eta_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}} \frac{1 + C/T_0}{1 + C/T} = B \frac{\sqrt{T}}{1 + C/T} \text{ in kg/ms.}$$

$C$  und  $B$  sind dabei universelle Konstanten. Statt  $T_0$  und  $\eta_0$  können auch andere zusammengehörige Werte von  $T$  und  $\eta$  eingesetzt werden.

Stoff <sup>2</sup>	$\eta_0 10^6$	$C$	$B 10^6$	Temperaturbereich	Versuchsjahr
Äthyläther . . .	6,86	325	0,91	0° bis + 200°	1910
Äthylen . . . .	9,61	225,9	1,052	— 75° bis + 300°	1901
„ . . . .	9,46	238,9	1,074	— 40° bis + 252°	1929
Ammoniak . . .	9,05	626	1,801	+ 20° bis + 450°	1930
Benzol . . . .	6,99	700	1,384	+ 100° bis + 213°	1909
„ . . . .	6,86	380	0,994	+ 15° bis + 250°	1929
Helium . . . .	18,76	78,2	1,459	— 70° bis + 100°	1914
Kohlenoxyd . .	16,89	100	1,396	— 130° bis + 20°	1911
„ . . . .	16,56	101	1,377	— 78° bis + 250°	1929
Kohlensäure . .	13,66	274	1,655	0° bis + 100°	1922
Luft . . . . .	17,19	172,6	1,698	+ 250° bis + 1000°	1926
„ . . . . .	17,10	123,6	1,503	0° bis + 400°	1928
Sauerstoff . . .	19,26	138	1,747	— 79° bis + 200°	1904/10
Stickstoff . . .	16,65	103	1,378	— 78° bis + 250°	1929
Methan . . . .	10,00	198	1,082	0° bis + 100°	1921
Schwefeldioxyd	11,68	416	1,784	0° bis + 120°	1922
Wasserdampf . .	8,19	961	2,53	+ 20° bis + 400°	1930
Wasserstoff . .	8,50	83	0,671	— 40° bis + 250°	1929

Die im folgenden angeführten Einzelwerte von  $\eta$  stimmen zum Teil nicht ganz mit obiger Auswertung nach Sutherland überein, weil die Angaben anderer Beobachter verwendet wurden.

Zahlentafel 14. Zähigkeit trockener Luft  $10^6 \eta$  in  $\text{kg/ms}^3$

$t^0$	$10^6 \eta$	$t^0$	$10^6 \eta$	$t^0$	$10^6 \eta$	$t^0$	$10^6 \eta$	$t^0$	$10^6 \eta$
— 145	2,40	— 74	11,70	0	17,20				
— 140	2,80	— 70	12,20	1	17,24	6	17,44	11	17,65
— 130	5,00	— 60	13,30	2	17,28	7	17,48	12	17,70
— 115	5,90	— 50	14,70	3	17,32	8	17,52	13	17,75
— 98	8,70	— 49,7	14,70	4	17,36	9	17,56	14	17,80
— 82	10,60	— 21,4	16,39	5	17,40	10	17,60	15	17,85

<sup>1</sup> Sutherland, W.: The viscosity of gases and molecular force. Philos. Mag. Bd. 36 (1893) S. 507.

<sup>2</sup> Die Zähigkeit der technischen Gase hängt im allgemeinen wohl in gleichem Sinne, nicht aber auch in genau gleichem Maße von der Temperatur ab (2 Beiwerte  $C$  oder  $B$  und  $C$  der Sutherland-Gleichung).

<sup>3</sup> Werte  $\eta$  für Temperaturbereich

- 145° bis — 50° nach Chella (1906),
- 49,7° bis — 21,4° nach Vogel, Breitenbach und Schmitt (1901),
- 0° bis + 11° nach Vogel (1914),
- + 10° bis + 23° nach Millikan (1914),
- + 24° bis + 200° nach Braune, Basch und Wentzel (1928),
- + 250° bis + 1000° nach Williams (1926).

Zahlentafel 14 (Fortsetzung).

$t^0$	$10^6 \eta$	$t^0$	$10^6 \eta$	$t^0$	$10^6 \eta$	$t^0$	$10^6 \eta$	$t^0$	$10^6 \eta$
16	17,89	26	18,35	60	19,80	140	23,60	550	37,20
17	17,94	27	18,39	65	20,03	160	24,40	600	38,68
18	17,99	28	18,42	70	20,27	180	25,00	650	40,17
19	18,04	29	18,45	75	20,50	200	25,50	700	41,62
20	18,09	30	18,48	80	20,74	250	27,04	750	43,01
21	18,14	35	18,68	85	20,99	300	28,86	800	44,32
22	18,19	40	18,90	90	21,25	350	30,68	850	45,60
23	18,24	45	19,10	95	21,50	400	32,45	900	46,88
24	18,28	50	19,32	100	21,73	450	34,13	950	48,12
25	18,32	55	19,55	120	22,70	500	35,70	1000	49,33

Zahlentafel 15.

Zähigkeit  $10^6 \eta$  einiger Gase nach den neuesten Messungen.  
Nach einer Zusammenstellung von L. Zipperer und G. Müller, a. a. O.

Stoff	chem. Z.	$-10^0$	$0^0$	$10^0$	$20^0$	$30^0$	$40^0$
Luft . . . . .	—	16,78	17,28	17,77	18,27	18,76	19,26
Stickstoff . . . . .	N <sub>2</sub>	16,26	16,73	17,20	17,67	18,15	18,62
Sauerstoff . . . . .	O <sub>2</sub>	18,70	19,27	19,84	20,41	20,97	21,54
Wasserstoff . . . . .	H <sub>2</sub>	8,26	8,48	8,70	8,92	9,14	9,36
Kohlenoxyd . . . . .	CO	16,10	16,56	17,02	17,48	17,94	18,40
Kohlensäure . . . . .	CO <sub>2</sub>	13,55	14,05	14,55	15,06	15,56	16,07
Methan . . . . .	CH <sub>4</sub>	10,03	10,36	10,69	11,02	11,35	11,68
Äthylen . . . . .	C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	9,00	9,33	9,66	9,99	10,33	10,66
Benzol . . . . .	C <sub>6</sub> H <sub>6</sub>	6,68	6,99	7,30	7,62	7,93	8,24
Ammoniak . . . . .	NH <sub>3</sub>	8,85	9,30	9,60	10,00	10,40	10,80
Schwefelwasserstoff	H <sub>2</sub> S	11,38	11,80	12,22	12,64	13,06	13,48

Zahlentafel 16.

Kinematische Zähigkeit  $10^6 \nu$  einiger Gase bei 760 mm QS.  
Nach einer Zusammenstellung von L. Zipperer und G. Müller, a. a. O.

Stoff	$-10^0$	$0^0$	$10^0$	$20^0$	$30^0$	$40^0$
Luft . . . . .	12,45	13,36	14,27	15,17	16,08	16,99
Stickstoff . . . . .	12,41	13,31	14,21	15,11	16,01	16,91
Sauerstoff . . . . .	12,56	13,49	14,42	15,36	16,29	17,23
Wasserstoff . . . . .	88,12	94,27	100,42	106,56	112,71	118,85
Kohlenoxyd . . . . .	12,37	13,26	14,15	15,04	15,93	16,82
Kohlensäure . . . . .	6,61	7,16	7,70	8,25	8,79	9,34
Methan . . . . .	13,45	14,49	15,53	16,57	17,60	18,64
Äthylen . . . . .	6,89	7,46	8,02	8,59	9,15	9,72
Benzol . . . . .	1,84	2,01	2,18	2,35	2,53	2,70

Die Zähigkeitswerte gelten genau nur für trockene Gase. Tatsächlich ändert sich z. B. die Zähigkeit der Luft aber nur sehr wenig mit zunehmendem Feuchtigkeitsgrade, so daß die oben angeführten Werte auch für feuchte Luft gelten können.

Z. B. ist die Zähigkeit von vollständig mit Wasserdampf gesättigter Luft bei atmosphärischem Drucke und Zimmertemperatur (18°) nur um 0,8 vH größer als bei trockener Luft<sup>1</sup>. Die Zähigkeit von trockener und bis zu 60 vH feuchter Luft (60 vH relative Feuchtigkeit) unterscheiden sich nicht meßbar<sup>2, 3</sup>. Aus den Kurven Abb. 10 (Bereich 0° bis 100°) und Abb. 11 (Bereich -50° bis 1000°) kann man  $\eta$  entnehmen und  $\nu$  berechnen, wenn man  $\gamma$  kennt:  $\nu = \frac{\eta}{\gamma}$ . Ist nicht  $\gamma$  sondern der Druck  $p$  der Luft bekannt, so teilt man die Werte der  $\nu_{1at}$ -Kurven durch  $p$ ;  $\nu = \frac{\nu_{1at}}{p}$  in  $m^2/s$ .

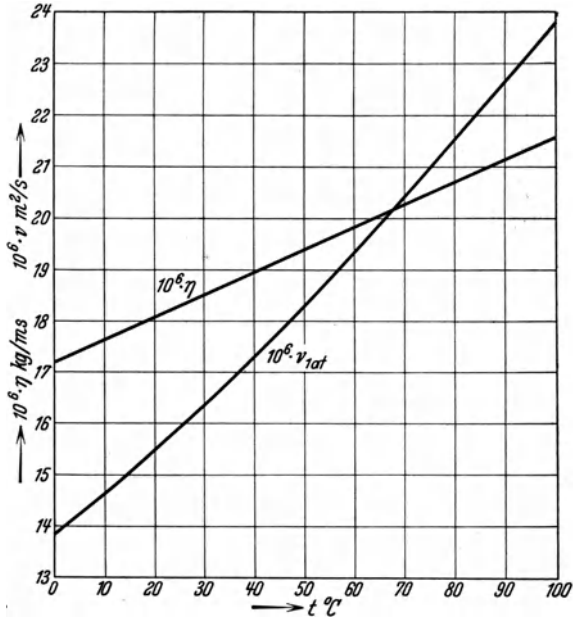


Abb. 10. Zähigkeit  $\eta \cdot 10^6$  und kinematische Zähigkeit  $\nu \cdot 10^6$  bei atmosphärischem Druck ( $p = 1 \text{ ata}$ ) von Luft im Bereiche 0 bis 100° C nach Zahlentafel 14.

Zahlentafel 17.

Zähigkeit  $\eta$  von einigen Gasen und Dämpfen nach anderen Messungen.

$t^\circ$	Azetylen	Äthylen	Ammoniak	Kohlensäure	Methan	Sauerstoff	Wasserstoff
- 75	—	7,00	6,90	10,50	7,70	14,80	6,80
- 50	—	8,90	7,60	11,65	8,60	16,30	7,40
- 25	—	8,75	8,45	12,77	9,55	17,70	7,93
0	—	9,65	9,30	13,90	10,35	19,20	8,49
10	—	10,05	9,65	14,37	10,80	19,72	8,73
20	10,20	10,30	10,00	14,82	11,15	20,30	8,95
30	10,49	10,60	10,40	15,28	11,60	20,90	9,17
40	10,79	10,90	10,80	15,72	12,00	21,45	9,37
50	11,13	11,20	11,15	16,18	12,35	22,00	9,57
60	11,31	11,55	11,50	16,65	12,65	22,60	9,77
70	11,66	11,85	11,90	17,10	12,90	23,10	9,95
80	11,98	12,15	12,25	17,56	13,20	23,64	10,15
90	12,24	12,48	12,60	18,02	13,40	24,20	10,35

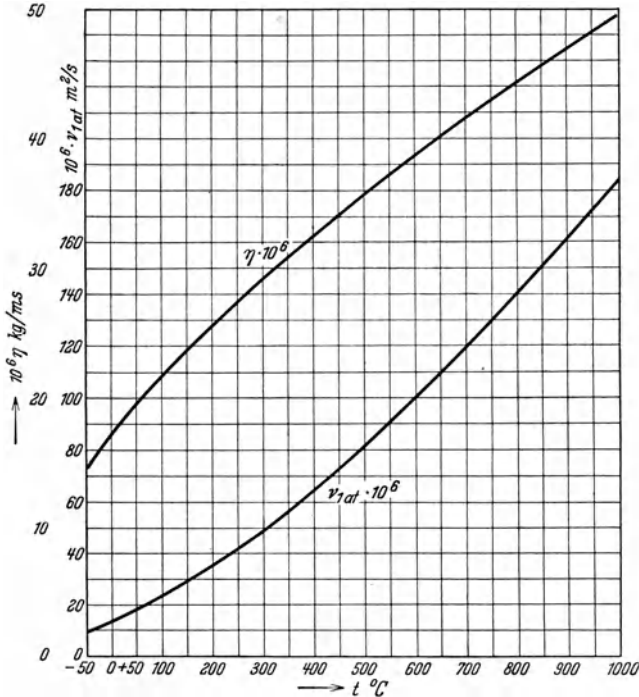
<sup>1</sup> Nach G. Zemplén: Untersuchungen über die innere Reibung der Gase. Ann. Physik (4) Bd. 29 (1909) S. 895. Nach L. Gilchrist<sup>2</sup> nur 0,3 vH größer bei 20°.

<sup>2</sup> Gilchrist, L.: Physik. Z. Bd. 14 (1913) S. 160; Physic. Rev. (2) Bd. 1 (1913) S. 124.

<sup>3</sup> Nach J. C. Stearns: Physic. Rev. (2) Bd. 27 (1926) S. 116 verkleinert der Wasserdampfgehalt die Zähigkeit um 0,3 vH.

Zahlentafel 17 (Fortsetzung).

$t^{\circ}$	Azetylen	Äthylen	Ammoniak	Kohlensäure	Methan	Sauerstoff	Wasserstoff
100	12,54	12,80	13,00	18,45	14,36	24,80	10,55
150	—	14,30	14,85	20,75	—	27,30	11,47
200	—	15,75	16,70	23,00	—	29,35	12,38
250	—	17,00	18,55	25,10	—	—	13,20
300	—	18,25	20,40	26,75	—	—	13,90

Abb. 11. Zähigkeit  $\eta \cdot 10^6$  und kinematische Zähigkeit  $\nu \cdot 10^6$  bei atmosphärischem Druck ( $p = 1 \text{ ata}$ ) von Luft im Bereiche  $-50$  bis  $+1000^{\circ} \text{C}$  nach Zahlentafel 14.Zahlentafel 18. Abhängigkeit der Zähigkeit  $\eta$  vom Druck bei Luft und Stickstoff und Kohlensäure. Werte  $\eta \cdot 10^6$  in  $\text{kg/ms}$ .

$p$ at	Luft $t = 16^{\circ} - 20^{\circ}$	Stickstoff $t = 30^{\circ}$	Kohlensäure $t = 30^{\circ}$
1	17,00	17,89	15,30
40	18,00	19,45	26,80
80	19,50	20,60	56,50
120	23,00	22,15	71,30
160	27,00	24,20	—
200	32,00	—	—

Bis 10 at bleiben die Abweichungen der Zähigkeit unter  $1 \text{ vH}^1$ .

<sup>1</sup> Über die Zähigkeitsänderung von Kohlensäure mit dem Druck s. a. H. Stakelbeck: Dissertation Karlsruhe 1930.

Zahlentafel 19. Rauminhalt  $v$  in  $\text{m}^3/\text{kg}$  von überhitztem und gesättigtem Wasserdampf (nach Mollier 1932)<sup>1</sup>.

Druck in at . . .	1	2	4	6	8	10
Sättigungstemp. <sup>0</sup>	99,1	119,6	142,9	158,1	169,6	179,0
$v$ gesättigt . . .	1,727	0,903	0,472	0,322	0,245	0,199
$t = 100^0$	1,732	—	—	—	—	—
150	1,976	0,980	0,481	—	—	—
200	2,217	1,103	0,546	0,360	0,267	0,210
250	2,455	1,224	0,608	0,403	0,300	0,237
300	2,693	1,343	0,669	0,444	0,331	0,263
350	2,930	1,463	0,729	0,485	0,362	0,288
400	3,166	1,581	0,789	0,525	0,393	0,313
450	3,403	1,700	0,849	0,565	0,423	0,337
Druck in at . . .	15	20	25	30	35	40
Sättigungstemp. <sup>0</sup>	197,4	211,4	222,9	232,8	241,4	249,2
$v$ gesättigt . . .	0,135	0,102	0,0817	0,0680	0,0582	0,0507
$t = 250^0$	0,155	0,114	0,089	0,0724	0,0603	0,0511
300	0,173	0,128	0,101	0,0831	0,0701	0,0604
350	0,190	0,142	0,112	0,0926	0,0786	0,0681
400	0,207	0,154	0,123	0,1015	0,0865	0,0751
450	0,224	0,167	0,133	0,1101	0,0940	0,0818

Zahlentafel 20. Zähigkeit  $\eta \cdot 10^6$  kg/ms von überhitztem und gesättigtem Wasserdampf (nach Speyerer 1925)<sup>2</sup>.

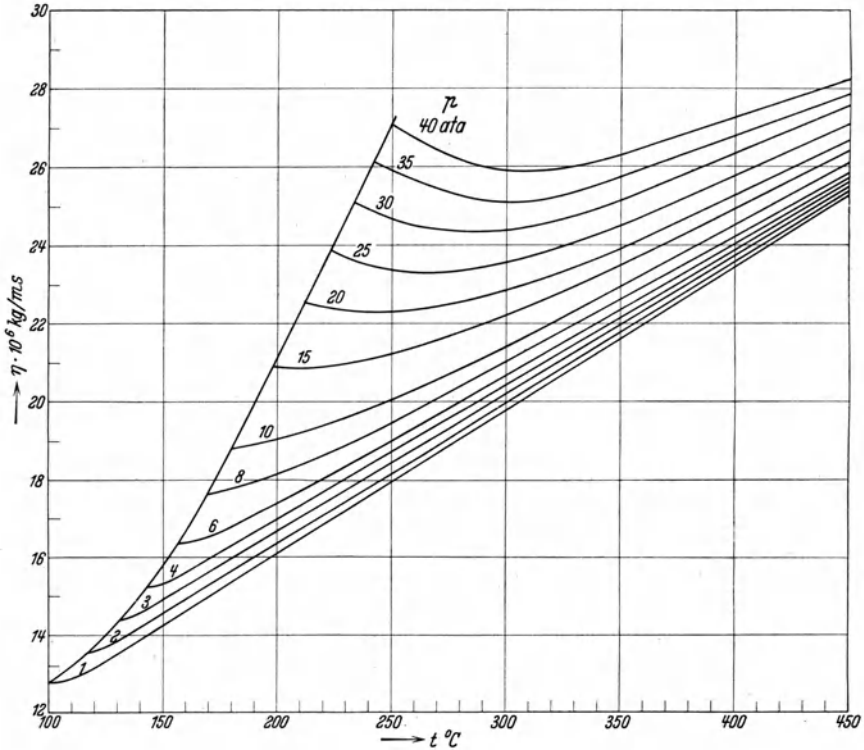
Druck in at . . .	1	2	4	6	8	10
Sättigungstemp. <sup>0</sup>	99,1	119,6	142,9	158,1	169,6	179,0
$\eta$ gesättigt . . .	12,55	13,50	14,68	15,60	16,50	17,60
$t = 110^0$	12,92	—	—	—	—	—
120	13,29	13,51	—	—	—	—
130	13,67	13,87	—	—	—	—
140	14,04	14,23	—	—	—	—
150	14,40	14,60	14,93	—	—	—
160	14,77	14,96	15,29	15,66	—	—
170	15,15	15,33	15,66	16,02	16,51	—
180	15,52	15,70	16,01	16,38	16,87	17,63
190	15,89	16,07	16,37	16,74	17,24	17,98
200	16,26	16,43	16,74	17,09	17,59	18,33
210	16,64	16,79	17,10	17,46	17,95	18,69
220	17,00	17,17	17,47	17,82	18,31	19,05
230	17,37	17,54	17,84	18,18	18,66	19,40
240	17,75	17,91	17,22	18,54	19,02	19,76
250	18,12	18,28	18,58	18,91	19,37	20,11
260	18,49	18,65	18,94	19,27	19,73	20,46
270	18,86	19,02	19,31	19,63	20,09	20,81
280	19,23	19,39	19,67	20,09	20,44	21,17
290	19,60	19,76	20,03	20,35	20,80	21,51
300	19,97	20,12	20,39	20,72	21,16	21,87

<sup>1</sup> Mollier, R.: Neue Tabellen und Diagramme für Wasserdampf, 7. Aufl. Berlin 1932.

<sup>2</sup> Speyerer, H.: Bestimmung der Zähigkeit des Wasserdampfes. VDI-Forsch.-Heft 1925 Nr. 273.

Zahlentafel 20 (Fortsetzung).

Druck in at . .	1	2	4	6	8	10
Sättigungstemp. <sup>0</sup>	99,1	119,6	142,9	158,1	169,6	179,0
$\eta$ gesättigt. . .	12,55	13,50	14,68	15,60	16,50	17,60
310	20,35	20,49	20,75	21,08	21,51	22,21
320	20,72	20,88	21,11	21,44	21,88	22,56
330	21,09	21,24	21,48	21,81	22,23	22,93
340	21,46	21,60	21,86	22,17	22,58	23,28
350	21,83	21,97	22,23	22,53	22,95	23,64

Abb. 12. Zähigkeit von gesättigtem und überhitztem Wasserdampf von verschiedenem Druck und Temperatur<sup>1</sup>.

Zähigkeitswerte bis zu Drücken von 40 at und Temperaturen bis 450° können aus Abb. 12 entnommen werden<sup>1</sup>. Die kinematische Zähigkeit ist dann  $\nu = \eta v$ .

Zähigkeit von Gasgemischen. Die technisch bedeutungsvollen Flüssigkeiten gasförmiger Art sind fast ausschließlich Gasgemische; auch Luft gehört dazu. Gemische von Dämpfen spielen nur eine untergeordnete Rolle.

Die Zähigkeit von Gasgemischen kann man im allgemeinen nicht nach der Mischungsregel bestimmen, d. h. die tatsächliche Zähigkeit kann nicht nach der prozentischen Beteiligung der einzelnen Gemischkomponenten ermittelt werden.

<sup>1</sup> Nach: Regeln für die Durchflußmessung mit genormten Düsen und Blenden. Berlin: VDI-Verlag 1932. Abb. 29. DIN 1952.



Bei nahezu gleich schweren Gemischteilen, wie Sauerstoff und Stickstoff bei Luft, stimmt die Mischungsregel ganz gut<sup>1</sup>. Sobald aber z. B. Wasserstoff beteiligt ist, wie im Leuchtgas, versagt die Mischungsregel, indem sie zu kleine Werte gibt. Siehe z. B. die Kurven von Abb. 13 für die gemessene und mit der Mischungsregel bestimmte Zähigkeit von Wasserstoff-Kohlenoxydgemischen.

Von den Physikern wurden mehrfach Gesetze zur Berechnung der Zähigkeit von Gasgemischen aus theoretischen Erwägungen heraus entwickelt, doch kam man kaum über das Zweistoffgemisch hinaus und konnte praktisch handliche Formeln nicht aufstellen<sup>2</sup>. Vorläufig herrscht auch noch nicht völlig Klarheit über die physikalischen Vorgänge bei Gasmischungen, obgleich schon außerordentlich eifrig auf diesem Gebiet gearbeitet wurde. Zähigkeitsmessungen an technischen Gasgemischen wurden bisher nur vereinzelt angestellt.

Die kinematische Zähigkeit  $\nu$  ist bei Gasen um so größer, je kleiner das spezifische Gewicht  $s$  ist. Biel<sup>3</sup> trug daher einige gelegentlich gemessene Zähigkeitswerte über dem relativen Gewicht ( $s$  (Luft = 1)) auf und legte durch diese Punkte eine Kurve (Abb. 14). Er empfahl, die Zähigkeit beliebiger Gase oder Gasgemische zu ihrem relativen Gewicht aus dieser Kurve zu entnehmen, solange nicht genauere Messungen vorliegen. Mann schlug die reziproke Mischungsformel als brauchbar vor<sup>4</sup>.

<sup>1</sup> Die Mischungsregel gibt bei Luft zwischen - 50 und + 200° nur Fehler von - 1,3 bis + 0,6 vH.

<sup>2</sup> Siehe S. Erk: Nr. 7.

<sup>3</sup> Biel, R.: Umrechnung des Druckabfalls in Rohrleitungen auf verschiedene Fördermittel. Gas- u. Wasserfach Bd. 70 (1927) S. 623.

<sup>4</sup> Mann, V.: Die Zähigkeit der technischen Gase. Gas- u. Wasserfach Bd. 73 (1930) S. 570.

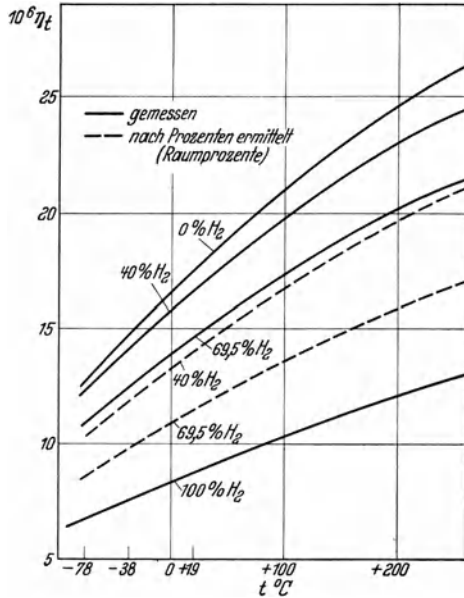


Abb. 13. Zähigkeit von Wasserstoff-Kohlenoxydgemischen bei verschiedenen Temperaturen und Mischungsverhältnissen. (Nach Angaben des Handbuches von Landolt und Börnstein.)

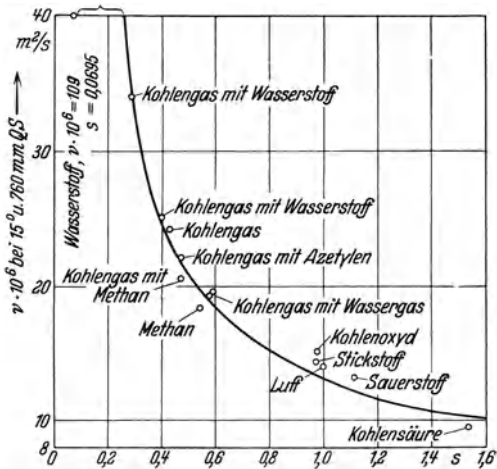


Abb. 14. Zusammenhang zwischen der kinematischen Zähigkeit (bei bestimmtem Druck und Temperatur) und dem relativen Gewicht bei Gasen nach Biel.

Sind  $\alpha, \beta, \gamma \dots$  die Raumeile der einzelnen Gemischkomponenten, so sei

$$\frac{1}{\nu} = \frac{\alpha}{\nu_1} + \frac{\beta}{\nu_2} + \frac{\gamma}{\nu_3} + \dots \text{ s/m}^2. \quad (12)$$

Zipperer<sup>1</sup> stellte eine praktische Näherungsformel auf, indem er benutzte, daß die Zähigkeiten  $\nu_0$  bei 0° und 760 mm QS von Sauerstoff, Stickstoff, Kohlenoxyd und Methan nur wenig voneinander verschieden sind. Als mittlere Werte können gelten

$10^6(\nu_i)_m =$	14,80	15,01	15,28	15,49	15,70 m <sup>2</sup> /s
bei $t = 10$		15	20	25	30 Grad.

Für Kohlendioxyd gilt etwa das 1/1,9fache und für höhere Kohlenwasserstoffverbindungen ( $C_mH_n$ ) das 1/2,2fache, für Wasserstoff das 7fache von  $(\nu_i)_m$ . Bei nicht zu hohem  $CO_2$  und  $C_mH_n$ -Gehalt kann man dann für die Zähigkeit beliebiger Gasgemische etwa setzen:

$$\nu_i = \frac{100 (\nu_i)_m}{(O_2 + CO + N_2 + CH_4) + 2(CO_2 + C_mH_n) + \frac{1}{7} H_2} \text{ m}^2/\text{s}, \quad (13)$$

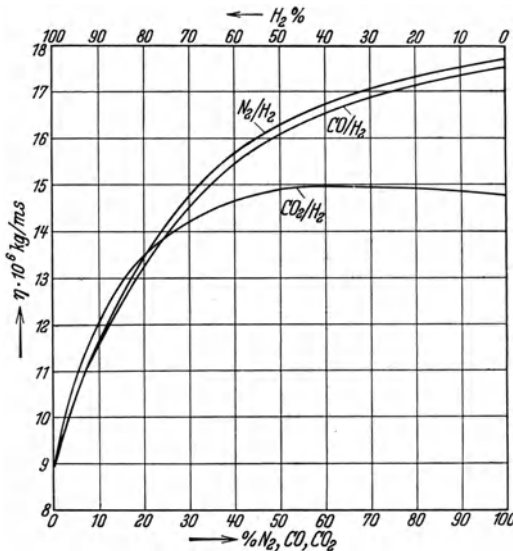


Abb. 15. Zähigkeit von Kohlenoxyd-Wasserstoff-, Kohlendioxyd-Wasserstoff- und Stickstoff-Wasserstoffgemischen von verschiedenem Mischungsverhältnis bei 20° (und atmosphärischem Druck) nach Messungen von Zipperer und Müller.

wobei die chemischen Zeichen gleichzeitig den Rauminhalt in vH bedeuten.

Zur Nachprüfung dieser Ansätze stellte Zipperer<sup>2</sup> systematisch eine Anzahl Zähigkeitsmessungen an Gemischen an. Zunächst bestimmte er die Zähigkeit von  $CO/H_2$ ,  $CO_2/H_2$  und  $N_2/H_2$ -Gemischen Abb. 15. Da  $O_2$  im allgemeinen nur in geringer Menge in technischen Gasgemischen enthalten ist und etwa so zähe wie  $N_2$  ist, kann man praktisch den  $O_2$ -Gehalt zum  $N_2$ -Gehalt schlagen. Ist dann z. B. ein Gemisch  $H_2/CO/CO_2$  gegeben, so sucht man zum entspr.  $H_2$ -Gehalt die Werte für das  $H_2/CO$  und das  $H_2/CO_2$ -Gemisch und bildet nach der Mischungsregel

$$\eta_{gem} \cdot l = \alpha \eta_1 + \beta \eta_2 + \gamma \eta_3 + \dots \quad (14)$$

mit  $\alpha + \beta + \gamma + \dots = 1$  oder mit  $\eta = \gamma \nu$

$$\nu_{gem} = \frac{\alpha \eta_1 + \beta \eta_2 + \gamma \eta_3 + \dots}{\alpha \gamma_1 + \beta \gamma_2 + \gamma \gamma_3 + \dots} \quad (15)$$

den Wert für das gesamte Gemisch. Ebenso verfährt man bei Gemischen aus vier Gasen.

<sup>1</sup> Zipperer, L.: Reynoldssche Zahl für Blendenmessung. Gas- u. Wasserfach Bd. 74 (1931) S. 1101.

<sup>2</sup> Zipperer, L., u. G. Müller: Beitrag zur Bestimmung und Berechnung der Zähigkeit von Gasgemischen. Gas- u. Wasserfach Bd. 75 (1932) S. 623ff.

**Beispiel:**  $N_2 = 17,8$  vH,  $CO = 26,2$  vH,  $CO_2 = 30,0$  vH,  $H_2 = 25,2$  vH,  $O_2 = 0,8$  vH, also  $N_2 + O_2 = 18,6$  vH. Die Zähigkeit dieses Gemisches wurde bei  $20^\circ$  zu  $\eta = 16,26 \cdot 10^{-6}$  kg/ms gemessen. Rechnung: Am Gemisch  $CO + CO_2 + O_2 + N_2 = 74,8$  vH vom ganzen Gemisch hat Anteil:  $CO = 26,2 : 74,8 = 35$  vH,  $CO_2 = 40,1$  vH,  $N_2 + O_2 = 24,9$  vH. Aus Abb. 15 entnimmt man zu  $H_2$ -Gemischen mit  $25,2$  vH Wasserstoff:

$$\begin{aligned} CO/H_2\text{-Kurve} \quad \eta &= 17,07 \frac{\text{kg}}{\text{ms}} \cdot 10^{-6}, \\ CO_2/H_2\text{-Kurve} \quad \eta &= 14,90 \frac{\text{kg}}{\text{ms}} \cdot 10^{-6}, \\ (N_2 + O_2)/H_2\text{-Kurve} \quad \eta &= 17,23 \frac{\text{kg}}{\text{ms}} \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

Das Mittel ergibt genau den gemessenen Wert, nämlich

$$10^6 \eta = 0,350 \cdot 17,07 + 0,401 \cdot 14,90 + 0,249 \cdot 17,23 = 16,24 \text{ kg/ms}_{20^\circ}.$$

Nach zahlreichen Versuchen von Müller und Zipperer scheint dieses Verfahren auf  $\pm 1$  vH genau, im Mittel auf  $\pm 0,5$  vH genau zu sein. Im allgemeinen erhält man etwas zu kleine Werte. Die Abweichungen sind aber praktisch unbedeutend, weil oft die Gaszusammensetzung gar nicht so genau bekannt ist. Hat das Gas außerdem noch Bestand an  $CH_4$  und  $C_mH_n$ , so ermittelt man zunächst die Zähigkeit des Gases ohne  $CH_4$  und  $C_mH_n$  wie im Beispiel und wendet dann die Mischungsregel auf das restliche Dreigasgemisch an. Solange der  $CH_4$ - und  $C_mH_n$ -Gehalt klein ist, stimmt diese Rechnung genügend genau mit den Messungen überein. Bei größerem Gehalt (z. B.  $CH_4 > 10$  vH) erhält man jedoch Fehler von 1 vH und mehr. Der Vergleich zwischen Rechnung und Messung ergab ferner, daß die Formeln von Mann [Gl. (12)] und Zipperer [Gl. (13)] lediglich brauchbar sind. Formel (13) kann man noch verbessern, wenn man den Wert  $(\nu_i)_m$  nach der Mischungsregel anteilig zum jeweiligen Gehalt an  $CO$ ,  $CH_4$ ,  $O_2$  und  $N_2$  berechnet. Nach Abb. 15 erhält man  $\eta$  bei  $20^\circ$ . Für die Umrechnung auf Temperaturen von  $-10^\circ$  bis  $+40^\circ$  gilt mit großer Genauigkeit

$$\nu_t = \frac{\eta_{20^\circ}}{1,2 s} [1 + 0,006(t - 20)] \frac{1,033}{p} \text{ m}^2/\text{s}. \quad (16)$$

Zum obigen Beispiel:  $\eta_{gem} = 16,24 \cdot 10^{-6}$  kg/ms bei  $20^\circ$ . Wie groß ist  $\nu$  bei  $10^\circ$  und  $5$  atü?

$$s_{gem} = 0,01 (N_2 s_{N_2} + CO_2 s_{CO_2} + CO s_{CO} + \dots) = 0,910$$

(s nach Zahlentafel 12). Dann ist

$$10^6 \nu_t = \frac{16,24}{1,2 \cdot 0,91} [1 + 0,006 \cdot (-10)] \frac{1,033}{5 + 1} = 2,40 \text{ m}^2/\text{s}.$$

Trägt man die von Zipperer an zahlreichen ganz verschiedenen Gasgemischen gemessenen Zähigkeiten nach dem Vorgange von Biel über dem relativen Gewicht der Gemische auf (Abb. 16), so kann man die einzelnen Punkte recht gut durch einen Kurvenzug verbinden, der sich durch die Gleichung

$$10^6 \nu = 0,755 + 13,82/s - 0,775/s^2 \text{ m}^2/\text{s} \quad (17)$$

( $20^\circ$ , 760 mm QS) ausdrücken läßt.

Zum obigen Beispiel:

$$\nu_{20^\circ 760 \text{ mm QS}} = \frac{\eta}{1,2 s} = \frac{16,26 \cdot 10^{-6}}{1,2 \cdot 0,91} = 14,9 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

gemessen; nach Gl. (17):

$$v_{200\ 760\ \text{mm QS}} = \left(0,755 + \frac{13,82}{0,91} - \frac{0,775}{0,91^2}\right) 10^{-6} = 15,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}^1.$$

Gl. (17) gilt im Bereich von Zipperers Versuchen [ $\text{CO}_4 = 4,6$  bis  $50,4$  vH,  $\text{CO}_2 = 3,3$  bis  $60,3$  vH,  $\text{H}_2 = 5,1$  bis  $87,7$  vH,  $\text{CH}_4 = 2,2$  bis  $20,9$  vH,  $\text{O}_2 = 0,0$  bis  $2,0$  vH

(Raumteile)]. Innerhalb dieser Grenzen liegen die meisten technischen Brenngase. Vorteilhaft bei diesem Verfahren ist noch, daß man mit dem spezifischen Gewicht rechnet, weil praktisch keineswegs immer die genaue Zusammensetzung des Gasgemisches bekannt ist<sup>2</sup>. Gl. (17) wird in der Größenordnung auch durch Angaben von Biegeleisen<sup>3</sup> bestätigt, der nach Versuchen von Chandler für Leuchtgas ansetzte

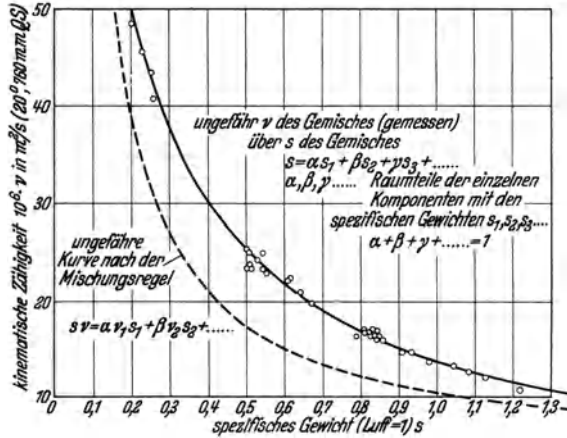


Abb. 16. Zusammenhang zwischen der kinematischen Zähigkeit (bei bestimmtem Druck und Temperatur) und dem relativen Gewicht bei Gasgemischen nach neueren Messungen.

$$\eta_i = 15,0 (T/273)^{0,77} \cdot 10^{-6} \text{ kg/ms}.$$

Das ist bei  $s = 0,5$  gleich  $v_{200, 760\ \text{mm QS}} = 26,4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ , nach Gl. (17) war  $v_{200, 760\ \text{mm QS}} = 25,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ . Zipperer fand  $24,1 \cdot 10^{-6}$ .

Bis weitere Zähigkeitsmessungen vorliegen, dürfte die nachstehende Zahlentafel (nach Abb. 16) für die meisten praktischen Zwecke ausreichen<sup>2</sup>.

Zahlentafel 21.

Gasart	s lt. Gaskalender (1932) Bd. 2 S. 289	$10^6 v \text{ m}^2/\text{s}$ bei $20^\circ$ und 760 mm QS
Steinkohlengas, trockner Betrieb . . . . .	0,44	28,0
Steinkohlengas, nasser Betrieb . . . . .	0,45	27,5
Steinkohlengas mit 40 vH Wassergas . . . . .	0,47 bis 0,49	26,3
Wassergas (blau) . . . . .	0,53	24,1
Wassergas (karburiert) . . . . .	0,7	19,0
Generatorgas aus Kohle . . . . .	0,94	14,4
Generatorgas aus Koks . . . . .	1,0	13,8
Generatorgas, nasser Betrieb . . . . .	0,88	15,4

<sup>1</sup> Nach Biels Kurve Abb. 14 erhält man  $14,7 \cdot 10^{-6}$ ; nach Manns Gl. (12)  $14,4 \cdot 10^{-6}$ ; nach Zipperers Gl. (13)  $14,1 \cdot 10^{-6}$ ; nach Abb. 15  $14,9 \cdot 10^{-6}$ ; nach Versuch  $14,9 \cdot 10^{-6}$ .

<sup>2</sup> Richter, H.: Beitrag zur Bestimmung und Berechnung der Zähigkeit von Gasgemischen. Gas- u. Wasserfach Bd. 75 (1932) S. 989.

<sup>3</sup> Biegeleisen, B.: Die Grundlagen zur Berechnung von Gasrohrleitungen. München 1918. Dingers polytechn. J. Bd. 332 (1917) S. 57. Chandler, D.: The flow of gases through pipes. J. Gaslighting 1910 S. 357.

Zahlentafel 21 (Fortsetzung).

Gasart	$s$ lt. Gaskalender (1932) Bd. 2 S. 289	$10^6 \nu \text{ m}^2/\text{s}$ bei $20^\circ$ und 760 mm QS
Braunkohlengas (bei $500^\circ$ entgast) . . . . .	0,6	22,0
Ölgas . . . . .	0,86	15,6
Schwelgas aus Steinkohlen. . . . .	0,54	23,8
Koksofengas . . . . .	0,41	29,5
Mondgas . . . . .	0,82	16,4
Gichtgas . . . . .	0,97	13,9
Blaugas . . . . .	0,96	14,0
Naturgas. . . . .	0,58	23,0
Luftgas . . . . .	0,92 bis 1,12	14,5 bis 12,2
Rauchgas . . . . .	rd. 0,88	15,4

## 2. Kontinuitätsgesetz.

Eine beliebige Flüssigkeit möge sich unter Wirkung eines zeitlich unveränderlichen Druckes schon so lange bewegen, daß ein Beharrungszustand erreicht ist. Dieser Beharrungszustand kann dadurch gekennzeichnet sein, daß an jeder Stelle des Stromes sich zeitlich immer alles gleichbleibt, d. h. alle Größen, die auf die Bewegung Einfluß haben, zeitlich unveränderlich sind (alle Ableitungen nach der Zeit am gleichen Orte verschwinden). Man spricht dann von einer stationären Bewegung. Fließt aber z. B. eine Flüssigkeit unter Wirkung periodisch veränderlicher Drücke, also pulsierend, so wird zwar im Sinne des Ingenieurs auch ein Beharrungszustand (Folge von gleichartigen Perioden), jedoch kein vollkommen stationärer Zustand erreicht. Man wird aber praktisch eine ganze Reihe von Bewegungsvorgängen, die nicht völlig stationär verlaufen (z. B. die turbulente Rohrströmung, siehe später), rechnerisch wie eine stationäre Strömung behandeln können. Diese Annäherung ist um so genauer, je kurzzeitiger die Perioden aufeinander folgen. Wir wollen uns nur mit vollkommen stationären Bewegungen beschäftigen und angenähert stationäre als solche betrachten.

Über die stationäre Strömung einer beliebigen Flüssigkeit durch eine geschlossene Rohrleitung sagt das Kontinuitätsgesetz aus, daß in der Zeiteinheit durch jeden Rohrquerschnitt dasselbe Flüssigkeitsgewicht gefördert wird. Voraussetzung ist dabei, daß die Leitung dicht ist. Bei Rohrverzweigungen gilt das Kontinuitätsgesetz sinngemäß für die Summe der abgezweigten Ströme. An den Leitungsquerschnitt stellt das Gesetz keine besonderen Anforderungen; er kann sich beliebig, auch unstetig, ändern.

Es bedeutet  $G_s$  das Durchflußgewicht in kg/s und  $G_h$  in kg/h,  $Q_s$  das Durchflußvolumen in  $\text{m}^3/\text{s}$  und  $Q_h$  in  $\text{m}^3/\text{h}$ ,  $F$  den Rohrquerschnitt in  $\text{m}^2$ ,  $\gamma$  das spezifische Gewicht des Stromes in  $\text{kg}/\text{m}^3$  und  $v = \frac{1}{\gamma}$

das spezifische Volumen in  $\text{m}^3/\text{kg}$ . Die einfachste Kontinuitätsgleichung lautet:

$$G_s = G_{s1} = G_{s2} = \dots = \text{konst.} \quad (18)$$

Die Zeiger 1, 2 . . . deuten auf verschiedene Leitungsquerschnitte hin, siehe Abb. 17. Die einzelnen Flüssigkeitsteilchen durchsetzen den Rohrquerschnitt im allgemeinen mit verschiedener Geschwindigkeit  $w_i$  in Richtung der Achse (Richtung  $l$ ). Die Reibung bewirkt, daß  $w_i$  nach der Rohrwand zu bis auf Null abnimmt, siehe Abb. 18. Das spezifische Gewicht  $\gamma$  ist in geraden Leitungen praktisch über den ganzen Querschnitt gleich groß. Dann ist das strömende Gewicht

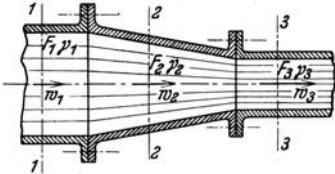


Abb. 17. Leitungsstück zur Erläuterung der Kontinuitätsbedingung.

$$G_s = \gamma \int^F w_i dF = F w \gamma, \quad (19)$$

wobei  $w$  die mittlere Geschwindigkeit im Rohrquerschnitt darstellt. Unter der mittleren Geschwindigkeit versteht man diejenige, die mit der Fläche vervielfacht denselben Durchfluß ergibt, wie die Summe der Produkte aller Einzelgeschwindigkeiten  $w_i$  mit den zugehörigen Querschnittselementen  $dF$ . Nun erhält man eine weitere Kontinuitätsbedingung

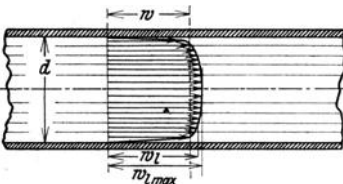


Abb. 18. Verteilung der Strömungsgeschwindigkeit  $w_1$  über den Querschnitt eines Kreisrohres.

$$G_s = F_1 w_1 \gamma_1 = F_2 w_2 \gamma_2 = \dots = \text{konst} \quad (20)$$

für beliebige Querschnitte und für Kreisquerschnitte

$$\frac{4}{\pi} G_s = d_1^2 w_1 \gamma_1 = d_2^2 w_2 \gamma_2 = \dots = \text{konst.} \quad (21)$$

Dabei ist

$$d = \sqrt{\frac{4 G_s}{\pi w \gamma}} = \sqrt{\frac{4 Q_s}{\pi w}} = \sqrt{\frac{G_h}{2827 \gamma w}} = \sqrt{\frac{Q_h}{2827 w}}. \quad (22)$$

Wegen des unveränderlichen spezifischen Gewichts gilt für raumbeständige Flüssigkeiten

$$Q_s = \frac{G_s}{\gamma} = F_1 w_1 = F_2 w_2 = \dots = \text{konst} \quad (23)$$

und wenn alle Querschnitte flächengleich sind

$$w = \frac{G}{F \gamma} = w_1 = w_2 = \dots = \text{konst.} \quad (24)$$

Bei gasförmigen Flüssigkeiten ändert sich das spezifische Gewicht im allgemeinen von Querschnitt zu Querschnitt (s. später). Dabei ist

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{F_2 \gamma_2}{F_1 \gamma_1}, \quad \text{und für } F = \text{konst} \text{ ist } w \gamma = \frac{w}{v} = \text{konst.} \quad (25)$$

Für sehr kleine Änderungen von  $w$ ,  $\gamma$  und  $F$  gilt

$$dG = F w \gamma \left( \frac{dF}{F} + \frac{dw}{w} + \frac{d\gamma}{\gamma} \right)$$

oder, weil  $dG = 0$  ist,

$$\frac{dF}{F} = -\frac{dw}{w} - \frac{d\gamma}{\gamma} = -\frac{dw}{w} + \frac{dv}{v}. \quad (26)$$

Setzt man diese Gleichung für den besonderen Fall an, daß  $\gamma = \frac{1}{v} = \text{konst.}$ , so kommt man wieder auf Gl. (23).

### 3. Energieformen.

Der gesamte Energiegehalt eines bewegten Flüssigkeitsteilchens kann aus einem potentiellen und einem kinetischen Teil aufgebaut werden. Die chemischen Eigenschaften der Flüssigkeit sollen sich nicht ändern; aus chemischen Vorgängen folgende Energieumsetzungen sollen unberücksichtigt bleiben.

#### I. Potentielle Energie.

Die potentielle Energie kann im weiteren Sinne aufgespeichert sein in Form von Gewichtsenegie, Druckenergie und Wärmeenergie.

a) **Gewichtsenegie oder Energie der Lage** ist bedingt durch das Gewicht  $G$  (kg) und die geodätische Höhe  $H$  (m) des Flüssigkeitsteilchens, das gegenüber der Bezugsebene den Arbeitsinhalt  $HG$  (mkg) besitzt. Dieser Energieinhalt entspricht der Arbeit, die durch Auslösung eines Zwangszustandes, z. B. durch Fallenlassen des gehobenen Teilchens, geleistet werden kann.

b) **Druck- oder Spannungsenergie** befähigt das Flüssigkeitsteilchen einen Widerstand zu überwinden, also etwa in einem Zylinder an einem Kolben Arbeit zu leisten, oder auf eine Höhe  $P/\gamma$  (m) zu steigen. Dabei bezeichnet  $P$  den Druck (kg/m<sup>2</sup>), unter dem das Teilchen steht, und  $\gamma$  (kg/m<sup>3</sup>) das spezifische Gewicht der Flüssigkeit.

#### II. Innere Energie.

a) **Wärme- oder innere Energie** stellt das innere Arbeitsvermögen dar, welches durch eine Temperaturdifferenz gegenüber einer Bezugstemperatur bedingt ist. Die innere Energie wird durch  $u$  in kcal/kg eingeführt. Gibt  $A = \frac{1}{427}$  den Wert von 1 mkg in Wärmeeinheiten an (mechanisches Wärmeäquivalent, 1 mkg =  $A$  kcal), so entspricht der innere Arbeitsgehalt der Gewichtsenegie  $\frac{Gu}{A} = 427 Gu$  in mkg. Die innere Energie von raumbeständigen Flüssigkeiten kann man nicht unmittelbar zur Arbeitsleistung heranziehen, weil deren Rauminhalt fast nicht von der Temperatur abhängt. Bei gasförmigen Stoffen dagegen kann die innere Energie bei der Ausdehnung des Gases zum Teil zur Verrichtung der Ausdehnungsarbeit beitragen.

b) **Wärmeinhalt.** Neben der Energie führen wir noch eine ihr ähnliche Größe

$$i = A \frac{P}{\gamma} + u = A P v + u$$

ein. Wir nennen sie Wärmeinhalt (Summe von potentieller und Wärmeenergie).

### III. Kinetische Energie.

Bewegt sich ein Flüssigkeitsteilchen von der Masse  $M = \frac{G}{g}$  (kg s<sup>2</sup>/m) in irgendeiner Richtung mit der Geschwindigkeit  $w$  (m/s), so stellt

$$M \frac{w^2}{2} = G \frac{w^2}{2g} \text{ (mkg)}$$

die kinetische Energie oder Wucht des Teilchens dar. Für das Gewicht  $G = 1$  kg erhält man die sog. Geschwindigkeitshöhe

$$\frac{w^2}{2g} \left( \frac{\text{mkg}}{\text{kg}} = \text{m} \right).$$

Entsprechend nennt man  $P/\gamma$  (m) die Druckhöhe.

Würde die Geschwindigkeit  $w$  plötzlich zu Null werden, d. h. das Teilchen senkrecht auf ein Hindernis stoßen, so könnte es sich vermöge seiner kinetischen Energie auf die Höhe  $w^2/2g$  erheben (Stauhöhe) oder an dem Hindernis eine Arbeit  $w^2/2g$  in mkg/kg verrichten.

## 4. Energiesätze für reibungslose Flüssigkeiten.

### a) Begriff der reibungslosen Flüssigkeit.

Man kann sich eine Flüssigkeit vorstellen, die mit unendlich großer Formänderungsgeschwindigkeit ausgestattet ist. Ein solcher Körper setzt seiner Verformung keinen Widerstand entgegen und könnte reibungslose Bewegungen ausführen. Die einfachste Art einer Rohrströmung ist eine Parallelströmung, d. h. alle Flüssigkeitsteilchen bewegen sich in einem geraden Rohr parallel zur Achse. Wirkt keine innere Reibung, so könnten alle Teilchen mit derselben Geschwindigkeit strömen (Abb. 19).

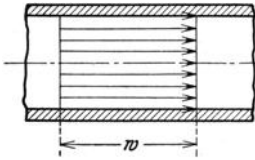


Abb. 19. Gleichmäßige Geschwindigkeitsverteilung über den Rohrquerschnitt bei einer gedachten reibungslosen Flüssigkeit.

### b) Energiegleichungen.

Der gesamte Energiegehalt  $E$  einer Flüssigkeitsmenge von 1 kg Gewicht kann durch die Summe

$$E = H + \frac{P}{\gamma} + \frac{u}{A} + \frac{w^2}{2g} \left( \frac{\text{mkg}}{\text{kg}} = \text{m} \right) \quad (27)$$

angegeben werden. Wenn man annimmt, daß die einzelnen Flüssigkeitsteilchen in jedem Normalquerschnitt der Leitung denselben Energiegehalt besitzen, dann gilt Gl. (27) für den Energiegehalt je kg der gesamten fließenden Masse. Unter  $P/\gamma$  muß man dabei die mittlere Druckhöhe und unter  $w^2/2g$  die mittlere Geschwindigkeitshöhe im Querschnitt verstehen.  $H$  mißt die Schwerpunkthöhe des Leitungsquerschnitts über einer bestimmten Bezugsebene. Bei der Strömung in



anderen als geraden Rohren kann man sich die Flüssigkeit in einzelnen Fäden fließend denken, die irgendwelche Bahnen verfolgen (siehe z. B. Abb. 140). In diesem Falle gilt für jeden Faden eine Energiegleichung.

Führt die gesamte Flüssigkeit eine stationäre Parallelbewegung aus (von Querschnitt 1 nach 2) und wird während dieser Bewegung eine Energiemenge  $Q'_{21}$  in kcal/kg von außen zugeleitet, so heißt die allgemeine Energiegleichung

$$H_2 - H_1 + \frac{P_2}{\gamma_2} - \frac{P_1}{\gamma_1} + \frac{1}{A} (u_2 - u_1) + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = \frac{1}{A} Q'_{21}.$$

Für unendlich benachbarte Querschnitte folgt

$$dH + d\left(\frac{P}{\gamma}\right) + \frac{du}{A} + \frac{w dw}{g} = \frac{dQ'}{A}. \quad (28)$$

Bei der Bewegung tropfbarer Flüssigkeiten ist eine Vereinfachung der allgemeinen Energiegleichung gegeben, weil das spezifische Gewicht unveränderlich ist, sofern keine Energie zu- oder abgeführt wird. Da der Gehalt an innerer Energie nicht unmittelbar zur Arbeitsleistung herangezogen werden kann, lautet mit  $Q'_{21} = 0$  die vereinfachte Gleichung

$$H + \frac{P}{\gamma} + \frac{w^2}{2g} = \text{konst}$$

oder

$$dH + \frac{1}{\gamma} dP + \frac{w dw}{g} = 0. \quad (29)$$

Zur Erläuterung dieses „Satzes von Bernoulli“ möge die Bewegung einer tropfbaren Flüssigkeit durch ein Rohrstück nach Art eines Venturimessers untersucht werden, Abb. 20. Das Diagramm zeigt die Energieumsetzungen des Flüssigkeitsfadens in der Rohrachse. Die Energie der Lage nimmt mit ansteigender Leitung gleichmäßig zu. Die kinetische Energie wächst mit der Verkleinerung und fällt mit der Vergrößerung des Leitungsquerschnittes. Die Gesamtenergie bleibt unverändert. Für das Energiediagramm ist es gleichgültig, in welcher Richtung die Leitung durchflossen wird.

Auch bei gasförmigen Flüssigkeiten ist eine Vereinfachung der allgemeinen Energiegleichung möglich, wenn man die Änderung der Lagenenergie vernachlässigt, die im Verhältnis zu den übrigen Energieumwandlungen meist sehr klein ist. Das ist bei geneigten Rohren immer zulässig, wenn keine großen Höhen zu überwinden sind. Für die ganze bewegte Masse kann man also schreiben

$$\frac{P_2}{\gamma_2} - \frac{P_1}{\gamma_1} + \frac{u_2 - u_1}{A} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = \frac{1}{A} Q'_{21}$$

oder

$$d\left(\frac{P}{\gamma}\right) + \frac{du}{A} + \frac{w dw}{g} = \frac{dQ'}{A}. \quad (30)$$

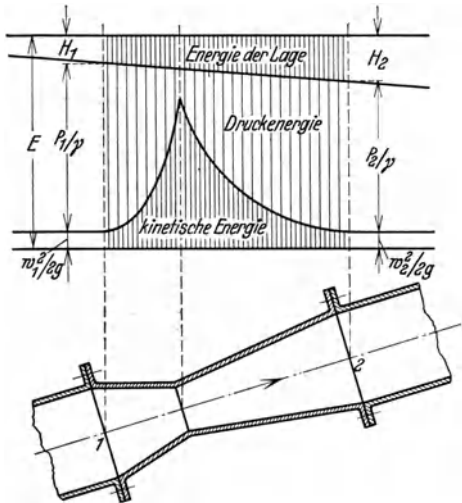


Abb. 20. Energieumwandlungen in einer tropfbaren Flüssigkeit bei der Bewegung durch ein Rohrstück nach Art eines Venturimessers. (Energiebild des Achsfadens.)

Mit der Einführung des Wärmeinhalts erhält man endlich

$$\frac{di}{A} + \frac{w dw}{g} = \frac{dQ'}{A}. \quad (31)$$

Ganz allgemein gilt für ein endliches Leitungsstück<sup>1</sup>

$$H_1 - H_2 + \int_2^1 \frac{1}{\gamma} dP = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g}. \quad (32)$$

Die linke Seite stellt die zur Beschleunigung der Flüssigkeit aufgewandte (oder bei der Verzögerung freiwerdende) Arbeit dar; Gl. (32) beschreibt die Umwandlungen von potentieller Energie in kinetische.

### c) Druck/Volumen-Diagramme.

Wie aus den Energiegleichungen hervorgeht, bedeuten Energieumwandlungen immer, daß Arbeit geleistet oder verbraucht wird. Die Frage ist nun, wie groß dieser Energieaustausch ist, damit man Gl. (32) weiter entwickeln kann. Zur Lösung dieser Aufgabe eignen sich vorzüglich Druck/Volumen-Diagramme, die man dieser Eigenschaft halber auch Arbeitsdiagramme nennt. Es mögen hier mit Rücksicht auf die späteren Überlegungen nur Druckabfallvorgänge betrachtet werden, für Drucksteigerungen gilt sinngemäß das Umgekehrte.

**I. Tropfbare Flüssigkeiten.** Bei tropfbaren Flüssigkeiten mit vernachlässigbar geringer Zusammendrückbarkeit findet beim Druckabfall keine Raumänderung statt. Die Zustandsänderung wird im  $P/V$ -Diagramm durch eine Parallele zur  $P$ -Achse dargestellt. Die (Füllungs-)Arbeit, die in einer waagerechten Leitung geleistet wird, wenn der Druck von  $P_1$  auf  $P_2$  fällt, ist

$$L = \int_2^1 v dP = v(P_1 - P_2) = \frac{P_1 - P_2}{\gamma} \text{ in } \frac{\text{mkg}}{\text{kg}} = \text{m}. \quad (33)$$

Der Pfeil in Abb. 21 gibt den Verlauf der Zustandsänderung an. Die schraffierte Fläche  $12ba1$  entspricht der geleisteten Arbeit. Die Fläche aller Streifen  $vdP$  ist immer dieselbe. Für eine geneigte Leitung gilt nach Gl. (32)

$$H_1 - H_2 + \frac{P_1 - P_2}{\gamma} = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} \text{ in m}. \quad (34)$$

Abb. 21. Druck/Volumen-Diagramm zum Druckabfall in einer tropfbaren Flüssigkeit.

<sup>1</sup> Mit

$$d\left(\frac{P}{\gamma}\right) = \frac{dP}{\gamma} + P d\left(\frac{1}{\gamma}\right) \quad \text{und} \quad dQ' = du + AP d\left(\frac{1}{\gamma}\right).$$

**II. Gasförmige Flüssigkeiten.** Im Gegensatz zu tropfbaren hängen gasförmige Flüssigkeiten dem Raume nach sehr stark von Druck und Temperatur ab. Eine gasförmige Flüssigkeit dehnt sich beim Druckabfall aus, was im  $P/V$ -Diagramm durch die Kurve 1—2 angedeutet wird (siehe Abb. 22). Durch die stetig zunehmende Ausdehnungsarbeit wird der Streifen  $v dP$  während der Zustandsänderung von 1 nach 2 in diesem Falle stetig an Fläche größer.

Bekanntlich sucht ein Gas bei seiner Ausdehnung der Umgebung Wärme zu entziehen. Ist eine Wärmezufuhr möglich, so wird die innere und potentielle Energie während der Zustandsänderung weniger stark vermindert, als wenn keine Wärme nachfließt. Es sind nun drei verschiedene Fälle denkbar:

1. Die zufließende Wärmemenge deckt allein die Arbeit  $L$ ,
2. es fließt keine Wärme von außen zu ( $dQ' = 0$ ),
3. es fließt weniger Wärme zu, als zur Leistung der Arbeit  $L$  gebraucht wird

$$(0 < dQ' < AdL).$$

Diese drei Fälle sind getrennt zu untersuchen. Es genügt, wenn wir uns nur mit den Vorgängen bei einem vollkommenen Gas beschäftigen, weil sich wirkliche Gase und hochüberhitzte Dämpfe ganz ähnlich verhalten. Für gesättigte und weniger hoch überhitzte Dämpfe gelten besondere Beziehungen. Bei den folgenden Ableitungen soll die allgemeine Gasgleichung  $PV = GR T$  genau gelten.

1. Die Zustandsänderung soll bei unveränderlichem Gehalt an innerer und potentieller Energie, also bei gleichbleibender Temperatur erfolgen. Dann sagt die allgemeine Gasgleichung aus, daß bei unveränderlichem Betrage von  $G$ ,  $R$  und  $T$  das Produkt  $PV = \text{konst}$  sein muß. Während des Ausdehnungsvorganges muß Wärmeenergie von außen durch die Leitungswand zugeführt werden, damit die Gastemperatur nicht absinkt. Für die isothermische Zustandsänderung gelten die Beziehungen:

$$P_1 V_1 = P_2 V_2; \quad \frac{P_1}{\gamma_1} = \frac{P_2}{\gamma_2}; \quad \frac{dP}{P} = \frac{d\gamma}{\gamma} = -\frac{dV}{V} = -\frac{dv}{v}. \quad (35)$$

Daraus ist ersichtlich, daß bei isothermischer Strömung die Druckenergie nicht zur Bewältigung der Beschleunigungsarbeit herangezogen wird. Diese Arbeit wird nur durch die zugeführte Wärmemenge  $Q'_{21}$  geleistet. Die Kurve  $Pv = \text{konst}$  ist im Druck/Volumen-Diagramm eine gleichseitige Hyperbel. Die Energie

$$-\frac{Q'_{21}}{A} = L = \int_{P_2}^{P_1} v dP$$

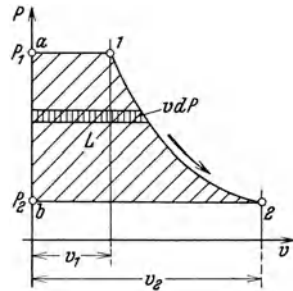


Abb. 22. Druck/Volumen-Diagramm zum Druckabfall in einer gasförmigen Flüssigkeit.

entspricht der schraffierten Fläche *12ba1* im  $P/v$ -Diagramm Abb. 22. Mit Gl. (35) erhält man für die Beschleunigungsarbeit bei isothermischer Strömung

$$L_{is} = P_1 v_1 \int_{P_2}^{P_1} \frac{dP}{P} = P_1 v_1 \ln \left( \frac{P_1}{P_2} \right) \text{ in mkg/kg.} \quad (36)$$

2. Das Gas soll während der Ausdehnung weder Wärme aufnehmen noch abgeben. Dieser Vorgang ist mit einem Temperaturabfall verbunden und kann durch die Gleichung  $Pv^\kappa = \text{konst}$  ausgedrückt werden. Da der Zustand eines Gases stets durch 2 der 3 Zustandsgrößen Druck, Volumen und Temperatur bestimmt ist, kann schon eine Beziehung zwischen  $P$  und  $v$  allein den adiabatischen Vorgang vollständig wiedergeben. Der Exponent  $\kappa$  ist ein Festwert vom Betrage

rd. 1,4 für zweiatomige Gase (Luft, Sauerstoff, Stickstoff, Wasserstoff, Stickoxyd, Kohlenoxyd),

rd. 1,3 für Kohlendioxyd, Methan, überhitzten Wasserdampf bis 25 at, Ammoniak.

Für 2 Zustände 1 und 2 gelten die Beziehungen

$$P_1 V_1^\kappa = P_2 V_2^\kappa; \quad \frac{P_1}{\gamma_1^\kappa} = \frac{P_2}{\gamma_2^\kappa}; \quad \frac{dP}{P} = \kappa \frac{d\gamma}{\gamma} = -\kappa \frac{dV}{V} = -\kappa \frac{dv}{v}. \quad (37)$$

Da bei adiabatischem Ausdehnungsvorgang die Temperatur fällt, muß der Raum  $V_2$  bei der Adiabate kleiner als bei der Isotherme sein, damit ist  $\gamma_2 > \gamma_1$  und  $(P_2/\gamma_2)_{ad} < (P_2/\gamma_2)_{is}$ . Das heißt, daß außer der inneren Energie auch die Druckenergie kleiner geworden ist. Bei adiabatischer Strömung dient die Abnahme an potentieller und innerer Energie allein zur Deckung der Beschleunigungsarbeit. Die Adiabate erscheint im Druck/Volumen-Diagramm als allgemeine Hyperbel. Folgende Arbeit ist in diesem Falle zu leisten:

$$L_{ad} = \int_{P_2}^{P_1} v dP = v_1 P_1^{\frac{1}{\kappa}} \int_{P_2}^{P_1} P^{-\frac{1}{\kappa}} dP = \frac{\kappa}{\kappa - 1} P_1 v_1 \left[ 1 - \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right]$$

und mit Gl. (37)

$$L_{ad} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \left[ \frac{P_1}{\gamma_1} - \frac{P_2}{\gamma_2} \right] = \frac{\kappa}{\kappa - 1} R(T_1 - T_2) \text{ in mkg/kg.} \quad (38)$$

Diese Arbeit ist wegen  $dQ' = 0$  nach Gl. (31) gleich der Differenz der Wärmeinhalte

$$L_{ad} = \frac{1}{A} (i_1 - i_2).$$

Die Wärmeenergie selbst nimmt um den Betrag

$$u_1 - u_2 = A \frac{1}{\kappa - 1} \left[ \frac{P_1}{\gamma_1} - \frac{P_2}{\gamma_2} \right] \text{ in kcal/kg}$$

ab.

3. Das Gas soll bei der Ausdehnung Wärme aufnehmen, aber nicht so viel, daß die Temperatur unveränderlich bleibt. Diese Zustandsänderung nennt man polytropisch; sie liegt zwischen der isothermischen und der adiabatischen:  $Pv^n = \text{konst}$  mit dem unveränderlichen Exponenten  $n$  ( $1 < n < \kappa$ ). Wir werden später erkennen, daß die polytropische Strömung praktisch bedeutungslos ist und wir nur die Grenzfälle der isothermischen und adiabatischen Strömung zu betrachten brauchen.

Um die verschiedenen Ausdehnungsvorgänge vergleichen zu können, wurden im Druck/Volumen-Diagramm Abb. 23 vom Anfangspunkt  $P_1$  und  $v_1$  aus Isotherme, Polytrope mit  $n = 1,2$  und Adiabate mit  $\kappa = 1,4$  gezeichnet. Bei einem bestimmten unteren Drucke  $P_2$  ist das Volumen  $v_2$  bei der Adiabate am kleinsten und bei der Isotherme am größten.

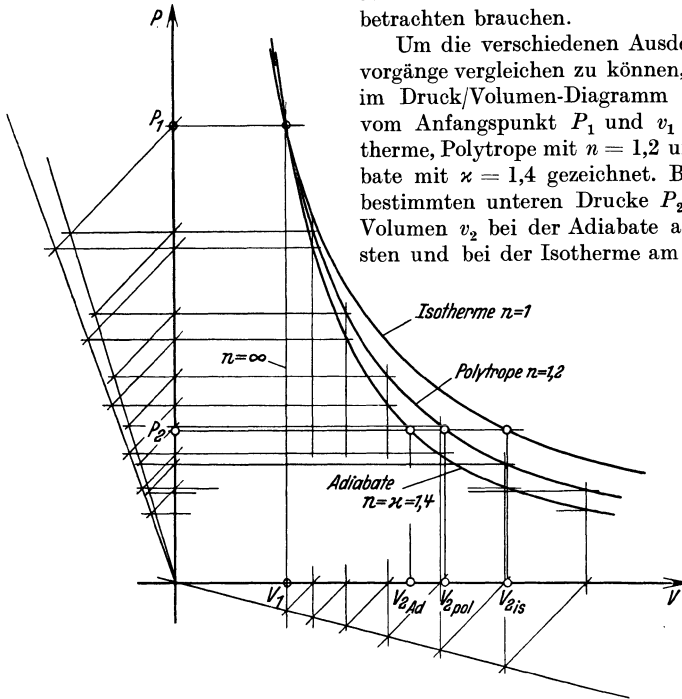


Abb. 23. Isotherme, Adiabate und Polytrope im Druck/Volumen-Diagramm.

Je nach Art der Ausdehnung sind also für Gl. (32) die beiden Gleichungen

$$H_1 - H_2 + P_1 \frac{1}{\gamma_1} \ln \left( \frac{P_1}{P_2} \right) = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} \quad \text{Isotherme,} \quad (39)$$

$$H_1 - H_2 + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \left[ \frac{P_1}{\gamma_1} - \frac{P_2}{\gamma_2} \right] = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} \quad \text{Adiabate} \quad (40)$$

anzusetzen.

### d) Arbeitsaufwand bei kleinen Druckänderungen.

Es ist nachzuprüfen, welchen Fehler man begeht, wenn man eine zusammendrückbare Flüssigkeit bei kleinen Druckänderungen als raumbeständig ansieht. Der wirkliche Arbeitsaufwand wird durch die Fläche  $ABCDEA$  wiedergegeben, wie Abb. 24 zeigt. Die Fläche  $ABDEA$  entspricht dem Arbeitsaufwand bei raumbeständiger Flüssigkeit und Fläche  $BCDB$  stellt den Fehler dar, den man bei

Vernachlässigung der Zusammendrückbarkeit begeh. Der relative Fehler ist, wenn man die Fläche  $BCDB$  in erster Annäherung durch ein Dreieck ersetzt,

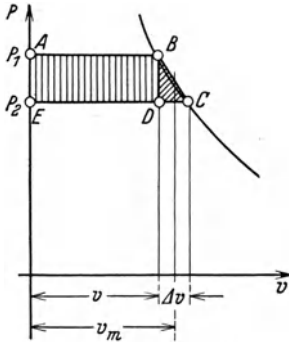


Abb. 24. Diagramm zur Bestimmung des Fehlers, wenn eine zusammendrückbare Flüssigkeit bei der Ausdehnung als raumbeständig betrachtet wird.

rechnen, so wird der Fehler sehr klein, wenn man die Flüssigkeit als beständig vom Raume  $v_m$  ansieht (in erster Annäherung null). Erst bei großem Druckabfall macht sich bemerkbar, daß man die Arbeit zu groß ermittelt.

$$\frac{\text{Fläche } BCDB}{\text{Fläche } ABDEA} = \frac{\overline{CD}}{2 \cdot \overline{ED}} = \frac{\Delta v}{2v}.$$

Allgemein (für die Polytrope) gilt

$$\frac{\Delta P}{P} = -n \frac{\Delta v}{v}$$

und damit

$$\frac{\Delta v}{2v} = -\frac{1}{2n} \frac{\Delta P}{P}. \quad (41)$$

Der Fehler ist um so größer, je kleiner  $n$  ist. Bei der Isotherme als dem ungünstigsten Fall ( $n=1$ ) darf der Druckabfall bei einem gegebenen relativen Fehler von

$$\begin{array}{ll} 0,5 \text{ vH} & \text{nur } 1 \text{ vH,} \\ 1,0 \text{ vH} & \text{nur } 2 \text{ vH} \end{array}$$

vom Anfangsdruck betragen. Kann man mit dem mittleren Volumen  $\frac{1}{2}(v_B + v_G) = v_m$  an Stelle von  $v_B$  rechnen, so wird der Fehler sehr klein, wenn man die Flüssigkeit als beständig vom Raume  $v_m$  ansieht (in erster Annäherung null). Erst bei großem Druckabfall macht sich bemerkbar, daß man die Arbeit zu groß ermittelt.

### e) Statischer und dynamischer Druck.

Der innere Zustand von flüssigen Körpern hängt während der Strömung genau so wie in der Ruhelage von den Größen Druck, Volumen und Temperatur ab. Die Zustandsgleichungen für tropfbare Flüssigkeiten (Beziehung zwischen Volumen und Temperatur) und gasförmige Körper (Gasgleichung) besteht unabhängig von der Geschwindigkeit, mit der sich der Körper bewegt.

Unter dem Druck, der in die Zustandsgleichungen einzuführen ist — statischer Druck — versteht man immer den absoluten Druck, den ein Meßinstrument für absoluten Druck anzeigen würde, wenn man es in der Strömung mit der herrschenden Geschwindigkeit mitführen würde. Ähnliche Meßverhältnisse liegen z. B. vor, wenn man im Flugzeug ein Barometer zur Luftdruckbestimmung (Höhenmessung) benutzt. Die Angaben Überdruck und Unterdruck stellen den Unterschied zwischen dem absoluten und dem derzeit herrschenden barometrischen Druck der Umgebung dar.

Im Falle, daß eine reibungsfreie Flüssigkeit durch eine gerade Leitung fließt, ist der statische Druck gleichmäßig über den Leitungsquerschnitt verteilt. Der statische Druck ist dann gleich dem, den die strömende Flüssigkeit auf die Rohrwand ausübt. Man könnte ihn mit einem Manometer messen, welches an eine Bohrung senkrecht durch die Wand angeschlossen ist. Die reibungsfreie Flüssigkeit bewege sich durch eine Rohrleitung mit stetig veränderlichem Querschnitt, z. B. eine kegliche Leitung. Folgende Kräfte wirken auf den Bewegungsvorgang

ein. Mit dem Querschnitt ändert sich auch der statische Druck und die Geschwindigkeit beständig in Richtung der Rohrachse. Abb. 25 zeigt ein elementares Teilchen der Flüssigkeit von prismatischer Gestalt mit Grundfläche  $dF$ . Die Flüssigkeit soll für den betrachteten Vorgang als raumbeständig und der inneren Energie nach unveränderlich anzusehen sein. Zur Vereinfachung wollen wir noch annehmen, daß nur Geschwindigkeiten in Richtung der Achse ( $l$ -Richtung) herrschen, die Berücksichtigung auch von Komponenten in anderen Richtungen würde zu ähnlichen Schlüssen führen.

Bei einer stationären Strömung sind die Geschwindigkeiten an jeder Stelle nach Größe und Richtung zeitlich unveränderlich. Eine Geschwindigkeitsänderung ist also nur beim Übergang zu einem anderen Orte möglich. Die Zu- oder Abnahme der Geschwindigkeit  $w$  auf der Strecke  $dl$  beträgt  $dw = \frac{\partial w}{\partial l} dl$  und die Beschleunigung mit dem Zeitdifferential  $dz$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial l} \frac{dl}{dz} = w \frac{\partial w}{\partial l},$$

wobei  $\frac{dl}{dz} = w$  ist. Nunmehr ergibt sich die Kraft aus Masse mal Beschleunigung zu

$$dF dl \frac{\gamma}{g} w \frac{\partial w}{\partial l}.$$

Dieser Massenkraft müssen die Schwerkraft  $dF dl \gamma \sin \alpha$  und die Druckkraft das Gleichgewicht halten. Die Kräfte auf die Grundflächen des Prismas sind  $P_1 dF$  und  $P_2 dF = \left( P_1 + \frac{\partial P}{\partial l} dl \right) dF$ , die Druckkraft als Differenz dieser Kräfte  $- dF \frac{\partial P}{\partial l} dl$ . Es besteht also die Beziehung (Eulersche Gleichgewichtsbedingung)

$$w \frac{\partial w}{\partial l} = g \sin \alpha - \frac{g}{\gamma} \cdot \frac{\partial P}{\partial l} \tag{42}$$

oder, bei Beschränkung auf waagerechte Leitungen ( $\alpha = 0, \sin \alpha = 0$ ) und ausschließlicher Veränderlichkeit von  $w$  und  $P$  nach  $l$

$$dP = - \frac{\gamma}{g} w dw. \tag{43}$$

Die Abnahme der Geschwindigkeit entspricht einer Zunahme des Druckes und umgekehrt. Als Energiegleichung erhält man wieder Gl. (29).

Wenn man die allgemeine Energiegleichung (27) mit  $\gamma$  erweitert

$$H \gamma + P + \frac{u}{A} \gamma + \frac{w^2}{2g} \gamma = E \gamma, \tag{44}$$

so stellen die einzelnen Glieder Drücke in  $\text{kg/m}^2$  oder  $\text{mm WS}$  von  $4^\circ$  vor. Als Druckwirkung unmittelbar zu messen ist davon allerdings nur  $P - P_0$  und  $\frac{w^2}{2g} \gamma$ , wobei unter  $P_0$  der absolute Druck der Umgebung, im allgemeinen der barometrische Luftdruck zu verstehen ist. Der Druck  $P - P_0$  wirkt gleichmäßig in der Flüssigkeit nach allen Seiten

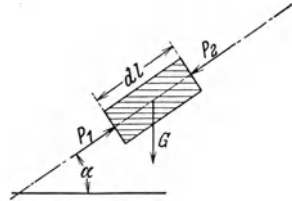


Abb. 25. Die an einem prismatischen Teilchen einer reibungslosen Flüssigkeit angreifenden Kräfte.

und kann durch das in Abb. 26 wiedergegebene Meßinstrument gemessen werden. Das hat Einlaßschlitze oder andere Öffnungen  $a$  in seinem äußeren Mantel, die senkrecht zur Strömungsrichtung der Flüssigkeit liegen. Durch diese Öffnungen wird der statische Druck  $P - P_0$  auf das Meßinstrument übertragen. Mit der dem Strom zugekehrten Bohrung  $b$  wird der Staudruck der Flüssigkeit  $\frac{w^2}{2g} \gamma$  und der statische Druck  $P - P_0$  gleichzeitig gemessen. Der Staudruck oder dynamische Druck möge mit  $P_{dyn}$ , der Gesamtdruck oder die Summe von  $P$

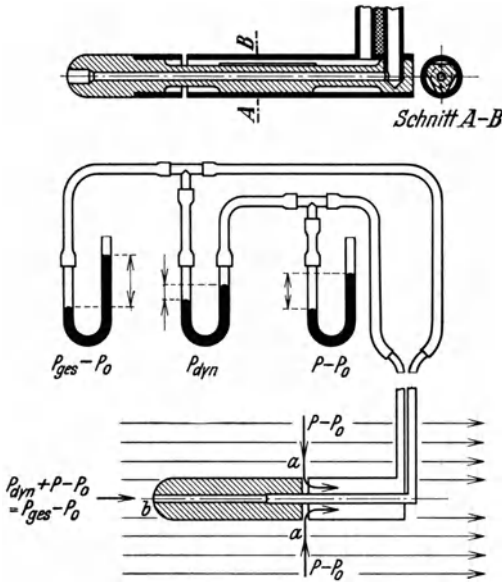


Abb. 26. Druckanzeige am Pitotrohr. Oben praktische Ausführungsform nach Prandtl.

und  $P_{dyn}$  mit  $P_{ges}$  bezeichnet werden.  $P_{dyn}$  kann mit dem Staugerät Abb. 26 nach der Beziehung bestimmt werden:

$$\begin{aligned} P_{dyn} &= \frac{w^2}{2g} \gamma \\ &= P_{ges} - P = (P_{ges} - P_0) \\ &\quad - (P - P_0) \text{ mm WS.} \quad (45) \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist aber nur dann einwandfrei, wenn das spezifische Gewicht  $\gamma$  unveränderlich ist. Für zusammendrückbare Flüssigkeiten gilt, wenn  $\gamma_{ges}$  das dem Gesamtdruck und  $\gamma$  das dem statischen Druck entsprechende spezifische Gewicht bedeutet, die Gleichung

$$\int_P^{P_{ges}} \frac{1}{\gamma} dP = \frac{w^2}{2g}, \quad (46)$$

die für den jeweiligen Zusammenhang zwischen  $P$  und  $\gamma$  integriert werden muß<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Die Größe des Fehlers, den man begeht, wenn man die Veränderlichkeit von  $\gamma$  vernachlässigt, also den dynamischen Druck mit dem  $\gamma$  errechnet, das zu  $P$  gehört, kann man aus folgendem Beispiel erkennen. Luft von 1,3 at und 50°, also  $\gamma = 1,375 \text{ kg/m}^3$ , bewegt sich mit 80 m/s. Dann ist

$$P_{dyn} = P_{ges} - P = \frac{w^2}{2g} \gamma = 448 \text{ mm WS.}$$

Bei adiabatischem Zusammenhang zwischen  $\gamma$  und  $P$  gilt nach Gl. (37) mit  $\kappa = 1,4$  für die verhältnismäßige Änderung des spezifischen Gewichts

$$\frac{\gamma_{ges} - \gamma}{\gamma} = \frac{1}{\kappa} \frac{P_{ges} - P}{P} = 0,0246 \text{ oder } 2,5 \text{ vH.}$$

Gl. (46) ist nach Abschnitt 4d angenähert gleich  $2 \frac{P_{ges} - P}{\gamma_{ges} + \gamma}$ . Rechnet man statt



Das Staegerät ist ein sehr brauchbares Druck- und Geschwindigkeitsmeßinstrument, das bei Messungen an natürlichen Flüssigkeiten praktischen Wert erhält. Es wird nach Pitot<sup>1</sup>, dem ersten, der dieses Meßverfahren empfahl, Pitotrohr genannt. Ohne Rücksicht auf die praktisch fast immer vernachlässigbare Veränderlichkeit von  $\gamma$  kann man mit dem Pitotrohr sehr einfach Geschwindigkeiten messen:

$$w = \sqrt{\frac{2g}{\gamma} (P_{ges} - P)} = \sqrt{\frac{2g}{\gamma} P_{dyn}} \text{ m/s.} \quad (47)$$

Die dem Druck  $P + \frac{w^2}{2g}\gamma$  entsprechende Energie pfl egt man mechanische Energie zu nennen. Für eine Flüssigkeitsmenge  $V$  in  $\text{m}^3$  erhält man

$$V \left( P + \frac{w^2}{2g}\gamma \right) \text{ mkg.}$$

Danach stellt der Gesamtdruck gleichzeitig die mechanische Energie je  $\text{m}^3$  dar.

Abb. 27 zeigt die Verteilung des statischen und dynamischen Druckes am Flüssigkeitsteilchen. Je nachdem, ob der Druck in einer Leitung größer oder kleiner als der Druck der Umgebung ist, bestimmt man mit dem Pitotrohr statische Überdrücke (Abb. 28) oder Unterdrücke

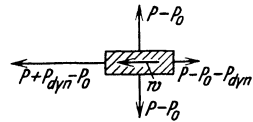


Abb. 27. Statischer und dynamischer Druck am Flüssigkeitsteilchen.

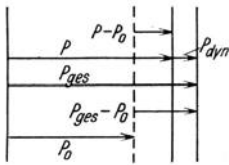


Abb. 28. Überdruck. Beziehungen zwischen dem statischen, dynamischen und Gesamtdruck.

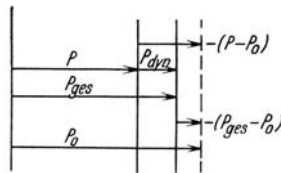


Abb. 29. Unterdruck. Beziehungen zwischen dem statischen, dynamischen und Gesamtdruck.

(Abb. 29). Wenn ein statischer Unterdruck  $-(P - P_0)$  gemessen wird, so muß man den dynamischen Druck  $P_{dyn}$  abziehen, um den Gesamtunterdruck  $-(P_{ges} - P_0)$  zu erhalten. Der dynamische Druck ist immer positiv und damit der absolute Gesamtdruck immer größer als der absolute statische Druck. Entsprechend ist der statische Unterdruck immer größer als der Gesamtunterdruck und der statische Überdruck immer kleiner als der Gesamtüberdruck.

dessen mit  $(P_{ges} - P)\gamma$ , so begeht man einen verhältnismäßigen Fehler von

$$\frac{1 - \frac{2}{\gamma_{ges} + \gamma}}{\frac{1}{\gamma}} = \frac{\gamma_{ges} - \gamma}{\gamma_{ges} + \gamma} \sim \frac{1}{2} \frac{\gamma_{ges} - \gamma}{\gamma} = 0,0123$$

oder 1,2 vH. Infolge des quadratischen Einflusses der Geschwindigkeit ist der Fehler bei geringeren Geschwindigkeiten erheblich kleiner.

<sup>1</sup> Pitot, H.: Description d'une machine pour mesurer la vitesse des eaux courantes. Mém. de l'acad. roy. des sc. 1732 S. 363.

## 5. Allgemeine Energiesätze für natürliche Flüssigkeiten.

### a) Energiegleichungen.

Wir wollen jetzt die Forderung, die Flüssigkeit sei unendlich leicht verformbar, fallen lassen, und zur Betrachtung von Bewegungsvorgängen wirklicher Flüssigkeiten übergehen. Es kann in der Natur nur dann eine stationäre Flüssigkeitsbewegung aufrechterhalten werden, wenn zwischen den Endpunkten der Leitung ein unveränderliches Druckgefälle zur Überwindung der Reibungsarbeit besteht. Mit der Voraussetzung, daß man unter der Wärmemenge, die während des Bewegungsvorganges zuzuführen ist, nicht nur die zur Bewältigung der Beschleunigungsarbeit, sondern auch die zur Darstellung der Reibungsarbeit beitragende Energie je kg strömende Flüssigkeit versteht, gelten die früher für reibungslose gedachte Flüssigkeiten aufgestellten Energiebilanzen auch für natürliche reibungsbehaftete Flüssigkeiten.

Es bedeutet  $L_{R\ 21}$  die bei der Bewegung vom Leitungsquerschnitt 1 bis Querschnitt 2 zu leistende Reibungsarbeit in mkg/kg strömende Flüssigkeit. Die allgemeine Energiegleichung der reibungsbehafteten natürlichen Flüssigkeit heißt dann

$$dH + v dP + \frac{w dw}{g} + dL_R = 0 \quad (48)$$

oder entsprechend Gl. (32)

$$H_1 - H_2 + \int_2^1 \frac{1}{\gamma} dP = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} + L_{R\ 21} \frac{\text{mkg}}{\text{kg}}. \quad (49)$$

Der Energieaufwand für die Überwindung der Reibung müßte einerseits entweder eine stärkere Wärmezufuhr oder einen größeren Abfall der potentiellen Energie als bei reibungsloser Strömung zur Folge haben. Andererseits äußert sich die Verrichtung der Reibungsarbeit in einer Erwärmung der Flüssigkeit und damit in einem geringeren Absinken der inneren Energie.

Wir wollen zunächst auf die Verhältnisse bei der Bewegung gasförmiger Flüssigkeiten eingehen. Für adiabatische Strömung (wo  $dQ' = 0$  ist) folgt, daß die Druckenergie in stärkerem Maße und die innere Energie in schwächerem Maße als bei reibungsfreier Strömung absinkt. In einer waagerechten Leitung von unveränderlichem Querschnitt z. B., die im Falle von reibungsfreier Strömung ohne Änderung der einzelnen Energieposten durchflossen wird, stellt sich jetzt infolge Reibung eine Umsetzung von Druck- in innere Energie, d. h. ein Druckabfall ein. Da die Erhöhung der inneren Energie nahezu nicht fühlbar wird,  $427 \text{ mkg} = 1 \text{ kcal}$ , so stellt dieser Druckabfall praktisch einen Energieverlust dar.

Strömt die Flüssigkeit isothermisch, so deckt die zufließende Energie die Beschleunigungsarbeit. Bleibt die entwickelte Reibungswärme vollständig in der Flüssigkeit, so braucht nicht mehr Wärme zugeführt zu werden als bei reibungsfreier Strömung<sup>1</sup>. Daraus darf natürlich nicht geschlossen werden, daß sich reibungsfreie und reibungsbehaftete isothermische Strömung vollkommen gleich verhielten; denn nur die Druckhöhe, nicht aber auch der Druck selbst bleibt gleich groß.

Zur Überwindung der Reibungskräfte gehört ein Druckunterschied  $(P_1 - P_2)F$ , siehe Abb. 30, der um so größer ist, je größer die Reibungskräfte sind und einen Druckabfall bei der Strömung bedingt.

Nach diesen Überlegungen kann man folgende Energiegleichungen für die Fortleitung gasförmiger Flüssigkeiten aus der allgemeinen Energiebilanz Gl. (28) ableiten:

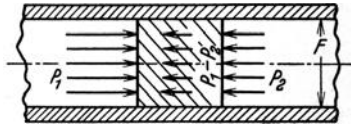


Abb. 30. Druckwirkungen bei der Bewegung einer natürlichen reibungsbehafteten Flüssigkeit.

Handelt es sich um isothermische Strömung, so ist  $\frac{P_1}{\gamma_1} = \frac{P_2}{\gamma_2}$  und  $u_1 = u_2$  und  $\frac{1}{A} Q'_{21} = \frac{P_1}{\gamma_1} \ln \frac{P_1}{P_2} - L_{R21}$ , also

$$H_1 - H_2 + \frac{P_1}{\gamma_1} \ln \frac{P_1}{P_2} + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2g} - L_{R21} = 0. \quad (50)$$

Bei adiabatischer Strömung ist  $Q'_{21} = 0$  und

$$H_1 - H_2 + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \left[ \frac{P_1}{\gamma_1} - \frac{P_2}{\gamma_2} \right] + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2g} - L_{R21} = 0. \quad (51)$$

[Vgl. hierzu Gl. (39) und (40).] Sind die Änderungen der Lagenenergie sehr gering, so kann man  $H_1 - H_2$  weglassen und die Gl. (50) und (51) als praktische Energiegleichungen gasförmiger Flüssigkeiten bezeichnen.

Für tropfbare Flüssigkeiten vereinfacht sich Gl. (49) wieder wesentlich, weil in Wirklichkeit Druck und Temperatur nur in sehr engen Grenzen schwanken. Eine Erhöhung der inneren Energie durch die Reibungswärme wird praktisch nicht fühlbar<sup>2</sup>; deshalb ist praktisch keine Umsetzung der Wärmeenergie zu erwarten, und das spezifische Gewicht konstant. Die Reibungswärme erscheint als verlorene Energie. Als praktische Energiegleichung der tropfbaren

<sup>1</sup> Die Reibungsarbeit ist genau gleich der zu ihrer Überwindung aufzuwendenden äußeren Arbeit, die entwickelte Reibungswärme genau gleich dem Wärmeäquivalent dieser äußeren Arbeit.

<sup>2</sup> Wie geringfügig die Erwärmung von tropfbaren Flüssigkeiten durch die bei der Überwindung der Reibung entwickelte Wärme ist, möge aus einem Beispiel ersehen werden. Preßwasser ströme durch eine Rohrleitung, wobei der Druck

Flüssigkeiten kann man ansetzen

$$H_1 - H_2 + \frac{P_1 - P_2}{\gamma} + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2g} - L_{R21} = 0, \quad (52)$$

wobei  $u_1 = u_2$  und  $Q'_{21} = 0$  ist.

Zur elementaren Behandlung der Bewegung natürlicher reibungsbehafteter Flüssigkeiten kann man die Eulersche Gleichgewichtsbedingung erweitern. Man muß dazu die Kräfte, die an einem Flüssigkeitsteilchen angreifen (Abb. 25), mit Rücksicht auf die durch Reibung hervorgerufenen Schubkräfte ergänzen und gelangt zu der sog. Navier-Stokesschen Gleichung. Da die Geschwindigkeit jetzt nicht mehr gleichmäßig über den Leitungsquerschnitt verteilt sein kann, wie man bei einer reibungsfreien Flüssigkeit annehmen konnte, weil die Flüssigkeit an der Rohrwand haftet (siehe Abb. 18), gibt es außer der Geschwindigkeitsänderung nach der  $l$ -Richtung immer auch solche nach der  $x$ - und  $y$ -Richtung, d. h. nach den Koordinaten der Querschnittsfläche. Die Gleichgewichtsbedingung für die  $l$ -Richtung heißt jetzt in einfachster Form für tropfbare Flüssigkeiten in einem waagerechten stationären Strom<sup>1</sup>:

$$w \frac{\partial w}{\partial l} = - \frac{g}{\gamma} \frac{\partial P}{\partial l} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial l^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \quad (53)$$

Für unendlich große Formänderungsgeschwindigkeit, also  $\nu = 0$ , geht diese Gleichung wieder in die frühere Gl. (43) über.

## b) Leitungsgefälle.

Es bleibt nun noch die Frage zu beantworten, welche Energiespanne die Flüssigkeit zum Strömen veranlaßt — Antriebsenergie. Ganz allgemein erhält man aus Gl. (48) dafür  $dH + v dP$ . Unter dem Leitungsgefälle  $J$  versteht man nun das Verhältnis der verfügbaren Antriebsenergie zum zurückzulegenden Weg:

$$\frac{dH}{dl} + \frac{1}{\gamma} \frac{dP}{dl} = - \frac{w}{g} \frac{dw}{dl} - \frac{dL_R}{dl} = J, \quad (54)$$

wobei  $dl$  das Wegelement bedeutet. Das Gefälle  $J$  hat keine Benennung (Antriebsenergie in mkg je kg strömende Flüssigkeit und je m Weg).

infolge Reibung von 100 auf 90 at fällt, also

$$\frac{P_1 - P_2}{\gamma} \cong \frac{10 \cdot 10^4}{1000} = 100 \text{ mkg/kg oder } 0,23 \text{ kcal/kg.}$$

Bleiben diese 0,23 kcal/kg vollständig im Wasser, so steigt die Temperatur um 0,23°, also nur sehr wenig.

Bei zusammendrückbaren Flüssigkeiten ist die Änderung der inneren Energie durch die Reibungswärme nicht mehr vernachlässigbar. Strömt z. B. Luft durch eine Leitung, wobei der Druck um 1 at fällt und das mittlere spezifische Gewicht 10 kg/m<sup>3</sup> beträgt, also

$$\frac{P_1 - P_2}{\gamma} = \frac{1 \cdot 10^4}{10} = 1000 \text{ mkg/kg oder } 2,34 \text{ kcal/kg,}$$

so entspricht das einem Temperaturzuwachs von rd. 10°.

<sup>1</sup> Ableitung siehe z. B. L. Prandtl-O. Tietjens: Hydro- u. Aeromechanik Bd. 2 S. 60ff. Berlin 1931; oder L. Hopf: Abschnitt Zähflüssigkeiten im Handb. d. Physik Bd. 8; Mechanik der flüss. u. gasf. Körper S. 92. Berlin 1927.

Gl. (54) gilt für beliebig gestaltete Leitungen. Wir wollen sie hier zunächst nur für den Fall des geraden Rohres mit unveränderlichem Querschnitt weiter entwickeln. Dann ist bei tropfbaren Flüssigkeiten die mittlere Geschwindigkeit  $w$  unabhängig von der Rohrlänge. Da sich die Flüssigkeitsreibung ( $\mu$ ) praktisch nicht nach dem Druck, sondern nur nach der Geschwindigkeit richtet, so ist auch die Reibung unabhängig von der Rohrlänge. In diesem Fall gilt also

$$\frac{H_1 - H_2}{l} + \frac{P_1 - P_2}{\gamma l} = \frac{L_{R21}}{l} = J, \quad (55)$$

d. h.  $J$  ist die Reibungsarbeit je lfd. m gerades Rohr und kg strömende Flüssigkeit.

Bei gasförmigen Flüssigkeiten ändert sich die Geschwindigkeit auch in geraden Rohren von unveränderlichem Querschnitt mit der Rohrlänge, weil der durch Reibung verursachte Abfall des statischen Druckes zu einer Ausdehnung und damit wegen der Kontinuitätsbedingung zu einer Beschleunigung des Stromes führt. Da die Reibung von der Geschwindigkeit abhängt, ändert sie sich auch mit der Rohrlänge. Wenn an einer Stelle des Stromes Druck  $P$  und spezifisches Gewicht  $\gamma$ , also z. B.  $P_1$  und  $\gamma_1$ , bekannt sind, so gilt nach Abschnitt 4c für die

$$\text{isothermische Strömung} \quad \frac{dH}{dl} + \frac{1}{\gamma_1} \frac{P_1}{P} \frac{dP}{dl} = J, \quad (56)$$

$$\text{adiabatische Strömung} \quad \frac{dH}{dl} + \frac{1}{\gamma_1} \left(\frac{P_1}{P}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \frac{dP}{dl} = J. \quad (57)$$

Man kann diese Gleichungen für endliche Weglänge  $l$  umformen, wenn man die Änderung des Druckes mit der Weglänge kennt. Dazu bedarf es aber erst der näheren Kenntnis der Reibungsarbeit, vornehmlich des Zusammenhanges zwischen Reibung und Geschwindigkeit.

## 6. Mechanische Ähnlichkeit von Strömungsvorgängen.

### a) Begriff der mechanischen Ähnlichkeit.

Für die folgenden Betrachtungen ist es von Interesse, zu wissen, wann zwei (oder mehrere) Bewegungsvorgänge von Flüssigkeiten mechanisch ähnlich sind.

Die mechanische Ähnlichkeitstheorie ist eine Erweiterung der Lehre von der geometrischen Ähnlichkeit: sie zieht noch den Vergleich von Kräften und Zeiten heran. Es bestehen also drei grundsätzliche Forderungen:

1. Die zu vergleichenden Flüssigkeitsströme müssen sich in oder um geometrisch vollständig ähnliche Körper bewegen, also z. B. durch zwei beliebig weite Rohre mit Kreisquerschnitt oder um zwei beliebig große Kugeln.

2. An geometrisch entsprechend gelegenen Stellen der beiden Strömungen müssen zur selben Zeit gleichgerichtete Geschwindigkeiten herrschen, die der Größe nach in einem bestimmten Verhältnis stehen, welches für alle geometrisch entsprechend gelegenen Stellen denselben Betrag hat.

3. Die an allen geometrisch entsprechend gelegenen Stellen auftretenden Kräfte müssen gleichgerichtet sein und ebenfalls in einem unveränderlichen Verhältnis stehen.

Wir wollen zunächst nur stationäre Strömungen vergleichen und die Flüssigkeit für die Bewegungsvorgänge als raumbeständig ansehen. Bei der Bewegung können Trägheitskräfte, Schwerkkräfte und Reibungskräfte auftreten. Es zeigt sich nun, daß bei Berücksichtigung je zweier dieser Kräfte ein Gesetz für die mechanische Ähnlichkeit aufgestellt werden kann. Der Einfluß der dritten Kraft muß, wenn das Gesetz exakt gelten soll, null sein (oder vernachlässigt werden können). Es ist nicht möglich, für die in der Natur vorkommenden Flüssigkeiten ein Ähnlichkeitsgesetz abzuleiten, welches alle drei Kräfte berücksichtigt<sup>1</sup>.

In unserem Falle handelt es sich um den Vergleich der Strömung in voll laufenden Rohrleitungen, wobei keine freien Oberflächen auftreten und die Schwerkraft der einzelnen Flüssigkeitsteilchen durch den Auftrieb aufgehoben ist. Es herrschen also nur Reibungs- und Trägheitskräfte. Man pflegt in der Rohrhydraulik dasjenige Ähnlichkeitsgesetz, das diese beiden Kräfte berücksichtigt, einfach als „Ähnlichkeitsgesetz“ zu bezeichnen. Gelegentlich nennt man es auch dem Forscher zu Ehren, der sich als erster mit diesen Betrachtungen beschäftigte, dem Engländer Osborne Reynolds, Reynoldssches Ähnlichkeitsgesetz<sup>2, 3</sup>.

Die Ähnlichkeitstheorie stellt keine besonderen Anforderungen an die Art der strömenden Flüssigkeiten; sie können tropfbar oder gasförmig, gleich oder verschieden sein.

<sup>1</sup> Prandtl, L., u. O. Tietjens: Hydro- u. Aeromechanik Bd. 2 S. 11. Berlin 1931. Herrmann, W.: Über die Bedingungen für mechanische Ähnlichkeit (Entwicklung der Gesetze aus Newtons Anschauungen). Z. VDI Bd. 75 (1931) S. 611.

<sup>2</sup> Reynolds, O.: An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. Proc. Roy. Soc., Lond. Bd. 35 (1883) oder Papers on mech. and phys. subjects Bd. 2 (1883) S. 51 (Cambridge). The two manners of motion of water. Nature Bd. 30 (1884) S. 88 (London u. New York). The Engineer 1886 S. 1. Philos. Trans. Roy. Soc., Lond. (A) Bd. 186 I (1895) S. 123; Bd. 174 (1883) S. 938; Bd. 177 (1887) S. 171.

<sup>3</sup> Schon vor Reynolds veröffentlichte ein Deutscher, nämlich v. Helmholtz, eine Arbeit, die sich mit mechanischen Ähnlichkeitsvorgängen ganz allgemeiner Art beschäftigte. — Über ein Theorem, geometrisch ähnliche Bewegungen flüssiger Körper betreffend, nebst Anwendung auf das Problem, Luftballons zu lenken. Monatsber. Kgl. Akad. Wiss. S. 501. Berlin 1873.

### b) Ableitung des Ähnlichkeitsgesetzes aus den Kräftebedingungen.

Zwei beliebige Flüssigkeiten mögen z. B. zwei verschieden weite gerade Rohre mit unveränderlichem Kreisquerschnitt und mit geometrisch vollkommen ähnlicher Beschaffenheit der inneren Rohrwand durchströmen. Die Durchmesser der Rohre seien  $d_1$  und  $d_2$ , die Zähigkeiten der beiden Flüssigkeiten  $\mu_1$  und  $\mu_2$  und die spezifischen Gewichte  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$ .

Zunächst sind die Kräfte zu ermitteln, die am Raumelement einer reibungsbehafteten Flüssigkeit angreifen. Der Würfel  $dl dx dy$  sei dieses Raumelement (Abb. 31 und 32), dabei liegt  $dl$  in Achsrichtung und  $dx$  und  $dy$  senkrecht zur Rohrachse.  $w_l$  stellt eine Geschwindigkeit in Achsrichtung an einer beliebigen Stelle der Strömung dar. Zur Vereinfachung der Rechnung wollen wir uns auf Bewegungen in Achsrichtung beschränken. Die Rechnung würde zu demselben Ziele führen, wenn auch Geschwindigkeitsänderungen in anderen Richtungen berücksichtigt würden. Die einzelnen Flüssigkeitsteilchen sollen sich nach beliebigen Gesetzen, also nicht nur parallel zur Rohrachse bewegen.

Soll ein Körper eine Geschwindigkeitsänderung erfahren, so widersteht er mit einer Trägheitskraft, die durch das Produkt von Masse mal Beschleunigung gegeben wird. Für den Würfel beträgt die Trägheitskraft in  $l$ -Richtung. (nach Abschnitt 4e)

$$K_T = \frac{dl dx dy}{g} \gamma w_l \frac{\partial w_l}{\partial t}.$$

In einer beliebigen Strömung ist die Geschwindigkeit  $w_l$  nach irgendeinem Gesetz  $w_l = f(x, y)$  über den Rohrquerschnitt verteilt. Mit  $w_l$  ändert sich auch die Schubspannung  $\tau$ , nämlich um

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial x} dx \quad \text{und} \quad \frac{\partial \tau_y}{\partial y} dy \quad (\text{Siehe Abb. 32}).$$

Mit  $dl dy$  und  $dl dx$  als Berührungsfläche erhält man die Reibungskräfte

$$K_R = dl dy \frac{\partial \tau_x}{\partial x} dx + dl dx \frac{\partial \tau_y}{\partial y} dy,$$

und mit

$$\tau_x = \mu \frac{\partial w_l}{\partial x} \quad \text{und} \quad \tau_y = \mu \frac{\partial w_l}{\partial y}$$

ergibt sich

$$K_R = dx dy dl \left[ \frac{\partial^2 w_l}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_l}{\partial y^2} \right] \mu.$$

Die Forderung des konstanten Kräfteverhältnisses heißt nun

$$\frac{K_{T1}}{K_{R2}} = \frac{K_{R1}}{K_{R2}} = \text{konst.}$$

Man kann diese Forderung auch fassen: für ähnlich gelegene Stellen muß gelten

$$\frac{K_{T1}}{K_{R1}} = \frac{K_{T2}}{K_{R2}} = \text{konst.}, \tag{58}$$

wobei die Zeiger 1 und 2 zu den Strömungen 1 und 2 weisen. Vergleicht man

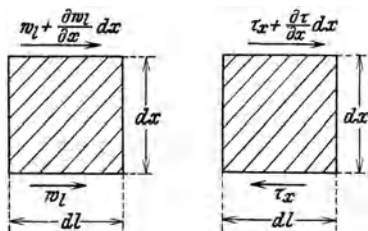


Abb. 31. Geschwindigkeiten an einem elementaren würfelförmigen Flüssigkeitsteilchen,  $l/x$ -Ebene.

Abb. 32. Reibungsschubspannungen an einem elementaren würfelförmigen Flüssigkeitsteilchen,  $l/x$ -Ebene.

die Kräfte, die an zwei entsprechenden Würfelementen angreifen, so muß also der Ausdruck

$$\frac{K_T}{K_R} = \frac{\frac{\gamma}{g} \frac{\partial w_l}{\partial l} w_l}{\mu \left[ \frac{\partial^2 w_l}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_l}{\partial y^2} \right]} \quad (59)$$

denselben Wert haben. Für ähnliche Rohrströmungen gelten nun offenbar folgende Beziehungen:

Alle Längen sind einer charakteristischen Länge proportional. Dasselbe gilt auch für Längendifferenzen. Bei Kreisrohren wählt man am besten den Rohrdurchmesser  $d$  als charakteristische Länge. Es ist also

$$x, y \text{ und } l \text{ sowie } \partial x, \partial y, \partial l \text{ proportional } d.$$

Alle Geschwindigkeiten sind proportional einer charakteristischen Geschwindigkeit, am einfachsten der mittleren Geschwindigkeit  $w$ . Also ist

$$w_l \text{ sowie } \partial w_l \text{ und } \partial^2 w_l \text{ proportional } w.$$

Zähigkeit  $\mu$  und spezifisches Gewicht  $\gamma$  sollen für jede Flüssigkeit konstant sein.

Man kann nun mit der kinematischen Zähigkeit  $\nu = \frac{\mu g}{\gamma}$  schreiben

$$\frac{K_T}{K_R} \text{ prop. } \frac{w d}{\nu}. \quad (60)$$

Da der Proportionalitätsfaktor für ähnliche Strömungen gleich groß ist, sagt diese Gleichung aus, daß zwei Strömungen mechanisch ähnlich sind, wenn

$$\frac{d_1 w_1}{\nu_1} = \frac{d_2 w_2}{\nu_2}. \quad (61)$$

Man nennt diese Größe  $\frac{w d}{\nu}$  die „Reynoldssche Zahl“ und bezeichnet sie mit  $Re$ . Da sie das Verhältnis zweier Kräfte oder das Verhältnis der kinetischen Energie zur Arbeit der Reibungskräfte darstellt, ist sie eine unbenannte Größe<sup>1</sup>.

Zur Veranschaulichung des Gesetzes mögen zwei Beispiele dienen. Wasser von bestimmter Zähigkeit durchströme zwei Kreisrohre von  $d_1 = 0,1$  m und  $d_2 = 0,2$  m lichter Weite. Ist  $w_1 = 4$  m/s die mittlere Strömungsgeschwindigkeit im ersten Rohr, so stehen alle an geometrisch entsprechend gelegenen Stellen auftretenden Trägheits- und Reibungskräfte dann im selben Verhältnis, wenn  $w_2 = 2$  m/s ist. Noch eindringlicher erscheint der praktische Wert des Gesetzes, wenn die Strömung von Wasser bei  $d_1 = 0,1$  m,  $w_1 = 2$  m/s und  $\nu_1 = 1,142 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s (bei  $t = 15^\circ$ ), also  $Re_1 = 175\,100$ , mit der Strömung von Luft bei  $d_2 = 0,1$  m und  $\nu_2 = 7,54 \cdot 10^{-6}$  (bei  $t = 15^\circ$  und 2 at abs.) verglichen wird. Dann, wenn

$$w_2 = w_1 \frac{d_1}{d_2} \frac{\nu_2}{\nu_1} = 13,2 \text{ m/s}$$

beträgt, sind die Luft- und Wasserströmung mechanisch ähnlich.

<sup>1</sup> Es ist sehr vorteilhaft, mit dimensionslosen Größen zu rechnen, weil man dann unabhängig vom Maßsystem ist (absolutes, technisches, englisches Maßsystem).

Die Zähigkeit oder Größe der inneren Reibung ist bei den technisch wichtigen Flüssigkeiten (Wasser, Gase) sehr klein, die Massenkräfte sind groß gegen die Reibungskräfte. Daher nimmt die Reynoldssche Zahl praktisch große Beträge (bis 2000000 und mehr) an.



Fließt z. B. in einem Rohre Wasser von  $15^{\circ}$  und in einem anderen Rohre Luft von  $15^{\circ}$ , wobei in beiden Fällen das Produkt aus  $w$  und  $d$  denselben Wert hat, so kann man aus der Ähnlichkeitsbedingung den interessanten Schluß ziehen, daß an ähnlich gelegenen Stellen in beiden Strömungen dann gleichgroße Kräfte auftreten, wenn die Luft unter einem Druck von 13,2 at abs. steht; dann ist nämlich  $\nu_1 = \nu_2$ . In diesem Falle verhält sich die Luft — abgesehen von ihrer Zusammendrückbarkeit — hydraulisch genau so wie Wasser.

### c) Ableitung des Ähnlichkeitsgesetzes aus der Navier-Stokesschen Gleichung.

Die Navier-Stokessche Gleichung (53) hat nicht die Erwartungen erfüllt, die in sie gesetzt wurden, weil sie nur in seltenen Fällen integrierbar ist. Sie gestattet jedoch leicht, auf die mechanische Ähnlichkeit von zwei Strömungsvorgängen zu schließen. Im Ähnlichkeitsfalle müssen entsprechende Veränderliche für alle ähnlich gelegenen Stellen der Strömungen zueinander in bestimmtem Verhältnis stehen. Offenbar herrschen folgende Beziehungen:  $w_1 = f_w w_2$ ;  $P_1 = f_P P_2$ ;  $\gamma_1 = f_\gamma \gamma_2$ ;  $\nu_1 = f_\nu \nu_2$ ;  $l_1 = f_a l_2$ ;  $x_1 = f_a x_2$ ;  $y_1 = f_a y_2$ ;  $d_1 = f_a d_2$ . Dabei sind  $f_w$ ,  $f_P$ ,  $f_\gamma$ ,  $f_\nu$ ,  $f_a$  irgendwelche konstante Werte ( $f_a$  gilt für alle Längenverhältnisse). Schreibt man zunächst die Navier-Stokessche Gleichung (53) für die Strömungen 1 und 2 an und schreibt man dann die 2. Gleichung unter Verwendung der  $f$ -Werte mit Zeiger 1 um, so erkennt man, daß diese beiden Gleichungen

$$w_1 \frac{\partial w_1}{\partial l_1} = - \frac{g}{\gamma_1} \frac{\partial P_1}{\partial l_1} + \nu_1 \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial l_1^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y_1^2} \right)$$

und

$$\frac{f_w^2}{f_a} w_1 \frac{\partial w_1}{\partial l_1} = - \frac{f_P}{f_\gamma f_a} \frac{g}{\gamma_1} \frac{\partial P_1}{\partial l_1} + \frac{f_\nu f_w}{f_a f_a} \nu_1 \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial l_1^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y_1^2} \right)$$

nur dann nebeneinander bestehen können, wenn die Konstantengruppen

$$\frac{f_w^2}{f_a} = \frac{f_P}{f_\gamma f_a} = \frac{f_\nu f_w}{f_a f_a} \quad (62)$$

gleich groß sind. Die Verbindung des ersten und dritten Ausdruckes ergibt die Reynoldssche Ähnlichkeitsbedingung

$$\frac{f_w f_a}{f_\nu} = 1 \quad \text{oder} \quad \frac{w d}{\nu} = \text{konst.}$$

Der Vergleich mit dem Ausdruck, der  $f_P$  enthält, führt zu einer Bedingung für den Druckverlust, die uns später noch gute Dienste leisten wird.

Das Ähnlichkeitsgesetz sagt also aus, daß Strömungsvorgänge dann mechanisch ähnlich sind, wenn ihnen gleiche Reynoldssche Zahlen zugeordnet sind. Es erlaubt bei Geschwindigkeiten, die genügend weit unter der Schallgeschwindigkeit liegen, Glycerin, Öl, Wasser, Luft, Wasserdampf usw. gleichmäßig als Flüssigkeiten anzusehen und beliebig zu Modellversuchen zu verwenden. Danach hat man die Möglichkeit, Versuche an beliebig verkleinerten oder vergrößerten Modellen mit verschiedenen Strömungsmitteln auszuführen und zu vergleichen oder für einen Entwurf die Bestform zu entwickeln. Wenn z. B. die wirkliche Anlage sehr groß ist und Versuche daran sehr kostspielig wären, oder

wenn die wirklichen Strömungsmittel, wie z. B. hochgespannte Flüssigkeiten tropfbarer, gasförmiger oder dampfförmiger Natur, sehr heiße oder kalte Stoffe, giftige Gase, Abgase u. dgl., versuchstechnisch Schwierigkeiten bereiten, so studiert man die Strömungsvorgänge mit Rücksicht auf das Ähnlichkeitsgesetz an Modellen mit versuchsmäßig leicht zu beherrschenden Strömungsmitteln und kann dann auf die wirklichen Vorgänge schließen. Dabei ist die Forderung nach geometrischer Ähnlichkeit strengstens zu beachten. Das gilt ganz besonders für die Rauigkeit der Leitungswände. Aber auch die nicht unmittelbar zu dem Teile der Anlage, der verglichen werden soll, gehörige Umgebung muß geometrisch ähnlich ausgebildet sein. Das betrifft hauptsächlich die Zu- und Ablaufleitungen und etwaige darin vorkommende Störungsquellen.

### d) Beziehungen für die Reynoldssche Zahl.

Mit dem Durchfluß  $G$  oder  $Q$  bestehen folgende Beziehungen für die Reynoldssche Zahl<sup>1</sup>:

$$Re = \frac{w d}{\nu} = \frac{w d \gamma}{\eta} = \frac{w d \gamma}{\mu g}, \quad (63)$$

$$Re = \frac{4 Q_s \gamma}{\pi d g \mu} = 0,1298 \frac{Q_s \gamma}{d \mu} = 36,0 \frac{Q_h \gamma}{d \cdot 10^6 \cdot \mu} = 354 \frac{Q_h}{d \cdot 10^6 \cdot \nu}, \quad (64)$$

$$Re = \frac{4 G_s}{\pi d g \mu} = 0,1298 \frac{G_s}{d \mu} = 36,0 \frac{G_h}{d \cdot 10^6 \cdot \mu} = 354 \frac{G_h}{d \cdot 10^6 \cdot \nu \gamma}. \quad (65)$$

In diesen Gleichungen können  $Q$ ,  $\gamma$  und  $\nu$  auf irgendeinen Zustand  $n$  bezogen sein, z. B.

$$Re = 354 \frac{Q_{h n}}{d \cdot 10^6 \nu_n}.$$

Wir wollen später 15° und 760 mm QS oder 1,033 at als Bezugsgrößen annehmen.

### e) Sonderfälle.

Es gibt geometrisch ähnliche Strömungsvorgänge, bei welchen keine Trägheitskräfte auftreten oder wo die Differenz zwischen Reibungskräften Null ist. Dann gilt für die mechanische Ähnlichkeit:

Vergleicht man zwei Parallelströmungen von raumbeständigen Flüssigkeiten, also Strömungen, bei denen sich alle Flüssigkeitsteilchen mit unveränderlicher Geschwindigkeit in parallelen Bahnen bewegen, so treten keine Trägheitskräfte auf. Wie später gezeigt wird, sind dann die Ausdrücke  $\partial^2 w_i$  nach  $\partial x^2$  und  $\partial^2 w_i$  nach  $\partial y^2$  an jeder beliebigen Stelle bei allen möglichen Strömungen gleich groß, siehe Gl. (133). Damit stehen die Reibungskräfte immer in demselben Verhältnis. Parallelströmungen raumbeständiger Flüssigkeiten durch oder um

<sup>1</sup> Siehe hierzu auch H. Richter: Zur Ermittlung der Reynoldsschen Zahl von Dampfströmen. Ing.-Arch. Bd. 3 (1932) S. 300. — Nomogramme in der Strömungstechnik. Gas- u. Wasserfach Bd. 75 (1932) S. 141.

geometrisch ähnliche Körper sind immer mechanisch ähnlich, ganz gleich, welche charakteristischen Längen und Geschwindigkeiten auftreten.

Das Beispiel der parallel bewegten Platten, Abb. 2, zeigt einen Fall, wo Trägheitskräfte und Differenz der Reibungskräfte Null sind, denn  $\partial w$ , nach  $\partial l$  ist Null, und  $\partial^2 w$ , nach  $\partial x^2$  ist Null, weil  $\partial w$ , nach  $\partial x$  konstant ist. Auch in diesem Fall sind alle möglichen Strömungen einander mechanisch ähnlich, man mag die Plattenentfernung erhöhen und Geschwindigkeit und Zähigkeit beibehalten oder irgendwelche andere Änderungen vornehmen.

Einfache Strömungsvorgänge, die immer mechanisch ähnlich sind, kann man auch immer rechnerisch genau erfassen. Das ist bei Strömungsvorgängen, die nur bei Gleichheit der Reynoldsschen Zahl mechanisch ähnlich sind, nicht der Fall.

## II. Theoretische Überlegungen und Versuchserfahrungen.

### Einleitung.

Flüssigkeiten können sich in der Natur auf zweierlei ganz verschiedene Art bewegen. Betrachten wir z. B. die Strömung über ein Wehr, so haben wir den Eindruck, als ob das Wasser an der Überfallstelle ein Glasgebilde ist. Das Wasser scheint in einzelnen Fäden zu fließen, die einander nicht durchdringen und immer dieselbe Bahn beschreiben. Im Unterlaufe nach dem Wehr dagegen befindet sich das Wasser in starker Wirbelung, wobei es nicht mehr möglich ist, einzelne Wasserfäden zu verfolgen. Jetzt lagert sich eine mehr oder weniger energische Querbewegung über die in Richtung des Laufes gehende Hauptströmung. Ein anderes Beispiel gibt der aus einer Zigarre aufsteigende Rauch. In ruhiger Luft kann man deutlich einzelne Rauchfäden wahrnehmen, bei bewegter Luft aber gerät der Rauch in Wirbelbewegung.

Diese beiden Strömungsarten: Fadenströmung und Wirbelströmung gibt es auch in geschlossenen Rohrleitungen. Im besonderen, praktisch vornehmlich interessierenden Falle der geraden Rohrleitung mit unveränderlichem Querschnitt ist die Fadenströmung eine reine Parallelströmung; häufig Schichten- oder Laminarströmung (lamina = Schichte) genannt<sup>1</sup>. Eine wirbelige Bewegung heißt ganz allgemein turbulent (= stürmisch, ungestüm)<sup>2</sup>.

Jede in der Natur beobachtbare Flüssigkeitsbewegung ist entweder eine turbulente oder eine Fadenströmung. Diese ist an kleine Strömungsgeschwindigkeiten oder genauer Reynoldssche Zahlen gebunden, jene tritt bei großen Geschwindigkeiten oder Reynoldsschen Zahlen auf. Bei Laminarströmung bewegen sich die einzelnen Flüssigkeitsteilchen ständig parallel zur Rohrachse, im Falle von Turbulenz führen sie neben dieser Hauptbewegung noch regellose rasch hin- und

---

<sup>1</sup> Andere Bezeichnungen sind Bandströmung, geradlinige, gleitende, ruhige oder wirbelfreie Bewegung, schlichte Strömung und noch andere, die nach der Eigenart der Laminarströmung gebildet sind.

<sup>2</sup> Auch Flechtströmung, krummlinige, reißende, rollende, unruhige oder wilde Strömung genannt.

hergehende Seitenbewegungen aus, die die Eigenschaft besitzen, daß ihr Mittelwert schon nach sehr kurzer Zeit verschwindet. Die technische Praxis arbeitet fast immer mit großen Fördergeschwindigkeiten und daher mit turbulenten Rohrströmungen.

Strömt eine Flüssigkeit durch eine geschlossene Rohrleitung, so haben die einzelnen Teilchen nicht alle dieselbe Geschwindigkeit. In der Mitte des Rohrquerschnitts fließt die Flüssigkeit meist am schnellsten; nach der Rohrwand zu nimmt die Geschwindigkeit bis auf Null ab, weil die Flüssigkeit in jedem Fall in einer dünnen Schicht an der Wand haftet (siehe Abb. 18, 33, 34). Wir erkennen, daß der Strömungswiderstand, den zu bestimmen unsere Hauptaufgabe sein wird, im wesentlichen von der inneren Reibung in der Strömung abhängen muß, weil eine eigentliche äußere Reibung zwischen Flüssigkeit und Rohrwand gar nicht auftritt. Trotzdem hat aber auch die Oberflächenbeschaffenheit der Wand einen Einfluß. Der Strömungswiderstand ist natürlich bei laminarer und turbulenter Bewegung verschieden. Bei einer Fadenströmung haben wir es mit einem reinen Reibungswiderstand zu tun, der durch die verschiedene Geschwindigkeit der einzelnen Fäden bedingt ist. Der Strömungswiderstand bei turbulenter Bewegung ist vornehmlich ein Wirbelwiderstand. Die einzelnen Flüssigkeitsteilchen prallen bei den kleinen unregelmäßigen Schwingungen ständig zusammen, so kann man es sich wenigstens vorstellen, und rufen dadurch dauernde Stoßverluste hervor. Dabei tritt der Einfluß der Zähigkeit fast ganz zurück, nur die Bewegung in einer dünnen Wandschicht, in der die Strömungsgeschwindigkeit schnell auf Null zurückgeht, richtet sich noch nach der Zähigkeit der Flüssigkeit. Eben wegen dieser Vorgänge in der Wandschicht (Grenzschicht) aber kann man die Gesetze der reibungslosen Flüssigkeit (wo der Einfluß der Zähigkeit vollständig weggedacht ist) nicht ohne weiteres auf die turbulente Strömung anwenden.

## **A. Strömung in geraden Rohren mit unveränderlichem Querschnitt.**

### **1. Beziehungen für den Druckabfall in geraden Rohren.**

#### **a) Allgemeine Bemerkungen zur Geschwindigkeits- und Druckverteilung im Leitungsquerschnitt.**

Im allgemeinen Falle einer Rohrströmung fließen die einzelnen Flüssigkeitsteilchen unter irgendeinem Winkel zur Rohrachse. Unter der Geschwindigkeitsverteilung im Querschnitt (Geschwindigkeitsprofil) wollen wir immer die Anordnung der Geschwindigkeits-

komponenten parallel zur Achse,  $w_l$ , verstehen. Die mittlere Geschwindigkeit  $w$  wird auch nur für die Hauptbewegungsrichtung (parallel zur Achse) bestimmt:

$$w = \frac{1}{F} \int w_l dF = \frac{Q_s}{F}. \quad (66)$$

Je nachdem, ob der Bewegungszustand der Flüssigkeit gestört oder beruhigt ist, wird sich eine Geschwindigkeitsverteilung beliebig oder symmetrisch zur Achse gelegen ausbilden, wenn der Rohrquerschnitt selbst symmetrisch zu einer Achse liegt, siehe Abb. 33 und 34. Als Störquelle ist dabei jeder Teil der Leitung aufzufassen, der eine Ablenkung der Flüssigkeit von ihrer bisherigen Bewegungsrichtung hervorruft, also z. B. vorstehende Dichtungen oder Nietköpfe, Ventile, Krümmer, Abzweigstücke, Rohrerweiterungen und -verengungen, Meßinstrumente u. dgl.

Auch die Verteilung des Druckes über den Querschnitt hängt vom Grade der Beruhigung des Strömungszustandes ab. Für be-

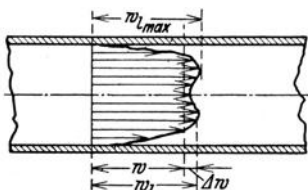


Abb. 33. Beispiel einer Geschwindigkeitsverteilung bei gestörter Kreisrohrströmung.

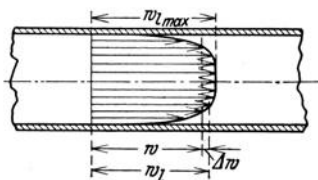


Abb. 34. Beispiel einer Geschwindigkeitsverteilung bei beruhigter Kreisrohrströmung.

ruhigte Strömungen durch gerade Rohre von unveränderlichem Querschnitt zeigt die Erfahrung, daß der Druck praktisch an allen Stellen des Querschnitts gleich groß ist. Damit ist auch das spezifische Gewicht bei zusammendrückbaren Flüssigkeiten wie bei raumbeständigen im Querschnitt konstant.

### b) Energieverteilung im Querschnitt.

Nach den Bemerkungen zur Druckverteilung im Querschnitt ist die Druck- und Lagenenergie auch gleichmäßig verteilt. Dasselbe wollen wir von der Wärmeenergie annehmen, was ja immer dann genügend genau zutrifft, wenn sich die Temperatur von Rohrwand und Flüssigkeit nicht unterscheiden.

Wie steht es nun mit der kinetischen Energie? Diese ist offenbar entsprechend der Geschwindigkeit sehr verschieden verteilt. Man wird deshalb mit einer mittleren Energie rechnen müssen. Dazu kann man aber nicht ohne weiteres die mittlere Geschwindigkeit

im Querschnitt  $w$  heranziehen. Die wirkliche kinetische Energie

$$\int \frac{w^3}{2g} dG \quad (67)$$

ist größer als die mit  $w$  gebildete. Es empfiehlt sich, einen Energiebeiwert  $\xi$  in die Rechnung einzuführen.

$$\xi = \frac{\int w_l^3 dG}{w^2 G} = \left( \frac{\int w_l^3 dF}{w^3 F} \right)_{\gamma = \text{konst}}, \quad (68)$$

wobei  $w_l$  ganz allgemein eine Funktion der Querschnittskordinaten  $x$  und  $y$  ist. Man kann leicht nachweisen, daß  $\xi$  immer größer als 1 ist, wenn die Geschwindigkeit nicht gleichmäßig verteilt ist.

Es möge  $\Delta w$  den ebenfalls von  $x$  und  $y$  abhängigen Unterschied zwischen  $w$  und  $w_l$ , also  $w_l = w + \Delta w$ , darstellen (Abb. 33 u. 34). Dann ist

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{w^3 F} \int (w + \Delta w)^3 dF \\ &= \frac{1}{w^3 F} \left[ w^3 F + 3w \int \Delta w^2 dF + 3w^2 \int \Delta w dF + \int \Delta w^3 dF \right]. \end{aligned}$$

Nach dem Begriff der mittleren Geschwindigkeit ist  $\int \Delta w dF = 0$ . Vernachlässigt man das kleine Glied  $\int \Delta w^3 dF$ , so ist

$$\xi = 1 + \frac{3}{w^2 F} \int \Delta w^2 dF. \quad (69)$$

Die Summe aller  $\Delta w^2$  ist immer positiv, also  $\xi > 1$ , wenn nicht  $\Delta w = 0$  und  $\xi = 1$  ist. Hierzu gelingt auch der exakte Nachweis leicht, wenn man die Geschwindigkeitsverteilung aufsucht, für die  $\xi$  einen äußersten Wert annimmt, wobei die Definitionsgleichung für die mittlere Geschwindigkeit Gl. (66) als Nebenbedingung einzuführen ist. Der Extremwert ist  $\xi = 1$ , wozu keine andere als die gleichmäßige Geschwindigkeitsverteilung gehört. Bei beruhigten Strömungen liegt  $\xi$  erfahrungsgemäß zwischen 1,08 und 2,00.

Für beruhigte Strömungen im Kreisrohr kann man Gl. (68) weiter entwickeln. Hier ist  $w_l = f(x) = f(y)$ . Man führt Polarkordinaten ein. Der Abstand eines Flüssigkeitsteilchens von der Rohrachse sei der Fahrstrahl am Winkel  $\varphi$  im Rohrquerschnitt

$$\xi = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{d/2} w_l^3 x dx d\varphi}{\left[ \int_0^{2\pi} \int_0^{d/2} w_l x dx d\varphi \right]^3} F^2.$$

Bei symmetrischer Geschwindigkeitsverteilung ist  $\varphi$  unabhängig von  $x$ .

Mit  $w_l = f(x)$  erhält man

$$\xi = \frac{d^4}{64} \frac{\int_0^{d/2} f(x)^3 x dx}{\left[ \int_0^{d/2} f(x) x dx \right]^3}. \quad (70)$$

Kennt man die Funktion  $w_l = f(x)$ , so kann man  $\xi$  berechnen.

Wenn die Funktion  $w_l = f(x) = f(y)$  einer symmetrischen Geschwindigkeitsverteilung punktweise gegeben ist, so setzt man am besten ein zeichnerisches

Auswertungsverfahren an. Kurve  $w_1$ , Abb. 35, stellt die Abhängigkeit der Geschwindigkeit von  $x/r$  dar, wobei  $x$  den Abstand von der Achse und  $r$  den Rohrhalmmesser bedeutet. Mit der Einführung von  $x/r$  kann man für  $\xi$  setzen

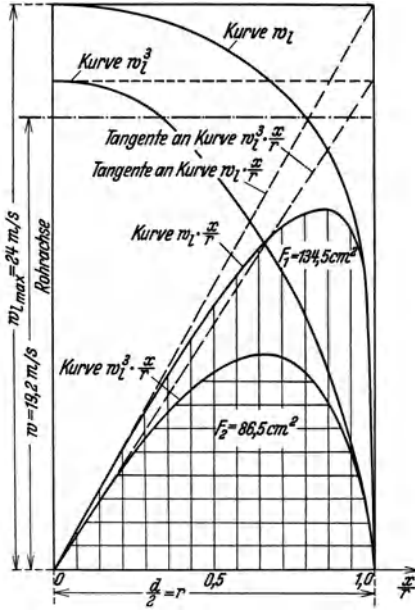


Abb. 35. Zeichnerisches Verfahren zur Bestimmung der mittleren Geschwindigkeit  $w$  und des Energiebeiwertes  $\xi$ , wenn das Geschwindigkeitsprofil  $w_1 = f(x)$  gegeben ist<sup>1</sup>. Maßstäbe  $m_1 = 1 \text{ m/s}$ ,  $m_2 = 1/14$ ,  $m_3 = 666 \text{ (m/s)}$ .

Mit der Einführung von  $x/r$  kann man für  $\xi$  setzen

$$\xi = \frac{1}{4} \frac{\int_0^1 w_1^3 \frac{x}{r} d\left(\frac{x}{r}\right)}{\left[ \int_0^1 w_1 \frac{x}{r} d\left(\frac{x}{r}\right) \right]^3}$$

und für die mittlere Strömungsgeschwindigkeit

$$w = 2 \int_0^1 w_1 \frac{x}{r} d\left(\frac{x}{r}\right). \quad (71)$$

Nun trägt man zur Kurve  $w_1$  über  $x/r$  die Werte  $w_1 \cdot \frac{x}{r}$  auf und planimetriert diese (senkrecht schraffierte) Fläche  $F_1(\text{cm}^2)$ . Würde  $w_1$  im Maßstab  $1 \text{ cm} \hat{=} m_1 \text{ m/s}$  und  $x/r$  im Maßstab  $1 \text{ cm} \hat{=} m_2 \cdot 1 \left( \text{Einheit } 1 = \left(\frac{x}{r}\right)_{x=r} \right)$  aufgetragen, so ist  $w = 2 \cdot F_1 \cdot m_1 \cdot m_2$ . Dann zeichnet man in einem passenden Maßstab  $1 \text{ cm} \hat{=} m_3 \text{ (m/s)}^3$  die Werte  $w_1^3$  und  $w_1^3 \cdot \frac{x}{r}$  über  $x/r$  auf und planimetriert die

(waagrecht schraffierte) Fläche  $F_2$ . Damit gilt für den Energiebeiwert  $\xi$

$$\xi = \frac{1}{4} \frac{F_2}{F_1^3} \frac{m_3}{m_1^3 m_2^3}.$$

Für das Beispiel Abb. 35 ergibt sich  $\xi = 1,16$ , d. h. also, die wirkliche kinetische Energie im Querschnitt ist 16 vH größer als die mit der mittleren Geschwindigkeit  $w$  errechnete.

Um den Vergleich mit Geschwindigkeitsverteilungen in anderen Kreisrohren zu ermöglichen, gibt man gern  $w_1$  im Verhältnis zu  $w_{1\text{max}}$ , der größten Geschwindigkeitskomponente  $w_1$  im Rohrquerschnitt in Achsrichtung an, die bei symmetrischer Verteilung in der Rohrachse liegt. Damit wird

$$\xi = \frac{1}{4} \frac{\int_0^1 \left(\frac{w_1}{w_{1\text{max}}}\right)^3 \frac{x}{r} d\left(\frac{x}{r}\right)}{\left[ \int_0^1 \frac{w_1}{w_{1\text{max}}} \frac{x}{r} d\left(\frac{x}{r}\right) \right]^3} \quad (72)$$

<sup>1</sup> Siehe hierzu auch J. Gasterstädt: Experimentelle Untersuchung des pneumatischen Fördervorganges. VDI-Forsch.-Heft 1924 Nr. 265.



und

$$w = w_{l\max} \cdot 2 \int_0^1 \frac{w_l}{w_{l\max}} \frac{x}{r} d\left(\frac{x}{r}\right). \quad (73)$$

Das zeichnerische Auswertungsverfahren für diese Integrale ist genau wie das oben beschriebene.

### c) Allgemeine Druckabfallgleichung.

Über die Art, wie die Reibung in die Bewegungsvorgänge von Flüssigkeiten eingreift, gibt der Abschnitt über die innere und äußere Reibung schon Aufschluß. Wie wir weiter feststellten, kommt es dabei zu einem Abfall des statischen Druckes. Es ist nun anzustreben, diesen Druckabfall rechnerisch zu erfassen, damit man seine Größe bei der Beurteilung und beim Entwurf technischer Anlagen berechnen kann.

Der Unterschied im statischen Druck am Anfang und Ende einer geraden Rohrleitung hat zwei Aufgaben:

er muß den Reibungswiderstand überwinden;

er muß den Trägheitswiderstand überwinden, der auftritt, wenn eine zusammendrückbare Flüssigkeit strömt, die sich mit abnehmendem statischen Drucke ausdehnt und dabei zur Aufrechterhaltung der Kontinuität beschleunigt werden muß. Bei tropfbaren Flüssigkeiten verschwindet dieser Tätigkeitswiderstand.

Der rechnerischen Erfassung des Strömungswiderstandes bieten sich zwei ganz verschiedene Wege. Einmal kann man die Bewegungen der einzelnen Flüssigkeitsteilchen verfolgen und versuchen, aus den Reibungswirkungen an den Teilchen die Gesamtreibung zu ermitteln (exakte Methode der Hydrodynamik). Andererseits kann man ohne Rücksicht auf die inneren Vorgänge in strömenden Flüssigkeiten nach Versuchserfahrungen praktische Ansätze machen, die eine näherungsweise Erfassung des Strömungswiderstandes erhoffen lassen (Methoden der praktischen Hydraulik).

Mit den exakten Ansätzen der Hydrodynamik kommt man heute nur bei der Parallelströmung zu brauchbaren Ergebnissen. Bei der technisch besonders wichtigen wirbeligen Strömung, die durch schwer übersichtliche Gesetze geregelt wird, ist bis heute eine exakte Erfassung des Strömungswiderstandes noch nicht gelungen. Hier helfen vorläufig nur die auf einer Unzahl von Versuchen aufgebauten Ansätze der Hydraulik.

Die Einführung eines Reibungskoeffizienten, wie es bei der Reibung zwischen festen Körpern üblich ist, führt bei der Reibung zwischen festen und flüssigen Körpern und in Flüssigkeiten selbst nicht zum Erfolg, weil da Berührungsfläche, Druck und Geschwindigkeit einen ganz anderen Einfluß haben. Man macht vielmehr nach Erfahrung zwei grundlegende Ansätze:

1. denkt man sich, daß der Strömungswiderstand durch eine Schubspannung hervorgerufen wird, die gleichmäßig über die benetzte Innenoberfläche des Rohres verteilt ist;

2. nimmt man an, daß der Strömungswiderstand vom Quadrat der mittleren Strömungsgeschwindigkeit abhängt, weil die Massenwiderstände innerhalb der wirbelnd bewegten Flüssigkeitsmasse von entscheidendem Einfluß sind.

Diese beiden Ansätze entsprechen der Beobachtung, daß der Flüssigkeitswiderstand proportional der benetzten Fläche und abhängig von der Strömungsgeschwindigkeit ist.

Es möge  $W$  den Widerstand in kg darstellen, den 1 kg der strömenden Flüssigkeit bei der Bewegung durch ein Rohr vom Querschnitt  $F$  erfährt. 1 kg Flüssigkeit erfüllt das Rohr auf die Länge  $\Delta l$ , siehe Abb. 36. Für Gewicht  $G$  und Oberfläche  $O$  des Flüssigkeitszylinders bestehen folgende Beziehungen:

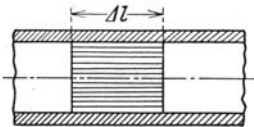


Abb. 36. 1 kg der Flüssigkeit erfüllt die Leitung auf die Länge  $\Delta l$ .

$$G = F \cdot \Delta l \cdot \gamma = 1 \text{ kg}$$

und

$$O = U \cdot \Delta l \text{ m}^2, \quad (74)$$

wobei  $U$  den Umfang des Rohrquerschnittes senkrecht zur Achse bedeutet.

$$O = \frac{U}{F \cdot \gamma}. \quad (75)$$

Die über die Oberfläche  $O$  des Flüssigkeitszylinders gleichmäßig verteilte Schubspannung sei  $\tau_o$ . Dann gilt für den Strömungswiderstand

$$W = O \tau_o = \frac{\tau_o}{\gamma} \frac{U}{F} \text{ kg/kg}. \quad (76)$$

Beim Durchströmen einer beliebigen Rohrlänge  $l$  wird demnach die Reibungsarbeit

$$L_R = W l = \frac{\tau_o}{\gamma} \frac{U}{F} l \text{ mkg/kg} \quad (77)$$

geleistet, wenn  $\tau_o$  und  $\gamma$  nicht von der Rohrlänge abhängen, oder

$$L_R = \frac{U}{F} \int_0^l \frac{\tau_o}{\gamma} dl, \quad (78)$$

wenn  $\tau_o$  und  $\gamma$  veränderlich sind. Für den in der Technik am meisten vorkommenden kreisförmigen Rohrquerschnitt  $F = \frac{\pi}{4} d^2$  heißen die Gleichungen

$$G = \frac{\pi d^2}{4} \cdot \Delta l \cdot \gamma = 1 \text{ kg} \quad \text{und} \quad O = \pi \cdot d \cdot \Delta l, \quad (79)$$

$$O = \frac{4}{d \cdot \gamma}. \quad (80)$$

Die benetzte Oberfläche des Rohres ist um so größer, je kleiner der Ausdruck  $F/U$  ist. Der kleinstmögliche Umfang einer der Größe nach gegebenen Fläche ist der Kreis; dort ist der „hydraulische Radius“  $F/U$  gleich  $d/4$ .

Nach den Abschnitten über Energieumwandlungen gilt für die Reibungsarbeit ganz allgemein

$$dH + \frac{1}{\gamma} dP = J dl = - \frac{w dw}{g} - dL_R. \quad (81)$$

Diese Gleichungen wurden ursprünglich für ein Flüssigkeitselement mit der Geschwindigkeit  $w$  entwickelt. Wenn man sie auf die gesamte Rohrströmung anwendet, so bedeuten die einzelnen Glieder die Änderungen der mittleren Energie im Querschnitt. Da die kinetische Energie durch die mittlere Geschwindigkeit ausgedrückt wird, muß der Energiebeiwert  $\xi$  nach Gl. (68) eingeführt werden. Es ist also

$$J dl = - \xi \frac{w dw}{g} - dL_R \quad (82)$$

und mit Gl. (78)

$$J dl = - \xi \frac{w dw}{g} - \frac{U}{F} \frac{\tau_0}{\gamma} dl. \quad (83)$$

Der zweite Ansatz der Hydraulik gibt eine Beziehung zwischen der gedachten Randspannung  $\tau_0$  und der mittleren Strömungsgeschwindigkeit  $w$ . Man setzt

$$4 \frac{\tau_0}{\gamma} = \lambda_R \frac{w^2}{2g}, \quad (84)$$

wobei an Stelle des Geschwindigkeitsquadrates die Geschwindigkeitshöhe eingeführt wird, um in der Widerstandszahl  $\lambda_R$  eine dimensionslose Größe zu haben. Die allgemeine Druckabfallgleichung lautet nun für beliebige Rohrquerschnitte

$$J dl = - \xi \frac{w dw}{g} - \lambda_R \frac{1}{4} \frac{U}{F} \frac{w^2}{2g} dl \quad (85)$$

und für Kreisrohre

$$J dl = - \xi \frac{w dw}{g} - \lambda_R \frac{1}{d} \frac{w^2}{2g} dl. \quad (86)$$

Die Beschleunigungsarbeit pflegt man auch durch Oberflächenspannung und Geschwindigkeitshöhe auszudrücken:

$$\xi \frac{w dw}{g} = \lambda_B \frac{1}{4} \frac{U}{F} \frac{w^2}{2g} dl. \quad (87)$$

Nun kann man das Reibungsglied  $\lambda_R$  und das Beschleunigungsglied  $\lambda_B$  der Widerstandszahl zusammenfassen zu

$$\lambda = \lambda_R + \lambda_B \quad (88)$$

und erhält die Energiegleichung

$$4J \frac{F}{U} = -\lambda \frac{w^2}{2g}, \quad (89)$$

die weiter nichts aussagt, als daß die Änderung der kinetischen Energie und die Reibungsarbeit durch die Änderung der potentiellen Energie und die zugeführte Arbeit  $Q'_{21}$  dargestellt werden müssen.

Zum Reibungsglied  $\lambda_R$  der Widerstandszahl ist noch zu bemerken, daß es sich wegen der willkürlichen Annahmen nicht um eine feste Größe handeln kann. Tatsächlich richtet sich  $\lambda_R$  nach der Art der strömenden Flüssigkeit, nach deren Druck und Temperatur und nach der Beschaffenheit des Rohrbaustoffes. Ferner hängt  $\lambda_R$  von der Geschwindigkeit  $w$  ab, weil das quadratische Gesetz nur annähernd gilt. Endlich zeigt sich, daß auch der hydraulische Radius  $F/U$  auf  $\lambda_R$  Einfluß hat. In manchen Fällen ist  $\lambda_R$  auch von der Querschnittsform abhängig, wenn es sich um ungewöhnliche oder sehr unregelmäßige Formen handelt.

Es ist nun die Aufgabe der praktischen Strömungsforschung, diese Zusammenhänge für die Berechnung der technisch wichtigsten Fälle weiter zu klären.

#### d) Druckverlust und Ähnlichkeitsgesetz.

Man kann die Art der strömenden Flüssigkeit durch ihre Zähigkeit  $\eta$ , ihren Druck  $P$  und ihre Temperatur  $t$  kennzeichnen. Zur Bedingung der geometrischen Ähnlichkeit gehört z. B., daß zwei Kreisrohre vom selben Durchmesser auch gleich rauh sind. Die hydraulische Rauigkeit des Rohrbaustoffes führt man erfahrungsgemäß durch Rauigkeitszahlen  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$  ein, die das Verhältnis der mittleren Höhe aller Rauigkeitserhebungen und Vertiefungen der benetzten Oberfläche zum mittleren Rohrdurchmesser und die Form und Häufigkeit der Erhebungen angeben. Wir wollen für den Rauigkeitseinfluß zunächst eine allgemeine Zahl  $\varepsilon$  ansetzen. Ohne Rücksicht auf andere als kreisförmige Rohrquerschnitte erhält man also

$$\lambda_R = f(\eta, P, t, \varepsilon, w, d). \quad (90)$$

Wenn man die einzelnen Zusammenhänge alle genau erforschen müßte, würde man wohl kaum zu umfassenden Ergebnissen gelangen. Hier gibt die Ähnlichkeitstheorie ein ausgezeichnetes Hilfsmittel, um die einzelnen Abhängigkeiten zu Gruppen zusammenzufassen.

Beim Vergleich der  $f$ -Werte, anläßlich der Entwicklung des mechanischen Ähnlichkeitsgesetzes aus der Navier-Stokeschen Gleichung, blieb zunächst das  $f_P$  enthaltende Glied unberücksichtigt [Gl.(62)]. Aus der Beziehung

$$\frac{f_w^2}{f_d} = \frac{f_P}{f_\gamma f_d} \quad \text{oder} \quad \frac{f_w^2 f_\gamma f_d}{f_P f_d} = 1$$

erhält man eine wertvolle Stütze für die auf den beiden Ansätzen der Hydraulik aufgebaute Druckabfallgleichung (89). Setzt man ein  $f_a$  proportional dem Rohrdurchmesser  $d$ , ein  $f_v$  proportional der Rohrlänge  $l = l_2 - l_1$  und  $f_p$  proportional dem Druckabfall  $-(P_1 - P_2)$ , so ergibt sich

$$\frac{P_1 - P_2}{\gamma} = -\text{konst} \frac{l}{d} w^2.$$

Der Einfluß von  $P$  und  $t$  kann durch den von  $\gamma$  ersetzt werden. Für die Strömung raumbeständiger Flüssigkeiten gilt wegen  $\eta$ ,  $\gamma$ ,  $\varepsilon$ ,  $w$  und  $d = \text{konst}$ , d. h.  $\lambda_B = 0$  und  $\lambda_R = \text{konst}$  [Gl. (90)]

$$\frac{P_1 - P_2}{\gamma} = -\lambda_R \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g} \quad \text{oder} \quad Jd = -\lambda_R \frac{w^2}{2g}, \quad (91)$$

also die oben entwickelte Druckabfallgleichung (89). Der Vergleich der Ausdrücke

$$\frac{f_p}{f_\gamma f_a} = \frac{f_v f_w}{f_a f_a} \quad \text{oder} \quad \frac{f_p f_w f_a^2}{f_\gamma f_w^2 f_a f_v} = 1$$

gibt eine Gleichung

$$\frac{P_1 - P_2}{\gamma} = -\text{konst} \left( \frac{v}{w d} \right) \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g} = -\frac{\text{konst}}{Re} \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g}, \quad (92)$$

wobei unter  $Re = \frac{w d}{\nu}$  die Reynoldssche Zahl zu verstehen ist. Daraus folgt für mechanisch ähnliche Strömungen

$$\lambda_R = \frac{\text{konst}}{Re}, \quad (93)$$

also wegen der gleichen  $Re$ -Werte auch gleiche Widerstandszahlen  $\lambda_R$ . Sind die Strömungen wohl geometrisch, aber nicht mechanisch ähnlich, so besteht keine Gleichheit der  $f$ -Gruppen, und man kann für  $\lambda_R$  ansetzen

$$\lambda_R = \text{konst} f \left( \frac{1}{Re} \right). \quad (94)$$

Über die Art der Funktion  $f(1/Re)$  sagt die Ähnlichkeitstheorie nichts aus. Es ist nur wahrscheinlich, daß  $\lambda_R$  um so größer ist, je kleiner  $Re$  ist und umgekehrt. Der Nutzen, den uns die Kenntnis von diesem Zusammenhang bringt, ist offenbar: Hat man die Funktion  $\lambda_R = \text{konst} f(1/Re)$  auf dem Versuchswege bestimmt, so kennt man auch den Einfluß von  $\eta$ ,  $\gamma$ ,  $w$  und  $d$  auf  $\lambda_R$ . Es bleibt nur noch die Abhängigkeit von  $\varepsilon$  übrig, also

$$\lambda_R = \text{konst} f \left( \frac{1}{Re}, \varepsilon \right), \quad (95)$$

die man durch wenige Versuchsreihen für jede Rauigkeit  $\varepsilon$  ermitteln kann.

Alle technischen Rohre sind hydraulisch rau. Erfahrungsgemäß wirkt die Rauigkeit bei kleinen Reynoldsschen Zahlen (Parallelströmung) nicht auf den Strömungsvorgang ein. Bei turbulenter Strömung, wo die Geschwindigkeit in einer sehr dünnen Randschicht (Grenzschicht) nahezu unvermittelt auf Null zurückgeht, ragen die Wandunebenheiten der technischen Rohre durch diese Grenzschicht und lösen einen kräftigen Impulsaustausch aus, der den ganzen Strömungsvorgang maßgeblich beeinflusst. Danach bieten offenbar raue Rohre dem Flüssigkeitsstrom einen größeren Widerstand als glatte Rohre. Immer tritt aber auch bei spiegelglatten, waagrecht verlegten Rohren noch erheblicher Strömungswiderstand auf, weil die Flüssigkeit in jedem Falle an der Rohrwand haftet, wodurch die innere Flüssigkeitsreibung zur Wirkung kommt. In technisch glatten Rohren, wie gezogenem Messingrohr, macht sich der Rauigkeitseinfluß erst bei sehr großen Reynoldsschen Zahlen bemerkbar; sie werden daher später gesondert behandelt.

Die Gültigkeit von Gl. (94) kann man auch leicht durch eine Dimensionsbetrachtung nachweisen. Nach Gl. (90) ist zunächst ohne Rücksicht auf  $\varepsilon$  die Funktion  $\lambda_R = f(\eta, \gamma, w, d)$ . Die Forschungsergebnisse lassen einen potenzgesetzmäßigen Zusammenhang zwischen den einzelnen Größen vermuten. Man setzt daher für Gl. (91) mit  $C$  als Konstante

$$P_1 - P_2 = \gamma f(\eta, \gamma, w, d) \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g} = \frac{C}{2g} \eta^x \gamma^y d^z w^n l^q.$$

Für die Benennungen der Gleichungswerte gilt mit  $q = 1$

$$\frac{\text{kg}}{\text{m}^2} = \frac{\text{s}^2}{\text{m}} \frac{\text{kg}^x}{\text{m}^x \text{s}^x} \frac{\text{kg}^y}{\text{m}^{3y}} \text{m}^z \frac{\text{m}^n}{\text{s}^n} \text{m}.$$

Danach müssen die Einzelgleichungen gelten

$$\begin{array}{l} \text{kg:} \quad 1 = x + y, \\ \text{m:} \quad -2 = -1 - x - 3y + z + n + 1, \\ \text{s:} \quad 0 = 2 - x - n, \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} y = 1 - x = n - 1, \\ z = x + 3y - n - 2 = n - 3, \\ x = 2 - n \end{array} \right.$$

oder

$$P_1 - P_2 = \frac{C}{2g} \eta^{2-n} \gamma^{n-1} d^{n-3} w^n l,$$

$$dJ = \frac{P_1 - P_2}{\gamma l} d = C \frac{\eta^{2-n}}{\gamma^{2-n} d^{2-n} w^{2-n}} \frac{w^2}{2g}$$

oder

$$\lambda_R = C \left( \frac{\nu}{w d} \right)^{2-n} = C (Re)^{n-2}. \quad (96)$$

Dieses Gesetz stammt von Reynolds. Den Rauigkeitseinfluß berücksichtigte er, indem er  $n = f(\varepsilon)$  setzte. Ehe wir uns weiter mit den Ansätzen für die Widerstandszahl  $\lambda_R$  befassen, wollen wir zunächst die allgemeine Druckabfallgleichung für raumbeständige und zusammendrückbare Flüssigkeiten aufstellen.

### e) Druckabfallgleichung für tropfbare Flüssigkeiten.

Bewegt sich eine raumbeständige Flüssigkeit durch eine Rohrleitung von unveränderlichem Querschnitt, so hat neben  $\gamma$  (bei praktisch gleichbleibender innerer Energie) auch  $w$  in jedem Querschnitt denselben Betrag. Damit ist  $\lambda_B = 0$ , und die Druckabfallgleichung (89) geht über in

$$4J \frac{F}{U} = -\lambda_R \frac{w^2}{2g} \quad (97)$$

oder für Kreisrohre in

$$Jd = -\lambda_R \frac{w^2}{2g}. \quad (98)$$

In diesem Falle ist  $\lambda_R$  unabhängig von der Rohrlänge  $l$ , gleichbleibenden Rohrbaustoff vorausgesetzt. Wir wollen weiterhin alle Gleichungen mit dem Rohrdurchmesser  $d$  entwickeln. Für beliebige Querschnittsformen erhält man die Beziehungen sofort, wenn man  $d$  durch  $4 \frac{F}{U}$  ersetzt. Mit Gl. (55) kann man für Gl. (98) schreiben, wenn  $l = l_2 - l_1$  ist:

$$H_1 - H_2 + \frac{1}{\gamma} (P_1 - P_2) = \lambda_R \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g} \quad (99)$$

oder

$$P_1 - P_2 = \gamma \lambda_R \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g} - (H_1 - H_2) \gamma \text{ kg/m}^2 \text{ oder mm WS}, \quad (100)$$

$$H_1 - H_2 + \frac{1}{\gamma} (P_1 - P_2) = 0,0826 \lambda_R \frac{Q_s^2}{d^5} l = 63,7 \lambda_R \frac{Q_h^2 l}{(100 d)^5}, \quad (101)$$

$$(H_1 - H_2) \cdot \gamma + P_1 - P_2 = 0,0826 \frac{1}{\gamma} \lambda_R \frac{G_s^2}{d^5} l = 63,7 \frac{1}{\gamma} \lambda_R \frac{G_h^2 l}{(100 d)^5}. \quad (102)$$

Mit  $\gamma'$  in  $\text{g/cm}^3 = \frac{\gamma}{1000} = \gamma'$  in  $\text{kg/dm}^3 = \gamma'$  in  $\text{t/m}^3$  und  $D$  in mm, also  $D = 1000 d$  gilt

$$P_1 - P_2 = 10^6 \gamma' \lambda_R \frac{l}{D} \frac{w^2}{2g} - (H_1 - H_2) 10^3 \gamma' \text{ mm WS}, \quad (103)$$

$$0,354 G_h = \gamma' w D^2, \quad (104)$$

$$P_1 - P_2 = 6370 \frac{1}{\gamma'} \lambda_R \frac{l}{D^5} G_h^2 - (H_1 - H_2) 10^3 \gamma' \text{ mm WS}. \quad (105)$$

Endlich erhält man mit

$$w = 4 Q_s / \pi d^2 = \sqrt[5]{2g \frac{(-) d J}{\lambda_R}} \quad \text{und} \quad \sqrt[5]{16 / \pi^2 2g} = 0,607, \quad (106)$$

$$d = 0,607 \sqrt[5]{\lambda_R} \sqrt[5]{Q_s^2 / J} = 0,0230 \sqrt[5]{\lambda_R} \sqrt[5]{Q_h^2 / J}.$$

Man erkennt, daß der Druckverlust bei Verringerung des Durchmessers  $d$ , der in der 5. Potenz auftritt, sehr stark wächst und umgekehrt.

## f) Druckabfallgleichungen für gasförmige Flüssigkeiten.

Die Art der Zustandsänderung bei der Fortleitung gasförmiger Flüssigkeiten hängt von der Ausführung der Rohrleitung ab. Man benutzt in der Technik je nach Verwendungszweck nackte oder mit Wärmeschutzmitteln versehene Leitungen. Führt eine nackte Leitung durch einen Raum, der sich auf einer unveränderlichen Temperatur befindet, und hat die strömende Flüssigkeit am Anfang der Leitung auch diese Temperatur; wie z. B. bei Gasfernleitungen, so wird die zur Bewältigung der Beschleunigungsarbeit herangezogene potentielle Energie stetig wieder durch Wärmeübergang aus der Umgebung ersetzt. In diesem Falle

dehnt sich die Flüssigkeit isothermisch aus. Ganz andere Verhältnisse herrschen z. B. bei der Fortleitung von Heißdampf mit großer Geschwindigkeit. Wenn die Leitung sehr gut wärmegeschützt ist, wird es dabei zu einer adiabatischen Ausdehnung der Flüssigkeit kommen.

Ein besonderes Kapitel wäre noch der Strömung bei erheblichem Wärmeübergang aus der oder an die Umgebung zu widmen. Hierher gehören Fälle mit Leitungen, die schlecht oder gar nicht wärmegeschützt (z. B. Röhre von Heizanlagen) oder kältegeschützt (z. B. Röhre von Kühlanlagen) sind, so daß ein starker Wärmeaustausch mit der Umgebung stattfindet. Zur rechnerischen Verfolgung solcher Strömungen muß man die Wärmeübertragungsgesetze kennen. Die erschöpfende Behandlung dieser Aufgaben würde hier aber zu weit führen<sup>1</sup>.

**α) Fortleitung ohne Wärmeaustausch, adiabatische Strömung.** Ohne Rücksicht auf das geodätische Gefälle  $dH$  heißt die Druckabfallgleichung (89) mit  $4 \frac{F}{U} = d$  und Gl. (81)

$$\frac{dP}{\gamma} = - (\lambda_R + \lambda_B) \frac{1}{d} \frac{w^2}{2g} dl.$$

Bei adiabatischer Strömung wird dem fließenden Körper von außen Wärme weder zugeführt noch entzogen. Damit würde sich der Zustand der Flüssigkeit, wenn keine Reibungswiderstände zu überwinden wären, nach einem Gesetz  $Pv^* = \text{konst}$  richten. Tatsächlich muß aber Reibungsarbeit geleistet werden, die in Wärmeenergie umgesetzt wird; die Druckenergie nimmt stärker und die innere Energie weniger stark ab, als das Gesetz der Adiabate angibt, und die Temperatur ist nach der Ausdehnung höher als bei reibungsloser Strömung.

Um die Art der Zustandsänderung kennenzulernen, wollen wir zunächst den Temperaturabfall bei adiabatischer reibungsloser Strömung untersuchen, der wegen  $1 \text{ kcal} = 427 \text{ mkg}$  sehr gering sein wird. Die Flüssigkeit soll dabei dem Gesetz  $Pv = RT$  streng folgen. Nach Gl. (38) und (40) gilt für zwei Querschnitte 1 und 2 die Beziehung

$$\frac{\kappa}{\kappa - 1} R (T_1 - T_2) = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g}, \quad (107)$$

das ist z. B. für Luft mit  $\kappa = 1,4$  und  $R = 29,3$

$$T_1 - T_2 = 0,0098 \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} \sim \frac{1}{100} \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g}.$$

<sup>1</sup> Siehe hierzu: ten Bosch, M.: Die Wärmeübertragung. Berlin 1922. Gröber, H.: Wärmeübertragung. Berlin 1926. Merkel, F.: Die Grundlagen der Wärmeübertragung. Leipzig 1927. Schack, A.: Der industrielle Wärmeübergang. Düsseldorf 1929. Banki, D.: Energieumwandlungen in Flüssigkeiten Bd. I S. 91. Berlin 1921.



Danach fällt die Temperatur erst um 1 Grad, wenn sich die kinetische Energie um 100 mkg/kg ändert, was z. B. einem Anwachsen der Geschwindigkeit von  $w_1 = 1$  m/s auf  $w_2 = 44,3$  m/s entsprechen würde. Bei der Strömung einer reibungsbehafteten Flüssigkeit ist dieser Temperaturunterschied noch geringer, weil die erzeugte Reibungswärme zur inneren Energie zuzuschlagen ist. Wegen dieses geringen Temperaturabfalls ist es praktisch in den meisten Fällen zulässig, an Stelle mit der adiabatischen mit isothermischer, also mit temperaturbeständiger Ausdehnung zu rechnen.

Einen ganz allgemeinen Einblick erlangt man in den adiabatischen Vorgang, wenn man die Schallgeschwindigkeit  $w_s = \sqrt{g \kappa P v}$  (im Zustand  $P$  und  $v$ ) einführt. Zunächst besteht die Kontinuitätsbedingung für Rohre mit unveränderlichem Querschnitt

$$\gamma w = \text{konst} \quad \text{oder} \quad w_2 = \frac{w_1 \gamma_1}{\gamma_2}.$$

Mit

$$\frac{\kappa}{\kappa - 1} \left[ \frac{P_1}{\gamma_1} - \frac{P_2}{\gamma_2} \right] = \frac{i_1 - i_2}{A} = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g}$$

folgt

$$\frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{P_1}{\gamma_1} + \frac{w_1^2}{2g} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{P_2}{\gamma_2} + \frac{w_2^2}{2g} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{P_2}{\gamma_2} + \frac{w_1^2}{2g} \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2}.$$

Setzt man

$$\frac{w_1^2}{2g} \frac{\gamma_1^2}{\kappa} \frac{\kappa - 1}{\kappa} = b,$$

so erhält man das Gesetz der Zustandsänderung für reibungslose Flüssigkeiten in

$$\frac{P}{\gamma} \left( 1 + \frac{b}{P\gamma} \right) = \text{konst}$$

oder mit  $w_1 \gamma_1 = w \gamma$  und  $w_s^2 = \frac{P}{\gamma} g \kappa = \kappa g R T$  in

$$\frac{P}{\gamma} \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} \frac{w^2}{w_s^2} \right) = \text{konst}. \quad (108)$$

Daraus folgt, daß das Gesetz  $\frac{P}{\gamma} = \text{konst}$  der Isotherme um so eher angesetzt werden kann, je kleiner das Verhältnis von  $w$  zu  $w_s$  ist. Beträgt z. B. bei Luft mit  $\kappa = 1,4$  und  $R = 29,3$  die Geschwindigkeit bei  $0^\circ$

$$w = 50 \text{ m/s}, \quad \text{so ist} \quad \frac{\kappa - 1}{2} \frac{w^2}{w_s^2} = 0,0046,$$

$$w = 100 \text{ m/s} \quad = 0,0182,$$

also klein gegen 1. Bei hochüberhitztem Wasserdampf mit  $\kappa = 1,3$  und  $R = 47,1$  ist bei  $300^\circ$  und

$$w = 50 \text{ m/s} \quad \frac{\kappa - 1}{2} \frac{w^2}{w_s^2} = 0,0011,$$

$$w = 100 \text{ m/s} \quad = 0,0044.$$

Die Schallgeschwindigkeit hängt nur von der Art und der Temperatur der Flüssigkeit ab.

Zahlentafel 22. Schallgeschwindigkeit der Luft und des überhitzten Wasserdampfes in Abhängigkeit von der Temperatur.

$t$ °C	$w_s$ m/s	$w_s^2$	$t$ °C	$w_s$ m/s	$w_s^2$
0	331	109600	100	473	224000
20	343	117800	150	504	254000
50	360	129800	200	533	284000
100	387	150000	250	560	314000
200	436	190100	300	586	344000
300	480	230300	350	612	374000
500	557	310800	400	636	405000

trockene Luft überhitzter Wasserdampf

Mit der Beziehung

$$\frac{dP}{\gamma} = v dP = d(vP) - P dv = R dT - RT \frac{dv}{v} = R dT - RT \frac{dw}{w}$$

wegen

$$\frac{dw}{w} = \frac{dv}{v}$$

erhält man nunmehr mit Gl. (81), (86) und (107)

$$\left( R T_1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \xi \frac{w^2 - w_1^2}{2g} \right) \frac{dw}{w} + \frac{\kappa - 1}{\kappa} \xi \frac{w dw}{g} - \xi \frac{w dw}{g} = \lambda_R \frac{1}{d} \frac{w^2}{2g} dl.$$

Die durch die Klammer zusammengefaßte Energieabnahme muß nicht nur die Beschleunigung, sondern auch die Reibung bewältigen. Das geht nur, wenn  $w$  bei der wirklichen kleiner als bei der reibungslosen Strömung ist. Nach Umformung erhält man

$$\left( R T_1 + \frac{\kappa - 1}{\kappa} \xi \frac{w_1^2}{2g} \right) 2g \frac{dw}{w^3} - \frac{\kappa + 1}{\kappa} \frac{dw}{w} \xi = \lambda_R \frac{1}{d} dl$$

und integriert zwischen den Grenzen  $w_2$  und  $w_1$ , 0 und  $l$  mit

$$\frac{R T_1 2g}{w_1^2} = \frac{2 w_1^2}{\kappa w_1^2}$$

$$\frac{1}{\kappa} \left[ \frac{w_2^2}{w_1^2} + \frac{\kappa - 1}{2} \xi \right] \left[ 1 - \left( \frac{w_1}{w_2} \right)^2 \right] + \frac{\kappa + 1}{\kappa 2} \xi \ln \left( \frac{w_1}{w_2} \right)^2 = \lambda_R \frac{1}{d} l. \quad (109)$$

Dabei ist unter der Annahme, daß die Rauigkeitszahl  $\varepsilon$  nicht von  $l$  abhängt (gleichmäßige Beschaffenheit des Rohrrinnens)

$$\left. \begin{aligned} \lambda_R &= \text{konst } f \left( \frac{1}{Re} \right) \\ \text{und mit} \\ Re &= \frac{w d}{\nu} = (w \gamma) \frac{d}{\mu g}, \quad \text{also } \frac{d(Re)}{dl} = 0, \\ \text{auch} \\ \frac{d(\lambda_R)}{dl} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (110)$$

Aus

$$T_2 = T_1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa R} \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g}$$

erhält man  $T_2$ , wobei zum Ausdruck kommt, daß wegen der Reibung  $w_2$  kleiner und  $T_2$  größer als bei reibungsfreier Strömung ist.  $P_2$  ergibt sich endlich aus

$$P_2 = P_1 \left( \frac{w_1 T_2}{w_2 T_1} \right).$$

**β) Fortleitung bei unveränderlicher Temperatur und vernachlässigbarer Änderung der Lagenenergie.** Für das Leitungsgefälle bei isothermischer Strömung, die in ihrer thermodynamischen Wirkung einem Drosselvorgang gleichkommt ( $i = \text{konst}$ ), war unter Vernachlässigung der Änderung der Lagenenergie der Ausdruck

$$J = \frac{1}{\gamma_1} \frac{P_1}{P} \frac{dP}{dl}$$

gefunden worden [Gl. (56)]. Damit heißt die Druckabfallgleichung

$$\frac{P_1}{\gamma_1} \frac{dP}{P} = -(\lambda_R + \lambda_B) \frac{1}{d} \frac{w^2}{2g} dl. \quad (111)$$

Für isothermische Zustandsänderung gilt

$$\text{weil} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{P_1}{\gamma_1} = \frac{P}{\gamma} \quad \text{und} \quad w_1 P_1 = P w, \\ w_1 \gamma_1 = w \gamma = \frac{\gamma_1}{P_1} w_1 P_1 = \frac{\gamma}{P} w P \end{array} \right\} P w^2 \gamma = \text{konst}$$

ist. Mit Rücksicht auf diese Beziehungen ist

$$P dP = -(\lambda_R + \lambda_B) \frac{1}{d} P_1 \gamma_1 \frac{w_1^2}{2g} dl$$

oder beim Übergang zur endlichen Rohrlänge  $l$

$$\int_{P_2}^{P_1} P dP = -\frac{1}{d} P_1 \gamma_1 \frac{w_1^2}{2g} \int_0^l (\lambda_R + \lambda_B) dl. \quad (112)$$

Das Reibungsglied  $\lambda_R$  ist unabhängig von der Rohrlänge  $l$ , siehe G. (110). Das Beschleunigungsglied  $\lambda_B$  dagegen hängt von  $l$  ab. Dieses Integral ist gesondert zu behandeln.

$\lambda_B$  wurde durch Gl. (87) mit

$$\lambda_B dl = 2 d \xi \frac{dw}{w}$$

in die Rechnung eingeführt. Mit  $w P = \text{konst}$  ist  $\frac{dw}{w} = -\frac{dP}{P}$  und

$$\lambda_B dl = -2 d \xi \frac{dP}{P}. \quad (113)$$

Wie aus Versuchen hervorgeht, ist der Energiebeiwert  $\xi$  praktisch nicht von  $w$  oder  $P$  abhängig, weil die Verteilung der Geschwindigkeiten  $w_l$  bezogen auf  $w_{l\text{max}}$  über den Leitungsquerschnitt nur sehr wenig von der absoluten Größe der Geschwindigkeiten abhängt.

Die Integration der Druckabfallgleichung ist nun ausführbar und ergibt nach  $P_2/P_1$  aufgelöst

$$\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^2 - 2\xi \frac{w_1^2}{2g} \frac{\gamma_1}{P_1} \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^2 = 1 - 2\lambda_R \frac{\gamma_1}{P_1} \frac{l}{d} \frac{w_1^2}{2g}. \quad (114)$$

Man kann aus dieser Gleichung  $P_2/P_1$  und daraus den Druckabfall  $P_1 - P_2$  berechnen, wenn man  $P_1$ ,  $\gamma_1$ ,  $w_1$ ,  $\xi$  und  $\lambda_R$  (zu  $Re$  und  $\varepsilon$ ) kennt. Zur Auflösung benutzt man am einfachsten zeichnerische Methoden<sup>1</sup>.

**γ) Vereinfachung der Formeln für isothermische Strömung.** 1. Vernachlässigung des Beschleunigungsgliedes. Um sich ein Urteil über den Fehler zu bilden, den man begeht, wenn man das Beschleunigungsglied der Formeln im vorigen Abschnitt vernachlässigt, also  $\lambda_B = 0$  setzt, entwickelt man aus den Gln. (111) und (113)

$$\frac{\lambda_B}{\lambda_R} = \frac{1}{\frac{1}{2} \frac{P}{\gamma} \frac{2g}{w^2} \frac{1}{\xi} - 1} = \frac{1}{\frac{1}{2} R T \frac{2g}{w^2} \frac{1}{\xi} - 1}. \quad (115)$$

Man kann damit den Fehler für irgendeinen Zustand  $P$ ,  $\gamma$ ,  $w$  abschätzen.

**Beispiel:** Bei welcher Geschwindigkeit  $w$  einer isothermischen Luftströmung ist  $\lambda_B$  gerade 1 vH von  $\lambda_R$ , wenn  $P = 80000 \text{ kg/m}^2$  ( $p = 8 \text{ at}$ ),  $\gamma = 10 \text{ kg/m}^3$  und  $\xi = 1,10$  ist?

Aus Gl. (115) ergibt sich mit  $\lambda_B : \lambda_R = 0,01$  ein Wert von  $w = 26,6 \text{ m/s}$ . Bestimmt man also, daß  $\lambda_B \leq 1 \text{ vH}$  von  $\lambda_R$  ist, dann kann man im Beispiel bis zu  $w = 26,6 \text{ m/s}$  vereinfachte Formeln anwenden. Bei  $10 \text{ vH}$  als Grenze würde  $w$  bis  $80,6 \text{ m/s}$  betragen können.

Aus Gl. (115) erkennt man, daß  $\lambda_B$  einen um so größeren Teil von  $\lambda_R$  ausmacht, je größer  $w$  und  $\xi$  und je kleiner  $R$  und  $T$  sind.  $\lambda_B$  kann praktisch meist gleich Null gesetzt werden, weil Widerstandszahl und Rohrdurchmesser im allgemeinen nicht mit sehr großer Genauigkeit bekannt sind.

Mit  $\lambda_B = 0$  gilt nach Gl. (112) für den Strömungswiderstand zwischen zwei Rohrquerschnitten 1 und 2

$$\frac{P_1^2 - P_2^2}{2P_1} = \lambda_R \frac{l}{d} \gamma_1 \frac{w_1^2}{2g} \quad (116)$$

oder mit  $P\gamma w^2 = \text{konst} = P_n \gamma_n w_n^2$

$$\frac{P_1^2 - P_2^2}{2P_n} = \lambda_R \frac{l}{d} \frac{w_n^2}{2g} \gamma_n \text{ kg/m}^2. \quad (117)$$

Wir wollen das konstante Produkt für einen Normalzustand, und zwar für  $15^\circ$  und  $760 \text{ mm QS Druck}$  (Zeiger  $n$ ) ansetzen. Mit

$$Q_{sn} = \frac{\pi}{4} d^2 w_n \quad \text{oder} \quad w_n^2 = \frac{16}{\pi^2} \frac{1}{d^4} Q_{sn}^2$$

erhält man Gl. (117) in der Form

$$\frac{P_1^2 - P_2^2}{2P_n} = \lambda_R \frac{l}{d^5} \frac{16}{\pi^2} \gamma_n \frac{Q_{sn}^2}{2g} \text{ kg/m}^2.$$

<sup>1</sup> Siehe Hütte: Des Ingenieurs Taschenb. Bd. 1 26. Aufl. S. 66/67.

Ersetzt man  $\gamma_n$  durch  $s\gamma_{nL}$ , ( $\gamma_{nL} = 1,225 \text{ kg/m}^3$ ), mit  $s$  als relatives Gewicht der strömenden Flüssigkeit bezogen auf Luft = 1, so ergibt sich nach  $Q_{s_n}$  aufgelöst mit  $p = 10^{-4} P$

$$Q_{s_n} = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{2g}{2\lambda_R} \frac{R_L}{T_n} \frac{T_n}{p_n}} \sqrt{\frac{d^5(p_1^2 - p_2^2)}{sl}} \text{ m}^3/\text{s}. \quad (118)$$

Dabei muß  $T = T_n$  sein. Ist aber  $T = T_n$ , so gilt wegen

$$\frac{wP}{T} = \frac{w_n \cdot P_n}{T_n}$$

die Gleichung

$$Q_{s_n} = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{g R_L}{\lambda_R \cdot T} \frac{T_n}{p_n}} \sqrt{\frac{d^5(p_1^2 - p_2^2)}{sl}} \text{ m}^3 \text{ s}. \quad (119)$$

Mit  $p_n = 1,033 \text{ at}$  (entspr.  $760 \text{ mm QS}$ ),  $T = T_n = 273 + 15 = 288^\circ \text{ abs.}$  und  $R_L = 29,3 \text{ m/Grad}$  (Gaskonstante von Luft) erhält man

$$Q_{s_n} = \frac{218,5}{\sqrt{\lambda_R}} \sqrt{\frac{d^5(p_1^2 - p_2^2)}{sl}} \text{ m}^3/\text{s} \quad (120)$$

oder

$$Q_{h_n} = \frac{0,249}{\sqrt{\lambda_R}} \sqrt{\frac{(100d)^5(p_1^2 - p_2^2)}{sL}} \text{ m}^3 \text{ h}, \quad (121)$$

( $L$  in km) und endlich

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{L} = \frac{0,2 \lambda_R p_n w_n^2 \gamma_n}{d 2g} = 16,15 Q_{h_n}^2 \frac{s \lambda_R}{(100d)^5} = 10,74 \frac{\lambda_R G_h^2}{(100d)^5} \text{ ata}^2/\text{km}. \quad (122)$$

Ferner gilt

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{P_2}{P_1} = \frac{p_2}{p_1} = \sqrt{1 - 2 \frac{\lambda_R}{RT} \frac{l}{d} \frac{w_1^2}{2g}} \quad (123)$$

und

$$P_2 - P_1 = P_1 \left[ \sqrt{1 - 2 \lambda_R \frac{\gamma_1}{P_1} \frac{l}{d} \frac{w_1^2}{2g}} - 1 \right] \text{ mm WS}, \quad (124)$$

und mit  $G_h$  in kg/h

$$P_2 - P_1 = P_1 \left[ \sqrt{1 - 127,5 \cdot \lambda_R \frac{l}{(100d)^5} \frac{1}{P_1 \gamma_1} G_h^2} - 1 \right] \text{ mm WS}. \quad (125)$$

2. Vernachlässigung der Ausdehnung. Bei schwachem Druckabfall kann man in vielen Fällen Geschwindigkeit  $w$  und spezifisches Gewicht  $\gamma$  als unveränderlich ansehen und die Gleichungen der tropfbaren Flüssigkeit um so eher auf gasförmige anwenden, je näher  $P_2/P_1$  an 1 kommt, also je kleiner der Druckabfall ist. Der Fehler in der Berechnung des Druckabfalls ergibt sich nach Gl. (41) halb so groß wie der Druckabfall auf  $P_1$  bezogen. Ist  $P_2 \sim P_1$ , so gelten annähernd die Gln. (99) bis (106). Zur Vereinfachung der Gln. (120) bis (122) führt man den mittleren Leitungsdruck  $p_m = \frac{p_1 + p_2}{2}$  ein:

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{L} = \frac{(p_1 - p_2)(p_1 + p_2)}{2L} \cdot 2 = \frac{p_1 - p_2}{L} \cdot 2 p_m = \frac{P_1 - P_2}{10l} \cdot 2 p_m, \quad (126)$$

$$\frac{P_1 - P_2}{l} \frac{p_m}{p_n} = \frac{p_1^2 - p_2^2}{L} \frac{5}{1,033} = \frac{p_1^2 - p_2^2}{L} \cdot 4,84,$$

$$\frac{P_1 - P_2}{l} = \frac{p_n}{p_m} \frac{\lambda_R w_n^2 \gamma_n}{d 2g} = \frac{p_n}{p_m} 63,7 \frac{\lambda_R Q_{h_n}^2 \gamma_n}{(100d)^5} \text{ kg/m}^3. \quad (127)$$

In Schwachdruckleitungen kann man häufig  $p_m \sim p_n$  setzen. Auf raumbeständige Fortleitung vom Zustand  $n$  bezogen, begeht man dabei einen Fehler von  $100(1 - p_n/p_m)$  in vH:

Bei $p_m > p_n$ um 100	200	300	400	500	1000	2000 mm WS
Fehler um vH	1,0	1,9	2,8	3,7	4,6	8,8

Berechnet man die Gasströmung wie eine raumbeständige vom Zustand 1, so erhält man einen zu kleinen Druckabfall; rechnet man mit Zustand  $n$ , so erhält man einen zu großen Druckabfall, wenn  $p_m > p_n$  ist.

**d) Fortleitung bei unveränderlicher Temperatur mit Rücksicht auf die Höhenänderung.** Bei geneigten Leitungen kann es gelegentlich vorkommen, daß so große Höhen zu überwinden sind, daß die Änderung der Lagenenergie nicht

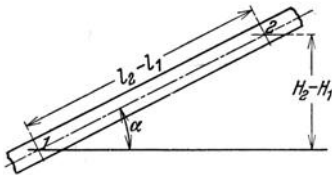


Abb. 37. Zusammenhang zwischen geodätischer Höhe und Rohrlänge bei geneigten Röhren  
 $H_2 - H_1 = (l_2 - l_1) \sin \alpha$ .

mehr vernachlässigt werden darf. Beträgt z. B. der Höhenunterschied der Druckluftleitung in einem Grubenbetrieb 1000 m und der Druck der Luft im Mittel 8 at abs., also etwa  $\gamma = 10 \text{ kg/m}^3$ , so nimmt der Druck, statisch betrachtet, von oben nach unten um  $(H_1 - H_2)\gamma \cong 10000 \text{ kg/m}^2$  oder 1 at zu. Unter Berücksichtigung der Lagenenergie gilt für gerade Röhre Gl. (56) und nach Abb. 37

$$\frac{dH}{dl} = \sin \alpha = \text{konst.}, \quad dH = dl \sin \alpha. \quad (128)$$

Damit ist ganz allgemein

$$\sin \alpha dl + \frac{P_1}{\gamma_1} \frac{dP}{P} = -\frac{\lambda_R}{4} \frac{U}{F} \frac{w_1^2}{2g} \frac{P_1^2}{P^2} dl + 2\xi \frac{w_1^2}{2g} P_1^2 \frac{dP}{P^3} \quad (129)$$

und

$$dl = \frac{2\xi P_1 \gamma_1 \frac{w_1^2}{2g} - P^2}{\frac{\lambda_R}{4} \frac{U}{F} \frac{w_1^2}{2g} P P_1 \gamma_1 + \sin \alpha \frac{\gamma_1}{P_1} P^3} dP$$

oder integriert und umgeformt

$$\frac{Ul}{4F} \frac{\lambda_R}{\xi} = \ln \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^2 - \left( 1 + \frac{\lambda_R}{\xi} \frac{Ul}{4F} \frac{P_1}{2\gamma_1(H_2 - H_1)} \right) \ln \frac{\frac{\lambda_R}{4} \frac{U}{F} \frac{w_1^2}{2g} \frac{l}{H_2 - H_1} + 1}{\frac{\lambda_R}{4} \frac{U}{F} \frac{w_1^2}{2g} \frac{l}{H_2 - H_1} + \frac{P_1^2}{P_2^2}} \quad (130)$$

Diese Gleichung ist durch weitere Umformung zur Berechnung von  $P_2$  brauchbar zu machen und am besten zeichnerisch zu lösen. Für senkrechte Leitungen ist  $H_2 - H_1 = l$ . Mit  $H_2 = H_1$ , waagerechte Leitung, kommt man wieder auf die frühere Gl. (114).

Man kann die Rechnung vereinfachen. Eliminiert man aus Gl. (129) den Druck  $P$ , indem man die Veränderlichen  $l$  und  $w$  ansetzt, so erhält man auf demselben Wege wie zu Gl. (130)

$$2(H_2 - H_1) \frac{\gamma_1}{P_1} = \ln \frac{w_2^2}{w_1^2} - \left( 1 + \frac{\xi}{\lambda_R} \frac{4F}{Ul} 2(H_2 - H_1) \frac{\gamma_1}{P_1} \right) \cdot \ln \frac{w_2^2 + (H_2 - H_1) \frac{4F}{lU} \frac{2g}{\lambda_R}}{w_1^2 + (H_2 - H_1) \frac{4F}{lU} \frac{2g}{\lambda_R}}. \quad (131)$$

Den Faktor des rechten Gliedes wird man in vielen Fällen gleich 1 setzen können. Dann ist

$$2(H_2 - H_1) \frac{\gamma_1}{P_1} = \ln \frac{1 + (H_2 - H_1) \frac{4F}{lU} \frac{2g}{w_2^2} \frac{1}{\lambda_R}}{1 + (H_2 - H_1) \frac{4F}{lU} \frac{2g}{w_1^2} \frac{1}{\lambda_R}}.$$

Entwickelt man die rechte Seite der Gleichung in eine Exponentialreihe, wobei man sich mit den ersten beiden Gliedern begnügen kann, weil  $2(H_2 - H_1) \frac{\gamma_1}{P_1}$  meist sehr klein ist, so erhält man mit  $w_2 : w_1 = P_1 : P_2$  und  $P_1 : \gamma_1 = P_2 : \gamma_2$

$$\frac{P_1^2 - P_2^2}{P_2^2} = \left( \lambda_R \frac{Ul}{4F} \frac{w_2^2}{2g} + H_2 - H_1 \right) 2 \frac{\gamma_2}{P_2}.$$

Aus dieser Gleichung wäre  $P_2$  zu berechnen. Wenn es zulässig ist

$$(H_2 - H_1) \frac{w_2^2}{w_1^2} \quad \text{durch} \quad (H_2 - H_1) \frac{w_2^2}{w_1^2}$$

zu ersetzen, d. h. wenn  $\gamma \cong \text{konst.}$ , so kann man auch schreiben

$$\frac{P_1^2 - P_2^2}{P_1^2} = \left( \lambda_R \frac{Ul}{4F} \frac{w_1^2}{2g} + H_2 - H_1 \right) 2 \frac{\gamma_1}{P_1} \tag{132}$$

was mit  $H_2 = H_1$  der Gl. (116) entspricht.

## 2. Laminarströmung im geraden Kreisrohr.

### a) Vollkommen ausgebildete Strömung.

Wir wollen zunächst die Gesetze der vollkommen beruhigten reinen Laminarströmung einer tropfbaren Flüssigkeit in einem geraden Rohr mit Kreisquerschnitt kennenlernen. Der Rohrquerschnitt werde von der fließenden Menge voll ausgefüllt. Alle Störungen, die von irgendwelchen stromaufwärts liegenden Richtungs- und Querschnittsänderungen herrühren, sollen behoben sein. Es habe also das Strömungsbild eine endgültige Form angenommen. Da alle Flüssigkeitsteilchen parallel zur Achse fließen, wobei die schnellsten die Rohrachse zur Bahn haben, während die langsamsten am Rohrrande haften, werden aus Symmetriegründen alle Teilchen in derselben Entfernung  $x$  von der Rohrachse dieselbe Geschwindigkeit haben. Die gesamte Flüssigkeitsmenge fließt in konzentrischen Schichten, deren Geschwindigkeiten von Null bis zur Geschwindigkeit des Achsfadens,  $w_{l\max}$ , zunehmen (teleskopartige Verschiebung).

Bei der vollständig beruhigten Strömung ist der Druck gleichmäßig über den Rohrquerschnitt verteilt, wie zahlreiche Messungen bestätigen. Wir betrachten die hohlzylinderförmige Schicht mit den Halbmessern  $x$  und  $x + dx$  (Abb. 38). Auf diese Schicht wirken in Achsrichtung die Kräfte  $P_1 2\pi x dx$  und  $P_2 2\pi x dx$ . Dazu kommt die Schwerkraft  $\gamma 2\pi x dx l$ , die in Achsrichtung die Komponente  $\gamma 2\pi x dx l \sin \alpha$  hat. Die treibende Kraft ist also mit  $l = l_{21}$ :

$$2\pi x dx (P_1 - P_2 + \gamma l_{21} \sin \alpha) = -\gamma 2\pi x dx l_{21} J,$$

wobei  $J$  das Leitungsfälle bedeutet Gl. (54/55). Dieser Kraft hält die Reibungskraft das Gleichgewicht. Würde sie das nicht tun, so würde die Flüssigkeit beschleunigt oder verzögert, was aber nach der Voraussetzung gleichbleibender Rohrweite und stationärer Strömung nicht möglich ist. Die einzelnen Schichten gleiten vermöge verschiedener Geschwindigkeit  $w$ , ständig übereinander weg und reiben dabei aneinander. Infolge der Zähigkeit der Flüssigkeit wirken nach dem

Newtonschen Ansatz, Gl. (5), auf Innen- und Außenmantel des Hohlzylinders gleichmäßig verteilte Schubspannungen  $\tau$ , die wir durch

$$\tau = \mu \frac{\partial w_i}{\partial x}$$

erfassen können. An der inneren Mantelfläche, die die Größe  $2\pi x l$  hat, greift eine Reibungskraft  $2\pi\mu l x \frac{\partial w_i}{\partial x}$ , an der äußeren die Kraft

$$- 2\pi\mu l \left[ x \frac{\partial w_i}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial w_i}{\partial x} \right) dx \right]$$

an. Die Summe der beiden Kräfte ist

$$- 2\pi\mu l \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial w_i}{\partial x} \right) dx$$

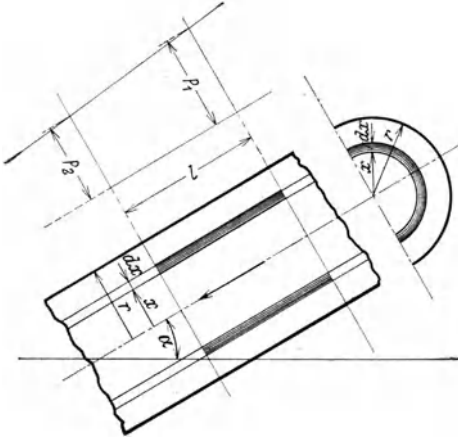


Abb. 38. Zur Ableitung des Gesetzes der laminarströmung.

und die Bewegungsgleichung der Schicht lautet nunmehr

$$- \gamma 2\pi x dx l J - 2\pi\mu l \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial w_i}{\partial x} \right) dx = 0.$$

Da  $J$ ,  $\gamma$  und  $\mu$  nicht von  $x$  abhängen, kann man die partiellen Zeichen durch gewöhnliche ersetzen. Nach erstmaliger Integration erhält man

$$\gamma J \frac{x^2}{2} = - \mu x \frac{dw_i}{dx} + C_1.$$

Die zweite Integration führt zu

$$\frac{1}{4} \gamma J x^2 = - \mu w_i + C_1 \ln x + C_2.$$

Für  $x = 0$  kann  $w_i$  nicht unendlich groß werden, folglich ist  $C_1 = 0$ . Das bedeutet gleichzeitig, daß  $dw_i/dx$  für  $x = 0$  (Rohrachse) auch Null ist und die Kurve der Geschwindigkeitsverteilung über den Querschnitt (Geschwindigkeitsprofil) bei  $x = 0$  eine zur Rohrachse senkrechte Tangente hat (Abb. 39). Die Gleichung der Geschwindigkeitsverteilung lautet also

$$- w_i = \frac{J \gamma}{4\mu} x^2 + C \quad (133)$$

und zeigt eine parabelförmige Verteilungskurve an, wobei der Scheitel der Parabel in der Rohrachse liegt. Wegen des Haftens am Rande muß für  $x = r$  die Geschwindigkeit  $w_i = 0$  sein. Mit dieser Bedingung kann man  $C$  bestimmen und bekommt

$$w_i = \frac{J \gamma}{4\mu} (r^2 - x^2) \quad (134)$$



oder mit  $\nu = \frac{\mu g}{\gamma}$

$$w_i = \frac{J g}{4 \nu} (r^2 - x^2). \tag{135}$$

Die gesamte Durchflußmenge erhält man nun leicht, indem man die einzelnen Schichtquerschnitte mit den zugehörigen Geschwindigkeiten summiert

$$dQ_s = 2 \pi x dx w_i = \frac{J g \pi}{2 \nu} (r^2 - x^2) x dx$$

für eine Schicht und für den ganzen Querschnitt

$$Q_s = \frac{J g \pi}{2 \nu} \int_0^r (r^2 - x^2) x dx = \frac{J g r^4 \pi}{8 \nu} = \frac{J g d^4 \pi}{128 \nu}. \tag{136}$$

Mit der mittleren Geschwindigkeit

keit  $w = \frac{Q_s 4}{\pi d^2}$  erhält man endlich

$$w = \frac{4}{\pi d^2} \frac{J g d^4 \pi}{128 \nu} = \frac{J g d^2}{32 \nu} \tag{137}$$

oder mit  $H_1 = H_2$

$$\frac{P_1 - P_2}{\gamma} = \frac{32 w \nu}{g d^2} (l_2 - l_1). \tag{138}$$

Bei laminarer Strömung ist der Druckhöhenverlust der ersten Potenz der mittleren Strömungsgeschwindigkeit  $w$ , der Rohrlänge  $l$  und der Zähigkeit  $\nu$  und umgekehrt dem Quadrat des Rohrdurchmessers  $d$  (oder dem Rohrquerschnitt) proportional. Aus Gl. (135) und (137) folgt, daß die Geschwindigkeit des Achsfadens,  $w_{l_{\max}}$ , mit  $x = 0$  gleich  $2 w$ , d. h. doppelt so groß wie die mittlere Geschwindigkeit ist. Es ist vorteilhaft Geschwindigkeitsverteilungen über den Querschnitt ohne Rücksicht auf die absolute Größe der Geschwindigkeit aufzutragen, weil man dann bequem verschiedene Profile vergleichen kann. Man pflegt die Einzelgeschwindigkeit  $w_i$  auf  $w_{l_{\max}}$  zu beziehen,

$$\frac{w_i}{w_{l_{\max}}} = 1 - \frac{x^2}{r^2}. \tag{139}$$

Damit erhält man gleichzeitig für den Achsabstand eine vergleichbare Größe, nämlich  $x/r$ . Außerdem sind diese Verhältniswerte unabhängig vom Maßsystem. Das relative Geschwindigkeitsprofil der laminaren Strömung zeigt Abb. 39. Die Geschwindigkeitskurve besitzt nach Gl. (134) am Rande ( $x = r$ ) eine Neigung

$$\frac{dw_i}{dx} = -\frac{J \gamma}{2 \mu} r.$$

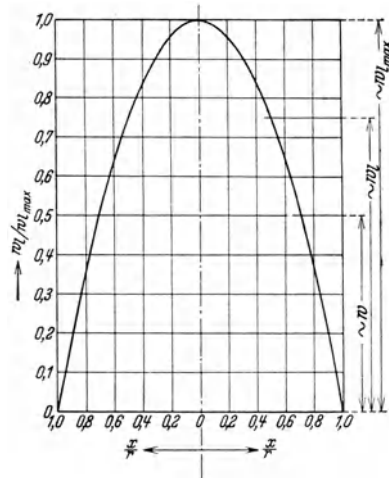


Abb. 39. Geschwindigkeitsprofil der laminaren Strömung. In der Rohrachse liegt der schnellste Faden. Nach der Wand zu nimmt die Geschwindigkeit nach Maßgabe einer quadratischen Parabel bis auf Null ab.

Danach herrscht eine gleichmäßig verteilte Randspannung

$$\tau_0 = -\frac{J\gamma}{2}r. \quad (140)$$

Für die früher angenommene Widerstandszahl  $\lambda_R$  folgt dann nach Gl. (84) und Gl. (98)

$$\lambda_R = 4 \frac{\tau_0}{\gamma} \frac{2g}{w^2} = -dJ \frac{2g}{w^2}.$$

Führt man diese Funktion in Gl. (138) ein und ersetzt man den Aus-

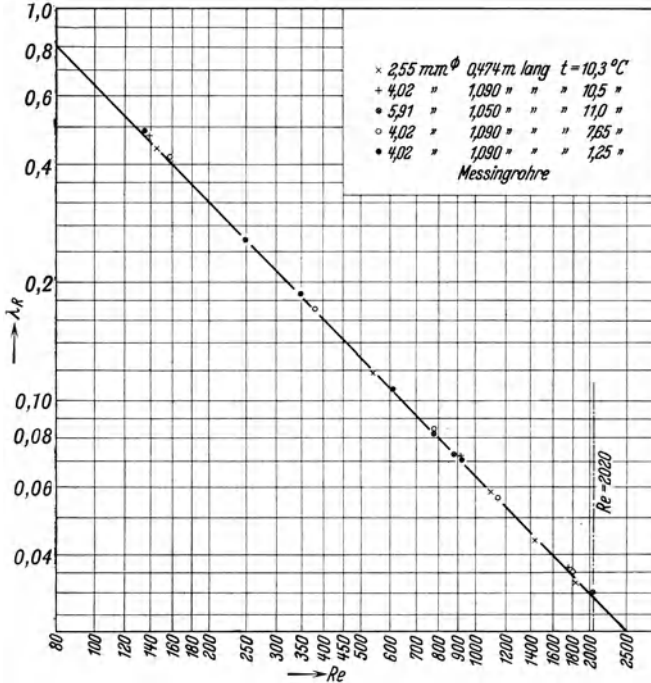


Abb. 40. Hagens Versuchswerte  $\log \lambda_R$  über  $\log Re$  (1839).

druck  $w d/\nu$  durch  $Re$ , so findet man mit Gl. (99) die einfache Form

$$\lambda_R Re = 64 \quad (141)$$

für das Gesetz der Laminarströmung. Allerdings ist zu bemerken, daß der Reynoldsschen Zahl  $Re$  hier nicht die Bedeutung zukommt wie bei turbulenter Strömung, weil wegen der Geschwindigkeitsverteilung nach Art eines Rotationsparaboloids die Ausdrücke

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = \text{konst}$$

werden (siehe Gl. (134) und Abschnitt Sonderfälle I. 6e) und danach alle möglichen Laminarströmungen in Kreisrohren ohne Rücksicht auf

die Größe der Reynoldsschen Zahl mechanisch ähnlich sind. Das Gesetz Gl. (141) kann zeichnerisch durch eine gleichseitige Hyperbel dargestellt werden. Bequem ist die Wiedergabe in einem logarithmisch geteilten Netz, wo das Gesetz sich durch eine unter  $-45^\circ$  gegen die Abszisse geneigte Gerade einzeichnen läßt (siehe Abb. 40 und 41).

Das Gesetz der Laminarströmung wurde von dem deutschen Wasserbauer Hagen<sup>1</sup> und dem französischen Arzt Poiseuille<sup>2</sup>, die unabhängig voneinander forschten, entdeckt, und heißt heute auch „Hagen-Poiseuillesches Gesetz“.

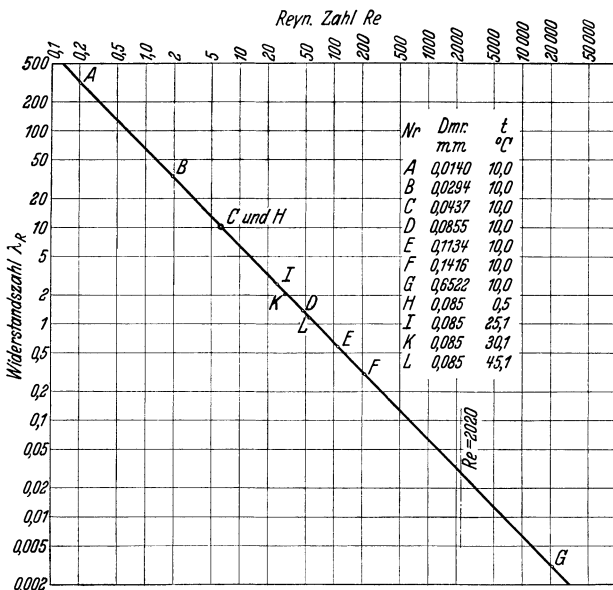


Abb. 41. Poiseuilles Versuchswerte  $\log \lambda_R$  über  $\log Re$  (1840).

Aus Gl. (139) kann man den Halbmesser  $x$ , dessen zugehörige Schicht sich mit der mittleren Geschwindigkeit  $w$  bewegt, berechnen

$$\frac{w}{w_{1\max}} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{x^2}{r^2} \quad \text{oder} \quad x = \frac{r}{\sqrt{2}} = 0,707 r. \quad (142)$$

In einem Rohre von  $0,707 d$  Durchmesser wird bei überall gleicher Geschwindigkeit  $w_{1\max}$  dieselbe Flüssigkeitsmenge gefördert, wie in einem Rohre vom Durchmesser  $d$  bei paraboloidischer Verteilung.

<sup>1</sup> Hagen, G.: Über die Bewegung des Wassers in engen zylindrischen Rohren. Ann. Physik Bd. 16 (1839) S. 423.  $D = 2,55$  bis  $5,91$  mm Durchmesser, Messingrohr.

<sup>2</sup> Poiseuille, J. L. M.: Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres. C. R. Acad. Sci., Paris Bd. 41 (1840) S. 961 u. 1041; Bd. 42 (1841) S. 112. Mém. des Savants Etrangers Bd. 9 (1846) S. 433. Deutsch: Pogg. Ann. Physik Bd. 58 (1843) S. 424.  $D = 0,014$  bis  $0,652$  mm, Glasrohr.

Mit dem Zusammenhang zwischen  $w_i$  und  $x$  kann man nach Gl. (70) die kinetische Energie im Querschnitt ermitteln. Für den Energiebeiwert erhält man 2, und die Energie im Querschnitt ist

$$\frac{\xi w^2}{2g} = \frac{2 w^2}{2g} = \frac{w^2}{g} \quad (143)$$

oder gleich der doppelten zur mittleren Geschwindigkeit  $w$  gehörigen Geschwindigkeitshöhe.

Die Gültigkeit des Gesetzes der Laminarströmung wurde für tropfbare Flüssigkeiten bis zu sehr großen Zähigkeiten nachgewiesen. Kahlbaum und Räber<sup>1</sup> fanden das Gesetz für Rizinusöl von der 4000fachen Zähigkeit des Wassers, Reiger<sup>2</sup> für Terpentinöl-Kolophoniumgemische bis zur 10<sup>9</sup>fachen Zähigkeit des Wassers bestätigt. Terpentinöl-Kolophoniumgemische haben je nach Zusammensetzung verschiedene Zähigkeiten. So stellte Ladenburg<sup>3</sup> mit solchen Gemischen von der 10<sup>6</sup>fachen Zähigkeit des Wassers Versuche an, die das Gesetz der Laminarströmung auf 1 vH genau erkennen ließen. Nach Glaser<sup>4</sup> gibt es aber einen Durchmesser, unter dem das oben entwickelte Gesetz nicht mehr gilt. Dieser kleinste Rohrdurchmesser hängt vom Grade der Zähigkeit ab. Wenn die Zähigkeit der Flüssigkeit die 10<sup>7</sup> fache oder 10<sup>9</sup> fache von Wasser ist, sind die kleinsten Durchmesser, bis zu welchen das Hagen-Poiseuillesche Gesetz gilt, 2 mm oder 10 mm. Versuche zur Nachprüfung des Gesetzes bei laminarer Strömung von kolloidalen Flüssigkeiten unternahm Reiner<sup>5</sup>; Versuche mit Ölen machte Carothers<sup>6</sup>.

Wir hatten bisher keine Forderungen an die Beschaffenheit der benetzten Rohrwand gestellt. Tatsächlich ist der Strömungswiderstand bei laminarer Strömung unabhängig von der Rauigkeit der benetzten Fläche, solange die relative Rauigkeit so klein ist, daß man in den Gleichungen mit guter Annäherung den wahren (von Ort zu Ort veränderlichen) Rohrdurchmesser durch einen mittleren ersetzen kann. Das bestätigen zahlreiche Messungen, wobei der mittlere Rohrdurchmesser durch Anfüllen des Rohres mit Wasser bestimmt wurde. So fand Schiller<sup>7</sup> das Gesetz in Messingrohren mit eingeschnittenem Gewinde, also sehr rauhen Rohren, bis zu einem gewissen Rauigkeitsgrad bestätigt.

<sup>1</sup> Kahlbaum, G. W. A., u. S. Räber: Acta Ac. Leop. Bd. 84 (1905) S. 204.

<sup>2</sup> Reiger, R.: Über die Gültigkeit des Poiseuilleschen Gesetzes bei zähflüssigen und festen Körpern. Pogg. Ann. d. Physik Bd. 19 (1906) S. 985. Dissertation Braunschweig 1901.

<sup>3</sup> Ladenburg, R.: Über die innere Reibung zäher Flüssigkeiten und ihre Abhängigkeit vom Druck. Pogg. Ann. d. Physik Bd. 22 (1907) S. 287.

<sup>4</sup> Glaser, H.: Über die innere Reibung zäher und plastisch-fester Körper und die Gültigkeit des Poiseuilleschen Gesetzes. Pogg. Ann. d. Physik Bd. 22 (1907) S. 694.

<sup>5</sup> Reiner, M.: Zur Hydrodynamik der Kolloide. Z. angew. Math. Mech. Bd. 10 (1930) S. 400.

<sup>6</sup> Carothers, S. D.: Portland experiments on the flow of oil in tubes. Proc. Roy. Soc., Lond. (A) Bd. 87 (1912) S. 154.

<sup>7</sup> Schiller, L.: Über den Strömungswiderstand von Rohren verschiedenen Querschnitts und Rauigkeitsgrades. Z. angew. Math. Mech. Bd. 3 (1923) S. 2; Z. VDI Bd. 67 (1923) S. 623.

Darüber hinaus beobachtete er größere Widerstandszahlen  $\lambda_R$  als nach Gl. (141).

Das oben abgeleitete Gesetz für Laminarströmung gilt auch für gasförmige Flüssigkeiten. Notwendig ist nur, eine Annahme über die Art der Zustandsänderung während der Strömung zu machen<sup>1</sup>. Nach früherem wird sich die Flüssigkeit praktisch isothermisch ausdehnen. Dann gilt nach Abb. 42

$$P + dP = P + \frac{\partial P}{\partial l} dl.$$

Bei zusammendrückbaren Flüssigkeiten kann man die Wirkung der Schwerkraft vernachlässigen. Die beschleunigende Kraft ist lediglich

$$2 \pi x \frac{\partial P}{\partial l} dl dx.$$

Die verzögernde Kraft erhalten wir wieder als Unterschied zwischen der inneren und äußeren Schichtreibungskraft

$$- 2 \pi \mu dl \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial w_i}{\partial x} \right) dx.$$

Bei stationärer Strömung halten sich beide Kräfte das Gleichgewicht

$$\frac{\partial P}{\partial l} - \mu \frac{\partial}{x \partial x} \left( x \frac{\partial w_i}{\partial x} \right) = 0. \quad (144)$$

Nun ist  $w_i = f(x, l)$ . Nach Gl. (20) ist  $\gamma w$  unabhängig von  $l$  gleich konstant und  $\frac{\partial(\gamma w_i)}{\partial l} = 0$ . Da  $t$  und  $P$  im Querschnitt konstant sind, sind  $t$ ,  $P$  und  $\gamma$  nur  $f(l)$ . Also gilt

$$\gamma \frac{dP}{dl} = \mu \frac{\partial}{x \partial x} \left( x \frac{\partial(\gamma w_i)}{\partial x} \right)$$

und, weil  $\gamma w_i \neq f(l)$

$$\gamma \frac{dP}{dl} = \mu \frac{d}{dx} \left( x \frac{d(\gamma w_i)}{dx} \right). \quad (145)$$

Diese Gleichung kann nur bestehen, wenn die Differentialquotienten jeder für sich konstant sind. Zunächst ist

$$-\gamma \frac{dP}{dl} = \text{konst} = C.$$

Mit  $\gamma = \frac{P}{RT}$  ist  $PdP = -C RT dl$  oder  $P^2 = -2CRTl + C_1$ . Die beiden Konstanten können aus den Grenzbedingungen,  $P = P_1$  bei  $l = 0$  und  $P = P_2$  bei  $l = l_{21} = -l_{12}$  bestimmt werden. Man erhält

$$P^2 = P_1^2 + (P_1^2 - P_2^2) \frac{l}{l_{12}}. \quad (146)$$

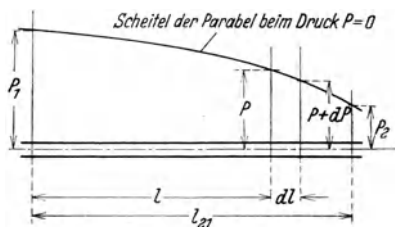


Abb. 42. Zusammenhang zwischen statischem Druck  $P$  und Rohrlänge  $l$  bei Strömung einer zusammendrückbaren Flüssigkeit, Strömungsrichtung von 1 nach 2.

<sup>1</sup> Ableitung ohne Rücksicht auf die Beschleunigungsarbeit. Genauere Ableitung siehe O. E. Meyer: Über die Strömung eines Gases durch eine Kapillarrohre. Pogg. Ann. d. Physik Bd. 127 (1866) S. 253. Ferner P. Hoffmann: Über die Strömung der Luft durch Röhren beliebiger Länge. Pogg. Ann. d. Physik Bd. 21 (1884) S. 470.

Aus Gl. (145) und (146) ergibt sich

$$\frac{d}{x dx} \left( x \frac{d(\gamma w_l)}{dx} \right) = - \frac{\gamma}{\mu} \frac{dP}{dl} = - \frac{P_1^2 - P_2^2}{2 \mu l_{21} R T}$$

und durch zweimalige Integration

$$\gamma w_l = - \frac{P_1^2 - P_2^2}{8 l_{21} \mu R T} x^2 + A \ln x + B. \quad (147)$$

Zur Bestimmung der beiden Konstanten  $A$  und  $B$  dienen die Grenzbedingungen: Wenn  $x = r$  ist  $w_l = 0$  und  $\gamma w_l = 0$ ; wenn  $x = 0$  ist  $\frac{dw_l}{dx} = 0$  und  $\gamma \frac{dw_l}{dx} = 0$  (Tangente an das Geschwindigkeitsprofil senkrecht zur Rohrachse, siehe Abb. 39). Aus der zweiten Bedingung folgt  $A = 0$ , aus der ersten und zweiten

$$B = \frac{P_1^2 - P_2^2}{8 l_{21} \mu R T} r^2,$$

also

$$\gamma w_l = \frac{P_1^2 - P_2^2}{8 l_{21} \mu R T} (r^2 - x^2) \quad \text{und} \quad w_l = \frac{P_1^2 - P_2^2}{8 l_{21} \mu P} (r^2 - x^2). \quad (148)$$

Der Durchfluß ergibt sich

$$Q_s = 2 \pi \int_0^r w_l x dx = 2 \pi \frac{P_1^2 - P_2^2}{8 l_{21} \mu P} \frac{r^4}{4} = \frac{g \pi d^4}{\nu 128} \frac{P_1 - P_2}{\gamma l_{21}} \frac{P_1 + P_2}{2 P} \quad (149)$$

und

$$w = \frac{g d^2}{32 \nu} \frac{P_1 - P_2}{\gamma l_{21}} \frac{P_1 + P_2}{2 P}. \quad (150)$$

Man hätte diese Gleichungen auch mit der früheren Gl. (116) und (141) finden können (mit  $l_{21} = l$ )

$$P_1^2 - P_2^2 = 2 \lambda_R P_1 \gamma_1 \frac{l_{21}}{d} \frac{w_1^2}{2g}; \quad \lambda_R = \frac{64}{Re} = \frac{64 \nu}{w d},$$

$$P_1^2 - P_2^2 = 64 \frac{\nu}{g} \gamma w P \frac{l_{21}}{d^2}.$$

Die Auflösung nach  $w$  ist identisch mit Gl. (150)<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Den versuchsmäßigen Nachweis der Laminarströmung von zusammendrückbaren Flüssigkeiten in Kreisröhren aus Glas, Eisen, Messing und Kupfer erbrachten z. B. W. Ruckes: Untersuchungen über den Ausfluß komprimierter Luft aus Haarröhren und die dabei auftretenden Wirbelerscheinungen. VDI-Forsch.-Heft Nr. 75. Berlin 1909; Z. VDI Bd. 52 (1908) S. 2065; Ann. Physik Bd. 25 (1908) S. 983ff. A. H. Gibson u. Grindley: An investigation of the resistance to the flow of air through pipes. Philos. Mag. Bd. 17 (1909) S. 389. J. J. Dowling: Steady and turbulent motion in gases. Nature, Lond. (1912) S. 494. K. W. F. Kohlrusch: Über das Verhalten strömender Luft in nichtkapillaren Röhren. Ann. Physik Bd. 44 (1914) S. 297. R. Schmid: Über die Gültigkeit des Poiseuilleschen Gesetzes in nichtkapillaren Röhren. Sitzungsber. d. Wiener Akad. d. Wiss. IIa Bd. 124 (1915) S. 1143. H. Speyerer: Bestimmung der Zähigkeit des Wasserdampfes. VDI-Forsch.-Heft Nr. 273. 1925. A. Knodel: Über die Gasströmung in Röhren und den Luftwiderstand von Kugeln. Ann. Physik (4) Bd. 80 (1926) S. 533 (nichtkapill. Rohre).

Die Behauptung, daß die strömende Flüssigkeit an der Rohrwand haftet, wurde mehrfach für laminare (und turbulente) Strömung nachgewiesen<sup>1</sup>. Außerdem läßt die Übereinstimmung zwischen der Rechnung und den Versuchsergebnissen Hagens und Poiseuilles erkennen, daß die Flüssigkeit haftet. Die Adhäsionskräfte an der Rohrwand sind erheblich größer als die (Zähigkeits-)Schubkräfte. Flüssigkeitsteilchen, die einmal an der Rohrwand liegen, bleiben haften. Nach unserer heutigen Kenntnis müssen wir für alle tropfbaren Flüssigkeiten (also auch z. B. für Quecksilber in Glasrohren) das Bestehen einer wahrnehmbaren Gleitung verneinen<sup>2</sup>.

Bei Gasen kann man das Haften nach der kinetischen Gastheorie erklären<sup>3</sup>. Dort stellt man sich vor, daß die einzelnen Flüssigkeitsteilchen je nach ihrem Wärmeinhalt in einer mehr oder minder heftigen Schwingung begriffen sind. Der bei den Bewegungen im Durchschnitt zurückgelegte Weg ist in einem ruhenden Gase nach allen Seiten Null. Bewegt sich die Flüssigkeit in einer Richtung mit einer bestimmten Geschwindigkeit  $w$ , so ist auch der Durchschnittswert nach dieser Richtung  $w$ , während er nach den anderen Richtungen verschwindet. An einer festen Begrenzung, z. B. an der Rohrwand, prallen die einzelnen Flüssigkeitsteilchen, die man sich als vollkommen elastische Kugeln vorstellen kann, auf und werden auch von der technisch glattesten Wand, die im Verhältnis zur Größe der Moleküle immer noch sehr rauh ist, völlig unregelmäßig zurückgeworfen, wobei ihre Durchschnittsgeschwindigkeit verschwindet: Die Flüssigkeit ist unmittelbar an der Rohrwand in Ruhe, sie haftet.

Bei hochverdünnten Gasen aber, wo die mittlere Weglänge nicht mehr verschwindend klein zu den Rohrabmessungen ist, gilt das Newtonsche Gesetz Abschnitt I 1c nicht mehr unbeschränkt. Dann herrscht eine Verteilung wie Abb. 43 zeigt. Die Schubspannung ist jetzt

$$\tau = \mu \frac{w_l}{x + 2a}.$$

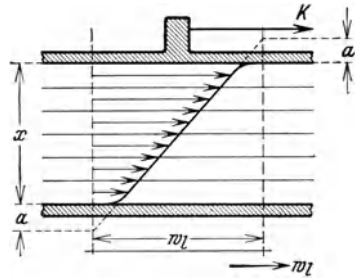


Abb. 43. Zwei ebene Platten bewegen sich parallel zueinander. Geschwindigkeitsverteilung in der eingeschlossenen Schicht eines hochverdünnten Gases.

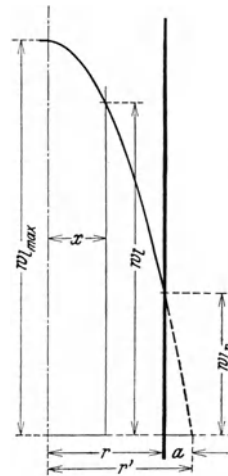


Abb. 44. Geschwindigkeitsverteilung bei der laminaren Bewegung eines hochverdünnten Gases durch ein Rohr.

<sup>1</sup> z. B. E. Duclaux: Ann. chim. phys. (4) Bd. 25 (1872) S. 472. H. S. Hele-Shaw: Investigation of the nature of surface resistance of water and streamline motion under certain experimental conditions. Inst. Naval Archit. Trans. Bd. 39 (1897) S. 145; Bd. 40 (1898) S. 21; C. R. Acad. Sci., Paris Bd. 132 (1901) S. 1306. A. Wyszomirski: Stromlinien und Spannungslinien. Dissertation Freiberg/Dresden 1914.

<sup>2</sup> Gegenteilige Beobachtungen machten z. B. O. E. Meyer: a. a. O. H. Helmholtz u. G. v. Piotrowski: Über Reibung tropfbarer Flüssigkeiten. Sitzgsber. math. Kl. Akad. d. Wiss. Wien Bd. 40 (1860) S. 607. Graham: On the motion of gases. Philos. Trans. Roy. Soc., Lond. 1846 S. 573; 1849 S. 349.

<sup>3</sup> Siehe S. Erk: Nr. 7 S. 520.

Nach Abb. 44 ist das Verteilungsgesetz

$$w_i = \frac{J\gamma}{4\mu} (r'^2 - x^2)$$

und der Durchfluß

$$Q_s = \frac{2\pi J\gamma}{4\mu} \int_0^r (r'^2 - x^2) x dx.$$

Die Halbmesserdifferenz ist  $r' - r = a$ , und unter Vernachlässigung des quadratischen Gliedes  $r'^2 = r^2 + 2ar$  und damit

$$Q_s = \frac{\pi r^4 J\gamma}{8\mu} \left(1 + 4\frac{a}{r}\right); \quad w = \frac{gr^2 J}{8\nu} \left(1 + 4\frac{a}{r}\right), \quad (151)$$

oder mit Rücksicht auf die isothermisch expandierende Fortleitung

$$\left. \begin{aligned} Q_s &= \frac{g\pi d^4}{128\nu} \frac{P_1 - P_2}{\gamma l} \frac{P_1 + P_2}{2P} \left(1 + 4\frac{a}{r}\right); \\ w &= \frac{gd^2}{32\nu} \frac{P_1 - P_2}{\gamma l} \frac{P_1 + P_2}{2P} \left(1 + 4\frac{a}{r}\right). \end{aligned} \right\} \quad (152)$$

$a$  ist ein Maß für die „Gleitung“<sup>1</sup> und hängt von der freien Weglänge der Moleküle ab und wächst mit zunehmender Druckerniedrigung. Nach Kundt und Warburg ist für Luft von Zimmertemperatur  $a = 0,001/P$  in m, also z. B. für  $P = 100 \text{ kg/m}^2$  ( $p = 0,1 \text{ at}$ ) gleich  $10^{-5}$  m (unabhängig vom Rohrdurchmesser), oder für  $d = 10^{-3}$  m ist

$$1 + 4\frac{a}{r} = 1 + \frac{4 \cdot 10^{-5}}{\frac{1}{2} \cdot 10^{-3}} = 1 + 0,08$$

oder 8 vH Abweichung vom Gesetz der reinen Laminarströmung.

## b) Vorgänge bei der Ausbildung der laminaren Strömung.

Wir haben bisher nur die vollständig ausgebildete Laminarströmung betrachtet. Man hat auch sehr interessante Beobachtungen bei der Ausbildung der Laminarströmung gemacht, die unter verschiedenen Bedingungen erfolgen kann. Einmal können wir uns vorstellen, daß ein Rohr an einen großen Behälter geschlossen ist. Die Flüssigkeit, die anfänglich mit überall gleicher Geschwindigkeit ( $w_i = w$ ) in das Rohr dringt, muß erst eine gewisse Rohrlänge durchströmen, bis das Geschwindigkeitsprofil der reinen Laminarströmung erreicht ist. Diese Rohrlänge pflegt man mit Anlaufstrecke zu bezeichnen<sup>2</sup>. Andererseits kann eine schon ausgebildete Laminarströmung durch Quer-

<sup>1</sup> Zusammenfassung der hauptsächlichsten Arbeiten über die Laminarströmung mit Rücksicht auf die „Gleitungsverbesserung“ siehe W. Klose: Über die Strömung verdünnter Gase durch Kapillaren. Dissertation Danzig 1931. Ann. Physik (5) Bd. 11 (1931) S. 73.

<sup>2</sup> Der Anlaufeffekt besteht darin, daß sich die endgültige Geschwindigkeitsverteilung der Rohrströmung erst nach Durchlaufen einer gewissen Strecke vom Einlauf einstellt und dementsprechend sich der Strömungswiderstand in diesem Teil des Rohres — der Anlaufstrecke — bis zu einem endgültigen ändert.



schnittsänderungen der Leitung gestört werden. Auch hier muß erst wieder eine bestimmte Länge von geradem Rohr mit unveränderlichem Querschnitt zurückgelegt werden, bis wieder reine Laminarströmung herrscht. Hier pflegt man von einer Beruhigungsstrecke zu sprechen. Wir wollen uns jetzt nur mit den Vorgängen beim Anlauf beschäftigen; für die Vorgänge bei der Beruhigung sind exakte Regeln nur schwer aufzustellen, weshalb man mit Erfahrungswerten rechnet.

Zunächst interessiert uns die Ausbildung des Geschwindigkeitsprofils im Anlauf. Wenn die Flüssigkeit wie bei Reynolds' Versuchen (Abb. 51) durch eine gut abgerundete Düse in die Rohrleitung gelangt, so wird sich der Strahl nicht von Düsen und Rohrwand ablösen und einschüren, sondern den Anfangsquerschnitt bei genau gleichmäßig verteilter Geschwindigkeit durchströmen (siehe Abb. 19 und 45). Da aber die Flüssigkeit an der Wand haftet, so wird sich alsbald eine sehr

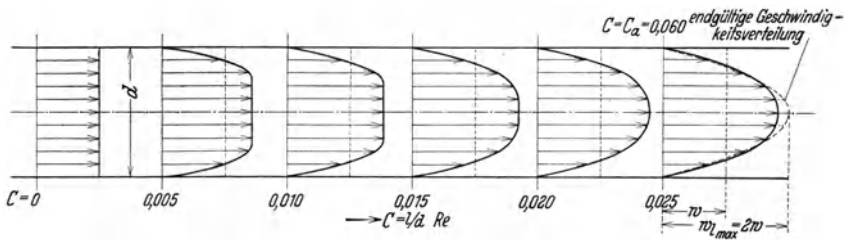


Abb. 45. Entwicklung der Geschwindigkeitsverteilung im Anlauf vom gleichmäßigen Profil (Einlaßquerschnitt) bis zum endgültigen Profil, nach Messungen von Nikuradse.

dünne Randschicht ausbilden, in der die Geschwindigkeit sehr schnell auf Null geht. Mit fortschreitender Bewegung wächst diese Randschicht immer mehr an, bis sie schließlich nach Zurücklegen der Anlaufsstrecke die Dicke des Rohrhalsmessers erreicht hat, d. h. das ganze Rohr ausfüllt. Gleichzeitig nimmt der Durchmesser des Kerns, der mit nahezu gleichmäßiger Geschwindigkeit fließt, von  $d$  auf Null ab. Dieser Anlaufvorgang steht unter der Wirkung der Zähigkeit der strömenden Flüssigkeit, die ein Abbremsen der Randschichten und Beschleunigen der Kernströmung verursacht. Daraus erkennen wir schon, daß ein Zusammenhang zwischen der Anlaufstrecke und der Reynoldsschen Zahl bestehen muß. Je zäher die Flüssigkeit ist, desto kürzer ist die Anlaufstrecke. Auch der Einfluß des Rohrquerschnitts ist schon zu deuten. Je größer der Querschnitt ist, desto später erst kann die Randschicht den ganzen Querschnitt ausfüllen, desto größer ist die Anlaufstrecke. Eine ähnliche Rolle spielt die Geschwindigkeit. Je schneller die Flüssigkeit fließt, um so später können die einzelnen Flüssigkeitsteilchen soweit abgebremst werden, daß Gleichgewicht zwischen den Massen- und Trägheitskräften besteht. Wenn man die einzelnen Ein-

flüsse linear ansetzt, dann kommt man für die Länge der Anlaufstrecke zu einer Beziehung

$$l_a = \text{konst} \frac{w F}{\nu}. \quad (153)$$

Für kreisförmigen Querschnitt folgt dann

$$l_a = C_a Re d \quad (154)$$

Daß eine solche Beziehung tatsächlich besteht, wurde versuchsmäßig nachgewiesen. Da sich bei dem mit zunehmender Anlauflänge allmählich einstellenden Gleichgewicht die Geschwindigkeitsverteilung immer langsamer (asymptotisch) der endgültigen nähert, erklärt man nach Prandtl<sup>1</sup> praktisch diejenige Länge als Anlaufstrecke, nach deren Durchströmen sich die herrschende von der endgültigen Geschwindigkeit in der Rohrachse nur noch um 1 vH unterscheidet. Boussinesq<sup>2</sup> bestimmte für die Anlaufstrecke bis 1 vH die Konstante  $C_a$  zu 0,065. Danach beträgt bei z. B.  $d = 0,01$  m und  $Re = 1000$  die Länge  $l_a = 0,65$  m; oder es ist bei  $Re = 1000$  das Verhältnis von Anlauflänge zu Rohrdurchmesser (relative Anlauflänge) 65. Schiller<sup>3</sup> ermittelte den Wert  $C_a$  zu 0,029, also erheblich kleiner.

Um den Anlaufvorgang rechnerisch erfassen zu können, wurde die Geschwindigkeitsverteilung über den Querschnitt in verschiedenen Abständen von der Einlauföffnung gemessen. Ergebnisse solcher Messungen von Nikuradse<sup>4</sup> zeigen Abb. 45 und 46. Anfangs ist die Geschwindigkeit gleichmäßig verteilt ( $C = \frac{l}{d Re} = 0$ ), bis  $C = 0,01$  steht die Kernströmung noch nicht unter dem Einfluß der Reibung, während in der Grenzschicht parabelförmige Geschwindigkeitsverteilung herrscht. Für Werte  $C > 0,01$  wird auch die Kernströmung von der Reibung erfaßt, was dadurch angezeigt wird, daß die gleichmäßige Geschwindigkeitsverteilung im Kern in eine gewölbte übergeht. In Abb. 45 wurden die Geschwindigkeitsprofile für  $C = 0,005; 0,010; 0,015; 0,020; 0,025$  dargestellt. Die gestrichelte Kurve im letzten Profil kennzeichnet die Verteilung bei ausgebildeter Laminarströmung. Bei  $C = 0,025$  beträgt die Abweichung der Achsgeschwindigkeit von der endgültigen noch 9 vH.

Mit einer von Prandtl vorgeschlagenen Näherung, daß während des ganzen Anlaufs die Kerngeschwindigkeit gleichmäßig und die Randgeschwindigkeit nach Maßgabe einer quadratischen Parabel verteilt ist, siehe Abb. 47, berechnete Schiller<sup>5</sup> die Anlaufprofile für verschiedene  $C$ . Dabei mußte die Geschwindigkeit der Kernströmung mit wachsender Randschichtdicke so zunehmen, daß die mitt-

<sup>1</sup> Prandtl, L., u. O. Tietjens: Hydro- und Aeromechanik Bd. 2 S. 25. Berlin 1931.

<sup>2</sup> Boussinesq, J.: C. R. Acad. Sci., Paris Bd. 113 (1891) S. 9 u. 49.

<sup>3</sup> Schiller, L.: Untersuchungen über laminare und turbulente Strömung. VDI-Forsch.-Heft Bd. 248 (1922); Z. angew. Math. Mech. Bd. 2 (1922) S. 96; oder Physik. Z. Bd. 23 (1922) S. 14. Leipziger Habilitationsschrift.

<sup>4</sup> Nikuradse, J.: Geschwindigkeitsverteilung im laminaren Anlauf. Erstmals veröffentlicht von Prandtl u. Tietjens: a. a. O. S. 28.

<sup>5</sup> Schiller: a. a. O.

lere Durchflußgeschwindigkeit dieselbe blieb. Da die Kernströmung fast nicht unter dem Einfluß der Zähigkeit steht, kann man sie rechnerisch angenähert wie eine reibungsfreie Strömung behandeln (Gültigkeit des Gesetzes von Bernouilli).

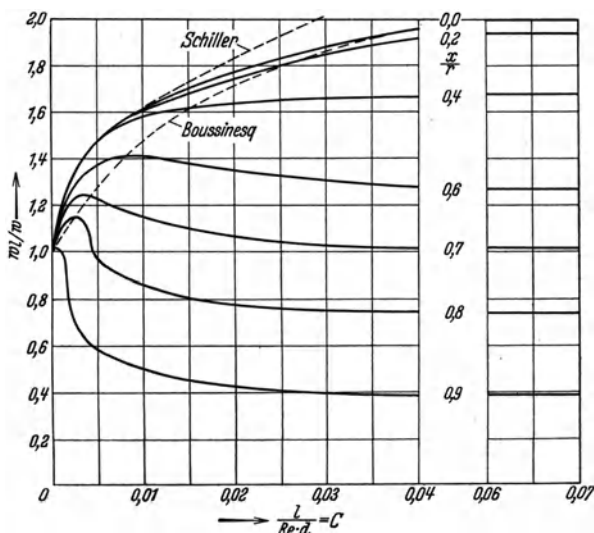


Abb. 46. Beschleunigung und Bremsung der einzelnen Schichten einer Laminarströmung im Anlauf, nach Messungen von Nikuradse.

Rechnung und Versuch stimmten bis etwa  $C = 0,01$  ganz gut überein. Für  $C > 0,01$  nähert sich allerdings die errechnete Geschwindigkeitsverteilung zu schnell der endgültigen. Tatsächlich können ja Rechnung und Versuch nur so lange übereinstimmen, wie die Zähigkeit keinen Einfluß auf die Kernströmung ausübt. Aus diesem Grunde ist auch Schillers  $C_a$ -Wert erheblich kleiner als der tatsächliche, der etwa bei  $C_a = 0,06$  liegen mag. In Abb. 46 wurden Linien  $w_{i\max}/w$  nach Boussinesq und Schiller eingetragen. Während Schillers Kurve besonders den Verhältnissen beim Beginn des Anlaufs gerecht wird,  $C_a = 0,00$  bis  $0,01$ , stellt Boussinesqs Kurve das Ende der Anlaufstrecke gut dar,  $C_a > 0,04$ .

Geschwindigkeitsverteilung und Strömungswiderstand sind, weil von einer Größe, der Zähigkeit, bedingt, eng miteinander verknüpft. Der Strömungswiderstand ändert sich während des Anlaufs bis zu seiner endgültigen Größe<sup>1</sup>. Die

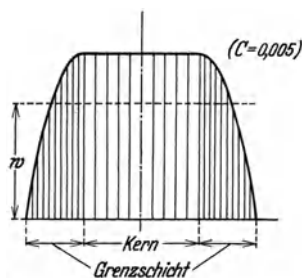


Abb. 47. Ersatz des laminaren Geschwindigkeitsprofils in der Anlaufstrecke durch eine gleichmäßig geschwinde Kernströmung und parabolisch verteilte Randströmung.

<sup>1</sup> Nach Helmholtz bilden sich Bewegungen, bei welchen keine Trägheitskräfte wirken, also z. B. laminare Strömungen, stets so aus, daß der geringste Reibungswiderstand auftritt. Das ist parabolische Verteilung der Geschwindigkeit bei Laminarströmung. Im Anlauf, wo die Flüssigkeit auch laminar strömt, aber mit anderer als parabolischer Verteilung, muß demnach ein höherer Strömungswiderstand oder Druckverlust herrschen, was mit den Versuchserfahrungen übereinstimmt. v. Helmholtz, H.: Wiss. Abh. Bd. I (1882) S. 264.

relative Rohrlänge, von der ab — bei vorgegebener Genauigkeit — der Endwiderstand erreicht wird, ist dieselbe wie die für die Geschwindigkeit ermittelte. Mit Rücksicht auf die Profiländerung Abb. 47 berechnete Schiller den Anlaufwiderstand, der bei der Entwicklung der laminaren Geschwindigkeitsverteilung durch die Beschleunigung der Kernströmung hervorgerufen wird. Die kinetische Energie im Querschnitt ist bei gleichmäßiger Geschwindigkeit ( $C = 0$ ) gleich  $w^2/2g$  (Energiebeiwert  $\xi = 1$ ). Nach Zurücklegen der Anlaufstrecke,  $C = C_a$ , hat die Bewegungsenergie im Querschnitt je Gewichtseinheit den Betrag  $2w^2/2g$  erreicht ( $\xi = 2$ ). Dieser Zuwachs geht auf Kosten der potentiellen Energie, verursacht also einen Druckabfall. Dazu kommt der zur Überwindung des Reibungswiderstandes im Rohr erforderliche Druckunterschied. Da der Geschwindigkeitsgradient an der Rohrwand, der am Einlauf zunächst sehr groß war, mit zunehmender Entfernung

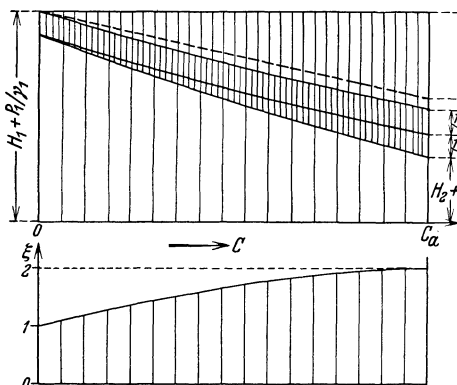


Abb. 48. Energieumsetzung im laminaren Anlauf. Abnahme des statischen Druckes, Zunahme der kinetischen Energie auf das Doppelte, Anwachsen des Energiebeiwertes von 1 auf 2. Der Druckhöhenverlust bei ausgebildetem Profil ist der Rohrlänge proportional. Der zusätzliche Druckhöhenverlust im Anlauf beträgt 0,16 Geschwindigkeitshöhen.

vom Einlauf und wachsender Grenzschichtdicke immer kleiner wird, wird der Druckabfall eine in Abb. 48 skizzierte Kurve befolgen. War die Flüssigkeit vor dem Einlauf in Ruhe, so muß ein Teil der Druckhöhe vor dem Einlauf auch noch zur Beschleunigung der fließenden Menge auf die mittlere Geschwindigkeit  $w$  herangezogen werden. Der gesamte Anlaufenergieverlust ist damit

$$\frac{P_1}{\gamma_1} - \frac{P_2}{\gamma_2} + H_1 - H_2 - 2 \frac{w^2}{2g}. \quad (155)$$

Schiller suchte nun den tatsächlichen Anlaufverlust, der durch die Veränderlichkeit der Randspannung  $\tau_0$  bedingt ist, zu berechnen. Er fand, daß die Erhöhung des Widerstandes im Anlauf gegenüber dem endgültigen auch eine Funktion der Zahl

$C = \frac{l}{d \cdot Re}$  ist. Umgerechnet in Geschwindigkeitshöhen erhielt er für die Erhöhung  $0,16 w^2/2g$ . Den Druckabfall von Beginn des Rohres an kann man mit

$$H_1 - H_2 + \frac{P_1}{\gamma_1} - \frac{P_2}{\gamma_2} = \frac{32}{g} \frac{l w v}{d^2} + n \frac{w^2}{2g} \quad (156)$$

angeben, wobei  $n$  im Einlaßquerschnitt von 0 auf 1 steigt und dann allmählich den Wert 2,16 erreicht. Allgemein ist

$$n = 1 + f\left(\frac{l}{d Re}\right) = 1 + f(C). \quad (157)$$

Schiller wies die aus der Rechnung hervorgehende Widerstandserhöhung durch Versuche nach. Boussinesq fand einen 50 vH zu großen Widerstand, nämlich  $0,24 w^2/2g$ . Schillers Rechnung gab ferner die Beziehung für die Anlaufänge:

$$\frac{l}{d} = \frac{1}{16} Re f\left(\frac{w_{l,max} - w}{w}\right) = \frac{Re}{16} f(m) \quad \text{mit} \quad m = \frac{w_{l,max} - w}{w}, \quad (158)$$

wobei  $l$  die Länge vom Einlaßquerschnitt an gerechnet ist. Für  $w_{i\max} = 2w$ , die endgültige Form, soll  $l$  gleich (oder größer)  $l_a$  sein. Wegen des nahezu reibungslosen Verhaltens der Kernströmung gilt

$$\left(H + \frac{P}{\gamma}\right)_{12} = \left(\frac{w_{i\max}^2 - w^2}{2g}\right)_{12}, \quad (159)$$

d. h. die Abnahme der potentiellen Energie entspricht dann allein der Steigerung der kinetischen Energie. Mit Gl. (158) und (159) ist der Energieunterschied zwischen einer Stelle 1 in der Anlaufstrecke und dem Einlauf

$$\left(H + \frac{P}{\gamma}\right)_{01} = \frac{w^2}{2g} (2m + m^2)_{01}. \quad (160)$$

Mit der Definitionsgleichung für  $\lambda_R$  erhält man für die Bewegung zwischen zwei beliebigen Querschnitten

$$H_{12} + \frac{P_{12}}{\gamma} = \lambda_R \cdot \frac{l_{21}}{d} \cdot \frac{w^2}{2g}$$

und

$$\lambda_R = (2m + m^2)_{21} \cdot \frac{d}{l_{21}}. \quad (161)$$

Nach Gl. (158) wurde in Abb. 49 das Verhältnis  $m$  als  $f(l/d Re) = f(C)$  und  $2m + m^2$  als  $f(C)$  aufgetragen. Damit kann man mit Gl. (160) den Druckverlust zwischen zwei beliebigen Stellen im Anlauf berechnen.  $l_a/d Re$  oder  $C_a$  wird erreicht, wenn  $m = 1$  oder  $2m + m^2 = 3$  ist. Nach Abb. 49 ist  $C_a = 0,029$ . Den Grad der Annäherung erkennt man an der  $m$ -Kurve.  $m$  ist für  $C > C_a$  gleich 1 (gleich konstant). Die Kurve hat bei  $C_a = 0,029$  einen Knick. Tatsächlich muß dort ein stetiger Übergang sein. Zum Vergleich wurde die Kurve nach Nikuradse eingetragen, die  $C_a = 0,06$  brachte. Die Schillersche Rechnung stimmt trotzdem noch recht gut mit der Wirklichkeit überein. Das zeigt Abb. 50. In einem Rohre mit bestimmter Anlaufänge  $l_a$  vor der Meßstrecke wurde der Druckverlust beobachtet, indem  $Re$  gesteigert wurde. Solange

$$Re \leq \frac{1}{0,029} \frac{l_a}{d}$$

war (bis Punkt A), ergab sich ein Druckverlust nach dem Gesetz von Hagen und Poiseuille. Wurde dieser Wert überschritten, so ergaben sich höhere Druckverluste oder Widerstandszahlen. Die Versuchspunkte zeigen, wie gut Rechnung und Versuch übereinstimmen.

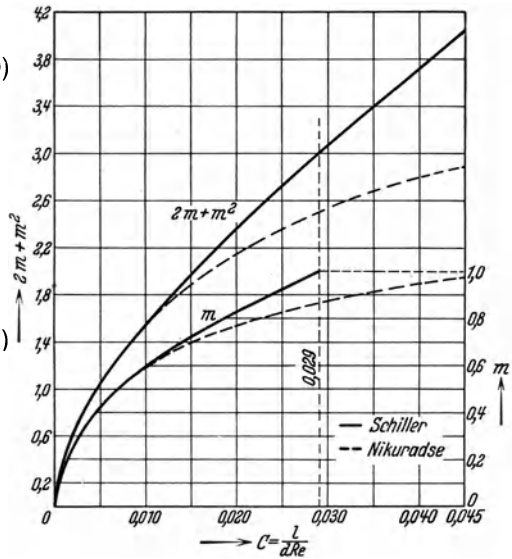


Abb. 49. Zum Druckverlust im laminaren Anlauf.

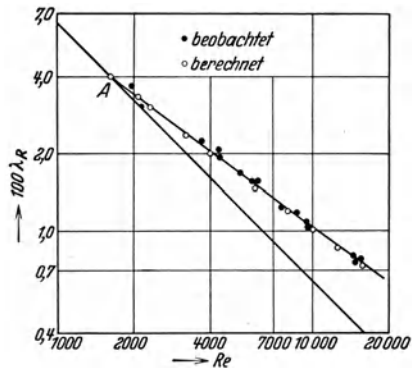


Abb. 50. Widerstandszahl im laminaren Anlauf nach Messungen und Berechnungen von Schiller.

Bei scharfkantigem Rohreinlauf werden die Verluste nur um ein geringes höher, weil sich ein Einlaufwirbel ausbildet, der eine natürliche Abrundung schafft. Die Beschreibung des Anlaufzustandes beruht vollständig auf Versuchen mit Wasser. Bei Strömung anderer tropfbarer oder gasförmiger Flüssigkeiten werden höchstwahrscheinlich ähnliche Vorgänge eintreten. Für die Längen der Beruhigungsstrecken werden je nach Störungsgrad etwa ähnliche Längen wie beim Anlauf nötig sein.

### 3. Übergangsgebiet zwischen laminarer und turbulenter Strömung.

Die oben erwähnten Navier-Stokesschen Gleichungen lassen keine Beschränkung für den Geltungsbereich der Laminarströmung erkennen; theoretisch ist die Laminarströmung unbegrenzt denkbar: Versuche

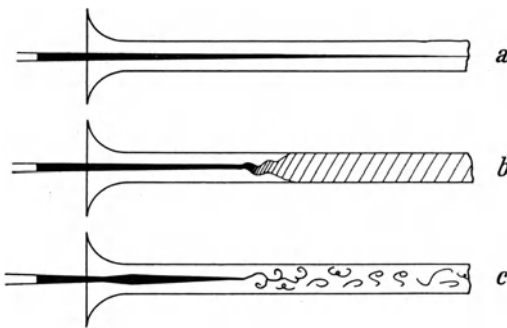


Abb. 51a bis c. Verschiedene Zustände eines Farbfadens in von Wasser durchströmtem Glasrohr. Nach Beobachtungen von Reynolds (1883).

51a laminare, 51b u. 51c turbulente Strömung.

zeigten aber, daß tatsächlich nur in einem engen Bereiche Laminarströmung herrscht, andernfalls führen die einzelnen Flüssigkeitsteilchen eine turbulente Strömung aus. Um die Grenze kennenzulernen, an der die eine Strömungsart in die andere übergeht, ließ Hagen dunkle Bernsteinspäne und Eichenholzspäne zugleich mit dem Versuchswasser durch Glasrohre

treiben<sup>1</sup>. Je nach der Größe der Strömungsgeschwindigkeit befanden sich die Späne in ruhiger achsparalleler oder in wirblicher anscheinend ganz unregelmäßiger Bewegung. Sehr auffallend unterschieden sich beide Strömungsarten, als er den aus einem geraden Rohr frei austretenden Wasserstrahl beobachtete. Gleich er anfangs einem unbeweglichen polierten Glasstabe mit glänzender Oberfläche, so nahm er nach Überschreiten eines gewissen Grenzzustandes einen matten Glanz wie geätztes Glas an und ließ unter der Lupe zahlreiche kleine Wellen erkennen. Gleichzeitig wurde der Strahl unruhig und schwankte hin und her. Besonders treffend sind Beobachtungen von Reynolds<sup>2</sup>, der die Strömung von teilweise gefärbtem Wasser durch Glasrohre mit

<sup>1</sup> Hagen, G.: Über den Einfluß der Temperatur auf die Bewegung des Wassers in Röhren. Abhandl. d. Akad. d. Wiss. math. Kl. S. 17. Berlin 1854.

<sup>2</sup> Reynolds, O.: a. a. O.

trompetenförmigem Einlauf untersuchte. Bei geringen Geschwindigkeiten schwamm der Farbfaden in gerader Bahn durch das Rohr (Abb. 51a). Wurde die Geschwindigkeit vergrößert, so mischte sich plötzlich das gefärbte Wasser in beträchtlicher Entfernung vom Einlauf mit dem klaren Wasser (Abb. 51b). Bei weiterer Geschwindigkeitssteigerung löste sich der Farbfaden immer näher am Einlauf auf, konnte diesen aber auch bei noch so hohen Geschwindigkeiten nicht erreichen. Wurde der Zustand von Abb. 51b kurzzeitig beleuchtet (etwa durch elektrischen Funken), so konnte man die einzelnen Wirbel deutlich erkennen (Abb. 51c). Reynolds' Anschauungen, daß das Übergangsgesetz nur von den Größen der Navier-Stokesschen Gleichungen [Gl. (53)], nämlich der Zähigkeit  $\mu$ , der Dichte  $\gamma/g$  der Flüssigkeit, der Geschwindigkeit  $w$  und dem Rohrdurchmesser  $d$  abhängt, erwies sich als allgemein zutreffend. Wenn wir die Reynoldssche Zahl als Ordnungsgröße für die Strömung verwenden, so zeigt sich, daß die Strömung bis zu einer gewissen Zahl laminar bleibt und darüber hinaus turbulent wird. Dieser Übergangszahl kommt aber keine absolute Bedeutung zu; sie kann je nach Verlauf der Strömung ganz verschiedene Werte annehmen. Nach zahlreichen Versuchen hängt der Betrag der Übergangszahl vom Grade der Störung oder Beruhigung der strömenden Flüssigkeit ab und richtet sich nach dem größten in der Flüssigkeit vorkommenden Störungsbetrage.

Aus den Untersuchungen Schillers<sup>1</sup> folgt, daß man bei jeder Versuchsanordnung eine ganze Reihe von Übergangszahlen finden kann. Von besonderem Einfluß ist die Form des Rohreinlaufs, der die wesentlichste Störquelle darstellt. Ferner hängt der Betrag der Einlaufstörung vom Beruhigungsgrade der Flüssigkeit vor Eintritt in das Rohr ab. Die beim Einlauf in die Strömung getragenen Wirbel begünstigen den Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung. Allerdings wird bald eine Reynoldssche Übergangszahl erreicht, die auch bei noch so heftiger Störung nicht mehr unterschritten werden kann. Sie beträgt  $Re_{krit} = 2320$ . Bei Strömungen mit kleinerer Kennzahl werden die Störungen nach hinreichend langer Beruhigungsstrecke immer wieder geglättet. Oberhalb  $Re_{krit} = 2320$  dagegen geht wirbelnd ankommende Flüssigkeit auch bei noch so langer Beruhigungsstrecke nicht mehr in laminare Strömung über. Die untere Grenze heißt kritische Reynoldssche Zahl. Da der Übergang vom Grad der Störung abhängt, kann man schließen, daß die Laminarströmung bis zu einer gewissen Grenze ( $Re = 2320$ ) stabil und darüber hinaus (von verschiedenem Grade) labil ist. Die kritische Geschwindigkeit ist jede Geschwindigkeit, die dem Wert  $Re_{krit} = w_{krit} d/\nu = 2320$  genügt.

<sup>1</sup> Schiller, L.: a. a. O. VDI-Forsch.-Heft 1922 Nr. 248 S. 5.

Zahlentafel 23. Beispiele für  $w_{krit}$  bei  $20^\circ$  und 760 mm QS.

Rohrdurchmesser $D$	10	20	100	1000 mm
Erdöl aus Burma . . . $\nu \cdot 10^6 = 18,90$	4,385	2,193	0,439	0,044 m/s
Deutsches Petroleum . . $\nu \cdot 10^6 = 1,790$	0,415	0,208	0,042	0,004
Wasser . . . . . $\nu \cdot 10^6 = 1,007$	0,233	0,117	0,023	0,002
trockene Luft . . . . . $\nu \cdot 10^6 = 15,17$	3,520	1,760	0,352	0,035
Leuchtgas . . . . . $\nu \cdot 10^6 = 26,30$	6,100	3,050	0,610	0,061

Durch möglichste Verringerung der Störungen (gut abgerundeter, glatter Einlauf, erschütterungsfrei aufgestellte Versuchsanlage, zur Beruhigung tagelang im Vorratsrog stehende Versuchsfüssigkeit) konnte man die Laminarströmung bis zu ziemlich hohen Reynoldsschen Zahlen erhalten (Poiseuille<sup>1</sup> bis 20900, Reynolds<sup>2</sup> bis 12850, Barnes und Coker<sup>3</sup> bis 54100, Saph und Schoder<sup>4</sup> bis 12000, Ekman<sup>5</sup> bis 51000, Brabbée<sup>6</sup> bis 17700, Schiller bis 22000). Danach erscheint es tatsächlich möglich, daß bei vollständigem Vermeiden der immer noch vorhandenen Störungen im Versuchsstrom, besonders beim Einlauf in das Rohr, beliebig hohe  $Re$  für den Übergang erreicht werden können. Praktisch wird man diese Störungen natürlich nicht restlos ausschalten können.

$Re_{krit}$  wurde öfters bestimmt: z. B.

Hagen (1854), Wasser, Glas- und Messingrohre, D. F. . . . .	2100
Reynolds (1883), Wasser, Bleirohre, D. F. . . . .	2000 ÷ 2100
Barnes und Coker (1901/05), Wasser, Messingrohre, W. F. . . .	1900 ÷ 2040
Saph und Schoder (1903), Wasser, Messingrohre, D. . . . .	2000 ÷ 2800
Morrow (1905) <sup>7</sup> , Wasser, Glasrohre, G. . . . .	1930
Ruckes (1908) <sup>8</sup> , Preßluft, Glasrohre, D. . . . .	2000 ÷ 2400
Stanton und Pannell (1914), Luft und Wasser, Messingrohre, D. .	2140 ÷ 2250
—, Luft und Wasser, Messingrohre, G. <sup>9</sup> . . . . .	4000
Kohlrausch (1914) <sup>10</sup> , Luft, Messingrohre, G. . . . .	1880 ÷ 2600

<sup>1</sup> Poiseuille, J.: a. a. O.

<sup>2</sup> Reynolds, O.: a. a. O.

<sup>3</sup> Barnes, H. T., u. E. G. Coker: The flow of water through pipes, experiments on streamline motion and the measurement of critical velocity. Nichols Physic. Rev. Bd. 12 (1901) S. 341; Philos. Trans. Roy. Soc., Lond. (A) Bd. 199 (1902) S. 234; B. A. Belfast Report 1902; Proc. Roy. Soc., Lond. Bd. 74 (1905) S. 341. Coker, E. G., u. S. B. Clement: An experimental determination of the change with temperature of the critical velocity of the flow of water in pipes. Philos. Trans. Roy. Soc., Lond. (A) Bd. 201 (1903) S. 45.

<sup>4</sup> Saph, A. V., u. E. H. Schoder: An experimental study of the resistance to the flow of water in pipes. Trans. Amer. Soc. civ. Engr. Bd. 51 (1903) S. 253

<sup>5</sup> Ekman, V. W.: On the change from steady to turbulent motion of liquids. Ark. Math., Astron. Physik Bd. 6 (1911) Nr. 12.

<sup>6</sup> Brabbée, K.: Widerstände in Warmwasserheizungen. Gesundh.-Ing. Bd. 36 (1913) S. 545.

<sup>7</sup> Morrow, J.: On the distribution of the velocity in a viscous fluid over the cross-section of a pipe, and on the action of critical velocity. Proc. Roy. Soc., Lond. (A) Bd. 76 (1905) S. 205.

<sup>8</sup> Ruckes, W.: a. a. O.

<sup>9</sup> Stanton, T. E., u. J. R. Pannell: Similarity of motion in relation to the surface friction of fluids. Philos. Trans. Roy. Soc., Lond. (A) Bd. 214 (1914) S. 199.

<sup>10</sup> Kohlrausch, K. W. F.: a. a. O.



Kohlrusch, Luft, Messingrohre, D. . . . .	2: 80
Schiller (1921), Wasser, Messingrohre, D. bei verschiedener Störung	2320
Wildhagen (1923) <sup>1</sup> , Preßluft, Glasrohre, D. . . . .	1900 ÷ 2700

Meßverfahren: D. durch Beobachtung des Druckabfalls, F. mittels Farbfäden, W. durch Beobachtung der Wärmeübertragung, G. durch Bestimmung der Geschwindigkeitsverteilung.

Am sichersten erscheint der Wert von Schiller (2320). Immerhin können wohl gelegentlich auch niedrigere Werte auftreten, so daß eine regellose Streuung bis  $Re = 2000$  herunter wahrscheinlich ist. Die von Reynolds mit 2020 gefundene Zahl (im Mittel) kann bei schärferer Nachprüfung seiner Versuche mit etwa 2400 angegeben werden. Hagens Versuche als die ältesten ergeben nachträglich umgerechnet Übergangszahlen zwischen 2300 und 2600<sup>2</sup>.

Man kann das Übergangsgebiet auch besonders gut beobachten, wenn man den Druckabfall im Versuchsrohr zwischen zwei verschiedenen Querschnitten mißt und die damit nach Gl. (89) berechnete Widerstandszahl  $\lambda_R$  im logarithmischen Diagramm über der zugehörigen Reynoldsschen Zahl  $Re$  aufträgt. Ein solches Diagramm, von Schiller mit Wasser aufgenommen, ist Abb. 52. Man sieht, wie durch gradweise

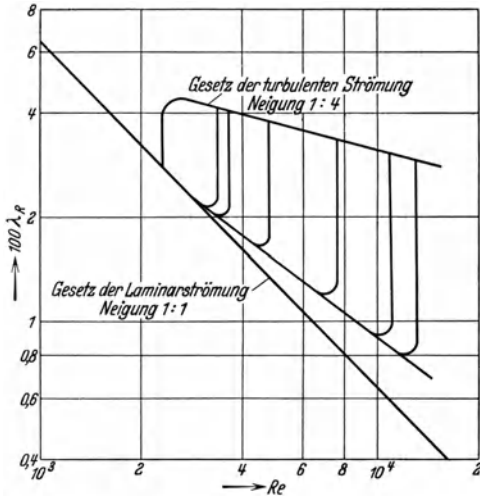


Abb. 52. Zusammenhang zwischen Widerstandszahl und Reynoldsscher Zahl bei verschieden großer Störung der Strömung im Grenzgebiet zwischen laminarer und turbulenter Strömung (nach Schiller).

Verringerung der Einlaufstörung die Übergangszahl gradweise erhöht wurde. Verfolgt man eine solche Übergangskurve, so erkennt man, daß  $\lambda_R$  zunächst nach dem Gesetz von Hagen und Poiseuille abnimmt (Gerade unter  $-45^\circ$ ). Nach Erreichen einer bestimmten Übergangszahl steigt  $\lambda_R$  plötzlich bis zu einer höher liegenden Kurve an, die das Widerstandsgesetz der turbulenten Strömung darstellt. Während also die Meßpunkte erst auf einer Geraden mit Neigung 1:1 lagen, konnten sie jetzt durch eine Gerade mit Neigung 1:4 verbunden werden, d. h. jetzt ist die Änderung von  $\lambda_R$  mit  $Re$  umgekehrt der 4. Wurzel aus  $Re$  proportional. In Abb. 52 gibt es eine ganze Reihe solcher Über-

<sup>1</sup> Wildhagen, M.: Über den Strömungswiderstand hochverdichteter Luft in Rohrleitungen. Z. angew. Math. Mech. Bd. 3 (1923) S. 181.

<sup>2</sup> Prandtl, L., u. O. Tietjens: Aero- u. Hydromechanik Bd. 2 S. 33 Abb. 17. Berlin 1931.

gänge<sup>1</sup>, jeder entspricht einem anderen Störungsgrade. Bei kleinen Störungen verläßt die Übergangskurve die Laminargerade nicht so plötzlich wie bei größeren Störungen. Als Übergangszahl pflegt man dann die zu bezeichnen, bei der die erste Abweichung von der Laminargeraden auftritt. Länger als bis  $Re = 12000$  konnte Schiller bei diesen Versuchen Laminarströmung nicht erhalten. Bei diesen großen Reynoldsschen Zahlen war die Laminarströmung so instabil, daß schon sehr geringe Störungsbeträge die turbulente Strömung einleiten konnten.

Schiller<sup>2</sup> fand auch die Länge der Anlaufstrecke von Einfluß auf die Größe der kritischen Zahl. Mit zunehmender Anlauflänge nahm  $Re_{krit}$  bis auf 2320 ab und behielt dann diesen Wert bei. Abb. 53 stellt Versuchsergebnisse an glatten peinlich geraden Rohren mit glatten gut abgerundeten Einlauföffnungen dar, die erst bei einem Verhältnis Anlauflänge zu Rohrdurchmesser von 1300 zu

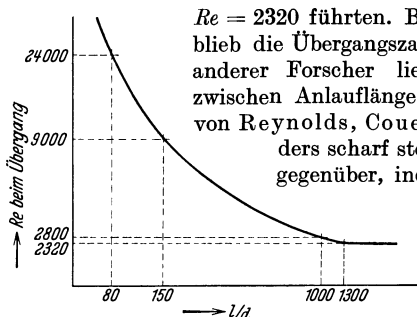


Abb. 53. Zusammenhang zwischen Übergangszahl und Anlauflänge nach Schiller (Versuchsbereich  $l/d = 34$  bis  $2635 =$  Anlauflänge zu Rohrdurchmesser,  $d = 0,006$  und  $0,012$  m Durchmesser. Messingrohr).

die kritische Zahl ist. Nach den andersdeutigen Messungen Schillers muß man wohl vorläufig diese Frage noch offen lassen. Für den Übergang selbst bei verschiedener Anlauflänge gab Schiller mehrere Diagramme an<sup>4</sup>, die zeigen, daß die Umwandlung der Strömungsformen um so langsamer erfolgt, je kürzer der Anlauf ist (Abb. 54).

Eine interessante Erscheinung beim Übergang ist das abwechselnde Auftreten von Turbulenz und Laminarströmung, was bei genügend langsamer Steigerung der Reynoldsschen Zahl beobachtet werden kann. Wird die Übergangszahl etwas überschritten, so tritt nach Reynolds' Farbfadenversuchen (s. o.) plötzlich an einer in beträchtlicher Entfernung vom Einlauf befindlichen Stelle des Rohres Turbulenz auf. Dadurch wird der Strömungswiderstand erhöht und fällt

<sup>1</sup> Die Abgabelung von der Laminargeraden, die auch ein Laminarströmungsgesetz darstellt, wurde im vorigen Abschnitt erklärt.

<sup>2</sup> Schiller, L.: Neue Versuche zum Turbulenzproblem. Physik. Z. Bd. 25 (1924) S. 541; Bd. 26 (1925) S. 64.

<sup>3</sup> Couette, M.: Etude sur le frottement des liquides. Ann. Chim. Phys. (6) Bd. 21 (1890) S. 433.

<sup>4</sup> Schiller, L.: Rauigkeit und kritische Zahl. Ein experimenteller Beitrag zum Turbulenzproblem. Z. Physik Bd. 3 (1920) S. 412.

die mittlere Strömungsgeschwindigkeit bei unveränderlicher Druckhöhe. Dieses Abbremsen braucht wegen der Trägheit des Stromes einige Zeit, weshalb  $\lambda_R$

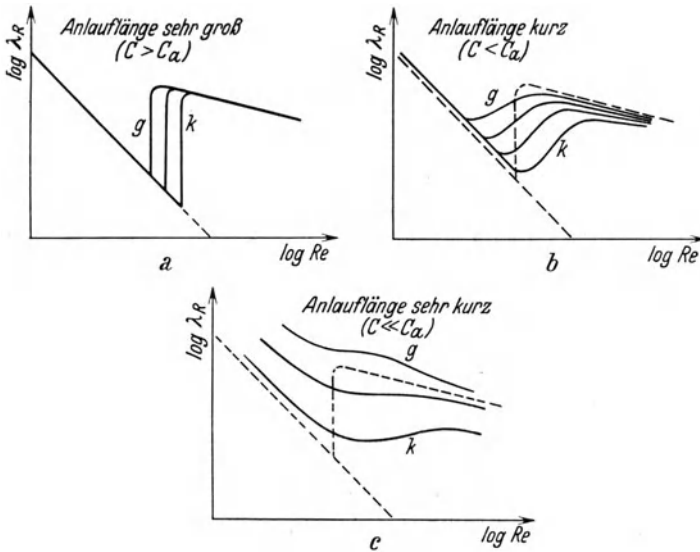


Abb. 54. Zusammenhang zwischen Widerstandszahl und Reynoldsscher Zahl im Übergangsbereich bei verschiedener Anlaufänge und verschiedenem Störungsgrad der Strömung nach Schiller. (Abb. 54a, b, c; *k* kleine Störung, *g* große Störung.)

zunächst schnell, dann langsamer ansteigt. Ist dabei die Reynoldssche Zahl wieder unter die kritische gesunken, so hört die weitere Turbulenzbildung auf. In dem Maße, wie der wirbelnde Teil der Flüssigkeit das Versuchsrohr verläßt, verringert sich der Strömungswiderstand und damit auch  $\lambda_R$ . Gleichzeitig wird die Flüssigkeit wieder beschleunigt und wiederholt sich der Vorgang (siehe Abb. 55).

Wie später erläutert wird, ist der Widerstand bei turbulenter Strömung im Gegensatz zur Laminarströmung von der Rauigkeit der Rohrwand abhängig. Man könnte daher auch vermuten, daß die Rauigkeit der Rohrwand, die im Verlaufe einer turbulenten Strömung eine ständige Störung hervorruft, den Betrag der kritischen Zahl wesentlich beeinflusst. So behauptete Ombeck<sup>1</sup>, die kritische Zahl sei um so kleiner, je rauher das Rohr ist. Nach Christen<sup>2</sup> hängt  $Re_{krit}$  von

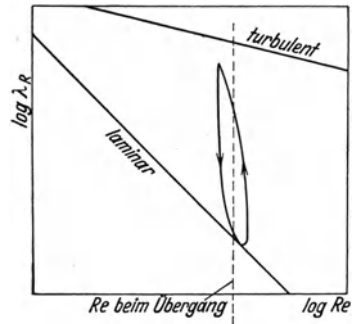


Abb. 55. Widerstandszahl bei abwechselndem Auftreten von Laminarströmung und Turbulenz im Übergangsbereich.

<sup>1</sup> Ombeck, H.: Druckverlust strömender Luft in geraden zylindrischen Rohrleitungen. VDI-Forsch.-Heft 1914 Nr. 158/159 S. 5.

<sup>2</sup> Christen, T.: Das Gesetz der Translation des Wassers in regelmäßigen Kanälen, Flüssen und Röhren. Leipzig 1903 und Z. VDI Bd. 47 (1903) S. 1641.

Rauhigkeit und Rohrdurchmesser ab.  $Re_{krit}$  sei um so höher, je glatter und weiter das Rohr ist, z. B. bei  $D = 100$  mm sei  $Re_{krit}$  bei Messingrohr = 5230, bei ge-teertem Gußeisenrohr = 1840 und bei stark verkrustetem Gußeisenrohr = 389. Schnetzler<sup>1</sup> fand, wie auch noch andere Forscher,  $Re_{krit}$  stark von der Rauhigkeit abhängig. Klarheit schafften erst wieder umfangreiche Versuche von Schiller<sup>2</sup>:  $Re_{krit}$  richtet sich solange nicht nach der Rauhigkeit der Rohrwand, als irgendwo eine Stelle stärkerer Störung vorhanden ist. Für ein Rohr mit geringer Rauhigkeit muß man unter normalen Verhältnissen den Einlauf als wesentlichste Störungsstelle ansehen, d. h. vom Einlauf in die Strömung gehende Wirbel sind zur Erregung der Turbulenz früher befähigt als durch Rauhigkeit der Rohrwand bedingte Störungen. Vergleichsweise mit einem sehr glatten und einem sehr rauen Rohr angestellte Versuche unter sonst gleichen Einlaufverhältnissen (scharfkantiger Einlauf) brachten beide als kleinste Übergangszahl  $Re = 2320$ . Als weiterer Beweis für das Überwiegen der Einlaufstörung kann gelten, daß viele Beobachter gleiche Übergangszahlen in Rohren gleichrauhem Baustoffes aber verschiedener lichter Weite fanden.  $Re_{krit}$  hängt nicht gesondert vom Rohrdurchmesser ab.

Aus den umfangreichen Messungen von Schiller folgt also, daß es ganz allgemein nur eine kritische Zahl gibt. Unter Außerachtlassung des Anlauf-effektes wurden vielfach ganz falsche Schlüsse über den Übergang gezogen<sup>3</sup>. Die Gesetzmäßigkeiten, die mit anderen Flüssigkeiten als Luft und Wasser auch nachgeprüft wurden, gelten ganz allgemein für alle Flüssigkeiten. Bose und Rauert<sup>4</sup> erhielten z. B. für Alkohol, Chloroform u. a. Flüssigkeiten  $Re_{krit}$  immer  $\sim 2000$ . Daraus, daß bei  $Re > Re_{krit}$  laminaire oder turbulente Strömung angetroffen werden kann, erhellt, daß die Reynoldssche Zahl zwar ein notwendiges, aber kein hinreichendes Kriterium für die Art der Strömung abgibt. Gleiche  $Re$  sagen also nicht ohne weiteres aus, daß die Strömungen in zwei wenn auch geometrisch vollkommen ähnlichen Rohren mechanisch ähnlich sind. Eine einwandfreie Erklärung über den Grund, warum die Laminarströmung von einer turbulenten abgelöst wird, gibt es bis heute noch nicht. Schon Reynolds beschäftigte sich eingehend mit diesem Problem. Im Laufe der Zeit wurden drei verschiedene Rechenverfahren entwickelt: Verfahren der kleinen Schwingungen (Lord Rayleigh), energetische Ansätze (Reynolds, Orr) und Verfahren der endlichen Störungen. Während Noether<sup>5</sup> die Turbulenz für einen freien Schwingungsvorgang hält, glaubt v. Mises, daß die Schwingungen von der technisch unter allen Umständen vorhandenen Rauhigkeit immer neu erregt werden. Außer diesen gibt es noch eine ganze Reihe andere Deutungen<sup>5</sup>. Mit Rechnungen untersuchte man zunächst nur die Stabilität der Laminarströmung. Besonderen Erfolg scheint die Methode der kleinen Schwingungen zu versprechen. Man hält dabei die Störungen durch mehr oder weniger heftige Schwingungen der einzelnen Flüssig-

<sup>1</sup> Schnetzler, E.: Strömungserscheinungen von Wasser in rauhwandigen Kapillaren innerhalb eines sehr großen Bereiches von Strömungsgeschwindigkeiten. Physik. Z. Bd. 11 (1910) S. 1002; Verh. dtsh. physik. Ges. 1910 S. 817.

<sup>2</sup> Schiller, L.: a. a. O. Z. Physik Bd. 3 (1920) S. 412.

<sup>3</sup> Siehe hierzu z. B. die vielumstrittenen Arbeiten von W. Sorkau: Physik. Z. Bd. 12 (1911) S. 582; Bd. 13 (1912) S. 805; Bd. 14 (1913) S. 147, 709, 828; Bd. 15 (1914) S. 582, 768; Bd. 16 (1915) S. 97, 101; L. Schiller u. H. Kirsten: Bd. 22 (1921) S. 523. C. Schaefer u. G. Heisen: Z. Physik Bd. 12 (1922) S. 165.

<sup>4</sup> Bose, E., u. D. Rauert: Experimentalbeitrag zur Kenntnis der turbulenten Flüssigkeitsreibung. Physik. Z. Bd. 10 (1909) S. 406; Bd. 12 (1911) S. 126.

<sup>5</sup> Noether, F.: Z. angew. Math. Mech. Bd. 1 (1921) S. 125, 218. Naumann, A.: Entstehung der turbulenten Rohrströmung. Z. Forsch. Ing.-Wes. Bd. 2 (1931) S. 85.

keitsteilchen gegeben und sucht die Ursachen für die Anfachung der Amplitude und schließt so auf die Stabilität oder auch, von der Laminarströmung ausgegangen, Labilität der Hauptströmung. Hier sind besonders Tollmiens Arbeiten zu nennen, die u. a. erkennen lassen, daß weniger die Energie als vielmehr die Wellenlänge der Störungsschwingung den Grad der Labilität der Laminarströmung bestimmt. Zu einem ähnlichen Ergebnis kam auch schon Reynolds, der sich mit den Energieänderungen durch eine Überlagerungsströmung befaßte. Prandtl äußert sich vorläufig wie folgt über das Entstehen der Turbulenz<sup>1</sup>: „Die Ursachen für die Entstehung der Turbulenz sind noch nicht hinreichend geklärt. Wahrscheinlich geben schwache Wirbel mit der Achse parallel zur Rohrachse, die durch geringe noch vorhandene Strömungen im Behälter verursacht werden, zunächst Anlaß zu labilen Geschwindigkeitsverteilungen im Rohr; diese führen dann zu einem raschen Zerfall der Strömung unter Bildung heftiger Querwirbel, die dann nicht mehr verschwinden, da sie immer wieder Anlaß zu neuen instabilen Geschwindigkeitsverteilungen geben. Bei scharfkantigem Einlauf bildet sich eine Trennungsschicht, die leicht in Wirbel zerfällt, und die dann Turbulenz hervorruft. Ist das Rohr in eine ebene Wand eingesetzt, daß es mit scharfer Kante an diese anschließt, so erhält man den Übergang zur turbulenten Strömung etwa bei  $Re = 2800$ .“

#### 4. Turbulente Strömung im glatten geraden Kreisrohr.

##### a) Vollkommen ausgebildete Strömung.

In der Technik gibt es Rohrströmungen mit Reynoldsschen Zahlen bis  $Re = 10^7$  und darüber; in dem weiten Bereich von  $Re > Re_{krit} (> 2320)$  herrscht praktisch immer turbulente Strömung. Bei den in der Praxis gebräuchlichen Geschwindigkeiten tritt Laminarströmung nur in sehr engen Röhren oder bei Förderung sehr zäher Flüssigkeiten auf. Rein äußerlich bewirkt die Turbulenz einen größeren Strömungswiderstand. Durch die turbulenten Querbewegungen wird die Flüssigkeit ständig durchgemischt und kinetische Energie ausgetauscht. Das Geschwindigkeitsprofil ist flacher als bei Laminarströmung, d. h. die Geschwindigkeit nahezu gleichmäßig über den Querschnitt verteilt (Abb. 56). Bei gleicher mittlerer Geschwindigkeit ist der Höchstwert  $w_{i,max}$ , der auch hier wieder in der Rohrachse liegt, viel geringer

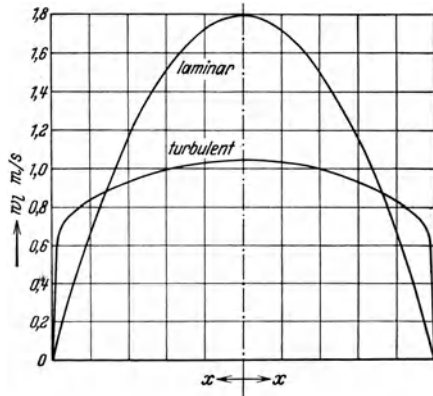


Abb. 56. Verteilung der axial gerichteten Geschwindigkeitskomponenten bei laminarer und turbulenter Bewegung, wenn in beiden Fällen dieselbe Flüssigkeitsmenge strömt.

<sup>1</sup> Prandtl, L.: Abriß der Strömungslehre S. 119. Braunschweig 1931.

als bei Laminarströmung. Erst in unmittelbarer Nähe der Rohrwand fällt die Geschwindigkeit schnell auf Null herab. Im Gegensatz zum reinen Reibungswiderstand der Laminarströmung ist der Strömungswiderstand bei Turbulenz hauptsächlich ein Wirbelwiderstand. Fast der ganze Strom wird aus zeitlich veränderlichen Wirbelballen gebildet, die den ganzen Querschnitt durchfahren<sup>1</sup>. Nur in unmittelbarer Nähe der Rohrwand schmiegen sich die Wirbelbahnen allmählich der geraden Rohrwand an, ohne diese selbst je zu berühren. Es gibt auch bei turbulenter Strömung eine laminare Grenzschicht, d. h. eine äußerst dünne Flüssigkeitsschicht bewegt sich unmittelbar an der Wand mit Teilchen, die nur parallel zur Rohrwand fließen. An der Wand selbst haftet die Flüssigkeit. Die Turbulenzwirbel dringen nicht in diese Grenzschicht ein, die die Wirkung einer Schmierschicht hat.

Wir wollen zunächst nur turbulente Strömungen in technisch glatten geraden Rohren untersuchen. Hier nimmt man von vornherein an, daß die an der Rohrwand fließende laminare Grenzschicht die mikroskopischen Unebenheiten der Wand völlig überdeckt, so daß sie keinen Einfluß auf den Strömungsverlauf gewinnen.

**a) Strömungswiderstand bei turbulenter Bewegung im glatten geraden Kreisrohr.** Nach Gl. (96) kann man die Widerstandszahl  $\lambda_R$  mit dem Ansatz

$$\lambda_R = b \cdot Re^c, \quad (162)$$

umfassender noch mit

$$\lambda_R = a + b Re^c \quad (163)$$

in die Rechnung einführen. Die Konstanten der Gleichung müssen durch Versuche bestimmt werden. Die Strömung in glatten Rohren bedeutet für die praktische Hydraulik einen nicht allzu wichtigen Grenzfall. Zur Klärung des Reibungseinflusses ist ihre Erforschung aber notwendig. Technisch glatte Rohre sind nahtlos gezogene Kupfer-, Messing- und Glasrohre, gelegentlich auch Bleirohre. Aus Versuchen mit technisch glatten Rohren kann man auf den Strömungswiderstand ideal glatter Rohre schließen. Folgende Ergebnisse wurden auf Grund vieler sorgfältiger Versuche erzielt:

Blasius<sup>2</sup> (1913),  $Re$  bis 100000 (Wasser und Luft), Bearbeitung fremder und eigene Versuche mit  $D = 39,75$  mm.

$$\lambda_R = 0,3164 Re^{-0,25}. \quad (164)$$

<sup>1</sup> Vorzügliche Lichtbilder über den turbulenten Strömungszustand in offenen Rinnen nahm z. B. Nikuradse auf. Siehe z. B. VDI-Forsch.-Heft Nr. 281 Abb. 45 bis 50. Berlin 1926.

<sup>2</sup> Blasius, H.: Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten. VDI-Forsch.-Heft 1913 Nr. 131; Z. VDI Bd. 56 (1912) S. 639. Schiller, L.: Über den Strömungswiderstand in Rohren verschiedenen Querschnitts- und

Maßgebend waren vornehmlich die sorgfältigen Versuche von Saph und Schoder (Abb. 57).

Ombeck<sup>1</sup> (1914),  $Re$  bis 500000 (Luft), Versuche mit  $D = 20$  und 40 mm.

$$\lambda_R = 0,242 Re^{-0,224}. \quad (165)$$

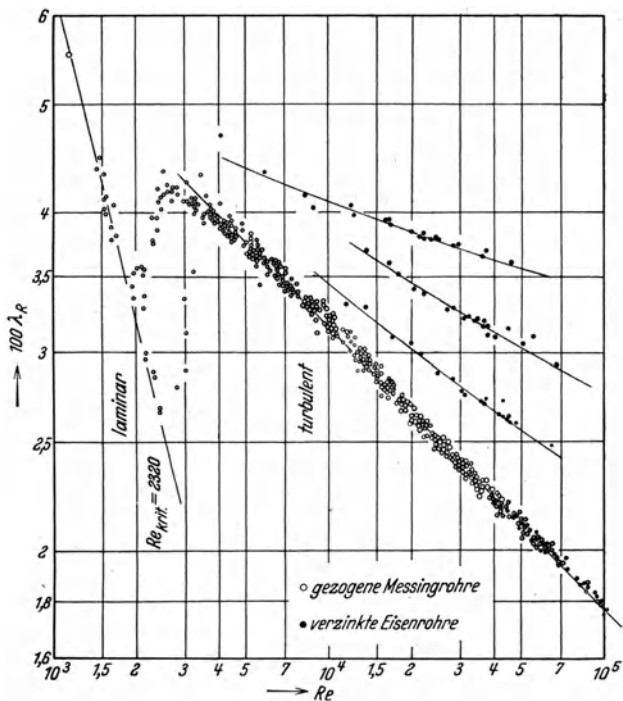


Abb. 57. Versuche von Saph und Schoder (1903).

Lees<sup>2</sup> (1915),  $Re$  bis 420000 (Wasser und Luft), Versuche von Reynolds, Saph und Schoder, Stanton und Pannell<sup>3</sup>  $D = 2,72$  bis 53,10 mm.

$$\lambda_R = 0,0072 + 0,6104 Re^{-0,35}. \quad (166)$$

Rauhigkeitsgrades. Z. angew. Math. Mech. Bd. 3 (1923) S. 2. Schiller glaubte zuerst, das Gesetz von Blasius bis  $Re = 400000$  annehmen zu können, ließ aber diese Annahme später fallen. Physik. Z. Bd. 26 (1925) S. 476. Nach Blasius' Versuchen war  $\lambda_R$  für  $Re = 100000$  bis 200000 größer als Gl. (164) angibt. Saph, A. V., u. E. H. Schoder: a. a. O.

<sup>1</sup> Ombeck, H.: a. a. O. Nußelt, W.: Der Wärmeübergang in Rohrleitungen. VDI-Forsch.-Heft 1910 Nr. 89. (Messingrohr, Luft,  $D = 22$  mm,  $l = 2$  m.) Ombecks Exponenten  $-0,224$  hatte Nußelt schon vorgeschlagen.

<sup>2</sup> Lees, C. H.: On the flow of viscous fluids through smooth circular pipes. Proc. Roy. Soc., Lond. (A) Bd. 91 (1915) S. 46.

<sup>3</sup> Stanton, T. E., u. J. R. Pannell: a. a. O. Dazu: E. Parry: On a theory of fluid friction and its application to Hydraulics. E. E. Journal 1920 S. 146.

Camichel<sup>1</sup> (1918) fand, daß der Widerstand bei turbulenter Strömung bei  $Re = 2000$  bis  $2400000$  nach ein und demselben Gesetz geregelt wird.

Lebeau<sup>2</sup> (1922),  $Re$  bis  $500000$  (Wasser und Luft) nach Lees' Untersuchungen

$$\lambda_R = 0,00785 + 0,618 Re^{-0,36}. \quad (167)$$

Jakob<sup>3</sup> (1922),  $Re$  bis  $70000$  (Wasser und Luft),  $D = 10$  und  $20$  mm.

$$\lambda_R = 0,3270 Re^{-0,254}. \quad (168)$$

Jakob und Erk<sup>4</sup> (1924),  $Re$  bis  $460000$  (Wasser),  $D = 47,09$  bis  $99,85$  mm.

$$\lambda_R = 0,00714 + 0,6104 Re^{-0,35}. \quad (169)$$

Kozeny<sup>5</sup> (1925),  $Re$  bis  $400000$  (Wasser) nach vielen fremden Versuchen.

$$\lambda_R = 0,00648 + 0,54 Re^{-1/3}. \quad (170)$$

Hermann<sup>6</sup> (1930),  $Re$  bis  $1900000$  (Wasser),  $D = 50$  und  $68$  mm.

$$\lambda_R = 0,00540 + 0,3968 Re^{-0,300}. \quad (171)$$

Lorenz<sup>7</sup> (1932),  $Re$  bis  $1200000$  (Wasser),  $D = 190$  mm.

$$\lambda_R = 0,0076 + 0,899 Re^{-0,394}. \quad (172)$$

Nikuradse<sup>8</sup> (1932),  $Re$  bis  $3240000$  (Wasser),  $D = 10$  bis  $100$  mm.

$$\lambda_R = 0,0032 + 0,221 Re^{-0,237}. \quad (173)$$

Richter<sup>9</sup> (1932),  $Re$  bis  $1140000$  (Luft und Wasser),  $D = 20$  mm.

$$\lambda_R = 0,00700 + 0,596 Re^{-0,35}. \quad (174)$$

<sup>1</sup> Camichel, C.: Sur les grandes vitesses de l'eau dans les conduites. C. R. Acad. Sci., Paris Bd. 167 (1918) S. 525.

<sup>2</sup> Lebeau, V.: Calcul des pertes de charge dans les conduites d'air, de vapeur et d'eau. Revue univ. des mines (6) Bd. 12 (1922) S. 301. Die von Ch. Hanocq ebenda S. 217 angegebenen verschärften Gleichungen nehmen leider eine so umständliche Form an, daß sie trotz scheinbar guter Übereinstimmung mit Versuchsergebnissen praktisch nicht verwendungsfähig sind.

<sup>3</sup> Jakob, M.: Bestimmung von strömenden Gas- und Flüssigkeitsmengen aus dem Druckabfall in Rohren. Z. VDI Bd. 66 (1922) S. 178, 862 und Wiss. Abh. phys.-techn. Reichsanst. Bd. 5 (1922) S. 433.

<sup>4</sup> Jakob, M., u. S. Erk: Der Druckabfall in glatten Rohren und die Durchflußziffer von Normaldüsen. VDI-Forsch.-Heft 1924 Nr. 267.

<sup>5</sup> Kozeny, J.: Über turbulentes Fließen an glatten Wänden. Wiener Sitzungsberichte Bd. 137 (1928) S. 307.

<sup>6</sup> Hermann, R.: Strömungswiderstand in Rohren. Leipzig 1930. Diss. Leipzig 1930.

<sup>7</sup> Lorenz, F. R.: Über turbulente Strömung durch Rohre mit kreisringförmigem Querschnitt. Mitt. d. Inst. f. Strömungsmaschinen der T. H. Karlsruhe. Herausgegeben von Spannhake 1932 Heft 2 S. 26.

<sup>8</sup> Nikuradse, J.: Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren. VDI-Forsch.-Heft 1932 Nr. 356.

<sup>9</sup> Richter, H.: Neue Versuche über den Druckverlust im glatten geraden Kreisrohr. Z. VDI Bd. 76 (1932) S. 1269.



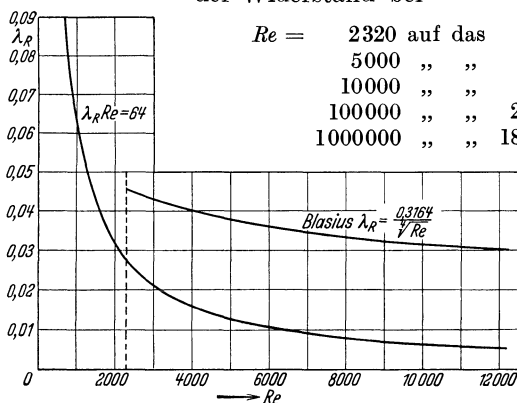
Zahlentafel 24. Werte von  $100\lambda_R$  nach verschiedenen Formeln:

$Re$	Blasius	Ombeck	Lebeau	Jakob	Lees, Jakob u. Erk	Kozeny
10000	3,164	3,075	3,027	3,150	—	3,160
50000	2,112	2,141	2,041	2,090	—	2,180
100000	1,778	1,836	1,765	—	1,799	1,810
500000	—	1,281	1,333	—	1,336	1,330

$Re$	Hermann	Lorenz	Nikuradse	Richter
10000	3,040	3,148	—	3,075
50000	2,081	2,028	—	2,049
100000	1,793	1,724	1,762	1,760
500000	1,313	1,269	1,304	1,302
1000000	1,178	1,149	1,156	1,173
2000000	1,050	—	1,030	—
3000000	—	—	0,964	—
5000000	—	—	0,890	—

Eine eingehende Beurteilung der einzelnen Formeln stammt vom Verfasser<sup>1</sup>, die in dem Schlusse gipfelt, daß für  $2000 < Re < 100000$  das Gesetz von Blasius Gl. (164) und für  $Re > 100000$  das Gesetz von Nikuradse Gl. (173) die wahrscheinlichsten Werte angibt. Bei  $Re > 10^5$  reicht der einfache Ansatz Gl. (162) nicht mehr aus; man muß Gl. (163) für Näherungsgleichungen benutzen. Auch mit Ansatz Gl. (163) können die Versuchskurven noch nicht restlos erfaßt werden. Die Abweichungen der Versuchskurven von der Näherungsformel sind aber so gering ( $< 0,5$  vH), daß es sich nicht lohnt, umständlichere Ansätze mit mehr Konstanten zu machen. Zur Veranschaulichung wurde in Abb. 58 und 59 die Widerstandszahl  $\lambda_R$  über der Reynoldsschen Zahl aufgetragen. Durch Umschlag von laminarer in turbulente Bewegung geht der Widerstand bei



Bei  $Re = 54100$ , der höchsten Zahl, bis zu der Laminarströmung gehalten werden konnte, geht der Widerstand beim Umschlag auf das 17,5fache! In Abb. 59 wurden die Kurven der Laminarströmung und

Abb. 58. Gesetz der Laminarströmung und der Turbulenz (Blasius) in der Umgebung des kritischen Gebietes.

<sup>1</sup> Vgl. Fußnote 9 von S. 94.

der turbulenten Strömung (nach Blasius und Nikuradse) im logarithmischen Diagramm aufgetragen. Das Gesetz Gl. (173) wird dabei als eine leicht gekrümmte Kurve dargestellt. Man kann vermuten, daß bis  $Re = 10^5$  das technisch glatte Rohr auch hydraulisch glatt ist.

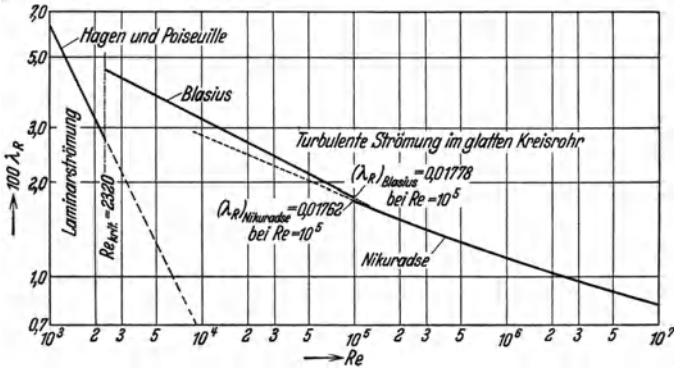


Abb. 59. Gesetze von Hagen und Poiseuille, Blasius und Nikuradse, logarithmisches Diagramm.

Die Gleichung von Blasius Gl. (164) gäbe dann das Gesetz des ideal glatten Rohres wieder. Bei  $Re > 10^5$  werden anscheinend auch technisch glatte Rohre hydraulisch rau, d. h. die größten Wandunebenheiten

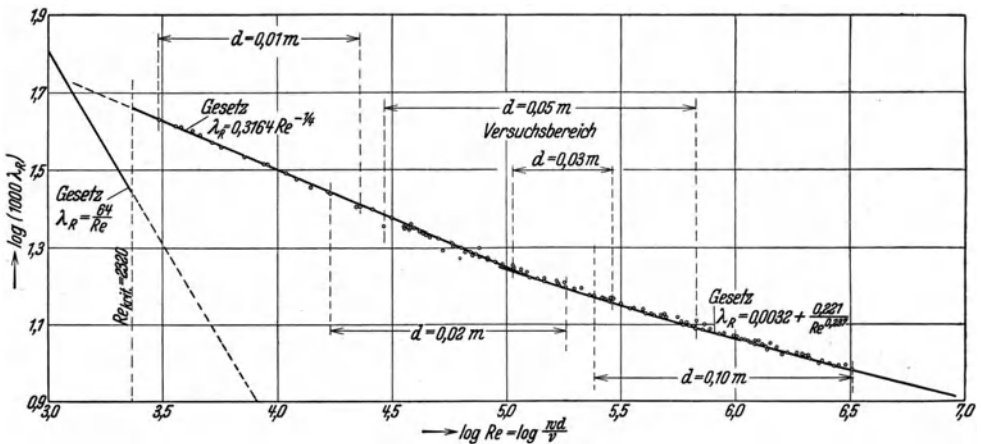


Abb. 60. Versuche von Nikuradse 1932.

beginnen durch die laminare Grenzschicht zu ragen, wobei sie einen größeren Durchflußwiderstand als idealglatte Rohre bieten<sup>1</sup>. Abb. 60

<sup>1</sup> Mit technisch glatt wollen wir dabei solche Rohre bezeichnen, deren Kurven  $\lambda_R/Re$  sich bei verschiedenen Rohrweiten decken. An sich scheint Kupferrohr das technisch glatteste Rohr zu sein, allerdings liegen die gegenüber Messingrohr beobachteten Abweichungen innerhalb der Versuchsgenauigkeit.

endlich gibt die einzelnen Versuchspunkte der neuesten und wohl auch sichersten Versuche von Nikuradse wieder. Bei  $Re \sim 125000$  schneiden sich die Kurven Gl. (164) und (173).

**β) Messung des Geschwindigkeitsprofils.** Zur Bestimmung der axial gerichteten Komponente der verschiedenen Strömungsgeschwindigkeiten im Rohrquerschnitt benutzt man entweder sehr feine Staurohre (siehe Abb. 26) aus Messing (z. B. Stanton<sup>1</sup>, Richter<sup>2</sup>), Stahl (z. B. Kirsten<sup>3</sup>), Silber (z. B. Lorenz<sup>4</sup>) oder Glas (z. B. Nikuradse<sup>5,6</sup>, Richter<sup>2</sup>) oder den Wärmeaustausch von sehr feinen Drähten mit der vorbeistreichenden Flüssigkeit — Heizdrahtanemometer — (z. B. v. d. Hegge-Zijnen/Burgers<sup>7</sup>). Stanton stellte 1911 erstmalig fest, daß das Geschwindigkeitsprofil in glatten Rohren nur von der Reynoldsschen Zahl abhängt. Bei ein und derselben Zahl wurde bei verschiedenen Rohrdurchmessern, Geschwindigkeiten und Zähigkeiten, also Drücken und Temperaturen und bei verschiedenen Stoffen (Luft, Wasser, Öl) stets dasselbe Profil gemessen. Mit zunehmendem  $Re$  rücken die großen Geschwindigkeiten immer näher an die Rohrwand und wird die Geschwindigkeitsverteilung immer gleichmäßiger. 1920 bestimmten Stanton und seine Mitarbeiter durch sehr genaue Messungen den wandnahen Teil des Profils bei Luft- und Wasserströmen, indem sie in der Rohrwand Vertiefungen anbrachten, in die sie feine Pitotrohre von 0,33 mm  $\varnothing$  legten und so bis auf  $\frac{2}{100}$  mm an die Wand heranmessen konnten. V. d. Hegge-Zijnen und Burgers wiederholten diese Messungen 1924, indem sie mit Heizdrahtanemometern die Geschwindigkeitsverteilung von Luft an einer ebenen Platte beobachteten. Ein 0,03 mm dicker Draht wurde elektrisch auf konstanter Temperatur gehalten. Die dazu nötige Wärmezufuhr war von der Geschwindigkeit der vorbeistreichenden Luft abhängig, die sich mit 4 bis 24 m/s bewegte. Für die Messungen unmittelbar an der Wand ist es gleichgültig, ob der Strom von einem Rohre oder einer ebenen Platte begrenzt wird. Abb. 61 zeigt die Meßergebnisse an einer Platte. Man erkennt mit Sicherheit, daß die Luft an der Platte haftet und daß in unmittelbarster Nähe der Wand eine laminare

<sup>1</sup> Stanton, T. E., D. Marshall u. C. N. Bryant: On the conditions at the boundary of a fluid in turbulent motion. Proc. Roy. Soc., Lond. (A) Bd. 97 (1920) S. 413 oder Physik. Ber. Bd. 2 (1921) S. 561. Barker, M.: On the use of very small Pitot-Tubes for measuring wind velocity. Proc. Roy. Soc., Lond. (A) Bd. 101 (1922) S. 435. Vgl. auch T. E. Stanton: The mechanical viscosity of fluids. Proc. Roy. Soc., Lond. (A) Bd. 85 (1911) S. 366.

<sup>2</sup> Richter, H.: a. a. O. Z. VDI Bd. 76 (1932) S. 1270.

<sup>3</sup> Kirsten, H.: Exp. Unters. d. Entwickl. d. Geschwindigkeitsverteilung bei der turbul. Rohrströmung. Dissertation Leipzig 1927.

<sup>4</sup> Lorenz, F. R.: a. a. O.

<sup>5</sup> Nikuradse, J.: Untersuchungen über die Geschwindigkeitsverteilung in turbulenten Strömungen. VDI-Forsch.-Heft 1926 Nr. 281. ( $Re \sim 180000$ ,  $D = 28$  mm.)

<sup>6</sup> Nikuradse, J.: a. a. O. VDI-Forsch.-Heft 1932 Nr. 356.

<sup>7</sup> v. d. Hegge-Zijnen, B. G., u. J. M. Burgers: Messungen der Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht längs einer ebenen Oberfläche. Verhdl. d. Kgl. Akad. d. Wiss. Amsterdam I. Sekt. XIII Bd. 3 (1924); XXIX Nr. 4 oder Z. angew. Math. Mech. Bd. 4 (1924) S. 521. Ludowici, W.: Messungen in der Grenzschicht strömender Gase. Z. VDI Bd. 70 (1926) S. 1122. (Beschreibung einer Versuchsanlage.)

Geschwindigkeitsverteilung besteht<sup>1</sup>. Andere sorgfältige Messungen über das Profil unternahm mit ähnlichen Ergebnissen Nikuradse (1926), die er kürzlich (1932) wiederholte.

Nach zahlreichen Messungen ist in glatten und ziemlich glatten Röhren das Verhältnis  $w/w_{i,max} \approx 0,84 \pm 4$  vH ( $D = 20$  bis 2760 mm,  $Re = 20000$  bis 3300000), und zwar zunehmend mit wachsender Reynoldsscher Zahl. Von  $Re = 20000$  bis  $Re = 3300000$  geht  $w/w_{i,max}$  von 0,79 auf 0,88, wobei sich das Profil immer mehr abplattet.

Die Einzelgeschwindigkeiten bei turbulenter Strömung sind von der Zeit abhängig; sie schwanken um einen Mittelwert. Diese Schwankungen sind neuerdings mehrfach gemessen worden. Sie betragen etwa  $\pm 5$  vH von der Transportgeschwindigkeit<sup>2, 3, 4</sup> und bleiben nahezu unveränderlich über den Rohrquerschnitt. Nur in der Nähe der Rohrwand nehmen sie schnell auf Null ab. Man begeht daher einen kleinen Fehler bei den Staurohrmessungen, der aber weniger als 5 vT ausmacht und daher vollständig vernachlässigt werden kann<sup>5</sup>. Da die Schwankungen von

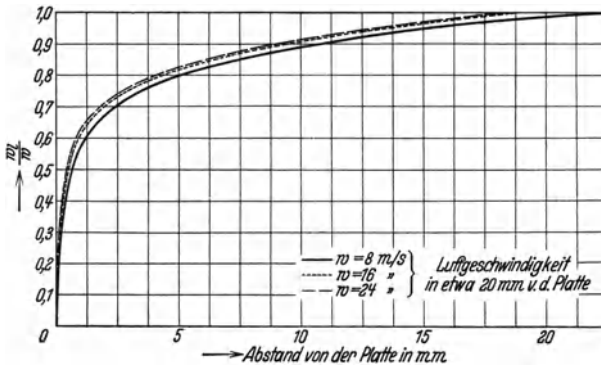


Abb. 61. Geschwindigkeitsverteilung an einer ebenen glatten Wand nach v. d. Hegge-Zijnen und Burgers.

sehr kurzer Wiederkehr sind, bleibt das Strömungsbild zeitlich nahezu unveränderlich und mißt man bei turbulenter Strömung ein bestimmtes unveränderliches Profil. Strenggenommen ist die turbulente Strömung eine nichtstationäre

<sup>1</sup> Bei einem Versuche, verschiedene Eigenarten der turbulenten Strömung zu erklären, zeigte auch Biel 1925 schon anschaulich, daß eine Bewegung ohne laminare Randschicht gar nicht denkbar ist. Biel, R.: Strömungswiderstand in Rohrleitungen. Sonderheft Mechanik der Z. VDI (1925) Abb. 7 bis 9 S. 42ff. In dieser laminaren Randschicht herrscht das Hagen-Poiseuillesche Gesetz und die durch dieses gegebene Geschwindigkeitsverteilung nach einer Parabel.

<sup>2</sup> Nikuradse, J.: Kinematographische Analyse einer turbulenten Strömung. Z. angew. Math. Mech. Bd. 9 (1929) S. 495.

<sup>3</sup> Burgers, J. M.: Experiments on the fluctuations of the velocity in a current of air. Proc. XXIX. Nr. 4 d. Kgl. Akad. d. Wiss. Amsterdam 1924.

<sup>4</sup> Das stimmt in gewissem Sinne mit einer rechnerischen Untersuchung von v. Mises überein, der schon 1914 nachwies, daß bereits Pulsationen von 4 vH der Transportgeschwindigkeit genügen, um das Profil der laminaren Bewegung in das bei turbulenter umzuwandeln. Siehe R. v. Mises: Elemente der Technischen Hydrodynamik I. Teil S. 71. Leipzig 1914.

<sup>5</sup> Prandtl, L., u. O. Tietjens: a. a. O. S. 50.

Bewegung, doch kann man sie praktisch wie eine stationäre berechnen, weil die Mittelwerte der Schwankungen in sehr kurzen Zeitabständen verschwinden.

γ) Versuch einer näherungsweise rechnerischen Erfassung der Geschwindigkeitsverteilung. Beim Vergleich der äußeren Erscheinungen bei laminarer und turbulenter Strömung erkennt man, daß ein enger Zusammenhang zwischen Geschwindigkeitsverteilung und Strömungswiderstand bestehen muß (Profil und  $\lambda_R$  sind bei glatten Röhren nur von  $Re$  abhängig). Da man nun der rechnerischen Erfassung des Strömungswiderstandes durch einfache Druckabfallmessungen nicht näher kommt, muß man versuchen, über das Geschwindigkeitsprofil weg an diese Aufgabe heranzukommen. Gelingt es durch gut annähernde Rechnungen das Profil für bestimmte Strömungsfälle vorzuberechnen, so hat man mit der für Profil und Strömungswiderstand maßgebenden Randspannung  $\tau_0$  ein Bindeglied zur Beurteilung des Strömungswiderstandes.

Zur rechnerischen Wiedergabe des Geschwindigkeitsprofils eignen sich Parabel-, Ellipsen- oder Stücke logarithmischer Linien.

Am vorteilhaftesten ist wohl die Darstellung des Profils durch Parabeln höherer Ordnung. In neuester Zeit gelang es auf diesem Wege einen schönen Erfolg zu erringen. Auf einen Vorschlag von Prof. Prandtl, Göttingen<sup>1</sup>, hin wurde die Annäherung mit Parabeln im Laufe der letzten Jahre systematisch untersucht. Prandtl nahm an, daß sich die axialen Komponenten der Geschwindigkeiten der einzelnen Flüssigkeitsteilchen,  $w_i$ , in der Nähe der Rohrwand bei turbulenter Strömung mit der  $1/7$ . Potenz des Abstandes von der Wand ( $r - x$ ) ändern. Dabei sollte dieser Ansatz zunächst nur für unmittelbare Wandnähe gelten. Der Ansatz lautet also<sup>2</sup>

$$w_i = m(r - x)^{1/7}, \quad (175)$$

wobei  $m$  für jedes Profil konstant ist und nur von der absoluten Größe der Geschwindigkeiten abhängt. Den Exponenten  $n = 1/7$  kann man mit dem Widerstandsgesetz von Blasius  $\lambda_R = b \cdot Re^c = 0,3164 Re^{-0,25}$ , Gl. (164), entwickeln. Zur Vereinfachung wollen wir wieder eine raumbeständige Flüssigkeit untersuchen; bei zusammendrückbaren ergeben sich ähnliche Gesetzmäßigkeiten. Nach Gl. (98) ist mit  $\Delta l = l_2 - l_1$

$$\lambda_R = \frac{\Delta P}{\Delta l} d \frac{2g}{\gamma w^2} = - J d \frac{2g}{w^2}.$$

<sup>1</sup> z. B. L. Prandtl: Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz. Z. angew. Math. Mech. Bd. 5 (1925) S. 136. L. Prandtl: Über den Reibungswiderstand strömender Luft. Ergebnisse der aerodynamischen Versuchsanst. Göttingen. III. Lieferung 1927 S. 1. J. Nikuradse: a. a. O. VDI-Forsch.-Heft Nr. 281 S. 17 und VDI-Forsch.-Heft Nr. 356.

<sup>2</sup> Unter Druck und Geschwindigkeit sind hier immer zeitliche Mittelwerte in Hauptbewegungsrichtung gemeint, während von den überlagerten wiederkehrenden Werten der Mischungsbewegung abgesehen wird.

Mit der Randspannung  $\tau_0$  erhielten wir für das Kräftegleichgewicht nach Gl. (76)

$$\Delta P \pi r^2 = 2 \pi r \Delta l \tau_0$$

oder

$$\frac{\Delta P}{\Delta l} = \frac{2 \tau_0}{r},$$

also entspr. Gl. (84)

$$\lambda_R = \frac{2 \tau_0}{r} 2 r \frac{2g}{\gamma w^2} \quad \text{oder} \quad \frac{\tau_0 g}{\gamma} = \lambda_R \frac{w^2}{8}. \quad (176)$$

Ersetzt man nun  $\lambda_R$  nach dem Gesetz von Blasius Gl. (164), so ist

$$\frac{\tau_0 g}{\gamma} = \text{Zahl} w^2 \left( \frac{w 2r}{\nu} \right)^{-\frac{1}{4}} = \text{Zahl} w^{\frac{7}{4}} r^{-\frac{1}{4}} \nu^{\frac{1}{4}}. \quad (177)$$

Unter „Zahl“ möge dabei die jeweilige Zusammenziehung der unbenannten Größen verstanden werden. Gl. (177) nach  $w$  aufgelöst ergibt

$$w = \text{Zahl} \left( \frac{\tau_0 g}{\gamma} \right)^{\frac{4}{7}} \left( \frac{r}{\nu} \right)^{\frac{1}{7}}. \quad (178)$$

Nach Prandtls Annahme soll das betrachtete Randgebiet sehr dünn sein. Dabei nimmt er an, daß die Strömung in der Nähe der Wand nicht von den Vorgängen an der gegenüberliegenden Wand beeinflusst wird, daß also auch die Schubkraft an einer Wand nur von den Vorgängen in unmittelbarer Umgebung dieser Wand beeinflusst wird. Dann kann die Schubspannung  $\tau_0$  nur von den Größen  $\nu$ ,  $\gamma/g$  und  $m$  abhängen: Es stehen also weder Rohrdurchmesser noch Geschwindigkeit im Strömungskern in unmittelbarem Verhältnis zur Wandreibung. Solange wie das Gesetz von Blasius gilt, d. h. solange ein reines Potenzgesetz zwischen  $\lambda_R$  und  $Re$  besteht und das technisch glatte Rohr sich hydraulisch nicht vom idealglatten unterscheidet, ändert sich nach zahlreichen Versuchserfahrungen das Geschwindigkeitsprofil nicht mit  $Re$ . Damit ist auch  $w/w_{i\max}$  von bestimmter Größe. An Stelle Gl. (178) kann man schreiben

$$w_{i\max} = \text{Zahl} \left( \frac{\tau_0 g}{\gamma} \right)^{\frac{4}{7}} \left( \frac{r}{\nu} \right)^{\frac{1}{7}} \quad (179)$$

oder, weil auch alle Verhältnisse  $w_i/w_{i\max}$  unverändert bleiben, für irgendeine Geschwindigkeit im Querschnitt

$$w_i = f \left( \nu, \frac{\gamma}{g}, \tau_0, r - x \right) = \text{Zahl} \left( \frac{\tau_0 g}{\gamma} \right)^{\frac{4}{7}} \left( \frac{r - x}{\nu} \right)^{\frac{1}{7}}. \quad (180)$$

Bei einer bestimmten Verteilung haben  $\tau_0$ ,  $g/\gamma$  und  $\nu$  feste Werte. Gl. (180) stimmt mit Gl. (175) überein<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Den Betrag der Zusammenziehung „Zahl“ der Gleichungen (179) und (180) kann man ermitteln, wenn man aus Gl. (176) die Spannung  $\tau_0$  bestimmt, wobei im Geltungsbereich des  $1/7$ . Gesetzes  $\lambda_R$  wiederum aus dem Gesetz von Blasius zu ermitteln ist. Beim  $1/7$ . Gesetz ist  $w/w_{i\max} = 0,816$ . Damit ergibt sich

$$\text{Zahl} = 8,57.$$

„Zahl“ hängt vom Exponenten  $n$  [siehe Gl. (181)] und damit von  $Re$  ab.

Da das Gesetz von Blasius nur etwa bis  $Re = 10^5$  gilt, wird das Verteilungsgesetz mit der  $1/7$ . Potenz auch nur bis  $Re = 10^5$  zutreffen. Für beliebigen Exponenten  $n$  geschrieben lautet Gl. (180)

$$w_i = \text{Zahl} \left( \frac{\tau_0 g}{\gamma} \right)^{\frac{1+n}{2}} \left( \frac{r-x}{\nu} \right)^n = m_n \cdot (r-x)^n. \quad (181)$$

So wird z. B. mit  $\lambda_R$  proportional  $Re^{-1/2}$  bei etwa  $Re = 500000$  nach obiger Rechenweise [Gl. (177 bis 180)]  $w_i$  proportional  $(r-x)^{1/2}$ . Das bedeutet also, daß der Exponent des Verteilungsgesetzes  $n = 1/2$  mit wachsendem  $Re$  auf  $1/8, 1/9, \dots$  abnimmt. Bei der größten von Nikuradse beobachteten Zahl  $Re = 3240000$  war  $n$  nur noch  $1/10$ . Die Änderung der Exponenten  $c$  und  $n$  [siehe Gl. (162) und Abb. 59/60] wird mit wachsender Reynoldsscher Zahl immer schwächer. Natürlich kann die Geschwindigkeitsverteilung durch ein solches Parabelgesetz nur in größerer Entfernung von der Rohrmitte ziemlich genau wiedergegeben werden. In der Rohrmitte versagt der Ansatz. Immerhin erkennt man aus Abb. 62, daß das Parabelgesetz nicht nur in unmittelbarer Nähe der Rohrwand durch den Versuch sehr gut bestätigt wird, sondern daß es auch überraschenderweise bis tief in das Innere des Rohres gilt.

Aus Gl. (179) und (180) erhält man

$$\frac{w_i}{w_{i \max}} = \left( \frac{r-x}{r} \right)^n. \quad (182)$$

Da  $w \pi r^2 = 2 \pi \int_0^r w_i x dx$  ist, ergibt sich für das Verhältnis der Geschwindigkeiten

$$\frac{w}{w_{i \max}} = \frac{2 \left( \frac{1}{n} \right)^2}{\left( \frac{1}{n} + 1 \right) \left( \frac{2}{n} + 1 \right)}, \quad (183)$$

also auch von  $n$  und damit von  $Re$  abhängig<sup>1</sup>. Das gilt natürlich ebenfalls nur angenähert wegen der Abweichung in der Rohrmitte, trotzdem aber gut mit Versuchen übereinstimmend. Bei

$$n = \frac{1}{7} \quad \frac{1}{7,5} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{8,5} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{1}{9,5} \quad \frac{1}{10}$$

ist

$$\frac{w}{w_{i \max}} = 0,816 \quad 0,829 \quad 0,837 \quad 0,845 \quad 0,853 \quad 0,860 \quad 0,866.$$



Abb. 62.  $1/2$ . Gesetz und wirkliche Geschwindigkeitsverteilung. Vergleich des gemessenen und des rechnerischen Profils.

<sup>1</sup> Schiller, L., u. R. Hermann: Widerstand von Platte und Rohr bei hohen Reynoldsschen Zahlen. Ing.-Arch. Bd. 1 (1930) S. 391.

Man muß nun nach einem Zusammenhang zwischen dem Exponenten  $n$  und der Reynoldsschen Zahl  $Re$  suchen. Wenn man annimmt,

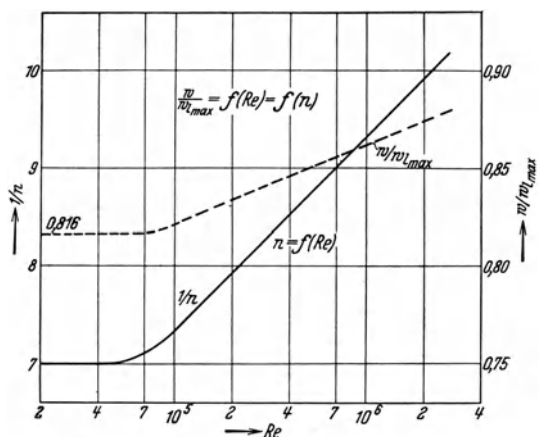


Abb. 63. Zusammenhang zwischen  $1/n$ ,  $w_i/w_{i,max}$  und  $Re$ .

daß zwischen  $\tau_0$ ,  $r - x$  und  $w_i$  eine eindeutige Beziehung besteht, so gilt nach Gl. (177) und (180)

$$\frac{\tau_0 g}{\gamma} \frac{1}{w_i^2} = f\left(\frac{w_i(r-x)}{\nu}\right) = B \left(\frac{w_i(r-x)}{\nu}\right)^{-\frac{1}{4}}, \quad (184)$$

denn

$$w_i^2 = \text{Zahl} \left(\frac{\tau_0 g}{\gamma}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{r-x}{\nu}\right)^{\frac{2}{3}}$$

oder

$$\left(\frac{\tau_0 g}{\gamma}\right) w_i^{-\frac{1}{2}} = \text{Zahl} \left(\frac{r-x}{\nu}\right)^{-\frac{1}{4}}.$$

Der Ausdruck  $w_i(r-x)/\nu$  ist auch eine Art Reynoldssche Zahl, die von der Entfernung  $(r-x)$  von der Rohrwand abhängt. In der Form von Gl. (184) muß  $w_i(r-x)/\nu$  auch den Exponenten des Widerstandsgesetzes  $c = -\frac{1}{4}$  haben. Zwischen den Exponenten  $n$  und  $c$  besteht

die Beziehung  $c = -\frac{2n}{1+n}$ ;

siehe Abb. 64. Es gilt nun, den Faktor  $B$  zu bestimmen. Gl. (184) logarithmiert ergibt

$$\log\left(\frac{\tau_0 g}{\gamma} \frac{1}{w_i^2}\right) = \log B + c \log\left(\frac{w_i(r-x)}{\nu}\right). \quad (185)$$

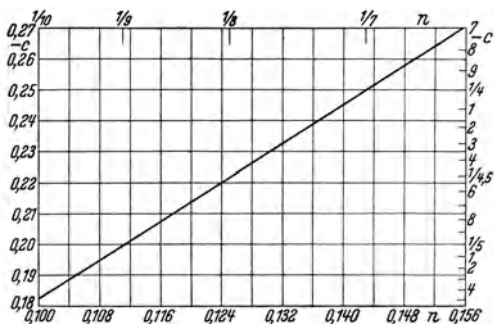


Abb. 64. Zusammenhang zwischen den Exponenten  $c$  des Widerstandsgesetzes und  $n$  der Profilgleichung.

Nikuradse hat die Geschwindigkeitsverteilungen bei verschiedenen Reynoldsschen Zahlen von 4000 bis 3240000 gemessen. Nach jedem dieser Versuche setzte er in Gl. (180) zwei Werte  $w_i$  und  $x$  an —  $\gamma$  und  $\nu$  hatte er gemessen — und trug  $\log(\tau_0 g/\gamma w_i^2)$  über  $\log\left(\frac{w_i(r-x)}{\nu}\right)$  auf.

Bei  $\log\left(\frac{w_i(r-x)}{\nu}\right) = 0$  konnte er  $\log B$  ablesen und  $B$  ermitteln. Diese  $B$ -Werte wurden in Abb. 65 über  $Re$  aufgetragen. Mit  $B$  kennt man jetzt auch den Exponenten  $c$  des Widerstandsgesetzes für beliebige Reynoldssche Zahlen.  $c$  wurde in Abb. 65 ebenfalls über  $Re$  aufgetragen.



Um nun die Geschwindigkeitsverteilung bei einer beliebigen Reynoldsschen Zahl berechnen zu können, muß man versuchen, ein allgemeingültiges Gesetz zu entwickeln, in dem von  $Re$  abhängige Parameter enthalten sind. Nach Prandtl legt man zu diesem Zwecke der Rechnung eine Größe

$$\bar{w} = \sqrt{\frac{\tau_0 g}{\gamma}} = w \sqrt{\frac{\lambda_R}{8}} \tag{186}$$

von der Benennung einer Geschwindigkeit zugrunde [siehe Gl. (176)], auf die man die einzelnen Geschwindigkeiten im Querschnitt bezieht und die unbenannte Größe

$$\varphi = \frac{w_l}{\bar{w}} \tag{187}$$

erhält. Ferner bildet man auch mit dem Randabstand einer der Reynoldsschen Zahl ähnliche unbenannte Größe<sup>1</sup>

$$\eta = \bar{w} \frac{(r-x)}{\nu} \tag{188}$$

Nikuradse trug nun nach seinen umfassenden Versuchserfahrungen die Werte  $\varphi$  über  $\eta$  auf. Wie zu erwarten, lagen diese (im Beobachtungsgebiete von  $Re = 4000$  bis  $3240000$ ) auf einer Kurve. Für genügend große Werte von  $\eta$  ( $> 10$ ) war dabei ziemlich genau

$$\varphi = 5,84 + 5,52 \log \eta \tag{189}$$

Bei kleinen Abständen  $\eta$  muß Laminarströmung angezeigt werden, wie die Messungen von Stanton und v. d. Hegge-Zijnen und Burgers erkennen ließen. Das trifft auch bei unserer Rechnung zu. Bei laminarer Strömung ist  $\tau_0 = \mu \left(\frac{dw_l}{dx}\right)_0$  oder  $w_l = \frac{\tau_0 (r-x)}{\mu}$ . Mit  $\tau_0 = \frac{\gamma}{g} (\bar{w})^2$  und  $\mu = \nu \frac{\gamma}{g}$  ist dann  $\frac{w_l}{\bar{w}} = \frac{\bar{w} (r-x)}{\nu}$  oder  $\varphi = \eta$ . Die laminare Rand-schicht klärt auch die Frage der Randspannung bei Annäherung des Profils der turbulenten Strömung mit Parabeln höherer Ordnung. Bildet man nämlich aus Gl. (180) den Differentialquotienten  $\frac{\partial w_l}{\partial x}$  für  $x = r$ , so erhält man unendlich. Damit wäre auch die Schubspannung unendlich groß, was natürlich nicht möglich ist. Deshalb, weil die Parabel  $n$ -ter Ordnung wegen der laminaren Grenzschicht gar nicht bis  $x = r$  reicht, sondern durch die quadratische Parabel des Gesetzes der Laminarströmung abgelöst wird, gibt es tatsächlich am Rande eine endliche Neigung und auch eine endliche Schubspannung. Die nach Nikuradse

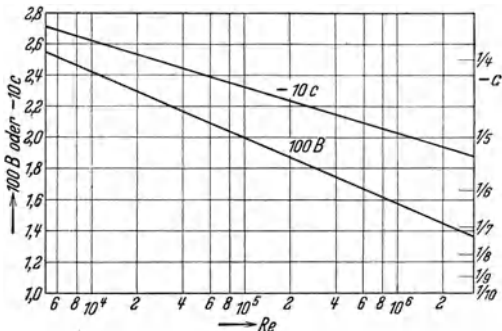


Abb. 65. Faktor  $B$  und Exponent  $c$  über der Ordnungszahl  $Re$ .

<sup>1</sup> Prandtl bezeichnet  $\bar{w}$  als Schubspannungsgeschwindigkeit;  $\eta$  als dimensionslosen Wandabstand und  $\varphi$  als dimensionslose Geschwindigkeit.

Versuchen aufgezeichneten Kurven zeigen, daß bis etwa  $\eta = 10$  Laminarströmung herrscht ( $\eta = \varphi$ ). Um einen Maßstab für die Dicke  $\vartheta$  dieser laminaren Schicht zu vermitteln, hat Prandtl<sup>1</sup> für das  $1/7$ -Gesetz eine einfache Übersichtsrechnung angestellt. Danach gilt für die

Dicke  $\vartheta$  und die Geschwindigkeit  $w_{1,\vartheta}$  (siehe Abb. 66 a u. b) die Beziehung

$$\frac{\vartheta}{r} = 68,4 \left( \frac{1}{2} Re \right)^{-\frac{7}{8}}$$

$$\text{und } \frac{w_{1,\vartheta}}{w} = 2,26 \left( \frac{1}{2} Re \right)^{-\frac{1}{8}}. \quad (190)$$

Ist z. B.  $Re = 80\,000$ , so ist  $\frac{\vartheta}{r} = 0,0064$

und  $\frac{w_{1,\vartheta}}{w} = 0,60$ . Man erkennt, wie klein der Randabstand und wie verhältnismäßig groß die Geschwindigkeit ist.

Auf dem kleinen Abstand fällt die Geschwindigkeit bis auf Null mit großer Annäherung geradlinig herab. Die Grenzschichtdicke ist deshalb so gering, weil bei turbulenter Strömung die Zähigkeitskräfte am Rohrrande einem sehr großen Druckgefälle das Gleichgewicht halten müssen. Bei  $Re = 100\,000$

ist  $\frac{\vartheta}{r} = 0,00536$ . Mit 10 mm Rohrradius wäre damit  $\vartheta \sim 0,05 \cdot 10^{-3}$  m. Da etwa ab  $Re = 100\,000$  technisch glattes Rohr hydraulisch rau erscheint, so könnte man die mikroskopischen Unebenheiten dieser Rohre im Mittel von der Größenordnung 0,05 mm annehmen<sup>2</sup>. Tatsächlich ragen sie jedoch nur etwa 0,01 mm hoch empor.  $\vartheta$  und  $w_{1,\vartheta}$  werden mit wachsendem  $Re$  immer kleiner.

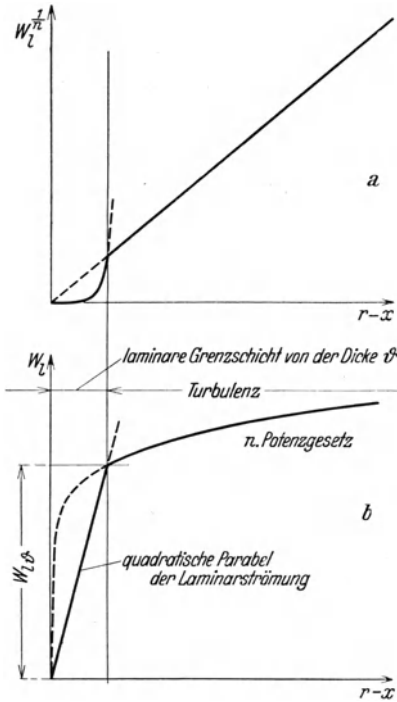


Abb. 66 a u. b. Geschwindigkeitsverteilung in der laminaren Grenzschicht.

<sup>1</sup> Prandtl, L., u. O. Tietjens: a. a. O. Über die laminare Grenzschicht innerhalb turbulenter Reibungsschichten S. 92.

<sup>2</sup> Der Auffassung, daß technisch glatte Rohre bei  $Re > 10^5$  hydraulisch rau werden, können die Ergebnisse der neuen Versuche von Nikuradse (Abb. 60) nicht folgen ( $D = 10$  bis 100 mm). Bei einem Rohrbaustoff von bestimmter absoluter Rauigkeit, wie Messing, müßten enge Rohre eher hydraulisch rau als weite werden, weil nach Gl. (190)  $\vartheta$  um so kleiner ist, je kleiner  $r$  ist und die Rauigkeitserhebungen um so eher durch die laminare Schicht ragen, je enger das Rohr ist. Allerdings sind Nikuradses Versuchsergebnisse wohl nicht so genau, daß man diese Frage sicher beantworten kann. Die früher angeführten Versuchsergebnisse von Jakob und Erk, Hermann und Lorenz lassen dagegen erkennen, daß enge Rohre weniger glatt als weite sind. Wir wollen daher vorläufig noch an der Auffassung festhalten, daß das Gesetz von Blasius mit dem des ideal glatten Rohres zusammenfällt.

Mit Gl. (189) kann man für ein bestimmtes  $\tau_0, \gamma, \nu$  und  $r$  die Geschwindigkeitsverteilung für ein beliebiges  $Re$  berechnen. Für verschiedene  $\eta$  bekommt man das zugehörige  $\varphi$  und durch Multiplikation mit der Geschwindigkeit  $\bar{w}$  die jeweilige Geschwindigkeit  $w_i = \varphi \bar{w}$ . Nach diesem Verfahren, sind die Verteilungen in Abb. 67 berechnet worden, die wohl mit guter Annäherung die wirklichen Kurven wiedergeben. Mit zunehmender Reynoldsscher Zahl wird die durch Reibung beeinflusste Schicht verschwindend klein. Man kann annehmen, daß mit wachsendem  $Re$  asymptotisch eine bestimmte Verteilung erreicht wird. Natürlich bleibt immer in der Rohrmitte eine geringe Ungenauigkeit, weil die berechneten Kurven bei  $x = 0$  keine zur Rohrachse senkrechte Tangente besitzen. Die Ungenauigkeit ist um so kleiner, je kleiner die Exponenten  $n$  oder  $c$  oder je größer  $Re$  ist. Da die Ungenauigkeit nur in der Achse der Umdrehungsparaboloide liegt, wird Durchfluß und Energiebeiwert  $\xi$  auf diese Weise trotzdem gut bestimmt. Je gleichmäßiger die Verteilung ist, desto näher ist  $\xi$  an 1. Mit dieser Rechnung ist vorläufig wenigstens für das glatte Rohr gelungen, was jahrhundertlang Bemühung von Wissenschaftlern und Ingenieuren war, nämlich die Profile für beliebige Strömungsfälle vor auszuberechnen.

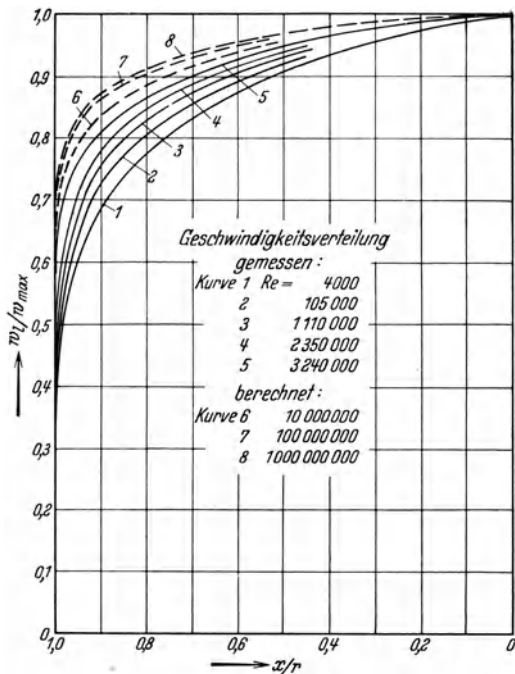


Abb. 67. Geschwindigkeitsprofile im glatten geraden Kreisrohr bei verschiedenen Reynoldsschen Zahlen nach Nikuradse.

Nikuradse konnte auf diese Weise auch das Verhältnis  $w/w_{i\max}$  für verschiedene  $Re$  berechnen. Danach wurde Abb. 68 gezeichnet. Die ausgezeichneten Kurven entsprechen Versuchsergebnissen von Stanton und Nikuradse. Bei Laminarströmung hat  $w/w_{i\max}$  den Wert 0,5. Mit wachsendem  $Re$  steigt es zunächst im Übergangsbereich schnell auf über 0,7, um sich dann allmählich Werten  $> 0,9$  zu nähern. Gleichzeitig nimmt  $\xi$  von 2 auf etwa 1,06 ab. Die häufig für turbulente Strömung im Mittel angenommene Zahl  $w/w_{i\max} = 0,833$  gilt etwa

bei  $Re = 300000$ . Die gestrichelte berechnete Kurve liegt bei kleinen Reynoldsschen Zahlen erheblich über der Versuchskurve<sup>1</sup>; bei größerem  $Re$  dagegen trifft die Berechnung zu.

d) **Rechnerische Form des Widerstandsgesetzes für glattes Rohr.** Es bleibt nun noch die Aufgabe, auf rechnerischem Wege Beziehungen zwischen Widerstandszahl, Reynoldsscher Zahl und Schubspannung abzuleiten<sup>2</sup>. Wir wollen von der Schubspannung ausgehen. Bei Laminarströmung gilt die Beziehung

$$\tau = \mu \frac{dw_t}{dx} = \frac{\gamma}{g} \nu \frac{dw_t}{dx}. \quad (191)$$

Es fragt sich nun, welchen Ansatz man bei Turbulenz machen kann. Boussinesq<sup>3</sup> änderte die Navier-Stokesschen Gleichungen unter Einführung der „Turbulenz“  $\varepsilon$  an Stelle des Newtonschen Reibungs-

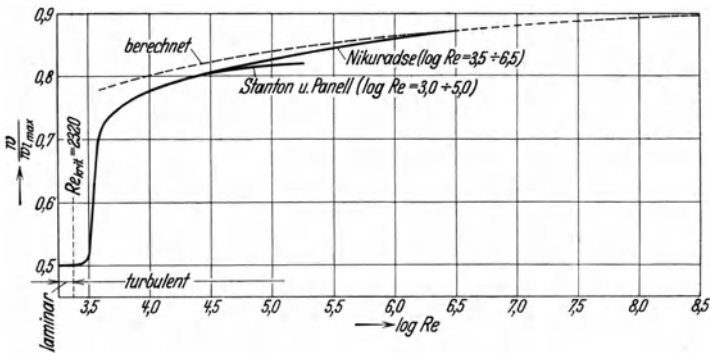


Abb. 68. Verhältnis von mittlerer Strömungsgeschwindigkeit  $w$  zur Höchstgeschwindigkeit im Querschnitt bei verschiedenen Reynoldsschen Zahlen.

wertes  $\mu$  um<sup>4</sup>, um sie für die Berechnung von turbulenten Strömungen geeigneter zu machen. Er setzte an

$$\tau = \frac{\gamma}{g} \cdot \varepsilon \cdot \frac{dw_t}{dx}. \quad (192)$$

Dabei ist  $\varepsilon$  wegen der Eigenart der turbulenten Strömung ein ganz

<sup>1</sup> Die Abweichung der berechneten von der gemessenen Kurve ist auf den Einfluß der Zähigkeit zurückzuführen, der im nächsten Abschnitt angedeutet wird. (Versagen des Verteilungsgesetzes in der Rohrmitte.)

<sup>2</sup> Siehe hierzu auch L. Schiller: Prandtls Theorie des Mischungsweges und Kármáns neues Widerstandsgesetz Nr. 6 S. 98ff.

<sup>3</sup> Boussinesq, J.: Essai sur la théorie des eaux courantes. Mém. prés. p. div. sav. à l'Acad. Sc. Bd. 23 (1877). Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides. Paris 1897. C. R. Acad. Sci., Paris Bd. 122 (1896) S. 1298 und Fortsetzung im 123. Bande.

<sup>4</sup> Die Boussinesqsche Turbulenz  $\varepsilon$  hat nichts mit der relativen Rauigkeit  $\varepsilon$  zu tun!

allgemein von Ort zu Ort veränderlicher Reibungsbeiwert, der dem Betrage nach vom allgemeinen Verlauf der Strömung abhängt.  $\varepsilon$  hat die Benennung der kinematischen Zähigkeit  $m^2/s$ , wie man beim Vergleich von Gl. (191) und (192) sieht. Prandtl<sup>1</sup> ersetzte  $\varepsilon$  sehr anschaulich durch

$$\varepsilon = w_x l_x, \tag{193}$$

wobei  $l_x$  die mittlere freie Weglänge der Wirbelballen und  $w_x$  ihre mittlere Geschwindigkeit quer zur Rohrachse bedeutet. Man denkt sich, daß an irgendeiner Stelle im Leitungsquerschnitt, wo die axial gerichtete Geschwindigkeitskomponente  $w_i$  angetroffen wird, in  $x$ -Richtung eine Geschwindigkeit  $w_x$  herrscht. Die Wirbel stammen aus einer mittleren Entfernung  $\pm l_x$ <sup>2</sup>. Sie bringen eine Geschwindigkeit

$$w_i \pm l_x \frac{dw_i}{dx} \tag{194}$$

mit. Man nimmt nun an, daß Teilchen, die aus verschiedenen Schichten stammen, aneinander prallen und dadurch eine Quergeschwindigkeit hervorrufen, die vom verschiedenen Impulsgehalt der aufprallenden Teilchen abhängt. Danach wäre die Relativgeschwindigkeit proportional dem Geschwindigkeitsunterschied, also proportional  $l_x \frac{dw_i}{dx}$ , wenn man die Flüssigkeitsteilchen als gleichmassige kugelige Körperchen ansieht. Man setzt

$$\varepsilon \sim l_x^2 \left| \frac{dw_i}{dx} \right| \tag{195}$$

und

$$\tau \sim \frac{\gamma}{g} l_x^2 \left| \frac{dw_i}{dx} \right| \left| \frac{dw_i}{dx} \right|, \tag{196}$$

wobei unter  $\left| \frac{dw_i}{dx} \right|$  der absolute Wert des Geschwindigkeitsgefälles verstanden werden möge. Nikuradse<sup>3</sup> ermittelte durch seine umfangreichen Versuche an Wasserströmungen in glatten Messingrohren, daß, ganz ähnlich wie bei laminarer Strömung, die Schubspannung  $\tau$  bei Turbulenz in zylindrischen Leitungen auf koaxialen Zylinderschichten gleich und dem Abstand von der Rohrmitte proportional ist, ( $x \leq r, \tau \leq \tau_0$ ).

$$\tau = \tau_0 \frac{x}{r}. \tag{197}$$

Nunmehr kann man  $\tau$ , aus der Geschwindigkeitsverteilung nach Gl. (196) den Mischungsweg  $l_x$  und mit Gl. (195) die Austauschgröße  $\varepsilon$  berechnen. Man fand, daß  $\varepsilon$  bei  $x = 0$  (Rohrmitte) einen Kleinstwert

<sup>1</sup> Prandtl, L.: Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz. Z. angew. Math. Mech. Bd. 5 (1925) S. 136.

<sup>2</sup> Dasselbe gilt für  $l_y$  und  $w_y$ .

<sup>3</sup> Nikuradse, J.: VDI-Forsch.-Heft Nr. 356, a. a. O.

annimmt. Nach dem Rande zu steigt  $\varepsilon$  zunächst auf einen Größtwert an, um dann schnell auf Null an der Rohrwand abzusinken. Die Verteilung von  $\varepsilon$  über dem Rohrquerschnitt hängt dabei von  $Re$  ab und wird — ebenso wie die Geschwindigkeitsverteilung — mit wachsendem  $Re$  immer weniger von  $Re$  abhängig. Der Mischungsweg  $l_x$  dagegen nimmt von  $x = r$  (Rohrwand) von Null bis auf einen Höchstwert in der Achse ( $x = 0$ ) stetig zu. Auch die Verteilung des Mischungsweges über den Rohrquerschnitt hängt ebenso wie  $\varepsilon$  und  $w_l$  von  $Re$  ab. Kármán<sup>1</sup> entwickelte auf Grund ähnlicher Vorgänge in verschiedenen turbulenten Strömungen, daß man für den Mischungsweg mit großer Annäherung setzen kann

$$l_x \sim \frac{\frac{dw_l}{dx}}{\frac{d^2w_l}{dx^2}}, \quad (198)$$

wenn man sich die Turbulenz als reine Wirbelbewegung vorstellt. Gl. (198) bedeutet einen unmittelbaren Zusammenhang der Geschwindigkeitsverteilung mit dem Mischungsweg und dem Strömungswiderstand. Vom Zutreffen der Gl. (198) konnte man sich durch praktische Geschwindigkeitsmessungen überzeugen<sup>2</sup>. Zusammen mit Gl. (196) gilt jetzt

$$\frac{g\tau}{\gamma} = a^2 \frac{\left(\frac{dw_l}{dx}\right)^4}{\left(\frac{d^2w_l}{dx^2}\right)^2}, \quad (199)$$

wobei  $a$  als eine universelle Konstante eintritt. Mit der Voraussetzung, daß das Gesetz nur im (nahezu) reibungsfrei strömenden Kern (bis zur laminaren Grenzschicht) der Strömung gilt, ferner mit  $\frac{dw_l}{dx} = 0$  bei  $x = 0$  und mit Gl. (197) erhält man die Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_R}} = A + B \log(Re \sqrt{\lambda_R}). \quad (200)$$

Da die Zähigkeit mit abnehmender Reynoldsscher Zahl immer mehr Einfluß auf die Strömung gewinnt, gilt Gl. (197) unter einem gewissen  $Re$  (etwa 100000) nicht mehr. Gl. (197) gilt aber für alle Strömungen, die wenig oder gar nicht unter dem Einfluß der Zähigkeit stehen. Man ist daher berechtigt, das Gesetz Gl. (200) bis zu sehr hohen Reynoldsschen Zahlen hin zu extrapolieren. Tatsächlich ist es der Form nach sehr brauchbar, denn alle bisher an luft-, öl- und wasserdurchströmten

<sup>1</sup> v. Kármán, Th.: Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math. Kl. 1930 S. 58.

<sup>2</sup> Nikuradse, J.: a. a. O. VDI-Forsch.-Heft Nr. 356.

glatten Rohren gemessenen Werte liegen mit großer Annäherung auf einer Geraden im  $1/\sqrt{\lambda_R} - \log(Re \sqrt{\lambda_R})$  - Diagramm. Gl. (200) ist allerdings der von v. Kármán erhaltenen Schlußgleichung nur nachgebildet. Sie kann ziemlich weit extrapoliert werden (vielleicht bis  $Re = 10^8$  oder  $10^9$ ), wenn auch nicht bis  $Re = \infty$  wie die Kármánsche. Aus den Versuchen ergibt sich etwa die Mittelform

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_R}} = -0,8 + \log(Re^2 \cdot \lambda_R). \quad (201)$$

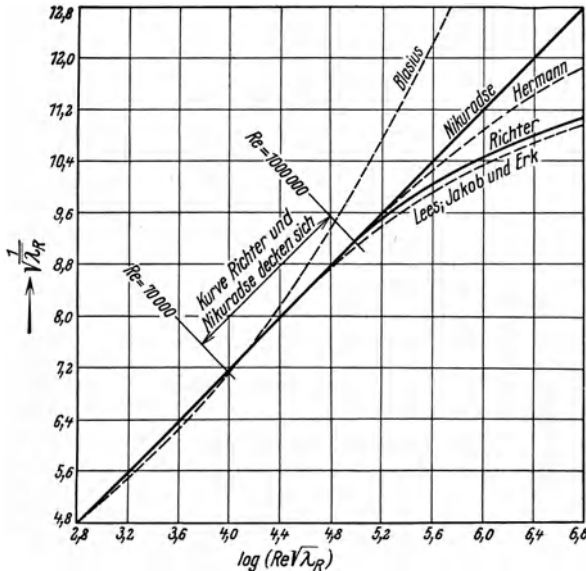


Abb. 69. Vergleich der Widerstandsformeln verschiedener Verfasser.

Auf die Form  $\lambda_R = a + b Re^c$  gebracht, erhält man für  $10^5 < Re < 10^8$  die Näherungsgleichung

$$\lambda_R = 0,0032 + 0,221 Re^{-0,237}, \quad (202)$$

die wir oben schon kennenlernten, siehe Gl. (173). Unterhalb  $Re = 10^5$  gibt diese Formel zu kleine Werte für  $\lambda_R$ .

In Abb. 69 wurden die Kurven von Blasius, Lees-Jakob und Erk, Schiller-Hermann, Richter, Nikuradse verglichen. Wie schon bemerkt, gilt bis  $Re = 10^5$  die Formel von Blasius. Ab  $Re = 10^5$  bis  $10^6$  decken sich die Kurven von Richter und Nikuradse, während die anderen Kurven um ein wenig abweichen. Darüber hinaus geben alle außer der Formel von Nikuradse, Gl. (200), zu große Werte von  $\lambda_R$ .

## b) Vorgänge bei der Ausbildung der turbulenten Strömung.

Einem Anlaufeffekt beim Einlauf oder Beruhigungseffekt nach Querschnittsänderungen unterliegt auch die turbulente Strömung. Allerdings ist hier der Anlaufverlust sehr klein, weil die Geschwindigkeit auch bei endgültigem Profil nahezu gleichmäßig über den Rohrquerschnitt verteilt ist. Die turbulente Anlaufstrecke ist wesentlich kürzer als die laminare und nicht in gleichem Maße von  $Re$  abhängig. Die Entwicklung der Geschwindigkeitsverteilung bei turbulenter Strömung untersuchte Kirsten<sup>1</sup>, der bei Versuchen mit Luft in Zinkluttun im Bereiche von  $Re = 10000$  bis  $50000$  bei Anlaufängen von 2 bis 135 Rohrdurchmessern innerhalb seiner Versuchsgenauigkeit von  $l/d = 100$  an keine wesentliche Änderung des Geschwindigkeitsprofils mehr beobachten konnte. Er gab als praktisch ausreichende Anlaufstrecke 50 bis 100 Rohrdurchmesser an.

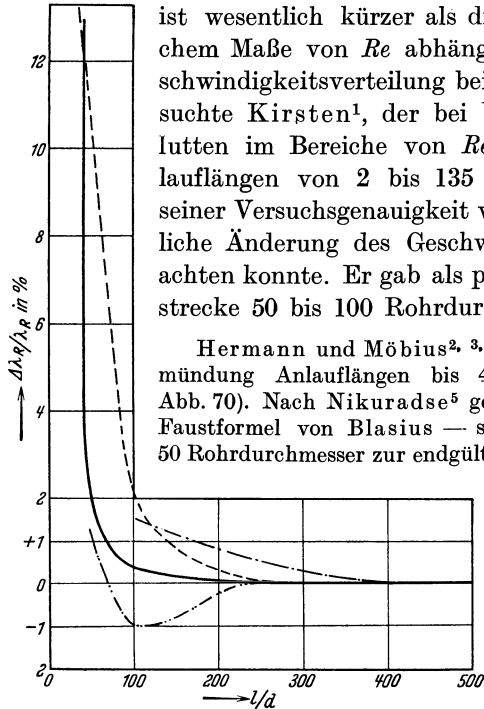


Abb. 70. Mehrwiderstand durch den Anlaufeffekt bei turbulenter Strömung nach Möbius.

- scharfrandiger Einlauf,
- - - abgerundeter Einlauf,
- · - · - Rechts- oder Linksgewinde im Einlauf,
- · · · · Gleichrichter vor Einlauf.

Hermann und Möbius<sup>2, 3, 4</sup> nahmen je nach Art der Rohrmündung Anlaufängen bis 400 Rohrdurchmesser an (siehe Abb. 70). Nach Nikuradse<sup>5</sup> genügen — entsprechend der alten Faustformel von Blasius — schon 25 bis 40, höchstens aber 50 Rohrdurchmesser zur endgültigen Ausbildung der Geschwindigkeitsverteilung.

Mit Sicherheit sind die nach Latzkos Theorie<sup>6</sup> vom turbulenten Anlauf errechneten Anlaufängen zu klein, der für  $Re = 40000$  eine Anlaufänge von nur 10 Rohrdurchmesser für ausreichend hielt.

In den Abb. 71 und 72 wurden Versuchsergebnisse von Nikuradse wiedergegeben<sup>7</sup>, die bei  $Re = 50000$  in einem Rohr mit abgerundetem Anlauf aufgenommen wurden. Beim Vergleich mit Abb. 45 und 46 erkennt man, daß schon bei  $l/d = 2,5$  ( $l/d Re = 0,00005$ ) ein erheblicher Unterschied zwischen den Profilen im laminaren und turbulenten Anlauf besteht. Das

<sup>1</sup> Kirsten, H.: Experimentelle Untersuchung der Entwicklung der Geschwindigkeitsverteilung bei der turbulenten Rohrströmung. Dissertation Leipzig 1927.

<sup>2</sup> Hermann, R.: a. a. O. <sup>3</sup> Schiller, L.: Nr. 6 S. 92.

<sup>4</sup> Richter, H.: a. a. O. Z. VDI Bd. 76 (1932) S. 1272.

<sup>5</sup> Nikuradse, J.: Über die Geschwindigkeitsverteilung im turbulenten Anlauf. Siehe L. Prandtl u. O. Tietjens: a. a. O. S. 52.

<sup>6</sup> Latzko, H.: Der Wärmeübergang an einen turbulenten Flüssigkeits- oder Gasstrom. Z. angew. Math. Mech. Bd. 1 (1921) S. 268.

<sup>7</sup> Nach Prandtl-Tietjens: a. a. O. Abb. 25/26.



scheint nun nicht ganz mit Reynolds' Versuchen übereinzustimmen, der bei der Farbfadenprobe fand, daß die Turbulenz erst in einiger Entfernung vom Einlauf beginnt und daß dieses Umschlagsgebiet zwar mit wachsendem  $Re$  näher an den Einlauf rückt, den Einlauf selbst aber nie erreicht, d. h. ein beträchtliches Stück

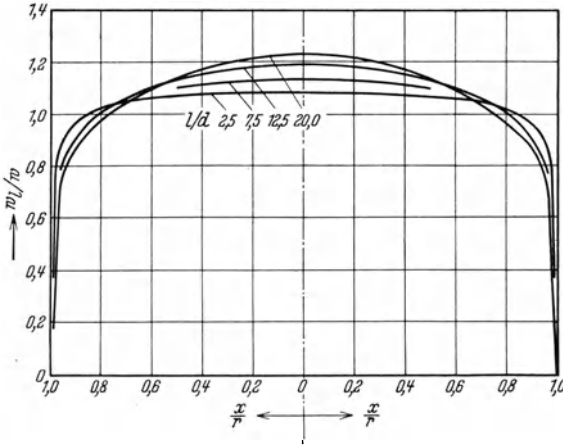


Abb. 71. Ausbildung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung in der Anlaufstrecke nach Messungen von Nikuradse ( $Re = 50000$ ).

am Einlauf immer laminar strömt. Zur Erklärung für diesen Widerspruch dienen z. B. russische Versuche mit Farbfäden<sup>1</sup>, wobei der mittlere und ein Faden dicht an der Wand gefärbt wurden. Beim Eintritt der Turbulenz fängt die Wirbelung

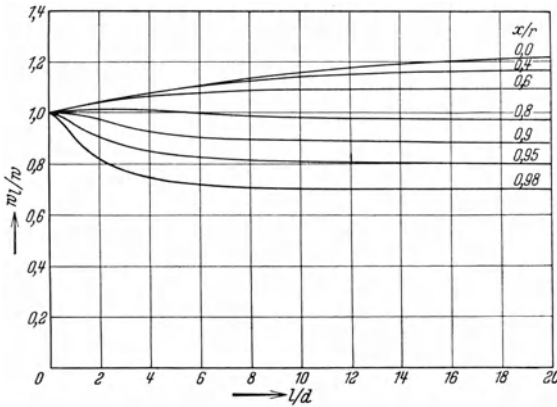


Abb. 72. Beschleunigung und Bremsung der einzelnen „Schichten“ einer turbulenten Strömung mit wachsender Entfernung vom Einlauf nach Messungen von Nikuradse ( $Re = 50000$ ).

stets am Rande an, während die Verwirbelung der Mitte erst viel später erfolgt. Da Reynolds nur den Achsfaden gefärbt hatte, konnte er den eigentlichen Beginn der Turbulenz nicht erkennen.

<sup>1</sup> Joukowsky, N. E.: Versuche von Moroschkin. Z. angew. Math. Mech. Bd. 8 (1928) S. 143.

Der Eintrittsdruckabfall beträgt bei gut abgerundetem Einlauf eine Geschwindigkeitshöhe (zur Darstellung der Geschwindigkeit). Bei scharfrandigem Einlauf (Abb. 73) kommt noch ein weiterer Abfall dazu, weil sich der Strahl im Eintritt zusammenzieht und erst dann auf den vollen Querschnitt ausbreitet.

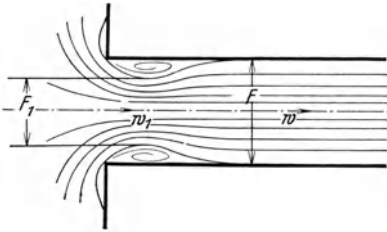


Abb. 73. Strahleinschnürung bei scharfrandigem Einlauf.  $\mu = F_1/F \sim 0,63$ .

Nach unten<sup>1</sup> ergibt sich hierfür ein Druckabfall von

$$\gamma \frac{w^2}{2g} \left( \frac{1}{\mu} - 1 \right)^2, \quad (203)$$

wobei  $\mu$  die Kontraktionszahl bedeutet. Demnach hat man für den gesamten Druckverlust am Einlauf zu setzen

$$\begin{aligned} & \gamma \frac{w^2}{2g} \left[ \left( \frac{1}{\mu} - 1 \right)^2 + 1 \right] \\ & = \gamma \frac{w^2}{2g} \left( \frac{1}{\mu^2} - \frac{2}{\mu} + 2 \right). \end{aligned} \quad (204)$$

Mit  $\mu = 0,63$  (Annahme) erhält man  $1,34 \cdot \gamma \cdot w^2/2g$ . Bei turbulenter Strömung ist der Energiebeiwert  $\xi = 1,08$  bis  $1,16$  (bei  $Re = 10^6$  bis  $10^4$ ). Da die Strömung im Einlaßquerschnitt zunächst gleichmäßig verteilt ist ( $\xi = 1,00$ ), muß bei der Ausbildung die kinetische Energie im Querschnitt noch um  $(0,08$  bis  $0,16) w^2/2g$  vergrößert werden, siehe Abb. 74 und 75. Nunmehr beträgt der gesamte Druckabfall im Anlauf einschließlich der scharfkantigen Mündung

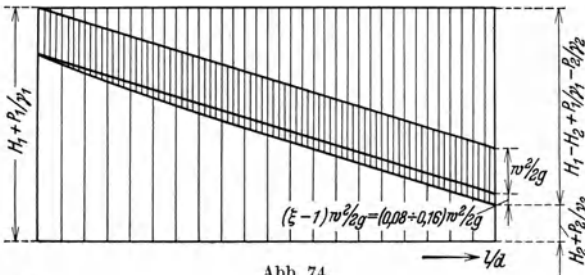


Abb. 74.

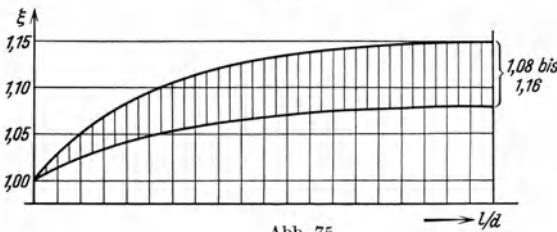


Abb. 75.

Abb. 74 u. 75. Energieumsetzung im turbulenten Anlauf. Abnahme des statischen Druckes, Zunahme der kinetischen Energie um  $0,08$  bis  $1,16$  Geschwindigkeitshöhen, Anwachsen des Energiebeiwertes von  $1$  auf  $1,08$  bis  $1,16$ . Der Eintrittsverlust von  $0,34$  Geschwindigkeitshöhen (bei  $\mu = 0,63$ ) ist nicht mit enthalten. Der Druckhöhenverlust bei ausgebildetem Profil ist der Rohrlänge proportional.

nung vom Einlaufquerschnitt  $1 < k < 1,5$  bei  $\mu = 0,63$  und mehr oder weniger bei kleineren oder größeren Kontraktionskoeffizienten beträgt.

wobei  $k$  je nach Form der Einlaufmündung und der Reynoldszahl des Stromes und (bei  $l$  an Stelle  $l_a$ ) der Entfernung

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta P}{\gamma} + \Delta H \\ & = \lambda_R \frac{l_a}{d} \frac{w^2}{2g} + k \frac{w^2}{2g}, \end{aligned} \quad (205)$$

<sup>1</sup> Abschnitt B, 2. Gl. (240) und (241).

## 5. Turbulente Strömung im rauhen geraden Kreisrohr.

### a) Allgemeingültige Erfahrungen und Gesetze.

Während wir bisher für Laminarströmung und Turbulenz im glatten Kreisrohr genaue oder gut angenäherte Gesetze auffinden konnten, sind die Eigenarten der turbulenten Strömung in rauhen Rohren, die ja den Techniker fast ausschließlich beschäftigt, ungleich schwieriger zu erforschen. Wegen der praktisch so überaus verschieden möglichen Beschaffenheit rauher Rohrwände sind im allgemeinen Strömungen durch zwei verschiedene Kreisrohre gleichen Durchmessers nicht geometrisch und damit auch nicht mechanisch ähnlich. Das einfache bisher benutzte Ähnlichkeitsgesetz reicht nicht mehr aus, um verschiedene Strömungen zusammenzufassen. Trägt man auch für rauhe Rohre die nach Gl. (88) und (89) ermittelten Widerstandszahlen  $\lambda_R$  über der

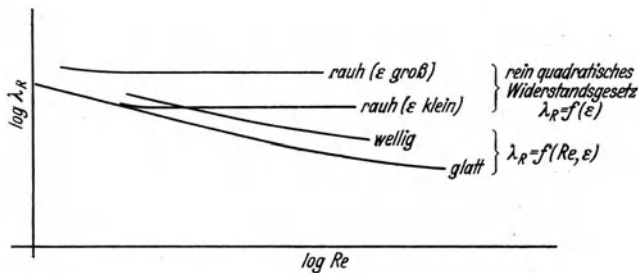


Abb. 76. Zusammenhang zwischen Widerstandszahl und Reynoldsscher Zahl bei glatten und rauhen Rohren.

Reynoldsschen Zahl  $Re$  auf (Abb. 76), so zeigt sich zunächst sofort: Durch den Einfluß der Rauigkeit wird  $\lambda_R$  und damit der Strömungswiderstand in rauhen Rohren höher als in glatten. Die Rauigkeit fördert die Wirbelung. Da bei turbulenter Strömung die Grenzschicht wegen der starken Wirbelung sehr dünn ist, erklärt sich, warum eine geringe Erhöhung der relativen Rauigkeit schon eine erhebliche Vergrößerung des Druckverlustes zur Folge hat. Gleich weite verschieden rauhe Rohre können zwar geometrisch praktisch ähnlich sein, aber wegen der Vorgänge in der Randschicht nicht auch die Strömungen.

In vielen Fällen ist  $\lambda_R$  unabhängig von  $Re$ , und zwar um so eher, je rauher das Rohr ist.  $\lambda_R$  nimmt also in Gl. (89) einen Festwert an; für jedes Rohr gilt ein rein quadratisches Widerstandsgesetz. Die Strömung ist dann praktisch eine reine Wirbelströmung; der Einfluß der Zähigkeit ist verschwindend klein.

Die Grundforderung geometrischer Ähnlichkeit ist auch dann nicht erfüllt, wenn wir Strömungen in gleichrauen, aber verschieden weiten Rohren vergleichen. Wollte man z. B. die  $\lambda_R/Re$ -Kurven für einen be-

stimmten (absolut gleich rauhen) Rohrbaustoff, z. B. Gußeisen, auftragen, so würde man eine ganze Schar Kurven, für jeden Durchmesser (jede relative Rauhhigkeit) eine, bekommen. Nußelt<sup>1</sup> betonte daher, daß bei der Erfassung des Strömungswiderstandes in rauhen Rohren nicht der absolute Betrag der Rauhhigkeitserhebungen maßgebend ist, wie er durch unsere Sinne festgelegt wird, sondern das Verhältnis von Rauhhigkeit zu Rohrhalbmesser, das er relative Rauhhigkeit nannte. Kennzeichnet man mit  $e$  die mittlere Höhe aller Rauhhigkeitserhebungen, so hätte man als ganz allgemeines Gesetz

$$\lambda_R = f\left(Re, \frac{e}{r}, \frac{F}{U}\right). \quad (206)$$



Abb. 77.



Abb. 78.



Abb. 79.

Abb. 77 bis 79. Beispiele von Wandrauhhigkeit.



Abb. 80. Beispiel von Wandwelligkeit.

Wir können schon vorwegnehmen, daß  $\lambda_R$  bei turbulenter Strömung praktisch meist nicht von  $F/U$  abhängt. Für  $e/r$  wollen wir das Zeichen  $\varepsilon$  setzen. v. Mises<sup>2</sup> u. a. stellten nach Gl. (206) ein allgemeines Widerstandsgesetz auf, das allerdings die wirklichen Verhältnisse nur in grober Annäherung erfaßt.

Der Grund, warum man auf diesem Wege nicht zum Ziele kommt, liegt darin, daß die Abhängigkeit der Strömungsform von der Art der Rauhhigkeit viel zu verwickelt ist, als daß sie sich durch eine einzige Rauhhigkeitsszahl  $e/r$  erfassen ließe. Blasius<sup>3</sup> beschrieb die hydraulische Rauhhigkeit wesentlich schärfer: Der die Rauhhigkeit charakterisierende Parameter ist für zwei Rohre von verschiedenen Durchmessern nur dann

derselbe, wenn beide Rohre für irgendeine (nicht nur für eine bestimmte) Reynoldssche Zahl denselben Wert von  $\lambda_R$  haben. Dann fallen die Kurven für beide Rohre im Diagramm für alle  $Re$  zusammen (Rohre mit gleichem  $\varepsilon$  müssen also noch nicht gleichrauh sein). Tatsächlich darf man nicht etwa annehmen, daß  $e$  unmittelbar die Größe der Wandehebungen mißt,  $e$  hängt vielmehr vornehmlich von der Häufigkeit der Erhebungen, von ihrer Form im einzelnen und von der Entfernung der einzelnen Buckel voneinander ab. Abb. 77 bis 80 zeigen verschiedene praktisch beobachtete Rauhhigkeiten. Abb. 77 stellt etwa die Oberfläche eines stark angerosteten Eisenrohres, Abb. 78 die eines neuen Gußeisenrohres, Abb. 79 die eines Zementrohres mit Bestandteilen gleichmäßiger Körnung und Abb. 80 die eines Holzrohres dar. Man erkennt,

<sup>1</sup> Nußelt, W.: a. a. O. VDI-Forsch.-Heft Nr. 89 S. 7.

<sup>2</sup> v. Mises, R.: a. a. O.

<sup>3</sup> Blasius, H.: a. a. O.

wie schwer es ist, die einzelnen Rauheitsgrade rechnerisch zu erfassen, und daß es ein außerordentlich schwieriges Unternehmen ist, ein genügend sicheres Widerstandsgesetz für beliebig rauhe Rohre aufstellen zu wollen. Voraussagen kann man, daß die Wände Abb. 77 bis 79, die schon bei kleinem  $Re$  durch die laminare Grenzschicht ragen, sehr starke Wirbelung der Flüssigkeit hervorrufen, und daß da im wesentlichen ein quadratisches Widerstandsgesetz herrschen muß. Eine Mittelstellung nehmen Rohre mit einer Rauheit nach Abb. 80 ein.

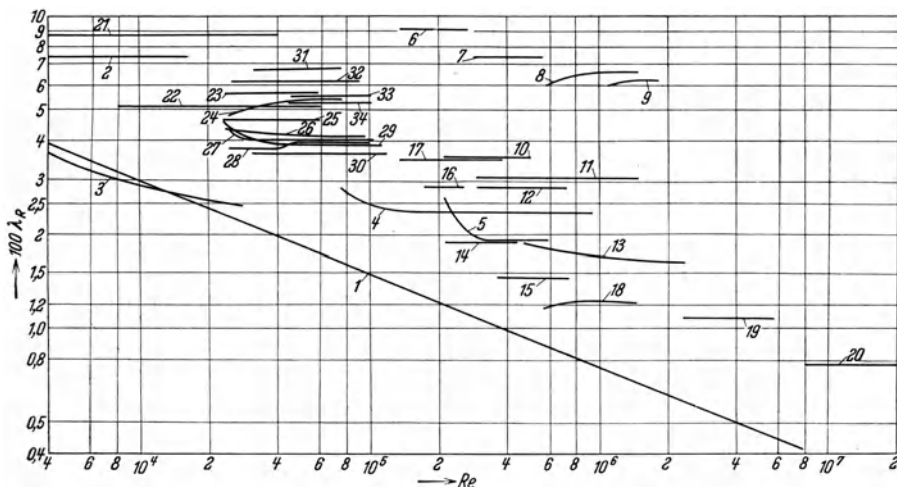


Abb. 81. Wandrauhe Rohre. 1 Blasius: glattes Messingrohr, 2 Darcy: Gußeisenrohr, 3—5 Darcy: Gußeisenrohre, 6—12 Bazin: offenes sehr rauhes Holzgerinne, 13 Marx, Wing, Hoskins: Holzrohr, 14—15 Petit: Eisenblechrohr, 16—17 Scobey: Zementrohr, 18 Bazin: Zementrohr, 19 Moore: Zementrohr, 20 Johnstone: Zementrohr, 21—22 Schiller: Messingrohr mit eingeschnittenem Gewinde, 23—30 Fromm: Leitung, Innenwand mit Drahtnetz überzogen, 31—34 Fromm: Rohr aus Waffellech.

Unter diesen Gesichtspunkten sichtete Hopf<sup>1</sup> 1923 die vorliegenden Versuchserfahrungen an neuen und mehrjährig in Betrieb befindlichen rauhen und glatten Rohren kreisförmigen (und rechteckigen) Querschnitts, die er in  $\log \lambda_R / \log Re$ -Diagramme eintrug<sup>2</sup>, siehe Abb. 81 bis 83. Die Rohre in Abb. 81 hatten scharfkantige, kurzwellige Rauheitserhebungen, wie Abb. 77 bis 79, und bestanden aus Zement, Gußeisen, verrostetem Eisen, Waffellech oder mit Drahtnetz bespannten Wänden.  $\lambda_R$  ist deutlich unabhängig von  $Re$  und nur  $\lambda_R = f(\epsilon)$ . Hopf

<sup>1</sup> Hopf, L.: Die Messung der hydraulischen Rauigkeit. Z. angew. Math. Mech. Bd. 3 (1923) S. 329.

<sup>2</sup> Blasius' Kurve steht in den Abb. 81 bis 83 nur zum Vergleich. Zu beachten ist, daß an sich Blasius' Kurve für glattes gezogenes Messingrohr nur bis  $Re = 100000$  gilt.

nannte diesen Rauigkeitstyp schlechthin „Wandrauhigkeit“. An-  
nähernd gilt

$$100 \lambda_R = (\varepsilon')^{0,314} = \left(\frac{e'}{d}\right)^{0,314}, \quad (207)$$

wobei etwa zu setzen ist<sup>1</sup>:

- neues, ziemlich glattes Metallrohr, asphaltiertes Blechrohr  $e' = 1,5$  m
- neues Gußeisenrohr, Eisenblechrohr, gut geglättetes Zementrohr . . . . .  $e' = 2,5$  m
- älteres Eisenrohr, angerostet . . . . .  $e' = 5$  m
- rauhes Zementrohr, verkrustetes Gußeisenrohr, rauhe Bretter . . . . .  $e' = 7$  m
- Leitungen aus Ziegel- oder Quadermauerwerk . . . . .  $e' = 10$  m

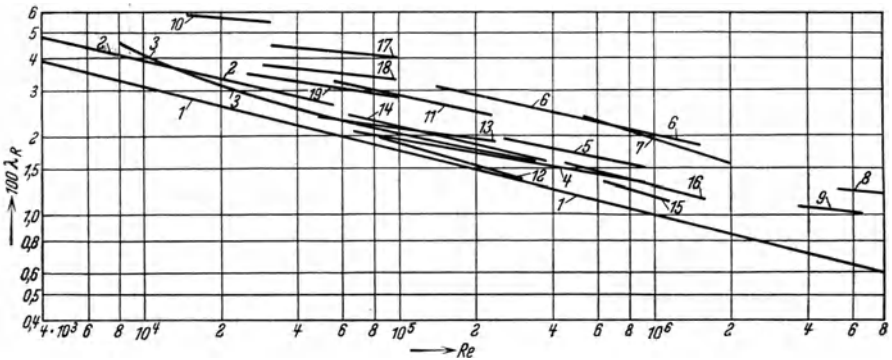


Abb. 82. Wandwellige Rohre. 1 Blasius: glattes Messingrohr, 2—5 Darcy: asphaltiertes Blechrohr, 6 Bazin: offenes Holzgerinne, 7 Marx, Wing, Hoskins: Holzrohr, 8—9 Scobey: Holzrohr, 10 H. Smith: Holzrohr, 11—16 Moritz: Holzrohr, 17 Fromm: Rohr aus gewalztem Waffelblech, 18 Fromm: Rohr aus stark gewalztem Waffelblech, 19 Fromm: Rohr aus noch stärker gewalztem Waffelblech.

<sup>1</sup> Nach Sichtung zahlreicher Versuchsergebnisse kann der Verfasser die Zusammenstellung überschlägig noch erweitern:

- im Mittel  $e' =$  {
- 1,0 m für neue, sorgfältig verlegte nahtlose Stahlrohre,
  - 1,3 m für mit gewöhnlicher Sorgfalt verlegte Stahlrohre,
  - 1,5 m für asphaltierte Stahlrohre,
  - 1,8 m für sauber verzinkte Eisenrohre,
  - 2,2 m für neue Gußeisenrohre mit vergossenen und gestrichenen Fugen,
  - 2,5 m für Eisenblech- und gut geglättete Zementrohre,
  - 3,0 m für gewöhnliche verzinkte Eisenrohre,
  - 3,3 m für gewöhnliche neue Gußeisenrohre,
  - 3,5 m für oberflächlich gereinigte Gußeisenrohre,
  - 3,6 m für wenig sorgfältig verlegte neue oder gereinigte Gußeisenrohre,
  - 4 m für rauh verzinktes Eisenrohr und für genietetes Eisenblechrohr ohne Innenanstrich,
  - 5 m für älteres angerostetes Eisenrohr,
  - 6 m für stark angerostetes Gußeisenrohr,
  - 7 m für rauhen Zement und rauhe Bretter,
  - 7 bis 9 m für verkrustetes Metallrohr,
  - 10 u. mehr m für Ziegel- und Quadermauerwerk.

Die Länge  $e'$  ist der absoluten Größe der Rauigkeitserhebungen etwa verhältnisgleich<sup>1</sup>. Siehe Abb. 84.

In Abb. 82 wurden Versuche mit Holzrohren, asphaltierten Eisenrohren und Rohren aus gewalztem Waffelblech eingetragen. Hier liegen die Kurven immer in etwa gleichem Abstand zur Kurve des glatten Rohres, die die untere Grenze bildet.  $\lambda_R$  ist abhängig vom Rohrdurchmesser und der Reynoldsschen Zahl. Das Widerstandsgesetz ist einfach eine Erweiterung des Gesetzes des glatten Rohres mit

$$\lambda_R = \lambda_{\text{glatt}} \cdot \psi, \tag{208}$$

wobei für Holzrohre  $\psi = 1,5$  bis  $2,0$  und für asphaltierte Eisenblechrohre  $\psi = 1,2$  bis  $1,5$  ist. Die Rohre haben eine Rauigkeit nach Abb. 80,

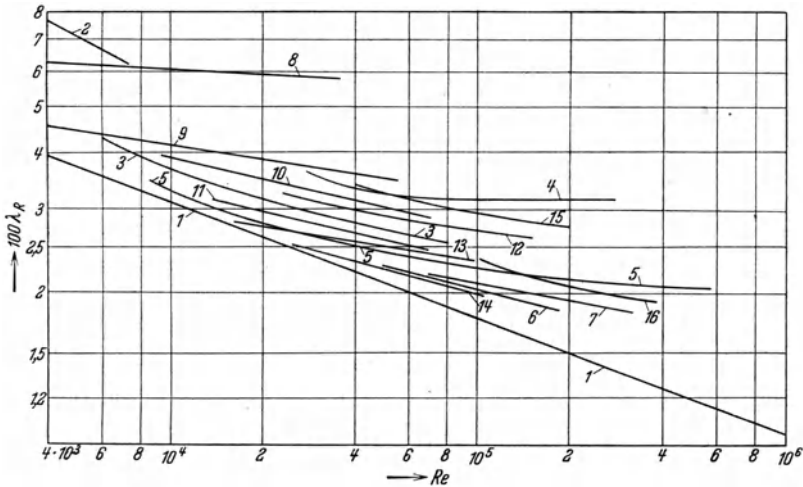


Abb. 83. Nicht ganz glatte gezogene Metallrohre. 1 Blasius: glattes Messingrohr, 2—3 Darcy: gezogenes Eisenrohr, 4—5 Darcy: neues Gußeisenrohr, 6—7 Lang: Kupferrohr, 8—11 Saph u. Schoder: verzinktes Eisenblechrohr, 12 Ombeck: geätztes Schweißeisenrohr, 13—14 Fritzsche: Gasrohr, 15—16 Petit: neues verzinktes Eisenblechrohr.

für die Hopf die Bezeichnung „Wandwelligkeit“ einführte. Naturgemäß richtet sich die Größe  $\psi$  nach  $\epsilon$  und nach dem Verhältnis  $f/e$ , siehe Abb. 80.  $\psi$  liegt um so näher an 1, je größer der Wert  $r \cdot f/e$  ist.

In Abb. 83 stehen die Versuchsergebnisse an gezogenen, nicht mehr ganz glatten Metallrohren, deren Kurven zwischen denen von Abb. 81 und 82 liegen. Bei kleinen Reynoldsschen Zahlen gehören sie zur Wandwelligkeits-, bei größeren zur Wandrauigkeitsgruppe,  $\lambda_R = f(Re, \epsilon)$ .

<sup>1</sup> Ein Fehler bei der Abschätzung der relativen Rauigkeit hat keinen großen Einfluß auf die Rechnung, weil  $e'/d$  nur unter einem niedrigen Exponenten auftritt. So bedeutet selbst ein Fehler von 50 vH bei  $e'$  für  $\lambda_R$  und den Druckverlust erst einen Fehler von 10 bis 20 vH. Aus diesem Grunde genügt es praktisch zumeist alle eisernen Leitungen mit dem Werte  $e' = 2,5$  m zu berechnen.

Wahrscheinlich dürfen wir nur im Bereich technisch üblicher Strömungen von  $\lambda_R/Re$ -Kurven verschiedenen Charakters sprechen. Wenn die Grenzschicht von den Rauigkeitserhebungen überragt wird (Abb. 85), dann herrscht nahezu reine Wirbelströmung. Mit wachsender

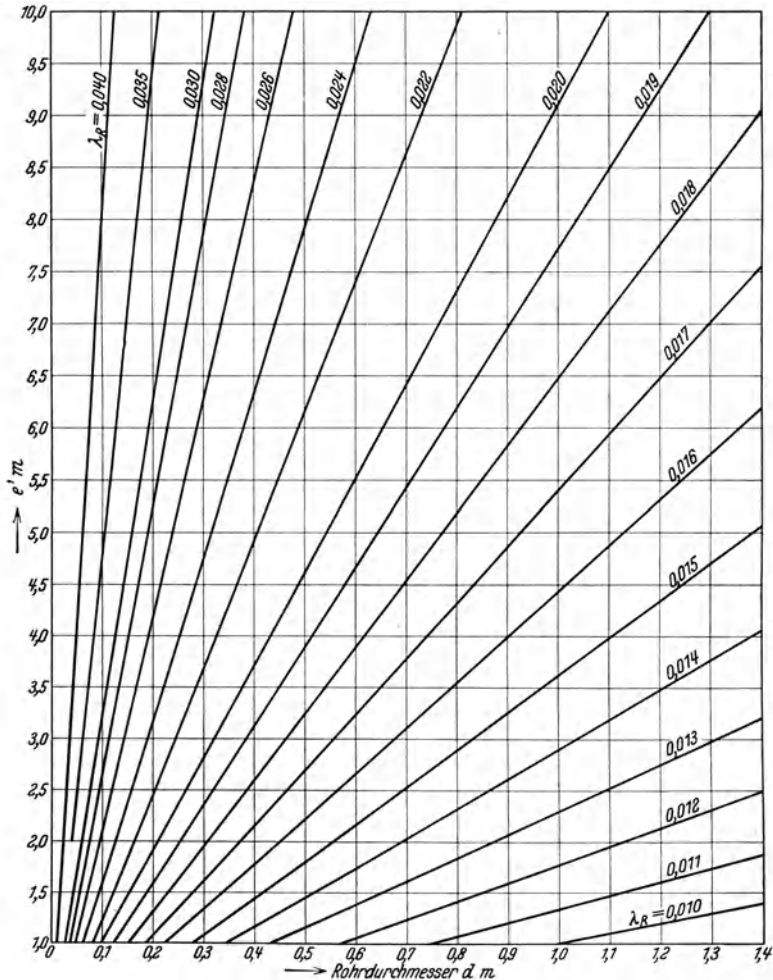


Abb. 84. Diagramm zur Ermittlung von  $\lambda_R$  aus  $e'$  und  $d$ .

Reynoldsscher Zahl nimmt die Dicke der Grenzschicht ab. Allmählich macht sich auch die Rauigkeit anfänglich hydraulisch glatter Rohre bemerkbar. Von gewissen kritischen Reynoldsschen Zahlen ab nehmen wandwellige Rohre die Eigenschaften wandrauber an. Diesen Übergang können wir im üblichen Bereiche mit Abb. 60 und 83 beobachten.



Vermutlich gehen später auch die Kurven von Abb. 82 in Parallele zur  $Re$ -Achse über. Ganz sicher ist dieses Bild natürlich nicht, doch stehen keine Gründe für eine andere Auffassung entgegen. Die Lage des Übergangsbereiches von wandwelligem zu wandrauhem Verhalten hängt wohl vom Grade der Rauigkeit des Rohres ab. Tatsächlich wird etwa ein Zusammenhang zwischen dem Exponenten  $c$  des Gesetzes  $\lambda_R = b \cdot Re^c$  und  $Re$  nach Abb. 86 bestehen. Wahrscheinlich nähert sich  $\lambda_R$  mit wachsendem  $Re$  einem bestimmten Grenzwert.

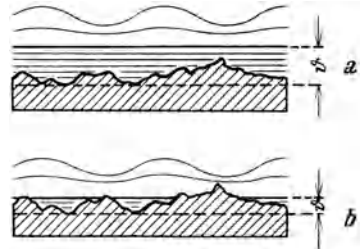


Abb. 85. Rauigkeitserhebungen und Grenzschichtdicke.  $a$  die Grenzschicht überdeckt die Rauigkeitserhebungen.  $b$  Sie bedeckt sie nicht mehr. —  $\delta$  Dicke der laminaren Grenzschicht.

Die Abb. 81 bis 83 lassen auch erkennen, daß es, wenn nicht gerade unmöglich, so doch sehr schwer möglich sein wird, allgemeingültige Formeln zu entwickeln. Im folgenden wird daher dem Ingenieur am besten gedient werden, wenn man ihm für bestimmte Werkstoffsorten besonders einfache Formeln gibt und vorläufig auf allgemeine Formeln verzichtet.

Zur Unterstützung von Hopfs Auffassung, daß für sehr raue Rohre ein Gesetz Gl. (207) gilt, können einige Versuche dienen, die mit Rohren von künstlicher genau bekannter Rauigkeit angestellt wurden. de Marchi<sup>1</sup> machte Versuche mit künstlich gerauhten Rohren. Er definierte die Rauigkeit durch  $\varepsilon = (d_a - d)/d$ , wobei  $d_a$  den äußersten Durchmesser (vor Aufbringung der rauhen Schicht) und  $d$  den durch Anfüllen des rauhen Rohres mit Wasser bestimmten bedeutet. Allerdings wurde hier nur das Übergangsbereich und seine unmittelbare Umgebung beobachtet, siehe Abb. 87<sup>2</sup>.

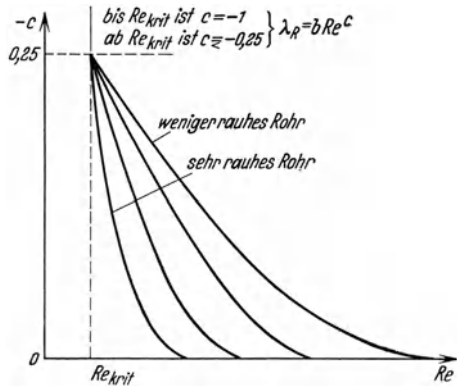


Abb. 86. Wahrscheinlicher Zusammenhang zwischen dem Exponenten  $c$  und der Reynoldsschen Zahl bei verschiedenem Rauigkeitsgrad.

Schiller<sup>3</sup> untersuchte eine Reihe Messingrohre, in die er Löwenherzgewinde von 0,6 und 0,3 mm Gangtiefe

<sup>1</sup> de Marchi, G.: Nuove esperienze intorno al cambiamento di regime nel movimento dell' acqua entro condotti circolari. Venezia. Prem. Officine Grafiche di Carlo Ferrari 1917. Rendiconti delle esperienze e degli studi esequili nell' Istituto Idrotecnico di Stra. Venezia Bd. 1 (1917) S. 19.

<sup>2</sup> Dabei scheint  $Re_{krit}$  etwas von der Rauigkeit abzuhängen. Trotzdem liegt aber  $Re_{krit}$  immer in der Nähe von 2000 und ist praktisch unabhängig von der Rauigkeit.

<sup>3</sup> Schiller, L.: a. a. O. Z. angew. Math. Mech. Bd. 3 (1923) S. 2.

eingeschnitten hatte, siehe Abb. 88<sup>1</sup>. Neuerdings untersuchte auch Nikuradse Messingrohre, die er künstlich anrauhete<sup>2</sup>. Um eine wohl definierte Rauigkeit zu erhalten, wurde Sand mit bestimmter Körnung an der mit Lack klebrig gemachten Innenwand der Rohre befestigt. Es handelt sich also wieder um Rohre der Wandrauigkeitsgruppe<sup>3</sup>. Abb. 89 zeigt die Versuchsergebnisse. Im laminaren Gebiet ist die Widerstandszahl um ein geringes höher als nach dem Gesetz

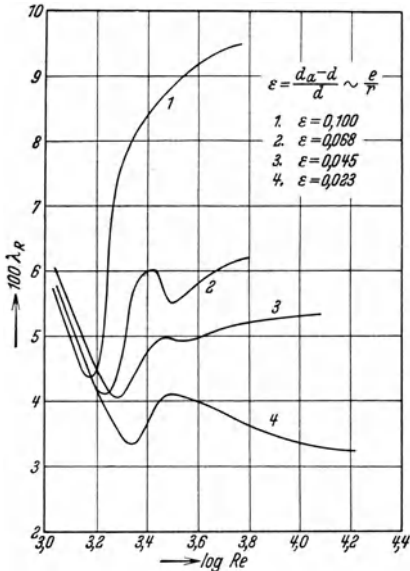


Abb. 87. Druckabfallmessungen an künstlich gerauhten Rohren von G. de Marchi.

<sup>1</sup> Die Reynoldssche Zahl beim Übergang beträgt 2800. Nur beim engsten Rohr (mit feinem und grobem Gewinde) ist  $\lambda_R$  von etwa  $Re = 10000$  ab konstant. Bei den weiteren Rohren schwankt  $\lambda_R$  etwas, scheint sich aber bei großem  $Re$  ebenfalls einem konstanten Wert zu nähern. Das 16 mm weite Rohr mit grobem Gewinde sollte theoretisch gleiche  $\lambda_R$  haben wie das 8 mm weite Rohr mit halb so tiefem Gewinde. Das trifft jedoch nicht zu, weil die beiden Gewinde vermutlich nicht streng geometrisch ähnlich waren. Bei großen  $Re$ -Werten scheint das Gesetz Gl. (207) zu stimmen. An den Schwankungen der Kurven kann auch Schuld haben, daß die Wassermenge durch das Gewinde in eine leicht drehende Bewegung versetzt worden war.

<sup>2</sup> Nikuradse, J.: Strömungswiderstand in rauhen Rohren. Z. angew. Math. Mech. Bd. 11 (1931) S. 409.

<sup>3</sup> Die Reproduzierbarkeit der Versuche wurde nachgeprüft, indem zwei gleichweite Rohre mit Sand gleicher Körnung behandelt wurden: Für beide Rohre galt dasselbe Widerstandsgesetz. Ferner wurden Rohrdurchmesser und Korngröße so geändert, daß das Verhältnis zwischen beiden unverändert blieb. Wieder wurde dasselbe Gesetz erhalten und nachgewiesen, daß tatsächlich die Größe von  $\epsilon/r$  in „wandrauh“ Rohren allein für den Strömungswiderstand maßgeblich ist.

<sup>4</sup>  $Re_{krit}$  liegt wie beim glatten Rohr zwischen 2160 und 2440.

<sup>5</sup> v. Kármán, Th.: Über laminare und turbulente Reibung. Z. angew. Math. Mech. Bd. 1 (1921) S. 231.

$\lambda_R \cdot Re = 64$ , was mit Anlaufstörungen zusammenhängen mag<sup>4</sup>. Im turbulenten Gebiet wird  $\lambda_R$  bald unabhängig von  $Re$ , und zwar um so eher, je rauher das Rohr ist. Im Übergangsbereich, wo das quadratische Gesetz noch nicht gilt, legt sich die Kurve des rauhen Rohres zunächst an die des glatten Rohres an. Sie zweigt um so eher ab, und zwar bei  $Re = \frac{\text{konst}}{\epsilon}$ , je rauher das Rohr ist.

v. Kármán<sup>5</sup> gelang es auch, das Gesetz Gl. (207) theoretisch nachzuweisen, wobei er sich auf das Gesetz von Blasius für glatte Rohre, Gl. (164), stützte. Er ging von der Tatsache aus, daß in Rohren mit rauher Wandung das Druckgefälle annähernd dem Quadrate der mittleren Strömungsgeschwindigkeit verhältnismäßig ist. Auf Grund einer Ähnlichkeitsbetrachtung konnte er Beziehungen zwischen dem Widerstandsgesetz des glatten und des rauhen Rohres aufstellen. Man kann annehmen, daß sich der Strömungswiderstand des rauhen Rohres aus

Einzelwiderständen der Wanderhebungen zusammensetzt, die einzeln dem quadratischen Gesetz gehorchen. Dabei ist der Mechanismus des Widerstandes durch regelmäßige Ablösung von Wirbeln ganz bestimmter Stärke und Abmessungen bedingt. Anders beim glatten Rohr, wo man sich denken kann, daß sich Wirbel ganz verschiedener Stärke bilden und die Häufigkeit der Wirbel durch ein

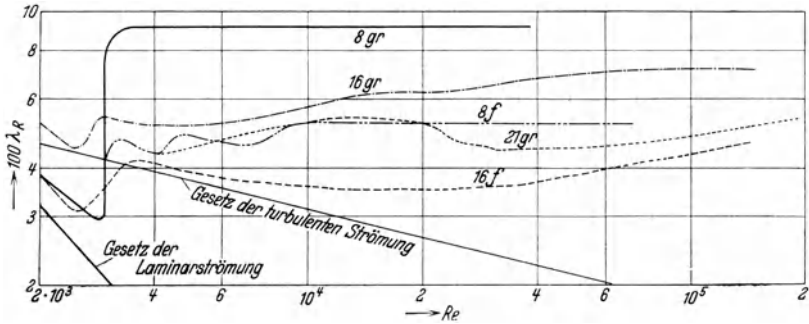


Abb. 88. Druckabfallmessungen an Röhren mit eingeschnittenem Gewinde von L. Schiller. Z. B. 8 gr = grobes Gewinde, 8 mm Durchmesser, 16 f = feines Gewinde in Rohr von 16 mm Durchmesser.

unbekanntes Gesetz geregelt wird. v. Kármán nahm nun an, daß zwischen den Größen der Einzelwirbel und der Rauigkeit eine bestimmte Beziehung besteht. Man kann dann den Strömungswiderstand in glatten Röhren aus dem bei rauhen Röhren beobachteten durch Überlagerung gewinnen, falls man die einzelnen quadratischen Widerstände mit dem richtigen Gewicht einführt. Mit der Kenntnis

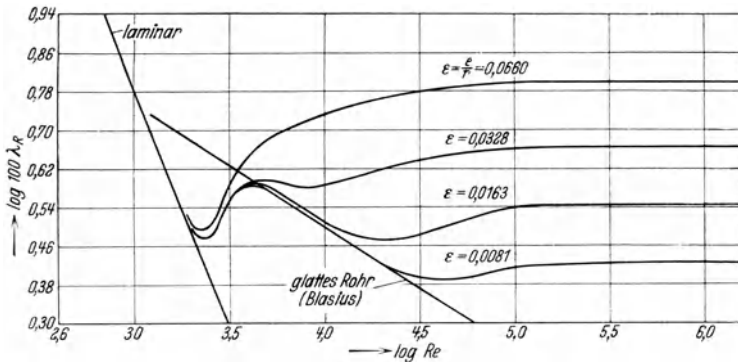


Abb. 89. Druckabfallmessungen an Röhren, deren Wände mit Sand bestreut waren, von J. Nikuradse.

des Gesetzes für das glatte Rohr gelangt man auf umgekehrtem Wege zum Gesetz des rauhen Rohres.

Nach den rechnerischen Untersuchungen fand v. Kármán für den Fall, daß das Blasius'sche Gesetz für glatte Rohre richtig ist und daß  $\lambda_R$  im rauhen Rohre von  $Re$  nicht abhängt, ein Gesetz (wenigstens für kleine Werte von  $\epsilon$ )

$$- J d = \lambda_R \frac{w^2}{2g} = f(\epsilon) \frac{w^2}{2g}, \quad \text{wobei } f(\epsilon) = \lambda_0 \cdot \epsilon^{\frac{-2c}{2+c}} \quad (209)$$

und  $\lambda_0$  eine Konstante ist. Setzt man mit Blasius  $c = -\frac{1}{4}$ , so gilt mit  $\frac{2}{7} = 0,286$

$$\lambda_R = \lambda_0 \varepsilon^{0,286}, \quad (210)$$

also nahezu die von Hopf entwickelte Gleichung. Prandtl kam auf Grund einer anderen Betrachtungsweise zu demselben Ergebnis. Mit Gl. (210) ließen sich Nikuradses Werte (Abb. 89) besser als mit Gl. (207) von Hopf erfassen. Hat  $\varepsilon$  einen bestimmten Wert, dann gilt

$$J = \text{konst} \frac{1}{d} \frac{1}{d^{\frac{2}{7}}} w^2 \quad \text{und} \quad w = \text{konst} (J)^{0,5} d^{0,64}, \quad (210a)$$

womit zahlreiche rein versuchsmäßig entwickelte Formeln übereinstimmen.

### b) Geschwindigkeitsverteilung im Rohrquerschnitt.

In mäßig rauhen Rohren weicht die Geschwindigkeitsverteilung nicht viel von der in glatten Rohren ab. So fanden Williams, Hubbell und Fenkell<sup>1</sup> in rauhen eisernen Rohren von 305 bis 1070 mm  $\varnothing$  für die Kenngröße

$$\frac{w}{w_{t\max}} = 0,840 \pm 0,035.$$

Stanton und Pannell<sup>2</sup> wiesen durch genaue Messungen nach, daß  $w/w_{t\max}$  um so kleiner ist, je rauher das Rohr ist, und daß die Form des Profils ebenso wie der Strömungswiderstand um so weniger von  $Re$  abhängt, je rauher das Rohr ist. Interessante Beobachtungen machte Fritzsches<sup>3</sup>. Da die Strömung an rauhen Wänden mehr als an glatten gehemmt wird, muß das Profil in ganz besonders rauhen Rohren vom bisher beschriebenen deutlich abweichen. Fritzsches untersuchte die Strömung zwischen verschiedenen rauhen ebenen Zink- und Glasplatten, siehe Abb. 90. Kurve 1 gehört zu glattem Spiegelglas, Kurve 2 zu gewöhnlichem Riffelglas und Kurve 3 zu Zinkblech, das sägezahnartig genutet war. Die Wandrauhigkeit beeinflußt besonders den Geschwindigkeitsverlauf in unmittelbarer Wandnähe.

In neuester Zeit gelang es auch, einen Zusammenhang zwischen Profil und Strömungswiderstand in rauhen Rohren zu finden. So wies z. B. Treer<sup>4</sup> nach,

<sup>1</sup> Williams, G. S., C. W. Hubbell u. G. H. Fenkell: Experiments on the effect of curvature upon the flow of water in pipes. Trans. Amer. Soc. civ. Engr. Bd. 42 (1902) S. 1. Ähnliche Beobachtungen machten z. B. H. F. Mills, A. V. Saph und E. W. Schoder, Adams und Wilson: Ebenda S. 204ff. G. Bellasis: Hydraulics S. 129. London 1914.

<sup>2</sup> Stanton, T. E.: The mechanical viscosity of fluids. Proc. Roy. Soc., Lond. (A) Bd. 85 (1911) S. 366.

<sup>3</sup> Fritzsches, W.: Der Einfluß der Wandrauhigkeit auf die turbulente Geschwindigkeitsverteilung in Rinnen. Z. angew. Math. Mech. Bd. 8 (1928) S. 199. Treer, M. F.: Der Widerstandsbeiwert bei turbulenter Strömung durch rauhe Kanäle. Physik. Z. Bd. 30 (1929) S. 538.

<sup>4</sup> Treer, M. F.: Die Geschwindigkeitsverteilung bei geradlinigen turbulenten Strömungen. Physik. Z. Bd. 30 (1929) S. 543.

daß die Gestalt des Profils nur von der Größe Gl. (176)

$$\lambda_R = \frac{\tau_0 g}{\gamma} \cdot \frac{8}{w^2}$$

abhängen könne, gleichgültig, wie diese sich ändere, ob durch Änderung der Rohrrauigkeit oder der Reynoldsschen Zahl. Kármán<sup>1</sup> entwickelte für den Fall  $\lambda_R = \text{konst}$  (wandrauhe Rohre) auf ähnlichem Wege wie beim glatten Rohr das theoretische Widerstandsgesetz

$$a w_{i \max} \sqrt{\frac{\gamma}{\tau_0 g}} = \log \frac{1}{\epsilon} + C',$$

oder

$$a_1 \frac{w_{i \max}}{w} \frac{1}{\sqrt{\lambda_R}} = \log \frac{r}{\epsilon} + C',$$

oder

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_R}} = 2,0 \log \frac{r}{\epsilon} + 1,74, \quad (211)$$

wie man aus Abb. 89 ermitteln kann.

$a$  und  $a_1$  sind universelle Konstante. An der Weiterentwicklung dieser Zusammenhänge wird zur Zeit noch gearbeitet, so daß wohl bald interessante Ergebnisse zu erwarten sind. Sie werden freilich vorläufig noch nicht unmittelbar für die praktische Ingenieurarbeit von Nutzen sein, weil es noch an einer einfachen und sicheren Bestimmung des Rauigkeitswertes  $\epsilon$  von technischen Rohren fehlt<sup>2</sup>.

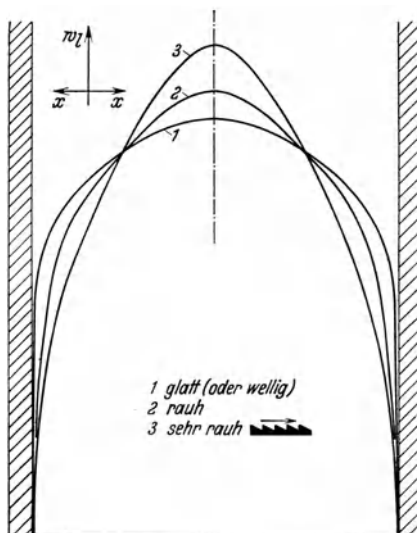


Abb. 90. Turbulente Geschwindigkeitsverteilung zwischen verschieden rauhen ebenen Glas- und Zinkplatten bei ein und derselben Durchflußmenge nach Fritzsche.

## 6. Strömung in geraden Rohren mit anderem als Kreisquerschnitt.

### a) Turbulente Strömung.

Wir hatten früher die Gesetze für den Druckabfall in geraden Rohren ohne Rücksicht auf die Form des Querschnitts abgeleitet, wobei wir an Stelle des Rohrdurchmessers das Vierfache des Verhältnisses von Querschnittsfläche  $F$  zu Querschnittsumfang  $U$  setzten:

$$d = 4 \frac{F}{U} \text{ in m.} \quad (212)$$

<sup>1</sup> v. Kármán, Th.: Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1930.

<sup>2</sup> Prandtl, L.: Neuere Ergebnisse der Turbulenzforschung. Z. VDI Bd. 77 (1933) S. 105. Nikuradse, J.: Strömungsgesetze in rauhen Rohren. VDI-Forsch.-Heft 1933 Nr. 361.

Nun ist noch durch Versuche nachzuweisen, daß diese einfache Umformung brauchbar ist.

Es empfiehlt sich, daß wir zunächst die Ergebnisse von Versuchen mit turbulenter Strömung betrachten, wobei sich zeigt, daß die mit Gl. (212) aufgestellten Beziehungen für den Druckabfall mit großer Annäherung zutreffen, solange es sich nicht um sehr gestreckte oder krummlinig begrenzte Querschnitte handelt.

Schiller<sup>1</sup> untersuchte die Strömung in Messingrohren mit gleichseitig-dreieckigem, quadratischem und rechteckigem Querschnitt, für die das Gesetz von Blasius Gl. (164) mit  $d = 4 \frac{F}{U}$  ziemlich genau stimmte und bemerkte mit Recht:

„Es muß dies mehr als ein Spiel des Zufalls sein, und man wird nicht fehlgehen in der Annahme, daß hier ein theoretischer Zusammenhang aufzudecken sein muß“, siehe Abb. 91. Fromm<sup>2</sup> wies die Zulässigkeit,  $d$  allgemein durch  $4F/U$  zu ersetzen, mit einigen Rohren rechteckigen Querschnitts nach, die er aus zwei gegenüberliegenden ebenen Platten und dazwischen geschobenen ebenen Randleisten verschiedener Dicke bildete.

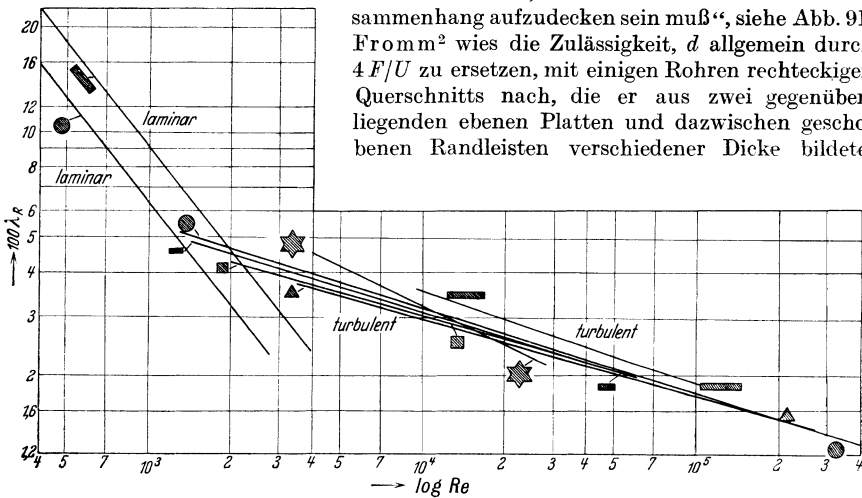


Abb. 91. Widerstandsgesetz für glatte gerade Rohre verschiedenen Querschnitts nach Schiller.

Als Versuchsplatten dienten glatte Zinkplatten, mit Draht überzogene Platten und Bleche mit sägezahnartigen Querriefen von sehr verschiedener Rauigkeit, die er durch Gipsabgüsse der Messung zugänglich machte. Ähnliche Beobachtungen stammen von Nikuradse<sup>3</sup> mit gezogenen Messingprofilrohren, deren Querschnitte gleichschenklige, gleichseitige und ungleichseitige Dreiecke, Trapeze,

<sup>1</sup> Schiller, L.: a. a. O. Z. angew. Math. Mech. Bd. 3 (1923) S. 2. Z. VDI Bd. 67 (1923) S. 623. Außerdem untersuchte Schiller noch ein Wellrohr mit Kreisquerschnitt, bei dem das Gesetz von Blasius auch zutrif. Dagegen bot ein dreigängig gewundenes Schraubenrohr von großer Ganghöhe der Windungen einen 2,5fachen Widerstand, der wohl durch die Drehbewegung der Flüssigkeit hervorgerufen wurde.

<sup>2</sup> Fromm, K.: Strömungswiderstand in rauen Rohren. Z. angew. Math. Mech. Bd. 3 (1923) S. 329.

<sup>3</sup> Nikuradse, J.: Turbulente Strömungen in nichtkreisförmigen Rohren. Ing.-Arch. Bd. 1 (1930) S. 326.

Rechtecke und andere Formen waren.  $Re_{krit}$  lag dabei immer zwischen 2000 und 2360. Er fand das  $1/7$ -Gesetz bei Rechteck- und Dreieckquerschnitten vorzüglich bestätigt<sup>1</sup>, womit er gleichzeitig nachweisen konnte, daß die Reibungsvorgänge und Randschichtbildung unmittelbar an der Wand nicht von den

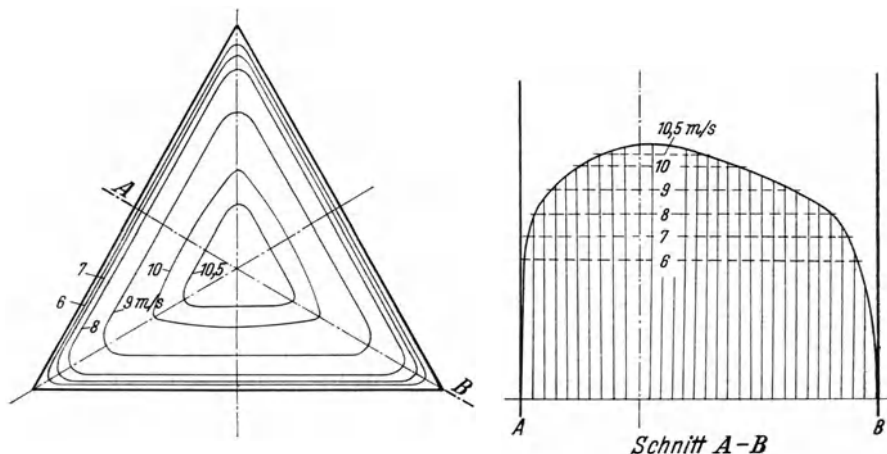


Abb. 92. Geschwindigkeitsverteilung im Dreieckrohr nach Nikuradse.

Vorgängen an der gegenüberliegenden Wand abhängen. Zum Vergleich fand er zu der zu Gl. (180) ermittelten „Zahl“ = 8,57 für Kreisrohre für ein Rechteckrohr mit Seiten von 8 und 28 mm „Zahl“ = 8,65, für Rechteckrohr, bei dem ein Seitenpaar sehr groß war, „Zahl“ = 8,25, für ein gleichseitiges Dreieckrohr mit 27 mm Seitenlänge „Zahl“ = 8,41 und endlich für ein Kreisrohr von 28 mm  $\varnothing$  „Zahl“ = 8,59.

Abb. 92 und 93 zeigen die Geschwindigkeitsverteilung bei turbulenter Strömung durch Dreieck- und Rechteckrohre<sup>2</sup>. Bei Rohren mit Kreisringquerschnitt beobachtete Lorenz<sup>3</sup> dagegen Abweichungen (gezogene Messingrohre von 190 mm Außen- und 10, 35 und 100 mm Kerndurchmesser,  $Re$  bis 1200000). Er setzte zur Auswertung die Formel  $\lambda_R = a + b Re^c$  an und fand

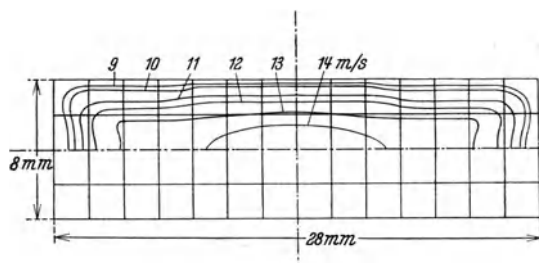


Abb. 93. Geschwindigkeitsverteilung im Vierkantrohr nach Nikuradse.

<sup>1</sup> Nikuradse, J.: Untersuchungen über die Geschwindigkeitsverteilung in turbulenten Strömungen. VDI-Forsch.-Heft 1926 Nr. 281.

<sup>2</sup> Über Querströmung in geraden Rohren mit dreieckigem Querschnitt siehe Abb. 122.

<sup>3</sup> Lorenz, F. R.: Über turbulente Strömung durch Rohre mit kreisringförmigem Querschnitt. Mitt. Inst. Strömungsmaschinen T. H. Karlsruhe, herausg. v. Spannhake 1932 Heft 2 S. 26.

Kerndurchmesser	0	10	35	100 mm
<i>a</i>	0,0076	0,100	0,100	0,112
<i>b</i>	0,899	1,311	1,983	3,790
— <i>c</i>	0,394	0,435	0,484	0,559

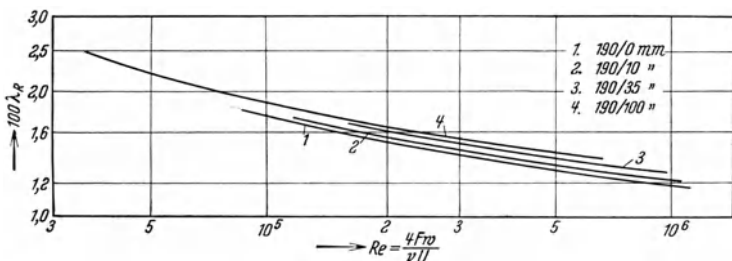


Abb. 94. Widerstandsgesetz von glatten Kreisringrohren bei verschiedenen Rohrdurchmessern nach Lorenz.

siehe Abb. 94.  $r_a$  bedeutet den Außen- und  $r_i$  den Kernradius.  $\lambda_R$  ist hier eine Funktion  $f(Re, r_a/r_i)$ . Dabei wurden Geschwindigkeitsverteilungen nach Abb. 95 gemessen. Am Kern bildet sich eine Grenzschicht aus, die mit  $r_i/r_a$  wächst und den

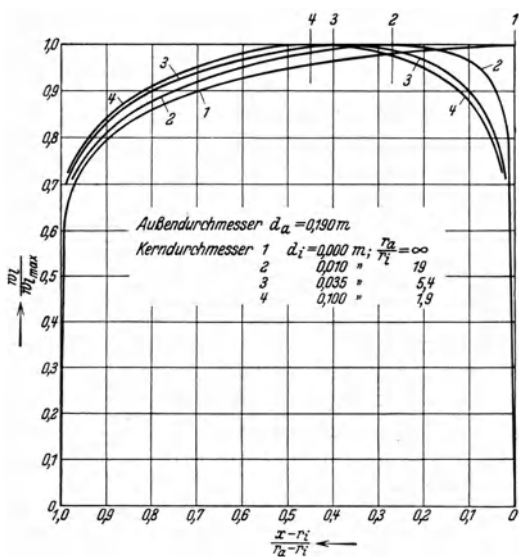


Abb. 95. Geschwindigkeitsverteilung in glatten Kreisringrohren bei turbulenter Strömung nach Lorenz.

Größtwert  $w_{i,max}$  nach außen schiebt, bis schließlich bei  $r_a \sim r_i$  (enge Ringspalte) der Größtwert bei  $0,5 (r_a + r_i)$  liegt. Die Verlagerung kommt durch die turbulente Mischungsbewegung zustande, wobei die verschiedensinnigen Krümmungen der Wände eine Rolle spielen.

Während bei turbulenter Strömung die Druckabfallgleichungen mit Einführung des hydraulischen Radius  $F/U$  fast immer gute Ansätze liefern, versagen sie bei Laminarströmung. Da hier die laminare Grenzschicht den ganzen Rohrquerschnitt erfüllt, beeinflussen die Reibungsvor-

gänge an einer Wand die an den anderen Wänden. Die Widerstandszahl  $\lambda_R$  steht jetzt mit der Reynoldsschen Zahl in einer Beziehung

$$\lambda_R = \varphi \frac{64}{Re} = \varphi \frac{16 \nu U}{w F}, \tag{213}$$

wobei die Vorzahl  $\varphi$  nur von  $F$  und  $U$  abhängt. Für  $\frac{F}{U} = \frac{d}{4}$  ist  $\varphi = 1$ .



Wir werden später ähnliche Verhältnisse bei der Laminarströmung durch gekrümmte Rohre antreffen. Man kann die Größe  $\varphi$  für regelmäßige Querschnitte berechnen. Wir wollen das hier für die beiden wichtigsten, den Kreisring- und den Rechteckquerschnitt, tun.

### b) Laminarströmung in Rohren mit Kreisringquerschnitt.

Man findet das Gesetz der Laminarströmung in Kreisringrohren, indem man die Konstanten  $A$  und  $B$  von Gl. (147) mit den Bedingungen:  $w_i = 0$  bei  $x = r_i$  und  $x = r_a$  berechnet.

$$w_i = \frac{P_1^2 - P_2^2}{8 l \mu P} \left( r_a^2 - x^2 + \frac{r_a^2 - r_i^2}{\ln \frac{r_a}{r_i}} \ln \frac{x}{r_a} \right) \quad (214)$$

und

$$w = \frac{P_1^2 - P_2^2}{16 l \mu P} \left( r_a^2 + r_i^2 - \frac{r_a^2 - r_i^2}{\ln \frac{r_a}{r_i}} \right). \quad (215)$$

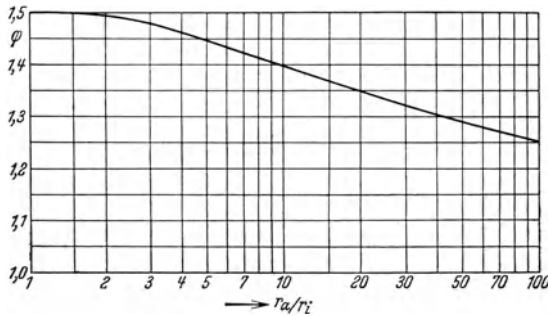


Abb. 96. Zusammenhang zwischen  $\varphi$  und  $r_a/r_i$  in Rohren mit Kreisringquerschnitt. Für  $r_a/r_i = \infty$  ist  $\varphi = 1,0$ .

Für tropfbare Flüssigkeiten ist dabei  $\frac{P_1^2 - P_2^2}{2P} = P_1 - P_2$ . Aus Gl. (215) erhält man

$$\lambda_R = \frac{64}{Re} \varphi = \frac{64}{Re} f \left( \frac{r_a}{r_i} \right) = \frac{64}{Re} \frac{\left( \frac{r_a}{r_i} - 1 \right)^2 \ln \frac{r_a}{r_i}}{\left( \frac{r_a^2}{r_i^2} + 1 \right) \ln \frac{r_a}{r_i} - \left( \frac{r_a^2}{r_i^2} - 1 \right)}. \quad (216)$$

Abb. 96 gibt Aufschluß über den Zusammenhang zwischen  $\varphi$  und dem Radienverhältnis. Zum Vergleich wurden in Abb. 97 Kurven  $w_i$  über  $\frac{x - r_i}{r_a - r_i}$  entsprechend Abb. 95 eingetragen. Bei Laminarströmung ergeben sich die Grenzfälle: bei  $\frac{r_a}{r_i} = \infty$  ist  $\frac{w}{w_{\max}} = 0,5$  und  $x_{\max} = 0$  (Rohr mit vollem Kreisquerschnitt); bei  $\frac{r_a}{r_i} \sim 1$  ist  $\frac{w}{w_{\max}} = 0,667$  und  $x_{\max} = \frac{1}{2} (r_a + r_i)$  (sehr enger Ringspalt). In Abb. 98 wurden die Profile bei laminarer und turbulenter Strömung für  $\frac{r_a}{r_i} = 19$  übereinander gezeichnet. Das Profil in Kreisringrohren weicht bei Laminarströmung viel stärker als bei turbulenter vom Profil des Kreisrohres ab.

Man kann sich die Rechnung, die praktisch z. B. an Ringspalt-Wärmeaustauschern eine Rolle spielt, wesentlich vereinfachen. Auf demselben Wege wie bei

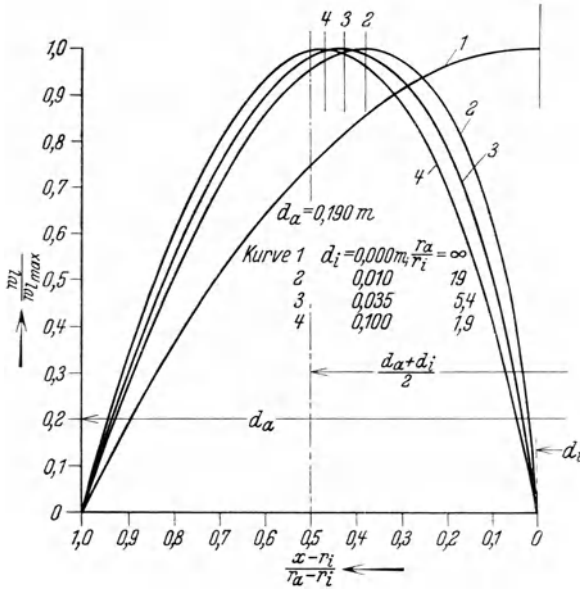


Abb. 97. Geschwindigkeitsverteilung bei Laminarströmung in Rohren mit kreisringförmigem Querschnitt.

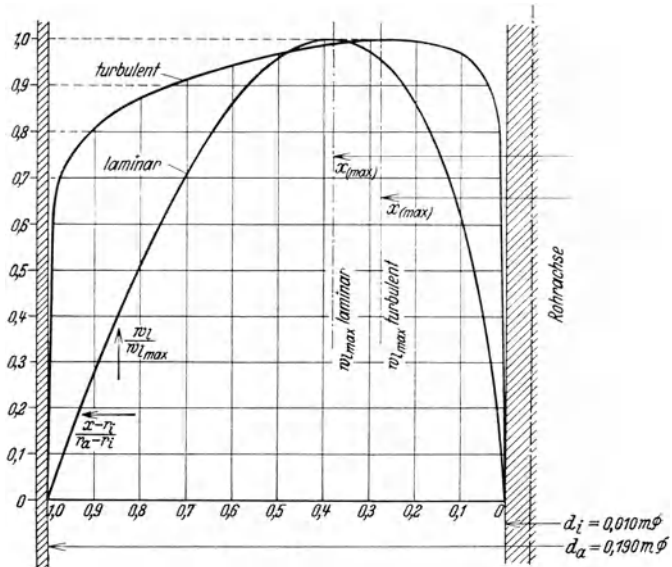


Abb. 98. Vergleich zwischen laminarem und turbulentem Geschwindigkeitsprofil im Rohr mit Kreisringquerschnitt bei  $\frac{r_a}{r_i} = 19$ .

Ableitung der Gl. (134) erhält man für die Laminarströmung zwischen zwei ebenen Platten, die der Strömung durch enge Ringspalte nahekkommt, mit  $s$  als Spaltbreite und  $b$  als Plattenbreite die Gleichung

$$w_i = \frac{P_1 - P_2}{\mu l} \left( \frac{s^2}{8} - \frac{x^2}{2} \right). \quad (217)$$

$x$  ist dabei die Entfernung der betrachteten Schicht von der Spaltmitte, siehe Abb. 99. Ferner gelten die Gleichungen

$$w_{i \max} = \frac{P_1 - P_2}{\mu l} \frac{s^2}{8};$$

$$w = \frac{2}{3} w_{i \max} = \frac{P_1 - P_2}{\mu l} \frac{s^2}{12};$$

$$\frac{P_1 - P_2}{\gamma} = \frac{12 \nu}{g s^2} l w;$$

$$\frac{F}{U} = \frac{b s}{2(b + s)} = \frac{s}{2 \left( 1 + \frac{s}{b} \right)} \sim \frac{s}{2};$$

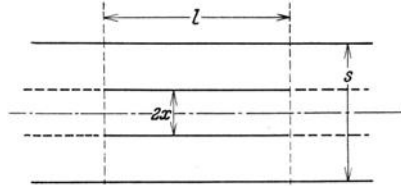


Abb. 99. Zur Berechnung der Laminarströmung zwischen sehr großen ebenen parallelen Platten.

$$\lambda_R = 48 \frac{\nu}{s w} = \frac{96}{Re} = \frac{64}{Re} \varphi; \quad \varphi = 1,5.$$

Bei ringförmigen Spalten ist  $s$  durch  $r_a - r_i$  zu ersetzen. Die Ausflußmenge ist

$$Q_s = w s b = w \pi \frac{1}{4} (d_a^2 - d_i^2)$$

$$= \frac{P_1 - P_2}{\mu l} \frac{1}{48} (d_a - d_i)^2 \frac{\pi}{4} (d_a^2 - d_i^2) \quad \text{für tropfbare Flüssigkeiten,}$$

$$= \frac{P_1^2 - P_2^2}{\mu 2 P l} \frac{1}{48} (d_a - d_i)^2 \frac{\pi}{4} (d_a^2 - d_i^2) \quad \text{für gasförmige Flüssigkeiten.}$$

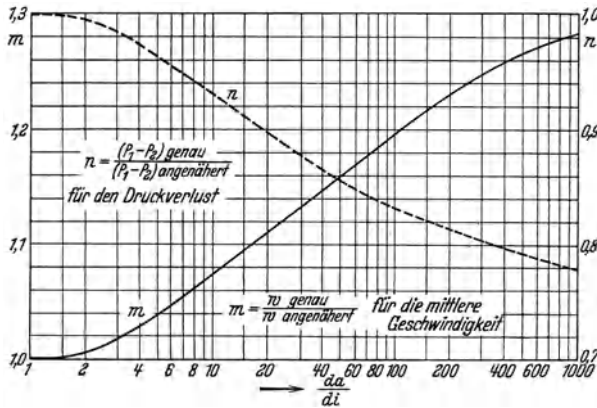


Abb. 100. Fehler bei der Annäherung der Kreisringrohrströmung an die Strömung zwischen parallelen Platten.

Diese vereinfachte Rechnung wird in vielen Fällen ausreichen. Abb. 100 gibt über den Fehler Aufschluß, den man gegenüber der exakten Rechnung begeht.  $m$  ist das Verhältnis der genauen zur angenäherten Geschwindigkeit und  $n$  das

der genauen zu den angenäherten  $\varphi$ -Werten. Für den genauen Strömungswiderstand gilt dann

$$\frac{P_1 - P_2}{\gamma} = n \frac{12 \nu w l}{g (r_a - r_i)^2}. \quad (218)$$

Hat man z. B. ein Kreisringrohr mit  $d_a = 0,250$  und  $d_i = 0,100$  m  $\varnothing$ , also  $\frac{d_a}{d_i} = \frac{r_a}{r_i} = 2,5$ , so ist nach Abb. 100 die genaue mittlere Strömungsgeschwindigkeit nur 1 vH größer als die angenäherte und der genaue Druckabfall nur 1,4 vH kleiner als nach Näherung. Für den besonderen Fall, daß der Kern nicht zentrisch im Rohre sitzt, ergibt sich durch ähnliche Rechnung

$$\frac{w_{\text{exzentr}}}{w_{\text{konzentr}}} = 1 + \frac{3}{2} \left( \frac{2E}{d_a - d_i} \right)^2, \quad (219)$$

wobei  $E$  die Exzentrizität bedeutet. Ist z. B.  $d_a = 0,10$  m und  $d_i = 0,04$  m, so nimmt das Verhältnis für  $E = 0,001$  m den Wert 1,0017, bei  $E = 0,005$  m den Wert 1,042 an, d. h.  $w_{\text{exzentr}}$  ist um 0,17 vH oder 4,2 vH größer als  $w_{\text{konzentr}}$ <sup>1</sup>.

Für  $E = \frac{1}{2} (d_a - d_i)$ , Anliegen an einer Wand, ist  $w_{\text{exzentr}}/w_{\text{konzentr}} = 2,5$ .

### c) Laminarströmung in Rohren mit Rechteckquerschnitt<sup>2</sup>.

Zur Ableitung des Gesetzes für vollständig ausgebildete Laminarströmung in geraden Rohren mit Rechteckquerschnitt können wir die Navier-Stokesche Gleichung (53) mit der Bestimmung, daß der Druck im Querschnitt verteilt, d. h. konstant, ist  $\left( \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \right)$  und die Strömungsgeschwindigkeiten nur Achsrichtung haben und nicht mit der Rohrlänge veränderlich sind  $\left( \frac{\partial w_l}{\partial l} = 0 \right)$ , schreiben

$$\frac{\partial P}{\partial l} = \mu \left( \frac{\partial^2 w_l}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_l}{\partial y^2} \right). \quad (220)$$

Bei Strömung von tropfbaren Flüssigkeiten ist der Druckabfall dem Wege verhältnismäßig. Nehmen wir ferner an, daß die Temperatur der Flüssigkeit und damit ihre Zähigkeit unveränderlich ist, so kann man

$$-\frac{\partial P}{\partial l} \frac{1}{\mu} = \text{konst} = 2C \quad (221)$$

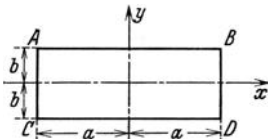


Abb. 101. Zur Berechnung der Laminarströmung in Rohren mit rechteckigem Querschnitt.

setzen. Zur Vereinfachung führt man noch ein  $w_l = \psi + C(b^2 - y^2)$ , siehe Abb. 101. Dann ist

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \quad (222)$$

Am Umfang des Rohres ist  $w_l = 0$ . Danach ist  $\psi = -C(b^2 - y^2)$  entlang  $AC$  und  $BD$ ,  $x = \pm a$ , und  $\psi = 0$  entlang den Wänden  $AB$  und  $CD$ , weil dort  $y = \pm b$  ist. Wenn  $y = \pm b$  ist, müssen alle Ausdrücke mit  $\psi$  verschwinden. Diese Bedingung wird

<sup>1</sup> Siehe hierzu weiter R. Heinze: Untersuchungen zum Lawaczek-Viskosimeter. Dissertation T. H. Berlin 1925.

<sup>2</sup> Siehe hierzu auch J. Boussinesq: Mém. sur l'influence des frottements dans les mouvements réguliers des fluides. J. Math. pures appl. (2) Bd. 3 (1868) S. 377. R. J. Cornish: Flow in a pipe of rectangular cross-section. Proc. Roy. Soc., Lond. (A) Bd. 120 (1928) S. 691.

durch Ausdrücke wie

$$\psi = \vartheta \cos \frac{(2n+1)\pi y}{2b} = \vartheta \cos m y$$

erfüllt, wobei  $\vartheta$  eine Funktion von  $x$  allein und  $n$  eine ganze Zahl ist. Mit dieser Einführung erhält man

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} - \vartheta m^2 = 0, \quad (223)$$

wobei man  $\vartheta$  darstellen kann durch  $\vartheta = A_n \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{I} m x + B_n \mathfrak{S} \mathfrak{I} m x$ . Da die Geschwindigkeit symmetrisch um die  $y$ -Achse verteilt sein wird, ist  $B_n = 0$  und

$$\vartheta = A_n \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{I} m x. \quad (224)$$

Danach besteht  $\psi = f(x, y)$  aus Ausdrücken  $\psi = \vartheta \cos m y = A_n \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{I} m x \cos m y$ . Diese Ausdrücke müssen so entwickelt werden, daß sie die Randbedingung  $\psi = -C(b^2 - y^2)$  erfüllen. Wir setzen  $\frac{y\pi}{2b} = y_1$  und erhalten

$$\psi = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{I} \frac{(2n+1)\pi x}{2b} \cos(2n+1)y_1. \quad (225)$$

Die Randbedingung für  $x = \pm a$  lautet mit  $y_1$

$$\psi = -C(b^2 - y^2) = \frac{C 4 b^2}{\pi^2} \left( y_1^2 - \frac{\pi^2}{4} \right). \quad (226)$$

Mit dieser Gleichung muß Gl. (225) für  $x = \pm a$  übereinstimmen. Entwickelt man Gl. (226) in einer Fourierschen Reihe und vergleicht man diese mit Gl. (225), so kann man die Konstanten  $A_n$  bestimmen. Man bekommt mit  $y = \frac{2}{\pi} b y_1$

$$\psi = -\frac{32 C b^2}{\pi^3} \left\{ \frac{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{I} \left( \frac{\pi x}{2b} \right)}{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{I} \left( \frac{\pi a}{2b} \right)} \cos \frac{\pi y}{2b} - \frac{1}{3^3} \frac{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{I} \left( \frac{3\pi x}{2b} \right)}{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{I} \left( \frac{3\pi a}{2b} \right)} \cos \frac{3\pi y}{2b} + \dots \right\}$$

und mit  $w_i = \psi + C(b^2 - y^2)$  das Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung

$$w_i = -\frac{32 C b^2}{\pi^3} \left\{ \right\} + C(b^2 - y^2). \quad (227)$$

Der Durchfluß wird durch

$$Q_s = \int_{y=-b}^{y=+b} \int_{x=-a}^{x=+a} w_i dx dy$$

gegeben:

$$Q_s = \frac{4}{3} \frac{a b^3}{\mu} \frac{dP}{dl} \left[ 1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{b}{a} \left( \mathfrak{X} \mathfrak{g} \frac{\pi a}{2b} + \frac{1}{3^5} \mathfrak{X} \mathfrak{g} \frac{3\pi a}{2b} + \dots \right) \right]. \quad (228)$$

Zur Beurteilung dieser Gleichung wollen wir zwei Sonderfälle untersuchen.

1. Quadratischer Querschnitt,  $a = b$ . Für diesen Fall erhält man

$$Q_s = 0,5620 \frac{a^4}{\mu} \frac{dP}{dl} = 4 a^2 w$$

für den Durchfluß und für die mittlere Strömungsgeschwindigkeit mit  $\mu = \frac{\nu \gamma}{g}$

$$w = 0,1405 \frac{a^2}{\nu} g J.$$

Mit Rücksicht auf  $4 \frac{F}{U} = 2a$  ergibt sich endlich

$$\lambda_R = \frac{57}{Re} = 0,89 \frac{64}{Re} \quad \left( \text{genauer} = \frac{56,9}{Re} \right).$$

2. Sehr flaches Rechteck,  $a$  oder  $b = \infty$ . Für diesen Fall erhält man für den Durchfluß angenähert, wenn z. B.  $a$  unendlich groß wird,

$$Q_s = \frac{4}{3} \frac{a b^3}{\mu} \frac{dP}{dl} \left( 1 - 0,630 \frac{b}{a} \right).$$

und nimmt  $w$  den Wert

$$w = \frac{1}{3} \frac{b^2}{\mu} \frac{dP}{dl}$$

an. Der hydraulische Radius  $4F/U$  erreicht gleichzeitig den Wert  $4b$ . Danach gilt für diesen Sonderfall, nämlich Strömung zwischen zwei unendlich großen ebenenplatten, die Beziehung

$$w = \frac{1}{3} \frac{\left( \frac{F}{U} \right)^2}{\nu} J$$

und

$$\lambda_R = \frac{96}{Re} = 1,5 \frac{64}{Re}.$$

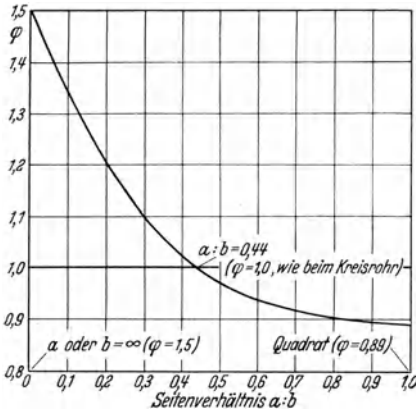


Abb. 102. Beiwert  $\varphi$  bei Laminarströmung in Röhren mit Rechteckquerschnitt.

Die Betrachtung der Sonderfälle lehrt, daß die Größe  $\varphi$  von Gl. (213) für den quadratischen Querschnitt einen Kleinstwert annimmt. Der quadratische Quer-

schnitt bietet den geringsten Durchflußwiderstand von allen Rechteckquerschnitten oder der Durchfluß wird beim Quadrat unter Wirkung eines bestimmten Druckes am größten. Der quadratische mit  $\varphi = 0,89$  erscheint günstiger als der Kreisquerschnitt mit  $\varphi = 1$ . Leitet man

aber dieselbe Flüssigkeitsmenge einmal durch ein quadratisches und einmal durch ein Kreisrohr von gleichem Querschnitt fort, so bietet das Quadrat den einfachen Widerstand des Kreisrohres. Man erkennt Quadrat- und Kreisquerschnitt als die günstigsten. Der Wert  $\varphi = 1,5$  für das Strömen zwischen

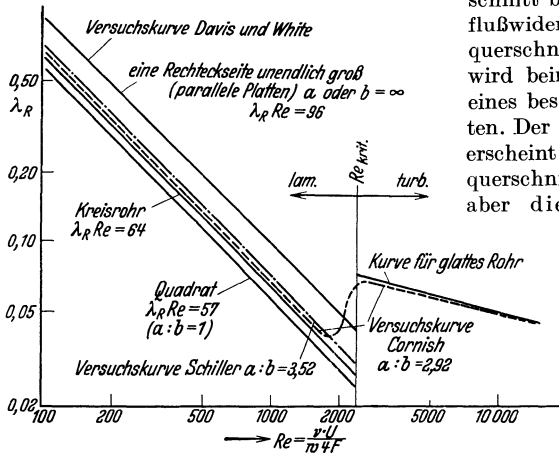


Abb. 103. Nachweis der berechneten  $\varphi$ -Werte mit verschiedenen Versuchen.

Platten von großer Breite wurde schon früher gefunden [Gl. (217)]. In Abb. 102 stehen die  $\varphi$ -Werte für verschiedene Rechteckquerschnitte. Mit der Einführung

$$\frac{P_1^2 - P_2^2}{2P} = J \gamma l$$

gelten die obenstehenden Gleichungen auch für zusammendrückbare Flüssigkeiten (ohne Rücksicht auf das verschwindend kleine Beschleunigungsglied). Boussinesq<sup>1</sup> stellte ähnliche Gleichungen auch für elliptische und gleichseitige Dreieckquerschnitte auf.

Ein versuchsmäßiger Nachweis der obigen Gleichungen gelang durch Arbeiten von Schiller<sup>2</sup> an Rohren mit quadratischem und rechteckigem (Seitenverhältnis 3,52 : 1) Querschnitt und Arbeiten von Cornish<sup>3</sup> an Rohren mit rechteckigem Querschnitt (Seitenverhältnis 2,92 : 1). Für sehr flache Rechtecke (Seitenverhältnisse 37 : 1 bis 170 : 1) fanden Davids und White<sup>4</sup> etwa den Wert  $\varphi = 1,5$ , wie er für ein Seitenverhältnis  $1 : \infty$  berechnet wurde. Siehe hierzu Abb. 103.

## B. Strömung in geraden Rohren mit veränderlichem Querschnitt.

### 1. Leitungen mit stetig veränderlichem Querschnitt.

#### a) Laminarströmung.

Bei Laminarströmung in einem geraden Rohr mit gleichbleibendem Querschnitt verfolgen alle Flüssigkeitsteilchen parallele Bahnen. Dagegen fließen in Rohren mit stetig veränderlichem Querschnitt alle Teilchen in verschiedenen Richtungen. Fraglich ist nun, ob wir auch in diesem Fall von einer Schichtenströmung sprechen dürfen, oder ob sich etwa Querströmungen ausbilden, die den Strom teilweise oder ganz durchsetzen. Klarheit brachten zwei interessante Arbeiten von Hele-Shaw<sup>5</sup> und Wyszomirski<sup>6</sup>, die in gewissem Sinne eine Verallgemeinerung der Reynoldsschen Farbfadenversuche darstellen. Beide Forscher ließen fadenweise gefärbtes Wasser durch enge Kanäle von rechteckigem Querschnitt fließen, die sich ganz beliebig stetig oder sprunghaft, gerade, gekrümmt oder knieförmig, erweiterten oder verengten (siehe z. B. Abb. 104 a bis c). Die Farbfäden waren im Verfolg der Strömung deutlich erkennbar: die einzelnen Teilchen flossen in Fäden, die einander nicht durchdrangen. Diese Strömungsform nennen wir Fadenströmung. Gleichschnelle Flüssigkeitsteilchen sind z. B. in Kreisrohren immer kreisringförmig um die Rohrachse angeordnet; symmetrisch gelegene Flüssigkeitsfäden kann man zu Schichten zu-

<sup>1</sup> Boussinesq, J.: a. a. O.      <sup>2</sup> Schiller, L.: a. a. O. Fußnote 1, S. 124.

<sup>3</sup> Cornish, J. R.: a. a. O.

<sup>4</sup> Davis, S. C., u. C. M. White: An experimental study of the flow of water in pipes of rectangular section. Proc. Roy. Soc., Lond. (A) Bd. 119 (1928) S. 92.

<sup>5</sup> Hele-Shaw, H. S.: Investigation of the nature of surface resistance of water and streamline motion under certain experimental conditions. Inst. Naval Archit., Lond. 1898 oder Z. VDI Bd. 42 (1898) S. 1389.

<sup>6</sup> Wyszomirski, A.: Stromlinien und Spannungslinien. Dissertation Dresden 1914.

sammenfassen. Wir haben eine allgemeine Form einer Laminarströmung. Für den besonderen Fall, daß alle Schichtgeschwindigkeiten gleichgerichtet sind, haben wir die Laminarströmung des geraden Rohres.

Es kann sich hier um erweiterte Rohre mit Umsetzung von Geschwindigkeit in Druck (Abb. 105) und um verengte Rohre mit Umsetzung von Druck in Geschwindigkeit (Abb. 106) handeln. Wegen der Zähigkeit der Flüssigkeit werden die einzelnen Schichten um so stärker abgebremst, je näher sie an der Rohrwand liegen. Die Verzögerung der gesamten Strömung, die im Falle einer Rohrerweiterung eintritt, wirkt gleichmäßig im ganzen Querschnitt<sup>1</sup>. Bei einem bestimmten Erweiterungsgrade der Leitung werden die langsamsten Schichten zum Stillstand kommen und bei noch stärkerer Erweiterung umkehren (Abb. 107). Inzwischen geht die Kernströmung — aus Gründen der Kontinuität — in der alten Richtung weiter.

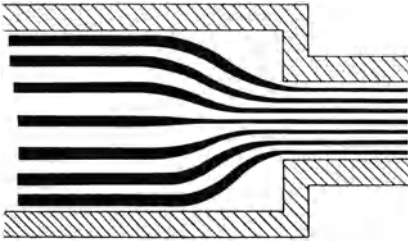


Abb. 104 a.

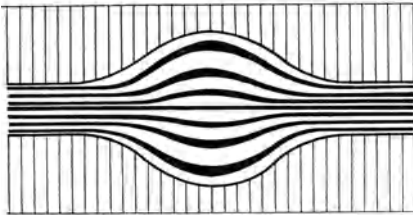


Abb. 104 b.

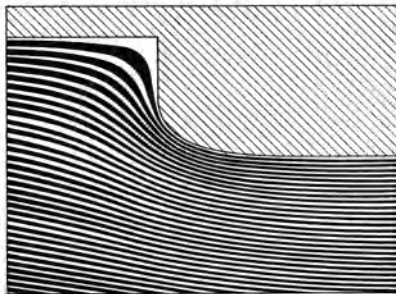


Abb. 104 c.

Abb. 104 a bis c. Fadenströmung in Rohren beliebigen Querschnitts nach Hele-Shaw und Wyszomirski.

vorgang gibt. Grundsätzlich von Interesse ist nur die Bedingung für den Eintritt der Rückströmung. Blasius betrachtete Kanäle von

<sup>1</sup> Genaue Messungen haben ergeben, daß der Druckzuwachs und damit auch die verzögernden Kräfte gleichmäßig über den Querschnitt verteilt sind.

<sup>2</sup> Blasius, H.: Laminare Strömung in Kanälen von wechselnder Breite. Z. Math. Phys. Bd. 58 (1910) S. 225.



rechteckigem Querschnitt mit bestimmter Breite  $b$  und veränderlicher Höhe  $h$ .  $Re' = \frac{h w}{\nu}$  ist dann eine von der Rohrlänge  $l$  unabhängige

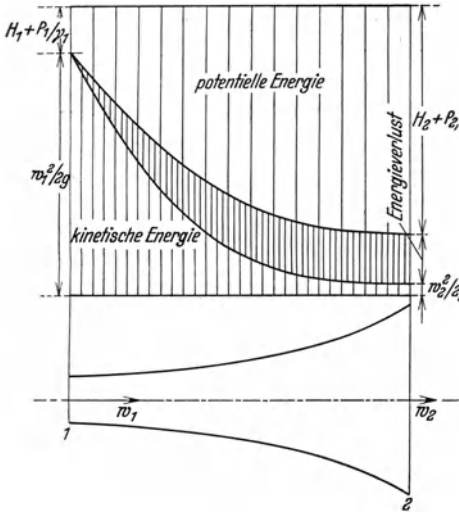


Abb. 105. Energieumsetzungen im erweiterten Rohr mit gerader Achse (Diffusor oder divergentes Rohr).

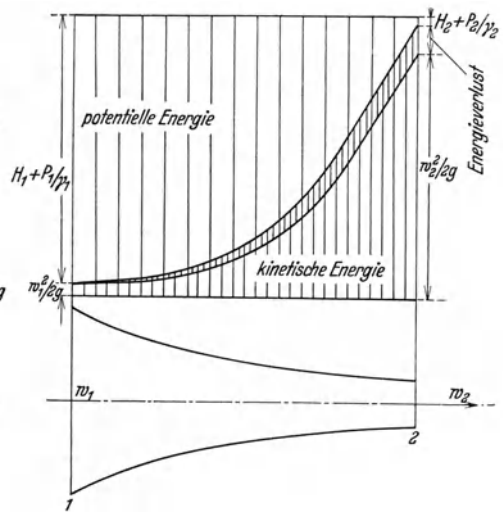


Abb. 106. Energieumsetzungen im verengten Rohr mit gerader Achse (Konfusor oder konvergentes Rohr).

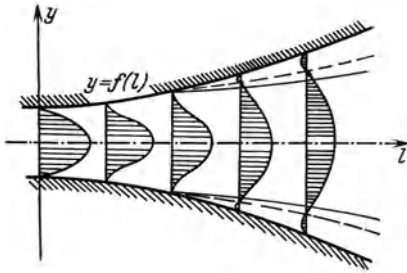


Abb. 107. Verteilung der Strömungsgeschwindigkeit über den Querschnitt gerader Rohre von veränderlicher Weite bei Laminarströmung nach Blasius.

Reynoldssche Zahl. Die veränderliche Begrenzung folge einer Funktion  $y = f(l)$ , siehe Abb. 107. Blasius fand für den Eintritt der Rückströmung als maßgebend

$$Re' \frac{dy}{dl} = \frac{35}{2}. \quad (229)$$

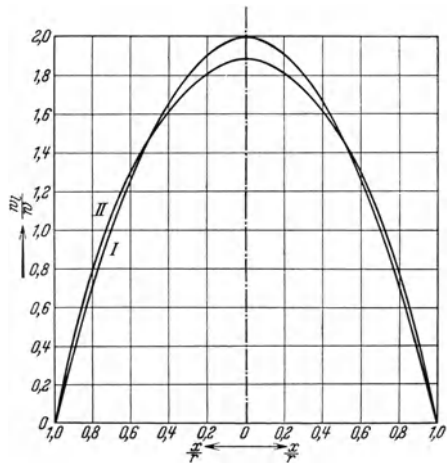


Abb. 108. Laminare Geschwindigkeitsverteilung nach Prandtl-Tietjens. I Rohr von unveränderlichem Kreisquerschnitt. II in Strömungsrichtung schwach verengtes Rohr ( $Re' \frac{dy}{dl} = 2$ ; z. B.  $Re' = 2000$  und  $\frac{dy}{dl} = 1/1000$ ).

In einem kegelförmig erweiterten Rohr von 1 m Länge und Durchmesser- vergrößerung um 35 mm würde sich demnach der Strahl bei  $Re' = 1000$

ablösen. (Neuere Rechnungen lassen allerdings wahrscheinlich werden, daß die Ablösung schon eher beginnt.)

Eine Querschnittsänderung, wenn sie auch nur gering ist, wirkt sich auf die Geschwindigkeitsverteilung aus. Abb. 108 zeigt, daß sich

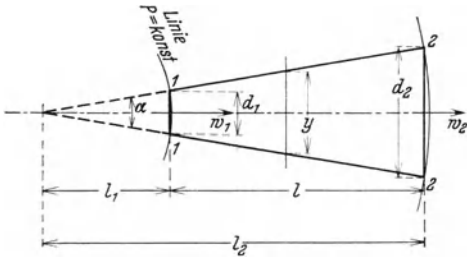


Abb. 109. Bezeichnungen für das konische Rohr.

das Profil bei Rohrverengung abplattet. Bei Strömung in erweiterten Rohren dagegen wird das Profil spitzer als beim geraden Rohr von unveränderlichem Querschnitt. Der Anstieg oder Abfall des statischen Druckes mit der Veränderung des Rohrquerschnitts überlagert sich dem Reibungsdruckabfall der Strömung, der um so kleiner wird,

je mehr sich das Rohr verengt. Je nach dem Grade der Rohrerweiterung kann der statische Druck mit der Rohrlänge abfallen, gleichbleiben oder anwachsen. Vermutlich hat die Rohrrauigkeit keinen besonderen Einfluß auf diesen laminaren Strömungsvorgang.

## b) Übergangsbereich zwischen laminarer und turbulenter Strömung.

Die kritische Reynoldssche Zahl hängt in starkem Maße mit der Änderung des Rohrquerschnitts zusammen. Je schneller sich das Rohr verengt, bei um so höherer Reynoldsscher Zahl liegt der Übergang. So fand z. B. Gibson<sup>1</sup>, daß in einem konischen Rohr von 15° Öffnungswinkel (Abb. 109)  $Re_{krit}$  auf das 5,7fache gesteigert wird. Umgekehrt liegt  $Re_{krit}$  um so tiefer, je mehr sich ein Rohr erweitert.

## c) Turbulente Strömung.

Die turbulente Strömung von Flüssigkeiten durch verengte oder erweiterte Rohre und die damit verbundenen Druck- und Geschwindigkeitsänderungen sind von großer technischer Bedeutung. Im wesentlichen spielen sich dieselben Vorgänge ab, wie sie eben für Laminarströmung beschrieben wurden. Wie bei Turbulenz im geraden zylindrischen Rohr bildet sich eine Randschicht aus, deren Dicke mit zunehmendem Grade der Rohrerweiterung abnimmt. Bei turbulenter Strömung führt die Strahlablösung zu besonders großen Verlusten, wobei kräftige Wirbelballen entstehen, die die ganze Strömung durchsetzen. Mit abnehmender Randschichtdicke wird der Strömungsverlust

<sup>1</sup> Gibson, A. H.: On the flow of water through pipes and passages having converging or diverging boundaries. Proc. Roy. Soc., Lond. (A) Bd. 83 (1910) S. 366.

immer größer und stellt sich bald ein quadratisches Widerstandsgesetz ein (nahezu reine Wirbelströmung). Bei Rohrverengung löst sich der Strahl nicht ab.

Besonders bemerkenswert ist nun die Frage nach dem größten zulässigen Erweiterungswinkel, bei dem noch keine Ablösung eintritt und welche Vorgänge sich einstellen, wenn dieser größte Winkel überschritten wird. Zur Vereinfachung wollen wir uns hier nur mit geradlinig bezogenen Rohren beschäftigen.

Versuche zur Beobachtung der Bewegungsvorgänge<sup>1</sup> wurden meist in den versuchstechnisch leichter zu beherrschenden Rohren mit Recht-

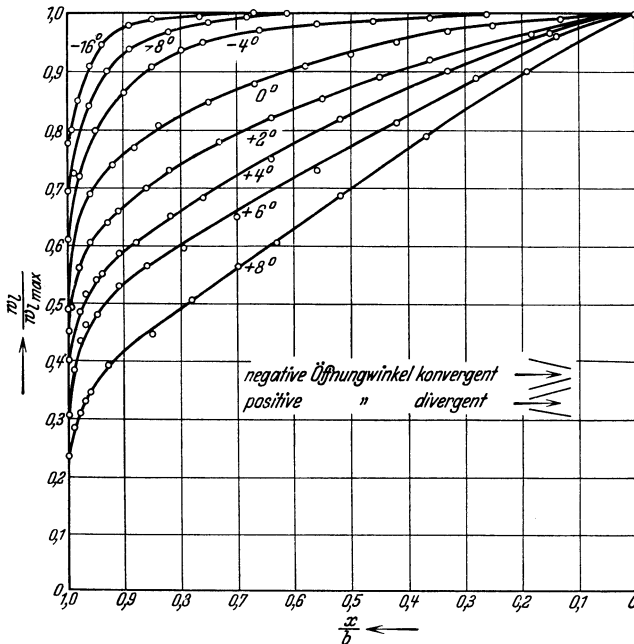


Abb. 110.  $w_1/w_{1max}$  in Abhängigkeit von  $x/b$  ( $b$  = Rohrbreite) bei verschiedenen Öffnungswinkeln  $\alpha$  und  $Re = 61000$  nach Messungen von Nikuradse.

<sup>1</sup> z. B. A. Fliegner: Versuche über das Ausströmen von Luft durch konisch divergente Rohre. Schweiz. Bauztg. Bd. 31 (1898) S. 68, 78, 84. R. Proell: Abhandlungen über kegelförmige Rohre. Z. ges. Turbinwesen 1904 S. 161; 1905 S. 151. K. Andres: Versuche über die Umsetzung von Wassergeschwindigkeit in Druck. VDI-Forsch.-Heft 1909 Nr. 76. H. Hochschild: Versuche über Strömungsvorgänge in erweiterten und verengten Kanälen. VDI-Forsch.-Heft 1912 Nr. 114. R. Kröner: Versuche über Strömungen in stark erweiterten Kanälen. VDI-Forsch.-Heft 1915 Nr. 222. A. Riffart: Über Versuche mit Verdichtungs-düsen. VDI-Forsch.-Heft 1922 Nr. 257. F. Dönch: Divergente und konvergente turbulente Strömungen mit kleinen Öffnungswinkeln. VDI-Forsch.-Heft 1926 Nr. 282. A. N. Wedernikoff: Luftströmung im flachen erweiterten Kanal. Ber.

eckquerschnitt, seltener in Rohren mit Kreisquerschnitt angestellt (Holz-, seltener Metallrohre). Versuche mit Wasser und Luft ergaben die Gültigkeit des Ähnlichkeitsgesetzes.

Der statische Druck wurde nahezu gleichmäßig verteilt über den Rohrquerschnitt gefunden (Abb. 109). Auch die Geschwindigkeitsverteilung wurde mehrfach gemessen. Abb. 110 bis 112 zeigen von Nikuradse aufgenommene Profile. Aus Abb. 110 ist ersichtlich, daß Profile in erweiterten Kanälen nach der Rohrmitte zu immer steiler, dagegen in verengten immer flacher werden, als das Profil bei Strömung im zylindrischen Rohr. Es zeigte sich bei  $Re = 61000$ , daß alle Profile

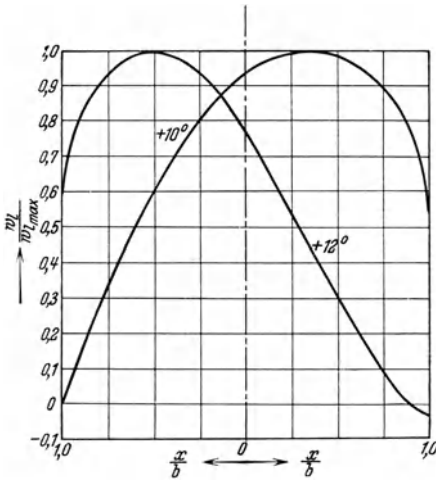


Abb. 111. Geschwindigkeitsverteilung bei Öffnungswinkeln  $\alpha$  von 10 und 12° (Erweiterung) und  $Re = 61000$  nach Messungen von Nikuradse.

bis zu 8° Öffnungswinkel symmetrisch liegen. Bei  $\alpha = 10^\circ$  ergab sich das Profil von Abb. 111. Der Strahl löste sich nach Überschreiten eines bestimmten Öffnungswinkels oder einer bestimmten Reynoldsschen Zahl nicht an der ganzen Innenwand des Rohres ab, sondern blieb an einer Seite hängen. Seine Lage war unstabil, er konnte leicht hin- und herpendeln. Bei  $Re = 61000$  löste sich der Strahl im Bereiche von  $\alpha = 9,6$  bis  $10,2^\circ$ , also schon bei kleinen Winkeln, ab. Als günstigsten Erweiterungswinkel kann man bis etwa  $Re = 100000$   $\alpha = 8^\circ$  ansprechen. Schon Weisbach

hatte den Winkel von  $8^\circ$  für den besten gehalten. Abb. 111 wurde andernteils bei  $12^\circ$  und Abb. 112 bei  $16^\circ$  Öffnungswinkel aufgenommen. Je größer  $\alpha$  war, um so schneller pendelte der Strahl hin und her. Für die Ablösung in glatten keilförmigen Kanälen fand Nikuradse die Grenze

$$\frac{\alpha}{2} \sqrt[4]{Re} \cong 75 \quad (\alpha = 9,6^\circ \text{ bei } Re = 61000). \quad (230)$$

In Rohren mit verschiedenem Erweiterungswinkel und bei verschiedenen Reynoldsschen Zahlen stellte sich ein ähnliches Geschwindigkeitsprofil ein, wenn der Kennwert  $\frac{\alpha}{2} Re^{\frac{1}{4}}$  dieselbe Größe hatte. Für

d. Zentr. Aero-Hydrodyn. Inst. Moskau Bd. 21 (1926). J. Nikuradse: Untersuchungen über die Strömungen des Wassers in konvergenten und divergenten Kanälen. VDI-Forsch.-Heft 1929 Nr. 289.

die Profile selbst traf das Prandtl'sche  $1/7$ . Verteilungsgesetz, wenigstens für die Randgebiete, genau zu.

Über den Druckabfall bei turbulenten nichtparallelen Strömungen in geraden Rohren kann vorläufig nicht viel genaues mitgeteilt werden. Wegen der beschränkten Länge von konischen oder keilförmigen Versuchsleitungen enthalten die meisten der gemessenen Strömungsverluste noch eine Reihe nicht nachprüfbarer Störungen. In stark erweiterten Kanälen übersteigen die Ablösungsverluste die Reibungsverluste mehrfach. Wegen der starken Wirbelung sind die Verluste praktisch immer dem Quadrate der mittleren Strömungsgeschwindigkeit verhältnismäßig. Die Größe der Verluste nimmt erheblich mit dem Rauigkeitsgrade der Rohrwand zu.

Manche Strömungsfälle in Rohren mit regelmäßigen Querschnitten kann man bei Verengung oder geringer Erweiterung nach Ansätzen von Baashuus<sup>1</sup> rechnen. Er leitete aus der allgemeinen Druckabfallgleichung für gerade Rohre die Form

$$w = k J^n \left( \frac{F}{U} \right)^m$$

mit  $k = \text{konst}$  für beliebige Strömungen (quadratisches Widerstandsgesetz,  $\lambda_R = \text{konst}$ ) ab entsprechend Gl. (210a). Für Kreisrohre erhielt er

$$\frac{P_1 - P_2}{\gamma} = \frac{n}{-m + n - 2} (h_1 - h_2). \quad (231)$$

Dabei bedeutet  $h_1$  den Abfall an Druckhöhe in einer Leitung von der Länge  $l_1$  mit unveränderlichem Querschnitt  $F_1$  und hydraulischem Radius  $F_1/U_1$  (siehe Abb. 109).

$$h_1 = \left( \frac{Q_s}{a} \right)^{\frac{1}{n}} l_1 d_1^{-\frac{2+m}{n}} \quad \text{mit} \quad a = \frac{k \cdot \pi}{4^{1+m}} \quad (231a)$$

und desgleichen  $h_2$  für  $l_2, d_2$ . Siehe hierzu Aufgabe 10. Diese Rechnung ist natürlich für erweiterte Rohre nur zugänglich, wenn sich der Strahl nicht ablöst.

Wenn  $\lambda_R$  nicht von  $Re$  abhängt, kann man auch eine andere Näherungsrechnung für Kanäle ohne Strahlablösung anstellen<sup>2</sup>. Mit  $y$  als veränderlicher Rohrweite ist nach Abb. 109

$$h = \frac{\Delta P}{\gamma} + \Delta H = \lambda_R \int \frac{dl}{y} \frac{w^2}{2g}$$

<sup>1</sup> Baashuus, N.: Druckhöhenverlust in Leitungen mit kontinuierlich veränderlichem Querschnitt. Z. Forschung Bd. 1 (1930) S. 202. Berlin.

<sup>2</sup> Weisbach, J.: Ingenieur- und Maschinenmechanik, 2. Aufl. Teil 1 S. 535. Braunschweig 1850. Banki, D.: Energieumwandlungen in Flüssigkeiten Teil 1 S. 74. Berlin 1921.

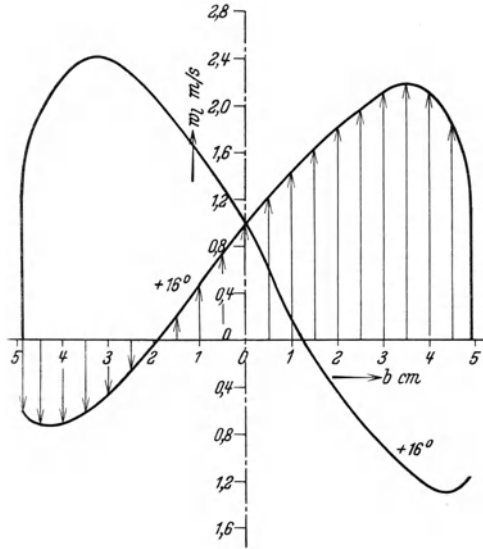


Abb. 112. Geschwindigkeitsverteilung bei Öffnungswinkel  $\alpha$  von  $16^\circ$  (Erweiterung) und  $Re = 61\,000$  nach Messungen von Nikuradse. Der Strahl legte sich regelmäßig an eine Stelle der Rohrwand an.

für die Energieumsetzung und mit der Kontinuitätsbedingung

$$w y^2 = w_1 d_1^2 = w_2 d_2^2 \quad \text{und weiter} \quad \frac{dl}{dy} = \frac{l}{d_2 - d_1}$$

bei Kreiskegelrohr. Nun ist nach Integration

$$h = \lambda_R \frac{l}{d_1} \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{d_2}{d_1} + \left( \frac{d_2}{d_1} \right)^2 + \left( \frac{d_2}{d_1} \right)^3 \right) \frac{w_2^2}{2g}. \quad (232)$$

Nach Versuchen gilt für den günstigsten Erweiterungswinkel von  $8^\circ$  etwa

$$P_2 - P_1 = (0,80 \text{ bis } 0,85) \frac{w_1^2 - w_2^2}{2g} \cdot \gamma. \quad (233)$$

Aus Versuchen von Gibson geht hervor, daß quadratische Rohre bei gleicher Länge und gleichen Verhältnissen von Anfangsquerschnitt zu Endquerschnitt und gleichen Zuströmbedingungen mindestens 20 vH höhere Verluste als kreisförmige Rohre haben. Je gestreckter die Rechteckquerschnitte sind, desto höhere Widerstände ergeben sich.

Für den Strömungswiderstand beliebig geformter Rohrstücke wollen wir fernerhin ansetzen

$$\frac{P_1 - P_2}{\gamma} + H_1 - H_2 = \zeta_1 \frac{w_1^2}{2g} = \zeta_2 \frac{w_2^2}{2g}. \quad (234)$$

Der Faktor bei der Geschwindigkeitshöhe ist  $\zeta = \lambda \frac{l}{d}$ . Für abgerundete Rohreinläufe wie Abb. 51 ist  $\zeta_2 = 0,06$  bis  $0,005$  (auf die Geschwindigkeit  $w$  im Rohr bezogen). Je glatter die Mündung und je größer die Reynoldssche Zahl der Strömung ist, desto kleiner ist  $\zeta_2$ . Für konische Verengungen ist  $\zeta \sim 0$ .

Ohne Rücksicht auf Reibung und Ablösung ist es gleich, in welcher Richtung ein konisches Rohr durchflossen wird. Die Umsetzung der beteiligten Energien geht nach der Bernoullischen Gleichung (29)

$$\frac{P_1 - P_2}{\gamma} + H_1 - H_2 = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g}. \quad (235)$$

Wegen der Reibungsvorgänge und Ablösungserscheinungen ist der Druckverlust bei natürlichen Flüssigkeiten bei Rohrerweiterung größer als bei Rohrverengung. Bezeichnet man mit  $P'_2$  den nach Gl. (235) zu erwartenden Enddruck, so ist der Wirkungsgrad des Rohres

$$\eta = \frac{P_2 - P_1}{P'_2 - P_1} \quad (236)$$

und mit

$$\zeta_2 = \left( \frac{w_1^2}{w_2^2} - 1 \right) (1 - \eta), \quad (237)$$

der Strömungswiderstand

$$\frac{P_2 - P_1}{\gamma} + H_2 - H_1 = \zeta_2 \frac{w_2^2}{2g}. \quad (238)$$

(Siehe hierzu Aufgabe 10.) Versuchsmäßig bestimmte Wirkungsgrade von Rohrerweiterungen können grob etwa angegeben werden<sup>1</sup>:

Erweiterungswinkel $\alpha = 8^\circ$	10°	12°	15°
Wirkungsgrad $\eta$ rund =	0,9	0,8	0,7
		0,7	0,6

<sup>1</sup> Näheres siehe R. Biel: Die Wirkungsweise der Kreiselpumpen und Ventilatoren. VDI-Forsch.-Heft Nr. 42 S. 39. Berlin 1907; Z. VDI. Bd. 52 (1908) S. 442.

## 2. Leitungen mit unstetig veränderlichem Querschnitt.

Es mögen nur turbulente Strömungen betrachtet werden, weil die grundsätzlich mögliche Laminarströmung ohne praktische Bedeutung ist. Bei plötzlichen Verengungen löst sich der Strahl immer ab. Bei Ausbreitung des Strahls auf den vollen Querschnitt treten Energieverluste auf, die sich mit dem Impulssatz berechnen lassen (Abb. 113)<sup>1</sup>.

	Querschnitt $F_0$	Querschnitt $F_2$
Impulszufuhr (Masse $\times$ Geschwindigkeit)	$\frac{\gamma}{g} F_0 w_0^2$	$-\frac{\gamma}{g} F_2 w_2^2$
Druckkräfte <sup>2</sup>	$P_0 F_2$	$-P_2 F_2$

Impulsänderung + Druckänderung = 0 zusammen mit $w_0 F_0 = w_2 F_2$ ergibt	$P_2 - P_0 = \frac{\gamma}{g} w_2 (w_0 - w_2)$
bei verlustloser Strömung wäre	$P_2' - P_0 = (w_0^2 - w_2^2) \frac{\gamma}{2g}$

Mehrverlust  $P_2' - P_2 = (w_0 - w_2)^2 \frac{\gamma}{2g}$

Wirkungsgrad der Druckumsetzung  $\eta = \frac{P_2 - P_0}{P_2' - P_0} = \frac{2w_2}{w_2 + w_0} = \frac{2}{1 + \frac{F_2}{F_0}}$  (239)

Widerstandszahl  $\zeta_2 = \left(\frac{F_2}{F_0} - 1\right)^2$  (240)

Druckverlust  $\frac{\Delta P}{\gamma} + \Delta H = \left(\frac{F_2}{F_0} - 1\right)^2 \frac{w_2^2}{2g}$  (241)

Zu diesem Stoßverlust kommt noch der Reibungsdruckverlust. Zur vollständigen Wiederausbreitung des Strahles ist das 8- bis 10fache des Rohrdurchmessers erforderlich<sup>3</sup>, siehe hierzu Abb. 114. Die Kontraktionszahl  $\mu$ , die das Verhältnis vom engsten Querschnitt  $F_0$  zum Durchlaß  $F_2$  angibt, kann aus Abb. 115 entnommen werden (nach Weisbach). Für  $F_2 \leq 0,1 F_1$  gilt .

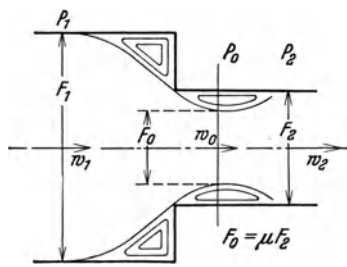


Abb. 113. Rohr mit plötzlicher Querschnittsänderung.

<sup>1</sup> Siehe Hütte, des Ingenieurs Taschenb. Bd. 1 (1931) 26. Aufl. S. 376.  
<sup>2</sup> Bei Strömungsrichtung von  $F_1$  nach  $F_2$  Ableitung ohne Rücksicht auf die Kraftwirkung am Querschnitt (Kreisring)  $F_1 - F_2$ .  
<sup>3</sup> Schütt, H.: Versuche zur Bestimmung der Energieverluste bei plötzlicher Rohrerweiterung. Mitt. d. Hydraul. Inst. d. T. H. München Heft 1 (1927) S. 42.

- $\mu = 0,62$  bis  $0,64$  bei scharfer Durchflußkante (Abb. 116),
- $\mu = 0,7$  bis  $0,8$  bei ganz schwacher Kantenbrechung,
- $\mu = 0,9$  bei wenig abgerundeter Kante,
- $\mu = 0,99$  bei starker glatter Abrundung (runder Einlauf, Abb. 51).

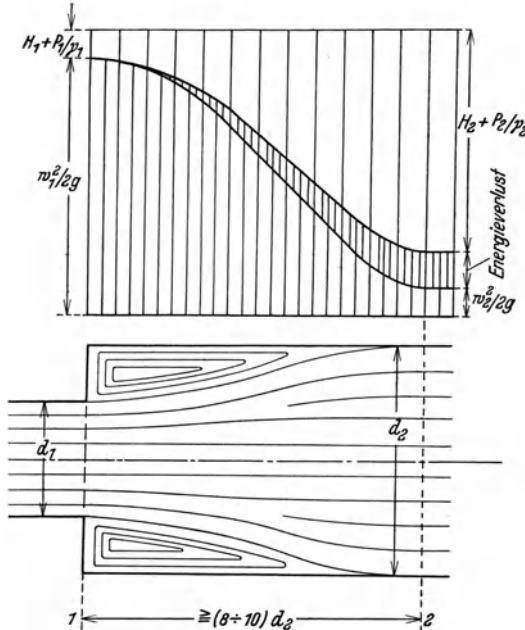


Abb. 114. Energieumsetzungen bei plötzlicher Querschnittsänderung.

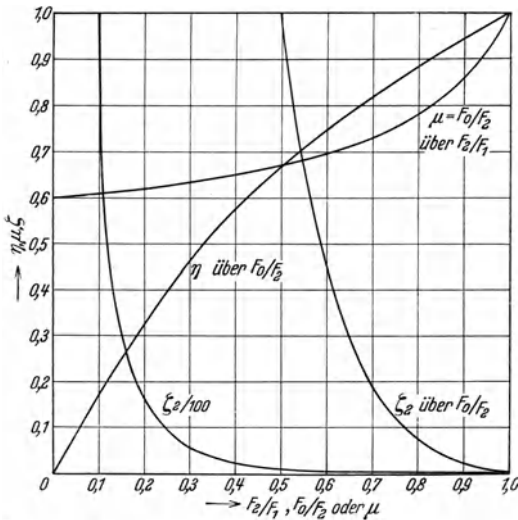


Abb. 115. Kontraktionszahl  $\mu$ , Wirkungsgrad  $\eta$  und Widerstandszahl  $\zeta$  bei verschiedenen Querschnittsverhältnissen (zu Abb.113).

Als Mittelwert kann man für den scharfrandigen Einlauf  $\zeta_2 = 0,50$  und bei leicht gebrochener Kante  $\zeta_2 = 0,25$  ansetzen. Ragt das Rohr noch ein Stück in das Auslaufgefäß hinein (Abb. 117), so ist bei scharfer Kante  $\zeta_2 = 3,0$  und bei um  $90^\circ$  abgephaster Kante  $\zeta_2 = 0,55$ . Bei scharfkantigem Einlauf unter einem Winkel  $\delta$  (Abb. 118) ist  $\zeta_2 = 0,5 + 0,3 \cos \delta + 0,2 \cos^2 \delta$ . Außer diesen finden sich in Weisbachs Lehrbuch noch eine ganze Reihe Angaben für Sonderfälle. Für den abgeblendeten Einlauf (Abb. 119) erhält man aus

$$\begin{aligned} & \frac{P_1}{\gamma_1} + \frac{w_1^2}{2g} \\ &= \frac{P_2}{\gamma_2} + \frac{w_2^2}{2g} + \zeta_2 \frac{w_2^2}{2g} \end{aligned}$$

die Beziehung mit  $\gamma_1 \sim \gamma_2$

$$\begin{aligned} & \frac{P_1 - P_2}{\gamma} \\ &= \left( \left( \frac{F_2}{F_1} \right)^2 - 1 - \zeta_2 \right) \frac{w_2^2}{2g} \end{aligned} \tag{242}$$

und

$$\frac{P_0}{\gamma} = \frac{P_2}{\gamma} + 2 \left( 1 - \frac{F_2}{F_1} \frac{1}{\mu'} \right) \frac{w_2^2}{2g}$$

mit Gl. (240) und

$$\mu' = \frac{F_0}{F_1}. \tag{243}$$



Mit Annahme  $\mu' = 0,60$  (in Übereinstimmung mit Weisbachs Versuchen) gilt dann

	$\zeta_2 = 0,44$	1,16	5,40	53,5	245
bei	$\frac{F_2}{F_1} = 1$	1,25	2	5	10.

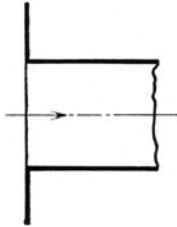


Abb. 116. Scharfrandiger Einlauf.

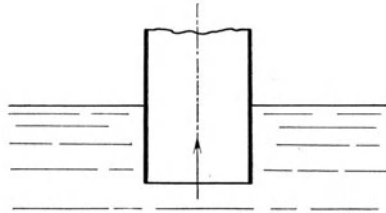


Abb. 117. Eingetauchter Einlauf.

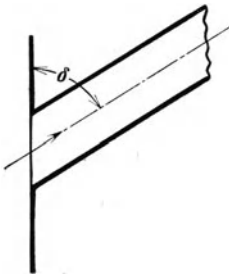


Abb. 118. Schiefwinkliger Einlauf.

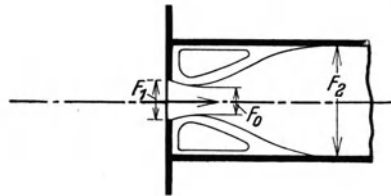


Abb. 119. Abgedeckter Einlauf.

## C. Strömung in anderen als geraden Rohren.

### 1. Richtungsänderungen.

#### a) Strömung in gekrümmten Rohren.

α) **Einwirkung der Krümmung auf die Strömungsform, Druck- und Geschwindigkeitsverteilung in gekrümmten Rohren.** Vorläufig betrachten wir nur Strömungen mit geradliniger Hauptbewegungsrichtung. Es entsteht jetzt die Frage, wie sich die Strömung in einem gekrümmten Rohre ausbildet, wo sich die Hauptbewegungsrichtung im allgemeinen ständig ändert. Zur Vereinfachung wollen wir die Strömung in einem Krümmer mit kreisförmig gekrümmter Achse untersuchen, der zwischen zwei gerade Rohre geschaltet sein möge. Wenn wir einmal von den turbulenten Querbewegungen absehen, so haben wir im geraden Rohr eine Parallelbewegung. Würden die einzelnen Flüssigkeitsteilchen auch im Krümmer dauernd in gleichem Abstand von der Rohrachse fließen,

so zeigt uns Abb. 120, daß die zurückzulegenden Wege um so größer sind, je näher sich die Teilchen am Scheitel des Krümmers bewegen.

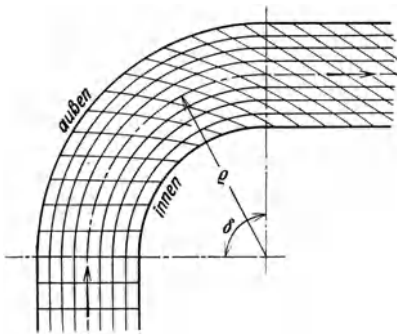


Abb. 120. Linien gleicher Weglänge im Kreiskrümmer. Die Außenseite wird mit Krümmerscheitel bezeichnet.

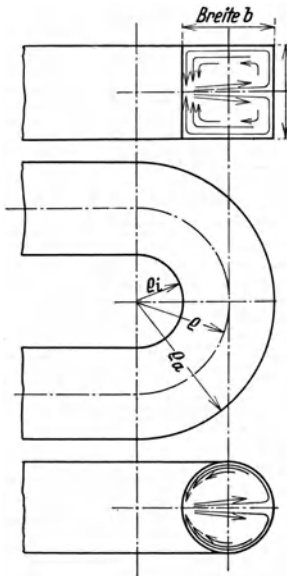


Abb. 121. Querströmung in Krümmern.

Wir haben nun noch gar nicht an die Wirkung der Fliehkräfte gedacht, die eine Strömung nach dem Krümmerscheitel hin einleiten möchten. Dieses Bestreben haben besonders die schnellen Teilchen im Kern der Strömung. Durch die Krümmung der Strombahnen wird eine nach dem Krümmerscheitel zu gerichtete Fliehkraft hervorgerufen. Die Bahn der „innen“ fließenden Flüssigkeitsteilchen mit kleinem Krümmungshalbmesser ist stärker als die der „äußeren“ gekrümmt, weshalb das Fliehvermögen

der „inneren“ Teilchen größer als das der „äußeren“ ist. Die Flüssigkeit haftet auch im Krümmer an der Rohrwand. Die Teilchen in der Nähe der Wand haben eine wesentlich geringere Geschwindigkeit als die im Kern, üben daher auch eine geringere Fliehkraft aus. Die energische Kernflüssigkeit verdrängt also die am Scheitel befindliche und zwingt sie zur Strömung nach der „Krümmerrinnenseite“ zu. Bei symmetrischem Rohrquerschnitt bildet sich dabei eine durch Abb. 121 verdeutlichte Querströmung aus, die sich der Hauptbewegung in Richtung der Rohrachse überlagert<sup>1</sup>. Die nach „außen“ dringenden Teilchen des Kerns büßen durch Reibung an der Grenzschicht im Scheitel einen Teil ihrer Energie ein und werden wieder von energischeren Teilchen beiseite geschoben. Bei der entstehenden Querbewegung, die ein Teilchen

<sup>1</sup> Siehe z. B. J. Lell: Beitrag zur Kenntnis der Sekundärströmung in gekrümmten Kanälen. Dissertation Darmstadt 1913. A. Hinderks: Nebenströmungen in gekrümmten Kanälen. Z. VDI Bd. 71 (1927) S. 1779; Bd. 72 (1928) S. 86, 388. H. Nippert: Über den Strömungsverlust in gekrümmten Kanälen. VDI-Forsch.-Heft 1929 Nr. 320. H. Richter: Der Druckabfall in glatten gekrümmten Rohrleitungen. VDI-Forsch.-Heft 1930 Nr. 338. W. Spalding: Versuche über den Strömungsverlust in gekrümmten Leitungen. Z. VDI Bd. 77 (1933) S. 143.

z. B. in einer Rohrschlange mehrere Male ausführen kann, geht ein beständiger Energieaustausch vor sich und macht sich ein erhöhter Strömungsverlust bemerkbar.

Neben dieser Querbewegung fließt die Flüssigkeit in Richtung der Rohrachse. Die absoluten Strombahnen sind zwei Bündel von flachgedrückten Spiralen. Die Flüssigkeit führt solche Spiralbewegungen bei allen Stromablenkungen aus, ganz gleich, ob im geraden Zuführungsrohr laminar fließende oder turbulente Flüssigkeit ankommt. Nur in besonderen Fällen bei sehr kleinen Reynoldszahlen unterbleibt die Querbewegung.

Außer bei Stromablenkungen bilden sich auch in geraden Rohren solche Querbewegungen aus, siehe z. B. Abb. 122<sup>1</sup>. Bei regelmäßigen Querschnitten fließt die Flüssigkeit längs der Winkelhalbierenden in die Ecken des Profils, weicht dort seitlich aus und fließt mit verminderter Energie wieder in den Kern der Strömung zurück. Neben der Hauptbewegung in Achsrichtung findet nämlich ein Impulstransport längs den Linien gleicher Geschwindigkeit statt, die am Schnitt mit den Winkelhalbierenden besonders scharf gekrümmt sind (siehe Abb. 92). Der Längstransport unterliegt der Fliehkraftwirkung, wobei die Querbewegung hervorgerufen wird.

Mit den Geschwindigkeitsänderungen sind auch Druckänderungen verbunden. Während im geraden Rohre der Druck (wenigstens bei Strömung raumbeständiger Flüssigkeiten) mit der Rohrlänge gleichmäßig abnimmt, steigt er im Krümmer an der Außenseite zunächst an und fällt dann wieder (siehe Abb. 123 und 124). Für die Innenseite gilt das Umgekehrte. Ändert sich auch

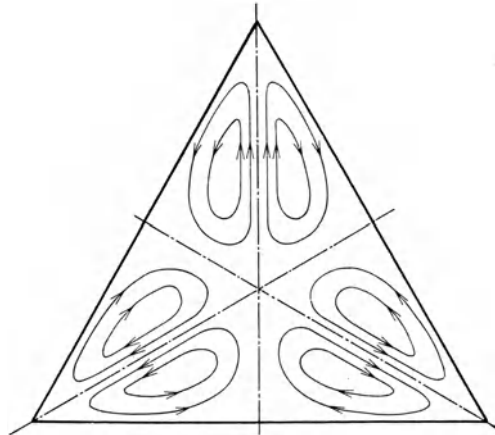


Abb. 122. Querströmung in geraden Rohren mit dreieckigem Querschnitt nach Untersuchungen von Nikuradse.

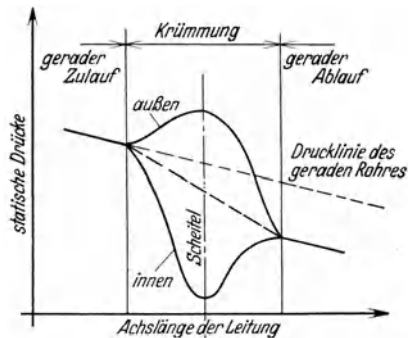


Abb. 123. Druckverteilung im Krümmer (ohne Rücksicht auf die Wirkung in dem anschließenden geraden Rohr).

<sup>1</sup> Nach J. Nikuradse: Turbulente Strömungen in nichtkreisförmigen Rohren. Ing.-Arch. Bd. 1 (1930) S. 306.

der Rohrquerschnitt im Krümmer, siehe Abb. 125, so liegt die Druckverteilung noch anders.

Nach den Strömungsvorgängen in der Grenzschicht bei erweiterten geraden Rohren neigen Stellen mit Druckanstieg zur Strahlablösung. Tatsächlich wurde auch in den mit Pfeilbogen angegebenen Gebieten (Abb. 125) Strahlablösung beobachtet<sup>1</sup>. An den Ablösungsstellen befindet sich die Flüssigkeit in kreisender Bewegung, die vom eigentlichen Strömungsvorgang ausgeschaltet ist.

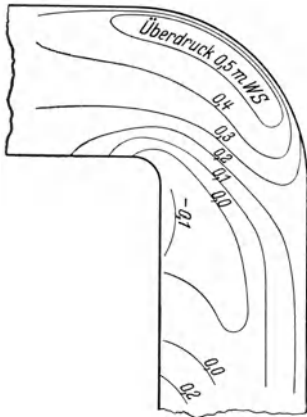


Abb. 124. Im Rohrkrümmer gemessene Druckverteilung nach Cordier<sup>4</sup>,  $w = 2,4 \text{ m/s}$ ,  $Re \sim 100000$ .

Durch die Querströmung liegt die größte Geschwindigkeit im Querschnitt gekrümmter Rohre nicht in der Achse, sondern mehr nach dem Krümmerscheitel zu. Abb. 126 a, b zeigen Linien gleicher Geschwindigkeit im Rohrquerschnitt nach Williams, Hubbell und Fenkell<sup>2</sup> und Nippert<sup>3</sup>. In Kreis- und Rechteckquerschnitten bilden sich ganz ähnliche Verteilungen aus, wobei das Höchstgeschwindigkeitsgebiet geschlossen ist, siehe Abb. 126 a, b und 127 a. Ist die Krümmung

aber sehr scharf, so ist nahezu der ganze Querschnitt mit langsam fließender Flüssigkeit ausgefüllt, und es bilden sich nur zwei Kuppen großer Geschwindigkeit aus (Abb. 127 b). An der Krümmeraußenseite herrscht starkes Geschwindigkeitsgefälle. Aus Abb. 128 erkennt man, wie

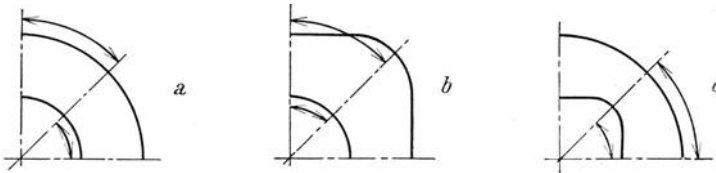


Abb. 125 a bis c. Pfeilbogen: Druckanstieg in Krümmern mit verschiedener Querschnittsfolge nach Nippert.

sich das Geschwindigkeitsprofil mit der Achslänge des Rohres ändert. Die größte Geschwindigkeit wandert nach der Krümmeraußenseite und nach der Krümmung wieder nach der Rohrmitte zurück. Nach v. Cordier<sup>4</sup>) bleiben Art der Druck- und Geschwindigkeitsverteilung an einer

<sup>1</sup> z. B. v. Cordier, Nippert, Richter: a. a. O.

<sup>2</sup> Williams, G. S., C. W. Fenkell u. G. H. Hubbell: a. a. O.

<sup>3</sup> Nippert, H.: a. a. O.

<sup>4</sup> v. Cordier, W.: Strömungsuntersuchungen an einem Rohrkrümmer. Dissertation Berlin 1910.

bestimmten Stelle des Krümmers bei wechselnder Reynoldsscher Zahl im wesentlichen unverändert.

Die Querbewegung wird nach den Krümmern im geraden Ablaufrohr allmählich wieder aufgehoben (siehe Abb. 128). Nach früherem

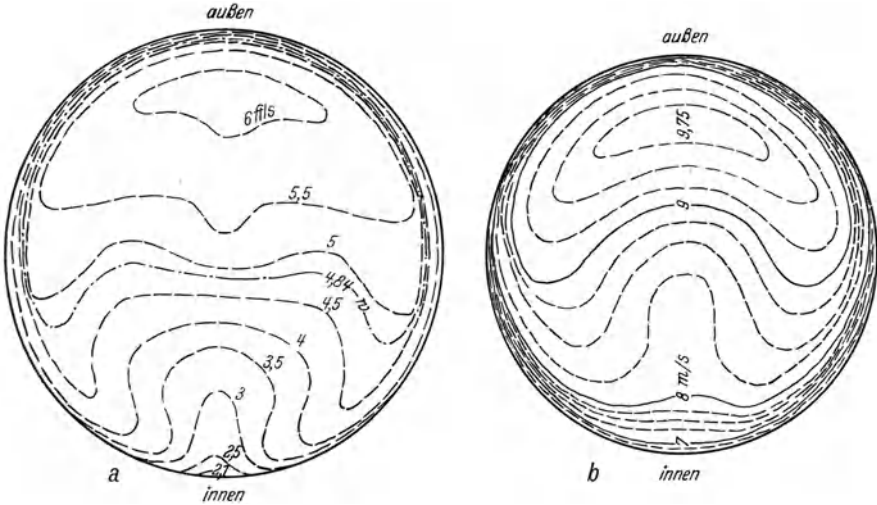


Abb. 126a, b. Geschwindigkeitsverteilung über den Querschnitt in gekrümmten Rohren nach Williams, Hubbell und Fenkell (Abb. 126a) und Nippert (Abb. 126b).

ist die nötige Rückbildungsstrecke von Krümmersströmung zu laminarer Strömung im geraden Rohr sehr groß. Bei Turbulenz sind etwa 50 Rohrdurchmesser anzusetzen. Zur Profilrückbildung bemerkt Nippert<sup>1</sup>: „Die Unterschiede in den Geschwindigkeiten sind unmittelbar hinter der Krümmung am größten, im weiteren Verlauf der Strömung werden sie langsam durch Geschwindigkeitsaustausch verringert. Das Gebiet der kleinsten Geschwindigkeit, das hinter der Krümmung unmittelbar an der Innenwand liegt,

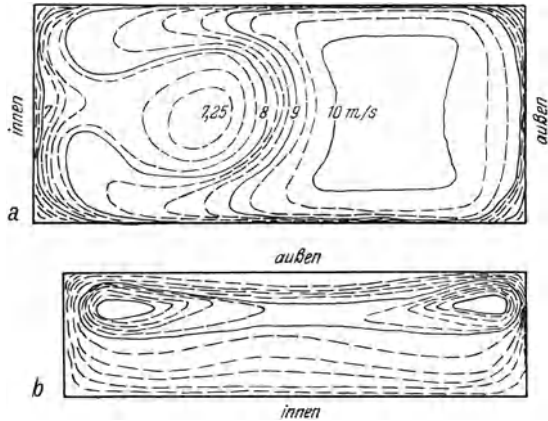


Abb. 127 a, b. Geschwindigkeitsverteilung in Hochkantkrümmern (Abb. 127a, sanfte Krümmung,  $\frac{e}{r} = 7$ ) und Flachkantkrümmern (Abb. 127b, sehr scharfe Krümmung, Knie) nach Nippert.

<sup>1</sup> Nippert, H.: a. a. O.

wird von den Ausläufern des Geschwindigkeitsmaximums, unterstützt durch die Drallwirkung des Doppelquerwirbels eingewickelt und in das Innere hineingedrängt. Hierdurch wird wiederum der Geschwindigkeits-

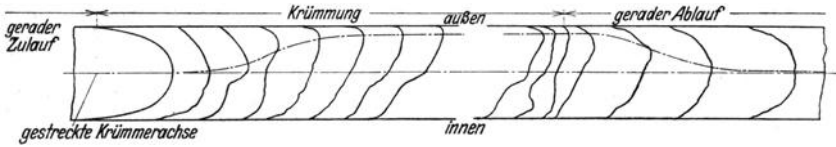


Abb. 128. Änderung des Geschwindigkeitsprofils mit der Achslänge in Krümmern nach Saph und Schoder<sup>1</sup>.

austausch beschleunigt und die Annäherung an das Geschwindigkeitsprofil für das gerade Rohr herbeiführt.“ Auch vor einem Krümmer setzt schon allmählich eine Umbildung der Strömung in die spätere Krümmerströmung ein. Bei turbulenter Strömung macht sich das, je nach Schärfe der Krümmung und Größe der Reynoldsschen Zahl, etwa bei 1 bis 2 Rohrdurchmesser, vor Krümmerbeginn bemerkbar.

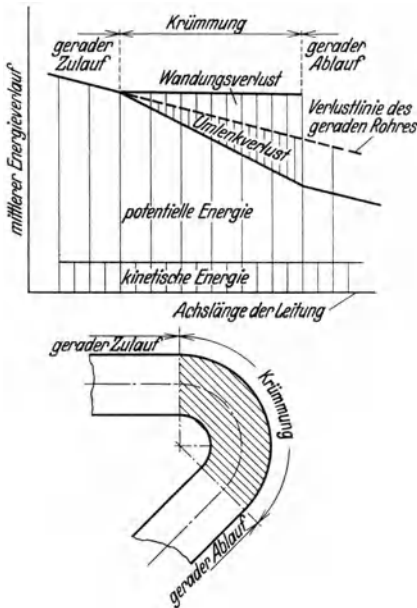


Abb. 129. Schematische Darstellung der Energieumwandlungen beim Fluß durch einen Krümmer (ohne Rücksicht auf die Wirkung in den anschließenden geraden Rohrstrecken).

**β) Druckabfall in gekrümmten**

**Rohren. 1. Turbulente Strömung in Krümmern.**

Neben dem geraden Rohr ist das (kreisförmig) gekrümmte das wichtigste Leitungselement. Es ist üblich, an Stelle mit der Widerstandszahl  $\lambda$  mit der Widerstandszahl  $\zeta$  zu rechnen. Dabei unterscheidet man rein formal zwischen Gesamt- und Umlenkungsverlust<sup>2</sup>. Mißt man den Druckverlust einmal im gekrümmten Rohr ( $\Delta P_{ges}$ ) und einmal in einem gleichartigen geraden Rohr mit derselben Achslänge ( $\Delta P$ ), so entfällt der Unterschied

$\Delta P_{ges} - \Delta P$  auf den Verlust durch Umlenkung im Krümmer ( $\Delta P_u$ ), siehe hierzu Abb. 129. Es werden also folgende Gleichungen angesetzt:

<sup>1</sup> Saph, A. V., u. E. W. Schoder: a. a. O. Trans. Amer. Soc. civ. Engr. Bd. 47 (1902) S. 295.

<sup>2</sup> Fritzsche O., und H. Richter: Beitrag zur Kenntnis des Strömungswiderstandes gekrümmter rauher Rohrleitungen. Mollier-Heft Forschg. Ing.-Wes. November 1933, Berlin.

$$\left. \begin{aligned} \text{Wandungsverlust } \Delta P &= \gamma \zeta \frac{w^2}{2g}, \\ \text{Umlenkungsverlust } \Delta P_u &= \gamma \zeta_u \frac{w^2}{2g} = \gamma (\zeta_{ges} - \zeta) \frac{w^2}{2g}, \\ \text{Gesamtverlust } \Delta P_{ges} &= \gamma \zeta_{ges} \frac{w^2}{2g} = \gamma (\zeta + \zeta_u) \frac{w^2}{2g}. \end{aligned} \right\} \quad (244)$$

Die Größe des Umlenkungsverlustes hängt ab von der Strahlablösung und der Querströmung. Genau genommen setzt sich der Wandungsverlust im Krümmer nicht nur aus der Wandreibung des geraden gleichlangen Rohres vom selben Baustoff, sondern noch aus der Änderung der Wandreibung infolge Änderung der Wandinnenbeschaffenheit bei Herstellung des Krümmers zusammen (z. B. Oberflächenänderung beim Biegen<sup>1</sup>).

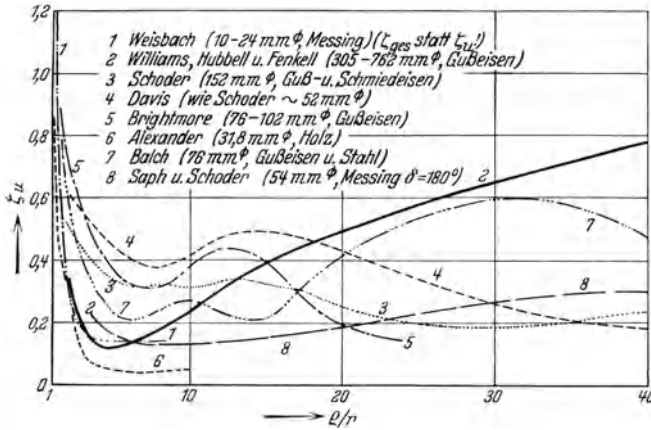


Abb. 130. Zusammenhang zwischen  $\zeta_u$  und  $q/r$  nach verschiedenen Forschern bei rechtwinkligen Krümmern.

Die Widerstandszahlen  $\zeta_u$  und  $\zeta_{ges}$  richten sich nach der Reynoldsschen Zahl  $Re$ , nach dem Krümmungsverhältnis  $q/r$ , nach dem Ablenkungswinkel  $\delta$  und nach der Rohrrauigkeit.

Den Zusammenhang der Werte  $\zeta_u$  mit dem Krümmungsverhältnis  $q/r$  zeigt Abb. 130<sup>2</sup>. Dort wurden verschieden raue Rohre aus

<sup>1</sup> Richter, H.: a. a. O. VDI-Forsch.-Heft Nr. 338.

<sup>2</sup> Weisbach, J.: Experimentalhydraulik S. 154. Freiberg 1855. Williams, G. S., C. W. Hubbell u. G. H. Fenkell: a. a. O. Saph, A. V., u. E. H. Schoder: An experimental study of the resistances to the flow of water in pipes. Trans. Amer. Soc. civ. Engr. Bd. 51 (1903) S. 253. Schoder, E.: Curve resistance in water pipes. Trans. Amer. Soc. civ. Engr. Bd. 62 (1909) S. 67. Davis, J. D.: On some experiments on curve resistance in water pipes. Trans. Amer. Soc. civ. Engr. Bd. 62 (1909) S. 97. Brightmore, A. W.: Loss of pressure in water flowing through straight and curved pipes. Minut. Proc. Instn. civ. Engr. Bd. 169 (1906/07) S. 315. Alexander, C. W. L.: The resistance offered to the flow of water in pipes by bends and elbows. Minut. Proc. Instn. civ. Engr. Bd. 159 (1905) S. 341. Balch, A.: Investigation of hydraulic curve resistance. Bull. Univ. Wisconsin Nr. 578. Madison 1913.

Messing, Gußeisen, Stahl und Holz mit 10 bis 762 mm  $\varnothing$  und  $\frac{\varrho}{r} = 1$  bis 40 untersucht. Es strömte Wasser ( $w = 0,01$  bis  $15,2$  m/s) und Luft ( $w = 10$  bis  $181$  m/s)<sup>1</sup>. Der Ablenkungswinkel betrug  $\delta = 90^\circ$  (außer bei Saph und Schoder,  $\delta = 180^\circ$ ). Nach Weisbachs Versuchsniederschrift konnte nur der Wert  $\zeta_{ges}$  aufgetragen werden, der aber praktisch unter  $\frac{\varrho}{r} = 5$  mit  $\zeta_u$  zusammenfällt.

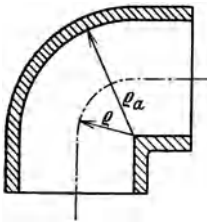


Abb. 131. Schärfster Krümmer mit  $\frac{\varrho}{r} = 1$ , mit Innenradius  $e_i = 0$  und Außenradius  $e_a = d$ .

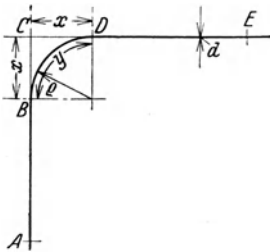


Abb. 132. Längenbezeichnungen beim Krümmer.

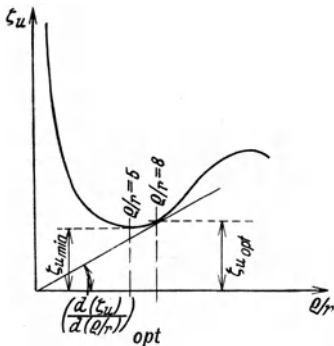


Abb. 133. Widerstandszahl  $\zeta_u$  über Krümmungsverhältnis  $\varrho/r$  für rechtwinklige Krümmer.

Die Darstellung beginnt mit  $\frac{\varrho}{r} = 1$ : Die schärfste Krümmung, die wir noch als Krümmer bezeichnen wollen, hat das Verhältnis  $\frac{\varrho}{r} = 1$ , siehe Abb. 131.

Im wesentlichen steigen in Abb. 130 die ermittelten  $\zeta_u$ -Werte nach Erreichen eines Kleinstwertes bei  $\frac{\varrho}{r} = 4$  bis 6 wieder an und nähern sich schließlich — manchmal nach mehrmaligem Auf- und Abschwanken — dem Wert Null. (Für  $\frac{\varrho}{r} \rightarrow \infty$ , gerades Rohr, muß  $\zeta_u \rightarrow 0$  gehen.)

Es bietet also z. B. die sanftere Krümmung mit  $\frac{\varrho}{r} = 10$  einen größeren Umlenkungswiderstand als die schärfere mit  $\frac{\varrho}{r} = 5$ . Dazu ist

allerdings zu bemerken, daß der geringste Druckabfall in Krümmern nicht genau bei dem Verhältnis  $\varrho/r$  auftritt, wo die Widerstandszahl  $\zeta_u$  einen Kleinstwert annimmt. Nach Abb. 132 erhält man z. B. den Gesamtverlust in einem rechtwinkligen Krümmer zwischen den Stellen A und E in

$$\frac{\Delta P_{ges}}{\gamma} = \left[ \frac{\lambda_R}{d} \left( AC + CE - 2\varrho + \frac{\pi}{2} \varrho \right) + \zeta_u \right] \frac{w^2}{2g}$$

Mit Rücksicht auf Abb. 133 gilt für den mindesten Druckverlust

$$\frac{d(\Delta P_{ges}/\gamma)}{d(\varrho/r)} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d(\zeta_u)}{d(\varrho/r)} = \lambda_R \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right).$$

Damit ist das günstigste Krümmungsverhältnis nicht 5, sondern etwa 8.

<sup>1</sup> Den in Abb. 130 wiedergegebenen Versuchskurven liegen Mittelwerte der Messungen zugrunde.



Eine sehr schöne, wenn auch theoretisch nicht haltbare Erklärung für die Form der Kurve  $\zeta_u$  über  $q/r$ , nämlich daß  $\zeta_u$  mit wachsendem  $q/r$  nach Art einer gedämpften Schwingung abklingt, gab Eustice<sup>1</sup>. Er untersuchte einige 90°-Krümmer mit 50,8 bis 152,4 mm  $\varnothing$  und  $\frac{q}{r} = 5$  bis 60. In Abb. 134 wurden die hydraulisch äquivalenten geraden Rohrlängen  $l'$  (oder  $\zeta_u$ ) über  $q/r$  aufgetragen. Eustice beobachtete nun die (tatsächlich anders vor sich gehende) Reflexion der anfangs innen fließenden Flüssigkeit. Im ungünstigsten Falle muß sie im Krümmerendquerschnitt gerade noch einmal reflektiert werden (Höchstwert von  $\zeta_u$  bei  $\frac{q}{r} = 13,9; 39,8 \dots$ ). Im günstigsten Falle kann sie den Endquerschnitt in Richtung der anschließenden geraden Rohrstrecke verlassen (Kleinstwert von  $\zeta_u$  bei  $\frac{q}{r} = 5,8; 25,4; 57,8 \dots$ ). Es ist wahrscheinlich, daß bei den wirklichen Strömungsvorgängen im Krümmer derartige Reflexionen eine gewisse Rolle mitspielen. Die Kurven von Brightmore und Schoder in Abb. 130 z. B. stimmen mit der Erklärung von Eustice gut überein.

Neuerdings untersuchte Nippert<sup>2</sup> die Strömungsvorgänge in Flußstahlkrümmern ( $q/r$  bis 7,  $\delta = 90^\circ$  und  $180^\circ$ ) mit Rechteck- und Kreisquerschnitt. Dabei wurde auch der Einfluß der Querschnittsänderung beobachtet (siehe Abb. 125 a bis c), um möglichst günstige Krümmerformen zu entwickeln. Es zeigte sich ganz allgemein, daß die Strömungsverluste herabgesetzt werden können, wenn man einen großen Krümmungsradius  $q_i$  vorsieht und die Rohrweite im Krümmerscheitel vergrößert (Abb. 125 b). Ferner soll Breite zu Höhe im Rechteckquerschnitt etwa 1 zu 2 sein (Abb. 121). Weisbach schlug ein anderes Mittel zur Verminderung des Strömungswiderstandes in Krümmern vor: Einbau dünner Scheidewände in die Krümmerachsebene (Einschränkung der Doppelquerströmung). Diese Anregung wurde in neuerer Zeit mehrfach beachtet<sup>3</sup>.

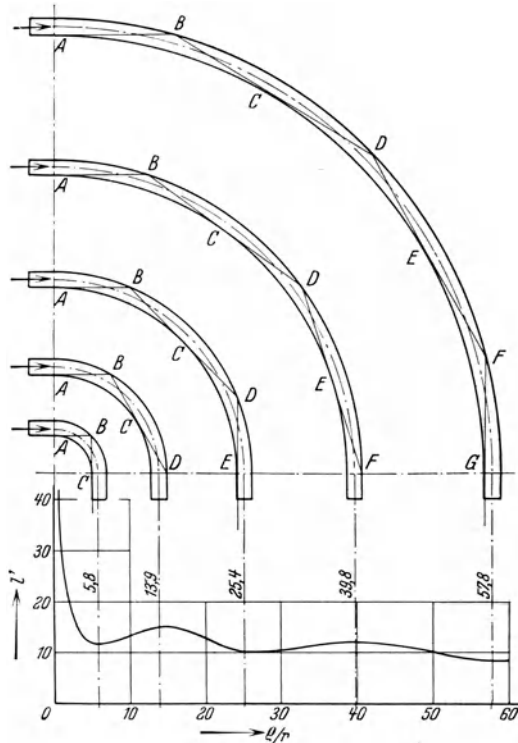


Abb. 134. Erklärung für das Auftreten von Kleinst- und Höchstwerten der Kurve  $l'$  (oder  $\zeta_u$ ) über  $q/r$  nach Eustice.

<sup>1</sup> Eustice, J.: Flow of fluids in curved passages. Engineering Bd. 120 (1925) S. 604. — Wat. & Wat. Engng. 1924 S. 270.

<sup>2</sup> Nippert, H.: a. a. O.

<sup>3</sup> Siehe z. B. Escher Wyss Mitt. Bd. 4 (1931) S. 84; Z. VDI Bd. 72 (1928) S. 1867.

Der Ablösungs- oder Formwiderstand hängt von der Größe der Fliehkraft oder der Drucksteigerung (Pfeilbogen Abb. 125) ab. Die

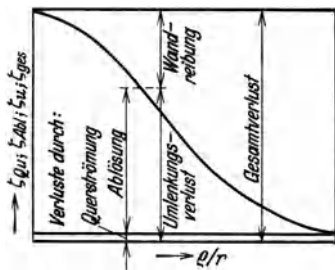


Abb. 135. Anteil von Wandungs-, Umlenkungs-, Ablösungs- und Querströmungsverlust am Gesamtverlust in Krümmern nach Nippert.

Querströmung, die nur einen geringen Anteil am Gesamtverlust ausmacht (1 bis 2, höchstens bis  $10 \sqrt{vH}$ )<sup>1</sup>, richtet sich nach der Form des Zuströmprofils. Sie ist um so heftiger, je größer  $w/w_{\text{max}}$  und der Absolutbetrag der Geschwindigkeiten ist. Es gelang Nippert, die einzelnen Verluste angenähert in ihrer verhältnismäßigen Zusammensetzung zu erfassen. In Abb. 135 wurde die Widerstandszahl für den Gesamtverlust ( $\zeta_{\text{ges}}$ ), Wandungsverlust ( $\zeta$ ), Umlenkungsverlust

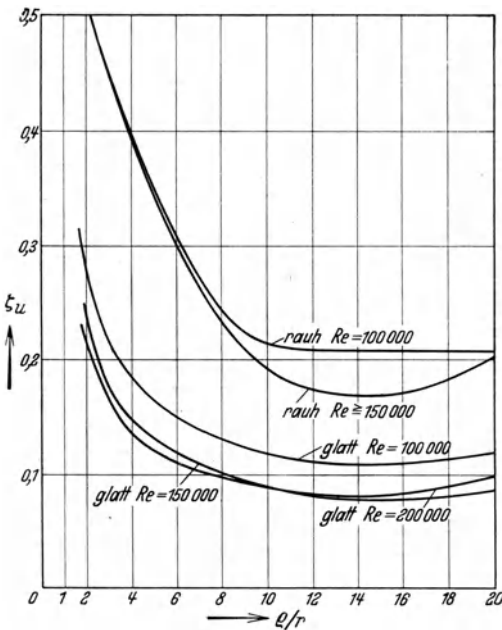


Abb. 136. Widerstandszahl  $\zeta_u$  in sehr glatten und sehr rauhen rechtwinkligen Krümmern in Abhängigkeit vom Krümmungsverhältnis und von der Reynoldsschen Zahl nach Hofmann.

( $\zeta_u$ ), Ablösungsverlust ( $\zeta_{\text{Abi}}$ ) und Querströmungsverlust ( $\zeta_{\text{Qu}}$ ) aufgetragen.  $\zeta_{\text{Qu}}$  ist sehr klein und bei unveränderlicher Strömungsgeschwindigkeit nahezu unabhängig von  $q/r$ .  $\zeta$  für den Wandungsverlust beim Knie (dargestellt mit  $\frac{q}{r} = 0$ ) ist  $= 0$ , während bei großem  $q/r$  der Ablösungsverlust allmählich verschwindet.

Einige sehr sorgfältige Versuche über den Zusammenhang zwischen Strömungswiderstand und Krümmungsverhältnis stammen von Hofmann<sup>2</sup>. Er untersuchte mehrere sehr glatte Bronzekrümmern ( $D = 43 \text{ mm } \varnothing$ ,  $Re = 1$  bis  $2 \text{ mal } 10^5$ ,  $\frac{q}{r} = 2$  bis  $20$ ,

$\delta = 90^\circ$ ), die zwischen glatte gerade Messingrohre eingebaut waren. Später gab er diesen Rohren mit einem Anstrich aus Ölfarbe und

<sup>1</sup> Lell, J.: Beitrag zur Kenntnis der Sekundärströmungen in gekrümmten Kanälen. Dissertation Darmstadt 1913.

<sup>2</sup> Hofmann, A.: Der Verlust in  $90^\circ$ -Rohrkrümmern mit gleichbleibendem Kreisquerschnitt. Mitt. Hydraul. Inst. T. H. München 1929 Heft 3 S. 45.

Sand eine sehr große Rauigkeit. Der Druckverlust in technisch rauhen Rohren muß nun zwischen dem in sehr glatten und dem in sehr rauhen Krümmern gemessenen liegen.  $(\zeta_u)_{\text{rauh}}$  war etwa doppelt so groß wie  $(\zeta_u)_{\text{glatt}}$ , siehe Abb. 136, während in den geraden Anschlußrohren  $(\zeta_u)_{\text{rauh}}$  nur etwa das 1,5fache von  $(\zeta_u)_{\text{glatt}}$  war. Das Minimum von  $\zeta_u$  lag erst bei  $\frac{\rho}{r} = 14$  bis 16. Praktisch kann man nach Abb. 136 schon von  $Re = 150\,000$  ab  $\zeta_u$  als unabhängig von der Reynoldsschen Zahl  $Re$  betrachten.

Über die Abhängigkeit der Werte  $\zeta_u$  vom Ablenkungswinkel  $\delta$  bei  $\frac{\rho}{r} = 4$  bis 8 berichten

die in Abb. 137 dargestellten Versuche von Du Buat<sup>1</sup> und Bouchayer<sup>2</sup>, deren Ergebnisse auch durch zahlreiche andere Versuche belegt werden können. Neuerdings entwarf Wasielewski Diagramm Abb. 138<sup>3</sup>. Danach scheint die Funktion

$$\zeta_u = f(\delta, \rho/r)$$

außerordentlich verwickelt zu sein.

Eine rechnerische Erfassung der Widerstandsgesetze der Krümmen ist sehr schwierig. Immerhin gelang es in neuerer Zeit, z. B. Lorenz<sup>4</sup>, brauchbare Näherungsrechnungen durchzuführen. Seinem Ansatz lag das 2. Kepler'sche Gesetz zugrunde, was für reibungslose Flüssigkeiten genau

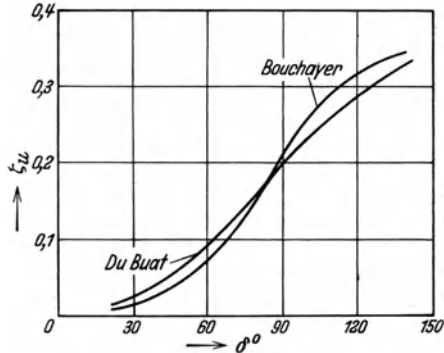


Abb. 137. Zusammenhang zwischen Widerstandszahl  $\zeta_u$  und Ablenkungswinkel  $\delta$  nach Du Buat und Bouchayer (nach Nippert).

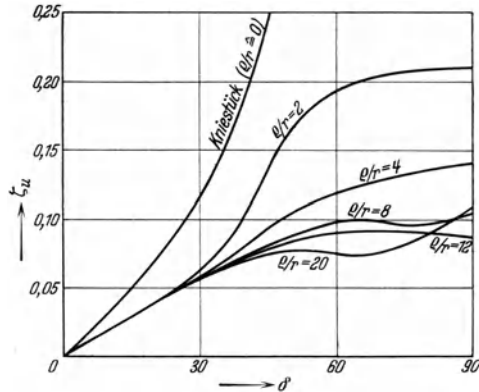


Abb. 138. Zusammenhang zwischen Widerstandszahl  $\zeta_u$  und Ablenkungswinkel  $\delta$  bei verschiedenen Krümmungsverhältnissen  $\rho/r$  nach Wasielewski.

<sup>1</sup> Du Buat, L. G.: Principes d'Hydraulique . . . Paris 1786.

<sup>2</sup> Bouchayer, A.: Les pertes des charges dans les conduites coudes et embranchements. Engineering Bd. 120 (1921) S. 241.

<sup>3</sup> Wasielewski, R.: Verluste in glatten Rohrkrümmern mit kreisrundem Querschnitt bei weniger als 90° Ablenkung. Mitt. Hydraul. Inst. T. H. München 1932 Heft 5.

<sup>4</sup> Lorenz, H.: Die Energieverluste in Rohrerweiterungen und Krümmern. Z. ges. Kälteind. Bd. 36 (1929) S. 129; Stodola-Festschrift S. 308. Zürich u. Leipzig 1929; Physik. Z. Bd. 30 (1929) S. 228.

gelten würde<sup>1</sup>. Er fand

$$\zeta_u = \left( \frac{r}{\varrho} + \frac{\pi \varepsilon \varrho}{2 r} \right) \frac{\delta^0}{90} \quad (245)$$

wobei  $\varepsilon$  die Rauigkeitszahl  $e/r$  des gleichartigen geraden Rohres bedeutet. Für mittelraue 90°-Krümmer ist nach dieser Gleichung

bei $\frac{\varrho}{r} = 1$	2	4	6	8	10
$\zeta_u = 1,0$	0,53	0,31	0,26	0,25	0,26

was etwa mit den Angaben von Balch, Brightmore und Schoder (Abb. 130) übereinstimmt.

Der Umlenkungsverlust hat denselben Charakter wie der Gesamtverlust. Beide sind derselben Potenz von  $Re$  verhältnisgleich und haben bei nahezu demselben Verhältnis  $\varrho/r$  Größt- oder Kleinstwerte<sup>2</sup>.

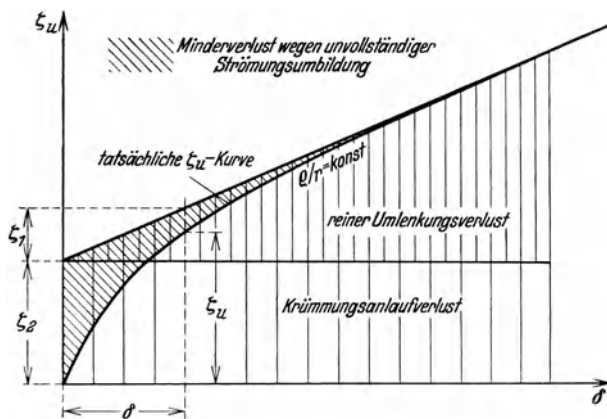


Abb. 139. Zum „reinen Umlenkungsverlust“ in gekrümmten Rohren.

Für raue Rohre müssen etwa  $50 \varnothing$  und für glatte bis zu  $200 \varnothing$  Rückbildungsstrecke für die Strömungen (Beruhigungsstrecke) nach dem Krümmer angesetzt werden.

2. Turbulente Strömung in Rohrschlangen. Über die Strömungsvorgänge in Rohrschlangen unternahm der Verfasser Versuche mit einem Gummidruckschlauch, der in Schlangenwindungen verschiedenen Durchmessers, verschiedener Zahl und verschiedener Windungshöhe verlegt wurde<sup>3</sup>. Trägt man  $\zeta_u$  über dem Ablenkungswinkel  $\delta$  auf (je Windung  $360^\circ$ ), so geht die Kurve bald in eine Gerade über (siehe Abb. 139). Fließt eine Flüssigkeit lange genug in einem unveränderlich kreisförmig gekrümmten Rohre, so wird schließlich die

<sup>1</sup> Nach dem zweiten Keplerschen Gesetz ist das Produkt aus Krümmungsradius und Geschwindigkeitskomponente senkrecht zum Radius (Tangentialgeschwindigkeit) von unveränderlicher Größe.

<sup>2</sup> Schoder, E., C. W. L. Alexander u. H. Richter: a. a. O.

<sup>3</sup> Bisher unveröffentlicht.

Umbildung der Geschwindigkeitsverteilung, wie sie sich im geraden Zuflußrohr eingestellt hatte, zu einer endgültigen im gekrümmten Rohr vollzogen sein. Den Druckverlust, der dann eintritt, wenn sich das Geschwindigkeitsprofil im gekrümmten Rohre nicht mehr ändert, wollen wir mit „reinem Umlenkungsverlust“ bezeichnen. Die Kenntnis der Energieänderung bei dieser „reinen Krümmerströmung“ ist für die theoretische Behandlung des Krümmerproblems von großem Wert.

Bewegt sich eine raumbeständige (oder nahezu raumbeständige) Flüssigkeit in einer beliebig geformten Bahn, ohne daß sich die Geschwindigkeitsverteilung über den Querschnitt mehr ändert, so ist der Druckverlust der Bahnlänge proportional. Ebenso wie bei der Strömung im geraden Rohr ein Anlaufeffekt zu beachten ist<sup>1</sup>, gibt es beim Krümmer einen Krümmungsanlaufeffekt. Die zugehörige Anlaufstrecke, für die die früher beschriebenen Einflüsse auch gelten, hat je nach Krümmungsverhältnis  $q/r$  eine verschiedene Länge  $\frac{l_a}{d} = \pi \cdot \frac{q}{r} \cdot \frac{\delta_a^0}{360}$ . Bei kleinem  $q/r$  ist dabei  $\delta_a \sim 360^\circ$ , bei großem  $\delta_a \sim 90^\circ$ . Für die reine Krümmerströmung gilt  $\zeta_{ges} = \lambda_{ges} \frac{l_k}{d}$  und  $\zeta_u = \lambda_u \frac{l_k}{d}$ , wobei  $\lambda_{ges}$  und  $\lambda_u$  unveränderlich, also  $\zeta_{ges}$  und  $\zeta_u$  proportional  $l_k$  ( $l_k$  Krümmerlänge) oder  $\delta$  sind.

Nach dieser Auffassung kann man  $\zeta_u$  zerlegen in  $\zeta_u = \zeta_1 + \zeta_2$ . In  $\zeta_1$  steckt der reine Umlenkungsverlust  $P_1 = \gamma \zeta_1 \frac{w^2}{2g}$ . Die Gerade von Abb. 139 ist die Kurve für den reinen Umlenkungsverlust. Der Ordinatenabschnitt  $\zeta_2$  gibt den Krümmungsanlaufeffekt  $P_2 = \gamma \zeta_2 \frac{w^2}{2g}$ . Zu jedem bestimmten  $q/r$ ,  $Re$ ,  $e/r$  und  $F/U$  gehört eine bestimmte Kurve  $\zeta_u$  über  $\delta$  und bestimmtes  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$ . Mit Zahlentafel 36 kann man sich leicht die Kurve  $\zeta_u$  über  $\delta$  für  $\delta = 45$  bis  $180^\circ$  und daran jene Gerade zeichnen, wenn man für den besonderen Fall einer Rohrschlange die Größen  $q/r$ ,  $Re$ ,  $e/r$ ,  $F/U$  und  $l_k$  (oder  $\delta$ ) kennt. Der Einfluß der Windungshöhe auf den Strömungswiderstand kann vollständig vernachlässigt werden.

Für das in Abb. 139 eingezeichnete Beispiel eines  $90^\circ$ -Krümmers war  $\zeta_1 = 0,33 \zeta_u$  und  $\zeta_2 = 0,78 \zeta_u$ , also  $\zeta_1 + \zeta_2 = 1,11 \zeta_u$  oder um 11 vH größer als  $\zeta_u$ . Das liegt daran, daß die Krümmungsanlaufstrecke länger als die Krümmerlänge  $l_k$  war. Tatsächlich wurden für den Anlaufeffekt nur  $100 - 33 = 67$  vH statt 78 vH verbraucht, denn die Umbildung der Strömung im geraden Rohr in die reine Krümmerströmung war noch nicht vollständig vollzogen. Erst von  $\delta = 315^\circ$  ab herrschte reine Krümmerströmung.

<sup>1</sup> Siehe Abschnitt: Vorgänge bei der Ausbildung der turbulenten Strömung in geraden Rohren.

Bewegt sich eine zusammendrückbare Flüssigkeit durch Krümmer oder Rohrschlangen, so gilt

$$\Delta P = \int (\lambda_R + \lambda_B + \lambda_u) \frac{\gamma}{d} \frac{w^2}{2g} dl = \int (\lambda_R + \lambda_B) \frac{\gamma}{d} \frac{w^2}{2g} dl + \int \zeta_u \gamma \frac{w^2}{2g} \frac{dl}{l}. \quad (246)$$

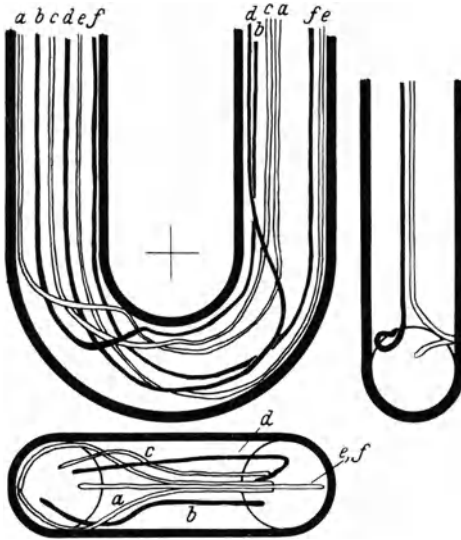


Abb. 140. Fahrt von gefärbten Wasserfäden durch Glaskrümmer bei Fadenströmung nach Eustice.

$\lambda_B$  ist unabhängig von der Form der Leitung.

3. Strömung in Krümmern bei kleinen Reynoldsschen Zahlen. Über die Art der Geschwindigkeitsverteilung in Krümmern bei kleinen Reynoldsschen Zahlen unterrichteten Versuche von Eustice<sup>1</sup>, der fadenweise gefärbtes Wasser durch Glaskrümmer mit Kreisquerschnitt schickte und die Fahrt der gefärbten Fäden beobachtete (Abb. 140). Beim Durchgang durch Krümmer mit sehr gestrecktem Querschnitt blieb die Geschwindigkeitsverteilung ungeändert

(Abb. 141)<sup>2</sup>. Da sich die gefärbten Fäden nicht mit der übrigen Flüssigkeit mischten, muß es auch in gekrümmten Rohren neben der turbulenten eine Fadenströmung geben. Bei einer bestimmten Übergangszahl  $Re$  geht die Fadenströmung in turbulente über.

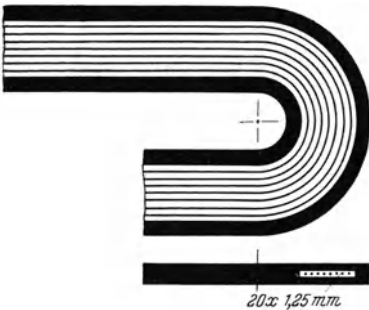


Abb. 141. Strömung in gekrümmten Rohren mit sehr gestrecktem Querschnitt bei kleiner Reynoldsscher Zahl nach Eustice.

Die Doppelquerströmung tritt bei Fadenströmung genau so wie bei Turbulenz in Krümmern auf. Man hat daher ein vorzügliches Mittel, um den Mechanismus der Querströmung zu studieren, wenn man einzelne Flüssigkeitsfäden einer laminaren Strömung färbt und ihren Lauf beobachtet.

Zur überschlägigen Beurteilung<sup>3</sup> des Strömungsvorganges bei parabolischer Geschwindigkeitsverteilung im Zuflußrohr (Laminarströmung) kann man für den

<sup>1</sup> Eustice, J.: a. a. O.

<sup>2</sup> Siehe auch die Arbeiten von Hele-Shaw und Wyzomirski: a. a. O.

<sup>3</sup> Nach W. R. Dean: The stream-line motion of fluid in a curved pipe. Philos.

Fall  $\varrho \gg r$  kommen, wenn man bedenkt, daß der durch Fliehkraftwirkung im Krümmer bedingte Druck nach außen dem bei der Querströmung wirkenden Druck das Gleichgewicht halten muß. Bei parabolischer Verteilung ist  $w_{i\max} = 2w$  und der Kraftanstieg im Achsfaden für die Raumeinheit  $(2w)^2 \gamma / \varrho g$ . In der Randschicht werden bei den kleinen Geschwindigkeiten nur kleine Zentrifugalkräfte ausgelöst. Die gesamte Fliehkraftwirkung möge durch

$$(P_a - P_i)b = \frac{(2r)^2}{4} \frac{(2w)^2}{\varrho} \frac{\gamma}{g} = 4 \frac{\gamma}{g} w^2 \frac{r}{\varrho} r$$

je Längeneinheit ersetzt werden, siehe Abb. 142. Dieser Kraftunterschied wirkt sich, da in den seitlichen Randgebieten entsprechende Kräfte fehlen, zur Querströmung aus. Nach Abb. 142 kann man die dabei wirkenden Kräfte grob abschätzen. Die nach außen und zurückströmenden Fäden reiben aneinander, wobei eine Schubspannung  $\tau$  zweimal und damit eine nach innen gerichtete Kraft je Längeneinheit von  $2\tau \cdot 2r$  auftritt, die der Kraft  $(P_a - P_i)b$  das Gleichgewicht hält. Dabei ist mit

$$a \sim \frac{r}{2} \text{ und } b = r$$

$$\tau = \mu \frac{\partial w}{\partial x} \sim \mu \frac{2w_x}{a} \sim \mu \frac{4w_x}{r},$$

$$2\tau \cdot 2r = 16 \mu w_x = 4 \frac{\gamma}{g} w^2 \frac{r}{\varrho} r$$

oder

$$\frac{w_x}{w} = \frac{1}{4} \frac{wr}{\nu} \frac{r}{\varrho} = \frac{1}{8} Re \frac{r}{\varrho}. \quad (247)$$

Man erkennt daraus, daß für den Strömungsvorgang die Dimensionslosen  $Re$  und  $\varrho/r$  maßgebend sind.

White<sup>1</sup> stellte auf Grund eigener Versuche ( $D = 6,3$  bis  $29,8$  mm,  $\frac{\varrho}{r} = 15$  bis  $2050$ ,  $Re = 0,06$  bis  $41000$ ) mit Öl und Wasser und Versuchen von Grindley und Gibson<sup>2</sup> ( $D = 3,17$  mm,  $\frac{\varrho}{r} = 112$ ,  $Re = 25$  bis  $1400$ ) mit Luft fest, daß man für den Widerstand bei Fadenströmung in gekrümmten Rohren ansetzen kann:

$$\frac{\Delta P}{\gamma} = \varphi \left( \frac{\Delta P}{\gamma} \right)_{laminar} = 32 \varphi \frac{w \nu l}{d^2 g}, \quad (248)$$

wobei nach Gl. (247) die Vorzahl  $\varphi = f\left(Re, \frac{r}{\varrho}\right)$  genauer  $f\left(Re \cdot \sqrt{\frac{r}{\varrho}}\right)$  ist. Abb. 143 zeigt die Versuchskurven. Für schwache Krümmung und sehr kleine Reynoldssche Zahl gilt das Gesetz der Laminarströmung ( $\varphi = 1$ ). Bei größerem  $Re \cdot \sqrt{\frac{r}{\varrho}}$  wird  $\varphi > 1$ . Die ausgezogene Stamm-

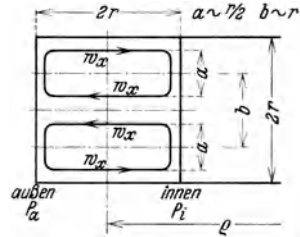


Abb. 142. Zur überschlägigen Beurteilung der Krümmerströmung, zur Vereinfachung quadratischer Querschnitt.

Mag. (7) Bd. 4 (1927) S. 208; (7) Bd. 5 (1928) S. 673. L. Prandtl: Abriß der Strömungslehre S. 120. Braunschweig 1931.

<sup>1</sup> White, C. M.: Streamline flow through curved pipes. Proc. Roy. Soc., Lond. (A) Bd. 123 (1929) S. 645.

<sup>2</sup> Grindley, H., u. H. A. Gibson: Flow of air through curved pipes. Proc. Roy. Soc., Lond. (A) Bd. 80 (1907) S. 114.

kurve gilt zunächst für alle Krümmenströmungen. Von bestimmten Stellen ab, und zwar um so eher, je größer das Krümmungsverhältnis  $\varrho/r$  ist, zweigt die Versuchskurve von der Stammkurve ab. Die Abzweigstelle meldet den Eintritt der Turbulenz. Danach geht Fadenströmung um so eher in turbulente über, je größer  $\varrho/r$  ist, d. h. je schärfer der Krümmer gebogen ist, um so stabiler ist auch die Fadenströmung<sup>1</sup>. Dieses Ergebnis war von vornherein nicht zu erwarten.

Für  $Re \cdot \sqrt{\frac{r}{\varrho}} < 10$  ist  $\varphi \approx 1$ , siehe Abb. 143. Bei  $100 < Re \cdot \sqrt{\frac{r}{\varrho}} < 2000$  gilt etwa die Näherungsformel

$$\varphi = 0,29 \left( Re \cdot \sqrt{\frac{r}{\varrho}} \right)^{0,36}.$$

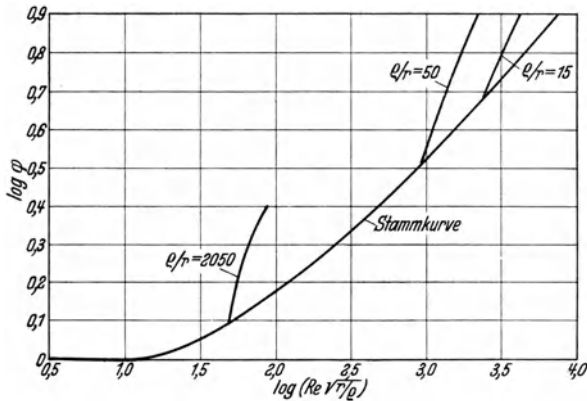


Abb. 143. Zum Fadenströmungswiderstand in gekrümmten Rohrleitungen. Abhängigkeit der Vorzahl  $\varphi$  von der Kenngröße  $Re \sqrt{r/\varrho}$ , nach White.

Etwas weniger scharf paßt für  $Re \sqrt{\frac{r}{\varrho}} > 10$  die Formel

$$\varphi = 0,37 \left( Re \cdot \sqrt{\frac{r}{\varrho}} \right)^{0,36},$$

so daß zur Berechnung des Druckverlustes bei Fadenströmung etwa angesetzt werden kann

$$\Delta H + \frac{\Delta P}{\gamma} = 32 \frac{w v l}{d^2 g} 0,37 \left( Re \cdot \sqrt{\frac{r}{\varrho}} \right)^{0,36}. \quad (249)$$

<sup>1</sup> Die gleichen Beobachtungen machte: G. J. Taylor: The criterion for turbulence in curved pipes. Proc. Roy. Soc., Lond. (A) Bd. 124 (1929) S. 243. Der Verf. fand dagegen (VDI-Forsch.-Heft Nr. 338 S. 14) an einem glatten Kupferrohrkrümmer ( $D = 20$  mm,  $Re = 700$  bis  $10000$ ,  $\varrho/r = 95,5$  und  $\delta = 90^\circ$ ), daß die Fadenströmung in Krümmern weniger stabil als in geraden Rohren ist. Auch wurde dort  $\varphi = 1,777$  als nahezu unabhängig von  $Re$  gefunden, doch war der Versuchsbereich zu beschränkt und waren die Messungen nicht scharf genug, um genügend sichere Feststellungen zu gestatten.



In diesen Gleichungen kommt der Ablenkungswinkel  $\delta$  nur in  $l$  vor, weil sie nach Versuchserfahrungen mit mehrfach gewundenen Rohrschlangen aufgestellt wurden, wo zwischen den Druckmeßstellen nahezu reine Krümmerströmung herrschte. An sich müßten bei nicht zu langen gekrümmten Rohren noch der Krümmungsanlauf- und -ablauffekt berücksichtigt werden; er ist aber vermutlich unmeßbar gering.

### b) Strömung in Knierohren.

Die Strömung durch Knierohre verläuft ganz ähnlich wie die durch gekrümmte Rohre, nur löst sich hier der Strahl noch stärker als in Krümmern ab und erfährt dadurch einen größeren Widerstand.

Die ersten Messungen führte Weisbach<sup>1</sup> aus; ihre Ergebnisse gelten auch heute noch als zutreffend. Er ließ Wasser und Luft durch Kniestücke aus Messing strömen ( $D = 10$  bis  $24,4$  mm,  $\delta = 90^\circ$  und andere Winkel,  $w = 0,2$  bis  $11,9$  m/s bei Wasser und  $6$  bis  $140$  m/s bei Luft)<sup>2</sup>. Bei Kniestücken ist  $\zeta_{ges} = \zeta_u = \zeta$ . Für  $\zeta$  gab er die Gleichung an

$$\zeta = 0,946 \sin^2 \frac{\delta}{2} + 2,047 \sin^4 \frac{\delta}{2}, \quad (250)$$

wobei  $\delta$  wie bisher den Ablenkungswinkel bedeutet, siehe Abb. 145c. Die zeichnerische Gestalt der Funktion  $\zeta = f(\delta)$  zeigt Abb. 144. In Zahlentafel 25 stehen Werte der Gl. (250).

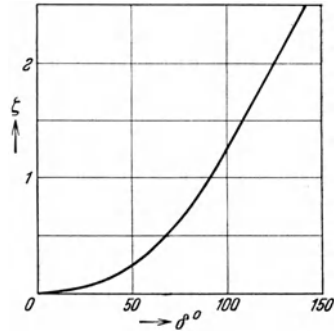


Abb. 144. Zusammenhang zwischen Widerstandszahl  $\zeta$  und Ablenkungswinkel  $\delta$  bei Kniestücken nach Weisbach.

Zahlentafel 25.  $\zeta$ -Werte für Kniestücke nach Weisbach.

$\delta =$	20°	40°	60°	80°	90°	100°	110°	120°	130°
$\zeta =$	0,046	0,139	0,364	0,740	0,984	1,26	1,56	1,86	2,16

Beim rechtwinkligen Knie ist  $\zeta \sim 1$ , d. h. der Druckverlust  $\sim$  eine Geschwindigkeitshöhe. Diese Zahlen sind Mittelwerte; für kleinere Durchmesser als 10 mm sind sie zu klein, für größere als 25 mm zu groß. Gleichungen zur Berechnung des Verlustes nach Borda-Carnots Satz über den Stoßverlust kann man nicht ansetzen, da die wirkliche Strömung wegen der Ablöserserscheinungen nahezu stoßfrei verläuft. Solche Gleichungen würden viel zu hohe Verluste ergeben<sup>3</sup>. Tatsächlich formt sich die Flüssigkeit selbst einen Krümmer, siehe Abb. 145a—c. Brightmore<sup>4</sup> bestimmte für 90°-Kniee aus Gußeisen von 76,2 und 101,6 mm  $\varnothing$   $\zeta$  zu 1,17. Weisbachs Werte sind wahrscheinlich alle um 5 bis 20 vH zu klein, weil er den Druckverlust nicht genügend weit vor und nach den Versuchsstücken bestimmte und daher den Verlust bei der Rückbildung der Strömung nach dem Knie

<sup>1</sup> Weisbach, J.: a. a. O.

<sup>2</sup> Die Versuche mit anderen Knien als  $\delta = 90^\circ$  und größeren Durchmessern als 24,4 mm wurden nicht veröffentlicht. Die Versuchsstücke befinden sich noch in der Weisbach-Sammlung an der Sächsischen Bergakademie Freiberg.

<sup>3</sup> Siehe die Versuche von D. Banki: Energieumwandlungen in Flüssigkeiten I S. 172ff. Berlin 1921.

<sup>4</sup> Brightmore: a. a. O.

nicht vollständig mit erfaßte. Die Formel von Gibson<sup>1</sup>

$$\zeta = 67,6 \cdot 10^{-6} \delta^{2,17} \quad (251)$$

gibt brauchbare Werte für technisch rauhe Knie. Bei  $\delta = 45^\circ$  ist  $\zeta$  nach Gibson um rund 43 vH größer als nach Weisbach, bei  $\delta = 90^\circ$  um rund 20 vH, bei  $\delta = 120^\circ$  um rund 17 vH größer, was mit den Erfahrungen einiger anderer Forscher übereinstimmt.

Neuerdings ermittelte Kirchbach<sup>2</sup> den Strömungswiderstand in einer Anzahl von Kniestücken und verschiedenen durch Aneinanderreihen von Kniestücken

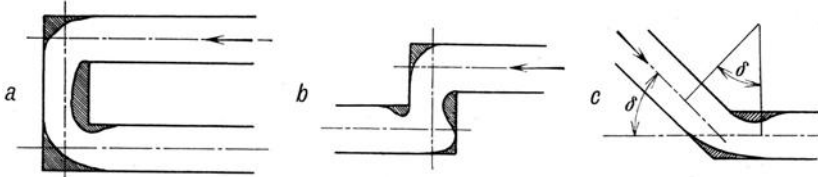


Abb. 145 a bis c. Ablösungsgebiete (schraffiert) in Kniestücken.

gebildeten Formstücken. Derartige, aus Kniestücken zusammengesetzte Bogen, S-Rohre u. a. werden häufig in Großversorgungsleitungen für Wasser und Gase oder in Druckrohrleitungen von Wasserkraftanlagen eingebaut, wenn die örtlichen Verhältnisse zu Richtungsänderungen zwingen. Bei solchen Leitungen handelt es sich meist um Stahlblechrohre von so großem Durchmesser, daß ihre relative Rauhgigkeit sehr klein ist. Da Kirchbach zu seinen Versuchen Rohre von nur 43 mm l. W. benutzen mußte, so wählte er sehr glatte Bronzestücke, um den wirklichen Verhältnissen entsprechende zu schaffen ( $Re = 18900$  bis

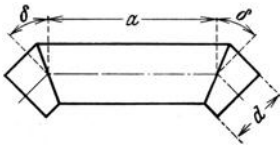


Abb. 146. Kniestück, aus einzelnen Kniestücken zusammengesetzt.

265000). Ab  $Re$  etwa 65000 (genauer erst ab  $Re = 200000$ ) war  $\zeta$  praktisch unabhängig von  $Re$ . Bei  $Re = 30000$  ergaben sich um rund 50 vH höhere Werte für  $\zeta$  als bei 65000. Kirchbach fand, daß sich bei Kniestücken von der Form Abb. 146 bei  $a = 1,5$  bis  $1,7d$  die günstigsten Strömungsverhältnisse, also der geringste Durchflußwiderstand einstellte. Der Gesamtwiderstand

eines durch Aneinanderreihen von mehreren Kniestücken (2, 3 oder mehr) war kleiner als die Summe der Widerstandswerte der einzelnen Kniestücke, solange die Größe des Knickstellenabstandes unterhalb gewisser Grenzen blieb, s. a. Abb. 159 bis 161.

Später untersuchte Schubart<sup>3</sup> dieselben Kniestücke noch einmal, nachdem er sie mit einem Gemisch aus Ölfarbe und Sand bestrichen hatte. Mit diesen sehr rauhen Rohren wurden grundsätzlich dieselben Beobachtungen wie mit den glatten gemacht. Dabei war der Energieverlust in den rauhen Kniestücken etwa doppelt so groß wie in den glatten; dieses Verhältnis hing nicht wesentlich von der Reynoldsschen Zahl ab. Der günstigste Knickstellenabstand war wiederum rund  $1,5d$ . Bemerkenswert ist noch, daß die Strömung nach Kniestücken mit kleinem Ablenkungswinkel längere Strecken im nachfolgend geraden Rohre zur Rückbildung des Geschwindigkeitsprofils braucht als bei größerem Ablenkungswinkel.

<sup>1</sup> Gibson, A. H.: Trans. Roy. Soc., Edinburgh Bd. 48 (1913) S. 799.

<sup>2</sup> Kirchbach, H.: Der Energieverlust in Kniestücken. Mitt. Hydraul. Inst. T. H. München 1929 Heft 3 S. 68.

<sup>3</sup> Schubart, W.: Der Energieverlust in Kniestücken bei glatter und rauher Wandung. Mitt. Hydraul. Inst. T. H. München 1929 Heft 3 S. 121.

## 2. Abzweige.

### Strömung in T-Stücken.

Der Strömungsvorgang in Abzweigstücken ist ziemlich verwickelt und bisher noch nicht exakt untersucht worden. Wir wollen uns daher nur mit dem Strömungswiderstand beschäftigen.

Je nachdem, ob der Abzweig recht- oder schiefwinklig angebracht ist und in welchem Sinne das Abzweigstück durchflossen wird und in welchem Verhältnis die Durchmesser der einzelnen Rohrenden zueinander stehen, werden verschiedene Durchflußwiderstände gemessen. Wird der Flüssigkeitsstrom getrennt, so entstehen im allgemeinen geringere Verluste als bei Stromvereinigungen. Bei den verschiedensten Messungen war der Strömungswiderstand praktisch immer nahezu proportional dem Quadrat der Durchflußgeschwindigkeit, weshalb die Widerstandszahl  $\zeta$  als von  $Re$  unabhängig angesehen werden kann.

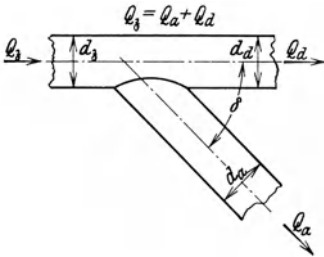


Abb. 147a. Stromtrennung.

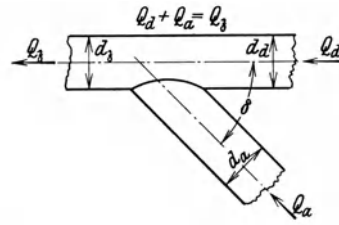


Abb. 147b. Stromvereinigung.

Der Zeiger  $d$  möge auf Stromdurchgang,  $a$  auf Stromabzweig und  $z$  auf beide Strömungen zusammen hinweisen (siehe Abb. 147a b). Dann kann man auf Grund von Erfahrungen des Hydraulischen Instituts der Technischen Hochschule München<sup>1</sup> für den Fall der Stromtrennung die Werte der Zahlentafel 26 für das günstigste Durchmesserverhältnis ansetzen:

Zahlentafel 26. Stromtrennung.

	$\frac{Q_a}{Q_z} = 0,3$			$\frac{Q_a}{Q_z} = 0,5$			$\frac{Q_a}{Q_z} = 0,7$		
	$90^\circ$	$60^\circ$	$45^\circ$	$90^\circ$	$60^\circ$	$45^\circ$	$90^\circ$	$60^\circ$	$45^\circ$
günstigstes $d_a/d_z$ . . .	1	0,61	0,58	1	0,79	0,75	1	1	1
„ $w_a/w_z$ . . .	0,3	0,8	0,9	0,5	0,8	0,9	0,7	0,7	0,7
„ $\zeta_a$ . . . . .	0,76	0,59	0,35	0,74	0,54	0,32	0,88	0,52	0,30

<sup>1</sup> Vogel, G.: Untersuchungen über den Verlust in rechtwinkligen Rohrverzweigungen. Mitt. Hydraul. Inst. T. H. München 1926 Heft 1 S. 75; 1928 Heft 2 S. 61. Petermann, F.: Der Verlust in schiefwinkligen Rohrverzweigungen. Ebenda 1929 Heft 3 S. 98. Kinne, E.: Beiträge zur Kenntnis der hydraulischen Verluste in Abzweigstücken. Ebenda 1931 Heft 4 S. 70. (Alle Versuche im Münchener Institut wurden mit Wasser angestellt.)

Es handelt sich dabei nur um Kreisrohre. Die Durchdringungskanten in den Abzweigstücken sind mit Radius  $0,1 d_a$  abgerundet. Die Werte gelten für glatte Rohre, werden aber für rauhe Rohre nur um ein geringes anders liegen.

Im Falle der Stromvereinigung (Abb. 147b) empfiehlt es sich mit der relativen Verlustleistung zu rechnen. Die Ströme bringen die kinetische Energie

$$E_{zugeführt} = \gamma \left( Q_a \frac{w_a^2}{2g} + Q_d \frac{w_d^2}{2g} \right) \text{ mkg}$$

mit. Verloren geht die Energie

$$E_{verlust} = \gamma \left( Q_a \left( \frac{\Delta P}{\gamma} \right)_a + Q_d \left( \frac{\Delta P}{\gamma} \right)_d \right) \text{ mkg.}$$

Mit relativer Verlustleistung bezeichnet man das Verhältnis

$$\chi = \frac{E_{verlust}}{E_{zugeführt}}. \quad (252)$$

Für Abzweige unter  $45^\circ$  und  $60^\circ$  wurde ermittelt

Zahlentafel 27. Stromvereinigung.

$\delta =$	$\frac{Q_a}{Q_z} = 0,3$		$\frac{Q_a}{Q_z} = 0,5$		$\frac{Q_a}{Q_z} = 0,7$	
	$60^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$45^\circ$
günstigstes $d_a/d_z$ . . .	1	0,58	0,58	0,58	0,58	1
„ $w_a/w_z$ . . .	0,3	0,9	1,5	1,5	2,0	0,7
„ $\chi$ . . .	0,33	0,20	0,56	0,43	0,66	0,53

Zu den Strömungsvorgängen bei der Stromvereinigung bemerkt Vogel: „Wir haben hinter dem T-Stück zwei Vorgänge zu unterscheiden: Einerseits wirkt die Mischung der langsamer und schneller fließenden Wasserteilchen auf eine Zunahme des statischen Druckes in der Fließrichtung hin. Andererseits ist aber, als Folge der durch das T-Stück erhöhten Turbulenz, die Wandreibung größer. Dieser Umstand wirkt auf die Abnahme des statischen Druckes in der Fließrichtung hin. Die beiden Vorgänge überlagern und beeinflussen sich gegenseitig. Die Beobachtung zeigt, daß hinter dem T-Stück zunächst der Mischungsvorgang, dann, in größerer Entfernung, die Erhöhung der Wandreibung überwiegt. Die Art, in der sich die beiden Strömungsvorgänge überlagern, ist nicht nur vom Verhältnis  $Q_a/Q_z$ , sondern auch von der Form des T-Stückes abhängig. Der Punkt, an dem die Wirkung der erhöhten Turbulenz zu überwiegen beginnt, rückt um so weiter vom T-Stück weg, je besser die Menge  $Q_a$  in geschlossenem Strahl in das T-Stück hineingeführt wird.“

### **III. Praktische Berechnung und Ausführung von Rohrleitungen.**

Nach dem Überblick über den heutigen Stand der Hydraulik wollen wir uns der Bearbeitung praktischer Aufgaben zuwenden. Wir werden dabei zunächst auf allgemeine Gesichtspunkte eingehen und dann besondere Strömungsfälle betrachten. Die eingestreuten Beispiele sollen die praktische Rechenarbeit erläutern. Im folgenden werden nur wenige Formeln zum Gebrauch empfohlen, um dem Leser eine unnütze Auswahl abzunehmen. Außer diesen Formeln gibt es noch zahlreiche andere passende; man wird aber in allen praktischen, heute berechenbaren Fällen mit den angeführten Formeln auskommen.

Bei den technischen Rohrleitungen handelt es sich fast ausschließlich um raue Rohre. Es erwächst also die Schwierigkeit, die Rauigkeit irgendeiner zu berechnenden Rohrleitung abzuschätzen. Die mittlere Höhe und Form der Rauigkeitserhebungen kann in den meisten Fällen nicht genau genug angegeben werden. Man kennzeichnet daher die Rauigkeit auf andere Weise, indem man etwa gleichraue Stoffe zusammenfaßt und für jede Rauigkeitsgruppe eine mittlere Rauigkeit aus Versuchen ableitet. Damit wird natürlich die Genauigkeit der Rechnung stark herabgesetzt, und wir müssen uns klar werden, daß ungünstigenfalls Fehler von 10 bis 20 vH auftreten können. Noch größere Abweichungen von den wirklichen Druckabfällen oder Strömungsgeschwindigkeiten sind wohl immer durch sorgfältige Beurteilung des Rauigkeitsgrades zu vermeiden.

#### **A. Allgemeingültige Richtlinien und Gesichtspunkte.**

##### **1. Formeln für gerades Rohr.**

Um zunächst einen allgemeinen Überblick über das Gebiet der technischen Rohrströmungen zu gewinnen, möge die Allgemeinformel von Biel<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Biel, R.: Über den Druckhöhenverlust bei der Fortleitung tropfbarer und gasförmiger Flüssigkeiten. Diss. Charlottenburg 1907; Z. VDI Bd. 52 (1908) S. 1053; VDI-Forsch.-Heft Nr. 44. Berlin 1907; Strömungswiderstand in Rohrleitungen. Sonderheft Mechanik der Z. VDI 1925 S. 39.

für die Widerstandszahl angeführt werden

$$\lambda_R = 0,00942 + \frac{M}{\sqrt{d}} + \frac{N\sqrt{d}}{Re} \tag{253a}$$

oder

$$\lambda_R = 0,00942 + \frac{M}{2\sqrt{\frac{F}{U}}} + \frac{2N}{Re} \sqrt{\frac{F}{U}} \tag{253b}$$

Diese Formel gilt für beliebige Flüssigkeiten.  $M$  und  $N$  sind feste Werte für einen bestimmten Rauigkeitsgrad. Biel ordnete die Werte  $M$  und  $N$  nach bestimmten Rauigkeitsgruppen:

Rauigkeitsgrad 0 vollkommen glatte Wandungen.

Rauigkeitsgrad I nahtlos gezogenes Messing-, Kupfer- und Bleirohr in nichtverdrücktem, streng zylindrischem Zustand, vernickelte Rohre, aus Leichtmetallen gezogene Rohre. Mit besonderer Sorgfalt ausgewähltes und gefugtes Glasrohr. Sorgfältig gehobelte und gefirnißte Holztafel.

Rauigkeitsgrad II: Walzhaut von Schmiedeisen. Mit gewöhnlicher Sorgfalt ausgesuchtes und gefugtes Glas- und Weißblechrohr. Schmiedeisenrohr, Eisenblech-

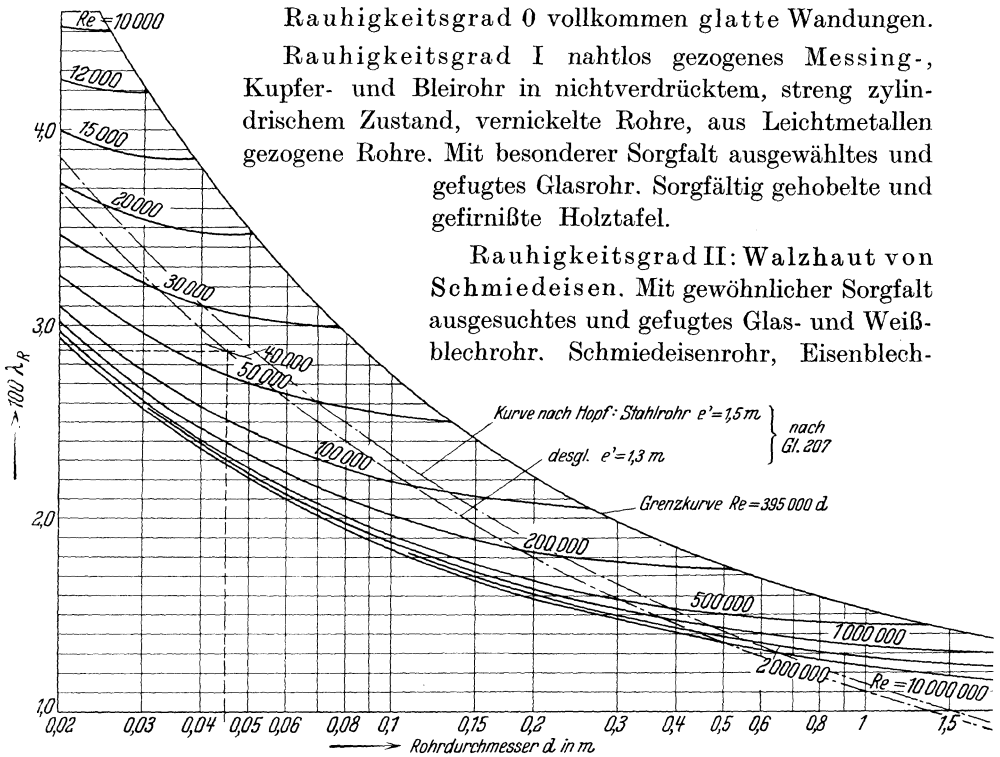


Abb. 148. Vertafelung der Formel von Biel für den Rauigkeitsgrad II (Stahlrohr). Beispiel:  $d = 0,045$  m  $\varnothing$ ,  $Re = 40000$ , dazu findet man  $\lambda_R = 0,0287$  aus  $100 \lambda_R = 2,87$ .

rohr. Sehr sorgfältig gehobeltes und gefugtes Rohr aus Holzdauben. Gewöhnliche Leitungsrohre aus dünnem gestrichenem oder verzinktem Blech und gehobelten Brettern. Sorgfältig aus reinem Zement hergestelltes Rohr. Sauber gegossenes Gußeisenrohr, sehr sorgfältig neu verlegt, Fugen mit Zement vergossen, dann gestrichen. Rechteckiger Kanal aus gehobeltem Holz, Blechen oder Walzeisen.

Rauhigkeitsgrad III: Gußeisenhaut. Gewöhnliche neue Gußeisenrohre oder aus Holzdauben zusammengesetzte Rohre. Grubenlüftungsrohre aus Holz, nach 50jährigem Betrieb mit festhaftendem Kohlenstaub bedeckt. Ebene Wandungen aus Zement mit Sand vermischt. Sehr ebenmäßig und fest verstampfter Beton.

Rauhigkeitsgrad IV: Rauhe zusammengenagelte Bretter. Sorgfältig ausgefugte Backsteine. Gewöhnlicher Beton.

Rauhigkeitsgrad V: Mit gewöhnlicher Sorgfalt ausgefugte Backsteine, stellenweise mit Schlamm bedeckt. Gewöhnliche Backsteine, Quadern.

Rauhigkeitsgrad  $> V$ : Sehr rauhe Wandungen z. B. mit starker Verkrustung. Lüftungsrohre aus Wellblech. Rohes Bruchsteinmauerwerk. Kanäle aus Erde.

In diese verhältnismäßig grobe Zusammenstellung können andere als die genannten Fälle leicht eingeordnet werden. Für  $M$  und  $N$  gilt Zahlentafel 28.

Die Bielsche allgemeine Formel gibt den Einfluß der Rohrweite, Zähigkeit, Geschwindigkeit, also der Reynoldsschen Zahl sowie der Rauigkeit auf den Widerstandsbeiwert in weitem Bereich, auch für Kanäle und Flüsse, ungefähr zutreffend wieder. Man kann sie zum Vergleich mit anderen Formeln nützlich verwenden. Sie ist aber für den praktischen Gebrauch zu umständlich. Außerdem gilt sie erst von einem bestimmten Grenzwert der Reynoldsschen Zahl an. Bei glattem Rohr gibt sie für sehr hohe Reynoldssche Zahlen, bei Stahlrohr unter rund 0,05 m  $\varnothing$  schon bei praktisch vorkommenden Reynoldsschen Zahlen zu hohe Werte.

Gl. (253) enthält zwei Kurvenscharen: 1. Linien gleichen Durchmessers, aber verschiedener Rauigkeit, 2. Linien gleicher Rauigkeit, aber verschiedenen Durchmessers. Abb. 148 stellt Gl. (253 a) für den Rauhigkeitsgrad II dar.

Wir wollen in unseren Rechnungen für die einzelnen technischen Rohrbaustoffe besondere Formeln ansetzen, die genauere und leichter berechenbare Werte als eine allumfassende Allgemeinformel geben.

**Stahlrohre.** Für den besonders wichtigen Fall der Strömung in Stahlrohren entwickelte Biel mit Rücksicht auf Versuche von Fritzsche u. a.<sup>1</sup> die Beziehung

$$\lambda_R = 0,0637 (10^4 \nu)^{0,148} Q_h^{-0,125} = 0,249 \nu^{0,148} Q_h^{-0,125}, \quad (254)$$

geltend oberhalb  $Re = 150000 d$  oder  $w = 150000 \nu$ , d. h. z. B. für

<sup>1</sup> Fritzsche, O.: Untersuchungen über den Strömungswiderstand der Gase in geraden zylindrischen Rohrleitungen. Z. VDI Bd. 52 (1908) S. 81; VDI-Forsch.-Heft Nr. 60. Berlin 1907. Siehe hierzu auch R. Biel: Gas- und Wasserfach Bd. 76 (1933) S. 676ff. und 742.

Zahlentafel 28.

Rauhigkeitsgrad	1000 $\epsilon$ mittlere lineare Rauhigkeits- erhebungen in mm (geschätzt)	$10^3 M$	$N$	Formel für $\lambda_R$	Die Formel gilt nur für
I Glatte Rohre . . . . .	0,01	1,00	1492	$\lambda_R = 0,00942 + 0,00100/\sqrt{d} + 1492\sqrt{d}/Re$	$w \geq 14,80 \cdot 10^5 \nu$
II Schmiedeeisen . . . . .	0,08	2,83	1115	$\lambda_R = 0,00942 + 0,00283/\sqrt{d} + 1115\sqrt{d}/Re$	$w \geq 3,95 \cdot 10^5 \nu$
III Gußeisen . . . . .	0,3	5,66	722	$\lambda_R = 0,00942 + 0,00566/\sqrt{d} + 722\sqrt{d}/Re$	$w \geq 1,28 \cdot 10^5 \nu$
IV Raue Bretter . . . . .	0,7	8,5	424	$\lambda_R = 0,0094 + 0,0085/\sqrt{d} + 424\sqrt{d}/Re$	$w \geq 0,50 \cdot 10^5 \nu$
V Backsteine . . . . .	1,3	11,3	0	$\lambda_R = 0,0094 + 0,0113/\sqrt{d}$	unbeschränkt für turbulente Strömung
> V Bruchsteine . . . . .	8	28	0	$\lambda_R = 0,009 + 0,028/\sqrt{d}$	
Rohe Bruchsteine . . . . .	20	46	0	$\lambda_R = 0,009 + 0,046/\sqrt{d}$	
Flüsse . . . . .	60	79	0	$\lambda_R = 0,009 + 0,079/\sqrt{d}$	
Flüsse mit Geröll . . . . .	140	118	0	$\lambda_R = 0,009 + 0,118/\sqrt{d}$	
Flüsse mit sehr viel Geröll	200	141	0	$\lambda_R = 0,009 + 0,141/\sqrt{d}$	
Flüsse mit grob. Geschiebe	275	166	0	$\lambda_R = 0,009 + 0,166/\sqrt{d}$	

$w \geq 0,185$  m/s bei Wasser von  $12^\circ$  und  $w \geq 3,0$  m/s bei Gasen unter atmosphärischem Druck. Die Formel kann also nicht zur Berechnung von Ölleitungen verwendet werden, wo  $Re$  im allgemeinen weit unter  $150000 d$  liegt. Der Exponent von  $Q_h$  ist in Anpassung an vielfach gefundene Versuchswerte zu  $0,125$  gewählt, um die Zahlenrechnung ohne Logarithmen ausführen zu können. An sich würde den meisten Versuchen ein etwas höherer Exponent besser entsprechen. Für den Exponenten von  $\nu$  ist der

Diese Formeln gelten also z. B. für:

Rauhigkeitsgrad	$w$ in m/s bei Wasser von $12^\circ C$	$w$ in m/s bei Luft von $15^\circ$ und $760$ mm QS	$Re \geq$ bei $d=0,10$ m
I	1,830	21,80	148000
II	0,488	5,81	39500
III	0,158	1,88	12800
IV	0,062	0,74	5000



von Fritzsche gefundene Wert 0,148 beibehalten, da die umständliche, aber nur einmalige Berechnung des Stoffwertes nicht ins Gewicht fällt. Mit geringer Abweichung kann man den Exponenten aber auch gleich 0,125 einsetzen und dann schreiben

$$\lambda_R = 0,061 (10^4 \nu)^{0,125} Q_h^{-0,125} = 0,0716 (d Re)^{-0,125}. \quad (255)$$

Diese Formel wurde in Abb. 149 und 150 mit zahlreichen Versuchsergebnissen verglichen. Die Übereinstimmung ist recht befriedigend. (Die älteren Versuche Abb. 149 streuen stärker als die neueren in Abb. 150.)

Zum Nachweis wurden außerdem die sorgfältigen Untersuchungen von Lebeau<sup>1</sup> herangezogen, die vorzüglich mit Gl. (254) übereinstimmen.

Für die technisch wichtigste tropfbare Flüssigkeit — Wasser — geht Gl. (254) bei  $t = 12^\circ \text{C}$  über in

$$\lambda_R = 0,0350 Q_h^{-0,125} = 0,0210 Q_{min}^{-0,125} = 0,0125 Q_s^{-0,125}$$

$$P_1 - P_2 = 2230 l Q_h^{1,875} (100 d)^{-5} \text{ mm WS}. \quad (256)$$

Ermittelt man nach dieser Gleichung den Strömungswiderstand, so gilt für  $t^0$  das  $(\nu_t/\nu_{12^\circ})^{0,148}$  fache, d. i. für

$t$	$0^\circ$	$4^\circ$	$8^\circ$	$12^\circ$	$16^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$50^\circ$	$100^\circ$
das	1,056	1,036	1,017	1,000	0,984	0,970	0,939	0,889	0,809fache.

Zur einfachen zeichnerischen Auswertung von Gl. (256) dient Nomo-gramm Abb. 151.

Für die Berechnung von Strömungen zusammendrückbarer Flüssigkeiten wollen wir die Gleichungen auf einen Normalzustand beziehen ( $15^\circ$  und 760 mm QS, Zeiger  $n$ ). Mit Zeiger  $m$  möge der mittlere Zustand zwischen Anfang und Ende der Leitung bezeichnet werden. Man kann in den meisten praktischen Fällen das Beschleunigungsglied  $\lambda_B$  der Widerstandszahl (siehe Gl. 88) vernachlässigen und  $\lambda_R$  durch  $\lambda$  ersetzen. Die Zähigkeit des Stadtgases z. B., d. i. des heutigen Leucht-gases, beträgt nach Biel rund  $20 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  bei  $15^\circ$  und 760 mm QS, womit gilt

$$\lambda = 0,05 Q_n^{-0,125}. \quad (257)$$

Bei Fördermitteln, deren Zähigkeit  $\nu$  wesentlich von  $20 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  abweicht, wählt man genauer

$$\lambda = 0,0637 \cdot 0,20^{0,023} \left( \frac{10^4 \nu_n}{Q_{n_u}} \right)^{0,125} = 0,061 \left( \frac{10^4 \nu_n}{Q_{n_u}} \right)^{0,125}. \quad (258)$$

<sup>1</sup> Lebeau, V.: a. a. O. Rev. univ. Mines (6) Bd. 12 (1922) S. 301. Siehe auch: Bericht von R. Bourgeat: Welt-Ingr. Kongreß Tokio Bd. 4 (1928, 1929) Teil 2 S. 281. Lebeau untersuchte alle erreichbaren, seit Darcy an rauen Rohren angestellten Versuche, wobei er die sichersten zur Aufstellung seiner Formeln benutzte.

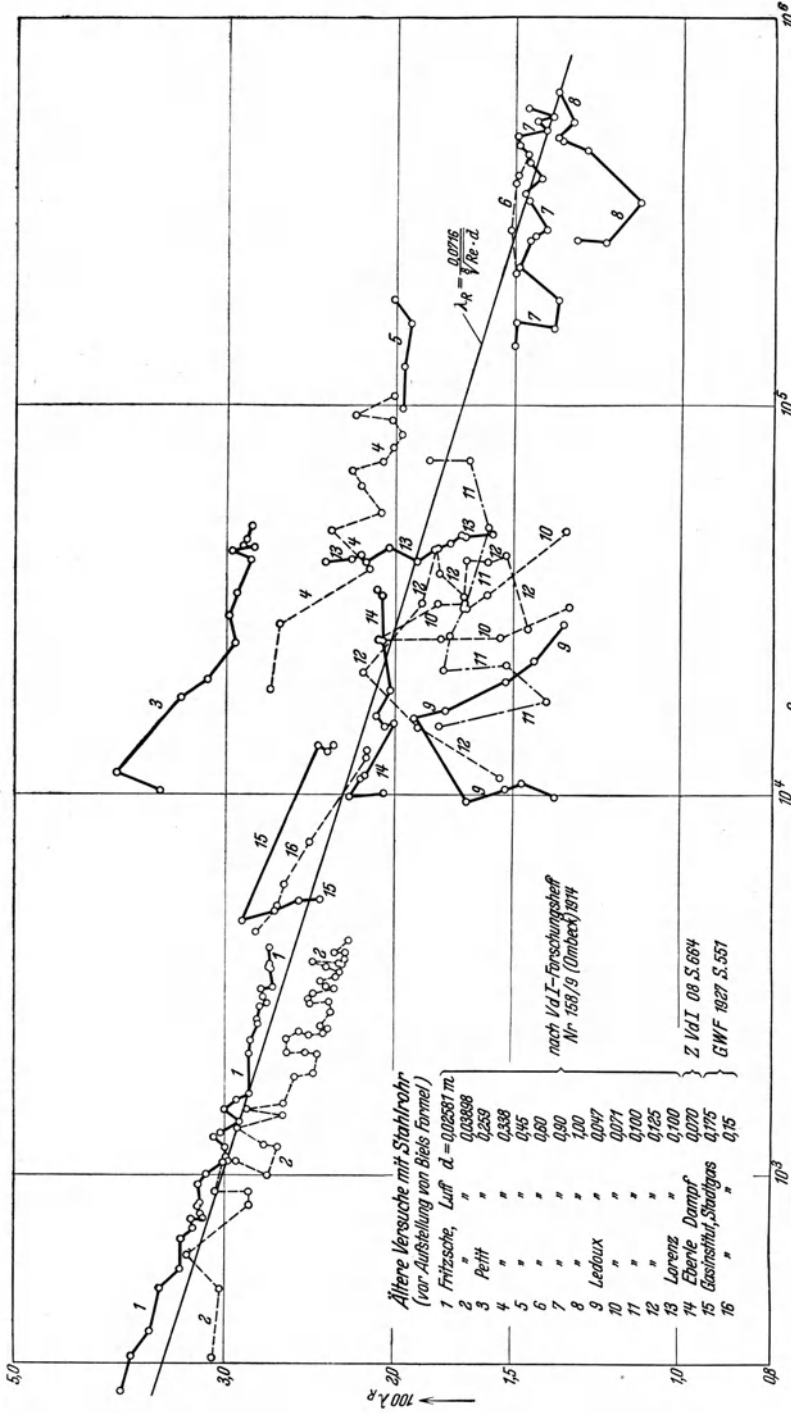


Abb. 149. Erfassung älterer Versuchsergebnisse mit Gl. (255).

So ergibt sich z. B. für Luft genauer 4 vH weniger als nach Gl. (258), nämlich

$$\lambda = 0,0478 Q_{h,n}^{-0,125}. \tag{259}$$

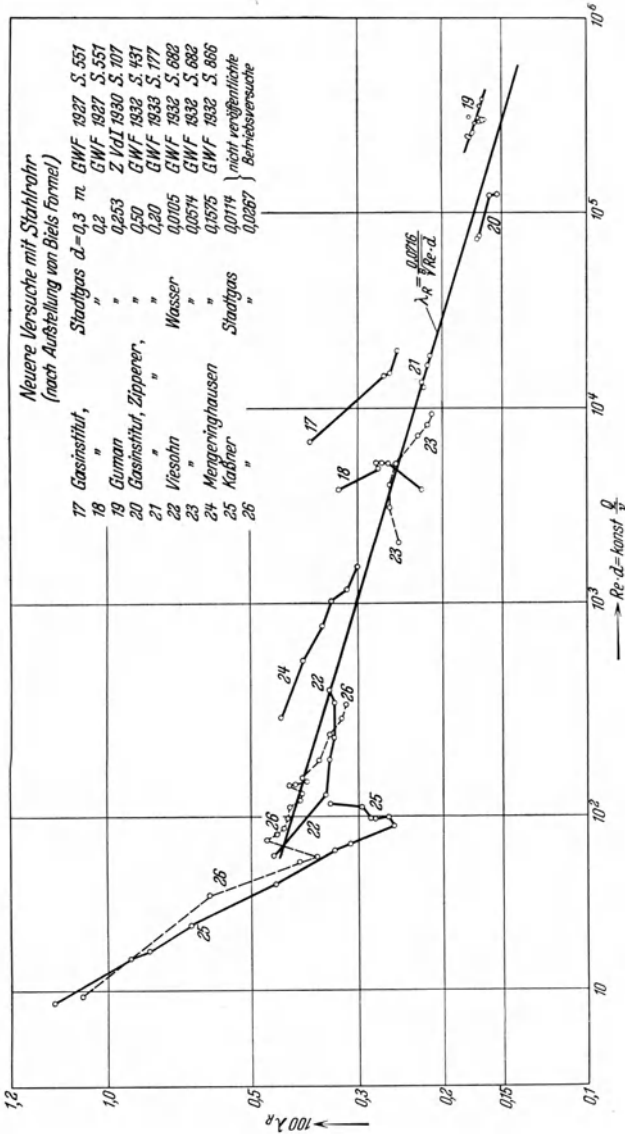


Abb. 150. Erfassung neuerer Versuchsergebnisse mit Gl. (255).

Für Stadtgas gilt nach den neuesten Zähigkeitsmessungen von Zipperer und anderen nicht  $20 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  und damit

$$\lambda = 0,0516 Q_{h,n}^{-0,125}. \tag{260}$$

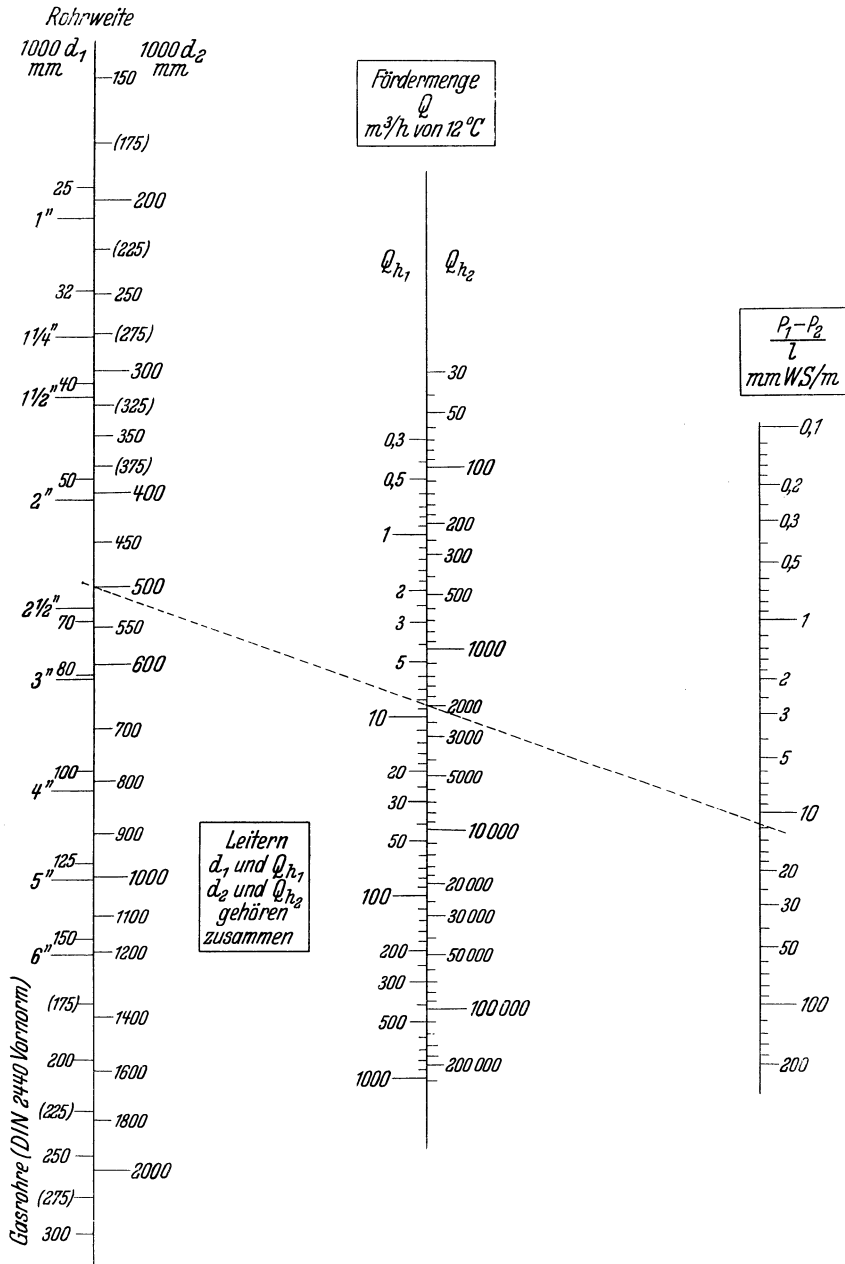


Abb. 151. Nomogramm zur Ermittlung des Druckverlusts in neuen Stahlrohrleitungen für Wasser von  $12^\circ$  unter Benutzung von Biels Gleichung (256). Beispiel: Bei  $D = 500$  mm und  $Q_h = 2000$  m<sup>3</sup>/h von  $12^\circ$  ist der Druckabfall 11,5 mm WS je lfd. m Rohr<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Siehe hierzu auch H. Müller: Gas- und Wasserfach Bd. 76 (1933) S. 673 und 742.

d. i. 3 vH mehr als Gl. (257) angibt. Der Unterschied ist aber so gering und noch nicht genügend sicher festgestellt, daß man die heute stark verbreitete Gl. (257) unbedenklich beibehalten soll. Tatsächlich sind ja auch die praktischen Angaben für Fördermenge, Rohrdurchmesser und Rohrrauigkeit so wenig genau, daß ein Fehler von 3 vH gar nicht ins Gewicht fällt. Kleine Zähigkeitsverschiedenheiten ändern Gl. (257) nur wenig, weil  $\nu$  nur unter dem Exponenten 0,148 vorkommt.

Mit Gl. (122), (126), (127) und (257) erhält man jetzt

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{L} = \frac{0,81 s Q_{h_n}^2}{(100 d)^5 Q_{h_n}^{0,125}} = 0,81 s \frac{Q_{h_n}^{1,875}}{(100 d)^5} = 0,207 \frac{P_1 - P_2}{l} \frac{p_m}{p_n} \text{ ata}^2/\text{km}. \quad (261)$$

Diese Gleichung ist rechnerisch wenig bequem. Sie wurde in Abb. 152/153 für Stadtgas mit dem relativen Gewicht  $s = 0,49$ , also

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{L} = 0,397 Q_{h_n}^{1,875} (100 d)^{-5} \text{ ata}^2/\text{km} \quad (262)$$

in einem Nomogramm vertafelt<sup>1</sup>.

Der Fortleitungswiderstand ist bei anderen Gasen mit  $s'$  als Stadtgas mit  $s = 0,49$  das  $C_s$  fache<sup>2</sup>.

Zahlentafel 29. Vervielfachungszahl  $C_s = \frac{s}{0,49}$ .

Wasserstoff . .	$s = 0,0695$	$C_s = 0,142$	Rauchgas und Koksgeneratorgas (Dampfluftr. betr.).	$s = 0,88$	$C_s = 1,80$
	0,3	0,61		0,9	1,84
Kohlengas . . .	{ 0,4	0,82			
	0,45	0,92	Koksgeneratorgas (Luftbetrieb) rd..	0,95	1,94
Kohlengas mit Wassergas . .	{ 0,47	0,96		0,99	2,02
	0,49	1,00	Hochofengas . . .	1,00	2,04
	0,51	1,04	Luft . . . . .	1,52	3,10
Wassergas . . .	0,53	1,08	Kohlensäure . . .		
	0,54	1,10			
	0,55	1,12			
	0,6	1,23			
	0,65	1,33			
	0,7	1,43			
	0,75	1,53			
	0,8	1,63			
	0,85	1,74			

Bei anderen Fortleitungstemperaturen als  $15^0$  gilt für den Widerstand das  $C_t$  fache.

<sup>1</sup> Andere Vertafelungen siehe z. B.: H. Müller: Einfachste graphische Berechnung von Hochdruckleitungen. Gas- u. Wasserfach Bd. 72 (1929) S. 285. K. Bayerlein: Graphische Berechnung von Gasfernleitungen. Gas- u. Wasserfach Bd. 71 (1928) S. 901. Jaenicke: Ein Beitrag zur Frage der Berechnung von Gasfernleitungen. Gas- u. Wasserfach Bd. 73 (1930) S. 417. H. Richter: Nomogramme zur Berechnung von Gasleitungen. Gas- u. Wasserfach Bd. 76 (1933) S. 240.

<sup>2</sup> Nach R. Biel: Umrechnung des Druckabfalls in Rohrleitungen auf verschiedene Fördermittel. Gas- u. Wasserfach Bd. 70 (1927) S. 623. Mit Rücksicht auf die neueren Zähigkeitsmessungen, deren Ergebnisse freilich noch nicht ganz sicher sein dürften, müßten die Werte  $C_s$  für  $s$  zwischen 0,4 und 0,99 um rund 3 vH größer sein.

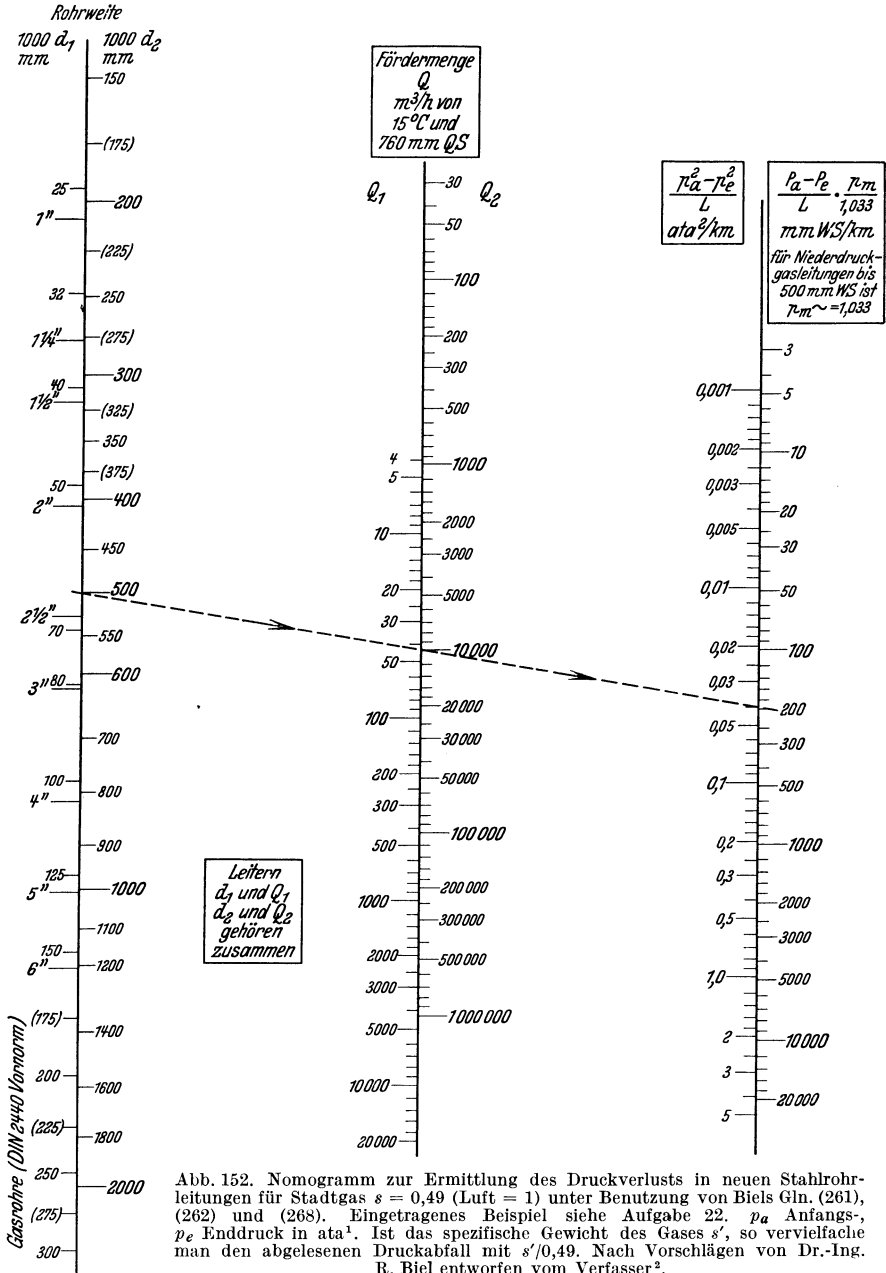


Abb. 152. Nomogramm zur Ermittlung des Druckverlusts in neuen Stahlrohrleitungen für Stadtgas  $s = 0,49$  (Luft = 1) unter Benutzung von Biels (Gln. (261), (262) und (268)). Eingetragenes Beispiel siehe Aufgabe 22.  $p_a$  Anfangs-,  $p_e$  Enddruck in ata<sup>1</sup>. Ist das spezifische Gewicht des Gases  $s'$ , so vervielfache man den abgelesenen Druckabfall mit  $s'/0,49$ . Nach Vorschlägen von Dr.-Ing. R. Biel entworfen vom Verfasser<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> Das gleiche Nomogramm wurde schon früher angegeben von H. Müller, Gas- und Wasserfach Bd. 72 (1929) S. 285—287. Aus obigem Nomogramm geht nur die Verwendungsweise für Niederdruck neben der für Hochdruck noch etwas deutlicher hervor.

<sup>2</sup> Der Verfasser (Anschriß: Gaswerk Berlin-Mariendorf) sendet die Nomogramme Abb. 152 und 153 als Doppelblatt auf festem Papier im Format DIN A 4 gegen Nachnahme von 1 RM.

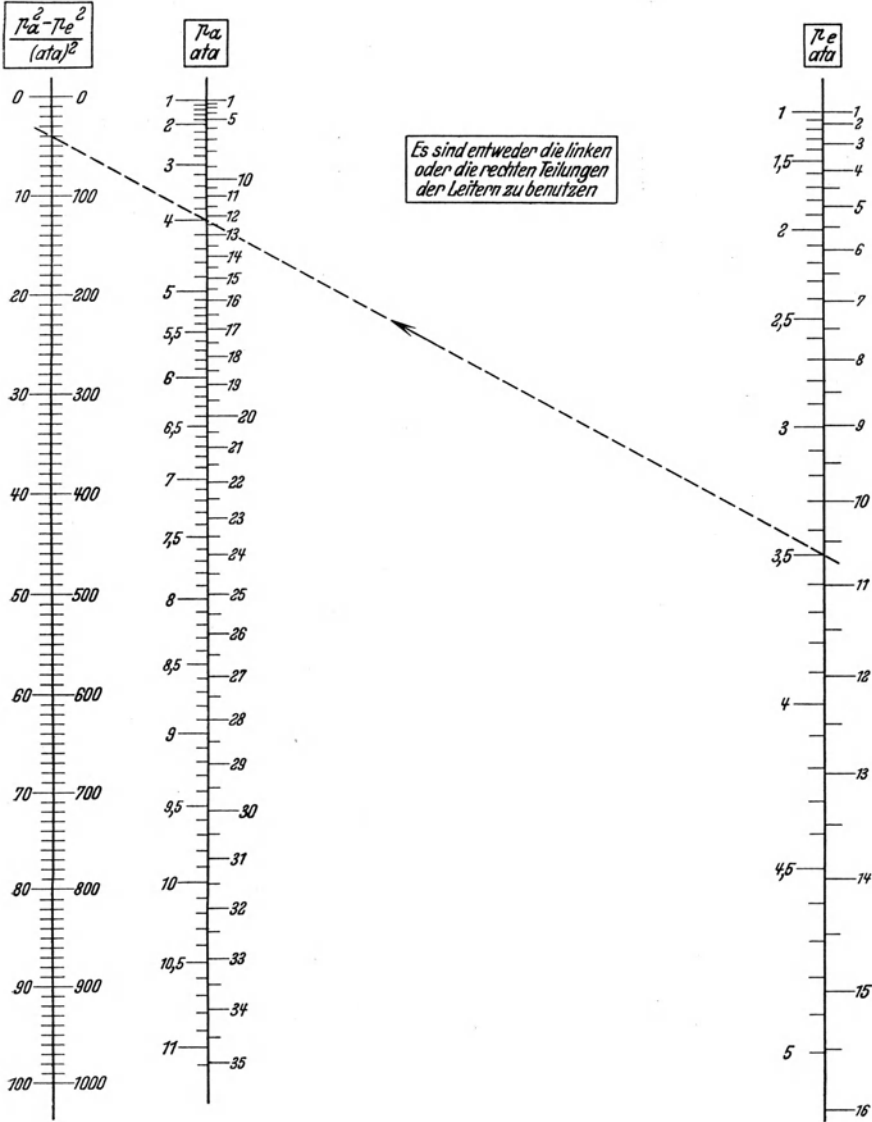


Abb. 153. Hilfstafel zur Ermittlung von  $p_a$  aus  $p_a^2 - p_e^2$  und  $p_e$ . (Zu Abb. 152.)  
 Beispiel siehe Aufgabe 22.

Da  $Q_{hn}^{0,125}$  rund gleich  $G_h^{0,125}$  ist, kann man auch mit guter Annäherung

$$\lambda = 0,05 G_h^{-0,125} \tag{263}$$

oder in Gl. (261) und (262)  $G_h$  für  $Q_{hn}$  setzen. Genauer heißt diese Beziehung z. B. für Luft

$$\lambda = 0,056 G_h^{-0,148} . \tag{264}$$

Zahlentafel 30.

$$\text{Vervielfachungszahl } C_t = \frac{\lambda \gamma}{\lambda_{15} \gamma_{15}} \left( \frac{Q_h}{Q_{h15}} \right)^2.$$

$t$	$C_t$	$t$	$C_t$	$t$	$C_t$	$t$	$C_t$
0	0,942	18	1,01	90	1,30	300	2,20
2	0,951	20	1,02	100	1,34	350	2,43
4	0,959	30	1,06	120	1,43	400	2,67
6	0,967	40	1,10	140	1,51	500	3,07
8	0,975	50	1,14	160	1,59	600	3,59
10	0,983	60	1,18	180	1,68	700	4,07
12	0,991	70	1,22	200	1,77	800	4,56
15	1,000	80	1,26	250	1,98	1000	5,56

Zur Vereinfachung der Rechnung setzt man mit Vorteil  $1000 \lambda = 2g\beta$  und bekommt mit Gl. (264) mit

$$\beta = 2,86 G_h^{-0,148} = 51 \lambda$$

für Luft die Beziehungen

$$\begin{aligned} \frac{p_1^2 - p_2^2}{2p} &= \beta \cdot 10^{-4} \gamma w^2 \frac{l}{D} = 12,5 \beta \frac{l}{\gamma D^5} G_h^2 \\ &= 0,00125 \beta R T \frac{l}{p} \frac{G_h^2}{D^5} \text{ at oder kg/cm}^2. \end{aligned} \quad (265)$$

$D$  bedeutet den Rohrdurchmesser in mm.

Zahlentafel 31. Zusammenhang zwischen  $\beta$ ,  $\lambda$  und  $G_h$  für Luft.

$G_h$	$\beta$	$100 \lambda$	$G_h$	$\beta$	$100 \lambda$	$G_h$	$\beta$	$100 \lambda$	$G_h$	$\beta$	$100 \lambda$
5,0	2,25	4,42	100	1,45	2,84	2500	0,90	1,77	65000	0,555	1,09
6,5	2,16	4,25	150	1,36	2,67	4000	0,84	1,65	100000	0,520	1,02
10	2,03	3,98	250	1,26	2,47	6500	0,78	1,53	150000	0,490	0,98
15	1,92	3,77	400	1,18	2,32	10000	0,73	1,43	250000	0,465	0,91
25	1,78	3,49	650	1,10	2,16	15000	0,69	1,35	400000	0,423	0,83
40	1,66	3,26	1000	1,03	2,02	25000	0,64	1,26	650000	0,394	0,77
65	1,54	3,02	1500	0,97	1,91	40000	0,595	1,17	1000000	0,369	0,72

Die genannten Formeln für Leitungen von zusammendrückbaren Flüssigkeiten sind für Hochdruckleitungen anzusetzen, das sind solche, wo  $p_m \geq 1,2$  ata ist (rund 2000 mm WS Überdruck). Für Niederdruckleitungen mit  $p_m < 1,2$  ata kann man die Formeln vereinfachen. Es genügt in den weitaus meisten Fällen auf Poles<sup>1</sup> Vorschlag hin die Widerstandszahl  $\lambda = 0,024$  zu setzen und wie mit einer raumbeständigen Flüssigkeit zu rechnen. Dann gilt

$$P_1 - P_2 = 0,024 \gamma \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g} \text{ mm WS oder kg/m}^2 \quad (266)$$

oder mit  $\gamma = \gamma_L s$  und  $Q_s$  an Stelle  $w$  und bei 15° Fortleitungstemperatur und 760 mm QS als Bezugsdruck

<sup>1</sup> Pole, S.: The motion of fluids in pipes. J. of gaslighting, water supply . . . 1852.



$$P_1 - P_2 = 1,873 \frac{l s Q_{hn}^2}{(100 d)^5} \text{ mm WS}; \quad J = \frac{P_1 - P_2}{\gamma_{Ln} s l} = 1,530 \frac{Q_{hn}^2}{(100 d)^5}, \quad (267)$$

$$Q_{hn} = 0,73 \sqrt{\frac{(100 d)^5 (P_1 - P_2)}{s l}} \text{ m}^3/\text{h}; \quad 100 d = \sqrt[5]{\frac{Q_{hn}^2 s l \cdot 1,873}{P_1 - P_2}} \text{ cm.}$$

Für genauere Rechnungen ist Gl. (257) zu empfehlen. Der Wert  $\lambda = 0,024$  ist nämlich für kleine Rohrdurchmesser zu klein und große zu groß. Mit  $p_m$  rund  $p_n$  gelten die Gleichungen (nach Gl. 261)

$$\frac{P_1 - P_2}{l} = 3,9 s \frac{p_n}{p_m} \frac{Q_{hn}^{1,875}}{(100 d)^5} \cong 3,9 s \frac{Q_{hn}^{1,875}}{(100 d)^5} \cong 3,2 \frac{G_h^{1,875}}{(100 d)^5} \text{ mm WS/m}. \quad (268)$$

Unter  $Q_{hn} = 117d$  oder  $w_n = 0,0415/d$  entsprechend  $Re = 2000$  herrscht Laminarströmung. Sie kann gelegentlich in engen Gasleitungen eine Rolle spielen ( $w_{nkrit}$  z. B. rund 2 m/s bei  $d = 0,02$  m; bei  $w_n < 2$  m/s herrscht Laminarströmung). Für den Strömungswiderstand bei Laminarströmung gilt

$$P_1 - P_2 = 32 \frac{l w v \gamma}{g d^2} = 0,115 l \frac{(10^6 v)}{(100 d)^4} Q_h \gamma \text{ mm WS}. \quad (269)$$

Für Leuchtgas z. B. mit  $v_n = 24,0 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s und  $\gamma_n = 0,625$  kg/m<sup>3</sup> ist

$$\frac{P_1 - P_2}{l} = 1,73 \frac{Q_{hn}}{(100 d)^4} \text{ mm WS/m oder kg/m}^3$$

anzusetzen.

In dem turbulenten Gebiet von  $2000 < Re < 150000 d$  gilt für Stahlrohre ziemlich genau die Gl. (164) von Blasius [Gl. (254) gäbe unter  $Re = 150000 d$  etwas zu kleine Werte]. Praktisch brauchbar ist auch die einfache Beziehung

$$\lambda_R = 0,0186 + 1,52 Re^{-0,5} \quad (270)$$

im Gebiete  $2000 < Re < 150000 d$ . Bei  $Re_{krit} = 2320$  ist  $\lambda$  rund 0,05.

**Gußeisenrohre.** Für gußeiserne Rohre kann man das  $C_G$ -fache (rund das 1,2fache) vom Widerstand der Stahlrohre ansetzen.

Zahlentafel 32. Vervielfachungszahl  $C_G = \frac{\lambda_G}{\lambda_{St}}$  für mittlere

Strömungsgeschwindigkeiten und tadellose Rohre.

$d$ in m . . .	0,05	0,10	0,15	0,20	0,30	0,50	1,00	2,00
$C_G$ . . . . .	1,28	1,25	1,23	1,22	1,19	1,17	1,14	1,11

Für mittlere Reynoldssche Zahlen von 20000 bis 200000 und mit üblicher Sorgfalt verlegte Rohre gibt eine Formel von Wegmann und Aeryns<sup>1</sup> etwas höhere Werte

$$\lambda_R = 0,0149 w^{-0,145} d^{0,341} \sim 0,106 Re^{-0,145} d^{-0,196}. \quad (271)$$

<sup>1</sup> Wegmann, E., u. A. N. Aeryns: New formula for flow of water in clean cast-iron pipes. Engng. News Rec. Bd. 95 (1925) S. 100; Bd. 96 (1926) S. 287.

Zum Nachweis der Formeln für Gußeisenrohr wurden die Angaben von Manning<sup>1</sup>, Perry<sup>2</sup>, Jones<sup>3</sup> (nach Versuchen von F. C. Lea, H. W. King, C. J. Corp, F. C. Scobey) und Lebeau<sup>4</sup> herangezogen.

**Glatte Rohre.** Für Rohre aus Messing, Kupfer, Bronze, Leichtmetall, Blei und Glas gilt bis  $Re = 100000$  die Formel von Blasius, Gl. (164); darüber hinaus gilt die Formel von Nikuradse, Gl. (173).

**Holzrohre.** Für Holzrohre gilt nach Scobey<sup>5</sup> eine Formel

$$\lambda_R = 0,0174 w^{-0,20} d^{-0,17} \sim 0,264 Re^{-1/5}, \quad (272)$$

die sehr brauchbar ist und die an hölzernen Leitungen von 32 bis 4115 mm  $\varnothing$  nachgeprüft wurde. Sie entspricht etwa der Formel von Hopf, Gl. (208), mit dem Beiwert  $\psi = 1,35$  bis 1,45 (glatte Holzrohre). Für ausgesprochen rauhe Holzrohre ist ein Zuschlag von etwa 20 vH zu machen.

**Betonrohre.** Nach Scobey<sup>6</sup> berechnet man Betonrohre nach der Formel

$$\lambda_R = C d^{-1/4}, \quad (273)$$

wobei im Mittel für monolithische Stränge, geschliffen, größtmögliche Glätte  $C = 0,0156$ , monolithische Stränge, über geölte Eisenformen gestampft  $C = 0,0180$ , aus Einzelrohren zusammengesetzte, einige Jahre betriebene Stränge  $C = 0,0218$  und mit wenig Sorgfalt zusammengesetzte Stränge  $C = 0,0290$  gilt. Diese Formel deckt sich sehr gut mit anderen Versuchsergebnissen.

**Eternitrohre.** Für Rohre aus Eternit (Asbestzementschiefer) stammt von Scimemi<sup>7</sup> die Formel

$$\lambda_R = 0,0119 (wd)^{-0,21} \sim 0,206 Re^{-0,21} \quad (274)$$

für neue Stränge<sup>8</sup>.

<sup>1</sup> Manning, R.: On the flow of water in open channels and pipes. Engineer Bd. 69 (1890) S. 80; Trans. Inst. civ. Engr. Ireland Bd. 12 (1890) S. 68.

<sup>2</sup> Perry, L.: New tests of loss of head in 2-In. black wrought-iron pipe. Engng. News Rec. Bd. 94 (1925) S. 272.

<sup>3</sup> Jones, J. O.: New tables for computing loss of head in Pipes. Engng. News Rec. Bd. 94 (1925) S. 240.

<sup>4</sup> Lebeau, V.: a. a. O.

<sup>5</sup> Scobey, F. C.: U. S. Department of Agriculture Bull. 1916 Nr. 376 oder Wasserkr. Bd. 16 (1921) S. 341.

<sup>6</sup> Scobey, F. C.: U. S. Department of Agriculture Bull. 1920 Nr. 852. The flow of water in concrete pipes. Dazu ferner: E. Parry: The frictional coefficient of concrete surfaces in pipes and channels. Engineering Bd. 114 (1922) S. 285. (Versuche über Rohre mit 0,20 bis 5,48 m  $\varnothing$ .)

<sup>7</sup> Scimemi, E.: Druckverlustmessungen in Eternitrohren. Ann. R. Scuola Ing. Padova Bd. 1 (1925) S. 1 Nr. 1.

<sup>8</sup> Siehe hierzu auch B. Pfeiffer: Eternitrohre. Gas- und Wasserfach Bd. 76 (1933) S. 580. Ludin, A.: Mitt. 13 d. Inst. f. Wasserbau a. d. Techn. Hochschule Berlin 1932.

Zahlentafel 33. Potenzen von  $Re$  zu Gl. (271), (272), (274).

$Re$	$Re^{1/5}$	$Re^{0,21}$	$Re^{0,145}$	$Re$	$Re^{1/5}$	$Re^{0,21}$	$Re^{0,145}$
10000	6,31	6,92	3,80	300000	12,47	14,13	6,22
20000	7,24	8,00	4,20	400000	13,19	15,00	6,48
30000	7,87	8,71	4,45	500000	13,80	15,75	6,69
40000	8,32	9,25	4,64	700000	14,75	16,83	7,03
50000	8,71	9,70	4,80	1000000	15,85	18,20	7,42
70000	9,31	10,40	5,02	2000000	18,20	21,03	7,83
100000	10,00	11,21	5,31	3000000	19,76	22,90	8,68
200000	11,48	12,96	5,60				

Zahlentafel 34. Potenzen von  $d$  zu Gl. (271) u. (273).

$d$ in m	$d^{-1/4}$	$d^{-0,196}$	$d$ in m	$d^{-1/4}$	$d^{-0,196}$
0,020	2,66	2,15	0,250	1,42	1,31
0,040	2,24	1,88	0,300	1,35	1,27
0,060	2,02	1,74	0,400	1,26	1,20
0,080	1,88	1,64	0,500	1,19	1,15
0,100	1,78	1,57	0,700	1,09	1,07
0,125	1,68	1,50	1,000	1,00	1,00
0,150	1,61	1,45	2,000	0,842	0,872
0,175	1,55	1,41	3,000	0,760	0,806
0,200	1,50	1,37	4,000	0,708	0,760

**Schläuche.** Schläuche können je nach Herstellung ganz verschieden rauh sein. Der Strömungswiderstand hängt in wasserführenden Schläuchen, die sich unter dem Betriebsdruck weiten, auch vom Druck ab. Freeman<sup>1</sup> gab die Beiwerte der Formeln

$$Jd = \lambda_R \frac{w^2}{2g} \quad \text{oder} \quad w = c \sqrt{\frac{JF}{U}} = \frac{c}{2} \sqrt{Jd} \quad (275)$$

[ $J$  mit  $l = l_2 - l_1$  gebildet, siehe Gl. (99)] an zu

	$\lambda_R$	$c$	$\Delta d/d$	$-\Delta J/J$
	je at Drucksteigerung			
sehr glatter Gummischlauch . . .	0,0169	68,2	0,0041	0,021
gewöhnlicher Gummischlauch . . .	0,0176	66,7	0,0034	0,017
sehr glatter, innen gummierter Baumwollschlauch . . . . .	0,0173	66,5	0	0
sehr rauher, innen gummierter Baumwollschlauch . . . . .	0,032	49,5	0,0018	0,009
gewöhnlicher, nicht gummierter Flachs- oder Hansschlauch . . .	0,042	43,3	0,0006	0,003
guter Lederschlauch . . . . .	0,027	53,9	0,0061	0,031

Die Werte  $\Delta d/d$  geben die Weitung und  $-\Delta J/J$  die Verringerung des notwendigen Leitungsfalles unter Druck je at Drucksteigerung an.

<sup>1</sup> Freeman, J. R.: Experiments relating to hydraulics of fire streams. Trans. Amer. Soc. civ. Engr. Bd. 21 (1889) S. 303 und anschließende Besprechung. Dazu ferner H. M. Spiers: Technical data on fuel. World Engr. Congreß. Tokio 1929.

Zwischen dem aufzuwendenden Druck und der Durchmessererweiterung besteht annähernd die Beziehung

$$\frac{\Delta p}{p} = -5 \frac{\Delta d}{d}. \quad (276)$$

Wasser fließt in Feuerwehrschräuchen mit etwa 0,5 bis 1,0 m/s. Für diesen Bereich gab Sander<sup>1</sup> für Hanfschräuche an

$$\left. \begin{array}{l} \text{gummierter Feuerwehrschräuch} \quad \lambda_R = 0,0351 - \frac{0,0104}{w} \\ \text{ungummierter Feuerwehrschräuch} \quad \lambda_R = 0,0558 - \frac{0,0027}{w} \end{array} \right\} \quad (277)$$

in guter Übereinstimmung mit Freemans Werten.

Nach noch nicht veröffentlichten Versuchen des Verfassers mit glattem Gummidruckschräuch gilt ganz allgemein

$$\lambda_R = 0,01113 + 0,9170 Re^{-0,41}. \quad (278)$$

Preßluftschräuche haben etwa mittlere Widerstandszahlen  $\lambda = 0,05$  bis 0,15, je nach Rauigkeit und Krümmung (Güte der Kupplung und Dichtheit) der Schräuche.

### Überschlagsformeln.

Neben diesen möglichst genauen, dafür aber nicht sehr bequemen Formeln für gerades Rohr muß man für den ersten Entwurf einfach auswertbare Ansätze haben, die man dann später, wenn man erst einmal einen Überblick über die ganze Aufgabe gewonnen hat, durch genauere Formeln verbessern muß. Dazu sollen die folgenden Gleichungen mit festen Werten von  $\lambda_R = 0,030$ ; 0,025; 0,020 und 0,015 dienen, die man benutzt, nachdem man sich überschlägig über die wahrscheinliche Größe der Widerstandszahl  $\lambda_R$  unterrichtet hat. Dabei ist zu bedenken, daß man für Gasströmungen, wenn man diese als raumbeständig vom Anfangszustand betrachtet, je nach den Drücken vor und hinter der Leitung mehr oder weniger zu kleine Druckverluste ermittelt.

Es gilt mit  $\lambda_R = 0,030$  ( $J$  m Flüssigkeitsgefälle/lfd. m)      (279)

$$\begin{aligned} J &= 0,00248 \frac{Q_s^2}{d^5} = 0,00154 \frac{w^2}{d} = 0,00137 \sqrt{\frac{w^5}{Q_s}}, \\ d &= 0,302 \sqrt[5]{\frac{Q_s^2}{J}} = 0,00154 \frac{w^2}{J} = 1,128 \sqrt{\frac{Q_s}{w}}, \\ w &= 25,5 \sqrt{dJ} = 1,27 \frac{Q_s}{d^2} = 14,0 \sqrt[5]{Q_s J^2}, \\ Q_s &= 20 \sqrt[5]{d^5 J} = 0,785 d^2 w = 187 \cdot 10^{-8} \frac{w^5}{J^2}. \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Sander, O.: Untersuchungen über den Druckhöhenverlust in Hanfschräuchen. Tübingen 1914.

Es gilt mit  $\lambda_R = 0,025$  (280)

$$\begin{aligned} J &= 0,00207 \frac{Q_s^2}{d^5} = 0,00127 \frac{w^2}{d} = 0,00113 \sqrt{\frac{w^5}{Q_s}}, \\ d &= 0,291 \sqrt[5]{\frac{Q_s^2}{J}} = 0,00127 \frac{w^2}{J} = 1,128 \sqrt{\frac{Q_s}{w}}, \\ w &= 28,1 \sqrt{dJ} = 1,27 \frac{Q_s}{d^2} = 15,1 \sqrt[5]{Q_s J^2}, \\ Q_s &= 22 \sqrt{d^5 J} = 0,785 d^2 w = 128 \cdot 10^{-8} \frac{w^5}{J^2}. \end{aligned}$$

Es gilt mit  $\lambda_R = 0,020$  (281)

$$\begin{aligned} J &= 0,00165 \frac{Q_s^2}{d^5} = 0,00102 \frac{w^2}{d} = 0,00090 \sqrt{\frac{w^5}{Q_s}}, \\ d &= 0,278 \sqrt[5]{\frac{Q_s^2}{J}} = 0,00102 \frac{w^2}{J} = 1,128 \sqrt{\frac{Q_s}{w}}, \\ w &= 31,4 \sqrt{dJ} = 1,27 \frac{Q_s}{d^2} = 16,5 \sqrt[5]{Q_s J^2}, \\ Q_s &= 25,0 \sqrt{d^5 J} = 0,785 d^2 w = 81,5 \cdot 10^{-8} \frac{w^5}{J^2}. \end{aligned}$$

Es gilt mit  $\lambda_R = 0,015$  (282)

$$\begin{aligned} J &= 0,00124 \frac{Q_s^2}{d^5} = 0,000765 \frac{w^2}{d} = 0,00068 \sqrt{\frac{w^5}{Q_s}}, \\ d &= 0,262 \sqrt[5]{\frac{Q_s^2}{J}} = 0,000765 \frac{w^2}{J} = 1,128 \sqrt{\frac{Q_s}{w}}, \\ w &= 36,1 \sqrt{dJ} = 1,27 \frac{Q_s}{d^2} = 18,5 \sqrt[5]{Q_s J^2}, \\ Q_s &= 28,4 \sqrt{d^5 J} = 0,785 d^2 w = 46 \cdot 10^{-8} \frac{w^5}{J^2}. \end{aligned}$$

Für den wichtigsten Fall, daß eine der drei Größen  $Q_s$ ,  $d$  und  $J$  gesucht wird, kann man die Zahlenrechnung mit Nomogramm Abb. 154 ersparen. Man legt dabei ein Ableselineal so, daß zwei bekannte Leiterstriche verbunden und der dritte aufgesucht wird. Wenn  $J$  und  $Q_s$  unveränderlich sind, erkennt man besonders gut den Einfluß von  $\lambda_R$  auf den Rohrdurchmesser  $d$ . Handelt es sich um andere als Kreisrohre, so muß man  $d$  durch  $4F/U$  ersetzen.

Für grobe Rechnungen an Wasserleitungen können noch einige sehr einfache Faustformeln empfohlen werden:

Für enge eiserne Wasserleitungen (etwa 20 mm  $\varnothing$ )

$$\frac{P_1 - P_2}{l} = 2 \frac{w^2}{d}, \quad \text{entsprechend } \lambda_R = 0,0392.$$

Für Wasserleitungen von etwa 100 mm  $\varnothing$

$$\frac{P_1 - P_2}{l} = \frac{w^2}{d}, \quad \text{entsprechend } \lambda_R = 0,0196.$$

Für Rohre von etwa 1 m  $\varnothing$

$$\frac{P_1 - P_2}{l} = 0,8 \frac{w^2}{d}, \quad \text{entsprechend } \lambda_R = 0,0157.$$

(283)

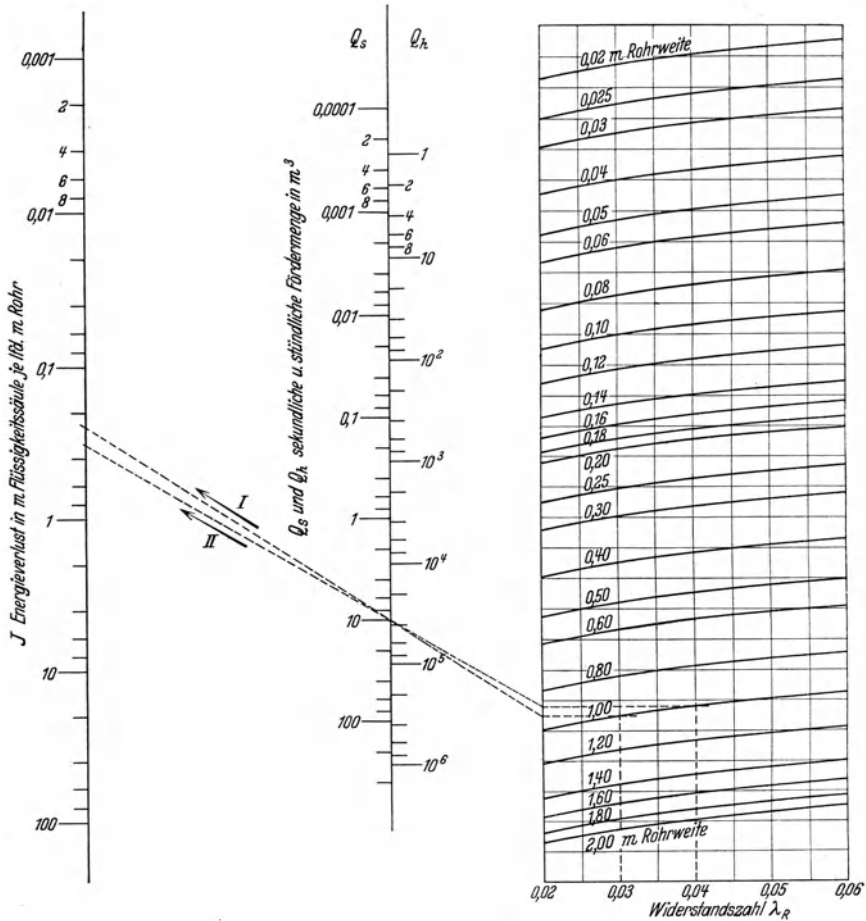


Abb. 154. Nomogramm zur Auswertung der Überschlagsformeln Gln. (279) bis (282). Beispiel I.  $Q_s = 10 \text{ m}^3/\text{s}$ ;  $d = 1,0 \text{ m}$ ;  $\lambda_R = 0,03$ ;  $J = 0,25$ . Beispiel II.  $Q_s = 10 \text{ m}^3/\text{s}$ ;  $d = 1,0 \text{ m}$ ;  $\lambda_R = 0,04$ ;  $J = 0,33 \text{ m Flüssigkeitssäule je lfd. m Rohr}$ .

## 2. Widerstandszahlen von Krümmern und anderen Leitungsteilen.

Der Druckabfall in Formstücken wird mit der Gleichung  $P_1 - P_2 = \gamma \zeta \frac{w^2}{2g}$  berechnet. Mit  $\zeta_u$  wird der Umlenkungs- und mit  $\zeta_{ges}$  der Gesamtverlust erfaßt. Abb. 155 erleichtert die Zahlenrechnung.

Für glatte (und raue) gekrümmte Rohre mit Kreisquerschnitt

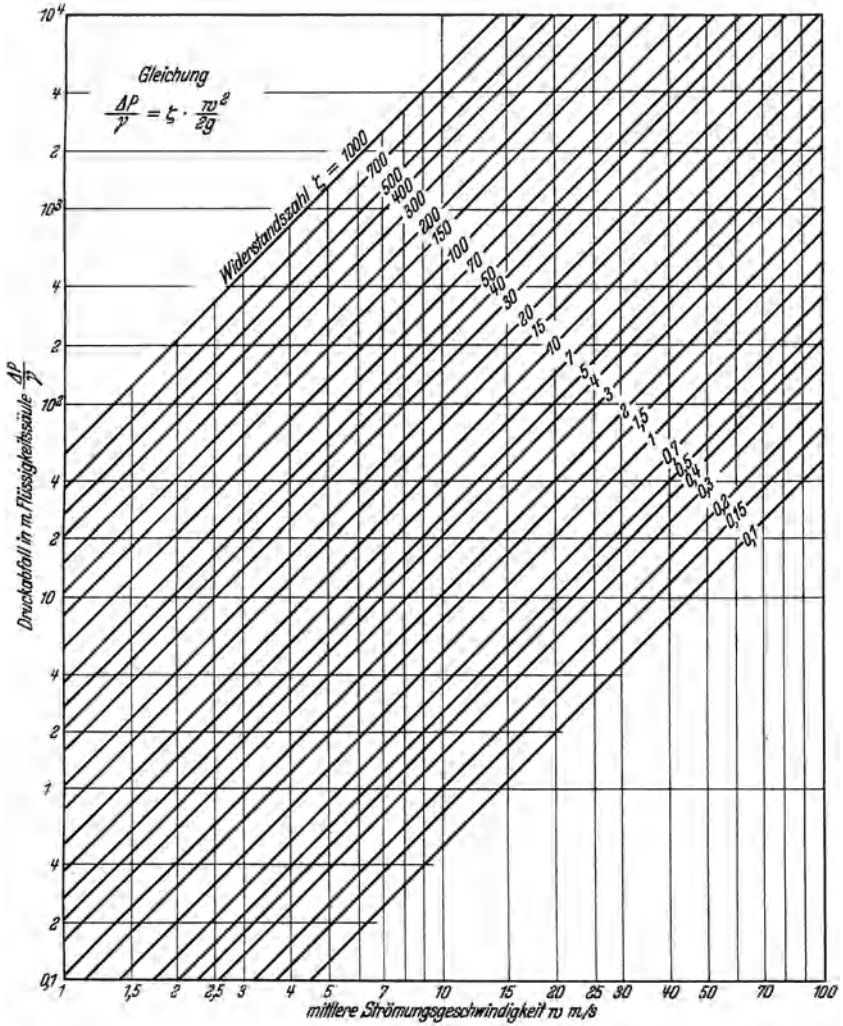


Abb. 155. Nomogramm zur Berechnung des Druckverlustes mit der Widerstandszahl  $\zeta$ .

gilt nach Weisbach

$$\zeta_{ges} = \left( 0,131 + 1,848 \left( \frac{r}{\varrho} \right)^{\frac{7}{2}} \right) \frac{\delta^0}{90} = \left( 0,13 + 0,16 \left( \frac{d}{\varrho} \right)^{\frac{7}{2}} \right) \frac{\delta^0}{90}, \quad (284)$$

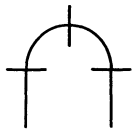
und für Rohre mit Rechteckquerschnitt (von der Breite  $2r = d$ , siehe Abb. 121)

$$\zeta_{ges} = \left( 0,124 + 3,104 \left( \frac{r}{\varrho} \right)^{\frac{7}{2}} \right) \frac{\delta^0}{90} = \left( 0,12 + 0,27 \left( \frac{d}{\varrho} \right)^{\frac{7}{2}} \right) \frac{\delta^0}{90}. \quad (285)$$

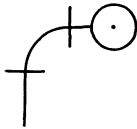
Zahlentafel 35. Werte für  $\zeta_{ges}$  bei rechtwinkligen Krümmern nach Weisbach nach den Gln. (284) und (285).

$\frac{\varrho}{d} = \frac{1}{2} \frac{\varrho}{r} =$	2,50	1,67	1,25	1,00	0,83	0,71	0,62	0,56	0,50
$\frac{d}{\varrho} = 2 \frac{r}{\varrho} =$	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$\zeta_{ges}$ Kreis =	0,14	0,16	0,21	0,29	0,44	0,66	0,98	1,41	1,98
$\zeta_{ges}$ Rechteck =	0,14	0,18	0,25	0,40	0,64	1,02	1,55	2,27	3,23

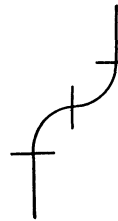
Für



2·90°-Krümmer gilt das doppelte,



2·90°-Krümmer (Raumkrümmer) das dreifache,



2·90°-Krümmer (Doppelkrümmer) das vierfache wie für einen 90°-Krümmer.

Für sanfte Bogen aus mittelrauhem Rohr mit Kreisquerschnitt kann man ansetzen<sup>1</sup>

Zahlentafel 36. Werte der Widerstandszahl für den Umlenkungsverlust  $\zeta_u$  für kreisförmig gekrümmte Rohre mit Kreisquerschnitt abhängig vom Krümmungsverhältnis  $\varrho/r$  und dem Ablenkungswinkel  $\delta$ . (Mittelrauhes Rohr bei  $Re$  etwa 50000.)<sup>2</sup>

$\delta =$	45°	60°	90°	120°	135°	180°
$\varrho/r = 8$	0,075	0,094	0,120	0,139	0,146	0,169
10	0,069	0,086	0,110	0,128	0,134	0,154
12	0,063	0,080	0,102	0,118	0,124	0,143
15	0,058	0,073	0,093	0,108	0,113	0,131
20	0,050	0,062	0,080	0,093	0,097	0,112
25	0,043	0,054	0,069	0,080	0,084	0,097
30	0,037	0,047	0,060	0,070	0,073	0,084
40	0,029	0,036	0,046	0,054	0,056	0,065
50	0,021	0,026	0,033	0,038	0,040	0,046

<sup>1</sup> Nach noch nicht veröffentlichten Versuchen des Verfassers mit einem Druckschlauch, der in verschiedenen Krümmungen verlegt wurde.

<sup>2</sup> Vgl. hierzu Abb. 138 und 139.



Demnach ist  $\zeta_u$  bei 180° Ablenkung im Mittel um 40 vH, bei 135° Ablenkung um 21,5 vH größer und bei 45° um 37,7 vH kleiner als bei 90° Ablenkung. Die Werte von Zahlentafel 36 sind für glattes Rohr zu groß und für rauhes Rohr zu klein (etwa um 8 vH zu groß für glattes Messingrohr und um 12 vH zu klein für rauhes Stahlrohr). Ihre Werte sind bei

$Re = 3000$  um 117,5 vH größer zu nehmen  
 10000 „ 46,7 „ „ „ „  
 100000 „ 12,5 „ kleiner „ „  
 250000 „ 24,3 „ „ „ „  
 500000 „ 30,6 „ „ „ „

Für Bogenstücke von handelsüblicher Form gilt

Zahlentafel 37. Widerstandszahlen für handelsübliche 90°-Krümmer und (für tropfbare Flüssigkeiten) für Fuß-, Teller- und Rückschlagventile nach Messungen verschiedener Beobachter.

$D$ mm	$q/d$	Glatte Rohre $\zeta_u$	Schmied-eisen $\zeta_u$	Guß-eisen $\zeta_u$	Fuß- oder Teller-ventil $\zeta$	Rück-schlag-ventil $\zeta$
20	6,0	0,350	0,50	0,75	—	—
30	4,3	0,225	0,30	0,45	—	—
40	3,5	0,120	0,160	0,24	12,0	22
50	3,0	0,105	0,135	0,21	10,0	18
60	2,7	0,100	0,138	0,21	9,0	15
70	2,4	0,100	0,138	0,21	8,5	12
80	2,2	0,100	0,143	0,21	8,0	10
90	2,1	0,100	0,144	0,21	7,5	9
100	2,0	0,100	0,145	0,22	7,0	8
125	1,80	0,110	0,152	0,23	6,5	7,0
150	1,67	0,120	0,158	0,24	6,0	6,5
175	1,57	0,125	0,165	0,25	5,6	6,0
200	1,50	0,130	0,170	0,26	5,2	5,5
225	1,44	0,135	0,177	0,27	4,8	5,0
250	1,40	0,138	0,182	0,28	4,4	4,5
275	1,36	0,140	0,188	0,28	4,0	4,0
300	1,33	0,145	0,191	0,29	3,7	3,5
350	1,28	0,150	0,199	0,30	3,4	3,0
400	1,25	0,155	0,206	0,31	3,1	2,5
450	1,22	0,160	0,215	0,32	2,8	2,0
500	1,20	0,160	0,217	0,33	2,5	1,8

Dabei gilt zwischen  $q/d$  und  $D$  die Normenbeziehung  $\frac{q}{d} = 1 + \frac{100}{D}$ . Die genannten Werte gelten für neue saubere Rohre. Als Faustformel kann gelten: Für Rohre mittlerer Weite ist  $\zeta_u$  rund  $\delta^0/500$  bei  $\frac{q}{r} = 3$  bis 8.

Neuerdings wurden die hydraulischen Verluste in einer Anzahl von Formstücken von besonderen Versuchsausführungen und allerlei Absperrvorrichtungen

von Stach gemessen<sup>1</sup>. Abb. 156 bis 158: Krümmer (Formen etwa nach Nipperts Anweisungen) *a* normal  $\frac{a}{d} = 3$ ; *b* mit geringer und *c* mit starker kreisförmiger Ausbauchung in der Mitte; *d* elliptische Ausbauchung mit großer Achse in Richtung des Krümmungsradius; *e* längliche Ausbauchung; *f* sanftere Krümmung

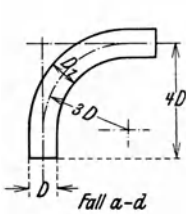


Abb. 156.

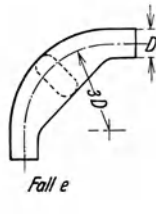


Abb. 157.

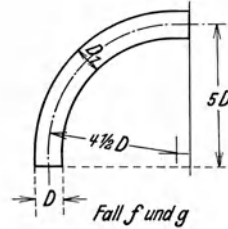


Abb. 158.

Abb. 156 bis 158. Von Stach untersuchte Krümmer.

als *a* und schließlich *g* wie *f* mit Aufbauchung in der Krümmermitte. Die Untersuchungen, die mit Preßluft von 3 bis 5 atü ausgeführt wurden, ergaben folgende Widerstandszahlen

Form	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>
$\zeta_{ges}$	0,28	0,30	0,25	0,28	0,32	0,37	0,32

Die Form *c* ( $\frac{a}{d} = 3$ , stärkere kreisförmige Ausbauchung in der Rohrmitte) scheint hydraulisch am günstigsten zu sein.

Für Knierohre gibt Zahlentafel 38 praktische Werte an.

Zahlentafel 38.  
Widerstandszahl für Knierohre  $\zeta (= \zeta_u)$ .

Ab- lenkungs- winkel $\delta$	$\zeta$ nach Kirchbach glatt	$\zeta$ nach Gibson mittelrauh	$\zeta$ nach Schubart sehr rauh
5°	0,016	—	0,024
10	0,034	—	0,044
15	0,042	0,045	0,062
22,5	0,066	0,058	0,114
30	0,13	0,109	0,17
45	0,24	0,262	0,32
60	0,47	0,49	0,68
75	—	0,80	—
90	1,13	1,18	1,27
100	—	1,48	—
110	—	1,82	—
120	—	2,19	—

Über den Widerstand in Ablenkungsstücken, die aus einzelnen Knien zusammengesetzt sind, geben Abb. 159 bis 161 Auskunft. Form *B* z. B. bietet bei  $a/d$  rund 2 nur einen um rund 50 vH größeren Umlenkungsverlust als ein Kreisrohrkrümmer. Es wird sich praktisch daher meist

<sup>1</sup> Stach, E.: Druckverlust in Formstücken für Preßluftleitungen. Glückauf Bd. 67 (1931) S. 1400. Druckverlust in Formstücken und Absperrungen. Arch. Wärmewirtsch. Bd. 13 (1932) S. 259.

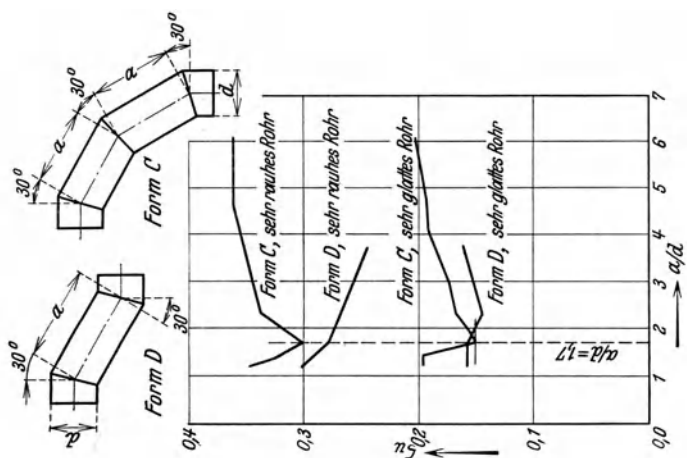


Abb. 161.

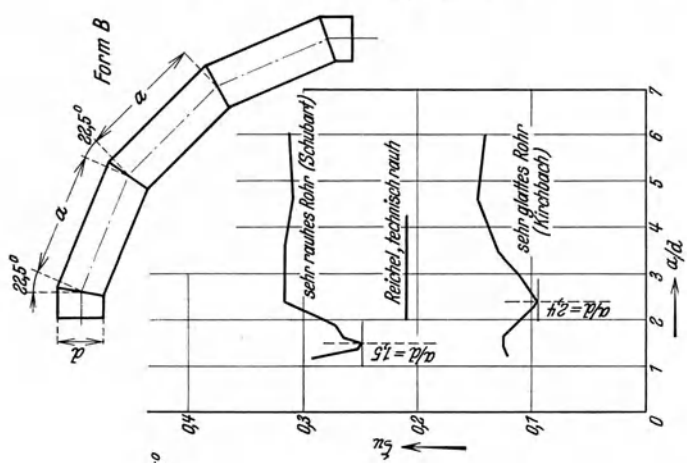


Abb. 160.

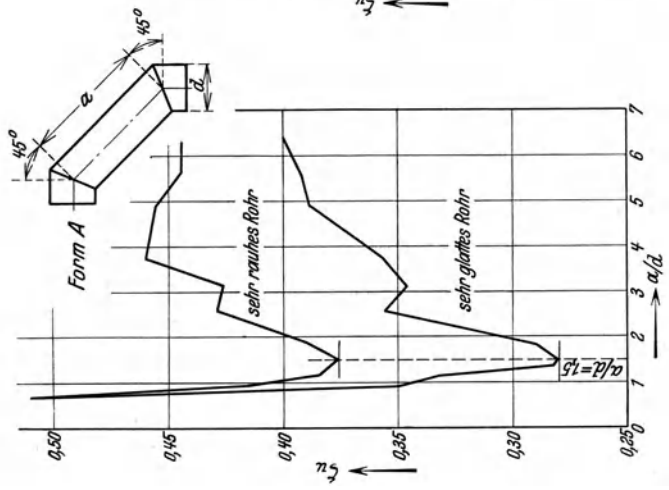


Abb. 159.

Abb. 159 bis 161. Widerstandszahlen für Ablenkungsstücke, die aus einzelnen Kniestücken zusammengesetzt sind, bei verschiedenen Knickstellenentfernungen nach Kirchbach und Schubart.

lohn, an Stelle kostspieliger Krümmen Ablenkungen von der Form *B* in Leitungen von großem Durchmesser einzubauen, zumal der Gesamtwiderstand beim Krümmen nur rund um 4 vH kleiner als bei den Knien ist. Form *C* bietet etwa 150 vH mehr Umlenkungswiderstand als Krümmen; Form *A* ist ziemlich ungünstig. Die Widerstandszahlen für technisch rauhe Rohre liegen etwa in der Mitte zwischen  $\zeta_{sehr\ glatt}$  und  $\zeta_{sehr\ rauh}$ , wie Abb. 160 zeigt<sup>1</sup>.

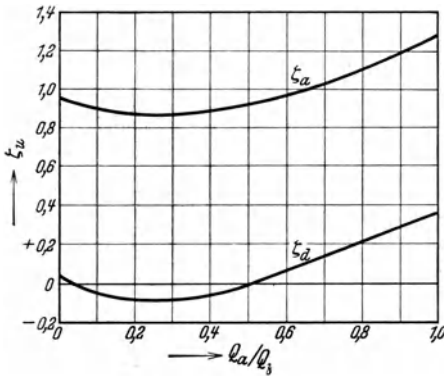


Abb. 162. Widerstandszahlen für rechtwinklige T-Stücke. Stromtrennung. Nach Vogel.

Die Widerstandszahlen für rechtwinklige T-Stücke aus Kreisrohren können aus Abb. 162 und 163 entnommen werden. Der Zeiger *a* bedeutet Abzweig, *d* Durchgang und *z* beide Ströme zusammen.  $\zeta_a$  ist die Widerstandszahl für den Abzweig,  $\zeta_d$  für den Durchgang. Dabei gilt

$$\left(\frac{\Delta P}{\gamma}\right)_a = \zeta_a \frac{w_z^2}{2g} \quad \text{und} \quad \left(\frac{\Delta P}{\gamma}\right)_d = \zeta_d \frac{w_z^2}{2g}. \tag{286}$$

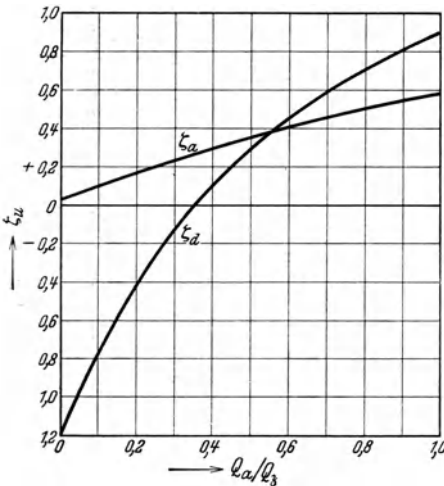


Abb. 163. Widerstandszahlen für rechtwinklige T-Stücke. Stromvereinigung. Nach Vogel.

Durch Abrunden der Durchdringungskanten können die Verluste etwas verringert werden (bei starken Abrundungen bis 30 vH). Abzweigstücke mit weniger als  $\delta = 90^\circ$  sind hydraulisch weit günstiger als solche mit  $90^\circ$ . Man kann die Verluste an Druckhöhe noch weiter senken, wenn man das abzweigende Rohr konisch ausführt<sup>2</sup>. Dabei ist der beste Verjüngungswinkel  $12^\circ$  bis  $14^\circ$ . Günstig ist, bei  $90^\circ$ -Ablenkung ein Abzweigstück mit  $45^\circ$ -Ablenkung und nachfolgend einen  $45^\circ$ -Bogen anzuordnen. Stach untersuchte auch eine Reihe T-Stücke besonderer Form<sup>3</sup> (ähnlich Vogels Untersuchungen), siehe Abb. 164a bis f: *a* altes scharfkantiges T-Stück; *b* altes kugelförmiges T-Stück; *c* kugelförmiges T-Stück mit nach

<sup>1</sup> „sehr glatt“ glatte Messingknie, „sehr rauh“ dieselben, innen Sandschicht aufgeklebt. Reichel, E.: Z. VDI. Bd. 55 (1911) S. 1414.

<sup>2</sup> Kinne, E.: Beitrag zur Kenntnis der hydraulischen Verluste in Abzweigstücken. Mitt. Hydraul. Inst. T. H. München 1931 Heft 4 S. 70.

<sup>3</sup> Stach, E.: a. a. O.

innen abgerundetem Hals; *d* wie *c* mit dachförmigem Hals; *e* abgerundetes T-Stück mit geradem Boden; *f* T-Stück mit kegelförmigem Hals und geringen Abrundungen. Er fand bei Stromtrennung:

Form	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
$\zeta_{ges}$	1,30	4,87	0,87	0,82	0,73	0,75

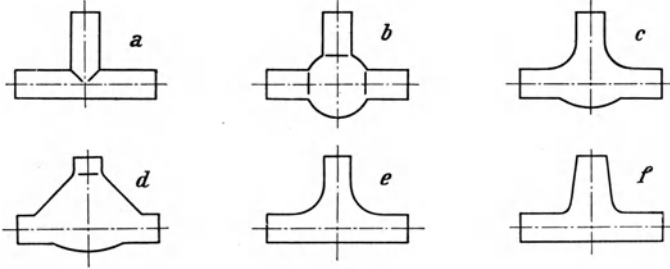


Abb. 164 a bis f. Von Stach untersuchte T-Stücke.

Die alte kugelförmige (Fall *b*) und die scharfkantige Ausführung (Fall *a*), die man heute noch viel im Betrieb antrifft, sind recht ungünstig. Am besten schneiden die einfachen Formen *e* und *f* ab.

Aus den Abb. 165 und 166 können praktische Widerstandszahlen für verschiedene Leitungsteile entnommen werden<sup>1</sup>. Vielfach ist es vorteilhaft, den Gesamtwiderstand eines Leitungsteiles durch die Länge laufender Meter geraden Rohres anzugeben, die denselben Durchflußwiderstand besitzt und die dann bei der Berechnung der Leitungsanlage einfach zur Länge des gerade verlegten Rohres hinzugezählt wird. Zahlentafel 39, die zum größten Teile dem Handbuch von Schwedler<sup>2</sup> entnommen wurde, gibt solche äquivalente Rohrlängen an.

Zum Nachweis dieser Zahlentafel können die umfangreichen Messungen von Perry<sup>3</sup> dienen. Rechnungen

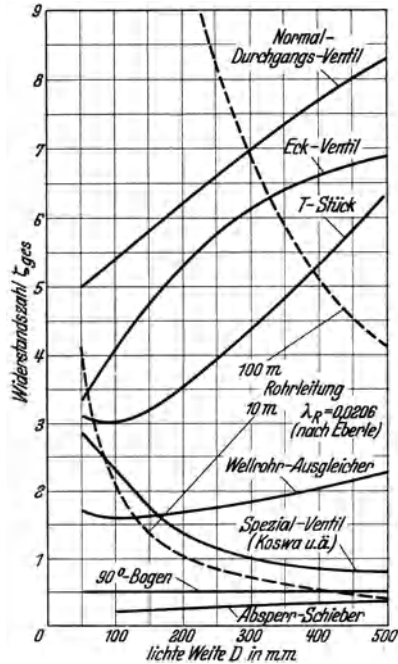


Abb. 165. Widerstandszahlen für verschiedene Formstücke (Mittelwerte) nach Arch. Wärmewirtsch. 1932 Arbeitsblatt 2.

<sup>1</sup> Die Widerstandszahl  $\zeta$  des Koswa-Ventils wird vielfach niedriger angegeben; von manchen Firmen, wie Schumann & Co., Leipzig-Plagwitz, mit  $\zeta = 1$ .

<sup>2</sup> Schwedler, F.: Handbuch der Rohrleitungen, Tafel 13 S. 208. Berlin 1932.

<sup>3</sup> Perry, L.: Tests of loss of head in standard elbows and tees. Engng. News Rec. Bd. 92 (1924) S. 940.

mit Zahlentafel 39 sind natürlich ziemlich grob und haben nur rein praktische Bedeutung.

Den Widerstand in Umlenkungsstücken verschiedener Art bei Niederdruckgasleitungen (vornehmlich Gebläseluftleitungen) kann man nach Rietschel<sup>1</sup> mit folgenden Widerstandszahlen berechnen.

1. Rechtwinkliges scharfes Knie mit Quadrat- oder Kreisquerschnitt  $\zeta_u = 1,1$ .

2. Rechtwinkliges scharfes Knie mit Rechteckquerschnitt (Abb. 167).

a) bei Umlenkung um Breitseite  $b$   $\zeta_u = 1,1$ ,

b) bei Umlenkung um Schmalseite  $a$

$$\zeta_u = 1,1 + \frac{a - b}{2}$$

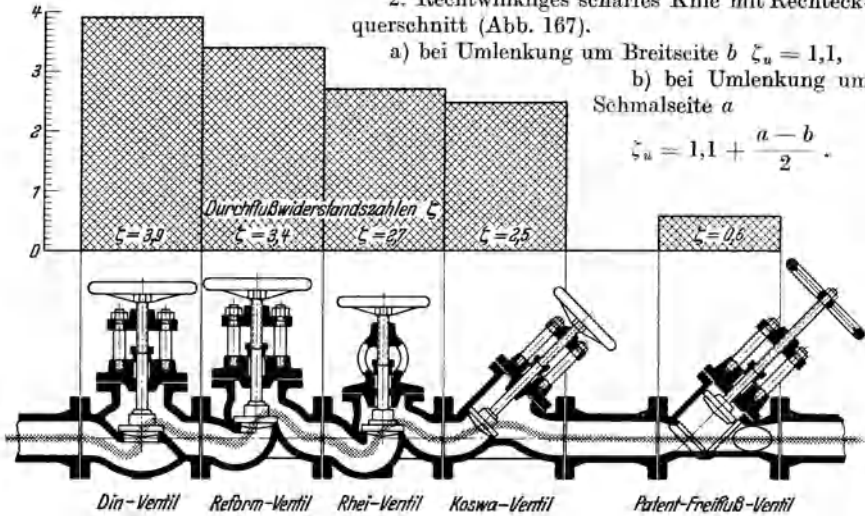


Abb. 166. Widerstandszahlen für verschiedene Arten von Durchgangsventilen, nach Pfeleiderer<sup>2</sup>.

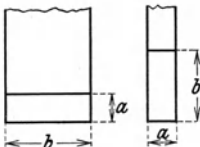


Abb. 167.

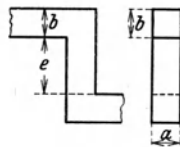


Abb. 168 a.

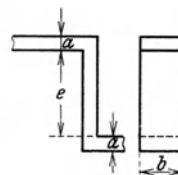


Abb. 168 b.

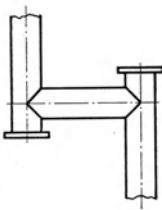


Abb. 169.

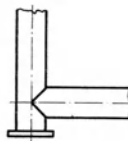


Abb. 170.

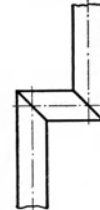


Abb. 171.

Abb. 167 bis 171. Verschiedene Leitungstücke.

<sup>1</sup> Rietschel, H.: Versuche über den Widerstand bei Bewegung der Luft in Rohrleitungen. Gesundh.-Ing. 1905 S. 9; Z. ges. Kälteind. 1905 S. 185, 205, und 1906 S. 3.

<sup>2</sup> Nach einer Druckschrift der AMAG-Hilpert-Pegnitzhütte, Nürnberg.



Für den besonderen Fall von Preßluftleitungen mit Schläuchen können für die Einzelwiderstände folgende Widerstandszahlen benutzt werden:

Normale Absperrventile . . . . .	$\zeta = 4$ bis $10$
Eckventile . . . . .	$\zeta = 2$ bis $3$
Absperrschieber . . . . .	$\zeta = 0,3$ bis $1$
Hähne . . . . .	$\zeta = 1$
Schlauchkupplungen mit Gummidichtung	$\zeta = 2$ bis $3$
Schlauchkupplungen mit Metallhülsen . .	$\zeta = 1,5$ bis $2$
Schlauchverschraubungen . . . . .	$\zeta = 1,5$ bis $2$
Verbindungsstücke . . . . .	$\zeta = 0,5$ bis $1$

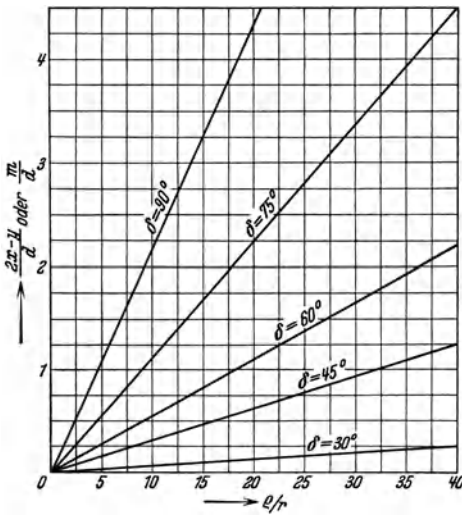


Abb. 172. Längenspanne  $2x - y = m$  abhängig von  $l$  und  $\delta$ .

Für praktische Rechnungen ist es häufig angenehm, wenn man die Leitungen nur eckenrecht auszumessen braucht (Krümmer durch Kniestücke ersetzt). Mit diesem Eckenmaß berechnet man dann die Leitung als gerade Leitung und macht für jeden Krümmer einen gewissen Zuschlag. Es ist nach Abb. 132

$$\begin{aligned} \frac{P_1 - P_2}{\gamma} &= \lambda_R \frac{AC + CE}{d} \frac{w^2}{2g} - \lambda_R \frac{2x}{d} \frac{w^2}{2g} \\ &\quad + \lambda_R \frac{y}{d} \frac{w^2}{2g} + \zeta_u \frac{w^2}{2g}. \end{aligned}$$

Bezeichnet man  $2x - y$  mit  $m$ , so gilt ( $l_e$  eckenrechte Länge):

$$\frac{P_1 - P_2}{\gamma} = \left[ \lambda_R \left( \frac{l_e}{d} - \frac{\sum m}{d} \right) + \sum \zeta_u \right] \cdot \frac{w^2}{2g}. \tag{287}$$

Die Werte von  $2x - y = m$  können aus Abb. 172 entnommen werden. Dabei sind Krümmer mit  $\delta > 90^\circ$  aus Teilkrümmern mit  $\delta$  bis  $90^\circ$  zusammensetzen. Praktisch werden meist gleiche Krümmer in die Leitungen eingebaut (z. B.  $n$  Krümmer mit  $\frac{l_e}{r} = 5$  und  $\delta = 90^\circ$ ).  $m$  und  $\zeta_u$  sind dann immer gleich groß. Mit  $n$  als Zahl gleicher Krümmer kann man für Gl. (287) einfach setzen:

$$\frac{P_1 - P_2}{\gamma} = \left[ \lambda_R \left( \frac{l_e}{d} - \frac{n \cdot m}{d} \right) + n \zeta_u \right] \cdot \frac{w^2}{2g}. \tag{288}$$



### 3. Widerstand von Leitungen mit vielen Abzweigungen.

Bei einer großen Zahl von Abzweigungen auf ein verhältnismäßig kurzes Leitungsstück (z. B. Verteilungsleitungen für Wasser oder Stadtgas) kann man annähernd so rechnen, als ob längs der Leitung stetig Flüssigkeit entnommen wird.

Die Leitung möge mit einer Menge  $Q_1$  beschickt werden; am Ende sei noch die Menge  $Q_2$  vorhanden. Bei stetiger Abgabe fließt im Abstand  $l_x$  vom Rohranfang die Menge  $Q_x$ :

$$\frac{Q_1 - Q_x}{Q_1 - Q_2} = \frac{l_x}{l} \quad \text{und} \quad Q_x = Q_1 - \frac{l_x}{l}(Q_1 - Q_2) = Q_1 \left[ 1 - \frac{l_x}{l} \left( 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \right) \right]$$

( $l$  = ganze Rohrlänge von Stelle 1 bis 2). Ist  $\lambda_R$  unabhängig von  $Re$  [nur  $f(d)$ , quadratisches Widerstandsgesetz], und ändert sich im betrachteten Leitungsstück der Rohrdurchmesser  $d$  nicht, so gilt für die Stelle  $Q_x$

$$dH + d \left( \frac{P}{\gamma} \right) = \left( 0,0826 \lambda_R \frac{Q_x^2}{d^5} \right) dl.$$

Mit der Gleichung für  $Q_x$  erhält man für raumbeständige Flüssigkeiten ( $\gamma$  = konst) nach Integration

$$H_1 - H_2 + \frac{P_1 - P_2}{\gamma} = \underbrace{0,0826 \lambda_R \frac{l}{d^5} Q_{s1}^2}_{\text{Widerstand ohne Abzweig}} \cdot \underbrace{\frac{1 + \frac{Q_{s2}}{Q_{s1}} + \left( \frac{Q_{s2}}{Q_{s1}} \right)^2}{3}}_{\text{Berichtigungsglied für Abzweig}}. \quad (289)$$

Diese Gleichung stellt natürlich nur eine grobe Annäherung dar. Bei genauerer Rechnung müßte man die Stücke zwischen den einzelnen Abzweigen getrennt untersuchen.

### 4. Förderung von pulsierenden Stoffströmen (nichtstationäre Strömung).

Versuchsmäßig ist mit pulsierenden Strömungen erst wenig gearbeitet worden. Sie herrschen in Saug- und Druckleitungen von Kolbenpumpen, -verdichtern und -gebläsen, Kapselpumpen, Zahnradpumpen, Leitungen von Schöpfwerken u. dgl. Der Strömungswiderstand wird von der Häufigkeit der Pulsationen, von der größten Abweichung von der mittleren Geschwindigkeit, von der Art der Pulsationen (stoßweises oder langsames Anheben und Abschwellen) und von den Größen ab-

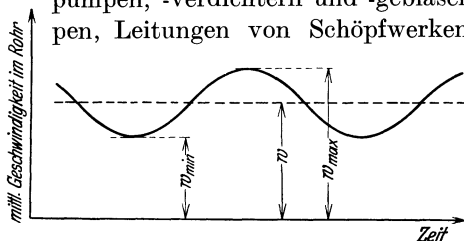


Abb. 173. Schwankung der mittleren Geschwindigkeit bei pulsierendem Fluß.

hängen, nach welchen sich der Widerstand bei stationärer Strömung richtet. Es empfiehlt sich zur Sicherheit bei praktischen Rechnungen

mit pulsierenden Strömen den Druckverlust mit  $Jd = \lambda_R \frac{v_{\max}^2}{2g}$  zu ermitteln [siehe Abb. 173 und Gl. (275)].

## 5. Wirkungsgrad einer Rohrleitung.

Man versteht unter dem Wirkungsgrad einer Rohrleitung den Ausdrück

$$\eta_{R,hr} = \frac{E_2}{E_1} = \frac{E_1 - L_R}{E_1} = 1 - \frac{L_R}{E_1}, \quad (290)$$

wobei  $E_1$  den Energiegehalt am Anfang und  $E_2$  den am Ende und  $L_R$  die beim Strom von 1 nach 2 geleistete Reibungsarbeit bedeutet.

Für tropfbare Flüssigkeiten kann man im Fall, daß man die vor der Leitung vorhandene Energie  $E_1$  möglichst stark ausnützen will (z. B. beim Betrieb einer Wasserturbine), für den Wirkungsgrad der Kraftleitungen von unveränderlichem Durchmesser setzen

$$\eta_{Rohr} = \frac{H_1 + \frac{P_1}{\gamma} - L_R}{H_1 + \frac{P_1}{\gamma}} = 1 - \frac{L_R}{H_1 + \frac{P_1}{\gamma}} \quad (291)$$

oder mit  $L_R = \lambda_r \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g}$

$$\eta_{Rohr} = 1 - \frac{\lambda_r \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g}}{H_1 + \frac{P_1}{\gamma}} = 1 - \frac{0,0826 \lambda_r \frac{l}{d^5} Q_s^2}{H_1 + \frac{P_1}{\gamma}}. \quad (291a)$$

Beim Betriebe einer Arbeitsleitung (z. B. nach Pumpen), in die man anfangs nur möglichst wenig mehr Energie stecken will, als man am Ende braucht,  $H_2 + \frac{P_2}{\gamma}$  also die gewonnene und  $H_2 + \frac{P_2}{\gamma} + L_R$  die zugeführte Energie je kg Flüssigkeit bedeutet, ist

$$\eta_{Rohr} = \frac{H_2 + \frac{P_2}{\gamma}}{H_2 + \frac{P_2}{\gamma} + L_R} = \frac{1}{1 + \frac{L_R}{H_2 + \frac{P_2}{\gamma}}} \quad (292)$$

oder

$$\eta_{R,hr} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_r \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g}}{H_2 + \frac{P_2}{\gamma}}} = \frac{1}{1 + \frac{0,0826 \lambda_r \frac{l}{d^5} Q_s^2}{H_2 + \frac{P_2}{\gamma}}}. \quad (292a)$$

Damit erhält man für einen bestimmten Wirkungsgrad  $\eta_{Rohr}$  die Fördergeschwindigkeit

$$w = \sqrt[5]{\frac{1 - \eta_{Rohr}}{\eta_{Rohr}} \frac{(H_2 + \frac{P_2}{\gamma}) 2g d}{l \lambda_r}} = \left[ \frac{1 - \eta_{Rohr}}{\eta_{Rohr}} \cdot 22,1 \frac{H_2 + \frac{P_2}{\gamma}}{l \lambda_r} \sqrt{Q_s} \right]^{\frac{2}{5}}. \quad (293)$$

Die Geschwindigkeit  $w$  richtet sich nach dem Rohrdurchmesser  $d$  und der Fördermenge  $Q_s$ . Wenn es sich um eine Kraftleitung handelt, dann tritt an Stelle  $\frac{1-\eta_{Rohr}}{\eta_{Rohr}}$  einfach  $1-\eta_{Rohr}$  und an Stelle  $H_2 + \frac{P_2}{\gamma}$  die Energie  $H_1 + \frac{P_1}{\gamma}$ .

Als Wirkungsgrad erscheint auch der Ausdruck

$$\eta_{Rohr} = \frac{E_2}{E_1} = \frac{\int_0^2 v dP}{\int_0^1 v dP}. \quad (294)$$

Stellt  $P_0$  die untere Druckhaltung einer Arbeitsmaschine dar, so ist für tropfbare Flüssigkeiten

$$\eta_{Rohr} = \frac{P_2 - P_0}{P_1 - P_0} \quad (295)$$

und für gasförmige Flüssigkeiten

$$\eta_{Rohr} = \frac{1 - \left(\frac{P_0}{P_2}\right)^{\frac{n-1}{n}}}{1 - \left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}}. \quad (296)$$

Für die Bemessung der Arbeitsfähigkeit des Gases vor und nach der Leitung wurde dabei der Prozeß eines Preßgasmotors mit dem Polytropenexponenten  $n$  zugrunde gelegt.

## 6. Größtmögliche Energieentnahme aus einer Leitung.

Wir wollen untersuchen, mit welcher Geschwindigkeit eine Rohrleitung von unveränderlichem Durchmesser durchflossen werden muß, damit der Arbeitsinhalt je kg ausfließende Flüssigkeit einen Größtwert annimmt.

Nach Gl. (82) und (86) besteht bei tropfbaren Flüssigkeiten zwischen dem Leitungsgefälle  $J$  und der Reibungsarbeit  $L_R$  die Beziehung

$$J = \lambda_R \frac{1}{d} \frac{w^2}{2g} = \frac{L_R}{l}.$$

Der Arbeitsinhalt des austretenden Strahls ist

$$L_s = (H_1 - H_2 - L_R) G_s = \left( H_1 - H_2 - \lambda_R \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g} \right) \frac{\pi d^2}{4} w \gamma \text{ mkg/s,}$$

wenn  $P_1$  gleich dem atmosphärischen Druck und  $P_2 = \gamma(H_1 - H_2) + P_1$  ist. Der Arbeitsinhalt nimmt in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit

einen GrößtWert an, wenn

$$\frac{dL_s}{dw} = 0 = H_1 - H_2 - 3 \lambda_R \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g} \quad \text{oder} \quad L_R = \frac{1}{3} (H_1 - H_2) \quad (297)$$

ist. Die zugehörige Geschwindigkeit ist

$$w = \sqrt{2g \frac{H_1 - H_2}{3 \lambda_R} \frac{d}{l}}. \quad (298)$$

Man muß durch ein Drosselorgan (dessen hydraulische Wirkung hier vernachlässigt werde) am Ende der Druckleitung diese Geschwindigkeit

einstellen, wenn man  $L_{\max}$  haben will. Läßt man größere oder kleinere Geschwindigkeiten zu, so ist  $L$  immer kleiner als  $L_{\max}$ . Die größte verfügbare Leistung ist

$$\begin{aligned} N_{\max} &= \frac{1}{75} L_{s \max} \\ &= \frac{1}{75} \frac{2}{3} (H_1 - H_2) \frac{\pi}{4} d^2 w \gamma \\ &\quad \text{in PS,} \quad (299) \end{aligned}$$

d. h. die Hälfte von  $N_{\max}$  geht durch Reibung in Wärmeenergie über:

$$\lambda_R \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g} = \frac{1}{3} (H_1 - H_2).$$

Damit erhält man einen Wirkungsgrad der Leitung von

$$\eta_{\text{Rohr}} = \frac{H_1 - H_2 - L_R}{H_1 - H_2} = \frac{2}{3} \quad \text{oder} \quad 67 \text{ vH.} \quad (300)$$

Für den Rohrdurchmesser erhält man im Falle  $L = L_{\max}$  die Gleichungen

$$d = 3 \lambda_R \frac{l}{H_1 - H_2} \frac{w^2}{2g} = \sqrt[5]{3 \lambda_R \frac{l}{H_1 - H_2} \frac{16}{\pi^2} \frac{Q_s^2}{2g}} = 0,315 \sqrt[5]{\frac{N_{\max}^2 \lambda_R l}{(H_1 - H_2)^3}}. \quad (301)$$

Mit  $\lambda_R = 0,025$  als Überschlagszahl wird aus der Vorzahl 0,315 der Wert 0,151. Jener Durchmesser ist allerdings nur in bezug auf  $L$  der günstigste. Praktisch sind für die Wahl des Durchmessers noch andere Gesichtspunkte wie verfügbare Wassermenge, Art der aufzustellenden Turbinen, Anlage- und Unterhaltungskosten maßgebend.

Zwischen der Arbeitsfähigkeit am Ende, also dem Enddruck  $P_2$ , und dem Durchflußgewicht  $G$  besteht ein ähnlicher Zusammenhang bei

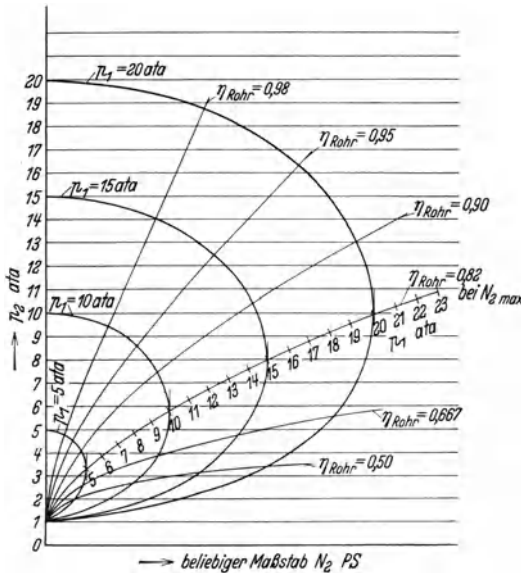


Abb. 174. Zusammenhang zwischen Anfangsdruck  $p_1$  und Enddruck  $p_2$  einer Gasleitung, wenn das Arbeitsvermögen am Ende ( $N_2$ ) einen GrößtWert annehmen soll.

gasförmigen Flüssigkeiten. Mit Gl. (38) und (125) ist bei isothermischer Strömung

$$N_2 = G_h L_{pol} \frac{1}{2 \cdot 3600} \cdot \frac{1}{75} = \text{konst} \sqrt{p_1^2 - p_2^2} \left[ 1 - \left( \frac{p_0}{p_2} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right] \text{ in PS,} \quad (302)$$

wenn  $p_0$  die untere Druckhaltung des Preßgasmotors bedeutet.  $\lambda_R$  ist konst. Zur Verdeutlichung wurden in Abb. 174 in einem Diagramm  $p_2$  über  $N_2$  Linien gleichen Anfangsdruckes  $p_1$  eingetragen. Das Diagramm zeigt, daß bei ganz bestimmten Drücken  $p_2$  die Leistungsfähigkeit  $N_2$  einen Größtwert annimmt. Für das Diagramm wurde  $p_0$  zu 1 ata und  $n$  zu 1,3 angenommen.

## 7. Ablagerungen an Rohrleitungen im Betrieb.

Schon öfters wurden Begriffe wie neue und gebrauchte Leitung bei Bemerkungen über die Wandinnenbeschaffenheit oder den Rauigkeitsgrad von Rohrleitungen verwendet. Die in diesen Abschnitten angeführten Formeln gelten, wenn nicht ausdrücklich anders bemerkt, für saubere neue Rohre.

Die Veränderungen der blanken Rohrwand, auf die der Hydrauliker beim Entwurf von Leitungsanlagen Rücksicht nehmen muß, können chemischer oder mechanischer Natur sein. Ablagerungen enthalten im allgemeinen pflanzliche, tierische oder mineralische Bestandteile.

In erster Linie sind eiserne Wasserleitungen starker Verschmutzung ausgesetzt. Schon nach kurzem Gebrauch pflegt die Innenfläche eine 2 bis 3 mm mächtige schleimige Schicht anzunehmen, in der Kalk, Magnesia und verschiedene Eisenverbindungen (z. B. Brauneisenstein) enthalten sein können. Allmählich kann eine dicke Kruste anwachsen, die durch Sinterung (z. B. bei hartem Wasser), Muschelansatz, Algen und Wasserpilze (deren Lebensfähigkeit nicht an Tageslicht gebunden sein muß) schließlich zu starker Knollenbildung führen kann. Besonders scheint sauer reagierendes Wasser bei Anwesenheit von freier Kohlensäure zur Knollenbildung zu neigen. Die Schnelligkeit, mit der sich solche Verkrustungen herausbilden, hängt vom Grade der Reinheit und Art und Herkunft des Wassers einerseits und von der Rauigkeit der Rohrwand andererseits ab. Mit der Oberflächenänderung kann sich die benetzte Wandfläche, besonders bei unregelmäßigen Ablagerungen, erheblich vergrößern. Die Ablagerungen bilden teilweise nur eine dünne Schicht, an anderen Stellen haben sie aber bis zur Rohrmittre reichende sanft ansteigende oder zackige Höcker. Starke Krustenbildung verringert den Durchlaßquerschnitt und vermehrt die benetzte Fläche, damit steigt der Druckverlust und die zu verrichtende Förder-

arbeit. Die Ablagerungsfähigkeit richtet sich vielfach nach der Durchflußgeschwindigkeit, besonders wenn das Wasser grobe Fremdkörper mitführt (Sand, Rostplättchen usw.). Da mit wachsender Verkrustung das Rohr enger wird, nimmt die Durchflußgeschwindigkeit bei gleichbleibender oder wenig veränderlicher Durchflußmenge zu, womit die Ablagerungen von selbst aufhören. In den meisten Fällen aber, wie bei unfiltriertem eisenhaltigem Wasser, richtet sich die Ablagerungsfähigkeit nicht nach der Geschwindigkeit<sup>1</sup>. Dann wächst das Rohr allmählich ganz zu. Röhre mit ungleichmäßigem Durchmesser, Walznähten usw. neigen besonders zu Ablagerungen und Verstopfungen.

Störungen in der Förderung können auch durch das Einfrieren von Leitungen kommen. Metallrohre sind wegen der besseren Wärmeleitfähigkeit einer Vereisung leichter ausgesetzt als Holzrohre, wenn die Kälte von außen eindringt.

Bei geringen Anschwemmungen bewirken die pflanzlichen und tierischen Bestandteile häufig eine größere Glätte der Röhre als im Neuzustand. Das macht sich günstig bei wasserführenden Holzrohren bemerkbar.

Gasleitungen unterliegen wegen der größeren Durchflußgeschwindigkeit nicht so leicht einer mechanischen Verschmutzung als Wasserleitungen. Hier bestehen Verkrustungen im allgemeinen aus Staub- und losgerissenen Rostteilchen, die u. U. zur Verstopfung verengter Leitungsteile oder nicht dauernd benutzter Abzweigleitungen führen können. Gelegentlich (z. B. in Wetterlütten) spielen wohl auch pflanzliche Ansätze eine Rolle.

Chemische Einflüsse auf die Röhre sind vornehmlich in Anrostungen (Korrosionen) zu erblicken. In dauernd gefüllten Wasserleitungen oder ähnlichen Fällen tritt infolge Luftmangels (bei absorbiert bleibender Luft) keine Oxydation ein. Aber nur teilweise gefüllt betriebene oder häufig entleerte Wasserleitungen oder Leitungen mit sauerstoffhaltigen feuchten Gasen rosten schnell, wodurch die Röhre meist erheblich rauher werden. Wenn der Flüssigkeitsdruck in Wasserleitungen abnimmt (Verengungen, Saugleitungen, Heberröhren, Drosselvorrichtungen), wobei Teile der vom Wasser aufgenommenen Gase (Luft, Kohlensäure, Chlorwasserstoff, schweflige Säure, Ammoniak) frei werden, wird der Angriff auf ungeschützte Wandstellen verschärft.

Hier möge auch auf die Gefahr des Abreißens einer zu fördernden tropfbaren Flüssigkeit hingewiesen werden (Kavitation). Die Ausscheidung von gelösten Dämpfen oder teilweise Verdampfung, wenn der manometrische Druck im Rohre

---

<sup>1</sup> Eisenhaltiges Wasser fällt den Eisenschlamm bei Durchmischung mit angesaugter Luft aus (Verfahren bei Enteisungsanlagen). Man kann die Verkrustung von Wasserleitungen durch sorgfältige Entgasung und Enteisung des Wassers vor der Leitung herabsetzen.

bis auf den Dampfdruck der Flüssigkeit (abhängig von der Flüssigkeitstemperatur) absinkt, führt zu Hohlraumbildungen und zum Abreißen der Flüssigkeit. Dadurch wird der Förderwiderstand erheblich vergrößert oder die Förderung überhaupt unterbrochen.

Andere chemische Einflüsse wie durch saure oder salzige Beschaffenheit des Wassers oder andere chemische Eigenschaften der Förderflüssigkeiten bewirken auch eine mehr oder weniger ungünstige Veränderung der Rohrwand. Bei Hausleitungen der Wasserversorgung bildet sich jedoch selbst nach vieljährigem Betrieb in der Regel beim Durchfluß von kaltem Wasser kein oder nur ein unbedeutender Niederschlag, der meist weißlich oder grünlich aussieht, ganz schwach und vor allem ganz glatt ist (Blei-, Kupfer- oder Messingrohre). Er besteht aus Blei- oder Kupferkarbonaten oder -oxyden und übt auf den Strömungswiderstand kaum einen Einfluß aus<sup>1</sup>.

Allgemein sind im Sinne von Betriebseinflüssen Holzrohre (wandwellige Oberfläche) am günstigsten. Sie neigen nur zu Pilzwucherungen. Sehr günstig verhalten sich auch glatte Beton- und Zementrohre, die im allgemeinen für größere Wasserleitungen verwendet werden und sich dabei mit einer dünnen schmierenden Schicht überziehen, wonach sie, wenigstens bei großer Reynoldsscher Zahl, manchmal glatter als gezogenes Messingrohr sind. Gußeisenrohre neigen wegen ihrer größeren Rauigkeit mehr zur Verkrustung als Stahlrohre. Die zahlreichen Verflansungen, die wegen der kurzen Rohrbaulänge der Gußeisenrohre nötig sind, geben Ansätzen guten Halt. Die Rostgefahr besteht vor allem bei Eisenblechleitungen, doch neigen diese wiederum weniger zu Verkrustungen als Gußeisenrohre. Verhältnismäßig günstig verhalten sich Stahlrohre in bezug auf Rosten und Ablagerungen. Dagegen verschmutzen rauherverzinkte und genietete Eisenblechrohre leicht, ebenso Rohre mit Schweißnähten. Mittel zur Verringerung von Oberflächenänderungen hat man, indem man die Rohre asphaltiert, glatt verzinkt oder andere widerstandsfähige glatte Überzüge anbringt.

Aus dieser Beschreibung erkennt man, daß es meist keinen Sinn hat, Formeln für neue und in Betrieb befindliche Rohre aufzustellen, weil die Möglichkeiten einer Oberflächenänderung praktisch gar zu verschieden sind. Man kann sich aber für Faustregeln zunutze machen, daß der Beschlag der Wände eine vom Rohrdurchmesser unabhängige Dicke nach Erfahrung annimmt.

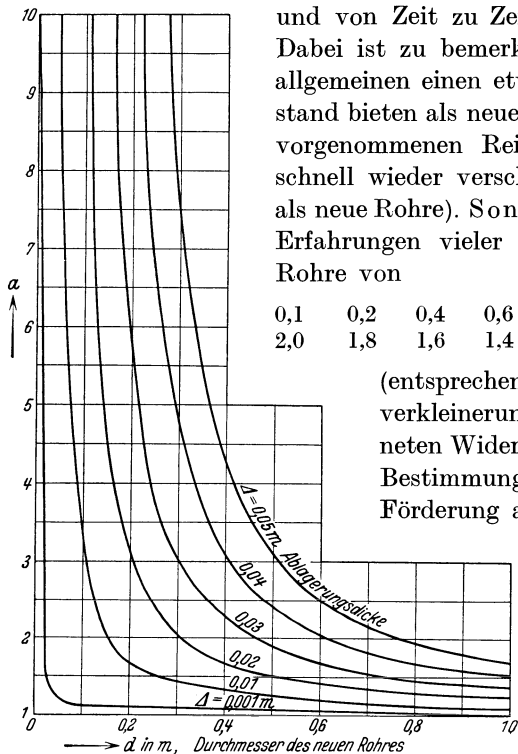
Gewöhnlich braucht man für Holz- und Zementleitungen keine Rücksicht auf Niederschläge zu nehmen. Für Gasleitungen aller Art

---

<sup>1</sup> Viesohn beobachtete z. B. an einer 18 Jahre alten Bleileitung eine Druckverluststeigerung gegenüber dem neuen Rohr um nur rund 4 vH. Viesohn, G.: Untersuchungen über Druckverluste in Rohrleitungen und Armaturen für die Hausleitungen der Wasserversorgung. Gas- u. Wasserfach Bd. 75 (1932) S. 679.

reicht es aus, den Leitungsdurchmesser um 5 mm, in besonders ungünstigen Fällen um 10 mm größer als berechnet zu halten. Bei eisernen Wasserleitungen muß man je nach Art und Durchflußgeschwindigkeit des Wassers bis 20 mm stärkere Rohre wählen. In sehr ungünstigen

Fällen muß man die Rohre bis 40 mm weiter halten und von Zeit zu Zeit reinigen oder auswechseln. Dabei ist zu bemerken, daß gereinigte Rohre im allgemeinen einen etwas größeren Durchflußwiderstand bieten als neue und je nach der Sorgfalt der vorgenommenen Reinigung mehr oder weniger schnell wieder verschmutzen (jedenfalls schneller als neue Rohre). Sonne<sup>1</sup> empfahl nach praktischen Erfahrungen vieler Art an Wasserleitungen für Rohre von



0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0 m Durchmesser das
2,0	1,8	1,6	1,4	1,2	1,1fache

(entsprechend 20 bis 40 mm Durchmesser-  
verkleinerung im Betriebe) des berechneten Widerstandes als Grundlage bei der Bestimmung des Kraftbedarfs für die Förderung anzunehmen (ohne Rücksicht auf die Größe der Strömungsgeschwindigkeit).

Für die Förderung anderer tropfbarer Flüssigkeiten gelten je nach Ablagerungsmöglichkeit und Korrosionsgefahr ähnliche Gesichtspunkte.

Abb. 175. Zum Strömungswiderstand in Rohren mit Betriebsablagerungen. Widerstandserhöhung um das  $a$ fache.

$$a = \left(\frac{d}{d - 2\Delta}\right)^5$$

$\Delta$  Dicke der Ablagerung.

Die Stärke von gemessenen Ablagerungen in Leitungen aus Gußeisen

für unfiltriertes Flußwasser z. B. möge folgende Zusammenstellung kennzeichnen (Querschnittsverkleinerungen in  $vH$ )<sup>2</sup>:

$d$ in m . . . . .	0,076	0,076	0,102	0,152	0,152	0,204	0,381
Betriebsjahre . . . .	20	32	22	10	20	24	40
Ablagerung in $vH$	35	75	54	20	33	36	28

entsprechend einer gleichmäßigen Ablagerungsdicke von

7,5	19,0	16,5	8,0	14,0	19,0	29,0 mm.
-----	------	------	-----	------	------	----------

<sup>1</sup> Sonne, E.: Grundlagen für die Berechnung der Wasserleitungen. Z. VDI Bd. 58 (1907) S. 1615.

<sup>2</sup> Nach O. Iben: Hütte, des Ingenieurs Taschenb., 20. Aufl. Bd. 1 (1908) S. 274.



Für das Verhältnis der Fördermengen vor (1) und nach (2) der Verschmutzung gilt, ganz allgemein, wenn  $\lambda_R$  (praktisch) = konst ist (raue Rohre):

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{\frac{5}{2}}. \quad (303)$$

Für Gefälle  $J$  und Druckverlust  $\Delta P$  ergibt sich

$$\frac{\Delta J}{J} = \frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta p}{p} \sim -5 \frac{\Delta d}{d}. \quad (304)$$

Der Strömungswiderstand vergrößert sich um das

$$a = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^5 \text{ fache,}$$

das ist in ungünstigen Fällen das 25- und mehrfache, wenn immer dieselbe Flüssigkeitsmenge durch das Rohr gedrückt werden soll. Siehe hierzu Abb. 175 und folgende Zusammenstellung.

Bei $\frac{d_2}{d_1}$	= 0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80
ist $\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^5$	= 32,0	19,9	12,9	8,62	5,95	4,21	3,06
bei $\frac{d_2}{d_1}$	= 0,80	0,85	0,90	0,93	0,95	0,98	1,00
ist $\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^5$	= 3,06	2,27	1,69	1,44	1,29	1,18	1,00

## 8. Über die Genauigkeit der Formeln.

Den Gleichungen, mit welchen wir hydraulische Vorgänge rechnerisch zu erfassen suchen, kommt ganz verschiedene Genauigkeit zu. Wir haben exakte Gleichungen wie z. B. das Gesetz der Laminarströmung, die wir mit beliebiger Genauigkeit ansetzen können, wenn uns nur die einzelnen Grundwerte der Aufgabe wie Rohrdurchmesser, Zähigkeit der Flüssigkeit usw. mit entsprechender Genauigkeit gegeben sind. Das gilt aber nicht für Interpolationsformeln, die aus einzelnen Versuchsergebnissen gewonnen wurden, oder für mehr oder weniger genaue Näherungsformeln. Hier kann man höchstens so weit gehen, als der Meßschärfe der einzelnen Versuchsgrößen entspricht. Bei der Abschätzung der Genauigkeit einer Formel müssen wir berücksichtigen, ob der Formel Laboratoriums- oder Versuche an bestehenden technischen Leitungen zugrunde liegen. Laboratoriumsversuche, bei welchen man unerwünschte Einflüsse nach Möglichkeit ausschalten kann, haben meist Anspruch auf größere Genauigkeit als praktische Versuche. Dafür sind sie aber im Versuchsbereich (Rohrweite und -länge, Geschwindigkeit usw.) beschränkt. Die Genauigkeit der praktischen Ver-

suche dagegen leidet vornehmlich an der wenig genauen Durchmesserbestimmung und Undichtheiten bei längeren Leitungen.

Praktisch kann man die Rauigkeit der Versuchsrohre kaum genügend deutlich beschreiben oder durch einen hinreichend scharfen Zahlenwert angeben, sondern muß gefühlsmäßig das Rohr in eine der oben beschriebenen Rauigkeitsgruppen einordnen. Vielfach hat eine Rohrbaustoffsorte ganz verschiedene Rauheit. Der Rauigkeitsgruppe Stahl oder Gußeisen schlechthin ordnet man einen mittleren Rauigkeitsgrad zu, der natürlich nicht für alle Stahl- oder Gußeisenrohre zutrifft. Wenig sorgfältig hergestellte Stahlrohre mit vorstehenden Walznähten oder Ziehriefen können schon im neuen Zustand rauher als tadellos gegossene Gußeisenrohre sein. Andererseits kann man Stahlrohre so sorgfältig herstellen, daß sie an die Glätte von Messingrohren herankommen. Aus diesem Grunde weichen die Formeln vielfach untereinander ab. Zu beachten ist auch, daß man verschiedene Rohrarten heute nach moderneren Verfahren mit anderer Oberflächenbeschaffenheit herstellt als früher, und daß daher ältere Formeln in manchen Fällen gar nicht mehr passend sein können. Z. B. waren früher verzinkte Rohre rauher als heute.

Es genügt zur ungefähren Angabe der Rauigkeit bei Versuchen nicht nur die Art des Rohrbaustoffes, sondern außerdem solche wie neu oder gebraucht, bearbeitet, gereinigt oder mit Niederschlägen oder Krusten, asphaltiert, verzinkt, verzinkt, über die Art und Sorgfalt der Herstellungsweise der Rohre, in welchem Maße das Rohr zylindrisch ist, über die Sorgfalt, mit der die Leitungen aus einzelnen Rohrstücken oder aus einzelnen Steinen zusammengesetzt sind, über die Anzahl und Art der Rohrverbindungen, ob der Zustand der Rohrleitung durch Stichproben oder durch systematische Durchsicht erkannt wurde u. v. a. m. Man bemerkt, welche mannigfaltige Unsicherheit praktischen Versuchen anhaftet. Dazu kommt noch, daß die Meßverfahren bei Versuchen im praktischen Betriebe nicht immer einwandfrei sind. Für handelsübliche Rohre kann man überhaupt keine sehr genauen Formeln aufstellen, weil ihre lichte Weite und Wandrauigkeit verschieden ausfällt.

Im allgemeinen geben Formeln eine Zahlengenaugigkeit von drei Stellen. Formeln, die auf besonders sorgfältigen Messungen beruhen [wie einige Gesetze für das glatte Rohr, Gl. (173) u. a.], können gelegentlich als auf vier Stellen genau gelten. Zuweilen läßt sich aber auch nur eine Genaugigkeit von zwei oder nur einer Stelle vertreten, besonders wenn es sich um Widerstandszahlen für einmalige Widerstände oder um Faustformeln handelt. Dabei ist zu berücksichtigen, daß es schon sehr schwierig ist, Widerstandsformeln für raue Rohre auf zwei Stellen genau anzugeben, weil die grundlegenden Versuchsergebnisse oft trotz der aufgewandten großen Sorgfalt beträchtlich voneinander abweichen.

Deshalb können die Formeln immer nur Mittelwerte geben, d. h. in ungünstigen Fällen kann die Rechnung um 10 vH und mehr von den wirklichen Vorgängen abweichen.

Die Formeln im dritten Teile dieses Buches wurden (vielfach unter erheblicher Abrundung ihrer Zahlenbeiwerte) so angegeben, wie ihrer Genauigkeit schätzungsweise entspricht. Hydraulische Rechnungen unter Mitschleppen von Zahlenschwänzen genauer als nach diesen Richtlinien durchzuführen, ist unsinnig.

Besondere Obacht ist beim Abnehmen von Rechenwerten aus logarithmischen Diagrammen zu üben. Durch die logarithmische Verzerrung können leicht größere Ablesefehler begangen werden.

Für ein und denselben Rohrbaustoff, z. B. Stahl, werden oft ganz verschiedene gebaute Formeln oder gleichgebauten mit ganz verschiedenen Beiwerten angegeben, je nachdem, wie man eine geeignete Kurve durch die (streuenden) Versuchspunkte legt oder nach welchem Ansatz man die Versuchsergebnisse auswertet. Tatsächlich geben dann diese Formeln an den Stellen, wo sich ihre Geltungsbereiche überschneiden, etwa dieselben Werte. Wenn man bedenkt, daß praktisch eine Rechengenauigkeit von  $\pm 5$  vH völlig ausreicht, so ist es zulässig, die vielen verschiedenen Formeln, die für Flüssigkeiten aller Art aufgestellt wurden und die sich nach sorgfältiger Auswahl nur noch wenig unterscheiden, durch eine einzige Formel zu ersetzen. Eine solche Mittelformel ist die von Biel für Stahlrohr, die damit allen praktischen Bedürfnissen genügt.

## 9. Richtlinien für die Anlage von Leitungen.

Maßgebend für den Entwurf einer Leitung ist zunächst die Art der fortzuleitenden Flüssigkeit. Danach ist ein bestimmter Rohrbaustoff zu wählen.

Die Auswahl aus den in Frage kommenden Rohrsorten wird durch Beurteilung ihrer Festigkeitseigenschaften und wirtschaftliche Überlegungen entschieden<sup>1</sup>.

Die Gestaltung der Leitung richtet sich nach den örtlichen Verhältnissen. Für ihre Abmessungen sind Fördermenge, zulässiger Druckabfall, zulässige Geschwindigkeit und zulässige Temperaturänderung maßgebend.

<sup>1</sup> Siehe z. B. M. Rother: Zur Berechnung der wirtschaftlichen Lichtweiten von Wasserhauptleitungen. Gas- u. Wasserfach Bd. 56 (1913) S. 321ff. W. Netolizka: Die wirtschaftliche Bemessung von Druckrohrleitungen für Wasserkraftanlagen. Röhrenind. Bd. 23 (1930) S. 291, 307. W. Denecke: Z. Wärme 1921, 1922, 1924, 1925, und besonders das Werk von R. Biel: Die wirtschaftlich günstigsten Rohrweiten für die Fortleitung von Wasser, Dampf und Gas. München u. Berlin 1930.

Zur Wahl der Rohrsorte ist zu bemerken: Gezogene oder über einen Dorn gepreßte Rohre sind oft mehr oder weniger konisch. Je nach der Richtung, in der konische Rohre durchflossen werden, bieten sie ganz verschiedenen Widerstand. Stumpf oder überlappt geschweißte Rohre haben je nach Art und Sorgfalt der Herstellung mehr oder weniger stark veränderliche lichte Weite. Jede kraftschlüssige Rohrverbindung ist mit Querschnittsänderungen verbunden (Erweiterung bei Verkuppung mit Festflanschen durch aufgewalzte Rohrenden und bei Muffenverbindung, Verengung am aufgebördelten Rande bei Losverflanschungen). Leitungen aus kurzen Rohrstücken bieten mehr Widerstand als Leitungen aus längeren Stücken. Gußeisenrohre haben kurze Baulängen (2 bis 4 m, enge Rohre sind kürzer als weitere). Schmiedeeisen- und Stahlrohre sind in Längen von 5 bis 10 m am Markt erhältlich, Steinzeugrohre in Längen von 0,8 bis 1,0 m. Stahlrohre sind leichter und fester als gußeiserner.

Bei Förderung von Flüssigkeiten, deren Temperatur an die Schmelztemperatur der Schutzüberzüge herankommt, dürfen nicht asphaltierte, verzinkte, verzinnte oder dgl. Rohre gewählt werden. Muffenleitungen, die in den Verbindungen durch Einlegen von Dichtungsstricken (Hanfzöpfen) und Hintergießen und Verstemmen mit Blei oder mit Bleizöpfen gedichtet werden, eignen sich auch nicht zur Förderung von heißen Flüssigkeiten. Durch die Wärmedehnung der Rohre können die Muffenenden auseinander geschoben werden.

Besteht die Gefahr einer Kohlensäureausscheidung, so sind Rohre aus Eisen oder Zink zu vermeiden.

Salziges Wasser ist am besten durch Holzrohre zu leiten, sonst sind auch Rohre aus Zink, Blei, Nickel oder aus besonderen Legierungen (Bronzen) zu empfehlen<sup>1</sup>.

Für die Fortleitung von säurehaltigem Wasser oder von Säuren benutzt man Blei-, Zinn-, Ton- oder Steinzeugrohre oder Rohre aus besonderen Legierungen. Bei geringem Säuregehalt eignen sich auch Holz- oder Holzgefütterte Rohre.

Für Gestaltung und Verlegung von Leitungen ist zu beachten:

Bei der Bemessung der Leitungen muß auf etwaige im Betriebe auftretende Verschmutzungen Rücksicht genommen werden.

Der lichte Durchmesser von Dichtungen soll größer als der Rohrdurchmesser gehalten werden, damit sie beim Zusammenschrauben der Rohre nicht ins Innere gepreßt werden.

Zur Entleerung verlegt man die Leitungen mit (geringem) Gefälle. Bei tropfbaren Flüssigkeiten ordnet man an den höchsten Stellen der Leitung Entgasungsventile an.

<sup>1</sup> Spiegelberg: Über den geeignetsten Rohrbaustoff für verschieden geartetes Wasser. Gesundh.-Ing. 1918 Nr. 11.

Für gußeiserne Leitungen ist immer eine sichere Unterfütterung und gute Lagerung erforderlich. In rutschendem oder arbeitendem Gelände (z. B. in Bergbaugebieten) oder bei moorigem oder frisch geschüttetem Boden sollen gußeiserne Leitungen (besonders unterirdische) nur mit großer Vorsicht oder gar nicht verlegt werden. Durch die Bewegungen können vermuffte Rohre auseinandergehen. Verflanschte Rohre können brechen. Die Bruchgefahr ist bei engeren Rohren größer als bei weiteren. Rohre über 125 mm l. W. brechen selten, häufiger Rohre von 50 bis 100 mm l. W. Die Unterlage für die Rohre darf nicht aus Steinen bestehen, besonders nicht bei dünnwandigen Stahlrohren, da sie infolge von Wärmeausdehnungen mit der Zeit durchgerieben werden.

Verschweißte Rohrleitungen, die meist in frostfreier Tiefe verlegt werden, zeichnen sich durch große Dichtheit aus.

Wenn starke Wärmeausdehnungen zu erwarten sind, müssen die Rohre entweder im Zickzack verlegt werden oder mit Ausdehnungsausgleichern (Lyra-, Linsen, Wellrohr- oder Stopfbüchskompensatoren) versehen werden.

Zur Verhütung grober Verschmutzung müssen Reinigungs- oder Senkkästen vorgesehen werden. Bei Rohreinläufen sind oft Siebe oder Rechen anzuordnen. Staubhaltige Gase müssen bei längeren Leitungen vor dem Einlauf durch Staubabscheider gehen.

Besondere Obacht ist auf die Möglichkeit des Auftretens von vagabundierenden Strömen in der Nähe von elektrischen Kraftwerken zu geben, die große Zerstörung durch Elektrolyse anrichten können (an gußeisernen, stählernen und Bleirohren<sup>1</sup>). Solche Ströme treten leicht aus blank verlegten elektrischen Leitungen aus (z. B. Schienen von elektrischen Bahnen).

## 10. Nennweiten handelsüblicher Rohre nach DIN 2402.

In den folgenden Beispielen wird immer mit Rohren von bestimmter lichter Weite gerechnet. Zur Übersicht mögen die normengerechten Lichtweiten von Rohren der technischen Praxis genannt werden:

Nach DIN 2402 für alle Rohrarten maßgebend in Millimeter

1,0	1,2	1,5	2,0	2,5	3	4	5	6	8	10		
10	13	16	20	25	32	40	50	60	(70)	80	(90)	100
100	110	(120)	125	(130)	(140)	150	(160)	175	200			
200	225	250	275	300	(325)	350	(375)	400	450	500		
500	550	600	700	800	900	1000						
1000	1100	1200	1400	1600	1800	2000	2200	2400				
2400	2600	2800	3000	3200	(3400)	3600	(3800)	4000				

<sup>1</sup> Siehe z. B. F. Eisenstecken: Neuere Forschungsarbeiten über das Verhalten von Stahlrohren bei starker Beanspruchung durch aggressive Stoffe. Gas- u. Wasserfach Bd. 76 (1933) S. 78ff.

Die eingeklammerten Maße sind möglichst zu vermeiden. Die Nennweiten der Rohre, die vom Normenausschuß der Deutschen Industrie festgelegt wurden, um die Lagerhaltung der Rohre zu erleichtern, stimmen nicht immer mit den tatsächlichen Lichtweiten der Rohre überein. Bisher war es fast ausschließlich üblich, die Rohrweiten nach englischen Zoll einzurichten. Der Weltmarkt ist heute noch auf englische Zoll eingestellt. Daher richtet sich auch die deutsche Industrie vielfach noch nach der Zolleinteilung und nimmt dabei die Nennweiten zur Richtlinie.

## B. Leitung tropfbarer Flüssigkeiten, besondere Strömungsfälle.

### 1. Wasserleitungen.

#### a) Leitungen für Trink- und Nutzwasserversorgung.

Ein umfangreiches Anwendungsgebiet der Rohrhydraulik ergibt sich bei der Trinkwasserversorgung. Bei den Hauptleitungen kommen Rohre größten und bei den örtlichen Verteilungsleitungen kleinsten Durchmessers vor. Die Haupt- und Zuleitungsrohre zu den einzelnen Verbrauchsstellen werden fast ausschließlich unterirdisch verlegt (je nach Frosttiefe, in Deutschland rund 1,5 m). Man benutzt für diese Leitungen gußeiserne oder stählerne, blanke oder asphaltierte Rohre. Oberirdische Leitungen größeren Durchmessers werden ebenfalls aus Gußeisen- oder Stahlrohren gebildet. Verteilungsleitungen geringen Durchmessers verlegt man aus Gasrohren (Schmiedeiseneröhren) oder Blei<sup>1</sup>, auch Messing- oder Kupferrohren. Ortsnetze pflegt man mit  $w = 0,6$  bis  $0,7$  m/s mittlerer Strömungsgeschwindigkeit zu berechnen, während man für die Hauptleitungen höhere Geschwindigkeiten zuläßt. Für den bürgerlichen Versorgungsdruck wählt man erfahrungsgemäß 5 bis 10 m mehr, als die höchstgelegene Anzapfstelle über dem Verteilungsnetz liegt. Bei normalen Haushöhen von 20 bis 30 m ergeben sich also Drücke von etwa 40 m WS an den höchstgelegenen Stellen der Hauptverteilungsleitungen<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> Reine Bleirohre können nur verwendet werden, wenn das zu leitende Wasser keine freie Kohlensäure enthält, die Blei angreift und ein giftiges, in Wasser lösliches Bleisalz bildet. Zum Schutz davor schwefelt man die Bleirohre. Besser sind zinnmantierte Bleirohre. Nach noch nicht veröffentlichten Versuchen vom Verf. geben technisch glatte Bleirohre in nicht verdrücktem Zustand um rund 6 vH mehr Widerstand als Messingrohre mit Gl. (164) u. (173).

<sup>2</sup> Siehe hierzu Näheres z. B. bei E. Groß: Handbuch der Wasserversorgung. München: Oldenbourg 1928. F. Schwedler: a. a. O. Nr. 17.

Kühlwasserleitungen stellt man allgemein aus Gas- oder geschweißten Stahlrohren her. Die Geschwindigkeit des Wassers wählt man zu 1 bis 2 m/s.

Zu Saugleitungen von Pumpen benutzt man gern gußeiserne Rohre, in besonderen Fällen auch Stahlrohre. Bei Kolbenpumpen wählt man Geschwindigkeiten von 0,6 bis 1 m/s je nach Länge der Saugleitung, bei Kreiselpumpen geht man auf 2,0 bis 2,5 m/s. Dabei ist darauf zu achten, daß die Saugwassersäule nicht abreißen kann.

Druckleitungen von Pumpen fertigt man je nach dem Leitungsdruck aus gußeisernen Rohren (bis 10 at oder 100 m WS), Gasrohren (bei kleinem Durchmesser) oder nahtlosen Stahlrohren. Die Geschwindigkeit soll zwischen 1 und 3 m/s liegen. Fördert man stark lufthaltiges Wasser (Korrosionsgefahr), so geht man gelegentlich bis 4 m/s. Meist wählt man die Geschwindigkeiten bei Kreiselpumpen höher als bei Kolbenpumpen.

Besondere Schwierigkeiten bietet die Wasserhaltung in Bergbaubetrieben, wobei oft beträchtliche Höhen zu überwinden sind. An den Anfängen der Druckleitungen von Wasserhaltungsmaschinen herrschen Drücke von 120 at und mehr. Die Anfänge solcher Leitungen muß man aus nahtlos gewalzten oder gezogenen Stahlrohren bilden. Wenn die Drücke mit zurückgelegter Förderhöhe genügend abgenommen haben, benutzt man vielfach auch gußeiserne Rohre. Die Fördergeschwindigkeit pflegt man zwischen 1 und 1,5 m/s zu wählen. Die Bergwässer können u. U. stark verschmutzt sein. Dann sind immer Stahlrohre vorzuziehen, weil sie weniger zu Ablagerungen neigen und in längeren Einheiten geliefert werden, also weniger Verflansungen als Gußeisenrohre benötigen. Besonders stark verunreinigte Wässer müssen schon wegen der Pumpen vor der Förderung mehr oder weniger gereinigt werden.

In der Warmwasserheizungstechnik verwendet man gezogene Rohre aus Schmiedeeisen. Bei Warmwasserheizungen kommt das Gebiet unmittelbar oberhalb  $Re_{krit} = 2320$  in Frage (kleine Geschwindigkeiten und Rohrdurchmesser). Hier gilt Biels Gl. (254) nicht mehr. Man geht nicht fehl, wenn man Blasius' Gl. (164) ansetzt.

**Aufgabe 1.** ( $Q$ ,  $d$ ,  $l$ ,  $t$ ,  $H_1 - H_2$  gegeben,  $P_1 - P_2$  gesucht.)

Durch eine gußeiserne gerade Rohrleitung von  $D = 300$  mm lichte Weite und  $l = 600$  m Länge sind  $Q_h = 100$  m<sup>3</sup>/h Gebrauchswasser bei  $t = 12^\circ$  im Mittel zu fördern. Je 100 m Rohrlänge steigt die Leitung um 1 m an. Das Wasser fließt in einen großen Behälter, in den die Leitung durchschnittlich 1,5 m unter dem Wasserspiegel einmündet. Hinter der Pumpe befindet sich ein normales Durchgangsventil, das in seiner hydraulischen Wirkung einer Rohrlänge von 130 m entspricht. Welcher Druckabfall tritt durch Reibung in der Rohrleitung ein? Welchen Druck und welche Leistung muß die Pumpe aufwenden? Welche Reibungswiderstände würden sich bei  $0^\circ$ ,  $20^\circ$  und  $100^\circ$  ergeben? Wie groß wäre der Reibungswiderstand in Stahlrohren?

Hilfsgrößen.

Nach Zahlentafel 3:  $v = 1,789 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  bei  $t = 0^\circ$   
 $v = 1,235 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  bei  $t = 12^\circ$   
 $v = 1,007 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  bei  $t = 20^\circ$   
 $v = 0,294 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  bei  $t = 100^\circ$ .

Nach Gl. (64)

$$Re = 354 \cdot 10^{-6} \frac{Q_h}{d v} = 354 \cdot 10^{-6} \frac{100 \cdot 10^6}{0,3 \cdot 1,235} = 95500 \text{ bei } 12^\circ,$$

$$Re = 66000 \text{ bei } 0^\circ$$

$$Re = 117000 \text{ bei } 20^\circ$$

$$Re = 400000 \text{ bei } 100^\circ$$

Ferner ist

$$w = \frac{4 Q_h}{3600 \pi d^2} = \frac{4 \cdot 100}{3600 \pi \cdot 0,09} = 0,393 \text{ oder rd. } 0,4 \text{ m/s.}$$

Widerstandszahl  $\lambda_R$  zu  $Re$  und  $d$

	0°	12°	20°	100°	nach Gleichung
Biel (Rauhigkeit III)	0,0257	0,0238	0,0231	0,0207	(253)
Wegmann und Aeryns	0,0269	0,0255	0,0247	0,0207	(271)

Widerstand  $P_1 - P_2 = \gamma \lambda_R \frac{v'}{d} \frac{w^2}{2g}$  mit  $v' = 600 + 130 = 730 \text{ m}$

Biel . . . . .	510	473	460	410 kg/m <sup>2</sup> od. mm WS
Wegmann und Aeryns	535	506	490	410

Biels Formel gibt Werte für saubere Rohre an, während die Werte von Wegmann-Aeryns für Rohre im Betriebszustand gelten. Der Druckverlust ist wegen der vielen Verflansungen (bei 4 m Rohreinzellänge 150mal) zu rund 600 mm WS bei  $t = 12^\circ$  anzusetzen.

Pumpendruck. Bei 1 m Saughöhe beträgt die gesamte Druckhöhe = geodätische Höhe (1,0 + 6,0 + 1,5 m) + Widerstandshöhe (0,6 m) + 1 Geschwindigkeitshöhe zur Beschleunigung des Wassers (0,01 m)

$$H_P = 1 + 6 + 1,5 + 0,6 + (0,01) = 9,1 \text{ m.}$$

Das Druckmanometer der Pumpe zeigt einen Druck von  $9,1 - 1,0 = 8,1 \text{ m WS}$  oder 0,81 at an.

Pumpenleistung. Mit einem Pumpenwirkungsgrad  $\eta_P = 0,6$  gilt

$$N_P = \frac{Q_h H_P \gamma}{3600 \cdot 75 \cdot \eta_P} = \frac{100 \cdot 9,1 \cdot 1000}{3600 \cdot 75 \cdot 0,6} = 5,62 \text{ oder rd. } 6 \text{ PS.}$$

Mit 6 PS kann die Pumpe eine manometrische Förderhöhe von 9,7 m überwinden, d. h. die Förderung ist unabhängig von der Temperatur des Wassers.

Stahlrohre hätten folgenden Widerstand:

Biel Gl. (253) Fall Rauhigkeitsgrad II, unbrauchbar, weil Grenzwert $Re = 118500$ bei $t$ bis $20^\circ$ noch nicht überschritten ist. Bei $100^\circ$ ist $P_1 - P_2 = 320 \text{ mm WS}$ .	Biel Gl. (256) oder Abb. 151 und Tafel zu Gl. (256) geben $P_1 - P_2 = 397 \text{ mm WS}$ bei $0^\circ$ 377 „ „ „ $12^\circ$ 366 „ „ „ $20^\circ$ 304 „ „ „ $100^\circ$
--	--

Gußeisenrohr bietet also den 1,25fachen Widerstand bei mittlerer Reynoldsscher Zahl. Zahlentafel 32 gibt das 1,19fache an, was für tadellose neue Rohre gilt.



**Aufgabe 2.** ( $Q_1, Q_2, d, l, \lambda_R$  gegeben,  $P_1 - P_2$  gesucht.)

Eine waagerechte gußeiserne Wasserleitung von  $d = 0,2$  m l. W. wird mit  $Q_{h1} = 150$  m<sup>3</sup>/h beschickt. Nach einer  $l = 1000$  m langen Strecke fließen noch  $Q_{h2} = 50$  m<sup>3</sup>/h.  $Q_h = Q_{h1} - Q_{h2} = 100$  m<sup>3</sup>/h sind gleichmäßig auf der 1000 m langen Strecke abgegeben worden. Wie groß ist der Strömungswiderstand der 1000 m langen Strecke, wenn  $\lambda_R = 0,03 \mp f(Re)$  ist?

$$\frac{P_1 - P_2}{\gamma} = 0,0826 \cdot 0,03 \frac{1000}{0,2^5} \frac{150^2}{3600^2} \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}}{3} = 6,5 \text{ m WS}$$

oder  $P_1 - P_2 = 6500$  mm WS oder 0,65 at ergibt sich nach Gl. (289).

**Aufgabe 3.** ( $P_1, l, d, w$  gegeben,  $P_2$  gesucht.)

Ein Hydrant hält Druckwasser von 8 at (oder 80 m WS) zur Verfügung. Welcher Druck herrscht am Ende einer  $l = 300$  m langen Schlauchleitung aus gummiertem hanfemem Feuerwehrschauch von 40 mm l. W., wenn das Wasser mit  $w = 0,7$  m/s fließt? Nach Gl. (277) ist

$$\lambda_R = 0,0351 - \frac{0,0104}{0,7} = 0,02.$$

Der Enddruck  $P_2$  ist

$$P_2 = P_1 - \gamma \lambda_R \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g} = 80000 - 1000 \cdot 0,02 \frac{300}{0,04} \frac{0,49}{19,6} = 76250 \text{ mm WS}$$

oder  $p_2 = 7,63$  at.

**Aufgabe 4.** ( $Q, P_1 - P_2, l, t$  gegeben,  $d$  gesucht.)

Eine stählerne Wasserleitung soll 2000 m<sup>3</sup>/h Wasser von 12<sup>o</sup> über eine Strecke von 2000 m führen. Der Druckverlust soll im ungünstigsten Falle, bei 20 mm Niederschlagsdicke, 23 m WS nicht überschreiten. Welchen Durchmesser muß die Leitung haben?

Zulässig ist ein Druckabfall von  $\frac{23000}{2000} = 11,5$  mm WS je lfd. m. Mit  $Q_h = 2000$  m<sup>3</sup>/h erhalten wir aus Abb. 151 (dort eingetragenes Beispiel) den Durchmesser 500 mm. Bei 20 mm Niederschlagsdicke muß  $1000 d = 540$  mm sein. Zu wählen ist ein normales Stahlrohr von 550 mm Nennweite (570 × 4 DIN 2454).

**Aufgabe 5.** ( $Q, P_1 - P_2, H_1 - H_2, l, t$  gegeben,  $d$  gesucht.)

In einem Braunkohlentagebau soll mit vorhandenen Mitteln eine Wasserhaltung aufgestellt werden. Die geodätische Druckhöhe beträgt 60 m. Eine vorhandene Pumpanlage drückt bis 7 at. Es fallen stündlich 60 m<sup>3</sup> Wasser an. Der Rohrstrang muß nach den örtlichen Verhältnissen 80 m lang sein. Einzubauen sind ein Ventil und 4 Krümmer, die zusammen denselben Druck wie 100 m gerades Rohr verbrauchen. Welcher Rohrdurchmesser ist zu wählen, wenn Stahlrohre von 70, 100 und 125 mm l. W. (76 × 3, 108 × 3,75 und 133 × 4 DIN 2451) vorrätig sind?

Überschlägig steht zur Überwindung des Rohrwiderstandes eine Druckhöhe von

$$\frac{1}{\gamma} (P_1 - P_2) = 70 - 60 = 10 \text{ m}$$

zur Verfügung. Davon mögen 5 m als Druckreserve bleiben. Annahme  $\lambda_R = 0,02$ .

Dann gilt nach Gl. (281) mit  $J = \frac{P_1 - P_2}{\gamma l_{21}}$  für den Durchmesser

$$d = 0,278 \sqrt[5]{\frac{Q_h^2}{J}} = 0,278 \sqrt[5]{\frac{3600 \cdot 180}{3600^2 \cdot 5}} = 0,110 \text{ m}.$$

Gewählt wird das Rohr von 125 mm  $\varnothing$ . Bei einer Wassertemperatur von 12° ist zur Nachprüfung mit Abb. 151 je m Rohrlänge  $P_1 - P_2 = \text{rd. } 16 \text{ mm WS/m}$ . Dadurch bleiben nicht 5, sondern 7 m WS zur Reserve, die z. T. noch verbraucht werden, weil die Leitung fliegend und wenig sorgfältig verlegt wird. Die Wassergeschwindigkeit bleibt mit 1,35 m/s in den zulässigen Grenzen für Pumpendruckrohrleitungen. Mit Rücksicht auf Frost nimmt der Druckverlust bei  $t = 0^\circ$  um das 1,06fache auf 3,2 m WS zu, was unbedenklich ist.

**Aufgabe 6.** ( $P_1 - P_2, d, l, t, H_1 - H_2$  gegeben,  $Q$  gesucht.)

Zum Zwecke der Kühlwasserversorgung einer Kompressorenanlage soll Wasser aus einer vorhandenen Druckleitung entnommen werden, die an der Anzapfstelle Wasser mit einem Druck von 20 m WS bereit hält. Die Anzapfleitung soll aus vorhandenen 3''-Gasrohren (3''  $\times$  6 DIN 2442, 76 mm l. W.) verlegt werden. Sie sei 112 m lang (gerade), enthalte 16 rechtwinklige Krümmer, 2 rechtwinklige Kniee und 2 normale Absperrventile. Im ganzen steigt die Leitung um 12 m an. Wie groß ist die stündlich fließende Wassermenge bei  $t = 20^\circ$ ?

Schätzung der Einzelwiderstände nach Zahlentafel 37 und 38 und Abb. 162 und 166.

16 rechtwinklige Krümmer, $\zeta$ je 0,17 ( $\zeta_u$ je 0,14) . . . . .	= 2,7
2 „ Kniee, $\zeta$ je 1,2. . . . .	= 2,4
2 normale Absperrventile, $\zeta$ je 3,9. . . . .	= 7,8
1 T-förmiger Abzweig, $\zeta \approx 1,0$ . . . . .	= 1,0
1 Geschwindigkeitshöhe zur Beschleunigung des Wassers auf den Strömungszustand im Rohr . . . . .	= 1,0
	$\Sigma \zeta = 14,9$

Bei 12 m Steigung stehen  $20 - 12 = 8 \text{ m WS}$  zur Überwindung des Strömungswiderstandes im Rohr zur Verfügung. Geschätzt  $\lambda_R = 0,025$ . Dann ist

$$\frac{\Delta P}{\gamma} = \left( \lambda_R \frac{l}{d} + \Sigma \zeta \right) \frac{w^2}{2g}$$

oder

$$w^2 = \frac{\frac{\Delta P}{\gamma} 2g}{\lambda_R \frac{l}{d} + \Sigma \zeta} = \frac{8 \cdot 19,6}{0,025 \cdot \frac{112}{0,076} + 14,9} = 3,03; \quad w = 1,74 \text{ m/s,}$$

$$Q_h = 28,4 \text{ m}^3/\text{h.}$$

Nachprüfung.  $\lambda_R$  nach Gl. (256) =  $0,035 Q_h^{-0,125} = 0,023$  bei 12°C, und ist das 0,97fache bei 20°, nämlich 0,022. Die Nachprüfung mit  $\lambda_R = 0,022$  ergibt  $w = 1,83 \text{ m/s}$  und  $Q_h = 29,9 \text{ m}^3/\text{h}$ . Eine schärfere Nachrechnung hätte keinen Sinn, weil die Genauigkeit der Rechnung nicht so groß ist. Es werden rund 30 m<sup>3</sup>/h ausfließen.

**Aufgabe 7.** ( $P_2, w, l_e, d, \varrho/r$  und  $t$  gegeben,  $P_1$  gesucht.)

In einer waagerechten Druckleitung soll Wasser von 20 m WS bereitgehalten werden. Bei Wasserentnahme treten Geschwindigkeiten bis  $w = 0,9 \text{ m/s}$  im Rohr auf. Die Leitung wurde zwischen Pumpe und Verbrauchsstelle eckenrecht ausgemessen zu  $l_e = 100 \text{ m}$ . Sie hatte anfangs 0,050 mm l. W., hat jetzt aber eine gleichmäßige Niederschlagsdicke von 2,5 mm und damit 0,045 m l. W. Sie macht  $n_1 = 24$  Bogen mit  $\frac{\varrho}{r} = 8$  und  $n_2 = 17$  Bogen mit  $\frac{\varrho}{r} = 10$ . Wie groß ist der Strömungswiderstand der Leitung, wenn noch 2 Koswaventile mit  $\zeta = 2$  eingebaut sind? Was zeigt das Manometer der Pumpe bei Entnahme für einen Druck an?

$$Re_{\max} = \frac{0,9 \cdot 0,045 \cdot 10^6}{1,007} = 40000$$

bei  $t = 20^\circ$ .

Aus Abb. 148 für Stahlrohr  $\lambda_R = 0,0287$ . (Rauhigkeit des Niederschlags wie Rauhigkeit von Stahlrohr angenommen.)

Nach Gl. 288 gilt für den Druckverlust

$$\frac{\Delta P}{\gamma} = \left[ \lambda_R \left( \frac{l_e}{d} - \frac{n_1 m_1}{d} - \frac{n_2 m_2}{d} \right) + n_1 \zeta_{u1} + n_2 \zeta_{u2} + \zeta \right] \frac{w^2}{2g}$$

Aus Abb. 172 erhält man zu  $\frac{q}{r} = 8$  und  $\delta = 90^\circ$ :  $\frac{m_1}{d} = 1,75$  und zu  $\frac{q}{r} = 10$ :

$\frac{m_2}{d} = 2,2$ . Das 1,2fache (für Stahlrohr) von Zahlentafel 36 ist bei  $\frac{q}{r} = 8$  und

$\delta = 90^\circ$ :  $\zeta_u = 0,144$  und bei

$\frac{q}{r} = 10$ :  $\zeta_u = 0,132$ . Mit diesen

Werten berechnet man  $\Delta P/\gamma$  zu 2,85 m. Das Manometer an der Pumpe zeigt also bei  $w = 0,9$  m/s an 20 + 2,9 oder 22,9 m WS oder 2,29 at an.

**Aufgabe 8.**

In einer Kühleinrichtung wird Wasser durch eine Rohrschlange aus Schmiedeisen von  $D = 40$  mm l. W. und von  $n = 30$  Windungen bei  $D_1 = 600$  mm Windungsdurchmesser und  $h = 50$  mm Windungshöhe geschickt. Die Schlange steht senkrecht und wird mit  $w = 1,4$  m/s bei einer mittleren Temperatur von  $t = 50^\circ$  von oben nach unten durchflossen. Wie groß ist das Druckgefälle zwischen Anfang und Ende der Schlange?

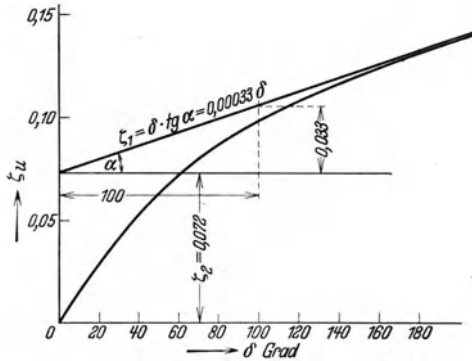


Abb. 176. Zu Aufgabe 8. Berechnung des Druckabfalls in einer Rohrschlange.

Die geodätische Höhe ist  $H_1 - H_2 = n \cdot \frac{h}{1000} = 30 \cdot 0,05 = 1,50$  m. Die gestreckte Länge der Schlange beträgt

$$l_{21} \text{ rd. } \frac{1}{1000} (\pi D_1 n + n \cdot h) = 58 \text{ m.}$$

Krümmungsverhältnis

$$\frac{q}{r} = \frac{D_1}{D} = \frac{600}{40} = 15.$$

Reynoldssche Zahl mit  $\nu = 0,556 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  bei  $50^\circ$  nach Tafel 3

$$Re = \frac{wd}{\nu} = 1,4 \cdot 0,04 \cdot \frac{10^6}{0,556} = 100000.$$

In Abb. 176 wurden die Werte  $\zeta_u$  nach Zahlentafel 36 für  $\frac{q}{r} = 15$  aufgetragen.

Man findet für den reinen Krümmungsverlust  $\zeta_1 = 0,00033 \cdot \delta$ ; den Krümmungsanlauf- und -auslaufeffekt kann man vernachlässigen. Für  $Re = 100000$  ist  $\zeta_1$  nach früherem 12,5 vH kleiner und für Stahlrohre 12 vH größer, als in Zahlentafel 36 steht, zu nehmen, also bleiben wir bei  $\zeta_1 = 0,00033 \delta$ . Bei  $n = 30$  Windungen ist  $\zeta_1 = 0,00033 \cdot n \cdot 360 = 3,56$  oder rd. 3,6. Der Strömungswiderstand ist jetzt mit  $\lambda_R = 0,026$  (geschätzt nach Abb. 148) im Rohr

$$\begin{aligned} \frac{P_1 - P_2}{\gamma} &= \lambda_R \frac{l_{21}}{d} \frac{w^2}{2g} + \zeta_1 \frac{w^2}{2g} - (H_1 - H_2) = 0,026 \frac{58}{0,04} \frac{1,96}{19,6} + 3,6 \frac{1,96}{19,6} - 1,50 \\ &= 3,77 + 0,36 - 1,50 = 2,63 \text{ m WS.} \end{aligned}$$

Der Umlenkverlust macht nur  $100 \cdot \frac{0,36}{3,77} = 9,6$  vH vom Wandungsverlust aus. Das Leitungsgefälle ist schließlich

$$J = \frac{H_1 - H_2}{l_{21}} + \frac{P_1 - P_2}{\gamma l_{21}} = 0,026 + 0,045 = 0,071 \text{ m WS/m lfd. Rohr}$$

oder 71 mm WS/m lfd. Rohr.

### b) Leitungen für Wasserkraftwerke.

Für die Druckrohrleitungen von Wasserkraftwerken verwendet man fast ausschließlich genietete oder aus Stahlblech geschweißte Rohre. Beim ersten Entwurf kann man folgende Widerstandszahlen<sup>1</sup> bei mittleren Rohrweiten zugrunde legen:

Gewönl. genietete Rohre . . . . .	neu	$\lambda_R = 0,020$ bis $0,022$
	gebraucht	$0,025$ „ $0,030$
Rohre mit Laschennietung, innen mit versenkten Nietköpfen, sorgfältig verlegt, geschweißte Rohre . . . . .	neu	$0,017$ „ $0,018$
	gebraucht	$0,020$ „ $0,026$
ferner		
glatte Holzrohre . . . . .	gebraucht und neu	$0,015$ „ $0,016$
Betonrohre mit innerem Glattverputz . . . . .	neu	$0,013$ „ $0,015$
	gebraucht	$0,014$ „ $0,018$

Diese Widerstandszahlen sind meist etwas größer als die wirklichen. Bei einigen Kraftwerksleitungen aus Stahl wurden Widerstandszahlen von 0,011 bis 0,013 gemessen, nachdem sie kurze Zeit in Betrieb waren. Als mittlere Rohrweiten gelten 0,8 bis 1,2 m. Eine Leitung der Ontario-Power-Co. von 5,48 m  $\varnothing$  aus Beton mit besonders sorgfältig geglätteten Wänden hatte etwas kleinere Werte  $\lambda_R$  als Lees' Gl. (166) für glattes Messingrohr<sup>2</sup>.

Meistens sind die Durchmesser der Druckrohrleitungen stufenweise abgesetzt. Dann ist jeder Strang gleicher Weite für sich zu berechnen. Den wirtschaftlichsten Leitungsdurchmesser, bei dem die Unterhaltungskosten der Leitung, Abschreibung und Druckverlust zusammen einen Kleinstwert im Verlaufe eines Jahres annehmen, kann man nach einer

<sup>1</sup> Unter Benutzung von Angaben von W. F. Durand: *Hydraulics of pipe lines*. New York 1921. M. W. Kellogg Co.: *High pressure hydraulic pipe lines*. New York 1926. A. Hruschka: *Druckrohrleitungen der Wasserkraftwerke*. Berlin 1929. F. Bundschu: *Druckrohrleitungen*. Berlin 1929. B. v. Alftan: *Über die Bestimmung der wirtschaftlich günstigsten Durchmesser bei Wasser-Druckrohrleitungen*. Diss. Dresden 1912.

<sup>2</sup> Nach F. C. Scobey: a. a. O. Die Druckrohrleitung für die Wasserkraftanlage am Hooverdamm besteht sogar aus Stahlrohren von 9 m Durchmesser bei 1380 m Länge. Z. VDI Bd. 75 (1931) S. 1422; Bd. 76 (1932) S. 810. Dafür berechnet man nach Hopf mit  $e' = 2,5$  [Gl. (207)]

$$100 \lambda_R = \left(\frac{e'}{d}\right)^{0,314} = 0,67; \quad \lambda_R = \text{rd. } 0,007!$$

einfachen Faustformel von Bundschu abschätzen<sup>1</sup>. Mit  $H_M$  als der höchstens im Betriebe auftretenden Druckhöhe (siehe Abb. 177) erhält man diesen Durchmesser aus

$$d = \sqrt[3]{0,052 Q_s^3} \quad \text{in m, wenn } H_M < 100 \text{ m} \quad (305)$$

und

$$d = \sqrt[3]{0,052 Q_s^3 \frac{100}{H_M}} \quad \text{in m, wenn } H_M \geq 100 \text{ m.} \quad (306)$$

$Q_s$  ist dabei die bei Vollbeaufschlagung der zur Leitung gehörigen Turbinen fließenden Menge in m<sup>3</sup>/s. Während des Betriebs herrscht das Betriebsgefälle  $H_B$ , bei geschlossener Leitung das Gefälle  $H$  und beim Schließen der Leitung durch Stau der abzubremsenden Flüssigkeitssäule das größte Gefälle  $H + H_s = H_M$ . Bis zu  $H = 100$  m kann man  $H_s$  mit etwa 15 bis 20 m ansetzen; für  $H > 100$  m empfiehlt Bundschu rund  $H_s = 20 + 0,1 H$ .

Je nach dem Gefälle ( $H$  bis 1500 m und mehr) kommen am unteren Ende der Druckrohrleitungen große Drücke vor (bis 150 at und mehr). Man pflegt daher bei großem Gefälle nur den oberen Anfang der Leitung aus genieteten Stahlblechrohren herzustellen. Dann schließt man

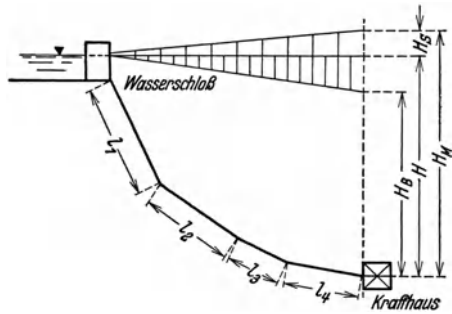


Abb. 177. Druckhöhen beim Turbinenbetrieb.

überlappt geschweißte (wassergasgeschweißte) oder, bei sehr großen Höhen, auch nahtlos gewalzte Stahlrohre (bis 475 mm l. W.) an. Gußeiserne Rohre benutzt man wegen ihres größeren Gewichts und ihrer geringeren Festigkeit seltener. Autogengeschweißte Rohre kann man aus Festigkeitsgründen nur am Anfang der Druckrohrleitungen verwenden.

Bei genieteten Rohrleitungen ist die günstigste Verbindung der einzelnen Bleche durch äußere Laschennietung gegeben, wo nur die inneren Nietköpfe vorstehen, sonst aber die Wand glatt ist. Diese Herstellungsart ist teuer. Man benutzt daher gern kegelige Bleche. Solche Rohre sind mit Durchflußrichtung  $a$  günstiger als mit Richtung  $b$ , Abb. 178. Hydraulisch noch günstiger sind aber zylindrische überlappte Schüsse als kegelige. Solche zylindrisch überlappte Rohre sind besonders billig herzustellen. Am besten scheint dabei eine Schußlänge von 0,7 Rohrdurchmessern zu sein<sup>2</sup> (Abb. 179).

<sup>1</sup> Siehe Fußnote 1 von S. 210.

<sup>2</sup> Poebing, O., u. J. Spangler: Der Reibungsverlust in Rohrleitungen, die aus überlappten Schüssen hergestellt sind. Mitt. Hydraul. Inst. T. H. München 1929 Heft 3 S. 118.

Flache Zuleitungen zum Wasserschloß oder auch Teile der Druckrohrleitungen (bei geringem Gefälle) werden vielfach in Zement- oder Betonrohren ausgeführt, wenn Geländeerhebungen zu durchbohren sind. Sonst wählt man für flache Leitungen Gräben (wenn nicht grobe

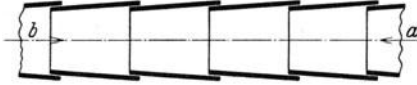


Abb. 178. Rohr, aus kegelförmigen Schüssen zusammengesetzt.



Abb. 179. Rohr, aus zylindrischen Schüssen zusammengesetzt.

Verunreinigungsgefahr: Laubfall, Verstaubung, Steinschlag zu befürchten ist). Für das notwendige Gefälle solcher Rohre und Gräben gibt Forchheimer<sup>1</sup> an [siehe Gl. (210a)]:

$$w = m \left( \frac{F}{U} \right)^{0,7} J^{0,5} = n \cdot d^{0,7} J^{0,5} \quad \text{oder} \quad J = k w^2 d^{-1,4} \quad (307)$$

Sudbury-Äquadukt in Klinker . . . . .	$m = 87,8$ ;	$n = 33,3$ ;	$k \cdot 10^6 = 900$
derselbe in Zementputz . . . . .	93,3	35,3	800
Croton-Äquadukt in Klinker . . . . .	75,4	28,5	1230
Sittertunnel in Beton . . . . .	91,8	34,8	830
für alten abgegriffenen Beton . . . . .	50	19	2800
für ablagerungsfreien Beton . . . . .	60	23	1900
Wienbett in Beton . . . . .	80,1	30,4	1080
Werkgraben, 1 bis 2 Jahre alt, Beton . .	59,0	22,4	2000
Desgl. $\frac{3}{4}$ Jahr später . . . . .	57,9	21,9	2080
Werkgraben, neuer Schalenbeton . . . . .	60,3	22,8	1920
Desgl. nach 10 Betriebsjahren . . . . .	48,6	18,4	2940
Werkgraben, 0,78 Beton, 0,22 Schlamm und Kies . . . . .	60,2	22,8	1920
Desgl. 0,50 Beton, 0,50 Schlamm und Kies	55,8	21,1	2240
Desgl. 0,48 Beton, 0,52 Schlamm und Kies	50,0	19,0	2790
Desgl. 0,26 Beton, 0,74 Schlamm und Feinkies	56,6	21,5	2170

nach praktischen Messungen.

In (geschlossenen) Druckrohrleitungen von kleinem Durchmesser wählt man je nach Art der Turbinen Geschwindigkeiten von 1 bis 4 m/s, bei größerem Durchmesser bis 7 m/s. Flache Zuleitungen haben 1 bis 3 m/s. Für Werkgräben möge 0,1 bis 0,5 m/s je nach Ausführung gelten.

Rohrumlenkungen werden ebenfalls aus genietetem oder geschweißtem Stahlblech oder aus Stahlguß hergestellt. Rohrarmaturen fertigt man aus Stahlguß.

Neuerdings verschweißt man ganze Turbinenleitungen.

**Aufgabe 9.** ( $J, l, \lambda_R, d$  gegeben,  $Q$  gesucht.)

Einer Francis-Turbinenanlage wird durch eine Druckrohrleitung aus gewöhnlichen genieteten Stahlrohren ( $\lambda_R = 0,02$ ) von 1 m l. W., die 2200 m lang ist und

<sup>1</sup> Forchheimer, Ph.: Durchfluß des Wassers durch Röhren und Gräben, insbesondere durch Werkgräben großer Abmessungen. Berlin 1923.

19 m Gefälle hat, gespeist. Wieviel Wasser liefert diese Leitung, wenn der Enddruck 16 m WS nicht unterschritten werden soll. Beim Einlauf in das Rohr steht das Wasser unter einem Druck von 1,5 m WS.

Für den Rohreinlauf wollen wir die Widerstandszahl  $\zeta = 0,5$  und für die Beschleunigung des Wassers vom Zustand im Wasserschloß auf den in der Leitung  $\zeta = 1,0$  ansetzen. Dann ist

$$H_1 - H_2 = \left( \lambda_R \frac{l}{d} + \zeta \right) \frac{w^2}{2g},$$

$$w^2 = \frac{(19 + 1,5 - 16) 19,6}{0,02 \cdot 2200 + 1,5} = 1,94;$$

$$w = 1,39 \text{ m/s}, \quad Q_h = 3600 \cdot 1,39 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 1 = 3900 \text{ m}^3/\text{h}.$$

Die Leitung würde also unter diesen Umständen etwa 4000 m<sup>3</sup>/h Wasser liefern.

**Aufgabe 10.** Eine Wassermenge von 11 m<sup>3</sup>/s durchfließe einen gußeisernen kegelförmigen Rohrteil von der Länge  $l_1 - l_2 = 4,0$  m, der den Einlaßdurchmesser  $d_1 = 3$  m und den Auslaßdurchmesser  $d_2 = 1$  m hat. Wie groß ist der Druckabfall?

Zur Berechnung dienen Gl. (231), (231a), (232). Siehe auch Abb. 109. Es gilt

$$\frac{d_1}{l_1} = \frac{d_2}{l_2} = \frac{d_2 - d_1}{l_2 - l_1} = \frac{2}{4}; \quad l_1 = 6,0 \text{ m}; \quad l_2 = 2,0 \text{ m}.$$

Der Druckverlust richte sich nach einer Beziehung  $w = 100 J^{0,54} \cdot (F/U)^{0,63}$ , also  $n = 0,54$  und  $m = 0,63$  (entsprechend etwa  $\lambda_R = 0,0145$ ). Mit  $k = 100$  ist  $a = 32,8$ . Dann ist

$$h_1 = \left( \frac{11}{32,8} \right)^{1,852} \cdot 6 \cdot 3^{-4,87} = 0,002 \text{ m} \quad \text{mit} \quad \frac{2 + m}{n} = 4,87 \quad \text{und} \quad \frac{1}{n} = 1,852$$

und

$$h_2 = \left( \frac{11}{32,8} \right)^{1,852} \cdot 2 \cdot 1 = 0,264 \text{ m}$$

und

$$h = -\frac{1}{1 - 4,87} 0,262 = 0,067 \text{ m WS Druckabfall}.$$

Nach Gl. (232) ergibt sich mit  $\lambda_R = 0,0145$  der Wert  $h = 0,071$  m WS. Für grobe Überschläge genügt auch der Ansatz

$$h = \lambda_R \frac{2l}{d_1 + d_2} \frac{\left( \frac{w_1 + w_2}{2} \right)^2}{2g} = 0,0145 \frac{2 \cdot 4}{4} \frac{\left( \frac{1,56 + 14,00}{2} \right)^2}{2g} = 0,090 \text{ m}.$$

Der Energieabfall  $h$  von rund 0,07 m oder 70 mm WS entspricht der Arbeit  $L_{R21}$  von Gl. (49). Nach Gl. (235) ist theoretisch der ganze Druckabfall 9870 mm WS. Der tatsächliche Druckabfall ist um 70 mm größer, also 9940 mm WS. Der Wirkungsgrad  $\eta$  für die Drosselung nach Gl. (236) ist größer als 1

$$\eta = \frac{9940}{9870} = 1,0071.$$

Nach Gl. (237) ist  $\zeta_2 = \left( \frac{2,43}{196} - 1 \right) (1 - 1,0071) = 0,0070$ . Setzt man  $\zeta_2$  in Gl. (238) ein, so erhält man wieder

$$h = 0,0070 \cdot \frac{196}{19,6} = 0,070 \text{ m}.$$

Der Reibungsdruckabfall ist also 70 mm, der gesamte Druckabfall ist 9940 mm WS, der Wirkungsgrad des Verengungsstückes ist 1,007 und die Widerstandszahl  $\zeta_2 = 0,0070$ .

**Aufgabe 11.** Geplant wird eine gerade Druckrohrleitung für 25 m Gefälle auf eine Länge von 1500 m. Wie groß sind in diesem Falle der günstigste Durchmesser und die günstigste Strömungsgeschwindigkeit, damit der Arbeitsinhalt des austretenden Strahls  $L$  bei einer geforderten Leistung am Rohrende von 100 PS einen Größtwert annimmt?

Überschlag mit  $\lambda_R = 0,02$  nach Gl. (301)

$$d = 0,315 \sqrt[5]{\frac{10000 \cdot 1500 \cdot 0,02}{25 \cdot 625}} = 0,315 \cdot 1,8 = 0,567 \text{ m.}$$

Gewählt wird wassergasgeschweißtes Stahlrohr nach DIN 2453 zu 550 mm  $\varnothing$ , für das in gebrauchtem Zustand etwa  $\lambda_R = 0,02$  gelten wird. Nunmehr ist

$$w^2 = 2g \frac{H_1 - H_2}{3 \lambda_R} \frac{d}{l} = 19,6 \frac{25}{3 \cdot 0,02} \frac{0,55}{1500} = 3,0; \quad w = 1,73 \text{ m/s}$$

$Re \sim 10^6$  und  $Q_s = 0,411 \text{ m}^3/\text{s}$  nach Gl. (298). Im Ruhezustand ist  $\frac{P_2}{\gamma} = 25 \text{ m}$ . Die Reibungsverluste im Betrieb betragen

bei $w = 1,00 \text{ m/s}$	z. B. 2,78 m,	also $\frac{P_2}{\gamma} = 22,2 \text{ m}$
1,73	8,34	16,7
2,00	11,12	13,9

und

$$L_s = (H_1 - H_2 - L_R) \frac{\pi}{4} d^2 w \gamma = \frac{P_2}{\gamma} \frac{\pi}{4} d^2 w \gamma = 5260 \text{ mkg/s}$$

6870  
6600

$L_{\max}$  liegt also tatsächlich bei 1,73 m/s. Nach Gl. (305) könnte man zum Vergleich noch den wirtschaftlichsten Durchmesser für  $Q_s = 0,411 \text{ m}^3/\text{s}$  berechnen:

$$d^7 = 0,052 Q_s^3; \quad d = 0,450 \text{ m,}$$

also nicht ganz so groß wie der für  $L_{\max}$  ermittelte. Der Rohrwirkungsgrad ist bei  $d = 0,55 \text{ m } \varnothing$   $\eta_{\text{Rohr}} = 0,67$ , und bei  $d = 0,45 \text{ m } \varnothing$  nur  $\eta_{\text{Rohr}} = 0,24$  mit  $\lambda_R \cong 0,017$ .

### c) Freispiegelleitungen.

Den Strömungswiderstand in nicht vollkommen gefüllten Leitungen (Freispiegelleitungen, im Gegensatz zu Druckrohrleitungen) kann man im groben mit dem Ansatz für vollständig gefüllte Rohre berechnen, wenn man den hydraulischen Radius  $F/U$  für den Rohrdurchmesser  $d$  setzt,  $4F/U = d$ .

$$4J \frac{F}{U} = \lambda_R \frac{w^2}{2g} \quad \text{oder} \quad 4J \frac{F}{U} = \frac{\lambda_R Q_s^2}{2g F^2}.$$

Führt man nach Abb. 180 den Füllwinkel  $\varphi$  ein, so kann man setzen

$$F = \frac{1}{2} r^2 \left( \frac{\pi \varphi}{180} - \sin \varphi \right) \quad \text{und} \quad U = \pi r \frac{\varphi}{180}.$$

Untersucht man jetzt diese Gleichungen, bei welchem Winkel  $\varphi$  der Durchfluß  $Q$  einen Größtwert annimmt, so kommt man nicht auf 360°,



sondern auf  $308^\circ$ . Die Rohrleitung würde demnach mehr Wasser führen, wenn der Querschnitt nicht vollkommen, sondern nur zu

$$100 - \frac{100}{\pi r^2} \left( \pi r^2 - \frac{1}{2} r^2 \left( \frac{\pi \varphi}{180} - \sin \varphi \right) \right) = 98 \text{ vH}$$

gefüllt wäre. Dabei wäre die Fülltiefe  $h = 0,949 d$ . Die größte mittlere Geschwindigkeit im mit  $\varphi$  veränderlichen Querschnitt würde sich bei  $\varphi = 257^\circ$  einstellen.

Das ist unwahrscheinlich. Man kann sich den ganzen Rohrquerschnitt in einzelne Abschnitte zerlegt denken und bei voller Füllung

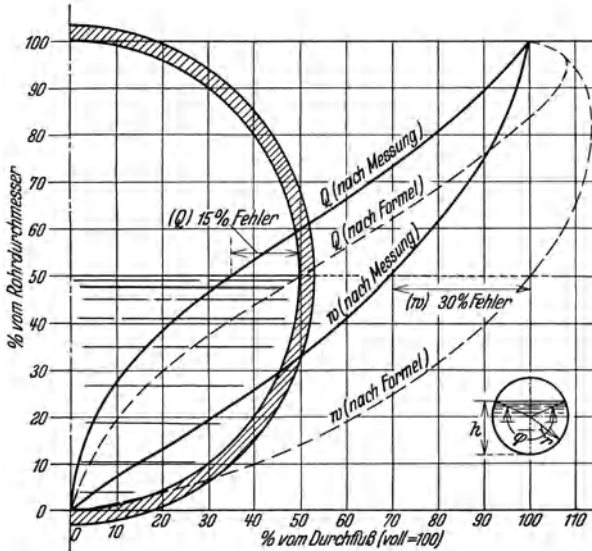


Abb. 180. Freispiegelleitung, berechnete und gemessene Fördermengen nach v. Bülow.  $Q$  und  $w$  sind nach der Berechnung bei halber Füllung um 43 vH zu groß.

hydraulische Gleichwertigkeit der einzelnen Abschnitte annehmen. Danach müßten  $w$  und  $Q_s$  ihre Größtwerte bei  $\varphi = 360^\circ$  haben. Die einfache Beziehung zwischen Strömungswiderstand und hydraulischem Radius ist in diesem Falle nicht vollständig erfüllt, wie es bei Rechteck-, Trapez- und Dreieckquerschnitten der Fall ist. Vermutlich gilt diese einfache Beziehung nur scharf bei geradlinig begrenzten Querschnitten. Der Zusammenhang zwischen Füllhöhe und Durchflußgeschwindigkeit oder -menge wurde mehrfach gemessen<sup>1</sup>. Abb. 180 zeigt die Versuchsergebnisse von v. Bülow.

<sup>1</sup> v. Bülow, F.: Die Leistungsfähigkeit von Fluß-, Bach-, Werkgraben-, Kanal- und Rohrquerschnitten. Gesundh.-Ing. Bd. 50 (1927) S. 262. Umfassende Angaben über den Strömungswiderstand in Freispiegelleitungen macht: Wild-Schöberlein: Tabellenbuch für die Berechnung von Kanälen und Leitungen. Berlin 1931.

## 2. Soleleitungen.

Salzlösungen und Meerwasser fördert man gern in Holzleitungen, weil das Holz nicht angegriffen wird. Vielfach benutzt man auch holzgefütterte Rohre.

Was den Metallangriff der Solen angeht, so kann gesagt werden, daß Gußeisen durch  $\text{CaCl}_2$ - und  $\text{MgCl}_2$ -Lösungen stärker als Stahl und dieser wieder durch  $\text{NaCl}$ -Lösungen stärker als Gußeisen angegriffen wird. Es gibt kritische Konzentrationen der Lösungen, bei denen stärkste Korrosion einsetzt (z. B. 17,1 vH bei  $\text{NaCl}$ -Lösungen<sup>1</sup>). Für Arbeitsflüssigkeiten der Kältemaschinen ist zu bemerken, daß für die Fortleitung von Ammoniak nur eiserne Rohre in Betracht kommen, für schweflige Säure nur kupferne.

Für Rohre mit Kreisringquerschnitt, wie sie für Wärmeaustauscher gebraucht werden, gilt praktisch genügend genau das bekannte Wider-

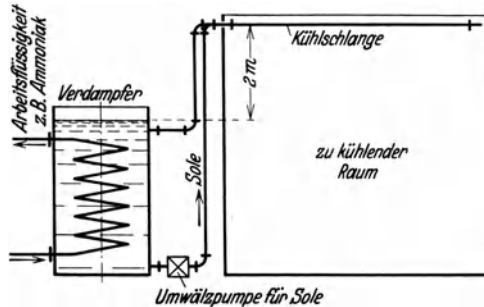


Abb. 181. Skizze einer Kühlanlage, zu Aufgabe 12.

standsgesetz mit  $Re = 4w \frac{F}{Uv}$ . Die Strömungen in den Soleleitungen der Kälteindustrie liegen zwischen  $Re_{krit}$  und  $Re = 50000$ .

**Aufgabe 12.** ( $\Delta H$ ,  $t$ ,  $d$ ,  $Q$ ,  $l$  gegeben,  $\Delta P$  gesucht.)

Abb. 181 stellt eine Kühlanlage dar, in der  $10 \text{ m}^3/\text{h}$  Chlorkalziumsole fließen sollen. Die Rohrleitung ist von Gasrohr mit  $50 \text{ mm l. W.}$  ( $2'' \times 6 \text{ DIN 2442}$ ). Die gerade Länge vom Verdampfer zur Umwälzpumpe ist  $0,5 \text{ m}$ , von der Pumpe bis zum Kühler  $23,0 \text{ m}$  und vom Kühler bis zum Verdampfer  $25,0 \text{ m}$ . In dieser Leitung befinden sich  $8$  Krümmern mit  $\delta = 90^\circ$  und  $\frac{Q}{r} = 6$  und  $3$  Rheiventile. Der Kühler liegt  $2 \text{ m}$  über dem Solespiegel im Verdampfer und besteht aus  $10$  geraden Rohren von  $15 \text{ m}$  Länge und  $50 \text{ mm l. W.}$  und aus  $9$  Krümmern  $\delta = 180^\circ$  und  $\frac{Q}{r} = 8$ . Zur Bemessung der Umwälzpumpe ist die Widerstandshöhe der Pumpe und das durchschnittliche Leitungsgefälle zu ermitteln, wenn die Sole im Mittel  $-10^\circ$  hat und  $1,2 \text{ t/m}^3$  wiegt.

<sup>1</sup> Über Korrosion in Kälteanlagen siehe z. B. M. Hirsch: Z. ges. Kälteind. Bd. 37 (1930) S. 231.

Gleichwertige Rohrlänge:

gerades Rohr  $0,5 + 23,0 + 25,0 + 150,0 = 198,5$  rd. 200 m

90°-Krümmer  $\frac{\varrho}{r} = 6$  (nach Zahlentafel 39)  $8 \times 1,5 = 12,0$  12 m

180°-Krümmer  $\frac{\varrho}{r} = 8$  (nach Zahlentafel 39)  $9 \times 1 \times 2,0 = 18,0$  18 m

Rheiventile (nach Zahlentafel 39)  $3 \times 2 = 6$  6 m

$\Sigma l = 236$  m

Reynoldssche Zahl:

Geschwindigkeit bei  $Q_h = 10$  m<sup>3</sup>/h und  $d = 0,05$  m ist  $w = 1,42$  m/s.

Zähigkeit nach Abb. 9 beträgt  $\frac{1}{\nu} = 2,2 \cdot 10^5$  oder  $\nu = 4,55 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s.

Reynoldssche Zahl

$$Re = \frac{wd}{\nu} = \frac{1,42 \cdot 0,05 \cdot 10^6}{4,55} = 15600.$$

Widerstandszahl

nach Gl. (270)  $\lambda_R = 0,0186 + 1,52 Re^{-0,5} = 0,0308$

und nach Gl. (254) ebenfalls  $\lambda_R = 0,0308$ .

Rohrwiderstand:

mit  $\zeta = 1,0$  für Ein- und Auslauf am Verdampfer

$$\Delta P = \gamma \left( \lambda_R \frac{\Sigma l}{d} + \Sigma \zeta \right) \frac{w^2}{2g} = 1200 \left( 0,0308 \frac{236}{0,05} + 2,0 \right) \frac{1,42^2}{19,6} = 18200 \text{ kg/m}^2$$

oder  $\Delta p = 1,82$  at.

Rohrwiderstandshöhe  $\frac{\Delta P}{\gamma} = 15,2$  m Solesäule.

Pumpenwiderstandshöhe =  $15,2 + 2,0 = 17,2$  m Solesäule.

Durchschnittliches Leitungsfälle je lfd. m gerade Leitung

$$J = \frac{\Delta H}{l} + \frac{\Delta P}{\gamma l} = \frac{17,2}{200} = 0,086 \text{ m} \text{ oder } 86 \text{ mm Solesäule}$$

oder  $1,2 \cdot 86 = 103$  mm WS.

### 3. Ölleitungen.

Wir wollen uns hier nur mit der Hydraulik der Fernölleitungen beschäftigen; für Schmierölleitungen wird man nur selten hydraulische Rechnungen anstellen.

#### a) Entwurf von Fernölleitungen.

Im wesentlichen sind für den Entwurf von Fernölleitungen dieselben Gesichtspunkte wie für andere Leitungen auch maßgebend. Außerdem spielt aber noch eine Rolle, daß man oftmals durch ein und dieselbe Leitung ganz verschiedene Öle fördern muß<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Siehe hierzu auch: W. G. Watkins: The design of oil fuel pipe lines. Engineering Bd. 118 (1924) S. 793.

Für den Betrieb ist sehr wichtig, daß man das Öl während der Förderung auf der Temperatur hält, für die die Leitung und die Pumpenanlagen berechnet wurden. Die Wirtschaftlichkeit und Betriebssicherheit der ganzen Anlage hängt von der Sorgfalt ab, mit der die Förderbedingungen eingehalten werden. Dichteänderungen gehen bei den Ölen linear mit der Temperatur, Zähigkeitsänderungen machen sich dagegen viel stärker bemerkbar (siehe Abb. 6 und 7). Die Eigenschaften der einzelnen handelsüblichen Öle sind so verschieden, daß man keine allgemeine Regel aufstellen kann. Recht schwierig wird die Aufgabe, wenn z. B. eine ganze Schiffsladung von einmal sehr zähem, andermal weniger zähem Öl in der Schiffsüberliegezeit vom Schiffstank wirtschaftlich in den Speicher oder umgekehrt gefördert werden muß, wozu man oft nur 48 Stunden Zeit hat. Bei Kriegsschiffen ist gelegentlich eine noch schnellere Öleinnahme erwünscht. Zur Sicherheit muß man dabei noch rechnen, daß das Öl in  $\frac{3}{4}$  der Überliegezeit gefördert wird. Bei nicht zu langen Förderwegen kann man sich mit Erwärmung des Öls helfen (vor Einlauf in das Rohr), doch ist man auch da beschränkt, weil sich das Öl bei zu starker Erwärmung unerwünscht in seine Teile zerlegt. Je nach Länge der Leitung und Art des Öls muß man daher eine oder mehrere Pumpenanlagen und Zwischenerhitzungen vorsehen.

Man verlegt die Ölleitungen aus gußeisernen, Gußstahl-, gezogenen oder geschweißten Stahlrohren oder aus Rohren von anderem passenden, d. h. möglichst glattem und festem Baustoff und benutzt möglichst zylindrische Rohre. Die Rohrverbindungen müssen sorgfältig hergestellt werden (mit verschmierten Fugen) und dem größten auftretenden Öldruck standhalten. Drücke von 60 bis 70 at sind nicht selten. Stahlrohre verlegt man in ziemlich weiten Gräben wegen der Wärmeausdehnungen im Zickzack. Die Gräben werden dann mit wärmeschützenden Stoffen lose verfüllt. Bis zu Drücken von 20 at verwendet man auch gußeiserne Leitungen, die man gelegentlich auf Rollenlagern anordnet und durch Ausdehnstücke unterbricht. Geschweißte Stahlrohre sind vorteilhafter als gußeiserne, weil sie leichter und fester sind. Innen bestreicht man die Rohre mit petroleumbeständigen Schutzmitteln, die bei den Betriebsverhältnissen nicht reißen oder brechen dürfen. Durch guten Anstrich wird die Korrosionsgefahr gemindert. Am besten aber auch teuersten wären Rohre aus nichtrostendem Stahl.

Die wirtschaftliche Fördergeschwindigkeit liegt bei 1,5 bis 2 m/s. Die Fördertemperatur hält man bei sehr zähem Ölen zwischen 35° und 40°. Solange das Öl laminar durch die Leitung fließt, ist die Wärmeabgabe nur gering (nur Wärmeleitung innerhalb des Öls). Bei turbulenter Strömung ist die Wärmeabgabe erheblich größer (Wärmeleitung und mechanische Wärmeabfuhr — Konvektion — mit den einzelnen Flüssigkeitsteilchen an die Rohrwand).

Bei sehr zähen Ölen, wie mexikanisches und Trinidadöl, schützt man die Rohre noch besonders gegen den Wärmeaustausch mit der Umgebung. Man hat schon solche Leitungen von mehreren 100 km Länge ausgeführt. Meistens ordnet man doppelte Leitungen aus Gründen der Betriebssicherheit an, die zusammen das  $1\frac{1}{2}$ fache, besser noch das Doppelte der größten zu fördernden Ölmenge schaffen sollen. Nachteilig ist bei Doppelleitungen, daß die Druckverluste mit kleiner werdendem Querschnitt stark zunehmen, siehe Gl. (101). So beträgt der Strömungswiderstand auf 400 mm Rohrdurchmesser bezogen etwa bei

16'' oder 400 mm $\varnothing$ das	1,0fache	}	bei einer Leitung, und bei zwei Leitungen das $\frac{1}{4}$ -fache dieser Werte, bei 3 Leitungen das $\frac{1}{9}$ -fache u. s. f., wenn $\lambda_R = \text{konst}$ ist.
14'' „ 350 „ $\varnothing$ „	2,0 „		
12'' „ 300 „ $\varnothing$ „	4,2 „		
10'' „ 250 „ $\varnothing$ „	10,5 „		
8'' „ 200 „ $\varnothing$ „	32,0 „		
6'' „ 150 „ $\varnothing$ „	136,0 „		

Ein anderes Hilfsmittel, die Förderung zu erleichtern, ist die Zähigkeitsverminderung durch Wasserzusatz. Man braucht aber mindestens 30 vH Wasser, um die Förderung wesentlich zu verbessern. Die Emulsion Öl/Wasser ist nur unter großen Kosten (Erhitzen auf  $100^\circ$ ) wieder zu zerlegen. An sich ist die Trennung von Wasser und Öl praktisch bis auf 1 vH Wassergehalt durchzuführen. Ein anderes Verfahren beruht auf dem Mischen von leichterem und schwererem Öl. Die hydraulischen Vorteile werden aber z. T. dadurch aufgewogen, daß durch das Mischen die leichteren Öle wertloser werden, weil sie teurer als schwere sind. Daher ist auch dieses Verfahren kostspielig. Dazu kommt, daß viele Felder nur schweres Öl haben und leichtes erst von anderen Feldern heranpumpen müßten.

Bemerkenswert ist ein Verfahren, das Isaacs und Speed<sup>1</sup> anwandten, um den Druckverlust in Erdöleleitungen zu mindern. Sie gaben den Rohren schraubenförmig gewundene Züge, durch die das Öl zu drehender neben fortschreitender Bewegung veranlaßt wurde. Sie setzten dem Öl Wasser zu, das, weil schwerer als Öl, durch die Fliehkraft nach der Rohrwand gedrückt wurde. Dabei waren im günstigsten Falle etwa 11 vH Wasser notwendig. An die Rohrwand legte sich ein dünner Wasserfilm, der als Gleitschicht wirkte. Auf diese Weise erreichte man mit gleichem Pumpdruck das 10fache der ohne Drall erhältlichen Fördergeschwindigkeit und konnte mit den Pumpdrücken heruntergehen und billigere Leitungen und weniger kräftige Pumpanlagen verwenden. Als Vergleichszahlen erhielt man im Mittel:

glattes Rohr, reines Öl . . . . .	$\lambda_R = 8,6$
glattes Rohr, 9 Teile Öl, 1 Teil Wasser . . . . .	$\lambda_R = 5,1$
Rohr mit Zügen, 9 Teile Öl, 1 Teil Wasser . . . . .	$\lambda_R = 0,061$

<sup>1</sup> Isaacs, J. D., u. B. Speed: A new method of pumping heavy crude fuel oil or other thick viscous fluid. Engng. News Rec. Bd. 55 (1906) S. 641.

Schwierigkeiten bestanden bei diesem Verfahren beim Anfahren. Dabei ist zu beachten, daß unter höherem Druck das Öl dichter als Wasser ist. Allerdings scheint dieser Zustand bei genügend langsamem Anfahren nicht erreicht zu werden. Wesentlich ist ferner, daß die Rohrverbindungen oder andere Unebenheiten die Wasserhaut nicht stören.

Heute wird in den weitaus meisten Fällen bei Förderung schwerer Öle das einfachste Verfahren der Erwärmung angewendet, weil es im Vergleich zu den anderen Verfahren immer noch das vorteilhafteste und technisch am leichtesten zu beherrschen ist.

### b) Ermittlung des Druckverlustes in Ölleitungen.

Das Öl strömt praktisch laminar oder turbulent. Der hydraulische Bewegungsvorgang liegt in der Nähe des Übergangsbereiches zwischen beiden Strömungsarten. Wir wollen für die Widerstandszahlen im Übergangsbereich eine von Watkins gegebene zeichnerische Darstellung Abb. 182 verwenden.

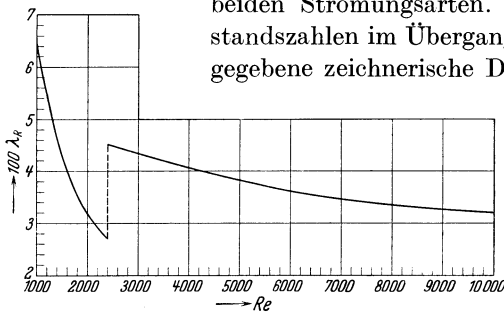


Abb. 182. Widerstandszahl von Rohrlösungen nach Watkins in der Nähe des Grenzgebietes zwischen laminarer und turbulenter Strömung.

Verglichen mit einigen deutschen Messungen scheinen die von Watkins angegebenen  $\lambda_R$ -Werte recht zuverlässig zu sein [bis  $Re = 150\,000 d$  stimmen sie etwa überein mit den Werten von Blasius' Gl. (164), darüber mit den Werten von

Biels Gl. (254)]. Nach Watkins' Erfahrung gilt bei Reynoldsschen Zahlen über 4000 (also außerhalb des Übergangsbereiches) Zahlentafel 40.

Zahlentafel 40. Widerstandszahlen  $100 \lambda_R$  von Rohrlösungen.

$Re/1000$	$100 \lambda_R$	$Re/1000$	$100 \lambda_R$	$Re/1000$	$100 \lambda_R$
4	4,06	20	2,64	70	1,95
6	3,62	25	2,49	80	1,90
8	3,37	30	2,38	90	1,85
10	3,20	35	2,28	100	1,80
12	3,04	40	2,19	150	1,68
14	2,92	45	2,13	200	1,58
16	2,80	50	2,08	250	1,50
18	2,71	60	2,00	300	1,44

Praktisch kann man den Übergang von laminarer in turbulente Strömung mit  $Re = 2400$  angeben. Dabei werden folgende Geschwindigkeiten  $w_{krit}$  in m/s angetroffen:

Zahlentafel 41.

Kritische Geschwindigkeit bei verschiedenem Rohrdurchmesser und verschiedener kinematischer Zähigkeit des Öls.

$10^6 \nu \text{ m}^2/\text{s}$	$d=0,1 \text{ m}$	$d=0,15 \text{ m}$	$d=0,2 \text{ m}$	$d=0,25 \text{ m}$	$d=0,3 \text{ m}$	$d=0,35 \text{ m}$	$d=0,4 \text{ m}$
1	0,0240	0,0160	0,0120	0,0096	0,0080	0,0069	0,0060
2	0,0480	0,0320	0,0240	0,0192	0,0160	0,0137	0,0120
2,5	0,0600	0,0400	0,0300	0,0240	0,0200	0,0172	0,0150
5	0,1200	0,0800	0,0600	0,0480	0,0400	0,0343	0,0300
10	0,2400	0,1600	0,1200	0,0960	0,0800	0,0686	0,0600
20	0,480	0,320	0,240	0,192	0,160	0,137	0,120
30	0,720	0,480	0,360	0,288	0,240	0,206	0,180
40	0,960	0,640	0,480	0,384	0,320	0,274	0,240
50	1,200	0,800	0,600	0,480	0,400	0,343	0,300
60	1,440	0,960	0,720	0,576	0,480	0,412	0,360
70	1,680	1,120	0,840	0,672	0,560	0,480	0,420
80	1,920	1,280	0,960	0,768	0,640	0,549	0,480
90	2,160	1,440	1,080	0,864	0,720	0,617	0,540
100	2,400	1,600	1,200	0,960	0,800	0,686	0,600
200	4,800	3,200	2,400	1,920	1,600	1,371	1,200
300	7,200	4,800	3,600	2,880	2,400	2,065	1,800
400	9,600	6,400	4,800	3,840	3,200	2,740	2,400
500	12,00	8,00	6,00	4,80	4,00	3,43	3,00
600	14,40	9,60	7,20	5,76	4,80	4,12	3,60
700	16,80	11,20	8,40	6,72	5,60	4,80	4,20
800	19,20	12,80	9,60	7,68	6,40	5,49	4,80
900	21,60	14,40	10,80	8,64	7,20	6,17	5,40
1000	24,00	16,00	12,00	9,60	8,00	6,86	6,00
2000	48,00	32,00	24,00	19,20	16,00	13,71	12,00
3000	72,00	48,00	36,00	28,80	24,00	20,65	18,00
5000	120,0	80,0	60,0	48,0	40,0	34,3	30,0
10000	240,0	160,0	120,0	96,0	80,0	68,6	60,0
20000	480,0	320,0	240,0	192,0	160,0	137,1	120,0

**Aufgabe 13.** Gesucht wird der Querschnitt eines Rohres, das 400 t/h mexikanisches Öl von im Mittel  $38^\circ\text{C}$  über eine Strecke von 7 km befördern soll. Dabei dürfen die Pumpdrücke nicht höher als 14 at und die Fördergeschwindigkeit nicht über 1,8 m/s sein.

Aus Abb. 6 entnimmt man den Wert  $\gamma = 929 \text{ kg/m}^3$  zu  $38^\circ$ ; 1 t/h entsprechen  $1,076 \text{ m}^3/\text{h}$  und  $400 \text{ t/h} = 430 \text{ m}^3/\text{h} = 0,1195 \text{ m}^3/\text{s}$ . Mit  $w = 1,8 \text{ m/s}$  errechnet man

$$d = \sqrt{\frac{4}{\pi} \frac{0,1195}{1,8}} = 0,290 \text{ m} \text{ oder } D \text{ rd. } 300 \text{ mm } \varnothing.$$

Bei  $D = 300 \text{ mm } \varnothing$  ist  $w = 1,69$  oder rd.  $1,7 \text{ m/s}$ . Nach Abb. 7 beträgt die Zähigkeit des Öls bei  $38^\circ$   $\nu = 6,1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ . Damit ist die

$$\text{Reynoldssche Zahl} \quad Re = \frac{1,7 \cdot 0,3 \cdot 10^4}{6,1} = 836,$$

also fließt das Öl laminar ( $Re < 2400$ ). Mit  $\lambda_R = 64/Re$  gilt für den Druckverlust

$$\Delta P = \gamma \lambda_R \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g} = 929 \frac{64}{836} \frac{7000}{0,30} \frac{1,7^2}{19,6} = 245000 \text{ kg/m}^2 \hat{=} \sim 25 \text{ at.}$$

Da dieser Druck den zulässigen von 14 at überschreitet, müssen wir einen größeren Rohrdurchmesser und damit geringere Geschwindigkeit wählen:  $D = 350 \text{ mm } \varnothing$ ,  $w = 1,244 \text{ m/s}$ . Dann wird  $Re = 713$  und  $\Delta p = 13,1 \text{ at}$ .

**Aufgabe 14.** Eine Leitung, die je nach Bedarf persisches, Borneo- oder Texasöl fördern soll, besteht aus Stahlrohren von 300 mm  $\varnothing$  und ist 215 km lang. Sie soll imstande sein, 360 t/h oder 100 kg/s des Öles zu liefern. Die Betriebsdrücke der Pumpen dürfen nicht höher als 60 at sein. Die mittlere Betriebstemperatur beträgt 15°. Die größte Zähigkeit der Fördermittel hat Texasöl mit  $\nu = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$  nach Abb. 7. Mit  $\gamma = 915 \text{ kg/m}^3$  bei 15° nach Abb. 6 wird  $Q_s = 0,109 \text{ m}^3/\text{s}$ . Geschwindigkeit und Reynoldssche Zahl sind dann

$$w = \frac{4}{\pi} \frac{0,109}{0,09} = 1,54 \text{ m/s}; \quad Re = 10^4 \frac{1,54 \cdot 0,3}{2,0} = 2310.$$

In diesem Fall in der Nähe der kritischen Reynoldsschen Zahl rechnet man sicherer mit turbulenter Strömung:  $\lambda_R = 0,044$ . Der Druckabfall ist dann

$$\Delta p = 915 \cdot 10^{-4} \cdot 0,044 \frac{1000}{0,30} \frac{1,54^2}{19,6} = 1,62 \text{ at/km.}$$

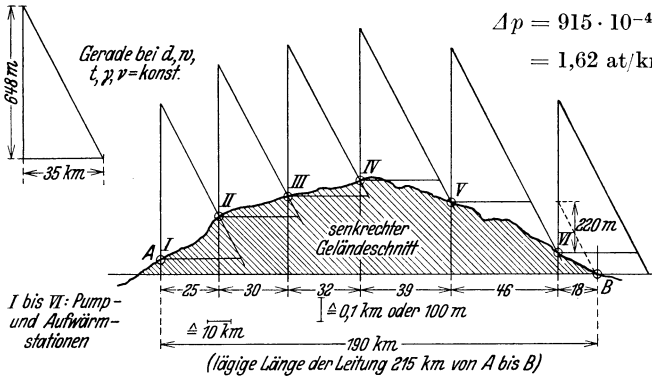


Abb. 183. Zu Aufgabe 14. Zeichnerisches Verfahren zum Auffinden der Pumpstationen nach Watkins.

Man kann demnach mit einer Pumpanlage  $\frac{60}{1,62} = 37 \text{ km}$  überwinden. Da das Gelände, durch das die Leitung führt, im allgemeinen nicht eben ist, lohnt eine zeichnerische Weiterentwicklung

der Aufgabe. 1,62 at entsprechen  $\frac{16200}{915} \cong 17,5 \text{ m}$  Ölsäule, 60 at entsprechen 648 m Ölsäule. Wenn außer  $d$  auch  $w$ ,  $t$  und  $\gamma$  sowie  $\nu$  als im Mittel unveränderlich angesehen werden können, fällt der Druck linear auf 37 km oder rd. 35 km um rd. 650 m Ölsäule, siehe Dreieck in Abb. 183. Mit Hilfe dieser Dreiecke kann man mit dem in Abb. 183 gezeigten Verfahren die einzelnen Stellen ermitteln, wo die Zwischenpump- und Erhitzungsstationen aufgestellt werden müssen. Nach Aufgabe 14 werden 6 Stationen notwendig, wobei die letzte nur 220 m Ölsäule oder rd. 20 at zu drücken braucht.

## C. Leitung gasförmiger Flüssigkeiten, besondere Strömungsfälle.

### 1. Luftleitungen.

Neben der Energieübertragung auf elektrischem Wege spielt die durch Fortleitung hochgespannter Gase und Dämpfe in der Technik eine große Rolle. Insbesondere nahm die Verwendung von Preßluftwerkzeugen und -erzeugern für vielerlei Zwecke mit der modernen



Entwicklung dieser Maschinen in den letzten Jahren stark zu. Wir finden Preßluftanlagen in Bergbau- und Hüttenbetrieben, in Gießereien, im Hoch- und Tiefbau, in Werften und Schmieden. Ferner betreibt man vielfach Fördereinrichtungen wie Hebezeuge oder Lokomotiven oder solche für Kleinguttransport durch Rohrleitungen mit Preßluft.

Zur Erzeugung der Preßluft dienen Kolbenverdichter (bis  $Q_{hn} = 5000 \text{ m}^3/\text{h}$  je Maschine) und Kreiselerdichter (bis  $Q_{hn} = 500000 \text{ m}^3/\text{h}$  und mehr), wobei die Luft auf 6 bis 10, manchmal auch 12 at Überdruck gebracht wird. In Sonderausführungen werden Drücke bis 1000 at und mehr erreicht.

Die Druckleitungen der Verdichter führt man in nahtlos gezogenen oder geschweißten Stahlrohren, bis 100 mm  $\varnothing$  auch in Gasrohren aus. Zur Berechnung von Preßluftleitungen können etwa folgende Werte für die mittlere Fördergeschwindigkeit bezogen auf Luft von 15° und 760 mm QS dienen:

Kolbenverdichter ( $w_s$ Saugleitung, $w_d$ Druckleitung)		
kleinere Verdichter . . . . .	$w_s = 12 \text{ m/s}$	$w_d = 20 \text{ m/s}$
mittelgroße Verdichter . . . . .	16 „	25 „
sehr große Verdichter . . . . .	20 „	30 „
sehr große Gebläse (für Niederdruck)	20 „	25 ÷ 30 „
Kreiselerdichter . . . . .	18 ÷ 23 „	25 ÷ 30 „

Man verlegt Preßluftleitungen mit einem Gefälle von 1 : 100 bis 1 : 200 in Richtung des Luftweges und baut ab und zu Wasserabscheider ein. Die Saugleitungen von Verdichtern stellt man vielfach aus Gußeisen, sonst auch aus Stahl her.

Als allgemeine Anhaltswerte für die Größenbestimmung einer Preßluftanlage gibt die FMA<sup>1</sup> an, daß ein Arbeiter beim Meißeln oder Stemmen mit Preßlufthammer etwa 4- bis 6mal soviel als bei Handbetrieb leistet, daß ein Arbeiter beim Bohren mit Preßluftwerkzeug das 10- bis 20fache als mit Bohrknarre leistet, daß ein Arbeiter das 5- bis 8fache der Leistung mit Handbetrieb erreicht, wenn er mit Preßluftwerkzeug stampft oder Kesselstein abklopft. Eine Preßluftnietkolonne von 3 Mann (ein Nietwärmer, ein Nieter und ein Gegenhalter) leistet mit Niethammer annähernd ein Drittel mehr als eine Handnietkolonne von 4 bis 5 Mann. Überschlägig verbrauchen

schwere Meißel oder Bohrhämmer . . . . .	$Q_{hn} = 25$ bis $33 \text{ m}^3/\text{h}$
leichte Meißel oder Bohrhämmer . . . . .	25 „ 30 „
schwere Niethämmer . . . . .	40 „ 50 „
Stampfer . . . . .	15 „ 25 „
Nietfeuer, Kesselsteinabklopfer und Gegenhalter	6 „ 9 „

Luft vom Ansaugzustand. Für die Geschwindigkeit in den Zuleitungen zu Preßluftwerkzeugen wählt man erfahrungsgemäß  $w_n = 25 \text{ m/s}$  bei Betriebsdrücken von 5 bis 9 atü.

Um eine sichere Versorgung mit Preßluft zu gewährleisten, legt man häufig in sich geschlossene Leitungen ringförmig an, die man dann an irgendeiner (oder mehreren) Stelle(n) speist. Solche Ringleitungen

<sup>1</sup> Nach Taschenb. f. Preßluftbetr. 5. Aufl. (1924) der Frankfurter Maschinenbau AG.

ordnet man auch für andere Gase und besonders für Wasserdampf an. Zur Berechnung von Ringleitungen nimmt man an, daß durch  $\frac{1}{3}$  der Leitung die Hälfte der in der gesamten Ringleitung geförderten Preßluft strömen muß. Bei Endleitungen mit gleichmäßig verteilten Anschlußstellen nehme man  $\frac{2}{3}$  der Länge für das Durchfließen der gesamten Luftmenge an, da u. U. sämtliche Preßluftverbraucher nahe am Ende angeschlossen sein können<sup>1</sup>.

**Aufgabe 15.** Eine Preßluftversorgungsleitung auf einer Werft ist nach Abb. 184 angelegt. *A* ist die Erzeugungsstelle, und an den Stellen *B*, *C* und *D* sollen je 6 Niethämmer, 2 schwere und 4 leichtere. angeschlossen sein. Der Verdichter liefert Luft von 8 atü Pressung.

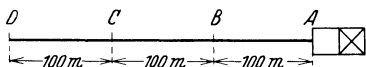


Abb. 184. Zu Aufgabe 15. Berechnung einer Preßluftleitung.

a) Welche Durchmesser soll die aus Stahlrohren DIN 2442 verlegte Leitung haben, wenn die Luft bei einer mittleren

Temperatur von 30° nicht schneller als mit  $w_n = 25$  m/s (15°, 760 mm QS) strömen soll?

Luftmengen: 2 schwere Niethämmer brauchen 90 m<sup>3</sup>/h und 4 leichte 120 m<sup>3</sup>/h vom Ansaugzustand. An jeder der drei Stellen *B*, *C* und *D* werden also  $Q_{hn} = 210$  m<sup>3</sup>/h abgenommen. In der Leitung von *A* bis *B* müssen drei  $Q_{hn} = 630$  m<sup>3</sup>/h oder  $Q_n = 76$  m<sup>3</sup>/h (von 9 ata und 30°), von *B* bis *C* müssen zwei  $Q_{hn} = 420$  m<sup>3</sup>/h oder  $Q_n = 50$  m<sup>3</sup>/h und von *C* bis *D* muß ein  $Q_{hn} = 210$  m<sup>3</sup>/h oder  $Q_n = 25$  m<sup>3</sup>/h fließen. Mit  $w_n = 25$  m/s hat die Leitung von *A* bis *B*  $d = 0,0945$  m Ø. Gewählt wird ein Rohr von 100,5 mm l. W. (4'' × 6,5 DIN 2442). Von *B* bis *C* ergeben sich 0,0771 m Ø. Gewählt wird ein Rohr von 76,3 mm l. W. (3'' × 6 DIN 2442). Von *C* bis *D* berechnet man 0,0545 m Ø. Gewählt wird ein Rohr von 63,5 mm l. W. (2½'' × 6 DIN 2442), weil das an sich auch ausreichende Rohr 2¼'' × 6 DIN 2442 möglichst zu vermeiden ist.

b) Mit welchem Druck steht dann die Luft an den Stellen *A*, *B*, *C* und *D* an?

Wenn man die Geschwindigkeit  $w_n \leq 25$  m/s einhält, so ergibt sich in nicht zu langen Leitungen der Druckabfall genügend genau nach Gl. (268) mit  $p_m$  rd.  $p_1 = p_A$ . Wir wollen die hydraulische Wirkung eines T-Stückes im Durchgang zu 10 m gerader Rohrstrecke annehmen. Dann ergibt sich mit  $p_m = 9$  ata,  $p_n = 1,033$  ata und  $s = 1,0$  und

$$\begin{array}{llll} Q_{hn} = 630 \text{ m}^3/\text{h}, d = 0,1005 \text{ m}, l = 100 \text{ m} : & P_A - P_B = & 79,6 & \text{mm WS} \\ 420 \text{ ,,} & 0,0763 \text{ ,,} & 110 \text{ ,,} & P_B - P_C = 157,5 \text{ ,,} \text{ ,,} \\ 210 \text{ ,,} & 0,0635 \text{ ,,} & 110 \text{ ,,} & P_C - P_D = 108,2 \text{ ,,} \text{ ,,} \end{array}$$

Zur Berechnung kann man auch Abb. 152 und Zahlentafel 29 benutzen. Es ist also

$$\begin{array}{ll} p_A = 9,000 \text{ at abs.} \\ p_B = 8,992 \text{ ,,} \text{ ,,} \\ p_C = 8,976 \text{ ,,} \text{ ,,} \\ p_D = 8,965 \text{ ,,} \text{ ,,} \end{array}$$

d. h. praktisch ein vollständig vernachlässigbarer Druckabfall von *A* bis *D* von 345,7 mm WS oder 0,035 at.

<sup>1</sup> wie Fußnote 1 S. 223.

**Aufgabe 16.** ( $Q$ ,  $P_1$ ,  $d$ ,  $l$ ,  $t$  gegeben,  $P_2$  gesucht.)

Einem Preßluftmotor werden  $Q_{h1} = 400 \text{ m}^3/\text{h}$  Preßluft von  $p_1 = 12 \text{ atü}$  aus-  
hilfsweise durch eine gerade Stahlrohrleitung von  $100 \text{ mm } \varnothing$  und  $750 \text{ m}$  Länge  
bei einer mittleren Temperatur von  $20^\circ$  zugeführt. Welcher Druck herrscht am  
Ende der Leitung?

Umrechnung des Luftraums auf  $15^\circ$  und  $760 \text{ mm WS}$

$$\frac{p_1 Q_{h1}}{T_1} = \frac{p_n Q_{hn}}{T_n}; \quad Q_{hn} = 400 \frac{13,00}{1,033} \frac{288}{293} = 4950 \text{ m}^3/\text{h}.$$

Geschwindigkeiten  $w_1 = 14,15 \text{ m/s}$ ;  $w_n = 175 \text{ m/s}$ . Die Aushilfsleitung ist also  
stark überlastet ( $w_n \gg 25 \text{ m/s}$ ). Dann ist der Widerstand nach Gl. (261) (oder  
Zahlentafel 29 und Abb. 152)

$$p_1^2 - p_2^2 = 0,81 L Q_{hn}^{1,875} (100 d)^{-5} = 0,81 \cdot 750 \cdot 4950^{1,875} \cdot 10^{-8} = 52 \text{ ata}^2,$$

$$p_2^2 = p_1^2 - (p_1^2 - p_2^2) = 169 - 52 = 117; \quad p_2 = 10,8 \text{ ata}; \quad p_1 - p_2 = 2,2 \text{ at}.$$

Die Geschwindigkeit  $w_2$  ist mit  $Pw = \text{konst}$

$$w_2 = w_1 \frac{P_1}{P_2} = 14,15 \cdot \frac{13,0}{10,8} = 17,0 \text{ m/s},$$

also rd. 20 vH mehr als  $w_1$ . Die Reynoldssche Zahl dieses Strömungsvorganges  
ist 1180000.

Mit der Bedingung  $w_n = 25 \text{ m/s}$  dürften nur  $710 \text{ m}^3/\text{h}$  von  $15^\circ$  und  $760 \text{ mm QS}$   
oder  $57,5 \text{ m}^3/\text{h}$  von  $20^\circ$  und  $12 \text{ atü}$  gefördert werden. Dann beträgt der Druck-  
verlust nur rd.  $0,06 \text{ at}$ .

**Aufgabe 17.** Welchen Durchmesser muß die Ringleitung einer Preßluft-  
versorgungsanlage haben, durch die  $2000 \text{ kg/h}$  Preßluft gehen sollen, wenn die  
Luft in  $1/3$  der Leitung und bei Durchfluß der halben Menge nicht mehr als  $0,5$  at  
Druck verlieren darf? Die gesamte Ringleitung sei  $300 \text{ m}$  lang, der Luftdruck an  
der Speisestelle  $5 \text{ atü}$ .

$1/2$  der Gesamtmenge ist  $1000 \text{ kg/h}$ . Mit  $\gamma_n = 1,225 \text{ kg/m}^3$  bei  $15^\circ$  und  $760 \text{ mm QS}$   
ist  $Q_{hn} = \frac{1000}{\gamma_n} = 815 \text{ m}^3/\text{h}$ .

$1/3$  der Ringleitung ist  $100 \text{ m}$  lang.

$p_1 = 6 \text{ ata}$ , dann ist  $p_2 = 6 - 0,5 = 5,5 \text{ ata}$  und  $p_1^2 - p_2^2 = 5,75 \text{ ata}^2$ . Mit  
Gl. (261) findet man zu diesen Werten  $d = 0,0526 \text{ m}$ . An sich würde ein Rohr  
 $2\frac{1}{4}'' \times 6 \text{ DIN 2442}$  von  $54 \text{ mm l. W.}$  genügen. Da diese Rohrweite aber möglichst  
zu vermeiden ist, wird man ein Rohr  $2\frac{1}{2}'' \times 6 \text{ DIN 2442}$  von  $63,5 \text{ mm l. W.}$  wählen.  
Bei  $63,5 \text{ mm l. W.}$  werden sich rund  $0,2 \text{ at}$  Druckabfall (an Stelle  $0,5 \text{ at}$ ) einstellen.  
Bei Festsetzung von  $0,3$  oder  $0,1 \text{ at}$  Druckabfall müßte die Leitung  $58$  oder  $72 \text{ mm}$   
im Lichten haben.

**Aufgabe 18.** Eine Schachanlage wird von über Tage aus mit Preßluft ver-  
sorgt. Bis zur untersten Sohle in  $1000 \text{ m}$  Tiefe geht eine Leitung aus Stahlrohr  
von  $100 \text{ mm } \varnothing$  und insgesamt  $2000 \text{ m}$  Länge. Durch diese Leitung werden stünd-  
lich  $700 \text{ m}^3$  ( $15^\circ$  und  $760 \text{ mm QS}$ ) Luft bei  $15^\circ$  mittlerer Temperatur gedrückt,  
die am Druckwindkessel unter einer Pressung von  $7 \text{ atü}$  steht. (Geschwindigkeit  
 $w_n = 24,8 \text{ m/s}$ ;  $w_1 = \frac{24,8}{8} = 3,1 \text{ m/s}$ .)

Bei Druckrohrleitungen ist bei den üblichen Geschwindigkeiten ( $w_n \sim 25 \text{ m/s}$ )  
und nicht zu großen Entfernungen der Druckabfall im allgemeinen so klein, daß  
man raumbeständige Fortleitung voraussetzen kann.

1. Ohne Berücksichtigung des Höhenunterschiedes gilt für Luft mit Gl. (262), (259) sowie Zahlentafel 29

$$\frac{P_1 - P_2}{2000} = 1,920 \frac{700^{1,875}}{10^5} \frac{1,033}{8} 2,04 \frac{0,048}{0,050} = 1,070 \text{ mm WS/m.}$$

Der Faktor 0,048/0,050 wurde mit Rücksicht auf Gl. (257) und (259) angesetzt:

$$P_1 - P_2 = 2000 \cdot 1,070 = 2140 \text{ mm WS (= 2,7 vH des Anfangsdruckes).}$$

2. Genauere Rechnung mit Acht auf die Ausdehnung

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{2} = \frac{0,81 \cdot 700^{1,875}}{10^5} \frac{0,048}{0,050} = 1,72 \text{ ata}^2/\text{km};$$

$$p_2 = \sqrt{p_1^2 - 2 \cdot 1,72} = 7,79 \text{ ata}; \quad P_1 - P_2 = 2100 \text{ mm WS.}$$

3. Berechnung mit Gl. (265)

$$G_n = 1,225 \cdot 700 = 858 \text{ kg/h, dazu ist nach Zahlentafel 31: } \beta = 1,06;$$

$$\gamma_1 = 1,225 \cdot 8 = 9,8 \text{ kg/m}^3,$$

$$p_1 - p_2 = 12,5 \cdot 1,06 \cdot 858^2 \frac{2000}{9,8 \cdot 10^{10}} = 0,199 \text{ at};$$

$$P_1 - P_2 = 1990 \text{ mm WS.}$$

4. Druckgewinn durch den Höhenunterschied:

$$\text{Druckluft } \gamma = 1,225 \cdot 8 \dots\dots\dots = 9,800 \text{ kg/m}^3$$

$$\text{Außenluft } \gamma = 1,225 \cdot 1 \dots\dots\dots = \underline{1,225 \text{ ,,}}$$

$$\text{Druckgewinn je lfd. m } \dots\dots\dots = 8,575 \text{ kg/m}^3$$

$$\text{Druckanstieg auf 1000 m } \dots\dots\dots = 8575 \text{ kg/m}^2$$

$$\text{Enddruck } P_2 = 80000 - 2100 + 8600 = 86500 \text{ ,,}$$

oder  $p_2 = 8,65 \text{ ata.}$

Der Druckgewinn durch den Auftrieb der Luft ist also weit größer als der Druckabfall. Die wirtschaftlich günstigste Strömungsgeschwindigkeit ist in diesem Fall bei mittleren Verhältnissen

$$w_1 = 6 \cdot p^{-\frac{1}{3}} = \frac{6}{2} = 3,0 \text{ m/s.}$$

Im Beispiel wurde mit  $w_1 = 3,1 \text{ m/s}$  diese wirtschaftliche Geschwindigkeit eingehalten.

**Aufgabe 19.** Die Zuführung zu einem Preßluftmotor sei 1000 m lang und 0,03 m weit, der Anfangsdruck  $p_1$  sei 17 ata und der Gegendruck im Motor  $p_0$  sei 1 ata. Die Lufttemperatur sei durchweg  $20^\circ$  und  $\lambda_R$  sei 0,03. Das Leistungsvermögen am Ende der Leitung  $N_2$  soll einen Größtwert haben. Wie groß ist die Durchflußmenge und der Wirkungsgrad der Rohrleitung?

Aus Abb. 174 erhält man den Größtwert von  $N_2$ , wenn  $p_2 = 8,8 \text{ ata}$  bei  $p_1 = 17 \text{ ata}$  ist. Aus Gl. (125) ermittelt man die Menge

$$G_s = 0,1534 \sqrt{(P_1^2 - P_2^2) d^5 / l} = 0,110 \text{ kg/s.}$$

Nach Gl. (38) ist das Leistungsvermögen am Anfang

$$N_1 = G_s \cdot L_{pot1} \cdot \frac{1}{75} = G_s \cdot \frac{n}{n-1} \cdot R T_1 \left[ 1 - \left( \frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right] \cdot \frac{1}{75}$$

$$= 0,110 \cdot \frac{1,3}{0,3} \cdot 29,3 \cdot 293 \cdot 0,480 \cdot \frac{1}{75} = 26,2 \text{ PS}$$

und am Ende  $N_2 = 21,5 \text{ PS}$ . Wegen der Rohrreibung verringert sich demnach

das Leistungsvermögen um  $N_1 - N_2 = 4,7$  PS. Der Wirkungsgrad der Übertragung ist demnach bei der größten Leistungsfähigkeit am Ende

$$\eta_{Rohr} = \frac{21,5}{26,2} = 0,82.$$

**Aufgabe 20.** ( $Q_{hn}$ ,  $l$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $\Delta P$  gegeben,  $d$  gesucht). Eine Gebläseluftleitung aus Stahlblech sei  $l = 700$  m lang und enthalte zwei Parallelschieber und zwölf 90°-Faltenrohrbogen mit  $q/r = 8$ . Sie werde mit  $Q_{hn} = 1000$  m<sup>3</sup>/h Luft unter 2000 mm WS Überdruck beschickt. Am Ende soll die Luft mit 1800 mm WS anstehen, also verfügbarer Druckunterschied 200 mm WS. Welcher Leitungsdurchmesser ist zu wählen?

Schätzt man zunächst die Wirkung der zwölf Bogen und der zwei Schieber zu 50 m gerader Rohrlänge ab, Rohrlänge zur Berechnung also  $700 + 50 = 750$  m, so können je km  $\frac{2000 - 1800}{0,750} = 267$  oder rd. 250 mm WS für den Druckunterschied angesetzt werden. Aus Abb. 152 und Zahlentafel 29 oder mit Gl. (268) erhält man mit  $Q_{hn} = 1000$  m<sup>3</sup>/h,  $\frac{P_1 - P_2}{L} = 250$  mm WS/km,  $p_m = 1,190$  at und  $p_n = 1,033$  at, also  $\frac{p_m}{p_n} \frac{P_1 - P_2}{L} = \frac{1,190}{1,033} \cdot 250 = 290$  mm WS/km, einen Rohrdurchmesser von 225 mm. Um diese wenig übliche Lichtweite zu vermeiden, wird Rohr von 250 mm Durchmesser gewählt.

Bei 250 mm Rohrdurchmesser entspricht die Wirkung von zwölf 90°-Faltenrohrbogen nach Zahlentafel 39 einer geraden Rohrlänge von  $12 \cdot 6,5 = 78$  m, und von zwei Parallelschiebern von  $2 \cdot 4 = 8$  m, zusammen also von  $78 + 8 = 86$  m. Kann der Druckabfall auf  $700 + 86 = 786$  m gleich 200 mm WS sein, so kann er auf 1000 m gleich 255 mm WS sein; oben wurde nur mit 250 mm WS/km gerechnet. Lutten von 250 mm l. W. sind also ausreichend, der Druckabfall beträgt tatsächlich 147 mm WS (an Stelle  $0,786 \cdot 250 = 197$  mm WS bei 225 mm Durchmesser).

Nach den einfachen Gleichungen von Pole, Gl. (266/267) erhält man

$$P_1 - P_2 = 0,024 \cdot \gamma_m \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{w_{zu}^2}{2g} = 0,024 \cdot \frac{p_n}{p_m} \cdot \gamma_n \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{w_{zu}^2}{2g} = 1,873 \cdot \frac{p_n}{p_m} \cdot \frac{l Q_{hn}^2}{(100 d)^5},$$

weil bei isothermischer Strömung  $p \cdot \gamma \cdot w^2 = \text{konst.}$  ist [bei  $t_m = t_n$ , siehe Gl. (118) und (119)], oder

$$(100 d)^5 = \frac{1,873 \cdot 1,033 \cdot 786 \cdot 1000^2}{1,190 \cdot 200} = 6400000; \quad d = 0,230 \text{ m.}$$

Das ist nur um 5 mm oder um  $\frac{230 - 225}{225} \cdot 100 = 2,2$  vH mehr als nach der genaueren Formel Gl. (268).

## 2. Gasleitungen.

### a) Allgemeine Bemerkungen.

Neben Luftleitungen kommen in der Technik vornehmlich Stadtgasleitungen und Förderanlagen für Heiz- und Kraftgase vor.

Die örtlichen Leuchtgasverteilungsnetze bestehen aus Niederdruckleitungen (Überdruck gegenüber dem atmosphärischen Druck unter 2 m WS). Die Speiseleitung des Netzes, die das Gas von einer entfernt gelegenen Gaserzeugungsstelle heranzuführt, ist, wenigstens bei größeren Entfernungen, eine Hochdruckleitung (mehr als 2 m WS Überdruck).

Früher trachtete jede Ortschaft selbst in einer oder mehreren kleinen Gasanstalten Stadtgas herzustellen. Aus Wirtschaftlichkeitsgründen errichtet man aber neuerdings in Kohlen- und Zechengebieten große Zentralversorgungsanlagen, die dann ganze Landstriche mit Gruppen von Städten und Gemeinden beliefern<sup>1</sup>. Mit dieser Entwicklung nehmen die Fragen der Gasfernleitung ein wichtiges Teilgebiet der praktischen Hydraulik ein. Die ersten Gasfernleitungen wurden in Nordamerika verlegt, indem man Naturgas nach weit entfernt liegenden Verbrauchszentren abzog.

Für die Niederdruckgasleitungen der örtlichen Verteilungsnetze benutzt man Stahl- oder gußeiserne Rohre, die in frostfreier Tiefe zu verlegen sind. Das Gas soll an den einzelnen Verbrauchsstellen mit Überdruck zwischen 40 und 50 mm WS, jedenfalls nicht weniger als 30 mm WS anstehen. Zu Hausleitungen benutzt man Gasrohre. Allgemein sollen die Leitungen ein Gefälle von 4 bis 5 m auf 1000 m haben und ab und zu mit Entwässerungstöpfen versehen werden. Diese schwache Neigung der Leitungen kann bei der Berechnung völlig vernachlässigt werden.

In Fernleitungen wendet man Drücke bis etwa 40 ata an. Wegen dieser hohen Drücke benutzt man ganz allgemein Stahlrohre (bis 475 mm  $\varnothing$  nahtlose, darüber wassergeschweißte). Die mittlere Strömungsgeschwindigkeit kann mit  $w_n = 25$  bis 65 m/s (bezogen auf 15° und 760 mm QS; höhere Werte bei höherem mittleren Leitungsdruck) angegeben werden.

### b) Nachprüfung von Biels Formel für Stahlrohr.

Die Bielsche Formel Gl. (254), (255) ist mehrfach an ausgeführten Gasfernleitungen nachgeprüft und als ausreichend übereinstimmend mit den Beobachtungen gefunden worden<sup>2</sup>. Nach diesen Prüfungen nahm der Sonderausschuß für Rohrleitungen im Deutschen Verein von Gas- und Wasserfachmännern nach sorgfältiger Sichtung der Ergebnisse folgende Stellung ein: Für genaue Berechnung von langen Hochdruckgasleitungen, vornehmlich Ferngasleitungen, wird die Benutzung der Bielschen Formel Gl. (261), (262) einstweilen empfohlen, bis noch genauere Formeln aufgestellt werden (Hauptversammlung Kassel 1927)<sup>3</sup>. Der Ausschuß hielt es dabei nicht ratsam, Formeln zu empfehlen, die möglicherweise bei günstigen Umständen zutreffende Werte geben, sondern vielmehr solche, die eine mittlere Sorgfalt bei der Herstellung, Auswahl und Lagerung, Verbindung und Verlegung der Rohre voraussetzen.

<sup>1</sup> Siehe die Denkschriften über die deutsche Großgasversorgung des deutschen Vereins von Gas- und Wasserfachmännern und der Aktiengesellschaft für Kohleverwertung (1927).

<sup>2</sup> z. B. Gas- u. Wasserfach Bd. 70 (1927) S. 547; Bd. 74 (1930) S. 107 u. 575; Bd. 76 (1933) S. 177.

<sup>3</sup> Gas- und Wasserfach, Bd. 70 (1927) S. 547.

**c) Zum Entwurf von Gasfernleitungen<sup>1</sup>.**

Es genügt an sich, wenn das Gas aus der Fernleitung in das Netz mit einem Überdruck gegenüber der Atmosphäre von 100 bis 2000 mm WS ( $p_2 \cong 1,01$  bis 1,2 at abs.) je nach Umfang des Netzes einströmt. Bei diesem niedrigen Drucke würde aber das Gas einen großen Raum einnehmen, wodurch weite und teure Rohrleitungen erforderlich wären. Die beiden Abb. 185 und 186 lassen erkennen, daß sich die Größen Druck  $p$ , Geschwindigkeit  $w$  und Temperatur  $t$  bei großem Druckgefälle ungünstiger als bei kleinem Druckgefälle verhalten. Bei großem Druckgefälle sinkt der Druck und dehnt sich die Flüssigkeit ganz besonders am Ende der Leitung aus, wenn der Gegendruck gleich dem atmosphärischen ist. Die Drucklinie ist eine Parabel mit Scheitel auf der Nulllinie. Dadurch erfährt das Gas im letzten Teil der Leitung den größten Druckabfall. Durch Erhöhen des Gegendruckes kann man

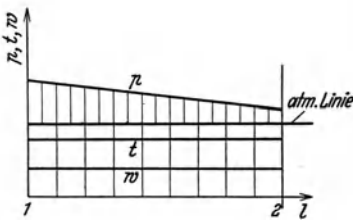


Abb. 185. Kleines Druckgefälle.

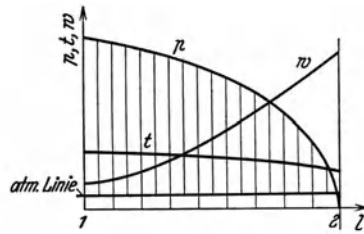


Abb. 186. Großes Druckgefälle.

Abb. 185 und 186. Druck-, Temperatur- und Geschwindigkeitsverlauf längs der Strömung einer zusammendrückbaren Flüssigkeit in einem zylindrischen Rohr nach Ombeck, ( $w$  wird bei  $p = 0$  unendlich groß).

wesentlich günstigere Förderbedingungen schaffen. Man erreicht dadurch nach Abb. 186, daß man bei gleichem Fördergewicht und gleichweiten Rohren den Druckverlust herabsetzt oder aber bei gleichem Druckverlust und gleichweiten Rohren die Fördermenge vergrößert. Endlich kann man auch bei derselben Fördermenge und demselben Druckverlust mit engeren Rohren auskommen. Indem man einen höheren Gegendruck vorsieht, schneidet man das hydraulisch unwirtschaftliche Ende in Abb. 186 ab. Das Gas hat dann am Leitungsende einen großen Überdruck. Zur nützlichen Entspannung könnte man zwischen Leitung und Netz Preßgasmotoren anordnen. In diesem Falle wäre für den Wirkungsgrad der gesamten Anlage weniger der Druckverlust, sondern der Arbeitsverlust in der Leitung maßgebend. Wir nehmen zum Überschlag die anfängliche Verdichtung und endliche Ausdehnung des Gases in Verdichter und Kraftmaschine als polytropisch an. Es gilt bei isothermischer Förderung nach Gl. (36) die Arbeitsgleichung

$$dL_h = G_h R T \frac{dP}{P} = Q_h \cdot dP. \tag{308}$$

<sup>1</sup> Siehe hierzu auch M. Wildhagen: a. a. O.

Mit einem Widerstandsgesetz von der Form

$$\lambda = a G_h^{-\frac{1}{\sigma}} \tag{309}$$

nach Gl. (263) und einem stündlichen Arbeitsverlust in der Rohrleitung durch den Strömungswiderstand je m Rohrlänge von

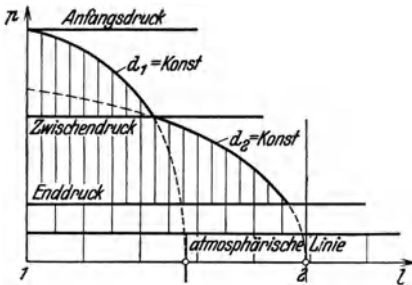


Abb. 187. Drucklinie bei abgestuften Rohrweiten.

$$\frac{dL_h}{dl} = \frac{G_h R T}{P} \frac{dP}{dl}$$

erhält man mit

$$\frac{dP}{dl} = C R T \frac{G_h^{\frac{3}{\sigma} - \frac{1}{\sigma}}}{d^{\frac{5}{\sigma}} P} \tag{310}$$

oder

$$\frac{dL_h}{dl} = C R^2 T^2 \frac{G_h^{\frac{3}{\sigma} - \frac{1}{\sigma}}}{d^{\frac{5}{\sigma}} P^2} \tag{311}$$

Daraus erkennt man, daß sich der Arbeitsverlust bei höherem Förderdruck stärker verringert als der Druckabfall durch den Strömungswiderstand. Bei gleichem Fördergewicht hängt der Arbeitsverlust vom Produkt  $P^2 d^{\frac{5}{\sigma}}$  ab; er ist umgekehrt proportional dem Quadrat des Förderdruckes, während der Druckverlust in geringerem Maße von der Größe des Förderdruckes abhängt. Legt man andererseits gleichen Arbeitsverlust zugrunde und fragt, wieviel der Rohrdurchmesser kleiner werden kann, wenn der Förderdruck erhöht wird, dann lautet die Antwort, daß bei gleicher Fördermenge der Durchmesser  $d$  mit der  $\frac{2}{5}$ . Potenz von  $P$  abnimmt. So nimmt der Durchmesser der Leitung bei Drucksteigerung von 1 auf 5, 10, 50, 100 at auf das 1 durch 1,9-, 2,5-, 4,8-, 6,3fache ab. Die Durchmesserabnahme bei Druckerhöhung wird von einer Verstärkung der Rohrwand und Verteuerung der Rohre begleitet, so daß bald eine wirtschaftlich günstigste Drucksteigerung erreicht ist (bei etwa 50 at). Gleichzeitig hat man es aber mit der Drucksteigerung in der Hand, die Druckfestigkeit der Rohre weitgehend auszunützen.

Mit Vorteil könnte man die Rohrweiten auch abstufen und erhielte dann eine Drucklinie nach Abb. 187. Anfänglich müßte man engere Rohre, später nach Ausdehnung des Gases weitere benutzen. Für den Fall eines unveränderlichen Arbeitsverlustes  $dL/dl$  längs des Rohres als Bedingung gilt dann das Abstufungsgesetz

$$d^5 P^2 = \text{konst.} \tag{312}$$

Um eine Beziehung zwischen  $d$  und  $l$  zu erhalten, muß man  $P$  durch  $l$  ersetzen:

$$5 d^4 P^2 \frac{d(d)}{dl} + d^5 2 P \frac{dP}{dl} = 0.$$



Mit Gl. (310), (311) und (312) ergibt sich dann, wenn der unveränderliche Arbeitsverlust  $\frac{dL_h}{dl} = K$  gesetzt wird:

$$5 \frac{RT G_h}{2K} \frac{1}{d} \frac{d(d)}{dl} + 1 = 0. \tag{313}$$

Für die Grenzen  $d = d_1; l = 0$  und  $d = d; l = l$  lautet dann Gl. (313)

$$\frac{5 RT G_h}{2K} \ln \frac{d}{d_1} = l. \tag{314}$$

Der Durchmesser und nach Gl. (312) auch der Druck ändern sich nach einem logarithmischen Gesetz,  $d$  wächst mit  $l$  und  $P$  fällt mit  $l$ .

**Aufgabe 21.** 1,5 Millionen m<sup>3</sup> Stadtgas (15<sup>0</sup> und 760 mm QS,  $s = 0,49$ ), etwa der tägliche Bedarf Großberlins, sollen bei mittlerer Temperatur von 15<sup>0</sup> über eine Strecke von 600 km gefördert werden. Am Anfang und Ende der Leitung befinden sich so große Speichereinrichtungen, daß der Gasstrom trotz schwankender Erzeugung und Abnahme stationär ist. Aus Sicherheitsgründen sollen zwei gleichweite Stahlrohrleitungen angelegt werden, wobei jede Leitung für sich imstande sein muß, die gesamte Gasmenge fortzuleiten. Welche Drücke und Rohrdurchmesser sind zu wählen? Wie groß ist der mechanische Leistungsverlust des Gases durch Reibung in der Leitung und wie groß ist der Rohrleitungswirkungsgrad?

1,5 · 10<sup>6</sup> m<sup>3</sup>/Tag entsprechen  $Q_{hn} = 62500$  m<sup>3</sup>/h. Der Vordruck  $p_1$ , der Gegen-  
druck  $p_2$ , die Rohrlänge  $L$ , der Rohrdurchmesser  $d$  und die Durchflußmenge  $Q_{hn}$   
sind miteinander durch Gl. (262) oder Abb. 152/153 verbunden (für  $s = 0,49$ ).  
Die Leistungsfähigkeit kann man mit

$$N = Q_{hn} \frac{s \gamma L m}{75 \cdot 3600} \frac{n}{n-1} T \frac{RL}{s} \left[ 1 - \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right] \text{ in PS}$$

berechnen, wobei  $n = 1,3$  und  $p_0 = 1$  ata gesetzt werden möge.  $\eta_{Rohr}$  ist nach Gl. (296) zu bestimmen.

a)  $p_1$  veränderlich,  $p_2 = 1$  ata.

gewählt		berechnet				
$p_1$ ata	$p_2$ ata	1000 $d$ mm	$N_1$ PS	$N_2$ PS	$N_1 - N_2$ PS	$\eta_{Rohr}$
2	1	1510	1530	0	1530	0
4	1	1090	2840	0	2840	0
6	1	923	3500	0	3500	0
8	1	820	3950	0	3950	0
10	1	750	4270	0	4270	0
12	1	697	4520	0	4520	0
15	1	637	4810	0	4810	0
20	1	568	5170	0	5170	0
30	1	482	5640	0	5640	0
40	1	430	5940	0	5940	0

Diese Zahlenwerte zeigen, wie der Durchmesser der Leitung mit wachsendem Vordruck  $p_1$  kleiner werden kann, wie aber auch die Leistung  $N_1$ , die vollkommen der zu leistenden Reibungsarbeit entspricht, größer wird. Während für eine weitere Leitung größere Anlagekosten und geringere Betriebskosten aufzuwenden sind, gilt für eine engere Leitung das Umgekehrte. Eine Steigerung des Vordruckes über 40 ata hat keine erhebliche Durchmesser- und Leitungsverbilligung

mehr zur Folge. Tatsächlich ist zur Kompression des Gases freilich eine indizierte Leistung

$$N'_1 = Q_{hn} \frac{s \gamma L n}{75 \cdot 3600} \frac{n}{n-1} T' \frac{R_L}{s} \left[ \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right]$$

aufzuwenden, wobei  $T'$  die Temperatur vor der Kompression bedeutet. Im ersten Stück der Rohrleitung geht die Temperatur schnell von der Endtemperatur  $T' \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{n-1}{n}}$  auf 15° durch Wärmeabgabe an das Erdreich zurück. Wir wollen nur die Leistungen  $N_1$  und  $N_2$  vergleichen.

b)  $p_1 = 40$  ata,  $p_2$  veränderlich.

gewählt		berechnet				
$p_1$ ata	$p_2$ ata	1000 $d$ mm	$N_1$ PS	$N_2$ PS	$N_1 - N_2$ PS	$\eta_{Bohr}$
40	1	430	5940	0	5940	0,000
40	2	430	5940	1530	4410	0,258
40	4	431	5940	2840	3100	0,478
40	6	432	5940	3500	2440	0,589
40	8	434	5940	3950	1990	0,665
40	10	436	5940	4270	1670	0,719
40	12	438	5940	4520	1420	0,761
40	15	443	5940	4810	1130	0,810
40	20	455	5940	5170	770	0,871
40	30	507	5940	5640	300	0,950
40	35	574	5940	5800	140	0,977
40	38	684	5940	5880	60	0,990

Aus dieser Zusammenstellung erkennt man, daß man den Gegendruck  $p_2$  auf die Hälfte des Vordruckes  $p_1$  bringen kann, ohne daß dabei der Rohrdurchmesser wesentlich zunimmt. Selbst ein Anwachsen des Gegendruckes bis auf 95 vH von  $p_1$ , nämlich auf 38 ata, hat nur eine Leitungsverstärkung um 59 vH zur Folge, wobei  $\eta_{Bohr}$  bis auf 99 vH geht und eine hohe mechanische Leistungsfähigkeit des Gases am Leitungsende vorhanden ist. In diesem Fall geht nur noch 1 vH von  $N_1$  durch Reibung verloren, während bei  $p_2 = 1$  ata 100 vH und bei  $p_2 = 20$  ata 13 vH verlorengehen.

c)  $p_1$  veränderlich,  $N_1 - N_2 = 4270$  PS

gewählt		berechnet				
$p_1$ ata	$N_1 - N_2$ PS	$p_2$ ata	1000 $d$ mm	$N_1$ PS	$N_2$ PS	$\eta_{Bohr}$
10	4270	1,00	750	4270	0	0,000
12	4270	1,10	698	4520	250	0,055
15	4270	1,27	638	4810	580	0,112
20	4270	1,48	568	5170	900	0,174
30	4270	1,85	482	5640	1370	0,243
40	4270	2,15	430	5940	1670	0,282

Diese Tafel läßt erkennen, wie sich  $p_2$  und  $d$  ändern, wenn ein bestimmter Leistungsverlust vorgeschrieben ist und  $p_1$  geändert wird. Mit der Erhöhung des Vordruckes wächst auch der Gegendruck und der Wirkungsgrad, während der Rohrdurchmesser kleiner wird.

d)  $p_1$  veränderlich, 1000  $d = 750$  mm.

gewählt		berechnet				
$p_1$ ata	1000 $d$ mm	$p_2$ ata	$N_1$ PS	$N_2$ PS	$N_1 - N_2$ PS	$\eta_{Rohr}$
10	750	1,00	4270	0	4270	0,000
11	750	4,69	4410	3110	1300	0,705
12	750	6,70	4520	3680	840	0,814
15	750	11,21	4810	4430	380	0,921
20	750	17,35	5170	5000	170	0,967
30	750	28,30	5640	5570	70	0,988
40	750	38,77	5940	5910	30	0,995

Man erkennt, wie bei einer bestehenden Anlage durch Erhöhen des Vordruckes der Gegendruck rasch gesteigert und der Rohrwirkungsgrad erhöht werden kann. Mit höheren Vordrücken als 20 ata läßt sich  $\eta_{Rohr}$  nicht mehr wesentlich verbessern. Der eigenartige Zusammenhang zwischen  $p_1$  und  $p_2$  liegt am Verlauf der Drucklinie Abb. 185/186.

Nach diesem Überblick erscheint es vom hydraulischen Standpunkt aus ohne Rücksicht auf wirtschaftliche Erwägungen vorteilhaft,  $p_1 = 20$  ata und 1000  $d = 600$  mm zu wählen. Dann ermittelt man

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{L} = 0,50 \quad \text{und} \quad p_2 = 10 \text{ ata,}$$

also  $p_2 = \frac{1}{2} p_1$ . Zu wählen ist wassergasgeschweißtes Stahlrohr nach DIN 2453.  $N'_1 = 10300$  PS,  $N_1 = 5170$  PS,  $N_2 = 4270$  PS,  $N_1 - N_2 = 900$  PS und  $\eta_{Rohr} = 0,825$ . in Übereinstimmung mit Abb. 174. Man erkennt, daß ganz beträchtliche Kompressionsleistungen aufgewandt und Expansionsleistungen ausgenützt werden müssen. Auf dem ersten Leitungsdrittel fällt der Druck um 2,7 at von 20 ata auf 17,3 ata, im zweiten um 3,2 at von 17,3 ata auf 14,1 ata und im letzten um 4,1 at. Betreibt man Haupt- und Reserveleitung, so daß durch jede  $\frac{1}{2} Q_{h,n}$  fließt, so müssen bei  $p_2 = 10$  ata vor der Leitung  $p_1 = 13,5$  ata mit  $\eta_{Rohr} = 0,912$  aufgewandt werden. Die Druckstation müßte also im Normalfalle dem Gas einen Druck von 13,5 ata bei  $N'_1 = 8520$  PS, im Sonderfall, wenn nur eine Leitung betrieben werden kann, von 20 ata bei  $N'_1 = 10300$  PS erteilen (bei  $t' = 15^\circ$ ).

Würde man, was praktisch aber wohl kaum in Frage kommt, vorschreiben, daß sich die Leistungsfähigkeit des Gases längs der Leitung stetig bis um  $N_1 - N_2 = 900$  PS verringert, also  $\frac{\Delta L_h}{\Delta l} = 405$  kg/h = konst, so erhält man mit der Konstanten  $C$  der Gl. (310) u. (311)  $u. (311) = 0,318 \cdot 10^{-9}$  — mit Gl. (111) u. (263) errechnet — und Gl. (312)

$$d^5 P^2 = 3285 \cdot 10^6$$

und dem Anfangsdruck  $p_1 = 20$  ata den Rohrdurchmesser 1000  $d_1 = 606 \sim 600$  mm. Für Gl. (314) ergibt sich

$$\ln d_2 - \ln d_1 = 0,152 \quad \text{und} \quad d_2 = 1,164 d_1$$

der Enddurchmesser 1000  $d_2 = 700$  mm. Der Rohrdurchmesser müßte also nach dem logarithmischen Gesetz stetig von 600 auf 700 mm, d. i. um 16,7 vH, zu-

nehmen, wenn der Leistungsverlust je lfd. m rd.  $\frac{1}{666}$  PS betragen soll. Wenn diese Aufgabe praktisch zu lösen wäre, würde man natürlich den Durchmesser sprungweise etwa jedes Mal um 50 mm vergrößern.

Während also bei unveränderlichem Leistungsverlust  $\frac{dL_h}{dl}$  mit abnehmendem Druck  $p$  in der Leitung der Rohrdurchmesser  $d$  immer größer werden muß, wächst in einer Leitung von unveränderlichem Durchmesser  $d$  der Verlust  $\frac{dL_h}{dl}$  mit abnehmendem Leitungsdruck  $p$  oder zunehmender Leitungslänge  $l$  an (vgl. Abb. 185 und 186).

Nach Starke<sup>1</sup> liegen die Verluste durch Undichtigkeit bei geringen Drücken und Längen unter 0,1 vH, können aber bei großen Drücken und langen Leitungen bis über 30 vH der Endmenge betragen. Besonders ungünstig seien gußeiserne Muffenleitungen. Große Verluste wurden in Gebieten mit Bodenbewegung wie in bergbaulich beanspruchtem Gelände beobachtet. Bei sorgfältiger Verlegung der Rohre ohne Flansch oder Muffe, einzeln verschweißt, kann man den Undichtigkeitsverlust auch bei großen Drücken und langen Leitungen wohl immer unter 5 vH halten.

#### d) Leuchtgas-Niederdruckverteilungsleitungen.

Hier kann man praktisch immer mit Poles Wert  $\lambda = 0,024$  rechnen, wobei man die Strömung als nichtzusammendrückbar ansieht. Entsprechend Gl. (289) gilt für häufig angezapfte Leitungen

$$L_R = H_1 - H_2 + \frac{P_1 - P_2}{\gamma_G} = 0,0826 \lambda \frac{l}{d^5} Q_{s1}^2 \frac{1 + \frac{Q_{s2}}{Q_{s1}} + \left(\frac{Q_{s2}}{Q_{s1}}\right)^2}{3}. \quad (315)$$

Das was in Gl. (315) rechts einschließlich  $Q_{s1}^2$  steht werde mit  $Q_s^2$  bezeichnet.  $P'_1$  und  $P'_2$  seien die Überdrücke an den Leitungsenden,  $P_0$  sei der atmosphärische Druck. Dann ist

$$P_1 = P_0 + P'_1 \quad \text{und} \quad P_2 \cong P_0 + (H_1 - H_2)\gamma_L + P'_2$$

und

$$L_R = H_1 - H_2 + \frac{1}{\gamma_G} [P'_1 - P'_2 - (H_1 - H_2)\gamma_L].$$

Endlich erhält man den Abfall an Überdruck

$$\begin{aligned} P'_1 - P'_2 &= \gamma_G L_R - (H_1 - H_2)(\gamma_G - \gamma_L) \\ &= \gamma_L \left[ 0,0826 \lambda s \frac{l}{d^5} Q_s^2 - (H_1 - H_2) \cdot \left( \frac{\gamma_G}{\gamma_L} - 1 \right) \right]. \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Siehe hierzu auch: P. Großmann: Dichtigkeitsprüfungen von Rohrleitungen. Gas- u. Wasserfach Bd. 76 (1933) S. 139. R. F. Starke: Gasfernleitung. Z. VDI Bd. 69 (1925) S. 538. R. F. Starke: Großgasversorgung. Leipzig 1924.

$\gamma_L$  ist im Mittel  $1,225 \text{ kg/m}^3$  und  $\frac{\gamma_\sigma}{\gamma_L} = s = \text{rund } 0,49$  für mittleres Stadtgas. Mit  $\lambda = 0,024$  wird

$$P'_1 - P'_2 = 0,00119 \frac{l}{d^5} Q_s^2 + (H_1 - H_2) 0,625 \text{ mm WS} \quad (316)$$

oder

$$P'_1 - P'_2 = 92000 \frac{l}{D^5} Q_h^2 + (H_1 - H_2) 0,625 \text{ mm WS}, \quad (317)$$

wobei mit  $Q_h$  der obenbezeichnete Ausdruck  $Q_s$  auf die Stunde umgerechnet ist. Ist  $H_2 > H_1$ , ansteigende Leitung, so wird der Druckabfall kleiner als bei  $H_1 = H_2$ , ja, er kann zum Druckzuwachs bei starkem Anstieg der Leitung und kleinem  $Q/D$  werden. Danach ist ersichtlich, daß man die Gasbehälter an möglichst tiefliegenden Orten aufstellt. Siehe hierzu Beispiel 26.

Bei Hausleitungen selbst läßt man nicht mehr als etwa  $1 \text{ m/s}$  Strömungsgeschwindigkeit zu, damit einzelne Entnahmestellen einander nicht stören. Dabei kommt man häufig in das Gebiet der Laminarströmung, siehe Gl. (269). In Häusern nimmt der Gasdruck von Stockwerk zu Stockwerk rasch zu. Gilt obiger Ansatz  $P'_1 - P'_2 = 0,625(H_1 - H_2)$ , wie im Falle  $Q_h = 0$ , keine Entnahme, so nimmt in einem  $30 \text{ m}$  hohen Haus der Druck von unten nach oben um rund  $19 \text{ mm WS}$  zu, d. h. je Stockwerk um rund  $5$  bis  $6 \text{ mm}$ . Da die Gasuhren auf Raummessung eingerichtet sind, ist ein Verbraucher bei höherem Druck etwas günstiger als einer bei niedrigerem Druck dran.

### Weitere Aufgaben an Gasleitungen.

**Aufgabe 22.** Siehe hierzu Abb. 152 und 153.  $Q_{h,n} = 10000 \text{ m}^3/\text{h}$  Stadtgas sollen durch eine  $1000 \text{ d} = D = 500 \text{ mm}$  weite Stahlrohrleitung gefördert werden.

Allgemeiner Fall:  $L = 100 \text{ km}$  Rohrlänge,  $p_2 = 3,5 \text{ ata}$ . Aus Abb. 152:

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{L} = 0,04 \text{ ata}^2/\text{km}, \quad p_1^2 - p_2^2 = 4 \text{ ata}^2$$

aus Abb. 153 (oder durch Rechnung)

$$p_1 = \sqrt{4 + 3,5^2} = 4,02 \text{ ata}$$

$$P_1 - P_2 = 40200 - 35000 = 5200 \text{ mm WS.}$$

Sonderfall: Raumbeständige Fortleitung, z. B. Niederdruckgasleitungen bis  $500 \text{ mm WS}$  Überdruck.  $p_m = 1,033 \text{ ata}$ ,  $L = 1 \text{ km}$  Rohrleitung.

$$\frac{P_1 - P_2}{L} = 195; \quad P_1 - P_2 = 195 \text{ mm WS.}$$

Grenzfall: Ist dagegen z. B.  $L = 10 \text{ km}$ , so wird  $P_1 - P_2 = 1950 \text{ mm WS}$ , d. h. hier trifft die Voraussetzung raumbeständiger Fortleitung nicht mehr zu.

Man erhält genauer

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{L} = 0,04 \cdot 10 = 0,4 \text{ ata}^2/\text{km}$$

und mit  $p_2 = 1,033 \text{ ata}$

$$p_1 = \sqrt{0,4 + 1,033^2} = 1,21 \text{ ata}$$

und

$$P_1 - P_2 = 12100 - 10330 = 1770 \text{ mm WS.}$$

**Aufgabe 23.**  $Q_{hn} = 2000 \text{ m}^3/\text{h}$  sollen bei  $t_m = 15^\circ$  durch ein Stahlrohr von  $0,150 \text{ m } \varnothing$   $L = 12 \text{ km}$  weit geleitet werden. Das relative Gewicht ist  $s = 0,51$ . Der Enddruck ist mit  $p_2 = 1,05 \text{ ata}$  festgelegt, wie groß ist  $p_1$ ?

$\frac{p_1^2 - p_2^2}{L}$  ist nach Diagramm Abb. 152 =  $0,81 \text{ ata}^2/\text{km}$ . Nach Zahlentafel 29 gilt für  $s = 0,51$  das 1,04fache, d. i.  $0,84 \text{ ata}^2/\text{km}$ . Damit ist

$$p_1^2 = 0,84 \cdot 12 + 1,05^2 = 11,2; \quad p_1 = 3,34 \text{ ata.}$$

**Aufgabe 24.**  $Q_{hn} = 2000 \text{ m}^3/\text{h}$  Generatorgas ( $C_s = 1,84$  nach Zahlentafel 29) ist durch Gußeisenrohr von  $0,150 \text{ m } \varnothing$  ( $C_G = 1,23$  nach Zahlentafel 32)  $12 \text{ km}$  weit bei  $8^\circ$  ( $C_t = 0,975$  nach Zahlentafel 30) fortzuleiten. Die Undichtigkeit der Leitung beträgt  $\frac{G_1}{G_2} = \frac{Q_{hn1}}{Q_{hn2}} = 1,05$  ( $C_v = 1,052$  nach Zahlentafel 42). Welchen Anfangsdruck  $p_1$  muß das Gas haben, wenn  $p_2 = 1,05$  ist?

Zahlentafel 42. Gleichmäßig auf die ganze Leitungslänge verteilte Undichtheiten oder Abzweigungen (oder kondensierender Dampf) bedingen das  $C_v$ -fache des Widerstandes mit  $C_v =$  wahrer Druckabfall zu der Endmenge entsprechender Druckabfall [nach Gl. (289)].

$\frac{G_{h1}}{G_{h2}}$	1	1,05	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	2,0
$C_v$	1	1,052	1,103	1,21	1,33	1,45	1,59	2,33

Nach Abb. 152 ist  $\frac{p_1^2 - p_2^2}{L} = 0,81 \text{ ata}^2$  für Leuchtgas mit  $s = 0,49$ . Für Generatorgas gilt also

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{L} = 0,81 C_s C_t C_G C_v = 0,81 \cdot 1,84 \cdot 0,975 \cdot 1,23 \cdot 1,052 = 1,88 \text{ ata}^2/\text{km},$$

$$\text{also } p_1^2 = 1,88 \cdot 12 + 1,05^2 = 23,7; \quad p_1 = 4,87 \text{ ata.}$$

**Aufgabe 25.** Zum Betriebe einer Großgasmaschinenanlage sollen stündlich  $8000 \text{ m}^3$  Hochofengas ( $15^\circ$   $760 \text{ mm QS}$ ) durch eine Stahlblechleitung gedrückt werden, deren Länge einschließlich der äquivalenten Länge für Einzelwiderstände  $1200 \text{ m}$  beträgt. Ein Gebläse erzeugt einen Anfangsüberdruck von  $1500 \text{ mm WS}$ . Der Endüberdruck soll  $500 \text{ mm WS}$  betragen. Der atmosphärische Außendruck sei  $1 \text{ at}$ . Wie groß ist der Leitungsdurchmesser bei einer Fortleitungstemperatur von  $25^\circ$  zu wählen, wenn  $w$  nicht über  $20 \text{ m/s}$  sein soll?

$$p_1 = 1,150 \text{ ata}; \quad p_1^2 = 1,321 \text{ ata}^2; \quad p_2 = 1,050 \text{ ata}; \quad p_2^2 = 1,102 \text{ ata}^2;$$

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{L} = \frac{0,219}{1,2} = 0,183 \text{ ata}^2/\text{km}.$$

Nach Gl. (262) ist dann

$$(100d)^5 = 0,397 Q_{hn}^{1,875} C_s C_t \frac{L}{p_1^2 - p_2^2} = 0,397 \frac{20900000}{0,183} 2,02 \cdot 1,04,$$

$$(100d)^5 = 10^8; \quad 100d = 40 \text{ cm}; \quad d = 0,4 \text{ m},$$

$$Q_{h_2} = 8000 \frac{1,033}{1,050} \frac{298}{288} = 8140 \text{ m}^3/\text{h} \text{ bei } 25^\circ \text{ und } 1,05 \text{ ata.}$$

Dann ist die Geschwindigkeit

$$w_2 = \frac{4}{\pi} \frac{Q_{h_2}}{d^2 3600} = \frac{4}{\pi} \frac{8140}{0,16 \cdot 3600} = 18 \text{ m/s.}$$

Es ist ein Rohr von 400 mm l. W. zu wählen, in dem die Geschwindigkeit bedingungsgemäß unter 20 m/s bleibt.

Ein an sich geringer Fortleitungsdruck vor einer Gasleitung kann u. U. bei Überwindung des Strömungswiderstandes wirksam durch den Auftrieb unterstützt werden, wenn die Leitung ansteigt:

**Beispiel 26.** Der Druck einer Ferngasleitung beträgt im Tal 0,2 atü oder 2000 mm WS, wobei der Außendruck der Luft gerade 1 ata und die Temperatur  $15^\circ$  ist. Ein Zweigstrang von  $d = 0,15 \text{ m } \varnothing$  und  $L = 7 \text{ km}$  Länge liefert  $Q_{hn} = 500 \text{ m}^3/\text{h}$  Stadtgas vom relativen Gewicht  $s = 0,49$  nach einer am Berghang um 400 m höher liegenden Ortschaft. In welchem Maße wird der Gasdruck durch die Höhenlage beeinflusst?

Nach Gl. (261) oder Abb. 152 und 153 ist

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{7} = \frac{0,81 \cdot 0,49 \cdot 500^{1,875}}{15^5} = 0,06 \text{ ata}^2/\text{km}$$

und

$$p_2 = \sqrt{1,2^2 - (7 \cdot 0,06)} = 1,01 \text{ ata, Endüberdruck } 100 \text{ mm WS,}$$

$$\text{mittlerer Fortleitungsdruck} \quad p_m = \frac{1}{2} (1,20 + 1,01) = 1,11 \text{ ata,}$$

$$\text{mittleres spezifisches Gewicht} \quad \gamma_m = 0,49 \frac{1,225}{1,033} 1,11 = 0,645 \text{ kg/m}^3,$$

$$\text{Auftrieb} \quad = 400 (1,225 - 0,645) = 232 \text{ kg/m}^2,$$

$$\text{Endüberdruck also tatsächlich rd.} \quad = 100 + 232 = 332 \text{ mm WS.}$$

Die Änderung des Barometerstandes mit der Höhe bewirkt eine geringfügige Verkleinerung des Auftriebs, die hier unberücksichtigt bleiben kann. Der Auftrieb ist in 400 m Höhe je lfd. m etwa das 0,96fache des Auftriebs, den man beim Barometerstand wie im Tal erhalten würde.

### 3. Dampfleitungen.

Die Gesetze für den Strömungswiderstand in Dampfleitungen sind insofern verwickelter wie bei Luft und anderen Gasen, als Dämpfe, wenigstens in der Nähe des Sättigungsgebietes, sich ganz anders als vollkommene Gase verhalten. Der Zustand eines Dampfes kann nicht wie der der Gase durch nur zwei Zustandsgrößen beschrieben werden.

Wir haben zwischen gesättigtem und überhitztem Dampf zu unterscheiden<sup>1</sup>. Während bei gesättigtem Dampf zu einer bestimmten Temperatur auch ein bestimmter Druck und umgekehrt gehört, kann ein überhitzter Dampf von bestimmter Temperatur unter ganz verschiedenen Drücken stehen<sup>2</sup>. Die Temperatur eines überhitzten Dampfes ist stets größer als die zum selben Druck gehörige Temperatur des gesättigten Dampfes (Sättigungstemperatur). Je stärker ein Dampf überhitzt ist, desto größer ist sein Wärme- oder Energieinhalt. Wird einem gesättigten Dampf Wärme entzogen, so fällt gleichzeitig ein Teil der verdampften Flüssigkeit in tropfbarer Form aus (Kondensat). Wird dagegen einem überhitzten Dampf z. B. bei unveränderlichem Druck Wärme entzogen, so fällt erst dann tropfbare Flüssigkeit aus, wenn die Temperatur bis auf die Sättigungstemperatur gesunken ist. Bei Fortleitung von gesättigtem Dampf muß man also auf den Anfall von Kondensat von vornherein Rücksicht nehmen, während bei Fortleitung von überhitztem Dampf in wärmegeschützten Leitungen im allgemeinen kein Niederschlag von tropfbarer Flüssigkeit zu erwarten ist.

Diese Gesichtspunkte gelten für alle Dämpfe. Hier soll nur die Fortleitung von Wasserdampf untersucht werden. In der technischen Praxis benutzt man Wasserdampf bis 35 at Druck bei Überhitzung bis auf 450<sup>0</sup> C. In neueren Großanlagen mit Turbinenbetrieb geht man gelegentlich auch auf höhere Drücke (60 at und mehr). Man läßt ganz allgemein ziemlich große Dampfgeschwindigkeiten in den Rohrleitungen zu (um enge Rohre mit geringer Oberfläche wegen der Wärmeverluste zu erhalten), und zwar etwa 20 bis 60 m/s bei Dampfturbinenbetrieb und 10 bis 25 m/s bei Dampfmaschinenbetrieb. Würde man Geschwindigkeiten von 80 bis 100 m/s oder mehr zulassen, so würden Schwingungen auftreten, die die Leitung zum Brummen veranlassen. Dampfgeschwindigkeiten und Rohrdurchmesser richten sich praktisch auch nach dem Druckabfall, der bei Mitteldruckanlagen 1 bis 2 (bis 3) at nicht überschreiten soll. Dampfleitungen werden jedenfalls immer turbulent durchflossen. Zur Ableitung des Kondenswassers sind sie unter einer Neigung von 1 m auf 100 bis 150 m zu verlegen. Die Neigung kann bei der hydraulischen Berechnung der meist nur kurzen Dampfleitungen ebenso wie alle anderen Höhenänderungen ohne weiteres vernachlässigt werden.

Zu Frischdampfleitungen benutzt man nahtlose Stahlrohre mit angewalzten Flanschen. Formstücke und Absperrorgane fertigt man aus Stahlguß<sup>3</sup>. Für Abdampfleitungen verwendet man bis 100 mm  $\varnothing$  Gasrohr,

<sup>1</sup> Näheres siehe z. B. Hütte, des Ingenieurs Taschenb. Bd. 1 oder die Lehrbücher von W. Schüle: Technische Thermodynamik, 5. Aufl. Berlin: Julius Springer 1930.

<sup>2</sup> Siehe z. B. die Dampftabellen von Mollier. Berlin: Julius Springer.

<sup>3</sup> Nähere Angaben siehe z. B. F. Schwedler: a. a. O. Nr. 17.



für größere Durchmesser wassergasgeschweißtes oder auch gußeisernes Rohr. Formstücke stellt man hierfür aus Stahlguß oder Gußeisen her.

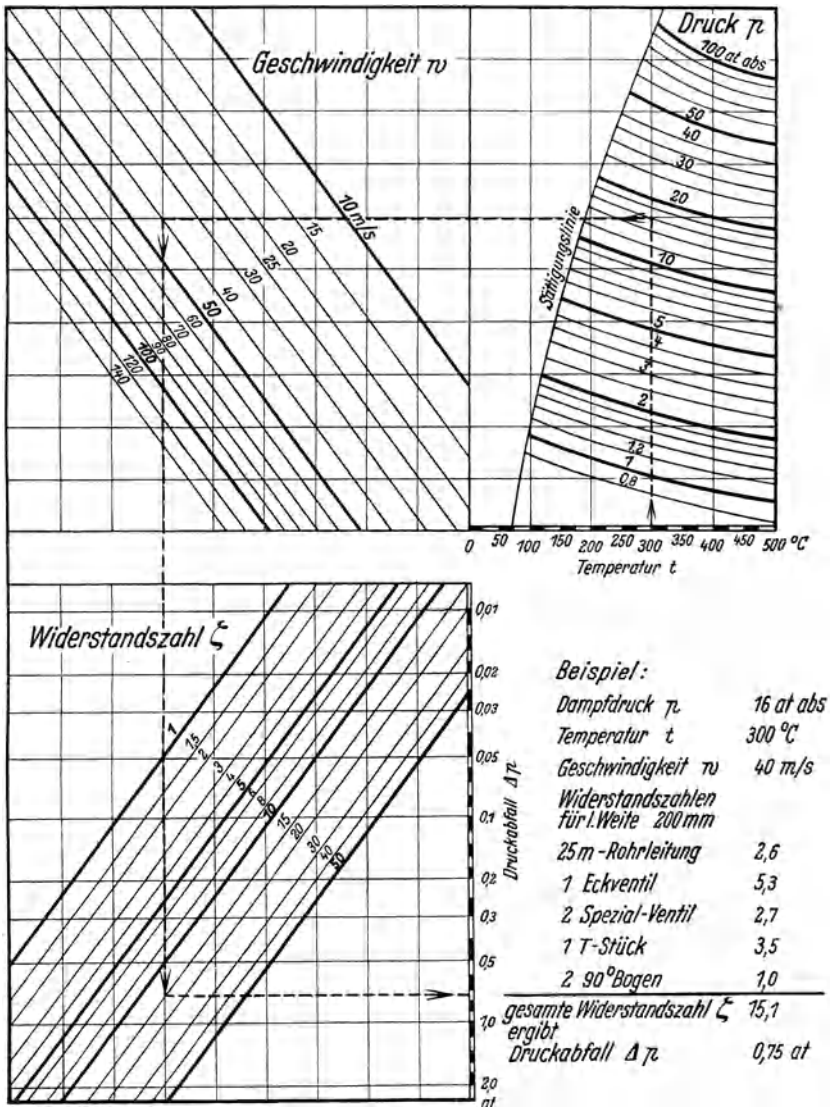
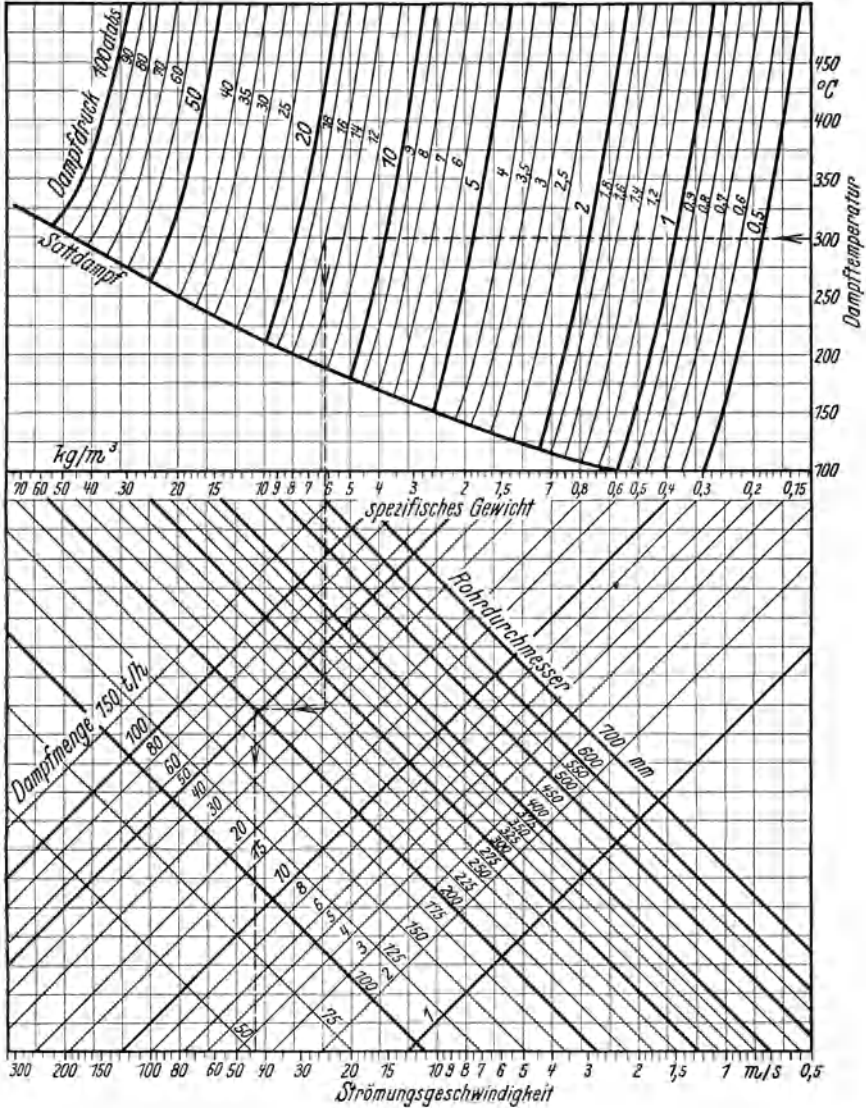


Abb. 188. Tafel zur Berechnung von kurzen Dampfleitungen. Druckabfall in Dampfleitungen nach Arch. Wärmewirtsch. 1932, Arbeitsblatt 1. Siehe hierzu Abb. 165.

Vielfach legt man zur Berechnung von Dampfleitungen einen unveränderlichen Wert  $\lambda = 0,0206$  zugrunde<sup>1</sup>, was für kurze Dampfleitungen

<sup>1</sup> Nach B. O. Berner: Die Fortleitung des überhitzten Wasserdampfes. Z. VDI





*Beispiel: Dampftemperatur 300°, Dampfdruck 16 at abs, Dampfmenge 30 t/h  
Rohrdurchmesser 200 mm ergibt Strömungsgeschwindigkeit 43 m/s*

Abb. 190. Hilfstafel zu Abb. 188. Mittlere Strömungsgeschwindigkeit in Dampfleitungen nach Arch. Wärmewirtsch. 1932, Arbeitsblatt 8.

Für trockengesättigten Dampf kann man für Drücke bis 20 at mit genügender Genauigkeit setzen <sup>1</sup>

$$\frac{P}{\gamma^{1,045}} = \text{konst} \quad \text{oder} \quad \frac{P^{0,957}}{\gamma} = \text{konst.}$$

<sup>1</sup> Siehe Hütte, des Ingenieurs Taschenb. Bd. I 26. Aufl. (1931) S. 524.

Richter, Rohrhydraulik.

Mit

$$\gamma w = \gamma_1 w_1 = \gamma_2 w_2 = \text{konst} \quad \text{und} \quad \gamma_2 = \gamma_1 \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{0.957} = \text{rd. } \gamma_1 \frac{P_2^{23}}{P_1} \sqrt[23]{\frac{P_1}{P_2}}$$

kann man die allgemeine Druckabfallgleichung

$$dP = \lambda \gamma \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g} dl$$

integrieren und erhält

$$P dP = \lambda \gamma_1 P_1 \frac{w_1^2}{2g} \sqrt[23]{\frac{P}{P_1}} \frac{l}{d} dl$$

und

$$(P_1^2 - P_2^2) \sqrt[23]{\frac{P_1}{P_2}} \cong 2 \lambda \gamma_1 P_1 \frac{l}{d} \frac{w_1^2}{2g}. \quad (318)$$

Aus dieser Gleichung kann man  $P_2$  als einzige Unbekannte ausrechnen. Wenn man den Druckabfall und damit den mittleren Druck abschätzen kann, so gilt auch

$$P_2 = P_1 - \lambda \gamma_1 \frac{P_1^{23}}{P_m} \sqrt[23]{\frac{P_m}{P_1}} \frac{l}{d} \frac{w_1^2}{2g}. \quad (319)$$

Mit schwachüberhitztem Dampf in der Nähe des Sättigungsgebietes ist die Rechnung sehr unsicher. Für in der Technik üblichen überhitzten Dampf kann man mit großer Annäherung  $\frac{P}{\gamma} = \text{konst}$  setzen, d. h. die Formel von Biel Gl. (254) u. (261) gilt praktisch genügend genau auch für Dampfleitungen. Bei hoher Überhitzung bekommt man allerdings ebenso wie bei hohem Dampfdruck erfahrungsgemäß etwas zu kleine Werte. Benutzt man Abb. 152, so muß man die ermittelten Werte  $(p_1^2 - p_2^2)/L$  noch mit  $C_a$  (rund 3) für gesättigten Dampf vervielfachen (siehe Zahlentafel 43). Für überhitzten Wasserdampf gilt wiederum das  $C_a$ -fache wie für gesättigten Wasserdampf. Dabei kann Abb. 152 so ausgewertet werden, als ob die  $Q_{hn}$ -Leiter eine  $G_n$ -Leiter wäre [nach Gl. (263).]

Zahlentafel 43.

Vervielfachungszahl  $C_a$  für gesättigten Wasserdampf nach Biel.

$C_a$	Druck at (Mittel)	$C_a$	Druck at (Mittel)	$C_a$	Druck at (Mittel)
2,32	0,1	2,62	1	3,01	10
2,42	0,2	2,75	2	3,18	20
2,49	0,4	2,86	4	3,44	40
2,54	0,6	2,93	6		

Zahlentafel 44. Vervielfachungszahl  $C_{\ddot{u}}$  für überhitzten Wasserdampf (zu  $C_a$  zu schlagen) ( $C = C_a C_{\ddot{u}}$ ) nach Biel.

$C_a$	$\frac{T_{\text{überhitzt}}}{T_{\text{gesättigt}}}$	$C_{\ddot{u}}$	$\frac{T_{\text{überhitzt}}}{T_{\text{gesättigt}}}$	$C_{\ddot{u}}$	$\frac{T_{\text{überhitzt}}}{T_{\text{gesättigt}}}$
1	1	1,30	1,2	1,81	1,6
1,085	1,05	1,44	1,3	1,93	1,7
1,16	1,1	1,56	1,4	2,06	1,8
1,23	1,15	1,69	1,5	2,18	1,9

Kondensiert gleichmäßig auf der ganzen Rohrlänge ein Teil des Wasserdampfes (oder ist die Leitung gleichmäßig undicht), so kann man wegen des nahezu unveränderlichen  $\lambda$ -Wertes den Druckabfall wie in einer Leitung mit gleichmäßigen Anzapfungen ermitteln. Ist  $G_1$  das Dampfgewicht am Anfang und  $G_2$  am Ende, so ist das Verhältnis des tatsächlichen Widerstandes zu dem der Endmenge  $G_2$  nach Gl. (289) gleich

$$\frac{1}{3} \left( 1 + \frac{G_1}{G_2} + \left( \frac{G_1}{G_2} \right)^2 \right) = \text{rd. } \frac{G_1}{G_2},$$

siehe Zahlentafel 42, oder zur Anfangsmenge  $G_1$  gleich

$$\frac{1}{3} \left( 1 + \frac{G_2}{G_1} + \left( \frac{G_2}{G_1} \right)^2 \right) = \text{rd. } \frac{G_2}{G_1}.$$

Man kann die Kondenswassermenge berechnen, wenn man z. B. für trockengesättigten Dampf ansetzt

$$G_{h1} - G_{h2} = k F \frac{\Delta t}{r_m} = \frac{\pi d}{r_m} (t_m - t_L) k l,$$

wobei  $k$  die Wärmedurchgangszahl des nackten oder isolierten Rohres in kcal/m<sup>2</sup> Grad  $h$ ,  $t_m$  die mittlere Dampftemperatur,  $r_m$  die mittlere Verdampfungswärme in kcal/kg und  $t_L$  die mittlere Temperatur der umgebenden Luft bedeutet. Die Wärmedurchgangszahlen liegen praktisch zwischen 1,3 und 3,6 je nach der Güte des Wärmeschutzes (Kieselgur, Diatomit, Kieselgurabest, Seide, Kork, Glaswolle u. dgl.)<sup>1</sup>. Man kann nunmehr die Dampfleitung einfach mit der Menge  $G_{h1} - \frac{G_{h1} - G_{h2}}{2}$  berechnen und erhält für die mittlere Geschwindigkeit

$$w = 353,7 \frac{1}{\gamma D^2} \left( G_{h1} - \frac{G_{h1} - G_{h2}}{2} \right) = 353,7 \frac{1}{\gamma D^2} \left( G_{h2} + \frac{G_{h1} - G_{h2}}{2} \right)$$

und findet den Leitungsdurchmesser mit

$$D^5 = \frac{637 \lambda \cdot l}{(p_1 - p_2) \gamma} \left( G_{h2} + \frac{G_{h1} - G_{h2}}{2} \right)^2.$$

Bei Niederdruckdampfleitungen (z. B. Heizungen) ändert sich das spezifische Dampfgewicht und die Dampftemperatur bei der Fortleitung

<sup>1</sup> Näheres siehe V. Hüttig; Heizungs- und Lüftungsanlagen in Fabriken S. 257 ff, Leipzig 1923.

so wenig, daß man sie wie Leitungen für raumbeständige Flüssigkeiten berechnen kann.

**Beispiele: Aufgabe 27.** 10 t/h gesättigter Wasserdampf sind 2500 m weit durch geschweißtes Schmiedeisenrohr von 200 mm  $\varnothing$  unter Wirkung eines Anfangsdruckes von 18 ata fortzuleiten. Wie groß ist der Enddruck, wenn sich dabei 3 vH Kondensat bilden, d. h.  $\frac{G_1}{G_2} = 1,03$  ist?

Nach Abb. 152 ist  $\frac{p_1^2 - p_2^2}{L} = 4,0 \text{ ata}^2/\text{km}$  zu  $d = 0,2 \text{ m}$  und  $G_h = 10000 \text{ kg/h}$  (an Stelle  $Q_{hn} = 10000 \text{ m}^3/\text{h}$  genommen) für Stadtgas. Für gesättigten Wasserdampf gilt

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{L} = 4,0 C_a \frac{G_1}{G_2} = 4,0 \cdot 3,1 \cdot 1,03 = 12,8 \text{ ata}^2/\text{km}.$$

$C_a = 3,1$  zu 18 ata nach Zahlentafel 43. Damit erhält man

$$p_2^2 = p_1^2 - 12,8 L = 18^2 - 12,8 \cdot 2,5; \quad p_2 = 17,1 \text{ at}.$$

**Aufgabe 28.** 1040 kg/h überhitzter Wasserdampf sollen unter Wirkung eines Druckes von  $p_1 = 7,55 \text{ ata}$  durch ein schmiedeisernes Rohr von 0,07 m  $\varnothing$  26,6 m<sup>2</sup> weit fortgeführt werden. Im Mittel strömt der Dampf mit  $t = 270^\circ$ , seine Sättigungstemperatur ist  $167^\circ$ . Wie groß ist der Druckabfall?

Zu  $T_{\text{üb}} = 270 + 273 = 543^\circ$  und  $T_{\text{ges}} = 167 + 273 = 440^\circ$ , also  $\frac{T_{\text{üb}}}{T_{\text{ges}}} = \frac{543}{440} = 1,235$  erhält man nach Zahlentafel 44  $C_{\text{ü}} = 1,33$ . Zu  $p_1 = 7,55 \text{ at}$  gehört  $C_a = 2,95$ . Mit Gl. (262) findet man  $\frac{p_1^2 - p_2^2}{L} = 11 \text{ ata}^2/\text{km}$  für Leuchtgas und

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{L} \cdot C_a \cdot C_{\text{ü}} = 11,0 \cdot 2,95 \cdot 1,33 = 43,1 \text{ ata}^2/\text{km}$$

für Dampf. Bei kleinem Druckabfall kann man nach Gl. (126) etwa setzen

$$P_1 - P_2 = \frac{5l}{p_1} \frac{p_1^2 - p_2^2}{L} = 5 \cdot 26,6 \frac{43,1}{7,55} = 760 \text{ mm WS}.$$

Ein genau entsprechender Versuch ergab 721 mm WS<sup>1</sup>.

**Aufgabe 29.** Überhitzter Dampf, enges Rohr.

$$d = 0,016 \text{ m}; \quad p_1 = 15 \text{ at}, \quad (C_a = 3,1); \quad t_{\text{üb}} = 250^\circ, \quad T_{\text{üb}} = 523^\circ,$$

$$\frac{T_{\text{üb}}}{T_{\text{ges}}} = \frac{523}{470} = 1,11, \quad (C_{\text{ü}} = 1,2); \quad G_h = 92,8 \text{ kg/h}, \quad l = 37,2 \text{ m},$$

$$L = 0,0372 \text{ km}, \quad \frac{p_1^2 - p_2^2}{L} = 185$$

für Stadtgas oder das 3,1 · 1,2fache für überhitzten Wasserdampf = 690 ata<sup>2</sup>/km.  $p_2^2 = 15^2 - 690 \cdot 0,0372$  und  $p_2 = 14,1 \text{ ata}$ ,  $p_1 - p_2 = 0,9 \text{ at}$  (nach einem Versuche 1,19 at)<sup>2</sup>.

**Aufgabe 30.** An eine bereits bestehende Dampfkraftanlage sollen noch weitere Dampfmaschinen angeschlossen werden. Dazu ist eine Rohrleitung von 210 m Länge mit 4 rechtwinkligen Krümmern  $\left(\frac{\varrho}{r} = 8\right)$ , 2 Freiflußventilen, 1 Falten-

<sup>1</sup> Z. VDI Bd. 52 (1908) S. 664.

<sup>2</sup> Z. VDI Bd. 70 (1926) S. 701.

rohr-Lyraausdehnbogen und 1 Wasserabscheider erforderlich. Durch diese Leitung müssen stündlich 40 t Dampf gefördert werden. Der Kesseldruck ist 16,5 atü und 350°. An den Maschinen muß Dampf von 15 atü und 300° anstehen. Welchen Durchmesser muß die Dampfleitung haben, wenn die Fördergeschwindigkeit 45 m/s nicht überschreiten soll?

Mit  $\gamma = 6,14 \text{ kg/m}^3$  bei 16 ata und 300° ergibt sich

$$d^2 = \frac{G_n \cdot 4}{3600 \pi w \gamma} = \frac{40000 \cdot 4}{3600 \cdot \pi \cdot 45 \cdot 6,14} = 0,0512; \quad d = 0,225 \text{ m } \varnothing.$$

Wir wollen Rohre mit 225 mm  $\varnothing$  wählen und den Druckverlust nachprüfen. Nach Zahlentafel 39 erhält man für die Formstücke eine äquivalente Rohrlänge von 120 m. Für den Druckverlust gilt nun

$$p_1^2 - p_2^2 = 0,397 \cdot L \cdot G_n^{1,875} \cdot \frac{C_d \cdot C_u}{(100 d)^5} = 45 \text{ ata}^2$$

mit  $C_d = 3,1$  und  $C_u = 1,50$  ( $\frac{T_{ab}}{T_{ges}} = 1,35$ ). Damit ergibt sich  $p_2 = 16,2 \text{ ata}$  zu  $p_1 = 17,5 \text{ ata}$ . Ein Rohr von 225 mm  $\varnothing$  ist also zulässig.

#### 4. Gerades glattes Rohr als Mengenmeßgerät.

Im Gegensatz zu tropfbaren Flüssigkeiten bereitet die Messung von gasförmigen oder dampfförmigen Flüssigkeiten praktisch erhebliche Schwierigkeiten. Neuerdings wurden die Staugeräte, vornehmlich die Düsen<sup>1</sup> zu brauchbaren Meßinstrumenten herangebildet. Auch mit Gasuhren<sup>2</sup> kann man ziemlich genaue Messungen durchführen. Unter günstigen Umständen eignet sich ferner das Thomasmeßverfahren, bei dem man dem Strom eine bestimmte Wärmemenge zuführt, seine Temperaturerhöhung mißt und das erwärmte Luftgewicht berechnet.

Man hat aber auch ein vorzügliches Meßverfahren, indem man die zu messende Flüssigkeitsmenge durch ein gerades technisch glattes Rohr (praktisch am besten Messingrohr) schickt, dessen Widerstandsgesetz von vornherein ohne Eichung hinreichend genau bekannt ist. So kann man aus Gl. (99) die Geschwindigkeit oder aus Gl. (101) den Durchfluß bei tropfbaren Flüssigkeiten ermitteln, wenn man  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $l$ ,  $d$ ,  $\gamma$  und  $\nu$  kennt. Allerdings ist dabei zu beachten, daß  $\lambda_R$  außer von  $d$  und  $\nu$  auch von  $w$ ,  $Q$  oder  $G$  abhängt. Das Druckabfallmengenmeßverfahren kommt aber vornehmlich zur Bestimmung von Gasmenge in Frage. Wir wollen daher die Berechnung für einen Gasstrom genauer durchführen. Das erweiterte Potenzgesetz als Beziehung zwischen der

<sup>1</sup> Regeln für die Durchflußmessung mit genormten Düsen und Blenden. Berlin 1930. Richter, H.: a. a. O. Forschung Bd. 2 (1931) S. 387.

<sup>2</sup> Fritzsche, O.: a. a. O. VDI-Forsch.-Heft Nr. 60.

Widerstandszahl  $\lambda_R$  und der Reynoldsschen Zahl  $Re$  lautet ganz allgemein nach Gl. (163)

$$\lambda_R = a + b Re^c = a + b \left( \frac{w_1 d}{\nu_1} \right)^c. \quad (320)$$

Wir wollen alle veränderlichen Größen an der Stelle 1 ansetzen und dazu  $P_2$  einführen. Die Konstanten  $a$ ,  $b$  und  $c$  können aus Gl. (174) entnommen werden. Aus Gl. (114) erhält man für  $\lambda_R$

$$\lambda_R = g \frac{d}{l} \left( 1 - \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^2 \right) \frac{P_1}{w_1^2 \gamma_1} + 2 \frac{d}{l} \xi \ln \left( \frac{P_2}{P_1} \right). \quad (321)$$

Der Vergleich von Gl. (320) und (321) ergibt

$$\left( a - 2 \frac{d}{l} \xi \ln \left( \frac{P_2}{P_1} \right) \right) w_1^2 + b \left( \frac{w_1 d}{\nu_1} \right)^c w_1^2 - g \frac{d}{l} \frac{P_1}{\gamma_1} \left( 1 - \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^2 \right) = 0. \quad (322)$$

Zur Ermittlung von  $w_1$  muß man den absoluten Druck  $P_1$ , den Druckunterschied  $P_1 - P_2$  und die mittlere Temperatur messen. Berechnet werden dann  $\ln(P_2/P_1)$  aus  $P_2/P_1$  sowie  $\nu_1$  und  $\gamma_1$ . Feste Werte sind für das Rohr  $a$ ,  $b$ ,  $d$ ,  $l$ ,  $g$  und im praktischen Messungsbereich auch  $\xi$ . Mit

$$M = \frac{a - 2 \frac{d}{l} \xi \ln \left( \frac{P_2}{P_1} \right)}{b \left( \frac{d}{\nu_1} \right)^c} \quad (323)$$

und

$$N = \frac{g \frac{d}{l} P_1 \left( 1 - \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^2 \right)}{\gamma_1 b \left( \frac{d}{\nu_1} \right)^c} \quad (324)$$

erhält man für die Berechnung der mittleren Strömungsgeschwindigkeit  $w_1$  die Gleichung

$$w_1^{2+c} + M w_1^2 - N = 0. \quad (325)$$

Man kann  $w_1$  aus Gl. (325) entweder durch Näherungsmethoden<sup>1</sup> oder zeichnerisch finden. Recht brauchbar ist in diesem Fall eine nomographische Darstellung von Gl. (325), siehe Abb. 191. Alle Gesetze mit dem gleichen Exponenten  $c$ , siehe Gl. (320), können durch eine einzige  $w$ -Skala dargestellt werden. Für andere  $c$ -Werte bekommt man andere Skalen von  $w_1$ . Trotzdem bleiben aber die  $M$ - und  $N$ -Leitern immer dieselben. Es gilt z. B. Abb. 191 für die Gesetze von Jakob und Erk Gl. (169), Lees Gl. (166) und Richter Gl. (174). Mit Vorteil kann man die  $w_1$ -Skalen für ganz verschiedene Gesetze, auch für solche, wo  $a = 0$  ist, wie das von Blasius Gl. (164), in einem einzigen Nomogramm anbringen. Je rauher das Meßrohr ist, desto näher wird die

<sup>1</sup> Jakob, M., u. S. Erk: a. a. O. VDI-Forsch.-Heft Nr. 267.



$w_1$ -Skala an die  $N$ -Skala herangeschwenkt. Die  $w_1$ -Skala kann mit so feiner Unterteilung versehen werden, daß man  $w_1$  genügend genau ablesen kann. Abb. 191 gilt für  $w_1 = 40$  bis 140 m/s.

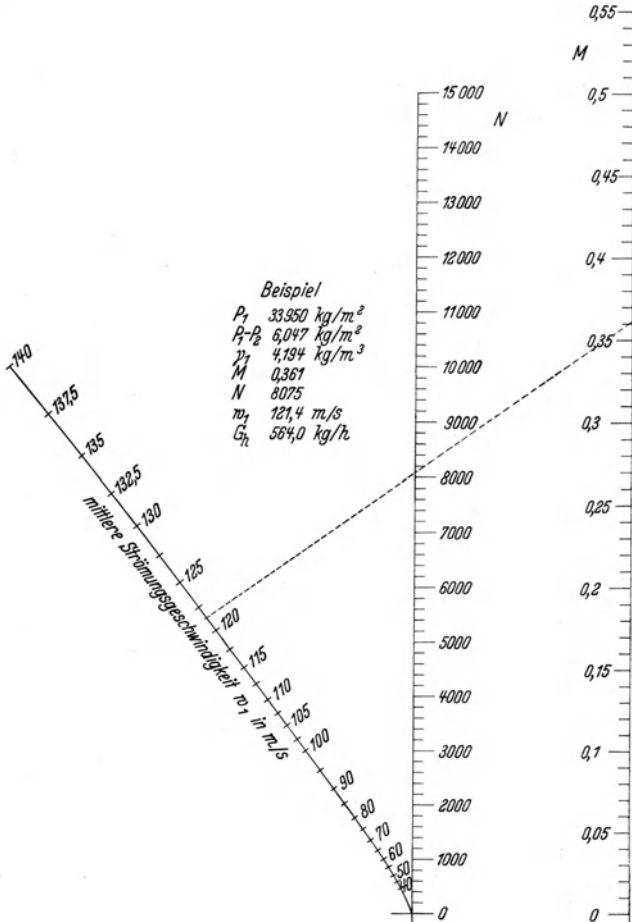


Abb. 191. Zeichnerische Bestimmung der mittleren Strömungsgeschwindigkeit  $w_1$  aus den Rechenwerten  $M$  und  $N$ .

Mit diesem Verfahren beherrscht man die größten in der Praxis vorkommenden Flüssigkeitsmengen. Es eignet sich vorzüglich zur Eichung von anderen Meßeinrichtungen. Um isothermische Strömung zu gewährleisten, muß bei Mengenmessung an Gasen oder Dämpfen mit anderer als Raumtemperatur das Rohr gut wärme geschützt sein. Dabei ist die Wärmeausdehnung des Meßrohres zu berücksichtigen. Für Messingrohr gilt z. B.

Lineare Ausdehnung von Messing zwischen 0 und  $t^{\circ}$  in mm bezogen auf 1 m Länge bei  $0^{\circ}$

0 bis $-190^{\circ}$	- 3,11
0 „ $+100^{\circ}$	+ 1,84
0 „ $+200^{\circ}$	+ 3,85
0 „ $+300^{\circ}$	+ 6,03
0 „ $+400^{\circ}$	+ 8,39

Für höhere Temperaturen als  $400^{\circ}$  muß man andere als Messingrohre, etwa kupferne bis  $600^{\circ}$ , darüber silberne nehmen<sup>1</sup>.

Zur sorgfältigen Messung muß vor und nach den Meßstellen eine Beruhigungsstrecke von mindestens  $100 d$  liegen. Deswegen wird das

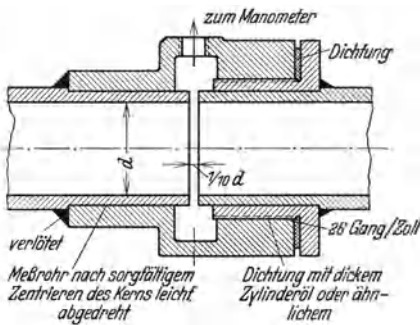


Abb. 192. Druckentnahmefassung.

Rohr bei größerem Durchmesser aus mehreren einzelnen Stücken bestehen, die sorgfältig verbunden werden müssen. Man benutzt vorteilhaft möglichst ein Rohr als Meßstrecke und je ein Rohr zur Beruhigung und verbindet die drei Rohrstücke durch zwei in Abb. 192 dargestellte Druckentnahmefassungen. Die eigentliche Meßstrecke ist so lang zu wählen, daß mindestens  $P_1 - P_2 = 200 \text{ mm WS}$  Druckabfall ein-

treten. Das ganze Meßgerät verursacht dann etwa 0,1 bis 0,05 at Druckverlust. (Da das praktisch, z. B. bei Mengemessung von Gebläseluft, nicht durchführbar ist, muß man ein anderes Mengemeßgerät benutzen, das man zuvor in einer Versuchsleitung mit diesem Verfahren geeicht hat.) Jakob<sup>2</sup> gibt die Genauigkeit des Druckabfallmengenmeßverfahrens mit  $1 \text{ vH}$  an, der Verfasser fand  $0,6 \text{ vH}^3$ .

<sup>1</sup> Dabei ist freilich noch nötig, daß man die Gültigkeit des Widerstandsgesetzes Gl. (174) auch bei so hohen Temperaturen für gezogenes Kupfer- und Silberrohr nachweist, was bisher noch nicht geschehen ist.

<sup>2</sup> Jakob, M.: Bestimmung von strömenden Gas- und Flüssigkeitsmengen aus dem Druckabfall in Rohren. Z. VDI Bd. 66 (1922) S. 178 u. 862; VDI-Forsch.-Heft Nr. 267.

<sup>3</sup> Richter, H.: a. a. O. VDI-Forsch.-Heft Nr. 338.

## Zur weiteren Vertiefung empfehlenswerte Bücher.

### Zu Abschnitt I und II.

1. Forchheimer, Ph.: Hydraulik, 3. Aufl. Leipzig u. Berlin 1930.
2. Forchheimer, Ph.: Grundriß der Hydraulik. Leipzig u. Berlin 1920.
3. Pöschl, T.: Lehrbuch der Hydraulik für Ingenieure und Physiker. Berlin 1924.
4. v. Mises, R.: Elemente der Technischen Hydrodynamik, Teil 1. Leipzig u. Berlin 1914.
5. Hopf, L.: Abschnitt Zähigkeit von Flüssigkeiten im Handb. d. Physik Bd. 7. Berlin 1927.
6. Schiller, L.: Abschnitt Strömung in Röhren im Handb. d. Experimentalphysik Bd. 4 Teil 4. Leipzig 1932.
7. Erk, S.: Abschnitt Zähigkeitsmessungen im Handb. d. Experimentalphysik Bd. 4 Teil 4. Leipzig 1932.
8. Prandtl, L., u. O. Tietjens: Hydro- und Aeromechanik, 2 Bände. Berlin 1930 u. 1931.
9. Prandtl, L.: Abriß der Strömungslehre. Braunschweig 1931.
10. Prandtl, L.: Abschnitt Mechanik der flüssigen und gasförmigen Körper in Müller-Pouillet's Handb. d. Physik Bd. 1, 11. Aufl. Braunschweig 1929.
11. Kaufmann, W.: Angewandte Hydromechanik Bd. 1. Berlin 1931.
12. Lamb, H.: Hydromechanik. Übersetzung aus dem Englischen von E. Helly. Leipzig u. Berlin 1931.
13. Tollmien, W.: Abschnitt Turbulente Strömungen im Handb. d. Experimentalphysik Bd. 4 Teil 1. Leipzig 1930.
14. Betz, A., H. Peters, u. H. Müller: Abschnitte über Mikromanometer, Druckmessung, Geschwindigkeits- und Mengenummessung im Handb. d. Experimentalphysik Bd. 4 Teil 1. Leipzig 1930.
15. Tietjens, O.: Abschnitt Beobachtung der Strömungsformen im Handb. d. Experimentalphysik Bd. 4 Teil 1. Leipzig 1930.

### Zu Abschnitt III.

16. Mann, V.: Röhre. München u. Berlin 1928.
17. Schwedler, F.: Handbuch der Rohrleitungen. Berlin 1932.
18. Biel, R.: Die wirtschaftlich günstigsten Rohrweiten für die Fortleitung von Wasser, Dampf und Gas. München u. Berlin 1930.

Bücher aus dieser Reihe wurden im Text mit der Nummer in dieser Zusammenstellung zitiert.

## Namenverzeichnis.

- Adams 122.  
Acryns 175.  
Alexander 149, 154.  
v. Alfthan 210.  
Andres 137.  
  
Baashuus 139.  
Balch 149, 154.  
Banki 62, 139, 159.  
Barker 97.  
Barnes 86.  
Basch 86.  
Bayerlein 171.  
Bellasis 122.  
Berner 239.  
Bernoulli 31, 140.  
Betz 249.  
Biegeleisen 26.  
Biel 23, 140, 163, 171,  
201, 220, 228, 242,  
249.  
Bingham 10.  
Blasius 92, 114, 120, 124,  
134, 175, 176, 220.  
Börnstein 6.  
ten Bosch 62.  
Bose 90.  
Bouchayer 153.  
Bourgeat 167.  
Boussinesq 80, 106, 130.  
Boyle 2.  
Brabbée 86.  
Braune 17.  
Breitenbach 17.  
Brightmore 149, 151, 154,  
159.  
Bryant 97.  
du Buat 153.  
Büche 16.  
v. Bülow 215.  
Bundschu 210.  
Burgers 97.  
  
Camichel 94.  
Carothers 74.  
Chandler 26.  
  
Chella 17.  
Christen 89.  
Coker 86.  
v. Cordier 146.  
Cornish 130.  
Corp 176.  
Couette 88.  
  
Darcy 167.  
Davis 133, 149.  
Dean 156.  
Dennecke 201.  
Dönch 137.  
Dowling 76.  
Duclaux 77.  
Durand 210.  
  
Eberle 168, 187, 240.  
Eisenstecken 203.  
Ekman 86, 88.  
Engler 7.  
Erk 7, 8, 23, 77, 94, 246,  
249.  
Euler 37.  
Eustice 151, 156.  
  
Fenkell 122, 146, 149.  
Fliegner 137.  
Forchheimer 212, 248.  
Freeman 177.  
Fritzsch 122.  
Fritzsche 148, 165, 245.  
Fromm 124.  
  
Gasterstädt 54.  
Gay-Lussac 2.  
Gibson 76, 136, 140, 157,  
160, 184.  
Gilchrist 19.  
Glaser 74.  
Gould 16.  
Graham 77.  
Grindley 76, 157.  
Gröber 62.  
Groß 204.  
Großmann 234.  
Guman 169.  
  
Hagen 72, 84, 87.  
Hanocq 94.  
v. d. Hegge-Zijnen 97.  
Heinze 130.  
Heisen 90.  
Hele-Shaw 77, 133, 156.  
v. Helmholtz 44, 77, 81.  
Hermann, R., 94, 101,  
111.  
Hermann, W., 44.  
Hinderks 144.  
Hirsch 216.  
Hochschild 137.  
Hoffmann 75.  
Hofmann 152.  
Hopf 42, 115, 210, 249.  
Hosking 10.  
Hruschka 210.  
Hubbell 122, 146, 149.  
Hüttig 243.  
  
Iben 198.  
Isaacs 219.  
  
Jackson 10.  
Jaenicke 171.  
Jakob 94, 246, 248.  
Jones 176.  
Joukowsky 111.  
  
Kahlbaum 74.  
v. Kármán 108, 120, 122.  
Kaßner 169.  
Kaufmann 249.  
Kellogg 210.  
Kepler 153.  
King 176.  
Kinne 161, 186.  
Kirchbach 160, 184.  
Kirsten 90, 97, 111.  
Klose 78.  
Knodel 76.  
Kohlrausch 76, 86.  
Kozeny 94.  
Kröner 137.  
Kundt 78.

- Ladenburg 74.  
 Lamb 249.  
 Landolt 6.  
 Latzko 111.  
 Lea 176.  
 Lebeau 94, 167, 176.  
 Ledoux 168.  
 Lees 93, 210.  
 Lell 144, 152.  
 Levy 16.  
 Lorenz, F. R., 94, 97, 125.  
 Lorenz, H., 153, 168.  
 Ludin 176.  
 Ludovici 97.  
  
 Mann 23, 249.  
 Manning 176.  
 de Marchi 119.  
 Mariotte 2.  
 Marshall 97.  
 Mengerinhausen 169.  
 Merkel 62.  
 Meyer, O. E., 75, 77.  
 Millikan 17.  
 Mills 122.  
 v. Mises 98, 114, 249.  
 Möbius 111.  
 Mollier 21, 238.  
 Moroschkin 111.  
 Morrow 86.  
 Müller, G., 17, 24.  
 Müller, H., 170, 172, 249.  
  
 Naumann 90.  
 Navier 42, 47.  
 Netolizka 201.  
 Newton 3, 70, 77.  
 Nikuradse 80, 83, 92, 94,  
 97, 99, 111, 120, 122,  
 124, 137, 145, 176.  
 Nippert 144, 151, 152, 184  
 Noether 90.  
 Nußelt 93, 114.  
  
 Ombeck 89, 93.  
 Orr 90.  
  
 Pannell 86, 93.  
 Parry 93, 176.  
 Perry 176, 187.  
 Petermann 161.  
 Peters 249.  
  
 Petit 168.  
 Pfeiffer 176.  
 Pfeleiderer 188.  
 v. Piotrowski 77.  
 Pitot 39.  
 Plank 16.  
 Poebing 211.  
 Poiseuille 6, 10, 73, 86.  
 Pole 174, 227, 234.  
 Pöschl 248.  
 Prandtl 38, 42, 44, 80,  
 87, 91, 98, 99ff., 111,  
 122, 157, 249.  
 Proell 137.  
  
 Räber 74.  
 Rauert 90.  
 Rayleigh, Lord 90.  
 Reichel 185.  
 Reiger 74.  
 Reiner 74.  
 Reynolds 44, 60, 84, 86,  
 93.  
 Richter 26, 48, 94, 97,  
 111, 144, 148, 154,  
 158, 171, 178, 182,  
 245, 248.  
 Rietschel 186.  
 Riffart 137.  
 Rodger 10.  
 Rother 201.  
 Ruckes 76, 86.  
  
 Saph 86, 93, 122, 148,  
 149.  
 Sander 178.  
 Schack 62.  
 Schaefer 90.  
 Schiller 74, 80, 84, 86,  
 92, 101, 106, 111, 119,  
 124, 133, 249.  
 Schmid, R., 76.  
 Schmitt 17.  
 Schnetzler 90.  
 Schöberlein 215.  
 Schoder 86, 93, 122, 148,  
 149, 151, 154.  
 Schubart 160, 184.  
 Schüle 238.  
 Schütt 141.  
 Schwedler 187, 204, 238,  
 249.  
 Scimemi 176.  
  
 Scobey 176, 210.  
 Simeon 16.  
 Slotte 10.  
 Sonne 198.  
 Sorkau 90.  
 Spalding 144.  
 Spangler 210.  
 Speed 219.  
 Speyerer 21, 76.  
 Spiegelberg 202.  
 Spiers 177.  
 Sprung 10.  
 Stach 184, 186.  
 Stakelbeck 16, 20.  
 Stanton 86, 93, 97, 122.  
 Starke 234.  
 Stearns 19.  
 Stokes 42, 47.  
 Sutherland 17.  
  
 Taylor 158.  
 Thorpe 10.  
 Tietjens 42, 44, 80, 87, 98,  
 111, 249.  
 Tollmien 91, 249.  
 Treer 122.  
  
 Ubbelohde 8.  
  
 Viesohn 169, 197.  
 Vogel, G., 161, 186.  
 Vogel, H., 8, 17.  
  
 Walker 16.  
 Warburg 78.  
 Wasielewski 153.  
 Watkins 13, 217.  
 Wedernikoff 137.  
 Wegmann 175.  
 Wentzel 17.  
 Weisbach 138, 139, 141,  
 149, 150, 151, 159, 182.  
 White 10, 133, 157.  
 Wild-Schöberlein 215.  
 Wildhagen 87, 229.  
 Williams 17, 122, 146,  
 149.  
 Wilson 122.  
 Wyzomirski 76, 133, 156.  
  
 Zemplén 19.  
 Zipperer 17, 24, 169.

## Sachverzeichnis.

- Abgedeckter Einlauf 143.  
Ablagerungen 195.  
Ablenkungswinkel 149, 153, 159, 161, 182, 190.  
Ablösung 134, 138, 141, 146, 160.  
Ablösungsverluste 139, 141.  
Ablösungswiderstand 152.  
Abschätzen der Rauigkeit 163.  
Abwechselndes Auftreten von Laminarströmung und Turbulenz 89.  
Abzweige 161, 186, 189, s. Viele Abzweige.  
Adiabate 34.  
Adiabatische Strömung s. Strömung.  
Ähnlichkeit, mechanische 43.  
Ähnlichkeitsgesetz 45, 58, 113.  
Allgemeine Richtlinien für praktische Rechnungen 163.  
Allgemeinformel von Biel 163.  
Ältere Versuche mit Stahlrohr 168.  
Anlage von Leitungen 201.  
Anlaufeffekt 78, 155.  
Anlaufstrecke 48.  
—, laminare 78.  
—, relative 80.  
—, turbulente 110, 148.  
Antriebsenergie 42.  
Äquivalente Rohrlänge s. gleichwertige Rohrlänge.  
Arbeitsblätter 48, 84, 170, 172, 173, 180, 181, 187, 198, 239, 240, 241.  
Arbeitsdiagramme 32.  
Arbeitsleitungen 192.  
Asbestzementrohre 176.  
Aufgaben 25, 54, 205, 212, 216, 221, 224, 231, 235, 244.  
Auftrieb 226, 237.  
Ausbauchung von Krümmern 146, 184.  
Ausdehnungsarbeit 32.  
Ausgleicher 187, 189.  
Auslauf 48, 141, 147, 154, 162.  
Äußere Reibung 3, 60, 96, s. Rauigkeit.  
Austauschgröße 106.  
Backsteine 116, 165.  
Bandströmung s. Laminarströmung.  
Baumwollschlauch 177.  
Beharrungszustand 27.  
Beispiele s. Aufgaben.  
Beruhigungsgrad 84.  
Beruhigungsstrecke 79, 110, 154.  
Betonrohre 165, 176, 197, 210, 212.  
Bielsche Formel s. Vereinsformel.  
Bleirohre 92, 164, 176, 197, 204.  
Bretter 165.  
Bronzerohre 152, 161, 176, 197.  
Dampfleitungen 237.  
Dampfsammler 189.  
Dichteverhältnis 3.  
Dichtungen 202.  
Doppelleitungen 219, 231.  
Doppelquerwirbel 144, 148, 156.  
Dreikantrohre 124, 145.  
Druck 36.  
Druckabfallgleichung, allgemeine 55.  
Druckentnahmefassung 248.  
Druckhöhe 30.  
Drucklinie 75, 82, 112, 135, 142, 145, 148, 229.  
Druckschlauch 154, 178, 182.  
Druckverteilung 51, 136, 143, 146.  
Druck-Volumendiagramme 32.  
Dünnflüssigkeit 1.  
Durchdringungskante bei Abzweigstücken 162, 186.  
Durchgangsventile 187, 188.  
Ebene Platte 4, 77, 97, 164.  
Eckenrecht ausgemessene Leitung 190.  
Eckventil 187.  
Einfrieren 196.  
Eingetauchter Einlauf 143.  
Einsiebtelgesetz 99, 139.  
Einzelwiderstände 140, 143, 159, 161, 181.  
Eisenblechrohr 115, 164.  
Elastische Rohre 177.

- Energie, antreibende 42.  
 Energiebeiwert 53.  
 Energieentnahme s. größtmögliche  
   Energieentnahme.  
 Energieformen 29.  
 Energie, mechanische 39.  
 —, mittlere kinetische 52.  
 Energiesätze 30, 40.  
 Energieverteilung 31, 52, 144.  
 Englergrad 8.  
 —, Umrechnungstafel 9.  
 Englerscher Zähigkeitsmesser 7.  
 Enteisungsanlage 196.  
 Entgasungsventile 202.  
 Entstehen der Turbulenz 90.  
 Erweiterungswinkel 136.  
 —, zulässiger 135, 137.  
 Eternitrohre 176.  
 Eulersche Gleichung 37.  
  
 Fadenströmung 50, 133, 156.  
 Farbfadenmethode 84, 111, 133, 156.  
 Ferngasleitungen 228, 229.  
 Fernölleitungen 217.  
 Feuerwehrschauch 178, 207.  
 Flachsschauch 177.  
 Flechtströmungs. Turbulente Strömung.  
 Fliehkraft 144, 152, 157.  
 Fluidität 6.  
 Flüsse 166, 215.  
 Flüssigkeit. Begriff 1.  
 —, reibungslose 30, 62, 83, 141.  
 —, tropfbare 1, 9, 32, 60, 69, 167, 204.  
 —, zähflüssige 1, 3.  
 —, zusammendrückbare 1, 16, 33, 61,  
   75, 167, 222.  
 Flüssigkeitsreibung 3.  
 Flußwasser 11.  
 Fördertemperatur bei Öl 218.  
 Formänderungsgeschwindigkeit 2, 30.  
 Formwiderstand 152.  
 Freispiegelleitungen 214.  
 Fritzsches Formel für Stahlrohre 174.  
 Fußventile 183.  
  
 Gasfernleitung s. Ferngasleitung.  
 Gasgemische 22.  
 Gasgleichung, allgemeine 2, 33.  
 Gaskonstante 2, 16.  
 Gasleitungen 61, 167, 193, 195, 196,  
   222, 227.  
 —, Temperatureinfluß auf den Strö-  
   mungswiderstand 174.  
  
 Gastheorie, kinetische 77.  
 Gasverlust 234, 236.  
 Gebläseleitungen 174, 188, 227, 234.  
 Gebrauchte Leitung 195.  
 Gekrümmte Rohre 143.  
 Genauigkeit der Formeln 199.  
 Genietete Rohre 210.  
 Gerades Rohr 51, 69, 91, 113, 123,  
   133, 141, 163.  
 Geradlinige Strömung s. Laminarströ-  
   mung.  
 Gesamtverlust 148, 152, 153.  
 —, geringster 150.  
 Geschwindigkeit, dimensionslose 103.  
 —, Formänderung 2, 30.  
 —, kritische 85, 221.  
 —, technisch übliche 204, 212, 216, 218,  
   223, 228, 235, 238.  
 —, Schall 1, 47, 63.  
 Geschwindigkeitshöhe 30.  
 Geschwindigkeitskuppen 146.  
 Geschwindigkeitsverteilung 3, 28, 30,  
   51, 71, 77, 79, 91, 97, 101, 105, 111,  
   122, 125, 135, 137, 143.  
 Gesetz von Bernoulli 31, 83, 140.  
 — von Blasius 92, 99, 121, 124, 176,  
   205.  
 — von Hagen und Poiseuille 71.  
 — von Kepler 153.  
 — von Newton 4, 77, 106.  
 — von Reynolds 44, 60.  
 Gewicht, spezifisches s. spezifisches Ge-  
   wicht.  
 Glasrohre 84, 92, 156, 164, 197.  
 Glattes Rohr 60, 69, 91, 164, 176, 182,  
   197.  
 Gleichwertige Rohrlänge 189.  
 Gleitende Strömung s. Laminarströ-  
   mung.  
 Gleitung 77.  
 Gräben 165, 212, 215.  
 Grenzschicht 51, 79, 92, 104, 113, 119,  
   125, 134, 144.  
 Großgasversorgung 228.  
 Größtmögliche Energieentnahme 193,  
   214, 226.  
 Grubenlüftungsrohre 165.  
 Gültigkeitsbereiche 93, 109, 166.  
 Gummischlauch 154, 177, 182.  
 Gußeisenhaut 165.  
 Gußeisenrohre 114, 149, 164, 175, 183,  
   189, 197, 200, 205, 216.

- Hanfschlauch** 177.  
**Hochdruckformeln** 67, 171.  
**Hochdruckleitungen** 224, 227, 229, 235.  
**Hohlraumbildung** 196.  
**Holzdaubenrohre** 164.  
**Holzrohre** 114, 117, 138, 149, 165, 176, 196, 210, 216.  
**Holztafel** 164.  
**Hooverdamm** 210.  
**Hydraulischer Radius** 57, 124, 155, 214.
- Idealglattes Rohr** 96, 104.  
**Impulssatz** 141.  
**Impulstransport** 145.  
**Innere Reibung** 3, 51.  
**Isotherme** 33.  
**Isothermische Strömung** s. Strömung.
- Kältemaschine** 216.  
**Kavitation** 196.  
**Kegeliges Rohr** 135, 213.  
**Keilförmige Kanäle** 135, 138.  
**Klinker** 212.  
**Knickstellenabstand** 160, 184.  
**Kniestücke** 159, 184, 188.  
**Knollenbildung** 195.  
**Kompressor** 223.  
**Kondensat** 2, 236, 238, 243.  
**Kontinuitätsgesetz** 27.  
**Kontraktionskoeffizient** 112, 141.  
**Korrosion** 114, 195.  
**Kraftleitung** 192, 210.  
**Kreisringrohre** 125, 216.  
**Kreisrohre** 51, 69, 91, 113, 144, 159.  
**Kritische Geschwindigkeit** 85, 221.  
**Kritische Reynoldssche Zahl** 85, 119, 125, 136, 158, 221.  
**Krümmmer** 143, 181.  
**Krummlinige Strömung** s. Turbulente Strömung.  
**Krümmungsverhältnis** 149, 154.  
**Kühlschlange** 209, 216.  
**Kühlwasserleitung** 205, 208.  
**Kupferrohr** 92, 117, 164, 176, 197, 204, 216.
- Laminarströmung**, ausgebildete 50.  
 — im Kreisringrohr 127.  
 — im Kreisrohr 69, 175.  
 — im Rechteckrohr 130.  
 — in engen Spalten 129, 132.  
 — in Rohren mit stetig veränderlichem Querschnitt 133.
- Laminarströmung**, in Ausbildung begriffene 78.  
**Lederschlauch** 177.  
**Leichtmetallrohre** 164, 176.  
**Leistungsverlust** 192, 193, 231.  
**Leitungsgefälle** 42.  
**Lösungsvermögen von Wasser** 11.  
**Luftleitungen** 169, 222.  
 —, Temperatureinfluß auf den Strömungswiderstand 174.
- Messingrohr** 92, 115, 124, 149, 159, 164, 176, 197, 204.  
**Meßverfahren für Gasmengen** 245.  
 — für Zähigkeit 7.  
**Mischungsregel** 22.  
**Mischungsweg** 107.  
**Mittlerer Leitungsdruck** 36, 67, 167, 175.
- Navier-Stokessche Gleichung** 42, 47, 84.  
**Nennweiten** 203.  
**Neue Leitung** 195.  
**Neuere Versuche mit Stahlrohr** 169.  
**Nichtkreisförmige Rohre** s. Laminarströmung und Turbulente Strömung.  
**Nichtstationäre Strömung** 27, 191.  
**Niederdruckformeln** 67, 175.  
**Niederdruckleitungen** 227, 234.  
**Nomogramme für Dampfleitungen** 239.  
 — für Stadtgasleitungen 172.  
 — für Wasserleitungen 170.  
**Normalzustand** 6, 48, 66, 167.  
**Nutzwasserversorgung** 204.
- Oberflächenänderung beim Biegen** 149.  
**Öffnungswinkel** 136.  
**Ölförderung mit Wasserzusatz** 219.  
**Ölleitungen** 217.
- Parallelströmung** 30, s. Laminarströmung.  
**Pendeln des Strahls** 138.  
**Pilzwucherungen** 195, 197.  
**Pitotrohr** 38, 97.  
**Plötzliche Querschnittsänderung** s. Querschnittsänderung.  
**Poise** 6.  
**Polytrope** 35.  
**Praktische Aufgaben** s. Aufgaben.  
**Praktische Berechnung von Rohrleitungen** 163.



- Praktische Formeln für gerade Rohre 163ff.  
 Preßgasmotor 195, 229.  
 Preßluftleitung s. Luftleitung.  
 Preßluftschlauch 178, 190.  
 Preßluftwerkzeuge 223.  
 Pulsierende Förderung 191.  
 Pumpen 192, 205.
- Q**uadratrohr 124, 131.  
 Querschnittsänderung, plötzliche 134, 141.  
 —, stetige 133, 146, 184.  
 Querschnittsfolge bei Krümmern 146, 184.  
 Querströmung 144, 152, 156.  
 Querströmungsverlust 152.
- Randschicht s. Grenzschicht.  
 Rauhes Rohr 113, 164, 182.  
 Rauigkeit 4, 113, 136, 149, 163, 195.  
 —, absolute 114.  
 —, gleichförmige 114.  
 —, künstliche 119, 152, 160, 186.  
 —, relative 114, 120, 149, 164.  
 —, ungleichförmige 114.  
 —, Wandrauigkeit 116.  
 —, Wandwelligkeit 117.  
 Rauigkeitserhebungen 96, 114, 163, 195.  
 Rauigkeitsgruppen 163, 164, 200.  
 Rechengenauigkeit 163, 201.  
 Rechteckrohr 115, 124, 137, 151, 164, 182, 188.  
 Rechtwinkliger Abzweig 161, 186, 189.  
 — Krümmer 149, 182, 189.  
 Reibung, äußere 3, 60, 96.  
 — der Ruhe 5.  
 —, innere 3, 51.  
 Reibungsarbeit 40, 56.  
 Reißende Strömung s. Turbulente Strömung.  
 Reynoldssche Zahl 46, 48.  
 — —, kritische 85, 119, 136.  
 Richtungsänderungen 143.  
 Ringleitung 223, 225.  
 Rohrleitungswirkungsgrad 192, 194, 231.  
 Rohrschlange 154, 159, 209.  
 Rollende Strömung s. Turbulente Strömung.  
 Rückbildungsstrecke 141, 147, 154, 162.  
 Rückschlagklappen 183, 189.  
 Ruhige Strömung s. Laminarströmung.
- Satz von Borda-Carnot 141, 159.  
 Schachtanlage 68, 225.  
 Scharfrandiger Einlauf 84, 112, 142.  
 Schärfster Krümmer 150.  
 Schichtenströmung s. Laminarströmung.  
 Schieber 187.  
 Schiefwinkliger Abzweig 161.  
 — Einlauf 143.  
 Schläuche 154, 177, 182.  
 Schraubenrohr 124.  
 Schubkraft 4, 42, 45, 56.  
 Schubspannungsgeschwindigkeit 103.  
 Schutzüberzüge 202, 218.  
 Schwankungen, turbulente 50, 98, 143.  
 Soleleitungen 216.  
 Spezifisches Gewicht 2, 6.  
 Spiralbewegungen 145.  
 Stadtgasleitungen 167, 171, 175, 227, 234.  
 Stahlrohre 114, 117, 149, 164, 165, 180, 183, 187, 197, 200, 204, 210, 216, 218, 223, 228, 238.  
 Stationäre Bewegung 27, 37.  
 Staurohr 38, 97.  
 Sternrohr 124.  
 Stetige Querschnittsänderung s. Querschnittsänderung.  
 Störungsbetrag 85.  
 Stoßverlust 141, 159.  
 Strahlablösung s. Ablösung.  
 Strahleinschnürung 112, 141.  
 Stromtrennung 161, 186.  
 Strömung, adiabatische 34, 40, 43, 62.  
 —, isothermische 33, 36, 41, 43, 65, 75, 127.  
 —, laminare, s. Laminarströmung.  
 —, raumbeständige 32, 41, 43, 61, 69, 130, 167, 204.  
 —, reibungslose 30, 62, 83, 141.  
 —, stationäre 27, 37.  
 —, turbulente, s. Turbulente Strömung.  
 —, zusammendrückbare 33, 40, 43, 62, 75, 127, 167, 222.  
 Stromvereinigung 162, 186.
- T**-Stück s. Abzweig.  
 Technisch glatte Rohre 92.  
 Technisch übliche Geschwindigkeiten s. Geschwindigkeit.  
 Tellerventile 183.  
 Trinkwasserversorgung 204.  
 Turbulente Querbewegungen 50, 98, 143.

- Turbulente Strömung, ausgebildete 27, 50.  
 — —, gerades Kreisrohr 91, 113.  
 — —, gerades Nichtkreisrohr 123, 136.  
 — —, nicht gerades Rohr 148.  
 Turbulente Strömung, in Ausbildung begriffene 110.  
 Turbulenz s. Austauschgröße.
- Überdruck 39, 229, 234.  
 Übergangsbereich 84, 136.  
 Übergangszahl 85, 118, 119, 158.  
 Überhitzung 3, 238, 243.  
 Überschlagsformeln 178.  
 Umlenkungsverlust 148, 152, 182.  
 —, reiner 154.  
 Umlenkwinkel s. Ablenkungswinkel.  
 Umsetzung von Druck in Geschwindigkeit 134, 141, 213.  
 — von Geschwindigkeit in Druck 134, 142.  
 Undichtigkeitsverlust 234, 236.  
 Unruhige Strömung s. Turbulente Strömung.  
 Unstetig veränderlicher Querschnitt s. Querschnittsänderung.  
 Unterdruck 39, 234.
- Vagabundierende Ströme 203.  
 Verabredungen 2, 29, 99.  
 Vereinsformel 167, 228.  
 Verkrustung 115, 165, 195.  
 Verlustleistung, relative 162.  
 Verlustlinie s. Drucklinie.  
 Verlustlose Strömung 30, 62, 83, 141.  
 Viele Abzweigungen 191, 207, 224, 234, 236, 243.  
 Vierkantrohr s. Rechteckrohr.  
 Viskosimeter 7.  
 Vollkommenes Gas 2.
- Walzeisen 115, 124, 165.  
 Walzhaut von Schmiedeeisen 164.  
 Wandabstand, dimensionsloser 103.  
 Wandinnenbeschaffenheit s. Rauigkeit.  
 Wandrauigkeit 116.  
 Wandschicht s. Grenzschicht.  
 Wandungsverlust 148, 152, 210.  
 Wandwelligkeit 117.  
 Wärmeausdehnungen 203, 218.  
 Wärmehalt 29.
- Wärmeleitfähigkeit 196, 218, 240.  
 Wärmeverlust 62, 240, 243.  
 Wasserabscheider 189.  
 Wasserdampf 21, 237.  
 Wasserkraftanlage 192, 194, 211.  
 Wasserleitungen 167, 180, 192, 195, 204, 210, 214.  
 —, Temperatureinfluß auf den Strömungswiderstand 167.  
 —, Warmwasserheizungen 205.  
 Weißblechrohr 164.  
 Wellrohr 124, 165, 189.  
 Werkgräben 165, 212, 215.  
 Widerstandsgesetz bei Laminarströmung:  
 — Kreisringrohr 127.  
 — Kreisrohr 70.  
 — Rechteckrohr 131.  
 Widerstandsgesetz bei turbulenter Strömung:  
 — glattes Rohr 108.  
 — nach Reynolds 60.  
 — rauhes Rohr 123.  
 Widerstandszahl 57, 60, 72, 83, 92, 113, 123, 126, 140, 148, 159.  
 Wilde Strömung s. Turbulente Strömung.  
 Wirbelfreie Strömung s. Laminarströmung.  
 Wirkungsgrad 140, 141, 192, 194, 213, 226, 231.  
 Wirtschaftlich günstigste Geschwindigkeit 226.  
 — — Rohrweite 194, 201, 210.
- Zähflüssigkeit 1.  
 Zähigkeit 3ff.  
 —, Abhängigkeit vom Druck 7, 10, 11, 20.  
 —, Abhängigkeit von der Temperatur 10.  
 —, dynamische 5, 6.  
 —, kinematische 5, 6.  
 Zähigkeitsmesser 7.  
 Zähigkeitsmeßverfahren 7.  
 Zähigkeitstafeln 6ff.  
 Zementrohre 114, 164, 197.  
 Ziegelmauerwerk 116.  
 Zwischenpumpstationen 222.  
 Zwischenüberhitzung 218, 222.  
 Zustandsgleichung 2.

**Handbuch der Rohrleitungen.** Allgemeine Beschreibung, Berechnung, Herstellung, Normung, Tabellen und Bildtafeln. Von Oberingenieur **Franz Schwedler**, Düsseldorf. Mit 27 Abbildungen im Text, 273 Abbildungen auf 46 Tafeln und 10 Tafeln in einer Tasche. VIII, 225 Seiten. 1932. Gebunden RM 32.—

Allgemeine Beschreibung von Rohrleitungen für verschiedene Verwendungszwecke. — Berechnung von Rohrleitungen, Druckverlust, Wärmeverlust, Festigkeit. — Herstellung von Rohrmaterial und Beschreibung allgemeiner Bauteile. — Normung im Rohrleitungsbau. — Einführung der DIN-Normen. — Richtlinien, Tabellen, DIN-Blätter und Bildtafeln.

\* **Druckrohrleitungen.** Berechnungs- und Konstruktionsgrundlagen der Rohrleitungen für Wasserkraft- und Wasserversorgungsanlagen. Von Dr.-Ing. **Felix Bundschu**. Zweite, neubearbeitete Auflage. Mit 15 Abbildungen. IV, 62 Seiten. 1929. RM 6.—

⊗ **Druckrohrleitungen der Wasserkraftwerke.** Entwurf, Berechnung, Bau und Betrieb. Von Ing. Dr. techn. **Artur Hruschka**, Ministerialrat, Abteilungsvorstand in der Direktion für die Elektrifizierung der Österreichischen Bundesbahnen, früher im Bundesministerium für Handel und Verkehr, Wien. Mit 152 Abbildungen, 31 Tabellen und 38 Beispielen im Text. XVI, 283 Seiten. 1929. RM 23.—; gebunden RM 25.—

\* **Der Durchfluß des Wassers durch Röhren und Gräben, insbesondere durch Werkgräben großer Abmessungen.** Von Hofrat Professor Dr. **Ph. Forchheimer**, Wien. Mit 20 Textabbildungen. IV, 50 Seiten. 1923. RM 2.—

\* **Aufgaben aus dem Wasserbau.** Angewandte Hydraulik. 40 vollkommen durchgerechnete Beispiele. Von Dr.-Ing. **Otto Streck**. Zweite, berichtigte Auflage. Mit 133 Abbildungen, 35 Tabellen und 11 Tafeln. IX, 362 Seiten. 1929. Gebunden RM 12.—

\* **Technische Thermodynamik.** Von Professor Dipl.-Ing. **W. Schüle**.  
Erster Band: Die für den Maschinenbau wichtigsten Lehren nebst technischen Anwendungen. Fünfte, neubearbeitete Auflage.  
Erster Teil: Lehre von den Gasen und allgemeine thermodynamische Grundlagen. Mit 181 Abbildungen im Text und den Tafeln I—IIa. VIII, 385 Seiten. 1930. Gebunden RM 18.—  
Zweiter Teil: Lehre von den Dämpfen. Mit 140 Abbildungen im Text und den Tafeln III—IVa. VIII, 280 Seiten. 1930. Gebunden RM 16.—  
Zweiter Band: Höhere Thermodynamik mit Einschluß der chemischen Zustandsänderungen nebst ausgewählten Abschnitten aus dem Gesamtgebiet der technischen Anwendungen. Vierte, erweiterte Auflage. Mit 228 Textfiguren und 5 Tafeln. XVIII, 509 Seiten. 1923. Gebunden RM 18.—

\* **Die Wärmeübertragung.** Ein Lehr- und Nachschlagebuch für den praktischen Gebrauch. Von Professor Dipl.-Ing. **M. ten Bosch**, Zürich. Zweite, stark erweiterte Auflage. Mit 169 Abbildungen, 69 Zahlentafeln und 53 Anwendungsbeispielen. VIII, 304 Seiten. 1927. Gebunden RM 22.50

\* Auf die Preise der vor dem 1. Juli 1931 erschienenen Bücher des Verlages Julius Springer-Berlin wird ein Notnachlaß von 10% gewährt. (Das mit ⊗ bezeichnete Werk ist im Verlag Julius Springer-Wien erschienen.)

**\* Angewandte Hydromechanik.** Von Professor Dr.-Ing. Walther Kaufmann, Hannover.

Erster Band: **Einführung in die Lehre vom Gleichgewicht und von der Bewegung der Flüssigkeiten.** Mit 146 Textabbildungen. VIII, 232 Seiten. 1931. RM 12.50; gebunden RM 14.—

*Ein zweiter Band, der sich mit den Anwendungen aus der technischen Strömungslehre beschäftigen wird, befindet sich in Vorbereitung.*

---

**Hydro- und Aeromechanik** nach Vorlesungen von L. Prandtl.

Von Dr. phil. O. Tietjens, Mitarbeiter am Forschungs-Institut der Westinghouse Electric and Manufacturing Co. Pittsburgh Pa., U.S.A. Mit einem Geleitwort von Professor Dr. L. Prandtl, Direktor des Kaiser Wilhelm-Institutes für Strömungsforschung in Göttingen.

\*Erster Band: **Gleichgewicht und reibungslose Bewegung.** Mit 178 Textabbildungen. VIII, 238 Seiten. 1929. Gebunden RM 15.—

Zweiter (Abschluß-) Band: **Bewegung reibender Flüssigkeiten und technische Anwendungen.** Mit 237 Textabbildungen und 28 Tafeln. VIII, 299 Seiten. 1931. Gebunden RM 23.—

---

**\* Mechanik der flüssigen und gasförmigen Körper.**

Bearbeitet von J. Ackeret, A. Betz, Ph. Forchheimer, A. Gyemant, L. Hopf, M. Lagally. Redigiert von R. Grammel. („Handbuch der Physik“, Band VII.) Mit 290 Abbildungen. XI, 413 Seiten. 1927.

RM 34.50; gebunden RM 36.60

Ideale Flüssigkeiten. Von Professor Dr. M. Lagally, Dresden. — **Zähe Flüssigkeiten.** Von Professor Dr. L. Hopf, Aachen. — Wasserströmungen. Von Professor Dr. Ph. Forchheimer, Wien-Döbling. — Tragflügel und hydraulische Maschinen. Von Professor Dr. A. Betz, Göttingen. — Gasdynamik. Von Dr. J. Ackeret, Göttingen. — Kapillarität. Von Dr. A. Gyemant, Charlottenburg. — Sachverzeichnis.

---

**\* Grundlagen der Hydromechanik.** Von Leon Lichtenstein,

o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Leipzig. („Grundlehren der mathematischen Wissenschaften“, Band XXX.) Mit 54 Textfiguren. XVI, 507 Seiten. 1929. RM 38.—; gebunden RM 39.60

---

**\* Energie-Umwandlungen in Flüssigkeiten.** Von Professor

Dónát Bánki, Budapest. In zwei Bänden. Erster Band: Einleitung in die Konstruktionslehre der Wasserkraftmaschinen, Kompressoren, Dampfturbinen und Aeroplane. Mit 591 Textabbildungen und 9 Tafeln. VIII, 512 Seiten. 1921. Gebunden RM 20.—

---

**\* Widerstandsmessungen an umströmten Zylindern von Kreis- und Brückenpfeilerquerschnitt.** Von Privat-

dozent Dr.-Ing. F. Eisner, Reg.-Baumeister, Berlin. („Mitteilungen der Preußischen Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau, Berlin“, Heft 4.) Mit 63 Textabbildungen. VI, 98 Seiten. 1929. RM 10.—

---

\* Auf die Preise der vor dem 1. Juli 1931 erschienenen Bücher wird ein Nachlaß von 10 % gewährt.