ENCYKLOPÄDIE
DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN

DRITTER BAND:

GEOMETRIE

Zur Beachtung! Im Schlußheft des vorliegenden Teilbandes als des zuletzt erschienenen befindet sich das gemeinsame Namensverzeichnis zum gesamten Band III der mathematischen Encyklopädie, während die Sachregister jeweils am Schlußband der drei Teile eingereiht sind.

ENCYKLOPÄDIE
DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN

DRITTER BAND IN DREI TEILEN

GEOMETRIE

REDIGIERT VON

W. FR. MEYER † UND **H. MOHRMANN**
IN GIESSEN

ZWEITER TEIL

ZWEITE HÄLFTE / TEILBAND B

Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH
1921—1934

ISBN 978-3-663-15461-7 ISBN 978-3-663-16032-8 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-663-16032-8
Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1934

Inhaltsverzeichnis zu Band III, 2. Teil, 2. Hälfte. B.

C. Algebraische Geometrie.

(Fortsetzung.)

10. Spezielle algebraische Flächen.

a) Flächen dritter Ordnung. Von W. Fr. Meyer †

I. Historische Entwicklung der Haupteigenschaften der Fläche.

II. Systematischer Ausbau der Theorie.

(Abgeschlossen im September 1928.)

10. Spezielle algebraische Flächen.

b) Flächen vierter und höherer Ordnung. Von W. Fr. Meyer †

I. Einleitung und Übersicht. Reziproke Erzeugung der $F_4, F_5, \ldots$ durch Flächen niederer Ordnung nach Reye und v. Escherich. Rationale und andere Kurven, nebst ihren Invarianten, auf besonderen F_4. Kanonisierung der F_4 und Reyes Dekaeder. Sonderfälle. Formentheoretisches. Übertragungsprinzipien.

II. Kummers Untersuchung der F_4 mit Scharen von Kegelschnitten.

III. Die F_4 mit Doppelkegelschnitt.

IV. Die Zykliden.

XI. Die Weddlesche und die Kummersche Fläche. Das Tetraedroid und die Wellenfläche.

XII. Regelflächen vierter und höherer Ordnung.

XIII. Metrisch bemerkenswerte Flächen vierter und höherer Ordnung.

(Abgeschlossen im August 1930.)

11. Algebraische Transformationen und Korrespondenzen. Von L. Berzolari in Pavia.

I. Einleitende Definitionen und Eigenschaften.

II. Algebraische Korrespondenzen und Korrespondenzprinzipien in linearen und nichtlinearen Gebieten.

III. Algebraische Korrespondenzen und Korrespondenzprinzipien für algebraische Kurven beliebigen Geschlechts.

IV. Birationale (oder Cremona-)Transformationen zwischen zwei linearen Räumen von zwei oder mehreren Dimensionen.

V. Mehrdeutige Korrespondenzen zwischen zwei linearen Räumen von zwei oder mehreren Dimensionen.

VI. Anwendungen.

VII. Ebene Abbildung von rationalen Flächen.

VIII. Andere besondere Abbildungen und algebraische Korrespondenzen.

(Abgeschlossen im Dezember 1932.)

Übersicht
über die im vorliegenden Bande III, 2. Teil, 2. Hälfte B zusammengefaßten Hefte und ihre Ausgabedaten.

C. Algebraische Geometrie.
(Fortsetzung.)

Heft 10. 20. XII. 1928.	10. MEYER: Spezielle algebraische Flächen. a. Flächen dritter Ordnung.
Heft 11. 27. V. 1931.	b. Flächen vierter und höherer Ordnung.
Heft 12. 17. VIII. 1933.	11. BERZOLARI: Algebraische Transformationen und Korrespondenzen.
Heft 13. 13. IX. 1934.	Titel und Inhaltsverzeichnis zu Band III, 2. Teil, 2. Hälfte. Register zu Band III, 2. Teil. Namenverzeichnis zu Band III, 1. u. 2. Teil.

III C 10. SPEZIELLE ALGEBRAISCHE FLÄCHEN.

III C 10a. FLÄCHEN DRITTER ORDNUNG.

Von

W. FR. MEYER

IN KÖNIGSBERG I. PR.

Inhaltsübersicht.

Literatur.

Monographien und Lehrbücher.

L. Cremona, Mémoire de géometrie pure pour les surfaces du troisième ordre (Berliner Preisschrift), J. f. Math. 68 (1867), p. 1—133 („*Cremona*").

R. Sturm, Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung (Berliner Preisschrift), Leipzig 1867 („*Sturm*").

F. Dumont, Théorie élementaire des surfaces du troisième ordre. Anecy 1893.

A. Henderson, The twenty-seven lines upon the cubic surface. Cambridge tracts Nr. 13, 1911.

Ferner die einschlägigen Abschnitte in den Lehrbüchern:

L. Cremona, Preliminari di una teoria generale dei superficie, Roma 1868; oder: Allgemeine Theorie der Oberflächen, deutsch von *M. Curtze,* Berlin 1870. Das Original erschien in erweiterter Ausgabe von *B. Guccia,* Geometria superiore, Palermo 1890.

G. Salmon-W. Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes, 2. Teil 1865, 3. Aufl. Leipzig 1880 („*Salmon-Fiedler*").

[Die erste zusammenhängende Darstellung der Theorie erschien im Originalwerk:

G. Salmon, Analytic Geometry of three dimensions, Dublin 1862 (4. ed. 1882, 5. ed. by R. A. P. Rogers 1915); in französischer Ausgabe par *O. Chemin,* Paris 1892. Als eine Fortführung des *Salmon*schen Werkes ist anzusehen: *A. B. Basset,* Geometry of surfaces, Cambridge 1910 („*Basset*").]

Th. Reye, Geometrie der Lage, 2. Abt. 1868; 3. Aufl., 3. Abt. Leipzig 1892; 4. Aufl., 3. Abt. Leipzig 1910 („*Reye*").

C. M. Jessop, Quartic surfaces, Cambridge 1916.

H. E. Timerding, Repertorium der Mathematik II, 2: Kap. 34 „F_3" („*L. Berzolari*"); Kap. 35 „Besondere F_4" („*Timerding*").

H. F. Baker, Principles of geometry, Cambridge III (1923): F_3, F_4 u. a.; IV (1925): Ausdehnungen auf den S_n.

Einzelne historische Notizen findet man bei:

S. J. Korteweg, Amsterdam Néerl. Arch. 20 (1892), p. 63;

E. Kötter, Entwickelung der synthetischen Geometrie, Deutsche Math.-Ver. 5 (1901) („*Kötter*").

Verwandte Artikel der Encyklopädie sind an geeigneten Stellen angeführt.

Bezeichnungen.

Mit S_n werde der lineare n-fach ausgedehnte Raum bezeichnet, mit E die Ebene. F_n bedeute sowohl die Fläche n^{ter} Ordnung, wie die zugehörige quaternäre Form; C_n eine Raumkurve n^{ter} Ordnung, c_n eine ebene Kurve n^{ter} Ordnung nebst ihrer ternären Form — im besonderen R_n, r_n die rationalen Kurven —; die dualistischen Gebilde werden durch griechische Buchstaben angegeben. Unter d_ν sei ein vielfacher Punkt ν^{ter} Ordnung in der Ebene wie im Raume verstanden, unter t_2 eine Doppeltangente einer c_n. Endlich bedeute f_n eine binäre Form n^{ter} Ordnung (n^{ten} Grades).

Eine Regelfläche 3. Ordnung trage das Zeichen RF_3.

Punktkoordinaten werden, wie üblich, mit x bezeichnet, die kontragredienten (dualistischen) mit u, Linienkoordinaten im Raume mit p.

I. Historische Entwicklung der Haupteigenschaften der Fläche.

1. Erstes Auftreten der allgemeinen F_3 bei Plücker und Magnus. Die allgemeine F_3 tritt wohl zuerst bei *J. Plücker*[1]) auf, der nach der (endlichen) Anzahl von Punkten P einer F_3 fragt, in denen sie mit einer eigentlichen F_2 einen Kontakt möglichst hoher, nämlich der dritten Ordnung aufweist.

Ein solcher Punkt P ist dadurch charakterisiert, daß in ihm die Schnittkurve C_6 der F_3 und F_2 einen d_4 besitzt.

Das ist nur so möglich (s. auch Nr. **11**), daß die C_6 zerfällt in ein Paar von Geraden und eine C_4 mit d_2 in P; zugleich existiert dann zu jedem solchen Punkt P noch ein ganzes Büschel von F_2 mit der angegebenen Kontakteigenschaft. Umgekehrt ergibt sich so, daß auf der F_3 eine endliche Anzahl von Geraden g liegt, derart, daß stets in dem Schnittpunkte zweier sich treffender g die F_3 mit einer F_2 einen Kontakt 3. Ordnung hat.

Weiter führt eine von *L. J. Magnus*[2]) aufgeworfene Frage. Zwei

1) *J. Plücker*, J. f. Math. 4 (1829), p. 349 = Ges. Abhandl. 1, herausgeg. von *A. Schoenflies*, Leipzig 1895, bes. p. 115. Vgl. den Ansatz bei *Clebsch*, Note 8. Die analytischen Bedingungen für den Kontakt einer F_2 mit einer F_n entwickelt *Ch. Hermite*, Cours d'analyse, Paris 1873, p. 148, die dann durch *H. Maschke* vereinfacht werden, Amer. Math. Soc. Bull. 3 (1902), p. 482.

Anderseits hat man den Kontakt einer C_2 mit einer F_n untersucht, so *A. Transon*, Nouv. Ann. (2) 9 (1870), p. 193, und ausführlich *G. Darboux*, Bull. math. astr. (2) 4 (1880), p. 348. Letzterer gelangt so im besonderen zu den Paaren inzidenter g auf der F_3 (s. Nr. 2) als C_2 mit Maximalkontakt.

2) *L. J. Magnus*, Sammlung von Aufgaben ..., Berlin 1837, § 84. (S. auch „*Kötter*", p. 347 ff.) Vgl. *Cremona* (Schluß von Nr. **11**), sowie auch *O. Hesse*, J. f. Math. 49 (1855), p. 243, 279. Die Ideen von *Magnus* haben weiter entwickelt: *F. Geiser*, J. f. Math. 69 (1868), p. 197; *A. Cayley*, London Math. Soc. Proc. 3 (1871), p. 127, der besonders den Fall von drei symmetrischen bilinearen Gleichungen

lineare Punkträume $S_3(x)$ und $S_3'(y)$ seien dadurch eineindeutig aufeinander bezogen, daß zwischen den Koordinaten (x) und (y) zweier entsprechender Punkte $P(x)$ und $P'(y)$ drei beliebige bilineare Relationen bestehen. Denkt man sich die letzteren etwa nach den y aufgelöst, so werden die y proportional den (mit alternierenden Vorzeichen genommenen) Determinanten $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma, \Delta$ einer Matrix $|\alpha_r, \beta_r, \gamma_r, \delta_r|$ $(r = 1, 2, 3)$, deren Elemente beliebige Linearformen der x sind. Irgendeiner Ebene $\mathsf{E}'(y)$ korrespondiert somit eine $F_3(x)$ [und vice versa einer Ebene $\mathsf{E}(x)$ eine $F_3'(y)$].

Verschwinden irgend zwei der vier Determinanten, etwa A und B, so auch die beiden anderen, Γ und Δ, mit Ausnahme der Punkte (x), für die die drei zweireihigen Determinanten der Matrix $|\gamma, \delta|$ zugleich verschwinden, also mit Ausnahme der Punkte einer $C_6(x)$. Da sich irgend zwei $F_3(x)$ in einer $C_9(x)$ schneiden, so folgt hier im besonderen, daß die der ∞^3-linearen Gesamtheit (Gebüsch) der Ebenen $\mathsf{E}'(y)$ entsprechende Gesamtheit (Gebüsch) der $F_3(x)$ eine feste „Fundamentalkurve" $C_6(x)$ gemein hat, und vice versa. Soweit *Magnus*.

Verfolgt man indessen seinen Gedankengang etwas weiter, so erkennt man, wie nahe er bereits der *Clebsch*schen Abbildung einer F_3 auf eine Ebene (s. Nr. **11**) und damit einer systematischen Theorie der F_3 war. Den Geraden je des einen Raumes entsprechen C_3 des andern. Den ∞^2 Geraden $g'(y)$ einer festgehaltenen Ebene $\mathsf{E}'(y)$ entsprechen ∞^2 $C_3(x)$, so daß sich irgend zwei derselben, $C_3^{(1)}$ und $C_3^{(2)}$ — abgesehen von je acht mit der C_6 gemeinsamen Punkten — noch in einem Restpunkte $P(x)$ begegnen, dem Bilde des Schnittpunktes $P'(y)$ der beiden entsprechenden Geraden g_1' und g_2'.

Umgekehrt frage man nach den Bildern der ebenen Schnitte $C_3(x)$ der festgedachten Fläche $F_3(x)$ in der festen Ebene $\mathsf{E}'(y)$.

Da dem Gebüsch der Ebenen $\mathsf{E}(x)$ ein Gebüsch von $F_3'(y)$ mit fester Fundamentalkurve $C_6'(y)$ entspricht, die die Ebene $\mathsf{E}'(y)$ in sechs festen „Fundamentalpunkten" A_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ trifft, so korrespondiert der Gesamtheit der ebenen Schnitte $C_3(x)$ das Gebüsch der ebenen $c_3'(y)$, die durch die sechs Punkte A_i gehen.

Insbesondere lassen sich hieraus (s. Nr. **11**) die Fälle ablesen, wo eine der $c_3'(y)$, und damit zugleich der ebene Schnitt $C_3(x)$ auf der

---

verfolgt, so daß die Transformation (x, y) zu einer Involution wird; *W. Fiedler*, Zürich. Vierteljahrsschr. 21 (1876), p. 369. Eine fruchtbare Anwendung der *Cayley*schen Involution auf die Erzeugung der 23 Arten der F_3 (s. Nr. 4) machte *F. Pobanz*, Calif. Univ. Publ. 1 (1924), p. 481. — Auf den S_4 wird die Involution ausgedehnt von *P. H. Schoute*, Arch. Teyler (2) 7 (1900), p. 117 und *N. Alderton*, Calif. Univ. Publ. 1 (1923), p. 345.

$F_3(x)$, in einen Kegelschnitt und eine Gerade, oder noch spezieller in drei Gerade zerfällt. Man gelangt so direkt zu einer Theorie der endlichen Anzahl von Geraden g auf der F_3, und ihren gegenseitigen Lagen.

2. Erste Grundlegung der Theorie. Die Bestimmung der 27 Geraden und 45 Ebenen nach Salmon und Cayley. Um die Mitte des vorigen Jahrhunderts legten die in regem Verkehr miteinander stehenden englischen Geometer *A. Cayley*, *G. Salmon* und *J. J. Sylvester* den Grund zu einer Theorie der F_3. Und zwar ergeben sich gleich zwei Haupteigenschaften, die Existenz der 27 Geraden[2a]) und 45 Ebenen, sowie die des Pentaeders der F_3 (Nr. **3**).

Da auf einer F_3 eine (im allgemeinen) endliche[3]) Anzahl von

2a) Das nächste Analogon zu den 27 g einer F_3 im S_4 bietet die F_5, auf der wiederum eine endliche Anzahl von g liegen muß. Deren Anzahl bestimmt *H. Schubert* als 2875, Kalkül der abzählenden Geom., Leipzig 1879. Durch eine eingehende Revision mit Ergänzungen bestätigt dies Ergebnis *D. V. Steed,* Calif. Univ. Publ. 1 (1924), p. 425, und behandelt auch weitere verwandte Aufgaben.

3) *Salmon* bei *Cayley,* Cambridge Dublin J. 4 (1849), p. 118 = *Cayley,* Coll. Math. Papers, Cambridge 1, p. 445, am Ende, p. 456. Die Schlußweise, die die Endlichkeit der Anzahl der Geraden g begründen soll, ist folgende. Eine beliebige Gerade trifft die F_3 in drei Punkten, die von einer kubischen Gleichung (in einem Parameter) abhängen. Die Gerade liegt dann und nur dann auf der F_3, wenn die vier Koeffizienten jener Gleichung zugleich verschwinden. Damit ergeben sich vier Bestimmungsgleichungen für die vier unabhängigen Koordinaten der Geraden, die im allgemeinen eine endliche Anzahl von Lösungen haben werden. Diese für die Behandlung derartiger Endlichkeitssätze damals übliche Schlußweise („Prinzip des Konstantenzählens"), die namentlich *Plücker* bevorzugte (vgl. *F. Klein,* Autogr. Vorl. über höhere Geometrie 1, Göttingen 1893), bedarf indessen gewisser Ergänzungen, wie zuerst *A. Clebsch,* Gött. Abh. 16 (1871), bes. p. 23, betonte. Es ist im einzelnen Falle zu zeigen, daß die vorgelegten n Bestimmungsgleichungen in n Unbekannten einerseits miteinander verträglich, andererseits voneinander unabhängig sind; wenn nicht, so würde im ersteren Falle gar keine Lösung existieren, im letzteren Falle dagegen eine Schar von unendlich vielen Lösungen. Aber selbst dann, wenn jene beiden Bedingungen (wie zumeist) erfüllt sind, kann sich noch ereignen, daß die der endlichen Lösungsanzahl entsprechenden geometrischen Gebilde irgendwie ausgeartet sind, und damit der Aufgabe, die solche Ausartungen ausdrücklich oder stillschweigend ausschließt, fremd sind. Im Falle des Textes, wo es sich um gesuchte Gerade handelt, ist eine Ausartung (in projektivem Sinne) ausgeschlossen. Die Verträglichkeit der vier Gleichungen wird an Spezialfällen (z. B. der F_3 mit vier Knotenpunkten, s. Nr. **13**) erkannt. Wären endlich die vier Gleichungen abhängig voneinander, so würde jede F_3 eine Regelfläche sein, was offenbar nicht zutrifft. Das obige Prinzip des Konstantenzählens hat *Plücker* insbesondere dann angewendet, wenn die Gleichung einer algebraischen Kurve oder Fläche auf eine gewisse kanonische Gestalt gebracht werden soll, deren Konstantenanzahl mit der der vorgelegten Gleichung übereinstimmt. Vgl. noch *E. Lasker,* Math. Ann. 58 (1904), p. 434, der ein Kriterium von *L. Kronecker* zugrunde legt wonach die

Geraden liegen wird, so gehe man mit *Salmon*[3]) von *einer* solchen (reell angenommenen) Geraden g ($x_3 = 0$, $x_4 = 0$) aus, so daß die Gleichung[4]) der F_3 die Gestalt $x_2 U = x_3 V$ erhält. Das Ebenenbüschel $x_4 = \lambda x_3$ schneidet noch lauter C_2 aus der F_3 aus, die sich durch eine quadratische Gleichung in den x_1, x_2, x_3 bestimmen. Eine solche C_2 kann nur dann in ein Geradenpaar ausarten, wenn die Koeffizientendeterminante $D(\lambda) = D$ der Gleichung verschwindet.

Nun ist in dieser dreireihigen Determinante D *ein* Element vom dritten Grade in λ, die Elemente seines Minors linear, endlich die vier Restelemente quadratisch in λ.

Da sich somit D als vom fünften Grade in λ erweist, so wird g, also auch jede Gerade der F_3, von zehn andern solchen Geraden getroffen. Eine Ebene T, in der drei Gerade der F_3 liegen, wird von jeder weiteren Geraden der F_3 einmal getroffen, worauf sofort die Existenz der „27 Geraden" g der F_3 fließt, die sich auf 45 der fraglichen Ebenen T verteilen.

Diese Ebenen T sind dieselben, die die F_3 dreimal berühren („Tritangentialebenen").

Hierauf gestützt, kann man auch die quadratischen Formen U, V als zerfallende annehmen, so daß die Gleichung der F_3, und zwar auf 120 Weisen, in die Gestalt $x_1 x_2 x_3 = y_1 y_2 y_3$ gebracht werden kann, die eine leichtere Übersicht und Bezeichnung der 27 Geraden und 45 Ebenen ermöglicht (Nrn. **8**, **11**).

Das Tripel der Ebenen x schneidet sich mit dem Tripel der Ebenen y in neun Geraden, aus denen sich sechs je windschiefe Tripel bilden lassen, deren jedes ein Hyperboloid bestimmt[5]); dieses schneidet

---

Funktionaldeterminante der Bedingungsgleichungen von Null verschieden sein muß. — Von *Cayley* (l. c.) rührt auch der Satz her, daß die, durch irgendeine der drei in einer T liegenden g vier weiteren an die F_3 gehenden T das nämliche Doppelverhältnis besitzen, vgl. auch *G. Kohn,* Monatsh. Math. Phys. 2 (1891), p. 343. Der Satz läßt sich nach *K. Bobek,* Wien Ber. 100 (1894), p. 887; Monatsh. Math. Phys. 8 (1897), p. 145 dahin erweitern, daß die fünf, durch irgendeine der g an die F_3 gehenden T dieselben (zwei) absoluten Invarianten haben. S. Nr. **12**.

4) Diese Gestalt $x_3 U = x_4 V$ ist gleichwertig mit der *Steiner*schen Erzeugung der F_3 durch ein Ebenenbüschel $x_4 = \lambda x_3$ und ein ihm projektiv zugeordnetes F_2-Büschel $U = \lambda V$ (s. Nr. 8).

5) Diese Bestimmungsweise läßt zwar theoretisch die Existenz der 27 Geraden hervortreten, ist aber praktisch weniger geeignet, wenn es sich um eine möglichst einfache Konstruktion der weiteren $27 - 9 = 18$ Geraden handelt. Denn die Bestimmung von je drei weiteren Geraden durch sechs Hyperboloide führt auf sechs kubische (irreduzible) Gleichungen, also auf sechs (gleichwertige) „Aufgaben 3. Grades", und setzt überdies die Existenz der F_3 voraus. Man

seinerseits aus der F_3 drei weitere Gerade aus, und eben diese $6 \cdot 3 = 18$ weiteren Geraden ergänzen sich mit den ursprünglichen neun zu den 27 Geraden g. Auf Realitätsverhältnisse wird nicht weiter eingegangen. Bis soweit *Salmon*.

Cayley[3]) weist darauf hin, wie man auch ohne Kenntnis[3a]) einer

---

verfahre vielmehr so. Durch die vorgelegten neun Geraden geht noch ein Büschel von $F_3: x_1 x_2 x_3 = \mu y_1 y_2 y_3$. Der Parameter μ läßt sich so bestimmen, daß die F_3 noch eine zehnte, irgend drei windschiefe von den gegebenen treffende Gerade enthält, was linear ausführbar ist. Aus diesen zehn bekannten Geraden lassen sich zwei je windschiefe Quadrupel herausgreifen, deren Transversalenpaare — die der F_3 angehören müssen — durch Lösung je einer Aufgabe 2. Grades erhalten werden. So kann man fortfahren, bis man endlich zu allen $27\, g$ gelangt ist. Als Kontrolle dient zweckmäßig die *Clebsch*sche Abbildung der F_3 (s. Nr. **11**). Somit bedarf man auf diesem Wege nur quadratischer und linearer Konstruktionen. Nach anderer Richtung hin verfolgt die $27\, g$ konstruktiv *H. F. Baker*, London Math. Soc. Proc. (2) 9 (1910), p. 145; insbesondere werden aus 7 gegebenen g die 20 übrigen linear konstruiert. — Legt man durch die Restberührungspunkte B_i der fünf, gemäß *Salmon* durch eine g an die F_3 gehenden T irgendeine C_3 mit vier Restschnittpunkten R_k, so berührt nach *F. Gonseth*, Ens. math. 18 (1916), p. 328 jede Ebene (g, R_k) die C_3 in R_k (Verallgemeinerung eines bekannten c_3-Satzes). — Der zu jedem Restkegelschnitt einer g gehörige Pol beschreibt nach *A. Brambilla*, Nap. Rend. (3) 2 (1896), p. 17; ebenda 3 (1897), p. 203, eine C_3, die durch die 5 d_2 der 5 mit g inzidenten g-Paare geht und die F_3 in den beiden Doppelpunkten der Involution auf g berührt; hiermit sind gewisse R_4 verknüpft. — Die $27\, g$ und 45 T bilden im S_3 eine Konfiguration $(27_5, 45_3)$, die von *L. Berzolari*, Rom Linc. Rend. (5) 25_2 (1916), p. 258, 367 genauer untersucht und zu einer Konfiguration (x_k, y_n) erweitert wird. Auch die Umkehrungsaufgabe wird behandelt und auf den S_r ausgedehnt, ebenda 26_1 (1917), p. 29, 102. *G. Kohn*, Wien Ber. 117 (1908), p. 53, studiert die entsprechende Konfiguration $(27_5, 45_3)$ als Spurgebilde der g und T auf irgendeiner ebenen Schnitt-c_3 und setzt sie in Beziehung zur Abbildung der F_3 (Nr. **11**) und zu den *Schur*schen F_2 (Note 11). Diese Konfiguration wird weiter verfolgt von *W. Burnside*, Cambr. Phil. Soc. Proc. 15 (1909), p. 71, und *W. P. Milne*, London Math. Soc. Proc. (2) 9 (1911), p. 617; ebenda 10 (1912), p. 446; bei letzterem steht das konstante Doppelverhältnis der vier, von einem Punkte der c_3 an sie gehenden Tangenten im Vordergrunde. — Über weitere Konfigurationen der $27\, g$ und 45 T s. Nrr. **11**, **22**.

3a) Man kann dann vermöge einer Reihe *Bézout*scher Eliminationsprozesse zu einer Endresultante 27. Grades in einer Unbekannten gelangen, deren Wurzeln den 27 g entsprechen (vgl. auch Nr. **22**). — Es seien noch einige direkte geometrische Ableitungen der 27 g erwähnt. *H. Picquet*, Soc. Math. Fr. B. 1 (1875), p. 260 gelangt auf mehrfache Weise zu den 27 g, indem er die endliche Anzahl von Trisekanten gewisser C_n im S_4 bestimmt, und dann geeignet projiziert. Bei *P. H. Schoute*, Amst. Versl. 19 (1910), p. 356, repräsentiert ein gewisses 27-top im S_6 die $27\, g$. Zwei weitere Ableitungen gibt *J. de Vries*, Arch. Néerl. (2) 6 (1901), p. 148, wo auch die Fälle von 1 bis 4 d_2 berücksichtigt werden. — Hieran mögen sich einige Hinweise auf F_n $(n > 3)$ mit einer endlichen Anzahl von g

Geraden g die Existenz der 27 Geraden der F_3 erschließen kann. Der von einem beliebigen Raumpunkte P an eine F_3 gehende Tangentialkegel[7]) ist von der Ordnung 6 und besitzt nach *Salmon*[6]) sechs Rückkehrkanten, aber keine Doppelkante, mithin nach einer der „*Plückerschen Formeln*“[7]) (s. Art. III C 4, *L. Berzolari*, Ebene algebrai-

---

schließen. F_4 und F_5 untersuchen *R. Sturm,* Math. Ann. 3 (1871), p. 249, und *J. de Vries,* Arch. Teyler (2) 8 (1902), p. 235; Amst. Versl. 10 (1902), p. 742 (besonders auch die Fälle mehrfacher g). Von bemerkenswerten F_4 seien erwähnt: Die F_4 mit Doppel-C_2 und $16\,g$, s. Nr. **16**; die *Kummer*sche F_4 mit $10\,g$ (s. „*Timerding*“, p. 854 ff.), die nach dem Muster der $27\,g$ *E. Pascal* studiert, Lomb. Ist. Rend. (2) 38 (1906), p. 688; eine (symmetrische) F_4 mit $48\,g$ verfolgt *F. Schur,* Math. Ann. 18 (1881), p. 1; J. f. Math. 95 (1883), p. 207, sowie zwei weitere mit 52 resp. $64\,g$ Math. Ann. 20 (1882), p. 84, vgl. auch *P. Veronese,* Math. Ann. 19 (1881), p. 161; die *Weddle*sche F_4 (s. „*Timerding*“, p. 852), der Ort der Spitzen der durch sechs Punkte gehenden Kegel 2. Ordnung mit $25\,g$, bei *C. Hierholzer,* Math. Ann. 4 (1871), p. 173; das Symmetroid von *Cayley* mit $10\,g$, London Math. Soc. Proc. 3 (1871), p. 19, 198, und eine verwandte F_4, ebenfalls mit $10\,g$, bei *W. Fr. Meyer,* Apolarität und Rat. Kurven, Tübingen 1883, Abschn. 3. — Systematisch untersucht g auf F_n *G. Affolter,* Math. Ann. 27 (1886), p. 277; ebenda 29 (1887), p. 1, indem er sie je nach der Natur der Restkurven in zwei Gruppen teilt.

6) *Salmon,* Cambridge Dublin J. 2 (1847), bes. p. 66, wo allgemein F_n betrachtet werden.

7) Bedeuten n die Ordnung einer ebenen Kurve c, d die Anzahl der Doppel-, r die der Rückkehrpunkte, und dualistisch ν die Klasse, δ die Anzahl der Doppel-, ϱ die der Wendetangenten, so lauten die *Plücker*schen Formeln:

$$\begin{cases} \nu = n(n-1) - 2d - 3r, & \varrho = 3n(n-2) - 6d - 8r, \\ n = \nu(\nu-1) - 2\delta - 3\varrho, & r = 3\nu(\nu-2) - 6\delta - 8\varrho. \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich für den *Cayley*schen Fall des Textes: $n = 6$, $d = 0$, $r = 6$, so daß $\nu = 12$, $\varrho = 24$, $\delta = 27$ wird, und das Geschlecht p aus der Geschlechtsformel:

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r = \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2} - \delta - \varrho, \text{ gleich } 4.$$

In dem besonderen Falle: $n = 4$, $d = 0$, $r = 0$ behalten ν und ϱ ihre Werte, während δ um Eins steigt, und p um Eins sinkt. Zu der Gleichung des *Cayley*schen Tangentialkegels gelangt man am kürzesten so. Wählt man die Spitze P des Kegels als eine Koordinatenecke A_4 ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$), so ordne man die Gleichung der F_3 nach Potenzen von x_4: $F_3 \equiv x_4^3 a_0 + 3x_4^2 a_1 + 3x_4 a_2 + a_3 \equiv g(x_4) = 0$. Ist dann D die Diskriminante der kubischen binären Form $g(x_4)$, so wird $D = 0$ die Gleichung des Kegels. Entwickelt hat man:

$$D \equiv f_2 f_4 - f_3^2 = (a_0 a_2 - a_1^2)(a_1 a_3 - a_2^2) - (a_0 a_3 - a_1 a_2)^2.$$

Die sechs Rückkehrkanten sind die von P ausgehenden Haupttangenten der F_3, so daß die drei Wurzeln von $g(x_4)$ zusammenfallen, mithin f_2, f_3, f_4 zugleich verschwinden. Für die sechs Wertsysteme (x_1, x_2, x_3), für die f_2 und f_3 verschwinden, verschwindet von selbst auch (solange $a_0 \neq 0$) f_4.

Im Sonderfalle $a_0 = 0$ reduziert sich g auf $3x_4^2 a_1 + 3x_4 a_2 + a_3$, und die Diskriminante D auf $4a_1 a_3 - 3a_2^2$, s. auch Nr. **12**.

sche Kurven, Nr. **18**) 27 Doppelebenen, die aus der F_3 die 27 Geraden ausschneiden. *Cayley* stellt auch für eine geeignete Form der F_3-Gleichung die Gleichungen der 45 Ebenen in rationaler Gestalt auf und studiert den Schnitt der Figur mit einer Ebene (s. auch Nr. **11**).

Insbesondere empfiehlt es sich, mit *Geiser* (s. Nr. **16**) die Spitze P des Tangentialkegels auf der F_3 selbst anzunehmen. Die Ordnung des Kegels reduziert sich dann auf vier; er besitzt weder Rückkehr- noch Doppelkanten, dagegen 28 Doppelebenen, von denen eine die Tangentialebene der F_3 in P ist, während die 27 übrigen, wie oben, den 27 Geraden g entsprechen. Man ist so in der Lage, die bekannte Theorie der Doppeltangenten einer allgemeinen ebenen c_4 heranzuziehen.

Die Kurve der Punkte, in denen eine F_n mit einer Geraden eine vierpunktige Berührung hat, wird nach einer Abzählung *Salmons*[8]) von einer F_{11n-24} aus der F_n ausgeschnitten. Für $n = 3$ ergibt sich eine F_9, die die 27 Geraden ausschneidet, die in invarianter Form aufgestellt wird (s. auch Nr. **11**).

3. Sylvesters Pentaeder und Steiners Kernfläche. *Sylvester*[9]) stellte den Satz auf, daß eine (allgemeine) Form $F_3(x_1, x_2, x_3, x_4)$ stets und nur auf eine Weise als Aggregat von fünf Kuben von Linearformen z der x kanonisch darstellbar sei:

$$(1)\quad F_3 \equiv a_1 z_1^3 + a_2 z_2^3 + \cdots + a_5 z_5^3 \equiv \sum a z^3 \quad (\text{„}\textit{Pentaederform}\text{" von } F_3),$$

wo die z an eine lineare Identität gebunden sind, die man in der Normalgestalt $\sum z \equiv 0$ annehmen darf. Die Ebenen $z = 0$ sind die des „*Pentaeders*" der F_3.

Der geometrische Inhalt von (1) ergibt sich auf Grund des Polarenbegriffes.

---

8) *Salmon,* Cambridge Dublin J. 4 (1849), bes. p. 260 [vgl. dazu *L. Schläfli,* Quart. J. 2 (1858), p. 55]. Später, Quart. J. 1 (1857), bes. p. 335, vollzieht *Salmon* die erforderliche Elimination. In übersichtlicher, invarianter Gestalt teilt *Salmon* die Gleichung in London Trans. 150 (Juni 1860), bes. p. 238—239 mit, begnügt sich aber mit einem Hinweis auf eine Verifikation. Dagegen gibt *A. Clebsch,* J. f. Math. 58 (1861, dat. März 1860), bes. p. 102, eine volle Ableitung, die durch *P. Gordan,* Ztschr. Math. Phys. 12 (1867), p. 495 vereinfacht wurde. — Ferner geht durch die Doppelpunkte der Kurve vierpunktiger Berührung nach *Clebsch,* J. f. Math. 63 (1864), bes. p. 17, eine Schar von F_{8n-14}, also für $n = 3$, von F_{10} durch die Treffpunkte der 27 Geraden, von einfacher Gleichung. Beachtenswert ist, wie sich der Ansatz bei *Clebsch* inhaltlich mit dem bei *Plücker* (s. Note 1) deckt.

9) *Sylvester,* Cambridge Dublin J. 6 (1851), bes. p. 199—200. Der Darlegung des Textes gegenüber behaupten *„Salmon-Fiedler"*, p. 377, *P. Gordan,* Math. Ann. 5, p. 341, und *J. Lüroth,* ebenda 7, p. 17, übereinstimmend, daß *Sylvester* den Satz ohne Beweis mitgeteilt habe.

Die erste Polare eines Punktes (y) bzw. der F_3 ist eine F_2; soll dieselbe in einen Kegel ausarten, so erfüllen die Punkte (y) eine F_4: $\sum \frac{1}{az} = 0$, d. i. die von *J. Steiner* so genannte „*Kernfläche*" der F_3, die auch der Ort der Spitzen (x) jener Kegel ist.[10])

Die Gleichung $\sum \frac{1}{az} = 0$ zeigt, daß die 10 Kanten des Pentaeders der F_4 angehören, und seine 10 Ecken Doppelpunkte der F_4 sind, deren erste Polaren bzgl. der F_3 je in ein Ebenenpaar zerfallen.

Sylvester hebt ferner hervor, daß die kanonische Form (1) die richtige Anzahl[11]) von Konstanten mit sich führe und fährt fort: Außer den Ecken des Pentaeders gebe es, bei allgemeiner F_3, ersichtlich keinen Punkt, dessen Polare bzgl. der F_3 in ein Ebenenpaar zerfalle; mithin existiere ein und nur ein Pentaeder. Somit finden sich im wesentlichen alle Momente einer Verifikation bei *S.*

---

10) Die Punkte (y) und (x) heißen *reziproke Pole* der F_3. Für eine F_n treten die Örter beider Punkte („*konjugierter Pole*") als *Hesse*sche und *Steiner*sche *Fläche* (oder *Kernfläche* und *konjugierte Kernfläche*) auseinander. — Die Kernfläche einer F_n wird untersucht von „*Cremona*", *H. Schubert*, Ztschr. Math. Phys. 15 (1870), p. 126; *A. Voss*, Math. Ann. 27 (1886), p. 27, 277. Der $H(F_3)$ ist eine Reihe von Spezialuntersuchungen gewidmet. Das Verhalten der $H(F_3)$ in singulären Punkten und Ebenen der F_3 untersucht *K. Rohn*, Math. Ann. 23 (1884), p. 82. Vom Standpunkt der Strahlensysteme aus erscheint die $H(F_3)$ bei *A. Voss*, Math. Ann. 30 (1887), p. 227. *Fr. Dumont*, Nouv. Ann. (3) 15 (1896), p. 312, 318, konstruiert die F_3 rückwärts aus ihrer H, als einer gewissen F_4 mit 10 d_2, und bringt diese Konstruktion in Verbindung mit der Abbildung der F_3 (Nr. **11**). *R. A. Roberts*, Quart. J. 29 (1897), p. 279 [s. auch die beiden Vorarbeiten London Math. Soc. Proc. 16 (1885), p. 238; 18 (1887), p. 202] studiert „*Poncelet*sche" Polygone und Polyeder, die aus Schmiegungsebenen gewisser C_3 entstehen. *J. I. Hutchinson* verfolgt gewisse Konfigurationen auf $H(F_3)$, Amer. Math. Soc. Bull. (2) 5 (1899), p. 282, die vorher *G. Humbert*, J. de math. (4) 10 (1894), p. 169, mit transzendenten Hilfsmitteln untersucht hatte, sowie gewisse C_5 und C_6 auf $H(F_3)$, ebenda (2) 6 (1900), p 328, von denen 4 resp. 6 Arten unterschieden werden, sowie gewisse Konfigurationen derselben. Mit Hilfe gewisser Potenzgesetze von *P. Serret*, Géom. de direction, Paris 1869, leitet weitere Eigenschaften der $H(F_3)$ ab *H. W. Richmond*, Quart. J. 33 (1902), p. 331. *R. M. Solowjew*, Moskau Math. Samml. 25 (1905), p. 386, studiert, in Analogie zur *Cayley*schen Kurve einer c_3, die Kongruenz der Verbindungsgeraden reziproker Pole und bestimmt deren Ordnung und Klasse.

11) Man adoptiere hier zur Ergänzung die auf *Plücker* zurückkehrende, wenn auch erst später von *Clebsch* genauer formulierte Schlußweise, daß bei gleicher Konstantenanzahl eine Form in eine andere gleicher Ordnung entweder stets, oder aber, wenn erst nach Erfülltsein von (einer oder mehreren) Bedingungen, noch auf unendlich viele Weisen überführbar sei (s. Note 3). Bei seinem ersten Beweise des Pentaedersatzes verfährt *Clebsch*, J. f. Math. 58 (1861), p. 109, ganz ähnlich wie *Sylvester* im Texte.

Für den *„Pentaedersatz"* gab *A. Clebsch*[12]) einen direkten Beweis. Die Gleichung der ersten Polare F_2 der F_3 ist $\sum y_i \frac{\partial F_3}{\partial x_i} = 0$. Die Gleichung der Kernfläche F_4 erhält man durch Nullsetzen der Determinante $\Delta = \left|\frac{\partial^2 F_3}{\partial x_i \partial x_k}\right|$, die entsteht durch Elimination der y_i (oder auch der x_i) aus vier in den x_i, y_i bilinearen und symmetrischen Gleichungen. Sollen diese vier Gleichungen nur zweien äquivalent sein, so müssen alle dreireihigen Minoren von Δ verschwinden, was für zehn Wertsysteme der x eintritt. Es gibt also zehn Punkte der F_4, deren erste Polare bzgl. der F_3 je in ein Ebenenpaar zerfällt, und jene zehn Punkte ordnen sich in der Tat mit den Kanten der zehn Ebenenpaare zum Pentaeder zusammen.

Zur Bestimmung der zehn Ecken wird eine Gleichung zehnten Grades aufgestellt, deren Auflösung auf die einer Resolventengleichung vom fünften Grade zurückkommt.

---

12) *Clebsch,* J. f. Math. 59 (1861), p. 193 (s. den Schluß von Note 11). *Clebsch* führt die Untersuchung bis zu einem gewissen Ziele allgemein für F_n durch, deren *Hesse*sche Fläche $4(n-2)^3$ Doppelpunkte von besonderer Konfiguration besitzt. Das im Texte skizzierte Verfahren von *Clebsch* läßt sich auf eine beliebige vierreihige symmetrische Determinante D ausdehnen, deren Elemente quaternäre Linearformen sind. Das gleichzeitige Verschwinden aller ersten Minoren findet wiederum für 10 Wertsysteme der Variabeln statt, s. *Cayley,* London Math. Soc. Proc. 3 (1871), p. 19, 198. Die Gleichung $D = 0$ liefert das „Symmetroid", eine F_4 mit 10 d_2 (s. *„Timerding",* p. 853). Diese hängt eng zusammen mit der r_6, s. *J. R. Conner,* Amer. J. math. 37 (1914), p. 29, und *A. B. Coble,* ebenda 41 (1919), p. 243; 46 (1924), p. 143. Letzterer zeigt in der zweiten Arbeit umgekehrt, wie zu gegebenem Symmetroid noch 4 Typen von r_6 gehören, und deckt das Auftreten dieser Figur in der Theorie zweier C_3, sowie in der Theorie der *Abel*schen Modularfunktionen ($p = 4$), auf. Das Symmetroid ist durch eine gewisse *Cremona*transformation überführbar in die unter Note 3 a) angeführte F_4 mit 10 g von *W. Fr. Meyer.* — Den Pentaedersatz bewiesen synthetisch *Cremona* und *Sturm* (Nr. 15), sowie *„Reye",* p. 113; formentheoretisch mit Hilfe der Symbolik *P. Gordan,* Math. Ann. 5 (1872), p. 341, wobei die Pentaederform als einfache Kontravariante der F_3 erscheint; endlich *Reye,* J. f. Math. 78 (1874), p. 114, vermöge seines Prinzips „der höheren Momente", das er auch auf die analoge Kanonisierung der F_4 als Summe von 10 Biquadraten anwendet. Ergänzungen zur *Reye*schen Methode und Weiterführungen bei Flächen höherer Ordnung finden sich bei *A. C. Dixon,* London Math. Soc. Proc. (2) 4 (1906), p. 223, und besonders bei *Ew. Boldewig,* Giorn. di mat. 65 (1926), p. 81. Mit Hilfe allgemeiner Sätze über lineare Systeme im S_n stellt *F. Palatini* die quinäre F_3 (auf noch ∞^1 Arten) als Summe von acht Kuben dar, Tor. A. 38 (1903), p. 43; vgl. auch die analoge Behandlung der c_n, Rom Linc. Rend. (5) 15 (1903), p. 378. — Bezüglich der mannigfaltigen weiteren Ausdehnungen auf den S_n sei auf *„Baker",* IV, sowie den Art. III C 7, *C. Segre,* Mehrdimensionale Räume, bes. Nrn. **34** und **42** verwiesen. Wegen der Beweise von *H. Toeplitz* und *W. Fr. Meyer* s. Nr. **20** und Nr. **19**.

4. Singularitäten. Klasse der Fläche. Einteilung in Arten nach Schläfli und Cayley. Die Zahl ν für die Klasse der F_3 reduziert sich nach *Salmon*[6]) (1847) um resp. 2, 3, 6 je nach dem Auftreten eines gewöhnlichen, biplanaren, uniplanaren Doppelpunktes.

Später hat *L. Schläfli*[13]) auf Grund kanonischer Gleichungsformen die nicht zerfallenden F_3 nach Maßgabe aller auftretenden Singularitäten in 22 Arten (species) eingeteilt, vgl. „*Salmon-Fiedler*", Art. 291.

Vorab sind die verschiedenen Singularitätenmöglichkeiten aufzuzählen; der Index des *Schläfli*schen Zeichens gibt jeweils die Anzahl der Einheiten an, um die die Klasse ν der F_3 beim Auftreten der betreffenden Singularität verringert wird.

Bei Parallelkoordinaten x, y, z sei der Anfang O die zu untersuchende Singularität, so daß F_3 die Gestalt annimmt:

$$F_3 = c_2 + c_3, \tag{2}$$

wo c_2 eine quadratische, c_3 eine kubische ternäre Form in x, y, z bedeutet. Nach z geordnet, sei

$$c_3 \equiv a_0 z^3 + z^2(a_1 x + b_1 y) + z f_2(x, y) + f_3(x, y). \tag{2'}$$

Es sind drei Hauptfälle zu unterscheiden.

Erstens, Fall C: O ist ein *gewöhnlicher Knotenpunkt* C_2; c_2 ist eine eigentliche Form mit einer Determinante $D \neq 0$; Typen: $xz - y^2$, $x^2 + y^2 + z^2$ ($c_2 = 0$ ist der Tangentenkegel in O).

Zweitens, die *Fälle B* eines *biplanaren Knotenpunktes* in O; c_2 zerfällt in ein Paar verschiedener, reeller oder konjugiert imaginärer

13) *Schläfli,* London Trans. 153 (1863), p. 193; vgl. *K. Bobek,* Wien Ber. **96** (1887), p. 355. Am Schlusse, p. 251, fügt *Cayley* als eine neue Art die nach ihm benannte Regelfläche hinzu, auf die, wie *Cayley* selbst angibt, bereits *M. Chasles,* Paris C. R. 53 (1861), p. 884 hingewiesen hatte. (S. auch Nr. **14**, Note 51.) Die 23 Arten von F_3 werden einfacher, direkt aus den Klasseneigenschaften heraus, hergeleitet von *A. B. Basset,* Nature 1905, p. 72 und ausführlicher „*Basset*". Über die Herleitung der 23 Arten mittels der *Cayley*schen Involution durch *F. Pobanz* s. Note 2. Den „Zusammenhang" der einzelnen Arten diskutiert eingehend, im Zusammenhang mit der Abbildung der F_3 (Nr. **11**), *A. Comessatti,* Ann. di mat. (3) 23 (1915), p. 215. Zugrunde liegt der von *F. Klein,* Math. Ann. 7 (1874), p. 549; 9 (1876), p. 476, eingeführte Begriff der „Zusammenhangstransformationsgruppe", woraus sich derjenige „äquivalenter" Flächentypen entwickelt. Auf gewisse Ausnahmefälle des Zusammenhanges macht *A. Tonelli* aufmerksam, Rom Linc. Rend. (5) 2 (1893), p. 15. Neuerdings ist der Zusammenhang von Flächen allgemeiner vom Gesichtspunkt automorpher Transformationen aus verfolgt, s. *J. Bromius*, Amst. Versl. 18 (1909), p. 176; *R. Brouwer,* Math. Ann. 69 (1910), p. 176, sowie den Art. III AB 12, *H. Tietze-M. Vietoris,* Beziehungen zwischen den verschiedenen Zweigen der Topologie. — Auf Grund der Erzeugung der F_3 durch projektive Büschel (s. Nr. 8) studiert ihre Singularitäten *A. Versluys,* Liège Mém. 20 (1895).

Linearfaktoren, D verschwindet, aber nicht alle ersten Minoren, d. i. der Kegel c_2 artet aus in ein Paar getrennter Ebenen mit der *Durchschnittskante* k (Typen xy, $x^2 + y^2$).

Erster Unterfall B_3: $k(x = 0, y = 0)$ gehört der F_3 nicht an, so daß $a_0 \neq 0$.

Zweiter Unterfall B_4: $k(x = 0, y = 0)$ gehört der F_3 an, so daß $a_0 = 0$; dagegen fällt die die F_3 längs k berührende Ebene $f_1 \equiv a_1 x + b_1 y = 0$ mit keiner der beiden „Ebenen" von O zusammen, so daß $a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$.

Dritter Unterfall B_5: Es tritt gerade der letzthin ausgeschlossene Fall ein, so daß entweder a_1 oder b_1 verschwindet.

Vierter Unterfall B_6: Jede Ebene durch k berührt die F_3 längs k, d. h. f_1 verschwindet identisch ($a_1 = b_1 = 0$).

Drittens, die *Fälle A* eines *uniplanaren Knotenpunktes* in O: c_2 artet in das Quadrat einer Linearform, etwa x^2, aus — alle ersten Minoren von c_2 verschwinden — d. i. der Kegel c_2 ist eine Doppelebene ($x = 0$). Diese Ebene trifft den kubischen Kegel $c_3 = 0$ in drei Geraden, die entweder alle verschieden sind, oder aber es fallen genau zwei derselben zusammen oder endlich alle drei. Je nachdem treten die drei Unterfälle A_6, A_7, A_8 ein.

Die 21 Arten von F_3 — die 22$^{\text{te}}$ und 23$^{\text{te}}$ sind die beiden Regelflächen mit der Klasse 3, s. Nr. **14** — mögen mit *Schläfli* in einer Tabelle vereinigt werden: die erste Zeile gibt jeweils die Klasse ν an, die zweite die zugehörige Singularität S:

ν	12	10	9	8	8	7	7	6	6	6	6
S	0	C_2	B_3	$2C_2$	B_4	$B_3 + C_2$	B_5	$3C_2$	$2B_3$	$B_4 + C_2$	B_6

ν	6	5	5	5	4	4	4	4	4	3
S	U_6	$B_3 + 2C_2$	$B_5 + C_2$	U_7	$4C_2$	$2B_3 + C_2$	$B_4 + 2C_2$	$B_6 + C_2$	U_8	$3B_3$

Schläfli bestimmt auch die „Zusammenhangszahlen" der einzelnen Arten (vgl. Nr. **17**).[13a])

In einer ergänzenden Arbeit, in der für jede Art die Lagerung der „Geraden" und „Ebenen" durch Angabe der zugehörigen Gleichungen sowie durch schematische Diagramme illustriert wird, hat *Cayley*[14]) insbesondere auch die zugehörigen Reziprokalflächen studiert.

13a) S. noch *Schläfli,* Ann. di mat. (2) 5 (1873), p. 289; 7 (1876), p. 193, wo die fünf Typen der reellen F_3 die Zusammenhangszahlen 12, 8, 4, 0, — 4 erhalten. S. über den Zusammenhangsbegriff die kritischen Ausführungen von *A. Tonelli,* Gött. Nachr. 1875, p. 387; Rom Linc. Rend. (5) 2 (1893), p. 15.

14) *Cayley,* London Trans. 159 (1869), p. 231 = Papers 6, p. 359. Wegen der Reziprokalflächen vgl. besonders ebenda, p. 201 = Papers 6, p. 329.

5. Fortsetzung. Einfluß der Singularitäten auf die 27 Geraden und 45 Ebenen. Auch beim Auftreten von Doppelpunkten bleiben die Anzahlen der 27 Geraden und 45 Ebenen nach *Salmon* gültig[15]), wenn man nur Gerade oder Ebenen, die durch Doppelpunkte gehen, mit geeigneter Vielfachheit zählt. *Schläfli* und *Cayley* haben wiederum eine erschöpfende Diskussion aller möglichen Fälle gegeben (s. Nr. **4**).

6. Realitätsverhältnisse bei den 27 Geraden und 45 Ebenen. Die fünf Schläflischen Typen singularitätenfreier Flächen. *Schläfli* (l. c.) hat überdies die Realitätsverhältnisse der 27 Geraden und 45 Ebenen eingehend erörtert, ebenfalls auf Grund kanonischer Gleichungsformen. Die 21 Arten von F_3 zerfallen dadurch wieder in eine Reihe von Unterarten. So sind bei singularitätenfreien F_3 fünf Unterarten (Typen) zu unterscheiden, je nachdem von den Geraden resp. Ebenen reell sind: 1) 27, 45; 2) 15, 15; 3) 7, 5; 4) 3, 13; 5) 3, 7, wie mittels geometrischer Methoden (Nr. **15**) *Cremona* und *Sturm* bestätigt haben (s. Nr. **11**). Man hat hierbei die jeweils nicht reellen Geraden in „punktierte" und „imaginäre" zu sondern, je nachdem sie einen reellen Punkt tragen oder nicht, also mit ihrer konjugiert imaginären inzident sind oder nicht.

Eigenartig ist der vierte Typus, insofern bei ihm auf der F_3 keine reelle kubische Raumkurve liegt, sondern immer nur (∞^2) Paare von konjugiert-imaginären solcher (s. Nr. **11**).

7. Graßmanns Erzeugungen der Fläche. Für die Erzeugungen der F_3 ist ein wesentlicher Gesichtspunkt von *H. G. Graßmann*[16]) entwickelt worden, der von allgemeinerer Grundlage ausgeht. Seine *„stereometrische Multiplikation"* führt ihn zu linealen Erzeugungen der F_n überhaupt, die nur die einfachsten Raumelemente (Punkt, Gerade, Ebene) benutzen.

Für $n = 3$ fließt daraus eine Reihe von Erzeugungen, deren

---

15) *Salmon*, Cambridge Dublin J. 4 (1849), p. 252. — *L. Zängl*, Wien Ber. 126 (1917), p. 857 bestätigt die schon von *„Sturm"* ausgesprochene Vermutung, daß der vierte *Schläfli*sche Realitätstypus überhaupt nicht durch eindeutige Abbildung der F_3 auf eine Ebene (Nr. **11**) erhalten werden kann. Zu dem Behuf bedient er sich allgemein einer „Abbildung p^{ter} Ordnung" der F_3, bei der an Stelle des c_3-Gebüsches ein geeignetes Gebüsch von c_p tritt.

16) *Graßmann*, J. f. Math. 49 (1855, dat. Juli 1852), p. 47, bes. p. 64. Vgl. die Biographie *Graßmanns*, Math. Ann. 14 (1880), bes. p. 1, sowie *Sturm*, ebenda 14 (1879), bes. p. 17 ff. und *R. Mehmke*, „Punktrechnung" 1, Leipzig 1913, p. 238. Hierbei sei auf einige Arbeiten hingewiesen, die die F_3 nach *Graßmann*schen Prinzipien behandeln: *H. Fritz*, Progr. Ludwigsgymn. Darmstadt 1889 (wo die F_3 als ausgeartete F_4 erscheint); *J. Haft*, Soc. Arg. 29 (1890); *St. Jolles*, Arch. Math. (3) 16 (1910), p. 1.

fruchtbarste nach *Graßmann* benannt worden ist; danach entsteht, als ein direktes Analogon zur Erzeugung eines Ordnungskegelschnittes durch zwei projektive Strahlbüschel, eine allgemeine F_3 als Ort des Schnittpunktes je dreier zugeordneter Ebenen von drei kollinearen Ebenenbündeln (s. Nr. **11**, wo auch auf eine Einschränkung hingewiesen ist). Die synthetische Ausführung dieser Erzeugung, insbesondere der Nachweis der 27 Geraden und 45 Ebenen von da aus, gebührt *H. Schroeter*.[17])

Die Fläche wird von einer beliebigen Ebene in einer allgemeinen (elliptischen) c_3 geschnitten. Während ein Punkt die c_3 beschreibt, umhüllen die zugeordneten Ebenen eines jeden der drei Bündel einen Kegel dritter Klasse. Darauf beruht es, daß es sechsmal vorkommt, daß sich drei entsprechende Ebenen in einer Geraden schneiden. Solche sechs (windschiefe) Gerade bilden dann eine „Sechs" (halbe „Doppelsechs") (Nr. **10**). Eine Doppelsechs sei mit $\overline{6}$ bezeichnet.

Der analytische Beweis findet sich schon früher bei *Schläfli*[18]), nur daß bei ihm das Moment der Erzeugung zurücktritt. Er geht von der *Salmon*schen Gestalt (Nr. 2) der F_3-Gleichung $x_1x_2x_3 + y_1y_2y_3 = 0$ aus, schreibt die linke Seite als dreireihige Determinante $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ 0 & x_2 & y_2 \\ y_3 & 0 & x_3 \end{vmatrix}$, zeigt, wie deren Elemente als beliebige quaternäre Linearformen angenommen werden dürfen, und gelangt mittels einfacher Determinantensätze zur Existenz einer Doppelsechs, und von da aus zu der der übrigen. Der Unterschied zwischen zwei halben Doppelsechsen entspricht dem zwischen horizontalen und vertikalen Reihen der Determinante. Daher gibt es auch für jede Doppelsechs zwei verschiedene Scharen von Erzeugungen der F_3, und entsprechend von C_3 auf der Fläche (s. Nr. **11**).[19]) Umgekehrt bestimmt irgendeine Doppelsechs die F_3 eindeutig.

Man gehe von fünf windschiefen Geraden $(a_1, a_2, \ldots, a_5)$ aus, die nur der einen Bedingung genügen sollen, eine Transversale (b_6) zu besitzen — oder auch umgekehrt von einer Geraden (b_6) und fünf windschiefen, sie treffenden Geraden $(a_1, a_2, \ldots, a_5)$. Je vier der fünf Geraden (a) besitzen eine zweite Transversale $(b_1, b_2, \ldots, b_5)$. Dann

Auf einen Ausnahmefall, wo die *Graßmann*sche Erzeugung der F_3 versagt, weist *C. Segre* 1908 hin, wie *A. Terracini,* Giorn. di mat. 49 (1910), p. 40 erwähnt, s. auch Nr. **8**.

17) *Schroeter,* J. f. Math. 62 (1863), p. 265.

18) *Schläfli,* Quart. J. 2 (1858), p. 110, bes. p 114—115.

19) Vgl. *„Reye"*, p. 53, wo die drei Ebenenbündel reziprok auf eine Abbildungsebene (Nr. **11**) bezogen werden.

kommt auch („Satz der Doppelsechs") diesen fünf Geraden (b) eine Transversale (a_6) zu, womit die Doppelsechs festgelegt ist, für sich ein elementar stereometrischer Satz, dessen elementarer Beweis aber auf Schwierigkeiten stößt. Durch die so ihr auferlegten $4 + 5 \cdot 3 = 19$ linearen Bedingungen ist die F_3 eindeutig bestimmt. Die 15 weiteren Geraden c_{ik} ($i, k = 1, 2, \ldots, 6$; $i \neq k$) entstehen als Schnitte je zweier Ebenen (a_i, b_k) und (a_k, b_i).

Die 45 Ebenen setzen sich zusammen aus den 30 Ebenen (a_i, b_k, c_{ik}) und den 15 weiteren vom Typus (c_{ik}, c_{lm}, c_{np}).

Geometrisch hat den Zusammenhang zwischen allen, ein und derselben dreireihigen Determinante entsprechenden Erzeugungen *F. Schur*[20]) untersucht. Als gemeinsames Band erscheint der Satz, daß die sechs Paare windschiefer Geraden einer Doppelsechs je konjugiert sind in bezug auf eine F_2 („*Schur*sche F_2"). *Schur* gründet den Beweis auf eine für die c_3 bestehende Schließungseigenschaft.

Eine Doppelsechs ist somit in diesem Sinne zu sich selbst dualistisch. Dies steht in Übereinstimmung mit den ∞^2 kubischen Ordnungskurven C_3 (Nr. **11**), die die Geraden einer halben Doppelsechs

20) *Schur,* Math. Ann. 18 (1881), p. 1; *Reye,* Math. Ann. 55 (1901), p. 257; *Griewe,* London Math. Soc. Proc. (2) 12 (1913), p. 315; *Baker,* ebenda (2) 11 (1912), p. 285, der nur projektive Eigenschaften von Gebilden zweiten Grades als Beweismittel braucht, vgl. auch den analogen, synthetisch entwickelten Gedankengang bei *G. T. Bennett,* London Math. Soc. Proc. (2) 9 (1910), p. 336; *de Vries,* Amst. Versl. 24 (1916), p. 1447, 1610. Neuerdings hat *E. Jolliffe,* Mess. (2) 55 (1926) p. 136 zwei weitere relativ elementare Beweise für den *Schur*schen Satz erbracht, einen projektiven und einen metrischen, in Anlehnung an *Baker.* Der erstere beruht auf dem Hilfssatze, daß, wenn ein Hyperbolid F_2 einem Tetraeder T umbeschrieben ist, jede Erzeugende der F_2 die vier Seitenflächen von T sowie die vier durch die Ecken gehenden Erzeugenden der andern Schar in vier Punktepaaren einer Involution trifft. Der metrische Beweis beruht auf der Bildung des Produktes gewisser Doppelverhältnisse. — Vom Gesichtspunkt der *Cremona*-Transformationen aus behandelt die $\bar{6}$ *E. Kasner,* Amer. J. f. Math. 25 (1903), p. 117; insbesondere stellt *E. Stenfors,* Die Schläflische Konfiguration . . ., Helsingfors 1924, die verschiedenen Typen bei automorphen Kollineationen auf und leitet hierbei neue Konstruktionen der $\bar{6}$ ab. — *J. H. Grace,* Cambr. Phil. Trans. 16 (1898), dehnt den Satz der $\bar{6}$ auf sechs Gerade mit einer Transversale aus: *J. L. Wren,* London Math. Soc. Proc. (2) 15 (1916), p. 144 beweist dies mittels einer *Cayley*schen (2, 3)-Transformation. *J. Kubota,* Tôh. Rep. 6 (1917), p. 89 dehnt dies wiederum auf mehr als sechs Gerade aus; in Tôh. Rep. 14 (1924), p. 391 führt er den Satz der $\bar{6}$, wie den von *Grace* einheitlich zurück auf ein Prinzip der darstellenden Geometrie, wonach eine Raumgerade abgebildet wird auf ein Punktepaar in der Ebene, so, daß inzidente Raumgerade übergehen in Punktepaare mit parallelen Verbindungsgeraden. — Auch vom S_4 aus hat man die $\bar{6}$ betrachtet, s. *H. F. Baker,* Cambr. Phil. Soc. Proc. 20 (1920), p. 133. — Im übrigen vgl. auch Nr. **10**.

zu Sehnen haben (während sie die Geraden der anderen halben Doppelsechs gar nicht, die 15 weiteren Geraden einmal treffen), und den ∞^2 kubischen Klassenkurven Γ_3, die die sechs Geraden der zweiten halben Doppelsechs zu Achsen haben. Je ein Paar (C_3, Γ_3) ist in bezug auf eine *Schur*sche F_2 konjugiert, insofern die Polarebenen der Punkte der C_3 die (Schmiegungs-)Ebenen der Γ_3 sind, und vice versa. Zu der Doppelsechs gehört entsprechend dualistisch eine Fläche dritter Klasse Φ_3, die von den Ebenen durch jede der zwölf Geraden der Doppelsechs berührt wird.

Reye[20]) geht ebenfalls aus von einer Doppelsechs: die Geraden je einer Sechs sind die gemeinsamen Sekanten von ∞^2 C_3 resp. C_3' auf der F_3; je zwei C_3 resp. C_3' haben einen Punkt gemein, während jede C_3 jeder C_3' in fünf Punkten begegnet (s. auch Nr. **11**), so daß jedes Paar (C_3, C_3') den vollen Schnitt der F_3 mit einer F_2 darstellt. Solcher „Verbindungs-F_2" gibt es ∞^4; es lassen sich neun linear unabhängige unter ihnen herausgreifen. Dann existiert eine bestimmte, zu diesen neun und damit zu allen ∞^4 F_2 konjugierte H_2, die „*Reye*sche *Hauptfläche*", die sich als unabhängig von der Auswahl der ursprünglichen Doppelsechs erweist und zu den 36 *Schur*schen F_2 in den mannigfaltigsten Beziehungen steht.

Die Reziproke der F_3 in bezug auf diese Hauptfläche H_2 ist eine kovariante Fläche Φ_3 von bemerkenswerten Eigenschaften. Die H_2 erscheint zugleich als umhüllt von den Ebenen von ∞^2 Polfünfecken $(P_i, P_k, P_l, P_m, P_n)$, derart, daß der Pol jeder der zehn Ebenen (P_i, P_k, P_l) auf der Gegenkante (P_m, P_n) liegt.

Diese Untersuchung wird von *A. B. Griewe*[20]) weitergeführt. Es zeigt sich, daß der obige Pol gerade der Restschnittpunkt der Gegenkante (P_m, P_n) mit der F_3 ist. Insbesondere werden die ausgearteten C_3 verfolgt, und umgekehrt systematisch die g der F_3 als ausgeartete C_3 (s. auch Nr. **11**) betrachtet nach dem Vorgange von *H. F. Baker*[20]), der u. a. unter diesem Gesichtspunkte die Gleichungen der 36 *Schur*schen F_2 aufstellt.

J. de Vries[20]) führt die *Reye*sche Figur der ∞^1 C_3 auf der F_3, die einen festen Punkt gemein haben, weiter aus; er bestimmt den Komplex der Sekanten jener C_3, und insbesondere die in ihm enthaltenen rationalen Kegel.[20a])

20a) Die sechs Argumentenpaare der sechs gemeinsamen Sehnen der ∞^1 C_3 und einem gemeinsamen Punkte, gebildet für irgendeine derselben, sind an drei invariante Bedingungen geknüpft, dieselben, die zwischen den sechs Argumentenpaaren der sechs d_2 einer r_5 herrschen, s. Nr. **19**.

8. Steiners Erzeugungen der Fläche. Konjugierte Trieder. Die von *J. Steiner*[21]) ohne Beweis aufgestellten und nach ihm benannten[22]) Erzeugungen der F_3, auf Grund deren er eine Fülle von Einzelergebnisse mitteilt, lassen sich auffassen als Modifikationen resp. Spezialfälle der *Graßmann*schen.

Eine Modifikation ist es, wenn die F_3 entsteht durch projektive Zuordnung eines Ebenen- und eines F_2-Büschels (II). Ein Spezialfall ist es, wenn die F_3 erscheint als Ort des Schnittpunktes der Polarebenen in bezug auf drei feste F_2, eines in einer Ebene variabeln Punktes (IV).

Desgleichen, wenn durch die neun Geraden, in welchen sich die Ebenen zweier beliebiger Dreikante (*Steiner*sche Trieder) schneiden, ein Büschel von F_3 geht (s. Nr. 2).[23]) Nimmt man noch außerdem einen Punkt P an, den die F_3 enthalten soll, so trifft jede Ebene durch P die neun Geraden in neun Punkten, die mit P eine c_3 bestimmen; der Ort der c_3 ist eine allgemeine F_3 (I).

Die 27 Geraden werden wie bei *Salmon* (Nr. 2) hergeleitet. Das in Rede stehende F_3-Büschel entsteht nach *Graßmann*scher Vorschrift durch die drei (uneigentlich) kollinearen Ebenenbündel (mit dem Para-

---

21) *Steiner*, Berlin Ber., Jan. 1856 = J. f. Math. 53, p. 133 = Werke, herausgegeben von *K. Weierstraß*, Berlin, 2 (1882), p. 651. Einige Berichtigungen zu *Steiner*schen Sätzen über F_3 bringt *R. Sturm*, Ztschr. Math. Phys. 45 (1900), p. 23; *Sturm* liefert auch eine Übersicht über *Steiners* F_3-Arbeiten, Bibl. Math. (3) 4 (1903), p. 160.

22) Vgl. die Zusammenstellung bei *Sturm*, Math. Ann. 23 (1884), p. 308 bis 310, auf die sich die römischen Ziffern des Textes beziehen. — Die Erzeugung (II) nimmt eine besondere, für die weitere Untersuchung der „Geraden und Ebenen" bequeme Gestalt (II') an, wenn das Ebenenbüschel aus den Polarebenen eines festen Punktes P_0 in bezug auf das F_2-Büschel besteht; die F_3 erscheint dann als Ort der Berührungspunkte der von P_0 an die F_2 des Büschels gehenden Tangenten. (S. auch Nr. **12**.) Vgl. die Durchführung bei *W. P. Milne*, Quart. J. 43 (1912), p. 207 (wo aber *Steiner* nicht erwähnt wird). Es ist indessen zu beachten, daß sich dieser Erzeugung (II') vier Typen von F_3 entziehen, wie *A. Terracini* nachweist, Giorn. di mat. 49 (1912), p. 40. — Die Erzeugung (II') läßt sich dahin verallgemeinern (s. Nr. **12**, Note 45a), daß man durch den festen Punkt P_0 irgendeine Gerade g legt und auf ihr die Doppelpunkte D, D' der durch das F_2-Büschel bestimmten Involution markiert. Bei Variieren von g erfüllen D, D' die F_3. Durch P_0 selbst geht ein Individuum F_2' des Büschels; die in der Tangentialebene der F_2' gelegenen beiden Erzeugenden sind zwei Gerade der F_3. Umgekehrt, bei gegeben gedachter F_3, ist P_0 als Schnittpunkt irgend zweier inzidenter g der F_3 zu wählen; die Basiskurve des zugehörigen F_2-Büschels ist die Berührungskurve C_4 des von P_0 an die F_3 gehenden Tangentenkegels (s. Nr. **12** und **16**).

23) In Nr. 2 wurde eine zehnte Gerade zur eindeutigen Festlegung der F_3 verwendet, was für die Konstruktion der weiteren Geraden vorteilhafter ist.

meter k):

(2) $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 k A_2 = 0, \quad \lambda_2 B_2 + \lambda_3 B_3 = 0, \quad \lambda_1 C_1 + \lambda_3 C_3 = 0,$

so daß die Gleichung des F_3-Büschels wird:

$$A_1 B_2 C_3 + k A_2 B_3 C_1 = 0. \tag{2'}$$

Solcher „konjugierter" Triederpaare gibt es nach *Steiner* bei gegebener F_3 120 (s. *Salmon* und Nr. **11**).

Die Realitätsverhältnisse der sechs Ebenen haben *Schläfli* (1858, l. c.), „*Sturm*" und „*Cremona*" (Nr. **15**) untersucht.

9. Erzeugungen der Fläche nach August, Sturm und Schroeter. Konjugierte Tetraeder. Weitere Erzeugungen. An die *Graßmann*schen und *Steiner*schen Erzeugungen der F_3 lehnen sich weitere an. So eine von *F. August*[24]) durch drei trilinear verknüpfte Ebenenbüschel. Im Prinzip deckt sich diese Erzeugung mit (2), da man nach *C. le Paige*[25]) die allgemeine trilineare Verwandtschaft durch lineare Transformation der drei Parameter λ_i $(i = 1, 2, 3)$ auf die kanonische Gestalt $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 =$ konst. bringen kann.

Ferner sind zu erwähnen zwei Verallgemeinerungen von *Sturm*[26]), der einmal eine durch zwei projektive F_2-Büschel entstehende F_4 in eine F_3 und eine Ebene zerfallen läßt, andererseits die F_3 herstellt durch reziproke Zuordnung eines Strahlen- und eines F_2-Bündels. *Sturm* hat aber auch die verschiedenen Erzeugungsweisen daraufhin untersucht, wie sie die fünf Realitätstypen (Nr. **6**) der singularitätenfreien F_3 liefern; hierbei erleidet der Begriff der Gleichwertigkeit zweier Erzeugungen eine gewisse Einschränkung.

Durch Spezialisierung der ersteren *Sturm*schen Erzeugung ist

---

24) *August,* Diss. Berol 1862. Die *August*sche Erzeugung der F_3 findet man noch öfters wieder, zumeist unter anderen Namen, so bei *E. G.*, Nouv. Ann. (3) 13 (1891), p. 138 (F_3 und Φ_3 mit besonderer Berücksichtigung der fünf Realitätstypen); *J. W. Russell,* London Math. Soc. Proc. 26 (1898), p. 446; *W. H. Blythe,* Mess. (2) 34 (1905), p. 139. Vgl. auch die „trilineare" Verwandtschaft bei *Schubert,* Nr. **21**. *F. London,* Math. Ann. 44 (1894), p. 375 erzeugt nach der *August*schen Methode sämtliche Arten der F_3, nebst den zerfallenden.

25) *Le Paige,* Paris C. R. 92 (1881), p. 1099.

26) *Sturm,* Preisschrift von 1867, Nrn. 109, 110. Die erstere Erzeugung wird genauer verfolgt von *W. Burnside*, Cambr. Phil. Soc. Proc. 15 (1911), p. 425 (s. auch Nr. **15**); die letztere von *A. Neumann,* Dissert. Breslau 1909. Nimmt man bei der letzteren die Koordinatenecke A_m als Zentrum des Strahlenbündels, so kommt die Erzeugung algebraisch darauf hinaus, die F_3 in der Gestalt darzustellen: $F_3 \equiv x_i F_2^{(i)} + x_k F_2^{(k)} + x_l F_2^{(l)}$, wo die F_2 in den x_i, x_k, x_l, x_m quadratisch sind.

H. Taylor[27]), indem er, ähnlich wie *Salmon* (Nr. 2), die vier der projektiven Erzeugung zugrunde liegenden F_2 in geeigneter Weise in Ebenenpaare zerfallen läßt, zu einer übersichtlichen Darstellung und Konstruktion der 27 Geraden (und 45 Ebenen) gelangt.

Seien A_i ($x_i = 0$, $i = 1, .., 4$) vier Ebenen, die man als die eines Koordinatentetraeders wählen mag, $v = 0$ eine beliebige fünfte Ebene, und λ_i vier Parameter, so setze man die Identität an:

$$(3) \qquad \prod_i (x_i) - \prod_i (y_i) \equiv \prod_i (x_i) - \prod_i (x_i - \lambda_i v) \equiv F_4 \equiv v \cdot F_3.$$

Dann liefert die Gleichung $F_3 = 0$ eine F_3, die die zwölf Durchschnittsgeraden der Ebenenpaare (x_i, y_k; $i \neq k$) enthält; von diesen gelangt man durch lineare Konstruktionen und eine quadratische zu den 15 übrigen Geraden. Man beachte, wie hier die F_3 in der rationalen Gestalt $\frac{F_4}{v}$ erscheint.

Ersichtlich liegt hier eine elementar-stereometrische Konfiguration vor, die zugleich eine Übertragung[28]) des *Pascal*schen Kegelschnittsatzes auf die Geraden einer F_3 repräsentiert.

Man schneide die vier Ebenen A_i eines Tetraeders mit einer fünften Ebene v, und lege jeweils durch die Schnittachse (v, A_i) eine beliebige weitere Ebene, so bilden die letzteren die Ebenen eines zweiten Tetraeders, die die nicht entsprechenden Ebenen des ersteren in $3 \cdot 4$ Geraden treffen; dann geht durch diese 12 Geraden eine (einzige) F_3.

---

27) *Taylor*, London Tranc. 185 (1894), p. 37. Hier fehlt aber der Nachweis, daß man so zu einer allgemeinen F_3 (mit 19 Konstanten) gelangt, sowie die Durchführung im Texte. Vgl. *W. Franz Meyer*, Deutsche Math.-Ver. 34 (1925), p. 158.

28) Reduziert man die Identität (3) auf den Fall der Ebene, so ergibt sich damit ein einfacher Beweis für die Umkehrung des *Pascal*schen Satzes, wo die Existenz der *Pascal*schen Geraden (v) vorausgesetzt wird. Die Umkehrung, d. i. der *Pascal*sche Satz selbst, erschließt sich daraus ohne weiteres auf Grund des Satzes, daß durch fünf Punkte ein Kegelschnitt bestimmt ist. — Von ganz anderem Charakter ist eine weitere, von *W. Fr. Meyer,* Deutsche Math.-Ver. 9_1 (1901), p. 91, herrührende Übertragung des *Pascal*schen Satzes auf eine F_3. Man lege ein windschiefes Vierseit zugrunde und markiere auf jeder Kante drei Punkte. Verbindet man dann je irgendeinen dieser Punkte der drei ersten Kanten durch eine Ebene, schneidet sie mit der letzten Kante in einem Restpunkte und fährt zyklisch so fort, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die gegebenen $4 \cdot 3$ Punkte einer F_3 angehören, die, daß die vier Restpunkte inzident sind. Insbesondere ergibt sich so, daß für ein windschiefes Vierseit von Haupttangenten der F_3 die vier Berührungspunkte inzident sind, und umgekehrt. Über ein anderes Auftreten des *Pascal*schen Satzes bei gewissen 15 g der F_3 s. Nr. 18.

Zwei solche Tetraeder mögen, in Analogie zu den konjugierten Triedern (Nr. **3**) „konjugiert" heißen. Von den 15 g, die nach Ausschluß einer Doppelsechs verbleiben, sondere man drei solche ab, die eine T bilden. Die übrigen zwölf verteilen sich auf ein einziges Paar konjugierter Tetraeder. Die Ebenen je eines solchen Tetraeders ergänzen sich mit der abgesonderten T zu einem „T-Fünfflach". Umgekehrt lassen sich aus den 15 g gerade sechs solcher Fünfflache bilden, die zu je zweien eine T gemein haben. Zu jeder der 36 Doppelsechsen gehören somit 15 solche Paare konjugierter Tetraeder, so daß es im ganzen 540 gibt (Nr. **11**).

Greift man umgekehrt bei gegebener F_3 irgendein solches Paar $(x; y)$ heraus, so liegen die vier Durchschnittsgeraden entsprechender Ebenen (x_i, y_i) in einer Ebene (v).

In Anlehnung an die *Graßmann*sche Erzeugung der F_3 hat *H. Schroeter*[29]) zwei weitere lineare Erzeugungen von elementar-stereometrischem Charakter synthetisch untersucht. Durch ihre Einfachheit beachtenswert ist die zweite. Gegeben seien ein Punkt P_0 und vier windschiefe Gerade, die man in zwei Paare (p, q) und (r, s) zerlege. Durch P_0 lege man den Bündel von Ebenen E_v, die die vier Geraden resp. in den Spuren (X_p, X_q), (X_r, X_s) treffen. Ist X der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden $g_{pq} = (X_p, X_q)$ und $g_{rs} = (X_r, X_s)$, so ist der Ort von X eine allgemeine F_3.

Ohne weiteres erkennt man, daß außer den vier Geraden selbst auch deren beide Transversalen t_1, t_2 sowie die beiden Treffgeraden t_{pq} und t_{rs}, die von P_0 an (p, q) resp. (r, s) gehen, der F_3 angehören. Dabei bestimmen sich t_1 und t_2 durch eine quadratische Konstruktion, alle übrigen Geraden der F_3 linear.

Die Punkte X der F_3 sind auf das Bündel E_v gerade so, nur dualistisch bezogen, wie bei der *Clebsch*schen Abbildung (Nr. **11**) auf

---

29) *Schroeter,* J. f. Math. 96 (1884), p. 282. Bei der ersten Erzeugung sind gegeben zwei Ebenenbüschel mit den windschiefen Achsen a_1, a_2, ein Ebenenbündel mit einem festen Zentrum B, sowie zwei weitere windschiefe Gerade b_1, b_2. Ein laufender Punkt auf b_1 resp. b_2 liegt in einer Ebene (a_1) resp. (a_2) und beide Punkte in einer Ebene (B). Der Schnittpunkt der drei Ebenen erzeugt die F_3. Indessen ist diese Figur nur eine andere Auffassung von der Figur der zweiten Erzeugung. — Es ist nur eine Modifikation der zweiten Erzeugung, wenn *Fr. Deruyts,* Brux. Bull. (3) 22 (1891), p. 33 die F_3 erzeugt durch eine Ecke eines beweglichen Dreiecks, von dem zwei anstoßende Seiten sich auf zwei feste Gerade stützen, während die Gegenseite einen Strahlbüschel mit festem Zentrum beschreibt. Tritt an die Stelle des Strahlbüschels ein Kegel ν^{ter} Ordnung, so erscheint die F_3 ν-fach. Man erkennt sofort, daß die Einführung der Gegenseite überflüssig und das Dreieck durch einen Winkel ersetzbar ist.

die Punkte einer Ebene. Sind außer den vier Geraden drei beliebige Punkte X_i ($i = 1, 2, 3$) gegeben, durch die die F_3 gehen soll, so bestimmen die jeweiligen Treffgeraden $(X_i pq)$, $(X_i rs)$ drei Ebenen E_i, die sich in P_0 treffen. Damit ist die ganze Konfiguration linear festgelegt.

Umgekehrt denke man sich eine F_3 gegeben, und auf ihr vier windschiefe Gerade in zwei Paaren (p, q), (r, s) herausgegriffen. Von jedem Punkte X der F_3 lege man die Treffgeraden an (p, q) und (r, s), so bestimmen diese eine Ebene E_ν. Diese Ebenen E_ν bilden dann ein Bündel, deren Spitze der Treffpunkt zweier Geraden der F_3 ist, eben von t_{pq} und t_{rs}.

Ergänzt man die Figur zu einer symmetrischen, indem man ein drittes Paar (t, u) von Geraden hinzunimmt, so daß die sechs Geraden eine Sechs (halbe Doppelsechs) der F_3 bilden, und kombiniert dann je zwei Paare, so sind die drei zugehörigen Punkte X_0, X_0', X_0'' die Berührungspunkte einer Ebene T.

Man kann auch die beiden Figuren von *Schroeter* und *Taylor* in Zusammenhang bringen. Dann beachte man, daß sich unter den zwölf Geraden zweier konjugierter Tetraeder sechs windschiefe Quadrupel befinden. Legt man irgendeines derselben der *Schroeter*schen linearen Erzeugung der F_3 zugrunde, so lassen sich aus dem Quadrupel zwei Paare derart bilden, daß die beiden zugehörigen Punkte P_0 Schnittpunkte von Geradenpaaren sind, die unter den zwölf Ausgangsgeraden vorkommen.

Die analytische Durchführung der *Schroeter*schen Erzeugung ist mit einigen Schwierigkeiten verknüpft.

Man wähle P_0 als eine Ecke A_m $(0, 0, 0, 1)$ des Koordinatentetraeders, so lautet die Gleichung des Ebenenbüschels E_ν: $\nu_i x_i + \nu_k x_k + \nu_l x_l \equiv (\nu x) = 0$. Die Linienkoordinaten von p bezeichne man mit $p_{ik} = p_l$ usf., $p_{ml} = \pi_l$ usf., und entsprechend mit $(q_i, \varkappa_i)$, (r_i, ϱ_i), (s_i, σ_i) für die drei weiteren Geraden q, r, s. Ferner setze man $J_p = (\nu p)_{kl}$, $K_p = (\nu p)_{li}$, $L_p = (\nu p)_{ik}$, $M_p = \nu_i \pi_i + \nu_k \pi_k + \nu_l \pi_l \equiv (\nu \pi)$, usf.

Dann sind die Koordinaten eines laufenden Punktes von g_{pq} resp. g_{rs} von der Form: $tJ_p + t'J_q, \ldots, tM_p + t'M_q$ resp. $-uJ_r - u'J_s$, $\ldots, -uM_r - u'M_s$, und ein Punkt X der F_3 hat den vier linearen Gleichungen zu genügen:

$$J \equiv tJ_p + t'J_q + uJ_r + u'J_s = 0, \quad K = 0, \quad L = 0,$$
$$M \equiv tM_p + t'M_q + uM_r + u'M_s = 0,$$

aus denen die Werte der t, t', u, u' zu entnehmen sind. Mit Rücksicht auf die Syzygie $\nu_i J + \nu_k K + \nu_l L \equiv 0$ kann man etwa die Gleichung $L = 0$ unterdrücken.

Damit erhält man für die Koordinaten x von X:

$$\varrho x_i = -(\nu p q)(JM)_{rs} + (\nu r s)(JM)_{pq}, \ldots,$$
$$-\varrho x_m = M_q M_s(\nu p r) - M_q M_r(\nu p s) + M_p M_r(\nu q s) - M_p M_s(\nu q r).$$

Diese Darstellung läßt sich auf Grund der Zerlegungen $(JK)_{rq} = \nu_l(\nu p q)$ usf. vereinfachen.

Setzt man sodann $v_i = M_q p_i - M_q p_l$, $w_i = M_s r_i - M_r s_i$ $(i, k, l = 1, 2, 3)$, so werden die x proportional den Determinanten der Matrix:

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} \nu_i & \nu_k & \nu_l & 0 \\ v_i & v_k & v_l & (\nu p q) \\ w_i & w_k & w_l & (\nu r s) \end{vmatrix},$$

und die Gleichung der F_3 erscheint in der Form

$$(4') \qquad F_3 \equiv (x y z) = 0,$$

wo

$$\begin{cases} y_i = \varkappa_i(p x) - \pi_i(q x) + x_m(p q)_{kl}, \\ z_i = \sigma_i(r x) - \varrho_i(s x) + x_m(r s)_{kl}, \end{cases}$$

womit die *Clebsch*sche Darstellung (Nr. **11**) erreicht ist.

Durch elementare Umformungen von (4′) erkennt man, wie die Geraden p, q, r, s, t_1, t_2, t_{pq}, t_{rs} der F_3 angehören. Durch geeignete Spezialisierung des Koordinatentetraeders lassen sich praktisch weitere Vereinfachungen von (4′) erzielen, wodurch aber die Symmetrie des Aufbaus zerstört wird.

Auf noch weitere Erzeugungen der F_3 kann nur kurz hingewiesen werden. Sie stützen sich auf besondere Konfigurationen auf der F_3, insbesondere auf die eines windschiefen Fünfecks von verschiedenen Gesichtspunkten aus, bei *G. Affolter*[30]), *H. Picquet*[31]), *G. Kohn*[32]).

---

30) *Affolter,* Arch. Math. Phys. 56 (1874), p. 113. Gegeben ist ein windschiefes Fünfseit Φ, nebst einer zu seinen Seiten windschiefen Geraden g'. Irgendeine Ebene des Büschels (g') trifft die Seiten von Φ in fünf Punkten, die eine c_2 bestimmen; letztere erzeugt eine F_3. Die sechs Geraden der Figur liegen auf der F_3; die übrigen 21 lassen sich durch lineare und quadratische Konstruktionen herleiten (was auf diese Weise nach Angabe von *Schläfli* schon *Steiner* getan hat).

Zieht man indessen die Abbildung der Nr. **11** heran, so lassen sich die übrigen 21 g bei geeigneter Reihenfolge lediglich durch lineare Konstruktionen gewinnen. — Auf gegeben gedachter F_3 läßt sich noch in mannigfaltiger Weise ein Fünfseit Φ herausgreifen, z. B. $(a_i, b_k, c_{kl}, c_{mn}, c_{il})$. Es gehören dann noch zwei Gerade (c_{lm} und c_{ln}) dazu, deren jede die Rolle der obigen Geraden g' übernehmen kann. Stillschweigend gilt die Beschränkung auf eine F_3 mit 27 reellen g.

31) *Picquet,* Bull. Soc. math. 4 (1876), p. 128. Gegeben ist eine ∞^4-lineare Schar S von F_2 nebst einer Geraden g'. Irgendeine Ebene des Büschels (g')

Natürlich lassen sich alle Erzeugungen dem Schema $3 = 1 + 1 + 1$ unterordnen. Wirft man einen zusammenfassenden Rückblick auf alle diese und ähnliche Erzeugungen, so vermißt man bei deren Urhebern zumeist den Nachweis, daß die jeweils in Rede stehende Erzeugung wirklich zum „allgemeinen" F_3-Typus mit 19 Konstanten führt, wodurch allein sich die „Gleichwertigkeit" verschiedener Erzeugungen ergeben könnte. Überdies beschränken sie sich, was die Realitätsverhältnisse angeht, mit wenigen Ausnahmen (so *Schläfli*, *Sturm*, *Cremona*)

---

trifft S in einer entsprechenden Schar S' von c_2; der zu S' apolare Klassenkegelschnitt γ_2 erzeugt dann im allgemeinen eine F_3. Sooft aber die F_2 von S einen Grundpunkt G gemein haben, sondert sich von der F_3 eine Ebene ab. Besitzt daher S fünf Grundpunkte G — die umgekehrt S eindeutig bestimmen —, so erzeugt γ_2 eine (allg.) F_3.

Für jede der fünf Ebenen (g'), die durch einen G geht, stellt dieser, doppelt zählend, die zugehörige γ_2 dar. Läßt man indessen die variierende Ebene des Büschels sich dieser besonderen Lage (durch G) beliebig nähern, so erscheint γ_2 als ein Geradenpaar mit dem Doppelpunkte G. Es ergeben sich so gerade die fünf Geradenpaare der F_3, die g' treffen (s. Nr. 2).

Greift man umgekehrt auf gegebener F_3 irgendeine (reelle) Gerade g' heraus, so gilt auch der Umkehrungssatz.

32) *Kohn*, Wien Ber. 99 (1890), p. 683. Es liege ein Bündel von C_3 mit fünf Grundpunkten G vor, nebst einem linearen Komplexe K_1. Dann erfüllen die Punkte, in denen ∞^2 Gerade von K_1 je von einer C_3 des Bündels berührt werden, eine (punktallg.) F_3 Jedes der fünf, K_1 angehörenden Geradenbüschel mit einem Zentrum G bildet die Tangenten der F_3 in G.

Auf Grund dieser synthetisch durchgeführten Erzeugung der F_3 werden über solche Gruppen von fünf Punkten auf gegeben gedachter F_3 Sätze bewiesen, die zum Teil bereits *E. Caporali*, Rom Linc. Rend. (3) 1 (1877), p. 232, 234; Napoli Rend. 20 (1881), p. 122, der sie „Polfünfecke" nennt, analytisch hergeleitet hatte. Es ergeben sich aber so noch andere bemerkenswerte Sätze, z. B. der folgende. Sind die fünf Ecken und zehn Diagonalpunkte eines räumlichen Fünfecks, zusammen mit noch zwölf weiteren Punkten A die Schnittpunkte von drei F_3, so liegen sie auch auf einer F_2, und die dem Fünfeck umbeschriebene und irgendeinem A bestimmte C_3 hat als Tangente in letzterem eine Erzeugende der F_2. S. die Ergänzungen bei *F. Gonseth*, Ens. math. 20 (1918), p. 90.

Noch sei auf zwei weitere eigenartige Erzeugungen der F_3 hingewiesen. Eine solche wird hergestellt vermöge einer eineindeutigen Beziehung zwischen den Punkten einer F_2 und den Geraden einer linearen Kongruenz von *G. Majcen*, Deutsche Math.-Ver. 14 (1905), p. 438; Wien Ber. 117 (1908), p. 631, wo daraufhin besonders die C_3 und C_4 auf der F_3 untersucht werden, desgl. Agram Ak. 175 (1909), p. 87; 178 (1911). Andererseits erscheint die F_3 mit drei d_2 als eine ausgeartete „*Weddle*sche F_4", der Ort der Spitzen der durch sechs Raumpunkte gehenden Kegel 2. Ordnung bei *F. Morley* und *J. R. Conner*, Amer. J. 31 (1909), p. 263. Hier finden die Methoden der Apolarität eine spezifische Verwendung. Über die *Weddle*sche F_4 s. Genaueres bei *C. Hierholzer*, Math. Ann. 4 (1871), p. 173; *E. Hunyady*, J. f. Math. 92 (1882), p. 304; vgl. Nr. 2, Note 3a.

auf den ersten Hauptfall, wo alle Geraden und Ebenen der F_3 reell ausfallen.

10. Schläflis Diskussion der 27 Geraden und 45 Ebenen. Sechsen und Doppelsechsen. Fünfen. Greift man mit *Schläfli*[33]), was noch auf 72 Weisen (s. auch Nr. **11**) möglich ist, aus den 27 Geraden sechs zueinander windschiefe a_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ heraus, so existiert ein komplementäres (konjugiertes) Sextupel b_i von ebenfalls windschiefen Geraden, derart, daß immer b_i alle a exkl. a_i trifft. Ein solches Paar von Sextupeln („Sechsen") heißt eine „Doppelsechs" („double six"). Jede der 15 Ebenen (a_i, b_k) trägt noch eine weitere Gerade c_{ik}, den Schnitt mit der konjugierten Ebene (a_k, b_i). Umgekehrt ist die ganze Figur bereits eindeutig bestimmt (s. auch Nr. **9**), wenn man von fünf windschiefen Raumgeraden ausgeht, die zugleich von einer sechsten (als der einzigen Transversale) getroffen werden („Satz der Doppelsechs"). Solcher „uneigentlichen Fünfen" von Raumgeraden gibt es eine ∞^{19}-Schar, in Übereinstimmung mit der Anzahl der 19 Konstanten einer

33) *Schläfli,* Quart. J. 2 (1858), p. 110, bes. p. 115. Einzelne Sätze über 2, 3, . ., 6 windschiefe Gerade der F_3 finden sich schon vorher bei *S. Brioschi,* Ann. fis. mat. 6 (1855), p. 374. An den „Satz der Doppelsechs" knüpft eine ganze Spezialliteratur an. Einen einfachen Beweis vermöge linearer Konstruktion der Figur gibt *A. C. Dixon,* Quart. J. 40 (1909), p. 381. Einen projektiven Beweis liefert *H. F. Baker,* London Roy. Soc. Proc. (A) 87 (1910), p. 597, einen anderen durch Rechnung London Math. Soc. Proc. (2) 15 (1916), p. 280. *E. R. Wakeford,* London Math. Soc. Proc. (2) 15 (1916), p. 340, weist nach, daß der Satz der Doppelsechs gleichwertig ist mit dem von *Miquel,* daß die Brennpunkte der fünf, den Teilvierseiten eines vollständigen ebenen Fünfseits einbeschriebenen Parabeln auf einem Kreise liegen, indem er eine C_3, die fünf der Geraden einer Sechs zu Sekanten besitzt, geeignet kollinear transformiert und dann projiziert. Eine Verallgemeinerung dieser Betrachtung findet sich bei *T. Kubota,* Tôhoku Sc. Rep. 6 (1917), p. 89, indem er die Leitstrahlen einer gewissen Schar linearer Kongruenzen auf die Kreise einer Ebene abbildet. Erweiterungen des Satzes auf sechs usf. Gerade, beim Studium von (2, 3)-deutigen *Cremona*-Transformationen, erhält *T. L. Wren,* London Math. Soc. Proc. (2) 15 (1916), p. 144. Eine Verallgemeinerung anderer Art, als eine Analogie zum *Desargues*schen Satze, leitet *L. Berzolari* ab, Palermo Rend. 20 (1905), p. 229. Eine Ausdehnung auf den S_5, als ein gewisser „Sechsflachsatz über F_2" findet sich bei *H. W. Richmond,* Cambridge Phil. Soc. Proc. 14 (1908), p. 475. Erwähnt sei noch, daß die Bedingung dafür, daß fünf Gerade eine Transversale besitzen, in einfacher Gestalt aufgestellt wird von *H. M. Taylor,* Mess. (2) 31 (1902), p. 135.

Ferner sei noch hingewiesen auf die Beziehungen der $\bar{6}$ zu den R_4 auf der F_3 bei *A. P. Thompson,* Mess. (2) 22 (1902), p. 130; das Verhalten der $\bar{6}$ gegenüber *Cremona*-Transformationen, bei *E. Kasner,* Amer. J. Math. 25 (1903), p. 117; die Behandlung der $\bar{6}$ vom S_5 aus bei *H. W. Richmond,* Cambr. Phil. Soc. Proc. 14 (1908), p. 475 (s. oben), und vom S_4 aus bei *H. F. Baker,* ebenda 20 (1920), p. 153. Im übrigen vgl. Nr. **6**.

allgemeinen F_3-Gleichung. Dabei sind noch windschief die Paare der Typen $(a_i, c_{kl};\ b_i, c_{kl};\ c_{ik}, c_{il})$, dagegen inzident die Paare der Typen $(a_i, c_{ik};\ b_i, c_{ik};\ c_{ik}, c_{lm})$.

Die 45 Ebenen T setzen sich zusammen aus den $2 \cdot 15$ Ebenen (a_i, b_k, c_{ik}) und den 15 Ebenen (c_{ik}, c_{lm}, c_{np}).

Es gibt noch eine zweite Art von „Geradenfünfen", das sind die „eigentlichen", die sich nicht durch eine sechste zu einer Sechs ergänzen lassen, sondern zwei Transversalen besitzen, z. B. $c_{ik}, c_{il}, c_{im}, c_{in}, c_{ip}$, mit den beiden Transversalen a_i, b_i.

Von Bedeutung ist der Satz von *J. Lüroth*[34]), wonach die F_3 erscheint als Ort der Punkte, von denen die Geraden einer Sechs als Tangenten einer γ_2 gesehen werden (s. auch Nr. **11**). Der Satz kann auch als eine neue Erzeugung der F_3 angesprochen werden.

11. Clebschs Abbildung der Fläche auf eine Ebene. Geometrie auf der Fläche. Schiefe Projektion. Sekantenprojektion und Sekantenabbildung. Löst man nach *Clebsch*[35])[35a]) die Gleichungen von drei

34) *Lüroth* bei *Clebsch,* Math. Ann. 1 (1869), p. 258—259. Allgemein hat *G. Kohn,* Monatsh. Math. Phys. 2 (1891), p. 293, den Ort der Spitzen der Kegel (2. Ordnung) untersucht, die sechs beliebige windschiefe Gerade g berühren. Dieser Ort ist eine F_8, von der sich im besonderen fünf Ebenen abspalten, wenn die g eine „Sechs" bilden. — Den *Lüroth*schen Satz hat *G. Kohn,* Wien Ber. 114 (1905), p. 143 invariantentheoretisch dahin formuliert, daß für alle Punkte der F_3 der „Wurf" (Inbegriff der absoluten Invarianten) der sechs, eine „Sechs" projizierenden Ebenen konstant ist.

35) *Clebsch,* J. f. Math. 65 (1866, dat. Okt. 1865), p. 359. Auch *Cremona* gelangt in seiner Preisschrift (s. Nr. **15**) von 1866 auf synthetischem Wege zu der Abbildung. [Über eine Anwendung der Abbildung auf die Konstruktion einer c_4 durch 14 Punkte s. *H. Müller,* Progr. Lahr 1869.] Verbesserungen der *Cremona*schen Methode geben *C. Segre* und *R. Sturm,* Arch. Math. Phys. (3) 10 (1906), p. 209, 216, sowie *R. Sturm,* J. f. Math. 134 (1908), p. 288.

Die Abbildungen von *Clebsch* und *Cremona* verwenden *E. Caporali,* In Mem. *D. Chelini,* 1881, p. 144, und *F. Dumont,* Nouv. Ann. (3) 15 (1896), p. 318 für eine Reihe von Abzählungsfragen. — Die Abbildung der F_3 führt auch sofort zu einer Abbildung der Verwandschaft zwischen dem achten und neunten Schnittpunkt irgend zweier Individuen eines c_3-Netzes mit sieben gemeinsamen Grundpunkten; ihr entspricht die Verwandtschaft zwischen den beiden Restschnittpunkten der F_3 mit den Geraden eines Bündels, dessen Spitze auf der F_3 liegt. S. die nähere Ausführung bei *A. Emch,* Amer. Math. Soc. Proc. 30 (1924), p. 527, der auch, im Anschluß daran, gewisse Schließungsprobleme behandelt.

Die Darstellung der F_3 als dreireihige Determinante verfolgt in arithmetischer Hinsicht *W. P. Milne,* Ann. of Math. (2) 23 (1921), p. 70; Amer. J. Math. 43 (1922), p. 102, insbesondere für rationale Lösungen der Gleichung $F_3 = 0$. Andererseits bringt *W. P. Milne,* London Math. Soc. Proc. (2) 21 (1921), p. 134, 325, 373, die *Clebsch*sche Abbildung der F_3 in Zusammenhang mit der Apolaritätstheorie auf der c_3 und der *Weddle*schen Fläche, s. Nr. **2**, Note 3a.

nach *Graßmann* (Nr. 7) kollinearen Ebenenbündeln nach den Koordinaten x_i eines Flächenpunktes Q auf, so werden die x_i proportional vier (homogenen) kubischen Formen $f_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ der „Parameter" λ.

Die Abbildung gibt nicht nur über bereits bekannte Konfigurationen auf der F_3 (s. den Text) neue Aufschlüsse, sondern sie führt auch zu neuen Konfigurationen. Es kann hier nur auf einige Bildungen dieser Art hingewiesen werden. Nach *Cremona,* Ist. Lomb. Rend. 3 (1870), p. 209, lassen sich aus den 45 Ebenen der F_3 Neuntupel („*Ennaeder*") bilden, deren jedes die 27 Geraden ausschneidet; diese zerlegen sich in 40 „*erster Art*" und 160 „*zweiter Art*", je nachdem sie auf vier Arten oder aber nur auf eine in drei Trieder zerfallen (s. auch Nr. 22). — *E. Bertini,* Ann. di mat. 12 (1884), p. 301, hat überhaupt aus den 45 Ebenen alle Polyeder hergestellt, von denen keine Kante der F_3 angehört; dazu genügt die Bestimmung gewisser „*Hauptpolyeder*". — *G. Affolter,* Arch. Math. Phys. 56 (1874), p. 113, und besonders eingehend *Sturm*, Math. Ann. 23 (1884), p. 289, haben aus Geraden der F_3 geschlossene „*Vier-, Fünf-, Sechsseite*" gebildet (vgl. *Zeuthen,* Nr. 16). — Nach *F. Schur,* J. f. Math. 95 (1883), p. 207, lassen sich die Treffpunkte der 27 Geraden auf 45 Arten zu je 12 in drei „*desmischen Tetraedern*" anordnen; es kommt das einfach darauf hinaus, daß die Verbindungsgerade zweier Treffpunkte, an denen vier verschiedene Gerade partizipieren, die F_3 dann und nur dann in einem dritten solchen Punkt trifft, wenn die vier Geraden ein windschiefes Viereck bilden; eine solche Gerade heiße eine „Treffpunktegerade". Bei gegebenem windschiefem Viereck sind die beiden Diagonalen solche Treffpunktegeraden. Zu jeder Diagonale gehört ein Paar, aus Geraden der F_3 gebildeter, perspektiver Dreiseite; mithin treffen sich auch die Verbindungslinien entsprechender Ecken als drei Treffpunktgerade in einem Punkte der F_3. Vermöge der *Clebsch*schen Abbildung der F_3 ist eine leichte Übersicht der Figur möglich. Es lassen sich zwei Gegenseiten des Vierecks einer „Sechs" so entnehmen, daß die beiden andern Gegenseiten der konjugierten Sechs angehören. Man hat also nur einen Typus, etwa $\{(a_i, a_k), (b_l, b_m)\}$. Greift man die beiden Treffpunkte (a_i, b_l) und (b_m, a_k) heraus, so sind c_{il} und c_{km} die zugehörigen Restgeraden, die in einem dritten Treffpunkte zusammenstoßen, und die beiden perspektiven Dreiecke, deren Ebenen sich in der Diagonale d schneiden, sind (a_i, b_l, c_{il}), (b_m, a_k, c_{km}). Die Verbindungsgeraden d_2, d_2', d_2'' zugeordneter Ecken inzidieren in einem Punkte D_2, und entsprechend der zweiten Diagonale d_2 existiert ein Inzidenzpunkt D_1.

Wir setzen die vollständigen Schemata her:

$$d_2 = \{(a_i, b_l), (b_m, a_k), (c_{im}, c_{kl})\}, \quad d_2' = \{(a_i, c_{il}), (b_m, c_{km}), (c_{im}, c_{np})\},$$
$$d_2'' = \{(b_l, c_{il}), (a_k, c_{km}), (c_{kl}, c_{np})\};$$
$$d_1 = \{(a_i, b_m), (b_l, a_k), (c_{il}, c_{km})\}, \quad d_1' = \{(a_i, c_{im}), (b_l, c_{kl}), (c_{il}\, c_{np})\},$$
$$d_1'' = \{(b_m, c_{im}), (a_k, c_{kl}), (c_{km}, c_{np})\}.$$

Im ganzen hat man 15 Gerade, die sich zusammensetzen aus 9 Geraden der F_3, nämlich aus den 4 Geraden des Vierecks, aus den 4 Restgeraden $(c_{il}, c_{km}; c_{im}, c_{kl})$ und der weiteren c_{np}, andererseits aus den $2 \cdot 3$ Verbindungsgeraden zugeordneter Ecken als Treffpunktegeraden. Ferner hat man 20 Punkte, einmal 18 Treffpunkte zweier Geraden der F_3 mit einer Treffpunktgeraden, sodann 2 Inzidenzpunkte von 3 Treffpunktegeraden. Es ist bemerkenswert, daß trotz der

Deutet man die λ als Koordinaten eines Punktes P in einer festen Hilfsebene E, so stellt in ihr $\sum u_i f_i = 0$ eine lineare ∞^3-Schar (Gebüsch) von c_3 mit sechs Grundpunkten A_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ dar (und umgekehrt), d. h. jede der c_3 ist das Bild eines ebenen Schnittes $\sum u_i x_i = 0$ der F_3.

Jedem Punkt P der Ebene E, als siebentem Grundpunkt eines c_3-Netzes, entspricht ein Punkt Q der F_3 als Grundpunkt eines Ebenenbündels, und vice versa. Die A_i sind die *„Fundamentalpunkte"* der

---

verschiedenen Natur der 15 Geraden und 20 Punkte das ganze eine Konfiguration $\{15_4, 20_3\}$ bildet.

Aus der zum Viereck gehörigen Doppelsechs lassen sich gerade noch zwei weitere windschiefe Vierecke $\{(b_i, b_k), (a_n, a_p)\}$, $\{(a_l, a_m), (b_n, b_p)\}$ je mit derselben Konfiguration bilden; in dem System aller drei Konfigurationen sind dann sämtliche 27 Geraden der F_3 enthalten.

Über die *E. Pascal*schen Konfigurationen s. Nr. **22**.

35a) Die umgekehrte Aufgabe, bei gegebener Abbildung, d. i. bekannter Lage der sechs Fundamentalpunkte A_i, die Gleichung der zugehörigen F_3 zu ermitteln, erledigt *A. B. Coble*, John Hopkins Univ. Circ. 1911, p. 59, auf invariantentheoretischer Grundlage [vgl. auch *F. Schottky*, J. f. Math. 146 (1916), p. 129, wo ähnliche Eliminationsaufgaben auf Grund algebraischer Beziehungen zwischen Thetafunktionen hehandelt werden.]

In der *Gauß*schen Ebene sind die A_i repräsentiert durch sechs Werte ζ_i einer komplexen Variablen ζ, die Wurzeln einer Gleichung 6. Grades. Mittels der Differenzen $\zeta_r - \zeta_s$ werden gewisse Ausdrücke B_i gebildet, und innerhalb dieser jene Differenzen dem *Clebsch*schen Übertragungsprinzip (s. Nr. **12**) unterworfen. Damit gehen die B_i über in Linearformen der x, und die Gleichung der F_3 resultiert in der *Cremona*schen Hexaederform $\sum C_i^3 = 0$ (s. Nr. **12**).

Auf elementarem Wege gelangt *W. Fr. Meyer* zum Ziele, Deutsche Math.-Ver. 36 (1927), p. 228. Das Koordinatendreieck wird so gelegt, daß jede Seite ein Paar der A trägt; die Gleichungen der 15 Geraden c_{ik}, sowie der 6 Kegelschnitte B_i lassen sich leicht aufstellen. Mittels ihrer werden vier geeignete Individuen des c_3-Gebüsches (durch die A) konstruiert. Die Elimination der Parameter führt dann direkt zur Gleichung der F_3 als dreireihiger Determinante (gleich Null), und damit zur *Graßmann*schen Erzeugung. In den Sonderfällen, wo die F_3 einen oder mehrere d_2 erhält (s. Note 36), findet die Aufgabe ihre direkte Erledigung auf Grund einer einfachen Identität. Auf derselben Grundlage werden aber auch, ebenda 37 (1928), p. 74, die anschließenden Aufgaben behandelt, die Gleichungen der 45 Tritangentialebenen und der 27 Geraden der F_3 rational und explizite in den Koordinaten der A in einfacher, übersichtlicher Gestalt darzustellen. Das Nämliche gilt für die 28 Doppeltangenten der durch die *Geiser*sche Projektion (s. Nr. **16**) aus der F_3 hervorgehenden c_4. Diese Gleichungen können weiterhin dazu dienen, nicht nur bekannte Lagenbeziehungen jener Gebilde rechnerisch zu bestätigen, sondern auch zu neuen zu gelangen. — Es sei auch noch hingewiesen auf *L. E. Dickson*, Quart. J. 33 (1901), p. 145; Amer. Math. Soc. Proc. (2) 8 (1901), p. 63, wo die Konfiguration der 27 g und 45 E durch eine einzige kubische Form repräsentiert wird. Dabei liegt zugrunde eine einfache endliche kont. Gruppe linearer homogener Substitutionen mit 78 Parametern.

„*Abbildung*“[35b])[35c]), für die die Eindeutigkeit des Entsprechens aufhört; das Bild irgendeines Punktes der Geraden a_i — wo die a_i eine Sechs

35b) Sind so nach *Clebsch* und *Graßmann* die Punkte einer F_3 und einer Ebene (1, 1)-deutig aufeinander bezogen, so lassen sich mit Hilfe von (1, 1)-deutigen („*Cremona*schen“) Transformationen des Raumes aus einer F_3 Flächen höherer Ordnung ableiten, wie dies *Cremona, Noether, Sturm, Montesano, M. Pieri* u. a. ausgeführt haben, s. Art. III C 6 b, *G. Castelnuovo* u. *F. Enriques*, Die algebraischen Flächen vom Gesichtspunkte der birationalen Transformationen aus.

Auf eine bemerkenswerte *Cremona*sche Transformation des Raumes, die durch vier windschiefe Gerade bestimmt ist, und mit der Theorie der F_3 und C_3 eng zusammenhängt, sei besonders hingewiesen: s. *E. K. Wakeford*, London Math. Soc. Proc. (2) 21 (1921), p. 98; *H. F. Baker*, ebenda p. 114. Durch die vier Geraden geht ein Gebüsch von F_3, die zugleich deren beide Transversalen enthalten, so daß sich irgend zwei F_3 des Gebüsches noch in einer Rest-C_3 schneiden. Ist die Gleichung des F_3-Gebüsches $\sum v_i F_3^{(i)}(x) = 0$, so deute man vermöge der Gleichungen $\varrho y_i = F_3^{(i)}(x)$ die $F_3^{(i)}(x)$ als Punkte (y) eines zweiten Raumes. Dann ist die so festgelegte Beziehung zwischen beiden Räumen umkehrbar: es ergibt sich $\sigma x_i = G_3^{(i)}(y)$, wo das Gebüsch von G: $\sum u_i G_3^{(i)}(y) = 0$ wiederum ein solches von Flächen 3. Ordnung durch vier feste Gerade ist. Man erkennt das, wenn man das Gebüsch $\{F_3^{(i)}\}$ aus vier geeigneten Grundindividuen zusammensetzt. Zu dem Behuf lege man durch zwei der Geraden zwei F_2, F und G, die noch je die dritte resp. vierte Gerade enthalten. Wählt man die beiden letzteren Geraden als Koordinatenkanten, dann gestattet die obige Transformation die kanonische Darstellung $\varrho y_i = F(x) x_i$, $\varrho y_k = F(x) x_k$, $\varrho y_l = G(x) x_l$, $\varrho x_m = G(x) x_m$, und ihre Umkehrung die durchaus analoge: $\sigma x_i = F'(y) y_i$, $\sigma x_k = F'(y) y_k$, $\sigma x_l = G'(y) y_l$, $\sigma x_m = G'(y) y_m$. Somit entspricht jeweils den Ebenen des einen Raumes ein Gebüsch von F_3 mit vier Grundgeraden des anderen Raumes. Daraus folgt, daß die Geraden je des einen Raumes übergehen in die ∞^4 C_4 des anderen Raumes, die dessen vier Grundgerade zu Sekanten besitzen.

In jedem der beiden Räume haben je zwei der in Rede stehenden C_3 noch sechs Restsehnen gemein; diese Figur geht über in die sechs C_3, die sechs beliebige windschiefe Gerade als Sehnen haben. (Über die nähere Bestimmung dieser sechs C_3 s. *W. Franz Meyer*, Apolarität, 1883, Abschn. III.)

Durch irgend zwei C_3 je einer Schar geht im allgemeinen keine F_3, wohl aber eine einzige solche, wenn die beiden C_3 noch einen Punkt gemein haben. Im besonderen kann man die beiden Räume sowie ihre vier Grundgeraden zusammenfallen lassen. Denkt man sich umgekehrt irgendeine partikuläre (eigentliche) F_3 eines Gebüsches durch vier Gerade, und legt diese F_3 als gegeben zugrunde, so kann man diese Geraden etwa als b_i, b_k, b_l, b_m wählen. Vermöge der *Clebsch*schen Abbildung entsprechen ihnen die vier Kegelschnitte B_i, B_k, B_l, B_m. Ergänzt man diese mittels einer willkürlichen Geraden c_1 zu einer c_9, die in den A (mindestens) d_3 besitzt, so erkennt man, wie dem Netz der c_1 eine ∞^2 Schar von C_3 auf der F_3 entspricht, die aus ihr durch ein die vier obigen Geraden enthaltendes Netz von F_3' ausgeschnitten werden. Durch lineare Zusammensetzung dieses Netzes mit der F_3 geht wieder das ursprüngliche Gebüsch hervor.

Es sei noch erwähnt, daß mit der obigen Figur des F_3-Gebüsches die von sieben windschiefen Geraden verknüpft ist, die einer F_4 angehören. Damit bilden — ist eine Richtung (Linienelement) durch A_i. Einer Geraden b_i der konjugierten Sechs (Nr. **10**) korrespondiert der Kegelschnitt B_i, der durch die A exkl. A_i geht.

Die Bilder der 15 übrigen Geraden auf der F_3 sind die 15 Verbindungsgeraden der Punktepaare A_i, A_k, die ebenfalls mit c_{ik} bezeichnet seien.

Allgemein gilt: „Jede c_{3n} der Ebene E mit (wenigstens) n-fachen Punkten d_n in den A korrespondiert dem Schnitt C_{3n} der F_3 mit einer F_n, und vice versa."

So bilden die 15 Geraden c_{ik} nebst den sechs Kegelschnitten B_i in E eine $c_{3\cdot 9}$ mit d_{10} in den A; mithin werden die 27 Geraden der F_3 durch eine (Schar) von F_9 ausgeschnitten, wie schon *Cayley* und *Clebsch* (Nr. 2) früher gezeigt hatten. Aber auch die 45 „Ebenen", die 36 Doppelsechsen und die 120 resp. 540 Paare konjugierter Trieder resp. Tetraeder (Nrn. 2, 8, **10**) gestatten jetzt eine deutliche Übersicht, die auch den inneren Zusammenhang hervortreten läßt.

Von den 45 „Ebenen" sind 30 vom Typus (a_i, b_k, c_{ik}) und 15 vom Typus (c_{ik}, c_{lm}, c_{np}).

Die 36 Doppelsechsen zerlegen sich in: 1. die eine, bei der Abbildung ausgezeichnete: (a_i, b_i); 2. die 15 vom Typus: $(a_i, b_i, c_{kl}, c_{km}, c_{kn}, c_{kp})$, $(a_k, b_k, c_{il}, c_{im}, c_{in}, c_{ip})$; 3. die 20 vom Typus: $(a_i, a_k, a_l, c_{mn}, c_{mp}, c_{np})$, $(b_m, b_n, b_p, c_{ik}, c_{kl}, c_{li})$.[35d)]

Werden die 120 Triederpaare je durch ihre $3 \cdot 3 = 9$ Schnittgeraden angegeben, so hat man: 1) $2 \cdot 10 = 20$ Paare vom Typus: $(a_i, a_k, a_l;\ b_i, b_k, b_l;\ c_{kl}, c_{il}, c_{ik})$; 2) 10 Paare vom Typus: $(c_{im}, c_{in}, c_{ip};\ c_{km}, c_{kn}, c_{kp};\ c_{lm}, c_{ln}, c_{lp})$; 3) $6 \cdot 15 = 90$ Paare vom Typus: $(a_i, a_k, c_{np};\ c_{km}, c_{im}, b_l;\ c_{kl}, c_{il}, b_m)$. Nach *Steiner*, l. c. p. 655, gehören zu jedem

---

sieben windschiefe Gerade auf einer F_4 liegen, ist eine einzige Bedingung notwendig und hinreichend, die *Cayley*, London Math. Soc. Proc. 3 (1871), p. 19, 198 genauer untersucht hat.

35c) Bezüglich der transzendenten Darstellung der Punkte einer F_3 durch mehrfach periodische resp. Thetafunktionen, wie sie *G. Darboux, E. Picard, G. Humbert, E. Traynard* u. a. verfolgt haben, sei auf das Werk von *H. F. Baker*, Multiple periodic functions, Cambridge 1907, verwiesen, sowie auf *F. Schottky*, Berl. Ber. 1914, p. 966; J. f. Math. 146 (1916), p. 129.

35d) Für manche Anwendungen bedarf man auch der Anzahlen der verschiedenen windschiefen Fünfen, Vieren, Dreien und Zweien, die sich aus den 27 g bilden lassen. Deren leicht aufstellbare Schemata ergeben folgendes. Von „uneigentlichen" Fünfen (s. Nr. **10**), mit nur einer Transversale, gibt es 432, von „eigentlichen", mit zwei Transversalen, 270; von Vieren 980, von Zweien 216. Eine Drei ergänzt sich vermöge ihrer drei Transversalen zu einer „Doppeldrei"; solcher existieren 360. Über eine Anwendung der letzteren auf die Gruppentheorie der F_3 s. Nr. **22**.

Paare konjugierter Trieder zwei andere, so daß die $3 \cdot 9$ Schnittgeraden die 27 Geraden der F_3 sind; solcher „*Ternen*" gibt es also 40.

Endlich lassen sich auch die $36 \cdot 15 = 540$ Paare konjugierter Tetraeder (Nr. **10**) leicht kennzeichnen. Schließt man von den 27 Geraden irgendeine Doppelsechs, z. B. (a_i, b_i) aus, so verbleiben noch 15 Gerade (c_{ik}) (s. auch Nr. **18**). Spaltet man von diesen wiederum eines der 15 Tripel ab, die eine Ebene T bilden, z. B. c_{il}, c_{kn}, c_{mp}, so bilden die zwölf übrigen auf nur eine Weise die Durchschnittsachsen nicht zugeordneter Ebenen (x_i, y_k) zweier konjugierter Tetraeder, nach dem Determinantenschema: $\{\cdot, c_{ik}, c_{lm}, c_{np};\ c_{lm}, \cdot, c_{kp}, c_{im};\ c_{ip}, c_{mn}, \cdot, c_{kl};\ c_{km}, c_{lp}, c_{in}, \cdot\}$. Hier deuten die vier Punkte die Schnittlinien entsprechender Ebenen (x_i, y_i) an, die nicht auf der F_3 liegen, wohl aber auf einer neunten Ebene (v) (s. Nr. **10**). Aus den 12 Geraden lassen sich gerade sechs windschiefe Quadrupel bilden, vom Typus $(c_{ik}, c_{im}, c_{in}, c_{ip})$.

Die Kegelschnitte C_2 auf der F_3 sind die Restschnitte der Ebenenbüschel durch die 27 Geraden a_i, b_i, c_{ik}. Ihnen entsprechen in der Ebene E Kurvenbüschel, und zwar der Reihe nach, der kubischen rationalen Kurven r_3 mit d_2 in A_i, und einfach gehend durch die fünf übrigen A; der Geraden durch A_i; endlich der c_2 durch irgend vier der A.

Damit sind alle Möglichkeiten erschöpft, wie eine ebene C_3 auf der F_3 resp. ihre Bildkurve c_3 zerfallen kann.

Von besonderem Interesse sind die verschiedenen zerfallenden Schnittkurven C_6 der F_3 mit einer eigentlichen (veränderlichen) F_2. Als Kontrolle dient mit Vorteil die umgekehrte Auffassung, wonach jene C_6 erscheinen als Schnitte einer festen F_2 mit einer (veränderlichen) F_3. Dabei wird die F_2 vermöge stereographischer Projektion auf eine Hilfsebene H abgebildet, mit zwei Fundamentalpunkten A, B, den Bildern der beiden Scharen von Erzeugenden der F_2; irgendeiner $C_6(F_2, F_3)$ entspricht dann eine c_6 mit d_3 in A und B.

Wir stellen die wesentlichsten Ergebnisse der ersteren Abbildung in einer Tabelle zusammen, wobei die Zeichen C_r, c_s $(r, s < 6)$ immer nichtzerfallende Kurven bedeuten; bei der einzelnen Abbildung genüge je die Anführung eines Typus.

Das Bild der allgemeinen (nichtzerfallenden[35e])) $C_6(F_2, F_3)$ $(p = 4)$ in E ist eine nichtzerfallende c_6 mit d_2 in den $6\,A$ $(p = 4)$.

35e) Die nichtzerfallenden $C_6 = (F_3, F_2)$ $(p = 4)$ hat *Clebsch*, J. f. Math. 63 (1864), p. 189 mit Hilfe der *Abel*schen Funktionen eingehend untersucht und besonders hinsichtlich ihrer dreimal berührenden Ebenen und sechsmal berührenden F_2 eine große Anzahl von Abzählungsergebnissen ermittelt.

Synthetisch hat eine Reihe dieser Ergebnisse *W. P. Milne* bestätigt, London Math. Soc. Proc. (2) 21 (1922), p. 375. Andererseits rühren von *E. Pascal* verschiedene Ergänzungen her, Lomb. Ist. Rend. (2) 38 (1905), p. 579. Von den nicht-

Je nach der Vielfachheit des Zerfallens der C_6 werde in Klassen eingeteilt:

---

zerfallenden C_6 auf einer F_3, die nicht durch eine F_2, sondern erst durch F_3' ausgeschnitten werden, sei besonders auf die elliptischen ($p = 1$) hingewiesen, durch die ein Büschel von F_3 geht, s. *Em. Weyr,* Wien Ber. 98 (1890), p. 98, 952; ebenda 100 (1891), p. 157 [s. auch die Vorarbeiten über elliptische C_5, ebenda 90 (1884), p. 1036; 92 (1886), p. 498; 84 (1888), p. 592], sowie *F. London,* Math. Ann. 45 (1894), p. 545, der u. a. die 18 dreimal berührenden Ebenen in 6 „assoziierte" Tripel zerlegt. Endlich seien auch noch die R_6 erwähnt, durch die nur eine einzige F_3 geht. Solche R_6 studiert *E. Ciani*, Lomb. Ist. Rend. (2) 39 (1906), p. 359, mit ∞^1 dreimal berührenden Ebenen und einer Gruppe automorpher Kollineationen, sowie Palermo Rend. 21 (1906), p. 322; 22 (1906), p. 287 (Schnitte einer F_3 mit Kegeln 2. Ordnung; abgesehen von diesem Falle gibt es keine irreduzible C mit ∞^1 dreimal berührenden Ebenen; vgl. Art. III C 9, *K. Rohn* und *L. Berzolari,* Allg. Raumkurven und abwickelbare Flächen, Nrn. **61**, **66**—**69**).

Die C_6 (nebst den C_3) hat *A. Brill,* Math. Ann. 64 (1907), p. 239; Palermo Rend. 25 (1907), p. 188, durch einzige Gleichung dargestellt. Es geschieht dies auf Grund einer allgemeinen Methode, s. *A. Brill,* Gött. Nachr. 1901, p. 156, wonach eine Raumkurve C dargestellt wird vermöge der Gleichung der ∞^1 Projektionskegel, deren Spitzen eine feste Gerade durchlaufen. Die Diskriminante jener Gleichung wird dann auf ihre Reduzibilität untersucht. Eine weitere Anwendung auf C_4 und R_4 gibt *A. Crespi,* Giorn. di mat. 55 (1916), p. 48; vgl. Art. III C 9, Nr. **5**.

Übrigens lassen sich Raumkurven noch auf eine andere Art durch eine einzige Gleichung darstellen, nämlich des Komplexes der sie treffenden Geraden. *W. Franz Meyer* hat diese Methode vermöge Resultantenbildungen auf R_n, bei deren Parameterdarstellung, angewendet, s. „Apolarität" (1883), Abschn. 3. Diese Methode läßt sich auch verwenden, wenn eine Raumkurve C als Schnitt einer F_m und F_n vorliegt. Man bedient sich dazu am besten des *Clebsch*schen Übertragungsprinzips (s. Nr. **12**). Schneidet man beide Flächen nach der *Joachimsthal*schen Methode mit einer Geraden g, so erhält man zwei binäre Gleichungen $f_m \equiv a_x^m = 0$, $f_n \equiv b_x^n = 0$. Denkt man sich deren Resultante R als Aggregat von Produkten aus Klammerfaktoren (ab) gebildet, so hat man nur jeden solchen Faktor durch eine vierreihige Determinante vom Typus $(abuv)$ zu ersetzen, wo die $(uv)_{is} = \pi_{ik}$ die Achsenkoordinaten von g sind. Dann liefert die Gleichung $R(\pi) = 0$ die gesuchte Komplexgleichung. Zerfällt im besonderen C in Teilkurven $C_1, C_2, \ldots$, so auch R in Teilresultanten $R_1, R_2, \ldots$ Füi geometrische Zwecke ist es oft vorteilhafter, von einer realen Darstellung von R als Aggregat von Invarianten $R = \sum J$ auszugehen. Kennt man weiter die geometrische Bedeutung des Verschwindens der einzelnen J, so erscheint die Komplexgleichung der Kurve C in der Gestalt $\sum \bar{J} = 0$, wo jeweils $\bar{J} = 0$ die Gleichung des Komplexes der Geraden g ist, die die beiden Flächen F, G in Punktgruppen mit der Eigenschaft $J = 0$ schneiden. So ergibt sich z. B. die Gleichung einer $C_4(F_2, G_2)$ in der Form: $C_4 \equiv \Phi\Psi - \mathsf{H}^2 = 0$, wo $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ die beiden Tangentenkomplexe von F_2, G_2 sind, und $\mathsf{H} = 0$ der harmonische Komplex, dessen Geraden F_2, G_2 in harmonischen Punktepaaren treffen.

Ähnlich ergibt sich die Gleichung einer $C_9(F_3, G_3)$ in der Form: $C_9 \equiv I - \mathsf{H}^3 = 0$; hier ist $\mathsf{H} = 0$ der Komplex der Geraden, die F_3, G_3 in konjugierten

A. Paare von Teilkurven der C_6.

a) $C_5(p=2)+C_1$.

Bilder: c_{ik} und c_5 ($p=2$) durch A_i, A_k, mit d_2 in den vier übrigen A.

b) $C_4(p=1)+C_2$.

Bilder: c_2 durch A_i, A_k, A_l, A_m und c_4 ($p=1$) durch die nämlichen A, mit d_2 in A_n, A_p.

c) C_3+C_3' (konjugiert).

Wegen der besonderen Bedeutung dieser C_3-Paare (s. Nr. **19**) seien hier die Bildertypen vollständig angegeben. Man hat je zwei konjugierte Netze von Kurven:

α) c_1, und rationale r_5 mit d_2 in allen A;

β) c_2 durch A_i, A_k, A_l, und rationale r_4 durch A_i, A_k, A_l, mit d_2 in A_m, A_n, A_p;

γ) rationale r_3 mit d_2 in A_i, einfach durch A_k, A_l, A_m, A_n, und r_3 mit d_2 in A_p, einfach durch die nämlichen $4A$.

NB. Bei der zweiten Abbildung (der F_2 auf H) zeigt sich, daß noch ein spezifisch imaginärer Typus auftritt. Die F_2 ist keine Regelfläche, A und B also konjugiert imaginär.

Man hat eine imaginäre c_3 mit d_2 in A, d_1 in B, und eine konjugiert imaginäre c_3' mit d_2 in B, d_1 in A. Ihnen entspricht auf der F_3, die überhaupt keine reelle C_3 trägt, ein Paar konjugiert imaginärer C_3. Dieser Fall entzieht sich der *Clebsch*schen Abbildung (s. u.).

B. Drei Teilkurven.

a) $C_4+C_1+C_1'$.

Es sind zwei Fälle a$_1$) und a$_2$) zu unterscheiden, je nachdem C_1 und C_1' windschief oder aber inzident sind.

a$_1$) $C_4(p=0)$, C_1 windschief zu C_1'.

Bilder: Eine r_4 durch A_k, A_l, mit d_2 in A_m, A_n, A_p, nebst c_{ik} und c_{il}.

a$_2$) $C_4(p=1)$, C_1 inzident mit C_1'.

Bilder: Eine c_4 ($p=1$) durch A_i, A_k, A_l, A_m, mit d_2 in A_n, A_p, nebst c_{ik} und c_{lm}.

b) $C_3+C_2+C_1$.

Bilder: c_1, eine r_3 durch A_i, A_k, A_l, A_m, A_n, mit d_2 in A_p, und die c_2 ($=B_p$) durch A_i, A_k, A_l, A_m, A_n.

Punktetripeln treffen, und $I=0$ der Komplex der Geraden g, für die das Quadrupel der Punkte, in denen g von einer Fläche des Büschels (F_3, G_3) berührt wird, ein harmonisches ist. [Über diese Quadrupel von Berührungspunkten s. *H. v. Os*, Amst. Akad. Versl. 25 (1917), p. 936.]

c) $C_2 + C_2' + C_2''$.

Bilder: c_2 durch A_i, A_k, A_l, A_m; c_2' durch A_i, A_k, A_n, A_p; c_2'' durch A_l, A_m, A_n, A_p.

C. Vier Teilkurven.

a) $C_3 + C_1 + C_1' + C_1''$.

Die drei Geraden können nicht in einer Ebene liegen sonst zerfiele die F_2 in zwei Ebenen; sie können aber auch nicht alle windschief sein, sonst zerfiele auch die C_3 in drei (windschiefe) Gerade, d. i. der Fall E (s. u.). Sei also etwa C_1 windschief zu C_1', beide getroffen von C_1''.

Bilder: c_2 $(= B_i)$ durch A_k, A_l, A_m, A_n, A_p;
c_2' $(= B_k)$ durch A_i, A_l, A_m, A_n, A_p,

nebst c_{ik} und einer c_1.

b) $C_2 + C_2' + C_1 + C_1'$.

C_1 und C_1' müssen inzident sein.

Bilder: c_2 durch A_i, A_k, A_n, A_p;
c_2' durch A_l, A_m, A_n, A_p,

nebst c_{ik} und c_{lm}.

D. Fünf Teilkurven.

$C_2 + C_1 + C_1' + C_1'' + C_1'''$.

Die vier Geraden zerfallen in zwei Paare windschiefer, während jede Gerade des einen Paares jede Gerade des anderen trifft.

Bilder: c_2 durch A_i, A_k, A_l, A_m,

nebst c_{in}, c_{kn} und c_{lp}, c_{np}.

E. Sechs Gerade.

Die sechs Geraden zerlegen sich in zwei windschiefe Tripel, die zueinander inzident sind; durch das eine der beiden Tripel ist das andere mitbestimmt (s. auch Nr. 2 bei *Salmon*).

Bilder: c_{ik}, c_{il}, c_{kl} und c_{mn}, c_{mp}, c_{np}.

Hieran schließe sich die Realitätsdiskussion der $27\,g$ und $45\,\mathsf{T}$ (s. Nr. **6**). Da die Gleichungen der c_3 des Gebüsches in E reelle Koeffizienten haben, können für singularitätenfreie F_3 nur vier verschiedene Fälle hinsichtlich der Realität der sechs Fundamentalpunkte A eintreten: 1. Alle sechs A sind reell; 2. vier der A sind reell, die beiden anderen konjugiert imaginär; 3. zwei der A sind reell, die vier übrigen bilden je ein Paar konjugiert imaginärer; 4. drei Paare konjugiert imaginärer A.

Es folgt die Einzeldiskussion.

Fall 1: [27; 45.] Alle $27\,g$ und $45\,\mathsf{T}$ sind reell.

Fall 2: [15; 15.] Seien A_i, A_k, A_l, A_m reell, A_n und A_p konjugiert imaginär.

Man hat die 15 reellen g: (a_i, a_k, a_l, a_m), (b_i, b_k, b_l, b_m), $(c_{ik}, c_{il}, c_{im}, c_{kl}, c_{km}, c_{np})$ und c_{ik}.

Die 12 übrigen g zerlegen sich in die sechs Paare konjugiert imaginärer: c_{in}, c_{ip}; c_{kn}, c_{kp}; c_{ln}, c_{lp}; c_{mn}, c_{mp}; a_n, a_p; b_n, b_p.

Die 15 reellen T tragen je drei reelle g und bestehen aus den sechs Paaren: (a_i, b_k, c_{ik}), (a_k, b_i, c_{ik}); . . ., (a_l, b_m, c_{lm}), (a_m, b_l, c_{lm}), nebst den drei weiteren (c_{np}, c_{ik}, c_{lm}), (c_{np}, c_{il}, c_{km}), (c_{np}, c_{im}, c_{kl}).

Fall 3: [7; 5.] Seien A_i, A_k reell, A_l und A_m, A_n und A_p konjugiert imaginär.

Die sieben reellen g sind: a_i, a_k; b_i, b_k; c_{ik}, c_{lm}, c_{np}; die 20 übrigen bestehen aus den zehn Paaren konjugiert imaginärer: c_{il}, c_{im}; c_{in}, c_{ip}; c_{kl}, c_{km}; c_{kn}, c_{kp}; a_l, a_m; a_n, a_p; b_l, b_m; b_n, b_p; c_{ln}, c_{mp}; c_{lp}, c_{mn}.

Die fünf reellen T zerlegen sich in zwei Arten von je drei resp. zwei Individuen, je nachdem sie α) drei reelle g, oder β) nur eine reelle g enthalten:

α) (a_i, b_k, c_{ik}), (a_k, b_i, c_{ik}), (c_{ik}, c_{lm}, c_{np});

β) $(c_{ik}, c_{ln} \cdot c_{mp})$, (c_{ik}, c_{lp}, c_{mn}).

Fall 4: [3; 7.] Seien A_i und A_k, A_l und A_m, A_n und A_p je konjugiert imaginär.

Die drei reellen g sind: c_{ik}, c_{lm}, c_{np}, die auch die einzige T mit drei reellen Geraden bilden. Außer dieser gibt es drei Paare reeller T mit je nur einer einzigen reellen Geraden: (c_{ik}, c_{ln}, c_{mp}), (c_{ik}, c_{lp}, c_{mn}); (c_{lm}, c_{in}, c_{kp}), (c_{lm}, c_{ip}, c_{kn}); (c_{np}, c_{il}, c_{km}), (c_{np}, c_{im}, c_{kl}).

Diese vier Fälle entsprechen den in Nr. **6** angegebenen *Schläfli*schen Realitätstypen 1., 2., 3., und 5. Der dortige vierte Typus [3; 13], mit drei reellen g, durch deren jede vier reelle T mit konjugiert imaginären g gehen, fällt bei der *Clebsch*schen Abbildung aus; der innere Grund ist, daß die zugehörige F_3 keine reelle C_3 trägt (s. unten, und Nr. **15**).

Für F_3 mit Singularitäten hat *J. Diekmann*[36]) die Abbildung weiter verfolgt.

---

36) *Diekmann*, Math. Ann. 4 (1871), p. 442. Weitere Ausführungen und Ergänzungen, auch für Fälle von d_2, liefern: *A. Korndörffer*, Pr. Neumünster 1877; *L. Cremona*, Edinb. Trans. 32 (1885), p. 599; *H. Schoute*, Amst. Versl. 15 (1907), p. 570, wo im besonderen das Verhalten der parabolischen Kurve beim Auftreten von d_2 verfolgt wird. Allgemein untersucht eine F_n in der Nachbarschaft eines d_2 *K. Rohn*, Math. Ann. 22 (1883), p. 134.

Beim Auftreten von d_2 der F_3 erfährt die Figur der sechs Fundamentalpunkte A mit ihren Geraden c und Kegelschnitten B gewisse Modifikationen.

Das Auftreten *eines* (konischen) d_2 entspricht der Bedingung, daß die A

Die an sich schematische Abbildung der F_3 auf eine Hilfsebene E hat *Clebsch*[37]) bei spezieller Wahl der Projektionsebene, durch *Steiners* *„schiefe Projektion“* (Werke 1, bes. p. 408), realisiert.

Diese besteht zunächst darin, daß man, nach Annahme zweier windschiefer „Leitgeraden“ l_1, l_2, jedem Raumpunkte Q die durch ihn gehende Transversale p von l_1 und l_2 als *„Projektionsstrahl“* zuordnet.

Dabei sind die Leitgeraden als *„Fundamentalgerade“* anzusehen, insofern zu jedem Punkte, etwa von l_1, noch das ganze Büschel von Projektionsstrahlen gehört, die ihn mit den Punkten von l_2 verbinden.

Ist C_n eine vorgelegte Raumkurve, so ordnet sich den Punkten von C_n eine Regelfläche der Ordnung $2n$ zu, die sich ebenso oft um eine Einheit vermindert, als C_n eine der beiden Leitgeraden trifft.

Fängt man nunmehr die Projektionsstrahlen p mit einer *„Projektionsebene“* Π auf, die l_1 und l_2 in einer festen Transversale t begegne, so sind die Raumpunkte Q auf die Punkte P, als Spuren der Projektionsstrahlen p in Π, bezogen.

Einer Raumkurve C_n entspricht jetzt eine c_{2n} in Π, deren Ordnung sich aber auch immer dann um Eins vermindert, wenn C_n die Transversale t trifft; denn jedem Punkte Q von t entspricht eben t selbst als Projektionsstrahl.

Beschränkt man sich weiter auf eine (allgemeine) F_3, als Ort von Punkten Q, derart, daß die beiden Leitgeraden der F_3 angehören, so ist damit die F_3 auf die Ebene Π eineindeutig abgebildet.

Ohne uns bei dem Fall einer beliebigen Ebene[37]) Π aufzuhalten,

---

einem (nichtzerfallenden) Kegelschnitte B angehören. Für manche Zwecke empfiehlt es sich jedoch, vermöge einer quadratischen Verwandtschaft T_2, deren drei Fundamentalpunkte in drei der A fallen — wodurch das Gebüsch der c_3 (durch alle A) wieder in ein solches übergeht — die Figur überzuführen in eine gleichwertige, bei der drei der A inzident sind.

Tritt die Besonderheit eines uniplanaren d_2 ein, so zerfällt der Kegelschnitt B in ein Paar von Geraden, deren jede drei der A trägt.

Im Fall von zwei d_2 liegen zwei Gerade vor, derart, daß ihr Schnittpunkt ein A ist, und jede derselben noch zwei weitere A trägt, während der letzte außerhalb liegt.

Im Falle von drei d_2 hat man ein Dreieck, dessen Ecken drei der A sind, während jede Seite noch einen weiteren A trägt.

Endlich bei vier d_2 (s. Nr. **13**) bilden die A die Ecken eines vollständigen Vierseits. Aus dieser Figur läßt sich die Existenz nebst der gegenseitigen Lage (und zu den d_2) der jeweils noch übrigen Geraden und Tritangentialebenen der F_3 ablesen.

37) *Clebsch*, Math. Ann. 5 (1872), p. 419. Läßt man die Projektionsebene Π beliebig, so treten einige Modifikationen auf, die die Einfachheit des Ganzen beeinträchtigen. Es treffe Π die Geraden b_i, b_k in A_i, A_k, und die ausgezeichnete Transversale c_{ik} von b_i, b_k treffe Π in A_r, während die Spuren der vier

wählen wir gleich mit *Clebsch* die Transversale t als eine weitere Gerade der F_3, also als irgendeine (reelle) der fünf Transversalen von l_1, l_2, die auf der F_3 liegen.

Damit auch die Bezeichnung dem früheren Schema (innerhalb der Hilfsebene E) angepaßt sei, seien b_i und b_k die beiden Leitgeraden, c_{ik} die Transversale t, die b_i und b_k in A_i und A_k treffe, so daß a_l, a_m, a_n, a_p die vier weiteren Transversalen sind mit den Spurpunkten A_l, A_m, A_n, A_p in Π.

Dann erweisen sich zunächst diese vier Punkte als Fundamentalpunkte der Abbildung. Aber auch A_i und A_k sind solche. Denn da z. B. a_k die Restgerade der Ebene (b_i, c_{ik}) ist, so projiziert sich jeder Punkt von a_k in den Punkt A_k auf Π, und analog ist es mit a_i und A_i.

Noch vier weitere Geraden treffen b_i allein, nämlich $c_{il}, c_{im}, c_{in}, c_{ip}$, und ebenso vier solche, die b_k allein treffen, $c_{kl}, c_{km}, c_{kn}, c_{kp}$; diese acht Geraden c_{rs} projizieren sich ersichtlich in die acht gleichbezeichneten Geraden $c_{rs} = (A_r, A_s)$. Weiter gibt es noch zehn Gerade g der F_3, die weder b_i noch b_k treffen; diese zerlegen sich in zwei Klassen, a) und b), je nachdem sie c_{ik} treffen oder nicht: a) $c_{lm}, c_{ln}, c_{lp}, c_{mn}, c_{mp}, c_{np}$; b) b_l, b_m, b_n, b_p.

Hier gehen wiederum die ersteren in die sechs gleichbezeichneten Geraden in Π über, die letzteren dagegen in die vier entsprechenden Kegelschnitte $B_l = (A_i, A_k, A_m, A_n, A_p)$ usf.

Es erübrigt demnach noch, die Projektion der beiden Leitgeraden b_i, b_k selbst zu betrachten, die sich eigenartig vollzieht, insofern die ursprüngliche Unbestimmtheit der Projektion bei der allgemeinen Raumtransformation (s. oben) in bestimmter Weise aufgehoben wird; da jeder Punkt S_i, etwa von b_i, nicht nur an sich in Betracht zu ziehen ist, sondern zugleich mit allen seinen Nachbarpunkten auf F_3.

Diese Nachbarpunkte gehören zugleich der Berührungsebene T_i von F_3 in S_i an, d. i. aber einer Ebene durch b_i, die aus der F_3 eine Rest-C_2 ausschneidet, mit zweitem Treffpunkt S_i' auf b_i: die Gesamtheit dieser Punktepaare $(S_i S_i')$ bildet eine Involution auf b_i.

---

weiteren Transversalen a_l, a_m, a_n, a_p in Π A_l', A_m', A_n', A_p' seien. Um die so entstehende schiefe Projektion der F_3 auf die *Clebsch*sche zurückzuführen, bedarf es noch einer quadratischen, eineindeutigen Transformation T_2, mit dem Fundamentaldreieck A_i, A_k, A_r, die die vier Punkte A_l', A_m', A_n', A_p' resp. in A_l, A_m, A_n, A_p überführe.

Dabei ist wieder beachtenswert das Verhalten der beiden Leitgeraden b_i, b_k. Wie im Texte bilden sich die Involutionspaare S_i, S_i' auf b_i ab auf Punktepaare P_i, P_i', deren Verbindungsgeraden das Büschel (A_i) in Π bilden; diese Punktepaare P_i, P_i' erfüllen aber jetzt keinen Kegelschnitt, sondern eine r_3 durch A_i, mit d_2 in A_k, und bilden auf ihr wieder eine Involution.

Ist nun T_i die Spur von T_i in b_k, so konvergieren im Grenzfalle die Projektionsstrahlen, die von den zu S_i auf F_3 benachbarten Punkten ausgehen, gegen die bestimmte Grenzlage (S_i, T_i), deren Spur in Π mit P_i bezeichnet sei; entsprechend gehört ein Punkt P_i' zu S_i'.

Diese Punktepaare (P_i, P_i'), deren Verbindungsgeraden das Büschel (A_k) in Π bilden, erfüllen den Kegelschnitt $B_i = (A_k, A_l, A_m, A_n, A_p)$, und bilden auf ihm wiederum eine Involution. So wird es verständlich, wie die beiden Leitgeraden b_i, b_k in die gleichbezeichneten Kegelschnitte B_i, B_k übergehen.

Hiermit ist die Realisierung der *Clebsch*schen Abbildung vermöge der schiefen Projektion festgelegt. Da ein beliebiger ebener Schnitt C_3 der F_3 alle 27 g trifft, insonderheit also die Geraden b_i, b_k, c_{ik}; a_l, a_m, a_n, a_p, so projiziert sich die C_3 in eine c_3 durch die sechs Fundamentalpunkte A, und vice versa. Und so weiter.

Umgekehrt, wenn sechs beliebige Fundamentalpunkte A in einer Ebene Π gegeben sind, so hat man nur durch A_i, A_k zwei beliebige windschiefe Raumgerade b_i, b_k zu legen und die schiefe Projektion wiederholt anzuwenden, um die ganze Konfiguration festzulegen.

So einfach diese „*schiefe*" Abbildung der F_3 auf eine Ebene Π erscheint, so ist doch zunächst ihre zwiefache Unsymmetrie zu beachten: einmal werden irgend zwei windschiefe Gerade (b_i, b_k) der F_3 herausgegriffen, sodann wird wiederum unter deren fünf Transversalen eine (c_{ik}) bevorzugt. Andererseits wird die Realität der drei Geraden (b_i, b_k, c_{ik}) vorausgesetzt, womit die beiden letzten *Schläfli*schen Typen (Nr. **10**) mit nur drei (sc. je inzidenten) reellen Geraden ausscheiden.

Dagegen sei gleich hier bemerkt, daß sich die Methode der schiefen Abbildung der F_3 auf die Regelflächen 3. Ordnung, einschließlich des *Cayley*schen Grenzfalles (Nr. **14**) übertragen läßt, indem man zwei windschiefe Gerade der Regelschar nebst einer der beiden Leitgeraden, resp. der Doppelleitgeraden, zugrunde legt.

Um aber zu einer symmetrischen direkten Abbildung der F_3 aut eine Ebene Π zu gelangen, bediene man sich der „*Sekantenprojektion*" und „*Sekantenabbildung*" mittels einer fest gewählten eigentlichen (reellen) kubischen Raumkurve $C_3^{(0)}$. Durch jeden Raumpunkt Q geht eine reelle Sekante s[38]) an die $C_3^{(0)}$, die Π in einem Punkte P treffe;

38) Diese Sekante s läßt sich formentheoretisch einfach darstellen, wenn man die $C_3^{(0)}$ als Normkurve $(N_3 = \mathsf{N}_3)\, x_3 : x_2 : x_1 : x_0 = \lambda^3 : 3\lambda^2 : 3\lambda : 1$ wählt, s. *W. Franz Meyer,* Apolarität und rationale Kurven, Tübingen 1883, Abschnitt 3, und Nr. **19**.

Repräsentiert man den Raumpunkt durch die Koeffizienten einer kubischen binären Form $f(\lambda)$, deren Wurzeln die drei vom Punkte an die N_3 gehenden (Schmiegungs-)Ebenen liefern, so werden die beiden Treffpunkte von s mit N_3

P ist das „*Sekantenbild*" von Q. Ersichtlich tritt dabei die $C_3^{(0)}$ selbst als Fundamentalkurve auf, insofern jedem Punkte $Q^{(0)}$ der $C_3^{(0)}$ alle Erzeugenden des von $Q^{(0)}$ ausgehenden, die $C_3^{(0)}$ projizierenden Kegels zugehören.

Die Ebene Π treffe die $C_3^{(0)}$ in drei reellen (getrennten) Punkten E_1, E_2, E_3. Das Bild einer C_n ist eine c_{4n} mit d_{2n} in E_1, E_2, E_3, wobei sich die Ordnung von c allemal dann um zwei Einheiten, die Ordnung der d um eine Einheit verringert, wenn C_n die $C_3^{(0)}$ trifft.[38a)]

---

durch die *Hesse*sche Form H von f gegeben, und der auf s vierte harmonische Punkt Q durch die Kovariante Q, mithin die Punktreihe auf s durch das Büschel (f, Q).

Die Punktepaare (f, Q) des Raumes stehen in einer eineindeutigen involutorischen kubischen Verwandtschaft T_3, in Übereinstimmung damit, daß die Form $Q(Q)$ wieder, bis auf einen konstanten Faktor, das Quadrat der Diskriminante R von f, mit f übereinstimmt.

In der Verwandtschaft T_3 entspricht einer Ebene, als Ort von Punkten f, eine F_3, deren Gleichung und Abbildung sich genau nach der *Clebsch*schen Vorschrift bilden läßt; die drei in Betracht kommenden linearen Gleichungen besagen im binären Gebiet, daß, bei homogener Schreibweise: $f(\lambda_1, \lambda_2)$, $Q(\lambda_1, \lambda_2)$, die Form Q konjugiert ist zu den drei Formen $\lambda_1 f_2$, $\lambda_2 f_1$, $\lambda_1 f_1 - \lambda_2 f_2$, wo unter f_1, f_2 die beiden Ableitungen von f zu verstehen sind. Die Elimination der Koeffizienten von f (Koordinaten des Punktes f) aus diesen drei Gleichungen nebst der der Ebene (f) liefert die Gleichung der F_3. Vgl. auch die synthetische Behandlung bei „*Reye*" und *A. Cantone,* Napoli Rend. 15 (1886), p. 181, sowie *P. H. Schoute,* Nieuw Arch. (2) 4 (1899), p. 90.

38a) Das Verfahren des Textes werde noch weiter ausgeführt. Man wähle die feste Kurve $C_3^{(0)}$ als Normalkurve $N_3 = \mathsf{N}_3$ (s. oben, und Nr. 19), so daß die Koordinaten x_i $(i = 3, 2, 1, 0)$ eines Punktes, von dem die drei Ebenen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ an N_3 gehen, zusammenfallen mit den (homogenen) elementarsymmetrischen Verbindungen s_i der λ. Der Punkt (x) läßt sich somit darstellen durch eine kubische binäre Form $f \equiv x_0 \lambda^3 - x_1 \lambda^2 + x_2 \lambda - x_3 \equiv s_0 \lambda^3 - s_1 \lambda^2 + s_2 \lambda - s_3$, mit den Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Sei Π eine im übrigen beliebige, aber feste Projektionsebene, die N_3 in drei reellen getrennten Punkten E_1, E_2, E_3 treffe. Die Ebene Π schneidet die Tangentenregelfläche T-R (4. Ordnung) in einer rationalen Kurve 4. Ordnung $r_4^{(t)}$, die in E_1, E_2, E_3 Spitzen besitzt, deren Tangenten sich in einem Punkte E treffen. Jede Tangente t der N_3 trifft die $r_4^{(t)}$ in einem Punkte P_t, jede Ebene Σ der N_3 in einer Tangente $t^{(t)}$, und umgekehrt.

Ist P_0 irgendein Punkt (λ_0) der N_3 mit der Tangente t_0 und der Ebene Σ_0, so geht von P_0 ein Projektionskegel $K_2^{(0)}$ an die N_3, der Π in einem Kegelschnitte $c_2^{(0)}$ trifft. Dieser berührt die $r_4^{(t)}$ im Spurpunkte $P_0^{(t)}$ von t_0, mit der Spur $t_0^{(t)}$ von Σ_0 als Tangente, und geht überdies durch die Punkte E_1, E_2, E_3. Umgekehrt gehört zu jedem solchen Kegelschnitte $c_2^{(0)}$ ein Projektionskegel $K_2^{(0)}$, mit der Spitze P_0 auf N_3.

Diese Betrachtungen dehne man aus auf irgend zwei Punkte $P_1(\lambda_1)$, $P_2(\lambda_2)$ der N_3 mit den Tangenten t_1, t_2; von ihnen gehen die Projektionskegel $K_2^{(1)}, K_2^{(2)}$ an die N_3 mit den Spurkegelschnitten $c_2^{(1)}, c_2^{(2)}$ in Π, die durch E_1, E_2, E_3 gehen, Dies finde seine Anwendung auf eine F_3, auf der man irgendeine (reelle) $C_3^{(0)}$ herausgreife. Es gibt dann sechs Sekanten[39]) der

und die $r_4^{(t)}$ in den Spurpunkten von t_1, t_2 berühren. Vermöge der T_2 des Textes gehen $c_2^{(1)}$, $c_2^{(2)}$ über in die beiden Tangenten λ_1, λ_2 von N_2, und der (vierte) Restschnittpunkt von $c_2^{(1)}$, $c_2^{(2)}$ in den Punkt (λ_1, λ_2). Da aber jener Restschnittpunkt zugleich die Spur der gemeinsamen Kante von $K_2^{(1)}$ und $K_2^{(2)}$ ist, d. i. der N_3-Sekante $s(\lambda_1, \lambda_2)$. Somit repräsentiert der Punkt (λ_1, λ_2) die N_3-Sekante $s(\lambda_1, \lambda_2)$.

Umgekehrt geht von irgendeinem Raumpunkt P eine einzige Sekante $s(\lambda_1, \lambda_2)$ an die N_3, deren Spur P_s in Π die Sekantenprojektion von P ist. Vermöge der T_2 geht P_s über in den Punkt $P'(\lambda_1, \lambda_2)$, das Sekantenbild von P. Liegt im besonderen P auf der T-R, so geht die Sekante s über in eine Tangente $t(\lambda)$ mit der Spur P_t, das Sekantenbild $P_t'(\lambda)$ von P liegt dann auf N_2, und umgekehrt. Liegt endlich P auf der N_3 selbst, so ist der Punkt ein Fundamentalpunkt der Abbildung, insofern P' die ganze N_2 erfüllt. — Es durchlaufe jetzt P eine Gerade g, die vorerst weder die N_3 treffe noch in Π liege. Der Spurpunkt von g in Π sei G. Das Ebenenbüschel $B(g)$ schneidet Π im Geradenbüschel (G). Irgendeine Ebene E von B treffe die N_3 in drei Punkten $(\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3')$, mit den Sekanten $s_1' = (\lambda_2', \lambda_3')$ usf., deren Spuren (auf einer Geraden durch G) $P_1^{(s)}$, $P_2^{(s)}$, $P_3^{(s)}$ seien. Diese letzteren Punkte gehen vermöge der T_2 über in die Ecken P_1', P_2', P_3' des Umdreiecks $(\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3')$ von N_2. „Variiert jetzt die Ebene E durch g, so beschreiben die Ecken der ∞^1 Dreiecke $(\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3')$ einen ‚Schließungskegelschnitt' c_2' von N_2, das Sekantenbild von g."

Das T_2-Bild der c_2' ist eine rationale Kurve 4. Ordnung $r_4^{(s)}$ mit d_2 in E_1, E_2, E_3.

Man gehe jetzt von irgend vier Punkten der N_2 aus; durch sie gehen zwei Schließungskegelschnitte c_2', c_2'' von N_2. Andererseits entsprechen jenen vier Punkten vermöge der T_2 vier Punkte auf der $r_4^{(t)}$; durch diese gehen vier Tangenten der N_3, die von zwei Transversalen g, g' getroffen werden, den Urbildern von c_2', c_2''. Mithin ist jeder Schließungskegelschnitt c_2' von N_2 das Sekantenbild einer bestimmten Raumgeraden g und umgekehrt. Allgemeiner ist das Bild einer beliebigen c_2 ein linearer Komplex K_1.

Noch sind einige Sonderfälle zu betrachten. Liegt g in Π, so geht das Sekantenbild c_2' durch die drei festen Punkte E_1, E_2, E_3, und umgekehrt.

Ferner treffe g die N_3 in einem Punkte (λ'), so daß eine variierende Ebene E' durch g noch zwei weitere Punkte (λ_1), (λ_2) ausschneidet. Das Sekantenbild c_2' zerfällt dann in die Tangente (λ') an N_2 und eine Gerade c_1', den Ort der Punkte (λ_1, λ_2), und umgekehrt.

Trifft g die N_3 zweimal, in (λ') und (λ''), so zerfällt die c_2' in das Tangentenpaar (λ'), (λ'') von N_2, und umgekehrt.

Liegt endlich g in einer Ebene $\Sigma(\lambda_0)$ der N_3, so berührt c_2' die N_2 an der Stelle (λ_0), und umgekehrt.

Das Gesamtergebnis ist also: „Die ∞^4-Mannigfaltigkeit der Raumgeraden g ist vermöge der Sekantenabbildung (1, 1)-deutig der ∞^4-Mannigfaltigkeit der Schließungskegelschnitte c_2' von N_2 zugeordnet."

Vergleicht man dies mit *Steiner*s schiefer Projektion, so macht sich ein wesentlicher Unterschied geltend. Bei der letzteren liegen zwei windschiefe Gerade g_1, g_2 zugrunde, die eine Projektionsebene Π in G_1, G_2 treffen. Eine beliebige Gerade g treffe Π in G. Dann ist das schiefe Bild von g ein Kegelschnitt k' durch G, G_1, G_2. Die ∞^4-Mannigfaltigkeit der g bildet sich daher

$C_3^{(0)}$, die eine „Sechs" der F_3 bilden; diese projizieren sich in ihre Spuren $A_r^{(0)}$ $(r = i, k, \ldots, p)$ auf Π. Die Geraden b_i der konjugierten

ab auf die ∞^3-Mannigfaltigkeit (Gebüsch) der Kegelschnitte k' durch G_1, G_2. In der Tat entsprechen umgekehrt einem vorgegebenen k' des Gebüsches noch ∞^1 Urgerade g, die Erzeugenden der anderen Schar von Erzeugenden des Hyperboloides, das k', g_1, g_2 enthält.

Und analog verhält es sich bei der Projektion einer beliebigen Raumkurve C.

Wir kehren zurück zur Sekantenabbildung einer Geraden g. Ihr steht dual die „Achsenabbildung" gegenüber, vermöge der g treffenden Achsen $a(\lambda_1', \lambda_2')$ der N_3. Durch die N_3 ist zwischen den Punkten P und Ebenen E ein Nullsystem bestimmt; durch jeden Punkt P, von dem die drei Ebenen $\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3'$ aus die N_3 gehen, geht als Nullebene E die Verbindungsebene der drei Punkte $\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3'$ der N_3, und vice versa. Durchläuft P eine Gerade g, so dreht sich seine Nullebene um die „konjugierte" Gerade g', und vice versa. Das Sekantenbild von g resp. g' ist das Achsenbild von g' resp. g; die Bilder von g und g' sind zwei „konjugierte" Schließungskegelschnitte c_1', c_2'', die N_2 in denselben vier Punkten treffen; die beiden Scharen von ∞^1 Schließungsdreiecken sind auf N_2 dargestellt durch zwei konjugierte Büschel binärer kubischer Formen.

Die Gleichung etwa des Achsenbildes c_2'' von g ergibt sich einfach so. Denkt man sich g als Schnitt zweier Ebenen $(\alpha s) = 0$, $(\beta s) = 0$, mit $(\alpha\beta)_{ik} = \pi_{ik}$, so hat man nur vermöge der Zerlegungen:

$$s_3 : s_2 : s_1 : s_0 = \lambda\sigma_2 : \lambda\sigma_1 + \sigma_2 : \lambda\sigma_0 + \sigma_1 : \sigma_0$$

λ zu eliminieren und erhält:

$$\begin{aligned} c_2'' \equiv & \begin{vmatrix} \alpha_0\sigma_0 + \alpha_1\sigma_1 + \alpha_2\sigma_2, & \alpha_1\sigma_0 + \alpha_2\sigma_1 + \alpha_3\sigma_2 \\ \beta_0\sigma_0 + \beta_1\sigma_1 + \beta_2\sigma_2, & \beta_1\sigma_0 + \beta_2\sigma_1 + \beta_3\sigma_2 \end{vmatrix} \\ & \equiv \pi_{01}\sigma_0^2 + \pi_{23}\sigma_2^2 + \pi_{02}\sigma_0\sigma_1 + \pi_{13}\sigma_2\sigma_3 + \pi_{12}\sigma_1^2 + (\pi_{03} - \pi_{12})\sigma_0\sigma_2 \\ & \equiv c_{00}\sigma_0^2 + \cdots + c_{01}\sigma_0\sigma_1 + \cdots = 0. \end{aligned}$$

Die Identität $\Pi \equiv \pi_{01}\pi_{23} + \pi_{02}\pi_{31} + \pi_{03}\pi_{12} = 0$ liefert die Schließungsbedingung; $S \equiv c_{00}c_{22} - c_{01}c_{12} + c_{11}(c_{11} + c_{02}) = 0$. Analog ergibt sich die Gleichung des Sekantenbildes c_2', wenn man g als Verbindungsgerade zweier Punkte ansieht.

Dieses Eliminationsverfahren überträgt sich sofort auf die Abbildung einer beliebigen Raumkurve C, wenn diese als Schnitt von zwei Flächen oder evtl. als gemeinsamer Schnitt von drei Flächen vorliegt.

Das allgemeinste Verfahren indessen, das zugleich die (1, 1)-Deutigkeit der Abbildung ins Licht setzt, beruht auf der konsequenten Verwendung von Linienkoordinaten. Sei gegeben die Gleichung irgendeines Geradenkomplexes $K_n(p_{ik}) = 0$, wo die p_{ik} Strahlenkoordinaten sind. Man bestimme die dem Komplexe angehörenden Sekanten $s(\lambda_1, \lambda_2)$ der N_3. Nun gilt für letztere die Darstellung:

$$p_{01} : p_{23} : p_{02} : p_{13} : p_{03} : p_{12} = \sigma_0^2 : \sigma_2^2 : \sigma_0\sigma_1 : \sigma_1\sigma_2 : \frac{9\sigma_1^2 - \sigma_0\sigma_2}{3} : 3\sigma_0\sigma_2.$$

Die Einsetzung dieser Werte in $K_n(p_{ik}) = 0$ liefert direkt die Gleichung des Sekandenbildes c_{2n}'. Liegt im besonderen eine Raumkurve C vor, so besteht der Komplex aus den sie treffenden Geraden g.

Die duale Achsenabbildung von K_n fließt aus der obigen, wenn man nur die beiden letzten Glieder der Proportion ersetzt durch $\sigma_0\sigma_2$ resp. $\sigma_1^2 - \sigma_0\sigma_2$. Um-

Sechs, die die $C_3^{(0)}$ nicht treffen, bilden sich ab auf die r_4 durch $A_k^{(0)}, \ldots, A_p^{(0)}$, mit d_2 in E_1, E_2, E_3; endlich die 15 Geraden c_{ik}, die die $C_3^{(0)}$ einmal treffen, in die c_2 durch $A_i^{(0)}, A_k^{(0)}, E_1, E_2, E_3$.

Das Bild eines ebenen Schnittes C_3 der F_3 wird eine c_6 durch alle $A^{(0)}$, mit d_3 in E_1, E_2, E_3.

Unterwirft man nunmehr die Ebene Π einer quadratischen eineindeutigen Transformation T_2, mit dem Fundamentaldreieck E_1, E_2, E_3, wodurch die sechs Punkte $A_i^{(0)}$ in sechs andere A_i übergehen mögen, so ist man damit genau zur *Clebsch*schen Abbildung der F_3 mit den A_i als Fundamentalpunkten gelangt.

Was die Realität anlangt, so bleibt bei dieser Sekantenabbildung der F_3 lediglich der schon oben erwähnte Fall ausgeschlossen, wo die F_2 überhaupt keine eigentliche reelle C_3 trägt.

Auch diese Abbildung ist ohne weiteres auf die Regelflächen 3. Ordnung übertragbar.

Endlich mögen auch noch die Sätze von *Plücker* und *Magnus* (in Nr. **1**) der *Clebsch*schen Abbildung eingeordnet werden.

Bei der *Plücker*schen Aufgabe sollte eine F_2 mit einer gegebenen

---

gekehrt liegt eine beliebige Kurve c' in Π vor, in der expliziten Darstellung:

$$\sigma_2 : \sigma_1 : \sigma_0 = f_2(\lambda) : f_1(\lambda) : f_0(\lambda) = f_2 : f_1 : f_0;$$

oder auch:

$$\sigma_2^2 : \sigma_0^2 : \sigma_2\sigma_1 : \sigma_0\sigma_1 : \sigma_1^2 : \sigma_0\sigma_2 = f_2^2 : f_0^2 : f_2 f_1 : f_0 f_1 : f_1^2 : f_0 f_2.$$

Ersetzt man hier die Quadrate und Produkte der σ durch die entsprechenden p_{ik}, so hat man die Gleichung des Urkomplexes K, dessen Sekantenbild c' ist.

Bemerkenswert ist der einfachste Fall eines linearen Komplexes K_1. Das Sekantenbild ist dann ein keiner Bedingung unterworfener Kegelschnitt c_2' in Π, und umgekehrt, so daß die beiden ∞^5-Mannigfaltigkeiten der linearen Komplexe und der Kegelschnitte in Π (1, 1)-deutig aufeinander abgebildet sind. Artet der Komplex in einen speziellen aus, der eine feste Gerade treffenden Geraden, so werden die Kegelschnitte wieder die Schließungskegelschnitte eines Normkegelschnitts, und vice versa.

Das Vorstehende, das übrigens auch für transzendente Kurven und Komplexe seine Gültigkeit behält, findet im besonderen seine Anwendung auf die F_3 und hier wieder in erster Linie auf die auf der F_3 gelegenen C_1, C_2, C_3 (s. den Text). Der wesentliche Unterschied der vorstehenden Sekantenabbildung des Raumes auf eine Ebene gegenüber der *Steiner*schen Projektion besteht darin, daß bei ersterer einem Geradenkomplex eineindeutig eine ebene Kurve entspricht, während bei der letzteren zwar eine Raumkurve stets in eine bestimmte ebene Kurve übergeht, dagegen umgekehrt einer ebenen Kurve im allgemeinen noch ∞^1 Raumkurven entsprechen.

39) Diese sechs Geraden stellen sich auch dar als die gemeinsamen (eigentlichen) Sekanten der $C_3^{(0)}$ und einer zweiten kubischen Kurve $C_3^{(1)}$, die erstere einmal trifft. Durch beide Kurven geht eine einzige F_3, womit wieder die ganze Figur festgelegt ist.

F_3 in einem Punkte Q eine vierpunktige Berührung haben, so daß die Schnittkurve C_6 in Q einen d_4 aufweist. In der Bildebene E wird also eine c_6 gesucht, die in den sechs Punkten A d_2 besitzt, und außerdem an einer Stelle P, dem Bilde von Q, einen d_4. Dann muß aber die c_6 zerfallen in zwei Gerade, etwa c_{ik} und c_{lm}, die sich in P schneiden, und eine r_4 durch A_i, A_k, A_l, A_m, mit d_2 in A_l, A_m und P; solcher r_4 gibt es noch ein Büschel. Auf der F_3 ist somit Q der Treffpunkt zweier Geraden der Fläche; die Schnittkurve $C_6(F_3, F_2)$ ist eine R_4 mit d_2 in Q, durch die noch ein Büschel von F_2 geht; solcher Büschel gibt es noch eine ∞^1-Schar.

Bei *Magnus* reduziert sich die Frage auf die nach der Natur der Restkurve C_6, die irgendeine, durch eine beliebig auf der F_3 ausgewählte (eigentliche, reelle) C_3 gelegte F_3' aus der F_3 ausschneidet.

In der Ebene E wähle man als Bild der C_3 eine r_5 mit d_2 in den sechs Punkten A, dann ist das Bild der C_6 eine c_4 $(p = 3)$ durch die sechs Punkte A, so daß es solcher c_4, und damit von C_6, noch eine ∞^8-Schar gibt. Denkt man sich aber umgekehrt eine solche C_6, und damit r_4, beliebig aber fest gewählt, so gehört dazu noch eine ∞^2-lineare Schar (Netz) von Restkurven r_5, und damit von C_3. Die zugehörigen ausschneidenden F_3' bilden somit auch ein Netz, also, mit der festen F_3 linear zusammengesetzt, ein Gebüsch, und dieses ist erade das von *Magnus* betrachtete.

Zum Schluß sei noch besonders auf den Satz (s. oben) hingewiesen, daß eine durch zwei windschiefe Gerade der F_3 gelegte F_2 eine rationale C_4 $(= R_4)$[40]) — durch die nur eine einzige F_2 hindurchgeht — ausschneidet, während bei Inzidenz der beiden Geraden eine allgemeine (elliptische) C_4 $(p = 1)$ resultiert.

12. Formentheoretische Behandlung der Fläche. Eine andere Untersuchungsrichtung sucht projektive Eigenschaften der F_3 durch algebraisch gleichwertige, d. i. invariante Formenbildungen wiederzugeben. *Salmon*[41]) entwickelt, im Anschluß an die spezielle Form (1) (Nr. 2), eine Reihe geometrisch wichtiger In-, Ko-, Kontravarianten

40) Diese rationalen $C_4 = R_4$, nebst ihrer algebraischen Darstellung durch vier biquadratische binäre Formen, scheint zuerst *Salmon* bemerkt zu haben, Cambridge Dublin J. 5 (1850), bes. p. 40, 43, wo die Charaktere der Schnitte einer F_3 mit einer F_2 untersucht werden. Über diese R_4 existiert eine ausgedehnte Literatur. Es genüge hier der Hinweis auf die Monographien: *L. Berzolari,* Ann. di mat. (2) 20 (1892), p. 101; *H. W. Richmond,* Cambr. Trans. 19 (1900), p. 132; *A. Jouffret,* Paris 1903; *O. G. E. Schreck,* Diss. Utrecht 1915, sowie auf den Art. III C 9, *K. Rohn-L. Berzolari,* Algebraische Raumkurven und abwickelbare Flächen, Nrn. 59, 60.

41) *Salmon,* London Trans. 150 (1860), p. 229.

und Zwischenformen. Weiter dringt *Clebsch*[42]) bei Zugrundelegung der allgemeinen F_3-Form ein; speziell die (geraden) Invarianten lassen sich durch fünf „fundamentale" ganzrational darstellen. *P. Gordan*[43]) gelingt es u. a., das Aggregat der fünf Pentaederebenen (Nr. **3**) als einfache Kovariante der F_3 abzuleiten. Weiteres Formenmaterial liefert *R. de Paolis.*[44])

H. Poincaré[45]) geht von allgemeineren Gesichtspunkten aus; er stellt die inäquivalenten Typen der F_3-Formen auf gegenüber linearen Variabelnsubstitutionen 1. mit beliebigen, 2. mit reellen, 3. mit ganzzahligen Koeffizienten. Dadurch werden die Kriterien gewonnen, unter denen jeweils zwei vorgelegte F_3 ineinander linear überführbar sind.

Systematische Anwendungen der Formentheorie auf die Erzeugungen der F_3 und deren Ausartungen, sowie auf den Zusammenhang zwischen dem Pentaeder und den 27 Geraden stehen noch aus. Ebensowenig ist bisher die Aufstellung eines vollen Formensystems der F_3 gelungen. Über die Invariantentheorie der „Hexaederform" F_3' vgl. Nr. **18**; über die binär-invarianten Beziehungen auf der F_3 vgl. Nr. **19**.

Neuerdings hat *W. Fr. Meyer*[45a]) ein Übertragungsprinzip an-

---

42) *Clebsch,* J. f. Math. 58 (1861), p. 93, 109. Vermöge des „*Clebsch*schen Übertragungsprinzips" (s. Note 45a) lassen sich aus den Invarianten gewisse Komplexgleichungen herleiten. — Über die geometrische Deutung der F_3-Invarianten durch *K. Bobek* s. Nr. **2**, Note 3.

43) *Gordan,* Math. Ann. 5 (1872), bes. p. 376.

44) *de Paolis,* Rom Linc. Mem. (2) 10 (1880/81), p. 123, s. Nr. **18**.

45) *Poincaré,* J. Éc. Pol. 51 (1883), p. 45.

45a) *W. Fr. Meyer,* Giorn. di mat. 1829. Wir beschränken uns hier auf den binären Fall des Prinzips und seine Anwendung auf den S_3. Es liege vor eine Reihe von Urformen $G_p(x_m) = G$, $H_q(x_m) = H_1, \ldots,$ der Ordnungen $p, q, \ldots$ in einer *nichthomogenen* Variabeln x_m: $G \equiv a_0 x_m^p + a_1 x_m^{p-1} + \cdots + a_p$, $H \equiv b_0 x_m^q + b_1 x_m^{q-1} + \cdots + b_q, \ldots,$ wo die Koeffizienten $a_r, b_s, \ldots$ ternäre Formen in drei *homogenen* Variabeln x_i, x_k, x_l der Ordnungen $r, s, \ldots$ bedeuten. Ferner sei $K_\nu(x_m) = K = k_w x_m^\nu + k_{w+1} x_m^{\nu-1} + \cdots + k_{w+\nu}$ eine (binäre) Kovariante der Urformen $G, H, \ldots$ von der Ordnung ν und dem Leitgliedgewichte w.

Man deute $x_i, x_k, x_l; x_m$ als homogene Punktkoordinaten im S_3. Unter A_m sei ein beliebig, aber fest gewählter Punkt verstanden, den man in die m^{te} Koordinatenecke verlege. Durch A_m lege man irgendeine Gerade g; ihr laufender Punkt läßt sich durch den Wert des nichthomogenen Parameters x_m angeben.

Die quaternären Gleichungen $G(x_i, x_k, x_l; x_m) = 0$ usf. stellen dann ein System von Urflächen $G, H, \ldots$ dar, und zugleich die binären Gleichungen $G(x_m) = 0$, $H(x_m) = 0$, .. mittels ihrer x_m-Wurzeln die Reihen $(P), (Q)$ der Schnittpunkte, die g mit den Urflächen gemein hat. Denkt man sich nunmehr auch die ν Wurzeln von $K(x_m) = 0$ als eine Punktreihe (K) auf g aufgetragen — die zu den obigen Reihen in invarianter Beziehung steht —, so erfüllt die Reihe (K), bei Variieren von g, eine zum Systeme $(G, H, \ldots; A_m)$ kovariante gegeben, mittels dessen Flächen, die zu einer F_3 (allgemeiner einem System von Flächen $F_p, F_q, \ldots$), der man noch einen Punkt und evtl.

Fläche K, deren Gleichung dann *direkt* durch $K(x_i, x_k, x_l; x_m) = 0$ geliefert wird, und daraufhin diskutierbar ist.

Im besonderen kann sich auch — für $\nu = 0$ — die Kovariante K auf eine Invariante J reduzieren; die Gleichung $J = 0$ stellt dann den Kegel dar, dessen Kanten g solche Punktreihen $(P), (Q), \ldots$ tragen, die an die Beziehung $J = 0$ geknüpft sind.

Es folgen einige Anwendungen des Prinzips. Als Urfläche liege vor eine F_3 mit der Gleichung: $F_3 \equiv a_0 x_m^3 + 3 a_1 x_m^2 + 3 a_2 x_m + a_3 = 0$. Eine Gerade g durch A_m treffe die F_3 im Punktetripel $P = (P_1, P_2, P_3)$. Auf g denke man sich einmal die beiden zum Tripel P äquianharmonischen Punkte H_1, H_2 bestimmt, andererseits die drei harmonischen Punkte Q_1, Q_2, Q_3.

Der Ort von H_1, H_2 ist eine Fläche 4. Ordnung H, die „äquianharmonische" — die *E. Ciani*, Lomb. Ist. Rend. (2) 54 (1921), p. 255, direkt untersucht —, und der Ort von Q_1, Q_2, Q_3 eine Fläche 6. Ordnung Q, die „harmonische". Die Gleichungen der beiden Flächen sind $H(x_m) = 0$, $Q(x_m) = 0$, wo H, Q die beiden Kovarianten von $F_3(x_m)$ bedeuten. Es besitzt H in A_m einen d_2, Q einen d_3. Ist D die Diskriminante von $F_3(x_m)$, so ergibt $D = 0$ (s. auch Nr. 2, Note 7) den von A_m an die F_3 gehenden Berührkegel D, der die F_3 längs einer C_6 berührt. Die Fläche H enthält diese C_6 doppelt und Q dreifach.

Endlich liegen auch die sechs, von A_m an die F_3 gehenden Haupttangenten — für die $H(x_m)$ identisch verschwindet — auf beiden Flächen. — Läßt man den Punkt A_m auf die F_3 rücken (s. Nr. **16**), so sondert sich von der Fläche Q eine Fläche 2. Ordnung ab, und es verbleibt eine Fläche 4. Ordnung Q', die „eigentliche harmonische" Fläche. Die beiden Flächen H und Q' haben die wesentlichsten Eigenschaften gemein: sie haben in A_m einen d_2, berühren sich sowie die F_3 und den Kegel (4. Ordnung) D längs der Kurve C_6, die sie als Doppelkurve enthalten, und es liegen auf ihnen die beiden von A_m an die F_3 gehenden Haupttangenten. Diese Eigenschaften spiegeln sich wieder, wenn man die ganze Figur mit einer Ebene schneidet.

Ähnlich verhält es sich bei dem Sonderfalle, wenn die F_3 zerfällt in eine (einteilige) F_2 und eine Ebene E.

Man hat wiederum zwei Flächen 4. Ordnung H und Q', wo H dann und nur dann reell ausfällt, wenn der von A_m an die F_2 gehende Berührkegel B mit seinem Berührkegelschnitt b einteilig ist. Im übrigen haben H und Q' die wesentlichsten Eigenschaften gemein: sie haben in A_m einen d_2, berühren sich sowie F_2 und B längs b, besitzen den Schnitt k von F_2 und E als Doppelkegelschnitt und enthalten die beiden Geraden, die von A_m an die beiden Treffpunkte von k und b gehen.

In dem metrisch ausgezeichneten Falle, wo die F_2 eine Kugel ist und E die E_∞, werden die beiden Flächen H und Q' zu Rotationszykliden (s. Nr. **16**). — Entsprechendes gilt in der Ebene.

Nunmehr adjungiere man dem Systeme (F_3, A_m) noch irgendeine Ebene F_1, die vorerst nicht durch A_m gehe, und die Gerade g im Punkte R' treffe.

Die drei, bezüglich R' zum Tripel (P_1, P_2, P_3) harmonischen Punkte R_1, R_2, R_3 erfüllen, bei Variieren von g, eine Fläche 6. Ordnung R, mit d_3 in A_m, deren Gleichung sich in eine durchsichtige Gestalt bringen läßt. Interessanter noch eine Ebene adjungiert hat, kovariant sind, eine einfache Behandlung zulassen. Bemerkenswert sind insbesondere die „äquianharmonische" Fläche und die beiden „harmonischen". Auch auf die dritte *Steiner*sche Erzeugung der F_3 (s. Nr. 8) fällt so ein neues Licht.

Ein anderes, von demselben[45b]) Verfasser herrührendes Übertragungsprinzip symbolischen Charakters erlaubt eine einfache Lösung

---

ist der Sonderfall, wenn die Ebene F_1 durch A_m geht; es reduziert sich dann R auf eine Fläche 3. Ordnung F_3', die „bez. A_m harmonische" Fläche; auf sie hat *D. Montesano* hingewiesen, s. Nr. **13**, Note 50. F_3 und F_3' sind eineindeutig aufeinander durch eine quadratische *Cremona*-Transformation bezogen. Besitzt die F_3 einen d_2, so auch die F_3'. Es liege der d_2 von F_3 in D; auf der Geraden g (A_m, D) bestimme man den Restschnittpunkt D', sowie den bez. A_m zu (D, D') harmonischen Punkt M. *Dann ist M der zugehörige d_2 der F_3'.*

Endlich sei noch der Fall erwähnt, wo das Ursystem aus zwei Flächen 2. Ordnung F_2, F_2' und deren Büschel B besteht. Es trifft g das Büschel in einer Involution, deren Doppelpunkte D_1, D_2 eine durch A_m gehende F_3 erfüllen. Da diese auch die Berührungspunkte der von A_m an die Individuen von B gehenden Tangenten enthält, fällt sie mit der nach der *Steiner*schen Erzeugung (II') (s. Nr. 8) entstehenden F_3 zusammen, erscheint aber hier unter allgemeinererem Gesichtspunkte. Das durch A_m gehende Individuum von B besitzt zwei durch A_m laufende Erzeugende g_1, g_2, die der F_3 angehören; die Grundkurve C_4 von B ist die Berührkurve des von A_m an die F_3 gehenden Berührkegels.

Wählt man umgekehrt auf gegebener F_3 den Punkt A_m als reellen Schnittpunkt zweier inzidenter Geraden g_1, g_2 der F_3, und legt von A_m an die F_3 den Berührkegel mit der Berührkurve C_4, so ist das zugehörige F_2-Büschel B eben das durch C_4 als Grundkurve bestimmte.

Analoge Erscheinungen treten im Falle einer ebenen c_3 ein.

45b) *W. Fr. Meyer*, Giorn. di mat. 1929. Dieses Prinzip hat eine gewisse formale Ähnlichkeit mit dem bekannten von *Clebsch* (s. Art. I B 2, Invariantentheorie, *W. Fr. Meyer*), wonach irgendeine in symbolischen Klammerfaktoren ausgedrückte Invariante J, etwa einer binären Form (oder eines Systemes solcher), nach Ränderung mit Variabeln u, gleich Null gesetzt, eine Klassenkurve liefert, deren Tangenten aus einer gegebenen ebenen Ordnungskurve Punktreihen mit der Eigenschaft $J = 0$ ausschneiden.

Zur Illustration des neuen Prinzips mögen einige Beispiele genügen. Sei die symbolische Gleichung einer $F_3 : (a\,x)^3 = 0$. Faßt man irgendeinen Raumpunkt (x) auf als Schnitt dreier Ebenen $(u)(v)(w)$, so sagt die Gleichung $(a\,u\,v\,w)^3 = 0$ aus, daß sich die Ebenen auf der F_3 schneiden.

Hier wird man zwei Fälle unterscheiden. Entweder hält man die Ebene $(w) = (\varepsilon)$ fest, und läßt (u) und (v) nebst ihrer Achse π variabel, oder aber man hält die beiden Ebenen $(u) = (\varepsilon)$, $(v) = (\eta)$ nebst ihrer Achse π' fest, und läßt (u) variieren.

Im ersteren Falle stellt die Gleichung $(a\,u\,v\,\varepsilon)^3 = 0$ — die man weiter nach den Achsenkoordinaten $\pi_{ik} = (u\,v)_{ik}$ entwickele, unter Wiedereinführung der realen Koeffizienten von F_3 — die Schnittkurve c_3 von F_3 mit (ε) in *einer* Gleichung dar, als den Komplex 3. Ordnung der sie treffenden Geraden π. Führt man hier statt der $\pi_{ik} = (u\,v)_{ik}$ die ihnen proportionalen komplementären Strahlen-verschiedener, auf den Schnitt einer (oder mehrerer) F_3 mit Geraden und Ebenen zurückkommender Aufgaben.

13. Reziprokalflächen. Die Steinersche Fläche S als Reziproke einer F_3 mit vier Knoten und ihre Abbildung auf die Ebene. Der F_3 steht dualistisch eine Φ_3 (mit 36 „Doppelsechsen") gegenüber, deren Ordnung zwischen zwölf und drei variieren kann.

Speziell ist die Reziproke einer F_3 mit vier Knoten[46]), die

---

koordinaten $p_{lm} = (xy)_{lm}$ ein und hält wiederum den Punkt (y) fest, so gewinnt man die Gleichung des über der c_3 stehenden Kegels mit der Spitze (y).

Im zweiten Falle ergibt sich durch $(a\varepsilon\eta u)^3 = 0$ die Gleichung des Schnittpunktetripels der Geraden $p' = (\varepsilon\eta)$ mit der F_3 in Ebenenkoordinaten u, d. h. als (ausgeartete) Fläche 3. Klasse. In beiden Fällen läßt sich die Figur von neuem, unter fortlaufender Anwendung des Prinzips, alternierend den Prozessen des Schneidens und Projizierens unterwerfen.

Man beachte, daß bei Anwendung des Prinzips von der Symbolik lediglich als abgekürzter Schreib- und Rechnungsweise Gebrauch gemacht wird, ohne auf deren innere invariantentheoretische Bedeutung zu rekurrieren.

46) Über diese speziellen F_3 [auf die wohl zuerst *Steiner* hingewiesen hat, s. den Brief an *Jacobi* bei *E. Jahnke,* Arch. Math. Phys. (2) 4 (1909), p. 268] vgl. besonders *F. E. Eckardt,* Math. Ann. 5 (1872), p. 30 (s. auch Progr. Reichenbach 1869). [Weitere Einzelausführungen bei: *R. Townsend,* Quart. J. 10 (1869), p. 26; *Saltel,* Brux. Bull. (2) 35 (1873), p. 46, 539; *H. Maynz,* Progr. Ludwigslust 1883; *C. Sharp-Sisam,* Educ. Times 54 (1891), p. 52; *W. Jaeckel*, Progr. Gymn. Olden 1909.] Wählt man die vier Knoten als Koordinatenecken, so nimmt die Gleichung der F_3 die einfache Form an: $\sum \frac{a_i}{x_i} = 0$; die F_3 geht also aus einer Ebene $\sum \frac{a_i}{y_i} = 0$ hervor vermöge der eineindeutigen involutorischen kubischen Transformation T_3: $\sigma x_i y_i = 1$, für die das Koordinatentetraeder Fundamentaltetraeder ist. [Über diese T_3 s. *W. Franz Meyer,* Heidelberg intern. Math.-Kongreß 1904, p. 322.] Bei der *Clebsch*schen Abbildung der F_3 auf die Ebene (Nr. **11**) werden also die sechs Fundamentalpunkte A_i im besonderen die Ecken eines vollständigen Vierseits und umgekehrt. In jede der Kanten des Tetraeders sind vier Gerade der allgemeinen F_3 zusammengefallen, die drei noch übrigen Geraden sind gegeben durch: $\frac{a_i}{x_i} + \frac{a_k}{x_k} = 0$, $\frac{a_l}{x_l} + \frac{a_m}{x_m} = 0$, die sich in der T-Ebene $\sum \frac{x_i}{a_i} = 0$ befinden. Vermöge der T_3 entsprechen den ∞^4 Geraden des Raumes die ∞^4 C_3 durch die Koordinatenecken; durch jede solche C_3 geht ein Büschel der in Rede stehenden F_3. Über die metrischen Beziehungen der Fläche zum Tetraeder s. Nr. **23**.

Die zur F_3 gehörigen Klassengleichungen gehen aus den Ordnungsgleichungen der *Steiner*schen Fläche S (s. den Text) unmittelbar hervor. Trotz ihrer Spezialität gewinnen diese F_3 bei Erörterung der gestaltlichen Verhältnisse der allgemeinen F_3 (Nr. **17**) Bedeutung. — Synthetisch, auf Grund des Verhaltens von zwei C_3 auf einem Kegel 2. Ordnung K_2, verfolgt die F_3 mit $4\,d_2$ *M. Zacharias,* Arch. Math. Phys. (3) 18 (1911), p. 289. Die C_3 durch einen festen Punkt

Steinersche (*Römische*) Fläche S[47]), von Interesse, eine F_4 mit vier „Doppelebenen", und drei durch einen Punkt gehenden Doppel-

---

der F_3 verteilen sich auf ∞^1 Paare, die den K_2 eines Büschels angehören; die Klassifikation dieser Büschel zieht die der F_3 nebst ihrer Konstruktion nach sich. Es wird auch die Polarentheorie der Fläche entwickelt.

Unabhängig von *Eckardt* entwickelt *H. E. Timerding,* Arch. Math. Phys. (3) 20 (1912), p. 98, dessen Methode von neuem, berücksichtigt aber auch imaginäre d_2.

Binär-invarianter Hilfsmittel bedient sich *E. Laguerre,* Nouv. Ann. (2) 11 (1872), p. 319, 334, 418; 12 (1873), p. 55. Die Koeffizienten einer biquadratischen Gleichung $f_4(t) = 0$ mit den Invarianten i, j werden als Pentaederkoordinaten eines veränderlichen Raumpunktes gedeutet. Dann ist $j = 0$ die Gleichung einer F_3, deren $4\,d_2$ die stationären Punkte der durch $f_4 = 0$ dargestellten rationalen Kurve 4. Klasse P_4 sind; die F_3 erscheint als Ort der Punkte, von denen vier harmonische Ebenen an die P_4 gehen. Weitere Eigenschaften der F_3 fließen aus denen der abwickelbaren F_6: $D \equiv i^3 - 27 j^2 = 0$ (wo D die Diskriminante von f_4 ist). Diese Fläche untersucht eingehend *Cayley,* Ann. di mat. (2) 2 (1868), p. 99, 219, 374; Quart. J. 9 (1871), p. 129. Der Schnitt der F_3: $j = 0$ mit der F_2: $i = 0$ ist die Rückkehrkante der F_6; sie ist eine Asymptotenkurve der F_3, und umgekehrt lassen sich alle diese Kurven auf der F_3 in jener Form darstellen. [Wählt man die Asymptotenkurven als Parameterkurven u, v der F_3, so läßt sich nach *T. Egorow,* Paris C. R. 132 (1901), p. 538, das Krümmungsmaß K der Fläche auf die einfache Form bringen: $K = \frac{-1}{\{\varphi(u) + \psi(v)\}^2}$.]

Andererseits hat *A. Goller,* Progr. Ludwigs-Realschule München 1902, die S mit ternär-invarianter Symbolik untersucht, indem er die Form $S \equiv u_\alpha a_x^2$ ansetzt, wo die u quaternäre, die x ternäre Variable sind. Insbesondere leitet er auf diesem Wege die Gleichung und die Eigenschaften der Asymptotenkurven von S ab. Weiterhin werden auch quaternäre Gebilde verfolgt, so die *Hesse*sche Fläche von S.

Endlich sei noch eine liniengeometrische Behandlung der F_4 mit $4\,d_2$, als Klassengebilde, erwähnt, bei *K. Ogura,* Tôhoku Math. J. 14 (1918), p. 28. Er geht von einem linearen „Punkt-Geraden-Konnex" $\sum_{i=1}^{i=4} P_i x_i = 0$ aus. Zu jedem Punkt (x) gehören die (Koinzidenz-)Strahlen eines Büschels in einer Ebene E_x; beschreibt (x) eine Ebene, so berührt die E_x eine F_3 mit $4\,d_2$.

Es sei noch auf eine metrisch interessante F_3 mit $4\,d_2$ hingewiesen, den Ort eines Punktes P, dessen Verbindungsgeraden mit zwei festen Punkten P_1, P_2 gegen eine feste Ebene E gleich geneigt sind. (Sie ist der Spezialfall einer von *„Sturm"*, p. 301, untersuchten Fläche.) Diese F_3 untersucht *H. Thieme,* Ztschr. Math. Phys. 40 (1895), p. 362; sie hat zwei reelle d_2 in P_1, P_2, und zwei imaginäre d_2 in den beiden Kreispunkten von E. Von den neun g der F_3 sind drei reell, zwei Gegenkanten des d_2-Tetraeders und deren Transversale. Vgl. *G. da Fano,* Ztschr. f. Realschulwesen 37 (1912), p. 524. *K. Böheim,* ebenda 38 (1913), p. 524, betrachtet in projektiver Verallgemeinerung die durch projektive Zuordnung eines Ebenenbüschels und eines Kegel-K_2-Büschels erzeugte F_3. Die *Thieme*sche F_3 steht in naher Beziehung zu den von *E. Müller,* Deutsche Math.-

geraden, die von jeder ihrer Tangentialebenen in $2\,C_2$ geschnitten wird.[47a])

Bemerkenswert ist die von *Weierstraß*[48])[48a]) herrührende Darstel-

Ver. 25 (1916), p. 209, eingeführten „axialinversen" F_3. Zwei Raumpunkte P, P' heißen „axialinvers", wenn ihre Verbindungsgerade eine feste Achse in einem Punkte R so trifft, daß das Produkt der Strecken (PR) und $(P'R)$ konstant bleibt. Einer Ebene (P) entspricht dann eine axialinverse F_3. [Auf eine eigentümliche Beziehung der F_3 mit $4\,d_2$ zur *Fresnel*schen Wellenfläche hat schon *Steiner* hingewiesen, Werke 2, p. 724, vgl. *E. Lampe,* Progr. Berlin 1870; Arch. Math. Phys. (3) 20 (1910), p. 111.

47) *Steiner,* Werke 2, p. 721 (Nachlaß) (s. *„Timerding"*, p. 872 ff.). Vgl. die Bemerkungen von *Weierstraß*, p. 741; *E. E. Kummer, K. Weierstraß, Schroeter,* Berl. Ber. 1863 = J. f. Math. 64, p. 66, 77, 79; *Cremona,* J. f. Math. 63 (1864), p. 315; Ist. Lomb. Rend. 4 (1867, Jan.), p. 15; *Clebsch,* J. f. Math. 67 (1867, dat. Juli 1866), p. 1. *Sturm,* Math. Ann. 3 (1871), p. 76, untersucht die Fläche besonders vom Klassenstandpunkt aus.

47a) Diesen Satz beweist *K. Th. Vahlen,* Acta math. 19 (1895), p. 194, mittels einfacher Determinantenrechnung.

48) Bezieht man also die Raumpunkte eines S_3' kollinear auf ein F_2-Gebüsch eines S_3, so entsprechen den Ebenen *Steiner*sche Flächen. Umgekehrt hat hierauf *„Reye"*, p. 140, sowie J. f. Math. 86 (1878), p. 84; Math. Ann. 48 (1896), p. 113, die Abbildung der Fläche gegründet. Einem Punkte P entsprechen acht assoziierte Punkte im S_3', einer Geraden g' eine C_4, einer F_n' eine F_{4n}, und im besonderen einer E' eine S. Vgl. die analytische Behandlung bei *V. Snyder* und *F. R. Sharpe,* Amer. Math. Soc. Trans. 19 (1898), p. 275, und die synthetischen Ergänzungen bei *A. Jopke,* Arch. Math. Phys. (3) 18 (1910), p. 133. Mit Vorteil wählt *Timerding* das F_2-Gebüsch als ein solches mit gemeinsamem Poltetraeder, Ann. di mat. (3) 1 (1917), p. 98; Ens. math. 19 (1917), p. 89.

E. Lacour, Nouv. Ann. (3) 17 (1898), p. 437, 499, vereinfacht die Abbildung der S, indem er deren Gleichung in eine rationale metrische Form bringt. Die Bilder der Asymptotenkurven von S sind gewisse c_3. (S. auch Note 50a.) Die parabolische Kurve von S zerfällt in die vier Berührungs-C_2 der vier singulären Ebenen.

Auf Grund der irrationalen Darstellung untersuchen die S: *C. Segre,* Giorn. di mat. 21 (1883), p. 358; *A. Roberts,* Mess. 11 (1885), p. 132, wo drei orthogonale Transformationen aufgestellt werden, die die S in sich überführen. Eine metrische Spezialisierung der S nimmt *K. Merz* vor, Diss. Techn. Hochsch. Zürich 1914, Schweiz. Nat. Ges. 1914, p. 102. Für rechtwinklige x, y, z legt er die irrationale Gleichung $\sqrt{\frac{x}{\beta}} + \sqrt{\frac{y}{\alpha}} + \sqrt{\frac{z}{\gamma}} = 1$ zugrunde. Vermöge der quadratischen Transformation: $\xi^2 = x$, $\eta^2 = y$, $\zeta^2 = z$ wird die S abgebildet auf ein Oktaeder. In der Diss. erscheinen die Ebenen des Oktaeders als Ort der Doppelgeraden eines gewissen Strahlensystems. *Merz* gibt auch historische Notizen über die S: Ens. math. 19 (1917), p. 89.

Umgekehrt untersucht *P. L. Schoute,* Amsterdam Ak. 4 (1896), p. 224, 272, eine gewisse F_4 als projektive Verallgemeinerung der S. Auf solchen F_4 liegen weder C_{2n+1} noch elliptische C_4, wie das für die S bereits *„Cremona"* und *„Sturm"* gezeigt hatten. — *A. Armenante,* Giorn. di mat. 12 (1874), p. 250, lung der Koordinaten x_i eines Punktes der S als beliebiger quadratischer Formen in drei Parametern λ, die nach *Clebsch* und *Cremona* eine durchsichtige Abbildung[47]) auf die λ-Ebene zur Folge hat (1867).

Einen ebenen Schnitt der S, d. i. einer R_4[49]), deren drei d_2 auf den drei Doppelgeraden liegen und für die die Spuren der vier Doppelebenen die Doppeltangenten sind, entspricht in der Bildebene eine c_2

---

studiert im besonderen die R_4 auf S; *J. Rowe,* Amer. Math. Soc. Proc. 12 (1911), p. 295, gibt eine Konstruktion der Tangentialebene. — Bezüglich der Metrik der S sei noch hingewiesen auf: *E. Amigues,* Nouv. Ann. (2) 19 (1878), der die S als „Mittelpunktsfläche" behandelt; *Cayley-Sharp,* Educ. Times 39 (1883), p. 31, wo der Umriß von einem Punkte einer Doppelgeraden aus als Ellipse ermittelt wird; *W. Schmidt,* Progr. Realgymn. Lüdenscheid 1889, wo die S erscheint als Ort der Punkte, für die die Summe der auf zwei feste windschiefe Gerade gefällten Lote gleich deren kürzestem Abstand δ ist. [Ersetzt man hier δ durch eine beliebige Konstante, so entsteht eine allgemeinere F_4.]

48 a) Die *Weierstraß*sche Darstellung der S ist nach verschiedenen Richtungen hin verallgemeinert worden. So hat man analog überhaupt F mit Scharen von C_2 untersucht, s. *G. Koenigs,* Paris C. R. 105 (1887), p. 407; J. Éc. Norm. (37) 5_2 (1887), p. 177, wo durch jeden Punkt der F n C_2 gehen; *G. Jung,* Palermo Rend. 4 (1890), p. 253 [F_3 und F_4 mit $\overline{C}_2$ s. Nr. **16**]; *Ed. Weyr*, Monatsh. Math. Phys. 2 (1891), p. 351; *Fr. Machovec,* Rosprawy 1893, Nr. 10 [Untersuchung der Tangentialebenen]; *E. Cosserat,* Paris C. R. 124 (1897), p. 1004; ebenda 130 (1900), p. 311, 385, wo F mit doppelter C_2-, im besonderen mit Kreiserzeugung verfolgt werden; *C. H. Sisam,* Amer. 7. Math. 30 (1908), p. 99 [F_3].

Mit Hilfe dieser Methode hat man die S auch als Projektion vom S_4 aus untersucht: s. *G. Veronese*, Rom Linc. Mem. (3) 19 (1884); *E. Ascione,* Rom Linc. Rend. (5) 6_1 (1897), p. 162, 240; *E. Cosserat,* s. oben 1897. Andererseits hat man das Analogon der S im S_n betrachtet: für $n = 4$ bei *A. Tanturri,* Giorn. di mat. (2) 14 (1907), p. 45, 291; allgemein bei *A. Brambilla,* Napoli Atti (2) 9 (1899), p. 185. — Nach einer anderen Richtung verläuft eine Erweiterung der *Weierstraß*schen Darstellung, indem an die Stelle der vier Quadrate linearer Ternärformen vier n^{te} Potenzen treten, s. *A. Brambilla,* Torino Atti 20 (1885), p. 781 [die Haupttangentenkurven bilden sich auch dann als die Inkegelschnitte eines Vierseits ab, s. Note 50a]; Lomb. Ist. Rend. (2) 21 (1888), p. 334, 541; Palermo Rend. 2 (1888), p. 176; *G. Lazzeri,* Ven. Ist. Atti (6) 6 (1888), p. 171; *A. Brambilla,* Giorn. di mat. 35 (1897), p. 1, wo die irrationale Darstellung auf den nächst höheren Fall ausgedehnt wird: $\sum_{i=1}^{i=5} \sqrt{Ax_i} = 0$ und dann eine F_8 liefert.

Umgekehrt ordnen sich der Darstellung von S die der $R \cdot F_3$ unter, s. Nr. **14**.

49) Umgekehrt denke man sich eine r_4, indem man ihre vier Doppeltangenten als Koordinatenvierseit wählt, dargestellt durch $\varrho x = f_i^2(\lambda)$, wo die f quadratische binäre Formen sind. Da die f_i an eine lineare Identität gebunden sind, so nimmt die implizite Gleichung der r_4 die Gestalt an: $\sum b_i \sqrt{x_i} = 0$.

Wegen der Apolaritätszusammenhänge zwischen dem Doppeltangentenvierseit und dem Doppelpunktsdreieck vgl. auch *A. Brill,* Math. Ann. 29 (1882), p. 531, sowie das Referat von *W. Franz Meyer* in den Fortschr. d. Math. 14 (für 1882), p. 534.

eines beliebigen Gebüsches, von dem man irgend vier linear unabhängige als Grundkurven wählen kann. Das Gebüsch der c_2 läßt sich auffassen als die Gesamtheit der c_2, die zu einer Schar Σ von γ_2 mit vier festen gemeinsamen Tangenten ($t_i = 0$) apolar (konjugiert) sind. Diese vier gemeinsamen Tangenten t_i, doppelt gezählt, gehören also dem Gebüsch der c_2 an, und sind die Bilder der vier Doppelebenen. Damit läßt sich die *Weierstraß*sche Darstellung der S normieren zu $\varrho x_i = t_i^2$; da die vier Linearformen t_i an eine lineare Identität, etwa $\sum b_i t_i \equiv 0$, gebunden sind, so wird die implizite Gleichung der S in irrationaler Gestalt: $\sum b_i \sqrt{x_i} = 0$. Der Schar der γ_2 gehören als ausgeartete Klassenkegelschnitte drei Punktepaare an, deren Verbindungsgeraden das Hauptdreiseit des t_i-Vierseits bilden; alle c_2 des Gebüsches treffen die Seiten dieses Hauptdreiseites in Involutionen von (je zu den Grundpunkten) harmonischen Punktepaaren.

Die in Geradenpaare zerfallenden c_2 des Gebüsches sind die Bilder der von den Tangentialebenen der S ausgeschnittenen C_2-Paare. Ist P der beliebig vorgegebene Doppelpunkt eines solchen unbekannten Geradenpaares, so ergeben sich die Geraden des Paares, in dem man die auf zwei der drei Hauptseiten befindlichen Punktinvolutionen von P aus projiziert, und dann das beiden Geradeninvolutionen gemeinsame Paar bestimmt.

Ist andererseits von den beiden Geraden einer zerfallenden c_2 des Gebüsches die eine beliebig gewählt, so ist die andere damit eindeutig bestimmt.

Die drei Hauptseiten sind die Bilder der drei Doppelgeraden der S, insofern jedem der obigen Punktepaare ein Punkt der zugehörigen Doppelgeraden entspricht. Das aus den Ecken des Hauptdreiseits gebildete Dreieck Δ ist das Bild des Punktes d_3, in dem die drei Doppelgeraden zusammenlaufen; dem Ebenenbündel dieses Punktes korrespondiert das Δ umgeschriebene Netz von c_2. Hieraus folgt nach *Darboux*[49a]), daß die Bilder der Haupttangenten von S die Inkegelschnitte des Vierseits der t_i sind.

49a) *G. Darboux,* Soc. Phil. B 10 (1873), p. 37. Der Satz kommt auf eine einfache Eigenschaft der mit der Schar Σ der γ_2 verknüpften quadratischen, involutorischen Geradenverwandtschaft T_2 zurück. Vermöge dieser entsprechen sich zwei Gerade g, g', wenn sie bezug auf alle γ_2 in Σ konjugiert sind.

Andererseits erscheinen diese ∞^2 Geradenpaare (g, g') als die zerfallenden Individuen des zu Σ apolaren c_2-Gebüsches. Denkt man sich irgendeine Gerade g gegeben, so wird sie von einer bestimmten γ_2 (in Σ) berührt. Ist P_1 der Berührungspunkt, so geht die, g vermöge T_2 entsprechende Gerade g' durch P_1 hindurch. Nun sind g, g' die Bilder der beiden C_2, die auf S von der Tangentialebene im Bildpunkte P (von P_1) ausgeschnitten werden. Die beiden Tan-

Von *S. Lie*[50]) rührt der Satz her: Der Ort der Pole irgendeiner festen Ebene ε in bezug auf alle, einer S angehörigen C_2, ist wiederum

genten der C_2 in P sind die durch P laufenden Haupttangenten von S. Läßt man die Gerade g als Tangente längs der obigen γ_2 wandern, so haben γ_2 und g jeweils im Berührungspunkte P_1 die Fortschreitungsrichtung gemein, und ersichtlich sind die γ_2 von Σ die einzigen Kurven dieser Art. Somit sind in der Tat die γ_2 von Σ die Bilder der Haupttangentenkurven von S, die sich daraufhin als Kurven R_4 leicht diskutieren lassen.

In den Sonderfällen (s. Nr. **14**), wo S in eine allgemeine R-F_3, und noch spezieller in eine *Cayley*sche R-F_3 ausartet, treten nur hinsichtlich der Schar Σ einige Modifikationen ein.

Im Falle der allgemeinen R-F_3 hat das c_2-Gebüsch einen Grundpunkt A, der doppelt zählend der Schar Σ angehört. Ist $\gamma_2^{(0)}$ irgendein eigentliches (und damit nicht durch A gehendes) Individuum von Σ, und sind t_1, t_2 die beiden von A an $\gamma_2^{(0)}$ gehenden Tangenten mit den Berührpunkten T_1, T_2, so ist Σ die Schar der, t_1, t_2 in T_1, T_2 berührenden γ_2. Im Spezialfalle der *Cayley*schen R-F_3 liegt A auf γ_2^0 und damit auf allen γ_2, und die Schar Σ besteht aus allen, $\gamma_2^{(0)}$ in A hyperoskulierenden γ_2.

50) *Lie*, Arch. Math. og Nat. 3 (1878), p. 84. Nach Angabe von *Noether*, Math. Ann. 53 (1900), p. 3, hat *Lie* seinen Satz schon 1869 der Universität zu Kristiania eingereicht. — Die *Lie*sche Fläche sei kurz mit L_ε bezeichnet.

G. Koenigs, Soc. math. fr. Bull. 16 (1888), p. 15, findet den Satz von neuem und gibt einen einfachen analytischen Beweis. Er fügt hinzu, daß die Doppelberührebenen von S einfache Berührebenen von L_ε sind, und daß L_ε durch den Schnitt von S mit ε hindurchgeht.

Von *A. Brambilla*, Nap. Rend. (3) 4 (1898), p. 19, rührt die Reziprozitätseigenschaft her: „Berührt eine Ebene η die L_ε, so berührt auch ε die L_η." Weiter dehnt *Brambilla*, ebenda p. 300, den *Lie*schen Satz auf „*Steiner*sche zweidimensionale Flächen" im S_4 und S_5 aus.

D. Montesano, Nap. Rend. (3) 5 (1899), p. 88, fragt nach den näheren Beziehungen zwischen den beiden Flächen S und L_ε, sowie nach den Gebilden, die bei Variieren der Ebene ε von den Doppelgeraden, dem d_3 und den Doppelberührebenen der L_ε beschrieben werden. Zu dem Behuf geht *Montesano* aus von einer F_3 und der zu ihr in bezug auf einen festen Punkt P „harmonischen" kubischen Fläche H_3, dem Ort der drei vierten harmonischen Punkte in bezug auf je zwei der drei Schnittpunkte von F_3 mit einer durch P gehenden variierenden Geraden. (S. auch Nr. **12**, Note 45a.) Besitzt im besonderen die F_3 vier d_2, ist also die Reziproke zu S, so findet das nämliche für die H_3 statt.

Dualistisch ist danach bei gegebener Ebene ε jeder S eine zweite, eben die L_ε, assoziiert, womit der *Lie*sche Satz durchsichtig bewiesen ist. Bewegt sich ε, so beschreiben die Doppelgeraden von L_ε die vier singulären linearen Komplexe, die jene Geraden zu Achsen haben, während der d_3 den ganzen Raum doppelt beschreibt; die Doppelberührebenen von L_ε entsprechen sich in einer gewissen (nicht involutorischen) *Cremona*schen Transformation.

Andere Erweiterungen finden sich bei *C. Rosati*, Tor. Ac. 35 (1900), p. 12

Der Ort der Pole der Sehnen einer auf S gelegenen C_4 in bezug auf die durch ihre Durchschnittspunkte gehenden C_2 von S ist wiederum eine S. Zerfällt die C_4 in zwei C_2, so zerfällt der Ort in die Ebenen der beiden C_2, und eine S; berührt im besonderen ε die S, so reduziert sich der Ort auf eine F_2. Der Satz bleibt auch gültig, wenn die gegebene S in eine R-F_3 ausartet. Weitere Ergänzungen zu diesem Satze haben *G. Königs*, *A. Brambilla*, *D. Montesano* und *C. Rosati* geliefert.[50])

---

eine F_2; ist die C_4 im besonderen eine Asymptotenkurve auf S, so fällt der Ort mit S zusammen, u. a. m. Artet die S in eine R-F_3 aus, so erfahren diese Sätze entsprechende Modifikationen.

Als Beweisprinzip dient geeignete Projektion der im S_5 gelegenen zweidimensionalen „*Verenese*schen Fläche" $F_4^{(2)}$: $x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6 = \lambda_1^2 : \lambda_2^2 : \lambda_3^2 : \lambda_2\lambda_3 : \lambda_1\lambda_3 : \lambda_1\lambda_2$, die zuerst von *G. Veronese*, Rom Ac. Linc. Mem. (3) 19 (1884), genauer untersucht worden ist.

Die Fläche S_ε läßt sich, wie Referent bemerkt, auch einfach invariant darstellen, wodurch zugleich ein neuer Beweis des *Lie*schen Satzes erbracht wird.

Sei S gegeben durch

(1) $$\varrho x_i = c^{(i)}(\lambda_r, \lambda_s, \lambda_t),$$

so ergeben sich die ∞^2, auf S gelegenen C_2, wenn man die $\lambda_r, \lambda_s, \lambda_t$ ersetzt durch beliebige Linearformen einer Variabeln λ:

(2) $$\lambda_r = \alpha_r\lambda + \beta_r,$$

mit $u_r = (\alpha\beta)_{st}$. Damit gehe (1) über in:

(1′) $$\varrho x_i = f_i(\lambda) = a_i\lambda^2 + 2b_i\lambda + c_i.$$

Für die Schnittpunkte λ_1, λ_2 einer solchen C_2 mit einer Ebene (ε) hat man:

(3) $$\lambda^2(\varepsilon a) + 2\lambda(\varepsilon b) + (\varepsilon c) = 0,$$

oder auch, für $\sigma_2 : \sigma_1 : \sigma_0 = \lambda_1\lambda_2 : \lambda_1 + \lambda_2 : 1$,

(3′) $$\sigma_2 : \sigma_1 : \sigma_0 = (\varepsilon c) : -2(\varepsilon b) : (\varepsilon a).$$

Nun hat der Pol $P'(x')$ von (ε) bez. C_2 die Koordinaten:

(4) $$\varrho x_i' = a_i\sigma_2 + b_i\sigma_1 + c_i\sigma_0.$$

Setzt man hier die Werte der σ aus (3) ein, und ordnet nach den ε_i, so erhält man für den Ort der Pole P' von (ε) bez. aller C_2 auf S:

(I) $$\varrho x_r' = \eta_{ir}\varepsilon_i + \eta_{kr}\varepsilon_k + \eta_{lr}\varepsilon_l + \eta_{mr}\varepsilon_m \qquad (r = i, k, l, m).$$

Hier bedeutet η_{rs} die in den Koeffizienten bilineare, in den Variabeln u quadratische Kontravariante der Formen $c^{(r)}$ und $c^{(s)}$. (Für $r = s$ wird η_{rr} die Klassenform von $c^{(r)}$.) Dann ist (I) die Darstellung von S_ε.

Das Beweisprinzip ist ersichtlich ausdehnbar auf den Raum S_n, sowie auf Formen $c^{(i)}$ höheren Grades und in mehr als drei λ-Parametern.

Es genüge etwa die Betrachtung der Fläche F im S_3:

(1a) $$\varrho x_i = c^{(i)}(\lambda_r, \lambda_s, \lambda_t),$$

wo jetzt die $c^{(i)}$ kubische ternäre Formen der Parameter seien. Bei der Abbildung von F auf die λ-Ebene entspricht den ebenen Schnitten von F ein Gebüsch kubischer Kurven c_3. Die Ordnung von F ist daher im allgemeinen gleich 9, erniedrigt sich aber je um eine Einheit bei jeweiligem Auftreten eines Grundpunktes A des c-Gebüsches. [Für sechs G ergibt sich die F_3 (Nr. **11**), für fünf G die F_4 mit $\bar{C}_2$ (Nr. **16**)]. Den ∞^2 Geraden der λ-Ebene entspricht jetzt eine ∞^2-Schar von C_3 auf F. Sucht man wieder den Ort der Pole (Nullpunkte) $P'(x')$ einer festen Ebene (ε) in bezug auf alle C_3 und verfährt im übrigen wie oben bei der S, so gelangt man zu einer, formal mit (I) übereinstimmenden Darstellung des

Von *G. Darboux*[50a]) rührt der Satz her, daß die F mit ∞^2 C_2 R-F_3 oder S sind, von *E. Picard* der allgemeinere, daß S und die rationalen, d. i. auf eine Ebene eindeutig abbildbaren R-F die einzigen F sind, deren ebene Schnitte rational sind. Weitere Verallgemeinerungen treten bei *G. Castelnuovo* auf.

14. Regelflächen 3. Ordnung und ihre Abbildung. Die Cayleysche Fläche. Eine allgemeine Regel-F_3 (R-F_3)[51]) entsteht als Ort der

---

Ortes der P'. Wiederum sind die $\eta_{rs} = -\eta_{sr}$ ($\eta_{rr} \equiv 0$) die in den Koeffizienten bilinearen, in den Variabeln u jedoch kubischen Kontravarianten von $c^{(r)}$ und $c^{(s)}$. Mithin ist der Ort der Pole P' ebenfalls eine Fläche $F = F_\varepsilon$ vom Typus (1a) usf.

50a) *G. Darboux,* Bull. math. astr. (2) 4 (1880), p. 348; *E. Picard,* Par. Soc. ph. 1878, p. 127 (mit Andeutung eines Beweises); J. f. Math. 100 (1886), p. 71. *G. B. Guccia* findet eine Lücke im *Picard*schen Beweise und ersetzt ihn daher durch einen anderen, der auf einer Ausdehnung eines Satzes von *M. Noether,* Math. Ann. 3 (1871), p. 161, über F mit Scharen rationaler C beruht.

Allgemeinere Gesichtspunkte treten bei *G. Castelnuovo* auf. In einer ersten Arbeit geht er aus von Eigenschaften ebener c, die bei eindeutiger Transformation erhalten bleiben und untersucht daraufhin solche Familien von F, deren ebene Schnitte ein vorgegebenes Geschlecht p besitzen. Für $p \leq 2$ ergibt sich, daß solche F (unter gewissen Beschränkungen) rational sind; für $p = 0$ resultiert so der *Picard*sche Satz als Spezialfall. [Wegen der Fälle $p > 2$ vgl. *Castelnuovo,* Rom Linc. Rend. (5) 3_1 (1894), p. 59, 473, und *F. Enriques,* ebenda p. 281.]

Andererseits ordnet *Castelnuovo,* Rom Linc. Rend. (5) 3_1 (1894), p. 22, die Sätze von *Darboux* und *Picard* dem allgemeineren unter, wonach die irreduzibeln F, die von Ebenen in einem ∞^2-Systeme reduzibler C geschnitten werden, R-F oder S sind. Vgl. auch *G. Fano,* In Mem. *d'Ovidio,* 1918, p. 342. Auf den S_n hat den *Picard*schen Satz *E. H. Moore* ausgedehnt, Amer. J. Math. 10 (1887), p. 27. Weitere Literatur über S bei „*Timerding*", p. 872 ff.

51) *M. Chasles,* Paris C. R. 53 (Nov. 1861), p. 884, wo die Kurven auf der Fläche kurz studiert werden und bereits auf die nach *Cayley* benannte R-F_3 hingewiesen wird (s. auch Nr. 4, Note 13); *Cayley,* London Trans. 154 (1864), p. 559 = Papers 5, p. 201; besonders eingehend bei *Cremona,* Ist. Lomb. A. 2 (Febr. 1861), p. 291; J. f. Math. 60 (1862), p. 313. Vgl. noch die zusammenfassenden Darstellungen von *Em. Weyr,* Geometrie der räuml. Erzeugnisse, Leipzig 1870, und *B. Klein,* Diss. Straßburg 1876. — Von neuerer Literatur sei noch folgendes erwähnt: *F. C. Ferry,* Arch. for Mat. Nat. 21 (1899), p. 1, untersucht für die allgemeine R-F_3 die Flächen niedrigster Ordnung, die durch eine vorgelegte C_n auf der Fläche gehen. Die residualen Schnitte lassen sich so wählen, daß sie nur aus Geraden der R-F_3 bestehen. Es wird auch die Parameterdarstellung des Textes (wenn auch nicht so einfach und durchsichtig, wie im Texte) abgeleitet [vgl. *Parrod,* Rev. math. spec. 17 (1907), p. 201], u. a. m. In einer anschließenden Arbeit, Amer. J. 23 (1901), p. 179, löst *Ferry* die analogen Aufgaben für die *Cayley*sche R-F_3; vgl. hinsichtlich der Parameterdarstellung *G. Cotty,* Nouv. Ann. (4) 8 (1908), p. 337; Rev. math. spec. 20 (1910), p. 533, 576. — Gewisse autokollineare R-F_3 untersucht *A. del Re,* Torino Atti 22 (1887), p. 901; Napoli Rend. (2) 1 (1887), p. 167.

F. M. Dumont, Soc. math. fr. Bull. 25 (1897), p. 74, zeigt, daß die R-F_3, einschließlich der *Cayley*schen, autopolar sind in bezug auf gewisse F_2. (Außer

Verbindungsgeraden („Erzeugenden") der Punktepaare (μ, λ) zweier windschiefer Geraden d, e, die durch eine (1, 2)-deutige Korrespondenz $f(\overset{(1)}{\mu}, \overset{(2)}{\lambda}) = 0$ verbunden sind. Jedem Punkte μ der „Doppelgeraden" d entsprechen zwei Punkte λ auf der einfachen Leitgeraden („Begleitgeraden") e, während umgekehrt jedem Punkte λ von e nur ein Punkt μ auf d entspricht. Die λ-Punktepaare bilden auf e eine Involution, deren Doppelelemente die Treffpunkte der beiden Doppelerzeugenden sind.

Da die Verwandtschaft $f(\mu, \lambda) = 0$ durch fünf beliebig gegebene Wertepaare (μ_i, λ_i) eindeutig bestimmt ist, so ist eine R-F_3 durch zwei windschiefe Gerade d, e und fünf ihrer Transversalen eindeutig festgelegt; sie hängt von 13 Konstanten ab. Die stereometrische

---

diesen Flächen erfreuen sich nur noch die F_3 mit drei biplanaren d_2 der genannten Eigenschaft.)

F. Severi, Ven. Ist. Atti 62 (1903), p. 65, untersucht, welche Typen der allgemeinen und *Cayley*schen R-F_3 einseitig und welche zweiseitig sind. Zu dem Behuf wird die Fläche auf eine zur Doppelgeraden senkrechte Ebene senkrecht projiziert. Es ergeben sich 19 verschiedene Typen; sieben derselben, darunter zwei *Cayley*sche, sind einseitig.

A. S. Gale, Amer. Math. Soc. Bull. (2) 10 (1904), p. 188, erhält (nebst zwei weiteren speziellen Typen von F_3) die *Cayley*sche R-F_3 als Doppeltranslationsfläche von C_3 (s. auch Nr. **23**, Note 109).

J. Krames, Wien Ber. 127 (1918), p. 563, untersucht die Striktionslinie der (E_∞ nicht berührenden) R-F_3; diese sind im allgemeinen gewisse C_8, wie schon *A. Adler,* Wien Ber. 85 (1882), p. 369 erkannt hatte. Für eine beliebige algebraische Regelfläche kann die Striktionslinie nur so zerfallen, daß sie aus einer irreduzibeln Kurve, der „eigentlichen Striktionslinie", und aus Geraden der Fläche besteht. Im besonderen ergibt sich, daß es nur eine einzige (E_∞ nicht berührende) R-F_3 gibt, deren eigentliche Striktionslinie eine C_2 ist, die dann von selbst eine Ellipse ist. Diese R-F_3 läßt sich durch eine spezielle projektive Zuordnung zwischen den Punkten eines Kreises und seiner Achse erzeugen.

Die Bilder der Haupttangentenkurven der R-F_3 sind durch den *Darboux*schen Satz (Note 49b) erledigt. Zu den Eigenschaften der Haupttangentenkurven selbst liefern Einzelbeiträge: *R. Nicodemi,* Giorn. di mat. 2 (1883), p. 270; *V. Snyder,* Amer. Math. Soc. Bull. (2) 5 (1891), p. 343; *G. Pittarelli,* Rom Linc. Rend. (4) 7 (1891), p. 452; Giorn. di mat. 32 (1894), p. 14; Lomb. Ist. Rend. (5) 12 (1894), p. 111, 148, 222; *G. Frauenfelder,* Diss. Zürich 1903. Liniengeometrisch behandeln die R-F_3: *J. Plücker,* Ann. di mat. (2) 1 (1869), p. 169, und vor allem *A. Voss,* Math. Ann. 8 (1874), p. 54; ebenda 12 (1876), p. 485. Hier werden mit Vorteil die *Klein*schen Komplexkoordinaten x_i (mit $\sum x_i^2 \equiv 0$) verwendet. Die R-F_3 erscheinen hier übrigens nur als Spezialfall der R-F_n, vgl. die allgemeine Theorie der R-F bei *C. Segre,* Math. Ann. 30 (1887), p. 202; ebenda 34 (1889), p. 1, und das Werk von *K. Zindler,* Liniengeometrie, Bd. 2, Leipzig 1906, den Art. *K. Zindler,* Algebraische Liniengeometrie, Nr. **50**, sowie auf das Werk von *E. Bertini,* Geometria projettiva . . ., Pisa 1987. — Die x_i legt auch *J. de Vries* der R-F_3 zugrunde, Néerl. Kongr. 1912, p. 145. Wegen des Sonderfalles des Zylindroides s. Nr. **24**.

Grundfigur ist dieselbe, wie die einer „Fünf“ g_i $(i = 1, \ldots, 5)$ einer F_3 (Nr. **11**) mit ihren beiden Transversalen t_1, t_2.

In der Tat besteht ein einfacher Zusammenhang. Durch jene sieben Geraden geht noch ein Büschel von F_3, deren Einzelindividuum durch eine achte Gerade h, die drei beliebig herausgegriffene g_1, g_2, g_3 der „Fünf“ trifft, festgelegt werden kann. Gleitet die Gerade h an den drei Geraden g_1, g_2, g_3 entlang, und rückt im Grenzfalle gegen eine der beiden Transversalen, etwa t_1, so geht die F_3 über in die R-F_3, mit t_1 als Doppelgeraden, t_2 als Begleitgeraden und den fünf Geraden g als Erzeugenden.

Aus der Frzeugung der R-F_3 — oder auch aus ihrer schiefen Projektion (Nr. **11**), indem man als Grundgerade zwei windschiefe Erzeugende nimmt, und durch d (resp. e) die Projektionsebene Π legt — fließt die Abbildung der R-F_3 nach *Clebsch*schem Muster.

Der Gesamtheit der ebenen Schnitte R_3 (mit d_2 auf d) entspricht in der Bildebene ein Gebüsch von c_2 mit festem Grundpunkt (Fundamentalpunkt) A_1.

Die Abbildung erscheint also auch als Spezialisierung von der der *Steiner*schen Fläche S (Nr. **13**). Die Doppelbedingung, daß das dort beliebig gelassene c_2-Gebüsch einen Grundpunkt erhält, ist für die S damit gleichwertig, daß sich von ihr eine Ebene (Doppelebene) abspaltet und die S so in eine R-F_3 ausartet; dabei artet die eine Schar der von den Tangentialebenen der S ausgeschnittenen C_2 in Gerade aus, eben die Erzeugenden der R-F_3, während die drei Doppelgeraden in eine einzige koinzidieren.

Ein Gebüsch von c_2 mit Grundpunkt A_1 läßt sich auffassen als die Gesamtheit der durch A_1 gehenden c_2, die zu einem festen Klassenkegelschnitt γ_2 apolar sind. Legt man von A_1 die beiden Tangenten t_1, t_2 an γ_2, mit den Berührungspunkten A_0, A_2, so daß die Gerade $p = (A_0, A_2)$ die Polare von A_1 ist, so drückt sich die Apolarität einfach dadurch aus, daß jede c_2 die Gerade p in einem zu (A_0, A_2) harmonischen Punktepaare (A, A') trifft; der Kegelschnitt γ_2 ist also durch das Punktepaar (A_0, A_2) ersetzbar.

Das Bild der Begleitgeraden e ist der Fundamentalpunkt A_1, insofern jedem Linienelement auf e ein Linienelement durch A_1 entspricht. Die Geraden durch A_1 sind die Bilder der Erzeugenden der R-F_3 und die Gerade p ist das Bild der Doppelgeraden d, insofern jedem Punkt von d eines der obigen Punktepaare auf p entspricht, deren Involution mit der der λ-Punktepaare auf e übereinstimmt. Endlich sind die beiden Geraden $t_0 = (A_1, A_2)$, $t_2 = (A_1, A_0)$ die Bilder der beiden Doppelerzeugenden.

Ein ebener Schnitt der R-F_3 kann nur auf drei Arten zerfallen in: α) $g + C_2$, β) $g + d$, γ) $g + g' + e$ (wo g und g' inzident sind).

Entsprechend zerfällt die Bild-c_2 in eine c_1 durch A_1, und überdies α) eine beliebige c_1', β) die Gerade p, γ) eine zweite zu c_1 konjugierte Gerade c_1' durch A_1.

Hieraus folgt auch die Erzeugung der Fläche durch eine Gerade g, die an zwei windschiefen Geraden d, e und einer C_2, die d einmal trifft, entlang gleitet. Der Vorteil der Abbildung tritt weiter deutlich hervor bei der Diskusion der Schnitte der R-F_3 mit anderen Flächen, da die Anzahl der möglichen Ansätze bei der Abbildung weit geringer ist als bei direktem Verfahren.

Es genüge die Aufzählung der Schnitte C_6 der R-F_3 mit einer (eigentlichen) F_2. Die Einteilung in Klassen geschieht nach der Vielfachheit des Zerfallens der Bild-c_4; die entsprechende Einteilung nach der Vielfachheit des Zerfallens der C_6 selbst kann sofort daraus entnommen werden.

Erster Typus:

A) *Allgemeine nichtzerfallende* c_4 ($p = 2$) mit d_2 in A_1; auf der R-F_3 nicht zerfallende C_6 mit $2 d_2$ auf d (den Schnittpunkten der F_2 mit d).

Dabei müssen sich die vier Schnittpunkte der c_4 mit der Geraden p in zwei Paare der Involution (A_0, A_2) zerlegen. [Diese Bedingung kommt im folgenden nur dann in Wegfall, wenn p einen Bestandteil der c_4 bildet.]

Sonderfall:

A_0) r_4 mit d_3 in A_1:

$C_6 = R_5 + e$.

Die R_5 hat ebenfalls $2 d_2$ auf d; die C_6 entsteht, wenn man eine F_2 durch e legt.

Zweiter Typus:

B) *Die* c_4 *zerfällt in zwei* (eigentliche) *Teilkurven.*

Man hat zwei Untertypen: B_1) $c_4 = c_3 + c_1$; B_2) $c_4 = c_2 + c_2'$.

Erster Untertypus. B_1) $c_4 = c_3 + c_1$.

Unterfälle:

$\mathrm{B}_{1,\mathfrak{a}}$) Die c_3 ($p = 1$) geht durch A_1, desgleichen c_1:

$C_6 = C_5 (p = 1) + g$.

Die C_5 hat einen d_2 auf d.

$\mathrm{B}_{1,\mathfrak{b}}$) r_3 mit d_2 in A_1, nebst beliebiger c_1:

$C_6 = R_4 + C_2$ (Schnitt mit einer F_2 durch eine C_2).

Die R_4 hat einen d_2 auf d.

Hiervon sind wiederum Spezialfälle:

$B_{1,b'}$) Die c_1 fällt mit p zusammen:

$C_6 = R_4 + d$ (Schnitt mit einer F_2 durch d).

$B_{I,b''}$) Auch c_1 geht durch A_1:

$C_6 = R_4 + g + e$ (Schnitt mit einer F durch g und e).

Zweiter Untertypus. B_2) $c_4 = c_2 + c_2'$. c_2 und c_2' gehen durch A_1:

$C_6 = C_3 + C_3'$ (Schnitt mit einer F_2 durch eine C_3).

C_3 und C_3' treffen sich dreimal, entsprechend den drei weiteren Schnittpunkten von c_2 und c_2'; überdies treffen aber C_3 und C_3' die Doppelgerade d in denselben beiden Punkten, entsprechend den beiden Punktepaaren von c_2 und c_2' auf p.

Dritter Typus:

C) c_4 zerfällt in die drei Teilkurven: $c_4 = c_2 + c_1 + c_1'$.
Unterfälle.

C_a) c_1 und c_1' (nicht konjugiert) durch A_1, c_2 beliebig:

$C_6 = R_4 + g_1 + g_2$ (Schnitt mit einer F_2 durch g_1 und g_2).

Es sind g_1 und g_2 windschief; die R_4 trifft d zweimal.

C_b) c_2 und c_1 durch A_1, c_1' beliebig:

$C_6 = g + C_2 + C_3$ (Schnitt mit einer F_2 durch eine g und C_2).

Hiervon sind wiederum Spezialfälle:

$C_{b'}$) $c_1' = p$:

$C_6 = g + C_3 + d$ (Schnitt mit einer F_2 durch g und d).

$C_{b''}$) Auch c_1' geht durch A_1, ist nicht konjugiert zu c_1:

$C_6 = g_1 + g_2 + e + C_3$ (Schnitt mit einer F_2 durch g_1, g_2 und e).

g_1 und g_2 sind windschief.

Vierter Typus:

D) c_4 zerfällt in vier Gerade: $c_4 = c_1 + c_1' + c_1'' + c_1'''$.
Unterfälle.

D_a) c_1 und c_1' (nicht konjugiert) durch A_1, c_1'' und c_1''' beliebig:

$C_6 = g_1 + g_2 + C_2 + C_2'$ (Schnitt mit einer F_2 durch g_1, g_2 und C_2).

g_1 und g_1 sind windschief.

Im besonderen können c_1'' und c_1''', und damit auch C_2 und C_2' zusammenrücken; dann berühren sich beide Flächen längs eines Kegelschnitts.

D_b) Eine der beiden Geraden c_1'' und c_1''', etwa die letztere, fällt mit p zusammen, während die erstere beliebig bleibt.

Es treten zwei Unterfälle ein, je nachdem c_1 und c_1' konjugiert sind oder nicht:

D_{b_1}) $C_6 = g + g' + d + C_2$ (Schnitt mit einer F_2 durch zwei inzidente Erzeugende g, g');

D_{b_2}) $C_6 = g + g_1 + d + C_2$ (Schnitt mit einer F_2 durch zwei windschiefe Erzeugende g_1, g_2, nebst d).

Beidemal kann wiederum auch c_1'' in p hineinfallen; dann artet auch die C_2 in d aus, und beide Flächen berühren sich längs d.

Endlich kann auch c_1'' durch A_1 gehen:

D_{b_3}) $C_6 = g_1 + g_2 + g_3 + d + e$ (Schnitt mit einer F_2 durch drei windschiefe Erzeugende g_1, g_2, g_3, oder auch durch die beiden Leitgeraden d, e).

Wählt man in der Bildebene A_1, A_0, A_2 als Koordinatenecken, andererseits das Koordinatentetraeder angemessen, so erhält die Gleichung der R-F_3 die Normalgestalt:

$$x_i x_m^2 = x_k x_l^2. \tag{5}$$

Bedeutet g_{rs} irgendeine Kante ($x_r = 0$, $x_s = 0$), so ist g_{lm} die Doppelgerade d, g_{ik} die Begleitgerade e, während g_{il} und g_{km} die beiden Doppelerzeugenden sind. Führt man die Parameter $\frac{x_i}{x_k} = \mu$, $\frac{x_l}{x_m} = \lambda$ ein, so reduziert sich die frühere Korrespondenz $f(\mu, \lambda) = 0$ auf $\mu = \lambda^2$. Aus (5) folgt auch die Erzeugung der R-F_3 durch ein Ebenenbüschel und ein ihm projektiv zugeordnetes F_2-Büschel (Nr. 8) von der speziellen Beschaffenheit, daß es zwei Doppelebenen enthält. Mit Hilfe eines weiteren Parameters ν ergibt sich aus (5) die explizite Darstellung:

$$x_i : x_k : x_l : x_m = \lambda^2 : 1 : \lambda\nu : \nu. \tag{5'}$$

Man kehre jetzt zurück zur ursprünglichen Auffassung, wonach das c_2-Gebüsch in der Bildebene aus den c_2 mit Grundpunkt A_1 bestand, die zu einem festen Klassenkegelschnitt γ_2 konjugiert waren, an den von A_1 die Tangenten $t_1 = (A_1 A_2)$ und $t_2 = (A_0 A_2)$ gingen.

Man denke sich nunmehr den Fundamentalpunkt A_1 beweglich, er wandere etwa auf der (als reell angenommenen) Tangente t_2 entlang, so kann der Grenzfall eintreten, daß er mit A_0 koinzidiert (d. i. auf γ_2 rückt). Dann rückt entsprechend auf der R-F_3 die Begleitgerade e in die Doppelgerade d, und es ergibt sich als Normalgleichung für diesen Grenzfall:

$$x_i x_k x_m = x_i^2 x_l + x_k^3. \tag{5a}$$

Dann ist die Kante g_{ik} die Doppelgerade d, während g_{kl} eine beliebige Erzeugende g liefert. Legt man durch d das Ebenenbüschel $x_i = \lambda x_k$, so erhält man aus (5a): $\lambda x_m = x_l + x_k$, und damit die Darstellung aller Erzeugenden. Aus (5a) folgt auch die Erzeugung der Fläche durch ein Ebenenbüschel und ein ihm projektiv zugeordnetes F_2-Büschel (Nr. 8) von der speziellen Beschaffenheit, daß es eine Doppelebene enthält und von den zwei Doppelgeraden, in die seine Grundkurve zerfällt, die eine mit der Achse des Ebenenbüschels zusammenfällt. Mit Hilfe eines weiteren Parameters ν wird (5a) gleichwertig mit der expliziten Darstellung:

$$x_i : x_k : x_l : x_m = \lambda^2 : \lambda : \nu : \lambda\nu + 1. \tag{5a'}$$

Dies ist die „*Cayleysche Fläche*“ (*Cayley*, Papers 5, bes. p. 211, 213, s. auch Nr. **4**, Note 13). Sie ist dadurch merkwürdig, daß sie, nach *S. Lie*[52]), abgesehen von den F_2 und den abwickelbaren Flächen, die einzige ist, die mehr als zwei unabhängige infinitesimale projektive Transformationen gestattet.

II. Systematischer Ausbau der Theorie.

15. Cremonas und Sturms Preisarbeiten. Kurven auf der Fläche. Hiermit schließt die erste Periode ab und eine zweite beginnt mit den, den Beweisen der *Steiner*schen Sätze gewidmeten Berliner Preisarbeiten von *Cremona*[53]) und *Sturm*[53]) (über letzteren s. auch Nrn. **6**, **8**, **10**); von da ab datiert erst eine systematische Theorie der F_3.

Bei *Cremona* erscheinen die bis dahin entdeckten geometrischen Sätze über die F_3 als Spezialfälle einer projektiven Theorie der F_n überhaupt (s. „*Salmon-Fiedler*“, Kap. I). Zwei Gesichtspunkte treten besonders hervor, einmal der der *Polargebilde*[54]), mit besonderer Anwendung auf die *Hesse*sche und *Steiner*sche Fläche — und im Anschluß daran, bei der F_3, auf das Pentaeder —, sodann, unabhängig davon,

52) *Lie* bei *Lie-Engel*, Transformationsgruppen, Bd. 3 (Leipzig 1893), p. 196. Vgl. die Ergänzungen von *F. Enriques*, Ven. Ist. Atti (7) 4 (1893), p. 1590; ebenda 5 (1894), p. 638, sowie die abschließende Arbeit von *Lie*, Leipzig Ber. 47 (1895), p. 209.

53) *Cremona*, J. f. Math. 68 (1867), p. 1—133; *Sturm* s. das Literaturverzeichnis. Auf die Arbeiten von *Cremona* und *Sturm* stützen sich insbesondere die Nrn. **16**, **18**—**21**. Ausführliche Inhaltsangaben findet man bei „*Salmon-Fiedler*“.

54) Auf die Polareigenschaften der Kernfläche der F_3, ihrer Knotenpunkte, reziproken Pole usf., wie sie besonders *Steiner*, *Clebsch*, *Cremona*, *Sturm*, *Reye* entwickeln, kann nur hingewiesen werden. Bezüglich der Ausartungen der Kernfläche vgl. *E. Ciani*, Rom Linc. Rend. (4) 6_1 (1890), p. 55; Ist. Lomb. Rend. 2 (26) (1892), p. 498, 523, 537; (2) 27 (1894), p. 222.

die *Erzeugung*[55]) gesuchter und gegebener Flächen und Raumkurven durch projektive, kollineare usw. Büschel, Netze usw. von Flächen geringerer Ordnung. Vgl. auch Nr. **21**.

Mit solchen Erzeugungen werden Abbildungen auf einfachere Grundgebilde organisch verknüpft, woraus die Geometrie *auf* der Fläche erwächst. Implizite bedienen sich *Cremona* und *Sturm* (wie auch „*Reye*“) dabei des *Bézout*schen Eliminationssatzes und des *Gauß*schen Fundamentalsatzes der Algebra.

Bei „*Sturm*“ werden zunächst die verschiedenen bis dahin aufgestellten Erzeugungsweisen der allgemeinen F_3, zugleich mit dem Nachweise ihrer $27\,g$, abgeleitet.

Sodann wird auf die Eigenschaften der F_3 hinsichtlich der auf ihr liegenden C niedrigster Ordnung eingegangen.

Es folgt die Betrachtung der Polarflächen der F_3, mit besonderer Anwendung auf die Kernfläche. Eingehend werden die Schnittkurven der F_3 mit einer F_2 und einer anderen F_3 diskutiert.

Nach Aufstellung einiger Hilfssätze über imaginäre Gebilde wird die Realität der $27\,g$ bei der allgemeinen F_3 festgestellt, an die sich die Einteilung der reellen F_3 in Gattungen anschließt.

Endlich wird auch das Auftreten von d_2 berücksichtigt.

Sturm[56]) hat weiterhin das ausgesprochene Bestreben, in Anlehnung an *H. Milinowski*[57]), in „rein geometrischer“ Art die Erzeugungen der F_3 zu studieren und hierauf die Polareigenschaften der Fläche zu stützen.

Die Abbildung der F_3 (Nr. **11**) auf eine Ebene gewinnt *Cremona* auf dem *Graßmann*schen Wege, indem er, unter Vermeidung von Koordinaten, nach dem Vorgange von *Magnus* und *Hesse* (Nr. **1**), den Raumebenen eine Schar (Gebüsch) von F_3 mit gemeinsamer C_6 zuordnet, und verwendet sie für die Schnitte der F_3 mit F_2 und anderen F_3.

Darüber hinaus haben *Sturm*[58]) und *K. Rohn*[58]) allgemein die bei

---

55) Vgl. „*Sturm*“, „*Reye*“, sowie Nr. **21**.

56) *Sturm*, J. f. Math. 88 (1880), p. 213, wo auch die Kurven auf der F_3 „rein synthetisch“ untersucht werden, vgl. auch Note 58. Vgl. „*Reye*“, p. 96.

57) *Milinowski*, Ztschr. Math. Phys. 23 (1878), p. 85, 211; J. f. Math. 89 (1880), p. 136.

58) *Sturm*, Math. Ann. 21 (1883), p. 457; *Rohn*, Leipz. Ber. 46 (1891), p. 84. Die F_3 sind dadurch ausgezeichnet, daß bei ihnen die Restkurven niedrigster Ordnung stets zerfallen. — Auf Grund einer *Sturm*schen Erzeugung der F_3 (s. Nr. **9**, Note 26) untersucht die C_3 auf F_3 *W. Burnside*, Cambr. Phil. Soc. Proc. 15 (1911), p. 425. — Im Anschluß an seine Erzeugung der F_3 (Nr. **9**, Note 32) untersucht *G. Majcen* insbesondere die C_3 und C_4 auf der F_3, Agram Ak. 175 (1909), p. 87; 178 (1911). — Als Sonderfall allgemeiner Erscheinungen bei den

gegebener Ordnung und gegebenem Geschlecht auf der F_3 je existierenden Kurvenarten untersucht, ersterer mittels der schiefen Projektion (Nr. **11**), letzterer mittels der zugehörigen *Restkurven* niedrigster Ordnung, die sich gerade bei der F_3 besonders einfach gestalten. Ausgedehnte Tabellen lassen die Fruchtbarkeit dieser Methoden hervortreten.

16. Geisers Projektion der Fläche von einem ihrer Punkte aus. Segres Projektion vom S_4 aus. Der von einem Punkte P (außerhalb der F_3) an die F_3 gehende Tangentenkegel ist von der 6^{ten} Ordnung und besitzt 27 Doppelebenen, eben die, welche nach *Cayley* (Nr. 2) die 27 Geraden der F_3 projizieren. Die Fruchtbarkeit dieser Methode trat aber erst hervor, als *F. Geiser*[59]) das Projektionszentrum P auf die F_3 selbst rücken ließ; die Ordnung des Kegels, für den die in P zur F_3 gehörige Tangentialebene zur 28^{ten} Doppelebene wird, reduziert sich dann auf vier. Der ebene Schnitt des Kegels wird somit eine allgemeine c_4 (vom Geschlecht 3) mit 28 Doppel-

---

F_n verfolgt *A. B. Basset* singuläre C_n und Γ_n, besonders für $n = 3, 4$: Quart. J. 36 (1905), p. 359; 37 (1906), p. 106; 39 (1908), p. 334; 40 (1909), p. 210; 41 (1910), p. 24; 42 (1911), p. 225. — Mittels der Restkurven untersuchte die C auf F_3 auch *H. F. Baker,* London Math. Soc. Proc. (2) 11 (1912), p. 285. — Die systematischen Untersuchungen von *Sturm* und *Rohn* führt, unter Benutzung verschiedener Abbildungen der F_3, weiter *M. Piazzolla-Belloch,* Giorn. di mat. 50 [(3) 12] (1922), p. 47. — Büschel von R_n auf zweiteiligen[76a]) F_3 verfolgt *A. Wiman,* Skand. Kongr. Helsingfors 1922, p. 41.

59) *Geiser,* Math. Ann. 1 (1868), p. 129. Vgl. die weitere Ausführung bei *M. Zacharias,* Diss. Rostock 1903. Einer der Hauptsätze lautet: „Drei g der F_3 entsprechen dann und nur dann drei syzygetischen[62]) Doppeltangenten der C_4, wenn zwei von ihnen inzident sind, und die dritte entweder beide oder keine von ihnen schneidet.“ Weitere Ergänzungen finden sich bei *M. Lenz,* London Math. Soc. Proc. (2) 9 (1910), p. 205. — Die Umkehrung der *Geiser*schen Projektion läßt sich besonders verfolgen bei der *Klein*schen $c_4 \equiv c_4' \equiv x_i^3 x_k + x_k^3 x_l + x_l^3 x_i = 0$, die in der Theorie der Transformation 7. Ordnung der elliptischen Funktionen, der endlichen Gruppen und ihrer Invarianten und der Gleichungen 6. Grades eine wesentliche Rolle spielt (s. z. B. *R. Fricke,* Algebra II, Braunschweig 1926). Man hat in der Identität $c_4 \equiv f_1 f_3 - f_2^2$ die Koeffizienten zu vergleichen, und für dieses System von Bedingungen eine möglichst einfache partikuläre Lösung zu finden. Eine solche ergibt sich in der Darstellung:

$$F_3' \equiv x_m^2(x_i + x_k + x_l) + x_m(x_i x_k + x_k x_l + x_l x_i) \\ + (x_i^2 x_k + x_k^2 x_l + x_l^2 x_i + x_i x_k x_l) = 0.$$

Diese F_3' ist sodann nach *Graßmann* (Nr. 7) zu erzeugen, wiederum vermöge einer geeigneten partikulären Lösung. Bildet man endlich die F_3' nach *Clebsch* (Nr. **11**) auf die Ebene ab, so lassen sich die nichthomogenen Koordinaten der sechs Fundamentalpunkte A als siebente komplexe Einheitswurzeln darstellen. S. *W. Fr. Meyer,* München Ber. 1928, p. 143.

tangenten, und umgekehrt lassen sich zu gegebener c_4 zugehörige F_3 konstruieren.[59a])

Wählt man P als Koordinatenecke A_4, so lautet die nach x_4 geordnete Gleichung der F_3: $x_4^2 f_1 + 2x_4 f_2 + f_3 = 0$, wo f_i eine ternäre Form der x_1, x_2, x_3 vom Grade i bedeutet. Dann ergibt sich sofort die Gleichung des Kegels und damit auch seines Schnittes c_4 mit der Ebene $x_4 = 0$ in der Normalform: $c_4 \equiv f_1 f_3 - f_2^2 = 0$, aus der man abliest, daß sich die Tangentialebene $f_1 = 0$ der F_3 in A_4 als eine Doppeltangente der c_4 projiziert.

Die c_4 läßt sich auch auffassen als Grenzkurve der (1, 2)-deutigen Abbildung[60]) der F_3 auf die Ebene vermöge des Strahlenbündels P.

Hierdurch bereichern sich die Theorien der c_4 und F_3 gegenseitig, wobei zu beachten ist, daß die erstere [vgl. Art. III C 5a, *G. Kohn*[61]), *Ebene Kurven der dritten und vierten Ordnung*] schon seit längerer Zeit, sowohl von geometrischer Seite her, wie von analytischer, auf Grund der Theorie der *Abel*schen Funktionen vom Geschlecht 3, eingehend untersucht worden ist.

So übertragen sich[62]) die zahlreichen Sätze von *Steiner*, *Hesse* u. a.

59a) Hierbei wird es für die Theorie der elliptischen Modulfunktionen von Bedeutung, daß die Diskriminanten der F_3 und c_4 einander proportional werden, s. *F. Klein-R. Fricke*, Elliptische Modulfunktionen, Leipzig 1911. Geometrisch ist sofort ersichtlich, daß sich ein d_2 der F_3 in einen d_2 der c_4 projiziert, und vice versa.

60) *Clebsch*, Math. Ann. 3 (1870), p. 45, bes. § 8. Hier werden allgemein derartige mehrdeutige Abbildungen von Flächen im Zusammenhange mit den eindeutigen betrachtet, insbesondere die Beziehung zwischen der (1, 2)-deutigen Abbildung der F_3 und der eineindeutigen der Nr. **11**. Solche (1, 2)-Abbildungen von Flächen, besonders hinsichtlich der „Übergangskurve" sind verschiedentlich weiter verfolgt worden, so von *R. de Paolis*, Rom Linc. Rend. (3) 1 (1877), p. 136; *M. Noether*, Math. Ann. 33 (1889), p. 525; *M. Pieri*, Tor. A. 24 (1889), p. 514; *F. Enriques* und *G. Castelnuovo*, Soc. Ital. (3) 10 (1896), p. 201 u. 232; *A. Bottari*, Ann. di mat. (3) 2 (1899), p. 277. — Es sei noch bemerkt, daß auch die (1, 3)-Abbildung der F_3 auf die Ebene untersucht worden ist, s. *S. Kantor*, J. f. Math. 95 (1883), p. 147.

61) Insbesondere sei auf die Nummern hingewiesen: **59.** *Steiner*sche und *Hesse*sche Kegelschnitte; **71.** Die *Geiser*sche Erzeugung; **75.** Realitätsfragen. Wegen der Beziehungen der c_4 zu den *Abel*schen und Thetafunktionen vgl. etwa *W. Wirtinger*, Untersuchungen über Thetafunktionen, Leipzig 1895, sowie die Artt. II B 6, 7 von *A. Krazer* und *W. Wirtinger*.

62) In dieser Hinsicht sei noch hingewiesen auf den Unterschied zwischen den von drei Doppeltangenten der c_4 gebildeten *syzygetischen* resp. *asyzygetischen* Dreiseiten.[59]) [Über deren analytische Behandlung s. z. B. *G. Frobenius*, J. f. Math. 103 (1888), p. 139.] Im ersteren Falle liegen die sechs Berührungspunkte auf einer c_2, so daß der *Pascal*sche Satz gilt, und entsprechend auf der F_3; im letzteren Falle besitzen die Schnittpunkte der drei Paare von Gegenseiten des Sechsecks die Eigenschaft, daß ihre Verbindungsgeraden mit den zugeordneten Ecken des

über die Lagerung der Doppeltangenten auf die Geraden der F_3. Der *Lüroth*sche Satz (Nr. **11**, Note 34), daß die sechs Geraden einer Sechs als Tangentialebenen eines Kegels 2. Klasse projiziert werden, tritt jetzt in organische Beziehung zu den *Hesse*schen γ_2, die gewisse Gruppen von sechs Doppeltangenten der c_4 berühren.[62a])

Auf Grund seiner vorangehenden Untersuchung der verschiedenen Typen von c_4[63]) konnte nunmehr *H. G. Zeuthen* einen völligen Überblick[64]) über die Gestalten der singularitätenfreien F_3 geben; den von

Dreiseits inzident sind, und wiederum entsprechend auf der F_3. Vgl. *W. Franz Meyer,* Arch. Math. Phys. (3) 15 (1909), p. 258; *O. Degel,* ebenda 20 (1912), p. 87.

62a) Dabei empfiehlt es sich, im Anschluß an *Hesse,* Nr. **1**, Note 2, die $27\,g$ der F_3 mit *Cayley* [J. f. Math. 68 (1867), p. 176] noch in anderer Weise zu bezeichnen, vgl. Art. *G. Kohn*[61]), sowie *R. Fricke,* Algebra II, Braunschweig 1926. Schon *Hesse,* J. f. Math. 49 (1855), p. 243, 279, hatte die 28 t_2 einer c_4 $(p = 3)$ den 28 Verbindungsgeraden von 8 (assoziierten) Raumpunkten (7, 8; $i, k = 1, 2, \ldots, 6$) zugeordnet. Da sich bei der *Geiser*schen Projektion eine der t_2, etwa (7, 8), als Spur der Tangentialebene der F_3 im Projektionspunkt absondert, gestatten die $27\,g$ der F_3, unter Auszeichnung einer Doppelsechs, z. B. (a_i, b_i) (s. Nr. **11**), die folgende Bezeichnung durch „Doppelindizes“:

$$a_i = (7, i), \quad b_i = (8, i), \quad c_{ik} = (i, k).$$

Danach lassen sich die Schemata für windschiefe und inzidente g der F_3, für die 36 Doppelsechsen und 45 Ebenen, die syzygetischen und asyzygetischen Dreiecke der t_2 usf., leicht umschreiben. Man beachte noch, daß sich sechs g der F_3 dann und nur dann in sechs, eine γ_2 berührende t_2 projizieren, wenn sie entweder eine Sechs bilden, oder aber eine „Doppeldrei“, das sind drei windschiefe g nebst ihren drei Transversalen. Hieraus wird ersichtlich, daß der Satz von *Hesse,* es gebe eine endliche Anzahl von Zwölferkomplexen der t_2, derart, daß 32 mal sechs von ihnen eine γ_2 berühren, auf einen Widerspruch stößt.

63) *Zeuthen,* Math. Ann. 7 (1874), p. 410. Weitere Ausführungen findet man bei *C. Crone,* Tiddskr. Mat. (3) 5 (1875), p. 161; Math. Ann. 12 (1877), p. 561; Tiddskr. Mat. (4) 1 (1877), p. 97; *Zeuthen*, Festschrift 1909, p. 27; *C. Hoßfeldt,* Ztschr. Math. Phys. 32 (1886), p. 1 (Realitätsdiskussion). — Bezüglich der Gestalten der c_4 sei auf den Art. *Kohn*, bes. Nrn. **52, 53** hingewiesen, sowie auf *R. Gentry,* On the formes of plane quartic curves, New York 1896; *O. Chisini,* Lomb. Ist. Rend. (2) 53 (1920), p. 591. — Den Zusammenhang der t_2 der c_4 mit *Cremona*transformationen des S_2 und S_3 untersucht *J. R. Conner,* Amer. J. Math. 38 (1916), p. 155. — Endlich sei auch noch der Zusammenhang der c_4 mit der *Kummer*schen F_4 erwähnt, vgl. *P. Roth,* Monatsh. Math. Phys. 18 (1907), p. 161, wo weitere Literatur; *F. Schottky,* J. f. Math. 146 (1916), p. 129.

64) *Zeuthen,* Math. Ann. 8 (1874), p. 1. Der Projektionspunkt auf der F_3 wird zweckmäßig an einer Stelle elliptischer Krümmung gewählt; vgl. die Ausführung im einzelnen bei *G. Herting*, Diss. München 1887. Für die Krümmung der F_3 ist zu beachten, daß nach *G. Bauer,* Münchn. Abh. 14 (1883), p. 1, die *parabolische* Kurve der F_3 zugleich die der Kernfläche ist.

Das Bild dieser parabolischen Kurve bei der Abbildung der Nr. **11** untersucht eingehend *H. H. Niesen,* Diss. Groningen 1910. Für den Fall des Auftretens von d_2 der F_3 s. *P. H. Schoute,* Amst. Versl. 15 (1907), p. 570.

Doppeltangenten der c_4 gebildeten Drei- und Vierseiten entsprechen in gewisser Weise aus Geraden der F_3 gebildete geschlossene Drei-, Vier- und Fünfseite. Insbesondere ordnen sich die fünf Realitätstypen der c_4 den fünf *Schläfli*schen Typen (Nr. **4**) gegenseitig zu; der bei den früheren Abbildungen (Nr. **11**) unzugänglich gebliebene fünfte Typus läßt sich jetzt leicht beherrschen. Überhaupt fällt durch die neue Abbildung auf die Ergebnisse von *Schläfli* und *F. Klein* (Nr. **17**) ein neues Licht

Auf andere Art hat *C. Segre*[65]) durch eine Projektion vom S_4 aus die F_3 zugänglich gemacht, indem er sie, gewissermaßen anhangsweise, als Ausartungen von F_4 ansieht (vgl. auch Nr. **9**).

Im S_4 seien zwei Über-F_2 vorgelegt:

$$F_2^{(4)} \equiv x_5^2 F_0 + x_5 F_1 + F_2 = 0, \quad G_2^{(4)} \equiv x_5^2 G_0 + x_5 G_1 + G_2 = 0,$$

deren Durchschnitt eine Mannigfaltigkeit M_4 bildet. Man projiziere die M_4 von einem zunächst außerhalb gelegenen Punkt P aus in einen S_3, so ergibt sich eine F_4 mit Doppelkegelschnitt $\overline{C}_2$ und 16 Geraden. Die Eigenschaften dieser F_4 werden wesentlich auf Grund des Satzes entwickelt, daß sich im Büschel $(F_2^{(4)}, G_2^{(4)})$ fünf Überkegel befinden, die sich ausgezeichneter Polaritätseigenschaften erfreuen.

Die F_4 läßt sich wiederum in Analogie zum *Clebsch*schem Muster (Nr. **11**) auf eine Ebene E mit fünf Fundamentalpunkten $A_i, \ldots, A_n$ abbilden, so daß den ebenen Schnitten der F_4 (d. s. c_4 mit zwei d_2 auf $\overline{C}_2$) ein Gebüsch von c_3 mit den fünf Grundpunkten A entspricht, d. i. die Gesamtheit der durch die A gehenden und zugleich zu einer festen γ_3 konjugierten c_3, und umgekehrt. Die 16 Geraden der F_4 ergeben sich aus dem *Clebsch*schen Schema einfach dadurch, daß man irgendeine Gerade (a_1) der F_3 nebst den zehn sie treffenden streicht. Dem Doppelkegelschnitt $\overline{C}_2$ korrespondiert eine gewisse ausgezeichnete c_3'[66])

65) *Segre,* Math. Ann. 27 (1884), p. 313. Wegen weiterer Ergänzungen und Vereinfachungen vgl. noch *G. Veronese,* Ven. Ist. A. (6) 2 (1884), p. 1847; Math. Ann. 24 (1884), p. 313. — Die Klassengleichung einer F_4 mit $\overline{C}_2$ (sowie allgemein einer F_n mit einer $\overline{C}$) zerlegt *O. Chisini* in Faktoren, Rom Linc. Rend. (5) 26_1 (1917), p. 545. — Im übrigen sei bezüglich der ausgedehnten Literatur über F_4 mit $\overline{C}_2$ auf *„Timerding"*, p. 864 ff. verwiesen, sowie auf: *L. Berzolari,* Ann. di mat. (2) 13 (1885), p. 102; *Reye,* Math. Ann. 55 (1902), p. 257; *H. F. Baker,* London Math. Soc. Proc. (2) 11 (1912), p. 285; *V. H. Rao,* ebenda (2) 17 (1919), p. 272. *Rao* verweist in diesem Zusammenhange noch auf eine Monographie von *Jessop* (1916) über F_4 (s. Literaturverzeichnis), die dem Referenten unzugänglich war und auch in den „Fortschritten der Math." nicht angezeigt worden ist.

66) Die Eigenschaften dieser Bildkurve c_3' von $\overline{C}_2$ sind von besonderem Interesse. Auf Grund der Tatsache, daß die Koeffizienten jeder c_3 des Gebüsches,

des c_3-Gebüsches derart, daß die Verbindungsgeraden der Punktepaar der c_3', die die Bilder der Punkte der $\overline{C}_2$ sind, durch einen festen Punkt der c_3' laufen.

Wählt man das Projektionszentrum P als die Koordinatenecke $(x_1 = 0, \ldots, x_4 = 0)$, so ergibt sich die Gleichung der F_4 als Resultante der obigen Gleichungen $F_2^{(4)} = 0$, $G^{(4)} = 0$ bzw. x_5:

$$F_4 \equiv (F_0 G_1 - F_1 G_0)(F_1 G_2 - F_2 G_1) - (F_0 G_2 - F_2 G_0)^2 = 0,$$

die die $\overline{C}_2$ als Schnitt der Ebene $F_0 G_1 - F_1 G_0 = 0$ mit der Fläche 2. Ordnung $F_0 G_2 - F_2 G_0 = 0$ erkennen läßt.

Läßt man nunmehr im besonderen mit *Segre* den Punkt P auf die M_4 selbst rücken, so daß die Konstanten F_0, G_0 verschwinden, also die obigen Gleichungen sich reduzieren auf

$$F_2^{(4)} \equiv x_5 F_1 + F_2 = 0, \quad G_2^{(4)} \equiv x_5 G_1 + G_2 = 0,$$

---

also auch jeder zerfallenden, an ein und dieselbe lineare Relation gebunden sind, läßt sich sofort eine ganze Reihe weiterer Punkte der c_3' angeben.

Zum Kegelschnitt $B_p(A_i, \ldots, A_n)$ gehören als Ergänzungskurven ein Büschel von c_1 mit einem Grundpunkte B' auf der c_3', der eben der Träger der Involution der Punktepaare ist, die den Punkten von $\overline{C}_2$ korrespondieren. Zu jeder der 15 Geraden c_{ik} gehört als Ergänzung ein c_2-Büschel, dessen Grundpunkte A_l, A_m, A_n und ein weiterer Punkt C'_{ik} auf c_3' sind.

Endlich gehört zu jedem der fünf Punkte A_i ein Büschel von r_3 mit d_2 in A_i, einfach durch $A_k, \ldots, A_n$ gehend, dessen drei weitere Grundpunkte A_i', U_i, U_i' ebenfalls der c_3' angehören, derart, daß (A_i, A_i'), (U_i, U_i') Paare der Involution sind.

Auf der so bestimmten c_3' schneidet die Tangente in B' einen Punkt B aus, der zugleich der Restpunkt des Kegelschnitts B_p ist. Schneidet ferner die Gerade (B', C'_{ik}) den Punkt C_{ik} aus, so tritt dieser zugleich als Restpunkt der Geraden $c_{ik} = (A_i, A_k)$ auf.

Diese Verhältnisse auf c_3' werden durchsichtiger, wenn man auf der c_3' ein elliptisches Integral erster Gattung u als Parameter (Argument) ausbreitet (vgl. Art. *Kohn,* Nr. **21**). Sind dann bei geeigneter Normierung u_i die Parameter der Punkte A_i und setzt man $s = \sum u_i$, so gehört dem Involutionszentrum B' das Argument $\frac{s}{2}$ zu, und die Punktepaare (u, u') der Involution sind an die Relation gebunden: $u + u' \equiv -\frac{s}{2}$ mod. Per.

Umgekehrt kann man von einer beliebig gegebenen c_3' als Bild von $\overline{C}_2$ ausgehen und auf ihr fünf Punkte $A_i(u_i)$ markieren, deren Verbindungskegelschnitt B_p den Restpunkt $B\,(-s)$ ausschneide.

Von B aus lassen sich vier Tangenten (B, B') an die c_3' legen; sollen die weiteren Punkte reell ausfallen, so darf B nicht dem Ovale von c_3' angehören. Wählt man eine der reellen Tangenten (B, B') aus, so hat man damit das Involutionszentrum $B'\left(-\frac{s}{2}\right)$ und weiter, in Umkehrung der obigen Reihenfolge, vermöge der zehn Restpunkte C_{ik} die zugehörigen C'_{ik}, und vermöge der fünf Punkte A_i die zugehörigen A_i'.

so spaltet sich die Ebene von $\overline{C}_2$ ab, und es resultiert eine F_3: $F_1 G_2 - F_2 G_1 = 0$ in der *Salmon*schen Normalform (Nr. 2). Dem entspricht, daß das c_3-Gebüsch in der Bildebene E jetzt einen sechsten Grundpunkt A_p erhält, womit die Beziehung zu einer γ_3 wegfällt.

Das Verfahren von *Segre* läßt noch eine andere instruktive geometrische Deutung zu.

Eine $F_2^{(4)}$ im S_4 bilde man stereographisch ab[67]) durch Projektion von einem auf ihr gelegenen Punkte auf einen S_3, ganz wie früher eine F_2 im S_3 (Nr. **11**). Die Abbildungsformeln sind von der Gestalt $\varrho x_i = \varphi_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ $(i = 1, \ldots, 5)$, wo die φ_i quaternäre quadratische Formen der vier (homogenen) Parameter λ bedeuten, mit der Besonderheit, daß die Gleichung $\sum a_i \varphi_i = 0$ eine lineare ∞^4-Schar von F_2 mit einem gemeinsamen Grundkegelschnitt C_2' darstellt. Dabei entsprechen den Geraden der $F_2^{(4)}$ die Geraden im S_3, die C_2' treffen, insbesondere also den durch irgendeinen festen Punkt P_0 der $F_2^{(4)}$ gehenden Geraden der $F_2^{(4)}$ die Erzeugenden des Kegels, der die C_2' vom Bildpunkt P_0' aus projiziert. Dem Schnitte M_4 der $F_2^{(4)}$ mit irgendeiner anderen Über-F_2, $G_2^{(4)}$, — oder auch dem von P_0 ausgehenden Projektionskegel der M_4 — korrespondiert dann im S_3 eben wieder eine F_4 mit dem Doppelkegelschnitt C_2', die sich auf eine F_3 reduziert, sobald P_0 der M_4 angehört, d. h. auch die $G_2^{(4)}$ den Punkt P enthält.

Das *Segre*sche Verfahren, soweit es die F_3 betrifft, ist also auch

67) Es ist nützlich, die in diesem Art. zur Verwendung kommenden eindeutigen Flächenabbildungen kurz zusammenzustellen.

Die stereographische Projektion einer F_2 (im S_3) auf eine Ebene E führte auf zwei Fundamentalpunkte A, B; dem Schnitte C_{2n} der F_2 mit einer F_n entsprach eine c_{2n} mit d_n in A und B (Nr. **11**).

Zur *Steiner*schen Fläche S gehörte ein zu einer festen γ_2 konjugiertes c_2-Gebüsch; einer C_{4n} (S, F_n) korrespondierte eine c_{2n} (Nr. **13**).

Der Regelfläche R-F_3 entsprach der besondere Fall, wo dieses c_2-Gebüsch einen Grundpunkt A besitzt; das Bild einer C_{3n} (Schnitt mit einer F_n) ist eine c_{2n} mit d_n in A.

Der *Cayley*sche Grenzfall resultierte, wenn A auf die γ_2 rückt (Nr. **14**).

Die *Clebsch*sche Abbildung der F_3 ergab ein c_3-Gebüsch mit sechs Grundpunkten $A_i, \ldots, A_p$; das Bild einer C_{3n} (F_3, F_n) war eine c_{3n} mit d_n in den A (Nr. **11**).

Die analoge Abbildung einer F_4 mit Doppelkegelschuitt $\overline{C}_2$ gehörte zu einem Gebüsch von c_3 mit fünf Grundpunkten $A_i, \ldots, A_n$, wo die c_3 zu einer festen γ_3 konjugiert waren. Das Bild einer C_{4n} (F_4, F_n) ist eine c_{3n} mit d_n in den A (Nr. **16**).

Endlich im S_4 hat man die oben im Texte behandelte stereographische Abbildung einer $F_2^{(4)}$ auf eine ∞^4-lineare Schar von F_2 im S_3 mit Grundkegelschnitt C_2'; das Bild einer M_{2n} $(F_2^{(4)}, F_n^{(4)})$ ist eine F_{2n} mit $n$fachem Kegelschnitt C_2'.

als eine simultane stereographische Projektion zweier Über-F_2 von einem gemeinsamen Punkte aus anzusehen.

Hinsichtlich der Realität sind bei der F_4 zwei Hauptfälle zu unterscheiden, je nachdem der Doppelkegelschnitt $\bar{C}_2$ ein- oder nullteilig ist. Im letzteren Falle wähle man in metrischer Auszeichnung $\bar{C}_2$ als den unendlichfernen (nullteiligen) Kugelkreis K (vgl. III AB 4a, *G. Fano, Analytische und synthetische Geometrie,* bes. Nr. 7). Dann wird das F_2-Gebüsch $\varphi_i = 0$ im Bildraume einfach das aller Kugeln, und die x_i werden die (überzähligen) *„pentasphärischen“*[68]) Koordinaten des Bildpunktes.

Die F_4 mit dem Doppelkegelschnitt K sind die *Zykliden,* und im Grenzfalle der F_3 ist diese eine *zyklische* (*zirkulare*)[68a]) (s. auch Nr. **23**).

17. Gestaltliche Verhältnisse der Fläche. Modelle. F. Kleins Auflösung von Knotenpunkten. Juels topologische Flächen 3. Ordnung. Um weitere Veranschaulichungen der F_3 anzureihen, so stellten *W. Fiedler*[69]) (1865) ein Stabmodell, und, auf Anregung von *Clebsch, Chr. Wiener* (1869) ein Gypsmodell der F_3 mit 27 reellen Geraden her.

Gestützt auf eine Reihe, auf seine Veranlassung von *F. Neesen* (1872) und *A. Weiler* (1873) verfertigter Modelle der F_3 mit vier reellen Knoten (s. Nr. **13**) wird von *F. Klein*[70]) zunächst bei gegebenen 27 reellen Geraden eine angenäherte Konstruktion des Pentaeders hergeleitet. Insbesondere wird die (auch in der Theorie der f_5[71]) auf-

---

68) Nach *G. Darboux,* Sur une classe remarquable ..., Paris 1873; Principes de géom. analytique, Paris 1917. Vgl. die Ausführungen bei *F. Klein,* Höhere Geometrie, autogr. Vorlesungen, Göttingen 1892, 1, p. 98ff., sowie das Werk von *E. Coolidge,* Circle and sphere, Cambridge 1916.

68a) Vgl. die Monographie von *J. Borgmeyer,* Pr. Duderstadt 1901. Eine zirkulare F_3 besitzt 40 Nabelpunkte, s. *S. Roberts* und *R. Townsend,* Ed. Times 19 (1874), p. 71. Sie liegen zu je 5 auf 16 Geraden.

69) *Fiedler,* Ztschr. Math. Phys. 14 (1869), II, p. 32. Berechnungen von Doppelsechsen und verwandten Konfigurationen für Modellzwecke finden sich bei *Cayley,* Quart. J. 10 (1869), p. 58 = Papers 6, 316; Cambridge Trans. 12 (1873), p. 366 = Papers 8, p. 366; *Cayley* (Modell einer Fläche S s. Nr. **13**), London Math. Soc. Proc. 5 (1874), p. 14; *P. Frost,* Quart. J. 18 (1881), p. 89; *W. H. Blythe,* Cambridge Proc. 8 (1895), p. 241; Quart. J. 29 (1897), p. 206; ebenda 32 (1900), p. 366; 34 (1902), p. 73. *B.* hat seine Untersuchungen zusammengefaßt in einer Monographie, Cambridge 1908 (s. das Literaturverzeichnis); *H. M. Taylor,* Cambridge Trans. 18 (1900), p. 375. — Es sei auch noch auf die Fadenmodelle von R_4 und P_4 (s. Nr. **11**) von *K. Rohn* hingewiesen: Deutsche Math.-Ver. 1 (1892), p. 43.

70) *Klein,* Math. Ann. 6 (1879), p. 551.

71) Denkt man sich eine Gleichung fünften Grades $f_5(x) = 0$ mit den Wurzeln $x_1, \dots x_5$ vorgelegt, in der die Koeffizienten von x^4, x^3, x^2 zugleich verschwinden, so gelten die Relationen $\sum x = 0$, $\sum x^2 = 0$, $\sum x^3 = 0$; s. *F. Klein,*

tretende) *„Diagonalfläche“* von *Clebsch*[72]) diskutiert, die die 15 Diagonalen der fünf Pentaedervierseite enthält, von der *Weiler*[73]) ein Modell hergestellt hatte.

Vor allem aber gelingt es *Klein*[70]), aus eben jener speziellsten F_3 durch den einfachen Prozeß des *„Verbindens“* resp. *„Trennens“* der in einem Knoten anstoßenden F_3-Äste, die fünf Arten von singularitätenfreien F_3 herzuleiten, des weiteren auch — mit eventueller Hinzunahme eines Durchganges durch einen biplanaren Knoten mit imaginären Hauptebenen — die sämtlichen „Arten“ von *Schläfli* (Nr. 4) mit reellen Knoten. Die Individuen ein und derselben Art lassen sich, ohne Grenzübergänge, durch Variieren der Koeffizienten der F_3-Form ineinander überführen.

Daraufhin untersuchte *C. Rodenberg*[74]) die Modifikationen, die das Pentaeder einer F_3 beim Auftreten von Singularitäten erleidet; er betrachtete auch umgekehrt die zu vorgegebenem Pentaeder zugehörigen F_3. Im Anschluß hieran ließ er (1881) eine Serie von 26 Gipsmodellen der F_3, teilweise mit ihrer Kernfläche, erscheinen.[75])

Ikosaeder, Leipzig 1884, p. 166. Deutet man die x als (überzählige) homogene Punktkoordinaten im S_3, so stellen die beiden Gleichungen $\sum x = 0$, $\sum x^3 = 0$ die Diagonalfläche F_3 dar, deren Pentaeder also zu einem symmetrischen („regulären“) wird (s. Nr. 3). Schneidet man die F_3 mit einer Pentaederebene, etwa $x_5 = 0$, so läßt sich die Gleichung des Schnittes in die Form setzen:

$$(x_1 + x_2 + x_3)^3 - (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) \equiv 3(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3) = 0,$$

d. h. der Schnitt zerfällt in die drei Diagonalen des x_5-Vierseits: $x_1 + x_2 = 0$, $x_3 + x_4 = 0$ usf.

72) *Clebsch,* Math. Ann. 4 (1871), p. 284. Vgl. *E. Ciani,* Rom Linc. Rend. (9) 7_1 (1891), p. 227; Palermo Rend. 21 (1906), p. 322. Die Geraden g der Diagonalfläche werden genauer untersucht von *Ch. Bioche,* Nouv. Ann. (3) 17 (1898), p. 111. Als eine F_3 mit einer endlichen Anzahl von Kollineationen in sich erscheint die Diagonalfläche bei *K. Bobek,* Monatsh. Math. Phys. 10 (1892), p. 122, 307. Im Zusammenhange mit einem räumlichen Fünfeck untersucht die Diagonalfläche *A. Grüttner,* Diss. Breslau 1903, sowie *E. Ciani,* Palermo Rend. 21 (1906), p. 322. — Die Zerlegung der Fläche durch ihre 27 g verfolgt *F. Klein,* Gesamm. Abhandl. 2, Berlin, Nr. 35, Zusatz 2.

73) *Weiler,* Gött. Nachr. 1872, p. 402. Es sei hier auch auf den Begriff des *„Zusammenhanges“* einer F_3 hingewiesen, den *Schläfli,* Ann. di mat. (2) 5 (1873), p. 289; 7 (1875), p. 193, für seine verschiedenen F_3-Arten bestimmt hat (vgl. Nr. 4). *Klein* zeigt, daß der Begriff des Zusammenhanges in projektivem Sinne einer gewissen Modifikation bedarf. Allgemeine Untersuchungen über die „Zusammenhangsgruppe“ und „Äquivalenz“ von Flächen mit reellen Singularitäten hat *A. Comessatti* angestellt, Ann. di mat. (3) 23 (1915), p. 215.

74) *Rodenberg,* Math. Ann. 14 (1878), p. 46. Ein Teil der Ergebnisse findet sich schon in der Diss. Gött. 1874.

75) *Rodenberg,* im Verlage von *Brill,* Darmstadt.

Neuerdings hat *Klein*[76]) in Gemeinschaft mit *H. Vermeil*, seine obigen Untersuchungen vervollständigt. Es blieb noch aufzuklären, wann der Durchgang eines konischen Knotens d_2 mit reellem Mantel durch einen biplanaren Punkt mit *reellen* Hauptebenen eine neue Flächenart liefert. Man gelangt *nur* bei der F_3 mit drei d_2 und einem „Stiel" zu einer neuen Art, wenn sich eine *ungerade* Anzahl der d_2 durch die biplanare Form ändert.

In allen anderen Fällen liefert, wie die genauere Untersuchung des Varierens der Koeffizienten lehrt, die Auflösung eines biplanaren d_2 nach der einen oder anderen Seite hin bei besonders symmetrisch gestalteten F_3 zwei Flächen, die durch Bewegung ineinander überführbar sind, also zu *derselben* Art gehören.

Die Verfolgung dieser symmetrischen Flächen hinsichtlich ihres Gesamtverlaufs führte *Vermeil* zu interessanten Figuren, die in der *Rodenberg*schen Modellserie[75]) fehlen.

Schon bei einfachen Singularitäten zeigt sich, daß spiegelsymmetrisch unterschiedene F_3 zwei *verschiedenen* Arten angehören.

Klein bedient sich zur Untersuchung der verschiedenen F_3-Arten noch einer anderen, elementareren Methode, der Projektion der Fläche von einem singulären Punkte aus. Die Art und Weise des Koinzidierens von Geraden der F_3, sowie der Windung der Tangentialebenen längs derselben erlaubt, alle Fragen nach den verschiedenen Gestaltenarten zu beantworten.

Es sei noch der Unterschied zwischen ein- und zweiteiliger F_3 betont; ein Trennungskriterium gibt *R. Sturm*[76a]) auf Grund der *Steiner*schen Erzeugung der F_3 durch ein F_2-Büschel und ein ihm projektiv zugeordnetes E-Büschel (Nr. 8) an. Zweiteilig sind nur die F_3 mit 3 reellen und 24 punktierten g.

Wir kommen jetzt zu den topologischen Untersuchungen von *C. Juel*, auf die wir ihres allgemeineren Charakters wegen etwas ausführlicher eingehen. *Juel*[77]) verfolgt überhaupt das Ziel, zu zeigen, wie Realitätseigenschaften algebraischer Gebilde von den mit ihnen verknüpften algebraischen Relationen (Gleichheiten und Ungleichheiten)

76) *Klein,* Gesamm. Abhandl. 2, Berlin 1921, herausgeg. von *R. Fricke* und *H. Vermeil,* Nr. 35, Zusatz 1. Die für die Anschauung nicht immer einfachen Abänderungsprozesse werden durch zahlreiche Zeichnungen erläutert.

76a) *Sturm,* J. f. Math. 153 (1923), p. 1. S. auch Nr. 15, Note 58.

77) *Juel,* Kjöb. Skr. 1899, p. 1: Kopenhagen Vid. Selsk. (7) 1 (1906), Nr. 6; Kjöb. Skr. (7) 1 (1907), p. 296; Deutsche Math.-Ver. 16 (1907), p. 196; Paris C. R. 152 (1910), p. 1219; Vid. Selsk. Skr. (7) 8 (1910), p. 365; Ber. 2ter skand. Math. Kongr. 1911, p. 91; Deutsche Math.-Ver. 22 (1913), p. 345; ebenda 24 (1915), p. 17; Danske Vid. S. 2 (1916), p. 277.

ganz unabhängig sind, vielmehr ihren Ursprung haben in Eigenschaften sehr viel allgemeinerer Funktionsklassen.

Den Ausgang (1906) bilden „geschlossene Kurven“ c, die von einer Geraden höchstens in einer gegebenen Anzahl n von Punkten (der „*Ordnung*“) geschnitten werden, wobei die Fälle $n = 2, 3, 4$ in erster Linie interessieren. Entsprechendes gilt für die „*Klasse*“.[77a])

Andererseits gibt der „*Ordnungs*-“ resp. „*Klassenindex*“ die Minimalzahl der Schnittpunkte mit einer Geraden, resp. der von einem Punkte ausgehenden Tangenten an.

Als Grundlage gilt ein gewisses „*Korrespondenzprinzip*“[77b]), daß, wenn — unter gewissen Bedingungen — auf einer c eine (p, q)-Punktekorrespondenz vorliegt, $p + q$ Koinzidenzpunkte existieren.

Als Singularitäten der c werden zugelassen Doppelpunkte (d_2), Spitzen, Wendepunkte und „vorspringende“ Punkte, nebst den dualistischen Geraden.

Über gemeinsame Punkte und Tangenten von zwei c_2 bestehen einfache Sätze. Ein Bogen einer c_n heißt „*elementar*“, wenn er einen Teil einer c_2 ausmachen kann. Eine (geschlossene) c ohne vorspringende Punkte heißt „*vollkommen stetig*“.

Eine c_3 ohne d_2 hat immer drei Wendepunkte; eine c_3 ohne d_2 und Spitzen kann aus drei elementaren Bögen zusammengesetzt werden.

Die wichtigsten c sind die c_4. Bei ihnen ist die Anzahl der Doppeltangenten gleich der Zahl der d_2, vermehrt um die halbe Zahl der Wendepunkte. Die d_2 zerfallen in solche „*erster Art*“ oder „*zweiter Art*“, je nachdem man von einem solchen keine oder aber zwei Tangenten an die c_4 legen kann. Daraufhin zerlegen sich die c_4 in vier Haupttypen.

Sodann[77]) wird auch die Klasse der c_3 und c_4 untersucht (1907). Die obigen Begriffe werden auf „Raumkurven C“ — die aus elementaren Bögen 3. Ordnung zusammengesetzt werden — und „Flächen F“ übertragen; für diese Gebilde werden besondere Existenzbeweise geführt.

Wurden bisher die c als gezeichnete „graphische“ Gebilde angesehen, so werden sie jetzt[77]) (1907) auch als „*nichtanalytische*“ Kurven definiert, in dem Sinne, daß die Form der ganzen Kurve durch keinen

77a) Es sei hier auch hingewiesen auf die Revision *v. Staudt*scher Sätze über topologische c durch *G. Peano*, Torino Atti 26 (1890), p. 299, sowie auf gewisse Relationen zwischen Singularitäten bei *A. Kneser*, Math. Ann. 41 (1892), p. 319. — (Über topologische c_4 und c_5 mit der Maximalzahl von 3 resp. 6 d_2 s. Note 82.)

77b) Vgl. hierzu *H. Erlang*, Nyt Tiddskr. Mat. 17 B (1906), p. 58.

Teil von ihr bestimmt werden kann. Nunmehr werden allgemeine eindeutige Abhängigkeiten der Ebene eingeführt, die zu neuen Ergebnissen für die c führen.

Eine Raumkurve C_n ist eine solche, daß ihre Projektion auf eine Ebene eine c_m $(m \leqq n)$ wird, wo n auch wirklich erreichbar ist.

Die erste Anwendung auf die F_3 betrifft zunächst die windschiefen[77]) (1910). Hier gilt der merkwürdige Satz, daß eine windschiefe F_3, ganz wie eine algebraische R-F_3, immer eine Doppelgerade d besitzt, während alle doppeltberührenden Ebenen durch eine zweite Gerade e gehen. Die allgemeine „$\overline{F}_3$" wird als eine „*einfache*"[77c]) festgelegt (1910); man verstehe dabei allgemein unter einer einfachen Fläche eine stetige und in projektivem Sinn geschlossene, deren Berührungsebenen und Hauptkrümmungsradien sich stetig ändern. Die Ordnung n gibt, wie früher, die größte Anzahl n der Schnittpunkte mit einer Geraden an. Dann gilt für einfache $\overline{F}_3$ der Hauptsatz, daß immer *eine* Gerade auf ihr existiert, und, falls kein d_2 vorhanden, ein *Dreiseit* von Geraden. Durch eine Gerade g der Fläche gehen höchstens fünf Ebenen, die noch zwei weitere g ausschneiden. Die Zahl 27 ergibt sich als Maximalzahl für die g.

Juel spricht die Erwartung aus, daß sich die ganze Geometrie der Lage auf einer (algebraischen) F_3 ohne wesentliche Änderungen auf eine einfache $\overline{F}_3$ übertragen lasse. Vor allem wäre freilich die Existenz der fünf *Schläfli*schen Typen (Nr. 6) auf einer einfachen $\overline{F}_3$ nachzuweisen und zu entscheiden, ob damit alle Realitätstypen (ohne d_2) erschöpft sind.

Im obigen Sinne werden auch[77]) (1910) einfache „zyklische" c der Ebene untersucht, für die die Maximalzahl der Schnittpunkte mit einem Kreise gleich 4 ist.

Merkwürdig ist der Satz[77]) (1911), daß eine einfache $\overline{F}$, die mit einem Kegelschnitt höchstens sechs Punkte gemein hat, mit gewissen Ausnahmen (so der windschiefen $\overline{F}_3$, s. oben) eine algebraische F_3 ist.

Desgleichen gilt, zum Unterschiede von der Ebene (s. oben), daß eine einfache $\overline{F}$, die mit einem Kreise höchstens vier Punkte gemein hat, mit gewissen Ausnahmen algebraisch ist (1911).

Die Bedeutung der einfachen $\overline{F}_3$ zeigt sich weiter darin, daß auf sie der allgemeine Begriff einer „*Elementarfläche*", als Analogons zur nichtanalytischen $\overline{C}$, zurückführbar ist: eine solche läßt sich aus Flächenstücken 3. Ordnung zusammensetzen; die Operationen des Schneidens und Projizierens liefern dann wiederum $\overline{C}$[77] (1913).

77c) Einfache c behandelt mengentheoretisch *J. Hjelmslev*, Nyt Tiddskr. Mat. 18 B (1907), p. 49.

Ein instruktives Beispiel einer solchen Elementarfläche ist (1915) die Verallgemeinerung $\bar{S}$ der *Steiner*schen S[77]) (Nr. **13**); diese $\bar{S}$ wird von jeder in einem hyperbolischen Punkte berührenden Ebene in zwei durch den Punkt gehenden $\bar{c}_2$ geschnitten. Sie hat eine oder drei Doppelgerade, keine oder zwei oder vier singuläre Ebenen. Überhaupt zeigt sich durchgängige Analogie mit den Eigenschaften der algebraischen *Steiner*schen S.

18. Zusammenhang zwischen den 27 Geraden und dem Pentaeder nach Cremona und Beltrami. Auf einen Zusammenhang zwischen den 27 Geraden und dem Pentaeder ging *Cremona*[78]) ein. Nach Ausscheidung einer Doppelsechs verbleiben 15 Gerade, in denen sich zehn Paare konjugierter Trieder[79]) (s. Nr. **11**) schneiden; deren Ecken sind reziproke Pole der F_3 (konjugierte Pole der Kernfläche), und bilden so ein „*Polarhexaeder*" der F_3. Seien dessen Ebenen $y_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ mit der Identität $\sum y = 0$. Dann schreibt sich die Gleichung der F_3 in den zehn Gestalten („Hexaederformen"):

$$(6) \qquad F_3' \equiv \sum y^3 \equiv (y_i + y_k)(y_k + y_l)(y_l + y_i) + (y_l + y_m)(y_m + y_n)(y_n + y_l) = 0.$$

Jedem der 36 Hexaeder läßt sich eine Γ_3 einbeschreiben; irgend zwei dieser Γ_3 haben fünf Ebenen gemein, und eben diese bilden das Pentaeder der F_3.

78) *Cremona,* Math. Ann. 13 (1878), p. 301. Die Hexaederform (6) F' der F_3 wird daher auch als *Cremona*sche Form der F_3 bezeichnet. Wegen ihrer Brauchbarkeit für die Aufstellung von Komitanten der F_3 vgl. *C. P. Sousley,* Amer. J. 39 (1917), p. 135. Vermöge des *Clebsch*schen Übertragungsprinzips wird die Symbolik der F_3 im S_3 übergeführt in eine entsprechende Symbolik für die F_3' im S_5; insbesondere werden so die Invarianten und linearen Kovarianten studiert. Durch Adjunktion gewisser irrationaler Invarianten von F_3' läßt sich eine typische Abbildung der F_3 auf die F_3' herstellen. Da die Gleichungen für die g der F_3' bekannt sind, so gelangt man auf diesem Wege zu einer invarianten Darstellung der Gleichungen der g auf der F_3, wobei die Abbildung der F_3' auf die Ebene (Nr. **11**) gute Dienste leistet. Über die Rolle, die die Form F_3' bei den gruppentheoretischen Untersuchungen von *Coble* spielt, s. Nr. **22**. Auf Grund der *Cremona*schen Form werden die Konfigurationen der Geraden und Ebenen der F_3 untersucht von *A. C. Dixon,* Quart. J. 41 (1910), p. 203. Eine Reduktion der 36 Polarhexaeder auf gewisse 11 „Haupthexaeder", im Falle von 1 d_2, führt *C. Caporali* aus, Napoli Rend. 20 (1881), p. 34, 59. Über *Cremona*sche Formen im S_4 s. *H. W. Richmond,* Quart. J. 34 (1903), p. 117.

79) Die 15 Geraden, die mit ihren 15 Ebenen eine Konfiguration $(15_3, 15_3)$ bilden, stehen in einer eigenartigen Beziehung zur *Pascal*schen Konfiguration, nach *Cremona,* Ist. Lomb. A (3) 1 (1877, April), p. 854; vgl. *R. de Paolis,* Rom Linc. Mem. 10 (1880/81), p. 123; *C. le Paige,* Acta math. 5 (1884), p. 195; „*Reye*", p. 182.

E. Beltrami[80]) zeigte durch Partialbruchzerlegung, wie die Gleichung der F_3 überhaupt auf ∞^4 Weisen in die Gestalt $F_3' \equiv \sum y^3 = 0$ gebracht werden kann; von diesen ∞^4 „*Polarhexaedern*" gelangt man zu den Ebenen des Pentaeders durch Auflösung einer Gleichung 5. Grades.

19. Fortsetzung. Binäre Beziehungen der Fläche auf kubische Raumkurven nach W. Fr. Meyer. Ergänzungen von Waelsch. Von kubischen Raumkurven C_3[80a]), die mit der F_3 organisch verbunden sind, treten hauptsächlich drei verschiedene Gattungen auf.

Erstens, entsprechend den 72 „Sechsen" der F_3, die 72 ∞^2-Scharen von C_3 auf der Fläche, deren jede die Geraden einer Sechs zu Sekanten besitzt. Ihre Bedeutung trat bereits bei der „Sekantenabbildung" der F_3 (Nr. **11**) hervor.

Zweitens, die zu den ersteren C_3 „assoziierten" 72 ∞^2-Scharen von C_3, die je die Geraden einer Sechs zu Achsen (Linien zweier Schmiegungsebenen) haben.

Drittens, die ∞^2-Schar der dem Pentaeder einbeschriebenen $C_3 = \Gamma_3$, die vermöge der ihnen umbeschriebenen je ∞^2 Polarhexaeder den Zusammenhang des Pentaeders mit den 27 Geraden vermittelten (s. Nr. **18**).

Es soll die Aufgabe sein, diese drei Gattungen von C_3 für eine invariantentheoretisch *binäre* Behandlung („Binäranalyse") der F_3 fruchtbar zu machen.[81])

Bei der ersten Gattung bildet sich die Handhabe dazu von selbst in der Abbildung der F_3 nach Nr. **11**. Bei Auszeichnung der Geraden einer Sechs waren die Bilder der ∞^2, jene Geraden zu Sekanten be-

---

80) *E. Beltrami,* Ist. Lomb. Rend. 12 (1879), p. 24. Vgl. *A. L. Dixon,* London Math. Soc. Proc. (2) 7 (1909), p. 389.

80a) Zur Theorie der C_3 vgl. die Monographien von *H. Schroeter,* Flächen 2. Ordnung und Raumkurven 3. Ordnung, Leipzig 1880; *O. Staude,* Raumkurven 3. Ordnung, Leipzig 1913, sowie den Art. von *Staude*, III C 2, Flächen 2. Ordnung . . ., und den Bericht von *Th. Reye,* Hamb. Mitt. 20 (1890), p. 43.

Die Figur von zwei C_3 und ihrer invarianten Gebilde wird verfolgt von *Th. Reye,* Math. Ann. 68 (1910), p. 417; 75 (1914), p. 586; *St. Jolles,* Math. Ztschr. 2 (1918), p. 318; 5 (1919), p. 169. Auf allgemeinerer Grundlage vom Standpunkte der *Abel*schen Modularfunktionen ($p = 4$) aus untersucht die Figur von zwei C_3 *A. B. Coble,* Amer. J. Math. 46 (1924), p. 143. Die Inzidenzbedingung zwischen einer Ebene der einen C_3 und einem Punkte der anderen führt zu einer (3, 3)-Korrespondenz, und vice versa. Dabei ergeben sich zahlreiche Zusammenhänge mit den r_5 und r_6, der F_3, dem Symmetroide u. a. S. auch die Vorarbeit Amer. J. Math. 41 (1919), p. 243, wo das Verhalten der r_6 und des Symmetroides gegenüber *Cremona*-Transformationen des S_2 und S_3 studiert wird.

81) *W. Fr. Meyer,* „Apolarität und rationale Kurven", Habil.schr. Tübingen 1883, bes. Abschn. 3 und 4.

sitzenden C_3 ein Netz von r_5 mit d_2 in den sechs Fundamentalpunkten, dagegen die Bilder der ∞^2 konjugierten C_3, mit den sechs konjugierten Geraden als Sekanten, die Geraden c_1 der Ebene. Man wird also hier die c_1 als die, in binärem Sinne, einfachsten Kurven bevorzugen und etwa die Schnitte der C_3 mit anderen Flächenkurven auf die Schnitte der c_1 mit den Bildkurven zurückführen.

So z. B. ergibt sich die Gleichung 12. Grades für die Argumentenpaare der sechs Sekanten der C_3 als äquivalent mit der Gleichung für die sechs Schnittpunktepaare einer c_1 mit den sechs Kegelschnitten B_i (durch je fünf der A).

Bei der zweiten Gattung von C_3 dagegen ist es gerade umgekehrt: jetzt treten die r_5[82]) als die binären Hauptrepräsentanten der F_3 in den Vordergrund.

Vorab ist es erforderlich, auf einer C_3 selbst einen Parameter λ auszubreiten. Bei geeigneter Wahl des Koordinatentetraeders ergibt sich als einfachste Darstellung der C_3 die als „*Normkurve*" N_3 resp. N_3[82a]):

$$\begin{cases} x_3 : x_2 : x_1 : x_0 = \lambda^3 : 3\lambda^2 : 3\lambda : 1; \quad u_0 : u_1 : u_2 : u_3 = \lambda^3 : -\lambda^2 : \lambda : -1; \\ p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23} = 1 : 2\lambda : \lambda^2 : 3\lambda^2 : 2\lambda^3 : \lambda^4. \end{cases}$$

82) *W. Fr. Meyer,* München Ber. 1885, p. 415.

Über den Gestaltenreichtum der r_5 mit sechs reellen d_2 s. *W. Fr. Meyer,* Diss. München 1878, und Edinburgh Proc. 13 (1886), p. 931. Die Untersuchungsmethode besteht in einer Kombinierung topologischer Eigenschaften von „Knoten" (nach *P. G. Tait*) und der quadratischen eineindeutigen Verwandtschaft T_2 (s. Nr. **11**). Vgl. auch die Note 77a in Nr. **17**. Die r_5 entstehen, indem man zunächst auf eine c_2 eine quadratische Transformation T_2 ausübt, für die die Ecken des Fundamentaldreiecks der c_2 nicht angehören, während dessen Seiten die c_2 je in zwei reellen Punkten treffen. Damit geht die c_2 in eine r_4 mit drei eigentlichen d_2 über. Eine solche r_4 wird wiederum einer T_2' unterworfen, für die die Ecken des Fundamentaldreiecks einfache Punkte der r_4 sind, während dessen Seiten je zwei reelle Restpunkte ausschneiden. Dadurch geht die r_4 über in eine r_5 mit sechs eigentlichen d_2, und entsprechend rückwärts. — Ersetzt man die c_2 durch ein topologisches Oval (Nr. **17**) der Ordnung und Klasse Zwei, das von einer c_2 in höchstens vier reellen Punkten getroffen wird (deren Anzahl aber auch erreicht wird), so ergeben sich die topologischen r_4 mit drei eigentlichen d_2. Wird eine solche r_4 von einer c_2 in höchstens acht reellen Punkten getroffen (deren Anzahl erreicht wird), so gelangt man zu den topologischen r_5 mit sechs eigentlichen d_2. Die von *Meyer* (l. c.) gezeichneten algebraischen r_5 sind daher auch als Bilder der entsprechenden topologischen r_5 anzusehen. — Auf gewisse Transformationen und Korrespondenzen, die mit der r_5 zusammenhängen, weist *J. R. Conner* hin, John Hopk. U. C. Heft 2 (1911), p. 64. Vom Standpunkt der Normkurve N_5 im S_5 aus behandelt die Invariantentheorie der r_5 eingehend *W. Müller,* Giorn. di mat. 60 (1922), p. 103; s. auch die Diss. Leipzig 1912.

82a) Über die Darstellung binärer Formen auf der C_3 resp. N_3 und deren geometrische Bedeutung liegen zahlreiche Untersuchungen vor. Wir erwähnen

Die Bedeutung dieser Normdarstellung beruht darauf, daß die (mit einer Größe s_0 homogen gemachten) elementaren symmetrischen Verbindungen s_i $(i = 3, 2, 1, 0)$ von drei Argumenten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ übereinstimmen mit den Koordinaten x_i des Punktes P, von dem die drei Ebenen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ an die N_3 gehen.

In der Folge zeigt es sich, daß alle binären Bildungen zurückkommen auf lineare „*s-Formen*" $a_s, b_s, \ldots$, wo die s die elementaren symmetrischen Verbindungen von ν $(\leqq n)$ Argumenten λ sind, oder auch auf die binären Formen $a_\lambda^\nu, b_\lambda^\nu, \ldots$, deren lineare Polaren die s-Formen sind. Der mit diesen s-Formen verknüpfte Rechnungsalgorithmus gestaltet sich dadurch einfach, daß man nach bekannten Regeln die s multilinear ausdrücken kann in solchen s, die sich auf irgendwelche Teilgruppen der λ beziehen, in die man die λ zerlegt haben mag. Man gehe jetzt umgekehrt von einer gegebenen r_5 aus, so daß die x_i binären Formen f_i 5. Grades proportional werden: die sechs Doppelpunkte d_2 mögen die Argumente α_i, β_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ tragen. Zwischen diesen bestehen drei Relationen[82]), und genau diese sind charakteristisch für die Argumentenpaare von sechs solchen Sekanten der C_3, die eine „Sechs" bilden. (S. Nr. **7**, Note 20a.)

Die ∞^9, bei gegebener C_3 so bestimmten F_3, entsprechen den ∞^9 F_3, die durch die C_3 hindurchgehen.

Das Kriterium dafür („*Schnittpunktetheorem*"), daß fünf Punkte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_5$ der r_5 einer Geraden angehören, wird durch drei Relationen von der Gestalt $a_s = 0$, $b_s = 0$, $c_s = 0$ gegeben, wo die s aus den λ gebildet sind. Spaltet man hier die λ in zwei Teilgruppen λ_1, λ_2 und $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ mit den symmetrischen Verbindungen τ_k $(k = 0, 1, 2)$ und σ_l $(l = 0, 1, 2, 3)$, so ergibt sich sofort das *Clebsch*sche Schema (Nr. **11**) für die Abbildung einer F_3, und umgekehrt. Demnach ist diese Abbildung in binärem Sinne dadurch charakterisiert, daß die in einem (auf einen Normkegelschnitt bezogenen) Punkte $\tau(\lambda_1, \lambda_2)$ der Hilfsebene und dem zugehörigen (auf eine kubische Normkurve bezogenen) Punkte $\sigma(\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$ der F_3 enthaltenen λ gerade die fünf Schnittpunkte der r_5 mit einer Geraden liefern. Oder auch: die F_3 erscheint als Ort aller „Inzidenztripel" $(\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$.

Einer Geraden g der F_3 entspricht eine Involution J_3 (Büschel)

---

etwa noch: *R. Sturm*, J. f. Math. 86 (1878), p. 116; *E. d'Ovidio*, Giorn. di mat. 17 (1879), p. 310; *F. Gerbaldi*, Torino Atti 15 (1880), p. 810; *L. Berzolari*, Palermo Rend. 5 (1891), p. 9, 33; *G. Kohn*, Wien Ber. 105 (1896), p. 1035 (C_3, die F_3 berühren); Deutsche Math.-Ver. 5_1 (1897), p. 58 (Binäre Behandlung der Korrelationen im S_n mittels der Normkurve N_n). Die durch eine C_3 gehenden F_3 führt *E. Waelsch*, Deutsche Math.-Ver. 4 (1897), p. 113 auf binäre Korrespondenzen zurück.

kubischer binärer Formen; die binären Bilder der sechs Geraden a sind die durch die Strahlbüschel der d_2 aus der r_5 ausgeschnittenen J_3. Die Bilder der sechs konjugierten Geraden b erhält man, wenn man die r_3-Büschel, die in einem Doppelpunkt der r_5 einen d_2 besitzen und durch die übrigen einfach hindurchgehen, mit der r_5 in Büscheln von Punktepaaren schneidet und die J_3 von deren Resttripeln bildet.

Endlich gelangt man zu den Bildern der 15 Geraden c_{ik} vermöge der c_2-Büschel durch irgend vier der Doppelpunkte, die die r_5 wiederum in Büscheln von Punktepaaren treffen, deren Resttripel zu den gesuchten J_3 führen.

Den neun Schnittpunkten der F_3 mit der C_3 korrespondieren die neun Wendepunkte der r_5, die durch die Wurzeln der Funktionaldeterminante Θ der f_i bestimmt sind. Denkt man sich umgekehrt jene neun Schnittpunkte auf der C_3 beliebig vorgegeben, so liegt das endlich-deutige Problem vor, zu gegebenem Θ ein zugehöriges Netz von f_i zu finden; jeder der 72 Sechsen auf der F_3 entspricht dabei ein solches Netz.

Am fruchtbarsten erweist sich die dritte Gattung von C_3.

Man gehe zunächst wieder von einer gegebenen C_3 als kubischer Normkurve ($N_3 = \mathsf{N}_3$) aus und markiere auf ihr neun beliebige Punkte, Wurzeln einer $f_9 = a_\lambda^9$.

Durch diese neun Punkte geht nur eine einzige, zu N_3 konjugierte (apolare) F_3 $a_{\lambda_1{}^3\lambda_2{}^3\lambda_3{}^3} = 0$, so daß jede F_2 des Gebüsches der ersten Polaren der F_3 konjugiert ist zu jeder der N_3 einbeschriebenen Φ_2. Man hat also wiederum eine ∞^9-Schar von F_3, die der C_3 zugeordnet sind. Die einzelne Relation $a_s \equiv a_{\varrho\sigma\tau} = 0$ liefert dann ∞^8 „*Polenneader*", derart, daß je drei Ecken ϱ, σ, τ eines solchen, an denen alle neun Ebenen partizipieren, ein Poldreieck der F_3 liefern. Versteht man unter f_0, f_1, f_2, f_3 die dritten (nach den homogenen Variabeln λ, μ genommenen) Ableitungen von f, und unter A_0, A_1, A_2, A_3 die zugehörigen linearen Polaren in sechs Argumenten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6$, so stellen die Relationen $A_i = 0$ die ∞^2 der N_3 umbeschriebenen *Cremona*schen Polarhexaeder dar; der Gesamtheit der ∞^2 C_3 entspricht die Gesamtheit aller ∞^4 Polarhexaeder.

Diese zur einzelnen N_3 gehörigen ∞^2 Polarhexaeder erhalten jetzt noch eine neue Bedeutung; je zwei ihrer konjugierten Ecken sind konjugiert in bezug auf das Gebüsch der ersten Polaren F_2 der F_3. Die Gesamtheit der N_3-Ebenensextupel der ∞^2 Hexaeder ist binär konjugiert zur Gesamtheit der N_3-Punktesextupel, die von den F_2 des Polarengebüsches der F_3 ausgeschnitten werden.

Das binäre Aquivalent für die Polareigenschaft der ∞^2 Hexaeder bzw. des F_2-Gebüsches liegt darin, daß die f_9 auf ∞^2 Arten als Aggregat von sechs neunten Potenzen kanonisch darstellbar ist, mithin jede F_2 des Gebüsches als Aggregat von sechs Quadraten.

Der Ort der Ecken der ∞^2 Hexaeder ist eine F_4 mit zehn Geraden; das binäre Bild ist eine r_6 mit einem d_5, deren Netz von Darstellungsformen f_6 konjugiert ist zum Gebüsch der obigen f_i, und deren mit dem d_5 äquivalente zehn d_2 jenen zehn Geraden entsprechen. Je zwei konjugierte Ecken eines Hexaeders bilden sich ab auf zwei Tripel von Punkten der r_6, die auf einer c_1 liegen; die F_4 erscheint als Ort aller Inzidenztripel.

Aus den ∞^2 Hexaedern lassen sich Involutionen von ∞^1 derart herausgreifen, daß die letzteren ein Pentaeder gemein haben, dessen binäres Bild der d_5 ist, während die sechste Ebene auf der N_3 unbestimmt bleibt. (S. oben bei *Beltrami*, Nr. **18**.) Das Pentaeder ergibt sich direkt aus der f_9 vermöge deren eindeutiger „kanonischer" Darstellung als Aggregat von fünf neunten Potenzen $(\lambda - \lambda_i)^9$; die λ_i sind die Wurzeln der zu allen vierten Ableitungen der f_9 konjugierten Form (*Sylvesters* „Kanonizante").

Dieses Pentaeder ist kein anderes als das „*Pentaeder*" der F_3 (s. Nr. **3**); aus der kanonischen Darstellung der f_9 geht die korrespondierende der F_3 direkt durch Polarenbildung hervor. Umgekehrt ist jede der ∞^2, dem Pentaeder der F_3 einbeschriebenen $\mathsf{\Gamma}_3$ konjugiert zum Polarengebüsch der F_3, und kann als Normkurve verwendet werden.

Damit ist auch ein binärer organischer Zusammenhang zwischen dem Pentaeder und den 27 Geraden der F_3 hergestellt, und zugleich ein neuer Beweis des Pentaedersatzes gewonnen (s. Nrn. **3, 18**).

Geht man von einer „Sechs" der F_3 aus, legt eine der ∞^2 C_3, für die die Geraden der Sechs Achsen sind, als Normkurve zugrunde, so erscheint die F_3 als die einzige durch ihre neun Schnittpunkte ($f_9 = 0$) — die den Wendepunkten der binären Bildkurve r_5 entsprechen — gehende, zur N_3 konjugierte F_3. Die kanonische Darstellung der f_9 führt unmittelbar zum Pentaeder der F_3; dieses stellt sich zugleich dar als ein ausgeartetes der ∞^2 Hexaeder, deren Gegenecken in bezug auf das Polarengebüsch der F_3 konjugiert sind.

Umgekehrt, geht man vom Pentaeder der F_3 aus, so lege man eine der ∞^2 ihm einbeschriebenen Γ_3 als Normkurve zugrunde, dann gelangt man rückwärts zur f_9 der Schnittpunkte der F_3 mit der N_3. Faßt man alsdann, was auf eine endliche Anzahl (72) von Arten möglich ist (s. oben), die f_9 als Funktionaldeterminante Θ eines Netzes von f_5 auf, so führt das konjugierte Netz direkt zur *Clebsch*schen

Abbildung der F_3 mit Auszeichung einer Sechs, deren Gerade Achsen der N_3 sind.

Läßt man die Zwischenglieder weg, so reduziert sich der Zusammenhang zwischen dem Pentaeder und den 27 Geraden der F_3 auf eine binärinvariante Zuordnung zwischen einer r_5 und einer r_6 mit d_5, die beiderseits auf eine kubische Normkurve bezogen sind; die erstere repräsentiert die 27 Geraden, insonderheit deren Sechsen, zugleich mit der *Clebsch*schen Abbildung, die letztere die Polarhexaeder der Kernfläche, speziell deren Pentaeder, zugleich mit dem Polarengebüsch.

Eine eigenartige Ergänzung rührt von *E. Waelsch*[83]) her. Die sechs Paare von Sekantenpunkten einer C_3, die zu einer Sechs der F_3 gehören (s. oben), genügen als sechs f_2 einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung; diese Gleichung, die sich in eine einfache invariante Form als Aggregat von Überschiebungen bringen läßt, ordnet direkt den sechs Sehnen f_2 alle Kollineationen von drei Ebenenbündeln zu, die die F_3 erzeugen (Nr. 7).

Waelsch geht dabei von allgemeineren Ansätzen aus. Zugrunde wird gelegt eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, deren Koeffizienten ganzrational von $x = \frac{x_1}{x_2}$ abhängen, in homogener Gestalt: $\Phi \equiv \sum g_\nu^{(i)} f_{i,n-i} = 0$, wo die g binäre Formen der Ordnung ν sind, und die $f_{i,n-i}$ die Ableitungen einer homogenen (beliebigen, nur wiederholt differenzierbaren) Funktion $f(x_1, x_2)$.

Ist speziell f eine binäre Form f_μ $(\mu \geqq n)$, so läßt sich Φ als Aggregat von Überschiebungen von f mit anderen Formen $f_{n+\nu}$, $f_{n+\nu-2}$, ... darstellen.

Die ganzrationalen Lösungen f_μ von $\Phi = 0$ stehen in Beziehung zu den Kollineationen des mehrdimensionalen Raumes und seiner „Ebenenbündel". Denn jeder Form f_μ entspricht eine bestimmte Form Φ, und jedem linearen Systeme von f ein ebensolches System von Φ.

20. Das Gebüsch der ersten Polaren der Fläche. Umgekehrt läßt sich fragen, wann ein F_2-Gebüsch zum Polarengebüsch (Nr. **19**) einer F_3 wird.

83) *Waelsch,* Prag Math. Ges. 1892, p. 78.

Es sei hier auf das Lebensprogramm von *Waelsch* hingewiesen, die projektive Invariantentheorie des n-ären Gebietes auf die des binären zurückzuführen. Vgl. die grundlegenden Abhandlungen Wien Ber. 100 (1891), p. 315 (Polargruppen von f auf N_n); 112 (1903), p. 645, 1091, 1533, sowie Monatsh. Math. Phys. 6 (1895), p. 261, 373 (Kollineationen und Korrelationen des S_n); Art. III D 10, *R. Weitzenböck,* Neuere Invariantentheorie. Die Gruppen projektiver Transformationen der Normkurve im S_n in organischem Zusammenhange mit der binären Invariantentheorie untersucht allgemein *A. Comessatti,* Math. Ann. 89 (1921), p. 272; 90 (1922), p. 174.

W. Frahm[84]) bemerkte, in dem er sich mit dem Ort der Spitzen der in einem F_2-Netz enthaltenen Kegel beschäftigte, daß die von „*Salmon-Fiedler*" benutzte kanonische Darstellung von $3 F_2$ als Summen von Quadraten derselben fünf Linearformen im allgemeinen Falle nicht möglich ist; wenn aber im besonderen, so auf ∞^2 Weisen. Oder auch auf Grund des „*Pentaedersatzes*" (Nr. **3**): „Drei F_2 lassen sich im allgemeinen nicht als Polaren einer F_3 darstellen."

Diese Unmöglichkeit folgt auch direkt aus einem Satze von *Lüroth*[85]), wonach einer allgemeinen c_4 ein vollständiges Vierseit nicht einbeschrieben werden kann.

Algebraisch hat *E. Toeplitz*[86]) die Frage direkt erledigt. Er stellt mittels symbolischer Rechnung diejenige simultane Invariante J von $3 F_2$ in einfacher Gestalt auf, die dann und nur dann verschwindet, falls jene Darstellung möglich ist.

Diese Bedingung $J = 0$ erweist sich aber auch hierfür als hinreichend; es wird die Schar der F_3 aufgestellt, deren Polaren die gegebenen F_2 sein können, wenn J verschwindet. Aber auch dafür zeigt sich diese Bedingung als notwendig und hinreichend, daß die drei F_2 als Summen von Quadraten derselben fünf Linearformen darstellbar sind Damit ist zugleich ein neuer Beweis des Pentaedersatzes (Nr. **3**) erbracht.

---

84) *Frahm,* Math. Ann. 7 (1874), p. 635.

85) *Lüroth,* Math. Ann. 1 (1869), p. 37. *Clebsch,* J. f. Math. 59 (1861), p. 125, hatte gezeigt, daß es im allgemeinen nicht möglich ist, eine ternäre biquadratische Form als Summe von fünf vierten Potenzen darzustellen, daß vielmehr solche c_4 sich durch das Verschwinden einer Invariante auszeichnen; *Lüroth* zeigt, daß das Verschwinden jener Invariante auch hinreichend ist für jene Darstellung, und leitet eine Reihe charakteristischer Eigenschaften solcher c_4 ab. Einen zweiten Beweis seines Satzes liefert *Lüroth* mit Hilfe gewisser, von *L. Kronecker* eingeführter Begriffe: Math. Ann. 13 (1878), p. 548. — Eine schon von *Steiner* betrachtete F_4, deren ebene Schnitte *Lüroth*sche c_4 sind, untersucht eingehend *F. Schur,* J. f. Math. 95 (1883), p. 207, und beweist auch die Umkehrung. Die F_4 steht in engem Zusammenhange mit desmischen Tetraedern.

Die *Lüroth*sche Arbeit hat Veranlassung zu eine Reihe weiterer gegeben, die den Gegenstand genauer verfolgen: *E. Ciani,* Napoli Rend. (3) 2 (1888), p. 126; *G. Scorza,* Ann. di mat. (3) 2 (1899), p. 155 (∞^3 Polsechsseite usf.); *G. Manfredini,* Giorn. di mat. 40 (1902), p. 16; *H. S. White* u. *Kate G. Miller,* Amer. Math. Soc. Bull. (2) 15 (1909), p. 347; *H. Bateman,* Amer. J. math. 36 (1914), p. 397 (mit weiterer Untersuchung der Beziehungen zwischen c_4 und F_3); *F. Morley,* Amer. Math. Soc. Bull. 23 (1917), p. 270; Amer. J. math. 41 (1919), p. 279.

86) *Toeplitz,* Math. Ann. 11 (1877), p. 422. Vgl. die weitere Ausführung bei *A. C. Dixon,* London Math. Soc. Proc. (2) 7 (1909), p. 150.

Eine geometrische Konstruktion des Polargebüsches der F_3 stammt von *H. Thieme*[87]) her.

Den Punkten des S_3 werden die F_2 eines Gebüsches projektiv so zugeordnet, daß die Polare eines Punktes P für die einem zweiten Punkte Q zugeordnete F_2 mit der Polaren von Q für die, P zugeordnete F_2 zusammenfällt. Aus zwei solchen Polarsystemen wird das Büschel, aus drei solchen der Bündel usf. konstruiert.

Die Gesamtheit der F_3 erweist sich als eine lineare ∞^{19}-Schar; es wird die Konstruktion der F_3 aus 19 Punkten durchgeführt (Nr. **21**).

Es kommen hier die allgemeinen Prinzipien zur Geltung, die *Thieme* in einer früheren Arbeit[87]) (1879) vermöge vollständiger Induktion für die Konstruktion von Polarsystemen von Kurven und Flächen entwickelt hatte.

21. Lineare Konstruktionen der Fläche. Allgemeinere Gesichtspunkte bei v. Escherich. Daran reihen sich lineare Konstruktionen der F_3, wenn sie durch gegebene Punkte und Gerade, also im besonderen durch 19 Punkte gehen soll.

Mit Hilfe der *„reziproken Flächensysteme"*, einer Erweiterung des Apolaritätsbegriffes, hat *G. v. Escherich*[88]) die Frage allgemein für F_n untersucht.

Zwei lineare Systeme μ^{ter} Stufe von F_m und F_n: $\sum \lambda_i U_i = 0$, $\sum \nu_i V_i = 0$ $(i = 0, 1, \ldots, \mu)$ heißen *„reziprok"*, wenn ihre Parameter λ, ν an eine bilineare Relation gebunden sind. Flächen, die solchen Systemen korrespondieren, die ein System $(\mu - \sigma - 1)^{\text{ter}}$ Stufe gemein haben, bilden ein System σ^{ter} Stufe. Jeder Punkt P bestimmt in jedem der beiden Systeme (U), (V) ein System $(\mu - 1)^{\text{ter}}$ Stufe; die diesem entsprechende Fläche im andern kann auch als die „dem Punkte P entsprechende" bezeichnet werden. Liegt ein Punkt *auf* einer entsprechenden Fläche im einen Sinne, so auch auf der im andern Sinne entsprechenden Fläche. Damit ergibt sich eine F_{m+n} als Ort der Punkte, die auf ihren entsprechenden Flächen liegen. In dieser allgemeinen *Erzeugung* einer F_{m+n} sind als Spezialfälle die bekannten[88a]) durch projektive Büschel, reziproke Bündel, einer F_2 als

87) *Thieme*, Math. Ann. 28 (1886), p. 133. Vgl. die vorbereitenden allgemeinen Betrachtungen von *Thieme*, Ztschr. Math. Phys. 24 (1879), p. 221, 276. Darstellendgeometrisch behandelt die Polaren einer F_n *C. Rodenberg*, Math. Ann. 26 (1886), p. 557.

88) *v. Escherich*, Wien Ber. 75 (1877), p. 523; 85 (1882), p. 526, 893; 90 (1884), p. 1056.

88a) Vgl. *Th. Reye*, Math. Ann. 1 (1869), p. 455; 2 (1870), p. 475; *H. Valentiner*, Tiddskr. Mat. (4) 3 (1879), p. 22; *F. Schur*, Math. Ann. 18 (1881), p. 1;

Ordnungsfläche zweier reziproker Räume u. a. enthalten. Jede F_{n+p} ist erzeugbar durch zwei reziproke Bündel ($\mu = 2$) für $p \leqq 7$. So entsteht im besonderen eine F_3 durch die Punkte, die bei einer reziproken Beziehung der Punkte des Raumes auf ein F_2-Gebüsch in ihre entsprechenden Flächen fallen.

Benützt man von den bestimmenden 19 Punkten einer F_3 nur 18, so kann man sieben Grundpunkte der Bündel 2. und 1. Ordnung in gegebene Punkte legen. Damit tritt eine Reduktion auf die folgende Aufgabe ein: ein Ebenenbündel ist gegeben; einen reziproken so zu konstruieren, daß 11 gegebene Strahlen des ersteren im letzteren Ebenen durch 11 gegebene Punkte entsprechen. Und diese Aufgabe kommt wieder auf die andere zurück, zwei Räume S_3 reziprok so aufeinander zu beziehen, daß 15 Punkte des einen „konjugiert" sind zu 15 im andern, d. h. zu solchen, die in entsprechenden Ebenen liegen; letztere Aufgabe wird stufenweise auf einfacheren Aufgaben aufgebaut.

Sind so irgend zwei F_3 durch 18 Punkte hergestellt, so wird die F_3 durch 19 Punkte erzeugt, indem vermittels der quadratischen Involution auf den Geraden, die den 19ten Punkt mit den 18 verbinden, je der 3te Punkt konstruiert wird; mit Hilfe solcher Punkte ergeben sich dann reziproke Flächen- und Ebenenbündel, die die F_3 durch die 19 Punkte erzeugen.

Auf dem angegebenen Wege lassen sich die F_2, F_3, F_4 mit alleiniger Hilfe von Zirkel und Lineal punktweise konstruieren.

Für einen besonderen Fall gelangt *F. Schur*[89]) so direkt zur F_3 durch 19 Punkte. Es ist dabei von Vorteil, die Erzeugung durch einen Strahlenbündel und einen reziproken F_2-Bündel aufzulösen in eine solche durch drei nach *August* (Nr. 9) trilinear reziprok verknüpfte Strahlenbündel.

M. Pannelli[90]) stützt sich analog auf die Erzeugung der F_3 durch drei trilinear verwandte Strahlenbündel (A), (B), (C). Man nehme etwa in (A) einen Strahl a an, und konstruiere die Schnittpunkte von a mit der F_2, die durch die projektive Beziehung zwischen (B) und (C) bestimmt ist; diese beiden Punkte gehören der F_3 an, die durch 19 gegebene Punkte gehen soll. Variiert a, so gelangt man punktweise zur ganzen F_3.

W. Fiedler, Zürich Vierteljahrsschr. 24 (1882), p. 180; *F. P. W. White*, Cambridge Phil. Soc. Proc. 21 (1920), p. 16 (Ausdehnungen auf den S_n).

89) *Schur*, Math. Ann. 23 (1884), p. 437.

90) *Pannelli*, Ann. di mat. 22 (1894), p. 237.

C. le Paige[91]) hat mit Hilfe von höheren Involutionen, insbesondere durch die *August*sche trilineare Verwandtschaft[91a]) zwischen drei Ebenenbüscheln (Nr. **9**), eine Reihe von Konstruktionen für die F_3 durch 19 Punkte entwickelt. Wir führen hier nur die relativ einfachste an. Danach wird das F_3-Büschel durch 18 Punkte schrittweise zurückgeführt auf die Konstruktion einer F_3 durch sieben Punkte und drei windschiefe Gerade, die auf die einer F_2 durch neun Punkte zurückkommt. Weiter bedarf man einer F_3 durch eine Gerade, 3×3 Punkte je in einer Geraden und sechs andere Punkte; weiter einer F_3 durch eine Gerade, drei Punkte in einer Geraden und zwölf andere Punkte; endlich einer F_3 durch drei Punkte in einer Geraden und 16 andere Punkte. Damit gelangt man durch Zusammenfassung zur F_3 durch 19 Punkte.

Gleichfalls an die *August*sche Erzeugung knüpft *H. Schubert*[92]) an und gibt für eine Reihe besonderer Fälle einfache Konstruktionen.

22. Gruppentheoretische Behandlung der Fläche, besonders ihrer 27 Geraden, nach Klein und Burkhardt, sowie von Coble. Die Gleichung 27. Grades $f_{27} = 0$, von der die Bestimmung der 27 Geraden der F_3 abhängt, besitzt nach *C. Jordan*[93]) keine Resolvente geringerer Ordnung. Den niedrigsten bekannten Resolventen entsprechen geometrisch die 36 *Schläfli*schen Doppelsechsen, die 40 *Steiner*schen „Ternen", die 40 *Cremona*schen Enneader 1. Art und die 45 „Ebenen" (Nr. **11**).

Die Gruppe der f_{27} ist isomorph mit der des Problems der Dreiteilung der hyperelliptischen Funktionen vom Geschlecht zwei.

Die Prinzipien, die das eine Problem in das andere überführen, hat *F. Klein*[94]) in einem Briefe an *C. Jordan* entwickelt; *H. Burk-*

---

91) *Le Paige,* Acta math. 3 (1884), p. 181. *Le Paige* bedient sich auch mit Vorteil einer quadrilinearen Verwandstchaft zur Erzeugung der F_3; Acta mat. 5 (1884), p. 195; Brux. Bull. (3) 8 (1884), p. 238, 555.

91a) Zur Theorie der trilinearen Verwandschaft vgl. noch: *B. Klein,* Ann. di mat. (2) 18 (1890), p. 213; *A. Jolles,* J. f. Math. 111 (1893), p. 207. Als Spezialfall allgemeinerer Abbildungen erscheint sie bei *G. Hauck,* J. f. Math. 108 (1891), p. 25; 121 (1894), p. 207; 128 (1904), p. 91.

92) *Schubert,* Math. Ann. 17 (1881), p. 457. Vgl. *E. de Jonquières,* Paris C. R. 105 (1887), p. 1203; 106 (1887), p. 526, 907; 107 (1888), p. 209.

93) *Jordan,* J. de math. 4 (1869), q. 147; Traité des Subst. . ., Paris 1870, p. 316—365.

94) *Klein,* J. de math. 4 (1888), p. 169. — Daß die Gleichung $f_{27} = 0$ algebraisch unauflösbar ist, zeigt einfach, unter Rückgang auf die algebraisch unauflösbaren Gleichungen 5. Grades, *F. Giudice,* Torino Atti 43 (1908), p. 42. — Die Gruppe des Textes untersuchen nach rein gruppentheoretischen Gesichtspunkten *A. de Séguier,* Paris C. R. 173 (1921), p. 433, und ausführlicher *H. Potron,* J. Éc. Polyt. (2) 22 (1922), p. 69.

hardt[95]) hat sie im einzelnen mit expliziten Formeln aus- und durchgeführt.

Bei den linearen Transformationen der Perioden, die die Charakteristik der vier hyperelliptischen Modulfunktionen $Z_{\alpha,\beta}$ (oder auch Z_i, $i = 1, \ldots, 4$) fest lassen, erfahren diese Z eine aus vier Operationen erzeugbare Gruppe G_{51840} linearer Substitutionen S. Aus zwei Reihen kogredienter Z, Z' bilde man die zweireihigen Determinanten a_{ik}, so erfahren diese eine aus sechs Operationen erzeugbare G_{25920} von halb so viel S. Deutet man die Z_i als Punkt-, die a_{ik} als Linienkoordinaten im Raume, so wird durch jene S eine vorher (1887) von *A. Witting*[96]) untersuchte Konfiguration festgelegt. Bei *Witting* treten gewisse „Hauptgerade" der Konfiguration hervor; durch jedes der 45 Paare derselben ist eine Strahlenkongruenz bestimmt, und es gibt 27 ausgezeichnete Fünfen solcher Paare (oder Kongruenzen). Die fünf zugehörigen Kongruenzen gehören jedesmal ein und demselben linearen Komplex an. Die Gleichungen dieser 27 Komplexe sind:

$$\mathsf{E}_k \equiv \varepsilon^\lambda a_{ik} - \varepsilon^\mu a_{il} - \varepsilon^{-\lambda} a_{lm} - \varepsilon^{-\mu} a_{km} = 0$$
$$\left(k, l, m = 0, 1, 2; \quad \lambda, \mu = 0, 1, 2; \quad \varepsilon = e^{\frac{2 i \pi}{3}}\right).$$

Diese Ausdrücke E werden bei den Operationen der G unter sich vertauscht.

Es ist auf 72 Arten möglich, je sechs dieser Komplexe „erster Art" $\xi_i = 0$ so auszuwählen, daß die 30 in ihnen enthaltenen Kongruenzen verschieden ausfallen.

Dieselben 30 Kongruenzen lassen sich aber noch auf eine andere Art in sechs Fünfen anordnen, die sechs Komplexen „zweiter Art" $\eta_i = 0$ entsprechen.

Damit ordnen sich die 72 Sechsen linearer Komplexe zu 36 „Doppel-

95) *Burkhardt*, Gött. Nachr. 1892, p. 1; Math. Ann. 41 (1892), p. 313. Weitere Literatur s. daselbst. Vgl. noch die Ergänzungen bei *W. Burnside*, Quart. J. 40 (1909), p. 246. In einer neueren Arbeit, Cambr. Proc. 33 (1927), p. 498 gibt *W. Burnside* eine anschauliche Konstruktion der G_{25920}. Eine „Doppeldrei" (s. Nr. **11**, Note 35d), d. i. eine Konfiguration aus drei windschiefen Geraden nebst irgend dreien ihrer Transversalen, geht, wie leicht ersichtlich, durch $6 \cdot 6 \cdot 2 = 72$ Kollineationen K in eine zweite gegebene „Doppeldrei" über. Wendet man dies an auf eine beliebig, aber festgewählte Doppeldrei auf einer F_3, und irgendeine der 360 Doppeldreien der F_3, so gelangt man zu einer Gruppe von $72 \cdot 360 = 25\,920$ K, die mit der G_{25920} des Textes holoedrisch isomorph ist. Mit dieser ist eine G_{51840} birationaler Transformationen eng verknüpft.

96) *A. Witting*, Diss. Göttingen 1887; Math. Ann. 29 (1887), p. 157.

sechsen" zusammen. Für jede ist $\Sigma_r \equiv \sum \xi_i = -\sum \eta_i$ $(r = 1, \ldots, 36)$, und $\Sigma_r = 0$ liefert einen neuen Komplex zweiter Art; den 36 Doppelsechsen von linearen Komplexen erster Art entsprechen 36 solche zweiter Art, von denen jeder gegenüber 720 S der G ungeändert bleibt.

Setzt man in den $Z_{\alpha\beta}$ ungerader Charakteristik, die gerade Funktionen ihrer Argumente sind, letztere gleich Null, so gehen die $Z_{\alpha\beta}$ in Modulformen $z_{\alpha\beta}$ über. Nun hatte *H. Maschke*[97]) die Invarianten der Z-Gruppe bestimmt; diese werden jetzt zu Modulformen zweiter Stufe, die gewisser Normaldarstellungen fähig sind.

Von den Invarianten der a-Gruppe werden die wichtigsten aufgestellt.

Die Reduktion der f_{27}, deren Gruppe mit dem Problem der a holoedrisch isomorph ist, auf dieses Problem wird nunmehr durchgeführt.

Liegt eine derartige Gleichung $f_{27} = 0$ vor, so zerfallen nach Adjunktion einer Wurzel die übrigen 26 in $10 + 16$, wo die ersteren „konjugiert", die letzteren „nicht konjugiert" heißen.

Versteht man unter x_i eine Wurzel der Gleichung, unter C_i resp. N_i die Summe der zu x_i konjugierten resp. nicht konjugierten Wurzeln, so sind die Ausdrücke $\xi_i = 4x_i - 2C_i + N_i$ lineare Funktionen, derart, daß jedes x_i rational durch das entsprechende ξ_i und die genannten Größen ausdrückbar ist.

Damit ist die Auflösung jeder solchen Gleichung $f_{27} = 0$ auf das Problem der a oder der Z zurückgeführt. Insbesondere gilt dies also von der Gleichung für die 27 Geraden einer F_3; dabei entsprechen zwei konjugierten resp. nicht konjugierten Lösungen zwei inzidente resp. windschiefe Gerade der F_3.

Die Gleichung 27. Grades $f_{27} = 0$ für die g der F_3 steht zu zwei anderen wichtigen Gleichungen der Geometrie in naher Beziehung. Geht man aus von der Gleichung 28. Grades $f_{28} = 0$ für die Doppeltangenten einer c_4 (Nr. **16**), so wird deren Gruppe — die isomorph ist mit der des Problems der Zweiteilung der Perioden bei den Θ-Funktionen vom Geschlecht Drei — nach Adjunktion einer Wurzel zur Gruppe unserer f_{27}. Adjungiert man wiederum von dieser, wie oben, eine Wurzel, so tritt eine Spaltung in eine $f_{10} = 0$ und $f_{16} = 0$

97) *H. Maschke,* Gött. Nachr. 1888, p. 78; Math. Ann. 33 (1889), p. 317; Math. Ann. 36 (1890), p. 190; Chicago Congress Pap. 1897, p. 175. Vgl. noch *E. Meyer,* Math. Ann. 65 (1908), p. 299, wo eine damit verknüpfte Konfiguration von 720 Raumgeraden untersucht wird.

ein; die Gruppe der ersteren ist die der Gleichung für die 10 Geraden der F_3, die die der adjungierten Wurzel entsprechende g treffen; die der letzteren ist die der Gleichung, von der die 16 Geraden einer F_4 mit Doppel-C_2 abhängen (Nr. **16**).

E. Pascal[98]) hat das Einzelstudium der beiden ersteren Gruppen nach der geometrischen Seite hin unter Heranziehung anderer Hilfsmittel wieder aufgenommen.

Pascal stellt sich überhaupt die Aufgabe, die von *Weber*, *Noether*, *Frobenius* u. a. aus der Theorie der *Abel*schen Funktionen für $p = 3$ (und $p = 4$) hergeleiteten Ergebnisse geometrisch nutzbar zu machen. Insonderheit kommen hierbei die von *Klein*[99]) eingeführten Begriffe der „*Elementar-*“ und „*Primcharakteristik*“ zur Geltung, und finden ihre Anwendung auf die Systeme der Berührungskurven der c_4 (Nr. **16**). *Pascal* verfolgt weiter den Einfluß der „*Monodromie*“ der *Riemann*schen Fläche für $p = 3$ auf die Charakteristiken und Systeme von Berührungskurven, insbesondere der 28 Doppeltangenten der c_4, die ihrerseits vermöge der *Geiser*schen Projektion (Nr. **16**) auf die F_3, sowie andererseits auf ein F_2-Netz mit acht Grundpunkten bezogen wird. Die gruppentheoretischen Eigenschaften der f_{27} erfahren damit eine weitere Untersuchung.

Scheidet man von den 28 Verbindungslinien der acht Grundpunkte des F_2-Netzes eine aus, so verbleiben 27, die sich den 27 g der F_3 eindeutig zuordnen lassen.

Von hier aus gelangt *Pascal*[100]) zu verschiedenen neuen Konfigurationen auf der F_3. Von Interesse sind die „*Zirkularpolyeder*“, die aus 3, 4, 5, ... Ebenen der F_3 so gebildet werden, daß je zwei konsekutive Ebenen eine der 27 g gemein haben; ferner gewisse Systeme von Geradenquintupeln und ihre Beziehungen zueinander und zu den Doppelsechsen. Sodann[101]) werden solche aus den Ebenen der F_3 gebildete Sechsflache untersucht, deren Ebenen die neun Geraden eines der 120 Paare konjugierter Trieder (Nr. **11**) enthalten, das Verhalten dieser 120 Gruppen zueinander, die Anzahlbestimmung derjenigen Paare, Tripel usf., die gewisse Geraden resp. Ebenen gemein haben.

Mit wesentlich anderen Hilfsmitteln, von der Seite gewisser *Cremona*scher Transformationen und ihrer Gruppen her, ist *A. B. Coble*[102])

98) *Pascal,* Ann. di mat. 20 (1892), p. 163, 269.

99) *Klein,* Math. Ann. 36 (1890), p. 1.

100) *Pascal,* Lomb. Ist. Rend. (2) 25 (1892), p. 1098, 1103, 1136.

101) *Pascal,* Rom Acc. Linc. Rend. (5) 1_2 (1892), p. 385, 417; 2_1 (1893), p. 8.

102) *Coble,* Amer. Math. Soc. Trans. 16 (1915), p. 155. — Vollständige Systeme irrationaler Invarianten von P_n^1 stellt *Cl. M. Huber* auf, Amer. J. math. 49 (1927), p. 251.

zu einer eigenartigen gruppentheoretischen Erfassung der F_3 und verwandter Gebilde gelangt. Wir müssen hier etwas weiter ausholen.

Den Ausgang bildet eine *„Reihe"* (*„set"*) P_n^k von n Punkten im S_k. Vermöge des Prinzips korrespondierender Matrizes gehört zu P_n^k eine *„assoziierte"* Reihe Q_n^{n-k-2}; im Falle $n = 2k - 2$ — also insbesondere für $k = 2$, $n = 6$ — ist eine P_n^k *„sich selbst assoziiert"*.

Die Invarianten J einer P_n^k werden aus den Determinanten der Koordinatenmatrix gebildet; sie sind homogen und gleichen Grades in den Koordinaten jedes Punktes und bleiben bei Vertauschungen der Punkte ungeändert. Für die P_6^1 und P_6^2 werden vollständige J-Systeme angegeben. Vermöge der hiermit verknüpften algebraischen Prozesse lassen sich bereits explizite Gleichungen für die F_3 erhalten, die vermöge der *Clebsch*schen Abbildung mittels der c_3 durch die P_6 hervorgeht, sowie für ihre 27 Geraden und 45 Ebenen.[102a])

Die in gewissem Sinne geordnete P_n^k läßt sich andererseits auf einen Punkt P eines $S_{k(n-k-2)}$ abbilden; zwei solche Bildpunkte P, P' sind durch eine *Cremona*sche Transformation T verbunden. Die $n!$ Bildpunkte P, die den $n!$ Permutationen der P_n^k entsprechen, sind konjugiert unter einer *Cremona*schen Gruppe $G_{n!}$, deren Invarianten sich aus denen von P_n^k ergeben.

Von Bedeutung sind die mit der P_n^k und $G_{n!}$ verknüpften *„Formenprobleme"*[103]), bei vorgegebenen numerischen Werten gewisser Systemformen die Variabeln zu bestimmen. Zu dem Behuf wird die $G_{n!}$ zu einer $G_{n,2}$ erweitert mittels des Begriffes *„kongruenter"* Punktreihen, die sich aus den beiden singulären Punktreihen einer *Cremona*-Transformation und evtl. noch einer gewissen Anzahl gewöhnlicher korrespondierender Punkte zusammensetzen (z. B. im Falle einer P_6^2 aus den beiden Fundamentaldreiecken einer T_2).

Die in einer Ebene mit einer P_n^2 kongruenten (und projektiv verschiedenen) Reihen lassen sich abbilden auf ein Aggregat von Punkten in einem $S_{k(n-k-2)} = \Sigma$, das bereits durch *einen* seiner Punkte bestimmt ist; diese Punkte sind konjugiert unter der erweiterten $G_{n,2}$.

Diese $G_{n,2}$ sind nur in den drei Fällen $n = 6, 7, 8$ endlich; die beiden ersteren sind isomorph zu den Gruppen der 27 g einer F_3 resp. der 28 Doppeltangenten einer c_4.

102a) Vgl. hiermit die frühere Aufstellung bei *Coble*, John Hopk. U. C. 190 (1911), p. 59. S. auch Nr. 11, Note 35a.

103) So führt 102) das durch die assoziierten P_5^1 und P_5^2 bestimmte Formenproblem der $G_{5!}$ zur Lösung der $f_5 = 0$, und das durch die assoziierten P_6^1 und P_6^3, sowie die sich selbst assoziierte P_6^2 bestimmte Formenproblem der $G_{6!}$ zur Lösung der $f_6 = 0$. S. weitere Literatur daselbst.

Was die erstere anlangt, so bilden die c_3 durch P_6^2 die Ebene zunächst ab auf eine F_3, die in der *Cremona*schen Hexaederform F_3' (Nr. **18**) auftritt. Die rationalen Invarianten der $G_{6,2}$ sind auch solche der F_3' nach Adjunktion einer Irrationalität, die eine „Sechs" festlegt.

Solche Invarianten bestimmen die invarianten Mannigfaltigkeiten der G_{61} im $S_4 = \Sigma$, und letztere werden umgekehrt durch sie bestimmt. Geht man über zur erweiterten $G_{6,2} = G_{51840}$ (s. oben) in Σ, so gelangt man zu den Invarianten und Kovarianten der F_3' und damit auch der allgemeinen F_3. Bei vorgegebener F_3 kennt man ihre Invarianten und linearen Kovarianten; diese sind die „bekannten" Größen im Formenproblem der $G_{6,2}$.

Dessen Lösung liefert den Bildpunkt P der P_6^2 in Σ. Aus der P_6^2 lassen sich die g der F_3', sowie deren lineare Kovarianten ableiten. Vermöge einer linearen Transformation gehen dann die bekannten g der F_3' über in die gesuchten der F_3.

Alle diese Prozesse sind *rational* mit Ausnahme der Lösung des Formenproblems der $G_{6,2}$; überdies tritt eine akzessorische Irrationalität hinzu, die in der Dreiteilung der Perioden der hyperelliptischen Funktionen für $p = 2$ ihren Ursprung hat.

Umgekehrt[104]) wird gezeigt, wie sich die g einer gegebenen F_3 rational durch Terme einer Lösung des Formenproblems der $G_{6,2}$ bestimmen lassen; diese Lösung kann aber auch erhalten werden in Termen der Lösung eines mit den Θ-Funktionen verknüpften Formenproblems.

Im Unterschied von der *Klein*schen Lösung wird hier kein Gebrauch gemacht von einer f_{27} oder einer von deren Resolventen; die Untersuchung bewegt sich lediglich im Gebiet der irrationalen In- und Kovarianten der Fläche nach Adjunktion ihrer 27 g. Die $G_{6,2}$ führt hier direkt zur *Burkhardt*schen Gruppe; den Vertauschungen der g entsprechen für die Invarianten die Operationen einer Korrelationsgruppe, die sich auf der *Burkhardt*schen Kollineationsgruppe aufbaut. Die Lösung des Formenproblems der $G_{6,2}$ geschieht durch Adjunktion einer Lösung des *Burkhardt*schen, womit auch das allgemeine *Burkhardt*sche Formenproblem lösbar wird. In gleichem Sinne hat *C. C. Bramble*[104a]) die $G_{7,2}$ für die Gruppe der 28 Doppeltangenten der c_4 verwendet.

23. Spezielles. In Anmerkungen zu den bisherigen Nummern (insbes. **13** und **14**) ist bereits öfters auf gewisse spezielle F_3 hinge-

104) *Coble,* Amer. Math. Soc. Trans. 17 (1916), p. 345; 18 (1917), p. 331.

104a) *Bramble,* Amer. J. Math. 40 (1918), p. 351.

wiesen worden; solche, die sich damals füglich nicht einreihen ließen, mögen hier, ohne Anspruch auf Vollständigkeit, zusammengestellt werden.

In metrischer Hinsicht werden die F_3 nach dem Verhalten zur E_∞ eingeteilt von *R. Zimmermann*[104b]; in diesem Sinne betrachtet die F_3 als „Mittelpunktsfläche" *K. Stoltz.*[104b]

F. Dumont[105] fragt nach solchen F_3 ($= \Phi_3$), die in bezug auf eine F_2 *autopolar* sind, d. i. mit ihrer Polarfläche zusammenfallen; er gelangt zu vier Typen, unter denen sich insbesondere die R-F_3 (Nr. **14**) befinden.

Dumont[106] findet weiter, bei dem Versuch, Sätze von *Chasles* über c_3 auf F_3 zu übertragen, drei Normaltypen von F_3, die in kanonischer Form aufgestellt werden. Endlich untersucht *Dumont*[107] auch F_3 mit einer Symmetrieachse.

H. Glaser[108] untersucht eingehend *autoinverse* F_3, d. s. solche, die durch Inversion in sich übergehen.

Bei einigen Autoren entstehen gewisse F_3 durch Translation von Kurven, so von C_3 bei *A. S. Gale*[109]: es ergeben sich drei Typen, worunter die *Cayley*sche R-F_3 (Nr. **14**); ferner indirekt durch Translation von r_4 bei *J. Eiesland.*[110]

Durch ähnliche C_2 werden gewisse F_3 erzeugt nach *C. von Ebbenhorst-Tenzbergen.*[111]

Umdrehungs-F_3 treten auf bei *M. J. von Uven*[112], allgemeiner symmetrische F_3 bei *E. Ciani*[112], von denen fünf Typen aufgestellt werden. Gewisse, aus F_2 abgeleitete symmetrische F_3 betrachtet *S. Mangeot.*[112] Gewisse, schon bei *Möbius* vorkommende F_3, verfolgt weiter *C. E. Cullis.*[113]

104b) *Zimmermann,* Progr. Realschule Freiburg 1888, wo das Verfahren auch auf F_4, F_5, F_6 ausgedehnt wird; *Stoltz,* Diss. Gießen 1890, wo auch die projektive Verallgemeinerung berücksichtigt wird.

105) *Dumont*, Soc. math. fr. Bull. 25 (1897), p. 74. S. Nr. **14**, Note 51.

106) *Dumont,* ebenda p. 235; 26 (1898), p. 124; Nouv. Ann. (3) 17 (1898), p. 503.

107) *Dumont*, Soc. math. fr. Bull 28 (1900), p. 117.

108) *Glaser,* Progr. Falkgymn. Berlin 1902, 1903.

109) *Gale,* Amer. Math. soc. Bull. (2) 10 (1904), p. 188. S. Nr. **14**, Note 51.

110) *Eiesland,* Amer. J. 30 (1908), p. 170; 33 (1911), p. 1. Die F_3 ergeben sich aus jenen Translationsflächen durch eine logarithmische Transformation der Koordinaten.

111) *v. Ebbenhorst-Tenzbergen,* Diss. Amsterdam 1912; Nieuw Arch. (2) 10 (1912), p. 75.

112) *v. Uven,* Arch. Teyler (3) 8 (1903), p. 407; *Ciani,* Rom Linc. Rend. (4) 6_1 (1890), p. 399; *Mangeot,* Nouv. Ann. (3) 10 (1891), p. 235.

113) *Cullis,* Calcutta Math. Soc. Bull. 1 (1919), p. 9, 83.

Deutet man mit *G. Huber*[114]) in der Gleichung konfokaler Kegelschnitte den Parameter λ (oder auch eine lineare Form von λ) als dritte Raumkoordinate z, so ergibt sich eine für Übungszwecke besonders geeignete F_3 („Pons-F_3").

Auf weitere metrisch-spezielle F_3[114a]) kann nur kurz hingewiesen werden.

In der Tetraedergeometrie treten gewisse F_3[114b]) als Analoga merkwürdiger Kreise und Kegelschnitte der Dreiecksgeometrie (Art. III_1 10, *G. Berkhan* und *W. Fr. Meyer*) auf.

Von differentialgeometrisch ausgezeichneten Kurven auf F_3 sind besonders die Asymptotenkurven betrachtet worden, so für F_3 mit einem gewöhnlichen d_2 bei *A. Sucharda*[115]); ferner von *B. Blutel* und *Ch. Bioche*[116]) F_3 mit C_3 und C_4 als Asymptotenkurven.

J. Drach[117]) deckt einen eigentümlichen Zusammenhang auf zwischen den Asymptotenkurven von F_3 und den Krümmungslinien der Wellenfläche (s. *„Timerding"*, p. 860 ff.). Von allgemeineren

---

114) *Huber,* Monatsh. Math. Phys. 22 (1911), p. 89.

114a) So diskutiert *E. Allardice,* Edinb. Math. Soc. Proc. 10 (1892), p. 59, die (in der Theorie der harmonischen Bewegungen auftretende) F_3:

$$xyz - (x^2 + y^2 + z^2) + 1 = 0;$$

s. auch *J. Hammond,* Edinb. Times 73 (1900), p. 74.

Den Ort der Fußpunkte der von einem Raumpunkte auf die Geraden einer linearen Kongruenz gefällten Lote, d. i. eine F_3 mit einer g_∞, studiert *L. Borgmeyer*, Diss. Münster 1893.

114b) *A. Sartiaux,* Nouv. Ann. (2) 8 (1869), p. 313; *H. Thieme,* Ztschr. Math. Phys. 27 (1882), p. 56; *G. Bauer,* München Ber. 1888, p. 737; *H. Jettmar,* Arch. Math. Phys. (3) 10 (1891), p. 398; *W. Fr. Meyer,* Intern. Kongr. Heidelberg 1904, p. 322; *S. Kniest,* Progr. Gymn. Rössel 1897; *Ch. Bioche,* Nouv. Ann. (4) 3 (1902), p. 438; *G. Fontené,* Nouv. Ann. (4) 6 (1906), p. 145; *J. Neuberg,* Arch. Math. Phys. (3) 16 (1910), p. 11; 17 (1911), p. 34; *W. H. Salmon,* ebenda (3) 18 (1911), p. 154; 21 (1913), p. 300; 23 (1914), p. 14.

115) *Sucharda,* Böhm. Akad. 5 (1896), Nr. 9; Monatsh. Math. Phys. 8 (1897). p. 297. „Die Gleichung einer solchen F_3, mit d_2 in O, läßt sich in der kanonischen Gestalt annehmen: $C_2 + C_3 = 0$, wo C_3 in drei lineare Faktoren zerfällt. Man hat vier Realitätstypen von F_3 zu unterscheiden, je nachdem 6, 4, 2, 0 reelle g durch den d_2 gehen. Bei dem letzten Typus läßt sich die Integration der Differentialgleichungen der Asymptotenkurven ausführen; bei den ersteren drei Typen muß man sich mit Annäherungen begnügen. Es werden jeweils möglichst genaue Konstruktionen der Kurven ausgeführt. [S. die Vorarbeiten von *W. Dyck* über gestaltliche Verhältnisse von Haupttangentenkurven, München Ber. 23 (1891), p. 23; Deutsche Math.-Ver. 1 (1892), p. 60.]

116) *Blutel,* Paris C. R. 117 (1894), p. 722; *Bioche,* Soc. math. fr. Bull. 27 (1899), p. 96; ebenda 35 (1907), p. 70.

117) *Drach,* Paris C. R. 152 (1911), p. 1458.

Gesichtspunkten aus untersucht die Haupttangentenkurven der F_3 *X. Stouff.*[118])

Die spezielle F_3: $xyz = a$ ist sowohl hinsichtlich ihres Orthogonalsystems von *H. Stahl*[119]), wie ihrer Krümmungslinien von *F. Schiffer*[119a]) untersucht worden.

Ferner sei auf die F_3 hingewiesen, die nach *R. v. Lilienthal*[120]) als Ort der Brennpunkte eines gewissen Strahlensystems auftritt.

Sodann sei auch noch auf die Behandlung der Asymptotenpunkte von F_3 bei *D. J. Korteweg*[121]), sowie besonderer F_3 mit Ovalpunkten bei *H. Wieleitner*[121a]) hingewiesen.

Endlich sei noch erwähnt, daß nach *L. Seifert*[121b]) bei einer F_3 mit uniplanarem d_2 die parabolische Kurve eine C_2, und die Haupttangentenkurven R_6 sind.

24. Das Zylindroid. Unter den R-F_3 (Nr. **14**) spielt das Zylindroid („Z") wegen seiner vielfachen Anwendungen[122]) in der Theorie der Bewegungen starrer Körper eine besondere Rolle.

Eine ergiebige Quelle für die geometrischen Eigenschaften der Fläche liefert die Liniengeometrie (s. den Art. III C 8, *K. Zindler*, Algebraische Liniengeometrie, bes. Nr. **13**). Danach erscheint die Z als eine „Achsenfläche" („A-F_3"), d. i. der Ort der Achsen der linearen Komplexe K_1 eines Büschels.

So zuerst bei *P. H. Schoute*[123]), unter Beschränkung auf zwei reelle getrennte Leitgerade l_1, l_2; die Doppelgerade d ist die Linie kürzesten Abstandes von l_1, l_2; die einfache Begleitgerade e ist die unendlichferne Achse der zu l_1, l_2 parallelen Ebenen.

---

118) *Stouff*, Éc. Norm. (3) 10 (1893), p. 45.

119) *Stahl*, Math. Ann. 3 (1871), p. 488. Über das Orthogonalsystem der F_3: $z = cy^2x$ s. *G. Hochheim*, Arch. Math. Phys. 35 (1873), p. 31.

119a) *Schiffer*, Progr. Realschule Wien 1900, in weiterer Ausführung von Angaben bei *G. Darboux*, Th. des surfaces I, Paris 1885, p. 496. Die zugehörige Zentrafläche diskutiert *C. Beutel*, Württ. mat. nat. Mitt. (2) 15 (1913), p. 33.

120) *v. Lilienthal*, Math. Ann. 31 (1888), p. 83.

121) *Korteweg*, Wien Ber. 98 (1889), p. 1154 [vgl. *Zeuthen*, Math. Ann. 8 (1874), p. 5].

121a) *Wieleitner*, Diss. Münster 1901.

121b) *Seifert*, Spiso Br. 1923, Nr. 23.

122) *R. S. Ball* hat seine zahlreichen Untersuchungen hierüber zusammengefaßt in dem Werke: Theorie of screws, Dublin 1876; 2. ed. London 1900.

Die Fläche Z tritt aber schon viel früher auf, vgl. die bis 1902 reichende Literaturübersicht von *E. Wölffing* und *E. Lampe*, Arch. Math. Phys. (3) 2 (1902), p. 228, auf die besonders verwiesen sei. Als älteste Autoren sind zu erwähnen: *Sangro*, Napoli Atti 1 (1819), p. 83, 97; *W. R. Hamilton*, Dublin Trans. 16 (1830), p. 4.

123) *Schoute*, Edinb. Times 52 (1890), p. 77.

Weitere Ergänzungen finden sich bei *A. Demoulin*[124]), der auf die Beziehungen der A-F_3 zur Z näher eingeht (s. u.), und auch den Fall nicht reeller Flächen berücksichtigt.

In drei Arbeiten[125]) allgemeinerer Tendenz von *St. Jolles, Th. Reye* und *H. Mohrmann* erscheinen beide Flächen als gewisse Spezialgebilde eingelagert.

Neuerdings hat *W. Fr. Meyer*[126]) beide Flächen und ihren Zusammenhang systematisch mittels liniengeometrischer Rechnung untersucht.

Für die beiden Grundkomplexe des Büschels werden kanonische Formen aufgestellt, aus denen sich die Eigenschaften der A-F_3 ablesen lassen. Dabei sind auch die Fälle von zwei komplexen sowie koinzidierenden Leitgeraden l_1, l_2 zulässig.

Zu vorgegebener A-F_3 gehören noch ∞^1 erzeugende K_1-Büschel.

Die A-F_3 erscheint als eine solche („konoide") R-F_3, deren Erzeugende zu d orthogonal sind, und die zwei reelle (getrennte) Koinzidenzerzeugende besitzt. Auf Grund der Tatsache, daß die A-F_3 und die Z ein einziges (sc. reelles) Paar von zugleich inzidenten und orthogonalen Erzeugenden besitzen, folgt die *völlige Identität* beider Flächen.

Aus den expliziten und impliziten Darstellungen der Z ergeben sich ohne weiteres die bekannteren Eigenschaften der Fläche.

So schneiden die Ebenen durch die Erzeugenden Ellipsen[127]) aus, deren Projektionen auf eine zu d senkrechte Ebene Kreise[127]) sind.

Der Ort der Fußpunkte der von einem beliebigen Raumpunkte P auf die Erzeugenden gefällten Lote ist eine jener Ellipsen.[128]) Um-

---

124) *Demoulin*, Bull. Soc. math. Fr. 20 (1892), p. 43; 29 (1901), p. 39.

125) *Jolles*, Math. Ann. 63 (1907), p. 337 (Fokaltheorie der linearen Kongruenzen); *Reye*, Math. Ann. 69 (1910), p. 550 (Kongruenz der Achsen eines Bündels von K_1); *H. Mohrmann*, Math. Ann. 73 (1913), p. 571 [Haupttangentenkurven auf Netzflächen; vgl. *A. Voss*, Math. Ann. 8 (1874), p. 54].

126) *Fr. Meyer*, J. f. Math. 159 (1028), p. 50. Dabei empfiehlt es sich, die Linienkoordinaten einer Raumgeraden nicht, wie üblich, durch zwei Indizes anzugeben, sondern, mit Rücksicht auf die Auszeichnung der E_∞, in zwei Tripel p_i, q_i $(i = 1, 2, 3)$ zu zerlegen.

Die binär-invariantentheoretische Grundlage der Figur wird durch ein System von fünf f_2 gebildet, die an fünf harmonische Beziehungen geknüpft sind.

127) *J. B. Göbel*, Ztschr. Math. Phys. 25 (1890), p. 281.

128) *Nash* und *Morel*, Edinb. Times 30 (1878), p. 96; *R. S. Ball*, ebenda 65 (1895), p. 28; 67 (1897), p. 60.

Umgekehrt ist die Z (abgesehen vom Zylinder) das einzige (reelle) Konoid mit stets ebenen Fußpunktkurven, nach *P. Appell*, Rev. math. sp. 5 (1895), p. 129. Dies gilt nach *Appell*, Bull. Soc. math. Fr. 28 (1900), p. 251, 367, auch allgemein gekehrt gehören zu irgendeiner solchen Ellipse noch ∞^1 Punkte P, die eine Parallele zu d erfüllen.

Gewisse Verallgemeinerungen der Z treten bei *E. Müller*[129]) und *V. Simandl*[130]) auf.

Differentialgeometrisch ist bemerkenswert, daß nach *Ch. Michel*[131]) der Ort der Krümmungszentra der durch einen Punkt P einer Fläche F gehenden Ebenenschnitte eine F_4 ist (s. „*Salmon-Fiedler*", p. 442; p. LXI, Note 171), mit einer Z als Inversen bezüglich P; beide Flächen haben die Doppelgerade d gemein. Umgekehrt läßt sich zu gegebener Z eine F konstruieren, wenn man P als einen Punkt von d wählt.

Daran schließen sich Schattenkonstruktionen[131]) der Z.

Nachträge.

Nr. 3, Note 10, p. 1446. Nach *E. Eckardt*, Ztschr. Math. Phys. 19 (1874), p. 259, liegen, wie aus der Normalgleichung der $H(F_3)$ hervorgeht, die zehn c_2, in denen die Tangentialkegel der zehn d_2 die H schneiden, zu je dreien zehnmal perspektiv.

Die Scheitel der zehn so entstehenden Sehkegel liegen auf den Pentaederkanten und werden aus diesen durch eine Ebene — $\sum az = 0$ — ausgeschnitten.

Nr. 8, Note 22, p. 1454. Die *Steiner*sche Erzeugung (II) der F_3 durch projektive Zuordnung eines Ebenen- und eines F_2-Büschels führt weiter aus *E. Eckardt*, Ztschr. Math. Phys. 20 (1875), p. 163.

---

für R-F; vgl. dazu noch *R. Bricard*, ebenda 29 (1901), p. 18, der auch sphärische Fußpunktkurven in Betracht zieht.

Andererseits existieren für jede R-F Punkte (die evtl. auch eine ganze Gerade erfüllen), deren Fußpunktkurve in bezug auf die Erzeugenden eine ebene ist, nach *E. Korawal*, Bull. math. astr. (2) 33 (1909), p. 138.

129) *Müller*, Wien Ber. 126 (1917), p. 915. Hier werden Punkttransformationen des S_3 untersucht, die die Ebenen in eine Schar kongruenter Konoide überführen; als Sonderfall tritt eine Schar von Z auf.

130) *Simandl*, Bull. math. int. 19 (1914), p. 46; 20 (1914), p. 236, 351. Eine gewisse R-F_4 erscheint als Verallgemeinerung der Z.

131) *Michel*, Ass. Fr. 22 (1893), p. 184; vgl. die Ergänzungen von *A. Mannheim*, ebenda 23 (1894), p. 201, und *E. Janisch*, Monatsh. Math. Phys. 8 (1897), p. 178. Hieraus entwickelt *Michel*, Bull. Soc. math. Fr. 24 (1896), p. 26; Ass. Fr. 31 (1903), p. 171, Schattenkonstruktionen der Z, indem der Leuchtpunkt entweder auf der Normalen von F in P, oder aber auf der Tangentialebene in P gewählt wird. Solche Konstruktionen bei Parallelbeleuchtung führen aus *A. Adler*, Wien Ber. 113 (1904), p. 431, und *E. Janisch*, Arch. Math. Phys. (3) 12 (1907), p. 317.

Nr. **11**, Note 35d, p. 1466. Im besonderen sind bemerkenswert die entsprechenden Gruppierungen in der Restkonfiguration von 16 g, die nach Ausschluß einer der 27 g, nebst den sie treffenden 10 g verbleiben. Es sind die nämlichen Gruppierungen, die zwischen den 16 g einer F_4 mit $\overline{C}_2$ bestehen, s. *J. Pereno*, Ann. di mat. (2) 21 (1893), p. 57; *„Timerding"*, p. 864 ff., und Nr. **16**.

Nimmt man etwa a_p als die ausgeschlossene Urgerade, so sind die 16 g repräsentiert durch: $a_i, a_k, a_l, a_m, a_n, b_p, c_{ik}, c_{il}, c_{im}, c_{in}, c_{kl}, c_{km}, c_{kn}, c_{lm}, c_{ln}, c_{mn}$.

Man hat zunächst 80 „Zweien" (Paare windschiefer g), andererseits 40 Inzidenzpaare. Sodann 130 „Dreien" (Tripel windschiefer g).

Die „Vieren" (Quadrupel windschiefer g) zerlegen sich in zwei Arten, zweiter resp. erster Art, je nachdem sie sich mittels einer fünften, zu allen vier windschiefen g zu einer „Fünf" ergänzen lassen oder nicht.

Jede Vier der ersten Art, etwa $(a_i, c_{kl}, c_{km}, c_{kn})$, läßt sich durch eine bestimmte zweite $(a_k, c_{il}, c_{im}, c_{in})$ derselben Art zu einer „Doppelvier" vervollständigen; jede Gerade der einen Vier trifft drei der anderen Vier, während sie zur vierten windschief ist.

Solcher Vieren erster Art gibt es 40, mithin 20 Doppelvieren. Die jeweils verbleibenden 8 g bilden wiederum, und zwar auf nur eine Art, eine Doppelvier erster Art; mithin gibt es 10 Paare von Doppelvieren erster Art, an denen je alle 16 g partizipieren.

Jede vorgegebene „Zwei" kommt in vier (nicht drei, wie *„Timerding"* versehentlich angibt) solchen Doppelvieren vor.

Auch die Vieren zweiter Art setzen sich zu Doppelvieren zusammen, z. B. (a_i, a_k, a_l, a_m), $(c_{in}, c_{kn}, c_{ln}, c_{mn})$. Hier ist gerade umgekehrt je eine Gerade der einen Vier windschief zu dreien der anderen Vier, während sie die vierte trifft (bei *„Timerding"* versehentlicht vertauscht).

Solcher Doppelvieren zweiter Art gibt es 40. Sie sind (1, 1)-deutig den 40 Inzidenzpaaren zugeordnet; die Geraden je einer der beiden Vieren treffen die eine Gerade des Inzidenzpaares, die andere nicht, und vice versa. Die verbleibenden 8 g bilden noch 8 Doppelvieren zweiter Art. Jede gegebene „Zwei" tritt in 12 Doppelvieren auf.

Von den beiden Transversalen irgendeiner Vier gehört stets die eine der F_4 an, die andere nicht.

Endlich hat man 16 „Fünfen" windschiefer g. Diese sind alle „eigentliche" (Nrn. **10, 11**), insofern sie zwei Transversalen zulassen; auch hier gehört stets die eine der F_4 an, die andere nicht. Diese 16 Fünfen sind (1, 1)-deutig den 16 g zugeordnet, eben vermöge der sie jeweils treffenden Transversale auf der F_4, und umgekehrt wird jede der 16 g von fünf Geraden, einer Fünf, getroffen.

Nr. **11**, Note 38a, p. 1475. Eine (1, 1)-deutige Korrespondenz zwischen den Geraden des Raumes und den Schließungskegelschnitten eines festen Kegelschnitts tritt schon bei *F. Aschieri* auf, Lomb. Ist. Rend. (2) 12 (1879), p. 265, 341, der den Grundgedanken *Cremona* zuschreibt.

Nr. **13**, Note 46, p. 1483. Die Krümmungslinien auf S, wie auf F_3 mit $4\,d_2$, untersucht, in Spezialisierung einer allgemeineren Methode, *G. Darboux,* Paris C. R. 84 (1877), p. 382.

Nr. **14**, Note 51, p. 1490. Die Polarflächen der R-F_3 untersucht eingehend *A. Hochheim,* Ztschr. Math. Phys. 23 (1878), p. 308, 345; 24 (1879), p. 18.

Nr. **16**, Note 65, p. 1501. Indem *H. G. Zeuthen,* Festschr. Kjöb. 1879, nach der *Geiser*schen Methode an eine F_4 mit $\overline{C}_2$ von irgendeinem Punkte der $\overline{C}_2$ die Tangenten an die F_4 legt, ergibt sich als Umrißspur wiederum eine allgemeine c_4 ($p = 3$).

Daraufhin werden die Gestalten der F_4, unter Berücksichtigung der Realität, der Zusammenhang u. a. diskutiert.

Nr. **17**, Note 69, p. 1504. Von weiteren Modellen seien noch erwähnt: ein solches der F_3 mit 27 reellen g, von *J. Caron,* Bull. Soc. Math. Fr. 8 (1880), p. 73; solche einer F_3 mit 4 d_2 (mit Haupttangentenkurven), von *S. Bacharach,* Münchener Modelle 1877 (Darmstadt); endlich solche von R-F_3, von *F. Berka,* Berlin 1879.

Nr. **23**. Von besondern F_3 seien noch die erwähnt, wo drei in einer Ebene T liegende g in einem Punkte inzidieren, bei *E. Eckardt,* Math. Ann. 10 (1875), p. 227. Unter den besonderen R-F_3 ist beachtenswert eine gewisse Schraubenfläche, bei *Cayley,* Men. (2) 1 (1871), p. 71.

(Abgeschlossen im September 1928.)

III C 10. SPEZIELLE ALGEBRAISCHE FLÄCHEN.

III C 10b. FLÄCHEN VIERTER UND HÖHERER ORDNUNG.

Von

W. FR. MEYER

IN KÖNIGSBERG IN PR.

Inhaltsübersicht.

IV. Zykliden.

V. F_4 mit einer Doppelgeraden.

VI. F_4 mit dreifachem Punkt und solche mit einer dreifachen Geraden.

VII. Die Steinersche Fläche.

VIII. Rationale Flächen vierter und höherer Ordnung.

IX. Flächen vierter und höherer Ordnung mit einer endlichen Anzahl von Geraden.

X. Flächen 4. Ordnung mit weniger als 16 Doppelpunkten.

XI. Die Weddlesche und die Kummersche Fläche.

XII. Regelflächen vierter und höherer Ordnung.

Literatur.

A. Die einschlägigen Abschnitte in den Lehrbüchern.

L. Cremona, Preliminari di una teoria geometrica delle superficie, Bologna Mem. (2) 6 (1866), p. 91; (2) 7 (1867), p. 29. Deutsch von *M. Curtze,* Allgemeine Theorie der Oberflächen, Berlin 1870. Das Original gab in erweiterter Form heraus: *B. Guccia,* Geometria superiore, Palermo 1890.

G. Salmon-W. Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes, 2. Teil, 3. Aufl., Leipzig 1880 („*Salmon-Fiedler*").

G. Salmon, Analytic Geometry of three dimensions. Vol. II. 5. ed. by A. P. Rogers, London 1915 (vergriffen). Französische Ausgabe von *O. Chemin,* Paris 1892.

A. B. Basset, Geometry of surfaces, Cambridge 1910.

Th. Reye, Geometrie der Lage, 2. Abt. 1868, 3. Abt. 4. Aufl. Leipzig 1910 („*Reye*").

H. E. Timerding, Repertorium der höheren Mathematik, Bd. II, 2, Leipzig 1922. Kap. 35 „Besondere F_4" (von *Timerding*) („*Timerding*").

H. T. Baker, Principles of geometry, Cambridge, vol. III (1923), F_4, F_5 usf., vol. IV (1925), Ausdehnungen auf den Raum S_n („*Baker*").

B. Monographien.

G. Darboux, Sur une classe remarquable de courbes et surfaces algébriques (Zykliden), Paris 1873, 2. ed. 1896 („*Darboux*").

Th. Reye, Synthetische Theorie der Kugeln und linearen Kugelnsysteme (Zykliden), Leipzig 1879.

G. Loria, Ricerche intorno alla geometria della sfera e loro applicazione allo studio ed alla classificazione delle superficie di quarto ordine aventi per linea doppia il cerchio imaginario all' infinito, Torino Mem. (2) 36 (1884); Torino Atti 20 (1885), p. 505.

K. Rohn, Die Flächen vierter Ordnung hinsichtlich ihrer Knotenpunkte und ihrer Gestaltung, Preisschrift der Jablonowskischen Gesellschaft, Leipzig 1886 [Auszug in Math. Ann. 29 (1887), p. 81] („*Rohn*").

H. T. Hudson, Kummers Quartic surface, Cambridge 1905 (ohne Literaturangaben) („*Hudson*").

C. M. Jessop, On Quartics with singular points, Cambridge 1916 („*Jessop*").

Der voraufgehende Artikel wird mit „F_3" zitiert.

Bezeichnungen.

Es gilt das in „F_3“ Angegebene, mit einigen Ergänzungen.

Ein ν-facher Knotenpunkt einer Fläche werde jetzt genauer mit D_ν, entsprechend eine ν-fache Ebene mit Δ_ν bezeichnet, mit t_ν eine an ν Stellen ($\nu = 0, 1, 2, 3, 4$) berührende Tangente der Fläche, mit T_i eine an i Stellen ($i = 0, 1, 2, 3$) berührende Tangentialebene; also im besondern t_0 eine beliebige Gerade, T_0 eine beliebige Ebene.

Das Zeichen für die Normkurve im S_n ist $N_n = \mathsf{N}_n$. Büschel, Netze, Gebüsche von Gebilden werden durch B, N, G angegeben. Im besonderen bedeute noch K_n einen Kegel n^{ter} Ordnung, $K^{(1)}$, $K^{(2)}$ einen linearen resp. quadratischen Geradenkomplex, $\mathfrak{K}^{(2)}$ eine quadratische Geradenkongruenz (2, 2).

Eine Regelfläche n^{ter} Ordnung wird mit R-F_n bezeichnet, ihre Regelstrahlen mit h.

Unter $\overline{C}, \overline{\overline{C}}, \ldots$ wurde eine doppelte, dreifache ... Kurve auf einer Fläche verstanden; im besonderen also unter $\overline{g}, \overline{\overline{g}}, \ldots$ eine doppelte, dreifache ... Gerade.

Linienkoordinaten im Raume werden genauer mit π resp. p angegeben, je nachdem sie als Achsenkoordinaten resp. Strahlenkoordinaten aufgefaßt werden.

I. Einleitung und Übersicht. Reziproke Erzeugung der $F_4, F_5, \ldots$ durch Flächen niederer Ordnung nach Reye und v. Escherich. Rationale und andere Kurven, nebst ihren Invarianten, auf besonderen F_4. Kanonisierung der F_4 und Reyes Dekaeder. Sonderfälle. Formentheoretisches. Übertragungsprinzipien.

1. Einleitung und Übersicht. Das eigentümliche Gepräge der Theorie der F_3 (s. Art. „F_3“) nebst ihrer Fülle geometrischer Eigenschaften beruhte auf zwei, sich selbst wieder gegenseitig bedingenden Hauptmomenten. Einmal ist es der Umstand, daß für eine F_3 die *Hesse*sche[1a]) und *Steiner*sche Fläche zusammenfallen, woraus die Lehre vom Pentaeder entspringt. Andererseits die Existenz einer endlichen Anzahl von Geraden auf der F_3, sowie von dreimal berührenden Ebenen. Daran lehnten sich die Erzeugungen der F_3, sowie ihre Abbildung auf eine Ebene von selber an.

1a) Die *Hesse*sche Fläche H einer F_n, deren Gleichung durch das Verschwinden der Determinante der zweiten Ableitungen von F_n geliefert wird, schneidet aus F_n die parabolische Kurve aus. Ein besonderes Verhalten weist H in den Knotenpunkten und vielfachen Kurven von F_n auf, wie *K. Rohn,* Math. Ann. 23 (1884), p. 80 näher ausführt. Sei D_k ein k-facher Knotenpunkt der F_n, so werden der Reihe nach folgende Fälle untersucht: 1. ein allgemeiner D_k; 2. der Sonderfall, wo der Tangentenkegel des D_k eine mehrfache Kante besitzt; 3. ein biplanarer und ein uniplanarer D_2; 4. ein einfacher Punkt der F_n, dessen Tangentenebene aus F_n eine c_n mit d_k ausschneidet; 5. die Doppel- und Rückkehrkurven.

Für eine F_4 erfahren die Ergebnisse geeignete Spezialisierungen.

Bei den $F_4 (F_5, \ldots)$ treten diese Momente und überhaupt die Theorie der punktallgemeinen Fläche in den Hintergrund. Die *Hesse*sche und *Steiner*sche Fläche sind jetzt verschieden. Zwar lassen sich deren allgemeine Eigenschaften sowie überhaupt die Polarentheorie der F_n, wie sie zuerst *L. Cremona* (s. Lit.) systematisch entwickelt hat, für die Einzelfälle $n = 4, 5, \ldots$ spezialisieren. Indessen gelangt man so zu wenig Ergebnissen, die von spezifisch geometrischem Interesse wären, was damit zusammenhängt, daß eine auch nur annähernde Übersicht über die Gestalten der in Betracht kommenden Gebilde unmöglich erscheint. So ist denn auch die reziproke Erzeugung einer F_4 durch Flächen niederer Ordnung (s. Nr. 2) nach *Th. Reye* und *G. v. Escherich* zwar von theoretischem Interesse, erweist sich aber zur Ableitung konkreter Eigenschaften der F_3 wenig geeignet. Desgleichen ist auch die von *Th. Reye* (s. Nr. 4) herrührende Ausdehnung des *Sylvester*schen Pentaeders der F_3 zu einem „Dekaeder" der F_4 usf. mehr von formalem Werte.

Was andererseits Gerade auf einer allgemeinen F_n angeht, so existieren solche für $n > 3$ überhaupt nicht mehr, ebensowenig wie allgemeine R und gewisse andere C (s. Nr. 3), vielmehr treten sie erst auf gewissen speziellen F auf, und ihr Auftreten gestaltet sich sehr verschieden, je nachdem die F singuläre Kurven besitzt oder nicht (s. Abschn. IX).

Endlich sei auch hinsichtlich der Theorie der Transformationen, insbesondere der *Cremona*schen, sowie der linearen C-Scharen auf der Fläche nach *Severi* u. a. auf deren allgemeine Darstellung verwiesen (s. Art. III C 6b, *G. Castelnuovo* und *F. Enriques*, Die algebraischen Flächen vom Gesichtspunkte der birationalen Transformationen aus; III C 11, *L. Berzolari*, Algebraische Transformationen). Wir beschränken uns daher im folgenden auf gewisse Typen spezieller F_4 (und anhangsweise auch von $F_5, \ldots$), insbesondere auf solche, die zu ihrem Teile an der Weiterentwickelung der höheren Raumgeometrie beigetragen haben.

Nach einer vorläufigen Übersicht über das Auftreten gewisser C auf F_4 und der damit verknüpften Invarianten (s. Nr. 3) wird auf die grundlegende *Kummer*sche Abhandlung über F_4 mit Scharen von C_2 näher eingegangen.

Die wichtigsten dieser F_4, nämlich die F_4 mit einem Doppelkegelschnitt $\overline{C}_2$, werden im Anschlusse an die Abbildungsmethode von *Clebsch* (s. Abschn. III) näher verfolgt, und weiter deren metrische Repräsentanten, die Zykliden Z (s. Abschn. IV). Die Methode von *Clebsch* ist dann weiterhin von ihm selbst, von *Noether* u. a. auf F_4 mit einer Doppelgeraden $\bar{g}$, $F_5 (F_6, \ldots)$ mit singulären Kurven ausgedehnt worden (s. Nr. **52**). Synthetisch und systematisch hat sie, besonders hinsichtlich der endlichen Anzahl auf ihr liegender Geraden, *Sturm* (s. Nr. **52**) untersucht.

In dieser Hinsicht steht ihnen gegenüber eine Reihe vereinzelter merkwürdiger $F_4 (F_5, \ldots)$ mit einer endlichen Anzahl von Geraden, im übrigen aber ohne singuläre Punkte und Kurven.

Daran schließt sich, in Verallgemeinerung des Früheren, eine Übersicht über die rationalen, d. i. auf eine Ebene eindeutig abbildbaren F_4 (s. Nr. **53**). Ein weiterer Abschnitt ist den wichtigsten F_4 mit < 16 Knotenpunkten D_2 gewidmet.

Den eigentlichen Kernpunkt des Ganzen bildet aber in Verbindung mit der *Weddle*schen F_4 die Theorie der *Kummer*schen Fläche K_m mit der Maximalzahl von $16 D_2$ nebst ihren Unterarten, des Tetraetroides T_e und der Wellenfläche W_l (s. Abschn. XI). Von besonderem Interesse ist hier die Durchdringung mit der Liniengeometrie der quadratischen Komplexe und Kongruenzen (s. Nr. **69** ff.), sowie der Darstellung durch hyperelliptische Funktionen von zwei Variabeln (s. Nr. **71**).

Eine besondere Beachtung verdienen auch die F_4 mit einem kubischen Knotenpunkte D_3 (s. Abschn. VI), unter denen wieder die *Steiner*sche Fläche S eine besondere Rolle spielt (s. Abschn. VII), sowie die F_4 mit einer dreifachen Geraden (s. Abschn. VI). Daran schließt sich eine systematische Betrachtung der Regelflächen R-F_4 (s. Abschn. XII) und anhangsweise der R-F_5 und R-F_6. Den Schluß bildet die Aufzählung einer Reihe von metrisch ausgezeichneten F_4, insbesondere solcher, die der Theorie der F_2 entspringen (s. Abschn. XIII).

Um auf die allgemeine F_4 zurückzukommen, so diene als Definition deren Gleichung in homogenen Punktkoordinaten x_i, x_k, x_l, x_m. Denkt man sich diese Gleichung etwa nach x_m entwickelt, so nimmt sie die Gestalt an

$$(1) \qquad F_4 \equiv c_0 x_m^4 + c_1 x_m^3 + c_2 x_m^2 + c_3 x_m + c_4 = 0,$$

wo c_ν $(\nu = 0, 1, \ldots 4)$ eine beliebige ternäre Form der Ordnung ν in x_i, x_k, x_l bedeutet. Die F_4 führt also $1 + 3 + 6 + 10 + 15 = 35$ Koeffizienten mit sich, oder hängt, in anderer Sprechweise, von 34 Konstanten ab.

An diese Darstellung mögen sich gleich einige vorläufige Bemerkungen über das Auftreten einfachster Singularitäten in der Koordinatenecke A_m anschließen. Geht vorab die F_4 einfach durch A_m, so verschwindet c_0, und (1) beginnt mit dem Gliede $c_1 x_m^3$; die Gleichung $c_1 = 0$ ist dann die der Tangentialebene T der F_4 in A_m.

Verschwindet weiter c_1 identisch, so daß (1) mit dem Gliede $c_2 x_m^2$ beginnt, so besitzt die F_4 in A_m einen Knotenpunkt 2. Ordnung D_2.

Dieser ist ein eigentlicher resp. biplanarer resp. uniplanarer, je nachdem die Gleichung $c_2 = 0$ einen irreduzibeln (ein- resp. nullteiligen Kegel 2. Ordnung, oder aber ein Paar getrennter (reeller resp. konjugiert imaginärer) Ebenen, oder endlich eine Doppelebene darstellt, wofür sich die algebraischen Kriterien leicht angeben lassen (s. Nr. **31**). Verschwindet auch c_2 identisch, so daß sich (1) reduziert auf $c_3 x_m + c_4 = 0$, so liegt in A_m ein kubischer Knotenpunkt D_3 vor; die 12 gemeinsamen Kanten der beiden Kegel $c_3 = 0$, $c_4 = 0$ liegen dann auf der F_4 (s. Nr. **37**). Die weiteren sukzessiven Ausartungen des D_3 in A_m werden wiederum durch die entsprechenden Ausartungen der kubischen Form c_3 bedingt. Verschwindet endlich auch noch c_3 identisch, so reduziert sich die F_4 auf den Kegel 4. Ordnung $c_4 = 0$, ein Fall, der im folgenden ausgeschlossen werde.

2. Reziproke Erzeugung der $F_4, F_5, \ldots$ durch Flächen niederer Ordnung nach Reye und v. Escherich. *Th. Reye*[1]) hat systematisch, mit synthetischen Hilfsmitteln, die Erzeugung von F_n aus Flächen geringerer Ordnung untersucht und sie insbesondere auf $F_4, F_5, \ldots$ angewendet.

Der nächstliegende Weg, die Erzeugung einer F_n durch zwei projektiv zugeordnete Büschel B_p und B_q von F_p und F_q, für $p + q = n$, erwies sich für die allgemeine F_n als ungeeignet.

Bei einer F_4 läge ein doppelter Ansatz vor.

Einmal die Erzeugung durch einen F_1-Büschel B_1 und einen ihm projektiv zugeordneten F_3-Büschel B_3. Diese setzt aber die Existenz einer Geraden g auf der F_4 voraus; eine solche F_4 hängt aber nur von 33 Konstanten ab (s Nr. **4**).

Andererseits die Erzeugung der F_4 durch ein F_2-Büschel B_2 und ein ihm projektiv zugeordnetes F_2'-Büschel B_2'. Dies würde wiederum die Existenz mindestens einer C_4 auf der F_4 voraussetzen; aber auch eine solche F_4 hängt nur von 33 Konstanten ab (s. Nr. **3**). Aus diesen Gründen stellt sich *Reye* die verwandte Aufgabe, die klassische *Steiner*sche Erzeugung einer F_2 durch ein Strahlennetz[2]) N_1 und ein ihm reziprok zugeordnetes F_1-Netz N_1' zu einer analogen Erzeugung von $F_3, F_4, \ldots$ auszubauen. Zu dem Behuf bedarf man vorab für die Erzeugung einer F_{n+1} einer synthetischen Definition resp. Konstruktion einer solchen reziproken Zuordnung eines g-Netzes N_1 und eines F_n-Netzes N_1.

1) *Th. Reye*, Math. Ann. 1 (1869), p. 455; ib. 2 (1870), p. 475. In der ersten Abhandlung werden der Reihe nach die $F_4, F_5, \ldots$ untersucht, die zweite entwickelt die allgemeine Theorie.

2) Im Texte wurde die kürzere Bezeichnung „Netz" der sonst üblicheren „Bündel" vorgezogen.

Dies geschieht schrittweise mittels Polarenbildung.

Im nächsthöheren Falle $n = 2$ adjungiere man der Figur eines g-Netzes N_1 und eines F_2-Netzes N_2 einen beliebig, aber fest gewählten Punkt P_0 und denke sich bezügl. P_0 das Netz N_1' der Polarebenen Π der F_2 des Netzes N_2 konstruiert. Bezieht man dann, wie bei *Steiner*, die beiden Netze N_1 und N_1' reziprok aufeinander, so heißen dann auch die beiden Netze N_1 und N_2 „reziprok zugeordnet" oder kurz „reziprok", und die Eigenschaften dieser Zuordnung erweisen sich als unabhängig von der Auswahl des Punktes P_0. Im nächsten Fall eines g-Netzes N_1 und eines F_3-Netzes N_3 reduziere man wiederum mittels Polarenbildung das Netz N_3 auf ein F_2-Netz N_2', beziehe nach obiger Regel die beiden Netze N_1 und N_2' reziprok aufeinander, so sind damit auch die beiden Netze N_1 und N_3 reziprok einander zugeordnet usf. So gelangt man allgemein zur reziproken Beziehung zweier Netze von F_p und F_q. Über die noch weitergehende Ausdehnung durch *G. v. Escherich* s. u.

Sind nun auf diesem Wege ein g-Netz N_1 und ein F_n-Netz N_n reziprok aufeinander bezogen, so erscheint eine F_{n+1} als Ort der n Schnittpunkte je einer g in N_1 mit der zugeordneten F_n in N_n.

Umgekehrt beweist dann *Reye*, daß eine solche Erzeugung einer beliebig vorgelegten F_{n+1} stets, und auf noch mannigfaltige Art, ausführbar ist; als Zentrum des g-Netzes N_1 ist jeder beliebige Punkt der F_{n+1} wählbar. Insbesondere erscheint so eine F_4 als überdeckt mit unendlich vielen Reihen von 27 Punkten als Grundpunkten von F_3-Netzen.

Es empfiehlt sich, die entsprechende algebraische Entwickelung an die Seite zu stellen.

Der Vollständigkeit halber werde mit dem einfachsten Falle der F_2 begonnen.

Sei die Koordinatenecke A_m das Zentrum des g-Netzes N_1, während das F_1-Netz N_1' aus irgend drei partikulären, linear-unabhängigen F_1: $y_i = 0$, $y_k = 0$, $y_l = 0$ aufgebaut sei. Die Gleichung von N_1' lautet dann in drei homogenen Parametern v

$$(1) \qquad N_1' \equiv v_i y_i + v_k y_k + v_l y_l \equiv (vy) = 0.$$

Irgendein Individuum g des Netzes N_1 werde festgelegt durch die homogenen Koordinaten x_i, x_k, x_l seiner Spur in der Ebene $\mathsf{E}(x_m = 0)$ als seine Parameter; ein laufender Punkt P auf g bestimmt sich durch Angabe des Wertes der nichthomogenen Koordinate x_m nach dem Schema

$$(2) \qquad N(x_i, x_k, x_l;\ x_m).$$

Man bestimme zunächst den Schnittpunkt $(x_i, x_k, x_l;\ x_m)$ irgendeiner

F_1 von N_1 mit irgendeiner g in N, so daß die beiden Wertsysteme der (v_i, v_k, v_l) und (x_i, x_k, x_l) als gegeben anzusehen sind. Dann liefert den noch fehlenden Wert von x_m die in x_m lineare Gleichung (1). Nunmehr seien die beiden Netze N und N_1 reziprok aufeinander bezogen, so daß die v_i, v_k, v_l beliebig, aber fest gegebene Linearformen l in den x_i, x_k, x_l seien:

$$\varrho v_r = l_r(x_i, x_k, x_l) \qquad (r = i, k, l). \tag{3}$$

Setzt man diese Werte der v in (1) ein, so ergibt sich unmittelbar als die Gleichung der gesuchten F_2

$$F_2 \equiv (xy) \equiv (ly) = 0. \tag{4}$$

Die Substitutionen (3) lassen sich bei geeignetem Koordinatensystem so normieren, daß man einfach setzen kann

$$\varrho v_r = x_r \qquad (r = i, k, l), \tag{3'}$$

womit (4) übergeht in

$$F_2 \equiv (xy) = 0. \tag{4'}$$

Umgekehrt ist ersichtlich, daß man die Gleichung einer vorgelegten, durch A_m gehenden F_2, und noch in mannigfaltiger Art, nach x_i, x_k, x_l so anordnen kann, daß sie die Gestalt (4′) annimmt.

Die obige Entwickelung läßt sich formal vereinfachen, indem sich die drei Gleichungen (3) in eine einzige zusammenziehen lassen. Man deute zu dem Behuf die v in (1) als Linienkoordinaten in einer Hilfsebene H. Dann drücken die Beziehungen (3) aus, daß zwischen den beiden Ebenen E und H eine Korrelation Γ besteht; jedem Punkte (x_i, x_k, x_l) in E ist linear eine Gerade (v_i, v_k, v_l) in H zugeordnet, und vice versa. Führt man daher auch in E Linienkoordinaten (u_i, u_k, u_l) ein, so läßt sich das System (3) ersetzen durch die eine in den u und v bilineare Korrelationsgleichung

$$\Gamma \equiv \sum a_{rs} u_r v_s \equiv [u, v] \equiv [u, x] = 0. \tag{5}$$

Ordnet man hier nach den u, so lassen sich die x_r linear in den v_s ausdrücken:

$$\sigma x_r = a_{ri} v_i + a_{rk} v_k + a_{rl} v_l. \tag{6}$$

Die Umkehrung nach dem v liefert Beziehungen von der Gestalt

$$\varrho v_r = \alpha_{ir} x_i + \alpha_{kr} x_k + \alpha_{lr} x_l \equiv l_r(x_i x_k x_l), \tag{7}$$

das sind aber wieder die Ausgangsgleichungen (3). Aus der Korrelation Γ (5) geht aber rückwärts wieder die Reziprozität (3) hervor.

Dies Verfahren ist ohne weiteres auf die Erzeugung einer F_{n+1} ausdehnbar. Es genüge, den Fall $n = 3$ als Typus zu betrachten. Während das g-Netz N (2) bleibt, ersetze man das F_1-Netz N_1 (1)

durch ein Netz N_3 von F_3

$$(8) \qquad N_3 \equiv v_i z_i + v_k z_k + v_l z_l \equiv (vz) = 0,$$

wo die z vorgegebene quaternäre kubische Formen in x_i, x_k, x_l, x_m bedeuten. Man bestimme vorab die drei Schnittpunkte P_1, P_2, P_3 irgendeiner $g(x_i, x_k, x_l)$ in N_1 mit irgendeiner $F_3(v_i, v_k, v_l)$ in N_3. Die gesuchten x_m-Werte der drei Punkte P sind die Wurzeln der in x_m kubischen Gleichung (8).

Nunmehr seien wieder die beiden Netze N und N_3 reziprok aufeinander bezogen mittels dreier Beziehungen von der Gestalt (3). Die Einsetzung der v in (8) führt unmittelbar zur Gleichung einer F_4

$$(9) \qquad F_4 = (vz) \equiv (lz) = 0$$

als Ort der Schnittpunkte irgendeiner g in N mit der ihr vermöge (3) reziproken F_3 in N_3.

Wie oben kann man sich der kanonischen Darstellung (3) $\varrho v_r = x_r$ bedienen, womit (4) die Normalgestalt annimmt

$$(9') \qquad F_4 \equiv (xz) = 0.$$

Liegt umgekehrt eine durch A_m gehende F_4 vor, so läßt sich ihre Gleichung in noch mannigfaltiger Art nach x_i, x_k, x_l so anordnen, daß sie in der Normalgestalt (9′) erscheint.

Auch die Zusammenziehung der drei Beziehungen (3) in eine einzige Korrelation Γ (5) vollzieht sich ganz wie oben im Falle $n = 1$.

Damit hat man die algebraische Bestätigung des *Reye*schen Satzes: „Eine vorgelegte, durch A_m gehende, im übrigen beliebige F_4 läßt sich, auf noch mannigfaltige Weise, erzeugen als Ort der Schnittpunkte eines g-Netzes N mit einem zu ihm reziproken F_3-Netze N_3." Dann erscheint die Gleichung der F_4 in der Normalgestalt $(xz) = 0$. Dabei läßt sich die Reziprozität durch eine Korrelation Γ ersetzen. Analoges gilt für eine F_{n+1}.

Dem oben entwickelten Grundgedanken hat *G. v. Escherich*[3]) die weiteste Ausdehnung gegeben, die die früheren Untersuchungen über Projektivität und Korrelation, Reziprozität und Apolarität als Sonderfälle umfaßt[4]), unter möglichster Vereinfachung des Rechenapparates.

---

3) *G. v. Escherich*, Wien Ber. 75 (1877), p. 523; ib. 85 (1882), p. 526, 893; ib. 87 (1884), p. 1036. In den ersten drei Abhandlungen wird die allgemeine Theorie entwickelt mit Anwendungen auf $F_4, F_5, \ldots$; die letzte bringt die Konstruktionen.

4) Man vgl. etwa: *Th. Reye*, Math. Ann. 1 (1869), p. 455; 2 (1870), p. 475; *H. Valentiner*, Tiddskr. f. Mat. (4) 3 (1879), p. 223; *F. Schur*, Math. Ann. 18 (1881), p. 1; *W. Fiedler*, Zürich Viertelj. 24 (1882), p. 186; *E. de Jonquières*, Paris C. R. 105 (1887), p. 1203; 106 (1887), p. 526, 907; 107 (1888), p. 209; *P. W. White*, Cambr. Phil. Soc. Proc. 21 (1920), p. 116 (mit Ausdehnungen auf den S_n).

Seien in irgendeinem Raume S_r zwei lineare „Flächensysteme" gegeben von den Ordnungen p, q und den Parameterreihen λ_r, μ_s ($r = 0, 1, \ldots, i$; $s = 0, 1, \ldots, k$) vermöge der Gleichungen

$$(10_\lambda) \qquad \sum \lambda_r F_r^{(p)} = 0, \qquad \sum \mu_s G_s^{(q)} = 0. \qquad (10_\mu)$$

Diese werden als „reziprok" definiert, wenn die Parameter λ_r, μ_s an eine feste bilineare Relation

$$(11) \qquad \Gamma \equiv [\lambda^{(1)}, \mu^1] = 0$$

gebunden sind.

Ist dann irgendein partikuläres Wertsystem (μ') der μ vorgegeben, so genügen vermöge (10_λ) die λ einer linearen Bedingung. Die lineare ∞^i-Schar (10_λ) reduziert sich damit auf eine ∞^{i-1}-fache, die man aus i linear unabhängigen Individuen F zusammensetzen mag, von denen nur vorausgesetzt wird, daß sie, wenn auch erst evtl. nach Erfülltsein gewisser Bedingungen, ein gewisses Gebilde $C(\mu')$ gemein haben, dessen Dimension jenachdem gleich Null, Eins usf. sein kann. Bei variierenden Reihen (μ') erzeugt $C(\mu')$ so eine Fläche F_n der Ordnung $n = p + q$.

Man erkennt, wie die Beziehung (11) die Verallgemeinerung der früheren Korrelation Γ (8) ist. Ohne hier auf die allgemeinen Untersuchungen des Verfassers über die Möglichkeit einer reziproken Erzeugung einer vorgelegten F_n einzugehen, begnügen wir uns mit dem Falle der F_4 im S_3. Man gelangt dann zu einer zweiten reziproken Erzeugung, wenn man in obigem den Indizes p, q, i, k die speziellen Werte Zwei beilegt. Einem partikulären Wertsysteme (μ') der μ entspricht dann ein F_2-Büschel $B^{(\lambda)}$ mit einer Basiskurve $C_4^{(\lambda)}$. Variiert das System (μ'), so trifft jede G_2 der zweiten Schar die reziproke $C_4^{(\lambda)}$ der ersten Schar in einer Reihe von acht assoziierten Punkten, deren Ort eine F_4 ist, deren Gleichung die „Netzgestalt" annimmt

$$(12) \qquad F_4 = G_2^{(0)} H_2^{(0)} + G_2^{(1)} H_2^{(1)} + G_2^{(2)} H_2^{(2)} = (GH) = 0.$$

Umgekehrt beweist *v. Escherich*, daß sich eine vorgelegte F_4 auf diese Weise, und zwar in noch mannigfaltiger Art, erzeugen läßt. Es existieren unendlich viele Kurven C_4, die die F_4 in Reihen R_{16} von 16 Punkten derart treffen, daß sich die R_{16} je in zwei assoziierte Teilreihen R_8 und R_8' zerlegen lassen, wo durch jede eine die C_4 nicht enthaltende F_2 hindurchgeht.

Es ist nützlich, die Figur auch von transzendentem Standpunkt aus zu betrachten.

Man denke sich auf der C_4 einen elliptischen Normalparameter u ausgebreitet. Sind dann u_i ($i = 1, \ldots 16$) die Argumente der 16 Schnittpunkte (C_4, F_4), so gilt nicht nur

$$\sum_{i=1}^{16} u_i = 0, \tag{13}$$

sondern die u lassen sich auch in zwei Reihen $u_r (r=1, \dots 8)$, $u_s (s=9, \dots 16)$ so zerlegen, daß man zugleich hat

$$\sum_{r=1}^{8} u_r = 0, \qquad \sum_{s=9}^{16} u_s = 0, \tag{14}$$

die wieder rückwärts (13) nach sich ziehen.

Faßt man zusammen, so erhält man den Satz von *v. Escherich*:

„Eine F_4 läßt sich noch auf eine zweite Art und noch auf mannigfaltige Weise erzeugen durch zwei reziproke F_2-Netze; die Gleichung der F_4 erscheint dann in der Netzgestalt (12) und die F_4 als überdeckt mit unendlich vielen Reihen von assoziierten Punktoktupeln."

Auf Grund dieser beiden reziproken Erzeugungen einer F_4 ist es *v. Escherich* weiterhin gelungen, nach Analogie der F_3 (s. „F_3", Nr. **20**) eine F_4, die durch 34 vorgegebene Punkte gehen soll, punktweise mit Zirkel und Lineal zu konstruieren.

Wie freilich zu erwarten, gestaltet sich die wirkliche Ausführung äußerst umständlich, so daß der erkenntnistheoretische Wert des Verfahrens mehr auf der *Möglichkeit* der Konstruktion beruht, als auf deren Realisierung im einzelnen.

3. Rationale und andere Kurven, nebst ihren Invarianten, auf besonderen F_4. Die F_2 und F_3 zeichnen sich dadurch aus, daß auf ihnen Scharen rationaler Kurven R_n einer jeden Ordnung n liegen. Eine Ausnahme bildet nur der Fall $n = 1$ bei den F_3, insofern es nur eine endliche Anzahl (= 27) von Geraden gab (s. Art. „F_3", Nr. **2**). Ähnliches gilt auch für Kurven C vom Geschlechte $1, 2, \dots$.

Auf diesem Umstande beruht es vornehmlich, daß die allgemeinen F_2 und F_3 eine so umfangreiche Reihe einfacher, schöner und durchsichtiger geometrischer Eigenschaften aufweisen.

Diese Erscheinung hört nun bei allgemeinen F_n $(n \geqq 4)$ auf, woraus umgekehrt wieder folgt, daß die Ableitung spezifischer Eigenschaften solcher F_n ungemein erschwert wird.

Allgemein hat die Natur der auf einer F_4 gelegenen Kurven *K. Rohn*[4a]) untersucht.

Man beachte vorab, daß für eine F_n $(n > 3)$ die Anzahl der verschiedenen C-Familien mit steigender Ordnung n rasch wächst. Deren

4a) *K. Rohn*, Leipzig Ber. 49 (1897), p. 631. Vgl. auch die voraufgehende Abhandlung von *Rohn* über die C auf F_3, ib. 46 (1894), p. 84; Art. „F_3", Nr. **15**.

Untersuchung wird aber dadurch erleichtert, daß die zugehörigen Restkurven $C^{(r)}$ niedrigster Ordnung zumeist zerfallen.

Die F_4 zeichnen sich dadurch aus, daß, wenn Ordnung und Geschlecht einer C auf F_4 vorgegeben sind, von solchen nur eine einzige Familie mit irreduziblen $C^{(r)}$ existiert, daneben aber auch noch Familien mit reduziblen $C^{(r)}$ möglich sind.

Die Teile letzterer $C^{(r)}$ sind entweder alle rational, oder es ist ein irrationaler Teil darunter, oder auch es existieren mehrere äquivalente elliptische Teile.

Dabei übersteigt die Anzahl dieser Teile stets die Anzahl der wirklichen D_2 der reduzibeln $C^{(r)}$.

Enthält die $C^{(r)}$ mehrere äquivalente elliptische Teile, oder auch mehrere sich je nicht treffende rationale, und liegt die $C^{(r)}$ mit der Ur-C auf einer Fläche F_λ der Ordnung λ, so schneidet die Gesamtheit der F_λ aus der F_4 nur eine Teilschar aus.

Weiter wird der Zusammenhang zwischen den $C^{(r)}$ verschiedener Ordnung verfolgt. Sodann werden die Konstantenanzahlen der C bestimmt; hierbei werden auch C mit mehrfach zählenden Teilen berücksichtigt.

Danach werden die C-Familien auf F_4 in vier Kategorien eingeteilt, für die Tabellen aufgestellt werden.

Beachtenswert ist eine Tabelle, die alle C bis zur Ordnung 24 umfaßt.

Im folgenden beschränken wir uns auf einige spezielle Arten von C auf besonderen F_4.

Wir betrachten zunächst das Auftreten rationaler Kurven R_n. Eine einfache Abzählung[5]) lehrt, daß bereits auf einer allgemeinen — von 34 Konstanten abhängigen — F_4 keine R_n ($n = 1, 2, \ldots$) liegen kann. Man denke sich auf einer R_n einen Parameter λ ausgebreitet, so daß die Koordinaten eines laufenden Punktes der R_n rationale ganze Funktionen von λ werden; einem Werte von λ entspricht nur *ein* Punkt der R_n und umgekehrt. Die $4n$ Punkte, in denen eine R_n eine F_4 trifft, hängen daher von einer Gleichung $f_{4n}(\lambda) = 0$ der Ordnung $4n$ ab, mit voneinander unabhängigen Koeffizienten. Die Forderung, daß die R_n ganz der F_4 angehöre, ist somit gleichwertig mit dem identischen Verschwinden jener Gleichung. Dies involviert $4n + 1$ unabhängige Bedingungen, während doch eine allgemeine R_n nur von $4n$ Konstanten abhängt. Es muß also eine gewisse Invariante J_n der F_4 verschwinden und umgekehrt, so daß der Satz gilt:

5) Vgl. auch die Ansätze bei *O. Tognoli*, Giorn. di mat. 11 (1873), p. 180.

„Damit eine R_n auf einer F_4 liege, ist das Verschwinden einer gewissen Invariante J_n der F_4 notwendig und hinreichend."

Das Bildungsgesetz dieser J_n ist bisher nicht ermittelt worden; noch weniger weiß man, ob diese J_n etwa ein vollständiges resp. relativ vollständiges oder ein Fundamentalsystem bilden, und wie sich andere Invarianten der F_4 durch jene ausdrücken. Für den Fall $n=2$, wie vorab bemerkt sei, ist ersichtlich, daß die Existenz einer $R_2 = C_2$ auf einer F_4 stets die einer zweiten nach sich zieht, nämlich der Restkurve der Ebene $\mathsf{E}(C_2)$ (s. auch Nr. **6**). Dies tritt auch in der Gleichung einer F_4 mit einer C_2 hervor, die von der Form sein muß

$$(1_2) \qquad F_4 \equiv F_2 G_2 - F_1 F_3 = 0.$$

Allgemein lege man durch eine auf der F_4 gelegen gedachte R_n eine F niedrigster Ordnung q, so zieht die Existenz der R_n zugleich die einer Restkurve C_{4q-n} nach sich, so daß auch für das Auftreten einer solchen das Verschwinden der Invariante J_n charakteristisch ist (s. Art. III C 9, *Rohn-Berzolari*, Algebraische Raumkurven und abwickelbare Flächen).

Es ist nützlich, die Natur dieser Restkurven für die niedrigsten Werte von $n = 1, 2, \ldots 6$ direkt zu untersuchen.

In den Fällen $n = 1$ bis 4 geht mindestens eine F_2 durch die R_n und in den beiden weiteren Fällen $n = 5, 6$ mindestens eine F_3. Man wird daher umgekehrt von einer F_2 resp. F_3 ausgehen und durch eine auf ihr gelegen gedachte R_n eine im übrigen beliebige F_4 legen und sodann die Restkurve mittels der Abbildung der F_2 resp. F_3 auf eine Ebene bestimmen (s. Art. „F_3", Nr. **11**).

Der Fall $n = 1$.

Die Gleichung der F_4 hat die Gestalt

$$(1_1) \qquad F_1 F_3 - F_1' F_3' = 0;$$

die F_4 ist also erzeugbar durch ein Ebenenbüschel und ein ihm projektiv zugeordnetes F_3-Büschel, und umgekehrt.

Man greife auf einer F_2 eine erzeugende Gerade g heraus und lege durch sie eine F_4; die Restkurve ist eine C_7.

Bei der (stereographischen) Abbildung der F_2 auf eine Ebene H mit zwei Fundamentalpunkten A_1, A_2 (s. „F_3", Nr. **16**, Note 67) ist das Bild des Schnittes C_8 der F_2 mit einer beliebigen F_4 eine c_8 mit d_4 in A_1 und A_2, und das Bild einer g auf F_2 eine Gerade c_1 durch einen der beiden Fundamentalpunkte, etwa A_1. Somit ist das Bild der Restkurve C_7 eine c_7 mit d_3 in A_1 und d_4 in A_2. Eine solche c_7 hat aber das Geschlecht $p = 15 - 3 - 6 = 6$.

Mithin ist auch die fragliche C_7 eine $C_7^{(6)}$ vom Geschlecht 6, und es gilt:

„Das Verschwinden der Invariante J_1 einer F_4 ist zugleich charakteristisch für die Existenz einer (und damit unendlich vieler) $C_7^{(6)}$ auf der F_4."

Der Fall $n = 1$ ist auch dadurch ausgezeichnet, daß man durch g ein Büschel von Ebenen legen kann, die aus der F_4 noch eine c_3 ausschneiden. Also ist das Verschwinden von J_1 auch charakteristisch für die Existenz einer und damit unendlich vieler c_3 auf der F_4.

Die Invariante J_1 läßt sich in normierter Gestalt leicht bilden. Eine (nicht nullteilige) F_4 läßt sich stets darstellen durch eine Gleichung von der Form $c_1 F_3 + c_1' F_3' + c_3'' F_3'' = 0$, wo die c ternäre Linearformen in x_i, x_k, x_l sind. Denn diese Gleichung besagt lediglich, daß die Fläche F_4 die Koordinatenecke A_m enthält. Dann aber wird J_1 einfach die Determinante der c. Denn deren Verschwinden ist notwendig und hinreichend dafür, daß die drei Formen c linear abhängig werden; damit reduziert sich aber die Gleichung der F_4 auf die Gestalt (1_1).

Der Fall $n = 2$ (s. die obige Gleichung (1_2)).

Das Bild einer C_2 auf einer F_2 ist eine c_2 durch A_1 und A_2. Legt man durch die C_2 eine F_4, so ergibt sich als Restkurve eine C_6. Das Bild derselben ist eine c_6 mit d_3 in A_1 und A_2, also eine $c_6^{(4)}$ vom Geschlecht $p = 10 - 2 \cdot 3 = 4$. Eine solche c_6 ist rational transformierbar in eine c_6 mit $6 d_2$. Hiervon kann man sich auch direkt überzeugen. Durch die C_6 läßt sich auch eine F_3 legen. Geht man wieder umgekehrt von einer allgemeinen F_3 und deren Abbildung aus, so ist in der Tat das Bild des Schnittes der F_3 mit einer beliebigen F_2 eine c_6 mit d_2 in den sechs Fundamentalpunkten A_i $(i = 1, \dots 6)$ (s. Art. „F_3", Nr. **11**). Projiziert man eine allgemeine $C_6^{(4)}$ von einem beliebigen Raumpunkt aus, so ergibt sich als Projektion eben eine c_6 mit $6 d_2$; durch die $C_6^{(4)}$ geht eine einzige F_2, die Fläche ihrer Trisekanten. Liegt im besonderen das Projektionszentrum auf dieser F_2, so wird die Projektion eine obige c_6 mit zwei d_3. Man hat also:

„Das Verschwinden der Invariante J_2 einer F_4 ist zugleich charakteristisch für die Existenz einer (und damit unendlich vieler) $C_6^{(4)}$ auf der F_4."

Dies steht in Übereinstimmung mit der Gleichung (1_2).

Anders verhält es sich mit der Frage nach dem etwaigen Auftreten von Kurven $C_6^{(3)}$, vom Geschlecht Drei (s. Art. „F_3", Nr. **1**, **11**) auf einer allgemeinen F_4. Eine solche $C_6^{(3)}$ erscheint am einfachsten als Schnitt von zwei F_3, die noch eine (irreduzible) C_3 gemein haben.

Wählt man bei der Abbildung einer der beiden F_3 als Bild der C_3 eine r_6, mit d_2 in den sechs Punkten A, so wird das Bild der $C_6^{(3)}$ eine allgemeine Normalkurve c_4 (mit $p = 3$) durch die A. Algebraisch läßt sich eine $C_6^{(3)}$ darstellen durch das simultane Verschwinden der Determinanten einer Matrix von der Gestalt $|A_i, B_i, C_i, D_i|$ $(i = 1, 2, 3)$ mit quaternären Linearformen als Elementen. Somit ist eine F_4 durch eine $C_6^{(3)}$ darstellbar durch eine vierreihige Determinante mit beliebigen quaternären Linearformen als Elementen

$$(1_2') \qquad F_4 = | ABCD | = 0.$$

Geometrisch sagt diese Darstellung aus, daß eine solche F_4 erzeugbar ist durch quadrilineare Zuordnung von vier Ebenengebüschen.

Von diesem Gesichtspunkt aus hat eine solche F_4 mit einer $C_6^{(3)}$ zuerst *F. Schur*[6]) synthetisch untersucht und festgestellt, daß sie, wenn auch nur von 33 Konstanten abhängig, im übrigen mit den allgemeinen F_4 die wesentlichsten Eigenschaften gemein hat. Damit ergibt sich zugleich, daß auch für die Existenz einer $C_6^{(3)}$ auf einer F_4 das Verschwinden einer gewissen Invariante, die mit J_2' bezeichnet sei, charakteristisch ist. Dann aber existieren auch unendlich viele $C_6^{(3)}$ auf der F_4, da, wie die Abbildung der F_3 zeigt, jede weitere F_4 durch die $C_6^{(3)}$ die vorgelegte F_4 noch in einer solchen $C_6^{(3)}$ als Restkurve schneidet.

Der Fall $n = 3$.

Sei jetzt $J_3 = 0$; die F_4 besitze eine (irreduzible, gewundene) C_3. Man lege wiederum durch die C_3 irgendeine F_2, so ergibt sich eine Restkurve C_5. Um deren Natur zu erkennen, gehe man wieder umgekehrt von einer gegebenen F_2 aus und lege durch eine auf ihr befindliche C_3 eine im übrigen beliebige F_4. In der Bildebene H ist das Bild der C_3 entweder eine c_2 durch einen der beiden Punkte A, etwa A_1, oder aber eine r_3 mit d_2, etwa in A_1 und d_1 in A_2.

Diese Bildkurve ist zu einer c_8 mit d_4 in A_1 und A_2 zu vervollständigen.

Die Ergänzungskurve ist also im ersten Falle — nach Absonderung der Geraden (A_1, A_2) — eine c_5 mit d_2 in A_1, d_3 in A_2, also eine $c_5^{(2)}$ vom Geschlecht 2, wie sich im zweiten Falle direkt ergibt.

Die Raumkurve C_5 ist also ebenfalls vom Geschlecht 2, eine $C_5^{(2)}$; eine solche wird von einem beliebigen Punkte aus in eine $c_5^{(2)}$ mit $4d_2$ projiziert, und die durch sie gehende F_2 ist die Fläche der Trisekanten.

Zu einer solchen $c_5^{(2)}$ mit $4d_2$ gelangt man wieder direkt durch den Schnitt der F_2 mit einer allgemeinen F_3, die mit F_2 eine Gerade

6) *F. Schur*, Math. Ann. 18 (1881), p. 1.

g gemein hat (s. Art. „F_3“, Nr. **11**). Das Bild von g in H ist eine c_1, etwa durch A_1, und die Restkurve wiederum eine $c_5^{(2)}$ mit d_2 in A_1, d_3 in A_2. Bedient man sich andererseits der *Clebsch*schen Abbildung der F_3 und sei das Bild von g etwa eine Gerade $c_{ik} = (A_i, A_k)$, so wird das Bild der Restkurve $C_5^{(2)}$ in der Tat eine $c_5^{(2)}$ mit $4 d_2$, in $A_l, \ldots, A_p$ (und d_1 in A_i, A_k). Es ergibt sich somit:

„Das Verschwinden der Invariante J_3 einer F_4 ist zugleich charakteristisch für die Existenz einer (und damit unendlich vieler) $C_5^{(2)}$ auf der F_4.“

Hier lassen sich weitere Folgerungen anknüpfen.

Algebraisch ist eine C_3 darstellbar durch das simultane Verschwinden der drei Determinanten einer Matrix $|A_i, B_i, C_i|$ $(i = 1, 2)$. Somit ist eine F_4 mit C_3 darstellbar als dreireihige Determinante von der Gestalt

$$(1_3) \qquad \begin{vmatrix} F_2, & G_2, & H_2 \\ A_1, & B_1, & C_1 \\ A_1', & B_1', & C_1' \end{vmatrix} = 0,$$

wo F_2, G_2, H_2 quadratische Formen sind. Zu einer weiteren geometrischen Eigenschaft einer solchen F_4 mit C_3 gelangt man, wenn man von irgendeinem (variierenden) Punkte P der F_4 an die C_3 die einzige Sekante s legt, die die F_4 in einem Restpunkte Q treffe. „Dadurch ist auf der F_4 eine (1, 1)-deutige involutorische Punktverwandtschaft (P, Q) hergestellt.“

Hierauf gestützt, kann man eine F_4 mit C_3 explizite irrational in der Weise darstellen, daß die Koordinaten eines Punktes P der F_4 als ganze Formen in drei Parametern α, β, τ erscheinen, wo τ eine quadratische Irrationalität der α, β ist.

Um eine solche Gestalt in einfachster Darstellung zu gewinnen, wähle man die C_3 als Normkurve $N_3 = \mathsf{N}_3$ (s. Art. „F_3“, Nr. **12**, **19**). Bezeichnet man daher jetzt die Koordinaten eines Punktes mit x_3, x_2, x_1, x_0, so wird die implizite Normaldarstellung einer F_4 mit N_3

$$(1_3') \qquad F_4 = \begin{vmatrix} F_2, & G_2, & H_2 \\ 3x_0, & x_1, & x_2 \\ x_1, & x_2, & 3x_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Auf der N_3 sei ein Parameter λ ausgebreitet: Eine Sekante, die zwei Kurvenpunkte (α), (β) verbindet, sei mit $s(\alpha, \beta)$ bezeichnet; man schneide die F_4 mit einer solchen. Die Koordinaten eines laufenden Punktes von s sind

$$(2) \quad x_3 : x_2 : x_1 : x_0 = \alpha^3 + \tau\beta^3 : 3(\alpha^2 + \tau\beta^2) : 3(\alpha + \tau\beta) : 1 + \tau.$$

Zunächst ergibt eine leichte Rechnung, daß man, nach Einsetzung von (2) in die Teildeterminanten $3x_0x_2 - x_1^2$, $9x_0x_3 - x_1x_2$, $3x_1x_3 - x_2^2$, abgesehen von dem gemeinsamen Faktor $2(\alpha - \beta)^2$, die Werte 1 $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ erhält. Andererseits hat man (2) in die quadratischen Formen F_2, G_2, H_2 einzutragen. Es genügt die Betrachtung einer der Formen, etwa von $F_2 = F$. Schreibt man symbolisch $F = (ax)^2$, so geht der symbolische Faktor (ax) vermöge (2) über in die kubische binäre Form $(ax)^3 + \tau(\alpha\beta)^3$, wo eine Verwechslung der binären Symbole a mit den quaternären nicht zu befürchten ist. Die Quadrierung von (ax) liefert

$$(a\alpha)^6 + 2\tau(a\alpha)^3(a\beta)^3 + \tau^2(a\beta)^6.$$

Die Bedeutung der drei hier auftretenden Formen liegt auf der Hand. Die Fläche $F_2 = F$ trifft die N_3 in sechs Punkten, deren λ-Argumente die Wurzeln der binären Form $f_6 = (a\lambda)^6$ sind. Durch Einsetzung von $\lambda = \alpha$ und $\lambda = \beta$ ergeben sich $(a\alpha)^6$ und $(a\beta)^6$, während $(a\alpha)^3(a\beta)^3$ diejenige Polarform ist, deren Verschwinden aussagt, daß das Punktepaar (α, β) harmonisch liegt zum Paar der Schnittpunkte von s mit F. Bezeichnet man analog G_2 mit $(bx)^2$, H_2 mit $(cx)^2$, so gelangt man zur Bestimmung der beiden Restschnittpunkte P, Q von s mit der F_4 zu der in τ quadratischen Gleichung

$$(3)\quad \begin{aligned}\varphi(\tau) \equiv &\{\alpha\beta(a\alpha)^6 + (\alpha + \beta)(b\alpha)^6 + (c\alpha)^6\}\\ &+ 2\tau\{\alpha\beta(a\alpha)^3(a\beta)^3 + (\alpha + \beta)(b\alpha)^3(b\beta)^3 + (c\alpha)^3(c\beta)^3\}\\ &+ \tau^2\{\alpha\beta(a\beta)^6 + (\alpha + \beta)(b\beta)^6 + (c\beta)^6\} = 0,\end{aligned}$$

die sich auch leicht in realer Gestalt schreiben ließe.

Damit ist in der Tat durch Kombinierung von (2) mit der Bedingung (3) die gesuchte Darstellung der F_4 $(1_3')$ erreicht. Von dieser algebraischen irrationalen Darstellung der F_4 kann man zu einer korrespondierenden transzendenten durch hyperelliptische Funktionen von zwei Variabeln übergehen (s. Nr. **26**, **71**).

Der Fall $n = 4$.

Durch eine allgemeine R_4 geht eine einzige F_2. Umgekehrt gehe man wieder von einer F_2 aus und einer auf ihr befindlichen R_4; durch letztere lege man eine im übrigen beliebige F_4.

Das Bild der R_4 in der Ebene H ist eine r_3 mit d_2 in einem der beiden Punkte A, etwa A_1, oder auch eine r_4 mit d_1 in A_1, und d_3 in A_2. Im ersteren Falle ist die Ergänzung der r_3 zu einer c_8 mit d_4 in A_1 und A_2, nach Absonderung der Geraden (A_1, A_2), eine r_4 mit d_1 in A_1 und d_3 in A_2. Im letzteren Falle gelangt man von einer solchen r_4 zur obigen r_3 zurück.

Somit ergibt sich:

„Denkt man sich die Bedingung $J_4 = 0$ erfüllt, so zieht die Existenz einer R_4 auf der F_4 die einer zweiten solchen R_4 nach sich; beide zusammen bilden den vollen Schnitt der F_4 mit einer F_2. Über den Fall einer elliptischen C_4 s. u.

Der Fall $n = 5$.

Durch eine allgemeine R_5 geht als Fläche niedrigster Ordnung eine F_3. Man lege also eine F_3 und irgendeine auf ihr befindliche R_5 zugrunde. Das Bild einer solchen R_5 ist eine r_3 mit d_2 in A_i, d_1 in A_k und A_l, oder auch eine r_4 mit d_2 in A_i, A_k, A_l, und d_1 in A_m, oder endlich eine r_5 mit d_3 in A_i, d_3 in A_k, A_l, A_m, und d_1 in A_n. Andererseits ist das Bild der Schnittkurve C_{12} der F_3 mit einer beliebigen F_4 eine c_{12} mit d_2 in allen sechs A.

In ersterem Falle ist die Ergänzungskurve zur r_3 eine c_9 mit d_2 in A_i, d_3 in A_k, A_l, d_4 in A_m, A_n, A_p. Eine solche c_9 hat das Geschlecht $p = 28 - 1 - 2 \cdot 3 - 3 \cdot 6 = 3$. Somit ist auch auf der F_4 die Ergänzungskurve der R_5 eine $C_7^{(3)}$ vom Geschlecht 3.

Dies bestätigt sich in den beiden andern Fällen, was nicht weiter ausgeführt werde.

Damit hat man:

„Ist die Bedingung $J_5 = 0$ erfüllt, so zieht die Existenz einer R_5 auf der F_4 die Existenz einer (und damit unendlich vieler) $C_7^{(3)}$ nach sich, und umgekehrt. Zwei solche Kurven R_5 und $C_7^{(3)}$ bilden den vollen Schnitt der F_4 mit einer F_3.

Der Fall $n = 6$.

Durch eine allgemeine R_6 geht eine einzige F_3. Sei also umgekehrt vorgelegt eine F_3 nebst irgendeiner R_6 auf ihr, durch die man eine im übrigen beliebige F_4 lege.

Das Bild der R_6 ist eine r_3 mit d_2 in A_i, d_1 in A_k, oder eine r_4 mit d_2 in A_i, A_k, A_l, oder eine r_5 mit d_3 in A_i, d_2 in A_k, A_l, A_m, usf., bis zu einer r_9 mit d_2 in A_i, d_3 in A_k, d_4 in A_l, A_m, A_n, A_p. In der Tat ist auch letztere Kurve rational, denn sie besitzt das Geschlecht $p = 28 - 1 - 3 - 4 \cdot 6 = 0$.

Wählt man etwa den ersten Typus der r_3, so ist die Ergänzungskurve zu einer c_{12} mit d_4 in allen sechs A eben eine r_9 von der oben angegebenen Art.

Mithin ist die Ergänzungskurve zur R_6 im Schnitte (F_3, F_4) wiederum eine solche R_6, und umgekehrt.

Man hat daher:

„Für $J_6 = 0$ zieht die Existenz einer R_6 auf der F_4 die Existenz einer zweiten solchen R_6 nach sich. Beide Kurven bilden zusammen den vollen Schnitt der F_4 mit einer F_3."

Elliptische C_n auf der F_4.

Auch hier beschränken wir uns auf die einfachsten Fälle.

Der niedrigste, aber wichtigste Fall ist $n = 4$.

Durch eine C_4 geht noch ein Büschel von F_2: Die Existenz einer C_4 auf einer F_4 zieht daher die Existenz von unendlich vielen weiteren solchen nach sich. Dies geht auch unmittelbar aus der Gleichung der F_4 hervor, die von der Gestalt sein muß

$$(1_4') \qquad F_4 \equiv F_2 G_2' - F_2' G_2 = 0.$$

Diese ist übrigens gleichwertig mit der andern

$$(1_4'') \qquad F_4 \equiv \sum_{i=1}^{4} a_i F_2^{(i)2} = 0.$$

Denn spaltet man die linke Seite von $(1_4'')$ in zwei Aggregate von je zwei Quadraten und zerlegt jedes der beiden Aggregate in das Produkt von zwei F_2-Faktoren, so gelangt man zu der Darstellung $(1_4'')$ zurück, und entsprechend vice versa.

Die Darstellung $(1_4')$ sagt geometrisch aus, daß die F_4 erzeugbar ist durch projektive Zuordnung von zwei F_2-Büscheln.[7])

Noch *G. Salmon* (s. „*Salmon-Fiedler*", 3. Aufl. [1882] Nr. 340) nahm an, daß eine allgemeine F_4 der Darstellungen $(1_4', 1_4'')$ fähig sei.

Indessen wies *G. Valentiner*[8]), indem er zugleich die Fragestellung zugleich erheblich verallgemeinerte, nach, daß jene Annahme unzutreffend sei.

Schon *Th. Reye* (s. Nr. 2) hatte betont, daß eine F_{p+q} nur dann durch zwei projektiv zugeordnete Büschel von F_p und F_q erzeugbar sein kann, wenn sie unendlich viele Schnittkurven $C_{pq} = (F_p, F_q)$ enthält. Indessen hat *Reye* nicht weiter untersucht, ob und wann die obige Bedingung für eine F_{p+q} erfüllt ist.

Valentiner geht so vor. Sei etwa $p \geqq q$. Man setze zur Abkürzung

$$a_n = \binom{n+1}{3} - 1, \quad A_{pq} = a_p - a_{p-q} - 1.$$

Dann ergibt sich zunächst A_{pq} als die Anzahl der Punkte einer F_q, die eine $C_{pq} = (F_q, F_p)$ auf ihr bestimmen.

---

7) Diese Erzeugung ist verschiedentlich weiter verfolgt worden, vgl. u. a. *Th. Reye*, Math. Ann. 1 (1869), p. 455; *H. Durrande*, Nouv. Ann. (2) 9 (1870), p. 440; *L. Cremona*, „In Memoriam *D. Chelini*", 1881, p. 413; *E. de Jonquières*, Paris C. R. 107 (1888), p. 209.

8) *G. Valentiner*, Tiddskr. f. Mat. (4) 3 (1879), p. 22; Dissert. Kjöbenhavn 1881.

Weiter setze man

$$\begin{cases} A_{npq} = a_n - a_{n-p} - a_{n-q} - 1 & (\text{für } n < p + q), \\ a_{npq} = a_n - a_{n-p} - a_{n-q} + a_{n-p-q} & (\text{für } n \geqq p + q). \end{cases}$$

Dann werden die Bedingungen aufgestellt, daß eine F_n eine C_{pq} enthält, sowie daß eine F_n durch A_{npq} resp. a_{npq} Punkte einer C_{pq} geht.

Daß diese Bedingungen notwendig und hinreichend sind, läßt sich an der Hand einer speziellen C_{pq} nachweisen, die, zusammen mit einer C_{qn-p}, den vollen Schnitt mit einer gewissen F_q' bildet. Wählt man dann insbesondere die F_q' als ein q-tupel von Ebenen, so läßt sich der obige Satz durch vollständige Induktion erhärten. Alsdann folgt aber, daß eine $F_n (n \geqq 4)$ mit einer C_{pq} nicht die allgemeine Fläche ihrer Ordnung sein kann. Endlich wird auch die Anzahl der Konstanten ermittelt, von der eine F_n mit einer C_{pq} abhängt, nämlich

$$a_p + a_q + a_{n-p} + a_{n-q} - a_{p-q} - a_{n-p-q} - 1 \quad (n > p + q,\ p \geqq q).$$

Für $n = 4$, $p = q = 2$ ergibt sich die Anzahl $33 = 34 - 1$. Mithin muß eine gewisse (bisher noch nicht aufgestellte) Invariante J_4' der F_4 verschwinden, damit letztere eine (und damit unendlich viele) C_4 besitzt. Es gilt also der Satz:

„Das Verschwinden einer Invariante J_4' einer F_4 ist charakteristisch für die Existenz einer (und damit unendlich vieler) C_4 auf der F_4, und damit für die Darstellbarkeit $(1_4')$ oder auch $(1_4'')$, oder, was geometrisch auf dasselbe hinauskommt, für die Erzeugbarkeit der F_4 durch zwei projektiv zugeordnete F_2-Büschel."

Im übrigen ist bei der Methode von *Valentiner* zu beachten, daß sie sich auf volle Schnittkurven C_{pq} beschränkt. Der allgemeinere Fall, wo eine C (auf einer F_n) als Partialschnitt von drei resp. vier Flächen erscheint, ist erst durch die allgemeine Restkurventheorie von *M. Noether* und *G. Halphen* erledigt worden.

Das Ergebnis *Valentiners* für die Konstantenzahl hat *A. Cayley*[9]) einfacher direkt abgeleitet. Sind F_r, F_s, F_t, F_u, mit $r + s = t + u$ vorgelegte beliebige quaternäre Formen, so läßt sich die Anzahl der Konstanten in der Form $F_r F_s - F_t F_u$ dadurch ermitteln, daß sie in die ihr kongruente Gestalt gebracht wird

$$(F_r + \alpha F_t)(F_s + \beta F_t) - F_t(F_u + \alpha F_s + \beta F_r + \alpha\beta F_t),$$

wo die α, β gewisse willkürliche Hilfsformen sind.

4. Die Kanonisierung der F_4 und Reyes Dekaeder. Sonderfälle. Die F_3 (s. Art. „F_3", Nr. 3) besaß ein „Pentaeder", d. h. die Form F_3 ließ sich (auf eine einzige Art) als Aggregat von fünf Kuben dar-

9) *A. Cayley,* Tiddskr. f. Mat. (4) 4 (1880), p. 145.

stellen. In Note 12 daselbst war auf einen Beweis hingewiesen, den *Th. Reye*[10]) mittels „höherer Momente" geführt hatte.

Da das mechanische Prinzip des Beweises auch auf F_4 (und F_n) ausdehnbar ist, sei jetzt näher darauf eingegangen.

Schon *O. Hesse*[11]) hatte gezeigt, daß ein starrer Körper K hinsichtlich seiner Momente M auf ∞^6 Arten durch vier Massenpunkte m_i ($i = 1, 2, 3, 4$) ersetzbar ist. Der erste Punkt ist willkürlich wählbar, dann ist seine Masse m_1, und die Ebene E_1 der drei andern Punkte bestimmt. In dieser Ebene E_1 ist ein zweiter Punkt beliebig annehmbar, womit seine Masse m_2 und die Gerade g_{34} der beiden Restpunkte bestimmt ist. Wählt man endlich noch auf dieser Geraden irgendeinen beliebigen Punkt als dritten Massenpunkt, so ist alles festgelegt.

Dabei haben die vier Massen m_i dieselbe Gesamtmasse M und denselben Schwerpunkt S wie der Körper K.

Die rein geometrische Figur der vier Punkte zeigt ganz die Eigenschaften eines Poltetraeders einer F_2. In der Tat existiert nach *Hesse* ein nullteiliges Ellipsoid E mit dem Zentrum S, für das die obigen vier Massenpunkte die Ecken eines Poltetraeders sind. Für alle Tangentialebenen von E und nur für diese verschwinden die Momente M von K.

Hieran knüpft *Reye* die Frage, ob auch hinsichtlich seiner n^{ten} Momente M_n ein Massensystem K durch eine endliche Anzahl von Massenpunkten (m_i) ersetzbar sei? Hierbei ist M_n[12]) hinsichtlich einer Ebene E definiert durch das Integral $\int r^n dm$, unter r den Abstand eines Punktes P des Systems von E verstanden. Oder genauer: wenn man sich die Gleichung von E in der *Hesse*schen Normalform gegeben denkt, ist

$$\text{(1)} \qquad \mathsf{M}_n = \int (\alpha x + \beta y + \gamma z - p)^n dm.$$

Die Entwickelung nach Potenzprodukten der x, y, z liefert ein Aggregat von $\nu = \binom{n+1}{3}$ Gliedern.

Hieraus folgt, daß sich M_n für jede Ebene bestimmen läßt, wenn es für r (unabhängige) Ebenen E_r bekannt ist.

Soll M_n einen vorgegebenen Wert M haben, so umhüllen die zugehörigen E eine Fläche P_n resp. P_{2n}, je nachdem n gerade oder ungerade ist; und jede beliebige E gehört zu einer solchen Fläche (M).

10) *Th. Reye*, J. f. Math. 72 (1870), p. 293; ib. 78 (1874), p. 114, 123.

11) *O. Hesse*, Analytische Geometrie des Raumes, Leipzig 1869, 2. Aufl.; Vorles. 25.

12) Der Fall $n = 2$ ist eingehender verfolgt worden durch *F. Ruffini*, Bol. Mem. (4) 4 (1884), p. 123.

Unter dieser Schar von Flächen (M) ist diejenige von besonderer Bedeutung, für deren Tangentialebenen T das Moment M_n verschwindet; sie heißt die „n^{te} Nullfläche P_n“.

Hieran schließt sich die Theorie „äquivalenter“ Systeme, bei denen für jede E die M_n übereinstimmen.

Die n^{te} Nullfläche gestattet eine einfache Berechnung der M_n und $\mathsf{M}_q (q < n)$.

Diese Entwickelungen lassen sich noch ausdehnen auf Momente M_n hinsichtlich einer Gruppe von k Ebenen.

Der Hauptsatz lautet, daß ein Massensystem hinsichtlich seiner M_n durch ν Massenpunkte ersetzbar ist, in besonderen Fällen schon durch $\binom{n}{2}$ resp. n.

Als Anwendung dienen die Fälle $n = 3$ und $n = 4$; das System ist dann (noch auf unendlich viele Weisen) durch 6 resp. 10 Massenpunkte ersetzbar.

Hierin ist bereits, wenn man zur dualistischen Figur übergeht und den algebraischen Kern herausschält, die kanonische Potenzsummendarstellung der F_3 durch ein Hexaeder und die der F_4 durch ein Dekaeder enthalten.

Die ∞^2 Hexaeder des ersteren Falles sind keine andern als die später von *L. Cremona* und *E. Beltrami* (s. Art. „F_3“, Nr. **12**, **18**) genauer untersuchten „Polarhexaeder“ der F_3, die als Spezialfall das „Pentaeder“ einschließen.

In der zweiten Abhandlung wird die algebraische Entwickelung einfacher und durchsichtiger gestaltet durch Heranziehung der Apolaritätstheorie (s. „F_3“, Nr. **12**, **19**).

Damit ergibt sich fast unmittelbar der obige Satz über die F_3, nebst verschiedenen Ergänzungen.

Das System ließ sich hinsichtlich seiner M_3 auf ∞^2 Weisen durch sechs Massenpunkte ersetzen. Durch je sechs solche ist eine C_3 bestimmt; diese ∞^2 C_3 haben fünf Grundpunkte gemein, durch die allein bereits das System ersetzbar ist.

Dualistisch gelangt man so zu den ∞^2, dem Pentaeder einbeschriebenen Klassenkurven Γ_3; diese Γ_3 sind zur F_3 apolar.

Nunmehr betrachten wir den Fall $n = 4$ mit zehn Massenpunkten. Man spalte von diesen irgendeinen ab und lege durch die neun übrigen, die durch sie bestimmte F_2.

Die Polare der F_2 muß sich auf den zehnten Punkt reduzieren, wenn die verlangte Ersetzbarkeit des Systems durch die zehn Punkte stattfinden soll.

Die weitere Untersuchung zeigt, daß von den zehn Punkten irgendeiner noch ganz willkürlich und ein zweiter auf der F_2 beliebig wählbar ist, womit die ganze Figur (einschließlich der Massen m_i) festgelegt ist.

Die kanonische Darstellung ist somit noch mit fünf willkürlichen Parametern behaftet.

Dies stimmt mit einer direkten Konstantenabzählung überein. Denn ein quaternäres Aggregat von zehn Biquadraten linearer Formen führt $4 \cdot 10 = 40$ Koeffizienten mit sich. Da andererseits die Anzahl der Koeffizienten einer F_4 35 beträgt, so ergibt die Differenz $40 - 35 = 5$ die Anzahl der Darstellungsparameter.

Es gilt somit der *Reye*sche Satz:

„Eine allgemeine F_4 ist, auf noch ∞^5 Weisen, als Aggregat von zehn, und nicht weniger, Biquadraten darstellbar:

$$F_4 \equiv \sum_{i=1}^{10} c_i(\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i z - p_i)^4.\text{“} \tag{2}$$

Die Figur der zehn entsprechenden Ebenen heißt das „*Reye*sche Dekaeder“.

Die *Reye*sche Methode hat später *Ew. Bodewig*[13]) in rein algebraischer Form entwickelt und verschiedentlich ergänzt.

In besonderen Fällen kann die kanonische Darstellung der F_4 Modifikationen erfahren.

Dies tritt z. B. ein, wenn eine irreduzible kubische Klassenkurve Γ_3 existiert, die zur F_4 apolar (konjugiert) ist, so daß jede zweite Polare F_2 der F_4 apolar ist zu jeder der Γ_3 einbeschriebenen Fläche φ_2.

Wählt man die Γ_3 als Normkurve $\mathsf{N}_3 = N_3$ (s. „F_3“, Nr. **19** und Note 14)

$$\begin{cases} x_3 : x_2 : x_1 : x_0 = \lambda^3 : 3\lambda^2 : 3\lambda : 1, \\ u_3 : u_2 : u_1 : u_0 = 1 : -\lambda : \lambda^2 : -\lambda^3, \end{cases} \tag{3}$$

so ist das algebraische Kriterium für die apolare Beziehung zwischen der N_3 und einer F_4 leicht angebbar. Die Form F_4 sei mit Polynomialkoeffizienten geschrieben, und $x_3^{\alpha_3} x_2^{\alpha_2} x_1^{\alpha_1} x_0^{\alpha_0}$ irgendeines der auftretenden Potenzprodukte.

Dann müssen alle Produkte dieser Art mit gleicher Exponentensumme $s = \alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0$ denselben literalen Koeffizienten a_s besitzen und umgekehrt, so daß sich deren Anzahl auf 13 reduziert.

Eine solche zur N_3 apolare F_4 trifft die Ordnungskurve N_3 in 12 Punkten, deren λ-Argumente von einer Gleichung 12. Ordnung

$$f_{12}(\lambda) \equiv a_0 + 12_1 a_1 \lambda + 12_2 a_2 \lambda^3 + \cdots + a_{12} \lambda^{12} = 0 \tag{4}$$

13) *Ew. Bodewig*, Giorn. di mat. 64 (1926), p. 81.

abhängen, wo die 12_i die zu 12 gehörigen Binomialkoeffizienten bezeichnen und die literalen Koeffizienten a_i genau mit den obigen von F_4 übereinstimmen. Umgekehrt ist bei beliebiger Wahl von (4) auch die F_4 eindeutig bestimmt.

Ist die Form f_{12} eine allgemeine ihrer Ordnung, so läßt sie sich kanonisch darstellen als Aggregat von 7 12^{ten} Potenzen auf ∞^2 Arten, als solches von 8 Potenzen auf ∞^3 Arten, als solches von 9 auf ∞^5 Arten und als solches von 10 Potenzen auf ∞^7 Arten usf.

Aus einer jeden solchen kanonischen Darstellung der $f_{12}(\lambda)$ läßt sich aber eine korrespondierende der $F_4(x)$ durch einen einfachen Polarisationsprozeß[14]) herleiten.

Sei irgendeine der kanonischen Darstellungen der $f_{12}(\lambda)$

$$f_{12}(\lambda) = \Sigma c_i(\lambda - \lambda_i)^{12}, \tag{5}$$

so bilde man die Gleichung der N_3-Ebenen Σ_i im Punkte λ_i

$$\Sigma_i = x_3 - x_2\lambda_i + x_1\lambda_i^2 - x_0\lambda_i^3 = 0. \tag{6}$$

Dann lautet die zu (5) parallel laufende kanonische Darstellung der F_4

$$F_4 \equiv \Sigma c_i \Sigma_i^4. \tag{7}$$

Andererseits kann aber auch die f_{12} von besonderer Beschaffenheit sein derart, daß sie bereits durch weniger als 7 12^{te} Potenzen darstellbar ist, wofür die invarianten Bedingungen bekannt sind.

So z. B. wenn die Kanonizante von f_{12} verschwindet, ist eine eindeutige Darstellung der f_{12} durch 6 volle Potenzen möglich, usf. So kann man heruntergehen bis zu solchen f_{12}, die Aggregate von drei 12^{te} Potenzen sind, und dementsprechend die korrespondierende F_4.

Faßt man zusammen, so ergibt sich:

„Ist die F_4 von der besonderen Art, daß eine zu ihr apolare Γ_3 existiert, die man als Normkurve $\mathsf{N}_3 = N_3$ wähle, so ist eine kanonische Darstellung der F_4 als Aggregat von Biquadraten bereits in der Weise möglich, daß 10 Potenzen mit 7 Parametern, 9 mit 5, 8 mit 3, und 7 mit einem Parameter auftreten. Die bezüglichen darstellenden Ebenen sind stets Ebenen der $\Gamma_3 = \mathsf{N}_3$.

Trifft die F_4 die N_3 in 12 Punkten, die von einer Gleichung 12. Ordnung $f_{12}(\lambda) = 0$ abhängen, so entspricht jeder kanonischen Darstellung (5) der f_{12} eine solche (6) der F_4.

Genügt aber die Form f_{12} im besondern solchen Bedingungen, daß für sie bereits eine Darstellung durch 6, 5, 4, 3 volle Potenzen existiert, so findet das Entsprechende für die zugehörige F_4 statt.“

Einen allgemeinen Satz über die kanonische Darstellung einer

14) *W. Fr. Meyer,* Apolarität und rationale Kurven, Tübingen 1883, Abschn. 3.

$F_{2\eta}$ gerader Ordnung im S_n, als Aggregat von $(2\eta)^{\text{ten}}$ Potenzen von Linearformen L, verdankt man *Sylvester*.[14a])

Zu dem Behuf dehnt er den von ihm früher eingeführten Begriff der invarianten Katalektikante K einer binären $f_{2\eta}$ (s. Art. I B 2, *W. Fr. Meyer*, Invariantentheorie) auf den allgemeinen Fall einer $F_{2\eta}$ in $n+1$ homogenen Variabeln aus.

Auch dann erscheint die Katalektikante K als Koeffizienterdeterminante der η^{ten} Ableitungen von $F_{2\eta}$. Die Invariante K verschwindet für ein Aggregat $(2\eta)^{\text{ter}}$ Potenzen von Formen L, solange deren Anzahl $< \binom{\eta+n}{n}$ ist.

Hieraus läßt sich folgern, daß im allgemeinen, d. h. für $K \neq 0$, eine $F_{2\eta}$ stets als Aggregat von $\binom{\eta+n}{n}$ vollen Potenzsummen von L darstellbar ist, dagegen als Aggregat von $\binom{\eta+n}{n}-1$ solcher Potenzen nur dann, wenn K verschwindet.

Im besonderen bestätigt sich so die Darstellung einer allgemeinen c_4 durch 6 Potenzen, für $K=0$ durch 5 Potenzen; in letzterem Fall liegt die *Clebsch-Lüroth*sche c_4 vor (s. Art. „F_3", Nr. **20**), wo K mit der von *Clebsch* angegebenen Invariante übereinstimmt. Sodann die obige *Reye*sche Darstellung einer F_4 (im S_3) durch 10 Biquadrate, und für $K=0$ durch 9 solche. Endlich sei noch der Fall einer F_4 im S_4 erwähnt als Summe von 15 Biquadraten und für $K=0$ von 14 solchen.

Bei Heranziehung der Apolaritätstheorie erhält das *Sylvester*sche Verfahren eine einfache geometrische Bedeutung. Danach stellt das Verschwinden von K die notwendige und hinreichende Bedingung dafür dar, daß eine zur $F_{2\eta}$ apolare Φ_η existiert; letztere berührt dann die durch Nullsetzen der L dargestellten $\binom{\eta+n}{n}-1$ Lineargebilde.

Zugleich erkennt man, wie der Prozeß fortsetzbar ist. Soll eine kanonische Darstellung einer $F_{2\eta}$ durch nur $\binom{\eta+n}{n}-2$ Potenzen von L möglich sein, so muß eine ∞^1-lineare Schar von zu $F_{2\eta}$ apolaren Φ_η existieren oder, algebraisch, es müssen alle ersten Minoren von K verschwinden, u. s. f.

Auf Grund einer direkten, auf dem Prinzip der Koeffizientenvergleichung beruhenden Methode bestätigt *Johnson*[14a]) verschiedene Einzelergebnisse, insbesondere über F_4 im S_3 und S_4. Hierbei werden auch Fälle von F ungerader Ordnung berücksichtigt.

14a) *J. J. Sylvester*, Paris C. R. 102 (1886), p. 1552. *A. R. Johnson*, Quart. J. 22 (1887), p. 158.

Es sei darauf hingewiesen, daß sich die kanonische Darstellung von Formen $F_{2\eta+1}$ ungerader Ordnung (abgesehen vom binären Falle) wesentlich komplizierter gestaltet. Dies zeigt sich schon im Falle der quaternären F_3 (s. Art. „F_3“, Nr. **3**, **19**). Bei einer allgemeinen F_3 existiert eine ∞^5-lineare Schar von zur F_3 apolarer Φ_2, und innerhalb dieser wieder eine ∞^4-lineare Schar solcher, die einem Pentaeder, eben dem *Sylvester*schen, einbeschrieben sind.

Diese ∞^4-Schar von Φ_2 zerlegt sich von selbst in ∞^2 ∞^2-Scharen, deren Individuen je einer der dem Pentaeder einbeschriebenen ∞^2 Γ_3 einbeschrieben sind; damit tritt eine Reduktion der Figur auf die ∞^2-Schar der einem Pentaeder einbeschriebenen und zur F_3 apolaren Γ_3 ein.

5. Formentheoretisches. Übertragungsprinzipien. Die projektive Invariantentheorie lehrt, wie man bei einer vorgelegten quaternären Urform F_4, oder allgemeiner, einer Reihe von Urformen der Ordnung $\leqq 4$, auf symbolischem wie unsymbolischem Wege unbegrenzt viele Komitanten, das sind Invarianten, Kovarianten, Kontravarianten, Zwischenformen usf., bilden kann und diese, wenigstens für gewisse Grade, in den Koeffizienten der Urformen in vollständigen, relativ vollständigen, assoziierten und anderen Systemen anordnen kann.

Indessen hat die Geometrie aus diesen Ansätzen bisher nur wenig Nutzen gezogen.

Wir begnügen uns daher mit der Zusammenstellung einiger Übertragungsprinzipien, die man je nach Bedarf verwenden kann (s. „F_3“, Nr. **12**).

Da ist in erster Linie das klassische Übertragungsprinzip für Invarianten von *A. Clebsch*, das hier zwei Formulierungen zuläßt, je nachdem man von dem binären oder ternären Gebiete als Stammgebiet herkommt. Die F_4 sei in symbolischer Schreibart

(1) $$F_4 \equiv (ax)^4 \equiv (a'x)^4 \equiv (a''x)^4 \equiv \cdots,$$

und entsprechend die weiteren Urformen in quaternären Symbolen $b, b', b'', \ldots, c, c', c'', \ldots$ usf.

Andererseits gehe man von einem korrespondierenden Systeme von binären Urformen aus:

(2) $$f_4 \equiv (a\lambda)^4 \equiv (a'\lambda)^4 \equiv (a''\lambda)^4 \equiv \cdots \text{ usf.}$$

mit binären Symbolen $a, b, c, \ldots$ Irgendeine Invariante i dieser Urformen (2) läßt sich symbolisch darstellen als Aggregat von Produkten, deren ϱ Faktoren „Klammerfaktoren“ der Typen $(aa'), (ab), \ldots$ sind, wo die Vielfachheit des Auftretens der einzelnen Symbole einfachen Regeln unterliegt.

Ersetzt man jetzt die einzelnen Klammerfaktoren (aa'), $(ab)\dots$ durch mit zwei Reihen von Ebenenkoordinaten u, v geränderte vierreihige Determinanten von den Typen $(aa'uv)$, $(abuv)$, ..., so geht i über in eine quaternäre Komitante J der Urformen (1). Führt man noch die Achsenkoordinaten $\pi_{ik} = (uv)_{ik}$ der Geraden $g = (u, v)$ ein, so gilt der Satz von *Clebsch:*

„Die Gleichung $J = 0$ stellt einen Geradenkomplex K der Ordnung ϱ dar, dessen Individuen die Urflächen $F, G, \dots$ in solchen Punktreihen treffen, daß für sie die binärinvariante Bedingung $i = 0$ erfüllt ist."

Um die Form J in den Achsenkoordinaten π_{ik} von g oder auch in den komplementären (ihnen proportionalen) Strahlenkoordinaten $p_{lm} = (xy)_{lm}$ auszudrücken, hat man nur jeden der Faktoren vom Typus $(aa'uv)$ zu entwickeln, wie folgt:

(3) $$(aa'uv) \equiv \sum (aa')_{ik}\pi_{lm} \equiv \sum (aa')_{ik} p_{ik}.$$

Einige einfachste Beispiele mögen zur Illustration dienen. Liegt nur eine einzelne Urform $F_4(1)$ vor, so liefert die Gleichung $G_2 \equiv (aa'uv)^4 = 0$ den Komplex 4. Ordnung der Geraden g, die die F_4 in äquianharmonischen Punkten treffen; $G_3 \equiv (aa'uv)^2 \cdot (a'a''uv)^2 \cdot (aa''uv)^2 = 0$ den Komplex 6. Ordnung, dessen Gerade die F_4 in vier harmonischen Punkten treffen, endlich die Diskriminantengleichung $G_2^3 - 27\,G_3^2 = 0$ den von A_m aus an die F_4 gehenden Tangentenkegel (s. auch Nr. **19**). Sind $F_4 \equiv (ax)^4 = 0$, $G_4 \equiv (bx)^4 = 0$ zwei verschiedene vorgelegte F_4, so erhält man in $(abuv)^4 = 0$ den Komplex 4. Ordnung, dessen Gerade aus den beiden Flächen konjugierte Punktquadrupel ausschneiden usf.

Andererseits sei

(4) $$c_4 \equiv (cx)^4 \equiv (c'x)^4 \equiv (c''x)^4 \equiv (c'''x)^4 \equiv \cdots$$

eine ternäre Urform 4. Ordnung. Eine Invariante J_c der C_4 ist darstellbar als Aggregat von c-Produkten, deren σ Faktoren Klammerfaktoren der Typen $(cc'c'')$, $(cc'c''')$, ... sind, und analog verhält es sich, wenn eine Reihe von ternären Urformen der Ordnungen $\leqq 4$ vorliegt.

Ersetzt man jene Klammerfaktoren durch mit Variabeln u geränderte vierreihige Determinanten der Typen $(cc'c''u)$, $(cc'c'''u)$ usf., so geht J_c über in eine Kontravariante $J = J(u)$ der Urformen (1). Damit hat man den zweiten Satz von *Clebsch:* „Es liefert $J(u) = 0$ die Gleichung einer Fläche σ^{ter} Klasse $F_\sigma(u)$, deren Tangentialebenen die quaternären Urflächen (1) in solchen Kurven $C_4 \dots$ schneiden, für die die Bedingung $J_c = 0$ erfüllt ist."

Hat man z. B. drei Flächen 4. Ordnung: $F_4 = (ax)^4 = 0$, $G_4 = (bx)^4 = 0$, $H_4 = (cx)^4 = 0$, so ist $(abcu)^4 = 0$ die Gleichung einer F_4, deren Tangentialebenen aus den drei gegebenen F_4 solche C_4-Tripel ausschneiden, daß ihre trilineare Invariante verschwindet.

Dieses Übertragungsprinzip von *Clebsch* läßt sich in seiner doppelten Gestalt auf Kovarianten ausdehnen.

Es liege etwa wieder eine binäre Urform $f_4(\lambda)$ vor, so ist eine Kovariante k darstellbar als Aggregat von Produkten, deren Faktoren teils ϱ Klammerfaktoren vom Typus (aa'), teils r Linearformen vom Typus $(a\lambda)$ sind. Ersetzt man wieder wie oben die (aa') durch $(aa'uv)$ usf., dagegen die $(a\lambda)$ durch korrespondierende quaternäre Linearformen (ax) usf., so geht k über in eine Konnexform

$$K = K[(uv), (x)] = K[(\pi), (x)], \tag{5}$$

die einmal abhängt in der Ordnung ϱ von den Achsenkoordinaten π_{ik} einer Geraden $g = (uv)$, andererseits in der Ordnung r von den Koordinaten x eines Punktes P. Das Verschwinden der Komitante K von (1) läßt sich geometrisch doppelt deuten. Entweder geht man von irgendeiner Raumgeraden $g(\pi)$ aus und denkt sich auf ihr die r Wurzeln von $K = 0$ als Punkte $P, P_1, P_2, P_3, \ldots$ markiert. Dann stellt die Gleichung $K = 0$ nicht nur die Gesamtheit jener Punkt-r-tupel dar, sondern sie liefert auch ein System von Flächen F_r niedrigster Ordnung r, das jene Punkt-r-tupel aus den Raumgeraden g ausschneidet.

Ist andererseits ein Punkt $P(x)$ vorgegeben, so erhält man vermöge $K = 0$ die $r - 1$ Geraden g, die P mit den $r - 1$ übrigen Punkten $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{r-1}$ verbinden, und zugleich bei Variieren von P ein System von Komplexen niedrigster Ordnung ϱ, dessen Gerade eben jene Verbindungslinien sind.

Ähnlich verhält es sich im ternären Falle. Eine Kovariante k_c der ternären Grundformen (4) ist darstellbar als ein Aggregat von Produkten, deren Faktoren teils σ Klammerfaktoren der Typen $(cc'c'')$, ... sind, teils r Linearformen der Typen (cx), ... Man ersetze die ersteren Faktoren durch solche der Typen $(cc'c''u)$, die letzteren durch quaternäre Linearformen (ax), ... Damit geht k_c über in eine Zwischenform $K[(u), (x)]$, von der Ordnung σ in den u und von der Ordnung r in den x. Das Verschwinden von K läßt wiederum eine doppelte Deutung zu.

Eine beliebige Ebene (u) schneide die Urflächen (1) in einer Reihe von Kurven $C, \ldots$; man denke sich innerhalb der Ebene (u) die zu ihnen kovariante Kurve k_c verzeichnet. Variiert die Ebene (u), so wird die Gesamtheit der Kurven k_c durch eine Fläche $K_r = K[(x)] = 0$ niedrigster Ordnung r ausgeschnitten. Andererseits geht durch irgendeinen Punkt $P(x)$ ein Kegel von Ebenen (u), und die Gesamtheit dieser Ebenen gehört einer Fläche σ^{ter} Klasse $K_\sigma = K[(u)] = 0$ an. Diese beiden Übertragungsprinzipien erweisen sich als nützlich zur kürzesten Darstellung gewisser Raumtransformationen. So z. B., wenn man einem Punkte P stets den zu ihm bezüglich aller F eines Netzes konjugierten Punkt Q zuordnet (s. Art. „F_3" Nr. 3). Ferner, wenn man einem Punkte P die ihm bezüglich aller F_2 eines Büschels zugehörige Polargerade p zuweist (s. Nr. 82).

Im allgemeinen ist aber das Gebilde $K = 0$ zu kompliziert, um einen direkten Nutzen zu gewähren. Man wird ihm daher näherkommen, wenn man gewisse in ihm enthaltene Teilgebilde für sich studiert. Da liegt es am nächsten, wenn man im „binären" Falle der Geraden $g(\pi) = (uv)$ die Bedingung auferlegt, stets durch einen festen Punkt P_0 zu laufen[15]), und entsprechend im „ternären" Falle, wenn die Ebene (u) stets eine feste Gerade g_0 enthält.

Die zugehörige Rechnung gestaltet sich im Anschluß an die obige einfach. Im binären Fall hat man nur bei der Darstellung (3) irgendeines Determinantenfaktors vom Typus $(aa'uv)$

$$(3) \qquad (a a' u v) \equiv \sum (a a')_{ik} p_{ik} \equiv \sum (a a')_{ik} (x y)_{ik}$$

den Punkt y als den festen Punkt P_0 anzusehen; man gelangt dann sofort zur Gleichung $R[(x)] = 0$ der Fläche, die erfüllt ist von den auf den durch $P_0(y)$ variierenden Geraden g aufgetragenen Punktreihen $k = 0$.

Im ternären Falle greife man ebenfalls einen Determinantenfaktor vom Typus $(cc'cu)$ heraus und betrachte die Ebene (u) zunächst als Verbindungsebene dreier Punkte $P(x)$, $Q(y)$, $R(z)$, so daß die u_i als dreireihige Determinanten $(xyz)_{klm}$ erscheinen. Damit nimmt $(cc'c''u)$ die Gestalt einer dreireihigen Determinante an:

$$(5) \qquad (cc'c''u) \equiv \begin{vmatrix} c(x), & c'(x), & c''(x) \\ c(y), & c'(y), & c''(y) \\ c(z), & c'(z), & c''(z) \end{vmatrix}.$$

Hier ordne man nach den Elementen der ersten Reihe und entwickle wiederum die drei Minoren nach den $(yz)_{ik} = p_{ik}$.

Nimmt man nunmehr die Gerade (p) als die feste Gerade g_0 und betrachtet den Punkt $P(x)$ als variabel, so liefert die Gleichung

15) *W. Franz Meyer*, Berlin Math. Ges. 28 (1929), p. 100; Giorn. di mat. 67 (1929), p. 1. Man vergleiche den Ansatz bei *H. M. Jeffery*, Brit. Ass. 18 (1878).

$K = 0$ direkt das Aggregat der endlichvielen Ebenen durch g_0, die aus den Urflächen je eine solche Reihe von Kurven C ausschneidet, zu denen die Kurve k_c in kovarianter Beziehung steht.

So einfach diese beiden Prozesse formal verlaufen, so erweisen sie sich doch zur näheren Erkenntnis der geometrischen Eigenschaften der in Rede stehenden Flächen und Ebenenaggregate als weniger geeignet. Man schlage zu dem Behuf lieber einen unsymbolischen Weg ein. Im binären Falle normiere man den festen Punkt P_0 als eine Koordinatenecke, etwa A_m, und ordne dementsprechend die Gleichungen der Urflächen (1) nach x_m wie folgt:

$$(6') \qquad F_4 \equiv a_0 x_m^4 + a_1 x_m^3 + a_2 x_m^2 + a_3 x_m + a_4 = 0 \text{ usf.},$$

wo die a_r ternäre Formen der Ordnung r in den x_i, x_k, x_l bedeuten. Irgendeine Gerade g durch A_m bestimmt sich durch ihre Spur (x_i, x_k, x_l) in der Ebene $x_m = 0$, während ein laufender Punkt P auf g durch Angabe des Wertes der nichthomogenen Variabeln (Parameters) x_m festgelegt wird.

Damit läßt sich den Gleichungen (1') eine doppelte Deutung beilegen. Einmal stellen sie wie bisher die Urflächen selbst dar und mögen dann genauer durch $F_4(x_i, x_k, x_l, x_m) = 0$ usf. bezeichnet sein.

Faßt man andererseits die Gleichungen (1) als solche in der einen Unbekannten x_m auf, was durch die Schreibweise $F_4(x_m) = 0$ usf. hervortrete, so liefern sie bei festgedachten x_i, x_k, x_l vermöge ihrer x_m-Wurzeln die Punktreihen, die auf der Geraden $g(x_i, x_k, x_l)$ durch die Urflächen (1') ausgeschnitten werden.

Diese doppelte Auffassung übertrage man auf irgendeine binäre Kovariante k der Ordnung ν der Formen $F_4(x_m)$ usf.:

$$(6) \qquad k(x_m) = k_w x_m^\nu + k_{w+1}^\nu + \cdots + k_{w+\nu} = 0,$$

mit w als Leitgewicht. Die Gleichung $k(x_m) = 0$ liefert wiederum auf g die Reihe der ν Punkte (k), die den Wurzeln von $k(x_m) = 0$ entsprechen. Dann gilt sofort der Satz:

„Die quaternäre Gleichung $k(x_i, x_k, x_l, x_m) = 0$ ist die der Fläche K, die bei variierender Geraden g durch die Punktreihen (k) erfüllt wird.“

Die Eigenschaften dieser kovarianten Fläche K lassen sich in jedem Einzelfalle aus ihrer quaternären Gleichung ablesen.

Analog verfahre man im ternären Falle. Die feste Gerade g_0 werde als Koordinatenkante a_{lm} ($x_i = 0$, $x_k = 0$) gewählt. Entsprechend ordne man die Urformen (1') nach Formen in den beiden nichthomogenen Variabeln x_l, x_m abnehmender Ordnung an usf. Dann gelangt man wiederum direkt zu einer übersichtlichen Darstellung des Ebenenaggregats $K = 0$.

Einige einfache Beispiele mögen zur Illustration dienen.

Es liege zunächst eine einzelne Urfläche F_4 (1) mit den Koeffizienten a vor. Man bilde die *Hesse*sche Form $h(x_m)$ der binären Form $F_4(x_m)$

$$h(x_m) \equiv (a_0 a_2 - a_1^2) x_m^4 + \cdots \tag{7}$$

Der Ort der Wurzelpunkte von $h = 0$ auf der Geraden g durch A_m ist eine Fläche 6. Ordnung H_6, deren Gleichung mit $h = 0$ übereinstimmt. Die Fläche H_6 hat in A_m einen D_2 mit dem Tangentenkegel $a_0 a_2 - a_1^2 = 0$ usf.

Weiter betrachte man die beiden Invarianten g_2 und g_3 von $F_4(x_m)$

$$\left\{\begin{aligned} g_2 &= a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2, \\ g_3 &= \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Dann liefert $g_2 = 0$ den „äquianharmonischen" Kegel 4. Ordnung K_4 mit der Spitze A_m, dessen Kanten die F_4 in äquianharmonischen Punktquadrupeln treffen. Entsprechend bestimmt $g_3 = 0$ den „harmonischen" Kegel 6. Ordnung K_6 mit der Spitze A_m, dessen Kanten aus der F_4 vier harmonische Punkte ausschneiden.

Jetzt werde der F_4 eine zweite Fläche 4. Ordnung G_4 mit Koeffizienten b adjungiert. Wir fassen einmal die zweite Überschiebung h' von $F_4(x_m)$, $G_4(x_m)$ ins Auge:

$$h' \equiv (a_0 b_1 - a_1 b_0) x_m^4 + \cdots = 0. \tag{9}$$

Die zugehörige Fläche H_5 ist von der 5. Ordnung, die durch A_m einfach hindurchgeht, mit der Tangentialebene $a_0 b_1 - a_1 b_0 = 0$.

Andererseits sei die Invariante c die vierte Überschiebung von $F_4(x_m)$ und $G_4(x_m)$:

$$i = a_0 b_4 - 4 a_1 b_3 + 6 a_2 b_2 - 4 a_3 b_1 + a_4 b_0. \tag{10}$$

Die Gleichung $i = 0$ ist zugleich die des Kegels 4. Ordnung $J = 0$, dessen Kanten beide Urflächen in konjugierten Punktquadrupeln schneiden.

Sodann adjungiere man der F_4 eine F_3 mit Koeffizienten b. Man bilde die lineare Kovariante l von $F_4(x_m)$ und $F_3(x_m)$

$$l \equiv x_m (a_0 b_3 - 3 a_1 b_2 + 3 a_2 b_1 - a_3 b_0) + \cdots. \tag{11}$$

Die zugehörige kovariante Fläche $L = L_4$ der 4. Ordnung besitzt in A_m einen D_2 mit dem Tangentenkegel

$$a_0 b_3 - 3 a_1 b_2 + 3 a_2 b_1 - a_3 b_0 = 0.$$

Weiter trete an die Stelle der F_3 eine F_2 mit Koeffizienten b. Man bilde die quadratische Kovariante q von $F_4(x_m)$ und $F_2(x_m)$

(12) $$q = x_m^2(a_0 b_2 - 2a_1 b_1 + a_2 b_0) + \cdots$$

Die zugehörige Fläche $Q = Q_4$ ist von der 4. Ordnung und besitzt in A_m einen D_2 mit dem Tangentenkegel

$$a_0 b_2 - 2a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0.$$

Endlich adjungiere man der F_4 eine vorerst nicht durch A_m gehende Ebene F_1 mit der Gleichung

(13) $$F_1 = x_m \varrho_0 + \varrho_1 = 0.$$

Für die beiden Urformen $F_4(x_m), F_1(x_m)$ bilde man die erste Überschiebung k $\left(\text{oder auch die erste Polare von } F_4(x_m) \text{ in bezug auf das Argument } -\frac{\varrho_1}{\varrho_0}\right)$

(14) $$k = \begin{vmatrix} a_0 x_m^3 + 3a_1 x_m^2 + 3a_2 x_m + a_3, & a_1 x_m^3 + 3a_2 x_m^2 + 3a_3 x_m + a_4 \\ \varrho_0, & \varrho_1 \end{vmatrix}$$
$$= x_m^3(a_0 \varrho_1 - a_1 \varrho_0) + \cdots$$

Die zugehörige Fläche $K = K_4$ ist eine Fläche der 4. Ordnung, die durch A_m einfach hindurchgeht, mit der Tangentialebene $a_0\varrho_1 - a_1\varrho_0 = 0$. Diese bemerkenswerte Fläche ist als eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen ersten Polare F_3' der F_4 in bezug auf den festen Punkt A_m anzusehen. Diese Fläche K geht durch die Schnitte der F_4 mit der F_1, sowie mit der ersten Polare von A_m in bezug auf die F_4. Umgekehrt ist K hierdurch und durch die Forderung, A_m zu enthalten, eindeutig bestimmt.

Ersetzt man die Koordinatenecke A_m durch einen beliebigen Punkt $Y(y)$ und schreibt $F_{x^4} = F$ für F_4, $E_x = E$ für F_1, F_{x^3y} für die Polare von Y in bezug auf F, so lautet die Gleichung der Fläche K

(14a) $$K \equiv F_{x^4} E_y - F_{x^3y} E_x = 0.$$

Faßt man hier die Ebene E als lineare Polare eines Punktes $Z(z)$ in bezug auf die Fläche F auf, so geht (14a) über in

(14b) $$K \equiv F_{x^4} F_{z^3y} - F_{x^3y} F_{z^3x} = 0.$$

Hieraus liest man ab, daß K auch den Punkt Z enthält. Da aber zu einer vorgegebenen Ebene E $3^3 = 27$ Linearpole Z (in bezug auf F) gehören, so liegen auch diese 27 Punkte auf der Fläche K.

Die Fläche K geht im besonderen in die F_3' über, wenn man der Ebene F_1 (13) die Forderung auferlegt, durch A_m selbst hindurchzugehen, so daß ϱ_0 verschwindet, und die Gleichung der F_1 sich reduziert auf $\varrho_1 = 0$, und damit als Gleichung der Polare F_3' entsteht (indem sich der Faktor ϱ_1 absondert)

(14′) $$F_3' \equiv a_0 x_m^3 + 3a_1 x_m^2 + 3a_2 x_m + a_3 x_m = 0.$$

Somit wäre die allgemeinere Fläche $K = K_4$ als „Polare der F_4 in bezug auf den festen Punkt A_m und die feste Ebene F_1“ zu bezeichnen.

Es sei noch bemerkt, daß sich diese Entwicklung ohne weiteres auf den Fall einer F_m im S_n ausdehnen läßt.

Zum Schlusse werde noch auf einige Figuren hingewiesen, die aus einer vorgelegten F_4 durch das Prinzip des Schneidens und Projizierens hervorgehen. Zu den Gleichungen dieser Figuren gelangt man mittels eines elementaren symbolischen Übertragungsprinzips [16]), wobei aber die Symbolik lediglich als ein Mittel zur Abkürzug der Rechnung erscheint.

Man schreibe wieder symbolisch

$$(1) \qquad F_4 \equiv (ax)^4 = 0.$$

Eine Gerade $g = (\varepsilon, \eta)$, als Schnitt zweier Ebenen ε, η gedacht, schneide die F_4 in einem Punktquadrupel (S): S_1, S_2, S_3, S_4. Es soll dies Quadrupel durch eine einzige Gleichung in Ebenenkoordinaten u dargestellt werden. Zu dem Behuf sehe man, wie schon früher, einen variabeln Punkt $P(x)$ als Schnitt dreier Ebenen (u), (v), (w) an, so daß die x_i die dreireihigen Determinanten $(uvw)_{klm}$ werden. Damit geht die symbolische Linearform (ax) über in die vierreihige Determinante $(auvw)$.

Demnach sagt die Gleichung

$$(15) \qquad (auvw)^4 = 0$$

aus, daß sich drei Ebenen (u), (v), (w) auf der F_4 treffen. Wählt man jetzt die beiden Ebenen (v), (w) als die beiden festen Ebenen (ε), (η), so nimmt (15) die besondere Gestalt an

$$(15') \qquad \sum(u) \equiv (a\varepsilon\eta u)^4 = 0.$$

Hier lassen sich wieder die Koordinaten π resp. p der festen Geraden $g = (\varepsilon, \eta)$ einführen vermöge der Umformung

$$(2) \qquad (au\varepsilon\eta) \equiv \sum (au)_{ik} \pi_{lm} \equiv \sum (au)_{ik} p_{ik}.$$

Damit stellt aber (15′) unmittelbar die gesuchte Gleichung des Punktquadrupels S dar, aufgefaßt als ausgeartete Fläche 4. Klasse $\sum \equiv \sum_4$.

Weiter denke man sich das Punktquadrupel S von irgendeinem festen Raumpunkte $Q(y)$ aus durch vier Gerade $(s) = s_1, s_2, s_3, s_4$ projiziert. Man hat dann nur das zu obigem Verfahren dualistische einzuschlagen. Die Gleichung (15′) wird dadurch die des Geradenquadrupels (s), aufgefaßt als ausgearteter Komplex 4. Ordnung.

---

16) *W. Franz Meyer,* Tôhoku Math. J. 32 (1930), p. 97.

So kann man fortfahren, indem man die Figur von neuem dem Prinzip des Projizierens und Schneidens unterwirft; die Gleichungen der so entstehenden Gebilde lassen sich stets mittels verhältnismäßig einfacher Determinantenbildungen konstruieren.

Die Gleichung (15) gestattet noch eine zweite Anwendung. Von den drei Ebenen (u), (v), (w) werde jetzt die eine $(w) = (\varepsilon)$ als eine feste angesehen, während die beiden anderen (u), (v) und damit auch ihre Schnittgerade $g = (uv) = (\varrho) = (q)$ beweglich bleiben. Demgemäß hat man die Umformung vorzunehmen

$$(2') \qquad (a\varepsilon uv) \equiv \sum (a\varepsilon)_{ik}\varrho_{lm} \equiv \sum (a\varepsilon)_{ik} q_{ik}.$$

Die feste Ebene ε schneidet die F_4 in einer Kurve 4. Ordnung c_4. Faßt man diese c_4 im Raume als speziellen Komplex 4. Ordnung auf, d. h. als Inbegriff der Raumgeraden g, die sie treffen, so ist die Gleichung der c_4 unmittelbar gegeben durch

$$(15\text{a}) \qquad c_4 \equiv (a\varepsilon uv)^4 = 0.$$

Betrachtet man wiederum in den $p_{ik} = (xy)_{ik}$ den Punkt y als einen festen Punkt Q, so liefert (15a) auch die Gleichung des von Q an die c_4 gehenden Projektionskegels. Diesen Kegel kann man von neuem schneiden, entweder mit einer festen Geraden oder aber mit einer festen Ebene; die Gleichungen der so entstehenden Gebilde lassen sich sofort hinschreiben usf.

Bezüglich der Anwendung des obigen Übertragungsprinzips auf die F_3 siehe Art. „F_3“ Nr. **12**.

Mögen die Ergebnisse dieser Übertragungsprinzipien, denen noch die dualistischen an die Seite zu stellen sind, im Hinblick auf die gesamte projektive Invariantentheorie der F_4 nur bescheiden sein, so ist dem gegenüber zu bedenken, daß einmal die obigen Entwickelungen ohne prinzipielle Schwierigkeit beliebig weiter ausgebaut werden können, andererseits die algebraische Bildung selbst so grundlegender geometrischer Invarianten, wie sie in Nr. **3** als existierend nachgewiesen wurden, bisher noch nicht gelungen ist.

II. Kummers Untersuchung über F_4 mit Scharen von Kegelschnitten.

6. Einleitung. Hilfssätze. Die erste systematische Untersuchung einer ausgedehnten Gattung von F_4, nämlich solcher, auf der Scharen von C_2 liegen, verdankt man *E. E. Kummer*.[17]) Auf diese werde daher näher eingegangen.

17) *E. E. Kummer*, Berlin Ber. Juli 1863 = J. f. Math. 64 (1865), p. 66.

Es sei vorausgeschickt, daß auf einer allgemeinen, von 34 Konstanten abhängigen F_4 keine C_2 liegt (s. Nr. 3). Liegt aber mindestens eine C_2 auf einer F_4 — wofür das Verschwinden einer gewissen Invariante J_2 notwendig und hinreichend war —, so auch noch eine zweite, von der Ebene der ersten ausgeschnittene.

Als Grundlage der Untersuchung dient bei *Kummer* der allgemeine, geometrisch[18]) evidente Hilfssatz: „Besitzt irgendein ebener Schnitt einer F_n an einer Stelle P_0 einen d_2, so ist P_0 entweder ein (eigentlicher) Berührungspunkt einer Tangentialebene T der F_n, oder aber ein D_2 der Fläche selbst."

Um zunächst die in ein Paar von F_2 zerfallenden F_4 im folgenden auszuschließen, benutzt *Kummer* den — wie er sagt, algebraisch leicht beweisbaren — Satz:[19])

„Schneiden alle durch einen beliebig, aber fest gewählten Raumpunkt Q_0 gehenden Ebenen aus einer F_4 C_2-Paare aus, so zerfällt die F_4 in ein F_2-Paar, mit Ausnahme des Falles, wo die F_4 ein Kegel K_4 mit der Spitze Q_0 ist."

Daraufhin lassen sich die besonderen Fälle, wo eine Ebene aus einer F_4 eine c_4 mit $\geqq 4 d_2$ ausschneidet, leicht übersehen, da die c_4 dann ersichtlich zerfallen muß. Im Falle von $4 d_2$ — wenn nicht drei derselben in einer Geraden g liegen — artet die c_4 in ein c_2-Paar aus. Tritt aber jener Spezialfall ein, so zerfällt die c_4 in die g und eine r_3. Im Falle von $5 d_2$ zerfällt die c_4 weiter in eine c_2 und ein g-Paar; endlich im Falle $6 d_2$ in vier Gerade.

Man bezeichne irgendein Individuum der gedachten, die F_4 in C_2-Paaren schneidenden Schar von Ebenen mit H; ferner mit T_i $(i = 0, 1, \ldots)$ eine die F_4 an i Stellen einfach berührende Tangentialebene (also im allgemeinsten Falle $i = 0$ mit T_0 eine beliebige, die F_4 nirgends berührende Ebene).

Damit bieten sich drei Hauptfälle (I), (II), (III) dar, je nachdem sie vom Typus T_0, T_1, T_2 sind.

18) Besitzt eine $F_n = F$ einen oder mehrere D_2 und schneidet man die F mit einer Ebene (u), deren Punkte explizite dargestellt sind durch $\varrho x_i = a_i \lambda + b_i \mu + c_i \nu$, so ergibt sich für den ebenen Schnitt c_n eine in λ, μ, ν ternäre Gleichung $c_n \equiv c = 0$. Dann zerfällt die Diskriminante D_c der Form c in ein Produkt von Faktoren, deren erster die Klassenform $\Phi(u)$ von F ist, während das Verschwinden eines der weiteren Faktoren besagt, daß die Ebene (u) je einen der D_2 enthält. Das ist das algebraische Äquivalent für den Satz des Textes, der auch analog für den S_n (inkl. $n = 2$) gilt. Es wäre wünschenswert zu untersuchen, wie weit der Satz des Textes auch für transzendente und topologische Flächen seine Gültigkeit behält.

19) Wie weit entsprechende Sätze für Flächen höherer Ordnung bestehen, scheint noch nicht in Betracht gezogen zu sein.

Der weitere Fall, wo die H vom Typus T_3 sind, liefert nichts Bemerkenswertes; berühren aber die H die F_4 längs einer (variierenden) Geraden g, so wird die F_4 zu der abwickelbaren R-F_4 (s. Nr. **76**), dem Ort der Ebenen einer Γ_3, wo ersichtlich jede T außer der g, die dann eine Doppelgerade $\bar{g}$ wird, noch eine C_2 ausschneidet.

7. Erster Hauptfall (I): Die Ebenen H sind vom Typus T_0. Die F_4 mit einer Doppelgeraden $\bar{g}$. Die Dupinsche Zyklide. Die F_4 mit zwei Selbstberührungspunkten. Jede H der Schar enthält dann 4 D_2 der F_4. Man hat wiederum vier Unterfälle zu unterscheiden, je nach der Anzahl der festbleibenden D_2.

Erster Unterfall (I_0): „*Keiner* der $4\,D_2$ ist für alle H derselbe." Dann schneidet jede Ebene E eine c_4 mit $4\,d_2$ aus, und es tritt der oben ausgeschlossene Fall $F_4 \equiv F_2 \cdot F_2'$ ein.

Zweiter Unterfall (I_1): „*Einer* der $4\,D_2$ ist für alle H derselbe." Die drei anderen D_2 erfüllen von selbst eine $\bar{C}_3$. Somit schneiden *alle* Ebenen H durch den festen D_2 die F_4 in C_2-Paaren, und es liegt wiederum der ausgeschlossene Typus $F_4 \equiv F_2 \cdot F_2'$ vor.

Dritter Unterfall (I_2): „*Zwei* der $4\,D_2$ sind fest." (F_4 mit $\bar{C}_2$ und zwei resp. vier D_2, die *Dupin*sche Zyklide.) Die beiden anderen D_2 erfüllen dann eine $\bar{C}_2$. Umgekehrt, besitzt eine F_4 eine $\bar{C}_2$ und (außerhalb dieser) noch zwei D_2 — deren Verbindungsgerade d sei —, so schneidet das Büschel von H durch d lauter C_2-Paare aus der Fläche F_4 aus.

Ein Ausnahmefall tritt nur ein, wenn d die $\bar{C}_2$ trifft (s. u.). Legt man zunächst eine F_4 mit einer $\bar{C}_2$ (ohne weitere D_2) zugrunde, so sei letztere der Schnitt einer Ebene $p = 0$ mit einer F_2: $\varphi = 0$, und $\psi = 0$ eine weitere beliebige F_2. Dann hat die Gleichung einer F_4 mit einer $\bar{C}_2$ ersichtlich die Gestalt[20])

$$(\mathrm{I}) \qquad F_4 \equiv \varphi^2 - 4p^2\psi = 0.$$

Sollen nun noch zwei D_2 existieren, deren Verbindungsgerade d (die die $\bar{C}_2$ nicht treffe) der Schnitt zweier Ebenen $q = 0$, $r = 0$ sei, so nimmt (I) im besonderen die Form an

$$(\mathrm{I}_2) \qquad F_4 \equiv \varphi^2 - 4p^2qr = 0,$$

und umgekehrt.

Die beiden D_2 werden von d aus φ ausgeschnitten. Das H-Büschel

20) Hier kann auch, was *Kummer* nicht besonders erwähnt, der Spezialfall eintreten, daß der Doppelkegelschnitt $\bar{C}_2$ in zwei (inzidente) Doppelgerade $\bar{g}_1$, $\bar{g}_2$ zerfällt. Dies tritt offenbar dann und nur dann ein, wenn die Ebene p die Fläche φ berührt (s. Nr. **15**). Über die Fälle, wo die — eigentliche oder auch zerfallende — $\bar{C}_2$ zu einem Kuspidalkegelschnitt wird, s. Nr. **18**.

durch d schneidet die C_2-Paare aus; insbesondere die beiden Ebenen q, r zwei sich deckende C_2: diese beiden Ebenen sind also singuläre T der F_4, die sie je längs einer C_2 berühren.

Noch spezieller kann die F_4 ein zweites Paar von D_2 besitzen, so daß dann zwei H-Büschel existieren, die C_2-Paare ausschneiden. Man kann der Gleichung einer solchen F_4 die Gestalt geben

$$(\mathrm{I}_2') \qquad F_4 \equiv (p^2 + qr - st)^2 - 4p^2qr$$
$$\equiv (p^2 - qr - st)^2 - 4p^2st = 0,$$

oder auch irrational

$$(\mathrm{I}_2'') \qquad p + \sqrt{qr} + \sqrt{st} = 0.$$

Die beiden H-Büschel sind (q, r) und (s, t); die vier Ebenen q, r, s, t sind wiederum singuläre T, die die F_4 je längs einer C_2 berühren.

Die $\bar{C}_2$ ist dargestellt durch $p = 0$, $qr - st = 0$ und die beiden D_2-Paare durch $q = 0$, $r = 0$, $p^2 - st = 0$; $s = 0$, $t = 0$, $p^2 - qr = 0$. Nun gibt es aber sechs Verbindungsgeraden je zweier der D_2; indessen erkennt man leicht[21]), daß vier derselben die $\bar{C}_2$ treffen, also *auf* der F_4 liegen, so daß die beiden obigen H-Büschel die einzigen sind, die C_2-Paare ausschneiden.

Ein ausgezeichneter metrischer Repräsentant dieser Gattung von F_4 ist die *Dupin*sche Zyklide Z_0[22]) (s. Nr. 28). *Dupin* fand sie als diejenige F, deren beide Scharen von Krümmungslinien Kreise sind. Für diese Z_0 fällt die $\bar{C}_2$ in den „Kugelkreis" K; von den beiden D_2-Paaren ist höchstens eines reell. Die Gleichung der Z_0 lautet am einfachsten in irrationaler Gestalt

$$(\mathrm{I}_2''') \quad Z_0 \equiv \sqrt{(ax - ek)^2 + b^2y^2} + \sqrt{(ex - ak)^2 - b^2z^2} - b^2 = 0.$$

Dritter Unterfall (I_3): „$\geqq 3$ der vier D_2 sind fest." (F_4 mit einer Doppelgeraden, F_4 mit zwei Selbstberührungspunkten.) Dann liegen diese D_2 entweder in einer Doppelgeraden $\bar{g}$, und umgekehrt schnei-

21) Man nehme zunächst den Fall an — den *Kummer* nicht besonders erwähnt —, daß außer den zwei D_2 (die mit D und D' bezeichnet seien), deren Verbindungslinie d die $\bar{C}_2$ nicht trifft, noch ein weiterer $D_2 = D''$ (außerhalb $\bar{C}_2$) existiere. Dann schneidet die Ebene $(DD'D'')$ aus der F_4 eine c_4 mit $5\,d_2$ aus, die also in eine c_2 und zwei c_1 zerfallen muß. Diese beiden c_1 treffen sich ersichtlich im Punkte D''. Somit treffen die beiden Geraden (D, D'') und (D', D'') die $\bar{C}_2$, liegen also auf der F_4. Wiederholt man diese Betrachtung für einen vierten $D_2 = D'''$ — wo die Gerade (D'', D''') die $\bar{C}_2$ nicht treffe —, so hat man das Ergebnis des Textes.

22) Die Bezeichnung Z_0 ist gewählt, um die *Dupin*sche Zyklide von der allgemeinen Zyklide Z (s. Abschn. IV) zu unterscheiden.

den bei einer F_4 mit $\bar{g}$ alle H durch $\bar{g}$ C_2 aus[23]) (s. Abschn. V). Ist eine solche $\bar{g}$ der Schnitt zweier Ebenen $p = 0$, $q = 0$, so kommt der Gleichung der F_4 die Gestalt zu

$$(\mathrm{I}_3) \qquad F_4 \equiv p^2\varphi + 2pq\varphi_1 + q^2\varphi_2 = 0.$$

Oder aber es rücken einige der vier festen D_2 zusammen. Der bemerkenswerteste Fall ist hier der, wo zweimal zwei D_2 in D, D' zusammenrücken, so daß die H durch deren Verbindungslinie d, die C_2-Paare ausschneiden, sich in zwei festen Punkten (D, D') berühren, also die F_4 zwei Selbstberührungspunkte aufweist.

Die Gleichungsform einer solchen F_4 lautet (s. auch Nr. 58)

$$(\mathrm{I}_3') \qquad F_4 \equiv \varphi^2 - f_4(p, q) = 0,$$

wo f_4 eine binäre Form 4. Ordnung in p, q ist. Die beiden Punkte D, D' sind die Treffpunkte der Geraden (p, q) mit φ. Den vier Wurzeln von f_4 entsprechen vier H als singuläre T, die einander deckende C_2 ausschneiden.

Man beachte, daß eine solche F_4 im allgemeinen keine $\bar{C}_2$ besitzt, sondern nur dann, wenn zwei der singulären T koinzidieren.

8. Zweiter Hauptfall (II): Die H sind vom Typus T_1. Die Steinersche Fläche S. Irgendeine H der Schar enthält drei D_2 der F_4, falls nicht der Berührungspunkt T der T_1 mit zweien der D_2 in einer Geraden g liegt, die dann der F_4 angehören muß (s. u.).

Man hat wiederum Unterfälle zu unterscheiden je nach der Anzahl der festen, in einer H liegenden D_2.

Erster Unterfall (II_1): „Die H gehen nicht alle durch einen festen D_2."

Dann erfüllen die drei anderen, mit H variierenden D_2 eine kubische Doppelkurve $\bar{C}_3$ (s. Nr. 76). Liegt aber wieder der Berührungspunkt T mit zweien der D_2 in einer g, so liegt eine R-F_4 vor (s. Abschn. XII). Es gilt also:

„Alle F_4 mit einer $\bar{C}_3$ — exkl. die R-F_4 — werden von allen T in C_2-Paaren geschnitten; im Falle der R-F_4 aber schneiden die T je eine g nebst einer r_3 aus."

Man hat folgende Sonderfälle zu unterscheiden:

(IIα) Die $\bar{C}_3$ ist irreduzibel;

(IIβ) die $\bar{C}_3$ zerfällt in einen Kegelschnitt $\bar{C}_2$ und eine ihn treffende

23) Es kann auch noch, was *Kummer* nicht erwähnt, eine zweite, zur ersten windschiefe — und ihr eventuell unendlich benachbarte — Doppelgerade existieren (s. Nr. 81). Dann gibt es zwei Büschel von H, die Scharen von C_2 aus der F_4 ausschneiden, die dann zu einer R-F_4 wird.

Gerade $\bar{g}$ nach dem Schema

$$\bar{C}_3 = \bar{C}_2 + \bar{g};$$

(IIγ) die $\bar{C}_3$ zerfällt in drei Doppelgerade $\bar{g}$, $\bar{g}_1$, $\bar{g}_2$:

$$\bar{C}_3 = \bar{g} + \bar{g}_1 + \bar{g}_2.$$

Die beiden ersten Fälle führen wiederum zu R-F_4 (s. Abschn. XII). Der dritte Fall spaltet sich abermals in drei Unterfälle:

(IIγ_1) Alle drei $\bar{g}$ koinzidieren und bilden eine dreifache Gerade $\bar{\bar{g}}$;

(IIγ_2) Zwei der $\bar{g}$ sind windschief und werden von der dritten getroffen;

(IIγ_3) Alle drei $\bar{g}$ treffen sich in einem Punkte, der dann ein dreifacher Punkt D_3 der F_4 ist.

Die beiden ersten Fälle ergeben wiederum nur R-F_4 (s. Abschn. XII). Im dritten Falle wird die F_4 von allen ∞^2 T in C_2-Paaren getroffen; es ist das der *einzige* Fall, wo ∞^2 H existieren (s. Abschn. VII). Der Gleichung einer solchen F_4 läßt sich die Gestalt geben

(IIγ) $$F_4 \equiv Aq^2r^2 + Br^2p^2 + Cp^2q^2 + 2Dpqrs = 0.$$

Hierbei sind die drei $\bar{g}$ die Schnittlinien der drei Ebenen p, q, r.

Zweiter Unterfall (II$_2$): „Die Schar der H geht durch einen festen D_2."

Dann erfüllen die beiden veränderlichen D_2 eine $\bar{C}_2$; alle H = T durch den festen D_2 schneiden C_2-Paare aus.

Die zugehörige F_4-Gleichung ergibt sich, wenn man in (I): $\varphi^2 - 4p^2\psi = 0$, die beiden Flächen 2. Ordnung φ und ψ so wählt, daß ψ ein Kegel wird, dessen Spitze auf φ liegt, und so den festen D_2 liefert, die obigen T sind zugleich die des Kegels ψ.

NB. Man könnte auch den Kegel der Flächentangenten im D_2 als einen solchen ansehen, dessen T zugleich solche der F_4 sind. Indessen fallen deren Berührungspunkte alle in den D_2 selbst; jede der ausgeschnittenen c_4 hat daselbst eine Spitze und noch zwei weitere d_2, bleibt aber irreduzibel.

Dritter Unterfall (II$_2'$): „Die Schar H = T geht durch zwei feste D_2"

Durch jeden Raumpunkt P gehen ∞^1 H = T, die einen Kegel 6. Ordnung K_6 umhüllen, der auch die F_4 umhüllt. Rückt der Punkt P auf die F_4 selbst, so reduziert sich der K_6 auf einen K_4, und liegt endlich P speziell auf einer der drei $\bar{g}$, so reduziert sich der K_4 auf einen K_2. Diese F_4 hat *J. Steiner* — in Rom, daher auch der Name „Römische Fläche" — gefunden, aber nichts darüber veröffentlicht, sondern nur eine Konstruktion der Flächen *K. Weierstraß* mitgeteilt.

Letzterer[24]) hat daraufhin eine explizite Darstellung der Fläche gegeben, so daß die homogenen Koordinaten eines Flächenpunktes beliebige quadratische Formen in drei homogenen Parametern werden.

Merkwürdigerweise meint *Kummer*, dem die Methode der Abbildung von Flächen ferner lag, daß sich aus dieser Darstellung der Fläche die wesentlichen Eigenschaften nur schwer würden ableiten lassen (s. jedoch Abschn. VII).

Noch ist zu erwähnen, daß die Verbindungsgerade der beiden D_2 auf der F_4 liegen kann; im übrigen bietet dieser Fall nichts Beachtenswertes.

9. Dritter Hauptfall (III): Die H sind vom Typus T_2. Die F_4 mit Doppelkegelschnitt $\overline{C}_2$. Die fünf Kummerschen Kegel. Eine solche T_2 geht noch durch zwei D_2 der F_4. Die Schar der $\mathsf{H} = \mathsf{T}_2$ kann nicht durch einen festen Punkt gehen, also sind beide D_2 veränderlich und erfüllen eine $\overline{C}_2$, und umgekehrt. Es gilt also:

„Eine F_4 mit $\overline{C}_2$ wird von allen T_2 in C_2-Paaren geschnitten."

Die Gleichung einer solchen F_4 mit $\overline{C}_2$ war bereits unter (I) aufgestellt:

$$\text{(III)} \qquad F_4 \equiv \varphi^2 - 4p^2\psi = 0.$$

Diese läßt sich sofort auch in die Gestalt bringen

$$\text{(III')} \qquad \begin{aligned} F_4 &\equiv (\varphi + 2\lambda p^2)^2 - 4p^2(\psi + \lambda\varphi + \lambda^2 p^2) \\ &\equiv \varphi_\lambda - 4p^2\psi_\lambda = 0, \end{aligned}$$

unter λ einen Parameter verstanden, und wo φ_λ und ψ_λ zur Abkürzung dienen.

Die Flächen ψ_λ berühren die F_4 je längs einer C_4. Bestimmt man im besonderen λ so, daß ψ_λ ein Kegel K_2 wird, so umhüllt ein solcher K_2 die F_4 doppelt, so daß jede T des K_2 die F_4 in zwei verschiedenen Punkten berührt, und damit ein C_2-Paar ausschneidet. Wie man leicht erkennt, ist die fragliche Bedingung $f_5(\lambda) = 0$ für λ von der 5. Ordnung. Somit gilt:

„Es gibt im allgemeinen für eine F_4 mit $\overline{C}_2$ fünf Kegel K_2, deren T die F doppelt berühren und aus ihr C_2-Paare ausschneiden; man erhält damit die Gesamtheit der auf der F_4 gelegenen C_2."

Das sind die fünf, später nach *Kummer* benannten Kegel.

Sonderfälle. Für eine imaginäre Wurzel von $f_5(\lambda) = 0$ wird auch die Schar der zugehörigen T imaginär. Im Falle einer Doppelwurzel treten an Stelle der zwei Scharen von T_2 zwei singuläre T der F_4,

---

24) *K. Weierstraß,* J. f. Math. 64 (1865), p. 77. Vgl. die synthetischen Ergänzungen von *H. Schroeter,* ib. p. 79.

die sie längs der $\overline{C}_2$ berühren, oder aber eine Schar von T_2, die durch einen festen D_2 gehen.

Hat im besonderen, wie im ersten Hauptfalle, die F_4 noch ein oder zwei Paare von D_2 — deren Verbindungsgeraden die $\overline{C}_2$ je nicht treffen — so bleiben von den fünf Scharen von T_2 nur drei resp. eine übrig; die anderen werden zu singulären T.

So hat bei der *Dupin*schen Zyklide Z_0 (I_2''') die $f_5(\lambda) = 0$ zwei Paare gleicher Wurzeln, denen die vier singulären T entsprechen; dagegen liefert die fünfte Wurzel wieder einen eigentlichen K_2, dessen T C_2-Paare ausschneiden.

Diese letzteren erweisen sich nach *H. A. Schwarz*[25]) als Kreise, so daß die Zyklide Z_0 sogar auf vier verschiedene Arten durch einen beweglichen (veränderlichen) Kreis erzeugbar ist.

Was endlich die R-F_4 anbelangt (s. Abschn. XII), so enthalten deren T_2 zwei erzeugende Gerade, schneiden also noch eine C_2 aus, die im besonderen wieder in ein g-Paar zerfallen kann.

Faßt man das Wesentliche zusammen, so führen die eigentlichen F_4 mit Scharen von C_2 — abgesehen von R-F_4 — auf folgende vier bemerkenswerte Typen:

a) F_4 mit (evtl. auch zerfallender) $\overline{C}_2$, die noch mit 1 bis $4 D_2$ behaftet sein kann;

b) F_4 mit einer $\overline{g}$;

c) F_4 mit zwei Selbstberührungspunkten;

d) die *Steiner*sche F_4.

III. Die F_4 mit Doppelkegelschnitt.

10. Die Abbildung der F_4 auf eine Ebene nach Clebsch. Die 16 Geraden auf der F_4. Unter den von *Kummer* aufgefundenen F_4 haben sich die mit Doppelkegelschnitt $\overline{C}_2$ als die bedeutsamsten erwiesen Dieser Gattung von F_4 ist daher der größte Teil der Literatur gewidmet, die sich überhaupt mit F_4 beschäftigt. Es wird daher ein näheres Eingehen auf diese F_4 gerechtfertigt sein. Wenn auch der metrische Sonderfall der Zykliden (s. Abschn. IV) lange vorher bekannt war, so hat auf die allgemeinen F_4 mit einem Doppelkegelschnitt $\overline{C}_2$, nebst einigen ihrer Unterarten, doch erst *E. E. Kummer* (s. Nr. 8) hingewiesen, als solche F_4, auf denen gewisse Scharen von C_2 liegen.

25) Nach einer Mitteilung von *H. A. Schwarz* an *Kummer*. Das Ergebnis folgt übrigens unmittelbar aus der Definition der Zyklide Z_0. Denn die fraglichen Paare von C_2, die durch die T des fünften K_2 aus der F_4 ausgeschnitten werden, treffen den Doppelkegelschnitt K je zweimal, sind also Kreise.

Die *Kummer*schen Ergebnisse werden im folgenden, bei Vergleichung mit anderen weitergehenden, unter neuen Gesichtspunkten wieder erscheinen.

Die erste systematische Untersuchung der F_4 mit $\bar{C}_2$ rührt von *A. Clebsch*[26]) her. Er stützt sich — im Anschluß an die von ihm früher (s. Art. „F_3“, Nr. **11**) durchgeführte (1, 1)-deutige Abbildung der allgemeinen F_3 auf eine Hilfsebene $\varDelta$ — auf eine analoge Abbildung. Unter Beschränkung auf den Fall einer F_4 mit einer reellen, irreduzibeln $\bar{C}_2$ geschieht deren Abbildung dadurch, daß den ebenen Schnitten c_4 der F_4 — die in den beiden Schnittpunkten mit der $\bar{C}_2$ zwei d_2 besitzen, also elliptisch sind — die c_3 eines Gebüsches G mit fünf Grundpunkten („Fundamentalpunkten“) A_r $(r = i, k, l, m, n)$ entsprechen, und umgekehrt.

Sind also $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ drei homogene Parameter, die als Punktkoordinaten in der Ebene $\varDelta$ gedeutet werden, und $f_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = f_i(\lambda)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ vier beliebige (linear unabhängige) ternäre kubische Formen mit fünf gemeinsamen Verschwindungsstellen A, so lautet die Abbildung

$$(1) \qquad \varrho x_i = f_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = f_i(\lambda).$$

In der Tat entspricht so der Gesamtheit der Ebenen $(ux) = 0$ und ihren Schnitten mit der F_4 ein Gebüsch G: $(uf) = 0$ von c_3 mit fünf Grundpunkten A. Da sich irgend zwei Individuen von G noch in vier variierenden Punkten treffen, so entsprechen letztere den vier Schnittpunkten der F_4 mit einer Geraden, und vice versa. Umgekehrt weist *Clebsch* nach, daß sich irgendeine F_4 obiger Art auf diese Weise abbilden läßt. Es ist nützlich, den Unterschied dieser Abbildung von der der F_3 hervorzuheben.

Bei letzterer bildeten sich die ∞^3 ebenen Schnitte ab auf das Gebüsch G' der c_3 durch sechs Grundpunkte A_t $(t = i, k, l, m, n, p)$ die umgekehrt das Gebüsch G' eindeutig bestimmen.

Hieraus ließen sich Existenz und Eigenschaften der auf der F_3 liegenden $C_1, C_2, C_3, \ldots$ nebst ihren Schnittpunkten und Konfigurationen ablesen.

Reduziert man die Figur in der Ebene $\varDelta$, indem man irgendeinen der sechs Fundamentalpunkte A von G', etwa A_p, wegläßt, so daß ein Gebüsch G von c_3 durch die fünf Punkte $A_i, \ldots, A_n$ übrigbleibt, so ist man in der Lage, Inzidenzsätze für C auf der F_3 in entsprechende auf der F_4 überzuführen. Andererseits beachte man,

26) *A. Clebsch,* J. f. Math. 69 (1867), p. 142, nebst einer Note, enthaltend den Beweis eines Hilfssatzes über Funktionaldeterminanten, ib. p. 355.

daß durch fünf Punkte A vorab eine ∞^4-lineare Schar von c_3 geht. Um von dieser Schar zu einem Gebüsch G zu gelangen, hat man die Koeffizienten aller in der Schar auftretenden c_3-Formen ein und derselben linearen Relation mit konstanten Koeffizienten zu unterwerfen.

Oder auch, geometrisch gesprochen, man adjungiere der Figur der fünf Punkte A eine beliebig, aber festgewählte Kurve 3. Klasse γ_3 und lege den c_3 durch die fünf A die Bedingung auf, zu dieser γ_3 apolar zu sein.

Ist irgendeine der c_3 durch die fünf A symbolisch dargestellt durch $(ax)^3 = 0$, die γ_3 durch $(\gamma u)^3 = 0$, so lautet die fragliche Bedingung $(a\gamma)^3 = 0$, d. h. die bilineare Invariante von c_3 und γ_3 verschwindet.

Vermöge dieser Apolaritätsanschauung lassen sich manche der *Clebsch*schen Überlegungen einfacher und durchsichtiger gestalten und gestatten überdies, den Ergebnissen eine gewisse Abrundung zu verleihen.

In Analogie zur Theorie der F_3 seien die zehn Verbindungsgeraden (A_r, A_s) mit c_{rs} und der Verbindungskegelschnitt der fünf Punkte A mit $B_p = B$ bezeichnet.

Hieraus folgt sofort, daß auf der F_4 genau 16 Gerade g liegen.

Den 5 Fundamentalpunkten A_r entsprechen 5 Gerade a_r so, daß irgendein Linienelement durch A_r sich eineindeutig abbildet auf ein solches der Geraden a_r.

Den 10 Geraden c_{rs} entsprechen 10 Gerade, die ebenfalls mit c_{rs} bezeichnet seien. Endlich ist das Bild des Kegelschnitts $B_p = B$ eine letzte Gerade $b_p = b$.

Diese 16 Geraden g auf der F_4 sind gleichberechtigt und werden daher von *Clebsch* durch die Ziffern $1, 2, \ldots, 16$ unterschieden. Da aber durch die Abbildung eine der Geraden, nämlich $b_p = b$, bevorzugt wird, erscheint die oben gewählte Bezeichnung zweckmäßiger. In der Tat sind die Tabellen, die *Clebsch* u. a. von den Vieren und Doppelvieren (s. u. Nr. **11**) aufstellt, wenig durchsichtig.

Das Kriterium windschiefer und inzidenter g-Paare läßt sich der Abbildung sofort entnehmen. Windschief sind g-Paare der Typen (a_i, a_k), (a_i, c_{kl}), (b, c_{ik}), (c_{ik}, c_{il}); solcher „Dupel" oder „Zweien" gibt es 80.

Inzident sind g-Paare der Typen (a_i, b), (a_i, c_{ik}), (c_{ik}, c_{lm}); solcher „Inzidenzpaare" gibt es 40.

Als Kontrolle diene, daß sich aus den $16\,g$ im ganzen $\binom{16}{2} = 120 = 80 + 40$ Paare bilden lassen.

Im einzelnen hat man von „Dupeln" 10 des Typus (a_i, a_k), 30 vom Typus (a_i, c_{kl}), 10 vom Typus (b, c_{ik}) und 30 vom Typus (c_{ik}, c_{il}); andererseits von Inzidenzpaaren 5 vom Typus (a_i, b), 20 vom Typus (a_i, c_{ik}) und 15 vom Typus (c_{ik}, c_{lm}).

Weiter liest man den Satz ab: „Jede der 16 g wird von genau 5 der anderen getroffen." So trifft

$$\left\{\begin{array}{llll} a_i & \text{die Geraden} & b, c_{ik}, c_{il}, c_{im}, c_{in}; \\ b & \text{,,} & \text{,,} \quad a_i, a_k, a_l, a_m, a_n; \\ c_{ik} & \text{,,} & \text{,,} \quad a_i, a_k, c_{lm}, c_{ln}, c_{mn}. \end{array}\right.$$

Umgekehrt sind dies die 16 einzigen „Quintupel" oder „Fünfen" windschiefer g, die also je eine gemeinsame, der F_4 angehörige Transversale besitzen. Sie seien kurz mit „5" bezeichnet.

11. Die Vieren und Doppelvieren. Für die weitere Theorie der F_4 mit $\overline{C}_2$ sind von Bedeutung die aus den 16 g herstellbaren windschiefen „Quadrupel" oder „Vieren", die kurz mit „4" bezeichnet seien. Diese zerlegen sich in zwei verschiedene Arten oder Gruppen; bei der ersten, den „4_1", existiert stets noch eine weitere g, die sie zu einer „5" ergänzt, bei der zweiten, der „4_2", nicht.

Man ordne die „4" in einer Tabelle, etwa nach der Anzahl der je auftretenden a.

In der ersten Spalte steht die Abzählnummer; in der zweiten die jeweils zu einer „5" ergänzende g (die also bei den Typen „4_2" fehlt); in der dritten Spalte die vier Elemente der „4"; in der vierten der Typus; in der letzten die Anzahl.

Dann hat man die Tabelle (I):

I.

1	2	3	4	5
1	a_n	$a_i\ a_k\ a_l\ a_m$	4_1	5
2	—	$a_i\ a_k\ a_l\ c_{mn}$	4_2	10
3	c_{mn}	$a_i\ a_k\ c_{lm}\ c_{ln}$	4_1	30
4a	—	$a_i\ c_{kl}\ c_{km}\ c_{kn}$	4_2	20
4b	c_{in}	$a_i\ c_{kl}\ c_{km}\ c_{kn}$	4_1	20
5a	c_{in}	$b\ c_{ik}\ c_{il}\ c_{im}$	4_1	20
5b	—	$b\ c_{ik}\ c_{il}\ c_{kl}$	4_2	10
6	a_i	$c_{ik}\ c_{il}\ c_{im}\ c_{in}$	4_1	5

Diese Vieren „4_1" und „4_2" lassen sich wiederum je in Paare von Doppelvieren „$\overline{4}$" zusammenfassen. Bei der ersteren Gruppe (A_1) treten immer zwei Typen von „4_1" zusammen, so daß jede g der einen Vier die in derselben Spalte stehende g der zweiten Vier trifft, dagegen zu deren drei anderen g windschief ist. Bei der zweiten Gruppe (A_2) treten immer zwei Typen von „4_2“ so zusammen, daß sich die obige Regel gerade umkehrt: jede g der einen Vier ist windschief zu der in derselben Spalte stehenden g der zweiten Vier, trifft aber deren drei andere g. Die Gruppe (A_1) enthält 40 Doppelvieren und weist drei Untertypen (A_1'), (A_1''), (A_1''') auf; die Gruppe (A_2) enthält 20 Doppelvieren mit zwei Untertypen (A_2'), (A_2'').

In beiden Tabellen gibt die erste Spalte den Untertypus an, die zweite das zugehörige Paar von Nummern der Tabelle (I), die dritte das Paar der Doppelvieren, die vierte die beiden je inzidenten Transversalen, endlich die fünfte die Anzahl.

Dann sind die beiden Tabellen die folgenden:

(A_1)

1	2	3	4	5
(A_1')	1	$a_i \; a_k \; a_l \; a_m$	b	5
	6	$c_{in} \; c_{kn} \; c_{ln} \; c_{mn}$	a_n	
(A_1'')	3	$a_i \; a_k \; c_{lm} \; c_{ln}$	c_{ik}	15
	3′	$c_{li} \; c_{lk} \; a_m \; a_n$	c_{mn}	
(A_1''')	4 b	$a_n \; c_{lm} \; c_{km} \; c_{kl}$	a_i	20
	5 a	$b \; c_{ik} \; c_{il} \; c_{im}$	c_{in}	

(A_2)

1	2	3	4	5
(A_2')	4 a	$a_i \; c_{kl} \; c_{km} \; c_{kn}$	—	10
	4 a′	$a_k \; c_{il} \; c_{im} \; c_{in}$	—	
(A_2'')	2	$a_i \; a_k \; a_l \; c_{mn}$	—	10
	5 b	$c_{kl} \; c_{il} \; c_{ik} \; b$	—	

Die Gruppe (A_1) der „$\bar{4}_1$“ läßt sich auch dadurch charakterisieren, daß jede „4_1“ eines Paares eine der F_4 angehörige Transversale (in der vorletzten Spalte) besitzt, so daß diese beiden Transversalen ein Inzidenzpaar bilden, von denen die eine die g der einen „4_1“ trifft, die der anderen nicht. Gemäß dieser Regel sind die 40 „$\bar{4}_1$“ der Gruppe (A_1) den 40 Inzidenzpaaren von g (1, 1)-deutig zugeordnet.

Dagegen besitzt keine der beiden „4_2“ eines Paares der Gruppe (A_2') eine auf der F_4 gelegene Transversale.

Innerhalb der Gruppe (A_1) lassen sich wiederum zwei „$\bar{4}_1$“ derart zusammenfassen, daß sie gerade alle $16\,g$ erschöpfen; zwei solche „$\bar{4}_1$“ heißen „komplementär“ und bilden zusammen eine „Doppelacht $\bar{8}$“, so daß von letzteren fünf existieren. Zu jeder „$\bar{4}_1$“ in (A_1) gehören vier komplementäre.

Auch dies mag im einzelnen bestätigt werden. Zu irgendeiner „$\overline{4}_1$“ von (A_1'), z. B.

$$\begin{vmatrix} a_i & a_k & a_l & a_m \\ c_{in} & c_{kn} & c_{ln} & c_{mn} \end{vmatrix},$$

gehören vier komplementäre des Typus (A_1'''), die durch die Indizes i, k, l, m unterschieden seien:

$$(i)\begin{vmatrix} b & c_{ik} & c_{il} & c_{im} \\ a_n & c_{im} & c_{km} & c_{kl} \end{vmatrix}, \quad (k)\begin{vmatrix} b & c_{ki} & c_{kl} & c_{km} \\ a_n & c_{lm} & c_{im} & c_{il} \end{vmatrix},$$

$$(l)\begin{vmatrix} b & c_{li} & c_{lk} & c_{lm} \\ a_n & c_{km} & c_{im} & c_{ik} \end{vmatrix}, \quad (m)\begin{vmatrix} b & c_{mi} & c_{mk} & c_{ml} \\ a_n & c_{kl} & c_{il} & c_{ik} \end{vmatrix}.$$

Desgleichen gehören zu jeder „$\overline{4}_1$“ von (A_1''), z. B.

$$\begin{vmatrix} a_i & a_k & c_{kl} & c_{km} \\ c_{ni} & c_{nk} & a_l & a_m \end{vmatrix},$$

vier komplementäre des Typus (A_1'''), nämlich eben die oben angegebenen. Endlich gehören zu irgendeiner „$\overline{4}_1$“ von (A_1'''), z. B.

$$\begin{vmatrix} b & c_{ik} & c_{il} & c_{im} \\ a_n & c_{lm} & c_{km} & c_{nl} \end{vmatrix},$$

vier komplementäre derart, daß eine vom Typus (A_1') ist, die drei anderen vom Typus (A_1''):

$$(A_1')\begin{vmatrix} a_i & a_k & a_l & a_m \\ c_{in} & c_{kn} & c_{ln} & c_{mn} \end{vmatrix},$$

$$(A_1'')\begin{vmatrix} a_i & a_k & c_{lm} & c_{mn} \\ c_{in} & c_{kn} & a_l & a_m \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_i & a_l & c_{kn} & c_{mn} \\ c_{in} & c_{ln} & a_k & a_m \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_i & a_m & c_{kn} & c_{ln} \\ c_{in} & c_{mn} & a_k & a_l \end{vmatrix}.$$

Einfacher gestaltet sich eine solche Zusammenfassung von „$\overline{4}_2$“ in der Gruppe (A_2).

Zu irgendeinem Paar von (A_2'), z. B.

$$\begin{vmatrix} a_i & c_{kl} & c_{km} & c_{kn} \\ a_k & c_{il} & c_{im} & c_{in} \end{vmatrix},$$

gehört als *einzige* komplementäre eine in (A_2'') enthaltene

$$\begin{vmatrix} a_l & a_m & a_n & c_{ik} \\ c_{mn} & c_{ln} & c_{lm} & b \end{vmatrix},$$

und vice versa.

Man hat also im ganzen in (A_2) zehn solcher Paare von „$\overline{4}_2$“.

Diese Konfigurationen der $16\,g$ nebst verwandten verfolgt weiter *J. Pereno.*[27])

27) *J. Pereno,* Ann. di mat. (2) 21 (1893), p. 57.

Andererseits hat *L. Berzolari*[28]) — nach vorgängiger Untersuchung der Gruppierung der $16\,g$, im Zusammenhange mit den fünf *Kummer*schen Kegeln (s. Nr. 9) — windschiefe Vierseite V aus den $16\,g$ gebildet, derart, daß vier solcher V alle g erschöpfen; sie bilden dann eine „Quaterne" Q.

Solcher Q gibt es drei Arten:

1. die 16 Ebenen E der V einer Q „erster" Art Q_1 zerlegen sich in zwei Gruppen von acht, die je durch einen „*Kummer*schen Punkt" (d. i. Spitze eines *Kummer*schen Kegels) gehen;

2. die 16 E der zweiten Art, Q_2, teilen sich in drei Gruppen von resp. 8, 4, 4; wiederum gehen die E jeder Gruppe durch einen *Kummer*schen Punkt;

3. die 16 E der dritten Art, Q_3, zerlegen sich in eine Gruppe von acht durch einen *Kummer*schen Punkt, und vier Paare, deren Schnittgerade je durch einen der vier weiteren *Kummer*schen Punkte laufen.

Im ganzen gibt es 110 Q: 10 Q_1, 60 Q_2 und 40 Q_3.

Die Verbindungsebene H von zwei inzidenten g ist eine dreifache Tangentialebene T_2, deren es also 40 gibt (s. auch Nr. **10**). Aus ihnen lassen sich 708 Oktaeder herstellen, derart, daß die H eines jeden alle $16\,g$ enthalten. Die verschiedenen Arten dieser Oktaeder werden in Beziehung gesetzt zu den fünf *Kummer*schen Punkten. Aus den $16\,g$ werden auch noch andere Vielseite gebildet.

Hieran schließen sich zwei perspektive Erzeugungen der F_4, die beide zu einer Konstruktion der $16\,g$ führen.

12. Die Kegelschnitte auf der F_4. Wir kehren zurück zur Abbildung der F_4 und suchen die Bilder der auf der F_4 gelegenen Kegelschnitte C_2.

Der Doppelkegelschnitt $\overline{C}_2$ selbst bildet sich ersichtlich ab als ein ausgezeichnetes, mit c_3' bezeichnetes Individuum des Gebüsches G, derart, daß jedem Punkte P der $\overline{C}_2$ ein Punktepaar (Q_1', Q_2') auf c_3' entspricht; die Geraden (Q_1', Q_2') laufen alle durch einen ausgezeichneten Punkt Q_0' der c_3'. Weiteres s. u.

Abgesehen von der $\overline{C}_2$ gibt es noch ∞^1 C_2 auf der F_4. Da die Ebene E einer solchen C_2 noch einen zweiten Kegelschnitt C_2' ausschneidet, sind stets zwei solche C_2 als „komplementäre" (oder „koplanare") einander zugeordnet.

Der Gesamtschnitt (C_2, C_2') einer solchen Ebene E mit der F_4 läßt sich als eine zerfallende c_4 mit vier d_2 ansehen. Von diesen fallen zwei in die Schnittpunkte von E mit der $\overline{C}_2$, sind also D_2 der

28) *L. Berzolari,* Ann. di mat. (2) 13 (1885), p. 81.

Fläche, während die beiden anderen die Berührungspunkte einer die F_4 zweimal berührenden Tangentialebene $\mathsf{E} = \mathsf{T}_2$ sind; umgekehrt schneidet jede der ∞^1 T_2 der F_4 zwei komplementäre C_2 aus (s. auch *Kummer* in Nr. **6**). Somit gilt der Satz:

„Die ∞^1 T_2 einer F_4 mit $\overline{C}_2$, und nur diese, schneiden aus der Fläche C_2-Paare aus.“

Das Bild eines solchen C_2-Paares ist offenbar eine solche $c_3^{(i)}$ im Gebüsche G, die zerfällt in irgendeine $c_1^{(i)}$ durch je einen Fundamentalpunkt A_i, und eine, jener $c_1^{(i)}$ (1, 1)-deutig zugeordnete $c_2^{(i)}$ durch die übrigen A.

Man beachte, daß eine $c_1^{(i)}$ genau acht von den Bildkurven der $16\,g$ der F_4 je einmal trifft, während die übrigen acht von der zugeordneten $c_2^{(i)}$ je einmal getroffen werden; das entsprechende gilt also von dem C_2-Paare auf F_4. Denn die $c_1^{(i)}$ geht durch A_i, trifft den Kegelschnit $B_p = B$ noch in einem Restpunkte und überdies die sechs Geraden $c_{kl}, c_{km}, c_{kn}, c_{lm}, c_{ln}, c_{mn}$; dagegen geht $c_1^{(i)}$ nicht durch A_k, A_l, A_m, A_n und trifft die vier übrigen c-Geraden je nur in einem dieser A. Und gerade umgekehrt verhält es sich mit der $c_2^{(i)}$.

Vergleicht man dies mit der Gruppe (A_1) (s. Nr. **11**) der Doppelvieren „$\overline{4}_1$“, so sieht man, daß jede der beiden obigen „Achten“ gerade ein Paar komplementärer „$\overline{4}_1$“ liefern, die alle $16\,g$ erschöpfen.

Nun war je ein Paar $(c_1^{(i)}, c_2^{(i)}) = c_3^{(i)}$ das Bild eines in zwei C_2 zerfallenden ebenen Schnittes c_4 der F_4. Die Koeffizienten aller dieser ∞^1 $c_3^{(i)}$-Formen genügen daher (s. oben) ein und derselben linearen Relation mit konstanten Koeffizienten. Seien λ, μ die Parameter der beiden Büschel (c_1) und (c_2) — der Index i werde jetzt unterdrückt —, so ist die Gleichung der $c_3 = c_3(\lambda, \mu)$ von der Gestalt

$$(2) \qquad c_3 \equiv c_3(\lambda, \mu) \equiv (c_1 + \lambda c_1')(c_2 + \mu c_2') = 0.$$

Somit sind die beiden Büschel projektiv aufeinander bezogen; man darf diese Zuordnung so normieren, daß sie die Gestalt $\lambda - \mu = 0$ erhält. Versteht man dann unter c_1, c_1', c_2, c_2' geeignete Individuen beider Büschel, so lautet die Zuordnung einfach

$$(2') \qquad c_1 + \lambda c_1' = 0, \quad c_2 + \lambda c_2' = 0.$$

Im besonderen hat man die drei zugeordneten Paare $\lambda = 0$), c_1 und c_2; $\lambda = \infty$), c_1' und c_2'; $\lambda = 1$), $c_1 + c_1'$ und $c_2 + c_2'$.

Diesen drei Paaren zerfallender c_3 in G entsprechen drei ebene Schnitte der F_4, deren Ebenen analog mit E_0, E_∞, E_1 bezeichnet seien, so daß man die Zuordnungen hat

$$c_1 c_2 \leftrightarrow \mathsf{E}_0, \quad c_1' c_2' \leftrightarrow \mathsf{E}_\infty, \quad (c_1 + c_1')(c_2 + c_2') \leftrightarrow \mathsf{E}_1.$$

Hierbei beachte man noch, daß

$$(c_1 + c_1')(c_2 + c_2') \equiv c_1 c_2 + c_1' c_2' + (c_1 c_2' + c_2 c_1').$$

Damit hat man als vierte Zuordnung für eine gewisse Ebene E'

$$c_1 c_2' + c_2 c_1' \leftrightarrow \mathsf{E}',$$

wo die vier E-Formen an die Identität geknüpft sind

$$\mathsf{E}' \equiv \mathsf{E}_1 - \mathsf{E}_0 - \mathsf{E}_\infty.$$

Multipliziert man andererseits die rechte Seite von (2) aus, so gilt

(2) $$c_3(\lambda, \mu) \equiv c_1 c_2 + \lambda(c_1 c_2' + c_2 c_1') + \lambda^2 c_1' c_2' = 0.$$

Mithin lautet die entsprechende Ebenenrelation

(2a) $$\mathsf{E}_0 + \lambda \mathsf{E}' + \lambda^2 \mathsf{E}_\infty = 0.$$

Diese ∞^1 Ebenen E umhüllen daher einen Kegel K_2 mit der expliziten Gleichung

(2a') $$K_2 \equiv 4\,\mathsf{E}_0 \mathsf{E}_\infty - \mathsf{E}'^2 = 0.$$

Hinterher kann man überall den Index i wieder hinzufügen, so daß zu jedem der fünf Fundamendalpunkte A ein solcher Kegel K_2 gehört. Das sind ersichtlich die fünf *Kummer*schen Kegel K_2 (s. Nr. 9).

Weiter bemerke man, daß die beiden projektiv zugeordneten Büschel (2) von c_1 und c_2 als Ort ihrer Paare von Schnittpunkten eine c_3 erzeugen mit der Gleichung

(3) $$c_3 \equiv c_1 c_2' - c_2 c_1' = 0.$$

Diese c_3 ist das Bild einer C_4, längs deren ein Büschel von F_2 die F_4 berührt. Faßt man zusammen, so hat man den Satz:

„Innerhalb des Gebüsches G ist für jeden der fünf Fundamentalpunkte A sein Strahlbüschel (c_1) dem c_2-Büschel (c_2), mit den vier übrigen A als Grundpunkten, projektiv zugeordnet. Je zwei dadurch einander zugeordnete ‚komplementäre' Individuen c_1, c_2 sind die Bilder von zwei ‚komplementären' (‚koplanaren') auf der F_4 gelegenen C_2, und deren Ebenen umhüllen je einen der fünf *Kummer*schen Kegel K_2.

Diese ∞^1 Ebenen sind zweimal berührende Tangentialebenen T_2 der F_4, und deren ∞^1 Paare von Berührungspunkten durchlaufen eine C_4 — das Bild der aus der projektiven Zuordnung der (c_1)- und (c_2)-Büschel hervorgehenden c_3 —, längs deren ein Büschel von F_2 die F_4 berührt. Damit sind zugleich alle C_2 auf der F_4 erschöpft."

Durch das obige ist eine längere Entwicklung bei *Clebsch* wesentlich gekürzt.

Nunmehr betrachten wir genauer die schon oben erwähnte c_3' in G, das Bild des Doppelkegelschnitts $\bar{C}_2$ auf der F_4. Man führe mit

Clebsch auf der c_3' ein geeignet normiertes elliptisches Integral[29]) 1. Gattung u als Argument (oder Parameter) ein. Die fünf Grundpunkte A_i mögen die Argumente u_i erhalten, mit $\sum u_i = s$. Weiterhin mögen die Argumente ausgezeichneter Punkte der c_3' in Klammern beigefügt werden.

Man betrachte zunächst den Kegelschnitt $B_p = B$, das Bild der Geraden $b_p = b$ auf der F_4. Durch b lege man das Ebenenbüschel $\mathsf{E}(b)$. Jede Ebene E desselben trifft die $\overline{C}_2$ in zwei Punkten, von denen der eine, der Inzidenzpunkt P_b $(\overline{C}_2, b)$ von $\overline{C}_2$ und b, fest ist, während der andere, P, mit E variiert. Jeder dieser beiden Punkte ist das Bild eines Punktepaares (Q_1', Q_2') auf c_3'.

Das Bild der Schnitte von $\mathsf{E}(b)$ mit der F_4 ist im G ein c_3-Büschel; dessen Individuen zerfallen aber in den festen Kegelschnitt B und eine variable c_1. Nach dem Apolaritätsprinzip bilden diese c_1 selbst ein Büschel mit einem festen Zentrum $B_0'(u_0')$ auf c_3'.

Andererseits trifft c_3' den Kegelschnitt B in einem Restpunkt $B_0\,(u_0 \equiv -s)$. Mithin ist das Bild von P_b (auf $\overline{C}_2$) das Punktepaar (B_0, B_0') auf c_3'. Folglich ist das Bild des laufenden Punktes P (auf $\overline{C}_2$) ein variierendes Punktepaar (Q_1', Q_2') auf c_3', derart, daß alle Geraden $(Q_1'\,Q_2') = (u, u')$ durch das feste Zentrum B_0' laufen.

Im besonderen muß, für $P = P_b$, die Gerade (B_0, B_0') aus der c_3' den Restpunkt B_0' ausschneiden, d. h. die Tangente t_0' von c_3' in B_0', geht durch B_0. Man hat also $u_0 + 2u_0' \equiv 0$. Der reelle Punkt u_0' kann daher nur eines der beiden Argumente $\frac{s}{2}$, $\frac{s}{2} + \frac{\omega}{2}$ besitzen. Die Normierung von u darf dahin getroffen werden, daß u_0' den Wert $\frac{s}{2}$ erhält.

Überdies geht aus obigem hervor, daß jedes Individuum c_3 in G die c_3' in zwei Punktepaaren (Q_1', Q_2'), (Q_1'', Q_2'') trifft, so daß die Geraden (Q_1', Q_2') und (Q_1'', Q_2'') durch das Zentrum B_0' laufen.

Markiert man umgekehrt auf c_3' zwei beliebige Punkte Q_1', Q_1'', so ergänzen sich diese vermöge der Geraden $(Q_1'B_0')$, $(Q_1''B_0')$ durch zwei Restpunkte Q_2', Q_2''. Die neun Punkte A_i, (Q_1', Q_2'), (Q_1'', Q_2'') sind die Grundpunkte eines c_3-Büschels in G, das dem Ebenenbüschel durch die beiden Bildpunkte P_1, P_2 auf $\overline{C}_2$ entspricht.

Dies dehnt sich ohne weiteres aus auf den Schnitt der F_4 mit

29) S. die systematische Untersuchung von *A. Harnack*, Math. Ann. 9 (1875), p. 1. Im Texte ist die Normierung von u so getroffen, daß das *Abel*sche Theorem für die $3k$ Schnittpunkte u_i $(i = 1, 2, \ldots, 3k)$ der c_3 mit einer c_k die Gestalt annimmt $\sum u_i \equiv 0$ (mod. ω, ω'), unter ω, ω' die reelle resp. rein imaginäre Periode von u verstanden.

Flächen beliebiger Ordnung. Als Muster diene eine F_2, die aus der $\overline{C}_2$ vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 ausschneide und aus der F_4 eine C_8. Die Bilder der vier Punkte P_i $(i = 1, \ldots, 4)$ sind vier Punktepaare (Q_i', Q_i'') auf c_3', so daß die vier Geraden (Q_i', Q_i'') durch B_0' gehen. Das Bild der C_8 ist eine $c_6 = c_6^{(5)}$ vom Geschlecht Fünf mit d_2 in den A, die die c_3' noch in den vier Punktepaaren (Q_i', Q_i'') trifft. Und umgekehrt.

Im besonderen kann die Bild-c_6 in zwei c_3 durch die A zerfallen, die im allgemeinen *nicht* in G enthalten sind; die C_8 auf der F_4 zerfällt dann in zwei C_4. Es gilt also:

„Eine nicht in G enthaltene c_3 ist das Bild einer C_4 auf F_4. Zwei solche c_3 zusammen sind das Bild eines C_4-Paares auf der F_4, das dann und nur dann von einer F_2 ausgeschnitten wird, wenn die vier Verbindungsgeraden der je vier Restpunkte der beiden c_3 auf c_3' durch B_0' gehen."

Analog verfahre man mit den zehn Geraden c_{ik} in der Bildebene nebst ihren Bildgeraden c_{ik} auf F_4.

Sei $P(c_{ik})$ der Treffpunkt von c_{ik} mit der $\overline{C}_2$, so schneidet das Ebenenbüschel (c_{ik}) aus $\overline{C}_2$ wiederum, außer dem festen Punkte $P(c_{ik})$, noch einen laufenden Punkt P aus. Die Bild-c_3 des Ebenenbüschels (c_{ik}) zerfallen jetzt in die feste Gerade c_{ik} und ein c_2-Büschel mit den Grundpunkten $A_l, A_m, A_n, C_{ik}'(u_{ik}')$.

Andererseits trifft c_{ik} die c_3' in einem festen Restpunkte $C_{ik}(u_{ik})$. Somit ist (C_{ik}, C_{ik}') das Bildpunktepaar des Punktes $P(c_{ik})$ auf $\overline{C}_2$.

Zur Bestimmung der beiden Argumente u_{ik}, u_{ik}' dienen die Relationen

$$u_i + u_k + u_{ik}' \equiv 0, \quad u_{ik} + u_{ik}' + u_0' \equiv 0,$$

wo $u_0' \equiv \frac{s}{2}$. Somit wird

$$u_{ik}' \equiv -(u_i + u_k), \quad u_{ik} \equiv u_i + u_k - \frac{s}{2}. \tag{4}$$

Da nach dem Apolaritätsprinzip die beiden Punkte C_{ik} und B_0' als bekannt anzusehen sind, so ergibt sich C_{ik}' als Schnittpunkt der Geraden (C_{ik}, B_0') mit c_{ik}.

Verfährt man ähnlich mit den fünf Fundamentalpunkten A_i selbst nebst ihren Bildern, den Geraden a_i auf der F_4, so erkennt man, daß dem Inzidenzpunkte $P(a_i)$ auf $\overline{C}_2$ dasjenige Punktepaar auf c_3' entspricht, das sich zusammensetzt aus $A_i(u_i)$ selbst und dem Restschnittpunkte $C_i'(u_i')$ der Geraden (A_i, B_0') mit c_3'. Aus $u_i + u_i' + u_0' \equiv 0$ $\left(u_0' \equiv \frac{s}{2}\right)$ ergibt sich

$$u_i' \equiv -u_i - \frac{s}{2}. \tag{5}$$

13. Die Kurven 3. Ordnung C_3 auf der F_4. Wir kommen zur Abbildung der C_3 auf F_4. Bilder solcher (irreduzibler) C_3 sind:

α) Das Netz der c_1. Eine solche allgemeine c_1 trifft die 10 Geraden c_{ik} je einmal, die $c_2 = B$ zweimal, während sie keinen der A enthält. Die entsprechenden Inzidenzen finden für die C_3 auf der F_4 statt.

β) Ein Netz von c_2 mit irgend drei der A, etwa A_i, A_k, A_l, als Grundpunkten. Eine solche c_2 sei mit $c_2^{(m,n)}$ bezeichnet. Sie geht nicht durch A_m, A_n, trifft auch die drei Geraden c_{ik}, c_{il}, c_{kl} in keinem weiteren Restpunkte; dagegen trifft die $c_2^{(m,n)}$ die Geraden c_{im}, c_{km}, c_{lm}, c_{in}, c_{kn}, c_{ln} je noch einmal, endlich die c_{mn} zweimal.

Solcher c_2-Netze gibt es $\binom{5}{2} = 10$. Das Analoge gilt wiederum auf der F_4.

γ) Ein Netz von $r_3 = r_3^{(i)}$ mit d_2 in A_i und d_1 in $A_k, \ldots, A_n$. Denn jede c_3 in G trifft eine solche $r_3^{(i)}$ noch in drei variabeln Restpunkten.

Eine $r_3^{(i)}$ trifft die Geraden c_{ik}, c_{il}, c_{im}, c_{in} in keinem weiteren Restpunkte, ebensowenig die $c_2 = B$; dagegen trifft die $r_3^{(i)}$ die sechs Geraden c_{kl}, c_{km}, c_{kn}, c_{lm}, c_{ln}, c_{mn} je noch in einem Restpunkt.

Solcher $r_3^{(i)}$-Netze gibt es fünf, entsprechend den fünf A.

Die Zusammenfassung ergibt für die C_3 auf der F_4 den Satz:

„Entsprechend den 16 g der F_4 gibt es auf der F_4 16 ∞^2 stetige gleichberechtigte Scharen von C_3.

Innerhalb jeder Schar trifft irgendein solches Individuum C_3 eine erste der g zweimal, zehn andere einmal, die letzten fünf gar nicht."

Im übrigen gilt das in Nr. **3** für F_4 mit einer C_3 angegebene hinsichtlich einer expliziten irrationalen Punktdarstellung der Fläche.

Aber auch die gegenseitigen Inzidenzen dieser C_3 auf der F_4 lassen sich der Abbildung leicht entnehmen. Denn aus ihr folgt:

α) Eine c_1 trifft jedes Individuum der zehn c_2-Typen (β) zweimal und jedes Individuum der fünf r_3-Typen (γ) dreimal.

β) Eine $c_2^{(m,n)}$ trifft jede c_1 vom Typus (α) zweimal, sechs c_2 vom Typus (ln) zweimal, drei c_2 vom Typus (kl) dreimal, drei r_3 (γ) vom Typus $r_3^{(i)}$, $r_3^{(k)}$, $r_3^{(l)}$ zweimal, und zwei r_3 vom Typus $r_3^{(m)}$, $r_3^{(n)}$ dreimal.

γ) Eine $r_3^{(i)}$ trifft eine c_1 (α) dreimal, sechs c_2 (β) vom Typus (mn) zweimal, vier c_2 vom Typus (in) dreimal, und vier r_3 vom Typus $r_3^{(k)}$ zweimal.

Die Zusammenfassung ergibt für die C_3 auf der F_4:

„Jede C_3 irgendeiner der 16 Scharen trifft jede C_3 von zehn anderen Scharen zweimal, und jede C_3 der fünf übrigen Scharen dreimal."

Endlich das Verhalten der C_3 einer und derselben Schar zueinander regelt sich durch den Satz:

„Innerhalb einer und derselben Schar von C_3 treffen sich je zwei Individuen nur einmal.“

14. Die rationalen Kurven 4. Ordnung R_4 auf der F_4 und ihre Beziehung zu den Vieren zweiter Art. Nunmehr seien auch noch die R_4 auf unseren F_4 mit $\overline{C}_2$ in Betracht gezogen. Deren Bilder sind folgende Gebüsche der drei Typen:

a) $c_2 = c_2^{(m,n)}$, durch irgend zwei Grundpunkte A_m, A_n;

b) $r_3 = r_3^{(i;n)}$, mit d_2 in A_i, d_1 in A_k, A_l, A_m;

c) $r_4 = r_4^{(m,n)}$, mit d_2 in A_i, A_k, A_l und d_1 in A_m, A_n.

Es gibt 10 Typen (a), 20 Typen (b) und 10 Typen (c), also im ganzen 40. Somit gilt:

„Auf der F_4 mit $\overline{C}_2$ gibt es 40 gleichberechtigte ∞^3-Scharen von R_4.“

Man suche weiter die Inzidenzen dieser R_4 mit den 16 g. Aus der Abbildung liest man ab:

a) Eine R_4, als Bild einer $c_2^{(m,n)}$, trifft die 16 g nach dem Schema:

0-mal	a_i, a_k, a_l, c_{mn};
1-mal	a_m, a_n; $c_{im}, c_{km}, c_{lm}, c_{in}, c_{kn}, c_{ln}$;
2-mal	$c_{ik}, c_{il}, c_{kl}, b$.

b) Eine R_4, als Bild einer $r_2^{(i;n)}$, trifft:

0-mal	a_n; c_{ik}, c_{il}, c_{im};
1-mal	a_k, a_l, a_m; $c_{kl}, c_{km}, c_{lm}, c_{in}$; b;
2-mal	a_i; c_{kn}, c_{ln}, c_{mn}.

c) Eine R_4, als Bild einer $r_4^{(m,n)}$, trifft:

0-mal	c_{ik}, c_{il}, c_{kl}; b;
1-mal	a_m, a_n; $c_{im}, c_{in}, c_{km}, c_{kn}, c_{lm}, c_{ln}$;
2-mal	a_i, a_k, a_l; c_{mn}.

Hieraus erkennt man leicht den Zusammenhang mit den Vieren „4_2“ und Doppelvieren „$\overline{4}_2$“, s. oben Nr. **11**.

Man greife etwa eine R_4 des Typus (a) heraus. Die 16 g ordnen sich dann zu „4_2“ und „$\overline{4}_2$“ an wie folgt:

$$\begin{Bmatrix} a_i, & a_k, & a_l, & c_{mn} \\ c_{ik}, & c_{il}, & c_{kl}, & b \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} c_{im}, & c_{km}, & c_{lm}, & a_n \\ c_{in}, & c_{kn}, & c_{ln}, & a_m \end{Bmatrix},$$

Also hat man:

„Greift man aus irgendeiner der 40 ∞^3-Scharen von R_4 auf der F_4 mit $\overline{C}_2$ ein beliebiges Individuum heraus, so trifft dieses vier der

16 g gar nicht, vier andere zweimal und die acht übrigen einmal. Dann bilden die beiden ersten Quadrupel eine „$\bar{4}_2$", desgleichen die letzteren acht g die komplementäre „$\bar{4}_2$". Auf diese Weise sind die 40 Scharen von R_4 den 40 Vieren zweiter Art „4_2" eineindeutig zugeordnet."

Auch die gegenseitigen Inzidenzen der R_4 entnimmt man sofort der Abbildung. Es genügt, etwa von einer $c_2^{(m,n)}$ des Typus (a) auszugehen. Die Anzahlen der jeweiligen freien Schnittpunkte mit allen 40 c der Typen (a), (b), (c), nach Untertypen geordnet, mögen in einer Tabelle zusammengefaßt werden:

Untertypus	Anzahl der c	Anzahl der freien Schnittpunkte
$c_2^{(m,n)}$	1	2
$c_2^{(m,i)}$	6	3
$c_2^{(i,k)}$	3	4
$r_3^{(m,n)}$	2	4
$r_3^{(i,m)}$	6	5
$r_3^{(m,i)}$	6	4
$r_3^{(i,k)}$	6	4
$r_4^{(m,n)}$	1	6
$r_4^{(i,n)}$	6	5
$r_4^{(i,k)}$	3	4

Faßt man das Wesentliche zusammen, so hat man:

„Eine beliebige R_4 irgendeiner der 40 ∞^3-Scharen auf der F_3 trifft eine R_4 derselben Schar zweimal, die R_4 von sechs anderen Scharen dreimal, die von zwanzig weiteren Scharen viermal, die von zwölf weiteren fünfmal, endlich die der letzten Schar sechsmal."

15. Fall eines Knotenpunktes D_2 auf der F_4. Es werde nun auch der Fall eines $D_2 = D$ einer F_4 mit $\bar{C}_2$ (s. *Kummer*, Nr. 7) in der Abbildungsebene untersucht.

Dann müssen irgend drei der fünf Fundamentalpunkte A, etwa A_i, A_k, A_l, auf einer Geraden, die mit c_{ikl} bezeichnet sei, liegen (und umgekehrt).

Das auf die c_3' als Bild der $\bar{C}_2$ Bezügliche bleibt im wesentlichen erhalten.

Innerhalb G zerfalle eine c_3 derart, daß sich die Gerade c_{ikl} abspaltet. Dann bilden die Ergänzungskegelschnitte $c_2 = c_2^{(m,n)}$ ein Netz N mit zwei Grundpunkten A_m, A_n. Irgendeine c_3 in G trifft eine solche $c_2^{(m,n)}$ noch in vier variabeln Punkten.

Dem Netze N muß im Raume ein Ebenenbündel mit dem Zentrum D entsprechen; in der Tat schneidet ja jede Ebene durch D die F_4 in einer r_4 mit drei d_2, deren einer in D liegt, während die beiden anderen, P_1, P_2, der $\bar{C}_2$ angehören.

Die c_3' in der Bildebene schneidet die $c_2^{(m,n)}$ ebenfalls in vier weiteren Punkten. Das sind gerade die obigen; sie zerfallen in zwei Paare (Q_1', Q_2'), (Q_1'', Q_2''), so daß die Geraden (Q_1', Q_2'), (Q_1'', Q_2'') durch das Zentrum B_0' auf der c_3' laufen (s. oben Nr. **12**).

Die Gerade c_{ikl} ist das Bild von D selbst.

Der Geraden c_{mn} entspricht auf der F_4 eine Gerade $c_{mn} = b$; desgleichen sind c_{im}, c_{km}, c_{lm}, c_{in}, c_{kn}, c_{ln} die Bilder der sechs gleichbezeichneten g auf F_4.

Weiter sind A_m, A_n Bilder der beiden g: a_m, a_n.

Endlich sind A_i, A_k, A_l die Bilder der drei durch D gehenden (und auf dem Tangentenkegel von D liegenden) Geraden a_i, a_k, a_l.

Wegen der weiteren Fälle des Auftretens von zwei bis vier D_2, sowie des Falles, wo die $\bar{C}_2$ in zwei inzidente Gerade zerfällt — jedoch mit Ausnahme des Falles, wo die $\bar{C}_2$ zu einem Kuspidalkegelschnitt (s. Nr. **17**) wird —, sei auf die ausführliche, unter Anwendung und Weiterführung der *Clebsch*schen Methode erfolgte Behandlung von *G. Korndörfer*[30]) verwiesen.

16. Die zur Bestimmung der 16 Geraden g dienende Gleichung 5. Ordnung. Mittels nicht ganz einfacher algebraischer Rechnungen, die auf geeigneter Kombinierung der Gleichungen zweier der fünf *Kummer*schen Kegel beruhen, führt *Clebsch* die Bestimmung der 16 g, die zunächst von einer Gleichung 16. Ordnung $f_{16} = 0$ abhängen, zurück auf die einer Gleichung 5. Ordnung $f_5 = 0$. Die letztere Gleichung ist also eine Resolvente der ersteren. Diese $f_5 = 0$ erweist sich zugleich als die für die fünf *Kummer*schen Kegel.

Denkt man sich die f_5 vollständig aufgelöst, so bedarf es nur noch der Auflösung quadratischer Gleichungen, um die 16 g einzeln darstellen zu können.

Es ist aber auch von Interesse, den geometrischen und gruppentheoretischen Zusammenhang zwischen den beiden obigen Gleichungen und zwei verwandten, der $f_{28} = 0$ für die 28 Doppeltangenten t_2 einer c_4 und der $f_{27} = 0$ für die 27 g einer F_3, zu verfolgen (s. auch „F_3", Nr. **22**).

---

30) *G. Korndörfer*, Math. Ann. 1 (1869), p. 592; 2 (1869), p. 41; 3 (1870), p. 496; 4 (1871), p. 117

Die zugehörigen gruppentheoretischen Betrachtungen hat *C. Jordan*[31]) ausgeführt; im besonderen hat im Anschlusse daran *F. Geiser*[31]) den Zusammenhang zwischen der $f_{16} = 0$ und der $f_5 = 0$ synthetisch illustriert und ergänzt.

Vermöge der *Geiser*schen Tangentenprojektion (s. „F_3", Nr. **16**) der F_3 von einem ihrer Punkte P aus auf eine Ebene Π entsprang eine c_4 (vom Geschlecht $p = 3$) mit $28\,t_2$. Dabei waren 27 dieser t_2 den $27\,g$ der F_3 (1, 1)-deutig zugeordnet, während sich die 28te t_2 als Spur der Tangentialebene der F_3 in P ergab.

Algebraisch besagt dies, daß sich die Gleichung $f_{28} = 0$ nach Adjunktion irgendeiner ihrer Wurzeln auf die Gleichung $f_{27} = 0$ reduziert, und entsprechend die Gruppe der ersteren auf die der letzteren. Die Gleichung $f_{27} = 0$ besitzt keine Resolvente geringerer Ordnung.

Geht man wiederum von irgendeiner der $27\,g$, $g = g_0$, der F_3 als einer bekannten aus, d. h. adjungiert man irgendeine Wurzel der $f_{27} = 0$, so spaltet sich die verbleibende Gleichung $f_{26} = 0$ rational in eine Gleichung 10. Ordnung $f_{10} = 0$ und eine 16. Ordnung $f_{16} = 0$.

Die erstere entsprach denjenigen $10\,g$ der F_3 (genauer den 5 inzidenten g-Paaren), die g_0 treffen; die letztere den noch übrigen $16\,g$, die g_0 nicht treffen.

Diese Gleichung $f_{16} = 0$ ist zugleich die, von der die Bestimmung der $16\,g$ einer F_4 mit $\overline{C}_2$ abhängt.

Die Gleichung $f_{10} = 0$ kommt, nach Auflösung von fünf gleichberechtigten quadratischen Gleichungen — die die Spaltung der $10\,g$ in die 5 Inzidenzpaare bewirkt — zurück auf eine Gleichung 5. Ordnung $f_5' = 0$.

Denkt man sich abermals von dieser $f_5' = 0$ irgendeine Wurzel adjungiert, die einem Inzidenzpaare (g_1, g_2) korrespondiere, so hat man auf der F_3 die Figur von drei Geraden g_0, g_1, g_2, die von einer dreifachen Tangentialebene der F_3 ausgeschnitten werden.

Die vier weiteren g-Paare, die g_0 treffen, entsprechen den Wurzeln einer $f_8 = 0$, auf die sich die $f_{10} = 0$ reduziert, während die beiden g_1 und g_2 treffenden 4 g-Paare zusammen den Wurzeln der $f_{16} = 0$ zugeordnet sind.

Hieraus schließt man, daß die zur Bestimmung der $10\,g_0$ treffenden g dienende Gleichung $f_5' = 0$ gleichberechtigt (d. i. gruppentheoretisch gleichzusammengesetzt) ist mit der *Clebsch*schen Gleichung $f_5 = 0$ für die $16\,g$ einer F_4 mit $\overline{C}_2$.

---

31) *C. Jordan*, Paris C. R. 68 (1869), p. 656; J. f. Math. 70 (1869), p. 182; Traité des substitutions, Paris 1873. — *F. Geiser*, J. f. Math. 70 (1869), p. 249. Vgl. auch *J. Pereno*, Ann. di mat. (2) 21 (1893), p. 57.

17. Erzeugung der F_4 durch zwei projektive F_2-Büschel. Die synthetischen Untersuchungen von Juel und Bobek. *Clebsch* gibt auch einige mit der Abbildung der F_4 mit $\bar{C}_2$ eng zusammenhängende projektive Erzeugungen der Fläche an. Merkwürdigerweise erwähnt er dabei nicht die fruchtbarste, die Erzeugung durch zwei projektiv zugeordnete F_2-Büschel.

Diese Erzeugung läßt sich an die *Clebsch*sche Abbildung anschließen. Die C_2 auf der F_4 bildeten, entsprechend den fünf *Kummer*schen Kegeln K_2, fünf ∞^1-Scharen (s. Nr. **12**). Deren Bilder waren die Geraden $c_1^{(i)}$ durch A_i und die Kegelschnitte $c_2^{(i)}$ durch A_k, A_l, A_m, A_n. Zu jeder C_2 auf F_4 gehörte eine koplanare, die beiden Bilder waren zwei projektiv entsprechende Individuen der beiden Büschel $c_1^{(i)}$ und $c_2^{(i)}$.

Das Bild der $\bar{C}_2$ war eine ausgezeichnete c_3' im c_3-Gebüsch G

Eine durch die $\bar{C}_2$ gehende F_2 schnitt die F_4 in einer Restkurve C_4; deren Bild war eine (nicht in G enthaltene) c_3 durch die fünf A. Zerfällt im besonderen die C_4 in zwei C_2, so auch die Bild-c_3 in eine $c_1^{(i)}$ und $c_2^{(i)}$. Der Index i werde jetzt wieder unterdrückt.

Hält man eine der beiden C_2, die mit $C_2^{(0)}$ bezeichnet sei, fest, so liegt ein F_2-Büschel vor, das die F_4 noch in einer beweglichen C_2 schneidet.

Das Bild der $C_2^{(0)}$ sei eine $c_2^{(0)}$; dann überstreicht das Bildbüschel der C_2-Schar die ganze Ebene, wie C_2 die ganze F_4 überstreicht.

Das Verfahren werde wiederholt für ein zweites F_2-Büschel mit fester $C_2^{(1)}$ und variierender C_2'.

Es ist zu zeigen, daß die Individuen beider C_2-Scharen sich decken.

Die Bilder der Gesamtschnittkurve irgendeiner F_2 des einen oder andern Büschels sind dargestellt durch Gleichungen von der Gestalt

$$c_3' c_2^{(0)}(c_1 + \lambda c_1') = 0, \quad c_3' c_2^{(1)}(c_1 + \mu c_1') = 0. \tag{1}$$

Für $\lambda = \mu$ und nur dann, wenn also die beiden F_2-Büschel projektiv aufeinander bezogen sind, fallen die entsprechenden Restkurven C_2, C_2' beider F_2-Büschel zusammen.

Zu demselben Ergebnis gelangt man auch direkt von der *Kummer*schen Gleichung (s. Nr. **7**) der F_4 aus:

$$F_4 \equiv \varphi^2 - 4x_m^2\psi = 0. \tag{2}$$

Die Gleichung eines F_2-Büschels durch die $\bar{C}_2$ ($\varphi = 0$, $x_m = 0$) und eine feste $C_2^{(0)}$ lautet

$$\varphi + 2x_m r + \lambda(\varphi + 2x_m r') = 0. \tag{3}$$

Hier ist das Paar der Ebenen von $\bar{C}_2$ und $C_2^{(0)}$ dargestellt durch

$$x_m(r - r') = x_m d_r = 0, \tag{4}$$

wo d_r zur Abkürzung steht.

Somit hat man als einfachste Darstellung zweier solcher projektiver F_2-Büschel

$$(5)\qquad \begin{cases}(\varphi + 2x_m r) + \lambda \cdot 2x_m d_r = 0,\\ 2x_m d_s + \lambda(\varphi + 2x_m s) = 0.\end{cases}$$

Das Ergebnis ist also eine F_4 mit der Gleichung

$$(6)\qquad F_4 \equiv (\varphi + 2x_m r)(\varphi + 2x_m s) - 4x_m^2 d_r d_s = 0.$$

Diese ist noch auf die Gestalt (2) zu bringen. Man hat sofort

$$(6')\qquad F_4 \equiv \{\varphi + x_m(r+s)\}^2 - x_m^2\{(r-s)^2 - 4d_r d_s\}$$
$$\equiv \varphi_m^2 - x_m^2 \psi_m = 0.$$

Bei vorgegebenen φ_m, ψ_m hat man geeignete Linearformen r, s, r', s' zu ermitteln, die (6′) genügen.

Zu dem Behuf beziehe man ψ_m auf ein Dreieck, von dem zwei Seiten Tangenten t_r und t_s sind und die dritte Seite die Polare p von deren Schnittpunkt, so daß die Gleichung von ψ_m in der Gestalt erscheint

$$(7)\qquad \psi_m \equiv p^2 + t_r t_s = 0.$$

Die rechte Seite soll mit $(r-s)^2 + d_r d_s$ zur Übereinstimmung gebracht werden. Die Vergleichung führt zu

$$(8)\qquad r - s = p,\quad r - r' = t_r,\quad s - s' = t_s.$$

Bei einteiliger $\bar{C}_2$, wo alle auftretenden Linearformen reell sind, sind bei beliebig angenommenem s die drei übrigen Formen r, r', s' bestimmt, was sich auch durch eine einfache Konstruktion veranschaulichen läßt.

Ist aber die $\bar{C}_2$ nullteilig, so werden r und $-s$, sowie t_r und t_s konjugiert imaginär, so daß (8) die Gestalt annimmt

$$(8')\qquad \begin{aligned} r &= \frac{p}{2} + i\alpha, & r - r' &= \sigma + i\tau,\\ -s &= \frac{p}{2} - i\alpha, & s - s' &= \sigma - i\tau,\end{aligned}$$

woraus sich nach willkürlicher Wahl von α wiederum r, s, r', s' bestimmen.

Die Erzeugung der F_4 mit $\bar{C}_2$ durch zwei projektive F_2-Büschel hat *C. Juel*[32]) direkt auf synthetischem Wege untersucht.

Die F_4 entsteht als Ort der Schnittkurven C_4 der projektiv zugeordneten Individuen zweier F_2-Büschel (α) und (β), die alle einen irreduzibeln (ein- resp. nullteiligen) Kegelschnitt ω gemein haben, der sich als der Doppelkegelschnitt $\bar{C}_2$ der F_4 erweist. Hieraus ergeben sich sofort die C_2-Scharen auf der F_4, sowie die Restschnittkurven C_4' der F_4 mit einer beliebigen, durch ω gehenden F_2.

32) *C. Juel*, Tiddskr. f. Mat. (4) 4 (1880), p. 81, 113.

Die fünf *Kummer*schen Kegel K_2 entstehen als die Enveloppen der Ebenen E solcher Restkegelschnitte, in denen sich (α) und (β) — außer in ω — schneiden. Daraufhin lassen sich die 16 Geraden auf der F_4, die doppelt berührenden Tangentialebenen T_2, sowie die Kurven 3. und 4. Ordnung auf der F_4 diskutieren. Ferner kann die F_4 von C_2-Ebenen berührt werden längs solcher C_4, die durch die vier Rückkehrpunkte (Kuspidalpunkte s. Nr. 18) auf der $\overline{C}_2$ gehen. Diese „einbeschriebenen" Flächen haben verschiedene besondere Eigenschaften. Berührt z. B. eine F_2 eine solche Fläche längs eines ganzen Kegelschnitts, so schneidet sie die F_4 in zwei C_4. Von diesen Flächen kann man auch zu den fünf *Kummer*schen Kegeln K_2 zurückgelangen.

Den Schluß bildet die Untersuchung einer Reihe von geometrischen Örtern, die zu der F_4 in enger Beziehung stehen. So gibt es fünf Systeme von F_2 durch die $\overline{C}_2$, die die F_4 in je zwei Punkten berühren. Der Ort der Pole, die der Ebene der $\overline{C}_2$ in bezug auf die F_2 eines einzelnen Systemes entsprechen, ist wiederum eine F_2. Nimmt man die Pole nur in bezug auf die Flächen durch einen gegebenen Punkt, so erhält man einen einzigen Kegelschnitt. Berühren andererseits die Flächen eine feste Ebene, so erhält man eine C_4, und dies gilt auch, wenn die Flächen eine feste Gerade berühren.

Damit gewinnt der Verfasser auch die Mittel für verschiedene Anzahlbestimmungen.

So gibt es von Kegelschnittflächen, die sich in der $\overline{C}_2$ und zwei anderen C_2 schneiden, und außerdem

1. durch zwei gegebene Punkte gehen, 10;
2. durch einen Punkt gehen und eine Gerade oder Ebene berühren, 20;
3. zwei Gerade oder Ebenen berühren, 40;
4. eine Gerade und eine Ebene berühren, 40.

Unabhängig von *Juel* hat auch *K. Bobek*[33]) die nämliche Erzeugung der F_4 mit $\overline{C}_2$ zugrunde gelegt.

Wir beschränken uns daher, anzuführen, daß er auch die Sonderfälle der F_4 mit einem bis vier D_2 berücksichtigt. Die erforderlichen Konstruktionen werden im einzelnen ausgeführt; auch wird die Beschreibung eines Fadenmodells für die 16 g hinzugefügt.

J. Cardinaal[34]) leitet aus der Erzeugung einer F_4 mit $\overline{C}_2$ durch zwei projektive F_2-Büschel B_1, B_2 die Hauptformen dieser F_4 her.

Greift man aus B_1 und B_2 je zwei beliebige Individuen heraus, so bestimmen diese ein F_2-Gebüsch G in einem ersten Raume S_3.

33) *K. Bobek*, Wien Ber. 90 (1884), p. 923, 1168.

34) *J. Cardinaal*, Amst. Versl. (3) 8 (1891), p. 88.

Sei weiter O ein fester Punkt, so bilden die Polarebenen π' in bezug auf die Individuen in G ein E'-Gebüsch G' in einem zweiten Raume S_3', das zu G in projektiver Beziehung steht. Hieraus erwächst eine Punkttransformation 2. Grades T_2 zwischen beiden Räumen S_3, S_3'. Vermöge dieser T_2 korrespondiert der F_4 mit $\overline{C}_2$ im S_3 eine Fläche 2. Ordnung F_2' im S_3', und den Kegeln innerhalb G, deren Spitzen die Kernfläche K bilden, Ebenen, die eine Fläche 2. Klasse Φ_2' berühren.

Behufs Klassifikation der F_4 mit $\overline{C}_2$ werden zunächst drei Hauptfälle unterschieden, je nachdem die (ein- resp. nullteilige) C_2 irreduzibel ist, oder aber in ein Paar (reeller resp. konjugiert imaginärer) Geraden zerfällt, oder endlich in eine doppeltzählende Gerade ausartet.

Jeder dieser drei Hauptfälle zerlegt sich wieder in acht Unterfälle. Zu dem Behuf unterscheide man hinsichtlich des Gebüsches G, ob dasselbe „allgemein" ist, d. h. keiner besonderen Bedingung genügt, oder aber, wenn die F_2 in G, außer der C_2, noch einen gemeinsamen Grundpunkt besitzen. Die Zeichen für diese beiden Fälle seien w resp. p.

Bei der Regelfläche F_2', die bei willkürlicher Gestalt und Lage durch das Zeichen w' charakterisiert sei, trenne man wieder die beiden Sonderfälle ab, wenn sie ein Kegel wird oder aber eine besondere Lage im S_3' einnimmt; die bezüglichen Zeichen seien k, b.

Man hat dann für die obigen acht Unterfälle das Schema:

Fall	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
G	w	p	w	w	p	p	w	p
F_2'	w'	w'	k	b	b	k	k, b	k, b

Jeweils werden die Lage der Flächen K_2', F_2' und die Kurven auf der erzeugten F_4 untersucht. Von den besonderen Lagen der Fläche F_2' werden 13 unterschieden, je nachdem F_2' die Fläche K berührt oder in speziellen Kurven schneidet.

Daran schließen sich noch Bemerkungen über die Fälle, wo die F_4 eine Zyklide Z ist oder aber in eine Regelfläche R-F_4 ausartet.

18. Die vier Kuspidalpunkte der F_4. F_4 mit Kuspidalkegelschnitt. Man knüpfe wieder an die *Kummer*sche Gleichung (s. Nr. 7) einer F_4 mit $\overline{C}_2$ an:

(1) $$F_4 \equiv \varphi^2 - 4p^2\psi = 0,$$

deren $\overline{C}_2$ der Schnitt (φ, p) war. Man unterwerfe (1), für $p \equiv x_m$, wiederum der *Kummer*schen Umformung (s. Nr. 9)

(1') $$\begin{aligned} F_4 &\equiv (\varphi + 2\mu x_m^2)^2 - 4x_m^2(\varphi\mu + x_m^2\mu^2 + \psi) \\ &\equiv \varphi_m^2 - 4x_m^2\psi_m. \end{aligned}$$

Diese läßt sich dazu verwenden, um φ_m zu einem Kegel zu machen.

Sei a_{mm} der Koeffizient von x_m^2, A die Determinante D_μ von φ und α_{mm} der Minor von a_{mm}. Es wird dann $D_\mu \equiv A + 2\mu\alpha_{mm}$ und verschwindet nur für $\mu = \mu_1 = -\frac{A}{2\alpha_{mm}}$; hierbei ist vorausgesetzt, daß φ weder selbst ein Kegel ist, noch die Ebene $x_m = 0$ berührt. Wählt man noch die Spitze dieses Kegels φ_1 als Koordinatenecke A_m und normiert φ_1 zu $x_i x_l - x_k^2$, so läßt (1′) die ausgezeichnete Darstellung zu

(2) $$F_4 \equiv (x_i x_l - x_k^2)^2 - 4x_m^2\psi_m = 0,$$

und A_l genügt den Bedingungen (2).

Der Koeffizient von x_l^2 wird x_i^2, d. h. der D_2 in A_l wird ein uniplanarer und zugleich ist ψ ein in ein Ebenenpaar ausgearteter *Kummer*scher Kegel K_2. Ist dagegen A_l ein beliebiger, nicht der Fläche ψ angehöriger Punkt der $\overline{C}_1$, also $c_0 \neq 0$, so wird der Koeffizient von x_l^2

(3) $$x_i^2 - 4c_0 x_m^2.$$

Somit zerfällt der Tangentenkegel des D_2 in A_l in ein Paar von Tangentialebenen T, T' der F_4, das harmonisch ist zur Ebene $(x_m = 0)$ der $\overline{C}_2$ und der Tangentialebene $x_i = 0$ (in A_l) des über $\overline{C}_2$ stehenden Kegels mit der Spitze A_m. Dieser Tangentialkegel $(\mathsf{T}, \mathsf{T}')$ des D_2 in A_l wird dann und nur dann ein uniplanarer, wenn c_0 verschwindet; die beiden Ebenen T, T' fallen dann zusammen und zwar in die Ebene $x_i = 0$, und man ist zum Spezialfalle (1′) zurückgelangt.

Endlich beachte man noch, das jede Ebene durch einen uniplanaren D_2 der $\overline{C}_2$ die F_4 in einer c_4 mit Spitze in D_2 schneidet, und umgekehrt.

Daher heißt ein solcher uniplanarer D^2 der $\overline{C}_2$ ein „*Kuspidalpunkt*“ (oder „Rückkehrpunkt“) der F_4. Somit gilt der Satz:

„Eine F_4 mit $\overline{C}_2$ besitzt vier Kuspidalpunkte, die Schnittpunkte der $\overline{C}_2$ mit der Fläche ψ.“

Man frage jetzt nach der Bedeutung der vier Schnittpunkte der $\overline{C}_2$ mit φ, für die also zugleich

(4) $$\varphi = 0, \quad p = 0, \quad \psi = 0.$$

Ordnet man noch ψ nach x_l, so nimmt damit (1) die Gestalt an

(1′) $$F_4 \equiv (x_i x_l - x_k^2)^2 - 4x_m^2(c_0 x_l^2 + c_1 x_l + c_2) = 0.$$

Überdies werde jetzt die Ecke A_l (auf c_2) so gewählt, daß sie auch auf ψ liegt. Dann verschwindet die Konstante c_0 — und vice versa — und (1′) reduziert sich auf

(1″) $$F_4 \equiv (x_i x_l - x_k^2)^2 - 4x_m^2(c_1 x_l + c_2) = 0.$$

Nunmehr entnimmt man auch der Gleichung (1) die Beziehung der fünf *Kummer*-Kegel K_2 zu den vier Kuspidalpunkten.

Nach *Kummer* ließ sich (1) umformen wie folgt:

$$(1\,\mathrm{a})\qquad F_4 \equiv (\varphi + 2\lambda p^2)^2 - 4p^2(\psi + \lambda\varphi + \lambda^2 p^2)$$
$$\equiv \varphi_\lambda^2 - 4p^2\psi_\lambda = 0.$$

Für fünf Werte von λ artete ψ_λ in einen *Kummer*-K_2 aus. Diese fünf K_2 gehören also dem Netze N (φ, p^2, ψ) an.

Die acht Grundpunkte von N rücken viermal zu je zweien auf $\bar{C}_2$ in die vier Kuspidalpunkte. Mithin hat man:

„Die fünf *Kummer*schen Kegel K_3 gehen alle durch die vier Kuspidalpunkte und berühren sich in ihnen.“

Man untersuche jetzt den singulären Fall, wo *jeder* Punkt des $\bar{C}_2$ zu einem Kuspidalpunkt wird und damit die $\bar{C}_2$ zu einem *„Kuspidalkegelschnitte“* der F_4.

Zu dem Behuf wähle man wieder $x_m = 0$ als Ebene p, während die beiden Formen φ und ψ beliebig seien. Dann schreibt sich (1) explizite

$$(5)\qquad F_4 \equiv \varphi^2 - 4x_m^2\psi$$
$$\equiv (a_0 x_m^2 + a_1 x_m + a_2)^2 - 4x_m^2(b_0 x_m^2 + b_1 x_m + b_2),$$

wo a_2 und c_2 als irreduzibel vorausgesetzt sind.

Im allgemeinen waren die vier Kuspidalpunkte die Schnittpunkte von $\bar{C}_2$ mit ψ', also außerhalb der Ebene $x_m = 0$ die gemeinsamen Lösungen von

$$(6)\qquad a_2 = 0,\ c_2 = 0.$$

Dann sind ∞^1 gemeinsame Lösungen von (6), wenn etwa a_2 als gegeben betrachtet wird, dann und nur dann möglich, wenn entweder c_2 identisch verschwindet, oder aber c_2 mit a_2 übereinstimmt. In ersterem Falle erhält ψ den Faktor x_m, so daß (5) die spezifische Gestalt annimmt

$$(7)\qquad F_4 \equiv \varphi^2 - 4x_m^3 q \equiv \varphi^2 - 4x_m^3(q_0 x_m + q_1).$$

Umgekehrt ist für jede F_4 vom Typus (7) ihre $\bar{C}_2$ ein Kuspidalkegelschnitt.

In letzerem Falle müßte sein

$$(8)\qquad c_2 \equiv a_2.$$

Es fragt sich, ob auch jetzt die Form F_4 (5) auf die Gestalt (7) gebracht werden kann. Zu dem Behuf verfahre man vorerst umgekehrt; man versuche (7) so umzuformen, daß c_2 nicht mehr identisch verschwindet, wohl aber gemäß (8) mit a_2 übereinstimmt. Zu dem Behuf schreibe man an Stelle von (7)

$$(7')\qquad F_4 \equiv (\varphi + 2x_m^2)^2 - 4x_m^2(\varphi + x_m^2 + q_0 x_m + q_1) \equiv \varphi_m^2 - 4x_m^2\psi_m.$$

Hier ergibt die explizite Entwicklung von ψ_m nach x_m

(9) $$\psi_m \equiv x_m^2(a_0 + 1 + q_0) + x_m(a_1 + q_1) + a_2.$$

Da a_2 auch in φ_m das freie Glied ist, so ist damit zunächst die Bedingung (8) erfüllt. Weiter müßte sein

(10) $$b_0 \equiv a_0 + 1 + q_0, \quad b_1 \equiv a_1 + q_1,$$

oder auch umgekehrt

(10′) $$q_0 \equiv b_0 - a_0 - 1, \quad q_1 \equiv b_1 - a_1.$$

Geht man jetzt wieder rückwärts, nimmt für q_0 und q_1 die Werte (10′), so ist man in der Tat von (5) aus, mit der Bedingung (8), zu der gewünschten Darstellung (7) gelangt; man hat nur noch φ durch $\varphi_m \equiv (a_0 + 2)x_m^2 + a_1 x_m + a_2$ zu ersetzen.

Vereinigt man beide Ergebnisse, so gilt der Satz:

„Die Gleichung einer F_4 mit Kuspidalkegelschnitt läßt sich stets auf die Gestalt bringen

(I) $$F_4 \equiv \varphi^2 - 4x_m^3 q = 0,$$

und umgekehrt stellt (I) stets eine solche F_4 dar.“

Auf dem Kuspidalkegelschnitt $\varphi = 0$, $x_m = 0$ existieren zwei ausgezeichnete Punkte, für die auch $q = 0$, also innerhalb $x_m = 0$ die Schnittpunkte von $a_2 = 0$ mit $q_1 = 0$. Bedient man sich wieder der *Kummer*schen Umformung

(11) $$\begin{aligned} F_4 &\equiv (\varphi + 2\lambda x_m^2)^2 - 4x_m^2(\varphi\lambda + \lambda^2 x_m^2 + x_m q), \\ &\equiv \varphi_\lambda^2 - 3x_m^2\psi_\lambda, \end{aligned}$$

so gelangt man, wie im allgemeinen Falle, zu den fünf *Kummer*schen Kegeln K_2. Diese gehören dem F_2-Netze $N(\varphi, x_m^2, x_m q)$ an, dessen acht Grundpunkte zu je vier innerhalb $x_m = 0$ in jene beiden Punkte $a_2 = 0$, $q_1 = 0$ zusammenrücken. Zugleich ist ersichtlich, daß alle C_2 der F_4 den Kuspidalkegelschnitt a_2 in den beiden Punkten treffen und in ihnen je eine feste Ebene berühren.

Überdies folgt aus der Darstellung (I) der F_4, daß die Tangentenebenen T der F_4 in den ∞^1 Kuspidalpunkten der $\bar{C}_2$ alle durch einen festen Punkt gehen. Dieser Punkt ist die Spitze des ausgezeichneten Kegels φ_1, und obige T sind zugleich die Tagentenebenen dieses Kegels.

Umgekehrt hat daraufhin *C. Crone*[35]) die F_4 mit Kuspidalkegelschnitt $\bar{C}_2$ durch Bewegung einer veränderlichen C_2 erzeugt, die zwei feste Ebenen in zwei festen Punkten berührt; sie läßt sich also vermöge einer geeigneten Kollineation in eine Rotationsfläche überführen. Es werden im besonderen Umrisse und Realitätseigenschaften solcher

35) *C. Crone,* Dissert. Kjöbenhavn 1881.

F_4 verfolgt. Variiert man die Stellung der erzeugenden C_2, so lassen sich die F_4 in drei Arten unterscheiden:

1. die $\bar{C}_2$ ist einteilig und trifft eine gewisse Ebene E_0 in zwei reellen Punkten;

2. ditto, aber die beiden letzteren Punkte sind nicht reell;

3. die $\bar{C}_2$ ist nullteilig.

Die Ebene E_0 ist eine, die F_4 längs einer erzeugenden C_2 berührende. Die Gattungen 2. und 3. lassen sich auf die erste zurückführen vermöge einer speziellen, nicht reellen Transformation, bei der aber reelle C_2 einander entsprechen.

Um die Verschiedenheiten in den Gestalten der F_4 besser zu übersehen, ist eine Reihe von Zeichnungen der c_4 mit zwei Spitzen beigegeben, die durch die Schnitte der F_4 mit Ebenen entstehen.

Sodann werden die Haupttangentenflächen untersucht; durch jeden Punkt gehen vier solche, von denen zwei reell sind. Insbesondere wird die Realität gewisser Haupttangentenflächen, die in Kegel ausgeartet sind, studiert.

Es folgt die Betrachtung des Umrisses c_6 der F_4, von irgendeinem Punkte aus gesehen. Die c_6 ist zugleich eine γ_6 mit acht Spitzen und acht Wendetangenten, und ist mit sich selbst kollinear mit dem charakteristischen Doppelverhältnis -1. Für jede solche c_6 liegen die vier Geraden durch das Kollineationszentrum, die je zwei Spitzen enthalten, äquianharmonisch.

Im besonderen wird das Projektionszentrum in der Ebene $\bar{C}_2$ gewählt, wobei sich schon alle Formen der c_6 ergeben. Diese hat null bis drei Zweige; höchstens vier Spitzen und vier Wendetangenten sind reell.

Endlich werden noch die C_2 betrachtet, in denen eine Tangentialebene eines *Kummer*schen Kegels die F_4 schneidet; in dem Berührungspunkte der Ebene haben die C_2 eine Berührung 2. Ordnung. Es schließt sich wieder die Realitätsuntersuchung an.

Eine Ergänzung zu dieser Arbeit von *Crone* bildet die von *J. Béla.*[36]) Wie oben, wird zunächst von der *Kummer*schen Gleichung einer F_4 mit $\bar{C}_2$ ausgegangen: $\varphi^2 - 4p^2\psi = 0$, mit $p = 0$, $\varphi = 0$ als $\bar{C}_2$, wo die vier Schnittpunkte der $\bar{C}_2$ mit ψ die Kuspidalpunkte sind. Liegt aber der Kegelschnitt (φ, p) auf ψ, so daß man $\psi \equiv \varphi + \mu p \nu$ setzen kann, so tritt der Fall des Kuspidalkegelschnittes $\bar{C}_2$ ein.

Setzt man zur Abkürzung

$$U \equiv (\varphi - 2p)^2,\; q \equiv -4(\mu\nu + p),$$

36) *O. Béla,* Math. Ann. 19 (1881), p. 291.

so nimmt die Gleichung der F_4 die Doppelgestalt an

$$(\mathrm{I}') \qquad F_4 \equiv U^2 + p^3 q = 0,$$
$$\equiv (U + \lambda p^2)^2 - p^2(\lambda^2 p^2 + 2\lambda U - pq).$$

Hieraus lassen sich noch andere Gleichungsformen der F_4 nebst Erzeugungsweisen ableiten. Die Tangentialebenen längs der $\overline{C}_2$ gehen durch einen festen Punkt und umhüllen einen Kegel K_2.

Es folgt die Untersuchung der ebenen Schnitte der F_4, sowie der umschriebenen Kegel, weiter der ebenen c_1, c_2, c_3, die auf der F_4 liegen. Die *Hesse*sche Fläche der F_4 zerfällt in die $F_2 = U$ und eine gewisse zweite $F_2 = H$. Ferner werden C_3 und C_4 auf der F_4 studiert. Jeder der 8 g der Fläche ist eine ∞^2-Schar von C_3 zugeordnet, als Schnitte der F_4 mit F_2, die noch die $\overline{C}_2$ und die betreffende g enthalten. Die C_4 auf der F_4 bilden eine ∞^3-Schar; es sind die Schnitte der F_4 mit F_3 durch $\overline{C}_2$. Andererseits gehören der F_4 noch 12 ∞^1-Scharen von R_4 an.

Historisch sei bemerkt, daß auf das Vorkommen eines Kuspidalkegelschnitts einer F_4 zuerst *A. Cayley*[37]) hingewiesen hat. Bald darauf entwickelte *L. Cremona*[38]) eine allgemeine Methode zur Abbildung von F mit einer Kuspidalkurve, ohne indessen ein Beispiel hierfür anzugeben. Erst etwas später[39]) gelangte er zu zwei solchen, eben der F_4 mit einer kuspidalen $\overline{C}_2$, und einer F_5 mit einer kuspidalen $\overline{C}_4$. Beide Flächen werden aus der F_3 mittels einer gewissen quadratischen *Cremona*transformation abgeleitet.

Über die Behandlung der F_4 mit Kuspidalkegelschnitt vom S_4 aus durch *C. Segre* s. Nr. **20**.

19. Die Zeuthensche Tangentenprojektion der F_4 von einem Punkte des Doppelkegelschnitts aus. Die Projektion der F_4 von der Spitze eines Kummerschen Kegels aus. Erzeugung der F_4. *F. Geiser* (s. Art. „F_3" Nr. **16**) hatte an eine F_3 von einem ihrer Punkte aus den Kegel K_4 der Tangenten gelegt, und ihn mit einer Projektionsebene Π geschnitten. Die Spur war eine allgemeine c_4 (vom Geschlecht drei). Damit war eine fruchtbare Methode gewonnen, um die Geometrie auf der F_3 auf Grund der bekannten Eigenschaften der c_4, insbesondere von deren Doppeltangenten t_2, zu studieren.

Daraufhin hatte *H. G. Zeuthen* seine voraufgehenden Untersuchungen über die verschiedenen Gestalten der c_4 in Beziehung gesetzt zu den

37) *A. Cayley,* Lond. Math. Soc. Proc. 3 (1871), p. 181.

38) *L. Cremona,* Ist. Lomb. R. 1871, p. 140, 159; Gött. Nachr. 1871, p. 29.

39) *L. Cremona,* Math. Ann. 4 (1871), p. 213; Bologna Mem. (3) 2 (1872), p. 117.

Gestalten der F_3 und konnte so eine übersichtliche Klassifikation der letzteren liefern.

Auf die F_4 mit $\overline{C}_2$ hat *Zeuthen*[40]) die *Geiser*sche Methode in zwei umfangreichen Arbeiten übertragen, und hat dadurch die Mittel gewonnen, nicht nur die Ergebnisse von *Clebsch,* (s. Nr. **10**) über die Geometrie *auf* der Fläche auf synthetischem Wege wieder zu gewinnen, sondern auch, wesentlich weitergreifend, in die Raumverhältnisse außerhalb der Fläche Einsicht zu erhalten. Insbesondere werden Form und Zusammenhang solcher F_4, sowie die Realität ihrer 16 Geraden g und ihrer fünf *Kummer*schen Kegel K_2 diskutiert.

Sei P irgendein Punkt der zunächst als einteilig vorausgesetzten $\overline{C}_2$, so lege man von P aus die ∞^1 Tangenten t an die F_4. Diese t bilden — wie bei der F_3 — einen allgemeinen Kegel K_4 der Ordnung 4 und vom Geschlecht 3. Schneidet man den K_4 mit irgendeiner festen Projektionsebene Π, so wird der Schnitt — oder auch der scheinbare Umriß der F_4 von P aus — eine allgemeine c_4. Hieraus werden in der ersten Abhandlung, in der die Grundlagen entwickelt werden, verschiedene allgemeine Eigenschaften der F_4, ihrer 16 g und 5 K_2 abgeleitet.

Die Tangentialebenen T der K_2 schneiden nach *Kummer* (s. Nr. **9**) die F_4 in zwei C_2; deren Projektionen sind 10 der durch *Clebsch* bekannten 63 Systeme von viermal berührenden c_2 der c_4. Da solche c_2 auch weiterhin eine wesentliche Rolle spielen, seien sie kurz mit $c_2^{(4)}$ bezeichnet.

Daneben wird eine zweite Art von Berührungsprojektion der F_4 mit Vorteil verwendet, indem das Projektionszentrum in die Spitze eines der 5 K_2 verlegt wird. Der Umriß der F_4 zerfällt dann in die doppelt zählende Spur des K_2 und, als „eigentliche“ Projektion, eine (elliptische) c_4 mit 2 d_2. Hieraus geht eine einfache Konstruktion der F_4 hervor, die zugleich eine Abbildung der F_4 auf eine Doppel-F_2 liefert.

Weiter werden die von *Zeuthen* und *C. Crone* früher (s. Art. „F_3“ Nr. **16**) gewonnenen Ergebnisse über die verschiedenen Figuren der (allgemeinen) c_4 und ihrer $c_2^{(4)}$-Systeme, speziell der Doppeltangenten t_2,

---

40) *H. G. Zeuthen,* Festschr. Kjöbenhavn 1879. [Eine italienische Übersetzung von *G. Loria* befindet sich in Ann. di mat. (2) 14 (1887), p. 31.] Den scheinbaren Umriß einer F_4 von einem D_2 aus (sowie verwandter Flächen) als „Übergangskurve“, unter Heranziehung der Zweiteilung der hyperelliptischen Funktionen, untersucht *A. Clebsch,* Math. Ann. 3 (1870), p. 45. Die Tangentenprojektion einer F_4 tritt übrigens schon bei *E. Kummer* (s. Nr. 8) auf, in besonderer Anwendung auf die *Steiner*sche Fläche S (s. auch Abschn. VII).

herangezogen und für die Gestalten der F_4 und ihrer Realitätsverhältnisse verwertet.

Bei einteiliger $\overline{C}_2$ läßt sich auf diesem Wege in jedem Einzelfalle die Anzahl der reellen g und die der reellen K_2 bestimmen. Man gelangt so zu einer Einteilung der F_4 in 6 Gattungen, die im einzelnen untersucht werden. Auch die jeweils auftretenden reellen C_2 auf der F_4 sowie ihre imaginären g werden verfolgt.

Am Schluß erfolgt, unter Benutzung des Kontinuitätsprinzips, die Übertragung der Ergebnisse auf den Fall einer nullteiligen $\overline{C}_2$.

Diese Grundzüge wurden in der zweiten Abhandlung weiter entwickelt. Der Verfasser macht es sich geradezu zum Programm, auf Grund der obigen Projektionsmethode, die Verhältnisse auf der F_4 direkt aus den verschiedenen Systemen von $c_2^{(4)}$ der c_4 und ihren gegenseitigen Beziehungen abzuleiten. Dabei wird von dem Kontinuitätsprinzip — dessen Verwendung, da es sich nur um algebraische Gleichungen und deren geometrische Deutung handelt, durchaus zulässig ist — durchgehends Gebrauch gemacht. Auf diese Weise lassen sich projektive Eigenschaften, die zunächst nur für bestimmte Realitätsverhältnisse entwickelt waren, auf den allgemeinen Fall ausdehnen.

Die von einem Punkte P der $\overline{C}_2$ an die F_4 gehenden Tangenten t bildeten einen allgemeinen Kegel K_4, der von einer festen Ebene Π in einer c_4 geschnitten wurde. Die Projektion c irgendeiner Kurve C auf der F_4 berührt die c_4 in den mit C_2 gemeinsamen Punkten. Umgekehrt lassen sich zu einer vorgegebenen c_4 in Π in noch mannigfaltiger Art zugehörige F_4 mit $\overline{C}_2$ herstellen.

Die beiden Tangentialebenen T, T' der F_4 in P schneiden aus Π zwei Doppeltangenten t_2 der c_4 aus; die 26 übrigen t_2 rühren von den F_4 zweimal berührenden und durch P gehenden Ebenen T_2 her. Von diesen 26 T_2 schneiden 10 die F_4 in C_2-Paaren und liefern so 10 weitere t_2; endlich die 16 übrigen T_2 enthalten je eine der 16 g — und außerdem noch eine r_3 — und führen zu den 16 übrigen t_2 der c_4. Bei einteiliger $\overline{C}_2$ und reellen T, T' der F_4 in P treten die eben angegebenen Eigenschaften fast ohne weiteres in Evidenz. Dabei empfiehlt es sich, „sichtbare" und „unsichtbare" Punkte der F_4 zu unterscheiden.

Mittels Bestimmung gewisser charakteristischer Anzahlen gelingt es, ein einfaches arithmetisches Kriterium aufzustellen, das zu entscheiden gestattet, ob zwei gegebene Punkte der F_4 entweder zugleich sichtbar resp. unsichtbar sind, oder aber der eine sichtbar, der andere unsichtbar

Läßt man hinterher den Projektionspunkt P auf der $\overline{C}_2$ variieren, so ergeben sich einzelne C_2-Scharen auf der F_4, die in Scharen von

$c_2^{(4)}$ projiziert werden. Je zwei dieser Scharen sind „konjugiert" (oder „komplementär"), indem sie die Enveloppe ihrer Ebenen gemein haben. Dabei bestimmt ein Punkt in Π genau zwei $c_2^{(4)}$ einer bestimmten Schar. Entsprechend geht durch irgendeinen Punkt der F_4 eine C_2 irgendeiner Schar und eine andere der konjugierten Schar. Die Ebenen solcher C_2-Paare umhüllen daher Kegel K_2, deren Anzahl fünf ist, da von jedem P der $\bar{C}_2$ zehn T ausgehen. Diese fünf K_2 sind daher die *Kummer*schen K_2, deren Kanten die F_4 doppelt berühren.

Von den C_2 eines Systems werden von P aus sechs in Paare von Doppeltangenten t_2 der c_4 derselben Schar projiziert. Zwei dieser sechs Paare enthalten zusammen die vier t_2, die von den beiden T der F_4 in P und den beiden an den betreffenden K_2 gehenden T in Π ausgeschnitten werden. Die übrigen vier Paare rühren von g-Paaren der F_4 her, die den K_2 berühren. Dasselbe gilt für das konjugierte System und seine Projektion. Die Anordnung der 16 g ist dieselbe wie die von 16 g einer F_3, die eine siebzehnte nicht treffen (s. Art. „F_3", Nr. **16**).

Weiter schneiden die T in P und die Paare der T an die fünf K_2 die sechs t_2-Paare einer Schar aus. Da je zwei von ihnen ihre acht Berührungspunkte auf einer $c_2^{(4)}$ haben, so folgt für die F_4:

„Die vier Haupttangenten in P, und die vier Berührungspunkte der beiden T_2 durch P, die denselben K_2 berühren, liegen auf einem Kegel 2. Ordnung."

Aus dem bekannten Satze, daß die sechs d_2 der t_2-Paare einer Schar auf einer c_2 liegen, folgt für die F_4:

„Der Kegel, von dem fünf Kanten einen Punkt P der $\bar{C}_2$ mit den Spitzen der *Kummer*schen K_2 verbinden, enthält auch die Tangente der $\bar{C}_2$ in P."

Für die Geometrie auf der F_4 ist von Bedeutung, daß jede c in Π, die die c_4 überall berührt, als Projektion von zwei verschiedenen C der F_4 angesehen werden kann. Von solchen C werden insbesondere die C_3 untersucht. Die durch P gehenden C_3-Systeme projizieren sich in Systeme von $c_2^{(4)}$; solcher ∞^1-Systeme gibt es 32; variiert P auf der $\bar{C}_2$, so entstehen 16 ∞^2-Scharen. Da ferner der von P ausgehende Projektionskegel die $\bar{C}_2$ in den vier Kuspidalpunkten der F_4 trifft (s. Nr. **18**), so folgt, daß die fünf K_2 diese Punkte enthalten.

Neben die bisherige Projektion von P aus stellt sich eine andere, von der Spitze T eines der fünf K_2 aus. Sieht man von dem doppeltzählenden K_2 ab, so ist der Tangentenkegel ein (elliptischer) K_4, der von Π in einer c_4 mit zwei d_2 geschnitten wird. Deren acht t_2 sind die Spuren der von T aus an die vier anderen K_2 gehenden T.

Nunmehr wendet sich *Zeuthen* zur Klassifikation der F_4, die reelle Punkte P auf ihrer $\overline{C}_2$ haben. Letztere zerlegt sich in zwei Gebiete: Das eine „eigentliche" mit reellen T in ihren P, das andere „isolierte" mit imaginären T. Beide Gebiete grenzen in den Kuspidalpunkten aneinander.

Andererseits hatte *Zeuthen* früher für die c_4 sechs Arten ermittelt; je nachdem der Projektionspunkt P dem einen oder anderen Gebiete angehört, hat man es mit verschiedenen Arten von c_4 zu tun. Sodann werden die verschiedenen Realitätsmöglichkeiten diskutiert.

Wieviel reelle Systeme von $c_2^{(4)}$ für die sechs c_4 Arten sich ergeben, und wieviel reelle und imaginäre t_2-Paare in jedem Systeme, entnimmt man einer von *C. Crone*[41]) angegebenen Tabelle. So ergeben sich sechs Arten von F_4; für jede wird die Zahl der reellen g (16, 8, 4, 0) und die der reellen K_2, sowie die Stellung des isolierten Gebietes der $\overline{C}_2$ gegen dieselben bestimmt. Zuletzt wird noch eine einfache Erzeugung der F_4, nach dem Muster einer von „*Darboux*" für die Zykliden Z (s. Abschn. IV) angegebenen, aufgestellt.

Man lege durch einen festen Punkt T eine variierende Gerade g, die zwei feste F_2, die mit σ_2 und δ_2 bezeichnet seien, in Punktepaaren (S, S') und (D, D') trifft. Sodann bestimme man die beiden Punktepaare (M_1, M_2) und (M_1', M_2'), die (D, D') und (T, S) resp. (T, S') harmonisch trennen. Diese beiden Paare (M_1, M_2) und (M_1', M_2') erfüllen eine F_4, deren $\overline{C}_2$ die Berührkurve des von T an die σ_2 gehenden Berührkegels ist, während der von δ_2 ein K_2 der F_4 wird. In dem Sonderfalle, wo σ_2 eine Kugel mit dem Zentrum T ist, entsteht eine Zyklide.

Die Schnittkurve C_4 (σ_2, δ_2) trennt die Punkte von σ_2, denen reelle Punktepaare der F_4 entsprechen, von den anderen. Berücksichtigt man die verschiedenen Gestalten der C_4, so gewinnt man ein zweites Einteilungsprinzip für die F_4, das auch die Fälle mit nullteiliger $\overline{C}_2$ umfaßt.

Nunmehr mögen wieder einige analytische Ergänzungen hinzugefügt werden. Um die Eigenart der *Zeuthen*schen Tangenten-Projektion besser zu erkennen, empfiehlt es sich, vorab einige Vorstufen in Betracht zu ziehen. Punktkoordinaten seien x_i, x_k, x_l, x_m, und die Gleichung einer beliebigen F_4, nach x_m entwickelt, mit bzw. ohne Binomialkoeffizienten geschrieben

$$(1) \qquad \begin{aligned} F_4 &\equiv a_0 x_m^4 + 4 a_1 x_m^3 + 6 a_2 x_m^2 + 4 a_3 x_m + a_4 \\ &\equiv b_0 x_m^4 + b_1 x_{2m}^3 + b_2 x_m^2 + b_3 x_m + b_4 = 0, \end{aligned}$$

41) *C. Crone,* Tiddskr. f. Mat. (3) 5 (1875), p. 161.

wo zunächst $a_0 = b_0 \neq 0$ sei, also die Koordinatenecke A_m nicht der F_4 angehöre.

Von A_m aus werde der Tangentenkegel K an die F_4 gelegt und mit der Projektionsebene $x_m = 0$ geschnitten. Die Gleichung von K ergibt sich sofort durch Nullsetzen der Diskriminante D der als in x_m biquadratischen, binären Form aufgefaßten Form $F_4(x_m)$ (s. Nr. **5**). Man kennt die invariante Darstellung von D. Sind g_2 und g_3 die beiden Invarianten von $F_4(x_m)$

(2) $$g_2 = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2, \quad g_3 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix},$$

so wird D

(3) $$D \equiv g_2^3 - 27 g_3^2.$$

Damit erhält man als Gleichung des Kegels K und zugleich seiner Spur in der Ebene $x_m = 0$

(4) $$K \equiv D = 0.$$

Da jedes Glied in D (3) vom Gewichte 12 bez. der a ist, stellt (4) einen Kegel 12. Ordnung K_{12} dar. Die Struktur der Projektion c_{12} läßt sich aus der rechten Seite von (3) ablesen.

Beim nächsten Schritt nehme man an, A_m sei ein einfacher Punkt der F_4, so daß $a_0 \equiv 0$ (aber nicht $a_1 \equiv 0$). Dann treten für g_2 und g_3 die Reduktionen ein

(2_1) $$g_2 \equiv 3 a_2^2 - 4 a_1 a_3, \quad - g_3 = a_1^2 a_4 - 2 a_1 a_2 a_3 + a_2^3.$$

Jetzt fällt in D (3) auch das mit der ersten Potenz von a_1 als Faktor behaftete Glied $a_1 a_2^4 a_3$ heraus, so daß aus D der Faktor a_1^2 heraustritt, während der zweite Faktor mit D' bezeichnet sei:

(3_1) $$D \equiv a_1^2 D'.$$

Mithin spaltet sich vom ursprünglichen Kegel K_{12} die Tangentenebene T ($a_1 = 0$) in A_m doppeltzählend ab, und der K_{12} reduziert sich auf einen K_{10}

(4′) $$K_{10} \equiv D' = 0.$$

Hier läßt sich D' einfacher darstellen. Die Form $F_4(x_m)$ in (1) reduziert sich wegen $a_0 = b_0 = 0$ auf die in x_m kubische binäre Form

(1′) $$F_4 \equiv x_m^3 b_1 + x_m^2 b_2 + x_m b_3 + b_4.$$

Dann muß D' mit der Diskriminante dieser kubischen Form übereinstimmen, und man erhält als Gleichung des Kegels K_{10}

(4a′) $$K_{10} \equiv D' \equiv 4(3 b_1 b_3 - b_2^2)(3 b_2 b_4 - b_3^2) - (9 b_1 b_4 - b_2 b_3)^2$$
$$= c_4 c_6 - c_5^2 = 0$$

Die Struktur der rechten Seite sagt aus, daß die Kurve c_4 die Projektionskurve c_{10} 20mal berührt, die Kurve c_6 30mal, so daß die $20+30=50$ Berührungspunkte von der Kurve c_5 ausgeschnitten werden.

Im nächsten Falle sei A_m ein einzelner Knotenpunkt D_2 der Fläche F_4. Dann verschwindet (außer $a_0=b_0$) $a_1 \equiv b_1$ identisch, und $a_2=b_2=0$ liefert den Kegel K_2 der Tangenten in D_2. Damit reduziert sich $D'(4a')$ auf

$$(4'') \qquad \begin{aligned} D'' &\equiv 4b_2^2(3b_2b_4-b_3^2)+b_2^2b_3^2 \\ &\equiv b_2^2(4b_2b_4-b_3^2). \end{aligned}$$

Vom Tangentenkegel K_{10} (4a') sondert sich also der Kegel $b_2=0$ doppeltzählend ab, und es verbleibt als eigentlicher Projektionskegel ein K_6:

$$(4a'') \qquad K_6 \equiv 4b_2b_4-b_3^2=0.$$

Hier ist, wie es sein muß, die rechte Seite die Diskriminante (bez. x_m) der abermals reduzierten Form F_4:

$$(1'') \qquad F_4 \equiv x_m^2b_2+x_mb_3+b_4.$$

Wiederum sind in der Projektionsebene $b_2=0$ und $b_4=0$ Berührkurven der Projektionskurve c_6, deren Berührpunkte auf der Kurve $b_3=0$ liegen.

Umgekehrt läßt sich jede c_6 mit einem sechsmal berührenden Kegelschnitte als Tangentenprojektion einer F_4 mit D_2 auffassen. Das ist auch der Ausgangspunkt in der Preisschrift von *K. Rohn* (s. Nr. **63**).

Dies findet nunmehr seine Anwendung auf den Hauptfall, wo eine F_4 mit $\bar{C}_2$ vorliegt und A_m irgendein D_2 der $\bar{C}_2$ ist. Die Gleichung der F_4 ist dann nach *Kummer* (s. Nr. 9) von der Gestalt

$$(5) \qquad \begin{cases} F_4 \equiv \varphi^2+x_i^2\psi=0, \\ \varphi \equiv x_md_1+d_2,\ \psi=x_m^2e_0+2x_me_1+e_2. \end{cases}$$

Hier seien die Koeffizienten d_1, d_2, e_1, e_2 explizite entwickelt:

$$(6) \qquad \begin{cases} d_1 \equiv d_ix_i+d_kx_k+d_lx_l, \\ d_2 \equiv d_{ii}x_i^2+2d_{ik}x_ix_k+\cdots, \\ e_1 \equiv e_ix_i+e_kx_k+e_lx_l, \\ e_2 \equiv e_{ii}x_i^2+2e_{ik}x_ix_k+\cdots. \end{cases}$$

Ordnet man jetzt F_4 nach x_m, so ergibt sich

$$(5') \qquad \begin{aligned} F_4 &\equiv x_m^2(d_1^2+e_0x_i^2)+2x_m(d_1d_2+e_1x_i^2)+(d_2^2+e_2x_i^2) \\ &\equiv x_m^2\alpha_2+2x_m\alpha_3+\alpha_4=0. \end{aligned}$$

Die Diskriminante D (bez. x_m) erhält damit den Wert

$$(7) \qquad D \equiv \alpha_2\alpha_4-\alpha_3^2 \equiv (d_1^2+e_0x_i^2)(d_2^2+e_2x_i^2)-(d_1d_2+e_1x_i^2)^2.$$

Hier tritt rechts der Faktor x_i^2 heraus, d. h. geometrisch, vom früheren Projektionskegel K_6 (4a″) sondert sich, doppeltzählend, die durch $x_i = 0$ dargestellte Ebene der $\overline{C}_2$ ab, wie es sein muß. Es verbleibt also als „eigentlicher" oder „*Zeuthen*scher" Projektionskegel K_4 resp. dessen Spur c_4 in der Projektionsebene

$$(\mathrm{I}) \qquad K_4 \equiv c_4 \equiv (e_0 d_2^2 + e_2 d_1^2 - 2 d_1 d_2 e_1) + x_i^2 (e_0 e_2 - e_1^2) = 0.$$

Hier haben die beiden Klammerausdrücke eine einfache Bedeutung. Einmal ist $e_0 e_2 - e_1^2$ die Diskriminante der Form $\psi(x_m)$; deren Verschwinden liefert also den von A_m aus an die F_2 $\psi = 0$ gehenden Berührkegel E. Andererseits ist $e_0 d_2^2 + e_2 d_1^2 - 2 d_1 d_2 e_1$ die Resultante $R_{\varphi,\psi} = R$ der quadratischen Formen $\varphi(x_m)$ und $\psi(x_m)$; das Verschwinden von R stellt den über der Schnittkurve $C_4(\varphi, \psi)$ stehenden Kegel 4. Ordnung mit der Spitze A_m dar.

Die Gleichung (I) schreibt sich somit kurz

$$(\mathrm{I}') \qquad K_4 \equiv c_4 \equiv R + x_i^2 E = 0,$$

so daß die Struktur der c_4 auf der Hand liegt.

Ist insbesondere A_m einer der vier Kuspidalpunkte (s. Nr. **18**), für den φ, x_i, ψ zugleich verschwinden, so verschwindet das konstante Glied e_0 in ψ. Damit nimmt (I′) die Gestalt an

$$(\mathrm{I}'') \qquad K_4 \equiv c_4 \equiv d_1 (e_2 d_1 - 2 d_2 e_1) + x_i^2 e_1^2 = 0,$$

wo $d_1 = 0$, $e_1 = 0$ die Spuren der Tangentialebenen von φ, ψ in A_m sind.

Weiter trete jetzt der Fall einer Kuspidal-$\overline{C}_2$ (s. Nr. **18**) ein, so daß *jeder* Punkt auf $\overline{C}_2$ ein uniplanarer D_2 wird, oder auch, daß jede Ebene die F_4 in einer c_4 mit zwei auf $\overline{C}_2$ gelegenen Spitzen trifft. Nach früherem (Nr. **18**) läßt sich dann die Gleichung der F_4 auf die Gestalt bringen

$$(8) \qquad F_4 \equiv \varphi^2 + x_i^3 v = 0.$$

Die oben in (5) auftretende Form $\psi \equiv x_m^2 e_0 + 2 x_m e_1 + e_2$ besitzt jetzt den Faktor x_i, so daß man setzen darf

$$(9) \qquad e_0 = 0, \quad e_1 = c_0 x_i, \quad e_2 = c_1 x_i.$$

Damit tritt in (I″) der Faktor x_i heraus, und es verbleibt als Projektionskurve eine c_3 mit der Gleichung

$$(\mathrm{I}''') \qquad c_3 \equiv d_1 (d_1 c_1 - 2 d_2 c_0) + c_0^2 x_i^3 \equiv 0.$$

Es ist dann die Gerade d_1 — die Spur der T von φ in A_m — eine Wendetangente, und die Spur der C_2 (φ, v), deren Gleichung $d_1 c_1 - 2 d_2 c_0 = 0$ ist, oskuliert die c_3 dreimal, so daß die drei Oskulationspunkte auf der Geraden $x_i = 0$, der Spur der $\overline{C}_2$, liegen.

Endlich sei noch der Fall in Betracht gezogen, wo die F_4 mit einer $\overline{C}_2$ noch einen D_2 außerhalb besitzt (s. *Kummer*, Nr. 7), etwa in der Koordinatenecke A_i. Es sind dann der Form F_4 in (5) die vier weiteren Bedingungen aufzuerlegen, daß die Koeffizienten von x_i^4, $x_i^3 x_k$, $x_i^3 x_l$, $x_i^3 x_m$ verschwinden. Somit muß sein gemäß (6)

$$\begin{cases} (10_i) & e_{ii} + d_{ii}^2 = 0 \\ (10_k) & e_{ik} + 2 d_{ii} d_{ik} = 0, \\ (10_l) & e_{il} + 2 d_{ii} d_{il} = 0, \\ (10_m) & e_i + d_i d_{ii} = 0. \end{cases}$$

Andererseits stelle man die Koeffizienten C_i, C_k, C_l von x_i^4, $x_i^3 x_k$, $x_i^3 x_l$ in der Form c_4 (I) auf.

Der Koeffizient C_i läßt sich leicht auf die Gestalt bringen

$$(11) \qquad C_i \equiv (e_0 + d_i^2)(e_{ii} + d_{ii}^2) - (e_i + d_i d_{ii})^2,$$

oder auch, da $e_{ii} + d_{ii}^2$ und $e_i + d_i d_{ii}$ die linken Seiten von (10) und (10_m) sind, kürzer

$$(11_i) \qquad C_i \equiv (10_i) \cdot (b_0 + d_i^2) - (10_m)^2.$$

Ähnlich ergeben sich für C_k und C_l die Darstellungen

$$(11_k) \qquad \tfrac{1}{2} C_k \equiv (10_i) \cdot d_i d_k + (10_k) \cdot (e_i + d_i^2) - (10_m) \cdot \{e_k + d_k d_{ii} + 2 d_i d_{ik}\},$$

$$(11_l) \qquad \tfrac{1}{2} C_l \equiv (10_i) \cdot d_i d_l + (10_l) \cdot (e_i + d_i^2) - (10_m) \cdot \{e_l + d_l d_{ii} + 2 d_i d_{il}\}.$$

Aus (11_i), (11_k), (11_l) geht hervor, daß C_i, C_k, C_l zugleich mit den Ausdrücken (10) verschwinden, d. h., daß, wie auch geometrisch ersichtlich, die Projektionskurve c_4 einen d_2 erhält.

Aber auch das Umgekehrte läßt sich an der Hand von (10) und (11) ohne Schwierigkeit beweisen, was dem Leser überlassen bleibe, daß die Existenz eines d_2 der c_4 die eines D_2 der F_4 nach sich zieht. Somit gilt:

„So oft die F_4 mit $\overline{C}_2$ einen weiteren D_2 erhält, so oft ist auch dessen Projektion von einem Punkte der $\overline{C}_2$ aus ein d_2 der Projektionskurve c_4, und umgekehrt.“

Besitzt im besonderen die F_4 mit $\overline{C}_2$ vier D_2 (s. *Kummer*, Nr. 7), also auch die c_4, so muß die letztere zerfallen, entweder in zwei c_2, oder aber (im singulären Falle) in eine c_1 und eine r_3.

Wir wenden uns jetzt zur analytischen Behandlung der *Zeuthenschen* Erzeugung der F_4 mit $\overline{C}_2$. Die Gleichungen zweier fester F_2 seien, nach x_m geordnet,

$$(12) \qquad \begin{cases} F \equiv a_0 x_m^2 + 2 a_1 x_m + a_2 = 0, \\ G \equiv b_0 x_m^2 + 2 b_1 x_m + b_2 = 0 \end{cases}$$

Im folgenden werde das von *W. F. Meyer* angegebene Übertragungsprinzip herangezogen (s. Nr. 5). Durch die Koordinatenecke A_m werde eine variierende Gerade g gelegt, die die Ebene $x_m = 0$ im Punkte $(x_i, x_k, x_l, 0)$ treffe; der laufende Punkt auf g wird durch den Parameter x_m bestimmt. Den beiden Schnittpunkten von g mit F und G mögen die Parameterwerte α, α' und β, β' entsprechen. Indem wir zugleich die *Zeuthen*sche Erzeugung verallgemeinern, werde noch eine beliebige, vorerst nicht durch A_m gehende Ebene E adjungiert mit der Gleichung

(13) $$\mathsf{E} \equiv x_m \varrho_0 - \varrho_1 = 0.$$

Dem Schnittpunkte R von E mit g kommt dann der Wert $x_m = \frac{\varrho_1}{\varrho_0}$ zu. Man suche zwei Punktepaare (M_1, M_2), (M_1', M_2') auf g, die zugleich harmonisch sind zu den Paaren (β, β') und (R, α) resp. zu (β, β') und (R, α'). Die beiden Paare (R, α), (R, α') bestimmen sich durch die Wurzeln der Gleichungen

$$\begin{cases} (14) \quad (R, \alpha) \equiv (x_m - \alpha)(x_m \varrho_0 - \varrho_1) \\ \qquad\qquad \equiv x_m^2 \varrho_0 - x_m(\varrho_1 + \alpha \varrho_0) + \alpha \varrho_1 = 0, \\ (14') \quad (R, \alpha') \equiv x_m^2 \varrho_0 - x_m(\varrho_1 + \alpha' \varrho_0) + \alpha' \varrho_1 = 0. \end{cases}$$

Dann erhält man die Gleichungen der beiden Paare (M_1, M_2), $(M_1' M_2')$ durch Nullsetzen der Funktionaldeterminanten von $G(1)$ mit (14) resp. (14')

$$\begin{cases} (15) \quad (M_1, M_2) \equiv x_m^2 p_{01} + x_m p_{02} + p_{12} = 0, \\ (15') \quad (M_1', M_2') \equiv x_m^2 p_{01}' + x_m p_{02}' + p_{12}' = 0. \end{cases}$$

Hier sind die p_{ik} die Determinanten der Matrix

(16) $$\begin{vmatrix} 2\varrho_0, & -(\varrho_1 + \alpha\varrho_0), & 2\alpha\varrho_1 \\ b_0, & b_1, & b_2 \end{vmatrix},$$

woraus die p_{ik}' durch Vertauschung von α mit α' hervorgehen.

Durch Multiplikation von (15) und (15') ergibt sich als Ort der Punktepaare (M_1, M_2), (M_1', M_2') eine in den Koeffizienten von F, G, E rationale Gleichung vom vierten Grade in x_m

(17) $$(M_1, M_2) \cdot (M_1', M_2') \equiv K \equiv x_m^4 p_{01} p_{01}' + \cdots \equiv x_m^4 k_0 + \cdots = 0.$$

Da die linke Seite eine in x_m binäre Kovariante des Systems (F, G, E) ist, genügt die Berechnung des Leitgliedes k_0

(18) $$\begin{aligned} k_0 &\equiv p_{01} p_{01}' \\ &\equiv \{(2\varrho_0 b_1 + \varrho_1 b_0) + \alpha \varrho_0 b_0\} \cdot \{(2\varrho_0 b_1 + \varrho_1 b_0) + \alpha' \varrho_0 b_0\} \\ &\equiv (2\varrho_0 b_1 + \varrho_1 b_0)^2 + (\alpha + \alpha')\varrho_0 b_0 (2\varrho_0 b_1 + \varrho_1 b_0) + \alpha\alpha' \varrho_0^2 b_0^2. \end{aligned}$$

Man setze hier für $\alpha + \alpha'$ und $\alpha\alpha'$ gemäß (1) ihre Werte $\alpha + \alpha' = -\frac{2a_1}{a_0}$,

$\alpha\alpha' = \frac{a_2}{a_0}$, und entwickle derart, daß in den einzelnen Gliedern nur Leitglieder von Kovarianten resp. Invarianten auftreten. Zu dem Behuf bilde man zunächst die Resultante R_a von G und E

(19) $$R_a = a_0\varrho_1^2 + 2a_1\varrho_0\varrho_1 + a_2\varrho_0^2.$$

Dann ergibt sich als seminvariante Darstellung von k_0

(20) $$k_0 \equiv b_0^2 R_a + 4\varrho_0 q_{01}(\varrho_0 b_1 + \varrho_1 b_0),$$

wo $q_{ik} = (ab)_{ik}$.

Um von hier aus zur typischen Darstellung der Kovariante K (17) selbst zu gelangen, hat man nur in (20) die einzelnen Leitglieder von (binären) Kovarianten durch letztere selbst zu ersetzen (während die Invarianten bleiben). Nun ist b_0 das Leitglied von G, ϱ_0 das von E, q_{01} das der Funktionaldeterminante (F, G):

(21) $$(F, G) \equiv q_{01}x_m^2 + q_{02}x_m + q_{12},$$

und $\varrho_0 b_1 + \varrho_1 b_0$ das der Funktionaldeterminante (E, G):

(22) $$(\mathsf{E}, G) = \begin{vmatrix} \varrho_0 & -\varrho_1 \\ x_m b_0 + b_1, & x_m b_1 + b_2 \end{vmatrix}$$
$$\equiv x_m(b_0\varrho_1 + b_1\varrho_0) + (b_1\varrho_1 + b_0\varrho_2).$$

Damit wird die *typische* Darstellung von (17)

(II) $$K \equiv R_a G^2 - 4\mathsf{E} \cdot (F, G) \cdot (G, \mathsf{E}) = 0.$$

Der gesuchte Ort der beiden Punktepaare (M_1, M_2), (M_1', M_2') ist also eine F_6 mit D_2 in A_m, deren weitere Eigenschaften sich aus (II) ablesen lassen, sobald man die geometrische Bedeutung des Verschwindens der einzelnen Faktoren kennt.

Nun stellt $R_a = 0$ den Kegel mit der Spitze A_m dar, der den Schnittkegelschnitt (F, E) projiziert. Sodann ist $(E, G) = 0$ eine F_3, der Ort der Doppelpunkte der Involutionen, die die Gerade g aus den Individuen des Büschels (F, G) ausschneidet. Endlich entsteht die F_2: $(G, \mathsf{E}) = 0$ als Ort des vierten harmonischen Punktes von R in bezug auf die Schnittpunkte (g, F).

Läßt man hinterher im besonderen die Ebene E durch A_m selbst gehen (also $R = A_m$), so daß $\varrho_0 = 0$, so sondert sich in (II) der Faktor ϱ_1^2 ab, d. h. geometrisch, von der F_6 spaltet sich die Ebene E doppeltzählend ab. Damit reduziert sich die F_6 auf die nach der *Zeuthen*schen Vorschrift entstehende F_4, die nunmehr leicht diskutierbar ist.

Für $\varrho = 0$ reduziert sich R_a auf $a_0\varrho_1^2$, E auf $-\varrho_1$, (E, G) auf $\varrho_1(x_m b_0 + b_1) \equiv \varrho_1 G_0$, wo G_0 die Polare von A_m bez. G bedeutet.

Mithin wird die Gleichung der F_4, wenn man noch bequemer $a_0 = 1$ nimmt,

$$\text{(IIa)} \qquad F_4 \equiv G^2 - 4 G_0 \cdot (F, G) = 0.$$

Hier erscheint rechts die *Segre*sche Form (s. Nr. **20**) einer F_4 mit $\bar{C}_2$; letztere ist der Schnitt von G mit der Ebene G_0, also der Berührkegelschnitt des von A_m an G gehenden Berührkegels. Von (IIa) aus gelangt man aber auch zur ursprünglichen *Kummer*schen Darstellung (s. Nr. **9**). Denn (F, G) gestattet die Umformungen

$$(21') \qquad (F, G) \equiv \begin{vmatrix} F_0, & F_1 \\ G_0, & G_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_0, & F \\ G_0, & G \end{vmatrix} = G F_0 - G_0 F.$$

Setzt man dies in (IIa) ein, so entsteht

$$\begin{aligned} F_4 &\equiv G^2 - 4\, G_0 (G_2 F_0 - G_0 F) \\ &\equiv (G - 2\, F_0 G_0)^2 - 4\, G_0^2 (F_0^2 - F), \end{aligned}$$

oder auch, da $F_0^2 - F$ mit der Diskriminante $D_a \equiv a_1^2 - a_2$ von F übereinstimmt,

$$\text{(IIa}') \qquad F_4 \equiv (G - 2 F_0 G_0)^2 - 4 G_0^2 D_a = 0.$$

Hieraus liest man noch ab, daß $D_a = 0$ der Berührkegel von A_m an F, einer der fünf *Kummer*schen Kegel ist, in Übereinstimmung mit *Zeuthen*.

Endlich sei noch der *Zeuthen*schen Tangentenprojektion der F_4 mit $\bar{C}_2$ von der Spitze eines *Kummer*kegels K_2 aus gedacht. Zu dem Behuf greife man zurück zum Falle (1) der allgemeinen F_4, der das Projektionszentrum A_m nicht angehörte. Die binäre Diskriminante D der Form $F_4(x_m)$, gleich Null gesetzt, lieferte den von A_m aus an die F_4 gehenden Tangentenkegel 12. Ordnung K_{12}, resp. dessen Spur in der Ebene $x_m = 0$.

Jetzt sei im besonderen die F_4 eine solche mit $\bar{C}_2$, welch letztere man in der Ebene $x_m = 0$ annehme. Die *Kummer*sche Gleichung der F_4, nach x_m geordnet, hat die Gestalt

$$\begin{aligned} (22) \quad F_4 &\equiv \varphi^2 - 4 x_m^2 \psi \\ &\equiv (a_0 x_m^2 + 2 a_1 x_m + a_2)^2 - 4 x_m^2 (c_0 x_m^2 + 2 c_1 x_m + c_2) = 0. \end{aligned}$$

Die rechts stehende, in x_m biquadrische binäre Form laute abgekürzt

$$(23) \qquad F_4(x_m) \equiv \alpha_0 x_m^4 + 4 \alpha_1 x_m^3 + 6 \alpha_2 x_m^2 + 4 \alpha_3 x_m + \alpha_4.$$

Dann ist bekanntlich die Diskriminante D von der Struktur

$$(24) \qquad D \equiv \alpha_4(\,) + \alpha_3^2(\,).$$

Da aber im vorliegenden Falle $\alpha_4 = a_2^2$, $\alpha_3 = a_1 a_2$, so tritt aus D der Faktor a_2^2 heraus. Geometrisch ist $a_2 = 0$ die Gleichung der $\bar{C}_2$; von der Spur des Kegels K_{12} spaltet sich also die $\bar{C}_2$ doppeltzählend ab, wie es sein muß, da ja jeder Punkt der $\bar{C}_2$ ein D_2 der F_4 ist, der vermöge der Tangentenprojektion in einen d_2 übergeht.

Nunmehr werde das Projektionszentrum A_m als Spitze eines *Kummer*kegels K_2 gewählt und $\psi = 0$ als Spitze des letzteren. Dann reduziert sich die Form ψ auf $x_m^2 c_2$ und die Form F_4 (22) auf

$$(22') \qquad F_4(x_m) \equiv (a_0 x_m^2 + 2a_1 x_m + a_2)^2 - 4x_m^2 c_2.$$

Demnach erhalten die Koeffizienten α in (23) die Werte

$$(23') \qquad \begin{cases} \alpha_0 = a_0^2, \ \alpha_1 = a_0 a_1, \ \alpha_2 = \frac{1}{3}(a_0 a_2 + 2a_1^2 - 2c_2), \\ \alpha_4 = a_2^2, \ \alpha_3 = a_1 a_2. \end{cases}$$

Die Diskriminante D von (22′) ist in ihre Faktoren zu zerlegen. Einmal hat D, wie oben bemerkt, den Faktor a_2^2 und analog auch den Faktor a_0^2. Sodann muß auch der Faktor c_2^2 auftreten, da für $c_2 \equiv 0$ die Form $F_4(x_m)$ das Quadrat einer quadratischen Form (φ) wird, also zwei Doppelwurzeln besitzt.

Geometrisch leuchtet das gleichfalls ein. Denn $c_2 = 0$ liefert die Spur des Kegels K_2, und jede Kante von K_2 berührt die Fläche F_4 zweimal (s. Nr. 9). Mithin existiert eine Zerlegung von D von der Struktur

$$(25) \qquad D \equiv a_0^2 a_2^2 c_2^2 c_4,$$

so daß $c_4 = 0$ die „eigentliche" Projektionskurve ergibt. Berechnet man auf Grund von (23′) die beiden Invarianten g_2 und g_3 der Form $F_4(x_m)$, bildet sodann gemäß (3) $D = g_2^3 - 27g_3^2$, und entwickelt nach Potenzen von c_2, so stellt sich in der Tat heraus, daß die Koeffizienten von c_2^0, c_2^1, c_2^5, c_2^6 verschwinden und eine Zerlegung vom Typus (25) resultiert, wo der Restfaktor c_4 die Gestalt annimmt

$$(26) \qquad c_4 = (c_2 - A)^2 - 4a_1^2 c_2,$$

wobei $A \equiv a_0 a_2 - a_1^2$ die Diskriminante der Form $\varphi(x_m)$ bedeutet. Die Kurve c_4 ist also eine elliptische (mit zwei d_2).

20. Die Segresche Projektion vom S_4 aus. Die Veronesesche Konstruktion. Schon *Steiner* und *Plücker* haben elliptische c_4 mit zwei d_2 untersucht, indem sie die Kurve als Projektion der Schnittkurve C_4 zweier F_2 von irgendeinem Raumpunkt P_0 aus ansahen. Als Sonderfall erscheinen die (elliptischen) c_3, wenn man den Projektionspunkt P_0 auf die C_4 selbst rücken läßt.

Und doch hat es längerer Zeit bedurft, bis man den S_4 zu einer analogen Projektion für die F_4 mit $\bar{C}_2$ benutzte. Dies scheint zuerst durch *G. Veronese*[42]), der schon vorher[43]) die Gesetze des Projizierens

42) *G. Veronese*, Ven. Ist. Atti (6) 2 (1884), p. 1841.

43) *G. Veronese*, Math. Ann. 24 (1884), p. 313.

und Schneidens höherer Räume systematisch untersuchte, geschehen zu sein.

Im S_4 haben zwei Über-F_2, $F_2^{(4)}$ und $G_2^{(4)}$, eine ∞^2-Mannigfaltigkeit $M_4^{(3)}$ der Ordnung 4 gemein. Projiziert man letztere von irgendeinem, zunächst nicht ihr selbst angehörigen Punkte P_0 in einen S_3, so erscheint als Projektion eine F_4 mit $\overline{C}_2$ (s. Art. „F_3", Nr. **16**). Hieraus leitet *Veronese* folgende Konstruktion einer F_4 mit $\overline{C}_2$ her. Man markiere auf einer festen Geraden drei Punkte V, V', S. Durch S lege man eine variierende Raumgerade h. Überdies seien zwei feste F_2, F und F', gegeben; einer der beiden Schnittpunkte von h mit F resp. F' sei A resp. A'. Die beiden Geraden (V, A) und $(V' A')$ mögen sich in einem Punkte X treffen. Dann erzeugt X eine F_4 mit $\overline{C}_2$.

Auch die Tangentialebene T der F_4 in X läßt sich leicht bestimmen. Seien T_a und $T_{a'}$ die Tangentialebenen von F und F' in A und A', so ist die Verbindungsebene von X mit der Geraden $(T_a, T_{a'})$ die gesuchte T.

Die $\overline{C}_2$ erhält man in Analogie zu den zwei d_2 einer bizirkularen c_4, indem man von P_0 aus die ∞^1 Sehnen an die $M_4^{(3)}$ legt. Daraus gewinnt man noch eine Konstruktion der $\overline{C}_2$, die man auch unabhängig vom S_4 ausführen kann.

Während sich *Veronese* auf diese Konstruktionen beschränkte, hat fast gleichzeitig *C. Segre* in einer umfangreichen Arbeit[44]) aus dem obigen Projektionsgrundgedanken eine systematische, fast erschöpfende Theorie der F_4 mit $\overline{C}_2$ entwickelt. Nicht nur die bekannten Eigenschaften dieser Flächengattung werden so auf einfache und natürliche Weise wiedergewonnen, sondern auch viele neue hinzugefügt. Vor allem führt den Verfasser seine Methode zu einer vollständigen Klassifikation der F_4 mit $\overline{C}_2$; er gelangt zu 70 verschiedenen Arten, von denen nur etwa die Hälfte vorher bekannt war.

Außer den 18 Arten bei allgemeiner (irreduzibler) $\overline{C}_2$ ergeben sich 5 Arten, wo die F_4 nur von der dritten Klasse ist; sodann mehrere Arten mit Kuspidal-$\overline{C}_2$ (s. Nr. 18), wo sich beide Schalen der Fläche in zwei Punkten der $\overline{C}_2$, den „clos-Punkten", berühren. Auch die F_4 mit einer in zwei inzidente Doppelgerade $\overline{g}_1$, $\overline{g}_2$ zerfallenden $\overline{C}_2$ werden eingehender als bisher untersucht. Von Interesse ist dabei der Sonderfall, wo der Punkt $(\overline{g}_1, \overline{g}_2)$ ein D_3 der F_4 ist, von dem wieder die *Steiner*sche Fläche S (s. Abschn. VII) ein Unterfall ist.

44) *C. Segre,* Math. Ann. 24 (1884), p. 313. Weitere Ergänzungen finden sich bei *Th. Reye,* Math. Ann. 55 (1902), p. 257; *H. F. Baker,* London Math. Soc. Proc. (2) 11 (1912), p. 285; *V. H. Rao,* ib. (2) 17 (1919), p. 272.

Auch die weiteren Fälle, wo eine der beiden Doppelgeraden, oder auch beide, kuspidal werden, werden genau berücksichtigt. Ferner wird für jede Art der F_4 die Verteilung der 16 g, sowie der ∞^1 C_2-Scharen auf der Fläche bestimmt, nebst der zugehörigen Abbildung niedrigster Ordnung. Weiter werden im besonderen die Arten anallagmatischer F_4 — die durch Inversion in sich übergehen — ermittelt; das Auftreten singulärer Punkte wird eingehend untersucht usf. Eine fruchtbare metrische Anwendung erfährt die Methode für die Zykliden Z (s. Abschn. IV) — für die die $\overline{C}_2$ der nullteilige Kugelkreis $\overline{\mathsf{K}}$ wird —, insbesondere für deren Fokaleigenschaften. Während übrigens bei *Darboux* u. a. ein Brennpunkt einer Zyklide Z eine sie doppelt berührende Nullkugel ist, erscheint hier allgemeiner ein Brennpunkt der Z als eine sie längs einer C berührende Nullkugel. Es sei noch darauf hingewiesen, wie die fünf *Kummer*schen Kegel K_2 (s. Nr. 9) direkt den fünf Überkegeln $K_2^{(4)}$ des F_2-Büschels ($F_2^{(4)}$, $G_2^{(4)}$) im S_4 entsprechen. Läßt man hinterher im besonderen den Projektionspunkt P_0 auf die $M_3^{(4)}$ selbst rücken, so geht die F_4 in eine allgemeine F_3 über (s. Art. „F_3" Nr. **16**).

Indem wir wegen weiterer Einzelheiten auf die Arbeit von *Segre* selbst verweisen, seien dessen synthetischen Entwicklungen einige analytische hinzugefügt.

Man bezeichne Punktkoordinaten im S_4 mit x_i, x_k, x_l, x_m, x_n und wähle den Projektionspunkt als n^{te} Koordinatenecke A_n, den Projektions-S_3 als $x_n = 0$. Ordnet man dann die Gleichungen der beiden Über-F_2 nach x_n, so nehmen sie die Gestalt an

$$(1) \qquad \begin{cases} F_2^{(4)} = F \equiv x_n^2 B_0 + 2x_n B_1 + B_2 = 0, \\ G_2^{(4)} = G \equiv x_n^2 C_0 + 2x_n C_1 + C_2 = 0, \end{cases}$$

wo die B_r, C_s quaternäre Formen in x_i, x_k, x_l, x_m der Ordnung r resp. s bedeuten. Im Büschel $B(F, G)$ befindet sich ein durch A_n gehendes Individuum F' mit der Gleichung

$$(2) \qquad F' \equiv x_n p_{01} + p_{02} = 0,$$

wo $p_{ik} = (BC)_{ik}$. Umgekehrt läßt sich das Büschel B auch aus F' und etwa F (mit $B_0 \neq 0$) zusammensetzen. Die Gleichung der Projektion F_4 der $M_4^{(3)}(F, G)$ ergibt sich durch Nullsetzen der Resultante von F und G

$$(3) \qquad F_4 \equiv p_{02}^2 - 4p_{01}p_{12} = 0.$$

Die $\overline{C}_2$ auf der F_4 ergibt sich als Ort der Spuren der durch A_n gehenden Sekanten der $M_4^{(3)}$. Diese Sekanten sind zugleich die auf F' liegenden, durch A_n gehenden Geraden. Letztere werden gemäß (2) durch $p_{01}=0$, $p_{02}=0$ geliefert. Mithin sind dies auch im $S_3(x_n=0)$ die Bestimmungsgleichungen der $\bar{C}_2$

$$(4) \qquad \bar{C}_2) \quad p_{01}=0, \quad p_{02}=0.$$

Dies bestätigt sich auch sofort algebraisch an der Hand von (1) und (3). Denn p_{01}, p_{02}, p_{12} sind an zwei lineare Identitäten gebunden

$$(5) \qquad \begin{cases} B_0 p_{12} \equiv B_1 p_{02} - B_2 p_{01}, \\ C_0 p_{12} \equiv C_1 p_{02} - C_2 p_{01}. \end{cases}$$

Verwendet man etwa die erstere (mit $B_0 \neq 0$), so geht (3) über in eine in p_{01} und p_{02} quadratische, homogene Gleichung, woraus hervorgeht, daß die F_4 eine $\bar{C}_2$: $p_{02}=0$, $p_{01}=0$ besitzt.

Man wird nun die „*Segre*sche" Gleichungsform (3) der F_4 in die ursprüngliche *Kummer*sche (s. Nr. 9)

$$(6) \qquad F_4 \equiv \varphi^2 - 4p^2\psi = 0$$

überführen wollen, und umgekehrt. Indem wir, wie es erlaubt ist, die Konstante B_0 gleich 1 annehmen, haben wir vermöge (5) den Wert von p_{12}:

$$(5) \qquad p_{12} \equiv B_1 p_{02} - B_2 p_{01}$$

in (3) einzusetzen. Dann ergibt sich durch einfache Umformungen

$$(7) \qquad \begin{aligned} F_4 &\equiv p_{02}^2 - 4p_{01}(B_1 p_{02} - B_2 p_{01}) \\ &\equiv (p_{02}^2 - 4p_{02}B_1 p_{01}) + 4B_2 p_{01}^2 \\ &\equiv (p_{02} - 2B_1 p_{01})^2 - 4p_{01}^2(B_1^2 - B_2). \end{aligned}$$

Setzt man hier

$$(8) \qquad p_{02} - 2B_1 p_{01} = \varphi, \quad p_{01} = p, \quad B_1^2 - B_2 = \psi,$$

so ist man in der Tat zur *Kummer*schen Gleichungsform (6) zurückgelangt.

Ein wenig schwieriger gestaltet sich die Umkehrung. Sei also jetzt (6) vorgelegt, so bedienen wir uns einer Modifikation des *Kummer*schen Verfahrens (a. a. O.), um von (6) aus zu den fünf Kegeln K_2 zu gelangen. Versteht man unter q eine beliebige Linearform, so forme man (6) um, wie folgt:

$$(9) \qquad F_4 \equiv (\varphi + 2pq)^2 - 4p(pq^2 + p\psi + \varphi q).$$

Dann besitzt die rechte Seite bereits die Struktur von (3); man hat nur noch zu zeigen, daß sich die drei Bildungen $\varphi + 2pq$, p, $pq^2 + p\psi + \varphi q$ als zweireihige Determinanten p_{01}, p_{02}, p_{12} einer Matrix (BC) (mit $B_0 = C_0 = 1$) darstellen lassen. Zu dem Behuf stelle man eine zu (5) analoge Identität auf, suche also zwei Formen B_1, B_2 so zu bestimmen, daß man hat

$$(10) \qquad \varphi q + pq^2 + p\psi \equiv B_1(\varphi - 2pq) - B_2 p.$$

In der Tat ergibt sich

$$(10') \qquad \varphi q + pq^2 + p\psi \equiv q(\varphi + 2pq) - p(q^2 - \psi).$$

Wählt man demnach

$$(11) \qquad B_1 = q, \quad B_2 = q^2 - \psi,$$

so ist (10) befriedigt. Nunmehr wähle man C_1, C_2 so, daß

$$(12) \qquad \begin{cases} p_{01} \equiv p \equiv C_1 - B_1, \\ p_{02} \equiv \varphi + 2pq \equiv C_2 - B_2 \end{cases}$$

wird, dann ergibt sich

$$(12') \qquad \begin{cases} C_1 \equiv B_1 + p \equiv p + q, \\ C_2 \equiv \varphi + 2pq + B_2 \equiv \varphi + 2pq + q^2 - \psi. \end{cases}$$

Als Kontrolle dient die Darstellung von p_{12}; wie leicht zu bestätigen, kommt

$$(13) \qquad p_{12} \equiv q\varphi + pq^2 + p\psi \equiv B_1 C_2 - B_2 C_1.$$

Endlich werde auch die *Verones*esche Konstruktion analytisch behandelt. Ohne die Rechnung im einzelnen auszuführen, genügt es, zu zeigen, daß die Konstruktion auf eine F_4 in der *Segre*schen Gestalt (2) führt. Man wähle auf der Koordinatenkante (A_l, A_m) noch einen festen Punkt als Einheitspunkt E (0, 0, 1, 1).

Durch A_m lege man eine variierende Gerade g, die zwei gegebene F_2: F, G (1) in den Punktepaaren A, A', B, B' treffe, mit den x_m-Werten $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$. Die Spur von g in $x_m = 0$ sei der Punkt $(y_i, y_k, y_l, 0)$, so daß $A(\alpha)$ und $B(\beta)$ die Koordinaten (y_i, y_k, y_l, α), (y_i, y_k, y_l, β) erhalten. Demnach wird $(y_i, y_k, y_l + \varrho, \alpha)$ ein laufender Punkt auf der Geraden (A_l, A), und $(y_i, y_k, y_l + \sigma, \beta + \sigma)$ ein solcher auf der Geraden (E, B).

Für den Schnittpunkt $P(x)$ beider Geraden wird also $\varrho = \sigma = \alpha - \beta$, d. h. P besitzt die Koordinaten

$$(y_i, y_k\ y_l + \alpha - \beta, \alpha)$$

mit den Bedingungen $F(\alpha) = 0$, $G(\beta) = 0$. Schreibt man lieber nichthomogen $x_i = y_i = 1$, so folgt aus (14)

$$y_k = x_k, \quad \alpha = x_m, \quad \beta = y_l + x_m - x_l.$$

Die Einsetzung in $F(\alpha) = 0$, $G(\beta) = 0$ führt zu zwei quadratischen Gleichungen in y_l. Die Elimination von y_l liefert so in der Tat die gewünschte Gleichung $F_4 = 0$ in der *Segre*schen Gestalt (2).

Das *Segre*sche Verfahren läßt noch eine andere fruchtbare Auffassung zu. Die Form $F_4(2)$ trat als Resultante der beiden in x_n binären Formen $F(x_n)$, $G(x_n)$ auf. Bildet man andererseits die Funktionaldeterminante $\Theta = (F, G)$

$$(14) \qquad \Theta \equiv (F, G) \equiv p_{01} x_n^2 + p_{02} x_n + p_{12},$$

so erscheint F_4 auch als Diskriminante der Form Θ. Dies besagt geometrisch, daß sich die Fläche F_4 im S_3 auch erzeugen läßt durch Tangentenprojektion (von A_n aus) der durch $\Theta = 0$ dargestellten Mannigfaltigkeit. Letztere ist ersichtlich eine $F_3^{(4)}$, die durch A_n einfach hindurchgeht. Es liegt somit eine Verallgemeinerung der *Geiser*schen Tangentenprojektion einer F_3 im S_3 vor (s. Art „F_3“, Nr. **16**), und es gilt:

„Die *Segre*sche Projektionsfläche F_4 mit $\bar{C}_2$ ist zugleich die Tangentenprojektion einer $F_3^{(4)} = \Theta$.“

Von dieser Θ lassen sich auf Grund des *W. Fr. Meyer*schen Übertragungsprinzips (s. Nr. **5** und Art. „F_3“ Nr. **12**) weitere Eigenschaften angeben. Legt man durch den Punkt A_n in S_4 eine variierende Gerade g, so wird diese von den Individuen des Büschels $B(F, G)$ in den Punktepaaren einer Involution getroffen. Sind D_1, D_2 deren Doppelpunkte, so ist der Ort derselben eben die Fläche Θ.

Im besonderen läßt sich Θ auch auffassen und definieren als Ort der Berührungspunkte der von A_n aus an die Individuen von B gehenden Tangenten; es ist das eine Verallgemeinerung einer *Steiner*schen Erzeugung der F_3 im S_3 (s. Art. „F_3“ Nr. **12**).

Ferner befand sich in B ein durch A_n gehendes Individuum F' (3). Auf F' gehen ∞^1 Gerade durch A_n, die durch $p_{01} = p_{02} = p_{12} = 0$ dargestellt sind; diese Geraden gehören zugleich der Fläche Θ an. Legt man weiter von A_n aus die Tangenten an Θ, so ist der Ort der Berührungspunkte die obige $M_3^{(4)}(F, G)$.

Umgekehrt gehe man von einer beliebigen, allgemeinen, durch A_n gehenden $F_3^{(4)}$ aus mit der Gleichung

$$(15)\qquad F_3^{(4)} \equiv c_1 x_n^2 + c_2 x_n + c_3 = 0.$$

Durch einen beliebigen Punkt P einer solchen $F_3^{(4)}$, z. B. $P = A_n$, geht eine endliche Anzahl ($= 6$) von Geraden, die auf der $F_3^{(4)}$ liegen. Denn für $P = A_n$ bestimmen sich diese sechs Geraden durch die sechs gemeinsamen Lösungen der drei Gleichungen

$$(16)\qquad c_1 = 0,\ \ c_2 = 0,\ \ c_3 = 0.$$

Und diese liefern im S_3 die sechs Schnittpunkte der C_2 ($c_1 = 0$, $c_2 = 0$) mit der F_3 ($c_3 = 0$), die, mit A_n verbunden, jene sechs Geraden ergeben.

Es gibt aber im besonderen eine endliche Anzahl von Punkten P_0 auf der $F_3^{(4)}$, durch die ∞^1, der $F_3^{(4)}$ angehörige Gerade gehen. Wählt man einen solchen Punkt P_0 wieder als Ecke A_n und zugleich als Zentrum der Tangentenprojektion, so kommt man gerade zu der obigen Konstruktion zurück. Von $P_0 = A_n$ aus gehen ∞^3 Tangenten an die

$F_3^{(4)}$, deren Berührungspunkte eine $M_3^{(4)}$ erfüllen. Durch diese $M_3^{(4)}$ geht ein Büschel $B(F, G)$, das mit dem ursprünglichen übereinstimmt. Dies bestätigt sich auch leicht algebraisch.

Sollen die drei Gleichungen (16) ∞^1 gemeinsame Lösungen besitzen, d. h. soll die $F_3(c_3 = 0)$ die $C_2(c_1 = 0,\ c_2 = 0)$ enthalten, so lassen sich Formen a_1, a_2 angeben, so daß c_3 als lineare Kombination von c_1 und c_2 erscheint in der Gestalt

(17) $$c_3 \equiv a_1 c_2 - a_2 c_1.$$

Man bestimme zwei weitere Formen b_1, b_2, so daß man hat

(18) $$c_1 \equiv b_1 - a_1,\quad c_2 \equiv b_2 - a_2,$$

also umgekehrt

(18′) $$b_1 \equiv c_1 + a_1,\quad b_2 \equiv c_2 + a_2,$$

so werden in der Tat die drei Formen c die Determinanten p_{ik} der Matrix

(19) $$\begin{vmatrix} a_0 = 1, & a_1, & a_2 \\ b_0 = 1, & b_1, & b_2 \end{vmatrix},$$

wie bei (1). Damit hat man ein Mittel gefunden, um die Geometrie auf einer allgemeinen $F_3^{(4)}$ auf die Geometrie einer F_4 mit $\overline{C}_2$ zu übertragen, und vice versa.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß *A. Weiler*[44a]) im Anschluß an die *Segre*sche Projektion den Fall einer F_4 mit Kuspidalkegelschnitt weiter verfolgt hat, unter besonderer Berücksichtigung des Sonderfalles, daß die beiden clos-Punkte koinzidieren.

Am Schlusse dieses Abschnittes seien noch einige andere Betrachtungsweisen der F_4 mit $\overline{C}_2$ erwähnt.

Mit Hilfe eines quadratischen Nullsystems vollzieht *A. Ameseder*[45]) die Abbildung einer F_4 mit $\overline{C}_2$ und einem D_2 auf eine F_2, die früher *Korndörfer*[30]) direkt nach der Methode von *Clebsch* ausgeführt hatte. Dabei ist ein quadratisches Nullsystem dadurch bestimmt, daß jedem Punkte eine mit ihm inzidente Ebene, seine „Nullebene", zugeordnet ist, und vice versa jeder Ebene ein mit ihr inzidenter Punkt, ihr „Nullpunkt", derart, daß die Nullpunkte der Ebenen eines Netzes eine F_2 erfüllen.

Sodann erscheint die F_4 mit $\overline{C}_2$ bei *A. del Re*[46]) als Fundamentalfläche eines speziellen Punkt-Ebenen-Konnexes (1, 2), oder auch als konjugierte Polare eines solchen Konnexes und einer F_2.

44a) *A. Weiler,* Ztschr. Math. Phys. 30 (1885), p. 17.

45) *A. Ameseder,* J. f. Math. 93 (1884), p. 62.

46) *A. del Re,* Rom Linc. Rend. (5) 2 (1893), p. 211.

Was weiter die Klassenform einer F_4 mit $\overline{C}_2$ betrifft, so begnügte man sich mit dem Hinweis, daß jene Form identisch verschwindet. Das Entsprechende findet allgemein statt für die Klassenform Φ_ν einer F_n mit einer Doppelkurve $\overline{C}$. Den inneren Grund für dieses identische Verschwinden von Φ_ν hat *O. Chisini*[47]) aufgedeckt; indem er die Ordnungsform F_n als Grenze einer singularitätenfreien Fläche ansieht, etwa eines Büschels $F_n + \lambda F_n'$, wo F_n' singularitätenfrei ist und der Parameter λ gegen Null konvergiert. Damit erscheint auch die Form Φ_ν als Grenze eines Klassengebildes.

Dann zeigt sich, daß das identische Verschwinden von Φ_ν nach erfolgtem Grenzübergange nur von einem gewissen, gegen Null konvergierenden Faktor herrührt, der noch insoweit unbestimmt ist, als er von der Art der Annäherung an die Grenzfläche F_n abhängt.

Befreit man sich, vor Vollziehung des Grenzprozesses, von diesem Faktor durch Division, so zerfällt der nunmehr nicht identisch verschwindende Restfaktor von Φ_ν seinerseits wieder in drei Faktoren, die, gleich Null gesetzt, folgende Gebilde liefern: 1. die Enveloppe der die F_n eigentlich berührenden Ebenen; 2. doppelt zählend, die Berührungsebenen der Doppelkurve $\overline{C}$; 3. dreifach zählend, die Spitzen der Kurve $\overline{C}$.

Endlich sei im besonderen erwähnt, daß *Lackner*[47a]) für eine F_4 mit zwei (inzidenten) Doppelgeraden und vier isolierten D_2 die Haupttangentenkurven ermittelt hat. Indem er die F_4 in geeigneter Weise auf eine Doppelebene abbildet, gehen die Haupttangentenkurven der Fläche über in eine Schar von Kegelschnitten und lassen sich daraufhin einfach konstruieren.

IV. Die Zykliden.

21. Die Zykliden als F_4 mit dem Kugelkreis als Doppelkegelschnitt. Obschon sich nach *Darboux*[48]) die Zykliden, die mit Z bezeichnet seien, ohne weiteres als metrischer Sonderfall der F_4 mit $\overline{C}_2$ erklären lassen, indem für sie die (nullteilig vorausgesetzte) $\overline{C}_2$ mit dem Kugelkreise $\overline{\mathsf{K}}$ zusammenfällt, so hat doch die historische Entwicklung der Z einen wesentlich anderen Weg eingeschlagen, indem

47) *O. Chisini,* Rom Linc. Rend. (3) 26_1 (1917), p. 575.

47a) *A. Lackner,* Wien Ber. 121, IIa (1912), p. 2519.

48) *G. Darboux,* Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques, Paris 1873, 2. Aufl. 1896. Der *Darboux*sche Standpunkt tritt auch selbständig bei *E. Laguerre* hervor in einer Reihe seit 1868 erschienener Abhandlungen, s. Oeuvres II, Paris 1905, p. 41, 54, 164.

die elementargeometrische Durchdringung mit der Kugeltheorie in den Vordergrund gestellt wurde.

Bei dieser spezifischen Entwicklung ist es oft schwer, Eigenschaften der Z als solche von F_4 mit $\overline{C}_2$ wiederzuerkennen.

Im übrigen ist wohl keine Gattung von F_4 so ausgiebig behandelt worden wie die Z, so daß eine vollständige, alle Gesichtspunkte berücksichtigende Darstellung[49]) derselben ein umfangreiches Werk werden würde. Es kann sich daher hier erst recht nur darum handeln, die Hauptmomente herauszugreifen.

22. Die Untersuchung von Casey. In einer ausführlichen Arbeit hat *J. Casey*[50]) die Grundzüge der Theorie der Z selbständig von der Theorie der Kugeln aus entwickelt.

Jeder ebene Schnitt der Z ist eine „bizirkulare" c_4, d. h. eine solche, die in den zwei — konjugiert imaginären — Kreispunkten d_2 besitzt.

Seien $\alpha_r = 0$ $(r = i, k, l, m)$ die Gleichungen von irgend vier Kugeln (die nicht einem Netze angehören), der „Grundkugeln", so ist die Z dargestellt durch eine beliebige quadratische Gleichung in den Variabeln α

$$(1) \qquad Z \equiv \sum\sum a_{rs}\alpha_r\alpha_s = 0. \qquad (r, s = i, k, l, m)$$

Denn sie genügt ersichtlich der obigen Definition in allgemeinster Weise. Die Z läßt sich auch auffassen als Enveloppe einer Kugel $(\alpha x) = 0$, wo die Parameter x an eine quadratische Bedingung geknüpft sind

$$(2) \qquad F_2 \equiv \sum\sum \frac{1}{a_{rs}} x_r x_s = 0.$$

Diese Kugel schneidet die Jacobiana der vier Grundkugeln orthogonal derart, daß ihr Zentrum die F_2 (2) erfüllt.

Man hat daher auch folgende elementare Definition der Z:

„Eine Z ist die Enveloppe einer Kugel, deren Zentrum sich auf einer vorgegebenen F_2 bewegt und die eine vorgegebene Kugel K orthogonal schneidet."

Der Verfasser nennt K die „erzeugende" Kugel und die F_2 die „fokale" F_2.

Tritt im besonderen in (1) eines der α garnicht auf, so reduziert sich die Z, die dann „binodal cyklide" heiße, auf eine solche mit zwei

49) Bezüglich der Einzeldarstellungen von „*Darboux*", „*Reye*", „*Loria*", „*Salmon-Fiedler*" (Kap. 7) s. Lit. Weiter sei noch erwähnt *G. Darboux*, J. Éc. Norm. (2) 1 (1872), p. 273; *G. Humbert*, J. Éc. Pol. 55 (1885), p. 127.

50) *J. Casey*, London Trans. 161 (1871), p. 585; London Math. Soc. Proc. 19 (1871), p. 496. Zur Theorie der Fokal-F_2 vgl. auch *H. Hart*, Mess. (2) 14 (1884), p. 1.

D_2; sie ist die Enveloppe einer Kugel, deren Zentrum eine feste C_2 durchläuft und die eine gegebene Kugel K orthogonal trifft.

Verfolgt man im allgemeinen Falle die Kugeln, deren Zentra einer erzeugenden Geraden der fokalen F_2 angehören, so schneiden sich dieselben in einem Kreise, der auf der Z liegt. Die Z erscheint also auch als Ort eines von nur einem Parameter abhängenden Kreises. Ist im besonderen die Fokal-F_2 ein Kegel K_2, so entspricht jeder Kante von K_2 ein Kreis. So entsteht eine Reihe von Kreisen, die auf einer gegebenen Kugel K liegen und zur Enveloppe eine sphärische C_4 („sphero-quartic") haben, den Schnitt der Kugel K mit dem Kegel K_2.

Diese C_4 stellt sich dar als eine Grenzform der Z und hat Eigenschaften, die denen der Z analog sind. Die C_4 ist die Enveloppe eines variabeln Kreises, dessen Zentrum auf einem gegebenen Kreise der Kugel liegt, der einen gegebenen sphärischen Kegelschnitt auf der Kugel orthogonal schneidet.

Da irgendein Kreis die Z und damit den Kugelkreis $\bar{\mathsf{K}}$ in zwei Punkten trifft, die als D_2 der Z anzusehen sind, so läßt sich die Fläche Z auch definieren als eine F_4, die von jedem Kreise in vier veränderlichen Punkten getroffen wird. Die Z erscheint so als direkte Verallgemeinerung der Kugel, als einer F_2, die von einem Kreise in zwei veränderlichen Punkten getroffen wird.

Man kann diesem Satze nach *W. Fr. Meyer*[51]) eine noch anschaulichere und elementarere Fassung geben. Für die Kugel gilt ersichtlich der Satz:

„Hat eine F_2 die Eigenschaft, daß für irgendeinen partikulären Punkt P_0 außerhalb der F_2 das Produkt $s_1 s_2$ der von P_0 aus gerechneten Sekantenabschnitte s_1, s_2 auf den durch P_0 gehenden Geraden konstant ist, so gilt das nämliche für jeden Punkt P des Raumes und die F_2 ist eine Kugel."

Analog läßt sich aus der Gleichung (1) der Z folgern:

„Hat eine F_4 die Eigenschaft, daß ein partikulärer, nicht auf F_4 gelegener Punkt P_0 existiert, so daß für alle durch P_0 gehenden Geraden g das Produkt $p = s_1 s_2 s_3 s_4$ der vier von P_0 aus gerechneten Sekantenabschnitte s_1, s_2, s_3, s_4 konstant ist, so gilt dies auch für jeden Raumpunkt P, und die F_4 ist eine Z."

Will man sich auf reelle Abschnitte s_1, s_2, s_3, s_4 beschränken, so bedarf sowohl die Lage von P_0, wie die Auswahl der durch ihn gehenden Geraden g einer gewissen Einschränkung.

---

51) *W. Fr. Meyer*, Ber. Deutsch. Math.-Ver. 38 (1929) (Aufgabe). Eine Lösung von *Gruber*, ib. 39 (1930).

23. Einführung der pentasphärischen Koordinaten nach Darboux. Die analytische Behandlung der Z wird wesentlich einfacher und übersichtlicher, wenn man mit *G. Darboux* (l. c.) pentasphärische Koordinaten s_i $(i = 1, \ldots, 5)$ einführt. Zunächst bilde man die mit Konstanten multiplizierten Potenzen p_i eines Punktes in bezug auf fünf beliebige Kugeln; solche p_i sind überzählige Koordinaten, die an eine quadratische Identität gebunden sind. Wählt man statt der p_i geeignete lineare Verbindungen s_i, so kann man es erreichen, daß die Identität zwischen den s_i die Normalgestalt erhält

$$\sum s_i^2 = 0. \tag{3}$$

Solche s_i heißen spezifisch „pentasphärische" Koordinaten eines Punktes; man sollte sie auch „*Darboux*sche" nennen. Entsprechend hat man es in der Ebene mit „tetrazyklischen" Koordinaten zu tun.

Die Gleichungen $s_i = 0$ stellen fünf „Grundkugeln" oder „Orthogonalkugeln" dar, die sich zu je zweien orthogonal durchsetzen; vier der Grundkugeln sind (bei reellen Koeffizienten) stets einteilig, die letzte nullteilig. Man darf z. B. setzen bei rechtwinkligen Koordinaten x, y, z

$$\begin{gathered} s_1 = 2rx, \quad s_2 = 2ry, \quad s_3 = 2rz, \quad s_4 = x^2 + y^2 + z^2 - r^2, \\ s_5 = i(x^2 + y^2 + z^2 + r^2). \end{gathered} \tag{4}$$

Drei der Kugeln sind hierbei in die Koordinatenebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ausgeartet; der Anfangspunkt O ist der Mittelpunkt der beiden übrigen Kugeln $s_4 = 0$, $s_5 = 0$, mit den Radien r, ir.

Jede Kugel (inkl. Ebene und Punkt) ist darstellbar durch eine lineare Gleichung zwischen den s und umgekehrt; die Orthogonalitätsbedingung für zwei Kugeln ist bilinear in den Koeffizienten usf.

Jede Z ist darstellbar durch eine homogene quadratische Gleichung in den s und umgekehrt.

Im besonderen hat man die eindeutig bestimmte Darstellung

$$Z \equiv \sum (a_i + \varrho) s_i^2 = 0, \tag{5}$$

wo, mit Rücksicht auf (3), der Parameter ϱ willkürlich bleibt. Die Z geht durch Inversion in bezug auf irgendeine der fünf Grundkugeln in sich über. Solche Flächen heißen nach *Moutard*[52]) „anallagmatische". Umgekehrt ist eine anallagmatische F_4 eine Z.

Zu jeder der fünf Grundkugeln sind ∞^2 Kugeln orthogonal, die die Z doppelt berühren; deren Mittelpunkte erfüllen je eine F_2, eine „Leitfläche" der Z (s. Nr. **21**). Unter diesen ∞^2 Kugeln befinden sich ∞^1 Ebenen. Diese gehen durch das Zentrum der zugehörigen Grund-

52) *Moutard*, Nouv. Ann. (2) 3 (1864), p. 306, 536.

kugel und stehen senkrecht auf den Kanten des Asymptotenkegels der zugehörigen Leitfläche.

Die ∞^1 Ebenen umhüllen daher je einen Kegel 2. Ordnung K_2; das sind die fünf *Kummerschen* Kegel der Z.

Die ∞^1 Ebenen, die die Z doppelt berühren, schneiden sie in Kreispaaren. So ergeben sich zehn Kreisscharen auf der Z (die aber nicht alle einteilig sind).

Die fünf Leitflächen der Z sind konfokal; deren Fokalkurven heißen die ebenen Fokalkurven der Z. Sie sind zugleich die Doppellinien der abwickelbaren Fläche, die der Z längs ihres Doppelkegelschnitts $\overline{\mathsf{K}}$ umschrieben ist.

Von den ebenen Fokalkurven der Z sind zu unterscheiden die sphärischen, in denen die Grundkugeln von den zugehörigen Leitflächen geschnitten werden. Die Punkte dieser Kurven lassen sich ansehen als Punktkugeln, die die Z doppelt berühren.

24. Konfokale Zykliden. Mit Hilfe der pentasphärischen Koordinaten s_i gelangt man mit *Darboux* (l. c.) auch leicht zum Begriff der konfokalen Z.

Die der Gleichung einer Schar konfokaler Mittelpunktsflächen 2. Ordnung nachgebildete Gleichung

$$\sum_i \frac{s_i^2}{\lambda - \alpha_i} = 0 \tag{6}$$

mit dem Parameter λ liefert eine solche Schar konfokaler Z. Wie bei den F_2 schneiden sich diese Z orthogonal, und von ihnen gehen drei durch jeden Raumpunkt. Sie bilden also ein „isothermes" Flächensystem.

Es gilt auch dieses Analogon zu den F_2, daß jede Z der Schar (5) von den anderen in den Krümmungslinien — die also algebraische C sind — geschnitten werden (s. Nr. 29).

25. Zykliken und Fokalflächen. Die Zykliden Z haben ein doppeltes Analogon in Kurven, je nachdem letztere ebene oder aber doppelt gewundene sind. Im ersteren Falle werde das Zeichen ζ, im letzteren das Zeichen Z verwendet. Zusammen führen sie den Namen „Zykliken"; die Kenntnis ihrer Haupteigenschaften ist bei eingehender Untersuchung der Z unerläßlich. Auch hier ist *G. Darboux* (l. c.) als Hauptautor anzusehen.

Die Z sind die Schnittkurven einer Kugel mit einer F_2; die ζ sind bizirkulare c_4 mit zwei d_2 in den beiden (konjugiert imaginären) Kreispunkten.

Eine Z läßt sich auf vier verschiedene Arten ansehen als Enveloppe von Kreisen, die einen festen Kreis auf einer gegebenen Kugel, den „Direktorkreis“, rechtwinklig schneiden und deren sphärische Zentra auf einem sphärischen Kegelschnitte, dem „Deferenten“, liegen. Diese Kreise werden auf der Kugel ausgeschnitten durch die Tangentialebenen je einer der vier, die Z enthaltenden Kegel 2. Ordnung.

Daher geht eine Z durch eine Inversion J wieder in eine solche über; wählt man im besonderen als J-Zentrum die Spitze eines jener Kegel und den J-Modul geeignet, so geht Z in sich über und heißt (s. oben) nach dem Vorgange von *Moutard* anallagmatisch.

Andererseits läßt sich Z auch durch passende J in einen sphärischen Kegelschnitt überführen.

Die vier Direktorkreise schneiden sich zu je zweien orthogonal, die vier Deferentenkegelschnitte sind konfokal.

Jede der vier Scharen doppelt berührender Kreise enthält vier Nullkreise (d. i. vom Radius Null); ihre Mittelpunkte sind die „Brennpunkte“ von Z, die Schnittpunkte je eines Paares von Direktorkreis und Deferent. Von diesen 16 Brennpunkten können aber nur vier reell sein. Zwischen den Abständen eines beliebigen Punktes von Z von drei Brennpunkten desselben Direktorkreises besteht eine lineare Relation.

Die Mittelpunkte der Z doppelt berührenden Nullkugeln durchlaufen die „Fokallinien“, selbst vier Z-Kurven, die auf vier Kugeln liegen, die orthogonal sind zur Urkugel.

Jede dieser Fokalkurven hat die drei anderen nebst Z zu Fokalkurven; es findet wieder eine gewisse Abstandsrelation statt.

Von den 16 Brennpunkten sind zwölf durch die vier anderen bestimmt. Durch jeden Punkt einer Kugel gehen zwei sich rechtwinklig durchsetzende Z mit gegebenen Brennpunkten.

Dies findet seine Anwendung auf die Zykliden Z. Hierbei sei bemerkt, daß die Eigenschaften der Z durch Spezialisierung aus der *Kummer*schen Fläche K_m (s. Abschn. XI), mit der sie projektiv verwandt sind, ableitbar sind. Indessen erfordert eine direkte Behandlung der Z einfachere Hilfsmittel, und man kann dann umgekehrt durch Verallgemeinerung zur K_m (wie auch zur allgemeinen F_3) übergehen. Die Definition der Z bei *Darboux* ist die *Casey*sche (s. Nr. 22): Sie sind die Enveloppen von Kugeln K, die eine feste Grundkugel K_0, die „Direktrix“, orthogonal schneiden, während ihre Mittelpunkte auf einer festen F_2, der „Deferente“ (bei *Casey* „Fokal-F_2“) liegen. Eine solche Erzeugung ist auf fünf Weisen möglich; die fünf Direktrizen bilden ein Orthogonalsystem und die fünf Deferenten ein konfokales.

Damit ergeben sich die weiteren Analogien mit den Zykliken: Die Z sind anallagmatisch und durch Inversion in F_2 transformierbar; die Brennlinien sind fünf Z, in denen jede Direktrix die zugehörige Deferente schneidet, usf. Die Brennlinien führen zu den Systemen konfokaler Z (s. Nr. **24**).

Bei der elementaren Behandlung der Z ist die Inversion J das Haupthilfsmittel. Eine tiefere Einsicht in die ganze Theorie der Z gewinnt man indessen durch passende projektive Verallgemeinerung der Inversion J. Man gehe von einer festen F_2 aus und einem festen Punkte O. Irgendeinem Punkte A wird $(1, 1)$-deutig involutorisch ein anderer Punkt A' derart zugeordnet, daß sich in ihm die Gerade $g = (A, O)$ mit der Polarebene π von A bzw. F_2 trifft, oder auch, was auf dasselbe hinauskommt, daß A' auf g zu A harmonisch liegt in bezug auf die beiden Schnittpunkte von g mit F_2. Diese quadratische Verwandtschaft (A, A') ist die in Rede stehende verallgemeinerte Inversion J_0; sie geht wieder in J über, wenn man im besonderen die F_2 als Kugel mit dem Zentrum O wählt.

Diese J_0 erweist sich als nützlich bei der Diskussion singulärer Fälle. Man beachte ferner, daß vermöge J_0 jede K treffende Gerade k wieder in eine solche übergeht, wodurch sich die Betrachtung der Fokaleigenschaften der Z durchsichtiger gestaltet u. a. m. Hierbei wird der Begriff der abwickelbaren „Fokalfläche" von Bedeutung, der sich allgemein für eine beliebige Grundfläche F aufstellen läßt.

Die Erzeugenden h dieser (nullteiligen) Fokalfläche treffen K und berühren F.

Dies gilt auch, wenn man an Stelle der Grundfläche F eine Grundkurve C setzt. Die Erzeugenden der abwickelbaren Fokalfläche treffen K und C. Die Doppelkurven dieser Fläche sind in beiden Fällen die „Fokalkurven"; jeder Punkt einer solchen ist ein „Brennpunkt" von F resp. C.

Die Rückkehrkurve einer Fokalfläche ist eine „Minimalkurve", für die jeder Bogen die Länge Null hat.

Die Normalen der Fokalfläche fallen mit den Erzeugenden zusammen, so daß jede Kurve auf der Fokalfläche als eine Krümmungslinie anzusehen ist. Da die Fokalfläche einer Urfläche F diese selbst längs einer Kurve berührt, so ist diese eine Krümmungslinie von F, der Schnitt von F mit der unendlich benachbarten konfokalen Fläche.

Durch Inversion geht die Fokalfläche einer Fläche in die der transformierten Fläche über. Hieran reiht sich noch eine große Reihe von Nebenbetrachtungen und Verallgemeinerungen, auf die hier nicht eingegangen werden kann.

26. Transzendente Darstellung der Zykliden nach Domsch. Die Zykliden gehören zu den Gattungen von Flächen, deren Punkte sich explizite durch hyperelliptische Funktionen von zwei Variabeln darstellen lassen. Das nämliche gilt auch von den F_4 mit $\bar{C}_2$ überhaupt (s. oben), der *Weddle*schen Fläche und der *Kummer*schen Fläche (Abschn. XI), von dem System konfokaler F_2 und anderen Gebilden. Vorab sei bemerkt, daß sich die Entwicklungen von *Domsch*[53]) vermöge einer geeigneten Kollineation auf die F_4 mit beliebiger irreduzibler ein- oder nullteiliger $\bar{C}_2$ direkt übertragen lassen.

Man kann auf zwei Wegen zu der gewünschten transzendenten Darstellung gelangen.

Entweder direkt, wobei man sich zweckmäßig pentasphärischer Koordinaten bedient.

Oder aber indirekt, indem man davon ausgeht, daß die F_2 — wie auch die *Kummer*sche F_4 — vermöge gewisser Transformationen in Zykliden Z überführbar sind und dann die als bekannt angesehenen Darstellungen der ersteren Fläche auf die Z überträgt.

Domsch schlägt diesen zweiten Weg ein, der den Vorzug größerer Anschaulichkeit besitzt. Vorab wird die Transformation eingehend untersucht, die ein System konfokaler F_2 in ein solches konfokaler Z überführt. Sei K eine feste Kugel, P ein beliebiger Punkt und π die Polarebene von P bez. K. Diese Ebene π läßt sich als Kugel mit unendlich großem Radius auffassen. Man bestimme dann in dem Kugelbüschel (K, π) die beiden Punktkugeln (sc. vom Radius Null) mit den Mittelpunkten P_1, P_2. Damit ist eine $(1, 2)$-deutige Korrespondenz C zwischen den Punkten P und den Punktepaaren P_1, P_2 festgelegt, die die Grundlage des Ganzen bildet. Mit Hilfe der C lassen sich einmal die gestaltlichen Verhältnisse der Z verfolgen, andererseits die *Darboux*schen Entwicklungen (s. Nr. **23**), die auf der Anwendung der hyperelliptischen Funktionen auf ein System konfokaler F_2 beruhen, auf die Z übertragen.

Hierbei entsprechen den gemeinsamen Tangenten zweier konfokaler F_2 die gemeinsamen, doppelt berührenden Kreise zweier konfokaler Z. Nunmehr wird die klassische *Lie*sche Transformation[1]) T_l des Geradenraumes in den Kugelraum herangezogen. Vermöge dieser T_l läßt sich die *Kummer*sche Fläche K_m (s. Nr. **71**) auf die Z abbilden. Damit geht aber auch die Verteilung hyperelliptischer Parameter auf K_m in eine entsprechende auf Z über. Hierbei spielen auch Kurven

53) *P. Domsch*, Dissert. Leipzig 1885 = Arch. Math. Phys. (2) 1, p. 193; 2, p. 225.

eine Rolle, die durch gewisse, zwischen jenen Parametern festgesetzte Beziehungen bestimmt werden.

Entsprechend den drei verschiedenen Parameterverteilungen auf K_m (s. Nr. **71**) ergeben sich ebensoviele auf Z. Die Art der gewonnenen Ergebnisse sei durch ein Beispiel illustriert.

Die 16, gleich Null gesetzten Θ-Funktionen liefern auf Z entweder 5 C_4, eine C_8 und 10 C_{16}, oder 4 C_8 und 12 C_4, oder endlich 16 g, deren jede K trifft.

Diese drei Fälle entsprechen gerade den obigen drei Parameterverteilungen.

Es folgen noch einige weitere Anwendungen auf die K_m. Führt man die beiden oben erwähnten Transformationen hintereinander aus, so erhält man eine solche, die ein System konfokaler F_2 direkt in ein gewisses System von K_m überführt. So gelangt man u. a. zu Schließungssätzen, wo an Stelle eines Polygons eine geschlossene Reihe von Hyperboloidstücken tritt.

27. Die Dupinsche Zyklide. *Ch. Dupin*[54]) gelangte zu dieser Fläche mit $4 D_2$, als er die Flächen bestimmte, deren Krümmungslinien Kreise sind (s. auch bei *Kummer*, Nr. 7). Die Z_0 ist erzeugbar als umhüllt durch die Kugeln, die drei gegebene Kugeln berühren. Sie werden aber zugleich von unendlich vielen Kugeln einer zweiten Schar berührt, so daß die Z_0 von zwei Kugelscharen umhüllt wird. Die Berührungskreise bilden auf Z_0 zwei orthogonale Kreisscharen, eben die Krümmungslinien.

Jede der beiden Kugelscharen ist in einem Kugelnetz enthalten. Es ist jeweils die Potenzachse des einen Netzes die Ähnlichkeitsachse der anderen Kugelschar.

Diese beiden (windschiefen) Achsen stehen aufeinander senkrecht, und die beiden Ebenen, die je durch eine Achse senkrecht zur anderen gelegt werden, sind Symmetrieebenen der Z_0.

Liegen im besonderen beide auf der Z_0, so reduziert sich diese auf eine (zirkulare) F_3 (s. Art. „F_3“, Nr. **16**). Dann ist in jeder der beiden Kugelscharen eine einzige Ebene enthalten, die von den Kugeln der anderen Schar in den Punkten einer der beiden Achsen berührt wird.

Im allgemeinen Falle dagegen sind in der einen Kugelschar zwei reelle, in der anderen zwei imaginäre Ebenen enthalten, die sich je

54) *Ch. Dupin*, Applications de Géom. Paris 1822. Bezüglich weiterer Literatur sei einmal auf Note 48) hingewiesen, sodann auf: *A. Mannheim*, Nouv. Ann. 19 (1860), p. 67; *Moutard*, ib. (2) 3 (1864), p. 306, 536; *A. Enneper*, Ztschr. Math. Phys. 14 (1869), p. 393; *H. Lemonnier*, Nouv. Ann. (2) 9 (1870), p. 514.

in einer der beiden Achsen schneiden. Diese vier singulären Tangentialebenen, die die Z_0 in Kreisen berühren, treten an die Stelle von vier der fünf *Kummer*schen Kegel. Der fünfte dagegen bleibt erhalten und liefert zwei weitere Kreisscharen auf der Z_0 (s. Nr. 9).

Cl. Maxwell[55]) hat die Gestalten der Z_0 verfolgt und durch stereoskopische Zeichnungen wiedergegeben. Falls die Z_0 zwei reelle D_2 aufweist, bieten sich zwei Typen dar:

1. die *Hornzyklide;* sie setzt sich aus zwei, in den D_2 zusammenstoßenden Hörnern zusammen;

2. die *Spindelzyklide*; sie besteht aus zwei Schalen, die eine spindelförmig, die andere melonenförmig und die erstere umschließend.

Zwei Sondertypen von Z_0 entstehen, wenn die beiden D_2 koinzidieren.

Alle diese Z_0 gehen aus einem Rotationskegel (resp. Rotationszylinder) durch Inversion hervor und sind daher einfach diskutierbar. Hat aber die Z_0 keine reellen D_2, so ist sie eine *Ringzyklide;* ein Sondertypus ist der Kreisring (Torus).

Wählt man die beiden Symmetrieebenen als $z = 0$, $y = 0$, so nimmt, für $\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ und a, b, c, d als vier Parameter, die Gleichung der Z_0 die Gestalt an

$$(1) \qquad Z_0 \equiv \varrho^4 - \sum a \cdot x\varrho^2 + \sum ab \cdot \varrho^2 - (a+b)(c+d)\,y^2 \\ - (b+c)(a+d)\,z^2 - \sum abc \cdot x + abcd = 0.$$

28. Fokalkurven und Abstandsrelationen. Wir kommen jetzt zu den „Fokalkurven" der Z_0; sie sind der Ort der Zentren der beiden Kugelscharen in ihren Symmetrieebenen. Das ist, wie bei den konfokalen F_2, eine Ellipse und Hyperbel, wo jede durch die Brennpunkte der anderen geht.

Die Kegel, die von den Punkten je der einen Fokalkurve die andere projizieren, sind Rotationskegel, die die Krümmungskreise der Z_0 enthalten.

Zwischen den Abständen, die von den beiden Brennpunktepaaren — F, F_1 auf der Hyperbel, F', F_1' der Ellipse — der Fokalkurven, und zwei laufenden Punkten der letzteren — Q auf der Hyperbel, R auf der Ellipse — bestimmt werden, bestehen einfache Relationen. Zunächst hat man die elementarbekannten Beziehungen

$$(2) \qquad FQ - F_1Q = \text{konst.}, \quad F'R + F_1'R = \text{konst.}$$

55) *Cl. Maxwell*, Quart. J. 9 (1868), p. 111. Vgl. auch die Darstellung bei *F. Klein*, Vorlesungen über höhere Geometrie, Göttingen (autographiert) 1893; 3. Aufl., herausg. von *W. Blaschke*, Berlin 1926, § 13.

Sodann gilt

(3) $$QR - FQ - RF' = \text{konst.}$$

Man nehme weiter auf der Geraden (QR) den Punkt P so an, daß stets

(4) $$PQ - FQ = \text{konst.},$$

dann ist auch

(5) $$PR - RF' = \text{konst.},$$

oder auch

(5′) $$PR + RF_1' = \text{konst.}$$

Damit hat man eine elementare Konstruktion der Z_0, die vom Punkte P erfüllt wird, und zwar so, daß (PQ) die Normale der Z_0 in P liefert.

Läßt man also die obigen Konstanten variieren, so erhält man eine Schar paralleler Z_0. Man erhält deren Gleichung unmittelbar aus (1), wenn man die a, b, c, d ersetzt durch $a + \lambda$, $b - \lambda$, $c + \lambda$, $d - \lambda$.

29. Die Krümmungslinien auf den Zykliden *Z*. Wie in Nr. 25 betont, sind nach *G. Darboux*[56]) die Krümmungslinien auf einer Zyklide Z deren Schnitte mit den konfokalen Zykliden.

Da sich zwei bizirkulare c_4 — indem sie in zwei festen Punkten (den Kreispunkten) d_2 besitzen — noch in acht beweglichen Punkten treffen, so haben zwei Zykliden, außer dem doppelt zählenden Kugelkreise K, noch eine C_8 als Restschnittkurve gemein. Somit sind die Krümmungslinien auf einer Z gewisse C_8, die daraufhin genauer untersucht werden. Eine tiefere Einsicht in deren Eigenschaften erhält man aber mit *Darboux* (l. c.), wenn man sich, ähnlich wie bei der Inversion (s. Nr. 25), einer geeigneten projektiven Verallgemeinerung bedient.

Die gewöhnliche Normale n einer Fläche F in einem Punkte P, mit der Tangentialebene T, läßt sich im projektiven Sinne charakterisieren als diejenige durch P laufende Gerade, die zu T bezüglich des Kugelkreises K — aufgefaßt als eine ausgeartete Φ_2 — konjugiert ist.

Ersetzt man hier K durch eine beliebige aber fest gewählte „absolute“ Fläche Φ_2, so tritt an Stelle von n die „verallgemeinerte“ Normale n', und entsprechend an Stelle der gewöhnlichen Krümmungslinien C die „verallgemeinerten“ C'; als Ort der bei Variieren von P auf F entstehenden Treffpunkte benachbarter n'. Wählt man im besonderen im Falle einer Zyklide Z (oder auch allgemeiner einer F_4

56) Vgl. weiter *G. Darboux,* Paris C. R. 92 (1881), p. 29.

mit $\bar{C}_2$) die Fläche Φ_2 als eine der Z eingeschriebene, so gehen die Kurven C' über in die „*Darboux*schen Krümmungslinien“ C'' auf Z.

Ihre Behandlung basiert auf der Diskussion ihrer Differentialgleichung, falls man als Variable die Linienkoordinaten der verallgemeinerten Normale verwendet (s. Nr. 73).

G. Humbert[57]) hat den Zusammenhang zwischen den *Darboux*schen Krümmungslinien C'' auf Z mit den einbeschriebenen Φ_2 genauer verfolgt und das bemerkenswerte Ergebnis abgeleitet, daß jene C'' von der Auswahl der einzelnen einbeschriebenen Φ_2 ganz unabhängig sind.

V. F_4 mit einer Doppelgeraden $\bar{g}$.

30. Einleitung. Diese Art von F_4 schließt sich an die mit $\bar{C}_2$ an. Sie treten schon bei *Kummer* auf (Nr. 7) als solche, die von ∞^1 Ebenen — nämlich den Ebenen durch die $\bar{g}$ — in C_2 geschnitten werden.

A. Clebsch[58]) hat diese F_4 dann eingehender behandelt und *M. Noether*[59]) einige Ergänzungen dazu gegeben. *Kummer* gibt die durchsichtige Gleichungsform

$$F_4 \equiv x_i^2\varphi + 2x_ix_k\psi + x_k^2\chi = 0, \tag{1}$$

wo φ, ψ, χ beliebige quadratische Formen sind; die $\bar{g}$ ist: ($x_i = 0$, $x_k = 0$).

Zunächst treten in (1) $3 \cdot 10 = 30$ Koeffizienten auf; es ist aber leicht zu sehen, daß unter den zugehörigen Potenzprodukten der x sechs zweimal vorkommen und eines ($x_i^2x_k^2$) dreimal. Die Anzahl der untereinander verschiedenen Potenzprodukte reduziert sich somit auf 22. Man hat daher:

„Eine F_4 mit vorgegebener $\bar{g}$ erfordert 13 Bedingungen, bei unbestimmt gelassener $\bar{g}$ nur 9.“

Jene 13 Bedingungen sagen eben aus, daß gewisse 13 Potenzpunkte der x in der Gleichung der F_4 wegfallen.

Jeder Punkt P' $(0, 0, x_l', x_m')$ auf $\bar{g}$ ist ein D_2 der F_4. Es läßt sich das auch algebraisch bestätigen, indem alle vier Ableitungen der Form F_4 (1) für einen solchen Punkt P', d. i. für $x_i = x_k = 0$, verschwinden. Denn diese Ableitungen enthalten immer nur solche Glieder, die entweder durch x_i oder durch x_k teilbar sind.

57) *G. Humbert*, J. Éc. Pol. 55 (1885), p. 127.

58) *A. Clebsch*, Math. Ann. 1 (1868), p. 260; vgl. *G. Darboux*, Bull. math. astr. 3 (1872), p. 221, 251, 281.

59) *M. Noether*, Math. Ann. 3 (1870), p. 101, 175; 4 (1871), p. 547.

31. Vorstufen zu einer F_4 mit $\bar{g}$. Es ist nützlich, die F_4 (1) mit einer $\bar{g}$ allmählich entstehen zu lassen. Man gehe aus von einer F_4, die zwei reelle D_2[60]), etwa in A_l und A_m, besitzt. Dann müssen die acht Potenzprodukte x_l^4, x_m^4, $x_l^3 x_i$, $x_l^3 x_k$, $x_l^3 x_m$, $x_m^3 x_i$, $x_m^3 x_k$, $x_m^3 x_l$ wegfallen. Mithin treten umgekehrt außer den in (1) angegebenen Gliedern noch die folgenden fünf auf

$$x_l^2 x_m^2,\ x_l^2 x_i x_m,\ x_l^2 x_k x_m,\ x_m^2 x_i x_l,\ x_m^2 x_k x_l,$$

so daß, wie es sein muß, eine F_4 mit zwei gegebenen D_2 von 26 Konstanten abhängt.

Legt man einer solchen F_4 mit zwei D_2 die weitere Bedingung auf, irgendeinen dritten Punkt P' der Geraden g ($x_i = x_k = 0$) zu enthalten und damit diese selbst, so erfordert dies das Wegfallen des Gliedes $x_l^2 x_m^2$, so daß noch die vier Produkte $x_l^2 x_i x_m$, $x_l^2 x_k x_m$, $x_m^2 x_i x_l$, $x_m^2 x_k x_l$ verbleiben. Versteht man daher unter A ein beliebiges lineares Aggregat derselben

$$(2)\qquad A = a_{im} x_l^2 x_i x_m + a_{km} x_l^2 x_k x_m + a_{il} x_m^2 x_i x_l + a_{kl} x_m^2 x_k x_l,$$

so nimmt die Gleichung der F_4, die die Gerade g enthält und auf ihr zwei D_2, in A_l, A_m, die Gestalt an

$$(3)\qquad F_4 \equiv x_i^2 \varphi + 2 x_i x_k \psi + x_k^2 \chi + A = 0.$$

Weiter verlange man, daß diese F_4 in irgendeinem dritten Punkt P' $(0, 0, x_l', x_m')$ auf g einen D_2 besitze.

Es müssen dann wiederum für P' alle vier Ableitungen der Form F_4 (3), oder auch, was genügt, der Form A verschwinden. Sei A_r die die Ableitung von A nach x_r. Dann verschwinden A_l und A_m von selbst für $x_i = x_k = 0$. Es treten also die beiden Bedingungen hinzu

$$(4)\qquad \begin{cases} A_i \equiv a_{im} x_l' + a_{il} x_m' = 0, \\ A_k \equiv a_{km} x_l' + a_{kl} x_m' = 0. \end{cases}$$

Somit darf man setzen, unter ϱ, σ willkürliche Parameter verstanden,

$$(5)\qquad \begin{cases} a_{im} = \varrho x_m', \quad a_{il} = -\varrho x_l', \\ a_{km} = \sigma x_m', \quad a_{kl} = -\sigma x_l'. \end{cases}$$

Damit nimmt A die spezifische Gestalt an

$$(6)\qquad \begin{aligned} A &\equiv x_l x_m \{\varrho x_m' x_l x_i + \sigma x_m' x_l x_k - \varrho x_l' x_m x_i - \sigma x_l' x_m x_k\} \\ &\equiv x_l x_m (x_l x_m' - x_l' x_m)(\varrho x_i + \sigma x_k). \end{aligned}$$

Nunmehr schneide man die F_4 (3) mit irgendeiner Ebene E_τ durch g

$$(7)\qquad x_i = \tau x_k.$$

60) Über die verschiedenen Formen eines D_2 und ihre gegenseitige Überführung s. *K. Rohn,* Math. Ann. 22 (1883), p. 124.

Solange die F_4 auf g nur zwei D_2 (in A_l, A_m) besitzt, ist der Schnitt mit E_τ eine c_4 mit d_2 in A_m und A_l, deren Gleichung (oder vielmehr die ihrer Projektion von A_i auf die Ebene $x_i = 0$) durch Einsetzung von (7) in die Gleichung der F_4 erhalten wird.

Enthält die F_4 die Gerade g, wie in (3), so spaltet sich in c_4 der Faktor x_k ab, d. h. die c_4 zerfällt in g und eine c_3, die durch A_l, A_m geht und g noch in einem dritten, mit dem Parameter τ in (7) variierenden Punkte $P(\tau)$ trifft. Gemäß (6) ist die Gleichung dieser c_3 von der Gestalt

$$(8) \qquad c_3 \equiv x_k \varphi_2(x_k, x_l, x_m) + x_l x_m (\tau \varrho + \sigma)(x_l x_m' - x_m x_l') = 0.$$

Dann und nur dann, wenn dieser Restpunkt $P(\tau)$ fest ist, d. i. mit $P'(0, 0, x_l', x_m')$ zusammenfällt, besitzt, wie (6) lehrt, die F_4 einen dritten D_2 in P'. Auf einer Geraden g einer F_4 können also drei D_2 liegen, ohne daß damit schon g zu einer Doppelgeraden $\bar{g}$ würde.

Die Forderung eines vierten D_2 aber auf g, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Forderung, daß sich von der c_3 abermals die Gerade g abspaltet, ist algebraisch damit gleichwertig, daß die Gleichung

$$(9) \qquad \tau \varrho + \sigma = 0$$

in τ identisch erfüllt ist. Dann aber verschwinden ϱ und σ einzeln, und man gelangt von (3) zu (1) zurück.

32. Die 16 Geraden auf der Fläche. Man schneide jetzt auch die F_4 (1) mit einer beliebigen Ebene $\mathsf{E}_\tau = \mathsf{E}(\tau)$ des Büschels (7). Eine solche E_τ schneidet aus der F_4 noch eine C_2 aus mit der Gleichungsform

$$(10) \qquad c_2(x_k, x_l, x_m) \equiv \sum \sum a_{rs} x_r x_s = 0.$$

Auf der F_4 existiert also, wie schon *Kummer* (s. Nr. 7) angab, eine ∞^1-Schar von C_2, die von dem Ebenenbüschel mit der Achse g ausgeschnitten wird. Unter diesen C_2 befindet sich eine endliche Anzahl solcher, die in ein Geradenpaar zerfallen. Für solche muß die Determinante $D(\tau)$ der Form c_2 (10) verschwinden. Fügt man jedem Koeffizienten a_{rs} seinen Grad in τ in Klammer bei, so wird die Gleichung $D(\tau) = 0$

$$(11) \qquad D(\tau) \equiv \begin{vmatrix} a_{kk}\,(2), & a_{kl}\,(3), & a_{km}\,(3) \\ a_{kl}\,(3), & a_{ll}\,(2), & a_{lm}\,(2) \\ a_{km}\,(3), & a_{lm}\,(2), & a_{mm}\,(2) \end{vmatrix} = 0.^{61)}$$

Da die linke Seite den Grad 8 in τ erhält, so gilt der Satz:

„Auf einer F_4 mit $\bar{g}$ befinden sich 16 Gerade g, die sich in acht,

61) Eine übersichtlichere Ableitung der Gleichung (11) findet sich bei *W. Fr. Meyer,* Giorn. di mat. 67 (1930), p. 1.

jeweils mit $\bar{g}$ inzidente Paare zerlegen. Je zwei g, die verschiedenen Ebenen angehören, sind windschief."

Ist umgekehrt g irgendeine Gerade auf der F_4, die die $\bar{g}$ treffen muß, so schneidet die Ebene $(g, \bar{g})$ die zugehörige Inzidenzgerade aus.

33. Abbildung der Fläche auf eine Ebene. Wir kommen zur Abbildung der F_4 (1) mit $\bar{g}$ auf eine Ebene.

Da jede E aus der F_4 eine c_4 mit einem d_2 (auf $\bar{g}$), also vom Geschlecht 2, ausschneidet, so müssen auch die c des Abbildungsgebüsches G solche vom Geschlecht 2 sein, und je zwei solche c müssen sich in vier variierenden Restpunkten treffen.

Diesen Bedingungen genügt nach *Clebsch*[58]) ein c_4-Gebüsch G mit neun Grundpunkten, von denen einer, A_0, ein d_2 ist, während die acht übrigen $A_i, \ldots, A_r$ einfache Punkte d_1 sind. Die acht Grundpunkte $A_i, \ldots, A_r$ sind die Bilder von acht windschiefen g $(= a_i, \ldots, a_r)$ der F_4.

Andererseits liefern die acht Verbindungsgeraden von A_0 mit irgendeinem der A (A_0, A_t) $(t = i, \ldots, r) = c_{0t}$ die acht weiteren g der F_4. Je ein Paar (a_t, c_{0t}) ist ein Inzidenzpaar.

Eine Gerade c_{0t} ergänzt sich mittels der durch alle 9 Fundamentalpunkte gehenden c_3, die mit c_3' bezeichnet sei, zu einer c_4 in G. Andererseits bildet diese c_3' aber auch zu jeder beliebigen Geraden $c_1^{(0)}$ durch A_0 die Ergänzung zu einer c_4 in G.

Somit ist die c_3' das Bild der $\bar{g}$, derart, daß irgendeinem Punkte P auf $\bar{g}$ zwei mit einem A_0 inzidente Punkte Q, Q' auf c_3' entsprechen und umgekehrt.

34. Die Kegelschnitte auf der Fläche. Die Bilder der c_1 (A_0) auf der F_4 sind die ∞^1 C_2, die von den Ebenen des Büschels $(\bar{g})$ ausgeschnitten werden. Es ist dies aber auch die einzige stetige Schar von C_2 auf F_4, da eine stetige Schar von c_4 in G nicht anders zerfallen kann als wie oben angegeben.

Im besonderen befinden sich unter diesen ∞^1 C_2 die acht Inzidenzpaare von g. Indessen existiert auf der F_4 noch eine endliche Anzahl von $C_2 = C_2'$ anderen Charakters.

Man entnimmt der Abbildung, daß es drei Arten von Bildern solcher C_2' gibt. Erstens:

α) Die 28 Geraden $c_{ik} = (A_i, A_k)$.

Diese ergänzen sich jeweils zu einer c_4 in G vermöge der „komplementären":

α') 28 $r_3^{(i,k)}$, mit d_2 in A_0, und d_1 in den 6 übrigen $A_l, \ldots, A_r$.

Je ein solches Paar $(c_{ik}, r_3^{(i,k)})$ ist das Bild von zwei koplanaren C_2' der F_4. Von deren vier gemeinsamen Punkten liegt einer auf $\bar{g}$.

In der Bildebene trifft c_{ik} die c_3' in einem Restpunkte C_{ik}, dessen Verbindungsgerade mit A_0 einen weiteren Restpunkt C_{ik} liefert.

Dann ist das Paar (C_{ik}, C'_{ik}) das Bild des auf $\bar{g}$ gelegenen Schnittpunktes der beiden C_2'.

Andererseits treffen sich c_{ik} und $r_3^{(i,k)}$ in drei Punkten, den Bildern der drei weiteren Schnittpunkte beider C_2'.

Als weitere Bilder von C_2' auf F_4 hat man:

β) Die $c_2 = c_2^{(i,k,l,m)}$ durch A_0 und vier der Grundpunkte A: $A_i, \ldots, A_m$.

Eine solche $c_2^{(i,k,l,m)}$ ergänzt sich mit der „komplementären“ $c_2^{(n,p,q,r)}$ durch A_0 und die vier übrigen A zu einer c_4 in G.

Auch jedes solche c_2-Paar (β) ist das Bild von zwei koplanaren C_2' der F_4. Die c_3' trifft die $c_2^{(i,k,l,m)}$ in einem Restpunkte $C^{(i,k,l,m)}$, dessen Verbindungsgerade mit A_0 einen weiteren Restpunkt $C'^{(i,k,l,m)}$ ausschneidet. Das nämliche Paar C, C' ergibt sich für die komplementäre $c_2^{(n,p,q,r)}$ und liefert das Bild des auf $\bar{g}$ gelegenen Schnittpunktes der beiden C_2', während deren drei übrige Schnittpunkte den (außer A_0) gemeinsamen Punkten der $c_2^{(i,k,l,m)}$ und $c_2^{(n,p,q,r)}$ entsprechen.

Nun gibt es $\binom{8}{4} = 70$ Arten, wie man aus 8 Elementen $i, \ldots, r$ 4 herausgreifen kann, die sich in 35 Paare vom Typus (i, k, l, m), (n, p, q, r) zerlegen.

Damit ist man zu $70 = 2 \cdot 35$ weiteren C_2' (β) auf F_4 gelangt. Hiermit sind zugleich alle Möglichkeiten erschöpft, wie eine c_4 in G zerfallen kann.

Es gibt aber in G noch eine ausgezeichnete rationale $c_4 = r_4'$ mit d_3 in A_0, und d_1 in den acht übrigen A.

Auch diese r_4' wird von einer beliebigen c_4 in G in zwei variierenden Restpunkten getroffen, ist also das Bild einer weiteren C_2' (γ) auf F_4.

Das Bild der koplanaren C_2' ist ersichtlich der Punkt A_0 selbst.

Die c_3' trifft die r_4' in einem Restpunkte C_0, während der Restschnittpunkt der Geraden (A_0, C_0) mit c_3' in A_0 selbst fällt, so daß (A_0, C_0) die Tangente der c_3' in A_0 ist.

Eben dieses Paar (A_0, C_0) ist das Bild des auf $\bar{g}$ gelegenen Schnittpunktes beider C_2' (γ). Die drei Tangenten der r_4' in d_3 (A_0) entsprechen den drei weiteren Schnittpunkten beider C_2'.

Faßt man zusammen, so hat man den Satz:

„Auf einer F_4 mit $\bar{g}$ existieren außer der früheren stetigen ∞^1-Schar von C_2 noch $2 \cdot 28 + 2 \cdot 35 + 2 \cdot 1 = 2 \cdot 64 = 128$ einzelne Kegelschnitte C_2', die sich in 64 Paaren koplanarer anordnen. Diese

64 Paare zerlegen sich in drei Arten gemäß den jeweils komplementären Bildern:

α) Die 28 Geraden $c_{ik} = (A_i, A_k)$,
α') die komplementären 28 $r_3^{(i,k)}$ mit d_2 in A_0 und d_1 in den sechs übrigen $A_l, \ldots, A_r$;

β) die $c_2 = c_2^{(i,k,l,m)}$ durch A_0 und irgend vier der A, etwa $A_i, \ldots, A_m$,
β') die komplementären $c_2^{(n,p,q,r)}$ durch A_0 und die vier übrigen A;

γ) die $c_4 = r_4'$ mit d_3 in A_0 und d_1 in den acht übrigen A,
γ') der Punkt A selbst.“

Aus der Abbildung läßt sich aber auch entnehmen, welche der 16 g von irgendeiner der 128 C_2' getroffen werden, sowie die gegenseitigen Schnittverhältnisse von C_2' verschiedener Arten.

Wir begnügen uns mit der Anführung einiger Ergebnisse.

Je sieben windschiefe g der F_4 werden zusammen mit $\bar{g}$ von einer C_2' auf F_4 getroffen, die noch einer achten g begegnet.

Auch so gelangt man zu den 128 C_2', die zu je zweien in 64 dreimal berührenden Ebenen $\overline{\overline{T}}$ liegen. Je zwei solche koplanare C_2' treffen zusammen alle 16 g.

Jede der 128 C_2' wird von 28 anderen doppelt geschnitten, mit denen zusammen sie dieselben zwei g trifft; von 70 anderen C_2' einfach, mit denen zusammen sie dieselben 4 g trifft; endlich von 28 C_2' gar nicht, mit denen zusammen sie dieselben 6 g trifft.

35. Die vier Kuspidalpunkte der F_4 mit $\bar{g}$. Die F_4 mit einer Kuspidalgeraden. Unter den möglichen Spezialfällen der F_4 mit $\bar{g}$ ist bemerkenswert der, wo die $\bar{g}$ zu einer Rückkehrkante (Kuspidalgeraden) wird. Während die F_4 mit $\bar{g}$ im allgemeinen eine Φ_{20} ist, reduziert sie sich im vorliegenden Falle auf eine Φ_{12}.

Vorab sei darauf hingewiesen, daß eine F_4 mit $\bar{g}$ im allgemeinen vier Kuspidalpunkte besitzt.

Um sie zu bestimmen, entwickele man in der Gleichung (1) die drei quadratischen Formen φ, ψ, χ nach x_l und x_m, also etwa für φ

$$(12) \qquad \varphi \equiv a_{ii} x_l^2 + 2 b_{ii} x_l x_m + c_{ii} x_m^2 + l_{ii} x_l + m_{ii} x_m + q_{ii},$$

wo die a, b, c Konstante sind, die l, m lineare Formen in x_i, x_k und die q eine quadratische in x_i, x_k.

Man bediene sich eines beweglichen Koordinatensystems derart, daß drei Ecken A_m, A_i, A_k desselben festbleiben, während die vierte Ecke A_l (des früheren festen Systems) durch einen variierenden Punkt A_l' $(0, 0, 1, \mu)$ auf der Kante (A_l, A_m) ersetzt wird.

Die zugehörige Koordinatentransformation lautet

$$(13) \qquad x_i : x_k : x_l : x_m = x_i' : x_k' : x_l' : x_l'\mu - x_m.$$

Dies setze man in (12) ein und ordne nach x_l', so kommt, wenn man nur auf das Glied mit $x_l'^2$ achtet,

$$(12') \qquad \varphi' \equiv x_l'^2(a_{ii} + 2b_{ii}\mu + c_{ii}\mu^2) + \cdots.$$

Verfährt man analog mit ψ und χ, so geht die ursprüngliche Gleichung F_4 (1) über in

$$(14) \qquad \begin{aligned} F_4' \equiv x_l'^2 \{ & a_{ii}x_i^2 + 2a_{ik}x_ix_k + a_{kk}x_k^2) \\ & + 2\mu(b_{ii}x_i^2 + 2b_{ik}x_ix_k + b_{kk}x_k^2) \\ & + \mu^2(c_{ii}x_i^2 + 2c_{ik}x_ix_k + c_{kk}x_k^2)\} + \cdots \\ \equiv x_l'^2 & (a + 2\mu b + \mu^2 c) + \cdots = 0, \end{aligned}$$

wo a, b, c feste quadratische Formen in x_i, x_k sind.

Soll jetzt die Ecke A_l' der Forderung genügen, ein Kuspidalpunkt der F_4 zu werden, so muß der in A_l' liegende D_2, der im allgemeinen ein biplanarer ist, in einen uniplanaren ausarten, d. h. die Diskriminante $D(\mu)$ des Faktors von $x_l'^2$ in (14) muß verschwinden, und umgekehrt. Somit ergibt sich für die Kuspidalpunkte der F_4 auf $\bar{g}$ ($x_i = x_k = 0$) (14) die Bestimmungsgleichung in dem Parameter μ

$$(15) \qquad D(\mu) \equiv ac - b^2 = 0.$$

Den vier Wurzeln dieser Gleichung entsprechen die vier Kuspidalpunkte der F_4 (1).

Soll jetzt weiter die $\bar{g}$ zur Kuspidalgeraden werden, so daß jeder D_2 auf $\bar{g}$ ein uniplanarer wird, so muß die Gleichung (15) in μ identisch erfüllt sein, und umgekehrt.

Diese Forderung ist aber gleichwertig mit der anderen, daß der durch die drei quadratischen Formen a, b, c dargestellte Kegelschnitt mit dem Normkegelschnitt seiner Ebene zusammenfällt. Oder auch, man darf den Parameter μ so normieren, daß das Koeffizientensystem der a_{ii}, b_{ii}, c_{ii}, ... in (14) die Werte erhält: $0, 0, \mu^2$; $0, \mu, 0$; $1, 0, 0$. Geht man zurück zur ursprünglichen Gleichung (1) resp. (12), so erkennt man, daß die in x_l, x_m quadratischen Aggregate C_{ii}, C_{ik}, C_{kk} innerhalb der φ, ψ, χ die Gestalt annehmen

$$(16) \qquad C_{ii} \equiv x_m^2\mu^2, \quad C_{ik} \equiv x_lx_m\mu, \quad C_{kk} \equiv x_l^2,$$

und damit das entsprechende Aggregat C in der Gleichung der F_4 selbst

$$(17) \qquad C \equiv x_i^2x_m^2\mu^2 + 2x_ix_kx_lx_m\mu + x_k^2x_l^2 \equiv (x_ix_m\mu + x_kx_l)^2.$$

Führt man hier wieder mittels (13) statt x_m die neue Koordinate $x_l'\mu - x_m$ ein, so beginnt der nach x_l' geordnete Klammerausdruck in (17) mit

$$x_l'(x_i\mu + x_k) + \cdots. \tag{18}$$

Während also der Kuspidalpunkt auf $\bar{g}$ variiert, dreht sich seine Tangentialebene um $\bar{g}$.

Zusammenfassend hat man den Satz:

„Soll die Doppelgerade $\bar{g}$ ($x_i = x_k = 0$) einer F_4 (1) zu einer Kuspidalgeraden werden, so ist dazu notwendig und hinreichend, daß sich das Aggregat der in x_l, x_m quadratischen Glieder in F_4 als volles Quadrat von der Gestalt (17) darstellen läßt.

Durchläuft dann der Kuspidalpunkt die Kuspidalgerade, so dreht sich seine Tangentialebene um die Kuspidalgerade."

36. Spezielle F_4 mit einer Doppelgeraden. Von der Liniengeometrie aus gelangte *J. Plücker*[62]) zu einer F_4 mit $\bar{g}$ und acht einzelnen D_2.

Es gibt dann vier Ebenenpaare, die die acht D_2, jede Ebene vier von ihnen, enthalten. Durch die $\bar{g}$ gehen vier Ebenen, die die F_4 längs einer Geraden berühren, die jeweils zwei der acht D_2 enthält. Die F_4 ist zugleich eine Φ_4.

Eine F_4 mit $\bar{g}$ und vier weiteren (nicht in einer Ebene gelegenen) D_2 hat *W. Frahm*[63]) durch geeignete Modifikation des *Clebsch*schen Verfahrens auf eine Ebene abgebildet.

Daß auf der (gewöhnlichen) $\bar{g}$ der Reihe nach ein, zwei, drei Punkte D_2 zu D_3 werden können, ohne daß die $\bar{g}$ zu einer $\bar{\bar{g}}$ wird, daß aber das Auftreten eines vierten solchen D_3 die $\bar{g}$ zu einer $\bar{\bar{g}}$ macht, wird in Abschn. VI gezeigt.

Es sei noch hingewiesen auf eine von *M. Noether*[64]) entdeckte, beachtenswerte F_6 mit einer $\bar{g}$ und einer $\bar{C}_4$, die das Geschlecht -1 besitzt.

---

62) *J. Plücker,* Neue Geometrie des Raumes, I, Leipzig, p. 168. Vgl. die weiteren Ausführungen bei *A. Clebsch,* Math. Ann. 1 (1868), p. 253; 2 (1869), p. 1; *F. Klein,* ib. 2 (1870), p. 371; *A. Cayley,* London Math. Soc. Proc. 3 (1871), p. 281.

63) *W. Frahm,* Math. Ann. 7 (1874), p. 512.

64) *M. Noether,* Math. Ann. 21 (1883), p. 399.

VI. F_4 mit dreifachem Punkt und solche mit einer dreifachen Geraden.

37. F_4 mit dreifachem Punkt und ihre Abbildung auf die Ebene. Unter den auf eine Ebene Π abbildbaren F_4 sind auch bemerkenswert die mit einem D_3.[65]) Sei zunächst, im einfachsten Falle, der D_3 ein einzelner gewöhnlicher dreifacher Knotenpunkt.

Dann geht die Abbildung unmittelbar hervor durch Projektion der F_4 vom D_3 aus auf eine Ebene Π, die man als Koordinatenebene $x_m = 0$ wähle. Verlegt man noch den D_3 in die Gegenecke A_m, so nimmt die Gleichung der F_4 die Gestalt an

$$F_4 = x_m a_3 - a_4 = 0, \tag{1}$$

wo a_3, a_4 ternäre Formen in x_i, x_k, x_l der Ordnung 3 resp. 4 bedeuten. Die Gleichung $a_3 = 0$ liefert im Raume den Tangentenkegel K_3 des D_3 (in der Ebene Π dessen Spur), während $a_4 = 0$ den Schnitt von Π mit der F_4 darstellt, im Raume den über dieser Kurve stehenden Kegel K_4.

Die beiden Kegel K_3 und K_4 haben 12 Kanten gemein; das sind die 12 Geraden g der F_4. Deren Spuren in Π seien mit A_r ($r = 1, 2, \ldots, 12$) bezeichnet; diese spielen die Rolle der Fundamentalpunkte in Π bei der Abbildung.

Irgendein ebener Schnitt der F_4 projiziert sich in eine c_4 durch die 12 Punkte A, und umgekehrt. Damit hat man den Satz:

„Die Abbildung der F_4 mit D_3 auf eine Ebene Π vollzieht sich durch ein Gebüsch G von c_4 (mit dem Geschlecht $p = 3$) mit 12 auf einer festen c_3 gelegenen Grundpunkten A, den Fundamentalpunkten der Abbildung, und umgekehrt."

Man beachte hierbei, daß ein „allgemeines" c_4-Gebüsch bereits durch 11 beliebig angenommene Grundpunkte bestimmt ist; ein solches Gebüsch führt auf eine gewisse rationale F_5 (s. Abschn. VIII und IX). Liegen aber im besonderen 11 solche Grundpunkte A auf einer vorgegebenen elliptischen c_3, so schneidet jene c_4 durch diese 11 Grundpunkte A_s ($s = 1, \ldots, 11$) noch einen festen 12ten Grundpunkt aus der c_3 aus.

Dies bestätigt sich leicht, wenn man wieder (s. Nr. **14**) auf der c_3 einen elliptischen, geeignet normierten Parameter u einführt. Eine c_4 trifft die c_3 in 12 Punkten A_r, deren Argumente u_r seien. Dann unterliegen die 12 u_r der Bedingung $\sum u_r = 0$. Man hat also für den

65) Über die verschiedenen Gestalten eines D_k und ihre Deformationen vgl. *K. Rohn,* Math. Ann. 24 (1884), p. 55.

12^{ten} Grundpunkt $-u_{12} \equiv \sum_{s=1}^{11} u_s$. Damit ist man zum obigen, bei der Abbildung der F_4 mit D_3 auftretenden c_4-Gebüsch zurückgelangt.

Diese Abbildung ist in einfachen Formeln festzulegen.

Irgendein Punkt $P(x)$ der F_4 liefert vermöge seines Projektionsstrahles p den Bildpunkt Q. Man gebe Q in der Ebene $x_m = 0$ die Koordinaten y_i, y_k, y_l. Die Lage von P auf p wird durch Angabe des Parameters x_m bestimmt, wo gemäß (1)

$$x_m = \frac{a_4(y)}{a_3(y)}. \tag{2}$$

Damit hat man die Abbildungsformeln

$$x_i : x_k : x_l : x_m = y_i a_3(y) : y_k a_3(y) : y_l a_3(y) : a_4(y). \tag{3}$$

Einige einfache Anwendungen der Abbildung mögen folgen.

Jeder der 12 Grundpunkte A ist das Bild der entsprechenden Geraden g auf der F_4, deren Spur er ist; genauer, den Linienelementen auf g entsprechen die Linienelemente durch A.

Die c_3' ist das Bild des D_3. Legt man durch den D_3 irgendeine Ebene E, so schneidet diese die F_4 in einer r_4 mit d_3 an der Stelle D_3. Die drei Tangenten des d_3 treffen die c_3' in drei Punkten, die auch auf E liegen. Somit ordnen sich die Punkte der c_3' (1, 1)-deutig den durch D_3 gehenden Linienelementen auf der F_4 zu. Eine beliebige Gerade c_1 in Π ist das Bild einer R_4 auf F_4, da jede c_4 in G die c_1 in vier variabeln Punkten trifft.

Nun ergänzt sich die c_1 mit der c_3' zu einer c_4 in G. In der Tat ist ja nach obigem die c_1 die Projektionsspur einer Ebene E durch D_3, die aus der F_4 eine r_4 mit d_3 ausschnitt. Somit reduziert sich die gesuchte R_4 auf eine ebene Kurve r_4. Den Tangenten c_1 der c_3' entsprechen die Schnitte der F_4 mit den Tangentialebenen des K_3.

Geht im besonderen die c_1 durch einen der Punkte A, so entspricht ihr eine in die betreffende Gerade g und eine r_3 (mit d_2 in D_3) zerfallende r_4.

Endlich entspricht einer Geraden $c_{ik} = (A_i, A_k)$ die Rest-C_2, die die Ebene (g_i, g_k) aus der F_4 ausschneidet. Diese $\binom{12}{2} = 66$ C_2 sind die einzigen auf der F_4.

Einer c_2 durch 5 der A entspricht eine C_3 auf F_4, die Restschnittkurve des durch die 5 Geraden g gehenden Kegels 2. Ordnung. Diese $\binom{12}{5} = 792$ C_3 sind die einzigen (irreduziblen) C_3 auf der F_4.

Einer c_2 durch nur 4 der A entspricht eine R_4 auf F_4 mit d_2 in D_3, die Restschnittkurve eines Kegels 2. Ordnung durch die 4 Geraden g.

38. Erzeugung der Fläche durch zwei projektive F_2-Büschel. Die Existenz von R_4-Scharen auf der Fläche muß zu deren Erzeugung durch zwei projektiv zugeordnete F_2-Büschel führen.

Man mache demgemäß den Ansatz

$$(4)\qquad F_4 \equiv \begin{vmatrix} a_1 x_m + a_2, & c_2 \\ b_1 x_m + b_2, & d_2 \end{vmatrix} \equiv x_m(a_1 d_2 - b_1 c_2) + (a_2 d_2 - b_2 c_2).$$

Soll diese Form mit der ursprünglichen (1) übereinstimmen, so müssen die dort gegebenen Formen a_3, a_4 in die Gestalt zu bringen sein

$$(5)\qquad \begin{cases} a_3 \equiv a_1 d_2 - b_1 c_2, \\ a_4 \equiv b_2 c_2 - a_2 d_2. \end{cases}$$

Zu dem Behuf greife man aus den 12 Schnittpunkten A der beiden Kurven a_3, a_4 irgend vier heraus, entweder alle reell oder ein Paar reell, ein zweites konjugiert imaginär oder endlich beide Paare konjugiert imaginär. Durch diese vier Grundpunkte lege man ein Kegelschnittbüschel (c_2, d_2). Dann existiert auf der Kurve a_3 ein bestimmter Punkt (a_1, b_1), so daß die a_3 als erzeugt erscheint durch projektive Zuordnung der beiden Büschel (c_2, d_2), (a_1, b_1), womit die erste Darstellung in (5) erzielt ist.

Sodann treffe irgendein Individuum des Büschels (c_2, d_2) die Kurve a_4 in einem zweiten Quadrupel von Punkten, durch die man ein Kegelschnittbüschel (a_2, b_2) derart lege, daß a_4 erzeugt erscheint durch projektive Zuordnung der beiden Büschel (c_2, d_2), (a_2, b_2), womit man zur zweiten Darstellung in (5) gelangt.

Ersichtlich entsteht jetzt die F_4 (1) durch die beiden projektiv zugeordneten F_2-Büschel

$$(6_\lambda)\qquad \begin{cases} a_1 x_m + a_2 + \lambda c_2 = 0, \\ b_1 x_m + b_2 + \lambda d_2 = 0, \end{cases}$$

resp.

$$(6_\mu)\qquad \begin{cases} a_1 x_m + a_2 + \mu(b_1 x_m + b_2) = 0, \\ c_2 + \mu d_2 = 0. \end{cases}$$

Die spezifische Eigenart dieser beiden Erzeugungen der F_4 mit D_3 (in A_m) liest man unmittelbar aus ihren Darstellungen (6_λ) resp. (6_μ) ab. So liegen im ersteren Falle als Grundkurven der beiden F_2-Büschel zwei R_4 vor, die an derselben Stelle (A_m) einen d_2 besitzen; die projektive Zuordnung beider Büschel ist dabei so zu treffen, daß sich die beiden, je eine der beiden R_4 von dem d_2 aus projizierenden Kegel K_2 einander entsprechen.

39. Die Untersuchung von Rohn. Den F_4 mit D_3 hat *K. Rohn*[66]) eine eingehende Untersuchung zuteil werden lassen, zugleich mit besonderer Berücksichtigung der gestaltlichen Verhältnisse. Auch er legt die Gleichung (1) zugrunde. Solche F_4 mit festem D_3 (in A_m) heißen „*Monoïde*“ M_4; die 12 auf ihr gelegenen Geraden $g_1, \dots, g_{12}$ — die gemeinsamen Kanten der beiden Kegel K_3 ($a_3 = 0$) und K_4 ($a_4 = 0$) — heißen „Hauptgerade“.

Da die Gleichung (1) von 24 Konstanten abhängt, kann man neun der g ($g_1, \dots, g_9$) beliebig annehmen; sie bestimmen den K_3.

Auf dem K_3 lassen sich noch g_{10} und g_{11} beliebig wählen, womit g_{12} bestimmt ist. Es bleiben dann noch vier Konstante zur Verfügung; dementsprechend kann man die M_4 noch durch vier beliebig angenommene Punkte legen.

Wie oben (Nr. 37) lege man irgendeine der 66 Ebenen E_{ik} (g_i, g_k); sie schneidet als Restkurve eine durch A_m gehende $C_2^{(i,k)}$ aus. Eine $C_2^{(i,k)}$ und $C_2^{(l,m)}$ ohne gemeinsamen Index treffen sich noch in einem weiteren Punkte.

Durch je fünf der g, z. B. g_i, g_k, g_l, g_m, g_n, geht ein Kegel K_2, der aus der M_4 noch eine, durch A_m gehende C_3 ausschneidet; solcher C_3 gibt es 792 (l. c.). Zwei C_3 mit verschiedenen Indizes treffen sich noch in fünf Punkten. Durch beide C_3 läßt sich also eine F_2 legen, die noch die, die beiden letzten Indizes führenden C_2 ausschneidet.

Analog werden K_2-Büschel durch vier der g betrachtet, gewisse K_3 u. a. m.

Wann besitzt die M_4 eine weitere, nicht durch A_m gehende Gerade g?

Dann und nur dann, wenn irgend drei der Hauptgeraden in einer Ebene liegen, die eben dann noch eine g ausschneidet. Solcher g kann es aber nicht mehr als 19 geben; in der Tat läßt sich eine M_4 mit 19 g konstruieren.

Nunmehr wird die Möglichkeit von Singularitäten der M_4 außerhalb des D_3 untersucht.

Ein D_2 kann nur eintreten, wenn mindestens zwei der Hauptgeraden koinzidieren, wenn also K_3 und K_4 längs dieser g, auf der der D_2 liegt, eine (gewöhnliche) Berührung haben.

Fallen k der Hauptgeraden zusammen, so erhält die M_4 einen D_k, der die Klasse der Fläche um k erniedrigt.

Ein uniplanarer D_2 kann nur eintreten, wenn die M_4 eine Doppelgerade $\bar{g}$, also noch eine weitere Singularität in A_m besitzt.

---

66) *K. Rohn,* Leipzig Ber. 1884, p. 1.

Trotz dieser verwirrenden Mannigfaltigkeit von weiteren Singularitätsmöglichkeiten gelingt es, eine einfache Regel über das gleichzeitige Auftreten solcher Singularitäten aufzustellen. Man zerlege die Zahl 12 auf irgendeine Art in ganzzahlige Summanden, dann entspricht dieser auch eine bestimmte Art von M_4. Zu jedem Summanden 1 gehört ein D_2, zu jedem Summanden 2 ein D_3, zu jedem Summanden 3 ein biplanarer D_3 usf.

Die Gestalten dieser verschiedenen Arten der Gattungen von M_4 werden verfolgt; von Interesse ist eine M_4 mit 6 D_2, als Spezialfall des Symmetroides (s. Nr. **62**).

Bei dieser gestaltlichen Diskussion erweist es sich als zweckmäßig, folgenden Begriff einzuführen.

Zwei F heißen „gestaltlich gleich", wenn sie durch stetige Änderung der Konstanten ihrer Gleichungen ineinander überführbar sind, ohne daß inzwischen eine Singularität verschwindet oder neu auftritt.

Dann zerlegen sich alle M_4 mit denselben Hauptgeraden in zwei Gruppen. Die M_4 jeder Gruppe sind gestaltlich gleich, und die eine Gruppe besteht aus Spiegelbildern der anderen. Auf diese Weise lassen sich alle M_4 mit gleichem Tangentenkegel K_3 in A_m gestaltlich vergleichen, indem man den Hauptgeraden alle möglichen Lagen erteilt.

Weiterhin sind dann noch die M_4 mit verschiedenen K_3 zu vergleichen, wobei es einen wesentlichen Unterschied macht, ob der K_3 einteilig oder zweiteilig ist; nebst der Lage der Hauptgeraden entscheidet dies die Gestalt.

Daraufhin lassen sich die M_4 zunächst ohne weitere Singularitäten, dann aber auch mit solchen, bis ins einzelnste verfolgen.

Am Schluß finden noch die Sonderfälle der *Steiner*schen Fläche (s. Abschn. VII), sowie der F_4 mit einer dreifachen Geraden $\overline{\overline{g}}$ (s. Nr. **40**) ihre Berücksichtigung.

40. F_4 mit dreifacher Geraden $\overline{\overline{g}}$ und ihre Abbildung. Der nächste Schritt würde sein, zu einer F_4 mit zwei D_3, etwa in A_l und A_m, überzugehen. Da dann in der Gleichung der F_4 x_l und x_m nur linear auftreten dürfen, muß sie die Gestalt haben

$$(1) \qquad F_4 \equiv x_l x_m f_2 + x_l f_3 + x_m g_3 + f_4 = 0,$$

wo die f, g binär in x_i, x_k sind.

Die Gerade (A_l, A_m) ist dann eine $\overline{g}$.

Erst wenn man an irgendeinen dritten Punkt auf (A_l, A_m) die Forderung stellt, ebenfalls ein D_3 der F_4 zu sein, existieren ∞^1 solche; jeder Punkt von (A_l, A_m) ist ein D_3, und die Gerade selbst eine dreifache Gerade $\overline{\overline{g}}$. Man kann dann der Gleichung der F_4 die Gestalt geben

$$(2) \qquad F_4 \equiv x_i^3 a + x_i^2 x_k b + x_i x_k^2 c + x_k^3 d = 0,$$

unter a, b, c, d Linearformen aller x verstanden.

Zunächst treten in (2) $4 \cdot 4 = 16$ homogene Koeffizienten auf. Aber von diesen kommen drei (die von $x_i^3 x_k$, $x_i^2 x_k^2$, $x_i x_k^3$) zweimal vor. Mithin hängt eine F_4 mit gegebener $\overline{\overline{g}}$ von $34 - 22 = 12$ Konstanten ab, oder auch, es gilt:

„Die Forderung an eine F_4, eine vorgegebene Gerade g als dreifache $(\overline{\overline{g}})$[67]) zu besitzen, involviert 22 (lineare) Relationen zwischen den Koeffizienten. Läßt man die Lage der $\overline{\overline{g}}$ unbestimmt, so vermindert sich die Zahl 22 um 4."

Jede Ebene E durch $\overline{\overline{g}}$ schneidet eine Restgerade h aus, die F_4 ist also eine Regelfläche R-F_4 und die h sind deren Regelstrahlen (s. Nr. 77).

Sei die Gleichung des E-Büschels durch $\overline{\overline{g}}$

$$(3) \qquad \mathsf{E}(\tau) \equiv x_i - \tau x_k = 0,$$

so werde der zugehörige Regelstrahl entsprechend mit $h(\tau)$ bezeichnet.

Nach Einsetzung von (3) in (2) sondert sich, wie es sein muß, der Faktor x_k^3 ab, und es bleibt zur Bestimmung von $h(\tau)$ eine in x_k, x_l, x_m lineare Gleichung von der Gestalt

$$(4) \qquad x_k f_4(\tau) + x_l f_3(\tau) + x_m g_3(\tau) = 0.$$

Durch Kombinierung von (4) mit (3) erhält man für die Achsenkoordinaten π von h die explizite Darstellung

$$(5) \qquad \pi_{ik} : \pi_{il} : \pi_{im} : \pi_{kl} : \pi_{km} : \pi_{lm} = f_4 : g_3 : h_3 : -\tau g_3 : -\tau h_3 : 0.$$

Eine beliebige Gerade π' trifft die F_4 in vier Punkten, die von einer biquadratischen Gleichung in τ abhängen.

Man markiere auf $\overline{\overline{g}}$ einen beliebig, aber fest gewählten Punkt P' mit der Koordinate $x'_{lm} = \frac{x'_l}{x'_m}$.

Für die durch P gehenden Regelstrahlen h erhält man gemäß (4) — wenn man hinterher $x_k = x_k' = 0$ setzt — die kubische Gleichung

$$(6) \qquad x_l' f_3(\tau) + x'_m g_3(\tau) = 0.$$

Läßt man nunmehr P' auf $\overline{\overline{g}}$ variieren, so stellt die Gleichung (6) ein Büschel (oder auch eine Involution) kubischer Gleichungen dar mit dem Parameter x'_{lm}. Durch jeden Punkt P' auf $\overline{\overline{g}}$ gehen somit drei Regelstrahlen h, deren Argumente τ die Wurzeln der kubischen Gleichung (6) sind.

67) Vgl. *„Salmon-Fiedler"*, Kap. 6, Nr. 326ff., und *A. Armenante,* Ann. di mat. (2) 4 (1870), p. 50.

Behufs Abbildung der F_4 mit $\overline{\overline{g}}$ auf eine Hilfsebene Π ($x_m = 0$) von irgendeinem D_3 auf $\overline{\overline{g}}$ aus, etwa A_m, wende man wieder das Mittel der Projektion von D_3 aus an (s. Nr. 37).

Irgendein ebener Schnitt der F_4 projiziert sich in eine r_4 mit d_3 in A_l, der Spur von $\overline{\overline{g}}$, die noch durch drei feste Punkte H_1, H_2, H_3 — die Spuren der drei durch A_m gehenden Regelstrahlen h — einfach hindurchgeht.

Da es von r_4 mit festem d_3 und drei festen d_1 noch eine lineare ∞^5-Schar gibt, so vollzieht sich die Abbildung der F_4 mittels eines Gebüsches G' von r_4 der angegebenen Art; dabei sind die Koeffizienten aller Formen r_4 in G' an zwei feste lineare Bedingungen geknüpft. Indessen läßt sich diese Abbildung vereinfachen, wenn man die ganze Figur in der Ebene einer quadratischen Transformation T_2 unterwirft, mit Fundamentalpunkten in A_l und zweien der H-Punkte, etwa H_2, H_3, während H_1 in einen anderen Punkt H übergehe.

Damit geht das Gebüsch G' von r_4 über in ein anderes Gebüsch G von r_3 mit d_2 in A_l und d_1 in H, und man hat den Satz:

„Die einfachste Abbildung einer F_4 mit $\overline{\overline{g}}$ geschieht mittels eines Gebüsches G von r_3 mit einem festen d_2 und einem festen d_1 als Grundpunkten."

Hieraus folgt eine explizite Darstellung der F_4 in zwei nicht homogenen Parametern λ, μ von der Gestalt

$$\rho x_i = c^{(i)}(\overset{2}{\lambda}, \overset{1}{\mu}), \tag{7}$$

wo die rechts stehenden ternären Formen c in λ quadratisch, in μ linear sind. Macht man noch mit einer dritten Variabeln ν homogen und sind L, M, N die Koordinatenecken, so ist L der feste d_2 und M der feste d_1.

Umgekehrt führt eine Darstellung vom Typus (7), wo die Formen $c^{(i)}$ im übrigen beliebig, wenn nur linear unabhängig, gegeben seien, zu einer Abbildung einer F_4 mit $\overline{\overline{g}}$.

Ordnet man die rechten Seiten von (7), einmal nach λ, das andere Mal nach μ, so erscheint die F_4 ebensowohl als Ort von ∞^1 Regelstrahlen h, wie als Ort von ∞^1 C_2. Die Bilder der h sind die Geraden c_1' des Büschels (A_l) und die Bilder der C_2 sind die Geraden c_1 des Büschels (H). Jede C_2 trifft jede h einmal. Man erhält die C_2 auf der F_4 direkt als Restkurven der durch irgend zwei von drei zusammengehörigen h gelegten Ebenen.

Im allgemeinen sind die drei von irgendeinem Punkte von $\overline{\overline{g}}$ ausgehenden Regelstrahlen h_1, h_2, h_3 nicht inzident. Man frage, wann dieser Sonderfall, etwa zunächst für den Punkt A_m, eintritt. Dann sind auch die Spuren H_1, H_2, H_3 inzident, und umgekehrt.

Vermöge der T_2 geht dann das Gebüsch G' von c_4 über in ein Gebüsch G mit einem d_2 in $A_l = L$, dessen eine Tangente fest ist. Wählt man als diese feste Tangente des d_2 etwa die Seite $\nu = 0$, so muß für alle Individuen c in G der Koeffizient von $\lambda^2\mu$ verschwinden, und umgekehrt.

Aus der Invarianz dieser Eigenschaft von G' resp. G folgt, daß die Inzidenz von drei Regelstrahlen h_1, h_2, h_3 unabhängig ist von der Lage des Projektionszentrums auf $\overline{\overline{g}}$. Sind also für irgendeinen Punkt P' auf $\overline{\overline{g}}$ die drei durch ihn gehenden Regelstrahlen inzident — was nur eine einzige Bedingung erfordert —, so findet das gleiche für jeden Punkt P von $\overline{\overline{g}}$ statt.

Dies mag auch rechnerisch bestätigt werden. Man ordne die Gleichung der F_4, wie im allgemeinen Falle eines einzelnen D_3 (s. Nr. **37**), nach x_m

$$F_4 \equiv c_3 x_m + c_4 = 0. \tag{8}$$

Hier sind jetzt, im Falle einer $\overline{\overline{g}}$ $(x_i = x_k = 0)$, die beiden von x_m freien Formen c_3, c_4 von spezifischer Eigenart.

In c_3 treten nur x_i und x_k auf; c_3 ist also eine binäre kubische Form in x_i, x_k und $c_3 = 0$ stellt drei Gerade h_1', h_2', h_3' durch A_l dar, die Spuren der drei durch A_m gehenden Regelstrahlen h_1, h_2, h_3.

Andererseits ist c_4 in x_l linear, also von der Gestalt

$$c_4 \equiv x_l g_3 + f_4, \tag{9}$$

wo wiederum g_3, f_4 binär in x_i, x_k sind. Die Kurve $c_4 = 0$, der Schnitt der F_4 mit $x_m = 0$, ist, wie es sein muß, eine r_4 mit d_3 in A_l.

Die Gleichung (8) der F_4 nimmt nunmehr die Gestalt an

$$F_4 \equiv f_4 + x_l g_3 + x_m h_3 = 0. \tag{8'}$$

Schneidet man wiederum die F_4 mit den E-Büschel (3) $x_i - \tau x_k = 0$, so reduziert sich (8') auf (4).

Man schneide jetzt die F_4 vorab mit einer beliebigen, nicht durch A_m gehenden Ebene E_v

$$\mathsf{E}_v \equiv v_i x_i + v_k x_k + v_l x_l - x_m = 0. \tag{10}$$

Projiziert man die Schnittkurve von A_m aus auf $x_m = 0$, so erhält man eine r_4 mit d_3 in A_l

$$\begin{aligned} r_4 &\equiv h_3(v_i x_i + v_k x_k + v_l x_l) + (f_4 + x_l g_3) \\ &\equiv \{h_3(v_i x_i + v_k x_k) + f_4\} + x_l(g_3 + h_3 v_l) = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Diese ∞^3 r_4 gehen noch durch drei feste Punkte H_1, H_2, H_3, die Spuren der drei durch A_m gehenden Regelstrahlen h_1, h_2, h_3. Nunmehr lege man der Ebene E_v die Beschränkung auf, durch einen festen Punkt $P'(0, 0, x_l', 1) = P'(x_l')$ der $\overline{\overline{g}}$ zu gehen, betrachte also das Büschel der Ebenen $\mathsf{E}_v' = \mathsf{E}_v(P')$. Die Gleichung einer solchen lautet gemäß (10)

$$(12) \qquad \mathsf{E}_v' \equiv v_i x_i + v_k x_k + x_l - x_l' x_m = 0.$$

Die Projektion des Schnittes hat also zur Gleichung

$$(13) \qquad r_4' \equiv g_3(v_i x_i + v_k x_k - x_l' f_4) + x_l(g_3 - x_l' f_3) = 0.$$

Hieraus geht hervor, daß, bei festem P' auf $\overline{\overline{g}}$, das Tangententripel der r_4' in d_3 (A_l) stets das nämliche ist

$$(15) \qquad g_3 - x_l' f_3 = 0.$$

Variiert dagegen P' auf $\overline{\overline{g}}$, so liefert (15) eine kubische Involution von Tangententripeln durch A_l.

Es ist noch zu zeigen, daß die Restschnittpunkte des Tripels (15) mit der r_4' (13) bei fest gedachtem P' zusammenfallen mit den Spuren der durch P' gehenden Regelstrahlen h_1', h_3', h_3'.

Man schneide, wie oben, die F_4 mit irgendeiner Ebene E_τ durch $\overline{\overline{g}}$

$$(3) \qquad \mathsf{E}_\tau \equiv x_i - \tau x_k = 0.$$

Nach Einsetzung in die Gleichung (8') der F_4 ergibt sich

$$(16) \qquad \mathsf{E}_i \equiv x_k f_4(\tau) + x_l f_3(\tau) + x_m g_3(\tau) = 0.$$

Die beiden Ebenen E_τ und E_i treffen sich in einem Regelstrahl h'.

Um dessen Treffpunkt $P'(x_l')$ auf $\overline{\overline{g}}$ zu bestimmen, hat man in (16) $x_i = x_k = 0$ zu setzen. Damit reduziert sich aber (16) wieder auf (15).

In der Tat gehört so zu jedem gegebenen τ ein Punkt $P'(x_l')$ auf $\overline{\overline{g}}$, umgekehrt aber zu gegebenem P' ein Tripel von τ-Werten.

Zusammenfassend hat man:

„Die ∞^3 Projektionsbilder der ebenen Schnitte einer F_4 mit $\overline{\overline{g}}$ $(x_i = x_k = 0)$, für A_m als Projektionszentrum und $x_m = 0$ als Projektionsebene, bilden ein Gebüsch von r_4 mit d_3 in A_l — der Spur von $\overline{\overline{g}}$ — und drei d_1 in drei festen Punkten H_1, H_2, H_3, den Spuren der durch A_m gehenden Regelstrahlen h_1, h_2, h_3.

Dagegen bilden die Tangententripel dieser ∞^3 r_4 in A_l nur eine lineare ∞^1-Schar, die kubische Involution (15). Für jedes Bündel von Schnittebenen, dessen Zentrum auf $\overline{\overline{g}}$ liegt, ist das Tangententripel fest."

41. Die F_4 mit $\overline{\overline{g}}$ als Achsenfläche einer kubischen Raumkurve. Ein bemerkenswerter Repräsentant der F_4 mit $\overline{\overline{g}}$ tritt bei den kubischen Raumkurven C_3 auf. Liegt noch eine feste Raumgerade g vor, so gehen von jedem Punkte P auf g drei Achsen a_1, a_2, a_3 der Kurve aus. Diese sind ersichtlich die Regelstrahlen einer F_4 mit $\overline{\overline{g}} = g$.

Es sollen die Abbildungsformeln aufgestellt werden.[68]) Man wähle die C_3 als Normkurve $N_3 = \mathsf{N}_3$ (s. Art. „F_3", Nr. **19**),

(a) $$x_3 : x_2 : x_1 : x_0 = \lambda^3 : 3\lambda^2 : 3\lambda : 1.$$

Von irgendeinem Raumpunkt (x) gehen drei Ebenen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ an die N_3, wo die elementarsymmetrischen Verbindungen der λ mit den x übereinstimmen. Spaltet man die λ in ein festes Paar (α, β) und ein variierendes Element μ, so sind, für $\sigma_2 : \sigma_1 : \sigma_0 = \alpha\beta : \alpha + \beta : 1$, die Koordinaten eines laufenden Punktes (μ) auf der Achse $a(\alpha, \beta)$

(b) $$x_3 : x_2 : x_1 : x_0 = \mu\sigma_2 : \sigma_2 + \mu\sigma_1 : \sigma_1 + \mu\sigma_0 : \sigma_0.$$

Hieraus folgen als Strahlenkoordinaten p_{ik} der Achse a

(c) $$p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23} = \sigma_0^2 : \sigma_0\sigma_1 : \sigma_0\sigma_2 : \sigma_1^2 - \sigma_0\sigma_2 : \sigma_1\sigma_2 : \sigma_2^2.$$

Nunmehr möge die Achse a variieren, doch so, daß sie stets eine feste Gerade g trifft (oder allgemeiner, einem festen linearen Komplex K angehört). Damit sind die σ an eine quadratische Bedingung gebunden

(d) $$c_2(\sigma) = 0.$$

Diese läßt sich wiederum ersetzen durch eine explizite Darstellung in einem Parameter λ

(e) $$\sigma_2 : \sigma_1 : \sigma_0 = f_2(\lambda) : g_2(\lambda) : h_2(\lambda).$$

Setzt man dies in (b) ein, so gelangt man gerade zu den früheren Abbildungsformeln (7) einer F_4 mit $\overline{\overline{g}}$ zurück.

Um von einer solchen Parameterdarstellung zu der impliziten Gleichung der zugehörigen F_4 zu gelangen, hat man aus (b) λ und μ zu eliminieren. Dies geschieht am einfachsten so: Man fasse einen Raumpunkt (x) als Zentrum eines Ebenenbündels (r), (s), (t) auf, so daß die x_i den Determinanten $(rst)_{klm}$ proportional werden.

Man schneide das Gebilde (b) der Reihe nach mit den drei Ebenen (r), (s), (t), so gelangt man zu drei Gleichungen der Form

(f) $$C_r \equiv (\overset{2}{\lambda}, \overset{1}{\mu}; \overset{1}{r}) = 0, \quad C_s \equiv (\overset{2}{\lambda}, \overset{1}{\mu}; \overset{1}{s}) = 0, \quad C_t \equiv (\overset{2}{\lambda}, \overset{1}{\mu}; \overset{1}{t}) = 0,$$

wo nur die Grade in den λ, μ, sowie den r_i, s_i, t_i angegeben sind.

Man bilde jetzt die Resultante R (bez. λ, μ) der drei Formen (f) — was auf die Bildung von Resultanten biquadratischer binärer Formen in λ zurückkommt. R ist in den Determinanten der Koeffizientenmatrix (bez. λ, μ) von (f) vom Grade vier, also auch im besonderen in den Größen $(rst)_{klm} = x_i$, womit die gesuchte Gleichung der F_4 gefunden ist.

---

68) *W. Fr. Meyer*, Apolarität und rationale Kurven. Tübingen 1883, Abschnitt 3.

VII. Die Steinersche Fläche.

42. Einleitung. Dieser Fläche ist bereits im Art. „F_3", Nr. **13**, gedacht worden. Dort erschien sie als Reziproke zu einer F_3 mit vier D_2.

Aber auch innerhalb der Theorie der F_4 nimmt S eine charakteristische Stellung ein.[69]) Entweder, wie schon bei *Kummer* (Nr. 8), als F_4 mit drei in einem Punkte — der dann von selbst ein D_3 wird — zusammenstoßenden Doppelgeraden $\bar{g}$, mit der merkwürdigen Eigenschaft, daß auf ihr eine ∞^2-Schar von C_2 liegt, in denen die Fläche von deren Tangentialebenen T geschnitten wird.[70]) Oder aber umgekehrt, wie im folgenden, im Anschluß an Nr. **37**, läßt sich die S als F_4 mit einzelnem D_3, durch den drei Doppelgerade $\bar{g}_1$, $\bar{g}_2$, $\bar{g}_3$ laufen, erklären.

Seien letztere vorerst als reell und verschieden angenommen, so verlege man sie in die drei von A_m ausgehenden Koordinatenkanten, dann hat die Gleichung von S ersichtlich die Gestalt

$$S \equiv a_i x_k^2 x_l^2 + a_k x_l^2 x_i^2 + a_l x_i^2 x_k^2 + b x_m x_i x_k x_l = 0. \tag{1}$$

Gegenüber der allgemeinen Gleichung einer F_4 mit D_3 (in A_m) (s. Nr. **37**) zeichnet sich die S dadurch aus, daß die Spur des Kegels K_3 in der Ebene $x_m = 0$ in drei Gerade, die Koordinatenseiten $x_i = 0$, $x_k = 0$, $x_l = 0$ zerfällt, und die des Kegels K_4 eine r_4 mit d_2 in den Koordinatenecken A_i, A_k, A_l ist.

Von den 12 g der allgemeinen F_4 mit D_3, den Schnittkanten der beiden Kegel K_3 und K_4, fallen jetzt je vier in eine der drei $\bar{g}$.

43. Abbildung der Fläche auf eine Ebene. Behufs Abbildung der Fläche S auf eine Ebene Π ($x_m = 0$) wende man zunächst wieder die Methode des allgemeinen Falles an, die Projektion vom D_3 aus auf Π. Irgendein ebener Schnitt der S ist eine r_4 mit drei d_2 auf den drei $\bar{g}$. Eine solche r_4 projiziert sich wiederum in eine r_4' mit drei d_2 in A_i, A_k, A_l.

Die Abbildung vollzieht sich also mittels eines gewissen Gebüsches G' solcher r_4'. Von r_4' in Π mit drei festen d_2 gibt es noch eine lineare ∞^5-Schar; soll sich diese auf ein *Gebüsch* G' reduzieren, so

69) Von weiterer Literatur sei erwähnt: *L. Cremona,* J. f. Math. 63 (1864), p. 315; 67 (1867), p. 1; Ist. Lomb. Rend. 4 (1867); *E. Lampe,* Dissert. Berlin 1864; *A. Clebsch,* J. f. Math. 67 (1867), p. 1; *R. Sturm,* Math. Ann. 3 (1871), p. 76; *E. Beltrami,* Bologna Mem. (3) 10 (1879), p. 232; *K. Rohn,* Math. Ann. 24 (1884), p. 149; *E. Laguerre,* Œuvres II, p. 275, 281, 319. Besonders sei hingewiesen auf die Monographie von *F. Gerbaldi,* La superficie di Steiner, Torino 1881.

70) *Th. Vahlen,* Acta Math. 19 (1895), p. 199, liefert einen einfachen Determinantenbeweis für den Satz des Textes.

müssen die Koeffizienten aller r_4' an zwei feste lineare Bedingungen gebunden sein.

Dieses Gebüsch G' von r_4' läßt sich in Ansehung der Abbildung von S durch ein einfacheres Gebüsch G von c_2 ersetzen. Man hat zu dem Behuf, wie in Nr. **40**, nur die ganze Figur einer (1, 1)-deutigen quadratischen Transformation T_2 mit Fundamentalpunkten in A_i, A_k, A_l zu unterwerfen.

Damit geht das Gebüsch G' der r_4' über in ein Gebüsch G von c_2 ohne gemeinsame Grundpunkte, von dem wiederum gilt, daß die Koeffizienten in allen c_2 von G zwei festen linearen Bedingungen unterliegen. Oder auch, in geometrischer Sprechweise, die ∞^3 c_2 in G müssen apolar (konjugiert) sein zu zwei festen Kurven zweiter Klasse γ_2 und damit zu allen Individuen von deren linearer Schar Σ.

Indessen kommt diese Eigenschaft jedem beliebigen Gebüsch G von c_2 zu, d. h. man kann G aus irgend vier linear unabhängigen Individuen $c_2^{(r)}$ $(r = 1, 2, 3, 4)$ linear zusammensetzen.

Seien y_i, y_k, y_l wiederum die Koordinaten eines Punktes der Ebene Π $(x_m = 0)$, so hat man als einfachste Abbildung von S

$$\varrho x_r = c_2^{(r)}(y_i, y_k, y_l) = c_2^{(r)}(y), \tag{2}$$

so daß sich die ∞^3 ebenen Schnitte von S auf das Gebüsch G der $c_2^{(r)}$ abbilden. Die Gleichungen (2) sind aber keine anderen, als die bereits von *Weierstraß*[71]) (s. auch Nr. 8) erkannten zur einfachsten expliziten rationalen (quadratischen) Darstellung von S in drei homogenen Parametern.

Die Fruchtbarkeit dieser Abbildungsdarstellung tritt aber erst hervor, wenn man das Gebüsch G der $c_2^{(r)}$ zugleich mit der obigen apolaren Schar Σ in projektivem Sinne als ein Ganzes auffaßt. Umgekehrt kann man von einer beliebigen linearen Schar Σ von Klassenkegelschnitten γ_2 in Π ausgehen; dann ist G dadurch rückwärts als die Gesamtheit der zu den γ_2 in Σ apolaren c_2 bestimmt.

Dieser Auffassung läßt sich eine weitere Vertiefung dadurch erteilen, daß man die Schar Σ als Grundlage einer seit *Steiner* (s. Art. „F_3“, Nr. **13**) wohlbekannten (1, 1)-deutigen involutorischen quadratischen Klassentransformation T_2 betrachtet. Jede Gerade g in der Ebene Π besitzt in bezug auf eine γ_2 in Σ einen Pol, und der Ort dieser Pole ist eine Gerade g', und rückwärts gelangt man so wieder von g' zu g. Die Verwandtschaft T_2 ist somit die der bezüglich Σ „konju-

71) *K. Weierstraß*, J. f. Math. 64 (1865), p. 66; vgl. die Ergänzungen von *H. Schroeter*, ib. p. 79; *A. Cayley*, ib. p. 172; London Math. Soc. Proc. 3 (1871), p. 190; ib. 5 (1873), p. 14.

gierten" Geradenpaare (g, g'). Umgekehrt läßt sich eine solche gegeben gedachte T_2 als Grundlage des Ganzen ansehen; denn in der T_2 existieren vier sich selbst entsprechende Gerade („Einheitsgerade"), die als gemeinsame Tangenten der Schar Σ letztere bestimmen. Diese vier Geraden bilden ein Vierseit Ω, dessen Diagonaldreiseit (Hauptdreiseit) Δ zu Seiten die Fundamentalgeraden von T_2 besitzt.

Die T_2 läßt sich invariantentheoretisch einfach darstellen (s. Nr. 5). Seien irgend zwei Individuen φ, ψ der Schar Σ gegeben durch

(3) $$\varphi \equiv (u\alpha)^2 = 0, \quad \psi \equiv (u\beta)^2 = 0,$$

so erhält man irgendein Geradenpaar (g, g') von T_2 mittels

(4) $$(u\alpha)(u'\alpha) = 0, \quad (u\beta)(u'\beta) = 0.$$

Löst man hier etwa nach den u_i' auf, so kommt

(5) $$\varrho u_i' = (u\alpha)(u\beta)(\alpha\beta)_{kl},$$

oder, wenn man diese drei Gleichungen durch Multiplikation mit kontragredienten Variabeln x_i und Addition zu einer einzigen zusammenzieht,

(5′) $$K \equiv (u\alpha)(u\beta)(\alpha\beta x) = 0.$$

Diese Gleichung stellt einen Konnex $K(u, x)$ dar, der die wesentlichsten Eigenschaften der T_2 unmittelbar erkennen läßt. Irgendeiner Geraden $g(u)$ entspricht derjenige Punkt (x), in dem g von der Bildgeraden $g'(u')$ getroffen wird. Umgekehrt ist einem Punkt (x) ein Paar von Geraden $g(u)$, $g'(u')$ zugeordnet, deren Schnittpunkt er ist.

Zugleich ist im ersteren Falle der Punkt (x) der Berührungspunkt des einen, g berührenden Individuums in Σ. Und im letzteren Falle sind die beiden durch den Punkt (x) gehenden Geraden g, g', die Tangenten desjenigen Individuums in der linearen ∞^2, dem Hauptdreiseit Δ einbeschriebenen Schar von Klassenkegelschnitten, das dem Punkte (x) kollinear zugeordnet ist.

Dreht sich eine Gerade g um den Punkt (x), so umhüllt die Bildgerade g' eben jenes Individuum, das also kürzer als T_2-Bild von (x) bezeichnet werden kann.

Deutet man in bekannter Weise den Konnex (5′) als Differentialgleichung, so stellt letztere unmittelbar die Schar Σ dar.

Was endlich die invariantentheoretische Struktur des Ausdruckes K angeht, so liegt hier ersichtlich eine Erweiterung des *Clebsch*schen Übertragungsprinzips (s. Nr. **5** und Art. „F_3", Nr. **12**) vor.

In der Tat, geht man zu zwei binären quadratischen Formen zurück

(3′) $$f \equiv (\alpha\lambda)^2, \quad g \equiv (\beta\lambda)^2$$

und bildet deren Funktionaldeterminante

(6) $$\Theta = (\alpha\lambda)(\beta\lambda)(\alpha\beta),$$

so geht K aus Θ direkt gemäß der *Clebsch*schen Regel hervor. Denn damit gehen die beiden binären linearen Faktoren $(\alpha\lambda)$, $(\beta\lambda)$ über in die beiden ternären Linearfaktoren $(u\alpha)$, $(u\beta)$, und der binäre Klammerfaktor $(\alpha\beta)$ in die mit den x geränderte Bildung $(\alpha\beta x)$.

Hand in Hand damit geht die geometrische Deutung.

Das Verschwinden von Θ liefert das zu den beiden Wurzelpaaren von f und g harmonische Paar, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Doppelelemente der Involution (f, g). Geht man nun wiederum in der Ebene von einem beliebigen Punkte (x) aus, so bilden die von ihm an die Schar $\Sigma(\varphi, \psi)$ gehenden Tangenten eine Involution, deren durch $\Theta = 0$ gelieferte Doppelelemente eben die beiden sich in T_2 entsprechenden Geraden g, g' sind.

Faßt man das Wesentliche zusammen, so hat man den Satz:

„Die projektive Geometrie auf der *Steiner*schen Fläche S ist das räumliche Äquivalent der projektiven Geometrie der ebenen quadratischen Verwandtschaft T_2.“

Einige Einzelheiten mögen noch zur Erläuterung dienen.

Die vier gemeinsamen Tangenten von Σ, die vier Einheitsgeraden t_i $(i = 1, \ldots, 4)$ in T_2, sind die Bilder der vier Doppelebenen Δ_i von S.

Das Hauptdreieck Δ als Ganzes ist das Bild des D_3 von S; je drei koplanaren Linienelementen durch D_3 entsprechen drei Linienelemente auf den Seiten von Δ, deren Punkte mit den Ecken von Δ auf einer c_2 liegen.

Einzeln sind die Seiten von Δ die Bilder der drei $\bar{g}$; jedem Punkte auf einer $\bar{g}$ entspricht ein Punktepaar (P, Q) auf der bezüglichen Seite von Δ. Diese ∞^1 Punktepaare bilden eine Involution, deren Doppelelemente die beiden Δ-Ecken der Seite sind. Greift man von den Kanten des durch die vier Doppelebenen Δ_i gebildeten Tetraeders T je ein Paar von Gegenkanten heraus und legt an sie vom D_3 aus die Leitgeraden, so sind diese drei Leitgeraden eben die drei Doppelgeraden $\bar{g}$.

Wählt man zugleich T als Koordinatentetraeder, so wird die Klassengleichung von S von der Gestalt

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{\alpha_i}{u_i} = 0. \tag{7}$$

Irgendeinem ebenen Schnitte von S entsprach eine c_2 des Gebüsches G und umgekehrt. Eine solche c_2 artet nur dann in ein Geradenpaar (c_1, c_1') aus, wenn dieses ein Paar (g, g') in T_2 ist. Dann zerfällt aber auch die Bild-r_4 auf S in zwei C_2, so daß von deren vier Grundpunkten drei auf den $\bar{g}$ liegen, während der letzte, das Bild des Punktes $(c_1, c_1') = (g, g')$, der Berührungspunkt einer Tangentialebene von S

ist und umgekehrt. Damit ergibt sich der Satz (s. Art. „F_3“, Nr. **13**): „Die Tangentialebenen der Fläche S schneiden die ∞^2 C_2-Paare aus ihr aus.“

Das obige Verfahren gestattet aber auch, den verschiedenen Sonderfällen, die hinsichtlich der drei $\bar{g}$ eintreten können, gerecht zu werden.

So können von den Seiten von Δ zwei konjugiert-imaginär werden, und damit auch zwei der $\bar{g}$ und umgekehrt. Die Gleichung von S nimmt dann die Gestalt an

$$(1') \quad S \equiv x_m x_l(x_i^2 + x_k^2) + a_l(x_i^2 + x_k^2)^2 + x_l^2(a_k x_i^2 + a_i x_k^2) = 0.$$

Weiter können irgend zwei Seiten von Δ oder sogar alle drei koinzidieren und entsprechend wiederum zwei der $\bar{g}$ oder alle drei.

Im ersteren Falle wähle man als $\bar{g}_1 = \bar{g}_2$ die Kante $(x_i = 0, x_l = 0)$ und als $\bar{g}_3$ die Kante $(x_k = 0,\ x_l = 0)$, so gehört zu S die Gleichung

$$(8) \qquad S \equiv c x_m x_i x_l^2 - (a x_l^4 + b x_i^2 x_k^2) = 0.$$

Schneidet man eine solche S mit irgendeiner Ebene $(\alpha x) = 0$ in einer r_4, so wird die Gleichung von deren Projektion auf die Ebene $x_m = 0$

$$(8') \qquad r_4 \equiv (\alpha_i x_i + \alpha_k x_k + \alpha_l x_l) x_i x_l^2 + (a x_l^4 + b x_i^2 x_k^2) = 0.$$

Diese r_4 besitzt in der Ecke A_k $(x_i = x_l = 0)$ einen Berührknoten (tacnode).

Fallen endlich alle drei $\bar{g}$ zusammen, etwa in die Kante $(x_i = x_l = 0)$, so nimmt die Gleichung von S die Gestalt an

$$(9) \qquad S \equiv c x_m x_i^3 - a(x_k^2 - x_i x_l)^2 = 0.$$

Der Schnitt mit einer Ebene $(\alpha x) = 0$ führt zu einer r_4, deren Projektion auf die Ebene $x_m = 0$ die Gleichung hat

$$(9') \qquad (\alpha_i x_i + \alpha_k x_k + \alpha_l x_l) x_i^3 + a(x_k^2 - x_i x_l)^2 = 0.$$

Eine solche r_4 besitzt in der Ecke A_k $(x_i = x_l = 0)$ einen Schmiegknoten (oscnode).

Läßt man in beiden Fällen die Ebene (α) geeignet variieren, so gelangt man, wie *Moore* und *Neelley* ausgeführt haben[72]), zur Gesamtheit aller projektiv verschiedenen Typen von r_4 mit tacnode und oscnode. Zugleich lassen sich die Invarianten der r_4 in übersichtlicher Weise durch die Koordinaten α_i der Schnittebene ausdrücken.

44. Normaldarstellungen der Fläche. Wir kehren zurück zu dem „allgemeinen Falle“, wo die vier Einheitsgeraden t_i und damit auch die Seiten von Δ reell ausfallen. Wählt man Δ in der Hilfsebene als Koordinatendreieck $(y_i = 0,\ y_k = 0,\ y_l = 0)$ und irgendeine der vier

72) *L. T. Moore* und *J. H. Neelley*, Amer. J. Math. 50 (1928), p. 467.

Geraden t_i, etwa t_m, als Gerade $y_i + y_k + y_l = 0$, so kann man setzen

$$(10)\qquad \begin{cases} -t_m = y_i + y_k + y_l, & t_i = -y_i + y_k + y_l, \\ t_k = y_i - y_k + y_l, & t_l = y_i + y_k - y_l, \end{cases}$$

so daß die t an die lineare Identität gebunden sind

$$(11)\qquad \sum_i^m t_i \equiv 0.$$

Damit erhält man für S die einfachste Parameterdarstellung

$$(12)\qquad \varrho x_i = t_i^2,$$

und im Anschluß daran, als einfachste implizite Gleichung von S in der irrationalen Gestalt,

$$(13)\qquad S \equiv \sum_i^m \sqrt{x_i} = 0.$$

Führt man die rechten Seiten von (12) aus, wobei zur Abkürzung $y_i^2 + y_k^2 + y_l^2 = s$ gesetzt werde, so kommt

$$(12')\qquad \begin{cases} t_i^2 = s - 2y_iy_k - 2y_iy_l + 2y_ky_l, \\ t_k^2 = s - 2y_iy_k + 2y_iy_l - 2y_ky_l, \\ t_l^2 = s + 2y_iy_k - 2y_iy_l - 2y_ky_l, \\ t_m^2 = s + 2y_iy_k + 2y_iy_l + 2y_ky_l. \end{cases}$$

Durch Umkehrung ergibt sich

$$(14)\qquad 4s = \sum_{r=i}^m t_r^2, \quad 8y_iy_k = -t_i^2 - t_k^2 + t_l^2 + t_m^2, \text{ usf.}$$

Führt man demgemäß neue Raumpunktkoordinaten z ein vermöge

$$(15)\qquad z_m = \sum x_r, \quad z_i = x_i - x_k - x_l + x_m, \text{ usf.},$$

so lautet in ihnen die Parameterdarstellung von S

$$(16)\quad \sigma z_m = y_i^2 + y_k^2 + y_l^2, \quad \sigma z_i = 2y_ky_l, \quad \sigma z_k = 2y_iy_l, \quad \sigma z_l = 2y_iy_k.$$

An die Darstellung (2) knüpfen sich weitere Bemerkungen. Zunächst fragt es sich, wie man von (2) aus durch Elimination der Größen ϱ, λ, μ zur Gleichung der S zurückgelangt. Zu dem Behuf frage man, wann sich drei Ebenen $(rx) = 0$, $(sx) = 0$, $(tx) = 0$ in einem Punkte (x) der S treffen, so daß $x_i = (rst)_{klm}$ wird. Dies führt zu drei c_2-Gleichungen, die je in den r, s, t linear sind

$$(17)\qquad c_2^{(r)}(r; \lambda, \mu) = 0, \quad c_2^{(s)}(s; \lambda, \mu) = 0, \quad c_2^{(t)}(t; \lambda, \mu) = 0.$$

Man stelle in bekannter Weise die Resultante R bez. λ, μ der rechten Seiten von (17) auf, indem man die Ableitungen J_λ, J_μ, J_ν der *Jacobi*schen Determinante J nach λ, μ und einer homogenen Variabeln ν gleich Null setzt und aus ihnen und (17) die Quadrate und

Produkte der λ, μ, ν eliminiert. Die Resultante R ist vom vierten Grade in den dreireihigen Determinanten der Koeffizientenmatrix bez. λ, μ von (17).

Diese dreireihigen Determinanten gehen aber von selbst über in vierreihige vom Typus $(abcx)$, wo die Kolonnen der a, b, c der ursprünglichen Koeffizientenmatrix von (2) angehören. Daraufhin liefert $R = 0$ direkt die gesuchte Gleichung von S.

Sodann lassen sich die vier Darstellungsformeln (2) formal in eine einzige zusammenziehen, indem man mit kontragredienten Variabeln u multipliziert und addiert

$$\varrho(ux) = \sum_r c_2^{(r)}(y) u_r. \tag{18}$$

Hier ist die rechte Seite linear in den quaternären u, quadratisch in den ternären y, also symbolisch geschrieben

$$S \equiv (u\alpha)(ay)^2. \tag{19}$$

Diese Form S läßt sich mit *A. Goller*[73]) als einzige Grundform der ganzen Theorie verwenden; die projektiven Eigenschaften der Fläche S werden gleichwertig mit dem Verschwinden gewisser Komitanten der Form S (19). Auf diesem Wege untersucht *Goller* die Asymptotenkurven (s. u. Nr. **46**) der Fläche, ihre *Hesse*sche Fläche u. a. m. (s. Art. „F_3“, Nr. **13**, Note 46).

Sodann gestatten die rechten Seiten von (2) noch eine andere Auffassung, indem man sich dieselben hervorgegangen denkt aus quaternären (quadratischen) Formen $C_2^{(r)}(z_i, z_k, z_l, z_m)$, wo man hinterher die z wieder durch Linearformen in ternären Variabeln y ersetzt.

Deutet man diesen algebraischen Vorgang geometrisch, so gelangt man zu der synthetischen Erzeugung der S durch *Th. Reye*[74]): Man hat nur die Raumpunkte eines S_3' kollinear auf ein F_2-Gebüsch eines S_3 zu beziehen, so entsprechen den Ebenen Flächen S. Umgekehrt hat hierauf *Reye*[74]) die Abbildung der Fläche S gegründet. Einem Punkte des einen Raumes entspricht eine Gruppe von acht assoziierten Punkten im anderen, einer Geraden eine C_4, einer F_n eine F_{4n}, und im besonderen einer Ebene eine S.

Die analytische Ausführung findet sich bei *V. Snyder* und *F. R. Sharpe.*[75]) Synthetische Ergänzungen rühren von *A. Jopke*[76]) her.

73) *A. Goller,* Progr. Ludwigs-Realschule München 1902.

74) *Th. Reye,* J. f. Math. 86 (1878), p. 84; Math. Ann. 48 (1896), p. 113. Vgl. auch „*Reye*“, p. 140.

75) *V. Snyder* und *F. R. Sharpe,* Amer. Math. Soc. Trans. 19 (1898), p. 275.

76) *A. Jopke,* Arch. Math. Phys. (3) 18 (1910), p. 133.

Der Formelapparat vereinfacht sich, wenn man mit *E. Timerding*[77]) das F_2-Gebüsch als ein solches mit gemeinsamem Poltetraeder wählt. Der mannigfachen Erweiterungen der *Weierstraß*schen Formeln (2) auf Flächen höherer Ordnung und in höheren Räumen ist in Art. „F_3“, Nr. **13**, Note 48a gedacht worden.

45. Weiteres zur Abbildung der Fläche. Bezüglich der Abbildung der Fläche S durch das c_2-Gebüsch G seien noch einige Ergänzungen hinzugefügt.

Die vier gemeinsamen Tangenten ($t_i = 0$) der zu G apolaren Schar Σ bildeten ein Vierseit Ω; auf den Seiten von dessen Hauptdreieck Δ liegen je zwei Gegenecken von Ω, und diese sind die Doppelelemente der zugehörigen „Ω-Involution“.

Jede c_2 in G trifft die Seiten von Δ in Punktepaaren der zugehörigen Ω-Involution. Umgekehrt, trifft eine c_2 irgend zwei der Seiten in Punktepaaren der Ω-Involution, so auch die dritte und ist dann in G enthalten. Diese Regel überträgt sich ohne weiteres auf Schnitte von S mit F_n. Die Bilder sind c_{2n}, die die Seiten von Δ in n Punktepaaren der Ω-Involution treffen usf.

Die in Geradenpaare (g, g') zerfallenden c_2 in G waren die Bilder der von den Tangentialebenen von S ausgeschnittenen C_2-Paare. Ist der Punkt $P(g, g')$ beliebig vorgegeben, so ergeben sich g und g', indem man die auf zwei der Seiten von Δ befindlichen Ω-Involutionen von P aus projiziert und dann das den beiden Geradeninvolutionen gemeinsame Paar bestimmt.

46. Die Haupttangentenkurven der Fläche. Das Bild irgendeiner *nicht* in G enthaltenen c_2 ist eine R_4 auf S; dies gilt also im besonderen von den irreduzibeln Individuen γ_2 der Schar Σ oder auch den „Inkegelschnitten“ von Ω. Deren Bilder R_4 sind aber nach *G. Darboux*[78]) die Haupttangentenkurven von S.

Dieser bemerkenswerte Satz geht fast unmittelbar aus den elementaren Eigenschaften der Verwandtschaft T_2 hervor.

Je zwei Gerade g, g' entsprachen sich in T_2, wenn sie bez. Σ konjugiert waren; sie bildeten zugleich die zerfallenden c_2 in G. Sei etwa die Gerade g gegeben, so wird sie von einer bestimmten γ_2 der Schar Σ in einem Punkte P_1 berührt; dann geht g' ebenfalls durch P_1. Andererseits sind g, g' die Bilder der beiden C_2, die auf S von der Tangentialebene im Bildpunkte P (von P_1) ausgeschnitten werden. Die Tangenten der beiden C_2 in P sind die beiden durch P laufenden

77) *H. E. Timerding,* Ann. di mat. (3) 1 (1917), p. 98.

78) *G. Darboux,* Soc. phil. B. 10 (1873), p. 37.

Haupttangenten h von S. Wandert jetzt g als Tangente längs der obigen γ_2, so haben γ_2 und g im jeweiligen Berührungspunkte P_1 die Fortschreitungsrichtung gemein, und die γ_2 in Σ sind die einzigen Kurven dieser Art. Somit sind in der Tat die γ_2 in Σ die Bilder der Haupttangentenkurven auf S, die sich als Kurven R_4 weiterhin diskutieren lassen.

47. Der Satz von Lie. Wir stellen noch einige Sätze allgemeineren Charakters über die S zusammen und verweisen wegen weiterer Einzelheiten wiederum auf Art. „F_3", Nr. **13**.

S. Lie[79]) hat den Satz aufgestellt:

„Der Ort der Pole irgendeiner festen Ebene ε in bezug auf alle auf einer S gelegenen C_2 ist wiederum eine S. Berührt im besonderen ε die S, so reduziert sich der Ort auf eine F_2. Der Satz bleibt auch gültig, wenn die gegebene S in eine R-F_3 ausartet."

Die *Lie*sche Fläche sei mit S_ε bezeichnet. *G. Koenigs*[80]) findet den Satz unabhängig von *Lie* und gibt einen analytischen Beweis. Er bemerkt weiter, daß die Doppelberührebenen $\overline{\mathsf{T}}$ von S einfache Berührebenen T von S_ε sind, und daß S_ε die Schnittkurve (S, ε) enthält.

A. Brambilla[81]) stellt eine Art von Reziprozitätsgesetz auf: „Berührt eine Ebene η die S_ε, so berührt auch ε die S_η." Er gibt auch Ausdehnungen des *Lie*schen Satzes auf „zweidimensionale S" im S_4 und S_5.

D. Montesano[82]) untersucht die Beziehungen zwischen den beiden Flächen S und S_ε genauer; er fragt auch nach den Örtern, die bei Variieren der Ebene ε von den $\overline{g}$, dem D_3 und den Doppelberührebenen $\overline{\mathsf{T}}$ der S_ε beschrieben werden.

Sein Ausgangspunkt ist eigenartig. Es liege eine F_3 zugrunde und ein fester Raumpunkt P (außerhalb der F_3). Durch P lege man irgendeine Gerade g und denke sich auf ihr die drei vierten harmonischen Punkte Q in bezug auf je zwei der drei Schnittpunkte von F_3 mit g bestimmt. Bei Variieren von g erfüllen die Punktetripel Q eine kubische Fläche M_3. Das Auftreten irgendeines D_2 der F_3 bewirkt auch das eines entsprechenden D_2' der M_3 und vice versa.

Hat also im besonderen die F_3 vier D_2, ist also die Reziproke zu einer S, so findet das nämliche für die M_3 statt.

Dualistisch ist somit bei gegebener Ebene ε jeder S eine zweite, eben die S_ε zugeordnet, womit der *Lie*sche Satz durchsichtig bewiesen ist.

---

79) *S. Lie*, Arch. Math. og Nat. 3 (1878), p. 84. Der Satz war schon 1869 der Universität zu Kristiania eingereicht, s. *M. Noether*, Math. Ann. 53 (1900), p. 3.

80) *G. Koenigs*, Soc. math. Fr. Bull. 16 (1888), p. 15.

81) *A. Brambilla*, Napoli Rend. (3) 4 (1898), p. 19.

82) *D. Montesano*, Napoli Rend. (3) 5 (1899), p. 88.

Bei Variieren von ε beschreiben die $\bar{g}$ von S_ε singuläre lineare Komplexe, die die $\bar{g}$ von S zu Achsen haben; der D_3 beschreibt den Raum doppelt und die $\overline{\mathrm{T}}$ von S_ε entsprechen sich in einer (nicht involutorischen) *Cremona*-Transformation.

Erweiterungen anderer Art gibt *C. Rosati.*[83]) Man denke sich irgendeine C_4 auf S herausgegriffen. Der Ort der Pole der Sehnen von C_4 in bezug auf die durch ihre Treffpunkte gehenden C_2 von S ist wiederum eine S. Zerfällt im besonderen die C_4 in zwei C_2, so zerfällt der in Rede stehende Ort in die Ebenen der beiden C_2 und eine F_2. Ist andererseits die C_4 eine Haupttangentenkurve auf S, so fällt der Ort mit S zusammen u. a. m. Artet die S in eine R-F_3 aus, so erfahren diese Sätze gewisse Modifikationen.

Der Verfasser leitet seine Sätze her durch geeignete Projektion der im S_5 gelegenen zweidimensionalen *Veronese*schen Fläche

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6 = \lambda_1^2 : \lambda_2^2 : \lambda_3^2 : \lambda_2\lambda_3 : \lambda_1\lambda_3 : \lambda_1\lambda_2,$$

die zuerst *G. Veronese*[84]) genauer untersucht hat.

Für den *Lie*schen Satz hat *W. Franz Meyer* einen invariantentheoretischen Beweis geliefert (s. „F_3", Nr. **13**). Sei S wiederum dargestellt durch

$$\text{(a)} \qquad \varrho x_i = c^{(i)}(\lambda_r, \lambda_s, \lambda_t).$$

Die ∞^2, auf S gelegenen C_2 ergeben sich hieraus bei Ersetzung der $\lambda_r, \lambda_s, \lambda_t$ durch beliebige Linearformen eines Parameters λ

$$\text{(b)} \qquad \lambda_k = \alpha_k\lambda + \beta_k \qquad (k = r, s, t).$$

Für $u_r = (\alpha\beta)_{st}$ geht damit (a) über in

$$\text{(c)} \qquad \varrho x_i = f_i(\lambda) = a_i\lambda^2 + 2b_i\lambda + c_i.$$

Für die Schnittpunkte λ_1, λ_2 einer solchen C_2 mit einer Ebene ε hat man die Gleichung

$$\text{(d)} \qquad \lambda^2(a\varepsilon) + 2\lambda(b\varepsilon) + (c\varepsilon) = 0,$$

oder auch für $\sigma_2 : \sigma_1 : \sigma_0 = \lambda_1\lambda_2 : \lambda_1 + \lambda_2 : 1$

$$\text{(d')} \qquad \sigma_2 : \sigma_1 : \sigma_0 = (c\varepsilon) : -2(b\varepsilon) : (a\varepsilon).$$

Nun hat der Pol $P'(x')$ von ε bez. C_2 die Koordinaten

$$\text{(e)} \qquad \varrho x_i' = a_i\sigma_2 + b_i\sigma_1 + c_i\sigma_0.$$

Setzt man hier die Werte der σ aus (d') ein, und ordnet nach den ε_i, so ergibt sich für den gesuchten Ort der Pole $P'(x')$

$$\text{(f)} \qquad \varrho x_r' = \varepsilon_i\eta_{ir} + \varepsilon_k\eta_{kr} + \varepsilon_l\eta_{lr} + \varepsilon_m\eta_{mr} \quad (r = i, k, l, m),$$

83) *C. Rosati*, Torino Atti 35 (1900), p. 12.

84) *G. Veronese*, Rom Linc. Mem. (3) 19 (1884).

wo unter η_{rs} die in den Koeffizienten bilineare, in den Variabeln u quadratische Kontravariante der Formen $c^{(r)}$ und $c^{(s)}$ zu verstehen ist, so daß im besonderen für $r = s$ η_{rr} die Klassenform von $c^{(r)}$ wird.

Dann stellt (f) die gesuchte S_8 dar. Das Beweisprinzip ist ausdehnbar auf Formen $c^{(i)}$ höheren Grades und in mehr Parametern, sowie auf den S_n.

48. Die Sätze von Darboux, Picard und Castelnuovo. Eine Reihe weiterer Sätze bezweckt, wenn man von den R-F absieht, wie es im folgenden stets der Fall sei, die Fläche S auf Grund gewisser, auf ihr gelegener C-Scharen zu charakterisieren.

Schon *Kummer* (Nr. 8) hatte erkannt, daß die S die einzigen F_4 mit einer ∞^2-Schar von C_2 sind.

Diesen Satz verallgemeinert *G. Darboux*, im Anschluß an seine Untersuchung[85]) über C_2, die mit einer F_4 einen möglichst hohen Kontakt haben, dahin, daß überhaupt eine F mit ∞^2 C_2 eine S ist.

Eine weitere Verallgemeinerung rührt von *E. Picard*[86]) her („*Picard*scher Satz"). Danach ist die S auch dadurch charakterisierbar, daß sie eine F mit ebenen rationalen Schnitten ist. *Picards* erste Mitteilung (1878) hierüber deutet den Beweis nur an; erst 1886 erfolgt eine ausführlichere Begründung.

Indessen stellte *G. B. Guccia*[87]) eine Lücke im *Picard*schen Beweise fest, und er ersetzt ihn daher durch einen anderen unter Ausdehnung der Methoden, die *M. Noether*[88]) zur Untersuchung der F mit Scharen rationaler C verwendet hatte.

Noch allgemeinere Gesichtspunkte treten bei *G. Castelnuovo*[89]) auf. In einer ersten Arbeit geht er aus von Eigenschaften ebener c, die bei eindeutiger Transformation erhalten bleiben. Daraufhin untersucht er solche Familien von F, deren ebene Schnitte ein vorgegebenes Geschlecht p besitzen. Für $p \leq 2$ ergibt sich, daß solche Flächen rational sind. Für $p = 0$ resultiert als Spezialfall der *Picard*sche Satz.

In abermaliger Erweiterung unter Benutzung eines Hilfssatzes von *L. Kronecker* beweist *Castelnuovo*, daß die irreduzibeln F, die von Ebenen in einem ∞^2-System reduzibler C geschnitten werden, Flächen S sind („*Castelnuovo*scher Satz"). Auf den S_4 hat den *Picard*schen Satz *E. H. Moore*[90]) ausgedehnt.

---

85) *G. Darboux*, Bull. Math. Astr. (2) 4 (1880), p. 348.

86) *E. Picard*, Paris Soc. Phil. 1878, p. 127; J. f. Math. 100 (1886), p. 71.

87) *G. B. Guccia*, Palermo Rend. 1 (1887), p. 165.

88) *M. Noether*, Math. Ann. 3 (1871), p. 161.

89) *G. Castelnuovo*, Rom Linc. Rend. (5) 3_1 (1894), p. 22.

90) *E. H. Moore*, Amer. J. Math. 10 (1887), p. 27.

49. Verallgemeinerungen der Weierstraßschen Darstellung der Fläche. Die *Weierstraß*sche Darstellung (2) der S ist verschiedentlich verallgemeinert worden.

So hat *G. Koenigs*[91]) überhaupt F mit Scharen von C_2 untersucht, derart, daß durch jeden Punkt der F n C_2 gehen.

Den Fall mit doppelter C_2-Erzeugung, insbesondere Kreiserzeugung, verfolgt eingehend *E. Cosserat.*[92])

Mit Hilfe dieser Methode haben *G. Veronese, E. Ascione, E. Cosserat*[93]) die S auch als Projektion vom S_4 aus untersucht.

Andererseits hat man das Analogon der S im S_n in Betracht gezogen. *A. Tanturri*[94]) studiert den Fall $n = 4$, den allgemeinen Fall *A. Brambilla.*[94])

Endlich läßt sich die *Weierstraß*sche Darstellung der S in der spezifischen Form (12) ausdehnen, indem man mit *A. Brambilla*[95]) die vier Quadrate linearer Ternärformen durch n^{te} Potenzen ersetzt; es ist beachtenswert, daß sich auch jetzt noch die Haupttangentenkurven als Inkegelschnitte eines Vierseits abbilden.

Ferner haben sich an die irrationale Darstellung (13) der S weitere Untersuchungen angeschlossen.

So hat *C. Segre*[96]) mittels der geometrischen Eigenschaften der Transformation $\varrho x_i' = x_i^2$ die Haupteigenschaften der S abgeleitet.

Die irrationale Darstellung (13) der S in der Gestalt $\sum_{i=1}^{i=4} \sqrt{A_i}x_i = 0$ dehnt *A. Brambilla*[97]) auf den nächst höheren Fall aus $\sum_{i=1}^{i=5} \sqrt{A_i}x_i = 0$ und untersucht die so entstehende F_8.

Aus der irrationalen Darstellung der S leitet *A. Roberts*[98]) drei orthogonale Transformationen ab, die S in sich überführen.

91) *G. Koenigs,* Paris C. R. 105 (1887), p. 407; J. Éc. Norm. (3) 5_2 (1887), p. 177. Vgl. *G. Jung,* Palermo Rend. 4 (1890), p. 253; *Ed. Weyr,* Monatsh. Math. Phys. 2 (1891), p. 351.

92) *E. Cosserat,* Paris C. R. 124 (1887), p. 1004; 130 (1900), p. 311, 385 (im besonderen doppelte Kreiserzeugung). Vgl. *H. Sisam,* Amer. J. Math. 30 (1908), p. 99.

93) *G. Veronese,* Rom Linc. Mem. (3) 19 (1884), p. 19; *E. Ascione,* Rom Linc. Rend. (5) 6_1 (1897), p. 162, 240; *E. Cosserat,* s. Note 92).

94) *A. Tanturri,* Giorn. di mat. (2) 14 (1907), p. 45, 291; *A. Brambilla,* Napoli Atti (2) 9 (1899), p. 185.

95) *A. Brambilla,* Torino Atti 20 (1885), p. 781; Lomb. Ist. Rend. (2) 21 (1888), p. 334, 541; Palermo Rend. 2 (1888), p. 176. Vgl. *G. Lazzeri,* Veneto Ist. Atti (6) 6 (1888), p. 171.

96) *C. Segre,* Giorn. di mat. 21 (1883), p. 358.

97) *A. Brambilla,* Giorn. di mat. 35 (1897), p. 1.

98) *A. Roberts,* Mess. 11 (1885), p. 132.

50. Metrische Beziehungen. Eine metrische Spezialisierung liegt bei *K. Merz*[99]) vor, indem er bei rechtwinkligen x, y, z die Gleichung $\sqrt{\frac{x}{\alpha}} + \sqrt{\frac{y}{\beta}} + \sqrt{\frac{z}{\gamma}} = 1$ zugrunde legt. Vermöge der Transformation $\xi^2 = x$, $\eta^2 = y$, $\zeta^2 = z$ (s. *Segre* oben) wird die S abgebildet auf ein Oktaeder. Die Ebenen desselben erscheinen als Ort der Doppelgeraden eines gewissen Strahlensystems.

Auch sei noch hingewiesen auf eine gewisse F_4 als projektive Verallgemeinerung der S bei *P. L. Schoute*.[100]) Auf einer solchen F_4 liegen weder C_{2n+1} noch elliptische C_4, wie das für die S schon „*Cremona*" und „*Sturm*" gezeigt hatten.

Die R_4 auf S studiert *G. Armenante*.[101]) Eine Konstruktion der Tangentialebene gibt *J. Rowe*.[101a])

Noch seien einige weitere metrische Eigenschaften der S erwähnt. *E. Amigues*[102]) betrachtet die S als eine gewisse „Mittelpunktsfläche".

Der Umriß der S von irgendeinem Punkte einer der drei $\bar{g}$ aus ist nach *Cayley-Sharp*[103]) eine Ellipse.

Bei *W. Schmidt*[104]) erscheint die S als Ort der Punkte, für die die Summe der auf zwei feste windschiefe Gerade gefällten Lote gleich deren kürzestem Abstand ist. Ersetzt man diesen durch eine beliebige Konstante, so entsteht eine allgemeinere F_4 (s. Nr. 86).

51. Die Krümmungslinien auf der Fläche S. Behufs Bestimmung der Krümmungslinien von S, deren Gleichung wieder in der irrationalen Gestalt

$$S \equiv \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}} - 1 = 0 \tag{13'}$$

angenommen sei, entwickelt *G. Darboux*[105]) eine allgemeinere Methode. Zugrunde liegt das *Dupin*sche Theorem, wonach sich die Flächen eines ∞^3-orthogonalen Systems in ihren Krümmungslinien schneiden (s. Art. III D 9, *E. Salkowski*, Dreifach orthogonale Systeme). Es liege ein ∞^1-Flächensystem mit einem Parameter u vor in der Gestalt

$$X + Y + Z \equiv u, \tag{α}$$

99) *K. Merz,* Dissert. Techn. Hochsch. Zürich 1914; Schweiz. Naturf. Ges. 1914, p. 102. Siehe auch die historischen Notizen von *K. Merz,* Ens. Math. 19 (1917), p. 89.

100) *P. L. Schoute,* Amsterdam Ak. 4 (1896), p. 224, 272.

101) *A. Armenante,* Giorn. di mat. 12 (1874), p. 250.

101a) *J. Rowe,* Amer. Math. Soc. Proc. 12 (1911), p. 295.

102) *E. Amigues,* Paris C. R. 86 (1878), p. 38.

103) *A. Cayley-Sharp,* Educ. Times 39 (1883), p. 31.

104) *W. Schmidt,* Progr. Realgymn. Lüdenscheid 1889.

105) *G. Darboux,* Paris C. R. 84 (1877), p. 382.

wo X, Y, Z je nur von x, y, z abhängen, und überdies drei Bedingungen genügen von dem Typus

$$(\beta) \qquad X'X'' \equiv 2(X''-a)(X''-b) \quad \text{usf.}$$

Eine solche Schar (α) gehört nach einem Satze von *J. A. Serret* einem ∞^3-Orthogonalsysteme an (s. Art. III D 3, *R. v. Lilienthal,* Kurven auf einer Fläche, Nr. **35**).

Es wird zunächst untersucht, wie sich die beiden anderen Scharen des Systems als Enveloppen von Flächen ergeben, die sich durch eine gewisse Quadratur bestimmen lassen. Sodann wird die Erweiterung verfolgt, wenn auf den rechten Seiten der Bedingungen (β) an die Stelle des Faktors 2 eine beliebige Konstante $2k$ tritt.

Daraus läßt sich folgern, daß sich unendlichviele algebraische ∞^3-orthogonale Flächensysteme angeben lassen, deren drei Scharen der nämlichen Gleichungsform genügen und sich nur durch die Parameterwerte unterscheiden.

Dies findet im besonderen seine Anwendung auf die Fläche S (13′) sowie auch auf die F_3 mit $4\,D_2$ (s. „F_3", Nr. **13**) mit der Gleichung $\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{y}+\frac{\gamma}{z}-1=0$ und allgemeiner auf die Fläche mit der Gleichung $\left(\frac{x}{a}\right)^m+\left(\frac{y}{b}\right)^m+\left(\frac{z}{c}\right)^m-1=0$.

VIII. Rationale Flächen vierter und höherer Ordnung.

52. Einleitung. Rationale Flächen oder auch solche vom Geschlecht Null sind solche, die sich durch ein homaloides Gebüsch von Kurven in einer Ebene mit einer endlichen Anzahl von Grundpunkten A („Fundamentalpunkten") auf die Ebene abbilden lassen (s. Art. III C 11, *L. Berzolari,* Algebraische Transformationen).

Diese Abbildung ist eine (1, 1)-deutige mit Ausnahme der Fundamentalpunkte A; letzteren entsprechen Kurven C auf der Fläche, oder genauer, die Linienelemente durch einen Punkt A korrespondieren (1, 1)-deutig den Linienelementen auf C. Vermöge einer solchen Abbildung lassen sich die homogenen Koordinaten eines Punktes P einer rationalen Fläche F darstellen als Formen derselben Ordnung in drei homogenen Parametern und umgekehrt; diese Parameter sind die Punktkoordinaten in der Bildebene.

53. Die Typen rationaler F_4. Wir beschränken uns in der Hauptsache auf die rationalen F_4, da man solche höherer Ordnung nur unvollständig kennt.

In den voraufgehenden Abschnitten ist bereits eine Reihe rationaler F_4 behandelt worden; diese besaßen entweder eine mehrfache Kurve oder aber einen D_3.

M. Noether[106]) bewies, daß alle F_4 mit einer mehrfachen Kurve rational sind.

Zu diesen Typen rationaler F_4 tritt zunächt noch der einer F_4 mit Selbstberührungspunkt (s. auch Nr. 7), der durch *Noether* und *L. Cremona* erledigt wurde.[107])

Die Abbildung geschieht durch ein Gebüsch G von c_6 mit $7\,d_2$ und $4\,d_1$.

Man beachte hierbei, daß G ein c_6-Gebüsch von besonderer Art ist. Durch sieben beliebige Punkte als d_2 geht, da eine allgemeine c_6 von 27 Konstanten abhängt, eine ∞^6-lineare Schar von c_6, also durch vier weitere einfache Punkte nur ein Netz. Die obigen $7 + 4$ Punkte sind somit an die Bedingung geknüpft, daß eine c_6, die in den sieben ersteren Punkten d_2 besitzt und noch durch drei weitere der vier letzteren Punkte einfach hindurchgeht, auch den vierten Punkt enthalten muß.

Irgend zwei c_6 in G treffen sich in $36 - 4 \cdot 7 - 4 = 4$ variierenden Punkten, wie es sein muß.

Die Theorie der rationalen F_4 brachte *Noether*[108]) dadurch zum Abschluß, daß er zeigte, wie nur noch zwei weitere Typen existieren.

Die Form der F_4-Gleichung für den ersteren Typus lautet

$$(1)\qquad \begin{aligned} F_4 \equiv f_1^2 x_4^2 + 2\{f_1 x_3(x_3 + g_1) + g_3\}\,x_4 + x_3^4 + 2x_3^3 h_1 \\ + x_3^2 h_2 + x_3 h_3 + h_4 = 0, \end{aligned}$$

wo die f, g, h binäre Formen in x_1, x_2 mit dem jeweiligen Index als Ordnung bedeuten.

Die Abbildung vollzieht sich durch ein Gebüsch G von c_7 mit einem d_3 und $9\,d_2$ als Grundpunkten.

Bezüglich der Grundpunkte von G tritt eine ähnliche Erscheinung ein wie soeben.

Da eine allgemeine c_7 von 35 Konstanten abhängt, so gibt es nur ein Netz von c_7, die an einer beliebigen Stelle einen d_3 besitzen und an neun weiteren beliebigen Stellen d_2; denn man hat $35 - 6 - 3 \cdot 9 = 2$. Soll aber statt des Netzes ein Gebüsch G eintreten, so müssen die zehn Grundpunkte einer gewissen Bedingung unterliegen. Andererseits treffen sich irgend zwei Individuen von G in $49 - 9 - 9 \cdot 4 = 4$ beweglichen Punkten, wie es sein muß.

106) *M. Noether,* Math. Ann. 3 (1871), p. 161; 4 (1871), p. 547.

107) *M. Noether,* Gött. Nachr. 1871, p. 267; *L. Cremona,* Math. Ann. 4 (1871), p. 213; „In Memoriam Chelini", Milano 1881, p. 413.

108) *M. Noether,* Math. Ann. 33 (1889), p. 546. Vgl. *G. Jung,* Ann. di mat. (2) 15 (1887), p. 277; *D. Montesano,* Napoli Rend. (3) 6 (1900), p. 158.

Der letzte Typus ist charakterisiert durch die Gleichungsform

$$(2)\quad F_4 \equiv x_1^2 x_4^2 - 2(x_3 x_1 f_1 + g_3) x_4 - x_3^3 x_1 + x_3^2 h_2 + x_3 h_3 + h_4 = 0,$$

wo wiederum die f, g, h Binärformen in x_1, x_2 sind.

Das Abbildungsgebüsch G besteht aus c_9 mit $8\ d_3$, einem d_2 und einem d_1. Auch hier sind die Lagen der zehn Grundpunkte einer Beschränkung unterworfen.

Denn da eine allgemeine c_9 von 54 Konstanten abhängt, so wären bei beliebiger Lage der Grundpunkte $8 \cdot 6 + 3 + 1 = 52$ Bedingungen zu erfüllen, so daß dann nur ein Netz von c_9 existierte.

Andererseits treffen sich irgend zwei c_9 von G in $81 - 8 \cdot 9 - 4 - 1 = 4$ beweglichen Punkten, wie es sein muß.

IX. Flächen vierter und höherer Ordnung mit endlichvielen Geraden.

54. Flächen vierter und höherer Ordnung ohne Singularitäten mit einer endlichen Anzahl von Geraden. Mangels einer systematischen Kenntnis dieser besonderen $F_4, F_5, \ldots$ — kennt man doch nicht einmal die jeweilige Maximalanzahl von Geraden auf der Fläche — beschränken wir uns darauf, eine Reihe von beachtenswerten Typen herauszugreifen.

Zunächst die F_4.

Wie schon in Nr. **3** hervorgehoben, erfordert das Auftreten einer Geraden g auf einer F_4 eine invariante Bedingung für die Konstanten der Fläche, so daß auf einer punktallgemeinen F_4 keine g liegen kann.

Die Gleichung einer F_4 mit einer vorgelegten g ($x_i = 0$, $x_k = 0$), wo fünf Bedingungen zu erfüllen sind, hat die Struktur

$$(1)\qquad F_4 \equiv x_i F_3 + x_k G_3 = 0.$$

Im nächst höheren Falle von zwei Geraden g_1, g_2 ist zu unterscheiden, ob diese windschief oder aber inzident sind; im ersteren Falle sind zehn, im letzteren neun Bedingungen zu erfüllen.

Bei zwei windschiefen Geraden

$$g_1(x_i = 0,\ x_k = 0),\quad g_2(x_l = 0,\ x_m = 0)$$

ist die Gleichung der F_4 von der Gestalt

$$(2\,\text{a})\qquad F_4 \equiv x_i x_l F_2 + x_i x_m G_2 + x_k x_l H_2 + x_k x_m L_2 = 0.$$

Dagegen bei zwei inzidenten Geraden

$$g_1(x_i = 0,\ x_k = 0),\quad g_2(x_i = 0,\ x_l = 0)$$

$$(2\,\text{b})\qquad F_4 = x_i F_3 + x_k x_l G_2 = 0.$$

Wir gehen über zu F_4 mit drei Geraden g_1, g_2, g_3. Man hat wieder die drei Hauptfälle zu unterscheiden, wo entweder alle drei g windschief sind, oder aber nur zwei, oder endlich, wo je zwei der g inzident sind.

Erster Fall. Alle drei g sind windschief, so daß etwa

$$g_1(a = 0,\ a' = 0),\quad g_2(x_i = 0,\ x_k = 0),\quad g_3(x_l = 0,\ x_m = 0).$$

Es sind 15 Bedingungen zu befriedigen. Gemäß (2a) muß die Gleichung der F_3 von der Struktur sein

$$\begin{aligned}(3\,\mathrm{a})\qquad F_4 \equiv\ & a(x_i x_l a_1 + x_i x_m b_1 + x_k x_l c_1 + x_k x_m d_1)\\ &+ a'(x_i x_l a_1' + x_i x_m b_1' + x_k x_l c_1' + x_k x_m d_1') = 0.\end{aligned}$$

Zweiter Fall. Nur zwei der drei g, g_1 und g_2 sind windschief. Es treten zwei Unterfälle ein, je nachdem die dritte Gerade g_3 nur eine jener beiden, oder aber beide trifft; bei ersterem sind 14, bei letzterem 13 Bedingungen zu erfüllen.

Im ersteren Unterfalle seien die isolierte Gerade $g = g_3$ $(a = 0,$ $a' = 0)$, die beiden anderen $g_1(x_i = 0,\ x_k = 0)$, $g_2(x_i = 0,\ x_l = 0)$. Man hat gemäß (2b) die Gleichungsform

$$(3\,\mathrm{b})\qquad F_4 \equiv a(x_i F_2 + x_k x_l F_1) + a'(x_i F_2' + x_k x_l F_1') = 0.$$

Im zweiten Unterfalle seien die beiden windschiefen Geraden wieder $g_1(x_i = 0,\ x_k = 0)$, $g_2(x_l = 0,\ x_m = 0)$, dagegen die dritte, beide treffende, g_3 etwa $(x_k = 0,\ x_m = 0)$.

Es entsteht die Gleichungsform

$$\begin{aligned}(3\,\mathrm{b}')\qquad F_4 \equiv\ & x_i x_l(x_k F_1 + x_m F_1') + x_i x_m(x_k G_1 + x_m G_1')\\ &+ x_k x_l(x_k H_1 + x_m H_1') + x_k x_m(x_k L_1 + x_m L_1') = 0.\end{aligned}$$

Dritter Fall. Je zwei der drei g sind inzident. Dann liegen entweder alle drei g in einer Ebene $(x_m = 0)$, also

$$g_1(x_m = 0,\ x_i = 0),\quad g_2(x_m = 0,\ x_k = 0),\quad g_3(x_m = 0,\ x_l = 0),$$

oder aber sie laufen durch einen Punkt (A_m), also

$$g_1(x_i = 0,\ x_k = 0),\quad g_2(x_i = 0,\ x_l = 0),\quad g_3(x_k = 0,\ x_l = 0).$$

Die Gleichungsformen der F_4 werden

$$(3\,\mathrm{c})\qquad F_4 \equiv x_m F_3 + x_i x_k x_l F_1 = 0,$$

resp.

$$(3\,\mathrm{c}')\qquad F_4 \equiv x_k x_l F_2 + x_l x_i G_2 + x_i x_k H_2 = 0.$$

Mithin besitzen diese letzteren F_4 einen D_2 im Punkte A_m, in dem die drei Geraden g zusammenstoßen.

Hieran schließen sich die Fälle, wo durch einen D_2 mehr als drei Gerade der F_4 gehen; sie seien hier gleich mit behandelt, wenn sie auch ihrer Natur nach zu Nr. 55 gehören.

Eine vierte Gerade g_4 treffe die Ebene $x_m = 0$ in einem Punkte $Q(y_i, y_k, y_l, 0)$. Man ordne demgemäß in (3 c') die Formen F_2, G_2, H_2 nach x_m,

(4) $F_2 \equiv x_m^2 a_0 + x_m a_1 + a_2, \quad G_2 \equiv x_m^2 b_0 + \cdots, \quad H_2 \equiv x_m^2 c_0 + \cdots.$

Die Gerade $g_4 = (A_m, Q)$ trifft die F_3 in zwei Restpunkten, die von der in x_m quadratischen Gleichung abhängen

(5) $$x_m^2(a_0 y_k y_l + b_0 y_l y_i + c_0 y_i y_k) + x_m\{a_1(y) y_k y_l + \cdots\} + \{a_2(y) y_k y_l + \cdots\} = 0.$$

Soll g_4 der F_4 angehören, so muß (5) in x_m identisch erfüllt sein, so daß man einzeln hat

(6) $$a_0 y_k y_l + b_0 y_l y_i + c_0 y_i y_k = 0,$$
$$a_1(y) y_k y_l + \cdots = 0, \quad a_2(y) y_k y_l + \cdots = 0.$$

Bei gegebener Geraden g, d. h. bei gegebenem Punkte $Q(y)$, lassen sich in mannigfaltiger Weise Wertsysteme der a_0, b_0, c_0, sowie der in $a_1, \ldots, a_2, \ldots$ auftretenden Koeffizienten angeben, die (6) erfüllen.

Analog verhält es sich mit einer fünften Geraden g_5, die durch den Punkt $R(z)$ in $x_m = 0$ festgelegt sei. Soll auch g_5 der F_4 angehören, so treten zu (6) drei weitere Bedingungen hinzu, die aus (6) durch Vertauschung der y mit den z hervortreten.

Die Konstanten a_0, b_0, c_0 sind jetzt an zwei lineare homogene Bedingungen gebunden, sind also im allgemeinen bestimmt, und verschwinden nicht zugleich, d. h. der Punkt A_m bleibt noch ein D_2.

Dieser Fall tritt z. B. bei der *Weddleschen Fläche* ein (s. Nr. **65**).

Es werde zu einer sechsten Geraden g_6 durch A_m übergegangen, die durch einen Punkt $S(s)$ in der Ebene $x_m = 0$ bestimmt sei. Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden. Die drei Konstanten a_0, b_0, c_0 unterliegen jetzt drei Bedingungen von dem in (6) angegebenen Typus. Entweder, „im allgemeinen", sind die drei Punkte Q, R, S beliebig, d. h. sie liegen *nicht* mit den drei Koordinatenecken A_i, A_k, A_l auf einer c_2. Dann liegen drei in a_0, b_0, c_0 lineare homogene Relationen mit nichtverschwindender Koeffizientendeterminante vor. Mithin verschwinden die a_0, b_0, c_0 einzeln, d. h. die F_4 besitzt in A_m einen D_3 (siehe Nr. **37**), und ihre Gleichung nimmt die Form an

(7) $$F_4 \equiv x_m a_3 + a_4 = 0.$$

Oder aber im besonderen, jene Determinante verschwindet, die a_0, b_0, c_0 verschwinden nicht zugleich und sind bestimmt; der D_2 in A_m bleibt ein solcher.

Ordnet man die Gleichung der F_4 nach x_m, wie folgt

(8) $$F_4 \equiv x_m^2 K_2 + x_m K_3 + K_4 = 0,$$

so ist die Gleichung des von A_m an die F_4 gehenden Tangentenkegels K_2 des D_2

$$K_2 \equiv a_0 x_k x_l + b_0 x_l x_i + c_0 x_i x_k = 0. \tag{9}$$

Die sechs Geraden g sind jetzt Kanten dieses Kegels K_2 und zugleich solche des kubischen Kegels K_3 und des biquadratischen K_4.

Mehr als sechs Gerade durch A_m könnte die F_4 nur in dem singulären Falle besitzen, wenn die Form K_3 identisch verschwindet, dann würden die acht gemeinsamen Kanten der beiden Kegel K_2 und K_4 auf der F_4 liegen.

Wir kehren zurück zu F_4 mit windschiefen Geraden. Indem die Fälle mit vier, fünf, sechs solchen Geraden übergangen seien, werde der Fall von sieben solchen Geraden ins Auge gefaßt. Da die Existenz solcher, beliebig gegeben gedachter sieben Geraden auf einer F_4 $7 \cdot 5 = 35$ unabhängige Bedingungen involviert, so müssen jene sieben Geraden einer gewissen Abhängigkeit unterliegen. Diese hat *Cayley*[109]) näher untersucht. Wie später *E. Wakeford*[110]) ausgeführt hat, steht eine solche F_4 mit sieben windschiefen g in enger Verbindung mit einer gewissen kubischen Raumtransformation T_3 (s. „F_3", Nr. **11**).

Man gehe von vier beliebigen windschiefen Geraden $h_1, \ldots, h_4$ aus. Durch diese geht ein Gebüsch G von F_3, dessen Gleichung sei

$$G \equiv \sum_{i=1}^{4} u_i' F_3^{(i)} = 0. \tag{10}$$

Man ordne den F_3 dieses Gebüsches G das Gebüsch der Ebenen $\mathsf{E}(u')$ eines zweiten Raumes kollinear zu. Dadurch wird eine kubische *Cremona*sche Punkttransformation T_3 zwischen beiden Räumen festgelegt. Umgekehrt korrespondiert dabei das Gebüsch der Ebenen $\mathsf{E}(u)$ des ersten Raumes einem Gebüsche G' von Flächen 3. Ordnung F_3' im zweiten Raume, wiederum mit vier gemeinsamen Geraden $h_1', \ldots, h_4'$.

Eine beliebige Gerade g des ersten Raumes geht vermöge der T_3 über in eine C_3, die die vier Geraden h' zu Sekanten hat, und vice versa.

Von besonderem Interesse ist eine gewisse F_4 mit zehn windschiefen Geraden g. Diese F_4 ist der Ort der Spitzen der Kegel eines „allgemeinen" F_2-Gebüsches G, d. h. eines solchen ohne gemeinsame Grundpunkte, und steht in engster Verbindung mit der Theorie der „allgemeinen" ebenen rationalen Kurven 6. Ordnung r_6, d. h. solcher,

---

109) *A. Cayley*, London Math. Soc. Proc. 3 (1871), p. 19, 198.

110) *E. K. Wakeford*, London Math. Soc. Proc. (2) 21 (1921), p. 98; vgl. dazu die Bemerkungen von *H. F. Baker*, ib. p. 114.

die zehn d_2 besitzen. Es werde von diesen r_6 ausgegangen.[111] Die Parameterdarstellung einer solchen r_6 lautet

$$\varrho x_i = f_i(\lambda) \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{11}$$

wo die f_i binäre Formen 6. Ordnung in λ sind.

Zu diesem Netz von Formen f gehört ein apolares Gebüsch von Formen φ derselben Ordnung, das sich zusammensetze aus

$$\varphi_a = (a\lambda)^6, \quad \varphi_b = (b\lambda)^6, \quad \varphi_c = (c\lambda)^6, \quad \varphi_d = (d\lambda)^6, \tag{12}$$

mit realen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_6$ usf.

Bedeuten $\lambda_1, \ldots, \lambda_6$ irgend sechs Parameterwerte und s_k ($k = 0, 1, \ldots, 6$) deren homogene elementarsymmetrische Verbindungen, so bilde man vermöge Polarisation nach den $\lambda_1, \ldots, \lambda_6$ aus (12) die vier Linearformen

$$\begin{aligned} (as) &\equiv \sum a_k s_k, \quad (bs) \equiv \sum b_k s_k, \\ (cs) &\equiv \sum c_k s_k, \quad (ds) \equiv \sum d_k s_k. \end{aligned} \tag{13}$$

Dann besagt das „Schnittpunkttheorem", daß die sechs Punkte $(\lambda_1), \ldots, (\lambda_6)$ der r_6 dann und nur dann auf einer Geraden liegen, wenn die vier Bedingungen erfüllt sind

$$(as) = 0, \quad (bs) = 0, \quad (cs) = 0, \quad (ds) = 0. \tag{14}$$

Man spalte weiter die sechs Werte $\lambda_1, \ldots, \lambda_6$ in zwei Reihen von je drei, etwa $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und $\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$, und bezeichne deren elementarsymmetrische Verbindungen mit σ_r resp. τ_s. Setzt man dann

$$\left\{\begin{aligned} A_0 &= a_0\sigma_0 + \cdots + a_3\sigma_3, \\ A_1 &= a_1\sigma_0 + \cdots + a_4\sigma_3, \\ A_2 &= a_2\sigma_0 + \cdots + a_5\sigma_3, \\ A_3 &= a_3\sigma_0 + \cdots + a_6\sigma_3 \quad \text{usf.}, \end{aligned}\right. \tag{15}$$

so nehmen die Gleichungen (14) die Form an

$$(as) \equiv \sum \tau_i A_i = 0, \quad (bs) \equiv \sum \tau_i B_i = 0 \quad \text{usf.} \tag{14'}$$
$$(i = 0, 1, 2, 3).$$

Eliminiert man hieraus die τ, so ergibt sich als Kriterium für die Inzidenz dreier Punkte $(\lambda_1), (\lambda_2), (\lambda_3)$ der r_6 die Bedingung

$$F_4 \equiv |\, A_i,\ B_i,\ C_i,\ D_i \,| = 0, \tag{16}$$

die also von derselben Struktur ist wie die Gleichung (s. Nr. **65**) der Kegelspitzenfläche eines F_2-Gebüsches, nur daß hier zwischen den Koeffizienten A, B, C, D gewisse Gleichheiten bestehen. Nunmehr ziehe man die kubische Normkurve $N_3 = \mathsf{N}_3$ (s. Nr. **3**) heran. Die Koordi-

---

111) *W. Fr. Meyer,* Apolarität und rat. Kurven. Tübingen 1883, Abschn. III.

naten x_i irgendeines Raumpunktes $P(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, von dem die drei (Schmiegungs-)Ebenen λ_1, λ_2, λ_3 an die N_3 gehen, fallen mit den σ_i zusammen.

Dem Gebüsch (12) der Formen φ, oder auch dem der Formen (14′), ist ein F_2-Gebüsch $G\,(F_a, F_b, F_c, F_d)$ (1, 1)-deutig zugeordnet. Die Gleichungen der $F_a, \ldots, F_d$ ergeben sich aus (14) für $\sigma_i = \tau_i$, so daß man hat

$$(17)\qquad F_a \equiv \sum_{i,k} x_i x_k a_{i+k} \equiv (ax)^2 = 0 \text{ usf.}$$

Andererseits ist der Normkurve N_3 eine ∞^2 Schar Σ von Flächen 2. Klasse Φ einbeschrieben, die sich aus drei Individuen Φ_α, Φ_β, Φ_γ zusammensetzen, deren Gleichungen sind

$$(18)\qquad \begin{cases} \Phi_\alpha \equiv u_0 u_2 - u_1^2 \equiv (u\alpha)^2 = 0, \\ \Phi_\beta \equiv u_0 u_3 - u_1 u_2 \equiv (u\beta)^2 = 0, \\ \Phi_\gamma \equiv u_1 u_3 - u_2^2 \equiv (u\gamma)^2 = 0. \end{cases}$$

Dann bestehen die zwölf Beziehungen zwischen den Flächen F und Φ

$$(19)\qquad \begin{cases} (a\alpha)^2 = 0, & (b\alpha)^2 = 0, & (c\alpha)^2 = 0, & (d\alpha)^2 = 0, \\ (a\beta)^2 = 0, & (b\beta)^2 = 0, & (c\beta)^2 = 0, & (d\beta)^2 = 0, \\ (a\gamma)^2 = 0, & (b\gamma)^2 = 0, & (c\gamma)^2 = 0, & (d\gamma)^2 = 0. \end{cases}$$

Diese sagen aus, daß jede Fläche F des Gebüsches G apolar ist zu jeder Fläche Φ der Schar Σ, oder kurz, daß das Gebüsch G apolar ist zur Normkurve N_3.

Vermöge (14′) ist je ein Punktepaar. (σ), (τ) der Fläche F_4 konjugiert zu G, d. h. zu jeder Fläche in G. Man hat damit den Satz: „Beschreibt man der Normkurve N_3 ein beliebiges, durch (1) dargestelltes Netz von Hexaedern um, so erfüllen deren Ecken die Kegelspitzenfläche F_4 eines F_2-Gebüsches G. Je ein Paar von Gegenecken eines solchen Hexaeders ist konjugiert in bezug auf die F_2 des Gebüsches G, oder auch, das Hexaeder ist ein ‚Polhexaeder' von G."

Sei ferner $d_2(\alpha_i, \beta_i)$ irgendeiner der zehn d_2 der r_6 (1). Da das Paar (α_i, β_i) mit jedem Punkte λ der r_6 ein Inzidenztripel bildet, so folgt: „Auf der Fläche F_4 liegen zehn windschiefe Gerade $g_i(\alpha_i, \beta_i)$, die zugleich Achsen der Normkurve N_3 sind." Weitere Gerade auf der F_4 existieren nicht.

Endlich beachte man noch, daß die Fläche F_4 die Normkurve N_3 in zwölf Punkten trifft, die von einer Gleichung $\Theta(\lambda) = 0$ abhängen, wo Θ die Funktionaldeterminante der Formen f (oder auch der Formen φ) bedeutet. Die Gleichung $\Theta(\lambda) = 0$ liefert andererseits für die r_6 deren zwölf Wendepunkte.

Es handelt sich nun um die Umkehrung der bisherigen Entwickelungen, indem man jetzt von einem allgemeinen F_2-Gebüsch G (ohne Grundpunkte) ausgeht. Gibt es dann eine kubische Kurve Γ_3, die zu G apolar ist?

Da eine Γ_3 von zwölf Konstanten abhängt, andererseits zwölf Bedingungen vorliegen, so können nur zwei Fälle eintreten; entweder gibt es eine endliche Anzahl von Γ_3, oder aber im allgemeinen keine Γ_3, wenn jedoch im besonderen eine, so auch unendlich viele.

Der letztere Fall kann nicht eintreten. Denn nach Nr. **65** befinden sich in G zehn Ebenenpaare, und deren zehn Schnittachsen wären dann die gemeinsamen Achsen von ∞ Γ_3, was ausgeschlossen ist. Mithin gibt es eine endliche Anzahl von zu G apolaren Γ_3, wo diese Anzahl nur gleich Eins oder Zwei sein kann.

Hier greift die vielseitige Untersuchung von *A. B. Coble*[112]) ein. Er bringt die kubischen Kurven $C_3 = \Gamma_3$ und die r_6 in einen direkten Zusammenhang. Man denke sich zwei beliebige Kurven C_3, C_3' gegeben und auf jeder einen Parameter λ, resp. λ' ausgebreitet. Man lege etwa durch C_3' das Netz N' von F_2, so schneidet dieses auf C_3 ein Netz von Punktsextrupeln $f_6(\lambda)$ von der Form (1) aus, das also durch eine r_6 repräsentiert werden kann. Analog entsteht vice versa eine r_6'. Sieht man dual die beiden kubischen Kurven als Klassengebilde (Gewinde) Γ_3, Γ_3' an und operiert entsprechend mit den einbeschriebenen Flächen 2. Klasse Φ_2, so bildet sich die Raumfigur von neuem ab auf ein Paar von r_6. Im ganzen treten also als Bilder der Raumfigur $(C_3, C_3') = (\Gamma_3, \Gamma_3')$ vier gleichberechtigte rationale Kurven 6. Ordnung vom Typus r_6 (1) auf.

Legt man nun etwa das Paar (Γ_3, Γ_3') zugrunde, so korrespondieren wie früher deren zehn gemeinsamen Achsen die zehn d_2 der r_6.

Dann aber weist *Coble* nach, daß auf diese Weise, bei beliebiger Lage der C_3, C_3', in der Tat das allgemeinste Netz (1) von binären Formen $f_6(\lambda)$ entsteht.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß *Coble* auch transzendente Hilfsmittel heranzieht, indem er die Figur (C_3, C_3') zu den *Abel*schen Modularfunktionen vom Geschlecht $p = 4$ in enge Beziehung setzt.

Faßt man das obige zusammen, so ist die Umkehrfrage jetzt beantwortet, und es gilt der Satz: „Zu einem F_2-Gebüsch gehört ein einziges Paar von Γ_3, so daß deren zehn gemeinsame Achsen die Schnittlinien der zehn in G enthaltenen Ebenenpaare sind. Die Kegelspitzenfläche F_4 von G enthält jene zehn Geraden (und keine wei-

112) *A. B. Coble,* Amer. J. Math. 41 (1919), p. 43; ib. 46 (1924), p. 143.

teren), und G ist das zu Γ_3 wie zu Γ_3' apolare F_2-Gebüsch. Überdies erscheint die F_4 als Ort der zehn Paare von Gegenecken von je ∞^2, Γ_3 resp. Γ_3' umbeschriebenen Hexaedern, und jedes solche Punktepaar ist konjugiert in bezug auf G."

Auf die Sonderfälle, wo sich die zehn d_2 der r_6 zu höheren Singularitäten vereinigen, werde nicht eingegangen und nur erwähnt, daß im Falle eines d_5 die F_4 sich zur *Hesse*schen Fläche $H(F_3)$ einer F_3 spezialisiert (s. Art. „F_3", Nr. **19**).

Der bisher behandelte Fall einer F_4 mit zehn g ist, vom Standpunkte der ebenen rationalen Kurven r_n aus, nur das Anfangsglied einer Kette von $F_4, F_5, \dots$ mit einer endlichen Anzahl von Geraden g.[111]) In der Tat, geht man von einer allgemeinen r_n aus, die also $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ d_2 besitzt und durch $\varrho x_i = f_n^{(i)}(\lambda)$ dargestellt ist, stellt das Schnittpunkttheorem auf und leitet aus ihm, ähnlich wie bei der r_6, das Inzidenzkriterium für irgend drei Punkte der r_n ab, so gelangt man zu dem Satze:

„Eine allgemeine ebene rationale Kurve r_n $(n \geqq 6)$ führt zu einer F_n mit $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ (und nicht mehr) Geraden, die Achsen einer Γ_3 sind. Die F_n erscheint als Ort der Ecken eines Netzes von n-flachen, die der Γ_3 umbeschrieben sind. Die Gleichung der F_n erhält man durch Nullsetzen einer n-reihigen Determinante, mit quaternären Linearformen als Elementen, deren Koeffizienten kettenförmig aufsteigen."

Zu einzelnen F_4 mit einer besonders hohen Anzahl von g gelangt *F. Schur*[113]); so zu einer „symmetrisch-tetraedralen" F_4 mit 48 g, und zwei weiteren F_4 mit 52 resp. 64 g.

Systematisch wird die Lagerung endlichvieler g auf einer F_n in zwei Arbeiten von *G. Affolter*[114]) untersucht, indem er sie je nach der Natur der Restkurven in zwei Hauptgruppen einteilt. Man gehe von den durch eine g auf einer F_n laufenden Ebenen aus, für die die Restkurve c_{n-1} irgendwie zerfällt. Eine Gruppe von g auf der Fläche heißt von der u^{ten} Klasse, wenn durch jede g der Gruppe u Ebenen gehen, für die die Restkurve c_{n-1} in gleicher Weise ausartet. So z. B. bilden die 27 g einer F_3 eine Gruppe 5. Klasse.

Bezeichnet man ferner eine nicht der F_n angehörige Schnittachse zweier Ebenen, von denen jede durch eine g der Fläche geht, als eine

---

113) *F. Schur*, Math. Ann. **18** (1881), p. 1; J. f. Math. **95** (1883), p. 207 (symmetrisch-tetraedrale F_4 mit 48 g); Math. Ann. **20** (1882), p. 84 (F_4 mit 52 resp. 64 g). Vgl. hierzu *P. Veronese*, Math. Ann. **19** (1881), p. **161**.

114) *G. Affolter*, Math. Ann. **27** (1886), p. 277; **29** (1887), p. 1.

„Kante", so enthält eine g-Gruppe „erster Art" keine Kante, durch die mehr als zwei, eine g der Fläche enthaltende Ebenen gehen.

Dagegen heißt eine g-Gruppe von der „zweiten Art", wenn durch eine oder mehrere Kanten mehr als zwei solcher Ebenen gehen.

In der ersten Abhandlung werden zunächst F_n mit g-Gruppen erster Art verfolgt, wo die Degeneration der Restkurven eine vollständige ist. In der zweiten Abhandlung bestimmt der Verfasser diejenigen Gruppen erster Art, wo die Degeneration der Restkurven keine vollständige ist. Es wäre wünschenswert, wenn diese allgemeinen Entwicklungen einmal abgerundet und andererseits von ihnen konkrete Anwendungen gemacht würden.

55. Flächen vierter und höherer Ordnung mit Singularitäten und einer endlichen Anzahl von Geraden. Die Methode, mittels deren *Clebsch* die F_3, die F_4 mit einer $\overline{C}_2$ resp. $\overline{g}$ auf eine Ebene eindeutig abgebildet hatte, ist von ihm selbst, sowie von *M. Noether*, *A. Cayley*, *L. Cremona*, *G. Darboux* u. a. auf höhere Fälle ausgedehnt worden. (S. Art. III C 11, *L. Berzolari*, Algebraische Transformationen.)

Wir beschränken uns auf F_5 mit mehrfachen C. Eine solche enthält eine endliche Anzahl von Geraden:

1. wenn sie eine dreifache Gerade $\overline{\overline{g}}$ enthält,
2. wenn zwei windschiefe doppelte Geraden $\overline{g}_1$ und $\overline{g}_2$ in der Fläche liegen,
3. wenn sie eine doppelte kubische Raumkurve $\overline{C}_3$ besitzt,
4. wenn sie eine doppelte $\overline{C}_4$ erster Spezies hat,
5. wenn sie mit einer doppelten Raumkurve 5. Ordnung $\overline{C}_5$ behaftet ist, die einen dreifachen Punkt d_3 besitzt.

Während bei der Abbildung dieser Flächen die endlichvielen Geraden gewissermaßen als Nebenprodukte auftreten, werden sie von *R. Sturm*[115]) mit synthetischen Mitteln direkt abgeleitet. Dabei werden ihre Anzahl und Lage, ferner die Kegelschnitte auf der Fläche und sonstige Singularitäten, die eventuell noch auftreten können, eingehend untersucht.

Auch Flächen von allgemeinerer Form werden berücksichtigt. So die F_n mit einer $(n-2)$-fachen Geraden, die stets eine endliche Anzahl einfacher Geraden besitzen, sowie überhaupt F_n, die eine — durch die Ordnungzahl n beschränkte — Anzahl vielfacher Geraden besitzen. Letztere Flächen sind dann ausführlicher von *J. de Vries*[116]) untersucht worden.

115) *R. Sturm*, Math. Ann. 3 (1871), p. 249.

116) *J. de Vries*, Arch. Teyler (2) 8 (1902), p. 235; Amsterdam Versl. 10 (1902), p. 742.

Was Flächen mit nur singulären Punkten und einer endlichen Anzahl von g betrifft, so sei (s. Nr. **39**) an die F_4 mit einem D_3 erinnert, von denen *K. Rohn* nachwies, daß zu den zwölf durch den D_3 selbst gehenden g eventuell noch eine, zwei bis zu 19 weiteren hinzutreten können.

X. Flächen 4. Ordnung mit weniger als 16 Doppelpunkten.

56. Einleitung. Die Theorie dieser F_4-Typen ist so vielgestaltig, daß wir auf die eingehende Monographie von „*Jessop*" (s. Lit.) verweisen müssen. Im folgenden seien nur einige solcher Typen hervorgehoben, deren Studium die Entwickelung der Flächen höherer Ordnung wesentlich beeinflußt hat. Vorab sei bemerkt, daß die F_4 mit einem, resp. unendlichvielen D_2 resp. D_3 bereits in den Abschnitten V, VI, VII behandelt sind.

Eine Anzahl von bemerkenswerten F_4 mit 11 bis 16 d_2 tritt in den verschiedenen Arbeiten von *Kummer*[117]) auf.

57. Die Untersuchungen von Cayley. In einer systematischen Theorie hat *A. Cayley*[118]) die Grundlagen entwickelt. Eines seiner Hauptergebnisse ist überraschend. Das Auftreten eines D_2 an einer bestimmten Stelle involviert für eine F vier Bedingungen. Man sollte also erwarten, daß F_4 mit acht D_2 in acht beliebig gewählten Punkten existieren, da die Anzahl $8 \cdot 4 = 32$ der Bedingungen noch um zwei geringer ist als die der Konstanten der F_3. *Cayley* zeigt aber, daß nicht mehr als sieben D_2 einer F_4 willkürlich angenommen werden können.

Es seien sieben Punkte $P_1, \ldots, P_7$ beliebig vorgegeben, so gibt es noch eine lineare ∞^6 Schar von F_4, die in ihnen D_2 besitzen. Die verfügbaren sechs Konstanten suche man so zu bestimmen, daß diese F_4 noch weitere D_2 erhält.

Hinsichtlich des Auftretens eines achten D_2 in einem Punkte P_8 können zwei verschiedene Fälle eintreten. Entweder sind die acht Punkte $P_1, \ldots, P_8$ assoziiert, d. h. die Grundpunkte eines F_2-Netzes, so daß P_8 bereits durch die $P_1, \ldots, P_7$ mitbestimmt ist (s. u. Nr. **61**), oder aber P_8 muß der Bedingung unterliegen, einer gewissen F_6 anzugehören, so daß eine solche F_4, nach Wahl von P_8, noch von vier Konstanten abhängt. Diese lassen sich weiter so bestimmen, daß noch ein neunter, resp. zehnter D_2 hinzutritt.

117) *E. E. Kummer*, Berlin Berichte 1864, p. 216, 246; Berlin Abh. 1866 („Über algebraische Strahlensysteme"); Berlin Ber. 1872, p. 474.

118) *A. Cayley*, London Math. Soc. Proc. 3 (1871), p. 19, 198, 234, 281.

Eine größere Anzahl von D_2 ist nur dann möglich, wenn die sieben Ausgangspunkte gewisse Bedingungen erfüllen. Von besonderem Interesse ist die eine F_4 mit zehn D_2. Hierher gehört das „Symmetroid“ (s. unten auch Nr. 62), d. h. eine F_4, die darstellbar ist durch Nullsetzen einer symmetrischen Determinante 4. Ordnung, deren Elemente quaternäre Linearformen sind. Nebenbei sei bemerkt, daß die bei *Kummer* auftretende F_4 mit elf D_2 ein Sonderfall des Symmetroides ist.

Verbindet man irgeneinen der zehn D_2 eines Symmetroides mit den neun weiteren durch Gerade, so sind letztere die gemeinsamen Kanten zweier kubischen Kegel K_3, K_3', die zusammen den vom ersten D_2 an die F_4 gehenden Tangentenkegel K_6 bilden.

Allgemein liege eine F_4 mit k D_2 vor, so greife man irgendeinen der D_2 heraus und lege von ihm aus den Tangentenkegel K_6 an die F_4, der die übrigen $k-1$ D_2 enthalten muß. Dieser K_6 ist in erster Linie für die Natur der F_4 und insonderheit der $k-1$ übrigen D_2 maßgebend.

Hieraus geht u. a. eine neue Eigenschaft des Symmetroides hervor. Es liege überhaupt eine F_4 mit zehn D_2 vor. Hat dann ein einziger derselben die Beschaffenheit, daß der von ihm ausgehende Tangentenkegel K_6 in zwei kubische Kegel K_3, K_3' zerfällt, so trifft dies auch für die neun anderen D_2 zu, und die F_4 ist ein Symmetroid.

Weiter werden noch F_4 mit 13 bis 16 D_2 behandelt, wobei die *Kummer*schen Ergebnisse verschiedene formale Ergänzungen erfahren. Durchweg werden die Lagenbeziehungen zwischen den D_2 und den K_6 durch Diagramme erläutert.

58. F_4 mit zwei Selbstberührungspunkten. F_4 mit vier uniplanaren Doppelpunkten. Die F_4 mit zwei Selbstberührungspunkten (die nicht (1, 1)-deutig auf eine Ebene abbildbar ist) fand zuerst *Kummer* (s. Nr. 7) unter denen, die eine Schar von C_2 besitzen. In der Tat schneidet das Büschel von Ebenen durch die beiden Selbstberührungspunkte Paare von sich berührenden C_2 aus der F_4 aus, die die obige Schar bilden.

Für vier singuläre Tangentialebenen des Büschels fallen die C_2 eines Paares zusammen. Die Gleichungsform für die F_4 lautet

$$(1) \qquad F_4 \equiv F_2^2(x_1, x_2, x_3, x_4) - f_4(x_1, x_2) = 0.$$

Die Gleichung einer F_4 mit vier reellen uniplanaren D_2, die man in die Koordinatenecken verlege, erhält man in der Gestalt

$$(2) \qquad \begin{aligned} F_4 &\equiv (a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \cdots + a_{34}x_3x_4)^2 + 2ax_1x_2x_3x_4 \\ &\equiv F_2^2 + 2ax_1x_2x_3x_4 = 0. \end{aligned}$$

Die vier D_2 in den Ecken A_r $(r = i, k, l, m)$ sind also in Doppelebenen T_r ausgeartet; es ist z. B. die Gleichung von T_m

(3) $$\mathsf{T}_m \equiv a_{im}x_i + a_{km}x_k + a_{lm}x_l = 0.$$

Diese vier Ebenen T sind aber zugleich die vier Tangentialebenen der Fläche F_2 in den A, so daß sich deren Eigenschaften unmittelbar auf die F_4 (2) übertragen lassen.

Es seien einige dieser Eigenschaften der vier Ebenen T angeführt. Die Spurgerade von T_m in der Ebene $x_m = 0$ sei mit t_m bezeichnet, so daß, in dieser Ebene gedeutet, die Gleichung (3) zugleich die von t_m ist:

(3′) $$t_m \equiv a_{im}x_i + a_{km}x_k + a_{lm}x_l = 0.$$

Man beachte dabei, daß diese vier Spurgeraden t ungeändert bleiben, wenn man die F_2 in (2) durch die ∞^4-lineare Schar ersetzt

(4) $$\sum a_i x_i^2 + \sum\sum a_{ik}x_i x_k = 0 \qquad (i \neq k),$$

mit willkürlichen Konstanten a_i. Man bestimme die Schnittpunkte von t_m mit den Seiten des Dreiecks (A_i, A_k, A_l), z. B. mit $(A_i\, A_k)$, die als Koordinatenkante im Raume durch $x_l = 0$, $x_m = 0$ dargestellt ist. Für den Schnittpunkt hat die Koordinate $x_{ik} = \frac{x_i}{x_k}$ auf der Kante gemäß (3) den Wert

(5) $$x_{ik} = -\frac{a_{km}}{a_{im}}.$$

Auf der nämlichen Kante $(x_l = 0, x_m = 0)$ befindet sich noch ein zweiter Spurpunkt, der mit der Geraden t_l (oder auch der Ebene T_l). Er heiße der „Nebenspurpunkt“, und x'_{ik} sei seine Koordinate. Dann folgt aus (5): $x'_{ik} = -\frac{a_{kl}}{a_{il}}$. Somit hat man für die drei Nebenspurpunkte auf den Seiten des Dreiecks (A_i, A_k, A_l)

(6) $$x'_{ik} = -\frac{a_{kl}}{a_{il}}, \quad x'_{kl} = -\frac{a_{li}}{a_{ki}}, \quad x'_{li} = -\frac{a_{ik}}{a_{lk}}.$$

Hieraus geht hervor, daß die drei Nebenspurpunkte in der Ebene $x_m = 0$ ebenfalls einer Geraden angehören; diese sei mit t'_m bezeichnet und heiße die zu t_m gehörige m^{te} „Nebengerade“.

Die Gleichung von t'_m wird

(7) $$t'_m \equiv \frac{x_i}{a_{kl}} + \frac{x_k}{a_{li}} + \frac{x_l}{a_{ik}} = 0,$$

oder auch

(7 a) $$t'_m \equiv x_i a_{ik} a_{il} + x_k a_{ki} a_{kl} + x_l a_{li} a_{lk} = 0.$$

Bildet man jetzt durch Multiplikation von (4) und (7 a) die Gleichung des Geradenpaares (t_m, t_m') und setzt noch zur Abkürzung

$$(8)\qquad \begin{cases} p_i = a_{ik}a_{il}a_{im}, \\ p_{ik} = p_{lm} = a_{il}a_{km} + a_{im}a_{kl} \quad (i, k, l, m = 1, 2, 3, 4), \end{cases}$$

so kommt

$$(9)\qquad t_m t_m' \equiv x_i^2 p_i + x_k^2 p_k + x_l^2 p_l + x_i x_k a_{ik} p_{ik} + x_k x_l a_{kl} p_{kl} + x_l x_i a_{il} p_{il} = 0.$$

Hieraus folgt sofort, daß die vier Geradenpaare (t, t') auf einem Hyperboloide G_2 liegen, dessen Gleichung lautet

$$(10)\qquad G_2 \equiv (x_i^2 p_i + \cdots + x_m^2 p_m) + \{x_i x_k (a_{ik} p_{ik} + a_{lm} p_{lm}) + \cdots\} = 0.$$

Somit gilt für die F_4 (2) mit vier uniplanaren D_2 in den Koordinatenecken A der Satz:

„Die vier Doppelebenen T der D_2 in den A schneiden die Gegenebenen des Tetraeders (A) in vier Geraden t, die auf einem Hyperboloide G_2 (10) liegen. Dieses schneidet auf jeder Gegenebene noch eine zweite Gerade t' (7a) aus.“

Für dieses Hyperboloid möge auch die Klassengleichung $\Gamma_2 = 0$ angegeben werden.

Die Fläche Γ_2 besitzt die vier Gegenebenen als Tangentialebenen mit den Erzeugenden t, t', also mit deren jeweiligem Schnittpunkt T als Berührungspunkt. Setzt man weiter zur Abkürzung

$$(11)\qquad \begin{cases} d_{ik} = d_{lm} = a_{ik}a_{lm} - a_{il}a_{km} \\ d_{kl} = d_{im} = a_{kl}a_{im} - a_{ik}a_{lm} \\ d_{li} = d_{km} = a_{il}a_{km} - a_{kl}a_{im}, \end{cases}$$

so hat man auf Grund von (4) und (7a) für die Koordinaten $x_i^{(m)}$, $x_k^{(m)}$, $x_l^{(m)}$ des Punktes T_m die Werte

$$(12)\qquad x_i^{(m)} : x_k^{(m)} : x_l^{(m)} = a_{kl}d_{kl} : a_{li}d_{li} : a_{ik}d_{ik}.$$

Damit ergibt sich als Gleichung der Klassenfläche Γ_2

$$(13)\qquad \Gamma_2 \equiv \sum d_{il}(u_i u_k a_{lm} + u_l u_m a_{ik})$$

$$\equiv \begin{vmatrix} u_i u_k a_{lm} + u_l u_m a_{ik}, & u_i u_l a_{km} + u_k u_m a_{il}, & u_k u_l a_{km} + u_i u_m a_{kl} \\ a_{ik}a_{lm}, & a_{il}a_{km}, & a_{im}a_{il} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Auf die vorliegende F_4 (2) sei auch die Methode der Tangentenprojektion (s. Nr. **19**) von irgendeinem der vier uniplanaren D_2, etwa in A_m, auf die Gegenebene $(x_m = 0)$ angewendet.

Zu dem Behuf ordne man die Gleichung (2) nach x_m

$$(2_m)\qquad F_4 \equiv (x_m t_m + k_m)^2 + 2a x_m x_i x_k x_l \equiv x_m^2 t_m^2 + 2x_m(t_m k_m + a x_i x_k x_l) + k_m^2 + 0,$$

wo

(14) $$k_m \equiv x_i x_k a_{ik} + x_k x_l a_{kl} + x_l x_i a_{li}.$$

Hier stellt, wie oben in der Ebene $x_m = 0$, die Gleichung (3′) $t_m = 0$ die Spur der Doppelebene des Kegels K_2 im D_2 (A_m) dar, und $k_m = 0$ den Schnittkegelschnitt der F_2 mit der Ebene $x_m = 0$, längs dessen die letztere die F_4 berührt.

Um den gesuchten Tangentenkegel $K_6^{(m)}$, der von A_m aus an die F_4 geht, oder auch seine Spur $k_6^{(m)}$ in der Ebene $x_m = 0$, zu erhalten, hat man die Diskriminante der in x_m quadratischen Gleichung (2_m) gleich Null zu setzen. Dann ergibt sich als Gleichung von $k_6^{(m)}$

(15) $$k_6^{(m)} \equiv (t_m k_m + a x_i x_k x_l)^2 - t_m^2 k_m^2 \equiv x_i x_k x_l (2 t_m k_m + a x_i x_k x_l)$$
$$\equiv x_i x_k x_l c_3^{(m)} = 0.$$

Damit ergibt sich der Satz:

„Liegt eine F_4 (2) mit vier uniplanaren D_2 in den Koordinatenecken A vor, und legt man von irgendeinem der D_2, etwa A_m, die Tangenten an die F_4, so treffen diese die Gegenebene $x_m = 0$ in den Punkten einer Übergangskurve $k_6^{(m)}$. Diese Kurve 6. Ordnung zerfällt aber in die Seiten des Dreiecks (A_i, A_k, A_l) und eine Kurve 3. Ordnung $c_3^{(m)}$. Letztere geht einmal durch die drei Spurpunkte der Doppelebene des $D_2(A_m)$ in den Seiten des Dreiecks und berührt andererseits den Berührungskegelschnitt k_m der Ebene $x_m = 0$ mit der F_4 in den Ecken des Dreiecks. Bei Variieren der Konstanten a in der Gleichung der F_4 bilden die Kurven $c_3^{(m)}$ das c_3-Büschel durch jene neun Grundpunkte."

59. F_4 mit vier beliebigen Doppelpunkten. Es ist nützlich, einer F_4 mit vier uniplanaren D_2 in den Ecken A eine F_4 mit vier allgemeinen D_2 in den A gegenüberzustellen. Die Gleichung einer solchen F_4 ist von der Form

(1) $$F_4 \equiv (x_i^2 x_k^2 b_{ik} + \cdots + x_l^2 x_m^2 b_{lm})$$
$$+ (x_i^2 x_k x_l b_{kl}^{(i)} + \cdots + x_m^2 x_i x_k b_{ik}^{(m)} + \cdots)$$
$$+ 4 b x_i x_k x_l x_m = 0.$$

Die Gleichung des Tangentenkegels K_m des $D_2(A_m)$, oder auch seines Spurkegelschnitts k_m in der Gegenebene $x_m = 0$, lautet

(2) $$K_m \equiv x_i^2 b_{im} + x_k^2 b_{km} + x_l^2 b_{lm}$$
$$+ x_k x_l b_{kl}^{(m)} + x_i x_l b_{il}^{(m)} + x_i x_k b_{ik}^{(m)} = 0.$$

Dieser trifft die Kante $(x_l = 0,\ x_m = 0)$ in dem Punktepaar $(ik)^{(m)}$ mit der Gleichung

(3) $$(ik)^{(m)} \equiv x_i^2 b_{im} + x_k^2 b_{km} + x_i x_k b_{ik}^{(m)} = 0.$$

Dieselbe Kante wird aber auch von K_l resp. k_l in einem „Nebenpunktepaar“ $(ik)^{(l)}$ geschnitten mit der Gleichung

$$(3') \qquad (ik)^{(l)} \equiv x_i^2 b_{il} + x_k^2 b_{kl} + x_i x_k b_{ik}^{(l)} = 0.$$

Man bilde jetzt durch Multiplikation von (3) und (3′) die Gleichung für das Aggregat der beiden Punktepaare $(ik)^{(l)}$, $(ik)^{(m)}$ und füge noch den Faktor b_{ik} hinzu, so ergibt sich

$$(4) \quad (ik)^{(l)}(ik)^{(m)} = x_i^4 q_i + x_k^4 q_k + x_i^3 x_k q_{ik}^{(i)} + x_i^2 x_k^2 q_{ik} + x_i x_k^3 q_{ik}^{(k)},$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$(5) \qquad \begin{cases} q_i \equiv b_{ik} b_{il} b_{im}, \quad q_k \equiv b_{ki} b_{kl} b_{km}, \\ q_{ik}^{(i)} \equiv b_{ik}(b_{im} b_{ik}^{(l)} + b_{il} b_{ik}^{(m)}), \\ q_{ik}^{(k)} \equiv b_{ik}(b_{km} b_{ik}^{(l)} + b_{kl} b_{ik}^{(m)}), \\ q_{ik} \equiv b_{ik}(b_{il} b_{km} + b_{im} b_{kl} + b_{ik}^{(l)} b_{ik}^{(m)}) \text{ usf.} \end{cases}$$

Das nämliche Verfahren sei auf die fünf übrigen Kanten angewendet. Aus der Struktur von (4) liest man den Satz ab:

„Liegt eine F_4 mit vier D_2 in den Ecken A eines Tetraeders T vor, so befinden sich auf jeder der sechs Kanten, z. B. (A_i, A_k), von T zwei Punktepaare, die von den Tangentenkegeln der beiden D_2 in A_l und A_m ausgeschnitten werden. Diese $4 \cdot 6 = 24$ Punkte sind Grundpunkte einer ∞^{12}-linearen Schar von Flächen 4. Ordnung.“

In der Tat geht durch jene 24 Punkte zunächst eine Fläche 4. Ordnung G_4 mit der Gleichung

$$(6) \quad \begin{aligned} G_4 \equiv (x_i^4 q_i + \cdots + x_m^4 q_m) + (x_i^2 x_k^2 q_{ik} + \cdots + x_l^2 x_m^2 q_{lm}) \\ + (x_i^3 x_k q_{ik}^{(i)} + x_i x_k^3 q_{ik}^{(k)} + \cdots + x_l^3 x_m q_{lm}^{(l)} + x_l x_m^3 q_{lm}^{(m)}) = 0. \end{aligned}$$

Fügt man hier der rechten Seite noch die 13 Potenzprodukte $x_i^2 x_k x_l$, $\ldots$, $x_m^2 x_k x_l$, $x_i x_k x_l x_m$ mit willkürlichen Koeffizienten hinzu, so entsteht die ∞^{12}-lineare Schar des obigen Satzes.

Der Schnitt der F_4 (1) mit irgendeiner der vier T-Ebenen, z. B. $x_m = 0$, muß in zwei Kegelschnitte zerfallen, von denen der eine k_m ist, während der zweite, der „Nebenkegelschnitt“, mit k_m' bezeichnet sei. Auch die Gleichung von k_m' ist leicht aufzustellen.

Die drei Seiten des Dreiecks (A_i, A_k, A_l) werden der Reihe nach von den Kegeln $K_l^{(l)}$, $K_i^{(i)}$, $K_k^{(k)}$ in den Nebenpunktepaaren $(ik)^{(l)}$, $(kl)^{(i)}$, $(li)^{(k)}$ geschnitten, deren Gleichungen nach dem Muster von $(ik)^{(l)}$ in (3′) zu bilden sind. Multipliziert man diese drei Gleichungen noch mit resp. b_{ik}, b_{kl}, b_{li}, so erkennt man, daß jene drei Nebenpunktepaare in der Tat auf einem Kegelschnitte k_m' liegen mit der Gleichung

$$(7) \quad \begin{aligned} k_m' \equiv x_i^2 b_{ik} b_{il} + x_k^2 b_{ki} b_{kl} + x_l^2 b_{li} b_{lk} + x_i x_k b_{ik} b_{ik}^{(l)} \\ + x_k x_l b_{kl} b_{kl}^{(i)} + x_l x_i b_{li} b_{li}^{(k)} = 0. \end{aligned}$$

Zur Kontrolle bilde man das Produkt der beiden Gleichungen (2) mit (7) für k_m und k_m', so gelangt man zu der Gleichung für den Schnitt der Fläche F_4 (1) mit der Ebene $x_m = 0$.

Es gilt daher auch der Satz:

„Besitzt eine F_4 in den vier Ecken A eines Tetraeders T Doppelpunkte, deren Tangentenkegel die bezüglichen Gegenebenen von T in vier Kegelschnitten k_i $(i = 1, 3, 3, 4)$ schneiden, so geht durch diese noch ein Büschel von Flächen 4. Ordnung G_4. Letztere schneiden aus jeder der vier Ebenen noch einen Restkegelschnitt k' aus."

Es ist nützlich, den beiden Sätzen Konstantenabzählungen hinzuzufügen. Im ersteren Falle liegen $6 \cdot 4 = 24$ gewisse Punkte auf den Kanten eines Tetraeders T vor. Soll eine Fläche 4. Ordnung durch 24 beliebige Punkte gehen, so involviert das ebenso viele (lineare) Bedingungen, so daß es solcher Flächen noch eine lineare ∞^{10}-Schar gibt. Da aber durch obige 24 Schnittpunkte der vier Tangentenkegel K mit den Kanten von T noch eine linear ∞^{13}-Schar von G_4 ging, so folgt, daß die zugehörigen 24 Bedingungen an drei Syzygien gebunden sind.

Ähnlich verhält es sich im zweiten Falle mit dem Büschel von G_4 durch die vier Spurkegelschnitte k der Kegel K. Soll ein gegebener (irreduzibler) Kegelschnitt einer Fläche 4. Ordnung angehören, so involviert das neun (lineare) Bedingungen. Im Falle von vier, je zueinander windschiefen Kegelschnitten würde das zu $4 \cdot 9 = 36$ Bedingungen führen, so daß eine solche Fläche gar nicht existierte. Vergleicht man dies mit dem für die vier Kegelschnitte k tatsächlich existierenden Büschel von G_4 (6), so erkennt man, daß auch die 36 zugehörigen Bedingungen genau drei Syzygien unterliegen müssen.

Behufs weiterer Untersuchung der durch eine F_4 mit vier D_2 gebildeten Figur werde die kubische, (1, 1)-deutige involutorische Punktverwandtschaft T_3 (s. Art. „F_3", Nr. **11**)

$$\rho x_i x_i' = c_i \tag{8}$$

herangezogen, die bequemer in der Normalgestalt

$$\sigma x_i x_i = 1 \tag{8'}$$

verwendet werde.

Sei wieder T das Koordinatentetraeder mit den Ecken A, so geht vermöge der T_3 eine beliebige Gerade g über in eine C_3 durch die A (und vice versa), eine beliebige Ebene E in eine F_3 mit D_2 in den A, und eine beliebige F_2 durch die A wieder in eine solche. Die Ausübung der T_3 auf die Gleichung (1) einer F_4 mit vier D_2 in den A zeigt sofort, daß die Gleichung ihre Struktur nicht ändert. Es gilt also allgemein der Satz:

„Besitzt eine F_4 wenigstens vier D_2, die ein eigentliches Tetraeder T bilden, so geht die F_4 vermöge einer T als Fundamentaltetraeder wieder in eine solche F_4 über.“

Denn die etwaigen weiteren D_2 der F_4 gehen vermöge der T_3 ebenfalls in solche über.

Man frage jetzt im besonderen, wann die F_4 (1) vermöge der normierten T_3 (8′) in sich selbst übergeht. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß je zwei „komplementäre“ Koeffizienten in (1) gleich werden, d. h. daß die Beziehungen erfüllt sind

$$(9) \qquad b_{ik} = b_{lm}, \text{ usf.}; \quad b_{ik}^{(l)} = b_{ik}^{(m)} = 2c_{ik}, \text{ usf.},$$

so daß sich die Anzahl von 19 Koeffizienten in (1) auf 10 reduziert, und die Gleichung der vermöge T_3 automorphen F_4 mit 4 D_2 in den A lautet

$$(10) \quad F_4 \equiv b_{ik}(x_i^2 x_k^2 + x_l^2 x_m^2) + \cdots + 2c_{ik}x_i x_k(x_l^2 + x_m^2) + \cdots + 4b\, x_i x_k x_l x_m = 0.$$

Entsprechend reduzieren sich die beiden Gleichungen (2), (7) für die Kegelschnitte k_m, k_m' auf

$$(11) \quad k_m \equiv x_i^2 b_{kl} + x_k^2 b_{il} + x_l^2 b_{ik} + 2x_i x_k c_{ik} + 2x_i x_l c_{il} + 2x_k x_l c_{kl} = 0,$$

$$(11') \quad k_m' \equiv x_i^2 b_{ik} b_{il} + x_k^2 b_{ki} b_{kl} + x_l^2 b_{li} b_{lk} + 2x_i x_k b_{ik} c_{ik} + 2x_i x_l b_{il} c_{il} + 2x_k x_l b_{kl} c_{kl} = 0.$$

Stellt man die weitere Forderung auf, daß irgendein Paar der vier Kegelschnitte k, k', z. B. k_m, k_m', zusammenfällt, so ist das ersichtlich nur so möglich, daß die drei Koeffizienten b_{ik}, b_{il}, b_{kl} einander gleich werden, also gleich Eins gesetzt werden können. Dann aber fallen auch die drei übrigen Paare (k, k') je zusammen und alle vier Kegelschnitte k liegen auf einer Fläche 2. Ordnung F_2 mit der Gleichung

$$(12) \quad F_2 \equiv x_i^2 + x_k^2 + x_l^2 + x_m^2 + 2x_i x_k c_{ik} + \cdots + 2x_l x_m c_{lm} = 0.$$

Die Gleichungen der vier Kegelschnitte $k = k'$, z. B. von $k_m = k_m'$, reduzieren sich jetzt auf

$$(13) \quad k_m \equiv k_m' = x_i^2 + x_k^2 + x_l^2 + 2x_i x_k c_{ik} + 2x_i x_l c_{il} + 2x_k x_l c_{kl} = 0,$$

und die der F_4 auf

$$(14) \quad F_4 \equiv x_i^2 x_k^2 + \cdots + x_l^2 x_m^2 + 2c_{ik} x_i x_k (x_l^2 + x_m^2) + \cdots + 4b x_i x_k x_l x_m = 0.$$

Endlich sei noch die weitere Forderung gestellt, daß von den sechs Koeffizienten c je zwei „komplementäre“ zusammenfallen, daß also die drei Beziehungen bestehen

$$(9') \qquad c_{ik} = c_{lm} = a, \quad c_{il} = c_{km} = b, \quad c_{im} = c_{kl} = c.$$

Geometrisch bedeutet das, daß die F_2 (12) apolar ist zu den drei Flächen 2. Klasse

$$u_i u_k - u_l u_m = 0, \quad u_i u_l - u_k u_m = 0, \quad u_i u_m - u_k u_l = 0.$$

Jede derselben ist in sich dual und dadurch bestimmt, daß sie zwei Paare von Gegenkanten des Tetraeders T enthält und überdies den Einheitspunkt $E(1, 1, 1, 1)$ enthält. Diese drei Flächen seien als die „Einheitsflächen" (2. Grades) von T bezeichnet. Letzterer Punkt E war aber einer der acht sich selbst entsprechenden Punkte der Verwandtschaft T_3 (8′). Offenbar sind diese acht Punkte gleichberechtigt und man könnte an Stelle von E auch irgendeinen der sieben anderen wählen, wozu nur unwesentliche Vorzeichenänderungen der Koordinaten x_i erforderlich wären.

Damit reduziert sich endlich die Gleichung der F_4 auf die Form

$$(15)\quad \begin{aligned} F_4 \equiv x_i^2 x_k^2 + \cdots + x_l^2 x_m^2 + 2a\{x_i x_k(x_l^2 + x_m^2) + x_l x_m(x_i^2 + x_k^2) \\ + \cdots + 4\nu x_i x_k x_l x_m = 0 \end{aligned}$$

und die Form F_2 auf

$$(16)\qquad F_2 \equiv x_i^2 + \cdots + x_m^2 + 2a(x_i x_k + x_l x_m) + \cdots = 0.$$

Für die so eingeschränkte F_4 (15) vereinfacht sich die Gleichung (6) des G-Büschels mit dem Parameter $\varkappa$ zu

$$(17)\qquad \begin{aligned} G_4 \equiv & \sum x_i^4 + 4\sum a\{x_i x_k(x_i^2 + x_k^2) + x_i x_m(x_l^2 + x_m^2)\} \\ & + 4\sum(1 + a^2)(x_i^2 x_k^2 + x_l^2 x_m^2) \\ & + 4\sum(a + 2bc)\{x_i x_k(x_l^2 + x_m^2) + x_l x_m(x_i^2 + x_k^2)\} \\ & + 4\varkappa\, x_i x_k x_l x_m = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung hat eine große Ähnlichkeit mit einer der Normalgleichungen der *Kummer*schen Fläche K_m (s. Nr. **68**). Bezieht man nämlich diese auf ein syzygetisches Tetraeter als Koordinatentetraeder, so lautet ihre Gleichung

$$(18)\qquad K_m \equiv F_2^2 - 4k x_i x_k x_l x_m = 0,$$

wo

$$(19)\qquad \begin{cases} F_2 \equiv \sum x_i^2 + 2\sum a(x_i x_k + x_l x_m), \\ k \equiv a^2 + b^2 + c^2 - 2abc - 1. \end{cases}$$

Entwickelt man die rechte Seite von (18), so gelangt man gerade zur Gleichung (17), falls man noch dem Parameter $\varkappa$ den speziellen Wert beilegt

$$(20)\qquad \varkappa = a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 = 2(a^2 b^2 c^2) - k.$$

Hieraus folgt der Satz:

„Es liege eine F_4 mit vier D_2 in den Ecken A eines Tetraeders T vor mit folgender Eigenart. Die F_4 gehe erstens in sich über vermöge einer kubischen Punktverwandschaft T_3 mit den A als Fundamentalpunkten und E als irgendeinem (reellen) ihrer acht sich selbst entsprechenden Punkte.

Zweitens sollen die Tangentenkegel in den D_2 die bezüglichen Gegenebenen von T in vier, einer F_2 angehörigen Kegelschnitten k schneiden.

Drittens soll diese F_2 zu den drei auf E als Einheitspunkt bezogenen Einheitsflächen 2. Klasse apolar sein. Dann befindet sich in dem Büschel von Flächen 4. Ordnung G_4, die die Ebenen von T längs der Kegelschnitte k berühren, ein Individuum, das eine *Kummer*sche Fläche ist, mit T als einem syzygetischen Tetraeder.

Umgekehrt gehört zu einer *Kummer*schen Fläche mit T als einem ihrer syzygetischen Tetraeder ein Büschel von Flächen 4. Ordnung F_4 mit D_2 in den Ecken von T, das überdies die drei obigen Eigenschaften besitzt."

Die beiden obigen Tetraeder sind zwei reziproke syzygetische Tetraeder der K_m (s. Nr. **68**).

60. Die Weddlesche Fläche 4. Ordnung. Die *Weddle*sche Fläche W_d (s. auch Nr. **65**) ist eine solche mit 6 D_2 in sechs beliebigen Punkten $P_1, \ldots, P_6$, und zwar ist sie der Ort der Spitzen der durch die sechs Punkte gehenden Kegel 2. Ordnung. Die W_d wird daher auch kurz als „Kegelspitzenfläche" bezeichnet. Sie tritt zuerst bei *Weddle*[119]) auf, der einige ihrer Eigenschaften angibt. Man kann die W_d auch auffassen als Ort der Spitzen der in Kegel ausgearteten F_2 eines Gebüsches G mit sechs Grundpunkten $P_1, \ldots, P_6$. Diese Auffassung erweist sich insbesondere als fruchtbar für die Theorie der *Kummer*schen Fläche K_m mit 16 D_2 (s. Nr. **66**).

Deutet man nämlich die vier homogenen Parameter, die in der Gleichung irgendeines F_2-Individuums von G auftreten, als Punktkoordinaten in einem zweiten Raume, so erfüllen die Punkte, deren Koordinaten Parameter von Kegeln in G sind, eine „Bildfläche" der W_d, so daß beide Flächen (1, 1)-deutig aufeinander bezogen sind. Diese Bildfläche ist eben die *Kummer*sche Fläche K_m.

Die Fläche W_d hat *C. Hierholzer*[120]) eingehender untersucht. Er stellt ihre Gleichung in der Gestalt auf

$$(1)\quad W_d \equiv \sum (a_i - a_k) x_i x_k (a_l x_m^2 - a_m x_l^2) = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3, 4;\ i \neq k).$$

Auf der W_d liegen 25 Gerade. Einmal die 15 Geraden g_{ik}, die je zwei

119) *Weddle,* Cambr. Dubl. Math. J. 5 (1850). Vgl. *A. Cayley,* Paris C. R. 52 (1861), p. 1216; London Math. Soc. Proc. 3 (1870), p. 67.

120) *C. Hierholzer,* Math. Ann. 4 (1871), p. 172.

Punkte P_i, P_k verbinden, andererseits die 10 Geraden $g_{ikl} = g_{mnp}$, die Schnittachsen je zweier Gegenebenen (ikl) und (mnp) des Sechsecks der Grundpunkte G_r $(r = i, \ldots, p)$.

Auf der Fläche W_d liegt auch die durch die sechs Grundpunkte bestimmte kubische Kurve C_3. Hierauf beruht (s. Nr. **3**) die explizite irrationale Darstellung, die *Bateman*[121]) für die Punkte der W_d angegeben hat.

Diese C_3 liegt aber auch der von *E. Hunyady*[122]) herrührenden transzendenten Darstellung für die Punkte der Fläche durch Thetafunktionen von zwei Variabeln zugrunde.

61. F_4 mit acht assoziierten Doppelpunkten. Diese F_3 besitzen $8\,D_2$ in acht assoziierten Punkten, d. h. den Grundpunkten eines F_2-Netzes (φ, ψ, χ); sie sind von *Cayley*[123]) eingehend untersucht (s. auch Nr. **57**). Man erhält ihre Gleichung durch Nullsetzen einer beliebigen, in den homogenen Größen φ, ψ, χ quadratischen Form oder, in *Cayley*s Bezeichnung,

$$F_4 \equiv (\varphi, \psi\, \chi)^2 = 0. \tag{1}$$

Schließt man nullteilige Flächen aus, so läßt sich der Gleichung (1) die kanonische Gestalt geben

$$F_4 \equiv \psi^2 - \varphi\chi = 0. \tag{1'}$$

Tritt der Sonderfall ein, daß eine der beiden Flächen φ, χ, etwa die erstere, in eine doppeltzählende Ebene u ausartet, so daß (1') übergeht in

$$F_4 \equiv \psi^2 - u^2\varphi = 0, \tag{2}$$

so liegt eine F_4 mit $\overline{C}_2$ und vier weiteren D_2 $(\psi = 0,\ \varphi = 0,\ u = 0)$ vor (s. Nr. **7**), von der wiederum die *Dupin*sche Zyklide (s. Nr. **27**) ein metrischer Sonderfall ist.

Zerfällt noch spezieller in (2) die Form φ in zwei Linearformen u, v, deren eine u ist, so daß sich (2) spezialisiert zu

$$F_4 \equiv \psi^2 - u^3 v = 0, \tag{3}$$

so hat man die F_4 mit einem Kuspidalkegelschnitt (s. Nr. **18**).

62. Das Cayleysche Symmetroid. Die desmische Fläche 4. Ordnung. Die Gleichung des Symmetroides F_4', einer F_4 mit $10\,D_2$, erhält man durch Nullsetzen einer symmetrischen vierreihigen Determi-

---

121) *H. Bateman*, London Math. Soc. Proc. (2) 3 (1905), p. 225.

122) *E. Hunyady*, J. f. Math. 92 (1882), p. 304; vgl. *F. Caspary*, Paris C. R. 112 (1891), p. 1356; Bull. Soc. Fr. math. (2) 15 (1891), p. 388; *F. Schottky*, J. f. Math. 105 (1889), p. 238; *G. Humbert*, J. de Math. (4) 9 (1893), p. 466.

123) *A. Cayley*, Quart. J. 10 (1870), p. 34; 11 (1871), p. 111.

nante, deren Elemente quaternäre Linearformen a_{ik} sind

$$(1) \qquad F_4' \equiv |a_{ik}| = 0.$$

Sie ist zuerst von *Cayley*[124]) genauer untersucht (s. auch Nr. **57** und Nrr. **65, 66**).

Ihre Eigenschaften treten am übersichtlichsten hervor, wenn man die a_{ik} auffaßt als Koeffizienten in der Gleichung eines allgemeinen F_2-Gebüsches G mit vier homogenen Parametern $\lambda_1, \ldots, \lambda_4$

$$(2) \qquad G \equiv \sum_i \sum_k x_i x_k (\lambda_1 b_{ik} + \lambda_2 b'_{ik} + \lambda_3 b''_{ik} + \lambda_4 b'''_{ik}) \\ \equiv \sum_i \sum_k x_i x_k a_{ik} = 0.$$

Man deute die λ als Punktkoordinaten in einem zweiten Raume S_3'. Dann erscheint die Gleichung (1) als Bedingung dafür, daß eine F_2 in G in einen Kegel K_2 ausartet. Die Spitzen dieser Kegel erfüllen die „Kegelspitzenfläche" 4. Ordnung F_4, und deren Punkte P sind den Punkten P' des Symmetroides F_4' (1, 1)-deutig zugeordnet. In diesem Sinne erscheint also das Symmetroid F_4' als „Bildfläche" der Kegelspitzenfläche F_4 und kann als eine Vorstufe zur *Kummer*schen Fläche K_m (s. Nr. **66**) angesehen werden.

Im F_2-Gebüsch G (2) gibt es, als ausgeartete Kegel, zehn Ebenenpaare, deren Schnittachsen — die der Kegelspitzenfläche F_4 angehören — den 10 D_2 des Symmetroides F_4' (1) entsprechen.

Daß die F_4' (1) 10 D_2 besitzt, läßt sich nach *Clebsch*[125]) auch direkt aus der Determinante (1) entnehmen, insofern es zehn Wertsysteme der λ gibt, für die alle ersten Minoren zugleich verschwinden.

Nach *A. B. Coble*[126]) lassen sich die beiden Flächen F_4 und F_4' durch eine Cremonatransformation ineinander überführen, was zu der Figur zweier kubischer Kurven C_3, C_3' in enger Beziehung steht (s. Nr. **54**).

Sind im besonderen die a_{ik} in (1) die zweiten Ableitungen einer kubischen Form F_3, so geht das Symmetroid (1) über in die *Hesse*sche Fläche $H(F_3)$ der F_3 (s. Art. „F_3", Nr. **3**).

Spezialisiert man andererseits die Gleichung (1) dahin, daß rechts die vier Diagonalelemente a_{ii} identisch verschwinden, so treten zu den zehn bisherigen D_2 noch vier weitere hinzu, indem jeder der vier Schnitt-

124) *A. Cayley,* London Math. Soc. Proc. 3 (1871), p. 44.

125) *A. Clebsch,* J. f. Math. 59 (1861), p. 193. *Clebsch* führt den Beweis nur für den speziellen Fall, wo das Symmetroid zur *Hesse*schen Fläche einer F_3 wird; sein Verfahren ist aber auf den Fall des allgemeineren Symmetroides ausdehnbar, s. *Cayley,* Note 124).

126) S. Note 112).

punkte von drei Ebenen des Typus $a_{ik} = 0$, $a_{il} = 0$, $a_{im} = 0$ zu einem neuen D_2 wird.

In diesem Falle läßt sich, wie die Entwicklung der Determinante (1) lehrt, die Fläche am einfachsten irrational darstellen vermöge der Gleichung

$$\sqrt{a_{ik}a_{lm}} + \sqrt{a_{il}a_{km}} + \sqrt{a_{im}a_{kl}} = 0. \tag{3}$$

Sodann werde auf eine beachtenswerte F_4 mit 12 D_2 hingewiesen, die „desmische“ Fläche. Ihre 12 D_2 sind die Ecken dreier „desmischer“ Tetraeder; solche sind nach *C. Stéphanos*[127]) dadurch definiert, daß sie — als ausgeartete Flächen 4. Ordnung aufgefaßt — einem F_4-Büschel angehören.

Die desmische F_4 ist auch dadurch bemerkenswert, daß sie, nach *G. Veronese*[128]), die Reziproke ist zu der projektiven Verallgemeinerung der Zentrafläche[129]) einer F_2. Letztere Verallgemeinerung ist, wie *W. Stahl*[130]) gezeigt hat, eine Fläche der 4. Klasse und der 12. Ordnung.

Endlich sei noch erwähnt, daß den F_4 mit 13 D_2 *B. Levi*[131]) eine eingehende Untersuchung hat zu Teil werden lassen.

63. Die Untersuchung von Rohn über F_4 mit 9 bis 15 Doppelpunkten. Einen wesentlichen Beitrag zur Theorie der F_4 mit einer endlichen Anzahl von D_2, insonderheit derer mit 9 bis 15 D_2, sowie der F_4überhaupt, hat *K. Rohn*[132]) in seiner Leipziger Preisschrift geliefert.

Seine Untersuchung zerfällt in zwei Hauptteile.

Der erste Teil ist den D_2 gewidmet, die überhaupt bei einer F_4 auftreten können, und den möglichen Beziehungen zwischen diesen D_2.

Das Haupthilfsmittel besteht in der ausgiebigen Betrachtung des von einem als existierend angenommenen D_2 an die F_4 gehenden Tangentenkegels K_6 (s. auch Nr. **19** und **31**) und seines Schnittes mit einer festen Projektionsebene Π.

Es werde, wie früher, der D_2 in die Koordinatenecke A_m ($x_i = 0$, $x_k = 0$, $x_l = 0$) verlegt, und die Ebene Π in die Koordinatenebene

127) *C. Stéphanos,* Bull. Math. Astr. (2) 3 (1879), p. 424. Vgl. *H. Schroeter,* Ztschr. Math. Phys. 28 (1883), p. 178.

128) *G. Veronese,* Rom Linc. Mem. (3) 9 (1881).

129) Über diese Zentrafläche siehe *G. Salmon,* Quart. J. 2 (1858), p. 207; *A. Clebsch,* J. f. Math. 62 (1863), p. 64; *A. Cayley,* Cambr. Phil. Trans. 12 (1873), p. 319; *F. Caspary,* J. f. Math. 81 (1876), p. 143; 83 (1877), p. 72; *„Salmon-Fiedler“,* p. 337 ff.

130) *W. Stahl,* J. f. Math. 101 (1887), p. 73.

131) *B. Levi,* „Sulla superficie del quarto ordine con 13 punti doppi“, Torino 1904.

132) *K. Rohn,* Leipzig Ber. 1884, p. 52; Preisschrift der *Jablonowski*schen Gesellschaft, Leipzig 1886.

$x_m = 0$. Ordnet man demgemäß die Gleichung der F_4 nach x_m, so nimmt sie die Gestalt an

(1) $$F_4 \equiv u_2 x_m^2 + 2 u_3 x_m + u_4 = 0,$$

wo u_r $(r = 2, 3, 4)$ eine ternäre Form der Ordnung r in x_i, x_k, x_l bedeutet. Die Gleichung des Tangentenkegels K_6 oder auch seiner Spur k_6 in der Ebene Π lautet dann

(2) $$k_6 \equiv u_2 u_4 - u_3^2 = 0.$$

Dies ist eine ebene Kurve 6. Ordnung von der spezifischen Eigenart, daß sie von einem Kegelschnitt c_2 $(u_2 = 0)$ überall, also in sechs Punkten berührt wird; diese lassen sich von einer c_3 $(u_3 = 0)$ derart aus der k_6 ausschneiden, daß in deren 12 Restschnittpunkten eine c_4 $(u_4 = 0)$ die k_6 berührt.

Umgekehrt läßt sich jede, im übrigen beliebig vorgegebene c_6 in der Ebene Π, die von einer c_2 in sechs Punkten berührt wird, als Spur des Tangentenkegels K_6, der von einem D_2 (in A_m) einer F_4 an diese Fläche geht, auffassen. Solcher zu $c_6 = k_6$ zugehöriger F_4 gibt es noch eine lineare ∞^7-Schar, die linear ineinander transformierbar sind.

Durch Betrachtung aller Spezialisierungen dieser c_6 kann man zu allen F_4 mit mindestens einem D_2 gelangen, und aus den Eigenschaften der jeweiligen c_6 auf das eventuelle Auftreten weiterer D_2 der F_4 und ihrer Beziehungen zueinander schließen.

Die als endlich vorausgesetzte Anzahl der D_2 kann jeden Wert von 1 bis 16 annehmen; der Maximalwert 16 führt zur *Kummer*schen Fläche K_m (s. Absch. XI).

Die verschiedenen Arten der c_6 mit sechsmal berührendem Kegelschnitt werden daraufhin genau diskutiert; unter diesen c_6 beanspruchen ein besonderes Interesse die mit resp. 8, 9, 10 d_2, und unter diesen wiederum die letzteren mit 10 d_2, wo die c_6 rational wird.

Nunmehr erfolgt die systematische Übertragung der Eigenschaften der c_6 auf die F_4 mit D_2, die daraufhin sachgemäß klassifiziert werden. Ist die Anzahl der D_2 größer als sieben, so ist deren Lage nicht mehr willkürlich, sondern gewissen Bedingungen unterworfen (s. auch *Cayley* in Nr. 57).

Der zweite Teil der Abhandlung beschäftigt sich mit den gestaltlichen Verhältnissen der in Rede stehenden F_4.

Hierbei kommt einmal der Umstand zur Geltung, daß jede Gerade, die mit einer F_4 mehr als vier Punkte gemein hat, ihr ganz angehören muß (s. Nr. 3).

Sodann spielt eine wesentliche Rolle die „Methode der Grenzfälle“. Man gehe von den Grenzfällen aus, wo die F_4 irgendwie ausartet, z. B.

in eine doppelt zählende F_2 oder, wo sie bereits eine gewisse Anzahl von D_2 besitzt; durch stetige Deformation dieser „Grenzflächen“ werden dann die „allgemeinen“, einschließlich derer ohne D_2, abgeleitet.

Drittens zieht der Verfasser auch mit Vorteil die Eigenschaften der Strahlensysteme heran, die von den Doppeltangenten t_2 der F_4 gebildet werden.

Wir begnügen uns hier mit der Angabe der gestaltlichen Hauptformen, deren eine F_4 ohne D_2 fähig ist. Es können auftreten:

1. Zwei ineinanderliegende Ovale;
2. F_4 ohne reellen Punkt (nullteilige F_4);
3. 1 bis 12 auseinanderliegende Ovale;
4. Ein Ring (vom Zusammenhang p), der evtl. noch von 1 bis 11 Ovalen begleitet sein kann;
5. Zwei Ringe mit $p = 1$;
6. Zwei „halbpaare“ F_4-Teile mit $p = 1$;
7. Ein halbpaarer Teil vom Zusammenhang p und evtl. noch 1 bis 11 Ovale.

Hierbei ist unter einem „paaren“ Flächenteil ein solcher zu verstehen, auf dem sich nur paare C-Züge befinden; unter einem „unpaaren“ Teile ein solcher mit nur unpaaren C-Zügen; endlich unter einem „halbpaaren“ Teil ein solcher mit paaren und unpaaren C-Zügen.

Wenn auch so, wie der Verfasser hervorhebt, noch keine vollständige Einsicht in die gestaltlichen Verhältnisse der F_4 gewonnen ist, so doch ein allgemeiner Überblick.

Wenn man den hier auftretenden Gestaltenreichtum bedenkt, der über 1000 charakteristisch verschiedener Typen umfaßt, so wird man in der Tat bezweifeln, ob eine völlig befriedigende Übersicht überhaupt erreichbar ist.

XI. Die Weddlesche und die Kummersche Fläche. Das Tetraedroid und die Wellenfläche.

64. Das allgemeine F_2-Gebüsch. Die Kegelspitzenfläche und ihre Bildfläche. Da die Grundlage dieses Abschnitts durch ein F_2-Gebüsch mit sechs Grundpunkten gebildet wird, mögen einige Hilfsentwicklungen über ein allgemeines F_2-Gebüsch vorausgeschickt werden (s. auch Nrr. **54**, **57**).

Seien F, H, L, M vier beliebige, linear unabhängige F_2, so bilde man aus ihnen mittels vier Parameter $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ ein Gebüsch G mit der Gleichung

$$G \equiv \lambda F + \mu H + \nu L + \varrho M = 0. \tag{1}$$

Soll im besonderen ein Individuum $(\lambda, \mu, \nu, \varrho)$ von G ein Kegel K mit der Spitze (x) sein, so ist dazu notwendig und hinreichend, daß alle ersten Ableitungen G_i der Form G für ein Wertesystem (x) zugleich verschwinden

(2) $$G_i \equiv \lambda F_i + \mu H_i + \nu L_i + \varrho M_i = 0.$$

Von hier aus kann man in zwei Richtungen vorgehen.

Einmal eliminiere man aus (2) die Parameter, so ergibt sich die Gleichung einer $F_4 = F_4'$

(3) $$F_4' \equiv |F_i, H_i, L_i, M_i| = 0.$$

Diese F_4' ist der Ort der Spitzen (x) aller in G enthaltenen Kegel K und wird daher als „Kegelspitzenfläche G" bezeichnet.

Die Gleichung (3) läßt sich auch symbolisch in einfacher Gestalt schreiben. Setzt man

(4) $$F \equiv (ax)^2, \quad H \equiv (bx)^2, \quad L \equiv (cx)^2, \quad M \equiv (dx)^2,$$

so erhält man sofort

(3′) $$F_4' \equiv (ax)(bx)(cx)(dx)(abcd) = 0.$$

Die Gleichung (3) läßt aber noch eine andere Auffassung zu. Man stelle die Bedingungen dafür auf, daß ein Punkt (x') zum Punkte (x) in bezug auf alle Individuen $(\lambda, \mu, \nu, \varrho)$ in G konjugiert sei, so hat man das System der in (x') und (x) symmetrischen Polargleichungen

(5) $$G_{xx'} \equiv \lambda F_{xx'} + \mu H_{xx'} + \nu L_{xx'} + \varrho M_{xx'} = 0.$$

Da diese Gleichung in den Parametern identisch zu erfüllen ist, löst sie sich in die vier Einzelgleichungen auf

(5′) $$F_{xx'} = 0, \quad H_{xx'} = 0, \quad L_{xx'} = 0, \quad M_{xx'} = 0.$$

Je nachdem man hier die x' oder die x eliminiert, erhält man die nämliche Gleichung (3), nur einmal in den x, das andere Mal in den x' geschrieben. Hieraus folgt:

„Jedem Punkte (x) der F_4' als Spitze eines Kegels K im Gebüsch G ist ein anderer Punkt (x') der F_4' $(1,1)$-deutig involutorisch zugeordnet. Je zwei solche Punkte (x) und (x') sind konjugiert in bezug auf alle F_2 des Gebüsches G. Zu jedem Kegel K mit der Spitze (x) gehört $(1,1)$-deutig involutorisch ein Kegel K', mit der Spitze (x').

Nunmehr greife die zweite, an (2) anknüpfende Betrachtung Platz. Schreibt man real

(6) $$\begin{cases} F \equiv \sum\sum a_{ik} x_i x_k, & H \equiv \sum\sum b_{ik} x_i x_k, \\ L \equiv \sum\sum c_{ik} x_i x_k, & M \equiv \sum\sum d_{ik} x_i x_k, \end{cases}$$

und setzt, für $r, s = i, k, l, m,$

(7) $$G_{rs} \equiv \lambda a_{rs} + \mu b_{rs} + \nu c_{rs} + \varrho d_{rs},$$

so lautet das Eliminationsresultat

(8) $$F_4''(\lambda, \mu, \nu, \varrho) \equiv |G_{rs}| = 0,$$

wo $|G_{rs}|$ eine symmetrische vierreihige Determinante ist.[132a])

Deutet man die Gleichung (8) in einem zweiten Raume $(\lambda, \mu, \nu, \varrho)$, so stellt sie wiederum eine Fläche 4. Ordnung F_4'' dar. Beide Flächen

132a) Man kann auch, was für manche Zwecke vorteilhaft ist, die Parameter λ, μ, ν, ϱ als Koordinaten einer Ebene deuten. Es liegt dann der duale Standpunkt vor, den *Th. Reye* vertritt, J. f. Math. 86 (1878), p. 84, s. auch „*Reye*", Vortrag 28. Vgl. auch *Darboux*[173]).

Da *Reye* den Gebrauch von Koordinaten verschmäht, adjungiert er der Figur des F_2-Gebüsches G einen beliebig, aber fest angenommenen Punkt, und ordnet dann die Polarebenen Π' dieses Punktes in bezug auf die F_2 in G diesen in einem zweiten Raume S_3' projektiv zu. An die Stelle der Bildfläche F_4'' von F_4' tritt jetzt eine Fläche 4. Klasse Φ_4'.

Einem F_2-Büschel B in G, mit einer C_4 als Basis, entspricht eine Gerade g', einem F_2-Netze N in G, mit einer Basis von 8 assoziierten Punkten, ein Punkt P'.

Das Bild einer beliebigen Ebene E ist eine *Steiner*sche Fläche S', die daraufhin genauer untersucht wird (s. auch Nr. 44).

Das Bild einer beliebigen Geraden g ist eine C_2'; liegt aber im besonderen ein „Hauptstrahl" s vor, d. i. die Verbindungsgerade irgend zweier assoziierter Punkte, so reduziert sich ihr Bild auf eine Gerade s'.

Die Spitzen der Kegel in G erfüllen die Kernfläche K_4; deren Punkte bilden sich (1, 1)-deutig ab auf die Tangentialebenen T' der Φ_4' und damit zugleich auf deren Berührungspunkte P'.

Die Bilder der 10 Ebenenpaare in G, deren Achsen der K_4 angehören, sind singuläre T' der Φ_4'.

Die Geraden s' sind die Doppeltangenten t_2' der Φ_4'; sie bilden eine Kongruenz $\mathfrak{K}$ (28, 12) der Ordnung 28 und der Klasse 12.

Hierauf werden der Reihe nach die Sonderfälle diskutiert, wo das Gebüsch G 1, 2, ..., 6 Grundpunkte G_i besitzt. Hierbei ist zu beachten, daß jede durch einen Grundpunkt G_i gehende Gerade g_i ein Hauptstrahl ist.

Das Bild von G_i selbst ist eine Ebene α_i', das des Kegels in G mit der Spitze in G_i eine C_2' in α_i'.

Das Bild des Geradenbündels (G_i) ist eine Kongruenz, die stets von der zweiten Klasse ist, während ihre Ordnung bei einem einzigen Grundpunkt gleich 7 ist und mit jedem weiteren Grundpunkte um Eins sinkt.

Man gelangt so, wenn man wieder die dualen Gebilde heranzieht, zu sechs von *Kummer*[117]) untersuchten Kongruenzen 2. Ordnung.

Jeder Verbindungsgeraden von zwei Grundpunkten entspricht ein D_2' auf Φ_4'.

Im Falle von sechs Grundpunkten, wo die Φ_4' wieder in die *Kummer*sche Fläche K_m übergeht, entstehen so 15 D_2'. Ein 16[ter] D_2' ist das Bild der durch die Grundpunkte gehenden und auf der K_4 — als Haupttangentenkurve — gelegenen C_3.

In allen Fällen ist die Φ_4' zugleich die Brennfläche je einer der zugehörigen Kongruenzen; im besonderen erscheint so die K_m als Brennfläche von sechs Kongruenzen (2, 2). (S. auch Nr. 69.)

F_4' und F_4'' sind (1, 1)-deutig aufeinander bezogen: Einem Punkte (x) der F_4' als Spitze eines Kegels K im Gebüsche G entspricht ein Bildpunkt $(\lambda, \mu, \nu, \varrho)$ der F_4'', wo $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ die zum Kegel K in G gehörigen Parameterwerte bedeuten.

Auch auf der Fläche F_4'' findet zwischen deren Punkten eine (1, 1)-deutige involutorische Beziehung statt; jedem Punkte $(\lambda, \mu, \nu, \varrho)$ als Bild eines Kegels K in G entspricht ein Punkt $(\lambda', \mu', \nu', \varrho')$ als Bild des Kegels K' in G.

Die Fläche „F_4" heiße daher die „Bildfläche" von F_4'.

Nun sind die Koeffizienten a_{rs}, b_{rs}, c_{rs}, d_{rs} der Linearformen G_{rs} völlig beliebig angenommen, d. h. die symmetrische Determinante $|G_{rs}|$ enthält im übrigen ganz beliebige quaternäre Linearformen der $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ als Elemente. Dies liefert den Satz:

„Eine symmetrische vierreihige Determinante mit quaternären Linearformen in vier Punktvariabeln $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ als Elementen läßt sich, gleich Null gesetzt, als Bildfläche F_4'' der Kegelspitzenfläche F_4' eines F_2-Gebüsches auffassen."

Diese Fläche F_4'' hat zuerst *A. Cayley* von anderen Gesichtspunkten ausgehend (s. Nr. **62**) eingehend untersucht und mit dem Namen „Symmetroid" belegt. Er stellt vor allem fest, daß sie 10 D_2 besitzt.

Reye[133]) hat den Zusammenhang dieses Satzes mit dem F_2-Gebüsch hergestellt, indem er ihn auf den Satz zurückführt, daß sich in einem F_2-Gebüsch G zehn Ebenenpaare als zerfallende Kegel K befinden.

Sei ein solches etwa $F \equiv x_i x_k = 0$, so entspricht ihm das Parametersystem $\lambda = 1$, $\mu = \nu = \varrho = 0$.

Für letzteres verschwinden aber alle ersten Minoren der Determinante $|G_{rs}|$.

Andererseits zeigt *Reye* direkt, daß alle ersten Minoren einer symmetrischen Determinante vom Typus $|G_{rs}|$ für zehn Wertsysteme der Variabeln $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ zugleich verschwinden. Nunmehr werde noch ein Hilfssatz herangezogen, der gleich allgemein ausgesprochen werde:

„Liegt eine n-reihige Determinante D vor mit n-ären Linearformen in Variabeln x_i als Elementen, und verschwinden für ein gewisses Wertsystem der Variabeln x_i alle ersten Minoren zugleich, so ist der entsprechende Punkt der durch $D = 0$ im S_{n-1} dargestellten Mannigfaltigkeit F_n ein D_2."

In der Tat, bildet man die Ableitung $D_i = \frac{\partial D}{\partial x_i}$, indem man in bekannter Weise der Reihe nach die Elemente jeder Reihe nach x_i differenziert und dann mit den zugehörigen ersten Minoren multipliziert,

133) *Th. Reye*, J. f. Math. 77 (1874), p. 269; 82 (1877), p. 54.

so erscheint D_i als ein Aggregat von Gliedern, deren jedes einen ersten Minor als Faktor besitzt.

Somit verschwinden für das in Rede stehende Wertsystem der x alle ersten Ableitungen von D, d. h. der entsprechende Punkt der F_n ist ein D_2.

Folglich gehört zu jedem der in G enthaltenen zehn Ebenenpaare, als Kegel K aufgefaßt, ein D_2 der F_4''. Endlich, beachtet man noch, daß, unter $(\mathsf{E}_1, \mathsf{E}_2)$ irgendeines der zehn Ebenenpaare in G verstanden, jeder Punkt auf der Achse $(\mathsf{E}_1, \mathsf{E}_2)$ als Spitze eines Kegels K, nämlich des in $(\mathsf{E}_1, \mathsf{E}_2)$ ausgearteten, angesehen werden kann, so folgt, daß die Achsen der zehn, in G enthaltenen Ebenenpaare ganz auf der Fläche F_4' liegen.

Faßt man zusammen, so ergibt sich der Satz:

„Im F_2-Gebüsch G befinden sich als ausgeartete Kegel K zehn Ebenenpaare, deren Achsen ganz auf der Kegelspitzenfläche F_4' liegen. Diesen zehn ausgearteten Kegeln entsprechen auf der Bildfläche F_4'' zehn Punkte, die für sie D_2 sind.“

65. Das F_2-Gebüsch mit sechs Grundpunkten. Behufs näherer Einsicht in die Struktur eines F_2-Gebüsches mit sechs, zunächst reell angenommenen Grundpunkten (von denen keine vier inzident seien), frage man zunächst nach den algebraischen wie geometrischen Beziehungen der zehn Ebenenpaare zueinander, deren jedes alle sechs Punkte enthält.

Man nehme irgend vier der sechs Grundpunkte als Ecken A_i, A_k, A_l, A_m des Koordinatentetraeders T; die beiden weiteren Punkte seien mit $Y(y)$ und $Z(z)$ bezeichnet. In bezug auf T hat man zwei Typen der zehn Ebenenpaare zu unterscheiden. Einmal die vier Paare (A_i, A_k, A_l), (A_m, Y, Z), andererseits die sechs Paare (A_i, A_k, Y), (A_l, A_m, Z) nebst dem jeweiligen komplementären (durch Vertauschung von Y und Z hervorgehenden) (A_i, A_k, Z), (A_l, A_m, Y), so daß man drei solcher Doppelpaare hat.

Die zugehörigen Gleichungen, für $p_{rs} = (yz)_{rs}$, lauten

$$\left\{\begin{array}{ll} (1_m) & F_m \equiv x_m(xyz)_{ikl} \equiv x_m(x_i p_{kl} + x_k p_{li} + x_l p_{ik}) = 0, \\ (1_{ik}) & F_{ik} \equiv (xy)_{ik}(xz)_{lm} \equiv x_i x_l y_k z_m + x_k x_m y_i z_l - x_i x_m y_k z_l \\ & \qquad\qquad - x_k x_l y_i z_m = 0, \\ (1_{lm}) & F_{lm} \equiv (xy)_{lm}(xz)_{ik} \equiv x_i x_l y_m z_k + x_k x_m y_l z_i - x_i x_m y_l z_k \\ & \qquad\qquad - x_k x_l y_m z_i = 0, \end{array}\right.$$

nebst den durch zyklische Vertauschung der Indizes daraus hervorgehenden. Zwischen diesen zehn quadratischen Formen bestehen gewisse lineare Identitäten mit numerischen Koeffizienten.

Um diese aufzustellen, gehe man aus von der identisch verschwindenden Determinante

$$(2) \qquad (xyxz) \equiv 0.$$

Entwickelt man die Determinante nach den Elementen der ersten Reihe, so ergibt sich als erste Identität

$$(\mathrm{I}) \qquad \sum_i^m F_i \equiv 0.$$

Entwickelt man andererseits die Determinante (2) nach dem *Laplace*schen Satze, so gelangt man zur zweiten Identität

$$(\mathrm{II}) \qquad \sum_i \sum_k F_{ik} \equiv 0.$$

Weiter betrachte man irgendeine der drei gleichberechtigten Differenzen

$$(3) \qquad D_{ik} \equiv F_{ik} - F_{lm}, \quad D_{il} \equiv F_{il} - F_{mk}, \quad D_{im} \equiv F_{im} - F_{kl},$$

etwa die erste. Gemäß (1_m) und (1_{ik}), (1_{lm}) wird explizite

$$(4) \qquad \begin{aligned} D_{ik} &\equiv F_{ik} - F_{lm} \equiv x_i x_l p_{km} + x_k x_m p_{il} - x_i x_m p_{kl} - x_k x_l p_{im} \\ &\equiv x_i(x_k p_{ml} + x_l p_{km} + x_m p_{lk}) + x_k(x_i p_{lm} + x_l p_{mi} + x_m p_{il}). \end{aligned}$$

Gemäß (1_m) und (I) folgt hieraus eine dritte Art von Identitäten

$$(\mathrm{III}) \qquad \left\{ \begin{aligned} D_{ik} &\equiv F_{ik} - F_{lm} \equiv F_i + F_k \equiv -(F_l + F_m), \\ D_{il} &\equiv F_{il} - F_{mk} \equiv F_i + F_l \equiv -(F_k + F_m), \\ D_{im} &\equiv F_{im} - F_{kl} \equiv F_i + F_m \equiv -(F_k + F_l). \end{aligned} \right.$$

Daraufhin lassen sich sofort die $F_i, \ldots, F_m$ durch die $F_{ik}, \ldots$ linear ausdrücken.

Denn durch geeignete Addition ergibt sich

$$(\mathrm{III}') \qquad \left\{ \begin{aligned} 2F_i &\equiv D_{ik} + D_{il} + D_{im}, \\ 2F_k &\equiv D_{ik} - D_{il} - D_{im}, \\ 2F_l &\equiv -D_{ik} + D_{il} - D_{im}, \\ 2F_m &\equiv -D_{ik} - D_{il} + D_{im}. \end{aligned} \right.$$

Durch Addition dieser Darstellungen gelangt man wieder zu (I) zurück. Somit gilt zunächst:

„Zwischen den zehn quadratischen Formen $F_i, \ldots, F_{ik}, \ldots$ bestehen fünf unabhängige lineare Identitäten mit numerischen Koeffizienten, die durch (III′) und (II) angegeben sind."

Indessen läßt sich die Darstellung (III′) noch vereinfachen. Denn die Kombinierung mit (II) führt (III′) über in

$$(\mathrm{III}'') \qquad F_i \equiv F_{ik} + F_{il} + F_{im} \equiv -(F_{kl} + F_{mk} + F_{lm}) \text{ usf.}$$

Daß hiermit alle linearen Identitäten mit numerischen Koeffizienten zwischen den $F_i, \ldots, F_{ik}, \ldots$ erschöpft sind, erkennt man, wenn man irgend vier lineare unabhängige Formen herausgreift, etwa F_{ik}, F_{lm}, F_{im}, F_{kl}, und durch sie etwa F_m linear ausdrückt, wie es möglich sein muß, da ja alle zehn Formen einem F_2-Gebüsch angehören. Man bilde also den Ansatz

$$(5) \qquad \nu_m F_m \equiv \lambda_{ik} F_{ik} + \lambda_{lm} F_{lm} + \lambda_{im} F_{im} + \lambda_{kl} F_{kl},$$

und ermittele die Verhältnisse der Koeffizienten ν_m, λ_{ik}, ...

Da links die Koeffizienten von $x_k x_l$, $x_i x_k$, $x_i x_l$ verschwinden, muß es auch rechts sein, und man hat die drei Bedingungen

$$\begin{cases} (6_{kl}) \qquad \lambda_{ik} y_i z_m + \lambda_{lm} y_m z_i = 0, \\ (6_{ik}) \qquad \lambda_{im} y_m z_l + \lambda_{kl} y_l z_m = 0, \\ (6_{il}) \qquad (\lambda_{ik} - \lambda_{kl}) y_k z_m - (\lambda_{im} - \lambda_{lm}) y_m z_k = 0. \end{cases}$$

Die beiden ersten liefern, unter ϱ, σ zwei Proportionalitätsfaktoren verstanden,

$$\begin{cases} (6'_{kl}) \qquad \lambda_{ik} = \varrho\, y_m z_i, \quad \lambda_{lm} = -\varrho\, y_i z_m, \\ (6'_{ik}) \qquad \lambda_{im} = \sigma\, y_l z_m, \quad \lambda_{kl} = -\sigma\, y_m z_l, \end{cases}$$

und nach Einsetzung in (6_{il})

$$(6'_{il}) \qquad \varrho = p_{kl}, \quad \sigma = p_{ik}.$$

Damit erhalten die vier Größen λ_{ik}, .. die endgültige Form

$$(7) \qquad \begin{cases} \lambda_{ik} = p_{kl} y_m z_i, \quad \lambda_{lm} = -p_{kl} y_i z_m, \\ \lambda_{im} = p_{ik} y_l z_m, \quad \lambda_{kl} = -p_{ik} y_m z_l. \end{cases}$$

Durch Eintragung in (5) bestimmt sich der letzte Faktor ν_m, indem die Koeffizienten von $x_i x_m$, $x_k x_m$, $x_l x_m$ rechts mit den entsprechenden in F_m proportional werden müssen.

Die Vergleichung führt in der Tat jedesmal zu demselben Werte von ν_m

$$(8) \qquad \nu_m = y_i y_l z_k z_m - y_k y_m z_i z_l.$$

Trägt man die Werte von λ und von ν_m aus (7) und (8) in (5) ein, so wird die gewünschte Identität

$$(9) \quad (y_i y_l z_k z_m - y_k y_m z_i z_l) F_m \equiv p_{kl}(y_m z_i F_{ik} - y_i z_m F_{lm}) \\ + p_{ik}(y_l z_m F_{im} - y_m z_l F_{kl}),$$

und analog für F_i, F_k, F_l.

Nunmehr läßt sich auch F_{mk} (oder auch F_{il}) in F_{ik}, F_{lm}, F_{im}, F_{kl} ausdrücken.

Aus (1_{lm}) ergibt sich, nach Multiplikation mit ν_m,

$$\nu_m F_{mk} \equiv \nu_m F_m - \nu_m F_{im} - \nu_m F_{lm}.$$

Nach Eintragung von $\nu_m F_m$ aus (9) ergibt sich

$$\nu_m F_{mk} \equiv \lambda_{ik} F_{ik} + F_{lm}(\lambda_{lm} - \nu_m) + F_{im}(\lambda_{im} - \nu_m) + \lambda_{kl} F_{kl}.$$

Hier ist $$\begin{cases} \lambda_{lm} - \nu_m \equiv - p_{im} y_k z_l, \\ \lambda_{im} - \nu_m \equiv - p_{lm} y_k z_i. \end{cases}$$

Nach Einsetzung dieser Werte, sowie derer von λ_{ik} und λ_{kl} wird die gewünschte Identität

$$(10)\quad (y_i y_l z_k z_m - y_k y_m z_i z_l) F_{mk} \equiv p_{kl} y_m z_i F_{ik} - p_{im} y_k z_l F_{lm} \\ - p_{lm} y_k z_i F_{im} - p_{ik} y_m z_l F_{kl}.$$

Hinterher lassen sich die bisherigen Darstellungen formal vereinfachen, wenn man den Punkt Z als Einheitspunkt $E(1, 1, 1, 1)$ normiert.

Es genüge die Darstellung des Gebüsches G in $F_{ik}, F_{lm}, F_{im}, F_{kl}$. Diese lautet explizite

$$(\mathrm{IV})\quad G \equiv x_i x_l \{ y_k(\lambda_{ik} - \lambda_{kl}) - y_m(\lambda_{im} - \lambda_{lm}) \} \\ + x_k x_m \{ y_i(\lambda_{ik} - \lambda_{im}) - y_l(\lambda_{kl} - \lambda_{lm}) \} - x_i x_m (\lambda_{ik} y_k + \lambda_{lm} y_l) \\ - x_k x_l (\lambda_{ik} y_i + \lambda_{lm} y_m) + x_i x_k (\lambda_{im} y_m + \lambda_{kl} y_l) \\ + x_l x_m (\lambda_{im} y_i + \lambda_{kl} y_k).$$

66. Die Weddlesche Fläche und die Kummersche Fläche als ihre Bildfläche. Invariante Darstellung beider Flächen. Von dem allgemeinen F_2-Gebüsch G der Nr. **64** ausgehend, könnte man nun der Reihe nach die Sonderfälle diskutieren, wo G k ($k = 1, 2, \ldots, 6$) Grundpunkte besitzt (die allen F_2 in G gemeinsam sind). Ohne auf die Zwischenfälle näher einzugehen, begnügen wir uns mit folgendem Hinweis. In G mögen einer oder mehrere (bis zu sechs) Grundpunkte auftreten.

Man wähle einen solchen als Koordinatenecke A_i, so daß die vier Bedingungen $a_{ii} = b_{ii} = c_{ii} = d_{ii} = 0$ erfüllt sind (und umgekehrt). Dann verschwinden in der Determinante $F_4' \equiv |F_i, H_i, L_i, M_i|$ für A_i die Elemente der i^{ten} Reihe, d. h. A_i gehört der F_4' an (wie auch geometrisch ersichtlich ist). In der Tat ergeben sich die Parameterwerte $\lambda_i, \mu_i, \nu_i, \varrho_i$ des Kegels K_i in G mit der Spitze A_i aus den drei linearen Gleichungen

$$G_{ir} \equiv \lambda a_{ir} + \mu b_{ir} + \nu c_{ir} + \varrho d_{ir} = 0 \qquad (r = k, l, m).$$

Andererseits verschwindet in der Bilddeterminante $F_4'' \equiv |G_{rs}|$ nach Voraussetzung das Element G_{ii} identisch. Entwickelt man daher die Determinante $|G_{rs}|$ nach den Elementen der i^{ten} Reihe und Kolonne, so erscheint $|G_{rs}|$ als eine quadratische Form in G_{ik}, G_{il}, G_{im}.

Mithin verschwindet $|G_{rs}|$ für die Parameterwerte $\lambda_i, \mu_i, \nu_i, \varrho_i$ von K_i in der 2^{ten} Ordnung, d. i., der Bildpunkt von A_i ist ein D_2 der Bildfläche F_4''. Somit gilt:

„Jeder Grundpunkt des Gebüsches G gehört der Kegelspitzenfläche F_4' einfach an, und sein Bildpunkt auf der Bildfläche F_4'' als ein D_2."

Läßt man daher im F_2-Gebüsch G der Reihe nach $1, 2, \ldots,$ 6 Grundpunkte zu, so besitzt die Bildfläche F_4'' der Reihe nach 11, $12, \ldots, 16$ D_2.

Der letzte Fall ist der wichtigste, da er zur *Kummer*schen Fläche[134]) (s. Nr. **68**) mit 16 D_2 führt. Umgekehrt läßt sich also letztere stets als Bildfläche der zu einem F_2-Gebüsch G mit sechs Grundpunkten gehörigen Kegelspitzenfläche auffassen.

Nunmehr gehen wir gleich zum letzten und wichtigsten Fall über, einem F_2-Gebüsch G mit sechs beliebigen Grundpunkten (von denen keine vier inzident sind) und knüpfen zu dem Behuf wieder an Nr. **65** an. Umgekehrt ist dann, nach Annahme der sechs Grundpunkte, das Gebüsch G völlig bestimmt. Auf die zugehörige Kegelspitzenfläche F_4' hat zuerst *Th. Weddle* (s. Nr. **61**) hingewiesen und ihre einfachsten Eigenschaften abgeleitet. Diese Fläche wird daher „*Weddlesche Fläche*" genannt; sie sei mit W_d bezeichnet.

Eingehender ist diese Fläche später von *C. Hierholzer* (Nr. **60**) untersucht. Wie in Nr. **65** seien vier der sechs (als reell angenommenen) Grundpunkte als die Koordinatenecken A_i, A_k, A_l, A_m gewählt, und die beiden übrigen mit $Y(y)$ und $Z(z)$ bezeichnet.

Man erkennt sofort, daß auf der W_d $10 + 15 = 25$ Gerade g liegen; einmal die 15 Verbindungsgeraden je zweier der sechs Grenzpunkte, andererseits die Achsen der zehn in G enthaltenen Ebenenpaare. Aus der ersteren Eigenschaft folgt zugleich, daß die sechs Grundpunkte D_2 auf W_d sind; jeder von ihnen ist die Spitze eines Kegels K, der durch die fünf von dem Grundpunkte nach den fünf anderen laufenden Geraden als Kanten bestimmt ist.

Durch die sechs Grundpunkte geht eine kubische Raumkurve C_3, die ebenfalls ganz auf der Fläche W_d liegt. Denn von jedem Punkte der C_3 aus projiziert sich letztere durch einen Kegel K, der durch die sechs Grundpunkte geht.

Um die Gleichung der Fläche W_d aufzustellen, könnte man von dem in Nr. **64** durch die vier Individuen $F \equiv F_{ik}, H \equiv F_{lm}, L \equiv F_{im}, M \equiv F_{kl}$ bestimmten Gebüsch G ausgehen, und von hier aus die Gleichung $W_d \equiv |F_i, H_i, L_i, M_i| = 0$ bilden. Indessen würde die so erhaltene Gleichung einmal in ihrer Struktur unsymmetrisch ausfallen und überdies mit einem fremden, von den y_i, z_i abhängigen (und in diesen quadratischen) Faktor behaftet sein.

134) Diesen Standpunkt haben wohl zuerst *Darboux*[173]), *Th. Reye*[132a]) und *R. de Paolis* betont, Rom Linc Rend. (4) 6_2 (1890), p 3. Die (1, 1)-deutige Beziehung zwischen den Punkten der W_d und K_m hat *F. Schottky* eingehend verfolgt, besonders in transzendenter Hinsicht, J. f. Math. 105 (1899), p. 269.

Hierholzer umgeht diese Schwierigkeit vermöge einer einfachen Abzählung.

Konstruiert man eine F_4 so, daß sie in den sechs Grundpunkten D_2 besitzt (was 24 Bedingungen involviert) und weiter die zehn Verbindungsgeraden je zweier von fünf der D_2 enthält (was zehn weitere Bedingungen erfordert), so ist eine solche F_4 bereits eindeutig festgelegt, muß also mit der W_d übereinstimmen und daher auch die fünf Geraden, die den sechsten Grundpunkt mit den übrigen verbinden, enthalten.

Daraufhin wird die Gleichung der W_d direkt aufgestellt in der Gestalt

$$\text{(I)} \qquad W_d \equiv \left|\frac{y_i z_i}{x_i}, x_i, y_i, z_i\right| = 0,$$

oder auch, unter Vermeidung der Nenner,

$$\text{(I)} \qquad W_d \equiv |y_i z_i x_k x_l x_m, x_i, y_i, z_i| = 0.$$

Aus dieser Darstellung lassen sich die oben angegebenen Eigenschaften unmittelbar ablesen.

Entwickelt man rechts nach dem *Laplace*schen Satze, so hat man, wenn man noch zur Abkürzung setzt

$$\text{(1)} \qquad y_i z_i = p_i, \quad (yz)_{ik} = p_{ik},$$

die ausgeführte Darstellung

$$\text{(Ia)} \qquad W_d \equiv \sum_i \sum_k x_i x_k p_{ik}(p_l x_m^2 - p_m x_l^2) = 0.$$

Man unterwerfe jetzt die W_d der (1, 1)-deutigen involutorischen kubischen Punkttransformation T_3 (s. Nr. **59** und Art. „F_3“, Nr. **13**)

$$\text{(2)} \qquad \sigma x_i x_i' = 1.$$

Einem Punkte $P(x)$ entspricht dabei ein Punkt $P'(x')$, so daß P und P' konjugiert sind in bezug auf das F_2-Netz durch die acht Einheitspunkte $E(x_i = e_i = \pm 1)$.

Die Koordinatenecken A_i sind die vier Fundamentalpunkte der T_3. Einer Geraden durch A_i entspricht wieder eine solche, einer beliebigen Geraden g eine C_3 durch die vier A und vice versa, einer F_2 durch die vier A wieder eine solche.

Somit geht das F_2-Gebüsch G vermöge der T_3 in ein ebensolches Gebüsch G über, nur daß an Stelle der zwei letzten Grundpunkte $Y(y_i)$, $Z(z_i)$ die transformierten $Y'\left(\frac{1}{y_i}\right)$, $Z'\left(\frac{1}{z_i}\right)$ treten.

Ferner geht jeder Kegel K in G mit der Spitze P über in einen Kegel K' mit der Spitze P'.

Hieraus folgt:

„Vermöge einer (1, 1)-deutigen involutorischen kubischen Punkttransformation T_3 mit den Koordinatenecken als Fundamentalpunkten geht die *Weddle*sche Fläche W_d (I) über in eine ebensolche, nur daß an Stelle der beiden letzten Grundpunkte Y, Z die transformierten Y', Z' treten."

Dies muß sich auch an der Gleichung (I) direkt bestätigen lassen. Vermöge der T_3 (2) entsteht aus (I) die transformierte Gleichung

$$(\mathrm{I}') \qquad W_d' \equiv \left| p_i x_i, \ \frac{1}{x_i}, \ y_i, \ z_i \right| = 0.$$

Andererseits ersetze man in (I) direkt die Punkte Y, Z durch Y', Z', so entsteht die Gleichung

$$(\mathrm{I}'') \qquad W_d'' \equiv \left| \frac{1}{p_i x_i}, \ x_i, \ \frac{1}{y_i}, \ \frac{1}{z_i} \right| = 0$$

Beide Gleichungen (I′) und (I″) müßten übereinstimmen, also ineinander überführbar sein.

Nun liefert die *Laplace*sche Entwicklung von (I′) explizite

$$(\mathrm{I}') \qquad \sum_i \sum_k x_i x_k p_{ik} (p_l x_m' - p_m x_l') = 0.$$

Andererseits multipliziere man die i^{te} Reihe ($i = 1, 2, 3, 4$) in (I″) mit p_i und entwickle dann wieder nach dem *Laplace*schen Satze, so entsteht in der Tat die nämliche Gleichung (I′).

Noch sei bemerkt, daß die Grundkurve C_3 der W_d vermöge der T_3 übergeht in die Gerade (Y', Z'), und vice versa die Gerade (Y, Z) in die Grundkurve C_3' der W_d'.

Weiter gelten für die W_d als eine F_4 mit einer C_3 die in Nr. **3** gemachten Angaben hinsichtlich der Restkurven C_5, sowie der irrationalen expliziten Parameterdarstellung der Fläche.

Letztere gestattet hier für die W_d eine spezifische Vereinfachung. Durch die Grundkurve C_3 geht ein F_2-Netz N. Sei N etwa linear zusammengesetzt aus den drei Flächen H, L, M, und sei F irgendeine weitere, nicht in N enthaltene F_2 innerhalb G, deren geeignete Auswahl noch vorbehalten bleibe. Nun bildeten je zwei Punkte P, Q, die bezüglich aller Individuen in G konjugiert waren, ein zusammengehöriges Punktepaar auf der Kegelspitzenfläche F_4' eines Gebüsches G.

Im vorliegenden Falle der W_d sind also zwei solche Punkte P, Q einmal konjugiert bez. N (d. h. aller Individuen in N), andererseits bez. F.

Aber (s. Art. „F_3", Nr. **11**) zwei, bez. N konjugierte Punkte liegen stets auf einer Sehne s der C_3, und zugleich harmonisch zu den beiden Treffpunkten von s mit der C_3, und umgekehrt.

Hieraus folgt:

„Auf irgendeiner Sehne s der C_3 betrachte man einmal die Involution J_1 der zu den beiden Treffpunkten von s mit der C_3 harmonischen Punktepaare, andererseits die Involution J_2 der bez. F konjugierten (also zu den beiden Schnittpunkten von s mit F harmonischen) Punktepaare. Das diesen beiden Involutionen gemeinsame Paar P, Q liefert die beiden Restschnittpunkte von s mit der *Weddle*schen Fläche W_d, und umgekehrt.“

Daraufhin läßt sich die gewünschte irrationale Darstellung der W_d auf Grund der *Hierholzer*schen Gleichung (I) der W_d, sowie der expliziten Darstellung der C_3 unschwer ableiten.

Die Parameterdarstellung der C_3 lautet

$$(3)\qquad \varrho x_i = \frac{p_i}{\lambda y_i + \mu z_i} = \frac{p_i}{f_i} \qquad (p_i = y_i z_i),$$

wo f_i zur Abkürzung steht. Der nichthomogene Parameter $\frac{\lambda}{\mu}$ sei mit ν bezeichnet. Die Sekante s verbinde zwei C_3-Punkte (ν'), (ν''), und die Einsetzung von deren Koordinaten in irgendeine Form werde entsprechend durch einen resp. zwei Akzente angegeben.

Die vier Grundpunkte A_i haben die Parameterwerte $\nu_i = -\frac{z_i}{y_i}$, und zu den beiden weiteren Y, Z gehören die Werte ∞, 0. Diese sechs Werte sind also die Wurzeln der Form 6. Ordnung

$$(4)\qquad f(\lambda, \mu) \equiv \lambda\mu f_i f_k f_l f_m.$$

Ein laufender Punkt auf der Sekante s hat, unter τ einen Parameter verstanden, die Koordinaten

$$(5)\qquad \varrho x_i = p_i\left(\frac{1}{f_i'} + \frac{\tau}{f_i''}\right).$$

Den beiden Restschnittpunkten P, Q von s mit W_d entsprechen dann zwei, nur durch das Vorzeichen verschiedene Werte von τ, Wurzeln der Gleichung

$$(6)\qquad \tau^2 f'' - f' = 0.$$

Damit wird die gesuchte irrationale Darstellung der *Weddle*schen Fläche W_d

$$(7)\qquad \varrho x_i = p_i\left(\frac{\sqrt{f''}}{f_i'} + \frac{\sqrt{f'}}{f_i''}\right).$$

Die Bedeutung der Grundkurve C_3 für die *Weddle*sche Fläche W_d tritt noch mehr hervor, wenn man die C_3 als Normalkurve $N_3 = \mathsf{N}_3$ wählt (s Nr. **3** und Art. „F_3“, Nr. **19**). Indem die Koordinaten jetzt zweckmäßiger mit den Indizes 3, 2, 1, 0 versehen werden, lautet die explizite Darstellung der N_3 resp. N_3

$$(8)\qquad \begin{cases} x_3 : x_2 : x_1 : x_0 = \lambda^3 : 3\lambda^2 : 3\lambda : 1, \\ u_3 : u_2 : u_1 : u_0 = -1 : \lambda : -\lambda^2 : \lambda^3. \end{cases}$$

Das F_2-Netz N durch N_3 setzt sich linear aus drei Individuen H, L, M zusammen

$$(9)\qquad \begin{cases} H \equiv 3x_0x_2 - x_1^2 = 0, \quad L \equiv 9x_0x_3 - x_1x_2 = 0, \\ \qquad M \equiv 3x_1x_3 - x_2^2 = 0, \end{cases}$$

wo die linken Seiten die Determinanten der Matrix $\begin{vmatrix} 3x_0, x_1, x_2 \\ x_1, x_2, 3x_3 \end{vmatrix}$ sind.

Die sechs Grundpunkte des F_2-Gebüsches G werden durch sechs Werte des Parameters λ bestimmt, die man sich als Wurzeln einer beliebigen Gleichung 6. Grades

$$(10)\quad f(\lambda) = a_0 + 6a_1\lambda + 15a_2\lambda^2 + \cdots + 6a_5\lambda^5 + a_6\lambda^6 \equiv (a\lambda)^6 = 0$$

gegeben denke.

Es wird sich zeigen, daß diese Gleichung (10) das Fundament in der invariantentheoretischen Behandlung der *Weddle*schen — und weiterhin der *Kummer*schen — Fläche bildet. Vorab sei bereits bemerkt, daß diese Behandlung der früheren erheblich überlegen ist, insofern sie von irgendwelchen Realitätsbeschränkungen unabhängig ist und auch irgendwelche Koinzidenzen der Grundpunkte, d. i. der Wurzeln von $f(\lambda)$, gestattet.

Das F_2-Gebüsch G durch die sechs Grundpunkte setze man wiederum linear zusammen aus dem Netze $N(H, L, M)$ in (9) und einer geeigneten, nicht in N enthaltenen F_2, die mit F bezeichnet sei. Als eine solche empfiehlt sich die zu N_3 apolare (konjugierte) Fläche F durch die Grundpunkte mit der Gleichung

$$(11)\quad \begin{aligned} F(x) \equiv a_0x_0^2 + 2a_1x_0x_1 &+ (2a_2x_0x_2 + a_2x_1^2) \\ &+ (2a_3x_0x_3 + 2a_3x_1x_2) + (2a_4x_1x_3 + a_4x_2^2) \\ &+ 2a_5x_2x_3 + a_6x_3^2 \equiv (ax)^2 = 0. \end{aligned}$$

Der laufende Punkt einer Sekante $s(\alpha, \beta)$ der N_3 hat die Koordinaten

$$(12)\quad x_3 : x_2 : x_1 : x_0 = \alpha^3 + \tau\beta^3 : 3(\alpha^2 + \tau\beta^2) : 3(\alpha + \tau\beta) : 1 + \tau.$$

Den beiden Schnittpunkten von s mit F entsprechen zwei Parameterwerte τ', τ'', die die Wurzeln der Gleichung werden

$$(13)\qquad f(\alpha) + \tau(\ \ ) + \tau^2 f(\beta) = 0,$$

wo der Koeffizient von τ nur angedeutet ist. Andererseits sind $0, \infty$ die τ-Parameter der beiden Treffpunkte (α) und (β) von s mit N_3. Nun waren die beiden Restschnittpunkte P, Q von s mit der Fläche W_d zu jenen beiden Punktepaaren harmonisch; ihre Parameterwerte τ_1, τ_2 sind also die Wurzeln der Gleichung

$$(14)\qquad \tau^2 f(\beta) - f(\alpha) = 0.$$

Mithin lautet die gesuchte irrational-explizite Darstellung der *Weddle*schen Fläche W_d

$$\text{(II)}\quad x_3 : x_2 : x_1 : x_0 = \alpha^3\sqrt{f(\beta)} + \beta^3\sqrt{f(\alpha)} : 3\left(\alpha^2\sqrt{f(\beta)} + \beta^2\sqrt{f(\alpha)}\right)$$
$$: 3\left(\alpha\sqrt{f(\beta)} + \beta\sqrt{f(\alpha)}\right) : \sqrt{f(\beta)} + \sqrt{f(\alpha)}.$$

Die Vergleichung mit der früheren Darstellung (7) zeigt die formale Ähnlichkeit, wie es nicht anders sein kann; während aber dort eine künstliche und nicht einfache Rechnung erforderlich war, ergibt sich (II) fast ohne Rechnung.

Man wird nun auch die rationale implizite Gleichung der W_d auf Grund der $C_3 = N_3$ in invarianter Gestalt zu haben wünschen.

Zu dem Behuf normiere man die drei Formen (9) mit dem Faktor 2 und schreibe $F = A$, sowie

$$\text{(9')}\quad \begin{cases} B \equiv 2(3x_0x_2 - x_1^2) \quad = 2\varphi, \\ C \equiv 2(9x_0x_3 - x_1x_2) = 2\psi, \\ D \equiv 2(3x_1x_3 - x_2^2) \quad = 2\chi. \end{cases}$$

Auch mögen vorübergehend die Indizes i, k, l, m statt 0, 1, 2, 3 verwendet werden.

Nun war die Gleichung der W_d

$$\text{(I)}\qquad W_d \equiv |A_iB_iC_iD_i| = 0.$$

Aus (9′) entnimmt man die Werte der B_r, C_r, D_r $(r = i, k, l, m)$

$$\text{(15)}\quad \begin{cases} B_i = 3x_l, & B_k = -2x_k, & B_l = 3x_i, & B_m = 0, \\ C_i = 9x_m, & C_k = -x_l, & C_l = -x_k, & C_m = 9x_i, \\ D_i = 0, & D_k = 3x_m, & D_l = -2x_l, & D_m = 3x_k. \end{cases}$$

Entwickelt man die Determinante (I) nach den A_r $(r = i, k, l, m)$, so ergibt sich

$$\text{(16)}\qquad |A_i, B_i, C_i, D_i| \equiv \sum_r A_r\mathcal{A}_r,$$

wo die $\mathcal{A}_r$ die Determinanten der Matrix (15) sind.

Damit ergibt sich die Gleichung der W_d in der Gestalt

$$\text{(Ib)}\quad W_d \equiv A_i(2x_k\varphi - 3x_i\psi) + 3A_k(x_l\varphi - 3x_i\chi)$$
$$+ 3A_l(-x_k\chi + 3x_m\varphi) + A_m(3x_m\psi - 2x_l\chi) = 0.$$

Diese ist noch einiger Modifikationen fähig auf Grund der beiden Identitäten

$$\text{(17)}\quad \begin{cases} 3x_i\chi - x_k\psi + x_l\varphi \equiv 0, \\ x_k\chi - x_l\psi + 3x_m\varphi \equiv 0. \end{cases}$$

Ordnet man dagegen (Ib) nach den φ, ψ, χ, so kommt die andere Darstellung

$$\text{(Ic)}\quad W_d \equiv -\chi(9x_iA_k + 3x_kA_l + 2x_lA_m)$$
$$+ \varphi(2x_kA_i + 3x_kA_l + 9x_lA_m) - 3\psi(x_iA_i - x_mA_m) = 0.$$

Hieraus ist ohne weiteres ersichtlich, daß die Fläche W_d die Grundkurve $C_3 = N_3$ enthält, da die rechte Seite von (Ic) mit φ, ψ, χ zugleich verschwindet.

Wir kommen zur invarianten Darstellung der *Kummer*schen Fläche. Gemäß Nr. **64** war die *Kummer*sche Fläche, die mit K_m bezeichnet sei, die Bildfläche der *Weddle*schen Fläche W_d mit der Gleichung

$$K_m \equiv |G_{rs}| = 0. \tag{I}$$

Im Anschluß an Nr. **66** werde auch K_m in invarianter Form aufgestellt. Schreibt man die Indizes i, k, l, m wieder als $0, 1, 2, 3$, so hat man zunächst, wenn die Parameter des F_2-Netzes N mit ν_1, ν_2, ν_3 bezeichnet werden, die Darstellung

$$K_m \equiv \begin{vmatrix} a_0, & a_1, & a_2 + 3\nu_1, & a_3 + 9\nu_2 \\ a_1, & a_2 + 2\nu_1, & a_3 - \nu_2, & a_4 + 3\nu_3 \\ a_2 + 3\nu_1, & a_3 - \nu_2, & a_4 - 2\nu_3, & a_5 \\ a_3 + 9\nu_2, & a_4 + 3\nu_3, & a_5, & a_6 \end{vmatrix} = 0. \tag{I'}$$

Diese Determinante wird man, etwa mittels des *Laplace*schen Satzes, nach den Potenzprodukten der ν entwickeln.

Macht man noch mit einer vierten Variabeln ν_0 homogen und ordnet nach Potenzen von ν_0, so ergibt sich eine Darstellung von der Struktur

$$K_m = C_0\nu_0^4 + C_1\nu_0^3 + C_2\nu_0^2 + C_3\nu_0 + C_4 = 0, \tag{Ia}$$

wo die C ternäre Formen in ν_1, ν_2, ν_3 von der durch den Index angegebenen Ordnung sind.

Diese Koeffizienten müssen sich darstellen lassen als invariante Komitanten der binären Grundform $f_6(\lambda)$, deren Wurzeln die sechs Grundpunkte (auf der N_3) des F_2-Gebüsches lieferten (s. Nr. **66**). Zunächst ist ersichtlich, daß C_0 mit der Determinante $|A|$ der zur N_3 apolaren Fläche $F = A$ übereinstimmt

$$C_0 \equiv \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{vmatrix}, \tag{1_0}$$

die zugleich die *Sylvester*sche Katalektikante der Grundform f_6 ist.

Das Verschwinden von C_0 bedeutet, daß die Fläche $F = A$ ein Kegel K des Gebüsches G wird.

Im folgenden empfiehlt es sich, die Größen ν_1, ν_2, ν_3 als Punktkoordinaten in der Ebene $\nu_0 = 0$ anzusehen, bezogen auf einen Normkegelschnitt N_2 $(= \mathsf{N}_2)$

$$N_2 \equiv \nu_1\nu_3 - \nu_2^2 = 0. \tag{2}$$

Führt man neben ν_2 noch die Variable ν_2' ein, so daß

(3) $$-2\nu_2 = \nu_2',$$

so geht (2) über in die übliche Gleichung von N_2

(2) $$N_2 \equiv 4\nu_1\nu_3 - \nu_2'^2 = 0,$$

oder auch explizite

(2a′) $$\nu_3 : \nu_2' : \nu_1 = \lambda^2 : 2\lambda : 1.$$

In der Ebene $\nu_0 = 0$ existiert eine zum Klassennormkegelschnitt N_2 apolare und durch die sechs Punkte, die den Wurzeln von $f_6(\lambda) = 0$ auf N_2 entsprechen, gehende $c_3 = c_3'$ mit der Gleichung

(4) $$c_3' \equiv \nu_1^3 a_0 + \nu_2'^3 a_3 + \nu_3^3 a_6 + 3\nu_1^2\nu_2' a_1 + 3\nu_1^2\nu_3 a_2 \\ + 3\nu_3^2\nu_2' a_5 + 3\nu_3^2\nu_1 a_4 + 6\nu_1\nu_2'\nu_3 a_3 = 0.$$

Verschwindet wie oben im besonderen $C_0 = |A|$, so läßt die Form $f_6(\lambda)$ die kanonische Darstellung als Summe von drei sechsten Potenzen zu. Entsprechend erscheint dann, wie durch Polarisation der f_6 hervorgeht, die Form c_3' als Summe von drei Kuben. Das Letztere bedeutet aber geometrisch, daß die Kurve 3. Ordnung c_3' eine äquianharmonische ist.

Nunmehr entwickele man behufs Ermittlung der weiteren Koeffizienten $C_1, \ldots, C_4$ in (Ia) die Determinante K_m in (I′) nach dem *Laplace*schen Satze, so erhält man zunächst für

(5) $$p_{ik} = \begin{vmatrix} a_i, & a_k \\ a_{i+1}, & a_{k+1} \end{vmatrix},$$

ein Aggregat von der Struktur

(6) $$K_m \equiv A_1 + A_2 + B_1 + B_2 - C_1 - C_2,$$

wo einzeln

(7) $$\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} A_1 \equiv (p_{01} - 2a_0\nu_1)(p_{45} - 2a_6\nu_3), \\ A_2 \equiv \{p_{23} + 3a_2\nu_3 - 8a_3\nu_2 + 3a_4\nu_1 + 9(\nu_1\nu_3 + \nu_2^2)\}^2; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} B_1 \equiv (p_{03} - 3a_0\nu_3 - 9a_1\nu_2)(p_{34} - a_4\nu_5 - a_5\nu_2 + 6\nu_3), \\ B_2 \equiv (p_{12} - a_1\nu_2 - a_2\nu_1 + 6\nu_1^2)(p_{25} + 3a_6\nu_1 - 9a_5\nu_1); \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} C_1 \equiv (p_{02} - a_0\nu_2 - 3a_1\nu_1)(p_{35} - a_6\nu_2 - 3a_5\nu_3), \\ C_2 \equiv (p_{13} + 3a_1\nu_3 - 9a_2\nu^2 + 2a_3\nu_1 + 18\nu_1\nu_2) \\ \qquad \cdot (p_{24} + 2a_3\nu_3 - 9a_4\nu_2 + 3a_5\nu_1 + 18\nu_2\nu_3) \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Man berechne jetzt hieraus den Koeffizienten C_1 von ν_0^3 in (Ia), eine Linearform in ν_1, ν_2, ν_3,

(8) $$C_1 \equiv \gamma_1\nu_1 + \gamma_2\nu_2 + \gamma_3\nu_3.$$

Die Ausdrücke für die Koeffizienten γ lassen sich linear in den ersten Minoren von $|A|$ bilden. Bedient man sich für die Koeffizienten von

A und f_6 der zweiten Bezeichnung $a_{ik} = a_{i+k}$, und ist entsprechend α_{rs} der Minor von a_{rs} in $|A|$, so erhält man einfach

(9) $\quad \gamma_1 = 2(\alpha_{22} - 3\alpha_{13}), \quad \gamma_2 = 2(\cdot\,\alpha_{03} - \cdot\,\alpha_{12}), \quad \gamma_3 = 2(\alpha_{11} - 3\alpha_{02}),$

wo die im folgenden nicht in Betracht kommenden numerischen Faktoren in γ_2 nur angedeutet sind. Nun geht aus der Herleitung der Form K_m hervor, daß die Darstellung (Ia) eine typische sein muß, d. h. die Koeffizienten $C_0, C_1, \ldots, C_4$ sind (in ν_1, ν_2, ν_3) ternäre Invarianten von f_6 und N_2.

Demnach repräsentiert die Gleichung $C_1 = 0$ eine invariante Gerade, und deren Schnittpunkte mit N_2 müssen sich bestimmen lassen durch die Wurzeln derjenigen quadratischen Kovariante $f_2(\lambda)$ von $f_6(\lambda)$, die in den Koeffizienten der letzteren kubisch ist.

Um $f_2(\lambda)$ zu bilden, gehe man aus von der Polarform

(10) $$(a\mu)^4(a\lambda)^2 \equiv \mu^4 A_0(\lambda) + 4\mu^3 A_1(\lambda) + \cdots,$$

wo

(11) $$A_i(\lambda) \equiv a_i\lambda^2 + 2a_{i+1}\lambda + a_{i+2} \qquad (i = 0, \ldots, 4).$$

Dann wird die Invariante g_2 der in μ biquadratischen binären Form (10) diejenige biquadratische Kovariante $f_4(\lambda)$ von $f_6(\lambda)$, die in den a quadratisch ist

(12) $$\begin{aligned} f_4(\lambda) &\equiv A_0A_4 - 4A_1A_3 + 3A_2^2 \equiv (p_{12} - 3p_{03}) + 2\lambda(p_{04} - 2p_{13}) \\ &\quad + \lambda^2(p_{05} + p_{14} - 8p_{23}) + 2\lambda^3(p_{15} - 2p_{24}) + \lambda^4(p_{25} - 3p_{34}) \\ &\equiv b_0 + 4b_1\lambda + \cdots + b_4\lambda^4. \end{aligned}$$

Schreibt man hier μ für λ und bildet die bilineare Invariante der beiden in μ biquadratischen Formen (10) und (12), so gelangt man zu der gesuchten Kovariante $f_2(\lambda)$

(13) $$f_2(\lambda) \equiv (b_0A_4 + b_4A_0) - 4(b_1A_3 + b_3A_1) + 6b_2A_2.$$

Entwickelt man die rechte Seite nach Potenzen von λ, so ergibt sich in der Tat

(14) $$f_2(\lambda) \equiv \gamma_1 - \gamma_2\lambda + \gamma_3\lambda^2$$

und diese geht aus C_1 vermöge (2a′) hervor.

Ähnlich läßt sich der Koeffizient C_2 von ν_0^2 in (Ia) behandeln. Da $C_2 = 0$ ein bez. N_2 invarianter Kegelschnitt c_2' sein muß, trifft er N_2 in vier Punkten, deren Argumente die Wurzeln der in den a kubischen biquadratischen Kovariante sind. Diese Kovariante muß also mit $f_4(\lambda)$ in (12) übereinstimmen. Daraufhin lassen sich die Koeffizienten c_{ik} in C_2

(15) $$C_2 \equiv \nu_1^2 c_{11} + 2\nu_1\nu_2 c_{12} + \cdots$$

leicht berechnen. Für das Leitglied c_{11} ergibt sich

$$(16_{11}) \qquad c_{11} \equiv 3(p_{03} - 3p_{12}).$$

Schneidet man C_2 mit N_2, d. h. wendet (2a′) an, so stellt sich in der Tat heraus, daß die „Schnittpunktform" bis auf den Faktor 3 mit der Kovariante f_4 zusammenfällt. Weiter notiere man noch den Wert von c_{12}

$$(16_{12}) \qquad c_{12} \equiv 6(2p_{13} - p_{04}).$$

Der Kegelschnitt $C_2 = 0$ läßt sich nun noch genauer bestimmen. Er gehört dem Büschel B von c_2 an, das durch die vier Grundpunkte $f_4(\lambda) = 0$ geht. Denkt man sich den in B enthaltenen, zu N_2 apolaren Kegelschnitt c_2' (mit denselben Koeffizienten wie $f_4(\lambda)$) herausgegriffen, so muß sich C_2 als lineare Kombination von c_2' und dem Produkt $g_2 N_2$ darstellen lassen, wo g_2 die quadratische Invariante von f_6 ist

$$(17) \quad g_2 \equiv a_0 a_6 - 5a_1 a_5 + 15 a_2 a_4 - 10 a_3^2 \equiv p_{05} - 5p_{14} + 10 p_{23}.$$

Stellt man andererseits C_2 explizite auf, so ergibt sich die gewünschte Darstellung

$$(18) \qquad C_2 \equiv c_2' + \tfrac{1}{4} g_2 N_2.$$

Weiter ergibt sich als Koeffizient C_3 von ν_0^3 in (Ia) durch explizite Entwicklung in homogenen Koordinaten s_0, s_1, s_2

$$(19) \quad \frac{1}{2\cdot 9} C_3 \equiv a_0 s_0^3 + a_3 s_1^3 + a_6 s_2^3 + 3a_1 s_0^2 s_1 + 3a_2 s_0 s_1^2 + 3a_2 s_0^2 s_2 \\ + 3a_5 s_2^2 s_1 + 3a_4 s_2 s_1^2 + 3a_4 s_2^2 s_0 + 6a_3 s_0 s_1 s_2.$$

Die Gleichung $C_3 = 0$ liefert also gerade die oben schon erwähnte, zu N_3 apolare c_3, die durch die den Wurzeln von $f_6 = 0$ entsprechenden sechs Grundpunkte auf N_2 geht.

Endlich erhält man für das freie Glied C_4 in (Ia) ohne weiteres

$$(20) \qquad C_4 \equiv 4 \cdot 9 \cdot 9 \cdot N_2^2.$$

Damit ist die typische Darstellung der Form K_m in der Gestalt (Ia) im einzelnen durchgeführt. Aus (Ia) bestätigt man noch, daß den sechs Kegeln K des Gebüsches G — durch die sechs Grundpunkte $f_6(\lambda) = 0$ auf N_3 — sechs D_2 auf der Fläche K_m entsprechen. Man bilde zu dem Behuf die ersten Ableitungen der Form K_m nach den ν.

Man erkennt sofort, daß $\frac{\partial K_m}{\partial \nu_0}$ verschwindet für $\nu_0 = 0$, $C_3 = 0$ und die drei weiteren Ableitungen für $\nu_0 = 0$, $N_2 = 0$. Die sechs gemeinsamen Lösungssysteme von $\nu_0 = 0$, $C_3 = 0$, $N_2 = 0$ sind aber gerade die Wurzeln von $f_6(\lambda) = 0$.

Überdies geht aus dem Faktor N_2^2 von C_4 (20) hervor, daß die Ebene $\nu_0 = 0$ eine Doppelebene Δ_2 der Fläche K_m ist (s. Nr. **68**).

67. Die Kummersche Fläche als Projektion vom S_4 aus. Der bisherigen Erklärung der *Kummer*schen Fläche K_m als Bildfläche der *Weddle*schen Fläche W_d werde jetzt eine solche von ganz anderem Charakter gegenübergestellt.

Nach dem Vorgange von *F. Geiser* (s. Art. „F_3“, Nr. **16**) und *Zeuthen* (s. Nr. **19**), die an eine F_3 (von einem ihrer Punkte aus) resp. an eine F_4 mit $\bar{C}_2$ (von einem Punkte der $\bar{C}_2$ aus) den Tangentenkegel legten, hat *C. Segre*[135]) auch die dreidimensionale kubische „Fläche“ $F_3^{(4)}$ im S_4 behandelt.

Sei die Gleichung einer durch die Koordinatenecke A_n gehenden $F_3^{(4)}$

$$(1) \qquad F_3^{(4)} \equiv F_1 x_n^2 + 2 F_2 x_n + F_3 = 0,$$

wo F_r $(r = 1, 2, 3)$ eine quaternäre Form der Ordnung r sei.

Legt man von A_n aus die Tangenten an die $F_3^{(4)}$, so erfüllen diese einen „Kegel“ $K_6^{(3)}$ der Ordnung 6 mit der Gleichung

$$(2) \qquad K_6^{(3)} \equiv F_1 F_3 - F_2^2 = 0.$$

Im S_3 (x_i, x_k, x_l, x_m) gedeutet, stellt (2) auch die Spur des Kegels im

135) *C. Segre,* Torino Atti 22 (1887), p. 791; Torino Mem. (2) 39 (1888). Vgl. *G. Castelnuovo,* Ven. Ist. A. (6) 5 (1889), p. 1249; (6) 6 (1889), p. 525; (7) 2 (1891), p. 855. In den beiden ersten Arbeiten wird die *Graßmann*sche Erzeugung der F_3 (s. Art. „F_3“, Nr. 7) auf den S_4 (und weiterhin auch auf den S_n) ausgedehnt.

Danach entsteht eine gewisse spezielle F_3 im S_4 durch drei kollinear aufeinander bezogene Netze von S_3, ist also durch eine Gleichung von der Gestalt $|ABC| = 0$, mit Linearformen als Elementen, darstellbar. Eine solche F_3 besitzt sechs D_2 und es gibt drei verschiedene ∞^2-Systeme von Geraden, die der F_3 angehören. Im besonderen läßt sich die kollineare Zuordnung so wählen, daß noch vier weitere D_2 hinzutreten, womit die F_3 in die *Segre*sche V_3 übergeht.

Die dritte Arbeit enthält eine systematische Untersuchung der Liniengeometrie des S_4. Eine Gerade wird durch zehn homogene Koordinaten $p_{ik} = (xy)_{ik}$ festgelegt, die an drei unabhängige Relationen gebunden sind.

Vor allem handelt es sich um die linearen Geradenkomplexe K_1, sowie um Büschel, Netze, Gebüsche derselben und die damit verknüpften singulären Erscheinungen.

Ein spezieller K_1 besteht aus den ∞^5 Geraden, die eine Ebene S_2 treffen.

Von besonderem Interesse ist die Theorie der Gebüsche von K_1. In einem solchen Gebüsche sind fünf spezielle K_1 enthalten, von denen vier den letzten mitbestimmen; das ist eine Verallgemeinerung des *Segre*schen Satzes (im Texte) über die fünf Ebenen α. Die allen Individuen des Gebüsches gemeinsamen ∞^2 Geraden erfüllen die *Segre*sche V_3, die so eine neue Beleuchtung erfährt.

Es wird auch festgestellt, daß die V_3 rational ist, indem deren S_3-Schnitten die lineare ∞^4-Schar von F_2 mit fünf Grundpunkten in einem Bild-S_3 zugeordnet wird.

Umgekehrt legt diese Abbildung behufs Ableitung der Eigenschaften der V_3 zugrunde *E. Dragoni,* Giorn. di mat. 40 (1902), p. 255.

S_3 dar, also eine Fläche 4. Ordnung F_4

(2′) $$F_4 \equiv F_1 F_3 - F_2^2 = 0.$$

Auf der $F_3^{(4)}$ liegen ∞^2 Gerade g (s. Nr. **20**); durch einen „allgemeinen“ Punkt der $F_3^{(4)}$, z. B. A_n, gehen sechs solcher g, die sich durch die gemeinsamen Lösungen der drei Gleichungen

(3) $$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = 0$$

bestimmen.

Im S_3 bedeuten diese Gleichungen der Reihe nach eine Ebene E, eine F_2 und eine F_3; die gemeinsamen Lösungen sind also die sechs Punkte P_i $(i = 1, \ldots, 6)$, in denen der Schnittkegelschnitt C_2 von E und F_2 die F_3 trifft, und somit die sechs obigen, von A_n auf der $F_3^{(4)}$ ausgehenden Geraden g_i die Geraden (A_n, P_i). Da für die Koordinaten eines Punktes P_i die linke Seite von (2′) in der zweiten Ordnung verschwindet, so sind die sechs Punkte P_i sechs Knotenpunkte D_2 der F_4, die auf C_2 liegen.

Umgekehrt läßt sich ersichtlich die Gleichung einer F_4 (im S_3) mit sechs auf einem Kegelschnitte C_2 liegenden D_2 auf die Form (2′) bringen. Es gilt also zunächst der Satz:

„Legt man an eine kubische dreidimensionale Mannigfaltigkeit $F_3^{(4)}$ im S_4 von einem beliebigen Punkte der $F_3^{(4)}$ aus den dreidimensionalen Tangentenkegel und schneidet diesen mit einem S_3, so ergibt sich eine Fläche 4. Ordnung F_4 mit sechs auf einem Kegelschnitt gelegenen D_2. Umgekehrt läßt sich eine solche F_4 auf noch mannigfaltige Art als Tangentenprojektion einer $F_3^{(4)}$ im S_4 von einem ihrer Punkte aus auffassen.“

Auch die *Kummer*sche Fläche K_m mit 16 D_2 besitzt solche Sextupel von D_2 und zwar 16 (s. Nr. **66**).

Andererseits beachte man, daß, wenn im besonderen die $F_3^{(4)}$ Knotenpunkte D_2 besitzt, jeder solche D_2 bei der obigen Tangentenprojektion in einen D_2 der F_4 übergeht.

Soll also im besonderen die F_4 zu einer K_m werden, so müßte entsprechend eine $F_3^{(4)}$ im S_4 hergestellt werden, die 10 D_2 besäße; diese würden sich dann in der Tat in zehn weitere D_2 der F_4 projizieren.

Hier setzt die Untersuchung von *C. Segre* ein.

Er stellt zunächst fest, daß die Maximalanzahl der einer $F_3^{(4)}$ angehörigen D_2 eben gleich zehn ist, und daß solche $F_3^{(4)}$, und zwar im wesentlichen in nur einer Art, existieren. Damit ist bereits der Satz bewiesen:

„Die *Kummer*sche Fläche K_m läßt sich auffassen als scheinbarer Umriß einer $F_3^{(4)}$ im S_4 mit 10 D_2 von einem ihrer Punkte aus.“

Zu einer solchen $F_3^{(4)}$ kann man auf verschiedene Weise gelangen. Die einfachste legt die ∞^2 Geraden g einer $F_3^{(4)}$ zugrunde.

Man denke sich vier allgemein gehaltene „Ebenen“ $F_1^{(4)}$ im S_4 gegeben, die mit α_i $(i = 1, \ldots, 4)$ bezeichnet seien. Damit im S_4 eine Gerade g eine Ebene (in einem Punkte) trifft, ist *eine* Bedingung notwendig und hinreichend. Es gibt also ∞^2 g, die die vier Ebenen α_i treffen. *Segre* beweist nun den eigenartigen Satz:

„Die ∞^2 Geraden g im S_4, die vier gegebene Ebenen α_i $(i = 1, \ldots, 4)$ treffen, treffen auch noch eine fünfte Ebene α_5, und die zehn Punkte, von denen je einer zweien der fünf Ebenen gemeinsam ist, sind zehn D_2 einer $F_3^{(4)}$, die durch die ∞^2 g erzeugt wird.“

Diese 10 D_2 der $F_3^{(4)}$ bilden eine an sich bemerkenswerte Konfiguration. Nach obigem liegen auf jeder der fünf Ebenen α, die offenbar ganz der $F_3^{(4)}$ angehören, vier der D_2. Solcher Gruppen von fünf Ebenen gibt es aber nicht nur eine, sondern sechs, zu denen im ganzen 15 Ebenen gehören.

Dementsprechend enthält die $F_3^{(4)}$ sechs ∞^2-Systeme von Geraden g derart, daß durch jeden Punkt der $F_3^{(4)}$ eine Gerade jedes Systems geht — das sind die eingangs betrachteten sechs Geraden — und in jedem S_3 zwei Gerade jedes Systems liegen. Die $F_3^{(4)}$ läßt sich daraufhin auch erzeugen durch drei „Netze“ (r_1), (r_2), (r_3) von S_3, je mit einer der Geraden r als Träger, die derart projektiv verbunden sind, daß sich immer drei Tripel entsprechender S_3 in einer Ebene schneiden, die die Geraden r_1, r_2, r_3 trifft.

Die $F_3^{(4)}$ geht durch 15 involutorische Kollineationen, deren jede eine Ebene der $F_3^{(4)}$ als Achsenebene besitzt, in sich über.

Die als Umriß der $F_3^{(4)}$ erscheinende *Kummer*sche Fläche K_m tritt aber bei dieser Methode zugleich als Brennfläche von Strahlensystemen auf (s. Nr. **69**). Es gilt nämlich der Satz:

„Die Projektionen der sechs ∞^2-Geradensysteme der $F_3^{(4)}$ sind die sechs Strahlensysteme, von denen K_m die Brennfläche ist.“

Wie bei der F_3 und F_4 mit $\overline{\overline{C}}_2$, stehen die $F_3^{(4)}$ und ihre Tangentenprojektion, die K_m, derart in gegenseitiger Beziehung, daß man aus den Eigenschaften je eines der beiden Gebilde die korrespondierenden des anderen ableiten kann.

Verlegt man allgemeiner das Projektionszentrum außerhalb der $F_3^{(4)}$, so ist der Umriß die allgemeinste $F_6 = \Phi_4$, die den Schnitt einer F_2 und F_3 zur Kuspidalkurve hat, und 10 D_2 besitzt, die sich zu je vier auf 15 doppeltberührende Ebenen verteilen. Die Fläche ist Brennfläche für sechs Strahlensysteme (3, 2).

Man projiziere die $F_3^{(4)}$ wiederum von einem ihrer Punkte aus auf einen S_3, andererseits aus einem ihrer D_2 in einen S_3'. So gelangt man zu einer ein-zweideutigen Punktverwandtschaft zwischen S_3 und S_3'.

Dann ist die Übergangsfläche eine Fläche 4. Ordnung, aber auch die Doppelfläche; letztere besitzt 9 D_2, die Schnittpunkte je dreier Erzeugenden einer F_2.

Diese Entwicklungen finden einen gewissen Abschluß, wenn man eine $F_3^{(4)}$, sofern sie nur mindestens *eine* Ebene besitzt, selbst wieder als Projektion einer Mannigfaltigkeit $M_4^{(4)}$ (von einem ihrer Punkte aus) ansieht, die die Basis eines Büschels von $F_2^{(5)}$ im S_5 ist, analog Nr. **16** im Art. „F_3".

Andererseits lassen sich aber die $M_4^{(4)}$ als quadratische Komplexe K_2 des S_3 deuten.

Somit entsteht eine neue Beziehung zwischen den obigen F_4, insbesondere der *Kummer*schen Fläche K_m und den Komplexen K_2.

Insbesondere läßt sich nach dieser Methode ein tetraedraler K_2[135a])

---

135 a) Sind $p_{ik} = (xy)_{ik}$ die sechs Koordinaten einer Geraden, zwischen denen also die Relation $P \equiv p_{ik}p_{lm} + p_{il}p_{mk} + p_{im}p_{kl} = 0$ besteht, so ist ein tetraedraler Komplex K_t — die Gesamtheit der Geraden, die die Ebenen eines festen Tetraeders, etwa des Koordinatentetraeders, nach konstantem Doppelverhältnis schneiden — durch eine Gleichung von der Form

$$K_t \equiv p_{ik}p_{lm} + k p_{im}p_{kl} = 0$$

dargestellt. Man deute die p_{ik} als Punktkoordinaten x_r $(r = i, k, l, m, n, p)$ in einem S_5. Dann stellen die beiden Gleichungen $P = 0$, $K_t = 0$ zwei Über-F_2 dar, die eine dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit M 4. Ordnung gemein haben.

Projiziert man diese M von einem partikulären ihrer Punkte aus auf einen S_4 $(x_p = 0)$ und läßt in dessen Punktkoordinaten x_i, x_k, x_l, x_m, x_n noch gewisse konstante Faktoren eingehen, so läßt sich die Gleichung der Projektion in der Normalgestalt schreiben

$$V_3 \equiv x_i x_k x_n - x_l x_m s = 0, \quad \text{wo} \quad s = \Sigma x.$$

Dies ist in der Tat die *Segre*sche V_3. Einmal erhält man neun D_2, indem man von den beiden Produkten $x_i x_k x_n$ und $x_l x_m s$ je zwei Faktoren einzeln gleich Null setzt. Der zehnte D_2 berechnet sich, indem man diejenige gemeinsame Lösung der fünf, gleich Null gesetzten, ersten Ableitungen von V_3 nach den x bestimmt, für die keiner jener sechs Faktoren verschwindet. Demgemäß erhält der zehnte $D_2 = E_1$ die Koordinaten (1, 1, —1, —1, 1).

Es ist nützlich, die Koordinaten der zehn D_2 in einer Tabelle zusammenzustellen:

	x_i	x_k	x_l	x_m	x_n
(1_{ik})	0	0	0	0	1
(2_{ik})	0	0	0	—1	1
(3_{ik})	0	0	—1	0	1
(1_{in})	0	1	0	0	0
(2_{in})	0	1	0	—1	0
(3_{in})	0	1	—1	0	0
(1_{kn})	1	0	0	0	0
(2_{kn})	1	0	0	—1	0
(3_{kn})	1	0	—1	0	0
(E_1)	1	1	—1	—1	1

so auf einen Doppelraum abbilden, daß dessen Übergangsfläche die K_m wird.

Durch Tangentenprojektion der V_3 von einem ihrer Punkte aus geht, wie im Texte, eine K_m als Grenzfläche hervor. Dieser entspricht rückwärts innerhalb des K_t eine Grenzkongruenz, die daraufhin (s. Nr. **71**) *E. A. Weiß,* Berlin Math. Ges. 27 (1928), p. 48 durch ϑ-Funktionen $\vartheta(u, v)$ $(p = 2)$ dargestellt hat.

Der Gleichförmigkeit halber führe man s als sechste überzählige Koordinate x_p ein, so daß man das Matrixschema hat

$$\begin{vmatrix} x_i & x_k & x_n \\ x_l & x_m & x_p \end{vmatrix}.$$

Von den 15 Ebenen, die je sechs D_2 tragen, erhält man zunächst neun durch gleichzeitiges Nullsetzen je eines x der ersten und zweiten Reihe; eine solche Ebene läßt sich also durch zwei Indizes festlegen, z. B. $x_i = 0$, $x_l = 0$ durch $[il]$. Die sechs übrigen Ebenen sind gerade die durch den zehnten $D_2 = E_1$ gehenden. Deren Gleichungen sind, bei Abkürzungen mittels dreier Indizes, die folgenden:

$$\begin{array}{l|l}
[i, kl] = [i, nm] & x_k + x_l = 0, \quad x_n + x_m = 0, \\
[i, nl] = [i, km] & x_n + x_l = 0, \quad x_k + x_m = 0; \\
[k, il] = [k, nm] & x_i + x_l = 0, \quad x_n + x_m = 0, \\
[k, nl] = [k, im] & x_n + x_l = 0, \quad x_l + x_m = 0; \\
[n, il] = [n, km] & x_i + x_l = 0, \quad x_k + x_m = 0, \\
[n, kl] = [n, im] & x_k + x_l = 0, \quad x_i + x_m = 0
\end{array}$$

Auch die 10 D_2 lassen sich durch zwei Indizes angeben. Zunächst erhält man die Gleichungen von neun der D_2 durch gleichzeitiges Nullsetzen je zweier x beider Reihen der Matrix. Somit bestimmen die beiden übrigen Indizes den D_2, z. B. (np): $x_i = 0$, $x_k = 0$, $x_l = 0$, $x_m = 0$. Dem zehnten $D_2 = E_1$ ist das Zeichen (lm) beizulegen. Zur Vergleichung mit den Bezeichnungen der 15 Ebenen und 10 D_2 in Nr. **67** dienen die beiden folgenden Schemata:

I. Die 15 Ebenen.

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
S_i & S_k & S_n & S_{il} & S_{kl} & S_{nl} & S_{im} & S_{km} & S_{nm} \\
[il] & [km] & [np] & [nm] & [ip] & [kl] & [kp] & [nl] & [im]
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc}
S_m & S_l & S_{lm} & S_{in} & S_{kn} & S_{ik} \\
[i, nm] & [k, nl] & [n, km] & [i, nl] & [k, nm] & [n, kl]
\end{array}$$

II. Die 10 D_2.

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc|c}
D_{kn} & D_{in} & D_{ik} & D_{nl} & D_{il} & D_{kl} & D_{km} & D_{nm} & D_{im} & D_{lm} \\
(il) & (km) & (np) & (im) & (kp) & (nl) & (ip) & (kl) & (nm) & (lm)
\end{array}$$

Sodann sollen noch in der neuen Bezeichnung die Sextupel der Ebenen angegeben werden, die durch je einen der neun D_2 (exkl. $E_1 = (lm)$) gehen. Es sind nur zwei Typen zu unterscheiden, je nachdem der Index p auftritt oder nicht. Als Repräsentanten mögen (np) und (il) dienen:

$$\begin{array}{l|l}
(np) & [il], [km]; \quad [im], [kl]; \quad [n, il], [n, im]; \\
(il) & [km], [np]; \quad [kp], [nm]; \quad [k, il], [n, il].
\end{array}$$

Bei den 15 Ebenen, insofern sie je ein Quadrupel von D_2 tragen, sind wiederum nur zwei Typen zu unterscheiden, je nachdem die Ebene durch

68. Die 16 D_2 und 16 Δ_2, syzygetische und azygetische Tetraeder der Kummerschen Fläche. Normaldarstellungen. Die lineare Konstruktion von H. Weber. Die Kummersche Konfiguration. Nach Untersuchung einer Reihe von F_4 mit $< 16\, D_2$ (s. Abschn. X) stieß *E. E. Kummer*[136]) bis zu der nach ihm benannten Fläche mit der Maximalzahl von 16 D_2 vor. Sie sei wieder mit K_m bezeichnet. Unter Benutzung verschiedener Gleichungsformen der Fläche leitet er die Grundeigenschaften ihrer Singularitäten ab.

Es kommt 16 mal vor, daß 6 D_2 auf einer C_2 liegen, deren Ebene dann eine Doppelebene Δ_2 der Fläche ist. Umgekehrt kommt es 16 mal vor, daß 6 Δ_2 Tangentenebenen eines Kegels K_2 sind, dessen Spitze ein D_2 der Fläche ist. Die Fläche K_m ist also in sich dual.

Bei der verwirrenden Mannigfaltigkeit von Auffassungen und Ergänzungen, deren die K_m fähig ist, erscheint es zweckmäßig, eine der einfachsten, als Bildfläche der *Weddle*schen Fläche (s. Nr. **66**), in den Vordergrund zu stellen.

Die sechs Grundpunkte des F_2-Gebüsches G seien wieder die Koordinatenecken A_i, ein Punkt $A(a_i)$, während der letzte Punkt B als Einheitspunkt $E(1)$ gewählt werde. Bedient man sich noch der Abkürzungen $a_{rs} = a_r - a_s$, $\lambda_{rs} = \lambda_r - \lambda_s$ $(r, s = i, k, l)$ und zeichnet einen der vier Indizes, etwa m, aus, so lautet die Gleichung des Gebüsches G mit den Parametern λ_i, λ_k, λ_l, λ_m

(1) $$G \equiv \lambda_i F_2^{(i)} + \lambda_k F_2^{(k)} + \lambda_l F_2^{(l)} + \lambda_m F_2^{(m)} = 0,$$

wo

(2) $$\begin{cases} F_2^{(i)} \equiv x_i a_m (x_k a_{lm} + x_l a_{mk} + x_m a_{kl}), \quad \text{usf.}, \\ F_2^{(m)} \equiv x_i x_k a_l a_{ik} + x_k x_l a_i a_{kl} + x_l x_i a_k a_{li}. \end{cases}$$

Setzt man dies in (1) ein und ordnet nach den Potenzprodukten der x, so geht (1) über in

(3) $$G \equiv \sum x_t x_u f_{tu} = 0,$$

$E_1 = (lm)$ geht oder nicht. Als Repräsentanten mögen $[n, il]$ und $[il]$ dienen:

$$\begin{array}{r|ll|} [n, il] = [n, km] & (il),\ (km); & (np),\ (lm) \\ [il] & (km),\ (np); & (kp),\ (nm) \end{array}.$$

Endlich seien noch die sechs *Segre*schen Pentaeder (s. Nr. **67**), deren fünf Ebenen sich zu je zweien in den zehn D_2 treffen, kurz charakterisiert. Diese lassen sich am übersichtlichsten durch fünfreihige symmetrische Matrizes, mit Lücken in der Hauptdiagonale, darstellen. Auch sie zerlegen sich in zwei Typen von je drei Pentaedern, je nachdem die beiden, durch $E_1 = (lm)$ gehenden Ebenen eines solchen dem einen oder dem anderen der beiden Tripel (S_l, S_m, S_{lm}), (S_{in}, S_{kn}, S_{ik}) angehören. Ihre explizite Aufstellung darf dem Leser überlassen bleiben.

Es braucht kaum bemerkt zu werden, daß die obigen Typenunterschiede nur darauf beruhen, daß das Indizespaar l, m formal ausgezeichnet worden ist.

136) *E. E. Kummer*, Berlin Ber. 1864, p. 246, 495.

wo

$$(4)\quad \begin{cases} f_{ik} \equiv \lambda_m a_l a_{ik} + \lambda_{ik} a_m a_{lm}, \\ f_{kl} \equiv \lambda_m a_i a_{kl} + \lambda_{kl} a_m a_{im}, \\ f_{li} \equiv \lambda_m a_k a_{li} + \lambda_{li} a_m a_{km}, \\ f_{im} \equiv \lambda_i a_m a_{kl}, \quad f_{km} \equiv \lambda_k a_m a_{li}, \quad f_{lm} \equiv \lambda_l a_m a_{ik}. \end{cases}$$

Die Gleichung der K_m ergibt sich durch Nullsetzen der Determinante der quadratischen Form G (3), lautet also[136a])

$$(\mathrm{I})\qquad K_m \equiv |f_{tu}| = 0 \qquad (f_{tt} = 0),$$

wo man noch in der letzten Kolonne und Reihe den gemeinsamen Faktor a_m unterdrücken kann. Entwickelt man die Determinante in (I) und setzt zur Abkürzung

$$(5)\qquad r_i \equiv f_{im} f_{kl}, \quad r_k \equiv f_{km} f_{li}, \quad r_l \equiv f_{lm} f_{ik},$$

so lautet die explizite rationale Gleichung der K_m

$$(\mathrm{I\,a})\qquad K_m \equiv r_i^2 + r_k^2 + r_l^2 - 2 r_i r_k - 2 r_i r_l - 2 r_k r_l = 0.$$

Formal noch übersichtlicher lautet die irrationale Gleichung

$$(\mathrm{I\,b})\qquad K_m \equiv \sqrt{r_i} + \sqrt{r_k} + \sqrt{r_l} = 0.$$

Schreibt man hinterher wieder den Buchstaben x statt λ, so zeigt die Ausführung der Produkte r in (5), daß man erhält

$$(5')\qquad \begin{aligned} r_i &\equiv x_i a_{kl} \{ x_m a_i a_{kl} + (x_k - x_l) a_m a_{im} \} \\ &\equiv x_i \{ x_m a_i a_{kl}^2 + (x_k - x_l) a_m a_{im} a_{ki} \} \quad \text{usf.} \end{aligned}$$

Man führe demgemäß zur Abkürzung die Ausdrücke ein

$$(6)\quad \begin{cases} A_i \equiv a_i a_{kl}^2, & A_k \equiv a_k a_{li}^2, & A_l \equiv a_l a_{ik}^2, \\ B_i \equiv a_m a_{im} a_{kl}, & B_k \equiv a_m a_{km} a_{li}, & B_l \equiv a_m a_{lm} a_{ik}, \end{cases}$$

so daß die B an die Identität gebunden sind

$$(7)\qquad B_i + B_k + B_l \equiv 0,$$

so lautet die irrationale Gleichung (Ib) der K explizite

$$(\mathrm{I\,b})\qquad \sum_{r=i}^{r=l} \sqrt{x_r (x_m A_r + (x_s - x_t) B_r)} = 0.$$

Hierbei ist die K_m auf ein „azygetisches" Tetraeder bezogen (s. u.).

136a) Zu einer derartigen irrationalen Darstellung der K_m gelangt *A. Cayley*, J. f. Math. 78 (1871), p. 292, auf Grund der *Riemann*schen Theorie der Doppeltangenten einer c_4. Daraufhin werden sechs — den zweiten Ableitungen von f entsprechende — in zwei Tripel zerlegte überzählige Koordinaten eines Raumpunktes eingeführt, zwischen denen zwei geeignet normierte Identitäten bestehen. Aus der so sich ergebenden irrationalen Darstellung der K_m lassen sich die Gleichungen der 16 Δ_2 ablesen. Eine modifizierte Darstellung gibt *Cayley*, ib. 94 (1883), p. 270.

Nach *Cayley*[137]) läßt sich die Gleichung (Ib) so umformen, daß man die Gleichungen der $16\,\Delta_2$ ohne weiteres ablesen kann. Führt man neue Variable y derart ein, daß man hat

$$(8) \qquad y_i : y_k : y_l : y_m = C_i x_i : C_k x_k : C_l x_l : -C_i C_k C_l x_m,$$

so geht (Ib) über in

$$(\mathrm{I}b') \qquad \sum_{r=i}^{l} \sqrt{y_r B_r (y_r C_s - y_s C_r) - \frac{y_m}{B_r}} = 0.$$

Es werden dann die Gleichungen von $8\,\Delta_2$

$$(9) \qquad \begin{cases} y_i = 0, \quad y_k = 0, \quad y_l = 0, \quad y_m = 0; \\ \frac{y_i}{B_i} + \frac{y_k}{B_k} + \frac{y_l}{B_l} = 0, \\ y_k C_l - y_l C_k - \frac{y_m}{B_i} = 0, \quad \text{usf.} \end{cases}$$

Die übrigen $8\,\Delta_2$ ergeben sich hieraus gemäß einer gewissen Vertauschungsregel.

Man führe nämlich noch Größen C_r', C_r'' ein gemäß

$$(10) \qquad C_r \equiv C_r' C_r'' \qquad (r = i, k, l),$$

mit den Identitäten

$$(10') \qquad \sum C_r' \equiv 0, \quad \sum C_r'' \equiv 0,$$

so hat man nur in den obigen Gleichungen (9) die C_r mit den C_r' resp. C_r'' zu vertauschen, um die weiteren $8\,\Delta_2$ zu erhalten.

Wir kommen zu den Beziehungen der $16\,D_2$ und $16\,\Delta_2$ der K_m zu den Grundpunkten und Geraden der W_d. Die Punkte der K_m und W_d waren nach Nr. **66** (1, 1)-deutig aufeinander bezogen.

Läßt man die beiden Räume der W_d und K_m zusammenfallen und bezeichnet die sechs Grundpunkte des F_2-Gebüsches G mit $1, 2, \ldots, 6$, so entsprechen diesen auf der K_m $6\,D_2$: (1), (2), ..., (6), dagegen die zehn übrigen den zehn Ebenenpaaren (ikl), (mnp), usf. Man kann daher diese $10\,D_2$ der K_m entsprechend bezeichnen mit $\binom{i\,k\,l}{m\,n\,p}$ oder noch kürzer mit (ikl) resp. (mnp), usf. Hält man hier etwa den ersten Index $i = 1$ fest, so entsprechen den zehn Kombinationen zu je zweien der fünf übrigen gerade die $10\,D_2$.

Durch die sechs Grundpunkte $i, \ldots, p$ ging eine bestimmte C_3.

Ist (i, k) irgendeine der 15 Verbindungsgeraden je zweier der sechs Grundpunkte, so geht durch C_3 ein F_2-Netz N, und durch (i, k) ein ein Netz N_{ik} von F_2 innerhalb des Gebüsches G.

Diesen 16 Netzen entsprechen die $16\,\Delta_2$ von K_m, jeweils als Ort der Punkte, die den F_2 eines Netzes entsprechen.

137) *A. Cayley,* J. f. Math. 73 (1871), p. 292.

Diese 16 Δ_2 berühren die K_m je längs einer C_2 und enthalten je sechs D_2 auf einer solchen.

So gehen durch die C_3 die sechs Kegel K_2, die aus je einem der sechs Grundpunkte die übrigen projizieren; die Ebene $\Delta_2(0)$, die dem F_2-Netz N entspricht, enthält die den sechs K_2 entsprechenden D_2. Ferner ist die Gerade (i, k) in vier der zehn Ebenenpaare enthalten und liegt auf zweien der sechs K_2; die $\Delta_2(i, k)$ enthält also die sechs jenen besonderen F_2 entsprechenden D_2. Dual ist jeder D_2 in sechs der Δ_2 enthalten.

Durch jede der 15 Verbindungslinien der sechs D_2, die einer Δ_2 angehören, geht immer noch eine weitere Δ_2 hindurch. Die 120 Verbindungsgeraden von je zwei der D_2 fallen zusammen mit den 120 Schnittlinien je zweier der Δ_2.

Damit lassen sich die gegenseitigen Inzidenzen der 16 D_2 und 16 Δ_2 in einem einfachen Schema festlegen.

In der Ebene $\Delta_2(0)$ liegen die D_2

$$(0)\mid \quad (i),\ (k),\ (l),\ (m),\ (n),\ (p);$$

und in irgendeiner der 15 $\Delta_2(ik)$ die D_2

$$(ik)\mid \quad (i),\ (k);\ (ikl) = (mnp),\ (ikm) = (lnp),\ (ikn) = (lmp),$$
$$(ikp) = (lmn).$$

Umgekehrt gehen durch einen $D_2(i)$ die 6 Δ_2

$$(i)\mid \quad (0),\ (ik),\ (il),\ (im),\ (in),\ (ip)$$

und durch einen $D_2(ikl) = D_2(mnp)$ die 6 Δ_2

$$(ikl) = (mnp)\mid \quad (ik),\ (il),\ (kl);\ (mn),\ (mp),\ (np).$$

Beim ersten Schema gehören die 6 D_2 je einer C_2 an, beim zweiten die 6 Δ_2 als Berührungsebenen einem Kegel K_2.

Hieraus geht hervor, daß die Schnittachse irgend zweier Δ_2 zwei D_2 trägt, und daß dual durch den Verbindungsstrahl irgend zweier D_2 zwei Δ_2 gehen.

Es zeigt sich das deutlich an den beiden folgenden Schemata wo bei jedem drei Typen zu unterscheiden sind.

Die Achse $[(0), (ik)]$ trägt die beiden D_2 $(i), (k)$;
„ „ $[(ik), (lm)]$ „ „ „ „ $(ikn), (ikp)$;
„ „ $[(ik), (il)]$ „ „ „ „ $(i), (ikl)$.

Durch den Strahl $[(i), (k)]$ gehen die beiden Δ_2 $(0), (ik)$;
„ „ „ $[(i), (ikl)]$ „ „ „ „ $(ik), (il)$;
„ „ „ $[(ikl), (ikm)]$ „ „ „ „ $(ik), (np)$.

Nunmehr seien die syzygetischen und azygetischen Tetraeder betrachtet.

Nach *H. Weber*[138]) existieren zwei ausgezeichnete Arten von Tetraedern, die sich aus D_2 und Δ_2 herstellen lassen. So bilden die vier Punkte $(i), (k), (l), (ikl)$ ein Tetraeder T_1, dessen Ecken D_2 und dessen Seiten Δ_2 sind; diese Δ_2 sind $(0), (ik), (il), (kl)$. Solcher „azygetischer" oder „*Rosenhain*scher" Tetraeder T_1 gibt es 80. Auf ein solches Tetraeder T_1 als Koordinatentetraeder war oben in (I b) die Gleichung der K_m bezogen.

Andererseits betrachte man ein Tetraeder T_2 vom Seitentypus $[(0), (ik), (lm), (np)]$. Hier sind die Seiten Δ_2, die Ecken aber *keine* D_2. Jede der sechs Kanten trägt zwei D_2 nach der Tabelle

$$\left\{\begin{array}{l|l}
(0),\ (ik) & (i),\ (k), \\
(0),\ (lm) & (l),\ (m), \\
(0),\ (np) & (n),\ (p) \\
(ik),\ (lm) & (ikp) = (lmn),\ (ikn) = (lmp), \\
(ik),\ (np) & (ikl) = (npm),\ (ikm) = (npl), \\
(lm),\ (np) & (lmi) = (npk),\ (lmk) = (npi).
\end{array}\right.$$

Es verbeiben also noch als die vier letzten D_2

$$(iln) = (kmp), \quad (ilp) = (kmn), \quad (lmn) = (klp), \quad (imp) = (kln).$$

Diese vier D_2 bilden die Ecken des zu T_2 „reziproken" Tetraeders T_2'. Dessen Ecken sind D_2, während seine Seiten keine Δ_2 sind. Durch dessen Kanten gehen dual je zwei Δ_2, daß sind eben die, die nach Ausschluß der Seiten-Δ_2 von T_2 noch übrig bleiben.

Diese Tetraeder $\mathsf{T}_2, \mathsf{T}_2'$ heißen „syzygetische" oder „*Göpel*sche" Tetraeder. Im ganzen gibt es 60 solcher Tetraeder, oder auch 30 Paare $(\mathsf{T}_2, \mathsf{T}_2')$.

Zwei reziproke syzygetische Tetraeder umfassen zusammen alle 16 D_2 und 16 Δ_2.

Andererseits lassen sich die azygetischen Tetraeder T_1 in Gruppen von vieren anordnen, deren Ecken und Seiten alle 16 D_2 und 16 Δ_2 erschöpfen. Eine solche Anordnung ist z. B.

$$\begin{array}{cccc}
(0) & (kl) & (li) & (ik) \\
(np) & (im) & (km) & (lm) \\
(mp) & (in) & (kn) & (ln) \\
(mn) & (ip) & (kp) & (lp).
\end{array}$$

Ihr entspricht die analoge Anordnung der D_2

$$\begin{array}{llll}
(ikl) & (i) & (k) & (l) \\
(m) & (inp) & (ilm) & (ikm) \\
(n) & (imp) & (iln) & (ikm) \\
(p) & (imn) & (ilp) & (ikp).
\end{array}$$

138) *H. Weber,* J. f. Math. 84 (1878), p. 332.

Durch irgendeinen der 16 D_2 des ersten Schemas gehen je die sechs Δ_2, deren Symbole eine Zeile und eine Spalte bilden, ausgenommen das der Zeile und Spalte gemeinsame Element. Analog liest man aus dem zweiten Schema die in einer Δ_2 liegenden sechs D_2 ab.

Jede Zeile und jede Spalte des ersten Schemas ergibt die Seiten, und die analoge Zeile oder Spalte des zweiten Schemas die Ecken eines azygetischen Tetraeders. Eine solche Anordnung der 16 D_2 und Δ_2 heißt eine „Viervier".

Wählt man ein syzygetisches Tetraeder als Koordinatentetraeder, so erhält die Gleichung der K_m nach *Kummer*[139]) die Gestalt (s. auch Nr. **71**)

(11) $$\varphi^2 - 16 k x_i x_k x_l x_m = 0,$$

wo

(12) $$\begin{cases} \varphi \equiv \sum x_i^2 + 2 \sum_k^m a_k (x_i x_k + x_l x_m), \\ k \equiv \sum_k^m a_k^2 - 1 - 2 a_k a_l a_m. \end{cases}$$

Aus der *Kummer*schen Gleichung (11) der K_m lassen sich die Inzidenzeigenschaften der aus den 16 D_2 und 16 Δ_2 bestehenden Figur direkt ableiten. Es zeigt sich, daß diese Eigenschaften lediglich von der relativen Lage einer Fläche 2. Ordnung φ zu einem Tetraeder (Vierflach) T_2, das als Koordinatentetraeder gewählt werde, oder auch, was auf dasselbe hinauskommt, von den zwölf Punkten, die φ aus den Kanten von T_2 ausschneidet. Dabei lassen sich diese zwölf Punkte auch ohne Bezugnahme auf eine Fläche φ direkt und elementar konstruieren.

Da die Indizes $i, k, l, \ldots$ bereits für die D_2 und Δ_2 Verwendung finden, seien Punktkoordinaten mit x_r, x_s, x_t, x_u bezeichnet, also die Ecken von T_2 mit A_r, A_s, A_t A_u, und die entsprechenden Ebenenkoordinaten mit v_r, v_s, v_t, v_u.

Unter der Koordinate irgendeines Punktes auf einer Kante von T_2, z. B. ($x_t = 0$, $x_u = 0$), sei das Verhältnis $x_{rs} = \frac{x_r}{x_s}$ verstanden, wo die Indizes stets in natürlicher Folge genommen seien. Wählt man einen beliebigen Raumpunkt als Einheitspunkt $E(1, 1, 1, 1)$, und projiziert diesen mittels einer Ebene durch irgendeine Kante auf deren Gegenkante, so heiße die Projektion auf letzterer deren (positiver) Einheitspunkt; der zugehörige negative Einheitspunkt bestimmt sich dadurch, daß das Paar der beiden Einheitspunkte harmonisch liegt zum Eckenpaar der Kante.

139) *E. E. Kummer*, Berlin Ber. 1864, p. 253.

Bezieht man die Punktreihen irgend zweier Gegenkanten, z. B. ($x_t = 0$, $x_u = 0$) und ($x_r = 0$, $x_s = 0$) derart projektiv aufeinander, daß sich die in natürlicher Folge genommenen Ecken A_r und A_s, A_t und A_u entsprechen, sowie die beiden positiven (und damit von selbst auch die beiden negativen) Einheitspunkte, so besitzen irgend zwei zugeordnete Punkte gleiche Koordinatenwerte $x_{rs} = x_{tu}$, und umgekehrt.

Die Fläche φ werde zunächst mit den drei in irgendeiner Ebene von T_2, etwa $x_u = 0$, gelegenen Kanten geschnitten. Nimmt man als Muster die Kante ($x_t = 0$, $x_u = 0$), so sind die Koordinaten der beiden Schnittpunkte die Wurzeln α, α' der Gleichung

$$x_r^2 + 2a x_r x_t + x_s^2 = 0,$$

so daß α, α' die Werte $-a \pm \sqrt{a^2 - 1}$ erhalten, wo $\alpha\alpha' = 1$, $\alpha + \alpha' = -2a$ ist. Dabei entspreche der Wert α einem beliebig, aber fest gewählten Vorzeichen der Quadratwurzel.

Analoges gelte von den Punktepaaren β, β', resp. γ, γ' der beiden anderen Kanten. Die Relation $\alpha\alpha' = 1$ besagt geometrisch, daß das Paar (α, α') harmonisch liegt zum Paare der Einheitspunkte auf der Kante usf. Vermöge der obigen Projektivitäten entstehen dann als Schnittpunkte von φ mit den drei Gegenkanten die gleich zu bezeichnenden Paare (α, α') usf.

Umgekehrt lassen sich diese sechs Punktepaare auf den Kanten von T_2 direkt und unabhängig von der Fläche φ bilden.

Man markiere auf den drei Kanten irgendeiner Ebene von T_2, z. B. $x_u = 0$, beliebig drei Punkte α, β, γ (sc. außerhalb der Ecken). Nach Wahl des Einheitspunktes E sind dann die weiteren neun Punkte auf Grund der obigen harmonischen Konstruktionen festgelegt. Bei gegebenem T_2 hängt somit die ganze Figur von sechs Konstanten ab. Nunmehr werden die zwölf Kantenpunkte zu gewissen zwölf D_2 einer K_m gemacht.

Die Indizes r, s, t, u seien so gewählt, daß der Reihe nach die Ebenen $x_u = 0$, $x_t = 0$, $x_s = 0$, $x_r = 0$ mit den Δ_2-Ebenen (0), (ik), (lm), (np) zusammenfallen, d. h. mit den Ebenen irgendeines syzygetischen Tetraeders.

Auf Grund der früheren Inzidenzschemata lassen sich dann die Koordinaten der zwölf auf den Kanten von T_2 gelegenen D_2, sowie der zwölf, sie je zu vier verbindenden Δ_2-Ebenen („Inzidenzebenen“) angeben. Dies zeigen die beiden folgenden Tabellen, wo der Einfachheit halber nur die Argumente α, β, γ verwendet sind.

(A) Tabelle der Raumkoordinaten der zwölf D_2 auf den Kanten von T_2.

	x_r	x_s	x_t	x_u
(i)	α	1	0	0
(k)	1	α	0	0
(l)	β	0	1	0
(m)	1	0	β	0
(n)	0	γ	1	0
(p)	0	1	γ	0
(ikl)	0	β	0	1
(imn)	0	1	0	β
(ikn)	γ	0	0	1
(ikp)	1	0	0	γ
(ilm)	0	0	α	1
(inp)	0	0	1	α

(B) Tabelle der Koordinaten der zwölf Inzidenzebenen.

	v_r	v_s	v_t	v_u
(il)	1	$-\alpha$	$-\beta$	$\alpha\beta$
(km)	$\alpha\beta$	$-\beta$	$-\alpha$	1
(in)	1	$-\alpha$	$\alpha\gamma$	$-\gamma$
(kp)	$\alpha\gamma$	$-\gamma$	1	$-\alpha$
(ln)	$-\gamma$	$-\beta$	$\beta\gamma$	1
(mp)	$-\beta$	$-\gamma$	1	$\beta\gamma$
(kl)	$-\alpha$	1	$\alpha\beta$	$-\beta$
(im)	$-\beta$	$\alpha\beta$	1	$-\alpha$
(kn)	$-\alpha$	1	$-\gamma$	$\alpha\gamma$
(ip)	$-\gamma$	$\alpha\gamma$	$-\alpha$	1
(nm)	$\beta\gamma$	1	$-\gamma$	$-\beta$
(lp)	1	$\beta\gamma$	$-\beta$	$-\gamma$

Die vier noch fehlenden D_2: (imp), (iln), (ilp), (imn) bilden die Ecken A_r', A_s', A_t', A_u' des zu T_2 reziproken Tetraeders (Vierecks) T_2.

Auf Grund der Tabellen (A) und (B) lassen sich die Koordinaten der vier D_2 berechnen. Setzt man zur Abkürzung

$$\mathsf{A} = \alpha + \beta\gamma, \quad \mathsf{B} = \beta + \alpha\gamma, \quad \Gamma = \gamma + \alpha\beta, \quad \Delta = \alpha\beta\gamma + 1,$$

so sind die Koordinaten der D_2 in der folgenden Tabelle enthalten.

(C) Tabelle der Koordinaten für die Ecken des reziproken Tetraeders T_2'.

	x_r	x_s	x_t	x_u
$(imp) = A_r'$	Δ	A	B	Γ
$(iln) = A_s'$	A	Δ	Γ	B
$(ilp) = A_t'$	B	Γ	Δ	A
$(imn) = A_u'$	Γ	B	A	Δ

Die Matrix der Koordinaten ist symmetrisch und hat vier gleiche Diagonalelemente Δ. Faßt man das bisherige zusammen, so hat man den Satz:

„Man wähle einen beliebigen Raumpunkt E als Einheitspunkt eines Koordinatentetraeders T_2 mit den Ecken A_r, A_r, A_t, A_u, und bestimme durch Projektion die sechs positiven Einheitspunkte auf den Kanten und damit auch die sechs negativen.

Sodann markiere man auf den drei Kanten in irgendeiner Ebene von T_2, z. B. $x_u = 0$, drei beliebige Punkte α, β, γ nebst den drei zugehörigen α', β' γ' derart, daß je ein Paar (α, α') usf. harmonisch liegt zum Paar der Einheitspunkte auf der Kante. Vermöge geeigneter projektiver Zuordnung der Punkte je zweier Gegenkanten von T_2 ergeben sich auf den drei Gegenkanten der obigen drei weitere Punktepaare mit denselben Koordinaten (α, α') usf. In jeder Ebene von T_2 liegen die drei Punktepaare auf einem Kegelschnitt C_2, und diese vier C_2 gehören einer bestimmten Fläche zweiter Ordnung φ an.

Es existieren dann zwölf Inzidenzebenen derart, daß immer vier der obigen zwölf Punkte, auf zwei Paaren von Gegenkanten, einer solchen Ebene angehören. Diese zwölf Inzidenzebenen gehen sechsmal zu zweien durch die Kanten eines zweiten Tetraeders T_2' mit den Ecken A_r', A_s', A_t', A_u'. Die zwölf Punkte, zusammen mit den vier Ecken von T_2', bilden die 16 D_2, und die zwölf Ebenen, zusammen mit den vier Ebenen von T_2, die 16 Δ_2 einer bestimmten *Kummer*schen Fläche K_m, für die T_2 und T_2' reziproke syzygetische Tetraeder sind."

Zur Bestimmung dieser K_m dient folgende Regel. Es gibt ein Büschel B von F_4, die die Ebenen von T_2 längs der Kegelschnitte C_2 berühren. Greift man in B dasjenige Individuum heraus, das irgendeine Ecke von T_2' enthält und damit von selbst die vier Ecken von T_2' als D_2 besitzt, so ist dieses Individuum die *Kummer*sche Fläche K_m mit den obigen 16 Punkten und 16 Ebenen als D_2 und Δ_2."

Mit Rücksicht auf die Reziprozität der beiden Tetraeder T_2 und T_2' wird man T_2' als ein neues Koordinatentetraeder (x_r', x_s', x_t', x_u') einführen, wo die Wahl des neuen Einheitspunktes E' noch vorbehalten bleibe.

Die einfachste aller Koordinatentransformationen, die T_2' in T_2 überführen, lautet auf Grund der Tabelle (C)

$$\text{(D)}\qquad \begin{cases} \varrho x_r = \Delta x_r' + \mathsf{A} x_s' + \mathsf{B} x_t' + \Gamma x_u' \\ \varrho x_s = \mathsf{A} x_r' + \Delta x_s' + \Gamma x_t' + \mathsf{B} x_u' \\ \varrho x_t = \mathsf{B} x_r' + \Gamma x_s' + \Delta x_t' + \mathsf{A} x_u' \\ \varrho x_u = \Gamma x_r' + \mathsf{B} x_s' + \mathsf{A} x_t' + \Delta x_u'. \end{cases}$$

Behufs Umkehrung hat man die vier verschiedenen Minoren der Koeffizientendeterminante von (D) zu berechnen. Man führe die zu den Δ, A, B, Γ „konjugierten" Werte Δ', A', B', Γ' ein gemäß

$$\text{(E)}\quad \Delta' = \alpha\beta\gamma - 1,\quad \mathsf{A}' = \alpha - \beta\gamma,\quad \mathsf{B}' = \beta - \alpha\gamma,\quad \Gamma' = \gamma - \alpha\beta,$$

so daß umgekehrt die zu den letzteren konjugierten Werte wieder die Δ, A, B, Γ werden.

Dann ergibt sich, daß die Minoren von Δ, A, B, Γ in (D) eben den konjugierten Größen (E) proportional sind.

Damit erhält man als Umkehrung der Koordinatentransformation (D)

$$\text{(D')}\qquad \begin{cases} \varrho' x_r' = \Delta' x_r + \mathsf{A}' x_s + \mathsf{B}' x_t + \Gamma' x_u \\ \varrho' x_s' = \mathsf{A}' x_r + \Delta' x_s + \Gamma' x_t + \mathsf{B}' x_u \\ \varrho' x_t' = \mathsf{B}' x_r + \Gamma' x_s + \Delta' x_t + \mathsf{A}' x_u \\ \varrho' x_u' = \Gamma' x_r + \mathsf{B}' x_s + \mathsf{A}' x_t + \Delta' x_u. \end{cases}$$

Die Reziprozität der beiden Tetraeder T_2, T_2' tritt in der Struktur von (D) und (D') deutlich hervor; die alten Koordinaten der Ecken von T_1' sind konjugiert zu den neuen Koordinaten der Ecken von T_2. Man sollte daher lieber die beiden Tetraeder als „konjugierte" statt als „reziproke" bezeichnen.

Überdies liest man aus (D) und (D') ab, daß die Einheitspunkte E, E' der beiden Tetraeder T_2, T_2' zusammenfallen.

Man bestimme jetzt die neuen Koordinaten der zwölf D_2 auf den Kanten von T_2. Es genügt, als Muster etwa den Punkt (i) auf der

Kante $x_t = 0$, $x_u = 0$ mit der Koordinate $x_{rs} = \alpha$ zu betrachten. Aus (D′) folgt für die neuen Koordinaten von (i)

$$\text{(F)} \qquad (i) \mid \quad x_r' \quad : \quad x_s' \quad : \quad x_t' \quad : \quad x_u' \\ = \alpha\mathsf{\Delta}' + \mathsf{A}' : \alpha\mathsf{A}' + \mathsf{\Delta}' : \alpha\mathsf{B}' + \Gamma' : \alpha\Gamma' + \mathsf{B}'.$$

Nach Einsetzung der Werte von $\mathsf{\Delta}'$, A', B', Γ' aus (E) vereinfachen sich die rechten Seiten von (F), so daß (F) übergeht in

$$(\mathrm{F}_1) \qquad (i) \mid \quad x_r' : x_s' : \quad x_t' \quad : x_u' \\ = \beta\gamma : 1 : -\gamma : -\beta.$$

Vergleicht man dies mit der Tabelle (B), so erkennt man, daß die neuen Koordinaten von (i) übereinstimmen mit den alten Koordinaten der Inzidenzebene (im). Fährt man so fort, so ergibt sich, daß vermöge der Korrelation

$$\text{(G)} \qquad \sigma' v_\lambda' = x_\lambda, \quad \text{oder auch} \quad \sigma v_\lambda = x_\lambda' \qquad (\lambda = r, s, t, u)$$

die neuen resp. alten Koordinaten der 16 D_2 übereinstimmen mit den alten resp. neuen Koordinaten der 16 Δ_2.

Dies läßt sich noch genauer verfolgen. Die Tabellen (A) und (B) zeigen, daß sich die zwölf Punkte D_2 auf den Kanten von T_2 in drei syzygetische Tetraeder vom Typus T_2 zerlegen, derart, daß bei jedem immer nur eines der drei Argumente α, β, γ auftritt, und entsprechend die zwölf Inzidenzebenen Δ_2 in drei syzygetische Tetraeder vom Typus T_2', derart, daß immer gerade die beiden anderen Argumente auftreten. Je eines der ersteren Tetraeder ist reziprok zu dem entsprechenden letzterem, und jedes dieser drei Tetraederpaare geht ineinander über vermöge der Korrelation (G).

Verbindet man dies mit dem früher eingeführten Begriff einer „Viervier" und seiner Reziproken, so ergibt sich durch Zusammenfassung der Satz:

„Zerlegt man die Figur der 16 D_2 und 16 Δ_2 einer *Kummer*schen Fläche K_m auf irgendeine der 20 gleichberechtigten Arten in eine Viervier syzygetischer Tetraeder und ihre reziproke, so existiert eine bestimmte Korrelation, die jedes der vier Paare reziproker Tetraeder ineinander überführt. Wählt man irgend eines dieser vier Paare als ein Paar von Koordinatentetraedern mit demselben Einheitspunkt, so läßt sich die Korrelation in der Normalform (G) darstellen."

Die auf ein Tetraeder T_2' bezogene Klassengleichung[139a]) der K_m ist also genau von derselben Form, wie die auf ein Tetraeder T_2 bezogene Ordnungsgleichung.

139a) Eine direkte Ableitung der Klassengleichung findet sich bei *A. Cayley* und *J. C. Sharp*, Ed. Times 11 (1884), p. 110.

Man vergleiche die obigen, auf dem ursprünglichen Tetraeder T_2 als Koordinatentetraeder beruhenden Rechnungen mit den ergänzenden der Nr. 59, die an das Koordinatentetraeder T_2' als ursprüngliches anknüpften.

Wir gelangen zur *Weber-Schroeter*schen linearen Konstruktion der 16 D_2 aus sechs derselben. Nach *H. Weber*[138]) lassen sich aus gewissen sechs der 16 D_2 die übrigen linear konstruieren, was *H. Schroeter*[140]) näher ausgeführt hat.

Diese Konstruktion, unter Verwendung einiger Vereinfachungen, ist folgende. Aus den 16 D_2 lassen sich sechs solche herausgreifen, die ein eigentliches Sechsek bilden (von dem keine vier Ecken inzident sind), z. B.:

$$(13)\qquad (i),\ (k),\ (l),\ (ikm) = (lnp),\ (ilm) = (knp),\ (klm) = (inp).$$

Jeder weitere D_2 aber ist mit dreien in (13) inzident.

Aus den sechs D_2 in (13) leitet man zunächst durch Verbindung acht Δ_2 ab, nach dem Schema

$$(14)\qquad \begin{cases} (0) = [(i),\ (k),\ (l)], \\ \begin{cases} (ik) = [(i),\ (k),\ (ikn)], \\ (il) = [(i),\ (l),\ (ilm)], \\ (kl) = [(k),\ (l),\ (klm)], \end{cases} \\ \begin{cases} (im) = [(i),\ (imk),\ (iml)], \\ (km) = [(k),\ (kml),\ (kmi)], \\ (lm) = [(l),\ (lmk),\ (lmi)], \end{cases} \\ (np) = [(npi),\ (npk),\ (npl)]. \end{cases}$$

Hieraus gewinnt man wieder zwei weitere D_2, (m) und (ikl), als Schnittpunkte dreier Ebenen

$$(15)\qquad \begin{cases} (ikl) = [(ik),\ (il),\ (kl)], \\ (m) = [(im),\ (km),\ (lm)]. \end{cases}$$

Damit sind jetzt acht D_2 und acht Δ_2 bekannt.

Um zu den beiden weiteren D_2, (n) und (p), zu gelangen, betrachte man in der Ebene (0) die vier bekannten D_2 $(i), (k), (l), (m)$. Auch die Verbindungsgerade c_{np} der beiden gesuchten D_2, (n) und (p), kennt man als Schnittlinie der Δ_2-Ebenen (0) und (np).

140) *H. Schröter,* J. f. Math. 100 (1887), p. 231. Eine einfache lineare Konstruktion gibt auch *Th. Reye,* J. f. Math. 86 (1878), p. 209. Ausgehend von einem (räumlichen) Sechseck legt er den Satz zugrunde, daß durch ein Fünfeck ein Polarsystem bestimmt wird. Von den Eigenschaften der *Kummer*schen Konfiguration wird hierbei nichts vorausgesetzt, vielmehr werden jene aus der Konstruktion selbst hergeleitet.

Nun sollen die sechs D_2 in der Ebene (0) einer $c_2 = c_2^{(n,p)}$ angehören.

Das Kegelschnittbüschel mit den vier Grundpunkten (i), (k), (l), (m) schneidet daher auf der Geraden c_{np} eine Jnvolution J aus, der das gesuchte Paar (n), (p) als Elementenpaar angehören muß. Diese Überlegung wiederhole man entsprechend für die Ebene (np). In dieser liegen die vier bekannten D_2

(16) $(npi) = (klm)$, $(npk) = (ilm)$, $(npl) = (ikm)$, $(npm) = (ikl)$.

Wiederum sollen diese vier Punkte mit den beiden Restpunkten (n), (p) einer $c_2' = c_2'^{(np)}$ angehören. Legt man daher ein zweites Kegelschnittbüschel in der Ebene (np) mit den vier Punkten (16) als Grundpunkten, so schneidet dieses aus der Geraden c_{np} ebenfalls eine Involution J' aus, der das gesuchte Paar (n), (p) als Elementenpaar angehören muß. Damit ergibt sich aber das gesuchte D_2-Paar (n), (p) auf der Geraden c_{np} als das den beiden Involutionen J und J' gemeinsame Punktepaar, das sich in diesem Falle linear konstruieren läßt.

Die noch fehlenden D_2 und Δ_2 erhält man nunmehr ohne weiteres je als Schnittpunkte von drei bekannten Δ_2-Ebenen, resp. als Verbindungsebenen von drei bekannten D_2.

Hiermit ist die gewünschte lineare Konstruktion geleistet. Man beachte noch, wie sich bei Entwicklung dieser Konstruktion die der Reihe nach auftretenden 16 D_2 und 16 Δ_2 von selbst zu einer Viervier aufbauen. Es genüge die Betrachtung der D_2. Vermöge (14) und (15) war man zu acht bekannten D_2 gelangt

(17) (i), (k), (l), (ikl); (m), (ikm), (ilm), (klm).

Diese beiden Quadrupel bilden bereits zwei azygetische Tetraeder. Ordnet man die acht übrigen, nunmehr ebenfalls bekannten D_2 in zwei Quadrupeln wie folgt

$$(17') \qquad \begin{cases} (ikn), & (iln), & (imn), & (p), \\ (ikp), & (ilp), & (imp), & (n), \end{cases}$$

so bilden diese wiederum zwei azygetische Tetraeder, und in (17) und (17′) zusammen hat man die in Rede stehende Viervier.

Die Figur der 16 D_2 und 16 Δ_2 wird als „*Kummer*sche Konfiguration" bezeichnet. Diese ist weiterhin, unter den mannigfaltigsten Gesichtspunkten, auch ganz unabhängig von der *Kummer*schen Fläche K_m, weiter verfolgt worden.[141])

141) *F. Klein,* Math. Ann. 2 (1869), p. 198; 5 (1872), p. 295; 27 (1886), p. 106. *E. Caporali,* Rom Linc. Mem. (2) 1878. *Th. Reye,* J. f. Math. 86 (1878),

69. Liniengeometrische Behandlung der Kummerschen Fläche. Die Kummersche Fläche als Singularitätenfläche eines quadratischen Komplexes und als Brennfläche einer quadratischen Kongruenz. Die Fläche K_m tritt unter zwei Gesichtspunkten in der Liniengeometrie auf, einmal als Singularitätenfläche quadratischer Komplexe K_2, andererseits als Brennfläche gewisser quadratischer Kongruenzen $\mathfrak{K}_2$.

Ein quadratischer Komplex K_2 wird nach *J. Plücker*[142]) durch eine quadratische Gleichung zwischen Linienkoordinaten geliefert. Hieraus geht hervor, daß die durch irgendeinen Punkt P laufenden Geraden von K_2 die Kanten eines quadratischen Ordnungskegels sind, und dual die in irgendeiner festen Ebene E gelegenen Geraden von K_2 die Tangenten eines Klassenkegelschnitts sind.

Legt man jetzt dem Kegel resp. Kegelschnitt die Bedingung auf, zu zerfallen — in ein Paar von Ebenen resp. Punkten —, so ist der Ort der Punkte P eine Fläche 4. Ordnung F_4, und die Enveloppe der Ebenen E eine Fläche 4. Klasse P_4.

Aber diese beiden Flächen fallen nach *F. Klein*[143]) zusammen, und zwar in eine in sich duale, allgemeine *Kummer*sche Fläche K_m, und diese heißt daher die „Singularitätenfläche" des Komplexes K_2. Die K_m erscheint zugleich als Singularitätenfläche von ∞^1 K_2 (siehe Nrr. **70**, **71**).

Die Gleichung der K_m geht direkt aus irgendeiner der 15 gleichberechtigten Normalgleichungen des K_2 hervor. Die K_m ist gemäß der Definition der Singularitätenfläche der Ort der Punkte, deren Komplexkegel in ein Ebenenpaar degeneriert. Für $p_{ik} = (xy)_{ik}$ lautet eine Normalgleichung des K_2

$$(1) \qquad K_2 = a_{12}p_{12}^2 + \cdots + a_{34}p_{34}^2 + 2ap_{12}p_{34} + 2bp_{23}p_{14} + 2cp_{31}p_{24} = 0.$$

Man denke sich nach den y geordnet und dann die Diskriminante $\Delta(y) = \Delta$ gleich Null gesetzt. Es ist Δ eine dreireihige Determinante

p. 84, 209. *R. de Paolis,* Rom Linc. Rend. (4) 6_2 (1890), p. 3. *E. Ciani,* Giorn. di mat. 34 (1896), p. 177; Ist. Lomb. Rend. 35 (1897), p. 235; Giorn. di mat. (36) (1898), p. 68; Ann. di mat. (3) 2 (1898), p. 53. *V. Martinetti,* Giorn. di mat. 34 (1896), p. 192; 35 (1897), p. 235; Palermo Rend. 16 (1902), p. 196. *H. E. Timerding,* Math. Ann. 54 (1901), p. 498. *L. Berzolari,* Rom. Linc. Rend. 16_1 (1907), p. 726; Palermo Rend. 24 (1907), p. 1.

142) *J. Plücker,* Neue Geometrie des Raumes 1 (1868); 2 (1869), hrsg. von *F. Klein,* Leipzig. Bezüglich der im folgenden zur Verwendung kommenden liniengeometrischen Hilfsmittel sei auf den Art. III C 8, *K. Zindler,* Algebraische Liniengeometrie, verwiesen.

143) *F. Klein,* Math. Ann. 2 (1870), p. 218.

von der Struktur

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} \Delta \equiv a_{12}x_2^2 + a_{13}x_3^2 + a_{14}x_4^2, & -a_{12}x_2x_2 + (b-c)x_3x_4, \\ & -a_{13}x_1x_3 + (a-b)x_2x_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}.$$

Entwickelt man rechts, und führt noch neue Koordinaten X_i ein vermöge

$$(3)\qquad X_i = x_i \sqrt[4]{a_{ik}a_{il}a_{im}},$$

so ergibt sich die Gleichung der K_m in der einfachen Form

$$(4)\qquad K_m \equiv \sum X_i^4 + \sum a(X_1^2 X_2^2 + X_3^2 X_4^2) + \nu X_1 X_2 X_3 X_4 = 0.$$

Dies ist aber gerade die Struktur der *Göpel*schen Relation zwischen vier ϑ-Funktionen (s. Nrr. **69** u. **71**).

Auf andere Weise geht *Cayley*[144]) vor, der die Kenntnis der 16 D_2 voraussetzt (s. Nr. **68**). Er zeigt zunächst, daß sich die Koordinaten der 16 D_2 der K_m bei geeigneter Wahl des Koordinatentetraeders durch nur vier Größen α_i, α_k, α_l, α_m ausdrücken lassen.

Man gehe von der natürlichen Anordnung $(\alpha_i, \alpha_k, \alpha_l, \alpha_m)$ aus, und leite aus ihr durch Umstellung die drei weiteren her

$$(\alpha_k, \alpha_i, \alpha_m, \alpha_l), \quad (\alpha_l, \alpha_m, \alpha_i, \alpha_k), \quad (\alpha_m, \alpha_l, \alpha_k, \alpha_i).$$

Aus jedem dieser vier Quadrupel gehen drei andere nach der nämlichen Regel hervor: Man halte das erste Element fest und ändere von je zweien der drei folgenden das Vorzeichen, z. B. beim ersten Quadrupel

$$(\alpha_i, \alpha_k, \alpha_l, \alpha_m), \quad (\alpha_i, \alpha_k, -\alpha_i, -\alpha_m), \quad (\alpha_i, -\alpha_k, \alpha_l, -\alpha_m),$$
$$(\alpha_i, -\alpha_k, -\alpha_l, \alpha_m).$$

Dann hat man in diesen 16 Quadrupeln gerade die Koordinaten der 16 D_2. *Cayley* bildet dann direkt die Gleichung der K_m. Führt man noch mit *Borchardt* (s. Nr. **71**) gewisse lineare Verbindungen p, q, r, s der Koordinaten als neue ein, so erkennt man, daß die Form der *Cayley*schen Gleichung keine andere ist als die ursprünglich von *Kummer* aufgestellte (s. Nr. **68**)

$$(5)\qquad \Phi^2 - 16\, Kpqrs = 0,$$

wo, für a, b, c als Konstante, Φ und K die Ausdrücke sind

$$(6)\qquad \begin{cases} \Phi \equiv \sum p^2 + \sum 2a(ps + qr), \\ K \equiv a^2 + b^2 + c^2 - 2abc - 1. \end{cases}$$

Sei g eine nicht zu K_2 gehörige Gerade, so wird g von unendvielen Geraden von K_2 getroffen, die man nach obigem entweder in

144) *A. Cayley*, J. f. Math. 73 (1871), p. 292.

Scharen von Kegelschnittstangenten oder von Erzeugenden quadratischer Kegel ordnen kann, so umhüllen[145]) diese Treffgeraden eine „zu g gehörige *Plücker*sche Komplexfläche". Es soll deren Gleichung gebildet werden.

Für $p_{ik} = y_i z_k - y_k z_i$ sei die Gleichung des Komplexes K_2

$$K_2 \equiv \varphi(p_{ik}) = 0. \tag{7}$$

Ist weiter (w) irgendein Raumpunkt, so betrachte man einen laufenden Punkt $(z + \lambda w) = (\lambda)$ auf der Geraden $\{(z), (w)\}$. Der Komplexkegel dieses Punktes (λ) ist dargestellt durch

$$\varphi\{y_i(z_k + \lambda w_k) - y_k(z_i + \lambda w_i)\} \equiv \varphi_{zz} + 2\lambda\varphi_{zw} + \lambda^2\varphi_{ww} = 0, \tag{8}$$

eine in den y quadratische Gleichung, die durch das Wertsystem $(z + \lambda w)$ doppelt erfüllt wird; andererseits läßt sich (8) auch als eine in λ quadratische Gleichung ansehen.

Bildet man in letzterem Sinne die Diskriminante D_λ bez. λ und setzt sie gleich Null

$$D \equiv \varphi_{zz}\varphi_{ww} - (\varphi_{zw})^2 = 0, \tag{9}$$

so hat man die Komplexfläche; sie ist von der Ordnung 4 und gemäß der dualen Natur der Linienkoordinaten auch von der Klasse 4.

Die acht Grundpunkte des F_2-Netzes $\varphi_{zz} = 0$, $\varphi_{zw} = 0$, $\varphi_{ww} = 0$ sind D_2 der Fläche; durch sie gehen die Komplexkegel der Punkte von g. Es ist also g eine Doppelgerade der Fläche, die Punkte in ihr sind Doppelpunkte ihrer ebenen Schnitte, und die Ebenen durch sie Doppelebenen ihrer Berührkegel.

Den acht D_2 entsprechen dual acht Doppeltangentialebenen Δ_2, die längs Kegelschnitten berühren und von den Komplexkegelschnitten in den Ebenen der Geraden berührt werden. Für eine Ebene durch g und einen der D_2 reduziert sich der Komplexkegelschnitt auf den Punkt D_2 und einen weiteren Punkt, d. h. die acht D_2 liegen viermal zu zweien in Ebenen durch g. Entsprechend gehen die acht Δ_2 viermal zu je zweien durch Punkte auf g. Jene sind die singulären Ebenen $\mathsf{E}_1, \ldots, \mathsf{E}_4$, diese die singulären Punkte $E_1, \ldots, E_4$ von g.

Die Verbindungslinien s_i der den E_i angehörigen Paare (i, i') von D_2 treffen g in vier Punkten P_i; der zu P_i bez. der beiden D_2 vierte harmonische Punkt sei P_i'. Dualistisch seien σ_i die Schnittlinien der durch die E_i gehenden Paare der Δ_2: $[i, i']$.

Die Δ_2 enthalten je vier D_2, und durch die D_2 gehen je vier Δ_2. Dann lassen sich die acht D_2 den acht Δ_2 mittels linearer Komplexe

145) *J. Plücker*[142]), 1, p. 168f. Als eine spezielle F_4 mit einer $\bar{g}$ (s. Nrr. **33**, **36**) wird die Komplexfläche auf eine Ebene abgebildet von *F. Klein*, Math. Ann. 2 (1869), p. 371; vgl. *A. Cayley*, London Math. Soc. Proc. 3 (1871), p. 281.

so zuordnen, daß jedem D_2 die vier Δ_2 entsprechen, in denen er liegt. Dabei sind die singulären E_i den singulären E_i, und die singulären s_i den singulären σ_i durch denselben Komplex zugeordnet. Mithin ist in bezug auf ihn das ganze Singularitätensystem, und überhaupt die ganze Komplexfläche sich selbst konjugiert. So sind das Büschel der singulären Ebenen und die Reihe der singulären Punkte einander projektiv (s. auch Nr. **36**).

Wir kommen jetzt zur Auffassung der K_m als Brennfläche. Ein (algebraisches) quadratisches Strahlensystem (Kongruenz) $\mathfrak{K}_2$ ist definiert als Gesamtheit von ∞^2 Geraden g derart, daß durch jeden Punkt zwei der g gehen und in jeder Ebene zwei der g liegen. Jede Gerade g der $\mathfrak{K}_2$ wird von zwei benachbarten „getroffen", d. h. genauer, der kürzeste Abstand ist von der dritten Ordnung unendlich klein; der Fußpunkt dieses Abstandes auf g ist dann der obige „Treffpunkt" und heißt „Brennpunkt".

Es gibt also auf jeder Geraden der $\mathfrak{K}_2$ zwei Brennpunkte; deren Ort ist die zweimantlige „Brennfläche". Diese Brennfläche einer $\mathfrak{K}_2$ erweist sich als identisch mit der K_m[146]); die Geraden der $\mathfrak{K}_2$ sind die Doppeltangenten der K_m. Umgekehrt läßt sich eine vorgelegte K_m noch auf sechs verschiedene Arten als Brennfläche einer $\mathfrak{K}_2$ ansehen. Die sechs zugehörigen linearen Komplexe (s. Nr. **70**) sind paarweise in Involution.

Aus der Auffassung der K_m als Singularitätenfläche eines K_2 ergibt sich eine Reihe bemerkenswerter Folgerungen. Die schon oben betonte Dualität der Fläche in sich äußert sich einmal in den Eigenschaften der *Kummer*schen Konfiguration der $16\,D_2$ und $16\,\Delta_2$ (s. Nr. **68**).

Sodann ist nach *F. Klein*[147]) für irgendeine Gerade g das Doppelverhältnis ihrer vier Schnittpunkte A_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ mit der K_m gleich dem Doppelverhältnis der vier an die Fläche gehenden Tangentialebenen B_i. *Klein*[147]) gibt für diesen Satz auch einen direkten Beweis.

Im allgemeinen Falle, wo g dem K_2 nicht angehört und die vier Punkte A_i getrennt sind, zerfällt für jeden A_i der Komplexkegel in ein Ebenenpaar (α_i, α_i') und für jede Ebene B_i die Komplexkurve in ein Punktepaar (B_i, B_i'). Die acht Punkte B_i, B_i', und die acht Ebenen α_i, α_i' bilden eine Konfiguration 8_4. Die ersteren sind die acht D_2 der Komplexfläche; die Verbindungslinien (B_i, B_i') und die Schnittachsen (α_i, α_i') gehören der Komplexfläche an. Modifikationen treten ein, wenn z. B. g dem K_2 angehört, wo dann vier der acht D_2 in die Punkte A_i fallen.

146) *F. Klein* und *S. Lie,* Berlin Ber. 1870, p. 891 = Math. Ann. 23 (1884), p. 579. Vgl. auch Nrr. **67**, **70**.

147) *F. Klein,* Math. Ann. 7 (1874), p. 208.

Weitere Besonderheiten finden statt, wenn g die K_m berührt, wo *F. Klein*[148]) sieben Fälle unterscheidet.

Ferner führte die Auffassung der K_m als Singularitätenfläche *F. Klein*[149]) zu dem Satze, daß es 16 Kollineationen und 16 Korrelationen gibt, die die K_m in sich überführen.

Im Zusammenhange mit gewissen, der K_m zugleich ein- und umbeschriebenen Konfigurationen (s. Nr. **72**) gelangte *F. Klein*[150]) zu 32 weiteren solchen „automorphen" Transformationen der K_m.

G. Fano[151]) legte sich die Frage vor, ob damit alle automorphen Transformationen der K_m erschöpft seien. Dies ist nicht der Fall; er fand vielmehr, daß noch unendlich viele weitere solcher Transformationen existieren. Er geht dabei von allgemeineren Gesichtspunkten aus. Die Grundlage wird durch den Satz gebildet, daß, wenn auf einer F_4 vom Geschlechte 1 eine Kurve C_n vom Geschlechte 2 liegt, so auch ein ganzes Netz solcher (s. auch Nr. **3**). Die Kurven dieses Netzes schneiden sich je in den Punktepaaren einer rationalen Involution J, die eine Abbildung der F_4 auf eine Doppelebene mit einer Verzweigungskurve c_6 gestattet (vgl. Nr. **19**). Die Geraden, die die Punktepaare von J verbinden, bilden eine rationale Kongruenz. Dies findet seine Anwendung auf den besonderen Fall $n = 6$, der u. a. durch eine K_m realisiert wird. Dann ergibt sich, daß die K_m ∞^1 birationale automorphe Transformationen gestattet, die eine diskrete Gruppe bilden. Hiermit wird die Auffassung als Brennfläche einer quadratischen Kongruenz $\mathfrak{K}_2$ verknüpft (s. oben). Im besonderen erzeugen dann die sechs zugehörigen J eine Gruppe G_{32} von 32 birationalen automorphen Transformationen, von denen 16 mit den 16 *Klein*schen Kollineationen zusammenfallen. Diese G_{32} führt auch jede Haupttangentenkurve der K_m in sich über (s. Nr. **70**).

70. Die Haupttangentenkurven der Kummerschen Fläche. Von liniengeometrischen Gesichtspunkten ausgehend haben *F. Klein* und *S. Lie*[152]) die Haupttangentenkurven der K_m untersucht. Als Grundlage diente die ∞^1-Schar (s. Nr. **69**) der quadratischen Komplexe K_2, deren jeder dieselbe K_m zur Singularitätenfläche besitzt.

---

148) *F. Klein* bei *J. Plücker*[142]) im letzten Abschnitt von Bd. 2.

149) *G. Klein,* Math. Ann. 2 (1870), p. 218. Die 16 Kollineationen bilden eine Gruppe G_{16}, deren vollständiges Invariantensystem *E. Study* aufgestellt hat, Leipzig Ber. 44 (1892), p. 122.

150) *F. Klein,* Math. Ann. 27 (1887), p. 142.

151) *G. Fano,* Lomb. Ist. Rend. (2) 39 (1906), p. 1071.

152) *F. Klein* und *S. Lie*, Berlin Ber. 1870, p. 891 = Math. Ann. 23 (1884), p. 579. Vgl. weiter *S. Lie,* Math. Ann. 5 (1871), p. 145; *F. Klein,* ib. p. 257, 278.

Für irgendeinen der K_2 liegen die beiden Punkte, die in einer Tangentialebene T der K_m die ausgeartete Komplexkurve repräsentieren, auf der Schnittkurve (T, K_m) und liegen zugleich mit dem Berührungspunkte der T auf einer Geraden, der zugehörigen „singulären" Geraden.

Durchlaufen diejenigen Punkte der K_m, deren singuläre Gerade eine Haupttangente ist, eine Haupttangentenkurve, die sich als eine $C_{16} = \Gamma_{16}$ erweist, so gehört zu jedem der ∞^1 erzeugenden K_2 eine Haupttangentenkurve der K_m, womit ihre Gesamtheit erhalten wird.

Jede dieser Kurven hat 16 Spitzen in den 16 D_2, und 16 stationäre Ebenen in den 16 Δ_2 der K_m, sowie $6 \cdot 16 = 96$ stationäre Tangenten. Entsprechend den in der ∞^1-Schar der K_2 enthaltenen sechs doppelt zählenden linearen Komplexen K_1 gibt es sechs ausgezeichnete Haupttangentenkurven $C_8 = \Gamma_8$, ohne Spitzen und stationäre Ebenen.

Andererseits erscheint die K_m auch als Brennfläche (s. Nr. **69**) eines je einem der sechs K_1 angehörigen Geradensystems des einen Systems seiner Doppeltangenten.

F. Klein[153]) vollzieht auf Grund seiner vier Parameter einer Geraden (s. Nr. **71**) eine direkte Integration der Differentialgleichung der Haupttangentenkurven.

S. Lie[154]) legt seine später so bekannt gewordene „Geraden-Kugel-Transformation" zugrunde, eine Berührungstransformation, die inzidente Gerade in sich berührende Kugeln überführt, und die Krümmunglinien einer Fläche in die Haupttangentenkurven einer anderen. Auf diesem Wege werden von neuem die wesentlichsten Eigenschaften der Haupttangentenkurven der K_m gewonnen.

Unter Benutzung der *Klein*schen Linienkoordinaten liefert *Th. Reye*[155]) einen neuen, rechnerischen Beweis für den Hauptsatz von *Klein* und *Lie*. Überdies gelangt er so zu weiteren Angaben für die charakteristischen Anzahlen der Haupttangentenkurven. Eine solche ist vom Geschlechte 17, vom Range 48 und besitzt 72 scheinbare Doppelpunkte.

Für die sechs ausgezeichneten Kurven reduzieren sich diese Anzahlen auf resp. 5, 24, 16. Ferner wird festgestellt, daß sich die Berührungspunkte der 96 stationären Tangenten gleichmäßig auf die

153) *F. Klein,* Göttinger Nachr. 1871, p. 44.

154) *S. Lie,* Kristiania Verh. S. 1871, p. 57, 182. Bezüglich der Geraden-Kugeltransformation vgl. etwa die elementare Darstellung bei *F. Klein*, Vorlesungen über höhere Geometrie. 3. Aufl., Berlin, hrsg. von *W. Blaschke,* § 71.

155) *Th. Reye,* J. f. Math. 97 (1884), p. 242. Über die eingeschlagene Methode vgl. auch die voraufgehende Arbeit, ib. 95 (1883), p. 330.

sechs ausgezeichneten Haupttangentenkurven verteilen. Überdies wird eine vollständige Ableitung der verschiedenen Gleichungsformen gegeben.

Das Hauptergebnis ist aber der Satz, daß sich die Hauptangentenkurven der K_m durch F_4 ausschneiden lassen. Genauer ist jede dieser Kurven die Grundkurve eines F_4-Büschels, und diese ∞^1-Büschel gehören einem Netze an.

Die verwickelte Rechnung, die zu diesem Satze führt, hat *C. Segre*[156]) durch einfache synthetische Betrachtungen ersetzt.

Daß die Haupttangentenkurven der K_m nach *G. Fano* durch die 32 linearen *Klein*schen automorphen Transformationen in sich übergehen, ist schon in Nr. **69** betont worden.

71. Transzendente Behandlung der Kummerschen Fläche. *C. W. Borchardt*[157]) hat die K_m durch die *Göpel*sche biquadratische Relation zwischen vier ϑ-Funktionen mit zwei Variabeln dargestellt. *Göpel*[158]) hatte gewisse 16 ϑ-Funktionen aufgestellt, die durch einfache Substitutionen in die 16 entsprechenden *Weierstraß*schen $\vartheta(v_1, v_2)$ in zwei Argumenten v_1, v_2 übergehen. Diese zerlegen sich in sechs „gerade" $\vartheta_{i5}^{\cdot}$ $(i = 0, \ldots, 5)$, und zehn „ungerade" ϑ_{rs} $(r \neq s, r, s = 0, \ldots, 4)$. „Nullwerte" heißen die 16 hieraus für $v_1 = v_2 = 0$ hervorgehenden Funktionswerte.

Vermehrt man die v_1, v_2 um „Perioden", so bleiben die ϑ-Verhältnisse, bis auf das Vorzeichen, ungeändert. Vermehrt man um halbe Perioden, so gehen aus irgendeinem der ϑ die 15 übrigen, jeweils bis auf einen gewissen Exponentialfaktor, hervor.

Göpel hat gewisse 60 Systeme von je vier der ϑ herausgehoben, die durch eine homogene biquadratische Relation verbunden sind. Je vier dieser „*Göpel*schen" Relationen gehen aus einander durch Vermehrung der Argumente um halbe Perioden hervor; eine von solchen vier Relationen enthält nur gerade ϑ, die anderen zwei gerade und zwei ungerade, und in den vier Relationen treten alle 16 ϑ auf.

Als Repräsentanten kann man die erste Relation wählen; solcher Repräsentanten gibt es also 15. Bezeichnet man die vier in einer solchen Relation auftretenden ϑ mit x, y, z, w, deren Nullwerte mit x_0, y_0, z_0, w_0, so schreibe man die Relation kurz

$$\Phi(x, y, z, w;\ x_0, y_0, z_0, w_0) = 0. \tag{I}$$

156) *C. Segre,* J. f. Math. 98 (1885), p. 301.

157) *C. W. Borchardt,* J. f. Math. 83 (1877), p. 234. Bezüglich der im folgenden zur Verwendung gelangenden Hilfsmittel aus der Theorie der ϑ-Funktionen sei auf die Artikel II B 6, 7 von *A. Krazer* und *W. Wirtinger* verwiesen.

158) *A. Göpel,* J. f. Math. 35 (1847), p. 277.

Dann verschwindet nicht nur die Form Φ für $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, $w = w_0$, sondern auch ihre ersten partiellen Ableitungen Φ_x, Φ_y, Φ_z, Φ_w. Deutet man jetzt x, y, z, w als homogene Koordinaten eines Raumpunktes P, so stellt $\Phi = 0$ eine F_4 dar, die in $P_0(x_0, y_0, z_0, w_0)$ einen D_2 besitzt. Da die Form Φ aber bei gewissen Vertauschungen der Variablen ungeändert bleibt, so gehen aus P_0 noch 15 weitere D_2 der F_4 hervor. Diese F_4 erweist sich daher als die *Kummer*sche Fläche K_m. Führt man Linearverbindungen der x, y, z, w als neue Koordinaten p, q, r, s ein und setzt, unter a, b, c Konstante verstanden,

$$(1) \qquad \begin{cases} \varphi \equiv \sum r^2 + 2 \sum a(ps + qr), \\ K \equiv \sum a^2 - 2\,abc - 1, \end{cases}$$

so geht (I) über in die *Kummer*sche Gleichung der K_m (s. Nr. 68)

$$(\mathrm{I}') \qquad F_4 \equiv \varphi^2 - 16\,Kpqrs = 0.$$

Somit lassen sich die nichthomogenen Koordinaten eines Punktes der Fläche darstellen als ϑ-Quotienten.

Es sei noch bemerkt, daß sich diese ϑ-Quotienten nach Formeln, die *Rosenhain*[159]) aufgestellt hat, ersetzen lassen durch algebraische Funktionen zweier Parameter ξ, η, die nur Quadratwurzeln aus ganzen Funktionen je eines dieser Paramter von einer Ordnung $\leqq 6$ enthalten.

Im wesentlichen zu denselben Ergebnissen gelangt *A. Cayley*[160]) auf einem anderen Wege. Auch er legt die 16 Gleichungen zugrunde, die *Göpel* für die Quadrate der 16 $\vartheta(u, u')$ gegeben hat. Aus ihnen hatte *Göpel* zunächst zwischen je fünf der ϑ^2 lineare Relationen hergeleitet, die sich aber nach *Rosenhain* auf solche zwischen nur vier ϑ^2 reduzieren lassen.

Cayley stellt letztere Relationen direkt auf, und zeigt ihren Zusammenhang mit der *Kummer*schen Fläche K_m. Hierbei entsprechen die 16 ϑ^2 den 16 D_2 der Fläche; linear verbundene ϑ^2 entsprechen solchen D_2, die in derselben singulären Tangentialebene (Doppelebene) Δ_2 liegen.

Ferner lassen sich nach *Göpel* und *Rosenhain* die Verhältnisse je zweier der 16 ϑ^2 rational ausdrücken durch x, x' und eine quadratische Irrationalität $\sqrt{X}$ resp. $\sqrt{X'}$, wo X von der Form ist

$$X \equiv x(1-x)(1-lx)(1-mx)(1-nx).$$

Cayley legt statt dessen die allgemeine Form 6. Ordnung X zugrunde vom Typus

$$(2) \quad \begin{cases} X \equiv f_3(x)\,g_3(x), \\ f_3(x) \equiv (a-x)(b-x)(c-x), \quad g_3(x) \equiv (d-x)(e-x)(f-x). \end{cases}$$

159) *G. Rosenhain*, J. f. Math. 28 (1844), p. 249; 29 (1845), p. 1.

160) *A. Cayley*, J. f. Math. 83 (1877), p. 210, 220; 84 (1877), p. 235.

Dann wurden die 16 ϑ^2 proportional einmal sechs Formen vom Typus $[a] \equiv (a-x)(a-x')$, andererseits zehn Irrationalitäten vom Typus

(3) $$[fg] \equiv \left(\frac{1}{x-x'}\right)^2 \left\{\sqrt{f_3(x)g_3(x')} - \sqrt{f_3(x')g_3(x)}\right\}.$$

Cayley fügt eine Tabelle dieser Funktionen $[a]$, $[fg]$ hinzu für die besonderen Werte von $x, x' = 0, \infty, ab, ac$ usf. Auf dieser Grundlage wird dann *Borchardts* Darstellung der *Kummer*schen Fläche K_m mittels der *Göpel*schen biquadratischen Relationen zwischen vier gewissen ϑ^2 in modifizierter Form von neuem abgeleitet.

Diese Untersuchungen von *Borchardt* und *Cayley* setzt *H. Weber*[161]) in Beziehung zu den Charakteristiken der $\vartheta(v_1, v_2)$ in zwei Argumenten v_1, v_2. Diese Untersuchung ist zunächst analog mit den von ihm früher[162]) für die *Abel*schen Funktionen vom Geschlecht 3 durchgeführten Entwickelungen.

Die $\vartheta(v_1, v_2)$ mit der Charakteristik $\begin{Bmatrix} g_1, & g_2 \\ h_1, & h_2 \end{Bmatrix} = [gh]$ werden mittels bekannter Doppelsummen definiert. Eine Charakteristik $[g, h]$ heißt gerade oder ungerade, je nachdem $g_1 h_1 + g_2 h_2$ gerade oder ungerade ist; je nachdem sind die $\vartheta(v_1, v_2)$ gerade oder ungerade Funktionen der v_1, v_2. Es gibt sechs gerade und zehn ungerade Charakteristiken; die ersteren seien bezeichnet mit (β_i) $(i = 1, \ldots, 6)$.

Unter der Summe $(\omega + \omega')$ zweier Charakteristiken $(\omega) = (g, h)$ und $(\omega') = (g', h')$ werde die neue

$$(\omega + \omega') = \begin{Bmatrix} g_1 + g_1', & h_1 + h_1' \\ g_2 + g_2', & h_2 + h_2' \end{Bmatrix},$$

bei Reduktion der Elemente mod. 2 verstanden.

Für diese Summen werden fünf einfache Verbindungs- und Zerlegungsgesetze aufgestellt. Mit Hilfe dieser Gesetze wird gezeigt, daß sich 16 Systeme von je sechs ϑ^2 finden lassen derart, daß zwischen je vier ϑ^2 eines Systems eine homogene lineare Gleichung besteht.

Ferner besteht zwischen drei Produkten von je zwei ϑ mit derselben Charakteristikensumme eine homogene lineare Relation; solcher gibt es 120. Hieraus lassen sich die *Göpel*schen Relationen 4. Ordnung ableiten.

Die Beziehung zu den hyperelliptischen Integralen wird gewonnen, indem man zwei solche für v_1 und v_2 einsetzt

(4) $$v_1 = \int_{z_1}^{z_2} \frac{f_1(z)\,dz}{\sqrt{f_6(z)}}, \quad v_2 = \int_{z_1}^{z_2} \frac{g_1(z)\,dz}{\sqrt{f_6(z)}},$$

161) *H. Weber*, J. f. Math. 84 (1878), p. 332.

162) *H. Weber*, Preisschrift Berlin 1876.

wo f_1, g_1 binäre Formen in z der 1. Ordnung sind, $f_6(z)$ eine solche der 6. Ordnung. Dann lassen sich die Quotienten zweier ϑ algebraisch durch z_1 und z_2 darstellen.

Setzt man jetzt irgend vier der ϑ^2 proportional Punktkoordinaten p, q, r, s, so erhält man eine F_4 mit v_1, v_2 als Parametern. Das Nullsetzen irgendeiner ϑ liefert einen ebenen Schnitt der F_4. Für die F_4 ergeben sich 120 gleichberechtigte Darstellungen. Die F_4 ist die allgemeinste mit 16 D_2, also die *Kummer*sche Fläche K_m. Die obigen 16 ebenen Schnitte sind Doppel-C_2, die je sechs D_2 tragen.

Von diesen 16 Doppelebenen Δ_2 gehen 16 mal je sechs durch einen D_2; mittels der Charakteristiken läßt sich entscheiden, ob eine bestimmte Δ_2 durch einen bestimmten D_2 geht, oder nicht.

Bezüglich der Lagenverhältnisse der Δ_2 und D_2 (s. Nr. **68**) ergibt sich weiter:

1. Durch irgend zwei D_2 gehen zwei Δ_2;
2. die Tripel von D_2 zerfallen in zwei Klassen von 320 resp. 240, je nachdem ihre Ebene eine Δ_2 ist, oder nicht;
3. die Quadrupel (Tetraeder T) von vier D_2 zerfallen in drei Klassen;
   a) 80 „T_1 erster Art" mit vier D_2, die zusammen alle 16 D_2 enthalten;
   b) 60 „T_2 zweiter Art", ohne Δ_2;
   c) 1440 „T_3 dritter Art" mit genau zwei Δ_2.

Die 16 D_2 lassen sich auf 15 Arten in vier T_2 zusammenfassen, deren jedes die drei anderen bestimmt. Zwischen gewissen Systemen von sechs D_2 bestehen gewisse projektive Beziehungen; stehen sechs D_2 nicht in einer solchen Beziehung, so bilden je vier derselben ein T_2.

Das Hauptergebnis ist dann: „Aus sechs D_2 der letzteren Art lassen sich die übrigen linear konstruieren." Diese Konstruktion hat *H. Schroeter*[163]) im einzelnen ausgeführt (s. Nr. **68**). Das der K_m polar entsprechende Gebilde ist wieder eine K_m.

Am Schlusse wird der Sonderfall der Wellenfläche W_l (s. Nr. **73**) und ihrer projektiven Umformungen behandelt, wo viermal vier D_2 in einer Ebene liegen. Die entsprechenden ϑ gehen vermöge einer quadratischen Transformation in elliptische über.

Die vielseitigste hierher gehörige Untersuchung verdankt man *K. Rohn.*[164]) Sie nimmt ihren Ausgang von der Liniengeometrie (s. Nr. **69**). Sind $x_i = 0$ $(i = 1, \ldots, 6)$ sechs lineare, je in Involution

163) *H. Schroeter,* J. f. Math. 100 (1887), p. 231.

164) *K. Rohn,* Dissert. München 1878. *Rohn* hat auch im math. Seminar der techn. Hochschule München drei Gipsmodelle der K_m verfertigt. Verlag A. Brill, Darmstadt 1877.

stehende Komplexe K_1 mit der Identität $\sum x_i^2 \equiv 0$, also die x_i die *Klein*schen[165]) Linienkoordinaten, so läßt sich die allgemeinste Gleichung eines quadratischen Komplexes K_2 auf die Form bringen

(5) $$K_2 \equiv \sum \frac{x_i^2}{k_i} = 0.$$

Dann ist durch

(6) $$K_2^{(\lambda)} \equiv \sum \frac{x_i^2}{k_i - \lambda} = 0$$

eine Schar konfokaler K_2 dargestellt. Die Wurzeln von (6) sind die „elliptischen" Linienkoordinaten eines Punktes. Sieht man in (6) die x_i als gegeben an, so ergeben sich vier λ-Werte; umgekehrt, sind letztere gegeben, so haben die vier entsprechenden konfokalen K_2 32 Gerade gemein, die sich aber nur durch die Vorzeichen ihrer Koordinaten unterscheiden.

Die K_2 der konfokalen Schar (6) haben dieselbe Singularitätenfläche F_4, die von den Geraden berührt wird, für die je zwei der vier λ koinzidieren.

Diese F_4 ist die *Kummer*sche Fläche K_m. Alle Tangenten in einem Punkte P der K_m gehören zwei konfokalen Komplexen $K_2(\lambda_1)$ und $K_2(\lambda_2)$ an. Durch λ_1 und λ_2 werden also je 32 Punkte der K_m bestimmt. Die Kurven $\lambda_1 =$ konst, $\lambda_2 =$ konst sind die beiden Scharen der Haupttangentenkurven. Aus dem Studium der λ folgt eine große Reihe weiterer Beziehungen.

Vor allem werden die Lagenbeziehungen und gestaltlichen Verhältnisse der K_m untersucht; es empfiehlt sich zu dem Behuf die Ableitung der K_m aus einer doppeltzählenden, einem Tetraeder einbeschriebenen F_2 mittels Variieren der Konstanten. So gelangt man zu den Lagegesetzen der 16 D_2 und 16 Δ_2, usf., unter besonderer Berücksichtigung der Realität.

Auf dieser geometrischen Grundlage erwächst nun in naturgemäßer Weise die transzendente Behandlung der K_m.

Die 32 Punkte (λ_1, λ_2) werden durch Einführung hyperelliptischer Funktionen derart getrennt, daß die Vieldeutigkeit auf Unterschiede in den Perioden zurückkommt. Sodann wird die Verteilung der λ_1, λ_2 auf die 16 Felder mit hyperbolischer Krümmung und die 16 Felder mit elliptischer Krümmung genauer untersucht.

Nunmehr läßt sich der Zusammenhang des bisherigen mit der *Borchardt-Cayley*schen Darstellung einsehen.

165) *F. Klein,* Math. Ann. 5 (1872), p. 261. Vgl. auch die weiteren Ausführungen in zwei Abhandlungen von *C. Segre,* Torino Mem. (2) 36 (1884).

Der von *Rohn* erzielte Fortschritt kennzeichnet sich vor allem darin, das die Darstellung der K_m eine eindeutige wird, gegenüber der dortigen 16-Deutigkeit. Umgekehrt läßt sich diese Vieldeutigkeit vermöge einer gewissen quadratischen Transformation beseitigen, womit der Zusammenhang zwischen jenen 16 Darstellungen aufgedeckt wird.

In einer zweiten Arbeit von *Rohn*[166]) wird die quadratische Transformation der hyperelliptischen Funktionen für sich behandelt; hierbei werden alle Transformationen, die dieselben Bedingungen zwischen den ϑ liefern, als gleichwertig angesehen. Die Zuordnungen der ϑ, sowie der Perioden, werden sodann an der *Kummer*schen Fläche K_m interpretiert, und führen so zu manchen Ergänzungen der früheren Darstellung. Hingewiesen sei noch auf die Eigenschaften der Parameter gewisser Punktgruppen auf der K_m, sowie auf die der Kurven, längs deren die K_m von anderen Flächen berührt wird.

Dadurch erscheinen die identischen Relationen zwischen den ϑ unter allgemeinerem Gesichtspunkte.

In einer dritten Arbeit[167]) geht *Rohn* auf die verschiedenen Gestalten der K_m — und im Anschluß daran der R-F_4 mit zwei Doppelgeraden — näher ein, unter besonderer Berücksichtigung der Realitätsverhältnisse. Das Hauptergebnis ist, daß es acht verschiedene K_m, und sieben verschiedene R-F_4 gibt. Zunächst werden wieder die sechs *Klein*schen Linienkoordinaten x_i zugrunde gelegt. Sodann setzt die topologische Behandlung ein. Diese führt auch zu den Gleichungen der acht K_m-Arten in Punktkoordinaten; aus einer der Gleichungen lassen sich die übrigen durch imaginäre lineare Transformationen herleiten. Hierbei ist zu beachten, daß die übliche quadratische Relation zwischen Linienkoordinaten durch reelle lineare Transformation auf die Gestalt

$$z_1^2 - z_2^2 + z_3^2 - z_4^2 + z_5^2 - z_6^2 = 0 \tag{7}$$

gebracht werden kann. Um die linke Seite in eine Summe von sechs Quadraten überzuführen, bedarf man einer imaginären Substitution S. Solcher S hat man nach *Klein*[165]) vier zu unterscheiden, die zu ebensoviel Typen von Koordinatensystemen führen.

Die Fläche K_m wird wieder als gemeinsame Singularitätenfläche einer konfokalen Schar von quadratischen Komplexen $\sum \frac{x_i^2}{k_i - \lambda} = 0$ eingeführt. Vermöge der vier obigen Typen von Koordinatensystemen werden die verschiedenen Gattungen von K_m bestimmt. Die K_m wird

166) *K. Rohn,* Math. Ann. 15 (1879), p. 315.

167) *K. Rohn,* Math. Ann. 18 (1881), p. 96.

dann und nur dann reell, wenn die imaginären Komplexe des konfokalen Systems paarweise konjugiert sind. Beim ersten Typus (I) sind die sechs Konstanten k reell, beim zweiten (II) vier, beim dritten (III) zwei, beim vierten (IV) keine; die nicht reellen sind stets paarweise konjugiert. Die einzelnen Typen ergeben wieder Unterabteilungen: Ia, Ib, Ic, IIa, IIb, III, IVa, IVb. So sind bei der ersten (Ia) alle 16 D_2 und 16 Δ_2 reell; die Fläche besteht aus acht Teilen von tetraedrischer Form. Bei der zweiten (Ib) ist weder ein D_2 noch eine Δ_2 reell; die Fläche besteht aus zwei Teilen, deren jeder mit einem einschaligen Hyperboloid Ähnlichkeit hat. Bei einer dritten Gattung (IIa) sind acht D_2 und acht Δ_2 reell; die Fläche besteht aus vier tetraedrischen Teilen. Bei einer vierten Gattung (IIb) verhält es sich wie bei (Ib), nur daß die Fläche jetzt aus einem einzigen Teile besteht.

Bei einer fünften und sechsten Gattung (III), (IVa) hat man vier reelle D_2 und vier reelle Δ_2; bei der ersteren sind die beiden Teile tetraedrisch, bei der letzteren ähnlich einem Ellipsoide resp. zweischaligem Hyperboloide (wie bei der Wellenfläche). Endlich weisen die beiden letzten Gattungen (Ic), (IVb) nur imaginäre Flächen auf.

Bei der topologischen Behandlung dienen die Grenzfälle, wo die Fläche zerfällt, als Ausgangsflächen, aus denen dann durch Deformation (Variation der Konstanten) die einzelnen Gestalten hervorgehen.

Von besonderer Bedeutung ist der Grenzfall einer doppelt zählenden F_2. Auf ihr greife man acht Erzeugende, je vier aus einer Schar, heraus; die 16 Schnittpunkte vertreten dann die D_2 und die 16 zugehörigen Berührungsebenen die Δ_2, und die Erzeugenden selbst die Berührungskegelschnitte in den D_2. Die Erzeugenden teilen (je nach ihrer Realität) die F_2 in Felder, die denen der K_m entsprechen.

Als Sonderfälle der K_m treten die obigen R-F_4 auf; fünf Arten gehen aus dem Typus (I) hervor, und zwei weitere aus dem Typus (II).

Damit darf die Frage nach den Gestaltsverhältnissen der K_m als vollständig beantwortet gelten.

Unabhängig von *Rohn* entwickelt auch *G. Darboux*[168]) den Zusammenhang der K_m mit den $\vartheta(v_1, v_2)$ von den *Klein*schen Linienkoordinaten aus. Wie bei *Weber* (s. oben) wird auch der Sonderfall der Wellenfläche berücksichtigt.

Darboux fügt aber noch eine einfache geometrische Interpretation des obigen Zusammenhanges hinzu.

Die Methode gilt zunächst allgemein für F_4, die wenigstens *einen* D_2 besitzen.

---

168) *G. Darboux,* Paris C. R. 92 (1881), p. 685, 1193.

Projiziert man die Punkte (x, y, z, t) der F_4 von einem solchen D_2 aus auf eine Bildebene E, etwa $t = 0$, so wird dadurch, wie bei *Clebsch* (s. Nr. **19**) die F_4 auf die doppelt gedachte E abgebildet. Die Übergangskurve, in der beide Blätter von E zusammenhängen, ist eine c_6 (s. Nr. **63**).

Damit gelangt man bereits zu einer irrationalen Darstellung der F_4, bei der nur eine einzige quadratische Irrationalität auftritt.

In dem besonderen Falle der K_m zerfällt aber die c_6 in sechs Gerade, die einen Kegelschnitt k berühren. Bei passender Wahl des Koordinatentetraeders wird k zum Normkegelschnitt $y^2 - xz = 0$. Eine Tangente desselben hat zur Gleichung $xm^2 + 2ym + z = 0$ mit dem Parameter m.

Zwei Tangenten ($m = \varrho$, und $m = \varrho_1$) bestimmen einen Schnittpunkt (ϱ, ϱ_1) mit den „Normkoordinaten" ϱ, ϱ_1. Seien jetzt $a, b, \ldots, f$ die Parameter der obigen sechs Tangenten und setzt man wie früher

$$f_3(x) \equiv (a - x)(b - x)(c - x),$$
$$g_3(x) \equiv (d - x)(e - x)(f - x),$$

so hat man als irrationale Darstellung der K_m

$$(8) \quad x : y : z : t = (a - \varrho)(a - \varrho_1) : (b - \varrho)(b - \varrho_1) : (c - \varrho)(c - \varrho_1) : R,$$

wo

$$(9) \qquad R \equiv \frac{\sqrt{f_3(\varrho)\,g_3(\varrho_1)} \pm \sqrt{f_3(\varrho_1)\,g_3(\varrho)}}{\varrho - \varrho_1},$$

ähnlich wie bei *Borchardt* und *Cayley*.

An *Darboux* schließt sich noch eine modifizierte Darstellung für die Koordinaten der Punkte der K_m durch irrationale Funktionen zweier Parameter durch *F. Brioschi*.[169]) Er geht hierbei aus von den 15 algebraischen Funktionen, die sich durch die Beziehung zwischen zwei ϑ ausdrücken lassen, und verwendet dann Eigenschaften dieser algebraischen Funktionen, die von *C. Weierstraß* aufgestellt waren.

Faßt man zusammen, so hat man drei Arten von Parameterdarstellungen der K_m zu unterscheiden (s. auch Nr. **26**).

Einmal hat man nach *Cayley* und *Weber* vier geeignet ausgewählte $\vartheta_i^2(v_1, v_2)$, die den Koordinaten y_i der K_m proportional sind.

Diese ϑ_i^2 ersetzt sodann *Borchardt* durch vier linear unabhängige Θ_i 2. Ordnung, mit der Charakteristik $\begin{pmatrix} 0\,0 \\ 0\,0 \end{pmatrix}$, die in den ϑ^2 linear sind. Vermöge quadratischer Transformation der Θ geht hieraus die *Borchardt*sche Darstellung der K_m durch hyperelliptische Funktionen hervor.

169) *F. Brioschi*, Paris C. R. 92 (1881), p. 944.

Drittens hat man die, der Liniengeometrie entstammende *Klein-Rohn*sche Darstellung

$$x_i = \frac{\lambda - \varkappa_i}{\sqrt{f'(\varkappa_i)}} \frac{\Theta_i(u_1, u_2)}{c_i},$$

von der aus man durch Einführung der doppelten Argumente wiederum zur Darstellung durch hyperelliptische Funktionen gelangt.

Eine vollständige Übersicht findet man bei *W. Reichardt.*[169a])

Auf den inneren Zusammenhang der transzendenten Darstellungen der F_4 mit $\bar{C}_2$, insonderheit der Zykliden Z (s. Nr. **26**), der *Weddle*schen Fläche W_d (s. Nr. **66**) und der *Kummer*schen Fläche K_m ist schon früher hingewiesen. Diese Zusammenhänge, die sich auch auf einige verwandte Gebilde, so auf eine F_2, und die gemeinsamen Tangenten zweier F_2 erstrecken, hat neuerdings *E. A. Weiß*[170]) einheitlich zusammengefaßt. Man kann diese Gebilde entweder unabhängig voneinander untersuchen und mit den entsprechenden ϑ-Relationen in Verbindung setzen, oder aber von der Parameterdarstellung eines dieser Gebilde ausgehen und die der übrigen durch geeignete Transformationen daraus gewinnen.

Die Abbildung von *P. Domsch*[53]) (Nr. **26**) führt eine Schar von F_2 in eine Schar konfokaler Z über. Die Z ihrerseits hängt vermöge der *Lie*schen[154]) Geraden-Kugel-Transformation mit der K_m zusammen. Von der K_m, die man als F_4 oder Φ_4 ansehen kann, führt eine von *Th. Reye*[171]) und *R. de Paolis*[171]) herrührende, und unabhängig von diesen durch *F. Schottky*[172]) mit der ϑ-Theorie verknüpfte Abbildung — oder auch eine von *G. Darboux*[173]) behandelte Verwandtschaft zur W_d.

169a) *W. Reichardt,* Nova Acta Leop. 50 (1887), p. 1887.

170) *E. A. Weiß,* J. f. Math. 159 (1928), p. 191.

171) *Th. Reye,* J. f. Math. 86 (1879), p. 84, 209; *R. de Paolis,* Rom Linc. Rend. (4) 6_2 (1890), p. 3.

172) *F. Schottky,* J. f. Math. 105 (1889), p. 233. Die 16 ϑ zerlegen sich in 6 gerade ϑ_r $(r = i, \ldots, p)$ und 10 ungerade $\vartheta_{ikl} = \vartheta_{mnp}$. Man bilde die 20 Produkte vom Typus $F_{ikl} = \vartheta_i \vartheta_k \vartheta_l \vartheta_{ikl}$. Diese lassen sich durch vier geeignete lineare Verbindungen x, y, z, w linear ausdrücken, die dann Koordinaten einer W_d sind.

Die 20 Verbindungsebenen (ikl) je dreier der sechs Grundpunkte G_i des zugehörigen F_2-Gebüsches entsprechen den 20 Gleichungen $F_{ikl} = 0$. Die mit dem Produkte Π der geraden ϑ multiplizierten 16 ϑ^2 verschwinden in allen G_i. Aus diesen 16 Ausdrücken lassen sich vier linear unabhängige X, Y, Z, W auswählen, durch die die anderen linear ausdrückbar sind.

Das Quadrat der Funktionaldeterminante der X, Y, Z, W ist in letzteren rational und liefert, gleich Null gesetzt, die Gleichung der K_m.

173) *G. Darboux,* Bull. Math. Astr. 1 (1870), p. 348 (Sur les systèmes de coniques et de surfaces du second ordre). Hier finden sich bereits bemerkens-

Weiter hat *F. Caspary*[174]) aus den Relationen zwischen den Elementen orthogonaler Matrizen die *Göpel*sche[158]) biquadratische Relation hergeleitet, und so den Zusammenhang zwischen solchen Matrizen und der K_m hergestellt.

Es sei noch bemerkt, daß *E. A. Weiß*[175]) unter Deutung der Elemente orthogonaler Matrizen als Koordinaten von Ebenen resp. Geraden die K_m und Z liniengeometrisch auf den S_4 abgebildet hat.

Unabhängig von den bisher skizzierten Überlegungen hat *O. Staude*[176]) die Parameterdarstellung der gemeinsamen Tangenten zweier F_2 abgeleitet.

Diese Kette gegenseitiger Zusammenhänge schließt *Weiß*[170]), indem er die *Staude*sche Parameterdarstellung durch eine gewisse quadratische Transformation aus den beiden Parameterdarstellungen der W_d gewinnt.

Unter Zugrundelegung der *Schottky*schen Darstellung der W_d wird zunächst in Anlehnung an *G. Humbert*[177]) die *Caspary*sche[178]) Para-

---

werte Hinweise auf die gegenseitigen Beziehungen zwischen der Kegelspitzenfläche F' eines F_2-Gebüsches G und ihrer Bildfläche F'', im Sinne von Nr. **66**. Hierbei erscheint F' als Ort der bezüglich aller F_2 in G konjugierten Punktepaare.

Die 10 Achsen der 10 Ebenenpaare in G gehören der Fläche F' an, andererseits entsprechen den 10 Achsen 10 D_2 der Bildfläche F''. Mit jedem Grundpunkte G_i von G wächst diese Anzahl der D_2 um Eins; bei sechs Grundpunkten G_i wird F'' zur *Kummer*schen Fläche K_m mit 16 D_2. Auch die gegenseitige Beziehung zwischen den Räumen von F' und F'' wird studiert; so entsprechen den Ebenen des ersteren Raumes F_3 mit 4 D_2 im letzteren Raume, u. s. f.

Die Methode ist rein synthetisch.

174) *F. Caspary,* J. f. Math. 94 (1883), p. 74. Vgl. Note 178).

175) *E. A. Weiß,* Zusatz zu einer Abhandlung von *E. Study* über *Lies* Kugelgeometrie, Berlin Ber. 1926, p. 381.

176) *O. Staude,* Habilitationsschrift Leipzig 1883 = Math. Ann. 22 (1884), p. 1, 145.

177) *G. Humbert,* J. de math. (4) 9 (1893), p. 468. Die K_m erscheint hier als Sonderfall der „hyperelliptischen“ Flächen F, deren Punktkoordinaten x, y, z sich als eindeutige, vierfach-periodische Funktionen von zwei Parametern u, v darstellen lassen.

Diese Darstellung läßt sich überführen in eine solche durch Quotienten von ϑ's q^{ter} Ordnung, die geeignet normiert werden.

Die Kurven auf F erhält man durch Nullsetzen von ϑ-Funktionen.

Im Falle der K_m $(q = 2)$ werden die homogenen Koordinaten $x_i, \ldots, x_m$ proportional vier $(= 2^2)$ linear unabhängigen geraden $\vartheta(u, v)$ 2. Ordnung mit der Charakteristik Null. Jedem Punkte P der K_m entsprechen, wie bei *Cayley* und *Weber,* zwei Paare (u, v), $(-u, -v)$.

Daraufhin werden die Kurven C auf der K_m eingehend untersucht, indem ϑ beliebiger Ordnung gleich Null gesetzt werden.

Es gibt nur C_{2n} gerader Ordnung auf K_m. Längs einer C_{2n} läßt sich eine meterdarstellung abgeleitet. Sodann führt eine Abbildung von der W_d zu den gemeinsamen Tangenten zweier F_2. Diese Abbildung vermittelt endlich den Übergang von den *Schottky*schen Ausgangsformeln zur Parameterdarstellung jener gemeinsamen Tangenten.

72. Konfigurationen, die der Kummerschen Fläche zugleich ein- und umgeschrieben sind. Als eine Anwendung der transzendenten Darstellung der K_m hatte *Rohn* (s. Nr. **71**) verschiedene mit ihr verbundene Konfigurationen untersucht. Diese Sätze werden von *F. Klein*[179]) im Zusammenhange dargelegt und weitergeführt.

Wie bei *Rohn* ist die Grundlage die konfokale Schar von quadratischen Komplexen K_2

$$\Delta(\lambda) \equiv \sum \frac{x_i^2}{\varkappa_i - \lambda} = 0 \tag{1}$$

mit K_m als Singularitätenfläche. Denkt man sich eine Gerade g durch ihre Koordinaten x_i gegeben, so trifft g die K_m in vier Punkten 1, 2, 3, 4, und zugleich gehen durch g vier Ebenen I, II, III, IV. Zu ihrer Bestimmung dient die Gleichung (1) mit ihren Wurzeln als elliptischen Koordinaten von g.

Jeder Zerlegung der vier Punkte in zwei Paare entspricht rational eine solche der vier Ebenen. Entsprechen sich z. B. die Paare (1, 2), (3, 4) und (I, II), (III, IV), so heißen sie bez. K_m „konjugiert".

Ein der K_m zugleich ein- und umschriebenes Tetraeder T, für das je zwei seiner Ebenen und die zwei Ecken ihrer Kante konjugiert sind, heißt „ausgezeichnet". Ein solches Tetraeder T, deren es ∞^5 gibt, steht zu den vier Wurzeln von (1) in enger Beziehung.

Nimmt man für ein T eine Ebene E (als Ebene von K_m) beliebig an, ferner auf der Schnittkurve von E mit K_m drei Ecken von T, so

---

F_n umbeschreiben. Sodann werden die C_{2n} bei vorgegebenem n hinsichtlich ihrer Scharen und Familien verfolgt. Adjungiert man noch evtl. ein bis vier C_2, so läßt sich eine C_{2n} als voller Schnitt der K_m mit einer Fläche F erhalten. So gelangt man zu 216 Scharen von C_6, zu 32 Familien von C_8, usf.

Es sei noch auf eine andere Arbeit von *Humbert*, Paris C. R. 120 (1895), p. 863, hingewiesen, wo eine gewisse, durch *Abel*sche Funktionen ($p = 3$) definierte F_6 in Zusammenhang mit der K_m und der Theorie der ebenen Kurven 4. Klasse γ_4 gebracht wird.

178) *F. Caspary*, Paris C. R. 112 (1891), p. 1356. Hier tritt, gegenüber *Schottky*[172]), die Vereinfachung ein, daß die Koordinaten einer W_d Produkte von nur drei ϑ (darunter einer ungeraden) werden.

In einer anschließenden Arbeit, Bull. Math. Astr. (2) 15 (1891), p. 308, werden statt der ϑ hyperelliptische Funktionen 1. Gattung eingeführt, die zu einfacher, expliziter wie impliziter Darstellung der W_d führen. Hier findet man auch ausführliche Literaturangaben über die W_d.

179) *F. Klein*, Math. Ann. 27 (1886), p. 106.

ist T bestimmt, und mittels konjugierter Paare einfach konstruierbar. Aus solchen T setzen sich weitere Konfigurationen zusammen, die wiederum der K_m ein- und umbeschrieben sind.

So entsteht u. a. eine gewisse Konfiguration $(16)_6$, die von D_2 und Δ_2 einer neuen *Kummer*schen Fläche K_m' gebildet wird. Jedes T, daß sich aus Ebenen und Ecken der Konfiguration bilden läßt, ist bez. K_m ausgezeichnet. Zwischen K_m und K_m' besteht volle Gegenseitigkeit. Setzt man

$$(2) \qquad f(\lambda) \equiv (\lambda - \varkappa_1) \ldots (\lambda - \varkappa_6),$$

so seien die beiden zu K_m gehörigen hyperelliptischen Integrale v_1, v_2

$$(3) \qquad v_1 = \int \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}, \quad v_2 = \int \frac{\lambda\, d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}.$$

Diese werden auf der zu $\sqrt{f(\lambda)}$ gehörigen zweiblättrigen *Riemann*schen Fläche F hinerstreckt, wobei als untere Grenze etwa der Verzweigungspunkt $\varkappa_6$ genommen werde. Man hat dann für v_1 und v_2 je die fünf Perioden

$$(4) \qquad P_i = 2\int_{\varkappa_6}^{\varkappa_i} dv \quad \text{mit} \quad \sum P_i = 0.$$

Man führe noch eine zweite, 32-blättrige Fläche F_1 ein, die zu der Proportion $\sqrt{\lambda - \varkappa_1} : \sqrt{\lambda - \varkappa_2} : \cdots : \sqrt{\lambda - \varkappa_6}$ gehört. Die v werden hierbei von der Form $\int_{\sqrt{\varkappa_6 - \varkappa_i}}^{\sqrt{\lambda - \varkappa_i}} dv$, bei geeigneter Normierung der Wurzelvorzeichen.

Jeder $g(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ entspricht ein Punktquadrupel auf F_1. Für $\lambda_3 = \lambda_4$ erhält man eine Tangente der K_m, für $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$ eine Haupttangente, für $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_3 = \lambda_4$ eine Gerade durch einen D_2 oder in einer Δ_2, usf.

Im Falle einer Tangente seien u', u'' die beiden ungleichen v-Parameterpaare, dem Berührungspunkte gebe man die Parameter $U = u_1' - u_1''$, $U_2 = u_2' - u_2''$ und der Berührungsebene die Parameter $(U_1) = u_1' + u_1''$, $(U_2) = u_2' + u_2''$.

Umgekehrt gehört zu jedem Paare U_1, U_2 resp. (U_1), (U_2) stets nur ein Punkt resp. eine Ebene der K_m.

Mit Hilfe dieser neuen Parameter werden zunächst die hyperelliptischen c_4 untersucht, die die Ebenen von K_m aus ihr ausschneiden; diese c_4 lassen sich auf die Fläche F eindeutig beziehen.

An einer solchen c_4 werden die Integrale v hinerstreckt und das *Abel*sche Theorem für Schnitte mit Geraden (und Kegelschnitten) aufgestellt. Hieraus erwächst das entsprechende Theorem für den Schnitt von K_m mit einer Geraden. Ferner lassen sich so die Kongruenzen angeben, denen die Parameter einer Geraden zu genügen haben, damit sie durch einen gegebenen Punkt von K_m geht, usf.

Konjugierte Punkte und Ebenen sind jetzt dargestellt durch

$$(U),\ (U) + 2v_1 + 2v_2;\quad (U) + 2v_1,\ (U) + 2v_2.$$

Mit diesen transzendenten Mitteln lassen sich die obigen Konfigurationen einfach und übersichtlich behandeln, wobei sich eine Reihe von Verallgemeinerungen von selbst anschließt.

Zugleich ergeben sich damit 32 weitere Transformationen, die die K_m in sich überführen (s. Nr. 69).

73. Das Cayleysche Tetraedroid und die Wellenfläche. Das Tetraedroid T_c ist ein besonderer Fall der K_m; die 16 D_2 liegen zu je vier auf den Seiten eines Tetraeders und bilden in ihnen vollständige Vierecke, deren Diagonalpunkte in den bezüglichen Ecken liegen. Diese Fläche hat *Cayley*[180]) gefunden und in zwei weiteren Abhandlungen[181]) eingehend untersucht, in der letzteren als Spezialfall der K_m. Aus einer einfachen Raumtransformation leitet die Fläche *Timerding*[182]) her.

Die vier Tangentialkegel in den einer Tetraederseite angehörigen D_2 sind zugleich Tangentialkegel einer F_2, von der das Tetraeder ein Poltetraeder ist. Die Koordinaten der 16 D_2 bilden eine Matrix von der Form

(1) $$|0,\ \pm a_{ik},\ \pm a_{il},\ \pm a_{im}|,$$

wo $a_{rs} = a_{sr}$.

Legt man also durch zwei Paare von D_2, die mit einer bestimmten Tetraederecke inzident sind, die Verbindungsebene, so enthält diese noch ein drittes Paar von D_2.

Die so erhaltenen Ebenen bilden dual vier vollständige Vierflache, deren Scheitel die vier Tetraederecken sind, während ihre Dia-

180) *A. Cayley*, J. de math. 11 (1846), p. 291 (Sur la surface des ondes).

181) *A. Cayley*, J. f. Math. 65 (1866), p. 284; ib. 87 (1879), p. 161. — Ein einfaches Kriterium dafür, daß sich eine K_m auf eine T_c reduziert, hat *J. J. Hutchinson* angegeben, Annals Math. 11 (1897), p. 198; Amer. Math. Soc. Bull. (2) 4 (1898), p. 327.

Die Punkte der K_m, wie auch der zugehörigen W_d, waren darstellbar durch hyperelliptische Funktionen ($p = 2$) von zwei hyperelliptischen Integralen v_1, v_2 (s. Nr. 71).

Das fragliche Kriterium lautet dann, daß die sechs, den u, v gemeinsamen Verzweigungspunkte in Involution liegen, wobei sich beide Integrale auf elliptische 1. Gattung reduzieren.

Auch die sechs Grundpunkte G_i des zugehörigen F_2-Gebüsches liegen dann auf ihrer C_3 in Involution. Überdies gehören dann der W_d (außer den bereits vorhandenen 25 g) noch zwei weitere g an.

182) *H. E. Timerding*, Ann. di mat. (3) 1 (1898), p. 95.

gonalebenen mit den Seiten des Tetraeders zusammenfallen. Die Gleichungen dieser Ebenen lauten

$$(2) \qquad \pm a_{lm} x_k \pm a_{mk} x_l \pm a_{kl} x_m = 0, \quad \text{usf.};$$

sie stellen die 16, je sechs D_2 enthaltenden Doppelebenen Δ_2 dar, entsprechend der allgemeinen Theorie der K_m. Die Gleichung der Fläche T_c lautet mittels einer fünfreihigen Determinante

$$(3) \qquad T_c \equiv \begin{vmatrix} 0 & x_i^2 & x_k^2 & x_l^2 & x_m^2 \\ x_i^2 & 0 & a_{ik}^2 & a_{il}^2 & a_{im}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = 0,$$

ist also in den x^2 quadratisch. Auf T_c liegen zwei Scharen von C_4, die das Grundtetraeder zum Poltetraeder haben.

Es gibt eine transzendente explizite Darstellung der T_c in elliptischen Funktionen su, cu, du, mit den Argumenten u, v und den Moduln $\varkappa$, λ

$$(4) \qquad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = su(\varkappa, u)\, du(\lambda, v) : cu(\varkappa, u)\, cu(\lambda, v) \\ : du(\varkappa, u)\, su(\lambda, v) : 1.$$

Die beiden obigen Scharen von C_4 fallen mit den Parameterkurven $u =$ konst., $v =$ konst. zusammen.

Gewisse F_4 lassen sich nach *K. Rohn*[183]) auf mehrere Arten als Tetraedroid T_c ansehen.

Wir kommen zur Wellenfläche W_l. Die *Fresnel*sche Wellenfläche W_l[184]) ist wiederum ein (metrischer) Spezialfall des Tetraedroids T_c. Es sind für sie nur vier der D_2 reell. Bei der ungemeinen Ausdehnung der Literatur beschränken wir uns auf das Wesentlichste.

Fresnel gelangte zu ihr (1827) bei der Untersuchung der Fortpflanzung des Lichtes in doppelt brechenden Medien. Geometrisch erzeugt er die Fläche, indem er im Mittelpunkte eines Ellipsoides auf dessen Zentralschnitten Lote gleich den Achsenlängen der Schnittellipse abträgt. Damit erhält er die Gleichung der W_l, wenn $\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ gesetzt wird, in der übersichtlichen Gestalt

$$(5) \qquad W_l \equiv \frac{x^2}{\varrho^2 - a^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 - c^2} - 1 = 0.$$

183) *K. Rohn,* Leipzig Ber. 1884, p. 10. *C. Segre,* ib. p. 132, fügt den Fall hinzu, wo sich eine F_4 auf sechs Arten als T_c ansehen läßt. Vgl. auch *E. Bertini,* Lomb. Ist. Rend. (2) 29 (1896), p. 566.

184) *J. Fresnel,* Paris Mém. 7 (1827), p. 126. Von weiterer Literatur sei erwähnt: *M. Ampère,* Ann. Chim. Phys. 39 (1828), p. 113; *A. Cauchy,* Exerc. de math. Bd. 5 (1830); Paris C. R. 13 (1841), p. 319; *J. Plücker,* J. f. Math. 19 (1839), p. 1, 91. Ein Literaturverzeichnis (bis 1896) gibt *G. Loria,* Il passato e il presente delle principali teorie geometriche, Torino 1896, p. 114 ff. — Bezüglich der Einzeleigenschaften der W_l sei auf „*Salmon-Fiedler*", p. 323 ff., verwiesen.

Die Hauptebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ schneiden die W_l je in einer Ellipse und einem Kreise; in der E_∞ wird der Kreis der Kugelkreis K.

Sei, wie üblich, $a^2 > b^2 > c^2$, so ergeben sich in

$$(6) \qquad x = \pm c\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}, \quad y = 0, \quad z = \pm a\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}$$

die Koordinaten der vier reellen D_2. Hieraus geht die von *H. Weber*[185]) gegebene Darstellung durch elliptische Funktionen hervor.

Bezüglich der Krümmungslinien der W_l s. Nr. **74**.

Auch die Klassengleichung der $W_l = \Omega_l$ nimmt eine einfache Gestalt an. Setzt man $\sigma^2 = u^2 + v^2 + w^2$, so hat man

$$(7) \qquad \Omega_l \equiv \frac{u^2}{a^2\sigma^2 - 1} + \frac{v^2}{b^2\sigma^2 - 1} + \frac{w^2}{c^2\sigma^2 - 1} = 0;$$

die Ω_l ist also eine Φ_4, wie es sein muß.

74. Die Haupttangentenkurven und die Krümmungslinien auf der Wellenfläche. Die Differentialgleichungen dieser Kurven lassen sich zwar durch Spezialisierung aus denen der entsprechenden Kurven auf der *Kummer*schen Fläche K_m (s. Nr. **70**) herleiten, und so im besonderen auch die geometrischen Eigenschaften der ersteren Gattung für die W_l gewinnen.

Es empfiehlt sich aber auch, nach dem Vorgange von *G. Darboux*[186]), ein direktes Verfahren, das überdies manche neuen Gesichtspunkte eröffnet.

Seien $P(x, y, z)$ irgendein Punkt einer zunächst beliebigen Fläche F, n die orientierte Normale mit den Richtungskosinus p, q, r, und p', q', r' die Determinanten der Matrix $\begin{vmatrix} p\,q\,r \\ x\,y\,z \end{vmatrix}$, so daß $\sum pp' = 0$, so lassen sich die sechs Größen $p, \ldots, p', \ldots$ als homogene Strahlenkoordinaten von n ansehen. Dann nehmen die Differentialgleichungen der Haupttangentenkurven (a), resp. der Krümmungslinien (b), die elegante Gestalt an

$$\begin{cases} \text{(a)} \qquad \sum dp\,dx = 0, \\ \text{(b)} \qquad \sum dp\,dp' = 0. \end{cases}$$

Dies finde seine Anwendung auf die Wellenfläche W_l mit dem Mittelpunkte O.

Die Gerade OP treffe W_l auf derselben Seite in einem zweiten

---

185) *H. Weber*, J. f. Math. 84 (1878), p. 332. Vgl. *A. Cayley*, Quart. J. 3 (1860); Ann. di mat. (2) 20 (1892), p. 1; *O. Böklen*, Ztschr. Math. Phys. 24 (1879), p. 400; 25 (1880), p. 346; 27 (1882), p. 160; *G. Darboux*, Paris C. R. 97 (1882), p. 1133; *E. Lacour*, Nouv. Ann. (3) 17 (1898), p. 266.

186) *G. Darboux*, Paris C. R. 97 (1883), p. 1039, 1133.

Punkte P_1; die parallelen Tangentialebenen in P, P_1 seien T, T_1, und α, β' die Quadrate der Abstände von O und T resp. T_1. Endlich seien β, α' die Quadrate der Radienvektoren (OP) resp. (OP_1). Bedeuten a, b, c gewisse Konstanten, so besteht die Identität

$$\text{(c)}\quad x(x-\beta)(x-\beta')-(x-a)(x-b)(x-c)\equiv\frac{abc}{\alpha\alpha'}(x-\alpha)(x-\alpha'),$$

die zwei Relationen zwischen den $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ liefert.

Setzt man dann

$$\text{(d)}\qquad x=C\left(\frac{a-\alpha}{\alpha}\right)^{m_1}\left(\frac{a-\alpha'}{\alpha'}\right)^{m_2}(a-\beta)^{n_1}(a-\beta')^{n_2},\ \text{usf.},$$

wo y, z aus x hervorgehen, indem man die Konstante C durch C', C'' und entsprechend a durch b, c ersetzt, so liegt in (d) die explizite Darstellung einer Fläche vor, die die Wellenfläche W_l als Sonderfall ($m_1 = n_2 = 0$, $m_2 = n_1 = \frac{1}{2}$) enthält.

Aus (d) ergeben sich die Größen p, q, r durch

$$\text{(e)}\quad p=\frac{1}{C(a-b)(a-c)}\left(\frac{a-\alpha}{\alpha}\right)^{m_1}\left(\frac{a-\alpha'}{\alpha'}\right)^{1-m_2}(a-\beta)^{1-n_1}(a-\beta')^{1-n_2},\ \text{usf.}$$

Genügen dann noch die Exponenten in (d) der Bedingung

$$\text{(f)}\qquad m_1+n_1+m_2+n_2=0,$$

wie es bei der W_l der Fall ist, und setzt man zur Abkürzung

$$\text{(g)}\qquad f(x)\equiv(x-a)(x-b)(x-c),$$

so lautet die „elliptische" Differentialgleichung der Haupttangentenkurven

$$\text{(a}'\text{)}\qquad \frac{(d\beta)^2}{f(\beta)}=\frac{(d\beta')^2}{f(\beta')},$$

wo die Variabeln β, β' bereits separiert sind.

Vermöge des Additionstheorems der elliptischen Integrale erster Gattung ergibt sich aus (a′) die algebraische Beziehung zwischen β und β'.

Diesem Ergebnis gibt *Darboux* eine einfache geometrische Deutung. Die Geraden, die die Seiten eines Tetraeders T nach konstantem Doppelverhältnis K treffen, erfüllen bekanntlich einen quadratischen Komplex, den sogenannten „tetraedralen".

Mithin sind die durch einen festen Raumpunkt Q gehenden Geraden des Komplexes die Kanten eines Kegels 2. Ordnung K_2 mit der Spitze Q.

Unter Anwendung auf die Wellenfläche W_l seien die Seiten von T die drei Hauptebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ nebst E_∞, und Q gehöre der W_l an. Legt man endlich noch dem Kegel K_2 die Bedingung auf, die W_l zu berühren, so beschreibt die Spitze Q eine Haupttangentenkurve der W_l; läßt man hinterher die Konstante $\varkappa$ variieren, so hat man die ganze Schar der Haupttangentenkurven.

Es werden auch noch gewisse weitere Flächengattungen mit derselben Eigenschaft angegeben.

Weniger einfach verhält es sich mit den Krümmungslinien der W_l.

Ein Versuch von *P. Zech*[187]), deren Differentialgleichungen direkt zu integrieren, mißlang, wie[188]) *E. Combescure* und *F. Brioschi* feststellten. Durch geeignete Wahl von Parameterkurven brachten beide Autoren die Gleichung der Krümmungslinien auf gewisse kanonische Formen.

Darboux (l. c.) untersucht zuvörderst die Krümmungslinien einer beliebigen Fläche oder auch ihrer Projektionen auf eine Tangentialebene in der Nähe eines Nabelpunktes. Diese Kurven sind im allgemeinen *nicht* algebraisch, sondern nur dann, wenn drei gewisse, in der Gleichung auftretende Konstante A, B, C rationale Zahlwerte besitzen. Diese Bedingung ist aber bei der W_l erfüllt.

Somit sind die Krümmungslinien der W_l in der Nähe eines Nabelpunktes algebraisch und haben die Gestalt gewisser C_{10}. Hieraus läßt sich aber noch kein Schluß auf den Gesamtcharakter der Kurven ziehen.

Die Differentialgleichung der Krümmungslinien der W_l läßt sich auf die einfache Form bringen

$$(\mathrm{b}')\quad f(\alpha)(d\beta)^2 + f(\beta)(d\alpha)^2 - d\alpha\, d\beta\left[2f(\alpha) + (\beta-\alpha)\left\{f'(\alpha) - \frac{f(\alpha)}{\alpha}\right\}\right] = 0.$$

Sie hat die bemerkenswerte Eigenschaft, daß ihre Gestalt bei Vertauschung von β mit β' ungeändert bleibt.

In dem besonderen Falle, wo sich die kubische Form $f(x)$ auf eine quadratische reduziert, läßt sich die Gleichung (b′) integrieren. Setzt man

$$(\mathrm{h})\qquad x f(x) \equiv \varphi(x),\quad v \equiv \alpha(\beta-\alpha),\quad w \equiv \frac{\varphi(\alpha)}{v},$$

und führt neue Variable y, p derart ein, daß

$$(\mathrm{i})\quad \alpha - w\frac{d\alpha}{dw} \equiv y,\quad -w \equiv \frac{dy}{dp},\quad \frac{d\alpha}{dw} \equiv p,\quad \alpha \equiv y - p\frac{dy}{dp},$$

so geht (b′) über in

$$(\mathrm{b}'')\qquad \int \frac{dp}{p^{\frac{2}{3}}(1+p)^{\frac{1}{3}}} = \int \frac{dy}{\varphi(y)^{\frac{1}{3}}}.$$

Es fragt sich nun, wann tritt bei der W_l der obige Spezialfall ein?

187) *P. Zech,* J. f. Math. 54 (1857), p. 72; 55 (1858), p. 94.

188) *E. Combescure,* Ann. di mat. 2 (1859), p. 278; *F. Brioschi,* ib. p. 285. S. auch Art. „F_3", Nr. **23**, Note 117.

Dies ist erstens der Fall, wenn, gemäß der Konstruktion der W_l aus einem Ellipsoide, an die Stelle des letzteren ein Zylinder tritt.

Oder aber, wenn sich das Ellipsoid, und damit auch die W_l selbst, nur wenig von einer Kugel unterscheidet, wie das bei den in der Optik vorkommenden Wellenflächen W_l in der Tat der Fall ist.

Hier lassen sich also die Krümmungslinien der W_l als bekannt ansehen.

Dagegen können, wie *Darboux* aus seinen Entwicklungen folgert, die Krümmungslinien der W_l im allgemeinen keine algebraischen Kurven bestimmter Ordnung sein.

Eine vollständige Lösung der Aufgabe wäre wünschenswert.

XII. Regelflächen vierter und höherer Ordnung.

75. Einleitung über Regelflächen 4. Ordnung R-F_4. Der erste, der sich mit R-F_4 und ihrer Erzeugung beschäftigte, scheint *M. Chasles*[189]) gewesen zu sein; er studiert auch Kurven auf der Fläche. Sodann hat sie *A. Cayley*[190]) in einer Reihe von Arbeiten nach verschiedenen Richtungen hin untersucht.

Eine vollständige Klassifikation ihrer 13 Arten gelang aber erst auf rein geometrischem Wege *L. Cremona*[191]), dessen Abhandlung von 1868 immer noch als grundlegend anzusehen ist. Bei der Einteilung wird das Verhältnis der R-F_4 zur jeweiligen Reziprokalfläche, sowie die Natur der Doppelkurve berücksichtigt. Liniengeometrisch hat *A. Voss*[192]) die R-F_4 untersucht und insbesondere das Auftreten singulärer Torsalgeraden verfolgt. Eine übersichtliche Ableitung der *Cremona*schen Er-

189) *M. Chasles,* Paris C. R. 53 (1861), p. 888.

190) *A. Cayley,* London Trans. 153 (1863), p. 453. In einer zweiten Arbeit, ib. 154 (1864), p. 559, werden bei der Klassifikation acht Arten von R-F_4 unterschieden und ihre Gleichungen diskutiert. — In einer dritten Arbeit, ib. 159 (1869), p. 111, werden vier weitere Arten hinzugefügt.

191) *L. Cremona,* Bologna Mem. (2) 8 (1868), p. 235.

192) *A. Voss,* Math. Ann. 8 (1874), p. 54. Bezüglich der Torsalgeraden vgl. auch *R. Sturm,* Math. Ann. 6 (1873), p. 255; *H. Schubert,* Math. Ann. 17 (1880), p. 574; *F. E. Björling,* Stockholm Öfs. 15 (1888), p. 587; Stockholm Vet. Bih. XV. *Sturm* und *Schubert* bestimmen die Anzahl der Torsalgeraden h_t einer R-F_n, vom Range r, als $2(r-n)$, ersterer direkt, letzterer mittels einer Formel aus der abzählenden Geometrie.

Man beachte noch den charakteristischen Unterschied zwischen einer Torsalgeraden h_t und einer beliebigen Erzeugenden h einer R-F. Bei einer beliebigen h sind deren Punkten P ihre Tangentialebenen T projektiv zugeordnet. Für eine h_t artet aber diese Projektivität aus; es gibt einen ausgezeichneten Punkt P' auf h_t, dem alle T entsprechen, und vice versa eine ausgezeichnete Ebene T', der alle P entsprechen.

gebnisse von einem einzigen Transformations-Gesichtspunkte aus (s. u. Nr. 82) hat neuerdings *Wong* gegeben.

76. Die abwickelbare R-F_4. Sie hat zur Rückkehrkante eine (irreduzible) kubische Raumkurve $C_3 = \Gamma_3$, deren Tangenten t die R-F_4 erzeugen, während die Tangentialebenen T der R-F_4 längs der Γ_3 zugleich deren (Schmiegungs-)Ebenen Σ sind und ein „kubisches Ebenengewinde" bilden. Die Ebene Σ schneidet jeweils aus der R-F_4 noch eine C_2 aus, den Ort der Spuren der t in Σ. Das sind die ∞^1 C_2 auf der R-F_4 (s. *Kummer*, Nr. 6).

Wählt man die $C_3 = \Gamma_3$ als Normkurve $N_3 = \mathsf{N}_3$ (s. Nr. 3)

$$(1)\qquad \begin{aligned} N_3)&\left\{\; x_3 : x_2 : x_1 : x_0 = \lambda^3 : 3\lambda^2 : 3\lambda : 1, \right.\\ \mathsf{N}_3)&\left\{\; u_3 : u_2 : u_1 : u_0 = 1 : -\lambda : \lambda^2 : -\lambda^3, \right. \end{aligned}$$

und bezeichnet die Determinanten der Matrix

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} 3x_3 & x_2 & x_1 \\ x_2 & x_1 & 3x_0 \end{vmatrix}$$

mit φ, ψ, χ, so daß

$$(3)\qquad \varphi \equiv 3x_1x_3 - x_2^2, \quad \psi \equiv x_1x_2 - 9x_0x_3, \quad \chi \equiv 3x_0x_2 - x_1^2,$$

so erhält man als Gleichung der R-F_4

$$(4)\qquad \psi^2 + 4\varphi\chi = 0.$$

Diese R-F_4 ist vom Geschlecht Null.

77. Die R-F_4 mit dreifacher Geraden $\overline{\overline{g}}$. Unterarten. Diese Flächen sind als F_4 mit ∞^1 D_3 bereits in Nr. 40 berücksichtigt worden, insbesondere hinsichtlich ihrer Abbildung auf eine Ebene, so daß wir uns hier auf einige Ergänzungen beschränken können.

Die Fläche läßt sich geometrisch am einfachsten erzeugen als Ort der Schnittlinien der Ebenen E eines Büschels B mit den Ebenen Σ eines auf B projektiv bezogenen kubischen Gewindes Γ_3; die Achse von B wird zur $\overline{\overline{g}}$ der Fläche. Stellt man das Gewinde Γ_3 allgemein dar durch eine Gleichung von der Form

$$(5)\qquad \Gamma \equiv u_0\lambda^3 + 3u_1\lambda^2 + 3u_2\lambda + u_3 = 0,$$

wo die u beliebige Linearformen der x bedeuten, und das Büschel B mit der Achse $(x_i = x_k = 0)$ durch

$$(5')\qquad \mathsf{B} \equiv x_i - \lambda x_k = 0,$$

so liefert die Elimination von λ als Gleichung der R-F_4 mit der $\overline{\overline{g}}$ $(x_i = x_k = 0)$

$$(6)\qquad u_0x_i^3 + 3u_1x_i^2x_k + 3u_2x_ix_k^2 + u_3x_k^3 = 0.$$

Dies war aber gerade die frühere (Nr. 40) zugrunde gelegte Darstellung einer F_4 mit $\overline{\overline{g}}$; man gelangt also umgekehrt von (6) aus sofort wieder zu den beiden projektiv bezogenen Gebilden B und Γ_3 zurück.

Fallen im besonderen zwei von den drei λ-Wurzeln der Gleichung (5) zusammen, so gelangt man zu einem „Torsalpunkt" der F_4 auf $\overline{\overline{g}}$. Ist also $D(\lambda)$ die Diskriminante von (5) bez. λ, so liefert $D = 0$ die vier Torsalpunkte, die Schnittpunkte von $\overline{\overline{g}}$ mit der abwickelbaren R-F_4 von Γ_3 (s. oben Nr. 76). Von jedem der Torsalpunkte gehen zwei benachbarte Regelstrahlen h der Fläche aus; deren Verbindungsebene ist eine „Torsalebene" der Fläche, die sie längs der ganzen Geraden h berührt.

Unterarten der R-F_4 mit $\overline{\overline{g}}$. Im allgemeinen (s. Nr. **40**) liegen die drei von irgendeinem Punkte der $\overline{\overline{g}}$ ausgehenden Regelstrahlen h_1, h_2, h_3 nicht in einer Ebene.

Die Gleichung der Fläche läßt sich dann, vermöge geeigneter Wahl des Koordinatentetraeders, auf die Normalgestalt bringen

$$(6_\alpha) \qquad x_i^2 x_l l + x_k^2 x_m m - \varrho x_i^2 x_k^2 = 0 \qquad (\varrho \neq 0),$$

wo $l \equiv a x_i + b x_k$ und $m \equiv c x_i + d x_k$ Linearformen in x_i und x_k bedeuten.

Liegen dagegen im besonderen die drei Regelstrahlen h_1, h_2, h_3 einmal, und da dann die Konstante ϱ den Wert Null annehmen muß, stets in einer Ebene, so reduziert sich die Gleichung (6_α) auf

$$(6_\beta) \qquad x_i^3 x_l l + x_k^2 x_m m = 0,$$

und die Gerade $x_l = x_m = 0$ gehört als einfache Leitlinie e der Fläche an. Umgekehrt führt die Forderung einer solchen Leitlinie e für die Fläche (6_α) eben zur vorliegenden Fläche (6_β).

Führt man in (6_β) die Parameter $\frac{x_i}{x_k} = \lambda$, $\frac{x_l}{x_m} = \mu$ ein, so stellt (6_β) eine (3, 1)-deutige Korrespondenz zwischen λ und μ dar, und umgekehrt läßt sich eine beliebige solche Korrespondenz vermöge geeigneter linearer Umformung von μ in die Gestalt (6_β) setzen. Damit hat man:

„Der Typus (6_β) von R-F_4 mit einer dreifachen Geraden $\overline{\overline{g}}$ und einer einfachen Leitgeraden e läßt sich erzeugen durch die Schnittgeraden entsprechender Ebenen in einer (3, 1)-Korrespondenz der beiden Büschel $(\overline{\overline{g}})$ und (e), oder auch dualistisch, durch die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte in einer (3, 1)-Korrespondenz der beiden Punktreihen $(\overline{\overline{g}})$ und (e). Und umgekehrt." Diese Fläche ist also ihre eigene Reziproke..

Andererseits verlange man, daß in (6_α) die beiden Linearformen l, m einander proportional werden, so daß die Resultante $R \equiv ad - bc$

von l und m verschwindet. Dann verwandelt sich (6_α), für $l \equiv ax_i + bx_k$, in

$$(6_\gamma) \qquad l(x_i^2 x_l + x_k^2 x_m) - \varrho x_i^2 x_k^2 = 0.$$

Die $\overline{\overline{g}}$ berührt jetzt die abwickelbare Fläche des Gewindes Γ_3, und von den drei durch einen beliebigen Punkt von $\overline{\overline{g}}$ gehenden Regelstrahlen h_1, h_2, h_3 fällt immer einer, etwa h_1, in die $\overline{\overline{g}}$.

Diese Fläche ist erzeugbar als Ort aller Geraden, die entsprechende Punkte einer festen Geraden g und eines zu dieser in einer (1, 2)-Korrespondenz stehenden Kegelschnittes k verbinden; hierbei ist angenommen, daß sich k und g in einem Punkte treffen, der als Punkt von g nicht mit einem der beiden ihm auf k entsprechenden Punkte zusammenfällt.

Ein noch speziellerer Fall bietet sich dar, wenn sich die Gleichung der R-F_4 in die Gestalt bringen läßt

$$(6_\delta) \qquad x_k(x_i^2 x_l + x_k^2 x_m) - x_i^4 = 0.$$

Die Ebene $x_k = 0$ enthält nur die $\overline{\overline{g}}$ und berührt die R-F_4 längs ihr, ist also eine „Torsalebene“.

Es folgt weiter der Typus

$$(6_\varepsilon) \qquad f_2(x_i, x_k)(x_i x_l + x_k x_m) - \varrho x_i^2 x_k^2 = 0 \qquad (\varrho \neq 0).$$

Durch jeden Punkt der $\overline{\overline{g}}$ geht (außer dieser) nur *ein* Regelstrahl h. Für zwei Punkte von $\overline{\overline{g}}$ fällt h mit $\overline{\overline{g}}$ zusammen, entsprechend den Wurzeln von $f_2 = 0$. Diese beiden Punkte koinzidieren in dem Sonderfalle

$$(6_\zeta) \qquad f_1^2(x_i, x_k)(x_i x_l + x_k x_m) - \varrho x_i^2 x_k^2 = 0 \qquad (\varrho \neq 0).$$

Von den drei durch die $\overline{\overline{g}}$ gehenden Mänteln der Fläche koinzidieren zwei zu einem „Kuspidalmantel“.

Eine beliebige Ebene schneidet die Fläche in einer r_4, deren d_3 auf $\overline{\overline{g}}$ aus einer Spitze besteht, durch die ein weiterer Kurvenzweig geht.[193])

Damit sind die R-F_4 mit einer $\overline{\overline{g}}$ erschöpft.

Bei den weiteren Fällen tritt stets die Erscheinung ein, daß die Punkte der — irreduziblen oder auch reduziblen — Doppelkurve $\overline{C}$ (2, 2)-deutig aufeinander bezogen sind. Dies läßt sich nach *K. Rohn*[194]) bei Berücksichtigung der Realitätsunterabteilungen mit Vorteil verwerten.

Vermöge linearer Umformung läßt sich die obige (2, 2)-Korrespondenz auf eine symmetrische Gestalt bringen, die sich dann weiterhin spezialisieren läßt.

---

193) *K. Rohn*, Math. Ann. 24 (1884), p. 147.

194) *K. Rohn*, Math. Ann. 28 (1887), p. 284.

Auf diese Weise gelingt die Einteilung und die Aufstellung der Gleichungen für die verschiedenen R-F_4 in ungezwungener Weise.

Die Doppelkurve $\bar{C}$ kann der Reihe nach bestehen aus einer $\bar{C}_3$, einer $\bar{C}_2$ und $\bar{g}$, einer $\bar{\bar{g}}$, aus zwei $\bar{g}$, endlich aus einer Selbstberührungsgeraden. Für zehn dieser Flächenarten hat *K. Rohn* Fadenmodelle anfertigen lassen.

78. R-F_4 mit irreduzibler kubischer Doppelkurve. Es kommen zunächst die F_4 mit einer — irreduziblen oder reduziblen — $\bar{C}_3$ in Betracht. Die grundlegende Arbeit verdankt man *Clebsch.*[195]) Mit Ausnahme der *Steiner*schen Fläche S, wo die $\bar{C}_3$ in drei durch einen Punkt laufende $\bar{g}$ zerfällt (s. Abschn. VII), liegt stets eine R-F_4 vor. Allgemein gilt, daß die Regelstrahlen h der R-F_4 Sekanten der $\bar{C}_3$ sind und einem linearen Geradenkomplex K_1 angehören.

Hauptfall. Die $\bar{C}_3$ ist irreduzibel.

Man hat zwei Unterfälle zu unterscheiden, je nachdem der Komplex K_1 allgemein oder speziell ist; die beiden Flächenarten seien kurz mit R resp. R' bezeichnet. Zunächst kommen die R in Betracht. Wie in Nr. **76** (s. auch Art. „F_3“, Nr. **11**) wähle man die C_3 wieder als Normalkurve N_3

(a) $$x_3 : x_2 : x_1 : x_0 = \lambda^3 : 3\lambda^2 : 3\lambda : 1,$$

und setze

(b) $$\varphi_3 \equiv 3x_1x_3 - x_2^2, \quad \varphi_2 \equiv x_1x_2 - 9x_0x_3, \quad \varphi_1 \equiv 3x_0x_2 - x_1^2.$$

Das durch die N_3 gehende F_2-Netz N ist demgemäß dargestellt durch

(c) $$N \equiv \varrho_3\varphi_3 + \varrho_2\varphi_2 + \varrho_1\varphi_1 \equiv \begin{vmatrix} 3x_3 & x_2 & x_1 \\ x_2 & x_1 & 3x_0 \\ \varrho_1 & \varrho_2 & \varrho_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Eine F_4 mit N_3 als Doppelkurve ist somit durch eine allgemeine quadratische Gleichung in den φ dargestellt

(7) $$\sum\sum a_{rs}\varphi_r\varphi_s = 0 \qquad (r, s = 1, 2, 3).$$

Trifft ein Regelstrahl h der R-F_4 die N_3 in zwei Punkten λ_1, λ_2, und setzt man $\sigma_2 : \sigma_1 : \sigma_0 = \lambda_1\lambda_2 : \lambda_1 + \lambda_2 : 1$, so genügen die σ der quadratischen Gleichung

(7′) $$a_{22}\sigma_2^2 + a_{11}\sigma_1^2 + a_{00}\sigma_0^2 + 2a_{21}\sigma_2\sigma_1 + \cdots = 0.$$

Die beiden von einem Punkte der N_3 ausgehenden Regelstrahlen h_1, h_2 koinzidieren, wenn der Parameter λ der Bedingung genügt

(8) $$(a_{00}\lambda^2 + 2a_{01}\lambda + a_{11})(a_{11}\lambda^2 + 2a_{12}\lambda + a_{22}) \\ - \{a_{01}\lambda^2 + (a_{11} + a_{02})\lambda + a_{12}\}^2 = 0.$$

Dies liefert die vier Kuspidalpunkte auf der N_3.

195) *A. Clebsch,* Math. Ann. 2 (1870), p. 445.

Der lineare Komplex K_1, dem die h von R angehören, hat in Strahlenkoordinaten $p_{ik} = (xy)_{ik}$ die Gleichung

$$(9) \quad a_{00}p_{01} + a_{11}p_{03} + a_{22}p_{23} + 2a_{12}p_{13} + (a_{11} + 2a_{02})p_{12} + 2a_{01}p_{02} = 0.$$

Die Ebene, die zwei von irgendeinem Punkte P der $\overline{N}_3$ ausgehende Regelstrahlen h_1, h_2 verbindet, schneidet aus der R noch eine C_2 aus. Analog schneidet eine Ebene, die zwei von einem zweiten Punkte P' der $\overline{N}_3$ ausgehende h_1', h_2' verbindet, eine C_2' aus. Diese beiden C_2' sind projektiv aufeinander bezogen und die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte sind die Regelstrahlen h der R.

Umgekehrt ist die Fläche R, wie schon *Clebsch*[195]) erkannte, erzeugbar durch die Verbindungslinien h entsprechender Punkte von zwei projektiv aufeinander bezogenen, sich nicht treffenden Raumkegelschnitten C_2, C_2'.

Hinterher läßt sich hieraus die $\overline{C}_3$ von R bestimmen. Man ermittele einmal die zwei Punktepaare, die auf jedem Kegelschnitt den Schnittpunkten seiner Ebene mit dem anderen entsprechen; andererseits die zwei Schnittpunkte der Verbindungslinien dieser Paare entsprechender Punkte.

Die durch diese sechs Punkte festgelegte C_3 ist die gesuchte Doppelkurve von R.

Der Sonderfall der Fläche R' tritt ein, wenn der Komplex K_1 in einen speziellen ausartet, also die Bedingung erfüllt ist

$$(7_\alpha) \qquad S \equiv a_{00}a_{22} + a_{11}(a_{11} + 2a_{02}) - 4a_{01}a_{12} = 0.$$

Die von allen Geraden von K_1 getroffene feste Gerade e wird eine einfache Leitlinie der Fläche R'. Man hat also:

„Die Fläche R' entsteht als Ort der eine gegebene Gerade e treffenden Sekanten einer gegebenen C_3."

Jede Ebene durch e trifft die C_3 in drei Punkten, deren Verbindungsgeraden die drei in der Ebene liegenden Regelstrahlen der R' sind. Für vier Ebenen fallen zwei dieser drei Regelstrahlen zusammen.

Es ist auch vorteilhaft, sich nach dem Vorgange von *W. Fr. Meyer* (s. Art. „F_3", Nr. **11**, **12**) einer Abbildung auf eine (σ)-Ebene zu bedienen, in der ein Punkt $(\sigma) = (\lambda_1, \lambda_2)$ auf einen Normkegelschnitt $N_2 = \mathsf{N}_2$ bezogen ist.

Diese Abbildung erscheint in zweifacher Gestalt.

Einmal entsprechen durch Kombinierung von (7′) und (9) den ∞^5 linearen Komplexen K_1 (1, 1)-deutig die ∞^5 Kegelschnitte c_2 der (σ)-Ebene. Artet im besonderen der Komplex K_1 in einen speziellen aus, als Ort der eine feste Gerade e treffenden Geraden, so daß die

Bedingung (7_α) erfüllt ist, so sagt das in der (σ)-Ebene aus, daß die dem K_1 entsprechende c_2 ein „Schließungskegelschnitt" des Normkegelschnitts N_2 wird, d. h. daß es ein und damit ∞^1 eigentliche „Schließungsdreiecke" Δ gibt, die N_2 um- und c_2 einbeschrieben sind. Sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Argumente (auf N_2) der Seiten eines solchen Dreiecks Δ, so treffen sich die drei Ebenen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ der N_3 in einem Punkte P auf der Leitgeraden e; gleitet Δ längs N_2, so durchläuft P die Gerade e.

Somit sind im besonderen die ∞^4 speziellen linearen Komplexe K_1 (1, 1)-deutig auf die ∞^4 Schließungskegelschnitte c_2 von N_2 bezogen.

Bei der zweiten Auffassung der Abbildung erscheinen die c_2 der (σ)-Ebene als Bilder der Regelflächen R resp. R' selbst, insofern die Fläche definiert wird als Ort der Sekanten der N_3, die einem gegebenen, allgemeinen resp. speziellen linearen Komplexe K_1 angehören.

Der laufende Punkt (x) einer Sekante $s(\lambda_1, \lambda_2)$ hat die Koordinaten

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 1 + \tau : 3(\lambda_1 + \tau\lambda_2) : 3(\lambda_1^2 + \tau\lambda_2^2) : \lambda_1^3 + \tau\lambda_2^3.$$

Damit hat man als Linienkoordinaten p_{ik} der Sekante $s(\lambda_1, \lambda_2)$

$$(10)\quad p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23} = \sigma_0^2 : \sigma_0\sigma_1 : \tfrac{1}{3}(\sigma_0\sigma_2 - \sigma_1^2) : 3\sigma_0\sigma_2 : \sigma_1\sigma_2 : \sigma_2^2.$$

Sollen diese Sekanten s einem gegebenen linearen Komplexe K_1 (9) angehören, so gelangt man unmittelbar zur c_2-Gleichung (7′) und vice versa. Die Regelstrahlen h der Fläche R resp. R' bilden sich so (1, 1)-deutig auf die Punkte der c_2 ab.

Dies läßt sich noch genauer verfolgen. Die bisher nur schematische (σ)-Ebene werde als eine Raumebene E gewählt, die die N_3 in drei reellen getrennten Punkten E_1, E_2, E_3 treffe.

Die abwickelbare R-F_4 der N_3 (s. Nr. 76) schneidet E in einer r_4 mit drei Spitzen in E_1, E_2, E_3, deren Tangenten sich in einem Punkte E treffen. Auf die Ebene E werde die quadratische Punkttransformation T_2 angewendet mit Fundamentalpunkten in E_1, E_2, E_3, und E als einem sich selbst entsprechenden Punkte.

Vermöge dieser T_2 geht die r_4 über in einen dem Dreieck $\Delta(E_i)$ einbeschriebenen Kegelschnitt („Inkegelschnitt"), der als Normkegelschnitt $N_2 = \mathsf{N}_2$ von E zugrunde gelegt werde. Jeder Tangente λ der r_4 als Spur einer Ebene λ der N_3 entspricht (1, 1)-deutig eine Tangente λ von N_2.

Eine beliebige Sekante (λ_1, λ_2) treffe E in einem Punkte P'. Dann ist das T_2-Bild von P' gerade derjenige Punkt P, von dem die Tangenten λ_1, λ_2 an N_2 gehen, der also mit $P(\lambda_1, \lambda_2) = P(\sigma)$ zu bezeichnen ist.

Nunmehr ist der Übergang von der Fläche R resp. R' zum Kegelschnitte $c_2(\sigma)$ in E, und umgekehrt, einfach zu vollziehen.

Die Fläche R resp. R' schneidet die Ebene E in einer r_4' mit drei d_2 in E_1, E_2, E_3. Vermöge der T_2 geht die r_4' direkt in die $c_2(\sigma)$ über. Umgekehrt, liegt eine $c_2(\sigma)$ in E vor, so ist ihr T_2-Bild eine r_4' mit drei d_2 in E_1, E_2, E_3. Durch diese geht eine einzige F_4 mit N_3 als Doppelkurve, und diese ist die in Rede stehende R resp. R'.

79. Die Mohrmannsche Untersuchung der R-F_4 mit irreduzibler kubischer Doppelkurve. Die Theorie der beiden Flächenarten R, R' hat *H. Mohrmann*[196]) zu einem gewissen Abschlusse gebracht, indem er zugleich die Arbeiten seiner Vorgänger einer Kritik unterzieht.

So ist die *Clebsch*sche[195]) Erzeugung der R durch zwei projektiv bezogene C_2 auf die R beschränkt, da die R' überhaupt keine (irreduzibeln) C_2 enthalten.

In der Tat sind die R und R' als Punktgebilde wesentlich verschieden. Zu dem Behuf werden die R und R' als Projektionen gewisser Normalflächen F_4, F_4' im S_5 aufgefaßt.

Die F_4 tragen doppeltbinäre Gebiete, sind eindeutig abbildbar auf eine eigentliche F_2 im S_3, und gestatten eine mit der Gruppe der Kreisverwandtschaften holoedrisch-isomorphe Kollineationsgruppe.

Dagegen tragen die F_4' *Jonquières*sche Gebiete 2. Ordnung und 2. Art, und gestatten eine, mit der automorphen Kollineationsgruppe eines Kegels 2. Ordnung holoedrisch-isomorphe Kollineationsgruppe.

Rohn[194]) hatte die symmetrische doppeltquadratische Korrespondenz J zugrunde gelegt, die die Erzeugenden h der R unter den Punkten der $\overline{C}_3$ hervorrufen. Aber es fehlt der Spezialfall der kubisch-zyklischen J mit verschwindender Invariante S, und eben dieser führt zur R'.

Sturm[192]) hat die R synthetisch untersucht. Er beachtet aber nicht, daß zwei Spezialfälle der J, der obige und das Zerfallen in zwei bilineare, nicht-involutorische Korrespondenzen, einander teilweise überdecken, also nicht ausschließen.

80. Die R-F_4 mit reduzibler kubischer Doppelkurve. Nunmehr sind die Fälle zu erörtern, wo die $\overline{C}_3$ reduzibel wird.

Der Fall (α): Die $\overline{C}_3$ zerfällt in einen Kegelschnitt $\bar{k}$ und eine ihn treffende Gerade $\bar{g}$. Man ordne die Punkte von $\bar{k}$ und $\bar{g}$ in einer (2, 2)-deutigen Korrespondenz derart zu, daß der Inzidenzpunkt sich selbst entspricht. Die Verbindungsgeraden zugeordneter Punkte sind die Regelstrahlen der R-F_4. Man normiere die Punkte (z) von $\bar{k}$ durch $z_1 : z_2 : z_3 : z_4 = \lambda^2 : \lambda : 1 : 0$ und die Punkte y von $\bar{g}$ durch $y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = 0 : 0 : \lambda' : 1$, so wird die Verbindungslinie von (z) und (y) ein Regel-

196) *H. Mohrmann*, Math. Ann. 89 (1923), p. 1.

strahl h der R-F_4, wenn die Bedingung erfüllt ist

$$(10) \qquad \lambda^2\lambda'^2 + a\lambda\lambda' + b\lambda + c = 0.$$

Die Gleichung der R-F_4 wird dann

$$(11) \quad (x_1x_3 - x_2^2)^2 + a(x_1x_3 - x_2^2)x_2x_4 + (bx_1 + cx_2)\,x_2x_4^2 = 0.$$

Man kann die Fläche auch erzeugen durch die Verbindungslinien entsprechender Punkte eines Kegelschnitts k' und einer Geraden g, wenn diese in einer (2, 1)-Korrespondenz stehen, und sich nicht treffen.

Der Fall (β): Haben dagegen k' und g einen Punkt entsprechend gemein, so fällt k' mit dem Doppelkegelschnitt $\bar{k}$ zusammen; in (10) und (11) erhält dann die Konstante c den Wert Null. Auf $\bar{k}$ gibt es einen, auf $\bar{g}$ zwei Kuspidalpunkte.

Der Fall (γ): Die $\bar{C}_3$ zerfällt in drei Doppelgerade[197]), von denen die eine $\bar{g}_1$, die beiden andern $\bar{g}_2$, $\bar{g}_3$ trifft (die selbst windschief sind). Man wähle die drei Geraden als Koordinatenkanten

$$g_1(x_1 = x_2 = 0), \quad g_2(x_1 = x_4 = 0), \quad g_3(x_3 = x_4 = 0).$$

Dann wird die Gleichung der R-F_4

$$(12) \qquad x_1^2x_3^2 + ax_1x_2x_3x_4 + (bx_1 + cx_2)x_2x_4^2 = 0.$$

Es ist $\bar{g}_1$ ein doppelter Regelstrahl, während $\bar{g}_2$, $\bar{g}_3$ doppelte Leitlinien der Fläche werden.

Die Fläche ist erzeugbar als Ort der Geraden, die zwei windschiefe Geraden g_2, g_3 und einen Kegelschnitt k, der weder mit g_2 noch mit g_3 einen Punkt gemein hat, treffen.

Oder auch als Ort der Geraden, die zwei feste Gerade g_2, g_3, und eine C_3, die mit jeder dieser Geraden einen Punkt gemein hat, schneiden.

Oder auch als Ort der Verbindungslinien entsprechender Punkte von zwei projektiv bezogenen C_2, falls die Punkte, in denen jede dieser C_2 die Ebene der andern trifft, paarweise einander zugeordnet sind. Die Schnittlinie beider Ebenen ist der doppelte Regelstrahl $\bar{g}_1$.

Oder endlich als Ort der Verbindungslinien entsprechender Punkte einer Geraden g und eines Kegelschnitts k, die in einer Korrespondenz (1, 2) stehen, derart, daß die beiden Punkte, die der Spur P von g in der Ebene von k auf k entsprechen, mit P in einer Geraden g_2 liegen. Diese beiden Geraden g_1, g_2 sind Doppelgeraden; die dritte, g_3, geht durch denjenigen Punkt O von g_2, in dem sich die Verbindungslinien der Punktepaare schneiden, die auf k den einzelnen Punkten von g_1 entsprechen, und geht ferner durch den Schnittpunkt der Ge-

197) *D. Segen,* J. f. Math. 112 (1893), p. 39.

raden, die die Schnittpunkte von k und irgendeiner Ebene durch g_1 mit den entsprechenden Punkten auf g_2 verbinden.

Auf g_2 und g_3 liegen zwei Kuspidalpunkte.

Der Fall (δ). Fallen im vorigen Falle im besonderen P und O zusammen, so auch g_2 und g_3.

Die Gleichung der Fläche wird

$$(13)\quad x_1^2(ax_1^2+2bx_1x_2+cx_2^2)+x_1(x_1x_4-x_2x_3)(dx_1+ex_2) \\ +(x_1x_4-x_2x_3)^2=0.$$

Hierbei ist $x_1=x_3=0$ der Doppelstrahl $\bar{g}_1$, und $x_1=x_2=0$ die doppelt zu zählende Leitlinie $g_2=g_3$.

81. Die R-F_4 vom Geschlecht 1 mit zwei windschiefen Doppelgeraden. Während die obigen R-F_4 alle vom Geschlecht 0 waren, gibt es noch einen Typus vom Geschlecht 1 mit zwei windschiefen — evtl. auch koinzidierenden — Doppelgeraden.

Man wähle sie als Koordinatenkanten

$$\bar{g}_1(x_1=x_2=0),\quad \bar{g}_2(x_3=x_4=0).$$

Die Gleichung der Fläche lautet, je nachdem man nach x_1, x_2 oder nach x_3, x_4 ordnet,

$$(14)\quad x_1^2(ax_3^2+2bx_3x_4+cx_4^2)+2x_1x_2(a'x_3^2+2b'x_3x_4+c'x_4^2) \\ +x_2^2(a''x_3^2+2b''x_3x_4+c''x_4^2) \\ \equiv x_3^2(ax_1^2+2a'x_1x_2+a''x_2^2)+2x_3x_4(bx_1^2+2b'x_1x_2+b''x_2^2) \\ +x_4^2(cx_1^2+2c'x_1x_2+c''x_2^2)=0.$$

Betrachtet man die beiden Verhältnisse $\frac{x_1}{x_2}=\lambda$ und $\frac{x_3}{x_4}=\mu$ als Parameter der Punktreihen auf $\bar{g}_2$ resp. $\bar{g}_1$, so erscheint (14) als doppeltquadratische Gleichung in λ und μ.

Somit erscheint die Fläche als Ort der Verbindungslinien entsprechender Punkte von zwei in einer (2, 2)-Korrespondenz stehenden Geraden g_1, g_2. Durch jeden Punkt von g_1 gehen zwei Regelstrahlen, die mit g_2 in einer Ebene liegen und vice versa.

Auf jeder der beiden Doppelgeraden $\bar{g}_1$, $\bar{g}_2$ liegen vier Kuspidalpunkte.

Die Fläche ist auch erzeugbar als Ort der Strahlen, die zwei gegebene Gerade g_1, g_2 und eine ebene c_3, die g_1 wie g_2 einmal schneidet, treffen.

Dieser letzteren Erzeugung kann man sich auch in dem Sonderfalle bedienen, wo g_1 und g_2 in eine Gerade g koinzidieren.

Es treffe g die c_3 in O. Die c_3 steht zu g in einer (2, 1)-Korrespondenz derart, daß die Punktepaare von c_3, die den einzelnen Punkten von g entsprechen, mit O stets in einer Geraden liegen, wodurch das Strahlenbüschel (O) auf die Punktreihe (g) projektiv bezogen wird.

Die Fläche ist der Ort der Verbindungslinien entsprechender Punkte von c_3 und g.

Wählt man g als Kante $(x_1 = x_2 = 0)$, so nimmt die Gleichung der Fläche die Gestalt an

$$(15)\quad f_4(x_1, x_2) + f_2(x_1, x_2)\cdot(x_1x_4 - x_2x_3) + (x_1x_4 - x_2x_3)^2 = 0,$$

wo f_4 und f_2 binär in x_1, x_2 sind.

82. Die Polaren-Methode von Wong. Von einem einheitlichen und natürlichen Prinzip aus hat *Wong*[198]) die R-F_4 hergeleitet.

Es handelt sich um die liniengeometrische Ausdehnung der schon öfter benutzten quadratischen Punkttransformation T_2 der Ebene auf den Raum. Es liege ein F_2-Büschel $B(F, G)$ vor. Man ordne jedem Punkte P als seine „Polare" p die gemeinsame Schnittlinie seiner Polarebenen in bezug auf die Individuen in B zu. Durchläuft P irgendeine Raumkurve C, so beschreibt seine Polare p eine gewisse R-F.

Dies werde im besonderen auf die R-F_4 angewendet. Seien die Gleichungen von F und G

$$(16)\qquad \begin{cases} F \equiv \sum\sum a_{ik}x_ix_k \equiv (ax)^2 = 0, \\ G \equiv \sum\sum b_{ik}x_ix_k \equiv (bx)^2 = 0; \end{cases}$$

der Punkt P habe die Koordinaten (y). Versteht man unter F_r, G_r $(r = i, k, l, m)$ die ersten Ableitungen von F, G, so bestehen zwischen den x und y die beiden Beziehungen

$$(17)\qquad \begin{cases} \sum x_iF_i(y) \equiv \sum y_iF_i(x) \equiv (ax)(ay) = 0, \\ \sum x_iG_i(y) \equiv \sum y_iG_i(x) \equiv (bx)(by) = 0. \end{cases}$$

Sind π_{ik} die Achsenkoordinaten der Geraden p, so folgt aus (17):

$$(18)\qquad \varrho\pi_{ik} = (ay)(by)(ab)_{ik} \equiv \begin{vmatrix} F_i(y), & F_k(y) \\ G_i(y), & G_k(y) \end{vmatrix}.$$

Diese Darstellungen (18) lassen sich auch in eine einzige zusammenziehen. Bedeutet r irgendeine p treffende Gerade mit den Achsenkoordinaten $r_{lm} = (uv)_{lm}$, so läßt sich (18) ersetzen durch die Gleichung des linearen Komplexes, dessen Geraden p treffen,

$$(19)\qquad (\pi r) \equiv (ay)(by)(abuv) \equiv |F_i(y),\ G_i(y),\ u_i,\ v_i| = 0.$$

Analog zur T_2 liegt in (19) eine Erweiterung des *Clebsch*schen Übertragungsprinzips auf Komitanten vor (s. Nr. **5**).

198) *B. C. Wong*, California Univ. Publ. 1 (1924), p. 371.

Eine Gerade g, deren Punktreihe von einem Parameter λ abhänge, trifft die beiden Flächen F, G in zwei Punktepaaren $f \equiv (a\lambda)^2 = 0$, $g \equiv (b\lambda)^2 = 0$, und das Büschel B in der Involution J: $f + \varrho g = 0$. Die Doppelpunkte D_1, D_2 von J bestimmen sich durch die Wurzeln der Funktionaldeterminante Θ von f, g: $\Theta \equiv (a\lambda)(b\lambda)(ab) = 0$.

Vermöge des Übertragungsprinzips gehen $(a\lambda)$, $(b\lambda)$ über in die quaternären Linearformen (ay), (by), und der binäre Klammerfaktor (ab) in die geränderte Determinante $(abuv)$, so daß $\Theta = 0$ übergeht in (19).

Läßt man jetzt die Gerade g variieren, so wird die Gesamtheit der Punktepaare D_1, D_2 direkt durch (21) dargestellt.

Es durchlaufe zunächst der Punkt $P(y)$ eine feste Gerade $g(y)$, die als Schnitt zweier Ebenen $(\alpha y) = 0$, $(\beta y) = 0$ gedacht sei. Kombiniert man diese beiden Gleichungen mit (17) und eliminiert die y, so ergibt sich

$$(20) \qquad |F_i(x),\ G_i(x),\ \alpha_i,\ \beta_i| = 0,$$

d. i. die Gleichung einer F_2. Beschreibt also ein Punkt P eine Gerade g, so durchläuft die Polare p die Erzeugenden (der einen Schar) einer R-F_2 (20).

Aber auch explizite läßt sich diese Schar der p leicht darstellen.

Man bestimme die Punkte $P(y)$ auf g durch einen Parameter τ, gemäß

$$(21) \qquad \varrho y_r = f_r(\tau) = c_r \tau + d_r \qquad (r = i, k, l, m),$$

so hat man für die Schar der p als Erzeugende der R-F_2 (20)

$$(22) \qquad \sigma \pi_{ik} = \begin{vmatrix} F_i[f_r(\tau)], & F_k[f_r(\tau)] \\ G_i[f_r(\tau)], & G_k[f_r(\tau)] \end{vmatrix},$$

wo die rechten Seiten quadratische binäre Formen in τ sind.

Nunmehr durchlaufe der Punkt $P(y)$ einen Raumkegelschnitt C_2, der gedacht sei als Schnitt einer festen Ebene $(\alpha y) = 0$ mit einer festen F_2: $F_2(y) = 0$. Man löse dann zunächst die drei Gleichungen

$$(23) \qquad \sum y_i F_i(x) = 0, \quad \sum y_i G_i(x) = 0, \quad (\alpha y) = 0$$

nach den y auf

$$(24) \qquad \omega y_i = \begin{vmatrix} F_k(x), & F_l(x), & F_m(x) \\ G_k(x), & G_l(x), & G_m(x) \\ \alpha_k, & \alpha_l, & \alpha_m \end{vmatrix} \equiv (F G \alpha)_{klm}.$$

Die Einsetzung dieser Werte der y in $F_2(y) = 0$ liefert als Ort der Geraden p eine R-F_4

$$(25) \qquad R\text{-}F_4 \equiv F_2[(FG)] = 0.$$

Deren explizite Darstellung vollzieht sich wie oben die der R-F_2.

Man stelle die C_2 explizite dar mittels eines Parameters τ

$$(26) \qquad \varrho y_r = g_r(\tau) = a_r\tau^2 + 2b_r\tau + c_r \qquad (r = i, k, l, m).$$

Die Einsetzung in (22) liefert die Regelstrahlen p der R-F_4

$$(27) \qquad \sigma\pi_{ik} = \begin{vmatrix} F_i[g_r(\tau)], & F_k[g_r(\tau)] \\ G_i[g_r(\tau)], & G_k[g_r(\tau)] \end{vmatrix},$$

wo die rechten Seiten biquadratische binäre Formen in τ sind.

Durchläuft also ein Punkt P eine C_2, so beschreibt seine Polare p eine R-F_4, die durch (23) resp. (27) dargestellt ist.

Überdies läßt sich aus obigem eine einheitliche direkte Erzeugung der R-F_4 durch zwei projektiv zugeordnete F_2-Büschel entnehmen. Zu dem Behuf hat man nur die Erzeugung der C_2 durch zwei projektiv bezogene Geradenbüschel zugrunde zu legen. Dies überträgt sich auf die Erzeugung der R-F_4 wie folgt.

Es liegen zwei F_2-Büschel B_1 und B_2 vor, deren Basiskurve je in eine Gerade und eine C_3 zerfällt. Die beiden Büschel B_1, B_2 lassen sich projektiv so aufeinander beziehen, daß sich je zwei zugeordnete Individuen in einer C_4 schneiden, die wiederum in eine Gerade p und eine C_3 zerfällt. Dann ist die R-F_4 der Ort der Geraden p.

Die Geraden p bilden einen tetraedralen Komplex, indem sie die Ebenen des gemeinsamen Poltetraeders des Büschels B nach konstantem Doppelverhältnis treffen. Wählt man dieses Tetraeder als Koordinatentetraeder („allgemeiner Fall"), so vereinfacht sich die Rechnung erheblich. Es ist hierbei vorteilhaft, die C_2 innerhalb ihrer Ebene auf ein Dreiseit von Geraden g zu beziehen und entsprechend die R-F_4 auf deren drei Bild-F_2.

Den ∞^2 Punkten Y einer Ebene u entspricht eine Kongruenz von Geraden p, die Sekanten einer bestimmten C_3 sind; jede C in u geht über in eine R-F durch die C_3.

Nach diesem Verfahren hat *Wong*[198]) sämtliche 12 *Cremona*schen Typen von R-F_4 hergeleitet. Läßt man zunächt das F_2-Büschel B ein allgemeines sein und variiert in geeigneter Weise die Lage der C_2, so gelangt man bereits zu neun Typen der R-F_4.

Behufs der drei noch übrigen Typen hat man das Büschel B geeignet zu spezialisieren, etwa so, daß sich die Individuen von B längs einer festen Geraden berühren. Man legt dann wieder der Gleichung von B eine spezifische Normalform zugrunde.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die R-F_4 als ausgeartete *Kummer*sche Flächen auch als Singularitätenflächen spezieller quadratischer Komplexe K_2 studiert werden können. Unter den 58 projektiv verschiedenen Gattungen von K_2 befinden sich nach *A. Weiler*[198a]) 38 solche, die eine R-F_4 zur Singularitätenfläche haben.

Läßt sich im besonderen ein K_2 durch lineare Kongruenzen $\mathfrak{K}_1$ erzeugen, so bilden deren Direktrizen die Erzeugenden h einer R-F_4, die der Singularitätenfläche angehört. Umgekehrt, falls die Singularitätenfläche eine R-F_4 ist, muß jede ihrer h Direktrix einer $\mathfrak{K}_1$ des K_2 sein.

Daraufhin lassen sich diese $\mathfrak{K}_1$ bestimmen und konstruieren.

83. Die Regelflächen 5. Ordnung. Diese hat in einer vielzitierten Abhandlung *H. A. Schwarz*[199]) behandelt, und vollständig klassifiziert. Je nach der Natur der Doppelkurve gelangt er zu 15 verschiedenen Arten; für zehn derselben ist das Geschlecht gleich Null, für vier weitere ist $p = 1$, und für die letztere $p = 2$.

Die Doppelkurve ist der Reihe nach:

1. eine vierfache Gerade;
2. eine C_6 mit D_3;
3. eine dreifache Gerade und eine C_3;
4. eine dreifache Gerade, ein Kegelschnitt und eine Doppelerzeugende;
5. eine dreifache und eine zweifache Gerade nebst zwei Doppelerzeugenden; hierbei können im besonderen die beiden ersteren Geraden koinzidieren;
6. eine zweifache Gerade und eine C_5 mit D_3;
7. eine zweifache Gerade, eine R_4 mit d_2 und eine Doppelerzeugende;
8. ein Kegelschnitt und eine R_4 mit D_2;
9. drei Kegelschnitte, die je zwei Punkte gemein haben, von denen einer allen drei Kegelschnitten angehört;
10. eine Doppelerzeugende und eine C_5 mit D_2;
11. eine C_5;
12. eine dreifache Gerade und ein zweifacher Kegelschnitt;
13. eine dreifache und eine zweifache Gerade nebst einer Doppelerzeugenden;
14. eine zweifache Gerade und eine C_4;
15. eine dreifache und eine zweifache Gerade, die evtl. auch koinzidieren können.

198a) *A. Weiler,* Ztschr. Math. Phys. 27 (1882), p. 257; J. f. Math. 95 (1883), p. 140. In einer früheren Arbeit, Math. Ann. 7 (1873), p. 145, hatte *Weiler* die 58 Gattungen quadratischer Komplexe aufgestellt.

199) *H. A. Schwarz,* J. f. Math. 67 (1866), p. 23.

84. Die Regelflächen sechster und höherer Ordnung. Einen ersten Versuch in der Klassifikation dieser Flächen R-F_6 macht *J. Bergstedt.*[200]) Indem er sich im wesentlichen der *Schwarz*schen Methode bedient, gelangt er, ohne Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben, zu neun verschiedenen Arten.

Weiter dringt *K. Fink*[201]) vor. Die Haupteinteilungsgesichtspunkte bleiben das Geschlecht p der Fläche R-F_6, und die Natur ihrer Doppelkurve.

Vorab wird allgemein das Maximum von p einer R-F_n durch Ermittlung der Anzahl der D_2 derjenigen Restkurve C bestimmt, die durch eine zwei erzeugende Gerade enthaltende Ebene ausgeschnitten wird.

Im Falle $n = 6$ werden sodann für jede mögliche Beschaffenheit des irreduzibeln Bestandteils von C das Geschlecht und die Ordnung der Doppelkurve $\bar{C}$ angegeben, sowie die Erzeugung der R-F_6 als Ort der Verbindungsgeraden entsprechender Punkte zweier aufeinander bezogenen Kurven.

Insbesondere werden im Falle $p = 0$ Ordnung und Geschlecht der $\bar{C}$ nebst der Anzahl ihrer D_3 ermittelt. Für $p = 1$ beschränkt sich *Fink* auf Spezialfälle.

Behufs einer vollständigen Klassifikation der R-F_6 verwendet *A. Wiman*[202]) neue Methoden. Zugrunde wird gelegt der Komplex K niedrigster Ordnung, dem die Regelstrahlen der Fläche R-F_6 angehören; dieser Komplex wird in geeigneter Weise auf den Punktraum abgebildet, so daß sich die Fläche in eine Kurve C transformiert (vgl. auch hinsichtlich der R-F_4 Nr. 82).

Die Abbildung wird so gewählt, daß die Komplexkegel stets in Gerade übergeführt werden, die selbst einen gewissen, leicht bestimmbaren Komplex bilden. Hierbei wird die Doppelkurve $\bar{C}$ der R-F_6 abgebildet auf die Sekantenregelfläche der Bildkurve, die diesem Komplex angehört. Die Vereinfachung der gestellten Aufgabe besteht darin, daß erst die Eigenschaften jener Sekantenregelflächen für sich untersucht, und dann auf die Doppelkurve $\bar{C}$ übertragen werden.

Die Fundamentalgebilde der Abbildung werden naturgemäß so bestimmt, daß die Ordnung der Bildkurve einen kleinsten Wert erhält; es treten dann nur die drei Fälle ein, wo diese Ordnung gleich resp. 3, 4, 5 wird. Als Hilfskomplex läßt sich ein tetraedraler K benutzen, der sich mittels eines F_2-Büschels B einfach auf den Punktraum abbilden läßt, in dem K von den Polargeraden der Punkte bez. B gebildet wird (s. Nr. 82).

200) *J. Bergstedt,* Lund Akad. Afh. 1886.
201) *K. Fink,* Dissert. Tübingen 1887.
202) *A. Wiman,* Dissert. Lund 1892.

In dem Sonderfalle, wo die R-F_6 Leitgerade besitzt, geht K in einen speziellen linearen Komplex über; eine der F_2 in B artet in ein Ebenenpaar aus.

Enthält ein allgemeiner linearer Komplex die Erzeugenden h der R-F_6, so hat die Sekantenregelfläche eine C_2 als Leitkurve, und umgekehrt.

Es werden daraufhin für die verschiedenen Arten der R-F_6 folgende Anzahlen ermittelt:

	$p=0$	$p=1$	$p=2$
Mit einer Leitgeraden	32	18	7
Ohne Leitgerade	36	11	2

Eine R-F_6 ohne zwei Leitgerade hat also höchstens das Geschlecht 2.

Überdies werden allgemein für eine R-F_n ohne dreifache Kurve und Leitgerade die Anzahl t der D_3 und die des Geschlechtes P der $\overline{C}$ ausgedrückt durch die Ordnung n der Fläche, das Geschlecht p und die Zahl f der D_2

$$\begin{cases} t = \frac{1}{6}(n-4)\{(n-2)(n-3)-6p\}, \\ P = \frac{1}{2}(n-3)(n-4)+p(n-5)-f. \end{cases}$$

Mithin muß $p \leqq \frac{1}{6}(n-2)(n-3)$ sein.

Entsprechende Formeln gelten für R-F mit einer Leitgeraden.

XIII. Metrisch bemerkenswerte Flächen vierter und höherer Ordnung.

85. Aus Flächen 2. Ordnung abgeleitete Flächen vierter und höherer Ordnung. Vorab mögen zwei Arbeiten von *E. E. Kummer* besprochen werden, da sie allgemeinere Gesichtspunkte enthalten. Beidemal wird die Einhüllende einer Schar von F_2 betrachtet.

Sei zunächst[203]) eine quadratische Schar von F_2 vorgelegt mit dem Parameter λ

(1) $$\lambda^2\varphi + 2\lambda\psi + \chi = 0.$$

Dann ist die Einhüllende die F_4

(2) $$F_4 \equiv \psi^2 - \varphi\chi = 0.$$

Diese Gattung von F_4 umfaßt eine Reihe bekannterer, so die F_4 mit $\overline{C}_2$ (Abschn. III), die *Kummer*sche Fläche K_m (Abschn. XII), die F_4 mit acht assoziierten D_2 (Nr. **61**), die *Steiner*sche Fläche S (Abschn. VII), die R-F_4 mit kubischer Doppelkurve (Nr. **78** ff.) u. a.

Während im allgemeinen die Doppeltangenten t_2 einer F_4 ein

203) *E. E. Kummer*, Berlin Ber. 1872, p. 474.

Strahlensystem (12, 28) bilden, so ist es für die F_4 (2) charakteristisch, daß das System in zwei zerfällt: (α) (4, 12), und (β) (8, 16).

Das System (α) besteht aus den Erzeugenden aller einhüllenden F_2, enthält also im besonderen die Kanten der acht, in der F_2-Schar (1) existierenden Kegel.

Adjungiert man der F_4 (2) noch die Scheitel jener acht Kegel, so erhält man die vollständige Brennfläche des Strahlensystems (α).

Dies ist der Spezialfall eines allgemeinen Gesetzes. Man betrachte das System der Doppeltangenten t_2 einer F_n. Dann zerfällt die Brennfläche dieses Systems in die F_n selbst, und die abwickelbare Fläche der doppelt berührenden Ebenen T_2 der F_n.

Kehren wir zur F_4 (2) zurück, so enthält das System (α) auch die Kanten der acht Kegel, die gebildet werden von den durch die acht Grundpunkte des Netzes (φ, ψ, χ) gehenden Strahlen; diese acht Grundpunkte sind D_2 der F_4. Diese acht Kegel sind die Orte der durch die D_2 gehenden Tangenten der F_4.

Die von den T_2 der F_2 (2) eingehüllte abwickelbare Fläche ist eine F_{96}, die aber zerfällt in jene acht doppelzählenden Kegel 6. Ordnung und eine F_{48}.

In gewissen Fällen kann das System (α) der Ordnung 4 in zwei Systeme 2. Ordnung zerfallen. Man kann auf diese Weise alle Strahlensysteme 2. Ordnung erhalten, die Brennflächen, aber keine Brennkurven haben, exkl. die der Klasse 7.

Das Obige findet dann noch seine Anwendung auf die *Kummer*sche Fläche K_m

$$K_m \equiv \varphi^2 - pqrs = 0, \tag{3}$$

wobei verschiedene Modifikationen eintreten.

Als Spezialfall der K_m erscheint die *Steiner*sche Fläche S. Es werden am Schlusse einige Gipsmodelle der K_m beschrieben.

Beim nächsten Schritt[204]) liegt eine kubische Schar von F_2 vor

$$\lambda^3\varphi + 3\lambda^2\psi + 3\lambda\chi + \omega = 0. \tag{4}$$

Die einhüllende Fläche F dieser Schar erhält man durch Nullsetzen der Diskriminante der in λ kubischen Form (4)

$$F \equiv 4(\psi^2 - \varphi\chi)(\chi^2 - \varphi\omega) - (\varphi\omega - \psi\chi)^2 = 0. \tag{5}$$

Diese Fläche F ist eine F_8, die insofern ein bemerkenswertes Seitenstück zur *Kummer*schen Fläche K_m bildet, als auch sie zu sich selbst dual (reziprok) ist. Diese F_8 erscheint auch als Brennfläche eines Strahlensystems (3, 3), falls die drei durch irgendeinen Punkt gehenden Strahlen des Systems nicht inzident sind.

204) *E. E. Kummer*, Berlin Ber. 1878, p. 25.

Die F_8 hat eine Wendekurve C_8, zwölf singuläre, längs C_2 berührende Tangentenebenen T, sowie zwölf D_2, die auf sechs Schnittachsen der zwölf T liegen. Jede dieser T ist in vier Punkten Schmiegungsebene der C_8, die zugleich auf den Berührungs-C_2 der T liegen.

In einem Zusatze bemerkt *Cayley*[205]), daß die obige F_8 zu einer Gattung von Flächen gehört, die er[206]) als Schnitte von drei gewissen, projektiv bezogenen Komplexen erhalten hat.

Das *Kummer*sche Verfahren ließe sich fortsetzen, indem man einhüllende Flächen von biquadratischen, ... F_2-Scharen betrachtet. Diese Flächen scheinen aber zu kompliziert zu sein, um noch Interesse zu erwecken. Vgl. indessen (weiter unten) eine spezielle biquadratische F_2-Schar als Enveloppe der Parallelflächen des Ellipsoides.

Ist im besonderen in der Gleichung (2) eine der beiden quadratischen Formen φ, χ das Quadrat einer Linearform p, so spezialisiert sich die F_4 (2) zu einer F_4 mit $\overline{C}_2$; für $p = 0$ als E_∞, und ψ als einen Minimalkegel tritt die Reduktion auf eine Zyklide Z ein. Als ein bemerkenswerter Unterfall der letzteren bietet sich die Inverse einer zentrischen F_2 in bezug auf deren Mittelpunkt als Pol dar. Macht man x, y, z noch mit q homogen, so sei die F_2, mit dem Anfangspunkt als Mittelpunkt, dargestellt durch

$$(6) \qquad F_2 \equiv G_2 - q^2 = 0,$$

wo G_2 eine quadratische Form in x, y, z ist. Vermöge der Inversion bez. O geht (6) über in die F_4

$$(7) \qquad F_4 \equiv q^2 G_2 - (x^2 + y^2 + z^2)^2 = 0,$$

also in eine leicht zu diskutierende Z. Ist im besonderen (6) ein Ellipsoid mit den Halbachsen a, b, c, so geht (7) über in

$$(7') \qquad F_4 = q^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right) - (x^2 + y^2 + z^2)^2 = 0.$$

Diese F_4 tritt in der Mathematik deformierbarer Körper als „Elastizitätsoberfläche" auf.

Cayley[207]) untersucht die Zentralinverse einer zentrischen F_2, indem er deren Gleichung auf verschiedene Formen bringt.

Im Falle eines Ellipsoides studiert *Cayley*[208]) die parabolische Kurve der in Rede stehenden Fläche, d. i. den Schnitt mit ihrer *Hesse*schen Fläche. Nach Abspaltung von vier doppelt zu zählenden Geraden, den

---

205) *A. Cayley*, ib. p. 309.

206) *A. Cayley*, London Math. Soc. Proc. 2 (1870).

207) *A. Cayley*, Quart. J. 11 (1871), p. 283.

208) *A. Cayley*, Quart. J. 15 (1877), p. 141.

K treffenden Kanten des Asymptotenkegels des Ellipsoides, bleibt als „eigentliche“ parabolische Kurve eine C_8.

Das Problem der Quadratur der Elastizitätsoberfläche hat, nach dem Vorgange von *K. G. J. Jacobi*, *Ed. Hutt*[209]) eingehend behandelt.

Indem er innerhalb des Doppelintegrals der Quadratur zwei geeignete neue Variable einführt, läßt sich die Integration nach der einen algebraisch ausführen; die Integration nach der zweiten Variabeln führt auf ein elliptisches Integral.

Dies Ergebnis dehnt *Hutt* weiterhin auf irgendeine Parallelfläche zur Elastizitätsoberfläche aus. Weiter bietet sich als ein eigenartiger metrischer Unterfall von (4) dar in der Schar konfokaler Mittelpunkts-F_2

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}-q^2=0. \tag{8}$$

Nach Heraufmultiplikation der Nenner und Verwendung von Summenabkürzungen, wie $\sum x^2 = x^2+y^2+z^2$ u. a., nimmt (8) die Gestalt an

$$\lambda^3 q^2 + \lambda^2\{\sum x^2 - q^2\sum a^2\} - \lambda\{\sum x^2(b^2+c^2) - q^2\sum b^2c^2\} \\ + \{q^2a^2b^2c^2 + \sum x^2b^2c^2\} = 0. \tag{8'}$$

Die zugehörige F_8 (5) besitzt nur ∞^1 reelle Punkte, nämlich die der beiden einteiligen Fokalkegelschnitte der Schar (8).

Diese beiden Fokalkegelschnitte nebst dem dritten (nullteiligen), sowie dem Kugelkreise K sind Doppelkegelschnitte $\overline{C}_2$ der F_8. Daraufhin läßt sich die Form F_8 als Summe von (7 resp. 10) Quadraten darstellen.

Die F_8 ist auch insofern bemerkenswert, als sie nach *F. Geiser*[210]) zusammenfällt mit dem Ort der Spitzen (x, y, z, q) der an das Ellipsoid (a, b, c) gehenden Rotationskegel. Dies setzt *Geiser* in Beziehung zum Hauptachsenproblem des Ellipsoides (oder allgemeiner, einer zentrischen F_2).

Diese drei Hauptachsen hängen von einer gewissen kubischen Gleichung $f_3(\lambda)=0$ ab. *E. E. Kummer*[210]) hatte gezeigt, daß die Diskriminante von f_3 als Summe von Quadraten darstellbar ist.

Auf Grund der Quadratsummendarstellung der Form F_8 liefert *Geiser* einen neuen Beweis des *Kummer*schen Satzes, wobei zugleich dessen innerer Grund anschaulich hervortritt.

Es werde noch auf einige weitere, den zentrischen F_2 und im be-

---

209) *Ed. Hutt,* Progr. Tilsit 1868. Die *Jacobi*sche Quadratur findet sich in J. f. Math. 39 (1850), p. 299.

210) *F. Geiser,* J. f. Math. 77 (1876), p. 47. Bezüglich des *Kummer*schen Satzes s. J. f. Math. 26 (1843), p. 268.

sonderen dem Ellipsoide entspringende Flächen höherer Ordnung eingegangen.

Da kommt vor allem die vielfach (s. „*Salmon-Fiedler*“, Nr. 273) untersuchte Parallelfläche des Ellipsoides in Betracht. Hierbei sei bemerkt, daß *S. Roberts*[211]) für die Parallelfläche einer zentrischen F_2 Ordnung, Klasse und einige Singularitäten bestimmt hat.

Weiter zeigt *Cayley*[211a]), daß sich diese Fläche als Enveloppe einer biquadratischen Schar von F_2 ansehen läßt. Ist die Gleichung des Ellipsoides

$$E \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \equiv \sum \frac{x^2}{a^2} - 1 = 0, \tag{9}$$

und h der Abtsand zwischen Ellipsoid und Parallelfläche, so lautet die Gleichung der Schar mit dem Parameter ϱ

$$\sum \frac{x^2}{a^2 + \varrho} - \left(1 + \frac{h^2}{\varrho}\right) = 0. \tag{10}$$

Bringt man die Nenner herauf, so ergibt sich links eine biquadratische Form $f_4(\varrho)$. Durch Nullsetzen von deren Diskriminante erhält man die Gleichung der Parallelfläche; diese erweist sich also als eine F_{12}. Sind g_2 und g_3 die Invarianten von $f_4(\varrho)$, so wird die Gleichung

$$F_{12} \equiv g_2^3 - 27\, g_3^2 = 0. \tag{11}$$

Hier stellt $g_2 = 0$ eine F_4, und $g_3 = 0$ eine F_6 dar; deren Schnittkurve, eine C_{24}, ist die Kuspidalkurve der F_{12}.

Eine eingehende Untersuchung der Parallelfläche verdankt man *Th Craig.*[212]) Die Fläche ist eine F_{12} (s. oben bei *Cayley*) mit einer C_{24} als Kuspidalkurve.

Nach Aufstellung der Gleichung der F_{12} werden die Krümmungsparameter u, v des Ellipsoides als unabhängige Variable eingeführt. Es ergibt sich dann für $\alpha = b - c$, $\beta = c - a$, $\gamma = a - b$ die einfache explizite irrationale Darstellung der F_{12}

$$x = \sqrt{\frac{a(a+u)+v}{-\beta\gamma}}\left(1 + \frac{h}{a}\sqrt{\frac{abc}{uv}}\right), \quad \text{usf.} \tag{12}$$

Nach Diskussion der Hauptschnitte der Fläche wird dann ihre Kuspidalkurve C_{24} untersucht. Diese zerfällt in die drei Fokalkegelschnitte des Ellipsoides, den Kugelkreis K und 16 Tangenten des letzteren.

Sodann hat *J. C. Malet*[212a]) die negative Fußpunktfläche F'' einer

211) *S. Roberts,* London Math. Soc. Proc. 4 (1872), p. 57.

211a) *A. Cayley,* Mess. 5 (1870), p. 191.

212) *Th. Craig,* J. f. Math. 93 (1889), p. 251.

212a) *J. C. Malet,* Dublin Trans. 1878 (zwei Abhandlungen).

zentrischen F_2 untersucht. Vorab wird als Vorbereitung der Fall der Ebene, also einer zentrischen c_2 behandelt.

Die gesuchte Kurve erweist sich als eine r_6 mit vier d_2 und sechs Spitzen. Die Spitzen liegen auf einer c_2, ihre Tangenten berühren eine γ_2; die acht Tangenten in den vier d_2 berühren eine γ_2', und die sechs Berührungspunkte der drei Doppeltangenten t_2 liegen auf einer c_2'.

Rechnung und geometrische Deutung verlaufen analog bei dem Raumproblem, nur daß hier naturgemäß die Singularitäten der fraglichen F_6 komplizierter sind.

Das in Rede stehende Problem läßt sich verallgemeinern. In der Ebene suche man den Ort der Mittelpunkte eines veränderlichen Kreises, der einen gegebenen Kreis orthogonal schneidet und eine gegebene Kurve c berührt. Andere Unterfälle dieser Verallgemeinerung sind die Parallelkurve von c nebst ihrer negativen Fußpunktkurve, sowie der Ort des Mittelpunktes eines Kreises, der die c und einen festen Kreis berührt.

Entsprechende Ansätze werden für den Fall des Raumes gemacht.

Weiter sei die „Gegenfußpunktsfläche" F' des Ellipsoides erwähnt. Allgemein, bei beliebiger Urfläche F, versteht *Th. Craig*[212]) unter der Fläche F' den Ort der Fußpunkte der Ebenen, die man durch einen festen Punkt P_0, den Pol, senkrecht zu den Normalen von F legen kann.

Für das Ellipsoid (9) als Urfläche und dessen Mittelpunkt als Pol erweist sich die fragliche Fläche F' als eine F_{10}.

Die Ableitung ihrer Gleichung erfolgt durch eine umständliche Elimination. Aus der Gleichung lassen sich einige Gestaltsverhältnisse der Fläche ableiten.

Eine einfachere explizite Darstellung ergibt sich, wenn man, wie oben, die Krümmungsparameter u, v des Ellipsoides als Parameter einführt. Damit gewinnt man die Fundamentalgrößen 1. Ordnung der Fläche F', aus denen man weitere Eigenschaften derselben ableiten kann.

Die Fläche F' hängt mit der Urfläche F und deren Fußpunktfläche F'' nach einem einfachen Gesetze zusammen:

Die beiden Normalen in entsprechenden Punkten der beiden letzteren Flächen treffen sich in dem entsprechenden Punkte der ersteren Fläche.

Zu einer eigentümlichen Fläche gelangt *L. Glaisher*[213]), indem er nach dem Ort der Mittelpunkte der Sehnen konstanter Länge eines Ellipsoides fragt.

---

213) *L. Glaisher,* Quart. J. 16 (1879), p. 283.

Vorab wird die analoge Frage in der Ebene für eine Ellipse erörtert. Es ergibt sich als Ort eine c_4, die eingehend diskutiert wird. Für das Ellipsoid ergibt sich als Ort ein räumliches Gebiet, das von Teilen einer gewissen F_6 begrenzt wird. Ist die Gleichung des Ellipsoides E, wie in (9), gegeben, und k die konstante Sehnenlänge, so lautet die Gleichung der F_6

$$F_6 \equiv \sum \frac{x^2}{a^2(a^2E^2 + k^2)} = 0. \tag{13}$$

Irgendeiner der drei Hauptschnitte der F_6 zerfällt in eine c_4 der obigen Art und eine Ellipse, die zu dem zugehörigen Hauptschnitt des Ellipsoides ähnlich und ähnlich gelegen ist.

Zwischen diesen beiden Kurven verläuft jeweils der Streifen des Ortsraumes.

Es wird noch auf gewisse Analogien zwischen der F_6 und der Wellenfläche hinsichtlich Gleichungsform und Gestalt hingewiesen.

Im Falle eines Rotationsellipsoides treten gewisse Vereinfachungen ein.

Bezüglich mehr elementarer Eigenschaften von, aus einer F_2 (resp. C_2) abgeleiteten metrischen Flächen höherer Ordnung (positive und negative Fußpunktfläche, Parallelfläche, Torusfläche u. a.) sei auf „*Salmon-Fiedler*", Kap. IV verwiesen.

86. Andere bemerkenswerte metrische Flächen vierter und höherer Ordnung. Ohne Anspruch auf Vollständigkeit sollen hier nur einige beachtenswerte Typen metrischer F_4 herausgehoben werden. Bei *W. Marx*[214]) liegt die stereometrische Aufgabe zugrunde, drei gegebene Raumgerade a, b, c durch eine Ebene nach einem Dreieck Δ mit vorgeschriebenen Winkeln α, β, γ zu schneiden. Man verbinde einen beliebig, aber fest gewählten Punkt A auf a mit einem auf b variierenden Punkte B durch eine Strecke s. Über s konstruiere man ein Dreieck Δ der gesuchten Art. Dann beschreibt die dritte Ecke von Δ einen Kreis, und dieser Kreis beschreibt bei (auf b) variierendem Punkte B eine F_4 mit einem Doppelkegelschnitt, der selbst ein gewisser Kreis durch A ist. Diese F_4 wird diskutiert; ihre vier Schnittpunkte mit der Geraden c führen zu den vier Lösungen der obigen Aufgabe.

A. Sucharda[215]) untersucht eingehend „Rückungsflächen", die entstehen durch Parallelverschiebung eines (unveränderlichen) Kegelschnitts C längs eines festen Kegelschnitts C_0. Diese Flächen gehören zur Gattung der F_4 mit $\overline{C}_2$.

214) *W. Marx,* Dissert. München 1880.

215) *A. Sucharda,* Casopis 13 (1884), p. 1, 161; ib. 15 (1886), p. 149; Wien Ber. 97 (1888), p. 1083; ib. 99 (1890), p. 549; ib. 101 (1892), p. 585.

In einer ersten Arbeit (1884) sind im besonderen C und C_0 Kreise, deren Ebenen orthogonal sind. Es werden für eine solche „Kreisrückungsfläche" ihre Symmetrieverhältnisse, ihre $\overline{C}_2$, ihre Kurve der parabolischen Punkte und ihre Kuspidalpunkte diskutiert, sodann ihre Polarflächen, ihre *Steiner*sche Fläche u. a. m. In einer zweiten Arbeit (1886) werden C und C_0 als beliebige Kegelschnitte angenommen. Es handelt sich vor allem um die Ermittelung der 16 Geraden g der F_4, und deren Anordnung. Als Hilfsmittel dient die *Geiser*sche Verallgemeinerung[215a]) der Inversion (s. Nr. **25**): Jedem Punkte X entspreche ein Punkt Y derart, daß ihre Verbindungsgerade p durch einen festen Punkt P_0 geht, und das Paar (X, Y) durch die Schnittpunkte von h mit einer festen F_2 harmonisch getrennt wird. Als zu transformierende Rückungs-F_4 wird im besonderen eine durch zwei gleichseitige Hyperbeln C, C_0 bestimmte gewählt, und als F_2 ein die $\overline{C}_2$ enthaltendes Rotationshyperboloid.

Die Transformierte der F_4 ist eine F_8, die sich aber nach Absonderung einer Ebene und eines Doppelkegels auf eine spezielle F_3 reduziert, in deren 27 Geraden die 16 der F_4 enthalten sind. Je vier dieser 16 g fallen in eine Gerade zusammen.

Die Methode ist auf den allgemeinen Fall übertragbar.

In drei weiteren Arbeiten[215]) werden Rückungs-F_4 mit einem Mittelpunkt untersucht; diese entstehen, wenn C und C_0 zentrische Kegelschnitte sind. Es werden (1889) wiederum die Singularitäten der F_4 ermittelt u. a. m. Die F_4 enthält zwei Systeme unter sich und mit C resp. C_0 kongruenter und homothetischer Kegelschnitte. Im besonderen wird (1888) die Normalenfläche F längs eines solchen verfolgt. Der Richtungskegel von F ist ein Kegel 2. Ordnung. Alle hierher gehörigen Berührungsaufgaben sind mit Zirkel und Lineal lösbar. Die Fläche F ist erzeugbar aus zwei ebenen c in (1, 2)-Korrespondenz. Die Fläche ist eine F_6 vom Geschlecht 0 und vom Range 10. Als Doppelkurve tritt eine C_{10} auf, die aber in eine C_2 (in E_∞) und eine C_8 zerfällt.

Beachtenswert ist, wie in einer letzten Arbeit (1892) genauer ausgeführt wird, daß sich die ziemlich verwickelten Singularitäten der Fläche in Paaren von reziproken anordnen lassen.

Zu einem metrischen Repräsentanten einer F_4 mit zerfallender $\overline{C}_2$ und vier isolierten D_2 führt eine stereometrische Aufgabe bei *W. Schmidt*.[216]) Die F_4 ist der Ort der Punkte, deren Entfernungen

215a) *F. Geiser,* J. f. Math. 70 (1869), p. 249.

216) *W. Schmidt,* Progr. Realgymn. Lüdenscheid 1889. Den Sonderfall, wo die beiden Geraden g_1, g_2 inzident sind, hatten bereits *A. Luchterhandt,* Progr.

l_1, l_2 von zwei gegebenen windschiefen Geraden g_1, g_2 eine konstante Summe k besitzen. Die vier D_2 bestimmen ein windschiefes Rechteck, dessen Diagonalen g_1 und g_2 sind, während die Seiten der F_4 angehören, womit alle g der Fläche erschöpft sind. Die F_4 besteht aus zwei, in den D_2 zusammenhängenden Mänteln, von denen aber nur der endliche (mit elliptischer Krümmung) der Aufgabe entspricht; für die Punkte des unendlichen Mantels (mit hyperbolischer Krümmung) ist $l_1 - l_2 = k$.

Für $k < \delta$, wo δ den kürzesten Abstand zwischen g_1 und g_2 bedeutet, verschwindet der endliche Mantel. Für den Grenzfall $k = \delta$ resultiert die *Steiner*sche Fläche S (s. Art. „F_3“, Nr. **13**).

Zu einer speziellen F_4 mit $\bar{C}_2$ führt eine instruktive Aufgabe aus der Differentialgeometrie. Man suche mit *F. Rudio*[217]) eine Fläche F, deren Krümmungsmittelpunktsfläche aus zwei konfokalen (Mittelpunkts-) F_2 besteht. Sei $a^2 > b^2 > c^2$, so stellt

$$(1) \qquad \sum_x \frac{x^2}{a^2 - \lambda} = 1$$

ein konfokales F_2-System dar. Durch irgendeinen Punkt $P(x, y, z) = P(\lambda, u, v)$ gehen drei solcher F_2, wo λ, u, v, die Wurzeln von (1), die elliptischen Koordinaten von P sind. Vom Punkte P, der auf der $F_2(\lambda)$ liegt, gehen zwei Gerade t_1, t_2 aus, die $F_2(\lambda)$ und eine weitere $F_2(\mu)$ des Systems (1) berühren.

Setzt man zur Abkürzung

$$(2) \qquad U = \frac{\sqrt{f(u)}}{(\lambda - u)(\mu - u)}, \quad V = \frac{\sqrt{f(v)}}{(\lambda - v)(\mu - v)},$$

wo $f(v) = (a^2 - v)(b^2 - v)(c^2 - v)$, so erhält man für die Richtungskosinus ξ, η, ζ von t_1, resp. t_2 die Werte

$$(3) \qquad \xi = x\left[\frac{U}{a^2 - u} \cdot \frac{\mu - u}{v - u} + \frac{V}{a^2 - v} \cdot \frac{\mu - v}{u - v}\right] \text{ usf.}$$

Das Strahlensystem

$$(4) \qquad x' = x + \varrho\,\xi$$

wird zum Normalensystem einer Fläche F, sobald man ϱ den Wert beilegt

$$(5) \qquad \varrho = \frac{1}{2}\left\{\int \frac{du}{U} + \int \frac{dv}{V}\right\}.$$

Diese Fläche F ist die in Rede stehende F_4 mit $\bar{C}_2$.

Friedrich-Wilhelm-Gymn. Berlin 1861, und ausführlicher *R. Gantzer*, Progr. Stendal 1876, untersucht. Die Gestaltsverhältnisse der Fläche sind im wesentlichen dieselben, wie im allgemeinen Falle.

217) *F. Rudio*, J. f. Math. 94 (1883), p. 240; ib. 105 (1888), p. 85. Vgl. auch *F. Klein*, Höhere Geom., 3. Aufl., hrsg. von *E. Blaschke*, Berlin 1926, § 6.

Die Methode und ihr Ergebnis lassen sich, wie in einer weiteren Arbeit[217]) gezeigt wird, ausdehnen auf die Mittelpunktsfläche F eines Strahlensystems 4. Ordnung und 4. Klasse, dessen Brennfläche aus zwei konfokalen F_2 besteht.

Eine einfache stereometrische Aufgabe führt *L. Heffter*[218]) zu „Isogonalflächen" 4. Ordnung. Sind in der Ebene zwei Punkte P_1 und P_2 gegeben, so ist bekanntlich der Ort der Punkte P, deren Verbindungslinien mit P_1, P_2 einen konstanten Winkel φ einschließen, ein System von zwei Kreisen, daß man auch als eine zerfallende c_4 („Isogonalkurve") auffassen kann.

Für den Raum bieten sich, wenn wiederum zwei Punkte P_1, P_2 gegeben sind, drei verschiedene Ausdehnungen dar.

Erstens, die „Isogonalfläche $J_\varphi(P_1, P_2)$", als Ort der Punkte P, deren Verbindungslinien mit P_1, P_2 einen konstanten Winkel φ bilden. Zweitens, die „Isogonalfläche $J_\varphi(g, A)$", als Ort der Punkte P, für die die Ebene (P, g) mit dem Strahle (P, A) einen konstanten Winkel φ bildet. Drittens, die „Isogonalfläche $J_\varphi(g_1, g_2)$", als Ort der Punkte P, für die die beiden Ebenen (P, g_1) und (P, g_2) einen konstanten Winkel φ einschließen.

Diese drei Arten von Flächen, die stets von der 4ten Ordnung sind, werden geometrisch wie analytisch eingehend untersucht.

Im ersten Falle ergibt sich offenbar die Rotationsfläche der in zwei Kreise zerfallenden c_4. Im zweiten Falle gelangt man zu einer F_4, die die Gerade g als Doppelgerade und den Punkt A als D_2 besitzt. Im dritten Falle resultiert eine R-F_4. Daß die Fläche eine R-F sein muß, erkennt man, wenn man sie so entstehen läßt, daß eine variierende Ebene E_1 des Büschels (g_1) stets mit einer, ihr projektiv zugeordneten Ebene E_2 des Büschels (g_2), die mit E_1 den Winkel φ bildet, geschnitten wird. Die Fläche besteht aus allen Tangentenpaaren, die von g_2 an die, aus der Fläche $J_\varphi(g_1, A_2)$ vom Büschel $\mathsf{E}_1(g_1)$ — oder auch, die von g_1 an die, aus der Fläche $J_\varphi(g_2, A_1)$ vom Büschel $\mathsf{E}_2(g_2)$ — ausgeschnittenen Kreise gehen.

Hierbei bedeuten A_1 und A_2 die Endpunkte der kürzesten Entfernung δ zwischen g_1 und g_2. Die Gestalt dieser R-F_4 variiert, je nachdem der Winkel $\alpha(g_1, g_2) \lesseqgtr \varphi$ ist.

Für $\alpha < \varphi$ besteht die R-F_4 aus zwei in sich geschlossenen Mänteln, die sich in g_1 und g_2 durchsetzen. Für $\alpha > \varphi$ existiert nur ein einziger Mantel, der sich längs der Geraden g_1 und g_2 durchsetzt, die aber nicht ihrer ganzen Ausdehnung nach der Fläche reell angehören.

218) *L. Heffter,* J. f. Math. 105 (1895), p. 1; Ztschr. Math. Phys. 41 (1896), p. 163.

Im Grenzfalle $\alpha = \varphi$ wird die Gerade $\delta = (A_1, A_2)$ zu einer Doppelerzeugenden der R-F_4. Man hat wiederum einen einzigen Mantel, der sich in den drei Geraden δ, g_1, g_2 durchsetzt, wo g_1 und g_2 ihrer ganzen Ausdehnung nach der Fläche angehören. Es wird auch der andere Grenzfall berücksichtigt, wo g_1 und g_2 inzident sind; die R-F_4 artet dann in einen „Isogonalkegel" aus.

In einem Nachtrage[218]) setzt der Verfasser auseinander, wie man von den verschiedenen F_4-Formen ein anschauliches Bild gewinnen kann, und beschreibt Modelle und Apparate, die von *W. Schmidt* in Gießen ausgeführt sind.

Von größerer Bedeutung als diese speziellen Untersuchungen sind die über Flächen mit Symmetriebenen $\mathsf{E}^{(s)}$, die sich mit denen regulärer Körper $K^{(s)}$ decken. Solche Flächen mögen kurz „symmetrische" heißen und mit $F^{(s)}$ bezeichnet werden. Es sei von vornherein betont, daß durch das Studium dieser Flächengattungen auch die Theorie der $K^{(s)}$ wesentlich gefördert wird.

Die beiden grundlegenden Abhandlungen sind die von *E. Lecornu* und *E. Goursat.*[219])

In der ersten wird, zunächst unabhängig von der Zahl und Anordnung der $\mathsf{E}^{(s)}$, die Gleichungsform der $F^{(s)}$ bestimmt. Als Grundlage dient der Satz:

„Haben drei (algebraische) Flächen $L =$ konst., $M =$ konst., $N =$ konst. gerade so viel gemeinsame Punkte, als zur Herstellung der Symmetrie erforderlich ist, so ist jede $F^{(s)}$ als ganze Funktion von L, M, N darstellbar."

L, M, N heißen „symmetrische Elemente". Für die weiteren Rechnungen werden vorab solche drei Elemente möglichst einfach ausgewählt: $L = x^2 + y^2 + z^2$, M und N je als Produkt der Abstände eines Punktes von den $\mathsf{E}^{(s)}$ eines auf die beiden einfachsten Arten zu wählenden symmetrischen Systems.

Für m, n als die Ordnungen von M, N erweist sich die Zahl der $\mathsf{E}^{(s)}$ des zugehörigen $K^{(s)}$ gleich $m + n - 1$. Nunmehr werden, im Anschluß an die fünf regulären $K^{(s)}$, drei Typen solcher symmetrischen Systeme unterschieden: Der „tetraedrische" Typus (I), der „kubo-oktaedrische" (II), und der „ikosi-dodekaedrische" (III).

Beim Typus (I) mit sechs $\mathsf{E}^{(s)}$ ist zu setzen

$$\text{(I)} \begin{cases} M = xyz, \\ N = -(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z). \end{cases}$$

219) *E. Lecornu,* Acta math. 10 (1887), p. 201; *E. Goursat,* Ann. Éc. Norm. (3) 4 (1887), p. 159, 241, 316.

Die Gleichung der zugehörigen $F^{(s)}$ lautet

(I') $\quad F^{(s)} \equiv \varphi\{x^2 + y^2 + z^2,\ x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2,\ xyz\} = 0.$

Für besondere Fälle bestehen verschiedene Beziehungen zu anderen Zweigen der Geometrie.

Beim Typus (II) mit neun $\mathsf{E}^{(s)}$ hat man

(II) $M = x^2y^2z^2, \quad N = x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2.$

Die Gleichung der zugehörigen $F^{(s)}$ läßt sich auf die einfache Form bringen

(II') $$F^{(s)} \equiv \varphi(x^2, y^2, z^2) = 0.$$

Im besonderen ergibt sich so eine biquadradische $F_4^{(s)}$. Vermöge der Substitution $x^2 = X$, $y^2 = Y$, $z^2 = Z$ geht sie in eine Rotations-F_2 über. Die Lage der D_2 der F_4, sowie ihrer 24 reellen Geraden, wird diskutiert.

In diese Klasse von $F^{(s)}$ gehört auch die „pseudosphärische" F_4, $x^4 + y^4 + z^4 = 1$, und die F_6: $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{a^2}$.

Beim Typus III mit 15 $\mathsf{E}^{(s)}$ setze man, unter λ den Wert $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ verstanden,

(III) $$\begin{cases} M = (z^2 - \lambda^2y^2)(y^2 - \lambda^2x^2)(x^2 - \lambda^2z^2), \\ N = (y^2 - \lambda^4z^2)(z^2 - \lambda^4x^2)(x^2 - \lambda^4y^2)(x^4 + y^4 + z^4 \\ \qquad\qquad - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2). \end{cases}$$

Die zugehörige $F^{(s)}$-Gleichung ist wiederum

(III') $$\varphi(L, M, N) = 0.$$

Es braucht kaum erwähnt zu werden, daß algebraischen $F^{(s)}$ bei allen drei Typen stets algebraische Gleichungen $\varphi = 0$ entsprechen, und vice versa.

Wir kommen zur *Goursat*schen weitergreifenden Untersuchung.[219]) Diese zerlegt sich in drei Teile. Der erste deckt sich im wesentlichen, abgesehen von der Auswahl der speziellen Probleme, mit den Methoden und Ergebnissen von *Lecornu.*

Außer den obigen drei $K^{(s)}$-Typen werden aber auch noch die der regelmäßigen Pyramide und Doppelpyramide berücksichtigt.

Ferner werden mit Vorteil Minimalkoordinaten $s = x + iy$, $\bar{s} = x - iy$ verwendet, und mit deren Hilfe die Klassengleichung der $F^{(s)}$ aufgestellt. Instruktive Beispiele werden durch gewisse F_3, F_4, F_6 geliefert.

Der zweite Teil ist den symmetrischen Minimalflächen $M^{(s)}$ gewidmet. (Bezüglich der allgemeinen Theorie der Minimalflächen siehe Art. III D 5, *R. v. Lilienthal,* Besondere Flächen, Kap. 6.) Ist P irgendein Punkt einer zunächst beliebigen Minimalfläche M, $p(s, \bar{s})$ sein sphärisches Bild, so entspricht jeder Kurve auf M als Ort von Punkten P seine sphärische Bildkurve als Ort der Punkte p.

Dadurch läßt sich jede Minimalkurve Γ vermöge der „charakteristischen Variabeln" $\sigma = -\frac{dx}{dz} - i\frac{dy}{dz}$ durch eine „charakteristische Funktion $F(\sigma)$" darstellen.

Aus der Kurve Γ wird gemäß der *Lie*schen Theorie (s. Nr. 87) durch Translation einer zweiten solchen Kurve Γ' jede M erzeugt; aus der charakteristischen Funktion von Γ läßt sich die von Γ' ableiten. Nunmehr trete die Bedingung ein, daß die M zu einer $M^{(s)}$ wird. Hierbei sind zwei Arten von Symmetrie zu unterscheiden. Entweder entsprechen zwei symmetrisch zu einer $\mathsf{E}^{(s)}$ gelegenen Kugelpunkten zwei symmetrisch gelegene Flächenpunkte, oder aber zwei symmetrisch zur Y-Achse gelegenen Kugelpunkten entsprechen zwei symmetrisch zur Y-Ebene gelegene Punkte der Fläche. Die Minimalkurve Γ muß dann derart sein, daß ihr symmetrisches Gegenbild entweder mit Γ selbst, oder aber mit deren konjugierter Kurve $\bar{\Gamma}$ zusammenfällt.

Für jeden der Körper $K^{(s)}$ werden Γ, Γ' nebst den zugehörigen charakteristischen Funktionen $F(\sigma)$ bestimmt.

Den beiden obigen Arten von Symmetrie korrespondieren dann die Bedingungen $\bar{F}(\sigma) = F(\sigma)$ resp. $-\sigma^2 F\left(-\frac{1}{\sigma}\right) = F(\sigma)$.

Diese beiden Bedingungen erweisen sich für algebraische $M^{(s)}$ je als hinreichend (für transzendente aber nicht).

Im dritten Teile werden die Gleichungen der $F^{(s)}$ funktionentheoretisch behandelt. Weiter wird die Symmetrie der Typen (I) und (II) auf den S_n, insbesondere den S_4, ausgedehnt.

Endlich wird noch auf eine Verallgemeinerung der Theorie hingewiesen. Es handelt sich dann um Flächen, die, ohne die Symmetrie eines $K^{(s)}$ zu besitzen, durch alle einen $K^{(s)}$ in sich überführenden Rotationen ebenfalls in sich übergehen.

E. Ciani[220]) macht auf eine Lücke bei *Goursat* aufmerksam. Es handelt sich für die $\mathsf{E}^{(s)}$ eines Büschels B um die Maximalzahl von $\mathsf{E}^{(s)}$, die eine $F^{(s)}$ haben kann, ohne eine Rotationsfläche zu sein, deren Achse die Achse von B ist. Für den Fall der Ebene hatte *Ciani* das analoge Problem bereits in einer voraufgehenden Arbeit behandelt.

Die beiden Hauptergebnisse sind:

1. Eine F_n kann ν ($< n$) E eines B zu $\mathsf{E}^{(s)}$ haben, aber nicht mehr als n;

220) *E. Ciani*, Rom Linc. Rend. (4) 6_1 (1890), p. 399.

2. Alle F einer ungeraden Ordnung, mit einer geraden Anzahl von $\mathsf{E}^{(s)}$ in B, enthalten eine g_∞, durch die alle zur B-Achse senkrechten Geraden gehen.

Hiervon wird im besonderen eine Anwendung auf die symmetrischen F_3 gemacht (s. auch Art. „F_3", Nr. **23**).

Den drei von *Goursat* angegebenen Typen, von denen der erste zur Doppelpyramide gehört, der zweite tetraedrisch ist, und der dritte eine einzige $\mathsf{E}^{(s)}$ besitzt, fügt *Ciani* noch zwei weitere Typen hinzu:

4. die F_3 mit zwei orthogonalen $\mathsf{E}^{(s)}$;
5. die F_3 mit drei unter dem Winkel $\frac{\pi}{3}$ gegeneinander geneigten $\mathsf{E}^{(s)}$.

Außer diesen fünf Typen symmetrischer F_3 existieren keine weiteren.

Im Falle der Doppelpyramide wird die F_3 nebst ihrer *Hesse*schen Fläche H genauer untersucht. Dabei tritt ein Spezialfall auf, wo das Problem der 27 g der F_3 nur von der Lösung einer kubischen Gleichung abhängt.

Nach *Juhel Rénoy*[221]) wird eine $F_4^{(s)}$ mit drei je zueinander senkrechten $\mathsf{E}^{(s)}$ und doppeltem Asymptotenkegel von jeder doppelt berührenden Ebene sowie von jeder doppelt berührenden F_2 mit demselben Asymptotenkegel in zwei Kegelschnitten geschnitten. Indessen hat diese Doppeleigenschaft mit der Symmetrie nichts zu tun, denn jede F_4 mit $\overline{C}_2$ wird von einer doppelt berührenden Ebene, sowie von einer doppelt berührenden, durch die C_2 gehenden F_2 in zwei Kegelschnitten geschnitten Der Schnitt ist beidemal eine r_4 mit vier d_2, zerfällt also in zwei c_2 (s. Nr. **9**).

Eine große Reihe spezieller $F^{(s)}$, insbesondere hexaedrischer $F_4^{(s)}$ mit neun $\mathsf{E}^{(s)}$, unter Berücksichtigung ihrer reellen Geraden, wird von *E. Lebon*[222]) diskutiert. Als Sonderfälle seien etwa die „Kuboide" und „Oktaedroide" erwähnt, die die Kanten eines Würfels resp. Oktaeders enthalten.

Mehrere Arbeiten hat auch *S. Mangeot*[223]) den $F^{(s)}$ und gewissen Verallgemeinerungen gewidmet. Es sei hier nur auf letztere eingegangen, da die Betrachtungen über die $F^{(s)}$ nicht über die von *Lecornu* und *Goursat* hinausgehen.

---

221) *Juhel Rénoy,* Nouv. Ann. (3) 7 (1888), p. 282.

222) *E. Lebon,* J. de math. spec. (3) 3 (1889), p. 103, 134, 159, 193, 219, 241, 282.

223) *S. Mangeot,* Paris C. R. 112 (1891), p. 1497; Nouv. Ann. (3) 10 (1891), p. 235; Ass. Fr. 20 (1891), p. 221; Paris C. R. 114 (1892), p. 1463; Soc. Math. Fr. Bull. 20 (1892), p. 84.

Es liege eine feste zentrische F_2 vor; auf der Normalen n in irgendeinem Flächenpunkte P denke man sich zwei gleiche (variierende) Längen von P aus abgetragen. Der Ort der Endpunkte heißt eine bez. F_2 symmetrische Fläche. Ist die Gleichung der F_2

$$(6) \qquad F_2 \equiv \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 1 = 0,$$

so ist die Gleichung der symmetrischen Fläche von F von der Form

$$(7) \qquad F \equiv \varphi(x^a, y^b, z^c) = 0.$$

Daraufhin werden die algebraischen F weiter verfolgt.

Das Verfahren ist auf eine beliebige Urfläche, die dann selbst eine $F^{(s)}$ sein mag, ausgedehnt.

Bezüglich der zahlreichen speziellen metrischen algebraischen Flächen, die der Theorie der Komplexe und Kongruenzen entspringen, sei auf den Art. III C 8, *K. Zindler*, Algebraische Liniengeometrie, verwiesen.

87. Algebraische Minimalflächen. (Über die allgemeine Theorie der Minimalflächen s. Art. III D 5, *R. v. Lilienthal*, Besondere Flächen, Kap. 6.) *L. Henneberg*[224]) fragt nach dem Minimalwert der Klassenanzahl ν für eine reelle algebraische Minimalfläche. Zu dem Behuf beweist er vorab das Kriterium: Je nachdem irgendein eine Minimalfläche berührender Zylinder als Orthogonalschnitt die Evolute einer algebraischen oder aber transzendenten Kurve besitzt, ist die Fläche selbst algebraisch oder aber transzendent.

Daraufhin läßt sich zeigen, daß der gesuchte Minimalwert von ν gleich Fünf ist.

In der Tat existiert eine solche Minimal-Φ_5, deren Ordnung (irrtümlich, s. u.) als 17 angegeben wird.

Diese Φ_5 erfährt eine eingehende Behandlung durch *C. Schilling*.[225]) Zugrunde liegt die allgemeine *Lie*sche Theorie der Minimalflächen; danach wird eine solche unter geometrischer Deutung einer *Weierstraß*schen Integraldarstellung erklärt als Ort der Mittelpunkte der Strecken, die irgend zwei Punkte zweier gegebener Minimalkurven verbinden.

Indessen läßt die *Lie*sche Theorie hier, wo es sich im besonderen um die Bestimmung charakteristischer Anzahlen algebraischer Minimalflächen handelt, verschiedene vereinfachende Modifikationen zu.

Die algebraischen Minimal-Φ_5 sind alle einander ähnlich und lassen

224) *L. Henneberg*, Ann. di mat. (2) 9 (1879), p. 54.

225) *C. Schilling*, Dissert. Göttingen 1880.

sich durch zwei (komplexe) Parameter s, s_1 rational explizite darstellen vermöge

$$(1)\quad \begin{cases} x = \left(\frac{1}{s^3} + \frac{1}{s_1^3}\right) - \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s_1}\right) + 3(s - s_1) - (s^3 + s_1^3), \\ y = i\left[\left(\frac{1}{s^3} - \frac{1}{s_1^3}\right) + 3\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s_1}\right) + 3(s - s_1) + (s^3 - s_1^3)\right], \\ z = 3\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s_1^2}\right) + 3(s^2 + s_1^2). \end{cases}$$

Die reellen Punkte entsprechen konjugierten Werten von s und s_1. Setzt man daher $s = re^{iq}$, $s_1 = re^{-iq}$, so wird die reelle Φ_5 dargestellt durch

$$(1')\quad \begin{cases} x = 2(r^{-3} - r^3)\cos 3q - 6(r^{-1} - r)\cos q, \\ y = 2(r^{-3} - r^3)\sin 3q + 6(r^{-1} - r)\sin q, \\ z = 6(r^{-2} + r^2)\cos 2q. \end{cases}$$

Im einzelnen werden diskutiert die Schnitte der Fläche mit den Koordinatenebenen und E_∞, eine Schar von einhüllenden Zylindern 6. Ordnung, und ihre Singularitäten.

Die Fläche besitzt eine Doppelgerade (die z-Achse), fünf dreifache Gerade, zwei Doppelkurven $\bar{c}_5$ in den beiden Symmetrieebenen, und vier Rückkehrkurven C_6.

Die Ordnung der Φ_5 ist gleich 10 (nicht 17, wie *Henneberg* angegeben hatte).

Ein stereoskopisches Bild eines Modelles ist beigefügt.

Nunmehr gehen wir noch kurz auf einige allgemeinere Untersuchungen über algebraische Minimalflächen ein. Zur Abkürzung sei eine Minimalfläche mit M, eine algebraische mit M_a bezeichnet; eine abwickelbare Fläche mit A, eine algebraische mit A_a; endlich der Kugelkreis, wie früher, mit K.

Es handelt sich nach *S. Lie*[226]) vor allem um Kriterien dafür, ob eine vorgelegte M eine M_a ist oder nicht, und im ersteren Falle darum, deren charakteristische Anzahlen (Ordnung, Klasse, Rang usf.) zu ermitteln.

Für die algebraischen Zwecke empfiehlt es sich, mit *Lie*[227]) die oben angegebene Erklärung einer M durch folgende, im wesentlichen gleichartige, zu ersetzen: Sind zwei Minimalkurven C_0, K_0 gegeben, die einen Punkt P_0 gemein haben, so entsteht die allgemeinste M durch Translation von C_0 längs K_0, indem P_0 die K_0 durchläuft, oder auch vice versa.

Die M ist dann und nur dann reell, wenn C_0 und K_0 konjugiert-komplex sind, und algebraisch dann und nur dann, wenn C_0 und K_0

226) *S. Lie,* Arch. for Math. og Nat. 2 (1877), p. 295.

227) *S. Lie,* ib. 3 (1878), p. 166.

beide algebraisch sind. Kann C_0 durch Translation in K_0 übergeführt werden, so überdecken die Minimalkurven der Fläche diese doppelt; letztere heißen „Doppelflächen".

Der Kegel von Tangenten, die von einem Punkte auf K an eine M gehen, zerfällt im allgemeinen in mehrere Kegel, deren jeder die M längs einer Minimalkurve berührt. Dies führt zu einer einfachen Formel für die Klasse einer M_a.

Ebenso wird eine allgemeine Methode zur Bestimmung der Ordnung einer M_a entwickelt.

In einer zweiten Arbeit werden weitere Kriterien für die M_a entwickelt. Es sei etwa das folgende angeführt. Enthält eine M eine ebene Krümmungslinie c, so ist die M dann und nur dann eine M_a, wenn die c die Evolute einer algebraischen Kurve ist.

Umgekehrt berührt jede M_a ∞^3 Evoluten algebraischer Kurven längs des Ortes der Krümmungsmittelpunkte.

Weiter[228]) wird gezeigt, daß die Tangentenkegel einer M_a diese nach ∞^3 algebraischen Kurven berühren.

Insbesondere lassen sich in jedem algebraischen Kegel ∞^∞ M_a einbeschreiben und bestimmen.

Eine vierte Arbeit[229]) knüpft an den oben[224]) erwähnten Satz von *Henneberg* an, daß der orthogonale Querschnitt eines jeden, einer M_a umbeschriebenen Zylinders, die Evolute einer algebraischen Kurve ist.

Lie stellt das allgemeine Problem („*Lie*sches Problem"), alle A_a zu bestimmen, denen sich M_a einbeschreiben lassen. Sieht man eine erste solche A_a als bekannt an, so lassen sich in der Tat alle übrigen (∞^∞) A_a dieser Art bestimmen.

Für besondere Fälle werden einfache Konstruktionen der A_a angegeben.

In zwei umfangreichen Abhandlungen[230]) werden die bisherigen Entwicklungen von *Lie* zusammengefaßt und weitergeführt. In der ersten sind die verschiedenen Methoden zur Bestimmung der Klasse und Ordnung einer M_a zusammengestellt. In der zweiten Abhandlung wird der Zusammenhang zwischen der Krümmungstheorie algebraischer Kurven und der Theorie der einer A_a einbeschriebenen M_a systematisch entwickelt.

Eine allgemeine Erledigung des *Lie*schen Problems verdankt man *G. Darboux*[231]), und zwar gleich in drei Arten von Lösungen.

228) *S. Lie*, ib. 4 (1878), p. 224.

229) *S. Lie*, ib. 4 (1878), p. 340.

230) *S. Lie*, Math. Ann. 14 (1879), p. 341; 15 (1879), p. 465.

231) *G. Darboux*, Paris C. R. 102 (1886), p. 1513.

Die erste Lösung ist analytisch und beruht auf der *Weierstraß*schen Integraldarstellung der M.

Die zweite Lösung verfährt geometrisch und dringt bis zur Konstruktion der Berührungskurven (A_a, M_a) vor.

Am eigenartigsten ist die dritte [232]) Lösung, sie sich geometrischer wie analytischer Hilfsmittel bedient. Geometrisch geht sie von einer, von *A. Ribaucour* [233]) herrührenden Entstehung der M aus, die sich durch besondere Einfachheit und Anschaulichkeit auszeichnet.

Gegeben seien zwei durch den Kugelkreis K gehende abwickelbare Flächen. Sei t eine gemeinsame Tangente, und β der Mittelpunkt von deren Strecke zwischen den beiden Berührungspunkten. Man errichte in β die zu t senkrechte Ebene E, dann ist die Einhüllende der E die allgemeinste M.

Indem *Darboux* noch einen weiteren Hilfssatz über Regelflächen heranzieht, leitet er durch Rechnung folgende Lösung des Problems ab. Um alle M_a zu erhalten, die einer vorgelegten A_a einbeschrieben sind, bestimme man vorab alle *R-F*, deren Erzeugende h senkrecht auf den Ebenen von A_a stehen, und für die der Schnittpunkt jeder h in der entsprechenden Ebene von A_a liegt.

Die Rückkehrkanten der beiden A_a, die jeder der *R-F* und K umbeschrieben sind, sind die Minimalkurven Γ, Γ_1, durch deren Translation (gemäß *Lie*) die gesuchten M_a entstehen.

Von der *Weierstraß*schen Integraldarstellung der M geht auch *O. Vivanti* [234]) aus. In jener treten zwei willkürliche Funktionen $F(u)$, $F_1(v)$ auf; die M ist nur reell, wenn F und F_1 konjugiert komplex sind, und den reellen Punkten der M entsprechen dann konjugiert-komplexe Werte der Variabeln u, v.

Es wird zunächst gezeigt, daß für die von *Henneberg* [224]) und *Schilling* [225]) studierte Minimal-Φ_5 die Funktion $F(u)$ den Wert besitzt

$$F(u) = \left(u - \frac{1}{u}\right)\left(u + \frac{1}{u}\right)\frac{1}{u^2}. \tag{2}$$

Es wird nunmehr der allgemeinere Fall betrachtet

$$F(u) = \left(\frac{1}{u} - u\right)^{\alpha}\left(u + \frac{1}{u}\right)^{\beta}\frac{1}{u^2}, \tag{3}$$

wo die Exponenten $\alpha, \beta\ (\geqq 1)$ ganzzahlig sind, und β ungerade ist. Behufs Untersuchung der zugehörigen M_a wird das Integral H gebildet

$$H(m, n; u) = \int\left(\frac{1}{u} - u\right)^{m}\left(\frac{1}{u} + u\right)^{n}\frac{du}{u}, \tag{4}$$

232) *G. Darboux,* ib. 104 (1887), p. 728.

233) *A. Ribaucour,* Brux. Mém. cour. 44 (1882).

234) *O. Vivanti,* Ztschr. Math. Phys. 33 (1888), p. 137.

wo die Exponenten m, n ($\geqq 0$) ganzzahlig sind, aber nicht zugleich verschwinden.

H ist nur dann algebraisch, wenn wenigstens eine der Zahlen m, n ungerade ist. Hieraus wird abgeleitet, daß die zu (3) gehörige M nur dann algebraisch (und zwar rational) wird, wenn α und β ungerade sind.

Für die so entstehenden M_a werden Ordnung, Klasse und Singularitäten ermittelt.

Die einzige, rein geometrisch vorgehende Untersuchung der M_a rührt von *R. Sturm*[235]) her. Es empfiehlt sich, vorab die *Lie*sche Mittelpunktserzeugung der M zu verallgemeinern. Gegeben seien zwei *beliebige* Kurven Γ, Γ_1, und eine Fläche F werde definiert als Ort der Mittelpunkte P der irgend zwei Punkte von Γ, Γ_1 verbindenden Strecken. Es wird dann direkt untersucht, wieviele solcher Punkte P auf einer beliebigen Geraden g liegen, und wieviel Berührungsebenen durch g an die Fläche F gehen. Damit bestimmt sich Ordnung und Klasse der F.

Der besondere Fall der Flächen M tritt ein, wenn die Tangenten von Γ und Γ_1 den Kugelkreis K treffen, und die M wird zu einer M_a, wenn Γ und Γ_1 algebraisch sind.

Auf diesem Wege werden auch die Eigenschaften der *Henneberg-Schilling*schen Minimal-Φ_5 abgeleitet.

Endlich sei noch auf eine Untersuchung der M_a durch *R. Glaser*[236]) hingewiesen.

Handelt es sich nur um die spezifischen Eigenschaften der M_a, so läßt sich die allgemeine *Lie*sche Translationstheorie der M nach verschiedenen Richtungen vereinfachen. Man gehe wieder aus von zwei Minimalkurven Γ, Γ_1. Eine solche Γ läßt sich wiederum bestimmen durch eine gewisse ebene Kurve γ. Letztere wird vermöge einer Inversion in sich transformiert, womit eine entsprechende Transformation der M resp. M_a verknüpft ist. Damit ergibt sich eine eigenartige Entstehung der M_a, die es gestattet, Ordnung, Klasse, Rang und Singularitäten direkt zu diskutieren.

Dies findet seine Anwendung u. a. auf eine von *A. Enneper*[237]) gefundene Minimal-F_9.

Symmetrische algebraische Minimalflächen sind bereits in Nr. 86 berücksichtigt worden.

---

235) *R. Sturm,* J. f. Math. 105 (1889), p. 101.

236) *R. Glaser,* Dissert. Tübingen 1891.

237) *A. Enneper,* Gött. Nachr. 1867, p. 297; Gött. Abh. 29 (1882), p. 41, 68.

Literatur-Nachträge.

Zu Abschnitt VIII.

Einige spezielle rationale Flächen:

F_5 mit $\overline{C}_3$: *A. Clebsch,* Math. Ann. 1 (1869), p. 284.

F_5 mit zwei windschiefen $\bar{g}$: *A. Clebsch,* ib. p. 307.

F_5 mit $\overline{C}_4$: *A. Clebsch,* Gött. Abh. 15 (1870), Math. Ann. 3 (1871), p. 71; *M. Noether,* ib. 3 (1871), p. 198, 568; *L. Cremona,* ib. 4 (1871), p. 215, 218.

F_{m+n+1} mit zwei windschiefen Geraden der Vielfachheiten m, n: *G. B. Guccia,* Assoc. Fr. 9 (1880), p. 191.

Eine Reihe rationaler F_5, die außer isolierten vielfachen Punkten evtl. noch eine $\bar{g}$ oder eine $\overline{C}_2$ besitzen: *S. E. Hill,* Math. Rev. 1 (1896), p. 1; *D. Montesano,* Napoli Rend. (3) 6 (1900), p. 158; (3) 7 (1901), p. 67; (3) 13 (1907), p. 66; *A. Pensa,* Dissert. Torino 1899, Ann. di mat. (3) 6 (1901), p. 249.

Rationale F mit C_2-Scharen, nebst ihrer Abbildung: *P. del Pezzo,* Palermo Rend. 1 (1887), p. 241; *G. Castelnuovo,* ib. 4 (1890), p. 73, durch Projektion aus dem S_n $(n > 3)$; *Th. Reye,* Math. Ann. 48 (1897), p. 113, durch Abbildung bekannter Flächen mittels eines F_2-Gebüsches.

Einige dieser Flächen auch bei: *G. Koenigs,* Ann. Éc. Norm. (3) 5 (1888), p. 177; Paris C. R. 105 (1887), p. 407; 109 (1889), p. 364; *E. Cosserat,* Paris C. R. 124 (1887), p. 1004; 130 (1900), p. 311, 385; *L. Godeaux,* Ens. math. 15 (1913), p. 310; *C. H. Sisam,* Amer. Math. Soc. Bull. (2) 22 (1916), p. 381; Amer. J. Math. 38 (1916), p. 373.

Eine Reihe obiger F mit $\infty\, C_2$ wird auch erhalten bei der Lösung des Problems, alle F gegebener Ordnung mit $\infty\, C_2$ zu bestimmen:

F_5: *M. de Franchis,* Rom Linc. Rend. (5) 15_2 (1906), p. 217, 284; Palermo Rend. 35 (1913), p. 47; *C. H. Sisam,* Amer. J. Math. 30 (1908), p. 99; *E. G. Togliatti,* Rom Linc. Rend. (5) 21_2 (1912), p. 35; Ist. Lomb. Mem. (3) 12 (1916), p. 243; *G. Marletta,* Catania Acc. Gioenia A. (5) 8 (1915), Nr. 14.

F_6: *G. Marletta,* Rom Linc. Rend. (5) 24_2 (1915), p. 109, 359; Palermo Rend. 40 (1915), p. 217; *E. G. Togliatti,* Rom Linc. Rend. (5) 24_2 (1915), p. 307, 329, 388; Ist. Lomb. Mem. (s. oben).

F_7: *Gels. Grimaldi,* Giorn. di mat. (3) 7 (1916), p. 341.

F_7 mit elliptischen Büscheln von C_2 (deren Ebenen kein Büschel bilden): *Gels. Grimaldi,* Palermo Rend. 42 (1917), p. 80.

F_8 mit $\infty\, C_2$, deren Ebenen kein Büschel bilden: *M. Bartolo,* Catania Acc. Gioenia A. (5) 12 (1918), Nr. 11; *Gels. Grimaldi,* ib. (5) 11 (1918), Nr. 9.

F_9 desgleichen: *S. Ragonesi,* Acireale Acc. Dafnica A. (2) 4 (1914—15), Nr. 5.

F_8 mit einem elliptischen Büschel von C_2: *Concettina Lango,* Catania Acc. Gioenia A. (5) 15 (1925), Nr. 2 bis.

F_6 und F_7 mit einem Büschel von c_3 (deren Ebenen kein Büschel bilden): *G. Marletta,* Palermo Rend. 41 (1916), p. 180.

F_6 mit einem Büschel von c_3 in Ebenen eines Büschels: *G. Marletta,* Palermo Rend. 42 (1917), p. 116.

F_6 und F_7 mit einem Büschel von r_3, deren Ebenen kein Büschel bilden: *A. Cataliotti,* Catania Acc. Gioenia A. (5) 11 (1918), Nr. 8.

Zu Abschnitt XII.

Rationale Regelflächen R-F und ihre ebene Abbildung: *A. Armenante,* Ann. di mat. (2) 4 (1869), p. 50; vollständig bei *A. Clebsch,* Math. Ann. 5 (1872), p. 1. Durch Reduktion der Abbildung auf eine Minimalordnung vermöge quadratischer Transformationen gibt *Clebsch* eine Klassifikation der rationalen R-F_n gemäß der Ordnung m der Leitkurve niedrigster Ordnung. Leitkurve einer R-F ist eine einfache Kurve, die jede Erzeugende in einem Punkte trifft. Dabei kann die Zahl m variieren von 1 bis $\frac{n}{2}$ resp. $\frac{n-1}{2}$, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

Diese analytisch bewiesenen Ergebnisse von *Clebsch* leitet synthetisch ab *C. Segre,* Torino A. 19 (1884), p. 355, durch Projektion einer R-F_n im S_{n+1}.

Im besonderen untersuchen die rationalen R-F_{m+n} mit zwei geradlinigen Leitkurven der Ordnungen m, n: *L. Cremona,* Ann. di mat. (2) 1 (1867—68), p. 248; *G. Pittarelli,* Rom Linc. Rend. (4) 7_1 (1891), p. 391, 452; (5) 3_2 (1894), p. 264.

(Herrn *L. Berzolari,* der auch die Nachträge geliefert hat, und Herrn *E. A. Weiß* bin ich wegen verschiedener Ratschläge zu Dank verpflichtet.)

(Abgeschlossen im August 1930.)

III C 11. ALGEBRAISCHE TRANSFORMATIONEN UND KORRESPONDENZEN.

VON

L. BERZOLARI

IN PAVIA.*)

Inhaltsübersicht.

I. Einleitende Definitionen und Eigenschaften.

II. Algebraische Korrespondenzen und Korrespondenzprinzipien in linearen und nicht linearen Gebieten.

III. Algebraische Korrespondenzen und Korrespondenzprinzipien für algebraische Kurven beliebigen Geschlechts.

---

*) Übersetzt von Herrn stud. *Heinz Spreng*.

IV. Birationale (oder Cremona-)Transformationen zwischen zwei linearen Räumen von zwei oder mehreren Dimensionen.

V. Mehrdeutige Korrespondenzen zwischen zwei linearen Räumen von zwei oder mehreren Dimensionen.

VI. Anwendungen.

Literatur.

Lehrbücher.

R. F. A. Clebsch, Vorlesungen über Geometrie, bearbeitet von *F. Lindemann*, Bd. 1, Leipzig 1875—76. Franz. Ausgabe von *A. Benoist*, 3. Bd., Paris 1879—80—83; 2. Aufl., 1_1, Leipzig 1906—1932 (zitiert als „Vorlesungen").

G. Salmon und *W. Fiedler*, Analytische Geometrie des Raumes, 2 Bd., 3. Aufl., Leipzig 1879—80 („Raumgeometrie").

K. Doehlemann, Geometrische Transformationen, 2 Bd., Leipzig 1902—1908 („Geom. Transf.").

R. Sturm, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften, 4 Bd., Leipzig und Berlin 1908—1909 („Geom. Verw.").

F. Severi, Lezioni di geometria algebrica (lith.), Padova 1908 („Lezioni").

F. Severi, Vorlesungen über algebraische Geometrie, deutsch von *E. Löffler*, Leipzig und Berlin 1921 („Vorlesungen").

F. Severi, Trattato di geometria algebrica 1_1, Bologna 1926 („Trattato").

H. G. Zeuthen, Lehrbuch der abzählenden Methoden der Geometrie, Leipzig und Berlin 1914 („Lehrbuch").

F. Enriques, Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche, hrsg. von *O. Chisini*, 3 Bd., Bologna 1915—1924 („Lezioni").

H. Malet, Étude géométrique des transformations birationnelles et des courbes planes, Paris 1921 („Étude").

Hilda P. Hudson, Cremona transformations, Cambridge 1927 („Cremona transf.").

L. Godeaux, Les transformations birationnelles du plan. Mémorial des sciences math., fasc. XXII, Paris 1927 („Transf. birat.").

L. Godeaux, La géométrie, Paris 1931.

A. B. Coble, Algebraic geometry and theta functions, New York 1929, Amer. math. Soc., Colloquium Publications, vol. X („Alg. geom.").

J. L. Coolidge, A treatise on algebraic plane curves, Oxford 1931 („Alg. pl. curves").

Abhandlungen.

L. Cremona, Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane, Mem. Acc. Bologna (2) 2 (1863), p. 621—630; (2) 5 (1865), p. 3—25 = Giorn. di mat. (1) 1 (1863), p. 305—311; (1) 3 (1865), p. 269—280, 363—376 = Opere 2 (Milano 1915), p. 54—61, 193—218.

L. Cremona, Sulle trasformazioni razionali nello spazio, Rend. Ist. Lomb. (2) 4 (1871), p. 269—279, 315—324; Ann. di mat. (2) 5 (1871), p. 131—162 = Opere 3 (Milano 1917), p. 241—259, 298—325.

L. Cremona, Über die Abbildung algebraischer Flächen, Gött. Nachr. 1871, p. 129—148 = Math. Ann. 4 (1871), p. 213—230 = Opere 3, p. 260—276.

A. Cayley, On the rational transformation between two spaces, Proc. London math. Soc. (1) 3 (1869—71), p. 127—180 = Papers 7 (Cambridge 1894), p. 189—240.

M. Noether, Über die eindeutigen Raumtransformationen, insbesondere in ihrer Anwendung auf die Abbildung algebraischer Flächen, Math. Ann. 3 (1871), p. 547—580 [1870].

A. Clebsch, Über die Abbildung algebraischer Flächen, insbesondere der vierten und fünften Ordnung, Math. Ann. 1 (1869), p. 253—316 [1868].

A. Clebsch, Über den Zusammenhang einer Klasse von Flächenabbildungen mit der Zweiteilung der *Abel*schen Funktionen, Math. Ann. 3 (1871), p. 45—75 [1870].

A. Clebsch, Über ein neues Grundgebilde der analytischen Geometrie der Ebene, Gött. Nachr. 1872, p. 429—449 = Math. Ann. 6 (1873), p. 203—215.

A. Brill, Über Entsprechen von Punktsystemen auf einer Curve, Math. Ann. 6 (1873), p. 33—65 [1872].

A. Brill, Über die Correspondenzformel, Math. Ann. 7 (1874), p. 607—622.

A. Brill, Über algebraische Correspondenzen, Math. Ann. 31 (1888), p. 374—409 [1887]; 36 (1890), p. 321—370.

E. Bertini, Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano, Ann. di mat. (2) 8 (1877), p. 244—286.

A. Hurwitz, Über algebraische Korrespondenzen und das verallgemeinerte Korrespondenzprinzip, Ber. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig 38 (1886), p. 10—38 = Math. Ann. 28 (1887), p. 561—585 [1886] = Math. Werke 1 (Basel 1932), p. 163—188.

F. Severi, Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie, Mem. Acc. Torino (2) 54 (1903), p. 1—49.

G. Castelnuovo, Sulla razionalità delle involuzioni piane, Math. Ann. 44 (1894), p. 125—155 [1893]; Auszug Roma Rend. Acc. Linc. (5) 2^2 (1893), p. 205—209.

F. Enriques, Sopra una involuzione non razionale dello spazio, Roma Rend. Acc. Linc. (5) 21^1 (1912), p. 81—83.

Vgl. noch *E. Pascals* Repertorium der höheren Mathematik, 2. Aufl., hrsg. von *H. E. Timerding*, 2, Leipzig und Berlin 1910—1922, p. 342—372 (Art. von *L. Berzolari*), p. 963—989 (Art. von *H. E. Timerding*).

Historische Darstellungen.

A. Brill und *M. Noether,* Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit, Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 3 (1894), p. 107—566 („Bericht").

E. Kötter, Die Entwicklung der synthetischen Geometrie von *Monge* bis auf *Staudt* (1847), Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 5 (1901), p. I—XXVIII, 1—486 („Bericht").

V. Snyder, A. B. Coble, A. Emch, S. Lefschetz, F. R. Sharpe, Ch. H. Sisam, Selected topics in algebraic geometry; Report of the Committee on rational transformations, Bull. of the National Research Council, Nr. 63, Washington 1928 („Report").

I. Einleitende Definitionen und Eigenschaften.

1. Algebraische Korrespondenzen zwischen zwei algebraischen Mannigfaltigkeiten. Es sind M und N zwei algebraische Mannigfaltigkeiten, die voneinander verschieden oder vereinigt sind, von willkürlichen Dimensionen, deren Elemente X und Y, die wir *Punkte* nennen, die projektiven Koordinaten x (also $x_1, x_2, \ldots$) und y (also $y_1, y_2, \ldots$) besitzen. Betrachtet man die algebraische [und irreduzible, wenn M und N als irreduzibel angenommen sind[1])] Mannigfaltigkeit W, deren Elemente alle möglichen Punktepaare XY sind, und innerhalb dieser eine algebraische Mannigfaltigkeit V, so erhält man, in der allgemeinsten Form, den Begriff der *algebraischen Korrespondenz* zwischen den Punkten X von M und den Punkten Y von N.

Wenn M und N vereinigt sind, so ist W die Mannigfaltigkeit, die von den geordneten Punktepaaren von M gebildet wird; bei jedem derartigen Punktepaar ist zu unterscheiden, welcher Punkt der M oder der N angehört.[2])

---

1) Vgl. *F. Severi,* „Trattato" 1_1, p. 193—194.

2) Diese allgemeine Begriffsbildung einer Korrespondenz zwischen zwei Mannigfaltigkeiten gab *C. Segre,* Ann. di mat. (2) 22 (1893), p. 48, in der Absicht, den allgemeinen Begriff der algebraischen Korrespondenz zwischen zwei algebraischen Mannigfaltigkeiten auf eine strenge Basis zu stellen. Dieser Begriff wurde von *F. Severi* entwickelt, Mem. Acc. Torino (2) 54 (1903), p. 1, der auf dieser Grundlage mit geometrischen Mitteln (Nr. 13) die Theorie der algebraischen Korrespondenzen zwischen algebraischen Kurven aufstellte. Gleichzeitig ging *M. de Franchis,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 12^1 (1903), p. 303, von demselben Begriff

In jedem Falle wird die Korrespondenz auf diese Weise durch ein System von algebraischen Gleichungen (mit Einschluß derer, die wir zur Darstellung der M und N gebraucht haben) zwischen den Koordinaten der Punkte X und Y definiert.[3]) Dieselben Gleichungen

---

aus, um ein Theorem von *Painlevé — Humbert — Castelnuovo* geometrisch zu beweisen, von dem in Nr. **31** die Rede sein wird.

Die Betrachtung der Mannigfaltigkeit, die von den Punktepaaren zweier gegebener Mannigfaltigkeiten gebildet wird (s. darüber weiterhin Anm. **114** und 255) wurde von *E. Steinitz,* Sitzungsb. Berliner math. Ges. 7 (1908), p. 29, in die *Analysis situs* übertragen und auf das Studium der kontinuierlichen Transformationen von Mannigfaltigkeiten und ihrer Koinzidenzpunkte angewandt. *Steinitz* hat für diese Mannigfaltigkeit die Bezeichnung *Produkt* eingeführt. Diese Betrachtung wurde ferner angewandt von *M. Fréchet,* Math. Ann. 68 (1910), p. 146; *R. E. Root,* Amer. J. of math. 36 (1914), p. 90; *H. Künneth,* Math. Ann. 90 (1922), p. 65; *H. Tietze,* Abh. aus dem math. Seminar der Hamburgischen Univ. 2 (1923), p. 37 und von anderen. S. III AB 13 (*H. Tietze* und *L. Vietoris*), Nr. **20** und auch *F. Severi,* Rend. Seminario mat. Univ. Roma (2) 7 (1931), p. 11—12.

Von denselben Begriffen hat in Untersuchungen großer Allgemeinheit *S. Lefschetz,* Trans. Amer. math. Soc. 28 (1926), p. 1; 29 (1927), p. 429 [Auszüge in Proc. Nat. Acad. of Sciences 9 (1923), p. 90; 11 (1925), p. 287, 290; Bull. Amer. math. Soc. (2) 29 (1923), p. 199], Gebrauch gemacht. Als besonderen Fall hat er vom Gesichtspunkt der Topologie die Theorie der algebraischen Korrespondenzen zwischen algebraischen Kurven rekonstruiert, Proc. Nat. Acad. of Sciences 12 (1926), p. 737; Ann. of math. (2) 28 (1927), p. 342 (s. Nr. **16**). S. noch *S. Lefschetz,* „Topology", Amer. math. Soc., Colloquium Publications, vol. XII, New York 1930, besonders für das Produkt, p. 220 ff., und für die Anwendungen auf die algebraische Geometrie, p. 385—392. Vgl. auch *H. D. Ursell,* Proc. Cambridge Phil. Soc. 25 (1929), p. 39.

3) Als Ausdehnung der Erzeugung jeder ebenen, algebraischen Kurve mittels eines Gelenksystems [III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **10**] — eine Erzeugung, die man *A. B. Kempe* verdankt, Proc. London math. Soc. (1) 7 (1875—76), p. 213; Mess. of math. (2) 6 (1877), p. 143 [s. auch *G. Koenigs,* „Leçons de cinématique", Paris 1897, p. 271—273] — hat *G. Koenigs,* Paris C. R. 120 (1895), p. 861, 981, und die zitierten „Leçons", p. 298—307, bewiesen, daß jede algebraische Raumkurve oder -fläche mittels eines Gelenksystems beschrieben werden kann. Allgemeiner hat *Koenigs* gezeigt, daß, wenn mehrere Punkte algebraischen Verbindungen unterworfen sind, d. h. Verbindungen, die mittels algebraischer Gleichungen zwischen den Koordinaten solcher Punkte dargestellt werden können, es immer möglich ist, diese Verbindungen mittels eines Gelenksystems zu realisieren, welches die gegebenen Punkte verbindet. Daraus folgt, daß auch jede geometrische Punkttransformation algebraischer Natur, sei sie eben, räumlich oder mehrdimensional, mechanisch realisierbar ist. Für den Fall der ebenen Homographie vgl. *G. Koenigs,* Paris C. R. 131 (1900), p. 1179. Darüber [vgl. IV 3 (*A. Schoenflies* und *M. Grübler*), Nr. **24**, **25**] s. außerdem *J. Kleiber,* Ztschr. Math. Phys. 36 (1891), p. 296, 328; 41 (1896), p. 177, 233, 281; *A. Emch,* Trans. Amer. math. Soc. 3 (1902), p. 493; Univ. of Colorado Studies 1 (1903), p. 210; résumé Arch. sc. phys. natur. Genève (4) 24 (1907), p. 368; Progr. Kantonschule Solothurn 1907; *É. Delassus,* Bull. sciences math. (2) 41 (1917), p. 278. S. auch Anm. 857 und Nr. **70**, **101**.

können zugleich mit den Koordinaten von X und Y auch unbestimmte Parameter rational enthalten, diese aber können immer mittels rationaler Operationen eliminiert werden.[4])

Man nennt die Korrespondenz *irreduzibel* oder *reduzibel*, je nach-

4) Über das Vorhergehende vgl. *C. Segre*[2]); *E. Bertini*, „Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi, con appendice sulle curve algebriche e loro singolarità", Pisa 1907, p. 202—204; 2. Ausg. Messina 1923, p. 238—240; deutsch hrsg. von *A. Duschek*, Wien 1924, p. 223—225; *F. Severi*, „Trattato" 1_1, p. 193—197. — Die Definition der algebraischen Mannigfaltigkeiten, von der hier Gebrauch gemacht ist [vgl. III C 7 (*C. Segre*), Nr. 6], folgt aus *L. Kronecker*, „Festschrift zu Herrn Ernst Eduard Kummers fünfzigjährigem Doktorjubiläum am 10. September 1881"; J. f. Math. 92 (1881), p. 1 = Werke 2 (Leipzig 1897), p. 237. Vgl. auch *J. Molk*, Acta math. 6 (1883), p. 1; *J. König*, „Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Größen", Leipzig 1903.

Die Bedingung der Algebraizität braucht nicht immer vorher gegeben zu sein. So ist, nach *T. Kubota* und *S. Kakeya*, Tôhoku math. J. 13 (1918), p. 296, jede analytische Punkttransformation zwischen zwei Ebenen, bei denen den geraden Linien der einen Ebene Kurven der Ordnung n in der anderen Ebene entsprechen, notwendig algebraisch. Anwendung auf eine kennzeichnende Eigenschaft der ebenen algebraischen Kurven n^{ter} Ordnung bei *T. Kubota*, Math. Ztschr. 31 (1929), p. 625.

Über die eindeutigen, auch nichtalgebraischen Punkttransformationen s. *L. Autonne*, Rend. Circ. mat. Palermo 10 (1896), p. 196; Acta math. 21 (1897), p. 249 [Auszüge Paris C. R. 121 (1895), p. 673, 881, 1129]; *H. Kistler*, Diss. Göttingen 1905; *J. Hadamard*, Paris C. R. 142 (1906), p. 74; Bull. Soc. math. de France 34 (1906), p. 71; Rev. mat. Hispano-Amer. 1 (1919), p. 169; *C. Jordan*, „Cours d'analyse" 1, 3. Aufl., Paris 1909, p. 85—90; *L. S. Dederick*, Diss. Harvard 1909; Trans. Amer. math. Soc. 14 (1912), p. 143 [Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 19 (1913), p. 169]; *W. R. Longley*, Bull. Amer. math. Soc. (2) 17 (1910), p. 1; *G. A. Bliss*, Trans. Amer. math. Soc. 13 (1911), p. 133 [Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 18 (1911), p. 64]; „Fundamental existence theorems", New York 1913 (Amer. math. Soc., Colloquium Lectures; The Princeton Colloquium); *S. E. Urner*, Trans. Amer. math. Soc. 13 (1911), p. 232; *G. R. Clements*, Bull. Amer. math. Soc. (2) 18 (1912), p. 451; (2) 19 (1913), p. 168; (2) 21 (1915), p. 292; Trans. Amer. math. Soc. 14 (1913), p. 325; Ann. of math. (2) 15 (1913—14), p. 1; *W. F. Osgood*, „Topics in the theory of functions of several variables", New York 1914 (Amer. math. Soc., Colloquium Lectures; The Madison Colloquium), p. 181—198; Trans. Amer. math. Soc. 17 (1916), p. 1; 19 (1918), p. 251 [Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 23 (1917), p. 404]; „Lehrbuch der Funktionentheorie" 1, 4. Aufl., Leipzig und Berlin 1923, p. 66—70; 2, Leipzig und Berlin 1924, p. 108 ff.; *W. V. Lovitt*, Trans. Amer. math. Soc. 16 (1915), p. 371; Bull. Amer. math. Soc. (2) 22 (1916), p. 236, 387; *Ph. Franklin* und *N. Wiener*, Trans. Amer. math. Soc. 28 (1926), p. 762 = Publ. Massachusetts Inst. of Tecnol. 2 (1927), Nr. 119; *B. O. Koopman*, Bull. Amer. math. Soc. (2) 34 (1928), p. 565 (Auszug ebendort p. 6); *G. Julia*, Rev. universitaria Bucarest 1 (1929), p. 129; Rev. mat. Hispano-Amer. (2) 4 (1929), p. 169; Bull. sciences math. (2) 53 (1929), p. 225; *F. Simonart*, Ann. Soc. scient. Bruxelles (A) 49 (1929), p. 121; *H. Cartan*, J. math. pures appl. (9) 10 (1931), p. 5; *S. Stoïlow*, Paris C. R. 192 (1931), p. 1342.

dem die Mannigfaltigkeit V irreduzibel ist oder sich aus verschiedenen Bestandteilen gleicher oder ungleicher Dimension zusammensetzt. Damit V irreduzibel sei, ist notwendig aber nicht hinreichend, daß M und N irreduzibel sind.[5])

Manchmal ist es nützlich, die Korrespondenz als die Gesamtheit zweier Operationen zu betrachten, deren eine die Inverse der anderen ist: Die eine, durch die man von den Punkten X zu den Punkten Y gelangt, die andere, die von diesen zu jenen führt. Heißt die eine T, so heißt die inverse T^{-1}.

Man sagt, daß eine algebraische Korrespondenz die *Indizes* α und β hat, und bezeichnet sie mit (α, β), wenn sie so beschaffen ist, daß jedem Punkte X von M eine bestimmte Anzahl $\beta \geqq 1$ von Punkten Y von N und jedem Punkte Y von N eine bestimmte Anzahl $\alpha \geqq 1$ von Punkten X von M entsprechen. In solchem Falle haben M und N dieselbe Dimension k und bei willkürlich gewählten Koordinaten von Y bestimmt das System der Gleichungen, die die Korrespondenz definieren, α Gruppen von Werten der Koordinaten von X. Diese ergeben sich also als algebraische Funktionen der Koordinaten von Y, mit α Werten, d. h. jede von ihnen genügt einer Gleichung vom Grade α, deren Koeffizienten rationale Funktionen der Koordinaten von Y sind und die man allein mittels rationaler Operationen aus den gegebenen Gleichungen erhalten kann. Das Gleiche gilt natürlich bei Vertauschung von M und N.

Damit die Korrespondenz keine Unbestimmtheitsfälle aufweist, muß man jeden singulären Punkt von M und N in *Elemente* zerfällt denken, was man entweder mittels birationaler Transformationen der Mannigfaltigkeit bewerkstelligen kann, die jene Singularität auflöst (s. Nr. **105** und **106**), oder dadurch, daß man die Singularität mittels geeigneter Reihenentwicklungen der Koordinaten der Punkte dieser

---

5) Über die Unzerlegbarkeit von algebraischen Bedingungen s. *F. Severi*, Rend. Circ. mat. Palermo 33 (1912), p. 313; Atti Ist. Ven. 75^2 (1916), p. 1121; „Vorlesungen", p. 375—380; „Trattato" 1_1, p. 22—25. Hinsichtlich der Unzerlegbarkeit von Mannigfaltigkeiten, Korrespondenzen, Bedingungen usw. hat *F. Severi*, Roma Rend. Acc. Linc. (5) 24^1 (1915), p. 877, 1011; (5) 25^1 (1916), p. 459, 551; „Vorlesungen", p. 307—401, beachtenswerte Anwendungen auf Kurven in zwei- und mehrdimensionalen Räumen gemacht; vgl. III C 9 (*K. Rohn* und *L. Berzolari*), Nr. **36**, **37**, **42**. S. auch *F. Enriques* und *O. Chisini*, „Lezioni" 1, p. 134—153.

Reduzible Korrespondenzen zwischen zwei Kurven haben *G. Fontené*, Bull. Soc. math. de France 25 (1897), p. 247; Nouv. Ann. de math. (4) 5 (1905), p. 433 und *A. Terracini*, Rend. Circ. mat. Palermo 56 (1931), p. 112 [Auszug Paris C. R. 193 (1931), p. 762] betrachtet.

Mannigfaltigkeit in den Umgebungen des singulären Punktes darstellt.[6])

Wir nennen *Übergangs-* oder *Verzweigungspunkte* der Korrespondenz[7]) die Punkte von M oder N, für die zwei oder mehr korrespondierende Punkte zusammenfallen, und (*doppelte* oder *mehrfache*) *Koinzidenzpunkte* der Korrespondenz diejenigen Punkte von N oder M, bei denen jene Koinzidenzen auftreten. Die ersten bilden auf M oder N eine Mannigfaltigkeit, welche im allgemeinen von der Dimension $k - 1$ ist und *Übergangs-* oder *Verzweigungsmannigfaltigkeit* der Korrespondenz genannt wird. Die zweiten bilden auf N oder M eine zweite Mannigfaltigkeit derselben Dimension, die (*doppelte* oder *mehrfache*) *Koinzidenzmannigfaltigkeit* der Korrespondenz heißt.

Aus dem Vorhergehenden folgt, daß eine algebraische Korrespondenz zwischen M und N dann und nur dann in einem Sinne eindeutig ist, wenn sie in jenem Sinne *rational* ist, also, $\beta = 1$ gesetzt, wenn die Koordinaten der Punkte von N als rationale Funktionen der Koordinaten der entsprechenden Punkte von M ausgedrückt werden können. Machen wir von homogenen Koordinaten Gebrauch, so sind die Koordinaten der Punkte von N proportional zu Formen gleicher Ordnung der Koordinaten der entsprechenden Punkte von M.

Die Korrespondenz wird dann und nur dann *eineindeutig* ($\alpha = \beta = 1$), wenn sie *birational* wird[8]), so daß auch die Koordinaten der Punkte von M Formen derselben Ordnung der Koordinaten der entsprechenden Punkte von N proportional werden.[9])

6) Vgl. *C. Segre*[2]), p. 52—53; *F. Enriques* und *O. Chisini*, „Lezioni“ 2, p. 127—130; 3, p. 3—6. Für den Fall birationaler Korrespondenzen zwischen zwei Kurven s. auch *F. Severi*, „Trattato“ 1_1, p. 78—79; „Conferenze di geometria algebrica“ (lith.), Roma 1927, p. 42—43, wo bewiesen wird, daß die einzigen Ausnahmen von der Eineindeutigkeit der Korrespondenz zwischen zwei birational äquivalenten Kurven aus den mehrfachen Punkten hervorgehen können, so daß eine birationale Korrespondenz zwischen zwei algebraischen Kurven, die frei von mehrfachen Punkten sind, ausnahmslos eineindeutig ist.

In „Conf. di geom. alg.“, p. 61, hat *F. Severi* noch bewiesen, daß eine birationale Korrespondenz zwischen zwei von mehrfachen Punkten und „ausgezeichneten Kurven“ [III C 6 b (*G. Castelnuovo* und *F. Enriques*), Nr. 4] freien algebraischen Flächen ausnahmslos eineindeutig ist.

7) Diese Bezeichnungen aus der *Riemann*schen Funktionentheorie hat *Emil Weyr*, „Beiträge zur Kurvenlehre“, Wien 1880, p. 2, auf die Korrespondenzen (α, β) zwischen zwei Grundgebilden 1. Stufe angewandt.

8) *D. Gravé*, Paris C. R. 134 (1902), p. 1345, hat eine trirationale Korrespondenz zwischen drei Räumen betrachtet, derart, daß die Koordinaten der Punkte eines jeden rationale Funktionen der Koordinaten der entsprechenden Punkte der beiden anderen sind.

9) Eine umkehrbar eindeutige (analytische) Transformation zwischen zwei

Zwei Mannigfaltigkeiten in birationaler Korrespondenz mit einer dritten sind auch untereinander in birationaler Korrespondenz.[10])

Eine algebraische Mannigfaltigkeit von der Dimension k nennt man *rational* oder *homaloid*[11]), wenn man sie in birationale Korrespondenz mit einem linearen Raum von k Dimensionen bringen kann. Damit dies eintritt, ist also notwendig und hinreichend, daß die Koordinaten ihrer Punkte rationale Funktionen von k unabhängigen Parametern sind und daß außerdem jedem Punkt der Mannigfaltigkeit eine einzige Gruppe jener Parameter entspricht. Für $k = 1, 2$ ist die zweite Bedingung überflüssig: Nr. **31** und **102**.

Es ist klar, daß, wenn eine Mannigfaltigkeit birational einer rationalen Mannigfaltigkeit entspricht, sie auch rational ist, und daß zwei rationale Mannigfaltigkeiten derselben Dimension auf unendlichviele Weisen aufeinander birational bezogen werden können.

Alle algebraischen Gebilde gegebener Dimension, die untereinander birational äquivalent sind, die also untereinander in birationale Korrespondenz gebracht werden können, heißen einer und derselben *Klasse* angehörig. Jede Klasse solcher Gebilde hängt von einer gewissen Anzahl ganzer Charaktere ab, als da ist das Geschlecht p für die

---

algebraischen Kurven, die keine anderen Singularitäten aufweist, als isolierte wesentliche Punkte, ist notwendigerweise birational [wenn es sich um gerade Linien handelt, so ist es eine Projektivität (s. weiter Anm. 36)]. Für $k > 1$ indessen können zwischen zwei algebraischen Mannigfaltigkeiten von k Dimensionen (beispielsweise zwischen zwei algebraischen Flächen) umkehrbar eindeutige, analytische Korrespondenzen auftreten, die nicht algebraisch sind. Vgl. *É. Picard,* Preisschrift, J. math. pures appl. (4) 5 (1889), p. 240 und 249.

Ausgehend von der Betrachtung einer gegebenen birationalen Transformation, hat *É. Picard,* Acta math. 18 (1893), p. 133; 23 (1900), p. 333 [Auszüge Paris C. R. 117 (1893), p. 472; 123 (1896), p. 1035], die Existenz einer Klasse von Transzendenten bewiesen, die eine Verallgemeinerung der doppeltperiodischen Funktionen darstellen. Vgl. auch *H. Poincaré,* J. math. pures appl. (4) 6 (1890), p. 313; *G. Julia,* Ann. Éc. Norm. (3) 39 (1922), p. 131; (3) 40 (1923), p. 97; *P. Appell,* Bull. Soc. math. de France 52 (1924), p. 12; *O. Onicescu,* Mathematica 2 (1929), p. 59.

10) Wenn zwischen zwei algebraischen irreduzibeln Mannigfaltigkeiten M, M', die zwei linearen Räumen R, R' von r Dimensionen angehören, eine birationale Korrespondenz besteht, derart, daß den Schnitten von M mit den Überebenen von R die Schnitte von M' mit den Überebenen von R' entsprechen, so ist die Korrespondenz homographisch, d. h. sie ist in einer Homographie zwischen R und R' enthalten. Vgl. *E. Bertini*[4]), 1. Ausg., p. 226—227; 2. Ausg., p. 269; deutsche Ausg., p. 253. Für den Fall zweier Kurven s. auch *F. Severi,* „Trattato" 1_1, p. 68—69 und 303.

11) Die zweite Benennung rührt von *J. J. Sylvester* her, Cambridge Dublin math. J. 6 (1850), p. 12 = Papers 1 (Cambridge 1904), p. 175.

Kurven[12]) und die Geschlechter p_a, p_g, $p^{(1)}, \ldots$ für die Flächen und für die Mannigfaltigkeiten höherer Dimension[13]), und außerdem von einer gewissen Anzahl stetig veränderlicher Parameter, die man *Moduln* der Klasse[14]) nennt.

Für zwei Kurven kann die birationale Identität durch Gleichheit der Geschlechter und der Moduln ausgedrückt werden, weil alle Kurven von gegebenem Geschlecht p eine algebraische *irreduzible* Mannigfaltigkeit bilden [s. III C 9 (*K. Rohn* und *L. Berzolari*), Anm. 197]. Aber schon für die Flächen[15]) können wir für gegebene Werte der verschiedenen Geschlechter mehrere irreduzible Mannigfaltigkeiten erhalten.[16])

Wenn man die *Klasse* aller birational Transformierten einer gegebenen irreduzibeln, algebraischen Mannigfaltigkeit betrachtet, so kann man in ein und dieselbe Unterklasse zwei Mannigfaltigkeiten setzen, welche sich *ausnahmslos* eineindeutig entsprechen.[17]) Hier ergibt sich also

12) II B 2 (*W. Wirtinger*), Nr. **5**; III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **4**, **15**.

13) III C 6 b (*G. Castelnuovo* und *F. Enriques*), Nr. **5**, **11**, **13**, **47**.

14) Für die Kurven s. II B 2 (*W. Wirtinger*), Nr. **31**; III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **30**; für die Flächen s. III C 6 b (*G. Castelnuovo* und *F. Enriques*), Nr. **22**.

15) *F. Enriques,* Atti Acc. Torino 47 (1912), p. 306.

Zum Beispiel verteilen sich die Flächen vom geometrischen Flächengeschlecht 1, sowie die regulären Flächen mit kanonischer Kurve von der Ordnung Null (d. h. Flächen, deren sämtliche Geschlechter gleich 1 sind) auf eine abzählbar unendliche Menge von irreduzibeln Familien, deren jede von 19 willkürlichen Moduln abhängt. *F. Enriques,* Rend. Acc. Bologna (2) 13 (1908), p. 25; Roma Rend. Acc. Linc. (5) 17^1 (1908), p. 690; *F. Severi,* Atti Ist. Ven. 68^2 (1909), p. 249. Vgl. auch *F. Enriques,* „Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche“ (lith.), hrsg. von *L. Campedelli,* 1, Padova 1932, p. 309—312; ferner III C 6 b (*G. Castelnuovo und F. Enriques*), Nr. **42**.

16) *É. Picard,* Preisschrift [9]), p. 256, hat ein Verfahren angegeben, mittels dessen man bei zwei gegebenen Kurven von demselben Geschlecht erkennen kann, ob zwischen diesen eine birationale Korrespondenz besteht und die birationale Substitution gefunden werden kann, wenn sie besteht. Das ist ein Problem, das mit dem der Bestimmung der Moduln verbunden ist. *É. Picard* hat auch, ebenda, p. 258, die analoge Frage für die Flächen behandelt.

Einige Bemerkungen gruppentheoretischer Natur über die birationalen Korrespondenzen zwischen zwei Kurven, in Beziehung zu den Moduln und den Perioden der zugehörigen Normalintegrale 1. Gattung, ebenso wie zur Theorie der Modulfunktionen, findet man bei *G. Fubini,* „Introduzione alla teoria dei gruppi discontinui e delle funzioni automorfe“, Pisa 1908, p. 393—403.

17) Diese Betrachtung hat zuerst *A. Clebsch,* Math. Ann. 5 (1871), p. 18, angestellt, der beim Studium der ebenen Abbildung der rationalen Flächen (Abschn. VII) dazu gebracht wurde, zwei Flächen als demselben *Typus* angehörig zu bezeichnen, wenn sie einander ausnahmslos birational entsprechen. So ist z. B. die *Steiner*sche Fläche [III C 10 b (*W. Fr. Meyer*), Nr. **42**—**51**] vom Typus der Ebene; nicht aber eine Fläche 2. Ordnung.

die Aufgabe, in ein und derselben Unterklasse die Modellmannigfaltigkeit der niedrigsten Ordnung zu suchen. Diese Aufgabe, die zu den allgemeinen *Basis*problemen[18]) gehört, ist bereits für einige Mannigfaltigkeiten gelöst: Die *Graßmann*sche und die *Segre*sche Mannigfaltigkeit, von denen in den Nr. **120** und **27** die Rede sein wird.

Die Wichtigkeit der Betrachtung der Äquivalenz der Mannigfaltigkeiten in Hinsicht auf die ausnahmslos birationalen Transformationen ist darin begründet, daß zwei Mannigfaltigkeiten, die in diesem Sinne äquivalent sind, auch topologisch äquivalent sind; mit anderen Worten: die genannten birationalen Transformationen sind die einzigen, die die topologischen Charaktere erhalten.[19])

Kehren wir nun zur (α, β)-Korrespondenz zurück, und setzen wir $\alpha > 1$, $\beta = 1$ voraus, so ist jede der Gruppen von α Punkten X in M,

---

18) Hinsichtlich der Gesamtheit der algebraischen Korrespondenzen auf einer algebraischen Kurve beachte man die Untersuchungen von *A. Hurwitz* und *F. Severi*, von denen in Nr. **12** und **13** die Rede sein wird. Hinsichtlich der Gesamtheit der algebraischen Kurven auf einer algebraischen Fläche sehe man die Untersuchungen von *F. Severi* und die darauf fußenden Arbeiten von *H. Poincaré*, *S. Lefschetz* und *G. Albanese*, dargestellt in III C 6 b (*G. Castelnuovo* und *F. Enriques*), Nr. **32**; „*Pascals* Repertorium der höheren Mathematik" 2, 2. Aufl., Leipzig und Berlin 1922, p. 763—766 (Art. von *F. Severi*); *S. Lefschetz*, „Report", p. 310—330; *G. Albanese*, Atti del Congresso intern. dei mat. Bologna 1928, 4 (Bologna 1931), p. 157; außerdem *F. Severi*, „Conf. di geom. alg."[6]), p. 359—378. S. ferner *G. Albanese*, Roma Rend. Acc. Linc. (6) 5 (1927), p. 481.

19) Betrachtet man ein algebraisches, irreduzibles ∞^k-Gebilde und seine sämtlichen projektiven Modelle, also alle die Mannigfaltigkeiten, welche mit jenem in birationaler Korrespondenz stehen, so ist die niedrigste Ordnung, die solche Modelle haben können, eine *absolute* Invariante des Gebildes und ist daher von *F. Severi*, „Conf. di geom. alg."[6]), p. 63, *absolute invariante Ordnung* des Gebildes genannt worden. Betrachtet man nur die projektiven Modelle ohne mehrfache Punkte, so kann man in ein und dieselbe Klasse diejenigen Modelle setzen, die zueinander in einer birationalen Korrespondenz ohne Ausnahme stehen. Ist $k = 1$, so erhält man damit eine einzige Klasse (s. Anm. 6); ist $k > 1$, erhält man indessen im allgemeinen mehrere Klassen. Den kleinsten Wert, den die Ordnung der Mannigfaltigkeiten einer dieser Klassen haben kann, nennt man *relative invariante Ordnung* der Mannigfaltigkeiten der betrachteten Klasse: sie ist eine *relative* Invariante der algebraischen Mannigfaltigkeiten ohne mehrfache Punkte.

Zum Beispiel sind für die Punktebene und die Geradenebene die absoluten und relativen invarianten Ordnungen gleich 1. Dagegen ist für die Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen, die von den Geraden des Raumes gebildet wird, die absolute invariante Ordnung gleich 1 und die relative gleich 2. Andere Beispiele in Anm. 255 und in Nr. **120**.

Über alles vorhergehende s. *F. Severi*, Ann. di mat. (3) 24 (1915), p. 89 und insbesondere „Conf. di geom. alg."[6]), p. 63—84. — Vgl. auch Anm. 114, am Ende.

die den Punkten Y in N entsprechen, durch einen beliebigen ihrer Punkte gekennzeichnet. Man sagt, daß diese ∞^k Gruppen von α Punkten auf M eine *Involution* der *Ordnung* α und der *Stufe* oder *Dimension* k bilden. Man sagt auch, daß in der $(\alpha, 1)$-Korrespondenz zwischen M und N M die *einfache* Mannigfaltigkeit, N dagegen die α-*fache* Mannigfaltigkeit ist.

In dem einfacheren Falle der *Doppel*mannigfaltigkeiten ($\alpha = 2$) sind die Koordinaten y der Punkte von N rationale Funktionen derjenigen der entsprechenden Punkte von M; die Koordinaten x der Punkte von M sind aber zweiwertige, algebraische Funktionen derjenigen des homologen Punktes von N. Die letzten sind daher vom Typus

$$x_i = A_i(y) + B_i(y)\sqrt{R(y)},$$

wo die Funktionen A_i, B_i, R rational sind. Wenn wir homogene Koordinaten einführen, können wir für sie Formen in den Koordinaten y einsetzen. $R(y)$ kann von gerader Ordnung und frei von mehrfachen Faktoren angenommen werden; und die Verzweigungsmannigfaltigkeit der Korrespondenz ist durch den Schnitt von N mit $R(y) = 0$ gegeben, nach Absonderung von etwa vorhandenen Faktoren gerader Multiplizität. Im besonderen kann sich diese Verzweigungsmannigfaltigkeit auf eine Gruppe von (für N mehrfachen) Punkten reduzieren oder auch ganz fehlen.

Sind zwei Mannigfaltigkeiten M und M^* auf der zweifachen Mannigfaltigkeit N mit ein und derselben Verzweigungsmannigfaltigkeit abgebildet, so können die Koordinaten ihrer Punkte in der folgenden Form angesetzt werden:

$$x_i = A_i(y) + B_i(y)\sqrt{R(y)},$$
$$x_i^* = A_i^*(y) + B_i^*(y)\sqrt{R^*(y)},$$

derart, daß die Durchschnitte von $R(y) = 0$ und $R^*(y) = 0$ mit N sich nur durch Bestandteile gerader Multiplizität voneinander unterscheiden. Wenn insbesondere $R(y) \equiv R^*(y)$, so ergeben sich die Mannigfaltigkeiten M und M^* als birational äquivalent, ja sie können sogar in zweifacher Weise birational aufeinander bezogen werden, indem man zwei Punkte als homolog nimmt, die aus denselben Werten der y hervorgehen und aus gleichen oder entgegengesetzten Werten von $\sqrt{R(y)}$. Wenn indessen $R(y) \not\equiv R^*(y)$, so können die M und M^* birational verschieden ausfallen; im allgemeinen verteilen sie sich für ein und dieselbe Verzweigungsmannigfaltigkeit auf eine endliche Anzahl von Familien. Für *rationale* N insbesondere reduziert sich diese Anzahl auf die Einheit, so daß die einfachen Mannigfaltigkeiten, die eine gegebene *rationale* Doppelmannigfaltigkeit mit einer bestimmten Verzweigungsmannigfaltigkeit repräsentieren, sämtlich miteinander birational identisch sind. Man kann daher ohne Zweideutigkeit von einer *rationalen Doppelmannigfaltigkeit mit einer gegebenen Verzweigungsmannigfaltigkeit* sprechen. In diesem Sinne spricht man in der Geometrie der birationalen Transformationen von der Doppelgeraden mit $2p+2$ gegebenen Verzweigungspunkten als Repräsentantin einer bestimmten Klasse von Kurven (hyperelliptische Kurven vom Geschlecht p), der Doppelebene mit einer Übergangskurve der 2. oder der 4. Ordnung usw.

Das gilt indessen im allgemeinen nicht, wenn N nicht rational ist und auch nicht für die α-fachen Mannigfaltigkeiten, wenn $\alpha > 2$: man kann daher nicht sagen, daß eine solche Mannigfaltigkeit birational definiert sei, wenn man auf ihr die Verzweigungsmannigfaltigkeit vorgibt.[20])

Nach Einführung mehrfacher Mannigfaltigkeiten kann man eine algebraische Korrespondenz *mit beliebigen Indizes* (α, β) zwischen zwei Mannigfaltigkeiten M und N als *eineindeutig* betrachten. Es genügt in der Tat, daß man M und N als β- und α-fach betrachtet. Dies leuchtet ein, wenn man z. B. als intermediär die Mannigfaltigkeit betrachtet, die von den Paaren entsprechender Punkte von M und N gebildet wird (oder auch die Mannigfaltigkeit der Verbindungsgeraden

---

20) Über das Vorausgehende vgl. *C. Segre*[2]), p. 57—61.

Ähnliche Bemerkungen gelten für die sogenannten *zyklischen* Mannigfaltigkeiten, d. h. für den Fall einer $(\alpha, 1)$-Korrespondenz mit zyklischer Monodromiegruppe; man braucht nur die obige Darstellung durch die allgemeinere

$$x_i = A_i(y) + \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} B_{i\beta}(y) \sqrt[\alpha]{(R(y))^{\beta}}$$

zu ersetzen. Im einfachsten Falle der Doppel- oder α-fach zyklischen *Kurven* ist die Anzahl der birational verschiedenen Familien mit einer gegebenen Verzweigungsgruppe von *A. Comessatti,* Mem. Acc. Torino (2) 60 (1909), p. 314; Rend. Semin. mat. Univ. Padova 1 (1930), p. 1 bestimmt worden. *O. Chisini,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 24^1 (1915), p. 153; (5) 30^2 (1921), p. 172, 251, 305, hat auch ähnliche Fragen, und insbesondere den allgemeinen Fall mehrfacher *elliptischer* (auch nicht zyklischer) Kurven ohne Verzweigungsgruppe, betrachtet. Vgl. *F. Enriques* und *O. Chisini,* „Lezioni" 3, p. 427—456. — Für zyklische *Flächen* ohne Verzweigungskurve wurde die Anzahl der Familien von *M. de Franchis,* Rend. Circ. mat. Palermo 48 (1924), p. 384 und 420, gegeben; s. auch 54 (1930), p. 454. Die Beziehungen zwischen den algebraisch-geometrischen und topologischen Standpunkten sind von *A. Comessatti* in obengenannten Padova Rend. untersucht und erklärt worden: dieser hat auch den Fall betrachtet, in dem eine Verzweigungskurve vorhanden ist, und die betreffende Anzahl von Familien bestimmt.

der homologen Punkte von M und N): auf diese sind M und N birational bezogen, wenn jeder ihrer Punkte β- oder α-fach gezählt wird.[21])

2. Beziehungen zwischen invarianten Charakteren zweier algebraischer Kurven oder Flächen in algebraischer Korrespondenz. Aus der Definition einer linearen Schar von Punktgruppen auf einer algebraischen Kurve [III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **24**] folgt, daß, wenn zwischen den Punkten zweier algebraischer Kurven, die voneinander verschieden oder vereinigt sind, eine algebraische $(1, \mu)$-Korrespondenz[22]) stattfindet, einer linearen Schar g_n^r auf der ersten Kurve eine lineare Schar $g_{n\mu}^r$ auf der zweiten Kurve entspricht, die mit der ∞^1-Involution von der Ordnung μ zusammengesetzt ist, deren Gruppen auf der zweiten Kurve den Punkten der ersten Kurve entsprechen.[23])

21) Vgl. *C. Segre*[2]), p. 59. Vgl. auch *R. Baldus*, Math. Ann. 75 (1913), p. 290, der, ausgehend von diesem Begriff, die (1, 2)-Korrespondenzen zwischen zwei geradlinigen Flächen R_1, R_2 studiert hat. Ist die einfache Regelfläche R_1 nicht rational, so gibt es zwei verschiedene Arten solcher Korrespondenzen. Bei der ersten Art entspricht jeder Erzeugenden g_1 von R_1 eine Erzeugende g_2 von R_2 und jedem Punkte von g_1 zwei Punkte von g_2. Bei der zweiten Art entsprechen jeder Erzeugenden g_1 von R_1 zwei Erzeugende g_2, g_2' von R_2, und einem Punkte von g_1 entsprechen zwei Punkte, deren einer auf g_2 und deren anderer auf g_2' liegt. *R. Baldus* hat unter gewissen einschränkenden Annahmen die Fundamentalpunkte der Korrespondenz, die Doppelkurve und die Übergangskurve studiert. In Verbindung mit den zwei Arten hat er Anwendungen auf Strahlensysteme, die ein ∞^1-System von Regelflächen 3. bzw. 2. Grades enthalten, gegeben.

22) Über solche nur rationale Korrespondenzen zwischen zwei Kurven s. *P. Painlevé,* Paris C. R. 105 (1887), p. 792; 107 (1888), p. 221, 320, 724; Preisschrift, Ann. Éc. Norm. (3) 8 (1891), p. 103; J. math. pures appl. (4) 10 (1894), p. 203; „Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles professées à Stockholm 1895" (lith.), Paris 1897, p. 92; *G. Humbert,* J. math. pures appl. (4) 10 (1894), p. 180; *É. Goursat,* Amer. J. of math. 16 (1894), p. 291; *E. Vessiot,* Ann. Fac. sc. Toulouse (1) 10 (1896), D, p. 10; *P. J. Myrberg,* Ann. Ac. sc. Fennicae (A) 24 (1925), Nr. 12.

Über automorphe rationale Transformationen einer Kurve s. *É. Picard,* Bull. Soc. math. de France 28 (1900), p. 24—25.

Über die Bestimmung der Gleichung der ebenen Kurve, die mittels einer rationalen Transformation aus einer gegebenen Kurve hervorgeht, s. *Elliot,* Ann. Éc. Norm. (2) 9 (1880), p. 167.

23) Wir erwähnen noch die folgenden Eigenschaften, die sich auf birationale Korrespondenzen zwischen zwei algebraischen Kurven beziehen, die in Räumen beliebiger Dimension liegen. Wenn eine Kurve γ' die eineindeutige Projektion einer irreduziblen Kurve γ ist oder wenn sie die homographisch transformierte Kurve einer solchen Projektion von γ ist, so entspricht vermöge der birationalen Korrespondenz, die zwischen γ und γ' resultiert, der linearen Schar, die auf γ' durch die Überebenen ihres Raumes bestimmt ist, auf γ eine

Allgemeiner, befinden sich die beiden Kurven in algebraischer Korrespondenz (α, β)[24]), so entsprechen den Gruppen einer auf einer Kurve vorgegebenen linearen Schar auf der anderen Kurve Gruppen einer algebraischen Schar, die in ein und derselben linearen Schar enthalten sind; mit anderen Worten, untereinander äquivalenten Gruppen auf der einen Kurve entsprechen auf der anderen ebenfalls untereinander äquivalente Gruppen.[25])

Die funktionale Verbindung zwischen den kanonischen Scharen [III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. 27], die auf den zwei Kurven bestehen, ist nach *F. Severi*[26]) in dem folgenden Satz ausgedrückt: Wenn zwi-

---

lineare Schar, die völlig in der linearen Schar enthalten ist, die auf γ durch die Überebenen ihres Raumes bestimmt ist.

Der Satz läßt sich wie folgt umkehren: Wenn zwischen zwei irreduziblen Kurven γ und γ', die in linearen Räumen von den Dimensionen r und r' (wobei $r > r' > 1$) liegen, eine birationale Korrespondenz besteht, welche die lineare Schar der überebenen Schnitte von γ' in eine lineare Schar transformiert, die vollständig in der linearen Schar der überebenen Schnitte von γ enthalten ist, so ist die Kurve γ' die Projektion von γ aus einem linearen Raum, der γ nicht schneidet, oder ist homographisch zu einer solchen Projektion.

Ist aber die birationale Korrespondenz, die zwischen γ und γ' besteht, so beschaffen, daß der Schar der überebenen Schnitte von γ' eine Schar $g_{n-k}^{r'}$ (wobei $k > 0$) entspricht, die teilweise in der Schar g_n^r der überebenen Schnitte von γ enthalten ist, so ist γ' Projektion von γ aus einem linearen Raum, der γ in k Punkten schneidet, jedoch nur, wenn jede Gruppe der $g_{n-k}^{r'}$ als Rest einer Fixgruppe in bezug auf die g_n^r betrachtet werden kann, insbesondere, wenn γ eine Normalkurve, d. h. g_n^r eine Vollschar ist [über die Bedeutung dieser Wörter s. III C 7 (*C. Segre*), Nr. 6; III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. 25]. S. darüber *F. Severi*, „Lezioni“, p. 115—121; „Vorlesungen“, p. 89—93, und in vollständiger Form „Trattato“ 1_1, p. 70—74 und 110—111.

24) Über Konstruktionen ebener Kurven in (α, β)-Korrespondenz s. *F. R. Sharpe* und *V. Snyder*, Trans. Amer. math. Soc. 22 (1921), p. 31; Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 27 (1920), p. 56.

Sätze über die Zweige zweier Kurven in algebraischer Korrespondenz, die als Ursprünge zwei homologe Punkte haben, gab *G. H. Halphen*, Ass. franç. pour l'avanc. des sciences, Congrès de Nantes 1875, p. 237; Bull. Soc. math. de France 4 (1875), p. 29; 5 (1876), p. 7 = Oeuvres 1 (Paris 1916), p. 363, 377, 557.

25) *F. Severi*, Atti Acc. Torino 38 (1903), p. 190; „Lezioni“, p. 206—208; „Vorlesungen“, p. 165—166; „Trattato“ 1_1, p. 206—207.

26) Rend. Ist. Lomb. (2) 36 (1903), p. 495; „Lezioni“, p. 208—213; „Vorlesungen“, p. 167—170; „Trattato“ 1_1, p. 207—210. Für den Fall einer $(\alpha, 1)$-Korrespondenz zuerst auf transzendentem Wege bei *P. Painlevé*, Preisschrift, Ann. Éc. Norm. (3) 8 (1891), p. 115; J. math. pures appl. (4) 10 (1894), p. 203; auf geometrischem Wege bei *G. Castelnuovo*, Roma Rend. Acc. Linc. (4) 7^2 (1891), p. 294. Ein anderer transzendenter Beweis bei *G. Humbert*[22]); ein geometrischer in *F. Enriques* und *O. Chisini*, „Lezioni“ 3, p. 72—73. S. auch *M. de Franchis*, „Funzioni algebriche di una variabile e applicazioni geometriche“ (lith.), Palermo 1928, p. 291—295, 450—451.

schen zwei Kurven C und C' eine (α, β)-Korrespondenz besteht, so liefert die transformierte Gruppe einer kanonischen Gruppe von C, vermehrt um die auf C' vorhandenen Doppelpunkte der Korrespondenz, eine Gruppe, die äquivalent ist mit einer α-fach gezählten kanonischen Gruppe von C', vermehrt um die Verzweigungspunkte der Korrespondenz, die auf C' liegen.

Bezeichnet man mit p und p' die Geschlechter von C und C' und mit y, y' die Anzahlen der Verzweigungspunkte der Korrespondenz, die auf C, C' bestehen, so erhält man als zahlenmässige Übersetzung des Satzes die Gleichung

$$y - y' = 2\alpha(p' - 1) - 2\beta(p - 1),$$

also die Formel von *H. G. Zeuthen* (und *G. H. Halphen*)[27]), die schon in III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. 4 und **15**[28]) gegeben wurde.

---

27) Kritische Bemerkungen über mancherlei Annahmen, die bei den gewöhnlichen Ableitungen dieser Formel eingeschlossen sind, hat *F. Severi* gemacht, Roma Rend. Acc. Linc. (6) 1 (1925), p. 562; „Trattato" 1_1, p. 211—217. Jene Annahmen sind: 1. daß die Korrespondenz irreduzibel ist; 2. daß ein Doppelpunkt der Korrespondenz, der auf C' liegt, ein *effektives* Doppelelement der $(1, \beta)$-Korrespondenz hervorruft, die zwischen C und dem ∞^1-Gebilde besteht, das durch die Paare homologer Punkte von C und C' gebildet wird; 3. daß die vielfachen Punkte der Korrespondenz auf jeder der beiden Kurven in derselben Anzahl vorhanden sind, wie die homologen Verzweigungspunkte. *F. Severi* hat gezeigt, welche Modifikationen man bei der Wertbestimmung der Multiplizität der mehrfachen Punkte oder der Verzweigungspunkte der Korrespondenz anbringen muß, damit die Formel von *H. G. Zeuthen* auch gültig ist, wenn jene Annahmen nicht zutreffen. Einige Hinweise schon bei *M. de Franchis*, Roma Rend. Acc. Linc. (5) 12^1 (1903), p. 303.

28) Zu den Anführungen, die dort gemacht sind, und denen in Anm. 26 fügen wir noch diese hinzu: *A. Clebsch* und *F. Lindemann*, „Vorlesungen" 1, p. 458—459; franz. Übers. 2, p. 168—170; *M. Bernhard*, Diss. Tübingen 1888, p. 5—7; *Fr. Junker*, Diss. Tübingen 1889, p. 33—43, die indessen, da sie auf das Korrespondenzprinzip von *Cayley-Brill* (Nr. **10**) gegründet sind, nur dann gelten, wenn es sich um eine Wertigkeitskorrespondenz handelt; *G. A. von Peschka*, „Darstellende und projektive Geometrie" 2, Wien 1884, p. 142—145; *G. B. Guccia*, „Lezioni di Geometria superiore" (lith.), Palermo 1890, p. 162—167; *T. Brodén*, Lunds Univ. Årskr. 30 (1893—1894), Nr. 2, p. 23—24; *H. Wieleitner*, „Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung", Leipzig 1905, p. 77—78; *E. Bertini*[4]), 1. Ausg., p. 396—397, 399—401; 2. Ausg., p. 483—484, 486—489; deutsche Ausg., p. 457—458, 460—464; *H. G. Zeuthen*, „Lehrbuch", p. 104—107; *C. Rosati*, Atti Acc. Torino 51 (1916), p. 1011; Ann. di mat. (3) 28 (1918), p. 47; *F. Enriques* und *O. Chisini*, „Lezioni" 3, p. 73; *J. L. Coolidge*, „Alg. pl. curves", p. 135—136 und 246. In einem besonderen Fall *G. Kobb*, Diss. Upsala 1889, p. 53; vgl. Acta math. 10 (1887), p. 94.

Für den Fall einer $(\alpha, 1)$-Korrespondenz s. *A. Hurwitz*, Math. Ann. 32 (1887), p. 293 [Auszug Gött. Nachr. 1887, p. 89] = Math. Werke 1, p. 244; *É. Goursat*[22]);

F. Severi[29]) hat diese Eigenschaften auf algebraische Korrespondenzen zwischen Flächen ausgedehnt [vgl. III C 6b (*G. Castelnuovo* und

---

J. L. Coolidge, „Alg. pl. curves“, p. 134—135. Beweise für diesen Fall, die aus der Vergleichung der Fundamentalpolygone einer *Fuchs*schen Gruppe und einer ihrer Untergruppen hergeleitet sind, bei *H. Poincaré,* Rend. Circ. mat. Palermo 27 (1908), p. 313, und *A. Comessatti,* Roma Mem. Acc. Linc. (6) 3 (1930), Nr. XII, p. 20—21.

Die Formel von *H. G. Zeuthen* ist ein besonderer Fall einer anderen, die ebenfalls von *H. G. Zeuthen* herrührt, Paris C. R. 78 (1874), p. 274, und sich auf algebraische ∞^1-Systeme ebener algebraischer Kurven bezieht.

Hinsichtlich des besonderen Falles $\alpha = \beta = 1$, d.h. des Ssatzes von *B. Riemann,* nach dem zwei Kurven in birationaler Korrespondenz dasselbe Geschlecht haben, fügen wir den Anführungen in III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **4**, **15**, **24** hinzu, daß die Beweise von *B. Riemann, L. Cremona, E. Bertini, A. Brill* und *M. Noether* bei *A. Clebsch* und *F. Lindemann,* l. c., p. 681—685 wiedergegeben sind; französische Übersetzung 3, p. 27—31; der Beweis von *L. Cremona* ist auch bei *E. Müller,* „Vorlesungen über darstellende Geometrie“ 3, Konstruktive Behandlung der Regelflächen, bearb. von *J. L. Krames,* Leipzig und Wien 1931, p. 52—53 angegeben; der Beweis von *E. Bertini* ist auch bei *G. Salmon,* „Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven“, bearb. von *W. Fiedler,* 2. Aufl., Leipzig 1882, p. 84—85 angegeben; bei *G. Salmon,* „Traité de géométrie analytique“, par *O. Chemin,* Paris 1884, p. 456—458: bei *H. Wieleitner,* l. c., p. 77—78; bei *G. A. von Peschka,* l. c., 2, p. 139—142; bei *F. Enriques* und *O. Chisini,* „Lezioni“ 2, p. 130—133, und bei *S. Ganguli,* „The theory of plane curves“ 1, 2. Aufl., Calcutta 1925, p. 188—190; der Beweis von *H. Schubert* ist bei *E. Bertini*[4]) angegeben, 1. Ausg., p. 206—207; 2. Ausg., p. 243—244; deutsche Ausg., p. 228—229; die von *H. G. Zeuthen* bei *R. Sturm,* „Geom. Verw.“ 1, p. 238—240. S. ferner *A. Clebsch* und *F. Lindemann,* l. c., p. 666—674; franz. Übers. 3, p. 7—17; *P. Appell* und *É. Goursat,* „Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales“, Paris 1895 (2. Aufl. Paris 1929), p. 260—261 u. 261—266; *H. F. Baker,* „Abel's theorem and the allied theory“, Cambridge 1897, p. 6—7; *A. R. Forsyth,* „Theory of functions of a complex variable“, 2. ed., Cambridge 1900, p. 524—525; *F. Schuh,* Ak. Amsterdam Versl. (4) 13 (1904), p. 127; *H. Hilton,* „Plane algebraic curves“, Oxford 1920, p. 128—129, 376—377; *F. Enriques* und *O. Chisini,* „Lezioni“ 3, p. 59 u. 62 ff.; *F. Severi,* „Lezioni“, p. 135; „Vorlesungen“, p. 106; „Trattato“ 1_1, p. 122 ff. u. 146; *M. de Franchis*[26]), p. 274; *J. L. Coolidge,* a. a. O., p. 120 und 246. Ein Beweis der Unveränderlichkeit des Geschlechtes einer ebenen Kurve gegenüber quadratischen Transformationen der Ebene bei *F. Enriques* und *O. Chisini,* „Lezioni“ 1, p. 284—285.

Für die Umkehrung des *Riemann*schen Satzes, die als Konsequenz der *Zeuthen*schen Formel betrachtet werden kann und nach der eine rationale Korrespondenz zwischen zwei algebraischen Kurven desselben Geschlechts $p > 1$ notwendigerweise birational ist, fügen wir den Anführungen in III C 4 (*L. Berzolari*), Anm. 50 hinzu: *A. Clebsch* und *F. Lindemann,* l. c., p. 459 in Anm.; franz. Übers. 2, p. 170 in Anm.; *P. Painlevé,* Paris C. R. 107 (1888), p. 321; Preisschrift, Ann. Éc. Norm. (3) 8 (1891), p. 115; „Leçons“[22]), p. 93; *P. Appell* und *É. Goursat,* l. c., p. 486—487; *H. F. Baker,* l. c., p. 7—8; *É. Picard,* „Traité d'analyse“ 2, 1. Ausg., Paris 1893, p. 454—455; 2. Ausg., Paris 1905, p. 498—499; 3. Ausg., Paris 1926, *F. Enriques*), Nr. **15**]. Stehen zunächst zwei Flächen in algebraischer (α, β)-Korrespondenz, so entspricht einem linearen Kurvensystem der einen Fläche auf der anderen ein algebraisches System, das völlig in einem linearen System enthalten ist. Dies vorausgesetzt, ist die funktionale Verbindung zwischen den kanonischen Systemen zweier Flächen in dem Satz gegeben: Besteht zwischen zwei Flächen F, F' eine algebraische (α, β)-Korrespondenz, so liefert die transformierte Kurve einer kanonischen Kurve und der ausgezeichneten Kurven von F [III C 6b (*G. Castelnuovo* und *F. Enriques*), Nr. **4**], vermehrt um die Koinzidenzkurve und die möglicherweise vorkommenden Fundamentalkurven der Korrespondenz (denen Punkte auf der anderen Fläche entsprechen) auf F', eine Kurve des linearen Systems, das durch eine α-kanonische Kurve von F' bestimmt ist, vermehrt um die α-fach gezählten ausgezeichneten Kurven und die auf F' gezogene Verzweigungskurve.

Hieraus hat *F. Severi* drei Beziehungen abgeleitet, die die Verbindungen zwischen den arithmetischen Geschlechtern, zwischen den (relativen) Invarianten von *Castelnuovo-Enriques* und zwischen den (relativen) Invarianten von *Zeuthen-Segre* zweier Flächen F, F' in (α, β)-Korrespondenz ausdrücken: Beziehungen, die in der Flächentheorie als analog zu denen von *Zeuthen* für die Kurven betrachtet werden müssen.

Nennen wir ϱ das Geschlecht der Verzweigungskurve D, die auf F gezogen ist; Θ die Gesamtzahl der Schnitte von D mit den ausgezeichneten Kurven und einer kanonischen Kurve von F[30]); τ die Zahl der Punkte von F, für welche drei homologe Punkte zusammenfallen (Punkte, von denen jeder eine Spitze für D ist); s $(\geqq 0)$ die Multiplizität von D in einem der Fundamentalpunkte der Korrespondenz; σ das Geschlecht der Fundamentalkurve, die einem solchen Punkte

---

p. 542—543; *E. Bertini*[4]), 1. Ausg., p. 401; 2. Ausg., p. 489; deutsche Ausg., p. 463; *F. Severi*, „Lezioni", p. 211—212; „Vorlesungen", p. 169; „Trattato" 1_1, p. 210; *H. G. Zeuthen*, „Lehrbuch", p. 109; *F. Enriques* und *O. Chisini*, „Lezioni" 3, p. 456—457; *M. de Franchis*[26]), p. 292—293; *J. L. Coolidge*, a. a. O., p. 135 und 246.

29) Rend. Ist. Lomb. (2) 36 (1903), p. 495. Vgl. auch *H. G. Zeuthen*, „Lehrbuch", p. 167—172. Für eine $(\alpha, 1)$-Korrespondenz schon zuerst bei *F. Enriques*, Mem. Acc. Torino (2) 44 (1893), p. 229, der darin auch die Beziehung zwischen den linearen Geschlechtern zweier Flächen abgeleitet hat.

Analoge Untersuchungen hat *G. Tafani* angestellt, Ann. Scuola Norm. sup. di Pisa 13 (1919), Nr. 2, für die $(\alpha, 1)$-Korrespondenzen zwischen zwei dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten.

Weitere Untersuchungen über die (α, β)-Korrespondenzen zwischen zwei algebraischen Flächen bei *G. Albanese*, Boll. Unione mat. ital. 11 (1932), p. 131.

30) „Immersionszahl" („carattere d'immersione") von D auf F, nach *F. Severi*, Atti Acc. Torino 37 (1902), p. 625.

entspricht; p_a das arithmetische Geschlecht von F; ω die Invariante von *Castelnuovo-Enriques*[31]) und I die Invariante von *Zeuthen-Segre* von F.[32]) ϱ', Θ', τ', s', σ', p_a', ω', I' seien die entsprechenden Zahlen für F'. Dann gelten die Formeln von *F. Severi*[33]):

$$\alpha(\omega'-1)-\beta(\omega-1)=\varrho-\varrho'+\tfrac{3}{2}(\Theta-\Theta')$$
$$+\sum(s+\sigma-1)-\sum(s'+\sigma'-1),$$
$$\alpha(I'+4)-\beta(I+4)=2(\varrho-\varrho')-(\tau-\tau')$$
$$+\sum(\tfrac{1}{2}s-\sigma+1)-\sum(\tfrac{1}{2}s'-\sigma'+1),$$
$$24\alpha(p_a'+1)-24\beta(p_a+1)=6(\varrho-\varrho')+3(\Theta-\Theta')$$
$$-2(\tau-\tau')+3\sum s-3\sum s'.$$

Vermöge der *Noether*schen Beziehung [III C 6b (*G. Castelnuovo* und *F. Enriques*), Nr. **14**]

$$\omega+I=12p_a+9,$$

ist eine dieser Formeln eine lineare Kombination der beiden anderen.[34])

---

31) Wenn F nur eine endliche Anzahl ausgezeichneter Kurven besitzt, so drückt die Summe dieser Zahl und der besagten Invariante ω das lineare Geschlecht (Kurvengeschlecht) der Fläche aus, d. h. die absolute Invariante, welche man mit $p^{(1)}$ bezeichnet.

32) Für die vorher genannten Invarianten einer algebraischen Fläche s. III C 6b (*G. Castelnuovo* und *F. Enriques*), Nr. **11—14**.

33) Wenn irgendeine der oben definierten Kurven fehlen sollte, so muß man ihr Geschlecht gleich der Einheit setzen.

34) *F. Klein,* Math. Ann. 7 (1874), p. 549; 9 (1875), p. 476 (wiedergegeben in Ges. math. Abh. 2, Berlin 1922, p. 63), verdanken wir einige Bemerkungen über gewisse Beziehungen, die zwischen dem Zusammenhang algebraischer Flächen und ihrem Verhalten bei birationalen Transformationen bestehen. Wenn zwei reelle algebraische Flächen (die durch Gleichungen mit reellen Koeffizienten dargestellt sind) in birationaler Korrespondenz stehen und dabei jedem reellen Punkt der einen ein reeller Punkt der anderen Fläche entspricht, aber auf keiner von ihnen reelle Fundamentalpunkte bestehen (d. h. Punkte, denen alle Punkte einer Kurve entsprechen), so haben die beiden Flächen augenscheinlich denselben Zusammenhang. Wenn wir aber nur die beiden ersten Annahmen festhalten, also auf den beiden Flächen reelle Fundamentalpunkte haben in der Anzahl n und n', so ist der Zusammenhang der ersten, vermehrt um n, gleich dem Zusammenhang der zweiten, vermehrt um n'. Dieser Satz gilt sogar für jeden Flächenmantel und für umkehrbar eindeutige (außer den Ausnahmen in den Fundamentalpunkten) kontinuierliche Punktkorrespondenzen, wie *A. Comessatti,* Ann. di mat. (3) 23 (1914), p. 240—242 festgestellt hat. S. hierüber die Anm. 1058.

II. Algebraische Korrespondenzen und Korrespondenzprinzipien in linearen und nichtlinearen Gebieten.

3. Algebraische Korrespondenzen zwischen den Elementen zweier Grundgebilde erster Stufe (oder zwischen den Punkten zweier rationaler Kurven). Sind C und C' zwei Grundgebilde erster Stufe, oder allgemeiner zwei irreduzible, rationale Kurven, also vom Geschlecht Null [III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **2, 15** und Anm. 292], so kann jede algebraische (α, β)-Korrespondenz zwischen ihren Punkten[35]) durch eine einzige Gleichung dargestellt werden

$$f(x, y) = 0, \tag{1}$$

vom Grade α, β in den Parametern x, y ihrer homologen Punkte.[36])

Insbesondere kann man eine $(1, 1)$-Korrespondenz durch eine bilineare Gleichung darstellen, so daß man in dem Falle, wo es sich um zwei Grundgebilde[37]) handelt, auf eine Projektivität kommt, während man im entgegengesetzten Fall die bilineare Gleichung oder auch die Algebraizität und die umkehrbare Eindeutigkeit der Korrespondenz als Definition der projektiven Korrespondenz zwischen den beiden rationalen Kurven betrachten kann.

---

35) Korrespondenzen dieser Art sind schon dem Sinne nach von *C. Mac Laurin* betrachtet worden, „Geometria organica, sive descriptio linearum curvarum universalis", Londini 1720, um *Newtons* organische Erzeugungen der ebenen Kurven darzustellen und zu erläutern (s. darüber l. c., p. 11, 30, 72). Von diesem Gesichtspunkte aus hat *E. de Jonquières,* J. math. pures appl. (2) 2 (1857), p. 153 geometrische Beweise verschiedener Sätze von *C. Mac Laurin* gegeben. Vgl. auch *M. Chasles,* Paris C. R. 78 (1874), p. 922, 1373, 1599; *Fr. Deruyts,* Mém. Soc. sc. Liège (2) 17 (1890), p. 28—31. Über die „Geometria organica" von *C. Mac Laurin* s. *Ch. Tweedie,* Proc. Roy. Soc. Edinburgh 36^1 (1915), p. 87.

36) Daß eine Korrespondenz mit den Indizes α, β zwischen zwei reellen oder komplexen Variabeln nicht notwendigerweise algebraisch ist und daß man deswegen nicht behaupten kann, daß sie $\alpha + \beta$ Koinzidenzelemente besitzt (s. Nr. **6**), bemerkte ausdrücklich *C. F. Geiser,* Ann. di mat. (2) 4 (1869), p. 25; vgl. auch *H. G. Zeuthen*, Bull. sciences math. (1) 5 (1873), p. 188—189 [s. III AB 5 (*A. Schoenflies,* Nr. 8]. Die Frage findet man bei *F. Enriques* und *O. Chisini*, „Lezioni" 1, p. 354—358, behandelt; man gelangt zu folgendem Ergebnis. Jede analytische Korrespondenz mit den Indizes α und β zwischen zwei Variablen x und y, die für alle reellen und komplexen Werte von x und y, allenfalls mit Ausnahme einer endlichen Anzahl singulärer Werte, definiert ist, ist algebraisch und wird durch eine Gleichung $f(x, y) = 0$ vom Grade α und β in x und y dargestellt. Ist $\alpha = \beta = 1$, so ist die Korrespondenz eine Projektivität: vgl. Anm. 9.

37) *M. Chasles,* Paris C. R. 37 (1853), p. 274; 41 (1855), p. 1098. Vgl. *E. de Jonquières,* „Mélanges de géométrie pure", Paris 1856, p. 153—154; *F. Severi,* „Trattato" 1_1, p. 9.

Die Korrespondenz ist *reduzibel* oder *irreduzibel*, je nachdem das Polynom f das Produkt zweier ganzer Polynome in x, y ist oder nicht.

Eine (α, β)-Korrespondenz ist vollkommen bestimmt, wenn dabei $\alpha\beta + \alpha + \beta$ Paare homologer Punkte gegeben sind.

Auf den Kurven C und C' gibt es $2\alpha(\beta - 1)$ bzw. $2\beta(\alpha - 1)$ Verzweigungspunkte und auf C' und C ebensoviele Doppelpunkte der Korrespondenz.

Wenn zwischen den Kurven C und C' eine $(\alpha, 1)$-Korrespondenz besteht, so bilden die Gruppen der α Punkte von C, die den einzelnen Punkten von C' entsprechen, auf C eine Involution der Ordnung α erster Stufe.[38] Eine $(\alpha, 1)$-Korrespondenz ist also nichts anderes als eine Projektivität zwischen einem einförmigen Gebilde und einer Involution von der Ordnung α.

Wenn die (α, β)-Korrespondenz zwischen den Punkten ein und derselben Kurve gegeben ist, so gibt es auf dieser $\frac{\alpha(\alpha-1)}{2} + \frac{\beta(\beta-1)}{2}$ Paare von Punkten, die sich in der gegebenen Korrespondenz involutorisch entsprechen.[39])

Eine (α, β)- und eine (α', β')-Korrespondenz zwischen den Punkten ein und derselben rationalen Kurve haben $\alpha\beta' + \alpha'\beta$ gemeinsame Paare entsprechender Punkte.

Eine (α, α)-Korrespondenz zwischen den Punkten ein und derselben rationalen Kurve C heißt *symmetrisch* und auch ein *symmetrisches Elementensystem*[40]), wenn die Gleichung (1) in x, y symmetrisch ist, so daß jeder Punkt von C dieselben α korrespondierenden Punkte hat, einerlei ob man den Punkt zu dem einen oder dem anderen Systeme rechnet. Eine solche Korrespondenz ist durch $\frac{\alpha(\alpha+3)}{2}$ Paare homologer Punkte bestimmt, besitzt $2\alpha(\alpha - 1)$ Verzweigungspunkte und ebenso viele Doppelpunkte.

Eine (α, α)-Korrespondenz zwischen den Punkten einer rationalen Kurve ist symmetrisch, wenn sie $\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}$ involutorische Punktepaare besitzt, die nicht einer symmetrischen $(\alpha - 1, \alpha - 1)$-Korrespondenz angehören.[41])

---

38) Für $\alpha = 2$ s. *M. Chasles*, Paris C. R. 41 (1855), p. 679—680, 1099; *E. de Jonquières*[37]), p. 154—155, 162—163.

39) *Em. Weyr*, J. f. Math. 74 (1871), p. 189.

40) Diese Bezeichnung stammt von *Em. Weyr*[7]), p. 8. *R. Sturm*, „Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung" 1, Leipzig 1892, p. 23; „Geom. Verw." 1, p. 275 nannte sie dagegen *involutorische Korrespondenz*.

41) *J. de Vries*, Nieuw Archief voor Wiskunde (2) 7 (1907), p. 469. Für $\alpha = 2$ s. *R Sturm*, „Geom. Verw." 1, p. 272—273.

Zwei symmetrische Systeme vom Grade α und α' auf derselben Kurve besitzen $\alpha\alpha'$ gemeinsame Paare.

Besteht zwischen zwei rationalen Kurven C und C' eine (α, β)-Korrespondenz, so erhält man auf C ein symmetrisches System vom Grade $\beta(\alpha - 1)$, wenn man zwei Punkte, die ein und demselben Punkt von C' homolog sind, als korrespondierend betrachtet. Ein symmetrisches System vom Grade $\alpha(\beta - 1)$ erhält man auf ähnliche Weise auf C'.[41a])

Zum Beweis der vorhergehenden und anderer Eigenschaften sind verschiedene geometrische Darstellungen der Korrespondenz zweckmäßig. Zum Beispiel[42]) kann man die beiden gegebenen rationalen Kurven auf zwei Büschel von Geraden beziehen, die in ein und derselben Ebene liegen und verschiedene Mittelpunkte O und O' haben. Ist, was man immer annehmen darf, die Gerade OO' in der Korrespondenz weder Koinzidenz- noch Verzweigungs- noch mehrfache Gerade, so hat der Ort der Schnittpunkte der korrespondierenden Geraden (die sog. *Korrespondenzkurve*) die Ordnung $\alpha + \beta$, und in O und O' die ordentlichen Multiplizitäten α und β ohne Tangentialbesonderheiten. Die Tangenten in O und O' sind die Geraden, die in den Büscheln O, O' der, als zu O', O zugehörig gedachten Geraden OO' entsprechen, während die anderen Tangenten, die von O und O' an die Kurve gezogen werden können, die Verzweigungsgeraden der Korrespondenz sind.

Geht man dagegen in der Weise vor, daß die Gerade OO' Koinzidenzgerade ist oder sogar k Koinzidenzgeraden absorbiert — und in einem solchen Falle spricht *Em. Weyr*[43]) davon, daß die beiden Büschel in *reduzierter Lage k^{ter} Ordnung* sind — so reduziert sich die Korrespondenzkurve auf die Ordnung $\alpha + \beta - k$ und hat in O und O' die Multiplizitäten $\alpha - k$ und $\beta - k$.

Findet die (α, β)-Korrespondenz zwischen den Punkten ein und derselben Kurve statt, so kann man die Korrespondenzkurve von der

---

41a) Andere Eigenschaften, mit Anwendungen, bei *A. Emch*, Amer. J. of math. 54 (1932), p. 285; Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 37 (1931), p. 831.

42) Vgl. *Em. Weyr* [7]), p. 44; *H. G. Zeuthen*, Acta math. 1 (1882), p. 174; „Lehrbuch", p. 176; *R. Sturm*, „Die Gebilde" [40]) 1, p. 21; „Geom. Verw." 1, p. 228—229, 241—242, 261—262, 271—272; *E. Bertini* [4]), 1. Ausg., p. 391 ff.; 2. Ausg., p. 478 ff.; deutsche Ausg., p. 452 ff.; *F. Severi*, „Lezioni", p. 138—141; „Vorlesungen", p. 101—102; „Trattato" 1_1, p. 290—292; *F. Enriques* und *O. Chisini*, „Lezioni" 1, p. 104—110, 159—164, 286—292; *R. Deaux*, Mathesis 45 (1931), p. 16. Untersuchungen der Korrespondenzkurve (unter dem Gesichtspunkt der Dualität und mit Anwendungen vor allem auf die Formeln von *Plücker*) bei *O. Zimmermann*, J. f. Math. 123 (1901), p. 1 und 175.

43) S. [7]), p. 47.

Ordnung $\alpha + \beta$ erhalten, wenn man die Korrespondenz auf eine Gerade r verlegt und die homologen Punkte von zwei Punkten O, O' einer Ebene durch r so projiziert, daß die Gerade OO' nicht irgendeinen Koinzidenz-, mehrfachen oder Verzweigungspunkt der Korrespondenz enthält.

Ist endlich die Korrespondenz symmetrisch, so wird die Kurve homolog-harmonisch, d. h. sie entspricht sich selbst in einer harmonischen Homologie, deren Achse r und deren Mittelpunkt der harmonisch konjugierte Punkt zu dem r und OO' gemeinsamen Punkte bzw. den Punkten O und O' ist.

Eine andere Darstellung, von der vor allem *Em. Weyr*[44]) Gebrauch gemacht hat, erhält man unter der Annahme, daß die Korrespondenz auf einen Kegelschnitt verlegt ist. Dann hüllen die Verbindungsgeraden der homologen Punkte eine Kurve der Klasse $\alpha + \beta$ ein, die *Em. Weyr* die *Direktionskurve* der Korrespondenz genannt hat.[45]) Diese schneidet den Kegelschnitt in den Verzweigungspunkten der beiden Systeme und berührt ihn in den $\alpha + \beta$ Koinzidenzpunkten (Nr. **6**) der Korrespondenz. Die Kurve hat die Ordnung $2\alpha\beta$ und besitzt $\frac{\alpha(\alpha-1)}{2} + \frac{\beta(\beta-1)}{2}$ Doppeltangenten, entsprechend den Punktepaaren, die in doppelter Art korrespondieren.

Ist die Korrespondenz eine symmetrische (α, α)-Korrespondenz, so ist die Direktionskurve eine allgemeine Kurve der Klasse α und Ordnung $\alpha(\alpha - 1)$, die als Tangenten die Tangenten an den Kegelschnitt in den 2α Koinzidenzpunkten der Korrespondenz hat. Sie trifft den Kegelschnitt in den $2\alpha(\alpha - 1)$ Verzweigungspunkten und ihre Tangenten in diesen Punkten schneiden den Kegelschnitt in den bezüglichen Doppelpunkten der Korrespondenz.[46])

---

44) S. [7]); außerdem *R. Sturm*, „Die Gebilde"[40]) 1, p. 20, 28—30; „Geom. Verw." 1, p. 270—272, 288ff.

45) S. Anm. 7, p. 6.

46) Über die vorigen und andere Eigenschaften der (α, β)-Korrespondenzen und für zahlreiche Anwendungen (vgl. Nr. **103**) s. vor allem *Em. Weyr*, Prag Ber. Böhm. Ges. 1873, p. 70; Mém. Soc. sc. phys. nat. à Bordeaux 10 (1875), p. 329 = Arch. Math. a fys. 1 (1875—76), p. 1; [7]); *G. Kohn*, Sitzungsb. Ak. Wien 90 (1885), p. 226; 106 (1897), p. 488; *R. Sturm*, „Die Gebilde"[40]) 1, p. 16—38; „Geom. Verw." 1, p. 225—304; *J. Rey Pastor*, Diss. Madrid 1910, p. 24ff.; „Fundamentos de la geometria proyectiva superior", Madrid 1916, p. 379ff.; *L. I. Neikirk*, Ann. of math. (2) 13 (1911), p. 52 [Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 16 (1910), p. 462]; *F. Enriques* und *O. Chisini*, „Lezioni" 1, p. 101—110, 157ff.; *A. Plamitzer*, Prace matem.-fiz. 30 (1919), p. 193; *H. Malet*, „Étude", p. 213—233; *H. F. Baker*, „Principles of geometry" 2, Cambridge 1922, p. 134—139; *E. Bertini*, „Complementi di geometria proiettiva", Bologna 1928, p. 17—25. In einigen von diesen werden auch

4. Fortsetzung: Algebraische (2, 2)-Korrespondenzen zwischen zwei Grundgebilden erster Stufe. Viel studiert wurden vor allem die

---

besondere Fälle betrachtet, insbesondere die (1, 2)- und (2, 2)-Korrespondenzen. Über diese letzteren s. auch Nr. 4.

Über die Bedingungen, unter denen eine (α, β)-Korrespondenz in andere mit kleineren Indizes zerfällt, s. *G. Fontene*, Anm. 5.

Die Typen von endlichen kontinuierlichen (im *Lie*schen Sinne) Gruppen von algebraischen Korrespondenzen auf der Geraden wurden von *K. Carda,* Monatsh. Math. Phys. 11 (1900), p. 31, bestimmt.

V. Retali, Rend. Ist. Lomb. (2) 32 (1899), p. 1051, hat eine (α, β)-Korrespondenz zwischen den Geradenbüscheln studiert, deren Mittelpunkte zwei beliebige Punkte einer Ebene sind, die dann bestimmt wird, wenn noch eine Kurve der Ordnung β und Klasse α sowie eine Gerade gegeben sind. Dabei ergibt sich eine Transformation der Kurve in eine andere von der Ordnung β^2, die viele spezielle Kurventransformationen in sich einschließt. Vgl. *G. Loria,* „Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven“ 2, 2. Aufl., Leipzig und Berlin 1911, p. 338—341; ital. Ausg., „Curve piane speciali algebriche e trascendenti“ 2, Milano 1930, p. 393—397.

Über die (1, 2)-, (1, 3)-, (2, 2)-Korrespondenzen s. *G. Battaglini,* Rend. Acc. Napoli 1864, p. 282 = Giorn. di mat. (1) 3 (1865), p. 218.

Eingehende geometrische Untersuchungen der (1, 2)-Korrespondenzen, mit Anwendung auf die Kurven 3. Ordnung mit Doppelpunkt und die kubischen Regelflächen bei *Em. Weyr,* „Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde und der algebraischen Kurven und Flächen als deren Erzeugnisse“, Leipzig 1869, und „Geometrie der räumlichen Erzeugnisse ein-zwei-deutiger Gebilde, insbesondere der Regelflächen dritter Ordnung“, Leipzig 1870. Über das geometrische Studium der (1, 2)-Korrespondenzen s. auch *Em. Weyr,* Sitzungsb. Ak. Wien 61 (1870), p. 731, 819; *R. Slawyk,* Ztschr. Math. Phys. 29 (1883), Suppl., p. 1, und, in Verbindung mit den kubischen Regelflächen, *R. Sturm,* „Die Gebilde“[40]) 1, p. 50—52.

Mit abzählenden Methoden studiert *H. Schubert,* J. f. Math. 88 (1879), p. 311, die (1, 2)-Korrespondenzen.

Formentheoretisch werden die (α, β)-Korrespondenzen, insbesondere die (1, 2)- und die (2, 2)-Korrespondenzen, studiert von *P. Gordan,* Math. Ann. 3 (1871), p. 360; 5 (1871), p. 96; 33 (1889), p. 387; „Vorlesungen über Invariantentheorie“, hrsg. von *G. Kerschensteiner,* 2, Leipzig 1887, p. 78 ff.; *A. Clebsch,* „Theorie der binären algebraischen Formen“, Leipzig 1872, p. 12 ff.; *A. Clebsch* und *F. Lindemann,* „Vorlesungen“ 1, p. 951 ff.; franz. Übers. 3, p. 369 ff.; 2. Aufl. 1^1, Leipzig 1906, p. 613 ff.; *G. Peano,* Atti Acc. Torino 17 (1881), p. 73; Giorn. di mat. (1) 20 (1881), p. 79; *H. Andoyer,* „Leçons sur la théorie des formes et la géométrie analytique supérieure“ 1, Paris 1900, p. 109—126; *G. Kohn*, Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 5^1 (1901), p. 58; *J. H. Grace* und *A. Young,* „The algebra of invariants“, Cambridge 1903, p. 53—60, 83; *H. W. Turnbull,* Proc. math. Soc. Edinburgh 41 (1922—23), p. 116; 42 (1924), p. 69; Proc. Roy. Soc. Edinburgh 43 (1923), p. 43; 44 (1924), p. 23; Proc. London math. Soc. (2) 27 (1928), p. 193; *W. Saddler,* Proc. Roy. Soc. Edinburgh 45 (1924), p. 3; 46 (1925), p. 264; *R. Vaidyanathaswamy,* Proc. Cambridge Phil. Soc. 23 (1926), p. 109; Proc. London math. Soc. (2) 24 (1924), p. 83; *Th. W. Moore,* Ann. of math. (2) 30 (1928), p. 92; *P. R. Piedvache,* Ann. of

(2, 2)-Korrespondenzen, insbesondere in Verbindung mit der Theorie der elliptischen Funktionen. Wirklich besteht, wenn $f(u)$ und $\varphi(u)$ zwei elliptische Funktionen 2. Grades desselben Arguments u, mit denselben Perioden sind, zwischen ihnen eine Beziehung, die bezüglich jeder von beiden 2. Grades und, wenn $f(u) = \varphi(u + C)$, mit konstantem C, symmetrisch ist. Umgekehrt drückt jede doppelt quadratische Gleichung die Beziehung zwischen zwei elliptischen Funktionen 2. Grades desselben Arguments und mit denselben Perioden aus. *L. Euler*[47]) hat in Form einer solchen Beziehung, die symmetrisch und vom Grade 2 bezüglich einer jeden der beiden Veränderlichen ist, den Additionssatz der elliptischen Funktionen aufgestellt; und *J. L. Lagrange*[48]) die allgemeine Beziehung auf die Transformation der elliptischen Integrale[49]) angewandt.

---

math. (2) 30 (1928), p. 272, 281; *N. H. McCoy*, Bull. Amer. math. Soc. (2) 37 (1931), p. 42. In Verbindung mit den Eigenschaften der algebraischen Kurven, die auf einer allgemeinen Fläche 2. Ordnung gezogen sind, und der Gruppe der Kreisverwandtschaften (Nr. 71) bei *Ed. Kasner,* Trans. Amer. math. Soc. 1 (1900), p. 430 [Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 8 (1901), p. 14; vgl. auch p. 190 und ebenso (2) 9 (1902), p. 186]; 4 (1903), p. 86 [s. III AB 7 (*E. Müller*), Nr. 8]; außerdem *F. Morley* und *B. C. Patterson*, Amer. J. of math. 52 (1930), p. 413.

Die (1, 2)-Korrespondenzen im speziellen werden studiert von *W. Saddler,* Proc. math. Soc. Edinburgh 43 (1924), p. 17; *R. Vaidyanathaswamy,* Proc. Cambridge Phil. Soc. 23 (1926), p. 233; mit Anwendung auf die Kurven 3. Ordnung mit Doppelpunkt von *G. Pittarelli,* Roma Mem. Acc. Linc. (4) 3 (1886), p. 375, 401; die (1, 2)- und (1, 3)-Korrezpondenzen von *S. Piazza,* Atti Acc. Torino 17 (1882), p. 431; die (2, 3)-Korrespondenzen von *R. Vaidyanathaswamy,* Proc. Cambridge Phil. Soc. 23 (1926), p. 631.

Für die (2, 2)-Korrespondenzen s. im übrigen Nr. 4; für die (3, 3)-Korrespondenzen s. Anm. 57.

47) Novi Comment. Petrop. 6 (1756, 1757), hrsg. 1761, p. 37 = Opera omnia (1) 20 (Leipzig und Berlin 1912), p. 58. Vgl. auch Novi Comment. Petrop. 7 (1758, 1759), hrsg. 1761, p. 3, 83, 128; 12 (1766, 1767), hrsg. 1768, p. 3, 42 = Opera omnia (1) 20 (1912), p. 153, 108, 201, 302, 318; außerdem „Institutiones Calculi integralis" 1, Petropoli 1768, p. 451 ff. S. außerdem *J. L. Lagrange,* Miscellanea taurinensia 4 (1766—1769), p. 98 = Oeuvres 2 (Paris 1868), p. 3; *L. Euler,* Acta Ac. Petrop. 2 I (1778), hrsg. 1780, p. 20; „Institutiones Calculi integralis" 4, 3. Aufl., Petropoli 1845, p. 465; *F. Richelot,* J. f. Math. 44 (1852), p. 277.

48) Mém. Ac. Turin 2 II (1784—1785), hrsg. 1786, p. 218 = Oeuvres 2, p. 251.

49) Über die (2, 2)-Korrespondenzen in Verbindung mit der Theorie der elliptischen Funktionen vgl. auch den Nachlaß von *C. G. J. Jacobi,* J. f. Math. 55 (1858), p. 1 = Werke 2, p. 363. Weitere Entwicklungen in *W. K. Clifford,* Proc. London math. Soc. (1) 7 (1875), p. 29 = Math. Papers (London 1882), p. 205; *A. Cayley,* „An elementary treatise on elliptic functions", London 1876, Chap. 14; ital. Übers. von *F. Brioschi,* Milano 1880, p. 314—328; *T. J. Stieltjes,* Bull. sc. math. (2) 12 (1888), p. 222 = Oeuvres 2 (Groningen 1918), p. 133; *G. H. Halphen,* „Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications" 2, Paris 1888, p. 329 ff.; *J. Ha-*

Die (2, 2)-Korrespondenzen spielen eine grundlegende Rolle auch bei den Schließungsproblemen, z. B. in bezug auf die Polygone, die einem Kegelschnitte einbeschrieben und einem anderen Kegelschnitte umbeschrieben sind[50]), und anderen Fragen.[51])

---

damard, Bull. sc. math. (2) 20 (1896), p. 263; *E. Lacour,* Nouv. Ann. de math. (3) 18 (1899), p. 293; *M. Lelieuvre,* Enseign. math. 2 (1900), p. 410; 3 (1901), p. 115; *H. Andoyer,* Ann. Éc. Norm. (3) 19 (1902), p. 491. — Weitere Sätze in bezug auf die Darstellung der (2, 2)-Korrespondenzen durch elliptische Funktionen, mit verschiedenen geometrischen Anwendungen bei *A. Hurwitz,* Math. Ann. 19 (1881), p. 56.

Über diesen Gegenstand vgl. noch *A. Enneper,* „Elliptische Funktionen, Theorie und Geschichte", 2. Aufl., hrsg. von *F. Müller,* Halle 1890, p. 185, 357; außerdem II B 3 (*R. Fricke*), Nr. **2**, **3**, **7**.

50) S. III C 1 (*F. Dingeldey*), Nr. **26**, **27**, **28**; *G. Loria,* „I poligoni di Poncelet", Torino 1889; Bibl. math. (2) 3 (1889), p. 67. S. auch *G. Darboux,* „Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques", Paris 1873; second tirage 1896, p. 183—207 [der Académie des sciences 1869 vorgelegt; s. Paris C. R. 68 (1869), p. 1311]; L'Institut 40 (1872), p. 180, 259; „Principes de géométrie analytique", Paris 1917, p. 235—287; *J. H. Macdonald,* Bull. Amer. math. Soc. (2) 27 (1921), p. 366; *R. Vaidyanathaswamy,* Proc. London math. Soc. (2) 27 (1927), p. 301; *W. Fr. Meyer,* Math. Ztschr. 30 (1929), p. 108; Auszug Sitzungsb. Berliner math. Ges. 27 (1928), p. 92; *M. de Franchis* [26]), p. 406—411.

R. Sturm, „Die Gebilde" [40]) 1, p. 30—37; „Geom. Verw." 1, p. 296—303, studiert mittels der Abbildung auf einen Kegelschnitt (Nr. **3**) und unter Anwendung auf die Polygone von *Poncelet* die wiederholte Anwendung einer symmetrischen (2, 2)-Korrespondenz. In „Die Gebilde" [40]) 1, p. 37—38, und in „Geom. Verw." 1, p. 303—304 hat *R. Sturm* die symmetrischen (2, 2)-Korrespondenzen auf die *Steiner*schen Polygone auf den ebenen kubischen Kurven angewandt [III C 5 (*G. Kohn*), Nr. **39**].

Über die (2, 2)-Korrespondenzen und ihre Erweiterungen in bezug auf eine Erweiterung der *Poncelet*schen Polygone s. *G. Fontené,* Nouv. Ann. de math. (3) 16 (1897), p. 437; Paris C. R. 162 (1916), p. 213; Bull. Soc. math. de France 44, C. R. (1916), p. 17; *K. Rohn,* Ber. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig 60 (1908), p. 94; 65 (1913), p. 185; Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 22 (1913), p. 330; *H. Liebmann,* Sitzungsb. Ak. München 1916, p. 19; *G. Darboux,* Paris C. R. 162 (1916), p. 57, 101, 214; *J. Thomae,* Ber. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig 69 (1917), p. 287; 70 (1918), p. 108; *B. Gambier,* Paris C. R. 178 (1924), p. 837; 179 (1924), p. 745, 878, 1241; Nouv. Ann. de math. (5) 3 (1925), p. 256, 281; Ann. Éc. Norm. (3) 46 (1929), p. 55.

Über die wiederholte Anwendung einer (2, 2)-Korrespondenz und das bezügliche Schließungsproblem s. *H. F. Baker,* Proc. Cambridge Phil. Soc. 23 (1926), p. 92.

51) Symmetrische oder nichtsymmetrische (2, 2)-Korrespondenzen ergeben sich z. B. beim Studium der Kongruenzen 2. Ordnung und 2. Klasse sowie der quadratischen Komplexe, auch beim Studium der Regelflächen 4. Grades. Für die ersten vgl. *R. Sturm,* „Die Gebilde" [40]) 2, p. 149—159; 3, p. 1—13, 41—44, 70—71, 107, 355—380, 389—394, 410ff.; für die zweiten *R. Sturm,* ebenda 1, p. 52—61; 3, p. 106—130, 410ff.; *K. Rohn,* Math. Ann. 28 (1886), p. 284.

Die hauptsächlichsten Eigenschaften der (2, 2)-Korrespondenzen verbinden sich mit der Aufgabe, die Veränderlichen x, y linear dergestalt zu transformieren, daß sich die Gleichung $f(\overset{2}{x}, \overset{2}{y}) = 0$ in eine symmetrische verwandelt, und mit dem Satz, der die Gleichheit der Invarianten ebenso für die beiden Quadrupel der Verzweigungspunkte, wie für die beiden Quadrupel der Doppelelemente aussagt, so daß vier Projektivitäten existieren, in denen den Doppel- oder Verzweigungselementen von x die von y entsprechen.[52])

52) Daß die beiden Quadrupel der Verzweigungselemente dieselben Invarianten haben [vgl. III C 5 (*G. Kohn*), Anm. 16], zeigt *L. Cremona,* Rend. Ist. Lomb. (1) 4 (1867), p. 199 = Opere 2, p. 396; der vollständigere Satz stammt von *Em. Weyr,* Ann. di mat. (2) 4 (1871), p. 272.

Über diese Sätze und die Frage der Reduktion von $f(\overset{2}{x}, \overset{2}{y})$ auf symmetrische Form s. *A. Capelli,* Giorn. di mat. (1) 17 (1879), p. 69; *G. Frobenius,* J. f. Math. 106 (1890), p. 125, die auch die Modifikationen untersucht haben, die in Sonderfällen, die die Korrespondenz darbieten kann, eintreten. Hierüber, und besonders über den *Cremona*schen Satz s. auch *A. Cayley,* Quart. J. of math. 11 (1871), p. 83; 12 (1873), p. 197; Mess. of math. (2) 20 (1891), p. 68 = Papers 8, p. 14; 9, p. 94; 13, p. 67; Proc. London math. Soc. (1) 10 (1879), p. 203 (fehlt in Papers); *H. G. Zeuthen*, Proc. London math. Soc. (1) 10 (1879), p. 196 (*H. G. Zeuthen* hat hiermit auch einen algebraischen Beweis des Lehrsatzes von *E. Schmidt* verbunden) [vgl. auch *G. H. Halphen,* Proc. London math Soc. (1) 9 (1878), p. 168 = Math. Ann. 15 (1879), p. 35 = Oeuvres 2, p. 82; außerdem einen Brief von *G. H. Halphen* an *H. G. Zeuthen* vom 6. Juni 1880, der in *G. H. Halphen,* Oeuvres 4, Paris 1924, p. 638 wiedergegeben ist]; (1) 11 (1880), p. 156; Acta math. 1 (1882), p. 176; „Lehrbuch“, p. 178; *Em. Weyr*[7]), p. 32—35; *K. Rohn*[51]), p. 285; *R. Bricard,* Bull. Soc. math. de France 25 (1897), p. 181; *H. Andoyer,* „Leçons“[46]) 1, p. 113; *R. Sturm,* „Die Gebilde“[40]) 1, p. 20; „Geom. Verw.“ 1, p. 255—258; *Ed. Kasner,* Trans. Amer. math. Soc. 1 (1900), p. 484; *F. Aschieri,* Rend. Ist. Lomb. (2) 37 (1904), p. 1030; *J. de Vries,* Nieuw Archief voor Wiskunde (2) 9 (1909), p. 1; *J. Rey Pastor,* Diss. Madrid 1910, p. 40; Ass. espanôla para el progr. de las ciencias, Valencia 1910, p. 19; *E. Duporcq,* „Premiers principes de géométrie moderne“, 2. éd. par *R. Bricard,* Paris 1912, p. 148—159; *C. Cailler,* Enseign. math. 16 (1914), p. 432; *R. Vaidyanathaswamy,* J. Indian math. Soc. 16 (1926), p. 164.

Über die symmetrischen (2, 2)-Korrespondenzen s. auch *F. Richelot*[47]); *N. Trudi,* Mem. Acc. Napoli 1 (1853), p. 63; Atti Acc. Napoli (1) 1 (1863), Nr. 6 (Auszug Rend. Acc. Napoli 1862, p. 198); Giorn. di mat. (1) 1 (1863), p. 81, 125; *J. Rosanes* und *M. Pasch,* J. f. Math. 70 (1868), p. 169; *G. Fontené,* Nouv. Ann. de math. (3) 19 (1900), p. 384; (4) 17 (1917), p. 75; *M. Stuyvaert,* Mém. Soc. sc. Liège (3) 7 (1907), Nr. 2, p. 133—154; *M. F. Egan,* Proc. Irish Ac. Dublin 29 (1911), p. 33; *F. Gerbaldi,* „Scritti matem. offerti ad Enrico d' Ovidio“, Torino 1918, p. 22 (bes. p. 48); Atti Acc. Torino 53 (1918), p. 767, 869; 55 (1920), p. 143; Rend. Ist. Lomb. (2) 51 (1918), p. 523; Rend. Circ. mat. Palermo 43 (1919), p. 78, wo diese Korrespondenzen in Verbindung mit den *G. H. Halphen*schen Kettenbrüchen, den elliptischen Funktionen und den *Poncelet*schen Polygonen auftreten; *G. Gherardelli,* Boll. Unione mat. ital. 6 (1927), p. 184.

Es ist klar, daß für eine symmetrische (2, 2)-Korrespondenz die Doppel- und Verzweigungselemente x mit den y zusammenfallen. Nach *Em. Weyr*[53]) ist umgekehrt die Korrespondenz symmetrisch, wenn die Verzweigungselemente x und y zusammenfallen. Diese Umkehrung ist aber nicht richtig, wenn sich die Korrespondenz auf niedrigere Korrespondenzen reduziert, auch nicht, wenn jenes Quadrupel von Verzweigungselementen harmonisch oder äquianharmonisch ist.[54])

Kommt es einmal in einer (2, 2)-Korrespondenz vor, daß das einem Elemente entsprechende Paar auch einem anderen vom ersten verschiedenen Elemente entspricht, so gilt die Eigenschaft immer für eine jede der beiden Formen. Die Elementenpaare einer jeden Form, die den einzelnen Elementen der anderen entsprechen, bilden eine Involution, und die beiden Involutionen, die so entstehen, sind projektiv. Die notwendige und hinreichende Bedingung hierfür ist, daß,

---

Rein geometrisch studiert die (2, 2)-Korrespondenzen, mit Anwendungen auf Kurven 4. Ordnung mit zwei Doppelpunkten und auf das *Poncelet*sche Schließungsproblem, *J. Thomae*, Abh. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig 21 (1894), p. 437; Ber. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig 47 (1895), p. 352. Vgl. dazu *R. Sturm*, „Geom. Verw." 4, p. 56—57, und noch *J. de Vries*, Nieuw Archief voor Wiskunde (1) 14 (1887), p. 193.

Formentheoretisch wird die (2, 2)-Korrespondenz studiert von *A. Clebsch* und *F. Lindemann*, „Vorlesungen" 1, p. 951 ff.; franz. Übersetzung 3, p. 369 ff.; *A. Capelli*, a. a. O.; *C. Le Paige*, Paris C. R. 94 (1882), p. 424; *P. Gordan*, Math. Ann. 33 (1889), p. 388; *G. Frobenius*, a. a. O.; *G. Giordano*, Giorn. di mat. (2) 6 (1899), p. 367; *P. Savio*, ebenda (2) 9 (1902), p. 192; *H. Andoyer*, Ann. Éc. Norm. (3) 19 (1902), p. 491; *C. Cailler*, a. a. O.

G. Fontené, Nouv. Ann. de math. (3) 16 (1897), p. 437; *G. Fontené* und *R. Bricard*, ebenda (3) 18 (1899), p. 437; *M. Fouché*, Bull. Soc. math. de France 44 (1916), p. 120, studieren Bedingungen, unter denen drei (2, 2)-Korrespondenzen unendlich viele gemeinsame Paare entsprechender Elemente haben. Diese Autoren, ebenso *G. Fontené*[5]), studieren auch die Bedingungen für die Reduzibilität des Produktes zweier (2, 2)-Korrespondenzen. S. hierüber auch *G. Ascoli*[285]), p. 109—110, der auch das Ergebnis von *M. Fouché* auf den Fall ausdehnt, daß die Korrespondenzen zwischen den Punkten von Kurven beliebigen Geschlechts stattfinden. S. ferner Nr. **30**.

Weitere Arbeiten über die (2, 2)-Korrespondenzen stammen von *Ed. Weyr*, J. f. Math. 71 (1869), p. 18; 73 (1870), p. 87; *R. Heger*, Ztschr. Math. Phys. 17 (1872), p. 71; *A. A. Bennett*, Ann. of math. (2) 16 (1914), p. 101.

Über die linearen Vektorfunktionen als binäre doppeltquadratische Formen s. *Em. Waelsch*, Sitzungsb. Ak. Wien 113 (1904), p. 1081.

53) Sitzungsb. Ak. Wien 87 (1883), p. 592. Vgl. auch *J. de Vries*[41]). Diese Eigenschaft macht *Em. Weyr* zur Grundlage seiner Untersuchungen über die eindeutigen Korrespondenzen auf den elliptischen Kurven (Nr. **43**).

54) *A. Capelli*[52]), p. 111; *G. Frobenius*[52]), p. 177; *T. Brodén*, Stockholm Öfversigt Vetensk.-Ak. Förhandlingar 50 (1893), p. 45; *R. Sturm*, „Geom. Verw." 1, p. 278—280; *M. Fouché*[52]).

wenn die Gleichung der (2, 2)-Korrespondenz in der Form

$$(a_{22}x^2 + a_{12}x + a_{02})y^2 + (a_{21}x^2 + a_{11}x + a_{01})y + a_{20}x^2 + a_{10}x + a_{00} = 0$$

geschrieben ist, gilt[55]):

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Tritt es einmal in einer symmetrischen (2, 2)-Korrespondenz zwischen zwei vereinigten Formen (so daß $a_{10} = a_{01}$, $a_{20} = a_{02}$, $a_{21} = a_{12}$) ein, daß einem — von den Koinzidenzelementen verschiedenen — Elemente zwei Elemente entsprechen, die auch einander entsprechen, so trifft dasselbe für jedes Element zu und die (2, 2)-Korrespondenz stellt eine kubische Involution dar. Damit dies eintrifft, ist notwendig und hinreichend, daß[56])

$$a_{00}a_{22} - a_{01}a_{12} + a_{02}(a_{11} - a_{02}) = 0.$$

5. Algebraische, insbesondere plurilineare Korrespondenzen zwischen mehreren Grundgebilden erster oder höherer Stufe. Einige der Untersuchungen in Nr. **3** und **4** wurden auf den Fall von Korrespondenzen zwischen drei oder mehreren Grundgebilden erster Stufe, vor allem auf plurilineare Korrespondenzen ausgedehnt, was gleichbedeutend ist mit dem Studium einer oder mehrerer algebraischer Formen, die mehrere Reihen binärer Veränderlicher enthalten.[57]) Es

---

55) *M. Chasles,* Paris C. R. 41 (1855), p. 680. Vgl. auch *E. de Jonquières*[37]), p. 163—166; *R. Heger*[52]); *A. Capelli*[52]), p. 92—97; *R. Sturm,* „Die Gebilde"[40]) 1, p. 22—23; 3, p. 72 in Anm.; „Geom. Verw." 1, p. 266—268; 4, p. 476.

56) *Em. Weyr*[53]), p. 595; *R. Sturm,* „Die Gebilde"[40]) 1, p. 30; „Geom. Verw." 1, p. 283—286; *B. Segre,* Boll. Unione mat. ital. 9 (1930), p. 1. S. auch *H. Mohrmann,* Math. Ann. 89 (1922), p. 12, wo auch andere Fälle der Ausartung einer symmetrischen (2, 2)-Korrespondenz betrachtet sind. Verallgemeinerung bei *G. Schaake,* Nieuw Archief voor Wiskunde (2) 15 (1925), p. 68.

57) Formentheoretische Untersuchungen über mehrlineare Formen bei *H. W. Turnbull,* „The theory of determinants, matrices, and invariants", London and Glasgow 1928, p. 197—212.

Untersuchungen über binäre symmetrische Formen mehrerer Reihen von Veränderlichen, mit Anwendungen auf die Involutionen, auf Kurven und Flächen, auch in den Überräumen bei *W. Fr. Meyer,* „Apolarität und rationale Kurven", Tübingen 1883; *A. B. Coble,* Amer. J. of math. 31 (1909), p. 183, 355; 32 (1910), p. 333.

A. B. Coble, Amer. J. of math. 43 (1920), p. 1 [Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 26 (1920), p. 390]; Trans. Amer. math. Soc. 28 (1926), p. 357 [Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 32 (1926), p. 113] studiert die Schließungsbedingungen einer allgemeinen doppeltbinären Form beliebiger Ordnung und gibt hier einige Erweiterungen auf mehrfach binäre Formen. Für den besonderen Fall einer (3, 3)-Korrewurden speziell die trilinearen Korrespondenzen[58]) studiert und auf Konstruktionen ebener Kurven und Flächen 3. Ordnung [III AB 5 (*A. Schoenflies*), Nr. 25] angewandt.[59]) Weniger studiert wurden die quadrilinearen Korrespondenzen.[60])

---

spondenz vgl. *H. S. White*, Proc. Nat. Acad. of Sciences 1 (1915), p. 464; 2 (1916), p. 337 [Auszüge Bull. Amer. math. Soc. (2) 22 (1915), p. 7, 70]; *A. B. Coble*, Proc. Nat. Acad. of Sciences 2 (1916), p. 530; Amer. J. of math. 43 (1920), p. 1 [Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 26 (1920), p. 390]; 46 (1924), p. 143; 51 (1929), p. 495; Trans. Amer. math. Soc. 28 (1926), p. 357 [Auszug Bull. Amer. Math. Soc. (2) 32 (1926), p. 113]: *Louise D. Cummings*, Bull. Amer. math. Soc. (2) 31 (1925), p. 266 (Auszug daselbst, p. 102); Proc. intern. math. Congress Toronto 1924, 1 (Toronto 1928), p. 725, wo bei *A. B. Coble* auch der Fall einer (α, β)-Korrespondenz betrachtet wird.

Eine spezielle (3, 3)-Korrespondenz, die in Zusammenhang steht mit der Ikosaedergleichung [I B 3 f (*A. Wiman*), Nr. 12], bei *P. Gordan*, Erlangen phys.-mediz. Soc. Sitzungsb. 9 (1877), p. 183; Math. Ann. 13 (1878), p. 375; *F. Klein*, „Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade", Leipzig 1884, p. 194—205; *F. Harshbarger*, Trans. Amer. math. Soc. 33 (1931), p. 557.

Em. Waelsch, Sitzungsb. Ak. Wien 113 (1904), p. 1209; *A. Reissinger*, Progr. Realschule Kempten 1907; *K. Petr*, Časopis 36 (1907), p. 243; *W. Godt*, Arch. Math. Phys. (3) 13 (1908), p. 1, haben die Reihenentwicklungen mehrfach binärer Formen studiert. — Über die mehrfach binären Formen s. auch *C. W. Gilham*, J. London math. Soc. 6 (1931), p. 203. Über die dreifache binäre Form der Grade 2, 1, 1 s. *C. W. Gilham*, Proc. London math. Soc. (2) 32 (1931), p. 259. — *Em. Waelsch*, Sitzungsb. Ak. Wien 113 (1904), p. 1107 hat die quadratischen Formen von mehreren binären Veränderlichen studiert.

58) Eine Korrespondenz dieser Art wird von *F. August*, Diss. Berlin 1862, *duplo-projektive Beziehung* genannt.

59) *F. August*[58]); *G. Battaglini*[46]); *R. Sturm*, Preisschrift, „Synthetische Untersuchungen über Flächen 3. Ordnung", Leipzig 1867, p. 44—45; „Geom. Verw." 1, p. 319—337, 370—371; *L. Cremona*, Preisschrift, J. f. Math. 68 (1868), p. 78—82 = Opere 3, p. 69—72; *C. Le Paige*, Belgique Mém. cour. et Mém. des savants étrang., in 4°, 42 (1878), Nr. 4; Paris C. R. 92 (1881), p. 1048, 1103; 93 (1881), p. 264, 509; Bull. Ac. sc. Belgique (3) 2 (1881), p. 40; (3) 4 (1882), p. 334; (3) 5 (1883), p. 85; Mém. Soc. sc. Liège (2) 10 (1883), Nr. 2, p. 1, 105; Roma Atti Acc. Pont. Nuovi Linc. 35 (1883), p. 140; J. sciencias math. astron. 5 (1883), p. 27, 77; J. sciencias math. phys. nat. 9 (1883); Acta math. 3 (1883), p. 181 [Auszug Paris C. R. 97 (1883), p. 34, 158]; Ak. Amsterdam Versl. (3) 19 (1884), p. 328; *J. Rosanes*, J. f. Math. 88 (1879), p. 241; *P. Appell*, Bull. Soc. philom. (7) 4 (1879), p. 18; *F. Folie* und *C. Le Paige*, Belgique Mém. (1) 43 (1880), Nr. 7; (1) 45 (1882), Nr. 1 [Auszug Bull. Ac. sc. Belgique (3) 1 (1881), p. 610]; *H. Schubert*, Math. Ann. 17 (1880), p. 457; Progr. Hamburg 1882; *B. Klein*, „Theorie der trilinear-symmetrischen Elementargebilde", Marburg 1881; *G. Castelnuovo*, Atti Ist. Ven. (6) 5 (1887), p. 1041; *Fr. Deruyts*, Bull. Ac. sc. Belgique (3) 17 (1889), p. 312; *F. Aschieri*, Rend. Ist. Lomb. (2) 23 (1890), p. 312; *G. Hauck*, J. f. Math. 108 (1891), p. 25; 128 (1905), p. 91; *F. London*, Math. Ann. 44 (1893), p. 375; 45 (1894), p. 545 (in der zweiten Arbeit des Verfassers wird Anwendung auf die Konstruktion der

Auf rein geometrischem Wege wurden die plurilinearen Korrespondenzen zwischen mehreren Grundgebilden erster Stufe im allgemeinen von *H. Wiener*[61]), *E. Kötter*[62]) und *R. de Paolis*[63]) studiert.

C. Segre[64]) zeigte, daß es in gewissen Fällen zweckmäßig ist, die plurilinearen Korrespondenzen als ausgeartete projektive Korrespondenzen zwischen Gebilden höherer Stufe[65]) aufzufassen.

Raumkurven 6. Ordnung und vom Geschlecht 1 gemacht); *J. W. Russell,* Proc. London math. Soc. (1) 26 (1894—95), p. 446; *St. Juński,* Sitzungsb. Ak. Wien 122 (1913), p. 1659; *C. Segre,* Ann. di mat. (3) 27 (1918), p. 75; *Elise Schwartz,* Math. Ztschr. 12 (1920), p. 18; *A. Duschek,* Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 32 (1923), p. 234; *W. Saddler,* Proc. Cambridge Phil. Soc. 22 (1925), p. 688; *S. di Noi,* Catania Boll. Acc. Gioenia (2) 54 (1925), p. 54; *K. Kořízek,* Časopis 58 (1928), p. 304; *C. W. Gilham,* J. London math. Soc. 4 (1929), p. 170; *R. Oldenburger,* Bull. Amer. math. Soc. (2) 38 (1932), p. 385.

U. Perazzo, Atti Acc. Torino 36 (1901), p. 891, hat die durch drei Büschel von Überebenen in trilinearer Korrespondenz erzeugte kubische Überfläche mit neun Doppelgeraden des fünfdimensionalen Raumes studiert.

C. Le Paige, Roma Atti Acc. Pont. Nuovi Linc. 35 (1883), p. 54; 36 (1884), p. 22, hat das System zweier trilinearer Formen studiert.

Trilineare Korrespondenzen zwischen drei Grundgebilden zweiter Stufe, mit zahlreichen Anwendungen vor allem auf die darstellende Geometrie (Perspektive, Photogrammetrie usw.) studierte *G. Hauck,* J. f. Math. 95 (1883), p. 1; 97 (1884), p. 261; 98 (1884), p. 304; 108 (1891), p. 25; 111 (1893), p. 207; 128 (1905), p. 91. S. auch *Th. Schmid,* Monatsh. Math. Phys. 4 (1893), p. 159; 6 (1895), p. 99; 7 (1896), p. 180; *Em. Müller,* „Vorlesungen über darstellende Geometrie" 1, bearbeitet von *E. Kruppa,* Leipzig und Wien 1923, p. 157—165, 187—189.

Über die trilinearen Korrespondenzen zwischen drei Ebenen s. auch *C. Le Paige,* Bull. Ac. sc. Belgique (3) 12 (1886), p. 422; *M. Pannelli,* Ann. di mat. (2) 22 (1894), p. 237, der hier eine Anwendung auf die Konstruktion der Fläche 3. Ordnung, die durch neunzehn Punkte bestimmt ist, gemacht hat; *M. Pasch,* Math. Ann. 52 (1898), p. 127; *Ph. Maennchen,* Diss. Gießen 1898; Math. Ann. 55 (1900), p. 81; *Maria Fritsche,* Rassegna mat. fis. 3 (1923), p. 225.

60) *G. Battaglini*[46]); *C. Le Paige,* Paris C. R. 94 (1882), p. 31, 69; Atti Acc. Torino 17 (1882), p. 299; Acta math. 5 (1884), p. 195 [Auszug Paris C. R. 98 (1884), p. 971], mit Anwendungen auf kubische Flächen [vgl. *Fr. Schur,* Ber. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig 36 (1884), p. 128]; *A. Colombi,* Rend. Ist. Lomb. (2) 37 (1904), p. 627; *C. Segre,* Ann. di mat. (3) 29 (1921), p. 105; *W. Saddler,* Proc. London math. Soc. (2) 30 (1929), p. 107.

61) „Rein geometrische Theorie der Darstellung binärer Formen durch Punktgruppen auf der Geraden", Darmstadt 1885; Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 17 (1908), p. 291.

62) Preisschrift, Abh. Ak. Berlin 1887, Nr. 1, p. 220—235, 286—289. S. ferner Anm. 924.

63) Mem. Acc. Torino (2) 42 (1892), p. 495.

64) Arch. Math. Phys. (3) 10 (1905), p. 209.

65) Vgl. hierüber den Brief von *L. Schläfli* an *J. Steiner* vom 29. November 1854, in „Der Briefwechsel zwischen Jakob Steiner und Ludwig Schläfli", Mitteil. Naturf. Ges. Bern, 1896, p. 152.

Andere Darstellungen hat *C. Segre*[66]) auch für algebraische Korrespondenzen beliebigen Grades zwischen den Punkten irgendeiner Anzahl m von rationalen Gebilden (z. B. linearen Räumen) beliebiger Dimension gegeben. Für eine derartige Korrespondenz gibt er ein Reduktionsprinzip an, wonach diese auf eine plurilineare Korrespondenz zwischen einer Anzahl von Gebilden $\leqq m$ reduziert werden kann.[67])

Mit Hilfe solcher Darstellungen hat *C. Segre*[68]) ausführlich die quadrilinearen Korrespondenzen zwischen vier Gebilden erster Stufe studiert, indem er diese Gebilde vor allem auf die Scharen der Erzeugenden zweier verschiedener oder vereinigter Flächen 2. Grades bezieht.

Für eine algebraische (α, β)-Korrespondenz zwischen zwei verschiedenen binären Gebieten (d. h. unabhängigen linearen Substitutionen unterworfen) ergibt sich[69]), daß die projektive Geometrie solcher Korrespondenzen gleichwertig ist mit der projektiven Geometrie zweier rationaler Kurven, deren eine von der Ordnung α ist, während die andere die Klasse β hat und beide in ein und demselben linearen Raume von r Dimensionen liegen, wobei r diejenige der beiden Zahlen α, β ist, die die andere nicht übersteigt.

Sätze über Korrespondenzen, die durch eine oder mehrere algebraische Gleichungen zwischen den Koordinaten mehrerer Punkte von zwei- oder mehrdimensionalen Räumen bestimmt sind, haben

66) Roma Rend. Acc. Linc. (5) 28^2 (1919). p. 308.

67) Wenn es sich z. B. um eine (2, 2)-Korrespondenz zwischen zwei binären Gebieten handelt, die durch eine homogene und sowohl in bezug auf x_1, x_2 wie in bezug auf y_1, y_2 quadratische Gleichung dargestellt wird, und man

$$(1) \qquad \begin{cases} X_0 = x_1^2, \quad X_1 = x_1 x_2, \quad X_2 = x_2^2; \\ Y_0 = y_1^2, \quad Y_1 = y_1 y_2, \quad Y_2 = y_2^2 \end{cases}$$

setzt, so reduziert sich diese Gleichung auf eine bilineare Gleichung $F(X, Y) = 0$ zwischen den X_i und den Y_i. Wenn man diese X_i und Y_i als homogene Punktkoordinaten auf zwei Ebenen auffaßt, so dienen die Gleichungen (1) dazu, die zwei binären Gebiete auf den Punkten X, Y zweier Kegelschnitte darzustellen. $F = 0$ definiert eine Reziprozität zwischen den Ebenen der beiden Kegelschnitte, und die gegebene (2, 2)-Korrespondenz wird dann in der Korrespondenz dargestellt, die zwischen den Punkten der Kegelschnitte besteht, die in jener Reziprozität reziprok sind.

68) Ann. di mat. (3) 29 (1921), p. 105.

69) *C. Segre*[66]). Weniger ausführlich schon erstmalig bei *G. Kohn,* Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 5 (1901), p. 58 [1896] und, mit Anwendung auf die (3, 3)-Korrespondenzen und die Theorie der gewundenen kubischen Kurve, Math. Ann. 52 (1898), p. 293; Auszug Sitzungsb. Ak. Wien 105 (1896), p. 1035.

W. K. Clifford[70]), *A. del Re*[71]), *L. Berzolari*[72]), *S. Kantor*[73]), *G. Z. Giambelli*[74]) angegeben (vgl. Nr. **121**).

6. Korrespondenzprinzip auf der Geraden (oder auf rationalen Kurven). Wenn auf einer Geraden (oder auf einem Grundgebilde erster Stufe oder, allgemeiner, auf einer rationalen Kurve) eine algebraische (α, β)-Korrespondenz besteht und man die Parameter x, y zweier homologer Elemente derart wählt, daß sie dieselbe Bedeutung haben, so erhält man die *Koinzidenzelemente*, von denen jedes mit einem der ihm entsprechenden Elemente zusammenfällt, für $x = y$, so daß sich dadurch das *Chasles*sche Korrespondenzprinzip[75]) ergibt: Eine algebraische (α, β)-Korrespondenz auf einer rationalen Kurve besitzt $\alpha + \beta$ Koinzidenzpunkte [außer wenn jeder Punkt der Kurve Koinzidenzpunkt ist[76])].

70) Math. from the Educ. Times 5 (1866), p. 49, 50 = Papers, London 1882, p. 415.

71) Giorn. di mat. (1) 26 (1888), p. 348.

72) Roma Rend. Acc. Linc. (5) 4^2 (1895), p. 148.

73) Sitzungsb. Ak. Wien 110 (1901), p. 1333.

74) „Sistemi di equazioni algebriche in più serie di variabili ed un nuovo campo nella teoria dell' eliminazione algebrica" (lith.), Torino 1910; „Scritti matem. offerti ad Enrico d'Ovidio", Torino 1918, p. 364. S. auch *L. Toscano,* Tôhoku math. J. 32 (1926), p. 32.

75) Dieses Korrespondenzprinzip wird gewöhnlich mit dem Namen von *M. Chasles* versehen, weil es zuerst von diesem Verfasser in allgemeiner Form für die Gerade ausgesprochen ist, Paris C. R. 58 (1864), p. 1175; Nouv. Ann. de math. (2) 5 (1866), p. 195. Aber schon *E. de Jonquières* und *L. Cremona* haben davon manche Anwendungen gemacht, vor allem auf die Bestimmung der Ordnungen geometrischer Örter. S. *E. de Jonquières*[37]), Kap. 4, besonders p. 174; J. math. pures appl. (2) 2 (1857), p. 153; (2) 6 (1861), p. 113; *L. Cremona,* „Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane", Mem. Acc. Bologna (1) 12 (1861), Nr. 83, 87, 98, 106, 116, 117 = Opere 1, p. 389, 391, 402, 411, 421—422, 424—425; außerdem Nouv. Ann. de math. (2) 3 (1864), p. 26 = Opere 2, p. 171, wo eine gewisse Aufgabe der Geometrie von *L. Cremona* durch „un principe connu (dont M. de Jonquières a fait un heureux usage)" gelöst ist. — Über die Geschichte dieses Prinzipes s. *C. Segre,* Bibl. math. (2) 6 (1891—2), p. 33.

Das Korrespondenzprinzip wurde zuerst auf die Grundgebilde erster Stufe wie auch auf Kurven n^{ter} Ordnung mit einem $(n-1)$-fachen Punkt angewandt. Sobald aber der allgemeine Begriff der rationalen Kurven Verbreitung fand, wurde das Prinzip sogleich auf dieselben angewandt: *M. Chasles,* Paris C. R. 62 (1866), p. 579, 1354; *A. Cayley,* ebenda p. 586; Proc. London math. Soc. (1) 1 (1866), Heft 7, p. 1 = Papers 5, p. 542; 6, p. 9; *E. de Jonquières,* J. f. Math. 66 (1866), p. 289.

Über die Notwendigkeit, daß die Korrespondenz algebraisch ist, s. Anm. 36. Vgl. auch Anm. 78.

76) Von dieser Bemerkung macht *A. Hurwitz,* Math. Ann. 15 (1878), p. 8, Anwendungen auf Schließungsprobleme, vor allem für die (2, 2)-Korrespondenzen. Vgl. III C 1 (*F. Dingeldey*), Nr. 28; III C 3 (*H. G. Zeuthen*), Nr. **10**.

Die Bedeutung dieses Prinzips besonders für die Anwendungen[77]) beruht darauf, daß es erlaubt, die Anzahl der Koinzidenzen anzugeben, wenn man nur die Indizes der Korrespondenz kennt, d. h. die Grade der Gleichung, die sie darstellt, in bezug auf x und y, nicht aber die Koeffizienten der Gleichung.[78])

Dieses Prinzip ist nichts anderes als eine Auslegung des Fundamentalsatzes der Algebra [I B 1a (*E. Netto*), Nr. 7] und gilt demgemäß, wenn jeder Koinzidenzpunkt mit der nötigen Multiplizität gezählt wird. Und gerade in der Bestimmung dieser Multiplizität liegt die Schwierigkeit der Anwendung auf bestimmte Fragen (vgl. Nr. **17**).

---

77) Die verschiedenartigen Anwendungen dieses Prinzips, die *M. Chasles* und andere ausgeführt haben (auf die Erzeugung von Kurven und Flächen, auf abzählende Untersuchungen, auf metrische Fragen usw.), sind in den verschiedenen Artikeln der Encyklopädie dargelegt worden. S. z. B.: III C 3 (*H. G. Zeuthen*), Nr. **12—15**; III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **9, 10, 11, 22**. S. außerdem z. B.: *Em. Weyr* [7]); *R. Sturm*, „Die Gebilde“ [40]) 1, p. 16 ff.; „Geom. Verw.“ 1, p. 225 ff.; *F. Klein*, „Riemannsche Flächen“ (lith.) 2, Göttingen 1892, p. 29—36; *H. G. Zeuthen*, „Lehrbuch“, p. 172—205; *T. Lemoyne*, „Les lieux géométriques en mathématiques spéciales“, Paris 1923.

Über Gebilde, die durch algebraische Korrespondenzen zwischen gegebenen Gebilden erzeugt werden, s. Nr. **103** und **104**.

Über die Lösung der Probleme 3. und 4. Grades s. die Preisschriften von *H. J. S. Smith*, Ann. di mat. (2) 3 (1869—70), p. 112, 218 = Papers 2 (Oxford 1894), p. 1, und von *H. Kortum*, „Über geometrische Aufgaben 3. und 4. Grades“ (zwei Abh.), Bonn 1869; außerdem *F. London*, Ztschr. Math. Phys. 41 (1896), p. 129; *T. Kubota*, Tôhoku math. J. 5 (1914), p. 29; *J. Sobotka*, Prag České Ak. Rozpravy 34 (1925), Nr. 3. Insbesondere für die Konstruktion der Koinzidenzpunkte einer (1, 2)-, (2, 2)-, (1, 3)-Korrespondenz s. *H. J. S. Smith*, l. c., p. 146, 231 = Papers 2, p. 32, 59; *T. Kubota*, Tôhoku math. J. 14 (1918), p. 104.

78) Eine Erweiterung des Korrespondenzprinzips gibt *C. Juel*, Danske Vidensk. Selsk. Skrifter (6) 10 (1899), p. 1 (résumé en français, ebenda, p. 76); (7) 1 (1906), p. 297 [Auszug Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 16 (1907), p. 196]; (7) 11 (1913), p. 113; Math. Ann. 76 (1914), p. 344, in seinen Untersuchungen über die im projektiven Sinne geschlossenen, völlig stetigen (algebraischen oder nichtalgebraischen) ebenen Kurven, d. h. solchen, die in jedem ihrer Punkte, allenfalls mit Ausnahme von Punkten in endlicher Anzahl, eine bestimmte und in kontinuierlicher Weise mit dem Berührungspunkt veränderliche Tangente haben. *C. Juel* hat auf solchen Kurven reelle Korrespondenzen mit den Indizes α, β betrachtet, die immer, wenn gewisse Bedingungen erfüllt sind, $\alpha + \beta$ reelle Koinzidenzen besitzen. Vgl. auch *P. Montel*, Bull. sc. math. (2) 48 (1924), p. 116. In der vorletzten angeführten Arbeit, p. 133, hat *C. Juel* den Beweis des Satzes angetreten, den *A. K. Erlang*, Nyt Tidss. for Math. 17, B (1906), p. 58 gegeben hat. S. auch *O. Chisini*, Rend. Ist. Lomb. (2) 53 (1920), p. 591, wo dieser Satz auf das Studium der Gestalt der ebenen kubischen elliptischen Kurven und der gewundenen Kurven 4. Ordnung 1. Art und der elliptischen Normalkurven eines beliebigen Raumes im allgemeinen angewandt ist.

Eine einfache, aber bedeutsame Bemerkung ist folgende.[79]) Damit ein Koinzidenzpunkt mindestens zweimal in der Gesamtzahl $\alpha + \beta$ der Koinzidenzpunkte zu zählen ist, ist hinreichend (aber im allgemeinen nicht notwendig), daß er mit zwei seiner Korrespondenten zusammenfällt, einerlei, ob er zur einen oder zur anderen der beiden vereinigten Kurven zugehörig betrachtet wird. Die Eigenschaft kehrt sich um, wenn die Korrespondenz symmetrisch ist: Damit ein Koinzidenzpunkt einer symmetrischen Korrespondenz mindestens zweimal in der Gesamtzahl der Koinzidenzpunkte zu zählen ist, ist notwendig und hinreichend, daß zwei seiner entsprechenden Punkte mit ihm zusammenfallen.

Eine Infinitesimalregel, die in jedem Falle die Multiplizität eines Koinzidenzpunktes mit Genauigkeit liefert, stammt von *H. G. Zeuthen*[80]), von dem ausgedehnte Anwendungen[81]) dieser Regel auf die Bestimmung von Singularitätenzahlen algebraischer Raumkurven herrühren. Unter der Voraussetzung, daß die Korrespondenz, wie es immer möglich ist, auf eine Gerade übertragen wird, ist die Multiplizität eines Koinzidenzpunktes K gleich der Summe der infinitesimalen Ordnungen der Strecken PP_1', PP_2', ..., die zwischen einem Punkt P der Geraden, dessen Abstand von K unendlich klein 1. Ordnung ist, und den ihm entsprechenden Punkten P_1', P_2', ... liegen.

H. Schubert[82]) hat dem *Chasles*schen Korrespondenzprinzip eine

79) *C. Segre*[2]), p. 50, zweite Anmerkung; *E. Bertini*[4]), 1. Ausg., p. 205, 393; 2. Ausg., p. 241—242, 480; deutsche Ausg., p. 226—227, 454; *R. Sturm,* „Geom. Verw.“ 1, p. 278; *F. Enriques* und *O. Chisini*, „Lezioni“ 1, p. 159, 162—164.

80) Bull. sc. math. (1) 5 (1873), p. 186. Vgl. auch Nouv. Ann. de math. (2) 6 (1867), p. 200; Danske Vidensk. Selsk. Skrifter (5) 10 (1872—73), p. 329—331 (résumé en français, p. X—XI). Die Regel ist wiedergegeben in *E. Bertini*[4]), 1. Ausg., p. 394—396; 2. Ausg., p. 481—483; deutsche Ausg., p. 455—457; *R. Sturm,* „Geom. Verw.“ 1, p. 231—232; *H. G. Zeuthen,* „Lehrbuch“, p. 186—187; *F. Enriques* und *O. Chisini,* „Lezioni“ 1, p. 159—162; *E. Rufini,* Rassegna mat. fis. 1 (1920—21), p. 221; *J. L. Coolidge,* „Alg. pl. curves“, p. 131. S. auch *F. Severi,* „Trattato“ 1_1, p. 226—228, wo die Regel für eine Korrespondenz mit Wertigkeit Null auf einer beliebigen, von superlinearen Zweigen freien Kurve, daher besonders auf einer geraden Linie, bewiesen wird.

81) Ann. di mat. (2) 3 (1869), p. 175; Auszug Paris C. R. 67 (1868), p. 225. Andere Anwendungen auf ebene Kurven, auf die Theorie der reziproken Flächen, auf die Systeme ebener korrelativer Figuren gibt *H. G. Zeuthen,* Math. Ann. 10 (1876), p. 214, 457 ff.; 77 (1915), p. 308. — Eine Anwendung auf eine Durchschnittaufgabe bei *B. Levi,* Atti Acc. Torino 34 (1899), p. 747—748.

82) Math. Ann. 10 (1876), p. 54 ff.; „Kalkül der abzählenden Geometrie“, Leipzig 1879, p. 42 ff. Anwendungen hier, außerdem Math. Ann. 11 (1877), p. 347;

allgemeinere Form gegeben und mittels des Bedingungskalküls daraus entsprechende Korrespondenzprinzipien in der Ebene und im Raum abgeleitet (Nr. 7).[83]) Unter der Voraussetzung, daß man z. B. im Raum ein algebraisches ∞^1-System von Punktepaaren PP' hat, ist die Anzahl der Punkte, in denen P und P' zusammenfallen (in der Weise aber, daß die Verbindungsgerade PP' eine wohl bestimmte Grenzlage hat), gleich der Summe der Anzahl der Paare, deren Punkt P in einer gegebenen Ebene liegt und der Anzahl der Paare, deren Punkt P' in einer gegebenen Ebene liegt, vermindert um die Anzahl der Paare, deren Gerade PP' eine gegebene Gerade schneidet.

H. Schubert[84]) hat das *Chasles*sche Korrespondenzprinzip auch dadurch erweitert, daß er, anstelle von Elementenpaaren, Gruppen einer beliebigen Zahl n von Elementen eines Grundgebildes erster Stufe, die durch eine algebraische Beziehung verknüpft sind, und die Koinzidenzen von k ($\leq n$) Elementen ein und derselben Gruppe betrachtet. *H. Schubert* hat hiervon[85]) zahlreiche Anwendungen[86]) gemacht.

7. Korrespondenzprinzipien in der Ebene und in linearen Räumen dreier oder mehrerer Dimensionen [vgl. III C 3 (*H. G. Zeuthen*), Nr. **16**; III C 7 (*C. Segre*), Nr. **46**]. *G. Salmon*[87]) hat ein Korrespondenzprinzip in der Ebene festgestellt, allerdings nur in Erwägung des Falles, daß Koinzidenzen nur in isolierten Punkten auftreten. Vollständiger

---

„Kalkül", p. 228. Vgl. *H. G. Zeuthen,* „Lehrbuch", p. 372—373. S. auch III C 3 (*H. G. Zeuthen),* Nr. **15**, **25**.

Eine weitere Anwendung macht *E. Panzi,* Giorn. di mat. (3) 6 (1915), p. 349, zum Beweise der *Plücker*schen Formeln [III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. 8], sogar allgemeinerer Formeln, bei denen es sich um Kurven mit s-fachen Punkten, die h verschiedene ($s+1$)-punktige Tangenten besitzen, und um duale Singularitäten handelt.

83) Einige von diesen Korrespondenzprinzipien sind von *H. Schubert,* Math. Ann. 11 (1877), p. 349—353 angegeben worden.

84) Math. Ann. 12 (1877), p. 180; „Kalkül"[82]), p. 247—261.

85) S. [84]); außerdem Math. Ann. 12 (1877), p. 202; „Kalkül"[82]), p. 262—273.

86) Ein Sonderfall, bei dem es sich um eine algebraische Korrespondenz zwischen n Punkten einer festen Gerade handelt, wird von *L. Saltel* betrachtet, der sich auch mit der Bestimmung der im Endlichen liegenden Koinzidenzpunkte und verschiedenen Anwendungen beschäftigt. S. Nouv. Ann. de math. (2) 12 (1873), p. 565; Belgique Mém. cour. et autres Mém., in 8°, 24 (1874), Nr. 5; 27 (1875), Nr. 4; Bull. Ac. sc. Belgique (2) 42 (1876), p. 300, 586; (2) 43 (1877), p. 24, 266; (2) 45 (1878), p. 102; (2) 47 (1879), p. 184; (2) 48 (1879), p. 632; Paris C. R. 80 (1875), p. 1064; 81 (1875), p. 884, 1047; 82 (1876), p. 63, 324; 83 (1876), p. 529, 608, 894; Thèse Nancy 1877; Mém. de Bordeaux (2) 4 (1880), p. 1.

87) „A treatise on the analytical Geometry of three dimensions", 2. ed., Dublin 1865, p. 511. Vgl. *G. Salmon* und *W. Fiedler,* „Raumgeometrie" 2, p. 615—616; franz. Übers. 3, p. 128; außerdem *R. Sturm,* „Die Gebilde"[40]) 1, p. 39—40; „Geom. Verw." 4, p. 130—132.

wurde ein derartiges Prinzip von *H. G. Zeuthen*[88]) in folgender Form ausgesprochen. In einer Ebene sei zwischen den Punkten x und y eine algebraische (α, β)-Korrespondenz gegeben und der Ort der Punkte x oder y, deren homologe Punkte sich auf einer gegebenen Geraden befinden, sei eine Kurve der Ordnung γ. Existiert dann eine Koinzidenzkurve der Ordnung δ und ist ε die Klasse der Hüllkurve der Geraden, die zwei homologe, zueinander und zur Koinzidenzkurve unendlich benachbarte Punkte verbinden, so ist die Anzahl der isolierten Koinzidenzpunkte $\alpha + \beta + \gamma - \delta - \varepsilon$.[89])

Dieser Satz wurde von *H. G. Zeuthen*[90]) teilweise, von *H. Schubert*[91]) vollständig auf den Raum ausgedehnt. Der Kürze halber beschränken wir uns auf den Fall, daß nur isolierte Koinzidenzpunkte vorhanden sind.[92]) Dann lautet das Korrespondenzprinzip im Raum: Findet im Raume eine algebraische (α, β)-Korrespondenz zwischen den Punkten x und y statt, derart, daß die Örter der Punkte x oder y, deren homologe Punkte sich auf einer gegebenen Geraden befinden, Kurven von der Ordnung γ und δ sind (die Örter der Punkte y oder x, deren homologe Punkte sich auf einer gegebenen Ebene befinden, daher Flächen von der Ordnung γ und δ), so ist die Anzahl der isolierten Koinzidenzpunkte $\alpha + \beta + \gamma + \delta$.[93])

Unter der gleichen Annahme, daß nur isolierte Koinzidenzpunkte existieren, wird das Korrespondenzprinzip von *E. Caporali*[94]) und

88) Paris C. R. 78 (1874), p. 1553. Vgl. auch *H. Schubert*, Math. Ann. 10 (1876), p. 50; „Kalkül“ [82]), p. 45; außerdem *A. Clebsch* und *F. Lindemann*, „Vorlesungen“ 1, p. 386—389; franz. Übers. 2, p. 108—112; *G. B. Guccia* [28]), p. 98—103; *H. G. Zeuthen*, „Lehrbuch“, p. 271—279, 373—374. — In anderer Form *G. Marletta*, Catania Atti Acc. Gioenia (5) 16 (1927), Nr. II bis; *A. Brigaglia*, Rend. Circ. mat. Palermo 53 (1928), p. 310.

89) Anwendungen dieses Prinzips bei *A. Brill*, Math. Ann. 8 (1874), p. 534; *A. del Re*, Rend. Circ. mat. Palermo 1 (1887), p. 272, 284; *M. Pieri*, Roma Rend. Acc. Linc. (4) 2^1 (1886), p. 327; (4) 2^2 (1886), p. 40; Atti Acc. Torino 25 (1890), p. 365; *R. Sturm*, „Geom. Verw.“ 4, p. 132—151.

90) Zuerst zitiert in Anm. 88, p. 1554.

91) Math. Ann. 10 (1876), p. 57; „Kalkül“ [82]), p. 45. S. auch *H. G. Zeuthen*, „Lehrbuch“, p. 376—380; außerdem *G. Marletta*, Catania Boll. Acc. Gioenia (2), Heft 59 (1928), p. 39.

92) *H. G. Zeuthen* [90]). Vgl. auch *G. Salmon* und *W. Fiedler*, „Raumgeometrie“ 2, p. 616—617; *G. B. Guccia* [28]), p. 103—106; *R. Sturm*, „Die Gebilde“ [40]) 1, p. 40—41; „Geom. Verw.“ 4, p. 420—425.

93) *H. Schubert*, Math. Ann. 10 (1876), p. 80—83, hat Korrespondenzprinzipien für Korrespondenzen zwischen Punkten und Ebenen des Raumes, sowie zwischen Punkten des Raumes und Geraden eines Komplexes gegeben und, p. 111—114, zahlreiche Anwendungen gemacht.

94) Mem. di Geometria, Napoli 1888, p. 331 (Nachlaß).

M. Pieri[95]), und auf algebraischem Wege von *K. Th. Vahlen*[96]), folgendermaßen auch auf die linearen Räume von n Dimensionen ausgedehnt: Besteht zwischen den Punkten x und y eines n-dimensionalen linearen Raumes eine algebraische Korrespondenz, die so beschaffen ist, daß α_i und β_i die Ordnungen der i-dimensionalen Örter sind, die den i-dimensionalen linearen Räumen entsprechen, welche vom Punkte x oder vom Punkte y beschrieben werden, so ist die Anzahl der Koinzidenzen, wenn $n = 2m$ ist,

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{m-1} + \beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_m$$

(und $\alpha_m = \beta_m$), und wenn $n = 2m + 1$,

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_m + \beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_m.$$

8. Korrespondenzprinzipien in nichtlinearen Mannigfaltigkeiten. Ein Korrespondenzprinzip, das den Prinzipien der vorhergehenden Nummer analog ist, ist auch im Strahlenraume vorhanden und wurde unter den allgemeinsten Annahmen zuerst von *H. Schubert*[97]) aufgestellt. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den Fall, daß nur eine endliche Anzahl von Koinzidenzen[98]) existiert. Besteht zwischen den Geraden g und h des Raumes eine algebraische (α, β)-Korre-

95) Roma Rend. Acc. Linc. (4) 3^1 (1887), p. 196; Rend. Circ. mat. Palermo 5 (1891), p. 252. Anwendungen bei *M. Pieri,* Giorn. di mat. (1) 26 (1888), p. 251; Rend. Circ. mat. Palermo 11 (1896), p. 58 und *Maria Miglio,* Catania Atti Acc. Gioenia (5) 18 (1931), Nr. XI. Über eine allgemeine Koinzidenzformel in einem linearen Raum von n Dimensionen s. auch *H. Schubert,* Math. Ann. 26 (1884), p. 55, der hiervon Anwendung auf die n-dimensionale Verallgemeinerung der Anzahlbestimmungen für die vielpunktig berührenden Tangenten einer punktallgemeinen Fläche macht; Verallgemeinerungen bei *E. Brambilla,* Ann. di mat. (3) 25 (1916), p. 317. Für $n = 4$ s. auch *L. Roth,* Proc. Cambridge Phil. Soc. 26 (1930), p. 286. Andere Koinzidenzformeln mit Anwendungen bei *M. Pieri,* Giorn. di mat. (1) 30 (1891), p. 133; s. auch *F. L. Hitchcock,* J. math. and phys., Massachusetts Inst. of Techn., Depart. of math., 3 (1924), p. 66. Andere Anwendungen der Koinzidenzformeln auf Geradensysteme eines n-dimensionalen Raumes, insbesondere für $n = 4$, liefert *C. G. F. James,* Proc. London math. Soc. (2) 24 (1926), p. 359; (2) 28 (1928), p. 161. Über allgemeine Koinzidenzformeln vom Gesichtspunkt der Analysis situs aus, s. die Zitate in Anm. 2.

96) J. f. Math. 113 (1893), p. 348, wo auch die Anzahl der Paare von Punkten, die sich in zwei gegebenen Korrespondenzen entsprechen, bestimmt wird [Formeln, die diese Frage für die Ebene und den Raum lösen, und weitere diesbezügliche Formeln bei *H. Schubert,* „Kalkül"[82]), p. 316—319]. Anwendungen bei *K. Th. Vahlen,* J. f. Math. 118 (1896), p. 251.

97) Math. Ann. 10 (1876), p. 63—79, mit vielen Anwendungen; außerdem „Kalkül"[82]), p. 61. Vgl. auch *H. G. Zeuthen,* „Lehrbuch", p. 383—388.

98) Für diesen Fall vgl. *F. Kliem,* Diss. Breslau 1909; *R. Sturm,* „Die Gebilde"[40]) 1, p. 44—47; „Geom. Verw." 4, p. 425—429.

spondenz und nimmt man an, daß, wenn g ein Büschel beschreibt, die Gerade h eine Regelfläche n^{ten} Grades erzeugt, während, wenn h ein Büschel beschreibt, die Gerade g eine Regelfläche vom Grade n' erzeugt, daß es endlich p Paare homologer Geraden, die durch zwei gegebene Punkte gehen und p' Paare, die in zwei gegebenen Ebenen liegen, gibt, so ist die Anzahl der Koinzidenzen $\alpha + \beta + n + n' + p + p'$.[99])

Dieses Ergebnis wird von *M. Pieri*[100]) ausgedehnt, der die (als endlich vorausgesetzte) Anzahl der Koinzidenzen in einer algebraischen Korrespondenz zwischen den Geraden eines beliebigdimensionalen linearen Raumes bestimmte, dann von *F. Severi*[101]), der die (als endlich vor-

---

99) Algebraische Korrespondenzen zwischen zwei Geradenräumen bieten sich z. B. beim sog. „Problem der räumlichen Projektivität", das *R. Sturm,* Math. Ann. 6 (1873), p. 513; 15 (1879), p. 407; „Geom. Verw." 1, p. 372—400; 4, p. 429; *H. Schubert,* „Kalkül"[82]), p. 194—202, behandeln. Bemerkenswert ist die umkehrbar eindeutige Korrespondenz, die man erhält, wenn man zwei aufeinander bezogene Gruppen von sieben Punkten ins Auge faßt und zwei Gerade als homolog betrachtet, von denen die beiden Punktgruppen durch zwei projektive Ebenenbüschel projiziert werden: *H. Müller,* Math. Ann. 1 (1869), p. 415; *R. Sturm,* ebenda 6 (1873), p. 528; 15 (1879), p. 415; „Geom. Verw." 1, p. 384ff. *R. Sturm* fand für eine solche ($\alpha = \beta = 1$) Korrespondenz $n = n' = 7$, $p = 3$, $p' = 19$, woraus sich 38 Koinzidenzstrahlen ergeben.

Eine weitere umkehrbar eindeutige Korrespondenz zwischen zwei Geradenräumen wird von *R. Sturm,* „Geom. Verw." 4, p. 142—145, 429, betrachtet, um die Anzahl 280 der Treffgeraden homologer Strahlen bei acht kollinearen Räumen zu bestimmen. Andere spezielle umkehrbar eindeutige Korrespondenzen zwischen zwei Geradenräumen studiert *F. Aschieri,* Giorn. di mat. (1) 13 (1875), p. 328; Mem. Acc. Bologna (3) 10 (1879), p. 549; Rend. Ist. Lomb. (2) 14 (1881), p. 123, 219.

Eine algebraische Korrespondenz zwischen Geraden in einem linearen Raum von n Dimensionen betrachtet *B. Levi,* Mem. Acc. Torino (2) 48 (1898), p. 115.

Spezielle involutorische Korrespondenzen im Geradenraume bei *C. H. van Os,* Ak. Amsterdam Versl. (4) 27 (1919), p. 337; *J. de Vries,* ebenda, p. 256, 260, 842, 1070, 1074, 1197; Rev. matem. Hispano-Amer. 5 (1923), p. 65; *G. Schaake,* Ak. Amsterdam Versl. (4) 27 (1919), p. 957; (4) 33 (1924), p. 804; (4) 34 (1925), p. 478; (4) 35 (1926), p. 608; *L. Savino,* „Una corrispondenza birazionale involutoria fra le rette dello spazio determinata da un fascio-schiera di quadriche", Pavia 1919; *L. Sapienza,* Catania Atti Acc. Gioenia (4) 17 (1929), Nr. VII; *J. M. Clarkson,* Bull. Amer. math. Soc. (2) 38 (1932), p. 193, 533; *A. R. Williams,* ebenda, p. 554.

G. Schaake, Ak. Amsterdam Versl. (4) 36 (1926), p. 386, hat eine birationale quadratische Korrespondenz zwischen zwei linearen Geradenkomplexen studiert.

Birationale Korrespondenzen zwischen zwei linearen Geradenkongruenzen haben *L. Godeaux,* Mém. Ac. Belgique, coll. in 8° (2) 6 (1922), Nr. 12, preisgekrönt 1921, und *G. Hulin,* Mém. Soc. R. des sc. de Liège (3) 14 (1928), Nr. 19 untersucht.

100) Atti Acc. Torino 25 (1890), p. 365.

101) Roma Rend. Acc. Linc. (5) 9^2 (1900), p. 321. Eine Anwendung bei *F. Severi,* Mem. Acc. Torino (2) 52 (1902), p. 80.

ausgesetzte) Anzahl der Koinzidenzen zweier linearer Räume von k Dimensionen angibt, die einem n-dimensionalen Raum angehören und untereinander durch eine algebraische Korrespondenz verknüpft sind.

Nach *H. Schubert*[102]) bezeichnen wir mit $[n]$ den linearen Raum von n Dimensionen, in dem wir uns alle Gebilde vorstellen, mit $[k]$ einen in ihm liegenden linearen Raum von k Dimensionen und mit $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$ das *Grundgebilde*, das von den $[k]$ gebildet wird, die mit einem gegebenen $[a_0]$ einen Punkt, mit einem gegebenen $[a_1]$ eine Gerade, ..., mit einem gegebenen $[a_{k-1}]$ einen $[k-1]$ gemeinsam haben, und in einem gegebenen $[a_k]$ liegen, wobei $0 \leqq a_0 < a_1 < \cdots < a_k \leqq n$ und der Raum $[a_i]$ immer in $[a_{i+1}]$ enthalten ist. Ferner bezeichnen wir mit $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ die Bedingung von der Dimension

$$(k+1)n - \tfrac{1}{2}k(k+1) - \sum_{i=0}^{i=k} a_i,$$

der sich ein $[k]$ unterwirft, wenn wir festsetzen, daß er in einem Grundgebilde $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$ liege. Dann lautet das Ergebnis, zu dem *F. Severi* gelangt ist: Befindet sich in einem algebraischen $\infty^{(k+1)(n-k)}$-System von Paaren S, S' von $[k]$ eine endliche Anzahl von Koinzidenzen, so ist diese Anzahl ausgedrückt durch

$$\sum (a_0, a_1, \ldots, a_k)(n - a_k, \ldots, n - a_0)'.$$

Hierbei gibt das Symbol $(a_0, a_1, \ldots, a_k)\ (n - a_k, \ldots, n - a_0)'$ die Anzahl der Paare an, deren Raum S dem Grundgebilde $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ angehört, während der entsprechende Raum S' dem konjugierten Grundgebilde $[n - a_k, n - a_{k-1}, \ldots, n - a_0]$ angehört, und die Summe sich auf alle möglichen Produkte der beschriebenen Art[103]) erstreckt.

Betrachtet man die Schnitte der Geraden einer linearen Kongruenz mit einer festen Ebene, so erhält man eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Kongruenz auf die Ebene. Mittels dieser kann man das Korrespondenzprinzip in der Kongruenz[104]) vom Korrespondenzprinzip in der Ebene (Nr. 7) ableiten. Bildet man dann die lineare Kongruenz auf die Punkte einer Fläche 2. Ordnung ab, so erhält man das Korrespondenzprinzip auf dieser Fläche[105]), das auch mittels einer stereographischen Projektion vom Korrespondenzprinzip in der Ebene abgeleitet werden kann.

---

102) Math. Ann. 26 (1884), p. 26; Acta math. 8 (1885), p. 97; Mitteil. math. Ges. Hamburg 1 (1885), p. 134. S. III C 7 (*C. Segre*), Nr. 3.

103) Über andere Verallgemeinerungen des Korrespondenzprinzips, die von *S. Kantor*[78]) stammen, s. III C 7 (*C. Segre*), Anm. 621.

104) *R. Sturm*, „Die Gebilde"[40]) 1, p. 129—131.

105) *R. Sturm*, a. a. O., p. 131—133.

Auf ähnliche Weise kann man vom Korrespondenzprinzip im Raume (Nr. 7) mittels einer umkehrbar eindeutigen Abbildung eines linearen Geradenkomplexes auf die Punkte des Raumes [III C 8 (*K. Zindler*), Nr. 6, c] das Korrespondenzprinzip im linearen Komplex[106]) ableiten.

H. G. Zeuthen[107]) hat das Korrespondenzprinzip auf einer Fläche 2. Grades auf direktem Wege abgeleitet. Die Korrespondenz zwischen den Punkten x, y der Fläche sei (α, β), γ die Anzahl der Punkte x einer Erzeugenden der einen Schar, die Punkten y einer Erzeugenden der anderen entsprechen, δ die Anzahl der Punkte y der ersten Erzeugenden, die Punkten x der zweiten entsprechen. Dann ist die Summe der Anzahl der isolierten Koinzidenzpunkte und der Ordnung der Regelfläche, die der Ort der Verbindungsgeraden entsprechender, auf der Koinzidenzkurve aufeinanderfallender Punkte x, y ist, gleich $\alpha + \beta + \gamma + \delta$.

Eine allgemeinere Formel, die die Anzahl der Koinzidenzen einer algebraischen Korrespondenz auf einer beliebigen algebraischen Fläche liefert, stammt von *H. G. Zeuthen.*[108]) Zwischen den Punkten x, y einer Fläche n^{ter} Ordnung bestehe eine algebraische (α, β)-Korrespondenz, λ sei die Anzahl der Paare der homologen Punkte x, y, die auf zwei allgemeinen ebenen Schnitten liegen; ξ sei die Anzahl der isolierten Koinzidenzpunkte, η die Ordnung der Koinzidenzkurve, ζ die Ordnung der Regelfläche, die von den Tangenten der Fläche gebildet wird, die zwei auf der Koinzidenzkurve zusammenfallende homologe Punkte x, y verbinden, ω schließlich die Anzahl der Punkte, in denen die Koinzidenzkurve die Berührungskurve eines der Fläche umbeschriebenen all-

---

106) *R. Sturm,* a. a. O., p. 267—269. Für den Fall eines speziellen linearen Komplexes s. *H. Schubert,* Math. Ann. 10 (1876), p. 67.

107) Math. Ann. 18 (1880), p. 35, wo sich Anwendungen auf die Theorie der projektiven Figuren auf einer Fläche 2. Grades, insbesondere auf das Problem der Einbeschreibung von Polygonen, deren Seiten durch gegebene Punkte gehen, finden. S. auch *H. G. Zeuthen,* „Lehrbuch", p. 263—271, wo weitere Anwendungen auf die Berührungskurve einer Linienkongruenz mit einer Fläche 2. Ordnung, auf gemeinschaftliche Strahlen zweier Kongruenzen usw. gemacht werden.

(2, 2)-Korrespondenzen zwischen quadratischen und höheren Mannigfaltigkeiten von n Dimensionen hat *A. Bennett,* Bull. Amer. math. Soc. (2) 26 (1919), p. 274, bei der Verallgemeinerung des Studiums der *Poncelet*schen Polygone für den Überraum betrachtet.

108) Paris C. R. 143 (1906), p. 491, 535. S. auch „Lehrbuch", p. 279—290, wo sich eine Anwendung hiervon auf ein Schließungsproblem für Flächen 3. Ordnung findet.

Erweiterung bei *G. Albanese*[29]), p. 134—135.

gemeinen Kegels schneidet. Dann ergibt sich die Formel

$$\xi + \eta + \zeta - \omega = \alpha + \beta + \frac{\lambda}{n} - \gamma(I + 1),$$

wo I die Invariante von *Zeuthen-Segre* [III C 6b (*G. Castelnuovo* und *F. Enriques*), Nr. **14**] der Fläche und γ eine positive, verschwindende oder negative Zahl ist, die ganz oder gebrochen sein kann, sich einfach bestimmen läßt und von *Zeuthen* die *Wertigkeit* der Korrespondenz genannt wird.

Sind z. B. die β Punkte y der Fläche, die einem beliebigen Punkt x von ihr entsprechen, jene nicht in x fallenden Schnittpunkte der Fläche mit einer mit x veränderlichen Kurve r^{ter} Ordnung, die bereits γ in den Punkt x fallende Schnittpunkte mit der Fläche hat (so daß $\beta = nr - \gamma$ ist), so wird die Korrespondenz die Wertigkeit γ haben.

Spaltet sich, wie im Falle der Korrespondenzen zwischen Punkten einer Kurve (Nr. **10**), die Gruppe der Punkte y, die ein und demselben Punkte x in einer Korrespondenz mit der Wertigkeit γ entsprechen, algebraisch so in kleinere Gruppen, daß dadurch i' auf jeden Punkt y' einer Gruppe, i'' auf jeden Punkt y'' einer anderen Gruppe usw. entfallen, und haben die Korrespondenzen zwischen x und y', zwischen x und y'', ... die Wertigkeiten $\gamma', \gamma'', \ldots$, dann ergibt sich

$$\gamma = i'\gamma' + i''\gamma'' + \cdots.$$

Hier ist auch die von *H. Krey*[109]) herrührende Bestimmung der Anzahl der Gruppen von n Punkten einer gegebenen Ebene (oder des Raumes) zu erwähnen, deren Koordinaten gegebenen Gleichungen genügen und außerdem so beschaffen sind, daß einer der n Punkte mit einem gegebenen Punkte zusammenfällt oder auf einer gegebenen Geraden oder einer gegebenen Ebene liegt, oder daß die Verbindungsgerade zweier von den n Punkten eine gegebene Gerade schneidet. Unter gewissen Annahmen kann die gesuchte Zahl mittels des Grades der gegebenen Gleichungen und der Anzahlen der Ausnahmepunkte der Ebene (oder des Raumes) ausgedrückt werden, für die eine der gegebenen Gleichungen identisch verschwindet. Genügen z. B. die vier Koordinaten eines Punktepaares in einer festen Ebene den vier Gleichungen

$$f_i(x, y) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

vom Grade μ_i, ν_i in x, y und ist α die Anzahl der Ausnahmepunkte, so ist die Anzahl der Punktepaare, deren Koordinaten den

109) Math. Ann. 19 (1881), p. 497.

vier Gleichungen genügen, gegeben durch

$$[\mu\mu\nu\nu] - (\alpha + 1)[\mu\mu] - (\alpha + 1)[\nu\nu] - [\mu\nu] + 3[\mu] + 3[\nu] + 6\alpha^2 + 18\alpha - 6,$$

wo jede eckige, i Buchstaben enthaltende Klammer die Summe aller Produkte von i Faktoren bezeichnet, die durch Einsetzen von i verschiedenen Indizes 1, 2, 3, 4 erhalten werden, so daß z. B.[110])

$$[\mu\mu\nu\nu] = \mu_1\mu_2\nu_3\nu_4 + \mu_1\mu_3\nu_2\nu_4 + \mu_1\mu_4\nu_2\nu_3 + \mu_2\mu_3\nu_1\nu_4 + \mu_2\mu_4\nu_1\nu_3 + \mu_3\mu_4\nu_1\nu_2.$$

III. Algebraische Korrespondenzen und Korrespondenzprinzipien für algebraische Kurven beliebigen Geschlechts.[111])

9. Algebraische Korrespondenzen zwischen zwei algebraischen Kurven. Aus Nr. **1** folgt, daß irgendeine algebraische (α, β)-Korrespondenz zwischen zwei algebraischen Kurven C, C' durch *zwei* algebraische Gleichungen zwischen den Koordinaten der homologen Punkte (außer den Gleichungen, die die Kurven selbst darstellen) dargestellt werden kann.[112]) Mit Ausnahme der Paare homologer Punkte in der Korrespondenz sind die beiden Gleichungen jedoch im allgemeinen durch eine endliche Anzahl von fremden Paaren[113]) befriedigt. Es kann aber vorkommen, daß die Korrespondenz auch durch eine einzige Gleichung dargestellt werden kann; s. Nr. **12** am Ende.

In jedem Fall können wir als algebraische Bildfläche der Punktepaare von C und C' (vgl. Nr. **1**), eine algebraische Fläche F annehmen, die von mehrfachen Punkten frei ist und sich in birationaler Korrespondenz ohne Ausnahme mit der Mannigfaltigkeit der Punktepaare von C und C' befindet.[114])

110) *H. Krey,* l. c., gibt auch die expliziten Formeln für die Punktetripel einer festen Ebene und Punktepaare im Raume; außerdem auch Formeln in bezug auf zwei Punkte, die auf einer gegebenen, und als Punktfläche von Singularitäten freien Fläche liegen.

111) Vgl. hierüber *S. Lefschetz,* „Report", p. 310—348; ferner der Bericht von *C. Rosati,* Atti del Congresso intern. dei mat. Bologna 1928, 4 (Bologna 1931), p. 79—91.

112) Vgl. auch *F. Klein,* „Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen", ausgearb. und vervollständigt von *R. Fricke* 2, Leipzig 1892, p. 673—676; *F. Severi,* „Trattato" 1_1, p. 191—193.

113) Einige numerische Charaktere der durch fünf biquaternäre Gleichungen eineindeutig aufeinander bezogenen Kurvenpaare hat *A. Voss* bestimmt, Math. Ann. 27 (1886), p. 364. S. III C 9 (*K. Rohn* und *L. Berzolari*), Nr. **70**.

114) Die Bildflächen der ∞^2 Punktepaare zweier algebraischer Kurven, die voneinander verschieden oder vereinigt sind, studieren *É. Picard* und *G. Simart,* „Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes" 1, Paris 1897,

Jeder Punkt x von C gehört zu ∞^1 Paaren, die auf F durch eine Kurve K_x dargestellt werden. Ändern wir x auf C, so ergeben sich

p. 129—132, 195—197; 2, Paris 1906, p. 196—202; *A. Maroni*, Atti Acc. Torino 38 (1903), p. 149; *M. de Franchis,* Rend. Circ. mat. Palermo 17 (1903), p. 104; *F. Severi,* Atti Acc. Torino 38 (1903), p. 185; Mem. Acc. Torino (2) 54 (1903), p. 19; *L. Remy,* Paris C. R. 147 (1908), p. 783; Ann. Éc. Norm. (3) 26 (1909), p. 259; *P. Roth,* Sitzungsb. Akad. Wien 129 (1920), p. 491. Ein Hinweis darauf schon bei *G. Humbert,* Rend. Circ. mat. Palermo 3 (1889), p. 278 und *G. Castelnuovo,* ebenda 4 (1890), p. 70.

Für den Fall der Punktepaare einer hyperelliptischen Kurve s. *L. Remy,* Bull. Soc. math. de France 37 (1909), p. 3; *L. Godeaux,* Bull. Ac. sc. Belgique 1910, p. 180; ist $p = 2$, so erhalten wir insbesondere hyperelliptische Flächen, für die III C 6 b (*G. Castelnuovo* und *F. Enriques*), Nr. **40** einzusehen ist. Verschiedene Eigenschaften der hyperelliptischen Flächen, die die geordneten Punktepaare einer singulären oder nichtsingulären elliptischen Kurve darstellen, bei *G. Scorza,* Rend. Circ. mat. Palermo 43 (1918), p. 233.

Über die Kurven vom Geschlecht $p = 3$ s. *F. Schottky,* J. f. Math. 105 (1889), p. 269; *G. Humbert,* Paris C. R. 120 (1895), p. 365, 425, 863; J. math. pures appl. (5) 2 (1896), p. 263; *L. Remy,* Paris C. R. 144 (1907), p. 412, 623; 147 (1908), p. 961; J. math. pures appl. (6) 4 (1908), p. 1; Ann. Éc. Norm. (3) 26 (1909), p. 193; *P. Roth,* Monatsh. Math. Phys. 23 (1912), p. 114; *L. Godeaux,* Bull. Ac. roumaine 1916, p. 271, 283, 373; Bull. sc. math. (2) 45 (1921), p. 14; Bull. Ac. sc. Belgique 1921, p. 697; Bull. Soc. math. de France 52 (1924), p. 484.

F. Severi, Atti Acc. Torino 38 (1903), p. 185, hat auch die Mannigfaltigkeiten von 3, 4, . . . Dimensionen betrachtet, welche die Punktetripel, -quadrupel, . . . einer gegebenen Kurve darstellen. Einen Satz über die Integrale 1. Gattung, die diesen Mannigfaltigkeiten zugehören, gibt *A. Comessatti,* Rend. Circ. mat. Palermo 36 (1912), p. 36 an. Die Mannigfaltigkeit der Tripel auch bei *F. Severi,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 16^2 (1907), p. 344; Rend. Circ. mat. Palermo 28 (1908), p. 81. In diesen Arbeiten (p. 343 bzw. p. 78) studiert *F. Severi* die Mannigfaltigkeit der Punktepaare einer Kurve und einer Fläche; dasselbe Problem behandelte *L. Godeaux,* Mém. Soc. sc. Liège (3) 9 (1912), Nr. 3.

Über die Mannigfaltigkeit der Punktepaare zweier Flächen s. *G. Albanese,* Atti Ist. Ven. 83^2 (1924), p. 585.

Soll die aus den Punktepaaren einer Kurve C (oder einer Fläche F) und einer Fläche Φ gebildete Mannigfaltigkeit rational sein, so ist nach *G. Albanese,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 33^2 (1924), p. 73 notwendig und hinreichend, daß sowohl C wie Φ (bzw. F und Φ) rational sind; soll die Mannigfaltigkeit der geordneten und der nichtgeordneten Punktepaare einer Fläche F rational sein, so ist notwendig und hinreichend, daß F rational ist.

Für eine Lösung des Umkehrproblems der *Abel*schen Funktionen vom Geschlecht $p = 3$ hat *W. Wirtinger,* Gött. Nachr. 1889, p. 474; Math. Ann. 40 (1891), p. 261 [Auszug Monatsh. Math. Phys. 2 (1891), p. 55] die Tripel von Punkten einer ebenen Kurve 4. Ordnung vom Geschlechte $p = 3$ auf einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit der Ordnung 24 des siebendimensionalen Raumes dargestellt. Für beliebiges p s. *W. Wirtinger,* Monatsh. Math. Phys. 1 (1889), p. 113.

Topologische Untersuchungen der Bildfläche der Punktepaare zweier Kurven findet man bei *S. Lefschetz,* „L'analysis situs et la géométrie algébrique“, Paris 1924,

∞^1 Kurven K_x derart, daß durch einen beliebigen Punkt von F eine und nur eine von ihnen hindurchgeht. Die Kurven K_x bilden auf diese Weise ein *Büschel* $\{K_x\}$ vom Geschlecht p. Auf ähnliche Weise entsprechen den Punkten y von C' auf F die Kurven eines Büschels $\{L_y\}$ vom Geschlecht p'. Es ist offenbar, daß sich sowohl zwei Kurven K_x wie auch zwei Kurven L_y nicht schneiden, während jede Kurve K_x jede Kurve L_y in einem Punkte schneidet.

Umgekehrt stellt jede Fläche, die zwei einmal schneidende Büschel $\{K_x\}$, $\{L_y\}$ besitzt, die Punktepaare zweier Kurven C, C' dar, von denen jede eineindeutig auf die Kurven eines der beiden Büschel bezogen ist.

Ist nun zwischen den Punkten x, y von C und C' eine algebraische (α, β)-Korrespondenz gegeben, so sind die Paare homologer Punkte durch eine algebraische Kurve Γ auf F dargestellt, die in

---

p. 52—54, 85—87; für den Fall von Punkten auf beliebigen Mannigfaltigkeiten s. *S. Lefschetz,* Preisschrift, Trans. Amer. math. Soc. 22 (1921), p. 362.

Für den Fall, daß C eine innerhalb eines reellen Raumes gegebene algebraische Kurve und $\bar{C}$ ihre konjugierte Kurve, d. h. der Ort der konjugiert imaginären Punkte der Punkte von C ist, wurden auch die Flächen Φ der Punktepaare von C und $\bar{C}$ (geordnete Paare, wenn $\bar{C}$ mit C zusammenfällt) und ihre reellen Modelle studiert. In jedem Fall wird eine *reelle Klasse* solcher Flächen völlig bestimmt und der reelle Teil der Φ, die zu der Klasse gehören, wird *algebraische Riemannsche Fläche* von C genannt, weil er sich in umkehrbar eindeutiger und kontinuierlicher Korrespondenz mit der Gesamtheit der reellen und imaginären Punkte von C befindet.

Ein Hinweis auf ein besonderes Modell ist schon von *C. Segre* gegeben, Math. Ann. 40 (1891), zweite Anmerkung auf p. 438. In methodischer Weise werden die *algebraischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten,* welche einer algebraischen irreduziblen Mannigfaltigkeit von k Dimensionen angehören (vgl. Anm. 178), von *F. Severi* in Vorlesungen auf der Universität Padua von 1910—11 betrachtet. S. *F. Severi,* „Conf. di geom. alg.“ [6]), p. 75—84, 332—343. Eingehende Studien für $k = 1$ bei *A. Comessatti*, Rend. Circ. mat. Palermo 53 (1928), p. 283, wo insbesondere auch der Fall der reellen Kurven, vor allem der Fall der reellen elliptischen Kurven studiert wird.

Einige Bemerkungen über die Mannigfaltigkeiten, die die nichtgeordneten Punktepaare einer algebraischen Mannigfaltigkeit ohne Ausnahme darstellen, bei *F. Severi* und *B. Segre*, Roma Rend. Acc. Linc. (6) 9 (1929), p. 1, 117. Eine derartige Mannigfaltigkeit wird nicht in bezug auf alle birationalen Transformationen als invariant definiert, sondern nur in bezug auf solche, die Modelle liefern, die diese Mannigfaltigkeit eineindeutig ohne Ausnahme darstellen. Daher kann es vorkommen, daß diese Modelle notwendigerweise gewisse projektive Singularitäten besitzen. Ein Modell z. B., das die nichtgeordneten Punktepaare einer von mehrfachen Punkten freien algebraischen Fläche birational ohne Ausnahme darstellt, besitzt sicherlich eine mehrfache Fläche, die den Paaren von zusammenfallenden Punkten entspricht. S. auch *F. Severi,* „Conf. di geom. alg.“ [6]), p. 131—134.

β Punkten von jeder Kurve K_x und in α Punkten von jeder Kurve L_y geschnitten wird. Umgekehrt bestimmt jede algebraische Kurve Γ von F eine algebraische Korrespondenz zwischen den Kurven zweier Büschel $\{K_x\}$ und $\{L_y\}$, wenn wir zwei Kurven der beiden Büschel, die sich auf Γ schneiden, als homolog bezeichnen; Γ stellt dadurch eine algebraische Korrespondenz zwischen C und C' dar.

Die Kurve Γ besitzt mehrfache Punkte dann und nur dann, wenn die Korrespondenz Paare untereinander homologer Verzweigungspunkte besitzt.[115])

Die Kurven der beiden einmal schneidenden Büschel sind Bilder *ausgearteter* Korrespondenzen.

All dies gilt auch dann, falls C mit C' zusammenfällt, wenn nur F als Bild der *geordneten* Punktepaare von C betrachtet wird.

Nehmen wir nun dagegen an, daß Φ eine algebraische Fläche ist, die die *nichtgeordneten* Punktepaare einer irreduziblen Kurve C vom Geschlecht p ohne Ausnahme darstellt. Die Punktepaare von C, zu denen ein fester Punkt gehört, sind auf Φ durch eine Kurve H dargestellt, so daß den Punkten von C ∞^1 Kurven H entsprechen, die mit C birational identisch sind und ein algebraisches System Σ vom *Index* 2 und vom *Grad* 1 bilden, d. h. derart, daß durch jeden Punkt von Φ zwei Kurven H gehen und zwei Kurven H sich in einem Punkte schneiden. Umgekehrt stellt jede Fläche mit einem algebraischen ∞^1-Kurvensystem vom Index 2 und Grad 1 die (nichtgeordneten) Punktepaare einer Kurve dar.

Unter diesen Voraussetzungen ist jede symmetrische Korrespondenz T zwischen den Punkten von C auf Φ durch eine Kurve dargestellt und umgekehrt. Ist aber eine nichtsymmetrische Korrespondenz S auf C gegeben und betrachtet man die Paare homologer Punkte in dieser Korrespondenz unter Außerachtlassung der Ordnung, so werden diese Paare auf Φ durch eine Kurve dargestellt, welche als Bild der Gesamtheit von S und ihrer Umkehrung S^{-1} angesehen werden muß.

Die identische Korrespondenz wird auf Φ von der Hüllkurve K des Systems Σ dargestellt, d. h. dem Ort der Punkte von Φ, von denen zwei zusammenfallende Kurven H ausgehen.

10. Das Korrespondenzprinzip von Cayley-Brill.[116]) Wir betrachten eine (α, β)-Korrespondenz zwischen den Punkten einer alge-

115) *M. de Franchis*[2]), p. 306; *F. Severi*, „Trattato" 1_1, p. 212.

116) Vgl. II B 2 (*W. Wirtinger*), Nr. **51**; III C 3 (*H. G. Zeuthen*), Nr. **17**; außerdem *A. Brill* und *M. Noether*, „Bericht", p. 530—552; *V. Snyder*, „Report", p. 173—174.

braischen Kurve. An Beispielen sieht man sofort, daß das Korrespondenzprinzip, das nach Nr. **6** für den Fall einer rationalen Kurve besteht, nicht immer für eine Kurve vom Geschlecht $p > 0$ gilt.[117]) Es gibt allerdings einen besonderen Fall, in dem das Korrespondenzprinzip auch für eine Kurve vom Geschlecht $p > 0$ ebenso wie für rationale Kurven gültig ist.[118]) Auf einer Kurve C der Ordnung m, die wir uns z. B. im gewöhnlichen Raum vorstellen wollen, sei die Korrespondenz vollständig durch eine Gleichung $f(x, y) = 0$ vom Grade n, n' in den Koordinaten x_i, y_i der homologen Punkte bestimmt; und wir machen die Annahme, daß die Gleichung nicht indentisch erfüllt sei, wenn zwei homologe Punkte in einen allgemeinen Punkt von C zusammenfallen. Dann hat die Korrespondenz die Indizes mn und mn', und die Koinzidenzpunkte sind als Schnittpunkte von C mit der durch die Gleichung $f(x, x) = 0$ dargestellten Fläche von der Ordnung $n + n'$, $mn + mn'$.

A. Cayley betrachtet auf einer beliebigen Kurve C vom Geschlecht p die (α, β)-Korrespondenzen im allgemeinen, die durch *eine einzige* Gleichung $f(x, y) = 0$ zwischen den Koordinaten der homologen Punkte P, P' dargestellt werden können, derart, daß diese Gleichung, wenn P gegeben ist, für keine anderen Punkte von C erfüllt ist, als für die β entsprechenden Punkte P', eventuell auch für feste Punkte von C und den eine bestimmte Zahl γ $(\geqq 0)$-mal gezählten Punkt P.

Diese Bedingung kann auch auf andere Weise ausgedrückt werden.[119])

117) Ist z. B. auf der Kurve eine lineare Schar g_n^1 gegeben, so kann man ihre Doppelpunkte als Koinzidenzpunkte einer symmetrischen Korrespondenz vom Index $n - 1$ erhalten, wenn man zwei Punkte als homolog betrachtet, die ein und derselben Gruppe der Schar angehören. Die Anzahl der Koinzidenzpunkte ist aber nicht $2(n - 1)$, sondern $2(n - 1) + 2p$: III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **24** am Ende und Nr. **34**.

Sind auf der Kurve zwei lineare Scharen g_n^1 und $g_{n'}^1$ gegeben, so kann man ebenso ihre gemeinsamen Paare erhalten, wenn man die Koinzidenzpunkte einer Korrespondenz aufsucht, in der man zwei Kurvenpunkte P und P' als homolog betrachtet, die in Verbindung mit ein und demselben Punkt Q der Kurve zwei Paare PQ und $P'Q$ liefern, von denen eines einer Gruppe von g_n', das andere einer Gruppe von $g_{n'}^1$ angehört. Die (nicht symmetrische) Korrespondenz weist die beiden gleichen Indizes $(n - 1)(n' - 1)$ auf, aber die Anzahl der Koinzidenzpunkte ist $2(n - 1)(n' - 1) - 2p$, so daß die Anzahl dieser gemeinsamen Paare $(n - 1)(n' - 1) - p$ ist. S. III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **34**.

Was das erste Beispiel betrifft, so ist nach *G. Gherardelli*, Boll. Unione mat. ital. 8 (1930), p. 176, jede symmetrische $(n - 1, n - 1)$-Korrespondenz mit der Wertigkeit 1, die einen Zyklus von n verschiedenen Punkten besitzt, zyklisch, d. h. von einer linearen Schar g_n^1 erzeugt.

118) Über die Korrespondenzen, die diese Eigenschaft aufweisen, s. *C. Rosati*, Roma Rend. Acc. Linc. (5) 22^2 (1913), p. 431. Vgl. die Anm. 243.

119) *C. Segre*[2]), p. 92.

Im allgemeinen verwandelt sich beim Variieren von P auf C die Gruppe der β entsprechenden Punkte nicht in einer linearen Schar der Ordnung β. Es kann dagegen vorkommen, daß die aus den β P entsprechenden Punkten P' und ebendiesem $\gamma(\geqq 0)$-mal gezählten Punkt P zusammengesetzten Gruppen einer linearen Schar der Ordnung $\beta+\gamma$ angehören (die sich nicht verändert, wenn sich P ändert). Gerade das ist aber die charakteristische Eigenschaft der Korrespondenzen, die durch eine einzige Gleichung darstellbar sind.

Das „*Cayley-Brill*sche Korrespondenzprinzip" besagt, daß eine Korrespondenz von dieser Beschaffenheit

$$u = \alpha + \beta + 2\gamma p \tag{1}$$

Koinzidenzpunkte besitzt. Es wird so genannt, weil es von *A. Cayley* zuerst ausgesprochen, von *A. Brill* dagegen zuerst vollständig bewiesen wurde.[120])

---

120) *A. Cayley,* Paris C. R. 62 (1866), p. 586; Proc. London math. Soc. (1) 1 (1866), Heft 7, p. 1; Trans. London Phil. Soc. 158 (1867), p. 145 = Papers 5, p. 542; 6, p. 9, 263, hat den Satz „tiré d'une induction qui paraît suffisante" (erste angeführte Arbeit) zur selben Zeit ausgesprochen, als das *Chasles*sche Korrespondenzprinzip auf beliebige rationale Kurven [Anm. 75] angewandt wurde und Anwendungen seines Satzes auf die Bestimmung der Klasse und Anzahl der Wendepunkte, der Doppeltangenten und der sextaktischen Punkte einer ebenen, nur mit gewöhnlichen Singularitäten behafteten Kurve gemacht. In der zweiten angeführten Arbeit hat *A. Cayley* seine Formel für einen Sonderfall bewiesen.

Die *Cayley*sche Formel im allgemeinen wird zuerst von *A. Brill* auf algebraischem Wege bewiesen, Math. Ann. 6 (1872), p. 33 [Auszug Gött. Nachr. 1871, p. 507], dann mehr geometrisch und unter vollständiger Prüfung des Verhaltens der Korrespondenz in den singulären Punkten in Math. Ann. 7 (1874), p. 607. Weitere algebraische Entwicklungen in bezug auf die Eliminationsprozesse, welche zu den Koinzidenzen führen, deren Anzahl durch die Korrespondenzformeln gegeben ist, stammen von *A. Brill,* Math. Ann. 31 (1887), p. 374; 36 (1890), p. 321 und *F. Junker,* Diss. Tübingen 1889.

Ein transzendenter Beweis mit Hilfe *Abel*scher Integrale bei *F. Lindemann,* Brief an *Ch. Hermite* vom 19. Juli 1877, J. f. Math. 84 (1877), p. 301. Ein analytisch-geometrischer Beweis bei *K. Bobek,* Sitzungsb. Ak. Wien 93 (1886), p. 899; geometrische Beweise bei *H. Schubert,* „Kalkül"[82]), p. 86—88, nach Methoden der abzählenden Geometrie unter Ableitung der Formel aus den allgemeinen Koinzidenzformeln für Punktepaare, und *C. Segre*[2]), p. 91, unter Anwendung der Überräume. Über die geometrische Behandlung von *F. Severi* s. Nr. **13**. — Zwei weitere Beweise mit Hilfe der abzählenden Geometrie gibt *H. G. Zeuthen,* Math. Ann. 40 (1891), p. 99, und zwar mit Hilfe des *Chasles*schen Korrespondenzprinzips, bzw. des Prinzips von der Erhaltung der Anzahl. Den ersten dieser beiden Beweise hat *H. G. Zeuthen* „Lehrbuch", p. 207—210; s. auch p. 217—218 mit Vereinfachungen wiedergegeben. Einen anderen geometrischen Beweis gibt *B. Sporer* an, Ztschr. Math. Phys. 39 (1893), p. 228 Über eine algebraisch-geometrische Behandlung s. auch *A. Clebsch* und *F. Lindemann,* „Vorlesungen" 1, *A. Brill* hat die Zahl γ (positiv oder Null) die *Wertigkeit* der Korrespondenz genannt, die algebraische Deutung derselben festgesetzt und gezeigt, daß sie sich nicht ändert, wenn man P mit P'[121]) vertauscht, so daß sie für eine gegebene Korrespondenz und ihre Inverse gleich ist.[122])

p. 441—474, 678—681, 720—753; franz. Übers. 2, p. 146—188; 3, p. 23—27, 76—118, wo auch verschiedene Anwendungen gemacht werden. S. noch, auch für Anwendungen, *J. L. Coolidge,* „Alg. pl. curves", p. 121—134, 246, 279—288. — Andere Anwendungen machen *A. Brill,* Math. Ann. 4 (1871), p. 522; Gött. Nachr. 1871, p. 513, auf Raumkurven; *A. Brill,* Math. Ann. 36 (1890), p. 321, und *H. G. Zeuthen,* Math. Ann. 40 (1891), p. 118, auf die Bestimmung von Spezialgruppen [III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **28**]; *H. G. Zeuthen,* a. a. O., p. 113, auf eine Sonderform der Gleichung einer ebenen Kurve 4. Ordnung und auf die *Steiner*schen Polygone; *K. Küpper,* Prag Ber. böhm. Ges. 1892, p. 257, auf verschiedene Fragen der Geometrie auf einer Kurve, z. B. zur Bestimmung der Anzahl der *Weierstraß*schen Punkte einer algebraischen Kurve [III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **27** und Nr. **34**, Anm. 379]; *F. Severi,* Mem. Acc. Torino (2) 51 (1900), p. 81, zur Bestimmung verschiedener Singularitäten einer Kurve in einem mehrdimensionalen Raume (Anzahl der Hauptsehnen, Anzahl der linearen Räume gegebener Dimension, die gegebene Berührungen mit der Kurve haben usw.). Eine Anwendung auf die Bestimmung der $(r+1)$-fachen Punkte einer linearen Schar g_n^r [III C 4 (*L Berzolari*), Nr. **34**] bei *F. Severi,* „Lezioni", p. 232—234; „Vorlesungen", p. 187—188, und andere Anwendungen abzählender Art auf lineare Scharen in „Trattato" 1_1, p. 243 ff. Verschiedene Anwendungen bei *R. Sturm,* „Geom. Verw." 4, p. 222—231 u. 254; *F. Enriques* und *O. Chisini,* „Lezioni" 3, p. 467—476, und *H. G. Zeuthen,* „Lehrbuch", über letztere Anwendungen s. Anm. 170. S. auch *F. Klein*[77]) 2, p. 36—40; *H. Wieleitner*[28]), p. 173—182. — Andere Anwendungen auf Raumkurven bei *J. W. Archbold,* Proc. Cambridge phil. Soc. 26 (1930), p. 358; *W. G. Welchman,* ebenda, p. 453.

121) Diese Eigenschaft folgt aus der Formel (1), die die Anzahl der Koinzidenzen nach dem *Cayley-Brill*schen Korrespondenzprinzip liefert, kann aber auch unabhängig davon bewiesen werden: *A. Brill,* Math. Ann. 7 (1874), p. 609, 612—613. S. auch *A. Clebsch* und *F. Lindemann,* „Vorlesungen" 1, p. 443; franz. Übers. 2, p. 149; *F. Severi,* „Trattato" 1_1, p. 199—204, wo der Satz für $\gamma \geqq 0$ auf algebraischem Wege, für $\gamma > 0$ auch durch einen Beweis differentialen Charakters begründet wird. Ein geometrischer Beweis für $\gamma \geqq 0$ bei *C. Segre*[2]), p. 92—93.

Für $\gamma = 0$ s. auch *F. Severi,* Mem. Acc. Torino (2) 54 (1903), p. 9—10; „Lezioni", p. 201—204 u. 218; „Vorlesungen", p. 163—165 u. 174; *A. Comessatti,* Rend. Circ. mat. Palermo 36 (1912), p. 44—45.

Für γ beliebig (positiv, Null oder negativ) s. Nr. **13**, bes. Anm. 157.

Über die rationale Bestimmung der Wertigkeit s. *M. Shibayama,* Tôhoku math. J. 16 (1919). p. 89; *T. Kubota,* ebenda, p. 92.

122) In seinen Untersuchungen über die Erweiterung des *Abel*'schen Theorems auf die Flächen [III C 6b (*G. Castelnuovo* und *F. Enriques*), Nr. **30**] hat *F. Severi,* Ann. di mat. (3) 12 (1905), p. 61, algebraische Korrespondenzen mit der Wertigkeit Null auch zwischen einer Kurve Γ und einer Fläche F betrachtet. Durch eine algebraische Korrespondenz läßt man jedem Punkte P von Γ alle

Bei den Anwendungen vornehmlich auf das Problem der Berührungen und im allgemeinen auf das Problem der Bestimmung der Anzahl der Gruppen einer linearen Schar g_n^r mit einem k_1-fachen Punkt, einem zweiten k_2-fachen Punkt, ..., wobei $\sum(k_i - 1) = r$ [III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **34**], ergibt sich oft der Fall, daß in der (α, β)-Korrespondenz die Gruppe der β Punkte, die jedem Punkte P entsprechen, in verschiedene rational trennbare Gruppen von verschieden definierten Punkten zerfällt. Diese Gruppe setzt sich dann aus β_1 λ_1-fachen Punkten, die P in einer (α_1, β_1)-Korrespondenz mit u_1 Koinzidenzen entsprechen, aus weiteren β_2 λ_2-fachen Punkten, die P in einer (α_2, β_2)-Korrespondenz mit u_2 Koinzidenzen entsprechen usw. zusammen.[123])

Punkte einer algebraischen Kurve C von F so entsprechen, daß bei Änderung von P die Kurve C ein irreduzibles algebraisches ∞^1-System S vom Grade n und Index ν beschreibt, d. h. derart, daß zwei allgemeine Kurven von S sich in n Punkten schneiden und ν Kurven von S durch einen allgemeinen Punkt von F gehen. Jede Kurve C wird aus einer bestimmten Anzahl k (≥ 1) von Punkten von Γ hervorgehen, so daß bei Änderung von C innerhalb S diese k Punkte auf Γ eine Involution vom Grade k beschreiben und die ν von einem Punkte von F ausgehenden Kurven von S, auf Γ durch eine Gruppe von $n' = k\nu$ Punkten dargestellt werden. Das System Σ dieser ∞^2 Gruppen von n' Punkten ist birational identisch mit F oder mit einer auf F existierenden Involution, je nachdem die ν Kurven von S, die durch den allgemeinen Punkt x von F hindurchgehen, von selbst durch andere mit x veränderliche Punkte von F nicht hindurchgehen oder hindurchgehen.

Hiernach nennt man nun die Korrespondenz, die von den Punkten von Γ zu den Punkten von F führt, *„von der Wertigkeit Null“*, wenn die homologen Kurven C der Punkte von Γ zu ein und demselben linearen System gehören. Die umgekehrte Korrespondenz, die von den Punkten von F zu denen von Γ führt, nennt man *„von der Wertigkeit Null“*, wenn die Gruppen des Systems Σ, die homolog zu den Punkten von F sind, zu ein und derselben linearen Schar gehören.

Für den Fall, daß die Korrespondenz zwischen F und Γ im einen Sinne von der Wertigkeit Null ist, zeigt nun *F. Severi*, daß sie es auch im entgegengesetzten Sinne ist.

Der Begriff der Wertigkeit Null und der vorausgehende Satz lassen sich sofort auf die Korrespondenzen zwischen einer Kurve und einer algebraischen Mannigfaltigkeit beliebiger Dimension ausdehnen. Eine Erweiterung auf den Fall einer Korrespondenz zwischen zwei willkürlichen algebraischen Mannigfaltigkeiten bei *C. Rosati*, Roma Rend. Acc. Linc. (5) 16^1 (1907), p. 955.

123) In bezug auf die Korrespondenzen mit veränderlichen mehrfachen Punkten hat *F. Severi*, „Trattato“ 1_1, p. 204—205, bewiesen, daß, wenn dem allgemeinen Punkte P der einen Kurve eine Punktgruppe der anderen Kurve entspricht, der der ν mal zu zählende Punkt P' (wo ν eine gewisse Zahl ist) angehört, sich in der umgekehrten Korrespondenz unter den homologen Punkten von P' der Punkt P befindet und ebenfalls ν mal gezählt werden muß. Folglich muß das gleiche, wenn in einer Korrespondenz zwischen zwei Kurven einem allgemeinen Punkt der einen Kurve verschiedene Punkte der anderen entsprechen, auch für die umgekehrte Korrespondenz zutreffen.

Die Formel für diese „zusammengesetzten“ Korrespondenzen lautet:

$$(2) \qquad \lambda_1(u_1 - \alpha_1 - \beta_1) + \lambda_2(u_2 - \alpha_2 - \beta_2) + \cdots = 2\gamma p.$$

Auch diese Gleichung stammt von *A. Cayley*[124]), der sie zur Bestimmung ebener Kurven, die verschiedene Berührungen mit einer gegebenen Kurve haben, verwandte[125]), weiter zur Bestimmung von Dreiecken, deren Ecken auf alle möglichen Weisen (52 an der Zahl) auf gegebenen Kurven liegen und deren Seiten gegebene Kurven (die sowohl untereinander, wie auch von den ersten verschieden sein können oder nicht) berühren.[126])

Als Anzahl der Punktepaare, die sich gleichzeitig in zwei (α, β)- und (α', β')-Korrespondenzen mit den Wertigkeiten γ und γ' entsprechen, findet man[127])

$$\alpha\beta' + \alpha'\beta - 2\gamma\gamma' p.$$

Sind aber alle beide Korrespondenzen symmetrisch, so daß $\alpha = \beta$, $\alpha' = \beta'$ ist, so ist diese Anzahl gleich der Hälfte der vorhergehenden, d. h. $\alpha\alpha' - \gamma\gamma' p$.

11. Systeme mehrerer Korrespondenzen zwischen den Punkten einer Kurve und Anwendungen auf Fragen abzählender Art über lineare Scharen. Um das Problem der Spezialgruppen zu lösen [III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. 28], hat *A. Brill* auf algebraischem Wege auch die Systeme einer beliebigen Anzahl k von Korrespondenzen zwischen k Punkten ein und derselben Kurve mit dem Vorsatz studiert, die Anzahl der Gruppen von k Punkten zu bestimmen, die sich in allen

---

124) S. die Anführungen in Anm. 75. Vgl. auch *C. Segre*[2]), p. 96.

Eine noch allgemeinere Formel, die auch für Korrespondenzen mit unendlich vielen Koinzidenzpunkten gültig ist und deren Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ auch negativ sein können, stammt von *F. Severi,* s. Nr. **13**.

125) Trans. London Phil. Soc. 158 (1868), p. 145 = Papers 6, p. 263. Analoge Anwendungen bei *A. Brill,* Math. Ann. 6 (1872), p. 46, der daraus einen algebraischen Beweis der allgemeinen Formel von *E. de Jonquières* [III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **34**; III C 7 (*C. Segre*), Nr. **25**] für das genannte allgemeine Problem abzählender Art auf den g_n^r folgert. Über die Ableitung dieser Formel vom *Cayley-Brill*schen Korrespondenzprinzip und ihre geometrisch-funktionale Bedeutung s., außer den in diesen beiden Artikeln angeführten Arbeiten, *F. Severi,* „Trattato“ 1_1, p. 243—249; *J. L. Coolidge,* „Alg. pl. curves“, p. 284—288.

126) Trans. London Phil. Soc. 161 (1870), p. 369 = Papers 8, p. 212; Auszüge Report British Ass. 34, Bath 1864 (London 1865), p. 1; 40, Liverpool 1870, (London 1871), p. 9; Proc. Roy. Soc. London 19 (1870), p. 292.

127) *A. Brill,* Gött. Nachr. 1871, p. 511; Math. Ann. 4 (1871), p. 521; 6 (1872), p. 42; 7 (1874), p. 611. S. auch *H. Krey,* Math. Ann. 12 (1877), p. 476; *H. Schubert,* „Kalkül“[82]), p. 319.

betrachteten Korrespondenzen entsprechen.[128]) Zu diesem Zwecke betrachtet er z. B. unter der Vorraussetzung, es handele sich um eine ebene Kurve $f(x, y) = 0$, k Korrespondenzen zwischen $k + 1$ Punkten $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $\ldots$, $P_{k+1}(x_{k+1}, y_{k+1})$, welche durch die Gleichungen

$$\varphi_i(x_1, y_1; x_2, y_2; \ldots; x_{k+1}, y_{k+1}) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

dargestellt sind. Aus diesen Formeln eliminiert er mit Hilfe der Gleichungen $f(x_i, y_i) = 0$ alle Paare von Veränderlichen mit Ausnahme z. B. von x_2, y_2 und x_3, y_3 und findet auf diese Weise eine Gleichung

$$\Omega(x_2, y_2; x_3, y_3) = 0,$$

die eine algebraische Korrespondenz zwischen den Punkten P_2 und P_3 bestimmt; um nun das Problem zu lösen, hat *A. Brill* zwei Rekursionsformeln für die Berechnung der Indizes und der Wertigkeit solcher Korrespondenzen angegeben.

Zu denselben Formeln ist auch *O. Göhner*[129]) gelangt, und zwar mittels eines geometrischen Rekursionsverfahrens, das man *A. Comessatti*[130]) verdankt und auf der *Severi*schen geometrischen Korrespondenztheorie (Nr. **13**) beruht, um die Anzahl der $r + 1$ linearen Scharen r^{ter} Dimension und n^{ter} Ordnung gemeinsamen Gruppen von $r + 1$ Punkten auf einer Kurve vom Geschlecht p zu bestimmen.

O. Göhner hat außerdem die expliziten Formeln für einen Sonderfall unsymmetrischer Korrespondenzen und den allgemeinsten Fall symmetrischer Korrespondenzen angegeben und Anwendungen auf Fragen abzählender Art über die linearen Scharen [s. III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **34**] und die algebraischen Kurven der Überräume gebracht.

So lautet z. B. der Ausdruck für die Anzahl der Gruppen von r Punkten einer Kurve vom Geschlecht p, die r linearen Scharen von der Dimension $r - 1$ und der Ordnung $n_1, n_2, \ldots, n_r$ gemeinsam sind:

$$(1) \qquad \sum_{i=0}^{r} i! \binom{p}{i} \sum_{t=0}^{r-i} \binom{i+t}{i} \tau_{r-i-t} (N - r + 1 - p)^t,$$

128) Math. Ann. 36 (1890), p. 321. Für $k = 2, 3, 4$ hatte schon *A. Brill*, Math. Ann. 6 (1872), p. 33, die expliziten Formeln gegeben. S. auch *A. Clebsch* und *F. Lindemann*, „Vorlesungen" 1, p. 720—753; franz. Übers. 3, p. 76—118. — Für $k = 3$ wurde die Formel von *H. Schubert*, Math. Ann. 17 (1880), p. 202, als Anwendung seiner Untersuchungen abzählender Art über die Dreiecke wiedergefunden. *Schubert*, a. a. O., p. 200, hat auch die Anzahl der Kurvenpunkte bestimmt, in denen drei homologe Punkte bei gegebener Korrespondenz zwischen Tripeln von Punkten unendlich benachbart werden.

129) Diss. Tübingen 1913.

130) Atti Ist. Ven. 69² (1910), p. 871.

wobei N eine beliebige ganze Zahl ist und $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$ die symmetrischen Elementarfunktionen der Zahlen $n_1 - N$, $n_2 - N$, ..., $n_r - N$[131]) sind.

12. Die allgemeine Korrespondenztheorie von A. Hurwitz.[132]) Nicht alle algebraischen (α, β)-Korrespondenzen zwischen den Punkten einer Kurve haben eine positive Wertigkeit, d. h. nicht alle können, wie in Nr. **10**, durch eine einzige Gleichung zwischen den Koordinaten der homologen Punkte[133]) dargestellt werden.

Die Bestimmung und Untersuchung aller algebraischen Korrespondenzen, die auf einer beliebigen algebraischen Kurve[134]) existieren,

---

131) Erteilt man N besondere Werte, so kann man aus Gleichung (1) andere besonders einfache Ausdrücke folgern. So erhält man für $N = r - 1$ und für $N = r + p - 1$ die Ausdrücke

$$\sum_{i=0}^{r} i!\binom{p}{i} \sum_{t=0}^{r-i} (-1)^t \binom{i+t}{i} S_{r-i-t}\, p^t, \tag{2}$$

$$\sum_{i=0}^{r} i!\binom{p}{i} T_{r-i}. \tag{2'}$$

Im ersten Ausdruck sind $S_1, S_2, \ldots, S_r$ die symmetrischen Elementarfunktionen der Zahlen $n_j - r + 1$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$, im zweiten $T_1, T_2, \ldots, T_r$ die symmetrischen Elementarfunktionen der Zahlen $n_j - r + 1 - p$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$.

Für $n_1 = n_2 = \cdots = n_r$ erhält man die von *A. Comessatti* a. a. O. angegebene Formel. Die Formel für den allgemeinen Fall wurde von *A. Comessatti,* a. a. O., p. 881 in nicht exakter Weise gegeben; genau und unter Form (2) von *Göhner*[129]), p. 34. Die Formel (1) wurde dann auf geometrischem, überräumlichem Wege von *A. Comessatti,* Atti Ist. Ven. 72^2 (1913), p. 1133 abgeleitet, wobei er die auf den Fall linearer Scharen gleicher Ordnung bezügliche Formel benutzte. *Göhner,* a. a. O., p. 47, hat auch auf algebraischem Wege die Formel bewiesen, welche schon von *G. Castelnuovo,* Rend. Circ. mat. Palermo 3 (1888), p. 27, mittels des Prinzips von der Erhaltung der Anzahl gefunden wurde, und in III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **34**, am Ende, wiedergegeben ist. Diese Formel liefert die Anzahl der Gruppen von $q + r$ Punkten, die zwei linearen Scharen g_m^q, g_n^r $(m, n \geq q + r)$ auf einer Kurve vom Geschlecht p gemeinsam sind. *Göhner* hat auch eine Rekursionsformel angegeben, um das analoge Problem für den Fall einer beliebigen Anzahl von linearen Scharen zu lösen. Über die Formel von *Castelnuovo* vgl. auch *Vittoria Notari,* Atti Ist. Ven. 82^2 (1923), p. 723.

132) S. II B 2 (*W. Wirtinger*), Nr. **52**; außerdem *A. Brill* und *M. Noether,* „Bericht", p. 552—565.

133) So ist beim zweiten Beispiel der Anm. 117 die Anzahl der Koinzidenzpunkte kleiner als die Summe der Indizes.

134) *F. Severi,* Math. Ann. 74 (1913), p. 521—522, hat bewiesen, daß die algebraischen Korrespondenzen mit gegebenen Indizes α, β auf einer algebraischen Kurve in eine endliche Anzahl kontinuierlicher Systeme zerfallen. S. Anm. 141 am Ende.

verdankt man *A. Hurwitz*.[135]) *A. Hurwitz* verwendet die *Abel*schen Integrale 1. Gattung[136]) und wählt als Ausgangspunkt die Darstellung der allgemeinsten Korrespondenzen auf einer Kurve C (oder der *Riemann*schen Fläche, die deren Bild ist) vom Geschlecht p (> 0) durch Nullsetzen eines Thetaquotienten.[137]) Auf diese Weise verknüpft sich das Studium der Korrespondenzen mit dem der komplexen Multiplikation der *Abel*schen Funktionen.

Sind $x_1, x_2, \ldots, x_\alpha$ die α Punkte von C, die einem Punkte y entsprechen und $u_1, u_2, \ldots, u_p$ die Werte von p, zu C gehörigen unabhängigen Integralen 1. Gattung, so sind die *Abel*schen Summen $\sum_{r=1}^{\alpha} u_k(x_r)$ als Funktionen von y Integrale 1. Gattung von C, und daher ergeben sich die Gleichungen

$$\sum_{r=1}^{\alpha} u_k(x_r) = \sum_{i=1}^{p} \pi_{ki} u_i(y) + \pi_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, p), \tag{1}$$

wobei die π_{ki} und π_k Konstante (d. h. unabhängig von y) sind und die ersten von der Korrespondenz abhängen, während die anderen, da sie von der Auswahl der additiven Konstanten in den Integralen u abhängen, unwesentliche Konstanten sind.

Man kann immer annehmen, daß die Integrale u so normiert sind, daß die Tabelle der auf die Rückkehrschnitte auf der *Riemann*schen Fläche bezüglichen Perioden folgende ist:

$$\left\{\begin{array}{lccccccccc} u_1) & 1 & 0 & \ldots & 0 & \tau_{11} & \tau_{12} & \ldots & \tau_{1p} \\ u_2) & 0 & 1 & \ldots & 0 & \tau_{21} & \tau_{22} & \ldots & \tau_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_p) & 0 & 0 & \ldots & 1 & \tau_{p1} & \tau_{p2} & \ldots & \tau_{pp} \end{array}\right. \qquad (\tau_{ik} = \tau_{ki}). \tag{2}$$

Dann berechnet man die Koeffizienten π_{ik}, indem man y unter Ausgang von einer Anfangslage passende geschlossene Wege beschreiben

135) Ber. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig 38 (1886), p. 10, wiedergegeben in Math. Ann. 28 (1886), p. 561 = Math. Werke 1 (Basel 1932), p. 163. Eine Darstellung der hauptsächlichen Ergebnisse von *Hurwitz* bei *F. Klein* und *R. Fricke*[112]) 2, p. 518—556, 667—679; *H. F. Baker*[28]), p. 639—648; *J. L. Coolidge*, „Alg. pl. curves", p. 329—336; *W. F. Osgood*[4]) 2, p. 631—648.

136) Eine transzendente Formulierung des Problems der Korrespondenzen, bei der die *Riemann*sche Darstellung der algebraischen Funktionen durch Summen von *Abel*schen Integralen 2. Gattung als Ausgangspunkt Verwendung findet, findet sich zuerst bei *F. Lindemann*[120]), aber nur für eine besondere Berührungskorrespondenz. Durch eine transzendente Gleichung definierte Wertigkeitskorrespondenzen hat *F. Lindemann* betrachtet, Ber. Naturf. Ges. Freiburg 7 (1878), p. 273.

137) Die Darstellung kann auch durch Primfunktionen geschehen, wie bei *F. Klein* und *R. Fricke*[112]).

läßt, und die Änderungen der beiden Seiten der Gleichungen (1) gleichsetzt. Das führt zu den linearen Gleichungen:

$$(3)\qquad \begin{cases} \pi_{kl} = h_{kl} + \sum_{i=1}^{p} g_{il}\tau_{ki}, \\ \sum_{i=1}^{p} \pi_{ki}\tau_{il} = H_{kl} + \sum_{i=1}^{p} G_{il}\tau_{ki}, \end{cases} \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, p)$$

in denen h, g, H, G ganze Zahlen sind, die von der Korrespondenz abhängen und daher die *charakteristischen ganzen Zahlen* der Korrespondenz genannt werden.

Zwei Korrespondenzen mit denselben charakteristischen ganzen Zahlen nennt man zur selben *Klasse* gehörig.

Für die inverse Korrespondenz T^{-1} drücken sich die charakteristischen ganzen Zahlen h'_{kl}, g'_{il}, H'_{kl}, G'_{il} mittels derjenigen von T durch folgende Formeln[138]) aus:

$$h'_{kl} = G_{lk}, \quad g'_{il} = -g_{li}, \quad H'_{kl} = -H_{lk}, \quad G'_{il} = h_{li}.$$

Eliminiert man aus den Gleichungen (3) die π_{ki}, so erhält man folgende p^2 quadratischen Beziehungen mit ganzen Koeffizienten zwischen den τ_{ik}:

$$(4)\qquad \sum_{i=1}^{p} h_{ki}\tau_{il} + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} g_{ji}\tau_{il}\tau_{kj} = H_{kl} + \sum_{i=1}^{p} G_{il}\tau_{ki}$$
$$(k, l = 1, 2, \ldots, p).$$

Nun sind zwei Fälle möglich. Erstens kann es vorkommen, daß die Gleichungen (4) in bezug auf die $\frac{p(p+1)}{2}$ Perioden τ_{ik} identisch erfüllt sind. Dann ist

$$(5)\qquad h_{11} = h_{22} = \cdots = h_{pp} = G_{11} = G_{22} = \cdots = G_{pp},$$

und alle übrigen Zahlen h, g, H, G sind Null. Nennen wir $-\gamma$ den gemeinsamen Wert der Zahlen (5), so nehmen die Gleichungen (1) folgende Form an

$$(6)\qquad \sum_{r=1}^{\alpha} u_k(x_r) + \gamma \cdot u_k(y) = \pi_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, p).$$

Man nennt in einem solchen Falle die Korrespondenz eine *gewöhnliche* oder *Wertigkeitskorrespondenz* und die ganze Zahl γ, die positiv,

---

138) Diese von *A. Hurwitz*, Math. Ann. 28 (1886), Anm. auf p. 578 = Math. Werke 1, Anm. auf p. 180, nur angedeuteten Beziehungen gelten auch für die Korrespondenzen zwischen den Punkten zweier verschiedener Kurven (Nr. **29**) und werden analytisch unter Benutzung der Thetafunktionen von *C. Rosati,* Ann. di mat. (3) 28 (1918), p. 37—40, auf topologischem Wege von *S. Lefschetz,* Ann. of math. (2) 28 (1927), p. 349—350, bewiesen.

negativ oder Null sein kann, die zur Korrespondenz gehörige *Wertigkeit.*[139])

Die geometrische Deutung der Gleichungen (6) folgt aus dem *Abel*schen Theorem.[140]) Für $\gamma \geqq 0$ besagen diese Gleichungen, daß die aus jedem γ-mal gezählten Punkte y und den α entsprechenden Punkten x zusammengesetzten Gruppen ein und derselben linearen Schar angehören, nämlich äquivalent oder korresidual sind [III C 4 (*Berzolari*), Nr. **25**], wie schon in Nr. **10** gesagt wurde. Ist dagegen $\gamma < 0$, setzt man $\gamma = -\gamma'$ und nennt y' einen von y verschiedenen Punkt von C, und $x_1', x_2', \ldots, x_\alpha'$ seine α entsprechenden Punkte, dann besagen die Gleichungen (6), daß die aus dem γ'-mal gezählten Punkt y und den $x_1', x_2', \ldots, x_\alpha'$ gebildete Gruppe mit der aus dem γ'-mal gezählten Punkt y' und aus $x_1, x_2, \ldots, x_\alpha$ zusammengesetzten Gruppe äquivalent ist.

Mit Wertigkeit begabte Korrespondenzen sind auf jeder algebraischen Kurve[141]) möglich.

---

139) Der Begriff einer Korrespondenz mit negativer Wertigkeit findet sich schon bei *A. Cayley*[125]) und [126]), sowie bei *A. Brill*[121]), besonders Math. Ann. 7 (1874), p. 607. Der erste von beiden macht Anwendungen seines Prinzips auch auf Fälle von Korrespondenzen mit negativer Wertigkeit. Solche Korrespondenzen sind in den zusammengesetzten Korrespondenzen (Nr. **10**) eingeschlossen, und auch als Quotienten von Korrespondenzen mit positiver Wertigkeit, deren Division aber nicht durchführbar ist, algebraisch darstellbar. Vgl. *A. Clebsch* und *F. Lindemann*, „Vorlesungen" 1, Anm. auf p. 747; franz. Übers. 3, Anm. auf p. 110—111; *A. Hurwitz*[138]), p. 574 = Math. Werke 1, p. 176; *A. Brill*, Math. Ann. 31 (1887), p. 406.

140) Vgl. *G. Scorza*, Atti Acc. Torino 35 (1900), p. 444—445.

141) In gewissen Fragen ist es zweckmäßig, die Integrale u 1. Gattung beliebig statt normal anzunehmen Vgl. *F. Severi*, Math. Ann. 74 (1913), p. 515 [Auszug Paris C. R. 156 (1913), p. 287]; *S. Cherubino*, Atti Acc. Torino 49 (1913), p. 705. Wir legen nun ein System von Rückkehrschnitten auf der *Riemann*schen Fläche fest und bezeichnen mit $\omega_{h1}, \omega_{h2}, \ldots, \omega_{h,2p}$ $(h = 1, 2, \ldots, p)$ die normalen Perioden von p Integralen 1. Gattung u_h $(h = 1, 2, \ldots, p)$, die zu der Kurve gehören und sich auf jene Schnitte beziehen. Fällt x in einen Schnitt, so ergeben sich die Beziehungen

$$\text{(I)} \qquad \sum_{i=1}^{p} \pi_{hi}\, \omega_{ir} = \sum_{s=1}^{2p} a_{sr}\, \omega_{hs}$$
$$(r = 1, 2, \ldots, 2p; \quad h = 1, 2, \ldots, p).$$

Hierin sind die π_{hi} von der Stelle von x unabhängige Konstante. Die ganzen Zahlen a_{sr} hängen vom Index r ab, der dem betrachteten Schnitt entspricht, nicht aber vom Index h, der dem Integral u_h entspricht, und sind für die Korrespondenz charakteristisch, weil sie durch diese jedesmal, wenn die Integrale und die Schnitte gewählt sind, auf eindeutige Weise bestimmt werden. Eliminieren wir aus den Gleichungen (I) die π_{ik}, so erhalten wir folgende p^2

Zweitens kann es vorkommen, daß die Gleichungen (4) wirkliche Gleichungen zwischen den Perioden τ_{ik} sind. Dann heißt man die Korrespondenz eine *singuläre* Korrespondenz. Diese ist nur möglich auf Kurven mit spezialisierten Moduln. Diese Kurven und die zugehörigen *Riemann*schen Flächen heißen auch *singulär.*[142])

Den Wertigkeitskorrespondenzen sind gewöhnliche Multiplikationen der mit der Kurve verknüpften *Abel*schen Funktionen zugeordnet; den singulären Korrespondenzen komplexe Multiplikationen.

---

algebraischen Beziehungen zwischen den ω:

$$\text{(II)} \qquad R_{hl}(a, \omega) = 0 \qquad (h, l = 1, 2, \ldots, p).$$

Severi, a. a. O., p. 521, hat bewiesen, daß, wenn die Schnitte der *Riemann*schen Fläche festgelegt und daher die ω gegeben sind, jedem System von Werten der π_{ik}, die mit den ganzen Zahlen a durch die Gleichungen (I) verknüpft sind, ein einziges und bestimmtes Wertsystem der a entspricht, das den Gleichungen (II) genügt, und umgekehrt.

Damit insbesondere die Korrespondenz mit Wertigkeit ausgestattet sei, ist notwendig und hinreichend, daß sich die Gleichungen (II) auf die Identität in bezug auf die ω reduzieren, was gerade für die Kurven mit allgemeinen Moduln zutrifft.

Sind die Indizes der Korrespondenz gegeben, so können die Größen π_{ik} und ähnlicherweise die ganzen Zahlen a nur eine endliche Zahl verschiedener Gruppen von Werten annehmen, *Severi,* a. a. O., p. 521—522 (vgl. Anm. 134).

142) Beispiele von singulären Korrespondenzen sind in den sogenannten *Modularkorrespondenzen* gegeben, die von *F. Klein,* Math. Ann. 17 (1879), p. 62 = Ges. math. Abh. 3, p. 169 [s. *F. Klein* und *R. Fricke*[112]) 2, p. 154—159, 596—634, 667—702] in die Theorie der elliptischen Modulfunktionen eingeführt wurden und *A. Hurwitz* Gelegenheit zur Entwicklung seiner Theorie gaben. Hierüber s. *A. Brill* und *M. Noether,* „Bericht“, p. 552—559; außerdem II B 4 (*R. Fricke*), Nr. 27.

Ein einfaches Beispiel ist in jener eineindeutigen Korrespondenz gegeben, die *F. Klein,* Math. Ann. 15 (1879), p. 279 = Ges. math. Abh. 2, p. 421 in den harmonischen ebenen Kurven 3. Ordnung entdeckt hat: vgl. III C 3 (*H. G. Zeuthen*), Anm. 118. — Andere aus dem Bild der Doppelkurve in der ebenen Abbildung einer rationalen Fläche entnommene Beispiele bei *M. Bernhard*[28]), p. 24 ff. Ein anderes aus der Theorie der Regelflächen gefolgertes Beispiel bei *H. G. Zeuthen,* Atti del IV Congr. intern. dei Matem. Roma 1908, 2 (Roma 1909), p. 227; „Lehrbuch“, p. 220—222. Zwei weitere Beispiele bei *F. Severi,* „Vorlesungen“, p. 185—187; „Trattato“ 1_1, p. 269 und 272—273. Das erste Beispiel ist ein Satz von *A. Hurwitz*[138]), p. 585 = Math. Werke 1, p. 187, der folgendermaßen ausgedrückt werden kann: Auf einer Kurve vom Geschlecht $p > 1$ ist eine eineindeutige Korrespondenz, falls sie nicht von einer linearen Schar g_2^1 erzeugt wird, sicherlich ohne Wertigkeit. Das zweite besagt, daß auf einer Kurve vom Geschlecht $p > 1$ eine irrationale Involution γ_m^1 vom Geschlecht π [Nr. 31, vgl. auch III C 4 (*Berzolari*), Nr. 24] eine symmetrische Korrespondenz von den Indizes $m - 1$ bestimmt, die ohne Wertigkeit ist. Für diese beiden Beispiele s. auch *F. Enriques* und *O. Chisini,* „Lezioni“ 3, p. 497—499.

Deshalb sind auf einer Kurve mit allgemeinen Moduln nur Wertigkeitskorrespondenzen möglich.[143])

A. Hurwitz hat diesen Satz dadurch vervollständigt, daß er bewies, daß es auf jeder singulären Kurve immer tatsächlich neben gewöhnlichen auch singuläre Korrespondenzen gibt.

Auf jeden Fall erhält man alle überhaupt möglichen Korrespondenzen, die es auf einer gegebenen Kurve gibt, wenn man alle möglichen ganzzahligen Lösungssysteme h, g, H, G der Gleichungen (3) aufsucht: jedes Lösungssystem führt zu einer Klasse von Korrespondenzen.

A. Hurwitz hat gezeigt, daß man alle Lösungssysteme erhält, wenn man eine gewisse endliche Anzahl μ von Korrespondenzen linear zusammensetzt, so daß man die Gleichung einer beliebigen Korrespondenz aus den Gleichungen von μ passend ausgewählten Korrespondenzen durch Multiplikation erhält. Dann ist $\mu = 1$ bzw. $\mu > 1$, je nachdem die Kurve nur Wertigkeitskorrespondenzen bzw. auch singuläre Korrespondenzen besitzt.

Sind

$$(7) \qquad \begin{cases} \pi_{kl}^{(\varepsilon)} = h_{kl}^{(\varepsilon)} + \sum\limits_{i=1}^{p} g_{il}^{(\varepsilon)} \tau_{ki} \\ \sum\limits_{i=1}^{p} \pi_{ki}^{(\varepsilon)} \tau_{il} = H_{kl}^{(\varepsilon)} + \sum\limits_{i=1}^{p} G_{il}^{(\varepsilon)} \tau_{ki} \end{cases} \qquad (\varepsilon = 1, 2, \ldots, \mu)$$

μ verschiedene Lösungen des Systems (3) (wobei nicht ausgeschlossen ist, daß unter den μ Systemen identische Lösungen sind, d. h. solche, die durch Elimination der $\pi_{kl}^{(\varepsilon)}$ zu identischen Beziehungen in bezug auf die τ_{ki} führen), so sind nach *Hurwitz* diese μ Lösungen voneinander *abhängig*, wenn es möglich ist, den Gleichungen

$$\sum_{\varepsilon=1}^{\mu} \lambda_\varepsilon \pi_{kl}^{(\varepsilon)} = 0 \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, p)$$

durch ganze Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu$ zu genügen, die nicht sämtlich verschwinden. Im gegenteiligen Falle sind nach *Hurwitz* die μ Lösungen voneinander *unabhängige* Lösungen.

Es können nicht mehr als $2p^2$ unabhängige Systeme (7) existieren.

Unter der Annahme, daß die μ Systeme (7) unabhängig sind und es nicht möglich ist, mehr als μ unabhängige Systeme von ihnen zu

143) S. hierüber, zur Vervollständigung des Beweises von *A. Hurwitz*, weiter Nr. **14**. Ein algebraisch-geometrischer Beweis ist bei *F. Enriques*, Math. Ann. 85 (1921), p. 198—199 angedeutet und in vollständiger Weise bei *F. Enriques* und *O. Chisini*, „Lezioni", 3, p. 493—496 erörtert worden.

finden, kann man, falls ein anderes System von Lösungen der Gleichungen (3) gegeben ist, die nicht sämtlich verschwindenden ganzen Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu$ finden, so daß

$$\lambda \pi_{kl} = \sum_{\varepsilon=1}^{\mu} \lambda_\varepsilon \pi_{kl}^{(\varepsilon)} \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, p)$$

und λ niemals Null sein kann. In solchem Falle wird man sagen, daß die μ Korrespondenzen $T_1, T_2, \ldots, T_\mu$, die man aus den Gleichungen (7) erhält, eine *Basis* bilden. Die Zahl μ wird *Basiszahl* der auf der Kurve existierenden algebraischen Korrespondenzen genannt. Sie kann $2p^2$ nicht überschreiten.

Man kann die μ Systeme immer in der Weise wählen, daß die Zahl λ gleich der Einheit wird. Dann ergibt sich für jedes Lösungssystem der Gleichungen (3) die Darstellung

$$\pi_{kl} = \sum_{\varepsilon=1}^{\mu} \lambda_\varepsilon \pi_{kl}^{(\varepsilon)} \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, p),$$

worin $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu$ ganze Zahlen sind. In diesem Falle spricht man davon, daß die Korrespondenzen $T_1, T_2, \ldots, T_\mu$ eine *Minimalbasis*[144]) bilden.

Als Anzahl der Koinzidenzen hat *Hurwitz* für jeden Fall die beiden Ausdrücke

$$(8) \qquad \begin{cases} \alpha + \beta - \sum_{i=1}^{p} (h_{ii} + G_{ii}), \\ \alpha + \beta + c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 + \cdots + c_\mu \lambda_\mu \end{cases}$$

gefunden. Im ersten Ausdruck sind h_{ii}, G_{ii} die oben erwähnten ganzen Zahlen, im zweiten $c_1, c_2, \ldots, c_\mu$ und $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu$ ganze Zahlen, von denen die ersten nur von der Beschaffenheit der Kurve, die zweiten einzig und allein von der Korrespondenz abhängen. Für eine Wertigkeitskorrespondenz mit (positiver, Null- oder negativer) Wertigkeit γ reduzieren sich diese beiden Ausdrücke auf $\alpha + \beta + 2\gamma p$, d. h. (für $\gamma \geqq 0$) die *Cayley-Brill*sche Formel. Im Falle singulärer Korrespondenzen kennt man jedoch bis jetzt für die Bestimmung der Zahlen, die in die Ausdrücke (8) eintreten, noch kein Verfahren, das für die Anwendungen von Nutzen sein könnte.

---

144) Die Möglichkeit der Reduktion auf eine Minimalbasis ist von *A. Hurwitz*[138]), p. 582 = Math. Werke 1, p. 184—185, angedeutet, von *F. Klein* und *R. Fricke*[112]), 2, p. 543 ff. bewiesen und als Folgerung allgemeinerer Untersuchungen (von denen in Nr. **20** die Rede sein wird) bei *G. Scorza*, Rend. Circ. mat. Palermo 41 (1916), p. 283 dargetan worden. Ein algebraisch-geometrischer Beweis, der auf der Umkehrung des topologischen Theorems von *Abel* (Nr. **16**) beruht, findet sich bei *F. Enriques* und *O. Chisini*, „Lezioni" 3, p. 505—508.

Ist eine Korrespondenz das Produkt von k Wertigkeitskorrespondenzen mit den Indizes (α_1, β_1), (α_2, β_2), ..., (α_k, β_k) und den beliebigen Wertigkeiten $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$, so ist die Anzahl ihrer Koinzidenzpunkte[145])

$$(9) \qquad \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k + \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_k + (-1)^{k+1} 2p\gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_k.$$

Mit anderen Worten, dies ist die Anzahl der Gruppen von k Punkten $P_1, P_2, \ldots, P_k$, die auf der Kurve liegen und so beschaffen sind, daß in den gegebenen Korrespondenzen P_1 und P_2, P_2 und P_3, ..., P_{k-1} und P_k, P_k und P_1 einander entsprechen.

Infolgedessen gilt für $k = 2$ die *Brill*sche Formel $\alpha\beta' + \alpha'\beta - 2\gamma\gamma' p$ für die Anzahl der gemeinsamen Paare zweier Korrespondenzen $[\alpha, \beta, \gamma]$, $[\alpha', \beta', \gamma']$ für alle Wertigkeitskorrespondenzen.[146])

Allgemeiner hat *A. Hurwitz* die Anzahl der gemeinsamen Paare zweier beliebiger (α, β)- und (α', β')-Korrespondenzen in der Form

$$\alpha\beta' + \alpha'\beta - \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{p}(h_{ik}h'_{ki} + g_{ik}H'_{ki} + H_{ik}g'_{ki} + G_{ik}G'_{ki})$$

angegeben, wobei h, g, H, G die auf die erste Korrespondenz bezüglichen, h', g', H', G' die auf die inverse Korrespondenz der zweiten bezüglichen charakteristischen ganzen Zahlen sind.

H. Burkhardt[147]) hat auf Grund der Resultate von *A. Hurwitz* bewiesen, daß die Anzahl der Koinzidenzen für eine beliebige (α, β)-Korrespondenz $(\alpha + \beta)(p + 1)$ nicht überschreiten kann.

Auf Grund der Formel (9) hat *F. Severi*[148]) die Anzahl der zyklischen Gruppen von gegebenem Index ν für eine auf einer Kurve vom Geschlecht p gegebene Wertigkeitskorrespondenz (α, β) von der Wertigkeit γ (positiv, Null oder negativ) bestimmt. Diese zyklischen

145) In Verbindung mit der Eigenschaft, daß das Produkt zweier Korrespondenzen mit den Wertigkeiten γ und γ' die Wertigkeit $-\gamma\gamma'$ hat, ergibt sich, daß die Wertigkeitskorrespondenzen auf einer Kurve vom Geschlecht $p > 0$ eine aus Untergruppen mit der Wertigkeit $\gamma < 0$, der Wertigkeit $\gamma \leqq 0$ und der Wertigkeit $\gamma = 0$ zusammengesetzte Gruppe bilden, während die Korrespondenzen mit positiver Wertigkeit für sich allein keine Gruppe bilden. S. *F. Enriques* und *O. Chisini*, „Lezioni" 3, p. 485ff., wo diese Eigenschaft auch in bezug auf die Art, nach der sich die auf einer Kurve bestehenden Korrespondenzen auf den Zyklen der zugehörigen *Riemann*schen Fläche verhalten, studiert wird.

146) Für $p = 1$ wird dieses Ergebnis bei *O. Schlesinger*, Math. Ann. 33 (1888), p. 432 mittels der Thetafunktionen abgeleitet.

Aus der *Brill*schen Formel folgt, daß eine irreduzible $[\alpha, \beta, \gamma]$-Korrespondenz auf einer Kurve vom Geschlecht p mit mehr als $\alpha(\alpha - 1) - p\gamma(\gamma + 1)$ Paaren in doppelter Weise entsprechenden Punkten symmetrisch ist. Vgl. *F. Enriquez* und *O. Chisini*, „Lezioni" 3, p. 466.

147) Paris C. R. 126 (1898), p. 1854.

148) S. Anm. 120, p. 88 erste Anführung.

Gruppen von ν Kurvenpunkten sind so beschaffen, daß man bei ν-mal aufeinanderfolgender Anwendung der Korrespondenz auf irgendeinen dieser Punkte wieder zu diesem zurück- und dabei durch jeden anderen Punkt dieser Gruppe je ein einziges Mal hindurchgelangt. Zerlegt man ν in Primfaktoren und ist

$$\nu = \nu_1^{k_1} \nu_2^{k_2} \ldots \nu_\varrho^{k_\varrho},$$

so ist die Anzahl der Gruppen

$$(10)\quad \frac{1}{\nu}\left[\{\nu\} - \sum\left\{\frac{\nu}{\nu_{i_1}}\right\} + \sum\left\{\frac{\nu}{\nu_{i_1}\nu_{i_2}}\right\} - \cdots + (-1)^\varrho\left\{\frac{\nu}{\nu_1 \ldots \nu_\varrho}\right\}\right],$$

wobei die Summen auf alle möglichen einfachen Kombinationen der Primfaktoren von ν ausgedehnt werden und das Symbol $\{\mu\}$ durch

$$\{\mu\} = \alpha^\mu + \beta^\mu + (-1)^{\mu+1} 2\gamma^\mu p$$

definiert ist.

Die Korrespondenzen zwischen zwei Kurven, die durch eine einzige algebraische Gleichung zwischen den Koordinaten zweier entsprechender Punkte (Nr. **10**) dargestellt werden können, haben nach *A. Hurwitz*[149]) immer die Wertigkeit Null oder eine positive Wertigkeit (sind die beiden Kurven voneinander verschieden, so ist die Wertigkeit Null). Umgekehrt kann eine Korrespondenz zwischen zwei Kurven mit der Wertigkeit Null oder einer positiven Wertigkeit immer durch eine einzige Gleichung ausgedrückt werden. Dagegen kann eine Korrespondenz mit negativer Wertigkeit oder eine singuläre Korrespondenz nicht durch eine einzige Gleichung, immer aber durch zwei simultane Gleichungen obengenannter Beschaffenheit dargestellt werden.

Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine (α, β)-Korrespondenz zwischen zwei Kurven vom Geschlecht p und p' durch eine einzige Gleichung bestimmt werden kann, können wir auch folgendermaßen ausdrücken. Die Anzahl der Verzweigungspunkte auf der ersten Kurve muß $2\alpha(p' + \beta - 1)$ sein, woraus folgt, daß in diesem Falle die Anzahl der Verzweigungspunkte der zweiten Kurve $2\beta(p + \alpha - 1)$[150]) ist.

13. Geometrische Behandlung der allgemeinen Korrespondenztheorie nach F. Severi. *F. Severi*[151]) hat die allgemeine Theorie der

149) S. auch *F. Enriques* und *O. Chisini*, „Lezioni" 3, p. 457—462; *F. Severi*, „Trattato" 1_1, p. 197—199.

150) *G. Castelnuovo*, Roma Rend. Acc. Linc. (5) 15^1 (1906), p. 341; s. auch *F. Enriques* und *O. Chisini*. „Lezioni" 3, p. 484—485. Diese Eigenschaft ist nichts anderes als eine andere Form des arithmetischen Kriteriums von *G. Castelnuovo*, von dem in Nr. **34** die Rede sein wird.

151) S. Anm. 2. S. auch „Lezioni", p. 213—243; „Vorlesungen", p. 170—196; „Trattato" 1_1, p. 217—243, wo auch verschiedene Anwendungen gemacht werden. Vgl.

(α, β)-Korrespondenzen auf einer irreduziblen Kurve vom Geschlecht p auf geometrischem Wege völlig neu entwickelt. Der Übergang von seiner Betrachtungsweise zur transzendenten Behandlung von *A. Hurwitz* (Nr. **12**) ist durch das *Abel*sche Theorem gegeben.

Der Kürze und der Deutlichkeit halber ist es zweckmäßig, folgende Bezeichnungen und Konventionen[152]) einzuführen.

Um zu bezeichnen, daß zwei Gruppen A und B von n Kurvenpunkten zu ein und derselben linearen Schar der Ordnung n gehören, d. h. *äquivalent* sind, schreibt man $A \equiv B$. Zwei einer dritten äquivalente Gruppen sind auch untereinander äquivalent.

Die Schreibweise λA, wobei λ eine ganze positive Zahl ist, bezeichnet die Gruppe der Punkte, die sich ergibt, wenn jeder Punkt der Gruppe A λ-mal gezählt wird.

Die durch eine Gruppe A bestimmte Vollschar soll mit $|A|$ bezeichnet werden.

Sind A, B, A', B' Punktgruppen der Kurve, für welche die Äquivalenz

(1) $$A + B' \equiv A' + B$$

besteht, so kann diese auch in der Form

(2) $$A - B \equiv A' - B'$$

geschrieben werden, und zwar auch dann, wenn die Residualschar $|A - B|$ (und daher auch die $|A' - B'|$)[153]) nicht existiert.

Je nachdem die Schar $|A - B|$ existiert oder nicht existiert, spricht man davon, daß das Symbol $A - B$ eine *wirkliche Gruppe*

---

auch *F. Enriques* und *O. Chisini*, „Lezioni" 3, p. 456 ff.; *J. L. Coolidge*, „Alg. pl. curves", p. 121–129.

In „Trattato" 1_1, a. a. O., wird die Theorie von *F. Severi* neu gegeben und vervollständigt und genau die Art und Weise festgelegt, in der die Koinzidenzpunkte in jeder Äquivalenzrelation, in der ihre Gruppe vorkommt, gezählt werden müssen. S. Nr. **17**.

152) Für einige von diesen vgl. auch *G. Castelnuovo*, Rend. Ist. Lomb. (2) 25 (1892), p. 1189. Der Begriff der virtuellen Punktgruppen und linearen Scharen wird von *F. Severi*[2]), p. 7—8; „Lezioni", p. 214—215; „Vorlesungen", p. 171, und vollständiger „Trattato" 1_1, p. 109—110, eingeführt. S. auch *F. Enriques* und *O. Chisini*, „Lezioni" 3, p. 44—45.

Die Begriffe der virtuellen Gruppen und linearen Scharen werden von *F. Severi*, Rend. Ist. Lomb. (2) 38 (1905), p. 859; Atti Ist. Ven. 68^2 (1909), p. 836 durch Einführung der Begriffe der virtuellen Kurven und linearen Systeme auf die Flächen ausgedehnt. Diese sind auch für die Beziehungen zwischen algebraischer Geometrie und Topologie wesentlich, wie sich aus den Untersuchungen von *S. Lefschetz*[2]) ergibt.

153) Für die Begriffe der Vollschar und Residualschar s. III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **25** und **26**.

(*gruppo effettivo*) oder eine *virtuelle Gruppe* (*gruppo virtuale*) darstellt. Im zweiten Falle wird durch die Gleichung (2) eine *Äquivalenz zwischen virtuellen Gruppen* definiert: Diese reduziert sich auf die Äquivalenz (1) zwischen wirklichen Gruppen.

Ist $A \equiv B$, so bezeichnet man die virtuelle Gruppe $A - B$ auch mit dem Symbol 0 und schreibt $A - B \equiv 0$.

Die Gesamtheit aller mit einer gegebenen Gruppe äquivalenten virtuellen Gruppen, ebenso die Gesamtheit aller Symbole vom Typus $A - B$, zwischen denen Beziehungen wie die (2) stattfinden, heißt *virtuelle lineare Vollschar*, und wird mit $|A - B|$ bezeichnet. *Ordnung* einer solchen virtuellen Schar ist die Differenz zwischen den Ordnungen der linearen Scharen $|A|$ und $|B|$. Ist $A \equiv B$, so heißt die virtuelle Schar $|A - B|$, die *lineare Schar Null.*[154])

Bestimmt eine um eine effektive Gruppe vermehrte virtuelle Gruppe eine wirkliche lineare Schar, so wird dieselbe Schar bestimmt, wenn man an Stelle der beiden betrachteten zwei äquivalente Gruppen[155]) setzt.

Aus dem vorhergehenden ergibt sich, daß eine Gruppe in einer Äquivalenz durch bloße Änderung des Vorzeichens von einer Seite zur anderen überführt werden kann. Es folgt weiter, daß mehrere Äquivalenzen auch nach Multiplikation mit willkürlichen (positiven oder negativen) ganzen Zahlen Seite für Seite addiert werden können.

Was die algebraischen Korrespondenzen (beliebiger Beschaffenheit) anbelangt, so ist es angebracht, mit *Summe* und *Produkt* zu arbeiten. Die Summe $T_1 + T_2$ zweier auf einer Kurve gegebener Korrespondenzen T_1 und T_2 ist die (notwendigerweise algebraische) Korrespondenz, die sich ergibt, wenn man jedem Kurvenpunkte die ihm vermöge T_1 und T_2 entsprechenden Punkte zuordnet. Diese Summe ist kommutativ und assoziativ. Das Produkt $T_2 T_1$ entsteht dadurch, daß man erst die einem Punkte der Kurve vermöge T_1 entsprechenden Punkte bestimmt und dann auf jeden dieser Punkte die Korrespondenz T_2 anwendet. Das Produkt ist im allgemeinen nicht kommutativ, wohl aber assoziativ und (bez. der Summe) distributiv.

---

154) Setzen sich A und B aus derselben Anzahl von Punkten zusammen, ohne aber äquivalent zu sein, so ist die Schar $|A - B|$ zwar von der Ordnung Null, nicht aber die lineare Schar Null.

155) Eine virtuelle Gruppe $A - B$ kann daher als ein Operatorsymbol $+ A - B$ betrachtet werden, das bei Anwendung auf eine passende effektive Gruppe G zu einer effektiven linearen Schar $|G + A - B|$ führt.

Der Begriff der virtuellen Gruppen und lineare Scharen ähnelt dem der negativen Zahlen in der Algebra.

Nach diesen Voraussetzungen geht nun *Severi* von der Betrachtung einer Wertigkeitskorrespondenz aus und setzt als Definition der Wertigkeit (vgl. Nr. **12**) fest, daß eine Korrespondenz T zwischen den Punkten einer Kurve vom Geschlecht p die Wertigkeit γ hat, wobei γ eine positive, negative ganze Zahl (oder Null) ist, wenn die identische Gleichung

$$Y + \gamma x \equiv Y' + \gamma x'$$

immer gilt, in der Y und Y' die Gruppen homologer Punkte in T von zwei beliebigen Punkten x und x' der Kurve bedeuten.

Ist $p > 0$, so kann eine Korrespondenz keine zwei verschiedenen Wertigkeiten haben.

Haben zwei Korrespondenzen die Wertigkeiten γ_1 und γ_2, so hat ihre Summe die Wertigkeit $\gamma_1 + \gamma_2$ und ihr Produkt die Wertigkeit $-\gamma_1\gamma_2$.[156])

Die vorhergehenden Operationen wenden wir nun auf Korrespondenzen mit der Wertigkeit Null und involutorische Korrespondenzen mit der Wertigkeit 1 (*elementare* Korrespondenzen) an, in denen zwei, ein und derselben Gruppe einer linearen Schar g_n^1 angehörende Punkte homolog sind. Dann wird bewiesen, daß die inverse Korrespondenz einer mit Wertigkeit ausgestatteten Korrespondenz dieselbe Wertigkeit hat[157]) und auf jeder Kurve Korrespondenzen mit willkürlich gegebener Wertigkeit (positiv, Null oder negativ) existieren.

Außerdem erhält man nicht nur das Korrespondenzprinzip für die Wertigkeitskorrespondenzen, sondern auch die funktionale Bedeutung dieses Prinzips.[158]) Hat nämlich eine Korrespondenz T die Wertig-

---

156) Von dem Begriff der Summe mehrerer Korrespondenzen geht man zu dem Begriff der Korrespondenz kT über, die das Vielfache gemäß einer positiven ganzen Zahl k einer gegebenen Korrespondenz T ist. Hat T die Wertigkeit γ, so hat die Korrespondenz kT die Wertigkeit $k\gamma$. Umgekehrt hat die Korrespondenz T die Wertigkeit γ, wenn kT die Wertigkeit $k\gamma$ hat. S. *F. Severi*, Atti Ist. Ven. 65^2 (1906), p. 634; „Trattato" 1_1, p. 257. — Allgemeiner hat *F. Severi*, Atti Acc. Torino 48 (1913), p. 666 auf geometrischem und transzendentem Wege bewiesen, daß, wenn kT die Wertigkeit γ hat, die Zahl γ ein Vielfaches von k ist, daß die Korrespondenz T auch Wertigkeit hat und diese Wertigkeit $\frac{\gamma}{k}$ ist. S. auch *F. Severi*, „Trattato" 1_1, p. 278—280.

Diese Begriffe treten bei *A. A. Bennett*, Ann. of math. (2) 16 (1914), p. 97; (2) 18 (1916), p. 200; (2) 21 (1919), p. 299 [Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 26 (1920), p. 248] beim Studium der Korrespondenzen in Verbindung mit Schließungsaufgaben auf.

157) Für den Fall einer Null- oder positiven Wertigkeit s. Anm. 121; ein einfacher geometrischer Beweis des Satzes für eine beliebige Wertigkeit bei *F. Severi*[2]), p. 10; „Lezioni", p. 220; „Vorlesungen", p. 175; „Trattato" 1_1, p. 232.

158) *A. Hurwitz*[138]), p. 566—567 = Math. Werke 1, p. 168—169; *F. Severi*[2]), p. 11; „Lezioni", p. 221; „Vorlesungen", p. 176; „Trattato" 1_1, p. 233—235.

keit γ (positiv, negativ oder Null), so stellt sich in der Tat heraus, daß die Korrespondenzformel $\alpha + \beta + 2\gamma p$ die zahlenmäßige Auslegung folgenden Satzes ist: Die Gruppe U der Koinzidenzpunkte ist äquivalent der Summe der Gruppen Y und X, die die homologen Punkte eines beliebigen Kurvenpunktes a in T und der inversen Korrespondenz T^{-1} enthalten, zusammen mit γ kanonischen Gruppen und dem 2γ-mal gezählten Punkt a. Symbolisch geschrieben lautet der Satz:

$$U \equiv X + Y + \gamma K + 2\gamma a,$$

worin K eine kanonische Gruppe bedeutet.

Zur Bestimmung *aller* algebraischer Korrespondenzen auf einer gegebenen Kurve und zum allgemeinsten Korrespondenzprinzip gelangt man durch Einführung des Begriffs der *Abhängigkeit* zwischen mehreren Korrespondenzen. Man sagt, daß die auf der Kurve gegebenen Korrespondenzen $T_1, T_2, \ldots, T_k$ (gemäß den Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$) voneinander *abhängig* sind (auch daß eine Korrespondenz von den übrigen abhängt), wenn es k so beschaffene ganze Zahlen (die positiv, Null oder negativ, nicht aber alle gleich Null sein können) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ gibt, daß sich, falls man mit Y_i die Gruppe der homologen Punkte eines beliebigen Punktes a in T_i bezeichnet, die Gruppe $\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + \cdots + \lambda_k Y_k$ bei Änderung von a in eine (wirkliche oder virtuelle) lineare Schar verwandelt. In Symbolen ausgedrückt muß sich, wenn Y_i' die Gruppe der homologen Punkte eines anderen Punktes a' in T_i genannt wird, ergeben:

$$\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + \cdots + \lambda_k Y_k \equiv \lambda_1 Y_1' + \lambda_2 Y_2' + \cdots + \lambda_k Y_k'.$$

Ist eine derartige Beziehung nur für solche Werte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ möglich, die alle gleich Null sind, so spricht man davon, daß die k Korrespondenzen *unabhängig* sind.

Sind die Korrespondenzen $T_1, T_2, \ldots, T_k$ gemäß den Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ voneinander abhängig, so sind auch ihre inversen Korrespondenzen gemäß diesen Zahlen voneinander abhängig.

Zwei Wertigkeitskorrespondenzen sind immer voneinander abhängig. Jede Wertigkeitskorrespondenz ist von der Identität abhängig; umgekehrt ist jede von der Identität abhängige Korrespondenz eine Wertigkeitskorrespondenz.[159])

Nach diesen Voraussetzungen ist die funktionale Verbindung zwischen den Gruppen der Koinzidenzpunkte mehrerer untereinander abhängiger Korrespondenzen durch folgenden Satz ausgedrückt: Ent-

159) Für diese Umkehrung s. *F. Severi,* Atti Acc. Torino 48 (1913), p. 660. Ein anderer Beweis bei *C. Rosati,* Roma Rend Acc. Linc. (5) 22^2 (1913), p. 387.

sprechen in den gemäß den Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ voneinander abhängigen Korrespondenzen $T_1, T_2, \ldots, T_k$, dem Punkte a die Punktgruppen $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$, während in den inversen Korrespondenzen diesem Punkte die Gruppen $X_1, X_2, \ldots, X_k$ entsprechen, und bezeichnet man mit $U_1, U_2, \ldots, U_k$ die Gruppen der Koinzidenzpunkte in den $T_1, T_2, \ldots, T_k$, so ergibt sich

$$(3) \qquad \lambda_1 U_1 + \cdots + \lambda_k U_k \equiv \lambda_1(X_1 + Y_1) + \cdots + \lambda_k(X_k + Y_k).$$

Nennt man α_i, β_i, u_i die Anzahlen der Punkte von X_i, Y_i, U_i derart, daß die Korrespondenz T_i die Indizes α_i, β_i und u_i Koinzidenzpunkte hat, so ist die zahlenmäßige Deutung der vorhergehenden Beziehung durch die Formel

$$(4) \qquad \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k = \lambda_1(\alpha_1 + \beta_1) + \cdots + \lambda_k(\alpha_k + \beta_k)$$

gegeben, die, falls alle $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ positiv sind, mit der *Cayley*schen Formel (2) in Nr. **10** übereinstimmt.[160])

F. Severi[161]) beweist, daß vermöge des *Abel*schen Theorems der eben aufgestellte Begriff der voneinander abhängigen oder unabhängigen Korrespondenzen mit dem auf transzendentem Wege gegebenen Begriff von *A. Hurwitz* (Nr. **12**) übereinstimmt. *F. Severi* beweist ferner auf Grund der Entwicklungen von *Hurwitz*, daß man auf jeder Kurve vom Geschlecht p eine endliche Anzahl μ ($\leqq 2p^2$) so beschaffener

160) Wie *F. Severi*, „Trattato" 1_1, p. 238—239 bemerkt hat, können die Formeln (3) und (4) auch auf den Fall ausgedehnt werden, daß irgendwelche von den k gegebenen Korrespondenzen unendlichviele Koinzidenzpunkte haben. Trifft dies z. B. für die T_1 und T_2 zu, so ist jede dieser Korrespondenzen reduzibel und zerlegt sich in die Summe einer Korrespondenz (die reduzibel sein kann) mit einer endlichen Anzahl von Koinzidenzen und die, eine gewisse Anzahl mal gezählte Identität E. Entsprechen vermöge T_1 dem allgemeinen Punkt a der Kurve derselbe μ_1-mal gezählte Punkt und $\beta_1 - \mu_1$ andere von a verschiedene Punkte, so sind diese Punkte homologe Punkte von a in einer Korrespondenz T_1' von der Art, daß

$$T_1 = T_1' + \mu_1 E, \quad T_1^{-1} = T_1'^{-1} + \mu_1 E.$$

Ähnlich liefert die Korrespondenz T_2

$$T_2 = T_2' + \mu_2 E, \quad T_2^{-1} = T_2'^{-1} + \mu_2 E.$$

Nennt man U_1' und U_2' die Gruppen der Koinzidenzpunkte von T_1' und T_2', so ergibt sich die Gleichung

$$\lambda_1 U_1' + \lambda_2 U_2' + \lambda_3 U_3 + \cdots + \lambda_k U_k \equiv \lambda_1 (X_1' + Y_1') + \lambda_2 (X_2' + Y_2') + \lambda_3 (X_3 + Y_3) \\ + \cdots + \lambda_k (X_k + Y_k) + 2(\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2) a + (\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2) K,$$

in der K eine kanonische Gruppe der Kurve ist. Die entsprechende numerische Relation ist

$$\lambda_1 u_1' + \lambda_2 u_2' + \lambda_3 u_3 + \cdots + \lambda_k u_k = \lambda_1 (\alpha_1 + \beta_1) + \lambda_2 (\alpha_2 + \beta_2) + \cdots + \lambda_k (\alpha_k + \beta_k) \\ + 2(\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2) p.$$

161) S. [2]), p. 16—19.

unabhängiger Korrespondenzen $T_1, T_2, \ldots, T_\mu$ festlegen kann, daß jede andere Korrespondenz von diesen abhängig ist. Man gelangt auf die Minimalbasis[144]) indem man zeigt, daß die $T_1, T_2, \ldots, T_\mu$ in der Weise ausgewählt werden können, daß, wenn T eine beliebige andere Korrespondenz ist, die $T, T_1, T_2, \ldots, T_\mu$ gemäß den Zahlen $1, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu$ voneinander abhängig sind. Durch die Korrespondenz T werden die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu$ bestimmt und man schreibt

$$T \equiv \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 + \cdots + \lambda_\mu T_\mu.$$

Handelt es sich um eine Kurve mit allgemeinen Moduln, so ergibt sich $\mu = 1$, und als Minimalbasis kann die Identität oder irgendeine beliebige Elementarkorrespondenz angenommen werden.

Hiernach ergibt sich das allgemeine Korrespondenzprinzip auf einer beliebigen Kurve sofort als die zweite der beiden Formen (8) in Nr. **12**, weil, falls T_i die Indizes α_i, β_i und u_i Koinzidenzpunkte, und T die Indizes α, β und u Koinzidenzpunkte hat, nach Gleichung (4)

$$u = \alpha + \beta + c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \cdots + c_\mu\lambda_\mu$$

gilt, wo

$$c_i = \alpha_i + \beta_i - u_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu)$$

ist, und die Zahlen c_i daher von der Kurve und nicht der Korrespondenz abhängen.

14. Fortsetzung: Die algebraischen Korrespondenzen zwischen den Punkten einer in einem linearen System veränderlichen Kurve auf einer algebraischen Fläche. Nach einer Bemerkung von *F. Severi*[162]) läßt sich die Eigenschaft (Nr. **12**), nach der eine singuläre Korrespondenz nur dann existiert, falls die Moduln der Kurve speziell sind (eine Eigenschaft übrigens, die bei *A. Hurwitz* rein zufällig auftritt), nur dann vollständig beweisen, wenn man zeigt, daß die in Nr. **12** erwähnten p^2 quadratischen Beziehungen (3) gänzlich unabhängig von den $\frac{(p-2)(p-3)}{2}$ Relationen sind, die für $p > 3$ und beliebige Kurven die Perioden der Normalintegrale erster Gattung

162) S. Anm. 141.

F. Severi, Roma Rend. Acc. Linc. (6) 6 (1927), p. 435 hat verschiedene seiner Beweispunkte vereinfacht und, wie im Text, die Annahmen, auf denen der Beweis beruht, genau angegeben.

Zu analogen Folgerungen ist unabhängig *O. Zariski,* Amer. J. of math. 50 (1928), p. 86 gelangt.

Zwei andere Beweise des Satzes von *A. Hurwitz* hat *S. Lefschetz* gegeben, Amer. J. of math. 50 (1928), p. 159, und insbesondere festgestellt daß auf einer allgemeinen hyperelliptischen Kurve keine singulären Korrespondenzen existieren.

verbinden.[163]) Im Hinblick auf dieses Ziel hat *Severi* bewiesen, daß Kurven vom Geschlechte p ohne singuläre Korrespondenzen für jeden Wert von p existieren. Dieses Ergebnis ist nichts anderes als ein Sonderfall des folgenden, das *F. Severi* sowohl auf transzendentem wie geometrischem Wege erhalten hat. Ist auf einer regulären Fläche ein allgemeines Netz von Kurven gegeben, so besitzt die allgemeine Kurve des Netzes nur Wertigkeitskorrespondenzen (besondere Kurven des Netzes können aber natürlich sehr wohl singuläre Korrespondenzen besitzen).[164]) Auf der Fläche kann ein Netz von Kurven mit singulären Korrespondenzen nur dann existieren, wenn die für das Netz charakteristische lineare ∞^1-Schar [III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **36**; III C 6 b (*G. Castelnuovo* und *F. Enriques*), Nr. **16**] durch irgendeine singuläre Korrespondenz zusammengesetzt wird.[165])

---

163) Diese Beziehungen kennt man nur im Falle $p = 4$, wo sie sich auf eine einzige reduzieren. S. *F. Schottky,* J. f. Math. 102 (1886), p. 321; Acta math. 27 (1903), p 235; *H. Poincaré,* J. math. pures appl. (5) 1 (1895), p. 292; Auszug Paris C. R. 120 (1895), p. 242. Vgl. II B 7 (*A. Krazer* und *W. Wirtinger*), Nr. **46** und **92**. — Über diese Beziehungen in Verbindung mit der *Hurwitz*schen Korrespondenztheorie s. auch Nr. **38**.

164) Daß dies eine charakteristische Eigenschaft der regulären Flächen ist, geht unmittelbar aus der in Anm. 141 angeführten Arbeit, p. 533—535, von *F. Severi* hervor. S. auch *R. Torelli,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 22^2 (1913), p. 478; Atti Acc. Torino 49 (1914), Anm. auf p. 858.

165) Der Begriff der Zusammensetzung einer linearen Schar g_n^1 durch eine Involution [III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **24**] ist nach *F. Severi,* Roma Rend. Acc. Linc. (6) 6 (1927), p. 435, folgender Erweiterung fähig. Es sei P ein auf C beweglicher Punkt und $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ die $n-1$ Punkte, die zusammen mit P die durch P bestimmte Gruppe von g_n^1 bilden. Es kann nun vorkommen, daß, wenn P auf C alle möglichen geschlossenen Zyklen unter Ausgang von einer gegebenen vorbestimmten Lage wieder zu dieser zurück durchläuft, der Punkt P_1 z. B., nur mit *gewissen* jener Punkte $P_2, \ldots, P_{n-1}$ vertauschbar ist. In diesem Falle werden wir die g_n^1 als *reduzibel* bezeichnen. Faßt man nun die durch den Umlauf von P vertauschbaren Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_k$ als homologe Punkte von P auf, so ergibt sich eine algebraische Korrespondenz, deren einer Index k ist; die g_n^1 ist nach *Severi* durch diese Korrespondenz zusammengesetzt. Kurz, eine g_n^1 ist durch eine Korrespondenz T zusammengesetzt, wenn sich alle einem Punkte P von C homologen Punkte in T in der von P bestimmten Gruppe von g_n^1 befinden.

Der Fall, daß g_n^1 durch einen Teil von T zusammengesetzt wird, unterscheidet sich nicht vom allgemeinen Falle, weil dieser Teil von T eine Korrespondenz S bildet (wobei $T = S + S'$), durch welche die g_n^1 zusammengesetzt wird.

F. Severi, a. a. O., hat auch gefunden, daß auf einer regulären Fläche die allgemeine Kurve eines einfachen irreduziblen linearen Systems (d. h. derart, daß sich seine charakteristische Schar nicht durch eine Involution zusammensetzt) von der Dimension $r \geq 2$, welche zwei Kurven mit einer einfachen Berührung

Da die Ebene eine besondere reguläre Fläche ist, so gelten diese Eigenschaften auch für die irreduziblen linearen mindestens ∞^2-Systeme ebener Kurven.[166])

Daraus folgt, daß sich auf einer Kurve mit allgemeinen Moduln, von beliebigem Geschlecht nur Wertigkeitskorrespondenzen befinden.[167])

F. Severi hat sich auch damit beschäftigt, die Korrespondenzen zwischen den Punkten einer Kurve auf einer irregulären Fläche zu charakterisieren. Nachdem er aus der Anzahl der singulären Korrespondenzen gewisse Korrespondenzen ausgeschlossen hat, die von ihm als *mit doppelter Wertigkeit* (s. Nr. **24**) bezeichnet werden, zeigt er, daß die kontinuierlichen Systeme singulärer Korrespondenzen, die zwischen den Punkten der allgemeinen Kurve eines linearen mindestens ∞^2-Systems $|C|$ auf einer irregulären Fläche F bestehen, eineindeutig den kontinuierlichen Systemen singulärer Korrespondenzen zwischen den Punkten der auf F bezüglichen *Picard*schen Mannigfaltigkeit V [III C 6 b (*G. Castelnuovo* und *F. Enriques*), Nr. **19**], zugeordnet sind.

Infolgedessen besitzt die allgemeine Kurve von $|C|$, falls die Moduln von V allgemein sind, nur Korrespondenzen mit (einfacher oder doppelter) Wertigkeit.

Es ergibt sich auch, daß die Anzahl der unabhängigen Korrespondenzen, die auf der allgemeinen Kurve von $|C|$ existieren, $2q^2+1$ nicht überschreiten kann, wobei q (>0) die Irregularität von F ist [III C 6 b (*G. Castelnuovo* und *F. Enriques*), Nr. **18**].

Die geometrische Behandlung dieses Gegenstandes hat *Severi* zu anderen Eigenschaften geführt, unter denen die folgenden erwähnt sein mögen. Besteht auf der allgemeinen Kurve vom Geschlecht p eines unendlichen linearen Systems $|C|$ auf einer (regulären oder irregulären) Fläche irgendeine singuläre Korrespondenz, so kann man auf jeder Kurve C ein kontinuierliches System singulärer Korrespondenzen rational

---

außer in den Basispunkten enthält, frei von singulären Korrespondenzen ist. Insbesondere enthält die allgemeine Kurve eines einfachen irreduziblen linearen ∞^r-Systems $(r \geqq 3)$ auf einer regulären Fläche nur Wertigkeitskorrespondenzen.

166) Es gibt Beispiele von Netzen ebener Kurven, die alle mit singulären Korrespondenzen ausgestattet sind, wie z. B. das aus den äquianharmonischen kubischen Kurven mit gemeinsamem polaren Dreieck gebildete Netz.

167) Nicht immer haben die veränderlichen Kurven eines linearen Systems auf einer regulären Fläche allgemeine Moduln. So haben die in unendlichen linearen Systemen veränderlichen ebenen Kurven m^{ter} Ordnung vom Geschlecht $p > \frac{3}{2}(m-2)$ keine allgemeinen Moduln.

Nach *F. Severi,* Roma Rend. Acc. Linc. (6) 7 (1928), p. 10—11, besitzt die Kurve auf einer algebraischen Fläche, die der Ort der Berührungspunkte der Kurven zweier allgemeiner linearer Büschel ist, keine allgemeinen Moduln.

bestimmen. Eine einzige singuläre Korrespondenz kann man auf der besagten allgemeinen Kurve bestimmen, wenn auf dieser Kurve ein Punkt und eine nicht speziale Gruppe von p Punkten rational gegeben sind.

In dieser geometrischen Behandlung spielt eine wesentliche Rolle die Ende von Nr. **34** erwähnte Ungleichheit, die ein arithmetisches Kriterium zur Kennzeichnung der Wertigkeitskorrespondenzen liefert.

15. Wertigkeit einer Korrespondenz nach H. Burkhardt und H. G. Zeuthen. Die positive oder negative Wertigkeit einer Wertigkeitskorrespondenz kann (aber nur auf einer Kurve mit allgemeinen Moduln) nach *H. G. Zeuthen*[168]) mit Hilfe der Formel für die Anzahl der Koinzidenzpunkte bestimmt werden. Nehmen wir die ebene Kurve als Modell, so ist die Zahl 2γ als die Anzahl der Koinzidenzen definiert, die man bei Einführung eines neuen Doppelpunktes auf der Kurve verliert oder erhält (je nachdem $\gamma > 0$ oder $\gamma < 0$).

Um in besonderen Fällen wirkliche Abzählungen zu erreichen, haben *H. Burkhardt*[169]) und *H. G. Zeuthen*[170]) es für zweckmäßig gehalten, jeder beliebigen Korrespondenz zwischen zwei Punkten einer Kurve eine Wertigkeit beizulegen. Diese Wertigkeit γ wird mittels der Gleichung (1) in Nr. **10** definiert und kann daher auch einen negativen oder gebrochenen Wert haben. Für die zusammengesetzten Korrespondenzen behält die *Cayley*sche Formel (2) in Nr. **10** ihre Gültigkeit. Wenn sich dann die Gruppe der Punkte P_2, die ein und demselben Punkt P_1 in einer Korrespondenz von der Wertigkeit γ entsprechen, algebraisch so in kleinere Gruppen spaltet, daß i' von diesen Punkten auf jeden Punkt P_2' einer Gruppe, i'' auf jeden Punkt P_2'' einer

---

168) Math. Ann. 40 (1891), p. 107.

169) Paris C. R. 126 (1898), p. 1854.

170) Vgl. „Lehrbuch", p. 205—263, wo zahlreiche Anwendungen des *Cayley-Brill*schen Korrespondenzprinzips (Nr. **10**) gemacht und auch solche Korrespondenzen betrachtet werden, deren Wertigkeit negativ oder gebrochen ist. Von diesen Anwendungen führen wir an: die Anwendungen auf die Regelflächen, auf die singulären und nichtsingulären eineindeutigen Korrespondenzen auf einer elliptischen Kurve (Nr. **43**) und auf die *Steiner*schen Polygone [III C 5 (*G. Kohn*), Nr. **39**], auf die Ableitung der *Plücker*schen Formeln [III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **8**], auf das Problem der spezialen Gruppen auf einer gegebenen Kurve [a. a. O., Nr. **28**], auf Berührungsaufgaben, insbesondere die Ableitung der Formel von *de Jonquières* [s. Anm. 125], auf die zwei Kurven ein- und umbeschriebener Vielecke, auf die mehrfachen Sekanten einer algebraischen Raumkurve [III C 9 (*K. Rohn* und *L. Berzolari*), Nr. **23**]. Weitere Anwendungen auf Berührungsprobleme p. 300—306, 338—340. Über das Problem der Bestimmung der Dreiecke, die einer algebraischen ebenen Kurve gleichzeitig ein- und umbeschrieben sind, s. auch *H. G. Zeuthen,* Congrès des Math. à Stockholm 1909, p. 40.

anderen Gruppe und so weiter fallen, und wenn die Korrespondenzen zwischen P_1 und P_2', zwischen P_1 und P_2'', ... die Wertigkeiten $\gamma', \gamma'', \ldots$ haben, so gilt:

$$\gamma = i'\gamma' + i''\gamma'' + \cdots.$$

So sind z. B. die Wertigkeiten der singulären Korrespondenzen auf einer harmonischen oder äquianharmonischen elliptischen Kurve (Nr. **43**) 0, und $\frac{1}{2}$ oder $-\frac{1}{2}$.

16. Die algebraischen Korrespondenzen zwischen algebraischen Kurven unter dem Gesichtspunkt der Analysis situs. Die *Analysis situs* liefert beachtenswerte Untersuchungsmittel auch für die Theorie der algebraischen Korrespondenzen zwischen algebraischen Kurven.[171])

Von den Wertigkeitskorrespondenzen kann nach *C. Rosati*[172]) folgende topologische Deutung gegeben werden: Hat man auf einer Kurve C eine Korrespondenz T mit Wertigkeit γ, und beschreibt ein Punkt P auf der *Riemann*schen Bildfläche von C einen beliebigen Zyklus (Kreis, Ringweg) σ, so beschreiben seine entsprechenden Punkte in T und T^{-1} zusammen einen Zyklus, der $-\gamma\sigma$, d. h. dem $|\gamma|$-mal im selben oder entgegengesetzten Sinne, je nachdem γ negativ oder positiv ist, durchlaufenen Zyklus σ homolog ist [im Sinne von *H. Poincaré*: vgl. III A B 3 (*M. Dehn* und *P. Heegaard*), Grundlagen, Nr. **1**; A, Nr. **3**].

C. Rosati[172]) hat das *Abel*sche Theorem topologisch gedeutet, *O. Chisini*[173]) im Anschluß daran das *Cayley-Brill*sche Korrespondenzprinzip durch die Methoden der Analysis situs[174]) begründet.

---

171) Ein Studium der Korrespondenzen unter diesem Gesichtspunkt bei *F. Enriques* und *O. Chisini*, „Lezioni" 3, p. 485—509. Vgl. auch *J. W. Alexander*, Trans. Amer. math. Soc. 25 (1923), p. 173.

172) Roma Rend. Acc. Linc. (5) 22^2 (1913), p. 386—387. S. auch *O. Chisini*[173]), p. 557; *F. Enriques* und *O. Chisini*, „Lezioni" 3, p. 489.

173) Rend. Ist. Lomb. (2) 54 (1921), p. 552.

174) Das *Abel*sche Theorem besagt [II B 2 (*W. Wirtinger*), Nr. **41—44**; III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **33**]: Auf einer Kurve vom Geschlecht p bewegt sich eine variable Punktgruppe G_n dann und nur dann innerhalb einer linearen Schar, wenn für jedes der p Integrale 1. Gattung die Summe der Werte, die es in den n Punkten der Gruppe G_n annimmt, konstant ist.

Es ergibt sich, daß der Satz vom Gesichtspunkt der Analysis situs aus wie folgt ausgedrückt werden kann. Auf einer algebraischen Kurve f ist jede algebraische ∞^1-Schar s_n von Gruppen G_n zu n Punkten, die einer linearen Schar g_n n^{ter} Ordnung angehören, vom *Zyklus Null*, d. h., wenn G_n bei Änderung innerhalb s_n und daher innerhalb g_n auf sich zurückgeht, ist die Summe der von den Punkten von G_n auf der zu f gehörigen *Riemann*schen Fläche R durchlaufenen Zyklen homolog zu einem Zyklus Null. Umgekehrt gehört jede algebraische ∞^1-Schar s_n von Gruppen G_n zu n Punkten von f, die vom Zyklus Null

Die allgemeinsten stetigen Korrespondenzen auf einer Mannigfaltigkeit von beliebiger Dimension, und ihre Koinzidenzen, wurden vom Gesichtspunkt der Analysis situs eingehend von *S. Lefschetz*[175]) studiert, der dabei die Ergebnisse von *A. Hurwitz* und *F. Severi* als besondere Fälle abgeleitet hat. *Lefschetz* hat eine stetige Transformation einer zusammenhängenden geschlossenen Mannigfaltigkeit M_k von k Dimensionen in eine andere (von M_k verschiedene oder nicht verschiedene) Mannigfaltigkeit M'_k als einen Zyklus von k Dimensionen innerhalb der Mannigfaltigkeit W_{2k} von $2k$ Dimensionen betrachtet, die aus den Paaren der Punkte von M_k und M'_k besteht. Die *algebraischen* Zahlen der Schnitte der k-dimensionalen Zyklen innerhalb W_{2k}[176]) liefern dann wichtige Ergebnisse über die zwei stetigen Transformationen gemeinsamen Punktepaare, insbesondere die Koinzidenzpunkte einer stetigen Transformation einer Mannigfaltigkeit M_k in sich.

Im Falle einer algebraischen Korrespondenz zwischen zwei voneinander verschiedenen oder nicht verschiedenen algebraischen Kurven C und C' geht *S. Lefschetz*[177]) von der vierdimensionalen *Riemann*schen

---

ist, einer linearen Schar n^{ter} Ordnung an, d. h. ist aus äquivalenten Gruppen aufgebaut. Für diese zweite Eigenschaft hat *O. Chisini* zwei topologische Beweise gegeben, die auf der Anwendung des Satzes von *G. Castelnuovo* beruhen, von dem in Nr. **34** die Rede sein wird; s. auch *F. Enriques* und *O. Chisini*, „Lezioni" 3, p. 499—505. Für den Fall einer Kurve mit allgemeinen Moduln hat *F. Enriques*, Math. Ann. 85 (1921), p. 199, wiedergegeben bei *F. Enriques* und *O. Chisini*, „Lezioni" 3, p. 491—493, einen Beweis gegeben, der auf dem Prinzip der Ausartung beruht, d. h. man läßt die gegebene ebene Kurve f vom Geschlecht p durch Zufügung eines neuen Doppelpunktes in eine solche vom Geschlecht $p-1$ ausarten. Nach derselben Methode hat *F. Enriques* angegeben, wie man die Fundamentalsätze der Geometrie auf einer algebraischen Kurve (Restsatz, Satz von *Riemann-Roch* usw.), und ebenso die Theorie der algebraischen Korrespondenzen auf einer algebraischen Kurve, erhalten kann.

175) S. das Zitat in Anm. 2.

176) D. h. mit ihren Vorzeichen, nach Art von *L. Kronecker* und *H. Poincaré*, betrachtete Schnitte. Die Ergebnisse der *Kronecker*schen „Charakteristikentheorie" [I B 3a (*C. Runge*), Nr. 7] sind für diese Fragen von wesentlicher Wichtigkeit.

S. außer den in Anm. 2 zitierten Arbeiten von *S. Lefschetz* über diese Schnitte *S. Lefschetz*, „L'anal. situs et la géom. alg."[114]), p. 10—16; „Topology"[2]), p. 161ff. (wo man auch andere Zitate findet); *F. Severi*, „Conf. di geom. alg."[6]), p. 322—332; *H. Hopf*, Proc. Nat. Acad. of Sciences 14 (1928), p. 149; Math. Ztschr. 29 (1928), p. 493; Gött. Nachr. 1928, p. 127. S. auch den Bericht über die kombinatorische Topologie von *B. L. van der Waerden*, Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 39 (1930), p. 121.

177) S. die Zitate in Anm. 2, besonders Proc. Nat. Acad. of Sciences 12 (1926), p. 737; Ann. of math. (2) 28 (1927), p. 342; „Topology", p. 391—392.

Mannigfaltigkeit R[178]) aus, die sich auf die Fläche bezieht, deren Punkte die Punktepaare von C und C' sind (Nr. **1** und **9**). Eine algebraische Korrespondenz zwischen C und C' wird dann durch einen zweidimensionalen Zyklus Γ in R dargestellt und *S. Lefschetz* beweist, daß die Indizes der Korrespondenz und ihre charakteristischen ganzen Zahlen die Koeffizienten der linearen Kombination sind, durch die sich Γ mittels der Zyklen eines Fundamentalsystems ausdrückt. Hieraus leitet *Lefschetz* genau die Ergebnisse von *A. Hurwitz* und *F. Severi* ab.

Vom Gesichtspunkt der Analysis situs aus wurde das Korrespondenzprinzip für beliebige, auch singuläre, algebraische (und sogar auch nicht algebraische) Korrespondenzen auch von *O. Chisini*[179]) begründet, der als Ausgangspunkt eine *Riemann*sche Fläche R vom Geschlecht p wählt. A_i, B_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ seien die Paare der Rückkehrschnitte von R, und zwischen den Punkten von R sei eine stetige Korrespondenz T mit den Indizes α, β gegeben, die eine infinitesimale Fläche in eine andere infinitesimale Fläche transformiert, wobei der Drehungssinn um die allgemeinen Paare entsprechender Punkte gewahrt bleibt. Die Korrespondenz T läßt einem jeden der p Rückkehrschnitte A_i eine Linie entsprechen, die topologisch homolog ist zu

$$\sum_{r=1}^{p} a_{ir} A_r + \sum_{r=1}^{p} b_{ir} B_r,$$

während die inverse Korrespondenz T^{-1} ebendiesem A_i eine Linie entsprechen läßt, die homolog ist zu

$$\sum_{r=1}^{p} a'_{ir} A_r + \sum_{r=1}^{p} b'_{ir} B_r.$$

Dann ist die Anzahl u der Koinzidenzpunkte von T ausgedrückt durch

$$u = \alpha + \beta - \sum_{i=1}^{p} (a_{ii} + a'_{ii}).$$

---

178) Vgl. Anm. 114. — Ist eine algebraische irreduzible Mannigfaltigkeit M von k Dimensionen gegeben, so bezeichnet man als auf diese bezügliche *Riemannsche Mannigfaltigkeit,* eine reelle (nicht notwendigerweise algebraische) Mannigfaltigkeit R von $2k$ Dimensionen, deren reelle Punkte in eineindeutiger und stetiger Korrespondenz mit den komplexen Punkten von M stehen. Ist M frei von mehrfachen Punkten, so fügt man die Bedingung hinzu, daß die eineindeutige Korrespondenz zwischen M und R ohne Ausnahmen sei. S. *F. Severi,* „Conf. di geom. alg.“ [6]), p. 75—84, wo die Existenz einer Mannigfaltigkeit R durch effektive Konstruktion eines (algebraischen) Modelles bewiesen wird.

Über die topologischen Eigenschaften der *Riemann*schen Mannigfaltigkeiten s. *S. Lefschetz,* „L'anal. situs et la géom. alg.“ [114]), p. 17 ff.; *F. Severi,* a. a. O., p. 332—343.

179) Rend. Ist. Lomb. (2) 57 (1924), p. 481. Für $p = 0$ vgl. *J. Rey Pastor*[46]), „Fundamentos ...“, p. 385—386.

Für die Korrespondenzen mit Wertigkeit γ ergibt sich:

$$a_{ir} = b_{ir} = a'_{ir} = b'_{ir} = 0 \quad \text{für} \quad i \neq r,$$
$$b_{ii} = b'_{ii} = 0, \quad a_{ii} = a'_{ii} = -\gamma$$

und man erhält die Formel von *Cayley-Brill.*

17. Multiplizität eines Koinzidenzpunktes in der Gruppe der Koinzidenzpunkte einer algebraischen Korrespondenz auf einer algebraischen Kurve; Regel von H. G. Zeuthen. Damit die Korrespondenzprinzipien auf einer algebraischen Kurve einen genauen Sinn haben, ist notwendig, daß jeder Koinzidenzpunkt einer auf einer solchen Kurve gegebenen algebraischen Korrespondenz eine ganz bestimmte Anzahl mal gezählt wird. Zu diesem Zwecke hat *H. G. Zeuthen*[180]) die von ihm angegebene Regel (Nr. **6**) für den Fall des *Chasles*schen Korrespondenzprinzips auf Kurven beliebigen Geschlechtes übertragen.

F. Severi hat weiterhin den Begriff der Multiplizität eines Koinzidenzpunktes und die Eigenschaft der Invarianz der Gruppe der Koinzidenzpunkte gegenüber birationalen Transformationen der Kurve festgelegt, wobei er zunächst[181]) den Fall der Korrespondenzen mit der Wertigkeit Null behandelt.

Es ergibt sich, daß jede Korrespondenz T von dieser Beschaffenheit, mit den Indizes α, β, auf einer Kurve C einem kontinuierlichen System von Korrespondenzen mit der Wertigkeit Null und den Indizes α, β angehört. Die allgemeine Korrespondenz S dieses Systems hat $\alpha + \beta$ verschiedene Koinzidenzpunkte; strebt S gegen T, so wird die Multiplizität eines Koinzidenzpunktes O von T, dem Ursprung eines bestimmten Zweiges δ von C, als Anzahl der Koinzidenzpunkte von S definiert, die auf δ gegen O streben. Daraus erhellt ohne weiteres die Invarianz der Multiplizität des Koinzidenzpunktes bezüglich der birationalen Transformationen der Kurve.

Um den Wert der Multiplizität des Koinzidenzpunktes O nach der Regel von *H. G. Zeuthen* zu bestimmen, ist es zweckmäßig, C frei von superlinearen Zweigen anzunehmen. Dann zählt O als Ursprung eines bestimmten Zweiges von C unter den Koinzidenzpunkten der Korrespondenz so oft, als die Summe der infinitesimalen Ordnungen der Abstände zwischen einem Punkte P des Zweigs und der ihm entsprechenden, dort veränderlichen Punkte beträgt, wenn man den Abstand OP als unendlich klein 1. Ordnung annimmt.

Um diese Ergebnisse auch auf eine beliebige algebraische Korrespondenz zwischen den Punkten einer Kurve C auszudehnen, benutzt

180) Math. Ann. 40 (1891), p. 99.

181) „Trattato“ 1_1, p. 220—228.

F. Severi[182]) die Betrachtung der *Komplementärkorrespondenz* einer gegebenen Korrespondenz, die er schon für einen anderen Zweck eingeführt hat.[183])

Es sei T eine beliebige (α, β)-Korrespondenz zwischen zwei voneinander verschiedenen oder nicht verschiedenen Kurven C und C' vom Geschlecht p und p', und Y die Gruppe der Punkte von C', die vermöge T einem Punkte x von C entsprechen. Ist auf C' eine allgemeine lineare Schar $g^{\beta}_{\beta+p'}$ gegeben, so lassen wir mit dem Punkte x, den Rest der Gruppe Y in bezug auf diese Schar korrespondieren. In der so erhaltenen neuen Korrespondenz S zwischen C und C' entspricht dem Punkt x von C eine nicht speziale Gruppe von p' Punkten auf C', während einem allgemeinen Punkte von C' vermöge der Korrespondenz S^{-1} eine bestimmte Zahl α' von Punkten x auf C entsprechen. Diese Korrespondenz S heißt *Komplementärkorrespondenz* von T.

Eine weitere Komplementärkorrespondenz Σ kann man durch Vertauschung der Rollen der Kurven C und C' definieren und erhält als ersten Index p.[184])

Die Korrespondenz S ist, wie die $g^{\beta}_{\beta+p'}$ von C', in einem kontinuierlichen $\infty^{p'}$-System, die Korrespondenz Σ in einem kontinuierlichen ∞^{p}-System veränderlich.

Bei der hier behandelten Frage darf angenommen werden, daß die Kurve C' mit C zusammenfällt und somit $p = p'$ ist. Das kontinuierliche System, in dem S veränderlich ist, wird durch folgende zwei Bedingungen bestimmt: 1. Der zweite Index einer Korrespondenz S des Systems ist gleich dem Geschlechte p der Kurve C; 2. die Korrespondenz $T + S$ (Nr. **13**) hat die Wertigkeit Null. Das System selbst ist augenscheinlich Kovariante von T in bezug auf die birationalen Transformationen der Kurve.

Das andere, von der Komplementärkorrespondenz Σ erzeugte System erhält man, wenn man den ersten Index der zu konstruierenden Korrespondenz gleich p setzt.

---

182) „Trattato" 1_1, p. 228—231.

183) Atti Acc. Torino 48 (1913), p. 674.

184) Der erste Index α' von S ist gleich dem zweiten Index von Σ, und es ergibt sich $\alpha' = \frac{\alpha}{\alpha_0} z$, worin α_0 und z der Index bzw. der *Äquivalenzdefekt* der nichtlinearen Schar sind, die von solchen Gruppen Y von C' gebildet wird, die vermöge T den Punkten von C entsprechen (s. Nr. 25). Die Bestimmung des Wertes von α' wurde von *F. Severi*[183]) auf transzendentem Wege ausgeführt; auf geometrischem Wege dann Roma Rend. Acc. Linc. (6) 1 (1925), p. 566—567; „Trattato" 1_1, p. 257—259.

Ist nach diesen Voraussetzungen ein Punkt O von C, der als Ursprung eines Zweiges δ gedacht wird, Koinzidenzpunkt von T, so nennt man Multiplizität von O in der Gruppe der Koinzidenzpunkte von T die Multiplizität, für die O Koinzidenzpunkt von $T + S$ ist. Diese Definition hat invarianten Charakter, und mit ihrer Hilfe wird die Regel von *H. G. Zeuthen* ohne weiteres auf eine beliebige algebraische Korrespondenz übertragen.

Zur Bestimmung der Multiplizität eines Koinzidenzpunktes O einer auf einer algebraischen Kurve C gegebenen algebraischen Korrespondenz dient auch folgende Bemerkung von *F. Severi*[185]), die diese Frage auf die analoge auf einer rationalen Kurve zurückführt. Da die infinitesimalen Ordnungen der Abstände, von denen bei der *Zeuthen*schen Regel die Rede war, nur von den Eigenschaften von C in der Umgebung von O abhängen, kann man zur Bestimmung dieser Multiplizität an Stelle der Kurve C eine andere, z. B. rationale Kurve setzen, die man erhält, wenn man in besonderer Weise die Charaktere von C annimmt, von denen die gesuchte Zahl unabhängig ist, und für welche die ursprüngliche Korrespondenz noch Sinn behält.

18. Grad und Geschlecht einer algebraischen Korrespondenz zwischen zwei algebraischen Kurven. Es sei T eine (α, β)-Korrespondenz zwischen zwei voneinander verschiedenen oder nicht verschiedenen algebraischen Kurven C und C' vom Geschlecht p und p'. Wird die Korrespondenz T auf der algebraischen Fläche F, die die Punktepaare von C und C' (Nr. **1** und **9**) darstellt, durch die Kurve Γ dargestellt, so nennt man den virtuellen Grad ν und das virtuelle Geschlecht ϱ von Γ [III C 6b (*G. Castelnuovo* und *F. Enriques*), Nr. **6**], *virtuellen Grad* und *virtuelles Geschlecht* der Korrespondenz.[186])

Wenn die Korrespondenz T einem kontinuierlichen Korrespondenzsystem angehört, so ist ihr Grad gleich der Anzahl der veränderlichen Paare, die zwei Korrespondenzen des Systems gemeinsam sind.

Eine Definition des Grades von T, die nur von den Begriffen der Geometrie auf einer Kurve Gebrauch macht, läßt sich auf folgende Weise[187]) erhalten.

Zunächst nehmen wir an, daß T eine Korrespondenz mit der

---

185) S. [120]) erstes Zitat, p. 82. Diese Methode hat *F. Severi* zur Lösung verschiedener Aufgaben abzählender Art auf den Kurven eines Überraumes verwandt. Anwendungen dieser Methode auch bei *F. Enriques*, Roma Rend. Acc. Linc. (5) 28^1 (1919), p. 370; *F. Enriques* und *O. Chisini*, „Lezioni" 3, p. 67—68.

186) S. *F. Severi*[2]), p. 19; *M. de Franchis*[2]). Unter topologischem Gesichtspunkt s. *S. Lefschetz*, Ann. of math. (2) 28 (1927), p. 342.

187) *F. Severi*, „Trattato" 1_1, p. 259—268.

Wertigkeit Null ist. Dann gehört sie (Nr. **17**) einem kontinuierlichem System von Korrespondenzen mit der Wertigkeit Null und den Indizes α, β an. Bezeichnet man mit T_1 eine andere Korrespondenz des Systems, dann bleibt die Anzahl der T und T_1 gemeinsamen Paare, also auch die Anzahl der Koinzidenzpunkte der Korrespondenz mit der Wertigkeit Null TT_1^{-1}, falls sich T und T_1 in dem System verändern, konstant gleich $2\alpha\beta$. Diese Zahl ist der Grad von T und wird mit $[TT_1]$, auch mit $[TT]$, ebenso mit $[T^2]$ bezeichnet, da sie gleich ist der Anzahl der Paare, die zu T und einer T unendlich benachbarten Korrespondenz des Systems gehören.

Dasselbe gilt auch, falls T keine Korrespondenz mit der Wertigkeit Null ist und nur ein kontinuierliches Korrespondenzsystem existiert, dem T angehört; aber ihr Grad ist, wie man sofort sehen wird, nicht durch die Zahlen α und β allein ausdrückbar.

Um den Begriff des Grades auch auf die *isolierten* Korrespondenzen auszudehnen, d. h. Korrespondenzen, die sich nicht in ein kontinuierliches System verwandeln lassen, bezeichnen wir mit T eine willkürliche Korrespondenz zwischen C und C', und mit S eine so beschaffene Korrespondenz, daß sich aus beiden die Korrespondenz $W = T + S$ mit der Wertigkeit Null ergibt: z. B. kann die Korrespondenz S die auf C' konstruierte Komplementärkorrespondenz von T sein (Nr. **17**).

Ist nach diesen Voraussetzungen T in einem kontinuierlichen System veränderlich und faßt man in diesem System eine von T verschiedene Korrespondenz T_1 ins Auge, so ergibt sich

$$[WT_1] = [TT_1] + [ST_1].$$

Aber die drei hier aufgeführten Zahlen ändern sich nicht, da sie gleich den Anzahlen der Koinzidenzpunkte der Korrespondenzen WT_1^{-1}, TT_1^{-1}, ST_1^{-1} sind, während sich diese Korrespondenzen in kontinuierlicher Weise verändern. Man kann daher schreiben

$$[T^2] = [WT] - [ST],$$

wo man mit $[WT]$ die Anzahl der Paare bezeichnet, die T und einer allgemeinen Korrespondenz W gemeinsam sind.

Man kann leicht beweisen, daß die in der letzten Beziehung angegebene Zahl $[T^2]$ nicht von S, sondern einzig und allein von T abhängt, und nimmt diese selbe Beziehung als Definition des virtuellen Grades $[T^2]$ von T, auch wenn T isoliert ist.

Läßt sich eine Korrespondenz in ein kontinuierliches System verwandeln, so ist ihr virtueller Grad positiv oder Null; dagegen kann der Grad einer isolierten Korrespondenz auch negativ sein (s. Anm. 290).

Für den virtuellen Grad einer beliebigen Korrespondenz T mit den Indizes α und β hat *F. Severi* den Ausdruck $2(\alpha\beta - \alpha')$ und ebenso $2(\alpha\beta - \beta')$ gefunden, wo α' und β' der erste bzw. der zweite Index der auf C' bzw. C konstruierten Komplementärkorrespondenz von T sind (daraus folgt $\alpha' = \beta'$ wie in Nr. **17**).

Der virtuelle Grad einer Korrespondenz mit den Indizes α, β übersteigt $2\alpha\beta$ nicht, und dies Maximum wird nur dann erreicht, wenn es sich um eine Korrespondenz mit der Wertigkeit Null handelt[188]).

Wenn zwei Korrespondenzen T und T' zwischen den Kurven C, C' die virtuellen Grade ν, ν' haben und i die Anzahl ihrer gemeinsamen Paare ist, so ist der virtuelle Grad von $T + T'$ gleich $\nu + \nu' + 2i$.[189])

Ist die Korrespondenz T irreduzibel, so ist das virtuelle Geschlecht ϱ und der virtuelle Grad ν von T mit den Geschlechtern p, p' von C, C' und den Indizes der Korrespondenz durch die Formel[190])

$$2\alpha(p' - 1) + 2\beta(p - 1) + \nu = 2\varrho - 2$$

verknüpft.

Zerfällt dagegen die irreduzible Korrespondenz T, beim Variieren in einem kontinuierlichen System, in zwei Korrespondenzen vom Geschlecht ϱ_1 bzw. ϱ_2 mit i gemeinsamen Paaren, so ergibt sich[191])

$$\varrho = \varrho_1 + \varrho_2 + i - 1.$$

Es sei eine symmetrische Korrespondenz T vom Index α auf einer Kurve vom Geschlecht p gegeben. Die Zahl α und die Anzahl u der Koinzidenzpunkte der Korrespondenz sind gleich der Anzahl der Schnitte der Kurve, die auf der Fläche Φ in Nr. **9** T darstellt, mit einer Kurve H und der Kurve K derselben Nummer. Zwischen diesen Zahlen, dem Geschlecht p von C, dem Geschlecht ϱ und dem Grad ν von T besteht[192]) die Beziehung

$$(1) \qquad 4\alpha(p - 1) + 2\nu = 4(\varrho - 1) + u.$$

Hat eine (α, β)-Korrespondenz auf einer Kurve vom Geschlecht

188) Diese Ergebnisse werden von *F. Severi*, Atti Acc. Torino 48 (1913), p. 660 durch Betrachtung der Geometrie auf einer Fläche gewonnen; allein mittels der Geometrie auf der Kurve in Roma Rend. Acc. Linc. (6) 1 (1925), p. 562; „Trattato" 1_1, p. 259—267. Vgl. auch *C. Rosati*, Roma Rend. Acc. Linc. (5) 22^2 (1913), p. 387.

189) *F. Severi*, „Trattato" 1_1, p. 262.

190) *M. de Franchis*, Rend. Circ. mat. Palermo 17 (1903), p. 110. S. auch *F. Severi*, „Trattato" 1_1, p. 267—268.

Kennt man die oben angegebene Bedeutung von ν, so kann diese Formel als Definition des virtuellen Geschlechts ϱ betrachtet werden.

191) *F. Severi*, „Trattato" 1_1, p. 268.

192) *M. de Franchis*[190]), p. 121.

p die Wertigkeit γ, so ist ihr Grad ν und ihr Geschlecht ϱ durch

$$\nu = 2(\alpha\beta - \gamma^2 p),$$
$$\varrho = (\alpha - 1)(\beta - 1) + p(\alpha + \beta - \gamma^2)$$

gegeben.[193])

Ist die Korrespondenz symmetrisch, dann muß der vorhergehende Wert von ν durch 2 geteilt werden, während der Wert von ϱ aus der Gleichung (1) abgeleitet werden kann.

19. Symmetrische und halbsymmetrische Korrespondenzen zwischen den Punkten einer algebraischen Kurve. Sind auf einer algebraischen Kurve zwei algebraische Korrespondenzen T und T^{-1}, deren eine die Inverse der anderen ist, voneinander abhängig, so müssen sie entweder *äquivalent* oder *residual* sein, d. h. im ersten Falle gehört die Differenz, im zweiten Falle die Summe der beiden Gruppen, die vermöge T und T^{-1} einem veränderlichen Punkt der Kurve entsprechen, einer linearen Schar an. Symbolisch ergibt sich $T \equiv T^{-1}$ bzw. $T \equiv - T^{-1}$.

Eine Korrespondenz, die ihrer Inversen äquivalent ist, insbesondere mit ihr zusammenfällt, heißt *symmetrisch;* eine Korrespondenz, die residual zu ihrer Inversen ist, *halbsymmetrisch.*[194]) Die charakteristischen ganzen Zahlen (Nr. **12**) einer symmetrischen Korrespondenz sind durch die Beziehungen[195])

$$h_{ik} = G_{ki}, \quad g_{ik} = - g_{ki}, \quad H_{ik} = - H_{ki}$$

miteinander verknüpft; die einer halbsymmetrischen Korrespondenz durch die Beziehungen

$$h_{ik} = - G_{ki}, \quad g_{ik} = g_{ki}, \quad H_{ik} = H_{ki}.$$

Ein Satz, von dem sich ein arithmetisches Kriterium zur Kennzeichnung der beiden Gattungen von Korrespondenzen ableitet, lautet[196]): Ist T eine (α, β)-Korrespondenz, von der u die Anzahl der Koinzidenzpunkte, d die Anzahl der involutorischen Paare und ν der virtuelle Grad (Nr. **18**) ist, so ergeben sich die Ungleichungen

$$(\alpha - \beta)^2 + \nu \leqq u + 2d \leqq (\alpha + \beta)^2 - \nu,$$

in denen die Gleichheitszeichen dann und nur dann gelten, wenn T symmetrisch bzw. halbsymmetrisch ist.

Nennt man μ die Basiszahl der Gesamtheit aller auf der Kurve

193) *F. Severi* [2]), p. 34.

194) *C. Rosati,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 22^2 (1913), p. 385, 431; Ann. di mat. (3) 25 (1915), p. 1 [Auszug Roma Rend. Acc. Linc. (5) 24^2 (1915), p. 182].

195) *C. Rosati,* Ann. di mat. (3) 25 (1915), p. 12—13.

196) *C. Rosati,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 22^2 (1913), p. 389.

bestehenden Korrespondenzen und μ_1, μ_2 die Basiszahlen der symmetrischen bzw. halbsymmetrischen Korrespondenzen auf derselben Kurve[197]), so ergibt sich[198])

$$\mu = \mu_1 + \mu_2.$$

Aus den allgemeinen Untersuchungen von *G. Scorza*, s. Nr. **20**, folgt[199])

$$(1) \qquad \mu \leqq 2p^2, \quad \mu_1 \leqq p^2.$$

Ist $p > 1$, dann gelten in diesen Ungleichungen entweder alle oberen oder alle unteren Zeichen, und dieser letzte Fall kann nur dann eintreten, wenn die Kurve *speziale Korrespondenzen* (Nr. **21**) enthält.[200])

Enthält die Kurve keine spezialen Korrespondenzen, so findet man sogar[201]) die unteren Grenzen[202])

$$\mu \leqq 2p, \quad \mu_1 \leqq 2p - 1;$$

ferner ist in diesem Fall μ ein Divisor von $4p^2$.[203])

---

197) Die Existenz der Minimalbasis für die Gesamtheit aller algebraischen Korrespondenzen zwischen den Punkten zweier voneinander verschiedener oder nicht verschiedener nicht rationaler algebraischer Kurven, wie auch die Existenz einer Minimalbasis nur für die symmetrischen und für die halbsymmetrischen Korrespondenzen, ergeben sich auch als Sonderfälle der allgemeinen Untersuchungen von *G. Scorza,* von denen in Nr. **20** die Rede sein wird. S. *G. Scorza,* Rend. Circ. mat. Palermo 41 (1916), p. 283.

198) *C. Rosati,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 22^2 (1913), p. 385, 431. *Rosati* geht von den Ergebnissen von *A. Hurwitz* (und *F. Severi*) (Nr. **12, 13**) über die Minimalbasis des Systems der Korrespondenzen zwischen den Punkten einer Kurve aus. Die vorhergehenden Eigenschaften leiten sich dann, mit anderen, aus einer geometrischen Darstellung dieser Korrespondenzen durch die rationalen Punkte (deren homogene projektive Koordinaten also auf ganze Zahlen reduziert werden können) eines linearen Raumes von $\mu - 1$ Dimensionen ab, indem man als Bild einer Korrespondenz den Punkt annimmt, dessen Koordinaten die Zahlen λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_\mu$ von Nr. **13** sind.

199) *G. Scorza*[197]), p. 276. Über die erste der Ungleichungen (1) s. *A. Hurwitz,* Math. Ann. 28 (1886), p. 582 = Math. Werke 1, p. 184, und Nr. **12, 13.** Daß $\mu_1 \leqq p^2$, $\mu_2 \leqq p^2$, war auch von *C. Rosati* bewiesen worden, Ann. di mat. (3) 25 (1915), p. 14; Auszug Roma Rend. Acc. Linc. (5) 24^2 (1915), p. 183.

200) *G. Scorza*[197]), p. 313. Der Fall $p = 1$ bildet eine Ausnahme, denn dann ist $\mu_1 = 1$ (wie aus der Eigenschaft am Ende vorliegender Nr. folgt), während μ die Werte 1 oder auch 2 haben kann.

201) *G. Scorza,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 25^1 (1916), p. 291 und [197]), p. 302—303.

202) Daß μ den Maximalwert $2p$ erreichen kann, hat *G. Marletta,* Note e Mem. Circ. mat. Catania 1 (1921), p. 1, unter der Annahme gezeigt, daß p eine ungerade Primzahl und $2p + 1$ Primzahl ist. Für $p = 5$ vgl. *G. Marletta,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 29^2 (1920), p. 19, 80.

203) *G. Scorza,* Rend. Circ. mat. Palermo 45 (1919), p. 132.

G. Scorza[204]) hat auch obere Grenzen für μ und μ_1 im Falle einer Kurve mit spezialen Korrespondenzen angegeben.

Obwohl in den Ungleichungen (1) sowohl μ wie μ_1 tatsächlich (und immer gleichzeitig) die Maximalwerte erreichen können[205]), können doch weder μ noch μ_1 alle unteren Werte annehmen.[206]) Wie beschaffen auch immer p sei, die Zahl μ kann tatsächlich jeden der Werte 1, 2, ..., $2p$ annehmen, und ist $p > 1$, so kann auch μ_1 jeden dieser Werte[207]) annehmen. Ist aber $p > 1$, so kann die Zahl μ keinen der Werte

$$2(p-1)^2+3, \quad 2(p-1)^2+4, \quad \ldots, \quad 2p^2-1$$

erreichen, und ist $p > 3$, so kann die Zahl μ_1 keinen der Werte

$$(p-1)^2+2, \quad (p-1)^2+3, \quad \ldots, \quad p^2-1$$

erreichen.[208])

Über die Werte von μ und μ_1 für den Fall, daß die Kurve frei von spezialen Korrespondenzen ist und ihr Geschlecht eine ungerade Primzahl ist, s. Nr. 23.

Wir bemerken schließlich[209]) noch, daß auf einer beliebigen elliptischen Kurve alle symmetrischen Korrespondenzen mit Wertigkeit ausgestattet sind: genau, hat die symmetrische Korrespondenz den Index α, und m mit einer linearen Schar g_2^1 der elliptischen Kurve gemeinsame Paare, so ist ihre Wertigkeit $\alpha - m$.

20. Geometrische Darstellungen und Erweiterungen. Untersuchungen von C. Rosati und G. Scorza; vorläufige Bemerkungen. Um die *Abel*schen Integrale und vor allem die Systeme *reduzibler* Integrale zu studieren, hat *F. Severi*[210]) eine geometrische Darstellung ersonnen, bei der die ∞^{p-1} Integrale 1. Gattung einer Kurve vom

204) Siehe [197]), p. 308 ff. Vgl. II B 7 (*A. Krazer* und *W. Wirtinger*), Nr. **114**.

205) *G. Scorza*, Roma Rend. Acc. Linc. (5) 24^2 (1915), p. 333; [197]), p. 311. — *G. Scorza*, Catania Atti Acc. Gioenia (5) 10 (1917), Nr. XVI, hat zwei Beispiele ebener Kurven mit maximalem μ und μ_1 angegeben. Die eine ist die Kurve vom Geschlecht $p = 3$, deren Gleichung $x^3y + y^3 + x = 0$ lautet, die andere die Kurve vom Geschlecht $p = 6$, deren Gleichung $x^4y + y^4 + x = 0$ lautet. Die erste ist die sogenannte „*Klein*sche Kurve" [III C 4 (*L. Berzolari*), Anm. 334; III C 5 (*G. Kohn*), Nr. 78; s. außerdem *L. Remy*, Bull. Soc. math. de France 34 (1906), p. 184]; die zweite wurde von *V. Snyder*, Amer. J. of math. 30 (1908), p. 1 und *E. Ciani*, Rend. Circ. mat. Palermo 36 (1913), p. 58 studiert.

206) *G. Scorza*[197]), p. 316—318.

207) Der Fall $p = 1$ bildet allerdings eine Ausnahme: Anm. 200.

208) Der Fall $p = 3$ bildet wirklich eine Ausnahme, weil die einzigen Werte, die μ_1 nicht annehmen kann, 7 und 8 sind: *G. Scorza*[197]), p. 312—313.

209) *F. Severi*[2]), p. 49.

210) Roma Rend. Acc. Linc. (5) 23^1 (1914), p. 581, 641.

Geschlecht p von den Punkten eines $(p-1)$-dimensionalen linearen Raumes S_{p-1} dargestellt werden, so daß die Bilder der *regulären Systeme* reduzibler Integrale gewisse lineare Räume des S_{p-1} sind.[211]) Unter Verwendung der Begriffe des *Schnittsystems* und *verbindenden Systems* zweier gegebener regulärer Systeme von reduziblen Integralen und der diesbezüglichen Eigenschaften[212]) hat *Severi* unter anderem einen einfachen geometrischen Beweis eines Satzes von *H. Poincaré* über die Kurven mit unendlich vielen elliptischen Integralen erhalten, von dem in Nr. **31** die Rede sein wird, und eine weitgehende Verallgemeinerung dafür angegeben.

Zu weiteren Ergebnissen kamen *C. Rosati* und *G. Scorza*, unter Anwendung einer von der vorhergehenden verschiedenen geometrischen Darstellung.

211) Ein Integral 1. Gattung heißt *reduzibel,* wenn seine Perioden einer oder mehreren homogenen linearen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten genügen. Für ein Integral 1. Gattung bedeutet die Reduzibilität eine Besonderheit. Durch die linearen Gleichungen, welche die Perioden eines reduziblen Integrals verknüpfen, kann man die $2p$ Perioden dieses Integrals als lineare Kombinationen, mit rationalen Koeffizienten, einer gewissen Anzahl von ihnen ausdrücken, die nicht weiter reduzibel sind und *reduzierte Perioden* genannt werden.

Ein lineares System reduzibler Integrale, die doppelt so viel reduzierte Perioden als die im System enthaltenen unabhängigen Integrale haben, nennt man nach *F. Severi,* Anm. 210, p. 582; „Vorlesungen", p. 281, ein *reguläres System.*

Über reduzierbare *Abel*sche Integrale s. II B 7 (*A. Krazer* und *W. Wirtinger*), Nr. **114** und **119—126**. Den dort angegebenen Anführungen schließen sich an *N. Lipine,* Paris C. R. 161 (1915), p. 278; *Giovannina Fabbrizzi,* Giorn. di mat. (3) 10 (1919), p. 16; *G. Scorza,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 30^2 (1921), p. 359; *F. Severi,* „Lezioni", p. 335—345; „Vorlesungen", p. 278—297; *K. Heegner,* Math. Ztschr. 31 (1928), p. 457, 481; J. f. Math. 168 (1931), p. 91. Wir fügen noch hinzu, daß geometrische Beweise des a. a. O. Nr. **119** angeführten Satzes III (von *H. Poincaré*), gegeben haben *G. Castelnuovo,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 14^1 (1905), p. 595; *G. Scorza,* ebenda (5) 24^1 (1915), p. 412, 645; [197]), p. 297; *C. Rosati,* Atti Acc. Torino 50 (1915), p. 457, die beiden ersten auch mit Ausdehnungen. Der im Text erwähnte Satz II von *H. Poincaré*, in dem a. a. O., Anm. 348 angegebenen Sonderfall, wird in Nr. **31** besprochen werden.

212) Sind zwei reguläre Systeme reduzibler Integrale A_1 und A_2 gegeben, so heißt das aus allen vorkommenden, A_1 und A_2 gemeinsamen Integralen gebildete lineare System und das lineare Minimalsystem von reduziblen Integralen, das A_1 und A_2 enthält, *Schnittsystem* bzw. *Verbindungssystem. F. Severi*[210]), p. 584—585, hat bewiesen, daß sowohl das Schnittsystem wie das Verbindungssystem regulär sind. Wenn A_1 ∞^{r_1} und A_2 ∞^{r_2} ist und die Dimensionen des Schnittsystems und des Verbindungssystems i bzw. c sind, so ergibt sich $i+c=r_1+r_2$, ausgenommen wenn das erste System nicht existiert, in welchem Falle dann gilt $c=r_1+r_2+1$. In diesem letzten Falle nennt man A_1 und A_2 voneinander *unabhängig.*

In einem linearen Raum S_{2p-1} von $2p - 1$ Dimensionen ($p > 1$), in dem ein System homogener projektiver Koordinaten angenommen ist, nenne man τ den S_{p-1}-Schnitt der p Überebenen, deren Koordinaten die Zeilen der Tabelle (2) in Nr. **12** sind, und Σ das lineare ∞^{p-1}-System der Überebenen, die durch τ gehen. Weder existieren in τ reelle Punkte, noch in Σ reelle Überebenen, so daß der Raum τ und der konjugiert-imaginäre Raum τ_0 unabhängig sind.

Unter diesen Voraussetzungen läßt man jedem Zyklus (Kreis) der auf die gegebene Kurve C vom Geschlecht p bezüglichen *Riemann*schen Fläche R den (rationalen) Punkt von S_{2p-1} entsprechen, dessen Koordinaten x_i die $2p$ ganzen Zahlen sind, die den Zyklus mit den auf R ausgeführten Rückkehrschnitten verknüpfen. Jedem Integrale 1. Gattung von C läßt man die Überebene von Σ entsprechen, deren Koordinaten ξ_i die normalen Perioden desselben Integrals sind. Damit bei dieser Darstellung ein rationaler Punkt P von S_{2p-1} und eine Überebene π von Σ zueinandergehören, ist es notwendig und hinreichend, daß die Periode des π entsprechenden Integrals längs des P entsprechenden Zyklus Null ist.[213])

Von dieser Betrachtung geht *C. Rosati* aus, der eine geometrische Deutung der *Hurwitz*schen Gleichungen (4) in Nr. **12** zugrunde legt, indem er teils Sätze der überräumlichen projektiven Geometrie, teils der Zahlentheorie und der algebraischen Körper anwendet. Die Ver-

213) Die vorhergehende Darstellung findet man bei *C. Rosati*, Atti Acc. Torino 50 (1915), p. 457; sie wird von ihm in allen weiteren Arbeiten, die wir im folgenden erwähnen werden, angewandt, mit Ausnahme der in Anm. 252, in der er sich an die Darstellung von *G. Scorza* anlehnt.

Die von *Scorza* erdachte Darstellung ist dual zu jener von *Rosati* (von der Darstellung der Zyklen abgesehen, von der *Scorza* keinen Gebrauch macht), und ihrer hat sich *Scorza* bedient Roma Rend. Acc. Linc. (5) 24^1 (1915), p. 412, 645; (5) 24^2 (1915), p. 393 beim Studium der *Abel*schen reduziblen Integrale (Nr. **21**); ebenda (5) 24^2 (1915), p. 279, 333 beim Studium der algebraischen Mannigfaltigkeiten mit maximalem Singularitätsindex; ebenda (5) 24^2 (1915), p. 445, 603; (5) 25^1 (1916), p. 289 beim Studium der algebraischen Mannigfaltigkeiten mit regulären Systemen reduzibler Integrale; Mem. Soc. ital. delle Scienze (dei XL) (3) 19 (1916), p. 139 [Auszug Paris C. R. 160 (1915), p. 392] beim Beweis des Fundamentalsatzes für die *Abel*schen singulären Funktionen mit einer beliebigen Anzahl unabhängiger Veränderlicher. Vgl. außerdem Rend. Circ. mat. Palermo 41 (1916), p. 263; 45 (1919), p. 1.

Wie *G. Scorza*, Roma Rend. Acc. Linc. (5) 24^1 (1915), Anm. auf p. 414, bemerkt, ist die Eigenschaft, daß die konjugiert-imaginären Räume τ und τ_0 voneinander unabhängig sind, die geometrische Deutung eines Satzes über die Normalperioden von p unabhängigen Integralen 1. Gattung, durch den *F. Severi*[141]), p. 518—519 einen Satz von *F. Klein* und *R. Fricke*[112]) 2, p. 540 verallgemeinert hat.

bindung zwischen diesen beiden Gebieten hat *Rosati* durch die Einführung des Begriffs der *Minimalgleichung* einer algebraischen Korrespondenz und die Ausdehnung des Wertigkeitsbegriffs (Nr. **23** u. **24**)[214]) hergestellt.

G. Scorza verwendet auch noch Eigenschaften der überräumlichen projektiven Geometrie, geht aber von einem allgemeineren Gesichtspunkt aus und vertieft das Studium der reduziblen *Abel*schen Integrale (Nr. **21**), indem er die gemeinsame arithmetische Grundlage dieser und der verwandten Theorien (Transformation der *Abel*schen Funktionen, *Abel*sche Funktionen mit komplexen Multiplikationen, algebraische Korrespondenzen zwischen algebraischen Kurven) zeigt, und klar macht, wie diese alle einen gemeinsamen Ursprung in einer allgemeinen Theorie haben, die er als *Theorie der Riemannschen Matrizen* bezeichnet.[215])

---

214) Korrespondenzen *mit doppelter Wertigkeit* hat schon *F. Severi*[141]), p. 533 ff., betrachtet und auf die Theorie der algebraischen Flächen angewandt. S. Nr. **14**.

Einige Ergebnisse von *C. Rosati* sind bei *J. L. Coolidge*, „Alg. pl. curves", p. 336—342 wiedergegeben.

215) Rend. Circ. mat. Palermo 41 (1916), p. 263; Auszug Roma Rend. Acc. Linc. (5) 25^1 (1916), p. 289. — S. auch Mem. Soc. ital. delle Scienze (dei XL) (3) 19 (1916), p. 139; Catania Atti Acc. Gioenia (5) 10 (1917), Nr. XVI; Paris C. R. 165 (1917), p. 497; Atti Acc. Torino 53 (1918), p. 1008; Rend. Circ. mat. Palermo 43 (1919), p. 213; Roma Rend. Acc. Linc. (6) 9 (1929), p. 253. Außerdem *Concetta Raciti*, Atti Acc. Torino 54 (1919), p. 443; *S. Lefschetz*, Paris C. R. 168 (1919), p. 758; Preisschrift[114]), p. 364 ff.; *N. Spampinato*, Rend. Circ. mat. Palermo 51 (1926), p. 238 [Auszug Roma Rend. Acc. Linc. (6) 5 (1927), p. 251]; 54 (1930), p. 124 [1928]; Note ed eserc. Circ. mat. Catania 5 (1927), p. 5, 85; 6 (1931), p. 43, 82, 94, 107; Roma Rend. Acc. Linc. (6) 5 (1927), p. 427; Catania Atti Acc. Gioenia (5) 16 (1928), Nr. V^{bis}; (5) 17 (1929), Nr. IX, XIII; (5) 18 (1931), Nr. XVI; Atti Soc. ital. progresso d. scienze 20^2, Milano 1931 (Roma 1932), p. 27; *C. Rosati*, Rend. Circ. mat. Palermo 53 (1928), p. 79 [Auszug Roma Rend. Acc. Linc. (6) 6 (1927), p. 191]; und auch *A. Comessatti*, Atti Ist. Ven. 85^2 (1926), p. 471, wo die involutorischen linearen Substitutionen mit ganzzahligen Koeffizienten studiert und auf die involutorischen birationalen Transformationen der algebraischen Mannigfaltigkeiten, insbesondere der algebraischen Kurven angewandt werden.

Über die Anwendung auf die birationalen Transformationen in sich und auf die Involutionen auf den hyperelliptischen Flächen s. *N. Spampinato*, Ann. di mat. (3) 30 (1920), p. 257; (3) 31 (1920), p. 127; Note e Mem. Circ. mat. Catania 1 (1922), p. 355; 2 (1923), p. 30; über die Anwendung auf die birationalen Transformationen der dreidimensionalen *Abel*schen Mannigfaltigkeiten in sich *N. Spampinato*, Note e Mem. Circ. mat. Catania 2 (1924), p. 233; „Le trasformazioni birazionali in sé di una varietà abeliana a tre dimensioni" (due Note), Catania 1925; für den Fall einer *Abel*schen Mannigfaltigkeit von beliebiger Dimension *N. Spampinato*, Note e Mem. Circ. mat. Catania 2 (1924), p. 246; Roma

Auf diese Weise werden schließlich viele Eigenschaften der algebraischen Korrespondenzen zwischen zwei voneinander verschiedenen oder nicht verschiedenen (nicht rationalen) algebraischen Kurven zu Sonderfällen von Eigenschaften der Theorie der *Abel*schen Funktionen mit einer beliebigen Anzahl unabhängiger Veränderlichen.

Ebenso hat *G. Scorza*[216]) das Studium der mit einer beliebigen Anzahl von Einheiten assoziativen Algebren dadurch vertieft, daß er ihre innige Verbindung mit der allgemeinen Theorie der *Riemann*schen Matrizen klarlegte und zeigte, wie fruchtbringend ihre Betrachtung für die Lösung wichtiger, auf die Matrizen selbst bezüglicher Fragen ist.

Sind

$$\mu \equiv |\mu_{j1}\mu_{j2}\ldots\mu_{jq}| \qquad (j=1,2,\ldots,p),$$
$$\mu' \equiv |\mu'_{l1}\mu'_{l2}\ldots\mu'_{lq'}| \qquad (l=1,2,\ldots,p')$$

zwei willkürliche (voneinander verschiedene oder nicht verschiedene) Matrizen mit p und p' Horizontal- und q und q' Vertikalreihen, so bezeichnet man eine bilineare Form mit rationalen Koeffizienten

$$\sum_{r=1}^{q}\sum_{s=1}^{q'} a_{rs}x_r y_s$$

Rend. Acc. Linc. (6) 5 (1927), p. 105; *A. Lo Voi,* Rend. Ist. Lomb. (2) 65 (1932), p. 424.

Über die *reellen Riemann*schen Matrizen und die reellen *Abel*schen Mannigfaltigkeiten s. *S. Lefschetz,* Proc. Nat. Acad. of Sciences 5 (1919), p. 103, 296; *S. Cherubino,* Giorn. di mat. (3) 13 (1922), p. 65; (3) 14 (1922), p. 47; Roma Rend. Acc. Linc. (6) 6 (1927), p. 197, 274; (6) 7 (1928), p. 199, 459; (6) 11 (1930), p. 154, 254; Atti Ist. Ven. 88² (1929), p. 369; 89² (1929), p. 271; Rend. Acc. Napoli (3) 36 (1930), p. 32, 108; Atti Soc. ital. progresso d. scienze 20², Milano 1931 (Roma 1932), p. 28; *A. Comessatti,* Ann. di mat. (4) 2 (1924), p. 67; (4) 3 (1925), p. 27; Atti Ist. Ven. 83² (1924), p. 735; Rend. Circ. mat. Palermo 48 (1924), p. 389; 53 (1928), p. 283; über die reellen elliptischen oder hyperelliptischen Kurven *A. Comessatti,* Boll. Unione mat. ital. 5 (1926), p. 69 bzw. 7 (1928), p. 10.

Über die auf die *Riemann*schen Matrizen und die *Abel*schen Funktionen bezüglichen Arbeiten von *G. Scorza* s. *S. Lefschetz,* Bull. sciences math. (2) 47 (1923), p. 120.

Alles, was diese Theorie betrifft, in II B 7 (*A. Krazer* und *W. Wirtinger*), Nr. **114, 125, 126**; *S. Lefschetz,* „Report", p. 349—395; über die reellen *Abel*schen Mannigfaltigkeiten s. auch den Bericht von *A. Comessatti,* Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 41 (1931), p. 121.

216) Rend. Circ. mat. Palermo 45 (1919), p. 1; Auszüge Roma Rend. Acc. Linc. (5) 26² (1917), p. 177; Paris C. R. 167 (1918), p. 454. Vgl. auch *A. A. Albert,* Ann. of math. (2) 31 (1929), p. 375; (2) 32 (1930), p. 131; (2) 33 (1932), p. 311; Trans. Amer. math. Soc. 33 (1931), p. 219; Rend. Circ. mat. Palermo 55 (1931), p. 57 [1929] [Auszüge Proc. Nat. Acad. of Sciences 16 (1930), p. 308, 313; 17 (1931), p. 3, 89; Bull. Amer. math. Soc. (2) 36 (1930), p. 199; (2) 37 (1931), p. 167]; (2) 38 (1932), p. 33; *A. Lo Voi,* Rend. Circ. mat. Palermo 55 (1931), p. 287, 477.

in den beiden Reihen von Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_q$ und $y_1, y_2, \ldots, y_{q'}$ als *simultane Riemannsche Form* derselben, wenn

$$\sum_{r=1}^{q}\sum_{s=1}^{q'} a_{rs}\mu_{jr}\mu'_{ls} = 0,$$

für $j = 1, 2, \ldots, p$; $l = 1, 2, \ldots, p'$ gelten.

Man nennt λ den *simultanen Charakter* von μ und μ', wenn dies die Maximalzahl der linear unabhängigen Formen ist, die unter ihren simultanen *Riemann*schen Formen ausgewählt werden können.

Wenn μ' mit μ zusammenfällt, so nennt man jede simultane *Riemann*sche Form von μ und μ' *Riemannsche Form von* μ.

Hiernach sei nun

$$\omega \equiv |\omega_{j,1}\,\omega_{j,2}\ldots\omega_{j,2p}| \qquad (j = 1, 2, \ldots, p)$$

eine Matrix von p Horizontal- und $2p$ Vertikalreihen, und man setze

$$\Omega_r^{(\lambda)} = \lambda_1\omega_{1r} + \lambda_2\omega_{2r} + \cdots + \lambda_p\omega_{pr},$$
$$\Omega_r^{(\lambda)} = \xi_r^{(\lambda)} + i\eta_r^{(\lambda)},$$

wo $i = \sqrt{-1}$, ξ_r, η_r reelle, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ willkürliche, reelle oder komplexe (aber nicht sämtlich verschwindende) Zahlen sind.

Dann ist ω eine *Riemannsche Matrix* vom *Geschlecht p*, wenn für sie eine *Riemannsche alternierende Form*

$$\sum_{r,s=1}^{2p} c_{rs}x_r y_s \qquad (c_{rs} + c_{sr} = 0)$$

existiert, und zwar derart, daß sich

$$\sum_{r,s=1}^{2p} c_{rs}\xi_r^{(\lambda)}\eta_s^{(\lambda)} \neq 0$$

ergibt für jedes System von Werten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, die nicht sämtlich verschwinden.

Das Geschlecht $p \geqq 1$ ist nichts anderes als der Rang der Matrix ω.

Ist λ der simultane Charakter einer *Riemann*schen Matrix ω in bezug auf sich selbst (so daß $\lambda \geqq 1$), und setzt man $\lambda = h + 1$, so nennt man h den *Multiplikabilitätsindex* von ω.

Dagegen nennt man k den *Singularitätsindex* von ω, wenn $k + 1$ die Maximalzahl ihrer linear unabhängigen alternierenden *Riemann*schen Formen ist.

Man sagt, daß ω *singulär* oder *nicht singulär* ist, je nachdem $k > 0$ oder $k = 0$ ist.

Es gilt[217])

$$0 \leqq k \leqq p^2 - 1, \quad 0 \leqq k \leqq h \leqq 2p^2 - 1.$$

217) *G. Scorza* [197]), p. 273, 276.

Sind p, p' die Geschlechter zweier *Riemann*scher Matrizen mit dem simultanen Charakter λ, so gilt[218]):

$$0 \leqq \lambda \leqq 2pp'.$$

Eine *Riemann*sche Matrix ist also nichts anderes als eine Matrix, die als Tabelle von primitiven Perioden eines Körpers *Abel*scher Funktionen aufgefaßt werden kann.

Zwei derartige Matrizen sind *isomorph*, wenn jede *Abel*sche Funktion des auf die eine Matrix bezüglichen Körpers (mit einer eventuellen vorläufigen homogenen linearen Substitution in den Veränderlichen) algebraisch mit Funktionen des auf die andere bezüglichen Körpers verknüpft ist. Sie sind *äquivalent*, wenn man die Körper *Abel*scher Funktionen dadurch zusammenfallen lassen kann, daß man bei den Funktionen eines der beiden Körper eine passende lineare Transformation der Veränderlichen ausführt.

Die Begriffe des simultanen Charakters zweier Matrizen, der *Riemann*schen Matrix sowie des Multiplikabilitäts- und des Singularitätsindex einer solchen Matrix, sind invariant gegenüber der Beziehung des Isomorphismus und insbesondere der Äquivalenz.

Betrachtet man die (notwendigerweise nicht sämtlich verschwindenden) Elemente einer horizontalen Reihe in einer *Riemann*schen Matrix als homogene projektive Koordinaten eines Punktes in einem Raum S_{2p-1}, so erhält man p Punkte; der von ihnen bestimmte lineare Raum τ_1 hat die Dimension $p - 1$ und ist unabhängig von dem konjugiert-imaginären Raum $\bar{\tau}_1$, so daß sowohl τ_1 wie auch $\bar{\tau}_1$ weder einen reellen Punkt enthalten, noch in irgendeiner reellen Überebene liegen.

Eine *Riemann*sche Matrix vom Geschlecht p heißt *unrein* oder *rein*, je nachdem in S_{2p-1} konjugiert-imaginäre rationale Räume S_{2q-1} $(0 < q < p)$, die τ_1 und $\bar{\tau}_1$ nach S_{q-1} schneiden, vorhanden sind oder nicht. Jeder derartige S_{2q-1}, der existiert, heißt *Achse* der Matrix.

Für eine unreine Matrix ist $p > 1$ und die Matrix immer singulär.

Man nennt *Riemannsche Homographie* einer *Riemann*schen Matrix eine *rationale* Homographie von S_{2p-1} (d. h. eine solche, bei der jedem rationalen Element, das also rationale Koordinaten hat, ein rationales Element entspricht), die einen jeden der Räume τ_1 und $\bar{\tau}_1$ in sich transformiert. Es gibt $h + 1$ und nicht mehr solcher linear unabhängiger Homographien.

Die Gesamtheit aller *Riemann*schen Homographien bildet eine Gruppe, die *Multiplikabilitätsgruppe* der Matrix genannt wird. Reduziert

218) *G. Scorza*[197]), p. 280.

sie sich nicht auf eine identische Gruppe, d. h. ist $h > 0$, so ist sie eine unendliche diskontinuierliche Gruppe. Der mit der Matrix verknüpfte Körper *Abel*scher Funktionen läßt komplexe Multiplikationen zu oder nicht, je nachdem sich die Gruppe auf die Identität[219]) allein nicht reduziert oder reduziert.

Wenden wir uns nun zum Fall der Kurven zurück. Wenn man statt der Betrachtung einer gegebenen Kurve die der mit der Kurve verknüpften *Riemann*schen Matrix (einer Matrix, die, wie schon gesagt wurde, vom Gesichtspunkt der Äquivalenz aus gesehen, völlig bestimmt ist) ins Auge faßt, so sind die Bilder der algebraischen Korrespondenzen zwischen den Punkten der Kurve die *Riemann*schen Homographien der Matrix. Wenn μ_1, μ_2 die Bedeutung von Nr. **19** haben, so sind die beiden Zahlen h und k von *G. Scorza* durch

$$h = \mu_1 + \mu_2 - 1, \quad k = \mu_1 - 1$$

ausgedrückt, so daß die um eine Einheit erhöhte erste Zahl die Basiszahl μ der auf der Kurve gelegenen algebraischen Korrespondenzen liefert. Ebenso stimmt auch die Basiszahl der Korrespondenzen zwischen zwei voneinander verschiedenen Kurven (Nr. **29**) mit dem Simultancharakter der mit den beiden Kurven verknüpften *Riemann*schen Matrizen überein.

Auch die in Nr. **21** *spezial* genannten algebraischen Korrespondenzen sind durch eine Eigenschaft der mit der Kurve verknüpften *Riemann*schen Matrix gekennzeichnet. Tatsächlich ist nach *G. Scorza*[220]) eine solche Matrix unrein oder rein, je nachdem die Kurve speziale Korrespondenzen enthält oder nicht.

21. Geometrische Deutung der Beziehungen von A. Hurwitz. Reduzible Abelsche Integrale 1. Gattung und „speziale" Korrespondenzen. Behalten wir die Benennungen von Nr. **20** bei, so bestimmt nach *C. Rosati*[221]) eine beliebige auf C gegebene algebraische Korrespondenz eine Transformation zwischen den Zyklen von R sowie eine Transformation zwischen den Integralen. Die erste verwandelt sich in S_{2p-1} in die rationale *Riemann*sche Homographie Ω, die durch die Formeln

$$\begin{aligned} \varrho x_i' &= h_{i1} x_1 + \cdots + h_{ip} x_p + H_{i1} x_{p+1} + \cdots + H_{ip} x_{2p}, \\ \varrho x_{p+i}' &= g_{i1} x_1 + \cdots + g_{ip} x_p + G_{i1} x_{p+1} + \cdots + G_{ip} x_{2p} \end{aligned}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, p)$$

---

219) Über alles vorhergehende s. *G. Scorza*, erstes Zitat in Anm. 215. Was die geometrische Darstellung von *G. Scorza* im Vergleich mit der Darstellung von *C. Rosati* anbelangt, s. Anm. 213.

220) S. [197]), p. 296.

221) Ann. di mat. (3) 25 (1915), p. 1; Auszug Roma Rend. Acc. Linc. (5) 24^2 (1915), p. 182.

dargestellt wird. Die zweite verwandelt sich in Σ in eine Homographie Π, die durch die Formeln

$$\sigma \xi_i' = \pi_{1i} \xi_1 + \cdots + \pi_{pi} \xi_p \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

dargestellt wird.

Dann ist die geometrische Bedeutung der p^2 *Hurwitz*schen Beziehungen (4) in Nr. **12** dadurch ausgedrückt, daß die Homographie Ω den Raum τ (und daher auch τ_0) in sich transformiert, und umgekehrt jede rationale Homographie von S_{2p-1}, die τ in sich transformiert, ein Bild paarweise voneinander abhängiger, unendlich vieler Korrespondenzen ist. Außerdem induziert die auf die Überebene von S_{2p-1} angewandte inverse Homographie von Ω in Σ die Homographie Π.

Eine algebraische Korrespondenz T auf C heißt *spezial*, wenn die Bildhomographie Ω singulär ist [für die singulären Homographien s. III C 7 (*C. Segre*), Nr. 8 und **14**]. Korrespondenzen von dieser Beschaffenheit existieren nur für den Fall, daß die Kurve C *reguläre Systeme von reduziblen Integralen 1. Gattung* besitzt (s. Nr. **20**). In der Tat ist der Rang des Moduls von Ω, also der Determinante von der Ordnung $2p$ (*charakteristische Determinante* der Korrespondenz)

$$\Delta = \begin{vmatrix} h_{ik} & g_{ik} \\ H_{ik} & G_{ik} \end{vmatrix}$$

immer eine gerade Zahl $2q$. Ist $0 < q < p$ (in welchem Falle die Korrespondenz T *spezial*, von der Art $p - q$ heißt), so sind der Korrespondenz T zwei reguläre (nicht notwendigerweise voneinander unabhängige) Systeme ∞^{p-q-1} und ∞^{q-1} reduzibler Integrale 1. Gattung *assoziiert*, oder auch *beigeordnet*. Die Integrale des ersten Systems liefern eine konstante Summe in der Gruppe der Punkte, die vermöge T einem veränderlichen Punkt auf C entsprechen. Das zweite System wird durch die Summe aller Werte, die ein allgemeines Integral von C in den Punkten der genannten Gruppe hat, erzeugt. Sind umgekehrt zwei *komplementäre*, voneinander unabhängige reduzible reguläre Systeme, und zwar ein ∞^{p-q-1}- und ein ∞^{q-1}-System gegeben, so existieren auf C speziale Korrespondenzen der Art $p - q$, denen diese Systeme assoziiert sind.[222])

Die Anzahl der voneinander unabhängigen spezialen Korrespondenzen, der Art $p - q$, denen zwei gegebene reduzible Komplementärsysteme ∞^{p-q-1} und ∞^{q-1} assoziiert sind, kann $2q^2$ nicht übersteigen.

---

222) Diese beiden Sätze sind in den beiden Sätzen von *G. Scorza*[197]), p. 279 u. 301 über die singulären *Riemann*schen Homographien einer *Riemann*schen Matrix enthalten. Ergänzungen zu diesen Sätzen bei *S. Cherubino,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 26^1 (1917), p. 538.

Die Charakterisierung der Homographien Ω, die Bilder der symmetrischen und halbsymmetrischen Korrespondenzen sind, erhält man auf einfache Weise dnrch Betrachtung des durch die Formeln

$$\sigma \xi_i = - x_{p+i}, \quad \sigma \xi_{p+i} = x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

bestimmten Nullsystems Λ in S_{2p-1}. Nennt man

$$r_{ik} = x_i y_k - x_k y_i \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, 2p)$$

die Koordinaten der Verbindungsgeraden zweier Punkte x, y, so ist das Nullsystem durch den linearen Geradenkomplex[223])

$$r_{1,p+1} + r_{2,p+2} + \cdots + r_{p,2p} = 0$$

bestimmt.

Der Raum τ (und daher auch τ_0) ist in Λ autopolar, d. h. jede Gerade von τ (und von τ_0) gehört dem genannten linearen Komplex an.

Multipliziert man Ω mit Λ, so erhält man eine rationale Reziprozität, die τ in sich transformiert und auch als Bild von T aufgefaßt werden kann.

Nun sind die Bilder der symmetrischen Korrespondenzen Reziprozitäten, die Nullsysteme sind, die der halbsymmetrischen Korrespondenzen Reziprozitäten, die Polaritäten sind. Daraus folgt, daß die Basiszahlen μ_1 und μ_2 der symmetrischen und halbsymmetrischen Korrespondenzen p^2 nicht übersteigen (s. Nr. **19**).

Das Bild insbesondere der Identität und der Wertigkeitskorrespondenzen (deren Bildhomographie die identische Homographie ist) ist Λ.

Die spezialen symmetrischen und halbsymmetrischen Korrespondenzen rühren von ausgearteten Nullsystemen und ausgearteten Polaritäten her. Die einer Korrespondenz dieser Beschaffenheit beigeordneten reduziblen regulären Systeme sind voneinander unabhängig und so beschaffen, daß das eine von ihnen das andere mit bestimmt, so daß man sagen kann, daß die Korrespondenz einem reduziblen regulären ∞^{q-1}-System *angehört*, und umgekehrt. Hiernach kann die Anzahl der unabhängigen symmetrischen und halbsymmetrischen spezialen Korrespondenzen der Art $p - q$, die einem gegebenen reduziblen regulären ∞^{q-1}-System angehören, q^2 nicht übersteigen.

22. Fortsetzung: Netze von spezialen Korrespondenzen, die einem regulären System reduzibler Integrale 1. Gattung beigeordnet sind. Immersionskoeffizient eines solchen regulären Systems. Weitere Resultate der Theorie der reduziblen Integrale in Verbindung

223) Dieses Nullsystem wird schon von *C. Rosati*, Atti Acc. Torino 50 (1915), p. 457 betrachtet.

mit der Korrespondenztheorie wurden von *C. Rosati*[224]) durch die Betrachtung der spezialen Korrespondenzen erzielt, und zwar unter Verwendung der geometrischen Darstellung in der vorhergehenden Nummer. Insbesondere hat *Rosati* mehrere der von *G. Scorza*[213])[215]) gewonnenen Ergebnisse für beliebige, mit einfachen Integralen 1. Gattung ausgestattete algebraische Mannigfaltigkeiten, auf anderem Wege wiedererhalten.

In der genannten Darstellung ist das Bild eines regulären Systems A von reduziblen Integralen ein lineares System von Überebenen, das in Σ enthalten ist. Als *Achse*[225]) von A bezeichnet man den rationalen Raum R, der in dem Träger des linearen Systems von Überebenen enthalten ist. Ist A ∞^{q-1}, so hat seine Achse R die Dimension $2(p-q)-1$.

Nach diesen Voraussetzungen sind einem reduziblen regulären System A zwei *Netze* von spezialen Korrespondenzen beigeordnet. Das eine Netz, *erster Art*, ist aus den Korrespondenzen T zusammengesetzt, die dem System *angehören*, d. h. so beschaffenen Korrespondenzen, daß die Summe der Werte eines beliebigen Integrals 1. Gattung der Kurve in den Punkten der homologen Gruppe eines veränderlichen Punktes ein Integral von A ist. Das andere Netz, *zweiter Art*, ist aus den Korrespondenzen T zusammengesetzt, die für die Integrale von A konstanten Niveaus sind.

Sind l und m die Anzahlen der in den beiden Netzen enthaltenen unabhängigen Korrespondenzen, so ergibt sich $l+m=\mu$. Die Zahlen l, m nennt man *ersten* bzw. *zweiten Index* des Systems A oder der Achse R. Zwei reguläre Komplementärsysteme haben, bis auf die Ordnung, dieselben Indizes.

Haben die beiden einem System A beigeordneten Netze ein $(\lambda-1)$-dimensionales Netz gemeinsam, so heißt die Zahl λ der *Immersionskoeffizient* von A. Zwei Komplementärsysteme haben denselben Immersionskoeffizienten.[226])

224) Ann. di mat. (4) 3 (1925), p. 109; Auszug Boll. Unione mat. ital. 4 (1925), p. 114.

225) Bezeichnung von *G. Scorza*[197]), p. 295. Vgl. Nr. **20**. In Verbindung mit Anm. 213 sei bemerkt, daß die Achse nach *G. Scorza* dual ist nicht dem Raum R (*Achse* von *C. Rosati*), sondern dem rationalen linearen ∞^{2q-1}-System von Überebenen, dessen Träger R ist.

226) Der Begriff des Immersionskoeffizienten stammt von *G. Scorza*, Roma Rend. Acc. Linc. (5) 24^2 (1915), p. 393; Rend. Circ. mat. Palermo **41** (1916), p. 300—301; **45** (1921), p. 137—138, wo auch seine geometrische Bedeutung angegeben ist. In Zusammenhang mit der Theorie der Korrespondenzen zwischen Kurven, s. *C. Rosati*[224]).

Ist p das Geschlecht der Kurve und q die Anzahl der unabhängigen im

Das System A heißt *isoliert* oder *nicht isoliert*, je nachdem $\lambda = 0$ oder $\lambda > 0$. Im ersten Falle gibt es keine A unendlich benachbarten regulären Systeme, und A besitzt ein und nur ein Komplementärsystem, das ebenfalls isoliert ist. Im zweiten Falle gehört A einer diskontinuierlichen, überall dichten unendlichen Menge analoger Systeme an, deren Dimension, Indizes und Immersionskoeffizient die gleichen sind. Das kleinste reelle Kontinuum, dem die genannten Systeme als Elemente angehören, ist eine algebraische Mannigfaltigkeit von der Dimension λ.

Damit ein reguläres System isoliert ist, ist notwendig und hinreichend, daß irgendein beliebiges der ihm beigeordneten Netze zusammen mit jeder seiner Korrespondenzen auch die inverse Korrespondenz enthält.

Gibt es isolierte Systeme, so ist ihre Anzahl begrenzt.[227])

Es seien s und e die Anzahlen der in dem A beigeordneten Netz erster Art enthaltenen unabhängigen symmetrischen und halbsymmetrischen Korrespondenzen und s' und e' die analogen Anzahlen für das Netz zweiter Art. Es gilt[228])

$$\mu_1 = s + s' + \lambda, \quad \mu_2 = e + e' + \lambda,$$

und weil $s \geqq 1$, $s' \geqq 1$, $e \geqq 0$, $e' \geqq 0$, so folgt daraus, daß λ die kleinere der Zahlen $\mu_1 - 2$, μ_2 nicht übersteigt.

Die Konfiguration aller regulären Systeme, die eine Kurve besitzen kann, wurde von *G. Scorza*[229]) untersucht, der die verschiedenen Fälle, die sich bei einer unreinen *Riemann*schen Matrix darbieten können, bestimmt hat; dann von *C. Rosati*[224]), unter engerem geometrischem Gesichtspunkt und in Verbindung mit der Theorie der Korrespondenzen zwischen Kurven.

C. Rosati ging von der Betrachtung der Systeme mit reinen Achsen aus, d. h. der Systeme, deren Achsen keine anderen Achsen niedriger Dimension enthalten. Diese Achsen zerfallen in t $(\geqq 1)$ algebraische Mannigfaltigkeiten $M_1, M_2, \ldots, M_t$ von den Dimensionen

---

System A enthaltenen Integrale, so hat man

$$\lambda \leqq 2q(p-q),$$

wo das Gleichheitszeichen gilt, wenn die zugehörige *Riemann*sche Matrix maximale Indizes (Nr. **20**) hat: *G. Scorza*[197]), p. 319; Boll. Unione mat. ital. 11 (1932), p. 142. Nach *M. Tognetti,* Boll. Unione mat. ital. 11 (1932), p. 86 wäre $\lambda \leqq 4q(p-q)$.

227) *G. Scorza*, Roma Rend. Acc. Linc. (5) 24^2 (1915), p. 400, 445; [197]), p. 300—301 und 306—307, wo es sich um algebraische Mannigfaltigkeiten, mehr im allgemeinen, handelt.

228) *G. Scorza*[197]), p. 301; *C. Rosati*[224]), p. 121.

229) S. [197]), p. 303 ff.

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t$. Sind $m_1, m_2, \ldots, m_t$ die zweiten Indizes der zur M_1, $M_2, \ldots, M_t$ gehörigen Achsen, so ist

$$(1) \qquad k_i + 1 = \frac{m_i}{m_i - \lambda_i}$$

eine ganze Zahl und stellt die Anzahl der unabhängigen Achsen dar, die M_i angehören; und es ergibt sich die Beziehung

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{t} \frac{m_i^2}{m_i - \lambda_i} = \mu.$$

Der Immersionskoeffizient einer beliebigen Achse der Kurve ist ausgedrückt durch

$$\lambda^* = \sum_{i=1}^{t} (r_i + 1)(k_i - r_i)(m_i - \lambda_i),$$

wo $r_i + 1$ die Anzahl der unabhängigen reinen Achsen ist, die in der gegebenen Achse enthalten sind und M_i angehören.

Daraus folgt, daß

$$\lambda^* \leqq \frac{\mu}{4},$$

wo das Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, wenn die durch die betrachtete Achse bestimmte Mannigfaltigkeit, zusammen mit jeder ihrer Achsen, jede zu ihr komplementäre Achse enthält. Wenn eine solche Mannigfaltigkeit existiert, so ist sie einzig (und daher die Kurve vom geraden Geschlecht).[230])

23. Minimalgleichung einer Korrespondenz. Nach *C. Rosati*[231]) heißt *Minimalgleichung* einer Korrespondenz T die Minimalgleichung der Homographie Ω, die das Bild der Korrespondenz ist[232]), d. h. die

230) Die vorhergehenden Formeln sind in anderen, schon von *G. Scorza*, Roma Rend. Acc. Linc. (5) **24**² (1915), p. 393; (5) 25₁ (1916), p. 289; [197]), p. 300, angegebenen Formeln enthalten, wenn man sich vor Augen hält, daß, wenn l, m der erste und zweite Index einer Achse sind und λ ihr Immersionskoeffizient ist, die Multiplikabilitätsindizes (nach *G. Scorza*, Nr. **20**) h_1 und h_2 der Achse und einer ihr komplementären Achse ausgedrückt sind durch

$$h_1 = m - \lambda - 1, \quad h_2 = l - \lambda - 1.$$

Dann ist die Formel (1) von *C. Rosati*, aus der sofort die Formel (2) folgt, nichts anders als die Formel (34) von *G. Scorza*[197]), p. 300, angewandt auf eine reine und eine ihr komplementäre Achse.

231) Atti Acc. Torino 51 (1916), p. 991.

232) Vgl. I A 4 (*E. Study*), Nr. **10**. Der Ausgangspunkt ist ein Satz von *G. Frobenius*, J. f. Math. 84 (1877), p. 11; Monatsber. Ak. Berlin **1896**, p. 606 über die Gleichung vom Minimalgrad, der eine bilineare Form genügt. Andere Beweise des Satzes bei *Ed. Weyr*, Monatsh. Math. Phys. 1 (1890), p. 187; *O. Perron*, Math. Ann. 64 (1906), p. 249; ein geometrischer Beweis *C. Rosati*[231]), p. 998. Der Satz besagt im wesentlichen, daß die Wurzeln der Minimalgleichung $\psi(z) = 0$

Gleichung, die von dem Minimalaggregat von Potenzen von T bestimmt ist, das eine Korrespondenz mit Wertigkeit Null erzeugt. Sie ist vom Grade $\leq 2p$, mit ganzzahligen Koeffizienten, deren erster gleich der Einheit ist. Für die Wertigkeitskorrespondenzen ist die Minimalgleichung linear. Ist die Korrespondenz symmetrisch, so sind alle Wurzeln der Minimalgleichung einfach und reell; ist die Korrespondenz halbsymmetrisch, so sind die Wurzeln der Minimalgleichung einfach und alle (ausgenommen eine eventuelle Wurzel Null) rein imaginäre Zahlen.

Zwei Korrespondenzen T und T^{-1}, deren eine die inverse der anderen ist, besitzen dieselbe Minimalgleichung.

In seinen allgemeinen Untersuchungen über die Algebren mit mehreren Einheiten und die *Riemann*schen Matrizen (Nr. 20), hat *G. Scorza*[233]) den Begriff des *Rangs* einer *Riemann*schen Matrix eingeführt, der für den Fall einer algebraischen Kurve der Maximalwert ϱ ist, den der Grad der Minimalgleichung einer auf der Kurve bestehenden Korrespondenz annehmen kann. Dieser ist invariant gegenüber der Beziehung des Isomorphismus (insbesondere der Äquivalenz) zwischen *Riemann*schen Matrizen. Es gilt[234])

$$\varrho \geqq 1, \quad \varrho \leqq \mu, \quad \varrho \leqq 2p.$$

Dann und nur dann ist $\varrho = 1$, wenn $\mu = 1$ (und daher $\mu_1 = 1$) ist.

Ist $\varrho = 2$, dann sind nur folgende Fälle möglich[235]):

$$\mu = 2,\ \mu_1 = 1; \quad \mu = 4,\ \mu_1 = 1; \quad \mu = \mu_1 = 2; \quad \mu = 4,\ \mu_1 = 3.$$

In den beiden ersten Fällen läßt die Kurve keine spezialen Korrespondenzen zu, in den beiden letzten kann sie solche zulassen oder nicht. Im ersten Falle ist $p \neq 2$, im zweiten Falle ist p eine gerade Zahl > 2, im vierten Falle ist p eine gerade Zahl $\geqq 2$.

G. Scorza[236]) hat auch den Fall gekennzeichnet, in dem ϱ den Maximalwert $2p$ erreicht, und unter der Annahme, daß die Kurve keine

---

einer (singulären oder nicht singulären) Homographie Ω einzig und allein die Wurzeln der charakteristischen Gleichung von Ω sind. Je nachdem $\psi(z) = 0$ nur einfache bzw. vielfache Wurzeln hat, ist Ω eine allgemeine bzw. eine spezielle Homographie. Ist außerdem $f(z) = 0$ irgendeine beliebige Gleichung, der Ω genügt, so muß $f(z)$ durch $\psi(z)$ teilbar sein. Vgl. noch *M. Tognetti*, Atti Acc. Torino 67 (1932), p. 7.

233) Rend. Circ. mat. Palermo 45 (1919), p. 119; Auszug Roma Rend. Acc. Linc. (5) 26^2 (1917), p. 177.

234) Für $p = 1$ ist $\varrho = 1$ bzw. auch $\varrho = 2$, je nachdem $\mu = 1$ bzw. $\mu = 2$ ist: *G. Scorza*[233]). Für $p = 2$ s. Nr. 28.

235) *G. Scorza*[233]), p. 157—160.

236) S. [233]), p. 162—163.

spezialen Korrespondenzen aufweist[237]), insbesondere die Fälle studiert, in denen p bzw. ϱ eine Primzahl[238]) ist. Für $p = 2$ s. Nr. 28. Ist p eine ungerade Primzahl[239]), so sind nur folgende Fälle möglich:

$$\mu = \mu_1 = 1,\ \varrho = 1; \quad \mu = 2,\ \mu_1 = 1,\ \varrho = 2;$$
$$\mu = \mu_1 = p,\ \varrho = p; \quad \mu = 2p,\ \mu_1 = p,\ \varrho = 2p.$$

Ist ϱ eine ungerade Primzahl, so sind nur zwei Fälle möglich:

$$\mu = \mu_1 = \varrho; \quad \mu = \varrho^2,\ \mu_1 = \frac{\varrho(\varrho + 1)}{2},$$

und p ist in beiden Fällen ein Vielfaches von ϱ.

Über das Vorhergehende vgl. auch Nr. 27.

24. Ausdehnung des Wertigkeitsbegriffs einer Korrespondenz; einfache und mehrfache Wertigkeiten einer Korrespondenz. Vermöge der Korrespondenz T mit den Indizes α, β, seien y', y'', …, $y^{(\beta)}$ die homologen Punkte eines Punktes x der Kurve C. Sind σ und σ' zwei, vermöge T untereinander entsprechende Zyklen der *Riemann*schen Fläche R, und nimmt man an, daß zwischen den Perioden τ und τ' eines Integrals 1. Gattung u längs dieser Zyklen die Beziehung

$$\tau' + \gamma\tau = 0$$

stattfindet, wo γ eine von σ unabhängige reelle oder komplexe Zahl ist, dann ist die Summe

$$u(y') + u(y'') + \cdots + u(y^{(\beta)}) + \gamma u(x)$$

auf R konstant. Bezeichnet man mit I die identische Korrespondenz auf der Kurve, dann sagt man, die *lineare Funktion von T, $T + \gamma I$* ist konstanten Niveaus für das Integral u oder auch γ ist eine *Wertigkeit von T in bezug auf das Integral u.*[240]) Die Gesamtheit aller Integrale, für die T die Wertigkeit γ besitzt, bildet ein lineares System,

237) Unter diese Annahme ist ϱ ein gemeinschaftlicher Teiler der Zahlen $2p$ und μ; der Quotient der Division von μ durch ϱ ist ein Divisor von ϱ und $\mu \leq \varrho^2$: *G. Scorza*[233]), p. 131.

238) Für den Fall, daß p eine ungerade Primzahl, s. *G. Scorza*, Paris C. R. 167 (1918), p. 454; [233]), p. 164—168; vgl. darüber *G. Humbert* und *P. Lévy*, Paris C. R. 158 (1914), p. 1609. Für den Fall, daß ϱ eine ungerade Primzahl, s. *G. Scorza*[233]), p. 168—174.

239) *G. Scorza*[197]), p. 312—313; [233]), p. 167—168, hat die vollständige Klassifikation der Fälle angegeben, die sich bei $p = 3$ darbieten können. Es gibt 4 Fälle, wenn die Kurve keine spezialen Korrespondenzen enthält, 18 Fälle dagegen, wenn ja.

240) *C. Rosati*, Atti Acc. Torino 51 (1916), p. 991; 53 (1917), p. 5. Der *Rosati*sche Begriff der *mehrwertigen Korrespondenz* ist eine Erweiterung des von *F. Severi* herrührenden Begriffs der *Korrespondenz mit doppelter Wertigkeit.* S. Anm. 214.

das dieser Wertigkeit *beigeordnet* heißt. Die Anzahl der unabhängigen Integrale dieses linearen Systems heißt *Dimension* der Wertigkeit.

Jede Korrespondenz T besitzt eine gewisse Anzahl von Wertigkeiten, die ebenso vielen linearen Systemen von Integralen beigeordnet sind. Diese Systeme sind untereinander unabhängig; und die Korrespondenz T heißt *regulär* bzw. *irregulär*, je nachdem diese Systeme durch das ganze ∞^{p-1}-System der auf die Kurve bezüglichen Integrale, bzw. durch ein Teilsystem, verknüpft werden können. Je nachdem T regulär oder irregulär ist, sind alle Wurzeln ihrer Minimalgleichung einfach oder nicht, ist also die Homographie Ω in Nr. **21** allgemein oder speziell (vgl. Anm. 232).

Die Wertigkeiten von T sind einzig und allein die mit vertauschtem Vorzeichen versehenen Wurzeln der charakteristischen Gleichung der Homographie Π (Nr. **21**) und die Bilder der ihnen beigeordneten linearen Systeme von Integralen die ihnen [im Sinne von III C 7 (*C. Segre*), Nr. **14**] entsprechenden Bündel von Koinzidenzüberebenen. Diese Wertigkeiten sind demnach algebraische ganze Zahlen, die invariant sind, sei es gegenüber den birationalen Transformationen der Kurve, sei es gegenüber der Gruppe der Rückkehrschnitte auf der *Riemann*schen Fläche R. Sie stimmen mit den Multiplikatoren der auf T bezüglichen komplexen Multiplikation überein.

Ist eine partielle Wertigkeit von T eine rationale ganze Zahl, so ist das ihr beigeordnete System von Integralen ein reduzibles reguläres System, und umgekehrt.

Speziale Korrespondenzen, und nur diese, besitzen die partielle Wertigkeit Null.

Die Betrachtung der einfachen und mehrfachen linearen Systeme von Koinzidenzpunkten und -überebenen einer Homographie führt zu dem Begriff der einfachen und mehrfachen Wertigkeiten. Es kann vorkommen, daß alle linearen Systeme von Integralen, für die die aufeinanderfolgenden Potenzen der linearen Funktion $T + \gamma I$ konstanten Niveaus sind, mit dem γ beigeordneten linearen ∞^{l-1}-System zusammenfallen; in diesem Falle sagt man, daß γ eine *einfache Wertigkeit* von T ist. Es kann dagegen vorkommen, daß die linearen Systeme von Integralen für die $T + \gamma I$ und die aufeinanderfolgenden Potenzen $(T + \gamma I)^2, \ldots, (T + \gamma I)^r$ konstanten Niveaus sind, die Dimensionen $l - 1,\ l + l_1 - 1,\ \ldots,\ l + l_1 + \cdots + l_{r-1} - 1$ haben, indem jedes dieser Systeme das vorhergehende enthält, während für das letzte von ihnen (das auch mit dem gesamten ∞^{p-1}-System zusammenfallen kann) die weiteren Potenzen $(T + \gamma I)^{r+1}, (T + \gamma I)^{r+2}, \ldots$ konstanten Niveaus sind. Trifft dies zu, so sagt man, daß γ eine *r-fache Wertigkeit* von T ist, und die genannten linearen Systeme von Integralen, von den Dimensionen $l-1,\ l+l_1-1, \ldots, l+l_1+\cdots+l_{r-1}-1$, heißen zu γ *beigeordnet.* Im ersten Falle ist die Multiplizität der Wurzel $-\gamma$ für die charakteristische Gleichung der Homographie Π gleich l, im zweiten Falle gleich $l+l_1+\cdots+l_{r-1}$.

Eine Korrespondenz T läßt nur einfache Wertigkeiten zu oder nicht, je nachdem die Homographie Ω, die das Bild von T ist, allgemein oder speziell ist.[241])

Die Minimalgleichung ist (im absoluten Rationalitätsbereich) reduzibel oder irreduzibel, je nachdem es speziale Korrespondenzen als rationale Funktionen von T gibt oder nicht[242]), da man eine Korrespondenz S *rationale Funktion* einer anderen Korrespondenz T nennt, wenn $lS \equiv f(T)$, wobei l eine ganze Zahl und f ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten ist. Besitzt insbesondere T mehrfache Wertigkeiten, so existieren speziale Korrespondenzen, die rationale Funktionen von T sind.

Die Wertigkeiten zweier Korrespondenzen T und T^{-1}, deren eine die Inverse der anderen ist, sind konjugiert-komplexe Zahlen; eine Wertigkeit von T und die konjugiert-komplexe Wertigkeit von T^{-1} haben dieselbe Multiplizität und sind (im allgemeinen verschiedenen) linearen Systemen von Integralen derselben Dimension beigeordnet. Daraus folgt, daß T und T^{-1} entweder beide regulär oder beide irregulär sind.

Was die mit mehrfachen Wertigkeiten ausgestatteten Korrespondenzen betrifft, so gilt auch noch die Eigenschaft, daß eine Kurve, auf der eine derartige Korrespondenz existiert, notwendigerweise reduzible reguläre Systeme besitzt.

Aus dem vorausgehenden leitet sich für die Anzahl der Koinzidenzen einer beliebigen Korrespondenz T ein Ausdruck ab, den man als eine Verallgemeinerung des *Cayley-Brill*schen Ausdrucks für die Korrespondenzen mit gewöhnlicher Wertigkeit betrachten kann. Es seien $\gamma', \gamma'', \ldots, \gamma^{(k)}$ die Wertigkeiten von T, so daß die Wertigkeiten von T^{-1} $\gamma_0', \gamma_0'', \ldots, \gamma_0^{(k)}$, die entsprechenden konjugiert-komplexen Zahlen der vorhergehenden sind. Es sei r_i ($\geqq 1$) die gemeinsame Multiplizität von $\gamma^{(i)}$ und $\gamma_0^{(i)}$, und $q_i - 1$ die gemeinsame Dimension der beiden linearen Systeme von Integralen, für die die Potenzen $(T+\gamma^{(i)}I)^{r_i}$

241) Dies ist ein Korollar einer Eigenschaft der linken Seite der Minimalgleichung der Homographie Ω, die nämlich das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der linken Seiten der Minimalgleichungen der Homographien ist, die Ω in den Räumen τ und τ_0 hervorruft. *C. Rosati,* Atti Acc. Torino 53 (1917), p. 14.

242) *C. Rosati,* Ann. di mat. (3) 31 (1921), p. 23—24.

und $(T^{-1} + \gamma_0^{(i)} I)^{r_i}$ konstanten Niveaus sind. Dann folgt aus dem ersten der *Hurwitz*schen Ausdrücke (8) von Nr. **12** für die Anzahl der Koinzidenzen der Ausdruck[243])

$$\alpha + \beta + \sum_{i=1}^{k} (\gamma^{(i)} + \gamma_0^{(i)})\, q_i.$$

Vom Gesichtspunkt der Wertigkeiten aus betrachtet, werden die symmetrischen und halbsymmetrischen Korrespondenzen wie folgt gekennzeichnet. Eine symmetrische Korrespondenz besitzt vor allem nur einfache und reelle Wertigkeiten; eine halbsymmetrische Korrespondenz nur einfache Wertigkeiten, die, außer einer möglichen Wertigkeit Null, rein imaginär sind.

Ist eine Wertigkeit von T und die konjugiert-imaginäre Wertigkeit von T^{-1} demselben linearen System von Integralen beigeordnet, so sind beide für T und T^{-1} einfache Wertigkeiten. Daraus folgt: Soll eine Korrespondenz T symmetrisch sein, so ist notwendig und hinreichend, daß alle ihre Wertigkeiten reell sind und jede für T und für T^{-1} ein und demselben linearen System von Integralen beigeordnet ist. Ähnlich ist es, damit eine Korrespondenz T halbsymmetrisch ist, notwendig und hinreichend, daß ihre Wertigkeiten rein imaginär sind (eine möglicherweise auftretende Wertigkeit Null ausgeschlosssen), und jede Wertigkeit von T und die konjugiert-imaginäre von T^{-1} ein und demselben System[244]) von Integralen beigeordnet sind.

C. Rosati[245]) hat auch, in Verbindung mit dem Nullsystem, das das Bild einer symmetrischen Korrespondenz (Nr. **21**) ist, die symmetrischen Korrespondenzen gekennzeichnet, deren sämtliche Wertigkeiten dasselbe Vorzeichen haben, und daraus einen Beweis des arithmetischen Kriteriums von *G. Castelnuovo* abgeleitet, von dem in Nr. **34** die Rede sein wird.

25. Hermitesche Korrespondenzen. Verbindung der Korrespondenztheorie mit dem Begriff der Ordnung von Zahlkörpern (nach R. Dedekind). Es sei T eine algebraische (α, β)-Korrespondenz zwischen zwei voneinander verschiedenen oder nicht verschiedenen Kurven

243) Insbesondere folgt, daß die Anzahl der Koinzidenzpunkte für eine halbsymmetrische Korrespondenz $\alpha + \beta$ ist. Vgl. schon erstmalig *C. Rosati*[118]), p. 436.

244) Die vorausgehenden Eigenschaften wurden von *C. Rosati*, Atti Acc. Torino 51 (1916), p. 991; 53 (1917), p. 5 angegeben. In der ersten Arbeit hat *Rosati* insbesondere die von ihm als *mehrwertige Korrespondenzen* bezeichneten Korrespondenzen betrachtet, und zwar in bezug auf den Fall, daß die Minimalgleichung der Korrespondenz nur rationale (und daher ganze) Wurzeln hat, und gezeigt, wie man Kurven konstruieren kann, auf denen mit beliebig vielen Wertigkeiten ausgestattete Korrespondenzen existieren.

245) Ann. di mat. (3) 31 (1921), p. 1.

C und C'. Sind $x_1, x_2, \ldots, x_\alpha$ die α Punkte von C, die vermöge T einem Punkte y von C' entsprechen, so gibt es auf C eine algebraische Schar γ_α' vom Index β (Nr. **32**), die von den Gruppen der α homologen Punkte eines veränderlichen Punktes von C' beschrieben wird. Betrachtet man ähnlicherweise die Korrespondenz T^{-1}, die von jedem Punkt x von C zu den β homologen Punkten von C' führt, so erhält man auf C' eine Schar γ_β' vom Index α. Diese Scharen γ_α' und γ_β' heißen die von T auf C und C' *induzierten* Scharen.

Seitenkorrespondenzen von T sind die beiden auf C bzw. C' existierenden symmetrischen Korrespondenzen S und S', in denen zwei Punkte homolog sind, die in T oder in T^{-1} ein und demselben Punkt von C' oder von C entsprechen, d. h. zwei Punkte, die ein und derselben Gruppe von γ_α' oder von γ_β' angehören.

Ist nach diesen Voraussetzungen T eine auf einer Kurve C gegebene (α, β)-Korrespondenz, so ist, damit jede Wertigkeit von T und die konjugiert-komplexe von T^{-1} ein und demselben System von Integralen 1. Gattung beigeordnet sind, notwendig und hinreichend, daß T und T^{-1} rationale Funktionen voneinander sind (Nr. **24**) (*C. Rosati*, Anm. 245).

Nun befinden sich aber unter den Korrespondenzen, die rationale Funktionen ihrer Inversen sind, nicht nur die symmetrischen und halbsymmetrischen, sondern auch die *Hermite*schen Korrespondenzen (vgl. Nr. **38**), d. h. die Korrespondenzen, deren Seitenkorrespondenzen mit gewöhnlicher Wertigkeit ausgestattet sind. Als *Hermite*sche Korrespondenz kann man auch eine nicht speziale Korrespondenz T bezeichnen, die so beschaffen ist, daß sich

$$(1) \qquad T^{-1}T = kI$$

ergibt, wo I die identische Korrespondenz und k eine (notwendigerweise positive) ganze Zahl ist, die *Ordnung* der *Hermite*schen Korrespondenz[246]) heißt.

Soll eine Korrespondenz, welche eine rationale Funktion ihrer Inversen ist, eine *Hermite*sche Korrespondenz sein, so ist notwendig und

---

246) Eine eineindeutige Korrespondenz ist eine *Hermite*sche Korrespondenz 1. Ordnung. Ist umgekehrt T eine *Hermite*sche Korrespondenz 1. Ordnung auf einer Kurve vom Geschlecht $p > 1$, so ist in einer der beiden Klassen $\pm T$ eine und nur eine eineindeutige Korrespondenz enthalten. Ist die Kurve hyperelliptisch und nur in diesem Falle, so ist in allen beiden Klassen eine solche Korrespondenz enthalten. S. *C. Rosati*[245]), p. 19—21. Hiervon hat *C. Rosati* einen arithmetischen Beweis des Satzes von *H. A. Schwarz* und *F. Klein* abgeleitet, von dem in Nr. **41** die Rede sein wird.

hinreichend, daß alle ihre Wertigkeiten gleichen Modul haben. In der Gleichung (1) haben alle Wertigkeiten von T den Modul $\sqrt{k}$.

Auf einer Kurve vom Geschlecht $p > 1$ gibt es *Hermite*sche Korrespondenzen einer gegebenen Ordnung k in endlicher Anzahl, wenn zwei derselben charakteristischen Matrix beigeordnete, d. h. ein und derselben Klasse angehörende (Nr. **12**), Korrespondenzen als nicht voneinander verschieden betrachtet werden.

Ist auf der Kurve C eine singuläre Korrespondenz T gegeben, so betrachten wir allgemein die Gesamtheit aller Korrespondenzen, die rationale Funktionen von T sind. Ist R eine innerhalb dieser Gesamtheit veränderliche Korrespondenz, so ist eine ihrer Wertigkeiten in dem durch eine Wertigkeit von T bestimmten algebraischen Zahlkörper veränderlich, nimmt aber im allgemeinen nicht alle ganzen Zahlen dieses Körpers als Werte an, sondern beschreibt eine Gesamtheit, die den Bedingungen einer *Ordnung* genügt.[247]) Aus dieser Überlegung heraus gab *C. Rosati*[248]) der Gesamtheit dieser Korrespondenzen R auch den Namen *Ordnung* und stellte sie durch $o(T)$ dar; die Korrespondenz T heißt die *Erzeugende* dieser Ordnung. *Grad* von $o(T)$ ist der Grad der Minimalgleichung von T. Je nachdem diese Gleichung (im absoluten Rationalitätsbereich) reduzibel oder irreduzibel ist, sagt man, daß $o(T)$ *reduzibel* oder *irreduzibel* ist.

Die Korrespondenzen einer Ordnung vom Grade n bilden ein Netz n^{ter} Stufe, sind zu je zweien vertauschbar und werden, außer durch Addition und Subtraktion, auch durch Multiplikation reproduziert. In einer Ordnung sind die Wertigkeitskorrespondenzen enthalten.

Ist eine Ordnung irreduzibel, so ist jede in ihr enthaltene Ordnung auch irreduzibel, und ihr Grad ein Divisor des Grades der gegebenen Ordnung.

Die gemeinsamen Korrespondenzen zweier Ordnungen sowie die in einer Ordnung enthaltenen symmetrischen Korrespondenzen bilden je eine Ordnung. Bilden die symmetrischen Korrespondenzen der Kurve eine Gruppe, so ist auch diese Gruppe eine Ordnung.

Soll eine Ordnung $o(T)$ mit ihrer Inversen $o(T^{-1})$ zusammenfallen, d. h. eine Korrespondenz T rationale Funktion ihrer Inversen sein, so ist notwendig und hinreichend, daß der Grad der Minimalgleichung von T gleich der Summe der Anzahl der voneinander unabhängigen symmetrischen und halbsymmetrischen Korrespondenzen ist, die rationale Funktionen von T sind.

247) Über den Begriff der *Ordnung* eines Zahlkörpers (nach *R. Dedekind*) s. I C 4a (*D. Hilbert*), Nr. **12**.

248) S. [245]), p. 25.

In einer irreduziblen Ordnung $o(T)$, die mit ihrer Inversen übereinstimmt, ist jede Korrespondenz mit reeller Wertigkeit symmetrisch; jede Korrespondenz mit rein imaginärer Wertigkeit halbsymmetrisch; jede Korrespondenz, deren eine Wertigkeit die Quadratwurzel einer ganzen Zahl als Modul hat, eine *Hermite*sche Korrespondenz.

Ist eine derartige Ordnung nicht vollständig aus symmetrischen Korrespondenzen zusammengesetzt, so enthält sie eine gleiche Anzahl unabhängiger symmetrischer und halbsymmetrischer Korrespondenzen. Als Erzeugende der Ordnung kann eine halbsymmetrische Korrespondenz K gewählt werden, und die symmetrischen und halbsymmetrischen Korrespondenzen der Ordnung sind durch rationale Funktionen gegeben, die nur gerade bzw. ungerade Potenzen von K[249]) enthalten.

26. Fortsetzung: Vertauschbare Korrespondenzen. Sind die Homographien, die die Bilder zweier auf einer Kurve C bestehenden Korrespondenzen T und U sind (die Homographien Ω von Nr. **21**), vertauschbar, so ergibt sich

$$TU = \varepsilon UT,$$

wobei ε eine rationale Zahl ist. Die Produkte TU und UT sind daher abhängige Korrespondenzen. Ist $\varepsilon = +1$ bzw. $\varepsilon = -1$ (was eintritt, wenn keine Potenz von TU mit Wertigkeit Null besteht), so werden nach *C. Rosati*[250]) die Korrespondenzen T und U *direkt* bzw. *umgekehrt vertauschbar* genannt.

Rosati hat, falls die Produkte TT^{-1} und $T^{-1}T$ voneinander abhängig sind, gefunden, daß die Korrespondenzen T und T^{-1} regulär und direkt vertauschbar sind, und außerdem jede von ihnen rationale Funktion der anderen ist.[251])

Daraus ergibt sich, daß die Annahme der Vertauschbarkeit der Korrespondenzen T und T^{-1} der anderen äquivalent ist, wonach die beiden Ordnungen $o(T)$ und $o(T^{-1})$ zusammenfallen. Hierüber hat *C. Rosati* folgenden Satz bewiesen.

Läßt die Minimalgleichung einer mit ihrer Inversen vertauschbaren Korrespondenz T r reelle Wurzeln und s Paare konjugiert-komplexer

249) Weitere Eigenschaften bei *N. Spampinato,* Note ed eserc. Circ. mat. Catania 5 (1927), p. 98—100.

250) Ann. di mat. (4) 6 (1929), p. 233; Auszug Roma Rend. Acc. Linc. (6) 5 (1927), p. 850.

251) Daraus folgt, daß die Kurven C, auf denen bei jeder Korrespondenz T und ihrer Inversen T^{-1} die (konjugiert-imaginären) Wertigkeiten denselben Integralen 1. Gattung beigeordnet sind, die Kurven sind, auf denen jede symmetrische Korrespondenz mit jeder halbsymmetrischen Korrespondenz vertauschbar ist. Diese Bedingung ist äquivalent mit der anderen, wonach die symmetrischen Korrespondenzen paarweise vertauschbar sind und daher eine Ordnung bilden.

Wurzeln zu, so besitzt die Ordnung $o(T)$ ein Netz $(r+s)^{\text{ter}}$ Stufe von symmetrischen Korrespondenzen und ein Netz s^{ter} Stufe von halbsymmetrischen Korrespondenzen. Ist die Gleichung irreduzibel, so muß $s=0$ oder $r=0$ sein, d. h. die Ordnung $o(T)$ besteht nur aus symmetrischen Korrespondenzen oder die Anzahl der in ihr enthaltenen voneinander unabhängigen symmetrischen Korrespondenzen ist gleich derjenigen der halbsymmetrischen. In allen beiden Fällen sind die Zahlen r und s Divisoren des Geschlechtes p.

27. Pseudoachsen einer Riemannschen Matrix. Multiplikabilitätsgruppe der Matrix und ihre Struktur. In einer allgemeinen Untersuchung über die *Riemann*schen Matrizen (Nr. **20**) hat *C. Rosati*[252]) einige Ergebnisse erhalten, die bei Anwendung auf die Matrix ω der Perioden eines primitiven Systems von Zyklen von p unabhängigen *Abel*schen Integralen 1. Gattung einer Kurve vom Geschlecht p als Ergebnisse der Korrespondenztheorie gedeutet werden können.

Nach der von *C. Rosati* (Nr. **20**, **21**, **22**) angegebenen geometrischen Deutung der Formeln von *A. Hurwitz* entspricht die Gesamtheit aller zu C gehörigen algebraischen Korrespondenzen, deren Basiszahl μ ist, einer unendlichen diskontinuierlichen Gruppe G rationaler Homographien eines linearen Raums S_{2p-1}, der in einem linearen $\infty^{\mu-1}$-System G^* enthalten ist, das gleichfalls eine kontinuierliche Gruppe mit $\mu-1$ Parametern ist. Die Gruppe G ist die Multiplikabilitätsgruppe der Matrix ω (Nr. **20**).[253])

Die Untersuchung der Struktur von G und von G^* wurde von *C. Rosati* auf rein geometrischem Wege durch das vertiefte Studium der Konfiguration der *Pseudoachsen* der Matrix ω durchgeführt. *Pseudoachse* der Matrix ω heißt jede Achse eines reellen ausgearteten Nullsystems von ω.[254]) Sie ist ein reeller linearer Raum R_{2q-1}, der sich auf die Räume τ und τ_0 (Nr. **20**) in zwei konjugiert-imaginären Räumen S_{q-1} stützt, und zu einer *Achse* (Nr. **22**) der Matrix wird, wenn er rational ist.

Nach dem gleichen Verfahren, das *C. Rosati* beim Studium der regulären Systeme reduzibler *Abel*scher Integrale (Nr. **22**) verwandt hatte, hat er auch den Begriff des *Immersionskoeffizienten* auf die Pseudoachsen ausgedehnt. Eine Pseudoachse R_{2q-1}, deren Immersions-

252) Rend. Circ. mat. Palermo 53 (1928), p. 79; Auszug Roma Rend. Acc. Linc. (6) 6 (1927), p. 191.

253) Vgl. hierüber *G. Scorza*[197]), p. 279.

254) Der Begriff der Pseudoachse einer *Riemann*schen Matrix rührt von *G. Scorza*[197]), p. 320 her, der die Wichtigkeit dieses Begriffs beim Studium dieser Matrizen hervorhob.

koeffizient λ ist, bestimmt eine reelle ∞^λ-Mannigfaltigkeit V von Pseudoachsen, die durch jede Homographie des linearen Systems G^* in sich verwandelt wird. Jede kontinuierliche Mannigfaltigkeit von Pseudoachsen, die eine Pseudoachse mit V gemeinsam hat, ist vollständig in V enthalten. Daher sagt man, daß V eine *vollständige* Mannigfaltigkeit von Pseudoachsen ist. Ist $\lambda = 0$, so wird R_{2q-1} durch alle Homographien von G^* in sich verwandelt und *isolierte Pseudoachse* genannt.

Jeder Pseudoachse R_{2q-1} hat *C. Rosati* noch eine weitere Zahl γ beigeordnet, die er als *Charakter* der Pseudoachse bezeichnete. Dies ist die Anzahl der voneinander unabhängigen Homographien, die in der Pseudoachse durch die Homographien von G^* bestimmt werden, die ebendiese Pseudoachse in sich verwandeln. Für den Fall, daß R_{2q-1} eine *reine* Pseudoachse ist, ergibt sich folgende Eigenschaft:

Der Immersionskoeffizient λ einer reinen, nicht isolierten Pseudoachse ist ein Vielfaches ihres Charakters γ. Setzt man $\lambda = k\gamma$, so ist $k+1$ die Maximalzahl der unabhängigen Pseudoachsen, die in der durch die besagte reine Pseudoachse bestimmten vollständigen Mannigfaltigkeit enthalten sind.

Da jede unreine Pseudoachse von ω durch Verbindung einer gewissen Anzahl unabhängiger reiner Pseudoachsen erhalten wird, muß man beim Studium der Konfiguration der Pseudoachsen die Art der Verteilung der reinen Pseudoachsen untersuchen. Es ergibt sich dann, daß sich die reinen Pseudoachsen der Matrix ω auf eine endliche Anzahl algebraischer irreduzibler Mannigfaltigkeiten $V_1, V_2, \ldots, V_t$ von den Dimensionen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t$ verteilen, wobei λ_i der Immersionskoeffizient der in V_i enthaltenen Pseudoachsen R_{2q_i-1} ist. Die Räume $R_{2Q_1-1}, R_{2Q_2-1}, \ldots, R_{2Q_t-1}$, denen die genannten Mannigfaltigkeiten angehören, sind voneinander unabhängig, gehören S_{2p-1} an (so daß $Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_t = p$) und sind die minimalen isolierten Pseudoachsen der Matrix.

Nimmt man, nach diesen Voraussetzungen, vor allem an, daß ω rein, d. h. die Kurve C frei von reduziblen regulären Systemen sei, so besitzen alle reinen Pseudoachsen ein und dieselbe Dimension $2q-1$ ($q_1 = q_2 = \cdots = q_t = q$), die minimalen isolierten Pseudoachsen ebenfalls ein und dieselbe Dimension $2Q-1$ ($Q_1 = Q_2 = \cdots = Q_t = Q$), und die Mannigfaltigkeiten $V_1, V_2, \ldots, V_t$ enthalten die gleiche Anzahl $k+1$ unabhängiger reiner Pseudoachsen ($k_1 = k_2 = \cdots = k_t = k$).

Das Studium der Konfiguration der Pseudoachsen wird dann durch folgende Eigenschaft vervollständigt.

Alle reinen Pseudoachsen einer reinen Matrix haben ein und denselben Charakter γ, der nur die Werte 1, 2, 4 annehmen kann. Im ersten Falle betrachten wir auf der Kurve C eine symmetrische Korrespondenz S vom Maximalrang ϱ (Nr. **23**), dann existieren keine mit S vertauschbaren (Nr. **26**) halbsymmetrischen Korrespondenzen; im zweiten Falle bilden die mit S vertauschbaren halbsymmetrischen Korrespondenzen ein Netz ϱ^{ter} Stufe; im dritten Falle, der nur dann möglich ist, wenn das Geschlecht p gerade und größer als 2 ist, bilden die halbsymmetrischen Korrespondenzen ein Netz $3\varrho^{\text{ter}}$ Stufe.

All dies kann kurz zusammengefaßt werden, indem man die Konfiguration der Pseudoachsen für eine reine Matrix *regulär* nennt. Die Matrix heißt dann *erster*, *zweiter*, *dritter* Art, je nachdem der Charakter ihrer reinen Pseudoachsen den Wert 1, 2, 4 annimmt.

Die vorhergehenden Eigenschaften können auch auf die unreinen, von isolierten Achsen freien Matrizen ausgedehnt werden.

Immer unter der Annahme, daß ω von isolierten Achsen frei sei, wird die Erzeugung der Mannigfaltigkeiten $V_1, V_2, \ldots, V_t$ der reinen Pseudoachsen weiter wie folgt präzisiert.

Ist λ die gemeinsame Dimension der Mannigfaltigkeiten V_i und $k+1$ die Maximalzahl der darin enthaltenen unabhängigen reinen Pseudoachsen R_{2q-1}, so ist $\lambda = k,\ 2k,\ 4k$, je nachdem ω erster, zweiter oder dritter Art ist.

Ist ω erster Art ($\lambda = k$), so ist die Mannigfaltigkeit V_i ($i = 1, 2, \ldots, t$) eine Schar einer „*Segre*schen Mannigfaltigkeit“ mit den Indizes k, $2q-1$.[255])

---

255) Sind n ($\geqq 2$) lineare Räume $S_{p_1}, S_{p_2}, \ldots, S_{p_n}$ von den Dimensionen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ gegeben, so bezeichnet man nach *G. Scorza*, Atti Acc. Torino 45 1909), p. 119 als „*Segresche Mannigfaltigkeit*“ von der Art n, mit den Indizes $p_1, p_2, \ldots, p_n$, die von der Gesamtheit allen Gruppen von n Punkten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ gebildete Mannigfaltigkeit V, welche man erhält, indem man einen beliebigen Punkt A_1 von S_{p_1} mit einem beliebigen Punkt A_2 von $S_{p_2}, \ldots$, mit einem beliebigen Punkt A_n von S_{p_n} vereinigt. Ein projektives Modell der Mannigfaltigkeit V wurde von *C. Segre*, Rend. Circ. mat. Palermo 5 (1891), p. 192 mittels folgender analytischer Darstellung angegeben.

$x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, \ldots, x_{p_i}^{(i)}$ seien die homogenen projektiven Koordinaten eines allgemeinen Punktes von S_{p_i} und $X_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ homogene projektive Koordinaten in einem linearen Raum S_k von der Dimension

$$k = (p_1+1)(p_2+1)\ldots(p_n+1) - 1.$$

Dann ergibt sich für die Mannigfaltigkeit V die Parameterdarstellung

$$\varrho X_{i_1 i_2 \ldots i_n} = x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \ldots x_{i_n}^{(n)}$$
$$(i_j = 0, 1, \ldots, p_j;\quad j = 0, 1, \ldots, n),$$

wo ϱ ein willkürlicher Proportionalitätsfaktor ist. Die Mannigfaltigkeit V liegt

Ist ω zweiter Art ($\lambda = 2k$), so sind in jeder minimalen isolierten Pseudoachse R_{2Q-1} zwei *Segre*sche Mannigfaltigkeiten W_i, $\overline{W}_i$, mit den Indizes k, $q-1$, enthalten, die zwei unabhängigen konjugiert-imaginären Räumen angehören und durch die „konjugierte Transformation" (d. h. die Korrespondenz, durch die jedem Punkt mit komplexen Koordinaten der Punkt mit den konjugiert-komplexen Koordinaten entspricht) ineinander verwandelt werden. Die Mannigfaltigkeit V_i wird durch die Verbindungsräume zweier willkürlicher Räume der zweiten Scharen von W_i und $\overline{W}_i$ erzeugt.

Ist ω dritter Art ($\lambda = 4k$), so muß $p = 2p_1$, $q = 2q_1$, $Q = 2Q_1$ sein, und in jeder minimalen isolierten Pseudoachse R_{4Q_1-1} ist eine *Segre*sche Mannigfaltigkeit W_i, mit den Indizes $2k+1$, $2q_1-1$, enthalten, die durch die konjugierte Transformation in sich verwandelt, aber frei von reellen Punkten ist. Die Mannigfaltigkeit V_i wird durch die Verbindungsräume zweier willkürlicher Räume der zweiten Schar von W_i erzeugt.

Die Struktur der Gruppen G und G^* für die von isolierten Achsen freien Matrizen hängt daher mit einer bestimmten Anzahl von *Segre*schen Mannigfaltigkeiten innigst zusammen, die alle gleiche Indizes haben. Unter der Voraussetzung, daß ω t minimale isolierte Pseudoachsen besitzt, gibt es t derartige Mannigfaltigkeiten, die alle reell

---

in S_k und in keinem Raume niedrigerer Dimension und hat die Dimension $p_1 + p_2 + \cdots + p_n$ und die Ordnung $\dfrac{(p_1 + p_2 + \cdots + p_n)!}{p_1!\, p_2! \cdots p_n!}$.

Über die Mannigfaltigkeit V vgl. III C 7 (*C. Segre*), Nr. **10**, **44**; außerdem *A. Terracini,* Atti Acc. Torino 49[2] (1913), p. 214; Roma Rend. Acc. Linc. (5) 30[2] (1921), p. 95; *A. Duschek,* Monatsh. Math. Phys. 33 (1923), p. 63; *E. Bertini*[4]), 1. Ausg., p. 200—202; 2. Ausg., p. 380—385; deutsche Ausg., p. 357—362; *E. Cartan*[536]), p. 313—322.

F. Severi, Ann. di mat. (3) 24 (1915), p. 89 hat die Möglichkeit eines Beweises dafür angedeutet, daß die Mannigfaltigkeit V das projektive Modell der Minimalordnung (vgl. Nr. **1**, besonders Anm. 19) sei, die mit ihren Punkten die Gruppen von n in n gegebenen Räumen $S_{p_1}, S_{p_2}, \ldots, S_{p_n}$ angenommenen Punkte ohne Ausnahme darstellt. In der Folge wurde dies von *G. Bordiga,* Ann. di mat. (3) 27 (1917), p. 1 für den Fall $p_1 = p_2 = \cdots = p_n$ bewiesen.

C. Segre, a. a. O. und Math. Ann. 40 (1891), p. 413 hat die Mannigfaltigkeit V dazu benutzt, die reelle Darstellung der komplexen Punkte eines beliebigen linearen Raumes zu verwirklichen. Über die auf diese Weise erhältlichen Mannigfaltigkeiten der niedrigsten Ordnung und damit verbundene Fragen, besonders die nach der günstigsten Darstellung des Variabilitätsgebiets zweier komplexer Variabeln, s. *F. Severi,* „Conf. di geom. alg."[6]), p. 68—74 und 188—196; Roma Rend. Acc. Linc. (6) 9 (1929), p. 915; außerdem *B. Segre,* Rev. mat. hispano-amer. (2) 3 (1928), p. 137; *F. Severi,* Rend. Semin. mat. e fis. di Milano 5 (1931), p. 24—30; Rend. Semin. mat. Univ. di Roma (2) 7[2] (1932), p. 24 ff.

sind und unendlich viele reelle Räume aufweisen, wenn ω erster Art ist; $2t$, die alle imaginär und paarweise konjugiert sind, wenn ω zweiter Art ist; ebenfalls t, die alle reell, aber frei von reellen Punkten sind, wenn ω dritter Art ist. Die Gruppe G^* verwandelt jede *Segre*sche Mannigfaltigkeit in sich, indem sie jeden Raum der ersten Schar fest läßt, und in ihm die vollständige Gruppe der Homographien des Raumes selbst induziert.

Die genannten *Segre*schen Mannigfaltigkeiten heißen *minimale invariante Mannigfaltigkeiten* der Multiplikabilitätsgruppe.

Bezeichnen wir mit α, β die gemeinschaftlichen Indizes der minimalen invarianten Mannigfaltigkeiten, so werden die Basiszahlen μ, μ_1, μ_2 der Kurve C durch die Formeln[256]

$$\mu = 2p\frac{\alpha+1}{\beta+1}, \quad \mu_1 = p\frac{\alpha+2}{\beta+1}, \quad \mu_2 = p\frac{\alpha}{\beta+1};$$

$$\mu = 2p\frac{\alpha+1}{\beta+1}, \quad \mu_1 = p\frac{\alpha+1}{\beta+1}, \quad \mu_2 = p\frac{\alpha+1}{\beta+1};$$

$$\mu = 2p\frac{\alpha+1}{\beta+1}, \quad \mu_1 = p\frac{\alpha}{\beta+1}, \quad \mu_2 = p\frac{\alpha+2}{\beta+1}$$

ausgedrückt, und zwar je nachdem die Matrix ω erster, zweiter oder dritter Art ist. Der Rang ϱ von ω ist in jedem Falle durch die Formel

$$\varrho = \frac{2p}{\beta+1}$$

gegeben.

In dem allgemeinen Falle, daß die Kurve C isolierte reduzible reguläre Systeme besitzt, d. h., die Matrix ω isolierte Achsen zuläßt, gibt es, wenn die minimalen isolierten Achsen mit $K_1, K_2, \ldots, K_s$ bezeichnet werden, in jeder Achse K_i eine gewisse Anzahl für die Gruppe

256) Aus diesen Formeln folgt, daß für eine von isolierten reduziblen regulären Systemen freie Kurve $\mu_1 - \mu_2 = \varrho$, $\mu_1 - \mu_2 = 0$, $\mu_1 - \mu_2 = -\varrho$ gilt, je nachdem die mit der Kurve verknüpfte *Riemann*sche Matrix erster, zweiter oder dritter Art ist.

Außerdem sind die Indizes α und β der minimalen invarianten Mannigfaltigkeiten in einer reinen Matrix so beschaffen, daß $\alpha \leq \beta$.

Für eine von isolierten Achsen freie Matrix gelten folgende obere Grenzen für die Werte von μ, μ_1, μ_2, ϱ:

$$p^2, \quad \frac{p(p+1)}{2}, \quad \frac{p(p-1)}{2}, \quad p;$$

$$2p^2, \quad p^2, \quad p^2, \quad 2p;$$

$$\frac{p^2}{2}, \quad \frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-1\right), \quad \frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}+1\right), \quad p,$$

je nachdem die Matrix erster, zweiter oder dritter Art ist. Wird eine der ersten drei Grenzen erreicht, so werden in jedem Falle auch die übrigen erreicht.

G^* invarianter *Segre*scher Mannigfaltigkeiten, die alle gleiche Indizes α_i, β_i haben und von derselben Art sind (entweder reell mit unendlich vielen reellen Räumen, oder paarweise konjugiert-imaginär, oder reell, aber frei von reellen Punkten). Und man erhält folgendes allgemeine Ergebnis:

Die Basiszahlen μ, μ_1, μ_2 und der Rang ϱ irgendeiner Kurve C sind durch die Formeln

$$\mu = \sum_{i=1}^{s} 2p_i \frac{\alpha_i + 1}{\beta_i + 1}, \quad \mu_1 = \sum_{i=1}^{s} p_i \frac{\alpha_i + 1 + \varepsilon_i}{\beta_i + 1}, \quad \mu_2 = \sum_{i=1}^{s} p_i \frac{\alpha_i + 1 - \varepsilon_i}{\beta_i + 1},$$

$$\varrho = \sum_{i=1}^{s} \frac{2p_i}{\beta_i + 1}$$

ausgedrückt. Darin bezeichnet s ($\geqq 1$) die Anzahl der minimalen isolierten Achsen $K_1, K_2, \ldots, K_s$ der C beigeordneten Matrix ω; $p_1, p_2, \ldots, p_s$ sind ihre Geschlechter, α_i und β_i die Indizes der in K_i enthaltenen invarianten minimalen Mannigfaltigkeiten, und es muß $\varepsilon_i = 1, 0, -1$ gesetzt werden, je nachdem die Achse K_i erster, zweiter oder dritter Art ist.

Mit den minimalen invarianten Mannigfaltigkeiten ist noch eine weitere Eigenschaft der Gruppe G verknüpft. Die Korrespondenzen der Kurve C, die mit jeder anderen Korrespondenz von C vertauschbar sind, bilden eine Ordnung (Nr. **25**). Diese nennt man die *zentrale Ordnung* der Multiplikabilitätsgruppe: ihre Verbindung mit den invarianten Mannigfaltigkeiten ist durch folgenden Satz ausgedrückt:

Die Anzahl der minimalen invarianten Mannigfaltigkeiten ist gleich dem Grad der Minimalgleichung $\psi(z) = 0$ der zentralen Ordnung. Die reellen Wurzeln dieser Gleichung sind den (von reellen Punkten freien oder nicht freien) reellen Mannigfaltigkeiten, die komplexen Wurzeln den imaginären Mannigfaltigkeiten beigeordnet. Die Gleichung ist reduzibel oder irreduzibel (im absoluten Rationalitätsbereich), je nachdem die C beigeordnete Matrix ω isolierte Achsen besitzt oder nicht; und im ersten Falle ist die Anzahl der irreduziblen Faktoren von $\psi(z)$ gleich der Anzahl der minimalen isolierten Achsen der Matrix.[257])

257) In den vorausgehenden Ergebnissen sind verschiedene Eigenschaften enthalten, die schon von *G. Scorza* (Nr. **23**) unter Anwendung der allgemeinen Sätze der Theorie der Algebren auf das Studium der *Riemann*schen Matrizen gefunden worden waren.

Ein anderer Sonderfall betrifft die Matrizen, deren Multiplikabilitätsgruppe eine *Abel*sche Gruppe ist. In diesem Falle sind die minimalen isolierten Pseudoachsen nur erster und zweiter Art. Ist ν' die Anzahl dieser Pseudoachsen erster Art und ν'' die der zweiter Art, so ergibt sich:

$$\mu = \nu' + 2\nu'', \quad \mu_1 = \nu' + \nu'', \quad \mu_2 = \nu'', \quad \varrho = \nu' + 2\nu''.$$

G. Scorza[258]) hat gezeigt, wie man unter der Annahme, daß die Gleichheit der Dimensionen der reinen Pseudoachsen und der minimalen isolierten Pseudoachsen einer reinen Matrix festgelegt sei, die Eigenschaft aller reinen Pseudoachsen, daß nämlich ihr Charakter nur eine der Zahlen 1, 2, 4 sein kann, mittels der Methoden der Theorie der Algebren und mit Hilfe bekannter Sätze von *G. Frobenius* und *E. Cartan* ableiten kann; und ferner, daß die Existenz *Segre*scher Mannigfaltigkeiten mit denselben Indizes, die invariant sind gegenüber der auf eine von isolierten Achsen freie Matrix bezüglichen Gruppe G^*, mit denselben Methoden aus einem Ergebnis von *G. Scorza*[259]) über die linearen, mit regulären Algebren verknüpften Systeme von Homographien abgeleitet werden kann.

Gleichwertige Formeln zu den Formeln von *C. Rosati*, die zur Berechnung der Multiplikabilitäts- und Singularitätsindizes sowie des Ranges einer beliebigen *Riemann*schen Matrix als Funktion passender Charaktere ihrer Pseudoachsen dienen, hat *N. Spampinato*[260]) bei der Entwicklung der Theorie der Pseudoachsen einer Matrix mittels systematischen Studiums der mit der Matrix verknüpften reellen Algebra angegeben.

Zu anderen Ergebnissen kommt *N. Spampinato*[260a]), indem er vom Gesichtspunkt der Algebren und der Halbalgebren die Theorie der sogenannten „pseudoriemannschen Zyklen“ entwickelt, die die Theorie der *Riemann*schen Matrizen umfaßt, und indem er eine wichtige Klasse von halbeinfachen Algebren studiert, die er „elementar“ nennt.

28. Algebraische Korrespondenzen zwischen den Punkten einer Kurve vom Geschlecht $p = 2$. *C. Rosati*[261]) führte als Anwendung seiner allgemeinen Ergebnisse die vollständige Bestimmung der Basiszahlen μ_1 und μ_2[262]) für den Fall $p = 2$ durch und bewies dabei durch direkte

---

258) Roma Rend. Acc. Linc. (6) 9 (1929), p. 253.

259) Note e mem. Circ. mat. Catania 1 (1921), p. 198.

260) Rend. Circ. mat. Palermo 54 (1930), p. 124 [1928].

260a) Note ed eserc. Circ. mat. Catania 6 (1931), p. 107.

Über das Studium der *Riemann*schen Matrizen mittels der Methoden der Theorie der Algebren und in Beziehung zu den Ergebnissen von *C. Rosati* s. noch *A. A. Albert*[216]), vor allem Rend. Circ. mat. Palermo 55 (1931), p. 57 [1929]; Ann. of math. (2) 33 (1932), p. 311. Vgl. auch *A. Lo Voi*[216]).

261) Ann. di mat. (3) 25 (1915), p. 18; Auszug Roma Rend. Acc. Linc. (5) 24^2 (1915), p. 184.

262) Die Zahl μ_1 stimmt mit der Basiszahl ϱ der Gesamtheit aller auf der (zur Kurve gehörigen) *Jacobi*schen Fläche (Nr. **35**) existierenden algebraischen Kurven überein (Anm. 18). Vgl. *G. Bagnera* und *M. de Franchis*, Preisschrift, Rend. Circ. mat. Palermo 30 (1908), p. 185.

Methode die tatsächliche Existenz der verschiedenen möglichen Typen.[263]) Enthält die Kurve keine spezialen Korrespondenzen, so findet man, daß als Werte von μ_1 und μ_2 nur die vier Fälle (1, 0), (2, 0), (2, 2), (3, 1) möglich sind. Der Charakter ϱ, von dem in Nr. **23** die Rede war, hat die Werte 1 bzw. 2, 4, 2. Besitzt dagegen die Kurve speziale Korrespondenzen, so sind als Werte von μ_1 und μ_2 die fünf folgenden Fälle möglich: (2, 0), es existieren zwei und nur zwei elliptische Integrale, von denen keines komplexe Multiplikation zuläßt; (2, 1), es existieren (nur) zwei elliptische Integrale, von denen ein einziges komplexe Multiplikation zuläßt; (2, 2), es existieren (nur) zwei elliptische Integrale, alle beide mit komplexer Multiplikation; (3, 1), es existieren unendlich viele elliptische Integrale, von denen keines komplexe Multiplikation zuläßt; (4, 4), es existieren unendlich viele elliptische Integrale, von denen jedes komplexe Multiplikation zuläßt. Die Zahl ϱ hat die Werte 2 bzw. 3, 4, 2, 4.[264])

Vor allem wurde der Fall $\mu_1 = 2$ studiert, d. h. der Fall einer einfach singulären Kurve Γ vom Geschlechte $p = 2$. Ist die Tabelle der Perioden der beiden zu Γ gehörigen Normalintegrale 1. Gattung[265])

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g' \end{vmatrix},$$

so findet zwischen den Perioden eine Beziehung (von *G. Humbert*) vom Typus

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0 \tag{1}$$

263) Die von *C. Rosati* bezeichneten Typen sind von *G. Scorza* [197]), p. 311—312, 336 ff., von seinem Gesichtspunkt aus wiedergefunden, wobei er sich darauf beschränkt, die Existenz derselben durch Beispiele zu bestätigen.

264) Für die Werte von ϱ s. *G. Scorza* [233]), p. 120.

Diese Einteilung ist im wesentlichen mit der Einteilung aller hyperelliptischen Flächen gleichwertig. Vgl. hierüber auch *S. Lefschetz*, Preisschrift [114]), p. 432—434.

G. Scorza [197]), p. 339 hat in jedem dieser neun Fälle das Studium der Gruppe der automorphen birationalen Transformationen der hyperelliptischen Flächen vertieft. In dem von spezialen Korrespondenzen freien Falle (2, 2) sind die Ergebnisse von *G. Scorza* von *S. Lefschetz*, a. a. O., p. 440—442 direkt auf arithmetischem Wege abgeleitet.

Der erste dieser neun Fälle liefert folgende Eigenschaft. Auf einer Kurve vom Geschlecht $p = 2$ ohne symmetrische singuläre Korrespondenzen ist jede Korrespondenz mit Wertigkeit ausgestattet.

Vom reellen Gesichtspunkt aus s. *S. Lefschetz*, Proc. Nat. Acad. of Science 5 (1919), p. 296; *S. Cherubino*, Roma Rend. Acc. Linc. (6) 16 (1932), p. 285 und 401.

265) Damit die angegebene Tabelle die Tabelle der normalen Perioden einer Kurve vom Geschlecht $p = 2$ sei, ist notwendig und hinreichend, daß, wenn man mit $\bar{g}, \bar{h}, \bar{g}'$ die Koeffizienten von $i = \sqrt{-1}$ in g, h, g' bezeichnet, $\bar{g}\bar{g}' - \bar{h}^2 > 0$ ist.

statt, wo A, B, C, D, E ganze Zahlen ohne gemeinsamen Teiler sind; und die Invariante der Gleichung (1), d. h. die ganze Zahl

$$\Delta = B^2 - 4AC - 4DE$$

hat im wesentlichen positiven Wert.[266])

Aus einem Satz von *G. Scorza*[267]) folgt, daß die Korrespondenzen der Typen (2, 0), (2, 1), (2, 2) eine Ordnung (Nr. **25**) zweiten bzw. dritten, vierten Grades bilden. Im zweiten Falle ist die Ordnung sicherlich reduzibel, während sie im ersten und dritten Falle reduzibel oder irreduzibel ist, je nachdem Γ elliptische Integrale besitzt oder nicht (d. h. speziale Korrespondenzen besitzt oder nicht).

Im ersten und dritten Falle enthält, unter der Annahme, daß die Kurve Γ frei von elliptischen Integralen ist, die auf Γ bezügliche *Jacobi*sche Fläche F (Nr. **35**), nach *G. Humbert*[268]), unendlich viele algebraische Systeme Σ, deren Dimension, Grad, Index und Geschlecht gleich 2 ist und die aus von mehrfachen Punkten freien irreduziblen Kurven zusammengesetzt sind: diese Systeme können den ganzen Lösungen (z, k) der *Pell*schen Gleichung

$$z^2 - \Delta k^2 = 4$$

zugeordnet sein.

Die Frage der Entscheidung über birationale Identität der Kurven derartiger unendlich vieler Systeme Σ (vgl. Nr. **38**) wurde von *G. Humbert*[268]), in der Folge weiter mit mehr geometrischen Methoden und auf

266) Dieser Satz stammt von *G. Humbert*, J. math. pures appl. (5) 5 (1899), p. 246; einen anderen Beweis dafür gaben *G. Bagnera* und *M. de Franchis*[262]), p. 193 an. *G. Scorza*, Roma Rend. Acc. Linc. (5) 23^2 (1914), p. 566 lieferte einen Beweis, der auf einer geometrischen Darstellung fußt, die von *C. Rosati*, Ann. di mat. (3) 25 (1915), p. 18 benutzt wurde, um die tatsächliche Existenz von Kurven vom Geschlecht $p = 2$, für welche μ_1 und μ_2 die von ihm gefundenen Werte haben, zu beweisen.

Sind zwischen den Perioden von Γ r ($= 0, 1, 2, 3$) unabhängige *Humbert*sche Beziehungen vorhanden, so ist die Basiszahl der Korrespondenzen von Γ, die ihren Inversen äquivalent sind (insbesondere der symmetrischen Korrespondenzen) $\mu_1 = r + 1$. S. *C. Rosati*, Rend. Circ. mat. Palermo 44 (1920), p. 307, und auch *L. Remy*, Paris C. R. 147 (1908), p. 1270.

Der Satz von *G. Humbert* wurde von *G. Scorza*, Mem. Soc. ital. delle Scienze (dei XL) (3) 19 (1916), p. 139 [Auszug Paris C. R. 160 (1915), p. 392] auf singuläre *Abel*sche Funktionen mit einer beliebigen Anzahl unabhängiger Veränderlicher ausgedehnt, und zwar mit Hilfe einer geometrischen Deutung des Existenzsatzes solcher Funktionen.

267) S. [197]), p. 337—338.

268) J. math. pures appl. (5) 5 (1899), p. 233; (5) 6 (1900), p. 279 [Auszug Paris C. R. 126 (1898), p. 508]. S. auch *F. Enriques* und *F. Severi*, Preisschrift, Acta math. 32 (1909), p. 283 (besonders p. 307); 33 (1910), p. 321, wo die Kurven

verschiedenen Wegen von *A. Comessatti*[269]) und *C. Rosati*[270]) für den Fall (2, 0)[271]), von *C. Rosati*[272]) für den Fall (2, 2) studiert. Bei der Annahme (2, 0) ergeben sich zwei Fälle. Entweder bestehen alle Systeme Σ aus birational identischen Kurven, oder sie zerfallen in zwei verschiedene Scharen birational identischer Kurven, so daß sich F als *Jacobi*sche Fläche zweier birational verschiedener Kurven ergibt. Je nachdem die Form $z^2 - \Delta k^2$ (wo jetzt Δ kein Quadrat ist) die Zahl -4 darstellen kann oder nicht, ergibt sich der erste oder der zweite der beiden Fälle.

Im Falle (2, 2) bezeichnen wir mit o und ω die beiden Ordnungen, die allen Korrespondenzen bzw. allen symmetrischen Korrespondenzen von Γ beigeordnet sind. Sind alle Einheiten von o reell (d. h., stimmen sie mit denen von ω überein) und haben sie in ω positive Normen, so ist F *Jacobi*sche Fläche auch für eine (und nur eine) andere mit Γ nicht birational identische Kurve. Im gegenteiligen Falle ist F nur für die Kurve Γ *Jacobi*sche Fläche.

29. Algebraische Korrespondenzen zwischen zwei voneinander verschiedenen algebraischen Kurven. Für diese Korrespondenzen gelten viele Eigenschaften, die in den vorhergehenden Nummern im Falle einer einzigen Kurve betrachtet wurden.[273]) So gilt auch noch der Satz von der Basis; haben die beiden Kurven die Geschlechter

---

auf der Fläche F und die automorphen birationalen Transformationen von F studiert werden.

269) Mem. Soc. ital. delle Scienze (dei XL) (3) 21 (1919), p. 45.

270) Rend. Circ. mat. Palermo 44 (1920), p. 307.

271) *Rosati* ging von der Betrachtung der singulären symmetrischen Korrespondenzen auf einer Kurve vom Geschlecht $p = 2$ und der mit ihnen verknüpften „intermediären Funktionen" aus.

Comessatti hat, mit den Methoden von *G. Bagnera* und *M. de Franchis*[262]), p. 185 und durch Diskussion der *Pell*schen Gleichung, alle Systeme Σ, die zu der einfach singulären *Jacobi*schen Fläche F gehören, bestimmt, und ihr Verhalten studiert, sowohl hinsichtlich der singulären birationalen Transformationen von F in sich, wie vom Gesichtspunkt der auf F bestehenden Minimalbasis aus, die schon von *G. Bagnera* und *M. de Franchis,* a. a. O., p. 195 konstruiert wurde.

Sind auf F zwei Systeme Σ und Σ_1, deren Kurven sich in j Punkten schneiden, festgelegt, so hat *A. Comessatti* gezeigt, daß man F auf eine Fläche Φ der Ordnung $2(j+2)$ eines linearen Raumes von $j+1$ Dimensionen, die frei von mehrfachen Punkten ist und überebene Schnitte vom Geschlecht $j+3$ besitzt, birational beziehen kann. *Comessatti* hat dann auf transzendentem Wege die Gruppe der Homographien studiert, die auf Φ den gewöhnlichen birationalen Transformationen von F in sich entsprechen. Der Fall $j = 3$ wurde von ihm besonders untersucht.

272) S. [245]), p. 43.

273) *F. Severi*[2]), p. 26; *G. Scorza*[197]), p. 279—280, 283.

p und p', so findet man außerdem (vgl. Nr. **20**), daß die Anzahl der voneinander unabhängigen Korrespondenzen die Zahl $2pp'$ nicht übersteigen kann. *G. Scorza*[274]) hat Grenzen für die Werte, die diese *Basiszahl* annehmen kann, angegeben und insbesondere die Bedingungen festgestellt, unter denen sie den Maximalwert $2pp'$ annimmt. Hierbei entstehen, wie im Fall der Korrespondenzen auf einer einzigen Kurve (Nr. **19**), Lücken. Ist z. B. $p' \geqq p > 1$, so kann diese Zahl keinen der Werte

$$2p(p'-1)+1, \quad 2p(p'-1)+2, \quad \ldots, \quad 2pp'-1$$

annehmen.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß n Korrespondenzen $T_1, T_2, \ldots, T_n$ zwischen zwei Kurven C und C' vom Geschlecht p und p' voneinander abhängig sind, erhalten wir folgendermaßen: Sind α_i, β_i die Indizes dieser Korrespondenzen und γ_{ik} die Anzahl der T_i und T_k gemeinschaftlichen Paare, so setzen wir

$$c_{ik} = \alpha_i\beta_k + \alpha_k\beta_i - \gamma_{ik} \quad (i \neq k;\ i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Bezeichnen wir ferner mit w_i die Anzahl der Verzweigungspunkte von T_i auf C und setzen

$$c_{ii} = 2\alpha_i(\beta_i + p' - 1) - w_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

so ist die gesuchte Bedingung durch das Nullwerden der symmetrischen Determinante $|c_{ik}|$ ausgedrückt.

Dieser Satz ist in allgemeinen von *F. Severi* bewiesenen Sätzen enthalten, die sich auf die *Basis* der Gesamtheit aller auf einer beliebigen algebraischen Fläche gezogenen algebraischen Kurven beziehen (Anm. 18).[275])

---

274) S. [197]), p. 318—320.

275) Der Satz kann auch mit elementareren Hilfsmitteln bewiesen werden. Daß aus der Abhängigkeit der Korrespondenzen $T_1, T_2, \ldots, T_n$ das Nullwerden der Determinante folgt, war schon von *F. Severi*[2]), p. 27 unter Betrachtung der Fläche, die die Punktepaare von C und C' ohne Ausnahme darstellt, bewiesen worden. Die umgekehrte Eigenschaft wurde von *G. Castelnuovo,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 15^1 (1906), p. 343 als Anwendung seines in Nr. **34** erwähnten arithmetischen Kriteriums bewiesen. Nur durch Betrachtungen über die Geometrie der Kurve wurde der Satz auch von *G. Tafani*, Giorn. di mat. (3) 5 (1914), p. 1, bewiesen, der noch hinzufügte, daß der Rang der Determinante die Anzahl der betrachteten unabhängigen Korrespondenzen ausdrückt. Ein anderer Beweis, der auf der Betrachtung der Fläche beruht, die die Paare der Punkte von C und C' darstellt, bei *P. Roth*[114]). — *G. Castelnuovo,* a. a. O., hat außerdem bemerkt, daß, wenn die Korrespondenzen $T_1, T_2, \ldots, T_n$ voneinander unabhängig sind, die Determinante $|c_{ik}|$ und alle ihre Hauptunterdeterminanten positiv sind.

C. Rosati[276]) hat die geometrische Deutung der Formeln von *A. Hurwitz* für die Darstellung der Korrespondenz mittels der *Abel*schen Integrale 1. Gattung auf den vorliegenden Fall ausgedehnt. Zwischen den Kurven C und C' von den Geschlechtern p und p' sei eine Korrespondenz T von den Indizes α und β gegeben; es seien $x_1, x_2, \ldots, x_\alpha$ die α Punkte von C, die vermöge T einem Punkte y von C' entsprechen; und γ'_α und γ'_β die von T auf C bzw. C' induzierten Scharen mit den Indizes β und α (Nr. **25**). Auf den *Riemann*schen Flächen R, R' von C, C' seien zwei Systeme von p, p' Rückkehrschnitten festgelegt, und die Normalintegrale 1. Gattung von C seien $u_1, u_2, \ldots, u_p$, diejenigen von C' $v_1, v_2, \ldots, v_{p'}$. Dann ergeben sich an Stelle der Gleichungen (1) von Nr. **12** die folgenden

$$\sum_{r=1}^{p} u_k(x_r) = \sum_{i=1}^{p'} \pi_{ki} v_i(y) + \pi_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, p),$$

in denen die π_k vom Ursprung der Integrationen abhängige Konstanten sind, und die π_{ki} den $2pp'$ linearen Beziehungen genügen, die aus den Gleichungen (3) in Nr. **12** folgen, wenn man in den rechten Seiten an Stelle der τ_{ki} die Perioden der u längs der Zyklen von R setzt, die τ_{il} der linken Seiten als die Perioden der v längs der Zyklen von R' betrachtet, und $k = 1, 2, \ldots, p$; $l = 1, 2, \ldots, p'$ setzt.[277])

Dann erweitert sich eine Eigenschaft in Nr. **21** folgendermaßen. Ist r der Rang der Matrix

$$\begin{Vmatrix} h_{ik} & g_{ik} \\ H_{ik} & G_{ik} \end{Vmatrix}$$

und q der der Matrix $\|\pi_{rs}\|$, so ist $r = 2q$, und der Korrespondenz T sind zwei reguläre Systeme reduzibler Integrale beigeordnet.[278]) Das eine ist ein ∞^{p-q-1}-System der Kurve C und aus den Integralen zusammengesetzt, die eine konstante Summe in den Gruppen der Schar γ'_α liefern, das andere ein ∞^{q-1}-System von C', welches durch die Summen der Integrale von C in den Gruppen derselben Schar erzeugt wird.

Die Zahl q heißt *Rang* der Korrespondenz.

Die geometrische Bedeutung der Zahl q erhellt aus folgendem Satz.[279]) Mit Γ_r ($r = 1, 2, 3, \ldots$) bezeichnen wir die aus r all-

---

276) Ann. di mat. (3) 28 (1918), p. 35.

277) Über alles vorhergehende, insbesondere die Scharen γ'_α und γ'_β, s. auch *R. Torelli,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 24^1 (1915), p. 1079.

278) Über die auf die Korrespondenz T^{-1} bezügliche Matrix s. Nr. **12** und Anm. 138.

279) *C. Rosati,* Rend. Circ. mat. Palermo 49 (1924), p. 167.

gemeinen Gruppen von γ'_α gebildete Gruppe. Ist $r \leqq q$, so ist die Gruppe Γ_r mit einer endlichen Anzahl analoger Gruppen äquivalent, ist dagegen $r > q$, so ist sie mit ∞^{r-q} analogen Gruppen äquivalent. Dasselbe gilt für die von r allgemeinen Gruppen von γ'_β gebildete Gruppe.

Sind S und S' die Seitenkorrespondenzen von T (Nr. **25**) auf C und C', so besitzen sie die einfachen Wertigkeiten β bzw. α, von den Dimensionen $p - q$ und $p' - q$. Bezeichnen wir mit I die identische Korrespondenz auf C und C', so ergeben sich die Beziehungen:

$$T^{-1}T = \beta I + S, \quad TT^{-1} = \alpha I + S'.$$

S und auch S' besitzen außerdem einfache reelle Wertigkeiten, deren Dimensionen sowohl für S wie auch für S' gleich sind und deren Summe die Zahl q[280]) ist.

C. Rosati[276]) hat auch die Bildkurve Γ von T, vom Geschlecht π studiert, d. h. die Kurve, deren Punkte die Paare homologer Punkte von T darstellen. Sie enthält zwei Involutionen K und K' von den Ordnungen β und α und den Geschlechtern p und p', die mit C und C' birational identisch[281]) sind.

Wir bezeichnen nun mit KK' und mit $K'K$ die beiden auf Γ liegenden algebraischen Scharen der Ordnung $\alpha\beta$, deren erste durch die Gesamtheit der aus den Punkten einer veränderlichen Gruppe von K hervorgehenden Gruppen von K', und deren zweite von der Gesamtheit der aus den Punkten einer veränderlichen Gruppe von K' hervorgehenden Gruppen von K erzeugt wird, so daß also die erste mit K', die zweite mit K zusammengesetzt ist. Dann ergeben sich folgende Eigenschaften.

Ist q der Rang der betrachteten Korrespondenz, so haben die regulären Systeme reduzibler Integrale 1. Gattung, für welche die beiden Scharen KK' und $K'K$ konstanten Niveaus sind, dieselbe Dimension $\pi - q - 1$. Sind diese Systeme voneinander verschieden, so gehören sie einer diskontinuierlichen unendlichen Menge regulärer Systeme gleicher Dimension an; stimmen sie dagegen überein, so sind die beiden Involutionen K und K' Komponenten ein und derselben Involution vom Geschlecht q, die konstanten Niveaus für ein und dasselbe reguläre reduzible System ist.[282])

280) *C. Rosati*[276]), p. 46—48, wo aus diesen Eigenschaften von S und S' ein Beweis der Formel von *H. G. Zeuthen* (Nr. **2**) abgeleitet wird.

281) Umgekehrt ist jede Kurve Γ, die zwei Involutionen K, K' von den Ordnungen β, α und den Geschlechtern p, p' enthält, die nicht mit ein und derselben Involution zusammengesetzt sind, Bildkurve einer (α, β)-Korrespondenz zwischen zwei mit K, K' birational identischen Kurven von den Geschlechtern p, p'.

282) Mit anderen Worten, besitzt eine Kurve zwei irrationale Involutionen, die nicht Komponenten ein und derselben Involution sind, so besitzt sie eine diskontinuierliche unendliche Menge regulärer Systeme von reduziblen Integralen.

Da die Korrespondenzen $T^{-1}T$ und TT^{-1} symmetrisch sind, so besitzen sie, außer einer möglichen Wertigkeit Null, nur einfache und reelle Wertigkeiten (Nr. **24**). Diese Wertigkeiten sind für beide Korrespondenzen dieselben, und jede hat für beide Korrespondenzen dieselbe Dimension. Sie sind gleich den Wertigkeiten und besitzen die Dimension der Wertigkeiten, die, auf der Bildkurve der gegebenen (α, β)-Korrespondenz, den Korrespondenzen KK' und $K'K$ angehören.

Besitzen die Seitenkorrespondenzen S und S', außer den möglichen Wertigkeiten β und α, mehr als eine weitere Wertigkeit, so enthält die Bildkurve der Korrespondenz eine $(q-1)$-dimensionale (diskontinuierliche) unendliche Menge regulärer reduzibler Systeme.

Besitzen zwei voneinander verschiedene, nicht rationale, algebraische Kurven keine reduziblen regulären Systeme von Integralen 1. Gattung, so sind sie nach *G. Scorza*[283]) verschiedenen Geschlechts, und alle zwischen ihnen stattfindenden algebraischen Korrespondenzen haben dann die Wertigkeit Null, oder auch ein und dasselbe Geschlecht und die Basiszahl jener Korrespondenzen ist dann gleich den Basiszahlen der auf jeder der beiden Kurven gelegenen Korrespondenzen.

30. (2, 2)-Korrespondenzen zwischen zwei algebraischen Kurven; Gruppen solcher Korrespondenzen auf einer algebraischen Kurve. *O. Chisini*[284]) hat unter Betrachtung der Kurve Γ der vorhergehenden Nummer, den Fall $\alpha = \beta = 2$ besonders behandelt. Die Aufgabe der Bestimmung aller Paare von Kurven C, C' in $(2, 2)$-Korrespondenz ist gleichwertig mit der Aufgabe der Bestimmung aller Kurven Γ, die zwei γ_2^1 (d. h. ∞^1-Involutionen 2. Ordnung: Nr. **31**) enthalten. Die $(2, 2)$-Korrespondenzen werden in periodische und nicht periodische Korrespondenzen eingeteilt, je nach der Beschaffenheit der Transformation der Kurve Γ, die sich als Produkt der beiden, je als birationale Transformation von Γ in sich selbst aufgefaßten, oben erwähnten γ_2^1 ergibt. Nicht periodische Korrespondenzen gibt es nur, wenn Γ rational oder elliptisch ist.

Allgemein ergibt sich, daß zwei Kurven, zwischen denen eine $(2, 2)$-Korrespondenz vorhanden ist, entweder birational identisch sind, oder zwei (rationale oder nicht rationale) birational äquivalente Involutionen enthalten, oder zwei konjugierten Familien von Kurven angehören, die als Funktionen voneinander wohl bestimmt sind.

283) S. Anm. 197, p. 297.

284) Ann. di mat. (3) 24 (1915), p. 121.

Die (2, 2)-Korrespondenzen auf elliptischen und hyperelliptischen Kurven haben *I. Holmqvist,* Diss. Lund 1900 und *C. E. Sjöstedt,* Diss. Uppsala 1929 studiert.

Für die periodischen Korrespondenzen reduziert sich die Konstruktion der Kurve Γ auf die Konstruktion einer algebraischen Funktion mit $2n$ Zweigen, deren Monodromiegruppe die der Doppelpyramide ist. *O. Chisini* hat den expliziten Ausdruck für diese Funktionen angegeben.

G. Ascoli[285]) hat eine Ausdehnung des Begriffs der *Gruppe* von Operationen angegeben und dabei auch Operationen ins Auge gefaßt, die kein eindeutiges Ergebnis haben, insbesondere nicht eindeutige Korrespondenzen zwischen den Punkten einer algebraischen Kurve. Für diese letzteren hat *G. Ascoli* die Begriffe der *Reduzibilität* einer Korrespondenz (Nr. **1**) sowie der *Summe* und des *Produktes* von Korrespondenzen (Nr. **13**) zu Hilfe genommen.

Nach *G. Ascoli* heißt ein Aggregat G von Korrespondenzen auf einer Kurve C eine *Gruppe*, wenn jeder irreduzible Teil des Produktes ST, wo S und T beliebige Korrespondenzen von G sind, auch (irreduzibler) Teil einer Korrespondenz von G ist. Daraus folgt, daß, wenn P von S in P' und P' von T in P'' verwandelt wird, es einen irreduziblen Teil des Produktes ST, der P in P'' verwandelt, und daher auch eine gewisse Korrespondenz von G, die P in P'' verwandelt, gibt. Die Äquivalenzbeziehung der Elemente in bezug auf die Gruppe ist damit auf diese Gruppe ausgedehnt, und diese Beziehung ist transitiv.

Diese Definition ist gleichwertig mit der anderen: G wird eine Gruppe genannt, wenn das Produkt zweier beliebiger Korrespondenzen von G in einer Summe von (voneinander verschiedenen oder nicht verschiedenen) Korrespondenzen von G enthalten ist.

Wenn eine Gruppe G endlich ist, d. h. eine endliche Anzahl von Korrespondenzen enthält (die als irreduzibel angenommen werden können), so enthält sie immer die Identität und die Inverse einer jeden ihrer Korrespondenzen. Außerdem hat jede ihrer Korrespondenzen gleiche Indizes.

Allgemeiner, ist eine Gruppe G gegeben und existiert eine ganze Zahl N, die die Indizes einer jeden Korrespondenz von G übersteigt, so hat jede von diesen Korrespondenzen gleiche Indizes.

Ist G endlich, so bilden die gegenüber den Korrespondenzen von G äquivalenten Punkte eine aus diesen Korrespondenzen (im Sinne der Anm. 165) zusammengesetzte Involution γ_n^1. Ist umgekehrt eine Involution γ_n^1 gegeben, und bezeichnet man mit H die (n, n)-Korrespondenz, die jedem Kurvenpunkt die ihn enthaltende Gruppe von γ_n^1 assoziiert, so bilden die irreduziblen Teile von H eine Gruppe.

285) Ann. di mat. (4) 6 (1929), p. 85; Auszug Boll. Unione mat. ital. 7 (1928), p. 202.

G. Ascoli hat sich besonders mit Gruppen von Korrespondenzen beschäftigt, deren Indizes 2 nicht übersteigen, so daß diese Gruppen also nur (1, 1)- und (2, 2)-Korrespondenzen enthalten können, und notwendige und hinreichende Bedingungen dafür gegeben, daß das Produkt zweier irreduzibler (2, 2)-Korrespondenzen in der Summe zweier Korrespondenzen von dieser Beschaffenheit reduzibel ist.[286]) Weiter hat *G. Ascoli* bewiesen, daß man immer eine Gruppe von (2, 2)-Korrespondenzen erhalten kann, indem man mittels einer zwischen einer gewissen Hilfskurve W und der gegebenen Kurve C bestehenden (1, 2)- oder (2, 1)-Korrespondenz eine Gruppe von birationalen Korrespondenzen zwischen den Punkten der Kurve W transformiert.

Dieses Ergebnis hat *G. Ascoli* auf die Kennzeichnung der Gruppen von (2, 2)-Korrespondenzen auf einer rationalen Kurve C angewandt, unter welcher Annahme die Kurve W rational oder elliptisch ist. Ist W rational, so ruft jede Projektivitätsgruppe auf W eine Gruppe von (2, 2)-Korrespondenzen auf C hervor. Ist W elliptisch, so ergibt sich eine enge Beziehung zwischen den endlichen Gruppen von (2, 2)-Korrespondenzen auf C, die die einzigen eigentlich diskontinuierlichen Gruppen sind, und der Theorie der Transformation der elliptischen Funktionen, und man begegnet Konfigurationen, deren Sonderfälle die *Poncelet*schen Polygone[287]) darstellen.

31. Involutionen beliebiger Ordnung und Dimension auf einer algebraischen Kurve. Wenden wir die Lehrsätze von *A. Hurwitz* (Nr. **12**) auf eine $(\alpha, 1)$-Korrespondenz $(\alpha > 1)$, d. h. eine einseitig rationale Korrespondenz zwischen zwei irreduziblen Kurven C und C' von den Geschlechtern p und p'[288]) an, so ergibt sich, wenn C nicht singulär und $p > 1$ ist, daß die Kurve C' rational ist.

Nun bezeichnet man als *Involution* n^{ter} *Ordnung* und r^{ter} *Stufe* oder *Dimension* auf einer beliebigen algebraischen Kurve C [III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. 24] jedes algebraische System von ∞^r Gruppen zu je n Punkten auf C, derart, daß r allgemeine Punkte von C einer und nur einer Gruppe angehören.

Ist dann zwischen zwei Kurven C und C' eine algebraische $(\alpha, 1)$-Korrespondenz gegeben und bewegt sich ein Punkt auf C', so beschreiben die α entsprechenden Punkte auf C eine Involution ∞^1 der Ordnung α,

286) Für den Fall rationaler Kurven s. auch die in Anm. 52 angegebenen Arbeiten von *G. Fontené, R. Bricard, M. Fouché.*

287) In der Arbeit von *G. Ascoli*, p. 107—108 sind auch die kontinuierlichen Gruppen von (2, 2)-Korrespondenzen für die algebraischen Kurven beliebigen Geschlechts angegeben.

288) Literatur über diese Korrespondenzen Anm. 22.

die, wenn $p' = 0$, *rationale Involution*, wenn $p' > 0$, *irrationale Involution* vom Geschlecht p' heißt.

Der vorhergehende Lehrsatz kann daher auch folgendermaßen ausgedrückt werden: Auf einer nicht singulären irreduziblen Kurve vom Geschlecht $p > 1$ ist jede Involution ∞^1 der Ordnung $\alpha > 1$ rational, also eine lineare Schar g_α^1.[289])

Ein anderer, für jede algebraische Kurve gültiger Lehrsatz über die Involutionen besagt, daß auf der Kurve niemals ein unendliches und kontinuierliches System irrationaler ∞^1-Involutionen existieren kann.

Hieraus leitet sich folgende *charakteristische* Eigenschaft der mehrfach unendlichen (also $r > 1$) linearen Scharen g_n^r ab [vgl. III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. 24]: Auf einer algebraischen Kurve ist eine Involution n^{ter} Ordnung und $r\ (> 1)^{\text{ter}}$ Dimension $(n > r)$ entweder eine lineare Schar g_n^r, oder wird (wenn das Geschlecht der Kurve $p > 0$ ist) erhalten, indem man die Gruppen einer irrationalen ∞^1-Involution auf alle möglichen Weisen zu je r zusammenfaßt (speziell, wenn man die Punkte der Kurve zu je r gruppiert).[290])

---

289) Es sei bemerkt, daß auf einer Kurve die Existenz einer ∞^1-Involution vom Geschlecht π das Vorhandensein eines regulären Systems von π unabhängigen Integralen 1. Gattung zur Folge hat. Vgl. *W. Wirtinger*, „Untersuchungen über Thetafunktionen", Leipzig 1895, p. 73—74; *A. Krazer*, „Lehrbuch der Thetafunktionen", Leipzig 1903, p. 493—494; *F. Severi*, „Lezioni", p. 341—342; „Vorlesungen", p. 288.

290) Diese Eigenschaften wurden mittels der *Abel*schen Integrale bewiesen von *G. Castelnuovo*, Atti Acc. Torino 28 (1893), p. 727 und *G. Humbert*, J. math. pures appl. (4) 10 (1894), p. 169 [Auszug Paris C. R. 116 (1893), p. 1350]; der Beweis von *Humbert* ist bei *É. Picard* und *G. Simart*[114]) 2, p. 64—67, wiedergegeben. S. noch *M. de Franchis*[26]), p. 472—482. Vorher war aber der Lehrsatz von der Nichtexistenz eines kontinuierlichen Systems irrationaler ∞^1-Involutionen auf einer Kurve implizite schon in einem Lehrsatz von *P. Painlevé*, Ann. Éc. Norm. (3) 8 (1891), p. 135 enthalten. Einen anderen transzendenten Beweis haben *G. Castelnuovo* und *F. Enriques*, Ann. Éc. Norm. (3) 23 (1906), Anm. auf p. 345 angegeben (vgl. *F. Severi*, „Lezioni", p. 340—343; „Vorlesungen", p. 281—282, 288—289 und *M. de Franchis*[26]), p. 541—542), und zwar unter Verwendung der Eigenschaft [*G. Castelnuovo* und *F. Enriques*, a. a. O., p. 342—345], daß eine algebraische Kurve niemals eine kontinuierliche Schar linearer Systeme von reduziblen *Abel*schen Integralen 1. Gattung besitzen kann. Algebraische Beweise lieferte *M. de Franchis*, Roma Rend. Acc. Linc. (5) 12^1 (1903), p. 303, und zwar mit Hilfe der Flächen, die die Punktepaare zweier Kurven ohne Ausnahme darstellt [vgl. Anm. 114]; *R. Torelli*, Atti Ist. Ven. 67^2 (1908), p. 831, 1336, und *F. Severi*, „Trattato" 1_1, p. 270, mit Hilfe von Betrachtungen der Geometrie auf der Kurve. *F. Severi* (vgl. Nr. 18) hat den Satz von folgender Tatsache abgeleitet: Ist auf einer Kurve vom Geschlecht p eine Involution γ_m^1 der Ordnung m und des Geschlechts π gegeben, so ist ihr Grad ν, d. h. der Grad der symmetrischen Korrespondenz vom Index $m-1$, in welcher sich zwei ein und derselben Gruppe

Dagegen[291]) ist jede Involution auf einer rationalen Kurve ($p = 0$) rational.[292])

---

von γ_m^1 (s. Anm. 142) angehörende Punkte entsprechen, durch

$$v = -2(p-1) - 2m(m-2)(\pi - 1)$$

gegeben, folglich für $p > 1$, $\pi \geqq 1$ negativ. Für $p = 1$ s. *F. Severi,* „Trattato" 1_1, p. 273—276.

Einen anderen geometrischen Beweis des Satzes hat *F. Severi* angegeben, „Trattato" 1_1, p. 284—286, und zwar mittels der *Jacobi*schen Mannigfaltigkeit (Nr. 35) der Kurve (daher nur für $p > 1$ gültig).

Geometrische Beweise für die Linearität der mehrfach unendlichen Involutionen bei *F. Severi,* „Lezioni", p. 343—345; „Vorlesungen", p. 289—290; „Trattato" 1_1, p. 277—278; *F. Enriques* und *O. Chisini,* „Lezioni" 3, p. 480—481. Für $p = 1$ war auf geometrischem Wege die Linearität schon von *G. Castelnuovo,* Atti Acc. Torino 24 (1888), p. 15—16 festgestellt worden.

Einige Sätze über Involutionen und algebraische Scharen vom Index (Nr. 32) > 1 sind bei *J. L. Coolidge,* „Alg. pl. curves", p. 315—328 wiedergegeben.

291) *J. Lüroth,* Math. Ann. 9 (1875), p. 163. Vgl., auch wegen der Verallgemeinerungen, *Ed. Weyr,* Časopis 8 (1879), p. 193; *P. Gordan,* Math. Ann. 29 (1886), p. 318; *F. Chizzoni,* Atti Acc. Napoli (2) 5 (1891), Nr. 1, p. 2; *É. Goursat* [22]); *W. F. Osgood,* Bull. Amer. math. Soc. (2) 2 (1895), p. 168; *P. Appell* und *É. Goursat* [28]), p. 288—290; *E. Netto,* Math. Ann. 46 (1895), p. 310; „Vorlesungen über Algebra" 2, Leipzig 1900, p. 505—509; *L. Raffy,* Revue math. spéc. 3 (1895), p. 153; *H. Weber,* „Lehrbuch der Algebra" 2, Braunschweig, 1. Aufl. 1896, p. 404—407; 2. Aufl. 1899, p. 472—474; *L. Autonne* [1125]), p. 245; *E. Bertini* [4]), 1. Ausg., p. 270—273; 2. Ausg., p. 340—343; deutsche Ausg., p. 318—321; *H. Hilton* [28]), p. 146—153; *F. Severi,* „Lezioni", p. 15—20; „Vorlesungen", p. 14—18; „Trattato" 1_1, p. 29—34; *F. Enriques* und *O. Chisini,* „Lezioni" 3, p. 48—49; *H. W. E. Jung,* „Einführung in die Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen", Berlin und Leipzig 1923, p. 157—158; *R. Fricke,* „Lehrbuch der Algebra" 2, Braunschweig 1926, p. 171; *M. de Franchis* [26]), p. 356—358; *J. L. Coolidge,* „Alg. pl. curves", p. 135 u. 246.

Nach einer Notiz von *F. Klein,* Ges. math. Abh. 2, Berlin 1922, p. 503 war der Satz *L. Kronecker* schon 1861 bekannt.

Der Satz kann auch aus der Formel von *H. G. Zeuthen* (Nr. 2) abgeleitet werden, und ist in folgendem allgemeineren Satz enthalten [*C. Segre* [2]), p. 63]: Auf einer rationalen Mannigfaltigkeit von k Dimensionen ist ein unendliches algebraisches System ($k-1$)-dimensionaler Mannigfaltigkeiten, das so beschaffen ist, daß durch eine gewisse Anzahl allgemeiner Punkte eine einzige Mannigfaltigkeit hindurchgeht, notwendigerweise eine lineare Schar. Vgl. III C 4 (*L. Berzolari*), Anm. 292, und z. B. auch den Hinweis von *J. L. Coolidge,* Bull. Amer. math. Soc. (2) 30 (1924), p. 205.

Dieser Satz ist mit folgendem gleichwertig: Können die Koordinaten der Punkte einer Kurve derart als rationale Funktionen eines Parameters t ausgedrückt werden, daß man ein und denselben Punkt der Kurve durch $n > 1$ Werte von t erhält, so können sie auch als rationale Funktionen eines neuen Parameters λ, der eine rationale Funktion von t ist, derart ausgedrückt werden, daß jeder Punkt der Kurve einem einzigen Wert von λ entspricht. Mit anderen Worten:

Allgemeiner: Eine algebraische Kurve kann nicht unendlich viele Involutionen höheren Geschlechts als die Einheit enthalten.[293])

Kann man die Punkte einer algebraischen Kurve C derart auf die Punkte einer Geraden g algebraisch beziehen, daß einem Punkte von C n Punkte von g entsprechen und einem Punkte von g ein einziger Punkt von C entspricht, so kann die Kurve C auf g auch mittels einer eineindeutigen algebraischen Korrespondenz bezogen werden und ist daher rational. S. die obigen Zitate.

292) Auf einer rationalen Kurve wird eine Involution n^{ter} Ordnung und r^{ter} Dimension durch eine Gleichung

$$(1) \qquad \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_r f_r = 0$$

dargestellt, wo $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_r$ veränderliche Parameter, und $f_0, f_1, \ldots, f_r$ linear unabhängige, ganze rationale Polynome n^{ten} Grades in bezug auf den Parameter sind, der den Punkten der Kurve eineindeutig entspricht. Die verschiedenen Gruppen der Involution bestehen aus den Punkten, deren Parameter der Gleichung (1) für ein und dasselbe System von Werten $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_r$ genügen.

Diese Involutionen wurden von vielen Gesichtspunkten aus nach verschiedenen Methoden von vielen Verfassern studiert [vgl. III C 7 (*C. Segre*), Nr. **27**], unter mannigfachen Anwendungen auf Konstruktionen von Kurven, Flächen, ... Viele dieser Untersuchungen beziehen sich auf Fragen abzählender Art über die Involutionen (vielfache Elemente, neutrale Gruppen, mehreren Involutionen gemeinsame Gruppen, ...), und führen zu Ergebnissen, welche als Sonderfälle, für $p = 0$, anderer auf die linearen Scharen einer Kurve von beliebigem Geschlecht p bezüglicher Fälle auftreten [III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **28** und **34**; III C 7 (*C. Segre*), Nr. **25**]. Wir führen an *J. V. Poncelet*, „Traité des propriétés projectives des figures" 2, 2. éd., Paris 1866 (Manuskript von 1830—31), p. 240ff.; Paris C. R. 16 (1843), p. 947 = „Traité" 2, p. 345—351; *E. de Jonquières*, Ann. di mat. (1) 2 (1859), p. 86; *L. Cremona*, „Introduzione"[75]), Nr. 21—24, 49 = Opere 1, p. 336—340, 364—365; „Preliminari di una teoria geometrica delle superficie", Mem. Acc. Bologna (2) 6 (1866); (2) 7 (1867), Nr. 41, 74 = Opere 2, p. 320—321, 341—342; *G. Battaglini*, Atti Acc. Napoli (1) 1 (1863), Nr. 12 [Auszug Rend. Acc. Napoli 1863, p. 158]; (1) 3 (1866—1868), Nr. 10 [Auszug Rend. Acc. Napoli 1866, p. 396] = Giorn. di mat. (1) 9 (1871), p. 1, 76; *A. Cayley*, Trans. Cambridge Phil. Soc. 11 (1863), p. 21 = Papers 5, p. 295; *Em. Weyr*, Prag Ber. böhm. Ges. 1870, p. 14; J. f. Math. 72 (1870), p. 285; Math. Ann. 3 (1870), p. 235; Ztschr. Math. Phys. 16 (1871), p. 353; Giorn. di mat. (1) 10 (1872), p. 165; Sitzungsb. Ak. Wien 61 (1870), p. 600; 79 (1879), p. 680; 81 (1880), p. 80; 83 (1881), p. 349; 84 (1881), p. 884; 85 (1882), p. 513, 840; Časopis 9 (1880), p. 279; „Beiträge"[7]); Bull. Ac. sc. Belgique (3) 3 (1882), p. 472; Mém. Soc. sc. Liège (2) 10 (1883), Nr. 3; *J. Lüroth*, Math. Ann. 11 (1876), p. 84; *A. Clebsch* und *F. Lindemann*, „Vorlesungen" 1, p. 207—210; 2. Aufl. 1^1, Leipzig 1906—1932, p. 407—411, 771—786, 810—836; franz. Übers. 1, p. 257—261; *C. Le Paige*, Ann. Soc. sc. Bruxelles 2 B (1877), p. 25; Bull. Ac. sc. Belgique (2) 44 (1877), p. 231, 365, 546; (2) 48 (1879), p. 530; (2) 49 (1880), p. 113; (3) 1 (1881), p. 134, 490; (3) 11 (1886), p. 121; (3) 14 (1887), p. 211; Belgique Mém. cour. et Mém. des savants étrang., in 4°, 42 (1878), Nr. 4, p. 30ff.; Sitzungsb. Ak. Wien 86 (1882), p. 104; J. sciencias math. astr. 5 (1883), p. 27, 77; *P. Appell*, Arch. Math. Phys. (1) 60 (1877), p. 125; *E. Dewulf*, Nouv. Corr. math. 4 (1878), p. 286, 397; 5 (1879), p. 21; *J. Neuberg*, ebenda 5 (1879), p. 18; *H. Wiener*, Diss. München 1881, p. 1—25; *A. Brill*, Math. Ann. 20 (1882), Der Fall der elliptischen Involutionen bildet eine Ausnahme, da auf einer Kurve vom Geschlecht $p = 1$ unendlich viele elliptische In-

---

p. 330; *W. Fr. Meyer,* „Apolarität“ [57]); Math. Ann. 21 (1882), p. 125, 434; *O. Schlesinger,* Math. Ann. 22 (1883), p. 520; *C. Stephanos,* Ann. Éc. Norm. (3) 1 (1884), p. 329; *H. Schubert,* Math. Ann. 26 (1884), p. 46—47; *G. Maisano,* Rend. Circ. mat. Palermo 1 (1884), p. 9; *M. Lerch,* Prag Ber. böhm. Ges. 1885, p. 597; *G. Castelnuovo,* Atti Ist. Ven. (6) 4 (1886), p. 1167; *R. de Paolis,* Roma Rend. Acc. Linc. (4) 2^2 (1886), p. 335; [63]); *E. Kötter* [62]), p. 53—156, 242—280; *W. Stahl,* J. f. Math. 104 (1887), p. 38; *D. Hilbert,* Math. Ann. 33 (1888), p. 227 [Auszug Ber. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig 39 (1887), p. 112]; *Fr. Deruyts,* Bull. Ac. sc. Belgique (3) 14 (1887), p. 322, 650; (3) 17 (1889), p. 312; (3) 26 (1893), p. 232; (3) 27 (1894), p. 495; (3) 31 (1896), p. 664; (3) 35 (1898), p. 196, 287, 885; (3) 36 (1898), p. 187, 194, 553; Mém. Soc. sc. Liège (2) 17 (1892), Nr. 3; *G. Fouret,* Rend. Circ. mat. Palermo 3 (1889), p. 42; *L. Berzolari,* Rend. Acc. Napoli (2) 5 (1891), p. 35; Ann. di mat. (2) 21 (1892), p. 1; *G. Torelli,* Ann. Ist. tecn. nautico Napoli 30 (1891); *M. Genty,* Bull. Soc. math. de France 20 (1892), p. 106; 21 (1893), p. 52; *R. Schumacher,* J. f. Math. 110 (1892), p. 230; *G. B. Guccia,* „Lezioni“ [28]), p. 51—60; Rend. Circ. mat. Palermo 7 (1893), p. 49 (vgl. *G. Torelli,* ebenda p. 75); 8 (1894), p. 227; *F. Gerbaldi,* Rend. Circ. mat. Palermo 9 (1894), p. 167; *F. Aschieri,* Mem. Acc. Modena (2) 11 (1895), p. 301; *R. Sturm,* Ztschr. Math. Phys. 40 (1895), p. 10; „Geom. Verw.“ 1, p. 179—208, 247, 266—319, 337—348; *M. Morale,* Rend. Circ. mat. Palermo 13 (1898), p. 274; *A. Tanturri,* Ann. di mat. (3) 4 (1900), p. 67; *F. Severi,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 9^1 (1900), p. 379; (5) 11^1 (1902), p. 52 (s. Anm. 314); *M. Lelieuvre,* Paris C. R. 132 (1901), p. 1172; Revue de math. spéc. 12 (1901), p. 297; *H. Bouvier,* Nouv. Ann. de math. (4) 3 (1903), p. 550; *M. Caspar,* Math. Ann. 59 (1904), p. 527; *J. A. Vreeswijk,* Diss. Utrecht 1905; *E. Bertini* [4]), 1. Ausg., p. 218—219, 282—283; 2. Ausg., p. 255—256, 352—354; deutsche Ausg., p. 240—241, 330—332; *G. Z. Giambelli,* Mem. Acc. Torino (2) 59 (1908), p. 433; *A. B. Coble,* Amer. J. of math. 31 (1909), p. 183, 355; 32 (1910), p. 333 [Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 15 (1909), p. 292]; *J. Fairon,* Bull. Ac. sc. Belgique 1909, p. 844; Mém. Soc. sc. Liège (3) 9 (1912), Nr. 1, 5, 6; *J. Rey Pastor,* „Fundamentos . . .“ [46]), p. 391—402; Preisschrift, Madrid Mem. Acad. de Ciencias Exactas Fis. y Nat. (2) 8 (1929), bes. p. 12—17, 28—47, 105—106, 126—136, 224—227; *G. Scorza,* Giorn. di mat. (3) 8 (1917), p. 281; *F. Enriques* und *O. Chisini,* „Lezioni“ 1, p. 168—206; *C. G. F. James,* Proc. Cambridge Phil. Soc. 22 (1924), p. 24; Messenger of math. 54 (1925), p. 129; *L. Pomey,* J. Éc. Polyt. (2), cah. 27 (1929), p. 1; (2), cah. 28 (1931), p. 109; (2), cah. 29 (1931), p. 115 [Auszüge Paris C. R. 187 (1928), p. 194; 191 (1930), p. 1424]; *A. Emch,* Commentarii math. Helvetici 2 (1930), p. 108; *H. G. Green* und *L. E. Prior,* J. Éc. Polyt. (2), cah. 28 (1931), p. 167.

Über die ∞^1-Involutionen in Verbindung mit der Auflösbarkeit einer algebraischen Gleichung mit einem linearen Parameter durch Wurzeln s. *O. Chisini,* Rend. Ist. Lomb. (2) 48 (1915), p. 382; *J. F. Ritt,* Trans. Amer. math. Soc. 24 (1922), p. 21; *O. Zariski,* Rend. Circ. mat. Palermo 50 (1925), p. 196.

In verschiedenen angeführten Arbeiten wurden auch Sonderfälle betrachtet, vor allem der Fall einer ∞^1-Involution und insbesondere, wenn diese Involution 3. oder 4. Ordnung ist. Über derartige Fälle s. noch *G. Battaglini,* Rend. Acc. Napoli 1864, p. 163, 263; 1865, p. 351; 1866, p. 35, 141 = Giorn. di mat.

volutionen (Nr. 43) existieren, während es andererseits Kurven vom Geschlecht $p > 1$ gibt, die eine (diskontinuierliche) unendliche Menge elliptischer Involutionen enthalten. Was nun diese zweite Eigenschaft

---

(1) 2 (1864), p. 243; (1) 3 (1865), p. 51; (1) 5 (1867), p. 39; *J. A. R. de la Gournerie,* Paris C. R. 66 (1868), p. 832; J. math. pures appl. (2) 14 (1869), p. 9, 103; *Em. Weyr,* Rend. Ist. Lomb. (2) 4 (1871), p. 144, 206; Prag Ber. böhm. Ges. 1872, p. 28; 1877, p. 131; Prag Abh. böhm. Ges. (6) 7 (1874), p. 1; Sitzungsb. Ak. Wien 73 (1876), p. 654; 79 (1879), p. 429; 81 (1880), p. 162, 169, 1007, 1218; 83 (1881), p. 63, 300, 807; 84 (1881), p. 1264; Časopis 9 (1880), p. 145; *F. August,* Arch. Math. Phys. (1) 55 (1873), p. 337; *H. Eggers,* ebenda, p. 341; *H. Milinowski,* Ztschr. Math. Phys. 19 (1874), p. 205; *P. Appell,* Ann. Éc. Norm. (2) 5 (1876), p. 245 [Auszüge Paris C. R. 82 (1876), p. 70; 83 (1876), p. 1209]; Arch. Math. Phys. (1) 62 (1878), p. 175; *P. Serret,* Paris C. R. 87 (1878), p. 643; *S. Kantor,* Prag Ber. böhm. Ges. 1878, p. 312; *C. Le Paige,* Bull. Ac. sc. Belgique (2) 46 (1878), p. 247; (2) 50 (1880), p. 115; Sitzungsb. Ak. Wien 81 (1880), p. 159, 845; 83 (1881), p. 351; 84 (1881), p. 233; 85 (1882), p. 844; Prag Ber. böhm. Ges. 1881, p. 61; Mém. Soc. sc. Liège (2) 10 (1883); (2) 11 (1885); Ann. Soc. sc. Bruxelles 8 B (1884), p. 87; Paris C. R. 98 (1884), p. 285, 353; *F. Folie* und *C. Le Paige,* Belgique Mém. (1) 43 (1880), Nr. 7, p. 15; (1) 45 (1882), Nr. 1, p. 15; *C. Stephanos,* Mém. prés. par divers savants 27 (1881), Nr. 7 [Auszug Paris C. R. 93 (1881), p. 994; s. auch den Bericht von *C. Jordan,* ebenda 94 (1882), p. 1230]; *Weill,* Nouv. Ann. de math. (3) 1 (1882), p. 62; *G. Maisano,* Rend. Circ. mat. Palermo 1 (1884), p. 13; *G. Torelli,* Rend. Acc. Napoli 24 (1885), p. 258; Ann. Ist. tecn. nautico Napoli 2 (1885), p. 27 = Giorn. di mat. (1) 24 (1885), p. 270; *G. Castelnuovo*[59]); *J. de Vries,* Ak. Amsterdam Versl. (3) 4 (1888), p. 307 = Arch. néerl. des sc. 23 (1889), p. 93; Nieuw Archief voor Wiskunde (2) 4 (1899), p. 101; (2) 16_3 (1930), p. 85; Le mat. pure appl. 1 (1901), p. 13 und 227 = Ak. Amsterdam Versl. (4) 9 (1901), p. 696; (4) 12 (1904), p. 740, 742; (4) 18 (1910), p. 744, 855; Sitzungsb. Ak. Wien 94 (1895), p. 46; *Cl. Servais,* Bull. Ac. sc. Belgique (3) 20 (1890), p. 272; Mathesis 36 (1922), p. 45; *L. Berzolari,* Rend. Acc. Napoli (2) 5 (1891), p. 71; Math. Ann. 51 (1898), p. 473; Rend. Ist. Lomb. (2) 54 (1921), p. 225; *O. Bolza,* Math. Ann. 50 (1897), p. 68, 314; *J. Thomae,* Ber. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig 47 (1895), p. 526; *L. Klug,* Orvos-Termész. Értesitö 1899; *W. Gilespie,* Amer. J. of math. 22 (1900), p. 259; *J. Fairon,* Bull. Ac. sc. Belgique 1900, p. 950; Mém. Ac. sc. Belgique, Coll. in 8°, (2) 2 (1909), Nr. 5; *L. Brusotti,* Ann. di mat. (3) 9 (1903), p. 311; *R. M. Winger,* Bull. Amer. math. Soc. (2) 25 (1917), p. 27; *J. H. Mac Donald,* ebenda (2) 32 (1926), p. 213; *J. Sobotka,* Časopis 55 (1926), p. 242; *G. Barba,* Catania Atti Acc. Gioenia (5) 16 (1929), Nr. XVIII^bis.

Über die ∞^1- und ∞^2-Involutionen 5. Ordnung s. *L. Berzolari,* Ann. di mat. (2) 19 (1891), p. 269; Rend. Circ. mat. Palermo 7 (1893), p. 5; *Th. W. Moore,* Amer. J. of math. 50 (1928), p. 415; Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 33 (1927), p. 260. S. weiter auch *W. Müller,* Diss. Leipzig 1910; Giorn. di mat. (3) 13 (1922), p. 103; Math. Ztschr. 24 (1924), p. 131.

Über diesen Gegenstand s. auch *V. Snyder,* „Report", p. 140—165.

293) *M. de Franchis,* Rend. Circ. mat. Palermo 36 (1913), p. 368. S. auch *F. Severi,* „Vorlesungen", p. 290—292; „Trattato" 1_1, p. 271—272. Andere Beweise bei *F. Severi,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 23^1 (1914), Anm. auf S. 581—582; *F. Enriques* und *O. Chisini,* „Lezioni" 3, p. 477—479; *M. de Franchis*[26]), p. 482—483.

anbelangt, so gehört, wenn auf einer Kurve vom Geschlecht $p > 1$ eine elliptische Involution vorhanden ist, zu dieser Kurve ein Integral 1. Gattung mit zwei reduzierten Perioden. Umgekehrt hat die Existenz eines solchen Integrals das Vorhandensein einer elliptischen Involution auf der Kurve zur Folge. Nun haben *É. Picard*[294]) und *H. Poincaré*[295]) Beispiele für Kurven vom Geschlecht $p > 1$ angegeben, die eine diskontinuierliche unendliche Menge elliptischer Integrale und daher eine diskontinuierliche unendliche Menge elliptischer Involutionen besitzen.[296]) *H. Poincaré*[297]) hat außerdem bewiesen, daß, wenn eine Kurve $k+1$ ($\geqq 3$), auf elliptische Integrale reduzible, linear unabhängige Integrale 1. Gattung besitzt, die Kurve unendlich viele Integrale dieser Art besitzt. Für $k = p$ folgt insbesondere, daß, wenn auf einer Kurve vom Geschlecht $p > 1$ mehr als p elliptische Involutionen verhanden sind, unendlich viele Involutionen dieser Art existieren.[298])

294) Paris C. R. 93 (1881), p. 1126; Bull. Soc. math. de France 11 (1882), p. 47. S. auch *A. Krazer*[289]), p. 487—488.

295) Paris C. R. 99 (1884), p. 853; Amer. J. of math. 8 (1886), p. 289.

296) *É. Picard,* Bull. Soc. math. de France 11 (1882), p. 43 [vgl. auch Paris C. R. 92 (1881), p. 398, 506] beweist: Besitzt eine Kurve vom Geschlecht $p = 2$ ein Integral 1. Gattung mit nur zwei verschiedenen Perioden, so besitzt sie noch ein zweites, mit anderen Worten: Besitzt die Kurve eine elliptische Involution n^{ter} Ordnung, so besitzt sie notwendigerweise eine zweite von derselben Ordnung. Andere Beweise bei *P. Appell* und *É. Goursat*[28]), p. 370—372; *G. Humbert,* J. math. pures appl. (5) 5 (1899), p. 248; vgl. auch *A. Krazer*[289]), p. 487. Ein geometrischer Beweis bei *R. Torelli,* Rend. Acc. Napoli (3) 17 (1911), p. 412. Vgl., auch über eine allgemeinere Eigenschaft, *A. Comessatti,* Rend. Circ. mat. Palermo 36 (1913), p. 55—56.

297) Amer. J. of math. 8 (1886), p. 305. Vgl. auch *A. Krazer*[289]), p. 489—490.

298) Einen geometrischen Beweis des Satzes von *H. Poincaré* hat *F. Severi*[210]) gegeben, wo sich auch allgemeinere Eigenschaften finden (vgl. Nr. **20**). Andere geometrische Beweise bei *C. Rosati*[211]); *G. Scorza*[197]), p. 304. S. auch *F. Severi,* „Vorlesungen", p. 293—297, wo auch andere Beispiele für Kurven vom Geschlecht $p > 1$ angeführt sind, die unendlich viele elliptische Involutionen besitzen. Was die vorigen Sätze betrifft, s. auch *M. de Franchis*[26]), p. 531—549.

Allgemeiner gilt der folgende Satz, den *R. Torelli,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 21^1 (1912), p. 453 auf geometrischem Wege (mit Ausdehnung auf höhere Mannigfaltigkeiten) bewiesen hat: Besitzt eine Kurve vom Geschlecht $p > 1$ zwei nicht zusammengesetzte elliptische Involutionen, deren Gruppen untereinander durch eine Korrespondenz, die nur in einem Sinne rational ist, bezogen werden können, so besitzt die Kurve unendlich viele derartige Involutionen. Für $p = 2$ findet man, auf transzendentem Wege, den Satz schon bei *O. Bolza,* Diss. Göttingen 1886; vgl. auch *G. Humbert*[296]), p. 250; *A. Krazer*[289]), p. 489.

Als Sonderfall seiner allgemeinen Untersuchungen hat *G. Scorza*[197]), p. 311, bewiesen, daß, wenn eine Kurve vom Geschlecht $p > 1$ keine isolierten regulären Systeme reduzibler *Abel*scher Integrale, aber eine elliptische Involution besitzt, sie unendlich viele elliptische Involutionen besitzt, und ihre Basiszahlen

Eine irrationale Involution T n^{ter} Ordnung auf einer Kurve C vom Geschlecht $p > 1$ besitzt die beiden Wertigkeiten 0 und $-n$ (Nr. 24), daher bestimmt T zwei reduzible reguläre Komplementärsysteme, in bezug auf welche die Korrespondenzen T und $T - nI$ (wo I die identische Korrespondenz ist) konstanten Niveaus sind. Umgekehrt wird durch diese beiden reduziblen regulären Systeme die Involution bestimmt.[299])

Auf der Kurve C ist die Anzahl der mit der Involution T vertauschbaren, voneinander unabhängigen algebraischen Korrespondenzen gleich $\mu - 2\lambda$, wo μ die Basiszahl der Korrespondenzen von C und λ der Immersionskoeffizient (Nr. 22) der durch T bestimmten reduziblen regulären Systeme ist. Daraus folgt, daß die T beigeordneten reduziblen regulären Systeme dann und nur dann isoliert sind (Nr. 22), wenn T mit jeder Korrespondenz der Kurve[300]) vertauschbar ist.

Bemerkenswerte Beziehungen zwischen den ∞^1-Involutionen auf einer algebraischen Kurve[301]) und der Theorie der *Fuchs*schen Funktionen hat *A. Comessatti*[302]) festgestellt. Der Schwerpunkt der Untersuchung liegt in dem allgemeinen Verzweigungssatz für diese Funktionen.[303]) Dabei handelt es sich um die notwendige und hinreichende

---

μ_1, μ_2 durch
$$\mu_1 = \frac{p(p+1)}{2}, \quad \mu_2 = \frac{p(p-1)}{2},$$
oder durch
$$\mu_1 = \mu_2 = p^2$$
gegeben sind.

Ein anderer Beweis bei *C. Rosati*[224]), p. 129—132.

299) *C. Rosati*[276]), p. 56.

300) *C. Rosati*[250]), p. 242; Auszug p. 853.

301) Über die irrationalen ∞^1-Involutionen s. noch *G. Castelnuovo*, Roma Rend. Acc. Linc. (4) 7^2 (1891), p. 294; (5) 15^1 (1906), p. 337; die erste von diesen Arbeiten gibt eine partielle Ausdehnung des *Riemann-Roch*schen Satzes [II B 2 (*W. Wirtinger*), Nr. 19; III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. 27]; *F. Amodeo*, Ann. di mat. (2) 20 (1892), p. 227; *J. V. de Porte*, Amer. J. of math. 40 (1918), p. 47; *L. Godeaux*, Bull. Ac. sc. Belgique (5) 15 (1929), p. 25. — Über den hyperelliptischen Fall s. *R. Torelli*, Rend. Circ. mat. Palermo 19 (1905), p. 297, wo eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür angegeben ist, daß eine hyperelliptische Kurve vom Geschlecht p eine Involution gegebener Ordnung und gegebenen Geschlechts enthält; im Falle $p = 2$ s. *G. Humbert*, Amer. J. of math. 16 (1894), p. 243.

302) Roma Mem. Acc. Linc. (6) 3 (1930), Nr. XII. Vgl. auch die Einführungsarbeit Atti Ist. Ven. 88^2 (1929), p. 771.

303) Dieser Satz findet sich schon bei *F. Klein* und *R. Fricke*[112]) 1, p. 344 ff. [s. auch *L. Bianchi*, „Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche", 2ª ed., Pisa 1916, p. 510 ff.] für die Untergruppen der Modulargruppe; bei *G. Fubini*[16]), p. 323 ff., für die Untergruppen der *Fuchs*schen Gruppen vom Geschlecht Null. S. auch *P. Appell* und *É. Goursat*[28]),

Bedingung dafür, daß, wenn zwei irreduzible algebraische Kurven f und C in $(1, n)$-Korrespondenz und eine *Fuchs*sche uniformisierende Veränderliche der Kurve f gegeben sind, die letzte auch für die Kurve C eine uniformisierende Veränderliche sei: infolgedessen erweist sich die so C beigeordnete *Fuchs*sche Gruppe als eine Untergruppe vom Index n der analogen auf f bezüglichen Gruppe. Mit anderen Worten: Es handelt sich um die Bedingung, welcher durch eine *Fuchs*sche Uniformisierende η von C genügt werden muß, damit die Involution, die auf C den Punkten von f entspricht, mittels eines Systems linearer Substitutionen von η erzeugt werden kann.

Diese Bedingung wird durch eine einfache Beziehung zwischen der Verzweigungsgruppe der Uniformisierenden auf f und der Verzweigungsgruppe der mehrfachen Abbildung von C auf f ausgedrückt. *A. Comessatti* hat durch den von ihm eingeführten (Anm. 396) Begriff der „*Galois*schen Kurve", bemerkenswerte Beziehungen zu der Theorie von *E. Galois* abgeleitet, und verschiedene Anwendungen davon gebracht, die zum Teil die allgemeine Seite beleuchten, darunter auch gewisse vier Beispiele, deren eines schon von *H. Poincaré*[304]) behandelt worden war.

32. Verallgemeinerung: Algebraische Scharen von Punktgruppen auf einer algebraischen Kurve. Eine Ausdehnung des Begriffs der Involution [vgl. III C 4 (*L. Berzolari*), Anm. 295] ist der Begriff der *algebraischen* ∞^r-*Schar* von Gruppen zu n Punkten auf einer irreduziblen algebraischen Kurve vom Geschlecht p. Die Zahl n heißt *Ordnung* der Schar, während man unter ihrem *Index* die Anzahl ν derjenigen ihrer Gruppen versteht, die r allgemein gegebene Punkte auf der Kurve enthalten (ist $\nu = 1$, so ergeben sich die Involutionen). Die Schar heißt *irreduzibel* oder *reduzibel*, je nachdem dies von der algebraischen Mannigfaltigkeit von r Dimensionen gilt, auf welche sie eineindeutig bezogen werden kann. Sie heißt *rational*, wenn diese Mannigfaltigkeit ein r-dimensionaler linearer Raum ist. Ist $r = 1$, so bezeichnet man als *Geschlecht* der Schar das Geschlecht der Kurve, auf welche sie eineindeutig bezogen werden kann.[305]) Eine ∞^r-Schar heißt *zusammengesetzt* (mit einer Involution ∞^1), wenn ihre einen all-

2. Ausg., 2, Fonctions automorphes, par *P. Fatou*, Paris 1930, p. 356 ff. — Vgl. II B 4 (*R. Fricke*), Nr. 13.

304) Rend Circ. mat. Palermo 27 (1908), p. 281 (§ 11).

305) *R. Torelli*, Rend. Acc. Napoli (3) 17 (1911), p. 420, hat eine Eigenschaft der Gruppe der Verzweigungspunkte einer ∞^1-Schar, vom Index ν und Geschlecht π, von untereinander äquivalenten Gruppen von n Punkten einer Kurve angegeben, unter Erweiterung auf die höheren Mannigfaltigkeiten.

gemeinen Punkt enthaltenden Gruppen von selbst noch weitere Punkte enthalten; anderenfalls heißt sie *einfach*.

Ist eine ∞^r-Schar rational, so sind ihre Gruppen äquivalent, die Schar ist also entweder eine lineare Schar g_n^r oder aber in einer linearen Schar g_n^s, wo $s > r$, enthalten.[306])

Für $r = 1$ hängt der Satz mit der Darstellung der Koordinaten x, y der Punkte einer Kurve $f(x, y) = 0$ als irrationale Funktionen n^{ten} Grades eines Parameters t zusammen, das heißt der Darstellung in der Form

$$(1) \qquad x = f_1(X, t), \quad y = f_2(X, t),$$

wo f_1 und f_2 rationale Funktionen von X und t sind, und die Irrationalität X durch eine Gleichung $\varphi(X, t) = 0$ n^{ten} Grades in X[307]) mit t

306) Von transzendentem Gesichtspunkt aus ist die Eigenschaft implizite im *Abel*schen Satze enthalten (vgl. *F. Severi,* „Lezioni", p. 332; „Vorlesungen", p. 271; „Trattato" 1_1, p. 240—241). In expliziter Form wurde sie von *F. Enriques,* Rend. Circ. mat. Palermo 10 (1895), p. 30, ausgesprochen, der einen geometrischen Beweis dafür gegeben hat. S. auch *F. Enriques* und *O. Chisini,* „Lezioni" 3, p. 78—79, 485. *F. Enriques* hat gezeigt, wie sich der Satz auf die rationalen Systeme von $(k - 1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, die auf einer k-dimensionalen Mannigfaltigkeit gelegen sind, erweitert. Denselben Satz hat *F. Severi,* Ann. di mat. (3) 12 (1905), p. 63 (vgl. auch „Lezioni", p. 205; „Vorlesungen", p. 165; „Trattato" 1_1, p. 205) auf geometrischem Wege von einem Satz[122]) über die Korrespondenzen mit der Wertigkeit Null zwischen einer Kurve und einer mehrdimensionalen Mannigfaltigkeit abgeleitet.

Die vorige Eigenschaft findet auch statt, wenn die Kurve reduzibel ist, wie *F. Severi* in zwei während des Druckes dieses Artikels erschienenen Arbeiten, Commentarii math. Helvetici 4 (1932), p. 268 (s. p. 313—315); Mem. Acc. d'Italia 3 (1932), Nr. 3 (s. p. 17—18) bewiesen hat. In diesen Arbeiten, besonders in der zweiten, hat *Severi* die Invariantentheorie der linearen Scharen von Punktgruppen auf einer reduziblen Kurve entwickelt. Diese Theorie wurde von *M. Noether,* Acta math. 8 (1886), p. 161 in Angriff genommen [s. III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **32**]; *Noether* hatte aber den Begriff einer linearen Schar auf einer reduziblen Kurve nicht frei gemacht von dem Linearsystem, welches die gegebene Schar auf derselben Kurve bestimmt.

Severi hat seine Invariantentheorie angewandt zu der Konstruktion einer Theorie der Scharen von Punktgruppen auf einer algebraischen Fläche oder Mannigfaltigkeit. Er führt den Begriff der *„Äquivalenzschar"* (*„serie di equivalenza"*) von Punktgruppen auf einer algebraischen Fläche ein, und entnimmt den elementarsten Eigenschaften derselben (a. a. O., p. 326 bzw. p. 47) einen einfachen Beweis der Rationalität einer Fläche, auf welcher die Gruppen von n Punkten eine rationale Mannigfaltigkeit bilden. Dieser Satz war für $n = 2$ von *G. Albanese,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 33^2 (1924), p. 73 mittels höherer Betrachtungen bewiesen worden (s. Anm. 114). *Severi* hat allgemein bewiesen: wenn die Mannigfaltigkeit der Gruppen von n Punkten, welche n irreduziblen Flächen angehören, rational ist, so ist jede solche Fläche rational.

307) Über diese Frage s. noch *F. Enriques* und *O. Chisini,* „Lezioni" 3, p. 119—121; hierüber und über allgemeinere Fragen noch *F. Enriques,* Math.

verknüpft ist. Eine solche Darstellung wird *einfach* genannt, wenn die Gleichungen (1) in Verbindung mit der Gleichung $f(x, y) = 0$ X und t als rationale Funktionen von x und y auszudrücken erlauben, so daß also nicht nur jedem Punkt der Kurve $f = 0$ ein einziger Wert von t entspricht, sondern auch einem Werte von t n $\left(\text{und nicht } \frac{n}{i}\right)$ Punkte von $f = 0$ entsprechen. Unter diesen Voraussetzungen kann der vorhergehende Satz auch folgendermaßen ausgesprochen werden: Ist die genannte Darstellung mittels einer Irrationalität n^{ten} Grades nicht einfach, so kann an ihre Stelle immer eine andere treten, die entweder auch noch von einer Irrationalität n^{ten} Grades abhängt und durch Ausführung einer rationalen Substitution des Parameters erhältlich ist, oder aber von einer Irrationalität niedrigeren Grades als n abhängt.[308])

Zwei Punkte x' und x'' einer algebraischen Kurve sind für eine algebraische Funktion y (mit $\nu \geqq 1$ Werten) des auf der Kurve beweglichen Punktes x gleichen Niveaus, wenn einer oder mehrere von den ν Werten, die y in x' annimmt, ebenso vielen Werten, die y in x'' annimmt, gleich sind. Mit Hilfe dieser Definition erhielt *F. Severi*[309])

Ann. 51 (1897), p. 134; Auszug Verh. d. ersten intern. Math.-Kongr. in Zürich 1897 (Leipzig 1898), p. 145.

O. Zariski, Roma Rend. Acc. Linc. (6) 3 (1926), p. 660, hat in Beantwortung einer von *F. Enriques,* Math. Ann. 51 (1897), p. 143 aufgeworfenen Frage folgenden Satz bewiesen, der den Satz von *P. Ruffini* und *N. H. Abel* [I B 3 c, d (*O. Hölder*), Nr. 18] über die Unmöglichkeit der Auflösung der allgemeinen Gleichung mit einer Unbekannten durch Wurzeln, falls diese höheren als 4. Grades ist, auf die algebraischen Kurven ausdehnt.

Für eine algebraische Kurve $f(x, y) = 0$ vom Geschlecht $p > 6$ mit allgemeinen Moduln gibt es keine Parameterdarstellung der Eigenschaft, daß x und y als Funktionen des Parameters t durch endlichmalige Wiederholung rationaler Operationen und des Wurzelzeichens erhalten werden, andererseits t eine rationale Funktion von x und y ist.

Für $p \leqq 6$ ist dagegen eine solche Parameterdarstellung möglich. — Die besonderen Kurven gegebenen Geschlechts $p > 6$, die eine Parameterdarstellung durch Wurzeln mittels einer (nicht zusammengesetzten) linearen Schar g_n^1 zulassen, hängen, wenn $n = 2$ (wenn sie also hyperelliptisch sind), von $2p - 1$ Moduln ab [III C 4 (*L. Berzolari*), Anm. 343]; wenn $n = 3$ bzw. $n = 4$, so hängen sie von $2p + 1$ bzw. $2p + 3$ Moduln ab. Ist dagegen $n > 4$, so hat *O. Zariski* gefunden, daß sie von höchstens $p + 4$ Moduln abhängen; ist n nicht kleiner als die niedrigste Ordnung einer linearen Schar auf einer Kurve vom Geschlecht p mit allgemeinen Moduln [III C 4 (*L. Berzolari*), Anm. 330], so hängen die genannten Kurven von einer beschränkten Anzahl von Moduln ab, die weder bei Vergrößerung von p noch bei Vergrößerung von n wächst.

308) Für die von einer Quadratwurzel abhängenden Irrationalitäten ist der Satz implizite bei *P. Painlevé,* Ann. Éc. Norm. (3) 8 (1891), p. 103 enthalten.

309) Atti Ist. Ven. 70^2 (1911), p. 374.

den genannten Satz von *F. Enriques* durch den Nachweis, daß die Gruppen konstanten Niveaus der algebraischen Funktion y des auf der Kurve beweglichen Punktes x untereinander äquivalent sind. Ferner zeigte er: Damit eine algebraische Schar von ∞^1 Punktgruppen auf der Kurve die Gesamtheit aller Gruppen gleichen Niveaus einer ν-wertigen algebraischen Funktion bildet, ist notwendig und hinreichend, daß die Schar rational, also eine lineare Schar ist. Der Index der Schar ist ein Divisor von ν, und die algebraische Funktion kann immer derart ausgewählt werden, daß der Index selbst gleich ν ist.

E. S. Allen[310]) hat die nicht zusammengesetzten, irreduziblen algebraischen Scharen γ_n^ϱ ϱ^{ter} Dimension und n^{ter} Ordnung mit dem Index ν auf einer irreduziblen Kurve C untersucht, und die Formel von *E. de Jonquières* (s. Anm. 125) auf sie ausgedehnt. Zu diesem Zwecke hat er gewisse zahlenmäßige Charaktere $z_1, z_2, \ldots, z_\varrho$ der Schar[311]) eingeführt und untersucht. Dabei ist z_i die Anzahl derjenigen Gruppen einer innerhalb der γ_n^ϱ durch Festhaltung von $\varrho - i$ allgemeinen Punkten von C definierten Teilschar $\gamma_{n-\varrho+i}^i$, welche in einer allgemeinen linearen Schar $g_{n+p-\varrho}^{n-\varrho}$ enthalten sind. Für $i > p$ ist $z_i = 0$; außerdem setzt man, was erlaubt ist, $z_0 = \nu$. Damit $z_i = 0$ sei, ist notwendig und hinreichend, daß jede Gruppe der genannten Teilschar $\gamma_{n-\varrho+i}^i$ unendlich vielen anderen Gruppen äquivalent ist, woraus folgt, daß, wenn für einen gewissen Index i $z_i = 0$ ist, ebenso $z_j = 0$ ist für $j > i$. Außerdem zerfallen, wenn $z_i > 0$, aber $z_{i+1} = 0$ ist, die Gruppen der Schar γ_n^ϱ in ∞^i Scharen $\bar{\gamma}$ von der Dimension $\varrho - i$, derart, daß die Gruppen ein und derselben Schar $\bar{\gamma}$ paarweise äquivalent, niemals aber zwei Gruppen von zwei verschiedenen $\bar{\gamma}$ äquivalent sind; und umgekehrt.[312])

Unter diesen Voraussetzungen liefert die Formel, die die Ausdehnung der Formel von *E. de Jonquières* darstellt, die Anzahl $d_{k_1 k_2 \ldots k_\alpha}$ der Gruppen von γ_n^ϱ, die mit einem $(k_1 + 1)$-fachen, einem $(k_2 + 1)$-fachen, $\ldots$, einem $(k_\alpha + 1)$-fachen Punkt und mit $\varrho - \sum_{i=1}^{\alpha} k_i$ (vorausgesetzt > 0) allgemeinen festen Punkten der Kurve[313]) ausgestattet sind:

310) Rend. Circ. mat. Palermo 37 (1913), p. 345; Auszug Roma Rend. Acc. Linc. (5) 22^2 (1913), p. 424.

311) Diese Charaktere sind analog den beiden Charakteren (Nr. 34) von *G. Castelnuovo,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 15^1 (1906), p. 337, für $\varrho = 1$, und von *R. Torelli,* Atti Ist. Ven. 67^2 (1908), p. 1330, für $\varrho = 2$ eingeführten und von ihnen z bzw. Z genannten Charakteren.

312) Für $\varrho = 2$ findet sich der Satz bei *R. Torelli*[311]).

313) Die Formel von *E. de Jonquières* ergibt sich für $z_0 = 1$, $z_1 = z_2 = \cdots = z_\varrho = 0$. Den allgemeinen Wert von d_1 findet man schon bei *G. Castelnuovo*[311]); *R. Torelli,*

$$d_{k_1 k_2 \dots k_a} =$$

$$= \frac{(k_1+1)(k_2+1)\dots(k_a+1)}{c_1!\,c_2!\dots c_a!} \sum_{i=0}^{a} \sum_{j=i}^{a} (-1)^i z_i y_j j!\,(a-j)! \binom{p-i}{j-i} \binom{n-\varrho-j}{a-j},$$

wo die Zahlen c die Anzahl der Wiederholungen in den k_i liefern, also $k_1 = k_2 = \dots = k_{c_1}$, $k_{c_1+1} = k_{c_1+2} = \dots = k_{c_1+c_2}, \dots, k_{c_1+c_2+\dots+c_{a-1}+1} = \dots = k_{c_1+c_2+\dots+c_{a-1}+c_a}$, und y_j die Summe der Produkte der $k_1, k_2, \dots, k_a$ zu je j darstellt, während $y_0 = 1$ ist.[314])

Atti Acc. Torino 42 (1906), p. 89 hat den Wert von d_{k_1} und in [311]) den von d_{11} gefunden.

314) Ein anderes Problem, das auch das von *E. de Jonquières* umfaßt, ist die Bestimmung der Anzahl der neutralen Gruppen [vgl. III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **24** und **28**] mit mehrfachen Elementen einer gegebenen linearen Schar g_n^r, d. h. der Anzahl der Gruppen, die von α_1 k_1-fachen, von α_2 k_2-fachen, ..., von α_ϱ k_ϱ-fachen Punkten (wo $k_1, k_2, \dots, k_\varrho$ voneinander verschieden sind, ein k aber auch gleich der Einheit sein kann) gebildet werden, und für die Gruppen der Schar neutral von der Gattung q sind. Unter der Aussage, daß eine solche Gruppe neutral von der Gattung q sei, versteht man, daß sie den Gruppen der Schar, die diese Gruppe mit den gegebenen Multiplizitäten enthalten müssen, $\sum \alpha_i k_i - q$ unabhängige Bedingungen auferlegt.

Damit die Aufgabe eine endliche Anzahl von Lösungen **hat**, ist im allgemeinen notwendig und hinreichend, daß, wenn

$$\sum \alpha_i k_i - q - 1 = k, \quad \sum \alpha_i = t$$

gesetzt wird,

$$(r-k) \sum \alpha_i k_i - t = (k+1)(r-k) \qquad (n \geqq r+q) \text{ gilt.}$$

Ist insbesondere $q = t$, $k = r-1$, so kommt man auf die Aufgabe von *E. de Jonquières* zurück.

Die allgemeine Formel für $p = 0$ wurde von *F. Severi,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 9¹ (1900), p. 379 aufgestellt. S. auch *Fr. Deruyts,* Bull. Ac. sc. Belgique (3) 35 (1898), p. 196, 885; (3) 36 (1898), p. 187, 194.

Für $p = 0$, wurde die Formel, im Falle neutraler Gruppen ohne mehrfache Elemente, durch Induktion von *W. Fr. Meyer,* „Apolarität" [57]), p. 363, und *A. Tanturri,* Ann. di mat. (3) 4 (1900), p. 112, angegeben; ein Beweis bei *F. Severi,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 11¹ (1902). p. 52.

Ist p beliebig, so kennt man keine Formel, die diese Aufgabe in ihrer ganzen Allgemeinheit löst. *F. Severi,* Mem. Acc. Torino (2) 51 (1900), p. 81 hat die Aufgabe für $r \leqq 5$ gelöst und einen Weg zur Lösung für beliebiges r angegeben.

Für neutrale Gruppen, die frei von mehrfachen Punkten sind („ausgezeichnete Gruppen" nach *A. Brill*), wurde die allgemeine Formel von *G. Z. Giambelli,* Mem. Acc. Torino (2) 59 (1909), p. 433 angegeben, und zwar unter Darstellung der g_n^r als überebene Schnitte einer Kurve n^{ter} Ordnung und p^{ten} Geschlechts eines r-dimensionalen linearen Raumes. Sonderfälle dieser Formel schon bei *A. Brill* und *M. Noether,* Math. Ann. 7 (1873), p. 294; *A. Brill,* ebenda 36 (1890), p. 321; *G. Castelnuovo,* Rend. Circ. mat. Palermo 3 (1888), p. 27; Roma Rend. Acc. Linc.

E. S. Allen hat auch die zahlenmäßigen Charaktere der Schar angegeben, die man bei der Betrachtung der Gruppen der gegebenen Schar γ_n^ϱ erhält, die einen $(\varkappa_1+1)$-fachen, einen $(\varkappa_2+1)$-fachen, ..., einen $(\varkappa_\alpha+1)$-fachen Punkt enthalten, wenn man diese Punkte aussondert. Die neue Schar hat die Dimension $\varrho-\sum\varkappa$, die Ordnung $n-\sum\varkappa-\alpha$ und den Index $d_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_\alpha}$. Was die anderen Charaktere betrifft, so drückt man für $\alpha=1$ einen beliebigen Charakter z_i' (wobei man $\varkappa$ statt $\varkappa_1$ schreibt) durch die Charaktere $z_0, z_1, \ldots, z_\varrho$ der gegebenen Schar aus und zwar nach der Formel

$$\begin{aligned} z_i' = {} & (\varkappa+1)^2(p-i+1)z_{i-1} \\ & + (\varkappa+1)[n-\varrho+\varkappa p-i(2\varkappa+1)]z_i-(i+1)\varkappa(\varkappa+1)z_{i+1}, \end{aligned}$$

so daß sich alle diese Charaktere durch wiederholte Anwendung dieser Formel auf jeden Fall durch die Charaktere $z_0, z_1, \ldots, z_\varrho$ der gegebenen Schar ausdrücken lassen.

33. Algebraische Kurven, die irrationale Involutionen 2. Ordnung enthalten. *A. Comessatti*[315]) hat die algebraischen Kurven untersucht, die irrationale Involutionen 2. Ordnung γ_2^1 vom Geschlecht $\pi \geqq 1$ enthalten, also die *Doppelkurven* vom Geschlecht π (für $\pi=0$ ergeben sich die hyperelliptischen Kurven), insbesondere für den Fall $\pi=1$.[316]) Vor allem untersucht er die Bedingungen für die birationale Identität zweier Doppelkurven, die auf ein und derselben Kurve vom Geschlecht π mit ein und derselben Verzweigungsgruppe G dargestellt sind. Diese Bedingungen hat *Comessatti* in verschiedener Form ausgedrückt: In projektiver Form unter Bezugnahme auf die Darstellung der Kurve, die sich, bis auf birationale Transformationen, durch Gleichungen vom Typus

$$f(x,y)=0, \quad z^2=R(x,y) \tag{1}$$

(4) 5^2 (1889), p. 130; *H. G. Zeuthen*, Math. Ann. 40 (1891), p. 118; *A. Tanturri*, Ann. di mat. (3) 4 (1900), p. 67; Atti Acc. Torino 39 (1904), p. 483.

Über die vorausgehenden und andere Fragen abzählender Art s. III C 7 (*C. Segre*), Nr. **24** und **25**, wo auch verschiedene hierauf bezügliche Formeln angeführt sind.

315) Mem. Acc. Torino (2) 60 (1909), p. 313.

316) Die Unterscheidung der verschiedenen Klassen mehrfacher Kurven ohne Verzweigungspunkte wurde von *F. Enriques*, Rend. Circ. mat. Palermo 20 (1905), p. 17, für $\pi=1$ mit Hilfe der elliptischen Funktionen durchgeführt, für Doppelkurven auf einer Kurve beliebigen Geschlechts π von *A. Comessatti*, a. a. O., unter Verwendung der *Abel*schen Funktionen. — Über die Konstruktion der mehrfachen elliptischen Kurven, die auf einer elliptischen Kurve ohne Verzweigungspunkte dargestellt sind, s. *F. Enriques*, a. a. O.; *O. Chisini*, Roma Rend. Acc. Linc. (5) 30^2 (1921), p. 172, 251, 305; *R. Garnier*, Ann. Éc. Norm. (3) 41 (1924), p. 310 ff. — Über dies alles und vor allem die mehrfachen elliptischen Kurven ohne Verzweigungspunkte s. *F. Enriques* und *O. Chisini*, „Lezioni" 3, p. 427—456.

ausführen läßt, worin $f = 0$ das Geschlecht π besitzt und R ein ganzes rationales Polynom ist; dann in invarianter Form gegenüber birationalen Transformationen; schließlich in topologischer Form mittels der auf die Kurve $f = 0$ bezüglichen *Riemann*schen Fläche.[317])

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die birationale Identität zweier Kurven C und C', von denen jede eine einzige Involution γ_2^1 vom Geschlecht π enthält, lautet in invarianter Form: Zwischen den beiden Involutionen γ_2^1 muß eine eineindeutige Korrespondenz T bestehen, die die Gruppe der Doppelpunkte der einen Involution γ_2^1 in die Gruppe der Doppelpunkte der anderen und außerdem jede kanonische Gruppe von C, die mit der γ_2^1 zusammengesetzt ist, in eine analoge Gruppe von C' verwandelt. Für jede Korrespondenz T, die diesen beiden Bedingungen genügt, gibt es zwei birationale Beziehungen zwischen C und C'.

Die Anzahl der birational verschiedenen, irreduziblen Kurven vom Geschlecht p, die durch ein und dieselbe Doppelkurve vom Geschlecht π dargestellt sind mit einer gegebenen Verzweigungsgruppe G[318]), ist im allgemeinen $2^{2\pi}$, reduziert sich aber auf $2^{2\pi} - 1$, wenn die Gruppe G fehlt (so daß $p = 2\pi - 1$)[319]), und kann sich weiterhin verringern, wenn G bei irgendeiner birationalen Transformation von $f = 0$ in sich[320]) ebenfalls ungeändert bleibt.

---

317) Über die Konstruktion der *Riemann*schen Flächen vom Geschlecht p, die sich auf einer ν-fachen Fläche vom Geschlecht π erstrecken, s. *A. Hurwitz,* Math. Ann. 39 (1891), p. 1 = Math. Werke 1, p. 321; ital. Übersetzung von *A. Brambilla*, mit Zusatz des Verfassers, Giorn. di mat. (1) 31 (1893), p. 229; (2) 10 (1903), p. 337. Über die *Hurwitz*sche Bestimmung der Anzahl *Riemann*scher Flächen von gegebener Verzweigungsart s. *H. Weyl,* Commentarii math. Helvetici 3 (1931), p. 103. Über die mehrfachen *Riemann*schen Flächen (d. h. die mehrfachen Kurven), die frei von Verzweigungspunkten sind, s. *O. Chisini,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 24^1 (1915), p. 153.

S. darüber Anm. 20, wo auch die Arbeiten von *M. de Franchis* und *A. Comessatti* angeführt sind.

318) Nehmen wir auf die Darstellung (1) bezug, so besteht die Gruppe G aus denjenigen den Kurven $f = 0$, $R = 0$ gemeinschaftlichen Punkten, in denen die Multiplizität der Schnitte ungerade ist. Es existieren $2(p - 2\pi + 1)$ derartige Verzweigungspunkte.

319) Für diesen Fall und wenn $\pi = 1$, s. *G. Castelnuovo,* Atti Acc. Torino 24 (1888), p. 13; *F. Enriques*[316]); wenn $\pi = 2$, *W. Dyck,* Math. Ann. 17 (1880), p. 493; wenn $\pi > 1$, *A. Hurwitz*[317]), p. 57 = Math. Werke 1, p. 379; ital. Übers. Giorn. di mat. (2) 10 (1903), p. 362.

320) *A. Comessatti* hat diese Reduzibilitätsfälle für $\pi = 1$ vollständig studiert. Er hat auch die Kurven studiert, die mehrere elliptische γ_2^1 enthalten, und notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß eine Kurve, die eine solche γ_2^1 enthält, auch noch eine zweite, mit der ersten vertauschbare γ_2^1

34. Formel von H. Schubert für algebraische ∞^1-Scharen. Arithmetisches Äquivalenzkriterium von G. Castelnuovo; Verallgemeinerungen und Anwendungen. Arithmetisches Kriterium von F. Severi für die Wertigkeitskorrespondenzen. Eine wichtige Formel abzählender Art für die algebraischen ∞^1-Scharen rührt von *H. Schubert* her.[321]) Ist auf einer Kurve vom Geschlecht p eine lineare Schar g_m^r und eine (rationale oder nicht rationale) ∞^1 Schar γ n^{ter} Ordnung vom Index ν gegeben, und wird allgemein vorausgesetzt, daß eine allgemeine Gruppe von γ den Gruppen von g_m^r, die diese Gruppe enthalten sollen, $k+1$ ($\leqq r$) unabhängige Bedingungen auferlegt, so liefert die Formel für die Anzahl der Gruppen von γ, die $k+1$ Punkte enthalten, die ihrerseits den Gruppen von g_m^r nur k Bedingungen auferlegen, den Wert

$$m\nu\binom{n-1}{k} - \frac{1}{2}d\binom{n-2}{k-1} - \mu\binom{n}{k+1},$$

wo d die Anzahl der Doppelpunkte von γ ist und μ sich auf eine in g_m^r enthaltene g_m^k bezieht, die aber nicht alle Gruppen von γ (partiell)

---

enthält. Endlich hat er ein Beispiel einer Kurve vom Geschlecht $p=5$ angegeben, die eine Gruppe von 15 γ_2^1 enthält, von denen 5 elliptisch und 10 vom Geschlecht 3 sind. Man beachte, daß eine Kurve, die zwei elliptische γ_2^1 enthält, das Geschlecht $p \leqq 5$ hat, und daß, wenn $p=5$ ist, diese beiden γ_2^1 vertauschbar sind.

321) Die Formel und ein Beweis mittels der Geometrie höherer Räume wurde von *H. Schubert* an *C. Segre* 1887 brieflich mitgeteilt und findet sich bei *C. Segre,* Roma Rend. Acc. Linc. (4) 3^2 (1887), p. 3, 149; ^{2}), p. 97. Einen einfachen, mittels der Korrespondenzformel für die Korrespondenzen mit Wertigkeit Null abgeleiteten Beweis findet man bei *F. Severi,* „Lezioni", p. 236—240; „Vorlesungen", p. 191—194; „Trattato" 1_1, p. 250—254; er ist in Atti e Mem. Acc. Padova 24 (1908), p. 137 wiedergegeben [vgl. *F. Enriques* und *O. Chisini,* „Lezioni" 3, p. 482]; einen anderen bei *F. Enriques,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 28^1 (1919), p. 370, wiedergegeben bei *F. Enriques* und *O. Chisini,* „Lezioni" 3, p. 76—77. Für den Fall, daß γ eine lineare Schar g_n^1 ist, findet sich die Formel von *H. Schubert* schon bei *G. Castelnuovo,* Atti Acc. Torino 24 (1889), p. 351.

Mit dem *Cayley-Brill*schen Korrespondenzprinzip wurde die Formel von *H. Schubert* auf mehrfach unendliche algebraische Scharen von *R. Torelli,* Atti Ist. Ven. 67^2 (1908), p. 1323 durch Bestimmung der Anzahl der Gruppen von $\varrho+r$ Punkten erweitert, welche einer algebraischen Schar ∞^ϱ vom Index ν und einer linearen Schar ∞^r gemeinsam angehören. Für $\varrho=2$ s. auch *E. Allen,* Bull. Amer. math. Soc. (2) 26 (1920), p. 58. — In der so gewonnenen Formel ist die Formel von *G. Castelnuovo* enthalten [III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **34**; vgl. Anm. 383. S. auch Nr. **11**, am Ende], die sich auf den Fall zweier linearer Scharen bezieht. Von seiner Formel hat *R. Torelli* verschiedene Anwendungen gemacht, so z. B. die Bestimmung der Anzahl der Gruppen einer algebraischen ∞^2-Schar, die mit zwei Doppelpunkten ausgestattet sind (s. weiter oben im Text).

enthält, und genau die Anzahl der in g_m^k enthaltenen Gruppen von γ bezeichnet.[322])

Mit Hilfe der *Schubert*schen Formel hat *G. Castelnuovo*[323]) ein arithmetisches Kriterium für die Zusammensetzung [III C 4 (*L. Berzolari*), Anm. 295] einer irreduziblen ∞^1-Schar γ_n^1 n^{ter} Ordnung vom Index ν aus äquivalenten Gruppen angegeben. Es ergibt sich, daß eine solche Schar höchstens $2\nu(n+p-1)$ Doppelpunkte besitzt und dies Maximum dann und nur dann erreicht wird, wenn die Schar in einer linearen Schar (n^{ter} Ordnung) enthalten ist[324]).

Bezeichnen wir mit d und δ die Anzahl der Doppel- bzw. der Verzweigungspunkte der Schar γ_n^1, mit z die Anzahl der in einer allgemeinen, nicht spezialen, linearen Schar g_{n+p-1}^{n-1} enthaltenen Gruppen von γ_n^1 und mit π das Geschlecht von γ_n^1, so ergeben sich die Formeln

$$(1) \qquad d = 2\nu(n+p-1) - 2z, \quad \delta = 2n(\nu+\pi-1) - 2z.$$

Es ist $z = 0$ dann und nur dann, wenn γ_n^1 in einer linearen Schar (n^{ter} Ordnung) enthalten ist. Die Zahl z heißt[325]) *Äquivalenzdefekt* von γ_n^1.

Aus dem Satz von *G. Castelnuovo* in Verbindung mit der Formel von *H. G. Zeuthen* (Nr. 2) folgt: Enthält eine Kurve vom Geschlecht p

322) Die Formel von *H. Schubert*, besonders der Fall $k = n - 1$, ist grundlegend für die nach der überräumlichen Methode behandelte Theorie der linearen Scharen von *G. Castelnuovo* und *C. Segre*, wo sie an Stelle des Fundamentalsatzes von *M. Noether* tritt [III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **23**]. S. *C. Segre*[2]), außerdem III C 7 (*C. Segre*), Anm. 356 und Nr. **43**.

323) Roma Rend. Acc. Linc. (5) 15^1 (1906), p. 337. Vgl. auch *F. Severi*, „Lezioni", p. 240—242; „Vorlesungen", p. 195—196; „Trattato" 1_1, p. 254—257, und Atti Acc. Torino 48 (1913), p. 660; außerdem *F. Enriques* und *O. Chisini*, „Lezioni" 3, p. 481—483. Ein anderer Beweis bei *C. Rosati*, Ann. di mat. (3) 31 (1922), p. 9.

Eine andere Anwendung dieser Formel von *H. Schubert* auf eine Erweiterung des *Riemann-Roch*schen Satzes für die irrationalen ∞^1-Involutionen hatte *G. Castelnuovo* im ersten Zitat der Anm. 301 gemacht.

324) Eine analoge Eigenschaft gilt, wenn die algebraische Schar reduzibel, d. h. die Gesamtheit mehrerer irreduzibler Scharen n^{ter} Ordnung mit den Indizes ν', ν'', ... ist, derart, daß $\nu' + \nu'' + \cdots = \nu$. Die Anzahl ihrer Doppelpunkte besitzt als Maximum den Wert $2\nu(n+p-1)$ und erreicht diesen Wert dann und nur dann, wenn jede zusammensetzende Schar in einer linearen Schar n^{ter} Ordnung enthalten ist. S. *F. Severi*, Atti Ist. Ven. 65^2 (1906), p. 641—642; „Trattato" 1_1, p. 256; *R. Torelli*, Atti Acc. Torino 42 (1906), p. 86 in Anm.

A. Maroni, Mem. Acc. d'Italia 3 (1932), Nr. 2 [Auszug Atti Soc. ital. progresso d. scienze 20^2, Milano 1931 (Roma 1932), p. 50] erweitert die Formel von *H. Schubert* und das Äquivalenzkriterium von *G. Castelnuovo* auf die algebraischen ∞^1-Scharen mit variablen mehrfachen Punkten.

325) Nach *R. Torelli*, Rend. Circ. mat. Palermo 37 (1914), p. 25.

zwei Involutionen der Ordnungen ν und ν' und der Geschlechter π und π', so gilt

$$p \leqq (\nu - 1)(\nu' - 1) + \nu\pi + \nu'\pi',$$

worin das Gleichheitszeichen gilt, wenn die ∞^1-Schar der Ordnung $\nu\nu'$, deren Gruppen aus denjenigen Gruppen einer der beiden Involutionen gebildet sind, welche durch die Punkte einer in der anderen Involution beliebig angenommenen Gruppe bestimmt sind, in einer linearen Schar enthalten ist.

Der Satz von *G. Castelnuovo* wurde von *R. Torelli* auf die mehrfach unendlichen Scharen ausgedehnt.[326]) Die Anzahl der $(r+1)$-fachen Punkte in einer algebraischen irreduziblen ∞^r-Schar n^{ter} Ordnung vom Index ν auf einer Kurve vom Geschlecht p ist höchstens $\nu(r+1)(n+rp-r)$, und dies Maximum wird dann und nur dann erreicht, wenn die gegebene Schar in einer linearen Schar n^{ter} Ordnung enthalten ist. Die Differenz zwischen diesem Maximum und der Anzahl der $(r+1)$-fachen Punkte ist gleich $r(r+1)z$, wo z den Äquivalenzdefekt der ∞^1-Schar bezeichnet, die aus den $r-1$ allgemeine Punkte der Kurve enthaltenden Gruppen der gegebenen Schar gebildet ist.

R. Torelli[321]) hat das Kriterium von *G. Castelnuovo* in einem anderen Sinne auf die algebraischen ∞^2-Scharen ausgedehnt. Ist n die Ordnung einer solchen Schar, ν ihr Index und δ die Anzahl ihrer mit zwei Doppelpunkten ausgestatteten Gruppen, so ist

$$\delta = 2\nu(n+p-2)(n+p-3) - 4\nu p - 4z(n+p-4) + 4Z,$$

wo z der Äquivalenzdefekt der ∞^1-Schar ist, die aus den einen allgemeinen Punkt der Kurve enthaltenden Gruppen der gegebenen ∞^2-Schar gebildet ist, und Z die Anzahl der Gruppen der ∞^2-Schar ist, die in einer allgemeinen linearen Schar g^{n-2}_{n+p-2} partiell enthalten sind. Ist $z=0$, so ist auch $Z=0$, aber Z kann auch Null sein, wenn z nicht gleich Null ist. Nach *R. Torelli* wird Z Null, entweder wenn alle Gruppen der Schar äquivalent sind (in welchem Falle auch $z=0$), oder aber, wenn diese Gruppen in ∞^1 einfach unendliche Scharen zerfallen, deren jede aus äquivalenten Gruppen besteht (in welchem Falle $z>0$ ist).

G. Castelnuovo[327]) hat sein Kriterium auf einen geometrischen

---

326) Atti Acc. Torino 42 (1906), p. 86, wo sich auch ein analoges arithmetisches Kriterium zur Entscheidung über die Frage, ob ein einer algebraischen Fläche angehörendes algebraisches Kurvensystem in einem linearen System enthalten ist, findet. Über dies und die Erweiterung auf höhere Mannigfaltigkeiten s. auch *C. Rosati*[122]), p. 952.

327) S. [323]). S. auch *F. Severi*, „Lezioni“, p. 243; „Vorlesungen“, p. 196; „Trattato“ 1_1, p. 256; *F. Enriques* und *O. Chisini*, „Lezioni“ 3, p. 483—484.

Beweis folgenden Satzes angewandt, den *F. Severi*[328]) auf transzendentem Wege in seinen Untersuchungen über die Erweiterung des *Abel*schen Theorems auf die Flächen gewonnen hatte, und der für die Geometrie auf einer algebraischen Fläche[329]) von Bedeutung ist. Ist eine irreduzible algebraische ∞^1-Schar n^{ter} Ordnung mit dem Index ν so beschaffen, daß sich die Gesamtheit ihrer ν Gruppen, die einen allgemeinen Punkt P der Kurve enthalten (inkl. den ν-mal gezählten Punkt P), bei veränderlichem P in einer linearen Schar $(n\nu)^{\text{ter}}$ Ordnung bewegt, so sind die Gruppen der Schar äquivalent.

Andere Anwendungen des Kriteriums von *G. Castelnuovo* auf die Geometrie auf den algebraischen Flächen und Mannigfaltigkeiten machte *F. Severi*[330]), der dies Kriterium auch auf einen geometrischen Beweis der beiden folgenden Sätze anwandte, für deren ersten er schon einen transzendenten Beweis erbracht hatte[331]), während der zweite den oben wiedergegebenen Satz auf reduzible Scharen ausdehnt.

Existiert auf einer algebraischen Kurve eine algebraische (irreduzible oder reduzible) ∞^1-Schar von Gruppen zu n Punkten, die so beschaffen ist, daß die k-fachen Vielfachen der Gruppen dieser Schar untereinander äquivalent sind, so sind auch die Gruppen selbst untereinander äquivalent.

Ist eine algebraische ∞^1-Schar aus einer endlichen Anzahl irreduzibler ∞^1-Scharen zusammengesetzt, die aus Gruppen von n' bzw. n'', ... Punkten gebildet sind, und ändert sich die Gesamtheit der einen P enthaltenden Gruppen, die jenen Scharen angehören bei veränderlichem P in einer linearen Schar, so besteht jede von diesen Scharen auch aus untereinander äquivalenten Gruppen.

Gibt es daher auf einer irreduziblen Kurve ein algebraisches ∞^r-System von Gruppen zu n Punkten, derart, daß sich die Gesamtheit aller Gruppen des Systems, die r auf der Kurve veränderliche Punkte enthalten, in einer linearen Schar bewegt, so sind die Gruppen des gegebenen Systems untereinander äquivalent.

---

328) Ann. di mat. (3) 12 (1905), p. 59; Auszug Paris C. R. 140 (1905), p. 926. Der Satz ist in einer etwas anderen Form bei *A. Comessatti,* Rend. Circ. mat. Palermo 36 (1912), p. 44 angegeben, und angewandt. Ein Beweis des Satzes auf Grund der Theorie der Korrespondenzen zwischen Kurven wurde von *C. Rosati,* Ann. di mat. (3) 28 (1918), p. 44—45 gegeben.

Unter der, hier wesentlichen Annahme der Irreduzibilität der Schar, wurde der Satz von *F. Severi* durch *G. Scorza,* Catania Atti Acc. Gioenia (5) 11 (1918), Nr. XX, auf die *Abel*schen Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension ausgedehnt.

329) S. *G. Castelnuovo,* Anm. 323.

330) Atti Ist. Ven. 65² (1906), p. 625. S. auch „Trattato" 1_1, p. 256—257.

331) Rend. Circ. mat. Palermo 21 (1905), p. 281, in Anm.

Für den ersten der beiden vorhergehenden Sätze hat *F. Severi*[332]) einen anderen, von dem Kriterium von *G. Castelnuovo* unabhängigen, geometrischen Beweis gegeben, und dazu benutzt, jenes Kriterium neu abzuleiten. *Severi* gelangt so (Nr. **18**) zu dem Satz, daß eine (α, β)-Korrespondenz zwischen zwei voneinander verschiedenen oder zusammenfallenden Kurven immer den Grad $\nu \leqq 2\alpha\beta$ hat, wo das Gleichheitszeichen nur gilt, wenn die Korrespondenz die Wertigkeit Null hat. Man gelangt von diesem Ergebnis mittels der Formel von *H. G. Zeuthen* zu dem Ergebnis von *G. Castelnuovo.*

Hieraus und aus einem in Anm. 156 angegebenen Satz, hat *F. Severi*[333]) auf geometrischem Wege (auch unter Angabe eines auf den Ergebnissen von *A. Hurwitz* beruhenden transzendenten Beweises)[334]) einen weiteren arithmetischen Satz vom Typus des Satzes von *G. Castelnuovo* abgeleitet, der die Wertigkeitskorrespondenzen kennzeichnet. Dieser neue Satz hängt sowohl mit jenem arithmetischen Kriterium von *G. Castelnuovo* für die Äquivalenz der Gruppen einer gegebenen algebraischen Schar auf einer Kurve, wie auch mit dem arithmetischen Kriterium zusammen, das ebenfalls von *F. Severi*[335]) ausgesprochen wurde, und zwar zur Entscheidung über die (algebraische oder lineare) Äquivalenz zweier geeigneter Gleichvielfacher von zwei auf einer algebraischen Fläche gezogenen Kurven. Es handelt sich dabei um folgende Ungleichung, welcher das Geschlecht p einer Kurve, die Indizes einer beliebigen, auf ihr gegebenen, algebraischen (α, β)-Korrespondenz, die Anzahl u ihrer Koinzidenzpunkte und ihr Grad 2μ, der notwendigerweise gerade ist (Nr. **18**), genügen:

$$(u - \alpha - \beta)^2 \leqq 4p(\alpha\beta - \mu),$$

wo das Gleichheitszeichen nur dann gilt, wenn die Korrespondenz Wertigkeit $\left(= \frac{u - \alpha - \beta}{2p}\right)$ hat.

35. Die Jacobische Mannigfaltigkeit V_p einer Kurve vom Geschlecht $p > 0$ und die eineindeutigen Korrespondenzen zwischen Gruppen von p Punkten der Kurve. Als *Picardsche Mannigfaltigkeit*[336]) wird jede algebraische irreduzible Mannigfaltigkeit von k Dimensionen bezeichnet, die eine transitive *Abel*sche ∞^k-Gruppe von birationalen Transformationen in sich zuläßt.

332) Atti Acc. Torino 48 (1913), p. 660.

333) S. [332]) und „Trattato" 1_1, p. 278—281.

334) Andere Beweise bei *C. Rosati,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 22^2 (1913), p. 433—434 in Anm.; *G. Tafani*[275]), p. 9.

335) Math. Ann. 62 (1905), p. 194; Auszug Paris C. R. 140 (1905), p. 361.

336) Nach *G. Castelnuovo,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 14^1 (1905), p. 551, 554.

Die einfachsten unter ihnen sind die auf die algebraischen Kurven bezüglichen *Jacobischen Mannigfaltigkeiten.* Als *Jacobische Mannigfaltigkeit* einer algebraischen irreduziblen Kurve C vom Geschlecht $p > 0$ bezeichnet man die algebraische irreduzible Mannigfaltigkeit V_p von p Dimensionen, deren Punkte birational, ohne Ausnahme, den auf der Kurve vorhandenen ∞^p linearen Scharen p^{ter} Ordnung und der Dimension $\geqq 0$ entsprechen [vgl. III C 4 (*L. Berzolari*), Anm. 362]; für $p = 1$ fällt sie mit der Kurve selbst zusammen. Sie ist birational identisch mit der p-dimensionalen Mannigfaltigkeit, die die ∞^p Gruppen von p Punkten von C[337]) ohne Ausnahme darstellt. Daher ist das Studium der birationalen Transformationen in sich, die V_p zuläßt, dem der eineindeutigen Korrespondenzen zwischen Gruppen von p Punkten von C gleichwertig. Von diesem Gesichtspunkt aus gelangt *G. Castelnuovo*[338]) zu einer Erweiterung der Theorie der eineindeutigen Korrespondenzen auf den elliptischen Kurven (Nr. **43**).[339])

Castelnuovo bezeichnete als *erster Art* die eineindeutigen Korrespondenzen, die sich ergeben, wenn man auf C eine der unendlich vielen nicht spezialen linearen Scharen g^p_{2p} ins Auge faßt und zwei Gruppen von p Punkten einander entsprechen läßt, die zusammen eine Gruppe dieser Schar bilden; als *zweiter Art* diejenigen, die das Produkt zweier Korrespondenzen erster Art sind (was dann auf unendlich viele Weisen möglich ist).[340])

337) Vgl. *G. Castelnuovo,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 14^1 (1905), p. 545, 593, 655. — Die Mannigfaltigkeit V_p enthält ein ∞^1-System algebraischer Mannigfaltigkeiten von $p-1$ Dimensionen, die Bilder der linearen Scharen g_p sind, welche durch die Gruppen von p Punkten mit einem festen Punkt bestimmt werden. Das System selbst besitzt eine irreduzible algebraische Basismannigfaltigkeit von $p-2$ Dimensionen, die das Bild der Spezialscharen g_p ist: *A. Comessatti,* Atti Acc. Torino 50 (1915), p. 439. — Vgl. noch, auch für allgemeinere Untersuchungen über die Theorie der *Abel*schen Funktionen, *G. Castelnuovo,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 30^1 (1921), p. 50, 99, 195, 355.

Über die *Jacobi*sche Mannigfaltigkeit (Fläche) für $p = 2$ s. *F. Enriques* und *F. Severi,* Preisschrift, Acta math. 32 (1909), p. 283; 33 (1910), p. 321 [1907].

Über die reellen *Jacobi*schen Mannigfaltigkeiten (insbesondere Flächen) s. *A. Comessatti*[215]).

In seinen Untersuchungen über die Arithmetik auf den algebraischen Kurven (Nr. 45) betrachtet *A. Weil*[426]) die arithmetischen Eigenschaften der *Jacobi*schen Mannigfaltigkeit, die zu einer Kurve vom Geschlecht p gehört, welche durch eine Gleichung, deren Koeffizienten einem gegebenen, algebraischen und endlichen Zahlkörper angehören, dargestellt ist.

338) Rend. Ist. Lomb. (2) 25 (1892), p. 1189. Vgl. auch *F. Severi,* „Vorlesungen“, p. 271—274; „Trattato“ 1_1, p. 281—284.

339) Über eine andere von *G. Scorza* herrührende Erweiterung, s. Nr. **40**.

340) Diese Benennungen stammen von *G. Castelnuovo*[338]); in [337]) hat er die beiden Benennungen vertauscht.

Die Korrespondenzen erster Art sind involutorisch und lassen je 2^{2p} Koinzidenzgruppen zu; dagegen ist im allgemeinen eine Korrespondenz zweiter Art weder involutorisch, noch hat sie, im allgemeinen, Koinzidenzgruppen. Das Produkt mehrerer Korrespondenzen erster und zweiter Art ist eine Korrespondenz erster oder zweiter Art, je nachdem die Anzahl der Korrespondenzen erster Art ungerade oder gerade ist. Die Korrespondenzen erster und zweiter Art bilden zusammen eine gemischte Gruppe, innerhalb der die Korrespondenzen zweiter Art eine p-fach unendliche kontinuierliche *Abel*sche Gruppe bilden, während die Korrespondenzen erster Art eine p-fach unendliche kontinuierliche Schar zusammensetzen, die keine kontinuierliche Gruppe (im Sinne von *S. Lie*) ist.[341])

Die Korrespondenzen erster und zweiter Art kann man insofern auch als *gewöhnliche* Korrespondenzen bezeichnen, als *G. Castelnuovo*[338]) mittels der transzendenten Ergebnisse von *A. Hurwitz* über die Korrespondenzen (Nr. 12) bewiesen hat, daß diese die einzigen eineindeutigen Korrespondenzen zwischen Gruppen von p Punkten sind, welche auf einer Kurve vom Geschlecht p *mit allgemeinen Moduln* bestehen können.

Über die *Jacobi*sche Mannigfaltigkeit und ihre automorphen Korrespondenzen 1. und 2. Art, s. noch *M. de Franchis*[26]), p. 484—549.

Die grundlegenden Eigenschaften der Transformationen 2. Art wurden von neuem, auf algebraisch-geometrischem Wege, von *O. Chisini*, Rend. Ist. Lomb. (2) 62 (1929), p. 839, abgeleitet, der auch den analytischen Ausdruck der infinitesimalen Transformationen, welche die aus den Transformationen 2. Art gebildete *Abel*sche Gruppe erzeugen, bestimmt und davon den Ausdruck der endlichen Transformationen abgeleitet.

In Rend. Ist. Lomb. (2) 63 (1930), p. 237, hat *O. Chisini* umgekehrt gezeigt, daß man von den auf die Transformationen 2. Art bezüglichen Eigenschaften auf algebraisch-geometrischem Wege die grundlegenden Eigenschaften der *Abel*schen Integrale 1. Gattung, die zu der Kurve gehören (Umkehrungssatz, Satz von *Abel*, . . .), ableiten kann, wenn man die Integrale als Exponenten der Transformationen 2. Art definiert, welche die ganze Gruppe solcher Transformationen erzeugen. — Im Falle $p = 1$ s. Anm. 407.

341) Die Korrespondenzen 2. Art liefern nach *G. Castelnuovo*[338]) eine einfache geometrische Deutung des *Abel*schen Satzes für Integrale 1. Gattung, d. h. die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß zwei Gruppen von n Punkten der Kurve äquivalent sind. Eine derartige Korrespondenz ist nämlich durch ein Paar entsprechender Gruppen bestimmt; wenn nun G eine Gruppe von $p-1$ Punkten ist und a und a' zwei Punkte der Kurve sind, so verändert sich die durch die beiden Gruppen $G + a$ und $G + a'$ bestimmte Korrespondenz 2. Art nicht, wenn man statt der Gruppe G eine andere Gruppe von $p-1$ Punkten nimmt; sie kann daher kurz mit $[a, a']$ bezeichnet werden. Damit nun die beiden Gruppen von n Punkten $a_1 a_2 \ldots a_n$ und $a_1' a_2' \ldots a_n'$ äquivalent sind, ist notwendig und hinreichend, daß das Produkt der n Korrespondenzen $[a_1, a_1']$, $[a_2, a_2']$, $\ldots$, $[a_n, a_n']$ die Identität sei.

In jedem Falle zerfallen die birationalen Transformationen der V_p in sich in kontinuierliche ∞^p-Scharen, die paarweise keine Transformation gemein haben und so beschaffen sind, daß das Produkt (in einer bestimmten Reihenfolge) zweier, in zwei gegebenen Scharen oder in ein und derselben Schar veränderliche Transformationen sich auch in eine Schar verwandelt.

Die Gesamtheit aller Scharen kann daher als eine Gruppe Γ aufgefaßt werden, die endlich oder diskontinuierlich unendlich ist. Besitzt die betrachtete Kurve C nur Wertigkeitskorrespondenzen, so ist Γ die aus den beiden Scharen gewöhnlicher Transformationen erster und zweiter Art zusammengesetzte zyklische Gruppe 2. Ordnung. In Γ gibt es nur dann Scharen singulärer Transformationen, wenn C singuläre Korrespondenzen besitzt.[342])

36. Die Jacobische Mannigfaltigkeit V_p in Verbindung mit den algebraischen ∞^1-Scharen von Punktgruppen auf der Kurve und mit der Theorie der algebraischen Korrespondenzen zwischen den Punkten dieser Kurve. In Verbindung mit der auf eine irreduzible Kurve C vom Geschlecht $p > 0$ bezüglichen *Jacobi*schen Mannigfaltigkeit V_p, hat *R. Torelli*[343]) die algebraischen ∞^1-Scharen von Punktgruppen von C untersucht. Die Kurve C besitzt immer ∞^1-Scharen n^{ter} Ordnung, welche nicht aus äquivalenten Gruppen zusammengesetzt sind und deren Geschlecht $\pi \geqq p$ ist. Hat die Kurve C aber allgemeine Moduln, so besitzt sie keine Scharen vom Geschlecht $\pi < p$. Gibt es eine derartige Schar, so besitzt die Mannigfaltigkeit V_p zwei Kongruenzen von irreduziblen *Picard*schen Mannigfaltigkeiten mit dem Index 1. Diese Kongruenzen sind durch die Schar völlig bestimmt und werden durch die Transformationen erster und zweiter Art von V_p[344]) in sich verwandelt. Nach *R. Torelli* kann man eine dieser Kongruenzen, die wir S nennen wollen, folgendermaßen konstruieren. Nimmt man auf C eine allgemeine lineare Schar $g^{n\pi}_{n\pi+p}$ an, so ist der Rest jeder Ge-

342) Hierüber und, allgemeiner, über die birationalen Korrespondenzen der p-dimensionalen *Abel*schen Mannigfaltigkeiten in sich, s. *G. Scorza*[197]), p. 330; *Concetta Raciti,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 28^1 (1919), p. 347. 377.

Damit eine *Abel*sche Mannigfaltigkeit ∞^p-Scharen birationaler Transformationen in sich zuläßt, die sich von den beiden Scharen der gewöhnlichen Transformationen erster und zweiter Art unterscheiden, ist nach *G. Scorza,* a. a. O., p. 332 notwendig und hinreichend, daß ihr Multiplikabilitätsindex (Nr. **20**) positiv sei.

343) Rend. Circ. mat. Palermo 37 (1913), p. 25 [Auszug Roma Rend. Acc. Linc. (5) 22^1 (1913), p. 772]; außerdem Roma Rend. Acc. Linc. (5) 22^2 (1913), p. 98, 437; Atti Acc. Torino 49 (1914), Anm. auf p. 858.

344) Vgl. *G. Castelnuovo,* erste Anführung[337]).

samtheit von π Gruppen der Schar γ_n^1 in bezug auf die lineare Schar eine Gruppe von p Punkten. Diese restlichen Gruppen bilden eine Schar $\infty^{\pi-i}$ $(0 \leqq i < \pi)$, die in V_p durch eine irreduzible *Picard*sche Mannigfaltigkeit V' dargestellt wird; und diese beschreibt, beim Variieren der Schar $g^{n\pi}_{n\pi+p}$, die Kongruenz S.

Rechnet man zwei ∞^1-Scharen zu ein und derselben *Klasse*, wenn sie sich Gruppe um Gruppe eineindeutig so aufeinander beziehen lassen, daß die Summe oder die Differenz homologer Gruppen in einer linearen Schar variiert, so wird jede Klasse durch eine beliebige ihrer Scharen bestimmt, und die Scharen ein und derselben Klasse bestimmen in V_p dieselbe Kongruenz S. *R. Torelli* hat die drei Fälle, in denen eine Klasse auftreten kann, untersucht, und zwar in Verbindung mit der Existenz von Scharen in der Klasse, die mit irgendwelchen Besonderheiten ausgestattet, also z. B. mit einer Involution zusammengesetzt sind.[345])

37. Fortsetzung: Arithmetische Invarianten einer algebraischen ∞^1-Schar von Punktgruppen auf einer algebraischen Kurve. In Verbindung mit dem Kriterium von *G. Castelnuovo* (Nr. **34**) läßt sich von transzendentem Gesichtspunkt aus sagen, daß das Verschwinden der in den Gleichungen (1) von Nr. **34** vorkommenden Zahl z notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daß alle Summen der p linear unabhängigen *Abel*schen Integrale 1. Gattung der Kurve, die sich auf die Gruppen der Schar γ_n^1 beziehen, konstant sind. Von diesem Gesichtspunkt aus hat *A. Comessatti* [346]) dadurch den Satz erweitert, daß er versuchte, durch eine Beziehung zwischen den Charakteren abzählender Art der Schar, die notwendige und hinreichende Bedingung dafür auszudrücken, daß unter den genannten Summen nur $r \leqq p$ unabhängig sind, daß man also $p - r$, und nicht mehr, unabhängige Integrale 1. Gattung bestimmen kann, deren Summen längs der Gruppen der Schar γ_n^1 beim Variieren dieser Gruppen konstant bleiben. Zu diesem Zwecke hat *Comessatti*, unter Erweiterung der geometrischen Definition der genannten Zahl z, gewisse positive ganze Zahlen $Z_0, Z_1, \ldots, Z_{p-1}$ eingeführt, die ebenso viele, bei birationalen Transformationen invariante Charaktere der Schar γ_n^1 darstellen. Der

345) Bei den Anwendungen hat *R. Torelli* bewiesen: Damit eine nicht zusammengesetzte Involution I auf einer Kurve C zyklisch und frei von Koinzidenzen sei, ist notwendig und hinreichend, daß auf C zwei mit I zusammengesetzte, nicht äquivalente Gruppen mit einer gleichen Anzahl von Punkten existieren, deren Bilder auf einer Kurve, die I darstellt, äquivalent sind. Rend. Circ. mat. Palermo 37 (1913), p. 42.

346) Rend. Circ. mat. Palermo 36 (1912), p. 35. Zu einigen der Ergebnisse von *A. Comessatti* gelangt *R. Torelli* auf anderem Wege, Rend. Circ. mat. Palermo 37 (1913), p. 25; Auszug Roma Rend. Acc. Linc. (5) 22^1 (1913), p. 772.

erste von diesen Charakteren ist $= z$, während Z_r die Anzahl der Gruppen einer allgemeinen, nicht spezialen, linearen Schar $g^{(r+1)(n-1)}_{(r+1)(n-1)+p}$ bezeichnet, die $r+1$ Gruppen der Schar γ^1_n partiell enthalten. Dann lautet die gesuchte Bedingung: $Z_r = 0$, ohne daß aber $Z_0, Z_1, \ldots, Z_{r-1}$ Null sind.[347])

G. Castelnuovo[348]) hat ferner die auf C existierenden Scharen γ^1_n in Verbindung mit der Mannigfaltigkeit V_p untersucht und verschiedene Eigenschaften der Invarianten Z_r aufgewiesen, die zeigen, daß diese tatsächlich die wichtigsten arithmetischen Charaktere einer algebraischen ∞^1-Schar sind. Die Mannigfaltigkeit V_p enthält immer ein algebraisches ∞^p-System Θ, das aus den $(p-1)$-dimensionalen, algebraischen Mannigfaltigkeiten (Orte der Nullstellen der Thetafunktionen 1. Ordnung) zusammengesetzt ist, von denen eine jede die in einer nicht spezialen linearen Schar g^{p-1}_{2p-1} partiell enthaltenen linearen Scharen p^{ter} Ordnung darstellt. *G. Castelnuovo* zeigte nun, daß man in Verbindung mit einer gegebenen auf C bestehenden Schar γ^1_n[349]) eine rationale Transformation der Mannigfaltigkeit V_p bilden kann, die die Mannigfaltigkeiten Θ von V_p in *intermediäre* Mannigfaltigkeiten Φ verwandelt [d. h., in $(p-1)$-dimensionale, in V_p enthaltene algebraische Mannigfaltigkeiten, deren jede auf C eine Schar γ^{p-1}_p darstellt, deren allgemeine Gruppe, nicht spezial ist][350]), deren Zahlen Z_r, bis auf gewisse Faktoren, Charaktere für das System der Mannigfaltigkeiten Θ angeben. Das Produkt $(p-r)!\,Z_{p-r}$ ist der Index der Schar γ^r_p, die auf C der Mannigfaltigkeit entspricht, welche Schnitt von $p-r$ allgemeinen Mannigfaltigkeiten Φ ist. Es gilt außerdem[351]), daß Z_r auch

347) Für die Berechnung der Zahlen Z_r, deren allgemeiner Ausdruck wahrscheinlich verwickelt ist, hat *A. Comessatti* Rekursionsformeln angegeben und zur expliziten Bestimmung von Z_1[358]) verwandt (woraus man schließt, daß auf einer irreduziblen algebraischen Kurve vom Geschlecht $p > n$ alle elliptischen Scharen γ^1_n, die nicht aus äquivalenten Gruppen gebildet sind, involutorisch sind), ebenso zur Berechnung von Z_r für den Fall, daß die Schar involutorisch ist (also mit dem Index $\nu = 1$). In diesem Falle, und wenn die involutorische Schar das Geschlecht π hat, lautet die Formel

$$Z_r = n^{r+1}\binom{\pi}{r+1}.$$

348) Roma Rend. Acc. Linc. (5) 30^1 (1921), p. 195, 355.

349) *G. Castelnuovo* nimmt der Einfachheit halber an, daß diese Schar γ^1_n birational identisch mit C ist, doch ist dies eine unwesentliche Einschränkung.

350) Über die intermediären Funktionen („Zwischenfunktionen") — „*Jacobi*sche Funktionen" nach *G. Frobenius*, J. f. Math. 97 (1884), p. 16 u. 188; „fonctions intermédiaires" nach *H. Poincaré*, Amer. J. of math. 8 (1886), p. 316 — s. II B 7 (*A. Krazer* und *W. Wirtinger*), Nr. **116**, **117**.

351) Über diese Andeutung vgl. auch *R. Torelli*[346]), p. 36.

der Index der *äquivalenten* Schar γ_p^r (und der *residualen* Schar γ_p^r) der g_{nr}^r ist, die sich bei der Zusammenstellung der Gruppen von γ_n^1 zu je r ergibt.[352])

Für diese Invarianten Z_r hat *G. Castelnuovo* auch folgende analytische Definition gegeben. Es sei C' eine mit der Schar γ_n^1 birational identische Kurve und ν der Index dieser Schar, so daß zwischen C und C' eine Korrespondenz mit den Indizes n und ν besteht. Bezeichnen wir mit T und T^{-1} die zueinander inversen Operationen, die von einem Punkte von C' zu den n homologen Punkten von C und von einem Punkte von C zu den ν homologen Punkten von C' führen, so ist $T^{-1}T$ auf C eine symmetrische Korrespondenz, welche p reelle und negative Wertigkeiten besitzt.[353]) Die Gleichung vom Grad p, deren Wurzeln diese Wertigkeiten sind, hat daher nur positive Koeffizienten, und diese Koeffizienten sind nun nach *G. Castelnuovo* genau diese Invarianten $Z_0, Z_1, \ldots, Z_{p-1}$.[354])[355])

C. Rosati[356]) hat das Ergebnis von *A. Comessatti* durch Verknüpfung mit der transzendenten *Hurwitz*schen Darstellung der algebraischen Korrespondenzen zwischen zwei Kurven wieder erhalten. Ferner gab *Rosati* auf Grund der analytischen Deutung von *G. Castelnuovo* ein neues, auf der Korrespondenztheorie beruhendes Verfahren an, mittels dessen er den Wert eines jeden Z_r als Funktion von p, n, ν und gewissen anderen Charakteren $k_1, k_2, \ldots, k_{r+1}$ bestimmte. Diese Charaktere, deren Betrachtung auf *A. Comessatti* zurückgeht[357]), der ihr

352) Ist auf einer Kurve C vom Geschlecht p eine algebraische Schar γ_n^r von ∞^r Gruppen zu n Punkten gegeben, von der niemals zwei Gruppen äquivalent sind, so kann man eine neue Schar γ_p^r derselben Dimension r und Ordnung p konstruieren, welche der ersten birational entspricht. Man nennt die Schar γ_p^r *äquivalent* bzw. *residual* zu der Schar γ_n^r, wenn sich die Differenz bzw. die Summe zweier entsprechender Gruppen der beiden Scharen in eine lineare Schar ändert (vgl. Nr. **17**); im zweiten Falle ist diese lineare Schar eine Schar g_{n+p}^n, die man als nicht spezial betrachten kann.

353) *C. Rosati*, Ann. di mat. (3) 31 (1921), p. 8. Wenn q der Rang (Nr. **29**) der (n, ν)-Korrespondenz zwischen C und C' ist, so sind $p-q$ dieser Wertigkeiten gleich Null.

354) Für diese Invarianten hat *G. Castelnuovo*[348]), p. 359, eine andere analytische Deutung gegeben, die auf einer Verallgemeinerung des *Jacobi*schen Umkehrproblems beruht.

355) Ist zwischen zwei Kurven C und C' eine Korrespondenz T mit den Indizes α, β gegeben, so haben die auf C bzw. C' entstehenden symmetrischen Korrespondenzen $T^{-1}T$ und TT^{-1} (Nr. **29**) gleiche Wertigkeiten, und daher die durch T auf C bzw. C' induzierten Scharen γ_α^1 und γ_β^1 (Nr. **25**) gleiche Invarianten.

356) Rend. Circ. mat. Palermo 49 (1924), p. 165; Auszug Boll. Unione mat. ital. 4 (1925), p. 23.

357) Anm. 346, p. 49 ff.

Auftreten in den Ausdrücken der Invarianten Z_r bemerkte, können wie folgt definiert werden.

Auf C seien die Gruppen $G_1, G_2, \ldots, G_i$ der γ_n^1 so beschaffen, daß jede Gruppe mit der folgenden mindestens einen Punkt gemein hat. Sind $P_1, P_2, \ldots, P_{i-1}$ Verbindungspunkte der Paare aufeinander folgender Gruppen, so nennt man die aus diesen Gruppen und Punkten zusammengesetzte Konfiguration *Kette* i^{ter} *Ordnung*. Zwei Punkte von C, deren einer in G_1 enthalten, von P_1 aber verschieden ist, deren anderer in G_i enthalten, von P_{i-1} aber verschieden ist, heißen *verkettet von der Verkettungsordnung* i. Unter diesen Voraussetzungen sind nun die oben erwähnten Charaktere $k_1, k_2, \ldots, k_{r+1}$, die Anzahlen der Koinzidenzen der symmetrischen Korrespondenzen $R_1, R_2, \ldots, R_{r+1}$, wo R_i die Korrespondenz ist, in der zwei Punkte von C homolog sind, die verkettet von der Verkettungsordnung i sind.

C. Rosati hat ein Verfahren angegeben, mittels dessen man, wenn die Zahlen $k_1, k_2, \ldots, k_{r+1}$ bekannt sind, den Wert der Invariante Z_r bestimmen, und umgekehrt, wenn die Invarianten $Z_0, Z_1, \ldots, Z_{r-1}$ bekannt sind, die Zahl k_r[358]) bestimmen kann.

Bezeichnet man mit $h_1, h_2, \ldots$ die Anzahl der Koinzidenzen der symmetrischen Korrespondenzen $\overline{R}_i$, die in analoger Weise wie die R_i für die Kurve C' definiert sind[359]), so ergeben sich nach *C. Rosati* Beziehungen, die die Zahlen h_i und k_i linear enthalten und eine Erweiterung der Formel von *H. G. Zeuthen* (Nr. 2) darstellen. Diese Beziehungen sind

$$\begin{aligned} h_r - k_r + n(h_1 + \cdots + h_{r-1}) - \nu(k_1 + \cdots + k_{r-1}) \\ = 2n(p' - 1) - 2\nu(p-1) \end{aligned}$$
$$(r = 2, 3, \ldots),$$

wo p' das Geschlecht von C' ist.

38. Transzendente Bedingungen für die birationale Identität zweier algebraischer Kurven. Birationale Korrespondenzen der

358) Insbesondere ergibt sich für Z_1 der Ausdruck

$$Z_1 = \frac{1}{4}\left\{2\nu^2(p-1)(2n+p-2) - 2\nu(n-1)(p-1) \right. \\ \left. + \frac{k_1^2}{2} - [(2\nu-1)(n-2) + 2\nu p]\,k_1 + k_2\right\},$$

der von *A. Comessatti*[346]), p. 56 angegeben und von *C. Rosati*[356]), p. 189 in Anm. wiedergefunden wurde.

359) Die Korrespondenzen R_i und $\overline{R}_i$ wurden von *C. Rosati* als *Seitenkorrespondenzen von der Ordnung* i der gegebenen (n, ν)-Korrespondenz zwischen C und C' bezeichnet. Sie haben die Indizes $\nu(n-1)^i(\nu-1)^{i-1}$ bzw. $n(\nu-1)^i(n-1)^{i-1}$ und sind rationale Funktionen (Nr. 24) von $T^{-1}T$ und TT^{-1}.

Jacobischen Mannigfaltigkeit V_p in sich.[360]) Durch Erweiterung eines Satzes von *F. Enriques* und *F. Severi*[361]), hat *R. Torelli*[362]) gezeigt: Gibt es auf einer Kurve C vom Geschlecht p eine von spezialen Gruppen freie irreduzible ∞^1-Schar γ, deren Ordnung, Index und Geschlecht gleich p ist, derart, daß kein Integral 1. Gattung von C konstante Summe längs ihrer Gruppen ergibt (d. h., daß sie nicht konstanten Niveaus für irgendein Integral 1. Gattung ist), so findet sich in der, durch γ bestimmten Klasse die von den Punkten von C gebildete Involution (1. Ordnung), also ist deswegen γ birational äquivalent mit C.

Aus diesem Satze folgt nach *R. Torelli*[363]) mittels der Ergebnisse von *A. Hurwitz* über die Korrespondenzen (Nr. **12**): Besitzen zwei Kurven ein und desselben Geschlechtes p zwei Systeme von Normalintegralen 1. Gattung, die dieselbe Tabelle normierter Perioden haben, so sind sie birational identisch.[364])

Hierher gehört auch der von *F. Severi*[365]) bewiesene Satz: Ist die *Jacobi*sche Mannigfaltigkeit V_p in bezug auf eine Kurve C *mit allgemeinen Moduln* — oder, was dasselbe ist[366]), in bezug auf eine von singulären symmetrischen Korrespondenzen freie Kurve C — gegeben[367]), so ist die Kurve C, bis auf birationale Transformationen, bestimmt. Mit anderen Worten, zwei Kurven ein und desselben Geschlechtes mit allgemeinen Moduln sind birational identisch, wenn es ihre *Jacobi*schen Mannigfaltigkeiten sind.

360) Über den Inhalt dieser Nr. s. den Bericht von *L. Godeaux*, Bull. sc. math. (2) 50^1 (1926), p. 258 und 272.

361) Preisschrift, Acta math. 32 (1909), p. 309.

362) Roma Rend Acc. Linc. (5) 22^2 (1913), p. 98.

363) S. [362]), p. 102—103. Vgl. auch *G. Scorza*[197]), Anm. auf p. 274—275; *S. Lefschetz*, Preisschrift[114]), p. 459.

364) Nach *F. Cecioni*, Ann. Univ. Toscane (2) 9 (1925), p. 181; „Sopra alcune questioni etc." (lith.), Livorno 1925, p. 45—46, gilt diese Eigenschaft auch für die *reellen* birationalen Transformationen (d. h., Transformationen, die durch Gleichungen mit reellen Koeffizienten dargestellt sind) zwischen zwei reellen hyperelliptischen Kurven vom Geschlecht p, die die Maximalzahl $p + 1$ reeller Züge haben.

Weitere, auf den Inhalt dieser Arbeiten bezügliche Entwicklungen, haben *F. Cecioni*, Ann. Univ. Toscane (2) 12 (1928), p. 27 [Auszug Roma Rend. Acc. Linc. (6) 9 (1929), p. 149] und *T. Salvemini*, Ann. Scuola Norm. sup. di Pisa 16 (1930), Nr. 4, gegeben S. auch *Livia Nerozzi*, ebenda, Nr. 3.

365) Atti Acc. Torino 50 (1915), p. 452. Vgl. auch *R. Torelli*, Roma Rend. Acc. Linc. (5) 24^1 (1915), p. 1103.

366) *F. Severi*, Anm. 141.

367) Diese Einschränkung ist notwendig, da zwei Kurven, die singuläre symmetrische Korrespondenzen besitzen, birational äquivalente *Jacobi*sche Mannigfaltigkeiten haben können, ohne selbst birational äquivalent zu sein. S. Anm. 374.

Die birationale Identität zweier Kurven läßt sich, im allgemeinen, nicht behaupten, wenn diese dieselben Perioden in bezug auf zwei beliebige primitive Systeme von Zyklen haben. *C. Rosati*[368]) hat bewiesen, daß es hierfür noch einer weiteren Bedingung bedarf, daß nämlich eine der gegebenen Kurven frei von singulären symmetrischen Korrespondenzen sein muß.

Unter Zugrundelegung des Satzes von *R. Torelli*, können die $\frac{p(p+1)}{2}$ Perioden der normalen Integrale 1. Gattung als *transzendente Moduln* der Kurven vom Geschlecht p betrachtet werden. Aber diese Moduln sind für $p > 3$ nicht voneinander unabhängig, sondern durch die $\frac{(p-2)(p-3)}{2}$ Beziehungen verknüpft, auf die in Nr. **14** hingewiesen wurde.[369])

Die Frage nach der Entscheidung über birationale Identität zweier Kurven wurde von *R. Torelli*[370]) studiert, auch mit der Absicht, diese Beziehungen aufzuklären. Mit Hilfe der Gleichungen, durch die *A. Hurwitz* eine algebraische Korrespondenz zwischen zwei Kurven darstellt, bestimmte *Torelli* zwischen diesen Perioden gewisse p^2 Beziehungen, deren Bestehen für die birationale Identität der beiden Kurven hinreichend ist. *Torelli* findet ein analoges System von p^2 Beziehungen, welche notwendige und hinreichende Bedingungen für die birationale Identität der *Jacobi*schen Mannigfaltigkeiten zweier Kurven aufstellen, und leitet daraus den oben wiedergegebenen Satz von *F. Severi* ab. Unter anderem ergibt sich noch: Besteht zwischen den Mannigfaltigkeiten, welche aus den Gruppen von ϱ Punkten zweier Kurven vom Geschlecht p (wo $\varrho < p$) bestehen, eine birationale Korrespondenz, so liefert diese auch zwischen den beiden Kurven eine birationale Korrespondenz; ist die erste singulär, so ist es auch die zweite.[371])

Zu dem Satz von *R. Torelli* über die birationale Identität zweier Kurven und weiteren Ergebnissen gelangt *A. Comessatti*[372]) auf dem Wege, daß er die für $p = 2$ geltenden Ergebnisse von *F. Enriques* und *F. Severi*[373]) über die *Hermiteschen Transformationen* einer *Jacobi-*

368) Rend. Circ. mat. Palermo 44 (1920), p. 328.

369) Nach *F. Severi*[162]), kann eine Kurve mit allgemeinen Moduln, d. h., deren transzendente Moduln eine allgemeine Lösung der genannten Beziehungen bilden, nur Korrespondenzen mit gewöhnlicher Wertigkeit besitzen.

370) Roma Rend. Acc. Linc. (5) 24^1 (1915), p. 1079, 1101. Hinsichtlich dieser Beziehungen s. auch *C. Rosati*[356]).

371) Für $\varrho = p - 1$ s. *A. Comessatti,* Atti Acc. Torino 50 (1915), p. 439.

372) S. Anm. 371.

373) Preisschrift, Acta math. 32 (1909), p. 369; 33 (1910), p. 321 [1907]. Hier wird bewiesen, daß einer jeden *Hermite*schen Transformation einer *Jacobi*schen

schen Fläche auf den Fall eines beliebigen p ausdehnt. Bezeichnen wir wie in Nr. **37** mit Θ das ∞^p-System $(p-1)$-dimensionaler algebraischer Mannigfaltigkeiten, die in V_p enthalten sind[374]), so zeigt *A. Comessatti*: Besteht zwischen den zu zwei Kurven C und C' ein und desselben Geschlechts $p > 1$ gehörigen *Jacobi*schen Mannigfaltigkeiten V_p und V_p' eine birationale Transformation, die das System Θ von V_p in das analoge System Θ' von V_p' verwandelt, so sind die beiden Kurven C und C' birational identisch.

Wenn C mit C' zusammenfällt, so bezeichnet *A. Comessatti* in Analogie mit der Benennung für $p = 2$[375]) jede birationale Transformation von V_p in sich, welche das System Θ in sich transformiert (s. Nr. **25**), als *Hermite*sche Transformation. Sie ist *gewöhnlich* oder *singulär*, je nachdem sie mit irgendeiner der gewöhnlichen auf V_p bestehenden Transformationen übereinstimmt oder nicht.

Jede automorphe singuläre *Hermite*sche Transformation von V_p entspricht einer automorphen birationalen Transformation von C.[376])

Jeder gewöhnlichen automorphen *Hermite*schen Transformation von V_p entspricht auf C die Identität, wenn C nicht hyperelliptisch ist. Ist dagegen C hyperelliptisch, so kann man jeder von diesen Transformationen die Identität oder die auf C bestehende Schar g_2^1, auf C entsprechen lassen.

Jeder Gruppe G_r von r automorphen *Hermite*schen Transformationen von V_p entspricht eine isomorphe Gruppe automorpher birationaler Transformationen der Kurve C, wobei der Hemiedriegrad des Isomorphismus gleich der Anzahl der in G_r enthaltenen, gewöhnlichen Transformationen (die Identität eingeschlossen), wenn aber C hyper-

---

Fläche eine birationale Transformation in sich der Kurve vom Geschlecht 2, der die Fläche beigeordnet ist, entspricht. Umgekehrt entspricht jeder birationalen Transformation dieser Kurve in sich ein System (im allgemeinen ∞^2) *Hermite*scher Transformationen der *Jacobi*schen Fläche.

374) Es ist nicht ausgeschlossen, daß V_p irgendein anderes, Θ analoges System Θ_1 enthalten kann, welches nach derselben Methode mittels einer anderen zwischen den Punkten von V_p und den linearen Scharen g_p von C bestehenden eineindeutigen Korrespondenz konstruiert wird. Dies trifft ein, wenn V_p — außer den *gewöhnlichen* automorphen birationalen Transformationen erster und zweiter Art (Nr. **35**), deren jede das System Θ in sich verwandelt — auch *singuläre* automorphe birationale Transformationen zuläßt, die das System Θ nicht in sich verwandeln. Es ist auch nicht ausgeschlossen, daß auf V_p zwei Systeme Θ und Θ_1 existieren, die von zwei nicht birational identischen Kurven C und C_1 herrühren, derart, daß V_p die *Jacobi*sche Mannigfaltigkeit von C_1 ebenso wie von C ist. Für $p = 2$ s. *G. Humbert*, J. math. pures appl. (5) 6 (1900), p. 317—326. S. Nr. 28.

375) *F. Enriques* und *F. Severi*[373]).

376) Vgl. hierüber auch *A. Rosenblatt*, Krakau Anz. 1918, p 193.

elliptisch ist und G_r Transformationen zweiter Art enthält, gleich der Hälfte dieser Anzahl ist.

C. Rosati[377]) hat auf die *Jacobi*schen Mannigfaltigkeiten die Eigenschaften der *Ordnungen*, von denen in Nr. **25** und **26** die Rede war, angewandt. Jeder Klasse (Nr. **12**) algebraischer Korrespondenzen auf der Kurve C, für welche die charakteristische Determinante Δ (Nr. **21**) von Null verschieden ist, kann man ein ∞^p-System von Transformationen der *Jacobi*schen Mannigfaltigkeit V_p, mit den Indizes 1 und Δ, beiordnen, und umgekehrt. Ist daher auf C eine irreduzible Ordnung $o(T)$ gegeben und o die ihr entsprechende Zahlenordnung, so bestimmt jede Zahl von o, bis auf gewöhnliche Transformationen erster Art, eine dieser $(1, \Delta)$-Transformationen; und diese wird birational, wenn die genannte Zahl eine Einheit der Ordnung o ist.

Hieraus gewinnt *C. Rosati* mittels des Satzes von *G. Lejeune Dirichlet* über die Einheiten der algebraischen Körper [I C 4 a (*D. Hilbert*), Nr. **7**], folgenden Lehrsatz[378]):

Auf der Kurve C sei eine singuläre Korrespondenz T gegeben, deren Minimalgleichung irreduzibel ist, und ν sei die Gesamtzahl der reellen Wurzeln und der Paare konjugiert komplexer Wurzeln dieser Gleichung (Nr. **23**). Dann besitzt die auf C bezügliche *Jacobi*sche Mannigfaltigkeit V_p, in Korrespondenz mit der Ordnung $o(T)$, eine *Abel*sche Gruppe G birationaler Transformationen, die endlich und zyklisch ist, wenn $\nu = 1$ ist, und diskontinuierlich unendlich, wenn $\nu > 1$ ist. Im zweiten Falle sind die Transformationen von G, je ein einziges Mal, durch die Formel

$$G = g^r G_1^{n_1} G_2^{n_2} \ldots G_{\nu-1}^{n_{\nu-1}}$$

gegeben, wo g eine zyklische Transformation von V_p, mit einer gewissen Periode m bezeichnet, die $G_1, G_2, \ldots, G_{\nu-1}$ ein Fundamentalsystem nicht periodischer Transformationen bilden, die Zahl r die ganzen Werte von 1 bis m durchläuft und die Exponenten $n_1, n_2, \ldots, n_{\nu-1}$ alle ganzen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen.

Eine andere Gruppe G', die gleiche Struktur wie G hat, entsteht bei Betrachtung der inversen Korrespondenz T^{-1}; und sind T und T^{-1} nicht rationale Funktionen voneinander, so sind die beiden Gruppen G und G' im allgemeinen voneinander verschieden.[379])

377) S. [242]), p. 31 ff.

378) Ein analoger Lehrsatz für die *Abel*schen Mannigfaltigkeiten bei *S. Lefschetz*, Preisschrift [114]), p. 439; *N. Spampinato*, Roma Rend. Acc. Linc. (6) 5 (1927), p. 105.

379) Ist T nicht rationale Funktion von T^{-1}, so sind die Gruppen G und G' sicherlich verschieden, wenn T wenigstens eine reelle Wertigkeit hat. *C. Rosati* [242]), p. 40—41.

Den reduzierten Einheiten der einer Korrespondenzenordnung $o(T)$ beigeordneten Zahlenordnung, entsprechen zyklische Transformationen der Gruppe G.[380])

39. Die Kurven, auf denen die aus der Gesamtheit der algebraischen Korrespondenzen bestehende Gruppe besonderen Permutabilitätsbedingungen genügt. Die Betrachtung der aus der Gesamtheit aller auf einer gegebenen algebraischen Kurve C vom Geschlecht p existierenden algebraischen Korrespondenzen gebildeten Gruppe G, veranlaßt *C. Rosati*[381]), die Kurven C zu untersuchen, bei denen für die Gruppe G besondere Permutabilitätsbedingungen bestehen (vgl. Nr. **26**). *Rosati* hat dies für drei Fälle durchgeführt.

I. *G sei eine Abelsche Gruppe.* Bei dieser Annahme sind alle auf C bestehenden Korrespondenzen regulär, paarweise vertauschbar, und bilden eine Ordnung $o(T)$. Je nachdem die Minimalgleichung der die Ordnung erzeugenden Korrespondenz T irreduzibel oder reduzibel ist, besitzt die Kurve keine reduziblen Systeme *Abel*scher Integrale 1. Gattung, bzw. in endlicher Anzahl. Besitzt die genannte Gleichung r reelle Wurzeln und s Paare konjugiert komplexer Wurzeln, so ist $\mu_1 = r + s$, $\mu_2 = s$. Ist C frei von reduziblen Systemen, so hat eine der beiden Zahlen r, s den Wert Null, und es ergibt sich: $\mu_1 = r$, $\mu_2 = 0$, oder $\mu_1 = s$, $\mu_2 = s$, wo die Zahlen r und s Divisoren des Geschlechtes p sind.

Die Struktur der Gruppe Γ, die aus den Scharen automorpher birationaler Transformationen der auf die Kurve C bezüglichen *Jacobi*schen Mannigfaltigkeit V_p besteht (Nr. **35**), ist durch folgenden Satz gegeben.

Die Scharen automorpher birationaler Transformationen von V_p bilden eine einzige, diskontinuierliche *Abel*sche Gruppe und sind, je ein einziges Mal, durch die Formel

$$\Gamma = \Gamma_0^r \Gamma_1^{n_1} \Gamma_2^{n_2} \dots \Gamma_{\nu-1}^{n_{\nu-1}}$$

gegeben, in der Γ_0 eine erzeugende Schar einer zyklischen Untergruppe

380) In dem Sonderfalle, daß die irreduzible Ordnung $o(T)$ mit $o(T^{-1})$ übereinstimmt, G und G' also zusammenfallen, sind die genannten zyklischen Transformationen *Hermite*sche Transformationen, und daher eineindeutigen Korrespondenzen von C assoziiert. In diesem Falle besitzt C eine zyklische Involution, die durch eine eineindeutige Korrespondenz, rationale Funktion von T, erzeugt wird. Bezeichnet man mit $2k$ die notwendigerweise gerade Anzahl der reduzierten Einheiten, welche in der der Ordnung $o(T)$ assoziierten Zahlenordnung enthalten sind, so hat die Involution die Ordnung $2k$ bzw. k, je nachdem C hyperelliptisch ist oder nicht.

381) S. Anm. 250.

gerader Ordnung $2k$ bezeichnet, die $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{\nu-1}$ ein Fundamentalsystem nicht periodischer Scharen bilden, die Zahl r die ganzen Werte von 1 bis $2k$ durchläuft und die Exponenten $n_1, n_2, \ldots, n_{\nu-1}$ alle ganzen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen können. Die Zahl ν ist ein Divisor von p und gleich der Basiszahl für die Korrespondenzen von C bzw. gleich der Hälfte dieser Zahl.

Die Kurve C besitzt eine eineindeutige Korrespondenz T von der Periode $2k$ oder k, je nachdem C hyperelliptisch ist oder nicht, und es gibt auf C außer der Korrespondenz T und ihren Potenzen keine andere eineindeutige Korrespondenz.

Ist $\nu = 1$, so kann die Ordnung der durch Γ_0 erzeugten zyklischen Gruppe nur eine der Zahlen 2, 4, 6 sein.

II. *In der Gruppe G sei jede Korrespondenz mit ihrer Inversen vertauschbar.* Damit dies eintrifft ist notwendig und hinreichend, daß die symmetrischen Korrespondenzen von C eine Ordnung $o(T)$ bilden.

Ist ν der Grad der Minimalgleichung der die Ordnung erzeugenden symmetrischen Korrespondenz T, so sind, unter der Voraussetzung, daß die Kurve frei von reduziblen regulären Systemen ist, nur folgende drei Fälle möglich:

$$\mu_1 = \nu,\ \mu_2 = 0; \quad \mu_1 = \nu,\ \mu_2 = \nu; \quad \mu_1 = \nu,\ \mu_2 = 3\nu.$$

In den beiden ersten Fällen ist die ganze Gruppe G eine Ordnung, und alle Korrespondenzen von C sind paarweise vertauschbar.

Im dritten Falle, der nur dann eintreten kann, wenn das Geschlecht p von C gerade und $\geqq 4$ ist, zerfallen die Korrespondenzen von C in unendlich viele Ordnungen, die die Ordnung $o(T)$ mit einem veränderlichen Netz ν^{ter} Stufe halbsymmetrischer Korrespondenzen verbinden.

III. *Die aus den Scharen birationaler Transformationen in sich der auf C bezüglichen Jacobischen Mannigfaltigkeit V_p bestehende Gruppe Γ, sei eine Abelsche Gruppe* (oder, was dasselbe ist, in der Gruppe G die aus den Korrespondenzen mit unimodularen Matrizen bestehende Untergruppe H eine *Abel*sche Gruppe). In diesem Falle gehört H einer mit der Inversen übereinstimmenden, irreduziblen Ordnung $o(T)$ an, und Γ ist holoedrisch isomorph mit der Gruppe der Einheiten einer der $o(T)$ beigeordneten, konjugierten Zahlenordnungen. Daher besitzt Γ eine endliche Basis und ihre von der Minimalgleichung von T abhängige Struktur ist die gleiche, die unter der Annahme I. angegeben wurde.

Es ergibt sich des weiteren, daß jede symmetrische Korrespondenz der Kurve C in $o(T)$ enthalten ist, die symmetrischen Korrespondenzen von C also eine Ordnung bilden. Man folgert, daß die Kurven, für welche die Annahme III. zutrifft, auch unter die Annahme II. fallen.

40. (p, p)-Korrespondenzen auf einer Kurve vom Geschlecht p mit allgemeinen Moduln. *G. Scorza*[382]) hat die Theorie der eineindeutigen Korrespondenzen auf den elliptischen Kurven (Nr. **43**) mit der Untersuchung der (p, p)-Korrespondenzen auf einer Kurve vom Geschlecht p mit allgemeinen Moduln erweitert.[383]) *Scorza* nennt eine solche Korrespondenz mit positiver Wertigkeit γ *spezial,* wenn ein, und daher jeder γ-mal gezählte Punkt der Kurve zusammen mit seinen p entsprechenden Punkten eine speziale Gruppe liefert (so daß $\gamma \leqq p - 2$); und zeigt, wie sich die Bestimmung der (p, p)-Korrespondenzen mit positiver Wertigkeit auf die der spezialen Korrespondenzen reduziert. In der Tat fallen die einzigen (p, p)-Korrespondenzen, die positive Wertigkeit γ haben und für die jeder γ-mal gezählte Punkt der Kurve, zusammen mit seinen p entsprechenden Punkten, eine nicht speziale Gruppe ergibt, mit den ∞^p Korrespondenzen mit Wertigkeit 1 zusammen, die sich ergeben, wenn man eine nicht speziale, vollständige Schar g^1_{p+1} ins Auge faßt und jedem Punkt der Kurve diejenigen p Punkte entsprechen läßt, die mit ihm zusammen eine Gruppe dieser Schar g^1_{p+1} ergeben.

Das Problem der Bestimmung der spezialen (p, p)-Korrespondenzen wurde von *G. Scorza* besonders für $p = 3, 4, 5, 6$ (für $p = 1, 2$ existieren diese nicht) behandelt; für $p = 3$ sind es nur die ∞^3 Korrespondenzen, welche durch die spezialen Scharen g^1_4 gegeben sind.

Dagegen kann man alle (p, p)-Korrespondenzen mit negativer Wertigkeit, und daher mit Wertigkeit -1, d. h. die von Koinzidenzen freien (p, p)-Korrespondenzen, auf einfache Weise bestimmen und konstruieren, wie beschaffen auch p sei. *G. Scorza* hat gefunden, daß es davon ∞^p gibt, und eine beliebige bestimmt ist, wenn die (notwendigerweise nicht speziale) Gruppe der p einem beliebigen Kurvenpunkt entsprechenden Punkte nach Willkür vorgegeben wird. Die Anzahl derjenigen unter ihnen, die symmetrisch sind, ist[384]) $2^{p-1}(2^p + 1)$.[385])

---

382) Atti Acc. Torino 35 (1900), p. 443, 765; 36 (1901), p. 610; 42 (1907), p. 1080. Vgl. auch *J. L. Coolidge,* „Alg pl. curves", p. 342—344.

383) Diese Theorie wurde von *G. Castelnuovo* auf andere Weise erweitert: s. Nr. **35**.

384) *G. Scorza* hat auch die projektive Deutung der (p, p)-Korrespondenzen auf der kanonischen Kurve $(2p - 2)^{\text{ter}}$ Ordnung und p^{ten} Geschlechts des $(p - 1)$-dimensionalen Raumes gegeben [„Normalkurve der φ": II B 2 (*W. Wirtinger*), Nr. **28**; III C 4 (*L. Berzolari*), Anm. 319; III C 7 (*C. Segre*), Nr. **26**], und davon Anwendung vor allem auf die ebene Kurve 4. Ordnung gemacht.

385) *L. Brusotti,* Rend. Ist. Lomb. (2) 43 (1910), p. 48 hat die (p, p)-Korrespondenzen auf einer reellen ebenen Kurve, die die Maximalzahl, d. h. $p + 1$ reelle Züge hat, betrachtet, und bewiesen, daß auf dieser Kurve (p, p)-Korre-

41. Automorphe birationale Transformationen einer irreduziblen Kurve [vgl. II B 2 (*W. Wirtinger*), Nr. **53**]. Eine irreduzible rationale Kurve ($p = 0$) läßt ∞^3 automorphe birationale Transformationen zu, die Projektivitäten, die zwischen ihren Punkten bestehen, und eine kontinuierliche Gruppe mit drei Parametern bilden.

Eine elliptische Kurve ($p = 1$) läßt ∞^1 automorphe, birationale Transformationen zu. Diese bilden eine gemischte Gruppe, innerhalb der die Transformationen zweiter Art (Nr. **35**) eine kontinuierliche *Abel*sche Gruppe mit einem einzigen Parameter bilden, die Transformationen erster Art dagegen, d. h. die auf der Kurve existierenden linearen Scharen g_2^1, eine kontinuierliche Schar, für sich allein aber keine Gruppe bilden. Es gibt nur drei involutorische Transformationen zweiter Art, und jede von diesen ordnet das Quadrupel der Doppelpunkte irgendeiner beliebigen Schar g_2^1 der Kurve dadurch zu, daß es dieses in zwei Paare trennt.

Eine Kurve vom Geschlecht $p > 1$ kann nur eine endliche Anzahl automorpher birationaler Transformationen zulassen.[386])

---

spondenzen sowohl mit nicht spezialer positiver Wertigkeit, als auch mit negativer Wertigkeit existieren, die einem reellen Kurvenpunkt auf einem reellen Zug p reelle Punkte auf den p übrigen reellen Zügen entsprechen lassen. Ist T eine solche (p, p)-Korrespondenz mit negativer Wertigkeit, so ist auch T^{-1} vom selben Typus.

386) Für $p = 0, 1$ s. z. B. *F. Klein*, „Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale", Leipzig 1882 (engl. Übers. von *F. Hardcastle*, Cambridge 1893), p. 66 = Ges. math. Abh. 3, Berlin 1923, p. 559; *H. Poincaré*, Acta math. 7 (1884), p. 12; *C. Segre* [2]), p. 112, 132; *P. Painlevé*, „Leçons" [22]), p. 97—101; *P. Appell* et *É. Goursat* [28]), p. 290—291, 295—297; *A. R. Forsyth* [28]), p. 532, 539—544; *K. Hensel* und *G. Landsberg*, „Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln", Leipzig 1902, p. 528—530, 534—537; *É. Picard* [28]) 2, 1. Ausg., p. 439—442; 2. Ausg., p. 484; 3. Ausg., p. 528—530; *F. Severi*, „Lezioni", p. 182; „Vorlesungen", p. 140—142; „Trattato" 1_1, p. 170—173.

Daß es für $p > 1$ keine (von einem willkürlichen Parameter analytisch abhängende) kontinuierliche Schar birationaler Korrespondenzen geben kann, bewies zuerst *H. A. Schwarz*, J. f. Math. 87 (1875), p. 139 = Ges. math. Abh. 2, Berlin 1890, p. 285, auf funktionentheoretischem Wege, mit Hilfe der *Riemann*schen Flächen. Einen weiteren Beweis lieferte *K. Weierstraß* in einem Brief an *H. A. Schwarz* vom 3. Okt. 1875, Werke 2, Berlin 1895, p. 235; einen dritten, mittels der *Abel*schen Integrale 1. Gattung, *É. Picard*, Paris C. R. 103 (1886), p. 517; Preisschrift [16]), p. 199; [28]) 2, 1. Ausg., p. 436—438; 2. Ausg., p. 480; 3. Ausg., p. 524—527, wiedergegeben bei *P. Appell* und *É. Goursat* [28]), p. 470—472, und bei *K. Carda*, Monatsh. Math. Phys. 11 (1900), p. 39. Einen algebraischen Beweis lieferte *G. Hettner*, Gött. Nachr. 1880, p. 386, mit Hilfe der von *K. Weierstraß* auf Grund seiner Vorlesungen über *Abel*sche Funktionen angegebenen Entwicklungen; dieser Beweis aber läßt eine Lücke, die von *M. Noether* bemerkt und ergänzt wurde, Math. Ann. 20 (1882), p. 59, der dafür, Math. Ann. 21 (1882), Eine Kurve vom Geschlecht $p > 2$ mit allgemeinen Moduln besitzt keine automorphen birationalen Transformationen.[387])

---

p. 138, noch einen einfacheren anderen Beweis lieferte. Ein weiterer geometrischer Beweis auf Grund von Betrachtungen der Geometrie auf der Fläche bei *M. de Franchis* [2]), p. 307. Einen von Erwägungen dieser Art unabhängigen Beweis gab *F. Severi,* „Trattato" 1_1, p. 268—269, durch Ableitung von der Eigenschaft (Nr. **18**), daß der virtuelle Grad einer birationalen Korrespondenz auf einer Kurve vom Geschlecht p gleich $-2(p-1)$ und daher für $p > 1$ negativ ist.

Daß der Satz für irgendeine beliebige, auch diskontinuierliche unendliche Menge birationaler Transformationen gilt, wurde von *F. Klein,* a. a. O., p. 67 = Ges. math. Abh. 3, p. 560 als wahrscheinlich bezeichnet. Ein Beweis mittels der *Fuchs*schen Funktionen wurde in einem Brief an *H. Poincaré* vom 3. April 1882, Ges. math. Abh. 3, p. 610 von ihm angedeutet, von *H. Poincaré,* Acta math. 7 (1884), p. 16 entwickelt. Vgl. auch *H. Weyl,* „Die Idee der Riemannschen Fläche", 2. Aufl., Leipzig-Berlin 1923, p. 159—165; außerdem *A. Comessatti,* Atti Ist. Ven. 88^2 (1929), p. 812—814, wo die Darstellung der birationalen (und antibirationalen; vgl. Nr. **62**) Transformationen der Kurve im Bereich der, durch die auf die gegebene Kurve bezügliche *Riemann*sche Fläche bestimmten *Fuchs*schen Gruppe (vom Geschlecht p), untersucht wird. — Einen weiteren transzendenten Beweis lieferte *É. Picard,* Bull. Soc. math. de France 21 (1893), p. 1; [28]) 2, 1. Ausg., p. 438—439; 2. Ausg., p. 483; 3. Ausg., p. 527—528 dadurch, daß er den Lehrsatz von dem Satz von *H. A. Schwarz* ableitete; dieser ist bei *A. R. Forsyth* [28]), p. 548—549, wiedergegeben.

Einen einfachen Beweis lieferte *A. Hurwitz,* Math. Ann. 41 (1892), p. 406 = Math. Werke 1, p. 394, der diesen von der Eigenschaft ableitete, daß eine nicht identische, birationale Korrespondenz auf einer Kurve vom Geschlecht p nicht mehr als $2p+2$ Koinzidenzpunkte haben kann (wenn $p>1$, sogar nicht mehr als $2p$) [vgl. *C. Segre* [2]), Anm. auf p. 133; *F. Severi,* „Lezioni", p. 186—187; „Vorlesungen", p. 145—147; „Trattato" 1_1, p. 175—176] und davon, daß die Anzahl der „*Weierstraß*schen Punkte", d. h. der p-fachen Punkte der kanonischen Schar, mindestens gleich $2p+2$ ist [III C 4 (*L. Berzolari*), Anm. 379]. Vgl. auch *F. Severi,* „Lezioni", p. 186—188; „Vorlesungen", p. 146—147; „Trattato" 1_1, p. 176. — Einen geometrischen Beweis, der aus einer Erweiterung des zweiten Beweises von *M. Noether* gefolgert ist, gab *C. Segre* [2]), p. 133, ebenfalls durch die Betrachtung der „*Weierstraß*schen Punkte". Vgl. auch *F. Severi,* „Lezioni", p. 182—186; „Vorlesungen", p. 143—145; „Trattato" 1_1, p. 173—175; *J. L. Coolidge,* „Alg. pl. curves", p. 292—293.

Ein arithmetischer Beweis bei *C. Rosati,* Ann. di mat. (3) 31 (1921), p. 20—21 (s. Anm. 246).

Andere Beweise bei *A. Hurwitz,* Gött. Nachr. 1887, Anm. auf p. 94 = Math. Ann. 32 (1888), Anm. auf p. 298 = Math. Werke 1, Anm. auf p. 249; *P. Painlevé,* „Leçons" [22]), p. 92—103; *H. F. Baker* [28]), p. 653—654; *K. Hensel* und *G. Landsberg*, a. a. O., p. 498—501, 542—544; *O. Chisini,* Rend. Ist. Lomb. (2) 47 (1914), p. 346; *F. Enriques* und *O. Chisini,* „Lezioni" 3, p. 309—310; *F. Severi,* „Vorlesungen", p. 145; „Trattato" 1_1, p. 177; *M. de Franchis* [26]), p. 459—464.

Über den Satz von *Schwarz-Klein* in Verbindung mit der konformen Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Flächen s. *F. Schottky,* J. f. Math. 83 (1877), p. 300; *É. Picard* [28]) 2, 1. Ausg., p. 496—497; 2. Ausg., p. 545—546;

Die Aufgabe der Bestimmung der algebraischen Kurven mit automorphen birationalen Transformationen wurde von *A. Hurwitz*[388]) durch die Betrachtung der zugehörigen *Riemann*schen Fläche und der *Abel*schen Integrale 1. Gattung gelöst. Für $p > 1$ sind solche Kurven entweder hyperelliptisch oder singulär (Nr. **12**).[389]) Wenn es derartige Transformationen gibt, so ist ihre Anzahl $\leqq 84\ (p-1)$[390]); jede von ihnen ist notwendigerweise periodisch[391]) und besitzt, wenn sie nicht identisch ist, eine Anzahl verschiedener Koinzidenzpunkte, die $\leqq 2p+2$ ist.[392]) Die Anzahl dieser Koinzidenzpunkte kann sich auf $2p$ erniedrigen, außer im Falle, daß die Kurve hyperelliptisch ist und die Transformation in ihr durch die Schar g_2^1 der Kurve erzeugt wird.

Jede Kurve, die eine automorphe birationale Transformation mit der Periode n zuläßt, kann durch eine Gleichung der Form

$$F(s^n, z) = 0$$

dargestellt werden, in der eine der Veränderlichen zu Exponenten erhoben ist, die sämtlich durch n teilbar sind, und zwar derart, daß zugleich die eindeutige Transformation durch die Formeln

$$s' = e^{\frac{2\pi i}{n}} s, \quad z' = z$$

gegeben ist.

Für die Periode n hat *A. Hurwitz* $n \leqq 10\ (p-1)$ gefunden;

3. Ausg., p. 589—590; Ann. Éc. Norm. (3) 30 (1913), p. 483; *F. Cecioni,* Rend. Circ. mat. Palermo 25 (1907), p. 1.

387) Beweise bei *F. Enriques,* Math Ann. 85 (1921), p. 195; *F. Enriques* und *O. Chisini,* „Lezioni" 3, p. 413—414. Hier wird der Satz mittels eines Ausartungsprinzips, von dem in Anm. 174 die Rede war, bewiesen. Einen anderen Beweis, für $p = 3$, bei *F. Enriques* und *O. Chisini,* „Lezioni" 3, p. 310—311; im allgemeinen, für $p > 2$, a. a. O., p. 570—571.

388) Gött. Nachr. 1887, p. 85 = Math. Ann. 32 (1887), p. 290; Math. Ann. 41 (1892), p. 403 = Math. W. 1, p. 241, 391.

389) Über diesen Satz von *A. Hurwitz,* Math. Ann. 28 (1886), p. 585 = Math. W. 1, p. 187, s. auch *F. Klein* und *R. Fricke*[112]) 2, p. 554—556. Ein geometrischer Beweis bei *F. Severi,* „Vorlesungen", p. 185—186, und auf einfachere Weise, p. 402.

390) Für $p = 3$ ist das Maximum für die *Klein*sche Kurve der Anm. 205 erreicht.

391) Hierfür vgl. auch *K. Küpper,* Prag Ber. böhm. Ges. 1892, p. 257; *H. F. Baker*[28]), p. 650—651; *G. Scorza*[197]), Anm. auf p. 289—290.

Es sei bemerkt, daß sich der Satz von *Schwarz-Klein* und der Satz von der Periodizität der Transformation voneinander ableiten lassen.

392) Für $\alpha = \beta = 1$ geht dieser Satz in den gegen Ende von Nr. **12** angegebenen Satz von *H. Burckhardt* über. — Die Anzahl der Koinzidenzpunkte kann auf einer Kurve von beliebig hohem Geschlecht Null sein: s. z. B. *P. Fatou*[303]), p. 505.

A. Wiman[393]) die niedrigere Grenze $4p+2$ angegeben. Durch Untersuchung der Frage im Zusammenhang mit der Theorie der Uniformisierung (vgl. Nr. **31** und Anm. 396), hat *A. Comessatti*[394]) bewiesen: Ist $p>0$ und hat die Transformation $u>0$ Koinzidenzpunkte, so gilt:

$$n \leqq 4p+2, \qquad \text{wenn } u=1,$$
$$n \leqq 4p, \qquad \text{wenn } u=2,$$
$$n \leqq \frac{2p}{u-2}+1, \qquad \text{wenn } u>2.$$

In den beiden ersten Fällen können die maximalen Werte der rechten Seiten tatsächlich für jeden beliebigen Wert von p erreicht werden; im dritten Falle kann die obere Grenze erreicht werden, wenn die rechte Seite eine ganze Zahl ist.[395])

A. Hurwitz[388]) hat gezeigt, wie sich die Bestimmung der birational verschiedenen Kurven von gegebenem Geschlecht p, die automorphe birationale Transformationen zulassen, durch eine endliche Anzahl von Versuchen durchführen läßt.[396])

---

393) Stockholm Bihang Svenska Vet.-Ak. Handlingar 21^1 (1895), Nr. 1.

394) Ann. di mat. (4) 8 (1929), p. 1.

395) Wenn n den Maximalwert annimmt, so ist die durch die Transformation erzeugte Involution n^{ter} Ordnung immer rational. Fällt u in das Intervall, das durch $p+2<u\leqq 2p+2$ bestimmt ist, so kann die Zahl u nur die geraden Werte annehmen und die Transformation ist involutorisch.

Für $u=0$ hat *A. Comessatti* ausgesprochen, daß $n \leqq \frac{10p}{3}$ sein muß und dies Maximum nur für $p=9$ erreicht wird.

396) Kurven von den Geschlechtern $p=3, 4, 5, 6$ mit automorphen birationalen Transformationen wurden von *A. Wiman* untersucht, Stockholm Bihang Svenska Vet.-Ak. Handlingar 21^1 (1895), Nr. 1, 3. S. auch *C. E. Pengra,* Trans. Wisconsin Univ. 14 (1903), p. 655. S. noch, für $p=4$, *Anna L. van Benschoten,* Diss. Cornell Univ. 1908 = Amer. J. of math. 31 (1909), p. 213 [Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 14 (1907), p. 67]; für $p=5$, *J. V. Mc Kelvey*, Diss. Cornell Univ. 1909 = Amer. J. of math. 34 (1909), p. 115; *L. Godeaux,* Bull. Soc. Sc. Liège 1 (1932), p. 119; für $p=6$, *V. Snyder,* Amer. J. of math. 30 (1908), p. 325 [Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 14 (1908), p. 354]. In diesen Arbeiten wird eine, im allgemeinen ebene, Normalform der Kurven gegebenen Geschlechts betrachtet, und die Gruppe der ebenen birationalen Transformtionen untersucht, für welche die Kurve invariant ist.

Verschiedene Kurven mit automorphen birationalen Transformationen hat *R. Fricke,* Acta math. 17 (1893), p. 345, in der Theorie der Transformationen fünfter und siebenter Ordnung von einigen besonderen automorphen Funktionen betrachtet. S. auch Anm. 397.

S. Lefschetz, Preisschrift[114]), p. 449 hat von diesem Gesichtspunkt aus das Studium der Kurve

$$y^q = \prod_i (x-a_i)^{\alpha_i}$$

Läßt eine gegebene Kurve vom Geschlecht $p > 1$ automorphe birationale Transformationen zu, so bilden diese eine endliche Gruppe.

---

vertieft, wo q eine gegebene, ungerade Primzahl ist, die Zahlen a_i willkürlich und die Zahlen α_i positive ganze Zahlen sind. Ist $r + 2$ die Anzahl der kritischen Punkte der Funktion y von x, so hängt die Kurve von $r - 1$ Moduln ab, und ihr Geschlecht ist durch $p = \frac{r(q-1)}{2}$ ausgedrückt.

Die Kurve umfaßt als Sonderfälle verschiedene Kurven, die von anderen Verfassern untersucht wurden, und liefert ein einfaches Beispiel einer mit singulären Korrespondenzen ausgestatten Kurve beliebigen Geschlechts. *S. Lefschetz* hat in allen Fällen die Gruppe der automorphen birationalen Transformationen der Kurve und die Invarianten der zugehörigen *Jacobi*schen Mannigfaltigkeit bestimmt.

Beachtenswerte Gruppen automorpher birationaler Transformationen gestatten die Kurven, die von *A. Comessatti,* Roma Rend. Acc. Linc. (6) 9 (1929), p. 272, 372, unter dem Namen „*Galois*sche Kurven" untersucht wurden, und mit Hilfe einer $(1, n)$-Korrespondenz zwischen zwei Kurven f, C konstruiert werden. Jede derartige Korrespondenz bestimmt (bis auf birationale Transformationen) die betreffende *Galois*sche Kurve G, die C und f als rationale Transformierte, sowie eine Gruppe automorpher birationaler Transformationen zuläßt, die mit der Monodromiegruppe der Darstellung von C auf f holoedrisch isomorph ist.

Realitätsdiskussion von Kurven mit eindeutigen Transformationen in sich nach der zyklischen und der *Abel*schen [2, 2, ...]-Gruppe findet man in einer akademischen Abhandlung, Uppsala 1927, von *G. Brundin.*

Mit verschiedenen Fragen in bezug auf die Kurven, auf die eine gegebene Kurve eineindeutig bezogen werden kann, hat sich *V. Snyder* beschäftigt, Amer. J. of math. 30 (1907), p. 10, 337; Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 14 (1907), p. 65.

Über die algebraischen Kurven, die durch unendlich viele Kollineationen des eigenen Raumes (die sogenannten „W-Kurven") in sich übergehen, daher rational sind, vgl. III C 9 (*K. Rohn* und *L. Berzolari*), Nr. 58. Den dort angeführten Arbeiten ist hinzuzufügen: *F. Severi,* „Trattato" 1_1, p. 177—180.

Eine irreduzible ebene Kurve 4. Ordnung vom Geschlecht $p = 3$ ist eine kanonische Kurve (d. h. „Normalkurve der φ"); läßt sie automorphe birationale Transformationen zu, so sind diese daher projektive Transformationen [vgl. III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. 27]. Die verschiedenen Typen solcher autoprojektiver Kurven wurden von *S. Kantor,* Acta math. 19 (1894), p. 115 und *A. Wiman*[393]) bestimmt. Dieselbe Bestimmung und die Bestimmung der betreffenden Kollineationsgruppen wurden bei *F. Enriques* und *O. Chisini,* „Lezioni" 3, p. 310—339 ausgeführt.

Die Gruppe der 168 ebenen Kollineationen, die die *Klein*sche Kurve[205]) in sich transformieren, wurde von *F. Klein,* Math. Ann. 14 (1878), p. 428 = Ges. math. Abh. 3, p. 90 untersucht. S. auch *F. Klein* und *R. Fricke*[112]) 1, p. 692—731. — Die Gruppe der 96 ebenen Kollineationen, welche die Kurve $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 0$ in sich transformieren, ist von *W. Dyck,* Diss. München 1879; Math. Ann. 17 (1880), p. 473, 510, untersucht worden.

E. Ciani, Rend. Circ. mat. Palermo 13 (1899), p. 347 bestimmt die verschiedenen Typen ebener Kurven 4. Ordnung, welche durch eine oder mehrere harmonische Homologien in sich transformiert werden; a. a. O. 28 (1909), p. 217

A. Hurwitz hat bewiesen [397]), daß für jede gegebene endliche Gruppe G stets algebraische Kurven existieren, welche eine mit der Gruppe G holoedrisch isomorphe Gruppe eindeutiger Transformationen in sich aufweisen.[398])

42. Der hyperelliptische Fall. Damit zwei hyperelliptische Kurven ein und desselben Geschlechts $p > 1$ in birationale Korrespondenz gebracht werden können, ist notwendig und hinreichend, daß innerhalb der betreffenden linearen Scharen g_2^1, die $2p + 2$ Doppelpunkte gleiche Doppelverhältnisse haben, die beiden Gruppen solcher Doppelpunkte

---

[Auszug Rend. Ist. Lomb. (2) 33 (1900), p. 1170] bestimmt er alle ebenen Kurven 4. Ordnung, welche durch Kollineationen in sich verwandelt werden.

Über diese Typen ebener Kurven 4. Ordnung vgl. III C 5 (*G. Kohn*), Nr. 78.

V. Snyder, Amer. J. of math. 30 (1906), p. 1 und *E. Ciani,* Rend. Circ. mat. Palermo 36 (1913), p. 58 haben die ebenen Kurven 5. Ordnung mit automorphen kollinearen Transformationen und die Gruppen solcher Kollineationen angegeben.

R. M. Winger, Amer. J. of math. 36 (1914), p. 53, hat die projektiv verschiedenen Typen rationaler ebener Kurven vierter und fünfter Ordnung bestimmt, welche gegenüber Kollineationen der Ebene invariant sind; a. a. O. 38 (1916), p. 45, hat er dieselbe Untersuchung für diejenigen 6. Ordnung durchgeführt; a. a. O. 47 (1923), p. 207 für diejenigen 7. Ordnung. Über den Fall der Kurven 6. Ordnung s. auch *I. Vojtěch,* Prag Ber. Böhm. Ges. 1913, Nr. 13; Prag České Ak. Rozpravy 22 (1913), Nr. 42.

397) Hierüber vgl. auch *W. Dyck,* Math. Ann. 20 (1881), p. 30; außerdem *W. Burnside,* „Theory of groups of finite order", 2. ed., Cambridge 1911, p. 397, 496; *P. Fatou* [303]), p. 501—513. Für den Fall der elliptischen und der hyperelliptischen Kurven s. *B. Jonzon,* Diss. Uppsala 1930.

Die *Riemann*schen Flächen mit automorphen, eineindeutigen Transformationen heißen, nach *F. Klein,* Math. Ann. 14 (1878), p. 459 = Ges. math. Abh. 3, Berlin 1923, p. 122, *regulär*; sie wurden von *W. Dyck,* Diss. München 1879; Math. Ann. 17 (1880), p. 473, 510, studiert. Vgl. auch *W. Dyck,* Math. Ann. 20 (1881), p. 30, Anm. Über das Vorhergehende s. II B 7 (*A. Krazer* und *W. Wirtinger*), Nr. 122.

398) *C. Rosati* [242]), p. 23, hat untersucht, unter welchen Umständen eine eineindeutige Korrespondenz auf einer Kurve symmetrisch oder halbsymmetrisch sein kann (Nr. 19). Es ergibt sich, daß die symmetrischen, eineindeutigen Korrespondenzen auf den Kurven vom Geschlecht $p > 1$ die Periode 2 haben; die halbsymmetrischen können dagegen nur auf hyperelliptischen Kurven existieren, haben die Periode 4 und erzeugen rationale Involutionen.

Mittels des Satzes von *Schwarz-Klein* hat *G. Tedesco*, Rend. Circ. mat. Palermo 39 (1914), p. 335, gezeigt: Bezeichnet man mit s den von einem gegebenen Ursprung an gezählten Bogen einer algebraischen Kurve, so sind die algebraischen Kurven, auf welchen die Transformationen $s' = s + c$, mit willkürlichem c, birational sind, entweder diejenigen „Richtungskurven" [vgl. III C 4 (*L. Berzolari*), Anm. 265], deren Bogen ein elliptisches Integral 1. Gattung ist, oder diejenigen, welche in einen (reellen oder imaginären) Kreis oder in eine Gerade durch Bogengleichheit birational transformiert werden können.

also untereinander projektiv sind. Ist diese Bedingung erfüllt, so gibt es *zwei* eineindeutige Korrespondenzen zwischen den beiden Kurven.

Handelt es sich um eine einzige hyperelliptische Kurve vom Geschlecht $p > 1$, so läßt diese immer eine automorphe birationale Transformation zu, wenn man zwei Punkte einander entsprechen läßt, welche ein Paar der auf der Kurve bestehenden Schar g_2^1 bilden. Damit die Kurve noch weitere (singuläre) automorphe birationale Transformationen zuläßt, ist notwendig und hinreichend, daß zwischen den Paaren der Schar g_2^1 eine Projektivität besteht, welche die Gruppe der $2p+2$ Doppelpunkte in sich verwandelt. Mit anderen Worten, hat die Kurve die Parameterdarstellung

$$x_i = A_i(\lambda) + B_i(\lambda)\sqrt{R(\lambda)},$$

wo $R(\lambda)$ ein Polynom vom Grad $2p+1$ oder $2p+2$ ohne mehrfache Faktoren ist, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung dadurch gegeben, daß die Gleichung $R(\lambda) = 0$ automorphe bilineare Transformationen zulassen muß.[399])

A. Hurwitz[400]) hat gezeigt, daß eine hyperelliptische Kurve, welche eine birationale Transformation zuläßt, die von der durch die Schar g_2^1 gegebenen Transformation verschieden ist, durch eine oder die andere der beiden Gleichungen

$$s^2 = R(z^n), \quad s^2 = zR(z^n)$$

dargestellt werden kann, und zwar derart, daß diese Transformation im ersten Falle durch die Formeln

$$z' = \varepsilon z, \quad s' = \eta s,$$

im zweiten Falle durch die Formeln

$$z' = \varepsilon z, \quad s' = \eta \varepsilon^{\frac{1}{2}} s,$$

gegeben ist, wobei η einen der Werte ± 1 bezeichnet und ε eine von $+1$ verschiedene n^{te} Einheitswurzel ist.

Die hyperelliptischen Kurven mit singulären automorphen birationalen Transformationen werden von *S. Kantor*[401]) auf geometrischem Wege untersucht, der dabei die ebene Kurve $(p+2)^{\text{ter}}$ Ordnung mit einem p-fachen Punkt als projektives Modell wählt [III C 4 (*L. Berzolari*), Anm. 338] und die diskontinuierlich unendliche Gruppe der

399) Hierüber vgl. z. B. *C. Segre*[2]), p. 112; *K. Hensel* und *G. Landsberg*[386]), p. 530—534; *F. Severi*, „Lezioni", p. 189—193; „Vorlesungen", p. 147—151; „Trattato" 1_1, p. 180—185. Vgl. auch *A. Wiman*, Anm. 393.

400) Math. Ann. 32 (1888), p. 305 = Math. W. 1, p. 257.

401) Rend. Circ. mat. Palermo 9 (1894), p. 65. Vgl. auch die Arbeiten von *R. Torelli* und von *G. Humbert*, angeführt in Anm. 301; außerdem *A. B. Coble*, „Alg. geom.", p. 125—135.

birationalen Transformationen der Ebene, welche die Kurve in sich transformieren, ins Auge faßt.

Mittels der *Hurwitz*schen Korrespondenztheorie hat *S. Cherubino*[402]) alle hyperelliptischen Kurven mit singulären automorphen birationalen Transformationen und ihre algebraischen Moduln bestimmt.

Der Sonderfall der Kurven vom Geschlecht $p = 2$ mit singulären automorphen birationalen Transformationen wird schon von *O. Bolza*[403]) vollständig untersucht, der die Gruppen solcher Transformationen sowie die projektiven und transzendenten Invarianten der betreffenden Kurven bestimmt.

43. Der elliptische Fall. Setzen wir im Falle der elliptischen Kurven $(p = 1)$[404]) in den Formeln von Nr. **12** $u(x) = u$ und $u(y) = u'$, so

402) Atti Acc. Torino 49 (1913), p. 705. In Atti Acc. Torino 50 (1914), p. 39, hat *S. Cherubino* auch die hyperelliptischen Kurven bestimmt, die automorphe Transformationen zulassen, welche das Produkt einer birationalen Transformation und der (konjugierten) Transformation sind, die in der Vertauschung der komplexen Koordinaten eines Punktes mit den konjugiert komplexen Koordinaten besteht (*antibirationale Transformationen* nach *A. Comessatti,* Nr. **62**). Diese Untersuchungen hat *S. Cherubino* verallgemeinert in Rend. Ist. Lomb. (2) 47 (1914), p. 959; (2) 48 (1915), p. 347, 993, 1026, in dem er algebraische Kurven und Flächen betrachtet, die automorphe, birationale oder antibirationale Transformationen zulassen, welche eine der Koordinaten projektiv transformieren.

403) Amer. J. of math. 10 (1887), p. 47; Auszug Math. Ann. 30 (1887), p. 546. Vgl. auch *F. Enriques* und *F. Severi,* Preisschrift, Acta math. 32 (1907), p. 378ff.

404) Als Ausgangspunkt der Geometrie auf einer elliptischen Kurve kann man die von *C. Mac Laurin* für die ebenen Kurven 3. Ordnung gefundenen Eigenschaften, sowie die Resttheorie von *J. J. Sylvester* auf diesen Kurven [III C 5 (*G. Kohn*), Nr. **35**] betrachten. S. *J. J. Sylvester,* Amer. J. of math. 3 (1880), Anm. auf p. 60 = Papers 3, Cambridge 1909, Anm. auf p. 352; *G. Salmon,* „Higher plane curves", 2. Ausg., Dublin 1873, p. 133—137. Vgl. *G. Salmon* und *W. Fiedler,* „An. Geom. d. höh. eb. Kurven"[28]), p. 174—179; *G. Salmon* und *O. Chemin,* „Traité de géom. anal."[28]), p. 196—200; und auch *A. Cayley,* Messenger of math. (2) 3 (1874), p. 62 = Papers 9, Cambridge 1896, p. 211.

405) Diese singulären Korrespondenzen wurden zuerst von *F. Klein,* Math. Ann. 15 (1879), p. 279 = Ges. math. Abh. 2, Berlin 1922, p. 421 bemerkt.

Über die geometrische Behandlung der gewöhnlichen Korrespondenzen s. vor allem *Em. Weyr,* Sitzungsb. Ak. Wien 87 (1883), p. 837; 88 (1884), p. 436 und auch 101 (1892), p. 1695 und 103 (1894), p. 365 [im Zusammenhang mit dieser letzten Arbeit s. *E. Czuber,* Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 4 (1897), p. 100; J. f. Math. 114 (1894), p. 312]; außerdem *K. Küpper,* Prag Abh. böhm. Ges. (6) 6 (1873); (6) 12 (1882), Nr. 1; Math. Ann. 24 (1883), p. 1; *F. Schur,* Math. Ann. 18 (1881), p. 1; 20 (1882), p. 262; *C. Segre,* Math. Ann. 27 (1886), p. 296; *G. Castelnuovo,* Atti Ist. Ven. (6) 5 (1887), p, 1089; Atti Acc. Torino 24 (1888), p. 4; *R. Sturm,* „Geom. Verw." 4, p. 152—222. Verschiedene besondere Eigenschaften bei *Em. Weyr,* Sitzungsb. Ak. Wien 90 (1884), p. 206; 92 (1885), p. 498; 97 (1888), p. 592; *C. Rosati,* Rend. Ist. Lomb. (2) 35 (1902), p. 407; *G. Marletta,* Catania Atti Acc. Gioenia werden die *gewöhnlichen* birationalen Korrespondenzen durch

$$u' = \pm u + \text{const.} \tag{1}$$

dargestellt, während die *singulären* birationalen Korrespondenzen durch

$$u' = \pm iu + \text{const.} \tag{2}$$

und durch

$$u' = \pm \varepsilon u + \text{const.}, \quad u' = \pm \varepsilon^2 u + \text{const.} \tag{3}$$

gegeben sind, wo $i = \sqrt{-1}$ und ε eine imaginäre kubische Wurzel der Einheit[405]) ist. Es gelten die Gleichungen (2) oder (3), je nachdem bei passender Auswahl das Verhältnis der Perioden des elliptischen Integrals 1. Gattung i oder ε ist. Im ersten Falle heißt die Kurve *harmonisch*, im zweiten *äquianharmonisch*, mit Rücksicht auf den Wert des Moduls der Kurve, d. h. den Wert, den das Doppelverhältnis der

---

(5) 1 (1908), Nr. XIV; *S. Audinarayanan*, J. Indian math. Soc. 17 (1928), p. 197. Unter transzendentem Gesichtspunkt s. z. B. *F. Klein* und *R. Fricke*[112]) 2, p. 237 ff.; *P. Appell* et *É. Goursat*[28]), p. 474—476; *M. de Franchis*[26]), p. 393—406.

Eine einfache und vollständige geometrische Behandlung aller gewöhnlichen und singulären Korrespondenzen gab *C. Segre*, Atti Acc. Torino 24 (1889), p. 734 [und seine Ergebnisse wurden von neuem auf transzendentem Wege von *P. Patrassi*, Giorn. di mat. (2) 3 (1895), p. 195 bewiesen]. S. auch *S. Kantor*, Preisschrift Atti Acc. Napoli (2) 3 (1891), Nr. 7, p. 43—55 [1883] [Auszug J. f. Math. 114 (1895), p. 92]; Atti Acc. Torino 29 (1893—94), p. 9 [1885]; *F. Amodeo*, Ann. di mat. (2) 19 (1890), p. 1, 145; *T. Brodén*, Stockholm Öfversigt Vetensk.-Ak. Förhandlingar 50 (1893), p. 213; *H. G. Zeuthen*, „Lehrbuch", p. 212—214, 223—237, 262—263; *B. Machytka*, Časopis 53 (1924), p. 136, 272; Mém. Soc. R. des sciences de Bohême (Věstnik) 1926 (Prague 1927), Nr. XX; *F. Severi*, „Vorlesungen", p. 151—155; „Trattato" 1_1, p. 170—173, 185—190; *J. L. Coolidge*, „Alg. pl. curves", p. 302—304. Eine ausführliche Darstellung, mit Betrachtung auch der elliptischen Normalkurven n^{ter} Ordnung im $(n-1)$-dimensionalen Raum, insbesondere der ebenen kubischen und der Raumkurven 4. Ordnung, findet sich bei *F. Enriques* und *O. Chisini*, „Lezioni" 3, p. 251—309 (s. auch p. 411—413). Unter anderem findet sich hier die von *F. Enriques*, Rend. Acc. Bologna (2) 24 (1920), p. 91 herrührende Erweiterung der Eigenschaften des syzygetischen Büschels ebener kubischer Kurven [III C 5 (*G. Kohn*), Nr. 33] auf eine beliebige elliptische Normalkurve n^{ter} Ordnung im $(n-1)$-dimensionalen Raum.

In den angeführten Arbeiten betrachtet *S. Kantor* die ∞^2 quadratischen Transformationen der Ebene, in denen eine eineindeutige Korrespondenz zwischen zwei (voneinander verschiedenen oder nicht verschiedenen) ebenen kubischen Kurven enthalten ist. S. auch *C. Segre*, letzte angeführte Arbeit.

Allgemeiner ist, nach *G. Castelnuovo*, Atti Acc. Torino 24 (1888), p. 8—9; *B. Bydžovský*, Prag České Ak. Rozpravy 23 (1914), Nr. 39, jede eineindeutige Korrespondenz auf einer elliptischen Normalkurve in einer unendlichen Schar quadratischer *Cremona*transformationen des Raumes enthalten, dem die Kurve angehört.

Über die *Cremona*transformationen der Ebene, die eine gegebene Kurve in sich transformieren, s. Nr. 58.

vier Doppelpunkte einer beliebigen auf der Kurve bestehenden Schar g_2^1 besitzt [III C 4 (*L. Berzolari*), Anm. 343].

Zwei willkürliche Kurvenpunkte können als homologe Punkte in einer automorphen birationalen Korrespondenz der Kurve aufgefaßt werden; und zwei derartige Korrespondenzen gibt es, wenn die Kurve nicht singulär, vier, wenn sie harmonisch, sechs, wenn sie äquianharmonisch ist.[406])

Die gewöhnlichen Korrespondenzen auf einer beliebigen elliptischen Kurve sind die Scharen g_2^1 und ihre Produkte. Je nachdem ein solches Produkt eine ungerade oder gerade Anzahl von Faktoren hat, nennt man die Korrespondenz *erster Art* (und ist eine g_2^1) oder *zweiter Art*. Im ersten Falle hat die Korrespondenz vier Koinzidenzpunkte, im zweiten Falle keinen, oder ist die Identität. Die Korrespondenzen erster oder zweiter Art erhält man aus der Gleichung (1), wenn man das negative bzw. das positive Vorzeichen setzt; die ersten sind rational, die anderen elliptisch.

Jede Transformation zweiter Art ist das Produkt zweier Transformationen erster Art, von denen eine beliebig angenommen werden kann. Während alle Transformationen erster Art involutorisch sind, gibt es unter den Transformationen zweiter Art nur drei involutorische; außer diesen existieren auf der Kurve keine anderen involutorischen Transformationen. Faßt man zwei beliebige Korrespondenzen erster Art ins Auge, so gibt es immer eine Korrespondenz zweiter Art, die diese beiden ineinander transformiert.

Die Transformationen zweiter Art bilden eine kontinuierliche *Abel*sche Gruppe, während die Transformationen erster Art ein kontinuierliches ∞^1-System bilden, das jedoch keine kontinuierliche Gruppe ist. Beide zusammen ergeben eine gemischte Gruppe.

Diese gemischte Gruppe der gewöhnlichen Transformationen wird, für die harmonischen und für die äquianharmonischen Kurven, durch die singulären Korrespondenzen erweitert.

Die singulären Korrespondenzen auf einer harmonischen Kurve zerfallen in zwei kontinuierliche ∞^1-Scharen, die keine Korrespondenz gemein haben. Sie sind zyklisch mit der Periode 4, haben zwei Koinzidenzpunkte und ein involutorisches Paar. Das Produkt zweier Korrespondenzen ein und derselben Schar ist eine Transformation erster Art, das Produkt zweier Korrespondenzen von verschiedenen Scharen eine Transformation zweiter Art.

Die singulären Korrespondenzen auf einer äquianharmonischen Kurve zerfallen in vier kontinuierliche ∞^1-Scharen, von denen zwei

406) Dies ist als Sonderfall in einem Satz von *G. Scorza* [197]), p. 336 enthalten.

aus zyklischen Korrespondenzen mit der Periode 3 und zwei aus zyklischen Korrespondenzen mit der Periode 6 bestehen. Jede von den ersten hat drei Koinzidenzpunkte, jede von den zweiten nur einen Koinzidenzpunkt und ein involutorisches Paar. Das Produkt zweier Korrespondenzen ein und derselben Schar ist eine singuläre Korrespondenz, die einer anderen Schar angehört. Das Produkt zweier Korrespondenzen ein und derselben Ordnung, aber verschiedener Scharen, ist eine Transformation zweiter Art; das Produkt zweier Korrespondenzen verschiedener Ordnung ist, je nach dem betreffenden Falle, eine Transformation erster Art bzw. eine singuläre Korrespondenz 6. Ordnung.[407])

Die singulären eineindeutigen Korrespondenzen auf einer elliptischen Kurve hängen eng mit der Theorie der komplexen Multiplikation der elliptischen Funktionen [über diese Theorie s. I C 6 (*H. Weber*)] zusammen, da das mit der Kurve verknüpfte elliptische Integral komplexe Multiplikation zuläßt oder nicht, je nachdem die Kurve singulär bzw. nicht singulär ist. Im ersten Falle sei

$$P\omega_1^2 + Q\omega_1\omega_2 + R\omega_2^2 = 0$$

die quadratische Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten, der die primitiven Perioden ω_1, ω_2 des Integrals genügen; dabei sind P, Q, R Zahlen ohne gemeinsamen Teiler, und es gilt

$$D = 4PR - Q^2 > 0.$$

Die von der Auswahl der primitiven Perioden des elliptischen Integrals unabhängige Zahl D heißt nach *G. Scorza*[408]) *Determinante* der

407) Da eine elliptische Kurve immer birational auf eine ebene Kurve 3. Ordnung ohne Doppelpunkte [vgl. III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **29**] bezogen werden kann, so können wir für andere, auf diesen Fall bezügliche, Eigenschaften und Zitate, sowie für Anwendungen auf den Artikel III C 5 (*G. Kohn*), Nr. **37**, **38**, **39** verweisen. Für die eineindeutigen Korrespondenzen zwischen elliptischen Kurven beliebiger Räume s. III C 7 (*C. Segre*), Nr. **28**. Für den Zusammenhang mit der Theorie der elliptischen Funktionen vgl. auch II B 3 (*R. Fricke*), Nr. **74**.

Mittels der Theorie der ebenen C_3 wurde der analytische Ausdruck der Transformationen zweiter Art auch noch von *O. Chisini*, Rend. Ist. Lomb. (2) 59 (1926), p. 529 untersucht, der (vgl. auch Anm. 340) von den Eigenschaften dieser Transformationen die grundlegenden Eigenschaften des elliptischen Integrals 1. Gattung auf algebraisch-geometrischem Wege abgeleitet hat.

Über Erweiterungen der Theorie der eineindeutigen Korrespondenzen zwischen den Punkten einer elliptischen Kurve auf die Korrespondenzen zwischen Gruppen von p Punkten und die (p, p)-Korrespondenzen zwischen den Punkten einer Kurve vom Geschlecht p, s. Nr. **35** und **40**.

408) Roma Rend. Acc. Linc. (5) 27^1 (1918). p. 171. Über diesen Gegenstand s. auch *V. Costa,* Catania Boll. Acc. Gioenia (2) 55 (1925), p. 11.

Kurve, und diese *erster* oder *zweiter Art*, je nachdem Q gerade oder ungerade, oder, was dasselbe ist, je nachdem $D \equiv 0$ bzw. $D \equiv 3$ (Mod. 4) ist. Ist die Kurve harmonisch, so ist $D = 4$, ist sie äquianharmonisch, so ist $D = 3$, und umgekehrt. Die singulären elliptischen Kurven, für welche D einen gegebenen Wert hat, verteilen sich auf eine endliche Anzahl von Klassen birational voneinander verschiedener Kurven.

Auf Grund dieser Begriffe hat *G. Scorza* die mit derselben Kurve birational identischen ∞^1-Involutionen auf einer singulären oder nicht singulären elliptischen Kurve bestimmt, also die Involutionen, deren Gruppen in birationale Korrespondenz mit den Punkten der Kurve gebracht werden können. Bezeichnen wir eine solche Involution mit γ_ν^1, so muß ν, wenn die Kurve nicht singulär ist, eine Quadratzahl sein, und es gibt dann eine Involution γ_ν^1 für jeden derartigen Wert ν. Ist dagegen die Kurve singulär und hat ihre Determinante den Wert D, so sind die Ordnungen der auf ihr bestehenden unendlich vielen Involutionen γ_ν^1 durch die positiven Zahlen gegeben, die, je nachdem die Kurve erster oder zweiter Art ist, durch eine oder die andere der beiden Formen

$$f \equiv \tau^2 + \frac{D}{4}\varrho^2, \quad f' \equiv \tau^2 + \tau\varrho + \frac{D+1}{4}\varrho^2$$

dargestellt werden können. Für jeden Wert von ν ergeben sich auf der Kurve soviel verschiedene Involutionen γ_ν^1, als die Anzahl der verschiedenen Darstellungen von ν mittels der Form f oder der Form f', geteilt durch 2, durch 4, durch 6, je nachdem $D > 4$, $D = 4$, $D = 3$ ist, beträgt.[409])

Auf einer beliebigen elliptischen Kurve C ist jede irrationale Involution γ_m^1 elliptisch und frei von Doppelpunkten. Eine Transformation zweiter Art von C, die eine Gruppe der Involution γ_m^1 in sich verwandelt, verwandelt jede andere Gruppe der Involution γ_m^1 in sich,

---

409) Ist die Kurve nicht singulär, so erhält man ihre unendlich vielen Involutionen γ_ν^1, wenn man für jeden Wert von n die $\gamma_{n^2}^1$ betrachtet, welche aus den Gruppen n-facher Punkte der ∞^1, auf der Kurve existierenden, linearen Scharen g_n^{n-1} gebildet ist. Für diesen Fall wurde die Frage schon von *R. Torelli*, Roma Rend. Acc. Linc. (5) 21^1 (1912), p. 457 gelöst.

Ist die Kurve singulär, so enthält sie, außer den vorhergehenden unendlich vielen $\gamma_{n^2}^1$, die man für $\varrho = 0$ durch die Formeln des Textes erhält, noch andere unendlich viele Involutionen, die *G. Scorza singulär* nennt. Ist $D > 4$, so ist die Ordnung der singulären γ_ν^1 von der Minimalordnung gleich $\frac{D}{4}$ bzw. $\frac{D+1}{4}$, je nachdem die Kurve erster oder zweiter Art ist; die Anzahl dieser γ_ν^1 beträgt im ersten Falle 1, im zweiten Falle 2.

und ist zyklisch von der Ordnung m oder einer Ordnung, die ein Divisor von m ist; derartige Transformationen existieren tatsächlich. Will man also die auf C existierenden Involutionen γ_m^1 bestimmen, so ist es nötig, von den zyklischen Transformationen zweiter Art m^{ter} Ordnung oder einer Ordnung, die ein Divisor von m ist, auszugehen. Die Anzahl dieser Transformationen unter Einschluß der Identität ist m^2.

Die Anzahl der *primitiven* Transformationen zweiter Art m^{ter} Ordnung, also der zyklischen Transformationen, deren Ordnung m und nicht kleiner ist, ist $m^2\left(1-\frac{1}{\alpha^2}\right)\left(1-\frac{1}{\beta^2}\right)\ldots$, wo $\alpha, \beta, \ldots$ die Primfaktoren von m sind.

Bezeichnet man eine Involution γ_m^1 als *primitiv*, wenn sie die Gesamtheit der Zyklen einer primitiven Transformation m^{ter} Ordnung ist, so ergibt sich, daß die Anzahl der primitiven elliptischen Involutionen m^{ter} Ordnung $m\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\ldots$ ist.

Die zyklischen Transformationen zweiter Art, von einer Ordnung, die gleich m oder einem Divisor von m ist, bilden, zusammen mit der Identität, eine endliche *Abel*sche Gruppe der Ordnung m^2. Daher existieren primitive oder nicht primitive, elliptische Involutionen auf C in unendlicher Anzahl, die Zahl derjenigen von gegebener Ordnung m ist aber endlich und gleich der Anzahl der in der vorhergenannten Gruppe enthaltenen Untergruppen m^{ter} Ordnung.[410])

44. Erweiterung des Satzes von H. A. Schwarz (Nr. 41) nach G. Castelnuovo. Den Satz von *H. A. Schwarz* (Nr. **41**), nach dem eine Kurve vom Geschlecht $p > 1$ eine kontinuierliche unendliche Menge automorpher birationaler Transformationen nicht zuläßt, hat *G. Castelnuovo*[411]) mit Hilfe der Ergebnisse von *A. Hurwitz* über die algebraischen Korrespondenzen (Nr. **12**), für die Kurven verallgemeinert, die eine kontinuierliche unendliche Schar algebraischer, nicht birationaler Korrespondenzen besitzen.

Das Geschlecht einer Kurve, welche eine kontinuierliche unendliche Schar algebraischer Korrespondenzen besitzt, deren einer Index α sei, ist nicht größer als $\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}$. Ist dies Maximum erreicht, so kann die Kurve in eine von mehrfachen Punkten freie, ebene Kurve $(\alpha+2)^{\text{ter}}$

410) Über diese und andere Eigenschaften s. *G. Castelnuovo,* Atti Acc. Torino 24 (1888), p. 4; *J. Valyi,* Math. naturw. Ber. Ungarn 9 (1891), p. 143; 10 (1892), p. 171; *Em. Weyr,* Sitzungsb. Ak. Wien 101 (1892), p. 1695; *F. Severi,* „Trattato" 1_1, p. 210 und 273—276.

411) Scritti matem. offerti ad *Enrico d'Ovidio,* Torino 1918, p. 164.

Ordnung transformiert werden.[412]) Auf einer solchen Kurve sind die α, einem Punkte x in einer bestimmten Korrespondenz C entsprechenden Punkte, die weiteren Schnitte der Kurve mit der Verbindungsgeraden von x mit einem Punkte m der Kurve, der von der Korrespondenz C abhängt. Weist aber die Kurve, außer den vorhergehenden ∞^1 (α, α)-Korrespondenzen, noch automorphe birationale Transformationen auf, so läßt sie die Korrespondenzen zu, die man durch Multiplikation jener Korrespondenzen mit den genannten birationalen Transformationen erhält.

45. Arithmetische Irrationalitäten, von denen die Transformationen algebraischer Kurven abhängen. Die Arithmetik auf den algebraischen Kurven. Wird eine algebraische Mannigfaltigkeit M in eine andere rational oder birational transformiert, so erfordert die angewandte Transformation im allgemeinen, daß man den Koeffizienten der Gleichungen, durch die M bestimmt ist und die rationale oder irrationale Zahlen sein können, weitere arithmetische Irrationalitäten, außerhalb des durch die Koeffizienten selbst bestimmten Rationalitätsbereichs, adjungiert. Hieraus ergeben sich verschiedene Aufgaben in bezug auf die Klassifikation der Mannigfaltigkeiten, die dabei in Verbindung mit der Gruppe der rationalen oder birationalen Transformationen mit rationalen Koeffizienten betrachtet werden.

Wir nehmen an, daß M eine Kurve vom Geschlecht p ist, die immer als eben betrachtet werden kann; $f(x, y) = 0$ sei ihre Gleichung.

Nach *M. Noether*[413]) kann die Kurve, falls $p = 0$ ist, durch eine birationale Transformation mit rationalen Koeffizienten auf eine Gerade oder einen Kegelschnitt reduziert werden, je nachdem sie ungerader oder gerader Ordnung ist. Mit anderen Worten, ist eine Gleichung $f(x, y) = 0$ vom Geschlecht $p = 0$, so kann man ihre Parameterdarstellung entweder ohne Adjunktion irgendwelcher numerischer Irrationalitäten erhalten, falls der Grad von f ungerade ist, oder dadurch, daß man höchstens eine quadratische Irrationalität dem durch die Koeffizienten von f bestimmten Rationalitätsbereich adjungiert, falls f geraden Grades ist.

412) Der Satz ist ohne Einschränkungen gültig, wenn nur die ∞^2 Gruppen von α Punkten, die den ∞^1 Punkten der Kurve in ∞^1 Korrespondenzen des Systems entsprechen, nicht mit Gruppen ein und derselben Involution zusammengesetzt sind.

413) Math. Ann. 3 (1870), p. 170. Vgl. auch *É. Picard*[28]) 2, 1. Ausg., p. 499—501; 2. Ausg., p. 548—550; 3. Ausg., p. 592—594; *F. Severi,* Mem. Acc. d'Italia 3 (1932), Nr. 5, p. 35.

Der Fall $p \geqq 1$ wurde von *F. Enriques*[414]) untersucht und liefert wesentlich verschiedene Ergebnisse, je nachdem $p = 1$ bzw. $p > 1$ ist. Während für $p > 1$ die Kurve immer rational in eine Kurve von bestimmter Ordnung transformiert werden kann, existieren für $p = 1$ unendlich viele Familien von Kurven dritter, vierter, . . . Ordnung, deren Ordnung nicht durch Transformationen mit rationalen Koeffizienten erniedrigt werden kann. Genauer, eine hyperelliptische Kurve vom Geschlecht $p > 1$ kann rational in eine Kurve von der Ordnung $2p + 2$ transformiert werden, die Reduktion auf Kurven niedrigerer Ordnung wird rational, im allgemeinen, nicht bewirkt, wohl aber durch Adjunktion quadratischer Irrationalitäten. Eine nicht hyperelliptische Kurve vom Geschlecht $p > 2$ kann in eine Kurve der Ordnung $2p - 2$ transformiert werden (Projektion der kanonischen Kurve), im allgemeinen aber nicht in Kurven niedrigerer Ordnung.[415])

Sind die Koeffizienten der Gleichung $f(x, y) = 0$ der Kurve (in einem gewissen Rationalitätsbereich k) rationale Zahlen, so heißt ein Punkt, dessen Koordinaten rationale Zahlen in k sind, *rationaler Punkt;* jedes System von n Punkten, für welches die symmetrischen Funktionen der Koordinaten solcher Punkte rational sind, *rationales System.* Analoge Definitionen gelten für die *algebraischen Punkte* und die *algebraischen Punktsysteme.*

Das Studium der Eigenschaften der rationalen oder algebraischen Punkte und Punktsysteme auf der Kurve M, insbesondere das Studium der Eigenschaften, die gegenüber birationalen Transformationen mit rationalen Koeffizienten invariant sind, bildet die *Arithmetik auf der Kurve M.*

Unter den Aufgaben, die gegenüber birationalen Transformationen mit rationalen Koeffizienten invariant sind, sind insbesondere die rationalen Punkte auf der Kurve M behandelt. Reduziert sich der Rationalitätsbereich auf die Gesamtheit der rationalen Zahlen, so ist

---

414) Math. Ann. 51 (1897), p. 148; Roma Rend. Acc. Linc. (5) 21^1 (1912), p. 15; (5) 23^1 (1914), p. 212.

415) Über diesen, und auch einen allgemeineren Satz, s. *J. v. Sz. Nagy,* Math. Ann. 73 (1913), p. 230.

Für das vorhergehende vgl. auch *F. Enriques* und *O. Chisini,* „Lezioni" 3, p. 340—355; dort (p. 355) wird auch gezeigt: Haben zwei Kurven f, f' vom Geschlecht $p > 2$ gleiche Moduln, so enthält die birationale Transformation, die beide ineinander überführt, im allgemeinen die Koeffizienten von f und f' rational.

Über die Irrationalitäten, von denen die Parameterdarstellung der Gleichung, die eine rationale Fläche darstellt, abhängt, s. Nr. **110**; auch für allgemeinere Fragen in bezug auf Auflösung der algebraischen Gleichungen mit mehreren Unbekannten, s. *F. Enriques,* Anm. 307.

diese Aufgabe keine andere, als die der Auflösung der diophantischen Gleichungen mit zwei Veränderlichen mittels rationaler Zahlen.

D. Hilbert und *A. Hurwitz*[416]) haben die arithmetische Deutung des Satzes von *M. Noether* über die ebenen Kurven vom Geschlecht $p = 0$ dadurch gegeben, daß sie die Aufgabe lösten, alle rationalen Punkte einer solchen durch eine Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten dargestellten Kurve zu bestimmen.

Dasselbe Problem ist allgemein, vor allem für $p = 0, 1$, von *H. Poincaré*[417]) untersucht worden, der für die Klassifikation der, durch eine Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten dargestellten Kurven, die Gruppe der birationalen Transformationen mit rationalen Koeffizienten zugrunde legte, welche die Kurve in sich transformieren. Man betrachtet daher zwei Kurven als äquivalent, die auseinander mittels einer solchen Transformation abgeleitet werden können; außer dem Geschlechte treten noch andere invariante Charaktere auf.

Besitzt die Kurve im Falle $p = 1$ einen rationalen Punkt, so ist sie äquivalent mit einer kubischen Kurve.

Indessen ist die Frage nach den Bedingungen, unter denen eine allgemeine Kurve mit ganzzahligen Koeffizienten, deren Geschlecht nicht gleich Null ist, rationale Punkte besitzt, noch nicht gelöst, auch nicht für $p = 1$.[418])

---

416) Acta math. 14 (1889), p. 217.

417) J. math. pures appl. (5) 7 (1901), p. 161. Im Falle $p = 0$ hat *H. Poincaré* die Ergebnisse von *D. Hilbert* und *A. Hurwitz* wiedergefunden.[416])

Ed. Maillet, J. Éc. Polyt. (2), cah. 20 (1920), p. 115 [Auszug Paris C. R. 168 (1919), p. 217, 852] hat sich mit der Bestimmung der Punkte mit ganzzahligen Koordinaten auf den rationalen Kurven eines Überraums beschäftigt, die durch Parameterdarstellungen mit ganzzahligen Koeffizienten definiert sind.

418) Die Aufgabe der Untersuchung der rationalen Punkte einer elliptischen ebenen kubischen Kurve wurde zuerst von *C. G. J. Jacobi,* J. f. Math. 13 (1834), p. 353 = Werke 2, Berlin 1882, p. 51 unter Anwendung der elliptischen Funktionen behandelt.

Über die Untersuchung von rationalen Punkten auf besonderen Kurven und über die vorhergehende Literatur s. *A. Hurwitz,* Math. Ann. 65 (1907), p. 428; *L. Schlesinger,* Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 17^1 (1908), p. 57; *P. von Schaewen,* ebenda 18 (1909), p. 7; *J. v. Sz. Nagy,* ebenda, p. 401; *Memor*, Interm. des math. (1) 24 (1917), p. 73; *T. Nagell,* Tôhoku math. J. 24 (1924), p. 48 [Auszug Japanese J. of math. 1 (1924), Abstracts, p. (22)]; *R. Lauffer,* Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 40 (1931), Angelegenheiten p. 39. Vgl. auch I C 1 (*P. Bachmann*), Nr. 7; außerdem *L. E. Dickson,* „History of the theory of numbers" 2, Washington 1920, p. 545; *T. Nagell,* „L'analyse indéterminée de degré supérieur", Mémorial des sciences math., Nr. XXXIX, Paris 1929, wo auch verschiedene Ergebnisse über die Punkte mit ganzzahligen Koordinaten auf Kurven, die durch Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten dargestellt sind, wiedergegeben sind.

Daß eine ebene kubische Kurve vom Geschlecht $p = 1$, mit einer Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten, unendlich viele rationale Punkte enthalten kann, haben *A. Hurwitz*[419]), *T. Nagell*[420]) und *G. Sansone*[421]) durch Beispiele bewiesen, und die Untersuchung vieler Beispiele kubischer Kurven mit einer endlichen Anzahl rationaler Punkte durchgeführt.

Das Studium der elliptischen ebenen kubischen Kurven mit ganzzahligen Koeffizienten wurde weiterhin von *B. Levi*[422]) vertieft, der insbesondere die Äquivalenzbedingungen in bezug auf birationale Transformationen mit rationalen Koeffizienten mittels der Bestimmung der voneinander unabhängigen numerischen Invarianten untersucht, deren Gleichheit diese Äquivalenz kennzeichnet. *B. Levi* hat des weiteren die Folgen rationaler Punkte, die aus einer Gruppe bekannter rationaler Punkte durch rationale Operationen erhalten werden, außerdem die endlichen Gruppen rational abhängiger Punkte studiert.[423])

Unter den von *H. Poincaré* für $p = 1$ angegebenen Invarianten, hat besondere Wichtigkeit der *Rang* der Kurve, welcher die Minimalzahl rationaler Punkte auf der Kurve ist, aus denen sich alle anderen durch rationale Operationen ableiten lassen.

Mittels der Methode einer auf der Zweiteilung der elliptischen

---

Allgemeine Untersuchungen bei *P. Fatou,* Interm. des math. (1) 15 (1908), p. 269; *J. v. Sz. Nagy,* Budapest Math. és Phys. Lapok 18 (1909), p. 331; 21 (1912), p. 58; Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 18 (1909), p. 4; 21 (1912), p. 183; Budapest Math. és termész. értesitö 30 (1912), p. 441; 32 (1914), p. 69; Ber. math. naturw. Ungarn 26 (1913), p. 168; Math. Ann. 73 (1913), p. 230, 600.

Über eine von *H. Poincaré* aufgeworfene Frage s. *F. Severi,* Ann. Éc. Norm. (3) 25 (1908), p. 468.

419) Vierteljahrsschr. Naturf. Ges. Zürich 62 (1917), p. 207.

420) Acta math. 52 (1928), p. 93.

421) Rend. Ist. Lomb. (2) 62 (1929), p. 237, 354. Bei *A. Hurwitz* und *T. Nagell* ist die Existenz unendlich vieler rationaler Punkte gewissen Bedingungen unterworfen; bei *G. Sansone* eine Familie kubischer Kurven betrachtet, die derart von einem Parameter rational abhängt, daß für jeden rationalen Wert des Parameters die kubische Kurve unendlich viele rationale Punkte enthält.

422) Atti Acc. Torino 41 (1906), p. 739; 43 (1908), p. 99, 413, 672; Atti del IV Congresso intern. dei matem., Roma 1908, 2 (Roma 1909), p. 173. Vgl. auch *M. I. Logsdon,* Trans. Amer. math. Soc. 27 (1925), p. 474; Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 29 (1923), p. 119.

423) In Verbindung mit dem Ende Anm. 405 Gesagten ergibt sich: Entsprechen sich zwei ebene kubische Kurven mit rationalen Koeffizienten vermöge einer, durch Formeln mit rationalen Koeffizienten definierten birationalen Korrespondenz, so können die beiden kubischen Kurven durch eine quadratische ebene Transformation mit rationalen Koeffizienten ineinander transformiert werden.

Funktionen begründeten „descente infinie"[424]) hat *L. J. Mordell*[425]) bewiesen, daß der Rang der Kurven vom Geschlecht $p = 1$ notwendig endlich ist, falls sich der Rationalitätsbereich auf die Gesamtheit der rationalen Zahlen reduziert.

Um die Ergebnisse der Fälle $p = 1$ auf die Kurven vom beliebigen Geschlecht p zu übertragen, ist es nach *H. Poincaré* notwendig, nicht mehr die rationalen Punkte auf der Kurve, sondern die rationalen Systeme von p Punkten auf dieser zu betrachten. Eine Invariante der Kurve in bezug auf die birationalen Transformationen mit rationalen Koeffizienten ist dann die Minimalzahl der rationalen Systeme von p Punkten, aus denen alle anderen durch rationale Operationen abgeleitet werden können. Diese Zahl heißt wiederum *Rang* der Kurve.

Mittels einer „descente infinie" und der Zweiteilung der *Abel*schen Funktionen hat *A. Weil*[426]) bewiesen, daß der Rang einer Kurve endlich ist, wie auch immer das Geschlecht p und wie auch immer der (algebraische und endliche) Zahlenkörper sei, den man als Rationalitätsbereich wählt.

Es ergibt sich außerdem, daß zu jeder Kurve eine *Abel*sche Gruppe mit endlicher Basis gehört, die nur von dem Rationalitätsbereich abhängt, aber invariant ist gegenüber den birationalen Transformationen, deren Koeffizienten diesem Rationalitätsbereich angehören. Hiervon leitet sich die Definition unendlich vieler numerischer Invarianten der Kurven mit algebraischen Koeffizienten[427]) ab.

424) Die Methode besteht in der Angabe eines Verfahrens, durch welches aus jeder Lösung einer gegebenen Gleichung der unbestimmten Analysis eine andere abgeleitet werden kann, und dem Beweis, daß die Anwendung dieses Verfahrens nicht unendlich oft wiederholt werden kann. Die Methode wurde systematisch von *P. de Fermat,* Oeuvres 1, Paris 1891, p. 340; 3, Paris 1896, p. 271—272, der ihr diesen Namen gab, und von *J. L. Lagrange,* Nouv. Mém. Ac. Berlin 1777 (éd. 1779), p. 140 = Oeuvres 4, Paris 1869, p. 377 angewandt. *P. de Fermat* hat z. B. bewiesen, daß es unmöglich ist, die Gleichung $x^4 - z^4 = y^2$ durch ganze Zahlen zu lösen, indem er zeigte, daß man aus jeder ihrer Lösungen dieser Beschaffenheit eine andere mit kleineren ganzen Zahlen ableiten kann.

Über die Geschichte des Prinzips der „descente infinie" und seiner Reduktion auf das Prinzip der vollkommenen Induktion, s. *G. Vacca,* Atti Acc. Torino 63 (1928), p. 241.

425) Proc. Cambridge Phil. Soc. 21 (1922), p. 179.

426) Thèse Paris 1929 = Acta math. 52 (1929), p. 281; Auszug Paris C. R. 185 (1927), p. 1426. Der zu dem Satz von *L. J. Mordell* führende Sonderfall wurde neuerdings, unter Anwendung von Elementarformeln der Theorie der elliptischen Funktionen, von *A. Weil,* Bull. Sc. math. (2) 54 (1930), p. 182 bewiesen.

427) Um zu beweisen, daß die Wiederholung des Verfahrens nicht unendlich oft ausgeführt werden kann, hat *A. Weil* einige allgemeine Sätze der Arithmetik über die algebraischen Mannigfaltigkeiten aufgestellt, und insbesondere

IV. Birationale (oder Cremona-)Transformationen zwischen zwei linearen Räumen von zwei oder mehreren Dimensionen.[428])

46. Einleitung. Versucht man den Begriff der Projektivität [III AB 5 (*A. Schoenflies*), Nr. 8] zwischen zwei Geraden, oder zwischen zwei Grundgebilden erster Stufe, zu verallgemeinern, so wird man zu der *rationalen Transformation*

$$\varrho x_i' = f_i(x_1, x_2) \qquad (i = 1, 2) \tag{1}$$

geführt, wo ϱ ein Proportionalitätsfaktor ist und f_1, f_2 zwei binäre Formen ein und derselben Ordnung n sind. Eine derartige Transformation ist aber nicht in eindeutiger Weise umkehrbar, mit Ausnahme des projektiven Falles, wo $n = 1$ ist. Darum geben, wenn $n > 1$ ist, die Gleichungen (1) Veranlassung zu einer $(n, 1)$-Korrespondenz zwischen den Punkten (x_1, x_2) und (x_1', x_2') der beiden Geraden, deren Inverse n Bestimmungen hat.

---

eine arithmetische Untersuchung der mit einer Kurve verbundenen *Jacobi*schen Mannigfaltigkeit (vgl. Nr. **35**—**38**) durchgeführt.

In a. a. O., p. 315, hat *A. Weil* ohne Beweis auch folgenden Satz angegeben, der ihm von *L. J. Mordell* mitgeteilt worden war.

Auf jeder Kurve vom Geschlecht $p > 0$ deren, als Rationalitätsbereich genommener, Zahlenkörper k völlig beliebig sei, kann nur eine endliche Anzahl von Punkten existieren, deren Koordinaten ganze Zahlen von k sind.

Es ist dabei nötig zu bemerken, daß die Punkte mit ganzzahligen Koordinaten gegenüber den birationalen Transformationen nicht invariant sind.

428) Einen Gesamtüberblick über die birationalen Transformationen zwischen zwei linearen Räumen von r Dimensionen, insbesondere für $r = 2, 3$, über ihre Gruppen, und ihre Anwendungen auf die Geometrie, die Algebra und die Modulfunktionen vom Geschlecht 3 und 4, hat *A. Coble,* Bull. Amer. math. Soc. (2) 28 (1922), p. 329, gegeben. — Über Aufgaben, die sich mit solchen Transformationen und ihren Gruppen verknüpfen, insbesondere in Verbindung mit der kubischen Überfläche des vierdimensionalen Raumes, s. *V. Snyder,* a. a. O. (2) 35 (1929), p. 607.

Allgemeine Betrachtungen über die birationalen Transformationen, ihre Gruppen und den Zusammenhang dieser Gruppen mit der projektiven Gruppe wurden von *T. Ôta* (= *T. Takasu*), Tôhoku Science Rep. Univ. 10 (1921), p. 155, angestellt.

Über die Gruppen endlicher Ordnung solcher Transformationen, in Verbindung mit der Theorie der automorphen Funktionen beliebig vieler Variabeln, vgl. *P. J. Myrberg,* Acta math. 46 (1925), p. 215; Auszug Wiss. Vorträge gehalten auf dem fünften Kongreß der Skandinavischen Math. in Helsingfors 1922 (Helsingfors 1923), p. 297. Vgl. auch Ann. Acad. sc. Fennicae (A) 23 (1924), Nr. 9. Über den Fall der Gruppen ebener Transformationen von *de Jonquières* s. Anm. 553.

Die Gesamtheit der *Cremona*transformationen eines r-dimensionalen linearen Raumes bildet eine Gruppe, welche von unendlichvielen Parametern abhängt (aber keine unendliche kontinuierliche Gruppe im *Lie*schen Sinne ist), und Transformationen beliebig hoher Ordnung enthält. Allgemeine Betrachtungen über diese Gruppe und ihre Untergruppen bei *S. Kantor,* Sitzungsb. Ak. Wien 112 (1903), p. 667.

Dies gilt nicht mehr, wenn es sich um Transformationen zwischen zwei Ebenen oder zwischen zwei Räumen von drei oder mehr Dimensionen handelt. Sind z. B. zwei Ebenen π, π' gegeben, so beziehen wir zwei Geradenbüschel A und B der einen Ebene projektiv auf zwei Geradenbüschel A' und B' der anderen. Bezeichnen wir in π und π' zwei Punkte als entsprechend, die von A und B bzw. von A' und B' durch zwei Paare entsprechender Geraden dieser Büschel projiziert werden, so entsteht zwischen π und π' eine eineindeutige Korrespondenz, die in beiden Sinnen rational, d. h. birational, jedoch im allgemeinen nicht projektiv ist, da den Geraden jeder der beiden Ebenen in der anderen Ebene Kegelschnitte entsprechen.

Betrachten wir, an Stelle zweier Ebenen, zwei Räume, so ist es leicht, zwischen diesen eine nicht projektive, birationale Transformation zu definieren, wenn man die vorhergehende Konstruktion erweitert, z. B. auf den beiden folgenden verschiedenen Wegen. Es genügt, in jedem Raume entweder drei Ebenenbüschel oder ein Ebenenbüschel und ein Geradenbündel festzulegen, und die Gebilde des einen Raumes projektiv auf die des anderen zu beziehen. Tut man dies auf allgemeinste Weise, so erhält man zwischen den beiden Räumen eine birationale Korrespondenz, in welcher den Ebenen jeden Raumes Flächen dritter bzw. zweiter Ordnung im anderen Raume entsprechen, je nachdem die erste oder die zweite Konstruktion ausgeführt worden ist.

Und ähnlich verfährt man in linearen Räumen von mehr als drei Dimensionen.

Transformationen dieser Art heißen *birational*; bei ihrer algebraischen Darstellung erscheinen die Koordinaten der Punkte einer jeden Ebene (oder eines jeden Raumes von drei oder mehr Dimensionen) als rationale Funktionen der Koordinaten der homologen Punkte der anderen Ebene (oder Raumes); bei Verwendung homogener projektiver Koordinaten als homogene ganze rationale Funktionen, also Formen, ein und derselben Ordnung der Koordinaten der homologen Punkte (s. Nr. **1**).

Diese Transformationen heißen auch *Cremonatransformationen*, weil sie zuerst *L. Cremona*[429]) in voller Allgemeinheit[430]) untersuchte.

429) Für die ebenen Transformationen, Mem. Acc. Bologna (2) 2 (1863), p. 621; (2) 5 (1864), p. 3 = Giorn. di mat. (1) 1 (1863), p. 305; (1) 3 (1865), p. 269, 363 [Auszug Rend. Acc. Bologna 1862—63, p. 106; 1864—65, p. 18; vgl. auch ebenda 1872—73, p. 148] = Opere 2, Milano 1915, p. 54, 193.

Algebraische Beweise einiger Lehrsätze über die ebenen *Cremona*schen Transformationen gab *J. Rosanes,* J. f. Math. 73 (1870), p. 97.

Eine Darstellung der hauptsächlichsten Ergebnisse von *L. Cremona* und anderen über die Theorie der birationalen Transformationen zwischen zwei Ebenen

47. Birationale Transformationen zwischen zwei Ebenen. Beginnen wir mit der Betrachtung einer birationalen Transformation

---

bei *E. Dewulf*, Bull. Sciences math. (1) 5 (1873), p. 206 und *A. Clebsch* und *F. Lindemann*, „Vorlesungen“ 1_1, p. 474—496; franz. Übers. 2, p. 188—210. Andere Darstellungen bei *G. Salmon* und *W. Fiedler*, „An. Geom. d. höh. eb. Kurven“ [28]), p. 392—407; *G. Salmon* und *O. Chemin*, „Traité de géom. anal.“ [28]), p. 439—453; *K. Doehlemann*, „Geom. Transf.“ 2, p. 1—179; *F. Severi*, „Lezioni“, p. 36—57; „Vorlesungen“, p. 30—46; „Trattato“ 1_1, p. 297—308; *R. Sturm*, „Geom. Verw.“ 4, p. 1—130; *H. Malet*, „Étude“, p. 155—212; *B. Mlodziejowsky*, Moskau math. Sammlung 31 (1922), p. 7; *F. Enriques* und *O. Chisini*, „Lezioni“ 3, p. 156—177; *Hilda P. Hudson*, „Cremona transf.“, p. 1—153; *L. Godeaux*, „Transf. birat.“; *J. L. Coolidge*, „Alg. pl. curves“, p. 201—204, 442—448.

Eine Übersicht vor allem über die Arbeiten von *L. Cremona* auch bei *G. Darboux*, Bull. Sciences math. (1) 3 (1872), p. 221, 251, 281.

Über diesen Gegenstand s. auch *A. B. Coble*, „Report“, p. 79—121.

Über die *Cremona*transformationen zwischen drei- oder mehrdimensionalen Räumen s. Nr. **73—91**.

430) Einige Zeitlang glaubte man, daß die quadratischen Transformationen die allgemeinsten eineindeutigen algebraischen Transformationen zwischen zwei Ebenen seien. So *L. I. Magnus*, J. f. Math. 8 (1831), p. 51; *J. Plücker*, „System der analytischen Geometrie“, Berlin 1835, p. 50; *G. V. Schiaparelli*, Mem. Acc. Torino (2) 21 (1864), p. 227 [1861], und *L. Cremona* selbst, Rend. Acc. Bologna 1861—62, p. 88 [27. März 1862] = Opere 2, Milano 1915, p. 8. Aber kurz nach der Veröffentlichung seiner angeführten Arbeit, verbesserte *L. I. Magnus*, „Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie“, Berlin 1833, p. VII, seinen Irrtum, indem er bemerkte, daß eine Folge quadratischer Transformationen zu höheren Transformationen führen könne; und *L. Cremona* machte, im Anfang seiner ersten Abhandlung [429]), Opere 2, p. 54, dieselbe Bemerkung. Außerdem hatte *E. de Jonquières* im Jahre 1859 einen Hinweis auf die, jetzt unter seinem Namen bekannte besondere Transformation (Nr. **51**) veröffentlicht, und zwar in dem Brief vom 10. Oktober 1859, Paris C. R. 49 (1859), p. 542, mit welchem er die Sendung einer seiner Arbeiten [die das Datum vom 25. November 1859 trägt; in Paris C. R. 49 (1859), p. 632, unter dem Datum vom 31. Oktober 1859, ersuchte er, die Arbeit selbst zurückzuhalten; und legte sie dann am 23. Januar 1860, Paris C. R. 50 (1860), p. 187 in endgültiger Form vor] über die Erzeugung von Raumkurven durch solche Transformationen (vgl. Nr. **103**) an die Académie des sciences de Paris begleitete. Diese Arbeit wird in Nouv. Ann. de math. (2) 3 (März 1864), p. 97, zusammengefaßt; in Giorn. di mat. (1) 23 (1885), p. 48 [1859, 1884] vollkommen neubearbeitet veröffentlicht.

Dieselbe irrtümliche Behauptung findet sich noch später bei anderen Verfassern, z. B. bei *G. de Longchamps*, Ann. Éc. Norm. (1) 3 (1866), p. 321; *Ed. Weyr*, Ztschr. Math. Phys. 14 (1869), p. 445; *E. Amigues*, Nouv. Ann. de math. (2) 16 (1877), p. 422; (2) 18 (1879), p. 549—550; *E. Czuber*, Monatsh. Math. Phys. 5 (1894), p. 267.

Eine Andeutung allgemeinerer Transformationen als die quadratischen machte *J. Steiner*, „Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten“, Berlin 1832, Anm. auf p. 295 = Werke 1, Berlin 1881, p. 439 in Anm. S. hierüber *G. J. Verdam*, Ak. Amsterdam Versl. 12 (1846), p. 67.

zwischen zwei Ebenen π, π', die voneinander verschieden sind oder zusammenfallen. Nennen wir x_1, x_2, x_3 und x_1', x_2', x_3' die homogenen projektiven Koordinateu zweier Punkte X und X' von π und π', so wird die Transformation, die π in π' überführt, durch Formeln vom Typus

$$\varrho x_i' = f_i(x_1, x_2, x_3) \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{1}$$

dargestellt sein, wo ϱ ein Proportionalitätsfaktor und f_1, f_2, f_3 drei ternäre Formen ein und derselben Ordnung n sind, die als frei von gemeinschaftlichen Faktoren angenommen werden dürfen.

Wir schließen aus, daß sich f_1, f_2, f_3 nur um konstante Faktoren unterscheiden sowie, daß sie als binäre Formen ein und derselben Ordnung zweier anderer Formen $u(x_1, x_2, x_3)$ und $v(x_1, x_2, x_3)$ betrachtet werden können. Tatsächlich entspräche im ersten Falle, und nur dann, einem beliebigen Punkte von π ein fester Punkt von π'; im zweiten Falle, und nur dann, würde sich beim Variieren des Punktes X auf π der homologe Punkt X' nicht über die ganze Ebene π' bewegen, sondern auf einer (rationalen) Kurve.

Gelten für nicht homogene Koordinaten x, y und x', y' die zu (1) analogen Transformationsformeln

$$x' = \varphi(x, y), \quad y' = \psi(x, y),$$

wo φ und ψ rationale Funktionen von x, y sind, so lautet die Bedingung dafür, daß beim Variieren von X in π der Punkt X' die ganze Ebene π' beschreibt: die Funktionaldeterminante von φ und ψ darf nicht identisch verschwinden.

Da wir annehmen, daß die Transformation birational ist, können wir die Formeln (1) umkehren, und erhalten analoge Formeln

$$\sigma x_i = \varphi_i(x_1', x_2', x_3') \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{2}$$

welche die *inverse Transformation* der gegebenen Transformation darstellen, d. h. die Transformation, die von der Ebene π' zur Ebene π führt, wobei $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ drei ternäre Formen ein und derselben Ordnung sind, die denselben Bedingungen unterworfen sind, die für die Formen f_1, f_2, f_3 aufgestellt waren.

Den Geraden

$$\lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_2' + \lambda_3 x_3' = 0 \tag{3}$$

von π' entsprechen in π die Kurven

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x) = 0, \tag{4}$$

welche bei Veränderung von $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ein Netz bilden. Die eineindeutige Korrespondenz, die zwischen diesem Netz und dem System der Geraden von π' besteht, ist projektiv, da den Geraden eines Büschels

Demnach erhält man die allgemeinste birationale Transformation zwischen zwei Ebenen, indem man die Geraden der einen Ebene auf die Kurven eines homaloiden Netzes der anderen Ebene projektiv bezieht.

48. Hauptpunkte und -kurven. Die Formeln (1) der vorhergehenden Nr. zeigen, daß der homologe Punkt eines Punktes X von π wohl bestimmt ist, ausgenommen, wenn er mit einem Basispunkte A des homaloiden Netzes (4) zusammenfällt. In diesem Falle lasse man X sich dem Punkt A längs Kurvenzweigen nähern und ermittle die Grenzlagen des homologen Punktes X' in π'. Haben die Kurven des Netzes in A mindestens eine veränderliche Tangente, so sei g eine durch A gehende Gerade und von den möglichen festen Tangenten verschieden. Dann gibt es in dem Netz ein Büschel von Kurven, welche g in A berühren, und diesem Büschel entspricht in π' ein Geradenbüschel mit einem wohl bestimmten Mittelpunkt A'. Man kann sagen, daß A' der homologe Punkt des Punktes von π ist, der auf der Geraden g zu A unendlich benachbart ist, da Kurvenzweigen, die mit der Tangente g durch A gehen, Kurvenzweige, die durch A' gehen, entsprechen. Läßt man g sich um A drehen, so bewegt sich der Punkt A' und beschreibt eine Kurve. Genauer ergibt sich, daß den A unendlich benachbarten Punkten von π in den verschiedenen von A ausgehenden Richtungen, wenn sie nur von den Richtungen der allen Kurven des homaloiden Netzes gemeinsamen Tangenten in A verschieden sind, die Punkte einer rationalen Kurve entsprechen, deren Ordnung gleich der Anzahl der veränderlichen Tangenten in A ist.

Nun sei g eine feste Tangente des Netzes (4) in dem Basispunkt A, und man nehme an, daß sich nicht alle Kurven des Netzes in A oskulieren (d.h. eine Berührung 2. Ordnung haben). Dann existieren in dem Netze ∞^1 Büschel von Kurven, die sich in A oskulieren, mit der gemeinsamen Tangente g, und einem jeden dieser Büschel entspricht in π' ein Büschel von Geraden mit einem bestimmten Mittelpunkte A_1. Man findet, daß die Punkte A_1 von π', die auf diese Weise aus jenen ∞^1 Büscheln von π erhalten werden, als Ort eine wohl bestimmte Gerade haben, derart, daß Kurvenzweigen mit der Tangente g, die sich in A oskulieren, Kurvenzweige entsprechen, die durch ein und denselben Punkt A_1 dieser Gerade gehen, und umgekehrt.

Wenn alle Kurven des Netzes (4) in A die Tangente g gemein haben und sich in A oskulieren, so verfährt man durch Betrachtung höherer Berührungen in A auf ähnliche Weise.

Zusammenfassend können wir sagen, daß jedem r-fachen Basispunkt A des homaloiden Netzes (4), in welchem alle Tangenten ver-von π' in dem Netze (4) die Kurven eines zum ersten projektiven Büschels entsprechen.

Auf ähnliche Weise entsprechen den Geraden

$$\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 = 0 \tag{5}$$

von π in π' die Kurven

$$\mu_1 \varphi_1(x') + \mu_2 \varphi_2(x') + \mu_3 \varphi_3(x') = 0, \tag{6}$$

welche ein Netz bilden; und die Korrespondenz zwischen diesem Netze und der Geradenebene π' ist projektiv.

Da den Schnittpunkten einer Geraden von π mit einer Kurve des Netzes (4) in π' die Schnittpunkte der homologen Kurven entsprechen, d. h. die Schnittpunkte einer Kurve des Netzes (6) mit einer Geraden, ergibt sich, daß die Kurven der Netze (4) und (6) ein und dieselbe Ordnung haben, daß also die Formen f_i und φ_i ein und derselben Ordnung sind. Anders ausgedrückt, eine birationale Transformation zwischen zwei Ebenen hat dieselbe Ordnung wie die inverse Transformation.

Da sich zwei Gerade von π' in einem einzigen Punkte schneiden, müssen sich auch zwei Kurven des Netzes (4) in einem einzigen, beweglichen Punkte schneiden, und $n^2 - 1$ von den Schnitten zweier Kurven des Netzes müssen daher in die Basispunkte des Netzes fallen. Dieselbe Eigenschaft gilt für das Netz (6). Aus diesem Grunde bezeichnet man die Netze (4) und (6) als *homaloid.*[431]) Die Kurven dieser Netze sind rational, weil durch die Transformation die Punkte einer jeden Kurve den Punkten der entsprechenden Geraden der anderen Ebene eineindeutig entsprechen.

Die vorhergehenden Betrachtungen können auch umgekehrt werden. In einer Ebene π sei ein homaloides Netz n^{ter} Ordnung gegeben, und wir beziehen es projektiv auf die Geraden einer Ebene π' so, daß jedes Geradenbüschel von π', dessen Mittelpunkt ein allgemeiner Punkt X' ist, mit einem Kurvenbüschel des Netzes korrespondieren wird, von dem nur einer von den Basispunkten, X, beweglich, d. h. von den Basispunkten des Netzes verschieden ist, und umgekehrt. Betrachten wir daher die Punkte X und X' als entsprechend, so entsteht zwischen den Ebenen π und π' eine birationale Transformation, die, wenn $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 0$, $f_3(x) = 0$ drei nicht ein und demselben Büschel angehörende Kurven des Netzes sind, durch die Formeln

$$\varrho x_i' = f_i(x_1, x_2, x_3) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

dargestellt werden kann.

---

431) S. Anm. 11. Über die homaloiden Netze s. III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **36**.

änderlich sind, in π' eine (rationale) Kurve r^{ter} Ordnung entspricht. Wenn es dagegen in A ϱ feste Tangenten gibt, so reduziert sich die Ordnung der Kurve auf $r - \varrho$, den einzelnen festen Tangenten entsprechen aber ebenso viele Gerade, so daß dem r-fachen Punkte A insgesamt eine Kurve r^{ter} Ordnung entspricht. Sind alle Tangenten in A fest, so entspricht A in π' ein einziger Punkt, und den r festen Tangenten entsprechen r Gerade, so daß man sagen kann, die A entsprechende Kurve existiert noch, aber zerfällt in r Gerade.

Ein analoges Ergebnis erhält man, wenn irgendeine der festen Tangenten in A unter den allen Kurven des Netzes (4) gemeinen Tangenten in A mehrmals zählt. Zählt eine solche Tangente g k-mal, so gehört jede Kurve des Netzes k in A oskulierenden Büscheln mit der Tangente g an, daher entspricht der Geraden g eine Kurve k^{ter} Ordnung.

Die Basispunkte der in π und π' gegebenen homaloiden Netze heißen *Hauptpunkte (Fundamentalpunkte)* der Transformation, und die Kurven, die ihnen im ebengenannten Sinne (in π' und π) entsprechen, heißen die *Hauptkurven (Fundamentalkurven)* der Transformation, die diesen Punkten entsprechen.[432]).

Der oben untersuchte Fall, daß die Kurven des homaloiden Netzes in einem Hauptpunkt A feste Tangenten besitzen, ist augenscheinlich damit gleichbedeutend, daß andere Hauptpunkte der Transformation dem Punkte A unendlich benachbart sind.

Für die Folge nehmen wir der Einfachheit halber an, daß die Hauptpunkte der Transformation, sowohl in der einen wie in der anderen Ebene, untereinander endlichen Abstand haben, aber manche unserer Angaben gelten auch im gegenteiligen Falle.[433])

Darum sprechen wir davon, daß jede Hauptkurve rational und ihre Ordnung gleich der Multiplizität des entsprechenden gewöhnlichen Hauptpunktes der anderen Ebene ist.

Diese Hauptpunkte und -kurven treten immer auf, vorausgesetzt,

---

432) *Punti e curve principali,* nach *L. Cremona,* Mem. Acc. Bologna (2) 5 (1865), p. 5, 7 = Giorn. di mat. (1) 3 (1865), p. 270, 272 = Opere 2, p. 194, 196.

433) Wie sich die Sätze und Formeln der Nr. **49** und **50** im allgemeinsten Falle, in dem die komplizierteren Singularitäten nicht ausgeschlossen werden, ändern, zeigt *H. W. E. Jung,* J. f. Math. 138 (1910), p. 255, auf algebraisch-arithmetrischem Wege. Einige Bemerkungen über die einfacheren Fälle bei *F. Enriques* und *O. Chisini,* „Lezioni" 3, p. 162—164. — Über die Erörterung der Hauptpunkte und -kurven s. auch *L. Autonne,* Rend. Circ. mat. Palermo 10 (1896), p. 226; Auszug Paris C. R. 121 (1895), p. 673. — Bemerkungen über den Fall, daß die Hauptpunkte nicht voneinander unabhängig sind, bei *G. Biasi,* „Intorno alle trasformazioni Cremoniane e ad una geometria analitica di grado superiore che ne deriva", Sassari 1905.

daß es sich nicht um eine Kollineation handelt; mit anderen Worten, die einzigen ohne Ausnahme umkehrbar eindeutigen *Cremona*schen Transformationen zwischen zwei Ebenen sind die Kollineationen.[434])

49. Grundlegende Beziehungen zwischen den Zahlen, die sich auf ein homaloides Netz beziehen. Nach Nr. 47 reduziert sich die Bestimmung der *Cremona*schen Transformationen gegebener Ordnung n auf die Konstruktion der homaloiden Netze n^{ter} Ordnung.

Wir bezeichnen mit $r_1, r_2, \ldots r_h$ die Multiplizitäten ($\geqq 1$) der auf π existierenden Hauptpunkte der Transformation. Da zwei Kurven des homaloiden Netzes einen einzigen veränderlichen Schnittpunkt aufweisen, ist

$$\sum_i r_i^2 = n^2 - 1. \tag{1}$$

Da ferner die allgemeine Kurve des Netzes irreduzibel sein soll, so kann sie nach einem Satz von *E. Bertini*[435]) über die linearen Systeme [III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. 3; III C 7 (*C. Segre*), Nr. 40] keine vielfachen Punkte besitzen, außer den Basispunkten des Netzes, d. h. außer den in π liegenden Hauptpunkten der Transformation. Die Kurven des Netzes haben aber das Geschlecht Null (Nr. 47), daher ist

$$\sum_i \frac{r_i(r_i - 1)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}. \tag{2}$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) leitet sich ab

$$\sum_i r_i = 3(n-1), \tag{3}$$

$$\sum_i \frac{r_i(r_i + 1)}{2} = \frac{n(n+3)}{2} - 2. \tag{4}$$

Die zweite von diesen Gleichungen sagt aus, daß die den Kurven des homaloidischen Netzes durch die Hauptpunkte von π auferlegten Bedingungen untereinander unabhängig sind, das Netz also *regulär* ist.[436])

---

434) Vgl. z. B. *F. Severi*, „Lezioni", p. 49; „Vorlesungen", p. 40; „Trattato" 1_1, p. 302. Der Lehrsatz folgt auch aus der Gleichung (1) in Nr. 49.

435) Rend. Ist. Lomb. (2) 15 (1880), p. 24. S. auch *É. Picard* und *G. Simart*[114]) 2, p. 51—52; *E. Bertini*[4]), 1. Ausg., p. 227—228; 2. Ausg., p. 269—271; Deutsche Ausg., p. 253—255; *F. Severi*, „Lezioni", p. 28—29; „Vorlesungen", p. 24—25; „Trattato" 1_1, p. 38—42; *F. Enriques* und *O. Chisini*, „Lezioni" 1, p. 181—182; *J. L. Coolidge*, „Alg. pl. curves", p. 115—116. Für den Fall eines homaloidischen Netzes wurde der Lehrsatz schon von *J. Rosanes*[429]), p. 100, bewiesen, sein Beweis ist bei *A. Clebsch* und *F. Lindemann*, „Vorlesungen" 1, p. 479—480; franz. Übers. 2, p. 195 wiedergegeben.

436) Aus allgemeinen Sätzen über die linearen Systeme ebener Kurven folgt, daß jedes vollständige irreduzible lineare System vom Grad 1 ein homaloides Netz ist. Allgemeiner, ein algebraisches System von der Dimension > 1,

Das System der vorausgehenden Formeln ist daher dem System der beiden Formeln[437])

$$\sum_i r_i = 3(n-1), \qquad \sum_i r_i^2 = n^2 - 1 \tag{5}$$

gleichwertig.

Unter den Folgerungen dieser Formeln befinden sich einige Ungleichungen. Vor allem ergibt sich für die Anzahl h der Hauptpunkte des Netzes die Begrenzung

$$2n - 1 \geqq h \geqq 9 - \frac{18}{n+1}, \tag{6}$$

wo das Gleichheitszeichen in beiden Fällen nur dann gesetzt werden darf, wenn es sich um eine Transformation von *de Jonquières* (Nr. **51**) bzw. eine der vier Transformationen handelt, für die $r_1 = r_2 = \cdots = r_h$ ist (Nr. **52**, siehe auch Anm. 826).[438])

---

für das zwei allgemeine Kurven einen einzigen veränderlichen Schnitt besitzen, ist ein homaloides Netz. Vgl. III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **35**, **36**.

437) Die vorausgehenden Formeln rühren von *L. Cremona*[429]) her, der Formel (2) aus Formel (1) und (4) dadurch ableitete, daß er die Regularität des Systems der den Geraden der anderen Ebene korrespondierenden Kurven implizite voraussetzte. Vgl. hierüber *L. Cremona,* Opere 2, erste Fußnote auf p. 56; außerdem *A. Cayley,* Proc. London math. Soc. (1) 3 (1870), p. 196; (1) 22 (1891), p. 475 = Papers 7, Cambridge 1894, p. 253; 13, Cambridge 1897, p. 115. — Nach *F. Enriques* und *O. Chisini,* „Lezioni" 3, p. 157 ist es nicht nötig, bei der Aufstellung der Formel (2) auch von dem Satz von *E. Bertini* Gebrauch zu machen; die allgemeine Kurve eines Netzes vom Grade 1 kann in der Tat keinen veränderlichen vielfachen Punkt P aufweisen, andernfalls hätte eine durch P gehende zweite Kurve des Netzes außer den Basispunkten mindestens zwei Schnittpunkte mit ihr gemein.

Vergegenwärtigen wir uns die *Noether*sche Betrachtungsweise der Singularitäten der ebenen Kurven [III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **12**, **14**, **15**], so gelten die Formeln des Textes, auch wenn einige Hauptpunkte der Transformation unendlich benachbart sind.

H. G. Zeuthen, Math. Ann. 4 (1871), p. 43 folgerte die Formel (3) als Sonderfall einer Formel für zwei beliebige algebraische Flächen in umkehrbar eindeutiger Korrespondenz.

438) *D. Montesano,* Rend. Acc. Napoli (3) 11 (1905), p. 270—271; Atti Acc. Napoli (2) 15 (1910), Nr. 7, p. 7—9. Hieraus folgen die schon von *S. Kantor,* Preisschrift Atti Acc. Napoli (2) 4 (1892), Nr. 2, p. 12 [1883] [Auszug J. f. Math. 114 (1895), p. 65] betrachteten Eigenschaften: für $n > 2, 5, 8, 17$ ist bzw. $h > 4, 6, 7, 8$. Das Verzeichnis der homaloidischen Netze mit $h < 9$ findet man bei *S. Kantor,* a. a. O., p. 19, und bei *D. Montesano*, zweites Zitat, p. 29. Ein einziges dieser Netze hat die Ordnung 17 und untereinander gleiche Multiplizitäten; die anderen sind niedrigerer Ordnung.

Nach *S. Kantor,* a. a. O , p. 12 [und p. 65] gibt es eine endliche Anzahl birationaler Transformationen mit $h \leqq 8$; eine unendliche Anzahl aber für $h \geqq 9$. Für $h = 9$ hat *A. B. Coble,* Trans. Amer. math. Soc. 17 (1915), p. 345 gefunden, Sind die Zahlen r_i absteigend geordnet, so daß $r_1 \geqq r_2 \geqq \cdots \geqq r_h$ ist, so ergeben sich die Ungleichungen

$$3r_1 > n, \qquad r_1 + 2r_2 > n,$$
$$r_1 + r_2 + r_3 > n,$$

von denen die dritte im Beweis (Nr. 57) für die Zerlegung jeder ebenen *Cremona*schen Transformation in quadratische Transformationen[439]) eine Hauptrolle spielte.

50. Eigenschaften der Hauptpunkte und -kurven. Zwischen den Hauptpunkten und den Hauptkurven einer birationalen Transformation zwischen zwei Ebenen π, π' existieren viele Verknüpfungen, deren größter Teil von *L. Cremona*[429]) aufgefunden wurde.

---

daß diese Transformationen in $2 \cdot 3^8 \cdot 960$ Klassen aufgeteilt werden können, und zwar so, daß jede Klasse eine unendliche Anzahl von Transformationen enthält, die durch die willkürliche Veränderung von acht ganzen Zahlen bestimmt sind. Die Typen von Transformationen mit $h < 9$ sind von *Mildred E. Taylor,* Amer. J. of math. 54 (1932), p. 123 bestimmt.

439) Die beiden ersten Ungleichungen stammen von *M. Noether,* Math. Ann. 5 (1872), p. 634. Die Zahl r_1 liegt daher innerhalb der Grenzen $n-1$ und $\frac{n+1}{3}$ und erreicht diese Werte nur im Falle der Transformationen von *de Jonquières,* bzw. wenn alle Zahlen r_i gleich sind. S. *D. Montesano,* Atti Acc. Napoli (2) 15 (1910), Nr. 7, p. 9.

Die dritte Ungleichung wurde gleichzeitig von *M. Noether,* Math. Ann. 3 (1870), p. 165—167 und von *J. Rosanes*[429]), p. 107 angegeben; von *M. Noether* von neuem Math. Ann. 5 (1872), p. 635. Über Beweise dieser Formel s. auch *A. Clebsch* und *F. Lindemann,* „Vorlesungen" 1, p. 488—489; franz. Übers. 2, p. 205—207; *E. Bertini,* Giorn. di mat. (1) 15 (1877), p. 329; *G. Salmon* und *W. Fiedler,* „An. Geom. d. höh. eb. Kurven" [28]), p. 397; *G. Salmon* und *O. Chemin,* „Traité de géom. anal." [28]), p. 443—444; *S. Kantor,* Amer. J. of math. 18 (1895), p. 239—240; *K. Doehlemann,* „Geom. Transf." 2, p. 155—156; *C. Jordan*[4]), p. 600—601; *R. Sturm,* „Geom. Verw." 4, p. 6—7; *D. Montesano,* a. a. O., p. 10—11; *B. K. Mlodziejowsky,* Moskau math. Sammlung 29 (1913), p. 269, Wiedergabe bei *Hilda P. Hudson,* „Cremona Transf.", p. 9—11 und *D. Montesano,* Rend. Acc. Napoli (3) 34 (1928), p. 89; *H. Malet,* „Étude", p. 167—168; *O. Chisini,* Atti Soc. Nat. Mat. Modena (5) 6 (1921), p. 7, Wiedergabe bei *F. Enriques* und *O. Chisini,* „Lezioni" 3, p. 166—168 und in *L. Godeaux,* „Transf. birat.", p. 10—11.

D. Montesano, erste Anführung, p. 10—11 (vgl. *E. Bertini,* a. a. O., p. 331) führte weiterhin aus, daß

$$r_1 + r_2 + r_3 = n + 1$$

nur gilt, wenn das homaloidische Netz von *de Jonquières* (Nr. **51**) oder eines der vier Netze ist, für die $r_1 = r_2 = \cdots = r_h$ (Nr. **52**). In der zweiten angeführten Arbeit, p. 93, fügte *D. Montesano* noch hinzu, daß für $n > 2$ die Ungleichung

$$r_1 + r_3 + r_5 > n$$

besteht, wodurch er das in der ersten angeführten Arbeit, p. 20, angegebene Ergebnis noch genauer gestaltet hat.

Vor allem ist die Anzahl der Hauptpunkte in beiden Ebenen dieselbe; mit anderen Worten, in jeder Ebene ist die Anzahl der Hauptpunkte gleich der Anzahl der Hauptkurven.[440])

Eine Hauptkurve ist durch ihre Multiplizitäten in den Hauptpunkten völlig bestimmt, und hat außer diesen keine mehrfachen Punkte.

Alle Schnittpunkte zweier Hauptkurven sind in den Hauptpunkten zusammengefaßt.

Die Multiplizität einer Hauptkurve in einem Hauptpunkte ist gleich der Multiplizität der dem Punkte in der andern Ebene entsprechenden Hauptkurve in dem der Kurve entsprechenden Hauptpunkt.

Die Hauptkurven jeder Ebene bilden die *Jacobi*sche Kurve des bezüglichen homaloiden Netzes. Dieser Satz liefert die geometrische Deutung der Formel (3) von Nr. 49.

Die Kurven des homaloiden Netzes einer Ebene werden von einer Hauptkurve nur in Hauptpunkten geschnitten; umgekehrt ist jede Kurve mit dieser Eigenschaft eine Hauptkurve.

Zerfällt eine Kurve des homaloiden Netzes, so sind alle Teile, mit Ausnahme eines einzigen, Hauptkurven.

Soll eine Kurve Hauptkurve sein, so ist notwendig und hinreichend,

---

440) Dieser Satz wurde von *L. Cremona* bewiesen, indem er die Anzahl der Kurvendoppelpunkte des Büschels betrachtete, das in der einen Ebene einem Geradenbüschel der anderen Ebene entspricht. *A. Clebsch,* Math. Ann. 4 (1871), p. 491 hat dafür einen anderen, einfachen Beweis geliefert, indem er bemerkte, daß, wenn man von einer Kollineation absieht, die Transformation bestimmt ist, wenn die Lage der Hauptpunkte in der einen oder anderen Ebene gegeben ist. Ist h die Zahl der Hauptpunkte in jeder der Ebenen, so folgt daraus, daß die Transformation, für $n > 2$ und daher $h \geqq 5$, $2h - 8$ absolute Invarianten (in bezug auf die Kollineationen) besitzt.

H. G. Zeuthen, Paris C. R. 70 (1870), p. 745; Math. Ann. 4 (1871), p. 43 folgerte den Lehrsatz von *L. Cremona* aus einer für zwei beliebige algebraische Flächen in umkehrbar eindeutiger Korrespondenz gültigen allgemeinen Formel. Auch *C. Segre,* Atti Acc. Torino 31 (1896), p. 495 bewies einen allgemeineren Lehrsatz als den von *L. Cremona* für die birationalen Korrespondenzen zwischen zwei algebraischen Flächen. S. auch *H. G. Zeuthen,* „Lehrbuch", p. 164—165.

Einen weiteren Beweis des Satzes von *L. Cremona* lieferte *M. Pannelli,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 19^1 (1910), p. 449 durch Betrachtung des Geschlechts der *Jacobi*schen Kurve des in einer der beiden Ebenen existierenden homaloiden Netzes. Ferner gab er die Erweiterung dieses Satzes auf die birationalen Transformationen zwischen zwei dreidimensionalen Räumen an (vgl. Nr. 75).

F. Klein, Math. Ann. 7 (1874), p. 555 = Ges. math. Abh. 2, Berlin 1922, p. 70 führte weiterhin aus, daß in einer *Cremona*schen Transformation zwischen zwei Ebenen auch gleichviel reelle Hauptpunkte auf den beiden Ebenen existieren. Vgl. Anm. 34 und 1058.

daß sie in einem Kurvenbüschel des homaloiden Netzes[441]) fester Bestandteil ist.

Nennt man $r_1, r_2, \ldots, r_h$ die Multiplizitäten der Hauptpunkte der ersten Ebene, $s_1, s_2, \ldots, s_h$ die der Hauptpunkte der zweiten Ebene, $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ die Multiplizität des r_i-fachen Hauptpunkts der ersten Ebene für die Hauptkurve von der Ordnung s_k (also die des s_k-fachen Hauptpunkts der zweiten Ebene für die Hauptkurve von der Ordnung r_i), so ergeben sich aus den vorhergehenden Sätzen die Formeln

$$(1) \quad \sum_k \alpha_{ik} = 3r_i - 1, \qquad (2) \quad \sum_k \alpha_{ik}^2 = r_i^2 + 1,$$

$$(3) \quad \sum_k s_k \alpha_{ik} = n r_i, \qquad (4) \quad \sum_k \alpha_{ik}\alpha_{jk} = r_i r_j \quad (i \neq j),$$

sowie die durch Vertauschung der r mit den s erhältlichen analogen Formeln.[442]).

Hieraus folgt leicht[443]), daß

$$(5) \quad \begin{vmatrix} n & r_1 & r_2 & \ldots & r_h \\ s_1 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1h} \\ s_2 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2h} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_h & \alpha_{h1} & \alpha_{h2} & \ldots & \alpha_{hh} \end{vmatrix} = \pm 1$$

ist; für das algebraische Komplement von n in dieser Determinante außerdem[444]) den Wert

$$|\alpha_{ik}| = \pm n.$$

---

441) Eine hinreichende, nicht aber notwendige Bedingung dafür, daß eine gegebene rationale Kurve als Hauptkurve eines homaloiden Netzes angesehen werden kann, gibt *G. Ferretti* an, Rend. Circ. mat. Palermo 16 (1902), p. 263. S. auch Nr. **56**.

442) Bezeichnet man mit h und h' die Anzahl der Hauptpunkte von π und π', so folgt aus der Gleichung (1) im Text und der Gleichung (3) von Nr. **49**

$$\sum_{i,k} \alpha_{ik} = 3\sum_i r_i - h = 9(n-1) - h,$$
$$\sum_{i,k} \alpha_{ik} = 3\sum_k s_k - h' = 9(n-1) - h',$$

woraus wieder $h = h'$ folgt. S. *A. Clebsch*[440]), p. 493.

Beweise der Gleichungen (1) und (2), die von der Betrachtung der *Jacobi*schen Kurve unabhängig sind, bei *G. Jung*, Rend. Ist. Lomb. (2) 19 (1886), p. 161. Weitere Beweise der Gleichungen (1), ..., (4) bei *S. Kantor*, Preisschrift[438]), p. 34—35 [Auszug J. f. Math. 114 (1895), p. 57—58].

443) *S. Kantor*[442]); *G. Loria*, Atti Acc. Torino 26 (1890), Anm. auf p. 289; *D. Montesano*, Rend. Acc. Napoli (3) 21 (1915), p. 117, und auch Atti Acc. Napoli (2) 18 (1929), Nr. 2, p. 11—12, wo bewiesen wird, daß der absolute Betrag eines jeden Elementes der Determinante gleich seinem algebraischen Komplement ist.

444) *A. Clebsch*, Anm. 440.

Hat die Transformation in der einen Ebene x_1 einfache Hauptpunkte, x_2 Doppelpunkte, ..., x_{n-1} $(n-1)$-fache Hauptpunkte, in der anderen Ebene y_1 einfache Hauptpunkte, y_2 Doppelpunkte, ..., y_{n-1} $(n-1)$-fache Hauptpunkte, so besagt ein anderer, von *L. Cremona* herrührender Lehrsatz, daß die Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ gleich den Zahlen $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, in derselben oder in einer anderen Reihenfolge genommen, sind.

Der Satz wurde durch Induktion von *L. Cremona*[445]) gefunden, später von *A. Clebsch*[446]) und *E. Bertini*[447]) bewiesen.

A. Clebsch gründete seinen Beweis auf einige Eigenschaften der *Gruppen* Γ, die ausschließlich von allen Hauptpunkten der einen Ebene, mit ein und derselben Multiplizität, sowie der *Gruppen* γ, die ausschließlich von allen Hauptkurven ein und derselben Ordnung gebildet werden. Diese Eigenschaften wurden von *E. Bertini*[448]) vervollständigt und dann[449]) auf beliebige reguläre lineare Systeme ebener Kurven mit unabhängigen Basispunkten[450]) ausgedehnt [III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **35, 36**].

Vor allem ist jeder eine höhere Punktzahl als die Einheit umfassenden Gruppe Γ eine und nur eine Gruppe γ *zugeordnet*, die aus der gleichen Anzahl von Kurven gebildet wird, und umgekehrt. Sind dann zwei Gruppen Γ und γ nicht zugeordnet, so haben alle Punkte (oder der Punkt) von Γ für alle Kurven (oder für die Kurve) von γ eine und dieselbe Multiplizität. Sind dagegen zwei Gruppen Γ und γ einander zugeordnet, so ordnen sich die Punkte von Γ den Kurven von γ derart zu, daß alle Multiplizitäten dieser Punkte für die entsprechenden zugeordneten Kurven einer gewissen Zahl ω gleich sind, alle Multiplizitäten dagegen derselben Punkte für die nicht zugeordneten Kurven von γ einer, von der vorhergehenden verschiedenen, Zahl ω' gleich sind (und jeder andere nicht in Γ enthaltene Hauptpunkt eine und dieselbe Multiplizität für alle Kurven von γ hat).[451])

---

445) Dieser Satz wurde von *T. A. Hirst* in Report British Ass. 34, Bath 1864 (London 1865), p. 3 = *L. Cremona,* Opere 2, p. 179 im Namen von *L. Cremona* mitgeteilt.

446) S. [440]), p. 490.

447) Rend. Circ. mat. Palermo 3 (1888), p. 17.

448) Rend. Ist. Lomb. (2) 13 (1880), p. 443.

449) Anm. 447, p. 5.

450) Der Satz von *L. Cremona* wurde von *G. Jung,* Ann. di mat. (2) 15 (1887), p. 301 auf alle regulären linearen Systeme mit unabhängigen Basispunkten ausgedehnt, für die die Anzahl der Basispunkte gleich ist der Anzahl der Fundamentalkurven. Ein weiterer Beweis bei *E. Bertini.*[447])

451) Daraus ergibt sich der Satz von *L. Cremona.*

Die Differenz $\omega - \omega'$ kann nur die Werte $+1$ und -1[452]) annehmen. Demgemäß können wir sagen[453]), daß im ersten Falle die Zuordnung der Gruppen Γ und γ eine *positive*, im zweiten Falle eine *negative Signatur* hat; das gleiche kann in bezug auf die Zuordnung gesagt werden, die zwischen den Punkten von Γ und den den Kurven von γ entsprechenden Hauptpunkten der anderen Ebene festgelegt wird.

Gilt für zwei r- und r'-fache Hauptpunkte $r > r'$, so ist nach *E. Bertini*[448]) die Multiplizität einer Hauptkurve im ersten Punkte größer oder gleich der Multiplizität, die sie im zweiten Hauptpunkte besitzt.

Gibt es in einer der beiden Ebenen weder Gruppen von einfachen noch Gruppen von Doppelpunkten (wobei jedoch ein einziger einfacher oder ein einziger Doppelpunkt existieren kann), so gehen die Hauptkurven maximaler Ordnung durch alle Hauptpunkte. Gehen die Hauptkurven maximaler Ordnung nicht durch alle Hauptpunkte, so müssen sie notwendigerweise durch alle diese Punkte bis auf einen hindurchgehen, und eine Gruppe von drei Kurven bilden, die einer Gruppe von drei einfachen Punkten zugeordnet ist, oder aber eine Gruppe von sechs Kurven bilden, die einer Gruppe von sechs Doppelpunkten zugeordnet ist.

51. Bestimmung der ebenen Cremonaschen Transformationen gegebener Ordnung. In Nr. **49** sahen wir, daß die auf ein homaloides Netz bezüglichen Zahlen $n, r_1, r_2, \ldots, r_h$ den zwei Gleichungen (5) genügen.

Fassen wir nun umgekehrt eine beliebige Lösung der Gleichungen (5) mit positiven ganzen Zahlen $n, r_1, r_2, \ldots, r_h$ ins Auge. Es gibt wenigstens ∞^2 ebene Kurven n^{ter} Ordnung, die durch h willkürlich gegebene Basispunkte hindurchgehen und in diesen die Multiplizitäten $r_1, r_2, \ldots, r_h$ haben, da die Dimension des aus solchen Kurven gebildeten linearen Systems nicht kleiner als $\frac{n(n+3)}{2} - \sum_i \frac{r_i(r_i+1)}{2}$, also nicht kleiner als 2 ist. Sind nun diese Kurven nicht reduzibel, so gibt es genau ∞^2; sie bilden folglich ein homaloides Netz. Gäbe es nämlich ∞^t, wo $t > 2$, so schnitten sich zwei von ihnen in mindestens $t-1$ beweglichen Punkten, und die zweite Formel (5) wäre nicht erfüllt.

Zwei homaloide Netze ein und derselben Ordnung n betrachtet

452) *A. Clebsch*[440]), p. 496 hatte bemerkt, daß n durch eine gewisse Potenz von $\omega - \omega'$ teilbar ist. *E. Bertini*[448]) stellte aber fest, daß $\omega - \omega' = \pm 1$ ist, wo auch ein von *L. Bianchi* herrührender anderer Beweis wiedergegeben ist.

453) Nach *D. Montesano*, Rend. Circ. mat. Palermo 31 (1911), p. 366.

man als *einem und demselben Typus* angehörig, wenn die Hauptpunkte des einen Netzes dieselben Multiplizitätsordnungen haben wie die des anderen Netzes. Andererseits können wir immer ein homaloides Netz von gleichem Typus wie ein gegebenes Netz konstruieren, welches außerdem seine Hauptpunkte in vorgegebenen Punkten allgemeiner Lage hat. Wir können daher von der Betrachtung dieser Punkte absehen und festhalten, daß jeder Typus homaloidischer Netze gegebener Ordnung n durch die Gruppe der den Formeln (5) genügenden Zahlen $r_1, r_2, \ldots, r_h$ vollständig bestimmt ist.

Infolgedessen hängt die Konstruktion aller möglichen homaloidischen Netze gegebener Ordnung n, also auch die Bestimmung aller möglichen ebenen birationalen Transformationen n^{ter} Ordnung, von der Auflösung der beiden Gleichungen (5) mit positiven ganzen Zahlen, unter Ausschluß der auf reduzible Kurven n^{ter} Ordnung führenden Lösungen ab. Diese Bestimmung ist daher gleichwertig mit der Lösung zweier Aufgaben; die eine ist rein arithmetisch, gehört der unbestimmten Analysis an und hat immer eine endliche Anzahl von Lösungen, die andere ist geometrisch und besteht für jede Lösung der ersten Aufgabe in der Erörterung darüber, ob die erhaltenen Kurven reduzibel sind oder nicht.

Da den Gleichungen (5) auch die Zahlen $s_1, s_2, \ldots, s_h$, die die Multiplizitäten der Hauptpunkte in der zweiten Ebene angeben, genügen müssen, nennt man nach *L. Cremona* zwei derartige Lösungen der Gleichungen (5), die sich auf ein und dieselbe Transformation beziehen, *konjugiert.*

Eine besonders wichtige und für jeden Wert von n geltende Lösung liefert in der einen und daher auch in der anderen Ebene ein Netz n^{ter} Ordnung mit einem $(n-1)$-fachen Hauptpunkt und $2(n-1)$ einfachen Hauptpunkten. Die Hauptkurven einer jeden Ebene sind die Verbindungsgeraden des ersten dieser Punkte mit den übrigen, ferner die Kurve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, die im ersten Punkte die Multiplizität $n-2$ besitzt und durch alle anderen einfach hindurchgeht. Durch diese Transformation entspricht dem Geradenbüschel, dessen Mittelpunkt der $(n-1)$-fache Hauptpunkt der einen Ebene ist, projektiv das Geradenbüschel, dessen Mittelpunkt der $(n-1)$-fache Hauptpunkt der anderen Ebene ist.

Diese Transformationen heißen *isologisch, isographisch* oder Transformationen *von de Jonquières*, weil sie zuerst von diesem Verfasser[454])

---

454) S. [430]). Als *E. de Jonquières* die Fundamentaleigenschaften seiner Transformation (die er als *isographisch* bezeichnete) zwischen zwei voneinander verschiedenen oder zusammenfallenden Ebenen festgestellt hatte, übertrug er sie

untersucht wurden, und zwar noch vor den allgemeinen Arbeiten von *L. Cremona.*[455])

In nicht homogenen Koordinaten (x, y), (x', y') können sie durch Formeln vom Typus

$$x' = x, \quad y' = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}$$

dargestellt werden, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ so beschaffene rationale Funktionen von x sind, daß $\alpha\delta - \beta\gamma$ nicht identisch gleich Null wird.

---

auf den Fall zweier Strahlenbündel mit der Absicht, die Kurve, die der Ort aller Schnittpunkte homologer Strahlen ist, zu untersuchen (s. Nr. **103**).

Zu einer Korrespondenz dieser Art gelangt man nach *L. Cremona,* Mem. Acc. Bologna (2) 2 (1863), p. 625 = Giorn. di mat. (1) 1 (1863), p. 308 = Opere 2, p. 57, durch Verallgemeinerung der „schiefen Projektion" von *J. Steiner* (vgl. Nr. **67**), also dadurch, daß man versucht, eine umkehrbar eindeutige Korrespondenz zwischen zwei voneinander verschiedenen Ebenen π, π' mit Hilfe einer zwei feste Kurven schneidenden, beweglichen Geraden festzulegen, oder mit anderen Worten, mit Hilfe der Geraden einer mit zwei Fokallinien ausgestatteten Kongruenz 1. Ordnung. Diese zwei Linien sind notwendigerweise eine Gerade und eine Kurve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit $n-2$ gemeinsamen Punkten. Für $n > 3$ ist die so zwischen π und π' entstehende Transformation von *de Jonquières* aber von besonderer Natur, da in einer jeden der zwei Ebenen $n-1$ einfache Hauptpunkte auf einer gerader Linie (auf der Geraden $\pi\pi'$) liegen.

Über die Transformationen von *de Jonquières* s. noch *K. Doehlemann,* Diss. München 1889, p. 14—22; „Geom. Transf." 2, p. 150—151; *U. Perazzo,* Mem. Acc. Torino (2) 54 (1904), p. 170; *R. Sturm,* „Geom. Verw." 4, p. 5 ff.; *A. B. Coble,* Trans. Amer. math. Soc. 24 (1922), p. 1; *L. Godeaux,* Bull. Ac. sc. Belgique (5) 9 (1923), p. 521; *Hilda P. Hudson,* „Cremona Transf.", p. 98—105; *P. Libois,* Mathesis 43 (1929), suppl., p. 13.

Eine von der Betrachtung einer Fläche n^{ter} Ordnung mit einer $(n-2)$-fachen Geraden und zwei $(n-1)$-fachen Punkten auf dieser Geraden, abgeleitete stereometrische Erzeugung der Transformation (mit Ausdehnung auf die drei- und mehrdimensionalen Räume), gab *J. F. Tinto,* Proc. math. Soc. Edinburgh 37 (1919), p. 48 an.

E. Dewulf, Ann. Éc. Norm. (3) 3 (1886), p. 405 untersuchte eine Transformation von *de Jonquières,* deren einfache Hauptpunkte dem $(n-1)$-fachen Punkte unendlich benachbart sind, und wandte sie auf Aufgaben der Kinematik an.

455) Eine Erweiterung der vorhergehenden Lösung wurde von demselben *E. de Jonquières,* Paris C. R. 101 (1885), p. 720 angegeben. Sie bezieht sich auf den Fall, daß n in der Form $n = k \cdot l$ geschrieben werden kann, wo k, l positive ganze Zahlen sind. Die Hauptpunkte des einen homaloiden Netzes sind ein $l(k-1)$-facher, $2(k-1)$ l-fache, ein $(l-1)$-facher und $2(l-1)$ einfache Punkte; die des anderen ein $k(l-1)$-facher, $2(l-1)$ k-fache, ein $(k-1)$-facher und $2(k-1)$ einfache Punkte. Zu den Transformationen von *de Jonquières* gelangt man wieder, wenn man $l = 1$ oder $k = 1$ setzt. Deutung und Erweiterungen bei *G. B. Guccia,* Paris C. R. 101 (1885), p. 808 [vgl. auch *E. de Jonquières,* Giorn. di mat. (1) 24 (1886), Anm. auf p. 9]; *F. Palatini,* Period. di mat. (3) 9 (1912), p. 133.

Mit der Lösung des oben angegebenen allgemeinen Problems beschäftigte sich vor allem *L. Cremona* in der zweiten, Anm. 429 angeführten Abhandlung. *Cremona* gab die Tabelle aller Transformationen der ersten zehn Ordnungen[456]) an, und bestimmte alle Transformationen n^{ter} Ordnung, bei denen in einer Ebene ein Hauptpunkt mit der maximalen Multiplizität $n-1$, $n-2$, $n-3$ oder $n-4$ existiert. Auf diese Weise gab *Cremona* zwei allgemeine Lösungen an, eine für gerades und eine für ungerades n; zwei andere für jeden Wert von $n \equiv 0, 1, 2$ (Mod. 3) und weitere vier für jeden Wert von $n \equiv 0, 1, 2, 3$ (Mod. 4).[457])

Mit der gleichen Aufgabe, vor allem hinsichtlich der Auflösung der Gleichungen (5) in Nr. **49** mit positiven ganzen Zahlen, beschäftigten sich speziell *F. P. Ruffini*[458]) und *E. de Jonquières.*[459]) Der letztere gab praktische Regeln an, von jeder Lösung dieser Gleichungen für einen gegebenen Wert von n die Lösungen derselben Gleichungen für höhere Werte als n[460]) abzuleiten.

---

456) Eine *L. Cremona* entgangene Lösung für $n = 8$ wurde von *A. Cayley*[457]) angegeben und ist (für $m = 3$) in einem allgemeineren Typus enthalten, wo n von der Form 2^m ist und es in jeder der beiden Ebenen ein homaloides Netz gibt, dessen Hauptpunkte drei einfache, drei Doppel-, drei vierfache, ..., drei 2^{m-1}-fache Punkte sind. Dieses letzte Netz war schon von *T. A. Hirst* in einer Mitteilung an die British Ass. vom Jahre 1865 [vgl. Report of Trans. of the British Ass. 35 (1865), Birmingham (London 1866), p. 6] erwähnt, die in Quart. J. of Math. 17 (1881), p. 301 veröffentlicht wurde. S. hierüber auch *R. Sturm,* Math. Ann. 19 (1881), Anm. auf p. 466; *G. B. Guccia,* Paris C. R. 101 (1885), p. 722—723 (mitgeteilt von *E. de Jonquières*); Rend. Circ. mat. Palermo 1 (1886), p. 68.

Die Behauptung von *S. Kantor,* Preisschrift[405]), p. 204, *L. Cremona* habe eines der homaloiden Netze für $n = 10$ ausgelassen, ist unbegründet.

457) Die Tabellen, die alle diese Ergebnisse von *L. Cremona* enthalten, sind bei *A. Cayley,* Proc. London math. Soc. (1) 3 (1870), p. 143 = Papers 7, Cambridge 1894, p. 204 wiedergegeben. Für $n = 7, 8, 9, 10$ und für die Werte von $n \equiv 1, 2$ (Mod. 3), $n \equiv 0, 1, 2, 3$ (Mod. 4) s. auch *S. Roberts,* Proc. London math. Soc. (1) 4 (1872), p. 121.

Für einige der von *L. Cremona* betrachteten Transformationen wurden von *G. B. Guccia,* Rend. Circ. mat. Palermo 1 (1885), p. 17, 20, 24, 50 die analytischen Formeln angegeben. S. auch *Cecilia Augugliaro,* „Formole analitiche di alcune trasformazioni cremoniane", Palermo 1921.

458) Mem. Acc. Bologna (3) 8 (1877), p. 457; (3) 9 (1878), p. 199; (4) 1 (1880), p. 367 [Auszüge Rend. Acc. Bologna 1876—77, p. 105; 1877—78, p. 121; 1879—80, p. 87]. Bei neuerlicher Bestimmung der homaloiden Netze 10. Ordnung traf *F. P. Ruffini* außer den von *L. Cremona* aufgefundenen Typen auf einen weiteren (den 15. Typus auf p. 483 der ersten angeführten Abhandlung), allerdings handelt es sich um eine nur arithmetische Lösung. (Vgl. Nr. **52**.)

459) Paris C. R. 101 (1885), p. 857, 921; Giorn. di mat. (1) 24 (1886), p. 1.

460) Bei *F. P. Ruffini* findet man insbesondere weitere allgemeine Lösungen

52. Fortsetzung: Untersuchungen von D. Montesano. Eine Methode, die mit Sicherheit alle geometrischen Lösungen des Problems der vorhergehenden Nr., und zwar je nur einmal liefert, wurde zuerst von *D. Montesano*[461]) angegeben. Unter Anwendung des Satzes von der Äquivalenz jeder ebenen *Cremona*schen Transformation mit einem Produkt quadratischer Transformationen (Nr. 57), gab *Montesano* ebenfalls ein einfaches Kriterium an, das erkennen läßt, ob

---

der Gleichungen (5), bei *E. de Jonquières* die Lösungen, die $n = 11, 12, 13$ entsprechen. Für $n = 11$ s. auch *D. Montesano,* Rend. Acc. Napoli (3) 11 (1905), p. 300; Atti Acc. Napoli (2) 15 (1910), Nr. 7, p. 34.

Weitere mehr geometrische Untersuchungen dieses Gegenstandes stammen von *L. Bianchi,* Giorn. di mat. (1) 16 (1878), p. 263; *F. Palatini,* Atti Ist. Ven. (7) 8 (1897), p. 1555; Period. di mat. (3) 9 (1912), p. 129; *Ines Larice,* Atti Ist. Ven. (8) 11 (1908), p. 731. Der von *L. Bianchi,* ausführlicher noch von *F. Palatini* eingeschlagene Weg zur Konstruktion der homaloiden Netze besteht in der fortgesetzten Anwendung *Cremona*scher Transformationen, insbesondere von Transformationen von *de Jonquières* (Nr. 51) und speziell von quadratischen, aufgegebene homaloide Netze. Auf diese Art findet man unter weiteren neuen auch einige der schon von *L. Cremona* und *F. P. Ruffini* angegebenen Lösungen. *Ines Larice* verwendet eine schon von *G. Veronese,* Roma Mem. Acc. Linc. (3) 19 (1884), p. 360—369 angegebene hyperräumliche Methode, nach der die homaloiden Netze der Ebene durch aufeinanderfolgende Projektionen und Schnitte der normalen (zweidimensionalen) Homaloidfläche 4. Ordnung im fünfdimensionalen Raum mit Ebenen erster und zweiter Art von dem Geradensystem der Ebene aus bestimmt werden [vgl. III C 7 (*C. Segre*), Nr. 33]. Auf diese Weise und mit Induktion von $n-1$ auf n gab *Ines Larice* insbesondere die Lösungen für $n = 14, 15$ an. — Nach *D. Montesano,* Atti Acc. Napoli (2) 15 (1910), Nr. 7, p. 5, 28 sind jedoch die von *Ines Larice* für $n = 14$ angegebenen und von *F. Palatini* in der zweiten angeführten Arbeit wieder erhaltenen nicht alle Lösungen, die die Aufgabe zuläßt. Wir bemerken noch, daß sich die zwei von *Ines Larice,* Period. di mat. (3) 6 (1909), p. 234 als neu bezeichneten allgemeinen Lösungen schon bei *F. P. Ruffini,* Mem. Acc. Bologna (3) 8 (1877), p. 499, 501 vorfinden.

Über die arithmetische Auflösung der Gleichungen von *L. Cremona* s. auch *Hilda P. Hudson,* Proc. London math. Soc. (2) 22 (1923), p. 223. Für $n = x\mu + \nu$, wo $\nu = 0, 1, \ldots, x-1$, werden hier die Fälle $x = 1, 2, 3, 4$ und auch der Fall eines beliebigen x untersucht, und nach einheitlichem Verfahren verschiedene der von den vorhergehenden Verfassern angegebenen sowie weitere neue Lösungen erhalten.

461) Rend. Acc. Napoli (3) 11 (1905), p. 259; Atti Acc. Napoli (2) 15 (1910), Nr. 7 [Auszug Rend. Acc. Napoli (3) 17 (1911), p. 146]. S. auch Rend. Acc. Napoli (3) 34 (1928), p. 42, 89, 123, wo diese Methode an vielen Beispielen erläutert wird. S. auch *B. K. Mlodziejowsky,* Moskau Math. Sammlung 31 (1922), p. 7, 35, 58, 341, wo die Methode von *D. Montesano* wiedergegeben ist und nach dieser Methode die Tabellen der homaloiden Netze für die ersten 21 Ordnungen konstruiert sind. Diese Ergebnisse stimmen mit denen von *D. Marazzo,* Diss. Napoli 1909 (nicht veröffentlicht) überein, der bis zur Ordnung 23 vordrang.

einer gegebenen arithmetischen Lösung der Gleichungen (5) von Nr. **49** in der Tat ein homaloides Netz[462]) entspricht.

Der Kürze halber nennen wir mit *D. Montesano* „*charakteristische Gruppe*" eines homaloiden Netzes n^{ter} Ordnung die Gruppe

$$G_n \equiv r_1 r_2 \ldots r_h$$

der Zahlen $r_1, r_2, \ldots, r_h$, die die Multiplizitätsordnungen der Hauptpunkte des Netzes bedeuten, also den Gleichungen (5) von Nr. **49** genügen. Gibt es ϱ Gruppen von Hauptpunkten des Netzes (Nr. **48**), die aus $k_1, k_2, \ldots, k_\varrho$ für das Netz bzw. δ_1-, δ_2-, ..., δ_ϱ-fachen Punkten zusammengesetzt sind (wo $k_i \geqq 1$), so bezeichnet man die Zahlen k_1, $k_2, \ldots, k_\varrho$ als *Koeffizienten* der charakteristischen Gruppe des Netzes. Man kann diese Gruppe mit dem Symbol

$$G_n \equiv {}^{k_1}/_{\delta_1}\ {}^{k_2}/_{\delta_2} \ldots {}^{k_\varrho}/_{\delta_\varrho}$$

bezeichnen.

Ferner bezeichnen wir als „*Cremonasche Gruppe n^{ter} Ordnung*" jede Gruppe positiver ganzer Zahlen („*Glieder*"), die den Gleichungen (5) genügen, und nennen sie, je nachdem sie charakteristische Gruppe eines homaloiden Netzes ist oder nicht, *geometrisch* oder *arithmetisch.* Die Aufgabe der Bestimmung der verschiedenen Typen homaloider Netze n^{ter} Ordnung reduziert sich auf diese Weise auf die der Bestimmung eines Systems arithmetischer Operationen, mit dem man alle geometrischen *Cremona*schen Gruppen n^{ter} Ordnung erhalten kann.

Wenn ein homaloides Netz gegeben ist, kann der Fall eintreten, daß bei besonderen geometrischen Verfahren, die auf dieses anzuwenden sind, allgemeine (von den Basispunkten des Netzes verschiedene) Punkte der Ebene ins Auge zu fassen sind. Entsprechend ist es in manchen Fällen von Vorteil, den Gliedern einer *Cremona*schen Gruppe, die größer als Null sind, andere Glieder zuzufügen, die gleich Null sind und diese, falls die Gruppe geometrisch ist, als Multiplizitätsordnungen für das entsprechende Netz, ebenso vieler von den Basispunkten verschiedener Punkte zu betrachten.

Nach diesen Voraussetzungen sei G eine *Cremona*sche Gruppe der Ordnung $n > 1$ und ein Tripel von Zahlen r_λ, r_μ, r_ν in dieser Gruppe gegeben, wo $r_\lambda \geqq r_\mu \geqq r_\nu$ ist. Ist nun die Bedingung $n \geqq r_\lambda + r_\mu$ erfüllt, und setzt man

(1) $$\varepsilon = n - (r_\lambda + r_\mu + r_\nu),$$

so ist eine neue *Cremona*sche Gruppe G' von der Ordnung $n' = n + \varepsilon$

---

462) Dieses Kriterium ist bei *R. Sturm*, „Geom. Verw." 4, p. 55 wiedergegeben.

bestimmt, die sich nur dadurch von G unterscheidet, daß an Stelle der Zahlen r_λ, r_μ, r_ν die Zahlen

$$r_\lambda' = r_\lambda + \varepsilon, \quad r_\mu' = r_\mu + \varepsilon, \quad r_\nu' = r_\nu + \varepsilon$$

auftreten.

Gehen wir umgekehrt von der Gruppe G' aus und verfahren in analoger Weise mit dem Tripel $r_\lambda', r_\mu', r_\nu'$, so erhalten wir die Gruppe G.

Die beiden Gruppen G und G' sind von gleicher Beschaffenheit, also entweder beide geometrisch oder beide arithmetisch.[463])

Gehen wir von der Gruppe G aus, so ist die für die Existenz der Gruppe G' notwendige und hinreichende Bedingung $n \geqq r_\lambda + r_\mu$ für alle Glieder r_λ, r_μ erfüllt, wenn G geometrisch, sie kann dagegen nicht erfüllt werden, wenn G arithmetisch ist.

Sind die Zahlen r_λ, r_μ, r_ν die größten Glieder der Gruppe G, so ist die Differenz (1) im wesentlichen negativ (Nr. 47). Für $n \geqq r_\lambda + r_\mu$ ist daher die Gruppe G', die sich daraus ergibt, von der Ordnung $n' < n$ und wird von *D. Montesano* als *„Ausgangsgruppe"* der Gruppe G bezeichnet. Diese heißt *„deszendent"*, von dem *Ableitungstripel* $r_\lambda', r_\mu', r_\nu'$ herrührende, Gruppe von G'.

Geht man umgekehrt von einer geometrischen *Cremona*schen Gruppe

$$G_{n'}' \equiv r_1' r_2' \ldots r_p' r_{p+1}' r_{p+2}' r_{p+3}'$$

aus, wo $r_1' \geqq r_2' \geqq \cdots \geqq r_p'$, $r_{p+1}' = r_{p+2}' = r_{p+3}' = 0$, so bilden drei von r_1' verschiedene Glieder $r_\lambda', r_\mu', r_\nu'$ ein Ableitungstripel in der Gruppe, wenn für $r_\lambda' \geqq r_\mu' \geqq r_\nu' \geqq 0$ $n' - r_1' \geqq r_\lambda' + r_\mu'$ ist. Auf ähnliche Weise bildet das Glied r_1' mit den Gliedern r_μ', r_ν' ein Ableitungstripel, wenn für $r_\mu' \geqq r_\nu'$ $n' - r_1' - r_2' \geqq r_\mu'$ ist. So ist die Konstruktion der vorhergenannten Tripel und dadurch die aller Gruppen G möglich, die sich aus der gegebenen Gruppe G' durch Deszendenz ergeben.

Geht man nun von der *Cremona*schen Gruppe erster Ordnung $G_1 \equiv 000$ aus und konstruiert ihre deszendente Gruppe, so erhält man die Gruppe zweiter Ordnung; bildet man die deszendenten Gruppen dieser Gruppe, so befindet sich darunter die Gruppe dritter Ordnung; konstruiert man wiederum die deszendenten Gruppen dieser Gruppe, so befinden sich unter diesen und den schon vorher erhaltenen Gruppen die Gruppen vierter Ordnung, und so weiter fort.

463) Genauer: Ist die Gruppe G geometrisch, so verwandelt sich ein homaloides Netz Ω mit der charakteristischen Gruppe G in ein homaloides Netz Ω' mit der charakteristischen Gruppe G' durch eine quadratische Transformation T, deren Hauptpunkte in der Ebene von Ω in drei vielfache Punkte der Ordnungen r_λ, r_μ, r_ν fallen: in diesem Falle sind die Hauptpunkte von T in der Ebene von Ω' von der Vielfachheit $r_\lambda', r_\mu', r_\nu'$. Und umgekehrt.

Zusammenfassend können wir also aussagen, daß die geometrischen *Cremona*schen Gruppen n^{ter} Ordnung sich, jede ein einziges Mal, unter den Gruppen vorfinden, die aus den geometrischen Gruppen der Ordnungen $\left[\frac{n+1}{2}\right], \ldots, n-1$ durch Deszendenz hervorgehen, und daher mit diesen letzten als bekannt betrachtet werden können.

Außerdem ist man nun imstande zu entscheiden, ob eine gegebene *Cremona*sche Zahlengruppe G_n geometrisch ist oder nicht. Es genügt die aufeinanderfolgende Konstruktion der Ausgangsgruppe von G_n, der Ausgangsgruppe der so erhaltenen Gruppe, und so weiter fort. Gelangen wir durch diese Konstruktion bis zur Gruppe erster Ordnung, so ist die gegebene Gruppe geometrisch; bleibt sie dagegen bei einer Gruppe höherer Ordnung als eins stehen, die keine Ausgangsgruppe zuläßt, weil die Ordnung niedriger als die Summe der beiden ersten Glieder wird, so ist die gegebene Gruppe arithmetisch. Im ersten Falle wird auch ein System quadratischer Transformationen bestimmt, die, wenn man sie nacheinander ausführt, vom Geradennetz einer Ebene zu einem homaloidischen Kurvennetz führen, dessen charakteristische Gruppe die gegebene Gruppe ist.

Die vorhergehende Methode beruht auf der Reduktion eines homaloiden Netzes auf ein Geradennetz durch aufeinanderfolgende quadratische Transformationen, deren jede die größte Erniedrigung in der Ordnung des Netzes bewirkt. Eine zweite, ebenfalls von *D. Montesano*[464]) herrührende Methode beruht auf der gleichen Reduktion, die aber mit Hilfe aufeinanderfolgender isologischer Transformationen (Nr. **51**), deren jede die größte Erniedrigung des Netzindexes bewirkt, durchgeführt wird.[464a])

---

464) Rend. Acc. Napoli (3) 11 (1905), p. 259.

464 a) Eine birationale Korrespondenz zwischen den Punkten zweier Ebenen kann man als Produkt von aufeinanderfolgenden quadratischen Korrespondenzen betrachten; das kann in der Weise geschehen, daß unter den geometrischen *Cremona*schen Gruppen ein Zusammenhang von Aufeinanderfolgen festgelegt wird, auf Grund dessen jede Gruppe G eine einzige Ursprungsgruppe Γ zuläßt, während aus jeder Gruppe Γ bestimmte Gruppen G folgen.

Nun kann eine birationale Korrespondenz zwischen den Punkten zweier Ebenen auch als Produkt von aufeinanderfolgenden isologischen Korrespondenzen von veränderlicher Ordnung betrachtet werden, die nach bestimmtem Gesetz aufeinanderfolgen, derart, daß entsprechend jede geometrische *Cremona*sche Gruppe auf eine einzige Weise ein Produkt von isologischen Gruppen ergibt.

Dadurch werden zwischen den geometrischen *Cremona*schen Gruppen zu den vorhergehenden analoge Zusammenhänge von Aufeinanderfolgen festgelegt, auf Grund deren jede Gruppe eine einzige Ursprungsgruppe zuläßt, während aus jeder Gruppe bestimmte geometrische Gruppen folgen.

D. Montesano bezeichnet als *Index* eines homaloiden Netzes, oder der entsprechenden *Cremona*schen Gruppe, die Differenz zwischen der Ordnung und der größten Zahl der Gruppe, und zeigt, daß ein homaloides Netz vom Index i, dessen Hauptpunkte sich in allgemeiner Lage befinden, immer durch aufeinanderfolgende, wohl bestimmte isologische (Nr. **51**) Transformationen, deren Anzahl nicht größer als i ist, in ein Geradennetz transformiert werden kann.

Allgemeiner spricht man nach *D. Montesano* davon, daß eine geometrische *Cremona*sche Gruppe n^{ter} Ordnung in einem Punkt P der Ebene von der *Klasse* k ist, wenn k die Differenz zwischen n und der Multiplizität des homaloidischen Netzes in P ist. Der Index der Gruppe ist also nichts anderes als die Minimalklasse dieser Gruppe.

Dieses verausgesetzt, führt *D. Montesano*, um zu der Bestimmung aller ebenen birationalen Transformationen zu gelangen, den von *L. Cremona*[465]) für $k = 1, 2, 3, 4$ eingeschlagenen Weg weiter, verfolgte also die Bestimmung aller Typen von Transformationen, die ein gewisses Geradenbüschel der einen Ebene in ein Kurvenbüschel gegebener Ordnung k der andern verwandeln, oder, was dasselbe ist, die Konstruktion aller *Cremona*schen Gruppen gegebener Klasse k.

Hat man eine Gruppe G_n von der Klasse k, die also ein Glied r, für welches $n - r = k$ ist, enthält, und ist keiner oder nur ein einziger ihrer übrigen Glieder gleich k, so bezeichnet man diese Gruppe als *einfach* in dem Glied r; kommt noch dazu, daß die restlichen Glieder der Gruppe die Zahl $\frac{k}{2}$ nicht übersteigen, so heißt die Gruppe *primitiv* in dem Glied r. *D. Montesano* beweist nun, daß sich die ∞^1 *Cremona*schen Gruppen einer gegebenen Klasse k in Systeme zerlegen lassen, die durch wohl bestimmte isologische Transformationen von den einfachen Gruppen dieser Klasse abgeleitet werden können. Diese einfachen Gruppen existieren in endlicher Anzahl und lassen sich ihrerseits durch wohl bestimmte isologische Transformationen von den primitiven Gruppen der Klasse k ableiten, so daß sich die Bestimmung der geometrischen Gruppen der Klasse k auf die Konstruktion der primitiven Gruppen dieser Klasse reduziert.

Diese Konstruktion läßt sich mit Hilfe der einfachen Gruppen niedrigerer Klasse durchführen; daher erhält man, wenn man von den

---

D. Montesano, Roma Rend. Acc. Linc. (6) 11 (1930), p. 872 und 1069, hat die Beziehungen, welche zwischen den genannten Deszendenzen bestehen, und die Eigenschaften, durch die sie charakterisiert werden, studiert. Hinweise auf diese Eigenschaften findet man in den in Anm. 461 zitierten Arbeiten von *D. Montesano* und *B. K. Mlodziejowsky.*

465) S. die zweite in Anm. 429 angeführte Abhandlung.

Gruppen der Klasse 1 ausgeht, die die isologischen Gruppen sind, nacheinander die *Cremona*schen Gruppen der Klassen 2, 3, 4, ... Auf diese Weise erhält man auch ein Mittel zur Bestimmung der verschiedenen Typen von Gruppen gegebener Ordnung n, da sich die Bestimmung dieser Typen unmittelbar durchführen läßt, wenn die einfachen Typen der Klasse $1, 2, \ldots, \left[\frac{2n-1}{3}\right]$[466]) bekannt sind.

Eine geometrische *Cremona*sche Gruppe der Klasse 2 ist vom Typus

$$G_n \equiv {}^1/_{n-2}\ {}^{n-2}/_2\ {}^3/_1$$

für willkürliches n, während die konjugierte Gruppe (Nr. **51**) vom Typus

$$G_n \equiv {}^3/_{\frac{n}{2}}\ {}^1/_{\frac{n-2}{2}}\ {}^{n-2}/_1, \qquad \text{wenn } n \text{ gerade ist,}$$

vom Typus
$$G_n \equiv {}^1/_{\frac{n+1}{2}}\ {}^3/_{\frac{n-1}{2}}\ {}^{n-2}/_1 \text{ ist, wenn } n \text{ ungerade ist.}$$

D. Montesano[467]) beweist, daß die Ordnung n einer birationalen Korrespondenz zwischen zwei Ebenen immer größer als die Anzahl h der Hauptpunkte einer jeden Ebene ist. Eine Ausnahme bilden nur die isologischen Korrespondenzen, die durch die geometrischen *Cremona*schen Gruppen der Klasse 2 bestimmten und einige von *D. Montesano* konstruierte spezielle Korrespondenzen der Ordnung $\leqq 13$, für die die Anzahl der Hauptpunkte gleich der Ordnung ist oder sie um eine Einheit übersteigt.

Eines der speziellen Probleme, die in Verbindung mit den in dieser und der vorhergehenden Nr. behandelten Aufgaben gestellt werden können, ist die Bestimmung aller aus einem oder mehreren untereinander gleichen Zahlensystemen zusammengesetzten geometrischen *Cremona*schen Gruppen.

Im einfachsten Falle besteht die Gruppe nur aus gleichen Zahlen. Man findet leicht, daß es nur vier derartige Gruppen (*symmetrische Gruppen*) gibt, wo jede zu sich selbst konjugiert ist. Die entsprechenden homaloiden Netze sind 2. Ordnung mit 3 einfachen Punkten, 5. Ordnung mit 6 Doppelpunkten, 8. Ordnung mit 7 dreifachen Punkten, 17. Ordnung mit 8 sechsfachen Punkten.[468])

---

466) *D. Montesano*[464]) führt die Bestimmung der einfachen Gruppen der ersten sieben Klassen, der primitiven der ersten neun Klassen, und mit Hilfe der ersten die Bestimmung der homaloiden Netze 11. Ordnung vollständig durch.

467) Atti Acc. Napoli (2) 15 (1911), Nr. 7, p. 26.

468) Die drei ersten Netze finden sich schon in den Tabellen von *L. Cremona* vor (Anm. 429, 456, 457); das vierte bei *E. Bertini,* Ann. di mat. (2) 8 (1877), p. 273

Die *halbsymmetrischen Gruppen* sind aus Zahlen zusammengesetzt, von denen ein Teil untereinander gleich, der Rest ebenfalls untereinander gleich, von den ersten Zahlen jedoch verschieden ist; sie werden von *D. Montesano*[469]) angegeben und zerfallen in von ihm konstruierte wohlbestimmte Systeme.[470])

Den oben erwähnten symmetrischen Gruppen kann man die *asymmetrischen Gruppen* entgegenstellen, die aus voneinander ganz verschiedenen Zahlen bestehen. Die (nur für $n \leqq 23$ existierende) von der Minimalordnung[471]) ist folgende[472]):

$$G_{23} = 12, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2.$$

53. Bestimmung der konjugierten Lösung zu einer gegebenen Lösung der Gleichungen von L. Cremona. Die Sätze von *L. Cremona* in Nr. **50**, insbesondere der Satz über die *Jacobi*sche Kurve eines homaloiden Netzes, eignen sich gut zur Bestimmung der einer gegebenen

in seinen Untersuchungen über die involutorischen Transformationen (Nr. **61**). Daß es keine weiteren symmetrischen Gruppen gibt, läßt sich aus den Gleichungen (5) in Nr. **49** leicht ableiten. Vgl. *D. Montesano,* Rend. Acc. Napoli (3) **11** (1905), p. 271—272; Atti Acc. Napoli (2) **15** (1910), Nr. 7, p. 6—7; unvollständig bei *F. P. Ruffini,* Mem. Acc. Bologna (3) 8 (1877), p. 462.

469) Rend. Acc. Napoli (3) **24** (1918), p. 31; Auszug daselbst (3) **21** (1915), p. 248.

470) Unter den bemerkenswertesten ist die den Transformationen von *de Jonquières* entsprechende sowie eine weitere, schon von *F. P. Ruffini,* Mem. Acc. Bologna (3) 8 (1877), p. 499 gefundene Gruppe, deren zugehöriges homaloides Netz die Ordnung $2n+1$ besitzt und mit 4 n-fachen Punkten sowie n Doppelpunkten ausgestattet ist, wo n eine beliebige, aber von 2 verschiedene positive ganze Zahl ist.

Fay Farnum, Amer. J. of math. **50** (1928), p. 357 [Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) **32** (1926), p. 598] und *Ch. C. Torrance,* a. a. O., **53** (1931), p. 911 [Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) **37** (1931), p. 171] bestimmten verschiedene Typen *triadischer* Transformationen, d. h. solche, bei denen in jeder der beiden Ebenen drei und nur drei Gruppen von Hauptpunkten mit gleicher Multiplizität existieren.

471) *P. de Martino,* Giorn. di mat. (3) **21** (1930), p. 130 [1925] bewies, daß die Ordnung einer asymmetrischen geometrischen *Cremona*schen Gruppe höher als 22 ist und mindestens 9 Glieder besitzt.

472) Die Existenz asymmetrischer Gruppen schien *A. Clebsch*[440]), p. 493, unmöglich; Beispiele dafür finden sich jedoch in den Tafeln der Preisschrift von *S. Kantor,* Atti Acc. Napoli (2) 3 (1891), Nr. 7; (2) 4 (1892), Nr. 2 [1883]; Auszug J. f. Math. **114** (1895), p. 50; Notiz Paris C. R. **100** (1885), p. 95 [1883]. — *D. Montesano,* Rend. Acc. Napoli (3) **11** (1905), p. 302—303; Atti Acc. Napoli (2) **15** (1910), Nr. 7, p. 29—32, konstruiert unendlich viele solcher Gruppen, insbesondere die der Minimalordnung. Die charakteristische Tafel dieser letzten wurde von *D. Montesano,* Rend. Acc. Napoli (3) **34** (1928), p. 42 konstruiert.

Eine andere beachtenswerte, aus neun aufeinanderfolgenden Zahlen zusammengesetzte asymmetrische Gruppe ist folgende:

$$G_{31} \equiv 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6.$$

Lösung der Fundamentalgleichungen von *L. Cremona* konjugierten (Nr. **51**) Lösung.

Ist nämlich ein homaloides Netz n^{ter} Ordnung in einer Ebene π, also die Lage und Multiplizitäten seiner Basispunkte gegeben, so müssen wir, um die birationale Transformation zu konstruieren, die durch das Netz bestimmt ist, die Hauptkurven kennen, die in π existieren. Es genügt daher, die Zahl n in zwei Teile n_1, n_2 zu teilen und zu versuchen, eine Kurve des homaloidischen Netzes aus zwei Komponenten mit den Ordnungen n_1, n_2 zu bilden, deren eine, infolge der in den Basispunkten angegebenen Multiplizitäten fest, deren andere in einem Büschel veränderlich ist. Die erste wird also eine Hauptkurve sein. Indem wir nun alle möglichen Teilungen der Zahl n so lange durchführen, bis die Summe der Ordnungen der gefundenen Kurven $3(n-1)$ ist, erhalten wir auf diese Weise die *Jacobi*sche Kurve des Netzes.

Zu einer Methode für die Bestimmung der konjugierten Lösung einer gegebenen Lösung gelangte *D. Montesano*[473]) auf anderem Wege durch das Studium des Produktes zweier birationaler Korrespondenzen zwischen den Ebenen π, π' und zwischen den Ebenen π', π'', auch für den Fall, daß diese auf π' gemeinsame Hauptpunkte oder Hauptkurven haben.

Als *charakteristische Tafel* der Transformation bezeichnet man die Tafel Q, die die Matrix der linken Seite der Formel (5) in Nr. **50** bildet. Diese erweitert sich auf einen weder zur Basisgruppe des einen noch zu der des anderen homaloiden Netzes gehörigen Punkt (und auf ähnliche Weise auf zwei oder mehrere Punkte) und seine Umgebung, unter Zufügung eines Paares von *Parasitenlinien*, und zwar einer horizontalen und einer vertikalen, die das Glied -1 gemeinsam haben, während alle anderen gleich Null sind.

Leiten wir nun von dem homaloiden Netz Ω ein homaloides Netz Ω' durch eine quadratische Transformation ab, deren Hauptpunkte in der Ebene π von Ω bzw. die Multiplizitäten r_λ, r_μ, r_ν für Ω haben, so erhalten wir die charakteristische Tafel Q' von Ω', indem wir eventuell an Q ein, zwei oder drei Paare von Parasitenlinien anfügen, und mit den vertikalen Linien von Q, deren erste Glieder die Zahlen $n, r_\lambda, r_\mu, r_\nu$ sind, die Operationen ausführen, durch die wir aus den erwähnten Zahlen der charakteristischen Gruppe (Nr. **52**) von Ω die Zahlen $n', r'_\lambda, r'_\mu, r'_\nu$ der charakteristischen Gruppe von Ω' erhalten.

---

473) Rend. Acc. Napoli (3) **21** (1915), p. 30, 69, 113. Nach dieser Methode hatte schon *C. Jung*[442]) zwei Formeln der Theorie bewiesen.

Aus dieser Eigenschaft folgt, daß es für die Konstruktion der charakteristischen Tafel eines homaloiden Netzes, dessen charakeristische Gruppe

$$G_n \equiv r_1 r_2 \ldots r_h$$

bekannt sei, genügt, von der charakteristischen, mit h Paaren von Parasitenlinien ausgestatteten, Tafel

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & -1 \end{array}$$

des Netzes erster Ordnung auszugehen und auf den Vertikalen dieser Tafel die gleichen (durch die Gruppe G_n wohlbestimmten) Operationen auszuführen, durch die man aus den Zahlen $1, 0, \ldots, 0$ der Gruppe G_1 die Zahlen $n, r_1, r_2, \ldots, r_h$ der Gruppe G_n[474]) erhält.

D. Montesano[473]) betrachtet die Transformation, die das Produkt zweier gegebener Transformationen zwischen den Ebenen π, π' und zwischen den Ebenen π', π'' ist, und zwar für den allgemeinsten Fall, daß die zwei Transformationen in der Ebene π' eine gewisse Anzahl gemeinsamer Hauptpunkte besitzen und aus der Koinzidenz solcher Hauptpunkte ohne weiteres die Koinzidenz von Hauptkurven der einen Transformation mit Hauptkurven der andern folgt. Insbesondere nimmt *Montesano* an, daß eine der beiden Transformationen die Umkehrung des Typus der anderen sei und, daß sie in der Ebene π' dieselben Hauptpunkte $O_1, O_2, O_3, \ldots, O_h$ besitzen, die für die eine Transformation von der Vielfachheit $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_h$, für die andere von der Vielfachheit $r_2, r_1, r_3, \ldots, r_h$ sind.

Mittels dieser speziellen Produktkorrespondenzen beweist *D. Montesano* alle in Nr. 50 wiedergegebenen Sätze von *A. Clebsch*, *L. Cremona*

474) *D. Montesano*, Rend. Acc. Napoli (3) 34 (1928), p. 123 teilt die geometrischen *Cremona*schen Gruppen derart in Serien, daß sich zwei Gruppen ein und derselben Serie nur durch die (in arithmetischer Progression zunehmende) Ordnung, durch das größte Glied (das in einer arithmetischen Progression, die die gleiche Differenz ε wie die erste hat, zunimmt) und durch die Anzahl der Glieder, die gleich ε sind und die zweite Stelle einnehmen (eine Zahl, die der Reihe nach die Werte 1, 3, 5, 7, ... oder die Werte 2, 4, 6, 8, ... annimmt) unterscheiden.

D. Montesano konstruiert die charakteristische Tafel der allgemeinen Gruppe irgendeiner beliebigen Serie und gelangt auf diese Weise zu einer Vereinfachung der Operationen, die bei der Durchführung der Konstruktion der charakteristischen Tafel der Transformationen von einer Ordnung die kleiner oder gleich einer gegebenen Zahl ist, in Frage kommen. Er macht Anwendung hiervon auf die Werte $n = 2, 3, \ldots, 7$.

und *E. Bertini* und stellt weitere neue auf. Insbesondere erhält er den Lehrsatz von *L. Cremona* über die Gleichheit der Zahlen $x_1, x_2 \ldots, x_{n-1}$ und $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$.[475])

D. Montesano[476]) gibt auch ein Verfahren für die Konstruktion der konjugierten geometrischen *Cremona*schen Gruppe einer gegebenen geometrischen Gruppe ohne Konstruktion der auf die zwei Gruppen bezüglichen charakteristischen Tafel.

54. Entsprechende Kurven in einer birationalen ebenen Korrespondenz. Mit Hilfe der Zahlen n, r_i, s_i, α_{ik} in Nr. 50 können die Ordnung der Kurve, die in einer Ebene zu irgendeiner beliebigen, in der anderen Ebene gegebenen Kurve korrespondiert, sowie ihre Multiplizitäten in den Hauptpunkten der eigenen Ebene leicht angegeben werden. Ist z. B. in der Ebene π eine Kurve C gegeben, die die Ordnung m und in den r_1-fachen, r_2-fachen, ..., r_h-fachen Hauptpunkten die Multiplizitäten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$ hat, so setzt sich die korrespondierende Kurve in π' aus den $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$-mal gezählten Hauptkurven der Ordnungen $r_1, r_2, \ldots, r_h$ und einer Kurve C' zusammen, deren Ordnung m' wir erhalten, wenn wir die veränderlichen Schnittpunkte von C mit den Kurven des homaloiden Netzes von π aufsuchen. Diese Ordnung ist daher

$$m' = mn - \sum_{i=1}^{h} \lambda_i r_i. \tag{1}$$

Die Multiplizitäten von C' in den Hauptpunkten von π' sind

475) Nach den Bezeichnungen von *D. Montesano* besagt dieser Satz von *L. Cremona*, daß zwei untereinander konjugierte geometrische *Cremona*sche Gruppen gleiche Koeffizienten haben. Der umgekehrte Lehrsatz gilt nicht. Daher ist, wie *D. Montesano*[473]) bemerkt hat, im Gegensatz zu einer Vermutung von *A. Cayley*[457]), p. 146 = Papers 7, p. 207, die er nach der Prüfung für die ersten zehn Werte von n gezogen hatte, die Bedingung der Gleichheit der Koeffizienten zwar notwendig, aber nicht hinreichend dafür, daß zwei geometrische *Cremona*sche Gruppen ein und derselben Ordnung untereinander konjugiert sind. Die Existenz von mehr als zwei mit denselben Koeffizienten ausgestatteten Gruppen G_n wird von $n = 12$ ab realisiert.

476) Rend. Acc. Napoli (3) 34 (1928), p. 42. S. auch *B. K. Mlodziejowsky*, Moskau math. Sammlung 31 (1922), p. 35.

Das Verfahren von *D. Montesano* beruht auf folgender Bemerkung. Ist in einer Ebene ein homaloides Kurvennetz gegeben, so betrachte man in der Ebene das Geradennetz und unterwerfe beide Netze aufeinanderfolgenden quadratischen Transformationen, die fortschreitend die größtmögliche Reduktion der Ordnung des ersten oder der Ordnungen der von ihm abgeleiteten Netze zur Folge haben. Auf diese Weise erreicht man die Transformation des gegebenen Netzes in ein Geradennetz und des gegebenen Geradennetzes in ein neues homaloides Netz, das gerade das konjugierte Netz zu dem ersten ist.

gleich der Anzahl der veränderlichen Schnitte von C mit den entsprechenden Hauptkurven von π; daher hat die Kurve C' in dem s_k-fachen Hauptpunkte die Multiplizität

$$\lambda_k' = m s_k - \sum_{i=1}^{h} \alpha_{ik}\lambda_i. \tag{2}$$

Zwischen den Zahlen $m, m', \lambda_i, \lambda_i'$ gelten die Beziehungen[477])

$$\begin{cases} 3m - \sum \lambda_i = 3m' - \sum \lambda_i', \\ m^2 - \sum \lambda_i^2 = m'^2 - \sum \lambda_i'^2. \end{cases} \tag{3}$$

Außerdem ergibt sich für zwei einander zugeordnete Gruppen von Hauptpunkten (Nr. 48) von π und π' die Eigenschaft, daß sich die Multiplizitäten der Punkte der zweiten Gruppe für die Kurve C' aus den Multiplizitäten der Punkte der ersten Gruppe für die Kurve C herleiten, wenn man zu diesen Multiplizitäten ein und dieselbe Zahl addiert oder sie von ein und derselben Zahl subtrahiert, je nachdem die Zuordnung der zwei Punktgruppen negative oder positive Signatur hat.[478])

Besitzt die Kurve C in zwei oder mehr Punkten der ersten Gruppe ein und dieselbe Multiplizität, so folgt daraus, daß die Kurve C' ein und dieselbe Multiplizität in den Punkten der zweiten Gruppe hat, die den ersten Punkten zugeordnet sind.[479])

55. Lineare Transformation mit ganzen Koeffizienten in Zuordnung zu einer ebenen Cremonaschen Transformation. In Verbindung mit seinen Untersuchungen über die periodischen ebenen birationalen Transformationen und die diskontinuierlichen endlichen Gruppen ebener birationaler Transformationen (Nr. **63**), vertieft *S. Kantor*[480]) vom arithmetischen Gesichtspunkt aus das Studium der Beziehungen (1) und (2) der vorhergehenden Nr., indem er bemerkt, daß sie eine lineare Transformation mit ganzzahligen Koeffizienten der Größen $m, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$ in die Größen $m', \lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_h'$ ausdrücken. Insbesondere bemerkt er, daß aus der, durch die Gleichungen (3) ausgedrückten Eigenschaft der Invarianz der linearen Form

477) *D. Montesano,* Rend. Circ. mat. Palermo 31 (1911), p. 363. Hieraus folgt für $m = m'$, daß $\sum \lambda_i = \sum \lambda_i'$, $\sum \lambda_i^2 = \sum \lambda_i'^2$ ist, zwei Formeln, die schon von *K. Doehlemann,* Math. Ann. 39 (1891), p. 569 angegeben wurden.

478) S. *D. Montesano*[477]), der dadurch zu diesem Satz und den Formeln im Text gelangte, daß er eine ebene birationale Transformation als Produkt mehrerer quadratischer Transformationen (Nr. 57) betrachtete.

479) Diese Eigenschaft wurde schon von *S. Roberts*[457]), p. 128 bemerkt.

480) S. [438]), p. 32 ff. [J. f. Math. 114 (1895), p. 55 ff.]. Vgl. *J. L. Coolidge,* „Alg. pl. curves", p. 483—488.

$3m - \sum \lambda_i$ und der quadratischen Form $m^2 - \sum \lambda_i^2$ die Gleichungen (1), (2), (3) und (4) in Nr. **50** folgen.

Durch die Betrachtung dieser linearen Transformation wurde *A. B. Coble*[481]) zu Untersuchungen veranlaßt, die für die Anwendung der *Cremona*schen Transformationen auf die Analysis und die Geometrie Bedeutung haben.

Sind P_m^2 und Q_m^2 zwei geordnete Reihen von m Punkten $p_1, p_2, \ldots, p_m$ und $q_1, q_2, \ldots, q_m$ auf zwei Ebenen, so bezeichnet man sie nach *A. B. Coble* als *kongruent* in bezug auf eine zwischen den zwei Ebenen gegebene birationale Transformation T, wenn $p_1 q_1, p_2 q_2, \ldots, p_\varrho q_\varrho$ Paare von Hauptpunkten von T in den zwei Ebenen und $p_{\varrho+1} q_{\varrho+1}, \ldots, p_m q_m$ $m - \varrho$ allgemeine Paare homologer Punkte in T sind (so daß $m \geqq \varrho$). Die Reihe P_m^2 hat $2(m-4)$ projektive Invarianten und kann daher durch einen Punkt P eines $2(m-4)$-dimensionalen linearen Raumes Σ dargestellt werden. Die $m!$ Permutationen der m Punkte von P_m^2 führen auf $m!$ Punkte P von Σ, die in einer *Cremona*schen Gruppe $G_{m!}$ konjugiert sind.

Gehen wir von einer Reihe P_m^2 zu einer kongruenten Reihe Q_m^2 über, deren Bild in Σ ein Punkt Q ist, so entsteht in Σ eine *Cremona*sche Transformation mit P und Q als homologen Punkten. Alle Reihen Q_m^2, die mit einer gegebenen Reihe P_m^2 in irgendeiner Ordnung kongruent sind, sind dann in Σ durch Punkte Q dargestellt, die konjugiert sind in einer erweiterten *Cremona*schen Gruppe $G_{m,2}$, die die Gruppe $G_{m!}$ als Untergruppe enthält und (holoedrisch, außer wenn zwei kongruente Punktgruppen projektiv sind) isomorph ist mit der Gruppe $g_{m,2}$ von Transformationen des Typus, der durch (1) und (2) der vorhergehenden Nr. (in $m+1$ homogenen Veränderlichen) ausgedrückt ist.

Die Gruppe $G_{m,2}$ ist diskontinuierlich unendlich für $m \geqq 9$; für $m = 6, 7, 8$ ergeben sich dagegen drei endliche Gruppen $G_{6,2}, G_{7,2}, G_{8,2}$ bzw. der Ordnungen 6! 72, 7! 288, 8! 8640, die mit der Gruppe der 27 Geraden einer allgemeinen kubischen Fläche [vgl. III C 10a (*W. Fr. Meyer*), Nr. 22], der Gruppe der 28 Doppeltangenten einer allgemeinen ebenen Kurve 4. Ordnung und der Gruppe der 120 Tritangential-Ebenen einer Raumkurve 6. Ordnung vom Geschlecht 4 auf einem Kegel 2. Ordnung isomorph sind.[482])

481) Trans. Amer. math. Soc. 16 (1914), p. 155; 17 (1915), p. 345; Auszüge Bull. Amer. math. Soc. (2) 20 (1914), p. 513; Proc. Nation. Ac. of Sciences 1 (1915), p. 245; 2 (1916), p. 244, 575. Vgl. auch *A. B. Coble,* „Alg. geom.", p. 9—24.

482) Die Gruppe $G_{7,2}$ wurde weiter von *C. C. Bramble,* Amer. J. of math. 40 (1918), p. 351 studiert; die Gruppen $G_{6!}$ und $G_{6,2}$ von *H. L. Black,* Ann. of math. (2) 28 (1927), p. 433.

A. B. Coble[483]) erhielt, indem er insbesondere annahm, daß die Reihe P_m^2 zu einer elliptischen Kurve 3. Ordnung gehöre und indem er diese in Parameterform durch elliptische Funktionen [III C 5 (*G. Kohn*), Nr. **36**] darstellte, eine andere Kollineationsgruppe $e_{m,2}$, isomorph zu $g_{m,2}$ und $G_{m,2}$; und er machte davon Gebrauch für das Studium von P_9^2, die der erste auf eine unendliche Gruppe führende Fall ist.

Erweiterungen und Anwendungen auf die Algebra und Geometrie s. Nr. **91**.

56. Cremonasche Äquivalenz zweier algebraischer ebener Kurven. Als eine Umkehrung des in der Nr. **54** behandelten Problems kann man die Frage der *Cremona*schen Äquivalenz zweier algebraischer ebener Kurven betrachten, bei der es sich darum handelt, zu entscheiden, wann zwei gegebene algebraische ebene Kurven durch eine *Cremona*sche Transformation zwischen ihren Ebenen voneinander abgeleitet werden können. Hierüber liegen aber bis jetzt nur Teilergebnisse vor, die sich von der Betrachtung der aufeinanderfolgenden *adjungierten Systeme*[484]) einer gegebenen Kurve herleiten. Die aufeinanderfolgenden einer ebenen Kurve adjungierten Kurven sind nämlich in bezug auf *Cremona*sche Transformationen Kovarianten dieser Kurve, wenn man von einfachen oder mehrfachen Hauptkurven absieht, die die Transformation als feste Teile hinzufügen kann.

Soll eine rationale Kurve durch eine *Cremona*sche Transformation in eine Gerade transformiert werden, so ist es notwendig und hinreichend, daß ihre adjungierten Systeme aller Indizes fehlen. Das Fehlen der adjungierten Systeme aller höheren Indizes als der Einheit ist dagegen notwendige und hinreichende Bedingung für die Transformierbarkeit einer irreduziblen Kurve vom Geschlecht $p = 1, 2, 3, 4, 5$ bzw. in eine Kurve C^3, eine C^4, eine C^4 oder eine C^5 mit dreifachem Punkt, eine C^5 oder auch eine C^6 mit vierfachem Punkte, eine C^5 oder eine C^7 mit fünffachem Punkte. Mit C^n bezeichnet man dabei eine Kurve n^{ter} Ordnung. Für $p = 3, 4, 5$ tritt der zweite oder der erste der angegebenen beiden Fälle ein, je nachdem die adjungierten Systeme vom Index 1 aus den Kurven eines Büschels gebildet sind oder nicht.

Sind zwei Kurven frei von allen adjungierten Systemen, deren Indizes höher als die Einheit sind, so ist eine eineindeutige Korre-

483) Trans. Amer. math. Soc. 17 (1915), p. 370.

484) Vgl. III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **27**, **37**. S. auch *F. Enriques* und *O. Chisini*, „Lezioni" 3, p. 177—187.

spondenz zwischen ihren Punkten in einer *Cremona*schen Transformation zwischen ihren Ebenen enthalten.[485])

57. Zerlegung einer ebenen birationalen Transformation in Faktoren. Große Bedeutung gewinnen die quadratischen Transformationen (Nr. **66**—**71**) vor allem durch die Tatsache, daß die von

485) Über die vorhergehenden Sätze s. *G. Marletta,* Rend. Circ. mat. Palermo 24 (1907), p. 229; der auf $p=0$ bezügliche Satz schon bei *G. Castelnuovo* und *F. Enriques,* ebenda 14 (1900), p. 302; die auf $p=0,1$ bezüglichen Sätze schon bei *G. Ferretti,* ebenda 16 (1902), p. 263—264. Vgl. auch *M. Gaba,* Bull. Amer. math. Soc. (2) 15 (1908), p. 208; *F. Enriques* und *O. Chisini,* „Lezioni" 3, p. 187—191; *J. L. Coolidge,* „Alg. pl. curves", p. 396—399 und 404; und für $p=0$ *E. Bertini,* Giorn. di mat. (1) 15 (1877), p. 329; *H. S. White,* Bull. Amer. math. Soc. (2) 12 (1905), p. 157.

Weitere Eigenschaften finden sich bei *G. Marletta,* Rend. Ist. Lomb. (2) 43 (1910), p. 781.

S. auch *S. Cherubino,* Rend. Ist. Lomb. (2) 48 (1915), p. 993, 1026.

Über den Fall einer Kurve C^6 6. Ordnung mit 10 Knotenpunkten, die ist die rationale ebene Kurve der Minimalordnung, die durch irgendeine *Cremona*sche Transformation nicht in eine Gerade transformiert werden kann, s. *Hilda P. Hudson,* Proc. London math. Soc. (2) 15 (1916), p. 385; *A. B. Coble,* Amer. J. of math. 41 (1919), p. 243 [Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 25 (1919), p. 388], letzterer fand auch, daß durch eine *Cremona*sche Transformation eine derartige Kurve C^6 in genau $2^{13}\cdot 31\cdot 51$ projektiv verschiedene Kurven 6. Ordnung transformiert werden kann. Vgl. auch *A. B. Coble,* Amer. J. of math. 46 (1924), p. 143 [Auszüge Proc. Nat. Ac. of Sciences 7 (1921), p. 245, 334; 9 (1923), p. 183]; „Alg. geom.", p. 75, 223—225. S. ferner, auch in Verbindung mit dem *Cayley*schen Symmetroid [III C 10b (*W. Fr. Meyer*), Nr. **62**], *A. B. Coble,* Proc. intern. Math. Congress Toronto 1924 (Toronto 1928), 1, p. 924; „Alg. geom.", p. 235—262. Vgl. Anm. 780 und 828.

Ein System von Invarianten einer algebraischen ebenen Kurve bezüglich der *Cremona*schen Transformationen ihrer Ebene erwähnt *A. B. Coble,* Bull. Amer. math. Soc. (2) 34 (1928), p. 142.

Aus einem anderen Satz, der eine hinreichende Bedingung dafür angibt, daß eine umkehrbar eindeutige Korrespondenz zwischen zwei ebenen Kurven in einer *Cremona*schen Korrespondenz zwischen ihren Ebenen enthalten ist, leitet *G. Marletta,* erste angeführte Arbeit, p. 230, ab, daß, wenn zwei mit $h\geq 0$ Doppelpunkten ausgestattete ebene Kurven ein und derselben Ordnung $n>4$ das Geschlecht $p>\frac{1}{2}n(n-7)+10$ haben, eine zwischen ihren Punkten existierende umkehrbar eindeutige Korrespondenz in einer Kollineation zwischen ihren Ebenen notwendigerweise enthalten ist. Für $h=0$ schon früher bei *K. Küpper,* Prag. Ber. böhm. Ges. 1892, p. 264; *V. Snyder,* Amer. J. of math. 27 (1904), p. 187; für $h=0,1$ schon bei *G. Marletta,* Catania Atti Acc. Gioenia (4) 19 (1905), Nr. V, der sich mit den Bedingungen dafür beschäftigt, daß eine umkehrbar eindeutige Korrespondenz zwischen den Punkten zweier zwei r-dimensionalen linearen Räumen angehörenden Kurven ein und derselben Ordnung in einer Kollineation zwischen diesen Räumen enthalten ist. Vgl. auch *V. Snyder,* Amer. J. of math. 30 (1906), p. 10 [Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 13 (1906), p. 272], 337; *J. L. Coolidge,* „Alg. pl. curves", p. 408.

L. I. Magnus und dann von *L. Cremona*[430]) erwähnte Eigenschaft, daß das Produkt mehrerer quadratischer Transformationen eine eineindeutige Transformation ist, immer umgekehrt werden kann.

In der Tat gilt der Satz, daß jede birationale Transformation zwischen zwei Ebenen als das Produkt einer endlichen Anzahl quadratischer Transformationen betrachtet werden kann.

Zu diesem Ergebnis sind *W. K. Clifford*[486]), *M. Noether*[487]) und *J. Rosanes*[488]) fast zu gleicher Zeit und unabhängig voneinander gelangt. Der erste beschränkt sich darauf, für Transformationen mit nicht höherer Ordnung als 8 und gewöhnlichen Hauptpunkten in allgemeiner Lage die Zerlegung einer birationalen Transformation in ein Produkt quadratischer Transformationen vorzunehmen. *M. Noether* und *J. Rosanes* leiten aus den beiden Beziehungen von *L. Cremona* (Nr. **49**) die Eigenschaft ab, daß die Summe der drei größten Multiplizitäten der Hauptpunkte in einem homaloiden Netz n^{ter} Ordnung n übersteigt [s. Nr. **49** und Anm. 439]. Wählt man also die drei höchsten Hauptpunkte des gegebenen homaloiden Netzes als Basispunkte eines Netzes von Kegelschnitten, so entsteht eine quadratische Transformation, durch die sich die Ordnung des Netzes erniedrigen wird. Verfährt man auf diese Weise weiter, so gelangt man schließlich zu einem Netze von Kegelschnitten oder dem Geradennetz einer Ebene, so daß die ursprüngliche Transformation in der gewünschten Art zerlegt wird.

Für ein homaloides Netz mit unendlich benachbarten Hauptpunkten fügte *J. Rosanes*, a. a. O., p. 109 hinzu, daß die anzuwendenden quadratischen Transformationen zwei oder drei zusammenfallende Hauptpunkte haben können; *M. Noether*[489]) behandelte diesen Fall ausführlich und versuchte zu beweisen, daß in jedem Falle eine quadratische Transformation angegeben werden kann, die die Ordnung des homaloiden Netzes herabsetzt.

C. Segre[490]) dagegen zeigte, auch unter Anführung von Beispielen, daß eine derartige Transformation fehlen kann.[491])

---

486) Vgl. *A. Cayley*[457]), p. 161 = Papers 7, p. 222; *W. K. Clifford*, Math. Papers, London 1882, p. 538.

487) Math. Ann. 3 (1870), p. 167; Auszug Gött. Nachr. 1870, p. 6 [1869].

488) Anm. 429, p. 106.

489) Math. Ann. 5 (1872), p. 635. Vgl. *G. B. Guccia*, Rend. Circ. mat. Palermo 1 (1886), p. 148.

490) Atti Acc. Torino 36 (1901), p. 645.

491) Der Einwand von *C. Segre* bezieht sich, mehr im allgemeinen, auch auf die Reduktion der linearen Systeme algebraischer ebener Kurven durch quadratische Transformationen auf die Minimalordnung und steht in Verbindung

Auf Grund dessen bewies *G. Castelnuovo*[492]) auf anderem Wege, durch die Betrachtung der aufeinanderfolgenden adjungierten Kurven eines linearen Kurvensystems diesen Satz, indem er zeigte, daß die Ordnung eines homaloiden Netzes in jedem Falle durch eine Transformation von *de Jonquières* herabgesetzt werden kann und jede Transformation von *de Jonquières* das Produkt einer endlichen Anzahl quadratischer Transformationen ist.[493])

Daß jede *Cremona*sche Transformation zwischen zwei Ebenen das Produkt einer endlichen Anzahl Transformationen von *de Jonquières* (und endlich ein Produkt quadratischer Transformationen) ist, bewiesen *D. Nencini*[494]) und *V. Franciosi*[495]) mit verschiedenen Methoden von neuem, wobei sie jedoch im Gedankengange von *M. Noether* hinsichtlich der Zerlegung der singulären Punkte der algebraischen ebenen Kurven blieben.[496])

Zur Zerlegbarkeit jeder ebenen *Cremona*schen Transformation in quadratische Transformationen gelangte auch *O. Chisini*[497]) durch eine Abänderung des Verfahrens von *M. Noether.*

---

mit einem gewissen Charakter der singulären Punkte der ebenen Kurven. Dieser Einwand besagt, daß eine quadratische Transformation nicht nur dann nicht ausgeführt werden kann, wenn dem einen der drei als Hauptpunkte betrachteten Punkte die zwei andern in verschiedenen Richtungen unendlich benachbart sind, sondern auch dann nicht, wenn die besagten drei Punkte zwar in gleicher Richtung, aber auf keinem linearen Zweig liegen. Vgl. III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **14** und **37**.

492) Brief an *C. Segre* vom 5. Mai 1901, Atti Acc. Torino 36 (1901), p. 861. Über den Beweis von *G. Castelnuovo* s. *J. W. Alexander,* Trans. Amer. math. Soc. 17 (1916), p. 295, der noch einen weiteren Beweis des Satzes gibt.

493) Letztere Eigenschaft wurde analytisch von *G. Castelnuovo* bewiesen; ein geometrischer Beweis von *C. Segre* findet sich bei *G. Castelnuovo*[492]), Fußnote auf p. 872.

494) Ann. di mat. (3) 27 (1916), p. 259.

495) Giorn. di mat. (3) 9 (1917), p. 141.

496) *D. Nencini* und *V. Franciosi* fanden mit strengen Methoden die Ergebnisse früherer Autoren (*E. Bertini, G. B. Guccia, V. Martinetti, G. Jung, M. de Franchis*) über die Reduktion der linearen Systeme irreduzibler ebener Kurven vom Geschlecht 0, 1, 2 auf die Minimalordnung wieder, während *G. Ferretti,* Rend. Circ. mat. Palermo 16 (1902), p. 236 der Methode von *G. Castelnuovo* gefolgt war. Über all dies s. III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **37**.

497) Modena Atti Soc. Nat. e Mat. (5) 6 (1921), p. 7; wiedergegeben bei *L. Godeaux,* „Transf. birat.“, p. 27—30, und *F. Enriques* und *O. Chisini,* „Lezioni“ 3, p. 168—173. Hier p. 177, findet man noch die Bemerkung, daß jede ebene *Cremona*sche Transformation in ein Produkt quadratischer Transformationen mit verschiedenen Hauptpunkten zerlegt werden kann.

Über den vorhergehenden Gegenstand s. auch *Hilda P. Hudson,* „Cremona transf.“, p. 144—153.

Einen Zerlegungssatz völlig anderer Art gibt *S. Kantor* [498]) an, der eine rational gegebene birationale Transformation T zwischen zwei Ebenen ins Auge faßt, also eine Transformation, unter deren Hauptpunkten sich nur rationale Gruppen in bezug auf einen festgelegten Rationalitätsbereich befinden. *S. Kantor* findet auf mehreren Wegen, daß jede derartige Transformation T ohne Einführung neuer Irrationalitäten in gewisse 16 einfachere Transformationen (Primfaktoren) zerlegt werden kann, die er vollständig angibt, und die für jede Transformation T nach Art, nach Aufeinanderfolge und nach gegenseitiger Lage der Hauptsysteme eindeutig bestimmt sind. Seine Ergebnisse formuliert *S. Kantor* auch zahlentheoretisch durch Betrachtung ganzzahliger birationaler Transformationen zwischen zwei Ebenen und weist den Zusammenhang mit der Idealtheorie nach.

58. Birationale Transformationen zwischen zwei vereinigt liegenden Ebenen. Neue Fragen treten für den Fall auf, daß die beiden Ebenen π, π', zwischen denen eine birationale Transformation stattfindet, zusammenfallen.

Der Ort der Punkte von π, die mit ihren entsprechenden Punkten von π' auf einer Geraden durch einen festen Punkt O liegen, ist eine durch O hindurchgehende Kurve Ω der Ordnung $n+1$, die auch durch zwei projektive Büschel, d. h. als Ort der Schnittpunkte der durch O hindurchgehenden Geraden von π' mit den entsprechenden Kurven von π erzeugt werden kann. Diese Kurve Ω und die analoge, durch Vertauschung von π und π' erhaltene Kurve Ω' heißen die *isologischen Kurven* von O.[499]) Jede solche Kurve geht durch sämtliche Fixpunkte

498) Monatsh. Math. Phys. 10 (1899), p. 54; Auszug Paris C. R. 126 (1898), p. 946.

499) Diese Bezeichnung stammt von *E. de Jonquières* [430]), der die ersten Eigenschaften dieser Kurven im Falle der seinen Namen tragenden Transformationen (Nr. **49**) angibt. Die gleichen Eigenschaften werden von *L. Cremona* [429]), zweite angeführte Arbeit, auf beliebige Transformationen ausgedehnt. Ein weiteres Studium der isologischen Kurven findet sich bei *G. B. Guccia,* Paris C. R. 101 (1885), p. 866; Rend. Circ. mat. Palermo 1 (1885—86), p. 56, 119, wo allgemeiner auch der Ort eines Punktes von π studiert wird, dessen Verbindungsgerade mit dem homologen Punkte von π' Tangente an eine gegebene Kurve der Klasse m ist. Dieser Ort hat die Ordnung $m(n+1)$ und geht mit mr Zweigen durch jeden für π r-fachen Hauptpunkt, mit m Zweigen durch jeden der $n+2$ Fixpunkte der Transformation. Über diesen Ort s. auch *G. B. Guccia,* Rend. Circ. mat. Palermo 1 (1884), p. 2, 5; *A. Capelli,* daselbst, p. 4; *A. Pepoli,* daselbst, p. 3; Atti Collegio Ing. e Architetti di Palermo 12 (1889), p. 1.

Für eine quadratische Transformation finden sich einige der von *G. B. Guccia,* Rend. Circ. mat. Palermo 1 (1886), p. 119 angegebenen Sätze schon bei *T. A. Hirst.* [456])

der Transformation und hat in jedem in π r-fachen oder in π' s-fachen Hauptpunkt die Multiplizität r bzw. s. Jede von O ausgehende Gerade schneidet Ω und Ω' in zwei Gruppen von n in der Transformation korrespondierenden Punkten. Die Kurven Ω und Ω' der verschiedenen Punkte der Ebene bilden zwei untereinander projektive Netze.

Mit Hilfe der isologischen Kurven kann man die Fixpunkte der Transformation (*Koinzidenzpunkte*) finden. Liegen die zwei Ebenen π und π' in allgemeiner Weise ineinander, so existiert eine endliche Anzahl, nämlich $n + 2$ Fixpunkte.[500]).

Die speziellen birationalen Transformationen einer Ebene in sich mit einer irreduziblen Koinzidenzkurve werden von *K. Doehlemann*[501]) und *G. Castelnuovo*[502]) studiert. Der erste bestimmt die projektiven Charaktere der Transformation und betrachtet speziell diejenigen unter diesen Transformationen, die von *de Jonquières* sind.[503]) Der letztere dagegen untersucht die für birationale Transformationen unveränderlichen Charaktere der Transformation (s. ferner Nr. **64**).

Besitzt die Transformation eine Koinzidenzkurve, so existieren außerhalb dieser noch weitere Fixpunkte, deren Anzahl aus der in Nr. 7 angegebenen Formel von *H. G. Zeuthen* abgeleitet werden kann.[504])

Ist D für eine Transformation ein Fixpunkt, so entsprechen sich die Tangentenpaare in D an die Paare miteinander korrespondierender, durch D hindurchgehender Kurven projektiv. Ist diese Projektivität nicht ausgeartet, so gehen zwei (voneinander verschiedene oder zu-

500) *E. de Jonquières,* Giorn. di mat. (1) 23 (1885), p. 66 [1859, 1884] für seine Transformationen; im allgemeinen *L. Cremona,* Mem. Acc. Bologna (2) 5 (1864), p. 33 = Giorn. di mat. (1) 3 (1865), p. 375 = Opere 2, p. 216. Vgl. hierüber *A. del Re,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 2^1 (1893), p. 456; Mem. Acc. Modena (3) 10^2 (1912), p. 398.

501) Math. Ann. 39 (1891), p. 567. — *K. Doehlemann* übernimmt aus der Theorie der ebenen Involutionen (Nr. **60**) den Begriff der *Klasse* einer birationalen Transformation zwischen zwei überlagerten Ebenen, also die Anzahl der Paare homologer Punkte, die auf einer allgemeinen Geraden liegen, und gibt alle Transformationen der Klassen 0, 1, 2 mit verschiedenen Hauptpunkten (a. a. O., p. 578 ff.) an. — *Rosaria Abbìa,* Catania Atti Acc. Gioenia (5) 9 (1916), Nr. III bestimmt unter den gleichen Annahmen die Transformationen dritter Klasse.

502) Roma Rend. Acc. Linc. (5) 1^1 (1892), p. 47.

503) Die birationalen Transformationen, insbesondere die von *de Jonquières,* mit einer gegebenen Koinzidenzkurve der Ordnung μ, welche einen $(\mu - 2)$-fachen Punkt besitzt, sind von *S. Kantor*[401]) studiert.

504) Über diese Formel s. *G. Marletta*[88]) und *A. Brigaglia.*[88]) In einem Sonderfalle stimmt sie mit der von *K. Doehlemann*[501]), p. 577, angegebenen und von *Hilda P. Hudson* in „Cremona transf.“, p. 87, wiedergegebenen Formel überein.

sammenfallende) invariante Richtungen durch D, und D heißt *erster Art;* ist sie dagegen ausgeartet, so ist jede von D ausgehende Richtung invariant, und D heißt *zweiter Art.*[505])

Für den Fall, daß zwei Kurven, Orte von Fixpunkten, zusammenfallen, beweist *Hilda P. Hudson*[506]), daß die allgemeinen Punkte dieser einzigen Kurve Koinzidenzpunkte zweiter Art sind; daß umgekehrt, wenn die allgemeinen Punkte einer Kurve Koinzidenzpunkte zweiter Art sind, die Kurve als ein Paar zusammenfallender Kurven, Örtern von Fixpunkten, betrachtet werden darf.

Eine Transformation zwischen zwei überlagerten Ebenen besitzt im allgemeinen auch eine endliche Anzahl *zyklischer* Gruppen von gegebenem Index N, also derartiger Gruppen von N Punkten, daß man alle anderen Punkte der Gruppe erhält und zu dem Ausgangspunkte zurückgelangt, wenn man auf einen beliebigen der Punkte einer solchen Gruppe die Transformation N-mal hintereinander anwendet und nicht früher. Für die quadratischen Transformationen ist die Anzahl dieser Gruppen von *T. A. Hirst*[507]) und *S. Kantor*[508]) bestimmt; für eine Transformation beliebiger Ordnung n von *S. Kantor.*[509])

Zerlegt man N in Primfaktoren, und ist

$$N = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_\nu^{m_\nu},$$

so ist die Anzahl der zyklischen Gruppen vom Index N durch

$$\frac{1}{N}\left[n^N - \sum n^{\frac{N}{p_i}} + \sum n^{\frac{N}{p_i p_j}} - \dots + (-1)^\nu n^{\frac{N}{p_1 p_2 \dots p_\nu}}\right]$$

gegeben.

So gibt es $\frac{n(n-1)}{2}$ involutorische Paare, $\frac{n(n-1)(n+1)}{3}$ periodische Tripel, $\frac{n^2(n-1)(n+1)}{4}$ periodische Quadrupel usw.

Eine birationale Transformation zwischen zwei überlagerten Ebenen

---

505) *K. Doehlemann*[501]), p. 574—575. S. auch *Hilda P. Hudson,* „Cremona transf.“, p. 77—79. Ein Beispiel für einen Koinzidenzpunkt zweiter Art bei *K. Doehlemann,* Diss. München 1889, p. 33.

506) Rend. Circ. mat. Palermo 50 (1925), p. 219; in einem Sonderfalle *K. Doehlemann*[501]), p. 584.

507) S. [456]). Das involutorische Paar für die quadratischen Transformationen findet man bei *F. Seydewitz,* Arch. Math. Phys. (1) 7 (1846), p. 142; dann auch z. B. bei *R. Sturm,* Math. Ann. 19 (1881), p. 466; *F. Aschieri,* Rend. Ist. Lomb. (2) 14 (1881), p. 21; die zwei zyklischen Tripel bei *J. Rosanes*[429]), p. 109.

508) Ann. di mat. (2) 10 (1880), p. 64.

509) Ann. di mat. (2) 10 (1880), p. 71. Vgl. auch *R. Sturm,* „Geom. Verw.“ 4, p. 39—41.

kann eine Kurve in sich oder auch zwei gegebene Kurven ineinander transformieren.[510])

Es werden auch ebene, in bezug auf birationale (vor allem quadratische) Transformationen ihrer Ebene invariante Kurven und die Gruppen derartiger Transformationen[511]) studiert.[512])

---

510) Vgl. *K. Doehlemann,* Ztschr. Math. Phys. 36 (1891), p. 356, wo vor allem die quadratischen Transformationen betrachtet werden.

Über die *Cremona*schen Transformationen der Ebene, in denen eine gegebene eineindeutige Korrespondenz zwischen den Punkten zweier voneinander verschiedener oder nicht verschiedener ebener Kurven enthalten ist, s. *S. Kantor,* Paris C. R. 100 (1885), p. 343; Acta math. 19 (1894), p. 115; für den Fall einer hyperelliptischen Kurve *S. Kantor* [401]).

511) Durch *Cremona*sche, vor allem quadratische, involutorische oder nicht involutorische Transformationen in sich transformierte Kurven werden studiert von *J. Rosanes* [429]), p. 109—110; *A. Emch,* Ann. of math. (2) 14 (1912), p. 57; Bull. Amer. math. Soc. (2) 24 (1917), p. 60, 327; (2) 30 (1924), p. 527 (Auszug daselbst, p. 392), worin auch gewisse Schließungsprobleme, zu denen diese Kurven Veranlassung geben, betrachtet werden; Tôhoku math. J. 21 (1922), p. 310 [Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 28 (1922), p. 157]; 24 (1924), p. 68 [Auszug Japanese J. of math. 1 (1924), Abstracts, p. (26)]; 25 (1925), p. 63 [Auszug Japanese J. of math. 2 (1926), Abstracts, p. (17)]; 32 (1929), p. 16; Amer. J. of math. 45 (1923), p. 192 [Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 29 (1923), p. 149]; Bull. Amer. math. Soc. (2) 35 (1929), p. 458; *A. Myller,* Nouv. Ann. de math. (4) 14 (1914), p. 126; *K. Ogura,* Tôhoku math. J. 4 (1914), p. 132; *F. G. Taylor,* Proc. Edinburgh math. Soc. 34 (1916), p. 163; *O. M. Thalberg,* Quart. J. of math. 50 (1923), p. 33; Christiania Vidensk. Skrifter 1924, Nr. 3; *B. Bydžovský,* Proc. intern. math. Congress Toronto 1924, 1 (Toronto 1928), p. 729; *L. Godeaux,* Tôhoku math. J. 28 (1927), p. 193 [Auszug Japanese J. of math. 4 (1928), Abstracts, p. (19)]; *B. Machytka,* Časopis 58 (1928), p. 60.

Erweiterungen auf drei- und mehrdimensionale Räume bei *A. Emch,* Amer. J. of math. 48 (1926), p. 21 [Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 31 (1925), p. 398]; Bull. Amer. math. Soc. (2) 36 (1930), p. 547.

Anna Helen Tappan, Amer. J. of math. 37 (1915), p. 309 bestimmt alle ebenen, in bezug auf *Cremona*sche Transformationen ihrer Ebene invarianten Kurven 6. Ordnung.

Nach *S. Kantor* [401]) ist die Involution, die auf einer ebenen hyperelliptischen Kurve durch die auf dieser existierende lineare Schar g_2^1 definiert ist, immer in einer involutorischen birationalen Transformation der ganzen Ebene enthalten.

A. Emch, Tôhoku math. J. 29 (1928), p. 329 [Auszug Japanese J. of math. 5 (1929), Abstracts, p. (14)] studiert die hyperelliptischen Kurven, die durch eine der von *E. Bertini* (Nr. 61) gefundenen involutorischen birationalen Transformationen in sich transformiert werden, und daraus eine Klassifikation der hyperelliptischen Kurven ableitet.

Über *Cremona*sche Transformationen, die eine gegebene elliptische ebene Kurve in sich transformieren, s. die Anführungen in Anm. 405 und 631; außerdem *V. Martinetti,* Giorn. di mat. (1) 23 (1884), p. 37; *K. Doehlemann* [510]); *Ch. Michel,* J. math. spéc. (5) 21 (1897), p. 111; *U. Perazzo* [454]), p. 163; *R. Bricard,* J. Éc.

59. Ebene birationale Reziprozitäten; Nullreziprozitäten. Eine birationale Korrespondenz kann auch statt zwischen zwei Punktebenen zwischen einer Punkt- und einer Geradenebene stattfinden und heißt dann besser *birationale Reziprozität.* Eine derartige Korrespondenz kann immer als das Produkt einer *Cremona*schen Korrespondenz mit einer Korrelation aufgefaßt werden, und ihre Eigenschaften sind völlig analog zu den Eigenschaften der *Cremona*schen Transformationen.

Liegen die beiden Ebenen ineinander und befindet sich jeder Punkt auf der korrespondierenden Geraden, so bezeichnet man die Reziprozität als *Nullreziprozität.* Zu einer derartigen Korrespondenz gelangt man nach *A. Ameseder*[513]) durch folgende Konstruktion. Ist ein

---

Polyt. (2), cah. 11 (1906), p. 39; *A. Geuß,* Diss. Erlangen 1909; *B. Bydžovský,* Prag České Ak. Rozpravy 18 (1909), Nr. 34; 29 (1920), Nr. 17, 23; Bull. intern. Ac. Prag 15 (1910), p. 1; 23 (1920), p. 68, 72; *B. Machytka,* Prag Univ. Publ. 1925, Nr. 27; *F. C. Ogg,* Ann. of math. (2) 29 (1928), p. 355.

Endliche Gruppen birationaler Transformationen der Ebene oder des Raumes, die eine elliptische Kurve der Ebene bzw. des Raumes unverändert lassen, studierte *V. Snyder,* Bull. Amer. math. Soc. (2) 33 (1927), p. 39.

512) Mit der Betrachtung der isologischen Kurven ist auch die Betrachtung gewisser mehrdeutiger Transformationen (Nr. **92**) verknüpft. Diese Transformationen erhält man, wenn man jedem Punkte der Ebene die Gerade entsprechen läßt, die diesen mit seinem in der gegebenen birationalen Korrespondenz homologen Punkte in π oder in π', oder diese beiden letzten Punkte verbindet. S. *G. Jung,* Roma Rend. Acc. Lincei (4) 2^2 (1886), p. 339; Rend. Ist. Lomb. (2) 19 (1886), p. 812. Erweiterungen bei *M. Pannelli,* Giorn. di mat. (1) 29 (1888), p. 154, wo die gleichen Konstruktionen auf birationale Transformation angewandt werden, die man durch öftere Wiederholung der gegebenen Transformation erhält.

Über die *Cremona*schen Transformationen, die ein System von Kurven 3. Ordnung mit mehreren festen Punkten oder das System der Kurven 6. Ordnung mit acht gegebenen Doppelpunkten in sich überführen, s. *B. Bydžovský,* Atti del Congresso intern. dei mat. Bologna 1928, 4 (Bologna 1931), p. 43.

Pia Nalli, Rend. Circ. mat. Palermo 31 (1910), p. 92, hat die ebenen Involutionen studiert (Nr. **60**, **61**), die ein Büschel elliptischer Kurven (jede Kurve in sich oder jede Kurve des Büschels in eine andere) in sich überführen, und hat für alle Fälle die Typen bestimmt, auf die die Involution und das Büschel durch birationale Transformationen der Ebene zurückgeführt werden können.

J. Yerushalmy, Amer. J. of math. 53 (1931), p. 319; 54 (1932), p. 279 gibt, auf Grund der *O. Chisini*schen Bestimmung der Büschel von Kurven 3. Ordnung mit demselben Modul, Rend. Circ. mat. Palermo 41 (1916), p. 59, eine Konstruktion der Büschel von äquianharmonischen Kurven 3. Ordnung an; er betrachtet dabei die *Cremona*schen Transformationen, die einen solchen invarianten Büschel besitzen.

513) Sitzungsb. Ak. Wien 83 (1881), p. 385. Anwendungen dieses Nullsystemes auf die ebenen Kurven 3. Ordnung bei *H. Oppenheimer,* Diss. Jena 1892 = Arch. Math. Phys. (2) 13 (1893), p. 268; Monatsh. Math. Phys. 12 (1901), p. 219. Mit Hilfe zweier derartiger Nullsysteme konstruiert und studiert *Ch. Beyel,* Ztschr.

Dreieck mit den Ecken A, B, C und den gegenüberliegenden Seiten a, b, c und ferner eine Zahl k gegeben, so läßt man jedem Punkte P der Ebene die Gerade p entsprechen, die durch diesen hindurchgeht und mit den Geraden PA, PB, PC ein Doppelverhältnis vom Werte k bildet (so daß auch das Doppelverhältnis der vier Punkte pa, pb, pc, P den gegebenen Wert k annimmt). Die so entstehende Korrespondenz ist quadratisch, und ihre Hauptelemente sind A, B, C und bzw. a, b, c.

R. Sturm[514]) fügt hinzu, daß jede birationale Nullreziprozität quadratisch ist und auf die vorhergehende Weise konstruiert werden kann.

60. Periodische, insbesondere involutorische birationale ebene Transformationen. Das in Nr. 58 erwähnte Problem der Zyklen einer ebenen birationalen Transformation T tritt bei der Wiederholung der Transformation T in der gegebenen Ebene auf. Auf diese Weise erhält man im allgemeinen neue Transformationen T^2, T^3, ..., und die Fixpunkte der Transformation T^N liefern die Zyklen von T vom Index N.

Spezieller kann die Transformation T aber auch so beschaffen sein, daß ihre Potenz T^N, und keine vorhergehende Potenz, die Identität ist und daher alle Punkte der Ebene zyklische Gruppen vom Index N erzeugen. Die Transformation T heißt dann *zyklisch* oder *periodisch* von der *Ordnung* N; für $N = 2$ insbesondere *involutorische Transformation* oder *Involution:* zwei beliebige korrespondierende Punkte entsprechen sich in doppelter Weise und heißen auch *konjugiert*.[515])

Hierbei bietet sich das Problem der Bestimmung der Bedingungen, denen eine gegebene birationale Transformation genügen muß, wenn

Math. Phys. 38 (1893), p. 65 die Kurven 3. Ordnung und 3. Klasse. — Über das gleiche Nullsystem s. auch *A. del Re,* Rend. Acc. Napoli (2) 3 (1889), p. 101; Giorn. di mat. (1) 28 (1890), p. 264.

Auf eine birationale Nullreziprozität trifft *L. Tuschel,* Sitzungsb. Ak. Wien 120 (1911), p. 231 bei Untersuchungen der Schraubenliniengeometrie, bei welchen man die Punkttransformationen studiert, welche die Ebene des Raumes in kongruente gerade Konoide (insbesondere Wendelflächen) mit parallelen Achsen überführen. Hierüber, ebenso über Erweiterungen, vgl. auch *E. Müller,* Sitzungsb. Ak. Wien 126 (1917), p. 915.

514) Math. Ann. 19 (1881), p. 473—474. Vgl. auch *G. Lazzeri,* Roma Rend. Acc. Linc. (4) 2^2 (1886), p. 61; *J. de Vries,* Ak. Amsterdam Versl. (4) 21 (1913), p. 1070; *R. Sturm,* „Geom. Verw." 4, p. 1, 61, 461. S. außerdem *J. de Vries,* Ak. Amsterdam Versl. (4) 26 (1918), p. 1485; (4) 27 (1919), p. 948, wo allgemein auch die rationalen Nullkorrespondenzen $(1, n)$ betrachtet werden, und noch *Catharina Maria van Dieren,* Pröfschrift Utrecht 1928. S. Nr. **92** und **93**.

515) Es gibt eine einzige Involution 1. Ordnung, die harmonische Homologie: *K. G. Chr. v. Staudt,* „Die Geometrie der Lage", Nürnberg 1847, Nr. 227; italien. Übers. von *M. Pieri,* Torino 1889, p. 106.

sie periodisch sein soll. Dieses Problem wurde von *S. Kantor*[516]), besonders für die quadratischen, kubischen und biquadratischen Transformationen ausführlich behandelt.

Für das Studium derartiger Transformationen scheint die Einführung neuer Charaktere zweckmäßig. So führt *E. Caporali*[517]) für die Involutionen den Begriff der *Klasse* ein, d. h. der Anzahl der auf einer allgemeinen Geraden liegenden Paare verschiedener konjugierter Punkte. Hat die Transformation die Ordnung n, die Klasse ν, und besitzt sie eine Koinzidenzkurve der Ordnung μ, so gilt

$$\mu + 2\nu = n.$$

Die isologischen Kurven der Punkte der Ebene bilden ein Netz der Ordnung $2\nu + 1$ und haben in jedem isolierten Fixpunkt einen dreifachen Punkt. Ist π das Geschlecht dieser Kurven und p das Geschlecht der Koinzidenzkurve, so umhüllen die Verbindungsgeraden der Paare unendlich benachbarter korrespondierender Punkte eine Kurve der Klasse $n - p - \pi$.

Weitere allgemeine Eigenschaften der Involutionen unter dem Gesichtspunkt der Klasse[518]) verdankt man *E. Bertini*[519]), *L. Berzolari*[520]) und *V. Martinetti*[521]).

516) Für die quadratischen Transformationen, Sitzungsb. Ak. Wien 82 (1881), p. 237; im allgemeinen, aber auch sehr ausführlich, vor allem für quadratische Transformationen, dann kubische und biquadratische Transformationen, in der Preisschrift[472]); vgl. auch Paris C. R. 100 (1885), p. 42. Für die periodischen quadratischen Transformationen Ergänzungen bei *V. Snyder,* Ann. of math. (2) 13 (1911), p. 140; Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 18 (1911), p. 62.

517) Rend. Acc. Napoli (1) 18 (1879), p. 212 = Mem. di geometria, Napoli 1888, p. 116.

518) Vgl. auch *R. Sturm,* „Geom. Verw." 4, p. 95—130; *K. Doehlemann,* „Geom. Transf." 2, p. 165—174; *Hilda P. Hudson,* „Cremona transf.", p. 89—97.

Eine Unterscheidung der Involutionen in vier Arten, unter anderem Gesichtspunkte, liefert *L. Godeaux,* Bull. Ac. sc. Belgique 1911, p. 217.

Beiträge zur Theorie der Involutionen bei *F. Palatini,* „Saggio di un metodo utile per lo studio delle trasformazioni geometriche", Palermo 1892; „Osservazioni sulle corrispondenze univoche fra i gruppi di h punti del piano ed i punti dello spazio lineare di $2h$ dimensioni", Avellino 1898.

A. B. Coble, Bull. Amer. math. Soc. (2) 13 (1907), p. 271 weist auf die Möglichkeit hin, die Involutionen mit Hilfe gegenüber *Cremona*schen Transformationen invarianter Konstruktionen zu studieren.

519) Rend. Ist. Lomb. (2) 16 (1882), p. 89, 190.

520) Ann. di mat. (2) 16 (1888), p. 191. Hier werden die Hauptpunkte der Transformation untersucht, speziell für den Fall, daß sich auf einer allgemeinen, von einem derartigen Punkte ausgehenden Geraden keine Paare korrespondierender Punkte befinden. Ist ein derartiger Punkt für die isologischen Kurven $(2\nu - i)$-fach und $i < \nu$, so ergibt sich $\nu \leqq \frac{i(i+1)}{2}$ (a. a. O., p. 205).

Ist die Klasse einer Involution von der Ordnung n gleich Null, erzeugen also die Verbindungsgeraden der Paare konjugierter Punkte eine Hüllkurve, so besitzt die Involution eine Koinzidenzkurve n^{ter} Ordnung, die Transformation ist also von *de Jonquières*.[522])

Involutionen von *de Jonquières*, die nicht die Klasse gleich Null haben, können entweder nur vier Fixpunkte oder auch unendlich viele besitzen, die auf einer einzigen Geraden oder auf zwei Geraden liegen. Ist n die Ordnung der Transformation, so ist $\frac{n}{2}$ bzw. $\frac{n-1}{2}$, $\frac{n-2}{2}$ die Klasse in den drei Fällen, so daß n im ersten und dritten Falle gerade, im zweiten Falle ungerade ist.[523])

Die Konfiguration der Hauptpunkte sowie die Konstruktion der Involutionen von *de Jonquières* und aller Involutionen 1. und 2. Klasse werden von *E. Bertini*[524]), die der Involutionen 3. und 4. Klasse von *V. Martinetti*[525]), die gewisser zweier Involutionen beliebiger Klasse und der Involutionen 5. Klasse von *L. Berzolari*[526]), die der Involutionen 6. Klasse von *P. A. Okken*[527]) angegeben.[528])

Eine Involution der Klasse $\nu > 1$ mit einem Hauptpunkt, der für die isologischen Kurven die Multiplizität $2\nu - 1$ besitzt, ist eine Involution von *de Jonquières* (a. a. O., p. 194).

Existiert ein r-facher Hauptpunkt, in dem die entsprechende Hauptkurve die Multiplizität $r-1$ besitzt, so ist die Transformation für $r > 3$ von *de Jonquières* : *E. Bertini*[519]), p. 91; *L. Berzolari*, a. a. O., p. 195—197.

Ist $\nu > 3$ und existiert ein r-facher, für die entsprechende Hauptkurve $(r-2)$-facher Hauptpunkt, so ist $r \leqq 5$ (*L. Berzolari*, a. a. O., p. 220—222).

L. Berzolari, Rend. Circ. mat. Palermo 3 (1889), p. 145 betrachtet auch den Fall, daß ein r-facher, für die korrespondierende Hauptkurve $(r-3)$-facher Hauptpunkt existiert, und findet, daß die Involution für $r \geqq 8$ 15 bestimmten Typen von Klassen $\leqq 7$ angehört.

521) Rend. Circ. mat. Palermo 4 (1890), p. 30, 126. Hier werden Einschränkungen für das Geschlecht der isologischen Kurven angegeben.

522) *E. Bertini*, Ann. di mat. (2) 8 (1876), p. 23.

523) *E. Bertini*, Ann. di mat. (2) 8 (1876), p. 11, 146. Für die Involutionen von *de Jonquières* vgl. auch *R. Sturm*, „Geom. Verw." 4, p. 107—130.

524) S. [519]). Der allgemeine Fall und einige Sonderfälle der Involutionen 1. Klasse werden schon von *C. F. Geiser*, J. f. Math. 67 (1866), p. 78 und *E. Caporali*[517]) betrachtet; ein Sonderfall der Involutionen 2. Klasse von *E. Caporali*.[517])

Die zwei von *E. Bertini* gefundenen Involutionen 5. Ordnung mit sechs zweifachen Hauptpunkten, die eine von der ersten, die andere von der zweiten Klasse, werden weiter von *B. Bydžovský*, Prag České Ak. Rozpravy 38 (1929), Nr. 2; Mém. Soc. R. des sciences de Bohême (Věstnik) 1929 (Prague 1930), Nr. 11, und von *L. Godeaux*, Mathesis 45 (1931), p. 11 studiert.

525) Ann. di mat. (2) 12 (1883), p. 73; (2) 13 (1884), p. 53.

526) Ann. di mat. (2) 16 (1888), p. 206, 212, 222. Bei den Involutionen 5. Klasse müssen nach *P. A. Okken*, Rend. Ist. Lomb. (2) 47 (1914), p. 226 zwei der von *L. Berzolari* gefundenen Typen entfernt und einer neu hinzugefügt werden.

527) Diss. Groningen 1913.

61. Reduktion der involutorischen birationalen ebenen Transformationen auf Typen mittels birationaler Transformationen. Es gibt eine andere Betrachtungsweise der birationalen Transformationen zwischen zwei überlagerten Ebenen, von der eine allgemeine Lösung der Aufgaben über die periodischen Transformationen und ihre Gruppen abgeleitet werden kann.

Wir betrachten zwei birationale Transformationen T und S in einer Ebene und bilden das Produkt

$$S \cdot T \cdot S^{-1} = T'.$$

Nach der allgemeinen Theorie der Operationen nennt man T' die *Transformierte* von T durch S. Nun können alle in den vorhergehenden Nrn. betrachteten Charaktere von T durch eine derartige Transformation umgestaltet werden. So werden die Ordnung, die Anzahl der Hauptpunkte, ihre Multiplizitäten usw. für T und T' im allgemeinen nicht gleich sein. Es existieren aber noch weitere Charaktere von T, die man als wesentlicher betrachten muß, da sie durch die Transformation unverändert bleiben und daher sowohl T wie T' angehören. Ist T z. B periodisch, so gilt dasselbe für T'; existieren Kurvensysteme, die gegenüber T invariant sind, so wird es auch analoge, in bezug auf T' invariante Systeme geben, und da man mit Hilfe der Transformation S von jenen zu diesen gelangt, so lassen sich die Eigenschaften der einen von den Eigenschaften der anderen mit Leichtigkeit ableiten.

Betrachten wir zwei Transformationen T und T', deren eine eine transformierte der anderen ist, als *äquivalent*, so ist eine Transformation T nach dieser Betrachtungsweise der *Typus* einer *Klasse äquivalenter Transformationen.*

E. Bertini vertritt als erster diesen Standpunkt in bezug auf die Involutionen. Vor allem behandelt er die Involutionen von *de Jonquières*[529]) und beweist, daß jede Involution dieser Art durch eine *Cre-*

528) Eine Involution beliebiger Klasse ν mit vier $(2\nu+1)$-fachen Hauptpunkten und $2\nu+1$ doppelten Hauptpunkten, die für $\nu = 2, 3, 4, 5$ den von den vorhergehenden Verfassern gefundenen Involutionen beigefügt werden muß, ist von *G. Marletta,* Acireale Mem. Acc. Zelanti (3) 10 (1918), Nr. 3 angegeben. Für $\nu = 2$ s. auch *G. Marletta,* Catania Atti Acc. Gioenia (5) 11 (1918), Nr. VI, p. 10; für $\nu = 3$ s. auch *G. Aprile,* Note e Mem. Circ. mat. Catania 1 (1921), p. 102.

Spezielle Involutionen ergeben sich beim Studium der Kongruenzen von Kegelschnitten im Raume [III C 9 (*K. Rohn* und *L. Berzolari*) Nr. 74], und zwar durch Schnitt mit einer Ebene: *M. Pieri,* Atti Acc. Torino 28 (1893), p. 289; *D. Montesano,* Rend. Acc. Napoli (3) 1 (1895), p. 93, 155.

529) Ann. di mat. (2) 8 (1877), p. 11, 146. Ein ausführlicher Auszug bei *E. Dewulf,* Bull. Sciences math. (2) 1^1 (1877), p. 276.

*Cremona*sche Transformation von der harmonischen Homologie abgeleitet werden kann, oder auch von einer Involution von *de Jonquières* einer gewissen Ordnung $p+2$ (wo $p>0$ ist), mit $2p+2$ einfachen und voneinander verschiedenen Hauptpunkten, sowie einer Koinzidenzkurve der Ordnung $p+2$ vom Geschlecht p, die im $(p+1)$-fachen Hauptpunkt der Transformation einen p-fachen, jedoch keinen weiteren mehrfachen Punkt besitzt.

E. Bertini[530]) studiert die gleiche Frage auch für beliebige involutorische Transformationen und findet einfache Typen, auf die alle diese Transformationen unter der Annahme, daß ihre sämtlichen Hauptpunkte voneinander verschieden sind, durch eine *Cremona*sche Transformation zurückgeführt werden können.

Diese (irreduziblen) Typen sind:

a) Harmonische Homologie.

b) Involutorische Transformationen von *de Jonquières* der Ordnung $p+2$ (wobei $p>0$ ist) mit $2p+2$ voneinander verschiedenen einfachen Hauptpunkten und einer Koinzidenzkurve der Ordnung $p+2$ mit einem p-fachen Punkt im $(p+1)$-fachen Hauptpunkt der Transformation.

c) Involutorische Transformation 8. Ordnung mit sieben dreifachen Hauptpunkten und einer Koinzidenzkurve 6. Ordnung, für die diese sieben Punkte Doppelpunkte sind (die *Jakobi*sche Kurve des Netzes der durch diese sieben Punkte hindurchgehenden Kurven 3. Ordnung).

d) Involution 17. Ordnung mit acht sechsfachen Hauptpunkten und einer Koinzidenzkurve 9. Ordnung mit dreifachen Punkten in diesen acht Punkten.

Der schon von *C. F. Geiser*[531]) betrachtete Typus c) wird durch

530) Ann. di mat. (2) 8 (1877), p. 244; Rend. Ist. Lomb. (2) 13 (1880), p. 443.

531) J. f. Math. 67 (1866), p. 78. Erweiterung bei *H. Milinowski,* J. f. Math. 77 (1873), p. 263.

Über die *Geiser*sche Transformation s. noch *A. Cayley,* Math. Ann. 8 (1874), p. 361 = Papers 9, Cambridge 1896, p. 506; *L. Göring,* Progr. Straßburg 1878; *P. H. Schoute,* Ass. franç. pour l'avanc. des sciences 8, Montpellier 1879, p. 194; *D. Montesano,* Atti Acc. Torino 27 (1892), p. 672; *R. Sturm,* „Geom. Verw.“ 1, p. 353—355; 4, p. 23, 96—105, 120—128; *V. Snyder,* Trans. Amer. math. Soc. 11 (1910), p. 371; *A. R. W. Williams,* Bull. Amer. math. Soc. (2) 22 (1916), p. 8 Math. Publ. Univ. California 1 (1920), p. 211; *H. Malet,* „Étude“, p. 207—212.

Eine Anwendung auf eine lineare Konstruktion der rationalen Kurven 5. Ordnung bei *K. Rohn,* Math. Ann. 25 (1884), p. 598.

Mit der *Geiser*schen Transformation verknüpfte Schließungsprobleme untersucht *A. Emch,* Bull. Amer. math. Soc. (2) 30 (1924), p. 527; Auszug daselbst p. 392.

Em. Weyr, Sitzungsb. Ak. Wien 58 (1868), p. 633 betrachtet den Sonderfall der *Geiser*schen Transformation, für den die sieben Hauptpunkte die Ecken das Netz der durch die sieben Hauptpunkte hindurchgehenden Kurven 3. Ordnung dargestellt, wenn zwei Punkte der Ebene, die weitere Schnittpunkte von zweien dieser Kurven sind, als konjugiert betrachtet werden. Die einem Hauptpunkt P korrespondierende Hauptkurve ist die Kurve 3. Ordnung, die in P einen Doppelpunkt besitzt und durch die übrigen sechs Hauptpunkte hindurchgeht. Die Klasse der Involution ist 1.

Der Typus d) läßt sich durch Betrachtung des linearen ∞^3-Systems von Kurven 6. Ordnung konstruieren, die in den acht Hauptpunkten acht Doppelpunkte haben. Es ergibt sich, daß die durch einen Punkt der Ebene hindurchgehenden Kurven dieses Systems notwendigerweise durch einen weiteren Punkt[532]) hindurchgehen, und die Involution dadurch entsteht, daß man diese beiden Punkte miteinander korrespondieren läßt. Die einem Hauptpunkt P korrespondierende Hauptkurve ist die Kurve 6. Ordnung, die in P einen dreifachen und in den anderen sieben Hauptpunkten Doppelpunkte hat. Die Klasse der Involution ist 4.[533])

---

und Diagonalpunkte eines vollständigen Vierecks sind. Zwei konjugierte Punkte sind es dann auch in bezug auf das Viereck. Ein weiterer Sonderfall, bei dem sich die Transformation auf die 6. Ordnung reduziert, wurde von *W. Wallstaff,* Diss. Breslau 1902, untersucht.

532) Wie *E. Bertini,* Ann. di mat. (2) 8 (1877), Fußnote auf p. 273 berichtet, gelangt unabhängig zu dieser Eigenschaft auch *L. Cremona* (der sie *E. Caporali* brieflich mitgeteilt hatte) indem er die Ebene, auf der man die Involution durchführt, als Abbildungsebene einer allgemeinen Fläche 3. Ordnung betrachtet und indem er sechs von den acht Hauptpunkten der Involution als Hauptpunkte der Abbildung [vgl. III C 10a (*W. Fr. Meyer*), Nr. 11] auffaßt. S. auch *G. B. Guccia* [28]), Fußnote auf p. 192—193; *R. Sturm,* „Geom. Verw." 4, p. 105—107. — Der gleiche Satz ist in einem allgemeineren, auf die linearen Systeme hyperelliptischer Kurven sich beziehenden Satz enthalten. S. *E. Bertini,* Ann. di mat. (2) 22 (1893), p. 36. Vgl. III C 4 (*L. Berzolari*), Anm. 400.

533) Weiteres über diese vier Typen bei *F. M. Morgan,* Amer. J. of math. 35 (1912), p. 79, der auch ihre Gleichungen angibt und die Involutionen der ersten fünf Klassen auf diese zurückführt. Ferner werden die Typen b), c), d) in Verbindung mit ihren linearen Systemen invarianter Kurven von *Th. L. Bennett,* Amer. J. of math. 48 (1927), p. 257 [Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 32 (1926), p. 112] untersucht. Verschiedene Ergebnisse, insbesondere ein Zusammenhang zwischen den Typen c) und d) bei *O. M. Thalberg,* Wiss. Vorträge, gehalten auf dem fünften Kongreß der skandinavischen Math. in Helsingfors 1922 (Helsingfors 1923), p. 204.

Über die Typen c) und d) s. noch *J. R. Conner,* Amer. J. of math. 38 (1916), p. 155; *A. Emch,* Comment. math. Helvetici 1 (1929), p. 64. Diese beiden Typen sind weiterhin, vor allem in Verbindung mit der Erzeugung hyperelliptischer Kurven der Ordnung $3n$, von *K. Küpper,* Prag. Abh. böhm. Ges. (7) 1 (1884), Nr. 1 studiert. *K. Bobek,* Sitzungsb. Ak. Wien 91 (1885), p. 476 untersucht all-

Für die rational gegebenen, involutorischen Transformationen stellte *S. Kantor*[534]) eine andere Äquivalenztheorie auf, indem er sie birational, ohne Einführung neuer Irrationalitäten, auf gewisse 16 Typen reduziert (vgl. Nr. **57** am Ende).

62. Analoge Reduktion auf Typen für die involutorischen antibirationalen ebenen Transformationen. Durch das Studium der reellen rationalen Flächen (Nr. **117**) wird *A. Comessatti*[535]) dazu geführt, die zur vorhergehenden Nr. analoge Frage der Reduktion der involutorischen *antibirationalen* Transformationen der Ebene auf gewisse Typen zu behandeln.[536])

Bezeichnen wir die konjugiert komplexe Zahl einer Zahl a mit $\bar{a}$ und das Polynom, das sich aus einem Polynom $f(x, y, \ldots)$ durch Vertauschung der Koeffizienten mit ihren konjugiert-komplexen herleitet, mit $\bar{f}(x, y, \ldots)$, so heißt eine Transformation T zwischen zwei Ebenen mit den Punktkoordinaten x, y und x', y' *antirational* wenn sie durch die Gleichungen

$$x' = f(\bar{x}, \bar{y}), \quad y' = \varphi(\bar{x}, \bar{y}) \tag{1}$$

bestimmt ist, wo f und φ rationale Funktionen sind. Sind diese Formeln (1) ferner umkehrbar, so heißt die Transformation T *antibirational.*

---

gemeiner einen Typus von Involutionen der Klasse ν und Ordnung $3\nu + 5$, für den die neun Basispunkte eines Büschels von Kurven 3. Ordnung Hauptpunkte sind. Die Fälle $\nu = 2, 3$ in Verbindung mit hyperelliptischen Kurven der Ordnung $3n + 2$ bzw. $3n + 1$ in Prag. Abh. böhm. Ges. (7) **1** (1885), Nr. 1, Anhang, p. 27.

Die Transformation d) wird, auch unter Angabe der Gleichungen, noch von *V. Snyder,* Amer. J. of math. 33 (1910), p. 327 studiert; außerdem von *B. Bydžovský,* Časopis 47 (1918), p. 247; *A. B. Coble,* Amer. J. of math. 41 (1919), p. 251—254; in Zusammenhang mit der Theorie der *Abel*schen Funktionen von *F. Schottky,* J. f. Math. 103 (1887), p. 185; *A. B. Coble,* „Alg. geom.", p. 209 ff. Eine Abbildung der Involution d) auf eine kubische Fläche bei *A. Wiman,* Math. Ann. 48 (1896), p. 228—229. — S. auch *B. Machytka,* Časopis 58 (1928), p. 219; *L. Godeaux,* Mathesis 43 (1929), p. 11, 49.

Über die Koinzidenzkurve vom Typus c) s. noch *A. Clebsch,* Math. Ann. 3 (1870), p. 58; vom Typus d), *E. C. Valentiner,* Tidss. for Math. (4) 5 (1881), p. 88.

534) Monatsh. Math. Phys. 10 (1899), p. 43.

535) Math. Ann. 73 (1913), p. 1; Auszug Roma Rend. Acc. Lincei (5) 20^2 (1911), p. 597.

536) Die auf diese Transformationen bezüglichen Begriffe sind in denen enthalten, die sich auf die hyperalgebraischen Gebilde beziehen, welche von *C. Segre,* Atti Acc. Torino 25 (1889), p. 276, 430, 592; 26 (1890), p. 35; Math. Ann. 40 (1891), p. 413 herrühren. Vgl. III A, B, 4 a (*G. Fano*), Nr. **16**, **17**, **18**. Vgl. noch *J. L. Coolidge,* „The geometry of the complex domain", Oxford 1924; *E. Cartan,* „Leçons sur la géométrie projective complexe", Paris 1931.

Fallen die beiden Ebenen zusammen, so ist eine spezielle involutorische antibirationale Transformation die durch die Gleichungen[537])

$$x' = \bar{x}, \quad y' = \bar{y}$$

dargestellte *konjugierte Transformation.*

Daraus folgt, daß eine antibirationale Transformation nichts anders ist als das Produkt einer birationalen Transformation zwischen zwei Ebenen mit der konjugierten Transformation einer von ihnen. Bezeichnet man nämlich mit U und V die durch die Gleichungen

$$x' = f(x, y), \quad y' = \varphi(x, y); \qquad x' = \bar{f}(x, y), \quad y' = \bar{\varphi}(x, y)$$

dargestellten birationalen Transformationen ein und derselben Ordnung n und mit K, K' die konjugierten Transformationen der beiden Ebenen, so ergibt sich

$$T = KU = VK',$$

wobei die Produkte von links nach rechts zu nehmen sind.

Fallen die beiden Ebenen zusammen und ist die antibirationale Transformation $T = KU = VK$ involutorisch, so folgt daraus

$$KUK = U^{-1}, \quad KVK = V^{-1},$$

d. h. die Transformationen U und V sind zu der konjugierten Transformation *harmonisch.*[538]) Sind daher U und V reelle Transformationen (ist also $KUK = U$, $KVK = V$), so müssen diese Transformationen auch involutorisch sein.[539])

---

537) Die konjugierte Transformation ist keine algebraische (ja nicht einmal eine analytische) Korrespondenz: sie besitzt nämlich auf jeder reellen Geraden unendlich viele Fixpunkte, ohne die Identität zu sein. Eine algebraische Kurve C wird durch die konjugierte Transformation in eine algebraische Kurve C' verwandelt, die gleiche Ordnung und gleiches Geschlecht (und im allgemeinen die gleichen projektiven Charaktere) wie C hat; C und C' sind aber im allgemeinen nicht birational äquivalent.

538) Nach der Bezeichnung von *C. Segre,* Math. Ann. 40 (1891), p. 429, 440.

539) Einige Eigenschaften der antibirationalen Transformationen leiten sich von den Eigenschaften der birationalen Transformationen durch triviale Erweiterung ab. Eine algebraische Kurve verwandelt sich in eine algebraische Kurve und ein lineares System wieder in ein lineares System. Insbesondere wird das Geradennetz jeder der beiden Ebenen in ein homaloides Netz n^{ter} Ordnung der andern Ebene verwandelt, wobei n die Ordnung der Transformationen U und V ist. Die Hauptpunkte und -kurven von T auf der Ebene (x, y) fallen mit denen von V zusammen, und sind denen von U konjugiert; das umgekehrte ist auf der Ebene (x', y') der Fall. Zwischen den Geraden einer der beiden Ebenen und den Kurven des homaloiden Netzes der anderen Ebene besteht eine Antiprojektivität; legt man umgekehrt zwischen die Geraden einer Ebene und die Kurven eines homaloiden Netzes einer anderen Ebene eine Anti-

Unter diesen Voraussetzungen findet nun *A. Comessatti*, daß die involutorischen antibirationalen Transformationen der Ebene durch aufeinanderfolgende quadratische Transformationen auf folgende voneinander verschiedene Typen, mit der niedrigsten Anzahl von Hauptpunkten, zurückgeführt werden können:

a) Konjugierte Transformation.

b) Antiquadratische Transformationen ohne Fixelemente.

c) Transformationen der Ordnung $m+1$ (wobei $m>1$ ist) mit einem m-fachen Hauptpunkt O und $2m$ einfachen Hauptpunkten $P_1, P_2, \ldots, P_{2m}$, die voneinander verschieden oder auch in verschiedenen Richtungen dem Punkte O unendlich benachbart sein können und deren homologe Hauptgeraden die Geraden $OP_1, OP_2, \ldots, OP_{2m}$ sind.

d) Transformation 8. Ordnung mit sieben verschiedenen dreifachen Hauptpunkten, deren jeder als homologe Hauptkurve die Kurve 3. Ordnung hat, die in diesem Punkte einen Doppelpunkt besitzt und durch die anderen sechs einfach hindurchgeht.

e) Transformation 17. Ordnung mit acht verschiedenen sechsfachen Hauptpunkten, deren jeder als homologe Hauptkurve die Kurve 6. Ordnung hat, die in diesem Punkte einen dreifachen Punkt und in den sieben übrigen Punkten ebenso viele Doppelpunkte besitzt.[540])

---

projektivität, so bestimmt diese eine antibirationale Transformation zwischen den beiden Ebenen.

Die Antiprojektivitäten, insbesondere die involutorischen Antiprojektivitäten (auch in den drei- und mehrdimensionalen Räumen) werden von *C. Segre*[536]) und, für die Gerade und die Ebene, schon früher von *C. Juel,* Diss. Kjöbenhavn 1885; Acta math. 14 (1889), p. 1, studiert, der sie *Symmetralitäten* nennt.

A. Comessatti[535]), p. 14—19, studiert insbesondere die involutorischen Antiprojektivitäten, ebenso die antiquadratischen ebenen Transformationen, besonders die involutorischen, aber auch die involutorischen antibirationalen ebenen Transformationen, die ein gegebenes Geradenbüschel in sich transformieren (und daher mit den involutorischen birationalen Transformationen von *de Jonquières* analog sind) und bestimmt die Typen, auf die diese durch quadratische Transformationen zurückgeführt werden können. Von den involutorischen antiquadratischen Transformationen gibt es zwei Typen, die hinsichtlich der Beziehungen zwischen Hauptpunkten und -geraden mit den zwei in Nr. **69** erwähnten Typen involutorischer quadratischer birationaler Transformationen analog sind. Ist aber jede Ecke des Hauptdreiecks der gegenüberliegenden Seite zugeordnet, so existiert ein einziger (auf die harmonische Homologie zurückführbarer) Typus quadratischer Transformationen, dagegen zwei wesentlich verschiedene Typen antiquadratischer Transformationen (deren einer auf die konjugierte Transformation zurückführbar und deren anderer frei von Fixpunkten ist).

540) Die durch diesen Satz bestimmte Klassifikation hat viele Analogien mit der der involutorischen birationalen Transformationen (Nr. **61**), weist jedoch auch einzelne Unterschiede auf. So erfordert die Existenz der Transformationen in

63. Typen endlicher diskontinuierlicher Gruppen von ebenen birationalen Transformationen. Beispiele unendlicher diskontinuierlicher Gruppen. Das allgemeinere Problem, die Typisierung periodischer birationaler ebener Transformationen, wird von *S. Kantor* behandelt, und zwar nach zwei Methoden. Bei der ersten Methode[541]) schickt er der Untersuchung und geometrischen Konstruktion dieser Typen die Lösung eines rein arithmetischen Problems (des sog. „Problems der Charakteristiken") voraus, die mit Untersuchungen von *Ch. Hermite* und *G. Frobenius* über die quadratischen Formen verknüpft ist und die möglichen Verkettungen der Hauptpunkte bei den Transformationen betrifft. Die zweite Lösung[542]) hängt nicht von dieser arithmetischen Untersuchung ab, sondern ist rein geometrischer Natur und beruht auf der Betrachtung eines invarianten linearen Systems rationaler oder elliptischer Kurven, zu dem man mit Hilfe der Invarianz aufeinanderfolgender Systeme von einer ursprünglichen invarianten Kurve adjungierten Kurven[543]) gelangt.

Es zeigt sich[544]), daß jede zyklische birationale Transformation der Ebene durch birationale Transformationen auf eine Transformation zurückgeführt werden kann, die eines der folgenden linearen Systeme in sich verwandelt:

a) das Geradennetz (Kollineationen);

b) ein Geradenbüschel (Transformationen von *de Jonquières*);

c) ein ∞^r-System ($r > 1$) kubischer Kurven mit $9 - r$ Basispunkten;

d) ein ∞^2-System von Kurven 6. Ordnung mit acht doppelten Basispunkten.

Die so von *S. Kantor* angegebenen Typen sind: Kollineationen, drei spezielle Transformationen von *de Jonquières* und gewisse 29 isolierte Transformationen mit höchstens acht Hauptpunkten.

---

den Fällen d) und e), im Gegensatz hierzu, bei den analogen birationalen Transformationen besondere Beziehungen zwischen den Hauptpunkten, damit eine Gruppe von sieben oder bzw. von acht Punkten eine Transformation vom Typus d) oder vom Typus e) erzeugen kann. Notwendig und hinreichend ist die Existenz einer involutorischen Antiprojektivität, in der diese Punkte Fixpunkte sind, d. h. also, daß diese Gruppe projektiv (durch eine *imaginäre* oder identische Projektivität) in eine Gruppe reeller Punkte transformiert werden kann.

541) Preisschrift[438]), p. 45 ff.; Auszug J. f. Math. 114 (1895), p. 72 ff.

542) Acta math. 19 (1894), p. 115.

543) Die Idee dieser Reduktionsmethode, die viele Anwendungen gehabt hat, stammt von *S. Kantor,* Paris C. R. 100 (1885), p. 343, der sie „Prinzip der Verminderung der φ" nannte. S. III C 4 (*L. Berzolari*), Fußn. 320.

544) S. auch *G. Castelnuovo,* Math. Ann. 44 (1893), p. 127; *A. Wiman,* daselbst 48 (1896), p. 198—199.

S. Kantor[545]) löst auch das noch allgemeinere Problem der Bestimmung aller Typen, auf die die endlichen diskontinuierlichen Gruppen ebener birationaler Transformationen birational zurückgeführt werden können [vgl. I B 3f (*A. Wiman*), Nr. 25]. Allerdings sind seine Ergebnisse zum Teil unrichtig; die genaue Aufzählung dieser Typen ist von *A. Wiman*[546]) im wesentlichen nach den Grundgedanken *S. Kantors* durchgeführt. Die auf diese Weise erhaltenen Typen sind folgende neun:

1. Kollineationsgruppen;

2. Gruppen von „orthoanallagmatischen" Transformationen (oder Gruppen von *de Jonquières*), die ein Geradenbüschel invariant lassen;

3. Gruppen, bei denen ein System von Kegelschnitten durch zwei feste Punkte (also auch die beiden Strahlenbüschel, deren Mittelpunkte in diese Basispunkte fallen) invariant ist;

4—8. Gruppen, bei denen ein System von Kurven 3. Ordnung mit 3 bis 7 festen Punkten invariant ist;

9. Gruppen mit einem invarianten Büschel von Kurven 3. Ordnung sowie einem invarianten System von Kurven 6. Ordnung mit Doppelpunkten in acht von den neun Basispunkten des Büschels.[547])

Bei den Typen 3, 4 und 5 bieten sich meistens quadratische Transformationen, beim Typus 6 meistens kubische Transformationen dar. Diese Gruppen endlicher Ordnung von quadratischen und kubischen Transformationen werden von *L. Autonne*[548]) studiert.

545) „Theorie der endlichen Gruppen von eindeutigen Transformationen in der Ebene", Berlin 1895.

546) Math. Ann. 48 (1896), p. 195.

547) *A. Wiman,* a. a. O., beweist, daß in den nicht auch von den Typen 1 und 3 gelieferten Gruppen vom Typus 2 immer eine invariante hyperelliptische Kurve existiert.

Nach *S. Kantor* erhält man die Gruppen 3 und 7 aus den automorphen Kollineationsgruppen einer Fläche 2. bzw. 3. Ordnung durch eindeutige Abbildung dieser Flächen auf eine Ebene.

Einer Gruppe vom Typus 7 ist *F. Klein,* Math. Ann. 12 (1877), p. 544 = Ges. math. Abh. 2, Berlin 1922, p. 364 bei Untersuchungen über das Ikosaeder begegnet.

Bei den Typen 8 und 9 kann die Ebene als das Bild einer Doppelebene mit einer Kurve 4. Ordnung bzw. als das Bild eines doppelten Kegels zweiten Grades mit einer Kurve 6. Ordnung als Übergangskurve aufgefaßt werden, so daß die in der einfachen Ebene zu bestimmenden Gruppen durch Kombination der Vertauschung der beiden Blätter mit der automorphen Kollineationsgruppe der Übergangskurve in beiden Fällen abgeleitet werden können.

Die Gruppen vom Typus 8 mit sieben Hauptpunkten werden ferner von *L. C. Cox,* Amer. J. of math. 39 (1915), p. 59; die Gruppen vom Typus 9 von *F. R. Sharpe,* daselbst 37 (1913), p. 55 studiert.

548) J. math. pures appl. (4) 1 (1885), p. 431; (4) 2 (1886), p. 49; Auszüge Paris C. R. 97 (1883), p. 567; 98 (1884), p. 565; 99 (1884), p. 646; 101 (1885),

Spezielle unendliche diskontinuierliche Gruppen ebener *Cremona*scher Transformationen erhält man mit Hilfe einiger Sätze von *A. B. Coble.*[549])

64. Typen endlicher kontinuierlicher Gruppen von ebenen birationalen Transformationen. Die Reduktionsmethode der vorhergehenden Nr. setzt *F. Enriques*[550]) instand, alle birational äquivalenten Typen endlicher (im Sinne von *S. Lie,* also von einer endlichen Anzahl von Parametern abhängiger) kontinuierlicher Gruppen von ebenen birationalen Transformationen[551]) zu bestimmen. Zu diesem Zwecke konstruiert *F. Enriques* irgendein gegenüber der Gruppe in-

---

p. 53; 105 (1887), p. 267. — Über die Beziehungen zwischen der Theorie von *S. Kantor* und den Untersuchungen von *L. Autonne* s. *S. Kantor*[545]), p. 52—53.

Über die Gruppen G_8, G_{16} und G_{32} quadratischer Transformationen und die linearen Systeme von Kurven der Ordnung $4n$ und $8n$, die ihnen gegenüber invariant sind, s. *B. Machytka,* Prag České Ak. Rozpravy 34 (1925), Nr. 17.

549) Trans. Amer. math. Soc. 17 (1915), p. 378. Ein Büschel ebener kubischer Kurven kann durch eine *Cremona*sche Transformation der Ebene in 960, ein Büschel von Kurven 6. Ordnung mit 9 doppelten Basispunkten in $2^8 \cdot 960$ projektiv verschiedene Typen, allgemein, ein Büschel von Kurven der Ordnung $3r$ mit neun r-fachen Basispunkten in eine endliche Anzahl von Typen transformiert werden. In all diesen Fällen gibt es daher eine unendliche diskontinuierliche Gruppe *Cremona*scher Transformationen, der gegenüber das betrachtete Büschel invariant ist.

In ähnlicher Weise läßt sich aus dem Satz von *A. B. Coble*[485]) über die projektiv verschiedenen Typen, auf die eine rationale Kurve C^6 zurückgeführt werden kann, eine unendliche diskontinuierliche Gruppe *Cremona*scher Transformationen ableiten, die die Kurve C^6 in sich transformieren.

Eine weitere unendliche diskontinuierliche Gruppe leitet sich aus der Eigenschaft ab [*A. B. Coble,* Trans. Amer. math. Soc. 24 (1922), p. 16], daß eine *Veronese*sche Fläche [III C 7 (*C. Segre*), Nr. **33**] durch eine *reguläre Cremona*sche Raumtransformation (Nr. **91**), deren Hauptpunkte auf der gegebenen Fläche liegen, in eine andere *Veronese*sche Fläche transformiert wird. Die Gruppe entsteht bei der Betrachtung der Abbildung dieser Fläche auf eine Ebene und besteht aus Transformationen, bei denen das homaloide Netz aus Kurven 5. Ordnung mit sechs Knotenpunkten gebildet wird.

Ein Hinweis auf den Gegenstand dieser Nr. bei *J. L. Coolidge*, „Alg. pl. curves", p. 492—498.

550) Roma Rend. Acc. Linc. (5) 2^1 (1893), p. 468.

551) Vgl. III AB 4b (*G. Fano*), Nr. **22**. S. außerdem *G. Fano,* Monatsh. Math. Phys. 9 (1898), p. 17; Auszug Verhandl. des I. intern. Math.-Kongresses in Zürich 1897 (Leipzig 1898), p. 254.

G. Bohlmann, Gött. Nachr. 1896, p. 44 [vgl. *M. Noether,* Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 5^1 (1901), p. 68 [1896]] bestimmt alle endlichen kontinuierlichen Gruppen ebener quadratischer Transformationen. S. auch *M. W. Haskell,* Bull. Amer. math. Soc. (2) 24 (1918), p. 418. Über die kontinuierlichen Gruppen von Kreisverwandtschaften s. Anm. 617.

variantes Linearsystem algebraischer Kurven und gelangt durch die Betrachtung der diesem sukzessiv adjungierten Systeme zu einem Beweis dafür, daß nur die drei folgenden Typen, mit ihren Untergruppen, existieren:

1. die 8-gliedrige Kollineationsgruppe;

2. die 6-gliedrige Gruppe der quadratischen Transformationen, die das lineare System von Kegelschnitten mit zwei verschiedenen Basispunkten in sich verwandeln[552]);

3. Die $(n+5)$-gliedrige Gruppe der Transformationen von *de Jonquières* willkürlicher Ordnung n, die ein Geradenbüschel und ein lineares ∞^{n+1}-System von Kurven n^{ter} Ordnung mit einem $(n-1)$-fachen Basispunkt im Mittelpunkt des Büschels und $n-1$ festen Tangenten in diesem Punkte gleichzeitig in sich verwandeln.[553])

Die durch zwei feste Punkte hindurchgehenden Kegelschnitte einer Ebene sowie die Kurven n^{ter} Ordnung mit einem gemeinsamen $(n-1)$-fachen Punkt und in diesem gemeinsamen Tangenten können als die Bilder der ebenen Schnitte einer Fläche 2. Ordnung des dreidimensionalen Raumes oder der überebenen Schnitte eines rationalen Normal-Kegels n^{ter} Ordnung eines $(n+1)$-dimensionalen Raumes, in einer ebenen Abbildung dieser Flächen aufgefaßt werden. Daher läßt sich das vorhergehende Ergebnis auch folgendermaßen ausdrücken: Die Geometrie der Ebene, deren „Hauptgruppe" von Transformationen[554]) eine von einer endlichen Anzahl Parametern abhängige kontinuierliche Gruppe *Cremona*scher Transformationen ist, stimmt mit der projektiven Geometrie auf der Ebene, oder einer Regelfläche 2. Ordnung, oder dem rationalen Normal-Kegel des $(n+1)$-dimensionalen Raumes, oder mit einem Sonderfall einer dieser drei Geometrien[555]) überein.

---

552) Bringen wir die beiden festen Punkte durch eine Kollineation in die beiden Kreispunkte der Ebene, so können wir aussagen, daß diese Gruppe die Gruppe der direkten Kreisverwandtschaften (Nr. **71**) ist.

553) Die Typen 1 und 2 treten auch unter den Typen endlicher diskontinuierlicher Gruppen auf (Nr. **63**).

Funktionentheoretische Betrachtungen über die Gruppen 3 von *de Jonquières* in Verbindung mit der Theorie der automorphen Funktionen bei *P. J. Myrberg,* Math. Ztschr. 21 (1924), p. 224. Vgl. Anm. 428.

554) Nach *F. Klein,* Erlanger Programm 1872 = Math. Ann. 43 (1893), p. 63 = Ges. math. Abh. 1, Berlin 1921, p. 460; ital. Übers. von *G. Fano,* Ann. di mat. (2) 17 (1890), p. 307; franz. Übers. von *H. Padé,* Ann. Éc. Norm. (3) 8 (1891), p. 87, 173; engl. Übers. von *W. Haskell,* Bull. Amer. math. Soc. (2) 2 (1893), p. 215; polnische Übers. von *S. Dickstein,* Prace mat.-fiz. 6 (1895), p. 27; russische Übers. von *D. M. Sintsoff,* Kasan Abh. (2) 5, 6 (1895—1896).

555) Hieraus folgt, daß jede algebraische Fläche mit einer transitiven kontinuierlichen Gruppe automorpher projektiver Transformationen auf eine Ebene

Die erste der drei von *F. Enriques* bestimmten Gruppen ist nach den allgemeinen Untersuchungen von *S. Lie* über die allgemeine projektive Gruppe[556]), einfach. Die zweite Gruppe enthält zwei und nur zwei invariante Untergruppen, die dreigliedrig sind und bei Betrachtung der Gruppe als Gruppe der automorphen projektiven Transformationen einer Regelfläche 2. Ordnung aus biachsialen Homographien bestehen. Die Struktur der dritten Gruppe wurde auf geometrischem Wege von *F. Enriques*[557]), auf Grund der endlichen Gleichungen der Gruppe von *H. Mohrmann*[558]) angegeben. Daraus ergibt sich, daß die dritte Gruppe drei und nur drei invariante kontinuierliche Untergruppen ∞^{n+4} bzw. ∞^{n+2}, ∞^{n+1} enthält.[559])

Dem Gedankengange dieser und der vorhergehenden Nr. folgend, erwähnen wir noch die von *G. Castelnuovo*[560]) herrührende Bestimmung der Typen, auf die die birationalen Transformationen der Ebene mit einer irreduziblen Koinzidenzkurve γ (s. Nr. 58) zurückgeführt werden können. Ist das Geschlecht von $\gamma > 1$, so kann eine derartige Transformation entweder durch eine *Cremona*sche Transformation auf eine Transformation von *de Jonquières* zurückgeführt werden, oder sie ist zyklisch 2., 3. oder 4. Grades. Ist nun das Geschlecht von $\gamma > 4$, so ist diese Koinzidenzkurve notwendigerweise hyperelliptisch, und die

---

oder eine nicht ausgeartete Fläche 2. Ordnung des dreidimensionalen Raumes oder eine normale rationale Kegelfläche n^{ter} Ordnung eines $(n+1)$-dimensionalen Raumes birational derart bezogen werden kann, daß die betrachtete Gruppe projektiver Transformationen eine Gruppe ebener Homographien oder eine Gruppe von Homographien des drei- oder auch $(n+1)$-dimensionalen Raumes erzeugt, die diese Fläche 2. Ordnung oder diese normale rationale Kegelfläche in sich verwandeln. S. *G. Fano*, Roma Rend. Acc. Linc. (5) 4^1 (1895), p. 149 und 322; Rend. Circ. mat. Palermo 10 (1895), p. 19.

Dieser Satz wird von *G. Fano*, Rend. Circ. mat. Palermo 10 (1895), p. 1 auch direkt, ohne Betrachtung der kontinuierlichen Gruppen birationaler Transformationen der Ebene bewiesen [s. ferner *G. Fano*, Rend. Circ. mat. Palermo 11 (1897), p. 240]; und hieraus gewann dieser umgekehrt, Rend. Circ. mat. Palermo 10 (1895), p. 16, die Ergebnisse von *F. Enriques* über diese Gruppen von neuem. Vgl. dazu auch *H. Mohrmann*, Habilitationsschrift Karlsruhe 1911; Rend. Circ. mat. Palermo 32 (1911), p. 158.

556) Math. Ann. 25 (1884), p. 130; „Theorie der Transformationsgruppen" unter Mitw. von *Fr. Engel*, 1, Leipzig 1888, p. 560.

557) Roma Rend. Acc. Linc. (5) 2^1 (1893), p. 532.

558) Rend. Circ. mat. Palermo 31 (1910), p. 170.

559) In bezug auf die Untergruppe ∞^{n+4} ergänzt *H. Mohrmann*[558]) die Ergebnisse von *F. Enriques* und zeigt, wie ein wesentlicher Unterschied zwischen dem Fall n gerade und dem Fall n ungerade besteht.

560) Roma Rend. Acc. Linc. (5) 1^1 (1892), p. 47; vgl. *S. Kantor*[542]), p. 130, und auch *J. L. Coolidge*, „Alg. pl. curves", p. 474—478.

Transformation kann durch eine *Cremona*sche Transformation auf eine Transformation von *de Jonquières* zurückgeführt werden, oder sie ist zyklisch 3. Grades.

Mit den angegebenen Sätzen über die endlichen, diskontinuierlichen oder kontinuierlichen, Gruppen ebener *Cremona*scher Transformationen kennt man die Typen derartiger Transformationen, die ein invariantes lineares Kurvensystem besitzen. Im allgemeinen haben jedoch die birationalen Transformationen der Ebene keine derartigen invarianten linearen Systeme. Daher wissen wir in bezug auf ihre Reduktion auf Typen, ja sogar in bezug auf die Bestimmung irgendeines ihrer invarianten Charaktere nichts weiteres auszusagen.

65. Gruppen ebener birationaler Berührungstransformationen. *L. Autonne*, der die endlichen diskontinuierlichen Gruppen ebener quadratischer und kubischer Transformationen (Nr. **63**) studiert, untersucht auch[561]) Gruppen ebener birationaler Berührungstransformationen[562]), und zwar durch Betrachtung von Substitutionen mit zwei

561) J. math. pures appl. (4) 4 (1888), p. 177, 407; Auszüge Paris C. R. 103 (1886), p. 1176; 104 (1887), p. 767, 1422. *L. Autonne* dehnte seine Untersuchungen auch auf drei- und mehrdimensionale Räume aus. S. Nr. **87** und **90**.

562) *G. Fano,* Roma Rend. Acc. Linc. (6) 8 (1928), p. 445, 529, 623; (6) 9 (1929), p. 16 [Auszug Atti del Congresso intern. dei matematici Bologna 1928, 4 (Bologna 1931), p. 35] stellt das Problem der ebenen birationalen Berührungstransformationen auf geometrische Grundlage, indem er zeigt, daß sich dies Problem mit Hilfe einer von *S. Lie* herrührenden Abbildung in ein Problem der *Cremona*schen Transformationen des dreidimensionalen Raumes verwandelt. *G. Fano* geht von der Bemerkung aus, daß in einer solchen Berührungstransformation die in der ersten oder zweiten Ebene den Punkten der anderen Ebene entsprechenden ∞^2-Kurvensysteme die beiden folgenden Eigenschaften besitzen, die die analogen Eigenschaften im Infinitesimalbereich zu denen der Kurven eines homaloidischen Netzes sind: In jedem dieser Systeme gibt es eine und nur eine Kurve, die ein allgemein gegebenes „Element" (Gesamtheit eines Punktes und einer zugehörigen Geraden) enthält; alle einer bestimmten Kurve des Systemes und ihren unendlich benachbarten Kurven gemeinsamen Punkte (und Tangenten) sind mit Ausnahme eines fest. Bezeichnen wir jedes ∞^2-System ebener, die beiden genannten Eigenschaften erfüllender irreduzibler Kurven γ mit Ω, so ist ein derartiges System als ∞^2-Gebilde rational, und ebenso sind seine einzelnen Kurven rational. Jedes derartige System Ω wird durch eine birationale Berührungstransformation in ein anderes System Ω verwandelt. Eine birationale Berührungstransformation zwischen zwei Ebenen kann dadurch bestimmt werden, daß man in diesen zwei willkürliche Systeme Ω (deren eines das ∞^2-System der Punkte oder der Geraden sein kann) angibt und diese als rationale ∞^2-Gebilde aufgefaßten Systeme durch eine willkürliche birationale Transformation verknüpft.

Bezeichnen wir mit n die Ordnung, mit ν die Klasse einer Kurve γ eines Systems Ω, so genügen diese Kurven γ $n + \nu - 1$ weiteren Bedingungen, die durch Berührungen mit gegebenen algebraischen Kurven (die möglicherweise durch

Reihen von drei homogenen Veränderlichen, d. h. von Koordinaten x_1, x_2, x_3 von Punkten und Koordinaten u_1, u_2, u_3 von Geraden einer Ebene.

Wir stellen die Substitution mit

$$s = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i\begin{pmatrix} a & b \\ x, & u \end{pmatrix} \\ u_i & \psi_i\begin{pmatrix} c & d \\ x, & u \end{pmatrix} \end{vmatrix}$$

dar, in der φ_i und ψ_i biternäre Formen bezeichnen, die in den x_i von der Ordnung a bzw. c, und in den u_i von der Ordnung b bzw. d sind. Die Substitution s heißt birational, wenn sich für

$$\alpha y_i = \varphi_i(x, u), \qquad \beta v_i = \psi_i(x, u)$$

Punkte zu ersetzen sind), auch durch Berührungen gegebener Ordnung in angegebenen Punkten ausgedrückt sind.

Unter diesen Voraussetzungen ist die von *S. Lie* angegebene Abbildung des Systems der Elemente einer Ebene auf den Punktraum [s. *S. Lie* und *Fr. Engel*[556]) 2, Leipzig 1890, p. 393 ff.; 434 ff.; und besonders *S. Lie* und *G. Scheffers*, „Geometrie der Berührungstransformationen" 1, Leipzig 1896, p. 238—247] eine birationale Transformation, die wie folgt dargestellt werden kann. Es seien ξ, η die Cartesischen Koordinaten eines Punktes der Ebene, p der Richtungskoeffizient der Geraden, die mit diesem Punkte ein Element bildet, und x, y, z die Koordinaten eines Punktes des Raumes. Die Transformation ist durch die Formeln

$$x = \xi, \quad y = \tfrac{1}{2}p, \quad z = \eta - \tfrac{1}{2}p\xi$$

gegeben, deren Umkehrungen

$$\xi = x, \quad \eta = z + xy, \quad p = 2y \quad \text{sind.}$$

Die Differentialgleichung $d\eta - p\,d\xi = 0$, die die „Elementvereine" der Ebene kennzeichnet [III D 7 (*H. Liebmann*), Nr. 4], verwandelt sich in die Gleichung (*) $dz + x\,dy - y\,dx = 0$, die *Pfaff*sche Gleichung eines nicht speziellen linearen Geradenkomplexes, so daß die Elementvereine der Ebene und die Kurven, deren Tangenten dem Komplexe angehören, miteinander korrespondieren. Bei der Abbildung sind die Bilder der birationalen Berührungstransformationen der Ebene die *Cremona*schen Raumtransformationen, die die Gleichung (*) in sich verwandeln. Einem allgemeinen System Ω der Ebene entspricht im Raume eine Kongruenz 1. Ordnung, die aus rationalen Kurven des Komplexes mit der Ordnung $n + \nu$ zusammengesetzt ist, die ihrerseits in n bzw. in ν Punkten die uneigentlichen Geraden der Ebenen $y = 0$ bzw. $x = 0$ und ferner in $n + \nu - 1$ Punkten gewisse zum Komplexe gehörige feste Kurven treffen.

So zeigt sich, daß die Bestimmung der birationalen Berührungstransformationen der Ebene, d. h. der Systeme Ω ebener Kurven, gleichwertig ist mit der Bestimmung aller Kongruenzen 1. Ordnung von rationalen Kurven irgendeiner beliebigen Ordnung m, die zu einem linearen Komplexe gehören und in $2m - 1$ Punkten gegebene, ebenfalls dem Komplexe angehörende Kurven treffen oder Bedingungen unterworfen sind, die als Sonderfälle hiervon aufgefaßt werden können.

J. M. Feld, Bull. Amer. math. Soc. (2) 37 (1931), p. 175, hat notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß eine Berührungstransformation der Ebene birational sei.

ergibt
$$\gamma x_i = \vartheta_i \binom{a' \;\; b'}{y,\; v}, \qquad \delta u_i = \eta_i \binom{c' \;\; d'}{y,\; v},$$
wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ Proportionalitätsfaktoren und ϑ_i, η_i biternäre Formen der y_1, y_2, y_3 und v_1, v_2, v_3 sind. Die Substitution ist überdies eine Berührungstransformation, wenn die beiden Gleichungssysteme
$$\sum_i u_i x_i = \sum_i u_i dx_i = \sum_i x_i du_i = 0,$$
$$\sum_i y_i v_i = \sum_i v_i dy_i = \sum_i y_i dv_i = 0$$
einander zur Folge haben.

Diese Transformationen (die *L. Autonne* als *Crémoniennes* bezeichnet und die für $b = 0$ die punktuellen *Cremona*schen Transformationen werden) bilden eine Gruppe, und *L. Autonne* studiert diejenigen Gruppen quadratischer Transformationen, bei denen also jede der positiven ganzen Zahlen a, b, c, d die Zahl 2 nicht übersteigt. Unter dieser Annahme können diese Transformationen auf andere zurückgeführt werden, bei denen eine dieser vier Zahlen den Wert Null oder Eins hat, wobei[563]) die Transformation durch Kombination einer geeigneten punktuellen *Cremona*sche Transformation mit der Substitution
$$\begin{vmatrix} x_i & u_i \\ u_i & x_i \end{vmatrix}$$
erhalten wird.

Eine spezielle Transformation s des so entstehenden Typus heißt *Cremonische* Transformation (*Crémonique*), und es zeigt sich, daß jede nicht Cremonische quadratische Transformation s das Produkt zweier oder dreier Cremonischer Transformationen ist.

Die Klassifikation der „Crémoniennes" fußt nach *L. Autonne* auf der Beschaffenheit der von ihm benannten *primordialen* Mannigfaltigkeiten, in die eine aus den Elementen (x, u) (von denen x oder auch u fest ist) zusammengesetzte Mannigfaltigkeit durch die „Crémonienne" transformiert wird.

Ein und dieselbe primordiale Mannigfaltigkeit kann nicht zu zwei verschiedenen „Crémoniennes" gehören.

Eine Cremonische Transformation kann immer, unter Umständen mit Hilfe des Dualitätsgesetzes, als eine im Sinne von *S. Lie* erweiterte (birationale) Punkttransformation[564]) betrachtet werden.

---

563) *L. Autonne,* J. math. pures appl. (4) 3 (1887), p. 63; Auszüge Paris C. R. 102 (1886), p. 313; 103 (1886), p. 1176.

564) *L. Autonne,* J. Éc. polyt. (1), cah. 61 (1891), p. 35; (1), cah. 62 (1892), p. 47; (1), cah. 63 (1893), p. 79; (1), cah. 64 (1894), p. 1; Paris C. R. 105 (1887), p. 850, 929; 106 (1888), p. 262; 113 (1891), p. 632; 114 (1892), p. 407; 115 (1892),

66. Ebene quadratische Transformationen[565]**; geschichtliche Bemerkungen.** Die Theorie der quadratischen Transformationen zwischen zwei Ebenen ist in ihren Grundzügen[566]) in den Untersuchungen über die „organische" Erzeugung ebener Kurven[567]) enthalten, die man *I. Newton*[568]), *C. Maclaurin*[569]) und *W. Braikenridge*[570]) verdankt.[571])

---

p. 587; 122 (1896), p. 1043 wendet seine Theorie auf die Differentialgleichungen 1. Ordnung mit rationalen Koeffizienten [vgl. II B 6 (*E. Hilb*), Nr. **4**] dadurch an, daß er nach der Betrachtungsweise von *A. Clebsch* die Integralkurven der Gleichung als Hauptkoinzidenzkurven eines Konnexes (s. Nr. **121**) auffaßt.

565) Erörterungen dieses Gegenstandes bei *A. Clebsch* und *F. Lindemann*, „Vorlesungen" 1, p. 474—477; franz. Übers. 2, p. 188—192; *G. Salmon* und *W. Fiedler*, „An. Geom. d. höh. eb. Kurven"[28]), p. 384—391; *G. Salmon* und *O. Chemin*, „Traité de géom. anal."[28]), p. 430—439; *F. Aschieri*, „Geometria proiettiva e descrittiva" 2, Milano 1884, p. 229—239; „Geometria proiettiva", 2. Ausg., Milano 1888, p. 376—383; „Geometria descrittiva", 2. Ausg., Milano 1896, p. 240—255; *Charlotte Angas Scott*, „An introductory account of certain modern ideas and methods in plane analytical geometry", London 1894, p. 217—232; *Th. Reye*, „Die Geometrie der Lage" 1, 4. Aufl., Leipzig 1899, p. 107, 178, 216, 236—237; 2, 4. Aufl., Stuttgart 1907, p. 209—214, 303—304; *H. Andoyer*, „Leçons"[46]), p. 290—301; *G. Salmon* und *W. Fiedler*, „Analytische Geometrie der Kegelschnitte" 2, 6. Aufl., Leipzig 1903, p. 788—796; *H. Wieleitner*[28]), p. 137 ff.; *F. Severi*, „Complementi di geometria proiettiva", Bologna 1906, p. 283—291; „Lezioni", p. 50—57; „Vorlesungen", p. 41—46; „Trattato" 1_1, p. 303—308; *K. Doehlemann*, „Geom. Transf." 2, p. 1—50; *R. Sturm*, „Geom. Verw." 2, p. 76—78; 4, p. 43—95; *E. Duporcq* und *R. Bricard*[52]), p. 133—142; *F. Enriques* und *O. Chisini*, „Lezioni" 1, p. 104—113; *J. Rey Pastor*[46]), „Fundamentos ...", p. 225—234; *H. Hilton*[28]), p. 120—124; *H. Malet*, „Étude", p. 87—112, 161—163, 197—198; *S. Ganguli*[28]), p. 17—19, 257—271; *Hilda P. Hudson*, „Cremona transf.", p. 30—54; *E. Bertini*[46]), p. 179—204; *J. L. Coolidge*, „Alg. pl. curves", p. 196—201.

Vgl. III A B 5 (*A. Schoenflies*), Nr. **26**; *E. Kötter*, „Bericht", p. 10—12, 193—195, 263—268, 318—322, 337—340; *A. Emch*, „Report", p. 19—55.

566) *Hilda P. Hudson*, „Cremona transf.", p. 388, bemerkt, daß ein Satz des *Apollonius* von Perga (rund 200 Jahre v. Chr.) ebene lineare und quadratische Transformationen (Translationen, Rotationen, Ähnlichkeiten, Inversionen und ihre Produkte) anführt. S. *Pappi Alexandrini* mathem. collectiones, übers. *Commandinus*, Bononiae 1660, p. 247.

567) *I. Newton*, „Enumeratio linearum tertii ordinis" (um 1676 geschrieben und im Anhang zur 1. englischen Ausgabe der Abhandlung „Optik" veröffentlicht), London 1704 = Opuscula math. philos. et philol., ed. *J. Castillioneus*, Lausannae et Genevae 1 (1744), p. 265—267 = Opera omnia, ed. *S. Horsley* 1, Londini 1779, p. 556—558, macht von dieser Benennung Gebrauch, um eine durch Hilfsmittel konstanter Form ausgeführte Konstruktion zu bezeichnen. Diese findet sich aber schon bei *F. van Schooten*, „De organica conicarum sectionum in plano desciptione tractatus", Leyden 1646; neu aufgelegt als 4. Buch der „Exercitationes mathematicae", Leyden 1657.

568) *I. Newton* gibt, ohne Beweis, derartige Erzeugungen für die Kegelschnitte und mit Doppelpunkten ausgestatteten Kurven höherer Ordnung an. So

Späterhin verwendet *G. Cramer*[572]) irrationale und rationale Transformationen, insbesondere die singuläre quadratische Transformation,

---

läßt er zwei Winkel konstanter Größe sich derart um ihre Scheitel drehen, daß zwei ihrer Schenkel sich auf einer festen Kurve schneiden. Dann beschreibt der Schnittpunkt der beiden anderen Schenkel eine Kurve höherer Ordnung als die der gegebenen Kurve. Auf diese Art erhält er einen Kegelschnitt als Ort des Schnittpunktes D der freien Seiten AD, BD zweier Winkel PAD, PBD, die um ihre Scheitel A bzw. B rotieren, während sich die beiden anderen Seiten AP, BP auf einer festen Geraden schneiden [„Philosophiae naturalis principia math.", Londini 1687 (Vorwort 1686), Buch 1, Lemma XXI; Opera 2, p. 101—102; „Enumeratio"[567]), Opuscula 1, p. 265 = Opera 1, p. 556. In den „Principia" führte *Newton* unter Betrachtung gewisser ähnlicher Dreiecke einen Beweis hierfür: „egregio ratiocinio ad morem veterum" nach *C. Maclaurin*[35]), p. 3, der daselbst, p. 1—3, einen rechnerischen Beweis hierfür liefert. Ein weiterer Beweis mit Hilfe der analytischen Geometrie bei *I. Newton* in „Arithmetica universalis, sive de compositione et resolutione arithmetica liber" (redigiert um 1685, veröffentlicht in Cambridge 1707), ed. *G. J.'s Gravesande,* Leyden 1732, p. 169—170 = Opera 1, p. 156—157], und leitet hiervon die Konstruktion eines Kegelschnittes ab, wenn fünf Punkte, oder vier Punkte und die Tangente in einem von ihnen, oder drei Punkte und die Tangenten in zwei von diesen Punkten bekannt sind [„Principia", Buch 1, Prop. XXII, XXIII, XXIV = Opera 2, p. 102—107; „Enumeratio"[567]), Opuscula 1, p. 266 = Opera 1, p. 557; „Arithm. univ.", p. 171—179 = Opera 1, p. 157—165].

Durchläuft der Punkt P einen Kegelschnitt, so beschreibt der Punkt D eine Kurve 4. Ordnung, die in A und B und der Lage von D, bei der die Geraden AP und BP zusammenfallen, drei Doppelpunkte hat. Geht aber z. B. der gegebene Kegelschnitt durch A hindurch, so ist der Ort von D eine Kurve 3. Ordnung, die durch B hindurchgeht und in A einen Doppelpunkt hat. Hieraus leitet sich eine Konstruktion der Kurve 3. Ordnung ab, von der ein Doppelpunkt und sechs einfache Punkte gegeben sind. S. *I. Newton,* „Enumeratio"[567]), Opuscula 1, p. 265—267 = Opera 1, p. 556—558. — Die Lösung des letzten Problems hat *I. Newton* schon früher in dem zweiten Briefe an *H. Oldenburg* vom 24. Oktober 1676 erwähnt [Opuscula 1, p. 340—341 = Opera 4, p. 548; „Commercium epistolicum J. Collins et aliorum", London 1712 (2. Ausg. London 1722); éd. *J. B. Biot* et *F. Lefort,* Paris 1856, p. 132].

569) In „Geom. organica"[35]) [s. auch Trans. London Phil. Soc. 30 (1719), p. 939; 39 (1735), p. 143, 148] beweist *C. Maclaurin* die organischen Konstruktionen von *I. Newton* und verallgemeinert diese durch Betrachtung von Winkeln mit veränderlichen Scheiteln beträchtlich. Auf diese Weise gelangt er dazu, Kurven höherer Ordnung zu konstruieren, die mit vielfachen Punkten ausgestattet sind oder nicht. Die Methoden von *Maclaurin* bestehen im Grunde aus der Betrachtung gewisser einförmiger oder mehrförmiger Korrespondenzen zwischen den Elementen zweier rationaler ∞^1-Gebilde (s. Nr. 3) oder, wie bei *Newton,* in der Ausführung des Gedankens einer quadratischen Transformation zwischen zwei Ebenen. Nach diesem letzten Gesichtspunkt geht *Maclaurin,* „Geom. organica", p. 79—86, von der von *Newton* herrührenden und in Anm. 567 und 568 angegebenen organischen Konstruktion der Kegelschnitte aus. Aus der Bemerkung, daß der Punkt D einen durch A, B und einen dritten Fixpunkt C hin-

die durch die Substitution $y = x'y'$ bestimmt ist (Nr. **68**), für das Studium der ebenen algebraischen Kurven.[573])

Ein Hinweis auf den Sonderfall der involutorischen Transformation, die durch ein Büschel von Kegelschnitten bestimmt ist (Nr. **69**),

---

durchgehenden Kegelschnitt beschreibt, wenn sich der Punkt P auf einer gegebenen Geraden bewegt, schloß *Maclaurin*, daß der Punkt D, wenn P eine Kurve γ durchläuft, eine Kurve beschreibt, die so viele Punkte mit einer Geraden gemeinsam hat, wie einer von diesen Kegelschnitten mit γ. Einer Kurve n^{ter} Ordnung entspricht daher eine Kurve der Ordnung $2n$, die in A, B, C n-fache Punkte hat; und so weiter fort.

570) *W. Braikenridge*, „Exercitatio geometrica de descriptione linearum curvarum", Londini 1733, führt mit Hilfe von Winkeln der Größe Null, also um feste Punkte rotierenden Geraden analoge Konstruktionen zu denen von *I. Newton* und *C. Maclaurin* aus; auch bei ihm läßt sich die Anwendung quadratischer Transformationen erkennen. Rotieren nämlich die Geraden A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 um drei Fixpunkte B_1, B_2, B_3, während der Punkt A_1 eine gegebene Gerade und der Punkt A_2 eine gegebene Kurve γ der Ordnung n beschreibt, so ist der Ort von A_3 nach *W. Braikenridge* eine Kurve γ' der Ordnung $2n$. Zum Beweis hierfür läßt er A_3 eine Gerade g durchlaufen, so daß A_2 einen Kegelschnitt beschreibt, und den $2n$ Schnittpunkten von γ mit diesem Kegelschnitte die Schnittpunkte von γ' mit g korrespondieren, s. a. a. O., p. 26—27. Hier, auf p. 24—26, wird der gleiche Satz auch durch Rechnung bewiesen. Ebenfalls durch Rechnung, a. a. O., p. 1—3, hat er diesen Satz für $n = 1$ bewiesen, und davon (p. 21—23) Konstruktionen eines durch fünf Punkte, oder vier Punkte und die Tangente in einem dieser Punkte, oder drei Punkte und die Tangenten in zwei von diesen Punkten gegebenen Kegelschnittes abgeleitet. — *Braikenridge* bemerkt auch (p. 24—59), daß die Multiplizität von γ' in B_1, B_2 und dem Schnittpunkt der Geraden g und B_2B_3 n ist, daß analog, wenn A_1 eine Kurve n^{ter} Ordnung und A_2 eine Kurve m^{ter} Ordnung durchläuft, der Punkt A_3 eine Kurve der Ordnung $2m \cdot n$ beschreibt, und gibt die Reduktion der Ordnung von γ' an, wenn γ durch B_1 oder B_2 hindurchgeht.

571) Hinsichtlich dieser alten Arbeiten von *Newton, Maclaurin, Braikenridge* und anderen s. *M. Cantor*, „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik" 3, 2. Ausg., Leipzig 1901, p. 421—426, 435—445, 787—793; und den „Bericht" von *E. Kötter*, p. 9—12, 15—17, 29—33. — Vgl. auch III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **10**.

572) „Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques", Genève 1750, z. B. p. 33—37, 288, 616, 626, 629, 636—652.

Im übrigen hat auch *I. Newton*, „Artis analyticae specimina, vel geometria analytica" (etwa 1670), Opera 1, p. 404, von der Transformation $x' = \frac{1}{x}$ Gebrauch gemacht.

573) Doch handelt es sich bei diesen Autoren tatsächlich nicht um eine Theorie der Reduktion der Singularitäten, sondern lediglich darum, durch Vereinfachung der Kurvengleichung die Konstruktion der Kurve zu vereinfachen und so ihre Form in der Nachbarschaft der singulären Punkte, im Endlichen oder Unendlichen zu erkennen. Vgl. hierüber den „Bericht" von *A. Brill* und *M. Noether*, p. 116—123, 135—139.

findet sich bei *J. V. Poncelet.*[574]) Mit diesem Sonderfall und anderen speziellen Konstruktionen quadratischer Transformationen beschäftigt sich *J. Steiner.*[575])

Ausführlich werden die quadratischen Transformationen von *L. I. Magnus*[576]) auf analytischem Wege, von *J. Steiner*[577]), *A. Jacobi*[578]) und *F. Seydewitz*[579]) auf geometrischem Wege studiert, späterhin sowohl nach der einen wie der anderen Methode von vielen anderen Autoren, wie in Nr. **67**, **68** und **69** besprochen werden wird.[580])

574) „Traîté des propriétés projectives des figures" 1, Paris 1822; 2. Ausg., Paris 1865, p. 43—44, 192, 206 (Nr. 81, 84, 370, 388).

575) J. f. Math. 3 (1828), p. 211—212 = Werke 1, Berlin 1881, p. 178—180; Ann. de math. 19 (1828—29), p. 51—54, 61—64 = Werke 1, p. 201—203, 208—210.

Ein Hinweis auch bei *J. Plücker,* J. f. Math. 5 (1829), p. 9 = Ges. math. Abh., Leipzig 1895, p. 132, der aus der Form der Gleichung eines dem zugrunde gelegten Dreieck umbeschriebenen Kegelschnittes erkannte, daß jedem Satz über die Schnittpunkte von Geraden ein Satz über den vierten Schnitt zweier derartiger Kegelschnitte entspricht.

576) J. f. Math. 8 (1831), p. 51; 9 (1832), p. 135; „Sammlung"[430]), p. 229—240.

577) „System. Entw."[430]), p. 251—295 = Werke 1, p. 407—439; vgl. auch Anhang, Nr. 60, 38), 39) = Werke 1, p. 446.

578) J. f. Math. 23 (1841), p. 243; 31 (1845), p. 76, 93.

579) Arch. Math. Phys. (1) 7 (1846), p. 113; (1) 8 (1846), p. 1.

580) Die quadratischen Transformationen sind in den Transformationen enthalten, die von *F. Klein* und *S. Lie,* Math. Ann. 4 (1871), p. 50 [Auszüge Paris C. R. 70 (1870), p. 1222, 1275] = *F. Klein,* Ges. math. Abh. 1, Berlin 1921, p. 424 (Auszüge, p. 415, 420), in ihren Untersuchungen über die sog. „*W*-Kurven" [III D 4 (*G. Scheffers*), Nr. **13**—**20** und **35**; III C 9 (*K. Rohn* und *L. Berzolari*), Nr. **58**] studiert werden. — Als Sonderfälle anderer, allgemeinerer, umkehrbar eindeutiger Transformationen der Ebene erscheinen sie auch bei *T. Dantzig,* Amer. J. of Math. 40 (1917), p. 198 und bei *R. Sauer,* Math. Ann. 106 (1931), p. 722.

Quadratische Transformationen zwischen einer Punktebene und einer Geradenebene betrachten *A. Voss,* Ztschr. Math. Phys. 17 (1872), p. 375; *H. Milinowski,* J. f. Math. 79 (1874), p. 140; *R. Sturm,* Math. Ann. 19 (1881), p. 471; *E. Heinrichs,* Diss. München 1887, p. 47; *F. Nicoli,* Mem. Acc. Modena (2) 7 (1890), p. 253; *Th. Tuch,* Diss. Jena 1890; *G. Cardoso-Laynes,* Period. di mat. (3) 1 (1904), p. 81; *G. A. G. de Longchamps,* daselbst, p. 241 [vgl. *G. Loria*[46]), 2, p. 348—349; ital. Ausg. 2, p. 406—407]; *N. G. W. H. Beeger,* Wiskundige Tijdschrift 7 (1910), p. 42; *T. Ono,* Tôhoku math. J. 10 (1916), p. 31, 144, 198; *T. Ôta* (= *T. Takasu*), Tôhoku Science Rep. 10 (1921), p. 233; *N. Durairajan,* J. Indian math. Soc. 18 (1929), p. 106; *J. Dieudonné,* Mathesis 44 (1930), p. 277. Transformationen dieser Art sind auch die „Fußpunkttransformationen" [über diese und andere spezielle Berührungstransformationen s. III D 7 (*H. Liebmann*), Nr. **11**]: s. *G. Loria,* Period. di mat. (3) 4 (1907), p. 214; außerdem[46]) 2, p. 311 ff.; ital. Ausg. 2, p. 358 ff., wo sich auch die diesbezügliche Literatur vorfindet.

Auf quadratische Transformationen zwischen zwei Bündeln stößt *Th. Reye,* Ztschr. Math. Phys. 13 (1868), p. 521, beim Studium der durch fünf gegebene Punkte hindurchgehenden kubischen Raumkurven.

67. Eigenschaften und Konstruktionen der ebenen quadratischen Transformationen. Die Bedeutung der ebenen quadratischen Transformationen erhellt vor allen Dingen daraus, daß jede *Cremona*sche Transformation zwischen zwei Ebenen durch Anwendung einer endlichen Anzahl quadratischer Transformationen (Nr. 57) erhalten werden kann.

In beiden Ebenen ergeben sich drei einfache Hauptpunkte A, B, C und A', B', C', sowie drei Hauptgerade, die Seiten der *Hauptdreiecke* ABC, $A'B'C'$. Die homaloiden Netze bestehen aus den diesen Dreiecken umbeschriebenen Kegelschnitten. Unter der Voraussetzung, daß z. B. die den Punkten A, B, C korrespondierenden Hauptgeraden $B'C'$ bzw. $C'A$ oder $A'B'$ sind, sind die den Punkten A', B', C' korrespondierenden Hauptgeraden BC bzw. CA oder AB, und den Geradenbüscheln mit den Mittelpunkten A, B, C entsprechen projektiv die Büschel mit den Mittelpunkten A', B', C'. Z. B. ist die Projektivität zwischen den Büscheln mit den Mittelpunkten A und A' so beschaffen, daß den Geraden AB und AC die Geraden $A'C'$ bzw. $A'B'$ in dieser Projektivität entsprechen. Die Punkte A und A', B und B', C und C' heißen *homologe Hauptpunkte*.

Einer Kurve m^{ter} Ordnung, die in A, B, C die Multiplizitäten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ hat, entspricht eine Kurve der Ordnung $2m - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3$, die in A', B', C' die Multiplizitäten $m - \lambda_2 - \lambda_3$, $m - \lambda_3 - \lambda_1$, $m - \lambda_1 - \lambda_2$ besitzt.

Von den verschiedenen geometrischen Konstruktionen der allgemeinen quadratischen Transformationen führen wir die folgenden von *F. Seydewitz*, *J. Steiner*, *A. Jacobi*, *G. Battaglini*, *Th. Reye* und *G. Darboux* an.

Auf einer Ebene π nehmen wir zwei Strahlenbüschel mit verschiedenen Mittelpunkten A und B an, in einer anderen, von π verschiedenen oder nicht verschiedenen Ebene π' zwei andere Büschel

R. Sturm, „Geom. Verw." 1, p. 376—377, findet beim Studium des tetraedralen Komplexes eine quadratische Korrespondenz zwischen den Punkten einer Ebene und den Ebenen eines Bündels, bei der zwei homologe Elemente einander angehören.

Quadratische Transformationen finden unter anderen auch *R. Sturm*, Math. Ann. 26 (1885), p. 468; „Geom. Verw." 3, p. 61—68, beim Studium zweier kollinearer Flächen 2. Ordnung, deren homologe Punkte von zwei willkürlichen ihrer festen Punkte projiziert werden; *C. Le Paige*, Bull. Ac. Sc. Belgique (3) 12 (1886), p. 422 beim Studium der trilinearen Korrespondenzen zwischen drei Ebenen; *M. Stuyvaert*, J. f. Math. 132 (1907), p. 231—232, und *R. Sturm*, „Geom. Verw." 4, p. 28 beim Studium der Kongruenzen kubischer Raumkurven.

Über die als Spezialfall in einer trilinearen Korrespondenz enthaltene ebene quadratische Transformation s. *G. Hauck*, J. f. Math. 98 (1884), p. 318.

mit verschiedenen Mittelpunkten A' und B' und beziehen nun die Büschel A und B auf die Büschel A' und B' durch zwei Projektivitäten derart, daß der Strahl AB in diesen Projektivitäten zwei voneinander verschiedene homologe Strahlen hat. Dann entsteht nach *F. Seydewitz*[581]) zwischen π und π' eine quadratische Korrespondenz, wenn wir jedem Punkte P von π den Punkt P' entsprechen lassen, in dem sich die homologen Strahlen von AP und BP schneiden. Es sind Hauptpunkte in π die Punkte A, B und der Schnittpunkt der Strahlen, die in den Büscheln mit den Zentren A und B dem Strahle $A'B'$ entsprechen.

Die *J. Steiner*sche[582]) Konstruktion läßt sich zwischen zwei voneinander *verschiedenen* Ebenen ausführen. Nimmt man außerhalb dieser Ebenen zwei windschiefe Gerade r, s an, so ergeben sich durch Schnitt von π und π' mit einer r und s treffenden Geraden („schiefe Projektion") zwei korrespondierende Punkte. Hauptpunkte sind in π die Spuren von r, s und der Punkt, in dem die Gerade $\pi\pi'$ von der Verbindungsgeraden der Spurpunkte von r, s auf π' geschnitten wird. Umgekehrt kann man jede quadratische Transformation zwischen zwei Ebenen dadurch erhalten, daß man der *Steiner*schen Konstruktion eine lineare Perspektivität hinzufügt.

Die Konstruktion, zu der *A. Jacobi*, *G. Battaglini* und *Th. Reye*[583]) unabhängig voneinander gelangen, ist die geometrische Deutung der analytischen Konstruktion von *L. I. Magnus* (s. unten), und läßt sich erhalten, wenn man jedem Punkte der einen Ebene den Schnittpunkt der Geraden entsprechen läßt, die diesem Punkte in der anderen Ebene in zwei gegebenen Reziprozitäten[584]) entsprechen.

---

581) S. Anm. 579. Bei *Seydewitz* werden auch die involutorische Transformation von *J. V. Poncelet* (Nr. **66** und **69**) und verschiedene andere Sonderfälle behandelt und die vier Fixpunkte und das involutorische Paar für den Fall gefunden, daß die beiden Ebenen überlagert sind. — S. auch *A. Jacobi*, J. f. Math. 31 (1845), p. 76, 93; *T. A. Hirst*, Nouv. Ann. de math. (2) 5 (1866), p. 213.

582) „System. Entw." [430]), p. 251 = Werke 1, p. 407. S. auch *A. Transon*, Nouv. Ann. de math. (2) 4 (1865), p. 385; (2) 5 (1866), p. 63; *E. Vessiot*, Bull. Soc. math. de France 22 (1894), p. 208; *Em. Müller* und *E. Kruppa* [59]) 1, p. 73—75.

583) *A. Jacobi*, J. f. Math. 23 (1841), p. 243; *G. Battaglini*, Giorn. di mat. (1) 1 (1863), p. 321 (Auszug Rend. Acc. Napoli 1863, p. 240); *Th. Reye*, Ztschr. Math. Phys. 11 (1865), p. 280; „Die Geom. d. Lage" [565]) 2, p. 87, 209—214. — Diese Transformation bezeichnet *G. Battaglini* als „duplo armonica".

584) Eine Konstruktion, die in gewisser Hinsicht ein Mittelding zwischen der Konstruktion mit Hilfe projektiver Büschel und der Konstruktion mit Hilfe eines Paares von Reziprozitäten ist, wird von *F. Aschieri*, Rend. Ist. Lomb. (2) 14 (1881), p. 21 und Anführungen in Anm. 565, angegeben. Man nimmt auf π und π' zwei projektive Büschel mit den Mittelpunkten S und S' an und legt zwischen

Eine andere, von *G. Battaglini* und *Th. Reye*[583]) angegebene Konstruktion, zu der unabhängig auch *G. Darboux*[585]) gelangt, besteht darin, daß man die Punkte einer Fläche 2. Ordnung von zwei festen Punkten O, O' dieser Fläche auf zwei (voneinander verschiedene oder nicht verschiedene) Ebenen π und π' projiziert. Hauptpunkte von π sind die Schnittpunkte von π mit den durch O hindurchgehenden Erzeugenden der Fläche und der Spurpunkt der Geraden OO' in π.[586])

Analytisch erhält man die allgemeinste Darstellung einer quadratischen Transformation zwischen zwei Ebenen, wenn man, wie es zuerst *L. I. Magnus*[587]) tut, zwei bilineare Gleichungen zwischen den Koordinaten der korrespondierenden Punkte[588]) aufstellt.

Die Formeln werden am einfachsten, wenn man die Hauptpunkte A, B, C und A', B', C' als Ecken der Fundamentaldreiecke wählt, so

---

den Ebenen selbst eine Reziprozität fest. Als Korrespondenten eines Punktes P von π wählt man den Schnittpunkt der homologen Geraden von SP im Büschel S' mit der Geraden, die P in der Reziprozität entspricht. — Ebenda wird auch die Erweiterung auf den Raum (Nr. **77**) vorgenommen.

585) L'Institut 36¹ (1868), p. 204 = Bull. Soc. philom. 5 (1868), p. 72, 77 = Ann. Éc. Norm. (1) 6 (1869), p. 61. Vgl. auch *S. L. Ravier,* Nouv. Ann. de math. (3) 10 (1891), p. 371.

Th. Reye und *G. Darboux* machen Anwendung auf die Konstruktion einer Fläche 2. Ordnung aus neun gegebenen Punkten.

586) Eine überräumliche Konstruktion für jede zwischen zwei Ebenen bestehende quadratische Transformation gab *G. Veronese,* Roma Mem. Acc. Lincei (3) 19 (1884), p. 365 an. Diese Konstruktion läßt sich immer erhalten, wenn man eine *Veronese*sche Fläche [Nr. **114**, 1.] auf die beiden gegebenen Ebenen von zwei Ebenen aus projiziert, deren eine diese Fläche längs eines Kegelschnittes, deren andere sie in drei Punkten schneidet (sekante Ebene erster und zweiter Art). — Eine andere bei *C. G. F. James,* J. London math. Soc. 1 (1926), p. 74.

587) S. Anm. 576. Vgl. *P. Bretschneider,* Progr. Plauen im V. 1870. Eine Andeutung der analytischen Methode auch bei *J. Plücker*[430]), p. 48—51.

Über die quadratischen Transformationen in Verbindung mit der Theorie der bilinearen Formen s. *M. Pasch,* Math. Ann. 38 (1890), p. 24. — Notwendige und hinreichende algebraische Bedingungen dafür, daß die durch zwei bilineare Gleichungen (also durch zwei Reziprozitäten) bestimmte Transformation eine Kollineation ist, bei *P. Muth,* Math. Ann. 42 (1892), p. 266.

588) *G. V. Schiaparelli*[430]) hat von derartigen allgemeinen Gleichungen ausgehend die quadratischen Transformationen zwischen zwei Punktebenen nach metrischen Gesichtspunkten klassifiziert und gefunden, daß diese, abgesehen von homographischen Transformationen, auf drei (reelle) Typen zurückgeführt werden können, die er als *hyperbolisch, zyklisch* und *parabolisch* bezeichnet, da den Geraden Hyperbeln bzw. Kreise oder Parabeln entsprechen. Der zweite Typus ist die in Nr. **70** erwähnte Inversion.

L. Cremona, Rend. Acc. Bologna 1861—1862, p. 88 = Opere 2, Milano 1915, p. 8, führt eine analoge metrische Klassifikation für die quadratischen Transformationen zwischen zwei Geradenebenen durch.

daß die Gleichungen der ihnen gegenüberliegenden Seiten der Dreiecke $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ und $x_1' = 0, x_2' = 0, x_3' = 0$ sind. Dann sind die Formeln der Transformation

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_2 x_3 : x_3 x_1 : x_1 x_2,$$

die der umgekehrten Transformation

$$x_1 : x_2 : x_3 = x_2' x_3' : x_3' x_1' : x_1' x_2'.$$

Mit nicht homogenen Koordinaten kann die Transformation durch die Formeln

$$y' = y, \quad x' = \frac{y}{x}$$

dargestellt werden, deren Umkehrungen

$$y = y', \quad x = \frac{y}{x'}$$

sind.

Dem Ursprung O $(x = y = 0)$ der ersten Ebene entspricht die Gerade $y' = 0$, und die verschiedenen Werte für x' in den Punkten dieser Geraden entsprechen den verschiedenen Werten des Bruches $\frac{y}{x}$, die durch die verschiedenen, von O ausgehenden Richtungen bestimmt sind. Den unendlich fernen Punkten der Achsen x und y entsprechen die Achse y' bzw. die unendlich ferne Gerade der zweiten Ebene; usw.

Es folgt z. B. aus der Konstruktion von *F. Seydewitz,* daß die Transformation bestimmt ist, wenn die drei Paare homologer Hauptpunkte und ein Paar korrespondierender Punkte, oder zwei Paare homologer Hauptpunkte und drei Paare korrespondierender Punkte gegeben sind.

Th. Reye[589]) beweist, daß die Transformation auch durch sieben Paare korrespondierender Punkte[590]) bestimmt ist, und studiert den Zusammenhang zwischen der Transformation und dem ∞^1-System der Korrelationen, für die diese sieben Punktepaare jeweils Paare konjugierter Punkte sind.[591]) Die Ecken der zwei Hauptdreiecke der Trans-

---

589) Ztschr. Math. Phys. 11 (1865), p. 280.

590) Faßt man im Falle zweier überlagerter Ebenen die zwei Hauptdreiecke und das Viereck ins Auge, dessen Ecken die Fixpunkte sind, so ist die Transformation nicht bestimmt, wenn sechs Elemente dieser Figur gegeben sind (Hauptpunkte und Hauptgerade, Ecken oder Seiten des Vierecks), und zwischen den übrigen Elementen finden algebraische Korrespondenzen statt, die von *H. J. Verhagen,* Diss. Groningen 1910, studiert wurden.

591) Über diesen Gegenstand s. auch *H. E. Schroeter,* J. f. Math. 62 (1862), p. 215; *Ed. Weyr,* Ztschr. Math. Phys. 14 (1869), p. 445; *T. A. Hirst,* Proc. London math. Soc. (1) 5 (1874), p. 40; 8 (1877), p. 262 [Wiedergaben in Ann. di mat. (2) 6 (1874), p. 260; (2) 8 (1877), p. 287, die zweite auch in Roma Trans. Acc. Linc. (3) 1 (1877), p. 86]; *R. Sturm,* Math. Ann. 19 (1881), p. 461; „Geom. Verw." 4,

formation sind die Punkte, die das sog. „Problem der ebenen Projektivität" lösen, das Problem der Bestimmung zweier Punkte [vgl. III AB 5 (*A. Schoenflies*), Nr. **16**], von denen diese sieben gegebenen Punktepaare durch zwei projektive Strahlengruppen[592]) projiziert werden.

Die ∞^4 quadratischen Transformationen zwischen den Punkten einer Ebene mit fünf gemeinsamen allgemeinen Paaren korrespondierender Punkte besitzen notwendigerweise auch ein gemeinsames sechstes Paar; und die ∞^2 quadratischen Transformationen mit sechs gemeinsamen allgemeinen Paaren besitzen ∞^1 gemeinsame andere Paare.[593])

---

p. 48—49; *F. London,* Math. Ann. 38 (1890), p. 334; *V. Weiß,* Sitzungsb. Ak. Wien 111 (1902), p. 1489. — Vgl. auch *J. Rosanes,* J. f. Math. 88 (1879), p. 241; 90 (1880), p. 303; 95 (1883), p. 247; *S. Kantor,* Math. Ann. 20 (1882), p. 297; Denkschr. Ak. Wien 46 (1882), p. 92; *R. Sturm,* „Geom. Verw." 1, p. 249—251; 2, p. 275 ff., 290 ff.

592) Das Problem ist von *Th. Reye*[589]) gerade mittels der Hauptpunkte der quadratischen Transformation gelöst, während *T. A. Hirst*[591]) umgekehrt mit Hilfe des Problems der Projektivität die zwei Hauptdreiecke der quadratischen Transformation konstruiert, die durch sieben Paare korrespondierender Punkte bestimmt wird.

Das Problem der ebenen Projektivität ist zuerst von *M. Chasles,* Nouv. Ann. de math. (1) 14 (1855), p. 50, aufgestellt, sodann auf analytischem Wege von *Abadie,* Nouv. Ann. de math. (1) 14 (1855), p. 142, auf geometrischem Wege von *Poudra,* daselbst (1) 15 (1856), p. 58; *E. de Jonquières,* daselbst (1) 17 (1858), p. 399; (1) 18 (1859), p. 64 behandelt. Eine vollständige Lösung wurde zuerst von *L. Cremona,* Nouv. Ann. de math. (1) 20 (1861), p. 452 = Opere 2, p. 4, auf analytischem Wege angegeben. Die kubische Gleichung, von der dies Problem abhängt, wurde von *L. O. Hesse,* J. f. Math. 62 (1862), p. 188 = Paris C. R. 54 (1862), p. 678 = Werke, München 1897, p. 507, studiert.

Rein geometrisch ist das Problem ausführlich und mit Anwendungen auf die Flächen 2. Grades von *R. Sturm,* Math. Ann. 1 (1869), p. 533 behandelt. Vgl. noch *H. Müller,* Math. Ann. 2 (1870), p. 281; *L. Burmester,* daselbst 14 (1879), p. 492; *K. Küpper,* Prag České Ak. Rozpravy 6 (1897), Nr. 21; Bull. intern. Ac. Sciences Prague 4 (1897), p. 45; *Ed. Weyr,* Prag České Ak. Rozpravy 8 (1899), Nr. 24; Bull. intern. Ac. Sciences Prague 6 (1901), p. 1; *R. Sturm,* „Geom. Verw." 1, p. 366; Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 19 (1910), p. 185; *G. Kohn,* Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 18 (1909), p. 453—454; *W. Olbrich,* Sitzungsb. Ak. Wien 134 (1925), p. 325; *L. Hofmann,* daselbst 138 (1929), p. 469; *Em. Müller* und *E. Kruppa*[59]) 1, p. 150 ff.

Über die Bedeutung dieses Problems für die Photogrammetrie vgl. den Bericht von *S. Finsterwalder,* „Die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie", Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 6^2 (1899), p. 1; außerdem VI 1, 2 (*S. Finsterwalder*), Nr. **5**. S. auch *H. v. Sanden,* Diss. Göttingen 1908; *S. Finsterwalder,* Abh. Ak. München 22 (1903), p. 229; *O. Stenström,* Ark. for Mat., Astr. och Fys. 21 (1930), A. 19.

593) Nach der Konstruktion von *A. Jacobi—G. Battaglini—Th. Reye* stimmt die erste Eigenschaft mit dem Satz von *A. Clebsch,* Math. Ann. 6 (1873), p. 205 überein, nach dem die ∞^3 Korrelationen einer Ebene mit fünf gemeinsamen Paaren $P_1 P_1', \ldots, P_5 P_5'$ konjugierter Punkte notwendigerweise ein sechstes gemeinsames Paar MM' (das sich durch lineare Konstruktionen von den gegebenen

68. Ebene quadratische singuläre Transformationen. Häufig, wie z. B. bei der Auflösung der Singularitäten der ebenen algebraischen Kurven [Nr. **105**. S. auch III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **13**] wird die singuläre quadratische Transformation verwandt, bei der die Hauptpunkte B und C zusammenfallen. Daraus folgt, daß auch B' und C' zusammenfallen, so daß das homaloide Netz in der einen und der anderen Ebene aus Kegelschnitten besteht, die zwei Punkte A, B bzw. A', B' sowie die Tangente in einem dieser Punkte B bzw. B' gemeinsam haben. Dem Punkte A entspricht die Gerade $B'C'$, die Tangente in B' an alle Kegelschnitte des homaloiden Netzes der Ebene π'. Die Korrespondenz zwischen den von A ausgehenden Richtungen und den Punkten von $B'C'$ ist eine Projektivität, in der der Richtung von AB der Punkt B' entspricht. Auf ähnliche Weise entsprechen den von A' ausgehenden Richtungen projektiv die Punkte der Geraden BC, die in B alle Kegelschnitte des Netzes der Ebene π berührt, wobei der Richtung von $A'B'$ der Punkt B entspricht. Dem Punkte B entspricht die Gerade $A'B'$ (und ebenso dem Punkte B' die Gerade AB); die zwischen den von B ausgehenden Richtungen und den Punkten von $A'B'$ bestehende Projektivität ist aber ausgeartet, da allen diesen von der Richtung von BC verschiedenen Richtungen auf $A'B'$ nur der Punkt B' entspricht, während der Richtung von BC alle Punkte von $A'B'$ entsprechen. Eben diese Punkte

---

ableitet) besitzen. Diese sechs Paare bilden nach *J. Rosanes*[591]) ein „linear abhängiges Punktsystem". Vgl. auch *G. Kohn,* Sitzungsb. Ak. Wien 114 (1905), p. 1431; *A. B. Coble*, Trans. Amer. math. Soc. 9 (1908), p. 396; 24 (1922), p. 1. Beweise des von *A. Clebsch* nur ausgesprochenen Satzes bei *A. Voss,* Math. Ann. 15 (1879), p. 355; *J. Rosanes,* J. f. Math. 88 (1879), p. 249; *R. Sturm,* Math. Ann. 22 (1883), p. 569; „Geom. Verw." 2, p. 285—287.

Das Paar MM' löst das „Problem der Projektivität" für die fünf gegebenen Punktepaare, d. h. das Problem der Bestimmung zweier so beschaffener Punkte M und M', daß die zwei Büschel $M(P_1 \ldots P_5)$ und $M'(P_1' \ldots P_5')$ projektiv werden. Es gibt im allgemeinen nur ein derartiges Paar MM': s. *K. G. C. v. Staudt*[515]), Nr. 263; ital. Übers., p. 124—125; *M. Chasles,* Paris C. R. 36 (1853), p. 951; *L. Cremona*, „Introduzione"[75]), Nr. 62; Mem. Acc. Bologna (1) 12 (1862), p. 354 = Opere 1, p. 374; eine einfachere Konstruktion bei *H. E. Schröter,* Ztschr. Math. Phys. 35 (1889), p. 59. — Über die birationale Korrespondenz (5. Ordnung), die die Punkte M und M' verbindet, s. Nr. 72. Über den zweiten Satz im Texte, der mit einem in Anm. 927 erwähnten Satz identisch ist, s. *R. Sturm,* Math. Ann. 19 (1881), p. 471; „Geom. Verw." 4, p. 50—53; *E. Duporcq,* Paris C. R. 126 (1898), p. 1405; *E. Duporcq* und *R. Bricard*[52]), p. 140.

Das Problem der Projektivität für zwei Gruppen von 5, 6, 7 Punkten, von denen zwei in jeder Gruppe die Kreispunkte sind, behandelt *A. Cayley,* Proc. London math. Soc. (1) 4 (1873), p. 396 = Papers 8, Cambridge 1895, p. 200.

entsprechen denjenigen einzelnen Büscheln von Kegelschnitten des homaloiden Netzes, die in B untereinander oskulieren.

Verlegen wir den Punkt $(0, 0, 1)$ nach A, den Punkt $(0, 1, 0)$ nach B, und nehmen wir auf der festen Tangente in B den Punkt $(1, 0, 0)$ willkürlich, so sind die Transformationsformeln

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1^2 : x_2 x_3 : x_1 x_3,$$

und ihre Umkehrungen

$$x_1 : x_2 : x_3 = x_1' x_3' : x_1' x_2' : x_3'^2.$$

Die Punkte $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ der zweiten Ebene sind A', B' und ein willkürlicher Punkt auf der festen Tangente in B'.

In nicht homogenen Koordinaten kann die Transformation durch die Formeln

$$x' = x, \quad y' = \frac{y}{x},$$

deren Umkehrungen

$$x = x', \quad y = x' y'$$

sind, dargestellt werden.

Dem Punkte $(x = y = 0)$ entspricht die Achse y', und die verschiedenen Werte von y' auf dieser Geraden entsprechen den verschiedenen, durch die von A ausgehenden Richtungen bestimmten Werten von $\frac{y}{x}$; den unendlich fernen Punkten der Achsen x und y entsprechen die Punkte der Achse x' und die der unendlich fernen Geraden der zweiten Ebene, und so weiter.

Wenig Gebrauch gemacht wird von der quadratischen Transformation, deren Hauptpunkte in der einen und daher auch in der anderen Ebene zusammenfallen. Sie kann durch die Formeln

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 x_2 + k x_3^2 : x_2^2 : x_2 x_3$$

dargestellt werden, wo k eine von Null verschiedene Konstante ist.[594]

594) Nachdem die singulären Korrespondenzen von *I. Newton* und *G. Cramer* (Nr. **66**) und später von *M. Hamburger, K. Weierstraß* und anderen für das Studium der singulären Punkte ebener algebraischer Kurven (vgl. Nr. **105**) verwandt worden sind, werden die gleichen Transformationen von *J. Rosanes*[429]), p. 105—106 angedeutet, dann von *A. Clebsch,* Math. Ann. 5 (1871), p. 3—6 benützt, um die Ordnung der ebenen Abbildung einer rationalen Regelfläche zu erniedrigen.

Die singulären quadratischen (und kubischen) Transformationen, mit Anwendungen auf die ebenen Kurven, studiert ausführlich *G. Rieß,* Diss. Erlangen 1893.

Eine Untersuchung der verschiedenen Fälle, die eine quadratische Transformation zwischen zwei überlagerten Ebenen aufweisen kann, findet sich bei *G. Bordiga*[922]), p. 52—56. — Über die Untersuchung der Fixpunkte in den verschiedenen Fällen, die eine derartige Transformation darbieten kann, s. *P. del Pezzo,* Rend. Acc. Napoli (3) 10 (1904), p. 366.

Vom Gesichtspunkt der abzählenden Geometrie aus behandelt *H. Schubert,* Mitt. math. Ges. Hamburg 1 (1882), p. 31, alle möglichen Ausartungen (in der

69. Ebene quadratische involutorische Transformationen. Von den quadratischen involutorischen Transformationen existieren nur zwei Typen, erstens der Typ, bei dem sich zwei Punkte entsprechen, die bezüglich aller Kegelschnitte eines Büschels konjugiert sind, zweitens die sog. *quadratische Inversion.*[595]) Bei dieser letzten ist ein Kegelschnitt γ und ein diesem nicht angehörender Punkt O gegeben, und als konjugierter Punkt eines Punktes P der Schnittpunkt der Geraden OP mit der Polaren von P in bezug auf γ zu wählen.

Bei einer Involution vom ersten Typus ist das Hauptdreieck das Polardreieck, das allen Kegelschnitten des Büschels gemeinsam ist, und die korrespondierende Hauptgerade jeder Ecke ist die gegenüberliegende Seite. Die Transformation hat vier Fixpunkte, die die Basispunkte des Büschels sind.[596])

Anzahl 17) der quadratischen Korrespondenzen mit der Konstantenzahl 13, d. h. um eins kleiner als die der allgemeinen quadratischen Transformation.

M. Fréchet, Nouv. Ann. de math. (4) 3 (1903), p. 503, bringt die Formeln einer quadratischen Transformation mit voneinander verschiedenen oder nicht verschiedenen Hauptpunkten auf gewisse Normalformen und zeigt, daß man jede derartige Transformation zwischen zwei Ebenen π, π' durch eine quadratische involutorische Transformation von π in sich ableiten kann, auf die man eine Kollineation zwischen π und π' folgen läßt.

Aus der Betrachtung quadratischer singulärer Transformationen leitete *F. Sibirani,* Tôhoku math. J. 24 (1925), p. 243 einige Transformationen ebener algebraischer Kurven ab.

595) *E. Bertini*[523]), Anm. auf p. 19. S. außerdem *K. Doehlemann,* „Geom. Transf." 2, p. 43—50; *R. Sturm,* „Geom. Verw." 4, p. 62—72; *Hilda P. Hudson,* „Cremona transf." p. 50—54; *E. Bertini*[46]), p. 200—204.

596) Diese Involution wurde zuerst von *J. V. Poncelet*[574]) betrachtet, dann von *E. E. Bobillier,* Ann. de math. 18 (1827—28), p. 256—257; *M. Chasles,* daselbst, p 296; *J. Steiner,* J. f. Math. 3 (1828), p. 212; Ann. de math. 19 (1828—1829), p. 61—64 = Werke 1, p. 179, 208—210.

Über diese Involution und ihre graphischen und metrischen Sonderfälle s. noch *M. Chasles,* J. math. pures appl. (1) 3 (1838), p. 407; *A. Jacobi,* J. f. Math. 23 (1841), p. 243; 31 (1845), p. 58, 96; *F. Seydewitz,* Arch. Math. Phys. (1) 5 (1844), p. 225, 331; *K. G. Ch. v. Staudt,* „Beiträge zur Geometrie der Lage", 2. Heft, Nürnberg 1857, §§ 23, 24 (bes. p. 204, 210); *H. A. Newton,* Math. Monthly 3 (1861), p. 235, 268; *E. Beltrami,* Mem. Acc. Bologna (2) 2 (1862), p. 361; Giorn. di mat. (1) 1 (1863), p. 109 (Auszug Rend. Acc. Bologna 1862—63, p. 82) = Opere 1, Milano 1902, p. 45; Mem. Acc. Bologna (3) 5 (1874), p. 543 = Opere 3, Milano 1911, p. 1; *G. Battaglini,* Giorn. di mat. (1) 1 (1863), p. 327; *L. Cremona,* Messenger of math. 3 (1864), p. 88 = Opere 2, p. 241 [vgl. *G. Salmon-W. Fiedler,* „Anal. Geom. d. Keg."[565]) 2, p. 795—796]; *Ch. Wiener,* Ztschr. Math. Phys. 9 (1864), p. 44; *P. H. Schoute,* Nieuw Archief voor Wiskunde 9 (1882), p. 117 = Bull. Sciences math. (2) 6 (1882), p. 152, 174; *W. Fiedler,* „Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage" 3, 3. Aufl., Leipzig 1888, p. 84, 170—176; *H. Durège,* „Die Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung", Leipzig

Das Hauptdreieck der quadratischen Inversion ist $OO'O''$, wenn O' und O'' die Berührungspunkte der von O an γ gehenden Tangenten sind, so daß also den Ecken O, O', O'' als Hauptgerade die

1888, p. 121—127; *G. Kilbinger,* Ztschr. Math. Phys. 33 (1887), p. 14; *J. Neuberg,* Mathesis (1) 8 (1888), p. 177; Mém. Soc. sc. Liège (2) 16 (1890), Nr. 8; *M. d'Ocagne,* Mém. Soc. sc. Liège (2) 16 (1890), Nr. 7; *F. Bücking,* Progr. Metz 1892; Diss. Tübingen 1893; *J. Thomae,* Abh. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig 21 (1895), p. 448; *J. J. Duran-Loriga,* Interm. des math. (1) 4 (1897), p. 270; *V. Retali,* daselbst (1) 5 (1898), p. 134; *J. Steiner,* „Vorlesungen über synthetische Geometrie" 2 („Die Theorie der Kegelschnitte"), bearb. von *H. Schroeter,* 3. Aufl., hrsg. von *R. Sturm,* Leipzig 1898, p. 281—286, 298—310, 442—446, 520; *E. Torroja,* „Tratado de geometría de la posición y sus aplicaciones a la geometría de la medida", Madrid 1899, p. 345—389; *L. Ripert,* Mathesis (2) 9 (1899), p. 185, 217; *Ch. Michel,* Bull. math. spéc. 6 (1900), p. 34; *A. Emch,* Univ. of Colorado Studies 1 (1904), p. 275; „Introduction to projective geometry", New York 1905, p. 185—216; Ann. of math. (2) 14 (1912—13), p. 57; Bull. Amer. math. Soc. (2) 24 (1918), p. 327 [Auszüge Bull. Amer. math. Soc. (2) 18 (1912), p. 270; (2) 24 (1918), p. 60]; *G. Berkhan,* Diss. Königsberg 1905; Arch. Math. Phys. (3) 11 (1907), p. 1; *R. Vercellin,* Period. di mat. (3) 7 (1910), p. 24; *W. Fr. Meyer,* Phys.-ökon. Ges. Königsberg 52 (1911), p. 239; *M. Stuyvaert,* „Algèbre à deux dimensions", Gand 1920, p. 134 ff.; *H. F. Baker*[46]) 2, p. 37—39; *F. Schuh,* Christiaan Huygens 4 (1925), p. 286; *L. Godeaux,* Mathesis 40 (1926), p. 352. Hier untersucht *L. Godeaux* einen Sonderfall und stellt für diesen Fall die Paare konjugierter Punkte durch die Punkte einer Fläche 3. Ordnung dar, die einen biplanaren Doppelpunkt und zwei konische Doppelpunkte sowie weitere Besonderheiten aufweist.

Die vorliegende Involution erhält in dualer Form *Em. Weyr,* Rend. Ist. Lomb. (2) 4 (1871), p. 636 beim Studium des Systemes eines Kegelschnittes und einer kubischen Raumkurve und leitete von ihr a. a. O. (2) 6 (1873), p. 179 folgenden Satz ab. Die zehn Paare gegenüberliegender Ebenen eines vollständigen windschiefen Sechsecks werden von einer Ebene in zehn Paaren von Geraden geschnitten, die in einer quadratischen involutorischen Transformation konjugiert sind, deren Hauptdreieck als Ecken die Schnittpunkte mit der dem Sechseck umbeschriebenen kubischen Raumkurve aufweist.

Unter den metrischen Sonderfällen der von uns betrachteten Involution interessiert besonders die, bei der die vier Grundpunkte des Büschels die Mittelpunkte der Kreise sind, die die Seiten eines gegebenen Dreiecks berühren. Man erhält so die auch „Dreiecksinversion" genannte „isogonale Verwandtschaft", bei der zwei Punkte konjugiert sind, die Brennpunkte eines dem gegebenen Dreiecke einbeschriebenen Kegelschnittes sind. S. *J. Steiner,* Ann. de math. 19 (1828), p. 44 = Werke 1, p. 196; *J. Plücker,* J. f. Math. 5 (1829), p. 4, 6, 25—26 = Ges. math. Abh., Leipzig 1895, p. 127, 129, 148; *A. Cayley,* Quart. J. of math. 4 (1860), p. 131 = Papers 4, p. 481; *W. S. Burnside,* daselbst 8 (1865), p. 34; *J. J. A. Mathieu,* Nouv. Ann. de math. (2) 4 (1865), p. 393, 481, 529; *J. Todhunter,* „A treatise on plane coordinate geometry", London 1855; 9. Aufl. 1888, p. 304; *P. H. Schoute,* a. a. O., und Bull. Sciences math. (2) 7 (1883), p. 314; *M. David,* Diss. Breslau 1884; *K. Doehlemann,* Ztschr. Math. Phys. 32 (1886), p. 120; *A. Clebsch* und *F. Lindemann,* „Vorlesungen" 1_1, 2. Aufl., Leipzig 1906, p. 324—326.

Die durch ein Büschel von Kegelschnitten gegebene Involution ist auf der

Geraden $O'O''$, OO', OO'' entsprechen. Der Kegelschnitt γ ist die Koinzidenzkurve.[597])

Eine quadratische involutorische Transformation kann Sonderfälle darbieten, bei denen nicht alle Hauptpunkte voneinander verschieden sind. Für die Involutionen des ersten Typus fallen zwei oder alle drei Hauptpunkte zusammen, wenn die Kegelschnitte des Büschels in einem gemeinsamen Punkte eine Berührung 2. bzw. 3. Ordnung haben. Bei der quadratischen Inversion tritt der Fall, daß zwei Hauptpunkte zusammenfallen, ein, wenn der Kegelschnitt der Fixpunkte in zwei Gerade zerfällt; der Fall, daß alle drei Hauptpunkte zusammenfallen, wenn der Punkt O auf den Kegelschnitt der Fixpunkte fällt. Im letzten Falle haben die Kegelschnitte des homaloidischen Netzes in O eine gegenseitige Berührung 2. Ordnung, eine einfache Berührung in O mit dem Kegelschnitt der Fixpunkte.

Zahlreich sind die Untersuchungen über die involutorischen oder nicht involutorischen quadratischen Transformationen und ihre graphischen oder metrischen Sonderfälle; viele von ihnen haben zur Konstruktion spezieller Kurven und zur Ableitung besonderer Eigenschaften dieser Kurven gedient.[598])

Kugel von *E. Heß*, „Einleitung in die Lehre von der Kugelteilung", Leipzig 1883, p. 104, 169, 185, 196, 204, 248, 292, 329, 336, 339, 380 untersucht.

Über diesen Involutionstypus vgl. III AB 10 (*G. Berkhan* und *W. Fr. Meyer*), Nr. **23**, **42**.

597) Diese Involution wird zuerst von *G. Bellavitis*, Nuovi Saggi dell'Acc. di Padova 4 (1838), p. 243 betrachtet, dann von *F. Seydewitz*, Arch. Math. Phys. (1) 5 (1844), p. 225; *A. Jacobi*, J. f. Math. 31 (1845), p. 76; *T. A. Hirst*, Proc. R. Soc. London 14 (1865), p. 91 = Ann. di mat. (1) 7 (1865), p. 49 = Giorn. di mat. (1) 4 (1866), p. 278 = Quart. J. of math. 17 (1881), p. 301 [Auszüge Report British Ass. Adv. Sciences 34, Bath 1864 (London 1865), p. 3; 35, Birmingham 1865 (London 1866), p. 6]; *C. F. Geiser*, Mitt. Berner Naturf. Ges. 1865, p. 97; *Th. Reye* [589]), p. 299; *B. Igel*, Ztschr. Math. Phys. 17 (1872), p. 516; *R. Sturm*, Math. Ann. 19 (1881), p. 464—465; *W. Maßny*, Progr. Gymn. Groß-Strehlitz 1887; *J. Thomae*, Abh. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig 21 (1895), p. 440; *V. Retali*, Period. di mat. (1) 13 (1898), p. 225—226; (2) 1 (1898), p. 158, 211; Interm. des math. (1) 16 (1909), p. 275; *G. Cardoso-Laynes*, Period. di mat. (1) 13 (1898), p. 167; (2) 1 (1898), p. 158; *E. Torroja* [596]), p. 753—776; *A. Gennaro*, Rassegna di mat. fis. e sc. nat. 1 (1929), p. 75.

Verallgemeinerungen bei *T. A. Hirst*, Report British Ass. Adv. Sciences 34, Bath 1864 (London 1865), p. 3; *J. S. Vaněček*, Paris C. R. 94 (1882), p. 1042.

598) Von den vielen Arbeiten erwähnen wir *O. Terquem*, Nouv. Ann. de math. (1) 1 (1842), p. 403; (1) 5 (1846), p. 497; *A. Cayley*, J. math. pures appl. (1) 14 (1849), p. 40; Johns Hopkins Univ. Circular, Nr. 13 (1882), p. 178 = Papers 1, p. 471; 12, p. 100; *F. Lucas*, J. math. pures appl. (2) 6 (1861), p. 137; *Th. Berner*, Diss. Berlin 1864; *G. A. G. de Longchamps*, Ann. Éc. Norm. (1) 3 (1866), p. 321; Nouv. Ann. de math. (2) 5 (1866), p. 119; J. de math. élém. (2) 6 (1882), p. 49,

70. Inversion oder Abbildung durch reziproke Radien.[599]) Wählen wir als Kegelschnitt γ einer quadratischen Inversion (Nr. **69**) einen

---

77, 97, 121, 145, 193; (2) 10 (1886), p. 109, 154, 198, 243; Period. di mat. (3) 1 (1904), p. 277; *F. August,* J. f. Math. 68 (1867), p. 239; *Ed. Weyr,* Ztschr. Math. Phys. 14 (1869), p. 445; *H. Bücking,* Diss. Marburg 1874; *J. N. Haton de la Goupillière,* Nouv. Ann. de math. (2) 14 (1875), p. 143, 144 [s. *A. Pellissier,* daselbst (2) 16 (1877), p. 37, 40]; *K. Zahradnik,* Arch. Math. Fys. 2 (1877—79), p. 101; Sitzungsb. Ak. Wien 75 (1877), p. 437; 117 (1908), p. 1167; *E. Amigues,* Nouv. Ann. de math. (2) 16 (1877), p. 422, 451, 496, 529; *K. A. Andrejef,* Moskau math. Sammlung 9 (1879), p. 361 [s. *N. Bougaief,* Bull. Sciences math. (2) 3^1 (1879), p. 35]; *J. Keller,* Vierteljahrsschr. Naturf. Ges. Zürich 25 (1880), p. 1; *F. Aschieri,* Rend. Ist. Lomb. (2) 14 (1881), p. 21; *P. H. Schoute,* Bull. Sciences math. (2) 6^1 (1882), p. 152, 174; (2) 7^1 (1883), p. 314; Nieuw Archief voor Wiskunde 9 (1882), p 117; 12 (1885), p. 1; Arch. Néerl. des sc. 20 (1885), p. 49; *W. Fr. Meyer,* „Apolarität“ [57]), p. 56—59, 238—271; Arch. Math. Phys. (3) 6 (1904), p. 339; *P. Scholim,* Diss. Breslau 1884; *Ch. Beyel,* Ztschr. Math. Phys. 31 (1886), p. 147; Vierteljahrsschr. Naturf. Ges. Zürich 31 (1886), p. 161; *F. Hofmann,* Ztschr. Math. Phys. 31 (1886), p. 283; *M. d'Ocagne,* J. math. spéc. (4) 5 (1886), p. 255; Nouv. Ann. de math. (3) 12 (1893), p. 337; Annaes scient. Ac. pol. do Porto 9 (1914), p. 5; „Cours de géométrie pure et appliquée de l'École polytechnique“ 1, Paris 1917, p. 335—337; *P. Mansion* und *Cl. Servais,* Mathesis (1) 7 (1887), p. 110, 129, 187; (1) 8 (1888), p. 28; *E. H. Moore,* Amer. J. of math. 10 (1888), p. 243; *W. G. Alexejef,* Moskau math. Sammlung 14 (1889), p. 223; *V. Retali,* Mem. Acc. Bologna (4) 10 (1890), p. 653 (Auszüge Rend. Acc. Bologna 1889—90, p. 59; 1890—91, p. 35); Mem. Soc. sc. Liège (2) 18 (1895); *A. del Re,* Giorn. di mat. (1) 28 (1890), p. 262; *H. Willig,* Progr. Mainz 1892, 1893; *E. Czuber,* Monatsh. Math. Phys. 5 (1894), p. 267; *J. Neuberg,* Ass. franç. Avanc. Sc. 23, Caen 1894, p. 261; *G. Leinekugel,* Nouv. Ann. de math. (3) 14 (1895), p. 391; *H. Liebmann,* Diss. Jena 1895, p. 17 ff.; *L. E. Dickson,* Amer. math. Monthly 2 (1895), p. 218; Rend. Circ. mat. Palermo 9 (1895), p. 256; Proc. Ac. California (3) 1 (1898), p. 13; *P. Cassani,* Atti Ist. Ven. (7) 9 (1897—98), p. 30; *M. W. Haskell,* Proc. Ac. California (3) 1 (1898), p. 1; *F. Ferrari,* Bull. Soc. philom. (9) 1 (1899), p. 93; *J. A. Third,* Proc. math. Soc. Edinburgh 18 (1900), p. 11; *H. E. Timerding,* Math. Ann. 53 (1900), p. 193, wo die Transformation mit Anwendung auf die *Aronhold*schen Untersuchungen über Doppeltangenten der Kurven 4. Ordnung in Zusammenhang mit der Theorie der Konnexe (Nr. **121**) gebracht wird [vgl. auch *J. W. P. Godt,* Diss. Göttingen 1873; *A. Clebsch* und *F. Lindemann,* „Vorlesungen“ 1, p. 1007 ff.; franz. Übers. 3, p. 442 ff.; s. III C 5 (*G. Kohn*), Nr. **68—70**]; *E. Duporcq,* Bull. Soc. math. de France 29 (1900), p. 1; *Ch. Tweedie,* Trans. R. Soc. Edinburgh 40 (1901), p. 253; *J. Majcen,* Agram Ak. 151 (1902), p. 1; *J. J. Durán-Loriga,* Matem. pure appl. 2 (1902), p. 121; Rev. Ac. Ciencias Madrid 6 (1908), p. 364; *K. Wolletz,* Progr. Jägerndorf 1903; *P. Cattaneo,* Period. di mat. (3) 1 (1904), p. 92; *A. Neumann,* Diss. Königsberg 1908; *Ch. François,* Mathesis (3) 9 (1909), p. 201; *D. N. Lehmer,* Amer. math. Monthly 17 (1910), p. 135; 18 (1911), p. 52; *L. Braude,* Annaes scient. Ac. pol. do Porto 8 (1912), p. 29, 107; *A. Nuber,* Diss. München 1912; *J. Coblyn,* Bull. Soc. math. de France 42 (1914), Comptes rendus des séances, p. 26, 48; *Y. Sawayama,* Tôhoku math. J. 6 (1914—15), p. 166; *F. G. Taylor,* Proc. math. Soc. Edinburgh 33 (1915), p. 70; 34 (1916), p. 163; *H. N. Wright,* Bull. Amer.

Kreis mit dem Mittelpunkt O, so erhalten wir die *Kreisinversion* oder *Abbildung durch reziproke Radien*, deren Hauptpunkte O und die

---

math. Soc. (2) 23 (1917), p. 403; *A. Pleskot,* Časopis 48 (1919), p. 56; *R. Deaux,* Mathesis 36 (1922), p. 443; *R. Mehmke,* Mitt. math. Ges. Hamburg 7 (1932), p. 78.

Über das Auftreten quadratischer Transformationen in der Dreiecksgeometrie [III AB 10 (*G. Berkhan* und *W. Fr. Meyer*), II] s. *G. Berkhan,* Diss. Königsberg 1904; Auszug Arch. Math. Phys. (3) 11 (1907), p. 1.

599) Von den vielen Darstellungen der Theorie und ihrer Anwendungen führen wir an *R. Townsend,* „Chapters on the modern geometry" 2, London 1863, p. 363; *F. Lucas,* „Études analytiques sur la théorie générale des courbes planes", Paris 1864, p. 187; *C. F. Geiser,* „Einleitung in die synthetische Geometrie", Leipzig 1869, p. 159—183; *G. Darboux,* „Sur une classe"[50]); „Principes"[50]), p. 365ff.; *Cochez,* J. math. élém. 1 (1877), p. 225, 257, 321, 353; 2 (1878), p. 1, 33; *Th. Reye,* „Synthetische Geometrie der Kugeln und linearen Kugelsysteme", Leipzig 1879; ital. Übers. von *M. Misani,* Milano 1881; [565]), p. 238—245; *A. Daguillon,* J. math. élém. 6 (1882), p. 129; *G. Holzmüller,* „Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften und der konformen Abbildung", Leipzig 1882, p. 25—54; *W. Fiedler,* „Cyklographie oder Construction der Aufgaben über Kreise und Kugeln und elementare Geometrie der Kreis- und Kugel-Systeme", Leipzig 1882; [596]), 3. Aufl., 1, Leipzig 1883, p. 219—224; 2, Leipzig 1885, p. 246—274, 534—544; 3, Leipzig 1888, p. 176, 188—189; *G. Salmon-W. Fiedler,* „An. Geom. d. höh. eb. Kurven"[28]), p. 134—136, 333—334, 388—390; *G. Salmon* und *O. Chemin,* „Traité de géom. anal."[28]), p. 153—156, 355—356, 433—437; *G. Salmon-W. Fiedler,* „Anal. Geom. d. Keg."[565]) 1, Leipzig 1898, p. 268—274; 2, Leipzig 1903, p. 784—788; *A. Clebsch* und *F. Lindemann,* „Vorlesungen über Geometrie" 2^1, Leipzig 1891, p. 428—430; *F. Klein,* „Einleitung in die höhere Geometrie", autograph. Vorlesungen Göttingen 1892—93, ausgearb. von *Fr. Schilling* 1, Göttingen 1893, p. 86—98, 438—446; „Vorlesungen über höhere Geometrie", 3. Aufl. bearb. von *W. Blaschke,* Berlin 1926, p. 43—49, 227—231; „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus" 2 (lith.), Leipzig 1909, ausgearb. von *E. Hellinger,* p. 203—210; 3. Aufl., Berlin 1925, p. 105—110; *S. Lie* und *G. Scheffers*[562]) 1, p. 6—9, 27—29; *G. Lazzeri,* Period. di mat. (2) 2 (1900), p. 137; *M. Simon,* „Analytische Geometrie der Ebene", Leipzig 1900, p. 104—111; *H. Wieleitner*[28]), p. 154—161; *F. Severi,* „Complementi"[565]), p. 179 ff.; *K. Doehlemann,* „Geom. Transf." 2, p. 50—95; *R. Sturm,* „Geom. Verw." 4, p. 72—83; *E. Duporcq* und *R. Bricard*[52]), p. 122 ff.; *J. L. Coolidge,* „A treatise on the circle and the sphere", Oxford 1916; *M. d'Ocagne,* „Cours de géom. pure"[598]) 1, p. 18—21, 337—340; *H. Hilton*[28]), p. 14—16, 123—124, 164—166; *H. v. Mangoldt,* „Einführung in die höhere Mathematik" 2, 3. Aufl., Leipzig 1921, p. 512 ff. *H. F. Baker*[46]) 2, Cambridge 1922, p. 67—75; 4, Cambridge 1925, p. 12—18; *B. Berdiales,* Publ. Circ. matem. Inst. Nac. Profesorato secundario, Buenos Ayres 1924, Nr. 2.

In einigen dieser Darstellungen ist auch die in Nr. **79** erwähnte Inversion im Raume behandelt worden.

Über diesen Gegenstand vgl. III AB 7 (*E. Müller*), Nr. **10**, **24**; III AB 8 (*J. Sommer*), Nr. **17**; III AB 9 (*M. Zacharias*), Nr. **17**, **18**; III D 1, 2 (*H. v. Mangoldt*), Nr. **24**; III D 9 (*E. Salkowski*), Nr. **4**.

Geschichtliche und bibliographische Bemerkungen über die Inversion bei *M. Chasles,* „Rapport sur les progrès de la géométrie", Paris 1870, p. 140;

Kreispunkte der Ebene sind. Die zweite Benennung rührt daher, daß zwei konjugierte Punkte P und P' in gerader Linie mit O liegen und derart beschaffen sind, daß das Produkt $OP \cdot OP'$ in Wert und Vorzeichen konstant ist.[600])

E. Kötter, „Bericht", p. 98—106; *M. Simon*, „Bericht über die Entwicklung der Elementargeometrie im XIX. Jahrhundert", Jahresb. Deutsch. Math.-Ver., Ergänzungsband 1, Leipzig 1906, p. 93—96.

600) Die ersten, die diese Art von Transformationen in der Ebene und im Raume (Nr. **79**), vor allem in Verbindung mit der stereographischen Projektion der Kugel verwandt haben, sind *G. P. Dandelin*, Nouv. Mém. Acad. Bruxelles 2 (1822), p. 169; 4 (1827), p. 1 und *L. A. J. Quetelet*, daselbst 3 (1826), p. 87; 4 (1827), p. 79, von denen der letztere die Transformierte einer Figur als *inverse* bezeichnet.

Das Inversionsprinzip wird von *J. Steiner*, J. f. Math. 1 (1826), p. 253 = Werke 1, p. 41 angedeutet, der es sich schon im Jahre 1824 vorgestellt hat [s. *F. Bützberger*, „Über bizentrische Polygone, Steinersche Kreis- und Kugelreihen und die Erfindung der Inversion", Leipzig und Berlin 1913, p. 33 und 49]; es wurde dann von *J. Plücker*, „Analytisch-geometrische Entwicklungen" 1, Essen 1828, p. 93 ff. [1827]; J. f. Math. 11 (1831), p. 219 = Ges. math. Abh., Leipzig 1895, p. 277 benutzt, der es schon, J. f. Math. 10 (1831), p. 293 = Ges. math. Abh., p. 246, für die Lösung der Berührungsaufgabe des *Apollonius* verwandt hat.

Als allgemeine Transformationsmethode von Figuren (der Ebene und des Raumes) ist die Inversion von *G. Bellavitis*, Ann. scienze del Regno Lombardo-Veneto 6 (1836), p. 126, 134 von neuem gefunden und mit Hilfe des Äquipollenzen-Kalküls studiert. Anwendungen hiervon in Mem. Soc. ital. Modena 25^2 (1851), p. 1; Nouv. Ann. de math. (1) 12 (1853), p. 443; Ann. scienze mat. fis. 5 (1854), p. 31 [Brief an *B. Tortolini* vom 27. Januar 1853]. Eine neue Darstellung dafür gibt *G. Bellavitis* in Ann. scienze mat. fis. 5 (1854), p. 241, 428, 473. Zum Studium von Kurven (und Flächen) wird die Inversion verwandt von *J. R. Ingram*, Trans. Dublin Phil. Soc. 1 (1842—43), p. 57, 159 und von *J. W. Stubbs*, daselbst, p. 145; Phil. Magazine (3) 23 (1843), p. 338; (3) 25 (1844), p. 208.

Die Inversion wird von *W. Thomson* (Lord *Kelvin*) als *Prinzip der Bilder* von neuem entdeckt und zwecks Vereinfachung der Theorie vom Potential sowie der Lösung der auf die Verteilung der Elektrizität bezüglichen Probleme studiert [II A 7 b (*H. Burkhardt* und *W. Fr. Meyer*), Nr. **16**; V 15 (*R. Gans*), Nr **13**]. S. Cambridge Dublin math. J. 3 (1848), p. 141, 266 und die Briefe von *W. Thomson* an *J. Liouville* vom 8. Oktober 1845 und vom 26. Juni 1846 in J. math. pures appl. (1) 10 (1845), p. 364; (1) 12 (1847), p. 256 = „Reprint of papers on electrostatics and magnetism" (London 1872); 2. Ausg. London 1884, p. 52, 60, 144, 146; außerdem *J. Liouville*, J. math. pures appl. (1) 12 (1847), p. 265 [Wiedergabe in *W. Thomson*, „Reprint" Anführung, p. 154 und im Auszug in Nouv. Ann. de math. (1) 13 (1854), p. 227]; (1) 13 (1848), p. 220; (1) 15 (1850), p. 103; *Note VI* in *G. Monge*, „Application de l'analyse à la géométrie", 5. Ausg., von *J. Liouville*, Paris 1850, p. 609—616. — Von *J. Liouville*, J. math. pures appl. (1) 12 (1847), p. 276 rührt die Bezeichnung *Transformation durch reziproke Radien* her.

Unabhängig von den vorhergehenden Untersuchungen gelangt *A. F. Möbius* durch seine *Kreisverwandtschaft* (Nr. **71**) zum gleichen Abbildungsprinzip, Ber. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig 4 (1852), p. 41; 5 (1853), p. 14 = J. f. Math. 52 (1856), Die Transformation verwandelt jede durch O hindurchgehende Gerade in sich, jede Gerade, die nicht durch O hindurchgeht, in einen Kreis, der durch O geht und die Parallele zu der gegebenen Geraden als Tangente in O hat, jeden Kreis, der nicht durch O hindurchgeht, in einen anderen Kreis, der auch nicht durch O geht.[601]) Der Winkel zweier Geraden ist gleich dem der entsprechenden Kreise[602]); mit anderen Worten, die Transformation erhält die Winkel (vertauscht allerdings den Sinn), ist also eine konforme Abbildung[603]), und wenn man von den Ähnlichkeiten absieht, sogar die einzige ebene birationale Transformation mit dieser Eigenschaft.[604])

Sind zwei Kurven zueinander invers, so fallen ihre Krümmungsmittelpunkte in zwei miteinander korrespondierende Punkte auf einer geraden Linie mit dem Inversionsmittelpunkt O.[605])

Jeder durch zwei homologe Punkte hindurchgehende Kreis ist invariant, und alle diese Kreise bilden das System der orthogonalen Kreise auf dem Kreis, der Ort der Fixpunkte ist.[606])

---

p. 229, 218; Abh. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig 2 (1855), p. 529 = Werke 2, Leipzig 1886, p. 189, 205, 243.

601) *J. Plücker,* „Anal.-geom. Entw.“ [600]) 1, p. 93 ff. Diese Eigenschaft tritt jedoch schon bei *F. Vieta* auf, „Apollonius Gallus seu exsuscitata Apollonii Pergaei περὶ ἐπαφῶν geometria ad v. c. Adrianum Romanum Belgam“, Paris 1600 = Opera math., opere et studio *Fr. van Schooten,* Lugd. Bat. 1646, p. 325, und ist von *P. de Fermat* (Anm. 675) auf den Raum erweitert.

Aus der Eigenschaft, daß ein Kreis in einen Kreis übergeht, folgt, daß die Inversion die Brennpunkte einer Kurve [III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. 21] in Brennpunkte der transformierten Kurve überführt [*Th. Berner,* Ztschr. Math. Phys. 9 (1864), p. 370—371], eine Eigenschaft, die sich von der Eigenschaft der Inversion im Raume, die Krümmungslinien der Flächen in ebensolche zu transformieren (Nr. 79), nicht unterscheidet.

602) *J. Plücker,* J. f. Math. 10 (1831), p. 293; 11 (1831), p. 219 = Ges. math. Abh., p. 246, 277.

603) S. III D 1, 2 (*H. v. Mangoldt*), Nr. 24; III D 3 (*R. v. Lilienthal*), Nr. 19; III D 6a (*A. Voss*), Nr. 3, 4.

Eine Erweiterung bei *H. M. Taylor,* Messenger of math. (2) 16 (1887), p. 143.

604) Ein geometrischer Beweis bei *L. Bianchi,* Giorn. di mat. (1) 17 (1878), p. 40.

605) *E. Cesàro,* „Lezioni di geometria intrinseca“, Napoli 1896, p. 26; deutsche Ausgabe von *G. Kowalewski,* Leipzig 1901, p. 29; *R. Goormaghtigh,* Nouv. Ann. de math. (4) 16 (1916), p. 18.

606) Von den zahlreichen anderen Arbeiten über die Inversion führen wir an *G. Salmon,* „A treatise on higher plane curves“, London 1852, p. 306; *A. S. Hart,* Cambridge Dublin math. J. 8 (1852), p. 47; *P. Serret,* „Des méthodes en géométrie“, Paris 1855, p. 21; *N. M. Ferrers,* Quart. J. of math. 3 (1857), p. 32; *T. A. Hirst,* Phil. Magazine (4) 16 (1858), p. 161; Ann. di mat. (1) 2 (1859), p. 95, 148; *B. Tortolini,* Ann. di mat. (1) 2 (1859), p. 189, 316; *G. H. O. Boeklen,* Arch. Math. Phys. (1) 32 (1859), p. 83; *V. A. Mannheim,* Nouv. Ann. de math. (1) 20

Die Inversion ist auch in Verbindung mit ihrer Erzeugung durch Gelenksysteme [vgl. IV 3 (*A. Schoenflies* und *M. Grübler*), Nr. **24** und **25**]

(1861), p. 68, 218; *H. Graßmann*, „Die Ausdehnungslehre", Berlin 1862, p. 280—284 (Nr. 408, 409) = Werke 1[2], Leipzig 1896, p. 276—280; *J. Casey*, Quart. J. of math. 5 (1862), p. 318; *N. Nicolaïdes*, Nouv. Ann. de math. (2) 4 (1865), p. 144; (2) 5 (1866), p. 168; *H. E. Habich*, daselbst (2) 5 (1866), p. 399; *Niewenglowski*, Ann. Éc. Norm. (2) 2 (1873), p. 133; *H. M. Taylor*, Messenger of math. (2) 7 (1878), p. 148; *É. M. Laquière*, Nouv. Corresp. math. 6 (1880), p. 351, 402, 433; *J. Sachs*, Badische Schulblätter 2 (1885), p. 141, 157; *J. Finsterbusch*, Progr. Werdau 1888, 1890; *D. Coelingh*, Nieuw Archief voor Wiskunde 16 (1889), p. 116; *C. A. Laisant*, Mathesis (1) 10 (1890), p. 224; *I. Amaldi*, Rend. Acc. Napoli (2) 5 (1891), p. 238; *Ch. Wolff*, Progr. Gymn. Erlangen 1891; *H. B. Newson*, Kansas Univ. Quart. 1 (1892), p. 47; *C. Habicht*, Diss. Bern 1904; *B. Hostinský*, Časopis 35 (1906), p. 137; *C. Klobasa*, Progr. Troppau 1907; *A. Simionov*, Bukarest Gazeta mat. 13 (1907), p. 71; *O. Mautz*, Beil. zum Jahresb. d. Gymn. Basel 1909; *R. Goormaghtigh*, Wiskundig Tijdschrift 11 (1914), p. 37; Mathesis 43 (1929), p. 329; *R. A. Johnson*, Amer. math. Monthly 24 (1917), p. 313; *J. L. Walsh*, Trans. Amer. math. Soc. 19 (1918), p. 291; 22 (1920), p. 101 [vgl. *A. B. Coble*, Bull. Amer. math. Soc. (2) 27 (1921), p. 434]; Ann. of math. (2) 23 (1922), p. 45; *T. Bhattacharya*, Calcutta math. Bull. 10 (1919), p. 29; *W. de Tannenberg*, „Conférences sur les transformations en géométrie plane", Paris 1921, p. 29 ff.; *P. Jansen*, Nieuw Tijdschr. voor Wiskunde 10 (1922—23), p. 255; *Hk. de Vries*, daselbst, p. 298; *J. W. Peters*, Amer. J. of math. 51 (1929), p. 599; *M. W. Dean*, daselbst, 52 (1930), p. 585.

Verallgemeinerungen der Inversion z. B. bei *W. Roberts*, J. math. pures appl. (1) 13 (1847), p. 209 (s. *J. Liouville*, daselbst, p. 220); *M. d'Ocagne*, Mathesis (1) 4 (1884), p. 73, 97; *H. C. Shaub*, Bull. Amer. math. Soc. (2) 38 (1932), p. 33.

Über die der Inversion korrelative Transformation s. *F. Balitrand*, Nouv. Ann. de math. (3) 12 (1893), p. 272; Interm. des math. (1) 24 (1917), p. 97; *J. Ser.*, Interm. des math. (1) 25 (1918), p. 23.

Über die quadratischen Korrespondenzen in der Ebene (und im Raume) und die Bedingungen dafür, daß sie Kreis (bzw. Kugel)-Verwandtschaften sind, s. *A. Neumann*, Diss. Königsberg 1908.

W. W. Johnson, The analyst 4 (1877), p. 42 klassifiziert die ebenen algebraischen Kurven in bezug auf die Inversion und bezeichnet als *Kreisgrad* einer solchen Kurve $f(x, y) = 0$ den Grad dieser Gleichung in bezug auf $x, y, r^2 = x^2 + y^2$. Es erweist sich, daß eine Kurve und ihre Inverse ein und denselben Kreisgrad haben.

Anwendungen der Inversion zur Auffindung topologischer Kurveneigenschaften macht *S. Lefschetz*, Bull. Amer. math. Soc. (2) 18 (1911), p. 62.

L. Godeaux, Mathesis 36 (1922), p. 19 stellt die Paare konjugierter Punkte bei der Inversion mit Hilfe der Punkte einer kubischen Fläche mit vier konischen Doppelpunkten umkehrbar eindeutig dar.

Über die „anallagmatischen", d. h. durch eine Inversion in sich transformierbaren Kurven s. III C 5 b (*G. Loria*), Nr. **20**, über die 3. und 4. Ordnung III C 5 (*G. Kohn*), Nr. **47**, **49**, **84—90**, **94—97**.

Über die Anwendung der Inversion auf die Geometrie des Zirkels s. *A. Adler*, Sitzungsb. Ak. Wien 99 (1890), p. 910; „Theorie der geometrischen Konstruktionen", Leipzig 1906, p. 119 ff.; *J. L. Coolidge*[599]), p. 186—188; *A. Quemper de* studiert. Der erste derartige Mechanismus ist von *A. Peaucellier* ersonnen.[607])

71. Kreisverwandtschaft (Kreisaffinität, Kreistransformation). Unter den speziellen kontinuierlichen Gruppen ebener birationaler Transformationen ist die sechsgliedrige Gruppe der birationalen Transformationen beachtenswert, die Kreise (eingeschlossen Gerade) in Kreise verwandeln.[608]) Diese Transformationen, deren Sonderfall die Inversion

---

Lanascol, „Géométrie du compas", Paris 1925, p. 297—382; *E. Daniele* in *F. Enriques,* „Questioni riguardanti le matematiche elementari" 2, 3. Ausg., Bologna 1926, p. 155; *J. Sobotka,* Mém. Soc. R. des sciences de Bohême (Věstník) 1929 (Prague 1930), Nr. 9.

607) Nouv. Ann. de math. (2) 3 (1864), p. 414 [deutsche Übers. von *R. Hoppe,* Arch. Math. Phys. (1) 58 (1875), p. 215]; s. auch *A. Peaucellier,* Nouv. Ann. de math. (2) 12 (1873), p. 71. Ein Beweis des Satzes von *A. Peaucellier* bei *F. August,* Arch. Math. Phys. (1) 58 (1875), p. 216.

Der von *A. Peaucellier* erdachte Mechanismus heißt nach ihm *Inversor von Peaucellier.* Dieser und andere Inversoren bei *L. Lipkin,* Bull. St. Pétersbourg 16 (1871), p. 57; *H. Hart,* Messenger of math. (2) 4 (1874), p. 82, 116; *A. B. Kempe,* Proc. R. Soc. London 23 (1874), p. 565 [franz. Übers., mit Zusatz, von *V. Liguine,* Nouv. Corr. math. 3 (1877), p. 129, 177]; Messenger of math. (2) 4 (1874), p. 121; (2) 6 (1877), p. 143; Proc. London math. Soc. (1) 7 (1876), p. 213; Nature 16 (1877), p. 65, 86, 125, 145; „How to draw a straight line", London 1877; *V. Liguine,* Nouv. Ann. de math. (2) 14 (1875), p. 529; *W. H. Laverty,* Proc. London math. Soc. (1) 6 (1875), p. 84; *J. J. Sylvester,* Nature 12 (1875), p. 168, 214 = Papers 3, Cambridge 1909, p. 26; *J. Kleiber,* Ztschr. Math. Phys. 36 (1891), p. 296, 328; *Fr. Schilling,* Ztschr. Math. Phys. 44 (1899), p. 214; *N. Ogloblin,* Bull. Ac. de l'Oucraine 1 (1923); *G. Hessenberg,* Tübingen naturw. Abh., 6. Heft, 1924; *L. G. Lojcianskij,* Leningrad Ann. Inst. Polyt. 30 (1927), p. 143; *H. Rademacher* und *O. Toeplitz,* „Von Zahlen und Figuren", Berlin 1930, p. 86—95; *K. Zindler,* Sitzungsb. Ak. Wien 140 (1931), p. 399.

Eine Beschreibung dieser und anderer Inversoren sowie anderer Gelenksysteme bei *P. Mansion,* Nouv. Corr. math. 2 (1876), p. 129; *W. W. Johnson,* The Analyst 3 (1876), p. 42, 70; *J. Neuberg,* „Sur quelques systèmes de tiges articulées", Bull. Ass. élèves des écoles spéc., Nr. 6, Univ. de Liège 1886; *L. Burmester,* „Lehrbuch der Kinematik" 1, Leipzig 1888, p. 574 ff.; *P. Burgatti,* Rend. Circ. mat. Palermo 14 (1900), p. 192; *A. Emch,* Progr. Kantonsschule Solothurn 1906—07; *E. G. Togliatti,* Period. di mat. (4) 2 (1922), p. 41: *N. Delaunay,* Proc. intern. math. Congress Toronto 1924, 1 (Toronto 1928), p. 911; *C. P. Holst,* Nieuw Tijdschr. voor Wiskunde 15 (1928), p. 183. Eine reichhaltige Bibliographie bei *V. Liguine,* Bull. sciences math. (2) 7^1 (1883), p. 145. Vgl. auch *D. Hilbert* und *S. Cohn-Vossen,* „Anschauliche Geometrie", Berlin 1932, p. 239 ff.; *K. Federhofer*[597a]), p. 27—28 und 41—44.

Über den Inversor von *Peaucellier* und andere Inversoren in nicht-euklidischer Geometrie s. *D. M. Y. Sommerville,* Proc. math. Soc. Edinburgh 44 (1926), p 26.

608) Vgl. *F. Klein,* Erlanger Programm 1872[554]), vor allem § 6, wo insbesondere die Äquivalenz der Geometrie der Kreis- und Kugelverwandtschaften mit anderen Geometrien nachgewiesen wird; außerdem *E. Study,* Math. Ann. 49 (1896),

(Nr. **70**) ist, werden vor allem betrachtet als Sonderfälle quadratischer Transformationen von *L. I. Magnus*[609]), dann unter dem Namen *Kreisverwandtschaften* ausführlich von *A. F. Möbius*[610]), der ähnlich wie *G. Bellavitis*[600]) für die Inversion von der Absicht ausging, aus Beziehungen zwischen Strecken einer Geraden entsprechende Beziehungen zwischen Abschnitten und Winkeln einer Ebene auf einem durch das Gebiet des Imaginären führenden Wege aufzufinden.[611])

Die Kreisverwandtschaften sind *konforme* Transformationen, erhalten also die Größe der Winkel und können *direkte* oder *inverse* Transformationen sein, je nachdem zwei einander entsprechende Winkel gleichen Sinn haben oder nicht. Im ersten Falle verwandelt die Transformation jeden Kreispunkt in sich, im zweiten Falle vertauscht sie die beiden Kreispunkte miteinander.[612])

Die direkten Kreisverwandtschaften bilden für sich eine kontinuierliche ∞^6-Gruppe, die inversen eine andere kontinuierliche ∞^6-Schar,

---

p. 497; *M. Bôcher,* Bull. Amer. math. Soc. (2) 20 (1913), p. 185; *E. Study,* daselbst (2) 22 (1916), p. 38; *M. Bôcher,* daselbst, p. 40. S. außerdem den „Bericht" von *E. Kötter,* p. 98—106, und III AB 4b (*G. Fano*), Nr. **11, 12, 13, 30.**

Eine ausführliche Darstellung der Kreis- und Kugelverwandtschaft, auch im Zusammenhang mit den nicht-euklidischen Geometrien und den Kreis- und Kugelgeometrien von *E. Laguerre* und *S. Lie* [III AB 4b (*G. Fano*), Nr. **13, 14**], findet sich bei *W. Blaschke,* „Vorlesungen über Differentialgeometrie" 3, bearb. von *G. Thomsen,* Berlin 1929. Als Beispiel für *Lie*sche Transformationsgruppen bei *G. Kowalewski,* „Einführung in die Theorie der kontinuierlichen Gruppen", Leipzig 1931, p. 106—119 und 309.

609) J. f. Math. 8 (1831), p. 60; „Sammlung"[430]), p. 236, 290.

610) Ber. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig 5 (1853), p. 14 = J. f. Math. 52 (1856), p. 218; Abh. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig 2 (1855), p. 529 = Werke 2, p. 205, 243.

In der zweiten Arbeit, p. 565—572 = Werke 2, p. 282—289, dehnt *A. F. Möbius* die Kreisverwandtschaft auf die Kugelfiguren aus und nennt eine ebene Figur und eine Kugelfigur, oder auch zwei Kugelfiguren *kreisverwandt*, wenn sie derart aufeinander bezogen sind, daß jedem Kreise der einen ein Kreis der anderen entspricht. Zwei Kugelfiguren sind daher kreisverwandt, wenn es ihre ebenen stereographischen Projektionen sind. — Auf p. 572—580 = Werke 2, p. 290—297, erweiterte *A. F. Möbius* die Kreisverwandtschaft auf die Figuren des Raumes, wo jeder Kugel des einen Raumes eine Kugel des anderen entspricht.

S. hierüber *R. Baltzer,* J. f. Math. 54 (1857), p. 162.

611) S. auch *A. F. Möbius,* Ber. Sächs. Ges. Wiss. 4 (1852), p. 41 = J. f. Math. 52 (1856), p. 229 = Werke 2, p. 189.

612) Die von *A. F. Möbius* betrachteten Kreisverwandtschaften sind direkt; jede von ihnen ist das Produkt einer geraden Anzahl von Inversionen. Eine derartige Transformation wurde von *G. Darboux,* „Leçons sur la théorie générale des surfaces" 1, 1. Ausg., Paris 1887, p. 162; 2. Ausg., Paris 1914, p. 223 als *transformation circulaire* bezeichnet.

Über die inversen Kreisverwandtschaften vgl. *F. Klein,* Erlanger Programm 1872[554]), Ges. math. Abh. 1, p. 475, Anmerkung.

die zwar keine Gruppe ist, mit den ersten zusammen aber eine gemischte kontinuierliche ∞^6-Gruppe bildet. Diese Gruppe wird oft als *Gruppe der reziproken Radien* bezeichnet, weil ihre Transformationen[613]), sich aus Inversionen, Spiegelungen an Geraden (falls der Inversionskreis sich auf eine Gerade reduziert) und Ähnlichkeitstransformationen zusammensetzen lassen.[614])

Die direkten und inversen Kreisverwandtschaften in der reellen z-Ebene erhält man durch Betrachtung derjenigen analytischen Transformationen einer komplexen Veränderlichen $z = x + iy$, für die die

---

613) S., auch für die analoge Eigenschaft im drei- und mehrdimensionalen Raume (Nr. **79** und **89**), *J. Liouville,* J. math. pures appl. (1) 12 (1847), p. 276; *V. A. Mannheim,* daselbst (2) 16 (1871), p. 317; *G. Darboux,* „Sur une classe“ [50]), p. 236—241; „Principes“ [50]), p. 373—378; *H. Poincaré,* Acta math. 3 (1883), p. 49 = Oeuvres 2, Paris 1916, p. 258; *A. Capelli,* Ann. di mat. (2) 14 (1885), p. 233; *G. Torelli,* Ann. Ist. tecnico di Napoli 7 (1889—90); *S. Lie* und *G. Scheffers* [562]) 1, p. 414—419; *A. del Re,* Mem. Acc. Modena (2) 12 (1898), p. 66; *Ch. J. de la Vallée Poussin,* Ann. Soc. scient. Bruxelles 32 A (1908), p. 70; *M. d'Ocagne,* „Cours de géom.“ [598]) 1, p. 35—40. — Vgl. III D 6 a (*A. Voss*), Nr. **3**.

J. L. Coolidge [599]), p. 306—335, bemerkt, daß die Gruppe der umkehrbar eindeutigen algebraischen Transformationen von Kreisen einer Ebene in Kreise, unter der Bedingung, daß Nullkreise in Nullkreise transformiert werden, mit der Gruppe der *Cremona*schen Transformationen der Cartesischen Ebene einfach isomorph ist, und führt die Bestimmung der reellen kontinuierlichen Gruppen von Kreistransformationen durch. — Auf p. 336—350 analoge Fragen für die sphärischen Transformationen (Nr. **79**).

614) Zwei durch eine Kreisverwandtschaft verknüpfte Ebenen können so aufeinandergelegt werden, daß man eine Inversion zwischen ihnen erhält. S. *F. Severi,* „Complementi“ [565]), p. 187.

Die Berührungstransformationen in der Ebene, die jeden Kreis in einen Kreis verwandeln, bilden eine von *S. Lie,* Gött. Nachr. 1871, p. 201; Math. Ann. 5 (1871), p. 186; Arch. for Math. og Naturv. 9 (1884), p. 40 auf mehrere Arten bestimmte zehngliedrige Gruppe; s. auch *S. Lie* und *Fr. Engel* [556]) 2, Leipzig 1890, p. 440—443; *S. Lie* und *G. Scheffers* [562]) 1, p. 150, 245—247, 426—427, 433—441; auf synthetischem Wege *G. Scheffers,* Ber. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig 51 (1899), p. 145. Hierüber s. noch *B. Schilling,* J. f. Math. 154 (1925), p. 241. Die von *S. Lie* in der ersten Arbeit durchgeführte Methode beruht auf dem Zusammenhang zwischen den Berührungstransformationen der Kreise einer Euklidischen Ebene und den konformen Punkttransformationen des Raumes. Hierüber s. noch *W. Ludwig,* Habilitationsschrift Karlsruhe 1904; Rend. Circ. mat. Palermo 23 (1907), p. 307; 26 (1908), p. 303.

G. Scheffers, Ber. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig 50 (1898), p. 261 bestimmt alle Punkttransformationen der Ebene, die jede Gerade in einen Kreis verwandeln. Es zeigt sich, daß es vier im Reellen wesentlich verschiedene Kategorien dieser Transformationen gibt, die algebraisch sind, und zwar drei zwei-eindeutige und eine ein-eindeutige. Vgl. noch *T. Kubota* und *S. Kakeya* [4]), wo dies Ergebnis von dem dort wiedergegebenen Lehrsatz abgeleitet wird.

neue Veränderliche $z' = x' + iy'$ eine gebrochene lineare Funktion von z, bzw. von der konjugiert komplexen Variabeln $x - iy$ ist.[615])

615) S. I A 4 (*E. Study*), Nr. **6**; III AB 7 (*E. Müller*), Nr. **7**, **8**.

Der Ursprung dieser analytischen Darstellung der Transformation findet sich in den Untersuchungen von *C. F. Gauß,* Werke 8, Leipzig 1900, p. 352—356 über die stereographische Projektion der Kugel mit Hilfe der Darstellung der komplexen Zahlen durch die Punkte einer Ebene. Ein systematisches Studium der Kreisverwandtschaften unter diesem Gesichtspunkte zuerst bei *F. H. Siebeck,* J. f. Math. 55 (1857), p. 221.

Über die Kreisverwandtschaft im Zusammenhang mit den linearen Transformationen einer komplexen Veränderlichen und ihren Gruppen, die für die Theorie der automorphen Funktionen [II B 4 (*R. Fricke*), Nr. **5** ff.] von grundlegender Bedeutung sind, s. *F. Klein,* Math. Ann. 9 (1875), p. 183 = Ges. math. Abh. 2, Berlin 1922, p. 275, der als erster alle endlichen Gruppen linearer Transformationen einer komplexen Veränderlichen auf geometrischem Wege bestimmt; *P. Gordan,* Math. Ann. 12 (1877), p. 23, der als erster diese Bestimmung algebraisch durchführt; außerdem *F. N. Cole,* Ann. of math. (1) 5 (1890), p. 121; *W. Burnside,* Messenger of math. (2) 20 (1891), p. 163; (2) 22 (1893), p. 190; *Fr. Schilling,* Math. Ann. 44 (1893), p. 161; *A. Emch,* Ann. of math. (1) 12 (1898—1899), p. 141; (2) 13 (1911—12), p. 155; (2) 14 (1912—13), p. 57 [Auszüge Bull. Amer. math. Soc. (2) 18 (1912), p. 57, 270]; Amer. math. Monthly 21 (1914), p. 139; *G. G. Morrice,* Messenger of math. (2) 29 (1900), p. 143; *W. Scheibner,* Ber. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig 55 (1903), p. 203; 58 (1906), p. 217; *G. Vivanti,* Rend. Circ. mat. Palermo 35 (1912), p. 160; *M. Bôcher,* Bull. Amer. math. Soc. (2) 20 (1914), p. 193 ff.; *E. B. van Vleck,* Trans. Amer. math. Soc. 20 (1919), p. 299; *W. de Tannenberg*[606]), p. 39 ff.; *E. Study,* Math. Ztschr. 18 (1923), p. 55, 201; 21 (1923), p. 45, 174; *A. Vakselj,* Paris C. R. 178 (1924), p. 1135; *F. Simonart,* Mathesis 43 (1929), p. 361; *R. Deaux,* ebenda 46 (1932), p. 264; *Deborah May Hickey,* Amer. J. of math. 54 (1932), p. 635. — S. ferner namentlich die Lehrbücher über die Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen und die Gruppentheorie, z. B. *G. Holzmüller*[599]), p. 55—67; *F. Klein,* „Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade", Leipzig 1884, p. 29 ff.; *F. Klein* und *R. Fricke*[112]) 1, p. 82—91, 163—175, 196—207; *H. Weber*[291]) 2, 1. Aufl., p. 195 ff.; 2. Aufl., p. 255 ff. [eine unrichtige Konstruktion der Gruppe des Ikosaeders wird bei *G. Bagnera,* Rend. Circ. mat. Palermo 11 (1897), p. 87 verbessert]; *R. Fricke,* „Analytisch-funktionentheoretische Vorlesungen", Leipzig 1900, p. 77—86; „Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen" 1, Leipzig und Berlin 1916, p. 66—76; „Lehrbuch der Algebra" 2, Braunschweig 1926, p. 24 ff.; *L. Bianchi,* „Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzioni e delle equazioni algebriche secondo Galois", Pisa 1900, p. 99—131; [303]), p. 33—86; „Lezioni di geometria differenziale", 3. Ausg. 1, Pisa 1922, p. 147—153; *A. R. Forsyth*[28]), p. 605—618, 677—714; *A. del Re,* „Geometria proiettiva ed analitica", Modena 1900, p. 242—248, 260—267, 317—385; *H. Burkhardt,* „Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen", 2. Aufl., Leipzig 1903, p. 18—52; *G. Vivanti,* „Elementi della teoria delle funzioni poliedriche e modulari", Milano 1906, p. 22 ff.; franz. Übers. von *A. Cahen,* Paris 1910, p. 17 ff.; *W. Scheibner,* „Beiträge zur Theorie der linearen Transformationen als Einleitung in die algebraische In-

Übertragen wir durch stereographische Projektion die vorhergehenden Operationen auf die Kugel, so erzeugt die Gruppe der Kreisverwandtschaften der Ebene die Gruppe der Raumkollineationen, die die Kugel in sich transformieren. Diese verwandeln jede einzelne Schar von imaginären Erzeugenden der Kugel in sich, oder auch eine Schar in die andere, je nachdem sie von den direkten oder inversen Kreisverwandtschaften herrühren. Die Inversionen der Ebene speziell verwandeln sich in die ∞^3 Homologien, die die Kugel in sich transformieren, und bei denen der Mittelpunkt der Homologie daher der Pol der Homologieebene in bezug auf die Kugel ist.[616)] [617)]

---

variantentheorie", Leipzig 1907, p. 7—12, 151—160; *G. Fubini*[16)], p. 78—95, 189—193; *K. Doehlemann*, „Geom. Transf." 2, p. 96—113; *R. Sturm*, „Geom. Verw." 4, p. 94—95; *G. Kowalewski*, „Die komplexen Veränderlichen und ihre Funktionen", Leipzig und Berlin 1911, p. 11—64; *N. Nielsen*, „Elemente der Funktionentheorie", Leipzig und Berlin 1911, p. 314—327; *L. R. Ford*, „An introduction to the theory of automorphic functions", London 1915, p. 1—15; „Automorphic functions", New York 1929, p. 1ff.; *L. Bieberbach*, „Einführung in die konforme Abbildung", Berlin und Leipzig 1915, p. 13ff.; „Lehrbuch der Funktionentheorie" 1, 2. Aufl., Leipzig und Berlin 1923, p. 45—63; *F. Enriques* und *O. Chisini*, „Lezioni" 1, p. 206—220; *J. L. Coolidge*[599)], p. 318—330; *S. Pincherle*, „Elementi della teoria delle funzioni analitiche" 1, Bologna 1922, p. 8—15; *W. F. Osgood*, „Lehrbuch der Funktionentheorie" 1, 4. Aufl., Leipzig und Berlin 1923, p. 239—245, 258—276; 2, Leipzig und Berlin 1924, p. 45—46; *K. Knopp*, „Aufgabensammlung zur Funktionentheorie" 1, Berlin und Leipzig 1923, p. 37—42, 114—124; *A. Pringsheim*, „Vorlesungen über Zahlen- und Funktionenlehre", II_1, Leipzig und Berlin 1925, p. 151—165; *G. Julia*, „Principes géométriques d'analyse" 1, Paris 1930, p. 25ff.; „Leçons sur la représentation conforme des aires simplement connexes", Paris 1931, p. 18ff.; *P. Fatou*[303)] 1, p. 1—101; *C. Carathéodory*, „Conformal representation", London 1932, p. 4ff.

Über den Zusammenhang mit der *Segre*schen Theorie der hyperalgebraischen Formen [III A B 4a (*G. Fano*), Nr. **16**, **17**, **18**] s. *P. Benedetti*, Ann. Scuola Norm. sup. di Pisa 8 (1898), Nr. 3, p. 29ff.

Mit Hilfe der Betrachtung der Gruppe der Kreisverwandtschaften in einer reellen Ebene führt *G. Fano*, Monatsh. Math. Phys. 7 (1896), p. 297 auf geometrischem Wege die Bestimmung der endlichen Gruppen linearer Transformationen einer Veränderlichen durch.

616) S. *F. Klein* und *Fr. Schilling*, „Einleitung"[599)] 1, p. 373—382; *F. Klein* und *W. Blaschke*, „Vorlesungen"[599)], p. 195—200; *M. Bôcher*, „Über die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie", Leipzig 1894, p. 17ff.; *W. Blaschke* und *G. Thomsen*[608)], bes. p. 1—135.

617) *M. Pieri*, Giorn. di mat. (3) 2 (1911), p. 49; (3) 3 (1912), p. 106 [1910], gründet die Geometrie der Inversionen in der Ebene und im Raume auf die beiden Grundbegriffe *Punkt* und *Kreis* (den Kreis als durch drei Punkte bestimmte Figur) sowie ein System von Postulaten (20 an der Zahl).

H. T. Burgess, Ann. of math. (2) 13 (1911—12), p. 123 [Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 17 (1911), p. 297] untersucht für eine ebene algebraische Kurve

72. Andere besondere Transformationen und Gruppen Cremonascher Transformationen zwischen zwei Ebenen. Verschiedene Auto-

---

eine Gruppe von Zahlen (*Kreiszahlen*), die arithmetische Invarianten dieser Kurve in bezug auf die Kreisgruppe sind.

Über die invariante Theorie der Gruppe der Kreisverwandtschaften im Zusammenhang mit der Geometrie auf einer Fläche 2. Ordnung und der Theorie der algebraischen, vor allem der quaternären und doppeltbinären Formen (Nr. **3**, **4**, **5**) s. *Ed. Kasner,* Trans. Amer. math. Soc. 1 (1900), p. 430 [Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 8 (1901), p. 14]; *F. Morley,* Bull. Amer. math. Soc. (2) 31 (1925), p. 293; *F. Morley* und *B. C. Patterson,* Amer. J. of math. 52 (1930), p. 413.

Die kontinuierlichen Gruppen von Kreistransformationen wurden geometrisch und gruppentheoretisch von *H. B. Newson,* Bull. Amer. math. Soc. (2) 4 (1897), p. 107; (2) 7 (1901), p. 259 studiert. Über das Studium der Gruppe der Kreisverwandtschaften mit Hilfe der Methoden der allgemeinen natürlichen Geometrie s. *G. Kowalewski,* Tôhoku math. J. 34 (1931), p. 130 [Auszug Japanese J. of math. 8 (1932), Abstracts, p. (15)]; „Vorlesungen über allgemeine natürliche Geometrie und *Lie*sche Transformationsgruppen", Berlin und Leipzig 1931, p. 114—115, 182—189, 242—246, 275—276; Ber. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig 83 (1931), p. 298; ferner *I. Ginzel,* ebenda 84 (1932), p. 51.

Über die Kreisverwandtschaften in einer Ebene mit nicht-euklidischer Maßbestimmung s. *G. Battaglini,* Giorn. di mat. (1) 16 (1878), p. 256; *R. Fricke* und *F. Klein,* „Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen" 1, Leipzig 1897, p. 1—59; *F. Hausdorff,* Ber. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig 51 (1899), p. 161; *H. Liebmann,* daselbst 53 (1901), p. 477; 54 (1902), p. 244; „Nichteuklidische Geometrie", 3. Aufl., Berlin und Leipzig 1923, p. 38—41, 99—100; *D. M. Y. Sommerville,* „The elements of non-euclidean geometry", London 1914, p. 180—191, 229—255; *O. Veblen* und *J. W. Young,* „Projective geometry" 2 (*O. Veblen*), Boston 1918, p. 219 ff. Über ihren Zusammenhang mit den Berührungstransformationen der Kreise der Ebene und den konformen Abbildungen des Raumes s. *W. Ludwig,* Anm. 614.

H. Beck, Trans. Amer. math. Soc. 11 (1909), p. 414 entwickelt den Zusammenhang der Geometrie der Kreisverwandtschaften mit der Geometrie, die aus der ebenen hyperbolischen Geometrie entsteht, wenn man als Raumelement den Pfeil betrachtet, d. h. ein wohlgeordnetes Paar von Punkten auf dem absoluten Kegelschnitte. Diese Pfeile sind das Analogon zu den Punkten der *Möbius*schen Geometrie und werden den Transformationen einer gewissen Gruppe unterworfen, die zu der *Möbius*schen Gruppe von ∞^6 Punkttransformationen ein Seitenstück ist.

J. W. Young und *F. M. Morgan,* Trans. Amer. math. Soc. 17 (1916), p. 233 [vgl. *J. W. Young,* Bull. Amer. math. Soc. (2) 18 (1912), p. 227—230; *J. W. Young* und *F. M. Morgan,* daselbst (2) 19 (1913), p. 515; (2) 21 (1915), p. 493] studieren eine kontinuierliche Gruppe quadratischer, das System der Kegelschnitte durch zwei feste Punkte in sich überführender Transformationen, die also eine Erweiterung der aus den direkten Kreisverwandtschaften gebildeten Gruppe ist. Es wird auch die Erweiterung auf die drei- und mehrdimensionalen Räume (s. Anm. 798) untersucht.

L. Burmester, Ztschr. Math. Phys. 20 (1875), p. 405 befaßt sich mit der Bewegung kreisverwandt veränderlicher ebener Systeme. Vgl. auch *M. Krause,* Arch. Math. Phys. (3) 16 (1910), p. 2; Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 19 (1910), p. 327;

ren[618]) geben für die Transformationen der ersten Ordnungen geometrische Konstruktionen an.[619])

Für fünf gegebene Punktepaare $P_1 P_1', \ldots, P_5 P_5'$ wird die Korrespondenz 5. Ordnung, die zwei Punkte M, M' derart verknüpft, daß die zwei Geradengruppen $M(P_1, \ldots, P_5)$, $M'(P_1', \ldots, P_5')$ projektiv werden (Anm. 593), von *R. Sturm*[620]), *H. Müller*[621]) und anderen[622]) studiert.

R. Müller, Ztschr. Math. Phys. 58 (1910), p. 247; *R. Skutsch,* daselbst, p. 252; *R. Mehmke,* daselbst, p. 257; *E. Herrmann,* Diss. Dresden 1913.

Weitere Untersuchungen über die Kreisverwandtschaft und ihre Erweiterung auf den Raum bei *A. Cayley,* Quart. J. of math. 2 (1858), p. 162; Proc. London math. Soc. (1) 8 (1877), p. 220 = Papers 3, Cambridge 1890, p. 118; 9, Cambridge 1896, p. 612; *G. Battaglini,* Giorn. di mat. (1) 1 (1863), p. 325; (1) 2 (1864), p. 142 [Auszüge Rend. Acc. Napoli 1863, p. 240; 1864, p. 37]; *C. Formenti,* Giorn. di mat. (1) 17 (1879), p. 232; *C. A. Laisant,* Mathesis (1) 7 (1887), p. 64; *H. Wiener,* Ber. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig 43 (1891), p. 644; *E. v. Weber,* München Ber. 31 (1901), p. 367; *E. Kasner,* Ann. of math. (2) 5 (1903—04), p. 99; Bull. Amer. math. Soc. (2) 9 (1903), p. 397; *R. Sturm,* „Geom. Verw.“ 4, p. 83—95; *J. L. Coolidge,* Bull. Amer. math. Soc. (2) 21 (1915), p. 279; [599]), p. 306—318, 330—335, 336—350; *G. Thomsen,* Abh. math. Seminar Hamburg Univ. 4 (1926), p. 117; *E. Kruppa,* Sitzungsb. Ak. Wien 140 (1931), p. 369; *D. Hilbert* und *S. Cohn-Vossen*[607]), p. 218 ff.

Über die Verwendung der Kreisverwandtschaft in der Dreiecksgeometrie s. vor allem *J. Schick,* München Ber. 30 (1900), p. 249.

618) *E. Bertini,* Rend. Ist. Lomb. (2) 15 (1882), p. 154 für die kubischen Transformationen; *Th. Cotterill,* Proc. London math. Soc. (1) 2 (1868), p. 119 [vgl. *A. Cayley* und *W. K. Clifford,* daselbst, p. 123 = *A. Cayley,* Papers 6, Cambridge 1893, p. 22] für die biquadratische Transformation, die das Produkt zweier allgemeiner quadratischer Transformationen ist; *K. Doehlemann,* Ztschr. Math. Phys. 32 (1887), p. 315; 33 (1888), p. 243 für die kubischen und biquadratischen Transformationen; *U. Perazzo*[454]), p. 158 und 176—177 für die quadratischen, kubischen und biquadratischen Transformationen unter Betrachtung zweier Ebenen eines fünfdimensionalen Raumes.

619) *Th. Maschke,* Diss. Breslau 1879, beschäftigt sich mit der Bestimmung einer kubischen Transformation durch eine gewisse Anzahl von Hauptpunkten oder von Paaren homologer Punkte.

A. Schmidt, Diss. Breslau 1882, gibt, besonders für die Transformationen 4. Ordnung, notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß eine gewisse Anzahl von als Hauptpunkte gewählten Punkten eine Transformation gegebener Ordnung bestimmt.

G. Marletta, Catania Atti Acc. Gioenia (5) 16 (1928), Nr. V^bis a beschäftigt sich mit der Bestimmung einer ebenen algebraischen Transformation durch eine gewisse Anzahl von Paaren homologer Punkte und führt dies für die Transformationen von *de Jonquières* beliebiger Ordnung (Nr. 51) und einige andere spezielle *Cremona*sche Transformationen durch, außerdem für die quadratischen Transformationen vom Index 1 und 2 oder auch 2 und 2, und die kubische Transformation von den Indizes 2 und 2 und vom Geschlecht 1 (Nr. **94** und **95**).

620) Math. Ann. 1 (1869), p. 536; „Geom. Verw.“ 1, p. 352—362; 4, p. 30—31.

621) Math. Ann. 2 (1870), p. 281.

R. Sturm[623]) gibt Beispiele ebener *Cremona*scher Transformationen, die aus der Betrachtung zweier verschiedener eindeutiger ebenen Abbildungen einer kubischen Fläche gewonnen werden, ferner[624]) ein Beispiel einer Transformation 10. Ordnung vom zweiten Typus der Tabelle von *L. Cremona.*

Viele Verfasser[625]) betrachten involutorische oder nicht involu-

---

622) *Ed. Dewulf* und *P. H. Schoute,* Bull. Sciences math. (2) 3 (1879), p. 383, die diese Korrespondenz für die Konstruktion von Kurven 4. Ordnung untersuchen (und auf p. 390 auch eine Transformation 20. Ordnung betrachten); *D. Montesano,* Ann. di mat. (3) 1 (1898), p. 343—345, der sie beim Studium der kubischen Flächen und gewisser Systeme linearer Geradenkomplexe erhält.

Für den Fall, daß in jeder der beiden Gruppen von fünf Punkten zwei Punkte die Kreispunkte sind, s. *A. Cayley,* Anm. 593. Ein anderer metrischer Sonderfall der Transformation, der in der Dreiecksgeometrie [III AB 10 (*G. Berkhan* und *W. Fr. Meyer*), Nr. 26] Anwendung findet, wird auch unter Erweiterung auf den Raum von *P. H. Schoute* in den in Anm. 596 angeführten Arbeiten, außerdem in Nieuw Archief voor Wiskunde 6 (1880), p. 78 studiert. S. außerdem *F. J. Van der Berg,* daselbst 7 (1881), p. 78; Mathesis (1) 2 (1882), p. 120; (1) 7 (1887), p. 118; *E. Vigarié,* J. math. élém. (3) 5 (1891), p. 101, 129, 153, 181, 207, 256.

623) Math. Ann. 26 (1885), p. 304; „Geom. Verw." 4, p. 20—31.

624) „Die Gebilde"[40]) 3, p. 508, Anmerkung.

625) *K. Glänzer,* Progr. Forbach 1874; Progr. Hamburg 1889 [s. *G. Loria*[46]) 2, p. 349—353; ital. Ausg. 2, p. 408—412]; *H. Nägelsbach,* Progr. Erlangen 1885 [s. *G. Loria*[46]) 1, p. 397; ital. Ausg. 1, p. 466]; *J. Thomae,* Ber. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig 47 (1895), p. 359; *G. Cardoso-Laynes,* Period. di mat. (2) 4 (1901), p. 33; *V. Retali,* Le mat. pure appl. 1 (1901), p. 47, 238; 2 (1902), p. 192, 222; *L. Lo Monaco-Aprile,* daselbst 2 (1902), p. 188: *E. Lacour,* Nouv. Ann. de math. (4) 2 (1902), p. 169; *M. W. Haskell,* Amer. math. Monthly 10 (1903), p. 1; *M. Vegas,* Rev. Ac. Ciencias Madrid 1 (1904), p. 90; *K. Zahradnik,* Sitzungsb. Ak. Wien 113 (1904), p. 973; 114 (1905), p. 669 = Časopis 34 (1905), p. 105, 329; 38 (1909), p. 6; *P. Pecl,* Progr. Gymn. Raudnic 1905; *H. J. van Veen,* Nieuw Archief voor Wiskunde (2) 11 (1914), p. 127; *F. M. Morgan,* Ann. of math. (2) 16 (1914), p. 134 [Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 21 (1914), p. 60]; *J. de Vries,* Wisk. Opgaven (3) 1 (1919), p. 45, Probl. XX; *L. Godeaux,* Nouv. Ann. de math. (5) 3 (1924), p. 12.

Über die kubischen Transformationen mit Hauptpunkten, die nicht alle voneinander verschieden sind, s. *G. Rieß*[594]); *H. C. Shaub,* Bull. Amer. math. Soc. (2) 37 (1931), p. 25.

L. Saltel und andere studieren eingehend die involutorische kubische Transformation, die *L. Saltel* als *arguesienne* bezeichnet. In einer Ebene liegen ein Punkt O und zwei Kegelschnitte Γ_1, Γ_2 fest, und jedem Punkte P der Ebene läßt man den Punkt P' der Geraden OP entsprechen, der P in der durch die beiden Paare von Schnittpunkten der Geraden mit Γ_1, Γ_2 bestimmten Involution konjugiert ist. Diese Transformation ist nichts anders als eine kubische Transformation, deren doppelter Hauptpunkt O und deren einfache Hauptpunkte die Γ_1, Γ_2 gemeinschaftlichen Punkte sind, und die durch eine Kollineation von der allgemeinen kubischen Transformation abgeleitet werden kann. Als Sonderfälle torische kubische Transformationen metrischer oder nicht metrischer Beschaffenheit, die durch spezielle Konstruktionen erhalten werden.[626])

---

kann man die harmonische Homologie und die Inversion von *T. A. Hirst* (Nr. **69**) erhalten.

S. *L. Saltel,* Mém. couronnés et autres Mém. Ac. Belgique, coll. in — 8°, Bruxelles 22 (1872), Nr. 5 [1870]; 23 (1873), Nr. 4 [1870]; 27 (1877), Nr. 5 [1875]; Bull. Ac. sc. Belgique (2) 34 (1872), p. 51, 52; (2) 43 (1877), p. 265; (2) 46 (1878), p. 90; Bull. Soc. math. de France 2 (1873), p. 52; Nouv. Corr. math. 1 (1874), p. 196; 5 (1879), p. 205; *P. Mansion,* Bull. Ac. sc. Belgique (2) 36 (1873), p. 625; *L. Crocchi,* Giorn. di mat. (1) 12 (1874), p. 378; *L. Philippin,* Nouv. Corr. math. 1 (1874), p. 127; *C. Le Paige,* Bull. Ac. sc. Belgique (3) 3 (1882), p. 760; *Cl. Servais,* Mathesis (1) 8 (1888), p. 105; *K. Doehlemann,* „Geom. Transf." 2, p. 168.

Der Ort der Doppelpunkte der durch die Kegelschnitte Γ_1, Γ_2 bestimmten Involutionen auf den von O ausgehenden Geraden ist eine durch O hindurchgehende Kurve C^3 3. Ordnung, die in den gemeinsamen Punkten von Γ_1 und Γ_2 die Verbindungsgeraden dieser Punkte mit O berührt. Daher läßt sich die Transformation auch dadurch erhalten, daß man Gerade durch O hindurchführt und auf jeder dieser Geraden die Punktepaare ins Auge faßt, die die weiteren Schnittpunkte mit C^3 harmonisch teilen. Eine Erweiterung für den Fall einer Kurve von der Ordnung n mit einem $(n-2)$-fachen Punkte in einem Briefe von *L. Saltel* an *E. Catalan,* Nouv. Ann. de math. (2) 11 (1872), p. 142 = Bull. Ac. sc. Belgique (2) 32 (1871), p. 352; außerdem *Cl. Servais* a. a. O.; *G. Cardoso-Laynes,* Period. di mat. (2) 2 (1900), p. 80; *V. Retali,* daselbst, p. 123; *H. Bateman,* Quart. J. of math. 37 (1905), p. 277.

G. Stiner, Vierteljahrsschr. Naturf. Ges. Zürich 40 (1895), p. 217 studiert zwei ebene Involutionen, deren eine die arguesienne ist.

626) Beachtenswerte *Cremona*sche Korrespondenzen erhält man, wenn man unter Verallgemeinerung der *Dupin*schen Theorie von den konjugierten Tangenten einer Fläche [III D 1, 2 (*H. von Mangoldt*), Nr. **37**; III D 3 (*R. von Lilienthal*), Nr. **3**] nicht nur die einem gewöhnlichen Punkte P einer Fläche unendlich benachbarten Punkte 1. Ordnung dieser Fläche, sondern auch die P unendlich benachbarten Punkte 2., 3., ... Ordnung einer Betrachtung unterwirft. Im Falle der unendlich benachbarten Punkte 2. Ordnung ergibt sich eine kubische *Cremona*sche Korrespondenz zwischen den Ebenen des Bündels mit P als Mittelpunkt und den Punkten der Tangentialebene in P, die zuerst von *C. Segre,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 17^2 (1908), p. 405 betrachtet wurde und zusammen mit anderen in den jüngsten Untersuchungen über die projektiv-differentielle Geometrie der Flächen eine wichtige Rolle spielt. S. *E. Čech,* Časopis 50 (1921), p. 219; Prag České Ak. Rozpravy 30 (1921), Nr. 36; Ann. di mat. (3) 31 (1921), p. 191; Bull. intern. Ac. tchèque des sciences 1923, p. 44, 80; *G. Fubini,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 32^2 (1923), p. 321; *E. Bompiani,* Ann. di mat. (4) 1 (1924), p. 259 [Auszug Roma Rend. Acc. Linc. (5) 32^2 (1923), p. 376]; Roma Rend. Acc. Linc. (5) 33^1 (1924), p. 85; *G. Fubini* und *E. Čech,* „Geometria proiettiva differenziale" 1, Bologna 1926, p. 132—133; 2, Bologna 1927, p. 470—540 (Anhang II, von *E. Bompiani*), p. 720—721; *E. P. Lane,* Amer. J. of math. 48 (1927), p. 204 [Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 32 (1926), p. 218]; *L. Godeaux,* Anais da Fac. de sciências do Porto 15 (1928), p. 157; Bull. Ac. sc. Belgique (5) 16 (1930), p. 762; *V. Strazzeri,* Rend. Circ. mat. Palermo 54 (1929), p. 314; „Lezioni di geometria

Andere Autoren untersuchen weitere spezielle involutorische oder nicht involutorische *Cremona*sche Transformationen im allgemeinen höherer als 3. Ordnung.[627])

---

differenziale proiettiva" (lith.), Palermo 1930, p. 127 ff.; *G. Fubini* und *E. Čech,* „Indroduction à la géométrie projective différentielle des surfaces", Paris 1931, p. 109—115; *G. Palozzi,* Roma Rend. Acc. Linc. (6) 14 (1931), p. 14.

Eine Erweiterung auf die Überräume bei *E. Čech,* Ann. di mat. (3) 31 (1922), p. 262.

627) *A. Clebsch,* Abh. Ges. Wiss. Göttingen 15 (1870), p. 56 trifft beim Studium der ebenen Abbildung einer Fläche 5. Ordnung mit Doppelkurve 4. Ordnung erster Art auf eine Transformation von *de Jonquières* (Nr. 51) 5. Ordnung.

J. R. Conner, Amer. J. of math. 38 (1916), p. 155 studiert die allgemeine *Cremona*sche Transformation 5. Ordnung, die als Ort der Fixpunkte eine kubische Kurve besitzt.

C. Le Paige, Bull. Ac. sc. Belgique (3) 3 (1882), p. 760; (3) 4 (1882), p. 415 untersucht zwei spezielle involutorische Transformationen von *de Jonquières* der Ordnungen 5 und 6 und eine Transformation 10. Ordnung, die durch ebene kubische Kurven erhalten werden. Über die beiden ersten vgl. *Fr. Deruyts,* Mém. Soc. sc. Liège (2) 14 (1887), Nr. 5; *L. Godeaux,* Bull. Ac. sc. Belgique 1907, p. 898; Erweiterungen dieser Transformationen bei *P. H. Schoute,* Ass. franç. avanc. des sciences 12, Rouen 1883, p. 131.

M. Diesing, Diss. Jena 1887 studiert eine spezielle Transformation 4. Ordnung; *E. Duporcq,* Interm. des math. (1) 7 (1900), p. 277 bestimmt einige Transformationen 5. Ordnung; *L. Godeaux*[625]) eine 7. Ordnung. Über weitere spezielle Transformationen s. *C. Burali-Forti,* Giorn. di mat. (1) 27 (1888), p. 160; *A. Schüttenhelm,* Diss. Straßburg 1901; *T. Wada,* Kyôto Univ. Mem. 5 (1913), p. 167; *L. Godeaux,* Bull. Ac. sc. Belgique (5) 9 (1923), p. 521; *R. Deaux,* Mathesis 38 (1924), p. 9; *E. Dahy,* Bull. Ac. sc. Belgique (5) 13 (1927), p. 42; *A. Emch*[924]), p. 69.

Ebene *Cremona*sche Transformationen treffen *S. Kantor,* Denkschr. Ak. Wien 46 (1882), p. 83 beim Studium der linearen Systeme linearer Transformationen der Ebene und *G. Marletta,* „Sulla rappresentazione delle congruenze di rette in proiezione centrale", Catania 1906 an.

O. M. Thalberg, Avh. Norske Vid. Ak. Oslo 10 (1932), p. 1 untersucht *Cremona*sche, insbesondere involutorische, Transformationen in Zusammenhang mit den Durchschnitten ebener algebraischer Kurven.

Ist ein Netz von Flächen 2. Ordnung gegeben und bezeichnet man zwei von zwei Basispunkten ausgehende Gerade als einander entsprechend, wenn sie Erzeugende verschiedener Scharen auf ein und derselben Fläche des Netzes sind, so erhält man nach *W. Stahl,* J. f. Math. 95 (1883), p. 298—299 zwischen den Strahlenbündeln, deren Mittelpunkte in diesen beiden Punkten liegen, eine birationale Korrespondenz, die 4. bzw. 8. Ordnung ist, je nachdem die beiden Punkte voneinander verschieden sind oder zusammenfallen. S. auch *R. Sturm,* „Die Gebilde"[40]), p. 291—292.

G. Aprile, Giorn. di mat. (3) 10 (1915), p. 129 betrachtet umkehrbar eindeutige Korrespondenzen zwischen den Punkten einer Ebene und den Sehnen einer kubischen Raumkurve, bei denen den Geraden der Ebene Regelflächen 4. Grades mit der kubischen Raumkurve als Doppelkurve entsprechen.

D. Montesano[628]) zeigt, daß es möglich ist, zwei Ebenen durch ein kontinuierliches ∞^1-System solcher *Cremona*scher Transformationen aufeinander zu beziehen, die einem allgemeinen Punkte jeder Ebene die einzelnen Punkte einer rationalen Kurve gegebener Ordnung in der anderen Ebene entsprechen lassen; das Studium dieser Systeme läßt sich auf das Studium der birationalen Korrespondenzen des Raumes, bei denen die Ebenen zweier bestimmter Büschel einander entsprechen, zurückführen.[629])

Zwei spezielle diskontinuierliche Gruppen in der Ebene werden von *D. Montesano*[630]) untersucht. Die erste besteht aus acht involutorischen Transformationen, von denen eine die Identität ist, die anderen quadratisch sind (drei vom ersten und vier vom zweiten in Nr. **69** beschriebenen Typus), und die zwei von den Hauptpunkten gemeinsam haben. Diese Gruppe kann durch Betrachtung einer Fläche F^2 2. Ordnung und eines ihrer Poltetraeder erhalten werden. Die vier durch die Ecken und gegenüberliegenden Flächen bestimmten harmonischen Homologien und die drei gescharten Involutionen, deren Involutionsachsen die Paare gegenüberliegender Kanten sind, bestimmen auf F^2 sieben involutorische Transformationen, die mit der Identität eine Gruppe bilden. Durch die stereographische Projektion von F^2 läßt sich nun aus einer derartigen Gruppe die erwähnte Gruppe erhalten.[631])

---

628) Giorn. di mat. (2) 10 (1903), p. 181.

629) *D. Montesano* konstruiert die genannten Systeme für den Fall, daß sie aus Homographien oder aus quadratischen Transformationen gebildet sind, oder auch aus Transformationen von *de Jonquières* willkürlicher Ordnung, bei denen sich zwei gegebene Geradenbüschel durch ein und dieselbe Projektivität entsprechen.

630) Atti Ist. Ven. (6) 6 (1887), p. 1425. Über die erste der beiden Gruppen s. auch *B. Machytka,* Časopis 55 (1925), p. 245.

631) Diese Gruppe kann man auch erhalten, wenn man die quadratischen Transformationen aufsucht, die die aus zwei projektiven, in ein und derselben Ebene liegenden, aber nicht konzentrischen Büscheln angehörenden, Quadrupeln von Geraden zusammengesetzte Figur in sich transformieren. Sind die beiden Quadrupel allgemein, so ergibt sich die von *D. Montesano* studierte Gruppe; sind sie harmonisch oder äquianharmonisch, so ergeben sich zwei Gruppen der Ordnung 32 bzw. 96 (deren Transformationen nicht alle involutorisch sind). S. *E. Ciani,* Rend. Circ. mat. Palermo 42 (1917), p. 323.

Eine Anwendung davon ergibt sich, wenn die beiden Quadrupel aus den Tangenten gebildet sind, die an eine Kurve C^4 4. Ordnung mit zwei Doppelpunkten von diesen Doppelpunkten aus gelegt werden können. Diese Gruppe wird von *E. Ciani,* Giorn. di mat. (3) 10 (1918), p. 31 [vgl. auch daselbst (3) 6 (1915), p. 192] studiert, der die verschiedenen Fälle untersucht, bei denen eine ebene Kurve 4. Ordnung durch quadratische Inversionen in sich transformiert wird. Sonderfälle, vor allem der Fall, daß die Kurve in den Kreispunkten zwei Doppelpunkte hat [bizirkulare Kurven 4. Ordnung: s. III C 5 (*G. Kohn*), Nr. **84**, Die zweite Gruppe kann man in ähnlicher Weise durch die ebene Abbildung einer Fläche 3. Ordnung erhalten; sie ist durch fünf beliebig auf der Ebene angenommene Punkte völlig bestimmt. Die fünf involutorischen Transformationen von *de Jonquières* 3. Ordnung, deren Hauptpunkte die gegebenen Punkte sind, sind paarweise vertauschbar, die Identität ist ihr Produkt. Ihre paarweisen Produkte sind dagegen die zehn quadratischen Involutionen vom ersten Typus, bei denen drei der gegebenen fünf Punkte Hauptpunkte, die anderen beiden untereinander konjugiert sind. Die betrachtete Gruppe besteht aus diesen 15 Transformationen und der Identität.

A. B. Coble[632]) studiert eine Gruppe von 120 Transformationen 5. Ordnung, die durch fünf Punkte der Ebene bestimmt, und eine Transformierte der Gruppe von 120 quadratischen Transformationen ist, die ihrerseits durch vier Punkte der Ebene bestimmt ist und schon von *L. Autonne* und dann von *S. Kantor* (Nr. **63**) gefunden wurde.[633]) Über diese Gruppe in Verbindung mit anderen, allgemeineren Untersuchungen s. weiter Nr. **91**.

73. Birationale Transformationen zwischen zwei Räumen von drei Dimensionen.[634]) Sehen wir von Untersuchungen über spezielle Transformationen ab, von denen wir im folgenden (Nr. **77**—**81**) reden

---

85, 87] bei *J. Casey,* Dublin Trans. Ir. Ac. 24 (1871), p. 457 [Auszug Dublin Proc. Ir. Ac. 10 (1869), p. 44]; *G. Darboux,* „Sur une classe“ [56]), p. 26ff.; *G. Salmon-W. Fiedler,* „Anal. Geom. der höh. eb. Kurven“ [28]), p. 316ff.; *G. Salmon* und *O. Chemin,* „Traité de géom. anal.“ [28]), p. 339ff.; *G. Koenigs,* „Leçons de l'agrégation classique de math.“ (lith.), Paris 1892, p. 130ff.; *J. de Vries,* Arch. Musée Teyler (2) 9 (1904), p. 255; *G. Loria*[46]) 1, p. 114ff.; ital. Ausg. 1, p. 138ff.; *T. J. Richards,* Quart. J. of math. 42 (1911), p. 236.

Mit Hilfe der Darstellung der Punktkoordinaten der Kurve durch elliptische Funktionen ist derselbe Gegenstand studiert von *B. Bydžovský,* Comptes rendus du Congrès intern. des math., Strasbourg 1920 (Toulouse 1921), p. 383 [s. auch Časopis 53 (1924), p. 27; Prag České Ak. Rozpravy 33 (1924), Nr. 32], der auch alle ebenen elliptischen Kurven 4. Ordnung bestimmt, die von einer, von der des allgemeinen Falles verschiedenen Anzahl quadratischer Transformationen in sich transformiert werden (hiervon gibt es neun, von denen sieben mit der Identität die erste der beiden von *D. Montesano* betrachteten Gruppen bilden, während die beiden anderen darin nicht enthalten sind).

632) Trans. Amer. math. Soc. 9 (1908), p. 396.

633) *L. Autonne,* J. math. pures appl. (4) 1 (1885), p. 435; Auszüge Paris C. R. 97 (1883), p. 567; 98 (1884), p. 565; *S. Kantor*[545]), p. 105 (Typus XIV).

Die Invariantentheorie der Gruppe von *A. B. Coble* war in dualer Form von *A. Clebsch,* Math. Ann. 4 (1871), p. 284 studiert worden.

634) Darstellungen bei *G. Salmon-W. Fiedler,* „Raumgeometrie“ 2, p. 545—574; *K. Doehlemann,* „Geom. Transf.“ 2, p. 180—324; *R. Sturm,* „Geom. Verw.“ 4, p. 339—419; *Hilda P. Hudson,* „Cremona transf.“, p. 154—387. Ein kurzer Hin-

wollen, so verdanken wir die allgemeine Theorie der birationalen Transformationen zwischen zwei dreidimensionalen Räumen den ungefähr gleichzeitigen Arbeiten von *A. Cayley*[635]), *M. Noether*[636]) und *L. Cremona.*[637])

Bezeichnen wir mit x_1, x_2, x_3, x_4 und x_1', x_2', x_3', x_4' die homogenen projektiven Koordinaten zweier Punkte X und X' in zwei voneinander verschiedenen oder überlagerten Räumen R und R', so wird eine rationale Transformation zwischen R und R' durch die Formeln

(1) $$\varrho x_i' = f_i(x_1, x_2, x_3, x_4), \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

bestimmt, wobei ϱ ein Proportionalitätsfaktor ist und die f_i vier quaternäre Formen ein und derselben Ordnung n sind, die als frei von gemeinschaftlichen Faktoren betrachtet werden dürfen (vgl. Nr. 88).

Die Transformation ist birational, wenn sich die Formeln dadurch umkehren lassen, daß wir die x_i mit Hilfe der x_i' durch neue Formeln

(2) $$\sigma x_i = \varphi_i(x_1', x_2', x_3', x_4'), \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

ausdrücken, wo σ ein Proportionalitätsfaktor und die φ_i vier quaternäre Formen ein und derselben Ordnung n' sind.

Die Zahl n ist die *Ordnung* der Transformation (1), während n' die Ordnung der inversen Transformation (2) ist. Aber im Gegensatz zu dem, was im Falle zweier Ebenen (Nr. 47) gilt, ist allgemein $n \neq n'$.

Vermöge der Gleichungen (1) entsprechen den Ebenen

$$\lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_2' + \lambda_3 x_3' + \lambda_4 x_4' = 0$$

des Raumes R' in R die Flächen n^{ter} Ordnung

(3) $$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0,$$

die ein lineares ∞^3-System bilden. Jede dieser Flächen wird auf die entsprechende Ebene Punkt für Punkt abgebildet, und ist daher eine rationale (oder Homaloid-) Fläche.

---

weis bei *G. Salmon*, „A treatise on the analytic geometry of three dimensions", edited by *R. A. P. Rogers* 2, 5. Aufl., London 1915, p. 268—277.

S. auch *A. B. Coble*, „Report", p. 197–226; *V. Snyder*, „Report", p. 227–251. — Ein Gesamtüberblick über die involutorischen Transformationen bei *V. Snyder*, Bull. Amer. math. Soc. (2) 30 (1924), p. 101.

635) Proc. London math. Soc. (1) 3 (1870), p. 127 = Papers 7, Cambridge 1894, p. 189.

636) Math. Ann. 2 (1869), p. 293 [Auszug Gött. Nachr. 1869, p. 298] und besonders Math. Ann. 3 (1870), p. 547.

637) Gött. Nachr. 1871, p. 129, Wiedergabe mit Zusätzen in Math. Ann. 4 (1871), p. 213; Rend. Ist. Lomb. (2) 4 (1871), p. 269, 315; Ann. di mat. (2) 5 (1871—1873), p. 131 = Opere 3, Milano 1917, p. 260, 241, 251, 298. Der allgemeine Teil der letzten Arbeit ist von *E. Dewulf*, Bull. Sciences math. (1) 7 (1874), p. 37 ins Französische übertragen.

In ähnlicher Weise entsprechen den Ebenen

$$\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 + \mu_4 x_4 = 0$$

von R in R' die Flächen n'^{ter} Ordnung

$$\mu_1 \varphi_1 + \mu_2 \varphi_2 + \mu_3 \varphi_3 + \mu_4 \varphi_4 = 0, \tag{4}$$

die ein lineares ∞^3-System bilden und von denen auch jede rational ist.

Zwei Flächen (3) schneiden sich außer in den Basiselementen des linearen Systems in einer beweglichen rationalen Kurve (die einer Geraden von R' entspricht), die n'^{ter} Ordnung ist, da ihren Schnittpunkten mit einer Ebene die n' Schnittpunkte einer Geraden mit einer Fläche des Systemes (4) in R' entsprechen.

In ähnlicher Weise schneiden sich zwei Flächen (4) außer in den Basiselementen des linearen Systemes in einer beweglichen rationalen Kurve n^{ter} Ordnung, die einer Geraden von R entspricht.

Diese Kurven der Ordnung n', n von R und R', die den Geraden des anderen Raumes entsprechen, bezeichnen wir mit M und N.[638])

Drei nicht einem Büschel angehörende Flächen (3) schneiden sich außer in der Basisgruppe in einem beweglichen Punkte, der dem gemeinsamen Punkt der drei homologen Ebenen in R' entspricht; die gleiche Eigenschaft gilt auch für die Fläche (4).

Infolge der eben genannten Eigenschaften heißen die Systeme (3) und (4) *homaloide Systeme.* Soll ein lineares irreduzibles System von algebraischen Flächen homaloid sein, so ist notwendig und hinreichend, daß sich drei ihrer allgemeinen Flächen nur in einem veränderlichen Punkte schneiden.[639]).

Die z. B. zwischen den Ebenen von R' und den Flächen des Systems (3) stattfindende Korrespondenz ist projektiv, da sie den Ebenen eines Büschels oder eines Bündels in R' die Flächen eines im System (3) enthaltenen Büschels bzw. Netzes entsprechen läßt.

Bezieht man umgekehrt die Flächen eines homaloiden Systems von R projektiv auf die Ebenen des Raumes R', so erhält man eine birationale Transformation zwischen R und R'.

---

638) Diese Kurven werden von *S. Kantor,* Acta math. 21 (1896), p. 11 als *homaloidale Kurven* bezeichnet.

639) S. *G. B. Guccia,* Rend. Circ. mat. Palermo 1 (1887), p. 348.

G. B. Guccia, Roma Rend. Acc. Linc. (4) 5^1 (1889), p. 460 zeigt, daß die Ordnung n' der inversen Transformation gleich dem Geschlecht des allgemeinen ebenen Schnittes der Fläche $f_r f_s + a f_t f_u = 0$ ist, wo f_r, f_s, f_t, f_u vier linear unabhängige Flächen des Systemes (3) sind und a eine willkürliche Konstante, vermindert um das doppelte Geschlecht des allgemeinen ebenen Schnittes der allgemeinen Fläche des Systemes (3) und um eine Einheit erhöht.

Auf diese Weise wird die Aufgabe der Bestimmung der birationalen Transformationen zwischen zwei Räumen R, R' auf die Konstruktion aller homaloiden Flächensysteme z. B. des Raumes R zurückgeführt.

Dem Schnitt einer Fläche des Systemes (3) mit einer Ebene von R entspricht vermöge der Transformation der Schnitt einer Ebene von R' mit einer Fläche des Systemes (4). Daher haben die ebenen Schnitte der Flächen, aus denen die beiden homaloiden Systeme (3) und (4) bestehen, gleiches Geschlecht, das als[640]) *Geschlecht* der Transformation bezeichnet wird. Aus Beispielen läßt sich erkennen, daß es tatsächlich birationale Transformationen irgendeines beliebigen gegebenen Geschlechts gibt.[641])

74. Hauptelemente. Durch die Formeln (1) in Nr. **73** ist der homologe Punkt X' eines Punktes X von R völlig bestimmt, wenn nicht die Koordinaten des Punktes X alle f_i zu Null werden lassen. Ordnet man den durch X' hindurchgehenden Ebenen von R' die Tangentialebenen in X an die durch X hindurchgehenden korrespondierenden Flächen des Systems (3) zu, so ergibt sich zwischen den Bündeln mit den Mittelpunkten X und X' eine Kollineation, die ausgeartet ist oder nicht, je nachdem X der *Jacobi*schen Fläche des Systems (3) angehört oder nicht. Mit anderen Worten: Durch die Gleichungen (1) ist eine ausgeartete oder nicht ausgeartete Kollineation zwischen den Umgebungen der Punkte X und X'[642]) definiert.

Wie bei den birationalen Transformationen zwischen zwei Ebenen (Nr. **48**) gibt es aber auch bei den birationalen Transformationen zwischen zwei Räumen R, R' Fundamental- oder Ausnahmeelemente, *Hauptelemente.* Es sind dies die Basispunkte und -kurven der beiden in R und R' existierenden homaloiden Systeme.[643]) Da die Formeln (1)

640) Nach *G. Loria,* Rend. Ist. Lomb. (2) 23 (1890), p. 824.

641) Hinweise auf eine Klassifikation der birationalen Transformationen zwischen zwei Räumen bei *Hilda P. Hudson,* „Cremona transf.", p. 382—387.

642) Der Satz gilt auch, wenn das lineare System (3) nicht homaloid, sondern beliebigen Grades $D > 0$ ist, also auch, wenn durch die Gleichungen (1) eine Korrespondenz mit den Indizes D und 1 zwischen R und R' bestimmt wird. S. *Th. Reye,* J. f. Math. 94 (1882), p. 312, wo auf p. 317—318 bemerkt wird, daß die Kollineation zwischen den homologen unendlich kleinen Teilen zweier Räume auch bei noch allgemeineren Korrespondenzen erhalten werden kann. — S. auch *J. Brill,* Quart. J. of math. 27 (1895), p. 356.

643) Das Studium dieser Hauptelemente findet sich in den Anm. 635, 636 und 637 angeführten Arbeiten, vor allem bei *M. Noether,* Math. Ann. 3 (1870), p. 547 und *L. Cremona,* Ann. di mat. (2) 5 (1871—73), p. 131 = Opere 3, p. 298. Vgl. auch *G. Salmon-W. Fiedler,* „Raumgeometrie" 2, p. 551—557; *F. Severi,* „Trattato" 1_1, p. 5—9.

von Nr. **73** für einen derartigen Punkt von R unbestimmt werden, wird es zweckmäßig sein, sich wie in der Ebene (Nr. **48**) vorzustellen, daß ein beweglicher Punkt diesem Punkte unendlich nahe kommt, und die von dem korrespondierenden Punkte angenommenen Grenzlagen aufzusuchen.

Es sei nun A ein s-facher Hauptpunkt des Systems (3), und X ein allgemeiner Punkt von R, dem der Punkt X' entspricht. Wir lassen X dem Punkt A unendlich nahe kommen, betrachten also im System (3) die Flächen, die in A eine bestimmte Gerade g als Tangente haben. Unter der Voraussetzung, daß g von den etwa vorhandenen festen Tangenten in A an die Flächen (3) verschieden ist, bilden die Flächen (3), die g in A berühren, ein Netz, und diesem Netz entspricht in R' ein Ebenenbündel, dessen Mittelpunkt X' der homologe Punkt von X ist, wenn X dem Punkte A auf der Geraden g unendlich nahe kommt.

Wir nehmen zunächst an, daß nicht alle Flächen (3) in A den gleichen Tangentenkegel besitzen. Dann bilden die Tangentenkegel in A an die Flächen (3) ein lineares System Γ, und es können zwei Fälle eintreten.

Es kann erstens vorkommen, daß die durch eine allgemeine Gerade des Bündels mit dem Mittelpunkt A hindurchgehenden Kegel von Γ nicht notwendig durch andere Geraden des Bündels hindurchgehen. In diesem Falle entspricht jedem A unendlich benachbarten Punkte X ein Punkt X', der sich bei Veränderung der Richtung der Geraden, auf der sich X dem Punkte A nähert, verändert; als Ort von X' ergibt sich eine rationale Fläche, deren Ordnung gleich der Anzahl der zwei Kegeln von Γ gemeinsamen veränderlichen Erzeugenden oder, was dasselbe ist, gleich der Anzahl der veränderlichen Zweige ist, mit denen eine Kurve M durch A hindurchgeht. Hat z. B. das System (3) in A keine festen Tangenten, und ist A für die Flächen (3) s-facher Basispunkt, so ist s^2 die Ordnung der Fläche.

Zweitens kann es eintreten, daß alle durch eine allgemeine Gerade des Bündels A hindurchgehenden Kegel von Γ durch weitere Gerade des Bündels notwendig hindurchgehen. Dann ist das System Γ mit einem Büschel zusammengesetzt, und allen A unendlich benachbarten

Man vergleiche hierzu, auch für birationale Transformationen zwischen zwei Räumen einer beliebigen Anzahl von Dimensionen (Nr. 88), *L. Autonne,* Paris C. R. 121 (1895), p. 673, 881, 1129; 122 (1896), p. 1043; Rend. Circ. mat. Palermo 10 (1896), p. 196; Acta math. 21 (1897), p. 249 [Auszug Paris C. R. 124 (1897) p. 139]; Nouv. Ann. de math. (3) 16 (1897), p. 420; *B. Levi,* Atti Acc. Torino 35 (1899), p. 20, wo auch die Fälle ausführlich behandelt werden, bei denen die Hauptelemente höhere Singularitäten darbieten. Vgl. auch *Hilda P. Hudson,* „Cremona transf.", p. 260—286.

Punkten von R auf den Erzeugenden ein und desselben Kegels des Büschels entspricht in R' ein einziger Punkt X'. Der Ort dieser Punkte X' ist eine rationale Kurve, deren Ordnung gleich der Anzahl der veränderlichen Erzeugenden ist, die einem allgemeinen Kegel des Büschels und einem allgemeinen Kegel des Systemes Γ gemeinsam sind.

Nun kann es drittens eintreten, daß alle Flächen (3) in A ein und denselben Tangentenkegel haben. Dann gibt es nur einen einzigen Punkt X', d. h. den A in den verschiedenen Richtungen unendlich benachbarten Punkten entspricht in R' ein einziger Punkt A'.

Im ersten Falle pflegt der Punkt A als *isolierter Hauptpunkt* bezeichnet zu werden, da sein typischer Fall der eines nicht auf Basiskurven des homaloiden Systems gelegenen Basispunktes ist.

Gehen die Kurven M durch einen derartigen nicht auf Hauptkurven gelegenen Hauptpunkt r-mal hindurch und bedeuten diese Durchgänge r' Bedingungen für die Kurven, so entspricht dem Punkte eine rationale Fläche r^{ter} Ordnung, die in der *Jacobi*schen Fläche des Systems (4) $\frac{r'}{r}$-mal auftritt.[644]

Haben z. B. die Flächen (3) in einem einfachen isolierten Hauptpunkt eine Berührung von der Ordnung $r-1$, so wird $r' = (r+1)r$, und die dem Punkte entsprechende Fläche r^{ter} Ordnung ist daher in der *Jacobi*schen Fläche des Systems (4) $(r+1)$-mal inbegriffen.[645]

Ein s-facher Hauptpunkt von R, der keinen Hauptkurven angehört, ist für die *Jacobi*sche Fläche des Systemes (3) von der Vielfachheit $4s-2$.[646]

Die Hauptpunkte vom zweiten Typus heißen auch *Hauptkurvenpunkte*, da ein allgemeiner Punkt einer Hauptkurve diese Beschaffenheit hat. Ist nämlich diese Hauptkurve C für das System (3) s-fach, so setzt sich der Tangentenkegel in einem ihrer Punkte an eine beliebige Fläche (3) aus s Ebenen zusammen, die durch die Tangente an C in diesem Punkte hindurchgehen.

---

644) *L. Cremona,* Ann. di mat. (2) 5 (1871—73), p. 138 = Opere 3, p. 304; zum Teil schon bei *M. Noether,* Gött. Nachr. 1869, p. 301; Math. Ann. 2 (1869), p. 299; 3 (1870), p. 550.

645) Über diese Eigenschaft s. auch *L. Cremona,* Rend. Ist. Lomb. (2) 4 (1871), p. 324 = Opere 3, p. 258: *M. Noether,* Ann. di mat. (2) 5 (1871), p. 177. Vgl. Anm. 654.

646) Für $s=1$ s. *M. Noether,* Math. Ann. 2 (1869), p. 310; für beliebiges s, *M. Noether,* Math. Ann. 3 (1870), p. 551; *L. Cremona* [644]), p. 139 = Opere 3, p. 304—305.

Unter der Voraussetzung, daß alle s Tangentialebenen an die Flächen (3) in den verschiedenen Punkten von C veränderlich sind, ist s die Ordnung der einem allgemeinen Punkte X von C entsprechenden (rationalen) Kurve. Beschreibt X nun C, so beschreibt diese Kurve eine Fläche, die in der *Jacobi*schen Fläche des Systems (4) auftritt. Die Ordnung einer derartigen Fläche ist gleich der Anzahl der veränderlichen Schnitte von C mit den Kurven M, und ihr Kurvengeschlecht gleich dem Geschlecht von C.

Wird aber die Kurve C von den Kurven M nicht in veränderlichen Punkten geschnitten, so entspricht einem beliebigen Punkte dieser Kurve eine feste Kurve C', die für R' eine Hauptkurve ist. Die Beziehung zwischen C und C' ist reziprok, d. h. jedem Punkte von C' entspricht die ganze Kurve C, und C' wird nicht von den Kurven N in veränderlichen Punkten geschnitten.

Eine Hauptkurve von R heißt *erster* oder *zweiter Art*, oder auch *ordentliche* oder *außerordentliche Hauptkurve*, je nachdem der erste oder der zweite Fall gilt, d. h. je nachdem ihren Punkten verschiedene Kurven oder ein und dieselbe Kurve entsprechen.[647])

Eine $s$fache Hauptkurve von R ist für die *Jacobi*sche Fläche des Systems (3) vielfach von der Ordnung $4s - 1$, falls sie ordentlich, von der Ordnung $4s$, falls sie außerordentlich ist.[648])

D. Montesano[649]) bemerkt: Sind C und C' zwei zugeordnete außerordentliche Hauptkurven der Räume R und R' und ist C eine s-fache Hauptkurve der Ordnung ν, sowie C' eine s'-fache Hauptkurve der

647) Die Unterscheidung der Hauptkurven und die Sätze im Texte verdanken wir *L. Cremona*[644]), p. 135 = Opere 3, p. 302; vgl. auch *M. Noether*, Math. Ann. 3 (1870), p. 550. Für den Fall der ordentlichen Hauptkurven s. schon früher *M. Noether*, Gött. Nachr. 1869, p. 301—302; Math. Ann. 2 (1869), p. 300; 3 (1870), p. 550.

Die erste Benennung stammt von *S. Kantor*[638]), p. 1; die zweite von *R. Sturm*, „Geom. Verw." 4, p. 343.

648) *L. Cremona*[644]), p. 136—137 = Opere 3, p. 302—303. Für den Fall der ordentlichen Hauptkurven, für $s = 1$, schon früher bei *M. Noether*, Math. Ann. 2 (1869), p. 310, für beliebiges s daselbst 3 (1870), p. 551.

Allgemeinere Sätze, die das Verhalten der *Jacobi*schen Fläche von vier Flächen in einem gemeinsamen Punkte oder längs einer gemeinsamen Kurve betreffen, bei *G. Loria*, Atti Acc. Torino 26 (1890), Anm. auf p. 283, 290, 296; *K. Doehlemann*, Math. Ann. 41 (1892), p. 566 und besonders *A. Levi*, Giorn. di mat. (2) 3 (1896), p. 215 [Auszug Atti Acc. Torino 31 (1896), p. 502]; *F. Gerbaldi*, Rend. Circ. mat. Palermo 10 (1896), p. 158. Allgemeinere Sätze, auch für einen Überraum, bei *M. Villa*, Mem. Ist. Lomb. (3) 13 (1931), p. 177; Auszug Roma Rend. Acc. Linc. (6) 13 (1931), p. 574.

649) Roma Rend. Acc. Linc. (5) 30^2 (1921), p. 447.

Ordnung ν', so ist

$$s = k\nu', \quad s' = k\nu,$$

wo k eine ganze Zahl $\geqq 1$ ist.[650])

Die Gesamtheit aller Flächen des einen Raumes, die den Hauptpunkten und den Hauptkurven des anderen entsprechen, bildet die *Jacobi*sche Fläche des homaloiden Systems in diesem Raume.

75. Fortsetzung: Grundlegende Formeln. Zwischen der Ordnung n der Flächen des homaloiden Systems (3) in Nr. **73** und den charakteristischen Zahlen der Basispunkte und -kurven dieses Systems bestehen drei Beziehungen, die das Analogon des von *L. Cremona* für die ebenen Transformationen (Nr. **49**) aufgestellten Gleichungssystemes bilden. Unter Beschränkung auf den Fall gewöhnlicher Singularitäten werden die beiden ersten derartigen Beziehungen von *A. Cayley*[651]) angegeben; in der folgenden allgemeineren Form zusammen mit der dritten, von *M. Noether*[652]), der auch einen Weg für die Einführung möglicherweise notwendiger Abänderungen in Sonderfällen angibt.[653])

Das System (3) n^{ter} Ordnung möge eine Basis besitzen, die aus einer gewissen Anzahl von Punkten P_l und einer gewissen Anzahl von ordentlichen (Nr. **74**) Kurven C_i gebildet ist. Jeder Punkt P_l sei

650) *L. Cremona*[644]), p. 135 = Opere 3, p. 302, ist noch der Ansicht, daß notwendigerweise $k = 1$ sein müsse, ebenso auch z. B. *R. Sturm*, „Geom. Verw." 4, p. 342. Daß k tatsächlich größer als 1 sein kann, beweist *D. Montesano* auch unter Anführung von Beispielen; s. Anm. 649, außerdem Roma Rend. Acc. Linc. (5) 27^1 (1918), p. 396, 438; Rend. Acc. Napoli (3) 27 (1921), p. 116, und Anm. 658. Weitere Beispiele bei *A. Tummarello,* Note e Mem. Circ. mat. Catania 1 (1921), p. 289. S. auch *Hilda P. Hudson,* „Cremona transf.", p. 271—274. S. auch, ebenso über die Erweiterung auf die Überräume, *G. Marletta,* Rend. Circ. mat. Palermo 49 (1925), p. 253.

Weiteres über die Hauptkurven bei *L. Godeaux,* Bull. Ac. sc. Belgique (5) 15 (1929), p. 314; *Marian M. Torrey,* Amer. J. of math. 54 (1932), p. 305.

651) S. [635]), p. 167—168, 179—180 = Papers 7, p. 227—228, 238—240.

652) Ann. di mat. (2) 5 (1871), p. 174.

653) *Hilda P. Hudson,* Ann. di mat. (3) 19 (1912), p. 45 studiert den Fall, daß die Tangentenkegel an die Flächen des homaloiden Systems in einem Hauptpunkte einen Teil gemeinsam besitzen, und bestimmt unter der Annahme, daß der Punkt keiner Hauptkurve angehört, wie auch unter der gegenteiligen Annahme, die Anzahl der Bedingungen, die durch die Gegenwart eines derartigen Punktes den Flächen des Systems auferlegt werden (*Postulation* des Hauptpunktes), sowie die Anzahl der Schnitte dreier Flächen des Systems, die von dem Punkte selbst absorbiert werden (*Äquivalenz* des Hauptpunktes). Hierauf beziehen sich die Arbeiten von *Hilda P. Hudson,* Math. Ann. 73 (1912), p. 73; Proc. London math. Soc. (2) 11 (1912), p. 398, die sich auf die Postulation und die Äquivalenz einer Kurve einfacher Berührung oder einer solchen höherer Ordnung für ein Flächensystem beziehen. S. auch *Hilda P. Hudson,* „Cremona transf.", p. 209—259. Vgl. hierüber III C 9 (*K. Rohn* und *L. Berzolari*), Nr. **29**—**33**.

von der Vielfachkeit q_l für die Flächen (3) und der zugehörige Tangentenkegel weder ganz noch zum Teil für alle Flächen (3) fest. Jede Kurve C_i, der Ordnung m_i vom Rang r_i, sei von der Vielfachkeit s_i für jede Fläche (3), und alle s_i Tangentialebenen in ein und demselben Punkte von C_i an ein und dieselbe Fläche mögen sich bei Veränderung dieser Fläche in dem System (3) verändern. Schließlich schneide jede Kurve C_i jede Kurve C_j in k_{ij} Punkten ($i \leqq j$) (habe also speziell k_{ii} wirkliche Doppelpunkte) und gehe durch jeden Punkt P_l mit t_{il} Zweigen hindurch; außerdem mögen die Flächen (3) eine gewisse Anzahl gemeinsamer einfacher Punkte haben, wo sie miteinander je eine Berührung der Ordnung $\sigma - 1$ eingehen.

Beachten wir nun, daß die Flächen (3) ein homaloides System bilden, daß sie also infolge der ihnen durch die Hauptpunkte und -kurven auferlegten Bedingungen ∞^3 sind, drei von ihnen sich in nur einem veränderlichen Punkte schneiden und daß sie das arithmetische Geschlecht Null haben, so erhalten wir die folgenden drei Formeln, die als *Gleichungen* der *Äquivalenz*, der *Postulation* bzw. des *Geschlechts* bezeichnet werden:

$$\text{(I)}\quad n^3 - 1 = \sum_i s_i^2[(3n-2s_i)m_i - r_i s_i] - \sum_{i,j} s_i^2(3s_j - s_i)k_{ij} + \sum_l q_l^3 - \sum_{i,l} s_i^2(3q_l - 2s_i)t_{il} + \sum \sigma^2,$$

$$\begin{aligned}\text{(II)}\quad &\tfrac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3) - 4\\ &= \sum_i \tfrac{1}{6}s_i(s_i+1)[(3n-2s_i+5)m_i - \tfrac{1}{2}(2s_i+1)r_i]\\ &- \sum_{i,j}\tfrac{1}{6}s_i(s_i+1)(3s_j - s_i + 1)k_{ij} + \sum_l \tfrac{1}{6}q_l(q_l+1)(q_l+2)\\ &- \sum_{i,l}\tfrac{1}{6}s_i(s_i+1)(3q_l - 2s_i + 2)t_{il} + \sum \tfrac{1}{2}\sigma(\sigma+1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(III)}\quad &\tfrac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3)\\ &= \sum_i \tfrac{1}{6}s_i(s_i-1)[(3n-2s_i-5)m_i - \tfrac{1}{2}(2s_i-1)r_i]\\ &- \sum_{i,j}\tfrac{1}{6}s_i(s_i-1)(3s_j - s_i - 1)k_{ij} + \sum_l \tfrac{1}{6}q_l(q_l-1)(q_l-2)\\ &- \sum_{i,l}\tfrac{1}{6}s_i(s_i-1)(3q_l - 2s_i - 2)t_{il},\end{aligned}$$

wobei für die Summen $\sum\limits_{i,j}$ immer $i \leqq j$, für die Summen $\sum\limits_{i,l}$ immer $i \leqq l$ zu nehmen ist und die ersten sich auf alle Schnittpunkte je zweier Hauptkurven mit Ausnahme derer, die in die Punkte P_l fallen, erstrecken, sowie auf alle Doppelpunkte jeder Kurve C_i, die zweiten zunächst auf alle Zweige der durch einen Punkt P_l hindurchgehenden Kurven C_i, dann auf alle verschiedenen Punkte P_l zu erstrecken sind.

Durch lineare Kombinationen der drei vorhergehenden Gleichungen leiten sich die folgenden ab:

$$\text{(IV)}\quad \tfrac{1}{6}(4n-1)(4n-2)(4n-3)-1$$
$$=\sum_i \tfrac{1}{6}\,4s_i(4s_i-1)[(12n-8s_i-5)m_i-\tfrac{1}{2}(8s_i-1)r_i]$$
$$-\sum_{i,j}\tfrac{1}{6}\,4s_i(4s_i-1)(12s_j-4s_i-1)k_{ij}$$
$$+\sum_l \tfrac{1}{6}\,4q_l(4q_l-1)(4q_l-2)$$
$$-\sum_{i,l}\tfrac{1}{6}\,4s_i(4s_i-1)(12q_l-8s_i-2)t_{il}+\sum\sigma(7\sigma-3),$$

$$\text{(V)}\quad 2(n^2-1)=\sum_i s_i[(n+s_i)m_i-\tfrac{1}{2}r_is_i]-\sum_{i,j}s_is_jk_{ij}+\sum_l q_l^2$$
$$-\sum_{i,l}s_iq_lt_{il}+\sum\tfrac{1}{2}\sigma(\sigma+1),$$

$$\text{(VI)}\quad 11(n-1)=\sum_i s_i(5m_i-\tfrac{1}{2}r_i)-\sum_{i,j}s_ik_{ij}+\sum_l 2q_l-2\sum_{i,l}s_it_{il}$$
$$+\sum\sigma(\sigma+3).$$

Bezeichnen wir mit den nämlichen, nur mit Strichen versehenen Buchstaben, die auf den anderen Raum bezüglichen analogen Zahlen, so gilt weiterhin offensichtlich, daß

$$\text{(VII)}\qquad n'=n^2-\sum_i s_i^2m_i,\quad n=n'^2-\sum_i s_i'^2m_i',$$

und da die ebenen Schnitte der Flächen der zwei homaloiden Systeme (3) und (4) ein und dasselbe Geschlecht haben, so hat man außerdem:

$$\text{(VIII)}\quad (n-1)(n-2)-\sum_i s_i(s_i-1)m_i=(n'-1)(n'-2)$$
$$-\sum_i s_i'(s_i'-1)m_i'.$$

Hieraus und aus den Gleichungen (VII) leitet sich die einfache Formel ab

$$\text{(IX)}\qquad 4(n'-n)=\sum_i s_i'm_i'-\sum_i s_im_i.$$

Die Gleichung (IV) besagt, daß die *Jacobi*sche Fläche des Systems (3) durch die Punkte P_l und die Kurven C_i die für diese Fläche $(4q_l-2)$- bzw. $(4s_i-1)$-fach sind, vollständig bestimmt ist.

Mittels der ersten Gleichung (VII) kann die Gleichung (V) wie folgt geschrieben werden:

$$\text{(X)}\quad 4n'-4=\sum_i 2s_i[(n-s_i)m_i-\tfrac{1}{2}r_is_i]-\sum_{i,j}2s_is_jk_{ij}+\sum_l 2q_l^2$$
$$-\sum_{i,l}2s_iq_lt_{il}+\sum\sigma(\sigma+1).$$

Nun schneidet eine Kurve M eine Kurve C_i in

$$Q_i = 2s_i[(n - s_i)m_i - \tfrac{1}{2}r_i s_i] - \sum_h s_h^2 k_{hi} - \sum_j (2s_i s_j - s_i^2) k_{ij}$$
$$- \sum_l (2s_i q_l - 2s_i^2) t_{il} \qquad (h < i,\ i \leqq j)$$

veränderlichen Punkten (wobei sich die Summe $\sum\limits_j$ für einen wirklichen Doppelpunkt von C_i auf alle beide Zweige des Knotens erstrecken muß), geht mit

$$R_l = q_l^2 - \sum_i s_i^2 t_{il}$$

Zweigen durch P_l und hat in einem Berührungspunkte der Ordnung $\sigma - 1$ der Flächen (3) einen σ-fachen Punkt, der M selbst $\sigma(\sigma + 1)$ Bedingungen auferlegt. Daher drückt die rechte Seite der Gleichung (X) die Anzahl der Bedingungen aus, denen die Kurven M durch die erwähnten Schnittpunkte mit den Kurven C_i und die genannten Durchgänge durch die Punkte P_l unterworfen sind.

Es zeigt sich noch, daß Q_i die Ordnung der einer Kurve C_i und R_l die Ordnung der einem Punkte P_l entsprechenden Fläche ist [welch letztere Fläche in der *Jacobi*schen Fläche des Systems (4) zweimal enthalten ist].[654])

Zu weiteren Beziehungen zwischen den genannten Zahlen gelangt *M. Pannelli* durch die Betrachtung der *Jacobi*schen Fläche des Systems (3), oder der *Jacobi*schen Kurve eines in (3) enthaltenen Netzes oder der *Jacobi*schen Gruppe (d. h. der Gruppe der Doppelpunkte) eines in (3) enthaltenen Büschels[655]), unter der Annahme, daß die homaloiden Systeme (3) und (4) keine einfachen Berührungshauptpunkte haben. Besonders beachtenswert sind die beiden nach der ersten und dritten Methode erhaltenen Formeln. Für den Raum R möge π die Anzahl der Hauptpunkte, γ die der Hauptkurven, μ die Summe der Ordnungen dieser Kurven, λ die Gesamtanzahl der Zweige der durch die Hauptpunkte hindurchgehenden Hauptkurven und ϱ_i das Geschlecht einer Kurve C_i bezeichnen, so daß

$$\mu = \sum_i m_i, \quad \lambda = \sum_{i,l} t_{il}, \quad \varrho_i = \tfrac{1}{2} r_i - m_i + 1.$$

Setzen wir außerdem

$$\varrho = \sum_i \varrho_i + \sum_{i,j} k_{ij} - \gamma + 1.$$

654) Das letzte Glied der Gleichung (X) bestätigt, daß die einem Berührungspunkte der Ordnung $\sigma - 1$ der Flächen (3) entsprechende Fläche der Ordnung σ in der genannten *Jacobi*schen Fläche $(\sigma + 1)$-mal enthalten ist (Nr. **74**).

655) Roma Rend. Acc. Linc. (5) 19^1 (1910), p. 449, bzw. Rend. Ist. Lomb. (2) 47 (1912), p. 1041 und Roma Rend. Acc. Linc. (5) 20^1 (1911), p. 404.

Bezeichnen wir mit den gleichen mit Strichen versehenen Buchstaben die analogen Zahlen für den Raum R', so lauten jene Formeln[656])

$$\text{(XI)} \qquad 4\pi + 4\mu - \varrho - 2\lambda = 4\pi' + 4\mu' - \varrho' - 2\lambda',$$

$$\text{(XII)} \qquad \pi + \gamma - \sum_i \varrho_i = \pi' + \gamma' - \sum_i \varrho_i'.$$

Wir bemerken noch, daß unter den vorhergehenden Annahmen für zwei überlagerte Räume R, R' aus dem *Chasles*schen Korrespondenzprinzip (Nr. **6**) folgt, daß $n + n' + 2$ Fixpunkte existieren.[657])

Nehmen wir insbesondere an, daß nicht alle Flächen der beiden Systeme (3) und (4) in irgendeinem Punkte einer Hauptkurve ein und dieselbe Ebene berühren oder in irgendeinem der (als voneinander verschieden vorausgesetzten) Hauptpunkte ein und dieselbe Ebene oder ein und denselben Kegel des Bündels berühren, dessen Mittelpunkt in diesem Punkte liegt. Die so beschaffenen Transformationen werden von *D. Montesano*[658]) studiert, der sie als *regulär* bezeichnet.

Man kann daher sagen, daß eine reguläre Korrespondenz in keinem der Räume R, R', zwischen denen sie stattfindet, Berührungssonderheiten aufweist.

D. Montesano konstruiert in jedem von den Räumen R, R' zwei *charakteristische Tafeln*, und zwar die eine aus Flächen, die andere aus Kurven der Korrespondenz, und beweist, daß die Tafeln A, B des Raumes R sich von den Tafeln B', A' des Raumes R' ableiten, wenn man die Reihen in Spalten verwandelt. Außerdem ist die Gesamtzahl der Hauptpunkte und -kurven in beiden Räumen bei der Korrespondenz die gleiche.

Der absolute Wert der Determinanten, deren Matrizen die charakteristischen Tafeln in einem beliebigen der beiden Räume sind, ist gleich der Einheit; multiplizieren wir in einem der beiden Räume in jeder Determinante die Elemente der ersten Spalte (oder der ersten Reihe) mit $i = \sqrt{-1}$ und bilden das Produkt der sich hieraus er-

---

656) Über die Gleichung (XII) s. auch *M. Pannelli,* Giorn. di mat. (3) 8 (1917), p. 111–113.

Eine Erweiterung der Gleichung (XI) auf eine birationale Korrespondenz zwischen zwei beliebigen algebraischen dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten bei *M. Pannelli,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 15^1 (1906), p. 619; eine Erweiterung der Gleichung (XII) daselbst (5) 23^2 (1914), p. 561.

Über alle vorhergehenden Formeln s. *Hilda P. Hudson,* Proc. London math. Soc. (2) 26 (1926), p. 453.

657) S. auch *M. Pannelli,* Giorn. di mat. (1) 28 (1888), p. 250; außerdem Nr. **7** und **88**, und, hinsichtlich der zyklischen Gruppen, Anm. 706, 805 und 894.

658) Atti Acc. Napoli (2) 17 (1926), Nr. 8; Auszug Rend. Acc. Napoli (3) 32 (1926), p. 93.

gebenden Determinanten aus Reihen (oder Spalten), so erhalten wir als Produkt die Determinante

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & & 1 \end{vmatrix}.$$

Hieraus folgt, daß jedes Element der einen Determinante gleich dem absoluten Wert des algebraischen Komplements des homologen Elementes in der anderen Determinante ist.[659])

Dadurch erhellt die zwischen den hier behandelten und den ebenen birationalen Korrespondenzen bestehende Analogie und so lassen sich neue Beziehungen feststellen, die zwischen den charakteristischen Zahlen jeder Transformation von diesem Typus bestehen.

Aus diesen Beziehungen und der Gleichung (XII) folgt, daß die Summe der Geschlechter der Hauptkurven in beiden Räumen die gleiche ist.[660])

76. Bestimmung der birationalen Transformationen zwischen zwei Räumen. Wie wir in Nr. **73** gesehen haben, reduziert sich die Bestimmung der birationalen Transformationen zwischen zwei Räumen R, R' auf die Konstruktion aller homaloiden Flächensysteme, z. B. des Raumes R.

Zur Lösung dieser Aufgabe könnten wir der Analogie mit dem Falle der ebenen Transformationen folgen und auf die arithmetischen charakteristischen, in Nr. **75** bezeichneten, Beziehungen zwischen den auf ein homaloides Flächensystem bezüglichen Zahlen zurückgehen. Wir würden jedoch großen Schwierigkeiten begegnen, wenn es sich um höhere Basissingularitäten handelt.

---

659) *D. Montesano,* Atti Acc. Napoli (2) 18 (1929), Nr. 2, p. 11—12.

660) All diese Eigenschaften sind von *D. Montesano* in Vorlesungen an der Universität Neapel von 1919 ab vorgetragen. Sie sind auch von *A. Tummarello,* Atti Soc. ital. per il progresso delle scienze 13, Napoli 1924 (Roma 1925), p. 326 ausgesprochen, und von *Hilda P. Hudson,* Proc. London math. Soc (2) 26 (1926), p. 459 [vgl. J. London math. Soc. 3 (1928), p. 3]; „Cremona transf.", p. 277 und 225 bewiesen.

Andere Sätze über diese Korrespondenzen, wenn man sie frei von Hauptkurven zweiter Art annimmt, hat *A. Tummarello,* Giorn. di mat. (3) 21 (1929), p. 92 angegeben.

Margherita (Piazzolla-)Beloch, Rend. Sem. mat. Univ. di Padova 1 (1930), p. 184 bestimmt die von vielfachen Punkten freien Kurven, die Hauptkurven erster Art für ein reguläres homaloides System sein können, das eine einzige Hauptkurve (und eventuelle Hauptpunkte) hat; sie betrachtet die regulären birationalen Transformationen, die in jedem der beiden Räume eine einzige Hauptkurve (und eventuelle Hauptpunkte) besitzen.

L. Cremona[661]) behandelt diese Aufgabe auf andere Art. Er bestimmt alle homaloiden Systeme (falls sie existieren), denen eine gegebene rationale Fläche angehört.

Ist ein homaloides System gegeben, so bemerken wir zunächst, daß die auf einer seiner Flächen f durch die anderen Flächen des Systems bestimmten veränderlichen Kurven ein derartiges lineares ∞^2-System bilden, daß sich zwei von diesen Kurven in einem veränderlichen Punkte schneiden. Bilden wir also f auf eine Ebene ab, so ist das Bild des genannten linearen Kurvensystems ein homaloides Netz. Die Methode von *L. Cremona* besteht in der Umkehrung dieser Betrachtung. Es sei f eine gegebene rationale Fläche und Σ das aus all denjenigen Flächen zusammengesetzte lineare System, die gleiche Ordnung und die gleichen vielfachen Punkte und Kurven wie f haben, so daß also jedes homaloide System, in dem möglicherweise f enthalten ist, auch in Σ enthalten ist. Nun bilden wir f auf eine Ebene π ab und bezeichnen mit Ω die Bilder der auf f von den Flächen von Σ ausgeschnittenen Kurven. Diese Kurven Ω bilden ein lineares System, dessen Dimension größer als die Einheit sein muß, wenn die Aufgabe möglich sein soll. Unter diesen Annahmen suchen wir alle homaloiden Netze (falls sie existieren) von Kurven K auf, die völlig oder teilweise in dem System der Kurven Ω enthalten sind, d. h. so beschaffene Netze, daß jede der Kurven K, möglicherweise zusammen mit einem festen System L ein- oder mehreremal gezählter Kurven, eine Kurve Ω bildet. Da die Kurven K zusammen mit L das Bild des Schnittes von f mit einer anderen Fläche von Σ darstellen, entspricht jedem der genannten homaloidischen Netze ein homaloides Flächensystem, in dem f einbegriffen ist, und umgekehrt. Verändern wir auf alle möglichen Weisen den Ort L und das Netz der Kurven K, so erhalten wir alle Transformationen, bei denen die Fläche f benutzt werden kann.

Die Ordnung der inversen Transformation, d. h. die Ordnung des homaloiden Systems des anderen Raumes, ist nichts anders, als die Ordnung der Kurven von f, deren Bilder auf π die Kurven K sind.

Hauptelemente im ersten Raume sind:

1. die vielfachen Punkte und Kurven von f;

---

661) Ein Hinweis in Gött. Nachr. 1871, p. 148; ausführlich in Math. Ann. 4 (1871), p. 225; Rend. Ist. Lomb. (2) 4 (1871), p. 269, 315; Ann. di mat. (2) 5 (1871—73), p. 139 = Opere 3, p. 271, 241, 251, 305. Vgl. auch *G. Salmon* und *W. Fiedler*, „Raumgeometrie" 2, p. 557 ff.; *K. Doehlemann*, „Geom. Transf." 2, p. 319—321; *R. Sturm*, „Geom. Verw." 4, p. 347 ff.; *Hilda P. Hudson*, „Cremona transf.", p. 167—171.

2. die in π durch den Ort L dargestellten Elemente von f; die Kurven von L erzeugen Hauptpunkte oder -kurven für das homaloide System, je nachdem sie bei der Abbildung von f auf π Hauptkurven sind oder nicht; tritt im ersten Falle eine von ihnen r-mal in L auf, so entspricht ihr ein Punkt, in dem alle Flächen des homaloidischen Systems eine Berührung $(r-1)^{\text{ter}}$ Ordnung haben;

3. die Punkte von f, die bei der Abbildung von f auf π den von den Hauptpunkten von π verschiedenen Basispunkten des Netzes K entsprechen;

4. die Kurven von f, die bei der Abbildung von f auf π denjenigen Hauptpunkten von π entsprechen, in denen die Multiplizität der aus L und einer allgemeinen Kurve K zusammengesetzten Kurve höher ist als die Multiplizität einer allgemeinen Kurve Ω.

Zur Charakterisierung des homaloiden Systems des zweiten Raumes R' genügt (Nr. 74) die Bestimmung der *Jacobi*schen Fläche des homaloiden Systemes des ersten Raumes R. Um die Teile dieser *Jacobi*schen Fläche zu bestimmen, die Hauptkurven von R' entsprechen, kann man wieder zur Abbildung von f auf π zurückkehren. Entsprechen in dieser Abbildung den Hauptpunkten von π, die keine Basispunkte des Netzes der Kurven K sind, und den Teilen der *Jacobi*schen Kurve des Netzes, die für die Abbildung keine Hauptkurven sind, auf f l_1 Gerade, l_2 Kegelschnitte, . . ., l_r (rationale) Kurven r^{ter} Ordnung, so sind die Hauptkurven in R' eine einfache Kurve der Ordnung l_1, eine Doppelkurve der Ordnung l_2, . . ., eine r-fache Kurve der Ordnung l_r.

Nach der angegebenen Methode konstruiert *L. Cremona* alle birationalen Transformationen, die durch eine Fläche 2. Ordnung erzeugt werden, also alle Transformationen der Ordnung (2, 2), (2, 3) und (2, 4), und verschiedene Transformationen, die sich von einer allgemeinen oder mit Doppelpunkten ausgestatteten Fläche 3. Ordnung herleiten.[662]

Margherita Beloch[663] beweist zwei (ihr von *G. Castelnuovo* mitgeteilte) Sätze, die geeignete Kriterien für die Entscheidung über Existenz oder Nichtexistenz gewisser homaloider Systeme liefern.

Nach dem ersten Satz fehlen bei einem homaloiden System n^{ter} Ordnung die adjungierten Flächen aller Indizes $h\,(=1, 2, \ldots)$, d. h. die Flächen der Ordnung $n-4h$, die mit der Multiplizität $i-h$

662) S. die in Anm. 661 angeführten Arbeiten. In Ann. di mat. werden die Bestimmungen, um die es sich hier handelt, sowohl auf geometrischem, als auch auf algebraischem Wege durchgeführt und die direkten und umgekehrten Formeln der verschiedenen Transformationen angegeben.

663) Ann. di mat. (3) 16 (1909), p. 27.

(oder Null) durch jede ordentliche i-fache Hauptkurve und der Multiplizität $l - 2h$ (oder Null) durch jeden ordentlichen l-fachen Hauptpunkt des Systemes hindurchgehen.

Der zweite, aus dem vorhergehenden folgende Satz lautet:

Setzt man $n = 4k + r$ $(r = 0, 1, 2, 3)$, so besitzt das homaloide System sicherlich

a) entweder eine Hauptkurve von der Multiplizität $\geqq k + 1$, die die Ordnung $\leqq 15$ hat, oder auch

für $r = 0$, b) einen Hauptpunkt mit der Multiplizität $\geqq 2k + 1$;

für $r = 1$, b) einen Hauptpunkt mit der Multiplizität $\geqq 2k + 2$, oder auch b′) vier Hauptpunkte mit der Multiplizität $2k + 1$;

für $r = 2$, b) einen Hauptpunkt mit der Multiplizität $\geqq 2k + 3$, oder auch b′) Hauptpunkte mit der Multiplizität $2k + 1$ und $2k + 2$ in geeigneter Anzahl;

für $r = 3$, b) einen Hauptpunkt mit der Multiplizität $\geqq 2k + 4$, oder auch b′) $2k + 1$, $2k + 2$, $2k + 3$-fache Hauptpunkte in angemessener Anzahl.[664])

77. Transformationen 2. Ordnung. Die homaloiden Systeme, denen eine gegebene Fläche 2. Ordnung angehören kann, sind folgende drei Typen:

1. die Flächen 2. Ordnung, die durch einen Kegelschnitt C und einen Punkt O hindurchgehen;
2. die Flächen 2. Ordnung, die durch eine Gerade g und drei Punkte O_1, O_2, O_3 hindurchgehen, deren Ebene nicht durch g geht;

664) Bezüglich der homaloiden Systeme vom Typus a), betrachtet *Margherita Beloch* insbesondere diejenigen, bei denen die Hauptkurve Γ größter Multiplizität eben ist oder auf einer Fläche 2. oder 3. Ordnung liegt (so daß Γ die Ordnung $\leqq 3$, bzw. 6 oder 11 hat), und bestimmt in jedem Falle Grenzen für die Multiplizitäten anderer Hauptkurven und anderer Hauptpunkte.

Für die homaloiden Systeme vom Typus b) findet man, daß sie entweder vom Hauptpunkt P maximaler Multiplizität ausgehende Hauptgeraden besitzen, oder daß ihre Hauptkurve maximaler Multiplizität eine Kurve auf einem Kegel mit der Spitze P ist, dessen Erzeugende von ihr außer in P nur noch in einem Punkte geschnitten werden.

Betrachten wir speziell die von Hauptkurven freien homaloiden Systeme des Typus b), so ergibt sich, daß es keine homaloiden Systeme mit nur Hauptpunkten ohne Berührungen gibt und jedes homaloide System mit Hauptpunkten allein (und Berührungen) aus Monoiden zusammengesetzt ist. Über diese letzten Systeme s. Nr. 82.

3. die Flächen 2. Ordnung, die durch vier Punkte O, O_1, O_2, O_3 hindurchgehen und in einem von ihnen, in O, eine feste Tangentialebene ω haben.[665])

Im Falle 1 ist die inverse Transformation ebenfalls 2. Ordnung und das homaloide System von R' ebenfalls aus Flächen 2. Ordnung gebildet, die durch einen Kegelschnitt C' und einen Punkt O' hindurchgehen. Die *Jacobi*sche Fläche des homaloiden Systems im ersten Raum z. B. besteht aus dem Kegel, der C aus O projiziert, und der zweimal gezählten Ebene ω.

Im Falle 2 besteht die *Jacobi*sche Fläche des homaloiden Systems

---

665) Die quadratischen Transformationen der drei Typen und ihre Sonderfälle werden geometrisch und algebraisch von *L. Cremona,* Rend. Ist. Lomb. (2) 4 (1871), p. 272—274 = Opere 3, p. 244—245, und besonders Ann. di mat. (2) 5 (1871—73), p. 141—155 = Opere 3, p. 306—319 behandelt; der Fall 3) wird auch in Gött. Nachr. 1871, p. 147 = Math. Ann. 4 (1871), p. 224 = Opere 3, p. 271 erwähnt und in Mem. Acc. Bologna (3) 1 (1871), p. 365 = Opere 3, p. 277 ausführlich studiert. Von allen diesen Transformationen machte *L. Cremona* Anwendung auf die ebene Abbildung zahlreicher rationaler Flächen der Ordnungen 4, 5, . . .

Die allgemeinen Fälle 1 und 2 behandeln, auch mit Angabe der Gleichungen, *A. Cayley,* Proc. London math. Soc. (1) 3 (1870), p. 170—174 = Papers 7, p. 229—233 und *M. Noether,* Math. Ann. 3 (1870), p. 557—564; Fälle 2 und 3 auch *G. Darboux,* Bull. Sciences math. (1) 2 (1871), p. 157; den Fall 2 mit verschiedenen Anwendungen *T. L. Wren*, Proc. London math. Soc. (2) 15 (1916), p. 144; den Fall 3 mit Anwendungen *Matilde Medugno,* Diss. Napoli 1910.

Über den Fall 1 s. auch *M. Mikan,* Prag České Ak. Rozpravy 37 (1928), Nr. 41.

Die allgemeine Transformation 1 findet sich aber zuerst als Sonderfall der in Nr. 77 erwähnten (3, 3)-Transformation bei *I. L. Magnus,* „Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie des Raumes", Berlin 1837, p. 412—417. In der Folgezeit ist sie von *G. V. Schiaparelli*[430]), p. 276 ff., 296 ff., in einem Sonderfalle von *C. F. Geiser*[597]) und J. f. Math. 70 (1869), p. 252 studiert.

Die Transformation vom Typus 2 wird von *M. Pannelli,* Giorn. di mat. (3) 8 (1917), p. 83 für das Studium der *Jacobi*schen Kurve eines Netzes von Flächen, von *O. Chisini,* Mem. Acc. Bologna (7) 8 (1920), p. 3 für die Auflösung der Singularitäten einer algebraischen Fläche (vgl. Nr. **106**) verwandt.

Die singulären quadratischen Transformationen studiert *G. Rieß*[594]), p. 49—63.

Über die quadratischen Transformationen s. noch *G. Salmon* und *W. Fiedler,* „Raumgeometrie" 2, p. 558—566; *F. Aschieri*[565]), p. 347—354, 383—391, 437—443; *K. Doehlemann,* „Geom. Transf." 2, p. 180—192; *R. Sturm,* „Geom. Verw." 4, p. 347—360; *F. Enriques* und *O. Chisini,* „Lezioni" 2, p. 551—562; *Hilda P. Hudson,* „Cremona transf.", p. 182—208, 287—294.

Metrisch spezielle quadratische Transformationen betrachten *L. Aoust,* Paris C. R. 56 (1863), p. 906; *M. d'Ocagne,* Mém. Soc. sc. Liège (2) 16 (1890), Nr. 7; Bull. Soc. math. de France 25 (1897), p. 8; *J. Neuberg,* Mém. Soc. sc. Liège (2) 16 (1890), Nr. 8; *G. Gallucci,* Note ed esercitaz. Circ. mat. Catania 6 (1931), p. 19.

von R aus der Ebene $O_1 O_2 O_3$ und den drei Ebenen $O_1 g$, $O_2 g$, $O_3 g$. Im Raume R' existieren daher eine doppelte Hauptgerade d' und drei einfache Hauptgerade g_1', g_2', g_3'. Die inverse Transformation ist 3. Ordnung und das homaloide System von R' aus kubischen Regelflächen gebildet, für die d' die doppelte Leitgerade und g_1', g_2', g_3' Erzeugende sind. Die *Jacobi*sche Fläche dieses Systems ist aus den je zweimal gezählten Ebenen $d'g_1'$, $d'g_2'$, $d'g_3'$ und der durch g_1', g_2', g_3' hindurchgehenden Fläche 2. Ordnung zusammengesetzt.

Im Falle 3 setzt sich die *Jacobi*sche Fläche des homaloiden Systems von R aus den Ebenen $O O_2 O_3$, $O O_3 O_1$, $O O_1 O_2$ und ω zusammen. Im Raume R' existieren daher drei doppelte Hauptgerade d_1', d_2', d_3' und ein einfacher Hauptkegelschnitt C', und die drei Doppelgeraden gehen außerdem durch ein und denselben Punkt Q' hindurch und schneiden C'. Die inverse Transformation ist 4. Ordnung und das homaloide System von R' aus *Steiner*schen Flächen gebildet, für die Q' dreifacher Punkt, C' ein einfacher Kegelschnitt ist und die d_1', d_2', d_3' Doppelgeraden sind. Die *Jacobi*sche Fläche dieses Systemes ist aus den zweimal gezählten Ebenen $d_2'd_3'$, $d_3'd_1'$, $d_1'd_2'$ und dem dreimal gezählten Kegel zusammengesetzt, der C' aus Q' projiziert.

Sonderfälle vom Typus 1 ergeben sich, wenn man annimmt, daß C in zwei voneinander verschiedene oder nicht verschiedene Geraden zerfällt oder O zu C gehört[666]); die gleichen Besonderheiten bieten sich auch im zweiten Raume dar. Es entstehen auf diese Weise, z. B. in R, die folgenden homaloiden Systeme:

1 a) Flächen 2. Ordnung, die durch einen Punkt O und zwei sich in einem Punkte A schneidende Gerade g_1, g_2 hindurchgehen;

1 b) Flächen 2. Ordnung, die durch einen Kegelschnitt C hindurchgehen und in einem Punkte O von C eine feste Tangentialebene haben;

1 c) Flächen 2. Ordnung, die durch zwei sich in einem Punkte A schneidende Gerade g_1, g_2 hindurchgehen und in einem Punkte O auf g_1 eine feste Tangentialebene haben;

666) Die spezielle Transformation, deren Hauptpunkt auf dem Hauptkegelschnitt liegt, ist zuerst von *L. Cremona*, Rend. Ist. Lomb. (2) 4 (1871), p. 140, 159; Math. Ann. 4 (1871), p. 214; Gött. Nachr. 1871, p. 130—131 = Opere 3, p. 227, 232, 261 betrachtet, unter Anwendung auf das Studium der Flächen 4. Ordnung mit Doppelkegelschnitt; dann auch von demselben Autor in Coll. math. in mem. D. Chelini, Milano 1881, p. 417 = Opere 3, p. 447 zum Studium einer Fläche 4. Ordnung mit einem Selbstberührungspunkte verwandt, ferner von *D. Montesano*, Rend. Acc. Napoli (3) 6 (1900), p. 158 zur Bestimmung verschiedener, von vielfachen Kurven freier rationaler Flächen 4. und 5. Ordnung (vgl. Anm. 994); endlich von *C. Segre*, Ann. di mat. (3) 6 (1901), Anm. auf p. 267. S. auch *Hilda P. Hudson*, „Cremona transf.", p. 194—198. S. noch Nr. 78 und Anm. 682.

1 d) Flächen 2. Ordnung, die durch zwei sich in einem Punkte O schneidende Gerade g_1, g_2 hindurchgehen und in O eine Berührung 2. Ordnung haben[667]);

1 e) Kegel 2. Ordnung, die durch einen Punkt O hindurchgehen und eine feste Ebene längs einer festen, nicht durch O hindurchgehenden Gerade g berühren (vgl. noch die Anm. 750).

Im Falle 2 ergeben sich Sonderfälle, wenn man annimmt, daß die drei Punkte O_1, O_2, O_3 alle oder zum Teile einander oder der Geraden g unendlich benachbart sind; im Falle 3, wenn man annimmt, daß die vier Punkte alle oder zum Teile einander unendlich benachbart sind.

Es ist leicht, die näheren Umstände für die verschiedenen Fälle zu erkennen.

So entsprechen im Falle 1 durch die Transformation den O unendlich benachbarten Punkten kollinear die Punkte der Ebene ω' von C' und daher den Geraden durch O die Geraden durch O', und die auf diese Weise durch die Transformation zwischen den beiden Bündeln O, O' bestimmte Korrespondenz ist auch eine Kollineation. Sind g und g' in dieser Kollineation zwei allgemeine einander entsprechende Gerade, so ist die zwischen ihren Punkten auftretende Korrespondenz eine nicht ausgeartete Projektivität, bei der dem Punkte O der Schnittpunkt von g' mit der Ebene ω' und dem Schnittpunkte von g mit der Ebene ω der Punkt O' entspricht. Ist aber g eine Erzeugende des Kegels Γ, der C aus O projiziert, und also g' eine Erzeugende des Kegels Γ', der C' aus O' projiziert, so ist die Korrespondenz zwischen den Punkten von g und g' eine ausgeartete Projektivität, wobei dem Schnittpunkt von g mit C jeder Punkt von g' und jedem Punkte von g der Schnittpunkt von g' mit C' entspricht.

Einer Ebene π durch O entspricht eine Ebene π' durch O', und diese beiden Ebenen sind durch eine quadratische Transformation aufeinander bezogen, deren Hauptpunkte in R, z. B., der Punkt O und die Schnittpunkte von π mit C sind.

Es seien A und A' die Schnittpunkte von C und C' mit zwei entsprechenden Erzeugenden g und g' der Kegel Γ, Γ', so daß dem Punkte A alle Punkte der Geraden $O'A'$ entsprechen. Den A in den verschiedenen Richtungen unendlich benachbarten Punkten, die in einer durch die Tangente t an C in A hindurchgehenden Ebene liegen, entspricht ein einziger Punkt von $O'A'$, und drehen wir nun diese Ebene um t herum, so verändert sich der homologe Punkt auf $O'A'$

667) Der Fall 1 d) wird von *L. Godeaux,* Mathesis 41 (1927), p. 147 betrachtet, unter Anwendung auf die kubischen Flächen.

und beschreibt eine zu dem Büschel mit der Achse t projektive Punktreihe; der Ebene ω entspricht O' und der Ebene Ot der Punkt A'. Den Geraden durch A entsprechen die $O'A'$ und C' treffenden Geraden.

Bezeichnen wir im Falle 1 a) mit g_1', g_2' und O' die Hauptelemente des Raumes R' und mit A' den g_1', g_2' gemeinsamen Punkt, so entsprechen einem Punkte von g_1 oder g_2 alle Punkte einer Geraden, die z. B. einen Punkt von g_1' oder g_2' aus O' projiziert; dann tritt zwischen die Punkte von g_1 und g_1' wie zwischen die Punkte von g_2 und g_2' eine Projektivität, wobei dem Punkte A der Punkt A' in beiden Projektivitäten entspricht. Diese Punkte A und A' sind Hauptpunkte vom dritten Typus (Nr. 74) und die zwischen den beiden Bündeln A und A' bestehende Korrespondenz ist quadratisch, wobei AO, g_1, g_2 und $A'O'$, g_1', g_2' homologe Hauptgerade sind.

Fallen g_1 und g_2 in eine einzige Gerade g und damit auch g_1' und g_2' in eine einzige Gerade g' zusammen [so daß der Fall 1 e) eintritt], so werden die Geraden g und g' projektiv und A, A' bezeichnen zwei beliebige korrespondierende Punkte dieser Geraden. Die Bündel A und A' sind wiederum durch eine quadratische Transformation aufeinander bezogen, wobei in A die zweimal gezählte Gerade g und die Gerade AO und in A' die zweimal gezählte Gerade g' und die Gerade $A'O'$ Hauptgeraden sind.

Auch im Falle 3 sind die Punkte O und Q' Hauptpunkte vom dritten Typus und die Korrespondenz zwischen den Bündeln O und Q' ist quadratisch, wobei OO_1, OO_2, OO_3 und d_1', d_2', d_3' homologe Hauptgeraden sind. Einer von O ausgehenden Geraden g auf ω entspricht eine Erzeugende g' des Kegels, der C' aus Q' projiziert, und die Korrespondenz zwischen diesen beiden Geraden ist eine ausgeartete Projektivität, da jedem Punkte von g der Punkt, in dem g' C' schneidet, und dem Punkte O von g jeder Punkt von g' entspricht.

Verlegen wir im allgemeinsten Falle 1 die Punkte der Koordinaten 0, 0, 0, 1 in O und O' und nehmen wir $x_4 = 0$ und $x_4' = 0$ als die Gleichungen der Ebenen von C und C', so läßt sich die Transformation durch die Formeln

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_1 x_4 : x_2 x_4 : x_3 x_4 : \gamma(x_1, x_2, x_3)$$

darstellen, deren Umkehrungen

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = x_1' x_4' : x_2' x_4' : x_3' x_4' : \gamma(x_1', x_2', x_3')$$

sind, wobei γ eine ternäre quadratische Form ist.

Bei den Sonderfällen beschränken wir uns auf den Fall 1 e), der in nicht homogenen Koordinaten durch die Gleichungen

$$x' = \frac{x}{z}, \quad y' = \frac{y}{z}, \quad z' = z$$

dargestellt ist, deren Umkehrungen

$$x = x'z', \quad y = y'z', \quad z = z'$$

sind.

Im ersten Raume liegt der Hauptpunkt O im Ursprung, die Ebene ω und der Hauptkegelschnitt C sind die unendlich ferne Ebene und die doppelt zählende unendlich ferne Gerade der xy-Ebene. Im zweiten Raume ist der Hauptpunkt O' der unendlich ferne Punkt der Achse z', die Ebene ω' und der Kegelschnitt C' sind die Ebene $x'y'$ und die zweimal gezählte unendlich ferne Gerade dieser Ebene. Den O in den verschiedenen Richtungen unendlich benachbarten Punkten entsprechen die Punkte der Ebene $x'y'$; insbesondere den von O ausgehenden Richtungen auf der Ebene xy die unendlich fernen Punkte der Ebene $x'y'$, während der Richtung der Achse z der Ursprung entspricht.[668])

Aus dem Vorhergehenden folgt eine einfache Konstruktion einer quadratischen Transformation vom Typus 1.[669])

Wir verlegen nach Willkür in R den Kegelschnitt C auf die Ebene ω, und den Punkt O außerhalb von ω und ähnlich in R' den Kegelschnitt C' auf die Ebene ω', und den Punkt O' außerhalb von ω'. Zwischen den Punkten von C und C' legen wir eine Projektivität fest, so daß auch die zwei Kegel, die C und C' aus O und O' projizieren, projektiv aufeinander bezogen werden. Vermöge dieser Projektivität zwischen den beiden Kegeln werden die beiden Bündel mit den Mittelpunkten O und O' kollinear aufeinander bezogen. Wird nun in R' eine allgemeine, nicht durch O' hindurchgehende Ebene π' angenommen, so lassen wir dieser in R eine durch O und C geführte Fläche 2. Ordnung φ derart entsprechen, daß die Tangentialebene an φ in O und die Ebene, die den Schnitt von π' mit ω' aus O' projiziert, in der genannten Kollineation einander entsprechen. Wählen wir nun in den Bündeln O und O' zwei beliebige, in der genannten Kollineation einander entsprechende Gerade g und g', so ist die Projektivität, die zwischen diesen bestehen muß, wohl bestimmt, da den Punkten O und

---

668) Diese spezielle quadratische Transformation ist weiterhin von *P. del Pezzo*, Rend. Acc. Napoli (3) 2 (1896), p. 288 (s. auch Anm. 750) und *L. Conte*, Giorn. di mat. (3) 22 (1931), p. 113 studiert; zur Analyse der singulären Punkte der Flächen (Nr. **106**) verwandt von *G. Kobb*, J. math. pures appl. (4) 8 (1892), p. 385; *C. Segre*, Ann. di mat. (2) 25 (1896), p. 13; *B. Levi*, daselbst (2) 26 (1897), p. 219; *A. Pensa*, daselbst (3) 6 (1901), p. 259 in Anm. und p. 277; *E. Geck*, Diss. Tübingen 1900; *G. Pfeiffer*, Atti IV Congresso intern. dei matem. Roma 1908, 2 (Roma 1909), p. 309; Moskau math. Sammlung 27 (1909), p. 228; Kiew Univ. Anzeiger 1909, Nr. 8b; 1911, Nr. 8, 9, 10b.

669) *R. Sturm*, „Geom. Verw." 4, p. 353—356.

$g\omega$ die Punkte $g'\omega'$ und O' entsprechen müssen und dem zweiten Schnittpunkt von φ mit g (außer O) der Schnittpunkt von g' mit π' entsprechen muß. Wollen wir nun von jedem Punkte P von R den entsprechenden Punkt P' bestimmen, so genügt es, die homologe Gerade g' von $g \equiv OP$ in der Kollineation zwischen den Bündeln O und O' aufzusuchen und auf dieser den homologen Punkt von P in der genannten Projektivität zu ermitteln.

Aus der Konstruktion läßt sich sofort erkennen, daß die vorliegende Transformation die Konstantenzahl 26 hat.

Eine weitere Konstruktion ergibt sich[670]), wenn wir zwei durch eine Reziprozität aufeinander bezogene Räume R, R' wählen und in diesen zwei kollineare Bündel mit den Mittelpunkten O und O' festlegen. Lassen wir nun jedem Punkte P von R den Punkt P' entsprechen, in dem die reziproke Ebene von P in der Reziprozität die homologe Gerade von OP in der Kollineation schneidet, so entsteht zwischen P und P' eine quadratische Transformation, deren Hauptpunkte in R und R' bzw. O und O' sind. Was den Hauptkegelschnitt von R z. B. anbelangt, so bemerken wir, daß, wenn wir mit ω' die homologe Ebene von O in der Reziprozität bezeichnen, diese Ebene auf das Bündel vom Mittelpunkt O' und daher auch auf das Bündel vom Mittelpunkt O reziprok bezogen wird. Der Kegelschnitt von ω', der der Ort aller auf den in dieser Reziprozität reziproken Ebenen liegenden Punkte ist, ist der Hauptkegelschnitt von R.

Die Kollineation zwischen den beiden Bündeln O und O' erzeugt eine kubische Raumkurve, und diese schneidet die Fläche 2. Ordnung, die der Ort aller Punkte ist, durch die die homologen Ebenen in der Reziprozität hindurchgehen, in sechs Punkten. Diese sechs Punkte sind die Fixpunkte der quadratischen Transformation.[671])

---

670) *F. Aschieri,* Rend. Ist. Lomb. (2) 14 (1881), p. 21; *R. Sturm,* „Geom. Verw.“ 4, p. 359.

Über die Konstruktion einer quadratischen Transformation, für die die beiden Hauptpunkte und Paare von entsprechenden Punkten gegeben sind, s. *M. Mikan,* Časopis 58 (1928), p. 70; Prag České Ak. Rozpravy 37 (1928), Nr. 42.

Über die isologischen Kurven einer quadratischen Transformation s. *M. Mikan*[665]).

671) Irrtümlicherweise behaupten *F. Aschieri*[670]) und *K. Doehlemann,* „Geom. Transf.“ 2, p. 189, daß es bei einer allgemeinen (2, 2)-Transformation keine involutorischen Paare gibt. Es existieren jedoch zwei derartige Paare, wie *Hilda P. Hudson* und *T. L. Wren,* Proc. London math. Soc. (2) 24 (1926), Notes and Abstracts, p. XXVIII bemerkt haben.

Über die Fixpunkte und involutorischen Paare s. auch *Hilda P. Hudson,* „Cremona transf.“, p. 178—179 und 202—206. — Allgemeiner s. Nr. 88.

Eine mit einer Fixpunktsebene ausgestattete (2, 2)-Transformation betrachtet *A. del Re,* Napoli Atti Acc. Pontaniana (2) 9 (1904), Nr. 10, p. 18.

78. Quadratische involutorische Transformationen. Es gibt drei Typen quadratischer involutorischer Transformationen[672]), je nachdem der Ort der Fixpunkte eine Fläche 2. Ordnung (die auch in zwei Ebenen zerfallen kann) oder ein Kegelschnitt und zwei andere Fixpunkte außerhalb des Kegelschnittes, oder eine Ebene und eine Gerade ist.

In jedem Falle sind die Flächen des homaloiden Systems Flächen 2. Ordnung mit einem gemeinsamen Kegelschnitt Γ (der auch in zwei voneinander verschiedene oder zusammenfallende Gerade zerfallen kann) und einem gemeinsamen Punkt O (der auch Γ angehören kann). Das Bündel der Geraden und Ebenen mit dem Mittelpunkt O wird durch die Involution in sich transformiert; im ersten Falle bleibt aber jede Gerade und jede Ebene durch O bei der Involution fest, während in den beiden anderen Fällen die automorphe Transformation des Bündels eine harmonische Homologie ist.

Der erste Typus (*räumliche Inversion*) bildet die Erweiterung der quadratischen Inversion von Nr. **69** auf den Raum. Die Fläche 2. Ordnung der Fixpunkte geht durch Γ hindurch, und zwei konjugierte Punkte befinden sich mit O auf einer Geraden und werden durch die Schnittpunkte der Fläche 2. Ordnung mit ihrer Verbindungsgeraden harmonisch getrennt.[673])

79. Inversion oder Abbildung durch reziproke Radien.[674]) Nehmen wir bei der räumlichen Inversion an, daß Γ der unendlich ferne imaginäre Kreis ist, so wird die Fläche 2. Ordnung der Fixpunkte eine Kugel vom Mittelpunkt O und die Korrespondenz die *Inversion* oder *Abbildung durch reziproke Radien.* Durch diese entspricht einer nicht durch O hindurchgehenden Ebene eine Kugel, die durch O hindurch-

---

672) *F. Aschieri*[670]); *V. Martinetti,* Rend. Ist. Lomb. (2) 18 (1885), p. 132.

673) Vgl. *C. F. Geiser*[597]); *K. Küpper,* Prag Abh. böhm. Ges. (7) 2 (1888), Nr. 10, p. 4; *R. Sturm,* „Die Gebilde“[40]) 2, p. 180—181; „Geom. Verw.“ 4, p. 356—359, 401—406. Von dieser Transformation macht *A. Buhl,* Bull. Sciences math. (2) 42 (1918), p. 212 beim Studium *Abel*scher Summen von Kegelinhalten Gebrauch.

∞^1-Systeme quadratischer involutorischer Transformationen betrachtet *D. Montesano,* Atti Acc. Torino 27 (1892), p. 1066, beim Studium der Geradenkongruenzen 2. Ordnung und 4. Klasse.

674) Anführungen über die Inversion in den Anmerkungen von Nr. **70**, die sich fast alle ebenso auf die Ebene wie auf den Raum beziehen. Darstellungen der Inversion für den Raum auch bei *G. A. von Peschka,* „Darstellende und projektive Geometrie“ 3, Wien 1884, p. 228—242; *M. Simon,* „Analytische Geometrie des Raumes“ 1, Leipzig 1900, p. 146—152; *K. Doehlemann,* „Geom. Transf.“ 2, p. 201—286; *R. Sturm,* „Geom. Verw.“ 4, p. 356—359; *G. Darboux,* „Principes“[50]), p. 366 ff.

geht und hier eine zur gegebenen Ebene parallele Tangentialebene hat; einer nicht durch O hindurchgehenden Kugel eine Kugel, die auch nicht durch O hindurchgeht.[675]) Einer Fläche m^{ter} Ordnung, die in O die Multiplizität μ und längs Γ die Multiplizität ν hat, entspricht eine Fläche der Ordnung $2m - \mu - 2\nu$, die in O die Multiplizität $m - 2\nu$ hat und $(m - \mu - \nu)$-mal durch Γ hindurchgeht.

Wie im Falle der Ebene erhält die Inversion die Winkel; jede birationale Transformation dieser Eigenschaft läßt sich aus Bewegungen, Ähnlichkeitstransformationen und Inversionen zusammensetzen.[676])

Allgemeiner [vgl. III D 1, 2 (*H. v. Mangoldt*), Nr. **24**; III D 6a (*A. Voss*), Nr. **6**; III D 9 (*E. Salkowski*), Nr. **4**] findet *J. Liouville*[677]):

675) Diese Eigenschaft, als Erweiterung der von *F. Vieta*[601]) betrachteten analogen Eigenschaft für die Ebene, bei *P. de Fermat*, „De contactibus sphaericis", Varia opera math., Tolosae 1679, p. 74 = Œuvres 1, von *P. Tannery* und *Ch. Henry*, Paris 1891, p. 52.

676) Ein synthetischer Beweis bei *L. Bianchi*[604]).

677) J. math. pures appl. (1) 13 (1848), p. 220; (1) 15 (1850), p. 103 und *Note VI* bei *G. Monge*, „Appl. de l'anal. à la géom."[600]), p. 609—616. Andere Beweise bei *J. N. Haton de la Goupillière*, J. Éc. Polyt. (1), cah. 42 (1867), p. 188; *S. Lie*, Math. Ann. 5 (1871), p. 184; *S. Lie* und *G. Scheffers*, „Geom. d. Berühr."[562]) 1, p. 419—427; *J. Cl. Maxwell*, Proc. London math. Soc. (1) 4 (1872), p. 117 = The scient. Papers 2, Cambridge 1890, p. 297; *T. J. I'A. Bromwich*, Proc. London math. Soc. (1) 33 (1900), p. 185; *K. von der Mühll*, Verh. Naturf. Ges. Basel 16 (1903), p. 158; *A. Lévêque*, Nouv. Ann. de math. (4) 20 (1920), p. 356; *G. Bouligand*, daselbst (5) 1 (1923), p. 266; *W. Blaschke*, „Vorlesungen über Differentialgeometrie" 1, 3. Aufl., bearb. und hrsg. von *G. Thomsen*, Berlin 1930, p. 100—102. Mittels der Quaternionen *P. G. Tait*, Trans. R. Soc. Edinburgh 27 (1874), p. 105; Proc. R. Soc. Edingburgh 9 (1877), p. 527; 19 (1892), p. 193 = Papers 1, Cambridge 1898, p. 176, 352; 2, Cambridge 1900, p. 329; ein zum Teil geometrischer Beweis bei *A. Capelli*, Ann. di mat. (2) 14 (1885), p. 227.

J. Liouville, Ann. math. pures appl. (1) 13 (1848), p. 220 und *S. Lie*, Gött. Nachr. 1871, p. 191; Math. Ann. 5 (1871), p. 186 in Anm., bemerken, daß der Lehrsatz für jeden euklidischen Raum von $n \geqq 3$ Dimensionen gilt. S. auch *F. Klein*, Erlanger Progr. 1872[554]); Ges. math. Abh. 1, p. 478, Anm. Beweise bei *R. Beez*, Ztschr. Math. Phys. 20 (1875), p. 253; *G. Darboux*, Ann. Éc. Norm. (2) 7 (1877), p. 282; „Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes", 1. Ausg, Paris 1898, p. 166—168; 2. Ausg., Paris 1910, p. 166—168; *S. Lie* und *Fr. Engel*[556]) 3, Leipzig 1893, p. 347—351; *F. Klein*, „Einl. in die höh. Geom."[599]) 1, p. 383—387; „Vorl. üb. höh. Geom."[599]), p. 198—200; *L. Bianchi*, „Lezioni di geom. diff."[615]), 1. Ausg., Pisa 1894, p. 460—462; 2. Ausg. 1, Pisa 1902, p. 375—376; 3. Ausg. 2, Bologna 1924, p. 466—470; deutsche Übers. von *M. Lukat*, Leipzig 1899, p. 487—488. Ein vektorieller Beweis von *T. Boggio* bei *P. Burgatti*, *T. Boggio*, *C. Burali-Forti*, „Geometria differenziale", Bologna 1930, p. 234—236.

Beweise des Satzes von *J. Liouville*, die von dem Satz von *Ch. Dupin* über die dreifach orthogonalen Flächensysteme [III D 9 (*E. Salkowski*), Nr. 2] abgeleitet jede umkehrbar eindeutige, stetige und konforme Korrespondenz zwischen zwei dreidimensionalen Gebieten des Raumes (die also so beschaffen ist, daß zwei korrespondierende infinitesimale Figuren ähnlich sind), setzt sich aus Bewegungen, Ähnlichkeitstransformationen und Inversionen zusammen.

Die so entstehende kontinuierliche endliche ∞^{10} Gruppe (*konforme Gruppe* oder *Gruppe der konformen Punkttransformationen des Raumes*) ist daher die Gruppe der Ähnlichkeiten und der Transformationen durch reziproke Radien und kann auch als Gesamtheit aller Punkttransformationen (*Kugelverwandtschaften*) definiert werden, die Kugeln (unter Einschluß der Ebenen) in Kugeln verwandeln.[678])

Die konforme Gruppe ist auch[679]) die allgemeinste Gruppe von Berührungstransformationen im Raume, die jeden Kreis in einen Kreis verwandeln.

---

werden, geben an *É. Goursat,* Ann. Éc. Norm. (3) 6 (1889), p. 10; *A. Giacomini,* Giorn. di mat. (2) 4 (1896), p. 125; *G. Darboux,* Arch. Math. Phys. (3) 1 (1900), p. 34. Der zweite dieser Autoren behandelt auch den Fall von $n > 3$ dadurch, daß er von der von *F. Klein,* Math. Ann. 5 (1871), p. 272 = Ges. math. Abh. 1, p. 121 angegebenen Erweiterung des Satzes von *Ch. Dupin* auf die Hyperräume Gebrauch macht.

Der Satz gilt nicht für $n = 2$, da jede analytische Funktion einer komplexen Veränderlichen eine Transformation ebener Figuren ergibt, die die Winkel erhält. Vgl. II B 1 (*W. F. Osgood*), Nr. 5.

Nach *R. Hoppe,* Arch. Math. Phys. (2) 4 (1886), p. 328 kommt jede konforme perspektivische Abbildung einer Fläche durch Ähnlichkeit oder reziproke Radien zustande.

Nach *E. Meyer,* daselbst (3) 13 (1907), p. 149 sind die involutorischen konformen Punkttransformationen, die nicht nur Ähnlichkeiten sind, Inversionen in bezug auf eine reelle Kugel oder aus einer Inversion und einer Spiegelung im Mittelpunkt der Kugel oder an einer durch den Mittelpunkt gehenden Geraden oder Ebene zusammengesetzt.

Jede lineare, reelle und orthogonale Substitution in einem n-dimensionalen Raum ist isogonal, erhält also die Winkel und ist daher ein Produkt aus Inversionen. Über ihre effektive Zerlegung in Inversionen s. *L. Autonne,* Ann. Univ. Lyon (2), fasc. 12 (1903); Auszug Paris C. R. 136 (1903), p. 1185.

678) Vgl. *S. Lie* und *G. Scheffers*[562]) 1, p. 419—426; *A. Bloch,* J. math. pures appl. (9) 3 (1924), p. 66; *G. Ricci,* Ann. Scuola norm. sup. Pisa 15 (1927), Nr. 5. S. auch *W. Blaschke* und *G. Thomsen*[677]), 3, Leipzig 1929, p. 228—268, 296—387, 447—457; *J. L. Coolidge*[599]), p. 336—350.

Man beachte die wesentliche Verschiedenheit zwischen dem Falle der Ebene und dem des Raumes (auch von mehr als drei Dimensionen). Eine Punkttransformation im Raume ist dann und nur dann konform, wenn sie jede Kugel in eine Kugel (oder auch nur jede Nullkugel in eine Nullkugel) überführt; in der Ebene dagegen gibt es keinen analogen Satz.

679) *E. Vessiot,* J. math. pures appl. (9) 2 (1923), p. 107.

Die Inversion besitzt die Eigenschaft, die Krümmungskurven einer Fläche in die Krümmungskurven der transformierten Fläche zu verwandeln; außerdem schneiden sich die zu zwei homologen Punkten gehörigen Normalen der beiden Flächen und die Hauptkrümmungsmittelpunkte in diesen Punkten liegen[680]) zu je zweien mit dem Inversionsmittelpunkt auf einer Geraden.[681])

680) *R. Bricard,* Nouv. Ann. de math. (4) 3 (1903), p. 99 löst die umgekehrte Frage, indem er alle Transformationen zwischen zwei Flächen bestimmt, bei denen die Paare homologer Punkte P, P' in einer Geraden mit einem festen Punkte O liegen, die Normalen in P, P' sich schneiden, und P und P' Krümmungskurven beschreiben.

K. M. Peterson, Moskau math. Sammlung 1 (1865), p. 391; 2 (1867), p. 17; franz. Übers. von *E. Cosserat* und von *E. Cosserat* und *H. Frenkel,* Ann. de la Fac. de Toulouse (2) 7 (1905), p. 5, 45; Wiedergabe bei *K. M. Peterson,* „Über Kurven und Flächen", Moskau und Leipzig 1868, studiert eine Korrespondenz zwischen zwei Flächen, die er *graphische Perspektivität* nennt, also konform und so beschaffen ist, daß zwei homologe Punkte mit einem festen Punkte in einer Geraden liegen. Es zeigt sich, daß eine derartige Korrespondenz nichts anderes ist als eine Ähnlichkeit oder auch eine Inversion, wie dann *Ed. Weyr,* Prag Ber. böhm. Ges. 1877, p. 273 von neuem findet.

Eine involutorische Transformation von Punktepaaren im Raume, deren Sonderfall die Inversion ist, wird von *G. Darboux*[612]) 4, Paris 1896, p. 79—85, 154—155 unter dem Namen *zusammengesetzte Inversion (inversion composée)* untersucht. S. auch *W. Burnside,* Messenger of math. (2) 32 (1903), p. 147.

681) Über die Sätze des Textes und weitere Eigenschaften der Inversion s. *J. W. Stubbs,* Phil. Mag. (3) 23 (1843), p. 343—344; *J. Liouville,* J. math. pures appl. (1) 12 (1847), p. 281; *T. A. Hirst,* Ann. di mat. (1) 2 (1859), p. 164; *Th. Moutard,* Nouv. Ann. de math. (2) 3 (1864), p. 306; *J. Weingarten,* Diss. Breslau 1864, p. 13; *J. N. Haton de la Goupillière,* J. Éc. Polyt. (1), cah. 42 (1867), p. 196; *E. Laguerre,* Nouv. Ann. de math. (2) 11 (1872), p. 14, 108, 241 = Œuvres 2, Paris 1905, p. 238; *H. M. Taylor,* Proc. London math. Soc. (1) 5 (1874), p. 105; *H. E. Graßmann,* Ber. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig 29 (1877), p. 133 = Math. Ann. 13 (1878), p. 559; *C. Neumann,* „Untersuchungen über das logarithmische und *Newton*sche Potential", Leipzig 1877, p. 355 ff.; *G. Salmon* und *W. Fiedler,* „Raumgeometrie" 2, p. 347—348; *V. Jamet,* Nouv. Ann. de math. (2) 20 (1881), p. 344, 385, 434; *G. Pirondini,* Giorn. di mat. (1) 27 (1889), p. 168; *R Mehmke,* Mitt. math.-naturw. Vereins in Württemberg 4 (1891), p. 36; *S. L. Ravier,* Nouv. Ann. de math. (3) 10 (1891), p. 371; *G. Kirchhoff,* „Vorlesungen über Elektrizität und Magnetismus", herausg. von *M. Planck,* Leipzig 1891, p. 54 ff.; *G. Demartres,* Bull. Sciences math. (2) 21^1 (1897), p. 182; „Cours de géométrie infinitésimale", Paris 1913, p. 275—276; *U. Grassi,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 10^2 (1901), p. 64; *W. Burnside,* Messenger of math. (2) 31 (1902), p. 97, 192; *R. Bricard,* Nouv. Ann. de math. (4) 3 (1903), p. 16; (4) 6 (1906), p. 19; *M. Fouché,* daselbst (4) 6 (1906), p. 18, dessen Beweis bei *M. d'Ocagne,* „Cours de géom."[598]) 1, p. 205—206 wiedergegeben ist; *G. Scorza,* Period. di mat. (3) 4 (1907), p. 288; *G. Fubini*[16]), p. 51—66; *L. P. Eisenhart,* „A treatise on the differential geometry of curves and surfaces", Boston 1909, p. 196; *G. Valiron,* Revue de math. speciales 21

Es wird auch der Fall betrachtet, bei dem der Inversionsmittelpunkt auf dem absoluten Kegelschnitt liegt.[682])

Nach *Th. Moutard*[683]) heißt eine Kurve oder eine Fläche, die durch eine Inversion in sich transformiert wird, *anallagmatisch* [vgl. III AB 7 (*E. Müller*), Nr. **10**].[684])

(1911), p. 238; *Th. Leconte,* Nouv. Ann. de math. (4) 12 (1912), p. 542; *A. R. Forsyth,* „Lectures on the differential geometry of curves and surfaces", Cambridge 1912, p. 105—107; *G. Darboux*[612]) 1, 2. Ausg., Paris 1914, p. 259—260, 276—278, 317; *E. Vessiot,* „Leçons de géométrie supérieure", 2. Ausg., Paris 1919, p. 230—237, 312—313; *A. Voss,* Sitzungsb. Ak. München 1920, p. 233; *L. Bianchi,* „Lezioni di geom. diff."[615]), 1. Ausg., Pisa 1894, p. 110 und 462; 3. Ausg. 1, Pisa 1922, p. 216—217; deutsche Übers. von *M. Lukat,* Leipzig 1899, p. 111—112 und 488; *C. E. Weatherburn,* „Differential geometry of three dimensions" 1, Cambridge 1927, p. 162—164.

Über die Anwendung einer Inversion auf eine Fläche 2. Ordnung s. *A. Cayley,* Quart. J. of math. 11 (1871), p. 283 = Papers 8, Cambridge 1895, p. 67.

Über die invarianten Eigenschaften einer ebenen oder gewundenen Kurve und einer Fläche, und ihre Invarianten in bezug auf die Gruppe der konformen Transformationen der Ebene oder des Raumes [III D 11 (*L. Berwald*), Nr. **13**] vgl. *A. Tresse,* Paris C. R. 114 (1892), p. 948; Acta math. 18 (1894), p. 66; *P. Calapso,* Rend. Circ. mat. Palermo 22 (1906), p. 197; *A. Voss,* Sitzungsb. Ak. München 1907, p. 77; 1920, p. 229; *R. Rothe,* Math. Ann. 72 (1911), p. 57; *A. Besserve,* Thèse, Paris 1915, *K. Ogura,* Tôhoku math. J. 9 (1916), p. 216; 16 (1919), p. 281; *G. W. Mullins,* Diss. Columbia 1917; *H. Liebmann,* Sitzungsb. Ak. München 1923, p. 79; Sitzungsb. Ak. Heidelberg 1923, Nr. 2, 4; *T. Kubota,* Science Rep. Tôhoku Univ. (1) 13 (1924), p. 243 [Auszug Japanese J. of math. 1 (1923), p. 41]; *G. Thomsen,* Abh. math. Seminar Hamburg Univ. 3 (1924), p. 31; 4 (1926), p. 117; Math. Ztschr. 21 (1924), p. 254; *T. Takasu* (= *T. Ôta*), Tôhoku math. J. 25 (1924), p. 127; 26 (1925), p. 54, 128, 145; Japanese J. of math. 1 (1924), p. 51, 141; 2 (1925), p. 39; Science Rep. Tôhoku Univ. (1) 14 (1925), p. 263 [Auszug Japanese J. of math., Abstracts 2 (1926), p. (20)]; *G. Kowalewski,* Ber. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig 77 (1925), p. 99; *E. Vessiot,* J. Éc. Polyt. (2) 25 (1925), p. 43; Bull. Soc. math. de France 54 (1926), p. 139; 55 (1927), p. 39; *F. Morley,* Amer. J. of math. 48 (1927), p. 144 [Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 32 (1926), p. 306]; *A. Kawaguchi,* Science Rep. Tôhoku Univ. (1) 15 (1926), p. 193; *A. Demoulin,* Proc. intern. math. Congress Toronto 1924, 1 (Toronto 1928), p. 795; Bull. Ac. sc. Belgique (5) 12 (1926), p. 220; *P. C. Delens,* „Méthodes et problèmes des géométries différentielles euclidienne et conforme", Paris 1927, p. 106ff.; *B. C. Patterson,* Amer. J. of math. 50 (1928), p. 553; *S. Nakajima,* Tôhoku math. J. 31 (1928), p. 21, 36, 210, 215; *R. Mühlbach,* Sitzungsb. Ak. Heidelberg 1928, Nr. 11.

682) Dieser Fall wird zuerst von *L. Cremona*[666]) betrachtet und von *G. Darboux,* Ann. Éc. Norm. (2) 7 (1877), p. 284; „Leçons sur les syst. orth."[677]), 1. Ausg., p. 168; 2. Ausg., p. 168 beim Studium der orthogonalen Systeme mit n Veränderlichen verwertet; von *L. Raffy,* Ann. Éc. Norm. (3) 22 (1905), p. 397; (3) 23 (1906), p. 387 bei Untersuchungen über die isothermischen Flächen verwandt.

683) Nouv. Ann. de math. (2) 3 (1864), p. 306.

684) Es gibt weder ebene noch gewundene anallagmatische Kurven mit unendlich vielen Inversionen, für die der Ort der Pole eine Kurve ist, noch

Th. Moutard[685]) und *G. Darboux*[686]) studieren gleichzeitig[687]) die anallagmatischen Flächen 3. und 4. Ordnung: es sind jene, die den absoluten Kegelschnitt einfach oder doppeltzählend enthalten; sie werden durch fünf Inversionen in sich transformiert.[688])

Die Klassifikation dieser Flächen in der Geometrie der Inversionen

---

anallagmatische Flächen mit unendlich vielen Inversionen, für die der Ort der Pole eine Fläche ist. Der Kreis und die Kugel sind die einzige Kurve und die einzige Fläche, die durch Inversionen, deren Mittelpunkt ein beliebiger Punkt der Ebene oder des Raumes ist, in sich transformiert werden. Besitzt eine Fläche unendlich viele Inversionspole, so ist der Ort dieser Pole eine Gerade oder eine Gesamtheit einer endlichen Anzahl von Geraden. Die *Dupin*sche Zyklide ist die einzige Fläche, die als Inversionspole alle Punkte zweier Geraden besitzt (die dann orthogonale Richtungen haben). Über diese Lehrsätze s. *G. Fouret,* Nouv. Ann. de math. (3) 2 (1883), p. 259; (3) 7 (1888), p. 113; *J. Hadamard,* Bull. Sciences math. (2) 12 (1888), p. 118.

U. Amaldi, Roma Rend. Acc. Linc. (5) 10^2 (1901), p. 168 bestimmt alle Flächen mit unendlich vielen automorphen konformen Transformationen. Es ergibt sich insbesondere, daß die Flächen mit mehr als ∞^1 derartigen Transformationen Ebenen oder Kugeln sind (wo dann die Gruppe sechs Parameter hat) oder sich durch eine konforme Transformation in einen Rotationszylinder, einen Rotationskegel oder einen Kreisring (in welchen Fällen die Gruppe zwei Parameter hat) transformieren lassen.

685) Nouv. Ann. de math. (2) 3 (1864), p. 306, 536; Paris C. R. 59 (1864), p. 243.

686) Paris C. R. 59 (1864), p. 240.

687) Vgl. *J. A. Serret,* Paris C. R. 59 (1864), p. 269; *G. Darboux,* Ann. Éc. Norm. (1) 2 (1865), p. 64—65.

688) S. auch *G. Darboux,* Ann. Éc. Norm. (1) 2 (1865), p. 55; (1) 3 (1866), p. 97; (2) 1 (1872), p. 273. Die Untersuchungen von *G. Darboux* über diesen Gegenstand sind zum großen Teile in dem Buche „Sur une classe" [50]) gesammelt; hier und in Paris C. R. 68 (1869), p. 1313 ist für diese Flächen der Name *Zykliden* vorgeschlagen.

S. außerdem *G. Humbert,* J. Éc. Polyt. (1), cah. 55 (1885), p. 127; *J. Meder,* Progr. Gymn. Aachen 1888; *G. Koenigs,* „Leçons de l'agrégation classique de mathématiques" (lith.), Paris 1892, p. 108 ff.; *K. Doehlemann,* „Geom. Transf." 2, p. 252—279; *S. Glaser,* Progr. Berlin 1902, 1903; *G. Darboux,* „Princ. de géom. anal." [50]), p. 405 ff.; *H. F. Baker,* „Princ. of geom." [46]) 4, p. 174—202.

Über die graphische Darstellung der *Dupin*schen Zyklide und speziell ihrer loxodromischen Kurven s. *M. de Franchis,* „Sulla rappresentazione grafica delle lossodromiche di un toro", Messina 1905; *P. Ernst,* Progr. Wien 1910; *E. Bompiani,* Mem. Ist. Lomb. (3) 12 (1915), p. 205. — Über die ebenen anallagmatischen Kurven vgl. III C 5 b (*G. Loria*), Nr. **20** e; über jene 3. und 4. Ordnung, s. III C 5 (*G. Kohn*), Nr. **47**, **49**, **84—90**, **94—97**; über die Zykliden s. III C 10 b (*W. Fr. Meyer*), IV, Nr. **21—29**. Über einige neue Entwicklungen der „anallagmatischen Geometrie" s. *B. Gambier,* J. math. pures appl. (9) 9 (1930), p. 179, wo auch viele frühere Arbeiten angeführt werden.

wurde von *G. Darboux*[689]) und von *J. Casey*[690]) teilweise, vollständiger von *G. Loria* durchgeführt.[691])

C. Segre[692]) führt die Klassifikation und das Studium aller Flächen 4. Ordnung mit irreduziblem oder reduziblem Doppel- oder Kuspidalkegelschnitt durch, und bestimmt und studiert insbesondere die Inversionen (im allgemeineren Sinne von Nr. **78**), die diese Flächen in sich transformieren.

80. Transformationen 3. Ordnung. Die birationalen Transformationen, bei denen das homaloide System eines Raumes aus allgemeinen Flächen 3. Ordnung gebildet wird, können in sieben Typen[693]) samt ihren Sonderfällen auftreten. Diese Typen sind:

1. (3, 3)-Transformationen mit einer Hauptraumkurve 6. Ordnung vom Geschlecht 3 in jedem Raum.

2. (3,4)-Transformationen; das homaloide System des einen Raumes

689) „Sur une classe“ 50).

690) Trans. London Phil. Soc. **161** (1871), p. 585; Auszug Proc. R. Soc. London **19** (1871), p. 496.

691) Mem. Acc. Torino (2) **36** (1883), p. 199.

692) Math. Ann. 24 (1884), p. 313. Vgl. III C 10b (*W. Fr. Meyer*), Nr. **20**.

693) Alle diese Transformationen außer der letzten werden von *L. Cremona,* Rend. Ist. Lomb. (2) 4 (1871), p. 274—277 = Opere 3, p. 245—248 mittels seiner in Nr. **76** erwähnten allgemeinen Methode bestimmt, und zwar unter Anwendung auf die ebene Abbildung zahlreicher rationaler Flächen 4, 5, . . . Ordnung; ebenfalls alle Transformationen nach einer etwas anderen Methode von *G. Loria,* Atti Acc. Torino 26 (1890), p. 275 und *R. Sturm,* Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 14 (1905), p. 18; ausführlicher und vollständiger von *R. Sturm,* „Geom. Verw.“ 4, p. 363—387.

Ein Hinweis auf den Typus 2 auch bei *L. Cremona,* Math. Ann. 4 (1871), p. 225; Gött. Nachr. 1871, p. 146 = Opere 3, p. 270. S. auch *L. Berzolari,* Ann. di mat. (2) 13 (1884), p. 118, der diesen Typus bei der ebenen Abbildung einer Fläche 4. Ordnung mit doppeltem Kegelschnitt verwendet, außerdem *G. Schaake,* Ak. Amsterdam Versl. (4) 32 (1923), p. 902. Ein Sonderfall bei *Hilda P. Hudson,* „Cremona transf.“, p. 329—352.

Der Typus 3 wird von *E. Caporali,* Ann. di mat. (2) 7 (1875), p. 149 = Mem. di geometria, Napoli 1888, p. 1 studiert, der ihn beim Studium der mit einer doppelten Raumkurve 5. Ordnung mit dreifachem Punkt ausgestatteten (rationalen) Flächen 5. Ordnung verwendet.

Der Typus 7 wird von *Maria Bonicelli,* Giorn. di mat. (2) 9 (1901), p. 184 studiert, unter Anwendung auf das Studium von rationalen Flächen 6. Ordnung.

Über die (3, 3)-, (3, 4)- und (3, 5)-Transformationen vgl. auch *G. Salmon* und *W. Fiedler,* „Raumgeometrie“ 2, p. 566—574.

J. G. Semple, Proc. Cambridge Phil. Soc. 25 (1929), p. 145 erhält diese Transformationen, indem er von gewissen dreidimensionalen rationalen Mannigfaltigkeiten ausgeht, die auf einen S_3 durch ein lineares System von Flächen 3. Ordnung birational abbildbar sind und indem er eine solche Abbildung von ihnen auf zwei S_3 betrachtet.

wird aus kubischen Flächen gebildet, die durch eine einfache Raumkurve 5. Ordnung vom Geschlecht 1 und einen einfachen Punkt hindurchgehen; das homaloide System des anderen Raumes aus Flächen 4. Ordnung mit gemeinsamem doppeltem Kegelschnitt und einer gemeinsamen einfachen Raumkurve 5. Ordnung vom Geschlecht 1, die den Kegelschnitt in 5 Punkten trifft.

3. $(3, 5)'$-Transformationen; das homaloide System des einen Raumes besteht aus kubischen Flächen mit einer gemeinsamen rationalen Raumkurve 4. Ordnung, die in einem gegebenen Punkte eine gegebene Ebene berühren; im anderen Raume aus Flächen 5. Ordnung mit einem gemeinsamen einfachen Kegelschnitt und einer gemeinsamen doppelten Raumkurve 5. Ordnung, die den Kegelschnitt in 4 Punkten trifft, und mit einem dreifachen, für alle Flächen des homaloiden Systems ebenfalls dreifachen Punkte ausgestattet ist.

4. $(3, 5)''$-Transformationen; das homaloide System des einen Raumes setzt sich aus kubischen Flächen zusammen, die durch zwei Punkte, durch eine Gerade und eine kubische Raumkurve gehen, wobei diese Raumkurve mit der Geraden keine Punkte gemeinsam hat; das homaloide System des anderen Raumes besteht aus Flächen 5. Ordnung, die eine dreifache Gerade t, zwei windschiefe Doppelgerade d_1, d_2 und eine einfache rationale Raumkurve C 5. Ordnung gemeinsam haben. Die Gerade t schneidet die beiden Geraden d_1 und d_2, C schneidet t zweimal und jede von den Geraden d_1, d_2 dreimal.

5. $(3, 6)'$-Transformationen; das homaloide System im einen Raume wird aus kubischen Flächen mit einer gemeinsamen kubischen Raumkurve gebildet, die in einem gegebenen Punkte eine Berührung 2. Ordnung miteinander (aber nicht mit gemeinschaftlicher Tangentialebene) haben; im anderen Raume aus Flächen 6. Ordnung, die eine dreifache Gerade und eine rationale Doppelkurve 6. Ordnung gemeinsam haben; die Doppelkurve wird in zwei Punkten von der dreifachen Geraden geschnitten und besitzt einen dreifachen Punkt, der auf der dreifachen Geraden liegt und für alle Flächen des homaloiden Systems vierfach ist.

6. $(3, 6)''$-Transformationen; im einen Raum ist das homaloide System aus kubischen Flächen gebildet, die in allen Punkten einer Geraden einander berühren und durch eine andere, mit der ersten windschiefe Gerade und drei in allgemeiner Lage gegebene Punkte hindurchgehen; im anderen Raume aus Flächen 6. Ordnung, die durch eine vierfache Gerade q, drei Doppelgerade d_1, d_2, d_3 und eine einfache rationale Raumkurve C 5. Ordnung hindurchgehen. Die Geraden q, d_1, d_2, d_3 gehen durch ein und denselben für alle Flächen des Systems

fünffachen Punkt hindurch, die Kurve C schneidet die Gerade q in drei Punkten und jede von den Geraden d_1, d_2, d_3 in zwei Punkten.

7. $(3, 6)'''$-Transformationen; im einen Raum existieren kubische Flächen, die durch drei zu je zweien miteinander windschiefe Gerade und einen Punkt hindurchgehen und in einem gegebenen Punkte eine gegebene Ebene berühren; im anderen Flächen 6. Ordnung, die durch einen dreifachen Kegelschnitt, drei Doppelgerade und eine einfache kubische Raumkurve hindurchgehen. Die drei Doppelgeraden laufen in einem für alle Flächen des homaloiden Systems dreifachen Punkte zusammen und schneiden sowohl den dreifachen Kegelschnitt wie auch die kubische Raumkurve in je einem Punkte; die kubische Raumkurve schneidet den dreifachen Kegelschnitt in drei Punkten.

L. Cremona und andere[694]) studieren auch birationale Transformationen, bei denen das eine der beiden homaloiden Systeme aus kubischen Flächen mit isolierten Doppelpunkten oder aus kubischen Regelflächen zusammengesetzt ist.

81. Fortsetzung: Birationale Transformationen der Ordnungen (3,3) und ihre besonderen Fälle. Von den Transformationen 3. Ordnung in Nr. **80** ist besonders der Typus 1 mit seinen Sonderfällen studiert, der als eine Erweiterung der ebenen quadratischen Transformation betrachtet werden darf, da er sich analytisch durch drei bilineare Gleichungen zwischen den Koordinaten zweier homologer Punkte darstellen läßt. Geometrisch ausgedrückt: der homologe Punkt jeden Punktes ist der Schnittpunkt der drei, ihm in drei gegebenen Reziprozitäten entsprechenden Ebenen. Unter diesem Gesichtspunkt wird die Transformation auf analytischem Wege und auch in Sonderfällen zuerst von *L. I. Magnus*[695]) studiert, auf geometrischem Wege von *L. Cremona*[696]), der diese Transformation für die Abbildung einer allgemeinen kubischen Fläche auf eine Ebene verwendet.

Die Transformation mit ihren Sonderfällen wird dann von neuem

694) *L. Cremona*[637]). Vgl. auch *R. Sturm*, „Geom. Verw." 4, p. 388—390, 398—401.

Dieser Gegenstand wird von *Hilda P. Hudson*, Amer. J. of math. 34 (1911), p. 203 in systematischer Weise behandelt.

Einige Sonderfälle auch bei *S. Kantor*, Sitzungsb. Ak. Wien 79 (1879), p. 775; *M. Pannelli*, Ann. di mat. (2) 25 (1897), p. 67; *G. Scorza*, daselbst (3) 15 (1908), p. 242—248; (3) 17 (1910), p. 281.

695) S. [665]), p. 408—412. Vgl. auch *O. Terquem*, Nouv. Ann. de math. (1) 5 (1846), p. 497.

696) Preisschrift, J. f. Math. 68 (1866), p. 72 = Opere 3, p. 64; „Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen in synthetischer Behandlung", übertragen von *M. Curtze*, Berlin 1870, p. 175—178.

von *A. Cayley*[697]) und besonders von *M. Noether*[698]) und *L. Cremona*[699]) studiert, und zwar unter Anwendung auf die ebene Abbildung vieler rationaler Flächen[700]).

Sind Γ und Γ' im allgemeinen Falle die Hauptkurven zweier Räume, die je mit einer kubischen Raumkurve zusammen den vollständigen Schnitt zweier kubischer Flächen zusammensetzen [III C 9 (*K. Rohn* und *L. Berzolari*), Nr. 68], so wird die *Jacobi*sche Fläche des homaloiden Systems jedes Raums aus der Regelfläche 8. Grades der Trisekanten von Γ oder Γ' gebildet. Jedem Punkte M von Γ entspricht eine Trisekante m' von Γ', und den drei auf m' gelegenen Punkten von Γ' entsprechen die drei von M ausgehenden Trisekanten von Γ. Einer Fläche n^{ter} Ordnung mit Γ als ν-facher Kurve entspricht eine Fläche der Ordnung $3n - 8\nu$, wobei Γ' vielfach von der Ordnung $n - 3\nu$ ist. Einer Kurve n^{ter} Ordnung, die Γ in ν Punkten schneidet, entspricht eine Kurve der Ordnung $3n - \nu$, die Γ' in $8n - 3\nu$ Punkten schneidet.

Die Transformation hat die Konstantenzahl 39 und ist daher durch 13 Paare entsprechender Punkte bestimmt.

Sind die beiden Räume überlagert, so besitzt die Transformation 8 Fixpunkte. Diese Fixpunkte sind die gemeinsamen Punkte der drei Flächen 2. Ordnung, der Orte der Punkte, die auf den homologen Ebenen in den drei, die Transformation bestimmenden Reziprozitäten liegen.

Die Sonderfälle der (3, 3)-Transformation ergeben sich beim Zerfallen von Γ. Dann zerfällt auch Γ' im allgemeinen. Diese beiden Zerfällungen haben jedoch nicht immer ein und dieselbe Beschaffenheit.

So können z. B. sowohl Γ als auch Γ' in eine Raumkurve 5. Ord-

---

697) Proc. London math. Soc. (1) 3 (1870), p. 174 = Papers 7, p. 233.

698) Math. Ann. 3 (1870), p. 199, 205 und besonders p. 552, 564.

699) Gött. Nachr. 1871, p. 129; Math. Ann. 4 (1871), p. 213 = Opere 3, p. 260.

700) S. außerdem *W. Fiedler,* Vierteljahrsschr. Naturf. Ges. Zürich 21 (1876), p. 369; *G. Salmon* und *W. Fiedler,* „Raumgeometrie" 2, p. 570—574; *J. Keller,* Vierteljahrsschr. Naturf. Ges. Zürich 25 (1880), p. 1; *R. Sturm,* Math. Ann. 19 (1881), p. 480—482; „Geom Verw." 3, p. 479—484; 4, p. 387—398; *Fr. Machovec,* Prag Ber. böhm. Ges. 1888, p. 104; *S. Kantor,* Amer. J. of math. 19 (1895), p. 1; *K. Doehlemann,* „Geom. Transf." 2, p. 286—301; *L. Godeaux,* Nouv. Ann. de math. (4) 9 (1909), p. 260; *Th. Reye,* „Die Geom. d. Lage" [565]) 3, p. 140—143; *S. Lefschetz,* Bull. Amer. math. Soc. (2) 18 (1912), p. 434; *M. Stuyvaert,* „Algèbre à deux dimensions", Gand 1920, p. 51—54; *Hilda P. Hudson,* „Cremona transf.", p. 295—302.

Die (3, 3)-Transformation tritt bei *C. Rodenberg,* Gött. Nachr. 1888, p. 185 auf, und zwar beim Studium der Bewegungen eines allgemeinen kollinear veränderlichen Systems.

nung vom Geschlecht 2 und eine ihrer Sehnen zerfallen [als Sonderfall, in eine Raumkurve 4. Ordnung erster Art und zwei windschiefe Sehnen dieser Kurve[701])]; oder in eine rationale Raumkurve 5. Ordnung und ihre Quadrisekante[702]); oder in eine Raumkurve 4. Ordnung zweiter Art und einen diese Kurve in vier Punkten schneidenden Kegelschnitt; oder in zwei kubische Raumkurven mit vier gemeinschaftlichen Punkten. Zerfällt aber Γ in eine Raumkurve 5. Ordnung vom Geschlecht 1 und eine Trisekante dieser Raumkurve, so zerfällt Γ' in eine Raumkurve 4. Ordnung erster Art und in einen diese Kurve in drei Punkte schneidenden Kegelschnitt; zerfällt Γ in drei Kegelschnitte, von denen zwei einander in einem Punkte und den dritten in je zwei Punkten schneiden, so zerfällt Γ' in eine Raumkurve 4. Ordnung zweiter Art und zwei einander schneidende Sehnen dieser Kurve.

Zerfällt dagegen Γ in eine kubische Raumkurve und eine ebene kubische Kurve mit drei gemeinschaftlichen Punkten, so wird das homaloide System des anderen Raumes aus kubischen Flächen mit einem gemeinsamen Doppelpunkt P und einer gemeinsamen Raumkurve 6. Ordnung vom Geschlecht 1 gebildet, die in P einen dreifachen Punkt hat.[703])

Eine (3, 3)-Transformation, bei der die Hauptkurve in beiden Räumen in eine kubische Raumkurve und drei Sehnen dieser Kurve

701) Dieser Fall und seine verschiedenen Sonderfälle werden von *Teresita Castelli,* Giorn. di mat. (3) 7 (1916), p. 10 studiert unter Anwendung auf die ebene Abbildung verschiedener Flächen 4. und 5. Ordnung.

702) Von dieser Transformation macht *E. Bertini,* Collectanea math. in mem. D. Chelini, Milano 1881, p. 321, Gebrauch, um die rationalen Raumkurven 5. Ordnung, vor allem ihre fünfmal schneidenden Kegelschnitte, zu studieren.

In einem Sonderfall dieser wie auch der vorhergehenden Transformation zerfällt die Hauptkurve in jedem der beiden Räume in vier windschiefe Gerade (ordentliche Hauptgerade) und ihre zwei Transversalen. Dies ist der mit dem allgemeinen Falle von *A. Cayley*[697]) betrachtete Sonderfall, während die anderen Sonderfälle der (3, 3)-Transformation von *M. Noether*[698]) und von *L. Cremona*[699]) behandelt werden. Im vorhergehenden Falle ist die *Jacobi*sche Fläche jedoch, im Gegensatz zur Behauptung von *A. Cayley,* a. a. O., p. 175 = Papers 7, p. 234, in jedem der beiden Räume aus den 4 Flächen 2. Grades gebildet, die durch die ersten vier, zu je dreien genommenen Geraden hindurchgehen. Über die gleiche Transformation s. auch *E. K. Wakeford,* Proc. London math. Soc. (2) 21 (1922), p. 98; *H. F. Baker,* daselbst, p. 114.

703) Eine Anwendung dieser Transformation zum Beweis der Formel (XII) in Nr. 75 bei *M. Pannelli,* Giorn. di mat. (3) 8 (1917), p. 112.

Ein Sonderfall dieser Transformation wird von *L. Cremona,* Mem. Acc. Bologna (3) 2 (1872), p. 117 = Opere 3, p. 326 studiert und zur Konstruktion einer rationalen Fläche 5. Ordnung mit einer Kuspidalkurve (4. Ordnung) verwandt.

zerfällt (also ein Sonderfall des oben angegebenen ersten Zerfalles), erhalten wir, wenn wir in einem Raume drei Ebenenbüschel, im anderen drei bzw. zu diesen projektive Ebenenbüschel annehmen und nun zwei Punkte als korrespondierend bezeichnen, die die Schnittpunkte zweier Tripel von korrespondierenden Ebenen sind.[704])

Hilda P. Hudson[705]) studiert alle Fälle, bei denen die Kurve Γ in sechs voneinander verschiedene oder nicht verschiedene Gerade zerfällt.

Der beachtenswerteste unter diesen Fällen und der, der die unmittelbare Verallgemeinerung der ebenen quadratischen Transformation darstellt, ist der, in dem sich Γ aus den sechs Kanten eines Tetraeders $ABCD$ und daher auch Γ' aus den sechs Kanten eines Tetraeders $A'B'C'D'$ zusammensetzt, so daß diese Transformation als *tetraedral* bezeichnet zu werden pflegt.[706]) Die zwei homaloiden

704) *M. Noether,* Math. Ann. 3 (1870), p. 570—571. Vgl. auch *Fr. v. Krieg,* Ztschr. Math. Phys. 29 (1884), Suppl., p. 38; *E. Ascione,* Giorn. di mat. (1) 31 (1893), p. 55; *K. Doehlemann,* Sitzungsb. Ak. München 24 (1894), p. 41; „Geom. Transf." 2, p. 297—300; *U. Perazzo*[454]), p. 156 und 177; *R. Sturm,* „Geom. Verw." 4, p. 394—397; *Hilda P. Hudson,* „Cremona transf.", p. 298—301. — *E. Ascione,* a. a. O., p. 73 ff. betrachtet auch die Fälle, für die die Transformation involutorisch ist; ein derartiger Fall auch bei *J. de Vries,* Ak. Amsterdam Versl. (4) 31 (1923), p. 38.

Ein metrischer Sonderfall einer derartigen involutorischen Transformation wird von *E. Müller,* Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 25 (1917), p. 209 unter der Bezeichnung *axiale Inversion* studiert, und zwar unter Anwendung auf die Theorie der Schraubenflächen. Ist eine feste Gerade g gegeben, so werden zwei Punkte P und P' als homolog bezeichnet, wenn die Gerade PP' die Gerade g im rechten Winkel schneidet und das Produkt der Abstände von P und P' von g konstant ist. Vgl. auch *L. Eckhart,* Sitzungsb. Ak. Wien 131 (1922), p. 417; *K. Strubecker*[770]), p. 574.

Liegen bei der Konstruktion des Textes die Achsen der drei Büschel im einen und im anderen Raume in einer Ebene, so erhalten wir die *tetraedrale* Transformation, von der in kurzem die Rede sein wird und die auf diese Weise von *G. Silldorf,* Ztschr. Math. Phys. 18 (1873), p. 523 untersucht wird.

705) Proc. London math. Soc (2) 9 (1911), p. 51; (2) 10 (1912), p. 15; (2) 22 (1924), Notes and Abstracts, p. II; (2) 23 (1924), Notes and Abstracts, p. XXVII; *A. Čech,* Časopis 50 (1921), p. 243.

706) Diese Transformation wird zuerst von *L. I. Magnus*[665]), p. 403—407 betrachtet. Über die gleiche Transformation, besonders im Falle, daß die zwei Tetraeder zusammenfallen und daher die Transformation involutorisch wird, s. noch *E. Beltrami,* Giorn. di mat. (1) 1 (1863), p. 208, 354 = Opere 1, Milano 1902, p. 73; Mem. Acc. Bologna (3) 7 (1876), p. 241 = Opere 3, Milano 1911, p. 52; *E. v. Hunyady,* Ztschr. Math. Phys. 11 (1866), p. 356; *C. F. Geiser,* J. f. Math. 69 (1868), p. 199; *F. E. Eckardt,* Progr. Reichenbach 1869; Math. Ann. 5 (1871), p. 30; *S. Lie,* Gött. Nachr. 1870, p. 56; *F. Klein* und *S. Lie,* Paris C. R. 70 (1870), p. 1222, 1275 = *F. Klein,* Ges. math. Abh. 1, Berlin 1921, p. 415; *M. Noether,*

Systeme sind aus kubischen Flächen gebildet, die in den Ecken dieser Tetraeder 4 Doppelpunkte haben und daher durch deren Kanten hindurchgehen. Entsprechen den Ecken A, B, C, D die Flächen $B'C'D'$, $A'C'D'$, $A'B'D'$, $A'B'C'$, so entsprechen den Flächen BCD, ACD, ABD, ABC die Ecken A', B', C', D', und den Kanten AB, $AC, \ldots$ die Kanten $C'D'$, $B'D', \ldots$, und diese Kanten sind außerordentliche Hauptkurven der beiden Räume. Zwei Flächen des einen homaloiden Systems schneiden sich weiter in einer dem diesbezüglichen Tetraeder umbeschriebenen kubischen Raumkurve. Die zweimal gezählten Flächen dieses Tetraeders bilden die *Jacobi*sche Fläche des Systems. Legen wir

---

Math. Ann. 3 (1870), p. 566; *G. Silldorf* [704]; *F. Lindemann,* Math. Ann. 7 (1873), p. 87, 95 ff.; *S. Kantor,* Sitzungsb. Ak. Wien 79 (1879), p. 780; Paris C. R. 90 (1880), p. 1156; [700], p. 8; Acta math. 21 (1896), p. 1; *E. Amigues,* Nouv. Ann. de math. (2) 18 (1879), p. 548; (2) 19 (1880), p. 433, 481; *P. H. Schoute,* Bull. Sciences math. (2) 6 (1882), p. 177 (Transformation durch symmetrische Ebenen in bezug auf die Halbierungs-Ebenen der Dieder eines Tetraeders); *W. Fiedler* [596], p. 185—191; *S. Lie* und *G. Scheffers* [562] 1, p. 342—355, 365—367; *E. Torroja* [596]; Unbekannt, Nouv. Ann. de math. (4) 1 (1901), p. 97; *W. Fr. Meyer,* Arch. Math. Phys. (3) 3 (1902), p. 170; (3) 5 (1903), p. 168; (3) 8 (1903), p. 135; Verh. des dritten intern. Math.-Kongr. in Heidelberg 1904 (Leipzig 1905), p. 322; Monatsh. Math. Phys. 18 (1907), p. 138; *H. Berger,* Diss. Straßburg 1903; *V. Eberhard.* Monatsh. Math. Phys. 17 (1906), p. 305; *Th. Reye,* „Die Geom. d. Lage" [565] 3, 4. Aufl., Leipzig 1910, p. 234—237 (ein metrischer Sonderfall, daselbst 2, p. 313—319); *K. Doehlemann,* „Geom. Transf." 2, p. 296—297; *J. de Vries,* Ak. Amsterdam Versl. (4) 17 (1908), p. 2; *R. Sturm,* „Geom. Verw." 4, p. 388—390; *G. Bordiga* [922], p. 50—52; *H. E. Timerding,* Arch. Math. Phys. (3) 20 (1911), p. 98; *V. Obešlo,* Časopis 44 (1915), p. 208; *L. Godeaux,* Mathesis 36 (1922), p. 19; Bull. Ac. sc. Belgique (5) 9 (1923), p. 377; (5) 12 (1927), p. 892; (5) 16 (1930), p. 907; *H. F. Baker,* „Princ. of geom." [46] 3, p. 139, 142—145; *A. Staempfli,* Diss. Zürich 1924; Enseign. math. 24 (1925), p. 127; *J. P. Gabbatt,* Proc. London math. Soc. (2) 24 (1924), p. 158; *R. Vaidyanathaswamy,* J. Indian math. Soc. 17 (1927), Suppl.; Proc. Cambridge Phil. Soc. 24 (1928), p. 578; *Hilda P. Hudson,* „Cremona transf.", p. 301—302; *K. Strubecker* [770], p. 550.

Im Falle wo die Transformation $x_i' = \frac{1}{x_i}$ involutorisch ist, sind zwei Punkte konjugiert, wenn sie die beiden Brennpunkte einer die vier Flächen des Tetraeders berührenden Rotationsfläche 2. Ordnung sind, und sie sind konjugierte Punkte in bezug auf die Flächen 2. Ordnung, die durch die acht Mittelpunkte der dem Tetraeder einbeschriebenen Kugeln gehen. S. hierüber besonders die aufgeführten Arbeiten von *C. F. Geiser* und von *W. Fr. Meyer,* bei dem letzteren auch Anwendungen auf die Tetraedergeometrie.

S. Kantor, Paris C. R. 90 (1880), p. 1156, bestimmt insbesondere die Anzahl der Zyklen von gegebenem Index für eine reguläre Transformation. Die Formel wird in allgemeinerer Form und für den r-dimensionalen Raum in Anm. 894 angegeben werden. Über die Erweiterung der Transformation auf die höheren Räume s. *E. Beltrami,* a. a. O., und *J. P. Gabbatt,* a. a. O., und speziell die Anführungen von Nr. **91.**

die beiden Tetraeder zugrunde, so wird die Transformation durch die Formeln

$$x_i' = \frac{1}{x_i} \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

ausgedrückt.

In einem weiteren Sonderfalle entsprechen sich je zwei konjugierte Punkte in bezug auf alle Flächen 2. Grades eines Netzes, so daß die drei bilinearen Gleichungen symmetrisch sind und die Transformation involutorisch wird. Dieser Spezialfall wurde von *E. E. Bobillier*[707]) und *L. I. Magnus*[708]) behandelt, dann von *L. O. Hesse*[709]) bei Untersuchungen über die Doppeltangenten einer allgemeinen ebenen Kurve 4. Ordnung [III C 5 (*G. Kohn*), Nr. **65, 66, 69**], von *J. Steiner*[710]) und anderen.[711])

Besteht das Netz der Flächen 2. Ordnung aus den Flächen, die ein gegebenes Pol-Tetraeder gemein haben, so wird die Transformation *tetraedral.*

Von vielen Autoren ist auch der Sonderfall studiert, daß das Netz aus den durch eine kubische Raumkurve hindurchgehenden Flächen 2. Ordnung gebildet wird, so daß sich die Hauptraumkurve 6. Ordnung auf die doppelt zählende kubische Raumkurve reduziert.[712]) Je zwei

707) Ann. math. pures appl. 18 (1827—28), p. 268—269.

708) S. [665]), p. 370—376, 403—407.

709) J. f. Math. 49 (1853), p. 279 = Werke, München 1897, p. 345.

710) Ber. Ak. Berlin 1856, p. 52 = J. f. Math. 53 (1857), p. 135 = Werke 2, Berlin 1882, p. 652—653.

711) *C. F. Geiser,* Vierteljahrsschr. Naturf. Ges. Zürich 10 (1865), p. 226; J. f. Math. 69 (1868), p. 197; *R. Sturm,* „Synthetische Unters." [59]), p. 28—44; J. f. Math. 70 (1868), p. 212; „Geom. Verw." 3, p. 412—413, 416—417, 488—490; 4, p. 406—414; *J. Johannes,* Diss. Tübingen 1889; *D. Montesano,* Atti Acc. Torino 27 (1892), p. 1053; Roma Rend. Acc. Linc. (5) 1^2 (1892), p. 77; *F. R. Sharpe* und *V. Snyder,* Trans. Amer. math. Soc. 25 (1923), p. 1 [Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 28 (1922), p. 379]; *L. Godeaux,* Bull. Ac. sc. Belgique (5) 13 (1927), p. 114; *J. Lairesse,* Mém. Soc. sc. Liège (3) 14 (1928), Nr. 18; *F. R. Sharpe,* Amer. J. of math. 53 (1931), p. 358. S. außerdem *K. Doehlemann,* „Geom. Transf." 2, p. 300—301; *Th. Reye,* „Die Geom. d. Lage" [706]) 3, p. 134—139; *G. Salmon* und *W. Fiedler,* „Analytische Geometrie des Raumes", herausg. von *K. Kommerell,* 1, 5. Aufl., Leipzig-Berlin 1922, p. 534—538; *Hilda P. Hudson,* „Cremona transf.", p. 303—305.

Die Typen dieser Involutionen bei *F. R. Morris,* Math. Publ. Univ. of California 1 (1920), p. 223.

Eine kubische Involution zwischen Ebenen bei *H. J. van Veen,* Nieuw Archief voor Wiskunde (2) 11 (1914), p. 127.

712) *L. Cremona,* Ann. di mat. (1) 1 (1858), p. 164, 278; (1) 2 (1858), p. 19; J. f. Math. 58 (1860), p. 138; Nouv. Ann. de math. (2) 1 (1861), p. 287, 366, 436 = Opere 1, p. 39, 70, 224; 2, p. 16; *K. G. Chr. v. Staudt,* „Beiträge" [596]), 3. Heft,

entsprechende Punkte liegen auf einer Sehne der kubischen Raumkurve und trennen die beiden Stützpunkte der Sehne harmonisch. Den Ebenen des Raumes entsprechen kubische Flächen, die durch die kubische Raumkurve hindurchgehen und in jedem Punkte dieser Kurve die zugehörige Schmiegungsebene berühren. Die der kubischen Raumkurve entsprechende Hauptfläche ist ihre Tangentenfläche.

82. **Nichtinvolutorische oder involutorische monoidale Transformationen.** *M. Noether*[713]) und *R. de Paolis*[714]) studieren die *monoidalen Transformationen*[715]), bei denen das homaloide System jedes Raumes aus Flächen n^{ter} Ordnung (Monoiden) mit einem gemeinsamen $(n-1)$-fachen Punkt (mit veränderlichem Tangentenkegel) und einer gemeinsamen irreduziblen oder reduziblen Raumkurve der Ordnung $n(n-1)$ gebildet wird, die in dem genannten Punkte die Multiplizität $(n-1)(n-2)$ hat. Zwei Flächen des Systems schneiden sich weiter in einer ebenen Kurve n^{ter} Ordnung mit der Multiplizität $n-1$ in diesem Punkte. Bezeichnen wir mit O den Hauptpunkt und mit Γ die Hauptkurve des ersten Raumes, so besteht die *Jacobi*sche Fläche des zugehörigen homaloiden Systemes aus dem Kegel der Ordnung $2(n-1)$, der Γ aus O projiziert, und einer doppelt zählenden Fläche der Ordnung $n-1$, die durch Γ hindurchgeht und in O die Multiplizität $n-2$ hat.[716])

Nürnberg 1860, p. 321; *R. Sturm,* J. f. Math. 70 (1868), p. 238; „Geom. Verw.“ 4, p. 408—411; *C. F. Geiser,* J. f. Math. 69 (1868), p. 215; *W. Fr. Meyer,* „Apolarität“ [57]), p. 59—61; *A. Cantone,* Rend. Acc. Napoli (1) 25 (1886), p. 181; Rend. Circ. mat. Palermo 1 (1886), p. 72; *Th. Reye,* Mitt. math. Ges. Hamburg 2 (1890), p. 52 ff.; „Die Geom. d. Lage“ [565]) 2, p. 180—190; *P. H. Schoute,* Handelingen van het Ned. Natuur- en Gene Congres 7, Harlem (1894), p. 258 = Nieuw Archief voor Wiskunde (2) 4 (1899), p. 90; *Ch. Bioche,* Bull. Soc. math. de France 26 (1898), p. 217 [Auszug Paris C. R. 125 (1897), p. 15]; *M. W. Haskell,* Amer. math. Monthly 10 (1903), p. 1; *St. Jolles,* J. f. Math. 130 (1905), p. 270; *G. Fano,* Roma Rend. Acc. Linc. (6) 9 (1929), p. 16; Atti del Congresso intern. dei matem. Bologna 1928, 4 (Bologna 1931), p. 42.

713) Math. Ann. 3 (1870), p. 578.

714) Giorn. di mat. (1) 13 (1875), p. 226, 282.

715) S. noch *K. Doehlemann,* Diss. München 1889; „Geom. Transf.“ 2, p. 317—319; *U, Perazzo*[454]), p. 175; *O. Chisini*[665]), p. 27; *F. Enriques* und *O. Chisini,* „Lezioni“ 2, p. 581—584; *Hilda P. Hudson,* „Cremona transf.“, p. 306—318.

716) Den Ebenen durch O entsprechen die Ebenen eines anderen Bündels. *L. Bianchi,* Giorn. di mat. (1) 16 (1878), p. 265, bemerkt, daß die hier betrachteten Transformationen die einzigen birationalen Transformationen sind, bei denen den Ebenen eines gegebenen Bündels die Ebenen eines bestimmten Bündels entsprechen.

Ein aus Monoiden gebildetes homaloides System, in dem der veränderliche Teil des Tangentenkegels nur eine Ebene ist, traf *G. Fano,* Mem. Acc. Torino (2)

Insbesondere werden die homaloiden monoidalen Systeme studiert, die frei von Basiskurven sind, die also (s. Anm. 664) nur den Scheitel und eine gewisse Anzahl einfacher Punkte gemeinsam haben, wobei sich die Monoide in einigen von ihnen berühren. Es gibt zwei Arten dieser Systeme, je nachdem die sie zusammensetzenden Monoide im gemeinsamen Scheitel den gleichen Tangentenkegel haben oder nicht.

Mit den monoidalen Systemen 2. Art beschäftigt sich *Margherita Beloch*[717]) und findet, daß die Ordnung dieser Systeme 4 nicht übersteigen kann, und daß sie Transformationen der folgenden Typen veranlassen:

1. (2, 4)-Transformation, bestimmt durch die Flächen 2. Ordnung, die durch 4 feste Punkte hindurchgehen und in einem von ihnen eine feste Tangentialebene besitzen;

2. (3, 9)-Transformation, bestimmt durch die Flächen 3. Ordnung mit einem gemeinsamen Doppelpunkt, drei gemeinsamen einfachen Punkten und einer Berührung 3. Ordnung in einem dieser Punkte;

3. (4, 16)-Transformation, bestimmt durch die Flächen 4. Ordnung, die einen gemeinsamen dreifachen Punkt und in einem anderen gemeinschaftlichen einfachen Punkt eine Berührung 5. Ordnung haben.[718])

Die homaloiden monoidalen (von Hauptkurven freien) Systeme der 1. Art können dagegen beliebige Ordnung haben. Für jedes n existieren nach *D. Montesano*[719]) ebenso viele Typen homaloider monoidaler Systeme dieser Art und der Ordnung n, wie Typen homaloider Netze von ebenen Kurven n^{ter} Ordnung.[720])

---

48 (1898), p. 229 bei Untersuchungen über die kontinuierlichen Gruppen birationaler Transformationen des Raumes an.

717) S. Anm. 663, p. 61—64.

718) Ein weiterer Beweis dieses Satzes bei *A. Tummarello,* Rend. Acc. Napoli (3) 17 (1911), p. 427; Auszug Atti Soc. ital. per il progresso delle scienze, 4ª riunione, Napoli 1910 (Roma 1911), p. 733, der auch den Typus 3 genauer untersucht.

Über den Typus 1 s. Anm. 665. Der Typus 2 wird schon von *L. Cremona,* Rend. Ist. Lomb. (2) 4 (1871), p. 279 = Opere 3, p. 249 betrachtet.

719) In Vorlesungen an der Universität Neapel 1909—10; vgl. Giorn. di mat. (3) 1 (1910), p. 173 und auch *A. Tummarello*[718]). S. noch *P. Burniat,* Bull. Ac. sc. Belgique (5) 18 (1932), p. 223.

720) Diese Systeme und die durch sie bestimmten Transformationen werden von *A. Tummarello*[718]) studiert, der mit Hilfe der monoidalen (n, n^2)-Transformationen der einen und der anderen Art auch neue Typen rationaler, von *endlichen* vielfachen Kurven freier Flächen und neue von *endlichen* Hauptkurven freie homaloide Systeme ableitete. Beide Typen sind aber im allgemeinen mit Punkten bzw. Hauptpunkten nicht gewöhnlicher Singularität ausgestattet, so daß sich also in ihrer Umgebung eine vielfache Infinitesimalkurve bzw. eine (einfache

Die involutorischen monoidalen Transformationen, bei denen also den Ebenen des Raumes Monoide M n^{ter} Ordnung entsprechen, werden von *D. Montesano*[721]) bestimmt und studiert, der zeigt, daß es nur 4 Typen dieser Transformationen geben kann. Ist nämlich O der gemeinsame Scheitel der Monoide M, so müssen den Geraden durch O Gerade entsprechen, die eine Kongruenz Q 1. Ordnung bilden und jede Fläche M in nur je einem Punkte schneiden, der kein Hauptpunkt ist. Hiernach ergeben sich die vier folgenden Typen:

a) Die Kongruenz Q fällt mit dem Bündel O zusammen und dann entsprechen sich die Strahlen durch O bei der Transformation zu je zweien in einer involutorischen Korrespondenz K.

b) Die Kongruenz Q hat als Leitkurven eine von O ausgehende und für die Monoide M $(n-2)$-fache Gerade d und eine rationale Raumkurve m^{ter} Ordnung, die für die Monoide M einfach ist und d in $m-1$ Punkten trifft, im allgemeinen aber nicht durch O hindurchgeht.

c) Die Kongruenz Q besteht aus den Geraden eines Bündels, dessen Mittelpunkt in einem anderen, für die Monoide M $(n-1)$-fachen Punkte P liegt. Die Gerade OP ist für diese Monoide $(n-2)$-fach.

d) Die Kongruenz Q besteht aus den Sehnen einer kubischen Raumkurve, die für die Monoide M (notwendig 3. Ordnung) einfach ist.[722])

oder vielfache) infinitesimale Hauptkurve befindet [nach Benennungen von *C. Segre,* Ann. di mat. (2) 25 (1896), p. 1].

A. Tummarello, Note e Mem. Circ. Mat. Catania 1 (1921), p. 289 studiert auch die Transformationen, die durch homaloide Systeme von Monoiden bestimmt sind, die im Scheitel eine Berührung 2. Ordnung haben. Diese Transformationen wendet er auf die ebene Abbildung gewisser rationaler Flächen n^{ter} Ordnung mit einem $(n-2)$-fachen Punkte oder auch der Ordnung $3n$ mit einem $3(n-1)$-fachen Punkte an.

A. Tummarello, a. a. O., p. 282 untersucht auch eine $(n, 2n-3)$-Transformation vom Geschlecht $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, bei der das homaloide System des ersten Raumes aus Monoiden n^{ter} Ordnung, das des zweiten Raumes aus Flächen der Ordnung $2n-3$ mit einer gemeinsamen $(n-2)$-fachen kubischen Raumkurve gebildet ist, ferner eine $(2n+1, 2n+1)$-Transformation vom Geschlecht $\frac{n(n+1)}{2}$, bei der jedes der beiden homaloidischen Systeme aus Flächen der Ordnung $2n+1$ mit einer gemeinsamen n-fachen kubischen Raumkurve besteht.

721) Rend. Ist. Lomb. (2) 21 (1888), p. 579, 684. S. auch *V. Snyder,* Ann. of math. (2) 25 (1924), p. 279 [Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 30 (1924), p. 209], wo die Gleichungen der vier Typen gegeben werden. S. auch *F. R. Sharpe,* Ann. of math. (2) 31 (1929), p. 633; Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 36 (1930), p. 187.

722) Die Transformationen vom Typus a) lassen sich durch birationale Transformationen auf vier Typen zurückzuführen, bei denen die Involution K

83. Nichtinvolutorische oder involutorische birationale Transformationen, die durch irgendwelche Eigenschaften des Systems der Verbindungsgeraden der homologen Punkte gekennzeichnet sind. Die Verbindungsgeraden der homologen Punkte einer birationalen (n, n')-Transformation zwischen zwei überlagerten Räumen bilden im allgemeinen einen Komplex (der rational ist, wenn die Transformation nicht involutorisch ist) vom Grade $n + n'$, der aber n^{ten} Grades ist, wenn die Transformation involutorisch ist.[723])

Es kann aber vorkommen, daß diese Geraden nur ∞^2 sind, also eine Kongruenz bilden.[724]) *R. de Paolis*[725]) bestimmt alle involutori-

---

eine der vier Involutionen von Nr. 61 ist. *D. Montesano*[721]) findet weiter, daß alle involutorischen Transformationen des Raumes von der Ordnung > 3, bei denen zwei Geradenkongruenzen 1. Ordnung einander entsprechen, durch birationale Transformationen auf die involutorischen monoidalen Transformationen der vier beschriebenen Typen zurückgeführt werden können.

Die Fälle, in denen K die Identität oder eine harmonische Homologie ist, werden schon von *V. Martinetti,* Rend. Ist. Lomb. (2) 18 (1885), p. 132 behandelt.

Über den Typus a) s. auch *K. Doehlemann,* Diss. München 1889, p. 10—14.

Beim Typus d) sind die Monoide M 3. Ordnung und gehen durch eine kubische Raumkurve C und eine ebene kubische Kurve H einfach hindurch; die Kurve C geht durch O hindurch, H hat in O einen Doppelpunkt, endlich C und H zwei weitere gemeinschaftliche Punkte.

Eine monoidale Involution 6. Ordnung vom Typus a) betrachtet *V. Snyder,* Giorn. di mat. (3) 14 (1922), p. 125, der sie aus der Betrachtung der allgemeinen kubischen Hyperfläche des vierdimensionalen Raumes ableitet.

M. M. Torrey, Amer. J. of math. 47 (1926), p. 181 klassifiziert die monoidalen Involutionen, bei denen alle Monoide einen festen Tangentenkegel im gemeinsamen Scheitel haben.

723) Unter den Annahmen von Nr. 75 wird der Komplex von *M. Pannelli,* Giorn. di mat. (1) 28 (1888), p. 245 studiert, der jedoch irrigerweise von zwei Komplexen spricht. In einigen Sonderfällen der (3, 3)-Transformation bei *E. Ascione*[704]), p. 79; *F. R. Sharpe* und *V. Snyder,* Trans. Amer. math. Soc. 25 (1923), p. 1; *A. Emch,* Amer. J. of math. 41 (1926), p. 21; *F. R. Sharpe,* ebenda 53 (1931), p. 358.

Die involutorischen Raumtransformationen in Beziehung zu dem genannten Komplex studiert *G. Aprile,* Catania Atti Acc. Gioenia (5) 18 (1932), Nr. XX. Er hat auch einige Kongruenzen von Kurven konstruiert, die autokonjugiert in der gegebenen Involution sind, und viele spezielle Fälle betrachtet, besonders die notwendigerweise rationalen Involutionen, deren zugehörige Komplexe Örter von ∞^1 Bündeln sind.

724) *W. Vogt,* Jahresb. math. Sektion Schles. Ges. für vaterl. Kultur, Breslau 84 (1906), p. 8 betrachtet *Cremona*sche, insbesondere kubische Transformationen, bei denen die Verbindungslinien der homologen Punkte eine lineare Kongruenz bilden oder durch ein und denselben Punkt hindurchgehen, und bezeichnet sie als *windschiefe* bzw. *zentrale* Transformationen. Vgl. auch *R. Sturm,* „Geom. Verw." 4, p. 390—391.

725) Roma Rend. Acc. Linc. (4) 1 (1885), p. 735, 754. Einige dieser Transformationen auch bei *E. Ascione,* Rend. Acc. Napoli (3) 2 (1896), p. 13.

schen Transformationen, für die dies zutrifft. Da die genannte Kongruenz offenbar 1. Ordnung ist, so zerfallen diese Involutionen in drei Typen, je nachdem die Strahlen der Kongruenz ein Bündel oder die Sehnen einer kubischen Raumkurve bilden oder Gerade sind, die eine feste Gerade und eine die Gerade in $n-1$ Punkten schneidende Kurve n^{ter} Ordnung treffen.[726])

Von den Involutionen des zweiten Typus ist eine zuerst von *C. F. Geiser*[727]) studierte Involution 7. Ordnung beachtenswert, die durch sechs in allgemeiner Lage im Raume gegebene Punkte A_1, $A_2, \ldots, A_6$ bestimmt wird. Der korrespondente Punkt eines beliebigen Punktes P ist der weitere gemeinsame Punkt der ∞^2 Flächen 2. Ordnung, die durch $A_1, A_2, \ldots, A_6$ und P hindurchgehen.[728]) Einer Geraden entspricht eine Kurve 7. Ordnung, die in den Punkten A_i

---

726) Zum ersten Typus gehört die von *Fr. Deruyts,* Mém. Soc. sc. Liège (2) 14 (1887), Nr. 5, p. 8 betrachtete kubische Involution, die folgendermaßen konstruiert wird. Es sei ein Büschel von Flächen 2. Ordnung gegeben sowie ein Punkt O, der nicht auf der Grundkurve liegt. Als homologen Punkt eines Punktes P wählen wir den weiteren Schnittpunkt der Geraden OP mit der durch P gehenden Fläche 2. Ordnung des Büschels.

Ebenfalls vom ersten Typus ist die Transformation *arguésienne* von *L. Saltel,* Mém. cour. et autres mém. publiés par l'Ac. de Belgique, Coll. in —8°, Bruxelles 22 (1870), Nr. 5, p. 40, eine Erweiterung der arguésienne der Ebene.[625]) Diese Transformation erhält man ausgehend von zwei Flächen 2. Ordnung und einem Punkte; sie ist im allgemeinen 3. Ordnung. S. darüber *Fr. Deruyts,* Mém. Soc. sc. Liège (2) 14 (1887), Nr. 5; *L. Godeaux,* Bull. Ac. sc. Belgique 1907, p. 28, 359; Nouv. Ann. de math. (4) 8 (1908), p. 69; Mém. et publ. Soc. sc. Hainaut (7) 1 (1910), p. 1, der die Transformation auch dadurch verallgemeinert, daß er die beiden Flächen 2. Ordnung nicht mit den Geraden eines Bündels, sondern mit den Geraden einer linearen Kongruenz schneidet; außerdem *Hilda P. Hudson,* „Cremona transf.", p. 322.

Kubische Involutionen vom dritten Typus, bei denen die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte einer linearen Kongruenz angehören, bei *F. Aschieri,* Mem. Acc. Bologna (3) 10 (1879), p. 549; *F. Chizzoni,* Roma Rend. Acc. Linc. (4) 2^1 (1886), p. 470, 476; *A. del Re,* Giorn. di mat. (1) 28 (1890), p. 270; [877]), p. 31.

727) Erste Anführung in Anm. 711 und J. f. Math. 67 (1866), p. 83. S. außerdem *R. Sturm,* Math. Ann. 1 (1869), p. 558ff.; „Geom. Verw." 4, p. 414—419; *V. Eberhard,* Diss. Breslau 1885, wo man p. 58—60 die Zerlegbarkeit der Verwandtschaft in drei kubische Verwandtschaften beweist; *M. Bernhard*[28]), p. 15—17; *E. Ascione*[725]); *Ch. H. van Os,* Ak. Amsterdam Versl. (4) 24 (1915), p. 116; *G. Fontené,* Nouv. Ann. de math. (4) 15 (1915), p. 515; *G. Humbert,* daselbst (4) 16 (1916), p. 133; *R. Bricard,* daselbst (4) 16 (1916), p. 171; *B. Gambier,* Ann. Éc. Norm. (3) 41 (1924), p. 259; *Hilda P. Hudson,* „Cremona transf.", p. 323—325. Eine Erweiterung bei *J. de Vries,* Ak. Amsterdam Versl. (4) 21 (1913), p. 1269.

728) Über die lineare Konstruktion dieses Punktes s. III C 2 (*O. Staude*), Nr. 132.

sechs Doppelpunkte hat; einer Ebene eine Fläche 7. Ordnung, die in den Punkten A_i vierfache Punkte hat, durch die 15 Gerade $A_i A_k$ einfach hindurchgeht, und die durch die Punkte A_i bestimmte kubische Raumkurve Γ als dreifache Kurve hat. Die Transformation hat nur diese 16 Hauptkurven, die alle außerordentlich sind, da jede mit jedem ihrer Punkte konjugiert ist.

Die *Jacobi*sche Fläche des homaloiden Systems besteht aus den sechs je zweimal gezählten Kegeln 2. Ordnung, deren Spitzen die Punkte A_i sind und die durch die anderen fünf Punkte (und deswegen auch durch Γ) hindurchgehen. Jeder dieser Kegel ist die der zugehörigen Spitze entsprechende Fläche.

Die Involution besitzt als Ort der Doppelpunkte eine Fläche K, die die *Jacobi*sche Fläche des linearen ∞^3-Systems der durch die Punkte A_i hindurchgehenden Flächen 2. Ordnung ist, also der Ort der Spitzen aller durch diese Punkte hindurchgehenden Kegel 2. Ordnung [*Weddle*sche Fläche. Siehe III C 2 (*O. Staude*), Nr. **141**; III C 10b (*W. Fr. Meyer*), Nr. **60**, **64**—**66**]. Sie ist 4. Ordnung, hat in den Punkten A_i Doppelpunkte, geht durch Γ, durch die 15 Geraden $A_i A_k$ und die 10 Geraden hindurch, in denen sich die durch je zwei komplementäre Tripel von Punkten A_i bestimmten Paare von Ebenen schneiden; der Tangentenkegel dieser Fläche in A_i projiziert Γ von A_i aus.

Die Verbindungsgeraden der Paare entsprechender Punkte sind die Sehnen von Γ; genauer existieren auf jeder dieser Sehnen unendlich viele derartige Paare, die (eines von diesen Paaren besteht aus den Stützpunkten der Sehne mit Γ) eine Involution bilden, deren Doppelpunkte die weiteren Schnittpunkte der Sehne mit K sind.

Die Aufgabe der Bestimmung aller involutorischen oder nicht involutorischen birationalen Korrespondenzen (wenn solche existieren), die zu einem Komplex vorher festgelegter Beschaffenheit führen (unter der Annahme, daß ein allgemeiner Strahl des Komplexes ein und nur ein Paar homologer Punkte enthält), wurde für einige Sondertypen von Komplexen gelöst und weist wesentliche Unterschiede auf, je nachdem es sich um involutorische oder nicht involutorische Korrespondenzen handelt.

M. Pieri[729]) und *D. Montesano*[730]) behandeln die Aufgabe für den Fall, daß der genannte Komplex aus Geraden besteht, die ein und dieselbe Fläche berühren. Von diesen Transformationen gibt es zwei Typen, die auf folgende Weise erhalten werden können.

729) Giorn. di mat. (2) 2 (1894), p. 167.

730) Rend. Acc. Napoli (3) 13 (1907), p. 256. Die Bestimmung von *M. Pieri* enthält Lücken und Ungenauigkeiten, die von *D. Montesano* berichtigt wurden.

a) Ist im Raume eine lineare Kongruenz von Kegelschnitten gegeben [also ein algebraisches ∞^2-System von Kegelschnitten derart, daß ein einziger Kegelschnitt durch einen allgemeinen Punkt des Raumes geht: s. III C 9 (*K. Rohn* und *L. Berzolari*), Nr. **45**, **74**], die auf den Hüllebenen einer Fläche F einer Klasse > 1 liegen, so bezeichnen wir zwei Punkte als entsprechend, die sich auf ein und demselben Kegelschnitt der Kongruenz befinden und mit dem Berührungspunkt der Kegelschnittebene mit F auf einer Geraden liegen. Auf diese Weise entsteht eine birationale involutorische Korrespondenz, die den Komplex der Tangenten von F erzeugt.[731])

b) Sind zwei Geradenkongruenzen 1. Ordnung (die keine Bündel sind, deren beide Leitgerade im übrigen aber voneinander verschieden sind oder zusammenfallen) durch eine birationale Korrespondenz T derart aufeinander bezogen, daß zwei homologe Strahlen immer in einer Ebene liegen, und die so resultierenden Ebenen eine Fläche F einer Klasse > 1 einhüllen, so bezeichnen wir zwei Punkte als korrespondent, wenn sie zwei in T homologen Strahlen der gegebenen Kongruenzen angehören und mit dem Berührungspunkt der Ebene der beiden Strahlen mit F auf einer Geraden liegen. Die sich auf diese Weise ergebende birationale Korrespondenz erzeugt den Komplex der Tangenten von F.[732])

D. Montesano bestimmt alle involutorischen[733]) und nicht involutorischen[734]) Transformationen, die einen nicht speziellen linearen Komplex erzeugen. Im allgemeinsten Falle haben die ersten dieser Transformationen die Ordnung 11 und werden durch eine Raumkurve Γ der Ordnung 10 und vom Geschlecht 11 vollständig bestimmt, die insofern von besonderer Beschaffenheit ist, als sie mit einer auf einer Fläche 2. Ordnung liegenden Raumkurve 6. Ordnung vom Geschlecht 3 die Basis eines Büschels von Flächen 4. Ordnung bildet, oder, was dasselbe ist, als diese Raumkurve Γ von jeder Ebene des Raumes in 10 Punkten einer Kurve 3. Ordnung geschnitten wird [vgl. III C 9 (*K. Rohn* und *L. Berzolari*), Nr. **70**]. Durch die Kurve Γ gehen ∞^4 Flächen 4. Ordnung hindurch, und die ∞^3 durch einen Punkt P gehenden Flächen gehen auch durch einen zweiten Punkt P'. Die Punkte P

731) Die Korrespondenzen dieses ersten Typus waren schon bekannt. Siehe *D. Montesano*, Rend. Ist. Lomb. (2) 26 (1893), p. 602—603.

732) *D. Montesano*[730]) gibt auch an, welche unter den Korrespondenzen vom Typus b) involutorisch sind.

733) Roma Rend. Acc. Linc. (4) 4^1 (1888), p. 207, 277. Konstruktionen einiger Fälle bei *A. del Re*, Giorn. di mat. (1) 28 (1890), p. 269.

734) Rend. Acc. Napoli (2) 2 (1888), p. 181. Vgl. auch *M. Pieri*, Rend. Circ. mat. Palermo 6 (1892), Anm. auf p. 234—235.

und P' entsprechen sich in der gesuchten Involution. Die Kurve Γ ist eine dreifache Hauptkurve für die Transformation; die anderen Hauptkurven sind 20 Strahlen des Komplexes, die Γ in je vier Punkten schneiden.

Die einen nicht speziellen linearen Komplex K erzeugenden nicht involutorischen Transformationen sind im allgemeinsten Falle 6. Ordnung und werden durch ein beliebiges Paar von Raumkurven C und C' 5. Ordnung vom Geschlecht 1, deren sämtliche Trisekanten in K liegen, vollständig bestimmt. Die Kurven C und C' sind zweifache Hauptkurven in den bezüglichen Räumen; im ersten Raume gibt es noch eine einfache Hauptkurve, die eine Raumkurve Γ 10. Ordnung vom Geschlecht 1 ist, die C in 25 Punkten schneidet und der elliptischen Regelfläche 5. Grades der Trisekanten von C' als Leitkurve angehört. Die vier Hauptkurven C, C', Γ, Γ' liegen auf ein und derselben Fläche 4. Ordnung, der Koinzidenzfläche der Transformation. Damit zwei Kurven 5. Ordnung vom Geschlecht 1 eine Transformation von der betrachteten Beschaffenheit erzeugen, ist notwendig und hinreichend, daß sie auf ein und derselben Fläche 4. Ordnung liegen und auf dieser korresidual sind.

Die allgemeinsten auf einen speziellen linearen Komplex bezüglichen involutorischen oder nicht involutorischen Transformationen werden von *M. Pieri*[735]) angegeben. Auch sie besitzen die Eigenschaft, durch eine bzw. zwei auf den gegebenen Komplex bezügliche Kurven vollständig bestimmt zu werden, ihre Ordnung kann jedoch beliebig hoch sein.[736])

735) Rend. Circ. mat. Palermo 6 (1892), p. 234. Ein Sonderfall bei *E. Ascione*[725]). Über den Fall, wo die Transformation quadratisch ist, vgl. auch *F. Aschieri*, Rend. Ist. Lomb. (2) 21 (1888), p. 216, 285, 446.

736) Die auf einen speziellen oder nicht speziellen linearen Komplex bezüglichen involutorischen Transformationen wurden von *H. A. Davis*, Amer. J. of math. 52 (1930), p. 53 analytisch untersucht; die involutorischen auf einen speziellen linearen Komplex bezüglichen von *H. A. Davis* und *Tyr. Davis*, Tôhoku math. J. 33 (1931), p. 254 [Auszug Japanese J. of math. 8 (1932), Abstracts, p. (14)]; vgl. noch *Evelyn Teresa Carroll*, Amer. J. of math. 54 (1932), p. 707; die nicht involutorischen auf einen speziellen linearen Komplex bezüglichen von *H. A. Davis*, Amer. J. of math. 53 (1931), p. 72 [vgl. Bull. Amer. math. Soc. (2) 35 (1929), p. 456].

Involutorische Transformationen, die einen speziellen oder nicht speziellen linearen Komplex erzeugen derart, daß jede Gerade des Komplexes mehrere Paare von konjugierten Punkten enthält, finden sich bei *D. Montesano*, Ann. di mat. (3) 1 (1898), p. 348; *V. Snyder*[722]); Bull. Amer. math. Soc. (2) 34 (1928), p. 405; (2) 36 (1930), p. 89 [vgl. *L. A. Dye*[751]), p. 261] und 188; Atti del Congresso intern. dei matem. Bologna 1928, 4 (Bologna 1931), p. 13.

D. Montesano[737]) bestimmt auch alle Involutionen, die einen nicht ausgearteten tetraedralen Komplex erzeugen. Im allgemeinsten Falle hat die Transformation die Ordnung 19 und wird durch eine Kurve Γ 11. Ordnung vom Geschlecht 14 vollständig bestimmt, die mit einer in 18 Punkten Γ treffenden Raumkurve C 5. Ordnung vom Geschlecht 2 die Basis eines Büschels von Flächen 4. Ordnung bildet. Die Kurve Γ ist eine fünffache Hauptkurve für die Transformation und wird von jeder Fläche des Haupttetraeders des Komplexes außer in den drei auf der Fläche gelegenen Ecken des Tetraeders in acht auf einem Kegelschnitt liegenden Punkten geschnitten. Die sich auf diese Weise ergebenden 4 Kegelschnitte sind zweifache Hauptkurven der Transformation. Die weiteren (einfachen) Hauptkurven sind 35 Gerade des Komplexes, die Γ in je vier Punkten schneiden.

Reduziert sich der tetraedrale Komplex auf die Gesamtheit aller einen nicht ausgearteten festen Kegelschnitt K schneidenden Geraden, so erhalten die diesbezüglichen Transformationen vom allgemeinen Falle völlig verschiedene Charaktere. Derartige nicht involutorische und involutorische Transformationen wurden von *M. Pieri*[738]) angegeben. Im ersten Falle wird die Transformation durch zwei elliptische Raumkurven Γ, Γ' 5. Ordnung, die K in je 5 Punkten schneiden, vollständig bestimmt. Die Transformation und ihre Inverse sind 12. Ordnung, K ist sechsfache Hauptkurve für beide, Γ bzw. Γ' sind dreifache Hauptkurven. Die Transformation besitzt noch weiter eine einfache, Γ in 25 Punkten und K in 15 Punkten treffende Hauptkurve der Ordnung 15 vom Geschlecht 1.

Für den involutorischen Fall ist die Transformation durch eine Kurve Γ der Ordnung 13 vom Geschlecht 14 völlig bestimmt, die in 13 Punkten K trifft, aber auf keiner Fläche 4. Ordnung liegt, deren K doppelter Kegelschnitt ist. Die Transformation hat die Ordnung 28, K als 14-fache und Γ als 5-fache Hauptkurve und besitzt außerdem 39 einfache Hauptgerade, die K schneidende Trisekanten von Γ sind.

---

737) Roma Rend. Acc. Linc. (4) 5^1 (1889), p. 497. Vgl. auch Rend. Ist. Lomb. (2) 25 (1892), p. 808. S. auch *D. Montesano,* Atti Acc. Napoli (2) 15 (1913), Nr. 8, p. 53—54, der beweist, daß die hier studierte Involution die einzige ist, die derart auf einen bilinearen Komplex von Kegelschnitten vom allgemeinsten Typus bezogen werden kann, daß jedes Paar der Involution je einem Kegelschnitt des Komplexes angehört [vgl. III C 9 (*K. Rohn* und *L. Berzolari*), Nr. 74]. Weiter studiert dieselbe Involution *L. Godeaux,* Bull. Ac. sc. Belgique (5) 17 (1931), p. 516.

738) Rend. Circ. mat. Palermo 7 (1893), p. 296. Ein Sonderfall des involutorischen Falles früher in Atti Acc. Torino 24 (1889), p. 514.

M. Pieri[739]) untersucht die Involutionen, die durch den speziellen, aus den Verbindungsgeraden der reziproken Punkte zweier voneinander verschiedener, miteinander korrelativer Ebenen bestehenden quadratischen Komplex bestimmt werden.[740]) Es existieren drei Typen dieser Involutionen, von den Ordnungen 10, 13, 16, die auf jeweils vier Arten durch Büschel von invarianten Flächen 2., 3., 4. Ordnung konstruiert werden können; aber obwohl der betrachtete Komplex den tetraedralen Komplex als Sonderfall einschließt, kann auch nicht eine dieser Involutionen für irgendwelche beliebige Spezialisierungen ihrer Hauptkurven in die allgemeinste aller durch einen tetraedralen Komplex bestimmten Involutionen verwandelt werden.

Grazia Macrina Caldarera[741]) bestimmt alle auf eine kubische Raumkurve bezüglichen nicht involutorischen und involutorischen Transformationen. Im allgemeinsten Falle sind die ersteren, wie auch deren inverse, von der Ordnung 15, und besitzen die kubische Raumkurve als 7-fache Hauptkurve; die letzteren sind von der Ordnung 27 und haben die kubische Raumkurve als 13-fache Hauptkurve (im einen wie im anderen Falle mit weiteren Hauptkurven).

Zu einer weiteren Kategorie von Involutionen gelangt *D. Montesano*[742]) beim Studium des linearen ∞^2-Systems S von Kegelschnitten, die als Schnitte der Ebenen eines Bündels vom Mittelpunkt O mit den

---

739) Rend. Ist. Lomb. (2) 25 (1892), p. 1037. Hier wird eine hyperräumliche Methode [s. III C 7 (*C. Segre*), Anm. 66] verwandt, die zur Bestimmung und zum Studium (vgl. *M. Pieri*, a. a. O., p. 1059—1060) der involutorischen oder nicht involutorischen birationalen Transformationen, die auf einen gegebenen Geradenkomplex bezug haben, dienen kann, wenn dieser Komplex als Projektion eines Geradenkomplexes 1. Ordnung des vierdimensionalen Raumes erhalten werden kann, d. h. eines derartigen ∞^3-Systems von Geraden, daß durch einen allgemeinen Punkt eine einzige Gerade hindurchgeht. Dies kann z. B. auf den Fall des quadratischen Komplexes angewandt werden, dessen singuläre Fläche eine *Steiner*sche Fläche ist.

740) Dieser Komplex pflegt als *Hirst*scher Komplex bezeichnet zu werden, da er von *T. A. Hirst,* Collectanea math. in mem. D. Chelini, Milano 1881, p. 51 [1879]; Proc. London math. Soc. (1) 10 (1879), p. 131 ausführlich studiert wurde. Vgl. auch *R. Sturm,* „Die Gebilde"[40]) 3, p. 427—433. S. III C 8 (*K. Zindler*), Nr. **40** e).

741) Rend. Circ. mat. Palermo 18 (1903), p. 205. — Über die Involutionen, bei denen die Verbindungsgeraden der konjugierten Punkte eine Kurve von größerer als der 9. Ordnung treffen, vgl. *D. Montesano,* Giorn. di mat. (1) 31 (1892), p. 46—47. — *A. H. Black,* Trans. Amer. math. Soc. 34 (1932), p. 795 [Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 38 (1932), p. 490] studiert Typen von involutorischen Raumtransformationen, bei denen die Verbindungsgeraden der konjugierten Punkte eine gegebene rationale Kurve treffen.

742) Atti Acc. Torino 27 (1892), p. 660.

Flächen 2. Ordnung eines auf das Bündel projektiv bezogenen Netzes erhalten werden. Alle diese Kegelschnitte treffen in sechs Punkten eine feste Raumkurve 7. Ordnung vom Geschlecht 5, die durch O hindurchgeht und das System S dadurch vollständig bestimmt, daß die durch sie hindurchgehenden kubischen Flächen ein Netz und die Kegelschnitte von S die residualen Basiskurven der in dem Netze enthaltenen ∞^2 Büschel bilden. Umgekehrt liegen die in sechs Punkten eine Raumkurve 7. Ordnung vom Geschlecht 5 schneidenden Kegelschnitte in Ebenen, die durch einen festen Punkt O der Kurve gehen und auf unendlich viele Arten als Schnitte dieser Ebenen mit einem zu dem Bündel O homographischen Netze von Flächen 2. Ordnung erhalten werden können.[743]) *D. Montesano* studiert die Involutionen, in denen jeder Kegelschnitt des Systems S invariant ist und zeigt, daß jede Involution, in der die Paare konjugierter Punkte auf den Strahlen eines Komplexes n^{ter} Ordnung liegen, der die Strahlen eines Bündels als $(n-1)$-fache Strahlen besitzt, im allgemeinen dem vorhergehenden Typus angehört, d. h. ein Netz invarianter kubischer Flächen zuläßt, das als Basis eine Kurve C 7. Ordnung vom Geschlecht 5 besitzt.[744])

Die vorhergehenden Untersuchungen legen die Frage nahe, ob ein gegebener algebraischer Geradenkomplex immer aus den Verbindungsgeraden der korrespondierenden Punkte einer birationalen Transformation des Raumes bestehen kann. Diese Frage muß verneinend beantwortet werden, denn *D. Montesano*[745]) bewies, daß der allgemeinste Komplex zweiten Grades eine derartige Erzeugung nicht zuläßt, daß vielmehr auf diese Weise nur die ein Geradenbündel besitzenden quadratischen Komplexe sowie die quadratischen Komplexe erzeugt werden

---

743) Vgl. III C 9 (*K. Rohn* und *L. Berzolari*), Nr. **70**. — Über dieses Kegelschnittsystem s. auch *R. Sturm*, „Synth. Unters.“ [59]), p. 229—234; *D. Montesano*, Roma Rend. Acc. Linc. (4) 4^1 (1888), p. 213.

744) Im allgemeinen Falle (wenn also diese Kurve C irreduzibel ist und durch O einfach hindurchgeht) existiert keine birationale Korrespondenz, die die Kegelschnitte von S in die Geraden eines Bündels transformiert. *D. Montesano* betrachtete einen Fall, bei dem dagegen diese Korrespondenz existiert. Dies ist der Fall, bei dem die kubischen Flächen des Netzes, das die Kurve C als Basiskurve besitzt, mit einem Doppelpunkt ausgestattet sind. Dieser Punkt fällt dann mit dem Mittelpunkt O des oben betrachteten Bündels zusammen und ist einer von den Basispunkten eines jeden Netzes von Flächen 2. Ordnung, das das System S erzeugt, so daß er also allen Kegelschnitten von S angehört und für C dreifach ist; diese Kurve wird so vom Geschlecht 3 und hat mit jedem Kegelschnitte von S außer O weitere vier Punkte gemein.

Allgemeinere Lehrsätze bei *D. Montesano*, Rend. Ist. Lomb. (2) 26 (1893), p. 602—604.

745) Rend. Ist. Lomb. (2) 25 (1892), p. 795. Vgl. noch *G. Aprile*[723]), p. 8.

können, die ein (und daher auch zwei) einfach unendliche Systeme linearer Kongruenzen besitzen.

D. Montesano hat auch die Konstruktion der allgemeinsten involutorischen und nicht involutorischen Transformationen, die die erwähnten zwei Typen von Komplexen erzeugen, durchgeführt.[746])

Insbesondere existiert nur ein einziger Typus von nicht involutorischen und ein einziger Typus von involutorischen Korrespondenzen, die einen quadratischen Komplex mit linearen Kongruenzen erzeugen.

Die nicht involutorische Transformation ist eine (5, 5)-Transformation, deren Hauptkurven in beiden Räumen eine dreifache Gerade, eine einfache, in 4 Punkten die Gerade schneidende Raumkurve der Ordnung 6 vom Geschlecht 1 und eine einfache, in 4 Punkten die Gerade und in 8 Punkten die Kurve 6. Ordnung schneidende rationale Raumkurve 5. Ordnung sind.

Im involutorischen Falle hat die Transformation die Ordnung 13, eine Raumkurve 4. Ordnung erster Art als fünffache Hauptkurve, eine in 16 Punkten die vorhergehende Kurve schneidende Raumkurve 10. Ordnung als zweifache Hauptkurve, und 16 einfache Hauptgerade.

84. Andere besondere birationale involutorische oder nichtinvolutorische Transformationen. Es gibt drei Typen von Transformationen des Geschlechts Null (Nr. 73)[747]):

a) die (2, 4)-Transformationen, deren erstes homaloides System aus Flächen 2. Ordnung, deren zweites aus *Steiner*schen Flächen zusammengesetzt ist (Typus 3 von Nr. 77);

b) die (4, 4)-Transformationen, bei denen jedes der beiden homaloiden Systeme aus *Steiner*schen Flächen zusammengesetzt ist, die die drei Doppelgeraden und drei Punkte gemeinsam haben;

c) die Transformationen, deren erstes homaloides System aus Regelflächen m^{ten} Grades mit einer $(m - 1)$-fachen geradlinigen Leitkurve, deren zweites aus Regelflächen n^{ten} Grades mit einer $(n - 1)$-fachen geradlinigen Leitkurve zusammengesetzt ist.

Die Typen a) und b) sind die einzigen, die durch eine *Steiner*sche Fläche erzeugt werden können.[748])

---

746) Im Falle eines quadratischen Komplexes mit einem Bündel sind außer den von *D. Montesano*[745]) betrachteten Korrespondenzen noch zwei andere möglich. S. *M. Pieri*[739]) und *D. Montesano,* Atti Acc. Napoli (2) 15 (1913), Nr. 8, p. 43, Fußnote.

747) *G. Loria,* Anm. 640.

748) Der Typus b) wird von *L. Cremona,* Rend. Ist. Lomb. (2) 4 (1871), p. 321 = Opere 3, p. 256 betrachtet; ausführlicher und mit Anwendungen von *G. Aprile,* Note e Mem. Circ. mat. Catania 1 (1921), p. 245.

Was den Typus c) anbetrifft, so sind die einzigen Regelflächen n^{ten} Grades, die einem homaloiden System angehören können, die Regelflächen mit einer $(n-1)$-fachen geradlinigen Leitkurve.

Hauptelemente für die Transformationen vom Typus c) sind (außer der vielfachen Leitkurve) nur einfache Punkte und einfache Gerade; die Anzahl der Hauptpunkte des einen Raumes ist gleich der Anzahl der (einfachen) Hauptgeraden des anderen Raumes.[749])

Einen Sonderfall der Transformationen c) bilden die *konischen Transformationen*, bei denen sich die genannten Regelflächen also auf Kegel reduzieren. Es ergibt sich[750]), daß nur ein einziges homaloides System von Kegeln n^{ter} Ordnung existiert, und dies ist aus allen Kegeln n^{ter} Ordnung mit veränderlichem Scheitel gebildet, die eine $(n-1)$-fache Erzeugende und längs dieser die $n-1$ Tangentialebenen gemeinsam haben und außerdem durch $n-1$ gegebene Punkte einfach hindurchgehen.

D. Montesano[751]) bestimmt die Involutionen, bei denen die den Ebenen des Raumes entsprechenden Flächen n^{ter} Ordnung Regelflächen mit einer $(n-1)$-fachen gemeinschaftlichen Geraden sind.

Außer diesen und den quadratischen Involutionen (Nr. 78) existiert nur noch eine einzige Kategorie von Involutionen vom Geschlecht Null, die Kategorie, bei der den Ebenen des Raumes *Steiner*sche Flächen entsprechen.[752]) Diese Transformationen werden von *D. Montesano*[753]) studiert, der feststellt, daß es nur zwei Typen dieser Transformationen gibt. Beim ersten Typus gibt es einen Fixpunktkegel 2. Ordnung und eine isolierte Fixpunktgerade; beim zweiten Typus einen Fixpunktkegelschnitt und einen isolierten Fixpunkt. Sowohl beim einen wie beim anderen Typus existiert eine lineare Kongruenz invarianter Kegelschnitte. Die Verbindungsgeraden der konjugierten

749) Die Transformationen c) und ihre Haupteigenschaften finden sich schon früher bei *C. Segre,* Atti Acc. Torino 21 (1885), p. 115. Ein Sonderfall bei *U. Perazzo*[454]), p. 171.

750) *M. Pieri,* Riv. di mat. 3 (1893), p. 44. — Für $n=2$ ergibt sich der Sonderfall 1e) der in Nr. 77 erwähnten quadratischen Transformation. Hierüber und über den Fall n beliebig s. *P. del Pezzo*[668]), der auch die Erweiterung auf die Überräume gibt. Für beliebiges n s. noch *L. Conte,* Giorn. di mat. (3) 21 (1930), p. 121 und für $n=2$ noch *L. Conte,* ebenda (3) 23 (1932), p. 83.

751) Rend. Ist. Lomb. (2) 21 (1888), p. 688. Auf analytischem Wege auch *L. A. Dye,* Trans. Amer. math. Soc. 32 (1930), p. 251; Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 36 (1930), p. 217.

752) Diese sind nicht in den monoidalen Involutionen (Nr. 82) enthalten, da man bei diesen annimmt, daß dem gemeinschaftlichen Scheitel eine Fläche entspricht, was im Falle *Steiner*scher Flächen nicht mehr zutrifft.

753) Rend. Ist. Lomb. (2) 30 (1897), p. 563.

Punktepaare bilden im ersten Falle einen speziellen linearen Komplex, im zweiten Falle einen kubischen rationalen Komplex.

Außer den monoidalen Transformationen vom Typus a) in Nr. 82 existieren nur noch zwei weitere Familien von Involutionen einer Ordnung > 1, die die Eigenschaft besitzen, eine Geradenkongruenz in sich zu verwandeln, die Involutionen nämlich, bei denen den Ebenen des Raumes Flächen n^{ter} Ordnung mit einer $(n-2)$-fachen Geraden oder auch Flächen der Ordnung $2n+1$ entsprechen, die durch eine n-fache Raumkurve 4. Ordnung erster Art hindurchgehen.

Diese beiden Familien werden von *D. Montesano* studiert.[754]) Die erste Involution besitzt außer der $(n-2)$-fachen Geraden eine einfache, in $3n-7$ Punkten die Gerade treffende Hauptkurve der Ordnung $3n-4$ vom Geschlecht $3n-7$. Die Kongruenz, die durch die Involution in sich transformiert wird, ist diejenige, die als Leitkurven die beiden Hauptkurven hat. Die zweite Involution besitzt als Hauptkurven außer der n-fachen Raumkurve 4. Ordnung $2n$ einfache Gerade, die Sehnen dieser Kurve sind, und transformiert die Kongruenz der Sehnen der Kurve selbst in sich.[755])

Die birationalen Transformationen vom Geschlecht 1 werden von *Grazia Nobile*[756]) angegeben.

754) Roma Rend. Acc. Linc. (4) 5^2 (1889), p. 123; bzw. Giorn. di mat. (1) 31 (1892), p. 36. Ein Hinweis auf die erste schon bei *L. Cremona,* Gött. Nachr. 1871, p. 148; Math. Ann. 4 (1871), p. 225 = Opere 3, p. 271. S. darüber auch *F. R. Sharpe,* Ann. of math. (2) 31 (1929), p. 637; Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 36 (1930), p. 191.

Ein homaloides System, das aus den Flächen n^{ter} Ordnung gebildet ist, die durch $3(n-3)$ allgemeine Punkte und durch vier zu je zweien windschiefe Gerade [von denen drei einfach sind und die vierte $(n-2)$-fach ist] hindurchgehen, bei *G. Marletta,* Rend. Circ. mat. Palermo 49 (1925), p. 259.

755) Diese Eigenschaft erlaubt, die Konstruktion der genannten Involution auf die Konstruktion der umkehrbar eindeutigen involutorischen Transformationen auf den kubischen elliptischen Kegeln zurückzuführen, die die Erzeugenden dieses Kegels zu je zweien einander entsprechen lassen.

Für $n = 5$ wird einer der von *D. Montesano* für die hier betrachteten Involutionen gefundenen Typen die von *M. Pieri,* Atti Acc. Torino 24 (1889), p. 514 untersuchte Involution 11. Ordnung; s. Anm. 738.

756) Giorn. di mat. (3) 12 (1921), p. 147. Zwei Typen der genannten Transformationen sind diejenigen, die durch eine Fläche 4. Ordnung mit Doppelkegelschnitt oder durch eine Fläche 5. Ordnung mit einer dreifachen und zwei zueinander windschiefen und die erste schneidenden Doppelgeraden bestimmt werden. Die Transformationen vom ersten dieser beiden Typen finden sich bei *Giovannina Aroldi,* Giorn. di mat. (3) 11 (1920), p. 175; die vom zweiten bei *Nicoletta Berardi,* daselbst (3) 14 (1923), p. 109.

Die Involutionen, bei denen den Ebenen des Raumes Flächen 4. Ordnung mit doppeltem Kegelschnitt entsprechen, wurden von *H. Pelzner,* Diss. München

Hazel Edith Schoonmaker[757]) bestimmt alle nicht monoidalen, involutorischen birationalen Transformationen mit einer Kongruenz invarianter Kegelschnitte.

L. Godeaux[758]) erweitert den Begriff der ebenen Transformationen von *de Jonquières* (Nr. **51**) dadurch auf den Raum, daß er die Transformationen studiert, die zwei gegebene Ebenenbüschel projektiv und zwei gegebene lineare Geradenkongruenzen birational ineinander transformieren.

Andere Klassen birationaler Transformationen bei *M. Noether*[759]), *Clara Moffa, V. Snyder*[760]), *D. W. Babbage*[761]), *J. O. Osborn*[762]), *F. R. Sharpe*[763]) und anderen.[764]) S. weiterhin Nr. **86, 96, 97**.

1913 studiert. S. auch *L. A. Dye* und *F. R. Sharpe,* Amer. J. of math. 54 (1932), p. 499; Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 38 (1932), p. 31.

757) Amer. J. of math. 51 (1927), p. 439; Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 34 (1928), p. 11.

758) Preisschrift[99]). Erweiterung bei *N. Dohogne,* Mém. Soc. sc. Liège (3) 14 (1928), Nr. 20.

759) Math. Ann. 3 (1870), p. 561 und 570. Bei einer dieser Transformationen wird eines der beiden homaloiden Systeme von Flächen der Ordnung $2r-s+1$ gebildet, die eine $(2r-s)$-fache Gerade g, $3r-2s$ einfache Geraden, die g aber nicht einander schneiden, und weitere s einfache Punkte gemeinsam haben; das andere setzt sich aus Flächen der Ordnung $r+1$ zusammen, die eine r-fache Gerade h, s einfache Gerade, die h schneiden, untereinander aber windschief sind, und $3r-2s$ einfache Punkte gemeinsam haben. Bei einer zweiten Transformation wird eines der homaloiden Systeme von Flächen der Ordnung $2n+1$ gebildet, die eine n-fache Kurve 4. Ordnung erster Art und $2n$ feste Sehnen dieser Kurve als einfache Gerade gemeinsam haben; das andere System hat die gleiche Beschaffenheit.

760) *Clara Moffa,* Diss. Napoli 1921; *V. Snyder,* Amer. J. of math. 46 (1924), p. 131, wo die mit einem linearen ∞^3-System (Gebüsch) invarianter kubischer Flächen ausgestatteten Involutionen studiert werden. — *V. Snyder,* Ann. of math. (2) 26 (1925), p. 165 [Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 30 (1924), p. 393] studiert die nicht monoidalen Involutionen, für die jedes Monoid eines Gebüsches invariant ist.

761) Proc. Cambridge Phil. Soc. 27 (1931), p. 404, wo die Involutionen gegeben werden, die durch Gebüsche kubischer Flächen bestimmt werden, die frei von singulären Punkten sind.

762) Amer. J. of math. 46 (1924), p. 17, wo die Involutionen studiert werden, die ein Gebüsch invarianter Flächen 6. Ordnung besitzen.

763) Bull. Amer. math. Soc. (2) 32 (1926), p. 7, wo Involutionen mit einem Gebüsch rationaler invarianter Flächen betrachtet werden.

764) *E. Ascione,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 6^1 (1897), p. 162, 240; *A. Tummarello,* Giorn. di mat. (3) 11 (1920), p. 60; *Grazia Nobile,* daselbst (3) 13 (1922), p. 23; *E. J. Purcell,* Bull. Amer. math. Soc. (2) 38 (1932), p. 636.

Illuminata Vagliasindi, Catania Atti Acc. Gioenia (5) 18 (1932), Nr. XXII, bestimmt die birationalen Transformationen, die entstehen, wenn man in einem

Unter den vielen anderen, von verschiedenen Autoren[765]) studierten Sonderfällen verweisen wir besonders auf eine Involution 15. Ordnung,

---

Raum S_4 die Punkte einander entsprechen läßt, in denen die Strahlen eines ∞^3-Strahlensystems 1. Ordnung [III C 7 (*C. Segre*), Nr. **45**] zwei gegebene Hyperebenen treffen.

Als birationale involutorische Transformation 4. Ordnung zwischen den Veränderlichen n, d, r und n', d', r' deutete *S. Kantor,* Atti Ist. Ven. (8) 3 (1901), p. 769 die *Plücker*schen Formeln [III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. 8 und Anm. 92], und erweiterte in analoger Weise diese Interpretation auch auf die *Cayley*schen Formeln für die algebraischen Raumkurven [III C 9 (*K. Rohn* und *L. Berzolari*), Nr. **17** und Anm. 84]. Vgl. auch *J. L. Coolidge,* „Alg. pl. curves", p. 101—102.

765) *L. Cremona,* Rend. Ist. Lomb. (2) 4 (1871), p. 321—323 = Opere 3, p. 256—258 untersucht (4, 4)-, (4, 5)-, (4, 7)- und (5, 7)-Transformationen; Trans. Ir. Ac. Dublin 28 (1884), p. 279 = Opere 3, p. 461 eine (4, 6)-Transformation; Proc. London math. Soc. (1) 15 (1884), p. 242 = Opere 3, p. 465, eine (5, 6)-Transformation.

R. Sturm, Math. Ann. 12 (1877), p. 292, 330, 335 ff.; „Geom. Verw." 2, p. 338—341; 4, p. 397—398, 423—424 erhält bei dem Problem der Korrelation von Bündeln und beim Studium von kollinearen Räumen (9, 9)- und (11, 11)-Transformationen.

Eine Involution 4. Ordnung, die als einfache Hauptkurven eine rationale Raumkurve 4. Ordnung, einen Kegelschnitt und zwei Gerade und eine zweifache Hauptgerade hat, findet *F. Aschieri,* Mem. Ist. Lomb. (3) 5 (1881), p. 254—255, 262—263 [1879] beim Studium einer Abbildung eines linearen Geradenkomplexes auf den gewöhnlichen Raum.

Verschiedene spezielle Transformationen findet *S. Kantor,* Anm. 627, p. 97 beim Studium der linearen Systeme linearer Transformationen im Raume.

D. Montesano, Mem. Acc. Bologna (5) 3 (1893), p. 549 studiert den kubischen (rationalen) Komplex, der durch die Erzeugenden der Flächen 2. Ordnung eines allgemeinen Netzes gebildet wird, und gibt zwei Typen umkehrbar eindeutiger, perspektivischer Abbildungen dieses Komplexes auf den Punktraum an. Als Produkte dieser Korrespondenzen erhält er verschiedene birationale Korrespondenzen des Raumes, die spezielle (3, 3)-, (5, 5)-, (7, 7)-, (7, 13)- usw. Korrespondenzen und eine Involution 9. Ordnung sind und alle die Eigenschaft besitzen, daß je ein Paar korrespondierender Punkte auf den Geraden des Komplexes liegt. Über denselben Komplex s. *L. Godeaux,* Bull. Ac. sc. Belgique (5) 16 (1930), p. 570.

Eine spezielle Involution 7. Ordnung, die das Produkt der in Anm. 770 erwähnten birationalen Nullreziprozität 7. Grades und einer mit dieser Nullreziprozität vertauschbaren Nullpolarität ist, bei *D. Montesano,* Ann. di mat. (3) 1 (1898), p. 348. Über diese s. ferner *V. Snyder,* Ann. of math. (2) 31 (1929), p. 335.

Zwei Involutionen der Ordnungen 9 und 11, begleitet von Nullreziprozitäten (Nr. 85), gaben *V. Snyder* und *Hazel Edith Schoonmaker,* Amer. J. of math. 54 (1932), p. 299 [Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 37 (1931), p. 834] an.

A. B. Coble, Amer. J. of math. 41 (1919), p. 243; Trans. Amer. math. Soc. 24 (1922), p. 1; „Alg. geom.", p. 233, betrachtet verschiedene Involutionen, die ein *Symmetroid* [III C 10b (*W. Fr. Meyer*), Nr. **62**] in sich transformieren.

Andere spezielle Transformationen bei *G. Bordiga,* Atti Ist. Ven. (6) 6 (1888), p. 958; *U. Perazzo*[454]), p. 178—182; *G. Scorza,* Ann. di mat. (3) 15 (1908), die als eine Erweiterung der ebenen Involution d) von Nr. **61** auf den Raum betrachtet werden darf. Sie wurde von *S. Kantor*[766]) und weiter von *J. R. Conner*[767]) studiert, in Verbindung mit den Thetafunktionen vom Geschlecht 3 aber früher schon von *F. Schottky*[768]) untersucht. Die einer Ebene entsprechende Fläche besitzt 7 achtfache Punkte, geht dreimal durch die Verbindungsgerade je zweier dieser Punkte und einmal durch die durch je sechs dieser Punkte bestimmten kubischen Raumkurven hindurch. Sind im Raume 7 Punkte in allgemeiner Lage gegeben, so gibt es ∞^6 Flächen 4. Ordnung, für die diese Punkte Doppelpunkte sind, und diejenigen unter ihnen, die durch einen gegebenen Punkt P hindurchgehen, enthalten noch einen weiteren Punkt P'. Die betrachtete Involution ist diejenige, in der P und P' konjugiert sind.

85. Birationale Raumreziprozitäten; Nullreziprozitäten. Eine birationale Transformation zwischen einem Punkt- und einem Ebenenraum heißt *birationale Reziprozität.* Sie kann immer als das Produkt einer *Cremona*schen Korrespondenz und einer gewöhnlichen Raumkorrelation[769]) aufgefaßt werden.

Eine birationale Reziprozität wird als *Nullreziprozität* bezeichnet, wenn jeder Punkt auf der entsprechenden Ebene liegt.

Das Produkt einer Nullreziprozität und einer gewöhnlichen Raumkorrelation K ist eine birationale Korrespondenz, bei der zwei homo-

---

p. 248—250; *J. R. Conner,* Trans. Amer. math. Soc. 13 (1910), p. 270; *L. Godeaux,* Nouv. Ann. de math. (4) 11 (1911), p. 1; Bull. Ac. sc. Belgique (5) 16 (1930), p. 762; *F. R. Sharpe* und *F. M. Morgan,* Ann. of math. (2) 15 (1912), p. 84; *J. F. Tinto,* Proc. Edinburgh math. Soc. 34 (1916), p. 133; 36 (1917), p. 17; *C. H. van Os,* Ak. Amsterdam Versl. (4) 27 (1919), p. 337; *Hilda P. Hudson,* „Cremona transf.", p. 325—328.

766) Amer. J. of math. 19 (1895), p. 24.

767) Amer. J. of math. 38 (1916), p. 155.

768) J. f. Math. 105 (1889), p. 269. S. auch *A. B. Coble,* „Alg. geom.", p. 161—186, 228—233.

769) Zwei birationale (3, 3)- und (11, 11)-Reziprozitäten findet *G. Lazzeri,* Roma Mem. Acc. Linc. (4) 4 (1887), p. 259 beim Studium der linearen Systeme bilinearer Konnexe von Punkten und Ebenen. Eine (3, 3)-Reziprozität bei *G. Bordiga*[594]), p. 82—84.

H. Guradze, Arch. Math. Phys. (3) 4 (1901), p. 288 studiert die kubische Reziprozität, bei der einem Punkte die Ebene entspricht, die durch die Fußpunkte der von diesem Punkte auf drei gegebene, zu je zweien windschiefe Gerade gefällten Lote bestimmt ist.

Ch. François, Mém. Soc. sc. Liège (3) 9 (1912), Nr. 4 und *T. Ôta* (= *T. Takasu*)[580]) studieren die kubische Reziprozität, bei der einem Punkte die Ebene entspricht, die durch die Fußpunkte der von diesem Punkte auf die Kanten eines Trieders gefällten Lote hindurchgeht.

loge Punkte in K reziprok sind, und umgekehrt. Daher kann die Bestimmung der Nullreziprozitäten des Raumes auf die Bestimmung der birationalen Korrespondenzen zurückgeführt werden, in denen zwei beliebige homologe Punkte reziprok bezüglich einer gewöhnlichen Raumkorrelation sind, oder auch speziell auf die Bestimmung der birationalen Korrespondenzen, die einen linearen Komplex erzeugen (Nr. **83**).

Im Gegensatz zur Ebene (Nr. **59**) gibt es im Raume daher unendlich viele Nullreziprozitäten jeder gegebenen Ordnung.[770]) Diese werden von *D. Montesano*[771]) betrachtet, der insbesondere die Null-

770) In Verbindung mit der Theorie der Differentialgleichungen 1. Ordnung und der Flächentheorie *A. Voss,* Math. Ann. 16 (1880), p. 556; 23 (1883), p. 45, 359.

Eine höhere Nullreziprozität untersucht erstmalig *L. Cremona,* Paris C. R. 54 (1862), p. 604 = Opere 2, p. 11 beim Studium der abwickelbaren Flächen 5. Ordnung. Die von ihm nur ausgesprochenen Sätze werden von *N. S. Dino,* Giorn. di mat. (1) 3 (1865), p. 100, 133 auf analytischem Wege, von *E. d'Ovidio,* daselbst, p. 107, 184, 214 auf geometrischem Wege bewiesen.

Eine durch eine gewöhnliche Raumkorrelation bestimmte Nullreziprozität 3. Ordnung wird von *R. Sturm,* Math. Ann. 19 (1881), p. 477—478 und 482—483 betrachtet; weitere von *S. Kantor*[627]), p. 115—116 [vgl. Math. Ann. 20 (1882), p. 297] und *G. Lazzeri*[769]), p. 266, der jedoch hier und auch schon Roma Rend. Acc. Linc. (4) 2^2 (1886), p. 73 daran festhielt, daß es im Raume keine weiteren Nullreziprozitäten gibt.

Die Nullreziprozitäten 2. Ordnung wurden von *A. Ameseder,* J. f. Math. 97 (1883), p. 62 studiert.

Beispiele quadratischer und kubischer Nullreziprozitäten bei *C. J. Kluyver,* Ak. Amsterdam Versl. (3) 8 (1891), p. 41 = Harlem Arch. Néerl. des sciences 25 (1891), p. 70; *E. Meyer,* Math. Ann. 60 (1904), p. 242; *R. Sturm,* „Geom. Verw." 3, p. 161—163; 4, p. 463 ff. Metrisch spezielle quadratische Nullreziprozitäten bei *Th. Schmid,* Monatsh. Math. Phys. 8 (1897), p. 267; *H. E. Timerding,* Ann. di mat. (3) 2 (1898), p. 239. Eine kubische Nullreziprozität, die in dem Studium der nicht-euklidischen Schraubungen sich vorfindet, bei *K. Strubecker,* Sitzungsb. Ak. Wien 140 (1931), p. 545.

D. Montesano, Ann. di mat. (3) 1 (1898), p. 346—355 trifft beim Studium des Problemes der Projektivität für Gruppen von linearen Geradenkomplexen auf eine Nullreziprozität, die im allgemeinen vom 7. Grade ist. Sind fünf lineare Geradenkomplexe und eine Gruppe von 5 Elementen eines Grundgebildes erster Stufe gegeben, die auf die 5 Komplexe bezogen sind, so korrespondieren in dieser Nullreziprozität ein Punkt und eine Ebene, wenn sie Mittelpunkt bzw. Ebene eines Geradenbüschels sind, in dem die 5 Geraden der gegebenen Komplexe eine zur gegebenen projektive Gruppe bilden. — Diese Nullreziprozität kann in Sonderfällen niedrigeren Grades sein. Beachtenswert ist die dem einzigen Typus der Nullreziprozität der Ebene (Nr. **59**) analoge Nullreziprozität 3. Grades mit Haupttetraeder, bei der den Ecken eines bestimmten Tetraeders die Ebenenbündel entsprechen, deren Mittelpunkte bzw. mit diesen Ecken zusammenfallen. Die gleiche kubische Nullreziprozität findet *C. Segre,* Rend. Circ. mat. Palermo 44 (1920), p. 139 beim Studium der alternierenden bilinearen Konnexe von Geradenpaaren.

771) Roma Rend. Acc. Linc. (4) 4^1 (1888), p. 583.

reziprozitäten konstruiert, bei denen die den Ebenenbündeln des einen Raumes entsprechenden Flächen des anderen Raumes die Eigenschaft besitzen, von jeder Geraden einer gewissen Kongruenz 1. Ordnung in nur einem, für die Kongruenz nicht singulären Punkte geschnitten zu werden.[772])

Erweiterungen Nr. **99**.

86. Produkte von birationalen Raumtransformationen. Endliche und unendliche diskontinuierliche Gruppen solcher Transformationen. In der Theorie der *Cremona*schen Raumtransformationen existiert kein Analogon des Satzes von Nr. **57**, nach dem jede ebene *Cremona*sche Transformation das Produkt einer endlichen Anzahl quadratischer Transformationen ist.

Hilda P. Hudson[773]) zeigt, daß es kein System von endlich vielen birationalen Transformationen der Art gibt, daß jede andere birationale Transformation als Produkt dieser Transformationen betrachtet werden darf.

Hierüber wie auch über die periodischen Transformationen und die endlichen oder unendlichen diskontinuierlichen Gruppen birationaler Transformationen existieren nur Sonderuntersuchungen und Sonderergebnisse. Das Problem der Typen (im Sinne von Nr. **61**) wurde dagegen für die kontinuierlichen Gruppen birationaler Raumtransformationen (Nr. **87**) gelöst.

Margherita Beloch[774]) beweist, daß eine birationale Transformation der Ordnung $n = 4k + r$ (wo $r = 0, 1, 2, 3$), deren Hauptkurve maximaler Multiplizität eine Raumkurve 6. Ordnung vom Geschlecht 3 mit der Multiplizität $\geqq k + 1$ [Typus a) von Nr. **76**] ist, das Produkt einer (3, 3)-Transformation und einer Transformation niedrigerer Ordnung als n ist.

Die quadratischen, vor allen die periodischen (2, 2)-Transformationen in einem Raume beliebiger Dimension (Nr. **89**) werden von

---

772) *A. del Re,* Rend. Acc. Napoli (3) 18 (1912), p. 296 studiert die Nullreziprozitäten, bei denen die genannten Flächen Monoide sind.

773) Rend. Circ. mat. Palermo 35 (1913), p. 286; „Cremona transf.", p. 358—359, 383—385. Diese Eigenschaft leitet sich aus der Bemerkung ab, daß die Konstruktion birationaler Transformationen mit einer Hauptkurve von beliebigem, vorher festgelegtem Geschlechte möglich ist, daß weiterhin eine birationale Transformation, die das Produkt zweier anderer Transformationen T_1 und T_2 ist, Hauptkurven besitzt, deren Geschlechter gleich denen der Hauptkurven von T_1 und T_2 sind.

774) S. Anm. 663, p. 64. — Ein Hinweis auf Reduktion von involutorischen birationalen Raumtransformationen bei *Esther Mc Cormick,* Bull. Amer. math. Soc. (2) 38 (1932), p. 488.

S. Kantor[775]) studiert; er untersucht[776]) auch die birationalen Transformationen, die als Produkte einer endlichen Anzahl von Kollineationen und dieser quadratischen Transformationen erhalten werden können[777]) und gibt die Typen an, auf die sich die periodischen unter diesen Transformationen und die aus ihnen gebildeten endlichen diskontinuierlichen Gruppen birational reduzieren lassen.

S. Kantor[778]) behandelt nach verschiedenen Methoden in analoger Weise wie für die entsprechenden Fragen der Ebene (Nr. **60, 61**) auch die periodischen kubischen (3, 3)-Transformationen, und zwar sowohl im allgemeinsten Falle, in dem die Hauptkurve 6. Ordnung irreduzibel, wie auch in dem spezielleren Falle, in dem die Transformation tetraedral ist (Nr. **81**), und gibt die Typen an, auf die diese birational zurückgeführt werden können.

S. Kantor[779]) studiert ferner die Produkte mehrerer tetraedraler Transformationen und zeigt, daß diese Produkte nur die von ordentlichen Hauptkurven freien, birationalen Transformationen liefern. Solche

---

775) Rend. Ist. Lomb. (2) 27 (1894), p. 477, 712, 749; (2) 28 (1895), p. 249, 298.

776) Amer. J. of math. 18 (1895), p. 219.

777) Die verschiedenen Fälle, die sich beim Produkt zweier quadratischer (2, 2)-Transformationen im dreidimensionalen Raume bieten können, werden von *Hilda P. Hudson.* Amer. J. of math. 35 (1911), p. 183 angegeben. Über die Produkte von Kollineationen und quadratischen Inversionen s. *Anna L. Van Benschoten,* Bull. Amer. math. Soc. (2) 18 (1912), p. 219.

M. Noether, Math. Ann. 3 (1870), p. 561—564 [vgl. *G. Salmon* u. *W. Fiedler,* „Raumgeometrie“ 2, p. 564] betrachtet das Produkt mehrerer (2, 2)- und (2, 3)-Transformationen unter der Annahme, daß der Hauptkegelschnitt der (2, 2)-Transformation zerfällt.

M. Noether, a. a. O., p. 568—570, und *L. Cremona,* Math. Ann. 4 (1871), p. 225; Gött. Nachr. 1871, p. 147 = Opere 3, p. 271 betrachten das Produkt mehrerer (3, 3)-Transformationen für den Fall, daß die Hauptkurve 6. Ordnung des einen und daher auch des anderen Raumes in eine feste Raumkurve 4. Ordnung erster Art und zwei veränderliche Sehnen dieser Raumkurve zerfällt.

F. E. Eckardt, Math. Ann. 5 (1871), p. 43—44 betrachtet das Produkt mehrerer tetraedralen Transformationen (Nr. **81**) unter der Annahme, daß zwei Ecken des Haupttetraeders fest sind.

J. de Vries, Ak. Amsterdam Versl. (4) 21 (1913), p. 812 studiert das Produkt der zwei kubischen involutorischen Transformationen, die durch zwei kubische Raumkurven (Nr. **81**, am Ende) bestimmt sind.

Über das Produkt zweier birationaler Transformationen s. auch *Hilda P. Hudson,* „Cremona transf.“, p. 353—359.

778) Amer. J. of math. 19 (1895), p. 1. Auf p. 25 werden auch die tetraedralen Transformationen angegeben, die eine Raumkurve 4. Ordnung erster oder zweiter Art in sich verwandeln.

779) Acta math. 21 (1896), p. 1.

Transformationen werden von *A. B. Coble*[780]) *regulär* genannt und weisen viele Eigenschaften der ebenen Transformationen auf. Die homaloiden Systeme beider Räume haben ein und dieselbe Ordnung, die gleiche Anzahl Hauptpunkte wie auch die gleiche Anzahl (außerordentlicher) Hauptkurven usw. *S. Kantor* gibt die Typen an, mit denen die periodischen Transformationen dieser Beschaffenheit birational äquivalent sind, und die aus diesen gebildeten endlichen diskontinuierlichen Gruppen. Auch bei diesen Problemen tritt die Analogie mit den gleichartigen Problemen für die Gesamtheit aller ebenen birationalen Transformationen zutage.

Eine gewisse Analogie mit den Transformationen von *S. Kantor* stellen vom Gesichtspunkt der Erzeugung die von *D. Montesano*[781]) studierten und von ihm *Hyperhomographien* genannten Transformationen dar. Die Ordnung der homaloiden Systeme einer derartigen Transformation ist in beiden Räumen eine willkürliche ungerade Zahl $2\nu + 1$, und beide homaloide Systeme haben die gleiche Anzahl ordentlicher Hauptkurven. Diese Hauptkurven sind in beiden Räumen Gerade, die zwei untereinander windschiefe und für die beiden Systeme ν-fache, außerordentliche Hauptgerade u, v (bzw. u', v') treffen, so daß den Geraden u, v des einen Raumes die je ν-mal gezählten Geraden u', v' im anderen Raume entsprechen. Dagegen besitzt die Transformation in keinem der beiden Räume Hauptpunkte, ist also regulär (im Sinne von Nr. **75**).

Das Geschlecht der Transformation ist ν. Diese Zahl ν wird als *Index* der Transformation bezeichnet. Die Transformation vom Index 1 ist die in Anm. 702 betrachtete (3, 3)-Transformation, die in jedem der beiden Räume als (ordentliche bzw. außerordentliche) Hauptkurven vier willkürlich gegebene Gerade und die beiden Schnittgerade dieser Geraden besitzt.

In einer Hyperhomographie von beliebigem Index sind die vier Hauptgeraden höchster Multiplizität in einem beliebigen der beiden Räume Hauptgerade einer hyperhomographischen Korrespondenz vom Index 1, die das homaloidische System der Korrespondenz in diesem

780) Trans. Amer. math. Soc. 17 (1915), p. 345.

Gruppen von regulären Transformationen in Verbindung mit dem *Symmetroid* von *A. Cayley* bei *A. B. Coble*, Amer. J. of math. 41 (1919), p. 243; „Alg. geom.“, p. 228—235 (s. auch die Anm. 485 u. 828). Ein Symmetroid kann durch reguläre Transformationen in nur $2^8 \cdot 51$ projektiv voneinander verschiedene Symmetroide transformiert werden. (Vgl. Anm. 485.)

Über die regulären Transformationen s. noch *Hilda P. Hudson*, „Cremona transf.“, p. 318—322. — Über die Erweiterung auf die Überräume s. Nr. **91**.

781) Atti Acc. Napoli (2) 18 (1929), Nr. 2.

Raume in ein anderes von gleichem Typus und niedrigerer Ordnung verwandelt.

Hieraus folgt, daß jede hyperhomographische Transformation das Produkt aufeinanderfolgender Transformationen von gleichem Typus und Index 1 ist.

D. Montesano bemerkt, daß der Typus jeder hyperhomographischen Korrespondenz vollständig durch die Multiplizitätsordnungen bestimmt ist, die die ordentlichen Hauptgeraden im ersten Raume für diese Korrespondenz besitzen, untersucht daher die sich hieraus ergebenden Zahlengruppen und erweitert alle Eigenschaften der geometrischen *Cremona*schen Gruppen der Ebene (Nr. **52**) auf diese Gruppen.

Außer den Transformationen von *S. Kantor* und *D. Montesano* erhält man als Produkte aufeinanderfolgender (3,3)-Transformationen von gleichem Typus die von *D. Montesano*[782]) studierten Korrespondenzen, bei denen das homaloide System in jedem der beiden Räume aus Flächen der Ordnung $2n - 1$ mit einer gemeinsamen $(n - 1)$-fachen kubischen Raumkurve und einer gewissen Anzahl gemeinsamer Sehnen dieser Raumkurve zusammengesetzt ist. Die Multiplizitätsordnungen dieser Sehnen für die Transformation bestimmen deren Typus vollständig, und es erweist sich, daß die beiden von ein und derselben Korrespondenz herrührenden Zahlengruppen im ersten und im zweiten Raume miteinander konjugierte, geometrische *Cremona*sche Gruppen (Nr. **52** und **53**) der Ordnung $n - 1$ sind.

Zwei spezielle diskontinuierliche Gruppen birationaler Raumtransformationen studiert *D. Montesano.*[783]) Die erste Gruppe besteht aus 16 involutorischen Transformationen, von denen eine die Identität ist, während die übrigen quadratisch sind, mit ein und demselben Hauptkegelschnitt K. Fünf von diesen Transformationen, deren Produkt die Identität ist, sind räumliche Inversionen; die anderen 10 Transformationen, die Produkte von je zweien (und auch je dreien) der vorhergehenden Transformationen sind, sind so beschaffen, daß jede Transformation die von dem betreffenden Hauptpunkte (s. Nr. **78**) ausgehenden Geraden paarweise in einer harmonischen Homologie einander entsprechen läßt. Die Gruppe ist vollständig bestimmt, wenn die Ebene von K und die Hauptpunkte $O_1, \ldots, O_5$ der fünf Inversionen gegeben sind.

---

782) Rend. Acc. Napoli (3) 27 (1921), p. **116**, **164**. Über diese Transformationen s. auch *J. F. Tinto,* Proc. Edinburgh math. Soc. 34 (1916), p. **133**; 36 (1917), p. 2.

783) S. Anm. 630. — Über die zweite dieser Gruppen s. auch *Ethel Isabel Moody,* Amer. J. of math. 53 (1931), p. 460.

Es gibt ein lineares ∞^3-System von Flächen 4. Ordnung, deren K ein doppelter Kegelschnitt ist und die alle durch jede Transformation der Gruppe in sich transformiert werden; die Spitzen der fünf „*Kummerschen* Kegel" aller dieser Flächen [III C 10b (*W. Fr. Meyer*), III, Nr. **10** bis **20**] sind die Punkte O_i.[784]) Betrachten wir insbesondere diejenigen ∞^2 dieser Flächen 4. Ordnung, die in die Ebene von K und eine kubische Fläche zerfallen, so finden wir, daß die eine allgemeine Fläche 3. Ordnung in sich verwandelnden quadratischen involutorischen Transformationen in 27, den 27 Geraden der Fläche zugeordneten ∞^1-Systeme von Gruppen des betrachteten Typus zerfallen.[785])

Die zweite von *D. Montesano* betrachtete Gruppe setzt sich aus 32 involutorischen Transformationen zusammen, deren eine die Identität ist, während die anderen 3. Ordnung sind, und entspricht vermöge der einfachsten umkehrbar eindeutigen Abbildung eines allgemeinen quadratischen Geradenkomplexes auf den Punktraum[786]) der Gruppe der Involutionen, die in dem Komplex durch die 32 den Komplex in sich verwandelnden homographischen oder korrelativen involutorischen Korrespondenzen des Raumes (einbegriffen die Identität) bestimmt sind. Die 31 Involutionen 3. Ordnung besitzen alle als Hauptkurve die Raumkurve 5. Ordnung vom Geschlecht 2, die Hauptkurve für die Abbildung ist [vgl. III C 9 (*K. Rohn* und *L. Berzolari*), Nr. **65**]. Sechs von diesen Involutionen, deren Produkt die Identität ist, besitzen Fixpunktflächen 3. Ordnung; weitere 15, die paarweisen Produkte der vorhergehenden Involutionen, besitzen je eine Fixpunktkurve (4. Ordnung erster Art), und die letzten 10, die Produkte von je dreien der ersten 6 Involutionen, besitzen je 8 Fixpunkte (Basispunkte eines Netzes

784) Ist K der absolute Kegelschnitt, so werden die Fixpunktflächen 2. Ordnung der fünf Inversionen paarweise orthogonale Kugeln.

785) Vgl. hierüber noch *K. Küpper*, Prag Abh. böhm. Ges. (7) 2 (1888), Nr. 10; Ztschr. Math. Phys. 34 (1889), p. 129; *R. Sturm*, „Geom. Verw." 4, p. 405—406.

786) Die Formeln für diese Abbildung stammen von *F. Klein*, wurden von *M. Noether*, Gött. Nachr. 1869, p. 305—306 erstmalig veröffentlicht und sind in *F. Kleins* Ges. math. Abh. 1, Berlin 1921, p. 89 wiedergegeben. Sie werden bewiesen von *E. Caporali*, Roma Mem. Acc. Linc. (3) 2 (1877—78), p. 749 = Memorie di geometria, Napoli 1888, p. 54, der diese Abbildung geometrisch untersucht. Vgl. auch *G. Darboux*, Bull. Sciences math. (1) 2 (1871), p. 157—158; *F. Aschieri*, Rend. Ist. Lomb. (2) 14 (1881), p. 500; *D. Montesano*, daselbst (2) 25 (1892), p. 795; *R. Sturm*, „Die Gebilde"[40]) 3, p. 272—282 (auch für die Besonderheiten der Abbildung, die den Sonderfällen des Komplexes entsprechen, p. 380—387, 404 ff.); *G. Salmon* und *W. Fiedler*, „Raumgeometrie" 2, p. 520—521; *C. M. Jessop*, „A treatise on the line complex", Cambridge 1903, p. 179—183; *H. F. Baker*, „Princ. of geom."[46]) 4, p. 234—235. — Vgl. III C 8 (*K. Zindler*), Nr. **37** f).

von Flächen 2. Ordnung). Jede Raumkurve 5. Ordnung vom Geschlecht 2 bestimmt eine Gruppe vom betrachteten Typus vollständig.

Spezielle unendliche diskontinuierliche Gruppen birationaler Raumtransformationen erhalten wir durch Betrachtung algebraischer Flächen, die durch diese Transformationen in sich transformiert werden.

J. I. Hutchinson[787]) bemerkt, daß die *Kummer*sche Fläche [III C 8 (*K. Zindler*), Nr. **36**; III C 10b (*W. Fr. Meyer*), XI, Nr. **64—74**] durch 60, die *Weddle*sche Fläche (a. a. O.) durch 15 tetraedrale Involutionen in sich transformiert wird; hierdurch werden unendliche diskontinuierliche Gruppen erzeugt, für die die genannten Flächen invariant sind.[788])

V. Snyder[789]) zeigt, daß die unendliche diskontinuierliche Gruppe automorpher birationaler Transformationen gewisser algebraischer Flächen, die ein Büschel elliptischer Kurven enthalten und von *A. Rosenblatt*[790]) betrachtet wurden, durch eine analoge Gruppe *Cremona*scher Raumtransformationen ersetzt werden kann.

Nach *V. Snyder* und *F. R. Sharpe*[791]) gilt das gleiche für die un-

787) Bull. Amer. math. Soc. (2) 7 (1900), p. 211. S. auch *V. Snyder*, Trans. Amer. math. Soc. 12 (1911), p. 354 [Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 17 (1911), p. 281]; *H. F. Baker*, Proc. London math. Soc. (2) 11 (1912), p. 302; *F. R. Sharpe* und *C. F. Craig*, Trans. Amer. math. Soc. 15 (1914), p. 236 [Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 20 (1914), p. 401]; *A. Emch*, ebenda 27 (1925), p. 270 [Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 30 (1924), p. 226]; *R. W. H. T. Hudson*, „Kummer's quartic surface", Cambridge 1905, p. 216—219.

Die analoge Gruppe, für die die *Hesse*sche Fläche einer kubischen Fläche invariant ist, bei *J. I. Hutchinson*, Bull. Amer. math. Soc. (2) 6 (1900), p. 328.

788) Die ersten Beispiele algebraischer Flächen mit unendlichen diskontinuierlichen Gruppen automorpher birationaler Transformationen (im allgemeinen aber birationaler Transformationen nicht des ganzen Raumes, d. h. nicht *Cremona*scher Transformationen) bei *G. Humbert*, Paris C. R. 126 (1898), p. 394, 508; J. math. pures appl. (5) 6 (1900), p. 372 und *P. Painlevé*, Paris C. R. 126 (1898), p. 512 an. Das Beispiel von *G. Humbert* bezieht sich auf die *Kummer*sche Fläche; das von *P. Painlevé* fußt auf Eigenschaften der elliptischen Funktion $p(u)$ und ist bei *É. Picard* und *G. Simart*[114]) 2, Paris 1906, p. 462—464 wiedergegeben.

Die Aufgabe der Bestimmung aller automorphen birationalen Transformationen einer *Kummer*schen Fläche wird von *F. Klein*, Math. Ann. 27 (1885), p. 141—142 = Ges. math. Abh. 1, p. 198—199 gestellt. Die Eigenschaft, daß sie eine unendliche diskontinuierliche Gruppe bilden, finden *G. Humbert*, a. a. O., und *J. I. Hutchinson*[787]), erstes Zitat.

789) Trans. Amer. math. Soc. 14 (1912), p. 105; Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 19 (1913), p. 302.

790) Rend. Circ. mat. Palermo 33 (1911), p. 212. S. noch Paris C. R. 153 (1911), p. 1460; Krakau Ak. d. Wiss. Anz. (A) 1912, p. 761.

791) Trans. Amer. math. Soc. 16 (1914), p. 62; Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 21 (1915), p. 278.

Über die beiden im Text bezeichneten Kurven s. III C 9 (*K. Rohn* und *L. Berzolari*), Nr. **67**, **68**.

endliche diskontinuierliche Gruppe birationaler Transformationen, die die allgemeinste, durch eine Raumkurve 6. Ordnung vom Geschlecht 2 oder eine nicht hyperelliptische Raumkurve 6. Ordnung vom Geschlecht 3 hindurchgehende Fläche 4. Ordnung in sich transformieren.

A. Emch[792]) gibt eine unendliche diskontinuierliche Gruppe *Cremona*scher Raumtransformationen an, die die Raumkurve 6. Ordnung vom Geschlecht 3 in sich verwandeln, die der Ort der Spitzen aller, einem Netze von Flächen 2. Ordnung angehörigen Kegel ist [III C 9 (*K. Rohn* und *L. Berzolari*), Nr. **68**]. Diese Gruppe wird durch die 28 involutorischen *Geiser*schen Transformationen (Nr. **83**) erzeugt, deren Fixpunktflächen die durch 6 beliebige von den 8 Basispunkten des Netzes bestimmten *Weddle*schen Flächen sind.

87. Typen endlicher kontinuierlicher Gruppen von birationalen Raumtransformationen [vgl. III AB 4b (*G. Fano*), Nr. 22]. Die Klassifikation der (im Sinne von *S. Lie*, also von einer endlichen Anzahl von Parametern abhängigen) endlichen kontinuierlichen Gruppen biratio-

---

Der Fall der Kurve vom Geschlecht 2 auch bei *V. Snyder*, Trans. Amer. math. Soc. 11 (1909), p. 15 [Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 15 (1908), p. 324]; der Fall der Kurve vom Geschlecht 3 bei *L. Godeaux*, Krakau Ak. d. Wiss. Anz. (A) 1913, p. 529; *V. Snyder* und *F. R. Sharpe*, Trans. Amer. math. Soc. 19 (1918), p. 290.

Im Falle der Kurve vom Geschlecht 2 stellt *G. Fano*, Rend. Ist. Lomb. (2) 39 (1906), p. 1071 fest, daß eine unendliche diskontinuierliche Gruppe birationaler Transformationen existiert, welche die durch die Kurve hindurchgehende allgemeinste Fläche 4. Ordnung in sich transformieren. Die vollständige Bestimmung der Gruppe führt *F. Severi*, Rend. Circ. mat. Palermo 30 (1910), p. 265 in Zusammenhang mit seinen Untersuchungen über die *Basis* des Systems der auf einer algebraischen Fläche existierenden algebraischen Kurven durch.

Eine analoge Eigenschaft gilt für die allgemeine, durch eine Raumkurve 8. Ordnung vom Geschlecht 2 hindurchgehende Fläche 4. Ordnung. S. *F. R. Sharpe* und *V. Snyder*, Trans. Amer. math. Soc. 21 (1920), p. 61.

Bezüglich des Vorhergehenden vgl. III C 6b (*G. Castelnuovo* und *F. Enriques*), Nr. **41**. Den dortigen Anführungen fügen wir hinzu, daß man andere Beispiele von Flächen mit einer unendlichen diskontinuierlichen Gruppe von birationalen Transformationen in sich bei *F. Enriques* findet, Mem. Soc. ital. delle scienze (dei XL) (3) 4 (1906), p. 350; *V. Snyder*, Bull. Amer. math. Soc. (2) 15 (1908), p. 291; (2) 16 (1909), p. 57; Trans. Amer. math. Soc. 11 (1910), p. 371; Amer. J. of math. 32 (1910), p. 177; *G. Fano*, Rend. Circ. mat. Palermo 29 (1909), p. 98; Roma Rend. Acc. Linc. (5) 29^1 (1920), p. 408, 485; (5) 29^2 (1920), p. 113, 175, 231; *R. Garnier*, Paris C. R. 149 (1909), p. 1054; *L. Remy*, ebenda, p. 1057; *L. Godeaux*, Roma Rend. Acc. Linc. (5) 21^1 (1912), p. 398; Krakau Ak. d. Wiss. Anz. (A) 1913, p. 529; *F. R. Sharpe* und *F. M. Morgan*, Ann. of math. (2) 15 (1912), p. 84; *F. R. Sharpe* und *V. Snyder*, Trans. Amer. math. Soc. 15 (1914), p. 266; Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 20 (1914), p. 400.

792) Trans. Amer. math. Soc. 27 (1925), p. 270; Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 30 (1924), p. 226.

naler Raumtransformationen (s. die Anführungen in den ersten Zeilen von Anm. 551), d. h. ihre Reduktion auf bestimmte Typen durch birationale Raumtransformationen wurde von *F. Enriques* und *G. Fano*[793]) vollständig durchgeführt.

Bei dieser Untersuchung kann man den von *F. Enriques* (Nr. **64**) bei dem analogen Problem der Ebene eingeschlagenen Weg nicht, wenigstens bis heute nicht, auf den Raum ausdehnen, also sich nicht der Eigenschaften der adjungierten Flächen bedienen. Man kann dagegen von einer allgemeinen, auf die kontinuierlichen Gruppen birationaler Transformationen in einem r-dimensionalen linearen Raume S_r ($r = 2, 3, \ldots$) bezüglichen Eigenschaft Gebrauch machen, die sich aus der immer auf unendlich viele Weisen möglichen Konstruktion eines durch alle Transformationen der gegebenen Gruppe in sich transformierten linearen Systemes von Hyperflächen ergibt.

Es ist nämlich möglich, auf unendlich viele Arten für jede kontinuierliche ∞^k-Gruppe birationaler Transformationen des Raumes S_r eine r-dimensionale, zu einem linearen Raume von $n \geqq r$ Dimensionen gehörige rationale Mannigfaltigkeit M_r mit einer kontinuierlichen ∞^k-Gruppe automorpher projektiver Transformationen zu konstruieren derart, daß, wenn man diese Mannigfaltigkeit M_r geeignet auf den Raum S_r abbildet, das Bild der projektiven ∞^k-Gruppe in S_r die betrachtete Gruppe birationaler Transformationen ist.[794])

So reduziert sich jede kontinuierliche Gruppe von birationalen Transformationen des Raumes S_r birational auf eine Gruppe von projektiven Transformationen einer rationalen M_r. Indem man sich auf diese Tatsache und auf die allgemeine *Lie*sche Theorie der Gruppen von Transformationen stützt, findet man die folgenden Typen, von denen die ersten drei sich als natürliche Erweiterungen der in Nr. **64** bezeichneten typischen *Cremona*schen Gruppen der Ebene ergeben.

1. die 15-gliedrige Kollineationsgruppe und ihre Untergruppen;

2. die 10-gliedrige Gruppe konformer Transformationen oder der reziproken Radien (die also Kugeln in Kugeln verwandeln) und ihre Untergruppen;

3. die „verallgemeinerten *de Jonquières*sche Gruppen“, d. h. die Gruppen, welche ein invariantes Ebenenbüschel oder ein invariantes Strahlenbündel besitzen;

---

793) Ann. di mat. (2) 26 (1897), p. 59.

794) Auf diese Eigenschaft stützt sich für $r = 2$ *G. Fano,* Rend. Circ. mat. Palermo 10 (1895), p. 16 bei der Aufstellung des Satzes von *F. Enriques* über die Typen von kontinuierlichen Gruppen von birationalen Transformationen der Ebene. S. Anm. 555.

4. zwei wohlbestimmte 3-gliedrige einfache transitive Gruppen von Transformationen 3. bzw. 7. Ordnung.

Insbesondere reduzieren sich alle primitiven Gruppen auf Gruppen vom Typus 1 und 2; die imprimitiven Gruppen auf Gruppen vom Typus 3; eine Ausnahme bilden nur die einfachen transitiven ∞^3-Gruppen, in denen die einen allgemeinen Punkt des Raumes fest lassenden Transformationen eine zu einer der drei Gruppen der regulären Polyeder (Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder) holoedrisch isomorphe Gruppe endlicher Ordnung bilden; diese Gruppen reduzieren sich auf drei wohlbestimmte Typen, nämlich eine konforme Gruppe, also vom Typus 2, und die zwei Gruppen vom Typus 4.[795])

Zur Vervollständigung der Bestimmung aller birational verschiedenen Typen, auf die die kontinuierlichen *Cremona*schen Gruppen des Raumes reduziert werden können, bleibt noch die Bestimmung der verschiedenen typischen Gruppen, die jedem der Typen 1, 2, 3 angehören. Die typischen Gruppen der Typen 1 und 2 wurden schon von *S. Lie*[796]) bestimmt; es sind dieselben Gruppen, die vom Gesichtspunkt der Punkttransformationen aus voneinander verschieden sind. Man hat nur noch die ∞^6-Gruppe der konformen Transformationen zuzufügen, die eine gegebene Kugel mit nicht verschwindendem Radius in sich verwandeln. Diese Gruppe kann zwar auf eine Gruppe vom Typus 1 reduziert werden, aber durch eine Transformation mit den Indizes 1 und 2 (vgl. Nr. 92), und nicht durch eine birationale Transformation.

Da alle Typen 1 und 2, mit Ausnahme der konformen ∞^3-Gruppe vom tetraedrischen Typus, primitiv sind, führt *G. Fano*[797]) die Bestimmung aller primitiven Gruppen von neuem und auf anderem, direkterem Wege durch. Auf diese Weise erhält man neun Typen, von denen fünf projektiv und nicht konform, zwei konform und nicht projektiv und zwei gleichzeitig projektiv und konform (daher Gruppen von Ähnlichkeiten) sind.

Die Bestimmung der birational verschiedenen Typen 3 führt *G. Fano*[798]) durch, der die vollständigen typischen Gruppen angibt, die alle anderen als Untergruppen enthalten.

795) Für beide Gruppen vom Typus 4 gaben *F. Enriques* und *G. Fano*[793]), p. 92 ff. die Darstellungsformeln. Eine direkte Konstruktion der ersten dieser beiden Gruppen bei *G. Scorza,* Ann. di mat. (3) 15 (1908), p. 232.

796) *S. Lie* und *Fr. Engel*[556]) 3, Leipzig 1893, p. 122—178.

797) Atti Acc. Torino 33 (1898), p. 480.

798) Mem. Acc. Torino (2) 48 (1898), p. 221. Unter den hier angegebenen Typen befindet sich auch der von *J. W. Young* und *F. M. Morgan*[617]) studierte, welcher durch drei invariante Ebenenbüschel bestimmt ist, von denen in jedem

Wir erhalten schließlich insgesamt 16 vollständige typische Gruppen: die projektive Gruppe, zwei Gruppen quadratischer Transformationen, drei Gruppen kubischer Transformationen (darunter die oktaedrische ∞^3-Gruppe), eine Gruppe von Transformationen 7. Ordnung (die ikosaedrische ∞^3-Gruppe), während für die anderen neun der Typus bestimmt ist, die Ordnung aber jeden beliebigen Wert annehmen kann.

M. Noether[799]) bestimmt alle möglichen kontinuierlichen Gruppen quadratischer Raumtransformationen. Es gibt fünf verschiedene Arten, mit Untergruppen: 1. die ∞^{10}-Gruppe, die das System der durch einen festen irreduziblen Kegelschnitt hindurchgehenden Flächen 2. Ordnung in sich transformiert; 2. eine ∞^{11}-Gruppe, die das System der durch zwei gegebene, sich schneidende Gerade hindurchgehenden Flächen 2. Ordnung in sich transformiert; 3. eine ∞^{13}-Gruppe, die das System der sich längs einer festen Erzeugenden berührenden Kegel 2. Ordnung in sich transformiert; 4. eine ∞^{11}-Gruppe, die das System der durch eine gegebene Gerade und durch einen gegebenen, nicht auf dieser Geraden liegenden Punkt hindurchgehenden Flächen 2. Ordnung in sich transformiert; 5. eine ∞^{13}-Gruppe, die das System der Flächen 2. Ordnung in sich transformiert, die durch eine gegebene Gerade hindurchgehen und in einem Punkte dieser Geraden einander berühren.

L. Autonne[800]) dehnt seine Untersuchungen über die Gruppen birationaler ebener Berührungstransformationen (Nr. **65**) auf den Raum aus. Insbesondere studiert er die *primordialen* Mannigfaltigkeiten einer derartigen Transformation und beschäftigt sich auch mit dem umgekehrten Problem, d. h. wenn eine primordiale Mannigfaltigkeit gegeben ist, die ensprechende Berührungstransformation zu konstruieren.

88. Birationale Transformationen zwischen zwei linearen *r*-dimensionalen Räumen.[801]) Von den birationalen Transformationen

---

eine Projektivität gegeben ist, der also das System aller kubischen Raumkurven, deren Sehnen die Achsen der drei Büschel sind, in sich transformiert (vgl. Nr. **81** und Anm. 704).

G. Fano, Roma Rend. Acc. Linc. (5) 7^1 (1898), p. 302, 332 gibt die Symbole der erzeugenden infinitesimalen Transformationen für jede Gruppe an und bringt die vorhergehenden Ergebnisse in Verbindung mit den Resultaten, die früher *S. Lie*[796]) bei der Bestimmung der verschiedenen Typen erhalten hatte, auf die durch willkürliche Punkttransformationen alle kontinuierlichen primitiven Gruppen und gewisse kontinuierliche imprimitive Gruppen von Punkttransformationen des Raumes reduziert werden können.

799) Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 5^1 (1901), p. 68 [1896].

800) S. [1125]), p. 137—244; J. Éc. Polyt. (2), cah. 8 (1903), p. 17; Auszug Paris C. R. **135** (1902), p. 776.

801) S. *A. B. Coble,* „Report“, p. 197—226.

zwischen zwei linearen Räumen von $r > 3$ Dimensionen kennt man nur einige Eigenschaften, einfache Erweiterungen verschiedener für $r = 2, 3$ gültiger allgemeiner Sätze.[802]) So kann jede birationale Transformation n^{ter} Ordnung zwischen einem Raume S_r und einem Raum S_r' dadurch festgelegt werden, daß man den Hyperebenen von S_r die Hyperflächen V^n n^{ter} Ordnung eines homaloiden Systems von S_r' projektiv entsprechen läßt. Hier, wie für $r = 2$ und $r = 3$, bezeichnen wir ein lineares System von Hyperflächen V^n als *homaloid,* wenn sich r von diesen Hyperflächen V^n in nur einem veränderlichen Punkte schneiden. *Projektiv* heißt diese Korrespondenz, wenn sie den Hyperebenen eines linearen Systems in S_r die Hyperflächen V^n eines linearen Systems in S_r' entsprechen läßt.

Es seien

$$(1) \qquad \varrho x_i' = f_i(x_0, x_1, \ldots, x_r) \qquad (i = 0, 1, \ldots, r)$$

die Formeln einer rationalen Transformation zwischen den Punkten X und X' von S_r und S_r', wobei $f_0, f_1, \ldots, f_r$ Formen n^{ter} Ordnung sind und ϱ ein Proportionalitätsfaktor ist. Die homologen Punkte eines Punktes X, dessen Koordinaten x_i alle Formen f_i zu Null werden lassen, also eines Basispunktes des linearen Systems

$$(2) \qquad \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_r f_r = 0,$$

erhalten wir als Grenzlagen der Punkte, die homolog sind zu den Punkten von S_r, die sich X in den verschiedenen von X ausgehenden Richtungen nähern. Im allgemeinen wird auf diese Weise dem Punkte X eine $(r - 1)$-dimensionale algebraische Mannigfaltigkeit entsprechen; es kann jedoch auch der Fall eintreten, daß dem Punkte X eine Mannigfaltigkeit einer niedrigeren Anzahl von Dimensionen entspricht. Derartige Basispunkte des linearen Systems (2) heißen *Hauptpunkte* der Transformation, und die den einzelnen Hauptpunkten entsprechenden Mannigfaltigkeiten heißen *Hauptmannigfaltigkeiten* der Transformation.

Damit die Gleichungen (1) zwischen S_r und S_r' eine so beschaffene rationale Korrespondenz bestimmen, daß bei Bewegung von X in S_r der homologe Punkt X' den ganzen Raum S_r' beschreibt, ist notwendig und hinreichend, daß die Formen $f_0, f_1, \ldots, f_r$ linear unabhängig sind und die durch einen allgemeinen Punkt von S_r hindurchgehenden Hyperflächen des Systems (2) auch durch eine endliche Anzahl weiterer Punkte hindurchgehen, die keine Hauptpunkte sind.

802) Vgl. *C. Carrone,* Catania Atti Acc. Gioenia (4) 11 (1898), Nr. 8 [Auszug Catania Boll. Acc. Gioenia 52 (1898), p. 15], wo insbesondere auch der Fall $r = 4$ betrachtet wird. Über diesen Fall s. auch *A. Gennaro,* Ann. Scuola Norm. sup. di Pisa 15 (1927), Nr. 6; *J. W. Archbold,* Proc. Cambridge Phil. Soc. 27 (1931), p. 502.

Soll die Transformation speziell birational sein, so ist es notwendig und hinreichend, daß das System (2) homaloid ist.[803])

Ist O ein s-facher Basispunkt des Systems (2), so entspricht jedem Punkt X, der ihm unendlich benachbart auf einer von O ausgehenden Geraden g liegt, in S_r' ein bestimmter Punkt X'. Dreht man g um O, so beschreibt X' einen Ort Ω', dessen Punkte, die zu einer Hyperebene von S_r' gehören, den Erzeugenden eines Tangentenkegels in O an eine Hyperfläche des Systems (2) entsprechen.

Wenn die Tangentenkegel in O an die Hyperflächen des Systems (2), die eine gemeinsame Erzeugende haben, nicht notwendig andere gemeinsame Erzeugende besitzen, so ist die Korrespondenz zwischen den Geraden g durch O und den Punkten X' von Ω' eineindeutig; in diesem Falle ist Ω' rational, von der Dimension $r-1$ und der Ordnung s^{r-1}.

Wenn diese Tangentenkegel als gemeinsamen Scheitel einen S_k haben, so hat die dem Punkt O entsprechende Mannigfaltigkeit Ω' im allgemeinen die Dimension $r-k-1$ und die Ordnung s^{r-k-1}. Diese tritt insbesondere dann auf, wenn O zu einer Mannigfaltigkeit M_k der Dimension k gehört, die eine s-fache Basis für das System (2) ist. Der Mannigfaltigkeit M_k entspricht dann im allgemeinen eine Mannigfaltigkeit der Dimension $r-1$ und der Ordnung s^{r-k-1}, die ein geometrischer Ort für ∞^k $(r-k-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten ist.

Ist die durch die Gleichungen (1) bestimmte Transformation birational, so sind außer der Ordnung n $(=n_1)$ noch weitere Charaktere $n_2, n_3, \ldots, n_{r-1}$ zu betrachten. Dies sind die Ordnungen der je $2, 3, \ldots, r-2, r-1$ Hyperflächen des homaloiden Systems (2) gemeinsamen beweglichen Mannigfaltigkeiten von $r-2, r-3, \ldots, 2, 1$ Dimensionen, die als 2., 3., …, $(r-1)^{\text{te}}$ Ordnung der Transformation bezeichnet werden können.

Man erkennt leicht, daß die inverse Transformation einer gegebenen birationalen Transformation gleiche, nur im entgegengesetzten Sinne zu nehmende Ordnungen wie diese besitzt.

Für die Konstruktion der birationalen Transformationen zwischen einem Raume S_r und einem Raume S_r' kann man eine Methode verwenden, die der von *L. Cremona* (Nr. 76) für den Fall $r=3$ angewandten Methode analog ist, indem man alle homaloiden Systeme, falls solche

803) S. *F. Severi*, „Trattato" 1_1, p. 5—9. Über die Hauptelemente einer birationalen Transformation s. die in Anm. 643 angeführten Arbeiten; außerdem *G. Marletta*[650]).

existieren, bestimmt, denen eine gegebene rationale Hyperfläche angehört.[804])

Sind die beiden Räume vereinigt, so ist die Anzahl der Fixpunkte gleich der Summe der $r - 1$ Ordnungen, erhöht um zwei Einheiten.

Über die Anzahl der zyklischen Gruppen[805]) s. allgemeiner die Anm. 894.

89. Quadratische Transformationen. Am meisten untersucht sind die quadratischen Transformationen.[806]) Im einfachsten Falle[807]) wird das homaloide System im einen Raume S_r aus den Hyperflächen 2. Ordnung V gebildet, die durch eine in einer Hyperebene π liegende quadratische Mannigfaltigkeit F der Dimension $r - 2$ und einen nicht auf π liegenden Punkt O hindurchgehen. Im anderen Raume S_r' wird das homaloide System in ähnlicher Weise aus den Hyperflächen 2. Ordnung V' gebildet, die durch eine auf einer

804) Vgl. *C. Carrone*[802]), p. 11—14, der diese Methode auf die Untersuchung homaloider Systeme, die eine Hyperfläche 2. Ordnung von S_4 enthalten (a. a. O., p. 14—45), sowie auf die Konstruktion einiger homaloider monoidaler Systeme in S_4 (a. a. O., p. 45—49) anwendet.

805) *S. Kantor,* Paris C. R. 90 (1880), p. 1156; Rend. Ist. Lomb. (2) 27 (1894), p. 713, Fußn.; *C. G. F. James,* London math. Soc. J. 1 (1926), p. 3. Z. B. die Anzahl der involutorischen Paare ist $\sum_{i=1}^{r-1} \frac{n_i(n_i - 1)}{2}$.

806) Die Produkte dieser Transformationen und die periodischen quadratischen Transformationen in einem Raume S_r werden von *S. Kantor,* Anm. 775, studiert. Über die involutorischen quadratischen Transformationen s. *B. Bydžovský,* Časopis 60 (1931), p. 214. — Verschiedene, aus Hyperflächen 2. Ordnung in S_4 gebildete homaloide Systeme betrachten *P. del Pezzo,* Rend. Acc. Napoli (3) 1 (1895), p. 133; (3) 2 (1896), p. 336; (3) 3 (1897), p. 33 [Erweiterung bei *F. Palatini,* Giorn. di mat. (2) 7 (1900), p. 320]; *C. Carrone*[802]), p. 14—45, und geben auch für einige Systeme Darstellungsformeln an. Eines dieser Systeme, das aus Hyperflächen 2. Ordnung gebildet wird, die durch eine elliptische Kurve 5. Ordnung hindurchgehen, wurde schon von *L. Bianchi,* Math. Ann. 17 (1880), p. 234, beim Studium des elliptischen Integrals erster Gattung angetroffen und dann, auch in vielen Sonderfällen, von *A. Gennaro*[802]) studiert. Ein anderer Fall bei *E. G. Togliatti,* Atti Acc. Torino 52 (1917), p. 775—777.

J. G. Semple, Trans. London Phil. Soc. (A) 228 (1929), p. 331 studiert und klassifiziert alle allgemeinen Typen quadratischer Transformationen zwischen zwei Räumen S_4 und gibt ihre inversen Transformationen an.

Deuten wir die reellen Teile und die Koeffizienten von i $(= \sqrt{-1})$ der Koordinaten eines Punktes in einer Ebene als Koordinaten eines Punktes in einem Raume S_4, so werden die Kollineationen der Ebene quadratische Transformationen zwischen zwei Räumen S_4. Vgl. dazu *P. del Pezzo,* Rend. Acc. Napoli (2) 7 (1893), p. 123.

807) S. *E. Bertini*[4]), 1. Ausg., p. 370—374; 2. Ausg., p. 455—459; deutsche Ausg., p. 429—433.

Hyperebene π' liegende quadratische Mannigfaltigkeit F' der Dimension $r-2$ und einen nicht zu π' gehörenden Punkt O' hindurchgehen. Alle Ordnungen sind gleich 2.

Bezeichnen $x_0, x_1, \ldots, x_r$ und $x_0', x_1', \ldots, x_r'$ die homogenen projektiven Koordinaten zweier Punkte von S_r und S_r', nehmen wir O und O' als Punkte $(1, 0, \ldots, 0)$ und π und π' als Hyperebenen $x_0 = 0$, $x_0' = 0$, und ist $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0$ die Gleichung von F in π, d. h. die Gleichung des Kegels, der F von O aus projiziert, so wird die Transformation durch die Formeln

$$\begin{aligned} \varrho x_0' &= \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_r) \\ \varrho x_i' &= x_0 x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, r) \end{aligned}$$

bestimmt, deren Umkehrungen

$$\begin{aligned} \sigma x_0 &= \varphi(x_1', x_2', \ldots, x_r') \\ \sigma x_i &= x_0' x_i' \qquad (i = 1, 2, \ldots, r) \end{aligned}$$

sind, wobei ϱ und σ zwei Proportionalitätsfaktoren sind.

Einer von O ausgehenden Geraden g entspricht eine von O' ausgehende Gerade g' und die auf diese Weise zwischen den Bündeln O und O' durch die quadratische Transformation bestimmte Korrespondenz ist eine Kollineation. Die Korrespondenz zwischen den Geraden g und g' ist eine Projektivität, die dann und nur dann ausartet, wenn g auf dem Kegel $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0$ und g' daher auf dem Kegel $\varphi(x_1', x_2', \ldots, x_r') = 0$ liegt. Ist die Projektivität nicht ausgeartet, so sind die homologen Punkte der Punkte O und O' die Schnittpunkte von g' mit π' und von g mit π. Wir können daher sagen, daß den Punkten von π der Punkt O' korrespondiert oder besser, daß den Punkten von π die O' unendlich benachbarten Punkte, also die von diesem Punkte ausgehenden Richtungen, kollinear entsprechen. Ist dagegen die Projektivität zwischen g und g' ausgeartet, so ist der entsprechende Punkt jedes Punktes von g der Schnittpunkt von g' mit π', so daß also jeder Geraden des Kegels $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0$ ein Punkt von F' entspricht und umgekehrt.

Der Punkt O und die Punkte von F heißen *Hauptpunkte* in S_r, ebenso der Punkt O' und die Punkte von F' *Hauptpunkte* in S_r'. Die Hyperebene π und der Kegel $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0$, ebenso auch die Hyperebene π' und der Kegel $\varphi(x_1', x_2', \ldots, x_r') = 0$, die diesen entsprechen, heißen *Haupthyperflächen* der quadratischen Transformation.

Die *Jacobi*sche Hyperfläche des homaloiden Systems von S_r setzt sich aus der $(r-1)$-mal gezählten Hyperebene π und dem ein einziges Mal gezählten Kegel $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0$ zusammen.

Trivial ist die Erweiterung der Transformation durch reziproke Radien auf einen Raum S_r (für $r = 2$ s. Nr. **70**, **71** und für $r = 3$ s. Nr. **79**). Die dadurch im euklidischen Raume von $r > 2$ Dimensionen entstehende konforme Gruppe ist eine endliche kontinuierliche Gruppe mit $\frac{(r+1)(r+2)}{2}$ Parametern.

90. Andere besondere birationale Transformationen und Gruppen solcher Transformationen. Spezielle Transformationen erhalten wir, außer durch die gegen Ende Nr. 88 angedeutete Erweiterung der Methode von *L. Cremona*, leicht auch durch Übertragung bekannter Konstruktionen der Ebene und des Raumes.

So erhalten wir eine quadratische Transformation, deren sämtliche Ordnungen gleich 2 sind, wenn wir in einem Raume S_{r+1} eine nicht spezialisierte Hyperfläche Q 2. Ordnung und zwei Hyperebenen π, π' annehmen und die Hyperfläche Q von zwei auf ihr fest gewählten Punkten aus auf π und π' projizieren.

Eine quadratische Transformation erhält man, wenn man einen Raum S_r und einen Raum S_r' durch eine Reziprozität und zwei Geradenbündel O und O' dieser Räume kollinear aufeinander bezieht und jedem Punkte P von S_r den Schnittpunkt der zu P reziproken Hyperebene mit der dem Strahl OP in der Kollineation entsprechenden Gerade von O' entsprechen läßt.

Wir erhalten dagegen eine Transformation der Ordnung r, wenn wir die beiden Räume S_r, S_r' durch r Reziprozitäten aufeinander beziehen und jedem Punkte des einen Raumes den Schnittpunkt der r reziproken Hyperebenen entsprechen lassen.[808])

Eine Transformation r^{ter} Ordnung erhalten wir auch, wenn wir r Büschel von Hyperebenen von S_r auf r Büschel von Hyperebenen von S_r' projektiv beziehen und zwei Punkte als homolog auffassen, die Schnittpunkte zweier bei diesen r Paaren von projektiven Büscheln homologer Gruppen von r Hyperebenen sind.[809])

808) *C. Carrone*[802]), p. 50; *L. Godeaux*, Rend. Ist. Lomb. (2) 43 (1909), p. 116.

809) *Maria del Re*, Rend. Acc. Napoli (3) 28 (1922), p. 203. Bei dieser Transformation ergeben sich zwei Sonderfälle, die von *C. Carrone*[802]), p. 50—57, bzw. von *E. Veneroni*, Rend. Ist. Lomb. (2) 34 (1901), p. 640 untersucht wurden. Die erste Transformation erhalten wir durch Betrachtung der Geraden in einem Raume S_{r+1}, die gleichzeitig r Räume S_{r-1} schneiden. Von diesen ∞^r Geraden geht eine und nur eine durch jeden Punkt von S_{r+1} hindurch. Es entsteht also zwischen zwei Hyperebenen von S_{r+1} eine birationale Korrespondenz r^{ter} Ordnung, wenn ihre Schnittpunkte mit einer dieser Geraden einander entsprechen. — Bei der zweiten Transformation besteht das homaloide System in jedem der beiden Räume S_r aus den Hyperflächen r^{ter} Ordnung, die durch $r+1$ in allgemeiner Lage gegebene Räume S_{r-2} hindurchgehen. Über einige der vorhergehenden

J. G. Semple[810]) klassifiziert die allgemeinen Typen von Flächen, die man als partiellen Schnitt zweier kubischer Hyperflächen in S_4 erhält und macht Anwendung davon auf das Studium einiger birationaler kubischer Transformationen in S_4.

O. Franceschi[811]) studiert spezielle monoidale *Cremona*sche Transformationen in S_4.

Einige Typen birationaler involutorischer Transformationen, die die kubische Hyperfläche von S_4 in sich transformieren, untersucht *V. Snyder.*[812]) Er betrachtet auch verschiedene unendliche diskontinuierliche Gruppen birationaler Transformationen mit einer invarianten kubischen Hyperfläche in S_4.[813])

P. H. Schoute[814]), *Nina Alderton*[815]), *C. G. F. James*[816]), *B. C. Wong*[817]),

---

Transformationen in einem S_4 s. *M. Mikan*, Prag České Ak. Rozpravy 39 (1929), Nr. 21; *J. A. Todd,* Proc. Cambridge Phil. Soc. 26 (1930), p. 323.

Weitere, von anderen speziellen Konstruktionen herrührende birationale Transformationen bei *A. del Re,* Giorn. di mat. (1) 28 (1890), p. 271; Roma Rend. Acc. Linc. (4) 6^2 (1890), p. 271; *P. del Pezzo*, Rend. Acc. Napoli (3) 2 (1896), p. 295; *C. Carrone*[802]), p. 57—62; *U. Perazzo*[454]), p. 149; *M. Stuyvaert,* Rend. Ist. Lomb. (2) 44 (1911), p. 314; *E. G. Togliatti*[806]); *G. Marletta*[650]), p. 252 [Anwendungen bei *G. Bennati,* Catania Atti Acc. Gioenia (4) 17 (1929), Nr. VI; *G. Marletta,* ebenda (4) 18 (1930), Nr. II]; *B. C. Wong,* Bull. Amer. math. Soc. (2) 35 (1929), p. 829; *Maria del Re,* Rend. Acc. Napoli (3) 35 (1929), p. 208; *G. Aprile,* Giorn. di mat. (3) 23 (1932), p. 196.

U. Amaldi, Giorn. di mat. (3) 9 (1918), p. 1 studiert die involutorische birationale Transformation, die zwischen den aufeinanderfolgenden Ableitungen einer beliebigen Funktion einer Veränderlichen bis zu irgendeiner beliebigen Ordnung und den Ableitungen der inversen Funktion bis zur gleichen Ordnung stattfindet.

R. Fricke, Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 3 (1894), p. 93 betrachtet eine mit dem Studium der Moduln der algebraischen Gebilde verknüpfte Gruppe *Cremona*scher Transformationen.

J. W. Young und *F. M. Morgan*[617]) erweitern die in Anm. 617 und 798 erwähnten Untersuchungen auf die Hyperräume.

810) Proc. London math. Soc. (2) 32 (1931), p. 369.

811) Giorn. di mat. (3) 18 (1927), p. 90; (3) 19 (1928), p. 131; Rassegna di mat. e fis. 7 (1927), p. 73, 109.

812) *V. Snyder,* Rend. Circ. mat. Palermo 38 (1913), p. 344 [Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 20 (1914), p. 288]; *V. Snyder* und *Marguerite Lehr,* Amer. J. of math. 53 (1931), p. 186 [Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 36 (1930), p. 191].

813) Bull. Amer. math. Soc. (2) 35 (1929), p. 612—615; *V. Snyder* und *Marguerite Lehr*[812]).

814) Arch. Musée Teyler (2) 7 (1900), p. 117.

815) Math. Publ. Univ. of California 1 (1923), p. 345.

816) Proc. Cambridge Phil. Soc. 22 (1924), p. 201.

817) Bull. Amer. math. Soc. (2) 32 (1926), p. 156; Ann. of math. (2) 27 (1926), p. 330 [Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 33 (1927), p. 272]; (2) 28 (1927), p. 251; Amer. J. of math. 49 (1927), p. 383.

L. Roth[818]) studieren die Involution 4. Ordnung in S_4, die aus den Paaren in bezug auf die Hyperflächen 2. Ordnung eines linearen ∞^3-Systems konjugierter Punkte gebildet wird.

H. C. Shaub[819]) bestimmt die allgemeinen Typen der involutorischen Transformationen in S_4, die ∞^4 Hyperflächen 2. Ordnung invariant lassen.

Maria Miglio[819a]) studiert die nicht involutorischen birationalen Transformationen in S_4, bei denen auf jeder Treffgeraden einer gegebenen, notwendig rationalen, Kurve ein und nur ein Paar von homologen Punkten liegt.

Über die durch Kollineationen und quadratische Transformationen vom einfachsten Typus (Nr. **89**) erzeugten endlichen Gruppen s. die Bemerkungen über *S. Kantor*[820]) Nr. **86**.

L. Autonne[821]) überträgt seine Untersuchungen über die birationalen Berührungstransformationen (Nr. **65** u. **87**) auf die Hyperräume.

91. Fortsetzung: Reguläre Gruppen Cremonascher Transformationen. Untersuchungen von A. B. Coble.[822]) *S. Kantor*[823]) und *A. B. Coble*[824]) dehnen die Betrachtungen in Nr. **55** dadurch bzw. auf den Raum

B. C. Wong, Ann. of math. (2) 30 (1929), p. 547 studiert auch die Korrespondenz, die in S_4 entsteht, wenn wir jedem Punkte die Gerade entsprechen lassen, in der sich die Polarhyperebenen des Punktes in bezug auf drei feste Hyperflächen 2. Ordnung schneiden. Das ∞^4-System der auf diese Art erhaltenen Geraden ist so beschaffen, daß sechs von diesen Geraden in einer allgemeinen Ebene liegen.

818) Proc. London math. Soc. (2) 30 (1929), p. 118.

819) Amer. J. of math. 49 (1927), p. 367; Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 33 (1927), p. 10.

819a) Catania Atti Acc. Gioenia (5) 18 (1932), Nr. XIX.

820) Eine Gruppe von Inversionen [vgl. III C 7 (*C. Segre*), Anm. 302] betrachtet *S. Kantor*[805]), p. 718.

821) Verh. des dritten intern. Math.-Kongresses, Heidelberg 1904 (Leipzig 1905), p. 379; Paris C. R. 155 (1912), p. 762; J. Éc. Polyt. (2), cah. 17 (1913), p. 147.

822) Ein Gesamtüberblick über diese Untersuchungen bei *A. B. Coble*, Bull. Amer. math. Soc. (2) 28 (1922), p. 329. S. auch *H. S. White*, daselbst (2) 35 (1929), p. 16.

Bezüglich derartiger Untersuchungen, vor allem im Zusammenhang mit den Thetafunktionen vom Geschlecht 2, 3, 4, s. auch *A. B. Coble*, „Alg. geom.“, wo auch viele Sonderfälle („*Reihe*“ P_6^2, P_7^2, P_8^2, P_9^2, P_{10}^2, P_6^3, P_7^3, P_8^3, ...) und die Verbindungen mit verschiedenen geometrischen Gebilden (ebene Kurve 4. Ordnung vom Geschlecht 3, rationale ebene Kurve 6. Ordnung, ebene Kurve 6. Ordnung vom Geschlecht 4, ebene hyperelliptische Kurven, Raumkurve 6. Ordnung vom Geschlecht 4, Fläche 3. Ordnung, *Kummer*sche Fläche, *Weddle*sche Fläche, Symmetroide, Involutionen in der Ebene und im Raume, ...) betrachtet werden.

823) S. Anm. 779.

824) S. Anm. 481; außerdem „Alg. geom.“, p. 39—45.

S_3 und den Raum S_r aus, daß sie die speziellen *Cremona*schen Transformationen untersuchen, die von *A. B. Coble* als *regulär* bezeichnet werden und die Produkte von Transformationen vom Typus $x_i x_i' = 1$ $(i = 0, 1, \ldots, r)$ und von Kollineationen sind. Diese Transformationen bilden eine Gruppe, die als *reguläre Cremonasche Gruppe* in S_r bezeichnet wird. Sie sind im wesentlichen durch ihre isolierten Hauptpunkte definiert, und besitzen analoge Eigenschaften wie die ebenen *Cremona*schen Transformationen: eine Transformation und ihre inverse haben ein und dieselbe Ordnung n [die die Form $(r-1)\mu + 1$ hat], die gleiche Anzahl ϱ isolierter Hauptpunkte usw.

Einer Hyperebene des ersten Raumes S entspricht im zweiten Raume S' eine Hyperfläche n^{ter} Ordnung, die in den Hauptpunkten $q_1, q_2, \ldots, q_\varrho$ von S' gewisse, durch $r-1$ teilbare Multiplizitäten $(r-1)s_1, (r-1)s_2, \ldots, (r-1)s_\varrho$ hat. Die dem Hauptpunkt p_i $(i = 1, 2, \ldots, \varrho)$ von S entsprechende Haupthyperfläche in S' habe die Ordnung r_i und in q_j die Multiplizität α_{ji}.

Hat nun eine Hyperfläche von S die Ordnung x_0 und in p_i die Multiplizität x_i, so wird die entsprechende Hyperfläche die Ordnung y_0 und in q_j die Multiplizität y_j haben, wobei

$$\begin{aligned} y_0 &= [(r-1)\mu + 1]x_0 - r_1 x_1 - \cdots - r_\varrho x_\varrho, \\ y_1 &= (r-1)s_1 x_0 - \alpha_{11}x_1 - \cdots\cdots - \alpha_{1\varrho}x_\varrho, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_\varrho &= (r-1)s_\varrho x_0 - \alpha_{\varrho 1}x_1 - \cdots\cdots - \alpha_{\varrho\varrho}x_\varrho. \end{aligned} \tag{1}$$

Bezeichnen wir dann mit $x_{\varrho+1}, \ldots, x_m$ und mit $y_{\varrho+1}, \ldots, y_m$ die Multiplizitäten der beiden Hyperflächen in $m - \varrho$ $(\varrho \leq m)$ Paaren allgemeiner miteinander entsprechender Punkte, so kommen zu den vorhergehenden noch die Beziehungen

$$y_{\varrho+1} = -(-1)x_{\varrho+1}, \ldots, y_m = -(-1)x_m$$

hinzu.

Gehen wir zur inversen regulären Transformation über, so ergeben sich statt der Zahlen r_i, s_i, α_{ji} die Zahlen s_i, r_i, α_{ij}.

Für die durch die Gleichungen (1) dargestellte lineare Transformation mit ganzen Koeffizienten ist eine lineare und eine quadratische Form invariant, d. h.

$$\begin{aligned} &(r+1)x_0 - x_1 - \cdots - x_m, \\ &(r-1)x_0^2 - x_1^2 - \cdots - x_m^2, \end{aligned}$$

wodurch man für die ganzen Zahlen $\mu, r_i, s_i, \alpha_{ji}$ folgende Beziehungen[825]) erhält, die den in Nr. **49** und **50** für die ebenen Transforma-

825) *A. B. Coble,* Trans. Amer. math. Soc. 17 (1915), p. 366.

tionen angegebenen Beziehungen analog sind:

$$\sum_i s_i = \sum_i r_i = (r+1)\mu,$$

$$\sum_i s_i^2 = \sum_i r_i^2 = (n+1)\mu,$$

$$\sum_j \alpha_{ji} = (r+1)r_i - 1, \qquad \sum_i \alpha_{ji} = (r+1)s_j - 1,$$

$$\sum_j \alpha_{ji} s_j = n r_i, \qquad \sum_i \alpha_{ji} r_i = n s_j,$$

$$\sum_j \alpha_{ji}^2 = (r-1)r_i^2 + 1, \qquad \sum_i \alpha_{ji}^2 = (r-1)s_j^2 + 1,$$

$$\sum_j \alpha_{ji}\alpha_{jk} = (r-1)r_i r_k, \qquad \sum_i \alpha_{ji}\alpha_{ki} = (r-1)s_j s_k.$$

Jedem Typus einer regulären Transformation mit vorher festgelegter Zuordnung der beiden Gruppen von isolierten Hauptpunkten entspricht eine lineare Transformation (1), und die Gesamtheit aller derartigen Typen mit ϱ gegebenen Hauptpunkten erzeugt eine Gruppe $g_{m,r}$ von Kollineationen, die für $m > r + 3$ mit Ausnahme der folgenden Wertepaare von m und r[826])

$$6,2; \quad 7,2; \quad 7,3; \quad 8,2; \quad 8,4$$

unendlich und diskontinuierlich ist.

A. B. Coble[827]) führt, indem er insbesondere annimmt, daß die $\varrho \leqq m$ Hauptpunkte auf einer elliptischen Normalkurve liegen und indem die Koordinaten der Punkte dieser Kurve durch elliptische Funktionen eines Parameters ausdrückt [III C 7 (*C. Segre*), Nr. 28], eine

---

826) *A. B. Coble*, a. a. O., p. 362.

A. B. Coble, a. a. O., p. 368—369 bestimmt auch alle Typen symmetrischer regulärer Transformationen, deren sämtliche Hauptpunkte also gleiche Multiplizität besitzen. Die Ordnung n einer derartigen Transformation, die Anzahl ϱ ihrer Hauptpunkte und die gemeinsame Multiplizität λ dieser Punkte können nur folgende Werte annehmen:

für $r \geqq 2$: $\quad n = r, \quad \varrho = r+1, \quad \lambda = 1;$

für r ungerade:

$$n = \frac{(r-1)(r+3)}{2} + 1, \quad \varrho = r+3, \quad \lambda = \frac{r+1}{2};$$

für $r = 4$: $\quad n = 49, \quad \varrho = 8, \quad \lambda = 10;$

außerdem für $r = 2$:

$n = 5, \ \varrho = 6, \ \lambda = 2; \qquad n = 8, \ \varrho = 7, \ \lambda = 3; \qquad n = 17, \ \varrho = 8, \ \lambda = 6,$

und für $r = 3$: $\quad n = 15, \ \varrho = 7, \ \lambda = 4.$

Die vier Fälle für $r = 2$ wurden in Nr. 52 angegeben. Die drei Fälle für $r = 3$ finden sich schon bei *S. Kantor*[779]), p. 27 vor.

827) a. a. O., p. 370.

weitere mit $g_{m,r}$ isomorphe Kollineationsgruppe $e_{m,r}$ mit rationalen Koeffizienten ein.

Die Betrachtung der Transformation (1) ist für *S. Kantor* der Ausgangspunkt zu den in Nr. 86 erwähnten Untersuchungen. *A. B. Coble* verfolgt dagegen das Studium der Transformation (1) im Zusammenhang mit der Betrachtung der *kongruenten „Reihen“* („*set*“) von Punkten in S_r und macht Anwendungen hiervon auf die Theorie der algebraischen Gleichungen und der *Abel*schen Modulfunktionen.

Eine „*Reihe*“ P_m^r ist ein Aggregat von m Punktes des Raumes S_r. Nach dem *Graßmann*schen Prinzip von den korrespondierenden Matrizen [I A 2 (*E. Netto*), Nr. 34] gehört der Reihe P_m^r von S_r eine „*assoziierte*“ Reihe Q_m^{m-r-2} in S_{m-r-2} an, und ist $m = 2r + 2$, so ist die Reihe P_m^r „*sich selbst assoziiert*“. Zwei assoziierte Reihen bestimmen einander in eindeutiger Weise.[828])

---

828) Über die assoziierten Reihen s. auch *A. B. Coble,* Trans. Amer. math. Soc. 24 (1922), p. 1 [Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 29 (1923), p. 120], wo auch „Spezialreihen“ auftreten, die für gegebene Werte von m und r gewissen projektiven Bedingungen genügen. So ergibt sich insbesondere, daß die Normalflächen der Ordnung $r - 1$ von S_r [III C 7 (*C. Segre*), Nr. 35] eine unendliche diskontinuierliche Gruppe automorpher regulärer Transformationen zulassen.

Eine beachtenswerte, sich selbst assoziierte Reihe ist die Reihe P_{2p+2}^p von S_p, die durch die Eigenschaft geometrisch gekennzeichnet ist, daß alle Hyperflächen 2. Ordnung durch $2p + 1$ von den Punkten dieser Reihe auch durch den letzten Punkt hindurchgehen. S. *A. B. Coble,* Trans. Amer. math. Soc. 16 (1914), p. 160, und vor allem Amer. J. of math. 40 (1918), p. 317, wo der Zusammenhang zwischen den absoluten Invarianten einer sich selbst assoziierten Reihe und den Thetafunktionen studiert wird. Für die Reihe P_{2p+2}^p ist die Anzahl dieser Invarianten $\frac{p(p+1)}{2}$, also gleich der Anzahl der Moduln der allgemeinen Thetafunktion von p Veränderlichen.

Über geometrische Zusammenhänge mit den *Abel*schen Modulfunktionen vom Geschlecht 4 s. *A. B. Coble,* Amer. J. of math. 46 (1923), p. 143; 51 (1929), p. 495; Auszüge Proc. National Ac. of Sciences 7 (1921), p. 245, 334; 9 (1923), p. 183.

Mit diesen letzten Untersuchungen verknüpfen sich die weiteren Arbeiten von *A. B. Coble,* Amer. J. of math. 41 (1919), p. 243 [vgl. auch Trans. Amer. math. Soc. 24 (1922), p. 20] über die Verbindung zwischen der Reihe P_{10}^2 der Knoten einer ebenen rationalen Kurve 6. Ordnung (vgl. Anm. 485 und 780) und der Reihe P_{10}^3 der Knoten des *Cayley*schen Symmetroides. Es zeigt sich, daß sich die Reihe P_{10}^3 gegenüber regulären *Cremona*schen Raumtransformationen ganz ähnlich verhält, wie die Reihe P_{10}^2 gegenüber *Cremona*schen ebenen Transformationen.

A. B. Coble, Ann. of math. (2) 17 (1915), p. 101 untersucht auch einen Isomorphismus zwischen den Thetafunktionen von p Veränderlichen und den irrationalen Invarianten einer Reihe P_{2p+2}^p.

Über die spezielle Reihe P_8^3, die sich aus den Basispunkten eines Netzes von Flächen 2. Ordnung von S_3 zusammensetzt, s. *J. R. Musselman,* Amer. J. of

Die Invarianten einer Reihe P_m^r setzen sich aus den Determinanten der Matrix der Koordinaten der m Punkte zusammen, sind in den Koordinaten jedes Punktes homogen und gleichen Grades und bleiben bei Vertauschungen der Punkte unverändert. Zwei assoziierte Reihen haben gleiche absolute Invarianten.[829])

Die in einer gewissen Art geordnete Reihe P_m^r kann, da sie $r(m-r-2)$ projektive Invarianten besitzt, durch einen Punkt P eines $r(m-r-2)$-dimensionalen linearen Raumes Σ dargestellt werden, und zwei dieser Bildpunkte P und P' sind durch eine *Cremona*sche Transformation verbunden. Die $m!$ von den $m!$ Permutationen der Punkte von P_m^r herrührenden Bildpunkte P sind unter einer Gruppe $G_{m!}$ von $m!$ *Cremona*schen Transformationen der Ordnung $m-r-2$ in Σ konjugiert; die Invarianten der Gruppe $G_{m!}$ ergeben sich aus denen von P_m^r.

Zwei geordnete Reihen P_m^r und Q_m^r von m Punkten, die sich aus den Punkten $p_1, p_2, \ldots, p_m$ von S_r und den Punkten $q_1, q_2, \ldots, q_m$ von S_r' zusammensetzen, sind nach *A. B. Coble*[830]) in bezug auf eine reguläre *Cremona*sche Transformation T *kongruent,* wenn ϱ ($\leqq m$) Paare $p_i q_i$ Hauptpunktepaare von T in den zwei Räumen sind und die restlichen $m-\varrho$ Paare allgemeine Paare homologer Punkte von T sind. Fügt man zu den erwähnten Permutationen der Punkte von P_m^r die Operation des Übergangs von P_m^r zur Gesamtheit aller mit ihr in bezug auf reguläre Transformationen im S_r kongruenten Reihen hinzu, so erhält man dadurch in Σ eine mit der Kollineationsgruppe $g_{m,r}$ isomorphe erweiterte Gruppe $G_{m,r}$ *Cremona*scher Transformationen. Die erweiterten Gruppen $G_{m,r}$ und $G_{m,m-r-2}$ der assoziierten Reihen P_m^r und Q_m^{m-r-2} stimmen überein; die Gruppe $g_{m\,r}$ und $g_{m,m-r-2}$ sind holoedrisch isomorph.[831])

math. 40 (1918), p. 69. S. auch *A. B. Coble,* Trans. Amer. math. Soc. 17 (1915), p. 377; *C. C. Bramble*[482]), p. 362.

829) Diese Invarianten werden von *A. B. Coble* im allgemeinen und in den einfachsten Sonderfällen in Trans. Amer. math. Soc. 12 (1910), p. 311; 16 (1914), p. 155; 17 (1915), p. 345; 24 (1922), p. 1 studiert. Über den Fall von 6 Punkten einer Ebene s. auch *J. R. Musselman,* Bull. Amer. math. Soc. (2) 35 (1929), p. 456.

830) S. [825]), p. 345.

831) Die in bezug auf reguläre Transformationen invarianten Eigenschaften von P_m^r lassen sich mit Hilfe gewisser *Diskriminanten-Bedingungen* ausdrücken, die von *A. B. Coble,* Trans. Amer. math. Soc. 17 (1915), p. 379; 18 (1916), p. 331 [Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 22 (1915), p. 9], besonders p. 338; Amer. J. of math. 41 (1919), p. 243 studiert wurden. Diese Bedingungen lassen sich durch reguläre Transformationen von zwei einfachen Typen ableiten, von denen der eine ausdrückt, daß zwei Punkte von P_m^r in einer gewissen Richtung zusammenfallen, der andere, daß $r+1$ Punkte der Reihe P_m^r in einem Raume S_{r-1} liegen.

In der zweiten Arbeit verwendet *A. B. Coble* die Gruppe $G_{6,2}$ in Σ_4 zur Bestimmung der 27 Geraden einer kubischen Fläche.

Die einzigen endlichen Gruppen $G_{m,r}$ $(m > r + 3)$ sind die Gruppe $G_{6,2}$, die Gruppe $G_{7,2} = G_{7,3}$ und die Gruppe $G_{8,2} = G_{8,4}$, von denen in Nr. **53** die Rede war. Alle anderen Gruppen $G_{m,r}$ sind unendlich diskontinuierlich.

Für $r = 1$ fällt die Gruppe $G_{m!}$ mit der von *E. H. Moore*[832]) studierten *„Doppelverhältnis-Transformationsgruppe“* (*„cross-ratio group“*) zusammen. Dieser bemerkt, daß sich die Doppelverhältnisse, die aus irgendwelchen vier Wurzeln einer binären Form der Ordnung $r + 3$ gebildet werden können, rational durch r passend unter ihnen ausgewählte ausdrücken lassen. Betrachtet man diese r Doppelverhältnisse als Koordinaten eines Punktes P eines Raumes S_r und nimmt man die Permutationen der $r + 3$ Wurzeln vor, so wird der Punkt P durch eine Gruppe $G_{(r+3)!}$ von $(r + 3)!$ *Cremona*schen Transformationen r^{ter} Ordnung transformiert, die daher mit der Gesamtgruppe aller Permutationen von $r + 3$ Elementen holoedrisch isomorph ist. In dieser Gruppe ist eine Gruppe von $(r + 2)!$ Kollineationen enthalten, die mit der symmetrischen Gruppe von $r + 2$ Elementen holoedrisch isomorph ist. Die Gruppe $G_{(r+3)!}$ läßt sich dadurch erhalten, daß man in S_r $r + 2$ allgemeine Punkte annimmt, und wird dann durch die Kollineationsgruppe der Ordnung $(r + 2)!$, die auf alle Arten die $r + 2$ Punkte permutiert, und durch die *Cremona*schen Transformationen r^{ter} Ordnung vom Typus $x_i x_i' = 1$ erzeugt, die $r + 1$ dieser Punkte als $(r - 1)$-fache Hauptpunkte und den übrig bleibenden Punkt als Fixpunkt haben. Die Anzahl der letzteren ist $(r + 2)!\,(r + 2)$.

Für $r = 2$ ergibt sich die gegen Ende Nr. **72** erwähnte Gruppe von 120 ebenen quadratischen Transformationen.[833])

Für $r = 3$ ergibt sich eine Gruppe von 720 kubischen Transformationen von S_3, die mit einer von *S. Kantor*[834]) bestimmten, wie auch mit einer von *Ed. Kasner*[835]) studierten Gruppe, die sich beim Studium

832) Amer. J. of math. 22 (1900), p. 279. S. auch *Ed. Kasner,* Bull. Amer. math. Soc. (2) 8 (1902), p. 374; *A. B. Coble,* Trans. Amer. math. Soc. 9 (1908), p. 420; Bull. Amer. math. Soc. (2) 33 (1927), p. 157; *L. Weisner,* Ann. of math. (2) 29 (1928), p. 440; Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 35 (1929), p. 4.

833) Diese Gruppe wird ferner von *H. E. Slaught,* Diss. Chicago 1898; Amer. J. of math. 22 (1900), p. 343; 23 (1900), p. 99 studiert. Ein Sonderfall bei *P. Field,* Bull. Amer. math. Soc. (2) 12 (1905), p. 234.

H. R. Brahana und *A. B. Coble,* Amer. J. of math. 48 (1925), p. 1 studieren eine reguläre Teilung der projektiven Ebene in 12 pentagonale Gebiete, die durch eine von der vorhergehenden *Cremona*schen Gruppe abgeleitete Gruppe in sich transformiert wird.

834) Anm. 779, p. 77 (Typus LI).

835) Amer. J. of math. 25 (1901), p. 107. Vgl. auch *J. F. Tinto,* Proc. Edinburgh math. Soc. 36 (1917—18), p. 17.

der Konfiguration der Doppelsechs einer kubischen Fläche darbietet, abstrakt äquivalent ist.

Für $r = 2, 3, 2p - 1$ wurde die Gruppe von *A. B. Coble*[836]) diskutiert, und zwar im Zusammenhang mit dem durch die Gruppe bestimmten Formenproblem und dem Problem der Auflösung der Gleichung 5., 6., $(2p + 2)^{\text{ten}}$ Grades, das sich im ersten Falle eng an die *Klein*sche Ikosaedertheorie anlehnt.

V. Mehrdeutige Korrespondenzen zwischen zwei linearen Räumen von zwei oder mehreren Dimensionen.

92. Rationale Transformationen zwischen zwei Ebenen.[837]) Die Theorie der birationalen Transformationen zwischen zwei Ebenen (Nr. **46** bis **72**) findet ihre natürliche Erweiterung in der Theorie der *mehrdeutigen algebraischen* oder *einfach rationalen* Transformationen.

Seien x_1, x_2, x_3 und x_1', x_2', x_3' die projektiven homogenen Koordinaten zweier Punkte X und X' in zwei voneinander verschiedenen oder vereinigten Ebenen π und π'; die Formeln

$$(1) \qquad \varrho x_i' = f_i(x_1, x_2, x_3) \qquad (i = 1, 2, 3),$$

wobei ϱ ein Proportionalitätsfaktor, f_1, f_2, f_3 drei ternäre Formen ein und derselben Ordnung n sind, die wir als frei von gemeinschaftlichen Faktoren betrachten können, lassen einem allgemeinen Punkt X von π einen und nur einen Punkt X' von π' und einem allgemeinen Punkt X' von π' eine gewisse endliche Anzahl D ($D \geqq 1$) von Punkten X von π entsprechen, wenn die Formen f_i nicht etwa binäre Formen ein und derselben Ordnung von zwei anderen Formen der x_1, x_2, x_3 sind, in welchem Falle bei Veränderung von X in π der Punkt X' eine (rationale) Kurve in π' beschreibt (vgl. Nr. **47**).

---

836) Trans. Amer. math. Soc. 9 (1908), p. 396 [Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 14 (1907), p. 253], bzw. ebenda 12 (1910), p. 311; Bull. Amer. math. Soc. (2) 30 (1924), p. 301.

In der letzten Arbeit betrachtet *A. B. Coble* ausgehend von $2p + 2$ Punkten eines Raumes S_{2p-1} auch eine *Abel*sche Gruppe der Ordnung 2^{2p+1}, die durch Transformationen vom Typus $x_i x_i' = 1$ erzeugt wird, die in $2p$ dieser Punkte isolierte Hauptpunkte haben und die beiden übrigen Punkte miteinander vertauschen. Die Gruppe besitzt eine p-dimensionale invariante Mannigfaltigkeit, eine Verallgemeinerung der *Weddle*schen Fläche. Eingehendere Untersuchungen bei *A. B. Coble,* Amer. J. of math. 52 (1930), p. 439, wo auch insbesondere der Fall $p = 3$ betrachtet wird.

837) Darstellungen dieses Gegenstandes, auch in Sonderfällen, bei *R. Sturm,* „Geom. Verw." 4, p. 232—261; *F. Severi,* „Lezioni", p. 36—46; „Vorlesungen", p. 30—37; „Trattato" 1_1, p. 297—301.

S. auch *V. Snyder,* „Report", p. 122—139.

Schließt man diesen Fall aus, so ergibt sich zwischen X und X' eine algebraische Korrespondenz mit den Indizes 1 und D, die *rationale Transformation* genannt wird, da sie in nicht homogenen Koordinaten x, y und x', y' durch Gleichsetzung von x', y' mit zwei rationalen Funktionen von x, y ausgedrückt werden kann (wobei die Funktionaldeterminante nicht identisch gleich Null ist).

Die Transformation heißt auch *mehrdeutig* (*zwei-*, *drei-*, ..., *-eindeutig*, je nachdem $D = 2, 3, \ldots$). Die Ebene π heißt *einfach*, die Ebene π' *D-fach.* Für $D = 1$ ergeben sich die birationalen Transformationen.

Das Studium der zweieindeutigen Transformationen wird von *A. Clebsch*[838]) in Zusammenhang mit der Zweiteilung der *Abel*schen Funktionen und mit der Absicht, Flächenabbildungen zu erhalten, begonnen; auf geometrischem Wege dann methodisch von *R. de Paolis*[839]) entwickelt, der Anwendungen von zwei Sonderfällen auf die nichteuklidische Geometrie[840]) bzw. die ebenen Kurven 4. Ordnung macht.[841]) Die Erweiterung auf die D-eindeutigen Transformationen für einen beliebigen Wert von D führen *P. Visalli*[842]), *G. Jung*[843]), *C. F. E. Björling*[844]) und *Charlotte Angas Scott*[845]) durch.

Verändert sich X' auf π', so beschreiben die D zu X korre-

---

838) Math. Ann. 3 (1870), p. 45; Auszug Gött. Nachr. 1870, p. 253.

Eine spezielle zweieindeutige Transformation zwischen zwei Ebenen schon bei *A. Cayley*, J. f. Math. 67 (1866), p. 95 = Papers 7, p. 121.

Eine Methode für das Studium der ebenen zweieindeutigen Transformationen durch Darstellung der Punktepaare der Ebene mittels der Punkte eines 4-dimensionalen Raumes rührt von *F. Palatini*, „Saggio di un metodo utile per lo studio delle trasformazioni geometriche", Palermo 1892 her.

839) Roma Mem. Acc. Linc. (3) 1 (1877), p. 511. Vgl. die Bemerkungen von *Charlotte Angas Scott*, Bull. Amer. math. Soc. (2) 7 (1900), p. 24.

840) Roma Mem. Acc. Linc. (3) 2 (1877), p. 31.

841) Roma Mem. Acc. Linc. (3) 2 (1878), p. 851.

842) „Sulle trasformazioni geometriche piane ν-ple", Messina 1884; „Sopra le diverse classi delle trasformazioni geometriche piane ν-ple", Messina 1884.

In diesen Arbeiten von *P. Visalli*, wie auch in der von *R. de Paolis*[839]), werden auch viele Sonderfälle untersucht.

843) Roma Rend. Acc. Linc. (4) 2^2 (1886), p. 302. — In Rend. Ist. Lomb. (2) 20 (1887), p. 370 studiert *G. Jung* das Problem der Bestimmung aller D-fachen Transformationen von der Minimalordnung, die durch eine willkürliche Auswahl der Hauptpunkte der einfachen Ebene erhalten werden können.

844) Stockholm Bihang Svenska Vet.-Ak. Handlingar 13 (1887), Nr. 8.

845) Ass. franç. Avanc. des sciences, St. Étienne 26 (1897), p. 50; Nieuw Archief voor Wiskunde (2) 3 (1898), p. 243; Quart. J. of math. 29 (1897), p. 329; 32 (1900), p. 209, wo sich Anwendungen auf die Transformation der Kurven vorfinden.

spondenten Punkte auf π eine Involution der Ordnung D (Nr. **102**), die mit der Transformation *verbunden* (*congiunta*) heißt, ebenso wie die Punkte einer Gruppe dieser Involution *untereinander verbunden* heißen.

Auf π existiert im allgemeinen eine Kurve Ω, deren jeder Punkt je einem ihrer verbundenen Punkte in einer bestimmten Richtung unendlich benachbart ist. Diese Richtung ist im allgemeinen verschieden von der der Tangente an Ω und heißt *Hauptrichtung*. Die Kurve Ω heißt *Doppelkurve* und die ihr in π' entsprechende Kurve Ω' nach *A. Clebsch*[838]) (vgl. Nr. **1**) *Übergangskurve* (*Grenzkurve* oder *Verzweigungskurve*). Die Kurven Ω und Ω' sind eineindeutig aufeinander bezogen und haben daher ein und dasselbe Geschlecht.

Es können aber in π, im allgemeinen außerhalb von Ω, *isolierte Doppelpunkte* in endlicher Anzahl existieren, d. h. solche, daß *jede* durch einen von diesen Punkten hindurchgehende Gerade zwei verbundene Punkte enthält, die mit demselben Punkte zusammenfallen.

Den Geraden von π' entsprechen in π die Kurven des Netzes $|f|$ vom Grade D [III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **3**]

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x) = 0,$$

d. h. eines Netzes, in dem zwei allgemeine Kurven D veränderliche Schnitte aufweisen, die eine Gruppe der verbundenen Involution bilden. Als *Hauptpunkte* von π werden die Basispunkte dieses Netzes bezeichnet. Fällt X in einen Punkt A von diesen, so liefern die Gleichungen (1) keine bestimmten Werte für die Koordinaten von X'. Lassen wir aber X kontinuierlich nach A streben, so ergibt sich (wie bei den birationalen Transformationen, Nr. **46**), daß den dem Punkte A in den verschiedenen von A ausgehenden Richtungen unendlich benachbarten Punkten, wenn diese Richtungen nur von den möglichen, allen Kurven von $|f|$ gemeinschaftlichen Tangenten in A verschieden sind, die Punkte einer rationalen, *Hauptkurve* genannten Kurve entsprechen. Die Ordnung dieser Kurve ist gleich der Anzahl der veränderlichen Tangenten der Kurven von $|f|$ in A, so daß also, wenn alle Tangenten in A an die Kurven von $|f|$ fest sind, den dem Punkte A unendlich benachbarten Punkten ein einziger Punkt in π' entspricht.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß alle Tangenten an die Kurven von $|f|$ in den Hauptpunkten von π veränderlich, also alle Hauptpunkte von π voneinander verschieden sind. Dann bezeichnen $r_1, r_2, \ldots$ die Multiplizitäten dieser Punkte, p das Geschlecht einer allgemeinen Kurve von $|f|$, s den *Überschuß* und ε den *Defekt* des Systemes $|f|$ ($s \geqq 0$, $\varepsilon \geqq 0$). Damit wollen wir ausdrücken [III C 4

(*L. Berzolari*), Nr. **35, 36**], daß s von den durch die Hauptpunkte von π den Kurven von $|f|$ auferlegten Bedingungen Folgerungen der übrigen sind, und die diesen $\sum_i \frac{r_i(r_i+1)}{2} - s$ unabhängigen linearen Bedingungen genügenden Kurven n^{ter} Ordnung ein lineares System von der Dimension $2 + \varepsilon$ bilden. Daher gilt

$$\sum_i r_i^2 = n^2 - D, \quad D = p - s + \varepsilon + 1.$$

Ist $s = \varepsilon$, so wird das Netz $|f|$ durch die in allgemeiner Lage angenommenen Hauptpunkte bestimmt (ist ein vollständiges und reguläres System), und es gilt $p = D - 1$.

Für $\varepsilon > s$ bestimmen die durch die Hauptpunkte allgemeiner Lage auferlegten Bedingungen kein Netz, sondern ein lineares System von einer Dimension > 2, dem das Netz $|f|$ angehören muß, und es ist $p < D - 1$.

Für $\varepsilon < s$ befinden sich die Hauptpunkte von π in speziellen Lagen in der Ebene, und es ist $p > D - 1$.

Die Zahl p heißt *Geschlecht* der Transformation und n deren *Ordnung.*

Die Ordnung von Ω' ist $2(D + p - 1)$.

Den Geraden von π entsprechen ∞^2 rationale Kurven φ' n^{ter} Ordnung, die jedoch kein lineares System bilden, sondern so beschaffen sind, daß D^2 von ihnen durch zwei allgemeine Punkte hindurchgehen. Sie besitzen gewisse r_1'-, r_2'-, ...-fache gemeinschaftliche Punkte, die als *Hauptpunkte* von π' bezeichnet werden. Einem beliebigen derartigen Punkte, der für die Kurven φ' gewöhnlich r_i'-fach ist, entspricht in π eine mit sich selbst verbundene *Hauptkurve* der Ordnung r_i', die auch zerfallen kann. Die Hauptkurven von π bilden mit der Doppelkurve Ω die *Jacobi*sche Kurve des Netzes $|f|$.[846]) Daher ergibt sich, wenn ν die Ordnung von Ω ist,

$$\nu = 3(n-1) - \sum_i r_i'.$$

Die Ordnung N der mit einer Geraden verbundenen Kurve ist durch

$$N = n^2 - \sum_i r_i'^2 - 1$$

---

846) In der ersten Arbeit von *P. Visalli*[842]) und den letzten beiden von *Charlotte Angas Scott*[845]) werden die *Plücker*schen Charaktere der Grenzkurve berechnet, die ebenso viele Resultate abzählender Art für das Netz $|f|$ liefern. Für den Fall, daß das Netz keine Hauptkurven aufweist, finden sich derartige Resultate abzählender Art schon bei *E. Caporali,* Coll. math. in mem. D. Chelini, Milano 1881, p. 153 [1879] = Mem. di Geometria, Napoli 1888, p. 182. S. III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **38**, b).

gegeben und zwei Kurven φ' schneiden sich in $N + 1$ veränderlichen Punkten.

Eine beliebige Kurve φ' hat $\frac{N-\nu}{2}$ veränderliche Doppelpunkte, berührt die Grenzkurve Ω' in ν Punkten und schneidet sie außer in den Hauptpunkten in ω Punkten, wobei ω die Ordnung der mit Ω verbundenen Kurve, also die Ordnung des Ortes der $D - 2$ mit den Punkten von Ω verbundenen Punkte ist (so daß also bei den ein-zweideutigen Transformationen jede Kurve φ' Ω außer den Hauptpunkten in jedem Schnittpunkte berührt).

Die mit der gegebenen mehrfachen Transformation verbundene Involution hat also die Ordnung N und die Klasse $\frac{N-\nu}{2}$.[847])

93. Sonderfälle. Unter den Doppeltransformationen tritt eine einzige Transformation 2. Ordnung auf; zwei vom Geschlecht Null bzw. vom Geschlecht 1 sind 3. Ordnung; drei sind 4. Ordnung, und zwar haben zwei von diesen das Geschlecht Null und eine das Geschlecht 1, und so weiter fort.

Die Transformation 2. Ordnung[848]) erhält man, wenn man eine Fläche Q 2. Ordnung von einem Punkte O dieser Fläche bzw. einem nicht auf Q gelegenen Punkte O' aus auf zwei gegebene Ebenen π und π' projiziert.[849]) Hauptelemente in π sind die Spuren A und B der beiden von O ausgehenden Erzeugenden von Q und die Spur der Tangentialebene in O. Hauptelemente in π' sind die Spur K' der Geraden OO' und die Spuren der durch OO' hindurchgehenden Tangentialebenen an Q. Der Doppelkegelschnitt ist der Schnitt von π mit dem Kegel, der den Berührungskegelschnitt des Q von O' aus umbeschriebenen Kegels von O aus projiziert. Der Grenzkegelschnitt ist

847) *G. Borghese*, Giorn. di mat. (2) 1 (1893), p. 58 erweitert die Formel von *S. Kantor* (Nr. 58) für die Anzahl der zyklischen Gruppen von gegebenem Index einer *Cremona*schen Transformation zwischen zwei vereinigten Ebenen auf die D-fachen Transformationen. Im allgemeinen existieren z. B. $\frac{D(D-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}$ involutorische Paare.

Über die Anzahl der Fixpunkte s. Nr. 7.

848) S. *R. de Paolis*, Anm. 840.

849) Die ebene Projektion einer Fläche 2. Ordnung von einem nicht auf ihr liegenden Punkte aus wurde schon, in Verbindung mit den Eigenschaften der Kegelschnitte mit doppelter Berührung, von *J. V. Poncelet*[574]), p. 379—382 (Nr. 608—610) betrachtet; als Erweiterung der stereographischen Projektion von *M. Chasles*, Ann. de math. pures appl. 19 (1828—29), p. 157; „Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie" [1. Ausg.: Mém. couronnés Ac. Bruxelles in 4°, 11 (1837), an die Ac. des sciences de Paris im Januar 1830 übersandt; deutsch von *L. A. Sohncke*, Halle 1839], Paris, 3. Ausg. 1889, p. 222—223, 372. — Über eine Erweiterung s. Anm. 852.

die Spur dieses umbeschriebenen Kegels auf π'. Die verbundene Involution ist eine quadratische Inversion (Nr. **69**).

Den Geraden von π entsprechen ∞^2 Kegelschnitte durch K', die mit dem Grenzkegelschnitte eine doppelte Berührung haben; den Geraden von π' entsprechen projektiv die Kegelschnitte eines Netzes, das in A und B zwei Basispunkte besitzt.

Betrachtet man die einfache Ebene als eine euklidische Ebene mit den absoluten Punkten A und B, die Doppelebene als eine nicht-euklidische Ebene, deren absolutes Gebilde der Grenzkegelschnitt ist, so gelangt man zu einer Verbindung zwischen der nicht-euklidischen Geometrie von π' und der euklidischen Geometrie von π.[850])

Die zweite der von *R. de Paolis*[841]) studierten Transformationen ist 3. Ordnung und vom Geschlecht 1 und läßt sich erhalten, wenn man das Netz der durch 7 feste Punkte hindurchgehenden kubischen Kurven der einen Ebene und das Geradennetz der anderen Ebene projektiv aufeinander bezieht. Dies kann man dadurch erreichen, daß man die Abbildungsebene einer kubischen Fläche mit ihren 6 Hauptpunkten [III C 10a (*W. Fr. Meyer*), Nr. **11**] auf eine andere Ebene bezieht, auf die diese Fläche von einem ihrer Punkte aus projiziert wird. Die verbundene Involution ist die Involution von *C. F. Geiser* (Nr. **61**). In der Doppelebene entsteht dann als Grenzkurve eine allgemeine Kurve 4. Ordnung, und *R. de Paolis* studiert auf diesem Wege[851]) speziell die Eigenschaften der Doppeltangenten dieser Kurve.[852])

850) Vgl. auch *H. Liebmann*, Diss. Jena 1895; *R. Sturm*, „Geom. Verw." 4, p. 239—242. — Über die Erweiterung auf den Raum s. Nr. **97**.

851) Über diese Methode und ihre Beziehung zu anderen Methoden (von *L. O. Hesse, S. Aronhold, C. F. Geiser*) s. III C 5 (*G. Kohn*), Nr. **65—72**. S. außerdem, auch über Anwendungen auf spezielle Kurven 4. Ordnung, *H. Bateman*, Amer. J. of math. 36 (1914), p. 357.

852) Weitere, durch spezielle graphische oder metrische Eigenschaften gekennzeichnete Doppeltransformationen bei *Ad. Schwarz*, Sitzungsb. Ak. Wien 94 (1887) p. 310; *V. Retali*, Mem. Acc. Bologna (4) 10 (1889), p. 653; Rend. Acc. Bologna 1899—90, p. 59; 1890—91, p. 35; Mém. Soc. sc. Liège (2) 18 (1895); Period. di mat. (2) 2 (1900), p. 163, 266; (2) 3 (1901), p. 222; Mathesis (2) 10 (1900), p. 209; (3) 1 (1901), p. 152, 176; Nouv. Ann. de math. (4) 1 (1901), p. 224; Le mat. pure appl. 1 (1901), p. 128, 145, 200, 282; 2 (1902), p. 113; Rev. trim. de mat. Zaragoza 5 (1905), p. 199; 6 (1906), p. 1; Interm. des math. (1) 17 (1910), p. 133; Annaes scient. da Acad. pol. do Porto 9 (1913), p. 10; *G. Bordiga*, Atti Ist. Ven. (7) 5 (1894), p. 1613; *E. Muzio*, „Trasformazione piana doppia del terzo ordine", Livorno 1903; *B. Bydžovský*, Časopis 47 (1918), p. 247.

(1, 2)-Transformationen zwischen einer Punkt- und einer Geradenebene studieren *J. Neuberg*, Mathesis (3) 5 (1905), p. 72; Ann. Soc. scient. Bruxelles 32 A (1908), p. 176; *F. Mühlemann*, Diss. Bern 1905; *G. Loria*, Arch. math. pures appl. 1 (1907), p. 21; [46]) 1, p. 300, Fußnote; ital. Ausg. 1, p. 352, Fußnote [III C 5 b

Anna Mayme Howe[853]) bestimmt alle Typen, auf die die Korrespondenzen mit den Indizes 1 und 3 durch birationale Transforma-

(*G. Loria*), Nr. 24]; *J. Klíma*, Časopis 52 (1923), p. 64; (1, 3)-Transformationen *J. Neuberg*, Nouv. Corr. math. 2 (1876), p. 189; 4 (1878), p. 379; Arch. Math. Phys. (3) 3 (1901), p. 89; *H. van Aubel*, Nouv. Corr. math. 2 (1876), p. 281, 316; *K. Cwojdziński*, Arch. Math. Phys. (3) 1 (1900), p. 175.

Nullsysteme, d. h. Korrespondenzen mit den Indizes 1, D zwischen Punkten und Geraden einer Ebene, bei denen zwei homologe Elemente vereinigt liegen, bei *J. de Vries*, Anm. 514, außerdem Izvješča 8 (1917), p. 22; 9/10 (1918), p. 70, 73; Auszüge Rad. 215 (1916), p. 122; 219 (1918), p. 7.

C. F. E. Björling, Stockholm Öfversigt Vetensk.-Ak. Förhandlingar 44 (1887), p. 19 betrachtet eine ebene (1, 2)-Transformation und konstruiert mit Hilfe dieser eine Kurve 4. Ordnung, von der ein Doppelpunkt und elf einfache Punkte gegeben sind.

P. P. Boyd, Diss. Cornell Univ. 1911 = Amer. J. of math. 34 (1912), p. 291 studiert die mit einer Involution von *de Jonquières* assoziierte (1, 2)-Transformation, die durch Projektion einer Fläche n^{ter} Ordnung von zwei Punkten dieser Fläche aus, von denen der eine $(n-1)$-fach, der andere $(n-2)$-fach ist, auf zwei Ebenen erzeugt werden kann. Für $n = 2$ s. Anm. 849.

Eine quadratische (1, 2)-Reziprozität fand *A. del Re*, Mem. Acc. Modena (2) 10 (1895), p. 415 beim Studium der Brennlinien durch Reflexion.

G. H. Halphen, Math. Ann. 15 (1879), p. 359 = Œuvres 2, Paris 1918, p. 319 betrachtet eine ebene (1, 9)-Transformation, die beim Studium der Kurven 3. Ordnung auftritt.

Zwei durch eine ebene rationale Kurve 5. Ordnung bestimmte ebene Transformationen mit den Indizes 1, 5 und 1, 10 in Beziehung zur Apolarität betrachtet *J. R. Conner*, Trans. Amer. math. Soc. 13 (1910), p. 265; Johns Hopkins Univ. Circ. 30 (1911), p. 64 [Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 17 (1911), p. 287]. S. auch *W. Müller*, Giorn. di mat. (3) 13 (1922), p. 156, 164; Math. Ztschr. 24 (1924), p. 145. Über die Erweiterung auf den Raum s. Anm. 887.

J. R. Conner[767]) studiert auch die allgemeine ebene quadratische Transformation mit den Indizes 1, 4.

W. G. Alexejeff, Moskau math. Sammlung 14 (1889), p. 223; 16 (1892), p. 256 studiert die spezielle Transformation mit den Indizes 1, 4, die man erhält, wenn man jedem Punkte einer Ebene die Basispunkte des Büschels der Polarkegelschnitte dieses Punktes in bezug auf die kubischen Kurven eines gegebenen Büschels entsprechen läßt.

R. Sturm, „Geom. Verw." 4, p. 477—480 betrachtet zum Beweis verschiedener Sätze über die Polarkurven eine ebene Transformation mit den Indizes $1, n-1$ und der Ordnung n, die durch eine Kurve n^{ter} Ordnung und einen Punkt bestimmt ist und in der die Kurve Koinzidenzkurve ist.

Eine (1, 16)-Transformation studiert *P. Burniat*, Mém. Soc. sc. Liège (3) 16 (1931), Nr. 7, in Verbindung mit einem Netz von desmischen ebenen Kurven 4. Ordnung.

Weitere ebene mehrfache Transformationen bei *X. Antomari*, Revue math. spéc. 3 (1894—95—96), p. 147, 311; *J. de Vries*[514]); *A. Emch*, Bull. Amer. math. Soc. (2) 27 (1921), p. 345.

853) Amer. J. of math. 41 (1917), p. 25.

tionen reduziert werden können; *T. R. Hollcroft*[854]) löst die gleiche Frage für die Korrespondenzen mit den Indizes 1 und 4.

Mehrfache ebene Transformationen werden auch von *F. Lucas*[855]) in der sogenannten *Geometrie der Polynome* betrachtet. Dabei handelt es sich um die Abhängigkeit zweier komplexer Veränderlicher z und Z, die durch die Beziehung $Z = f(z)$ miteinander verknüpft sind, wobei $f(z)$ ein Polynom in z ist. Allgemeiner studiert *A. Emch*[856]) die Korrespondenz, die man unter der Annahme erhält, daß $f(z)$ eine gebrochene rationale Funktion von z ist.

94. Algebraische Korrespondenzen mit willkürlichen Indizes zwischen zwei Ebenen. Die algebraischen (m_1, m_2)-Korrespondenzen zwischen zwei Ebenen π_1, π_2[857]) im allgemeinen studiert *R. Baldus*[858]), teils in direkter Erweiterung der bekannten Eigenschaften der rationalen Korrespondenzen (Nr. **92**) in bezug vor allem auf die Hauptpunkte und -kurven, die Übergangs- und Doppelkurven, die Kurven, die in einer der beiden Ebenen den Geraden der anderen Ebene entsprechen, teils durch Ableitung von Eigenschaften der Transformation aus den

---

854) Amer. J. of math. 44 (1921), p. 163; Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 26 (1920), p. 439.

855) J. Éc. Polyt. (1), cah. 46 (1879), p. 1. Weitere Literatur bei *G. Loria*[46]) 1, p. 439—453; ital. Ausg. 1, p. 513—527; außerdem III C 5 b (*G. Loria*), Nr. **21**.

856) Rend. Circ. mat. Palermo 34 (1912), p. 333; Bull. Amer. math. Soc. (2) 8 (1912), p. 437; (2) 25 (1917), p. 397 [Auszug daselbst (2) 24 (1917), p. 280].

Über den Sonderfall $f(z) = \frac{1}{z^n}$ s. *C. M. Hebbert,* Tôhoku math. J. 13 (1918), p. 1; Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 23 (1917), p. 394. Der Fall, in dem $f(z)$ der Quotient von zwei Trinomen zweiten Grades ist, bei *S. Purushottam,* J. Indian math. Soc. 17 (1928), p. 102, 129; *R. Stolzenberg,* Ber. Säch. Ges. Wiss. Leipzig 82 (1930), p. 57.

Über diese Transformationen, sowohl für den Fall, daß $f(z)$ eine ganze, wie auch für den Fall, daß $f(z)$ eine gebrochene Funktion ist, s. *G. Holzmüller*[599]), p. 103—232, mit vielen Beispielen und Literaturangaben. S. ferner *F. H. Siebeck,* Anm. 615; *H. Durège,* Arch. Math. Phys. (1) 42 (1864), p. 1; *O. Biermann,* Sitzungsb. Ak. Wien 89 (1884), p. 84; *P. G. Laurin,* „Sur la transformation isogonale définie par une fonction rationnelle", Lund 1887; *K. Doehlemann,* „Geom. Transf." 2, p. 113—129; *G. Julia,* „Principes géométriques d'analyse" 1, Paris 1930, p. 54 ff.

857) Über lineale Erzeugung derartiger Transformationen und ihre Beziehung zur linealen Erzeugung der ebenen algebraischen Kurven nach *H. Graßmann* [III AB 4a (*G. Fano*), Nr. **23**; III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **10**] s. *A. Canda,* Monatsh. Math. Phys. 22 (1911), p. 279; 23 (1912) p. 347; 24 (1913), p. 33.

858) Math. Ann. 72 (1911), p. 1.

Über die durch zwei irreduzible algebraische Gleichungen zwischen den Koordinaten zweier homologer Punkte bestimmten Korrespondenzen mit beliebigen Indizes s. *C. Delin,* Diss. Lund 1893. Vgl. auch *J. G. H. Swellengrebel,* J. f. Math. 43 (1850), p. 245.

Eigenschaften der algebraischen Kongruenz K, die aus den Verbindungsgeraden der Paare homologer Punkte von π_1 und π_2 gebildet wird.

Es bezeichne n die Ordnung der in einer beliebigen der beiden Ebenen den Geraden der anderen Ebene entsprechenden Kurven, p_1, p_2 das Geschlecht dieser auf π_1 und π_2 liegenden Kurven und n_1, n_2 die Ordnung der Doppelkurven in π_1, π_2. Wir bezeichnen als *Ordnung* eines Hauptpunktes die Summe der Ordnungen der ihm entsprechenden Hauptkurven, wobei jede Kurve so oft zu zählen ist, wie die Anzahl der Blätter beträgt, in denen sie Fundamentalkurve für diesen Punkt ist, und nehmen an, daß π_1 α_i Hauptpunkte der Ordnung i, π_2 β_i Hauptpunkte der Ordnung i $(i = 1, 2, \ldots)$ enthält. Dann ergeben sich die Formeln[859]:

$$\sum i\alpha_i = 3n - m_1 + 2p_1 - n_2 - 2,$$
$$\sum i\beta_i = 3n - m_2 + 2p_2 - n_1 - 2.$$

Die Kongruenz K hat die Ordnung $\mu = n + m_1 + m_2$, ihre Klasse ist $\nu = n$, ihre singulären Punkte sind einzig und allein die Hauptpunkte der zwei Ebenen π_1, π_2. Die Ebenen selbst sind singuläre Ebenen der Kongruenz. Bezeichnen k_1 und k_2 die Hüllkurven der in π_1 bzw. π_2 liegenden Geraden von K, so hat k_1 z. B. die Ordnung $2(n + m_1 + p_1 - 1)$, die Klasse $n + m_1$, das Geschlecht p_1 und besitzt $\frac{1}{2}(n + m_1)(n + m_1 - 3) - p_1 + 1$ Doppeltangenten.

Die Brennfläche von K hat die Ordnung $2(2n + m_1 + m_2 + p_1 + p_2 - 2)$, die Klasse $2(2n + p_1 + p_2 - 2)$, schneidet π_1, π_2 in den Übergangskurven, bzw. den Kurven k_1 und k_2 und berührt die Ebenen selbst längs der dem Schnitt der beiden Ebenen entsprechenden Kurven n^{ter} Ordnung vom Geschlecht p_1 und p_2.

Die Kongruenz K kann eineindeutig, und ohne Auftreten von Fundamentalelementen bei der Abbildung, auf einer algebraischen Fläche Φ mit der Ordnung $\mu + \nu = 2n + m_1 + m_2$ und Doppelkurven von der Ordnungssumme $\binom{\mu}{2} + \binom{\nu}{2} + l$ abgebildet werden, die keine Kuspidalkurve aufweist. Dabei ist

$$l = (n-1)(n + m_1 + m_2) - (2n + p_1 + p_2 - 2)$$

die Summe des Ranges von K und der Ordnung der aus den Doppelstrahlen von K gebildeten Regelfläche.

Daraus leitet man ab, daß sich die gegebene (m_1, m_2)-Korrespondenz zwischen π_1 und π_2 dadurch erzeugen läßt, daß die einfach

859) In diesen und anderen von *R. Baldus* angegebenen Formeln sind Formeln einbegriffen, die für die birationalen oder einfach rationalen Transformationen (Nr. **49** und **92**) bereits angeführt wurden.

überdeckte Fläche Φ zugleich auf die m_2-fach überdeckte Ebene π_1 und die m_1-fach überdeckte Ebene π_2 abgebildet wird.

Betrachtet man den Schnitt von K mit einem Büschel von linearen Komplexen, so ergibt sich weiter, daß man jede algebraische (m_1, m_2)-Korrespondenz zwischen zwei Ebenen dadurch erzeugen kann, daß man den Kurven einer rationalen Schar vom Index m_2 der einen Ebene die Kurven einer rationalen Schar vom Index m_1 der anderen Ebene eineindeutig zuordnet, und die Punkte zweier zugeordneter Kurven eineindeutig aufeinander bezieht.

R. Baldus untersucht auch Transformationen, die sich in rationale und birationale Transformationen zerlegen lassen, und speziell den Zusammenhang zwischen der Rationalität der Fläche Φ und der Zerlegbarkeit der (m_1, m_2)-Korrespondenz in rationale Transformationen. Entsprechen z. B. den Geraden von π_1 rationale Kurven von π_2 (ohne daß den Geraden von π_2 rationale Kurven in π_1 zugeordnet sein müssen), so zerfällt die Korrespondenz in die Transformationen vom Index $(1, m_2)$ und $(m_1, 1)$.[860])

95. Sonderfälle. *Ch. Wiener*[861]) verallgemeinert die Konstruktion von *F. Seydewitz* (Nr. 67) für die quadratischen Transformationen dadurch, daß er an Stelle der Geradenbüschel Kurvenbüschel beliebiger Ordnung nimmt.[862])

Die allgemeinen, quadratischen und kubischen (2, 2)-Transformationen, bei denen also den Geraden jeder Ebene Kurven 2. oder 3. Ordnung der anderen Ebene entsprechen, studiert *G. Marletta*[863]), der auch

860) Über die Anzahl der Fixpunkte, falls π_1 und π_2 vereinigt sind, s. Nr. 7.

861) Math. Ann. 3 (1869), p. 11.

862) Über verschiedene, auf Kurven angewandte algebraische Transformationen vgl. *G. Loria*[46]) 2, p. 223—359; ital. Ausg. 2, p. 254—421.

Einige höhere ebene Nullsysteme, d. h. algebraische Korrespondenzen zwischen den Punkten und den Geraden einer Ebene, in denen zwei homologe Elemente ineinander liegen, betrachten *Th. Schmid,* Sitzungsb. Ak. Wien 99 (1890), p. 960; *E. Müller,* daselbst 120 (1911), p. 1798; *J. de Vries,* Ak. Amsterdam Versl. (4) 25 (1917), p. 954; (4) 26 (1918), p. 1142.

863) Rend. Circ. mat. Palermo 17 (1903), p. 173, 371. In der zweiten Arbeit finden sich auch verschiedene Ergebnisse für die allgemeinen (2, 2)-Transformationen.

Nach *R. Ragonesi,* Catania Atti Acc. Gioenia (5) 18 (1931), Nr. XXIII, können die quadratischen (m_1, m_2)-Transformationen zwischen zwei Ebenen nur von den Indizes (1, 1), (1, 2), (2, 2), (1, 3), (1, 4) sein.

Über die quadratischen (2, 2)-Transformationen s. noch *P. Visalli,* Rend. Circ. mat. Palermo 3 (1889), p. 165; *C. C. Engberg,* Graduate Bull. Univ. of Nebraska 1 (1900), p. 23; Ann. of math. (2) 4 (1902), p. 89; *R. Sturm,* „Geom. Verw." 4, p. 261—265. Analytische Behandlung bei *T. Kubota,* Science Reports Tôhoku Imp. Univ. 6 (1917), p. 359; 7 (1918), p. 33, 113; 8 (1919), p. 11; 14 (1925), p. 155;

verschiedene Konstruktionen dafür angibt. Eine einfache Konstruktion für die quadratische Transformation erhält man, wenn man eine Fläche F 2. Ordnung und zwei nicht zu ihr gehörende Punkte O, O' ins Auge faßt und zwei Punkte der gegebenen (voneinander verschiedenen oder nicht verschiedenen) Ebenen π_1, π_2 miteinander korrespondieren läßt, die die Projektionen ein und desselben Punktes von F von O und O' aus sind.[864])

Bei einer kubischen Transformation haben die den Geraden von π_2, π_1 entsprechenden kubischen Kurven in π_1, π_2 notwendigerweise ein und dasselbe Geschlecht, sind also rational oder elliptisch. Im zweiten Falle erhält man eine einfache Konstruktion durch Projektion einer kubischen Fläche, die keine Regelfläche ist, oder auch eines elliptischen Kegels von zwei einfachen Punkten der Fläche aus auf zwei Ebenen.

V. R. Barraco[865]) studiert die allgemeinen (2, 2)-Korrespondenzen und gibt Konstruktionen für die allgemeinen quadratischen involutorischen (2, 2)-Korrespondenzen.

E. Veneroni[866]) studiert die symmetrischen (2, 2)-Korrespondenzen zwischen zwei vereinigten Ebenen.

---

15 (1926), p. 671 [Auszüge Japanese J. of math. 2 (1926), Abstracts, p. (20); 3 (1927), Abstracts, p. (8)].

C. G. J. Jacobi konstruiert eine spezielle quadratische (2, 2)-Transformation und wendet sie auf die konfokalen Kegelschnitte an. Sind auf zwei Ebenen zwei Punktepaare A, B und A', B' gegeben, so betrachtet man in dieser Transformation zwei Punkte P und P' als korrespondierend, wenn $AP = A'P'$, $BP = B'P'$. S. den Brief von *C. G. J. Jacobi* an *J. Steiner,* J. f. Math. 12 (1834), p. 137; franz. Übers. von *A. Marre,* J. math. pures appl. (1) 11 (1846), p. 237 = Werke 7, Berlin 1891, p. 7 und die von *O. Hermes,* J. f. Math. 73 (1871), p. 179 = Werke 7, p. 42 mitgeteilte hinterlassene Arbeit von *C. G. J. Jacobi* in der auch die Erweiterung auf den Raum vorgenommen wird (Anm. 891). Über die gleiche Transformation s. noch *S. Cohn,* J. f. Math. 54 (1856), p. 329; *L. Burmester,* Math. Ann. 16 (1880), p. 89; *R. Sturm,* „Geom. Verw." 4, p. 448—449.

864) Über diese Konstruktion und Anwendungen auf die darstellende Geometrie s. *R. Neuendorff,* Ztschr. Math. Phys. 64 (1916), p. 61.

865) Giorn. di mat. (3) 7 (1915), p. 42.

866) Rend. Ist. Lomb. (2) 50 (1917), p. 447, 550, 651, wo der Fall betrachtet wird, daß sich die Paare korrespondierender Punkte auf die Geraden eines Büschels oder die Tangenten eines Kegelschnittes verteilen (und auf jeder derartigen Geraden ∞^1 Paare liegen).

E. Veneroni, Rend. Ist. Lomb. (2) 51 (1918), p. 374, 753; Ak. Amsterdam Versl. (Proc.) (4) 28 (1925), p. 335, studiert die symmetrischen (2, 2)-Korrespondenzen auch unter der Annahme, daß eine allgemeine Gerade der Ebene ein und nur ein Paar homologer Punkte enthält.

Für die auftretenden Haupttypen gibt *E. Veneroni* auch verschiedene Konstruktionen.

B. A. Edwards[866a]) studiert mit hyperräumlichen Methoden die periodischen (2, 2)-Korrespondenzen.

F. R. Sharpe und *V. Snyder*[867]) bestimmen die Typen, auf die sich die (2, 2)-Transformationen durch birationale Transformationen reduzieren lassen. *T. R. Hollcroft* löst dieselbe Frage für die (2, 3)-Korrespondenzen[868]) und[869]) für die (3, 3)-, (2, 4)-, (3, 4)- und (4, 4)-Korrespondenzen.[870])

96. Rationale Transformationen zwischen zwei dreidimensionalen Räumen. Wie im Falle der ebenen Transformationen kann die Theorie der birationalen Transformationen zwischen zwei dreidimensionalen Räumen durch Betrachtung der *mehrfachen,* d. h. der *einfach rationalen Transformationen* zwischen zwei Räumen erweitert werden, d. h. der algebraischen Korrespondenzen, durch die jedem Punkte X eines *einfachen* Raumes R ein einziger Punkt X' des *mehrfachen* Raumes R' entspricht, während jedem Punkte X' von R' D Punkte von R entsprechen.

Einige allgemeine Eigenschaften dieser Transformationen werden von *Th. Reye*[871]) angegeben. Eingehender untersucht diese Eigenschaften *R. de Paolis*[872]) für die Doppeltransformationen, d. h. für $D = 2$. Der Einfachheit halber beschränken wir uns hier auf den Fall $D = 2$.

Ändert sich X' in R', so beschreiben die Paare korrespondierender Punkte X in R eine Involution, die mit der Transformation *verbunden* (*congiunta*) heißt, ebenso wie die Punkte eines Paares dieser Involution untereinander *verbunden* (*congiunti* nach *R. de Paolis, assoziiert*

866a) J. London math. Soc. 2 (1927), p. 72.

867) Trans. Amer. math. Soc. 18 (1916), p. 402; Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 23 (1917), p. 67.

868) Amer. J. of math. 41 (1917), p. 5 [Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 24 (1918), p. 273]; 43 (1919), p. 199.

869) Amer. J. of math. 49 (1927), p. 553; Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 33 (1927), p. 264.

870) Weitere spezielle (2, 2)-Transformationen bei *C. Burali-Forti,* Rend. Circ. mat. Palermo 5 (1890), p. 91, wo auch die (2, 2)-Transformationen betrachtet werden, die als Produkte zweier (1, 2)-Transformationen entstehen; *J. Wagner,* Diss. München 1903; *E. Amson,* Diss. Erlangen 1904; *C. Wiesing,* Diss. Breslau 1906; *R. Sturm,* „Geom. Verw.“ 4, p. 265—268; *E. Veneroni,* Rend. Ist. Lomb. (2) 47 (1914), p. 521, 704; *J. de Vries,* Ak. Amsterdam Versl. (4) 30 (1921), p. 5.

Weitere mehrfache Transformationen bei *Ch. Beyel,* Vierteljahrsschr. naturf. Ges. Zürich 26 (1881), p. 297; *G. Broll,* Diss. Breslau 1911; *J. de Vries,* Ak. Amsterdam Versl. (4) 25 (1917), p. 954; (4) 26 (1918), p. 1142. Der zweite dieser Autoren betrachtet höhere Nullsysteme: vgl. Anm. 852.

871) J. f. Math. 94 (1882), p. 312. Über die von *Th. Reye* studierte ausgeartete oder nicht ausgeartete Kollineation, die die Korrespondenz zwischen den Umgebungen zweier homologer Punkte X und X' bestimmt, s. Nr. **74**.

872) Roma Mem. Acc. Linc. (4) 1 (1884—85), p. 576.

nach *Th. Reye*) heißen. Wir bezeichnen mit N die Ordnung der verbundenen Involution.

In R existiert im allgemeinen eine Fläche Ω, für die jeder Punkt seinem jeweils verbundenen Punkte in einer bestimmten Richtung unendlich benachbart ist. Diese Richtung ist im allgemeinen nicht tangential an Ω und heißt *Hauptrichtung*. Die Fläche Ω heißt *Doppelfläche* der Transformation und die ihr in R' entsprechende Fläche Ω' (Nr. **1**) *Übergangsfläche* (*Grenzfläche* oder *Verzweigungsfläche*) der Transformation.

In einem allgemeinen Punkte von Ω existiert nur eine Hauptrichtung; es kann aber vorkommen, daß es in R *Doppelkurven*, d. h. also solche gibt, für die in jedem ihrer Punkte ∞^1 Hauptrichtungen existieren. Ferner können auch *isolierte Doppelpunkte* auftreten, so daß also jede durch einen von diesen Punkten hindurchgehende Gerade zwei verbundene Punkte enthält, die im gleichen Punkte zusammenfallen.

Sind die Formeln für die Korrespondenz

$$\varrho x_i' = F_i(x_1, x_2, x_3, x_4) \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

so entsprechen den Ebenen von R' in R die Flächen des linearen Systems

$$\lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_4 F_4 = 0,$$

d. h. die Flächen eines linearen ∞^3-Systems $|F|$ einer gewissen Ordnung n und vom Grade 2, so daß also drei allgemeine Flächen dieses Systems zwei veränderliche Schnitte aufweisen (die ein Paar der verbundenen Involution bilden). Diese Flächen F sind sich selbst verbunden und auf die Doppelebene abbildbar (Nr. **118**).

Den Geraden von R' entsprechen ∞^4 hyperelliptische Kurven Γ einer gewissen Ordnung m, die alle sich selbst verbunden sind und jede Fläche F in nur zwei, untereinander verbundenen veränderlichen Punkten schneiden.

Die Ordnung n des linearen Systems $|F|$ und das Geschlecht p der Kurven Γ heißen *Ordnung* und *Geschlecht* der Transformation.

Den Ebenen von R entsprechen ∞^3 rationale Flächen Φ' der Ordnung m, die jedoch kein lineares System bilden, sondern so beschaffen sind, daß acht von ihnen durch drei allgemeine Punkte gehen. Die einer Ebene α entsprechende Fläche Φ' berührt die Übergangsfläche Ω' längs der Kurve, die dem Schnitt von α mit der Doppelfläche Ω entspricht, und schneidet Ω' in keinem weiteren veränderlichen Punkte. Drei allgemeine Flächen Φ' schneiden sich in $3N + 1$ veränderlichen Punkten.

Den Geraden von R entsprechen ∞^4 rationale Kurven Δ' n^{ter} Ordnung der Art, daß durch jedes Punktepaar vier von ihnen hindurchgehen. Ist ν die Ordnung von Ω, so berührt jede Kurve Δ' die Fläche Ω' in ν Punkten und schneidet diese Fläche in keinem anderen veränderlichen Punkte. Jede Kurve Δ' wird von den Flächen Φ' in $N+1$ veränderlichen Punkten geschnitten.

Hauptpunkte und *Hauptkurven* der Transformation in R oder R' sind die Punkte und Kurven, die allen Flächen F bzw. allen Flächen Φ' gemeinsam sind.

Ein Hauptpunkt von R oder R' heißt *1.* oder *2. Klasse*, je nachdem durch ihn alle Kurven Γ bzw. alle Kurven Δ' hindurchgehen oder nicht. Eine Hauptkurve von R oder von R' heißt *1.* oder *2. Klasse*, je nachdem sie von den Kurven Γ bzw. den Kurven Δ' in veränderlichen Punkten geschnitten wird oder nicht.

Einem Hauptpunkte von R entspricht eine Fläche oder eine Kurve, je nachdem dieser Punkt 1. oder 2. Klasse ist. Gehen im ersten Falle die Kurven Γ mit ϑ veränderlichen Tangenten durch diesen Punkt, so ist die korrespondierende Fläche rational und hat die Ordnung ϑ. Ist der Punkt im zweiten Falle für die Flächen F r-fach, so hat die entsprechende Kurve die Ordnung r.

Einer Hauptkurve von R entspricht eine Fläche oder eine Kurve, je nachdem sie 1. oder 2. Klasse ist. Wird im ersten Falle die Kurve von den Kurven Γ in s veränderlichen Punkten geschnitten, so entspricht ihr eine Fläche s^{ter} Ordnung.

Auf ähnliche Weise entsprechen den Hauptpunkten und den Hauptkurven von R' Flächen oder Kurven, je nachdem sie 1. oder 2. Klasse sind. So kann einem Hauptpunkt 1. Klasse von R' eine mit einem Punkte oder einer Kurve verbundene rationale Fläche oder zwei untereinander verbundene rationale Flächen oder auch eine Fläche entsprechen, die auf die Doppelebene abbildbar und sich selbst verbunden ist.

Die so als korrespondent zu Hauptpunkten oder -kurven 1. Klasse von R' oder R sowohl in R wie in R' erhaltenen Flächen heißen auch *Hauptflächen* für R bzw. R'.

Die *Jacobi*sche Fläche des linearen Systems $|F|$ besteht aus Ω, den Hauptflächen, die den Hauptkurven von R' entsprechen, und den zweimal gezählten Hauptflächen, die den Hauptpunkten von R' entsprechen.

Eine Kurve von R, die von den Flächen F in keinen veränderlichen Punkten geschnitten wird, heißt *parasitisch*, wenn sie mit jedem ihrer Punkte verbunden ist.[873]) Eine derartige Kurve von der Ordnung τ ist eine τ-fache Hauptkurve für die verbundene Involution, und ihr entsprechender Punkt in R' ist ein für die Flächen Φ' τ-facher Hauptpunkt 2. Klasse. Die Parasitenkurven gehören der Fläche Ω an.

Einer rationalen Kurve oder rationalen Fläche von R' entspricht im allgemeinen eine nicht rationale Kurve oder nicht rationale Fläche; jeder rationalen Kurve oder rationalen Fläche von R entspricht dagegen eine rationale Kurve oder eine rationale Fläche.

Die Ordnung der Fläche Ω' ist $2(p+1)$. Sind in R' außerdem ϱ Hauptpunkte 1. Klasse, die für die Kurven $\varDelta'$ die Multiplizitäten $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_\varrho$ besitzen, und r Hauptkurven 1. Klasse, die von den Kurven $\varDelta'$ in $s_1, s_2, \ldots, s_r$ veränderlichen Punkten geschnitten werden, so ist

$$\nu = 4(n-1) - 2\sum_1^\varrho \vartheta_i - \sum_1^r s_i$$

die Ordnung der Fläche Ω.

R. de Paolis[872]) (p. 600ff.) untersucht auch den Komplex der Verbindungsgeraden der Paare verbundener Punkte im einfachen Raum, vor allem ihre eineindeutige Abbildung auf die Punkte des Doppelraumes R'. Bezeichnen wir mit ψ die Anzahl der Rückkehrpunkte der veränderlichen Doppelkurve einer allgemeinen Fläche Φ' (der Schnittpunkte dieser Doppelkurve mit der Fläche Ω' außer den Hauptpunkten), so ist der Grad des Komplexes $N - \nu - \frac{1}{2}\psi$.[874])

Ist umgekehrt eine birationale involutorische Transformation des Raumes gegeben und kennt man eine eineindeutige Abbildung des aus den Verbindungsgeraden der Paare konjugierter Punkte gebildeten Komplexes auf den Raum, so sind ohne weiteres alle Doppeltransformationen des Raumes bestimmt, mit denen die gegebene Involution verbunden ist. So können wir auf Grund der in Nr. **83** erwähnten Untersuchungen alle die Doppeltransformationen als bekannt voraussetzen, mit denen Involutionen verbunden sind, die lineare oder quadratische Geradenkomplexe bestimmen.

97. Sonderfälle. *F. Aschieri*[875]) erweitert die Untersuchungen von

---

873) Diese Bezeichnung stammt von *P. H. Schoute*, Ass. franç. pour l'avanc. des sciences 9, Reims 1880, p. 156, der auch eine Fläche mit unendlich vielen Parasitenkurven *parasitisch* nennt. Diese Fläche ist nichts anderes als die Hauptfläche, die einem Hauptpunkte 1. Klasse des Raumes R' entspricht.

874) Es kann jedoch vorkommen (Nr. **83**), daß alle Verbindungsgeraden zweier verbundener Punkte sich selbst verbunden sind und dann nicht einen Komplex, sondern eine Kongruenz bilden.

875) Rend. Ist. Lomb. (2) 14 (1881), p. 673; (2) 15 (1882), p. 66, 147, 247. — Von dieser (1, 2)-Transformation macht *M. de Franchis*[688]), p. 18 beim Studium des Torus in Verbindung mit der nicht-euklidischen Geometrie Gebrauch.

R. de Paolis (Anm. 840 und Nr. **93**) dadurch auf den Raum, daß er die quadratische Doppeltransformation studiert, bei der den Ebenen des doppelten Raumes R' im einfachen Raume R Flächen 2. Ordnung durch einen festen Kegelschnitt entsprechen, und macht davon Anwendung auf die nicht-euklidische Geometrie.

Der Sonderfall, in dem diese Flächen Kugeln sind, hängt auch mit der Theorie der anallagmatischen Flächen (Nr. **79**) zusammen und wurde schon von *G. Darboux*[876]) studiert. Betrachten wir eine feste Kugel S, so entsprechen jedem Punkte P die beiden Punkte, die die Mittelpunkte der durch den Schnitt von S mit der Polarebene von P in bezug auf S gehenden Kugeln vom Radius Null sind. Daher entspricht jeder von P beschriebenen Figur eine bei der Inversion mit der Hauptkugel S anallagmatische Figur.[877])

Th. Berner[878]) und dann wiederholt *Th. Reye* studieren die durch die Formeln

$$(1) \qquad \varrho x_i' = F_i(x_1, x_2, x_3, x_4) \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

bestimmte Transformation, wobei die F_i quadratische Formen der x_1, x_2, x_3, x_4 sind, indem sie sich auf eine projektive Abbildung des F^2-Gebüschs

$$\lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_4 F_4 = 0$$

auf einen Ebenenraum stützen [vgl. III C 2 (*O. Staude*), Nr. **136—145**]. Eine derartige Abbildung läßt sich dadurch erhalten, daß man einen Punkt O fixiert und jeder Ebene π' von R' die Fläche des F^2-Gebüschs entsprechen läßt, für die π' Polarebene des Punktes O ist. Dann entsprechen den durch einen Punkt P von R hindurchgehenden ∞^2 Flächen des Gebüschs in R' die Ebenen eines Bündels, und daher dem Punkte P in R' der Mittelpunkt P' dieses Bündels. Umgekehrt ent-

---

876) Ann. Éc. Norm. (1) 2 (1865), p. 69; „Sur une classe“ [50]), p. 120—127, 173—180, 230—231; „Leçons“ [612]) 3, Paris 1894, p. 492—501; „Principes“ [50]), p. 482—505.

877) Über diese Transformation und im allgemeinen über die (1, 2)-Transformationen in der Ebene und im Raume, die zur Überführung der nicht-euklidischen Maßbestimmung in die euklidische dienen können, s. noch *F. Klein,* Math. Ann. 7 (1874), p. 553; *W. Ludwig* [614]); *J. Wellstein,* Arch. Math. Phys. (3) 17 (1910), p. 195: *H. Beck,* daselbst (3) 18 (1911), p. 220; *T. Ôta* (= *T. Takasu*), Tôhoku math. J. 17 (1919), p. 251; 26 (1926), p. 187.

A. del Re, Mem. Acc. Modena (2) 12 (1898), p. 1, studiert eine quadratische Doppelreziprozität, die beim Studium der Glanzpunkte und -kurven einer in einer allgemeinen Metrik des Raumes betrachteten algebraischen Fläche auftritt, und erweitert sie auf die Hyperräume.

878) Diss. Berlin 1864, p. 16 mit Anwendungen auf das Studium von Flächen 4. Ordnung.

sprechen jedem Punkte P' von R' in R acht untereinander verbundene Punkte.[879])

Einer Geraden von R entspricht ein Kegelschnitt, der Ω' in 4 Punkten berührt. Geht die Gerade jedoch durch zwei verbundene Punkte (liegt sie daher auf unendlich vielen Flächen des Gebüschs), ist sie also ein *Hauptstrahl*, so entspricht ihr, und zwar nur in diesem Falle, eine weitere Gerade, und alle so resultierenden ∞^2 Geraden bilden die Kongruenz (28. Ordnung und 12. Klasse) der Bitangenten von Ω'.

Einer Ebene von R entspricht eine auf diese Weise eineindeutig auf die Ebene bezogene *Steiner*sche Fläche, deren Eigenschaften *Th. Reye* auf diesem Wege feststellt.

Th. Reye[880]) studiert auch die Sonderfälle, bei denen das Gebüsch k ($= 1, 2, \ldots, 6$) Basispunkte aufweist, so daß die Transformation die Indizes 1 und $8 - k$ hat. Die Doppelfläche Ω hat in diesen Punkten Knotenpunkte und enthält die Geraden, die diese Punkte paarweise verbinden. Jede Gerade, die von einem dieser Punkte ausgeht, ist ein Hauptstrahl, und die Kongruenz der Bitangenten von Ω', die den durch einen von diesen Punkten hindurchgehenden Geraden entsprechen, hat die Ordnung $8 - k$ und die Klasse 2.

---

879) *Th. Reye* untersucht diese Transformation auf rein geometrischem Wege schon in der 1. Ausgabe seines Buches „Die Geometrie der Lage" 2, Hannover 1868, p. 246 [1867] und macht Anwendungen davon. S. außerdem *Th. Reye,* J. f. Math. 86 (1878), p. 84; „Die Geom. der Lage" [706]) 3, p. 143—173, 240—250; *R. Sturm,* „Die Gebilde" [40]) 2, p. 278—281. Über die Transformation (1) s. noch *Th. Reye,* J. f. Math. 94 (1882), p. 316 und vor allem Math. Ann. 48 (1896), p. 113, teilweise Wiedergabe in „Die Geom. der Lage" [706]) 3, p. 240—247, wo zahlreiche Anwendungen auf rationale Flächen mit Kegelschnittscharen gemacht werden.

S. außerdem *A. Jopke,* Arch. Math. Phys. (3) 18 (1910), p. 113; *V. Snyder* und *F. R. Sharpe,* Trans. Amer. math. Soc. 19 (1917), p. 275 [Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 24 (1918), p. 66]. Unter Anwendung der Quaternionen, *Ch. J. Joly,* Trans. London Phil. Soc. (A) 201 (1903), p. 304.

Die Transformation wurde bei Gelegenheit einer Untersuchung metrischer Natur von *H. C. Gossard,* Amer. J. of math. 38 (1916), p. 442 verwandt.

880) J. f. Math. 86 (1878), p. 84; „Die Geom. d. Lage" [706]) 3, p. 153—168. Für den Fall $k = 5$ s. auch *W. Stahl,* J. f. Math. 91 (1880), p. 18; 97 (1883), p. 162.

Der Fall, bei dem das F^2-Gebüsch eine Basisgerade aufweist, bei *R. Krause,* Diss. Straßburg 1879; *J. Cardinaal,* Ak. Amsterdam Verhandl. 1 (1892), Nr. 6; J. f. Math. 111 (1893), p. 31; *Th. Reye,* „Die Geom. d. Lage" [706]) 3, p. 168—173.

Der Fall, bei dem das F^2-Gebüsch einen Basiskegelschnitt aufweist, bei *J. Cardinaal,* Ak. Amsterdam Versl. (3) 8 (1891), p. 88; *R. Suppantschitsch,* Progr. Prag-Neustadt 1904; *R. Sturm,* „Geom. Verw." 4, p. 430—436. Ein metrischer Sonderfall bei *Emma Cairo,* Period. di mat. (3) 10 (1913), p. 155.

Ein Hinweis auf verschiedene vorhergehende Sonderfälle bei *Th. Berner,* Anm. 878.

Interessant vor allem ist der Fall, bei dem das Gebüsch aus Flächen 2. Ordnung gebildet wird, die durch sechs feste Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_6$ hindurchgehen. Dann erhält man eine Doppeltransformation, bei der die 15 Geraden, die die Punkte A_i paarweise verbinden, und die durch diese hindurchgehende kubische Kurve Γ Parasitenkurven sind, deren Korrespondenten in R' 16 Hauptpunkte (2. Klasse) sind. Diese Punkte sind für die Fläche Ω' Doppelpunkte und diese Fläche ist also eine allgemeine *Kummer*sche Fläche.[881] Die 16 singulären Ebenen dieser Fläche sind die korrespondenten der sechs Kegel 2. Ordnung, die zu Scheiteln je einen der Punkte A_i haben und die durch die übrigen fünf hindurchgehen, sowie der zehn Ebenenpaare, von denen jedes alle sechs Punkte enthält.

Der der kubischen Kurve Γ entsprechende Hauptpunkt ist für alle in R' den Ebenen von R entsprechenden *Steiner*schen Flächen dreifach.

Die Doppelfläche der Transformation ist die *Weddle*sche Fläche 4. Ordnung, Ort der Scheitel der Kegel 2. Ordnung, die durch die sechs Punkte A_i hindurchgehen.[882]

Die verbundene Involution ist die in Nr. 83 erwähnte *Geiser*sche Involution 7. Ordnung.

Die vorhergehende und die im Anfange dieser Nr. erwähnte Transformation sind die beiden einzigen Typen quadratischer Doppeltransformationen des Raumes.

---

881) Über diesen Sonderfall, diese Betrachtungsweise der *Kummer*schen Fläche und die sechs Kongruenzen 2. Ordnung 2. Klasse, deren Brennfläche sie ist, s. *Th. Reye,* J. f. Math. 86 (1878), p. 97; „Die Geom. d. Lage"[706] 3, p. 159—168; *W. Stahl,* J. f. Math. 93 (1882), p. 218; *R. de Paolis,* Roma Rend. Acc. Linc. (4) 6^2 (1890), p. 3; *S. Kantor,* Amer. J. of math. 19 (1895), p. 52; Acta math. 21 (1896), p. 73; *J. I. Hutchinson,* Bull. Amer. math. Soc. (2) 4 (1898), p. 327; *R. Sturm,* „Geom. Verw." 4, p. 436—446; *L. Godeaux,* Bull. Ac. sc. Belgique (5) 8 (1922), p. 443; (5) 9 (1923), p. 360, 459. — Für den Zusammenhang mit der Theorie der Thetafunktionen vgl. *F. Schottky,* J. f. Math. 105 (1889), p. 233, 269.

F. Bolus, Mém. Soc. sc. Liège (3) 15 (1930), Nr. 2, studiert den Fall, in dem das Gebüsch aus den Flächen 2. Ordnung besteht, die durch sechs feste Punkte gehen, von denen zwei zusammenfallen; ebenda (3) 16 (1931), Nr. 5 den Fall, in dem drei dieser Punkte zusammenfallen.

L. Godeaux, Bull. Ac. sc. Belgique (5) 16 (1930), p. 576 und *F. Bolus,* ebenda, p. 659, betrachten den Fall eines Gebüsches, das aus Flächen 2. Ordnung besteht, die durch drei feste Punkte gehen und in diesen drei gegebene Gerade berühren.

882) Die (1, 2)-Korrespondenz zwischen der *Kummer*schen und der *Weddle*schen Fläche wurde von *R. W. H. T. Hudson,* „Kummer's quartic surface", Cambridge 1905, p. 160—172, und von *V. Snyder,* Trans. Amer. math. Soc. 12 (1911), p. 354 [Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 17 (1911), p. 281] studiert. Der zweite Autor betrachtet auch die *Cremona*schen Transformationen, die die eine oder andere der beiden Flächen in sich verwandeln. S. auch *L. Godeaux*[881]).

Ein weiterer beachtenswerter Sonderfall ist die durch die Formeln

$$\varrho x_i' = x_i^2 \qquad (i=1,2,3,4) \tag{2}$$

bestimmte Transformation, bei der das F^2-Gebüsch also aus den Flächen 2. Ordnung mit einem gemeinsamen Poltetraeder gebildet wird. Bezeichnen T und T' die Fundamentaltetraeder in beiden Räumen, so entsprechen einem beliebigen Punkte von R' 8 Punkte, die sich nur durch die Vorzeichen zweier oder einer einzigen Koordinate unterscheiden. Diese Punkte sind daher paarweise entweder in einer harmonischen Homologie, deren Mittelpunkt und Ebene eine Ecke und die gegenüberliegende Fläche von T ist, oder in der gescharten Involution, deren Involutionsachsen zwei gegenüberliegende Kanten von T sind, miteinander konjugiert; sie bilden mit den Ecken von T ein Tripel *desmischer Tetraeder*.[883]) Den Ebenen von R entsprechen *Steiner*sche

883) Die hier betrachteten Systeme von 8 Punkten erscheinen zuerst bei *O. Hermes*, J. f. Math. 56 (1858), p. 204, der auch die Konfiguration von drei desmischen Tetraedern betrachtet [vgl. III AB 5a (*E. Steinitz*), Nr. 8], von neuem dann bei *E. Beltrami*, Giorn. di mat. (1) 1 (1863), p. 208, 354 = Opere 1, Milano 1902, p. 73 in Verbindung mit der birationalen tetraedralen Transformation (Nr. 81) und der kubischen Fläche mit 4 Doppelpunkten (reziproke Fläche der *Steiner*schen Fläche), die in der Transformation einer Ebene entspricht. Auf direktem Wege wurden sie studiert von *C. Stephanos*, Bull. Sciences math. (2) 3^1 (1879), p. 424; ausführlich dann und unter Anwendung auf beachtenswerte Konfigurationen von Punkten, Kurven und Flächen, insbesondere die desmische Konfiguration, von *G. Veronese*, Roma Mem. Acc. Linc. (3) 9 (1881), p. 265, 306 [Auszug Roma Transunti Acc. Linc. (3) 4 (1880), p. 132], der, a. a. O., p. 340—341, auch die Transformation (2) betrachtet und zum Studium eines Büschels von Flächen 4. Ordnung und 12. Klasse mit 12 gemeinsamen Doppelpunkten, Ecken dreier desmischer Tetraeder, verwendet. Diese *desmischen Flächen* sind reziproke Polaren der Zentrafläche eines Ellipsoids. Bei *G. Salmon* und *W. Fiedler*, „Raumgeometrie" 2, p. 322, wird bemerkt, daß sich die Gleichung der Tangentenfläche einer Raumkurve 4. Ordnung 2. Art bei Einführung eines besonderen Koordinatensystems in die Gleichung einer desmischen Fläche 12. Ordnung verwandelt, und zwar durch eine Transformation (2), d. h. dadurch, daß man an Stelle der Koordinaten ihre Quadrate setzt. Auf Grund dieser Bemerkung verwendet *W. Stahl*, J. f. Math. 101 (1885), p. 73 dieselbe Transformation für die synthetische Darstellung des Zusammenhangs zwischen jenen beiden Flächen. S. darüber auch *K. Merz*, Schweiz. Naturf. Ges. 1914, p. 102; Diss. Zürich 1914 = Beilage zum Progr. der Bündnerischen Kantonsschule 1913—14, Chur 1914. Vgl. außerdem III C 9 (*K. Rohn* und *L. Berzolari*), Nr. 59.

Die gleichen Gruppen von 8 Punkten und die Transformation (2) wurden von neuem von *C. Segre*, Giorn. di mat. (1) 21 (1883), p. 355 und *H. E. Timerding*, Ann. di mat. (3) 1 (1897), p. 95 studiert. Der erste von diesen Autoren gibt Anwendungen auf die *Steiner*sche Fläche, die Raumkurven 4. Ordnung 1. Art auf einer Fläche 2. Ordnung, speziell auf den quadratischen Komplex von *Battaglini* [III C 8 (*K. Zindler*), Nr. 38] und den diesem in jener Transformation entspre-

Flächen, die von jeder der vier Ebenen von T' längs je eines Kegelschnitts berührt werden; den Geraden von R entsprechen die Kegelschnitte, die diese vier Ebenen berühren.

B. Wimmer[884]) studiert die durch die Gleichungen

$$\sum A_i x_i' = 0, \quad \sum B_i x_i' = 0, \quad \sum C_i x_i' = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

bestimmte Doppeltransformation 4. Ordnung vom Geschlecht 2, wobei die A_i und B_i lineare, die C_i quadratische Formen der x_1, x_2, x_3, x_4 sind. Man hat also zwei Ebenenräume und ein F^2-Gebüsch, die reziprok auf einen Punktraum bezogen sind und jedem Punkte dieses Raumes die beiden Schnitte der beiden Ebenen und der Fläche 2. Ordnung, die zu ihm korrespondieren, entsprechen lassen. Die verbundene Involution 19. Grades ist diejenige, die einen tetraedralen Komplex erzeugt (Nr. **83**).

Dieselbe Transformation studieren *F. R. Sharpe* und *V. Snyder*[885]), die auch andere Fälle ins Auge fassen, bei denen nur eine einzige der Formen A_i, B_i, C_i in den x_1, x_2, x_3, x_4 linear ist. Weitere Doppeltransformationen studieren die gleichen Autoren[886]), indem sie auch diese Einschränkung fallen lassen und speziell die verbundenen Involutionen der Transformationen untersuchen.[887])

---

chenden Komplex von Kegelschnitten, die vier feste Ebenen berühren; der zweite Anwendungen auf gewisse Flächen 4. Ordnung, vor allem die *Steiner*sche Fläche und die Raumkurven 4. Ordnung 1. Art. — S. auch *Th. Reye,* „Die Geom. d. Lage“ [706]) 3, p. 248—250; *K. Merz,* a. a. O.; *V. Šimandl,* Prag České Ak. Rozpravy 26 (1917), Nr. 27.

Hiermit verwandte Arbeiten über das Gebüsch von Flächen 2. Ordnung mit gemeinsamem Poltetraeder bei *L. Painvin,* J. f. Math. 63 (1863), p. 58; *K. Meister,* Ztschr. Math. Phys. 31 (1886), p. 321; 34 (1889), p. 6, 73 [1881], mit Zusätzen veröffentlicht von *A. Rasche.*

Über die Transformation (2) und die allgemeinere, durch die Formeln $\varrho x_i' = x_i^n$ bestimmte Transformation s. auch *S. Lie* u. *G. Scheffers*[562]) 1, p. 337—396.

884) Diss. Erlangen 1891 = Ztschr. Math. Phys. 36 (1891), p. 214. Vgl. auch *R. Sturm,* „Geom. Verw.“ 4, p. 446—447.

885) Trans. Amer. math. Soc. 20 (1919), p. 185; Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 24 (1918), p. 469.

886) Trans. Amer. Math. Soc. 21 (1920), p. 52; Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 26 (1920), p. 59.

887) Über diese Involutionen s. *L. Godeaux,* Bull. Ac. sc. Belgique (5) 17 (1931), p. 991. Eine (1, 2)-Transformation 12. Ordnung findet *R. Sturm,* Math. Ann. 12 (1877), p. 330; „Geom. Verw.“ 2, p. 338; 4, p. 460—461 beim Studium des Problems der Korrelation von Bündeln; eine Transformation mit den Indizes 1, D in „Geom. Verw.“ 3, p. 410—413 beim Studium der Polarflächen in bezug auf eine Fundamentalfläche, mit Erweiterung a. a. O. 4, p. 424—425.

Eine (1, 2)- und eine (1, 3)-Transformation, beide 3. Ordnung und vom Geschlecht 1, werden von *C. Segre,* Mem. Acc. Torino (2) 39 (1887), p. 44 studiert,

98. Algebraische Korrespondenzen mit willkürlichen Indizes zwischen zwei Räumen. Über diese Korrespondenzen existieren mit Ausnahme dessen, was sich auf die Anzahl der Koinzidenzpunkte (hierüber s. Nr. 7) und der zyklischen Gruppen (s. Anm. 894) bezieht, keine allgemeinen Untersuchungen.

---

und zwar durch Projektion von kubischen Hyperflächen des vierdimensionalen Raumes, die mit Doppelpunkten ausgestattet sind.

Weitere spezielle (1, 2)-Transformationen werden von verschiedenen Verfassern betrachtet: von *M. Pieri,* Atti Acc. Torino 24 (1889), p. 514 eine 3. Ordnung und vom Geschlecht 2, unter Anwendung auf die Tritangenten gewisser Flächen 6. Ordnung; von *M. Pannelli,* Giorn. di mat. (1) 29 (1891), p. 133 eine 4. Ordnung vom Geschlecht 2, die bei der Abbildung der durch zwei Ebenenbündel und ein Netz von Flächen 2. Ordnung, das zu beiden projektiv ist, erzeugten Fläche 4. Ordnung auf die Doppelebene (mit allgemeiner Verzweigungskurve 6. Ordnung) Verwendung findet; von *S. Kantor,* Amer. J. of math. 19 (1895), p. 54; Acta math. 21 (1896), p. 73 zwei weitere (1, 2)-Transformationen 4. Ordnung; von *G. Marletta,* Giorn. di mat. (2) 10 (1901), p. 125 eine 5. Ordnung und vom Geschlecht 2; von *F. Romano,* Diss. Catania 1906 eine 3. Ordnung und vom Geschlecht 1; weitere (1, 2)-Transformationen von *V. Retali,* Interm. des math. (1) 14 (1907), p. 182, 235.

F. R. Sharpe und *V. Snyder*[711]) studieren die (1, 2)-Transformation, die mit der kubischen Involution verknüpft ist, in der der konjugierte Punkt eines Punktes der Schnittpunkt seiner Polarebenen in bezug auf drei gegebene Flächen 2. Ordnung (Nr. 81) ist.

Eine (1, 2)-Transformation 5. Ordnung vom Geschlecht Null, eine (1, 3)- und eine (1, 4)-Transformation betrachtet *G. Aprile,* Catania Atti Acc. Gioenia (5) 7 (1914), Nr. XXII, p. 18 mit Hilfe der Projektion einer gewissen Hyperfläche 4. Ordnung des vierdimensionalen Raumes. Auf weitere (1, 2)-Transformationen weist *G. Aprile* in Rassegna di mat. e fisica 2 (1921), p. 25 hin.

Eine (1, 3)-Transformation, bei der den Ebenen des dreifachen Raumes Flächen 5. Ordnung mit einer mit einem dreifachen Punkt ausgestatteten Doppelkurve 5. Ordnung entsprechen, wurde von *A. del Re,* Roma Rend. Acc. Linc. (4) 6^2 (1890), p. 227 studiert, der daselbst (5) 8^2 (1899), p. 106 beim Studium gewisser Komplexe von Kugeln auch eine $(1, D)$-Transformation betrachtet.

Eine (1, 6)-Transformation verwendet *A. B. Coble,* Trans. Amer. math. Soc. 7 (1904), p. 1 beim Studium der Beziehungen zwischen den Gruppen der Kollineationen, die eine kubische Raumkurve oder eine Fläche 2. Ordnung in sich transformieren.

J. R. Conner, Bull. Amer. math. Soc. (2) 19 (1913), p. 284 untersucht als Erweiterung von Transformationen der Ebene (Anm. 852) eine durch eine rationale Raumkurve 7. Ordnung bestimmte (1, 7)-Transformation.

Eine mehrfache Transformation untersucht *R. W. Rutgers,* Ak. Amsterdam Versl. (4) 24 (1916), p. 1460; Nieuw Archief voor Wiskunde 12 (1917), p. 109, indem er die Flächen eines linearen ∞^3-Systems mit rationalen oder elliptischen Schnitten projektiv auf die Ebenen des Raumes bezieht.

Weitere spezielle mehrfache Transformationen werden von *S. Kantor,* Anm. 627 betrachtet.

O. Tognoli[888]) und *M. Pannelli*[889]) erweitern die Untersuchungen von *Ch. Wiener*[861]) auf den Raum, und zwar unter Betrachtung der mehrdeutigen Korrespondenz, die man erhält, wenn man drei Büschel von Flächen projektiv auf drei andere Büschel bezieht und zwei Punkte als homolog bezeichnet, die die Schnittpunkte zweier Tripel korrespondierender Flächen sind.

G. Marletta[890]) studiert die quadratischen und kubischen Transformationen mit den Indizes 2, 2 und gibt verschiedene allgemeine Konstruktionen dieser Transformationen an. Bei den ersten Transformationen entsprechen den Geraden eines jeden der beiden Räume Kegelschnitte des anderen; bei den zweiten entsprechen den Geraden jedes Raumes Kurven 3. Ordnung, die für beide Räume kubische Raumkurven, kubische ebene elliptische oder rationale Kurven sind.[891])

888) Giorn. di mat. (1) 10 (1871), p 1, 141, jedoch nicht ganz exakt.

889) Rend. Acc. Napoli (2) 1 (1887), p. 153.

890) Catania Atti Acc. Gioenia (4) 17 (1903), Nr. XI. Über die kubischen Transformationen mit den Indizes 2, 2 s. auch *Matilde Prampolini*[897]), p. 25.

891) Eine spezielle (2, 2)-Transformation studiert *C. Wiesing,* Diss. Breslau 1906. Über diese und andere (2, 2)-Transformationen s. *R. Sturm,* „Geom. Verw." 4, p. 453—460. Auch verschiedene andere zweizweideutige Korrespondenzen traf *R. Sturm,* Math. Ann. 12 (1877), p. 254; „Geom. Verw." 2, p. 338—339; 4, p. 460—461 beim Problem der Korrelation von Bündeln. Weitere mehrfache Korrespondenzen bei *R. Sturm,* „Geom. Verw." 4, p. 422—425 bei Betrachtung kollinearer Gebüsche von Flächen und Sätzen über die Polarflächen.

F. Aschieri[735]) studiert gewisse mehrfache Transformationen und ihre Beziehung zu den Geradenkomplexen.

J. de Vries, Ak. Amsterdam Versl. (4) 21 (1913), p. 807 betrachtet die Transformationen vom Index 2, 2 und 3, 3, bei denen zwei Punkte homolog sind, die auf einer Sehne einer Raumkurve 4. Ordnung 1. oder 2. Art liegen und durch die beiden Schnittpunkte harmonisch getrennt werden.

Sind zwei Tripel A, B, C und A', B', C' von Punkten gegeben, so untersucht *C. G. J. Jacobi*[863]) die (2, 2)-Transformation, bei der zwei Punkte P und P' sich entsprechen, wenn $AP = A'P'$, $BP = B'P'$, $CP = C'P'$, und macht Anwendungen auf eine Erzeugung der Flächen 2. Ordnung, die konfokalen Flächen 2. Ordnung und speziell die Sätze von *J. Ivory* [III C 2 (*O. Staude*), Nr. **62**]. — S. außerdem *R. Townsend,* Cambridge Dublin math. J. 3 (1847), p. 148; *F. Joachimsthal,* J. f. Math. 73 (1871), p. 207 (hinterlassene Arbeit von 1861); *O. Hermes,* daselbst, p. 209; *G. Darboux,* Mém. Soc. sciences phys. nat. Bordeaux (1) 8 (1870—72), p. 197; *L. Painvin,* Nouv. Ann. de math. (2) 10 (1871), p. 481; (2) 11 (1872), p. 376; *G. Salmon* und *W. Fiedler,* „Raumgeometrie" 1, p. 234; daselbst, herausg. von *K. Kommerell* 1, 5. Aufl., Leipzig und Berlin 1923, p. 433; *L. Burmester,* Math. Ann. 16 (1880), p. 110; *H. Schröter,* „Theorie der Oberflächen 2. Ordnung und der Raumkurven 3. Ordnung als Erzeugnisse projektivischer Gebilde", Leipzig 1880, p. 640; *Cl. Servais,* Bull. Ac. sc. Belgique (3) 26 (1893), p. 96; *R. Sturm,* J. f. Math. 122 (1900), p. 263; 140 (1911), p. 33; „Geom. Verw." 4, p. 447—453; *G. B. Mathews,* Quart. J. of math. 35 (1904), p. 239; *O. Staude,* „Analytische Geometrie

99. Höhere Nullverwandtschaften. Findet zwischen einem Raume von Punkten P und einem Raume von Ebenen π eine algebraische Korrespondenz mit den Indizes α, β statt, so daß einem Punkte α Ebenen und einer Ebene β Punkte entsprechen, so heißt diese *höhere Nullverwandtschaft* oder auch *höheres Nullsystem*, wenn zwei beliebige homologe Elemente ineinander liegen.[892])

Wir bezeichnen mit γ und δ die analogen Zahlen der beiden so in Nr. 7 benannten Zahlen, mit γ also die Klasse der abwickelbaren Hüllfläche der Ebenen π, die den Punkten P einer Geraden entsprechen, d. h. die Ordnung der Fläche, die der Ort aller den Ebenen π eines Bündels entsprechenden Punkte P ist, und mit δ die Ordnung der Kurve, die der Ort aller den Ebenen π eines Büschels entsprechenden Punkte P ist, also die Klasse der durch die Ebenen π, die den Punkten P einer Ebene entsprechen, eingehüllten Fläche. Im vorliegenden Falle sind die *charakteristischen Zahlen* α, β, die *Ordnungszahl* γ und die *Klassenzahl* δ des Nullsystems durch die Beziehung

$$(1) \qquad \delta - \beta = \gamma - \alpha$$

miteinander verknüpft, wobei jede der beiden Seiten (*Modul* des Nullsystems) angibt, wie oft eine gegebene Gerade einem Büschel angehört, dessen Mittelpunkt und dessen Ebene in der gegebenen Korrespondenz homolog sind.[893])

des Punktepaares, des Kegelschnittes und der Fläche 2. Ordnung" 2, Leipzig und Berlin 1910, p. 716—718.

Weitere algebraische Transformationen bei *M. N. Vaněček,* Paris C. R. 94 (1882), p. 210; *J. S. Vaněček,* daselbst, p. 1463, 1583; *J. S.* und *M. N. Vaněček,* daselbst 95 (1882), p. 1049, 1146; 99 (1884), p. 742, 856, 909; Prag Ber. böhm. Ges. 1883, p. 345; *Ch. Beyel,* Vierteljahrsschr. Naturf. Ges. Zürich 31 (1886), p. 1.

892) Vgl. III C 8 (*K. Zindler*), Nr. 54. — Für $\alpha = \beta = 1$ s. Nr. 85.

893) Einige allgemeine Eigenschaften finden sich bei *A. Ameseder,* Anm. 770, von dem die Bezeichnungen des Textes herrühren. S. auch *R. Sturm,* „Die Gebilde" [40]) 1, p. 78—81; „Geom. Verw." 4, p. 461—473, wo auch verschiedene Sonderfälle betrachtet werden. Weitere derartige Fälle bei *R. Sturm,* Math. Ann. 28 (1886), p. 277; *G. Loria,* Giorn. di mat. (2) 3 (1887), p. 374; *F. Krieg v. Hochfelden,* Sitzungsb. Ak. Wien 97 (1888), p. 806; *A. del Re,* Giorn. di mat. (1) 28 (1890), p. 280; Rend. Acc. Napoli (3) 18 (1912), p. 296; (3) 19 (1913), p. 48; Mem. Acc. Modena (3) 10^2 (1913), p. 393; *E. Ascione,* Giorn. di mat. (1) 31 (1893), p. 85; *E. Veneroni,* Mem. Acc. Torino (2) 51 (1902), p. 121; *J. Wolff,* Nieuw Archief voor Wiskunde (2) 9 (1910), p. 85; *H. de Vries,* Ak. Amsterdam Versl. (4) 21 (1912), p. 309; Nieuw Archief voor Wiskunde (2) 10 (1913), p. 258; *J. de Vries,* Ak. Amsterdam Versl. (4) 21 (1912), p. 1061; (4) 26 (1917), p. 1492; (4) 32 (1923), p. 133, 238; (4) 33 (1924), p. 65; (4) 37 (1928), p. 37.

Über Nullsysteme, die beim Studium der Geradenkongruenzen auftreten, wenn man jedem Punkte des Raumes die Ebenen entsprechen läßt, die die von dem Punkte ausgehenden Geraden der Kongruenz paarweise enthalten, und dual,

100. Mehrdeutige Korrespondenzen zwischen zwei linearen Überräumen. Über diesen Gegenstand existieren nur Untersuchungen über wenige Sonderfälle.[894])

A. del Re[895]) studiert eine quadratische Doppeltransformation im n-dimensionalen Raume.

G. Aprile[896]) untersucht eine quadratische Doppeltransformation vom Geschlecht 1 im vierdimensionalen Raume und wendet sie verschiedentlich an, vor allem auf rationale Flächen und Hyperflächen.

Matilde Prampolini[897]) untersucht die quadratischen und kubischen Transformationen von den Indizes 2 und 2 im n-dimensionalen Raume.

101. Ebene und räumliche, ein- und mehrdeutige Transformationen, die mit Fragen der Kinematik verknüpft sind [IV 3 (*A. Schoenflies* und *M. Grübler*), Nr. 4, 5, 8, 9, 12, 14, 23, 31].[897a]) Die ebene birationale quadratische Transformation tritt in verschiedenen Fragen der

---

s. *R. Schumacher,* Diss. München 1885; Math. Ann. 37 (1890), p. 109; 38 (1890), p. 301; *R. Sturm,* „Die Gebilde" [40]) 1, p. 79—81; 2, p. 1—3, 244—245, 256—257, 263—266, 270—272, 293—295, wo auch viele Sonderfälle betrachtet werden. Weitere derartige Fälle bei *J. Welsch,* Diss. Erlangen 1912.

Andere Fälle, die beim Studium der Kongruenzen von kubischen Raumkurven auftreten [III C 9 (*K. Rohn* und *L. Berzolari*), Nr. 76] bei *E. Heinrichs,* Diss. München 1887, p. 29 ff.; *M. Stuyvaert,* Diss. Gand 1902, p. 66—71; Bull. Ac. sc. Belgique 1907, p. 507.

894) Über die Anzahl der Fixpunkte s. Nr. 7. Die Anzahl der zyklischen Gruppen von ν Punkten bei einer (α, β)-Korrespondenz der Ordnungen $n_1, n_2, \dots n_{r-1}$ im S_r ist durch die Formel (10) in Nr. 12 gegeben, wo jetzt das Symbol $\{\mu\}$ durch

$$\{\mu\} = \alpha^\mu + \beta^\mu + n_1^\mu + \cdots + n_{r-1}^\mu$$

definiert ist. S. *F. Severi* [120]), erstes Zitat, p. 90 Fußn. Für $\alpha = \beta = 1$ s. die Zitate in Anm. 805.

895) S. Anm. 877, p. 54.

896) Catania Atti Acc. Gioenia (5) 10 (1917), Nr. V [1915], und ausführlich Giorn. di mat. (3) 9 (1918), p. 90; (3) 10 (1919), p. 129 [1915]; außerdem Acireale Mem. Acc. Zelanti (3) 10 (1919), Nr. 5. Die hier betrachteten Korrespondenzen (Erweiterungen der Korrespondenzen von *Th. Berner* und *Th. Reye* in Nr. 97) entstehen, wenn wir ein lineares ∞^4-System von Hyperflächen 2. Ordnung eines Raumes S_4 projektiv auf die Hyperebenen von S_4 beziehen. Über diese Korrespondenzen s. auch *L. Roth,* Proc. London math. Soc. (2) 30 (1930), p. 305. Dieser Verfasser betrachtet auch, a. a. O., p. 425, eine Projektivität in S_4 zwischen den Hyperflächen 2. Ordnung eines linearen ∞^3-Systems mit 16 Basispunkten und den Punkten eines Raumes S_3 und erhält eine mit 20 Knotenpunkten ausgestattete Fläche 5. Ordnung des Raumes S_3, die ein Analogon zu dem Symmetroid von *A. Cayley* darstellt.

897) Note e Mem. Circ. mat. Catania 2 (1923), p. 12.

897a) S. auch *K. Federhofer*, „Graphische Kinematik und Kinetostatik", Berlin 1932.

Kinematik auf, die sich auf die endliche oder kontinuierliche Bewegung einer ebenen beweglichen Figur in ihrer Ebene beziehen. So verknüpfen sich bei der ebenen Bewegung eines starren ebenen Systems die Systeme der korrespondierenden Krümmungsmittelpunkte durch eine quadratische Transformation, die von *L. Burmester*[898]), und in Verbindung mit einer Kreisverwandtschaft zwischen den Fokalzentren aller in jener quadratischen Verwandtschaft einander entsprechenden zirkularen Kurven von *R. Müller*[899]) betrachtet wurde. Diese Transformation bietet sich auch beim Studium der Bewegung einer Ebene dar, deren sämtliche Punkte sphärische Kurven beschreiben.[900])

Algebraische Korrespondenzen, die beim Studium der Momentanbewegung eines ebenen ähnlich-veränderlichen Systems in seiner Ebene auftreten, vor allem die in irgendeiner Phase zwischen den Systempunkten und den Krümmungsmittelpunkten ihrer Bahnkurven entstehende (1, 2)-Korrespondenz 3. Ordnung untersucht *R. Müller*[901]), der auch eine (1, 4)-Korrespondenz, die sich bei der Bewegung eines starren ebenen Systems ergibt[902]), und weiter eine ebene (3, 3)-Transformation studiert, die bei der Betrachtung der sogenannten „Koppelkurve" bei der Bewegung eines Kurbelgetriebes[903]) auftritt.

Ebene (1, 3)- und (1, 4)-Transformationen, die sich auf die Bewegung eines auf einem anderen Kreise rollenden Kreises beziehen, betrachtet *A. Kleber*.[904])

In der Kinematik treten auch, in einigen Sonderfällen, kubische birationale Raumtransformationen (3, 3) auf (Nr. **80**, **81**), und zwar

898) „Lehrbuch der Kinematik" 1, Leipzig 1888, p. 117. S. außerdem *R. Bricard,* „Leçons de cinématique" 1, Paris 1926, p. 211—219.

899) Ztschr. Math. Phys. 54 (1906), p. 100.

S. außerdem *R. Burmester,* Der Civilingenieur (2) 22 (1877), p. 598; *E. Dewulf,* Paris C. R. 92 (1881), p. 1091; *A. Schoenflies,* „Geometrie der Bewegung in synthetischer Darstellung", Leipzig 1886, p. 12—46; franz. Übers. von *Ch. Speckel,* Paris 1893, p. 13—51; *J. Tannery,* Ann. Éc. Norm. (3) 3 (1886), p. 71; *E. Cavalli,* Atti Acc. Napoli (2) 9 (1898), Nr. 12; Auszug Rend. Acc. Napoli (3) 4 (1898), p. 411.

Analoge Eigenschaften bei der Bewegung einer starren Figur um einen festen Punkt bei *A. Schoenflies,* a. a. O., p. 56—78; franz. Übers., p. 52—81.

900) *R. Bricard,* J. math. pures appl. (5) 4 (1898), p. 409; Auszug Paris C. R. 125 (1897), p. 1024.

901) Diss. Leipzig 1883; Ztschr. Math. Phys. 36 (1891), p. 129; Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 19 (1910), p. 29, 147.

902) Ztschr. Math. Phys. 36 (1890), p. 193, 257.

903) Ztschr. Math. Phys. 34 (1889), p. 303, 372; 36 (1891), p. 11, 65; vgl. außerdem daselbst 42 (1897), p. 247; 48 (1903), p. 224. Die Koppelkurve wurde von *F. V. Morley,* Amer. math. Monthly 31 (1924), p. 71, und zwar mit Hilfe der Inversionsgeometrie, studiert.

904) Diss. Rostock 1911.

beim Studium der Bewegung eines starren räumlichen Systems[905]) sowie der allgemeinsten Relativbewegung von zwei starren Körpern.[906])

Zu einer Klasse geometrischer Verwandtschaften ebener und räumlicher Systeme, die auf kinematischem Wege erzeugt sind, gelangt *L. Burmester*[907]), der sie *kinetographische Verwandtschaften* nennt und auf ebene und räumliche Mechanismen anwendet. Eine kinetographische Verwandtschaft zweier ebenen Systeme S und S', von denen S fest und S' beweglich ist, wird durch eine gegebene gesetzmäßige Bewegung des Systems S' in dem System S und durch die eindeutige (oder mehrdeutige) Zuordnung der Punkte auf zwei in den Systemen S, S' gegebenen Kurven C, C' bestimmt. Entsprechende Punkte der auf diese Weise kinetographisch aufeinander bezogenen Systeme S, S' sind dann die Punkte X, X' in beiden Systemen, die sich im gleichen Augenblicke mit zugeordneten Punkten der Ausgangskurven C' und C decken.

L. Burmester untersucht auch, als Beispiele, einige Spezialfälle; weitere Sonderfälle, die auf ebene kinetographische Verwandtschaften mit den Indizes 2, 4 führen, bei *H. Rieder*[908]) und *K. Hübsch*[909]); ein anderer Fall, der auf ebene und räumliche kinetographische Verwandtschaften mit den Indizes 2, 2 führt, bei *M. Sergelius.*[910])

L. Burmester[911]) betrachtet höhere Nullsysteme, die bei kinematischen Untersuchungen über die Bewegung der affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen und starren Systeme auftreten.

Über Verwandtschaften, die durch Gelenkketten herstellbar sind, vgl. Anm. 3 und Nr. **70** am Ende, und IV 3 (*A. Schoenflies* und *M. Grübler*), Nr. **24**, **25**.

102. Allgemeine Involutionen in den linearen Räumen zweier oder mehrerer Dimensionen; Rationalitätsfragen. Man bezeichnet als *Involution* von der *Ordnung* n und *Stufe* h in einem r-dimensionalen ($r \geqq 1$) linearen Raume S_r ein so beschaffenes algebraisches ∞^h-System von Gruppen zu n Punkten (die untereinander *konjugiert* heißen), daß

905) *R. Mehmke,* Der Civilingenieur (2) 29 (1883), p. 581; *A. Schoenflies,* J. f. Math. 98 (1884), p. 265; Bull. Sciences math. (2) 12^1 (1888), p. 18; Math. Ann. 40 (1891), p. 317; „Geom. d. Bew.“ [899]), p. 138—150; franz. Übers., p. 140—154; *A. Mannheim,* „Principes et développements de géométrie cinématique“, Paris 1894, p. 165 ff.; *W. van der Woude,* Ak. Amsterdam Versl. (4) 29 (1920), p. 434.

906) *G. Koenigs,* Mém. prés. par divers savants (2) 35 (1914), Nr. 1, p. 76—94.

907) Sitzungsb. Ak. München 37 (1907), p. 17.

908) Diss. München 1907.

909) Diss. München 1909.

910) Ztschr. Math. Phys. 61 (1912), p. 367.

911) Ztschr. Math. Phys. 47 (1902), p. 128.

m allgemeine Punkte von S_r genau einer Gruppe angehören ($m \leqq n$, $h = rm$).[912])

Über einen Satz von *J. Lüroth*, nach dem auf der Geraden ($r = 1$) alle Involutionen rational sind, s. Nr. **31**.

Für $r > 1$ wurden besonders die Involutionen für $m = 1$ studiert, die schlechtweg *Involutionen* n^{ter} *Ordnung* heißen. Es sind algebraische ∞^r-Systeme von Gruppen zu n Punkten von der Art, daß sich ein allgemeiner Punkt von S_r in einer einzigen Gruppe befindet.

Ist $n = 2$, so bestimmt die Involution eine involutorische *Cremona*sche Transformation in S_r, bei der zwei Punkte einander entsprechen, die ein Paar der betrachteten Involution bilden. Für $n > 2$ fehlen aber die Mittel zur Untersuchung, die durch die Betrachtung einer derartigen Transformation geliefert werden.

G. Castelnuovo[913]) geht von völlig anders gearteten Begriffen aus und zeigt, daß jede ebene Involution ($r = 2$) rational ist, ihre Gruppen also umkehrbar eindeutig auf die Punkte einer Ebene bezogen werden können [III C 6b (*G. Castelnuovo* und *F. Enriques*), Nr. 37].

Ein analoger Satz für $r > 2$ besteht nicht, da *F. Enriques*[914]) an einem Beispiel gezeigt hat, daß im dreidimensionalen Raum eine nicht

912) Verschiedene Eigenschaften dieser Involutionen bei *F. Chizzoni*, Atti Acc. Napoli (2) 5 (1891), Nr. 1.

913) Math. Ann. 44 (1893), p. 125; Auszug Roma Rend. Acc. Linc. (5) 2^2 (1893), p. 205. Ein allgemeinerer Lehrsatz bei *G. Castelnuovo* und *F. Enriques*, Ann. di mat. (3) 6 (1900), p. 214; Auszug Paris C. R. 131 (1900), p. 739.

S. auch *F. Enriques*, „Lezioni" [15]), p. 462—477.

Über die Rationalität der ebenen Involutionen s. auch *A. Schmitt*, Diss. Freiburg 1904.

Diese Frage wurde schon von *J. Lüroth*, „Rationale Flächen und involutorische Transformationen", Progr. Univ. Freiburg 1889, behandelt, der jedoch nur in einigen Sonderfällen zur Lösung gelangt. *J. Lüroth* beweist die Rationalität der Involutionen von der Ordnung $n = 2$ (s. Nr. **61** und die Zitate von *J. Lüroth* und *E. Bertini* in Nr. **118**) und die einer von einer zyklischen *Cremona*schen Transformation vom Index 3 abgeleiteten Involution der Ordnung $n = 3$.

914) Roma Rend. Acc. Linc. (5) 21^1 (1912), p. 81.

Die von *F. Enriques* konstruierte Involution hat die Ordnung 216 und wurde weiter studiert von *G. Aprile*, Rassegna di mat. e fis. 1 (1920), p. 133.

S. Kantor [542]), p. 192 und Amer. J. of math. 23 (1901), p. 2—3, hatte ohne jegliche Andeutung eines Beweises behauptet, daß jede Involution von ∞^r Gruppen zu n Punkten im r-dimensionalen Raume rational ist.

Nach *G. Fano*, Roma Rend. Acc. Linc. (6) 15 (1932), p. 3, ist eine Involution in S_3 rational oder irrational, je nachdem sie, als algebraische dreidimensionale Mannigfaltigkeit betrachtet, endliche kontinuierliche Gruppen von birationalen Transformationen in sich zuläßt oder nicht. Insbesondere kann eine irrationale Involution in S_3 nicht von einer endlichen kontinuierlichen Gruppe von *Cremona*schen Transformationen in sich transformiert werden.

rationale Involution existiert, deren Gruppen also nicht mit den Punkten des Raumes in eineindeutige Korrespondenz treten können [III C 6b (*G. Castelnuovo* und *F. Enriques*), Nr. **37, 48**].[915])

Zum Beweis des oben ausgesprochenen Satzes untersucht *G. Castelnuovo* eine algebraische Fläche F (eines gewissen linearen Raumes von $\varrho > 2$ Dimensionen), deren Punkte in eineindeutiger Korrespondenz mit den Gruppen der Involution stehen, und folgert nach eingehender Beschäftigung mit den auf F liegenden linearen Kurvensystemen, daß die Fläche F rational ist. Gleichzeitig erhält er verschiedene beachtenswerte Eigenschaften der Involutionen.[916])

In der Ebene existieren spezielle Punkte, und zwar in endlicher Anzahl, die *Hauptpunkte* heißen und die sämtlich nicht nur je einer, sondern je ∞^1 Involutionsgruppen angehören. Die ∞^1 Gruppen $n-1$ konjugierter Punkte eines Hauptpunktes liegen auf einer irreduziblen oder reduziblen, algebraischen Kurve, welche *Hauptkurve* und deren Ordnung *Ordnung* des Hauptpunktes heißt.

Betrachtet man die Korrespondenz mit den Indizes $n-1, n-1$, die zwei Punkte ein und derselben Involutionsgruppe verknüpft, so beschreiben bei der Bewegung eines Punktes auf einer Kurve C in der Ebene, die $n-1$ konjugierten Punkte eine Kurve C', die *Transformierte* von C.

Eine *Fixpunktkurve* ist der Ort eines Punktes, der einem seiner konjugierten Punkte unendlich benachbart ist.

Eine Kurve, die der Ort von ∞^1 Involutionsgruppen ist, heißt *der Involution angehörende Kurve* (*Involutionskurve*). Ebenso bezeichnen wir ein System von Kurven, die alle der Involution angehören, als *der Involution angehörend.*

Erweitern wir schließlich die von *E. Caporali* für $n = 2$ (Nr. **60**) eingeführte Bezeichnung, so ist die *Klasse* der Involution die Anzahl ν der Paare auf einer allgemeinen Geraden liegender konjugierter Punkte.

Ist k die Ordnung der Fixpunktkurve, so haben die transformierten Kurven der Geraden der Ebene die Ordnung $2\nu + k$ und alle

915) Über die Sätze von *J. Lüroth, G. Castelnuovo, F. Enriques* in Beziehung zur allgemeinen algebraischen Theorie der Körper s. *E. Steinitz,* J. f. Math. 137 (1910), p. 302; *Emmy Noether,* Math. Ann. 76 (1914), p. 175; *E. Steinitz,* „Algebraische Theorie der Körper“, neu hrsg. von *R. Baer* und *H. Hasse,* Berlin und Leipzig 1930, p. 73 und 126.

916) Verschiedene allgemeine Eigenschaften der Involutionen in der Ebene, in Verbindung vor allem mit ihrer Erzeugung durch ein Netz oder zwei Kurvenbüschel, bei *F. Chizzoni,* Roma Mem. Acc. Linc. (3) 19 (1883), p. 301. Hier wird die Ordnung als *Grad* bezeichnet. S. auch *F. R. Sharpe,* Amer. J. of math. 50 (1928), p. 627; Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 34 (1928), p. 695.

und nur die Hauptpunkte gemeinsam. Die aus einer Geraden R und ihrer Transformierten R' zusammengesetzten ∞^2 Kurven $R + R'$ gehören der Involution an; ebenso gehört ihr das lineare System Γ an, das die Ordnung von $R + R'$ und die niedrigste Dimension unter den linearen Systemen hat, die alle Kurven $R + R'$ enthalten.

Dieses System Γ ist irreduzibel und liefert eine spezielle Fläche F, die für einen gewissen ϱ-dimensionalen linearen Raum S_ϱ ($\varrho > 2$) normal ist und eineindeutig auf die Involution bezogen werden kann. Tatsächlich genügt es, für F eine Fläche, deren hyperebene Schnitte den Kurven von Γ in einer $(1, n)$-Korrespondenz entsprechen, oder, falls eine derartige Fläche für den Raum, dem sie angehört, nicht normal ist, die normale Fläche gleicher Ordnung anzunehmen, als deren Projektion jene betrachtet werden darf. Eine derartige irreduzible, und für den Raum S_ϱ normale Fläche F hat dann die Ordnung $2\nu + k + 1$, ihre allgemeinen hyperebenen Schnitte haben das Geschlecht ν, und ihre ∞^2 hyperebenen Schnitte, deren Bilder die Kurven $R + R'$ sind haben keine gemeinschaftlichen festen Punkte.[917]

Diese Betrachtungen verfolgt *G. Ferretti*[918] weiter und beweist, daß eine der Involution angehörende Kurve und die ihr entsprechende Kurve auf F ein und dieselbe Ordnung haben; daß ferner die Kurve R' für $\nu > 1$ eine Ordnung $\leqq 4\nu + 3$, für $\nu = 1$ dagegen eine Ordnung $\leqq 8$ haben, so daß $k \leqq 2\nu + 3$ oder $k \leqq 6$, je nachdem $\nu > 1$ oder $\nu = 1$ ist; daß außerdem n die Ordnung von F nicht übersteigt, so daß $n \leqq 4\nu + 4$ oder $n \leqq 9$, je nachdem $\nu > 1$ oder $\nu = 1$ ist.

G. Ferretti gibt auch Konstruktionen der Involutionen von der Klasse Null (insbesondere von den Involutionen, die er „von *de Jonquières*" nennt, d. h. solche, deren Gruppen auf den Geraden eines Büschels liegen) und von der Klasse 1 an. In Verfolgung des gleichen Gedankenganges gibt *Dorotea Bernardini*[919] Konstruktionen der Involutionen von der Klasse 2 an.[920]

917) Der normalen Fläche F bedient sich auch *G. Marletta*, Catania Atti Acc. Gioenia (5) 11 (1917), Nr. VI beim Studium der algebraischen ∞^2-Systeme von $(r - 2)$-dimensionalen algebraischen Mannigfaltigkeiten des r-dimensionalen Raumes, deren eine einzige durch einen allgemeinen Punkt geht (*lineare Kongruenzen*).

Die Abbildung spezieller ebener Involutionen auf Flächen studieren *A. Emch*, Amer. J. of math. 45 (1923), p. 192 [Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 29 (1923), p. 149]; Bull. Amer. math. Soc. (2) 33 (1927), p. 745; (2) 35 (1929), p. 381; *L. Godeaux*[596], [606], [920]; Mathesis 36 (1922), p. 19; 40 (1926), p. 352; *J. Dessart*[920].

918) Rend. Circ. mat. Palermo 17 (1903), p. 311.

919) „Sulla generazione delle involuzioni piane di 2ª classe", Palermo 1917.

920) Über die durch ein Kurvennetz bestimmte Involution s. *H. Milinowski*, J. f. Math. 77 (1873), p. 263; *A. Clebsch* und *F. Lindemann*, „Vorlesungen" 1,

Über die Reduktion der Involutionen von der Ordnung 3 oder 4 auf Typen siehe *Anna Mayme Howe*, Anm. 853 und *T. R. Hollcroft*, Anm. 854.[921])

p. 722 ff.; franz. Übers. 3, p. 79 ff.; *P. H. Schoute,* Ass. franç. adv. sciences 8, Montpellier 1879, p. 194; *M. Bernhard*[28]), p. 11—14; *J. de Vries,* Arch. Néerl. des sc. 23 (1889), p. 355 = Ak. Amsterdam Versl. (3) 6 (1888), p. 92; *Ch. P. Steinmetz,* Amer. J. of math. 14 (1891), p. 39. — Durch ein Büschel bestimmte Involutionen bei *A. R. Williams,* Bull. Amer. math. Soc. (2) 36 (1930), p. 133; Auszug daselbst (2) 35 (1929), p. 605.

Durch ein Netz von Kurven vom Geschlecht 0, 1, 2 gegebene Involutionen 3. Ordnung bei *Florence E. Allen,* Quart. J. of math. 45 (1913), p. 258; weitere spezielle Involutionen 3. und 4. Ordnung bei *J. de Vries,* Ak. Amsterdam Versl. (4) 19 (1910), p. 52; (4) 22 (1914), p. 872, 1379, 1385; (4) 23 (1914), p. 84; (4) 26 (1918), p. 1256; *Ch. H. van Os,* Handelingen van het 17e Nederlandsch Natuur- en Geneeskundig Congres, Leiden 1919, p. 188; *G. Aprile,* Note e Mem. Circ. mat. Catania 1 (1921), p. 102; *F. R. Sharpe,* Amer. J. of math. 50 (1928), p. 627; 52 (1930), p. 397 [Auszüge Bull. Amer. math. Soc. (2) 33 (1927), p. 649; (2) 36 (1930), p. 187]; *F. G. Williams,* Amer. J. of math. 53 (1931), p. 127.

Über die Involutionen 3. oder 4. Ordnung von der Klasse 1 s. *J. de Vries,* Arch. Neerl. des sciences exactes et nat. (3 A) 13 (1930), p. 58, 68.

Die Involution, die durch eine ebene, nicht homologische, zyklische Homographie bestimmt ist, deren Periode eine Primzahl $p > 2$ ist, hat *L. Godeaux,* Mém. Soc. sc. Liège (3) 15 (1930), Nr. 9; (3) 16 (1931), Nr. 1, 13 studiert. Für den Fall $p = 3$ s. *P. Muth,* Diss. Gießen 1890, p. 19 ff.; *L. Berzolari,* Rend. Ist. Lomb. (2) 37 (1904), p. 306; *L. Godeaux,* Nouv. Ann. de math. (4) 16 (1916), p. 49; für den Fall $p = 5$ s. *J. Dessart,* Mém. Soc. sc. Liège (3) 16 (1931), Nr. 12; für $p = 11$ s. *L. Godeaux,* Bull. Ac. sc. Belgique (5) 17 (1932), p. 1356.

Eine ebene Involution im Zusammenhang mit der Theorie der gemischten Polaren in bezug auf eine Fundamentalkurve bei *G. Castelnuovo,* Atti Ist. Veneto (6) 4 (1886), p. 1559; andere bei *J. de Vries,* Arch. Musée Teyler (2) 4 (1894), p. 119.

W. van der Woude, Ak. Amsterdam Versl. (4) 18 (1910), p. 842 und *J. de Vries,* daselbst (4) 34 (1925), p. 391 studieren die kubische Involution, die von den durch fünf feste Punkte hindurchgehenden kubischen Raumkurven auf einer Ebene bestimmt wird.

Die durch ein lineares ∞^3-Flächensystem bestimmten Involutionen des dreidimensionalen Raumes werden untersucht von *P. H. Schoute,* Ass. franç. adv. sciences 9, Reims 1880, p. 156; *M. Bernhard*[28]), p. 14—17; *Ch. P. Steinmetz,* Ztschr. Math. Phys. 35 (1890), p. 219, 272, 354 (s. Anm. 937); im Falle eines Systemes von Flächen 2. Ordnung *Ch. H. van Os,* Ak. Amsterdam Versl. (4) 24 (1915), p. 116. Eine Involution 4. Ordnung bei *G. Schaake,* Ak. Amsterdam Versl. (4) 35 (1926), p. 268.

Die durch Betrachtung der Schnitte der Hyperflächen von r Büscheln erhältliche Involution im r-dimensionalen Raume wird, speziell für $r = 2, 3, \ldots, 6$, von *Ch. H. van Os,* Diss. Utrecht 1916 studiert; für $r = 3$, falls es sich um Flächen 2. Ordnung handelt, von *J. de Vries,* Ak. Amsterdam Versl. (4) 21 (1913), p. 1269.

921) Man hat auch *Involutionen in der komplexen Ebene* studiert. Sind $f(z)$ und $\varphi(z)$ zwei rationale ganze Funktionen n^{ten} Grades der auf der *Gauß*schen Ebene dargestellten komplexen Veränderlichen z, so liefert die Gleichung

VI. Anwendungen.

103. Gebilde, die aus algebraischen Korrespondenzen zwischen gegebenen Grundgebilden hervorgehen. In Erweiterung der Untersuchungen über die Kurven, Flächen, Geradensysteme (Kegelschnitte, Flächen 2. Ordnung, ebene und Raumkurven 3. Ordnung, kubische Flächen, tetraedraler Komplex, ...), die durch zwei oder mehrere projektiv aufeinander bezogene Grundgebilde 1., 2. oder 3. Stufe erzeugt werden, kann man die in analoger Weise erzeugten Gebilde studieren, wenn man zwei oder mehrere dieser Grundgebilde durch ein- oder mehrdeutige algebraische Korrespondenzen aufeinander bezieht.[922]) Wir führen hier verschiedene Resultate über die beachtenswertesten Fälle an, die eintreten können.[923])

$f + \lambda\varphi = 0$ bei Veränderung von λ die Gruppen einer Involution n^{ter} Ordnung auf der komplexen Ebene. Diese Involutionen sind von *J. de Vries*, Monatsh. Math. Phys. 3 (1892), p. 285; *E. H. C. H. Veen*, Diss. Utrecht 1917 insbesondere für die Fälle $n = 2, 3, 4$ untersucht worden. S. hierüber auch *E. Beltrami*, Mem. Acc. Bologna (2) 9 (1870), p. 607 = Opere 2, Milano 1904, p. 129; *L. Wedekind*, Diss. Erlangen 1875; Math. Ann. 9 (1875), p. 209 [Auszug Sitzungsb. phys.-med. Soc. Erlangen 1875, p. 93]; *R. Russell*, Proc. London math. Soc. (1) 19 (1887), p. 56; *J. de Vries*, Rend. Circ. mat. Palermo 5 (1891), p. 289; Monatsh. Math. Phys. 5 (1894), p. 1; Arch. Musée Teyler (2) 4 (1894), p. 119; *V. Retali*, Interm. des math. (1) 13 (1906), p. 213; *A. Clebsch* und *F. Lindemann*, „Vorlesungen", 2. Aufl. 1_1, Leipzig 1906—1932, p. 836—869; *F. Lindemann*, Sitzungsb. Ak. München 1919, p. 147; *A. Colucci*, Giorn. di mat. (3) 15 (1922), p. 62; *J. H. Grace*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 24 (1928), p. 210.

922) Über derartige auf die Liniengeometrie bezügliche Gebilde s. III C 8 (*K. Zindler*), Nr. **41 ff.**

Eine methodische Darstellung der Hauptergebnisse über diesen Gegenstand findet sich bei *G. Loria*, Giorn. Soc. di letture e conversazioni scient. di Genova 1887, p. 53 = Giorn. di mat. (2) 3 (1896), p. 354. — Verschiedene, durch drei, durch *Cremona*sche Korrespondenzen aufeinander bezogene Grundgebilde 2. Stufe erzeugte Gebilde auch bei *A. Pepoli*, Anm. 499.

Ausführliche Untersuchungen über die Gebilde, die sich durch zwei, mittels einer quadratischen *Cremona*-Transformation aufeinander bezogene Grundgebilde 2. Stufe erhalten lassen, bei *G. Bordiga*, Preisschrift, Mém. Acc. Belgique, coll. in —4°, (2) 2 (1909), Nr. 3 [1907]. — Für den Fall von zwei oder mehr solcher Grundgebilde s. *A. Plamitzer*, Prace matem.-fiz. 35 (1929), p. 1; 38 (1931), p. 79.

923) Für den Fall linearer Korrespondenzen s. noch *A. del Re*, Rend. Acc. Napoli (1) 25 (1886), p. 272; Rend. Circ. mat. Palermo 1 (1887), p. 272; Roma Rend. Acc. Linc. (4) 6^2 (1890), p. 221; (5) 2^1 (1893), p. 245; Atti Acc. Torino 28 (1893), p. 420; außerdem z. B. *R. Sturm*, „Geom. Verw." 1, p. 401—415; 4, p. 132—151. Insbesondere über Örter von Treffgeraden entsprechender Strahlen in eindeutig und linear verwandten Strahlengebilden s. *Fr. Kliem*, Diss. Breslau 1909. = *R. Scaccianoce*, Atti e Rend. Acc. Dafnica di Acireale (2) 2 (1907), Nr. 1, studiert

Zwei Ebenenbüschel mit den Achsen a und b in einer (m, n)-Korrespondenz erzeugen eine Regelfläche vom Grade $m + n$, die der Ort der Schnitte der homologen Ebenen ist; die Geraden a und b sind für die Regelfläche n- und m-fach. Dieselbe Regelfläche läßt sich auch durch die duale Konstruktion erhalten, wenn man die zwischen den Punkten von a und den Punkten von b sich ergebende (n, m)-Korrespondenz ins Auge fasst und die homologen Punkte verbindet.[924])

---

eine rationale Fläche 7. Ordnung, die man mit Hilfe von drei reziprok auf eine vierte Ebene bezogenen Ebenen erhält. Eine Erweiterung in Period. di mat. (3) 5 (1908), p. 35.

924) Über die durch zwei Grundgebilde 1. Stufe oder zwei beliebige rationale Gebilde in (α, β)-Korrespondenz erzeugten Kurven, Regelflächen usw. siehe *Em. Weyr,* „Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde und der algebraischen Curven und Flächen als deren Erzeugnisse", Leipzig 1869; „Beiträge" [7]); Prag Abh. böhm. Ges. (6) 4 (1870); (6) 5 (1871); Math. Ann. 3 (1870), p. 34; Prag Ber. böhm. Ges. 1874, p. 198; *M. Lazarski,* Sitzungsb. Ak. Krakau 15 (1887), p. 224; *L. Crelier,* Enseign. math. 8 (1906), p. 455; 9 (1907), p. 107; 10 (1908), p. 111; 15 (1913), p. 453 [vgl. *B. Bydžovský,* daselbst 16 (1914), p. 366; *L. Crelier,* daselbst, p. 369]; *R. Sturm,* „Geom. Verw." 1, p. 241—253; *B. Kalicun,* Sitzungsb. Ak. Wien 119 (1910), p. 1351; 120 (1911), p. 1299; 121 (1912), p. 2351; 122 (1913), p. 365; 123 (1914), p. 313; Lemberg Sevčenko-Ges. 17 (1916), p. 1; *K. Bartel,* Vektor (Varsavia) 1912; Paris C. R. 158 (1914), p. 1875; Prace mat.-fiz. 26 (1915), p. 65; *D. Mazkewitsch,* Diss. Bern 1915; *A. Plamitzer,* Sitzungsb. Ak. Wien 125 (1916), p. 1343; 126 (1917), p. 203, 807; Prace mat.-fiz. 30 (1919), p. 191; 31 (1920), p. 129; *S. Joss,* Mitt. Naturf. Ges. Bern 1918, p. 134; *H. S. White,* Amer. J. of math. 48 (1926), p. 223; *H. P. Pettit,* Tôhoku math. J. 28 (1927), p. 72 [Auszug Japanese J. of math. 4 (1928), Abstracts, p. (6)]; *F. Ayres,* Bull. Amer. math. Soc. (2) 34 (1928), p. 143; *E. Müller,* „Vorlesungen über darstellende Geometrie" 2, Die Zyklographie, herausg. von *J. L. Krames,* Leipzig u. Wien 1929, p. 257—263; *A. Emch,* Comment. math. Helvetici 4 (1932), p. 65; *Joanna I. Mayer,* Tôhoku math. J. 36 (1932), p. 1.

Über die Erzeugung der Kurven 3. oder 4. Ordnung s. III C 5 (*G. Kohn*), Nr. **25, 26, 27, 42, 47, 48, 64, 79, 83, 92.** — Über die Erzeugung von Regelflächen s. *W. L. Edge,* „The theory of ruled surfaces", Cambridge 1931, p. 45 ff.

Über die durch die Schnitte der homologen Kurven von zwei ∞^1-Systemen mit beliebigen Indizes in (m, n)-Korrespondenz erzeugten Kurven s. *P. de Lepiney,* Mathesis (4) 1 (1911), p. 113; *H. G. Zeuthen,* „Lehrbuch", p. 180—181; für $m = n = 1$ s. *L. Cremona,* „Introduzione" [75]), Nr. 83 = Opere 1, p. 388—389.

Sind in einer Ebene n Geradenbüschel in n-linearer Korrespondenz (Nr. 5) gegeben, so ist der Ort der Punkte, in denen n homologen Geraden zusammenlaufen, eine Kurve n^{ter} Ordnung, die durch die Mittelpunkte der gegebenen Büschel geht. Umgekehrt kann auf diese Weise jede Kurve n^{ter} Ordnung erzeugt werden, wenn man n willkürliche Kurvenpunkte als Mittelpunkte der n Büschel wählt. Diese Konstruktion ist eine einfache Modifikation der Konstruktion von *H. Graßmann* durch einen linearen Mechanismus [III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **10** und **11**]. *H. Graßmann* leitet diese Konstruktion zuerst von den allgemeinen Grundsätzen ab, die er in „Die lineale Ausdehnungslehre", Leipzig

Befinden sich auf den Ebenen α und β zwei Strahlenbüschel mit den Mittelpunkten A und B in (m, n)-Korrespondenz, so bilden die Treffgeraden der Paare entsprechender Strahlen einen Komplex vom Grade $m + n$. Alle Kegel des Komplexes gehen durch A, B und die $m + n$ Punkte der Geraden $\alpha\beta$ in denen sich zwei homologe Strahlen der beiden Büschel schneiden.

Befinden sich drei Ebenenbüschel mit einem und demselben Büschel in (m_1, n_1)-, (m_2, n_2)-, (m_3, n_3)-Korrespondenz, so daß z. B. das erste und das zweite untereinander in $(n_1 m_2, n_2 m_1)$-Korrespondenz treten, so bilden die Schnitte der Tripel entsprechender Ebenen eine Kurve der Ordnung

$$n_1 m_2 m_3 + n_2 m_3 m_1 + n_3 m_1 m_2,$$

die mit den Achsen der drei Büschel je

$$m_1(n_2 m_3 + n_3 m_2), \quad m_2(n_3 m_1 + n_1 m_3), \quad m_3(n_1 m_2 + n_2 m_1)$$

Punkte gemein hat.

Sind in drei verschiedenen Ebenen drei Strahlenbüschel in algebraischen Korrespondenzen gegeben, die wie oben durch ein viertes Büschel bestimmt werden, so erzeugen die Geraden, die die Tripel entsprechender Strahlen treffen, eine Kongruenz von der Ordnung und Klasse

$$n_1 m_2 m_3 + n_2 m_3 m_1 + n_3 m_1 m_2.$$

Die Mittelpunkte und Ebenen der drei Büschel sind singuläre Punkte bzw. Ebenen der Kongruenz. Der Mittelpunkt des ersten Büschels z. B. ist der Scheitel eines Kegels der Kongruenz, von der Ordnung $n_2 m_3 + n_3 m_2$, und die Ebene des gleichen Büschels enthält eine Kurve der Kongruenz, von der Klasse $n_2 m_3 + n_3 m_2$.

1844 (2. Ausg., Leipzig 1878), p. 224—228 = Werke 1[1], Leipzig 1894, p. 245—249 entwickelt, später, unabhängig von der Ausdehnungslehre, durch den Begriff der planimetrischen Multiplikation, s. J. f. Math. 31 (1845), p. 111 = Werke 2[1], p. 49.

Über diese Konstruktion s. *E. Kötter,* Preisschrift[62]), p. 220—235, 286—289. Vgl. auch *F. Deruyts,* Mém. Soc. sc. Liège (2) 17 (1890), p. 160; *L. Pomey,* Nouv. Ann. de math. (5) 3 (1924), p. 81; *E. Fiquemont,* Enseign. math. 25 (1926), p. 46. — *E. Kötter,* a. a. O., p. 231—235, 286—289 macht davon Anwendung auf die Konstruktion einer Kurve n^{ter} Ordnung, die durch $\frac{n(n+3)}{2}$ gegebene, reelle oder imaginäre Punkte hindurchgeht.

Für $n = 3$ s. *C. Le Paige* und *F. Folie,* Bull. Acc. sc. Belgique (3) 1 (1881), p. 610; Mém. couronnés et Mém. des savants étrangers (in 4°) de l'Acad. de Belgique 43 (1882), Nr. 7 [1880]; 45 (1884), Nr. 1 [1882]; *C. Le Paige,* Bull. Ac. sc. Belgique (3) 4 (1882), p. 334; (3) 5 (1883), p. 85; Mém. Soc. sc. Liège (2) 10 (1883), p. 1, 105; *G. Castelnuovo,* Atti Ist. Ven. (6) 5 (1887), p. 1041; *F. London,* Math. Ann. 44 (1893), p. 375; 45 (1893), p. 545; *J. W. Russell,* Proc. London math. Soc. (1) 26 (1894—95), p. 446.

Es gibt $n_2 m_3 + n_3 m_2$ Paare entsprechender Strahlen des 2. und 3. Büschels, die sich schneiden, und jedes Paar erzeugt $2m_1(n_2 m_3 + n_3 m_2)$ Strahlenbüschel der Kongruenz.[925])

Sind vier Strahlenbüschel S, S_1, S_2, S_3 in verschiedenen Ebenen derart aufeinander bezogen, daß die Korrespondenz zwischen S und S_i eine (m_i, n_i)-Korrespondenz ist, so bilden die Geraden, die vier homologe Strahlen treffen, eine Regelfläche vom Grade

$$2(m_1 m_2 m_3 + n_1 m_2 m_3 + n_2 m_3 m_1 + n_3 m_1 m_2).$$

Durch den Mittelpunkt des ersten Büschels gehen $n_1 m_2 m_3 + n_2 m_3 m_1 + n_3 m_1 m_2$ Geraden dieser Fläche, durch den Mittelpunkt des zweiten z. B. $m_2 m_3 + m_2 n_3 + m_3 n_2$ Geraden.[926])

Befinden sich zwei Strahlenbündel in birationaler Korrespondenz n^{ter} Ordnung, so erzeugen die Schnittpunkte von Paaren entsprechender Strahlen eine Kurve von der Ordnung $n + 2$ und vom Geschlecht $n - 1$.[927])

---

925) Für $m_i = n_i = 1$ vgl. *D. Roccella,* „Sugli enti geometrici dello spazio di rette generati dalle intersezioni de' complessi corrispondenti in due o piú fasci proiettivi di complessi lineari", Piazza Armerina 1882, p. 28; *T. A. Hirst,* Proc. London math. Soc. (1) 16 (1885), p. 232; Rend. Circ. mat. Palermo 1 (1886), p. 64; *R. Sturm,* J. f. Math. 101 (1887), p. 162; „Die Gebilde"[40]) 2, p. 78; „Geom. Verw." 1, p. 403; *G. Fano,* Ann. di mat. (2) 21 (1893), p. 157.

926) Für $m_i = n_i = 1$ vgl. *D. Roccella*[925]), p. 30; *R. Sturm,* „Geom. Verw." 1, p. 405.

927) Für den Fall der Transformationen von *de Jonquières* s. *E. de Jonquières*[430]); im allgemeinen *L. Cremona,* Mem. Acc. Bologna (2) 5 (1865), p. 33—35 = Giorn. di mat. (1) 3 (1865), p. 375—376 = Opere 2, p. 217—218. Vgl. auch *R. Sturm,* „Geom. Verw." 4, p. 31—32.

Für den Fall zweier Bündel in quadratischer Korrespondenz s. *R. Sturm,* Math. Ann. 19 (1881), p. 469—471; „Geom. Verw." 4, p. 49—52; *G. Bordiga*[922]), p. 36 ff. Hier ist der Ort der gemeinsamen Punkte homologer Strahlen eine Kurve 4. Ordnung 1. Art; haben aber sieben in allgemeiner Lage befindliche Paare entsprechender Strahlen einen Schnittpunkt, so schneiden sich zwei beliebige homologe Strahlen, und der Ort der Schnittpunkte ist eine Fläche 2. Ordnung.

Nach *R. Sturm* besitzen alle ∞^4 quadratischen Transformationen zwischen zwei Bündeln, in denen fünf gegebene Paare sich schneidender Geraden einander entsprechen, noch ein sechstes Paar sich schneidender homologer Geraden. Betrachten wir außerdem die ∞^2 durch sechs Paare sich schneidender homologer Strahlen bestimmten quadratischen Transformationen zwischen zwei Bündeln, so enthalten alle diese die gleichen ∞^1 Paare sich schneidender homologer Geraden, und der Ort der gemeinschaftlichen Punkte ist eine einzige Raumkurve 4. Ordnung 1. Art. Vgl. Nr. 67.

Sind zwei Bündel in birationaler Korrespondenz der Ordnung n gegeben, so studiert *D. Lo Piano,* Rend. Acc. Napoli (3) 6 (1900), p. 130 die rationale Fläche, die man dadurch erhält, daß man durch einen festen Punkt O die Geraden führt, die die Paare der entsprechenden Geraden treffen, und daß man

Besteht zwischen zwei voneinander verschiedenen Punktebenen eine *Cremona*sche Korrespondenz n^{ter} Ordnung, so erzeugen die Verbindungsgeraden der homologen Punkte eine Kongruenz $(n+2)^{\text{ter}}$ Ordnung und n^{ter} Klasse, die unter dem Namen *Cremonasche Kongruenz* vor allem von *T. A. Hirst*[928]) untersucht wurde. Die beiden gegebenen Ebenen sind für die Kongruenz singulär; jede von ihnen enthält unendlich viele Gerade dieser Kongruenz, die eine Kurve $(n+1)^{\text{ter}}$ Klasse umhüllen, für welche der Schnitt der beiden Ebenen n-fache Tangente ist. Dieselbe Gerade ist für die Kongruenz n-fach. Jeder Hauptpunkt der Korrespondenz ist für die Kongruenz singulär. Die Brennfläche der Kongruenz ist im allgemeinen $4n^{\text{ter}}$ Ordnung und $4(n-1)^{\text{ter}}$ Klasse.

Die auf analoge Weise durch zwei Ebenen in $(1, n)$-Korrespondenz erzeugte Kongruenz wurde für $n = 2$ von *I. Conti*[929]), im allgemeinen von *P. Visalli*[930]) studiert; die durch zwei Ebenen in (m, n)-Korrespondenz erzeugte Kongruenz von *R. Baldus.*[931])[932])

---

auf jeder derselben den vierten harmonischen Punkt von O bezüglich der zwei Treffpunkte sucht. Sie ist von der Ordnung $n+2$ und besitzt eine Doppelkurve der Ordnung $\frac{n(n-1)}{2}+1$ und hat in O einen Doppelpunkt.

Die Kurve, die der geometrische Ort der Punkte ist, in denen sich die Paare homologer Geraden zweier linearer Kongruenzen in birationaler Korrespondenz treffen, ist von *G. Hulin*[99]) studiert worden.

928) Proc. London math. Soc. (1) 14 (1883), p. 259; (1) 16 (1885), p. 232; (1) 17 (1886), p. 287; Rend Circ. mat. Palermo 1 (1886), p. 64, wo auch viele Sonderfälle betrachtet werden. Vgl. auch *R. Schumacher,* Math. Ann. 37 (1890), p. 132; *A. del Re,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 2^1 (1893), p. 452; *G. Fano,* Ann. di mat. (2) 21 (1893), p. 155; Atti Acc. Torino 36 (1901), p. 366; *R. Sturm,* „Geom. Verw." 4, p. 36—38; *M. Stuyvaert,* Enseign. math. 12 (1910), p. 489. Für den Fall einer quadratischen Transformation s. *W. Stahl,* J. f. Math. 97 (1883), p. 146; *D. Montesano,* Atti Acc. Torino 27 (1892), p. 1064; *U. Perazzo*[454]), p. 160; *G. Bordiga*[922]), p. 5 ff.; für den Fall einer Kreisverwandtschaft (Nr. 71) *A. Emch,* Ann. of math. (2) 13 (1911), p. 155; Bull. Amer. math. Soc. (2) 18 (1911), p. 57; *Em. Müller* und *E. Kruppa*[59]), p. 89—95; für den Fall einer kubischen Transformation *E. Schöner,* Diss. München 1887. Für viele Sonderfälle s. auch *R. Sturm,* „Die Gebilde"[40]) 2, p. 32—34, 103—110, 243—244, 253—255, 266—267, 292—293, 310.

929) Rend. Circ. mat. Palermo 1 (1887), p. 230; 2 (1887), p. 97. Vgl. auch *R. Sturm,* „Die Gebilde"[40]) 2, p. 110—116.

930) Rend. Ist. Lomb. (2) 28 (1894), p. 114, 264, 319; Roma Rend. Acc. Linc. (5) 4^1 (1895), p. 33, 58.

P. Visalli, Roma Rend. Acc. Linc. (4) 3^1 (1887), p. 124 betrachtet auch die Kurve der Ordnung $n+\nu+1$, den Ort der Punkte, in denen sich die homologen Strahlen zweier durch eine $(1, n)$-Transformation ν^{ter} Ordnung aufeinander bezogener Bündel schneiden.

931) S. Anm. 858.

Für die Erzeugung einiger algebraischer ∞^3-Komplexe von Geraden in S_4

Befinden sich ein Strahlenbündel vom Mittelpunkt A und ein Ebenenbündel vom Mittelpunkt B in *Cremona*scher Korrespondenz n^{ter} Ordnung, so bilden die den homologen Geraden und Ebenen gemeinschaftlichen Punkte eine (Monoid-)Fläche $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, die in A einen n-fachen, in B einen einfachen Punkt hat. Fallen A und B zusammen, so entsteht ein Kegel $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, der Ort der in den korrespondierenden Ebenen des zweiten Bündels gelegenen Strahlen des ersten Bündels, und ein Kegel $(n+1)^{\text{ter}}$ Klasse, die Hüllfläche der die homologen Strahlen des ersten Bündels enthaltenden Ebenen des zweiten Bündels.[933])

Eine Punkt- und eine Geradenebene, die durch eine *Cremona*sche Korrespondenz n^{ter} Ordnung aufeinander bezogen sind, erzeugen einen Komplex vom Grade $n+1$, den Ort der Geraden, die von den Punkten der ersten Ebene die Punkte der homologen Geraden der zweiten Ebene projizieren.[934])

Drei Ebenenbündel, die sich in *Cremona*schen Korrespondenzen von den Ordnungen n_1, n_2, n_3 mit einer Punktebene π befinden, erzeugen als Ort der Schnitte der homologen Ebenen eine Fläche der Ordnung $n_2n_3+n_3n_1+n_1n_2$, deren Multiplizitäten in den Mittelpunkten der drei Bündel n_2n_3, n_3n_1, n_1n_2 sind und die $n_2n_3+n_3n_1+n_1n_2+3$

---

benutzt *Maria Miglio,* Catania Atti Acc. Gioenia (5) 15 (1925), Nr. I[bis] birationale und mehrfache Transformationen zwischen zwei Ebenen.

932) Die Strahlenkongruenzen, die man erhält, wenn man von einer Funktion $w=f(z)$ der komplexen Veränderlichen z ausgeht, w und z auf zwei Ebenen darstellt und die homologen Punkte verbindet, betrachtet *K. Weierstraß* in seinen Vorlesungen über *Abel*sche Funktionen; s. Math. Werke 4, Berlin 1902, p. 323. Vgl. auch *G. Vivanti,* Rend. Circ. mat. Palermo 9 (1894), p. 108. Viele Sonderfälle bei *M. J. van Uven,* Diss. Utrecht 1908 = Ak. Amsterdam Verh. (1) 10 (1911), Nr. 2. Für den Fall, daß $f(z)$ eine lineare gebrochene Funktion ist, was zur Kreisverwandtschaft führt (Nr. 71), s. *A. Emch,* Ann. of math. (2) 13 (1912), p. 155; für den Fall einer quadratischen Beziehung zwischen w und z s. *E. Busche,* Progr. Hansaschule Bergedorf bei Hamburg 1890 und 1891. Über den allgemeinen Fall s. noch *E. Study,* Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 11 (1902), p. 324 ff.; *J. L. Coolidge,* Atti Acc. Torino 38 (1904), p. 175; *E. J. Wilczynski,* Trans. Amer. math. Soc. 20 (1919), p. 271.

933) *G. Jung,* Roma Rend. Acc. Linc. (4) 1 (1885), p. 762, 773.

934) *P. Visalli,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 4^1 (1895), p. 480. — Für $n=1$ vgl. *T. A. Hirst,* Proc. London math. Soc. (1) 10 (1879), p. 131; Collectanea math. in mem. D. Chelini, Milano 1881, p. 51; *R. Sturm,* „Die Gebilde"[40]) 3, p. 429; „Geom. Verw." 2, p. 210.

R. Souris, Bull. Ac. sc. Belgique (5) 17 (1931), p. 1365; (5) 18 (1932), p. 71, 165 studiert die Brennfläche der Kongruenz der Kegelschnitte, die man als Schnitte homologer Elemente eines Ebenenbündels und eines Netzes von Flächen 2. Ordnung erhält, die durch eine quadratische Korrespondenz verbunden sind.

nicht durch diese Mittelpunkte gehende Geraden enthält. Die Fläche läßt sich auf die Ebene π abbilden, und ihren ebenen Schnitten entsprechen auf π Kurven der Ordnung $n_1 + n_2 + n_3$, die die Bildpunkte der vorhergehenden Geraden und die Hauptpunkte der Korrespondenzen zwischen π und den drei Bündeln gemeinsam haben. Die Fläche enthält doppelte Kurven, die in ihrer Gesamtheit von der Ordnung[935])

$$\tfrac{1}{2}(n_2 n_3 + n_3 n_1 + n_1 n_2 - 2)(n_2 n_3 + n_3 n_1 + n_1 n_2 - 3)$$

sind.

Vier Ebenenbündel, die sich in *Cremona*schen Korrespondenzen von den Ordnungen n_1, n_2, n_3, n_4 mit ein und demselben Grundgebilde 2. Stufe befinden, erzeugen als Ort der Punkte, durch die vier homologe Ebenen gehen, eine Kurve der Ordnung

$$n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_1 n_4 + n_2 n_3 + n_2 n_4 + n_3 n_4.$$ [936])

Vier Geradenebenen in *Cremona*schen Korrespondenzen von den Ordnungen n_1, n_2, n_3, n_4 mit ein und demselben Grundgebilde 2. Stufe erzeugen als Ort der vier homologe Geraden treffende Geradenpaare eine Kongruenz der Ordnung und Klasse $n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_1 n_4 + n_2 n_3 + n_2 n_4 + n_3 n_4$, für die die vier Ebenen singulär sind.

Fünf Geradenebenen in *Cremona*schen Korrespondenzen von den Ordnungen $n_1, n_2, \ldots, n_5$ mit ein und demselben Grundgebilde 2. Stufe erzeugen als Ort der Geraden, die fünf entsprechenden Geraden dieser Ebenen treffen, eine Regelfläche vom Grade

$$2(n_1 n_2 + n_1 n_3 + \cdots + n_4 n_5).$$ [937])

935) Über diese Fläche vgl., außer *G. Loria*[922]), *G. Jung,* Roma Rend. Acc. Linc. (4) 1 (1885), p. 810; (4) 2^1 (1886), p. 85; *P. Visalli,* daselbst, (4) 2^2 (1886), p. 80, 84; *E. Kötter,* Jahrbuch über die Fortschritte d. Math. 19 (1890), p. 596; *A. del Re,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 2^1 (1893), p. 452. In diesen Arbeiten wird auch die Fläche untersucht, die man mittels zweier durch *Cremona*sche Korrespondenzen auf ein Ebenenbündel bezogener Punktebenen erhält, indem man den Ort der Punkte sucht, in denen die Verbindungsgeraden der homologen Punkte der beiden Ebenen von den homologen Ebenen des Bündels geschnitten werden.

936) Für $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 1$ vgl. z. B. *R. Sturm,* „Geom. Verw." 2, p. 195; 3, p. 375, 549 ff.

937) Über den Komplex der Verbindungsgeraden der Paare homologer Punkte von zwei dreidimensionalen Räumen in *Cremona*scher Korrespondenz s. Nr. **83**. Über den Komplex, der sich im Falle einer Doppeltransformation ergibt, s. Nr. **96**. *Ch. P. Steinmetz*[920]) zweites Zitat, studiert den Komplex, der in analoger Weise durch eine mehrdeutige involutorische Verwandtschaft erzeugt wird; einige Ungenauigkeiten wurden von *W. Stahl,* Jahrbuch über die Fortschritte d. Math. 22 (1893), p. 626 berichtigt.

Andere Geradenkomplexe erhalten auf ähnliche Weise *A. Weiler,* Ztschr. Math. Phys. 24 (1879), p. 159; *J. de Vries,* Arch. Musée Teyler (2) 9 (1905), p. 553; Ak. Amsterdam Versl. (4) 11 (1903), p. 762; (4) 13 (1905), p. 605, 703; (4) 14 (1906),

104. Gebilde, die aus algebraischen Korrespondenzen zwischen gegebenen nicht-linearen Gebilden hervorgehen. Befinden sich zwei ebene Kurven von den Ordnungen n, n' in ein und derselben Ebene in (α, α')-Korrespondenz und sind k gemeinsame Punkte Fixpunkte, so hüllen die Verbindungsgeraden der homologen Punkte eine Kurve der Klasse $n\alpha' + n'\alpha - k$ ein. Fallen jedoch die beiden Kurven zusammen und ist die Korrespondenz symmetrisch, so daß $n = n'$, $\alpha = \alpha'$, so muß diese Zahl durch zwei geteilt werden, so daß die Klasse $n\alpha - \frac{k}{2}$ ist.[938]

Befinden sich zwei algebraische Flächen in eineindeutiger Korrespondenz, so bilden die Verbindungsgeraden der homologen Punkte eine Kongruenz, die für Sonderfälle von *E. Caporali*[939] und *A. Voss*[940], im allgemeinen von *M. Pannelli*[941] studiert wurde.

---

p. 666, unter Betrachtung verschiedener involutorischer oder nicht involutorischer Projektivitäten zwischen Erzeugenden von Regelflächen oder Tangenten einer Raumkurve.

H. J. van Veen, Nieuw Archief voor Wiskunde (2) 11 (1915), p. 232 studiert den durch zwei Büschel linearer Komplexe in (m, n)-Korrespondenz erzeugten Komplex.

St. Juński, Sitzungsb. Ak. Wien 122 (1913), p. 1659 studiert den durch drei Büschel linearer Komplexe in trilinearer Korrespondenz erzeugten kubischen Komplex.

938) Vgl. *A. Cayley,* Proc. London math. Soc. (1) 1, VII (1866), p. 6; Trans. London Phil. Soc. 158 (1867), p. 149—150; Quart. J. of math. 15 (1878), p. 32 = Papers 6, p. 13, 268; 10, p. 259. S. auch z. B. *R. Sturm,* „Geom. Verw.“ 1, p. 264—266; 4, p. 144—145; *E. Müller*[28], p. 46 ff., wo auch weitere analoge Lehrsätze auftreten; *Barré,* Nouv. Ann. de math. (5) 2 (1924), p. 201. Für $\alpha = \alpha' = 1$, $k = 0$ s. *L. Cremona,* „Introduzione“[75], Nr. 83 = Opere 1, p. 389; *A. Clebsch* und *F. Lindemann,* „Vorlesungen“ 1, p. 383; franz. Übers. 2, p. 105.

Über Regelflächen, die in analoger Weise erzeugt werden, wenn die zwei Kurven nicht in ein und derselben Ebene liegen oder Raumkurven sind, s. *M. Chasles,* Paris C. R. 62 (1866), p. 581; *A. Cayley,* Trans. Cambridge Phil. Soc. 11^2 (1867), p. 277 = Papers 7, p. 54. Vgl. *G. Salmon* und *W. Fiedler,* „Raumgeometrie“ 2, p. 320—322.

Für den Fall zweier homologer Kurven bei der Bewegung einer in der Ebene oder im Raume beweglichen starren Figur s. *M. Chasles,* Paris C. R. 51 (1860), p. 855, 905; 52 (1861), p. 77, 189, 487, wo auch viele andere Resultate aufgeführt werden.

939) Rend. Acc. Napoli (1) 18 (1879), p. 244 = Mem. di geometria, Napoli 1888, p. 126. Hier wird der Fall einer Ebene und einer rationalen Fläche behandelt, die eineindeutig auf die Ebene abgebildet ist. Sonderfälle bei *G. Fano,* Mem. Acc. Torino (2) 51 (1900), p. 62; *R. Sturm,* „Die Gebilde“[40] 2, p. 272—281.

940) Math. Ann. 30 (1887), p. 227. Hier handelt es sich um zwei durch vier biquaternäre Gleichungen eineindeutig aufeinander bezogene Flächen, insbesondere die *Hesse*sche und *Steiner*sche Fläche einer gegebenen punktallge-

105. Reduktion der Singularitäten der ebenen und nichtebenen algebraischen Kurven. Eine der wichtigsten Anwendungen der Theorie der algebraischen, vor allem der birationalen Transformationen ist die Reduktion der Singularitäten der ebenen und nicht ebenen algebraischen Kurven und der algebraischen Flächen.

Was die ebenen Kurven[942]) anbelangt, so verdankt man *M. Noether*[943])

---

meinen Fläche [falls diese 3. Ordnung ist, s. auch *R. Russell,* Proc. Irish. Ac. Dublin (3) 5 (1899), p. 462; *R. M. Ssolowjew,* Moskau math. Samml. 25 (1905), p. 386]. Die durch vier biquaternäre Gleichungen definierte eineindeutige Korrespondenz zwischen zwei Flächen ist von *H. Krey,* Math. Ann. 18 (1881), p. 82 und von *A. Voss,* daselbst 27 (1886), p. 357 studiert.

Besteht zwischen zwei Flächen von den Ordnungen n, n' eine (α, α')-Korrespondenz, so besteht zwischen der Klasse e und der Ordnung ε der Kongruenz der Verbindungsgeraden der homologen Punkte die Beziehung $\varepsilon = n\alpha' + n'\alpha + e$, s. *A. Voss,* Math. Ann. 30 (1887), p. 229.

A. Voss, Abh. bayer. Ges. Wiss. München 16 (1887), p. 243 studiert auch die Kongruenz, die der Ort der Verbindungsgeraden der Punkte einer algebraischen Fläche mit den Polen der zugehörigen Tangentialebenen in bezug auf eine gegebene Fläche 2. Ordnung ist.

941) Mem. Acc. Linc. (4) 6 (1889), p. 216. — Hier nimmt der Verfasser an, daß die eineindeutige Korrespondenz zwischen den zwei Flächen unter denselben Annahmen stattfindet, unter denen sie von *H. G. Zeuthen,* Math. Ann. 4 (1871), p. 21 studiert wurde, und erhält so als Sonderfälle verschiedene der schon von *T. A. Hirst*[928]), *E. Caporali*[939]), *A. Voss*[940]) gefundenen Formeln abzählender Art wieder.

942) Vgl. III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **12—18**. — S. außerdem *A. Brill* und *M. Noether,* „Bericht", p. 367 ff.; *G. A. Bliss,* Bull. Amer. math. Soc. (2) 29 (1923), p. 161; *A. Emch,* „Report", p. 56—74.

943) Gött. Nachr. 1871, p. 267; vollständiger Math. Ann. 9 (1875), p. 166; s. auch *A. Brill* und *M. Noether,* Math. Ann. 7 (1873), p. 287. Beweis mittels rationaler Operationen bei *M. Noether,* Math. Ann. 23 (1883), p. 311. Vgl. noch *P. Roth,* Monatsh. Math. Phys. 27 (1916), p. 121; *H. W. E. Jung,* Math. Ann. 84 (1921), p. 161.

Daß notwendigerweise die Aufeinanderfolge der quadratischen Transformationen abbrechen muß, beweist zuerst *M. Hamburger,* Ztschr. Math. Phys. 16 (1871), p. 461, der auf diesem Wege zur Darstellung mittels Potenzenreihen gelangt.

Einen mehr geometrischen Beweis des Satzes gibt *E. Bertini,* Rend. Ist. Lomb. (2) 21 (1888), p. 326, 413; (2) 23 (1890), p. 307; Wiedergabe in [4]), 1. Ausg., p. 375—379; 2. Ausg., p. 460—465; deutsche Ausgabe, p. 434—439. S. noch einen Beweis von *G. Simart* bei *É. Picard*[28]) 2, 1. Ausg., p. 360—364; 2. Ausg., p. 404—408; 3. Ausg., p. 431—435; einen weiteren bei *F. Severi,* „Lezioni", p. 57—65; „Vorlesungen", p. 46—52; „Trattato" 1_1, p. 309 ff. Vgl. auch *M. Noether,* Rend. Circ. mat. Palermo 4 (1890), p. 89, 300; *M. de Franchis,* daselbst 11 (1897), p. 129—132; *Hilda P. Hudson,* „Cremona transf.", p. 128—143; *J. L. Coolidge,* „Alg. pl. curves", p. 204—207. Ein transzendenter Beweis mit Reihenentwicklung der Koordinaten bei *C. Jordan*[4]), p. 583—599; vgl. *S. Pincherle,* „Lezioni sulla teoria delle funzioni analitiche" (lith.), gesammelt von *A. Bottari,* den Satz, daß jede irreduzible oder reduzible algebraische ebene Kurve, falls sie nur frei von mehrfachen Komponenten ist, durch eine endliche Anzahl quadratischer Transformationen (also eine passende *Cremona*sche Transformation) in eine andere transformiert werden kann, die nur gewöhnliche vielfache Punkte, d. h. Punkte mit untereinander verschiedenen Tangenten hat. Dies kann sogar in der Weise geschehen, daß jedem singulären Punkte der gegebenen Kurve auf der anderen Kurve nur einfache Punkte in endlicher Anzahl entsprechen.[944]) Daraus

---

Bologna 1899—1900, p. 333—336; *M. de Franchis* [26]), p. 239—255; *J. L. Coolidge,* a. a. O., p. 213—241.

Methoden, die sich nicht wesentlich von der Methode von *M. Hamburger* unterscheiden, verwendet *K. Weierstraß* in seinen Vorlesungen über die *Abel*schen Funktionen an der Universität Berlin seit dem Jahre 1873 [s. den Brief von *K. Weierstraß* an *H. A. Schwarz* vom 3. Oktober 1875, in Werke 2, Berlin 1895, p. 236 und die „Vorlesungen über die Theorie der *Abel*schen Transzendenten", Werke 4, Berlin 1902, p. 13—45], und auch *L. Koenigsberger,* „Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Funktionen, nebst einer Einleitung in die allgemeine Funktionenlehre" 1, Leipzig 1874, p. 166—198. S. auch *O. Biermann,* „Theorie der analytischen Funktionen", Leipzig 1887, p. 205—224; *O. Stolz,* „Grundzüge der Differential- und Integralrechnung" 1, Leipzig 1893, p. 177—198.

Der Satz von *M. Noether* wird auch bei *F. Enriques* und *O. Chisini,* „Lezioni" 2, p. 417—419 bewiesen. Hier, p. 325—544 [Auszug *F. Enriques*, Roma Rend. Acc. Linc. (5) 25^1 (1916), p. 607; s. auch *O. Chisini,* Atti Ist. Ven. (9) 5 (1921), p. 419; *F. Enriques,* Rend. Semin. mat. Univ. Roma (2) 1 (1923), p. 31] findet sich auch eine eingehende Untersuchung der singulären Punkte der ebenen algebraischen Kurven, sowohl mit Hilfe quadratischer Transformationen oder durch Reihenentwicklungen, als auch mit Hilfe der Differentialbedingungen, die den Durchgang einer Kurve durch unendlich benachbarte Punkte und die diesbezüglichen Multiplizitäten kennzeichnen. S. III C 9 (*K. Rohn* und *L. Berzolari*), Nr. **11**.

Mit Hilfe quadratischer Transformationen, insbesondere quadratischer Inversionen (Nr. **69**), werden die Singularitäten der ebenen algebraischen Kurven studiert von *Charlotte Angas Scott,* Amer. J. of math. 14 (1892), p. 301; 15 (1893), p. 221; „An introductory account of certain modern ideas and methods in plane analytical geometry", London 1894, p. 224—232; *A. B. Basset,* Quart. J. of math. 37 (1906), p. 313; 43 (1911), p. 151; 47 (1915), p. 1; „A treatise on the geometry of surfaces", Cambridge 1910, p. 123—130; *G. Pfeiffer,* Bull. Univ. Kiew 1907, Nr. 6; *V. Retali,* Interm. des math. (1) 16 (1909), p. 275. S. auch *H. Wieleitner* [28]), p. 161—172; *K. Doehlemann,* „Geom. Transf." 2, p. 7—21.

Die Transformation einer ebenen Kurve mit nur gewöhnlichen Singularitäten in eine andere, die nur Knoten- und Rückkehrpunkte besitzt, durch eine Inversion, Kollineationen und Korrelationen bei *V. Jamet,* Nouv. Ann. de math. (3) 19 (1900), p. 506.

944) *J. Coolidge,* Proc. Nat. Acad. of Sciences 14 (1928), p. 435 gibt unter Betrachtung der adjungierten Kurven notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß eine gegebene ebene algebraische irreduzible Kurve durch eine *Cremona*sche Transformation der Ebene in eine andere Kurve mit gewissen einfacheren Singularitäten transformiert werden kann.

folgt, daß jede Singularität der Kurve als aus mehreren, untereinander unendlich benachbarten vielfachen Punkten in endlicher Anzahl zusammengesetzt betrachtet werden kann; daß ferner die Umgebung des singulären Punktes durch eine endliche Anzahl Reihenentwicklungen nach positiven ganzen Potenzen eines Parameters dargestellt werden kann.

Dasselbe Ergebnis erhält nach zwei verschiedenen Methoden *G. H. Halphen*[945]) durch eine birationale Transformation der Kurve, nicht aber der ganzen Ebene dieser Kurve.[946])

Der zweite Beweis von *G. H. Halphen*[947]) beruht auf der folgenden speziellen Transformation.[948]) Ist f die gegebene (von mehrfachen Teilen freie) Kurve, so nehmen wir in ihrer Ebene einen Kegelschnitt C an, der sich in allgemeiner Lage in bezug auf f befindet, und lassen jedem Punkte P von f den Schnittpunkt P' der Tangente an f in P mit der Polare von P in bezug auf C entsprechen. Beschreibt P die Kurve f, so beschreibt P' eine Kurve f'. Auf analoge Weise leiten wir von f' eine neue Transformierte f'' ab, und so weiter; und eine beliebige derartige transformierte Kurve befindet sich in eineindeutiger Korrespondenz mit f. *G. H. Halphen* zeigt, daß es eine endliche und bestimmte Zahl i gibt, derart, daß alle transformierten Kurven $f^{(i)}, f^{(i+1)}, \ldots$ nur gewöhnliche Singularitäten aufweisen.

Durch eine birationale Transformation der Kurve (nicht aber der ganzen Ebene) kann man die Kurve sogar auf eine andere Kurve reduzieren, die nur Doppelpunkte mit voneinander verschiedenen Tangenten hat.[949])

---

945) Paris C. R. 80 (1875), p. 638; J. math. pures appl. (3) 2 (1876), p. 87 = Oeuvres 1, Paris 1916, p. 358, 420.

L. Autonne, J. Éc. Polyt. (2), cah. 2 (1897), p. 61—64, 92—105 beweist den gleichen Lehrsatz, indem er von dem „*Newton*schen *Parallelogramm*" [vgl. III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. 13] Gebrauch macht.

946) Die Entstehung höherer vielfacher Punkte in der transformierten Kurve und die umgekehrte Frage der Auflösung vielfacher Punkte einer gegebenen Kurve in einfache Punkte der transformierten Kurve behandeln durch birationale Transformationen der Kurve *A. Clebsch* und *P. Gordan*, „Theorie der *Abel*schen Funktionen", Leipzig 1866, p. 54 ff.; *A. Brill*, Inauguralabh. Gießen 1867.

947) Wiedergabe bei *P. Appell* und *É. Goursat*[28]), p. 276—282; *A. R. Forsyth*[28]) p. 554—559.

948) Ein analytisches Studium dieser Transformation bei *A. R. Forsyth*, Messenger of math. 30 (1900), p. 1; *J. L. Coolidge*, „Alg. pl. curves", p. 346—352. Vgl. auch *G. Loria*[46]) 2, p. 276—278; ital. Ausg. 2, p. 313—316.

949) Dies hat zuerst *L. Kronecker* bewiesen, J. f. Math. 91 (1881), p. 301 = Werke 2, Leipzig 1897, p. 193, mitgeteilt an *B. Riemann* und an *K. Weierstraß* im Jahre 1858; an die Akademie der Wissenschaften Berlin 1862; vorgetragen

Dieser Satz kann auch mittels Projektion aus jedem der folgenden abgeleitet werden: jede algebraische ebene Kurve (ohne mehrfache Teile) kann a) birational auf eine von mehrfachen Punkten freie Raumkurve bezogen werden; oder b) als Projektion einer von mehrfachen Punkten freien Kurve betrachtet werden, die einem Raume von vier oder mehr Dimensionen angehört.[950])

---

in Vorlesungen an der Universität Berlin 1870—71. Durch eine birationale Transformation der Kurve läßt *L. Kronecker* der gegebenen Kurve eine andere entsprechen, die im Endlichen nur gewöhnliche Knotenpunkte besitzt. Man kann jedoch auch erreichen, daß die transformierte Kurve keine unendlichfernen vielfachen Punkte besitzt, s. *K. Hensel* und *G. Landsberg*[386]), p. 402—409. Die Methode von *L. Kronecker* wurde von *K. Weierstraß* bei den Vorlesungen in Berlin 1869 verwandt. S. auch *L. W. Thomé,* J. f. Math. 126 (1903), p. 52; 134 (1908), p. 144.

Der genannte Satz ist von *G. H. Halphen*, „Étude sur les points singuliers des courbes algébriques planes", Anhang zu der franz. Übers. von *G. Salmons* „Treatise on the higher plane curves", Dublin 1852 (3. Ausg. 1879): „Traité de géométrie analytique (courbes planes)", par *O. Chemin,* Paris 1884, p. 630 = Oeuvres 4, Paris 1924, p. 78, nach einer Methode von neuem bewiesen, die eine Lücke enthält, auf die *É. Picard*[28]) 2, 1. Ausg., p. 364—366 aufmerksam macht. Vgl. auch *A. Clebsch* und *F. Lindemann,* „Vorlesungen" 1, p. 661—674; franz. Übers. 3, p. 1—17. Das gleiche zeigen *P. Appell* und *É. Goursat*[28]), p. 282—284; *A. R. Forsyth*[28]), p. 559—560; *J. L. Coolidge*[948]), unter Anwendung der angeführten Transformation von *G. H. Halphen.*

Einen einfachen geometrischen Beweis unter der Annahme, daß die gegebene Kurve nur gewöhnliche vielfache Punkte hat, und unter Verwendung der in Nr. **93** erwähnten Doppeltransformation 3. Ordnung und vom Geschlecht 1 liefert *E. Bertini*, Riv. di mat. 1 (1891), p. 22 = Math. Ann. 44 (1894), p. 158; Wiedergabe bei *É. Picard*[28]) 2, 2. Ausg., p. 408—410; 3. Ausg., p. 435—437. Vgl. darüber *W. H. Young* und *Grace Chisholm Young*, Atti Acc. Torino 42 (1906), p. 82. Auf Grund einer Bemerkung von *F. Klein,* Math. Ann. 44 (1894), p. 160 ist die Methode von *E. Bertini* in Verbindung mit der ebenen Abbildung einer Fläche 3. Ordnung von *B. M. Walker*, Diss. Chikago 1906 [Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 14 (1907), p. 336] genau durchgeführt worden. Vgl. auch *J. L. Coolidge*, „Alg. pl. curves", p. 208—212.

Weitere Beweise bei *G. Simart,* Paris C. R. 116 (1893), p. 1047; *A. del Re*[852]), p. 447, Fußnote; *E. Vessiot*, Ann. Fac. Toulouse (1) 10 (1896), D; *G. A. Bliss,* Bull. Amer. math. Soc. (2) 29 (1923), p. 161; Trans. Amer. math. Soc. 24 (1922), p. 274 [Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 29 (1923), p. 206].

950) Der Satz **a)** ist bewiesen von *H. Poincaré,* Paris C. R. 117 (1893), p. 18; *M. Pieri,* Riv. di mat. 4 (1894), p. 40; *E. Vessiot,* Bull. Soc. math. de France 22 (1894), p. 208; *A. del Re,* Rend. Acc. Napoli (3) 7 (1901), p. 202; *F. Severi,* „Lezioni", p. 172—175; „Vorlesungen", p. 134—135; Atti Ist. Ven. 79 (1920), p. 933; „Trattato" 1_1, p. 74—77; *G. Albanese,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 33^1 (1924), p. 13.

Der Satz **b)** ist implizite in den von *A. Brill* und *M. Noether,* Math. Ann. 7 (1873), p. 269 [Auszug Gött. Nachr. 1873, p. 116] angegebenen Sätzen

Ein analoger Satz gilt für eine beliebige algebraische Kurve des drei- oder mehrdimensionalen Raumes, falls sie nur frei von mehrfachen Teilen ist. Danach kann die Kurve also durch eine *Cremona*sche Raumtransformation in eine andere Kurve transformiert werden, die nur vielfache Punkte mit voneinander verschiedenen Tangenten aufweist.[951])

Die ebene oder nichtebene Kurve kann überdies[952]) durch eine *Cremona*sche Raumtransformation in eine andere, von vielfachen Punkten freie Kurve transformiert werden.[953])

Weitere Anwendungen der Transformation von *G. H. Halphen* auf die vielfachen Punkte der ebenen Kurven macht *G. Albanese*.[954]) Ist in einer Ebene ein algebraisches System von algebraischen Kurven

---

über die linearen Scharen von Punktgruppen auf einer algebraischen Kurve enthalten; explizit wurde er angegeben von *G. Veronese,* Math. Ann. 19 (1881), p. 213—214. S. auch *P. del Pezzo*, Rend. Acc. Napoli (2) 7 (1893), p. 15, 45; *C. Segre* [2]), p. 43; *F. Severi,* „Lezioni", p. 175—176; „Vorlesungen", p. 135—136; „Trattato" 1_1, p. 77—78, 161—164; *F. Enriques* und *O. Chisini,* „Lezioni" 2, p. 545—550; 3, p. 143—144; *J. H. McDonald,* Bull. Amer. math. Soc. (2) 31 (1925), S. 391.

Wir fügen noch hinzu, daß die im Texte erwähnten Eigenschaften außer **b)**, auch von *K. Hensel* und *G. Landsberg* [386]), p. 397—409, 418 unter dem Gesichtspunkt der arithmetischen Theorie der algebraischen Kurven bewiesen wurden.

951) *P. del Pezzo,* Rend. Circ. mat. Palermo 6 (1892), p. 144—145, wo sich diese Frage auf die analoge Frage für die ebenen Kurven reduziert und nichts Bestimmtes über die angewandte Transformation ausgesagt wird; *M. Pannelli,* Rend. Ist. Lomb. (2) 26 (1893), p. 216, wo von kubischen Transformationen vom Typus $x_i' = \frac{1}{x_i}$ Gebrauch gemacht wird; *C. Segre*, Ann. di mat. (2) 25 (1896), p. 9; *B. Levi,* daselbst (2) 26 (1897), p. 228—230; [99]), p. 132 ff.; *F. Enriques* und *O. Chisini,* „Lezioni" 2, p. 558—560, die allgemeine oder nicht allgemeine quadratische Transformationen verwenden. Diese Beweise wurden gegeben, mit Ausnahme des zweiten von *B. Levi*, für den Fall des gewöhnlichen Raumes; es bietet aber keinerlei Schwierigkeit, sie auch auf die Kurven eines Hyperraumes auszudehnen.

952) *B. Levi,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 7^1 (1898), p. 111, unter der Annahme, daß die Kurve schon in eine solche transformiert ist, die nur noch vielfache Punkte mit voneinander verschiedenen Tangenten hat, und unter Verwendung von kubischen Transformationen vom Typus 1) in Nr. **80**; *F. Enriques* und *O. Chisini*, „Lezioni" 2, p. 560—562, wo quadratische Transformationen vom Typus 2) von Nr. 77 verwandt werden und auf p. 558—560 bemerkt wird, daß es möglich ist, durch aufeinander folgende quadratische Transformationen vom Typus 1), eine Kurve mit vielfachen Punkten und voneinander verschiedenen Tangenten, nicht aber eine von vielfachen Punkten freie Kurve zu erhalten.

953) In bezug auf die Raumkurven s. III C 9 (*K. Rohn* und *L. Berzolari*), Nr. **11.**

954) Rend. Circ. mat. Palermo 52 (1927), p. 143.

gegeben, die mit willkürlichen und von Kurve zu Kurve veränderlichen Singularitäten ausgestattet sind, so ist nach *G. Albanese* möglich, das gegebene System durch eine endliche Anzahl passend ausgewählter Transformationen von *Halphen* in ein anderes zu transformieren, dessen allgemeine Kurve nur gewöhnliche Doppelpunkte besitzt.[955])

106. Reduktion der Singularitäten der algebraischen Flächen.[956]) Ebenfalls von *M. Noether*[957]) stammt der Gedanke, die Singularitäten der algebraischen Flächen durch *Cremona*sche, insbesondere quadratische Raumtransformationen aufzulösen.[958]) Jede Singularität der Fläche wird somit betrachtet als herrührend von der unbegrenzten Annäherung gewöhnlicher vielfacher Punkte und Kurven, und es ist möglich, die Umgebung jeden Punktes oder jeder Kurve der Fläche durch endlich-viele Systeme von Potenzreihen ebenso vieler Variabelnpaare vollständig darzustellen. Dieser Gedanke wurde von verschiedenen Autoren weiter entwickelt, jedoch scheint man bis jetzt noch keine vollständige und endgültige Theorie wie bei den Kurven zu haben.[959])

955) Dies wäre durch *Cremona*sche Transformationen der Ebene nicht möglich, es sei denn, daß die (voneinander verschiedenen oder unendlich benachbarten) vielfachen Punkte der Systemkurven nicht in feste Punkte der Ebene fielen, wie es z. B. eintrifft, wenn es sich um ein lineares System handelt.

956) Vgl. III C 6a, Nr. 4 und III C 6b, Nr. 3 (*G. Castelnuovo* und *F. Enriques*); außerdem „*Pascal*s Repertorium der höheren Math." 2, 2. Aufl., Leipzig und Berlin 1922, p. 699—712 (Art. von *L. Berzolari*); *A. Emch*, „Report", p. 252—256.

957) Gött. Nachr. 1871, p. 270; Math. Ann. 33 (1888), p. 551, Fußnote.

958) *Cremona*sche Transformationen wendet auf Flächen 4. und 5. Ordnung *A. Berry*, Trans. Cambridge Phil. Soc. 18 (1899), p. 333; 19 (1902), p. 249; 20 (1904), p. 74 bei der Untersuchung solcher Flächen an, für die Integrale erster Gattung von totalen Differentialausdrücken existieren.

959) Die Auflösung der Singularitäten der Flächen durch *Cremona*sche Raumtransformationen ist mittels monoidaler Transformationen von *P. del Pezzo*, Rend. Circ. mat. Palermo 6 (1892), p. 139 studiert; mittels quadratischer Transformationen von *G. Kobb*, J. math. pures appl. (4) 8 (1892), p. 385; Bull. Soc. math. de France 21 (1893), p. 76 [eine Kritik dieser Arbeiten von *G. Kobb* bei *B. Levi*, Ann. di mat. (2) 26 (1897), p. 219; *C. W. Mc G. Black*, Diss. Harvard Univ. 1901; Proc. Amer. Acad. arts sc. 37 (1901—02), p. 281; [Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 8 (1901), p. 21]; *C. Segre*, Ann. di mat. (2) 25 (1896), p. 1; *B. Levi*, daselbst (2) 26 (1897), p. 219; (3) 2 (1898), p. 127; Atti Acc. Torino 33 (1897), p. 66 [Auszug Paris C. R. 134 (1902), p. 222]; *G. Pfeiffer*, Bull. Univ. Kiew 1907, Nr. 5b; *A. B. Basset*, Quart. J. of math. 39 (1908), p. 250; „Treatise"[943]), p. 164—172.

Über die erwähnten Reihenentwicklungen vgl. die angeführten Arbeiten von *G. Kobb* und *C. W. Mc G. Black*, außerdem *G. H. Halphen*, Ann. di mat. (2) 9 (1877), p. 68 = Oeuvres 2, Paris 1918, p. 154; *E. Geck*, Diss. Tübingen 1900; *K. Hensel*, Acta math. 23 (1900), p. 339; Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 8 (1900), p. 221; J. f. Math. 165 (1931), p. 257; *B. Levi*, Paris C. R. 134 (1902), p. 642; *H. W. E. Jung*, J. f. Math. 133 (1908), p. 289; Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 18

O. Chisini[960]) transformiert unter Verwendung monoidaler, insbesondere quadratischer Transformationen irgendeine beliebige algebraische Fläche in eine andere, die nur mit vielfachen Kurven mit im allgemeinen voneinander verschiedenen Tangentialebenen ausgestattet, frei von isolierten vielfachen Punkten ist, und auf den vielfachen Kurven nur zwei Gattungen singulärer Punkte besitzt, und zwar eine endliche Anzahl gewöhnlicher Rückkehrpunkte (in denen sich zwei lineare Mäntel der Fläche in einem Mantel 2. Ordnung vereinigen), sowie eine endliche Anzahl Kreuzpunkte, in denen sich zwei verschiedene mehrfache Kurven, von den Multiplizitäten r und s (wo $r \geqq s$) schneiden und dort verschiedene Tangenten besitzen (Kreuzpunkten, die für die Fläche die Multiplizität r haben).

F. Enriques und *O. Chisini*[961]) führen eine genaue Untersuchung des Problems durch und üben Kritik an vielen früheren Arbeiten.[962])

(1909), p. 267; J. f. Math. 165 (1931), p. 128; *K. Sander*, Diss. Halle 1927; *K. Brauner*, Abh. math. Semin. der Hamburgischen Univ. 6 (1928), p. 1; *E. Kähler*, Math. Ztschr. 30 (1928), p. 188; unter Erweiterung des „*Newton*schen Parallelogramms" *E. Wöllfing*, Diss. Dresden 1896; Ztschr. Math. Phys. 42 (1897), p. 14; *L. Autonne*, J. Éc. Polyt. (2), cah. 2 (1897), p. 51; (2), cah. 3 (1897), p. 1; *L. Pilgrim*, Math.-naturw. Mitt. Württemberg (2) 7 (1905), p. 19; *G. Dumas*, Paris C. R. 152 (1911), p. 682; 154 (1912), p. 1495; Atti del Congresso intern. dei mat. Bologna 1928, 4 (Bologna 1931), p. 419; Actes Soc. Helv. sc. nat. Lausanne 1928, p. 129; Enseign. math. 27 (1928), p. 324; 29 (1930), p. 332 [s. auch Thèse Paris 1904; Commentarii math. Helvetici 1 (1929), p. 120; 4 (1932), p. 230]; *W. V. D. Hodge*, Proc. London math. Soc. (2) 30 (1929), p. 133; *P. Burniat*, Bull. Soc. sc. Liège 1 (1932), p. 131.

Die Zusammensetzung der Doppelpunkte wurde mittels quadratischer *Cremona*scher Transformationen untersucht von *C. Segre*, a. a. O.; *É. Picard* und *G. Simart*[114]) 1, p. 71—77; *B. Levi*, Atti Acc. Torino 40 (1904), p. 139; *A. Zappalà*, Atti Acc. Peloritana Messina 1921, p. 28; 1923, p. 58; *Hilda P. Hudson*, „Cremona transf.", p. 199—201, 361 ff.; *A. Pensa*, Atti Acc. Torino 66 (1931), p. 225; auch mittels Reihenentwicklungen von *E. Geck*, Math.-naturw. Mitt. Württemberg (2) 6 (1904), p. 65; (2) 7 (1905), p. 1; *G. Pfeiffer*[668]).

Für das Studium anderer spezieller singulärer Punkte verwendet *M. Pannelli*, Ann. di mat. (2) 25 (1897), p. 67 spezielle *Cremona*sche Transformationen 3. und 5. Ordnung; *N. Dohogne*, Mém. Soc. sc. Liège (3) 14 (1928), Nr. 7; *M. Paul*, Mathesis 46 (1932), p. 215 quadratische Transformationen.

A. Pensa[994]) untersucht mit Hilfe quadratischer Transformationen den Einfluß gewisser singulärer Punkte einer Fläche auf ihr numerisches Geschlecht und ihr Doppelgeschlecht [III C 6 b (*G. Castelnuovo* und *F. Enriques*), Nr. **11**, **13**].

960) Mem. Acc. Bologna (7) 8 (1920) p. 3. Vgl. auch die hiermit verwandten Arbeiten Roma Rend. Acc. Linc. (5) 26^2 (1917), p. 8; (5) 29^1 (1920), p. 127, 170, 241; Rend. Acc. Bologna (2) 24 (1920), p. 67.

961) „Lezioni" 2, p. 577—658.

Über diesen Gegenstand s. auch *Hilda P. Hudson*, „Cremona transf.", p. 353—381.

962) Über die Reduktion der Singularitäten algebraischer Gebilde in Ver-

Mit dem vorausgehenden Problem verwandt ist das andere, irgendeine beliebige algebraische Fläche, durch eine birationale Korrespondenz zwischen den Flächen, nicht ihren Räumen, auf eine andere von vielfachen Punkten freie Fläche zu beziehen, die einem linearen Raume (von mindestens fünf Dimensionen) angehört, oder, was dasselbe ist, eine von vielfachen Punkten freie Fläche zu konstruieren, als deren umkehrbar eindeutige Projektion die gegebene Fläche aufgefaßt werden darf, oder, was immer noch dasselbe ist, die gegebene Fläche auf eine andere Fläche des dreidimensionalen Raumes birational zu beziehen, die nur gewöhnliche Singularitäten aufweist, d. h. eine Doppelkurve, auf dieser eine endliche Anzahl von Punkten, die für die Kurve einfach und die Fläche uniplanar sind und ferner eine endliche Anzahl von Punkten, die für die Kurve dreifache Punkte mit voneinander verschiedenen und nicht in einer Ebene liegenden Tangenten, für die Fläche dreifache und triplanare Punkte sind.

Die Möglichkeit einer derartigen Reduktion wurde zuerst von *M. Noether*[963]) ausgesprochen, unmittelbar darauf von *P. del Pezzo*[964]), wenn auch nicht ganz vollständig, bewiesen.[965]) Ein vollständiger Beweis wurde von *B. Levi*[966]) angegeben; ein weiterer, einfacherer von *G. Albanese.*[967])

107. Reduktion linearer Systeme algebraischer Kurven und Flächen auf Typen mittels Cremonascher Transformationen. Auch die Theorie der linearen Systeme ebener oder nicht ebener algebraischer Kurven und algebraischer Flächen verdankt den birationalen Transformationen wichtige Ergebnisse. So erhält man vor allem die Reduktion der linearen Systeme auf Typen, die durch Einfachheit gewisser Charaktere gekennzeichnet sind, z. B. auf Typen der Minimalordnung.

---

bindung mit der Modultheorie s. *W. Schmeidler,* Math. Ann. 81 (1920), p. 223; 84 (1921), p. 303; J. f. Math. 153 (1923), p. 215.

963) Sitzungsb. Ak. Berlin 1888, p. 123.

964) Rend. Circ. mat. Palermo 2 (1888), p. 139; 3 (1889), p. 236.

965) Vgl. die Bemerkungen von *C. Segre*[959]), p. 36ff. und die daraufhin zwischen *C. Segre* und *P. del Pezzo* entstandene Polemik: *C. Segre,* Atti Acc. Torino 32 (1896—97), p. 781; 33 (1897—98), p. 19; *P. del Pezzo,* Atti Acc. Pontaniana (2) 2 (1897), Nr. 4, 10.

Andere Beiträge zur sicheren Begründung des Satzes bei *C. Segre*[959]); *É. Picard* und *G. Simart*[114]) 1, p. 71—83 (der hier gegebene Beweis wurde dann von den gleichen Verfassern im 2. Bande, p. 523, für unvollständig erklärt) [vgl. *É. Picard,* Paris C. R. 124 (1897), p. 533]; *F. Severi,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 23^2 (1914), p. 527; *J. W. Alexander, II,* Bull. Amer. math. Soc. (2) 21 (1915), p. 283. Vgl. auch *F. Severi,* „Conf. di geom. alg.“[6]), p. 49—63.

966) Atti Acc. Torino 33 (1897), p. 66; Auszug Paris C. R. 134 (1902), p. 222.

967) Rend. Circ. mat. Palermo 48 (1924), p. 321.

Über diese Reduktionen im Falle linearer Systeme ebener Kurven s. III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **36**, **37**.[968])

Über analoge Reduktionen im Falle linearer Systeme von Raumkurven s. III C 9 (*K. Rohn* und *L. Berzolari*), Nr. **45** und über lineare Systeme von Kegelschnitten im Raume, daselbst, Nr. **74**.

Durch Verallgemeinerung der Verfahren in der Ebene läßt sich die Reduktion gewisser einfacher linearer Systeme[969]) algebraischer Flächen auf Typen erhalten. So findet *F. Enriques*[970]), daß durch birationale Transformationen des Raumes:

1. jedes einfache lineare System von Flächen, die sich paarweise in veränderlichen rationalen Kurven schneiden[971]), zurückgeführt werden kann:

a) auf das System der Flächen 2. Ordnung durch einen festen Kegelschnitt;

b) auf ein System von Flächen 2. Ordnung, die eine gegebene Ebene in einem gegebenen Punkte berühren;

---

968) Über die linearen Systeme vom Geschlecht $p = 0, 1$ s. noch *F. Enriques* und *C. Chisini*, „Lezioni" 3, p. 192—199; *J. L. Coolidge*, „Alg. pl. curves", p. 401—409; ein Hinweis auf die Systeme vom Geschlecht $p = 3, 4$ bei *G. H. Graves*, Bull. Amer. math. Soc. (2) 20 (1914), p. 172; über die Systeme hyperelliptischer Kurven *H. S. White*, daselbst (2) 10 (1904), p. 332; über den allgemeinen Fall *W. V. D. Hodge*, Proc. London math. Soc. (2) 29 (1929), p. 145.

Über die Reduktion der linearen Systeme und, allgemeiner, der kontinuierlichen Systeme ebener algebraischer Kurven unter dem Gesichtspunkt der Moduln ihrer Kurven, durch quadratische Transformationen, s. *B. Segre*, Ann. di mat. (4) 7 (1929), p. 71; Auszug Atti del Congresso intern. dei mat. Bologna 1928, 4 (Bologna 1931), p. 129.

969) Ein lineares System heißt *einfach*, wenn die Systemflächen, die durch einen allgemeinen Punkt des Raumes gehen, nicht notwendigerweise auch durch andere mit dem ersten veränderliche Punkte gehen.

970) Roma Rend. Acc. Linc. (5) 2^2 (1893), p. 281; (5) 3^1 (1894), p. 481, 536; Math. Ann. 46 (1895), p. 179.

Die Reduktion auf Typen wird von *F. Enriques* auf die Bestimmung der dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten des n-dimensionalen linearen Raumes zurückgeführt, deren Schnittkurven durch $(n-2)$-dimensionale lineare Räume rational, elliptisch oder hyperelliptisch sind (Nr. **119**). Für den Fall der linearen Systeme von Flächen mit veränderlichen elliptischen Schnitten muß er daher die einfachen Systeme vom Grade 3 ausschließen, da die Bestimmung der Typen dieser Systeme von der Frage — die bis heute noch nicht beantwortet werden kann (vgl. Nr. **119**) — abhängt, ob die kubische Hyperfläche des 4-dimensionalen Raumes ohne Doppelpunkte rational ist oder nicht.

F. Palatini, Giorn. di mat. (2) 7 (1900), p. 315 reduziert die linearen Systeme n^{ten} Grades und $(n+r-1)^{\text{ter}}$ Dimension von Hyperflächen des r-dimensionalen Raumes durch birationale Transformationen dieses Raumes auf gewisse drei Typen.

971) Über diesen Fall vgl. auch *K. W. Rutgers*, Diss. Groningen 1912.

c) auf ein System von Flächen n^{ter} Ordnung mit einer $(n-1)$-fachen Basisgeraden und möglicherweise anderen Basiselementen;

2. jedes einfache lineare System von Flächen, die sich paarweise in veränderlichen elliptischen Kurven schneiden und deren Grad größer als 3 ist[972]), auf eines der folgenden typischen linearen Systeme n^{ten} Grades von der Dimension $n+1$, oder ein in einem dieser Systeme enthaltenes System reduziert werden kann:

für $n=4$,

a) das ∞^5-System kubischer Flächen, das durch eine Basiskurve 5. Ordnung und vom Geschlecht 2 (die ausarten kann) bestimmt ist, die der partielle Schnitt einer Fläche 2. Ordnung und einer kubischen Fläche ist;

für $n=5, 6, 7, 8, 9$,

b) das ∞^{n+1}-System kubischer Flächen, das durch einen doppelten Basispunkt bestimmt ist, in dem der Tangentenkegel 2. Ordnung fest ist (und für $n>6$ als irreduzibel angenommen werden darf) und $9-n$ Basisgerade enthält; oder auch

für $n=5$,

c) das durch eine Basiskurve 4. Ordnung 2. Art (die ausarten kann) bestimmte ∞^6-System kubischer Flächen;

für $n=6$,

d) das ∞^7-System kubischer Flächen durch drei gegebene windschiefe Gerade;

e) das durch einen doppelten Basispunkt und eine einfach durch ihn hindurchgehende kubische Raumkurve (die ausarten kann) bestimmte ∞^7-System kubischer Flächen;

f) das ∞^7-System kubischer Flächen, das durch einen biplanaren Basispunkt und eine feste Tangentialebene in diesem Punkt, und durch eine ebene kubische Basiskurve (die ausarten kann), für die der genannte Punkt Doppelpunkt ist, bestimmt wird;

für $n=7, 8$,

g) das ∞^8-System der Flächen 2. Ordnung mit einem einfachen Basispunkt, bzw. das ∞^9-System aller Flächen 2. Ordnung;

für $n=8$, auch

h) das ∞^9-System der Flächen 4. Ordnung mit dreifachem Basispunkt, zwei durch ihn hindurchgehenden doppelten Basisgeraden und

972) Grad eines linearen Systems ist die Anzahl der beweglichen Schnittpunkte dreier veränderlicher Systemflächen.

in diesem Punkt (außer der Ebene der zwei Geraden) ein- und demselben irreduziblen Tangentenkegel 2. Ordnung;

3. jedes einfache lineare System von Flächen, die sich paarweise in veränderlichen hyperelliptischen Kurven (vom Geschlecht $p > 1$) schneiden, auf ein System von Flächen einer gewissen Ordnung n mit einer $(n - 2)$-fachen Basisgeraden, einer weiteren einfachen Basiskurve, die die Ebenen durch diese Gerade in zwei außerhalb der Geraden selbst liegenden, veränderlichen Punkten schneidet, und unter Umständen noch weiteren Basiselementen, reduziert werden kann.

Wenn den Flächen eines einfachen, irreduziblen linearen Systems einer Dimension $\geqq 7$ (das keinen Kegel darstellt) die Annahme zweier Doppelpunkte in zwei allgemeinen Punkten 7 statt 8 Bedingungen auferlegt, so besitzt nach *G. Scorza*[973]) eine Systemfläche mit zwei Doppelpunkten notwendigerweise unendlich viele weitere Doppelpunkte. Hat sie genau ∞^1 Doppelpunkte, so kann das System durch eine *Cremona*sche Transformation auf ein lineares System von Flächen 2. Ordnung, oder das System der kubischen Flächen mit einem Basisdoppelpunkte und einer durch diesen Punkt hindurchgehenden kubischen räumlichen Basiskurve (die ausarten kann) reduziert werden.[974])

108. Andere einzelne Anwendungen. Eine der ersten und gewöhnlichsten Anwendungen der algebraischen, besonders der birationalen Transformationen, ist die Ableitung neuer Eigenschaften von Figuren aus bekannten Eigenschaften anderer Figuren, insbesondere die Lösung konstruktiver Aufgaben über gegebene Figuren. So dienen z. B. die ebenen quadratsichen Transformationen auf diese Weise zum Studium der Kurven 4. Ordnung mit drei Doppelpunkten[975]);

---

973) Rend. Circ. mat. Palermo 25 (1907), p. 193.

974) Einen analogen Satz beweist *G. Scorza,* Rend. Circ. mat. Palermo 27 (1908), p. 148 für die einfachen irreduziblen linearen Hyperflächensysteme (die keine Kegel darstellen) von einer Dimension $\geqq 9$ des vierdimensionalen Raumes von der Art, daß die Annahme zweier Doppelpunkte in zwei allgemeinen Punkten 9 statt 10 Bedingungen auferlegt. Eine Hyperfläche des Systemes mit zwei derartigen Doppelpunkten besitzt notwendigerweise unendlich viele Doppelpunkte. Hat sie genau ∞^1 Doppelpunkte, so kann das System durch eine *Cremona*sche Transformation immer auf ein lineares System von Hyperflächen 2. Ordnung, oder ein lineares System von Hyperflächen 4. Ordnung mit einer dreifachen Geraden g, mit einer elliptischen Basisregelfläche 6. Ordnung (die ausarten kann), deren g dreifache Gerade ist, und möglicherweise noch anderen Basiselementen reduziert werden.

975) S. hierüber III C 5 (*G. Kohn*), Nr. **91** ff.

A. Zelenka, Časopis 56 (1927), p. 86 konstruiert mit Hilfe einer quadratischen Transformation den durch fünf Paare konjugierter Punkte bestimmten Kegelschnitt.

die *Cremona*schen Transformationen der Ebene werden zur Reduktion der Gleichungen ebener Kurven auf Normalformen verwandt[976]); die *Cremona*schen Transformationen im Raume führen zur Kenntnis vieler rationaler Flächen (s. Anm. 994), usw.

E. Bertini[977]) erhält unter Anwendung einer involutorischen Transformation von *de Jonquières* Beziehungen zwischen den Berührungspunkten der Tangenten, die an eine ebene Kurve n^{ter} Ordnung mit einem $(n - 2)$-fachen Punkte von diesem Punkte aus gelegt werden können.

O. M. Thalberg[978]) untersucht für gewisse Kurven mit Hilfe einer involutorischen quadratischen Transformation die Beziehung zwischen den Tangenten in einem mehrfachen Punkte.

Weitere Anwendungen der quadratischen Transformationen auf das Studium ebener Kurven bei *G. Bauer*[979]), *H. Kortum*[980]), *P. del Pezzo.*[981]) Der letztere beweist so die Existenz von Kurven 5. Ordnung mit 5 Spitzen.

Mit Hilfe einer involutorischen quadratischen Transformation des ersten Typus (Nr. **69**) erhält *M. Disteli*[982]) die Darstellung aller Gestalten der ebenen kubischen Kurven, und *A. Emch*[983]) leitet die schon von *I. Newton* [III C 5 (*G. Kohn*), Nr. **1**, **6**] angegebenen fünf Typen dieser kubischen Kurven ab.

Weitere Anwendungen der ebenen *Cremona*schen Transformationen auf die Topologie der ebenen algebraischen Kurven bei *W. Fr. Meyer*[984]), *Charlotte Angas Scott*[985]), *J. v. Sz. Nagy*[986]).

D. D. Leib[987]) wendet eine involutorische quadratische Transformation auf die Untersuchung der Invarianten des Systems zweier Dreiecke in einer Ebene an.

---

976) S. III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **29**.

977) Roma Atti Acc. Linc. (3) 1 (1877), p. 92. Erweiterungen bei *E. Caporali,* Rend. Acc. Napoli (1) 20 (1881), p. 143 = Memorie di geometria, Napoli 1888, p. 164; *G. B. Guccia,* Rend. Circ. mat. Palermo 9 (1894), p. 45, 268; *S. Kantor,* daselbst, p. 68.

978) Den sjette Skandinaviske Matem. Kongress 1925, p. 473.

979) J. f. Math. 69 (1867), p. 293.

980) Preisschrift[77]), p. 39.

981) Rend. Acc. Napoli (2) 3 (1889), p. 46.

982) Ztschr. Math. Phys. 36 (1891), p. 138.

983) Univ. Colorado Studies 1 (1904), p. 275; Bull. Univ. Illinois 25 (1928), Nr. 43.

984) Proc. R. Soc. Edinburgh 13 (1885—86), p. 931.

985) Trans. Amer. math. Soc. 3 (1902), p. 388.

986) Math. Ann. 77 (1916), p. 416.

987) Trans. Amer. math. Soc. 10 (1909), p. 388.

E. H. Moore[988]) untersucht mit Hilfe einer *Cremona*schen Transformation die Möglichkeit der Aufhebung gewisser Bedingungen, denen die Elemente einer Figur unterworfen sind, und macht davon Anwendung auf das System von sechs Punkten einer Ebene mit einer mehrfachen perspektivischen Beziehung.

J. F. Pobanz[989]) verwendet involutorische kubische Transformationen für die Bestimmung der verschiedenen Typen kubischer Flächen.

J. A. Todd[989a]) benutzt die Transformation 2 der Nr. 77 und einige von den Transformationen der Nr. 81, um abzählende Probleme über kubische Raumkurven zu lösen.

E. Ouivet[990]) benutzt gewisse ebene birationale, besonders quadratische Transformationen mit zwei oder drei zusammenfallenden Hauptpunkten (Nr. 68) für die Integration gewisser Differentialgleichungen.

VII. Ebene Abbildung von rationalen Flächen.[991])

109. Allgemeines. Es sei F eine algebraische Fläche (von zwei Dimensionen), die einem linearen Raum S_k von k Dimensionen ($k \geqq 3$) und nicht einem niedrigerem Raum angehört. Die Fläche F wird als *rational* oder *homaloid* (Nr. 1) bezeichnet, wenn ihre Punkte und die einer Ebene π eineindeutig und algebraisch aufeinander bezogen werden können. In diesem Falle spricht man auch davon, daß F *auf die Ebene abbildbar* und jeder Punkt von π das *Bild* des entsprechenden Punktes von F ist.

Die in der vorhergehenden Definition gegebene Eigenschaft ist äquivalent mit der andern (Nr. 1), nach der die Koordinaten der Flächenpunkte durch rationale Funktionen zweier Parameter ausgedrückt werden können, die ihrerseits rationale Funktionen der Koordinaten des auf der Fläche beweglichen Punktes sind. *G. Castelnuovo*[992])

988) Amer. J. of math. 10 (1888), p. 243.

989) Math. Publ. Univ. of California 1 (1924), p. 401.

989a) Proc. R. Soc. London (A) 131 (1931), p. 286.

990) Paris C. R. 150 (1910), p. 1036.

991) Vgl. III C 7 (*C. Segre*), Nr. 32.

Einen Überblick über den Ursprung und die Entwicklung der Theorie vom algebraischen ebenso wie vom geometrischen Gesichtspunkt aus gibt *M. Noether* im Nekrolog von *R. F. A. Clebsch,* Math. Ann. 7 (1873), p. 30—37; ital. Übers. von *E. Beltrami,* Ann. di mat. (2) 6 (1873—75), p. 181—188. S. auch *G. Darboux,* Bull. Sciences math. (1) 2 (1871), p. 23, 184, 221, 314; (1) 3 (1872), p. 221, 251, 281; außerdem *F. R. Sharpe,* „Report", p. 275—290.

992) Anm. 913.

Diese Frage wurde schon von *J. Lüroth*[913]) untersucht, der aber nur in Spezialfällen zur Lösung gelangte.

zeigt, daß diese zweite Eigenschaft überflüssig, also jede Fläche rational ist, deren Punktkoordinateu rational durch zwei Parameter ausgedrückt werden können.[993])

Die Rationalität einer algebraischen Fläche leuchtet in einigen Fällen geometrisch unmittelbar ein, so z. B. bei den Monoiden, bei den Flächen der Ordnung $m + n + 1$ mit zwei windschiefen m- bzw. n-fachen Geraden und bei den Regelflächen 4. Ordnung mit einer doppelten kubischen Raumkurve. Für jede dieser Flächen existiert im wesentlichen nur eine Art ebener Abbildung.

In anderen Fällen dagegen erlaubt die Fläche eine bestimmte Anzahl gleichberechtigter ebener Abbildungen, die man mit Hilfe geometrischer Konstruktionen erhält, nachdem man durch Auflösung einer bestimmten höheren Gleichung gewisse ausgezeichnete Elemente auf der Fläche bestimmt hat. Dies trifft zu für die allgemeine Fläche 3. Ordnung und die Fläche 4. Ordnung mit Doppelkegelschnitt, bei der die 27 bzw. die 16 Geraden bestimmt werden müssen, für die Fläche 4. Ordnung mit Doppelgerade und die Fläche 5. Ordnung mit Doppelkurve 4. Ordnung vom Geschlecht 1, bei denen außer den Geraden gewisse einzelne Kegelschnitte bestimmt werden müssen.

Allgemeine Kriterien für die Rationalität einer Fläche finden sich in III C 6 b (*G. Castelnuovo* und *F. Enriques*), Nr. **34**—**38** und beziehen sich auf die Existenz eines linearen Büschels rationaler Kurven auf der Fläche, oder die Möglichkeit der Abbildung der Fläche auf eine rationale Doppelebene (Nr. **118**), oder allgemeiner die Existenz eines linearen Kurvensystems gegebenen Charakters (z. B. hyperebener Schnitte speziellen Geschlechts: s. Nr. **114**) auf der Fläche, oder die Möglichkeit der Darstellung der Koordinaten des laufenden Punktes als rationale Funktionen zweier Parameter, oder das Nullwerden des numerischen Geschlechts und des Doppelgeschlechts.

Eine Methode, die die Bestimmung beliebig vieler rationaler

---

993) Es ist klar, daß eine rationale Fläche auch transzendente, eindeutige Parameterdarstellungen zuläßt; es genügt, an Stelle zweier Parameter, die bei einer rationalen Darstellung auftreten, beliebige eindeutige Funktionen anderer Veränderlicher zu setzen. Die umgekehrte Eigenschaft gilt dagegen nicht; z. B. lassen zwar die hyperelliptischen Flächen [III C 6 b (*G. Castelnuovo* und *F. Enriques*), Nr. **40**] eindeutige Darstellungen mit zwei Parametern zu, sind aber nicht rational. — *G. Rémoundos*, Bull. Soc. math. de France 37 (1909), p. 244 gibt eine ausgedehnte Klasse eindeutiger transzendenter Darstellungen an, die zu rationalen Flächen führen.

Flächen erlaubt, besteht in der Anwendung einer birationalen Transformation des Raumes auf schon bekannte rationale Flächen.[994])[994a])

110. Irrationalitäten, von denen die ebene Abbildung einer rationalen Fläche abhängig gemacht werden kann. *F. Enriques*[995])

---

994) Zu den in den Nr. 77, 80, 81 angeführten Arbeiten fügen wir noch das folgende hinzu. Außer den rationalen Flächen 4. Ordnung mit einem dreifachen Punkt und denen mit einer mehrfachen Linie existieren nur noch drei Typen, und alle besitzen einzig und allein einen Doppelpunkt (von besonderer Natur). Dieses Resultat stammt von *M. Noether,* Math. Ann. 33 (1888), p. 546, der diese Flächen ausführlich auf algebraisch-geometrischem Wege untersucht hat, auch mit Rücksicht auf die ebene Abbildung. S. über diese III C 10b (*W. Fr. Meyer*), Nr. 53. Über eine derselben s. ferner *D. Montesano*[666]).

Von den rationalen Flächen 5. Ordnung werden, außer den schon von *L. Cremona* und *M. Noether* gefundenen, viele andere mit nur isolierten mehrfachen Punkten oder außer diesen Punkten mit einer Doppelgeraden oder einem Doppelkegelschnitt bestimmt, indem man sie aus bekannten Flächen mit Hilfe birationaler Raumtransformationen gewinnt, von *J. E. Hill,* Math. Review 1 (1896), p. 1, vor allem von *D. Montesano,* Rend. Acc. Napoli (3) 6 (1900), p. 158; (3) 7 (1901), p. 67; (3) 13 (1907), p. 66. Auf eine der in der dritten Arbeit von *D. Montesano* angegebenen Flächen hat schon *A. Bottari,* Ann. di mat. (3) 2 (1899), p. 295—296 aufmerksam gemacht. Über einige dieser Flächen und andere, die man mit Hilfe birationaler Raumtransformationen erhält, s. noch *A. R. Williams,* Bull. Amer. math. Soc. (2) 34 (1928), p. 761; (2) 36 (1930), p. 735; (2) 37 (1931), p. 615; *H. N. Hubbs,* ebenda (2) 38 (1932), p. 295. Einige von *D. Montesano* bestimmte Flächen finden sich auch bei *A. Pensa,* Ann. di mat. (3) 6 (1901), p. 249; teilweise „Sull' influenza di alcune singolarità di superficie sul genere numerico e sul bigenere P, con applicazioni alla determinazione di superficie razionali di 5° ordine“, Mondoví 1900.

Über andere Flächen, die mittels birationaler Raumtransformationen gewonnen werden, s. *R. de Paolis*[714]); *S. Kantor,* Sitzungsb. Ak. Wien 79 (1879), p. 768; *J. E. Hill,* Amer. J. of math. 19 (1897), p. 289; *G. Bordiga,* Atti Ist. Ven. (8) 12^2 (1910), p. 1027; *A. Tummarello,* Giorn. di mat. (3) 11 (1919), p. 60 [Auszug Atti Soc. ital. progr. sc. 10, Pisa 1919 (Roma 1920) p. 442]; *Grazia Nobile,* ebenda (3) 13 (1922), p. 23.

994a) Bei der Untersuchung nicht rationaler Flächen kann es sich natürlich als nützlich erweisen, von anderen Darstellungen Gebrauch zu machen. So studiert *M. Noether,* Preisschrift, Abh. Ak. Berlin 1882, p. 115 [Auszug J. f. Math. 93 (1882), p. 318], ausführlicher Math. Ann. 21 (1882), p. 399, die Abbildung einer Fläche F^6 6. Ordnung vom numerischen Geschlecht -1 auf einen elliptischen kubischen Kegel oder eine Regelfläche 4. Grades mit zwei Doppelgeraden. Die Fläche F^6 ist die Fläche 6. Ordnung mit einer zweifachen Raumkurve 4. Ordnung vom Geschlecht 1 und einer diese Raumkurve nicht schneidenden Doppelgeraden.

995) Math. Ann. 49 (1897), p. 1 [Auszug Roma Rend. Acc. Linc. (5) 4^2 (1895), p. 311]. Vgl. III C 6b (*G. Castelnuovo* und *F. Enriques*), Nr. 38. — Über diesen Gegenstand s. noch *M. Noether,* Math. Ann. 3 (1870), p. 161; *É. Picard,* Arch. Math. Phys. (3) 1 (1900), p. 209; Bull. Sciences math. (2) 25 (1901), p. 81; [28]) 2, 2. Ausg., p. 550—553, 3. Ausg., p. 594—596.

bestimmt die arithmetischen Irrationalitäten, von denen die Parameterdarstellung einer rationalen Fläche durch umkehrbar rationale Funktionen zweier Parameter abhängig gemacht werden kann, und findet, daß eine derartige Darstellung immer durch rationale Operationen (Eliminationen), durch Ziehen von Quadrat- und Kubikwurzeln und durch Auflösung einer der Gleichungen (einschließlich ihrer Ausartungen) für die Zweiteilung der Argumente der *Abel*schen Funktionen vom Geschlecht 3 oder Geschlecht 4 oder der hyperelliptischen Funktionen vom Geschlecht p $(p = 1, 2, 3, \ldots)$[996]) ausgeführt werden kann.

Zunächst zeigt er, daß eine rationale Fläche immer rational in eine andere Fläche transformiert werden kann, die Punkt für Punkt auf sie bezogen und frei von „eigentlichen" vielfachen Punkten ist.[997]) Hiernach folgt nun aus dem vorhergehenden Satz eine Unterscheidung der von eigentlichen mehrfachen Punkten freien rationalen Flächen in vier Familien nach den Typen, in die diese Flächen rational ohne Zusatz numerischer Irrationalitäten transformiert werden können. Diese vier Familien sind:

1. Die Flächen, deren Typus die rationalen Flächen mit rationalen hyperebenen Schnitten sind. Sie können dadurch auf die Ebene abgebildet werden, daß man höchstens eine Quadratwurzel zieht.

2. Die Flächen, deren Typus die rationalen Flächen mit elliptischen hyperebenen Schnitten sind. Ihre ebene Abbildung läßt sich durch Ziehen von Quadrat- und Kubikwurzeln und Auflösung einer Gleichung für die Zweiteilung der *Abel*schen Funktionen vom Geschlecht 3 erhalten.[998])

---

996) Vgl. noch *F. Enriques,* Math. Ann. 51 (1899), p. 134 [Auszug in Verhandl. des ersten intern. Math.-Kongresses in Zürich 1897 (Leipzig 1898), p. 145], wo verschiedene allgemeine Bemerkungen über die Auflösung der algebraischen Gleichungen mit mehreren Unbekannten enthalten sind.

997) P heißt *„eigentlicher"* mehrfacher Punkt der Fläche, wenn der Schnitt der Fläche mit einer Hyperebene durch P ein niedrigeres Geschlecht als der allgemeine hyperebene Schnitt hat.

998) Die Flächen dieser Familie können ohne Einführung von Irrationalitäten auf die einfache Ebene abgebildet werden, oder auf die Doppelebene mit einer Verzweigungskurve 4. Ordnung, oder die kubische Fläche des Raumes S_3, oder die Fläche 4. Ordnung mit Doppelkegelschnitt im Raume S_4, oder die Fläche 6. Ordnung mit elliptischen Schnitten im Raume S_6, oder die Fläche 8. Ordnung mit elliptischen Schnitten im Raume S_8, oder die Fläche 9. Ordnung mit elliptischen Schnitten im Raume S_9. Unter den von *F. Enriques*[995]) aufgezählten Flächen fehlt, wie *F. Severi*[413]), p. 36—37 Fußn. bemerkt, diejenige 8. Ordnung mit elliptischen Schnitten im Raum S_8. Aber *F. Enriques,* Roma Rend. Acc. Linc. (6) 16 (1932), p. 540 hat gefunden, daß die ebene Abbildung einer solchen Fläche durch Ziehen von 3 Quadratwurzeln erhalten werden kann.

3. Die Flächen, deren Typus die rationalen Flächen mit hyperelliptischen hyperebenen Schnitten sind, die ein lineares Büschel von Kegelschnitten enthalten. Diese können auf die Ebene mit Hilfe von Quadratwurzeln und Auflösung einer Gleichung für die Zweiteilung der Argumente der hyperelliptischen Funktionen beliebigen Geschlechts p abgebildet werden.

4. Die Flächen, deren Typus der Doppelkegel 2. Ordnung mit einer Verzweigungskurve 6. Ordnung vom Geschlecht 4 ist. Die ebene Abbildung reduziert sich auf die Auflösung der Gleichung für die Zweiteilung der Argumente der *Abel*schen Funktionen vom Geschlechte 4.

111. Vorläufige Eigenschaften der ebenen Abbildung einer rationalen Fläche. Das Haupthilfsmittel für die Untersuchung der ebenen Abbildung der Fläche F ist das lineare System $|f|$ der Kurven in der Bildebene π, die die Bilder der durch die Hyperebenen des Raumes S_k in F gebildeten Schnitte sind [vgl. III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **37**, **38**].

Sind x_1, x_2, x_3 die homogenen projektiven Koordinaten eines Punktes von π und $y_0, y_1, \ldots, y_k$ die eines Punktes von S_k und ist

$$\lambda_0 f_0(x) + \lambda_1 f_1(x) + \cdots + \lambda_k f_k(x) = 0 \tag{1}$$

die Gleichung des Systems $|f|$, so wird die Fläche F durch die Gleichungen

$$\varrho\, y_i = f_i(x) \qquad (i = 0, 1, \ldots, k) \tag{2}$$

dargestellt.

Das System $|f|$ kann nicht mit den Kurven eines Büschels zusammengesetzt werden, da sonst die f_i binäre Formen neuer Veränderlicher wären und die Gleichungen (2) eine (rationale) Kurve statt einer Fläche bildeten. Daher muß nach einem Satz von *E. Bertini* [I B 1 b (*E. Netto*), Nr. **5**; III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **3**] das System $|f|$, abgesehen von einem etwa vorkommenden, allen Systemkurven gemeinsamen festen Teil, irreduzibel sein.

Vermöge der vorhergehenden Abbildung werden die in bezug auf die birationalen Transformationen der Ebene invarianten Eigenschaften des Systems $|f|$ zu projektiven Eigenschaften der Fläche F, und umgekehrt.

Faßt man ebenso an Stelle des Systems $|f|$ ein anderes, von dem ersten durch eine birationale Transformation der Ebene abgeleitetes System ins Auge, so stellt dieses die ebene Abbildung einer zu F projektiven (d. h. F in einer Raumkollineation entsprechenden) Fläche und insbesondere der Fläche F selbst dar. Daraus folgt, daß zwei ebene eindeutige Abbildungen ein und derselben Fläche immer *Cremona*sche Transformierte voneinander sind und es bei der Untersuchung der projektiven Eigenschaften einer rationalen Fläche mit Hilfe ihrer Abbildung auf einer Ebene immer erlaubt ist, an Stelle dieser Ebene eine andere, auf die erste birational bezogene Ebene zu setzen.[999])

Ist das System $|f|$ vom *Grade* [III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. 3] D $(D > 0)$, d. h. schneiden sich zwei allgemeine veränderliche Systemkurven in D veränderlichen Punkten, so hat die Fläche F die Ordnung D.

Ist aber das System $|f|$ mit einer Involution von der Ordnung μ zusammengesetzt [a. a. O., Nr. **35**], d. h. gehen alle Systemkurven, die durch einen allgemeinen Punkt von π gehen, notwendigerweise auch durch $\mu - 1$ $(\mu \geqq 2)$ weitere Punkte, so reduziert sich die Fläche F auf eine (nach dem in Nr. **109** angegebenen Satz von *G. Castelnuovo* ebenfalls rationale) Fläche der Ordnung $\frac{D}{\mu}$, die μ-mal gezählt werden muß, so daß, während jedem Punkte von π ein einziger Punkt von F entspricht, jedem Punkte von F dagegen μ Punkte von π entsprechen.[1000])

Ist das System $|f|$ *vollständig* [a. a. O., Nr. **35**], d. h. aus allen Kurven einer gegebenen Ordnung gebildet, die in den Basispunkten gegebene Multiplizitäten haben, und also nicht in einem anderen Systeme gleicher Ordnung, gleichen Grades und höherer Dimension enthalten, so ist die Fläche F *normal* [III C 7 (*C. Segre*), Nr. **6**], d. h. keine Projektion einer anderen Fläche gleicher Ordnung, die einem Raum von mehr als k Dimensionen angehört.

Ist dagegen das System $|f|$ *partiell*, genügt es also auch Bedingungen, die sich nicht als Durchgänge durch Basispunkte ausdrücken, so daß es in einem anderen linearen System gleicher Ordnung, gleichen Grades und der Dimension k' $(k' > k)$ enthalten ist und das eine Fläche F' eines k'-dimensionalen Raumes darstellt, so ist die durch das System $|f|$ dargestellte Fläche F Projektion von F' aus einem linearen Raume $S_{k'-k-1}$. Ist die (irreduzible) Fläche F von S_k eineindeutige Projektion der (irreduziblen) Fläche F' von $S_{k'}$ aus einem Raum $S_{k'-k-1}$, so sind die hyperebenen Schnitte von F Projektionen der hyperebenen Schnitte von F', die man mittels der durch den Raum $S_{k'-k-1}$ gehenden Hyperebenen erhält und vorkommendenfalls

999) Über diese Bemerkungen [III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **37**] vgl. *C. Segre*, Brief vom 9. April 1887 an *G. B. Guccia*, Rend. Circ. mat. Palermo 1 (1884—87), p. 217; daselbst 4 (1890), p. 86 in Anm.; *G. Jung*, Rend. Circ. mat. Palermo 4 (1890), p. 253.

1000) Für den Sonderfall der mehrfachen Ebenen s. Nr. **118**.

von einer in diesem Raume liegenden festen Kurve befreit. Hat daher der Raum $S_{k'-k-1}$ mit F' eine Kurve oder auch eine endliche Anzahl von Punkten gemein, so erhält man das lineare System, das F darstellt, aus dem linearen System, das F' darstellt, indem man den Kurven dieses Systems die Bedingung auferlegt, entweder eine feste Kurve zu enthalten oder durch feste Punkte zu gehen, so daß die Ordnung von F kleiner als die Ordnung von F' wird.

So z. B. sind die rationalen Flächen die auf die Ebene durch lineare Systeme von Kurven n^{ter} Ordnung abgebildet werden können, Projektionen der (normalen) durch das System aller Kurven n^{ter} Ordnung dargestellten Fläche Φ von der Ordnung n^2 des Raumes von $\frac{n(n+3)}{2}$ Dimensionen.[1001])

112. Hauptpunkte und -kurven der ebenen Abbildung. Entsprechen in der ebenen Abbildung von F einem speziellen Punkte P von F auf der Ebene π mehrere Punkte P_1', P_2', ... (in endlicher Anzahl), so ist dieser Punkt P für F mehrfach und die Punkte P_1', P_2', ... legen den durch sie hindurchgehenden Kurven von $|f|$ eine einzige Bedingung auf. Ist umgekehrt ein Punkt P für F mehrfach, so sind die Bilder der in F durch die Hyperebenen durch P erzeugten Schnitte auf π die Kurven eines in $|f|$ enthaltenen linearen Systems von der Dimension $k-1$ und niedrigeren Grades als $D-1$. Im Gegensatz zum System $|f|$ kann dieses System wie zuvor neue Basispunkte in endlicher Anzahl (auch einen einzigen neuen Basispunkt, der aber vielfach oder ein Berührungspunkt sein und also wenigstens zwei Schnitte absorbieren muß), oder eine neue Basiskurve, oder eine Zunahme in der Multiplizität (oder Berührungen) in ursprünglichen Basispunkten aufweisen.

Als *Hauptpunkte* der Abbildung von F auf π bezeichnet man die Basispunkte des Systems $|f|$. Ist A einer dieser Punkte und für $|f|$ ν-fach und läßt man ihm einen allgemeinen Punkt der Ebene sich unendlich nähern, so findet man, daß allen A unendlich benachbarten

1001) Vgl. *G. Veronese* [950]), Anm. auf p. 224.

Über das Vorausgehende vgl. *E. Bertini* [4]), 1. Ausg., p. 308—314; 2. Ausg., p. 386—392; deutsche Ausg., p. 363—369 und, auch über allgemeinere Eigenschaften, *C. Segre* [2]), p. 41—68. — Für den Fall $n=2$ s. Nr. **114**, 1.; für den Fall $n=3$ s. Anm. 1014.

Eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit der Ordnung n^2 in einem Raume von $\frac{n(n+3)}{2}+1$ Dimensionen, die von jeder Hyperebene in einer Fläche vom Typus der Fläche Φ geschnitten wird, ist ein Kegel. *G. Scorza*, Rend. Circ. mat. Palermo 28 (1909), p. 400, wo sich auch ein allgemeinerer Satz vorfindet.

Punkten von π auf F Punkte einer rationalen Kurve (*Hauptkurve* von F) entsprechen, deren Ordnung gleich der Anzahl der veränderlichen Tangenten der Kurven von $|f|$ in A ist.[1002] Die Kurve wird für F μ-fach sein, wenn die Involution der Tangenten in A an die Kurven von $|f|$ mit einer ∞^1-Involution der Ordnung μ zusammengesetzt ist.

Hauptkurven der Abbildung auf π sind die Fundamentalkurven [III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **36**] des Systems $|f|$. Diese können irreduzibel oder reduzibel sein; die Gesamtheit mehrerer Hauptkurven ist ebenfalls eine Hauptkurve. Es gibt eine endliche Anzahl von Hauptkurven.

Eine Hauptkurve von π wird von den allgemeinen Kurven des Systems $|f|$ in keinen veränderlichen Punkten geschnitten. Umgekehrt ist jede irreduzible oder reduzible Kurve von π, die von den allgemeinen Kurven von $|f|$ in keinem veränderlichen Punkte geschnitten wird, eine Hauptkurve.

Eine Hauptkurve wird auch durch die Eigenschaft gekennzeichnet, daß sie den Kurven des Systems $|f|$, die sie als einen Teil enthalten müssen, nur eine einzige Bedingung auferlegt. Mit anderen Worten, sie trennt sich (ein einziges Mal) von den Kurven von $|f|$ ab, die durch einen ihrer allgemeinen Punkte hindurchgehen.

Ist also $\varphi(x) = 0$ die Gleichung einer Hauptkurve φ von π, so kann das System $|f|$ durch eine Gleichung von der Form

$$\lambda_0 f_0(x) + \varphi(x) \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \psi_i(x) = 0,$$

die Fläche F mithin durch die Gleichungen

$$\varrho y_0 = f_0(x),$$
$$\varrho y_i = \varphi(x)\psi_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

dargestellt werden.

Daraus folgt, daß eine Hauptkurve von π das Bild eines einzigen Punktes Y von F ist (*Hauptpunkt* von F), in dem Sinne, daß den verschiedenen Punkten der Kurve die verschiedenen, von dem Punkte Y auf der Fläche ausgehenden Richtungen entsprechen. Genauer: den Tangenten in Y an die Schnittkurven von F mit den durch Y

1002) *A. Clebsch*, Math. Ann. 1 (1868), p. 266.

Im extremen Falle, daß die Kurven von $|f|$ nur feste Tangenten in A besitzen, entspricht dem Punkte A auf F nicht eine Kurve, sondern ein für F im allgemeinen vielfacher Punkt. Mit Hilfe einer birationalen Transformation der Bildebene können derartige Punkte dadurch immer eliminiert werden, daß man sie in Hauptkurven transformiert.

gehenden Hyperebenen entsprechen in π die veränderlichen Schnittpunkte der Hauptkurve φ mit den Kurven des linearen Systems[1003])

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \psi_i(x) = 0.$$

Eine irreduzible Hauptkurve heißt *einfach* oder *mehrfach*, je nachdem sie durch eine birationale Transformation von π in einen Punkt transformiert werden kann oder nicht, der kein Hauptpunkt des linearen Systems ist, das das transformierte von $|f|$[1004]) ist. Durch eine birationale Transformation der Ebene π kann das (als irreduzibel vorausgesetzte, einfache und mindestens ∞^3-)System $|f|$ immer in ein anderes analoges System folgender Typen transformiert werden:

1. Ein von einfachen Hauptkurven freies System.

2. Ein System, das eine einzige, zwei verschiedene Hauptpunkte enthaltende Hauptgerade besitzt, und von anderen Hauptpunkten frei ist.

3. Ein System, das als einfache Hauptkurven eine gewisse Anzahl von Hauptgeraden hat, die von einem Hauptpunkte O ausgehen und je einen anderen, O unendlich benachbarten Hauptpunkt enthalten.[1005])

113. Fortsetzung: Kurven, die sich auf der Ebene und der Fläche entsprechen. Nach einer früheren Bemerkung (Nr. **111**) und einem allgemeinen Satz von *M. Noether* [III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **12** und Nr. **35** am Ende] dürfen wir immer annehmen, daß das lineare

---

1003) Dann und nur dann, wenn die lineare Schar, die dieses System auf φ bestimmt, mit einer Involution der Ordnung μ zusammengesetzt ist [III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **24**], entsprechen daher einer Tangente von F in Y μ Punkte von φ. In diesem Falle sind die Y unendlich benachbarten Punkte von F μ-fach.

Eine beliebige Hauptkurve hat in einem ν_i-fachen Hauptpunkt von π eine Multiplizität $\nu_i' \leqq \nu_i$; ist n' ihre Ordnung, während die Ordnung der Kurven von $|f|$ n ist, so gibt es ∞^{k-1} Residualkurven, d. h. solche, die mit dieser Hauptkurve Kurven von $|f|$ bilden, und diese haben die Ordnung $n - n'$ und in dem betrachteten Punkte die Multiplizität $\nu_i - \nu_i'$. Daraus folgt, daß sich zwei dieser Residualkurven in $D - \left(\sum_i \nu_i'^2 - n'^2\right)$ Punkten schneiden, so daß die betrachtete Hauptkurve einen $\left(\sum_i \nu_i'^2 - n'^2\right)$-fachen Punkt von F darstellt. Diese Zahl ist auch die Anzahl der Schnitte dieser Hauptkurve mit ihren Residualkurven, außerhalb der Hauptpunkte.

1004) Über diese Unterscheidung und den folgenden Satz s. *A. Comessatti*, Math. Ann. 73 (1913), p. 19—33, der dies zur Untersuchung der Eigenschaften der reellen rationalen Flächen (Nr. **117**) verwendet und auch eine *notwendige* Bedingung dafür angibt, daß eine Hauptkurve einfach ist.

1005) In weniger präziser Form *E. Caporali* [1035]), p. 147 = Mem. di geom., p. 174—175.

System $|f|$ nur gewöhnliche Hauptpunkte mit veränderlichen Tangenten besitzt. Bezeichnet dann n die Ordnung und p das Geschlecht der Systemkurven (*Ordnung* und *Geschlecht* des Systems) und ν_i ihre Multiplizitäten in den Hauptpunkten, so ist[1006])

$$\sum_i \nu_i = 3n + 2p - D - 2, \quad \sum_i \nu_i^2 = n^2 - D.$$

Das System $|f|$ kann *regulär* sein oder nicht, d. h. alle den Systemkurven durch die Multiplizitäten in den Hauptpunkten auferlegten Bedingungen können untereinander unabhängig oder s derselben können eine Folge der übrigen sein; im zweiten Falle bezeichnet man die Anzahl s als den *Überschuß* (*sovrabbondanza*) des Systems.[1007])

Ist das System $|f|$ vollständig, so ist seine Dimension k durch

$$\frac{n(n+3)}{2} - \sum_i \frac{\nu_i(\nu_i+1)}{2} + s$$

gegeben.

Ist das System dagegen partiell, also in einem anderen vollständigen System von einer Dimension $k' > k$ enthalten, so nennt man die Differenz $k' - k = \varepsilon$ den *Defekt* des Systems $|f|$. Aus dem Vorhergehenden läßt sich für die Dimension k in jedem Falle die Formel

(1) $$k = D - p + 1 + s - \varepsilon$$

ableiten.

Diese Formel läßt sich für die Fläche F deuten, wenn man sagt, daß für eine rationale Fläche der Ordnung D mit hyperebenen Schnitten

---

1006) Der „Exzeß der Hauptelemente" des Systems $|f|$, d. h. die Differenz zwischen der Anzahl der Hauptpunkte und einfachen Hauptkurven des Systems [III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **36**)], ist $I + 1$ [vgl. *C. Segre,* Atti Acc. Torino 31 (1895—96), p. 496], wobei I die Invariante von *Zeuthen-Segre* der Fläche ist [III C 6 b (*G. Castelnuovo* und *F. Enriques*), Nr. **14**].

1007) Über diesen Gegenstand s. außer den Anführungen von III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **33**, **35** ff. noch *E. Bertini*[4]), 1. Ausg., p. 244—247, 387—390; 2. Ausg., p. 290—293, 475—477; deutsche Ausg., p. 273—275, 448—451; *F. Enriques* und *O. Chisini*, „Lezioni" 3, p. 192—193; *F. Severi,* „Trattato" 1_1, p. 348—350; außerdem *B. Gambier,* Ann. Éc. Norm. (3) 41 (1924), p. 147; (3) 42 (1925), p. 217 [Auszüge Paris C. R. 175 (1922), p. 1384; 176 (1923), p. 1287; 180 (1925), p. 897]; Mathesis 40 (1926), p. 49. Hier werden die linearen Systeme von Kurven gegebener Ordnung mit einer gegebenen Gruppe von Basispunkten eingehend untersucht. Als Beispiele hierfür werden Anwendungen auf die ebene Abbildung von Flächen der 3., 5. und 7. Ordnung mit einer zweifachen bzw. dreifachen kubischen Raumkurve, die Abbildung der Fläche 4. Ordnung mit einer Doppelgeraden, der Fläche 5. Ordnung mit zwei Doppelgeraden und einer Fläche 8. Ordnung mit einer Doppelkurve 12. Ordnung und einer dreifachen Geraden gemacht.

S. noch *M. Légaut,* Paris C. R. 178 (1924), p. 2157; 179 (1924), p. 17; 180 (1925), p. 718; Ann. Fac. des sc. Univ. Toulouse (3) 16 (1925), p. 29.

vom Geschlecht p der normale Raum [III C 7 (*C. Segre*), Nr. **6**] von der Dimension $D - p + 1 + s$[1008]) ist.

Da die Kurven von $|f|$ n^{ter} Ordnung sind und ihnen auf F die Schnittkurven mit den Hyperebenen entsprechen, so entsprechen den Geraden der Bildebene π auf F Kurven G n^{ter} Ordnung. Ist L eine Kurve von F und L' deren Bild auf π, so folgt daraus, daß die Ordnung von L' gleich der Anzahl der Schnitte von L mit einer Kurve G, die nicht in die Hauptpunkte von F (deren Bilder auf π Hauptkurven des Systems $|f|$ sind) fallen, und die Ordnung von L gleich der Anzahl der Schnitte von L' mit den Kurven von $|f|$ außerhalb der Hauptpunkte sein wird.

Hat die Kurve L' die Ordnung m und im ν_i-fachen Hauptpunkt von π die Multiplizität μ_i, so daß also μ_i die Anzahl der Schnitte der Kurve L mit der dem Hauptpunkt korrespondierenden Kurve von F ist, so hat L die Ordnung $mn - \sum_i \mu_i \nu_i$.

Wir betrachten nun die vollständige Schnittkurve von F mit einer Hyperfläche Φ der Ordnung N. Diese hat die Ordnung DN und schneidet die Kurve von der Ordnung ν_i, deren Bild ein ν_i-facher Hauptpunkt ist, in $N\nu_i$ Punkten, eine allgemeine Kurve G dagegen in Nn Punkten. Das Bild dieser Schnittkurve auf π ist daher eine Kurve von der Ordnung Nn, und ihre Multiplizitäten in den ν_i-fachen Hauptpunkten sind $N\nu_i$. Das Geschlecht der Kurve selbst, also auch das der Schnittkurve ist

$$Np + \frac{(N-1)(DN-2)}{2}.$$

Diese Zahl muß aber um α Einheiten verringert werden, falls sich F und Φ in α Punkten[1009]) berühren.

Zerfällt die vollständige Schnittkurve von F mit Φ, so ist der Fall beachtenswert, in dem das Bild einer der Komponenten auf π ein Hauptpunkt der Abbildung ist. Ist dieser Punkt ein ν_i-facher Hauptpunkt, so geschieht dies dann und nur dann, wenn das Bild der

1008) Ist $D > 2p - 2$ oder $k > p$, so ist das System $|f|$ regulär; ist $D > 2p$ oder $k > p + 1$, so ist das System selbst einfach. Aus der ersten Eigenschaft folgt, daß das System $|f|$ für $p = 0$ und $p = 1$ sicher regulär ist; aus der zweiten, daß, wenn das System $|f|$ für $p = 0$ vollständig ist, oder hat $p = 1$ und $D > 2$, es einfach ist. Folglich hat für $p = 0$ die Fläche F als normalen Raum einen Raum von $D + 1$ Dimensionen, für $p = 1$ einen von D Dimensionen. Diese Sätze stammen von *C. Segre*, Brief vom 9. April 1887 an *G. B. Guccia*, Rend. Circ. mat. Palermo 1 (1884—87), p. 217. Über allgemeinere Sätze von *G. Castelnuovo* vgl. III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **36**.

1009) *A. Clebsch*, Math. Ann. 1 (1868), p. 268.

vollständigen Schnittkurve in dem Hauptpunkt eine höhere Multiplizität als $N\nu_i$[1010]) aufweist.

114. Besondere Fälle. Unter den mit Hilfe der ebenen Abbildung untersuchten speziellen rationalen Flächen von S_k erwähnen wir folgende, für die wir im allgemeinen $k > 3$ annehmen; nur in einigen Fällen werden wir hier auch den Fall $k = 3$ anführen und verweisen für den Rest auf den Artikel III C 10b (*W. Fr. Meyer*).

1. *Fläche von Veronese* [III C 7 (*C. Segre*), Nr. **33**] 4. Ordnung im Raum S_5, durch das System aller Kegelschnitte der Ebene dargestellt.[1011])

2. *Rationale Regelflächen* n^{ter} Ordnung, die einem Raume S_k ($k < n + 1$) angehören. Sie können durch Projektion von den (normalen) Regelflächen n^{ter} Ordnung, die einem Raume S_{n+1} angehören, abgeleitet werden [III C 7 (*C. Segre*), Nr. **30**]. Die ebene Abbildung dieser letzten Fläche läßt sich durch Projektion aus einem passend gewählten Raum S_{n-2} erhalten.[1012])

In Verbindung mit den Fällen 1. und 2. ergibt sich die charakteristische Eigenschaft, daß jede algebraische Fläche eines Raumes S_n, *deren hyperebene Schnitte rational sind,* auch rational und zwar entweder eine rationale Regelfläche, oder die Fläche von *Veronese*, oder eine Projektion dieser Fläche von außerhalb liegenden Punkten auf einen Raum S_3 oder einen Raum S_4 ist.[1013])

1010) *A. Clebsch* [1009]), p. 269.

1011) Angedeutet von *A. Cayley,* Trans. London Phil. Soc. 158 (1867), p. 81—82 = Papers 6, Cambridge 1893, p. 197—198; mit Hilfe der ebenen Abbildung ausführlich behandelt von *G. Veronese,* Roma Mem. Acc. Linc. (3) 19 (1884), p. 344; *C. Segre,* Atti Acc. Torino 20 (1885), p. 487; *E. Study,* Habilitationsschrift, Leipzig 1885; Math. Ann. 27 (1885), p. 58. — S. auch *E. Bertini* [4]), 1. Ausg., p. 314—352; 2. Ausg., p. 392—435; deutsche Ausg., p. 369—410.

Über Anwendungen s. *E. Caporali* und *C. Segre,* Ann. di mat. (2) 20 (1885—1892), p. 237; *W. Wirtinger,* Math. Ann. 40 (1892), p. 261; *E. Study,* daselbst, p. 563; *F. Gerbaldi,* Rend. Circ. mat. Palermo 13 (1899), p. 161; *C. Rosati,* Atti Acc. Torino 35 (1899), p. 12.

1012) *G. Veronese* [950]), p. 224; *C. Segre,* Atti Acc. Torino 19 (1884), p. 355. Vgl. auch *E. Bertini* [4]), 1. Ausg., p. 285—303; 2. Ausg., p. 355—376; deutsche Ausg., p. 333—353.

Über die ebene Abbildung der normalen rationalen Regelflächen s. auch *E. H. Moore,* Trans. Connecticut Acad. 7 (1885), p. 9; *G. Bordiga,* Atti Ist. Ven. (6) 4 (1886), p. 1085; *A. Terracini,* Rend. Ist. Lomb. (2) 48 (1915), p. 62. Über die rationalen Regelflächen n^{ter} Ordnung (insbesondere für $n = 5$) von S_4 *M. Morale,* Catania Atti Acc. Gioenia (4) 14 (1901), Nr. II; über die kubischen Regelflächen von S_4 noch *G. Veronese,* a. a. O., p. 229; *G. Bordiga,* Atti Ist. Ven. (6) 4 (1886), p. 520; über die Regelflächen 4. Ordnung von S_4 *G. Caldarera,* Acireale Atti e Rend. Acc. Zelanti (2) 7 (1896), p. 141.

1013) *E. H. Moore,* Amer. J. of math. 10 (1887), p. 17; *S. Kantor,* Paris C. R.

3. *Nicht-geradlinige Flächen mit elliptischen hyperebenen Schnitten.* Jede algebraische nicht-geradlinige Fläche n^{ter} Ordnung mit elliptischen hyperebenen Schnitten ist rational und von einer Ordnung $n \leqq 9$. Sie kann auf die Ebene durch ein lineares System von Kurven 3. Ordnung mit $9 - n$ einfachen Basispunkten abgebildet werden. Eine Ausnahme bildet eine gewisse Fläche 8. Ordnung von S_8, die durch alle Kurven 4. Ordnung mit zwei doppelten Basispunkten abgebildet wird.[1014])

---

132 (1901), p. 124; *E. Bertini*[4]), 1. Ausg., p. 323; 2. Ausg., p. 402—403; deutsche Ausg., p. 378—379.

Für $n = 3$ läßt sich hieraus der von *É. Picard,* Bull. Soc. philom. (7) 2 (1878), p. 127; J. f. Math. 100 (1885), p. 71 herrührende Satz ableiten, daß die Flächen des gewöhnlichen Raumes mit rationalen ebenen Schnitten die rationalen Regelflächen und die *Steiner*sche Fläche sind. Vgl. auch *G. B. Guccia,* Rend. Circ. mat. Palermo 1 (1886), p. 165; *É. Picard* und *G. Simart*[114]) 2, p. 57—63; *É. Picard,* Brief an *C. Segre* vom 8. April 1901, Atti Acc. Torino 36 (1900—1901), p. 684.

Über die Reduktion der linearen Systeme ebener rationaler Kurven durch birationale Transformationen auf die Minimalordnung s. *G. B. Guccia,* Rend. Circ. mat. Palermo 1 (1886), p. 139.

1014) *G. Castelnuovo,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 3^1 (1894), p. 59. S. auch *P. del Pezzo,* Rend. Circ. mat. Palermo 1 (1887), p. 241; außerdem *F. Enriques,* Math. Ann. 46 (1895), p. 182—186.

Charakteristische Eigenschaften der rationalen Flächen von S_n $(6 \leqq n \leqq 9)$, die durch ein lineares System von Kurven 3. Ordnung auf die Ebene abgebildet werden können, gab *A. Terracini,* Modena Soc. Naturalisti e Matem. (5) 6 (1922), p. 14, 34 an, wo auch charakteristische Eigenschaften der durch ein lineares ∞^{14}- oder ∞^{13}-System von Kurven 4. Ordnung dargestellten rationalen Flächen von S_{14} oder S_{13} angegeben werden. Vgl. auch *G. Fubini* und *E. Čech,* „Geom. proj. diff.“ [626]) 2 (Anhang III, von *A. Terracini*), p. 768—769.

Eine spezielle Fläche 9. Ordnung von S_4 mit elliptischen Schnitten bei *L. Godeaux,* Nouv. Ann. de math. (4) 16 (1916), p. 59.

Die Fläche 5. Ordnung von S_5 mit elliptischen Schnitten wurde von *F. Severi,* Rend. Circ. mat. Palermo 15 (1901), p. 42—44; Mem. Acc. Torino (2) 52 (1902), p. 102, dann von *H. W. Richmond,* Proc. London math. Soc. (2) 24 (1926), Notes and Abstracts, p. XVI gefunden; untersucht von *F. Bath,* Proc. Cambridge Phil. Soc. 24 (1928), p. 48, 191; *G. Timms,* Proc. R. Soc. London (A) 119 (1928), p. 242; *H. F. Baker,* J. London math. Soc. 6 (1931), p. 176; *G. Fano,* Rend. Ist. Lomb. (2) 65 (1932), p. 93; *J. W. Archbold,* Proc. Cambridge Phil. Soc. 28 (1932), p. 51. Erweiterung bei *D. W. Babbage,* Proc. Cambridge Phil. Soc. 27 (1931), p. 399; *W. L. Edge,* ebenda 28 (1932), p. 285.

Eine spezielle Fläche, mit elliptischem Schnitte, von der 8. Ordnung im Raume S_5 bei *L. Godeaux,* Bull. Ac. sc. Belgique (5) 16 (1930), p. 562.

G. Fano, Atti Ist. Ven. (7) 7 (1896), p. 1100 untersucht eine Fläche 5. Ordnung von S_5 mit ∞^4 automorphen projektiven Transformationen, die durch ein ∞^5-System kubischer Kurven mit vier gemeinsamen unendlich benachbarten Punkten, von denen drei in einer geraden Linie liegen, dargestellt wird.

4. *Nicht-geradlinige Flächen mit hyperelliptischen hyperebenen Schnitten vom Geschlecht* $p > 1$. Eine derartige Fläche ist immer rational, von einer Ordnung $\leqq 4p + 4$ und kann in der Weise auf die Ebene abgebildet werden, daß die Bilder ihrer hyperebenen Schnitte Kurven einer gewissen Ordnung ν mit einem gemeinsamen $(\nu - 2)$-fachen Punkt und möglicherweise weiteren gemeinsamen einfachen oder Doppelpunkten sind.[1015])

5. *Nicht-geradlinige Flächen mit hyperebenen Schnitten vom Geschlecht 3.* Mit der Bestimmung aller möglichen Flächen mit dieser Eigenschaft, wie auch der Möglichkeit ihrer Ableitung durch Projektion von einer gleichen Fläche und dem Studium ihrer Abbildung auf bekannte Flächen beschäftigen sich *G. Castelnuovo*[1016]), *G. Castelnuovo* und *F. Enriques*[1017]), *G. Scorza.*[1018]) Sind diese Flächen von einer Ordnung > 4, so zeigt sich, daß sie entweder rational sind oder durch birationale Transformationen des Raumes auf einen elliptischen kubi-

---

Die durch drei kollineare Gebilde 2. Stufe erzeugte Fläche 6. Ordnung von S_6, die durch die kubischen Kurven durch drei feste Punkte auf die Ebene abgebildet werden kann, untersucht *G. Bordiga,* Atti Ist. Ven. (6) 4 (1886), p. 1461; Paris C. R. 102 (1886), p. 743; Erweiterung Paris C. R. 102 (1886), p. 1442.

Über die Reduktion der linearen Systeme elliptischer ebener Kurven durch birationale Transformationen auf die Minimalordnung s. *G. B. Guccia,* Rend. Circ. mat. Palermo 1 (1887), p. 169.

Eine Untersuchung über die Geometrie der als Punkte eines Raumes S_9 betrachteten ebenen Kurven 3. Ordnung stammt von *N. Spampinato,* Catania Atti Acc. Gioenia (5) 12 (1919), Nr. XXI; (5) 13 (1921), Nr. V und *J. Yerushalmy,* Amer. J. of math. 54 (1932), p. 129; Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 37 (1931), p. 173.

Über alles Vorhergehende s. III C 6 a (*G. Castelnuovo* und *F. Enriques*), Nr. **22**; III C 6 b (*G. Castelnuovo* und *F. Enriques*), Nr. **36**; III C 7 (*C. Segre*), Nr. **36** und über Erweiterungen Nr. **44**.

1015) *G. Castelnuovo,* Rend. Circ. mat. Palermo 4 (1890), p. 73; *F. Enriques,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 2^2 (1893), p. 285; Math. Ann. 46 (1895), p. 186—188. Vgl. auch *H. S. White,* The Boston Colloquium, Lectures on Math. 1903 (New York 1905), p. 12—18.

Diese Flächen treten bei der Bestimmung der Flächen von S_k auf, deren Räume S_h, die sie in $h + 1$ Punkten schneiden, nicht den ganzen Raum S_k ausfüllen. Nach *F. Palatini,* Atti Acc. Torino 41 (1906), p. 634, sind derartige Flächen tatsächlich nur die rationalen Flächen von S_{3h+2}, die durch das System der Kurven der Ordnung $2h$ mit einem $(2h - 2)$-fachen Hauptpunkt und $h - 1$ Doppelpunkten auf die Ebene abgebildet werden können, und falls $h = 4$, auch die durch das System aller Kurven 4. Ordnung der Ebene abgebildete Fläche. Erweiterung a. a. O., 44 (1909), p. 362.

1016) Atti Acc. Torino 25 (1890), p. 695.

1017) Ann. di mat. (3) 6 (1900), p. 212.

1018) Ann. di mat. (3) 16 (1909), p. 255; (3) 17 (1910), p. 281.

schen Kegel reduziert werden können.[1019]) Sind sie rational, so ist ihre Ordnung $\leqq 16$.[1020])

1019) Verschiedene Klassen derartiger Flächen und ihre Abbildung auf die einfache oder die Doppelebene werden von *G. Castelnuovo* [1016]) untersucht, der insbesondere alle rationalen Flächen mit Schnitten vom Geschlecht 3 und ihre ebenen Abbildungen bestimmt. Eine spezielle derartige Fläche wurde von *G. Bordiga,* Atti Ist. Ven. (6) 5 (1887), p. 1397 untersucht. Diese ist 7. Ordnung im Raume S_5 und wird durch vier kollineare Gebilde 2. Stufe erzeugt. S. auch *Maria del Re,* Rend. Acc. Napoli (3) 31 (1925), p. 108.

Von *G. Castelnuovo* und *F. Enriques* [1017]) stammt der Satz, daß eine Fläche mit Schnitten vom Geschlecht 3, deren Ordnung > 4 ist, entweder Regelfläche oder rational ist, oder auf eine Regelfläche vom Geschlecht 1 oder 2 birational bezogen werden kann. Mit Hilfe dieses Satzes führt *G. Scorza* [1018]) die von *G. Castelnuovo* begonnene Untersuchung zu Ende und studiert speziell die Abbildung auf den elliptischen kubischen Kegel mit Hilfe *Cremona*scher Transformationen.

M. de Franchis, Rend. Circ. mat. Palermo 14 (1899), p. 33 bestimmt alle nicht rationalen Flächen 4. Ordnung, deren geometrisches Geschlecht $p_g = 0$ ist. Sie sind entweder Kegel oder können durch eine birationale Transformation des Raumes auf einen elliptischen kubischen Kegel bezogen werden. *M. de Franchis* untersucht diese Abbildung, bestimmt die Beschaffenheit der Singularitäten und die Gleichungen der gefundenen Flächen in allen Fällen und vervollständigt so die von *H. Poincaré,* Paris C. R. 99 (1884), p. 1145; *É. Picard* und *G. Simart* [114]) 1, p. 134—136; *A. Berry,* Paris C. R. 129 (1899), p. 449 auf transzendentem Wege erhaltenen Ergebnisse.

Die Ergebnisse von *G. Castelnuovo, G. Scorza* und *M. de Franchis* liefern die vollständige Bestimmung der Typen, auf die die auf einem elliptischen kubischen Kegel liegenden einfachen linearen, mindestens ∞^3-Systeme von Kurven vom Geschlecht 3 birational reduziert werden können, oder, wenn man will, durch *Cremona*sche Transformationen des Raumes. Zwei kubische Kegel in eineindeutiger algebraischer Korrespondenz lassen sich nämlich durch eine *Cremona*sche Transformation des Raumes voneinander ableiten: *M. de Franchis,* a. a. O., p. 64, in Anm.

1020) Verschiedene der vorhergehenden Flächen findet unter anderen *C. H. Sisam,* Amer. J. of math. 41 (1917), p. 49 [Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 24 (1918), p. 423] bei der Bestimmung aller Flächen mit ∞^1 kubischen Kurven, die kein Büschel bilden, auch, a. a. O., p. 212 [Auszug Bull. Amer. math. Soc. (2) 25 (1919), p. 247] bei der Bestimmung der Flächen, die zwei oder mehrere Büschel (elliptischer oder rationaler) kubischer Kurven enthalten.

Die algebraischen Flächen mit zwei Büscheln rationaler Kurven sind rational und werden von *L. Godeaux,* Enseign. math. 15 (1913), p. 310, bestimmt, der die Ergebnisse von *G. Koenigs,* Ann. Éc. Norm. (3) 5 (1888), p. 177 [Auszug Paris C. R. 105 (1887), p. 407]; Paris C. R. 109 (1889), p. 364 auf die Bestimmung der algebraischen Flächen im Raume S_3 mit zwei Büscheln von Kegelschnitten erweitert.

Wir fügen noch hinzu, daß *U. Amaldi,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 11^2 (1902), p. 217, alle birational verschiedenen Flächen bestimmt hat, die mehr als zwei Kurvenbüschel von der Art enthalten, daß die allgemeine Kurve jedes Büschels die allgemeine Kurve jedes anderen Büschels in einem einzigen Punkte trifft.

Spezielle rationale Flächen mit Kurvenbüscheln untersucht *Maria Caruso,* „Su una classe di superficie razionali degli iperspazi", Catania 1925.

6. Alle algebraischen Flächen im Raume S_n mit einer transitiven kontinuierlichen (daher mindestens ∞^2) Gruppe automorpher projektiver Transformationen sind rational.[1021])

7. Eine Fläche im Raume S_n von der Ordnung $\frac{n(n-1)}{2}$, die durch die Schnitte der homologen Hyperebenen n projektiver Bündel erzeugt wird. Auf die Ebene wird sie mittels der Kurven n^{ter} Ordnung durch $\frac{n(n+1)}{2}$ feste Punkte abgebildet.[1022])

Weitere spezielle rationale Flächen im Raume S_n, insbesondere im Raume S_4 untersuchen verschiedene andere Verfasser.[1023])

1021) *G. Fano* [555]).

1022) *F. P. White,* Proc. Cambridge Phil. Soc. 22 (1924), p. 1. Für $n = 4$ s. *G. Veronese* [950]), p. 232; *G. Bordiga,* Roma Mem. Acc. Linc. (4) 3 (1887), p. 182; *F. P. White,* Proc. Cambridge Phil. Soc. 21 (1922), p. 216.

1023) *E. G. Togliatti,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 26^1 (1917), p. 553 untersucht beim Studium der Netze von ausgearteten Reziprozitäten im Raume S_n die ebene Abbildung einer normalen rationalen Fläche von der Ordnung $\frac{n(n-3)}{2} + 2$, die durch das lineare System aller durch $\frac{(n-2)(n+1)}{2}$ allgemeine Punkte der Ebene hindurchgehenden Kurven der Ordnung $n - 1$ abgebildet wird.

C. Segre, Atti Acc. Torino 59 (1924), p. 303 untersucht die rationale Fläche, die auf die Ebene durch ein lineares System von Kurven n^{ter} Ordnung abgebildet wird, die einem aus Tangenten eines gegebenen Kegelschnitts gebildeten vollständigen $(n+1)$-Seit umbeschrieben sind. Ist das System aus allen derartigen ∞^n Kurven gebildet, so hat die Fläche die Ordnung $\frac{n(n-1)}{2}$ und gehört einem Raume S_n an.

Maria del Re, Rend. Acc. Napoli (3) 29 (1923), p. 79 [Erweiterungen, p. 150; (3) 30 (1924), p. 42, 51] untersucht rationale Flächen der Ordnung $2n^2$ im Raume $S_{n(n+1)}$, die durch Kurven von der Ordnung $3n$ mit sieben gemeinschaftlichen n-fachen Punkten abgebildet werden.

Verschiedene rationale Flächen findet *E. G. Togliatti,* Comment. math. Helvetici 1 (1929), p. 255, durch Betrachtung der Flächen, die eine *Laplace*sche Gleichung „darstellen". Das bedeutet: Gehört die Fläche einem Raume S_r an, so genügen die $r+1$ homogenen projektiven Koordinaten des allgemeinen Punktes dieser Fläche, die man als Funktionen der beiden krummlinigen Koordinaten auf der Fläche betrachtet, einer linearen homogenen partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung (von *Laplace*). Es zeigt sich, daß für $r > 4$ keine nicht geradlinigen Flächen 4. oder 5. Ordnung mit besagter Eigenschaft existieren. Für $r \geqq 5$ sind dagegen die einzigen nicht geradlinigen Flächen einer Ordnung $\leqq 6$ vom gewünschten Typus gewisse Flächen 6. Ordnung, die einem Raume S_5 angehören und hyperebene Schnitte vom Geschlecht 1 oder auch 2 aufweisen. Eine solche 6. Ordnung im Raum S_5 mit überebenen Schnitten vom Geschlecht 1 studiert *L. Godeaux,* Bull. Ac. sc. Belgique (5) 18 (1932), p. 405.

Über die ebene Abbildung einer rationalen Fläche des Raumes S_4 s. *H. F. Baker,* Proc. Cambridge Phil. Soc. 28 (1932), p. 62. Vgl. noch *L. Roth,* ebenda, p. 300.

115. Ebene Abbildung einer rationalen Fläche des dreidimensionalen Raumes.[1024]) Wir fassen den Fall $k = 3$ ins Auge[1024a]) und nehmen an, daß das lineare System $|f|$ in Nr. **111, 112, 113** irreduzibel und einfach und daher auch die durch dies System abgebildete Fläche F von der Ordnung D einfach ist.[1025])

Die Formel (1) in Nr. **113** wird:

$$D - p + s - \varepsilon - 2 = 0. \tag{1}$$

Aus der Betrachtung des Geschlechtes p der ebenen Schnitte leitet man eine auf die Doppelkurve von F bezügliche Eigenschaft ab. Mit d bezeichnen wir die Ordnung dieser Kurve (unter Einschluß einer möglicherweise auftretenden Kuspidalkurve) oder allgemeiner einer Doppelkurve, die geeigneterweise [vgl. III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **18**] als äquivalent mit einer Kurve beliebiger Multiplizität zu betrachten ist. Dann ist

$$d = \frac{(D-1)(D-2)}{2} - p.$$

Hieraus und aus der Formel (1) leitet sich ab

$$d = \frac{(D-2)(D-3)}{2} - s + \varepsilon$$

Verschiedene rationale Flächen von S_4 mit ihrer ebenen Abbildung fanden *E. Ascione,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 6^1 (1897), p. 162; *F. Severi,* Rend. Circ. mat. Palermo 15 (1901), p. 33 bei der Untersuchung der Flächen von S_4 mit scheinbaren zwei- oder dreifachen Punkten; *G. Marletta,* Rend. Circ. mat. Palermo 28 (1908), p. 353; Catania Atti Acc. Gioenia (5) 3 (1909), Nr. II, beim Studium der Geradenkomplexe (∞^3-Systeme) 1. Ordnung (so daß also durch einen allgemeinen Punkt eine einzige Gerade geht).

1024) Einen Weg für die Bestimmung der Gleichung einer rationalen Fläche wenn die Koordinaten des laufenden Punktes der Fläche als rationale Funktionen zweier Parameter ausgedrückt sind, wurde von *A. Brill,* Math. Ann. 5 (1871), p. 401 angegeben und auf den Fall der *Steiner*schen Fläche angewandt.

1024a) Nach *J. C. H. Gerretsen,* Nieuw Archief voor Wiskunde (2) 17^1 (1931), p. 67, existiert im dreidimensionalen Raum keine algebraische Fläche F einer Ordnung $\geqq 2$, die sich derartig birational auf eine Ebene π abbilden läßt, daß jeder Punkt von F einem und nur einem Punkt von π und jeder Punkt von π einem und nur einem Punkt von F entspricht.

1025) Ein einfaches Beispiel für ein zusammengesetztes System $|f|$ ist das ∞^3-System der Kurven 6. Ordnung mit acht gemeinschaftlichen Doppelpunkten (Nr. **61**). Die durch dieses System dargestellte Fläche ist ein zweimal gezählter Kegel 2. Ordnung. Die Bilder seiner Erzeugenden sind die kubischen Kurven durch die 8 Punkte, das Bild seines Scheitels ist der neunte, all diesen kubischen Kurven gemeinschaftliche Punkt. Vgl. *E. Caporali*[1035]), p. 165—166 = Mem. di geom., p. 197—198; *B. Gambier,* Ann. Éc. Norm. (3) 42 (1925), p. 262.

und schließlich[1026])

$$d \geqq \frac{(D-2)(D-3)}{2} - s.$$

G. Humbert[1027]) vertieft auf transzendentem Wege das Studium der Abbildung der Kurven, die der Fläche F und ihren adjungierten Flächen gegebener Ordnung gemeinsam sind, d. h. im Falle gewöhnlicher Singularitäten der Flächen, für die jede l-fache Kurve von F mindestens $(l-1)$-fach, und jeder isolierte l-fache Punkt von F mindestens $(l-2)$-fach ist. Er gelangt zu folgendem Ergebnis:

Schneidet man F mit den adjungierten Flächen der Ordnung $D+q-4$ $(q \geqq 1)$, so sind die Bilder der veränderlichen Schnittkurven Kurven von der Ordnung $nq-3$, die in den Hauptpunkten von π dieselben Singularitäten besitzen[1028]), wie die zu dem Bild des Schnittes von F mit einer allgemeinen Fläche der Ordnnng q adjungierten Kurven [bzgl. derartiger Singularitäten s. III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **15**]. Umgekehrt ist jede Kurve von π der Ordnung $nq-3$, die in den Hauptpunkten der Abbildung sich wie diese adjungierten Kurven verhält, das Bild der Schnittkurve von F mit einer adjungierten Fläche von F der Ordnung $D+q-4$.[1029])

Mit den vorhergehenden Sätzen verknüpfen sich verschiedene Eigenschaften in bezug auf die vielfachen Punkte von F. Ein derartiger Punkt kann von zweierlei Art sein, je nachdem er als Bilder alle Punkte einer Kurve (*Hauptkurve*) oder eine endliche Anzahl (mindestens 2) besitzt. Man sagt dann mit *G. Humbert*, daß der Punkt in diesen Fällen *erster* bzw. *zweiter Art* ist.

1026) *A. Clebsch*[1009]), p. 255 [in III C 4 (*L. Berzolari*), Anm. 444 muß der Sinn der Ungleichung umgekehrt werden]. — Ebenda, p. 270, entwickelt *A. Clebsch* die Gleichung der Abbildung der Doppelkurve einer auf die Ebene abbildbaren Fläche. Eine Erweiterung bei *M. Noether,* Math. Ann 3 (1870), p. 187—188.

Über die singulären Korrespondenzen, die bei der Abbildung der Doppelkurve auftreten, s. *M. Bernhard*[28]), p. 23 ff.

1027) Math. Ann. 45 (1894), p. 428.

1028) Nehmen wir, wie es immer erlaubt ist, an, daß das System $|f|$ nur gewöhnliche Basispunkte mit veränderlichen Tangenten besitzt, so haben diese Bilder, wie aus Nr. **113** hervorgeht, im ν_i-fachen Hauptpunkt die Multiplizität $q\nu_i - 1$.

1029) *G. Humbert*[1027]), p. 433, 437. Über Sonderfälle dieser beiden Sätze s. auch *A. Cayley,* Math. Ann. 3 (1870), p. 469 = Papers 8, Cambridge 1895, p. 388; *E. Caporali*[1035]), p. 166—167 = Mem. di geom., p. 198—199. Aus diesen Sätzen läßt sich leicht ableiten, daß die adjungierten Flächen von F der Ordnung $D+q-4$ ein lineares System von der Dimension

$$(p-1)q + \tfrac{1}{2}Dq(q-1) + \tfrac{1}{6}(q-1)(q-2)(q-3)$$

bilden.

G. Humbert findet, daß jede zu F längs der mehrfachen Kurven und in den vielfachen Punkten erster Art adjungierte Fläche auch in den vielfachen Punkten zweiter Art adjungiert ist. Daraus folgt, daß die vielfachen Punkte zweiter Art auf den vielfachen Kurven von F liegen, und jede längs dieser Kurven adjungierte Fläche notwendigerweise in jedem dieser Punkte adjungiert ist. Es ergibt sich weiter, daß die isolierten vielfachen Punkte, durch die die adjungierten Flächen hindurchgehen [insbesondere daher alle l-fachen isolierten Punkte ($l > 2$), nicht aber die gewöhnlichen Doppelpunkte], erster Art sind und das gleiche für jeden auf vielfachen Kurven gelegenen vielfachen Punkt gilt, wenn nicht jede längs derartiger Kurven adjungierte Fläche dadurch von selbst in diesem Punkte adjungiert ist.

Die umgekehrten Eigenschaften gelten nicht, d. h. ein auf vielfachen Kurven gelegener, vielfacher Punkt der Art, daß jede längs dieser Kurven adjungierte Fläche auch in diesem Punkte adjungiert ist, ist nicht notwendigerweise zweiter Art.

G. Humbert bezeichnet jeden vielfachen Punkt von F, durch den die adjungierten Flächen hindurchgehen müssen, der außerdem so beschaffen ist, daß die längs vielfacher Kurven adjungierten Flächen nicht notwendigerweise in diesem Punkte adjungiert sind, als *ausgezeichneten* (*remarquable*) singulären Punkt. Er gibt die Bedingungen dafür an, daß eine rationale Fläche F, deren ebene Abbildung gegeben ist, ausgezeichnete singuläre Punkte besitzt, und zeigt, daß, falls F t derartige Punkte besitzt, wenigstens eine Fläche der Ordnung $D-4$ existiert, die zu F längs vielfacher Kurven und in r ($r < t$) willkürlich gewählten derartigen Punkten adjungiert ist, nicht aber in irgendeinem der $t-r$ übrigen Punkte.[1030])

Wir erwähnen noch, daß für den Fall der ebenen Abbildung einer rationalen Fläche mittels Parameter-Darstellung der Koordinaten *A. Clebsch*[1031]) die Differentialgleichung der Asymptoten-Kurven und

1030) Da die ebenen Schnitte von F Kurven von der Ordnung D und vom Geschlecht p sind, die eine adjungierte Kurve der Ordnung $D-4$ zulassen, so ist $D \leqq 2(p-1)$ [III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. 27]. Daraus folgt, daß es keine ausgezeichneten singulären Punkte gibt, falls $p=1$ oder $p=2$ ist, auch dann nicht, wenn F eine Regelfläche ist. Für $p=3$, und daher $D=4$, existieren dagegen derartige Punkte: F ist dann frei von mehrfachen Kurven und besitzt einen besondersartigen, dreifachen oder doppelten ausgezeichneten singulären Punkt.

1031) J. f. Math. 67 (1866), p. 9. Diese Gleichung wird hier, nach einer von *P. Gordan* mitgeteilten Methode, für den Fall der *Steiner*schen und der kubischen Regel-Fläche integriert.

L. Cremona[1032]) die Differentialgleichungen der isotropen Kurven, der Krümmungskurven und der Asymptoten-Kurven bestimmt haben.

116. Fortsetzung: Fragen abzählender Art, die mit der ebenen Abbildung einer rationalen Fläche verknüpft sind [vgl. III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **38** c)]. Viele Fragen abzählender Art über die ebene Abbildung einer rationalen Fläche F wurden von *A. Clebsch*[1033]), *A. Cayley*[1034]), vor allem und in systematischer Weise von *E. Caporali*[1035]) gelöst, und zwar unter der Annahme, daß das Bildsystem $|f|$ einfach und vollständig ist, nur gewöhnliche Basispunkte mit veränderlichen Tangenten besitzt und frei von Hauptkurven (Nr. **112**) ist.

Das System $|f|$ soll, wie in der vorhergehenden Nr., die Ordnung n, den Grad D, das Geschlecht p und σ Basispunkte haben.

Eine Kurve des Systems $|f|$, die einen nicht in den Basispunkten liegenden Doppelpunkt besitzt, ist das Bild eines Schnittes von F mit einer Tangentialebene. Betrachtet man daher ein Büschel dieser Kurven, so ergibt sich, daß die Klasse von F

$$D + 4p + \sigma - 1$$

ist.[1036])

Die Bilder der Schnitte von F mit den durch einen festen Punkt O des Raumes gehenden Ebenen sind Kurven eines Netzes von $|f|$, und die *Jacobi*sche Kurve J dieses Netzes ist das Bild der Berührungskurve von F mit dem von O aus umbeschriebenen Kegel. Daraus folgt, daß dieser Kegel die Ordnung $2(D + p - 1)$ und das Geschlecht $9p - \sigma + 1$ hat. Aus diesen beiden Zahlen und der vorhergehenden Zahl für die Klasse findet man mit Hilfe der *Plücker*schen Formeln [III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. 8], daß durch einen allgemeinen Raum-

1032) Mem. Acc. Bologna (3) 1 (1870), p. 49 [Auszug Rend. Acc. Bologna 1869—70, p. 86] = Opere 3, Milano 1917, p. 209.

1033) Math. Ann. 1 (1868), p. 253. Vgl. auch Rend. Ist Lomb. (2) 1 (1868), p. 794.

1034) Math. Ann. 3 (1870), p. 469 = Papers 8, Cambridge 1895, p. 388.

1035) Coll. math. in mem. D. Chelini, Milano 1881, p. 144 [1879] = Mem. di geometria, Napoli 1888, p. 171.

Sonderfälle bei *J. de Vries*, Ak. Amsterdam Versl. (4) 23 (1914), p. 907.

Die Resultate von *E. Caporali* über die Netze sind bei *F. Enriques* und *O. Chisini*, „Lezioni" 2, p. 174—180 wiedergegeben. Sie sind in den von *F. Severi*[30]), p. 642 angegebenen Ergebnissen über die Netze von Kurven auf einer beliebigen algebraischen Fläche enthalten.

Erweiterungen auf lineare ∞^3-Systeme von Kurven auf einer beliebigen algebraischen Fläche bei *M. Pannelli*, Rend. Circ. Mat. Palermo 20 (1905). p. 34; *T. Bonnesen*, Kjöbenhavn Overs. 1906, p. 281.

1036) *E. Caporali*[1035]), p. 152 = Mem. di geom., p. 181.

punkt O $24p$ stationäre Tangentialebene (d. h. Tangentialebenen in parabolischen Punkten),

$$\tfrac{1}{2}[(D + 4p + \sigma)^2 - 86p - 5D - 3\sigma + 4]$$

Doppeltangentialebenen,

$$3(D + 6p - \sigma - 1)$$

Inflexions- (oder Haupt)tangenten,

$$2[(D + p)^2 - 5D - 17p + 2\sigma + 4]$$

Doppeltangenten von F[1037]) gehen.

Die ∞^3 Netze von $|f|$ liefern ∞^3 *Jacobi*sche Kurven J, die ebenfalls ein lineares System bilden.[1038]) Zwei von den Kurven J schneiden sich außer in den Basispunkten in

$$3D + 12p - \sigma - 3$$

Punkten. Abstrahieren wir von den Doppelpunkten von Kurven des beiden Netzen gemeinsamen Büschels, so bleiben

$$2(D + 4p - \sigma - 1)$$

derartige Punkte C, daß die polaren Geraden eines beliebigen dieser Punkte in bezug auf alle Kurven von $|f|$ durch ein und denselben Punkt C' gehen. Die Punkte C liegen daher auf allen Kurven J, sind die Berührungspunkte für Netze von Kurven f, mit der gemeinsamen Tangente CC', und ebenso die Doppelpunkte für ein ganzes Büschel von Kurven f (und daher für zwei von diesen Kurven Spitzen).[1039])

Die Kurven J dienen beim Studium der Doppelkurve und der parabolischen Kurve von F, deren Ordnungen

$$\tfrac{1}{2}(D - 1)(D - 2) - p \quad \text{bzw.} \quad 4(D + 2p - 2)$$

sind.

Der Schnitt von F mit der ersten Polare eines allgemeinen Punktes O zerfällt in die Doppelkurve und die Berührungskurve mit dem von O aus umbeschriebenen Kegel. Trennen wir die Kurve J vom Bilde dieses Schnittes ab, so ergibt sich, daß die Kurve Δ, die das Bild der Doppelkurve und daher der Ort der für das System $|f|$ „neutralen Paare“ von Punkten ist (d. h. der Punktepaare, die den Kurven f eine einzige Bedingung auferlegen), die Ordnung $(D - 4)n + 3$ und in jedem ν_i-fachen Basispunkt von $|f|$ die Multiplizität $(D - 4)\nu_i + 1$

1037) *E. Caporali* [1035]), p. 152—153 = Mem. di geom., p. 181—182.

1038) *E. Caporali* [1035]), p. 147—148 = Mem. di geom., p. 175. Für $n = 2$ schon bei *J. Rosanes,* Math. Ann. 6 (1872), p. 298.

1039) *E. Caporali* [1035]), p. 147—148 = Mem. di geom., p. 175—176.

hat.[1040]) Die Kurve Δ geht durch jeden Punkt C hindurch und berührt hier die Gerade CC'.

Die Punkte C sind die Bilder der uniplanaren oder Kuspidalpunkte von F, die auf der Doppelkurve der Fläche liegen.[1041])

Die Klasse der aus den Tangentialebenen von F in den Punkten der Doppelkurve gebildeten abwickelbaren Fläche ist gleich der Anzahl der Schnittpunkte der Doppelkurve mit der Berührungskurve des von einem allgemeinen Punkte aus umbeschriebenen Kegels mit Ausnahme der Kuspidalpunkte von F. Sie ist also gleich der Anzahl der Schnittpunkte von Δ mit einer Kurve J außer den Hauptpunkten und den Punkten C und daher

$$(D-1)(2D-7)+2p(D-11)+3\sigma.$$

Mit Hilfe dieser Zahl kann man die Anzahl t der „neutralen Tripel" für das System $|f|$ berechnen, d. h. der Tripel von Punkten, die den Kurven f eine einzige Bedingung auferlegen und durch die daher ein Netz derartiger Kurven geht. Jeder von den $3t$ Punkten dieser Tripel ist für Δ doppelt, und jedes Tripel stellt einen für F und auch die Doppelkurve dreifachen Punkt dar. Da die zweite Polare eines Punktes O die Doppelkurve in diesen dreifachen und auch in den Punkten schneidet, in denen eine Tangentialebene durch O geht, so ist die Anzahl t der dreifachen Punkte von F[1042])

$$t=\tfrac{1}{6}(D-1)(D^2-8D+18)-p(D-8)-\sigma.$$

Aus dem Vorhergehenden[1043]) ergibt sich, daß das Geschlecht von Δ

$$(D-3)^2+2p(D-10)+3(\sigma-1)$$

ist, während das Geschlecht der Doppelkurve

$$\tfrac{1}{2}(D-3)(D-4)+p(D-12)+2(\sigma-1)$$

ist.

1040) *A. Clebsch*[1009]), p. 271—272, analytisch; *E. Caporali*[1035]), p. 154 = Mem. di geom., p. 183.

Allgemeinere Formeln, die auch gelten, wenn in der Bildebene Hauptkurven vorkommen, gibt *H. G. Zeuthen,* Math. Ann. 4 (1871), p. 43—44, als Sonderfälle anderer Formeln für die birationale Korrespondenz zwischen zwei beliebigen algebraischen Flächen.

1041) „Pinch-points", nach *A. Cayley,* Quart. J. of math. 9 (1868), p. 332 = Papers 6. Cambridge 1893, p. 123.

1042) *A. Cayley*[1034]); *E. Caporali*[1035]), p. 155 = Mem. di geom., p. 185. Für $\sigma=0$ s. auch *Ch. H. van Os,* Interm. des math. (1) 23 (1916), p. 74; *E. G. Togliatti,* daselbst, p. 191.

1043) *E. Caporali*[1035]), p. 156 = Mem. di geom., p. 185. In dem von *A. Clebsch*[1009]), p. 272 angegebenen Ausdruck sind die $3t$ Doppelpunkte von Δ nicht berücksichtigt.

Die Punkte von Δ sind derart untereinander gepaart, daß zwei Punkte P' und P'' eines Paares ein und denselben Punkt P der Doppelkurve auf den beiden Mänteln von F darstellen und den durch P gehenden Kurven von F auf einem oder dem anderen Mantel entsprechen auf der Ebene π Kurven durch P' oder P''. Die Geraden $P'P''$ umhüllen eine eineindeutig auf die Punkte der Doppelkurve von F bezogene Kurve, die daher dasselbe Geschlecht wie diese Doppelkurve, die Klasse

$$(n-1)(D-4)-4p+\sigma$$

hat und frei von stationären Tangenten ist.

Das Bild der parabolischen Kurve von F ist die Kurve H, die der Ort der Kuspidalpunkte von Kurven von $|f|$ ist. Diesen Ort erhält man, wenn man die *Jacobi*sche Kurve eines Netzes von Kurven J aufsucht. In der Tat setzt sich eine derartige *Jacobi*sche Kurve aus der Kurve H und einer Kurve f zusammen. Daraus folgt, daß H die Ordnung $4(2n-3)$[1044], in jedem ν_i-fachen Hauptpunkte die Multiplizität $4(2\nu_i-1)$ und in jedem Punkte C einen Doppelpunkt hat.

Das Geschlecht von H und daher auch der parabolischen Kurve ist

$$64p-6D-8\sigma+21.$$

E. Caporali, von dem diese Ergebnisse herrühren[1045], berechnet auch die Zahlen, die sich auf die abwickelbaren Flächen beziehen, die von den stationären Tangentialebenen und den Doppeltangentialebenen von F[1046] gebildet werden. Die Klasse der ersten wurde schon angegeben, ihr Geschlecht ist gleich dem Geschlecht der parabolischen Kurve und ihre Ordnung

$$2(D+24p-2\sigma).$$

Das Bild der Berührungskurve der Doppeltangentialebenen ist die Kurve K, die der Ort der Doppelpunkte der Kurven von $|f|$ mit zwei Doppelpunkten ist. Diese Kurve K hat die Ordnung

$$3(n-1)(D+4p+\sigma)-31n+42,$$

in jedem ν_i-fachen Hauptpunkte die Multiplizität

$$(3\nu_i-1)(D+4p+\sigma)-31\nu_i+14$$

und in jedem Punkte C die Multiplizität $D+4p+\sigma-8$. Die betreffende Raumkurve hat daher die Ordnung

$$2(D+p-1)(D+4p+\sigma)-17D-28(p-1).$$

1044) *A. Clebsch,* J. f. Math. 67 (1866), p. 15. Vgl. auch *N. R. Pekelharing,* Nieuw Archief voor Wiskunde (2) 11 (1914), p. 132; *F. Schuh,* daselbst, p. 138.

1045) Anm. 1035, p. 149, 158 = Mem. di geom., p. 177, 188.

1046) Anm. 1035, p. 158—163 = Mem. di geom., p. 188—194.

Die Kurven H und K berühren sich in

$$2(64p - 7D - 6\sigma + 20)$$

Punkten, die die Selbstberührungspunkte ebensovieler Kurven von $|f|$ und die Bilder von Punkte von F sind, in denen die Tangentialebene Inflexionstangentialebene für die abwickelbare Fläche der stationären Tangentialebenen ist. Sucht man die übrigen, H und K gemeinsamen Punkte außerhalb der Hauptpunkte und der Punkte C auf, so findet man, daß es

$$24p(D + 4p + \sigma - 25) + 48(D + \sigma - 3)$$

Ebenen gibt, die eine einfache und eine stationäre Berührung mit F haben, so daß also die Bilder der entsprechenden Schnitte Kurven f mit einem Knoten- und einem Kuspidalpunkt sind. Auf ähnliche Weise findet man, daß F

$$\tfrac{1}{6}(D + 4p + \sigma)^3 - (D + 4p + \sigma)(2D + 41p + \sigma) - \tfrac{1}{6}(175D - 3434p + 223\sigma) + 106$$

Tritangentialebenen aufweist (deren Schnitte als Bild eine Kurve f mit drei Doppelpunkten haben).

Die vorhergehenden Ergebnisse können in einigen Sonderfällen[1047]) verschiedene Abweichungen aufweisen. Ist z. B. einer von den Hauptpunkten einfach, so erniedrigt sich die Anzahl der Doppeltangentialebenen von einem allgemeinen Punkt aus an F um eine Einheit, die Anzahl der Inflexionstangentialebenen der abwickelbaren Fläche der stationären Tangentialebenen um zwei Einheiten und die Anzahl der Tritangentialebenen um $D + 4p + \sigma - 8$ Einheiten; die Multiplizität der Kurve K in einem derartigen einfachen Hauptpunkte erhöht sich dagegen um eine Einheit.

Ähnlich erniedrigt jeder doppelte Hauptpunkt die Anzahl der Tritangentialebenen von F um eine Einheit.

Hat einer der Hauptpunkte die Multiplizität $n - 1$, so reduziert sich der Ort H auf die Gruppe der je zweimal gezählten Verbindungsgeraden dieses Punktes mit den Punkten C.

117. Reelle Mäntel der reellen rationalen Flächen und deren Zusammenhangseigenschaften in bezug auf die ebene Abbildung der Fläche. Untersuchungen von A. Comessatti.[1047a]) Die ebene Abbildung ist ein wirksames Hilfsmittel auch für das Studium der *reellen* rationalen Flächen (in einem reellen Raume von drei oder mehr Dimen-

1047) *E. Caporali* [1035]), p. 163—166 = Mem. di geom., p. 194—198.

1047a) Hierüber vgl. den Bericht von *A. Comessatti*, Jahresb. Deutsch. Math.-Ver 41 (1931), p. 107.

sionen), d. h. derer, die durch Gleichungen mit reellen Koeffizienten dargestellt werden können. Hierbei ist zu beachten, daß sich die Darstellung der Koordinaten der Punkte einer derartigen Fläche durch rationale Funktionen zweier Parameter nicht immer durch rationale Funktionen mit reellen Koeffizienten ausführen läßt. Mit anderen Worten, die ebene Abbildung der Fläche kann nicht immer in reeller Weise ausgeführt werden.

Die allgemeinsten Untersuchungen über die reellen rationalen Flächen im Zusammenhang mit der ebenen Abbildung[1048]) stammen von *A. Comessatti*, der zunächst[1049]) die Klassifikation dieser Flächen unter dem Gesichtspunkt der reellen (d. h. durch Gleichungen mit reellen Koeffizienten darzustellbaren) birationalen Transformationen, die Anzahl ihrer Mäntel und die Beziehung dieser Anzahl zu einer (relativen) Invariante der Fläche (der sogenannten Invariante von *Zeuthen-Segre*), ferner die reellen Moduln einer Klasse in bezug auf reelle birationale Transformationen äquivalenter reeller rationaler Flächen studiert hat; darauf[1050]) untersucht er die Zusammenhangseigenschaften der Mäntel und ihre Beziehungen zu der genannten Invariante.

1048) Von speziellen Untersuchungen führen wir an: über die Flächen 3. Ordnung *L. Schläfli*, Quart. J. of math. 2 (1858), p. 117; Trans. London Phil. Soc. 153 (1863), p. 193; Ann. di mat. (2) 5 (1872), p. 289; (2) 7 (1875), p. 193; *F. Klein*, Math. Ann. 6 (1873), p. 551 = Ges. math. Abh. 2, Berlin 1922, p. 11; *H. G. Zeuthen*, Math. Ann. 7 (1873), p. 428; 8 (1874), p. 1; außerdem *G. Herting*, Diss. München 1887; Progr. Augsburg 1887; *H. H. Niesen*, Diss. Groningen 1910; über die kubischen Regelflächen *F. Severi*, Atti Ist. Ven. (8) 5 (1903), p. 863; über die Flächen 4. Ordnung mit Doppelkegelschnitt *H. G. Zeuthen*, „Om flader af fjerde orden med dobbeltkeglesnit“, Festschrift Univ. Kjöbenhavn 1879; ital. Übers. von *G. Loria*, Ann. di mat. (2) 14 (1886—87), p. 31; über die Monoide 4. Ordnung *K. Rohn*, Math. Ann. 24 (1884), p. 55; über die Monoide beliebiger Ordnung *R. Torelli*, Atti Acc. Napoli (2) 14 (1910), Nr. 4, der die Methode von *F. Severi*, a. a. O., durch Betrachtung der durch Projektion vom Scheitel aus erhaltenen ebenen Abbildung der Fläche erweitert und insbesondere eine Methode für die Bestimmung der ein- und zweiseitigen Mäntel mit Hilfe der Abbildung angibt. Es zeigt sich, daß im allgemeinen alle Mäntel zweiseitig sind; weist das Monoid aber in seinen Singularitäten oder seinem Verhalten zu der unendlich fernen Ebene gewisse Besonderheiten auf, so enthält es mindestens einen einseitigen Mantel. S. hierüber weiter die Anm. 1056.

S. weiter noch die Bemerkungen von *F. Klein*, Math. Ann. 7 (1874), p. 549; 9 (1875), p. 476 = Ges. math. Abh. 2, p. 63 über den Zusammenhang der Flächen, insbesondere 2. oder 3. Ordnung.

1049) Math. Ann. 73 (1913), p. 1; Auszug Roma Rend. Acc. Linc. (5) 20^2 (1911), p. 597.

1050) Ann. di mat. (3) 23 (1914), p. 215. Hier (p. 231—252) werden auch die Fundamentaleigenschaften des Zusammenhanges der Flächen systematisch entwickelt und die verschiedenen Gesichtspunkte, unter denen man diese Eigen-

Es sind im wesentlichen zwei Betrachtungen, die diesen Untersuchungen zugrunde liegen. Die erste ist die Betrachtung der reellen linearen Kurvensysteme auf der Fläche, wenn man ein lineares Kurvensystem als reell bezeichnet, wenn es die konjugierte Kurve einer beliebigen Systemkurve enthält. Unter Anwendung des Verfahrens der sukzessiven Adjunktion [III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **27**; III C 6 b (*G. Castelnuovo* und *F. Enriques*), Nr. **12**] von einem allgemeinen reellen linearen System aus findet man in der Tat, daß auf einer reellen rationalen Fläche immer mindestens ein reelles lineares System existiert, das einem der folgenden Typen angehört:

α) Ein Büschel rationaler Kurven;

β) ein Netz vom Grade 2 elliptischer Kurven (das auf das Netz der ebenen kubischen Kurven mit 7 Basispunkten bezogen werden kann);

γ) ein ∞^3-System vom Grade 4 und vom Geschlecht 2 (das auf das System der ebenen Kurven 6. Ordnung mit 8 doppelten Basispunkten bezogen werden kann).

Dies führt zur Einteilung der reellen rationalen Flächen in drei Familien: Eine Fläche gehört der Familie I an, wenn sie Systeme α) enthält, der Familie II, wenn sie keine Systeme α), aber mindestens ein System β), der Familie III, wenn sie nur Systeme γ) enthält.[1051]) Diese Unterscheidung ist gegenüber den reellen birationalen Transformationen invariant und in Übereinstimmung mit den Ergebnissen von *F. Enriques* (Nr. **110**) über die rationalen Flächen vom Standpunkte der birationalen Transformationen mit rationalen Koeffizienten aus.

Die zweite Betrachtung, von der *A. Comessatti* ausgeht, bezieht sich darauf, daß die Realität der algebraischen Gebilde (Punkte, Kurven, lineare Kurvensysteme, ...) einer reellen rationalen Fläche F dadurch gekennzeichnet ist, daß diese Gebilde durch die *konjugierte Transformation* der Fläche (Vertauschung von i in $-i$) in sich verwandelt werden. Geht man von der Fläche zur Bildebene über, so liefert diese Transformation eine involutorische antibirationale (Nr. **62**) Transformation T der Ebene, so daß das Studium der genannten reellen Gebilde von F mit dem Studium der gegenüber T invarianten analogen Gebilde äquivalent ist. Soll daher ein einfaches irreduzibles lineares System einer Dimension $r \geqq 3$ von ebenen Kurven als das Bild der hyper-

---

schaften betrachten kann, verglichen. Endlich (p. 275—278) folgt die Anwendung auf kubische Regelflächen und allgemeine Flächen 3. Ordnung und ein Vergleich dieser Resultate mit den Ergebnissen von *L. Schläfli* und *F. Klein* in den Anm. 1048 angeführten Arbeiten.

1051) Es sei bemerkt, daß ein und dieselbe Fläche Systeme zweier oder sogar aller drei Typen enthalten kann.

ebenen Schnitte einer reellen rationalen Fläche eines r-dimensionalen Raumes betrachtet werden können, so ist notwendig und hinreichend, daß dies System gegenüber einer involutorischen antibirationalen Transformation T invariant ist und invariante Kurven aufweist.

Die Wichtigkeit der Betrachtung dieser Transformation T für das vorliegende Problem beruht darauf, daß zwei in bezug auf reelle birationale Transformationen äquivalente reelle rationale Flächen F, F' zwei Transformationen T, T' entsprechen, die durch (nicht notwendigerweise reelle) birationale Transformationen der Ebene aufeinander reduziert werden können und umgekehrt, so daß den in bezug auf derartige Transformationen verschiedenen Klassen von Transformationen T folglich Klassen von Flächen F entsprechen, die gegenüber reellen birationalen Transformationen voneinander verschieden sind. Infolgedessen wird das Problem der Klassifikation der reellen rationalen Flächen in Beziehung zu reellen birationalen Transformationen durch Reduktion der involutorischen antibirationalen Transformationen der Ebene auf die in Nr. **62** bezeichneten Typen a), b), c), d), e) gelöst.

Will man die vorausgehende Klassifikation der reellen rationalen Flächen in drei Familien weiter fortsetzen, so wird es notwendig, die reellen Mäntel zu betrachten. In der Tat ist klar, daß die Anzahl dieser Mäntel in bezug auf reelle birationale Transformationen invariant ist.[1052])

Alle Flächen mit einem einzigen Mantel rufen Transformationen T hervor, die auf die konjugierte Transformation reduziert werden können, und lassen sich daher reell in eine reelle Ebene transformieren. Alle von Mänteln freien Flächen dagegen führen auf den Typus b) von Nr. **62**, der der einzige von Fixelementen freie Typus ist, und können in eine von reellen Punkten freie reelle Fläche 2. Ordnung transformiert werden.

Diese beiden Fälle beziehen sich auf Flächen der Familie I. Die

1052) Der von *A. Comessatti* geschaffene Begriff reeller (projektiver, d. h. nicht durch die unendlich ferne Kurve der Fläche begrenzter) Mantel, hat gegenüber reellen Transformationen invarianten Charakter. Ist die gegebene Fläche F frei von reellen Singularitäten, oder nur mit isolierten reellen Singularitäten ausgestattet, so wird, wenn man von den möglicherweise vorkommenden isolierten Singularitäten absieht, der reelle Teil von F aus einer gewissen Anzahl (möglicherweise Null) geschlossener, zusammenhängender zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten gebildet. Jede derartige Mannigfaltigkeit heiße *reeller Mantel* von F. Besitzt die Fläche F reelle Singularitäten, so kann sie durch eine reelle Transformation in eine Fläche F' verwandelt werden, die frei von Singularitäten ist, und dann bezeichnet man die zu den Mänteln von F' homologen Mannigfaltigkeiten als Mäntel von F.

übrigen Typen c), d), e) entsprechen den drei Familien I, II, III, und als Anzahl ihrer Mäntel findet man bzw. m, 4, 5.[1053])

Zur Herstellung einer Beziehung zwischen dieser Anzahl und einer Invariante der Fläche geht *A. Comessatti* von der Eigenschaft aus, daß jede reelle rationale Fläche mit mehr als einem Mantel auf eine von einfachen Hauptkurven freie Ebene (Nr. **112**) abgebildet werden kann. Ist dies geschehen, so ist die Anzahl der Hauptpunkte der Abbildung gleich $I+1$, wobei I die (relative) Invariante von *Zeuthen-Segre* [III C 6b (*G. Castelnuovo* und *F. Enriques*), Nr. **14**] der Fläche ist. Daraus ergibt sich, daß der Wert von I für die reellen rationalen Flächen, die die gleiche Anzahl m von Mänteln haben und ein- und derselben Familie angehören, nicht unter ein gewisses Minimum fallen kann, das durch eine passende reelle birationale Transformation tatsächlich erreicht wird. Ein derartiger Minimalwert ist durch folgende Tabelle gegeben.

Für die Familie I:

$I = 2m$, wenn $m > 1$; $I = -1$, wenn $m = 1$; $I = 0$, wenn $m = 0$;

für die Familie II:

$$I = 6, \quad m = 4;$$

für die Familie III:

$$I = 7, \quad m = 5.$$

Die Bedingungen dafür, daß zwei reelle rationale Flächen, die in ein- und derselben Familie enthalten sind und ein- und dieselbe Anzahl m von Mänteln besitzen, zu ein- und derselben Klasse gehören, d. h. gegenüber reellen birationalen Transformationen äquivalent sind, lassen sich durch Gleichsetzung passender *reeller Moduln* ausdrücken.[1054])

1053) *A. Comessatti* gelangt zu diesem Schlusse mit Hilfe der Abbildung der Fläche auf eine reelle Doppelebene, indem man als eine auf eine reelle Doppelebene abbildbare Fläche eine solche betrachtet (Nr. **118**), die ein reelles Netz vom Grade 2 enthält (wobei die Übergangskurve reell ist). Das Resultat, zu dem man gelangt, ist, daß jede reelle rationale Fläche einem der folgenden Typen angehörig betrachtet werden kann:

eine reelle Doppelebene mit einer Übergangskurve der Ordnung $2n$, die einen Punkt mit einer Multiplizität $\geqq 2n-2$ aufweist;

eine reelle Doppelebene mit Übergangskurve 4. Ordnung und vom Geschlecht 3;

eine reelle Doppelebene mit Übergangskurve 6. Ordnung, die zwei unendlich benachbarte dreifache Punkte aufweist, oder ein reeller Doppelkegel 2. Ordnung mit Übergangskurve 6. Ordnung vom Geschlecht 4.

Dies sind also die Typen der rationalen Doppelebenen (Nr. **118**), nur handelt es sich hier um reelle Doppelebenen mit reeller Übergangskurve.

1054) Der Untersuchung dieser Moduln schickt *A. Comessatti* ein tiefgründiges Studium der *charakteristischen linearen Systeme* auf einer Fläche voraus, Für $m = 0, 1$ existieren keine Moduln. Die Flächen der Familie I mit $m > 1$ Mänteln hängen von $2m - 3$ reellen Moduln ab; die der Familie II und III von 6 bzw. von 8 Moduln. Jeder Gruppe von Werten, die man den Moduln erteilt, entsprechen zwei Klassen von Flächen, falls es sich um die Familie I handelt, nur eine einzige, falls es sich um die Familien II und III handelt.

A. Comessatti studiert auch den Zusammenhang der reellen rationalen Flächen[1055]) und verknüpft dessen Eigenschaften sowohl mit den Eigenschaften der ebenen Abbildung, als auch mit den (relativen) invarianten Charakteren der Fläche; dabei betrachtet er nur die von *F. Klein*[1056]) als *absolut* bezeichneten Eigenschaften des Zusammenhangs.

---

indem er mit dieser Bezeichnung irgendeines der reellen linearen Systeme α), β), γ) versieht, dessen Existenz auf der Fläche auf besagte Weise die Zugehörigkeit dieser Fläche zu einer der drei Familien zur Folge hat. So findet er, daß die Fläche der Familie I ein einziges charakteristisches lineares System aufweist, falls $m > 3$ ist, unendlich viele charakteristische Systeme dagegen, die alle bei automorphen reellen birationalen Transformationen der Fläche äquivalent sind, falls $m = 3, 2$ ist; ferner, daß die Flächen der Familie II ebenfalls unendlich viele äquivalente charakteristische Systeme, und die Flächen der Familie III ein einziges charakteristisches System besitzen.

A. Wiman, Wiss. Vorträge, gehalten auf dem fünften Kongreß der Skandinavischen Math. in Helsingfors 1922 (Helsingfors 1923), p. 41 verifiziert diesen Satz direkt im Falle einer allgemeinen kubischen Fläche mit zwei Mänteln, d. h. der Fläche V^{ter} Art von *L. Schläfli*, erste und zweite Anführung in Anm. 1048.

1055) Anm. 1050. Die von *Comessatti* betrachteten Flächen können willkürliche Singularitäten aufweisen, denen bezüglich der Zusammenhangseigenschaften, man denselben Einfluß zuzuweisen übereinkommt, den sie hätten, wenn sie aufgelöst wären. Mit anderen Worten, man betrachtet jede reelle rationale Fläche F in bezug auf den Zusammenhang als äquivalent mit einer von Singularitäten freien anderen Fläche, zu der man mit Hilfe eines wohl bestimmten, mit der ebenen Abbildung von F verknüpften Typus reeller birationaler Transformationen gelangt. Eine Konstruktion eines derartigen Modelles bei *A. Comessatti,* a. a. O., p. 252—254.

1056) Math. Ann. 7 (1874), p. 549; 9 (1875), p. 476 = Ges. math. Abh. 2, p. 63. Vgl. auch *W. v. Dyck,* Ber. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig 37 (1885), p. 314; 38 (1886), p. 53; 39 (1887), p. 40; Math. Ann. 32 (1888), p. 457. Diese Eigenschaften sind invariant in bezug auf eineindeutige, kontinuierliche reelle Flächentransformationen, die im reellen Bereiche frei von Ausnahmen sind. Es sind dagegen *relative* Eigenschaften diejenigen, die nur dann unverändert bleiben, wenn man mit einer besonderen Gruppe von Transformationen operiert, die sich z. B. auf den Raum oder auf gewisse mit der Fläche verbundene Mannigfaltigkeiten beziehen. So sind relative Eigenschaften diejenigen, die sich auf den *projektiven* Gesichtspunkt des Zusammenhangs beziehen (d. h. die gegenüber Deformationen im endlichen Bereich und gegenüber reellen Kollineationen invariant bleiben), und die von *F. Klein,* Math. Ann. 6 (1873), p. 578; 7 (1874), p. 549 = Ges. math. Abh.

Unter diesem Gesichtspunkte werden die Eigenschaften des Zusammenhangs eindeutig an zwei Charaktere geknüpft, einen qualitativen, die *Einseitigkeit* oder *Zweiseitigkeit* der Fläche, und einen numerischen, die *Zusammenhangszahl* (Anzahl der Querschnitte, die man ausführen muß, um die Fläche einfach zusammenhängend zu machen) [III A B 3, B II (*M. Dehn* und *P. Heegaard*), Nr. **3**].

Zur Bestimmung dieser beiden Charaktere, wenn man eine ebene Abbildung von F kennt, geht *A. Comessatti* von einer speziellen ***normalen*** ebenen Abbildung aus, die man für jede reelle rationale Fläche erhalten kann, und zu der man folgendermaßen gelangt.[1057]) Wird F auf eine reelle Ebene abgebildet, so ist das lineare System $|f|$, das

---

2, p. 11, 63, von *K. Rohn* [1048]) und von *H. G. Zeuthen* [1048]) betrachtet wurden. Z. B. sind das einschalige Hyperboloid und der Ring zwar vom projektiven, nicht aber vom absoluten Gesichtspunkt aus voneinander verschieden.

Ein anderer Gesichtspunkt, den man *metrisch* nennen kann, ist der, nach dem man die uneigentlichen Punkte der Mäntel als Grenze betrachtet, wobei auch die Möglichkeit der Deformation der Mäntel im endlichen Bereich übrig bleibt. Hierher gehören die in Anm. 1048 angeführten Arbeiten von *F. Severi* und *R. Torelli*. In der ersten Arbeit findet man verschiedene metrische Typen zweiseitiger kubischer Regelflächen, die vom absoluten Gesichtspunkt aus dagegen alle einseitig sind (und die Zusammenhangszahl 2 haben). Was die Monoide anbetrifft, die *R. Torelli* betrachtet hat, so sind diese, vom absoluten Gesichtspunkt aus, da man eine reelle ebene Abbildung von ihnen ausführen kann, entweder einseitig, oder, wenn sie zweiseitig sind, gehören sie zum Typus der Kugel oder des Rings.

1057) In einigen Sonderfällen kann man die Betrachtung der normalen ebenen Abbildung vermeiden. Kann man z. B. die Abbildung der Fläche auf eine reelle Ebene in reeller Weise erhalten (so daß die Fläche aus einem einzigen Mantel besteht), so ergibt sich die Zusammenhangszahl Z, wenn man der Differenz zwischen der Anzahl der reellen Hauptpunkte der Abbildung und der Anzahl der einfachen reellen Hauptkurven eine Einheit zufügt. Vgl. ***F. Enriques,*** Rend. Acc. Bologna (2) **16** (**1912**), p. 70, der für den Fall, daß die Ordnung der Fläche gerade ist, auch eine hinreichende (nicht aber notwendige) Bedingung dafür angibt, daß die Fläche unter den vorhergehenden Annahmen einseitig ist. Nach dieser Bedingung muß die Summe der Ordnungen dieser einfachen Hauptkurven gerade ($\geqq 0$) sein.

So sind die allgemeinen Flächen 2. Ordnung zweiseitig mit $Z = 0, 2$, je nachdem sie elliptisch oder hyperbolisch sind. Die *Steiner*sche Fläche ist einseitig mit $Z = 1$. Die rationalen Flächen von der Ordnung $n = 3, 4, \ldots 9$, mit elliptischen ebenen Schnitten, die durch reelle kubische Kurven mit reellen Basispunkten, oder ohne Basispunkte für $n = 9$, auf die Ebene abgebildet werden können, sind einseitig, mit $Z = 10 - n$. Die Flächen 4. und 6. Ordnung, die durch Kurven 4. Ordnung mit zwei (reellen oder nicht reellen) doppelten Basispunkten und 4 bzw. 2 imaginaren einfachen Basispunkten abgebildet werden, sind zweiseitig, mit $Z = 2, 0$, je nachdem die beiden doppelten Basispunkte reell sind oder nicht.

das Bild der hyperebenen Schnitte ist, gegenüber einer involutorischen antibirationalen Transformation T, dem Bild der konjugierten Transformation von F, invariant. Nun läßt sich das System $|f|$ durch eine *Cremona*sche Transformation auf einen der drei Ende Nr. **112** angezeigten Typen, und T ebenfalls durch eine *Cremona*sche Transformation auf einen der fünf in Nr. **62** angezeigten Typen reduzieren. Es zeigt sich, daß, mit einer Einschränkung, sich die beiden vorhergehenden Reduktionen gleichzeitig bewerkstelligen lassen. Genauer ergibt sich der Satz, daß jedes irreduzible einfache lineare System einer Dimension $\geqq 3$ von ebenen Kurven, das gegenüber einer involutorischen antibirationalen Transformation T invariant ist und invariante Kurven besitzt, durch eine *Cremona*sche Transformation auf ein analoges System reduziert werden kann, das in bezug auf eine Transformation τ (die die transformierte von T ist), die einem der fünf erwähnten Typen angehört, invariant ist, und außerdem

1. von einfachen Hauptkurven frei ist

oder aber auch, wenn τ die konjugierte Transformation ist,

2. mit einer einzigen zwei verschiedene Hauptpunkte enthaltenden Hauptgeraden ausgestattet ist und frei von anderen reellen Basispunkten (und anderen einfachen Hauptkurven) ist,

3. als einfache Hauptkurven m Geraden besitzt, die von einem Basispunkt O ausgehen und je einen weiteren O unendlich benachbarten Basispunkt enthalten.

Die Abbildung von F heißt *normal*, wenn das lineare System $|f|$, das die hyperebenen Schnitte darstellt, den Bedingungen des Satzes[1058]) genügt.

1058) Die Methode von *A. Comessatti* besteht darin, daß man jeder Fläche F eine reelle Fläche Φ beiordnet, die von F durch eine reelle birationale Transformation abgeleitet wird und deren Zusammenhang direkt geschätzt werden kann, während man den Zusammenhang von F aus dem von Φ auf Grund des Einflusses ableitet, den die zwischen F und Φ bestehende reelle Transformation auf den Zusammenhang ausübt. Führt man sich die Eigenschaften der normalen Abbildung vor Augen, so gelingt es im allgemeinen, Φ derart zu konstruieren, daß die reelle birationale Transformation zwischen F und Φ auf Φ eine endliche Anzahl von Hauptpunkten aufweist und auf F frei von Hauptpunkten ist. Dann ergibt sich die Ableitung des Zusammenhangs von F aus dem von Φ mit Hilfe des Lehrsatzes von *F. Klein*, Math. Ann. 7 (1874), p. 554—557 = Ges. math. Abh. 2, p. 69—73 [neuerlich bewiesen und genauer ausgeführt von *A. Comessatti* [1050]), p. 242; s. Anm. 34]: Findet zwischen zwei Mänteln mit den Zusammenhangszahlen Z und Z' eine kontinuierliche eineindeutige Korrespondenz statt, die auf dem ersten Mantel n, auf dem zweiten n' Hauptpunkte aufweist, so ist

$$Z + n = Z' + n'.$$

Die Invariante von *Zeuthen-Segre* der reellen Fläche F sei I, die Zusammenhangszahl Z, so daß, wenn die Fläche k Mäntel mit den Zusammenhangszahlen $z_1, z_2, \ldots, z_k$ besitzt[1058a]), ist

$$Z = \sum_{i=1}^{k} z_i - 2k + 2.$$

Dann ergibt sich, wie auch die reelle rationale Fläche sei,

$$Z \equiv I \pmod{2},$$

und im Einklang mit dieser Beziehung, wenn die Zahl I gegeben ist, schwankt die Zahl Z, die sich auf eine Fläche einer bestimmten Familie mit einer bestimmten Anzahl m der Mäntel bezieht, zwischen zwei Grenzen, deren untere fest ist, während die obere von I abhängt. Genau ist

$$\begin{gathered} 0 \leqq Z \leqq I + 2, \\ -2m + 2 \leqq Z \leqq I - 4m + 2, \\ -6 \leqq Z \leqq I - 12, \\ -7 \leqq Z \leqq I - 14, \end{gathered}$$

je nachdem F nur einen Mantel hat, zur Familie I (mit $m > 1$ Mänteln), II oder III (mit 4 bzw. mit 5 Mänteln) gehört.

Für einen gegebenen Wert von I und eine gegebene Anzahl m der Mäntel existieren in jeder Klasse Flächen derart, daß die entsprechende Zahl Z die vorhergehenden Beziehungen befriedigt (und im Falle der Familie III derart, daß die Zusammenhangszahl des Mantels, den wir unten als *singulär* bezeichnen werden, $\geqq 1$ ist).

Alle Flächen F mit einem einzigen Mantel, für die $Z > 2$ ist (und die daher auf die reelle Ebene reell abgebildet werden können), sind einseitig. Die zweiseitigen Typen treten nur für $Z = 0$ und für $Z = 2$ auf und sind mit einer Kugel bzw. einem Ring äquivalent.

Alle Mäntel der Flächen der Familien I oder II, deren Z den Minimalwert annimmt, sind zweiseitig und vom Kugeltypus; übersteigt Z dieses Minimum, so ist wenigstens ein Mantel einseitig. Insbesondere haben alle Flächen dieser beiden Familien mit ungeradem I wenigstens einen einseitigen Mantel.

Unter den fünf Mänteln einer Fläche der Familie III existiert ein und nur ein (*singulär* genannter) Mantel, der durch keine reelle birationale Transformation auf einen zweiseitigen Mantel reduziert werden kann. Daher besitzen die Flächen dieser Familie immer wenigstens einen

---

1058a) In der Terminologie der Topologie stimmt die Zahl Z mit der *Betti*-zahl (mod. 2) vom Index 1 überein: *S. Lefschetz*, „Topology“ [3]), p. 35.

einseitigen Mantel, der der singuläre Mantel und dessen Zusammenhangszahl wenigstens gleich 1 ist. Die anderen vier Mäntel können dagegen gleichzeitig auf zweiseitige Mäntel des Kugeltypus reduziert werden, was der Fall ist, wenn Z den Minimalwert annimmt.

Eine dritte von *A. Comessatti* betrachtete Invariante (gegenüber reellen birationalen Transformationen von F) wird aus den *Severi*schen Untersuchungen über die Basis für die Kurvensysteme auf einer algebraischen Fläche [vgl. III C 6b (*G. Castelnuovo* und *F. Enriques*), Nr. **32**] abgeleitet und ist die *reelle Basis* von F. Dies ist die Anzahl $\bar{\varrho}$ der linear unabhängigen reellen algebraischen Kurven, mit denen jede reelle algebraische Kurve von F linear verknüpft ist. Diese Invariante ist mit Z und I durch die einfache Beziehung

$$I + Z = 2(\bar{\varrho} - 1)$$

verbunden, die für jede reelle rationale Fläche gilt, unabhängig von der Familie, der sie angehört, und unabhängig von der Anzahl ihrer Mäntel.[1059])

Neuerdings hat *A. Comessatti*[1060]) gezeigt, daß diese Formel in einer weit allgemeineren Beziehung enthalten ist, die für alle reellen algebraischen Flächen gilt.

118. Abbildung auf mehrfache Ebenen; Rationalitätsfragen [vgl. III C 6b (*G. Castelnuovo* und *F. Enriques*), Nr. **22** und **35**][1060a]). Eine Doppelebene entsteht nicht nur durch (1, 2)-Korrespondenzen zwischen zwei Ebenen (Nr. **92**), sondern allgemeiner (vgl. Nr. **1**), unter Betrachtung einer algebraischen (1, 2)-Korrespondenz zwischen einer Ebene und einer beliebigen algebraischen Fläche, d. h. einer eineindeutigen algebraischen Korrespondenz zwischen den Punkten der Ebene und den Punktepaaren der Fläche. Man sagt dann eben, daß die Fläche *auf die Doppelebene abgebildet ist.*

Man kann auch sagen, daß eine Doppelebene dadurch entsteht, daß man eine Fläche annimmt, die ein Kurvennetz vom Grade 2 enthält und dieses auf das Geradennetz einer Ebene projektiv bezieht.

1059) So hat man für die von Doppelpunkten freien reellen kubischen Flächen, je nachdem sie der I., II., . . ., V. Art von *L. Schläfli* (in den beiden ersten Anführungen in Anm. 1048) angehören, also 27, 15, 7, 3, 3 reelle Gerade besitzen (im IV. Falle sind von den übrigen Geraden 12 punktierte und 12 schlechthin imaginär, im V. Falle alle punktiert), $Z = 7, 5, 3, 1, -1$; $\bar{\varrho} = 7, 6, 5, 4, 3$, während in jedem Falle $I = 5$ ist. Die Flächen der ersten vier Arten bestehen aus einem einzigen einseitigen Mantel, die Flächen der V. Art aus zwei Mänteln, deren einer einseitig mit $z_1 = 1$, deren anderer zweiseitig mit $z_2 = 0$ ist.

1060) Ann. di mat. (4) 5 (1928), p. 299.

1060a) Ausführliches über Doppelebenen bei *F. Enriques*, „Lezioni"[15]), p. 348—438.

Die Übergangskurve der Doppelebene ist der Ort der Punkte der Ebene, denen zwei zusammenfallende Punkte auf der Fläche entsprechen.[1061])

Zwei Flächen, die auf eine Doppelebene abgebildet sind, mit derselben Übergangskurve, sind birational identisch.

Die Gleichung der betrachteten Fläche kann in der Form

$$z^2 = R(x, y) \tag{1}$$

dargestellt werden, wobei R eine ganze rationale Funktion von x, y ist. Ist R ein irreduzibles Polynom, so ist die Gleichung der Übergangskurve $R = 0$; im entgegengesetzten Falle erhält man die Gleichung der Übergangskurve, indem man die mit ungeraden Exponenten ausgestatteten Faktoren von R je einmal nimmt und ihr Produkt gleich Null setzt. Durch eine birationale Transformation kann die Gleichung der Fläche immer in die Gleichung (1) verwandelt werden, wo R nur einfache Faktoren enthält, so daß $R = 0$ die reine Übergangskurve darstellt.

Die Ordnung der Übergangskurve ist immer gerade; denn ist der Grad von R ungerade, so muß der Kurve $R = 0$ die unendlich ferne Gerade der Ebene zugefügt werden.

Die in Nr. **92** betrachteten, von einer ebenen Doppeltransformation herrührenden Doppelebenen sind *rational*, d. h. Doppelebenen, bei denen die genannte Fläche eineindeutig auf die Ebene abgebildet werden kann.

Das Problem der Abbildung einer rationalen Doppelebene auf eine einfache Ebene wurde von *A. Clebsch*[1062]) studiert und hängt von der Untersuchung gewisser Kurven ab, die Berührungen mit der Übergangskurve Ω' der Doppelebene haben. Diese Untersuchung kann als Problem der Zweiteilung der zu Ω' gehörigen *Abel*schen Funktionen aufgefaßt werden.

Dabei bietet sich die Aufgabe der Bestimmung notwendiger und hinreichender Bedingungen, daß eine Doppelebene $\{x, y, \sqrt{R(x, y)}\}$ rational ist, d. h. eine rationale Substitution $x = \varphi(X, Y)$, $y = \psi(X, Y)$ existiert, die das Polynom $R(x, y)$ in ein vollkommenes Quadrat transformiert.

1061) Wird eine Fläche auf eine mehrfache Ebene abgebildet, so kann man das Geschlecht der einer Kurve der Ebene entsprechenden Flächenkurve nach der Formel von *H. G. Zeuthen* (Nr. 2) berechnen. Vgl. *H. G. Zeuthen,* Math. Ann. 3 (1870), p. 323; 4 (1871), p. 637 in Anm. Weitere Formeln in bezug auf die Abbildung einer Fläche auf eine mehrfache Ebene bei *H. G. Zeuthen,* Math. Ann. 4 (1871), p. 48—49 als Sonderfälle von Beziehungen, die für die birationalen Korrespondenzen zwischen zwei beliebigen algebraischen Flächen gelten.

1062) Math. Ann. 3 (1870), p. 45; Auszug Gött. Nachr. 1870, p. 253.

Dieses Problem wurde von *M. Noether*[1063]) gelöst. Damit eine Doppelebene rational sei, ist nach *M. Noether* notwendig und hinreichend, daß ihre Übergangskurve durch eine birationale Transformation der Ebene auf einen der folgenden Typen reduziert werden kann:

a) Kurve einer gewissen Ordnung $2n$ $(n \geqq 1)$ mit einem $(2n-2)$-fachen Punkt;

b) Kurve 4. Ordnung;

c) Kurve 6. Ordnung mit zwei unendlich benachbarten dreifachen Punkten.

In diesen drei Fällen sind Ausartungen zugelassen, außer für a), die Ausartung der Kurve von der Ordnung $2n$ in $2n$ Gerade eines Büschels, für b), die Ausartung der Kurve 4. Ordnung in 4 Gerade eines Büschels, für c), die Ausartung der Kurve 6. Ordnung in 6 Gerade eines Büschels oder drei Kegelschnitte eines Büschels mit zwei gemeinschaftlichen Berührungen. In der Tat erzeugen diese Ausartungen Doppelebenen, die Regelflächen vom Geschlecht > 0 abbilden.[1064])

Den Satz von *M. Noether* beweisen auf anderem Wege und in einfacherer und strengerer Weise von neuem *G. Castelnuovo* und *F. Enriques*[1065]), die sogar notwendige und hinreichende Bedingungen für

---

1063) Sitzungsb. phys.-med. Soc. Erlangen 10 (1878), p. 81.

Für eine andere Form dieser Bedingung s. *M. Noether,* Gött. Nachr. 1871, p. 275.

1064) Der Typus a) für $n = 1, 3$ (der Fall n beliebig wird aber nach der gleichen Methode behandelt), und der Typus b) wurden von *A. Clebsch*[1062]), dann von *R. de Paolis*[839]) untersucht. *A. Clebsch* beweist die Rationalität der entsprechenden Doppelebene. Die Doppelebene des Typus a) für $n = 1$ kann man erhalten, indem man eine Fläche 2. Ordnung von einem allgemeinen Punkt des Raumes aus auf eine Ebene projiziert. Die Doppelebene des Typus b), indem man eine Fläche 3. Ordnung von einem ihrer einfachen Punkte aus auf eine Ebene projiziert: vgl. *C. F. Geiser,* Math. Ann. 1 (1868), p. 129 und III C 10a (*W. Fr. Meyer*), Nr. **16**.

Der Typus c) stammt von *M. Noether*[1063]), erste Anführung, der die Rationalität dieses Typus beweist und sich weiter ausführlich mit ihm beschäftigt, Math. Ann. 33 (1888), p. 524. — *M. Noether,* Math. Ann. 33 (1888), p. 546 verwendet seine Ergebnisse zur Bestimmung aller rationalen Flächen 4. Ordnung mit einem Doppelpunkte.

Über den Typus c) vgl. auch *F. R. Sharpe,* Bull. Amer. math. Soc. (2) 18 (1912), p. 220; (2) 19 (1912), p. 58.

F. Enriques und *F. Severi,* Preisschrift, Acta math. 33 (1910), p. 399, finden eine Doppelebene, deren Übergangskurve aus drei Kegelschnitten gebildet ist, die zu je zweien doppelte Berührung haben, derart, daß die sechs Berührungspunkte die Ecken eines vollständigen Vierseits sind.

1065) Rend. Circ. mat. Palermo 14 (1900), p. 290.

die Rationalität einer Doppelebene, deren Übergangskurve auf irgendeine Art gegeben ist, bestimmt haben. Ist diese Kurve irreduzibel, n^{ter} Ordnung und nur mit gewöhnlichen Singularitäten ausgestattet, so lauten diese Bedingungen, daß keine Kurve von der Ordnung $2n-3i$ $(i>1)$ vorkommen darf, die durch jeden $(2s)$-fachen oder $(2s+1)$-fachen Punkt der gegebenen Kurve $(2s-i)$-mal hindurchgeht.

Zu der *Noether*schen Reduktion der rationalen Doppelebenen auf die drei angegebenen Typen kann man auch dadurch gelangen, daß man die von *E. Bertini* (Nr. **61**) bestimmten Typen involutorischer birationaler Transformationen zugrunde legt und beweist, daß alle diese Involutionstypen rational sind, d. h. ebene Doppeltransformationen hervorrufen. Dieser Beweis wird von *J. Lüroth*[1066]) auf algebraischem, von *E. Bertini*[1067]) auf geometrischem Wege erbracht.

A. Bottari[1068]) betrachtet allgemeiner, von einem analogen Begriffe ausgehend, mittels der von *S. Kantor* und *A. Wiman* (Nr. **63**) bestimmten Typen von periodischen *Cremona*schen Transformationen, die *zyklischen mehrfachen Ebenen*

$$\{x, y, \sqrt[n]{R(x, y)}\}.$$

Für $n>2$ gibt er die Klassifikation dieser Ebenen an, und zwar nach den Typen, auf die die Übergangskurve $R(x, y)=0$ (der unter Umständen die eine gewisse Zahl mal gerechnete unendlich ferne Gerade der Ebene zuzufügen ist) durch eine birationale Transformation der Ebene reduziert werden kann. Das ist gleichbedeutend mit der Bestimmung der Rationalitätsbedingungen der Fläche $z^n = R(x, y)$.

Der Fall n beliebig kann auf den Fall, daß n Primzahl ist, zurückgeführt werden; und in diesem Falle findet man, daß die Übergangskurve durch eine *Cremona*sche Transformation auf einen der folgenden Typen reduziert werden kann:

a) für n beliebig, eine Gruppe von $\mu n+2\ (\mu \geqq 0)$ Geraden, von denen μn durch ein- und denselben Punkt gehen;

für $n=3$, auch

b) eine willkürliche kubische Kurve,

c) eine Kurve 6. Ordnung mit einem vierfachen Punkte und zwei diesem Punkte in verschiedenen Richtungen unendlich benachbarten Doppelpunkten;

für $n=5$, auch

1066) S. Anm. 913.

1067) Rend. Ist. Lomb. (2) 22 (1889), p. 771.

1068) Ann. di mat. (3) 2 (1899), p. 277; Giorn. di mat. (2) 10 (1903), p. 285.

d) eine aus einer willkürlichen kubischen Kurve und einer ihrer Inflexionstangenten zusammengesetzten Kurve.

Hinsichtlich der nicht rationalen mehrfachen Ebenen beschränken wir uns auf folgende Hinweise, da dieser Gegenstand mehr die Flächentheorie angeht [vgl. III C 6 b (*G. Castelnuovo* und *F. Enriques*), besonders Nr. **42**].

M. Bottasso untersucht auf algebraisch-geometrischem Wege die Fundamentalcharaktere (lineares Geschlecht, Flächengeschlecht, ...) einer zyklischen mehrfachen Ebene, deren Übergangskurve irreduzibel ist, sowohl für den Fall, daß diese Kurve[1069]) die allgemeinste Kurve ihrer Ordnung ist, als auch für den Fall, daß die Übergangskurve gewisse elementare Singularitäten[1070]) aufweist.

F. Enriques führt die Klassifikation der Doppelebenen durch, deren Geschlechter alle gleich 1 sind[1071]), sowie der Doppelebenen vom linearen Geschlecht $p^{(1)} = 1$[1072]), und zwar nach den Typen, auf die ihre Übergangskurve durch birationale Transformationen der Ebene reduziert werden kann.

L. Campedelli gibt die vollständige Klassifikation der Doppelebenen mit einer Übergangskurve 8. Ordnung[1072a]) oder 10. Ordnung[1072b]) an.

Ist $R(x, y)$ das allgemeinste Polynom ihres Grades, so zeigt *É. Picard*[1073]), daß der „Index des linearen Zusammenhangs" der Fläche (1) den Wert Null[1074]) annimmt.

1069) Atti Acc. Torino 44 (1908), p. 12.

1070) Atti Acc. Torino 44 (1908), p. 255.

1071) Mem. Soc. ital. delle Scienze (dei XL) (3) 10 (1896), p. 201. S. auch *L. Godeaux,* Annaes scient. Acad. pol. do Porto 14 (1920), p. 15; Bull. Acad. sc. Belgique (5) 9 (1923), p. 459; (5) 18 (1932), p. 311; Bull. Soc. Roy. sc. Liège 1 (1932), p. 64.

1072) Roma Rend. Acc. Linc. (5) 7^1 (1898), p. 234, 253.

1072a) Roma Rend. Acc. Linc. (6) 15 (1932), p. 203.

1072b) Ebenda, p. 358, 536. Eine Doppelebene mit (reduzibler) Übergangskurve 10. Ordnung vorher bei *F. Enriques*[1071]), p. 207.

1073) *É. Picard* und *G. Simart*[114]) 1, p. 85—93, wo auch allgemeinere Sätze angegeben werden.

1074) *É. Picard,* Preisschrift[16]), p. 175ff. verdanken wir die Einführung des Begriffes des *linearen Zusammenhanges* in die Theorie der algebraischen Flächen. Dieser ist eine ungerade Zahl; bezeichnen wir ihn mit $2q+1$, so ist die Zahl $2q$ der *Index des linearen Zusammenhanges.* Die Zahl q ist gleich der *Irregularität* der Fläche und der Anzahl der mit der Fläche verbundenen linear unabhängigen, einfachen *Picard*schen Integrale 1. Gattung. S. III C 6b (*G. Castelnuovo* und *F. Enriques*), Nr. **23** und **25—28**.

Die Zahl $2q$ ist die *Betti*sche Zahl R_1 der Fläche oder der zugehörigen *Riemann*schen vierdimensionalen Mannigfaltigkeit (Nr. **16**); s. *S. Lefschetz,* „Topology"[2]), p. 35.

Mit der Bestimmung dieses Index für die Fläche (1) beschäftigt sich *H. Lacaze*[1075]) in verschiedenen Fällen und zeigt, daß der Index Null wird, d. h. die Fläche regulär ist, wenn das Polynom $R(x, y)$ irreduzibel ist.

Die gleiche Eigenschaft besitzt nach *O. Zariski*[1076]) die Fläche $z^n = R(x, y)$, wenn R ein irreduzibles Polynom und n die Potenz einer Primzahl ist.

M. de Franchis[1077]) bestimmt alle irregulären Doppelebenen, d. h. diejenigen, die $q \geqq 1$ einfache *Picard*sche Integrale erster Gattung besitzen, und beweist, daß in diesem Falle die Übergangskurve $R = 0$ von $2q + 2$ oder $2q + 1$ Kurven ein- und desselben Büschels gebildet wird. Jede Kurve des Büschels ist die Projektion zweier Kurven der Fläche (1), die einem hyperelliptischen Büschel vom Geschlecht q angehören.

A. Comessatti[1078]) bestimmt alle irregulären zyklischen dreifachen Ebenen und beweist, daß auch in diesem Falle die Fläche ein irrationales Kurvenbüschel, und, außer in einem Ausnahmefall, nur ein einziges besitzt.

Nicht jede ebene algebraische Kurve C ist Übergangskurve einer mehrfachen Ebene. Hiervon rühren die Schwierigkeiten her, die man antrifft, wenn man den *Riemann*schen Existenzsatz der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen auf den Fall zweier Veränderlichen erweitern will.[1079])

Die Frage ist zuerst von *F. Enriques*[1080]) studiert worden, der auf topologisch-gruppentheoretischem Wege notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben hat, daß eine Kurve C, die eine gewisse Anzahl von Knoten und Spitzen besitzt, Übergangskurve einer

---

1075) Ann. Fac. des sc. Univ. Toulouse (2) 3 (1901), p. 151.

1076) Proc. Nat. Acad. of Sciences 15 (1929), p. 494. — S. Anm. 1084.

1077) Roma Rend. Acc. Linc. (5) 13^1 (1904), p. 688. S. auch Rend. Circ. mat. Palermo 20 (1905), p. 50.

R. Torelli, Rend. Ist. Lomb. (2) 43 (1910), p. 909, erweitert den Satz von *M. de Franchis* durch Angabe notwendiger und hinreichender Bedingungen dafür, daß ein k-dimensionaler Doppelraum eine voraus bestimmte Anzahl einfacher Integrale 1. Gattung aufweist.

1078) Rend. Circ. mat. Palermo 31 (1910), p. 369.

1079) S. III C 9 (*K. Rohn* und *L. Berzolari*), Anm. 202. S. weiterhin *L. Schlesinger*, Acta math. 56 (1930), p. 1, wo auch, anknüpfend an die Arbeiten von *F. Enriques* und *F. Severi*, über die vorhergehenden Untersuchungen *L. Schlesingers* berichtet wird.

1080) Ann. di mat. (4) 1 (1923), p. 185; Auszug Paris C. R. 154 (1912), p. 418. S. auch Atti Acc. Torino 47 (1912), p. 300.

n-fachen Ebene ist. Legt man in der Ebene $z = 0$ von C ein allgemeines Geradenbüschel $y = tx$ fest, so betrachte man die algebraischen Kurven, die auf einer n-fachen, im Büschel variablen Geraden a dargestellt werden, wobei die Verzweigungspunkte die Schnittpunkte von a mit C sind. Zieht man die zugehörige n-blättrige *Riemann*sche Fläche R_t und die *Argand-Gauß*sche Ebene heran, auf welcher die komplexe Variable t dargestellt wird, so bringen die von *F. Enriques* gefundenen Bedingungen zum Ausdruck, daß die Substitutionen für die Verzweigungspunkte einer R_t gewissen „Invarianzbedingungen" genügen müssen für ein gewisses System von Schleifen, die in der Ebene der komplexen Variablen t die kritischen Punkte umschließen, die den einfachen Tangenten oder Knoten oder Spitzen von C entsprechen.

Daraus folgt: wenn in der Ebene ein stetiges irreduzibles System $\{C\}$ von Kurven C einer gewissen Ordnung gegeben ist, die als Singularitäten nur eine gewisse Zahl von Knoten und Spitzen besitzen, und wenn eine seiner Kurven C Verzweigungskurve einer n-fachen Ebene ist, so trifft dies auch für die anderen Kurven des Systems zu.

O. Zariski[1081]) bemerkt, daß die von *F. Enriques* angegebenen Bedingungen gleichbedeutend sind mit der Behauptung, daß die sogenannte „Fundamentalgruppe" der Kurve C[1082]) bestimmte Besonderheiten aufzuweisen hat. Er hat daher die Fundamentalgruppe der Kurve C eines stetigen irreduziblen und vollständigen Systems $\{C\}$ direkt untersucht, und unter anderem bewiesen, daß, wenn die Fundamentalgruppe von C nicht zyklisch ist, einer der beiden folgenden Fälle eintreten muß: entweder bestimmen die verschiedenen Kurven von $\{C\}$, die von der Ordnung m angenommen sind, auf einer allgemeinen Geraden nicht alle ∞^m Gruppen von m Punkten, oder die Kurven von $\{C\}$, die m gegebene Punkte einer Geraden enthalten, bilden nicht ein stetiges irreduzibles System[1083]). Das liefert

1081) Amer. J. of math. 51 (1929), p. 305; Atti del Congresso intern. dei matem. Bologna 1928, 4 (Bologna 1931), p. 133.

1082) *H. Poincaré*, J. Éc. polyt., (2), cah. 1 (1895), p. 60. Über diesen Begriff vgl. *O. Veblen*, The Cambridge Colloquium 1916, part. II, „Analysis situs" (New York 1922), p. 132; 2. Aufl. 1931, p. 139; *S. Lefschetz*, „Topology" [2]), p. 82. — S. III A B 3 (*M. Dehn* und *P. Heegaard*), C I, p. 207; III A B 13 (*H. Tietze* und *L. Vietoris*), p. 197. In Beziehung zur topologischen Behandlung der Singularitäten einer algebraischen, allgemein einer algebroiden Kurve s. *O. Zariski*, Amer. J. of math. 54 (1932), p. 453.

1083) *O. Zariski* zeigt, daß, wenn die Fundamentalgruppe einer irreduziblen Kurve C abelsch ist, sie notwendig die zyklische Gruppe der Ordnung n ist; außerdem zeigt er, daß die Fundamentalgruppe die zyklische Gruppe der Ordin einzelnen Fällen die Antwort auf die Frage, ob eine gegebene Kurve C Verzweigungskurve einer mehrfachen Ebene ist.

O. Zariski[1084]) zeigt ferner, daß für den Fall, in dem die Fundamentalgruppe einer ebenen irreduziblen Kurve

$$(2) \qquad f(x, y) = 0,$$

die bezüglich der uneigentlichen Geraden allgemeine Lage besitzt, zyklisch ist, für jeden Wert der ganzen positiven Zahl n die Fläche

$$(3) \qquad z^n = f(x, y)$$

regulär ist. Das führt ihn zum Studium des Problems, die ebenen algebraischen Kurven (2) zu charakterisieren, die irreguläre zyklische mehrfache Ebenen (3) hervorrufen, und die mithin, nach dem vorigen Satz, als Übergangskurven von mehrfachen, nicht-zyklischen Ebenen aufgefaßt werden können.

O. Zariski betrachtet insbesondere den Fall einer irreduziblen oder reduziblen Kurve (2), die nur Knoten und Spitzen besitzt, und bewertet die Irregularität der Fläche mittels der Überschüsse [III C 4 (*L. Berzolari*), Nr. **35**] von gewissen linearen Kurvensystemen, die durch die als Basispunkte genommenen Spitzen der Kurve (2) bestimmt sind.

Wenn die Kurve (2) irreduzibel ist, erhält man die vollkommene Klassifizierung der entsprechenden mehrfachen zyklischen irregulären Ebenen. Ist die irreduzible Kurve (2), die nur Knoten und Spitzen besitzt, von der Ordnung m, so ist für die Irregularität der Fläche (3) notwendig und hinreichend, daß m und n durch 6 teilbar sind und daß, wenn man $m = 6j$ setzt, das lineare System $\{C_{m-3-j}\}$ der Kurven von der Ordnung $m - 3 - j$, die durch die Spitzen der Kurve (2) gehen, überschüssig ist. Sind diese Bedingungen erfüllt, so hängt die Irregularität der Fläche nicht von n ab und ist gleich dem Überschuß des genannten Systems $\{C_{m-3-j}\}$.[1085])

---

nung n ist, wenn die Kurve irreduzibel ist und nicht vielfache Punkte oder nur gewöhnliche Knoten besitzt. Um daher nichtzyklische Fundamentalgruppen zu erhalten, muß man Kurven mit Spitzen betrachten. Für alle irreduziblen Kurven der ersten vier Ordnungen ist die Fundamentalgruppe zyklisch, außer der Kurve 4. Ordnung mit drei Spitzen. Eine andere Kurve mit nichtzyklischer Fundamentalgruppe ist die Kurve 6. Ordnung mit sechs auf einem Kegelschnitt liegenden Spitzen.

1084) Ann. of math. (2) 32 (1931), p. 485.

Dieser Satz ist in gewisser Hinsicht allgemeiner als der auch von *O. Zariski* stammende vorhergehende, auf den sich die Anm. 1076 bezieht.

1085) Den Fall anderer Singularitäten hat *Marguerite Lehr,* Amer. J. of. math. 54 (1932), p. 471 betrachtet.

Die Frage, wie man erkennt, ob eine gegebene ebene Kurve C Übergangskurve einer mehrfachen Ebene ist, wurde vollständig gelöst von *B. Segre*[1086]) für die n-fachen Ebenen, die er *allgemeine* nannte, d. h. für diejenigen, die Projektionen einer allgemeinen Fläche n^{ter} Ordnung des gewöhnlichen Raumes von einem Punkt außerhalb derselben sind. Damit eine ebene irreduzible Kurve der Ordnung $n(n-1)$ Übergangskurve einer n-fachen allgemeinen Ebene sei, ist notwendig und hinreichend, daß sie $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)$ Knoten und $n(n-1)(n-2)$ Spitzen besitzt, durch die, ohne sich zu berühren, eine Kurve der Ordnung $(n-1)(n-2)$ und eine Kurve der Ordnung $(n-1)(n-2)+1$ gehen.[1087])

VIII. Andere besondere Abbildungen und algebraische Korrespondenzen.

119. Verschiedene rationale Mannigfaltigkeiten dreier Dimensionen. Auf Rationalität hin wurden insbesondere einige dreidimensionale Mannigfaltigkeiten untersucht.

Seit langer Zeit schon wird das Problem der Rationalität der von mehrfachen Punkten freien kubischen Hyperfläche im Raume S_4,

---

Bemerkenswert sind einige Anwendungen von *O. Zariski*[1084]) auf Kurven, die nur Knoten und Spitzen besitzen. Ist eine solche Kurve irreduzibel und von der Ordnung m, und ist β die größte ganze Zahl derart, daß $6\beta < m$ ist, so sind die linearen Systeme von Kurven der Ordnungen $m-4$, $m-5, \ldots, m-3-\beta$, die einfach durch die Spitzen der Kurve gehen, regulär. Daraus folgert man, daß nicht immer ebene algebraische Kurven mit vorher bestimmten *Plücker*schen Charakteren vorhanden sind. Z. B. existieren nicht Kurven 7. Ordnung mit 11 (oder mehr) Spitzen, oder Kurven 8. Ordnung mit 16 (oder mehr) Spitzen. Einen mehr elementaren Beweis dieser letzten Eigenschaft gibt *O. Zariski,* Amer. J. of math. 53 (1931), p. 309.

1086) Mem. Acc. d'Italia 1 (1930), Nr. 4.

1087) Für $n > 2$ sind diese letzten Bedingungen nicht Folgerungen der ersten, denn für $n > 2$ existieren Paare von stetigen, voneinander verschiedenen Systemen von Kurven mit denselben *Plücker*schen Charakteren, von denen das eine aus Übergangskurven besteht und das andere nicht. Für $n = 3$ s. *B. Segre,* Roma Rend. Acc. Linc. (6) 10 (1929), p. 557; für $n = 4$ s. *B. Segre*[1086]), p. 31.

Daraus folgt, daß im allgemeinen die *Plücker*schen Zahlen zur Charakterisierung der Kurven eines stetigen Systems nicht genügen.

In [1086]) erweitert *B. Segre* seinen Satz auf den Fall, in dem es sich handelt um den Umriß einer algebraischen Fläche, die eine endliche Anzahl von konischen oder biplanaren Doppelpunkten besitzt, und behandelt ausführlich den Fall $n = 4$, wobei er neue Eigenschaften der allgemeinen ebenen Kurve 4. Ordnung findet.

untersucht[1088]); anscheinend[1089]) aber muß diese Frage verneinend beantwortet werden.[1090])

F. Enriques[1091]) wendet die Ergebnisse in Nr. **110** auf die Untersuchung typischer Abbildungen an, die man für die dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten mit einem linearen ∞^i-System ($i = 1, 2, 3$) rationaler Flächen (d. h. derart, daß eine und nur eine Fläche des System durch i allgemeine Punkte der Mannigfaltigkeit geht) erhalten kann. Insbesondere ergibt sich die schon von *M. Noether*[1092]) bemerkte Eigenschaft, daß die kubische Hyperfläche im Raume S_4 durch die Punktepaare einer Involution des Raums S_3[1093]) abgebildet werden kann.

F. Enriques[1094]) beweist auch, daß eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit einer Ordnung $n > 2$ im Raume S_4 mit einer $(n - 2)$-fachen Geraden g durch eine Involution im Raume S_3 abgebildet werden kann, wenn sie eine nicht aus Kegelschnitten in Ebenen durch g zusammengesetzte rationale Fläche enthält.[1095])

Rationale dreidimensionale Mannigfaltigkeiten in einem Raum S_n erhält man [vgl. III C 7 (*C. Segre*), Nr. 44], wenn man das Problem der Reduktion gewisser linearer Flächensysteme auf Typen durch *Cremona*sche Raumtransformationen (Nr. **107**)[1096]) zu lösen versucht.

Bezeichnet M eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit im Raume S_n, so gilt folgendes:

1088) S. z. B. *F. Enriques,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 3^1 (1894), p. 482, in Anm.

1089) Vgl. *F. Enriques,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 21^1 (1912), p. 82; *F. R. Sharpe,* Bull. Amer. math. Soc. (2) 31 (1925), p. 214.

1090) Die kubischen Hyperflächen im Raume S_4 mit einem oder mehreren Doppelpunkten in endlicher oder unendlicher Anzahl sind dagegen rational und ihre eineindeutige Abbildung auf einen Raum S_3 läßt sich in einfachster Weise durch Projektion aus einem der Doppelpunkte erhalten. S. III C 7 (*C. Segre*), Nr. **42**.

1091) Anm. 995.

1092) In einem Briefe an *C. Segre.* S. *F. Enriques,* Anm. 1088.

1093) *G. Marletta,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 27^1 (1918), p. 371; Rend. e Mem. Acc. Zelanti Acireale (3) 10 (1918), Nr. **2** zeigt allgemeiner, daß jede Hyperfläche n^{ter} Ordnung im Raume S_4, mit einer $(n - 3)$-fachen Ebene und einer in dieser Ebene liegenden $(n - 2)$-fachen Geraden, auf die Punktepaare einer Involution im Raume S_3 bezogen werden kann. Vgl. auch *V. Snyder,* Anm. 722.

1094) Ann. di mat. (3) 20 (1912), p. 109.

1095) Er beweist sogar einen allgemeineren Satz, aus dem folgt, daß jede Kongruenz 1. Ordnung rationaler Kurven im Raume S_3 mit Hilfe einer (im allgemeinen nicht umkehrbaren) rationalen Transformation des Raumes aus einem Geradenbündel erhalten werden kann. S. III C 9 (*K. Rohn* und *L. Berzolari*), Nr. **45**.

1096) *F. Enriques,* Anm. 970.

a) Sind die Schnitte von M mit den S_{n-2} rationale Kurven, so ist M rational, und zwar eine Mannigfaltigkeit 2. Ordnung, oder eine ∞^1-Schar von Ebenen, oder ein Kegel 4. Ordnung, der eine Fläche von *Veronese* von einem Punkte aus projiziert, oder eine Projektion dieses Kegels.[1097])

b) Sind diese Schnitte von M elliptische Kurven und ist die Ordnung von M größer als 3, so ist M rational, oder ein elliptisches ∞^1-System von Ebenen. Ist M rational, so gehört sie höchstens einem Raum S_9 an, hat höchstens die Ordnung 8 und kann durch ein lineares System von Flächen 2. oder 3. Ordnung auf S_3 abgebildet werden.

c) Sind diese Schnitte von M hyperelliptische Kurven vom Geschlechte $p > 1$, so ist M rational, mit Ausnahme des Falles, daß M ein Ebenenbüschel vom Geschlechte p enthält.

Analoge Eigenschaften gelten allgemeiner für alle Mannigfaltigkeiten einer Dimension $\geqq 3$ in einem Raum S_n, deren Schnittkurven rational, elliptisch oder hyperelliptisch sind. Alle Mannigfaltigkeiten mit rationalen Schnitten sind rational, und zwar Mannigfaltigkeiten 2. Ordnung, rationale ∞^1-Scharen von linearen Räumen und die *Verone*sesche Fläche projizierende Kegel, oder eine Projektion dieser Kegel. Auch die nicht kegelförmigen Mannigfaltigkeiten mit elliptischen oder hyperelliptischen Schnitten sind rational mit Ausnahme der aus einer ∞^1-Schar linearer Räume zusammengesetzten und (möglicherweise) der kubischen Mannigfaltigkeiten.[1098])

1097) Über die letzte Eigenschaft und ihre Erweiterungen s. *C. Segre,* Atti Acc. Torino 21 (1885), Anm. auf p. 95—96; Beweise von *E. Bertini* und *C. Segre* bei *E. Bertini*[4]), 1. Ausg., p. 321—322 und Anm. auf p. 342; 2. Ausg., p. 400—402 und Anm. auf p. 422; deutsche Ausg., p. 376—378 und Fußnote auf p. 397; *A. Tanturri,* Giorn. di mat. (2) 14 (1907), p. 291; *G. Scorza,* Rend. Circ. mat. Palermo 28 (1909), p. 400; *A. Terracini,* Atti Acc. Torino 49 (1913), p. 226—227.

1098) Die Erweiterung auf die Mannigfaltigkeiten mit rationalen oder hyperelliptischen Schnitten vom Geschlechte > 1 läßt sich unmittelbar erhalten. S. *F. Enriques,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 2^2 (1893), p. 282, in Fußnote; Math. Ann. 46 (1895), p. 190—191; vgl. auch *S. Kantor,* Amer. J. of math. 23 (1901), p. 20—21; Paris C. R. 132 (1901), p. 124; *F. Enriques,* Paris C. R. 132 (1901), p. 248.

Der Fall der elliptischen Schnitte wird von *G. Scorza,* Ann. di mat. (3) 15 (1908), p. 217 [Auszug Roma Rend. Acc. Linc. (5) 17^1 (1908), p. 10] untersucht, der alle möglichen Typen eingehend studiert, und auch ihre Abbildungen, die man, wenn M rational ist, durch lineare Systeme kubischer Hyperflächen erhalten kann. — Über diesen Fall vgl. auch *S. Kantor,* Amer. J. of math. 24 (1902), p. 254—255. Ein besonderer Fall bei *C. G. F. James,* Proc. Cambridge Phil. Soc. 21 (1923), p. 675.

Luisa Bellesini, Catania Atti Acc. Gioenia (5) 13 (1921), Nr. XIV untersucht die Abbildung verschiedener rationaler dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten im

Als Folge der vorhergehenden Untersuchungen studiert *G. Fano*[1099]) die algebraischen dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten in einem Raum S_n ($n \geqq 4$), deren Schnittflächen rational sind. Er beweist, daß alle diese Mannigfaltigkeiten mit Ausnahme eventuell der von Doppelpunkten freien kubischen Hyperfläche im Raume S_4 rational sind, und untersuchte ihre eindeutige Abbildung auf einen Raum S_3.[1100])

Raume S_4 und S_5, deren Schnittkurven das Geschlecht 3 haben, auf einen Raum S_3.

M. Pieri, daselbst (4) 15 (1902), Nr. XI, p. 14 studiert eine rationale dreidimensionale Mannigfaltigkeit im Raume S_5, deren Schnittkurven das Geschlecht 4 haben.

1099) Ann. di mat. (3) 24 (1915), p. 49; Auszug in „Scritti mat. offerti ad Enrico d'Ovidio", Torino 1918, p. 342.

G. Fano, Mem. Acc. Torino (2) 48 (1898), p. 221 untersucht die Abbildung verschiedener anderer dreidimensionaler rationaler Mannigfaltigkeiten auf einen Raum S_3, z. B. die Abbildung der Mannigfaltigkeit, die der Ort der Treffgeraden zweier rationaler Normalkurven von der Ordnung m und n ist, die in zwei unabhängigen linearen Räumen eines Raumes S_{m+n+1} liegen.

1100) Einige rationale dreidimensionale Mannigfaltigkeiten, die auf einen Raum S_3 durch ein lineares System von Flächen 2. oder 3. Ordnung abbildbar sind, behandelt *P. del Pezzo*[1014]), p. 261—263.

Die durch vier kollineare Gebilde 3. Stufe erzeugte (rationale) Hyperfläche 4. Ordnung im Raume S_4 wurde von *G. Veronese*[950]), p. 233 betrachtet.

G. Marletta, Giorn. di mat. (2) 9 (1902), p. 265; (2) 10 (1903), p. 47, 113 1901] untersucht, vor allem für $n = 4$, die (rationale) Hyperfläche n^{ter} Ordnung mit einer $(n-2)$-fachen Ebene des Raumes S_4 und ihre Abbildung auf einen Raum S_3.

F. d'Amico, Catania Atti Acc. Gioenia (4) 18 (1905), Nr. XI untersucht die Abbildung der Hyperfläche 4. Ordnung im Raume S_4 mit drei paarweise windschiefen einfachen Ebenen auf einen Raum S_3.

G. Aprile, daselbst (5) 7 (1914), Nr. XXII; (5) 8 (1915), Nr. XXVIII untersucht die Hyperfläche 4. Ordnung und eine gewisse Hyperfläche 5. Ordnung im Raume S_4, die beide eine zweifache normale kubische Regelfläche enthalten, und ihre eindeutige Abbildung auf einen Raum S_3. — In Giorn. di mat. (3) 7 (1915), p. 294; Catania Atti Acc. Gioenia (5) 12 (1918), Nr. X; Roma Rassegna di mat. e fis. 2 (1921—22), p. 25, und letzte Anführung in Anm. 896 untersucht *G. Aprile* verschiedene rationale Hyperflächen 5. und 6. Ordnung im Raume S_4, die unendlich viele Flächen 2. Ordnung enthalten und ihre Abbildungen auf den Raum S_3, außerdem verschiedene rationale Flächen 5. und 6. Ordnung mit unendlich vielen Kegelschnitten.

G. Aprile, dritte Anführung in Anm. 896, und *L. Roth*[896]) studieren die eindeutige Abbildung zweier rationaler Hyperflächen 4. Ordnung, die bei den in Anm. 896 erwähnten Doppeltransformationen im Raume S_4 auftreten, auf einen Raum S_3.

L. Roth[818]) untersucht die (rationale) Hyperfläche 4. Ordnung des Raumes S_4, den Ort der Pole einer Hyperebene in bezug auf die Hyperflächen 2. Ordnung eines linearen ∞^3-Systems, und ihre Abbildung auf die Hyperebene.

Nach *G. Fano*[1101]) ist jede algebraische dreidimensionale Mannigfaltigkeit des Raums S_n $(n > 3)$ rational, die eine transitive kontinuierliche (daher mindestens ∞^3) Gruppe automorpher projektiver Transformationen zuläßt.

120. Andere besondere Abbildungen und rationale Mannigfaltigkeiten. Eindeutige Abbildungen anderer rationaler Mannigfaltigkeiten auf einen linearen Raum wurden schon in anderen Artikeln der Encyklopädie betrachtet. Wir führen die folgenden, durch passende Projektionen erhaltenen Abbildungen an: Die durch „stereographische Projektion" erhaltene Abbildung der Hyperflächen 2. Ordnung im Raume S_n auf eine Hyperebene [III C 7 (*C. Segre*), Nr. **16, 18**][1102]);

J. G. Semple[693]) betrachtet dreidimensionale rationale Mannigfaltigkeiten, die durch ein lineares System von kubischen Flächen auf einen Raum S_3 abgebildet werden können.

1101) Roma Rend. Acc. Linc. (5) 8^1 (1899), p. 562.

1102) Diese Darstellung liefert insbesondere die Abbildung eines linearen Geradenkomplexes auf einen Raum S_3. S. hierüber III C 8 (*K. Zindler*), Nr. **6,** c).

Von der (stereographischen) Projektion einer Hyperfläche 2. Ordnung von einem ihrer Punkte auf eine Hyperebene macht schon Gebrauch *G. Darboux,* Paris C. R. 69 (1869), p. 392 um die metrische Geometrie eines Raumes S_{n-1} von der Geometrie einer Hyperfläche 2. Ordnung im Raume S_n abzuleiten [vgl. III C 7 (*C. Segre*), Nr. **18**]. Die Äquivalenz dieser beiden Geometrien, d. h. der projektiven Geometrie einer Hyperfläche 2. Ordnung im Raume S_n, auf der ein Punkt fixiert ist, mit der metrischen Euklidischen Geometrie eines Raumes S_{n-1}, ist vollständig von *F. Klein*, Math. Ann. 5 (1871), p. 257 = Ges. math. Abh. 1, Berlin 1921, p. 106 [vgl. auch Erlanger Programm 1872 [554]) § 4 = Ges. math. Abh. 1, p. 468] klargelegt, der die Haupteigenschaften und die allgemeinen Formeln der stereographischen Projektion angibt und davon Gött. Nachr. 1872, p. 164 = Math. Ann. 22 (1883), p. 234 = Ges. math. Abh. 1, p. 153 eine andere Anwendung macht. — S. auch *A. Giacomini,* Ann. Scuola Norm. sup. Pisa 8 (1899), Nr. **4.**

F. Klein, Math. Ann. 5 (1871), p. 267; Erlanger Progr. 1872 [554]), § 6 = Ges. math. Abh. 1, p. 116, 474 [s. auch *F. Klein* und *Fr. Schilling,* „Einleitung" [599]) 1, p. 381; *F. Klein* und *W. Blaschke,* „Vorlesungen" [599]), p. 197; *M. Bôcher* [616]), p. 243—244] bemerkt auch (vgl. Nr. **71**), daß die Gruppe der Transformationen durch reziproke Radien und der Ähnlichkeiten in jedem Euklidischen Raum S_n $(n > 1)$ durch stereographische Projektion aus der Gruppe der Kollineationen eines Euklidischen Raumes S_{n+1} erhalten werden kann, die eine nicht ausgeartete Hyperfläche 2. Ordnung dieses Raumes S_{n+1} in sich transformieren [s. III AB 4b (*G. Fano*), Nr. **11**]. Vgl. auch *G. Koenigs,* „La géométrie réglée et ses applications", Paris 1895, p. 130ff.; außerdem *U. Amaldi,* Rend. Circ. mat. Palermo 16 (1902), p. 17, wo diese Eigenschaft von neuem bewiesen wird und zur Bestimmung der Typen reeller konformer Gruppen mit einem Parameter im gewöhnlichen Raume dient.

Über die Klassifikation und Bestimmung der in bezug auf die genannte die Abbildung der $(n-2)$-dimensionalen $(n>3)$ Mannigfaltigkeit 4. Ordnung, der Basis eines Büschels von Hyperflächen 2. Ordnung im Raume S_n, durch Projektion von einer ihrer festen Geraden aus [a. a. O., Nr. **20**] auf einen Raum S_{n-2}[1103]); die Abbildung der aus einem rationalen ∞^1-System von Räumen S_i zusammengesetzten $(i+1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit n^{ter} Ordnung im Raume S_{n+i}, deren Abbildung man erhält, wenn man sie von einem passend gewählten Raume S_{n-2} auf einen Raum S_{i+1} projiziert [a. a. O., Nr. **43**].[1104])

Werden die Räume S_k eines gegebenen Raumes S_n durch *Graßmann*sche [a. a. O., Nr. 2] (überschüssige) homogene Koordinaten dargestellt und diese Koordinaten als homogene Koordinaten eines Punktes in einem Raum S_ϱ gedeutet, wobei

$$\varrho = \binom{n+1}{k+1} - 1$$

ist, so werden die Räume S_k des Raumes S_n eineindeutig und ohne Ausnahme durch die Punkte einer algebraischen Mannigfaltigkeit V_t dargestellt, die von vielfachen Punkten frei ist, die Dimension $=(k+1)(n-k)$, die Ordnung[1105])

$$N = \frac{1!\,2!\,\ldots\,k!\,t!}{(n-k)!\,(n-k+1)!\,\ldots\,n!}$$

besitzt und in einem Raume S_ϱ und keinem linearen Raume niedrigerer

---

Gruppe des Euklidischen Raumes S_n invarianten Kurven s. *E. Schubarth,* Enseign. math. 25 (1926), p. 234.

Die stereographische Projektion einer Kugel im Raume S_4 untersucht *K. Brauner,* Abh. math. Seminar der Hamburgischen Univ. 6 (1928), p. 9 für das Studium der analytischen Funktionen zweier unabhängiger Veränderlicher.

1103) Sonderfälle dieser Abbildung sind die Abbildungen eines quadratischen Geradenkomplexes auf einen Raum S_3 und einer Geradenkongruenz 2. Ordnung 2. Klasse [III C 8 (*K. Zindler*), Nr. **45**] auf eine Ebene. Über die erste s. Anm. 786; über die zweite *E. Caporali,* Roma Mem. Acc. Linc. (3) 2 (1877—78), p. 749 = Mem. di geom., p. 54, der auch die Formeln der Abbildung angibt; außerdem *R. Sturm,* „Die Gebilde" [40]) 2, p. 98—103; *C. M. Jessop* [786]), p. 183—186; *H. F. Baker,* „Princ. of geom." [46]) 4, p. 236—237. Über die Abbildung dieser Kongruenz auf eine Fläche 3. Ordnung oder eine Fläche 4. Ordnung mit Doppelkegelschnitt s. *L. Cremona,* Roma Mem. Acc. Linc. (2) 3 (1875), p. 285 = Opere 3, Milano 1917, p. 384; *F. Schur,* Diss. Berlin 1879, p. 23; Math. Ann. 15 (1879), p. 445; *R. Sturm,* a. a. O., p. 146—147, 180—184, 198—203.

1104) Über die rationalen Regelflächen $(i=1)$ s. Nr. **114,** 2); für $i=2$ *C. Segre,* Atti Acc. Torino 21 (1885), p. 95; für i beliebig *A. Bellatalla,* daselbst 36 (1901), p 803. Vgl. auch *E. Bertini* [4]), 1. Ausg., p. 303—305; 2. Ausg., p. 376—378; deutsche Ausg., p. 353—355.

1105) Der Wert von N findet sich bei *H. Schubert,* Mitt. math. Ges. Hamburg 1 (1884), p. 87; Acta math. 8 (1885), p. 97.

Dimension liegt. Die Mannigfaltigkeit V_t ist rational, da sie birational auf die *Segre*sche Mannigfaltigkeit (s. Anm. 255) der Gruppen von $k+1$, in $k+1$ Räumen S_{n-k-1} des Raumes S_n angenommenen Punkten bezogen werden kann, und wurde von *F. Severi*[1106]) untersucht, der sie „*Graßmann*sche Mannigfaltigkeit" mit den Indizes n, k nennt. Insbesondere studiert *F. Severi* deren eineindeutige Abbildung auf einen Raum S_t, die sich durch Projektion aus einem passend gewählten Raume $S_{\varrho-t-1}$ konstruieren läßt, und beweist, daß die Mannigfaltigkeit V_t in der Klasse aller Mannigfaltigkeiten, die die Gesamtheit der Räume S_k eines Raumes S_n birational und ohne Ausnahme darstellen, ein Modell von der Minimalordnung[1107]) bildet, das außerdem in dem Sinne projektiv bestimmt ist, daß jede für ihren Raum [a. a. O., Nr. **6**] normale Mannigfaltigkeit von der Minimalordnung der betrachteten Klasse projektiv identisch mit der Mannigfaltigkeit V_t ist.[1108])

1106) Ann. di mat. (3) 24 (1915), p. 89; ein Hinweis auch in „Conf. di geom. alg." [6]), p. 67—68. S. außerdem *A. Rosenblatt,* Paris C. R. 178 (1924), p. 1258; Ann. Soc. polonaise de math. 3 (1924), p. 29; Mém. Soc. sc. Liège (3) 16 (1931), Nr. 6; *J. G. Semple,* Proc. London math. Soc. (2) 32 (1931), p. 200; *T. G. Room,* J. London math. Soc. 7 (1931), p. 4; *U. Morin,* Rend. Semin. mat. Univ. Padova 3 (1932), p. 82. — Anwendungen bei *L. M. Brown,* J. London math. Soc. 5 (1930), p. 168; *D. W. Babbage,* Proc. Cambridge Phil. Soc. 28 (1932), p. 421. — Für $k=1$ vgl. *C. H. Sisam,* Atti Acc. Torino 46 (1911), p. 481; für $n=5$, $k=1$ s. *G. Fano,* Roma Rend. Acc. Linc. (6) 11 (1930), p. 329. — Für $n=5$, $k=2$ wurde die Abbildung von *C. Segre,* Ann. di mat. (3) 27 (1918), p. 75 und 151 [Auszug Roma Rend. Acc. Linc. (5) 26^1 (1917), p. 341] verwandt, und noch von *C. V. Hanumanta Rao,* Proc. Cambridge Phil. Soc. 26 (1930), p. 72 studiert.

1107) S. Nr. **1**. Nach Anm. 19 ist die absolute invariante Ordnung der Mannigfaltigkeit V_t gleich 1, die relative invariante Ordnung gleich N.

1108) Zahlreiche Abbildungen der aus den Geraden eines Raumes S_n gebildeten $2(n-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit auf einen linearen Raum bei *S. Kantor,* J. f. Math. 118 (1897), p. 105. S. auch *B. Levi,* Mem. Acc. Torino 2) 48 (1899), p. 113; *A. Terracini,* Atti Acc. Torino 48 (1913), p. 432; *J. A. Todd,* Proc. London math. Soc. (2) 33 (1932), p. 328, und vor allem für $n=4$, auch *J. G. Semple,* Proc. London. math. Soc. (2) 30 (1930), p. 500; *J. A. Todd,* daselbst, p. 513; *W. G. Welchman,* Proc. Cambridge Phil. Soc. 28 (1932), p. 275, 416.

Für $n=3$, d. h. Abbildungen des gewöhnlichen Geradenraums auf einen vierdimensionalen linearen Raum s. III C 8 (*K. Zindler*), Anm. 699; außerdem *R. Sturm,* „Die Gebilde" [40]) **1**, p. 272—291; *C. M. Jessop* [786]), p. 244 ff.; *G. Schaake,* Diss. Groningen 1922; *Em. Müller* und *E. Kruppa* [59]) **1**, p. 277 ff.

Über die *Klein*sche Abbildung des Geradenraumes auf eine Hyperfläche 2. Ordnung im Raume S_5 s. III C 8 (*K. Zindler*), Nr. **22**. Vgl. auch *H. F. Baker,* „Princ. of geom." [46]) 4, p. 40 ff.; *H. W. Turnbull,* Proc. Cambridge Phil. Soc. 22 (1925), p. 694; *T. L. Wren,* daselbst, 23 (1926), p. 386; *L. Roth,* daselbst 27 (1931), p. 190; Proc. London math. Soc. (2) 32 (1931), p. 72; *W. L. Edge* [924]), p. 22 ff.

Eine Abbildung des Strahlenraumes auf das quadratische ∞^4-System der Kegelschnitte, die den einem festen Kegelschnitt umbeschriebenen Dreiecken um-

G. Bordiga[1109]) untersucht insbesondere die $(2n)$-dimensionale Mannigfaltigkeit im linearen Raume von $\frac{n(n+3)}{2}$ Dimensionen, die die nicht geordneten Gruppen von n Punkten einer Ebene darstellt. Den Gruppen von n zusammenfallenden Punkten entsprechen die Punkte der gegen Ende Nr. **111** erwähnten Fläche Φ.[1110])

---

beschrieben sind, erwähnt *L. Cremona,* Giorn. di mat. (1) 10 (1872). p. 47 = Opere 3, Milano 1917, p. 295 in einem Brief vom 11. Januar 1872 an *E. Beltrami* [vgl. *E. Beltrami,* Giorn. di mat. (1) 9 (1871), p. 344 = Opere 2, Milano 1904, p. 186—187] an. Eingehend untersucht wird diese Abbildung von *F. Aschieri,* Rend. Ist. Lomb. (2) 12 (1879), p. 265, 341; (2) 18 (1885), p. 494; Mem. Ist. Lomb. (3) 6 (1885), p. 75 und 263; Wiedergabe bei *R. Sturm,* „Die Gebilde" [40]) 1, p. 291—300; kurzgefaßt auch bei *Em. Müller* und *E. Kruppa,* a. a. O., p. 139—143, ferner bei *J. de Vries,* Ak. Amsterdam Versl. (4) 34 (1925), p. 13 und ausführlicher bei *C. Segre*[1011]).

Abbildungen des Strahlenraumes durch die geordneten Punktepaare einer Ebene bei *G. Lazzeri,* Atti Ist. Ven. (6) 3 (1884), p. 247, 437; *B. Mayor,* Paris C. R. 135 (1902), p. 1318; *S. Kakeya,* Tôhoku math. J. 2 (1912), p. 212; *J. de Vries,* Christiaan Huygens 1 (1921), p. 29; 2 (1922), p. 133; Ak. Amsterdam Versl. (4) 34 (1925), p. 208. — Derartige Abbildungen wurden weiterhin von *W. Blaschke,* Ztschr. Math. Phys. 60 (1911), p. 61; *E. Kleinmann,* Diss. Hamburg 1921; *Anna Fischer,* Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 37 (1928), p. 263 untersucht und sind in allgemeineren, von *F. Rehbock,* Ztschr. angew. Math. u. Mechanik 6 (1926), p. 379, 449 [vgl. auch Monatsh. Math. Phys. 38 (1930), p. 257] angegebenen Abbildungen enthalten. Über die Abbildungen von *W. Blaschke* [und von *J. Grünwald,* Anm. 1116] s. *Em. Müller* und *E. Kruppa*[59]) 1, p. 240—277, wo auch der Zusammenhang mit den vorhergehenden Untersuchungen von *E. Study* aufgezeigt wird. S. auch *J. Klima,* Časopis 57 (1927), p. 7.

F. Palatini, Atti Ist. Ven. (8) 2 (1900), p. 861; (8) 3 (1901), p. 371; Roma Rend. Acc. Linc. (5) 11^1 (1902), p. 315, gibt eine lineare Abbildung der linearen Geradenkomplexe im Raume S_4 auf die Punkte eines Raumes S_9, und in ähnlicher Weise für die linearen Geradenkomplexe im Raume S_5 und S_n.

Eine Abbildung der fünfdimensionalen Mannigfaltigkeit, die von den Ebenenbüscheln des Raumes S_3 gebildet wird, auf die Kegelschnitte einer Ebene studiert *J. Wolff,* Ak. Amsterdam Versl. (4) 34 (1925), p. 325.

1109) Anm. 255.

1110) *G. Bordiga,* Atti Ist. Ven. 77^2 (1918), p. 317 [s. auch daselbst 55 (1897), p. 1091; außerdem *E. Bertini*[4]), 1. Ausg., p. 50; 2. Ausg., p. 60; deutsche Ausg., p. 56] untersucht die rationale Geradenmannigfaltigkeit von der Dimension $n+1$, Ordnung $n+1$ und Klasse $n+1$ im Raume S_{2n+1}, den Ort der ∞^n Geraden, die drei gegebene, voneinander unabhängige Räume S_n schneiden und studiert ihre Abbildung auf einen S_{n+1}, die durch Projektion aus einem in irgendeinem der drei gegebenen Räume S_n liegenden Raume S_{n-1} erhalten wird.

A. Brambilla, Giorn. di mat. (2) 4 (1896), p. 1; Atti Acc. Napoli (2) 9 (1899), Nr. 2 [1897]; Nr. 14 [1898], erweitert gewisse Verfahren auf den Raum S_n, die beim Studium der *Steiner*schen Fläche vor allem von *E. Beltrami,* Mem. Acc. Bologna (3) 10 (1879), p. 297—312 = Opere 3, Milano 1911, p. 221—234, und

Bei verschiedenen Fragen erweist sich die Abbildung der Gesamtheit der Hyperflächen m^{ter} Ordnung eines Raumes S_n auf die rationale normale Mannigfaltigkeit M von der Dimension n und der Ordnung m^n in einem Raume S_ϱ $\left[\varrho = \binom{m+n}{n} - 1\right]$ [III C 7 (*C. Segre*), Nr. **44**][1111]) oder auf die Punkte eines Raumes S_ϱ als vorteilhaft.[1112]) Diese M ist nichts anderes als die Mannigfaltigkeit,

---

C. Segre, Giorn. di mat. (1) 21 (1883), p. 355 verwandt wurden, und untersucht so die durch die Gleichung

$$\sum_{i=0}^{n} x_i^{\frac{1}{m}} = 0$$

dargestellte rationale Hyperfläche $(m^{n-1})^{\text{ter}}$ Ordnung, die also vermöge der Transformation $x_i = y_i^m$ der Hyperebene $\sum_{i=0}^{n} y_i = 0$ entspricht. Für $m = 2$ s. auch *B. C. Wong,* Bull. Amer. math. Soc. (2) 35 (1929), p. 605; Amer. J. of math. 54 (1932), p. 293, wo noch weitere rationale Hyperflächen eines Raumes S_n betrachtet werden.

E. Veneroni, Rend. Ist. Lomb. (2) 47 (1914), p. 712 untersucht eine von Doppelpunkten freie rationale kubische Hyperfläche im Raume S_5 und ihre eindeutige Abbildung auf einen Raum S_4. *M. Pieri,* Catania Atti Acc. Gioenia (4) 15 (1902), Nr. XI, hatte schon die Abbildung des Schnittes dieser Hyperfläche mit einer durch zwei Ebenen der ersten Hyperfläche gehenden Hyperfläche 2. Ordnung, auf einen Raum S_3 studiert.

B. Bydžovský, Časopis 52 (1923), p. 11 untersucht die Projektion einer Hyperfläche m^{ter} Ordnung mit einem $(m-1)$-fachen Punkt im Raume S_n von diesem Punkte aus auf eine Hyperebene und leitet davon verschiedene *Cremona*sche Transformationen ab.

Nach *Maria Miglio,* Catania Atti Acc. Gioenia (5) 16 (1927), Nr. I[bis], sind alle durch r gegebene Räume S_{r-2} gehenden $(r-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten r^{ter} Ordnung eines Raumes S_r die Bilder der hyperebenen Schnitte einer r-dimensionalen Mannigfaltigkeit der Ordnung $r!$, die zu einem S_{2^r-1} gehört und r Büschel von $(r-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten der Ordnung $(r-1)!$ enthält.

In Zusammenhang mit den Untersuchungen von Nr. **91** studiert *A. B. Coble,* Amer. J. of math. 54 (1932), p. 425 eine rationale $(2p-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit eines Raumes von $\binom{2p+2}{p}\frac{1}{p+1} - 1$ Dimensionen, die gegenüber einer, mit der symmetrischen Gruppe der Ordnung $(2p+2)!$ isomorphen Kollineationsgruppe invariant ist.

1111) *G. Veronese*[950]), Fußnote auf S. 224—225 und [1011]), wo vor allem der Fall $n = 2$ behandelt wird; s. Nr. **114**, 1. Eine charakteristische differentielle Eigenschaft dieser Mannigfaltigkeit bei *E. Bompiani,* Roma Mem. Acc. Linc. (5) 13 (1922), p. 452; für $n = 2$, Roma Rend. Acc. Linc. (5) 30^2 (1921), p. 248.

1112) Diese Abbildung wird von *F. Palatini,* Atti Acc. Torino 38 (1902), p. 43; Roma Rend. Acc. Linc. (5) 12^1 (1903), p. 378 und *A. Terracini,* Ann. di mat. (3) 24 (1915), p. 1 für das Studium der Darstellung der Formen, vor allem einer bzw. zweier ternärer Formen als Summen von Potenzen linearer Formen deren Punkte in der zweiten Abbildung die Bilder der aus einer m-mal gezählten Hyperebene zusammengesetzten Hyperflächen m^{ter} Ordnung sind.

Von den vielen anderen Abbildungen von Mannigfaltigkeiten untereinander [1113]) erwähnen wir folgende, die Gegenstand vieler Untersuchungen

---

verwandt; von *B. Segre,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 33^1 (1924), p. 182 für das Studium der berührenden linearen Systeme eines Hyperflächensystems eines Hyperraumes. Für $n = 2$ wird diese Darstellung von *F. Severi,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 24^1 (1915), p. 877; „Vorlesungen", p. 307—353, weiter von *E. Bompiani,* Roma Rend. Acc. Linc. (5) 31^2 (1922), p. 471 und *G. Albanese,* „Sui sistemi continui di curve piane algebriche", Pisa 1923, p. 14—21 für das Studium der Mannigfaltigkeit, die aus ebenen Kurven gegebener Ordnung mit Doppelpunkten gebildet ist [vgl. III C 9 (*K. Rohn* und *L. Berzolari*), Nr. **35** und **36**] benutzt; von *L. Brusotti,* Rend. Ist. Lomb. (2) 51 (1918), p. 612; Roma Rend. Acc. Linc. (5) 28^2 (1919), p. 322; (5) 30^1 (1921), p. 375; „Sui fasci reali di curve piane algebriche", Pavia 1919, bei topologischen Untersuchungen über die algebraischen ebenen Kurven verwandt.

Die Abbildung der Gesamtheit der Flächen 2. Ordnung mittels der Punkte eines S_9 wird von *L. Godeaux,* Mém. Soc. sc. Liège (3) 14 (1928), Nr. 6 [vgl. *Th. Reye,* J. f. Math. 82 (1876), p. 54, 173] studiert, der daraus die Geometrie des ∞^{12}-Systems der kubischen Raumkurven ableitet.

Dieselbe Abbildung wird von *W. G. Welkman,* Proc. Cambridge Phil. Soc 27 (1931), p. 20 und *J. A. Todd,* ebenda, p. 538, benutzt um Probleme abzählen der Natur über elliptische Raumkurven 4. Ordnung zu lösen. Analoge Probleme löst mit einer ähnlichen Methode für Kurven eines S_4 *W. G. Welkman,* ebenda 28 (1932), p. 18. Anwendungen auf die Flächen 3. Ordnung bei *T. G. Room,* J. London math. Soc. 7 (1932), p. 147, 154.

1113) Über verschiedene dieser Abbildungen s. besonders III AB 8 (*J. Sommer*), Nr. **25** und **26**; III C 7 (*C. Segre*), Nr. **1**; III C 8 (*K. Zindler*), Nr. **6**, **20**, **22**, **37**, **39**, **40**, **44—52**.

W. Wirtinger, Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 4 (1894—95), p. 97 gibt eine eineindeutige Abbildung der Paare von beigeordneten Korresidualscharen von Punkttripeln einer ebenen Kurve 4. Ordnung mit Doppelpunkt auf die Punkte einer *Kummer*schen Fläche.

A. J. van Ditmarsch, Pröfschrift Utrecht 1928 hat die Linienelemente einer Ebene auf die Tangenten eines Monoids abgebildet.

G. Schaake, Atti del Congresso intern. dei matem. Bologna 1928, 4 (Bologna 1931), p. 45 gibt hyperräumliche Abbildungen der Gebilde, die von einem Punkt und einer mit ihm inzidenten, in einer gegebenen Ebene liegenden Geraden, von einem Punkt und einer mit ihm inzidenten Ebene und von einem Punkt und einer mit ihm inzidenten Geraden in S_3 gebildet werden. — Eine Abbildung der ebenen Linienelemente (Punkt und Gerade inzident in einer Ebene) auf die Punkte eines S_3 findet man bei *S. Lie* und *G. Scheffers* [562]) 1, p. 108.

A. Emch, Comment. math. Helvetici 3 (1931), p. 1 hat einen projektiven Hyperraum S_r auf eine rationale Hyperfläche in einem S_{r+1} abgebildet, um dann umgekehrt aus den Eigenschaften dieser Hyperfläche Schlüsse auf diejenigen von S zu ziehen (besonders für S_2, S_3 und S_4).

sind: die Abbildung der Kreise einer Ebene durch die Punkte des Raumes[1114]); die Abbildung der Gruppen von k Punkten eines Raumes S_n auf die Punkte eines linearen oder nicht linearen Raumes von kn Dimensionen[1115]); die Abbildung des Punktraumes auf eine Mannigfaltigkeit von ∞^3 Punktepaaren in der Ebene („Zweibilderprinzip"), und weitere Abbildungen von drei- und mehrdimensionalen Räumen vor allem bei Anwendungen auf die darstellende Geometrie.[1116])

G. Schaake, Ak. Amsterdam Versl. (4) 33 (1924), p. 432 und *W. van der Woude,* ebenda (4) 34 (1925), p. 270 studieren die Abbildung der Polardreiecke eines Kegelschnittes auf die Punkte des Raumes.

Mannigfaltige Abbildungen von Systemen von algebraischen Raumkurven [III C 9 (*K. Rohn* und *L. Berzolari*), Nr. **74—76**] bei *H. P. Hoestra,* Pröfschrift Utrecht 1928; *J. de Vries,* Ak. Amsterdam Versl. (4) 37 (1928), p. 40, 151, 371, 450; Nieuw Archief voor Wiskunde (2) 15 (1928), p. 217, 219, 225; (2) 16² (1929), p. 39, 43; (2) 16⁴ (1930), p. 1; Arch. Néerland. (3) 13 (1929), p. 140; *J. W. A. van Kol,* Wis- en Natuurk. Tijdschrift 14 (1928), p. 83, 90; Ak. Amsterdam Versl. (4) 37 (1928), p. 156, 334, 772, 778, 907; Nieuw Archief voor Wiskunde (2) 16¹ (1929), p. 37, 40, 84; (2) 16² (1929), p. 31; (2) 16³ (1930), p. 80 [vgl. *J. A. Todd*[1112]), p. 541—542]; *L. Godeaux,* Ak. Amsterdam Versl. (4) 37 (1928), p. 1001; Nieuw Archief voor Wiskunde (2) 16³ (1930), p. 1; *L. Sweerts,* ebenda (2) 17² (1932), p. 137.

1114) *H. Graßmann,* „Die Ausdehnungslehre", Berlin 1862, p. 278—279 (Nr. 405) = Werke 1², Leipzig 1896, p. 274—275; *R. Mehmke,* Ztschr. Math. Phys. 24 (1879), p. 257; *A. Porchiesi,* Mem. Acc. Bologna (4) 3 (1882), p. 681; (4) 5 (1885), p. 421; *J. Thomae,* Ztschr. Math. Phys. 29 (1884), p. 284; *P. H. Schoute,* Sitzungsb. Ak. Wien 94 (1886), p. 786; *I. Amaldi*[606]); *E. Müller,* Monatsh. Math. Phys. 4 (1893), p. 44; *G. Gallucci,* Nouv. Ann. de math. (3) 19 (1900), p. 145; *E. Duporcq,* daselbst, p. 193; *E. Meyer,* Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 16 (1906), p. 138; *C. Cappello,* Giorn. di mat. (2) 15 (1908), p. 197; *K. Doehlemann,* „Geom. Transf." 2, p. 82—84; *K. W. Walstra,* Ak. Amsterdam Versl. (4) 25 (1917), p. 960; *J. Smit,* Diss. Utrecht 1920; *J. de Vries,* Ak. Amsterdam Versl. (4) 29 (1921), p. 920; *J. H. Grace,* Proc. Cambridge Phil. Soc. 23 (1927), p. 859. — Im Zusammenhang mit den konformen und den Berührungstransformationen s. *S. Lie,* Gött. Nachr. 1871, p. 191; Math. Ann. 5 (1871), p. 186, und vor allem *S. Lie* und *G. Scheffers*[562]) 1, p. 411—480; hierüber und über die Kreis- und Kugelgeometrie s. III AB 4b (*G. Fano*), Nr. **11, 12, 13.**

1115) *F. Chizzoni*[912]); *F. Palatini*[838]), wo auch Sonderfälle betrachtet werden. Vgl. auch *F. R. Sharpe*[723]).

1116) *J. Grünwald,* Sitzungsb. Ak. Wien 120 (1911), p. 677 (s. Anm. 1108); *G. Schaake,* Diss. Groningen 1922; Ak. Amsterdam Versl. (4) 34 (1925), p. 49, 472; Handel van het XXˢᵗᵉ Nederl. Natuur- en Geneesk. Congres Groningen 1925, p. 152; *L. Eckhart,* Sitzungsb. Ak. Wien 132 (1923), p. 177; „Konstruktive Abbildungsverfahren", Wien 1926; *J. de Vries,* Ak. Amsterdam Versl. (4) 32 (1923), p. 238; (4) 33 (1924), p. 65; *A. Torroja,* Mem. Acad. de Ciencias y Artes de Barcelona 18 (1924), Nr. 11; Atti del Congresso intern. dei matem. Bologna 1928, 4 (Bologna 1931), p. 51; *D. Montesano,* Rend. Acc. Napoli (3) 32 (1926), p. 215; *Th. Schmid,* Sitzungsb. Akad. Wien 137 (1928), p. 621; *J. Klima,* Prag Ber. Böhm.

121. Konnexe. Eine oder mehrere algebraische Gleichungen mit mehreren Reihen von Veränderlichen bestimmen, wenn die Veränderlichen jeder Reihe als Koordinaten eines Elementes einer Mannigfaltigkeit betrachtet werden, zwischen den Elementen dieser Mannigfaltigkeiten eine algebraische Korrespondenz (Nr. **1**, s. auch die Anführungen gegen Ende der Nr. 5). Sind die verschiedenen Elemente ungleichartig, so erhält man in allgemeinster Weise die *Konnexe.*

Ihre Betrachtung verdanken wir *A. Clebsch*[1117]), der die Konnexe der Ebene untersucht, die durch eine algebraische Gleichung zwischen den Koordinaten eines beweglichen Punktes und denen einer beweglichen Geraden[1118]) dargestellt werden und ihren engen Zusammen-

---

Ges. 1929, Nr. 3; *L. Hofmann*[592]). — Ein allgemeiner Überblick über das Abbildungsprinzip bei *Em. Müller,* Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 22 (1912), p. 44.

Speziell in bezug auf Abbildungen des Punktraumes durch Punktepaare in der Ebene und ihre Beziehungen mit den allgemeinen Abbildungsprinzipien der darstellenden Geometrie s. *P. Cassani,* Atti Ist. Ven. (5) 6 (1884—85), p. 1835; *A. Suini,* Il Politecnico 34 (1886), p. 510; *R. Nicodemi,* Napoli Atti Acc. Pontaniana (1) 25 (1895), Nr. 3; *G. Bordiga,* Atti Ist. Ven. 61 (1902), p. 389, 609; „Lezioni di Geometria descrittiva" (lith.), 1. Ausg. Padova 1902—03; 2. Ausg. Padova 1907; *A. del Re,* Napoli Atti Acc. Pontaniana (2) 9 (1904), Nr. 10; (2) 10 (1905), Nr. 5; (2) 11 (1906), Nr. 5 und 6; Rend Acc. Napoli (3) 10 (1904), p. 278; „Lezioni sulle forme fondamentali dello spazio rigato usw.", Napoli 1906, p. 75 ff.; Roma Rend. Acc. Linc. (5) 17^2 (1908), p. 639; *Em. Müller,* Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 14 (1905), p. 569; *E. Kruppa,* Sitzungsb. Ak. Wien 119 (1910), p. 487; *M. d'Ocagne,* Paris C. R. 175 (1922), p. 737.

Andere Angaben, speziell über frühere Arbeiten, bei *G. Loria,* „Storia della geometria descrittiva", Milano 1921, p. 479 ff.

Eine systematische Darstellung der Betrachtungsweisen von *Em. Müller* und *E. Kruppa* findet sich bei *Em. Müller* und *E. Kruppa,* „Vorl. üb. darst. Geom."[59]) 1.

Eine eingehende Behandlung der allgemeinen Abbildungsverfahren von *Em. Müller* und *E. Kruppa,* insbesondere in Gegenüberstellung mit den früheren Abbildungsverfahren von *G. Bordiga* bei *A. Comessatti,* Atti Ist. Ven. 87 (1928), p. 579.

Analoge Abbildungen in der darstellenden Geometrie eines Raumes S_n bei *U. Perazzo,* Atti Acc. Torino 41 (1906), p. 923. Für $n = 4$ s. *G. Veronese,* Atti Ist. Ven. (5) 8 (1882), p. 981; *G. Carbone,* Giorn. di mat. (2) 8 (1901), p. 207; *G. Loria,* Arch. Math. Phys. (3) 2 (1902), p. 257; *P. H. Schoute,* „Mehrdimensionale Geometrie" 1, Leipzig 1902, p. 84—125; *H. de Vries,* „Die Lehre von der Zentralprojektion im vierdimensionalen Raum", Leipzig 1905; *L. Hofmann,* Sitzungsb. Ak. Wien 130 (1921), p. 169; *Rosaria Sorrentino-Giordano,* Giorn. di mat. (3) 22 (1931), p. 149.

1117) Gött. Nachr. 1872, p. 429 = Math. Ann. 6 (1873), p. 203; franz. Übers. in Bull. Sciences math. (1) 8 (1875), p. 234. S. noch *A. Clebsch* und *F. Lindemann,* „Vorlesungen" 1, p. 924—1037; franz. Übers. 3, p. 335—480. — Invariantentheoretisch für eine beliebige Elementkombination bei *A. Clebsch,* Gött. Abh. 17 (1872), p. 11.

1118) Derartige Gleichungen sind schon kurz von *J. Plücker,* „Anal.-geom. Entw."[600]) 2, Essen 1831, p. 251 ff., ausführlicher dann von *J. G. H. Swellengrebel,* hang mit der Theorie der algebraischen Differentialgleichungen 1. Ordnung zeigt.[1119])

Ist $f(x, u) = 0$ eine Gleichung m^{ten} Grades in den Koordinaten x_1, x_2, x_3 eines Punktes und n^{ten} Grades in den Koordinaten u_1, u_2, u_3 einer Geraden der Ebene, so bestimmt diese Gleichung zwischen den Punkten und den Geraden der Ebene eine derartige algebraische Korrespondenz, daß jedem Punkte x unendlich viele Gerade u entsprechen, die eine Kurve K^n der Klasse n einhüllen, und jeder Geraden u unendlich viele Punkte x, deren Ort eine Kurve C^m der Ordnung m ist. Man sagt, daß sich so ein *Konnex* (m, n), d. h. der *Ordnung* m und *Klasse* n, ergibt. Ein Punkt und eine Gerade, deren Koordinaten der Gleichung $f(x, u) = 0$ genügen, bilden ein *Element* des Konnexes; es gibt ∞^3 derartige Elemente.

Zwei Konnexe haben im allgemeinen ∞^2 gemeinsame Elemente, die eine *Koinzidenz* bilden. Drei Konnexe haben im allgemeinen ∞^1 gemeinsame Elemente, die ein *Kurvenpaar*, also die Gesamtheit zweier Kurven, eines Ortes und einer Hüllkurve, bilden. Vier Konnexe besitzen im allgemeinen eine endliche Anzahl gemeinsamer Elemente.

Man bezeichnet als *identischen Konnex* den bilinearen Konnex, der durch die Gleichung

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

dargestellt wird, und als *Hauptkoinzidenz* eines gegebenen Konnexes die Koinzidenz, die aus den diesem und dem identischen Konnex gemeinsamen Elementen gebildet wird. Bei diesem Gebilde entsprechen jedem Punkte x n durch diesen Punkte gehende Gerade (*Koinzidenzstrahlen*), die von x an die zugehörige Kurve K^n geführten Tangenten, und jeder Gerade u m auf dieser Geraden liegende Punkte (*Koinzidenzpunkte*), die Schnittpunkte von u mit der zugehörigen Kurve C^m.

Betrachtet man in jedem Punkte der Ebene die n Richtungen der zugehörigen n Koinzidenzstrahlen, so ergibt sich ein Kurvensystem mit der Eigenschaft, daß durch jeden Punkt der Ebene n Systemkurven gehen und jede Gerade der Ebene von m Systemkurven berührt wird. Diese Kurven heißen die zu $f(x, u) = 0$ gehörigen *Konnexkurven* und bilden das Integral einer Differentialgleichung 1. Ordnung

„Analytisch-geometrische Untersuchungen über allgemeine Verwandtschaftsverhältnisse von Koordinatensystemen", Bonn 1855, betrachtet worden.

1119) Hierüber s. II A 4 b (*E. Vessiot*), Nr. **10**; III D 4 (*G. Scheffers*), Nr. **38**; III D 8 (*H. Liebmann*), Nr. **3**, **4**.

mit algebraischen Koeffizienten, so daß sie auch als *Hauptkoinzidenz-* oder *Integralkurven* des Konnexes bezeichnet werden.[1120]

Es sei (x, u) ein Element des Konnexes, K^n und C^m die Hüllkurve und der Ort, die dem Punkte x und der Geraden u entsprechen. Ist y der Berührungspunkt von u mit K^n und v die Tangente in x an C^m, so ist das Paar (y, v) ein Element eines anderen Konnexes (der mit dem ursprünglichen übereinstimmen kann), den man den *konjugierten Konnex* des gegebenen nennt. Die Gleichung dieses neuen Konnexes erhält man durch Elimination der Größen ϱ, σ, x_i, u_i aus den Gleichungen

$$f(x, u) = 0, \quad \sigma y_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}, \quad \varrho v_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Der konjugierte Konnex des konjugierten Konnexes ist wieder der ursprüngliche.

Der konjugierte Konnex eines Konnexes (m, n) hat die Ordnung $n[mn + 2(m-1)(n-1)]$ und Klasse $m[mn + 2(m-1)(n-1)]$.[1121]

Für andere Eigenschaften der Konnexe in der Ebene und den drei- oder mehrdimensionalen Räumen verweisen wir auf andere Artikel der Encyklopädie und führen nur einige ergänzende Hinweise an.

Über die Konnexe in der Ebene s. III AB 7 (*E. Müller*), Nr. 35[1122];

1120) Hier fügen sich die in III C 4 (*L. Berzolari*), Anm. 102 angeführten Arbeiten von *G. Fouret* über die ∞^1-Systeme (algebraischer oder nicht algebraischer) ebener Kurven mit Erweiterungen auf die Flächensysteme ein. Über diese letzteren s. III C 9 (*K. Rohn* und *L. Berzolari*), Anm. 258. S. auch die in Anm. 1119 angeführten Encyklopädieartikel; außerdem *L. Autonne* [564].

1121) Über die vorhergehenden Eigenschaften s. *A. Clebsch* [1117], vor allem *A. Clebsch* und *F. Lindemann* [1117], wo auch ein algebraisches Verfahren zur Aufstellung der Gleichung des konjugierten Konnexes eines gegebenen Konnexes angegeben und, auch für Sonderfälle, der Zusammenhang mit der Theorie der doppelt binären Formen (Nr. 3) und der Differentialgleichungen entwickelt wird.

Erweiterungen bei *G. H. Halphen*, Paris C. R. 83 (1876), p. 705 = Œuvres 1, Paris 1916, p. 546.

Über den konjugierten Konnex eines gegebenen Konnexes s. noch *C. Stephanos*, Bull. Sciences math. (2) 4 (1880), p. 318. Beweise für die hier nur angegebenen Sätze bei *D. M. Sintzow*, Samml. d. Mitteil. d. math. Ges. Charkow (2) 12 (1910), Nr. 2, p. 74; Nr. 3, p. 97.

1122) S. außerdem *G. H. Halphen*, Bull. Soc. math. de France 5 (1876), p. 7 = Œuvres 1, p. 557; *G. Fouret*, daselbst, p. 130; *H. Schubert*, „Kalkül" [82], p. 306—307; *A. Voss*, Math. Ann. 23 (1883), p. 157; *F. Klein* und *Fr. Schilling*, „Einleitung" [599] 1, p. 242 ff.; *F. Klein* und *W. Blaschke*, „Vorlesungen" [599], p. 123 ff.; *D. M. Sintzow*, Kasan phys.-math. Ges. Nachr. (2) 11 (1901), p. 71; Samml. d. Mitteil. d. math. Ges. Charkow (2) 10 (1909), Nr. 5—6, p. 271; Enseign. math. 27 (1928), p. 50; *A. del Re*, Mem. Acc. Modena (3) 10^2 (1912), p. 393; *O. E. Glenn*, Trans. Amer. math. Soc. 17 (1916), p. 405; Amer. J. of math. 48 (1927), p. 45 [Auszug über die Konnexe von Punkt und Gerade (oder auch Ebene und Gerade) und die Konnexe von Geradenpaaren s. III C 8 (*K. Zindler*), Nr. 53[1123]); über die Konnexe in den Hyperräumen s. III C 7 (*C. Segre*), Nr. 45[1124]); hierzu führen wir noch einige Arbeiten über die Konnexe von Punkt und Ebene[1125]) und die Konnexe von Punkt, Ebene und Gerade an.[1126])

Bull. Amer. math. Soc. (2) 32 (1926), p. 315]; 50 (1928), p. 209; *Elisabetta Ragazzi,* Messina Atti Acc. Peloritana 1931.

In einigen dieser Arbeiten werden auch Sonderfälle betrachtet, speziell die Fälle, in denen die Ordnung oder Klasse des Konnexes oder auch beide, die Werte 1 oder 2 annehmen. Über diese Fälle s. noch *A. Clebsch* und *P. Gordan,* Math. Ann. 1 (1868), p. 359; *J. W. P. Godt,* Diss. Göttingen 1873; *T. A. Hirst,* Ann. di mat. (2) 6 (1874), p. 288; *A. Harnack,* Math. Ann. 9 (1876), p. 1, 218; *A. Armenante,* Roma Atti Acc. Linc. (2) 3 (1876), p. 123; *J. Rosanes,* J. f. Math. 88 (1879), p. 241; 90 (1880), p. 303; *G. Battaglini,* Atti Acc. Napoli (1) 8 (1879), Nr. 6; (1) 9 (1892), Nr. 4 [Auszüge Rend. Acc. Napoli (1) 18 (1879), p. 176; (1) 19 (1880), p. 110] = Giorn. di mat. (1) 19 (1881), p. 316; (1) 20 (1882), p. 230; Roma Mem. Acc. Linc. (3) 9 (1880—81), p. 3 [Auszug Roma Trans. Acc. Linc. (3) 5 (1881—82), p. 24] = Giorn. di mat. (1) 21 (1883), p. 50; *A. Voss,* Math. Ann. 15 (1879), p. 355; *J. Möller,* Lunds Univ. Års-skrift 16 (1879—80), p. 1; *G. Peano,* Atti Acc. Torino 16 (1881), p. 497; *R. Sturm,* Math. Ann. 22 (1883), p. 569; *G. Lazzeri* [1108]); *F. Amodeo,* Giorn. di mat. (1) 25 (1887), p. 321; Auszug Rend. Acc. Napoli (2) 1 (1887), p. 216; *M. Pannelli,* Giorn. di mat. (1) 26 (1887), p. 1; (2) 5 (1898), p. 81; *E. Pascal,* Ann. di mat. (2) 18 (1890), p. 26; (2) 24 (1896), p. 193; *P. Muth,* Math. Ann. 42 (1892), p. 257; *H. E. Timerding,* Math. Ann. 53 (1900), p. 193; *K. Petri,* Diss. München 1903; *A. B. Coble,* Bull. Amer. math. Soc. (2) 9 (1903), p. 291; Math. Ann. 70 (1910), p. 337; *H. Degenhart,* Diss. München 1909; *K. Ogura,* Tôhoku math. J. 13 (1917), p. 172; *Teresa Cohen,* Amer. J. of math. 41 (1919), p. 205; *F. Morley,* daselbst, p. 279; *O. E. Glenn,* Bull. Amer. math. Soc. (2) 31 (1925), p. 483; *A. Narasinga Rao,* J. Indian math. Soc. 18 (1929), p. 68.

1123) Über die Konnexe von Punkt und Gerade s. noch *A. del Re,* Rend. Circ. mat. Palermo 1 (1887), p. 284; Rend. Acc. Napoli (2) 2 (1888), p. 349; „Il connesso lineo-lineare e le superficie polari congiunte rispetto ad esso e ad una superficie algebrica fondamentale“, Napoli 1888; „Le curve polari congiunte rispetto ad una coincidenza di piani e di rette e ad una superficie algebrica“, Napoli 1888; Giorn. di mat. (1) 28 (1890), p. 276; Atti Acc. Torino 28 (1893), p. 420; [877]); [1122]), p. 403; *J. C. Choufoer,* Diss. Amsterdam 1927; *D. M. Sintzow,* Enseign. math. 27 (1928), p. 67.

1124) S. außerdem *L. Autonne,* Paris C. R. 138 (1904), p. 1148; Ann. Univ. de Lyon (2) 16 (1905); *G. Z. Giambelli,* Riv. di mat. e fis. 1 (1926), p. 90; Messina Atti Acc. Peloritana 1929 und 1931; *P. Bertuccelli,* Messina Atti Acc. Peloritana 1931; Giorn. di mat. (3) 22 (1931), p. 53; ferner die Zitate am Ende von Nr. 5.

1125) *G. Battaglini,* Giorn. di mat. (1) 14 (1876), p. 110 = Atti Acc. Napoli (1) 7 (1878), Nr. 5 [Auszug Rend. Acc. Napoli (1) 14 (1875), p. 141]; Roma Mem. Acc. Linc. (3) 12 (1881—82), p. 233 = Giorn. di mat. (1) 21 (1883), p. 293 [Auszug Roma Trans. Acc. Linc. (3) 6 (1881—82), p. 40]; *R. Krause,* Math. Ann. 14

(1879), p. 294; *E. Bonsdorw,* Bull. Ac. St. Petersburg 6 (1883), p. 13; *G. Lazzeri,* Roma Mem. Acc. Linc. (4) 4 (1887), p. 259; *A. del Re,* Roma Rend. Acc. Linc. (4) 6^2 (1890), p. 221; (5) 1^2 (1892), p. 343; (5) 2^1 (1893), p. 211; Atti Acc. Torino 28 (1893), p. 420; *L. Autonne,* Belgique Mém. cour. et Mém. des savants étrang., in 4°, 59 (1901—1903), Nr. 1 [1899]; *J. Goettler,* Progr. München 1899; *M. Stuyvaert,* Belgique Mém. cour. et autres Mém., in 8°, 61 (1901—1902), Nr. 1; *L. Godeaux,* Monatsh. Math. Phys. 20 (1909), p. 269; Ak. Amsterdam Versl. (4) 19 (1911), p. 942; *G. Fontené,* Bull. Soc. math. de France 38 (1910), p. 164; 39 (1911), p. 57; *D. M. Sintzow,* Wiss. Abh. Univ. Kasan 1894, Nr. 6, p. 145; 1895, Nr. 1, p. 143; Nr. 3, p. 99; Nr. 4, p. 85 [Auszug Bull. Sciences math. (2) 22 (1898), p. 221]; Samml. d. Mitteil. d. math. Ges. Charkow (2) 12 (1910), Nr. 1, p. 1; Proc. of the fifth intern. Congress of Math., Cambridge 1912, 2 (Cambridge 1913), p. 134; Enseign. math. 27 (1928), p. 65.

1126) *D. M. Sintzow,* Samml. d. Mitteil. d. math. Ges. Charkow (2) 8 (1904), p. 210; Moskau math. Sammlung 27 (1910), p. 346; *L. Godeaux,* Bull. Ac. sc. Belgique 1909, p. 1161.

(Abgeschlossen im Dezember 1932.)

Berichtigungen.

p. 317, letzte Z.: Lies Math. Ann. 3 statt Math. Ann. 1.
p. 326, Z. 18 v. u.: Lies 214 statt 218.
p. 335, Z. 17 v. o.: Lies 493 statt 495.
p. 336, Z. 12 v. u.: Lies 509 statt 507.
p. 357, Z. 2 v. o.: Lies $4a$ statt $3a$.
p. 371, Z. 4 v. u.: Lies VII statt V, VI.
p. 383, Z. 7 v. o.: Lies t statt f.
p. 405, Z. 22 v. o.: Lies 41 statt 40.
p. 418, Z. 5 v. o.: Lies Schar statt Scharen.
p. 422, Z. 24 v. u.: Lies 51 statt 50.
p. 453, Z. 5 v. u.: Lies $\geqq$ statt $\leqq$.
p. 455, Z. 8 v. o: Lies $\binom{n+r-1}{r-1}$ statt $\binom{n+r+1}{r-1}$.
p. 1277, letzte Z.: Lies $m\pi' + m'\pi$ statt $m\pi + m'\pi'$.
p. 1278, Z. 1 v. o.: Lies $-2(\alpha_1 - \alpha_2)$ statt $-3(\alpha_1 - \alpha_2)$.
p. 1278, Z. 6 v. o.: Lies $-(\alpha_1 + \alpha_2)$ statt $-\frac{3}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$.
p. 1373, Z. 8 v. o.: Die Korrespondenz $(n-4)^{\text{ter}}$ Ordnung zerfällt ihrerseits, wie *A. Terracini* [Rend. Circ. mat. Palermo 56 (1932), p. 118 Fußn.] gezeigt hat, in $n-4$ und ebenso, für ungerades n, die Korrespondenz $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung in $n-3$ paarweise zueinander inverse Projektivitäten, die indessen nicht rational getrennt sind. Dementsprechend zerfällt die von den Hauptsehnen gebildete Linienfläche in $1 + \frac{n-4}{2}$ bzw. $\frac{n-3}{2}$ Teile.

Register zu Band III, 2. Teil.

Von A. Boy in Treubnrg.

Die Stichworte des Registers sind durch gesperrten Druck hervorgehoben; die Wiederholung des Stichworts ist durch einen Strich angedeutet. Die Zahlen beziehen sich auf die Seiten des Bandes. Unter dem einzelnen Stichworte sind die Nachweise im allgemeinen nach steigender Seitenzahl geordnet.

Abkürzungen.

Ebene Kurven zweiter ... Ordnung sind mit c_2 ..., Raumkurven dritter ... Ordnung mit C_3 ..., Flächen zweiter ... Ordnung mit F_2 ... bezeichnet; diese Bezeichnungen gelten auch als Stichworte und stehen am Anfange des betreffenden Buchstaben des Registers. Im Text des Registers — nicht als Stichworte — sind ferner Doppelpunkt, Doppeltangente, Doppelgerade, Doppelkegelschnitt bzw. mit D_2, t_2, $\bar{g}$, $\bar{c}_2$, dreifacher Punkt, dreifache Gerade bzw. mit D_3, $\bar{\bar{g}}$, Regelfläche dritter ... Ordnung mit R-F_3 ... abgekürzt; weitere Abkürzungen ergeben sich aus der angeführten Stelle.

B

C

(s. auch unter K und Z)

E

G

H

I

J

K

(s. auch unter C)

L

M

N

Q

R

S

T

U

Z

(s. auch unter C)

Berichtigungen.

p. 1108, Z. 4 v. o. lies: $p_i p_k$ statt p_{ik}.
p. 1108, Z. 6 v. o. lies: p jetzt Ebenenkoordinaten statt p_{ik} Strahlenkoordinaten.
p. 1143, Fußnote 1059) lies: R_5 statt R.

Namensverzeichnis zu Band III, Geometrie.

Angefertigt von den Assistenten des Mathematischen Instituts der Technischen Hochschule München.

Vorbemerkung: Die erste, große, fettgedruckte arabische Zahl bezieht sich jeweils auf den Teilband (1, 2 oder 3); die zweite, kleinere, fettgedruckte arabische Zahl (1 oder 2) bezieht sich auf die Hälfte eines jeden Teilbandes. Bei Teilband 1, 2 bezeichnet der Buchstabe A bzw. B dessen Unterteilung; mit 3* ist der Schlußteil von 3, der eine gesonderte Paginierung hat, gekennzeichnet.

A

B

D

E

F

G

H

K

M

P

S

T

U

V

W

Y

Z

Band III$_2$ **Heft 10.**

ENCYKLOPÄDIE
DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.

HERAUSGEGEBEN
IM AUFTRAGE DER AKADEMIEN DER WISSENSCHAFTEN ZU
BERLIN, GÖTTINGEN, HEIDELBERG, LEIPZIG, MÜNCHEN UND WIEN
SOWIE UNTER MITWIRKUNG ZAHLREICHER FACHGENOSSEN.

IN SECHS BÄNDEN.

BAND I: ARITHMETIK UND ALGEBRA, IN 2 TEILEN	RED. VON W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG.
— II: ANALYSIS, IN 3 TEILEN . . .	H. BURKHARDT † (1896–1914), W. WIRTINGER (1905–1912) IN WIEN, R. FRICKE IN BRAUNSCHWEIG UND E. HILB IN WÜRZBURG.
— III: GEOMETRIE, IN 3 TEILEN . .	W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG UND H. MOHRMANN IN DARMSTADT.
— IV: MECHANIK, IN 4 TEILBÄNDEN.	F. KLEIN † (1896–1925) UND C. H. MÜLLER IN HANNOVER.
— V: PHYSIK, IN 3 TEILEN	A. SOMMERFELD IN MÜNCHEN.
— VI, 1: GEODÄSIE UND GEOPHYSIK	PH. FURTWÄNGLER IN WIEN UND E. WIECHERT † (1899–1905) IN GÖTTINGEN.
— VI, 2: ASTRONOMIE, IN 2 TEILBÄNDEN	K. SCHWARZSCHILD † (1904–1916) UND S. OPPENHEIM † (1919–1928).

BAND III$_2$. HEFT 10.

AUSGEGEBEN AM 20. DEZEMBER 1928.

VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG 1928

Bisher erschien: Bd. I (vollständig); Bd. II (vollständig); Bd. III$_{1\,\mathrm{I}}$ (vollständig); Bd. III$_{1\,\mathrm{II}}$, Heft 5–9; Bd. III$_{2\,\mathrm{I}}$ (vollständig); Bd. III$_{2\,\mathrm{II}}$, Heft 7–10; Bd. III$_3$ (vollständig); Bd. IV$_{1\,\mathrm{I}}$ (vollständig); Bd. IV$_{1\,\mathrm{II}}$, Heft 1–3; Bd. IV$_{2\,\mathrm{I}}$ (vollständig); Bd. IV$_{2\,\mathrm{II}}$ (vollständig); Bd. V (vollständig); Bd. VI$_{1\,\mathrm{A}}$ (vollständig); Bd. VI$_{1\,\mathrm{B}}$ (vollständig); Bd. VI$_{2\,\mathrm{A}}$ (vollständig); Bd. VI$_{2\,\mathrm{B}}$, Heft 1–2.

Jeder Band ist einzeln käuflich, dagegen werden einzelne Hefte nicht abgegeben. Der Bezug der ersten Lieferung eines Bandes verpflichtet zu seiner vollständigen Abnahme.

Aufgabe der Encyklopädie ist es, in knapper, zu rascher Orientierung geeigneter Form, aber mit möglichster Vollständigkeit eine Gesamtdarstellung der mathematischen Wissenschaften nach ihrem gegenwärtigen Inhalt an gesicherten **Resultaten** zu geben und zugleich durch sorgfältige Literaturangaben die geschichtliche Entwicklung der mathematischen **Methoden** seit dem Beginn des 19. Jahrhunderts nachzuweisen. Sie beschränkt sich dabei nicht auf die sogenannte reine Mathematik, sondern berücksichtigt auch ausgiebig die **Anwendungen** auf Mechanik und Physik, Astronomie und Geodäsie, die verschiedenen Zweige der Technik und andere Gebiete, und zwar in dem Sinne, daß sie einerseits den Mathematiker orientiert, welche Fragen die Anwendungen an ihn stellen, andererseits den Astronomen, Physiker, Techniker darüber orientiert, welche Antwort die Mathematik auf diese Fragen gibt. In 6 Bänden werden die einzelnen Gebiete in einer Reihe **sachlich angeordneter Artikel** behandelt; jeder Band soll ein ausführliches alphabetisches Register enthalten. Auf die Ausführung von Beweisen der mitgeteilten Sätze muß natürlich verzichtet werden. — Die Ansprüche an die Vorkenntnisse der Leser sollen so gehalten werden, daß das Werk auch demjenigen nützlich sein kann, der nur über ein bestimmtes Gebiet Orientierung sucht. — Eine von den beteiligten gelehrten Gesellschaften niedergesetzte Kommission, z. Z. bestehend aus den Herren

W. v. Dyck-München, **O. Hölder**-Leipzig, **M. Planck**-Berlin, **W. Wirtinger**-Wien,

steht der Redaktion, die aus den Herren

R. Fricke-Braunschweig, **Ph. Furtwängler**-Wien, **E. Hilb**-Würzburg, **W. Fr. Meyer**-Königsberg, **H. Mohrmann**-Darmstadt, **C. H. Müller**-Hannover, **A. Sommerfeld**-München

besteht, zur Seite. — Als Mitarbeiter an der Encyklopädie beteiligen sich ferner die Herren

I. Band:

W. Ahrens (†)
P. Bachmann (†)
J. Bauschinger-Leipzig
G. Bohlmann-Berlin
L. v. Bortkewitsch-Berlin
H. Burkhardt (†)
E. Czuber (†)
W. v. Dyck-München
D. Hilbert-Göttingen
O. Hölder-Leipzig
G. Landsberg (†)
R. Mehmke-Stuttgart
W. Fr. Meyer-Königsberg i. P.
E. Netto (†)
V. Pareto-Lausanne
A. Pringsheim-München
C. Runge (†)
A. Schoenflies (†)
H. Schubert (†)
D. Seliwanoff-Prag
E. Study-Bonn
K. Th. Vahlen-Greifswald
H. Weber (†)
A. Wiman-Upsala

II. Band:

L. Bieberbach-Berlin
M. Bôcher (†)
H. A. Bohr-Kopenhagen
E. Borel-Paris
G. Brunel (†)
H. Burkhardt (†)
H. Cramér-Stockholm
G. Faber-München
M. Fréchet-Poitiers
R. Fricke-Braunschweig
H. Hahn-Wien
J. Harkness-Montreal
E. Hellinger-Frankfurt a. M.
K. Hensel-Marburg
E. Hilb-Würzburg
H. W. E. Jung-Halle
A. Kneser-Breslau
A. Krazer (†)
L. Lichtenstein-Leipzig
L. Maurer (†)
W. Fr. Meyer-Königsberg i. P.
P. Montel-Paris
N. E. Nörlund-Kopenhagen
W. F. Osgood-Cambridge, [Mass.
P. Painlevé-Paris
S. Pincherle-Bologna
A. Pringsheim-München
M. Riesz-Lund
A. Rosenthal-Heidelberg
C. Runge (†)
A. Sommerfeld-München
O. Szász-Frankfurt a. M.
O. Toeplitz-Bonn
E. Vessiot-Paris
A. Voss-München
A. Wangerin-Halle
E. v. Weber-Würzburg
Fr. A. Willers-Charlottenburg
W. Wirtinger-Wien
E. Zermelo-Freiburg
L. Zoretti-Caen

III. Band:

G. Berkhan (†)
L. Berwald-Prag
L. Berzolari-Pavia
Chr. Betsch-Cannstatt
G. Castelnuovo-Rom
M. Dehn-Frankfurt a. M.
F. Dingeldey-Darmstadt
F. Enriques-Rom
G. Fano-Turin
P. Heegaard-Oslo
G. Kohn (†)
H. Liebmann-Heidelberg
R. v. Lilienthal-Münster i. W.
G. Loria-Genua
A. Lotze-Stuttgart
H. v. Mangoldt (†)
W. Fr. Meyer-Königsberg i. P.
E. Müller (†)
E. Papperitz-Freiberg i. S.
K. Rohn (†)
H. Rothe (†)
E. Salkowski-Charlottenburg
G. Scheffers-Charlottenburg
A. Schoenflies-Frankfurt [a. M.
C. Segre (†)
J. Sommer-Danzig
P. Stäckel (†)
O. Staude (†)
E. Steinitz-Kiel
H. Tietze-München
L. Vietoris-Innsbruck
A. Voss-München
R. Weitzenboeck-Amsterdam
M. Zacharias-Berlin
H. G. Zeuthen (†)
K. Zindler-Innsbruck

IV. Band:

M. Abraham (†)
P. Cranz-Berlin
C. u. T. Ehrenfest-Leiden
S. Finsterwalder-München
O. Fischer (†)
L. Föppl-München
Ph. Forchheimer-Wien
Ph. Furtwängler-Wien
M. Grübler-Dresden
M. Grüning-Hannover
E. Hellinger-Frankfurt a. M.
L. Henneberg-Darmstadt
K. Heun-Karlsruhe
G. Jung-Mailand
Th. v. Kármán-Aachen
F. Klein (†)
A. Kriloff-Petersburg
H. Lamb-Manchester
A. E. H. Love-Oxford
R. v. Mises-Berlin
C. H. Müller-Hannover
L. Prandtl-Göttingen
G. Prange-Hannover
H. Reißner-Charlottenburg
A. Schoenflies (†)
P. Stäckel (†)
O. Tedone-Genua
H. E. Timerding-Braunschwg.
A. Timpe-Berlin
A. Voss-München
G. T. Walker-Simla (Indien)
K. Wieghardt (†)
G. Zemplén (†)

V. Band:

M. Abraham (†)
L. Boltzmann (†)
M. Born-Göttingen
G. H. Bryan-Bangor (Wales)
P. Debye-Leipzig
H. Dießelhorst-Braunschwg.
P. S. Epstein-Pasadena
R. Gans-Königsberg
K. F. Herzfeld-München
F. W. Hinrichsen (†)
E. W. Hobson-Cambridge
H. Kamerlingh-Onnes-Leiden
W. H. Keesom-Leiden
Kratzer-Münster i. W.
M. v. Laue-Berlin
Th. Liebisch (†)
H. A. Lorentz (†)
L. Mamlock-Berlin
H. Minkowski (†)
O. Mügge-Göttingen
J. Nabl-Wien
W. Pauli-Hamburg
F. Pockels (†)
L. Prandtl-Göttingen
R. Reiff (†)
C. Runge (†)
A. Schoenflies (†)
M. Schröter (†)
R. Seeliger-Greifswald
A. Smekal-Halle
A. Sommerfeld-München
E. Study-Bonn
A. Wangerin-Halle
W. Wien (†)
J. Zenneck-München

VI, 1. Band:

R. Bourgeois-Paris
V. Conrad-Wien
G. H. Darwin (†)
F. Exner-Wien
S. Finsterwalder-München
Ph. Furtwängler-Wien
F. R. Helmert (†)
S. Hough-Kapstadt
H. Meldau-Bremen
W. Moebius-Leipzig
P. Pizzetti-Pisa
C. Reinhertz (†)
A. Schmidt-Potsdam
E. v. Schweidler-Innsbruck
W. Trabert (†)

VI, 2. Band:

E. Anding-Gotha
J. Bauschinger-Leipzig
A. Bemporad-Catania
E. W. Brown-New-Haven
C. Ed. Caspari-Paris
F. Cohn-Berlin
R. Emden-München
F. K. Ginzel-Berlin
P. Guthnick-Neu-Babelsberg
F. Hayn-Leipzig
J. v. Hepperger-Wien
G. Herglotz-Göttingen
K. Hoffmeister-Sonneberg
J. Holetschek-Wien
H. Kienle-Göttingen
H. Kobold-Kiel
F. Kottler-Wien
K. Laves-Chicago
G. v. Niessl-Wien
S. Oppenheim-Wien (†)
H. Samter-Berlin
K. Schwarzschild (†)
K. Sundman-Helsingfors
E. T. Whittaker-Edinburgh
A. Wilkens-Breslau
C. W. Wirtz-Kiel
H. v. Zeipel-Upsala

Sprechsaal für die Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften.

Unter der Abteilung **Sprechsaal für die Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften** nimmt die Redaktion des Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung ihr aus dem Leserkreise zugehende Verbesserungsvorschläge und Ergänzungen (auch in literarischer Hinsicht) zu den erschienenen Heften der Encyklopädie auf. Diesbezügliche Einsendungen sind an den Herausgeber des Jahresberichts Herrn Prof. Dr. L. Bieberbach, Berlin-Dahlem, Gelfertstraße 16, zu richten, der sich mit den betr Bandredakteuren wegen der Veröffentlichung der Notizen in Verbindung setzen wird.

Die akademische Kommission zur Herausgabe der Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften.

Band III 2 **Heft 13.**

ENCYKLOPÄDIE
DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN

MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.

HERAUSGEGEBEN
IM AUFTRAGE DER AKADEMIEN DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN, GÖTTINGEN, HEIDELBERG, LEIPZIG, MÜNCHEN UND WIEN SOWIE UNTER MITWIRKUNG ZAHLREICHER FACHGENOSSEN.

IN SECHS BÄNDEN.

BAND I: **ARITHMETIK UND ALGEBRA**, IN 2 TEILBÄNDEN.	RED. VON **W. FR. MEYER** † (1896—1904)
— II: **ANALYSIS**, IN 5 TEILBÄNDEN .	RED. VON **H. BURKHARDT** † (1896—1914), **W. WIRTINGER** (1905–1925) IN WIEN, **R. FRICKE** † (1914–1927) UND **E. HILB** † (1919—1927)
— III: **GEOMETRIE**, IN 6 TEILBÄNDEN	RED. VON **W. FR. MEYER** † (1907—1934) UND **H. MOHRMANN** IN GIESSEN (1907—1934)
— IV: **MECHANIK**, IN 4 TEILBÄNDEN.	RED. VON **F. KLEIN** † (1896–1925) UND **C. H. MÜLLER** IN HANNOVER (1901—1934)
— V: **PHYSIK**, IN 3 TEILBÄNDEN. .	RED. VON **A. SOMMERFELD** IN MÜNCHEN (1903—1926)
— VI, 1: **GEODÄSIE** UND **GEOPHYSIK**	RED. VON **PH. FURTWÄNGLER** IN WIEN (1899—1905) UND **E. WIECHERT** † (1899—1905)
— VI, 2: **ASTRONOMIE**, IN 2 TEILBÄNDEN	RED. VON **K. SCHWARZSCHILD** † (1904–1916), **S. OPPENHEIM** † (1917–1928) UND **W. v. DYCK** IN MÜNCHEN, I. V. (1929—1934)

BAND III 2. HEFT 13.

AUSGEGEBEN AM 13. SEPTEMBER 1934

VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG 1934

Sämtliche Bände sind demnächst vollständig.
Jeder Band sowie die einzelnen Hefte sind gesondert käuflich.

Aufgabe der Encyklopädie ist es, in knapper, zu rascher Orientierung geeigneter Form, aber mit möglichster Vollständigkeit eine Gesamtdarstellung der mathematischen Wissenschaften nach ihrem gegenwärtigen Inhalt an gesicherten Resultaten zu geben und zugleich durch sorgfältige Literaturangaben die geschichtliche Entwicklung der mathematischen Methoden seit dem Beginn des 19. Jahrhunderts nachzuweisen. Sie beschränkt sich dabei nicht auf die sogenannte reine Mathematik, sondern berücksichtigt auch ausgiebig die Anwendungen auf Mechanik und Physik, Astronomie und Geodäsie, die verschiedenen Zweige der Technik und andere Gebiete, und zwar in dem Sinne, daß sie einerseits den Mathematiker orientiert, welche Fragen die Anwendungen an ihn stellen, andererseits den Astronomen, Physiker, Techniker darüber orientiert, welche Antwort die Mathematik auf diese Fragen gibt. In 6 Bänden werden die einzelnen Gebiete in einer Reihe sachlich angeordneter Artikel behandelt; jeder Band soll ein ausführliches alphabetisches Register enthalten. Auf die Ausführung von Beweisen der mitgeteilten Sätze muß natürlich verzichtet werden. — Die Ansprüche an die Vorkenntnisse der Leser sollen so gehalten werden, daß das Werk auch demjenigen nützlich sein kann, der nur über ein bestimmtes Gebiet Orientierung sucht. — Eine von den beteiligten gelehrten Gesellschaften niedergesetzte Kommission, z. Z. bestehend aus den Herren

W. v. Dyck-München (Vorsitzender), **O. Hölder**-Leipzig, **H. Liebmann**-Heidelberg, **M. Planck**-Berlin, **W. Wirtinger**-Wien,

steht der Redaktion, die z. Z. aus den Herren

Ph. Furtwängler-Wien, **H. Mohrmann**-Gießen, **C. H. Müller**-Hannover, **A. Sommerfeld**-München, **W. v. Dyck**-München i. V.

besteht, zur Seite. — Als Mitarbeiter an der Encyklopädie haben sich ferner beteiligt die Herren:

I. Band:

W. Ahrens (†)
P. Bachmann (†)
J. Bauschinger (†)
G. Bohlmann (†)
L. v. Bortkewitsch-Berlin
H. Burkhardt (†)
E. Czuber (†)
W. v. Dyck-München
D. Hilbert-Göttingen
O. Hölder-Leipzig
G. Landsberg (†)
R. Mehmke-Stuttgart
W. Fr. Meyer (†)
E. Netto (†)
V. Pareto-Lausanne
A. Pringsheim-München
C. Runge (†)
A. Schoenflies (†)
H. Schubert (†)
D. Seliwanoff-Prag
E. Study (†)
K. Th. Vahlen-Berlin
H. Weber (†)
A. Wiman-Upsala

II. Band:

L. Bieberbach-Berlin
M. Bôcher (†)
H. A. Bohr-Kopenhagen
E. Borel-Paris
G. Brunel (†)
H. Burkhardt (†)
H. Cramér-Stockholm
G. Faber-München
M. Fréchet-Poitiers
R. Fricke (†)
H. Hahn-Wien
J. Harkness-Montreal
E. Hellinger-Frankfurt a. M.
K. Hensel-Marburg
E. Hilb (†)
H. W. E. Jung-Halle
A. Kneser (†)
A. Krazer (†)
L. Lichtenstein (†)
L. Maurer (†)
W. Fr. Meyer (†)
P. Montel-Paris
N. E. Nörlund-Kopenhagen
W. F. Osgood-Berkeley (California)
P. Painlevé-Paris
S. Pincherle-Bologna
A. Pringsheim-München
M. Riesz-Lund
A. Rosenthal-Heidelberg
C. Runge (†)
A. Sommerfeld-München
O. Szász-Frankfurt a. M.
O. Toeplitz-Bonn
E. Vessiot-Paris
A. Voss (†)
A. Wangerin (†)
E. v. Weber (†)
Fr. A. Willers-Freiberg
W. Wirtinger-Wien
E. Zermelo-Freiburg
L. Zoretti-Caen

III. Band:

G. Berkhan (†)
L. Berwald-Prag
L. Berzolari-Pavia
Chr. Betsch-Stuttgart
G. Castelnuovo-Rom
M. Dehn-Frankfurt a. M.
F. Dingeldey-Darmstadt
F. Enriques-Rom
G. Fano-Turin
P. Heegaard-Oslo
G. Kohn (†)
H. Liebmann-Heidelberg
R. v. Lilienthal-Münster i. W.
G. Loria-Genua
A. Lotze-Stuttgart
H. v. Mangoldt (†)
W. Fr. Meyer (†)
E. Müller (†)
E. Papperitz-Freiberg i. S.
K. Rohn (†)
H. Rothe (†)
E. Salkowski-Neubabelsberg
G. Scheffers-Charlottenburg
A. Schoenflies (†)
C. Segre (†)
J. Sommer-Danzig
P. Stäckel (†)
O. Staude (†)
E. Steinitz (†)
H. Tietze-München
L. Vietoris-Wien
A. Voss (†)
R. Weitzenboeck-Amsterdam
M. Zacharias-Berlin
H. G. Zeuthen (†)
K. Zindler (†)

IV. Band:

M. Abraham (†)
P. Cranz-Berlin
C. u. T. Ehrenfest-Leiden
S. Finsterwalder-München
O. Fischer (†)
L. Föppl-München
Ph. Forchheimer-Wien
Ph. Furtwängler-Wien
M. Grübler-Dresden
M. Grüning-Hannover
E. Hellinger-Frankfurt a. M.
L. Henneberg (†)
K. Heun (†)
G. Jung-Mailand
Th. v. Kármán-Aachen
F. Klein (†)
A. Kriloff-Petersburg
H. Lamb-Manchester
A. E. H. Love-Oxford
R. v. Mises-Istanbul
C. H. Müller-Hannover
L. Prandtl-Göttingen
G. Prange-Hannover
H. Reißner-Charlottenburg
A. Schoenflies (†)
P. Stäckel (†)
O. Tedone-Genua
H. E. Timerding-Braunschwg.
A. Timpe-Berlin
A. Voss (†)
G. T. Walker-Simla (Indien)
K. Wieghardt (†)
G. Zemplén (†)

V. Band:

M. Abraham (†)
L. Boltzmann (†)
M. Born-Cambridge (Engl.)
G. H. Bryan-Bangor (Wales)
P. Debye-Leipzig
H. Dießelhorst-Braunschwg.
P. S. Epstein-Pasadena
R. Gans-Königsberg
K. F. Herzfeld-München
F. W. Hinrichsen (†)
E. W. Hobson-Cambridge
H. Kamerlingh-Onnes-Leiden
W. H. Keesom-Leiden
Kratzer-Münster i. W.
M. v. Laue-Berlin
Th. Liebisch (†)
H. A. Lorentz (†)
L. Mamlock-Berlin
H. Minkowski (†)
O. Mügge-Göttingen
J. Nabl-Wien
W. Pauli-Hamburg
F. Pockels (†)
L. Prandtl-Göttingen
R. Reiff (†)
C. Runge (†)
A. Schoenflies (†)
M. Schröter (†)
R. Seeliger-Greifswald
A. Smekal-Halle
A. Sommerfeld-München
E. Study (†)
A. Wangerin (†)
W. Wien (†)
J. Zenneck-München

VI, 1. Band:

R. Bourgeois-Paris
V. Conrad-Wien
G. H. Darwin (†)
F. Exner-Wien
S. Finsterwalder-München
Ph. Furtwängler-Wien
F. R. Helmert (†)
S. Hough-Kapstadt
H. Meldau-Bremen
W. Moebius-Leipzig
P. Pizzetti-Pisa
C. Reinhertz (†)
A. Schmidt-Potsdam
E. v. Schweidler-Innsbruck
W. Trabert (†)

VI, 2. Band:

E. Anding-Gotha
J. Bauschinger (†)
A. Bemporad-Catania
E. W. Brown-New-Haven
C. Ed. Caspari-Paris
F. Cohn-Berlin
R. Emden-München
F. K. Ginzel-Berlin
P. Guthnick-Neubabelsberg
F. Hayn-Leipzig
J. v. Hopperger (†)
G. Herglotz-Göttingen
A. Hnatek-Wien
J. Hopmann-Leipzig
K. Hoffmeister-Sonneberg
H. Kienle-Göttingen
H. Kobold-Kiel
F. Kottler-Wien
K. Laves-Chicago
G. v. Niessl-Wien
S. Oppenheim (†)
H. Samter-Berlin
E. Schönberg-Breslau
K. Schwarzschild (†)
K. Sundman-Helsingfors
E. T. Whittaker-Edinburgh
A. Wilkens-München
C. W. Wirtz-Kiel
H. v. Zeipel-Upsala

Erschienene Bände bzw. Hefte:

Band I. **Arithmetik und Algebra**, in 2 Teilen. Vollständig erschienen.
- II. **Analysis**, in 3 Teilen. Teil I in zwei Hälften, Teil II und Teil III in zwei Hälften vollständig erschienen
- III. **Geometrie**, in 3 Teilen. Vollständig erschienen.
- IV. **Mechanik**, in 4 Teilbänden und 1 Registerband. Teilband I, III und IV vollständig erschienen, II. Teilband in 4 Heften und Registerband in 1 Heft demnächst vollständig.
- V. **Physik**, in 3 Teilen. Vollständig erschienen.
- VI,1. **Geodäsie und Geophysik**, I. und II. Teilband vollständig erschienen.
- VI,2. **Astronomie**, 1. und 2. Hälfte, vollständig erschienen.

Band III: Geometrie, in 3 Teilen.
Redigiert von W. Fr. Meyer (†) und H. Mohrmann in Gießen.

Die vor den Abhandlungen stehenden arabischen Ziffern bezeichnen die einzelnen Hefte.

1. Teil.

Vorrede zu Band III von **W. Fr. Meyer** (†) und **H. Mohrmann** in Gießen.

A. Rein geometrische Theorien.

B. Grundlagen der Anwendung von Algebra und Analysis auf die Geometrie.

1. Hälfte.

Inhaltsverzeichnis von Band III, Teil 1, 1. Hälfte.

1. Prinzipien der Geometrie: **F. Enriques** in Bologna.
2. Die Begriffe „Linie" und „Fläche": **H. v. Mangoldt** (†).
3. Analysis situs: **M. Dehn** in Frankfurt a. M. und **P. Heegaard** in Oslo.

4a. Gegensatz von synthetischer und analytischer Geometrie in seiner historisch. Entwicklung im XIX. Jahrhundert: **G. Fano** in Turin.

4b. Die Gruppentheorie als geometrisches Einteilungsprinzip: **G. Fano** in Turin.

5. Projektive Geometrie: **A. Schoenflies** (†).

5a. Konfigurationen der projektiven Geometrie: **E. Steinitz** (†).

6. Darstellende Geometrie: **E. Papperitz** i. Freiberg i. S.
7. Die verschiedenen Koordinatensysteme: **E. Müller** (†).

2. Hälfte.

Inhaltsverzeichnis von Band III, Teil 1, 2. Hälfte

8. Elementare Geometrie vom Standpunkte der neueren Analysis aus: **J. Sommer** in Danzig.
9. Elementargeometrie und elementare nichteuklidische Geometrie in synthetischer Behandlung: **M. Zacharias** in Berlin.
10. Neuere Dreiecksgeometrie: **G. Berkhan** (†) und **W. Fr. Meyer** (†).

11a. Systeme geometrischer Analyse I: **H. Rothe** (†).

11b. II: **A. Lotze** in Stuttgart.

12. Polyeder und Raumeinteilungen: **E. Steinitz** (†).
13. Beziehungen zwischen den verschiedenen Zweigen der Topologie: **H. Tietze** in München und **L. Vietoris** in Wien.

Register zu Band III, 1. Teil.

2. Teil.

C. Algebraische Geometrie.

1. Hälfte.

Inhaltsverzeichnis von Band III, Teil 2, 1. Hälfte.

1. Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme: **F. Dingeldey** in Darmstadt.
2. Flächen II. Ordnung und ihre Systeme und Durchdringungskurven: **O. Staude** (†).
3. Abzählende Methoden: **H. G. Zeuthen** (†).
4. Allgemeine Theorie d. höheren ebenen algebraischen Kurven: **L. Berzolari** in Pavia.

5a u. 5b. Spezielle ebene algebr. Kurven: **G. Kohn** (†) und **G. Loria** in Genua.

6a. Grundeigenschaften der algebraischen Flächen: **G. Castelnuovo** in Rom und **F. Enriques** in Rom.

6b. Die algebraischen Flächen vom Gesichtspunkte der birationalen Transformationen aus: **G. Castelnuovo** in Rom und **F. Enriques** in Rom.

2. Hälfte, Teilband A.

Inhaltsverzeichnis von Band III, Teil 2, 2. Hälfte. Teilband A.

7. Mehrdimensionale Räume: **C. Segre** (†).
8. Algebr. Liniengeometrie: **K. Zindler** (†).
9. Algebraische Raumkurven u. abwickelbare Flächen: **K. Rohn** (†) und **L. Berzolari** in Pavia.

2. Hälfte, Teilband B.

Inhaltsverzeichnis von Band III, Teil 2, 2. Hälfte, Teilband B.

10. Spezielle algebraische Flächen: Flächen dritter Ordnung. **W. Fr. Meyer** (†).
11. Spezielle algebraische Flächen: Flächen vierter und höherer Ordnung. **W. Fr. Meyer** (†).
12. Algebraische Transformationen u. Korrespondenzen: **L. Berzolari in Pavia.**
13. Register zu Band III, 2. Teil.

Namenverzeichnis zu Band III.

3. Teil.

Inhaltsverzeichnis von Band III, Teil 3.

D. Differentialgeometrie.

1./2. Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Kurven und Flächen: **H. v. Mangoldt** (†).

3. Die auf einer Fläche gezogenen Kurven: **R. v. Lilienthal** in Münster i. W.
4. Besondere transcendente Kurven: **G. Scheffers** in Charlottenburg.
5. Besondere Flächen: **R. v. Lilienthal** in Münster i. W
6. Abbildung und Abwickelung zweier Flächen aufeinander: **A. Voss** (†).
7. Berührungstransformat.: **H. Liebmann** in Heidelberg.
8. Geometrische Theorie der Differentialgleichungen: **H. Liebmann** in Heidelberg.
9. Dreif. orthogon. Flächen-Systeme: **E. Salkowski** in Charlottenburg.
10. Neuere Arbeiten der algebraischen Invariantentheorie. Differentialinvarianten: **R. Weitzenböck** in Amsterdam.
11. Differentialinvarianten in der Geometrie. Riemannsche Mannigfaltigkeiten und ihre Verallgemeinerungen: **L. Berwald** in Prag.

Register zu Band III, 3. Teil.

Bisher erschien:

Teil	1	Heft	1	(A, B 1—3).	[220 S.]	1907.	RM	8.—
—	1	—	2	(A, B 4a u. 4b).	[168 S.]	1907.	RM	6.40
—	1	—	3	(A, B 5).	[92 S.]	1909.	RM	2.60
—	1	—	4	(A, B 5a, 6, 7).	[290 S.]	1910.	RM	11.—
—	1	—	5	(A, B 8, 9 I).	[191 S.]	1914.	RM	7.20
—	1	—	6	(A, B 9 II).	[210 S.]	1919.	RM	8.—
—	1	—	7	(A, B 10, 11 I).	[252 S.]	1921.	RM	9.40
—	1	—	8	(A, B 11).	[172 S.]	1924.	RM	6.40
—	1	—	9	(A, B 12).	[139 S.]	1922.	RM	5.—
—	1	—	10	(A, B 13)	[124 S.]	1931.	RM	5.—
—	2	—	1	(C 1).	[160 S.]	1903.	RM	6.—
—	2	—	2	(C 2).	[96 S.]	1904.	RM	3.60
—	2	—	3	(C 3, 4).	[199 S.]	1906.	RM	7.40
—	2	—	4	(C 5a)	[114 S.]	1909.	RM	4.40
—	2	—	5	(C 5b)	[64 S.]	1915.	RM	2.40
Teil	2	Heft	6	(C 6a u. b).	[133 S.]	1915.	RM	5.—
—	[illegible]	—	7	(C 7).	[204 S.]	1918.	RM	7.60
—	2	—	8	(C 8).	[256 S.]	1922.	RM	11.—
—	2	—	9	(C 9).	[208 S.]	1927.	RM	7.80
—	2	—	10	(C 10).	[93 S.]	1928.	RM	3.60
—	2	—	11	(C 10b)	[248 S.]	1931.	RM	9.40
—	2	—	12	(C 11)	[439 S.]	1933.	RM	14.—
—	2	—	13		[153 S.]	1934.	RM	7.60
—	3	—	1	(D 1—3).	[183 S.]	1903.	RM	8.60
—	3	—	2/3	(D 4—6a).	[254 S.]	1903.	RM	9.60
—	3	—	4	(D 7—8).	[98 S.]	1915.	RM	3.80
—	3	—	5	(D 9).	[66 S.]	1920.	RM	2.40
—	3	—	6	(D 10).	[72 S.]	1922.	RM	4.60
—	3	—	7	(D 11).	[134 S.]	1927.	RM	5.60