

DIE GRUNDLEHREN DER MATHEMATISCHEN
WISSENSCHAFTEN IN EINZELDARSTELLUNGEN
BAND VI

L. BIEBERBACH
DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

ZWEITE AUFLAGE

SPRINGER-VERLAG BERLIN HEIDELBERG GMBH

DIE GRUNDLEHREN DER
MATHEMATISCHEN
WISSENSCHAFTEN

IN EINZELDARSTELLUNGEN MIT BESONDERER
BERÜCKSICHTIGUNG DER ANWENDUNGSGBIETE

GEMEINSAM MIT

W. BLASCHKE
HAMBURG

M. BORN
GÖTTINGEN

C. RUNGE
GÖTTINGEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. COURANT
GÖTTINGEN

BAND VI

THEORIE DER
DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

VON

LUDWIG BIEBERBACH



SPRINGER-VERLAG BERLIN HEIDELBERG GMBH 1926

THEORIE DER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

VORLESUNGEN AUS DEM
GESAMTGEBIET DER GEWÖHNLICHEN UND DER
PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

VON

LUDWIG BIEBERBACH

O. Ö. PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER
FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT IN BERLIN
MITGLIED DER PREUSSISCHEN AKADEMIE
DER WISSENSCHAFTEN

ZWEITE NEUBEARBEITETE AUFLAGE

MIT 22 ABBILDUNGEN



SPRINGER-VERLAG BERLIN HEIDELBERG GMBH 1926

ALLE RECHTE, INSBESONDERE
DAS DER ÜBERSETZUNG IN FREMDE SPRACHEN, VORBEHALTEN
COPYRIGHT 1926 BY SPRINGER-VERLAG BERLIN HEIDELBERG
URSPRÜNGLICH ERSCHIENEN BEI JULIUS SPRINGER IN BERLIN 1926
SOFTCOVER REPRINT OF THE HARDCOVER 2ND EDITION 1926
ISBN 978-3-662-41732-4 ISBN 978-3-662-41873-4 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-41873-4

Vorwort zur ersten Auflage.

Ein Lehrbuch über Differentialgleichungen zu schreiben, das, wie es ein rechtes Lehrbuch soll, nach allen Seiten hin in die Probleme, den Geist, die Methoden und die Ergebnisse der Theorie einführt, so daß der Leser von da aus jeder Originalarbeit mit Verständnis als etwas nicht allzu fremdem gegenübertreten kann, das scheint eine Unmöglichkeit zu sein.

So ergibt sich von selbst ein Bescheiden, und so wird ein einführendes Buch immer nur eine Auswahl aus dem Stoff bringen können. Beeinflußt durch meinen persönlichen Geschmack, habe ich die Auswahl getroffen. Dabei habe ich mich bemüht, nicht Dinge beiseite zu lassen, von deren Pflege auch in unseren Landen Ersprießliches erwartet werden kann. Ein auch in diesem Sinne modernes Buch fehlt auf dem Gebiete der Differentialgleichungen. Daß es nützlich wäre, ein solches zu schreiben, habe ich mir bei der Abfassung des vorliegenden Werkes stets vor Augen gehalten. Ein Blick ins Inhaltsverzeichnis wird des Näheren lehren, wie ich meiner Aufgabe nachzukommen suchte. Wie weit ich sie gelöst habe, mag man nach der Lektüre entscheiden.

Bei der Korrektur verdanke ich freundliche Ratschläge den Herren: *Courant, Kerékjártó, H. Kneser, Knopp, Lettenmeyer, Perron.*

Berlin, April 1923.

L. Bieberbach.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Die Kürze der Zeit, die mir für die Vorbereitung der zweiten Auflage blieb, hat mich gezwungen, mit den Zusätzen, die ich gerne machen wollte, haushälterischer umzugehen, als ich gerne gemocht hätte.

Meine Hauptarbeit hat in einer sorgfältigen Revision des Textes bestanden. Keine Seite ist unverändert geblieben. Eine große Zahl kritischer Bemerkungen meines scharfsinnigen Göttinger Kollegen *Grandjot* war mir dabei besonders wertvoll und nützlich. Dankbar bin ich auch den Herren *Courant*, *Doetsch*, *Hammerstein*, *Kamke*, *H. Kneser*, *Krafft* für so manchen guten Rat. So hoffe ich, daß man mich hinsichtlich der Änderungen und Besserungen des Textes keiner zu großen Zurückhaltung zeihen wird. Das Kapitel über partielle Differentialgleichungen erster Ordnung und Systeme gewöhnlicher ist z. B. fast ganz neu redigiert worden.

An Zufügungen möchte ich wenigstens die folgenden hervorheben: Den Existenzbeweis von Lösungen für gewöhnliche Differentialgleichungen

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

bei bloßer Stetigkeit von $f(x, y)$, die *Poincaré-Lindelöfschen* Untersuchungen über das Verhalten von Lösungen solcher Differentialgleichungen im komplexen Gebiet in der Umgebung fester singulärer Stellen, die Theorie der Systeme gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Berlin, im Herbst 1925.

L. Bieberbach.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung	Seite 1
----------------------	------------

Erster Abschnitt.

Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung.

I. Kapitel.

Elementare Integrationsmethoden.

§ 1. Die Trennung der Variablen	6
§ 2. Lineare Differentialgleichungen	10
§ 3. Einparametrische Kurvenscharen	12
§ 4. Exakte Differentialgleichungen	15
§ 5. Der integrierende Faktor	16
§ 6. Die <i>Clairautsche</i> Differentialgleichung und Verwandtes	20
§ 7. Ziel und Tragweite der elementaren Integrationsmethoden	23

II. Kapitel.

Die Methode der sukzessiven Approximationen und verschiedene Anwendungen derselben.

§ 1. Das Verfahren der sukzessiven Approximationen	26
§ 2. Die graphische Darstellung der Differentialgleichungen	33
§ 3. Wie beurteilt man die Güte einer Näherung?	36
§ 4. Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen	39
§ 5. Die <i>Euler-Cauchysche</i> Polygonmethode	41
§ 6. Integration durch Potenzreihen	47
§ 7. Übertragung der <i>Simpsonschen</i> Regel	49

III. Kapitel.

Diskussion des Verlaufs der Integralkurven.

§ 1. Elementare Betrachtungen	51
§ 2. Singuläre Punkte	53
§ 3. Die homogene Differentialgleichung $y' = \frac{Cx + Dy}{Ax + By}$	56
§ 4. Allgemeine Sätze über den Verlauf der Integralkurven im reellen Gebiet	60
§ 5. Die Differentialgleichungen $x^m \frac{dy}{dx} = ay + bx + \mathfrak{P}(x, y)$	71
§ 6. Die Differentialgleichungen $\frac{dy}{dx} = \frac{Cx + Dy + \delta(x, y)}{Ax + By + \varepsilon(x, y)}$	74
§ 7. Über die Verteilung der singulären Stellen	89
§ 8. Singuläre Lösungen	94

IV. Kapitel.

Differentialgleichungen erster Ordnung im komplexen Gebiet.

§ 1. Feste und bewegliche Singularitäten	100
§ 2. Differentialgleichungen mit eindeutigen Integralen	105
§ 3. Die Differentialgleichungen $\frac{dw}{dz} = \frac{Cz + Dw + \mathfrak{P}_2(z, w)}{Az + Bw + \mathfrak{P}_1(z, w)}$ in der Umgebung von $z = w = 0$	108

Zweiter Abschnitt.

Gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

I. Kapitel.

Die Existenz der Lösungen.

	Seite
§ 1. Die Methode der sukzessiven Approximationen	115
§ 2. Geometrische Veranschaulichung	117

II. Kapitel.

Elementare Integrationsmethoden.

§ 1. Einige Typen von Differentialgleichungen	119
§ 2. Die Differentialgleichung der Kettenlinie	121
§ 3. Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . .	123

III. Kapitel.

Diskussion des Verlaufs der Integralkurven.

§ 1. Geschlossene Integralkurven	132
§ 2. Die Lösungskurven linearer Differentialgleichungen	146
§ 3. Randwertaufgaben	157
§ 4. Nähere Betrachtung der Eigenwerte und der Eigenfunktionen von $y'' + (\sigma + \lambda \varrho) y = 0$	160
§ 5. Über die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den Eigenfunktionen eines Randwertproblems	173
§ 6. Die <i>Besselsche</i> Differentialgleichung	176
§ 7. Zusammenhang mit der Theorie der Integralgleichungen	180

IV. Kapitel.

Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung im komplexen Gebiet.

§ 1. Lage der Singularitäten der Lösung	183
§ 2. Die Natur der Singularitäten	184
§ 3. Außerwesentliche und wesentliche Singularitäten	187
§ 4. Auflösung einer Differentialgleichung in der Nähe einer außerwesentlichen singulären Stelle	190
§ 5. Anwendung auf die <i>Besselsche</i> Differentialgleichung	197
§ 6. Differentialgleichungen der <i>Fuchsschen</i> Klasse	198
§ 7. Die hypergeometrische Differentialgleichung	201
§ 8. Analytische Fortsetzung einer einzelnen Lösung	204
§ 9. Legendresche Polynome	212

Dritter Abschnitt.

Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung und Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

§ 1. Lineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung	216
§ 2. Geometrische Deutung. Verallgemeinerung	225
§ 3. Vorläufige Betrachtung der allgemeinen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung	229
§ 4. Die allgemeine Gleichung erster Ordnung	231
§ 5. Überbestimmte Systeme von partiellen Differentialgleichungen . . .	240

	Seite
§ 6. Über die Integration der für die charakteristischen Streifen aufgestellten Differentialgleichungen	243
§ 7. Das vollständige Integral	247
§ 8. Integration einiger spezieller Differentialgleichungen	252
§ 9. Differentialgleichungen, in welchen die unbekannte Funktion nicht explizite vorkommt	255
§ 10. Anwendungen in der Mechanik	255
§ 11. Die Charakteristikentheorie im Fall von n unabhängigen Veränderlichen	260
§ 12. Das vollständige Integral im Falle von n unabhängigen Veränderlichen	264
§ 13. Kanonische Transformationen und Berührungstransformationen	281
§ 14. Systeme gewöhnlicher linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	295

Vierter Abschnitt.

Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

I. Kapitel.

Allgemeines.

§ 1. Existenzsatz	300
§ 2. Charakteristiken	306
§ 3. <i>Monge-Ampèresche</i> Differentialgleichungen	309
§ 4. Lineare Differentialgleichungen	314

II. Kapitel.

Hyperbolische Differentialgleichungen.

§ 1. Die <i>Laplacesche</i> Kaskadenmethode	316
§ 2. Die <i>Riemannsche</i> Integrationsmethode	317
§ 3. Die Differentialgleichung der schwingenden Saite	325

III. Kapitel.

Elliptische Differentialgleichungen.

§ 1. Die <i>Greensche</i> Formel	327
§ 2. Die erste Randwertaufgabe beim Kreis	331
§ 3. Die Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$	337
§ 4. Verallgemeinerungen	348

IV. Kapitel.

Parabolische Differentialgleichungen.

§ 1. Existenz und Unität der Lösungen	350
§ 2. Der lineare begrenzte Leiter	353
§ 3. Der unbegrenzte Leiter	354
Namenverzeichnis	357
Sachverzeichnis	358

Einleitung.

Unter einer *gewöhnlichen Differentialgleichung* versteht man eine Beziehung

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

zwischen einer Funktion $y(x)$ einer Variablen x , den Ableitungen dieser Funktion und der Veränderlichen x . Wenn Ableitungen bis zur n -ten Ordnung einschließlich vorkommen, so spricht man von einer *Differentialgleichung n -ter Ordnung*. So ist z. B.

$$\frac{dy}{dx} - x - y = 0$$

eine Differentialgleichung erster Ordnung.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 0$$

dagegen ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Die Benennung Ordnung bezieht sich auf die Höchstordnung der vorkommenden Ableitungen und ist nicht mit dem für einige Differentialgleichungen zu erklärenden Begriff des Grades zu verwechseln. Wir werden z. B.

$$\frac{dy}{dx} - x - y = 0$$

oder

$$\frac{dy}{dx} + x^2y = 0$$

linear oder vom ersten Grad nennen, weil links lineare Funktionen von $y' = \frac{dy}{dx}$ und y stehen. Das Adjektiv *gewöhnlich* bezieht sich darauf, daß es sich um Funktionen $y(x)$ einer Variablen x handelt. Es setzt diese Differentialgleichungen in Gegensatz zu den *partiellen*, bei welchen es sich um Funktionen von zwei oder mehr Variablen handelt. So ist z. B.

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = e^x$$

eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung.

Es kann auch vorkommen, daß ein *System* von mehreren Differentialgleichungen für mehrere Funktionen oder auch für eine Funktion *einer* oder *mehrerer* Variablen vorgelegt ist. Immer aber ist die

Aufgabe der Theorie darin zu sehen, die *Eigenschaften derjenigen Funktionen zu ermitteln, welche einer vorgelegten Differentialgleichung oder einem System von Differentialgleichungen genügen*. Die geringste Forderung ist es, einen *expliziten Ausdruck für diese Funktionen zu finden*. Wichtiger ist es, *herauszubekommen, wie der funktionentheoretische Charakter, also z. B. der Verlauf des Kurvenbildes der lösenden Funktionen, von den Eigenschaften der Differentialgleichung abhängt und aus denselben bestimmt werden kann*. Es erhebt sich die Frage, *wie unter mehreren Lösungen eine mit gegebenen Eigenschaften zu finden ist, es handelt sich darum, den numerischen Verlauf einer als vorhanden erkannten Lösung zu finden*, und viele ähnliche Aufgaben werden der Theorie vom mathematischen Grübelgeist, vom Interesse des physikalischen, chemischen, astronomischen oder technischen Praktikers gestellt. *Allen diesen allerverschiedensten Aufgaben muß eine Theorie der Differentialgleichungen Rechnung tragen. Sie hat die Aufgaben zu klassifizieren und die Mittel zu ihrer Bewältigung bereitzustellen, so daß jeder Spezialfall dann nur noch eine mehr oder weniger große Einzelarbeit verlangt*.

Unsere nächste Aufgabe wird es sein, die einfachsten *Differentialgleichungen erster Ordnung* zu untersuchen. Sie sollen von der Form

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

sein. Dabei sei $f(x, y)$ in einem gewissen Bereich der x - y -Ebene als eindeutige und stetige Funktion gegeben¹⁾.

Unter einer *Lösung* oder einem *Integral* einer Differentialgleichung verstehen wir irgendeine der Differentialgleichung genügende, also differenzierbare Funktion. Ihr geometrisches Bild heißt *Integralkurve*.

Wir wollen uns an Hand einer *geometrischen Deutung* zunächst eine ungefähre Vorstellung über die zu erwartenden Ergebnisse verschaffen.

Das geometrische Bild einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung (1) ist ein *Richtungsfeld*. Die Differentialgleichung erlaubt es nämlich, in jedem Punkt des

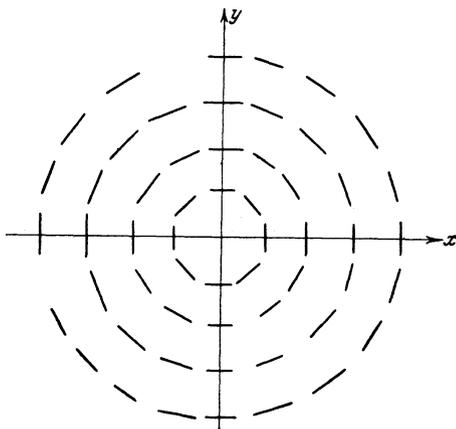


Abb. 1.

¹⁾ Wegen der Begriffe „Bereich“ und „stetige Funktion von zwei Variablen“ vgl. man z. B. meinen Leitfaden der Differentialrechnung, 2. Aufl., auf S. 115 und auf S. 116.

Definitionsbereiches von $f(x, y)$ die Ableitung der gesuchten Funktion, d. i. die Steigung der gesuchten Kurven zu berechnen. Wir können uns dieselben in jedem Punkt durch ein Geradenstück markiert denken, welches die verlangte Richtung hat¹⁾. Abb. 1 veranschaulicht das Richtungsfeld der Differentialgleichung

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Man kann natürlich nicht in jedem Punkt, aber doch in einigen, die Richtung markieren und so schon eine gewisse Vorstellung über den Verlauf der Lösungen erlangen. Man kann dazu in irgendeinem Punkt des Bereiches beginnen und von da ein Stück Weges in der verlangten Richtung bis zu einem Nachbarpunkt gehen. Man wird dort wieder die dort verlangte Richtung einschlagen²⁾ und bis zu einem Nachbarpunkt einhalten, dort wieder zu der veränderten neuverlangten Richtung übergehen usw. So bekommt man etwa das Bild der Abb. 2. Man wird so durch jeden Punkt des Bereiches voraussichtlich eine Kurve finden. Gegen diese Überlegung kann man einwenden, daß man ja eigentlich schon sofort nach dem Verlassen des ersten Punktes die Richtung ändern müßte, nicht erst nach einer Weile, wenn anders die gefundene Kurve *überall* die verlangte Richtung einhalten soll. Doch kann man sich mit der – später durch einen bündigen Schluß zu bestätigenden – Vorstellung trösten, daß man sicher eine gewisse *Annäherung* an die wirkliche Lösungskurve erhalten wird, wenn man nur nie zu lange ein und dieselbe Richtung einhält. Eine gewisse Stütze kann ja auch diese Hoffnung schon vorläufig in einer Reminiszenz aus der Integralrechnung finden. Betrachten wir nämlich den speziellen Fall

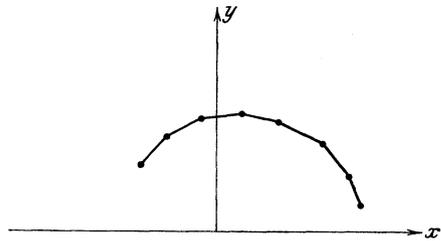


Abb. 2.

$\frac{dy}{dx} = f(x),$

so haben wir es gerade mit der Grundaufgabe der Integralrechnung zu tun, und wir wissen, daß dort tatsächlich die Näherungskurven bei fortgesetzter Verfeinerung des Verfahrens gegen das Integral konver-

1) Den Inbegriff eines Punktes und eines durch ihn gehenden Geradenstückes, also analytisch das Zahlentupel (x, y, y') nennen wir *Linienelement*.

2) Es könnte zweifelhaft sein, in welcher der beiden möglichen Richtungen man die Tangente im neuen Punkt zu verfolgen hat. Indessen ist es doch klar, daß man so vorgehen wird, daß die eingeschlagenen Richtungen sich halbwegs stetig aneinanderreihen. Nimmt man auf diese Vorschrift Rücksicht, so kann man bei genügend kleinen Schritten nie im Zweifel sein, wie man weitergehen wird.

gieren. Die einzelnen Näherungen sind ja weiter nichts, als die geometrischen Bilder der Näherungssummen, welche man bei der Definition des bestimmten Integrales zu benutzen pflegt. Ersetzt man nämlich die Kurve des Intergranden durch ein Treppenvolygon und zeichnet die Intergalkurve dieses Treppenvolgons, so hält diese gerade in den einzelnen Teilintervallen je eine feste Richtung ein. Diese bei der „graphischen Integration“ benutzten Kurven sind es, die als einfacher Spezialfall dessen auftreten, was wir auch bei den Differentialgleichungen antreffen.

Wir wollen aus unserer Überlegung die *Vermutung* entnehmen, daß durch jeden Punkt unseres Bereiches genau eine Integralkurve der Differentialgleichung gehen muß, oder analytisch ausgedrückt, daß es genau eine der Differentialgleichung genügende differenzierbare Funktion $y(x)$ gibt, die für $x = x_0$ den gegebenen Wert $y = y_0$ annimmt, vorausgesetzt, daß der Punkt mit den Koordinaten x_0, y_0 dem gegebenen Bereiche angehört, in welchem $f(x, y)$ gewisse noch näher anzugebende Eigenschaften besitzt.

Wir wenden uns nun dazu, in einigen Fällen auf einem ersten primitiven Wege die Lösungen einer vorgelegten Differentialgleichung wirklich alle anzugeben. Wir werden dann stets das eben Gefundene bestätigt finden, wie denn auch für

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

die gewünschte Lösung bekanntlich durch

$$y = \int_{x_0}^x f(x) dx + y_0$$

gegeben ist.

Man kann sich auch in dem vorhin gewählten Beispiel der Differentialgleichung (2), losgelöst von jeder allgemeinen Methode¹⁾, leicht davon überzeugen, daß unsere Vermutung zutrifft. Denn da die Integralkurve den Punkt (x, y) mit der Steigung $-\frac{x}{y}$ passiert, muß sie nach den Regeln der analytischen Geometrie auf die Verbindungsgeraden dieses Punktes mit dem Koordinatenursprung²⁾ senkrecht stehen. Da sie also jeden ihrer Punkte in derjenigen Richtung passiert, die auch der durch diesen Punkt gehende, im Koordinatenursprung zentrierte Kreis einschlägt, so sind die Kreise Kurven, welche überall die verlangte Richtung besitzen. Durch

$$(3) \quad x^2 + y^2 = r^2$$

¹⁾ Wir werden bald eine solche auf diese Differentialgleichung anwendbare Methode kennen lernen.

²⁾ Ihre Steigung ist $\frac{y}{x}$, so daß das Produkt der beiden Steigungen tatsächlich -1 ist.

müssen also Lösungskurven dargestellt sein. Man rechnet leicht nach, daß die aus der Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2$$

gewonnenen Funktionen tatsächlich der Differentialgleichung (2) genügen. Denn differenziert man diese Gleichung nach x , so hat man

$$x + yy' = 0.$$

Also ist wirklich die Differentialgleichung (2) von S. 3 durch die Kreise (3) erfüllt. Daß unsere Näherungskonstruktion eine gewisse Annäherung an die Kreise liefert, wird man nicht verkennen. Übrigens springen sie ja in Abb. 1 recht deutlich in die Augen.

Erster Abschnitt.

Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung.

I. Kapitel.
Elementare Integrationsmethoden.

§ 1. Die Trennung der Variablen.

Wir wollen die Methode der *Trennung der Variablen* zunächst an der Differentialgleichung

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} + \frac{x}{y} = 0$$

darlegen. Die Methode geht von der — vorerst unbewiesenen — Annahme aus, daß diese Gleichung Lösungen besitzt. Denkt man sich dann für y eine der Lösungen der Gleichung eingesetzt, so muß die Gleichung

$$y \frac{dy}{dx} = -x$$

identisch in x gelten. Namentlich muß das Integral der linken Seite dem der rechten gleich sein. Das liefert

$$(2) \quad \int_{x_0}^x y \frac{dy}{dx} dx = \frac{x_0^2 - x^2}{2}.$$

Das Integral linker Hand wird durch die Substitutionsmethode berechnet, indem man durch $y = y(x)$ als neue Integrationsvariable y selbst einführt. Setzt man $y(x_0) = y_0$, so findet man

$$\frac{y^2 - y_0^2}{2} = \frac{x_0^2 - x^2}{2}.$$

Setzt man dann $x_0^2 + y_0^2 = r^2$, so hat man in

$$x^2 + y^2 = r^2$$

eine algebraische Gleichung, welcher die gesuchte Lösung genügen muß. Umgekehrt sieht man auch leicht, daß jede dieser Gleichung genügende Funktion $y(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung ist. Damit ist dann der anfänglich noch ausstehende Beweis für die Existenz der Lösungen nachträglich erbracht.

Die Verwendung der Substitutionsmethode bei der Berechnung des Integrales (I) setzt voraus, daß auf der betrachteten Integralkurve $\frac{dy}{dx}$ sein Vorzeichen nicht wechselt, daß man sich also auf das Innere eines durch die Koordinatenachsen bestimmten Quadranten beschränkt.

Bemerkung: Alle in diesem Kapitel zu besprechenden Methoden gehen von der Annahme aus, daß Lösungen existieren, und jedesmal kann dieser Beweis dadurch nachgetragen werden, daß man hinterher verifiziert, daß die gefundene Lösung tatsächlich der Differentialgleichung genügt. Wir wollen aber diese eintönigen Verifikationen in der Folge weder durchführen noch erwähnen, zumal wir auch im folgenden Kapitel einen allgemeingültigen Beweis für die Existenz der Lösungen kennen lernen werden.

Eine Differentialgleichung gilt stets dann als gelöst oder, wie man auch sagt, als *integriert*, wenn es gelungen ist, eine Lösungskurve durch einen beliebig gewählten Punkt des zugrunde gelegten Bereiches zu finden. Das ist in unserem Beispiel der Fall. Verlangt man nämlich einen Kreis durch den Punkt (x_0, y_0) der oberen oder der unteren Halbebene, so muß man nur $r^2 = x_0^2 + y_0^2$ setzen.

Die eben dargelegte Methode bleibt stets anwendbar, wenn die vorgelegte Differentialgleichung die Form

$$\frac{dy}{dx} = \frac{j(x)}{\varphi(y)}$$

besitzt. Dabei möge $f(x)$ im Intervall $a \leq x \leq b$, $\varphi(y)$ dagegen im Intervall $\alpha \leq y \leq \beta$ stetig erklärt sein¹⁾. $f(x)$ und $\varphi(y)$ sollen daselbst überdies von Null verschieden sein. Der Bereich, in dem wir die Differentialgleichung studieren, ist dann das Rechteck $a \leq x \leq b$, $\alpha \leq y \leq \beta$. Man kann die Gleichung so schreiben:

$$\varphi(y) \frac{dy}{dx} = f(x).$$

Denkt man sich wieder für y irgendeine bestimmte Lösung eingesetzt, so kann man wie oben integrieren, und findet

$$\int_{y_0}^y \varphi(y) dy = \int_{x_0}^x f(x) dx$$

als eine Gleichung für diejenige Lösung, welche für $x = x_0$ den Wert y_0 annimmt. Wenn die Funktionen $f(x)$ und $\varphi(y)$ nicht zu kompliziert sind, wird man nun mit der weiteren Untersuchung der Lösung keine Schwierigkeiten mehr haben. In komplizierteren Fällen kann es aber geschehen, daß mit diesen einfachen Schritten erst die geringste Arbeit geleistet ist.

Häufig tritt der Fall ein, daß erst nach Einführung einer neuen unbekanntenen Funktion oder nach Einführung einer neuen un-

¹⁾ Das sind Einschränkungen, die wieder durch die Verwendung der Substitutionsmethode nötig werden.

abhängigen Variablen der eben eingeschlagene Weg gangbar wird. So hat z. B.

$$\frac{dy}{dx} = x + y$$

nicht die bisher zugrunde gelegte Form. Wählt man aber

$$v = x + y$$

als neue unbekannte Funktion, so wird die Differentialgleichung

$$\frac{dv}{dx} = v + 1.$$

Nun können die Variablen getrennt werden, solange nicht $v = -1$ wird. Man findet dann

$$\log \left| \frac{v+1}{v_0+1} \right| = x - x_0$$

oder

$$v = -1 + (v_0 + 1) e^{x-x_0}.$$

Also wird

$$(3) \quad y = -x - 1 + (1 + x_0 + y_0) e^{x-x_0}.$$

Dabei ist noch $v_0 = x_0 + y_0$ gesetzt. Tatsächlich stellt diese Gleichung eine Funktion dar, die für $x = x_0$ den Wert y_0 annimmt. Für sie wird nirgends $y + x = -1$, es sei denn, daß $x_0 + y_0 = -1$ vorgegeben wird. Dann ist aber die Lösung $y = -x - 1$ selbst, die also auch in (3) enthalten ist.

Durch die gleiche Substitution werden bei allen Differentialgleichungen von der Form

$$\frac{dy}{dx} = f(x + y)$$

die Variablen getrennt.

Ähnlich behandelt man $y' = f(\alpha x + \beta y)$.

Es gibt eine weitere ziemlich umfassende wichtige Klasse von Differentialgleichungen, in welchen sich durch eine einfache Substitution die Variablen trennen lassen. Ich meine die *homogenen Differentialgleichungen*. Sie haben die Form:

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Hier hilft die Substitution

$$v = \frac{y}{x},$$

durch die v als neue unbekannte Funktion eingeführt wird. Die Differentialgleichung wird dann

$$v' x + v = f(v)$$

oder

$$v' = \frac{f(v) - v}{x}.$$

Die Variablen sind also getrennt. Will man aber hier die Methode von S. 7 verwenden, so muß man neben $x \neq 0$ auch $f(v) - v \neq 0$ voraussetzen. Dadurch wird aber nicht nur das Intervall eingeschränkt, indem die Bestimmung der Lösung mit Hilfe des Verfahrens gelingt, sondern es gehen auch gewisse Lösungen der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ verloren. Wenn nämlich die Zahl α der Gleichung $f(\alpha) - \alpha = 0$ genügt, so ist $y = \alpha x$ eine Lösung der homogenen Gleichung (4).

Dieses Vorkommnis enthält einen Hinweis darauf, daß es wünschenswert sein kann, den Begriff der Lösung weiter zu fassen, als dies bisher geschehen ist, nämlich so, daß durch Transformationen, wie die eben benutzte, keine Lösungen verloren gehen. Wie das zu bewerkstelligen ist, wird später klar werden.

In anderen Fällen führen andere Substitutionen auf eine homogene Differentialgleichung. Führt man z. B. in

$$(x - y^2) + 2xy \frac{dy}{dx} = 0$$

$v = y^2$ ein, so erhält man die homogene Gleichung

$$1 - \frac{v}{x} + \frac{dv}{dx} = 0.$$

Auf homogene Differentialgleichungen lassen sich im allgemeinen auch die folgenden zurückführen:

$$(5) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{Ax + By + C}{ax + by + c}.$$

Falls nämlich $C = 0$ und $c = 0$ ist, so ist die Gleichung bereits homogen. Durch eine passende Transformation kann man aber diese Gestalt im allgemeinen herstellen. Der Gedanke ist der: Man betrachte die beiden Geraden

$$Ax + By + C = 0, \quad ax + by + c = 0.$$

Man bringe durch eine passende Verschiebung des Koordinatensystems, also durch eine Substitution der Form:

$$(6) \quad x = u + h, \quad y = v + k$$

den Schnittpunkt der beiden Geraden in den Koordinatenanfang. Das geht immer, wenn $Ab - Ba \neq 0$ ist. Dieser Fall werde also zunächst ausgeschlossen.

Durch die Substitutionsgleichungen wird also sowohl eine neue unabhängige Variable wie eine neue unbekannte Funktion eingeführt. Man findet leicht, daß

$$\frac{dv}{du} = \frac{dy}{dx}$$

ist. Die Substitution (6) liefert also zunächst

$$\frac{dv}{du} = \frac{Au + Bv + (Ah + Bk + C)}{au + bv + (ah + bk + c)}.$$

Nun bestimme man h und k aus den beiden Gleichungen

$$Ah + Bk + C = 0, \quad ah + bk + c = 0.$$

Diese sind lösbar, weil $Ab - Ba \neq 0$ sein soll. Die transformierte Gleichung ist dann homogen.

Wenn aber $Ab - Ba = 0$ ist, so kann man die Gleichung *nicht* auf eine homogene Gleichung zurückzuführen, aber man kann für $b \neq 0$ die Differentialgleichung so schreiben:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{B}{b}(ax + by + c) + C - \frac{Bc}{b}}{ax + by + c}.$$

Dann führe man durch

$$v = ax + by + c$$

eine neue unbekannte Funktion v ein. Die Gleichung wird dann

$$\frac{1}{b} \left(\frac{dv}{dx} - a \right) = \frac{\frac{B}{b}v + C - \frac{Bc}{b}}{v}$$

oder

$$\frac{dv}{ax} = \frac{(B + a)v + Cb - Bb}{v}.$$

Hier sind die Variablen getrennt. Dabei ist angenommen, daß $b \neq 0$ sei. Der Fall $b = 0$ erledigt sich ja von selbst, weil dann auch $B = 0$ oder $a = 0$ sein muß, wenn nicht wieder der vorweggenommene Fall

$$Ab - Ba \neq 0$$

vorliegen soll. Im Falle $B = 0$ sind aber die Variablen getrennt, während im Falle $a = 0$ nach S. 8 die Substitution $Ax + By = v$ zur Trennung der Variablen führt.

§ 2. Lineare Differentialgleichungen.

Die linearen Differentialgleichungen haben die Gestalt

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} + f(x)y + \varphi(x) = 0.$$

Die Koeffizienten $f(x)$ und $\varphi(x)$ mögen in einem Intervall stetig erklärt sein. Zur Integration der linearen Differentialgleichungen führt der Ansatz $y = u \cdot v$, durch den zwei Hilfsfunktionen $u(x)$ und $v(x)$ eingeführt werden. Die Gleichung wird dann

$$u(v' + fv) + u'v + \varphi = 0.$$

Nun bestimme man v aus der Gleichung:

$$(2) \quad v' + f(x)v = 0.$$

Dann bleibt für u :

$$u'v + \varphi = 0.$$

In beiden Gleichungen können dann die Variablen getrennt werden. Man findet

$$v = v_0 e^{\int_{x_0}^x f(x) dx}.$$

Daher wird

$$u = \frac{1}{v_0} \int_{x_0}^x \varphi(x) e^{+\int_{x_0}^x f(x) dx} dx + u_0.$$

So hat man schließlich:

$$y = v_0 e^{-\int_{x_0}^x f(x) dx} \left\{ u_0 - \frac{1}{v_0} \int_{x_0}^x \varphi(x) e^{+\int_{x_0}^x f(x) dx} dx \right\}.$$

Dann wird

$$y = e^{-\int_{x_0}^x f(x) dx} \left\{ y_0 - \int_{x_0}^x \varphi(x) e^{+\int_{x_0}^x f(x) dx} dx \right\}$$

dasjenige Integral unserer Differentialgleichung, welches für $x = x_0$ den Wert y_0 annimmt. *Es ist in jedem Intervall stetig und mit stetiger erster Ableitung versehen, in dem die Koeffizienten von (1) stetig sind.*

Wir wollen die Integration der linearen Gleichung (1) noch etwas anders darstellen. Zwar ist es im Grunde genau das Gleiche, doch wollen wir die Gelegenheit benutzen, um an einem einfachen Beispiel die *Methode der Variation der Konstanten* kennen zu lernen. Wenn in der Gleichung

$$y' + f(x)y + \varphi(x) = 0$$

$\varphi(x) = 0$, die Gleichung also, wie man sagt, *homogen*¹⁾ wäre, so wären die Variablen getrennt und man fände als allgemeines Integral

$$y = c e^{-\int_{x_0}^x f(x) dx}.$$

Dabei ist c eine beliebige Konstante²⁾, die Integrationskonstante. Der Grundgedanke der neuen Methode ist es nun, in der inhomogenen Gleichung

$$y' + f(x)y + \varphi(x) = 0,$$

1) Das Wort *homogen* wird also jetzt in anderem Sinne gebraucht als bei den Differentialgleichungen

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

auf S. 8. Jetzt bezieht es sich darauf, daß die linke Seite eine homogene Funktion von y' und y ist, während es sich früher darauf bezog, daß die rechte Seite eine homogene Funktion von x und y war. Vorhin war überdies die homogene Funktion von nullter Dimension, jetzt ist sie von erster Dimension.

2) Sie war vorhin mit v_0 bezeichnet.

in der also nun $\varphi(x)$ nicht identisch verschwindet, den Ansatz

$$y = c(x) e^{-\int_{x_0}^x f(x) dx}$$

zu machen, also die Konstante $c(x)$ zu variieren, d. h. durch eine noch zu bestimmende *Funktion* von x zu ersetzen. (Man erkennt jetzt wieder das Produkt von zwei Funktionen, das bei der ersten Darstellung den Ausgang bildete.) Man findet dann

$$c' \cdot e^{-\int_{x_0}^x f(x) dx} + \varphi(x) = 0$$

und berechnet daraus $c(x)$. So findet man dann die schon vorhin angegebene Auflösungsformel wieder.

Auf die linearen Gleichungen läßt sich die *Bernoullische* Differentialgleichung

$$y' + f(x)y + \varphi(x)y^n = 0 \quad (n \neq 1)$$

zurückführen. Man hat sie nur so zu schreiben:

$$y^{-n} \cdot y' + y^{1-n} f(x) + \varphi(x) = 0,$$

um zu erkennen, daß die Substitution $v = y^{1-n}$ auf die lineare Gleichung

$$\frac{1}{1-n} v' + v \cdot f(x) + \varphi(x) = 0$$

führt.

Oft erweist es sich als nützlich, von der Differentialgleichung für die unbekannt Funktion $y(x)$ zur Differentialgleichung für die Umkehrfunktion $x(y)$ überzugehen. Ist nämlich $x(y)$ bestimmt, so ist natürlich damit auch implizite $y(x)$ bekannt; jedenfalls sind zu seiner Bestimmung keine Differentialgleichungen mehr zu lösen. Oft ist aber die Differentialgleichung der Umkehrfunktion leichter angreifbar.

Wenn z. B. die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} (x^2 \sin y - yx) = 1$$

vorgelegt ist, so wird daraus

$$\frac{dx}{dy} + yx - \sin y \cdot x^2 = 0.$$

Das ist eine *Bernoullische* Gleichung für x , die wir integrieren können.

§ 3. Einparametrische Kurvenscharen.

In einem Bereich B sei die Funktion $\psi(x, y)$ eindeutig und stetig erklärt. Ihre Werte im Bereich B erfüllen dann eine gewisse Strecke einer Zahlengeraden, der c -Achse. Versteht man dann unter c irgendeinen Wert aus diesem Intervall, so definiert die Gleichung

$$(1) \quad \psi(x, y) = c$$

eine Kurve des Bereichs B . Kurven, die zu verschiedenen c -Werten gehören, treffen sich nicht im Bereiche B , weil in diesem Bereich $\varphi(x, y)$ eine eindeutige Funktion ist. Die Gesamtheit dieser Kurven bildet eine einparametrische Kurvenschar, c heißt der Parameter der Schar. Eine solche Schar kann auch durch eine Gleichung der Form

$$\varphi(x, y, c) = 0$$

definiert sein. Es wird dann im allgemeinen nicht zu jedem x - y -Paar nur ein c -Wert gehören. Es werden vielmehr im allgemeinen durch jeden Punkt des Bereiches B mehrere Kurven der Schar gehen. Die Auflösung

$$c = \psi(x, y)$$

ergibt dann eine mehrdeutige Funktion $\psi(x, y)$, z. B. die mit zwei Vorzeichen wählbare Quadratwurzel. Wir wollen voraussetzen, daß $\varphi(x, y, c)$ in einem gewissen Gebiete G der x, y, c eine eindeutige stetige Funktion von x, y, c ist, die stetige partielle Ableitungen nach x , nach y und nach c besitzt; $\frac{\partial \varphi}{\partial c}$ sei in G von Null verschieden. In der Umgebung eines jeden solchen der Gleichung $\varphi(x, y, c) = 0$ genügenden Wertetripels x_0, y_0, c_0 werden dann die bekannten Sätze¹⁾ über implizite Funktionen verwendbar, und man hat daher in der Umgebung einer jeden solchen Stelle (x_0, y_0) eine oder mehrere eindeutige und stetige Auflösungen

$$c = \psi(x, y).$$

Wir setzen nun weiter voraus, daß $\psi(x, y)$ mit stetigen ersten Ableitungen versehen sei und nehmen an, daß c_0, x_0, y_0 ein der Gleichung (1) genügendes Wertetripel sei, für das $\frac{\partial \psi}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ ist. Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es dann in der Umgebung von $x = x_0$ eine stetige mit stetiger erster Ableitung versehene Funktion $y(x)$, die der Gleichung $c_0 = \psi(x, y)$ genügt, und für die $y(x_0) = y_0$ ist. Das gleiche gilt aus Stetigkeitsgründen für alle c -Werte, die von c_0 hinreichend wenig verschieden sind. Dann gilt der Satz:

Die Kurven einer jeden einparametrischen Kurvenschar genügen einer Differentialgleichung erster Ordnung.

Wenn man nämlich die Gleichung

$$c = \psi(x, y)$$

nach x differenziert, so bekommt man

$$0 = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{dx},$$

und dies ist schon die gewünschte Beziehung zwischen x, y, y' der durch unsere Gleichung dargestellten Kurven.

¹⁾ Vgl. z. B. meinen Leitfaden der Differentialrechnung, 2. Aufl., S. 120.

Ist die Schar in der allgemeinen Form

$$(2) \quad \varphi(x, y, c) = 0$$

gegeben, so wird analog

$$(3) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0.$$

Eliminiert man dann c aus den beiden letzten Gleichungen (2) und (3), so erhält man die gewünschte Differentialgleichung.

Zwei Beispiele werden die Dinge vollends klarlegen.

Die Tangenten einer Kurve

$$\eta = f(\xi)$$

machen eine einparametrische Kurvenschar

$$(2') \quad y = f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi)$$

aus. ξ ist der Parameter der Schar. Differenziert man nach x , so findet man natürlich

$$(3') \quad y' = f'(\xi)$$

für die Richtung der Tangenten. Nun hat man ξ aus beiden Gleichungen (2') und (3') zu eliminieren, wenn man nicht die beiden Gleichungen

$$y = f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi) \\ y' = f'(\xi)$$

etwa als eine Parameterdarstellung der Differentialgleichung selbst ansehen will. Tatsächlich werden wir uns später mit Differentialgleichungen befassen, die in dieser Form gegeben sind oder auf diese Form gebracht werden können.

Wenn z. B.

$$\eta = \xi^2$$

die vorgelegte Kurve ist, so hat man

$$y = \xi^2 + 2\xi(x - \xi)$$

und

$$y' = 2\xi.$$

So erhält man die Differentialgleichung

$$y = \frac{y'^2}{4} + y' \left(x - \frac{y'}{2} \right) \quad \text{oder} \quad y'^2 - 4xy' + 4y = 0$$

der Parabeltangenten.

Durch

$$x^2 + y^2 = r^2$$

ist die Schar der konzentrischen Kreise gegeben. Also wird

$$x + yy' = 0$$

die Differentialgleichung der Schar.

Ebenso wird

$$2yy' - 1 = 0$$

die Differentialgleichung der Parabelschar

$$y^2 = x + C.$$

§ 4. Exakte Differentialgleichungen.

Die Bemerkungen des vorigen Paragraphen führen uns zu einer weiteren Integrationsmethode.

Wenn nämlich die Koeffizienten $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ einer Differentialgleichung

$$(1) \quad P + Q \frac{dy}{dx} = 0$$

in einem einfachzusammenhängenden Bereich B stetige mit stetigen ersten Ableitungen versehene Funktionen sind, welche der Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

genügen — solche Differentialgleichungen heißen *exakt* —, so gibt es nach bekannten Sätzen der Integralrechnung eine in B eindeutige und stetige Funktion $\varphi(x, y)$, deren Ableitungen P und Q sind. Dann besagt aber die Differentialgleichung, die man dann in der Form

$$(2) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$$

schreiben kann, weiter nichts, als daß längs einer jeden Integralkurve der Differentialgleichung die Funktion $\varphi(x, y)$ einen konstanten Wert annimmt. Dann ist $\varphi(x, y) = C$ die Schar der Integralkurven.

Wenn z. B. die Gleichung

$$x^2 + y^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

vorliegt, eine homogene Gleichung, die man auch nach S. 8 behandeln könnte, so ist die Integrabilitätsbedingung für die Koeffizienten erfüllt. Man berechnet dann bekanntlich die Funktion $\varphi(x, y)$ so: Da die x -Ableitung von φ den Wert x^2 besitzt, so findet man

$$\varphi = \int x^2 dx + \psi(y) = \frac{x^3}{3} + \psi(y).$$

Hier bedeutet $\psi(y)$ eine Funktion von y , die nun aus der Bedingung zu bestimmen ist, daß

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = y^2$$

sein soll. Das liefert aber

$$\psi'(y) = y^2.$$

Also wird

$$\psi(y) = \frac{y^3}{3} + c.$$

So finden wir

$$\varphi = \frac{x^3 + y^3}{3} + c.$$

Daß die Ableitungen dieser Funktion die richtigen Werte haben, bestätigt man leicht. So sind also

$$x^3 + y^3 = C$$

die Lösungen unserer Differentialgleichung. Wünscht man insbesondere die Integralkurve durch den Punkt x_0, y_0 , so wird

$$x^3 + y^3 = x_0^3 + y_0^3$$

deren Gleichung.

§ 5. Der integrierende Faktor.

Wenn die Koeffizienten der Differentialgleichung

$$P(x, y) + Q(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$$

nicht der Integrabilitätsbedingung des § 4 genügen, so kann man doch hoffen, dieselbe durch Multiplikation mit einer geeigneten Funktion $M(x, y)$, die man *Multiplikator* oder auch *integrierender Faktor* nennt, in eine exakte Differentialgleichung zu verwandeln. Denn wenn man annimmt, daß die Differentialgleichung Lösungen besitzt, und daß die Schar ihrer Lösungskurven durch

$$\varphi(x, y) = c$$

gegeben ist, und das φ partielle Ableitungen erster Ordnung besitzt, so muß die Differentialgleichung auf die Form

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}$$

gebracht werden können. Daher muß

$$\frac{P}{Q} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}$$

sein. Daraus folgt

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{P} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{Q}.$$

Setzt man den gemeinsamen Wert dieser beiden Quotienten gleich $M(x, y)$ so findet man, daß

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = MP, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = MQ$$

ist, daß also tatsächlich die Differentialgleichung

$$MP + MQ \frac{dy}{dx} = 0$$

exakt ist.

Wie kann man nun aber eine solche Funktion M wirklich bestimmen? Wir setzen voraus, daß M , P und Q stetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitzen, betrachten also weiterhin nur Differentialgleichungen, die dieser Voraussetzung genügen, und nennen auch nur Funktionen

der angegebenen Art Multiplikatoren. Da dann die Funktionen MP und MQ der Integrabilitätsbedingung genügen müssen, so findet man für M die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial(MP)}{\partial y} = \frac{\partial(MQ)}{\partial x}.$$

Man kann sie auch so schreiben:

$$P \frac{\partial M}{\partial y} - Q \frac{\partial M}{\partial x} + M \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = 0.$$

Man mag geneigt sein, die Integration dieser partiellen Differentialgleichung für schwieriger zu halten, als die der ursprünglich vorgelegten gewöhnlichen Differentialgleichung. Indessen muß man bedenken, daß man für unsere Zwecke nur irgend eine, lange nicht die allgemeinste Lösung der partiellen Differentialgleichung braucht. Und tatsächlich ist es oft leicht, aus dem bloßen Anblick dieser Gleichung eine ihrer Lösungen zu finden.

Wenn z. B.

$$\frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right)$$

nur von x abhängt, so kann man der partiellen Differentialgleichung durch eine Funktion genügen, die nur von x abhängt. Denn macht man die Annahme

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 0,$$

so reduziert sich die partielle Differentialgleichung auf

$$Q \frac{\partial M}{\partial x} = M \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right)$$

oder

$$\frac{M'}{M} = \frac{P_y - Q_x}{Q}.$$

Daraus findet man sofort

$$M = e^{\int \frac{P_y - Q_x}{Q} dx}.$$

Die linearen Differentialgleichungen können auf diese Weise integriert werden. Doch sind dies natürlich nicht die allgemeinsten hierher gehörigen Differentialgleichungen. Denn auch

$$y + xy + \sin y + (x + \cos y) \frac{dy}{dx} = 0$$

kann so integriert werden. Ein Multiplikator ist e^x . Das allgemeine Integral wird

$$e^x(xy + \sin y) = c.$$

Manchmal kann man Vorteil aus der Kenntnis des Zusammenhanges zwischen den verschiedenen Multiplikatoren ein und derselben Differentialgleichung ziehen.

Wenn nämlich $M(x, y)$ ein Multiplikator, und $f(x, y) = c$ das allgemeine Integral¹⁾ einer gewöhnlichen Differentialgleichung sind, so ist auch $M \cdot f$ ein Multiplikator. Denn man rechnet nach:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(MfP)}{\partial y} - \frac{\partial(MfQ)}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial y} MP - \frac{\partial f}{\partial x} MQ + f \frac{\partial(MP)}{\partial y} - f \frac{\partial(MQ)}{\partial x} \\ &= MP \frac{\partial f}{\partial y} - MQ \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{wegen} \quad \frac{\partial(MP)}{\partial y} - \frac{\partial(MQ)}{\partial x} = 0 \\ &= -MQ \left(\frac{dy}{dx} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad \text{wegen} \quad P + Q \frac{dy}{dx} = 0 \\ &= 0 \quad \text{wegen} \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0. \end{aligned}$$

Da weiter das allgemeine Integral auch in der Form

$$\varphi(f) = c$$

geschrieben werden kann, wenn man unter $\varphi(w)$ eine willkürliche nirgends konstante differenzierbare Funktion versteht, so ergibt sich, daß auch

$$M \cdot \varphi(f)$$

ein Multiplikator ist.

Wenn umgekehrt der Quotient zweier Multiplikatoren M_1 und M_2 nicht von x und y unabhängig ist, so stellt

$$\frac{M_1}{M_2} = c$$

das allgemeine Integral der Differentialgleichung dar. Wenn nämlich

$$\frac{df}{dx} = M_1 P + M_1 Q \frac{dy}{dx}$$

und

$$\frac{d\varphi}{dx} = M_2 P + M_2 Q \frac{dy}{dx}$$

ist, so stellen sowohl

$$f(x, y) = c \quad \text{wie} \quad \varphi(x, y) = C$$

das allgemeine Integral dar. Längs einer jeden Integralkurve haben sowohl f wie φ konstante Werte. Die Werte von φ sind also bekannt, wenn man die von f kennt. Daher kann φ als Funktion von f dargestellt werden. Nun hat man aber

$$\frac{d\varphi}{df} = \frac{M_2(P + Qy')}{M_1(P + Qy')} = \frac{M_2}{M_1}.$$

Da aber weiter, wie wir eben sahen

$$\varphi = F(f)$$

¹⁾ Vorbehaltlich einer späteren schärferen Begriffsbestimmung werde unter einem allgemeinen Integral eine mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung versehene Funktion $f(x, y)$ verstanden, derart, daß man alle einem gegebenen Bereich B angehörigen Integralkurven durch $f(x, y) = c$ darstellen kann.

ist, so ist auch

$$\frac{d\varphi}{df} = F'(f).$$

Daher ist wirklich

$$\frac{M_2}{M_1} = F'(f) = c$$

das allgemeine Integral. Denn $\frac{M_2}{M_1}$ hat längs einer jeden Integralkurve einen konstanten Wert und besitzt auch stetige partielle Ableitungen erster Ordnung, weil dies nach der Begriffsbestimmung des Multiplikators für M_1 und M_2 der Fall ist.

Man kann von diesen Bemerkungen auch auf die folgende Weise zur Integration von Differentialgleichungen Gebrauch machen. Es sei etwa ein Multiplikator von

$$(y^3 + x) + (x^3 + y) y' = 0$$

zu bestimmen. Wir schreiben die Differentialgleichung so:

$$(y^3 + x^3 y') + (x + y y') = 0.$$

Betrachtet man dann erst einmal die beiden Differentialgleichungen

$$y^3 + x^3 y' = 0 \quad \text{und} \quad x + y y' = 0$$

gesondert für sich, so ist man leicht in der Lage, die sämtlichen Multiplikatoren einer jeden derselben zu bestimmen. Die erste besitzt den Multiplikator $x^{-3} y^{-3}$ und $x^{-2} + y^{-2} = c$ ist ihr allgemeines Integral. Also ist

$$x^{-3} y^{-3} F(x^{-2} + y^{-2})$$

der allgemeinste Multiplikator der ersten Gleichung. Ein Multiplikator der zweiten ist 1 und $x^2 + y^2 = c$ ist ihr allgemeines Integral.

Also ist

$$f(x^2 + y^2)$$

ihr allgemeinsten Multiplikator. Wenn es nun gelingt, eine Funktion zu finden, die als Multiplikator der beiden Differentialgleichungen zugleich brauchbar ist, so ist dieselbe auch ein Multiplikator der ursprünglich gegebenen Differentialgleichung. Es kommt also darauf an, der Bedingung

$$x^{-3} y^{-3} F(x^{-2} + y^{-2}) = f(x^2 + y^2)$$

zu genügen. Man sieht leicht, daß es hinreicht

$$f(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2)^{-3/2} \quad \text{und} \quad F(x^{-2} + y^{-2}) = (x^{-2} + y^{-2})^{-3/2}$$

zu wählen. Daher ist

$$(x^2 + y^2)^{-3/2}$$

ein Multiplikator der gegebenen Differentialgleichung. Man prüfe die Richtigkeit dieser Angabe durch Betrachtung der Integrabilitätsbedingung nach.

§ 6. Die *Clairautsche* Differentialgleichung und Verwandtes.

Die Differentialgleichungen

$$y = f(x, y')$$

$$y = f(y')$$

$$x = f(y')$$

$$x = f(y, y')$$

werden am zweckmäßigsten dadurch behandelt, daß man

$$y' = \phi$$

als neue unbekannte Funktion einführt. Kennt man nämlich erst einmal y' als Funktion von x , so setze man diese nur in die gegebene Differentialgleichung ein, um damit eine Gleichung zwischen x und y allein zu erhalten. Man verifiziert dann, daß sie ein Integral der Differentialgleichung liefert. Den Verlauf des Verfahrens wollen wir uns jetzt am Beispiel der *Clairautschen* Differentialgleichung

$$y = xy' + f(y')$$

etwas näher ansehen. Wir denken uns in die Differentialgleichung irgend eine Lösung derselben eingetragen. Um eine Differentialgleichung für die neue unbekannte Funktion

$$y' = \phi$$

zu bekommen, setzen wir voraus, daß y' eine stetige Ableitung nach x und daß $f(y')$ eine stetige Ableitung nach y' besitze. Wir differenzieren

$$y = x\phi + f(\phi)$$

nach x . So finden wir

$$\phi = \phi + x\phi' + f'(\phi)\phi'$$

oder

$$\phi'(x + f'(\phi)) = 0.$$

Für jedes einzelne x ist also entweder

$$\phi' = 0$$

oder aber

$$x + f'(\phi) = 0.$$

Die vorausgesetzte Stetigkeit von ϕ' und von $f'(\phi)$ hat zur Folge, daß eine jede der beiden Gleichungen in einem Intervall überall erfüllt ist, wenn sie in einer überall dichten Menge desselben erfüllt ist. Daher zerfällt ein jedes Intervall, für das unsere Voraussetzungen erfüllt sind, in Teilintervalle derart, daß in einem jeden derselben durchweg entweder die eine, oder die andere der beiden Gleichungen (oder auch beide) erfüllt sind. Im ersten Falle wird

$$\phi = c.$$

Daher wird dann

$$y = xc + f(c)$$

ein Integral. Man erhält so eine Schar von geraden Linien. Im zweiten Falle aber wird

$$x = -f'(p).$$

Dies mit

$$y = xp - f(p),$$

d. h. mit

$$y = -pf'(p) + f(p)$$

zusammen gibt eine Parameterdarstellung einer bestimmten Kurve der x, y -Ebene mit p als Parameter, die gleichfalls der Differentialgleichung genügt. Denn auch für diese Kurve wird, wie man leicht ausrechnet,

$$y' = p.$$

Allerdings muß man dazu noch voraussetzen, daß f eine zweite nicht verschwindende Ableitung besitzt. Diese Einzelkurve, die zu der Geradenschar noch hinzutritt, nennt man ein *singuläres Integral*, während man im Gegensatz dazu die im allgemeinen Integral enthaltenen Einzelintegrale als *partikuläre Integrale* bezeichnet. Das Vorkommen solcher singulärer Integrale, das *Taylor* zum ersten Male im Jahre 1715 bemerkte, scheint im Widerspruch mit unseren bisherigen Auffassungen über die Integrale der Differentialgleichungen zu stehen. Wir wollen daher ihr Vorkommen mit dem allgemeinen Integrale in Zusammenhang bringen und damit eine Aufklärung geben, die *Lagrange* 1774 gefunden hat. Zu dieser Aufklärung führt uns die Bemerkung, daß im Falle der *Clairautschen* Differentialgleichung das singuläre Integral die Enveloppe der einparametrischen Kurvenschar des allgemeinen Integrales ist. Will man nämlich die Enveloppe der Geradenschar

$$y = xc + f(c)$$

bestimmen, so hat man bekanntlich¹⁾ diese Gleichung nach dem Para-

¹⁾ Ohne auf eine allgemeine Theorie der Enveloppen einer beliebigen Kurvenschar eingehen zu wollen, sei hier nur so viel gesagt. Bei den Geradenscharen

$$y = xc + f(c)$$

mögen vorab die folgenden Bemerkungen Platz haben. Da die Schargeraden einander nicht parallel sind, so schneiden sich je zwei derselben. Wenn man eine Kurve sucht, die von den Geraden der Schar berührt wird, so kann man sich gegenwärtig halten, daß zwei genügend benachbarte Tangenten sich in der Nähe ihrer Berührungspunkte schneiden und daß der Berührungspunkt der Geraden c als Grenzlage des Schnittpunktes der beiden Geraden c und $c + h$ für $h \rightarrow 0$ aufgefaßt werden kann. Der Schnittpunkt aber bestimmt sich aus den beiden Gleichungen

$$y = xc + f(c)$$

$$y = x(c + h) + f(c + h)$$

meter c zu differenzieren und dann aus beiden Gleichungen c zu eliminieren. So findet man hier für die Enveloppe

$$\begin{aligned}x &= -f'(c) \\ y &= xc + f(c).\end{aligned}$$

Das ist aber gerade die Parameterdarstellung des singulären Integrals. Da aber nun die Enveloppe von den Kurven des allgemeinen Integrals berührt wird, so genügen auch ihre Linienelemente der Differentialgleichung. Unter einem Linienelemente verstanden wir ja ein Wertetripel x, y, y' oder geometrisch einen Punkt x, y vereinigt mit der Richtung einer ihn passierenden Geraden. Da dann aber alle Linienelemente der partikulären Integrale der Differentialgleichung genügen, so genügt auch ein jedes Linienelement, das ein solches partikuläres Integral mit der Enveloppe im Berührungspunkt gemeinsam hat, der Differentialgleichung. Da aber die Enveloppe nur solche Linienelemente besitzt, so ist es nicht verwunderlich, daß die Enveloppe der partikulären Integrale der Differentialgleichung genügt.

oder auch aus den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}y &= xc + f(c) \\ 0 &= x + \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.\end{aligned}$$

Geht man nun zu $h \rightarrow 0$ über, so erhält man, wie im Text angegeben wurde, zur Bestimmung des Punktes, in dem die Gerade c die Enveloppe berührt, die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}y &= xc + f(c) \\ 0 &= x + f'(c),\end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned}y &= -cf'(c) + f(c) \\ x &= -f'(c),\end{aligned}$$

die man als eine auf den Parameter c bezogene Darstellung der Enveloppe auffassen mag. Man überzeugt sich weiter leicht, daß die Enveloppe in ihrem Punkt c von der Schargeraden c berührt wird. Denn die Gleichung der Tangente an die Enveloppe im Punkte c wird ja

$$y = xc + f(c).$$

Bei diesen letzten Darlegungen ist stillschweigend angenommen, daß die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}x &= -f'(c) \\ y &= -cf'(c) + f(c)\end{aligned}$$

tatsächlich eine Kurve bestimmen. Das ist nur dann nicht der Fall, wenn $f'(c)$ von c unabhängig ist. Sei etwa $f'(c) = a$. Dann wird $f(c) = ac + b$, also die Enveloppe durch den Punkt

$$x = -a, y = b$$

geliefert. Tatsächlich bestehen dann ja auch die Lösungen der Differentialgleichung

$$y = xy' + ay' + b$$

aus den geraden Linien

$$y = xc + ac + b,$$

die alle durch den Punkt

$$x = -a, y = b$$

hindurchgehen.

In diesen Bemerkungen ist schon das allgemeine Gesetz begründet, daß *stets die Enveloppen der partikulären Integrale als singuläre Integrale der Differentialgleichung genügen.*

Zum Schluß möchte ich nun noch auf eine sehr merkwürdige Tatsache aufmerksam machen. Man kann nämlich aus geradlinigen Stücken und einem Bogen der Enveloppe noch weitere Integralkurven zusammensetzen: Man gehe von einem Punkte aus und verfolge eine ihn passierende Gerade der Schar bis zu ihrem Berührungspunkte mit der Enveloppe und verfolge dann diese in der Ankunftsrichtung weiter bis zu einem beliebigen ihrer Punkte und gehe in diesem wieder auf die dort berührende Schargerade über. Eine solche Kurve besitzt in jedem Punkte eine stetig sich ändernde Tangente und ist aus lauter Linienelementen der Differentialgleichung zusammengesetzt, ist also eine Integralkurve. So kann man also durch einen Punkt beliebig viele Integralkurven legen.

Auch bei der *Lagrangeschen Differentialgleichung*

$$x + yf(y') + q(y') = 0$$

erlaubt es die Einführung von

$$y' = \phi,$$

die vorzunehmenden Auflösungsprozesse erst nach der Integration auszuführen. Führt man nämlich $y' = \phi$ ein und differenziert nach x , so erhält man

$$1 + \phi f(\phi) + yf'(\phi)\phi' + \varphi'(\phi)\phi' = 0.$$

Führt man nun noch y statt x als unabhängige Variable ein, so erhält man

$$1 + \phi f(\phi) - yf'(\phi)\phi \frac{d\phi}{dy} + \varphi'(\phi)\phi \frac{d\phi}{dy} = 0$$

für $\phi(y)$. Geht man zur Umkehrungsfunktion $y(\phi)$ über, so wird

$$\frac{dy}{d\phi} (1 - \phi f(\phi)) + y \cdot \phi f'(\phi) + \phi \varphi'(\phi) = 0$$

und das ist eine lineare Differentialgleichung für $y(\phi)$.

Hat man aus ihr y als Funktion des Parameters ϕ bestimmt, so liefert die Differentialgleichung selbst auch x als Funktion dieses Parameters. Daß man so wirklich die Lösungen in Parameterdarstellung gefunden hat, verifiziert man durch Einsetzen in die Differentialgleichung.

Ganz ähnlich verfährt man auch bei den anderen Differentialgleichungen, die zu Beginn dieses Paragraphen aufgeführt wurden.

§ 7. Ziel und Tragweite der elementaren Integrationsmethoden.

Nach unseren Erfahrungen kann man es wohl als das Ziel der elementaren Integrationsmethoden bezeichnen, geschlossene Ausdrücke für die Lösungen von Differentialgleichungen zu finden. Als Hilfs-

mittel werden dabei die elementaren Funktionen und die Quadraturen d. h. die bestimmten Integrale zugelassen. Es ist ja ein bekannter Satz von *Liouville*, daß man nicht alle Integrale elementarer Funktionen durch elementare Funktionen ausdrücken kann. Elementar heißen dabei alle Funktionen, die sich durch endlich oftmalige Anwendung algebraischer, exponentieller und logarithmischer Prozesse explizit darstellen lassen. Ebenso sollen jetzt noch endlich viele Quadraturen zugelassen werden. Es ist wieder ein Satz von *Liouville*, daß man nicht alle Differentialgleichungen erster Ordnung, die durch Nullsetzen elementarer Funktionen gegeben sind, auf diese Weise lösen kann. Die Beispiele, an denen das *Liouville* gezeigt hat, gehören dem Gebiet der sogenannten *Riccatischen* Differentialgleichungen an. Darunter versteht man Differentialgleichungen von dieser Gestalt:

$$(1) \quad y' = \alpha_0(x) + \alpha_1(x)y + \alpha_2(x)y^2.$$

Euler, dessen „*Institutiones calculi integralis*“ auch heute noch die reichste Sammlung elementar integrierbarer Differentialgleichungen enthalten, hatte sich damit befaßt, elementar integrierbare Fälle der speziellen *Riccatischen* Gleichung

$$(2) \quad y' + y^2 = ax^m \quad (a = \text{Konstante})$$

zu finden. Sein Ergebnis ist dieses: *Es läßt sich Trennung der Variablen stets dann erreichen, wenn der Exponent m unter Verwendung einer ganzen positiven Zahl k in einer der beiden Formen*

$$m = \frac{-4k}{2k+1} \quad \text{oder} \quad m = \frac{-4k}{2k-1}$$

geschrieben werden kann. Im ersten der beiden Fälle macht man die Substitution

$$x = t^{1/m+1}, \quad y = \frac{a}{m+1} Z^{-1}$$

und gelangt so zu der Differentialgleichung

$$Z' + Z^2 = \frac{a}{(m+1)^2} t^n \quad \text{mit} \quad n = -\frac{4k}{2k-1}.$$

In einer solchen geht man dann mit der Substitution

$$t = \frac{1}{\tau}, \quad Z = \frac{1}{t} - \frac{z}{t^2}$$

weiter und gelangt zu

$$z' + z^2 = \frac{a}{(m+1)^2} \tau^n \quad \text{mit} \quad n = \frac{-4(k-1)}{2(k-1)+1}.$$

Somit kommt man durch mehrmalige Verwendung solcher Substitutionen in allen erwähnten Fällen nach endlich vielen Schritten zu einer Differentialgleichung

$$y' + y^2 = \alpha$$

mit konstantem α , in welcher also die Variablen getrennt sind. Als Grenzfall $k \rightarrow \infty$ ist unter jenen *Riccatischen* Gleichungen auch noch

$$y' + y^2 = ax^{-2}$$

enthalten. Hier führt die Substitution $y = \frac{1}{z}$ zu einem der schon behandelten Typen. *Liouville* hat nun gezeigt, daß die hier aufgeführten die einzigen Fälle sind, in welchen spezielle *Riccatische* Gleichungen (2) elementar integrierbar sind. Damit hat er Beispiele von Differentialgleichungen gegeben, welche *nicht* elementar integrierbar sind. Die *Liouvillesche* Arbeit, auf die wegen des Beweises verwiesen werden muß, steht in *Liouvilles Journal de mathématiques*, Bd. 6 (1841).

Der Leser wird noch ein Wort über die allgemeine *Riccatische* Gleichung (1) vermissen. Sie wird durch die Substitution

$$(3) \quad y = -\frac{1}{\alpha_2} \frac{d \log u}{dx}$$

in die lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(4) \quad \alpha_2 u'' - (\alpha_2' + \alpha_1 \alpha_2) u' + \alpha_0 \alpha_2^2 u = 0$$

übergeführt¹⁾. Der von *Euler* behandelte spezielle Typus (2) führt auf

$$u'' - ax^m u = 0,$$

die also für $m = \frac{4k}{2k \pm 1}$ elementar integriert werden kann. Elementar sind weiter diejenigen dem allgemeinen Typus (1) angehörigen Gleichungen zu integrieren, in welchen

$$a_0 \alpha_2 = c_1, \quad \frac{\alpha_2'}{\alpha_2} = \alpha_1 + c_2 \text{ ist (wo } c_1 \text{ und } c_2 \text{ Konstanten sind).}$$

Denn dann bekommt die lineare Differentialgleichung (3) konstante Koeffizienten und kann daher, wie wir S. 127 sehen werden, elementar behandelt werden. Bei Betrachtung der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung werden wir nochmals auf die *Riccatischen* zurückkommen und dann noch einen allgemeinen Satz über dieselben kennen lernen. (S. 131).

II. Kapitel.

Die Methode der sukzessiven Approximationen und verschiedene Anwendungen derselben.

Die bisher verwendeten Methoden sind recht primitiv und dementsprechend ist ihre Tragweite gering. Natürlich kann man in hinreichend einfachen Fällen Ersprößliches mit denselben erzielen, aber in komplizierteren Fällen werden die Resultate rechnerisch recht umständlich. Daran ändern auch nichts die Überlegungen, durch die

¹⁾ Jede lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung kann durch Umkehrung dieses Prozesses auch in eine *Riccatische* verwandelt werden.

Lie die Theorie der elementaren Integrationsmethoden auf eine systematische Basis gestellt hat. Auch ist die Ausbeute dieser Überlegungen für die Untersuchung der funktionentheoretischen Natur der Lösungen und ihres numerischen Verlaufes sehr gering, ganz abgesehen davon, daß es, wie wir sahen, Fälle gibt, wo diese Methoden gar nicht zum Ziele führen können.

Es ist daher an der Zeit, daß wir uns wieder auf unsere Aufgabe besinnen und uns nicht in das Studium der Lösungsmethoden verlieren und nicht darüber die Lösungen selbst vernachlässigen. Dies ist auch der Grund, weswegen ich hier auf *Lie* nicht näher eingehe¹⁾.

Wir wollen zunächst eine bequeme, gut konvergente Methode zur näherungsweise Integration von Differentialgleichungen kennen lernen. Wir werden uns dabei auch gleichzeitig vergewissern, daß in der Tat jede Differentialgleichung Lösungen besitzt, und damit auch die S. 4 ausgesprochene Vermutung beweisen.

§ 1. Das Verfahren der sukzessiven Approximationen.

Zunächst wollen wir den folgenden Satz beweisen.

Existenztheorem: *In der Differentialgleichung*

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

sei $f(x, y)$ in einem gegebenen Bereiche²⁾ B der xy -Ebene stetig und genüge für jedes dem Bereiche angehörige Punktepaar (x, y_1) und (x, y_2) der Lipschitzschen Bedingung

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M |y_1 - y_2|,$$

wo M eine passende, von x , von y_1 und von y_2 unabhängige positive Zahl ist. In B sei ferner $|f(x, y)| < M$. Es seien weiter a und b zwei positive Zahlen, die der Bedingung

$$b < aM$$

genügen, und für die das Rechteck R :

$$|x - x_0| \leq a, \quad |y - y_0| \leq b$$

¹⁾ *Sophus Lie* hat in seinem gemeinsam mit *Georg Scheffers* herausgegebenen Buch: *Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen* (Leipzig 1891) eine eingehende Theorie der elementaren Integrationsmethoden gegeben. Man vergleiche auch den Bd. III der gesammelten Abhandlungen von *Lie*.

²⁾ Unter einem „Bereiche der xy -Ebene“ werde ein für allemal eine Punktmenge dieser Ebene verstanden, derart, daß es um jeden ihrer Punkte eine Kreischeibe gibt, die ganz zur Menge gehört. Außerdem soll die Menge aus nur einem Stück bestehen, so daß man je zwei ihrer Punkte miteinander durch einen dem Bereiche angehörigen Polygonzug verbinden kann.

dem Bereiche B angehört. Dann gibt es genau eine samt ihrer ersten Ableitung in $|x - x_0| \leq a$ stetige Funktion $y = \varphi(x)$, die der Differentialgleichung (1) genügt, für die also in $|x - x_0| \leq a$

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$$

gilt, und die zugleich durch den Punkt (x_0, y_0) hindurchgeht, für die also $\varphi(x_0) = y_0$ ist.

Die im Satz genannte Lipschitzsche Bedingung ist sicher dann erfüllt, wenn $f(x, y)$ eine in B stetige und beschränkte partielle Ableitung nach y besitzt. Denn wenn diese dann in B der Ungleichung $\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| < M$ genügt, dann lehrt der Mittelwertsatz, daß die Lipschitzsche Bedingung mit diesem M erfüllt ist.

Zum Beweis verwende ich das Verfahren der sukzessiven Approximationen. Um es einzuleiten, geht man von irgendeiner stetigen Funktion $y = y_0(x)$ aus, die nur der Anfangsbedingung $y_0(x_0) = y_0$ genügen und der eine dem Rechteck R angehörige Kurve entsprechen möge. Man kann als solche erste Näherung $y_0(x)$ etwa die Konstante $y_0(x) = y_0$ wählen. Man kann aber auch, und das wird zweckmäßiger sein, den Polygonzug nehmen, den wir schon auf S. 3 erwähnt haben und der den bekannten Näherungssummen der bestimmten Integrale entspricht. Ausgehend von $y = y_0(x)$ werden die weiteren Näherungen auf folgende Weise gewonnen. Falls

$$\frac{dy_0}{dx} = f(x, y_0(x)),$$

ist, so ist $y_0(x)$ eine Lösung. Anderenfalls setze man

$$\frac{dy_1}{dx} = f(x, y_0(x))$$

und bestimme hieraus $y_1(x)$ so, daß $y_1(x_0) = y_0$ wird. Wie man aus der Integralrechnung weiß, ist hierdurch $y_1(x)$ eindeutig bestimmt, und zwar ist

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_0(x)) dx.$$

Nun bestimmt man y_2 so aus $\frac{dy_2}{dx} = f(x, y_1(x))$, daß $y_2(x_0) = y_0$ wird,

und findet

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_1(x)) dx.$$

Allgemein wird y_n durch

$$\frac{dy_n}{dx} = f(x, y_{n-1}), \quad y_n(x_0) = y_0$$

definiert, so daß

$$(2) \quad y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}(x)) dx$$

ist. Falls eine der hierbei vorkommenden Näherungen selbst Lösung ist, also falls z. B. $y_n'(x) = f(x, y_n(x))$, $y_n(x_0) = y_0$ ist, so wird für $p \geq 0$ $y_{n+p}(x) = y_n(x)$. Anderenfalls ist zur Bestimmung einer Lösung noch die Konvergenz der $y_n(x)$ zu untersuchen. Dabei wird sich dann auch ergeben, daß die übrigen Behauptungen unseres Satzes zutreffen.

Wir wollen zeigen, daß der $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$ existiert und daß die Grenzfunktion $y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$ eine Lösung der vorgelegten Differentialgleichung ist. Zunächst erörtere ich die Frage, ob man die angegebenen Schritte tatsächlich ausführen kann. Das geht dann und nur dann, wenn die Kurven $y = y_n(x)$ für das Intervall $|x - x_0| \leq a$ alle dem zugrunde gelegten Bereich angehören. Für $y_0(x)$ wurde dies vorausgesetzt. Wir nahmen nämlich an, daß $y = y_0(x)$ für $|x - x_0| \leq a$ eine Kurve aus dem Rechteck R ist. Für die anderen $y_0(x)$ aber wird

$$|y_n(x) - y_0| \leq \int_{x_0}^x |f(x, y_{n-1})| dx < M |x - x_0|.$$

Nun ist

$$|x - x_0| \leq a \quad \text{und} \quad Ma < b.$$

Also ist

$$|y_n(x) - y_0| < b.$$

Daher liegen für $|x - x_0| \leq a$ alle Näherungskurven $y = y_n(x)$ im Rechteck R .

Weiter bemerkt man, daß für $|x - x_0| \leq a$

$$\left| \frac{y_1(x) - y_0(x)}{x - x_0} \right|$$

beschränkt ist. Wählt man also N passend, so ist

$$|y_1(x) - y_0(x)| \leq N |x - x_0|.$$

Ferner wird

$$\begin{aligned} |y_2(x) - y_1(x)| &= \left| \int_{x_0}^x (f(x, y_1) - f(x, y_0)) dx \right| \leq M \int_{x_0}^x |y_1(x) - y_0(x)| dx \\ &\leq MN \int_{x_0}^x |x - x_0| dx = MN \frac{|x - x_0|^2}{2}. \end{aligned}$$

Allgemein wird, wie man durch vollständige Induktion nachweist,

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq M^{n-1} \cdot N \cdot \frac{|x - x_0|^n}{n!}.$$

Denn nimmt man

$$|y_{n-1}(x) - y_{n-2}(x)| \leq M^{n-2} \cdot N \cdot \frac{|x - x_0|^{n-1}}{(n-1)!}$$

als richtig an, so folgt aus

$$y_n(x) - y_{n-1}(x) = \int_{x_0}^x \{f(x, y_{n-1}) - f(x, y_{n-2})\} dx,$$

daß

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq M \int_{x_0}^x |y_{n-1} - y_{n-2}| dx \leq M^{n-1} \cdot N \cdot \frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

ist.

Die Reihe

$$\begin{aligned} y(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) \\ &= y_0(x) + (y_1(x) - y_0(x)) + \dots + (y_n(x) - y_{n-1}(x)) + \dots \end{aligned}$$

konvergiert hiernach absolut und gleichmäßig für alle x mit $|x - x_0| \leq a$. Die Konvergenz ist mit der der Reihe für die Exponentialfunktion vergleichbar. Sie ist also sehr gut. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz ist $y(x)$ stetig in $|x - x_0| \leq a$. Da $y_n(x)$ in R verläuft, ist $f(x, y_n)$ erklärt und eine stetige Funktion von x . Aus

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}) dx$$

ergibt sich für $n \rightarrow \infty$, weil $y_{n-1} \rightarrow y$ gleichmäßig für alle $|x - x_0| \leq a$,

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx.$$

Daraus folgt

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

So haben wir also eine Lösung der Differentialgleichung gefunden, die der gegebenen Anfangsbedingung genügt. Für $|x - x_0| < a$ gilt für dieselbe $|y(x) - y_0| < aM < b$. Wir wollen uns noch überzeugen, daß sie tatsächlich die *einzige* Lösung ist. Nimmt man an, $Y(x)$ und $y(x)$ seien zwei Lösungen, die der Bedingung

$$y(x_0) = Y(x_0) = y_0$$

genügen. μ sei das Maximum der Differenz $|Y(x) - y(x)|$ für $x_0 \leq x \leq x_0 + \alpha$. α ist dabei eine Zahl, über die wir gleich noch näher verfügen werden. Dann ist

$$|f(x, Y) - f(x, y)| \leq M |Y - y|.$$

Aus

$$Y' - y' = f(x, Y) - f(x, y)$$

folgt weiter $|Y - y| \leq M\mu |x - x_0| \leq M\mu \cdot \alpha$.

Sei nun weiter $\alpha < \frac{1}{2M}$, so ist

$$|Y(x) - y(x)| \leq \frac{\mu}{2} \quad \text{für} \quad x_0 \leq x \leq x_0 + \alpha,$$

was nur dann keinen Widerspruch gegen die Definition von μ bedeutet, wenn $\mu = 0$ ist. Dann fallen aber zwischen $x = x_0$ und $x = x_0 + \alpha$ beide Lösungen zusammen. Ebenso schließt man im

Intervall $x_0 - \alpha \leq x \leq x_0$ usw. Tatsächlich existiert also nur eine Lösung bei gegebener Anfangsbedingung¹⁾. Der eingangs ausgesprochene Satz ist nun in allen Teilen bewiesen. Die Gesamtheit der nach ihm vorhandenen Integrale machen das *allgemeine Integral* der Differentialgleichung aus. Jedes einzelne derselben heißt ein *partikuläres Integral*. (Vgl. dazu die vorläufige Erklärung S. 18.)

Bemerkungen: 1. Unsere Beweisführung läßt nicht erkennen, inwieweit die gemachten Voraussetzungen für die Richtigkeit der Behauptungen notwendig sind. In dieser Hinsicht hebe ich folgendes hervor. Für die Existenz der Lösungen reicht die Stetigkeit von $f(x, y)$ hin. Erst für die Einzigkeit der Lösung, d. h. ihre eindeutige Bestimmtheit durch die Anfangsbedingungen muß eine weitere Bedingung wie die *Lipschitzsche* gefordert werden. Dies hat zuerst *Peano* erkannt. Einen durchsichtigen Beweis hat *Perron* *Annalen* 76 gegeben. Einen Beweis dafür, daß (1) bei bloßer von $f(x, y)$ vorausgesetzter Stetigkeit stets Lösungen besitzt, findet der Leser auf S. 43 ff. dieses Buches. Daß die Einzigkeit der Lösung ohne *Lipschitz*-Bedingung verloren gehen kann, sieht man schon an der Differentialgleichung

$$y' = \sqrt{|y|}$$

an der Stelle $x = y = 0$. Denn $y = 0$ und $y = \frac{x^2}{4}$ sind zwei Lösungen durch diesen Punkt. Vgl. auch S. 53 ff.

2. Die Güte der Konvergenz unseres Verfahrens, d. h. die Zahl der Schritte welche man nötig hat, um eine gewisse Annäherung an die Integralkurve zu erzielen, hängt wesentlich von der Zahl M , d. h. von dem Maximum von $\frac{\partial f}{\partial y}$ in dem Rechteck ab. Man kann sich geometrisch leicht überlegen, daß man es in einem gewissen Maße in der Hand hat, durch eine passende Substitution, die geometrisch auf eine Drehung des xy -Koordinatensystems hinausläuft, hier einigermaßen günstige Verhältnisse zu schaffen. Schon S. 2 war von der geometrischen Deutung der Differentialgleichung die Rede. Ihr geometrisches Äquivalent war ein Feld von Linienelementen. Man kann demselben eine gewisse Übersichtlichkeit dadurch verschaffen, daß man die Linien einzeichnet, in deren Punkten Linienelemente gleicher Richtung liegen. Wir wollen sie die *Isoklinen* der Differentialgleichung nennen. Wenn nun $\frac{\partial f}{\partial y}$ einen großen Wert hat, so bedeutet das geometrisch, daß sich auf den Parallelen zur y -Achse die Richtung der Linienelemente rasch ändert, daß also diese geraden Linien die verschiedenen Isoklinen in rascher Folge durchsetzen. Wenn man also das Koordinatensystem so legt, daß die Isoklinen einigermaßen senkrecht zur Richtung der x -Achse stehen, so wird im neuen System $\frac{\partial f}{\partial y}$ einigermaßen klein werden und dann wird die Konvergenz unseres Verfahrens besser. Das kommt auch bei der geometrischen Durchführung der Methode der sukzessiven Approximationen zur Geltung.

¹⁾ Man kann unschwer unser Ergebnis dahin ergänzen, daß es außer der gefundenen keine Lösung gibt, für die $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ ist. Wenn man also von einer Lösung $f(x)$ nur voraussetzt, daß sie für $x_0 < x < x_0 + a$ differenzierbar ist, und daß $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ ist, so ist sie schon mit der im Existenztheorem angegebenen identisch.

Durch eine Differentialgleichung wird jedem Punkte des Bereiches B eine Richtung zugeordnet. Dabei ist es gemäß den über $f(x, y)$ gemachten Voraussetzungen ausgeschlossen, daß die gegebenen Richtungen der y -Achse parallel werden. Die geometrische Auffassung läßt somit als willkürlich erscheinen, was uns wohl bisher als vernünftige Annahme erschien. Drehung des Koordinatensystems kann bewirken, daß $f(x, y)$ an einzelnen Stellen unendlich wird, und umgekehrt kann man ein solches Unendlichwerden von $f(x, y)$ durch Änderung des Koordinatensystems in der Umgebung eines Punktes vielfach beseitigen, indem man durch Drehung des Koordinatensystems zu einer anderen Differentialgleichung übergeht, die auch in dem bisherigen Ausnahmepunkt unseren Voraussetzungen genügt, die aber in seiner Umgebung dieselben Richtungen vorschreibt, wie die gegebene. Ein Unendlichwerden von $f(x, y)$ braucht also nicht notwendig ein singuläres Vorkommen zu bedeuten. Es kann einfach auf der Lage des Koordinatensystems beruhen, und bedeuten, daß eine Lösung der y -Achse parallel wird. Wenn z. B.

¹ $f(x, y)$ stetig bleibt, können wir durch Vertauschung von x und y zum Ziele gelangen. Am besten entspricht aber der Übergang zur Parameterdarstellung der geometrischen Sachlage. Man kann durch irgendeine Gleichung $\frac{dx}{dt} = \varphi(x, y)$ mit stetigem $\varphi(x, y)$ den Parameter t einführen. $\varphi(x, y)$ soll dabei längs einer Integralkurve nirgends verschwinden. Trägt man nämlich rechts die Gleichung $y = f(x)$ einer Lösung ein, so gewinnt man hieraus durch Quadratur ihre Parameterdarstellung¹⁾, wobei noch der $t = 0$ entsprechende Punkt auf jeder Lösung beliebig wählbar bleibt, wie es der noch auftretenden Integrationskonstanten entspricht. Durch Einführung dieses Parameters t kann man dann statt $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ auch schreiben $\frac{dy}{dt} = f \cdot \varphi$ und so diese eine Differentialgleichung durch das System $x' = \varphi, y' = f \cdot \varphi$ ersetzen. Ein entsprechender Existenzsatz lehrt dann wieder, daß es unter entsprechenden Bedingungen für f und φ genau eine Lösung gibt, die für $t = t_0$ die Werte x_0 und y_0 annimmt. Denkt man noch an die Willkür in der Wahl des $t = 0$ entsprechenden Punktes, so kann man auch sagen, es gehe nach wie vor durch jeden Punkt x_0, y_0 genau eine Lösung. Diese Betrachtungen legen es nahe, den Existenzsatz auf Systeme von Differentialgleichungen auszudehnen.

Man kann nun aber auch auf Systeme direkt die Methode der sukzessiven Approximationen ohne jede nennenswerte Änderung übertragen und so auch noch allgemeinere Systeme betrachten wie z. B.

1) Es wird also $\frac{dx}{dt} = \varphi(x, f(x))$, also $t = \int \frac{dx}{\varphi(x, f(x))}$.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z),$$

$$\frac{dz}{dx} = g(x, y, z).$$

Hier wird man dann x, y, z als drei Raumkoordinaten deuten. Geometrisch bedeuten dann diese Gleichungen wieder, daß jedem Raumpunkt aus einem gewissen Bereich ein Linienelement zugeordnet wird. Und dann geht wieder durch jeden Punkt eine Lösung. Ich formuliere nun gleich den Satz für das allgemeinste System:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2 \dots n).$$

Die Funktionen $f_i(x, y_1, \dots, y_n)$ seien in einem gewissen Bereich der x, y_i , also z. B. in dem Intervall $R: |x - x_0| < a, |y_i - y_i^{(0)}| < b_i$ eindeutig und stetig erklärt. Es sei darin $|f_i| < M_i$ und es sei $b_i > a M_i$. Endlich sei in R die Lipschitz-Bedingung

$|f(x, y'_1, \dots, y'_n) - f(x, y''_1, \dots, y''_n)| < M\{|y'_1 - y''_1| + \dots + |y'_n - y''_n|\}$ erfüllt. Dann gibt es genau n in $|x - x_0| < a$ stetige und mit stetigen ersten Ableitungen versehene Funktionen $y_i(x)$, welche diesen Differentialgleichungen genügen, für welche $y_i(x_0) = y_i^{(0)}$ ist, und für die in $|x - x_0| < a$ auch $|y_i - y_i^{(0)}| < b_i$ ist¹⁾.

Kommt insbesondere auf der rechten Seite x nicht vor, so kann man x als einen Parameter t auffassen und zu einem eine Gleichung weniger umfassenden System übergehen. Durch jeden Punkt des x, y_i -Raumes geht dann genau eine Lösung, die das ursprüngliche System in Parameterdarstellung liefert. Denken wir insbesondere an das ebene System zurück, wo also zwei auf einen Parameter t bezogene Differentialgleichungen $x' = f(x, y), y' = g(x, y)$ vorliegen, so ist dieser Rückgang auf eine Gleichung nur dann nicht möglich, wenn an einer Stelle x_0, y_0 sowohl $f(x_0, y_0)$ wie $g(x_0, y_0)$ verschwinden. Dann wollen wir diese Stelle eine *singuläre* nennen. Wir werden solche singuläre Stellen bald noch ausführlicher behandeln. Hier sei nur einiges angeführt, was aus unseren seitherigen Darlegungen von selbst sich ergibt. Der für Systeme ausgesprochene Existenzsatz ist auch hier ohne weiteres anwendbar. Es gibt genau eine Lösung, welche für $t = t_0$ die Werte x_0 und y_0 annimmt, das ist eben die Lösung $x = x_0, y = y_0$, der geometrisch in der x - y -Ebene keine Kurve, sondern eben nur der singuläre Punkt entspricht. Auch hier ist wieder²⁾ zu bemerken, daß unsere Beweisführung die Behauptung mit umfaßt, daß es auch keine weiteren Lösungen gibt, die bei endlichem t_0 für $t \rightarrow t_0$ gegen x_0 und y_0

¹⁾ Es sei dem Leser als nützliche Übung überlassen, die für eine einzelne Differentialgleichung in diesem Paragraphen vorgetragene Beweisführung auf Systeme zu übertragen.

²⁾ Vgl. die Fußnote ¹⁾ auf S. 30.

konvergieren. Wohl aber kann es weitere Lösungen geben, welche für $t \rightarrow \infty$ gegen x_0 und y_0 konvergieren. So sind ja z. B. für die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x},$$

deren singulärer Punkt $x = y = 0$ ist, alle Geraden $y = mx$ Lösungen. In Parameterdarstellung kann man das System $x' = x, y' = y$ wählen, und

$$x = e^t x_0, \quad y = e^t y_0$$

werden Lösungen, welche für $t \rightarrow -\infty$ gegen $x = 0$ und gegen $y = 0$ streben.

§ 2. Die graphische Darstellung der Differentialgleichungen.

Für unsere Zwecke ist die Darstellung vermittelt der Isoklinen die wichtigste. Wir haben oben schon dargelegt, daß eine Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

oder ein System von Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{dt} = g(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = h(x, y)$$

jedem Punkt eines Bereiches B , in dem $f(x, y), g(x, y), h(x, y)$ eindeutig, stetig und mit stetigen Ableitungen erster Ordnung versehen sein sollen, und in dem g und h nirgends gleichzeitig verschwinden, eine Richtung zuordnet, und daß also eine Differentialgleichung durch ein Feld von Linienelementen graphisch dargestellt wird. Um nun in diese Darstellung eine gewisse Übersichtlichkeit zu bringen, verbinden wir die Punkte des Bereiches, welchen die gleiche Richtung zugeordnet ist, durch Kurven, die wir Isoklinen nennen. Wir versehen die einzelnen Isoklinen mit Nummern und merken uns in einem nebenan verzeichneten Richtungsplan die zugehörigen Richtungen an¹⁾.

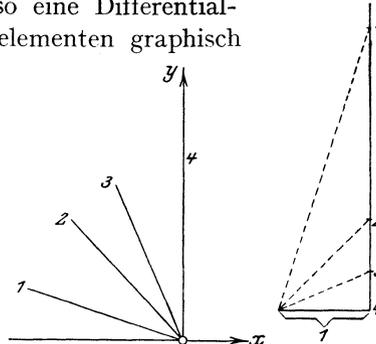


Abb. 3 a.

Abb. 3 b.

In Abb. 3 verzeichnen wir das Bild der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

¹⁾ Man könnte natürlich auch gerade Linien der verlangten Richtung an die Isoklinen selbst zeichnen. Es würde aber Wirrwarr geben, wollte man sie hier so lang wählen, daß man mit einiger Sicherheit dann durch andere Punkte Parallelen dazu ziehen kann.

Abb. 4 zeigt die Differentialgleichung

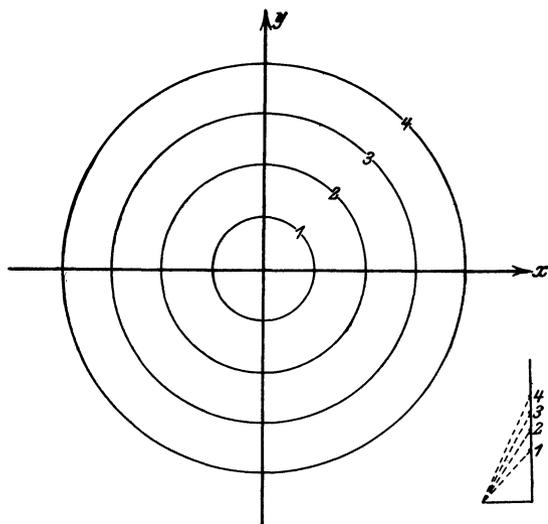


Abb. 4a.

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2,$$

wobei der kleinste Kreisradius als Längeneinheit gedacht ist.

Eine besondere Eigentümlichkeit weisen die Linienelemente der *linearen Differentialgleichungen* auf. Diejenigen Linienelemente nämlich, welche zu Punkten mit gleicher Abszisse gehören, sind auf einen festen Punkt hingerrichtet. Wenn nämlich die Differentialgleichung



Abb. 4b. $y' + f(x)y + g(x) = 0$

gegeben ist, so gehört das Linienelement des Punktes x, y der Geraden

$$\eta = y - (f(x)y + g(x)) (\xi - x)$$

an. Das Linienelement des Punktes x, y_1 aber liegt auf

$$\eta = y_1 - (f(x)y_1 + g(x)) (\xi - x).$$

Beide Geraden schneiden sich im Punkt

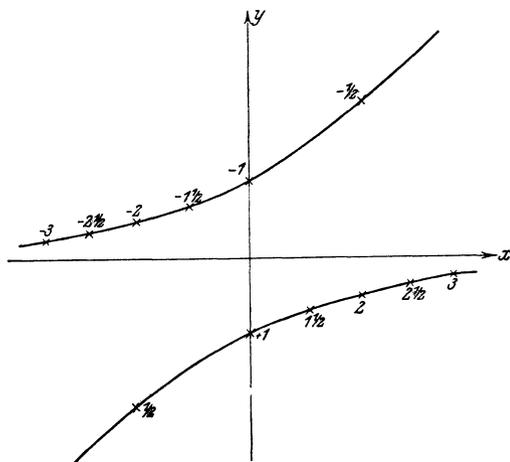


Abb. 5.

$$\xi = x + \frac{1}{f(x)}, \quad \eta = -\frac{g(x)}{f(x)},$$

dessen Koordinaten also nur von x , nicht von y oder y_1 abhängen. Man kann daher die *Leitkurve*

$$\xi = x + \frac{1}{f(x)}, \quad \eta = -\frac{g(x)}{f(x)}$$

statt des Isoklinenfeldes verwenden, wenn man zu jedem ihrer Punkte die zugehörige Abszisse derjenigen Linienelemente anmerkt, welche auf diesen Punkt hingerrichtet sind. Natürlich kann man

von hier aus auch leicht das Isoklinenfeld selbst zeichnen. Abb. 5

zeigt das Bild der Differentialgleichung

$$y' = yx + 1$$

mit der Leitkurve

$$\xi = x - \frac{1}{x}, \quad \eta = -\frac{1}{x}$$

oder

$$\eta^2 - \eta\xi - 1 = 0.$$

Will man also z. B. das zum Punkt (2, 3) gehörige Linienelement finden, so sucht man den Punkt der Leithyperbel, dessen Ordinate $\eta = -\frac{1}{2}$ ist und verbindet ihn mit (2, 3). Dies liefert die Richtung des Linienelements (vgl. Abb. 5; an die Hyperbelpunkte sind die Abszissen x angeschrieben. In unserem Beispiel ist also der Hyperbelpunkt zu nehmen, an dem 2 steht.)

Will man ausgehend von der Leitkurve die Isoklinen zeichnen, z. B. die zu $y' = 2$ gehörige, so lege man durch alle Punkte der Leitkurve Parallele zu der gewünschten Richtung der Linienelemente und bringe diese mit den zu den einzelnen Kurvenpunkten gehörigen Parallelen zur y -Achse zum Schnitt. So erhält man zu jeder Abszisse denjenigen Punkt, dessen Linienelement die gewünschte Richtung hat.

Sowohl Isoklinenfeld wie Leitkurve können auch mit Vorteil verwendet werden, wenn es sich darum handelt, in der schon angedeuteten Weise eine erste Näherungslösung der Differentialgleichung zu zeichnen. Abb. 6 zeigt eine solche für die Differentialgleichung

$$y' = x^2 + y^2.$$

Man kann die Näherungen dadurch verbessern, daß man die Isoklinen dichter wählt. Auch empfiehlt es sich, in dem Streifen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Isoklinen die Näherungskurve nicht mit einer der auf den Isoklinen vorgeschriebenen Richtungen zu zeichnen, sondern dazu das arithmetische Mittel der auf beiden vorgeschriebenen Richtungen zu verwenden. Daß dies Verfahren bei genügender Verfeinerung gegen die wahre Lösung konvergiert, werden wir bald beweisen und dabei gleichzeitig auch die Güte der bei jedem Schritt erreichten Näherung abschätzen.

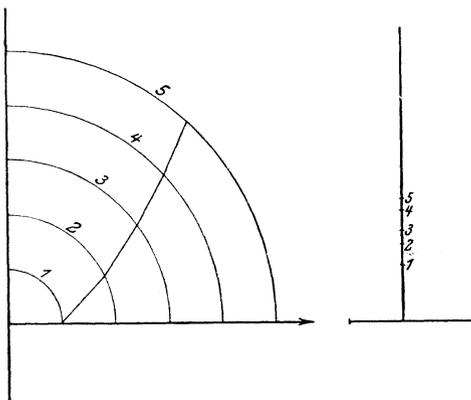


Abb. 6.

§ 3. Wie beurteilt man die Güte einer Näherung?

Wenn man fragt, wie gut eine Näherung mit einer Lösung übereinstimmt, so verlangt man damit eine Abschätzung der Differenz zwischen der Näherung und der Lösung. Oben, bei der zeichnerischen Behandlung der Differentialgleichung, waren wir in Versuchung, schon zufrieden zu sein, wenn wir nur sahen, daß die betreffende Funktion angenähert der Differentialgleichung genügt, oder anders ausgedrückt, wenn sich herausstellte, daß die Richtungen der Lösungen angenähert mit den in den Punkten der Kurve im Feld vorgeschriebenen Richtungen übereinstimmten. Und hier erhebt sich das Problem. Ich formuliere es so: Man hat zwei Differentialgleichungen

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

$$(2) \quad \frac{dY}{dx} = f(x, Y) + A(x, Y).$$

$f(x, y)$ soll in einem Bereich B stetig und beschränkt sein und einer *Lipschitzschen* Bedingung genügen. $A(x, y)$ soll in B beschränkt sein. Dazu kommt noch eine gleich zu nennende weitere Voraussetzung. Man wünscht zu wissen, wie groß die Differenz zweier Lösungen der beiden Gleichungen sein kann, wenn diese Lösungen den gleichen Anfangsbedingungen genügen. Man wird natürlich erwarten, daß ein kleines $A(x, Y)$ einen geringen Unterschied der Lösungen bedingt, oder mit anderen Worten, daß die Lösungen sich stetig mit der Differentialgleichung ändern. Es soll sich aber auch darum handeln, den Unterschied der Lösungen abzuschätzen.

Man braucht nur wieder die Lösungen nach der Methode der sukzessiven Approximationen zu konstruieren; dabei ergibt sich die Beantwortung unserer Frage mit Leichtigkeit. Zur Vereinfachung der Rechnung wollen wir bei beiden Differentialgleichungen die gleiche erste Näherung verwenden. Als solche Näherung benutzt man eine Lösung $Y(x)$ der zweiten Differentialgleichung, weil man sonst angesichts der wenigen über $A(x, Y)$ gemachten Voraussetzungen nicht sicher ist, daß das Verfahren konvergiert. Ich setze weiter voraus, daß diese Lösung stetig und mit einer Ableitung versehen sei, die bis auf endlich viele Sprünge stetig ist. Diese erste Näherung sei

$$y_0(x) = Y(x).$$

Die Lösungen sollen so bestimmt werden, daß sie für $x = x_0$ den Wert $y = y_0$ erhalten. Namentlich ist also $y_0(x_0) = Y_0(x_0) = y_0$. Ich setze

$$|A(x, y)| < \delta.$$

Dann finde ich zunächst die beiden Näherungen

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_0(x)) dx$$

und

$$Y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_0(x)) dx + \int_{x_0}^x A(x, y_0(x)) dx.$$

Ihr Unterschied kann sofort abgeschätzt werden:

$$|Y(x) - y_1(x)| < \delta |x - x_0|.$$

Daher wird weiter¹⁾

$$|f(x, Y) - f(x, y_1)| < M |Y - y_1| < \delta M |x - x_0|.$$

So erhält man dann die Abschätzung

$$\begin{aligned} Y(x) - y_2(x) &= \\ &= \int_{x_0}^x \{f(x, Y) - f(x, y_1)\} dx + \int_{x_0}^x A(x, Y) dx < \delta M \frac{|x - x_0|^2}{2} + \delta |x - x_0|. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich wieder leicht

$$|f(x, Y) - f(x, y_2)| < M |Y - y_2| < \delta M^2 \frac{|x - x_0|^2}{2} + \delta M |x - x_0|.$$

Und daraus findet man

$$Y - y_3 < \delta M^2 \frac{|x - x_0|^3}{3!} + \delta M \frac{|x - x_0|^2}{2} + \delta |x - x_0|.$$

Durch vollständige Induktion bestätigt man leicht, daß allgemein

$$Y - y_n < \delta M^{n-1} \frac{|x - x_0|^n}{n!} + \delta M^{n-2} \frac{|x - x_0|^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \delta |x - x_0|.$$

Da aber nun für die Lösungen $Y(x)$ und $y(x)$ selbst

$$Y(x) - y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{Y(x) - y_n(x)\}$$

wird, so findet man aus unseren Abschätzungen:

$$(3) \quad |Y(x) - y(x)| < \delta |x - x_0| e^{M|x - x_0|}.$$

Diese Formel ist es, die wir gewinnen wollten.

Sie bringt u. a. zum Ausdruck, daß sich bei festen Anfangsbedingungen die Lösungen stetig mit der Differentialgleichung ändern.

Ich wende dies insbesondere auf den Fall an, daß die rechte Seite einer Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \mu)$$

stetig von einem Parameter μ abhängt, genauer, daß sie eine stetige Funktion von x, y und dem Parameter μ ist, solange x, y einen Bereich B

¹⁾ Unsere Annahme über $Y_0(x)$ hat zur Folge, daß alle $Y_i(x)$ mit $Y(x)$ übereinstimmen. M hat die auf S. 26 angegebene Bedeutung.

und μ einem Intervall I angehören. Dann hängen auch die Lösungen bei fester, d. h. von μ unabhängiger Anfangsbedingung stetig von μ ab. Wenn außerdem $f(x, y, \mu)$ erste Ableitungen nach y und nach μ besitzt, die ihrerseits stetig von x, y, μ abhängen, so besitzen auch die Lösungen erste Ableitungen nach μ , die stetig von x und μ abhängen.

Die erste Hälfte der Behauptung, welche sich auf die stetige Abhängigkeit der Lösungen von x und μ bezieht, ergibt sich unmittelbar als Anwendung der vorausgegangenen Betrachtungen. So bleibt nur noch der auf die Differenzierbarkeit bezügliche Teil der Behauptung zu beweisen. Dazu bilde man den nach μ genommenen Differenzenquotienten auf beiden Seiten der Identität

$$(4) \quad \frac{dy(x, \mu)}{dx} = f(x, y(x, \mu), \mu).$$

Man erhält

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y(x, \mu + \Delta\mu) - y(x, \mu)}{\Delta\mu} \right) = \frac{f(x, y + \Delta y, \mu + \Delta\mu) - f(x, y, \mu)}{\Delta\mu}.$$

Dafür kann man kurz schreiben¹⁾

$$(5) \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{\Delta y}{\Delta\mu} \right) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y + \vartheta \Delta y, \mu + \vartheta \Delta\mu) \frac{\Delta y}{\Delta\mu} + \frac{\partial f}{\partial \mu}(x, y + \vartheta \Delta y, \mu + \vartheta \Delta\mu) \quad (0 < \vartheta < 1).$$

Das ist eine lineare Differentialgleichung für den Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta\mu}$, eine Gleichung, deren Koeffizienten an der Stelle $\Delta\mu = 0$ noch stetig von dem in die Lösung eingehenden Parameter $\Delta\mu$ abhängen. Für $\Delta\mu \rightarrow 0$ gehen die Koeffizienten der Differentialgleichung in die der linearen Differentialgleichung

$$(6) \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \mu) z + \frac{\partial f}{\partial \mu}(x, y, \mu)$$

über. Für μ ist nämlich eine feste Zahl zu nehmen, so daß $y(x, \mu)$ eine wohlbestimmte Funktion von x ist. Daher ist auch bei festem $\Delta\mu$, Δy eine wohlbestimmte Funktion von x , die für $\Delta\mu \rightarrow 0$ gleichmäßig in x gegen Null geht. Daher unterscheiden sich bei festem $\Delta\mu$ die Koeffizienten von (5) von denen von (6) um Funktionen von x , die für $\Delta\mu \rightarrow 0$ gleichmäßig in x gegen Null streben. Man wird vermuten, daß die bei x_0 verschwindende Lösung von (5) bei diesem Grenzübergang $\Delta\mu \rightarrow 0$ stetig in die bei x_0 verschwindende Lösung von (6) übergeht. Falls dies richtig ist, so besitzt $\frac{\Delta y}{\Delta\mu}$ für $\Delta\mu \rightarrow 0$ einen Grenzwert, und somit ist die bei x_0 der Bedingung $y(x_0) = y_0$ genügende Lösung von (4) eine differenzierbare Funktion von μ , deren Ableitung nach μ stetig von x und μ abhängt. Den Beweis erbringt man am besten

¹⁾ Im Falle, wo $f(x, y, \mu)$ analytisch von y, μ abhängt, entwickle man rechts nach Potenzen von Δy und $\Delta\mu$.

durch direkte Integration der linearen Gleichungen (5) und (6) (vgl. S. 11). Die dort gegebene Auflösungsformel läßt die Richtigkeit unserer Vermutung sofort erkennen. Man kann den Beweis aber auch dadurch führen, daß man das über die Differentialgleichungen (1) und (2) gewonnene Ergebnis (3) auf die Differentialgleichungen (6) und (5) anwendet, wobei also (1) durch (6) und (2) durch (5) zu ersetzen ist.

Wendet man die gleiche Betrachtung auf (6) an, dessen Lösung $z = \frac{\partial y}{\partial \mu}$ ist, so erkennt man, daß aus der Existenz und Stetigkeit der Ableitungen von f nach y und μ bis zur n -ten Ordnung einschließlich, die Existenz und Stetigkeit von $\frac{\partial y^n}{\partial \mu^n}$ folgt.

Bemerkung: Alle Ergebnisse übertragen sich unverändert auf Systeme.

§ 4. Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen.

Der naiven Anschauung liegt die Auffassung nahe, daß eine geringe Änderung der Anfangsbedingungen eine nur geringe Änderung der Lösung nach sich zieht. Wir wollen die Richtigkeit dieser Ansicht bestätigen und zugleich eine Abschätzung der Lösungsänderung gewinnen. Auch hierzu leistet die Methode der sukzessiven Approximationen gute Dienste. Es sei

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

die Differentialgleichung¹⁾. Die Anfangsbedingung für die Lösung $Y(x)$ derselben sei

$$Y(x_0) = y_0;$$

für die Lösung $y(x)$ aber sei $y(x_0) = y_0 + \varepsilon$, wo $|\varepsilon| < \eta$ sei.

Dann sei

$$Y_0(x) = y_0 \qquad y_0(x) = y_0 + \varepsilon$$

$$Y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, Y_0(x)) dx \qquad y_1(x) = y_0 + \varepsilon + \int_{x_0}^x f(x, y_0(x)) dx$$

$$Y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, Y_1) dx \qquad y_2(x) = y_0 + \varepsilon + \int_{x_0}^x f(x, y_1(x)) dx$$

usw. eine Folge von Näherungslösungen.

Daraus gewinnt man

$$\begin{aligned} |Y_1(x) - y_1(x)| &< \eta + M\eta |x - x_0| \\ |Y_2(x) - y_2(x)| &< \eta + M\eta |x - x_0| + M^2\eta \frac{|x - x_0|^2}{2}. \end{aligned}$$

Vollständige Induktion lehrt allgemein

$$|Y_n(x) - y_n(x)| < \eta + M\eta |x - x_0| + M^2\eta \frac{|x - x_0|^2}{2} + \dots + M^n \eta \frac{|x - x_0|^n}{n!}.$$

¹⁾ Wir knüpfen an die Voraussetzungen und die Bezeichnungen der S. 26 an.

Durch Grenzübergang folgt

$$(2) \quad |Y(x) - y(x)| \leq \eta e^{M|x-x_0|}.$$

Wir haben damit zugleich auch die Größe des Einflusses abgeschätzt, welchen eine Änderung der Anfangsbedingungen auf den Verlauf der Integralkurve äußerstens haben kann. Hätte es sich uns lediglich darum gehandelt, aufzuweisen, daß die Lösung stetig von y_0 abhängt, so hätte die Bemerkung genügt, daß die Näherungslösungen stetig von y_0 abhängen und daß die Reihe

$$y_0 + \Sigma(y_n - y_{n-1})$$

gleichmäßig in y_0 konvergiert. Das folgt einfach daraus, daß die Abschätzungen auf S. 28 von der speziellen Wahl von y_0 unabhängig sind, wofern nur (x_0, y_0) ein Punkt aus dem S. 26 eingeführten Rechteck ist. Man gehe nur unter diesem Gesichtspunkt die Betrachtungen von S. 27 ff. erneut durch!

Die Lösungen sind also stetige Funktionen der Anfangsbedingungen:

$$y = y(x, y_0).$$

Zu einem zweiten Beweis dieses Ergebnisses gelangt man durch Anwendung des auf S. 37 gewonnenen Satzes. Man mache, um das einzusehen, in (1) die Substitution $y(x) = z(x) + \varepsilon$. Dadurch geht (1) in

$$(3) \quad \frac{dz}{dx} = f(x, z + \varepsilon)$$

über. Die Lösung $y(x)$ mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0 + \varepsilon$ geht in eine Lösung von (3) mit der Anfangsbedingung $z(x_0) = y_0$ über. Man hat also eine Lösung $Y(x)$ von (1) und eine Lösung $z(x)$ von (3) mit gleicher Anfangsbedingung zu vergleichen. Daher liefert die Abschätzung (3) von S. 37

$$|Y(x) - z(x)| < \eta M |x - x_0| e^{M|x-x_0|}$$

Daraus folgt

$$|y(x) - z(x)| < \eta + \eta M |x - x_0| e^{M|x-x_0|},$$

ein Ergebnis, das nicht ganz so gut ist, als das oben auf direktem Wege gewonnene (2).

Die eben verwendete Methode hat aber den Vorteil, daß sie auch Aufschluß über die Differenzierbarkeit der Lösungen als Funktionen der Anfangsbedingungen liefert. Wir können nämlich y_0 als einen Parameter μ auffassen, von dem die Lösungen abhängen. So liefert der auf S. 38 bewiesene Satz unmittelbar das Ergebnis, *daß die Lösungen von (1) eine stetige erste Ableitung nach y_0 besitzen, falls $f(x, y)$ eine stetige erste Ableitung nach y besitzt, sowie daß die Ableitungen der Lösungen nach y_0 bis zur n -ten Ordnung einschließlich existieren und stetig sind, wenn die Ableitungen von $f(x, y)$ nach y bis zur n -ten Ordnung einschließlich stetig sind.*

Die Betrachtungen dieses Paragraphen lassen sich wieder auf Systeme übertragen. Hieraus oder auch direkt kann man weiter schließen, daß die Lösungen auch stetig von dem Anfangswert x_0 abhängen. Man kann sie also in der Form

$$(4) \quad y = \varphi(x; x_0, y_0)$$

schreiben und hat dann, falls noch die ersten Ableitungen von $f(x, y)$ nach x und y stetig sind, in $\varphi(x; x_0, y_0)$ eine samt ihren Ableitungen erster Ordnung stetige Funktion vor sich. Man kann diese Gleichung nach y_0 auflösen und schließen, daß die Auflösung

$$y_0 = \psi(x, y, x_0)$$

selbst samt ihren ersten Ableitungen stetig von x, y, x_0 abhängt. Die Auflösung von (4) ist nämlich einfach durch

$$y_0 = \varphi(x_0; x, y)$$

gegeben. Wenn man nämlich mit (x, y) einen Punkt der durch (x_0, y_0) gehenden Lösung bezeichnet, so ist diese Lösung auch durch diesen Punkt bestimmt. Demnach muß insbesondere die durch x, y bestimmte Lösung durch $x_0 y_0$ gehen. Also ist

$$y_0 = \varphi(x_0; x, y),$$

und diese Funktion ist samt den ersten Ableitungen stetig in den mehrerwähnten Rechtecken.

Bemerkung: Die Überlegungen dieses Paragraphen erlauben es auch, den Einfluß einer gleichzeitigen Änderung von Anfangsbedingung und Differentialgleichung zu beurteilen. Wenn man dies z. B. auf Differentialgleichungen anwendet, deren rechte Seite

$$f(x, y, \mu)$$

stetig von x, y und einem Parameter μ abhängt, so erkennt man, daß die Lösung, welche für $x = x_0$ den Wert y_0 annimmt, stetig von den beiden Variablen y_0 und μ abhängt. Denn eine gleichzeitige geringe Änderung von y_0 und μ zieht eine geringe Änderung von $f(x, y, \mu)$ und also eine geringe Änderung der Lösung y nach sich.

§ 5. Die Euler-Cauchysche Polygonmethode.

Cauchy hat die bekannte zur Definition des bestimmten Integrales dienende Methode auf Differentialgleichungen übertragen. Wir haben den Ansatz dieser Methode schon mehrfach zur näherungsweise Integration verwendet. Schon Euler lehrte ein genähertes Integral dadurch finden, daß man vom Anfangspunkt aus in der dort vorgeschriebenen Richtung ein Stück weit vorgeht, in einem gewissen Punkte dann zu der dort vorgeschriebenen Richtung übergeht, um diese ein Stück weit einzuhalten usw. Aber erst Cauchy hat *bewiesen*, daß die Polygone gegen Integralkurven konvergieren. Daß dem so ist, kann man mit

den uns zu Gebote stehenden Mitteln am raschesten folgendermaßen einsehen. Die durch das Polygon dargestellte Funktion ist die genaue Lösung einer allerdings unstetigen Differentialgleichung

$$\frac{dY}{dx} = F(x, Y)$$

Man definiere $F(x, Y) = f(x, Y)$ überall außer in den Punkten des Polygons. In den ihm angehörigen Punkten setze man $F(x, Y)$ gleich dem Richtungskoeffizienten der oder einer der hindurch gehenden Polygonseiten.

Ich schreibe dann die Hilfsdifferentialgleichung so

$$\frac{dY}{dx} = f(x, Y) + \{F(x, Y) - f(x, Y)\}.$$

Setze ich dann noch $F - f = A$, so werden die Betrachtungen von S. 36ff. anwendbar. Jedenfalls soll $f(x, y)$ der Lipschitzschen Bedingung genügen und daher konvergieren die auf

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

bezüglichen Näherungen y_n . Die auf

$$\frac{dY}{dx} = F(x, Y)$$

bezüglichen Näherungen Y_n sind aber offenbar alle identisch, wenn man wie S. 36 für Y_0 die genaue Lösung $Y(x)$ dieser Differentialgleichung, das bekannte *Euler-Cauchysche* Polygon, nimmt. Diese Tatsachen genügen aber, um die Betrachtungen von S. 36ff. anwendbar zu machen. Man findet daher für den Unterschied zwischen der genauen Lösung durch (x_0, y_0) und der *Euler-Cauchyschen* Näherung

$$|Y(x) - y(x)| < \delta |x - x_0| e^{M|x-x_0|}.$$

Dabei ist offenbar δ weiter nichts als eine obere Schranke für den absoluten Betrag der Differenz zwischen dem in einem Punkte des Polygons durch die Differentialgleichung vorgeschriebenen Richtungskoeffizienten und dem im gleichen Punkte vom Polygon innegehaltenen Richtungskoeffizienten. δ kann daher dadurch beliebig klein gemacht werden, daß man die Polygonseiten hinreichend kurz wählt. Man hat also das Resultat:

Wenn längs einer jeden Seite des Euler-Cauchyschen Polygons die Schwankung von $f(x, y)$ kleiner als δ bleibt, und wenn ferner im ganzen Bereich $f(x, y)$ der Lipschitzschen Bedingung von S. 26 genügt, so ist der Unterschied zwischen der genauen Lösung von

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

und der Euler-Cauchyschen Näherung kleiner als

$$\delta |x - x_0| e^{M|x-x_0|}.$$

Ich will noch eine Anwendung der *Euler-Cauchyschen Methode* angeben. Es soll sich darum handeln — wie schon S. 30 in Aussicht genommen wurde — zu beweisen, daß der Existenzsatz von S. 26 für Differentialgleichungen

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

mit einer gewissen Einschränkung schon dann gilt, wenn nur $f(x, y)$ in einem gewissen Bereich B stetig ist. Die Einschränkung liegt darin, daß jetzt durch jeden Punkt von B zwar *mindestens* eine Lösung von (1) geht, daß es aber jetzt, wie schon S. 30 bemerkt wurde, im allgemeinen mehr als eine Lösung durch einen gegebenen Punkt gibt. Ich werde also folgendes beweisen:

Wenn $f(x, y)$ im Bereiche B stetig ist und wenn x_0, y_0 ein Punkt aus B ist, so gibt es eine Zahl $a > 0$ derart, daß für $|x - x_0| < a$ mindestens eine stetige Funktion $y(x)$ existiert, für die (1) in $|x - x_0| < a$ identisch erfüllt ist, und für die $y(x_0) = y_0$ ist.

Zum Beweise grenze ich um x_0, y_0 ein B angehöriges Rechteck $|x - x_0| \leq \alpha, |y - y_0| \leq \beta$ ab und ersetze alsdann (1) durch eine Differentialgleichung

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = g(x, y),$$

deren rechte Seite im ganzen Streifen $|x - x_0| \leq \alpha$ stetig ist, und wo im Rechteck und an seinem Rande

$$g(x, y) = f(x, y)$$

gilt. Eine solche Funktion erhält man, wenn man außerhalb des Rechtecks

$$g(x, y) = f(x, y_0 \pm \beta)$$

definiert, wo das obere oder das untere Zeichen gelten soll, je nachdem $y - y_0 > \beta$ oder $y - y_0 < -\beta$ ist. Dieser Kunstgriff hat den Vorteil, daß wir für die neue Gleichung (2) im ganzen Intervall $|x - x_0| \leq \alpha$ eine Lösung erhalten, die dann für alle die x -Werte der Gleichung (1) genügt, für die sie im Rechteck verläuft. Dadurch ist dann die Zahl a des Satzes bestimmt. Diese ist wegen der Stetigkeit der Lösung sicher positiv.

Zur Konstruktion einer Lösung bedienen wir uns der Polygonmethode. Zur Konstruktion des n -ten Polygons teilen wir das Intervall $|x - x_0| \leq \alpha$ in 2^n gleiche Teile ein, so daß die zum n -ten Polygon gehörige Einteilung durch Halbierung aller der Intervalle entsteht, die beim $n - 1$ -sten Polygon auftraten. Ausgehend vom Punkte x_0, y_0 konstruieren wir dann das n -te Polygon, indem wir stets in dem zwischen zwei x -Teilpunkten gelegenen Streifen eine feste Richtung einhalten, nämlich diejenige, die über dem x_0 zunächst gelegenen Teilpunkt vorgeschrieben ist.

$$\eta = \psi_n(x)$$

sei die dem n -ten Polygon zugehörige Richtungsfunktion, so daß das n -te Polygon selbst durch

$$(3) \quad y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x \psi_n(t) dt$$

gegeben ist¹⁾. Wir betrachten noch

$$(4) \quad y_n^*(x) = y_0 + \int_{x_0}^x g(t, y_n(t)) dt.$$

Alle bei den verschiedenen Polygonen vorkommenden x -Teilpunkte bilden eine abzählbare Menge. Die Funktionen $|\psi_n(x)|$ liegen alle unter einer festen Schranke M , denn das sind Werte, die $g(x, y)$ in geeigneten Punkten annimmt. Daher sind nach (3) und (4) auch die $|y_n(x)|$ und $|y_n^*(x)|$ unter einer festen Schranke gelegen. Daher kann man aus der Folge der $y_n(x)$ eine Teilfolge auswählen, derart, daß an allen Teilpunkten der

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$$

existiert. Man nummeriere, um das einzusehen, die Teilpunkte und betrachte die Werte der $y_n(x)$ am ersten Teilpunkte. Da sie beschränkt sind, kann man eine konvergente Teilfolge auswählen. Die dazu gehörigen Funktionen $y_n(x)$ betrachte man am zweiten Teilpunkte und wähle daraus eine auch dort konvergente Teilfolge aus usw.

So möge man nacheinander die Folgen

$$\begin{array}{l} y_{\lambda_1}(x), \quad y_{\lambda_2}(x) \dots \\ y_{\mu_1}(x), \quad y_{\mu_2}(x) \dots \\ \dots \end{array}$$

erhalten, deren jede eine Teilfolge der vorhergehenden ist, und die derart beschaffen sind, daß die n -te Folge an den n ersten Teilpunkten konvergiert. Die Diagonalfolge

$$y_{\lambda_1}(x), \quad y_{\mu_2}(x) \dots$$

konvergiert dann an allen Teilpunkten.

Ich werde nun zeigen, daß diese Diagonalfolge sogar für *alle* x aus $|x - x_0| \leq \alpha$ konvergiert.

Sei nämlich x_1 eine beliebige Stelle mit $|x_1 - x_0| \leq \alpha$, so gibt es zwischen x_0 und x_1 beliebig nahe bei x_1 Teilpunkte. x_2 sei ein solcher, über den wir nun gleich passend verfügen werden. Jedenfalls ist

$$y_n(x_1) - y_n(x_2) = \int_{x_2}^{x_1} \psi_n(x) dx.$$

¹⁾ Die für $\psi_n(x)$ vorhin durch Werte gegebene Definition läßt sich dann so in Formeln ausdrücken. Ein Teilintervall sei von x_k und x_{k+1} begrenzt. x_k sei der x_0 zunächst gelegene Teilpunkt. Dann ist zwischen x_k und x_{k+1} ψ_n so erklärt: $\psi_n(x) = g(x_k, y_n(x_k))$ und in den an x_0 anstoßenden Intervallen ist $\psi_n(x) = g(x_0, y_0)$.

Daher ist

$$|y_n(x_1) - y_n(x_2)| < M |x_1 - x_2|$$

für *alle* n . Man gebe eine Zahl $\varepsilon > 0$ vor und wähle x_2 so nahe an x_1 , daß

$$M |x_1 - x_2| < \frac{\varepsilon}{3}$$

wird. Ferner wähle man alsdann n so groß, daß für alle $p > 0$

$$|y_{n+p}(x_2) - y_n(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

ist. Da auch

$$|y_{n+p}(x_1) - y_{n+p}(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

ist, so wird

$$|y_{n+p}(x_1) - y_n(x_1)| < \varepsilon,$$

woraus die Konvergenz folgt. Es gibt also eine Grenzfunktion $y(x)$, für die

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$$

in $|x - x_0| \leq \alpha$ gilt. Ich zeige, daß diese Grenzfunktion stetig ist.

Dies folgt daraus, daß, wie eben schon für spezielle x_1, x_2 bemerkt wurde, für *irgend* zwei Werte x_1 und x_2 , für die

$$M |x_1 - x_2| < \varepsilon$$

ist, auch für alle n

$$|y_n(x_1) - y_n(x_2)| < \varepsilon$$

ist. Daher ist auch

$$|y(x_1) - y(x_2)| < \varepsilon,$$

sobald

$$M |x_1 - x_2| < \varepsilon$$

ist.

Weiter streben die durch (4) erklärten $y_n^*(x)$ derselben Grenzfunktion $y(x)$ zu, wie die $y_n(x)$. Denn aus (3) und (4) folgt

$$y_n^*(x) - y_n(x) = \int_{x_0}^x [g(x, y_n(x)) - \psi_n(x)] dx.$$

Nun aber sind die Werte von $\psi_n(x)$ in den einzelnen Teilintervallen konstant, und zwar stets gleich dem Wert, den $g(x, y_n(x))$ in der am Anfang des Teilintervalles gelegenen Ecke des Polygons $y_n(x)$ annimmt. Daher ist wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $g(x, y)$

$$|g(x, y_n(x)) - \psi_n(x)| < \eta,$$

sobald nur n groß genug ist, d. h., sobald alle Teilintervalle klein genug sind. Daraus folgt sofort, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n^*(x) - y_n(x)) = 0$$

gleichmäßig für $|x - x_0| \leq \alpha$ gilt.

Ich zeige noch, daß die $y_n(x)$ gleichmäßig gegen $y(x)$ konvergieren. Dies kann den vorausgegangenen Betrachtungen sofort entnommen werden. Denn wir haben folgendes bewiesen, wenn

$$|x_1 - x_2| < \frac{\varepsilon}{3M}$$

ist, so folgt aus

$$|y_{n+p}(x_2) - y_n(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

daß

$$|y_{n+p}(x_1) - y_n(x_1)| < \varepsilon.$$

Man gebe daher ein $\varepsilon > 0$ beliebig vor und teile das Intervall

$$|x - x_0| \leq \alpha$$

in endlich viele Teilintervalle ein, deren Länge kleiner als $\frac{\varepsilon}{6M}$ ist. Zu jedem Teilintervall gehört dann eine Nummer N derart, daß im ganzen Intervall

$$|y_{n+p}(x) - y_n(x)| < \varepsilon$$

ist für beliebiges $p > 0$ und $n > N$.

Das größte dieser endlich vielen N sei N' . Es hat die Eigenschaft, daß für $n > N'$ und $p > 0$ in jedem der Intervalle, also auch im ganzen Intervalle

$$|y_{n+p}(x) - y_n(x)| < \varepsilon$$

ist. Daher folgt aus

$$y^*(x) = y_0 + \int_{x_0}^x g(x, y_n(x)) dx$$

in Verbindung und der gleichmäßigen Existenz der Grenzwerte

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$$

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n^*(x)$$

und in Verbindung mit der Stetigkeit von $g(x, y)$, daß

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x g(x, y) dx$$

ist, und daraus folgt durch Differentiation, daß $y(x)$ eine Lösung von (2) ist, für die $y(x_0) = y_0$ gilt.

Wir haben schon S. 30 bemerkt, daß es im allgemeinen noch weitere dieser Anfangsbedingung genügende Lösungen gibt. Man vgl. auch noch die Bemerkungen auf S. 53.

§ 6. Integration durch Potenzreihen.

Wenn man die Voraussetzung macht, daß $f(x, y)$ eine analytische Funktion seiner Argumente ist, so werden auch die Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

analytische Funktionen. Wir wollen uns davon überzeugen.

Ich setze voraus,¹⁾ daß $f(z, w)$ in dem durch $|z - z_0| \leq A$ und $|w - w_0| \leq B$ bestimmten Bereich eine eindeutige analytische Funktion der beiden komplexen Variablen z und w sei²⁾. In diesem Bereich sei weiter

$$|f(z, w)| < M.$$

Ferner seien $a \leq A$, $b \leq B$ so gewählt, daß

$$b > aM.$$

Es soll eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{dw}{dz} = f(z, w)$$

gefunden werden, die für $z = z_0$ den Wert $w = w_0$ annimmt. Man kann auch jetzt die Lösung nach der Methode der sukzessiven Approximationen finden. Nur müssen jetzt einige Abschätzungen etwas anders gewonnen werden. Wir benötigen vor allem eine Abschätzung

$$|f(z, w_1) - f(z, w_2)| \leq M |w_1 - w_2|.$$

Diese gewannen wir S. 27 aus dem Mittelwertsatz³⁾. Hier muß etwas anders geschlossen werden. Man muß ja nur erkennen, daß

$$\left| \frac{f(z, w_1) - f(z, w_2)}{w_1 - w_2} \right| \leq M$$

ist bei passender Wahl von M . Nun ist aber dieser Differenzenquotient selbst eine analytische Funktion von z, w_1, w_2 für $|z - z_0| \leq A$, $|w_1 - w_0| \leq B$ und $|w_2 - w_0| \leq B$. (Für $w_1 \rightarrow w_2$ kommt ja $\frac{\partial f}{\partial w}(z, w_2)$ heraus.) Daher gibt es eine Schranke M , wie wir sie suchen.

Wir können nun wie auf S. 27ff. die Methode der sukzessiven Approximationen ansetzen. Wir wählen nur aus bald ersichtlichen Gründen als erste Näherung $w_0(z)$ eine analytische Funktion. Ich setze z. B. $w_0(z) = w_0$. Dann wird

$$w_1(z) = w_0 + \int_{z_0}^z f(z, w_0) dz$$

¹⁾ Man vgl. die Voraussetzungen auf S. 26.

²⁾ Sie soll also nach z und nach w differenzierbar und als Funktion der beiden Variablen z und w stetig sein.

³⁾ Der Leser vergleiche zum folgenden stets die entsprechenden Darlegungen von S. 26ff.

Hier kann die z_0 mit z verbindende Gerade als Integrationsweg gewählt werden. Dann erkennt, man daß

$$(1) \quad |w_1(z) - w_0| < M |z - z_0|$$

ist. Genau wie auf S. 28 kann man nun die weiteren Näherungen abschätzen, wofern man nur geradlinig von z_0 nach z integriert. Wir müssen uns nur noch ähnlich wie auf S. 28 vergewissern, daß das Einsetzen der gefundenen Näherungen $w_n(z)$ in $f(z, w)$ zu analytischen Funktionen $f(z, w_n(z))$ führt. Dazu ist erforderlich, daß die Werte von z dem Kreise $|z - z_0| \leq A$, und daß die Werte, die $w_n(z)$ annimmt, dem Kreis $|w - w_0| \leq B$ angehören. Setzt man $|z - z_0| \leq a$ voraus, so ist nach (1) $|w_1 - w_0| < aM < b$. Wir wollen zeigen, daß für alle n und $|z - z_0| \leq a$ auch $|w_n - w_0| < b$ ist. Wir nehmen dem Verfahren der vollständigen Induktion entsprechend an, daß $|w_{n-1} - w_0| < b$ für $|z - z_0| \leq a$. Dann ist wegen

$$w_n(z) = w_0 + \int_{z_0}^z f(z, w_{n-1}) dz$$

ersichtlich, daß

$$|w_n(z) - w_0| \leq M |z - z_0| < Ma < b.$$

So gelangen wir zu einer Folge von analytischen Näherungsfunktionen $w_n(z)$, die für $|z - z_0| \leq a$ gegen eine gleichfalls analytische Grenzfunktion konvergiert. Der Konvergenzbeweis ergibt sich genau so wie S. 28/29. Es sei eine nützliche Übung für den Leser das näher durchzuführen. Die Grenzfunktion $w(z)$ ist dann die gesuchte Lösung der Differentialgleichung. Daß es keine weitere gibt, die denselben Anfangsbedingungen genügt, erkennt man, wie auf S. 29.

Als analytische Funktion kann man sie in eine Potenzreihe

$$(2) \quad w(z) = w_0 + c_1(z - z_0) + \dots$$

entwickeln. Da man nun einmal weiß, daß man ihre Koeffizienten so wählen kann, daß sie eine Lösung der Differentialgleichung darstellt, so kann man ihre wirkliche Bestimmung auch auf anderem bequemeren Wege vornehmen. Dazu bietet sich die Methode der unbestimmten Koeffizienten dar. Man geht mit der Reihe (2) in die Differentialgleichung hinein und bekommt dadurch gewisse Bedingungen für die Koeffizienten, aus welchen man sie berechnen kann.

Wenn nämlich der Differentialgleichung

$$\frac{dw}{dz} = f(z, w) = \sum a_{ik} (z - z_0)^i (w - w_0)^k$$

die Funktion $w = w_0 + c_1(z - z_0) + \dots$

genügen soll, so sind zur Bestimmung ihrer Koeffizienten c_k nur die Ableitungen von w an der Stelle z_0 zu berechnen. Denn es ist ja

$$c_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k w}{dz^k} \right|_{z=z_0}.$$

Man entnimmt aber sofort der Differentialgleichung, daß

$$c_1 = \left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=z_0} = f(z_0, w_0) = a_{00}$$

ist. Differenziert man die Gleichung einmal nach z und setzt $z = z_0$, so findet man

$$2! c_2 = \left. \frac{d^2 w}{dz^2} \right|_{z=z_0} = \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{z=z_0, w=w_0} + \left. \frac{\partial f}{\partial w} \right|_{z=z_0, w=w_0} \cdot \left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=z_0} = a_{10} + a_{01} c_1.$$

So kann man nacheinander die Koeffizienten berechnen. Denn jede neue Gleichung erlaubt es, einen weiteren Koeffizienten durch die vorher schon bestimmten auszudrücken.

Auch die weiteren Betrachtungen von S. 36ff. lassen sich nun unverändert übertragen. Insbesondere lehrt die Überlegung von S. 39ff, daß die Lösungen analytisch von den Anfangsbedingungen abhängen und analytische Funktionen eines selbst analytisch in die Differentialgleichung eingehenden Parameters sind.

Auch auf Systeme lassen sich die Betrachtungen ohne weiteres übertragen.

§ 7. Übertragung der Simpsonschen Regel.

In der Integralrechnung lernt man verschiedene Formeln zur numerischen Quadratur kennen. Die bekannteste ist die *Simpsonsche* Regel. Sie lehrt, daß das Integral

$$J(h) = \int_a^{a+h} f(x) dx$$

angenähert durch die Formel

$$J_1(h) = \frac{h}{6} \left[f(a) + 4f\left(a + \frac{h}{2}\right) + f(a+h) \right]$$

ausgewertet werden kann. Die Güte der Übereinstimmung kommt darin zum Ausdruck, daß die Entwicklungen von $J(h)$ und von $J_1(h)$ nach Potenzen von h bis zu den Gliedern vierter Ordnung einschließlich übereinstimmen. Auch kennt man Formeln zur Abschätzung des Fehlers.

Es ist ein gemeinsamer Zug aller dieser Formeln, den Integralwert näherungsweise durch eine lineare Funktion geeigneter Funktionswerte auszudrücken. *Runge* hat es zuerst unternommen, nach diesem Gedanken Näherungsformeln zur Auflösung von Differentialgleichungen zu gewinnen. *Kutta*¹⁾ hat in Verfolg dieser Untersuchungen durch eine längere Rechnung folgendes Ergebnis gefunden.

Dasjenige Integral der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

¹⁾ Zeitschrift für Math. u. Phys. Bd. 46. 1901.

welches für $x = x_0$ den Wert y_0 besitzt, wird für $x = x_0 + h$ angenähert durch die folgende *Runge-Kuttasche Formel* dargestellt:

$$y(x_0 + h) = y_0 + \frac{h}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4).$$

Hier ist

$$K_1 = f(x_0, y_0),$$

$$K_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_1 h}{2}\right),$$

$$K_3 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_2 h}{2}\right),$$

$$K_4 = f(x_0 + h, y_0 + K_3 h).$$

Entwickelt man sowohl die Lösung, wie diese Näherung nach Potenzen von h , so erhält man Übereinstimmung bis zu den Gliedern vierter Ordnung einschließlich

Was nun die Abschätzung des Fehlers anlangt, den man bei Anwendung dieser Regel begeht, so gewinnt man durch einige Rechnung auf Grund des *Taylorschen Satzes* das folgende Ergebnis. Der Unterschied zwischen der wahren Lösung y_w und der Näherungslösung y_n durch den Punkt (x_0, y_0) genügt der Ungleichung

$$|y_w - y_n| < \frac{6MN}{|N-1|} |x - x_0|^5 \frac{N^5 - 1}{N - 1}.$$

Dabei ist folgendes vorausgesetzt: Im Gebiete B : $|x - x_0| < a$, $|y - y_0| < b$ genügt $f(x, y)$ samt seinen partiellen Ableitungen der vier ersten Ordnungen den folgenden Bedingungen:

$$|f(x, y)| < M,$$

$$\left| \frac{\partial^{(i+k)} f}{\partial x^i \partial y^k} \right| < \frac{N}{M^{k-1}} \quad (i+k \leq 3).$$

Ferner soll

$$\begin{aligned} |x - x_0| N &< 1 \\ aM &< b \end{aligned}$$

sein. Ich will die dazu führenden Rechnungen nicht reproduzieren. Auf eine Aufstellung ähnlicher Fehlerabschätzungen im komplexen Gebiet kann verzichtet werden.

Ich will z. B. für $x = 0,2$ dasjenige Integral von

$$y' = x| + y$$

berechnen, welches für $x = 0$ verschwindet. Die Näherungsformel liefert 0,0214, die genaue Lösung

$$y = e^x - x - 1$$

ergibt auf vier Dezimalen genau gleichfalls 0,0214.

Die Approximation ist also besser als sie die allgemeine Abschätzung erwarten ließ. Denn diese liefert für $M = 1$, $N = 1$, $a = 0,1$, $b = 0,2$

immerhin als äußersten möglichen Fehler noch $\frac{6 \cdot 2^4}{10^4}$. Hätte man für $x = 0,1$ gerechnet, so hätte man als möglichen Fehler nur $\frac{3}{10^4}$ gefunden. Will man auch für 0,2 eine größere Genauigkeit erreichen, so kann man erst den Wert der Lösung für 0,1 berechnen und dann mit dem gefundenen Wert als Anfangswert nochmals die *Kuttasche* Regel anwenden. Man hat dann außer dem zweimal vorkommenden Fehler von $\frac{3}{10^4}$ noch den Fehler zu berücksichtigen, der davon herrührt, daß man am Anfang des zweiten Intervalles einen um höchstens $\frac{3}{10^4}$ falschen Anfangswert verwendet hat. Das macht aber nach S. 40 für den Wert der Lösung bei 0,2 höchstens $\frac{3}{10^4}$ aus. Daher findet man durch zweimalige Anwendung der *Kuttaschen* Regel in der eben angegebenen Weise die Lösung für $x = 0,2$ bis auf einen Fehler von äußerstens $\frac{9}{10^4}$.

Wer sich näher für praktische Integration interessiert, möge zu dem in dieser Sammlung erschienenen Buch von *Runge* und *König* über numerisches Rechnen greifen.

III. Kapitel.

Diskussion des Verlaufs der Integralkurven.

§ 1. Elementare Betrachtungen.

In diesem Kapitel soll rein qualitativ ein Überblick über den Verlauf der Integralkurven gewonnen werden. Wir werden ihr Steigen und Fallen, ihre Konvexität und Konkavität, ihre Wendepunkte und einige weitere Dinge, die wir bald angeben werden, untersuchen. Zunächst soll in diesem Paragraphen angedeutet werden, wie man oft über die eben schon genannten Fragen Aufschluß gewinnen kann. Wenn die Differentialgleichung $f(x, y, y') = 0$ vorgelegt ist, so stellt $f(x, y, 0) = 0$ im allgemeinen Kurven dar, welche die Teile des Richtungsfeldes, in welchen die Integralkurven steigen von denjenigen trennen, wo sie fallen¹⁾. Differenziert man die Differentialgleichung nach x , so erhält man $f_x + f_y \cdot y' + f_{y'} \cdot y'' = 0$. Daher liegen die Wendepunkte der Integralkurven auf der Kurve, deren Gleichung mit y' als Parameter durch

$$f(x, y, y') = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0$$

¹⁾ Der Zusatz „im allgemeinen“ deutet darauf hin, daß unter Umständen $f(x, y, 0) = 0$ keine Kurve ist, wie z. B. bei $f = y'$ oder daß unter Umständen auch die Integralkurven überall steigen, wie z. B. für $f = x^2 - y'$, wo also $f(x, y, 0) = 0$ nicht trennen kann. Sind aber Stellen beiderlei Art im Feld vorhanden, so werden sie durch $f(x, y, 0) = 0$ voneinander getrennt.

gegeben ist. Die Teile derselben, wo $\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$ ist, kommen dabei offenbar im allgemeinen nicht in Betracht. Diese Kurve trennt also auch die Teile des Richtungsfeldes, wo die Integralkurven konkav sind, von denjenigen, wo sie konvex sind. Ohne weiteren Zusatz können diese Angaben nur dann verwendet werden, wenn die Differentialgleichung in der Form $y' = F(x, y)$ vorgelegt ist, und wenn dabei $F(x, y)$ in einem Bereich B samt seinen ersten Ableitungen als eindeutige und stetige Funktion erklärt ist. Dann wird $F(x, y) = 0$ der Ort derjenigen Punkte, wo die Integralkurven der x -Achse parallel sind und

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} F = 0$$

wird der Ort der Wendepunkte. Wir wollen an einem Beispiele die Verwertung der Angaben näher kennen lernen.

Es sei $y' = 1 + xy$ vorgelegt. Der Ort horizontaler Tangenten ist

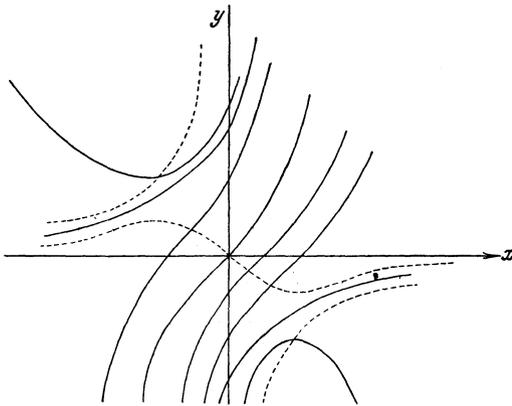


Abb. 7.

die Hyperbel $1 + xy = 0$, während die Wendepunkte auf der Kurve dritter Ordnung $x + y + x^2y = 0$ liegen¹⁾. Beide Kurven sind in Abb. 7 punktiert eingetragen. Schon diese wenigen Bemerkungen erlauben es, zu erkennen, daß die Integralkurven den in Abb. 7 verzeichneten ungefähren Verlauf haben müssen. Man kann durch Betrachtung der Isoklinen der Genauigkeit

der Zeichnung noch etwas zu Hilfe kommen, z. B. beachten, daß die Achsen stets unter 45 Grad durchsetzt werden. Aber nicht alle Integralkurven können die x -Achse treffen. Auch solche Kurven sind in Abb. 7

¹⁾ Da bei festem x für hinreichend große positive y dieser Ausdruck positiv ist, für große negative y aber negative Werte annimmt, so hat in der Tat jede Integralkurve, welche die C_3 durchsetzt, in diesem Schnittpunkt einen Wendepunkt. Man kann noch hinzufügen, daß jede Integralkurve, welche die C_3 trifft, in diesem Schnittpunkt dieselbe auch durchsetzt. Denn in einem solchen Schnittpunkt (x_0, y_0) gilt für die Richtung y_0' der Integralkurve: $y_0 + x_0 y_0' = 0$, während sich die Richtung y_1' der C_3 aus $1 + 2x_0 y_0 + (1 + x_0^2) y_1' = 0$ ergibt. Im Falle einer Berührung beider im Punkte (x_0, y_0) müßte $y_0' = y_1'$ sein. Das kann aber wegen der Gleichung der C_3 nur für $y_0 = 0$ möglich sein. Hier aber ist wegen der Gleichung der C_3 auch $x_0 = 0$. In diesem Punkte $(0, 0)$ aber ist $y_0' = 1$, $y_1' = -1$. Ob der Ort der Wendepunkte wirklich nur aus Wendepunkten besteht, bedarf auch einer Überlegung, ähnlich der eben in unserem Beispiel durchgeführten.

zu sehen. Wenn man nämlich z. B. vom Punkte $(+2, -2)$ beginnend eine Integralkurve für wachsende x verfolgt, so fällt sie ständig, verfolgt man sie aber für abnehmende x , so steigt sie an, bis sie die punktierte Hyperbel trifft. Hier ist sie der x -Achse parallel, um dann bei weiter abnehmendem x wieder zu fallen.

§ 2. Singuläre Punkte.

Wir haben S. 26ff. bewiesen, daß unter gewissen Voraussetzungen durch jeden Punkt eines Gebietes B nur eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ geht. Die Voraussetzungen aber waren diese: $f(x, y)$ soll in B eindeutig und stetig sein und einer *Lipschitz*-Bedingung

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M |y_1 - y_2|$$

genügen. Dabei ist M eine von x und dem Wertepaar y_1, y_2 nicht abhängende passende feste Zahl. Wir wollen uns nun die Frage vorlegen, inwieweit die Bedingungen für die Gültigkeit des Ergebnisses auch *notwendig* sind. Zunächst erinnern wir uns (vgl. S. 43), daß die bloße Stetigkeit von $f(x, y)$ schon die Existenz der Lösungen zur Folge hat. Wenn nur $f(x, y)$ eine stetige Funktion ist, so geht durch jeden Punkt von B *mindestens* eine Lösung hindurch. Aber ohne weitere Voraussetzungen über $f(x, y)$ kann man nicht nachweisen, daß durch jeden Punkt *nur* eine Lösung geht. Tatsächlich kann man Differentialgleichungen mit stetigem $f(x, y)$ angeben, welche mehrere Lösungen durch ein und denselben Punkt schicken. Das gilt schon von der einfachen Differentialgleichung

$$y' = +\sqrt{y}.$$

Denn ihre Lösungen sind neben $y = 0$ die Parabeln

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{4}(x+h)^2 && \text{(für } x \geq -h)^1 \\ y &= -\frac{1}{4}(x+h)^2 && \text{(für } x \leq -h), \end{aligned}$$

welche bei $x = -h$ die x -Achse berühren.

Aber erinnern wir uns an die Definition der Lösung: Lösung heißt jede differenzierbare Funktion, welche der Differentialgleichung genügt. Daher sind auch solche Kurven als Lösungen anzusprechen, welche aus einem geradlinigen Stück und einem Parabelbogen bestehen. Z. B.

$$\begin{aligned} y &= 0 && \text{für } x \leq a \\ y &= \frac{1}{4}(x-a)^2 && \text{für } x \geq a \quad (a > 0) \end{aligned}$$

Durch den Punkt $x = 0, y = 0$ geht außer diesen Lösungen auch die Lösung $y = 0$ hindurch.

Ein weiteres Beispiel ist dieses: Die Lösungen sollen durch folgende Kurven geliefert werden

¹⁾ Für $x < -h$ wäre y' nicht mehr positiv, so daß also nur diese Parabelbogen der Differentialgleichung genügen.

$$\begin{array}{ll}
 y = \alpha & \text{für } y \leq 0 \\
 y = \beta x^2 & \text{für } 0 \leq y \leq x^2 \\
 y = x^2 + \gamma & \text{für } y \geq x^2.
 \end{array}
 \quad (\alpha, \beta, \gamma \text{ Parameter} \\
 \text{der Kurvenscharen})$$

Daraus ergibt sich für das $f(x, y)$ der Differentialgleichung

$$\begin{array}{ll}
 f(x, y) = 0 & \text{für } y \leq 0 \\
 f(x, y) = 2 \frac{y}{x} & \text{für } 0 \leq y \leq x^2 \\
 f(x, y) = 2x & \text{für } y \geq x^2.
 \end{array}$$

Dies so für alle x, y erklärte $f(x, y)$ ist durchweg stetig¹⁾. Gleichwohl gehen durch den Koordinatenanfangspunkt unendlich viele Lösungen, nämlich die zwischen $y = 0$ und $y = x^2$ gelegenen Parabeln $y = \beta x^2$.

Man hat zeigen können, daß stets dann, wenn durch einen Punkt P , wo $f(x, y)$ stetig ist, mehrere Lösungen gehen, dieselben zwischen zwei äußersten Lösungen liegen und einem von beiden gebildeten Winkelraum in der Umgebung von P lückenlos ausfüllen²⁾.

Eine hinreichende Bedingung dafür, daß eine stetige Differentialgleichung durch jeden Punkt nur eine Lösung schickt, haben wir in der *Lipschitz*-Bedingung erkannt. Der allgemeineren Frage nach zugleich notwendigen und hinreichenden Bedingungen wollen wir nicht näher treten.

Nun will ich weiter noch Differentialgleichungen betrachten, bei welchen die *Stetigkeit des Richtungsfeldes in einzelnen Punkten unterbrochen* ist.

Eine Stelle, wo eine oder die andere Voraussetzung unseres Existenzsatzes von S. 26 nicht erfüllt ist, soll stets eine *singuläre* Stelle heißen.

Ich beginne mit einigen ganz einfachen, aber, wie wir sehen werden, typischen Beispielen:

1. Ich betrachte

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

und will den Verlauf der Lösungen dieser Differentialgleichung in der Nähe des Koordinatenanfangs untersuchen. Da die Lösungen die Geraden $y = cx$ sind, so zeigt sich, daß alle Integralkurven den Koordinatenanfang passieren. Denn jede Integralkurve ist durch einen ihrer Punkte (x_0, y_0) festgelegt. Die durch diesen Punkt gehende Integralkurve ist $y = \frac{y_0}{x_0} x$. Tatsächlich ist ja auch $\frac{y}{x}$ für $(x, y) = (0, 0)$ nicht stetig, und das ermöglicht es, daß durch den Punkt nicht eine, sondern alle Lösungen gehen. Aber nicht jede Unstetigkeit am Koordinatenanfang hat diese Folge.

¹⁾ Für $(x, y) = (0, 0)$ folgt dies daraus, daß für alle (x, y) $|f(x, y)| \leq 2|x|$ ist.

²⁾ Man vgl. *W. F. Osgood* in den Monatsheften für Mathematik und Physik Bd. 9, S. 331, 1898. Ferner *H. Kneser* in den Sitzber. d. preuß. Akad. d. Wiss. 1923, phys. math. Kl. S. 171, wo ein analoger Satz für Systeme bewiesen wird.

2. Wir brauchen nur die Gleichung

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = a \frac{y}{x}$$

zu betrachten, um dies einzusehen. Man findet nämlich $y = cx^a$ als Lösungen. Je nach der Beschaffenheit von a zeigen diese aber verschiedenes Verhalten. Den Fall $a = 1$ haben wir ja schon vorweggenommen. Ist a positiv, so erkennt man, daß nach wie vor alle Integralkurven durch den Koordinatenanfang gehen. Sie berühren dort alle bis auf eine die x -Achse, wenn $a > 1$ ist. Sie berühren alle bis auf eine die y -Achse, wenn $a < 1$ ist.

Wir sagen in all den bisher behandelten Fällen, es liege in $(0, 0)$ ein *Knotenpunkt* der Lösungen vor.

Ein ganz anderes Bild bieten die Fälle $a < 0$ dar. Dann sind nämlich durch

$$y = cx^a$$

„Hyperbeln“ dargestellt, deren Asymptoten die x - und die y -Achse sind. Diese beiden Geraden gehören auch zu den Lösungen, wenn man statt der Gleichung (1) das System $\frac{dx}{dt} = x$, $\frac{dy}{dt} = ay$ betrachtet. Es hat abgesehen von $x = 0$ die gleichen Lösungen wie (1). Wir sagen in diesem Falle, es liege ein *Sattelpunkt* vor, weil die Integralkurven ähnlich aussehen wie die Höhenlinien in der Nähe eines Gebirgssattels.

In allen diesen Fällen gibt es also Integralkurven durch den Koordinatenanfang, also durch den *singulären Punkt* der Differentialgleichung. Darunter waren immer mindestens zwei Geraden. Nur eine Gerade kommt unter den Integralkurven von

3. $y' = \frac{x+y}{x}$ vor. Die Integralkurven sind nämlich

$$y = x(c + \log |x|)$$

und darunter kommt nur die Gerade $x = 0$ vor. Wir haben also noch einen *Knotenfall*.

Nun werden wir endlich noch Fälle kennen lernen, wo gar keine Integralkurven durch den singulären Punkt gehen.

4. So sind z. B. die Integralkurven von

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

die Kreise

$$x^2 + y^2 = c.$$

Wenn, wie in diesem Beispiel die Integralkurven sich geschlossen um den singulären Punkt herumlegen, spricht man von einem *Wirbelpunkt*.

5. Endlich betrachte ich noch die Differentialgleichung der logarithmischen Spiralen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + ay}{ax - y}$$

Zur Integration dieser Gleichung führt man am besten Polarkoordinaten durch

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

ein. Dann wird die Gleichung

$$\frac{dr}{d\varphi} = r a.$$

Also sind wirklich die logarithmischen Spiralen

$$r = c e^{a\varphi}$$

die Lösungen. Diese durchsetzen bekanntlich alle Strahlen durch den Ursprung unter einem festen Winkel, dessen Tangens $\frac{1}{a}$ ist. Daß dies der Fall ist, kann man ja auch direkt aus der Differentialgleichung ablesen. Setzt man nämlich

$$\frac{1}{a} = \operatorname{tg} \alpha$$

und

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi,$$

so kann man ja die Differentialgleichung so schreiben

$$y' = \operatorname{tg}(\alpha + \varphi).$$

Jedesmal dann, wenn, wie in diesem Beispiel die Integralkurven sich asymptotisch um den singulären Punkt herum winden, spricht man von einem *Strudelpunkt*.

Die hier untersuchten Beispiele sind nun zunächst typisch für die homogene Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Cx + Dy}{Ax + By},$$

wie wir im nächsten Paragraphen sehen werden. Sie sind aber auch typisch für eine ausgedehnte weitere Klasse von Differentialgleichungen (§ 6).

§ 3. Die homogene Differentialgleichung $y' = \frac{Cx + Dy}{Ax + By}$.

Ich setze voraus, daß in dieser Differentialgleichung nicht $A = B = 0$ ist und daß auch sonst nicht $AD - BC = 0$ ist. Denn diese erste Möglichkeit ist sinnlos und im zweiten Falle sind auf der rechten Seite Zähler und Nenner proportional, so daß sich die Gleichung auf $y' = \operatorname{const}$ reduziert.

Die an den Beispielen des § 2 und schon früher gesammelten Erfahrungen lassen es zweckmäßig erscheinen, statt

$$(1) \quad y' = \frac{Cx + Dy}{Ax + By}$$

das System

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + By \\ \frac{dy}{dt} &= Cx + Dy \end{aligned}$$

zu untersuchen. Jede Lösung von (1) gibt zu einer Lösung von (2) Anlaß und umgekehrt führt jede Lösung von (2) zu einer Lösung von (1), es sei denn, daß für dieselbe $\frac{dx}{dt} = 0$ ist, d. h. daß es sich um eine Parallele zur y -Achse handelt. Man kann also auch sagen, daß der Übergang von (1) zu (2) eine Erweiterung des Begriffs „Lösung von (1)“ bedeutet.

Ich will zunächst zusehen, welche Vereinfachungen das System (2) durch eine lineare Koordinatentransformation erfahren kann. Ich führe durch

$$(3) \quad \begin{cases} \xi = \alpha x + \beta y \\ \eta = \gamma x + \delta y \end{cases} \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ sind Konstanten, für die } \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \text{ ist})$$

die neuen Veränderlichen ξ, η ein. Ich erhalte

$$\frac{d\xi}{dt} = \alpha \frac{dx}{dt} + \beta \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d\eta}{dt} = \gamma \frac{dx}{dt} + \delta \frac{dy}{dt}$$

Ich will versuchen, durch passende Wahl der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ das System auf die Gestalt

$$(4) \quad \frac{d\xi}{dt} = \lambda_1 \xi, \quad \frac{d\eta}{dt} = \lambda_2 \eta \quad (\lambda_1, \lambda_2 \text{ konstant})$$

zu bringen. Das führt dazu, daß für alle x, y die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} x(\alpha A + \beta C) + y(\alpha B + \beta D) &= \lambda_1(\alpha x + \beta y) \\ x(\gamma A + \delta C) + y(\gamma B + \delta D) &= \lambda_2(\gamma x + \delta y) \end{aligned}$$

gelten. Daher muß sein:

$$(5) \quad \begin{aligned} \alpha(A - \lambda_1) + \beta C &= 0 & \text{und} & & \gamma(A - \lambda_2) + \delta C &= 0 \\ \alpha B + \beta(D - \lambda_1) &= 0 & & & \gamma B + \delta(D - \lambda_2) &= 0. \end{aligned}$$

Das sind zwei Paar linearer Gleichungen mit je zwei Unbekannten α, β bzw. γ, δ . Sollen dieselben lösbar sein, so müssen λ_1 und λ_2 die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$(6) \quad \begin{vmatrix} A - \lambda & C \\ B & D - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\lambda^2 - \lambda(A + D) + AD - BC = 0$$

sein. Man nennt sie die *charakteristische* Gleichung des Systems (2).

Wenn diese Gleichung zwei voneinander verschiedene Wurzeln besitzt, so gehören dazu vermöge der zwei Paar linearer Gleichungen (5) vier Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, deren Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$ von Null

verschieden ist. Ist nämlich $C \neq 0$, so sind die Gleichungen (5) erfüllt, wenn man $\alpha = C$, $\beta = \lambda_1 - A$, $\gamma = C$, $\delta = \lambda_2 - A$ setzt, dann ist $\alpha\delta - \beta\gamma = C(\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0$. Ähnlich schließt man, wenn $B \neq 0$ ist. Falls aber $B = C = 0$ ist, so kann man $\lambda_1 = A$, $\lambda_2 = D$ nehmen; dann sind die Gleichungen (5) erfüllt, wenn man $\alpha = D - A$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = D - A$ setzt. Wieder ist dann $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Daher ist durch (3) eine lineare Substitution erklärt, welche das System (2) auf die Form (4) bringt. Da $AD - BC \neq 0$ angenommen wurde und da nach (6) $AD - BC = \lambda_1 \lambda_2$ ist, so kann keines der beiden λ verschwinden. Sind insbesondere λ_1 und λ_2 reell, so sind sofort einige der im vorigen Paragraphen besprochenen Fälle wieder zu erkennen. Wenn aber die λ_1 und λ_2 konjugiert komplex sind, so bleibt erst noch zu untersuchen, welcher der im vorigen Paragraphen besprochenen Fälle sich unter dieser komplexen Form verbirgt. Um das zu erkennen, mache ich in (4) die neue Substitution

$$\xi = r e^{i\varphi}, \quad \eta = r e^{-i\varphi}.$$

So erhält man das System

$$r' = r \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{2}, \quad \varphi' = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2i}.$$

Die Integralkurven sind also

$$r = c_1 \exp\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} t\right), \quad \varphi = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2i} (t + c_2)$$

d. h.

$$r = c \exp\left(i \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \varphi\right),$$

Dabei sind c_1, c_2, c Konstanten und $\exp(x)$ bedeutet e^x .

Die Integralkurven werden also Spiralen, es sei denn, daß

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

ist. Dann sind es geschlossene Kurven (Ellipsen). Es liegt also ein Strudelpunkt oder ein Wirbelpunkt vor.

Nun bleibt noch der Fall zu behandeln, wo die quadratische Gleichung (1) zwei zu sammenfallende Wurzeln hat.

Ich behandle erst den Fall, daß die Gleichungen (5) identisch erfüllt sind. Dann kann man $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 1$ nehmen. Die Substitution ist also $\xi = x$, $y = \eta$. Daher hat jetzt das System (2) von vornherein die Gestalt:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_1 x, \quad \frac{dy}{dt} = \lambda_1 y$$

mit lauter geradlinigen Integralkurven. Sind aber die Gleichungen (5) nicht identisch erfüllt, so wollen wir die Koeffizienten α , β aus (5) bestimmen, die γ , δ aber zunächst noch beliebig annehmen, aber so, daß $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ ist. Dadurch wird dann (2) auf die Form

$$(8) \quad \frac{d\xi}{dt} = \lambda_1 \xi, \quad \frac{d\eta}{dt} = \Gamma \xi + \Delta \eta$$

gebracht.

Hier ist aber $\Delta = \lambda_1$. Dies folgt daraus, daß die charakteristischen Gleichungen für das ursprüngliche System (2) und das transformierte (8) übereinstimmen. Geht nämlich durch irgend eine Transformation (3) das System (2) in

$$(9) \quad \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= A\xi + B\eta \\ \frac{d\eta}{dt} &= \Gamma\xi + \Delta\eta \end{aligned}$$

über, und ist

$$\begin{aligned} x &= \alpha'\xi + \beta'\eta \\ y &= \gamma'\xi + \delta'\eta \end{aligned}$$

die zu (2) inverse Transformation, so wird im Sinne des Matrizenkalküls

$$\begin{pmatrix} A & B \\ \Gamma & \Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{vmatrix} A - \lambda & B \\ \Gamma & \Delta - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A - \lambda & B \\ C & D - \lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{vmatrix},$$

wie man sofort nachprüft. Die charakteristische Gleichung des transformierten Systems hat also dieselben Wurzeln wie die charakteristische Gleichung von (2). Daher ist in (8) auch $\Delta = \lambda_1$. In dem so erhaltenen System

$$\frac{d\xi}{dt} = \lambda_1\xi, \quad \frac{d\eta}{dt} = \Gamma\xi + \lambda_1\eta$$

mache man im Falle $\Gamma \neq 0$ nun weiter die Substitution $\Gamma\xi = \lambda_1\xi_1$. Dann geht es in

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \lambda_1\xi_1, \quad \frac{d\eta}{dt} = \lambda_1(\xi_1 + \eta)$$

über, und dies haben wir schon im vorigen Paragraphen untersucht.

Von Koordinatentransformationen abgesehen, sind also die im vorigen Paragraphen studierten Fälle die einzigen, welche bei den in der Überschrift dieses Paragraphen genannten Differentialgleichungen vorkommen.

Ich merke noch die rechnerischen Ergebnisse der Überlegungen an. Unsere Differentialgleichungen (2) zerfallen zunächst mit Rücksicht auf die Gleichung (6) in drei Klassen:

$$\begin{aligned} \text{Klasse I: } & (A - D)^2 + 4BC > 0 \\ \text{,, II: } & (A - D)^2 + 4BC < 0 \\ \text{,, III: } & (A - D)^2 + 4BC = 0 \end{aligned}$$

Bei Klasse I sind alle Integrale in

$$(\gamma x + \delta y)^{-\lambda_1} (\alpha x + \beta y)^{\lambda_2} = \text{const.}$$

enthalten. λ_1 und λ_2 sind die beiden Wurzeln der Gleichung (6).

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ können aus (5) berechnet werden. Wenn dann λ_1 und λ_2 gleiches Vorzeichen haben, d. h. wenn

$$AD - BC > 0$$

ist, so haben wir einen Knotenpunkt. Wenn aber λ_1 und λ_2 verschiedene Vorzeichen haben, wenn also

$$AD - BC < 0$$

ist, so liegt ein Sattelpunkt vor.

Bei Klasse II kann gleichfalls das allgemeine Integral auf die Form

$$(\gamma x + \delta y)^{-\lambda_1} (\alpha x + \beta y)^{\lambda_2} = \text{const}$$

gebracht werden. Das ist keine reelle Schreibweise. Die Betrachtungen von S. 56 und von S. 58 lehren aber, wie dieselbe zu erhalten ist. Man findet beim Übergang zur Polarkoordinaten, wenn man beachtet, daß $\alpha x + \beta y$ und $\gamma x + \delta y$ konjugiert komplex wird,

$$(\alpha x + \beta y) (\gamma x + \delta y) = c e^{2i \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \arctg i \frac{(\gamma - \alpha)x + (\delta - \beta)y}{(\gamma + \alpha)x + (\delta + \beta)y}}.$$

Es liegt im allgemeinen ein Strudelpunkt und ausnahmsweise ein Wirbelpunkt vor. Insbesondere arten die Spiralen in Ellipsen aus, wenn $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ ist. Ihre Gleichung wird

$$|\alpha x + \beta y|^2 = c.$$

Setzt man

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_1 + i\alpha_2 \\ \beta &= \beta_1 + i\beta_2, \end{aligned}$$

so wird ihre Gleichung

$$(\alpha_1 x + \beta_1 y)^2 + (\alpha_2 x + \beta_2 y)^2 = c.$$

Bei der Klasse III liegt wieder ein Knotenpunkt mit einer einzigen Geraden

$$\alpha x + \beta y = 0$$

vor, deren Koeffizienten α, β sich aus (2) bestimmen.

§ 4. Allgemeine Sätze über den Verlauf der Integralkurven im reellen Gebiet.

Die bloße Anwendung der Sätze über die stetige Abhängigkeit der Integralkurven von den Anfangsbedingungen läßt weitgehende Schlüsse über den Verlauf der Integralkurven einer Differentialgleichung

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$$

in einem Gebiete B zu, wo Zähler und Nenner als eindeutige und stetige mit stetigen ersten Ableitungen nach x und y versehene Funktionen erklärt sind. $|P(x, y)|$ und $|Q(x, y)|$ mögen in B unter einer

Schranke M bleiben. Es erweist sich für die Betrachtung als zweckmäßig, die Integralkurven auf einen Parameter t zu beziehen und also die Differentialgleichungen in der Form

$$(2) \quad \frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y)$$

anzunehmen. Durch diese Einführung wird das durch (1) definierte Feld von Linienelementen, durch ein Feld von Vektoren (gerichteten Geraden) ersetzt. Denn durch (2) wird nicht nur die Tangente der Integralkurve im Punkte (x, y) gegeben, sondern auch die Richtung bestimmt, in welcher für wachsende t die Integralkurve den Punkt passiert. Nur in den Punkten, wo P und Q beide verschwinden, wird keine bestimmte Richtung erklärt. Wir nennen solche Punkte *singuläre Stellen des Vektorfeldes*. Bei den folgenden Darlegungen stütze ich mich im wesentlichen auf eine Arbeit von *Bendixson*: *Acta mathematica*, Bd. 24, 1900.

Wir haben schon S. 32 festgestellt, daß zu jedem Punkt $x = x_0$, $y = y_0$ des Gebietes B und endliches t_0 genau eine Lösung gehört, für die $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = x_0$, $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = y_0$ ist. Eine Änderung des endlichen Wertes t_0 , welchen man dem Punkte zuordnet, ändert an der Lösungskurve $x = x(t)$, $y = y(t)$ nichts; dadurch ändert sich nur die Parameterdarstellung. Das folgt sofort daraus, daß eine Substitution $t_1 = t + h$ die Differentialgleichungen, auf deren rechter Seite ja der Parameter fehlt, nicht ändert. *Hat man also zwei Lösungen*

$$x_1(t), y_1(t) \quad \text{und} \quad x_2(t^*), y_2(t^*)$$

derart, daß für $t = t_0$, $t^* = t_0 + h$

$$x_1(t_0) = x_2(t_0 + h), \quad y_1(t_0) = y_2(t_0 + h)$$

ist, so ist für alle τ

$$x_1(t_0 + \tau) = x_2(t_0 + h + \tau), \quad y_1(t_0 + \tau) = y_2(t_0 + h + \tau).$$

Eine solche durch einen Punkt x_0, y_0 festgelegte Lösung wollen wir nun auf ihrem weiteren Verlauf verfolgen. Sie möge etwa von x_0, y_0 ausgehend ein Stück weit nach der Methode der sukzessiven Approximationen durch eine Reihe dargestellt sein. Ist dann x_1, y_1 mit dem Parameterwert t_1 ein weiterer durch diese Darstellung erfaßter Punkt der Lösung, so können wir für x_1, y_1, t_1 erneut das Verfahren der sukzessiven Approximationen ansetzen und so die Lösung ein Stück weiter verfolgen. Nun sind zwei Fälle denkbar. Entweder kann man dabei bei fallenden oder bei wachsenden Parametern nicht über einen gewissen endlichen Grenzwert T des Parameters hinauskommen, oder aber man kann dabei zu beliebig großen Werten des Parameters gelangen. Es genügt dabei völlig, wachsende Parameter zu betrachten. Der andere Fall wird durch die Substitution $t_1 = -t$ auf diesen zurückgeführt. Zunächst ist leicht zu sehen: *Wenn man bei der Fortsetzung*

nicht zu beliebig großen Parameterwerten gelangen kann, wenn also die obere Grenze T der längs der Kurve in B erreichbaren Parameterwerte endlich ist, so kann die Lösungskurve für gegen T wachsende Parameterwerte nicht im Inneren eines abgeschlossenen Teiles des Bereiches B bleiben. Denn nach Voraussetzung gilt längs der Kurve:

$$|P(x(t), y(t))| < M, \quad |Q(x(t), y(t))| < M \quad \text{für } t_0 \leq t < T$$

Daraus folgt

$$|x(t_1) - x(t_2)| < M |t_1 - t_2|, \quad |y(t_1) - y(t_2)| < M |t_1 - t_2|.$$

Das bedeutet aber die Existenz der Grenzwerte

$$\lim_{t \rightarrow T} x(t) = a, \quad \lim_{t \rightarrow T} y(t) = b.$$

Der Punkt (a, b) müßte somit dem Inneren von B angehören. Das widerspricht aber der vorhin erwähnten Feststellung von S. 32, weil man sonst die Lösung für T übertreffende Parameterwerte verfolgen könnte. Der Punkt (a, b) liegt also am Rand des Bereiches und gegen ihn konvergiert die Kurve für $t \rightarrow T$.

Ich wende mich zu dem anderen der beiden unterschiedenen Fälle, in dem man die Lösung für beliebig große Parameterwerte verfolgen kann. Hier will ich den *Spezialfall vorwegnehmen*, daß beide Grenzwerte

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = a, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = b$$

existieren. Dann ist, wie ich zeigen will,

$$P(a, b) = 0 \quad \text{und} \quad Q(a, b) = 0$$

wofern nicht (a, b) am Rande von B liegt. Liegt nämlich (a, b) in B und wäre z. B. $P(a, b) \neq 0$, so wäre jedenfalls für genügend große t , z. B. für $t \geq m$,

$$|P(x(t), y(t))| > \left| \frac{P(a, b)}{2} \right|.$$

Daher wäre wegen der Stetigkeit von $P(x(t), y(t))$ für große t entweder ständig

$$P(x(t), y(t)) > \frac{P(a, b)}{2} > 0,$$

oder ständig

$$P(x(t), y(t)) < \frac{P(a, b)}{2} < 0.$$

In beiden Fällen folgt durch Integration

$$|x(t) - x(m)| > \frac{|P(a, b)|}{2} (t - m),$$

so daß also gegen Annahme $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = \infty$ sein müßte. Stellen (a, b) , für welche $P(a, b) = 0$ und $Q(a, b) = 0$ ist, nannten wir S. 54 singuläre Stellen der Differentialgleichung (I), wofern nicht das gleichzeitige Verschwinden von $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ durch Beseitigung

eines gemeinsamen Faktors zu beheben ist. Übertragen wir die dort gegebene Definition sinngemäß auf das System (2) so gehört der Punkt (a, b) jedenfalls nicht zu den singulären, weil die im Existenzsatz von S. 32 formulierten Voraussetzungen jedenfalls erfüllt sind. Tatsächlich geht ja durch den Punkt (a, b) die Lösung $x = a$, $y = b$, welche das allgemeine Existenztheorem liefert. Es ist aber nach dem eben Festgestellten nicht ausgeschlossen, daß unter Umständen noch eine weitere Integralkurve diesem Punkte für $t \rightarrow \infty$ zustrebt. Auch stellt ja die vom Existenztheorem gelieferte Lösung $x = a$, $y = b$ in der x - y -Ebene keine eigentliche Kurve dar. Schon die Betrachtungen des vorigen Paragraphen haben uns einigen Aufschluß über die hier etwa zu erwartenden Möglichkeiten gegeben. *Wir wollen diesem Sachverhalt entsprechend die Stellen (a, b) , wie schon S. 32 erwähnt, zu den singulären rechnen.* Der Wortlaut unserer Definition von S. 54 schließt ja auch eine solche *Erweiterung der Begriffsbestimmung* nicht aus.

Ich wende mich nun zu dem *allgemeinen Fall*. *Ich betrachte einen Kurvenbogen $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \geq t_0$, der keinen singulären Punkt der Differentiengleichungen (2) trifft. Die Punkte $x(t)$, $y(t)$ sollen für $t \rightarrow \infty$ mehrere Häufungspunkte in B besitzen. Es soll also im Inneren von B Punkte geben, denen $[x(t), y(t)]$ für beliebig große t beliebig nahe kommt. Am Rande von B und in singulären Punkten sollen dagegen solche Häufungspunkte nicht liegen. Dann ist die Kurve $\mathcal{C}: x = x(t)$, $y = y(t)$ entweder selbst eine geschlossene Kurve, oder aber die Häufungspunkte für $t \rightarrow \infty$ liegen auf einer anderen geschlossenen Integralkurve.*

Diese Aussage entspricht der schon für den Fall der Existenz der Grenzwerte gemachten besonderen Feststellung. Denn die einem singulären Punkte (a, b) entsprechende Lösung $x = a$, $y = b$ gehört zu den geschlossenen Lösungen, insofern als auf ihr zu verschiedenen Parameterwerten derselbe Punkt gehört.

Zum Beweise unterscheide ich *zwei Fälle*. Ich nehme *zunächst an, ein Häufungspunkt gehöre der Lösung L selbst an*. Die Lösung soll also einem ihrer Punkte für beliebig große t beliebig nahe kommen. *Dann ist die Lösung notwendig geschlossen.*

Als geschlossene Lösung wird also, um es noch einmal zu wiederholen, eine Lösung angesprochen, auf welcher zu einzelnen Punkten mehrere Parameterwerte gehören. D. h. also: einen solchen Punkt passiert die Kurve nicht allein für $t = t_0$, sondern noch für einen anderen Wert $t_0 + h$. Daraus folgt aber, daß auch beliebige Parameterwerte $t_0 + \tau$ und $t_0 + h + \tau$ dieselben Punkte ergeben (S. 61). Die sämtlichen Kurvenpunkte sind also durch die zwischen t_0 und $t_0 + h$ gelegenen Parameterwerte bereits erschöpft.

Ich will jetzt *zuerst beweisen, daß die Lösung notwendig geschlossen ist, wenn einer ihrer zu $t \rightarrow \infty$ gehörigen Häufungspunkte auf ihr liegt*. P sei ein solcher Häufungspunkt. Ich errichte in demselben die Kurven-

normale. Falls die Lösung nicht geschlossen ist, so muß diese Normale von der Lösung in unendlich vielen Punkten getroffen werden, die sich in P häufen. Denn sei Q irgendein weiterer Punkt der Lösung. P gehöre zum Parameter p , Q zum Parameter q . Dann lehrt der Satz von der stetigen Abhängigkeit der Lösungen von den Anfangspunkten, daß in einem beliebig gegebenen Parameterintervall $p - \delta < t < p + \delta$ die Lösung von den zu den um $q - p$ größeren Parameterwerten $q - \delta < t < q + \delta$ gehörigen Lösungspunkten nur wenig abweicht, wofern nur Q hinreichend nahe bei P gewählt ist. Stellt man also diese Überlegung für eine gegen P konvergierende Folge von Punkten Q_n an, deren Parameterwerte $q_n \rightarrow \infty$ streben, so erhält man unendlich viele Kurvenbogen, die beliebig nahe an dem um P abgegrenzten Bogen entlang laufen. Wenn die Kurve etwa selbst geschlossen ist, dann fallen alle diese Bogen zusammen; denn sie hat dann eine endliche Länge. Unsere Annahme, die Kurve sei nicht geschlossen, hat zur Folge, daß alle diese Bogen die Normale überschreiten, und zwar müssen sie alle in hinreichender Nähe von P bei wachsenden Parameterwerten die Normale im gleichen Sinne überschreiten. Auch dies folgt ja aus der Stetigkeitsbetrachtung, weil doch in hinreichender Nähe von P nur geringe Richtungsunterschiede der Integralkurven vorkommen. Dies aber führt zu einer gestaltlichen Unmöglichkeit. Man gebe ein P enthaltendes Normalenstück ν vor, das so kurz gewählt sei, daß es von allen Bogen im gleichen Sinn überschritten wird. Man verfolge die Lösung von P aus im Sinne wachsender Parameter, bis sie zum ersten Male die Normale des Punktes P trifft. Dieser Treffpunkt sei P_1 . Der Kurvenbogen PP_1 und das Normalenstück PP_1 begrenzen dann nach dem *Jordanschen Kurvensatz*¹⁾ einen Bereich, aus welchem die

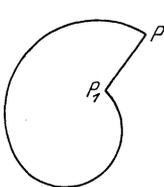


Abb. 8a.

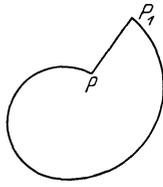


Abb. 8b.

Lösung nie wieder austreten (Abb. 8a) oder in den sie nie wieder eintreten kann (Abb. 8b), da sie ja das Normalenstück PP_1 , wenn überhaupt, so nur immer im selben Sinne überschreiten kann, und da sie keinen Punkt des Bogens PP_1 treffen kann, ohne mit diesem Bogen im weiteren

Verlauf übereinzustimmen. Der Bogen PP_1 enthält nämlich keinen singulären Punkt. Daraus folgt, daß auf der Normalen die Schnittpunkte in derselben Reihenfolge aufeinander folgen, wie die zugehörigen Parameterwerte auf der Kurve. P_1 ist der P zunächst gelegene Schnittpunkt auf der Normalen. P könnte also nicht Häufungspunkt der Schnittpunkte sein. Die Lösung muß also selbst geschlossen sein.

¹⁾ Der beste heute bekannte Beweis ist der von *E. Schmidt* in den Sitzungsbericht der preuß. Akad. d. Wiss. 1923, S. 318—329.

Ich betrachte nun den *anderen Fall*. P sei ein Häufungspunkt, der nicht auf der zu untersuchenden Lösung L liegt. Alsdann will ich zeigen, daß die durch P gehende Lösung L' geschlossen ist. Jedenfalls ist sofort zu sehen, daß jeder Punkt der durch P gehenden Lösung L' ein Häufungspunkt von L für $t \rightarrow \infty$ ist. Das folgt wie eben aus Stetigkeitsgründen durch Betrachtung einer gegen P konvergierenden Folge von Punkten P_v von L . Sind nämlich P_v und P genügend nahe beieinander gelegene Punkte von L und L' , so betrachte man die Integralkurven L und L' , die für $t = t_0$ durch P_v oder P gehen. Für ein beliebiges Intervall $t_0 \leqq t \leqq T$ sind sie dann um so weniger voneinander verschieden, je näher P_v und P beieinander liegen. Daher kann auch L' keinem singulären Punkt und auch nicht dem Rande von B beliebig nahe kommen, weil sonst dasselbe (gegen Annahme) für L zutreffen müßte¹⁾. Wenn nämlich L' für $t \rightarrow \infty$ dem singulären Punkt σ beliebig nahe käme, so bestimme man T so, daß der zu $t = T$ gehörige Punkt von L' um weniger als eine vorgegebene Zahl $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ von σ entfernt ist. Alsdann bestimme man P_v auf L so, daß für $t_0 \leqq t \leqq T$ die Kurve L um weniger als $\frac{\varepsilon}{2}$ von L' abweicht. Dann hat der zu $t = T$ gehörige Punkt von L von σ eine Entfernung, die ε nicht übertrifft. Da man aber $\varepsilon_1 > 0$ beliebig wählen kann, so kommt man in Widerspruch mit den über L gemachten Annahmen. Daher muß nun auch L' im Innern von B Häufungspunkte besitzen, die nicht singulär sind. Diese Häufungspunkte liegen aber notwendig auf L' . Anderenfalls sei R ein solcher Häufungspunkt von L' . Dann mache ich im Punkte R bei L' dieselbe Betrachtung wie im vorigen Falle im Punkte P bei L . Die durch R gehende Lösung heiße dann L'' . Auf ihr errichte ich in R die Normale und schneide diese mit L' . Wieder erkenne ich, daß auf dieser Normalen in genügender Nähe von R die Schnittpunkte mit L' in derselben Reihenfolge liegen wie die zugehörigen Parameterwerte auf L' . Es seien also R_1, R_2, R_3 drei solche Schnittpunkte und $t_1 < t_2 < t_3$ die zugehörigen Parameterwerte. Nun aber kann man einsehen, daß zwischen R_1 und R_2 sowohl wie zwischen R_2 und R_3 die Normale nur einmal von L geschnitten werden kann. Daraus würde dann folgen, daß R_2 nicht Häufungspunkt von L sein kann. Denn an L' laufen doch, wie wir gerade sahen, Bogen von L entlang²⁾. Um also z. B. zu erkennen, daß die Normale zwischen R_1 und R_2 nur einmal von L geschnitten werden kann, muß man nur bemerken, daß alle etwa vorhandenen Überschreitungen, falls nur R_1, R_2, R_3 genügend nahe an R gewählt

¹⁾ In dem Falle also, wo neben anderen auch solche Häufungspunkte da sind, lehrt unsere Betrachtung, daß jedenfalls ein ganzer, beiderseits von singulären Punkten begrenzter Bogen von L' von Häufungspunkten besetzt ist.

²⁾ Man nehme nur $T = t_3$.

sind, im selben Sinne erfolgen müßten. Da aber der Bogen $R_1 R_2$ von L' keinen singulären Punkt trifft und zusammen mit dem Geradenstück $R_1 R_2$ einen Bereich begrenzt, so müßten die Überschreitungen abwechselnd in der einen oder der anderen Richtung geschehen. Daher muß R auf L' liegen. Denn die gegenteilige Annahme führt zu Widersprüchen. Daher ist L' geschlossen.

Unser Satz ist damit bewiesen. Er kann aber noch durch die folgenden Bemerkungen ergänzt werden. Die Kurve L ist jedenfalls eine Spirale, die sich in immer engeren Windungen an L' heranlegt. L' nennt man einen *Grenzykel*. Nun ergibt sich weiter, daß alle Lösungen, welche nur irgend einmal genügend nahe an L' herankommen, Spiralen sein müssen. Um das zu erkennen, errichte ich in einem Punkte R von L' eine Normale nach der Seite, auf der die Spirale L liegt. Ich wähle ein Stück der Normalen so kurz, daß allemal die Spirale L bei wachsendem t die Normale im selben Sinne überschreitet. Dann wähle ich auf dieser Normalen irgendeinen hinreichend nahe bei R gelegenen Punkt P und lege durch denselben eine Lösung L'' . Auch diese schmiegt sich dann für $t \rightarrow \infty$ der Lösung L' an. Gehören nämlich zum Punkte R von L' die Parameterwerte t_0 und $t_0 + \tau$ ($\tau > 0$), und wählt man P hinreichend nahe bei R und ordnet auch P von L'' den Parameterwert t_0 zu, so muß für $t_0 \leq t \leq t_0 + 2\tau$ L'' ständig beliebig nahe bei L' verlaufen. Liegt dann P auf der Normalen zwischen den beiden Schnittpunkten R_1 und R_2 von L mit der Normalen, so verläuft die neue Lösung L'' immer auf derselben Seite von L in deren Nähe. Ich verfolge sie bis zum nächsten Schnittpunkt P_1 mit der Normalen. Ist R_3 der auf R_2 folgende Schnittpunkt von L mit der Normalen, so muß P_1 zwischen R_2 und R_3 liegen, weil sonst die neue Lösung L schneiden müßte. Auf P_1 wende man die gleiche Überlegung an, die eben bei P angewendet wurde. So erkennt man, daß die Schnittpunkte P_n von L'' nur der Normalen zwischen den Schnittpunkten R_n von L und der Normalen liegen und sich daher wie diese gegen R häufen. Dies beweist daß L'' sich spiralg an L' anschmiegt.

Ich schließe noch einige Betrachtungen über das Verhalten der Lösungen in der Umgebung einer geschlossenen Lösung an. Daß eine geschlossene Lösung von einer Schar geschlossener Lösungen umgeben sein kann, haben wir schon im vorigen Paragraphen am Beispiel

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = x$$

gesehen. Hier sind die Lösungen die Kreise um den Ursprung als Mittelpunkt. Daß auch in der Umgebung einer geschlossenen Lösung

¹⁾ R_2 sei der näher an R gelegene und folge auf R_1 , wenn man L im Sinne wachsender Parameter durchläuft.

Spiralen liegen können, und noch manches andere, sieht man an dem Beispiel

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y + \delta(x^2 + y^2 - 1)x \sin \frac{1}{x^2 + y^2 - 1} \\ \frac{dy}{dt} &= x + \delta(x^2 + y^2 - 1)y \sin \frac{1}{x^2 + y^2 - 1} \end{aligned} \right\} \text{für } x^2 + y^2 \neq 1.$$

Aber $\frac{dx}{dt} = -y$ und $\frac{dy}{dt} = x$ für $x^2 + y^2 = 1$.

Führt man nämlich Polarkoordinaten ein ($x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$), so werden diese Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \delta(r^2 - 1) \sin \frac{1}{r^2 - 1} && \text{für } r \neq 1 \\ \frac{dr}{d\theta} &= 0 && \text{für } r = 1. \end{aligned}$$

Unter den Lösungen sind also den unendlich vielen Nullstellen von $\sin \frac{1}{r^2 - 1}$ entsprechend unendlich viele Kreise enthalten, die sich gegen den Kreis $r = 1$ häufen. Zwischen zwei aufeinanderfolgenden dieser Kreise verlaufen aber die Lösungen als Spiralen, die sich um jeden der beiden Grenzkreise herumwinden. Dazwischen hängt nämlich r monoton von θ ab.

Es fällt auf, daß sich die Differentialgleichung zwar in der Umgebung der isolierten Kreise analytisch verhält, daß sie aber auf dem Häufungskreis selbst nicht analytisch ist. Daß tatsächlich so etwas im analytischen Fall nicht vorkommen kann, ist leicht einzusehen. Ich will nämlich zeigen, daß in der Umgebung einer geschlossenen Lösung, auf der sich die Differentialgleichung analytisch verhält, entweder nur geschlossene Lösungen oder nur Spiralen liegen. Nehme ich nämlich an, gegen eine geschlossene Lösung häuften sich andere geschlossene Lösungen, dann errichte ich in einem Punkt P der Häufungslösung eine Normale, und führe auf dieser Normalen den Abstand s von P als Parameter ein. Durch einen beliebigen Punkt s der Normalen lege ich eine Lösung. Diese verfolge ich in Richtung wachsender Parameter, bis sie zum ersten Male wieder die Normale trifft. Das geschehe bei dem Parameter s_1 . Dann ist nach S. 49 s_1 eine analytische Funktion $f(s)$ für alle s , die zu Punkten der Normalen aus der Umgebung der Häufungslösung gehören. Für diejenigen unendlich vielen Werte s aber, welche geschlossene Lösungen bestimmen, ist dann $f(s) = s$. Da dies aber nun in einem Intervall, in dem $f(s)$ analytisch ist, unendlich oft der Fall ist, so ist nach bekannten Sätzen über analytische Funktionen für alle $s: f(s) = s$ und das heißt, daß alle Lösungen aus einer gewissen Umgebung der Häufungslösung geschlossen sein müssen.

Ich füge noch eine Bemerkung über das Verhalten geschlossener Lösungen bei hinreichend geringer Abänderung der Differentialgleichung an.

Daß bei hinreichend geringer Abänderung einer Differentialgleichung geschlossene Lösungen wieder in geschlossene Lösungen übergingen, wird man schon angesichts des letzten Beispiels, in dem man ja δ beliebig klein wählen kann, nicht behaupten wollen. Wohl aber kann man eine solche Aussage machen, wenn man von einer Differentialgleichung mit einer *einfachen und isolierten geschlossenen Lösung* L ausgeht. Darunter will ich eine Lösung verstehen, an die sich von außen und innen andere Lösungen spiralig anschließen. Daher die Benennung *isoliert*. Es möge aber außerdem der Windungssinn der Spiralen außen und innen *derselbe* sein, d. h. so, daß sämtliche Spiralen für $t \rightarrow +\infty$ sich der geschlossenen Lösung nähern. Nur dann soll die geschlossene Lösung *einfach* heißen. Alsdann gilt der Satz, daß eine jede andere Differentialgleichung, die in einer gewissen Umgebung dieser geschlossenen Lösung hinreichend wenig von der ersten verschieden ist, in dieser Umgebung selbst mindestens eine geschlossene Lösung besitzt. Zum Beweise betrachte ich wieder die schon vorhin eingeführte Funktion $s_1 = f(s)$, bei der man aber jetzt, wo die Differentialgleichung nur den zu Beginn dieses Paragraphen formulierten Voraussetzungen genügt, nur von der Stetigkeit Gebrauch machen kann. Die entsprechende Funktion für die abgeänderte Differentialgleichung sei $s_1 = g(s)$. Hier ist nun dem geringen Unterschied beider Differentialgleichungen entsprechend die zweite Funktion nur wenig von der ersten verschieden. Nach unseren Voraussetzungen erfährt nun beim Durchgang durch $s = 0$ die stetige Funktion $f(s) - s$ einen Vorzeichenwechsel. Daher gilt das gleiche auch für die Funktion $g(s) - s$ für einen oder mehrere $s = 0$ benachbarte Werte von s . Auch die abgeänderte Differentialgleichung besitzt also geschlossene Lösungen, die dazu noch in der Nähe der geschlossenen Lösung der ursprünglichen verlaufen. Unsere Betrachtung läßt außerdem deutlich erkennen, inwiefern die Voraussetzung, daß die geschlossene Lösung einfach sei, wesentlich ist. Anderenfalls braucht tatsächlich die Gleichung $s = g(s)$ keine Lösung zu besitzen.

Über geschlossene Lösungen gilt nun weiter der folgende Satz: *Im Inneren einer jeden geschlossenen Lösung L liegt mindestens ein singulärer Punkt der Differentialgleichung.* Wir setzen voraus, daß die Lösungskurve einen einfach zusammenhängenden Bereich umschließt, in dem die Koeffizienten $P(x, y)$, $Q(x, y)$ der Differentialgleichung den zu Beginn dieses Paragraphen angegebenen Voraussetzungen genügen.

Beim Beweise stütze ich mich darauf, daß die Differentialgleichungen (2) die ich im Gegensatz zur Behauptung als singularitätenfrei annehme, in einem L enthaltenden einfach zusammenhängenden Bereich ein stetiges Vektorfeld erklären. Verfolgt man den Feldvektor längs L , so erleidet er, da er zugleich Tangentenvektor von L ist, beim vollen Umlauf eine Gesamtdrehung um 2π . Dies steht im Gegensatz zur An-

nahme, daß das Vektorfeld im Inneren von L frei von Singularitäten ist. Verfolgt man nämlich den Feldvektor z. B. längs eines genügend kleinen Dreiecks, so ist seine Gesamtdrehung wegen der Stetigkeit des Vektorfeldes Null. Längs eines jeden Sehnenpolygons, das L genügend nahe approximiert, ist die Änderung des Feldvektors gleichfalls 2π . Dies Polygon kann Selbstüberkreuzungen haben. Aber man kann es in einfach geschlossene Polygone zerlegen. Längs eines jeden ist die Drehung des Feldvektors ein Vielfaches von 2π und längs mindestens eines derselben ist sie ein von Null verschiedenes Vielfaches von 2π . Ein solches Polygon zerlegt man durch Diagonale in Dreiecke. Bei Umlaufung mindestens eines derselben in die Gesamtdrehung des Feldvektors ein von Null verschiedenes Vielfaches von 2π . Denn umläuft man alle Dreiecke im gleichen Sinne, so ist die Summe der einzelnen Drehungsänderungen des Feldvektors gleich der Gesamtdrehung bei Umlaufung des Polygons. Ein solches Dreieck, bei dem die Drehung des Feldvektors von Null verschieden ist, zerlege man durch Parallele zu den Seiten, die man durch die Seitenmitten zieht in vier kongruente Dreiecke. Bei mindestens einem desselben ist die Gesamtdrehung ein von Null verschiedenes Vielfaches von 2π . Dies zerlege man in der gleichen Weise. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man beliebig kleine Dreiecke, bei deren Durchlaufung der Feldvektor sich jeweils um ein von Null verschiedenes Vielfaches von 2π dreht. Das widerspricht aber den vorhin festgestellten Tatsachen, daß längs genügend kleinen Dreiecken, die Änderung des Feldvektors Null ist, falls das Feld frei von Singularitäten ist, d. h. frei von Stellen, wo die zugeordneten Vektoren die Länge Null haben. Also besitzt das Feld innerhalb von L Singularitäten¹⁾.

Man kann, wie man leicht sieht, und wie der Leser des näheren durchüberlegen möge, aus den vorausgegangenen Betrachtungen den folgenden Schluß ziehen:

Eine Lösung L , die für alle t ganz im Inneren eines einfach zusammenhängenden Bereiches verläuft, der in seinem Inneren höchstens eine singuläre Stelle P enthält, ist entweder eine P umschließende geschlossene Kurve, oder ist eine Spirale, die sich einem Grenzykel anschmiegt, welcher P umschließt, oder sie mündet im singulären Punkt, oder sie ist eine Spirale, die sich an eine Lösung anschließt, die sowohl für $t \rightarrow +\infty$ wie für $t \rightarrow -\infty$ im singulären Punkt mündet, oder aber sie strebt für $t \rightarrow -\infty$ oder für $t \rightarrow +\infty$ gegen den Rand.

Ich beschließe diese gestaltlichen Betrachtungen mit dem folgenden nützlichen Satz. *Eine singuläre Stelle P sei von einem Kreise umschlossen, in dem keine weiteren singulären Stellen liegen. Von zwei*

¹⁾ Zu diesem Beweis vergl. man den *Pringsheimschen* Beweis des Cauchyschen Integralsatzes oder den Beweis des *Weierstraßschen* Monodromiesatzes. Vgl. *Bieberbach*: Lehrbuch der Funktionentheorie Bd. I.

Punkten seiner Peripherie mögen Lösungen L_1 und L_2 ausgehen, die in P münden. Diese mögen zusammen mit der Peripherie des Kreises einen Bereich G bestimmen, in welchem keine weitere in P mündende Lösung verläuft. Dann kann man um jeden auf L_1 und jeden auf L_2

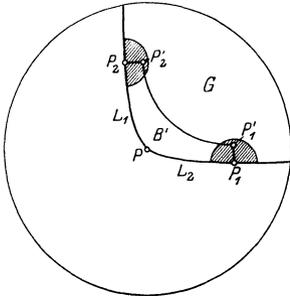


Abb. 9.

gelegenen Punkt (P_1 und P_2) durch Kreisbogen aus G solche Gebiete ausschneiden, daß jede Lösung L' , die in dem einen beginnt, auch das andere Gebiet passiert. (Abb. 9.)

Ersichtlich ist dies eine Verallgemeinerung des Satzes von der stetigen Änderung der Lösungen bei Änderung der Anfangswerte. Man kann diesen ja offenbar in ganz ähnlicher Weise formulieren. Zum Beweise errichte ich in den beiden Punkten P_1 und P_2 Normalen, die in G hineinführen, und die so kurz sind, daß sie

einander nicht treffen, und verbinden ihre Endpunkte P_1' und P_2' in G durch einen Kurvenbogen. Der von $P_1 P P_2 P_2' P_1' P_1$ begrenzte Bereich sei B' . Alsdann lasse ich in einem Punkte R der Normalen zwischen P_1 und P_1' eine Lösung beginnen. Diese kann nicht in P münden. Sie kann nicht geschlossen sein, da es sonst neben P noch singuläre Punkte gäbe, sie kann sich aus demselben Grund keiner geschlossenen Lösung anschmiegen, sie kann sich aber auch keiner mit beiden Enden in P mündenden Lösung anschmiegen, da dies sich mit unseren Annahmen nicht verträgt. Also muß sie einmal wieder B' verlassen. Das muß auf einem Punkt der Verbindungslinie $P_1 P_1' P_2' P_2$ geschehen. Ich darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß dieser Austritt S weiter von P_1 ab, also näher an P_2 heran, als der Beginn R liegt. Den Anfangspunkt lasse ich sich nun stetig auf P_1 hin bewegen. Dann bewegt sich der Endpunkt S stetig von P_1 weg einer Grenzlage zu. Ich behaupte, daß diese Grenzlage P_2 sein muß. Denn anderenfalls sei V der zwischen P_1 und P_2 gelegene Grenzpunkt. Ich behaupte, daß die durch ihn gehende Lösung in P münden müßte. Anderenfalls müßte sie irgendwo die Verbindungslinie $P_1 P_2$ zum zweiten Male in einem inneren Punkte U schneiden. Dann aber müßten aus Stetigkeitsgründen alle in der Nachbarschaft von V beginnenden Lösungen auch ein zweites Mal in der Nähe von U die Verbindungslinie $P_1 P_2$ treffen. Das widerspricht aber der Definition von V . Andererseits kann aber die in V beginnende Lösung nach Voraussetzung nicht in P münden. Also muß V mit P_2 zusammenfallen. Darin liegt aber der Beweis unseres Satzes. In G verlaufen also die Lösungen ähnlich wie in der Umgebung eines Sattelpunktes. Wegen weiterer Sätze über gestaltliche Verhältnisse sei auf die S. 61 erwähnte Arbeit von *Bendixson* verwiesen. Ich gehe jetzt zu Anwendungen auf spezielle Differentialgleichungen über.

Bemerkungen. 1. Wir haben die Sätze dieses Paragraphen für Differentialgleichungen gewonnen, welche der *Lipschitz*-Bedingung genügen. *Brouwer* hat in einigen Arbeiten über stetige Vektorverteilung auf Oberflächen in den Amsterdamer Berichten von 1910 den allgemeineren Fall von nur stetigen Differentialgleichungen behandelt und dort entsprechende Ergebnisse gewonnen. Namentlich schließt sich der Beweis des Satzes von S. 68/69 an *Brouwer* an.

2. Hinsichtlich der Übertragung dieser Sätze über den Gesamtverlauf von Lösungen auf Systeme ist noch wenig bekannt. Wir werden insbesondere später bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung näher auf die Dinge eingehen. Hier liegen weitergehende Untersuchungen vor.

§ 5. Die Differentialgleichungen $x^m \frac{dy}{dx} = ay + bx + \mathfrak{F}(x, y)$.

Ihrer besonderen Wichtigkeit wegen will ich diese Differentialgleichungen nun zuerst behandeln. $\mathfrak{F}(x, y)$ sei dabei eine Potenzreihe, die keine Glieder von niedrigerer als der zweiten Dimension enthält und die in der Umgebung von $(0, 0)$ konvergiert. Von dem zu gewinnenden Ergebnis werden wir im folgenden Paragraphen eine Anwendung machen. m werde stets als ganze positive Zahl vorausgesetzt. Wir gehen wieder zur Parameterdarstellung über und setzen

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x^m \\ \frac{dy}{dt} &= ay + bx + \mathfrak{F}(x, y) \end{aligned}$$

Ich beginne die nähere Untersuchung mit dem Fall 1. ***m eine ungerade ganze Zahl, $a < 0$.***

Zunächst wählen wir eine Umgebung des Ursprungs, in welcher kein weiterer singulärer Punkt liegt. Als solche Umgebung kann ein parallel den Koordinatenachsen orientiertes Rechteck genommen werden. Es wird durch die Lösung $x = 0$ in zwei Teilrechtecke zerlegt, die wir getrennt zu betrachten haben. Zunächst wähle ich die Zahl $\delta > 0$ so, daß die Punkte $(0, \delta)$ und $(0, -\delta)$ dem Rechteck angehören und daß

$$\begin{aligned} a\delta + \mathfrak{F}(0, \delta) &< 0 \\ -a\delta + \mathfrak{F}(0, -\delta) &> 0 \end{aligned}$$

ist. Dann kann man weiter die Zahl $\varepsilon > 0$ so wählen, daß das von den Geraden $x = \pm \varepsilon$, $y = \pm \delta$ begrenzte Rechteck ganz im erstgenannten enthalten ist und daß für $|x| \leq \varepsilon$

$$\begin{aligned} a\delta + bx + \mathfrak{F}(x, \delta) &< 0, \\ -a\delta + bx + \mathfrak{F}(x, -\delta) &> 0 \end{aligned}$$

gilt. Ich betrachte dann zunächst denjenigen Teil des kleineren Rechtecks, in dem $x < 0$ ist. In ihm gibt es, wie ich zeigen will, genau eine Lösung der Differentialgleichung, welche im Ursprung mündet. Ich lege durch irgendeinen inneren Punkt P der Begrenzungsstrecke $y = \delta$ dieses Rechtecks eine Lösung der Differentialgleichung. Da in diesem

Punkt und in seiner Umgebung $\frac{dy}{dx} > 0$ ist, so verläßt diese Lösung mit zunehmendem x das Rechteck. Ebenso steht es auf der gegenüberliegenden Rechteckseite, wo $\frac{dy}{dx} < 0$ ist. Verfolgt man daher eine solche Lösung für abnehmende x ins Rechteck hinein, so muß sie die Rechteckseite $x = -\varepsilon$ treffen¹⁾. Ich lasse nun den Anfangspunkt P_1 auf $y = \delta$ gegen den Punkt $(0, \delta)$ konvergieren. Die Punkte, in welchen die zugehörigen Lösungen die Rechteckseite $x = -\varepsilon$ treffen, hängen dabei stetig von der Lage des Punktes P ab und rücken monoton auf die Rechteckseite $y = -\delta$ zu. Sie streben daher einer Grenzlage S_1 mit den Koordinaten $(-\varepsilon, s_1)$ zu, wenn P seiner angegebenen Grenzlage zustrebt. Betrachtet man ebenso die Lösung durch einen P_2 auf $y = -\delta$ und läßt wieder P_2 von links her gegen $(0, -\delta)$ konvergieren, so streben die stets vorhandenen Schnittpunkte dieser Lösungen mit $x = -\varepsilon$ einer Grenzlage S_2 mit den Koordinaten $(-\varepsilon, s_2)$ zu. Hier ist $s_1 \geq s_2$, weil sich sonst eine von einem Punkte von $y = \delta$ ausgehende Lösung mit einer von einem Punkte von $y = -\delta$ ausgehenden im Inneren des linken Teilrechtecks treffen müßte. Legt man dann durch S_1 eine Lösung, so muß dieselbe im Ursprung münden. Denn man kann sie bis zum Verlassen des Rechtecks verfolgen. Dies kann nur auf $y = \pm \delta$ oder im Ursprung geschehen. Denn $x = 0$ ist eine sonst von Singularitäten freie Lösung und vertikale Tangenten kommen auf der zu untersuchenden Lösung nicht vor. Wenn aber die Lösung durch S_1 in einem inneren Punkt einer der beiden Rechteckseiten $y = \pm \delta$ endete, so müßte das aus Stetigkeitsgründen bei allen Lösungen durch, S_1 beiderseits benachbarte, Punkte ebenso sein. Das widerspricht aber der Definition von S_1 . Die Lösung durch S_1 muß also im Ursprung münden. Die gleiche Überlegung gilt für die durch S_2 gehende Lösung. Daraus ergibt sich $S_1 = S_2$. Denn es gibt nur eine in der Rechteckshälfte $x < 0$ gelegene Lösung, welche im Ursprung mündet. Anderenfalls seien nämlich $y_1(x)$ und $y_2(x)$ zwei derartige Lösungen. Dann hat man

$$x^m \frac{d(y_1 - y_2)}{dx} = (y_1 - y_2) (a + f(x)).$$

Hier ist $f(x) = \frac{\mathfrak{P}(x, y_1) - \mathfrak{P}(x, y_2)}{y_1 - y_2}$ eine Funktion von x , die sich nach Potenzen von x , y_1 und y_2 entwickeln läßt und die für $x = 0$ verschwindet. Daher gibt es eine Zahl σ derart, daß

$$|f(x)| < \left| \frac{a}{2} \right| \quad \text{für} \quad |x| < \sigma, \quad |y_1| \leq \delta, \quad |y_2| \leq \delta.$$

¹⁾ Sollte sie nämlich über $y = +\delta$ oder über $y = -\delta$ das Rechteck verlassen, so müßten beide Male vertikale d. h. der y -Achse parallele Tangenten auf ihr zu finden sein, was für $x < 0$ unmöglich ist.

Ist dann $-\sigma < x_0 < 0$, so ist (für $x_0 < x < 0$)

$$y_1(x) - y_2(x) = [y_1(x_0) - y_2(x_0)] e^{\int_{x_0}^x \frac{a+f(x)}{x^m} dx}$$

Daher ist

$$\begin{aligned} y_1(x) - y_2(x) &> y_1(x_0) - y_2(x_0) e^{\frac{1}{2} \int_{x_0}^x \frac{a}{x^m} dx} \\ &> y_1(x_0) - y_2(x_0) \end{aligned}$$

und das widerspricht der Annahme, daß $y_1(x)$ und $y_2(x)$ im Ursprung münden sollen. *In der Rechteckhälfte $x < 0$ gibt es also genau eine im Ursprung mündende Lösung. Das gleiche ist in der Rechteckhälfte $x > 0$ der Fall.* Das erkennt man am raschesten, indem man diesen Fall auf den vorigen durch Vorzeichenänderung von x zurückführt.

Ich komme zum Fall 2: ***m ungerade ganze Zahl, $a > 0$.***

Ich konstruiere ein Rechteck genau wie im vorigen Fall. Jetzt ist aber für $|x| < \epsilon$

$$\begin{aligned} a\delta + bx + \mathfrak{P}(x, \delta) &> 0 \\ -a\delta - bx + \mathfrak{P}(x, -\delta) &< 0. \end{aligned}$$

Ich betrachte zuerst die Hälfte $x > 0$ des Rechtecks. Eine in diesem beginnende Lösung kann bei abnehmendem x nach diesen Ungleichungen das Rechteck weder auf $y = +\delta$ noch auf $y = -\delta$ verlassen. Sie kann ihm aber auch nicht über $x = 0$ entinnen. Sie muß also entweder im Ursprung münden oder geschlossen sein oder sich einer geschlossenen anschmiegen. Die beiden letzten Fälle sind ausgeschlossen, weil sonst im Rechteck weitere singuläre Punkte lägen. Also münden alle Lösungen im Ursprung. Ebenso schließt man in der Hälfte $x < 0$ für wachsende x . *Jetzt ist also der Ursprung ein Knoten, insofern als alle im Rechteck beginnenden Lösungen im Ursprung münden.*

Im Falle 3: ***m gerade ganze Zahl, $a < 0$*** sind keine neuen Erörterungen mehr nötig. Für $x < 0$ schließt man wie eben auf ein Knotengebiet und für $x > 0$ greift die Überlegung von Fall 1 wieder Platz. *In $x > 0$ liegt also nur eine im Ursprung mündende Lösung.*

Im Falle 4: ***m gerade ganze Zahl, $a > 0$*** schließt man für $x > 0$ wieder auf Knoten und für $x < 0$ auf eine einzige im Ursprung mündende Lösung.

Die Fälle $a = 0$ erfordern eine eindringendere Behandlung. Auch sie sind erledigt, wie wir sehen werden, wenn allgemein davon die Rede sein wird, wie man allgemeinere analytische Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} dy &= \mathfrak{P}_1(x, y) \\ dx &= \mathfrak{P}_2(x, y) \end{aligned}$$

in der Nähe des Ursprungs behandeln kann. Da wird sich zeigen, daß man alles auf die eben behandelten Typen zurückführen kann.

Es wird nun aber noch von Interesse sein, zu sehen, wie man in allen besprochenen Fällen die unter Umständen nur in einem Exemplar vorhandene, im Ursprung mündende Lösung wirklich berechnen kann. Das geschieht mit Hilfe einer von *Bendixson* herrührenden Methode der sukzessiven Approximationen. Man kann sie auch im Knotenfall zur Berechnung der Lösungen bis in den Ursprung hinein verwenden. Überhaupt erhält man so auch eine neue rechnerische Herleitung unserer Ergebnisse. *Perron* hat in einer schönen Arbeit (*Math. Annalen* 75) mit dieser Methode noch wesentlich allgemeinere Differentialgleichungen von der Form

$$\varphi(x) \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

erledigen können, wo dann für $\varphi(x)$ und $f(x, y)$ nur gewisse Stetigkeitsbedingungen erfüllt zu sein brauchen. Ich möchte mich aber hier damit begnügen, für den erwähnten Fall die Methode zu schildern.

Es genügt, den Fall $m = 1$, $a < 0$ zu betrachten.

Dann nehme man als erste Näherung $y_0 = 0$ und bestimme y_1 aus

$$x \frac{dy_1}{dx} = ay_1 + bx + \mathfrak{F}(x, 0)$$

so, daß entweder $\lim_{x \rightarrow +0} y_1(x) = 0$ oder $\lim_{x \rightarrow -0} y_1(x) = 0$ ist. Ich will den zweiten Fall weiter verfolgen. Man überlegt sich leicht, daß

$$y_1 = (-x)^a \int_x^0 [bx + \mathfrak{F}(x, 0)] (-x)^{a-1} dx$$

der gestellten Forderung genügt. Dann trage man y_1 ein und setze

$$y_2 = (-x)^a \int_x^0 [bx + \mathfrak{F}(x, y_1)] (-x)^{a-1} dx$$

Setzt man dies Verfahren fort, so erhält man eine Folge von Funktionen y_n . Diese konvergieren gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion y , welche der Differentialgleichung genügt und für die $\lim_{x \rightarrow -0} y(x) = 0$

ist. Das Nähere der Beweisführung möge der Leser sich entweder selbst zurechtlegen oder bei *Bendixson* oder *Perron* nachlesen.

§ 6. Die Differentialgleichungen $\frac{dy}{dx} = \frac{Cx + Dy + \delta(x, y)}{Ax + By + \varepsilon(x, y)}$.

Unter ziemlich allgemeinen Voraussetzungen kann man den Satz aussprechen, daß für das Verhalten der Lösungen dieser Differentialgleichung in der Umgebung von $x = y = 0$ das Verhalten der Lösungen von

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Cx + Dy}{Ax + By}$$

in der Umgebung desselben Punktes maßgebend ist. Der Punkt

$x = y = 0$ soll auch für die vorgelegte Differentialgleichung ein singulärer sein; es sei also $\delta(0, 0) = \varepsilon(0, 0) = 0$. Obwohl unsere Überlegungen meist viel allgemeiner gelten, wollen wir uns weiter einer formal einfacheren Darstellung zuliebe auf den Fall beschränken, daß δ und ε als Potenzreihen in x, y gegeben sind, die mit Gliedern frühestens zweiter Dimensionen beginnen. Die Determinante der linearen Glieder $AD - BC$ sei von Null verschieden. Wir schreiben außerdem die Differentialgleichung in Parameterdarstellung:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + By + \mathfrak{F}_1(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Cx + Dy + \mathfrak{F}_2(x, y). \end{cases}$$

Ich beginne mit dem einfachsten Fall. Die beiden Wurzeln λ_1, λ_2 der charakteristischen Gleichung

$$(2) \quad \begin{vmatrix} A - \lambda & B \\ C & D - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

seien reell und mit dem gleichen Vorzeichen versehen¹⁾. Dann läßt sich eine Umgebung um den Ursprung abgrenzen, derart, daß die durch die Punkte dieser Umgebung hindurchgehenden Lösungen alle in den singulären Punkt hineinlaufen.

Wie wir wissen, kann man durch eine Koordinatentransformation die Differentialgleichungen auf die Gestalt

$$(3) \quad \begin{cases} x_1' = \lambda_1 x_1 + \mathfrak{F}_1(x_1, y_1) \\ y_1' = \mu x_1 + \lambda_2 y_1 + \mathfrak{F}_2(x_1, y_1) \end{cases}$$

bringen. Dabei sind λ_1 und λ_2 die beiden Wurzeln der charakteristischen Gleichung und μ ist nur dann von Null verschieden, wenn $\lambda_1 = \lambda_2$ ist. $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ sind wieder zwei Potenzreihen, die keine Glieder nullter oder erster Dimension enthalten. Ich nehme zunächst $\mu = 0$ an. Dann betrachte ich $x_1^2 + y_1^2$ d. i. das Quadrat der Entfernung der Punkte einer Lösungskurve vom Ursprung. Aus (3) folgt

$$(4) \quad x_1 y_1' + y_1 y_1' = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + x_1 \mathfrak{F}_1 + y_1 \mathfrak{F}_2.$$

Grenzt man somit eine genügend kleine Umgebung um den Ursprung ab, so besitzt darin dieser Ausdruck stets dasselbe Vorzeichen wie $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2$. Dies ist aber eine definite quadratische Form, da λ_1 und λ_2 gleiches Vorzeichen besitzen. Sind z. B. λ_1 und λ_2 positiv, so ist nach (4) $\frac{d}{dt}(x_1^2 + y_1^2) > 0$ und daher nähert sich bei abnehmendem Parameterwert die Lösungskurve ständig dem Ursprung. Die Lösungskurven münden sogar alle im Ursprung, d. h. für hinreichend große $|t|$ ist $x^2 + y^2$ beliebig klein. Denn wären z. B. alle Punkte der Lösungskurve um mindestens σ vom Ursprung entfernt, wäre also

¹⁾ Wegen $AD - BC \neq 0$ ist $\lambda = 0$ keine Wurzel von (2).

$x_1^2 + y_1^2 \geq \sigma$, so wäre auf derselben die Ableitung $x_1 x_1' + y_1 y_1'$ wegen (4) gleichfalls ständig oberhalb einer angebbaren Schranke. Und daraus könnte man abschätzen, daß einer Änderung des Parameters t etwa um die Einheit eine Verkleinerung der Entfernung um einen Betrag entsprechen müßte, der selbst oberhalb einer wesentlich positiven Schranke bliebe. Das widerspricht aber der Annahme, daß die Entfernung der Lösungskurve oberhalb σ bleibt für beliebig große Werte von $|t|$.

Es gibt also entweder einen endlichen Wert τ von t , so daß $\lim_{t \rightarrow \tau} x(t) = \lim_{t \rightarrow \tau} y(t) = 0$, oder aber es ist $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0$. Die erstgenannte Möglichkeit steht nach S. 32 im Widerspruch mit der Tatsache, daß es außer der trivialen Lösung $x = 0, y = 0$ keine andere geben kann, die für $t = \tau$ die Werte $x = 0, y = 0$ annimmt.

Auf die gleiche Weise sieht man, daß

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (x_1^2) = \lambda_1 x_1^2 + x_1 \mathfrak{F}_1(x_1, y_1)$$

sowie

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (y_1^2) = \lambda_2 y_1^2 + y_1 \mathfrak{F}_2(x_1, y_1)$$

für hinreichend kleine x_1 und y_1 im Falle $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ positiv sind, daß also für abnehmende $t \rightarrow -\infty$ sowohl $x_1(t)$ wie $y_1(t)$ monoton gegen Null abnehmen.

Ähnlich kann man im Falle schließen, wo $\mu \neq 0$, also die beiden Größen λ_1 und λ_2 gleich sind. Dann betrachte man den Ausdruck

$$x_1^2 + k y_1^2,$$

der ja für positives k definit ist. Für seine Ableitung folgt aus (3)

$$x_1 x_1' + k y_1 y_1' = \lambda_1 x_1^2 + k \mu x_1 y_1 + k \lambda_1 y_1^2 + x_1 \mathfrak{F}_1 + k y_1 \mathfrak{F}_2$$

und das ist nun für genügend kleines positives k in einer genügend kleinen Umgebung des Ursprungs wieder definit. Daher schließt man genau wie eben, daß alle Lösungen in den Ursprung einmünden.

In diesem Falle sieht man weiter analog wie vorhin ein, daß

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (x_1^2) = \lambda_1 x_1^2 + x_1 \mathfrak{F}_1(x_1, y_1)$$

für hinreichende kleine x_1, y_1 im Falle $\lambda_1 > 0$ positiv ist, daß also jetzt wenigstens $x_1(t)$ für gegen $-\infty$ abnehmende t monoton gegen Null abnimmt.

Geometrisch gesprochen, besagen die eben angestellten Überlegungen, daß für Wurzeln λ_1 und λ_2 mit gleichem Vorzeichen alle Lösungen im Ursprung münden, und daß sie dabei nicht spiralig verlaufen können. D. h. sie können nicht alle Geraden des Ursprungs in dessen Umgebung beliebig oft treffen. Denn sonst könnte $x_1(t)$ nicht monoton gegen Null abnehmen. Daraus werden wir bald zu schließen lernen, daß die Lösungen in bestimmten Richtungen im Ursprung münden.

Offenbar versagen unsere Überlegungen für den Fall, wo die Wurzeln der charakteristischen Gleichung zwar reell sind, aber verschiedenes Vorzeichen besitzen. Wohl aber bleiben sie anwendbar in dem Falle, wo die Wurzeln der charakteristischen Gleichung konjugiert imaginär sind. Setzt man dann

$$\lambda_1 = \mu_1 + i\mu_2, \quad \lambda_2 = \mu_1 - i\mu_2,$$

so kann man x_1 durch $x_1 - iy_1$ und y_1 durch $x_1 + iy_1$ ersetzen und so die Differentialgleichung auf die Form

$$(5) \quad \begin{cases} x_1' = \mu_1 x_1 + \mu_2 y_1 + \mathfrak{P}_1(x_1, y_1) \\ y_1' = -\mu_2 x_1 + \mu_1 y_1 + \mathfrak{P}_2(x_1, y_1) \end{cases}$$

bringen, wo wieder die Potenzreihen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ erst mit den Gliedern zweiter Dimension beginnen. Wir betrachten wieder $x_1^2 + y_1^2$, dessen Ableitung

$$x_1 x_1' + y_1 y_1' = \mu_1(x_1^2 + y_1^2) + x_1 \mathfrak{P}_1 + y_1 \mathfrak{P}_2$$

ist. Betrachten wir den Fall $\mu_1 \neq 0$ näher. In einer genügend kleinen Umgebung des Ursprungs ist wieder $x_1 x_1' + y_1 y_1'$ definit, und daraus folgt wieder, daß alle Lösungen dieser Umgebung in den Ursprung einmünden. Ist aber $\mu_1 = 0$, so gilt ein solcher Schluß nicht, und die Erinnerung an den früher betrachteten Strudelpunkt lehrt auch, daß jetzt nicht mehr immer die Lösungen in den Ursprung münden müssen. Zur Klärung dieser Dinge sind tiefergreifende Erörterungen nötig, die wir noch zurückstellen wollen. *Zur Entscheidung darüber, ob jetzt Strudel oder Wirbel vorliegt, reichen nicht mehr die Glieder erster Ordnung hin.*

Unsere Betrachtung läßt bei den bisher behandelten Fällen noch nicht den spezifischen Unterschied zwischen Knoten und Strudel oder Wirbel erkennen, den wir in dem vorvorigen Paragraphen bei den homogenen Gleichungen herausgearbeitet hatten. Bevor wir uns also dem noch ausstehenden Fall reeller λ_1 und λ_2 mit verschiedenem Vorzeichen zuwenden, wollen wir diese Frage noch erörtern. Es wird sich wieder zeigen, daß bei reellen Wurzeln gleichen Vorzeichens stets der Knotenfall vorliegt. Bei komplexen Wurzeln aber liegt Strudel oder Wirbel vor.

Diese Untersuchung beruht auf einem von *Bendixson* herrührenden Satz, den ich zunächst angeben will. Der Satz bezieht sich sogar auf etwas allgemeinere Differentialgleichungen. Ich will ihn in dieser allgemeinen Fassung aussprechen, dann aber nur für unseren Fall beweisen. An der Beweismethode wird dabei nichts Wesentliches verloren gehen. Der Satz bezieht sich auf Differentialgleichungen von der Form

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = X_m + \mathfrak{P}_1(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Y_m + \mathfrak{P}_2(x, y). \end{cases}$$

Dabei sind X_m und Y_m ganze rationale homogene Funktionen m -ter Ordnung, während die Potenzreihen \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 Glieder m -ter oder niedrigerer Ordnung nicht enthalten. Der Satz lautet dann: **Eine Lösung der Differentialgleichung, welche im Ursprung mündet, ist entweder eine Spirale oder sie mündet mit einer bestimmten Tangente ein. Diese genügt der Gleichung $xY_m - yX_m = 0$.**

Ich beschränke mich, wie schon gesagt, beim Beweis auf den Fall $m = 1$. Hier ist also $X_1 = Ax + By$, $Y_1 = Cx + Dy$. Man führt Polarkoordinaten ein: $x = \rho \cos \vartheta$, $y = \rho \sin \vartheta$. Die Differentialgleichungen werden dann

$$(7) \quad \begin{cases} \rho' = \rho \{ \cos \vartheta \cdot X_1(\cos \vartheta, \sin \vartheta) + \sin \vartheta Y_1(\cos \vartheta, \sin \vartheta) \} + \rho^2 f_1(\rho, \vartheta) \\ \vartheta' = \cos \vartheta \cdot Y_1(\cos \vartheta, \sin \vartheta) - \sin \vartheta X_1(\cos \vartheta, \sin \vartheta) + \rho f_2(\rho, \vartheta) \end{cases}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \rho^2 f_1(\rho, \vartheta) &= \cos \vartheta \mathfrak{P}_1(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta) + \sin \vartheta \mathfrak{P}_2(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta) \\ \rho^2 f_2(\rho, \vartheta) &= -\sin \vartheta \mathfrak{P}_1(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta) + \cos \vartheta \mathfrak{P}_2(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta). \end{aligned}$$

Es gibt dann eine Zahl R , so daß die beiden Funktionen f_1 und f_2 sich für $\rho \leq R$, $-\infty < \vartheta < +\infty$ nach Potenzen von ρ entwickeln lassen. Man wähle außerdem R so klein daß man auf Grund der vorher gewonnenen Ergebnisse sicher ist, daß jede in einem Punkte dieses Kreises beginnende Lösung entweder für wachsende oder für abnehmende Parameterwerte gegen den Ursprung konvergiert. Dann kann man eine Zahl T so bestimmen, daß für $t > T$ die nun näher zu betrachtende in den Ursprung mündende Lösung ganz im Kreise $\rho \leq R$ bleibt. Während man sich auf der Lösung dem Ursprung nähert, muß $t \rightarrow \infty$ streben. Jedenfalls darf man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß man für wachsende t auf der Lösung dem singulären Punkt zustrebt. Bloße Vorzeichenänderung von t bringt dies ja nötigenfalls mit sich. Wäre nun aber für ein endliches $t = \tau$

$$\lim_{t \rightarrow \tau} x(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \tau} y(t) = 0,$$

erhielten wir nach S. 32 einen Widerspruch mit der Tatsache, daß es doch eine andere Lösung gibt, welche für $t = \tau$ die Werte $x = 0$ und $y = 0$ annimmt; das ist nämlich die triviale Lösung $x = 0$, $y = 0$, für die also x und y für alle t den Wert Null haben.

Wir dürfen also annehmen, daß für $t > T$ die zu betrachtende Lösung ganz im Kreise $\rho \leq R$ liegt und daß sie für $t \rightarrow \infty$ gegen den Ursprung konvergiert. Wir hatten schon Polarkoordinaten ρ, ϑ eingeführt. Deuten wir diese wieder als rechtwinklige Koordinaten einer neuen Ebene, so verläuft die zu betrachtende Lösung für $t > T$ ganz im Streifen $0 \leq \rho \leq R$ und strebt für $t \rightarrow \infty$ gegen die Gerade $\rho = 0$. Wir fragen nach den Grenzpunkten, die die Punkte der Kurve dabei auf $\rho = 0$ bestimmen und beweisen, daß es deren nicht mehr als einen geben kann. Dieser Nachweis ergibt sich besonders leicht in dem Fall,

wo $xY_1 - yX_1$ nicht identisch verschwindet. Dann gibt es nämlich (bis auf Vielfache von 2π) nur endlich viele Werte ϑ für die

$$(8) \quad \cos \vartheta \cdot Y_1(\cos \vartheta, \sin \vartheta) - \sin \vartheta \cdot X_1(\cos \vartheta, \sin \vartheta) = 0$$

ist. Wenn dann unsere Lösung auf $\varrho = 0$ zwei verschiedene Grenzpunkte hat, $\vartheta = \alpha$, und $\vartheta = \beta$ so wählen wir einen Wert $\vartheta = \gamma$ zwischen beiden, für den $\cos \gamma \cdot Y_1(\cos \gamma, \sin \gamma) - \sin \gamma \cdot X_1(\cos \gamma, \sin \gamma) \neq 0$ ist und wählen R so klein, daß für $\vartheta = \gamma$, $\varrho \leq R$ gemäß (7) auch $\vartheta' \neq 0$ ist. Dann kann die den Streifen $0 \leq \varrho \leq R$ durchsetzende Gerade $\vartheta = \gamma$ von unserer Lösung nur einmal überschritten werden, denn wegen des festen Vorzeichens von ϑ' müßten alle Überschreitungen in der gleichen Richtung geschehen, also entweder in Richtung wachsender oder in Richtung abnehmender ϑ . Daher muß unsere Lösung entweder ständig oberhalb oder ständig unterhalb der Geraden $\vartheta = \gamma$ bleiben. Daraus folgt, daß sie nur einem Grenzpunkt auf $\varrho = 0$ zustreben kann. Liegt dieser im Unendlichen, so bedeutet das offenbar, daß die entsprechende Lösung in der x - y -Ebene eine Spirale ist, da sie jede Gerade durch den Ursprung dann unendlich oft durchsetzt. (Die Geraden $\vartheta = \vartheta_0$, $\vartheta = \vartheta_0 + 2\pi \dots$ der ϱ - ϑ -Ebene geben ja alle dieselbe Gerade der x - y -Ebene.) Ist der Grenzpunkt aber ein endlicher Punkt $\vartheta = \alpha$, so bedeutet dies, daß unsere Lösung in der x - y -Ebene in bestimmter Richtung α in den Ursprung einmündet. Diese Richtung ist durch die ϑ -Koordinate des Punktes auf $\varrho = 0$ bestimmt, dem die Lösung in der ϱ - ϑ -Ebene zustrebt. Dieser ϑ -Wert aber genügt der Gleichung (8). Denn auch $\varrho = 0$ ist Lösung der Differentialgleichungen (7). Der Grenzpunkt $\vartheta = \alpha$ muß also ein singulärer Punkt für diese Differentialgleichungen sein und daher muß dort (8) erfüllt sein. Das bedeutet aber doch, daß längs der Tangente

$$xY_1 - yX_1 = 0$$

ist.

Da X_1 und Y_1 lineare Funktionen von x und y sind, so ist dies eine quadratische Gleichung. So erkennt man, daß in dem Falle, wo $xY_1 - yX_1$ nicht identisch verschwindet, nicht mehr als zwei Richtungen in Betracht kommen, in welchen Lösungen in den Ursprung einmünden können. Ob aber in jeder dieser beiden Richtungen oder auch nur in einer von ihnen Lösungen einmünden, ist eine erst nachher zu entscheidende Frage. Darüber enthält auch der augenblicklich zu beweisende Satz von Bendixson keine Aussage. Diesen haben wir durch die vorstehenden Betrachtungen für den Fall bewiesen, daß $xY_1 - yX_1$ nicht identisch verschwindet.

Er bleibt nur noch zu beweisen für den Fall, daß $xY_1 - yX_1$ identisch verschwindet. Dann ist offenbar

$$xY_1 = yX_1 = a_0xy,$$

wo a_0 konstant und $\neq 0$ ist. (X_1 und Y_1 verschwinden nach S. 75 nicht identisch.)

Also ist $X_1 = a_0 x$ und $Y_1 = a_0 y$. In Polarkoordinaten werden dann die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \rho' &= \rho a_0 + \rho^2 f_1(\rho, \vartheta) \\ \vartheta' &= \rho^{r+1} \cdot S_{2+r}(\cos \vartheta, \sin \vartheta) + \rho^{r+2} f_2(\rho, \vartheta). \end{aligned}$$

Dabei ist r eine passende positive oder verschwindende ganze Zahl und S_{2+r} ein Polynom, von der durch den Index angegebenen Ordnung. Durch die Gleichung $\frac{dt_1}{dt} = \rho$ führen wir nun längs der zu untersuchenden Lösung einen neuen Parameter t_1 ein. Dann werden die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \rho' &= a_0 + \rho f_1 \\ \vartheta' &= \rho^r S_{2+r} + \rho^{r+1} f_2. \end{aligned}$$

Nun sei $\vartheta = \alpha$ irgendein Punkt auf $\rho = 0$. Es ist ein regulärer Punkt für das Gleichungssystem (9), das wegen $a_0 \neq 0$ auf $\rho = 0$ keine singulären Punkte besitzt. Daher geht durch diesen Punkt genau eine Lösung von (9). Diese ist aber, anders wie im vorigen Falle, *nicht* $\rho = 0$. Denn diese Kurve ist gar nicht Lösung von (9), wegen $a_0 \neq 0$. Ihr entspricht in der x - y -Ebene eine Lösung von (6), die in der Richtung α in den Ursprung einmündet. Umgekehrt entspricht auch jeder Lösung der Gleichungen (6), welche in der Richtung α in den Ursprung einmündet, eine Lösung von (9), welche durch $\rho = 0$, $\vartheta = \alpha$ hindurchgeht¹⁾. Da dies aber ein regulärer Punkt ist, so gibt es auch nur eine Lösung von (6), welche unter der Richtung α in den Ursprung einmündet. Ich betrachte weiter die durch $\rho = 0$, $\vartheta = \alpha + 2\pi$ gehende Lösung von (9). Ihr entspricht dieselbe Lösung von (6). Beide Kurven der ρ - ϑ -Ebene schneiden für hinreichend kleines R aus dem Streifen $0 \leq \rho \leq R$ ein Gebiet G aus, das als umkehrbar eindeutiges Bild von $\rho \leq R$ der x - y -Ebene anzusprechen ist. In diesem Gebiet müssen nun die Bilder aller anderen Lösungen von (6) liegen, welche durch Punkte $\rho \leq R$ hindurchgehen. Da nun bisher ja α ganz beliebig war, so haben wir in jeder Richtung durch den Ursprung genau eine Lösung. Dieser entspricht eine durch $\rho = 0$, $\vartheta = \alpha$ hindurchgehende. Alle so erhaltenen Lösungen von (9) bedecken nun aber offenbar das Gebiet G vollständig; d. h. durch jeden Punkt dieses Gebietes geht genau eine der gefundenen Lösungen hindurch. Das folgt sofort daraus, daß diese Lösungen stetig vom Anfangspunkt $\rho = 0$, $\vartheta = \alpha$ abhängen. Daher sind damit alle Lösungen von (6) im Gebiete $\rho \leq R$ erschöpft.

Den auf S. 78 angegebenen Satz von *Bendixson* haben wir nun bewiesen. *Wir haben erkannt, daß in dem Falle, wo $xY_1 - yX_1 = 0$ ist, jede Lösung in einer bestimmten Richtung im Ursprung mündet,*

¹⁾ Es sei wieder darin erinnert, daß die Darlegungen sich stets auf den Fall $m = 1$ von (6) beziehen.

und daß zu jeder Richtung auch genau eine Lösung gehört. Wenn aber $xY_1 - yX_1$ nicht identisch verschwindet, so mündet entweder jede Lösung, in einer der beiden $xY_1 - yX_1 = 0$ genügenden Richtungen in den Ursprung, oder aber alle Lösungen nähern sich spiralig dem Ursprung, d. h. so, daß jede Lösung jeden Strahl des Ursprungs in dessen Umgebung unendlich oft schneidet, oder es gibt überhaupt keine im Ursprung mündende Lösung.

Wenden wir nun diesen Satz von *Bendixson* an. Er lehrt, daß in dem Falle, wo die charakteristische Gleichung (2) komplexe Wurzeln hat, nur spiralige Lösungen in den Ursprung münden können. Denn die Gleichung für die Tangenten wird dann, unter Zugrundelegung der Normalform (5) unserer Differentialgleichungen:

$$\mu_2(x_1^2 - y_1^2) = 0,$$

und dies hat ja wegen $\mu_2 \neq 0$ keine reellen Nullgeraden. Im Falle komplexer, aber nicht rein imaginärer Wurzeln der charakteristischen Gleichung münden somit alle einer gewissen Umgebung des Ursprungs angehörige Lösungen spiralig in demselben. Der Fall rein imaginärer Wurzeln bleibt wie auf S. 77 noch unentschieden. Aus dem Satz von *Bendixson* ergibt sich auch, daß im Falle reeller Wurzeln gleichen Vorzeichens der charakteristischen Gleichungen die Lösungen alle unter bestimmten Tangentenrichtungen in den Ursprung münden. Diese Aussage ist in dem Falle, wo $xY_1 - yX_1$ identisch verschwindet, nach dem vorhin Gesagten direkt im Satze von *Bendixson* enthalten. Das ist also der Fall, wo in (3) $\lambda_1 = \lambda_2$ und $\mu = 0$ ist. Allgemein haben wir aber auf S. 76 für charakteristische Wurzeln von gleichem Vorzeichen bereits festgestellt, daß spiralige Lösungen nicht vorkommen. Also münden für reelle λ von gleichem Vorzeichen alle Lösungen in bestimmten Richtungen im Ursprung.

Wir werden bald noch näher untersuchen, inwieweit die nach dem Satz von *Bendixson* möglichen Richtungen wirklich vorkommen.

Wir wenden uns jetzt dem Falle zu, daß die charakteristische Gleichung reelle Wurzeln von verschiedenen Vorzeichen besitzt. Diese seien dann $\lambda_1 = \lambda > 0$ und $\lambda_2 = -\lambda' < 0$. Dann kann man die Differentialgleichungen (I) auf die Form

$$(10) \quad \begin{aligned} x' &= \lambda x + \mathfrak{P}_1(x, y) \\ y' &= -\lambda' y + \mathfrak{P}_2(x, y) \end{aligned}$$

bringen. Da es uns vor allem auf die den Ursprung passierenden Lösungen ankommt, so machen wir die Substitution $y = x y_1$. Dann finden wir die Differentialgleichungen

$$(11) \quad \begin{aligned} x' &= \lambda x + x^2 \mathfrak{Q}_1(x, y_1) \\ y_1' &= -(\lambda + \lambda') y_1 + x \mathfrak{Q}_2(x, y_1) \end{aligned}$$

Dabei sind \mathfrak{Q}_1 und \mathfrak{Q}_2 neue Potenzreihen, die nach Potenzen von x und y_1 fortschreiten. Wir müssen diejenigen Lösungen dieser Gleichung

aufsuchen, die für $x \rightarrow 0$ endlich bleiben, oder doch so schwach unendlich werden, daß $x y_1 \rightarrow 0$ strebt. Wir wollen zunächst diejenigen Lösungen von (11) suchen, die durch $x = 0$, $y_1 = 0$ hindurchgehen. Dazu gehört namentlich $x = 0$ selbst. Dieser Lösung entspricht aber bei den Gleichungen (10) nur die triviale Lösung $x = 0$, $y = 0$. Auf jede Lösung kann man in der Umgebung von $x = 0$, $y_1 = 0$ durch

$$\frac{d\tau}{dt} = \lambda + x \mathfrak{D}_1(x_1, y_1)$$

den neuen Parameter τ einführen. Für genügend kleine x , y_1 wächst er wegen $\lambda > 0$ mit t zugleich. Nach Einführung dieses Parameters gehen die Differentialgleichungen (11) in

$$(12) \quad \begin{aligned} x' &= x \\ y_1' &= -\frac{(\lambda + \lambda') y_1 + x \mathfrak{D}_2(x_1, y_1)}{\lambda + x \mathfrak{D}_1(x_1, y_1)} = -\frac{(\lambda + \lambda')}{\lambda} y_1 + x \mathfrak{D}_3(x, y_1) \end{aligned}$$

überführen, wo \mathfrak{D}_3 eine neue Potenzreihe ist, die nach Potenzen von x , y_1 fortschreitet. Auf (12) wenden wir die Ergebnisse von S. 71 an. Darnach gibt es noch genau zwei weitere Lösungen von (11) durch den Ursprung. Diesen entsprechen dann Lösungen von (10), welche durch den Ursprung gehen und dort $y = 0$ berühren. Es gibt deren also genau zwei, von denen übrigens die eine die positive, die andere die negative x -Achse berührt. Genau ebenso können wir dann mittels der Substitution $x = y x_1$ zwei Lösungen von (10) ausfindig machen, welche durch den Ursprung gehen und dort $x = 0$ berühren. Damit sind dann alle Lösungen bestimmt, welche im Ursprung eine der beiden Koordinatenachsen berühren. Der Satz von *Bendixson* lehrt aber dann weiter, daß alle dem Ursprung zustrebenden Lösungen von (10) dort unter bestimmten Tangenten ankommen. Denn spiralförmige Lösungen müßten die beiden schon gefundenen Lösungen in regulären Punkten treffen. Weiter lehrt der Satz von *Bendixson*, daß als solche Tangentenrichtungen nur die beiden Koordinatenachsen in Betracht kommen. *Daher haben wir dann alle Lösungen durch den Ursprung gefunden. Es sind genau vier. Je zwei berühren eine der beiden Koordinatenachsen von verschiedenen Seiten herkommend.*

Ich stelle nun zunächst zusammen, was wir bis jetzt für die in der Überschrift dieses Paragraphen genannten Differentialgleichungen erreicht haben. Im Falle reeller Wurzeln der charakteristischen Gleichung gehen bei gleichem Vorzeichen sämtliche einer gewissen Umgebung des Ursprungs angehörige Lösungen in diesen hinein. Das gleiche ist im Falle komplexer Wurzeln der Fall, es sei denn, daß die Wurzeln rein imaginär sind. Dieser Fall ist noch unentschieden. Im Falle reeller Wurzeln von verschiedenem Vorzeichen gehen genau vier Lösungen in den Ursprung hinein. Im Falle komplexer Wurzeln wurde weiter erkannt, daß die im Ursprung mündenden Lösungen Spiralen sind. Im Falle reeller Wurzeln gleichen Vorzeichens münden

alle Lösungen in bestimmten Tangentenrichtungen. In dem Falle wo $xY_1 - yX_1 = 0$ ist, d. h. wo $A = D = 0$, $B = C$, d. h. $\lambda_1 = \lambda_2$, $\mu = 0$ ist, mündet nach dem Satz von *Bendixson* in jeder Richtung genau eine Lösung. Wie sich die Richtungen der Lösungen auf die Nullstellen von $xY_1 - yX_1 = 0$ verteilen, bleibt in den anderen Fällen noch zu untersuchen. Im Falle $\lambda_1 = \lambda_2$, $\mu \neq 0$ ist die Antwort ohne weiteres klar. Denn hier wird $xY_1 - yX_1 = \mu x_1^2$, so daß alle Lösungen im Ursprung $x_1 = 0$ berühren. So bleibt nur noch der Fall, wo die beiden Wurzeln der charakteristischen Gleichung verschieden sind. Die beiden in Betracht kommenden Tangentenrichtungen sind dann aus

$$(13) \quad xY_1 - yX_1 = x(Cx + Dy) - y(Ax + By) = 0$$

zu bestimmen. Sie sind, wie man leicht sieht, verschieden, sind es doch die Richtungen der geradlinigen durch den Ursprung gehenden Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichungen. Wir dürfen das Koordinatensystem so legen, daß die Koordinatenachse $x = 0$ in keine dieser Richtungen fällt. Somit ist $B \neq 0$. Wir machen in den Gleichungen (I) die Substitution: $y = x\eta$. Sie führt uns auf

$$(14) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + Bx\eta + x^2\mathfrak{P}_1^*(x, \eta) \\ \frac{d\eta}{dt} &= C + D\eta - \eta(A + B\eta) + x\mathfrak{P}_2^*(x, \eta) \end{aligned}$$

Ihre auf der Lösung $x = 0$ gelegenen singulären Punkte werden durch

$$(15) \quad C + D\eta - (A + B\eta)\eta = -B(\eta - \eta_1)(\eta - \eta_2) = 0$$

gegeben. Es sind also zwei voneinander verschiedene, deren η -Koordinaten η_1 und η_2 nach (13) mit den Richtungen der eventuellen Tangenten übereinstimmen. In der Umgebung dieser beiden singulären Stellen gehört diese Differentialgleichung dem in der Paragraphenüberschrift genannten Typus an¹⁾. Wie man aus der Existenz der reellen Lösung $x = 0$ sieht, sind die Wurzeln der zugehörigen charakteristischen Gleichungen beide Male reell.

Daher lehren die Betrachtungen dieses Paragraphen, daß durch jeden der beiden singulären Punkte außer $x = 0$ noch weitere Lösungen hindurchgehen. Daraus folgt, durch Eintragen dieser für $x \rightarrow 0$ gegen bestimmte Grenzwerte konvergierenden Funktionen in $y = \eta x$, daß durch den Ursprung gewisse Lösungen von (I) mit bestimmter Tangentenrichtung hindurchgehen. Daher gehen nach S. 81 alle im

¹⁾ Betrachtet man z. B. die Wurzel η_1 von (15) und setzt $\eta - \eta_1 = H$, so werden die linearen Glieder von (14), wenn man rechts nach Potenzen von x und H entwickelt: $(A + B\eta_1)x$ und $-B(\eta_1 - \eta_2)H + x\mathfrak{P}_2^*(0, \eta_1)$. Hier kann aber die Determinante der Koeffizienten der linearen Glieder nicht verschwinden. Denn dann müßte entweder $A + B\eta_1 = 0$ oder $-B(\eta_1 - \eta_2) = 0$ sein. Im ersten Falle wäre, da η_1 eine Wurzel von (15) ist, auch $C + D\eta_1 = 0$ und daher müßte $AD - BC = 0$ sein, gegen unsere Annahme. Im anderen Falle wäre η_1 eine Doppelwurzel von (15) entgegen einer bereits gemachten Feststellung.

Ursprung mündenden Lösungen in bestimmten Richtungen in diesen Punkt hinein. Gleichzeitig wird erkannt, daß in jeder der beiden möglichen Richtungen Lösungen im Ursprung münden.

Nunmehr ist es leicht, zu zeigen, daß tatsächlich ein *Knotenpunkt vorliegt, daß also tatsächlich alle Lösungen bis auf zwei mit der einen der beiden Tangenten einmünden*. Zu dem Zweck müssen wir zeigen, daß der eine der beiden singulären Punkte von (14) auf $x = 0$ ein Knoten, der andere ein Sattel ist, daß also in den einen alle, in den anderen nur vier Lösungen einmünden. Zwei von diesen vier werden durch $x = 0$ selbst absorbiert, den beiden anderen entsprechen dann zwei mit der einen der beiden möglichen Tangenten einmündende Lösungen von (14), während alle übrigen dem Verhalten des anderen singulären Punktes von (14) entsprechend in der anderen Richtung einmünden. Um nun diese Verhältnisse der beiden singulären Punkte von (14) einzusehen, muß man sich ihre charakteristischen Gleichungen ansehen. Falls η_1 und η_2 die beiden singulären Punkte auf $x = 0$ sind, so werden, wie man leicht nachprüft,

$$(A + B\eta_1 - \mu)(B(\eta_1 - \eta_2) + \mu) = 0$$

und

$$(A + B\eta_2 - \mu)(B(\eta_2 - \eta_1) + \mu) = 0$$

ihre charakteristischen Gleichungen. Um zu sehen, daß im einen Fall die beiden Wurzeln verschiedenes, im anderen aber beide gleiches Vorzeichen haben, ist nur festzustellen, daß das Produkt aller vier negativ ist. Dies Produkt ist aber

$$-(A + B\eta_1)(A + B\eta_2)B^2(\eta_1 - \eta_2)^2.$$

Und das ist wegen (15) gleich

$$-(AD - BC)B^2 \cdot (\eta_1 - \eta_2)^2.$$

Die Determinante $AD - BC$ ist aber positiv, denn nach (2) ist sie das Produkt der beiden $\lambda_1 \lambda_2$, die gleiches Vorzeichen haben. Nach S. 83 ist $B \neq 0$.

Durch eine kleine Rechnung kann man auch noch feststellen, daß die Richtung, welche von fast allen Lösungen im Ursprung eingehalten wird, die gleiche ist, wie bei der zugehörigen homogenen Gleichung. Der Leser möge das selbst nachrechnen.

Damit ist nun die Diskussion der Differentialgleichungen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Cx + Dy + \mathfrak{P}_2(x, y)}{Ax + By + \mathfrak{P}_1(x, y)}$$

in dem in Aussicht genommenen Falle, daß $AD - BC \neq 0$ ist, zu Ende geführt. Man kann das Ergebnis dahin aussprechen, daß für das qualitative Verhalten der Lösungen in der Nähe des Ursprungs in der Regel allein die linearen Glieder maßgebend sind. Diese bestimmen sogar die Richtungen, in welchen die Lösungen im Ursprung münden.

Freilich konnten wir bisher im Falle rein imaginärer Wurzeln der charakteristischen Gleichungen nicht den Wirbelfall vom Strudelfall trennen. Hier sind eben tatsächlich die linearen Glieder nicht mehr allein maßgebend. Das erkennt man sofort an zwei Beispielen, in welchen die linearen Glieder die gleichen sind. So wird

$$x' = y + 2y^3, \quad y' = -x - 2x^3$$

durch die geschlossenen Kurven

$$x^2 + y^2 + x^4 + y^4 = \text{konst.}$$

gelöst. Hier liegt also ein Wirbel vor. Dagegen liegt bei

$$\begin{aligned} x' &= y + x(x^2 + y^2) \\ y' &= -x + y(x^2 + y^2), \end{aligned}$$

ein Strudel vor. Denn in Polarkoordinaten wird diese Gleichung

$$\varrho' = \varrho^3.$$

Ihre Lösungen sind die Spiralen $\varrho^2 = -\frac{1}{2(\theta + c)}$.

Da wir jetzt an eine Stelle gekommen sind, wo im Falle von Differentialgleichungen, deren Koeffizienten im Ursprung sich nicht analytisch verhalten, die Dinge anders liegen können, so will ich auch dafür noch ein Beispiel geben. Ich betrachte

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y + (x^2 + y^2) x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \\ \frac{dy}{dt} &= x + (x^2 + y^2) y \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Führt man Polarkoordinaten ein, so kommt

$$\varrho' = \varrho^3 \sin \frac{1}{\varrho^2}$$

und daraus erkennt man, den unendlich vielen gegen Null sich häufenden Nullstellen der rechten Seite entsprechend, daß der Differentialgleichung durch unendlich viele Kreise mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt genügt wird. In einem von zwei aufeinanderfolgenden derartigen Kreisen begrenzten Ring liegen aber keine weiteren geschlossenen Integrale. Denn in einem solchen Ring ist ϱ' von einerlei Vorzeichen. Die hier verlaufenden Integralkurven wickeln sich also spiralig um die Begrenzungskreise herum.

Kehren wir zurück zum analytischen Fall. Wir legen uns die Frage vor, wie man nun bei einer vorgelegten Differentialgleichung entscheiden kann, ob sie zum Strudelfall oder zum Wirbelfall gehört. Man kennt dafür zwei verschiedene Methoden, eine von *Poincaré* und eine von *Bendixson*. Die *Poincarésche* beruht auf folgenden Gedanken. Wenn eine Schar geschlossener Integralkurven den Ursprung umschließen soll, so wird man die Gleichung derselben in der Form $F = \text{konst.}$ annehmen dürfen. Es liegt nahe, es hierbei einmal mit einer Funktion F

zu versuchen, die sich nach Potenzen von x und y entwickeln läßt. Für F ergibt sich dann aus den Differentialgleichungen die Bedingung

$$0 = \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Um F dieser Bedingung gemäß bestimmen zu können, denken wir uns die Entwicklung von F nach homogenen Polynomen der x , y geordnet:

$$F = F_1 + F_2 + \dots$$

Dabei ist also F ein homogenes Polynom k -ter Ordnung. Die Differentialgleichung dürfen wir nach S. 75 in der Form

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y + X_2 + \dots \\ \frac{dy}{dt} &= x + Y_2 + \dots \end{aligned}$$

annehmen. Daraus erkennt man sofort, daß $F_1 = 0$ sein muß. Ebenso leicht findet man $F_2 = x^2 + y^2$. Denn auf einen konstanten Faktor kommt es bei der Bestimmung von F nicht an. Und ferner hat man die Bedingung, daß bei Ordnung von $\frac{dF}{dt}$ nach homogenen Polynomen alle diese einzelnen Polynome verschwinden müssen. Für das Polynom F_k findet man hiernach die Bedingung

$$(16) \quad y \frac{\partial F_k}{\partial x} - x \frac{\partial F_k}{\partial y} = G_k.$$

Dabei ist G_k ein Polynom k -ten Grades, das sich aus der Differentialgleichung und denjenigen F_i zusammensetzt, deren Ordnung niedriger als k ist. Zur weiteren Rechnung führt man am bequemsten Polarkoordinaten ein: $x = \varrho \cos \vartheta$, $y = \varrho \sin \vartheta$. Dann erkennt man leicht, daß für ein homogenes Polynom k -ten Grades

$$G_k = \varrho^k \sum (p_n \cos n\vartheta + q_n \sin n\vartheta)$$

gilt. In der Fourierreihe kommen dabei nur solche Glieder vor, deren Nummer n dieselbe Parität hat wie k , und k nicht übertrifft. Man sieht auch leicht ein, daß umgekehrt diese Bedingung dafür hinreichend ist, daß das ϱ^k -fache der Fourierreihe ein homogenes Polynom k -ten Grades ist. Setzt man dann $F_k = \varrho^k \varphi(\vartheta)$ und $G_k = \varrho^k \psi(\vartheta)$, so wird aus der Gleichung (16) die folgende:

$$-\frac{d\varphi}{d\vartheta} = \psi(\vartheta).$$

Man kann ihr also dann und nur dann genügen, wenn das Absolutglied in der Fourierreihe für $\psi(\vartheta)$, d. i. also $p_0 = 0$ ist. Das ist für ungerades k offenbar von selbst erfüllt, da ja $\varrho^k \psi(\vartheta)$ ein homogenes Polynom sein soll. Für ungerades k ist dann $\varphi(\vartheta)$ eindeutig bestimmt, da doch auch in $\varphi(\vartheta)$ das Absolutglied Null sein muß. Bei geradem k indessen bedeutet Verschwinden von p_0 eine besondere Bedingung,

und jetzt ist auch $\varphi(\vartheta)$ nur bis auf eine additive Konstante bestimmt. Ich behaupte nun, daß das Verschwinden der p_0 eine notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Wirbels ist. Nehme ich nämlich an, diese Bedingung des Verschwindens der p_0 sei bis zur Nummer $k = 2n$ erfüllt, für $k = 2n$ selbst aber sei sie nicht mehr erfüllt, dann kann man eine Funktion $q(\vartheta)$ aus

$$-\frac{d\varphi}{d\vartheta} = \psi(\vartheta) - p_0$$

bestimmen. Das ist gleichbedeutend mit der Bestimmung eines zugehörigen homogenen Polynoms aus der Gleichung

$$y \frac{dF_{2n}}{dx} - x \frac{dF_{2n}}{dy} = G_{2n} - p_0 (x^2 + y^2)^n.$$

Nun setze ich

$$F = x^2 + y^2 + F_0 + \dots + F_{2n-1} + F_{2n}.$$

Dabei mögen die $F_0, \dots, F_{2n-1}, \dots$, aus den Gleichungen (16) bestimmt sein. Dann fallen in dem Ausdruck

$$\frac{dF}{dt}$$

alle Glieder von kleinerer als $2n$ -ter Ordnung weg, während das Glied $2n$ -ter Ordnung

$$- p_0 (x^2 + y^2)^n$$

wird. Daraus folgt, daß in genügender Nähe des Ursprungs $\frac{dF}{dt}$ von einerlei Vorzeichen ist. Ich will annehmen, es sei das negative. Dann folgt hieraus, daß auf einer dieser Umgebung des Ursprungs angehörigen Integralkurve $x = x(t)$, $y = y(t)$ bei wachsendem Parameter t die Funktion F monoton abnimmt. Mit wachsendem t nähert sich also die Integralkurve immer mehr dem Ursprung. Sie mündet also entweder in denselben für $t \rightarrow \infty$ oder aber sie hat eine Kurve $F = c$ als Grenzykel. Nun aber können in unserem Falle einer analytischen Differentialgleichung und einer analytischen Funktion F nur endlich viele Kurven $F = c$ Integralkurven sein. Denn aus $F = c$ findet man als Gleichung der Integralkurve $y = f(x, c)$, und dies hängt algebraisch vom Parameter c ab. Wenn diese Funktion nun für unendlich viele sich gegen Null häufende Werte von c der Differentialgleichung genügte, so müßte dies nach allgemeinen Sätzen über analytische Funktionen für alle c so sein, während wir doch von einer Integralkurve ausgingen, auf der F sich monoton ändert, statt konstant zu sein. Somit gibt es in unserem Falle, wo ein $p_0 \neq 0$ ist, in einer gewissen Umgebung vom Ursprung keine geschlossenen Integralkurven. Daher müssen alle einer solchen Umgebung angehörigen Integralkurven im Ursprung münden. Daher ist für den Wirbelfall das Verschwinden aller p_0 eine notwendige Bedingung. Daß sie auch hinreicht, zeigt

Poincaré durch den Nachweis, daß die für F so zu findende unendliche Reihe konvergiert. Doch will ich darauf nicht mehr eingehen.

Lieber will ich noch die Methode von *Bendixson* schildern. Dieser setzt von vornherein die Differentialgleichung in Polarkoordinaten an. Man kann sie dann, wie man leicht sieht, auf die Form

$$\frac{d\rho}{d\vartheta} = \rho c_1(\vartheta) + \rho^2 c_2(\vartheta) + \dots$$

bringen. Diejenige Lösung, welche für $\vartheta = 0$ den Wert ρ_0 annimmt, hängt analytisch von ρ_0 ab. (S. 49) Sie läßt sich also für hinreichend kleine ρ_0 durch eine für alle $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ konvergente Reihe

$$\rho = \rho(\vartheta, \rho_0) = \rho_0 u_1(\vartheta) + \rho_0^2 u_2(\vartheta) + \dots$$

darstellen. Aus $\rho(0, \rho_0) = \rho_0$ folgt, da dies für alle genügend kleinen ρ_0 gelten soll, $u_1(0) = 1$, $u_k(0) = 0$ ($k = 2, 3, \dots$). Trägt man diese Reihe in die Differentialgleichung ein, so erhält man für die u_k die folgenden Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d u_1}{d \vartheta} &= u_1 c_1(\vartheta) \\ \frac{d u_2}{d \vartheta} &= u_2 c_1(\vartheta) + u_1^2 c_2(\vartheta) \\ \frac{d u_3}{d \vartheta} &= u_3 c_1(\vartheta) + 2 u_1 u_2 c_2(\vartheta) + u_1^3 c_3(\vartheta) . \\ &\dots \end{aligned}$$

Die Lösungen sind durch die bei $\vartheta = 0$ vorgeschriebenen Werte völlig bestimmt. Für die Geschlossenheit der Lösungen ist hinreichend, daß die u_k periodische Funktionen der Periode 2π sind. Diese Bedingung ist aber auch notwendig. Denn wären etwa u_1, u_2, \dots, u_r periodisch, u_{r+1} aber nicht periodisch, so sei z. B.

$$u_{r+1}(2\pi) - u_{r+1}(0) = d < 0 .$$

Dann wird

$$\rho(2\pi, \rho_0) - \rho(0, \rho_0) = \rho_0^{r+1} [d + \rho_0 \{ u_{r+1}(2\pi) - u_{r+1}(0) \} + \dots] .$$

Daher ist für hinreichend kleine ρ_0

$$\rho(2\pi, \rho_0) - \rho(0, \rho_0) < 0 .$$

Also wird

$$\rho(0, \rho_0) > \rho(2\pi, \rho_0) > \rho(4\pi, \rho_0) > \dots$$

Daher wird $\vartheta = 0$ unendlich oft von jeder Lösung getroffen. Die Bedingung ist also auch notwendig.

Man muß sich aber vor Augen halten, daß die Tragweite dieser Betrachtungen begrenzt ist. Sie enthalten insbesondere bisher keine Rechenvorschrift, nach der man in einem konkreten Fall vorgehen kann. In dieser Richtung liegt nur eine Arbeit von *Dulac* (Bull. des sc. math. 32 (1908)) vor, der für die Differentialgleichung

$$\frac{d y}{d x} = \frac{-y + a_1 x^2 + b_1 x y + c_1 y^2}{x + a_2 x^2 + b_2 x y + c_2 y^2}$$

die Diskussion völlig durchgeführt hat. Hier genügen acht der unendlich vielen Bedingungen, wie man bei direkter Ausführung der Integration sieht.

Ich will noch erwähnen, wie man im Sattelfall die vier reellen Lösungen durch den Ursprung wirklich finden kann. *Bendixson* hat zu diesem Zweck in seiner zu Beginn dieses Paragraphen genannten Arbeit ein Verfahren der sukzessiven Approximationen angegeben, das dem S. 74 besprochenen durchaus analog ist und das ich daher nicht mehr näher erörtern will.

Zum Schluß dieser Betrachtungen noch den Hinweis, daß in der Arbeit von *Bendixson* eine Methode entwickelt wird, die das Verhalten der Lösungskurven einer jeden Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mathfrak{F}_1(x, y)}{\mathfrak{F}_2(x, y)}$$

in der Nähe des Ursprungs festzustellen erlaubt. Durch eine Kette bilinearer Transformationen wird eine jede solche Differentialgleichung auf die in diesem und dem vorigen Paragraphen ausführlich diskutierten Typen zurückgeführt.

Bemerkung: 1. In zwei neueren Arbeiten in der *Math. Zeitschr.* Bd. 15 u. Bd. 16 hat *Perron* den Gegenstand dieses Paragraphen erneut vorgenommen und in weitem Umfang die Bedingungen für $\delta(x, y)$ und $\varepsilon(x, y)$ angegeben, unter denen die Sätze dieses Paragraphen richtig bleiben.

2. Die Übertragung der vorliegenden Ergebnisse auf Systeme hat bisher nur dürftige Ergebnisse gezeigt. Sie beschränken sich wesentlich auf die durch gewisse Reihenentwicklungen gewonnene Erkenntnis, daß im Falle, wo ν der Wurzeln der charakteristischen Gleichung einen negativen Realteil haben, eine ν -parametrische Schar von Lösungen für $t \rightarrow \infty$ gegen den Ursprung konvergiert. Wenn z. B. alle diese Wurzeln positiv reell sind, so kann dies ganz analog wie S. 75 bewiesen werden. Ein dem allgemeinen Satz dieses Paragraphen entsprechender ist bisher nicht bekannt. Doch hat das Wenige, was bekannt ist, schon für Fragen der Mechanik wichtige Dienste getan. Vollständig kann man natürlich analog zu § 3 die Diskussion für Systeme linearer Gleichungen mit konstanten Koeffizienten durchführen. Doch möchte ich diese Dinge, für die wir anlässlich der linearen Gleichungen zweiter Ordnung noch Proben bekommen werden, nicht mehr verfolgen. (Vgl. auch S. 295 ff.)

§ 7. Über die Verteilung der singulären Stellen.

Man darf immer annehmen, daß durch eine vorgelegte Differentialgleichung einem jeden Punkt einer geschlossenen Fläche eine sie berührende Richtung zugeordnet sei und daß es sich also darum handelt, auf der geschlossenen Fläche Kurven zu finden, die jeden Punkt in der dort vorgeschriebenen Richtung passieren. Denn wenn zunächst eine der seither betrachteten Differentialgleichungen $y' = f(x, y)$ in einem Bereiche der x - y -Ebene eindeutig erklärt ist, so kann man ein Stück dieses Bereiches durch stereographische Projektion auf eine Kugeloberfläche projizieren und dann die in einem Stück dieser Fläche vor-

liegende Erklärung der Differentialgleichung über den Rest der Fläche so ergänzen, daß eine auf der geschlossenen Kugeloberfläche erklärte Differentialgleichung herauskommt. Dieser Gedanke gibt auch die Möglichkeit an die Hand, die bisher besprochenen Ergebnisse auf Differentialgleichungen der Form $f(x, y, y') = 0$ zu übertragen, wo etwa $f(x, y, y')$ ein Polynom sein möge. Dann ist das Problem, diese Gleichung zu untersuchen, nach *Poincaré* gleichwertig mit der Untersuchung der Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{\partial f}{\partial z}, & \frac{dy}{dt} &= -z \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x} + z \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

auf der Fläche $f(x, y, z) = 0$ und somit haben wir in manchen Fällen wieder eine Differentialgleichung, die jedem Punkt einer geschlossenen Fläche in eindeutiger Weise eine sie berührende Richtung zuordnet. Tatsächlich definieren diese drei Differentialgleichungen Raumkurven, deren Projektion auf die x - y -Ebene $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = z$ liefert, so daß also diese Projektionen der Differentialgleichung $f(x, y, y') = 0$ genügen. Tatsächlich liegen diese Raumkurven auf der Fläche $f(x, y, z) = 0$, falls man ihre Anfangspunkte darauf wählt. Denn längs der Kurven ist $\frac{df}{dt} = 0$.

An diesen Ansatz können wir anknüpfen, wenn wir jetzt noch einen allgemeinen Satz über die Verteilung der Singularitäten erörtern wollen.

Zunächst betrachten wir eine einzelne singuläre Stelle S eines Systems

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = f(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y).$$

Dabei sollen $f(x, y)$, $g(x, y)$ in der Umgebung von $x = 0$, $y = 0$ eindeutig und stetig erklärt sein und einer *Lipschitz*-Bedingung genügen. Im Punkte $x = 0$, $y = 0$ selbst sollen $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$ sein, während in der betrachteten Umgebung keine weiteren singulären Stellen liegen. Jedem von $(0, 0)$ verschiedenen Punkt ist dann durch (1) ein gerichtetes Linienelement zugeordnet.

Nach *Poincaré* ordnen wir der isolierten singulären Stelle S einen *Index* j zu. Mit *Birkhoff* erklären wir ihn so: Man lege um die singuläre Stelle eine einfach geschlossene Kurve \mathfrak{C} , welche aus endlich vielen, stetig differenzierbaren Bogen besteht und außer S keine andere singuläre Stelle umschließt. Durchläuft man dieselbe im positiven Sinn, so erfährt dabei der durch die Differentialgleichungen erklärte Vektor eine Drehung $2j \cdot \pi$. j heißt dann *Index der singulären Stelle*. Man erkennt nämlich sofort, daß die ganze Zahl j von der Wahl der umschließenden Kurve unabhängig ist. Denn bei stetiger Änderung derselben

müßte sich auch j stetig ändern und bleibt daher als ganze Zahl unverändert.

Bei den Differentialgleichungen des § 6 ist es leicht, den Index zu bestimmen. Er ist nämlich stets dem Index der bei Beschränkung auf die linearen Glieder entstehenden homogenen Gleichung gleich. Setzt man nämlich $\frac{dx}{dt} - i \frac{dy}{dt} = r e^{i\varphi}$, so wird der Index der $\frac{1}{2\pi}$ -fachen Änderung gleich, welche φ bei Durchlaufung einer geschlossenen Kurve um die singuläre Stelle erfährt. Ist $x = x(\tau)$, $y = y(\tau)$, $0 \leq \tau \leq 1$ die geschlossene Kurve, so wird somit

$$j = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{d\varphi}{d\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{d}{d\tau} \log (r e^{i\varphi}) d\tau$$

Denn $\log r$ ändert sich beim Umlauf nicht. Also ist

$$j = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{j' + i g'}{f + i g} d\tau$$

wenn

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y)$$

die Differentialgleichungen sind, und j' und g' die Ableitungen von f und g nach τ bedeuten. Ist insbesondere $f = Ax + By + \mathfrak{P}_1(x, y)$, $g = Cx + Dy + \mathfrak{P}_2(x, y)$, wie im § 6, wo also \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 Potenzreihen sind, die nur Glieder von höherer als der zweiten Ordnung enthalten, so wird bei Verwendung von Kurven, die hinreichend nahe den Ursprung umschließen, geschlossen, daß

$$j = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{(Ax' + By') + i(Cx' + Dy')}{(Ax + By) + i(Cx + Cy)} d\tau$$

ist. Man erkennt dies ähnlich wie beim *Rouchéschen* Satz der Funktionentheorie, indem man statt \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 zunächst $\lambda \mathfrak{P}_1$, $\lambda \mathfrak{P}_2$ $0 \leq \lambda \leq 1$ einträgt und bemerkt, daß das Integral so lange stetig von λ abhängt, als der unter dem Integral vorkommende Nenner nicht verschwindet. Dies aber ist für $0 \leq \lambda \leq 1$ sicher dann der Fall, wenn längs der geschlossenen Kurve \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 hinreichend klein sind, d. h. wenn diese Kurve hinreichend nahe am Ursprung verläuft. Da aber das Integral eine ganze Zahl als Wert hat, so ist es von λ unabhängig.

Für die homogenen Gleichungen ist aber der Index leicht zu bestimmen. Man erschließt seinen Wert unmittelbar aus den auf S. 56ff. gemachten Angaben.

Im Knotenfall, im Strudelfall und im Wirbelfall ist darnach $j = 1$, im Sattelfall aber ist $j = -1$.

Wir betrachten nun eine geschlossene Fläche vom Geschlecht p mit eindeutig erklärter Indikatrix. Auf ihr sei wieder durch Differential-

gleichungen mit eindeutigen stetigen und der *Lipschitz*-Bedingungen genügenden Koeffizienten ein Vektorfeld gegeben. Es möge endlich viele singuläre Stellen aufweisen. Wir zerlegen dann durch irgendwelche endlich viele *Jordansche* Kurvenbogen mit stetig sich ändernder Tangente die geschlossene Fläche in endlich viele einfach zusammenhängende Gebiete, deren jedes an seinem Rand keine, in seinem Inneren nicht mehr als eine singuläre Stelle besitzen möge. Diese Einteilung der Oberfläche kann als Polyeder aufgefaßt werden, und so hat man nach dem *Eulerschen* Polyedersatz zwischen der Anzahl e der Ecken, k der Kanten, und f der Flächenstücke die Beziehung

$$e + f - k = 2 - 2p.$$

Falls nun in einer Ecke ν Kanten zusammenstoßen, so gilt noch $\sum_1^e \nu_i = 2k$. Wir bestimmen nun für jedes der Gebiete den Index j .

Dabei ist der Index derjenigen Gebiete, die keine singuläre Stelle enthalten, Null. Zur Bestimmung des Index für die anderen Bereiche bedienen wir uns des folgenden Verfahrens. Wir betrachten den im Sinne der positiven Indikatrix gemessenen Winkel zwischen dem Feldvektor und dem Tangentenvektor der Randkurve. Dieser habe die Richtung einer im Sinne der Indikatrix positiv erfolgenden Umlaufung des Bereiches. Dann ist die Winkeländerung des Feldvektors gleich der Summe der Änderungen des Tangentenvektors vermehrt um die Änderung des Winkels zwischen Tangentenvektor und Feldvektor. Die erstere Änderung ist 2π . Die letztere ist ein Vielfaches von 2π , das man findet, indem man abzählt, wie oft der Winkel im wachsenden bzw. im abnehmenden Sinn ein Vielfaches von π durchläuft. Die ersteren nennen wir äußere, die anderen innere Berührungen des Feldvektors mit dem Tangentenvektor¹⁾. Nun aber heben sich die Anteile, welche Berührungen von Lösungen mit inneren Kantenpunkten zuzuschreiben sind, gegenseitig auf, wenn man die Summe aller Indizes bildet. Denn eine solche Berührung ist für das eine der angrenzenden Gebiete eine innere, für das andere eine äußere. Es bleiben also nur die Berührungen mit Lösungen in den Ecken der Gebiete. Geht aber eine Lösung durch eine Ecke, so passiert sie dort das Innere zweier Gebiete und berührt die $\nu - 2$ anderen von außen. Es sei denn, daß eine Lösung eine Ecke in einer Kantenrichtung passiert. Man darf aber immer die Einteilungslinien so wählen, daß dies nicht der Fall ist. Somit hat man in einer Ecke $\nu - 2$ äußere Berührungen. Bildet man nun die Summe der Indizes über alle Bereiche, so wird sie dieser Summe $-\sum \frac{\nu_i - 2}{2} + f$

¹⁾ Alle hier erwähnten Winkel werden in den Parameterebenen gemessen. Man wählt also die Teilbereiche so klein, daß für jeden eine bestimmte Wahl der Flächenparameter ausreicht. Man überzeugt sich leicht, daß die Indizes von der Wahl der Parameter unabhängig sind.

gleich. Denn alle inneren und äußeren Berührungen heben sich auf, mit Ausnahme der in den Ecken stattfindenden Berührungen. Eine jede äußere Berührung aber gibt eine Abnahme um π und die f Flächen geben der Winkeländerung der Tangente entsprechend einen Zuwachs um 2π . Zur Bestimmung des Index ist durch 2π zu dividieren. Somit wird

$$\sum j = c + f - k = 2 - 2p.$$

Für die Kugel ist $p = 0$; hier besitzt also eine Kurvenschar stets mehr als eine Singularität, falls nur Singularitäten der bisher betrachteten Art vorkommen. Denkt man sich andererseits auf der Kugel das Kreisbüschel, das entsteht, wenn man sie mit einem Ebenenbüschel durch eine ihrer Tangenten schneidet, so ist dies eine Kurvenschar mit nur einem singulären Punkt. Der Index muß also 2 sein. Um das nachzuprüfen, denken wir uns die Kugel stereographisch auf eine Ebene so projiziert, daß wir das Kreisbüschel

$$(x - a)^2 + y^2 = a^2$$

erhalten. Als Differentialgleichung findet man

$$x' = xy, \quad y' = 2(x^2 - y^2).$$

Verfolgt man z. B. das Vektorfeld dieser Differentialgleichung längs eines Kreises um den Ursprung, so bestätigt man leicht, daß der Index 2 ist (vgl. Abb. 10). Hier liegt auch im gestaltlichen Verhalten der Lösungen etwas neues vor. Es treten sogenannte „geschlossene Knotengebiete“ in dem betrachteten Kreise auf. Das sind Bereiche, in welchen jede Lösung aus dem Ursprung kommend wieder im Ursprung mündet. Früher kamen „Sattelgebiete“ vor. Diese waren von Lösungen begrenzt, die im Ursprung mündeten, und darin gingen die Lösungen alle am Ursprung vorbei. In allen bisher betrachteten Fällen besteht zwischen dem Index j , der Zahl k der geschlossenen Knotengebiete und der Zahl λ der Sattelgebiete die Relation

$$j = \frac{k - \lambda}{2} + 2.$$

Bendixson hat in der S. 61 genannten Arbeit gezeigt, daß diese plausible Relation stets dann richtig ist, wenn die Zahlen k und λ endlich sind, und dies ist, wie er gezeigt hat bei allen Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{dt} = \mathfrak{P}_1(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = \mathfrak{P}_2(x, y)$$

der Fall, wo \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 Potenzzeiten sind, die in der Umgebung des

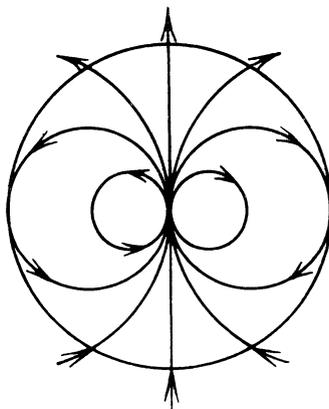


Abb. 10.

Ursprungs konvergieren. Z. B. ist für einen regulären Punkt, wo \mathfrak{F}_1 und \mathfrak{F}_2 nicht beide verschwinden, $k = 0$, $\lambda = 2$. Also $j = 0$.

§ 8. Singuläre Lösungen.

Schon gelegentlich der *Clairautschen* Gleichung lernten wir auf S. 20 das eigentümliche Vorkommen von singulären Lösungen kennen. Wir machten damals die Erfahrung, daß durch einzelne Punkte zwei sich dort berührende Integralkurven gingen. Die singuläre Lösung trat als Enveloppe der die *Clairautsche* Gleichung lösenden Geraden-schar auf. Nun wollen wir von allgemeineren Erwägungen aus an die singulären Lösungen herangehen.

Wir betrachten eine Differentialgleichung

$$(1) \quad f(x, y, y') = 0.$$

$f(x, y, p)$ sei samt seinen partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung für alle in Betracht kommenden Linienelemente (x, y, p) eindeutig und stetig. Die in Betracht zu ziehenden Linienelemente seien: (x, y) aus einem Bereich B , p beliebig.

Um die seither aufgestellten Sätze anwendbar zu machen, muß erst die Auflösung nach p bewerkstelligt werden. Darüber gibt gewöhnlich der bekannte Satz über implizite Funktionen Aufschluß. Er lehrt folgendes: Wenn man ein Wertetripel x_0, y_0, p_0 hat, das der Gleichung $f(x, y, p) = 0$ genügt, und wenn für dies Wertetripel die Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial p}(x_0, y_0, p_0)$$

nicht auch verschwindet, so gibt es in einer gewissen Umgebung von (x_0, y_0) eine einzige wohlbestimmte eindeutige stetige Funktion

$$p = F(x, y),$$

die der Gleichung genügt, und die für $x = x_0, y = y_0$ den Wert $p = p_0$ annimmt, und welche stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung nach x und y besitzt. Oft werden so zu jedem Wertepaar, d. h. zu jedem Punkt x_0, y_0 mehrere Werte p_0 und damit mehrere Funktionen $p = F(x, y)$ gehören, die der Gleichung genügen. Gewissermaßen wird das Feld der Linienelemente aus mehreren Schichten bestehen. Eine besondere Rolle müssen nach allem aber jedenfalls die Linienelemente spielen, welche auch noch der Gleichung

$$(2) \quad \frac{\partial f}{\partial p}(x, y, p) = 0$$

genügen. Alle diese Linienelemente genügen den beiden Gleichungen

$$(3) \quad f(x, y, p) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial p}(x, y, p) = 0.$$

Wir betrachten die Menge derjenigen (x, y) , zu welchen p -Werte

gehören, die zusammen mit den (x, y) den beiden Gleichungen (3) genügen. Wir nennen die von diesen (x, y) gebildete Menge die *Diskriminantenkurve*. Man kann sie in vielen Fällen durch Eliminieren von p aus (3) gewinnen. Dies gelingt z. B. in der Umgebung derjenigen Linienelemente für die $\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \neq 0$ ist. Dann kann man aus der zweiten Gleichung (3) p als stetige mit stetigen Ableitungen versehene Funktion gewinnen und in die erste Gleichung (3) eintragen. Aus ihr gewinnt man dann die Diskriminantenkurve als mit stetig sich ändernder Tangente versehene Kurve in der Nähe derjenigen (x, y) für die nicht auch $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ verschwinden. Die Linienelemente, die den beiden Gleichungen (3) genügen, heißen *singuläre Linienelemente*.

Betrachten wir z. B. die Differentialgleichung

$$y'^2 = x.$$

Ihre singulären Linienelemente genügen den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} p^2 &= x, \\ 2p &= 0. \end{aligned}$$

Sie sind alle der x -Achse parallel und liegen auf der Kurve $x = 0$. Man stellt weiter leicht den Verlauf der Integalkurven fest. Nur für positive x sind reelle Integalkurven vorhanden. Dieselben besitzen in den Punkten der Diskriminantenkurve Spitzen.

Die Lösungen sind $y = \pm \frac{2}{3} x^{3/2} + c$. Den beiden Schichten $y' = +\sqrt{x}$ und $y' = -\sqrt{x}$ entsprechend gehen durch jeden Punkt mit positiver Abszisse x zwei Integalkurven hindurch.

Ich betrachte weiter die Gleichung

$$y'^2 = y.$$

Hier genügen die singulären Linienelemente den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} p^2 &= y, \\ 2p &= 0. \end{aligned}$$

Sie sind alle der x -Achse parallel, liegen aber jetzt auf der Kurve $y = 0$. Diese Kurve ist daher selbst Lösung, und die übrigen Integalkurven $y = \frac{(x+c)^2}{4}$ berühren dieselbe. Wir sagen in diesem Fall, die Diskriminantenkurve sei *singuläre Lösung*. *Wir verstehen also unter einer singulären Lösung eine aus lauter singulären Linienelementen aufgebaute Lösung*. Nach der Definition der Diskriminantenkurve kann eine singuläre Lösung nur aus einzelnen Bogen der Diskriminantenkurve bestehen. Denn diese ist der Ort der Punkte, welche singuläre Linienelemente tragen. Aber das erste Beispiel lehrt zugleich, daß die Diskriminantenkurve ganz und gar nicht immer eine singuläre Lösung der Differentialgleichung ist. Damit dies der Fall ist, müssen vielmehr noch besondere Zusatzbedingungen bestehen. Diese

wollen wir jetzt herleiten. Wir müssen ja nur feststellen, unter welchen Umständen die Richtung der Diskriminantenkurve mit der in ihren Punkten vorgeschriebenen singulären Feldrichtung übereinstimmt. Wenn dies längs eines Bogens derselben der Fall ist, so ist dieser Bogen singuläre Lösung. Um aber die Richtung der Diskriminantenkurve zu bestimmen, hat man ihre Gleichung (3) zu differenzieren. Das liefert

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx} = 0.$$

Da aber längs der Diskriminantenkurve

$$\frac{\partial f}{\partial p} = 0$$

ist, so erhält man die Bedingung

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0.$$

Soll daher das $\frac{dy}{dx}$ der Diskriminantenkurve mit dem p des Feldes übereinstimmen, so muß

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} p = 0$$

sein. Daher erhält man zur Bestimmung der singulären Lösungen die drei Gleichungen

$$(4) \quad \begin{cases} f(x, y, p) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial p}(x, y, p) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, p) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, p) \cdot p = 0. \end{cases}$$

Wenn umgekehrt eine Kurve den sich durch Elimination des Parameters p aus den drei Gleichungen (4) ergebenden beiden Gleichungen genügt, so ist sie eine singuläre Lösung der Differentialgleichung, falls nicht auch noch für alle ihre Punkte

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, p) = 0$$

ist. Denn wenn man zur Bestimmung der Richtung die erste der drei Gleichungen (4) differenziert, so erhält man unter Berücksichtigung der zweiten

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y' = 0.$$

Daher ist nach der dritten

$$\frac{\partial f}{\partial y}(y' - p) = 0.$$

Hieraus ergibt sich wegen der auf $\frac{\partial f}{\partial y}$ bezüglichen Bedingung

$$y' = p,$$

so daß für das y' der Diskriminantenkurve wegen der ersten Gleichung (4) $f(x, y, y') = 0$ gilt. Sie ist also eine Lösung, und zwar eine

singuläre, wegen des Bestehens der zweiten der drei Gleichungen. Die drei Gleichungen (4) zusammen mit $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, p) \neq 0$ legen daher die singulären Lösungen fest.

Man sieht aus den vielen für eine singuläre Lösung notwendigen Bedingungen, daß *im allgemeinen* die Diskriminantenkurve *nicht* singuläre Lösung sein wird. Sie wird vielmehr im allgemeinen Ort der Spitzen der Integralkurven sein (vgl. das erste Beispiel). Übrigens kann sehr wohl auch die Diskriminantenkurve Lösung sein, ohne aus singulären Linienelementen zu bestehen. Sie kann mit anderen Worten auch nichtsinguläre Lösung sein. So ist es z. B. bei

$$(y'^2 - x + y)(y' - 1) = 0.$$

Für die singulären Elemente muß

$$\begin{aligned} (p^2 - x + y)(p - 1) &= 0 \text{ und} \\ 2p(p - 1) + p^2 - x + y &= 0 \end{aligned}$$

sein. Elimination von p liefert als Diskriminantenkurve

$$(x - y)(y - x + 1)^2 = 0.$$

Auf $x = y$ sind $p = 0$ die singulären Richtungen. Auf $y = x - 1$ sind $p = 1$ die singulären Richtungen; $y = x$ ist also Lösung, ohne singuläre Lösung zu sein. Das kommt dadurch zustande, daß ein anderer Zweig, der durch $f(x, y, p) = 0$ definierten Funktion $p = F(x, y)$ längs der Diskriminantenkurve deren Richtungen liefert.

Nach diesen Darlegungen ist es klar, daß eine jede Enveloppe einer Schar von Integralkurven, d. h. eine jede Kurve, die in jedem ihrer Punkte von einer Integralkurve berührt wird, eine singuläre Lösung ist, im Sinne der vorhin aufgestellten Definition. Denn da durch jedes ihrer Linienelemente zwei verschiedene Integralkurven gehen, muß der vorhin erwähnte Satz über implizite Funktionen in seiner Anwendung auf die Linienelemente der Enveloppe versagen¹⁾. Solche Linienelemente nannten wir aber singulär. Die Enveloppe besteht also nur aus singulären Elementen.

Man darf aber nicht umgekehrt schließen wollen, daß alle singulären Lösungen als Enveloppen einer Schar von Integralkurven aufgefaßt werden können. Es ist also nicht immer der Fall, daß die singuläre Lösung in ihren Punkten von anderen Integralkurven berührt wird.

¹⁾ Es sollen nur solche Linienelemente betrachtet werden, für die $\frac{\partial f}{\partial y'}$ existiert.

Ebenso mag die Möglichkeit beiseite bleiben, daß man zwar in der Umgebung des betreffenden Linienelementes die Gleichung $f(x, y, y') = 0$ nach y' auflösen kann, daß aber für die aufgelöste Gleichung $y' = f(x, y)$ die Lipschitzbedingung nicht erfüllt ist. Auch so könnte es ja kommen, daß mehrere Lösungen durch das Linienelement gehen.

Einige Beispiele sollen die Verhältnisse klarstellen. Ich betrachte die Tangenten der kubischen Parabel

$$y = x^3.$$

Sie genügen der Gleichung

$$(5) \quad 27(y - y'x)^2 = 4y'^3.$$

Wenn man die singulären Integrale derselben sucht, so hat man noch die beiden Gleichungen

$$(6) \quad 54(y - y'x)x + 12y'^2 = 0$$

$$(7) \quad -54(y - y'x)y' + y'54(y - y'x) = 0$$

aufzustellen. Da (7) identisch erfüllt ist, so hat man zur Auffindung der singulären Lösungen nur y' aus (5) und (6) zu eliminieren. Das führt auf

$$108 \cdot 4y'^3x^2 - 144y'^4 = 0.$$

Daher ist entweder

$$y' = 0$$

oder

$$y' = 3x^2.$$

Die erste Möglichkeit führt zu der singulären Lösung

$$y = 0,$$

die zweite zur Parabel

$$y = x^3.$$

Während diese als Enveloppe der die Gleichung befriedigenden Geradenschar aufzufassen ist, gibt es keinerlei Integralkurven, die die Gerade $y = 0$ in ihren einzelnen Punkten berührten. Sie ist keine Enveloppe. Trotzdem besteht sie aus singulären Linienelementen. Diese Erscheinung tritt stets bei den Wendetangenten der Leitkurve einer Differentialgleichung auf, deren Lösungen durch die Tangenten dieser Leitkurve bestimmt sind.

Wenn nämlich

$$\eta = f(\xi)$$

die Gleichung der Leitkurve ist, so sind

$$y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$$

die Gleichungen ihrer Tangenten. S. 13 haben wir gelernt, wie man die Differentialgleichung einer solchen Kurvenschar bestimmt. Sie ergibt sich durch Elimination von ξ aus den beiden Gleichungen

$$y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$$

$$y' = f'(\xi).$$

Zur Bestimmung der singulären Lösungen dieser Gleichung hat man die ξ -Ableitung der ersten Gleichung Null zu setzen. Das liefert aber

$$f''(\xi)(x - \xi) = 0.$$

Also

$$x - \xi = 0$$

und

$$f''(\xi) = 0.$$

Der erste Fall liefert die Leitkurve. Der zweite Fall führt zu den Wendetangenten, da ja die Wendepunkte durch $f''(\xi) = 0$ charakterisiert sind. (Zu den Wendetangenten zählen wir also alle Tangenten, die in höherer als der ersten Ordnung die Kurve berühren.)

Warum gerade diese Wendetangenten mit zu den singulären Lösungen, also auch mit zu der Diskriminantenkurve gehören, läßt sich am vorigen Beispiel der Gleichung

$$27(y - y'x)^2 = 4y^3$$

leicht erläutern, wenn man beachtet, daß von den Punkten des in Abb. 11 schraffierten Gebietes drei Tangenten an die Parabel gehen, von den Punkten des nicht schraffierten Gebietes aber nur eine. Beide Gebiete werden naturgemäß durch die Diskriminantenkurve getrennt, denn das ist deren geometrische Bedeutung.

Ich betrachte noch ein zweites Beispiel, in dem die singulären Lösungen nicht als Enveloppen auftreten. Das ist der Fall bei der Differentialgleichung

$$y'^2 = y^3.$$

Ihre Lösungen sind

$$y = \frac{4}{(x + c)^2}.$$

Dazu kommt noch die singuläre Lösung

$$y = 0.$$

Sie wird von keiner anderen Integralkurve im Endlichen berührt, tritt vielmehr als gemeinsame Asymptote aller Integralkurven auf, die sich ihr beliebig nahe anschmiegen. Diese gehen nämlich auseinander durch Parallelverschiebung in Richtung der x -Achse

hervor. Wenn daher eine der Kurven, z. B. $y = \frac{4}{x^2}$ (Abb. 12), für

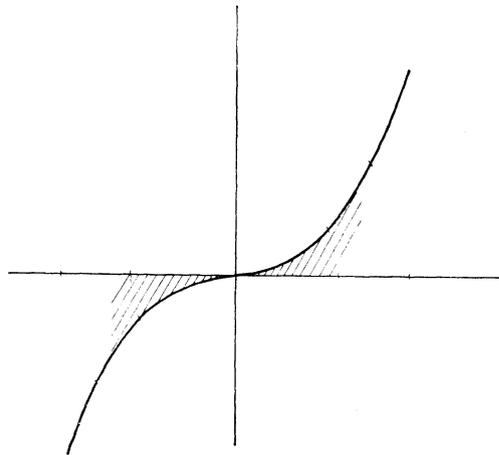


Abb. 11.

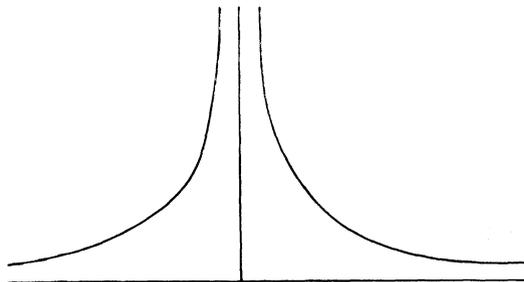


Abb. 12.

$x > 20$ nur um höchstens $\frac{1}{100}$ von $y = 0$ abweicht, so kann man sie so parallel verschieben, daß eine Kurve entsteht, die schon für $x > x_0$ nur noch um $\frac{1}{100}$ von $y = 0$ abweicht. x_0 kann dabei ganz beliebig gewählt werden. Denn

$$y = \frac{4}{(x + 20 - x_0)^2}$$

ist die gewünschte Kurve.

IV. Kapitel.

Differentialgleichungen erster Ordnung im komplexen Gebiet.

§ 1. Feste und bewegliche Singularitäten.

Für z -Werte, welche einem abgeschlossenen Bereiche B der komplexen z -Ebene, und für w -Werte, welche einem abgeschlossenen Bereiche G der komplexen w -Ebene angehören, sei $f(z, w)$ eine eindeutige, bis auf gewisse Singularitäten reguläre analytische Funktion. Uns wird hier allein der Fall beschäftigen, daß $f(z, w)$ für die genannten Werte (z, w) durchweg von rationalem Charakter ist. Wir wollen also $f(z, w)$ als Quotient zweier in dem Bereiche regulärer Funktionen annehmen. Es sei $f(z, w) = \frac{f_1(z, w)}{f_2(z, w)}$, wo $f_1(z, w)$ und $f_2(z, w)$ im zugrunde gelegten Bereiche regulär sind. Dann stellen wir uns die Aufgabe, die Lösungen der Differentialgleichung

$$(1) \quad \begin{aligned} dw &= f_1(z, w) \\ dz &= f_2(z, w) \end{aligned}$$

in diesem Bereiche zu untersuchen. Solche Lösungen sind durch ihre Anfangsbedingungen bestimmt, und wir wissen von S. 48 her folgendes: Wenn die Anfangswerte z_0, w_0 so gewählt sind, daß $f(z, w)$ an dieser Stelle regulär ist, daß also mit anderen Worten daselbst der Nenner nicht verschwindet, dann gibt es genau eine in der Umgebung von z_0 eindeutige reguläre Funktion $w(z)$, für die $w(z_0) = w_0$ gilt, und die der Differentialgleichung genügt. Wir wissen weiter, daß es auch keine andere nichtanalytische dieser Bedingung genügende Lösung gibt, ja man kann der Fußnote ¹⁾ von S. 30 sogar entnehmen, daß es keine weitere der Bedingung $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ genügende Lösung gibt.

Die weitere Aufgabe ist nun, mit Hilfe funktionentheoretischer Methoden eine solche durch ihre Anfangsbedingungen festgelegte Lösung durch analytische Fortsetzung in ihrem weiteren Verlauf zu verfolgen. Wo sind z. B. die Singularitäten einer solchen Lösung zu suchen? Ich nehme an, bei Fortsetzung längs eines bestimmten Weges könne man bis an eine Stelle z_0 aus B heran, nicht aber über dieselbe hinaus ge-

langen. Hier sind nun zwei Fälle zu unterscheiden. *Entweder konvergiert bei Annäherung an die Stelle z_0 die Funktion $w(z)$ einem bestimmten Grenzwert zu oder nicht.* Ich betrachte erst den *zweitgenannten Fall*. Es wird sich zeigen, daß er nur dann eintritt, wenn $f_2(z_0, w) = 0$ ist für alle w . Da nämlich der Nenner $f_2(z, w)$ im Bereiche G regulär ist, so gibt es in G nur endlich viele Stellen w_i , für die $f_2(z_0, w_i) = 0$ ist, falls nicht $f_2(z_0, w) = 0$ ist. Man umgebe sie durch Kreise, über deren Kleinheit noch zu verfügen sein wird. Dann kann man eine von der Kleinheit der Kreise abhängende Zahl ϱ so bestimmen, daß für $|z - z_0| \leq \varrho$ die Wurzeln w von $f_2(z, w) = 0$ alle im Innern dieser Kreise liegen. Dann gibt es eine positive Zahl M derart, daß für $|z - z_0| \leq \varrho$ und für ein jedes nicht diesen Kreisen angehörige w stets $|f_2(z, w)| > M$ gilt. Wählt man nun die Kreise genügend klein, so muß es beliebig nahe bei z_0 auf dem der Fortsetzung zugrunde gelegten Wege Stellen geben, wo die Werte der Lösung außerhalb oder auf der Peripherie jener Kreise liegen. Denn sonst müßte gegen die Annahme $w(z)$ für $z \rightarrow z_0$ gegen einen Grenzwert konvergieren. Da aber zu jeder dieser Stellen somit ein endlicher Konvergenzkreis gehört, dessen Radius stetig vom Entwicklungsmittelpunkt abhängt, so können bei Annäherung an z_0 die Konvergenzradien nicht gegen Null streben. Denn sie besitzen in der aus dem Äußeren und dem Rand jener Kreise gebildeten Teilmenge von G ein positives Minimum. Somit ist tatsächlich nur der *erste* der beiden aufgezählten Fälle wirklich möglich. Wenn also die Fortsetzung über z_0 hinaus nicht möglich ist, ohne daß $f_2(z_0, w) = 0$ ist für alle w , so muß $w(z)$ bei Annäherung an z_0 einem bestimmten Grenzwert w_0 zustreben. Die Betrachtung lehrt dann außerdem, daß $f_2(z_0, w_0) = 0$ ist. Nun haben wir drei Fälle zu unterscheiden:

Entweder ist $f_2(z_0, w) = 0$ in der Umgebung von w_0 für kein anderes w erfüllt, oder aber es ist $f_2(z_0, w) = 0$ für alle w Null. Beide Male sei $f_1(z_0, w_0) \neq 0$. Im *ersten* Falle also, wo zwar $f_2(z_0, w_0) = 0$ ist, aber $f_2(z_0, w) \neq 0$ für $w \neq w_0$ in der Umgebung von w_0 , sprechen wir von einer *beweglichen* Singularität. Denn der Grenzwert w_0 , mit dem wir in z_0 ankommen, hängt von den Anfangswerten der untersuchten Lösung ab. Es erweist sich dann also bei der Fortsetzung längs desselben Weges eine andere Lösung unter Umständen in z_0 als nicht singular, falls sie nämlich für $z \rightarrow z_0$ einen von w_0 verschiedenen Grenzwert hat. Im *zweiten* Falle aber, wo $f_2(z_0, w) = 0$ ist für alle w , liegt eine *feste* Singularität vor. Denn nun ist jede Lösung bei Annäherung an z_0 in der gleichen Lage. Der *dritte* noch zu unterscheidende Fall ist der, daß außer $f_2(z_0, w_0) = 0$ auch $f_1(z_0, w_0) = 0$ ist. Dies soll also in den beiden ersteren Fällen nicht so sein.

Der *erste* der eben aufgezählten Fälle ist sehr leicht zu erledigen. In diesem Falle nämlich, wo zwar $f_2(z_0, w_0) = 0$ ist, in der Umgebung

von w_0 aber $f_2(z_0, w)$ nicht weiter verschwindet, ist offenbar in der Differentialgleichung

$$(2) \quad \frac{dz}{dw} = \frac{f_2(z, w)}{f_1(z, w)},$$

welcher die Umkehrfunktion genügt, die rechte Seite in der Umgebung von z_0, w_0 regulär. Die rechte Seite verschwindet zwar für z_0, w_0 , aber sie verschwindet nicht für z_0 und beliebiges w . Daher kommen in der Entwicklung der rechten Seite Glieder vor, die von $z - z_0$ unabhängig sind. Das niedrigste derselben sei vom Grade m . Dann läßt sich diejenige Lösung, welche für $w = w_0$ den Wert z_0 besitzt, in eine Potenzreihe dieser Form entwickeln:

$$(3) \quad z = z_0 + c_{m+1}(w - w_0)^{m+1} + \dots$$

Denn sei

$$(4) \quad \frac{dz}{dw} = a_m(w - w_0)^m \mathfrak{P}_1(w - w_0) + (z - z_0) \mathfrak{P}_2(z - z_0, w - w_0),$$

wo \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 Potenzreihen bedeuten, die in der Umgebung von $w = w_0$ bzw. $z = z_0, w = w_0$ konvergieren, so mache man nach S. 48 den Ansatz

$$z = z_0 + c_1(w - w_0) + \dots$$

Dann ist

$$c_k = \frac{1}{k!} \left(\frac{d^k z}{dw^k} \right)_{(w=w_0)}$$

Man sieht aber aus (4) sofort, daß daher $c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$ ist.

Die Umkehrung der Reihe (3) lehrt, daß w in der Umgebung von z_0 nach Potenzen von $(z - z_0)^{\frac{1}{m+1}}$ entwickelt werden kann. Es liegt also für die Lösung ein $m + 1$ -blättriger algebraischer Verzweigungspunkt vor. Daß dieser Verzweigungspunkt auftrat, ist aber durchaus dadurch bedingt, daß wir gerade die Lösung betrachteten, die für $z \rightarrow z_0$ gegen w_0 strebte. Denn verlangen wir diejenige Lösung, welche für $w = w_1$ den Wert z_0 annimmt, so finden wir für dieselbe eine Reihe

$$z = z_0 + \alpha_1(w - w_1) + \dots,$$

in der jetzt der Koeffizient α_1 der ersten Potenz nicht verschwindet, falls nur w_1 hinreichend nahe bei w_0 liegt, nämlich so nahe, daß

$$f_2(z_0, w_1) \neq 0$$

ist. Dann wird aber

$$w = w_1 + \frac{1}{\alpha_1} (z - z_0) + \dots$$

in der Umgebung von z_0 regulär. So erklärt sich die nicht ganz treffende Bezeichnung „bewegliche“ oder auch „verschiebbare“ Singularität.

Im zweiten der drei Fälle, wo $f_2(z_0, w) = 0$ ist für alle w , würde die gleiche Überlegung nur zu der Lösung $z = z_0$ führen, mit der wir

für unseren Zweck weiter nichts anfangen können. Bei Annäherung an eine derartige Singularität zweiter Art kann nun tatsächlich die Lösung $w(z)$ unbestimmt werden. So ist ja z. B. die allgemeine Lösung von

$$\frac{dw}{dz} = \frac{w}{z^2}$$

die Funktion $w = C e^{-\frac{1}{z}}$. Sie wird bei Annäherung an $z = 0$ längs der imaginären Achse tatsächlich unbestimmt, d. h. sie strebt keinem Grenzwert zu. Hier sprechen wir von einer *festen* Singularität.

Eine große Menge von Untersuchungen befaßt sich damit, bei gegebener Differentialgleichung die Natur der Lösungen in der Nähe einer solchen festen singulären Stelle z_0 zu untersuchen. *Briot* und *Bouquet* haben die Untersuchungen begonnen, *Picard*, *Poincaré*, *Dulac*, *Bendixson*, *Horn* und neuerdings *Malmquist* haben sie gefördert. Ich verweise wegen alles weiteren auf eine Arbeit von *Malmquist* im Arkiv för matematik astronomi och fysik, Bd. 15, wo auch die Literatur erwähnt ist. Hier sei nur so viel gesagt: Den Ausgangspunkt der Untersuchung bildet immer ein Zweig der Lösung, welcher einem bestimmten Grenzwert w_0 zustrebt, wenn sich z auf einem passenden Wege der singulären Stelle nähert. Dieser Wert w_0 erfüllt aber dann immer mit z_0 zusammen die Gleichung $f_1(z_0, w_0) = 0$. Dies folgt sofort aus der schon mehrfach angestellten Überlegung, welche an (2) anknüpft. Diese Gleichung wäre ja sonst in der Umgebung von z_0, w_0 regulär. Aber ihre einzige Lösung, welche für $w \rightarrow w_0$ gegen z_0 strebt, ist $z = z_0$, das aber nicht Umkehrung der jetzt zu betrachtenden Lösung sein kann. Somit bekommt man Anschluß an die singulären Stellen der *dritten* Art, welche wir im reellen Gebiet schon ausführlich untersucht haben.

Wir haben bei diesen Betrachtungen endliche z_0 und w_0 angenommen. Aber man weiß, wie man durch die Substitutionen $\frac{1}{z} = \zeta$ oder $\frac{1}{w} = \eta$ dem Unendlichfernen beikommt.

In diesem Paragraphen möchte ich nur noch die Frage behandeln, ob es Differentialgleichungen mit lauter festen singulären Stellen gibt, und wodurch diese von beweglichen Verzweigungspunkten ihrer Lösungen freien Differentialgleichungen charakterisiert sind. Wir beschränken uns dabei von vornherein auf Differentialgleichungen (1), in welchen die rechte Seite rational ist. Zähler und Nenner sollen also ganze rationale Funktionen sein. Die festen singulären Stellen sind diejenigen Stellen z_0 , für welche der Nenner für alle w verschwindet. Dazu kommt eventuell noch der unendlich ferne Punkt, wenn der Übergang zu $z = \frac{1}{\zeta}$ die Stelle $\zeta = 0$ zu den festen Singularitäten überführt. Die Substitution $z = \frac{1}{\zeta}$ aber führt die Differentialgleichung (1) in

$$(3) \quad \frac{dw}{dz} = - \frac{f_1\left(\frac{1}{\delta}, w\right)}{f_2\left(\frac{1}{\delta}, w\right)} \cdot \frac{1}{\delta^2}$$

über. Und hier kann man alle gewünschten Feststellungen leicht machen. Außerhalb dieser festen Singularitäten besitzt ein jedes Integral nach unseren Überlegungen allenfalls noch Pole.

Soll nun eine Differentialgleichung (1) der angegebenen Art nur feste Verzweigungspunkte besitzen, so muß der Nenner der rechten Seite für jedes z_0 , für das er überhaupt verschwindet, identisch in w oder nur für solche w verschwinden, für die zugleich der Zähler verschwindet. Nimmt man Zähler und Nenner als teilerfremd an, so tritt dieser letztere Fall nur für endlich viele z_0 ein. Richtet man die Aufmerksamkeit auf die übrigen z_0 , so erkennt man, daß im Nenner das w gar nicht vorkommt. Die Differentialgleichung muß daher von der Form

$$\frac{dw}{dz} = \varphi(z, w)$$

sein, wo $\varphi(z, w)$ ein Polynom in w ist. Damit sind bewegliche algebraische Verzweigungspunkte ausgeschlossen, in welchen w endlich bleibt. Nun müssen noch diejenigen ausgeschlossen werden, in welchen w unendlich wird. Daher mache ich die Substitution $w = \frac{1}{\mathfrak{w}}$. Damit geht die Differentialgleichung (1) in

$$(4) \quad \frac{d\mathfrak{w}}{dz} = -\mathfrak{w}^2 \varphi\left(z, \frac{1}{\mathfrak{w}}\right)$$

über. Nun muß wieder der Nenner von \mathfrak{w} unabhängig sein (nachdem man etwaige gemeinsame Faktoren von Zähler und Nenner entfernt hat). Daher kann $\varphi(z, w)$ in w höchstens vom zweiten Grade sein. Damit haben wir den Satz:

Die einzigen rationalen Differentialgleichungen, deren Lösungen keine beweglichen algebraischen Verzweigungspunkte besitzen, sind die vom Riccatischen Typus

$$(5) \quad \frac{dw}{dz} = A_0(z) + A_1(z)w + A_2(z)w^2.$$

Bemerkung. Auch für die allgemeineren Differentialgleichungen

$$f(x, y, y') = 0,$$

wo $f(x, y, y')$ ein Polynom in x, y, y' ist, wurde durch *Fuchs* und *Poincaré* das Problem gelöst, alle Differentialgleichungen mit nur festen Verzweigungspunkten zu bestimmen. Das Ergebnis ist dieses: Das allgemeine Integral ist entweder eine algebraische Funktion, oder aber man kann die Differentialgleichung durch eine algebraische Substitution entweder auf eine *Riccatische* oder auf die Differentialgleichung

$$y' = g(x) \sqrt{(1-y^2)(1-k^2 y^2)}$$

transformieren.

Aus unseren bisherigen Ergebnissen ergibt sich leicht ein dem *Picardschen Satz* für ganze transzendente Funktionen entsprechender Satz für die Lösungen unserer Differentialgleichungen. Er lautet: *In der Differentialgleichung*

$$\frac{dw}{dz} = f(z, w)$$

sei die rechte Seite eine rationale Funktion. $w(z)$ sei ein Integral derselben, welches eine unendlich vieldeutige Umkehrfunktion $z(w)$ besitzt. Dann gibt es nur endlich viele Ausnahmewerte W , für welche die Gleichung $w(z) = W$ nur endlich viele Lösungen besitzt.

Zum Beweise betrachtet man die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{f(z, w)},$$

welcher die Umkehrfunktion unseres Integrals genügt. Feste Singularitäten und Singularitäten dritter Art derselben sind nur in endlicher Zahl vorhanden. Wir betrachten eine Stelle W , welche nicht zu diesen festen Singularitäten gehört. An dieser Stelle nimmt die Funktion $z(w)$ Werte an, unter denen, wie ich zeigen will, unendlich viele verschiedene vorkommen. Es ist nämlich jeder Zweig unserer Funktion an der Stelle W von algebraischem Charakter. Ein jeder Zweig aber ist durch seinen bei W angenommenen Wert festgelegt. Da aber die Funktion nach Voraussetzung unendlich vieldeutig ist, und da jeder ihrer Zweige auf jedem, die angegebenen Singularitäten vermeidenden Weg bis nach W fortgesetzt werden kann, nimmt die Funktion $z(w)$ an der Stelle W unendlich viele verschiedene Werte an. Darin liegt der Beweis unseres Satzes.

Dieser Satz legt die Frage nach den endlich vieldeutigen Integralen der Differentialgleichung (1) nahe. Derartigen Fragen wenden wir uns nun zu.

§ 2. Differentialgleichungen mit eindeutigen Integralen.

Im vorigen Paragraphen wurde schon bewiesen, daß die einzigen rationalen Differentialgleichungen ohne verschiebbare algebraische Verzweigungen die *Riccatischen* sind. Daher sind jedenfalls auch die Differentialgleichungen, welche *nur* eindeutige Integrale besitzen, bei welchen also überhaupt keine, also auch keine verschiebbaren Verzweigungen vorkommen, unter den *Riccatischen* zu suchen. Die Bedingungen dafür, daß eine *Riccatische* Gleichung nur eindeutige Integrale besitzt, sind noch unbekannt¹⁾. Für andere Differentialgleichungen

¹⁾ Der auf S. 131 gegebenen Darstellung ihrer Koeffizienten durch drei Integrale von (5) S. 104. Kann man einer Antwort auf diese Frage entnehmen, die aber nicht voll befriedigt.

hat aber *Malmquist* den folgenden schönen Satz bewiesen (Acta mathematica Bd. 36):

Wenn die rationale Differentialgleichung $\frac{dw}{dz} = f(z, w)$ keine Riccati-sche ist, so ist jedes eindeutige Integral derselben eine rationale Funktion.

Zum Beweis sind zwei von *Boutroux* herrührende Hilfssätze über das Wachstum der Integrale rationaler Differentialgleichungen bei Annäherung an singuläre Stellen notwendig. Ich verweise wegen des Beweises derselben auf die Darstellung von *Malmquist*. Der erste Hilfssatz dient zum Beweis des zweiten.

Hilfssatz I: In der Differentialgleichung

$$\frac{dw}{dz} = c_0 + c_1 w + \dots + c_n w^n \quad (n > 1, c_n \neq 0)$$

seien die c_i rationale Funktionen von z . $w(z)$ sei ein eindeutiges Integral dieser Gleichung, welches außerhalb eines gewissen Kreises $|z| > r$ außer bei $z = \infty$ keine Singularität besitzt. Dann gibt es eine Zahl μ und eine Zahl R , so daß für $|z| > R$ stets $|w(z)| > |z|^\mu$ gilt.

Hilfssatz II: In der rationalen Differentialgleichung $\frac{dw}{dz} = \frac{f_1(z, w)}{f_2(z, w)}$ habe der Zähler in w den Grad n_1 , der Nenner in w den Grad n_2 , und es sei $n_1 = n_2 + 2$. $w(z)$ sei eine eindeutige Lösung dieser Gleichung, welche für $|z| > r$ keine anderen Singularitäten als $z = \infty$ besitzt. $w_i(z)$ genüge der Gleichung $f_2(z, w) = 0$. $w_i(z)$ habe in $|z| > r$ keine andere Singularität als $z = \infty$; es sei für endliche z aus $|z| > r$ nie $w(z) = w_i(z)$. Dann gibt es zwei Zahlen τ_i und R , so daß

$$\frac{1}{|w - w_i|} < |z|^{\tau_i} \quad \text{für } |z| > R.$$

Auf Grund des Hilfssatzes II kann nun der Satz von *Malmquist* recht einfach bewiesen werden. Es sei nämlich $w(z)$ eine eindeutige Lösung der Differentialgleichung. Mit Ausnahme der festen Singularitäten der Differentialgleichung besitzt diese Funktion keine anderen Singularitäten als Pole. Trägt man nun diese Funktion in den Nenner ein, so wird $\frac{1}{f_2(z, w(z))}$ eine eindeutige Funktion von z , die nur noch an den festen Singularitäten und den Singularitäten dritter Art der Differentialgleichung singularär sein kann. Betrachten wir nämlich Stellen z , die nicht Singularitäten zweiter oder dritter Art sind. Hat dort $w(z)$ einen Pol, so ist die Regularität von $\frac{1}{f_2(z, w(z))}$ ohne weiteres klar. Ist aber dort $w(z)$ regulär, so kann $f_2(z, w)$ nicht verschwinden. Denn sonst wäre daselbst $\frac{dz}{dw} = 0$. Der Zähler kann nämlich nicht gleichzeitig verschwinden, weil dies nur an den Singularitäten dritter Art der Differentialgleichung passieren kann. Betrachten wir nun das Ver-

halten von $\frac{1}{f_2(z, w(z))}$ an einer singulären Stelle zweiter oder dritter Art z_0 der Differentialgleichung etwas näher. Man kann dort $\frac{1}{f_2}$ in eine *Laurent-Reihe* entwickeln.

$$\frac{1}{f(z, w)} = G\left(\frac{1}{z-z_0}\right) + \mathfrak{P}(z-z_0).$$

Hier ist bekanntlich $G(\mathfrak{z})$ eine ganze Funktion. Wendet man nun den zweiten Hilfssatz auf die verschiedenen Linearfaktoren des Nenners f_2 an, so schließt man leicht, daß es eine Zahl ρ gibt, derart, daß

$$\left| \frac{1}{f_2(z, w(z))} \right| < |z - z_0|^\rho$$

ist in einer gewissen Umgebung von z_0 . Daraus folgt wieder, daß für jede positive Zahl ε in einer gewissen Umgebung von z_0 die Abschätzung gilt

$$\left| G\left(\frac{1}{z-z_0}\right) \right| < |z - z_0|^{-\rho + \varepsilon}.$$

Daher gilt für die ganze Funktion $G(\mathfrak{z})$ für genügend große \mathfrak{z} die Ungleichung

$$|G(\mathfrak{z})| < \mathfrak{z}^{-\rho + \varepsilon}.$$

Daher ist $G(\mathfrak{z})$ ein Polynom. Daher hat $\frac{1}{f_2(z, w(z))}$ keine anderen Singularitäten als Pole. Und daher ist es eine rationale Funktion $\varphi(z)$. Da demnach $w(z)$ der algebraischen Gleichung

$$\frac{1}{f_2(z, w)} = \varphi(z)$$

genügt, ist $w(z)$ eine algebraische Funktion. Da sie aber eindeutig sein soll, so ist $w(z)$ rational, wie bewiesen werden sollte.

Malmquist hat in der gleichen Arbeit einen analogen Satz über rationale Differentialgleichungen mit endlich vieldeutigen Integralen bewiesen. Er ist auch damit über den Inhalt der Vermutungen und Beweisversuche *Painlevés*, dem man die Fragestellung verdankt, hinausgegangen. Dieser weitergehende Satz lautet:

Wenn eine rationale Differentialgleichung $\frac{dw}{dz} = f(z, w)$ ein endlich vieldeutiges Integral besitzt, so ist dasselbe entweder eine algebraische Funktion, oder aber man kann die Differentialgleichung durch eine Substitution der Form

$$w = \frac{\alpha_1 w^n + \alpha_2 w^{n-2} + \dots + \alpha_n}{\beta_1 w^{n-1} + \beta_2 w^{n-2} + \dots + \beta_n}$$

in eine Riccatische Gleichung

$$\frac{dw}{dz} = a_0 + a_1 w + a_2 w^2$$

überführen. In dieser sowohl wie in der Substitution sind dabei alle Koeffizienten rationale Funktionen von z .

Wegen des etwas langwierigen Beweises dieses Satzes sei auf die Originalarbeit von *Malmquist* verwiesen.

Bemerkung. Von *Hermite* rührt der folgende Satz her, den er in seinem Cours d'analyse angibt und für den auch in *Picards Traité d'analyse* ein Beweis zu finden ist (Bd. 3, S. 62). Wenn $f(z_1, z_2)$ ein Polynom ist, so ist das allgemeine Integral der Gleichung $f(w, w') = 0$ nur dann eindeutig, wenn die algebraische Kurve $f(z_1, z_2) = 0$ vom Geschlecht 0 oder 1 ist.

§ 3. Die Differentialgleichungen $\frac{dw}{dz} = \frac{Cz + Dw + \mathfrak{F}_2(z, w)}{Az + Bw + \mathfrak{F}_1(z, w)}$ in der Umgebung von $z = w = 0$.

Wir wollen wie im reellen Gebiet auf S. 75 annehmen, daß die Potenzreihen \mathfrak{F}_1 und \mathfrak{F}_2 in einer gewissen Umgebung von $z = w = 0$ für alle komplexen z und w konvergieren. Wir wollen das Verhalten der Integrale in der Nähe von $z = w = 0$ im komplexen Gebiet untersuchen und so in dieser Richtung unsere im reellen Gebiet gewonnenen Ergebnisse erweitern. Wir beschränken uns dabei — weiter reichen die zu entwickelnden Methoden noch nicht — auf den Fall, wo man durch eine lineare Transformation der z und w erreichen kann, daß $C = B = 0$ ist. Wir nehmen ferner statt der Differentialgleichung der Überschrift wieder das System

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \lambda_1 x_1 + \mathfrak{F}_1(x_1, x_2) = P_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= \lambda_2 x_2 + \mathfrak{F}_2(x_1, x_2) = P_2(x_1, x_2) \end{aligned}$$

vor. Die von *Poincaré* erdachte, von *Lindelöf* verallgemeinerte Methode beruht darauf, daß man die Schar der Lösungskurven in der Form

$$(2) \quad u(x_1, x_2) = \text{const}$$

geschrieben denkt. Dann ist u eine Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung

$$(3) \quad P_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0$$

und umgekehrt liefert jede (3) genügende Funktion u vermöge (2) Lösungskurven von (1). Es handelt sich also darum, diejenigen Integrale u von (3) zu untersuchen, welche im Ursprung verschwinden. Die Untersuchung soll für den Fall geleistet werden, daß λ_1 und λ_2 bei ihrer Deutung als Punkte in der komplexen λ -Ebene beide auf derselben Seite (nicht auf) einer passend gewählten Geraden der λ -Ebene liegen. Die Voraussetzung ist durch die anzuwendende Methode bedingt. Der Grundgedanke der Methode ist dieser. Man betrachtet an Stelle von (3) zunächst die beiden anderen Differentialgleichungen

$$(4) \quad P_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = \lambda_1 u$$

Die Diff.-Gleich. $\frac{dw}{dz} = \frac{Cz + Dw + \mathfrak{P}_2(z, w)}{Az + Bw + \mathfrak{P}_1(z, w)}$ in der Umgebung von $z = w = 0$. 109

$$(5) \quad P_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = \lambda_2 u.$$

Hat man dann ein Integral u_1 von (4) und ein Integral u_2 von (5) gefunden, so ist

$$(6) \quad u = \frac{u_2^{\frac{1}{\lambda_2}}}{u_1^{\frac{1}{\lambda_1}}}$$

ein Integral von (3).

Denn setzt man in (4) $u = u_1$ und multipliziert man (4) mit

$$\frac{1}{\lambda_1} u_1^{\lambda_1 - 1},$$

so sieht man, daß

$$U_1 = u_1^{\lambda_1}$$

der Differentialgleichung

$$(7) \quad P_1 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial U_1}{\partial x_2} = U_1$$

genügt. Ebenso findet man für

$$(8) \quad U_2 = u_2^{\lambda_2} \\ P_1 \frac{\partial U_2}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial U_2}{\partial x_2} = U_2.$$

Multipliziert man dann (7) mit U_2 und (8) mit U_1 und subtrahiert man beides voneinander, so sieht man, daß für (6) die Gleichung (3) gilt.

Wir schreiten zur Durchführung des Ansatzes. Wir suchen Integrale von (4) und (5) nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten zu bestimmen. Setzen wir also z. B. in (4) an

$$(9) \quad U = x_1 + \sum_{v_1 + v_2 = 2}^{\infty} C_{v_1 v_2} x_1^{v_1} x_2^{v_2},$$

so erhält man

$$(10) \quad \lambda_1 x_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} + \lambda_2 x_2 \frac{\partial U}{\partial x_2} - \lambda_1 U = \sum_{v_1 + v_2 = 2}^{\infty} R_{v_1 v_2} x_1^{v_1} x_2^{v_2}.$$

Hier bedeuten die $R_{v_1 v_2}$ ganze rationale Funktionen derjenigen $C_{\mu_1 \mu_2}$ für die $\mu_1 + \mu_2 < v_1 + v_2$ ist, und der Koeffizienten von \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 . Die Methode der unbestimmten Koeffizienten lehrt also, wenn man auch auf der linken Seite von (10) das (9) einträgt

$$(11) \quad (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 - \lambda_1) C_{v_1 v_2} = R_{v_1 v_2} \quad (v_1 + v_2 \geq 2).$$

Hieraus kann man rekurrent die $C_{v_1 v_2}$ bestimmen, wofern niemals

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 - \lambda_1 = 0$$

wird. In diesem Falle wird die Bestimmung unmöglich, weil die rechte Seite $R_{v_1 v_2}$ ja nicht gleichzeitig zu verschwinden braucht. Wir wollen daher nach *Lindelöf* statt (4) die Differentialgleichung

$$(12) \quad P_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = \lambda_1 u + \varphi$$

betrachten, wo

$$\varphi = \sum_{v_1 + v_2 = 2}^{\infty} \varphi_{v_1 v_2} x_1^{v_1} x_2^{v_2}$$

eine noch passende zu bestimmende Funktion bedeutet. Machen wir in (12) wieder den Ansatz (9), so erhalten wir statt (10)

$$(13) \quad \lambda_1 x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \lambda_2 x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} - \lambda_1 u = \sum_{v_1 + v_2 = 2}^{\infty} (R_{v_1 v_2} + \varphi_{v_1 v_2}) x_1^{v_1} x_2^{v_2}$$

und statt (12) kommt

$$(14) \quad (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 - \lambda_1) C_{v_1 v_2} = R_{v_1 v_2} + \varphi_{v_1 v_2} \quad (v_1 + v_2 \geq 2).$$

Nunmehr kann man stets dann, wenn

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 - \lambda_1 = 0$$

wird,

$$\varphi_{v_1 v_2} = -R_{v_1 v_2}$$

setzen und so erreichen, daß man (14) erfüllen kann. $C_{v_1 v_2}$ freilich bleibt willkürlich. Wir wollen dann stets $C_{v_1 v_2} = 0$ setzen.

Bevor wir die Konvergenz der so zu findenden Reihen untersuchen, wollen wir uns die so zu erreichenden Ergebnisse etwas näher vergegenwärtigen. Da λ_1 und λ_2 nach Voraussetzung dem Inneren einer Halbebene angehören, so kann es keine Relation

$$p_1 \lambda_1 + p_2 \lambda_2 = 0$$

geben, in der p_1 und p_2 beide nichtnegativ sind. Besteht also eine Relation $v_1 \lambda_1 + v_2 \lambda_2 - \lambda_1 = 0$, in der v_1 und v_2 nichtnegativ sind und $v_1 + v_2 \geq 2$ ist, so muß $v_1 = 0$ sein. Dann ist also

$$(15) \quad \lambda_1 = v_2 \lambda_2 \quad (v_2 \geq 2)$$

und man sieht, daß es nicht mehr als eine einzige Relation

$$v_1 \lambda_1 + v_2 \lambda_2 - \lambda_1 = 0$$

gibt und daß diese die Form (15) hat.

Stellen wir die gleichen Betrachtungen bei (5) an, so werden wir auf Relationen

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_2 \quad (v_1 + v_2 \geq 2)$$

geführt und sehen, daß es nicht mehr als eine geben kann und daß diese dann notwendig von der Form

$$(16) \quad \lambda_2 = v_1 \lambda_1 \quad (v_1 \geq 2)$$

ist. Vergleicht man (15) und (16), so sieht man, daß man höchstens bei einer der beiden Gleichungen (4) oder (5) auf eine Relation (13) oder (16) stoßen kann. Nehmen wir an, bei (4) kam keine solche Relation

Die Diff.-Gleich. $\frac{dw}{dz} = \frac{Cz + Dw + \mathfrak{B}_2(z, w)}{Az + Bw + \mathfrak{B}_1(z, w)}$ in der Umgebung von $z = w = 0$. 111

vor, so können wir hier $\varphi = 0$ nehmen und erhalten durch unsere Überlegung — sowie die Konvergenz bewiesen ist — eine Lösung u_1 von (4). Stoßen wir auch bei (5) auf keine Relation, so können wir auch dort $\varphi = 0$ nehmen und finden ein Integral von (5), kommt aber eine Relation (16) vor, so können wir

$$\varphi = K u_1^{r_1}$$

nehmen und dann K so bestimmen, daß die zu (14) analogen Gleichungen

$$(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 - \lambda_2) C_{v_1 v_2} = R_{v_1 v_2} + \varphi_{v_1 v_2}$$

stets lösbar sind. Dagegen genügt es, wenn

$$(17) \quad \lambda_2 = \mu \lambda_1$$

die Relation ist,

$$R_{\mu o} + K = 0$$

zu nehmen, also $\varphi = -R_{\mu o} u_1^{\mu}$ zu setzen.

In dem Falle, wo eine Relation (17) besteht, ist $\varphi = -R_{\mu o} u_1^{\mu}$ eine Lösung von (5), wenn u_1 eine Lösung von (4) ist. Man setze nur u_1 in (4) ein und multipliziere mit $-\mu R_{\mu o} u_1^{\mu-1}$.

Aus
$$P_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \lambda_2 \varphi$$

und
$$P_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \lambda_2 u_2$$

aber folgt, daß

$$(18) \quad u = \varphi - u_2 = u_1^{\mu} - u_2$$

der Gleichung (3) genügt. In dem Falle, wo man weder bei (4) noch bei (5) auf eine Relation stößt, ist

$$(19) \quad u = \frac{1}{u_2^{\lambda_2}} \cdot \frac{1}{u_1^{\lambda_1}}$$

eine Lösung von (3). Daher werden die Lösungen von (1) entweder

durch
$$u_2^{\lambda_2} - C u_1^{\lambda_1} = 0$$

oder durch
$$u_1^{\mu} - u_2 = C$$

in einer genügend kleinen Umgebung von $x_1 = x_2 = 0$ dargestellt.

Alles kommt also nun schließlich auf den Nachweis an, daß die Reihen, auf die wir geführt wurden, in einer gewissen Umgebung von $x_1 = x_2 = 0$ gleichmäßig konvergieren.

Ich gebe zunächst noch einmal den zu beweisenden Konvergenzsatz an.

Es werden Zahlen $C_{v_1 v_2}$ rekurrent aus den Gleichungen

$$(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 - \lambda_k) C_{v_1 v_2} = R_{v_1 v_2} + \varphi_{v_1 v_2} \quad (\lambda_1 + \lambda_2 \leq 2)$$

bestimmt. Dabei sind die $R_{v_1 v_2}$ bekannte ganze rationale Funktionen

der C_{μ_1, μ_2} und $\mu_1 + \mu_2 < \nu_1 + \nu_2$ und $\sum \varphi_{\nu_1, \nu_2} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2}$ ist eine in der Umgebung von $x_1 = x_2 = 0$ gleichmäßig konvergente Reihe, k ist 1 oder 2. Es gibt eine oder keine Wahl der ν_1, ν_2 , so daß

$$\lambda_1 \nu_1 + \lambda_2 \nu_2 - \lambda_k = 0$$

ist. Wird das aber Null, so wird auch die rechte Seite Null und wir setzen $C_{\nu_1, \nu_2} = 0$. Zu zeigen ist, daß

$$x_k + \sum_{\nu_1 + \nu_2 = 2}^{\infty} C_{\nu_1, \nu_2} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2}$$

in der Umgebung von $x_1 = x_2 = 0$ gleichmäßig konvergiert.

Besteht keine Relation

$$\nu_1 \lambda_1 + \nu_2 \lambda_2 - \lambda_k = 0,$$

so gibt es eine Zahl $\varepsilon > 0$, so daß

$$(20) \quad \left| \frac{\nu_1 \lambda_1 + \nu_2 \lambda_2 - \lambda_k}{\nu_1 + \nu_2 - 1} \right| > \varepsilon > 0$$

für $\nu_1 + \nu_2 \geq 2$. Schreibt man aber diesen Ausdruck in der Form

$$\frac{\lambda_1 \nu_1 + \nu_2 \lambda_2}{\nu_1 + \nu_2} - \frac{\lambda_k}{\nu_1 + \nu_2},$$

$$1 - \frac{1}{\nu_1 + \nu_2},$$

so sieht man, daß er für wachsende $\nu_1 + \nu_2$ sich unbegrenzt der Strecke nähert, die λ_1 mit λ_2 verbindet, und die also der eingangs genannten Halbebene angehört. Da aber der Zähler nie verschwindet, so folgt daraus die Existenz von ε . Besteht aber eine Relation

$$\nu_1 \lambda_1 + \nu_2 \lambda_2 - \lambda_k = 0,$$

bei der $\nu_1 + \nu_2 = \mu$ ist, so gilt (20) für alle $\nu_1 + \nu_2 > \mu$.

Zum Konvergenzbeweis bedienen wir uns der Majorantenmethode, indem wir die C_{ν_1, ν_2} mit gewissen Zahlen C_{ν_1, ν_2}^* vergleichen, die wir jetzt erklären wollen. Wir betrachten die Funktionen P_1^* und P_2^* , die aus P_1 und P_2 dadurch hervorgehen, daß man jeden Koeffizienten durch seinen absoluten Betrag ersetzt. Die R_{ν_1, ν_2}^* seien aus den C_{μ_1, μ_2}^* und den Koeffizienten der P_1^* und P_2^* ebenso gebildet, wie R_{ν_1, ν_2} aus den C_{μ_1, μ_2} und den Koeffizienten der P_1 und P_2 . Für $\nu_1 + \nu_2 \leq \mu$ setze man

$$C_{\nu_1, \nu_2}^* = C_{\nu_1, \nu_2}$$

und für $\nu_1 + \nu_2 > \mu$ bestimme man die C_{ν_1, ν_2} rekurrent aus

$$(21) \quad \varepsilon (\nu_1 + \nu_2 - 1) C_{\nu_1, \nu_2}^* = R_{\nu_1, \nu_2}^* + |\varphi_{\nu_1, \nu_2}|.$$

Dann ist sicher

$$C_{\nu_1, \nu_2}^* \geq |C_{\nu_1, \nu_2}|.$$

Wir betrachten dann die Reihe

$$F^* = x_k + \sum_{\nu_1 + \nu_2 = 2}^{\infty} C_{\nu_1, \nu_2}^* x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2},$$

Die Diff.-Gleich. $\frac{dw}{dz} = \frac{Cz + Dw + \mathfrak{P}_2(z, w)}{Az + Bw + \mathfrak{P}_1(z, w)}$ in der Umgebung von $z = w = 0$. 113

setzen \mathfrak{P}_1^* , \mathfrak{P}_2^* für die Potenzreihen mit Koeffizienten, die absolute Beträge der Koeffizienten von \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 sind, und haben dann nach (10) die formal richtige Gleichung

$$(22) \quad \mathfrak{P}_1^* \frac{dF^*}{dx_1} + \mathfrak{P}_2^* \frac{dF^*}{dx_2} = \sum_{r_1+r_2=2}^{\infty} R_{r_1 r_2}^* x_1^{r_1} x_2^{r_2}.$$

Formal richtig, d. h. die Koeffizienten gleicher $x_1^{r_1} x_2^{r_2}$ auf beiden Seiten stimmen überein. Die Relation (21) ist die Grundlage der Konvergenzbetrachtungen. Es mögen \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 sowie φ für $|x_1| \leq r$, $|x_2| \leq r$ absolut konvergieren. Dann sei $0 \leq t \leq r$ eine reelle Variable. Ich setze

$$F_{\varrho}^* = x_k + \sum_{r_1+r_2=2}^{\varrho} C_{r_1 r_2}^* x_1^{r_1} x_2^{r_2},$$

setze darin $x_1 = x_2 = t$ und untersuche

$$F_{\varrho+1}^* - F_{\varrho}^* = t^{\varrho+1} \sum_{r_1+r_2=\varrho+1} C_{r_1 r_2}^*$$

Wegen (21) ist für $\varrho > \mu$ und $\nu_1 + \nu_2 = \varrho + 1$

$$\varrho \varepsilon \sum C_{r_1 r_2}^* = \sum R_{r_1 r_2}^* + \sum \varphi_{\nu_1 \nu_2} \quad (\nu_1 + \nu_2 = \varrho + 1).$$

Nach (22) aber ist für positive x_1, x_2

$$\begin{aligned} \sum_{r_1+r_2=\varrho+1} R_{r_1 r_2}^* x_1^{r_1} x_2^{r_2} &< \left[\mathfrak{P}_1^* \frac{dF^*}{dx_1} + \mathfrak{P}_2^* \frac{dF^*}{dx_2} \right]_{\varrho+1} = \left[\mathfrak{P}_1^* \frac{dF_{\varrho}^*}{dx_1} + \mathfrak{P}_2^* \frac{dF_{\varrho}^*}{dx_2} \right]_{\varrho+1} \\ &< \mathfrak{P}_1^* \frac{dF_{\varrho}^*}{dx_1} + \mathfrak{P}_2^* \frac{dF_{\varrho}^*}{dx_2}. \end{aligned}$$

Also wird insbesondere für $x_1 = x_2 = r$

$$r^{\varrho+1} \sum_{r_1+r_2=\varrho+1} R_{r_1 r_2}^* < \left[\mathfrak{P}_1^* \frac{dF_{\varrho}^*}{dx_1} + \mathfrak{P}_2^* \frac{dF_{\varrho}^*}{dx_2} \right]_{x_1+x_2=r}$$

Nun sei für $x_1 = x_2 = r$

$$\mathfrak{P}_1^* < M, \quad \mathfrak{P}_2^* < M, \quad F_{\varrho}^* = M_{\varrho}.$$

Dann findet man durch Differenzieren, weil alle Koeffizienten von F_{ϱ}^* positiv sind

$$\frac{dF_{\varrho}^*}{dx_k} \Big|_{x_1=x_2=r} < \frac{\varrho M_{\varrho}}{r}.$$

Dann ist

$$\sum_{r_1+r_2=\varrho+1} R_{r_1 r_2}^* < \frac{2M \cdot M_{\varrho}}{r^{\varrho+1} \cdot r}.$$

Daher wird

$$\sum_{r_1+r_2=\varrho+1} C_{r_1 r_2}^* < \frac{2M M_{\varrho}}{r^{\varrho+1}} + \frac{\Phi}{r^{\varrho+1} \cdot \varrho \varepsilon},$$

wenn unter Φ eine geeignete positive Zahl verstanden wird.

So wird

$$F_{\varrho+1}^* - F_{\varrho}^* < \left(\frac{t}{r}\right)^{\varrho+1} M_{\varrho} \omega_{\varrho},$$

wo
$$\omega_{\varrho} = \frac{2M}{r\varepsilon} + \frac{\Phi}{M_{\varrho}\varepsilon}$$

gesetzt ist und $0 \leqq t \leqq r$ ist. Für $t = r$ folgt

$$M_{\varrho+1} < M_{\varrho} (1 + \omega_{\varrho}).$$

Weiter wird

$$F_{\varrho+2}^* - F_{\varrho+1}^* < \left(\frac{t}{r}\right)^{\varrho+2} M_{\varrho+1} \omega_{\varrho+1} < \omega_{\varrho+1} (1 + \omega_{\varrho}) M_{\varrho} \left(\frac{t}{r}\right)^{\varrho+2}.$$

Für $t = r$ wird

$$M_{\varrho+2} < (1 + \omega_{\varrho}) (1 + \omega_{\varrho+1}) M_{\varrho}.$$

Also sind für $x_1 = x_2 = t$ die Glieder der Reihe

$$F_{\varrho}^* + (F_{\varrho+1}^* - F_{\varrho}^*) \dots \dots$$

kleiner als die Glieder der Reihe

$$M_{\varrho} \left(1 + \omega_{\varrho} \left(\frac{t}{r}\right)^{\varrho+1} + (1 + \omega_{\varrho}) \omega_{\varrho+1} \left(\frac{t}{r}\right)^{\varrho+1} \dots \dots \right) \quad (0 \leqq t \leqq r).$$

Der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder ist

$$(1 + \omega_{\varrho+k}) \frac{\omega_{\varrho+k+1}}{\omega_{\varrho+k}} = \frac{t}{r}.$$

Für $k \rightarrow \infty$ aber konvergiert $\omega_{\varrho+k}$ gegen $\frac{2M}{r\varepsilon}$. Daher konvergiert unsere Reihe, sobald

$$t < \frac{r}{1 + \frac{2M}{r\varepsilon}}$$

ist. Die Reihe

$$x_k + \sum_{\nu_1 + \nu_2 = 2}^{\infty} C_{\nu_1 \nu_2} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2}$$

konvergiert also absolut und gleichmäßig, solange

$$|x_1| < \frac{r}{1 + \frac{2M}{r\varepsilon}}, \quad |x_2| < \frac{r}{1 + \frac{2M}{r\varepsilon}}$$

bleiben.

Man kann diese Betrachtungen auch auf Systeme ausdehnen. Man vgl. dazu *Lindelöf*, Sur la forme des intégrales des équations différentielles au voisinage des points singuliers. Acta soc. Sc. Fenn. Bd. 22 (1897). Wir haben uns im vorstehenden im wesentlichen an diese Arbeit angeschlossen.

Zweiter Abschnitt.

Gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

I. Kapitel.

Die Existenz der Lösungen.

§ 1. Die Methode der sukzessiven Approximationen.

Wir können uns kurz fassen, denn es handelt sich im wesentlichen um eine Übertragung des bei den Differentialgleichungen erster Ordnung Gesagten. Wir nehmen die Differentialgleichungen in der Form

$$y'' = f(x, y, y')$$

an und setzen voraus, daß $f(x, y, y')$ in einem gewissen Bereich B des (x, y, y') -Raumes eindeutig und stetig erklärt sei und stetige partielle Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y'}$$

besitze. Wir werden beweisen, daß es dann zu jeder dem Bereich angehörigen Anfangsbedingung, d. h. zu jedem Wertetripel x_0, y_0, y_0' , das als System der Koordinaten eines inneren Bereichspunktes aufgefaßt werden kann, eine und nur eine in einem gewissen Intervall $|x - x_0| < \delta$ zweimal stetig differenzierbare Lösung

$$y = y(x)$$

gibt, die für $x = x_0$ den Wert y_0 annimmt und deren Ableitung an der Stelle x_0 den Wert y_0' hat.

Man kann geometrisch den Sachverhalt auch so aussprechen: Ein gewisser Bereich der x - y -Ebene ist vorgelegt; jedem Punkt sind gewisse zulässige Richtungen zugeordnet. Das Wertetripel x, y, y' , wo x, y einem Bereichspunkt, y' einer zulässigen Richtung in diesem Punkt zugehören, werde als Koordinatentripel eines Punktes des dreidimensionalen Bereiches aufgefaßt. Diese Punkte machen einen Bereich aus, in dem $f(x, y, y')$ eindeutig und stetig erklärt ist und stetige Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}$ besitzt. Dann geht durch jeden Bereichspunkt der x - y -Ebene in jeder zulässigen Richtung genau eine Lösung.

Man faßt den Satz am besten als Spezialfall eines etwas allgemeineren über Systeme von Differentialgleichungen auf. Setzt man

nämlich $y' = z$, so ist die Gleichung zweiter Ordnung gleichbedeutend mit dem System erster Ordnung

$$\begin{aligned} z' &= f(x, y, z) \\ y' &= z \end{aligned}$$

mit zwei unbekanntenen Funktionen $y(x)$ und $z(x)$. Das allgemeinste derartige System hat die Gestalt

$$(1) \quad \begin{cases} y' = \varphi(x, y, z) \\ z' = \psi(x, y, z). \end{cases}$$

Dabei sollen $\varphi(x, y, z)$ und $\psi(x, y, z)$ in einem gewissen Bereich $K: |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b, |z - z_0| \leq c$ des x - y - z -Raumes als eindeutige und stetige Funktionen erklärt sein, welche stetige partielle Ableitungen erster Ordnung nach y und z besitzen. Da man

$$y = y(x) \quad \text{und} \quad z = z(x)$$

als die Gleichungen einer Raumkurve auffassen kann, so lautet der hier zu beweisende Satz so, daß *durch jeden Punkt des Bereiches K genau eine Lösungskurve des Systems (1) geht.*

Der Beweis kann wie auf S. 26ff. nach der Methode der sukzessiven Approximationen erbracht werden. Nur eines sei hervorgehoben. Alle Überlegungen sind daran gebunden, daß die bei dem Verfahren gewonnenen Näherungsfunktionen stets Kurven aus dem Bereich K darstellen. Denn sonst würde das Einsetzen in die Funktionen φ, ψ nicht möglich sein, da diese nur im Bereich K zur Verfügung stehen. Offenbar ist dazu nur zu fordern, daß die Funktionen $|y_n(x) - y_0|$ und $|z_n(x) - z_0|$ nicht zu groß werden. Wegen der wieder geltenden Ungleichungen der Form

$$\begin{aligned} |y_n(x) - y_0| &< M |x - x_0| \\ |z_n(x) - z_0| &< M |x - x_0| \end{aligned}$$

ist aber dazu nur zu verlangen, daß das Intervall $|x - x_0|$ nicht zu groß wird.

Wenn also z. B. $\varphi(x, y, z)$ und $\psi(x, y, z)$ im Bereich $a \leq x \leq b$ für beliebige y und z stetig differenzierbar sind, so entfallen diese Bedingungen und das Verfahren der sukzessiven Approximationen konvergiert im ganzen Intervall $a \leq x \leq b$. In diesem ganzen Intervall sind also $y(x)$ und $z(x)$ stetige Funktionen. Wenn $f(x, y, y')$ eine analytische Funktion ist, so kann der Satz dahin ergänzt werden, daß auch die Lösungen analytisch sind. Die Durchführung der Beweise sei dem Leser als nützliche Übung überlassen.

Auch die früher bewiesenen Sätze über die stetige Abhängigkeit der Lösungen von den Anfangsbedingungen und vom Parameter lassen sich ohne weiteres übertragen.

§ 2. Geometrische Veranschaulichung.

Ähnlich wie Differentialgleichungen erster Ordnung kann man auch Differentialgleichungen zweiter Ordnung geometrisch veranschaulichen. Jeder Gleichung zweiter Ordnung entspricht ein *Krümmungsfeld*. Denn die Gleichung ordnet jedem Linienelement x, y, y' den Wert $f(x, y, y')$ für die zweite Ableitung y'' zu. Dadurch ist aber der Krümmungskreis der Integralkurve bestimmt. Die Differentialgeometrie lehrt ja, daß

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{1 + y'^2} \cdot \frac{1}{y''} \\ \xi &= x - \frac{1 + y'^2}{y''} \cdot y' \\ \eta &= y + \frac{1 + y'^2}{y''} \end{aligned}$$

den Krümmungsradius und den Krümmungsmittelpunkt festlegen. Man kann sich hiernach näherungsweise die Konstruktion einer Integralkurve so denken: Man fixiere zunächst das Anfangelement, also Anfangspunkt und Anfangsrichtung. Alsdann bestimme man den zugehörigen Krümmungskreis und gehe auf demselben ein Stück weiter. Man halte an und bestimme zu der letzten Kreisrichtung den neuen zugehörigen Krümmungskreis und gehe auf diesem ein Stück weiter usw.

Man hat also nun nicht mehr nur eine Anfangsbedingung nötig, um eine Lösung festzulegen, sondern deren zwei. Es genügt nicht, den Anfangspunkt zu kennen, es muß auch die Anfangsrichtung in diesem Punkt gegeben sein, um die Lösung festzulegen. Die Lösungen bilden also eine zweiparametrische Schar von Kurven. Als Parameter können die zu einer bestimmten Abszisse x gehörigen Ordinaten und ersten Ableitungen angesehen werden.

Man überzeugt sich leicht, daß auch umgekehrt jede zweiparametrische Kurvenschar unter den nötigen Differenzierbarkeitsbedingungen als Lösungsschar einer Differentialgleichung 2. Ordnung aufgefaßt werden kann. Denn aus der Schargleichung

$$\varphi(x, y, a, b) = 0$$

und den abgeleiteten Gleichungen

$$\begin{aligned} \varphi_x + \varphi_y y' &= 0, \\ \varphi_{xx} + 2\varphi_{xy} y' + \varphi_{yy} y'^2 + \varphi_y y'' &= 0 \end{aligned}$$

wird man im allgemeinen a und b eliminieren können und dadurch eine Differentialgleichung 2. Ordnung erhalten.

Eine hübsche Bemerkung ist es, daß man die vorhin gegebene geometrische Deutung manchmal zur vollen Integration einer Differentialgleichung ausbeuten kann. Ich will das am Beispiel

$$y'' = 2 \frac{(1 + y'^2)(xy' - y)}{x^2 + y^2}$$

kurz darlegen. Man findet für den zum Linienelement x_0, y_0, y_0' gehörigen Krümmungsmittelpunkt die Koordinaten

$$\xi = \frac{(x_0^2 - y_0^2) y_0' - 2x_0 y_0}{2(x_0 y_0' - y_0)},$$

$$\eta = \frac{x_0^2 - y_0^2 + 2x_0 y_0 y_0'}{2(x_0 y_0' - y_0)}.$$

Eliminiert man y_0' , so hat man die Gleichung des Ortes der Krümmungsmittelpunkte aller zum Punkt x_0, y_0 gehörigen Linienelemente. Man findet die gerade Linie

$$2\xi x_0 + 2\eta y_0 = x_0^2 + y_0^2.$$

Sie ist die Mittelsenkrechte der Strecke vom Ursprung nach dem Punkt x_0, y_0 . Daher sind die Krümmungskreise die Kreise durch den Ursprung und durch x_0, y_0 . Da für jedes Linienelement eines solchen Kreises die gleiche Konstruktion gilt, so besteht er aus lauter Krümmungselementen der Differentialgleichung und daher ist jeder dieser Kreise eine Integralkurve. So erkennt man, daß die Integralcurven aus der Gesamtheit der Kreise durch den Ursprung bestehen. Ihre Gleichung ist

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2.$$

Man verifiziert leicht nachträglich durch Rechnung die Richtigkeit dieses Resultates.

Nun zu den Systemen von zwei Gleichungen mit zwei unbekanntem Funktionen. Seien also die rechten Seiten des Systems

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y, z), \quad \frac{dz}{dx} = \psi(x, y, z)$$

in einem Bereich eindeutig, stetig und stetig differenzierbar erklärt. Jedem Punkt ist dann eine Richtung zugeordnet und die Integrale sind geometrisch als Raumkurven zu deuten, die jeden Punkt in der dort vorgeschriebenen Richtung passieren. Die Grund- und Aufrißmethode der darstellenden Geometrie gibt leicht die Mittel zur näherungsweise Konstruktion der Integralkurven an die Hand: Man geht vom Anfangspunkt aus ein Stückchen in der dort vorgeschriebenen Richtung weiter, im so erreichten Punkt geht man zu der dort vorgeschriebenen Richtung über und verfolgt sie ein Stückchen usw.

Will man im Reellen — nur davon ist bei diesen Konstruktionen die Rede — die Genauigkeit dieser Näherungen prüfen, so muß man sich wieder an die Darlegungen des vorigen Paragraphen erinnern. Denn betrachten wir z. B. noch einmal die Gleichungen 2. Ordnung. Unsere Näherungsmethode läuft dann darauf hinaus, längs der einzelnen Kreisbogen des zur Näherung benutzten Kreisbogenpolygones y'' konstant zu nehmen. Kennt man also die Schwankung von $f(x, y, z)$ längs des Polygons, so läuft unsere Näherung darauf hinaus, das gegebene System

$$\frac{dz}{dx} = f(x, y, z), \quad \frac{dy}{dx} = z$$

durch ein System

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx} &= f(x, y, z) + A(x, y, z), \\ \frac{dy}{dx} &= z\end{aligned}$$

zu ersetzen, in dem $A(x, y, z)$ dem Betrag nach nicht größer ist als die erwähnte Maximalschwankung. Daher kann man wie S. 36 an Hand der Methode der sukzessiven Approximationen die Güte der Näherung abschätzen.

Ähnlich kann man bei der für Systeme angegebenen Näherung vorgehen. Hier sind die Näherungen geradlinige Polygone des x - y - z -Raumes und längs jeder Polygonseite nehmen wir statt des vorgeschriebenen Feldes die durch die Polygonseiten bestimmten Konstanten $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$. Für das Näherungsfeld gilt also

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \varphi(x, y, z) + A(x, y, z), \\ \frac{dz}{dx} &= \psi(x, y, z) + B(x, y, z)\end{aligned}$$

Hier können A und B dem Betrag nach die Schwankung der Funktionen φ und ψ längs der Seiten des Näherungspolygons nicht übertreffen. Damit werden die früheren Methoden wieder anwendbar, um den Unterschied zwischen Lösung und Näherung abzuschätzen.

II. Kapitel.

Elementare Integrationsmethoden.

§ 1. Einige Typen von Differentialgleichungen.

Bei der Gleichung

$$y'' = f(y)$$

ermöglicht ein kleiner Kunstgriff leicht die Integration. Multipliziert man nämlich die Gleichung mit y' , so hat man

$$y' y'' = y' f(y).$$

Integriert man beide Seiten nach x , so erhält man

$$\frac{1}{2} y'^2 = \int f(y) dy + h$$

und das ist dann eine durch Trennung der Variablen zu behandelnde Differentialgleichung 1. Ordnung

Auch

$$(1) \quad y'' = f(y')$$

läßt sich elementar integrieren. Man führt $y' = p$ als neue unbekannte Funktion ein und reduziert damit die Gleichung auf eine der 1. Ordnung:

$$p' = f(p).$$

Das liefert sofort

$$(2) \quad x = \int \frac{d\phi}{f(\phi)}.$$

Um nun aber weiter zu integrieren, müßte man erst nach ϕ auflösen. Daher ist es besser, ϕ als Parameter aufzufassen. Dann hat man ja durch (2) schon x in Parameterdarstellung. Um das noch fehlende y zu bekommen, geht man von

$$\frac{dy}{d\phi} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{d\phi} = \phi \cdot \frac{1}{f(\phi)}$$

aus und findet

$$(3) \quad y = \int \frac{\phi}{f(\phi)} d\phi.$$

(2) und (3) stellen, wie man leicht verifiziert, in jedem Stetigkeitsintervall von $f(\phi)$, in dem $f(\phi) \neq 0$, eine Lösung von (1) dar.

Auch die allgemeineren Gleichungen

$$f(x, y', y'') = 0$$

werden durch die Einführung von $y' = \phi$ sofort auf Gleichungen 1. Ordnung zurückgeführt:

$$f(x, \phi, \phi') = 0.$$

An

$$f(y'', y', y) = 0$$

kommt man durch Vertauschung von x und y heran. Dadurch wird die Gleichung zu

$$f\left(\frac{-x''}{(x')^3}, \frac{1}{x'}, y\right) = 0,$$

ein Typus, von dem gerade die Rede war.

Bei

$$f\left(x, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}\right) = 0$$

führt der Ansatz

$$\frac{y'}{y} = u$$

zum Ziel. Man hat dann

$$\begin{aligned} y' &= uy \\ y'' &= uy' + u'y = u'y + u^2y. \end{aligned}$$

Trägt man dies in die Gleichung ein, so wird sie

$$f(x, u, u^2 + u') = 0.$$

Diese letzte Gleichung zusammen mit

$$y' = uy$$

ist mit der gegebenen Gleichung gleichwertig.

§ 2. Die Differentialgleichung der Kettenlinie.

Diese Differentialgleichung gehört zwar zu den schon im vorigen Paragraphen behandelten Typen. Wir wollen aber an ihrem Beispiel erkennen, daß es häufig schwieriger ist, die Integrationskonstanten so zu bestimmen, daß den gegebenen Anfangsbedingungen genügt wird, als alle Lösungen der Differentialgleichung zu finden. Gerade diese Fragen stehen bei den Gleichungen zweiter Ordnung im Vordergrund des Interesses. Es ist nur ein ganz spezieller Fall der Randwertaufgaben, d. i. der Bestimmung der Integrationskonstanten aus gegebenen Bedingungen, wenn man diejenige Lösung verlangt, welche für $x = x_0$ den Wert y_0 und deren Ableitung daselbst den Wert y'_0 annimmt. Bei der Aufgabe der Kettenlinie handelt es sich darum, die Gestalt einer Kette von gegebener Länge zu bestimmen, die zwischen zwei gegebenen Punkten aufgespannt ist. In mathematischer Formulierung besagt dies: man soll diejenige Lösung von

$$y'' = \lambda \sqrt{1 + y'^2}$$

finden, welche für $x = x_0$ den Wert y_0 und für $x = x_1$ den Wert y_1 hat und deren zwischen diesen beiden Punkten (x_0, y_0) und (x_1, y_1) gelegener Bogen die Länge L hat. Es scheint auffällig, daß man drei Bedingungen an die zwei Integrationskonstanten stellen kann. Man sollte meinen, daß die beiden Bedingungen, die darin liegen, daß die Kettenlinie durch zwei gegebene Punkte gehen soll, schon zur Bestimmung der beiden Integrationskonstanten ausreichen. Wie sich dieser scheinbare Widerspruch aufklärt, wird sich bald zeigen. Trägt man $y' = p$ in die Gleichung ein, so hat man

$$p' = \lambda \sqrt{1 + p^2}$$

zu integrieren. Das liefert¹⁾

¹⁾ Dabei ist in bekannter Weise der hyperbolische Kosinus durch

$$\text{Cof } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cos ix \quad (i = \sqrt{-1}),$$

der hyperbolische Sinus durch

$$\text{Sin } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = -i \sin ix$$

erklärt. Daraus ergibt sich $\text{Cof}^2 x - \text{Sin}^2 x = 1$

und $\frac{d \text{Cof } x}{dx} = \text{Sin } x$ und $\frac{d \text{Sin } x}{dx} = \text{Cof } x$.

Die Umkehrfunktionen sind

$$\text{Ar Cof } x \quad \text{und} \quad \text{Ar Sin } x.$$

Für sie findet man in bekannter Weise

$$\frac{d \text{Ar Cof } x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad \text{und} \quad \frac{d \text{Ar Sin } x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Mit Hilfe der oben angegebenen Beziehungen zu den trigonometrischen Funktionen lassen sich leicht die goniometrischen Formeln übertragen, die wir im Text zum Teil benutzen werden.

$$x = \frac{1}{\lambda} \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} p + h_1.$$

Daraus folgt

$$y' = p = \operatorname{Sin} (x - h_1) \lambda.$$

Nochmalige Integration liefert also

$$y = \frac{1}{\lambda} \operatorname{Cos} (x - h_1) \lambda + h_2.$$

Nun wird die Länge des Kettenlinienstückes zwischen x_0 und x_1

$$\begin{aligned} L &= \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx = \frac{1}{\lambda} \int_{x_0}^{x_1} y'' dx = \frac{1}{\lambda} (\operatorname{Sin} (x_1 - h_1) \lambda - \operatorname{Sin} (x_0 - h_1) \lambda) \\ &= \frac{2}{\lambda} \operatorname{Cos} \left(\frac{x_0 + x_1 - 2h_1}{2} \lambda \right) \operatorname{Sin} \left(\frac{x_1 - x_0}{2} \lambda \right). \end{aligned}$$

Also haben wir die Bedingung

$$(1) \quad L = \frac{2}{\lambda} \operatorname{Cos} \left(\frac{x_0 + x_1 - 2h_1}{2} \lambda \right) \operatorname{Sin} \left(\frac{x_1 - x_0}{2} \lambda \right).$$

Ferner aber haben wir die beiden „Randbedingungen“ für Intervallanfang und -ende:

$$y_0 = \frac{1}{\lambda} \operatorname{Cos} (x_0 - h_1) \lambda + h_2,$$

$$y_1 = \frac{1}{\lambda} \operatorname{Cos} (x_1 - h_1) \lambda + h_2.$$

Subtraktion beider liefert

$$(2) \quad y_1 - y_0 = \frac{2}{\lambda} \operatorname{Sin} \left(\frac{x_0 + x_1 - 2h_1}{2} \lambda \right) \operatorname{Sin} \left(\frac{x_1 - x_0}{2} \lambda \right).$$

Die beiden Bedingungen (1) und (2) müßten also für die eine Integrationskonstante h_1 bestehen. Es erscheint ausgeschlossen, daß man h_1 diesen beiden Forderungen gemäß wählen kann. Vielmehr muß man auch noch den Koeffizienten λ der Differentialgleichung als unbestimmt ansehen. Dann wird sich zeigen, daß man h_1 und λ so wählen kann, daß die beiden Gleichungen (1) und (2) erfüllt sind. Das hat physikalisch einen wohl bestimmten Sinn, denn der Koeffizient λ ist gleich dem Quotienten aus dem Gewicht der Ketteneinheit und der Horizontalkomponente der Kettenspannung. Diese letztere hängt aber von der Kettenlänge, und damit von den Randbedingungen ab in einer Art und Weise, die eben erst nach Integration der Differentialgleichung in der nun gleich anzugebenden Weise ausfindig gemacht werden kann. Ich eliminiere zunächst h_1 aus (1) und (2), indem ich beide quadriere und subtrahiere. Das liefert

$$L^2 - (y_1 - y_0)^2 = \frac{4}{\lambda^2} \operatorname{Sin}^2 \left(\frac{x_1 - x_0}{2} \lambda \right)$$

oder

$$\frac{\operatorname{Sin} \frac{x_1 - x_0}{2} \lambda}{\frac{x_1 - x_0}{2} \lambda} = \frac{\sqrt{L^2 - (y_1 - y_0)^2}}{x_1 - x_0}.$$

Setze ich

$$\frac{x_1 - x_0}{2} \lambda = \xi \quad \text{und} \quad \frac{\sqrt{L^2 - (y_1 - y_0)^2}}{x_1 - x_0} = \alpha,$$

so habe ich die Gleichung

$$\frac{\text{Sin } \xi}{\xi} = \alpha$$

nach ξ aufzulösen. Das liefert mir den Wert von λ . Die Auflösung geschieht graphisch oder mit Hilfe einer hyperbolischen Sinustafel¹⁾.

Man sieht sofort, daß das wegen $x_1 > x_0$ und nach der physikalischen Bedeutung von λ notwendig positive ξ durch α eindeutig bestimmt ist. Somit ist auch der Parameter λ durch die Seillänge und die Intervalllänge eindeutig festgelegt. Kennt man erst einmal λ , so bietet ersichtlich die Bestimmung zunächst von h_1 aus (2) und dann von h_2 mit Hilfe von Tafeln keine wesentlichen Schwierigkeiten. Es mag auffallen, daß nur für $\alpha > 1$ sich Gerade $\eta = \alpha\xi$ und Sinuskurve $\eta = \text{Sin } \xi$ außerhalb des Nullpunktes schneiden, denn diese geht unter 45 Grad durch den Nullpunkt. Der innere Grund hierfür liegt darin, daß doch sicher die Seillänge größer sein muß als der Abstand der beiden durch das Seil zu verbindenden Punkte. Der Quotient beider Längen ist aber gerade α .

Man überzeugt sich übrigens leicht durch geometrische Betrachtungen, daß für jeden Wert des Parameters λ genau eine Kettenlinie von passender Länge durch die beiden gegebenen Punkte geht. Denn alle Kettenlinien gehen, wie ein Blick auf ihre Gleichung zeigt, bei festem λ durch Parallelverschiebungen auseinander hervor. Man erhält also alle Lösungen durch einen der beiden Punkte, wenn man eine Kettenlinie an diesem Punkt entlang schiebt. Dann nimmt sie aber ein einziges Mal eine Lage an, bei der sie auch durch den anderen Punkt geht.

§ 3. Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Diese haben die Gestalt

$$(1) \quad y'' + g y' + h y = f(x).$$

Dabei sind g und h Konstanten, $f(x)$ irgend eine in einem gegebenen Intervall stetige Funktion. Wenn dieselbe identisch Null ist, so haben wir es mit der *homogenen* Gleichung

$$(2) \quad y'' + g y' + h y = 0$$

zu tun. Wenn $f(x)$ nicht identisch Null ist, so nennt man (1) eine *inhomogene* Gleichung. Wir beschäftigen uns zunächst mit der homogenen.

¹⁾ Z. B. *Jahnke-Emde*: Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. Leipzig 1909.

Man kann sie stets auf die Gestalt

$$(3) \quad y'' + cy = 0$$

bringen und dann nach der allgemeinen Methode von S. 119 weiter behandeln. c ist dabei wieder eine Konstante. Ich will auf diese Transformation erst mit ein paar Worten eingehen, obwohl das nicht die eigentliche Methode zur Behandlung der linearen Differentialgleichungen ist.

Man kann jede¹⁾ lineare Differentialgleichung

$$(3) \quad y'' + \varphi_1(x)y' + \varphi_0(x)y = f(x)$$

durch die Substitution

$$y = u \cdot v$$

mit passend gewähltem u auf die Gestalt

$$v'' + \varphi(x) \cdot v = f(x)$$

bringen. Macht man nämlich in der Gleichung (3) den Ansatz $y = u \cdot v$, so wird sie zunächst

$$v'' \cdot u + v' \{2u' + \varphi_1(x)u\} + v \{u'' + \varphi_1(x)u' + \varphi_0(x)u\} = f(x).$$

Bestimmt man dann u aus

$$2u' + \varphi_1(x)u = 0,$$

so wird die Gleichung

$$v'' \cdot u + v \{u'' + \varphi_1(x)u' + \varphi_0(x)u\} = f(x)$$

oder ausführlicher

$$v'' + v \left[\varphi_0(x) - \frac{1}{4} (\varphi_1^2 + 2\varphi_1') \right] = f(x) \frac{1}{u}.$$

Wenn aber namentlich $\varphi_1 = g$ und $\varphi_0 = h$ konstant sind, so wird hieraus

$$v'' + \left(h - \frac{g^2}{4} \right) v = f(x) e^{\frac{g}{2}x}.$$

Das ist eine Gleichung mit konstanten Koeffizienten.

Indessen mag es dem Leser überlassen bleiben, diese Integrationsmethode zu Ende zu führen. Hier möchte ich lieber ein anderes Verfahren zur Darstellung bringen. Es beruht darauf, daß man den Ansatz

$$y = e^{rx} \quad (r \text{ konstant})$$

in der Differentialgleichung (1) macht. Das möge zunächst an

$$(4) \quad y'' + cy = 0$$

auseinandergesetzt werden. Unser Ansatz führt hier auf

$$e^{rx} (r^2 + c) = 0,$$

¹⁾ Die Anwendbarkeit der Methode ist an die Bedingung geknüpft, daß $\varphi_1'(x)$ stetig ist. Der S. 115 angeführte Existenzsatz verlangt freilich nur, daß $\varphi_0(x)$ und $\varphi_1(x)$ sowie $f(x)$ in einem Intervall stetig sind, so daß sich also die hier zu schildernde Methode nur auf einen Spezialfall bezieht.

unterdrückt man den nirgends verschwindenden Faktor e^{rx} , so hat man die quadratische Gleichung $r^2 - c = 0$

für r . Man bekommt so also die beiden Lösungen

$$y_1 = e^{\sqrt{-c}x},$$

$$y_2 = e^{-\sqrt{-c}x}.$$

Scheinbar ist damit nun nicht viel gewonnen. Denn wir haben zwei ganz spezielle Lösungen gefunden. Unser eigentliches Ziel aber ist es doch, die allgemeine Lösung zu finden, die zwei willkürliche Integrationskonstanten enthält. Denn erst dann kann man diese Konstanten so zu bestimmen suchen, daß die Lösung zwei vorgebbaren Anfangsbedingungen genügt, daß sie also z. B. einen gegebenen Punkt in gegebener Richtung passiert, daß für sie also $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'$ ist.

Da setzt aber wieder eine ganz *allgemeine Eigenschaft aller linearen homogenen Differentialgleichungen* ein. Ist nämlich $y(x)$ Lösung irgendeiner linearen homogenen Differentialgleichung, so ist auch jedes konstante Multiplum $Y(x) = \gamma y(x)$ derselben eine Lösung. Denn es wird ja

$$Y'' + \varphi_1(x)Y' + \varphi_0(x)Y = \gamma(y'' + \varphi_1(x)y' + \varphi_0(x)y) = 0.$$

Ebenso ist die Summe zweier Lösungen y_1 und y_2 wieder Lösung. Denn es ist ja

$$(y_1 + y_2)'' + \varphi_1(x)(y_1 + y_2)' + \varphi_0(x)(y_1 + y_2)$$

$$= (y_1'' + \varphi_1(x)y_1' + \varphi_0(x)y_1) + (y_2'' + \varphi_1(x)y_2' + \varphi_0(x)y_2) = 0.$$

Wenn wir dies auf Gleichung (3) anwenden, so wird

$$y = c_1 e^{\sqrt{-c}x} + c_2 e^{-\sqrt{-c}x}$$

gleichfalls Lösung der linearen Differentialgleichung

$$y'' + cy = 0.$$

Dabei sind c_1 und c_2 zwei willkürliche Konstanten. Damit haben wir nun in der Tat die allgemeine Lösung gefunden. Denn man sieht leicht ein, daß man c_1 und c_2 so bestimmen kann, daß sowohl die Lösung wie ihre Ableitung für $x = x_0$ gegebene Werte annehmen. Dazu sind ja nur die beiden Gleichungen

$$y_0 = c_1 e^{\sqrt{-c}x_0} + c_2 e^{-\sqrt{-c}x_0},$$

$$y_0' = c_1 \sqrt{-c} e^{\sqrt{-c}x_0} - c_2 \sqrt{-c} e^{-\sqrt{-c}x_0}$$

nach c_1 und c_2 aufzulösen. Man erkennt aber sofort, daß dies stets möglich ist, wenn nur c nicht verschwindet. Das sei also vorausgesetzt. Wir haben also tatsächlich die allgemeine Lösung unserer Differentialgleichung gefunden. Wir wollen sie uns noch etwas näher ansehen. Wir gehen zunächst auf den Umstand ein, daß sie nicht stets in reeller Gestalt auftritt. Sie besitzt nur dann reelle Gestalt, wenn $c < 0$ ist.

Wenn aber $c > 0$ ist, so haben wir z. B. in

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = \cos \sqrt{c}x$$

und

$$\frac{y_1 - y_2}{2i} = \sin \sqrt{c}x$$

zwei reelle Lösungen und in

$$y = c_1 \cos \sqrt{c}x + c_2 \sin \sqrt{c}x$$

eine zweiparametrische Schar von solchen, wenn wir nur den c_1 und c_2 beliebige reelle Werte beilegen. Daß dies dann wieder die allgemeine Lösung ist, ergibt sich natürlich schon aus den vorigen Darlegungen, kann aber auch leicht noch einmal nachgeprüft werden.

Ich will lieber gleich für die *allgemeine lineare homogene Differentialgleichung* die Frage behandeln, wann zwei spezielle Lösungen y_1 und y_2 ein *Fundamentalsystem* bilden, d. h. wann man alle Lösungen durch lineare Kombination derselben darstellen kann. Es wird sich ergeben, daß dies dann und nur dann der Fall ist, wenn ihr Quotient nicht konstant ist. Jedenfalls darf dann keine derselben identisch verschwinden. Um das einzusehen, haben wir nur zu fragen, wann die beiden Gleichungen

$$y_0 = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0),$$

$$y_0' = c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0)$$

für beliebige x_0 , y_0 und y_0' nach c_1 und c_2 auflösbar sind. Man erkennt sofort in

$$y_2' y_1 - y_1' y_2 \neq 0$$

die notwendige und hinreichende Bedingung¹⁾. Dann ist aber sicher nicht der Quotient $\frac{y_1}{y_2}$ konstant. Denn aus

$$y_1 = c y_2$$

folgt

$$y_1' = c y_2',$$

und das zieht

$$y_2' y_1 - y_1' y_2 = 0$$

nach sich. Umgekehrt folgt aus

$$y_2' y_1 - y_1' y_2 = 0$$

in jedem Intervall, in dem weder y_1 noch y_2 verschwinden, daß

$$\frac{y_1'}{y_1} = \frac{y_2'}{y_2},$$

¹⁾ Ist diese Bedingung an irgendeiner Stelle x_0 erfüllt, so ist sie aus Stetigkeitsgründen auch gleich in einem diese Stelle umgebenden Intervall erfüllt. Überdies lehrt Formel (5) von S. 128, daß sie dann sogar in dem diese Stelle enthaltenden Stetigkeitsintervall von $\varphi_1(x)$ überall erfüllt ist. (Vgl. S. 146.)

also daß

$$\log y_1 = \log y_2 + \log c$$

oder daß

$$y_1 = c y_2$$

ist. Beim Übergang über eine Nullstelle x_0 von y_1 oder y_2 kann aber diese Konstante sich nicht ändern, weil doch die Ableitungen y_1' und y_2' in x_0 stetig und von Null verschieden sind¹⁾.

Wenden wir dies allgemeine Ergebnis auf unseren speziellen Fall an, so sehen wir sofort, daß

$$\cos \sqrt{c}x \quad \text{und} \quad \sin \sqrt{c}x$$

ein Fundamentalsystem bilden.

Man erkennt bei *konstantem* c einen wesentlichen Unterschied der Lösungen für $c < 0$ und für $c > 0$ darin, daß im zweiten Fall periodische Funktionen mit der Periode $\frac{2\pi}{\sqrt{c}}$ herauskommen, während im ersten Fall die Lösungen keine reelle Periode besitzen. Die Frage nach Lösungen durch zwei gegebene Punkte soll später behandelt werden. Jetzt wollen wir erst die Frage nach den allgemeinen Lösungen bei den übrigen Gleichungen mit konstanten Koeffizienten weiter behandeln.

Die Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + g y' + h y = 0$$

läßt sich wieder mit dem Ansatz $y = e^{rx}$ integrieren. Er führt auf die quadratische Gleichung

$$r^2 + g r + h = 0.$$

Wenn dieselbe zwei reelle verschiedene Lösungen r_1 und r_2 hat, so ist

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

die allgemeine Lösung. Wenn aber $g^2 - 4h < 0$ ist, so geht man im Interesse der Realität der Lösungen besser zu den trigonometrischen Funktionen über. Dann hat man in

$$y = e^{-\frac{g}{2}x} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{4h - g^2}}{2} x + c_2 \sin \frac{\sqrt{4h - g^2}}{2} x \right)$$

die allgemeine Lösung

Wenn aber $4h - g^2 = 0$ ist, so hat die quadratische Gleichung nur eine Wurzel und man bekommt nur eine Lösung der Differentialgleichung und hat also auch kein Fundamentalsystem. Man kann

natürlich sofort verifizieren, daß in diesem Falle neben $e^{-\frac{g}{2}x}$ auch

$$x e^{-\frac{g}{2}x}$$

¹⁾ Sonst wäre nämlich die durch $y(x_0) = y'(x_0) = 0$ bestimmte Lösung identisch Null. S. 151 wird ausdrücklich bewiesen werden, daß in einem Intervall, wo die Koeffizienten der Differentialgleichung stetig differenzierbar sind, die Nullstellen der Lösungen keinen Häufungspunkt besitzen können.

eine Lösung ist. Aber es ist wohl angemessener, einen systematischen Weg zu kennen, der zu dieser Lösung hinführt. Den gibt es in der Tat. *Die Kenntnis einer speziellen Lösung erlaubt es nämlich stets, eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung auf eine erster Ordnung zurückzuführen.* Ich will dies bei dieser Gelegenheit darlegen. Wenn nämlich y_1 eine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + \varphi_1(x)y' + \varphi_0(x)y = 0$$

ist, so hat man

$$y_1'' + \varphi_1(x)y_1' + \varphi_0(x)y_1 = 0.$$

Eliminiert man aus diesen beiden Gleichungen $\varphi_0(x)$, so findet man

$$y''y_1 - y_1''y + \varphi_1(x)(y'y_1 - y_1'y) = 0$$

oder

$$\varphi_1(x) = -\frac{d}{dx} \log(y'y_1 - y_1'y).$$

Also gilt für jedes Lösungspaar y, y_1

$$(5) \quad y'y_1 - yy_1' = \gamma \cdot e^{-\int \varphi_1(x) dx},$$

wo unter γ eine geeignete Konstante verstanden ist. Das ist aber eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung zur Bestimmung von $y(x)$.

Man kann die Zurückführung auf eine Gleichung erster Ordnung auch noch in anderer Weise bewerkstelligen. Man bezeichne wieder mit y_1 eine schon bekannte Lösung und gehe mit dem Ansatz

$$y = y_1 \cdot v$$

in die Differentialgleichung hinein. Dann findet man wieder

$$\underline{y_1''}v + 2\underline{y_1'}v' + \underline{y_1}v'' + \underline{\varphi_1 y_1'}v + \underline{\varphi_1 y_1}v' + \underline{\varphi_0 y_1}v = 0.$$

Da aber y_1 der Differentialgleichung genügt, so wird daraus

$$y_1 v'' + (2y_1' + \varphi_1 y_1)v' = 0.$$

Setzt man noch $v' = u$, so hat man

$$u' + u \left(2 \frac{y_1'}{y_1} + \varphi_1 \right) = 0$$

und

$$y = y_1 \cdot \int u dx.$$

Die Anwendung auf unser konkretes Beispiel konstanter Koeffizienten sei dem Leser überlassen. Doch sei bemerkt, daß man hier auch durch einen Grenzübergang zur anderen Lösung gelangen kann. Wenn nämlich die charakteristische Gleichung

$$r^2 + gr + h = 0$$

von

$$y'' + gy' + hy = 0$$

zwei verschiedene Lösungen etwa ϱ und $\varrho + h$ hat, so ist auch

$$\frac{e^{(\varrho+h)x} - e^{\varrho x}}{h}$$

eine Lösung der Differentialgleichung. Geht man aber zu $h \rightarrow 0$ über, so wird hieraus gerade

$$x e^{ax} = x e^{-\frac{g}{2}x}.$$

Auch dies führt zu der neuen Lösung hin. Jetzt ist also

$$y = e^{-\frac{g}{2}x} (a + bx)$$

mit konstanten a und b das allgemeine Integral.

Ich gehe nun zur *inhomogenen Gleichung* über. Es gibt eine auf beliebige lineare Gleichungen zweiter Ordnung anwendbare Methode, die *Variation der Konstanten*, welche stets die Integration der inhomogenen Gleichung erlaubt, wenn man ein Fundamentalsystem der homogenen kennt. Die Lösung der inhomogenen kann dann auf zwei Quadraturen zurückgeführt werden. Sei die Differentialgleichung

$$y'' + \varphi_1(x)y' + \varphi_0(x)y = f(x)$$

und sei $y_1(x)$, $y_2(x)$ ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Gleichung. Dann gehe ich mit dem Ansatz

$$y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$$

in die inhomogene Gleichung hinein. Diese wird dann

$$\begin{aligned} & c_1''y_1 + c_2''y_2 + 2c_1'y_1' + 2c_2'y_2' + \underline{c_1'y_1'' + c_2'y_2''} \\ & + \underline{\varphi_1 c_1'y_1 + \varphi_1 c_2'y_2} + \underline{\varphi_1 c_1 y_1' + \varphi_1 c_2 y_2'} \\ & + \underline{\varphi_0 c_1 y_1 + \varphi_0 c_2 y_2} = f(x). \end{aligned}$$

Die unterstrichenen Glieder ergeben zusammen natürlich Null. Dann fordere ich weiter¹⁾

$$(6) \quad c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0.$$

Dann ist auch

$$c_1''y_1 + c_2''y_2 + c_1'y_1' + c_2'y_2' = 0$$

1) Dieser Ansatz mag als Deus ex machina erscheinen. Er wird sofort ersichtlich, wenn man die Differentialgleichung zweiter Ordnung durch ein System

$$y' - z = 0,$$

$$z' + \varphi_1 z + \varphi_2 y = f$$

ersetzt. Macht man aber hier den Ansatz

$$y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$$

$$z = c_1(x)y_1' + c_2(x)y_2',$$

der aus der linearen Kombination zweier Lösungen

$$\text{und} \quad y = y_1, \quad z = y_1'$$

$$y = y_2, \quad z = y_2',$$

also aus

$$c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$c_1 y_1' + c_2 y_2'$$

durch Variation der Konstanten hervorgeht, so wird man ganz von selbst auf (6) und (7) geführt.

und so bleibt übrig

$$(7) \quad c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x).$$

Aus den beiden Gleichungen (6) und (7) ergibt sich sofort

$$c_1(x) = \int_{x_0}^x \frac{f(x) y_2 dx}{y_1' y_2 - y_2' y_1} + h_1 = d_1(x) + h_1$$

$$c_2(x) = \int_{x_0}^x \frac{f(x) y_1 dx}{y_2' y_1 - y_1' y_2} + h_2 = d_2(x) + h_2.$$

So wird also

$$y = d_1(x) y_1 + d_2(x) y_2 + h_1 y_1 + h_2 y_2$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung. h_1 und h_2 sind dabei die willkürlichen Konstanten.

Ein wichtiger Spezialfall möge noch besonders behandelt werden. Das ist die Gleichung

$$y'' + \lambda y = A \cos bx \quad (\lambda, a, b \text{ sind konstant}).$$

Statt der Durchführung der eben dargelegten allgemeinen Methode erweist sich hier der Ansatz

$$y = \beta \cdot A \cos bx$$

mit konstantem β als zweckmäßiger. Er führt zu der Bedingungs-
gleichung

$$-\beta b^2 + \lambda \beta = 1$$

für β ; so wird

$$y = \frac{A}{\lambda - b^2} \cos bx$$

eine Lösung der inhomogenen Gleichung. Man kann aber dann leicht alle angeben, wenn man nur beachtet, daß die Zufügung irgendeiner Lösung der homogenen Gleichung stets eine neue Lösung der inhomogenen Gleichung liefert und daß die Differenz zweier Lösungen der inhomogenen Gleichung stets eine Lösung der homogenen ergibt. Daher ist

$$y = \frac{A}{\lambda - b^2} \cos bx + h_1 \cos \sqrt{\lambda} x + h_2 \sin \sqrt{\lambda} x$$

das allgemeine Integral unserer Gleichung. Dies Verfahren versagt nur, wenn $\lambda = b^2$ wird. Aber man kann dann durch Grenzübergang leicht eine Lösung der inhomogenen Gleichung finden. Jedenfalls ist nämlich stets

$$\frac{A}{b + \sqrt{\lambda}} \frac{\cos bx - \cos \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda} - b}$$

eine Lösung der inhomogenen Gleichung, solange noch $\sqrt{\lambda} \neq b$ ist. Macht man aber hier den Grenzübergang $b \rightarrow \sqrt{\lambda}$, so erhält man

$$\frac{A}{2\sqrt{\lambda}} x \sin \sqrt{\lambda} x,$$

und das ist ersichtlich eine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y'' + \lambda y = A \cos \sqrt{\lambda} x.$$

Nahe verwandt mit den Gleichungen mit konstanten Koeffizienten sind die Gleichungen

$$y'' + \frac{g}{x} y' + \frac{h}{x^2} y = 0.$$

g und h sind dabei wieder konstant. Man kann sie durch die Substitution

$$x = e^t$$

auf Gleichungen mit konstanten Koeffizienten zurückzuführen. Darin liegt schon, daß der Ansatz

$$y = x^\varrho$$

zum Ziel führen muß. Er führt ja in der Tat auf die Bedingungsgleichung

$$(8) \quad \varrho(\varrho - 1) + g\varrho + h = 0.$$

Hat die Gleichung (8) zwei verschiedene Wurzeln ϱ_1 und ϱ_2 , so sind

$$y_1 = x^{\varrho_1} \quad \text{und} \quad y_2 = x^{\varrho_2}$$

Lösungen, die ein Fundamentalsystem bilden.

Hat die Gleichung (8) aber zwei gleiche Wurzeln, so sind

$$y_1 = x^{1-g} \quad \text{und} \quad y_2 = x^{1-g} \log x$$

Lösungen, die ein Fundamentalsystem bilden.

Bemerkung. Wir hatten auf S. 25 die *Riccatische* Gleichung (I) der S. 24 durch die Substitution (3) in die lineare Gleichung (4) übergeführt. Durch diese Substitution wird nun auch aus den allgemeinen Integral der einen das allgemeine Integral der anderen, wobei noch ein konstanter Faktor der Lösungen der linearen unerheblich bleibt. Wenn nun u_1 und u_2 zwei Lösungen von (4) sind, welche durch die Anfangsbedingungen $u_1(x_0) = 0$, $u_1'(x_0) = 1$, $u_2(x_0) = 1$, $u_2'(x_0) = 0$ festgelegt sein mögen, so ist somit

$$y = - \frac{1}{\alpha_2} \frac{c_1 u_1' + c_2 u_2'}{c_1 u_1 + c_2 u_2}$$

das allgemeine Integral der *Riccatischen* Gleichung. Insbesondere ist also

$$y = - \frac{1}{\alpha_2} \frac{1 - \gamma_0 \alpha_2(x_0) u_1' + u_2'}{\alpha_2 - \gamma_0 \alpha_2(x_0) u_1 + u_2}$$

dasjenige Integral, welches bei x_0 den Wert γ_0 hat. Es hängt also linear von der willkürlichen Konstanten ab. Das bedeutet geometrisch, daß das Doppelverhältnis von irgend vier Lösungen konstant ist. Wenn man daher drei verschiedene Integrale $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ der Differentialgleichung (I) von S. 24 kennt, so kann man diese Differentialgleichung so schreiben:

$$\begin{vmatrix} y' & 1 & y & y^2 \\ \gamma_1' & 1 & \gamma_1 & \gamma_1^2 \\ \gamma_2' & 1 & \gamma_2 & \gamma_2^2 \\ \gamma_3' & 1 & \gamma_3 & \gamma_3^2 \end{vmatrix} = 0$$

Und daraus kann man entnehmen, wie man die Koeffizienten von (I) S. 24 durch die drei Integrale $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ darstellen kann.

III. Kapitel.

Diskussion des Verlaufs der Integralkurven.

§ 1. Geschlossene Integralkurven.

Nächst den Gleichungen erster Ordnung ist der qualitative Verlauf der Lösungen gewisser Gleichungen zweiter Ordnung Gegenstand vielfältiger Untersuchung gewesen. Es handelt sich dabei einerseits um lineare Differentialgleichungen, die wir in den nächsten Paragraphen ausführlich behandeln wollen. Andererseits sind die Lösungen gewisser nichtlinearer Differentialgleichungen eingehend durchforscht. Ich will hier im Anschluß an eine Arbeit von *Birkhoff*¹⁾ das Wesentlichste herausheben. Die Gleichungen, welche wir betrachten wollen, sind von relativ spezieller Gestalt. Es sollen die *Eulerschen* Gleichungen gewisser definierter Variationsprobleme sein. Die Aufgabe, Kurven so zu bestimmen, daß das Integral

$$(1) \quad J = \int_{t_0}^{t_1} F(x, y, x', y') dt$$

möglichst klein wird, führt auf die beiden Differentialgleichungen

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial x'} \right) - \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

die man die *Eulerschen* Gleichungen des Variationsproblems nennt. Die Funktion F sei samt ihren ersten und zweiten Ableitungen in einem gewissen Bereiche B stetig.

Daß die gesuchten Kurven den beiden Differentialgleichungen genügen müssen, sieht man nach den Regeln der Variationsrechnung leicht so ein:

Es sei $x = x(t)$, $y = y(t)$ für $t_0 \leq t \leq t_1$ eine Kurve, welche die Punkte (x_0, y_0) und (x_1, y_1) verbindet; x und y seien in diesem Intervall zweimal stetig differenzierbar; t_0 und t_1 sollen die den beiden Punkten (x_0, y_0) und (x_1, y_1) entsprechenden Werte des Parameters t sein. $x = x(t) + \varepsilon \eta_1(t)$, $y = y(t) + \varepsilon \eta_2(t)$ stelle eine benachbarte Kurve dar, welche dieselben Punkte verbindet; es sei also $\eta_1(t_0) = \eta_1(t_1) = \eta_2(t_0) = \eta_2(t_1) = 0$; die η_1 und η_2 seien stetig differenzierbar; ε sei ein Parameter. Für diese Kurve wird das Integral

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(x + \varepsilon \eta_1, y + \varepsilon \eta_2, x' + \varepsilon \eta_1', y' + \varepsilon \eta_2') dt,$$

und diese Funktion von ε soll für $\varepsilon = 0$ ein Minimum besitzen. Da-

¹⁾ Dynamical systems with two degrees of freedom. Transactions of the Am. math. soc. 18, 199–300. 1917.

her muß die Ableitung nach ε für $\varepsilon = 0$ verschwinden. Differentiation aber liefert

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \eta_1 \frac{\partial F}{\partial x} + \eta_1' \frac{\partial F}{\partial x'} + \eta_2 \frac{\partial F}{\partial y} + \eta_2' \frac{\partial F}{\partial y'} \right\} dt.$$

Durch partielle Integration kann man dies Integral auf die folgende Form bringen:

$$(3) \quad 0 = \int_{t_0}^{t_1} \left[\eta_1 \left\{ \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial x'} \right) \right\} + \eta_2 \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right\} \right] dt.$$

Die ausintegrierten Bestandteile fallen dabei weg, weil η_1 und η_2 am Anfang und Ende des Intervalles verschwinden sollen. Soll nun aber dieses Integral bei beliebiger Wahl der Funktionen η_1 und η_2 verschwinden, so müssen, wie man leicht nachweist, die beiden Klammern Null sein. Das sind aber gerade die linken Seiten der beiden *Eulerschen* Differentialgleichungen. Wäre z. B. die erste Klammer, die nach den gemachten Voraussetzungen eine stetige Funktion von t ist, nicht überall Null, so gäbe es ein Intervall $t_0 + h \leq t \leq t_1 - k$ ($h > 0$, $k > 0$) in dem sie von Null verschieden ist. Dann wähle man $\eta_1 = 0$ für $t_0 \leq t \leq t_0 + h$ und für $t_1 - k \leq t \leq t_1$, aber $\eta_1 < 0$ für $t_0 + h \leq t \leq t_1 - k$, ferner $\eta_2 = 0$ für $t_0 \leq t \leq t_1$. Bei dieser Wahl von η_1 und η_2 wäre aber das in (3) vorkommende Integral nicht Null.

Einem Leser, welcher dieser Betrachtung aufmerksam gefolgt ist, wird sich die Bemerkung schon aufgedrängt haben, daß den beiden Differentialgleichungen (2) nicht nur diejenigen Kurven genügen, welche dem Integral (1) einen kleineren Wert erteilen, als alle genügend benachbarten Kurven, sondern auch die, für welche es größer wird als für die Nachbarkurven, sowie überhaupt alle die Kurven, für welche es einen stationären Wert bekommt, d. h. für welche jene Ableitung nach ε für $\varepsilon = 0$ und beliebige η_1 und η_2 verschwindet. Wegen dieses Sachverhaltes nennt man auch die Lösungen von (2) mit einem etwas neutraleren Namen: *Extremalen*.

Die Frage, deren Lösung das weitere gewidmet ist, ist nun die nach den *geschlossenen Extremalen*. Für die Methoden, die wir einschlagen, ist die Heranziehung des Variationsproblems charakteristisch. Wir erhalten damit zugleich eine Probe für das Eingreifen der Variationsrechnung in die Theorie der Differentialgleichungen. Das sind Dinge, die sich leicht noch viel weiter verfolgen ließen, und ein anderes Buch dieser Sammlung läßt noch mehr die Bedeutung dieses Ansatzes hervortreten¹⁾.

Die Schwierigkeiten, auf die sich die Methode wird einstellen müssen, liegen darin, daß die Art des Extremums noch recht verschieden sein kann.

¹⁾ Courant-Hilbert: Methoden der mathematischen Physik.

D. h. die Menge der Kurven, innerhalb deren die geschlossene Extremale ein Extrem liefert, kann recht verschieden sein. Z. B. kleinerer Integralwert als *alle* genügend benachbarten Kurven, oder nur kleinerer Wert als *gewisse* genügend benachbarte Kurven oder auch nur überhaupt stationärer Charakter. Man muß nur an die analogen Verhältnisse bei den Maxima und Minima der Funktionen einer oder zweier Veränderlichen denken, um sich klar zu machen, daß es auch Extremalen geben wird, die weder ein Minimum noch ein Maximum liefern. Sie werden den Sattelpunkten der Flächen entsprechen.

Birkhoffs Verdienst gegenüber seinen Vorgängern ist es, alle diese verschiedenen Vorkommnisse ausgenutzt zu haben. Er hat allen diesen Möglichkeiten durch besondere Methoden Rechnung getragen. Wir wollen im folgenden darzustellen versuchen, welche Gedanken da ausschlaggebend sind.

Die Beweismethoden stützen sich namentlich auf einen bestimmten Satz der Variationsrechnung, den wir nun zuerst angeben wollen und dessen Heranziehung die Beschränkung auf Variationsprobleme bestimmter Art, nämlich auf die sogenannten positiv definiten Variationsprobleme erfordert.

Zunächst sei erwähnt, daß $F(x, y, x', y')$ eine positiv homogene Funktion von x' und y' von der Ordnung Eins sein soll, d. h. es soll $F(x, y, kx', ky') = kF(x, y, x', y')$ sein für $k > 0$. Der Sinn dieser Voraussetzung ist der: Unabhängigkeit des Integrales von der Wahl des Parameters t , für den Fall, daß zu einem anderen Parameter τ übergegangen wird, der mit t zugleich wächst; dann wird nämlich

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \cdot k, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\tau} k, \quad \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{k}, \quad k > 0.$$

Das Variationsproblem heißt definit, wenn in dem zugrundegelegten Bereich B der x, y für beliebige nicht gleichzeitig verschwindende x' und y' die Funktion $F_1(x, y, x', y')$ von einerlei Vorzeichen ist. Dabei kann F_1 durch

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = x'^2 F_1$$

definiert werden. Im Falle des Minimums muß namentlich $F_1 > 0$ sein, und das wollen wir weiter voraussetzen. Diese Voraussetzungen sind z. B. für $F \equiv \sqrt{ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2} + \alpha x' + \beta y'$ erfüllt, wenn man $a > 0$, $ac - b^2 > 0$ voraussetzt. Zu unserem Problem gehört für $\alpha = \beta = 0$ namentlich das der geodätischen Linien auf einer Fläche, deren Linienelement durch $s'^2 = ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2$ erklärt ist. Der Satz der Variationsrechnung lautet nun so: *Satz I: Wenn die Funktion F mit ihren Ableitungen der beiden ersten Ordnungen in einem Bereich B der x, y für beliebige nicht gleichzeitig verschwindende x', y' stetig ist, wenn $F_1 > 0$ ist, so kann man jedem Punkt P desselben eine Umgebung*

zuordnen, derart, daß man jeden Punkt derselben mit P durch einen Extremalenbogen verbinden kann, der ganz in dieser Umgebung verläuft und der dem Integral (1) einen kleineren Wert erteilt, als jede andere in der Umgebung verlaufende, die beiden Punkte verbindende abteilungsweise stetig differenzierbare Kurve. Man kann die Umgebung so klein wählen, daß das über die Extremalenbogen erstreckte Integral einen Wert kleiner als eine beliebig vorgegebene Zahl ε bekommt. Setzt man, wie es von nun an geschehen soll, weiter voraus, daß $F > 0$ sei, für alle x, y des Bereiches und beliebige x', y' , so ist der Integralwert sogar kleiner als der zu irgendeiner anderen in B verlaufenden, die beiden Punkte verbindenden Kurve gehörige Integralwert. Ein allen aufgezählten Voraussetzungen genügendes Variationsproblem heißt positiv und positiv definit¹⁾. Beim erwähnten Problem der geodätischen Linien sind alle Voraussetzungen erfüllt.

Die Problemstellung selbst ist uns auch bei den Gleichungen erster Ordnung nicht fremd gewesen. Man rufe sich nur den Satz von S. 63 ins Gedächtnis zurück. Er behauptet unmittelbar die Existenz von geschlossenen Integralkurven in Bereichen folgender Beschaffenheit: Legt man durch einen Punkt des Bereiches eine Integralkurve, so verläßt sie in ihrem weiteren Verlauf den Bereich nicht und mündet auch nicht in einem singulären Punkt.

Hier wollen wir *Bereiche* heranziehen, die in folgendem Sinne *konvex* sind: Es soll eine positive Zahl η geben derart, daß zwei Punkte des Bereiches sich stets dann durch einen dem Bereich angehörigen Extremalenbogen verbinden lassen, wenn es eine Kurve gibt, die beide verbindet und für die das Integral (1) einen Wert kleiner als η annimmt. Man kann das kurz ausdrücken, indem man sagt: Zwei genügend nahe beieinander gelegene Punkte des Bereiches lassen sich durch einen Extremalenbogen verbinden, welcher vollständig dem Bereich angehört. Konvex in diesem Sinne wird also z. B. eine geschlossene Fläche sein, und wenn wir weiterhin beweisen, daß es in einem konvexen Bereich geschlossene Extremalen gibt, so liegt darin insbesondere der Satz begründet, daß es auf geschlossenen Flächen geschlossene geodätische Linien gibt.

Zunächst suchen wir geschlossene Extremalen vom Minimaltypus die also einen kleineren Integralwert liefern sollen als alle benachbarten Kurven. Da gilt folgender

Satz II: Vorgelegt ist ein konvexer Bereich²⁾ B . In seinem Inneren liegt eine geschlossene rektifizierbare Kurve \mathcal{C} , für welche $J \leq J_0$ ist bei passender Wahl von J_0 . \mathcal{C} soll nicht unter Festhaltung von $J \leq J_0$ innerhalb B auf einen Punkt stetig zusammengezogen werden können.

¹⁾ Wegen des Beweises sei z. B. auf *Bolza: Variationsrechnung, S. 274ff.* verwiesen.

²⁾ Statt dessen genügt es auch, vorauszusetzen, daß man an diejenigen Randkurven, die nicht konvex sind, mit Kurven, deren $J \leq J_0$ ist, nicht beliebig nahe herankommen kann.

Dann kann \mathcal{C} stetig in eine geschlossene Extremale deformiert werden, für welche auch $J \leq J_0$ ist und die vom Minimaltypus ist, entweder in bezug auf alle genügend benachbarten Kurven, oder doch wenigstens in bezug auf die ihr auf einer ihrer beiden Seiten genügend benachbarten Kurven. In diesem letzteren Falle ist sie eine Randkurve des Bereiches.

Der Beweis dieses Satzes beruht auf einer von Signorini (Palermo Rendiconti 33 [1912]) zuerst verwendeten sinnreichen Methode. Durch sie wird das Problem auf eines der gewöhnlichen Minima zurückgeführt.

Wir gehen zunächst von der in B gegebenen geschlossenen rektifizierbaren Kurve \mathcal{C} zu einem aus Extremalenbogen gebildeten Polygon über. Wir dürfen annehmen, daß \mathcal{C} keine geschlossene Extremale ist; denn in diesem Falle bleibt nichts zu beweisen. Dann teilen wir \mathcal{C} in n Teilbogen ein, derart, daß längs eines jeden derselben das Integral einen Wert bekommt kleiner oder gleich¹⁾ $\frac{J_0}{n}$ und derart, daß der Endpunkt eines jeden Bogens einer seinem Anfangspunkt auf Grund von Satz I zugeordneten Umgebung angehört. Weiter soll $\frac{J_0}{n} < \eta$ sein, d. i. die bei der Definition des konvexen Bereichs verwendete Zahl.

Man kann dann nach Satz I den Anfangspunkt eines jeden Bogens mit seinem Endpunkt durch einen Extremalenbogen verbinden. Das aus diesen Extremalenbogen gebildete Polygon \mathcal{C}' — das nicht frei von Selbstüberschneidungen zu sein braucht — erteilt bei passender Wahl²⁾ seiner Endpunkte dem Integral einen Wert kleiner als J_0 . Ferner kann man das Polygon \mathcal{C}' durch stetige Deformation aus \mathcal{C} herstellen. Um das einzusehen, betrachte man einen einzelnen der n Bogen von \mathcal{C} . Man lasse einen Punkt P diesen Bogen durchlaufen und betrachte dabei ständig den Extremalenbogen, welcher vom Anfangspunkt des Bogens von \mathcal{C} zu P hinreicht. Dieser Extremalenbogen ändert sich stetig mit P . Und so geht der Extremalenbogen durch stetige Abänderung aus dem entsprechenden Bogen von \mathcal{C} hervor. Nunmehr betrachte man in B irgendwelche n Punkte P_i folgender Art. P_{i+1} heiße der auf P_i folgende Punkt. P_1 , wofür wir auch P_{n+1} schreiben, folge wieder auf P_n . So hat jeder Punkt P_i einen Vorgänger und einen Nachfolger. Jeder Punkt soll weiter in der seinem Vorgänger nach Satz I zugeordneten Umgebung und überdies so nahe bei diesem liegen, daß

1) Dazu geht man auf der Kurve von einem beliebig gewählten ersten Teilpunkt so lange weiter, bis der Integralwert gerade gleich $\frac{J_0}{n}$ geworden ist. Hier legt man den zweiten Teilpunkt hin usw.

2) Da \mathcal{C} keine geschlossene Extremale sein soll, so gibt es auf ihr Punkte, die nicht innere Punkte von \mathcal{C} angehörigen Extremalenbogen sind. Man wähle dann einen Punkt vor diesem und einen Punkt hinter diesem als Anfang und Ende eines Bogens von \mathcal{C}' . Dieser gibt nach Satz I dem Integral (1) einen kleineren Wert als der entsprechende Bogen von \mathcal{C} .

das Integral (1) über den beide nach Satz I verbindenden Extremalenbogen höchstens gleich $\frac{J_0}{n}$ wird.

Der Integralwert des so durch $P_1 \dots P_n$ bestimmten Polygons werde als Funktion der P_i mit $J(P_1 \dots P_n)$ bezeichnet. Dies ist dann eine stetige Funktion der P_i , die in einem gewissen abgeschlossenen Bereich¹⁾ eines $2n$ -dimensionalen Raumes der Koordinaten (x_i, y_i) der P_i erklärt ist und in diesem Bereiche nur Werte nicht über J_0 annimmt. Dieser Bereich kann aus mehreren getrennten Stücken bestehen; wir betrachten denjenigen zusammenhängenden abgeschlossenen Teilbereich, dem der repräsentierende Punkt des zuerst erhaltenen Polygons \mathfrak{C}' angehört. In einem gewissen inneren Punkt \mathfrak{C} dieses Bereiches besitzt $J(P_1 \dots P_n)$ sein absolutes Minimum in bezug auf diesen Bereich. Diesem Punkt entspricht eine Kurve, welche durch stetige Abänderung aus \mathfrak{C}' gewonnen werden kann. Denn man kann ja im P_i -Bereich den Minimumpunkt \mathfrak{C} mit dem Ausgangspunkte \mathfrak{C}' verbinden. Jedem Punkt der Verbindungslinie entspricht ein Extremalpolygon, und diese ändern sich stetig mit dem repräsentierenden Punkt. Nun aber muß das dem absoluten Minimum entsprechende Polygon \mathfrak{C} eine einzelne geschlossene Extremale sein. Ich nehme zum Beweise an²⁾, es käme eine Ecke vor, d. h. ein Punkt auf \mathfrak{C} , der nicht immer Punkt eines \mathfrak{C} angehörigen Extremalensbogens ist. Sie möge bei P_2 liegen. Die Bogen $P_1 P_2$ und $P_2 P_3$ bilden die Ecke. Das über beide erstreckte Integral ist höchstens gleich $2 \frac{J_0}{n}$. Nehme ich auf jedem der beiden Bogen in hinreichender Nähe der Ecke P_2 einen Punkt P_1' und P_3' an, so kann man beide sicher durch einen einzigen Extremalensbogen verbinden, über den das Integral einen kleineren Wert bekommt als über $P_1' P_2 P_3'$. Also ist auch das über $P_1 P_1' P_3' P_3$ erstreckte Integral kleiner als $2 \frac{J_0}{n}$. Daher kann man auf dem Bogen $P_1' P_3'$ einen Punkt P_2' so bestimmen, daß sowohl das Integral über $P_1 P_1' P_2'$ wie das Integral über $P_2' P_3' P_3$ kleiner sind als $\frac{J_0}{n}$. Daher kann man nun P_2' sowohl mit P_1 wie mit P_3 durch je einen Extremalensbogen verbinden; für beide wird das Integral kleiner als $\frac{J_0}{n}$. Über $P_1 P_2' P_3$ wird überdies das Integral kleiner als über $P_1 P_1' P_3' P_3$ und dies war kleiner als das über $P_1 P_2 P_3$. Ersetzt man also die Ecke P_2 durch P_2' , so erhält man ein neues Polygon, das ein *kleineres* Integral liefert. Das widerspricht der Minimaleigenschaft des Polygons P_1, P_2, \dots, P_n . Also besteht

1) Hat man nämlich ein Polygon wie z. B. \mathfrak{C}' im vorigen Absatz, für das $J < J_0$ ist, so kann man (x_i, y_i) in der Umgebung seiner i -ten Ecke frei variieren lassen.

2) Ich verdanke die nun folgende Schlußweise Herrn R. Brauer.

unser Extremalenpolygon aus einer einzigen geschlossenen Extremalen. Sie kann im Inneren oder auch im Rand des Bereiches verlaufen. A priori wäre es aber auch denkbar, daß sie nur einzelne Punkte mit dem Rande gemeinsam hat. Dies kann aber noch durch besondere hier nicht durchzuführende Betrachtungen als unmöglich erkannt werden. Ebenso wenig will ich hier des näheren ausführen, daß die geschlossene Extremale einen Integralwert liefert, der von keiner ihr im Bereiche genügend benachbarten Kurve unterschritten werden kann.

Als Anwendung des so bewiesenen Satzes ergibt sich z. B. folgendes: Auf jeder geschlossenen Fläche, deren Geschlecht mindestens Eins ist, gibt es geschlossene geodätische Linien in unendlicher Anzahl. Denn man überzeugt sich leicht, daß es unendlich viele geschlossene Kurven von topologisch verschiedenem Typus gibt, d. h. Kurven, die sich nicht auf der Fläche ineinander deformieren lassen.

Unser bewiesener Satz behauptet ganz und gar nicht, daß jeder mehrfach zusammenhängende konvexe Bereich geschlossene aller-kürzeste Extremalen in seinem *Inneren* enthält. Tatsächlich gilt auch ein solcher Satz nicht wie man an dem Beispiel eines zweifach zusammenhängenden Stückes einer passend gewählten Rotationsfläche sehen kann. Dieselbe möge dadurch entstehen, daß man das über $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ gelegene Stück der Kurve $y = \sin x$ um die sie nicht treffende Gerade $y = -2$ rotieren läßt. Das zweifach zusammenhängende Stück ist von zwei aufeinanderfolgenden Kehlkreisen begrenzt. Alle dem Flächenstück angehörig nicht auf einen Punkt zusammenziehbaren Kurven sind länger als diese Kehlkreise. Diese Kurven des absoluten Minimums liegen also nicht im Bereichinneren. Gleichwohl befinden sich in dem Bereich geschlossene Extremalen, nämlich der Kreis der weitesten Ausbuchtung. Unsere Methode liefert also keine Handhabe, die Existenz derselben zu erkennen. Darin liegt schon eine Andeutung für die Tragweite der Methode. Man kann darüber mit *Birkhoff* noch eingehendere Erörterungen anstellen. Jedenfalls wird es nötig, andere Methoden auszudenken, mit welchen man auch andere Sorten von geschlossenen Extremalen gewinnen kann; andere, d. h. solche, die nicht einen kleineren Integralwert liefern als alle genügend benachbarten Kurven.

Zu einer solchen Methode führt uns die Bemerkung, daß unter einer gleich zu nennenden weiteren Voraussetzung über das zu behandelnde Variationsproblem jeder Punkt des vorhin betrachteten Polygonraumes, in dem alle ersten partiellen Ableitungen von $J(P_1 \dots P_n)$ verschwinden, entweder eine Nullkurve, d. h. eine in einen Punkt ausgeartete Kurve ($J = 0$) oder aber eine geschlossene Extremale liefert. Diese neue Voraussetzung soll darin bestehen, daß keine diskontinuierlichen, d. h. mit Ecken versehenen Lösungen vorkom-

men. In der Variationsrechnung wird gezeigt¹⁾, daß diese Bedingung damit gleichbedeutend ist, daß in keinem Punkt $\frac{\partial F}{\partial x'}$ und $\frac{\partial F}{\partial y'}$ für verschiedene Wertepaare (x', y') beide gleiche Werte bekommen. Nennen wir nun ein Extremalenpolygon, für das die ersten Ableitungen von $J(P_1 \dots P_n)$ im entsprechenden Punkt des Polygonraumes alle verschwinden, zum Unterschied von den bisher betrachteten Minimumpolygonen ein *Minimaxpolygon* und nehmen an, es habe eine Ecke P_1 , so denke man sich dieselbe auf einer beliebigen stetig und stetig differenzierbaren Kurve $x = x(\tau)$, $y = y(\tau)$ verschoben. $\tau = 0$ möge dem Punkte P_1 entsprechen. Verbindet man auf Grund von Satz I die verschobene Ecke stets mit der vorausgehenden und der folgenden Ecke durch einen Extremalbogen, so erhält man neue von τ stetig abhängende Polygone. Das Integral J wird eine Funktion von τ , deren Ableitung bei $\tau = 0$ wegen der Minimaxeigenschaft verschwinden muß. Diese Ableitung wird aber¹⁾:

$$\dot{x} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x'} \right)_1 - \left(\frac{\partial F}{\partial x'} \right)_2 \right] + \dot{y} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right)_1 - \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right)_2 \right].$$

Dabei sind \dot{x} , \dot{y} die Ableitungen von $x(\tau)$ und $y(\tau)$ für $\tau = 0$ und in den Klammern stehen die Werte der ersten Ableitungen von F für die beiden in der Ecke P_1 zusammenstoßenden Extremalbögen. Da diese Ableitung aber bei beliebiger Wahl der \dot{x} , \dot{y} verschwinden soll, so müßten doch $\frac{\partial F}{\partial x'}$ und $\frac{\partial F}{\partial y'}$ für *verschiedene* (x', y') *gleiche* Werte haben, wenn wirklich eine Ecke vorkommen soll. Dies widerspricht der neuen Voraussetzung, so daß das Minimaxpolygon keine Ecken hat. Es besteht somit aus einer einzigen geschlossenen Extremalen.

Nun kann man aber oft aus der Existenz von Minimumpolygonen auf die von Minimaxpolygonen schließen.

Zunächst führen wir die von *Birkhoff* im Unterschied zu der eben besprochenen *Minimummethode* als *Minimaxmethode* ersonnene ein. Dieses Minimaxprinzip geht von der Tatsache aus, daß *die ersten Ableitungen einer Funktion z. B. auch in einem Punkte verschwinden, an den zwei oder mehr in der Umgebung desselben sonst getrennte Bereiche anstoßen, in welchen die Funktion kleiner ist als in dem Punkte selbst. Solche Punkte sollen Minimaxpunkte heißen.* Über ihre Existenz gilt folgender

Satz III (Minimaxprinzip): *Eine Funktion J sei in einem abgeschlossenen, zusammenhängenden Bereich B des n -dimensionalen Raumes eindeutig und analytisch. Sie besitze im Inneren dieses Bereiches mindestens ein Minimum und zwar an den abgeschlossenen Punktmengen P_1, P_2, \dots, P_l . Auf jeder derselben ist J einem seiner Minima gleich.*

1) Vgl. z. B. O. Bolza: Vorlesungen über Variationsrechnung S. 367.

In keinem dieser Kontinua möge es geschlossene stetige Kurven geben, die sich in demselben nicht stetig auf einen Punkt zusammenziehen lassen. Jedesmal dann, wenn es möglich ist, zwei dieser Kontinua (P_i, P_k) in B durch eine stetige Kurve zu verbinden, längs deren für irgendein festgewähltes J_0 : $J \leq J_0$ ist, soll es möglich sein, dieselbe stetig in eine andere **im Inneren** von B gelegene zu deformieren, welche auch P_i und P_k verbindet und längs deren auch $J \leq J_0$ ist. In dem Falle, wo es nur eine Stelle gibt, an der J ein Minimum annimmt, werde außerdem angenommen, daß es im Inneren von B geschlossene stetige Kurven gebe, die sich nicht durch stetige Deformation im Inneren von B auf einen Punkt zusammenziehen lassen. Dann gibt es im Inneren von B mindestens einen weiteren Punkt, wo die ersten Ableitungen von J alle verschwinden.

Satz III kann durch die folgenden Überlegungen plausibel gemacht werden. Einen vollbefriedigenden Beweis gibt es noch nicht.¹⁾ Die Werte von J in den einzelnen Minimumspunkten seien der Größe nach geordnet $J_1 \leq J_2 \leq \dots \leq J_l$. Punkte mit $J < J_1$ gibt es also überhaupt nicht. Ist aber J' eine Zahl größer als J_1 , so gibt es Punkte der Mannigfaltigkeit, in welchen $J < J'$ ist. Ist insbesondere J' nur wenig größer als J_1 , so werden diese Punkte eine gewisse Umgebung von P_1 ausmachen.

Diese Umgebung enthält, solange sie klein genug ist, nur stetige Kurven, die zu Kurven auf P_1 homolog sind. In dem Augenblick, wo dann J' über den nächst kleineren Wert des sukzessiven Minima: J_2 hinauswächst, treten neue von der bisherigen zunächst getrennte Umgebungen auf. Da aber für große J' schließlich die Umgebungen den ganzen Bereich ausfüllen, so müssen Verschmelzungen der verschiedenen Umgebungen irgendwann vorkommen. Solche Verschmelzungen können auch allein zum Auftreten geschlossener nicht auf einen Punkt zusammenziehbarer Kurven führen. Es soll nun festgestellt werden, daß diese Verschmelzungen gerade in den Minimaxpunkten erfolgen. Dies ist anschaulich plausibel, wenn die Verschmelzung zweier Umgebungen im Inneren des Bereiches erfolgt. Denn wenn die beiden Umgebungen zusammenkommen, so geschieht dies in Punkten, an die *zwei verschiedene* Bereiche anstoßen, in welchen J kleiner ist als in dem Verschmelzungspunkt selbst. Bekannte Sätze über implizite Funktionen lehren dann, daß in einem solchen Punkt alle ersten partiellen Ableitungen von J verschwinden müssen. Es ist aber auch leicht zu *sehen*, daß stets Verschmelzungen im Inneren von B auftreten müssen. Denn nehmen wir an, die Umgebungen der Kontinua P_i und P_k verschmelzen in einem Randpunkt, in welchem $J = J''$ sei. Dann kann man P_i und P_k über diesen Punkt hin miteinander durch eine Kurve ver-

¹⁾ Man vgl. jedoch *M. Morse*: Relations between the critical points of a real function of n independent variables. Trans. Am. math. soc. 27 (1925).

nden, auf der $J \leqq J''$ ist. Nach unseren Voraussetzungen kann man diese aber stetig in eine andere ganz in B gelegene deformieren, die auch P_i und P_k verbindet und längs der auch $J \leqq J''$ ist. Daher muß es auch einen Verschmelzungspunkt beider Umgebungen im Inneren von B geben.

Die Verwertung des Satzes III für die uns beschäftigenden Probleme will ich an einer bestimmten Frage darlegen, nämlich dem Problem, *ob es auf jeder geschlossenen Fläche vom Geschlecht Null geschlossene geodätische Linien gibt*. Vom Geschlecht Null ist dabei eine Fläche, welche vom Typus der Kugel ist, die also durch jede ihrer geschlossenen Kurven in zwei Kalotten zerlegt wird, und die sich umkehrbar eindeutig und stetig auf die Fläche einer Kugel abbilden läßt. Bei diesem Problem leistet die früher benutzte Minimummethode nichts. Aus dem S. 135/136 aufgestellten Satz folgt nichts über die Existenz geschlossener geodätischer Linien. *Satz III* aber führt zu dem folgenden Satz: *Auf jeder geschlossenen Fläche vom Geschlecht Null gibt es geschlossene geodätische Linien*.

Zum Beweis ist zu zeigen, daß bei passender Wahl von n der Raum der Extremalenpolygone einen linearen Zusammenhang besitzt, der mindestens zwei ist, d. h. daß es in ihm mindestens eine geschlossene Kurve gibt, die sich nicht in dem Raum stetig auf einen Punkt zusammenziehen läßt. Einer geschlossenen Kurve des Polygonraumes entspricht eine stetige Schar von Extremalenpolygonen auf der Fläche. Es handelt sich darum, eine solche Schar von Extremalenpolygonen anzugeben, die man nicht durch stetige Deformation so abändern kann, daß alle Kurven in beliebiger Nähe eines einzigen Punktes verlaufen.

Birkhoff selbst hat folgendes Beispiel angegeben: Man betrachte Extremalenpolygone von der Art, daß die einer Ecke P benachbarten Ecken in der dieser Ecke durch Satz I zugeordneten Umgebung liegen und wähle die Eckenzahl n so groß, daß man ein dieser Bedingung genügendes Extremalenpolygon durch stetige Deformation über die ganze Fläche hinübergleiten lassen kann. Man wähle insbesondere die Deformation so, daß die vorkommenden Polygone stetig von einem Parameter t abhängen ($0 \leqq t \leqq 1$) und sich für $t \rightarrow 0$ auf einen Punkt P , für $t \rightarrow 1$ auf einen anderen Punkt Q zusammenziehen. Diese Punkte sind als ausgeartete Polygone aufzufassen: Alle Ecken sind zusammengerückt. Wir sprechen von Nullkurven, weil für dieselben $J = 0$ wird. Man verbinde P und Q noch durch eine stetige Kurve auf der Fläche, deren Punkte alle Nullkurven entsprechen, wenn man sie als ausgeartete Extremalenpolygone auffaßt. Dieser stetigen Deformation entspricht eine geschlossene Kurve des Polygonraumes, die den bei der Deformation verwendeten Nullkurven entsprechend ein Stück weit in dem Teilraum des Polygonraumes verläuft, der den Nullkurven entspricht und der in umkehrbar eindeutiger stetiger Beziehung zu der geschlossenen

Fläche vom Geschlecht Null steht. Denn jedem Punkt derselben entspricht genau eine Nullkurve. Nun läßt sich zeigen, daß man die geschlossene Kurve nicht so deformieren kann, daß sie ganz in der Fläche der Nullkurven verläuft. Und dies ist gleichbedeutend damit, daß man sie nicht auf einen Punkt zusammenziehen kann.

Der Beweis stützt sich auf den folgenden, einleuchtenden, hier nicht näher zu begründenden Satz aus der Analysis situs¹⁾. Wir betrachten eine Schar von geschlossenen Jordankurven auf einer geschlossenen Fläche vom Geschlecht Null. Die Kurven sollen stetig von einem Parameter t abhängen. Sie sollen sich für $t \rightarrow 0$ auf einen Punkt P der Fläche und für $t \rightarrow 1$ auf einen anderen von P verschiedenen Punkt Q der Fläche zusammenziehen. Andere „Nullkurven“ als diese beiden sollen in der Schar nicht vorkommen. Nun betrachte man zunächst eine Kurvenschar S , in der sich nie zwei verschiedene Kurven treffen. Dann gehört zu jedem Punkt R der Fläche mindestens ein Parameterwert t derart, daß die diesem Parameterwert entsprechende Kurve durch den Flächenpunkt hindurchgeht. Diese Behauptung bleibt aber auch für jede stetig von einem Parameter abhängende Schar richtig, die aus einer Schar S durch stetige Abänderung hervorgeht. Auch eine solche Schar kann nicht aus lauter Nullkurven bestehen. Man kann somit die erwähnte geschlossene Kurve des Polygonraumes nicht ganz in die Fläche der Nullkurven hineinziehen.

Daher kann der Polygonraum nicht einfach linear zusammenhängend sein, sondern enthält Kurven, die sich nicht auf einen Punkt zusammenziehen lassen. Ferner aber haben wir mindestens einen Punkt in unserem 2 n -dimensionalen Raume, in welchem J ein Minimum hat, das sind die den Nullkurven entsprechenden Punkte ($J = 0$). Daher liefert Satz III mindestens eine geschlossene Extremale. Die Methode läßt die Frage offen, ob es einfach geschlossene Extremalen gibt. Die eben gefundene könnte Selbstüberkreuzungen haben. Kürzlich hat *Urysohn* (Jahresber. d. D. M. V. Bd. 34) angedeutet, wie man durch eine Modifikation der *Birkhoffschen* Methode auch die Existenz einfach geschlossener Extremalen beweisen kann.

Es ist von vornherein einleuchtend, daß man auch mit Hilfe dieser Methode keinen Aufschluß über die Gesamtheit der geschlossenen Extremalen gewinnt. So liefert ja die Methode z. B. nur den Nachweis für die Existenz mindestens einer geschlossenen geodätischen Linie auf einer geschlossenen Fläche vom Geschlecht Null, während es deren doch, wie z. B. auf der Kugel, unendlich viele geben kann. Da setzt

¹⁾ Herrn von *Kerékjártó* verdanke ich die folgende Bemerkung: Der erste Teil des Satzes ergibt sich aus S. 71/72 von Gött. Nachr. 1922 (v. *Kerékjártó*: Über Kurvenscharen auf Flächen). Der zweite Teil des Satzes folgt aus dem *Brouwerschen* Satze über die Invarianz des Abbildungsgrades bei stetigen Deformationen (Math. Ann. Bd. 71, S. 105).

nun eine weitere sehr feinsinnige, in ihren Grundzügen auf *Poincaré* zurückgehende Methode ein. Ich berichte über ihre Ausgestaltung durch *Birkhoff*, ohne noch auf *Beweise* einzugehen.

Zunächst die folgende nützliche geometrische Deutung durch Bewegungszustände. Wir deuten $x = x(t)$, $y = y(t)$ als Bahnkurven einer Bewegung, indem wir den Parameter t als Zeit auffassen. Ein einzelner Bewegungszustand ist dann durch Angabe von x , y , x' , y' , also von vier Koordinaten, bestimmt. Der Mannigfaltigkeit der Bewegungszustände entspricht eine Punktmenge in einem vierdimensionalen Raum. Normieren wir den Parameter t in geeigneter Weise, so machen wir die Beobachtung, daß wir es mit einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit im vierdimensionalen Raum zu tun haben. Wir können die Einheit der Zeitmessung, z. B. so wählen, daß $F = 1$ ist. Das ist dann die Gleichung der erwähnten Fläche im vierdimensionalen Raum, deren Punkte die Bewegungszustände repräsentieren. Einer geschlossenen Extremalen entspricht wieder eine geschlossene Kurve in dieser dreidimensionalen Mannigfaltigkeit. Einer jeden Extremalen entspricht eine Kurve, die wir, um einen kurzen Namen zu haben, aus einem bald deutlichen Grund Stromlinien nennen. Die weiteren Darlegungen knüpfen nun an die Einführung einer geeigneten zweidimensionalen Fläche an, welche in *jedem* genügend großen Zeitintervall von allen Stromlinien durchsetzt wird. Diese Fläche, welche wir *Schnittfläche* nennen wollen, wird außerdem von geschlossenen Stromlinien begrenzt und von allen anderen Stromlinien unter einem von Null verschiedenen Winkel getroffen, der aber bei Annäherung an den Rand wie die erste Potenz der Entfernung vom Rande gegen Null strebt. Es liegt natürlich nicht auf der Hand, daß es eine solche Schnittfläche gibt, aber *Birkhoff* hat für ziemlich allgemeine Klassen von Variationsproblemen die Existenz der Schnittflächen nachgewiesen.

Ich begnüge mich mit der Angabe, daß die Existenz der Schnittfläche durch *Birkhoff* z. B. für das Problem der geodätischen Linien auf den geschlossenen Flächen bewiesen wurde, deren Geschlecht Null übertrifft, und für das Problem der geodätischen Linien auf geschlossenen Flächen vom Geschlechte Null unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß keine geschlossenen geodätischen Linien vom Minimumtypus ohne Doppelpunkte vorhanden sind. Ich will nun weiter den Grundgedanken der Methode unter Beschränkung auf das Problem der geodätischen Linien darlegen. Die Methode beruht auf der Einführung einer mit den Stromlinien eng verknüpften *Transformation der Schnittfläche in sich*. Jede Stromlinie trifft, wie vorausgesetzt wurde, in *jedem* genügend großen Zeitintervall die Schnittfläche. Verfolgen wir also eine nicht dem Rande angehörige Stromlinie von einem Schnittpunkt aus für wachsende Zeiten weiter, so folgt aus dieser Voraussetzung, daß sie die Schnittfläche noch ein zweites Mal treffen muß.

So wird jedem Punkt der Schnittfläche ein wohl bestimmter anderer zugeordnet, nämlich der nächste Treffpunkt der ihn passierenden Stromlinie. So ist dem Variationsproblem eine umkehrbar eindeutige und, wie man leicht sieht, auch stetige Transformation der Schnittfläche in sich zugeordnet. Geschlossene Stromlinien müssen offenbar durch Punkte der Schnittfläche gehen, die nach endlich oftmaliger Anwendung der Transformation in die Ausgangslage zurückgeführt werden. Denn eine geschlossene Stromlinie hat nur endlich viele Schnittpunkte mit der Schnittfläche gemeinsam. Unsere Transformationen der Schnittfläche in sich besitzen nun außerdem noch eine positive Integralinvariante. D. h. es gibt eine auf der Schnittfläche erklärte positive Funktion p derart, daß das $\iint p df$ erstreckt über zwei bei der Transformation einander entsprechende Teile der Schnittfläche denselben Wert hat. Dies ist leicht einzusehen. Ich führe die Überlegung an dem *Beispiel der geodätischen Linien* vor. Wir führen der Bequemlichkeit wegen in der dreidimensionalen Mannigfaltigkeit der Bewegungszustände geeignete Koordinaten ein. Zunächst führen wir auf der Fläche, deren geodätische Linien untersucht werden sollen, isotherme Koordinaten ein. Dadurch wird das Linienelement auf die Form

$$s'^2 = a(x, y) (x'^2 + y'^2)$$

gebracht, wo $a(x, y)$ eine positive analytische Funktion ist. Der Parameter t längs der Extremalen werde wieder durch $a(x'^2 + y'^2) = 1$ normiert. Dann werden, wie man nach leichter Rechnung sieht, die Differentialgleichungen der geodätischen Linien.

$$(3) \quad \begin{aligned} ax'' + a_x x'^2 + a_y x' y' - \frac{a_x}{2a} &= 0, \\ ay'' + a_x x' y' + a_y y'^2 - \frac{a_y}{2a} &= 0. \end{aligned}$$

Da nun aber x' und y' an die Bedingung $a(x'^2 + y'^2) = 1$ geknüpft sind, liegt es nahe, einen Parameter φ so einzuführen, daß

$$(4) \quad \begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{a}} \cos \varphi, \\ y' &= \frac{1}{\sqrt{a}} \sin \varphi \end{aligned}$$

wird. Dann liefert die Differentiation von $\varphi = \arctg \frac{y'}{x'}$ nach t :

$$(5) \quad \varphi' = a(x' y'' - y' x'').$$

Aus den beiden Gleichungen (3) findet man dann

$$(6) \quad \varphi' = \frac{1}{2} \frac{(a_x y' - a_y x')}{a} = \frac{1}{2} \frac{a_x \sin \varphi - a_y \cos \varphi}{a^{3/2}},$$

so daß (4) und (6) nun die Differentialgleichungen der Stromlinien sind. x, y, φ sind Parameter in der dreidimensionalen Mannigfaltig-

keit der Bewegungszustände. Schreibt man (4) und (6) in der Form

$$(7) \quad \begin{cases} x' = X(x, y, \varphi), \\ y' = Y(x, y, \varphi), \\ \varphi' = \Phi(x, y, -\varphi), \end{cases}$$

so sieht man sofort, daß $X_x + Y_y + \Phi_\varphi = 0$ ist. Das erinnert an die Kontinuitätsgleichung der Hydrodynamik der inkompressiblen Flüssigkeiten. Und tatsächlich kann man auch hier den Schluß ziehen, daß das Volumen $\iiint dx dy d\varphi$ eines beliebigen Bereiches bei der durch die Gleichungen (7) definierten Strömung unverändert bleibt. Zu dem Zwecke ist nur zu zeigen, daß das über die Oberfläche eines Bereiches erstreckte Integral der zu dieser Oberfläche normalen Geschwindigkeitskomponente der Strömung Null ist. Nun sind aber Y , X , Φ die drei Geschwindigkeitskomponenten. \mathbf{v} sei der Geschwindigkeitsvektor, ξ der Vektor der Flächennormalen. Dann ist $\iint \mathbf{v} \cdot \xi df$ erstreckt über die Oberfläche des Bereiches das Oberflächenintegral der Normalkomponente der Geschwindigkeit; $\mathbf{v} \cdot \xi$ ist dabei das innere Produkt der beiden Vektoren, also, da ξ ein Einheitsvektor ist, der Normalkomponente der Geschwindigkeit gleich. Nach dem Gaußschen Satz der Integralrechnung ist aber dies Oberflächenintegral gleich dem Volumintegral

$$-\iiint (X_x + Y_y + \Phi_\varphi) dx dy d\varphi.$$

Hier ist aber das Integral Null, und somit ist unsere Behauptung bewiesen. Wir wenden das Ergebnis insbesondere auf einen Stromfaden an, d. h. wir legen durch die Punkte eines zweidimensionalen Flächenstückes die Stromlinien hindurch und verfolgen dieselben bis zu irgendeinem anderen zweidimensionalen Flächenstück hin. Der von diesen beiden Flächenstückchen und den durch ihre Ränder gehenden Stromlinien begrenzte Bereich ist der Stromfaden. Da an den von den Stromlinien gebildeten Rändern die Normalkomponente der Geschwindigkeit Null ist, so bleibt vom Oberflächenintegral nur das über die beiden zweidimensionalen Flächenstücke erstreckte übrig und die Summe dieser beiden Oberflächenintegrale der Normalkomponente der Geschwindigkeit ist Null. Dabei sind aber immer die äußeren Normalen zu nehmen. Die eine derselben weist in die Stromrichtung, die andere in die entgegengesetzte Richtung. Daher können wir auch sagen, das Integral der Normalkomponente der Geschwindigkeit hänge von der Wahl des zweidimensionalen durch den Stromfaden gelegten Flächenstückes nicht ab, wenn man dabei immer die nach der Bewegungsrichtung genommene Normalkomponente der Geschwindigkeit verwendet. Die Strömung führt eben in der Zeiteinheit durch alle Querschnitte des Stromfadens die gleiche Flüssigkeitsmenge hindurch. Wenden wir dies insbesondere auf die Schnittfläche und zwei auf ihr

durch die Strömung ineinander übergeführte Flächenstücke an, so sind dies gerade zwei Querschnitte eines Geschwindigkeitsfadens. Die Normalkomponente der Geschwindigkeit ist eine positive Funktion und das Oberflächenintegral derselben ist die gesuchte Integralinvariante. Das Problem der geschlossenen Extremalen läuft somit jetzt auf die Frage nach denjenigen Punkten der Schnittfläche hinaus, die bei einer umkehrbar eindeutigen Transformation derselben mit positiver Integralinvariante fest bleiben. Darauf war schon *Poincaré* aufmerksam geworden, und er hat in seinem letzten geometrischen Theorem versucht, in einem bestimmten Falle die Existenz solcher Fixpunkte zu beweisen. *Birkhoff* hat dann später den Beweis wirklich erbracht. Dies letzte *Poincarésche* Theorem aber ist dieses: Wenn eine umkehrbare eindeutige und stetige Transformation eines Kreisringes (begrenzt von zwei konzentrischen Kreisen) eine positive Integralinvariante besitzt, stetig aus der Identität erzeugt werden kann und dabei beide Randkurven in verschiedener Richtung transformiert werden, so sind mindestens zwei Fixpunkte vorhanden. *Birkhoff* hat in seiner Arbeit, über die ich hier berichtet habe, noch weitere analoge Sätze ausgesprochen und bewiesen. Aber es mag das Gesagte genügen, um zu zeigen, in welchem weitem Maße Sätze der Analysis situs für die Zwecke der Theorie der Differentialgleichungen nutzbar gemacht werden können.

§ 2. Die Lösungskurven linearer Differentialgleichungen.

Schon auf S. 124 haben wir gelernt, daß man die Differentialgleichung

$$y'' + \varphi_1(x)y' + \varphi_0(x)y = f(x)$$

durch die Substitution

$$y = e^{-\frac{1}{2} \int \varphi_1(x) dx} \cdot v$$

auf die Gestalt

$$v'' + v \left\{ \varphi_0(x) - \frac{1}{4} (\varphi_1(x))^2 - \frac{1}{2} \varphi_1'(x) \right\} = f(x) e^{\frac{1}{2} \int \varphi_1(x) dx}$$

bringen kann. Wir wollen weiterhin annehmen, daß eine Differentialgleichung von der Form

$$(1) \quad y'' + \varrho(x)y = 0$$

vorgelegt sei.

An die Spitze stelle ich die schon S. 126 erwähnte Bemerkung, daß eine jede Lösung in jedem Stetigkeitsintervall des Koeffizienten $\varrho(x)$ samt ihrer ersten Ableitung stetig ist. Damit ist folgendes gemeint: Die in der Umgebung von $x = x_0$ durch $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$ festgelegte Lösung $y(x)$ ist nicht allein in der nächsten Umgebung dieser Stelle, sondern in dem vollen Stetigkeitsintervall von $\varrho(x)$, welchem x_0 angehört, als stetige mit stetiger Ableitung versehene Funktion

definiert. Am einfachsten sieht man dies nach einer Bemerkung von Herrn *Courant* so ein: Sei z. B. $\alpha > x_0$ die obere Grenze derjenigen Zahlen, für die $y(x)$ in $x_0 \leq x < \alpha$ stetig und mit stetiger Ableitung versehen ist. Dann gibt es eine Umgebung der Stelle α : $\alpha - h \leq x \leq \alpha + h$ ($h > 0$) in der ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung: $y_1(x)$, $y_2(x)$ stetig und mit stetiger erster Ableitung erklärt ist. Man kann dann nach S. 126 zwei Zahlen c_1 und c_2 so bestimmen, daß

$$c_1 y_1 + c_2 y_2$$

bei $x = \alpha - h$ mit $y(x)$ Funktionswert und Wert der ersten Ableitung gemein hat. Dies $c_1 y_1 + c_2 y_2$ stimmt dann mit $y(x)$ für $\alpha - h \leq x < \alpha$ überein, ist aber auch noch für $\alpha \leq x \leq \alpha + h$ stetig und mit stetiger Ableitung versehen: Daher war α nicht die obere Grenze derjenigen Zahlen, für die $y(x)$ in $x_0 \leq x < \alpha$ stetig und mit stetiger Ableitung versehen ist.

Wir wollen nun feststellen, welche Schlüsse das Vorzeichen von $q(x)$, sowie die Schranken, zwischen welchen diese Funktion liegt, hinsichtlich des qualitativen Verlaufs der Lösungen zulassen.

Ich will als *ersten Fall* den betrachten, daß im Intervall $a \leq x \leq b$

$$q(x) < 0$$

und stetig ist. Dann ergibt sich aus

$$y'' = -q(x)y,$$

daß stets y und y'' gleiches Vorzeichen besitzen, daß also eine jede Lösung oberhalb der x -Achse ihre Höhlung nach oben, unterhalb der x -Achse ihre Höhlung nach unten kehrt. Für die Lösungen kommen daher bis auf Vorzeichen nur die in Abb. 13 angedeuteten vier Typen in Betracht. Es ist dabei hinsichtlich des Treffens der x -Achse und hinsichtlich Fallen oder Steigen die Einteilung getroffen. Keine nicht durchweg verschwindende Lösung kann daher im Intervall $a \leq x \leq b$ mehr als eine Nullstelle besitzen.

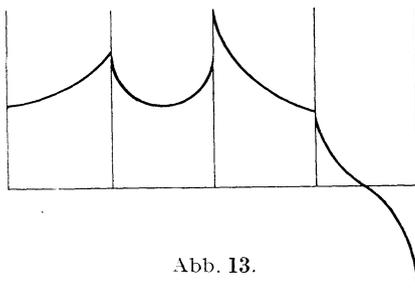


Abb. 13.

Der *zweite Fall* sei der, daß für $a \leq x \leq b$

$$q(x) > 0$$

und stetig ist. Dann folgt aus der Differentialgleichung

$$y'' = -q(x)y,$$

daß stets y und y'' verschiedene Vorzeichen besitzen. Eine jede Lösung kehrt also ihre Höhlung der x -Achse zu; auf dieser liegen die Wende-

punkte. Man darf aber daraus nicht etwa schließen, daß nun alle Lösungen für genügend große x die x -Achse schneiden. Das ist zwar bei den Lösungen von

$$y'' + y = 0$$

der Fall. Denn das allgemeine Integral $c_1 \cos x + c_2 \sin x$ dieser Gleichung kann ja auch in der Form $C_1 \sin(x + C_2)$ geschrieben werden. Es ist aber z. B. nicht bei der Lösung $y = \sqrt{x}$ von $y'' + \frac{1}{4} \frac{1}{x^2} y = 0$ der Fall.

Um diese beiden Fälle voneinander trennen zu können, muß der Einfluß der Schranken untersucht werden, zwischen denen $\varrho(x)$ im betrachteten Intervall liegt. Da nämlich, wie wir eben sahen, schon allein der Umstand, ob ϱ größer oder kleiner als Null ist, mancherlei Schlüsse zuläßt, so wird zu erwarten sein, daß eine ungefähre Schätzung von ϱ im Intervall noch weitere Schlüsse erlaubt. *So wird man darauf geführt, die Lösungen verschiedener Differentialgleichungen miteinander zu vergleichen.* So wie wir eben mit gewissen Lösungen von $y'' = 0$ verglichen, wollen wir jetzt mir den Lösungen anderer Differentialgleichungen

$$(2) \quad z'' + \sigma(x)z = 0$$

vergleichen.

Ich wende mich zunächst wieder zu $\varrho < 0$. In dieser Hinsicht gilt nun der folgende **Satz**:

In (1) sei $\varrho \leq \sigma \leq 0$, aber nicht $\varrho \equiv \sigma$. Durch die Bedingungen $y(x_0) = y_0 \leq 0$, $y'(x_0) = y_0'$ sei ein Integral $y(x)$ von (1) festgelegt. $z(x)$ sei das Integral von (2), welches die gleichen Anfangsbedingungen erfüllt. In $x_0 \leq x \leq x_0 + h$ seien $\varrho(x)$ und $\sigma(x)$ stetig, $\varrho(x) \leq 0$, und $y(x) > 0$ für $x > x_0$. Dann gilt $y > z$ für $x > x_0$.

Aus den beiden Differentialgleichungen (1) und (2) liest man ohne weiteres die Relation ab:

$$(3) \quad y''z - z''y + (\varrho - \sigma)yz = 0.$$

Integration derselben liefert

$$(4) \quad y'z - z'y = - \int_{x_0}^x (\varrho - \sigma) yz dx.$$

Da aber y für $x > x_0$ positiv ist, und da nach der Wahl der Anfangsbedingung $z > 0$ jedenfalls in einem gewissen Intervall $x_0 < x < x_0 + k$ gilt, da ferner $\varrho \leq \sigma$ aber nicht $\varrho \equiv \sigma$ ist, so ist $y'z - z'y > 0$ für $x_0 < x < x_0 + k$. Daraus folgt

$$(5) \quad \frac{y'}{y} > \frac{z'}{z}.$$

für $x_0 < x < x_0 + k$. Nochmalige Integration von x_0 bis x ergibt für den Fall, daß $y_0 > 0$ ist,

$$\frac{y}{y_0} > \frac{z}{y_0}.$$

Also ist wegen $y_0 > 0$ wirklich

$$y > z.$$

Im Falle, wo $y_0 = 0$ ist, bezeichne man mit x_1 eine zwischen x_0 und $x_0 + h$ gelegene Stelle, die wir dann gegen x_0 rücken lassen werden. Nun integriert man (5) von x_1 bis x und erhält

$$\frac{y(x)}{y(x_1)} > \frac{z(x)}{z(x_1)}$$

oder wegen $y(x_1) > 0$ auch

$$y(x) > z(x) \frac{y(x_1)}{z(x_1)}.$$

Nun lasse man $x_1 \rightarrow x_0$ rücken, dann wird

$$\frac{y(x_1)}{z(x_1)} \rightarrow \frac{y'(x_0)}{z'(x_0)} = 1.$$

Und daher ist

$$y(x) \geq z(x)$$

Hier kann aber das Gleichheitszeichen nur im Punkte x_0 stehen. Denn stünde es bei x_1 , wo $x_0 < x_1 \leq x_0 + h$ ist, so müßten sich die Integralkurven im Schnittpunkt berühren, weil es sonst in der Nähe Punkte gäbe, wo $y(x) < z(x)$ wäre. Wegen $y(x) > 0$ für $x > x_0$ ist im Schnittpunkt $x_1: y(x_1) = z(x_1) > 0$. Nun mache man die Substitution $x = -\xi$ in (1) und (2). Man erhält

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + \varrho(-\xi)y = 0$$

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} + \sigma(-\xi)z = 0$$

und das Intervall

$$-\xi_0 - h \leq \xi \leq -\xi_0.$$

Nun ist für $\xi > -x_1$ unsere erste Schlußweise verwendbar und wir finden

$$y(x_0) > z(x_0)$$

gegen die Voraussetzung $y(x_0) = z(x_0)$. Damit ist der Satz nun vollständig bewiesen.

Der Beweis gilt, solange $z > 0$ bleibt. Wird aber $z \leq 0$, so ist erst recht $y > 0 \geq z$. Damit ist dann der Beweis für alle $x > x_0$ geführt; denn wegen $\sigma \leq 0$ kann $z(x)$ nur einmal verschwinden, wenn es nicht identisch Null ist.

Als Vergleichsdifferentialgleichungen bieten sich z. B. die mit konstanten Koeffizienten dar. Da diese durch Exponentialfunktionen gelöst werden, so gewinnt man hier folgendes Ergebnis:

Wenn in (1) der Koeffizient $\rho(x)$ für alle $x > x_0$ stetig und negativ ist, und wenn $\lim_{x \rightarrow \infty} \rho(x) = -a^2$ ($a > 0$) gilt und wenn $y(x) > 0$ für $x < x_0$, so hat man für genügend große x die Abschätzung:

$$C e^{(a-\eta)x} < y(x) < C e^{(a+\eta)x},$$

wobei C und η beliebig wählbare positive Konstanten sind.

Beweis: Für die Differentialgleichung

$$z'' - b^2 z = 0 \quad (b > 0)$$

besitzt das Integral

$$\frac{b y_0 + y_0'}{2b} e^{b(x-x_0)} + \frac{b y_0 - y_0'}{2b} e^{-b(x-x_0)} = z(b, x)$$

die gewünschten Anfangswerte y_0 und y_0' . Hat man nun die Aufgabe, die positiven Integrale der Differentialgleichung

$$y'' + \rho(x)y = 0$$

abzuschätzen, für den Fall, daß

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \rho(x) = -a^2$$

gilt, so liegt von einem gewissen x ab $-\rho$ zwischen $(a-\varepsilon)^2$ und $(a+\varepsilon)^2$. Daher hat man für y die Abschätzungen

$$y > \frac{(a-\varepsilon)y_0 + y_0'}{2(a-\varepsilon)} e^{(a-\varepsilon)(x-x_0)} + \frac{(a-\varepsilon)y_0 - y_0'}{2(a-\varepsilon)} e^{-(a-\varepsilon)(x-x_0)}$$

$$y < \frac{(a+\varepsilon)y_0 + y_0'}{2(a+\varepsilon)} e^{(a+\varepsilon)(x-x_0)} + \frac{(a+\varepsilon)y_0 - y_0'}{2(a+\varepsilon)} e^{-(a+\varepsilon)(x-x_0)}.$$

Da nun aber jedenfalls für jedes positive η

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{z(b, x)}{e^{(b+\eta)x}} = 0$$

und

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{(b-\eta)x}}{z(b, x)} = 0$$

gilt, so folgt aus unserer Abschätzung insbesondere die folgende

$$C e^{(a-\eta)x} < y < C e^{(a+\eta)x}.$$

Diese gilt nach beliebiger Wahl der positiven Zahlen C und η von einem gewissen x an.

Für allgemeinere Differentialgleichungen besitzt man aus Mangel an geeigneten Vergleichsdifferentialgleichungen keine ähnlich guten Ergebnisse. Gewisse andere naheliegende Überlegungen führen zu viel weniger guten Abschätzungen.

Nunmehr sei eine Differentialgleichung

$$(6) \quad y'' + \rho(x)y = 0$$

vorgelegt, in der $\rho(x)$ für $x > x_0$ stetig und positiv sei.

Ich beginne mit der folgenden Bemerkung. *Im Endlichen können sich die Nullstellen eines nicht identisch verschwindenden Integrales nicht häufen.* Denn in jedem Intervall aus $x > x_0$ ist jede Lösung samt ihrer Ableitung stetig. Dies ergibt sich entweder nach S. 116 mit der Methode der sukzessiven Approximationen oder nach der S. 146/147 angegebenen Schlußweise. Wenn nun bei $x = \alpha$ etwa eine Häufungsstelle von Nullstellen läge, so müßte dort das betreffende Integral samt seiner Ableitung verschwinden¹⁾. Es wäre also identisch Null, da jede Lösung durch ihren eigenen und den Anfangswert ihrer Ableitung eindeutig bestimmt ist.

Betrachte ich nun zwei Integrale y_1 und y_2 derselben Differentialgleichung und nehme an, daß sie ein Fundamentalsystem bilden, daß also keines derselben identisch verschwinde und daß ihr Quotient nicht konstant sei, dann liegt zwischen je zwei Nullstellen des einen Integrales mindestens eine Nullstelle des anderen²⁾.

Integriert man nun zwischen zwei Nullstellen ξ und η von y_1 , so erhält man

$$(7) \quad y_2(\eta) y_1'(\eta) = y_2(\xi) y_1'(\xi).$$

Man darf nun annehmen, daß ξ und η zwei aufeinanderfolgende Nullstellen sind und daß zwischen beiden $y_1 > 0$ ist. Dann ist jedenfalls

$$y_1'(\xi) > 0 \quad \text{und} \quad y_1'(\eta) < 0^3).$$

Man darf weiter annehmen, daß $y_2(\xi) > 0$ sei⁴⁾. Dann lehrt die Formel (7), daß $y_2(\eta) < 0$ sein muß. Daher liegt zwischen ξ und η mindestens eine Nullstelle von y_2 . Da man aber ebenso schließen kann, daß zwischen zwei Nullstellen von y_2 mindestens eine von y_1 liegt, so kann man das Ergebnis dahin verschärfen, daß *zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen der einen Lösung eines Fundamentalsystems genau eine der anderen liegt.*

1) Man kann bei der Bildung der Differenzenquotienten stets diese Nullstellen verwenden. Dann ist der Differenzenquotient stets Null und durch Grenzübergang auch der Differentialquotient.

2) Daraus folgt ein zweiter Beweis dafür, daß die Nullstellen einer Lösung keinen Häufungspunkt besitzen. Denn in diesem müßte dann jede andere Lösung gleichfalls verschwinden.

3) Zunächst ist nämlich sicher z. B. $y_1'(\xi) \geq 0$. Wäre aber $y_1'(\xi) = 0$, so wäre $y_1 = 0$, da ja auch $y_1(\xi) = 0$ ist und die Lösung durch $y_1(\xi) = y_1'(\xi) = 0$ eindeutig bestimmt ist. Es sollte aber $y_1(x) \neq 0$ sein. Ebenso findet man $y_1'(\eta) < 0$.

4) Wäre auch $y_2(\xi) = 0$, so gingen beide Lösungen durch Multiplikation mit dem Quotient ihrer Ableitungen in diesem Punkte auseinander hervor. Sie haben ja dann bei $x = \xi$ den gleichen Wert Null und unterscheiden sich nur in den dort vorgeschriebenen Ableitungen $y'(\xi)$, die bei keiner — die nicht identisch Null ist — Null sein kann. Durch Multiplikation einer solchen Lösung mit einer geeigneten Konstanten bleibt der Wert $y(\xi) = 0$ erhalten, während man $y'(\xi)$ jeden beliebigen Wert verschaffen kann. Linear unabhängige Integrale haben also keine gemeinsame Nullstelle. Wäre aber $y_2(\xi) < 0$, so dürfte ich zu — y_2 übergehen, weil dabei die Lage der Nullstellen nicht geändert wird.

Man erkennt daraus schon, daß zwischen dem Abstand der aufeinanderfolgenden Nullstellen und dem Koeffizienten $\varrho(x)$ ein abschätzbarer Zusammenhang bestehen muß. Ihn wollen wir jetzt ergründen.

Dazu führt eine ähnliche Bemerkung wie bei $\varrho(x) < 0$. Wieder gilt in gewissem Umfang die Bemerkung, daß die Differentialgleichung mit größerem ϱ die kleineren Integrale besitzt. Um sie scharf zu fassen, nehme ich an, es seien zwei verschiedene Differentialgleichungen

$$(8) \quad \begin{aligned} y'' + \varrho(x)y &= 0 \\ z'' + \sigma(x)z &= 0 \end{aligned}$$

vorgelegt, d. h. es sei $\varrho(x) \neq \sigma(x)$, und es sei $\varrho(x) \leq \sigma(x)$ für $\alpha \leq x \leq \beta$. Man gewinnt dann wieder sofort die Formel

$$(9) \quad y''z - z''y = (\sigma - \varrho)yz.$$

Ich nehme nun an, daß y und z bei $x = x_0$ verschwinden und dort die gleiche von Null verschiedene Ableitung haben. Integriere ich dann die Formel (7) von x_0 bis x ($\alpha \leq x_0 < x \leq \beta$), so finde ich

$$(10) \quad y'z - z'y = \int_{x_0}^x (\sigma - \varrho)yz \, dx.$$

Hieraus folgt für $x > x_0$, und solange y und z nicht negativ sind,

$$y'z - z'y > 0.$$

Also wird

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y}{z} \right) = \frac{y'z - yz'}{z^2} > 0$$

für $x > x_0$. Also wächst $\frac{y}{z}$. Da aber $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{y}{z} = 1$ ist, so ist

$$(11) \quad y > z \quad \text{für} \quad x > x_0$$

und unter der Annahme, daß y und z nicht negativ sind. Fällt insbesondere die auf x_0 folgende Nullstelle $x_1 > x_0$ von $y(x)$ noch in das Intervall $\alpha \leq x \leq \beta$, so wird schon die nächste Nullstelle von $z(x)$ vorher erreicht.

Die Differentialgleichung mit größerem Koeffizienten besitzt also das kleinere Integral, wenn beide in gleicher Richtung steigend durch ihre gemeinsame Nullstelle x_0 hindurchgehen, und zwar im Intervall

$$\alpha \leq x_0 < x \leq \beta,$$

solange das Integral der Differentialgleichung mit größerem Koeffizienten nicht zum zweiten Male verschwindet. Die nächste Nullstelle der Lösung der Differentialgleichung mit dem größeren Koeffizienten liegt näher bei x_1 als die nächste Nullstelle des Integrals der Differentialgleichung mit kleinerem Koeffizienten. Diese letztere auf die Lage der Nullstellen sich beziehende Aussage ist nicht daran gebunden, daß beide Integrale in der gemeinsamen Nullstelle die gleiche Ableitung besitzen. Denn die Lage der Nullstellen

wird durch einen konstanten Faktor, mit dem man ein Integral multipliziert, nicht beeinflusst.

Bei größeren Koeffizienten der Differentialgleichung liegen also in einem durch die vorstehenden Betrachtungen näher festgelegten Sinn die Nullstellen näher beieinander als bei kleineren.

Ich ziehe zur weiteren Präzisierung des Resultates die Differentialgleichung

$$z'' - a^2 z = 0$$

mit konstantem Koeffizienten heran.

$$(12) \quad z = \frac{y_0'}{a} \sin a(x - x_0)$$

ist dasjenige Integral derselben, welches für $x = x_0$ verschwindet und dessen Ableitung dort den Wert y_0' besitzt. Gilt nun für nicht konstantes $\varrho(x)$ in dem Intervall $\alpha \leq x \leq \beta$ die Abschätzung $0 < m \leq \varrho \leq M$, so gilt für das durch $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = y_0' > 0$ festgelegte Integral derselben die Abschätzung

$$(13) \quad y > \frac{y_0'}{\sqrt{M}} \sin \sqrt{M}(x - x_0)$$

sicher in dem kleineren der beiden Intervalle

$$x_0 < x < x_0 + \frac{\pi}{\sqrt{M}} \quad \text{und} \quad x_0 < x < \beta.$$

Für die nächste Nullstelle x_1 von y gilt als insbesondere

$$x_1 - x_0 > \frac{\pi}{\sqrt{M}}.$$

Ebenso erkennt man, daß

$$(14) \quad y < \frac{y_0'}{\sqrt{m}} \sin \sqrt{m}(x - x_0)$$

in dem kleineren der beiden Intervalle $x_0 < x < x_0 + \frac{\pi}{\sqrt{m}}$ und $x_0 < x < \beta$ und solange $y \geq 0$ bleibt. Ist also insbesondere das erste Intervall das kleinere und bezeichnet $x_1 > x_0$ die auf x_0 folgende Nullstelle von y , so ist

$$x_1 - x_0 < \frac{\pi}{\sqrt{m}}.$$

Wir fassen das Ergebnis so zusammen: Wenn in dem Intervall $\alpha \leq x \leq \beta$

$$0 < m \leq \varrho(x) \leq M$$

ist, so gilt für den Abstand Δx zweier aufeinanderfolgender dem Intervall $\alpha \leq x \leq \beta$ angehöriger Nullstellen x_0 und x_1 von y die Abschätzung

$$(15) \quad \frac{\pi}{\sqrt{M}} \leq \Delta x \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}}.$$

Hiernach kann man die Anzahl n der Nullstellen, welche eine Lösung y in dem Intervall $\alpha \leq x \leq \beta$ besitzt, abschätzen. Ich beschränke

mich dabei auf den Fall, daß α und x_0 zusammenfallen und zähle die bei x_0 gelegene Nullstelle nicht mit. Man hat dann nach (15)

$$(16) \quad \frac{\beta - \alpha}{\pi} \sqrt{m} \leq n \leq \frac{\beta - \alpha}{\pi} \sqrt{M}.$$

Man kann das Ergebnis noch folgendermaßen verschärfen. Man betrachte zwei Integrale $y(x)$ und $z(x)$ der beiden Differentialgleichungen (8), welche beide bei x_0 verschwinden. *Läßt man dann x wachsen, so wird die k -te Nullstelle ζ_k von $z(x)$ vor der k -ten Nullstelle η_k von $y(x)$ angetroffen.* Diese Behauptung ist nach dem vorstehenden jedenfalls für die erste auf x_0 folgende Nullstelle richtig. Wir beweisen sie für die k -te durch vollständige Induktion.

Ich nehme also die Behauptung für die m -ten Nullstellen als bewiesen an. Die m -te Nullstelle ζ_m von z wird also vor der m -ten Nullstelle η_m von y angetroffen. Dann konstruiere ich eine Lösung $y_1(x)$ von (8), welche in ζ_m verschwindet, und suche ihre in der Richtung wachsender x folgende Nullstelle. Da aber y_1 zwischen η_m und η_{m+1} mindestens eine Nullstelle haben muß, so liegt die gewünschte folgende noch vor η_{m+1} und daher liegt auch ζ_{m+1} vor η_{m+1} .

Eine weitere Vervollständigung erhalten unsere Betrachtungen durch die Bemerkung, daß die Lage der Nullstellen stetig von einer Änderung der Differentialgleichung abhängt. Um die Aussage zu präzisieren, will ich annehmen, es sei eine Differentialgleichung

$$(17) \quad y'' + \varrho(x, \lambda) y = 0^1$$

vorgelegt, in welcher für ein gewisses das Intervall $x_0 \leq x \leq x_1$ enthaltendes über das rechte Ende etwas verlängertes Intervall, und für ein Parameterintervall $\alpha \leq \lambda \leq \beta$ der Koeffizient eine stetige Funktion des Parameters λ sei. Dann betrachte man wieder eine bei x_0 verschwindende Lösung, welche dort die Ableitung $y'(x_0) = 1$ besitzen möge. Man wandere von x_0 in Richtung wachsender x und es sei $\eta_n(\lambda)$ die n -te hier angetroffene Nullstelle. Sie hängt dann stetig von λ ab. Dies folgt unmittelbar daraus, daß, wie wir schon von S. 116 wissen, die angegebene Lösung $y(x, \lambda)$ stetig von λ abhängt. Um hieraus die Richtigkeit der Aussage über $\eta_n(\lambda)$ zu erkennen, wähle man einen bestimmten Wert $\lambda = \lambda_0$, für den man die Stetigkeit untersuchen will. Man grenze um $\eta_n(\lambda_0)$ ein Intervall ab, in dem keine weitere Nullstelle von $y(x, \lambda_0)$ liegt. An Anfang und Ende soll also $y(x, \lambda_0)$ verschiedenes Vorzeichen haben. Für alle λ -Werte, welche hinreichend wenig von λ_0 verschieden sind, besitzt dann $y(x, \lambda)$ wieder an Anfang und Ende verschiedenes Vorzeichen, und daher besitzt auch für diese λ -Werte $y(x, \lambda)$ in dem Intervall mindestens eine Nullstelle. Da man das Intervall beliebig

¹⁾ Man kann durch eine Zusatzüberlegung auch mit der Annahme auskommen, daß $\varrho(x, \lambda)$ nur in $x_0 \leq x \leq x_1$ selbst stetig ist.

klein und die brauchbare λ -Änderung entsprechend wählen kann, so folgt hieraus die stetige Abhängigkeit der Nullstelle vom Parameter, sowie erst feststeht, daß in dem Intervall nicht mehr als eine Nullstelle liegen kann. Dies aber folgt sofort daraus, daß man das Intervall so klein wählen kann, daß darin $y'(x, \lambda_0)$ einerlei Vorzeichen besitzt. Ferner wähle man die λ -Änderung so klein, daß dabei das Vorzeichen der Ableitung erhalten bleibt.

Nunmehr bringe ich diese Stetigkeitsbetrachtung mit der bisherigen in Verbindung und setze nun noch voraus, daß in (17) $\varrho(x, \lambda)$ bei festem x aus $x_0 \leq x \leq x_1$ eine stetige positive monoton wachsende Funktion von λ sei. Dann kann man die bisherige Betrachtung noch dahin ergänzen, daß die n -te Nullstelle $\eta_n(\lambda)$ mit wachsendem λ nach links rückt, daß also $\eta_n(\lambda)$ eine monoton abnehmende Funktion ist. Das folgt ja ohne weiteres aus der schon oben festgestellten Tatsache, daß die n -te Nullstelle einer Lösung der Gleichung mit größerem Koeffizienten vor der n -ten Nullstelle einer Lösung der Gleichung mit kleinerem Koeffizienten angetroffen wird. Nimmt man nun endlich noch an, daß $\varrho(x, \lambda)$ für $\lambda \rightarrow \beta$ einer Grenzfunktion $\varrho(x)$ gleichmäßig zustrebe, so lehrt unsere Betrachtung, daß $\eta_n(\lambda)$ gegen die n -te Nullstelle der Lösung der Grenzgleichung konvergiert. Von besonderem Interesse ist aber hier ein nicht unmittelbar in dieser Aussage enthaltener Fall, nämlich der, daß $\varrho(x, \lambda)$ für $\lambda \rightarrow \beta$ und $x_0 \leq x \leq x_1$ gleichmäßig gegen Unendlich strebt, d. h. also, daß für hinreichend große λ im ganzen Intervall einschließlich der Enden $\varrho(x, \lambda)$ über jeder gegebenen Schranke liegt. Man erkennt sofort aus (16), daß dann mit wachsendem λ die Zahl der Nullstellen im Intervall beliebig groß werden wird, und daß $\eta_n(\lambda) \rightarrow x_0$ konvergiert.

Setzt man endlich noch voraus, daß $\varrho(x, \lambda)$ für $\lambda \rightarrow \alpha$ und $x_0 \leq x \leq x_1$ gleichmäßig gegen Null oder eine hinreichend kleine positive stetige Funktion strebt¹⁾, so besitzt für λ -Werte aus der Nähe von α eine bei $x = x_0$ verschwindende, im Intervall $x_0 \leq x \leq x_1$ nicht identisch verschwindende Lösung im Inneren desselben überhaupt keine Nullstelle. Das führt zu dem folgenden Satz, den wir nach **Klein Oszillationstheorem** nennen wollen:

In der Differentialgleichung

$$y'' + \varrho(x, \lambda)y = 0$$

sei $\varrho(x, \lambda)$ in $a \leq x \leq b$, $\alpha \leq \lambda \leq \beta$ eine stetige positive Funktion der beiden Veränderlichen x und λ . Ferner mögen die folgenden beiden Voraussetzungen gelten:

1. Zu jedem $M > 0$ gebe es ein $\varepsilon > 0$ derart, daß $\varrho(x, \lambda) > M$ für $a = x_0 \leq x \leq x_1 < b$ und $\beta - \lambda < \varepsilon$, wo $x_0 \leq x \leq x_1$ ein festes inneres Teilintervall wo $a \leq x \leq b$ bedeutet.

¹⁾ Es genügt nach S. 153 anzunehmen, daß sie kleiner als $\frac{\pi^2}{(x_1 - x_0)^2}$ sei.

2. Ebenso gebe es ein $\varepsilon > 0$, so daß für $\lambda - \alpha < \varepsilon$ und $x_0 \leq x \leq x_1$ die Ungleichung

$$\varrho(x, \lambda) < \frac{\pi^2}{(x_1 - x_0)^2}$$

gilt. Dann gehört zu jedem ganzen positiven n eine Zahl λ_n derart, daß $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \dots$ und daß

$$y'' + \varrho(x, \lambda_n)y = 0$$

eine bei $x = x_0$ und bei $x = x_1$ verschwindende Lösung hat, die im Inneren des Intervalles $x_0 < x < x_1$ an genau n Stellen verschwindet. Läßt man die Voraussetzung 2. fallen, so kann man die Behauptung des Satzes nur für genügend große n aufrecht erhalten. Durch eine Stetigkeitsbetrachtung kann man sich von der Annahme $x_1 < b$ frei machen und kann den Satz auch für $x_1 = b$ aussprechen.

Wir nennen jeden Wert λ_i , für den (17) eine bei $x = x_0$ und $x = x_1$ verschwindende nichttriviale Lösung besitzt, *Eigenwert* und jede zugehörige nichttriviale Lösung eine *Eigenfunktion*. Die Verteilung der Eigenwerte soll nun für die spezielle Differentialgleichung

$$(18) \quad y'' + \lambda \varrho(x)y = 0$$

noch etwas näher untersucht werden. Es sei $0 < m \leq \varrho(x) \leq M$.

Ich werde zeigen, daß

$$\lambda_n \geq \frac{n^2 \pi^2}{(x_1 - x_0)^2 M}$$

ist, daß also namentlich die Reihe

$$\sum \frac{1}{\lambda_n}$$

konvergiert. λ_n soll also der λ -Wert sein, zu dem eine Lösung von (18) gehört, die bei $x = x_0$ und bei $x = x_1$ verschwindet und die $n - 1$ Nullstellen im Inneren des Intervall besitzt. Es ist nämlich nach Formel (16) auf S. 154

$$n \leq \frac{x_1 - x_0}{\pi} \sqrt{\lambda_n \cdot M}.$$

Also ist wirklich

$$(19) \quad \lambda_n \geq \frac{n^2 \cdot \pi^2}{(x_1 - x_0)^2 M}.$$

Daher konvergiert die Reihe der reziproken Eigenwerte. Analog findet man noch

$$\lambda_n \leq \frac{n^2 \cdot \pi^2}{(x_1 - x_0)^2 m}.$$

Im Falle $\varrho(x) > 0$ sind die Eigenwerte λ_n von (18) alle positiv und so beschaffen, daß $\sum \frac{1}{\lambda_n}$ konvergiert.

§ 3. Randwertaufgaben.

Das Oszillationstheorem des vorigen Paragraphen ist ein erstes Beispiel für eine ganz neuartige Fragestellung. Bisher hatten wir eine Lösung immer durch ihren Wert und den Wert ihrer Ableitung an einer Stelle festgelegt. Schon bei der Kettenlinie und jetzt wieder tritt uns die Aufgabe entgegen, eine Lösung dadurch festzulegen, daß für zwei Werte von x die Werte der Lösung gegeben werden. Da diese in dem von diesen beiden Stellen begrenzten Intervall zu untersuchen ist und die Lösung somit durch Bedingungen an den Rändern des Intervalles festgelegt werden soll, so sprechen wir von einer Randwertaufgabe. Es gibt deren noch andere. Es wird immer darauf ankommen, durch zwei Bedingungen die beiden Integrationskonstanten festzulegen. Diese Bedingungen mögen durch zwei Gleichungen zwischen den Werten von $y(x)$ und $y'(x)$ an den Enden des Intervalles $x_0 \leq x \leq x_1$ geliefert werden, und zwar wollen wir uns auf den Fall beschränken, daß eine lineare Differentialgleichung

$$(1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

in der p , p' und q in $x_0 \leq x \leq x_1$ stetig sein mögen, vorgelegt ist, und daß zwei lineare Gleichungen die Randbedingungen liefern. Diese werallgemein so aussehen:

$$(2) \quad \begin{aligned} a_{00}y(x_0) + a_{01}y'(x_0) + a_{10}y(x_1) + a_{11}y'(x_1) &= a \\ a'_{00}y(x_0) + a'_{01}y'(x_0) + a'_{10}y(x_1) + a'_{11}y'(x_1) &= a'. \end{aligned}$$

Wir teilen die Randwertaufgaben zunächst in homogene und inhomogene ein. Bei den homogenen sind sowohl Differentialgleichung wie Randbedingungen homogen, d. h. es verschwinden sowohl in (1) wie in (2) die rechten Seiten, so daß also wie im vorigen Paragraphen eine Lösung nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt sein kann. Bei den inhomogenen ist mindestens eine der rechten Seiten in (1) und (2) von Null verschieden. Die *Randwertaufgabe*, die uns im vorigen Paragraphen begegnete, und die auch bei der Kettenlinie vorlag, wollen wir die *erste* nennen. Hier sind also an den Intervallenden die Werte der unbekannteten Funktion vorgeschrieben. Von der *zweiten* wollen wir reden, wenn an Anfang und Ende der Wert der Ableitung gegeben ist. Darüber hinaus gibt es noch mancherlei andere, denen wir keine besonderen Namen geben wollen. Transformiert man in der auf S. 124 angegebenen Weise (1) so, daß der Koeffizient von y' verschwindet, so gehen die Relationen (2) in neue lineare Relationen zwischen den Anfangs- und Endwerten der neuen Lösung über. Der lineare Charakter der Randwertaufgabe bleibt also erhalten und wie man ebenso leicht sieht, wird aus einer homogenen Aufgabe eine homogene und aus einer inhomogenen eine inhomogene. Aus einer ersten Randwertaufgabe wird eine erste, aus einer zweiten eine zweite usw.

Ich beschränke mich daher weiterhin auf $p \equiv 0$, d. h. auf die Differentialgleichung

$$(3) \quad y'' + q(x)y = r(x),$$

wo q und r in dem zugrunde gelegten Intervall $x_0 \leq x \leq x_1$ stetig sein mögen. Wir werden uns in dieser Darstellung auch wesentlich auf die erste Randwertaufgabe beschränken.

Ich beginne mit einer allgemeinen Beziehung zwischen homogenen und inhomogenen Randwertaufgaben, die in den linken Seiten von (1) und (2) übereinstimmen. Da gilt der Satz: *Die inhomogene Aufgabe ist stets dann lösbar, wenn die zugehörige homogene keine triviale d. h. nicht identisch verschwindende Lösung besitzt. Ist aber die homogene lösbar, so besitzt eine zugehörige inhomogene nur dann Lösungen, wenn die rechten Seiten noch gewisse Zusatzbedingungen erfüllen, ist also im allgemeinen nicht lösbar.* Diese Alternative erinnert an eine bekannte Alternative aus der Theorie der linearen algebraischen Gleichungen und tatsächlich folgt auch unser Satz unmittelbar aus diesem algebraischen. Wenn nämlich y_1 und y_2 ein Fundamentalsystem der zu (1) gehörigen homogenen Gleichung bilden, so ist nach S. 130 die allgemeine Lösung von (1) selbst durch

$$(4) \quad \frac{y_1 \int_{x_0}^x r(\xi) y_2(\xi) d\xi - y_2 \int_{x_0}^x r(\xi) y_1(\xi) d\xi}{[y_1'(x_0) y_2(x_0) - y_1(x_0) y_2'(x_0)]} + C_1 y_1 + C_2 y_2$$

gegeben. Die beiden Randbedingungen (2) laufen dann aber stets auf zwei lineare Gleichungen zwischen den C_1 und C_2 hinaus, deren rechte Seiten verschwinden, wenn ein homogenes Problem vorliegt. Im Fall der ersten Randwertaufgabe

$$y(x_0) = a, \quad y(x_1) = a'$$

sehen diese Bedingungsgleichungen z. B. so aus:

$$(5) \quad \begin{aligned} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) &= a \\ C_1 y_1(x_1) + C_2 y_2(x_1) &= a' - \frac{y_1(x_1) \int_{x_0}^{x_1} r y_2 d\xi - y_2(x_1) \int_{x_0}^{x_1} r y_1 d\xi}{y_1'(x_0) y_2(x_0) - y_1(x_0) y_2'(x_0)}. \end{aligned}$$

Daraus fließt aber unmittelbar die behauptete Alternative. Betrachten wir insbesondere ein homogenes Problem: $a = a' = r = 0$, so sehen wir, daß dasselbe nur dann lösbar ist, wenn die Determinante

$$y_1(x_0) y_2(x_1) - y_2(x_0) y_1(x_1) = 0$$

ist. Ist diese nicht Null, so ist jedes inhomogene Problem lösbar. Dieses ist aber für den Fall des Verschwindens der Determinante sicher nur dann lösbar, wenn die rechten Seiten der Gleichungen einer bekannten linearen Gleichung genügen. Ist insbesondere $a = a' = 0$, so müssen die rechten Seiten überhaupt verschwinden. Diese Bedingung kann

leicht in einer etwas anderen Form angegeben werden. Wählen wir nämlich im Fundamentalsystem y_1 als Lösung des homogenen Problems, so ist in (5) $y_1(x_1) = 0$, $y_2(x_1) \neq 0$, und daher lautet die Bedingung für das

Verschwinden der rechten Seite von (5) offenbar, daß $\int_{x_0}^{x_1} r(\xi) y_1(\xi) d\xi = 0$ sein muß. In diesem Falle ist die Aufgabe auch tatsächlich lösbar und man bekommt die Lösung, wenn man in (4) $C_2 = 0$ einträgt. Die Lösung hängt dann wieder — wie beim algebraischen Problem — noch von einem Parameter C_1 ab.

Ich knüpfe noch einmal an (4) an, um dieser Formel noch eine etwas andere Gestalt zu geben. Ich nehme dabei an, der ersten homogenen Randwertaufgabe könne für die zu (3) gehörige homogene Gleichung nicht genügt werden, und will mit Hilfe von (4) diesen homogenen Randbedingungen für die inhomogene Gleichung (3) zu genügen suchen. Um dieser Formel eine bequeme Gestalt zu geben, lege ich y_1 und y_2 durch die Anfangsbedingungen $y_1(x_0) = y_2(x_1) = 0$ und die Zusatzbedingung $y_1'(x_0) y_2(x_0) - y_1(x_0) y_2'(x_0) = 1$ fest. Dann kann man die Lösung von (3) in der Form

$$\begin{aligned} y &= y_1 \int_{x_0}^x y_2 r d\xi - y_2 \int_{x_0}^x y_1 r d\xi - y_1 \int_{x_0}^x y_2 r d\xi \\ &= -y_1 \int_x^{x_1} y_2(\xi) r(\xi) d\xi - y_2 \int_{x_0}^x y_1(\xi) r(\xi) d\xi \end{aligned}$$

schreiben. Nun setze man

$$\begin{aligned} G(x, \xi) &= y_1(\xi) y_2(x) \quad \text{für } x_0 \leq x \leq x_1 \\ &= y_2(\xi) y_1(x) \quad \text{für } x_0 \leq \xi \leq x_1. \end{aligned}$$

Dabei ist offenbar $G(x, \xi) = G(\xi, x)$. Man nennt diese Funktion die *Greensche Funktion* des Randwertproblems. Sie genügt in jedem der beiden Intervalle $x_0 \leq x \leq \xi$ und $\xi \leq x \leq x_0$ der homogenen Differentialgleichung (3) und der homogenen ersten Randbedingung in $x_0 \leq x \leq x_1$. Bei $x = \xi$ ist sie zwar stetig, aber ihre Ableitung erleidet dort eine sprunghafte Änderung. Es ist nämlich

$$\left. \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{\xi=0} - \left. \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{\xi=0} = y_1'(\xi) y_2(\xi) - y_2'(\xi) y_1(\xi) = 1.$$

Dann kann man schreiben

$$(6) \quad y = - \int_{x_0}^{x_1} G(x, \xi) r(\xi) d\xi.$$

Manchmal bietet es Vorteile, von der Zusatzbedingung auf

$$y_1'(x_0) y_2(x_0) - y_1(x_0) y_2'(x_0) = 1$$

abzusehen. Alsdann beachte man, daß

$$y_1'(x) y_2(x) - y_1(x) y_2'(x)$$

konstant ist, und setze

$$(7) \quad G(x, \xi) = \frac{y_1(x)y_2(x)}{y_1'(\xi)y_2(\xi) - y_1(\xi)y_2'(\xi)} = \frac{y_1(x)y_2(\xi)}{y_1'(x_0)y_2(x_0)} \quad \text{für } x_0 \leq x \leq \xi \\ = \frac{y_1(\xi)y_2(x)}{y_1'(\xi)y_2(\xi) - y_1(\xi)y_2'(\xi)} = \frac{y_1(\xi)y_2(x)}{-y_1(x_1)y_2'(x_1)} \quad \text{für } \xi \leq x \leq x_1$$

Die Formel (6) bleibt dann richtig.

§ 4. Nähere Betrachtung der Eigenwerte und der Eigenfunktionen von $y'' + (\sigma + \lambda \varrho) y = 0$.

In der Differentialgleichung

$$(1) \quad y'' + (\sigma + \lambda \varrho) y = 0$$

seien $\sigma(x)$, $\varrho(x)$, $\varrho'(x)$ in $x_0 \leq x \leq x_1$ stetig und $\varrho(x) > 0$.

Wenn man zwei zu verschiedenen Eigenwerten gehörige Eigenfunktionen multipliziert und ihr Produkt mit $\varrho(x)$ über das Intervall x_0 bis x_1 integriert, so erhält man Null. Man sagt, je zwei Eigenfunktionen verschiedener Nummer seien zueinander *orthogonal*. Man hat nämlich

$$y_n'' + (\sigma(x) + \lambda_n' \varrho(x)) y_n = 0, \\ y_m'' + (\sigma(x) + \lambda_m \varrho(x)) y_m = 0.$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit y_m , die zweite mit y_n und subtrahiert, so hat man

$$y_n'' y_m - y_m'' y_n = (\lambda_m - \lambda_n) \varrho(x) y_n y_m.$$

Integriert man von x_0 bis x_1 , so kommt

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_{x_0}^{x_1} y_n y_m \varrho dx = (y_n' y_m - y_m' y_n) \Big|_{x_0}^{x_1} = 0.$$

Daher ist wegen $\lambda_n \neq \lambda_m$

$$(2) \quad \int_{x_0}^{x_1} y_n y_m \varrho dx = 0$$

und das ist der analytische Ausdruck für die Orthogonalität der beiden Eigenfunktionen¹⁾.

¹⁾ Daraus folgt auch, daß alle Eigenwerte reell sind. Unter Eigenwert verstehen wir dabei nach S. 156 irgendeinen reellen oder komplexen Wert von λ , für den die homogene Differentialgleichung (1) eine am Anfang und Ende des Intervalles, aber nicht überall im Intervall verschwindende Lösung besitzt. Mit jedem komplexen Eigenwert λ tritt auch sein konjugiert komplexer $\bar{\lambda}$ als Eigenwert auf. Dazu gehören konjugiert komplexe Eigenfunktionen $\varphi(x)$ und $\overline{\varphi(x)}$, für die also $\int_{x_0}^{x_1} \varrho(x) \varphi(x) \overline{\varphi(x)} dx = 0$ sein müßte. Da aber $\varrho(x) > 0$ ist und $\varphi(x) \overline{\varphi(x)} \geq 0$ ist, so muß $\varphi(x) \equiv 0$ sein. Reelle Eigenwerte η besitzen auch stets bis auf konstante Faktoren reelle Eigenfunktionen. Denn wäre $\varphi(x)$ eine zu dem reellen Eigenwert λ gehörige komplexe Eigenfunktion, so wären auch $\overline{\varphi(x)}$ und also auch das reelle $\varphi(x) + \overline{\varphi(x)}$ Eigenfunktionen. Alle zu demselben Eigenwert gehörige Eigenfunktionen sind aber bis auf konstante Faktoren einander gleich.

Weiter ist wegen $\varrho > 0$

$$\int_{x_0}^{x_1} \varrho(x) y_n^2(x) dx \neq 0.$$

Da die Eigenfunktionen nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt sind, so sollen dieselben durch Multiplikation mit geeigneten Faktoren so normiert werden, daß

$$(3) \quad \int_{x_0}^{x_1} \varrho(x) y_n^2(x) dx = 1$$

ist. Es wird sich zeigen, daß die so normierten Eigenfunktionen beschränkt sind, daß es also eine von n unabhängige Zahl M gibt, derart, daß für alle n und alle x in $x_0 \leq x \leq x_1$

$$|y_n(x)| \leq M$$

gilt.

Wir werden dies Resultat als eine unmittelbare Folgerung aus einer asymptotischen Abschätzung der Eigenfunktionen gewinnen. Damit meinen wir eine näherungsweise Bestimmung der zu großen λ -Werten gehörigen Eigenfunktionen. Da für große λ die Änderungen, welche σ und ϱ im Intervall erfahren können, einen relativ geringen Einfluß auf die Werte von $\sigma + \lambda\varrho$ haben, so wird man diese als nahezu konstant ansehen dürfen. Somit liegt die Erwartung nahe, daß man die Eigenfunktionen näherungsweise durch einen Ausdruck dieser Form wird darstellen können:

$$(4) \quad Y = z(x) \sin \int_{x_0}^x \sqrt{\varrho(\xi)} d\xi.$$

wobei $z(x)$ eine noch passend zu bestimmende Funktion von x bedeutet.

Wir haben darüber hinaus im Sinn, für beliebige von Eigenwerten λ_i verschiedene große λ ein Fundamentalsystem der Gleichung (1) asymptotisch darzustellen. Insbesondere werde das durch $y_1(x_0) = y_2(x_1) = 0$ festgelegte gewählt. Diese beiden können ja dann kein konstantes Verhältnis besitzen, weil sie sonst bei x_0 und bei x_1 verschwänden, und also Eigenfunktionen wären.

Zunächst möge noch eine Bemerkung darüber Platz finden, warum wir uns auf eine genäherte Darstellung der Eigenfunktionen für große Eigenwerte beschränken dürfen. Dies hat seinen Grund darin, daß unter den λ -Werten, deren absoluter Betrag unter einer irgendwie gegebenen Schranke liegt, nur endlich viele Eigenwerte vorkommen. Um das einzusehen, betrachten wir irgendeine Anzahl n von Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ und die zugehörigen durch (2) normierten Eigenfunktionen: y_1, y_2, \dots, y_n . Ich nehme an, daß $\lambda = 0$ kein Eigenwert sei. Eventuell kann dies durch eine passende Transformation $\lambda' = \lambda - \lambda_0$ erreicht werden. Es sei dann $G(x, \xi)$ die Greensche Funktion von

$$y'' + \sigma(x)y = 0.$$

Dann ist nach (6) S. 159

$$(5) \quad y_k(x) = \lambda_k \int_{x_0}^{x_1} G(x, \xi) y_k(\xi) \varrho(\xi) d\xi.$$

Bezeichnet dann $f(x)$ irgendeine in $x_0 \leq x \leq x_1$ stetige Funktion, so ist wegen (2) und (3)

$$(6) \quad \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \sqrt{\varrho(\eta)} f(\eta) - \sum_1^n y_k(\eta) \sqrt{\varrho(\eta)} \int_{x_0}^{x_1} f(\xi) y_k(\xi) \varrho(\xi) d\xi \right\}^2 d\eta \\ = \int_{x_0}^{x_1} \varrho(\eta) [f(\eta)]^2 d\eta - \sum_1^n \left\{ \int_{x_0}^{x_1} f(\xi) y_k(\xi) \varrho(\xi) d\xi \right\}^2 \geq 0.$$

Nun setze man insbesondere

$$f(x) = G(z, x).$$

Dann wird nach (5)

$$\int_{x_0}^{x_1} G(z, \xi) y_k(\xi) \varrho(\xi) d\xi = \frac{1}{\lambda_k} y_k(z).$$

Also ist nach (6)

$$\sum_1^n \frac{[y_k(z)]^2}{\lambda_k^2} \leq \int_{x_0}^{x_1} \varrho(\eta) [G(\eta, z)]^2 d\eta.$$

Man multipliziere mit $\varrho(z)$ und integriere von x_0 bis x_1 . So hat man

$$\sum_1^n \frac{1}{\lambda_k^2} \leq \int_{x_0}^{x_1} d\eta \int_{x_0}^{x_1} dz \varrho(\eta) \varrho(z) [G(\eta, z)]^2.$$

Also ist die Summe über die Quadrate der reziproken Eigenwerte konvergent. Diese besitzen also nirgends einen Häufungspunkt im Endlichen. Zudem sind wegen $\varrho(x) > 0$ die Eigenwerte, deren absoluter Betrag eine gewisse Schranke übersteigt, alle positiv.

Nachdem man nun erst einmal weiß, daß in endlichem Bezirk nur endlich viele Eigenwerte liegen, kann man durch Überlegungen ähnlich den auf S. 156 angestellten sogar weiter erkennen, daß

$$\sum \frac{1}{\lambda_k}$$

konvergiert. Es sei wieder $\varrho(x) \leq M$ und $|\sigma(x)| \leq M_0$ in

$$x_0 \leq x \leq x_1 < b^1),$$

woselbst $\varrho(x)$ stetig sein möge. λ_0 sei so gewählt, daß für $\lambda \geq \lambda_0$

$$\sigma(x) + \lambda \varrho(x) > 0$$

¹⁾ Von dieser Annahme kann man sich befreien.

ist. ν sei die Anzahl der Eigenwerte die kleiner oder gleich λ_0 sind. Dann bestimmen sich die Eigenwerte

$$\lambda_{n+\nu}, \quad n > 0$$

aus dem Oszillationstheorem und es gibt daher eine Zahl $k > 0$, so daß die Eigenfunktion $y_{n+\nu}$ in $x_0 < x < x_1$ genau $n + k$ Nullstellen hat. Dann ist nach S. 156

$$n + k \leq \frac{x_1 - x_0}{\pi} \sqrt{M_0} + \lambda_n M.$$

D. h.:
$$\lambda_{n+\nu} \geq \left\{ \frac{\pi^2 (n+k)^2}{(x_1 - x_0)^2} - M_0 \right\} \frac{1}{M} = (n + \nu^2) \cdot O(1),$$

wobei $O(1)$ einen Faktor bedeutet, der für alle n unter einer festen Schranke bleibt. Man hat also

$$\lambda_n = n^2 O(1).$$

Die Behauptung über die Konvergenz von $\sum \frac{1}{\lambda_k}$ ist damit reichlich bewiesen. Weiterhin brauche ich nun die Voraussetzung, daß $\varrho(x)$ eine in $x_0 \leq x \leq x_1$ stetige Ableitung besitze.

Ich komme zur *asymptotischen Darstellung der Lösungen*. Ich mache zu diesem Zwecke den Ansatz

$$(7) \quad \begin{aligned} y_1(x, \lambda) &= y_1(x) \cdot e^{i \sqrt{\lambda} \int_{x_0}^x \sqrt{\varrho} dt} \\ y_2(x, \lambda) &= y_2(x) \cdot e^{-i \sqrt{\lambda} \int_{x_0}^x \sqrt{\varrho} dt} \end{aligned}$$

in der Absicht, in dieser Form zunächst zwei Funktionen zu gewinnen, die möglichst gut die Differentialgleichung (1) erfüllen. Damit ist gemeint, daß bei Einsetzung von (7) in (1) und nachheriger Entwicklung der linken Seite nach fallenden Potenzen von λ möglichst viele Anfangsglieder der Entwicklung verschwinden. Man findet

$$\begin{aligned} & y_1''(x, \lambda) + (\sigma + \lambda \varrho) y_1(x, \lambda) \\ &= e^{i \sqrt{\lambda} \int_{x_0}^x \sqrt{\varrho} dt} \{ y_1'(x) + i \sqrt{\lambda} [(V \varrho)' y_1 + 2 V \varrho y_1'] + \sigma y_1 \}, \end{aligned}$$

so daß man noch

$$(V \varrho)' y_1 + 2 V \varrho y_1' = 0$$

fordern kann. Das führt zu

$$y_1(x) = e^{-\frac{1}{4}},$$

so daß nach (7)¹⁾

$$(8) \quad y_1(x, \lambda) = e^{-\frac{1}{4}} \exp \left(i \sqrt{\lambda} \int_{x_0}^x V \varrho dt \right)$$

¹⁾ $\exp(a)$ bedeutet e^a .

und
$$y_2(x, \lambda) = \varrho^{-\frac{1}{4}} \exp \left(-i \sqrt{\lambda} \int_{x_0}^x \sqrt{\varrho} dt \right)$$

wird. Sie genügen nach unserer Rechnung beide der Differentialgleichung

$$(9) \quad u'' + (\sigma + \lambda \varrho) u = u r(x),$$

wo
$$r(x) = \frac{y_1''(x) + \sigma(x) y_1'(x)}{y_1(x)}.$$

Obwohl hiernach y_1 und y_2 nur bis auf ein Glied mit einem von λ unabhängigen Koeffizienten der Differentialgleichung (1) genügen, wird sich gleich zeigen, daß sie gleichwohl in für unsere Zwecke brauchbarer Weise die Lösungen von (1) approximieren: Nach Formel (4) S. 158 gilt nämlich für die Lösungen von (1) die folgende Relation:

$$(10) \quad z(x, \lambda) = c_1 y_1(x, \lambda) + c_2 y_2(x, \lambda) - \frac{y_1(x, \lambda) \int_{x_0}^x r(\xi) y_2(\xi, \lambda) z(\xi, \lambda) d\xi}{2i \sqrt{\lambda} \varrho^{1/4}} + \frac{y_2(x, \lambda) \int_{x_0}^x r(\xi) y_1(\xi, \lambda) z(\xi, \lambda) d\xi}{2i \sqrt{\lambda} \varrho^{1/4}}.$$

Also setzen wir¹⁾

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 0$$

und nennen das zugehörige $z: z_2(x, \lambda)$, und setzen²⁾ $c_1 = 0, c_2 = 1$ und nennen das zugehörige $z: z_1(x, \lambda)$.

Wir setzen weiter $\sqrt{\lambda} = \alpha + i\beta$ und

$$z_k(x, \lambda) = z_k(x) e^{i\beta \int_{x_0}^x \sqrt{\varrho} dt}.$$

Nach (10) wird dann

$$\exp \left(i\beta \int_{x_0}^x \sqrt{\varrho} dt \right) |z_k(x)| \leq \varrho^{-\frac{1}{4}} \exp \left(\beta \int_{x_0}^x \sqrt{\varrho} dt \right) \varrho^{-\frac{1}{4}} \exp \left(-\beta \int_{x_0}^x \sqrt{\varrho} dt \right) \cdot \int_{x_0}^x |r(\xi)| \exp \left(\beta \int_{x_0}^x \sqrt{\varrho} dt \right) \cdot |z_k(\xi)| \exp \left(i\beta \int_{x_0}^{\xi} \sqrt{\varrho} dt \right) d\xi + \frac{\varrho^{-\frac{1}{4}} \exp \left(\beta \int_{x_0}^x \sqrt{\varrho} dt \right) \cdot \int_{x_0}^x |r(\xi)| \exp \left(-\beta \int_{x_0}^x \sqrt{\varrho} dt \right) \cdot |z_k(\xi)| \exp \left(i\beta \int_{x_0}^{\xi} \sqrt{\varrho} dt \right) d\xi}{2 \sqrt{\lambda} \varrho^{1/4}} + \frac{\varrho^{-\frac{1}{4}} \exp \left(-\beta \int_{x_0}^x \sqrt{\varrho} dt \right) \cdot \int_{x_0}^x |r(\xi)| \exp \left(-\beta \int_{x_0}^x \sqrt{\varrho} dt \right) \cdot |z_k(\xi)| \exp \left(i\beta \int_{x_0}^{\xi} \sqrt{\varrho} dt \right) d\xi}{2 \sqrt{\lambda} \varrho^{1/4}}.$$

¹⁾ So erhält man diejenige Lösung, welche bei $x = x_0$ den Wert $\varrho^{-\frac{1}{4}}(x_0)$ hat, und deren Ableitung bei $x = x_0$ den Wert $-\frac{1}{4} \varrho^{-\frac{5}{4}}(x_0) \varrho'(x_0) + i \sqrt{\lambda} \varrho^{\frac{1}{4}}(x_0)$ besitzt.

²⁾ So erhält man diejenige Lösung, welche bei $x = x_0$ den Wert $\varrho^{-\frac{1}{4}}(x_0)$ hat, und deren Ableitung bei $x = x_0$ den Wert $-\frac{1}{4} \varrho^{-\frac{5}{4}}(x_0) \varrho'(x_0) - i \sqrt{\lambda} \varrho^{\frac{1}{4}}(x_0)$ hat.

Wenn nun $\beta \geq 0$ ist, so vergrößert man den zweiten Summanden rechts, indem man unter dem Integral

$$r(\xi) \exp \left(\beta \int_{x_0}^x \sqrt{Q} dt \right) | z_k(\xi) | \exp \left(\beta \int_{x_0}^x \sqrt{Q} dt \right)$$

schreibt, während sich im dritten Summanden unter dem Integral zwei Faktoren zerstören. Für $\beta \leq 0$ verfährt man mit dem dritten Summanden rechts so, wie eben mit dem zweiten, während sich im zweiten zwei Faktoren zerstören. So gelangt man zu der Abschätzung

$$\text{Max}_{x_0 \leq x \leq x_1} | z_k(x) | \leq \text{Max}_{x_0 \leq x \leq x_1} Q^{-1/4} + \text{Max}_{x_0 \leq x \leq x_1} Q^{-1/2} \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \text{Max}_{x_0 \leq x \leq x_1} | z_k(x) |,$$

wo
$$\mu = \int_{x_0}^{x_1} | r(\xi) | d\xi$$

ist. Setzt man $\text{Max} | z_k(x) | = z$, $\text{Max} Q^{-1/4} = P$, so ist also

$$z \leq P + P^2 \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} z.$$

Also

$$z \leq \frac{P}{1 - P^2 \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}} \text{ für genügend große } \sqrt{\lambda} |.$$

D. h. z ist beschränkt für alle λ . Daher ist

$$(11) \quad z_k(x, \lambda) = y_k(x, \lambda) + \frac{\exp \left(\beta \int_{x_0}^x \sqrt{Q} dt \right)}{\sqrt{\lambda}} O(1).$$

$y_k(x, \lambda)$ ist dabei durch (8) erklärt. Es ist $\sqrt{\lambda} = \alpha + i\beta$ gesetzt. Und $O(1)$ bedeutet einen für alle λ und x unter einer festen Schranke gelegenen Faktor. Zur Erläuterung dieser asymptotischen Darstellung der Lösungen von (1) sei noch bemerkt, daß nach (8)

$$y_k(x, \lambda) \leq Q^{-1/4} \exp \left\{ \beta \int_{x_1}^x \sqrt{Q} dt \right\},$$

so daß der Unterschied zwischen $z_k(x, \lambda)$ und $y_k(x, \lambda)$ von kleinerer Größenordnung in λ ist als $y_k(x, \lambda)$ selbst.

Auf Grund von (11) kann man nun auch zu einer asymptotischen Darstellung der Lösungen gelangen, die bei $x = x_0$ verschwinden. Da der dritte und vierte Summand in (10) bei $x = x_0$ verschwindet, so ist

$$(12) \quad Z_1(x, \lambda) = \frac{z_1 - z_2}{2i} \dots \frac{y_1 - y_2}{2i} - \frac{y_1 \int_{x_0}^x r y_2 Z_1 d\xi - y_2 \int_{x_0}^x r y_1 Z_1 d\xi}{2i \sqrt{\lambda} Q^{1/4}}$$

eine bei $x = x_0$ verschwindende Lösung von (1). Man entnimmt dies auch den S. 164 angegebenen Anfangsbedingungen für z_1 und z_2 . Für diese neue Lösung gewinnt man aus (11) die folgende asymptotische Darstellung

$$(13) \quad Z_1(x, \lambda) = \varrho^{-\frac{1}{4}} \sin \left\{ \sqrt{\lambda} \int_{x_0}^x \sqrt{\varrho} dt \right\} + \frac{\exp \left\{ \beta \int_{x_0}^x \sqrt{\varrho} dt \right\}}{\sqrt{\lambda}} O(1).$$

Da im Punkte $x = x_1$ die gleichen Betrachtungen wie bei x_0 angestellt werden können, so gewinnt man in

$$(14) \quad Z_2(x, \lambda) = \varrho^{-\frac{1}{4}} \sin \left\{ \sqrt{\lambda} \int_{x_1}^x \sqrt{\varrho} dt \right\} - \frac{y_1 \int_{x_1}^x r y_2^* Z_2 d\xi - y_2 \int_{x_1}^x r y_1^* Z_2 d\xi}{2i \sqrt{\lambda} \varrho^{1/4}} \\ = \varrho^{-\frac{1}{4}} \sin \left\{ \sqrt{\lambda} \int_{x_1}^x \sqrt{\varrho} dt \right\} + \frac{\exp \left\{ \beta \int_{x_1}^x \sqrt{\varrho} dt \right\}}{\sqrt{\lambda}} O(1).$$

eine Lösung von (1) die bei $x = x_1$ verschwindet. Hier ist

$$y_1^*(x, \lambda) = \varrho^{-\frac{1}{4}} \exp \left\{ i \sqrt{\lambda} \int_{x_1}^x \sqrt{\varrho} dt \right\},$$

$$y_2^*(x, \lambda) = \varrho^{-\frac{1}{4}} \exp \left\{ i \sqrt{\lambda} \int_{x_1}^x \sqrt{\varrho} dt \right\}.$$

$Z_2(x, \lambda)$ ist durch die Anfangsbedingungen

$$Z_2(x_1, \lambda) = 0$$

$$Z_2'(x_1, \lambda) = \sqrt{\lambda} \varrho^{1/4}(x_1)$$

festgelegt.

Da $Z_1(x, \lambda)$, wie man leicht sieht, eine ganze Funktion von λ ist und die Eigenwerte der Gleichung

$$Z_1(x_1, \lambda) = 0$$

genügen, so findet man aufs neue, daß unendlich viele Eigenwerte vorhanden sind, daß sie sich im Endlichen nicht häufen, und man kann auch auf Grund von (12) mit Hilfe des *Rouchéschen* Satzes¹⁾ der Funktionentheorie erneut die S. 163 gewonnene asymptotische Darstellung der Eigenwerte herleiten.

Wir gehen nun zur asymptotischen Darstellung der *Greenschen* Funktion über. Ich lege dem (7) von S. 163 zugrunde. Aus (12) und (13) entnimmt man, daß

$$Z_1'(x_0) = \varrho^{1/4}(x_0) \sqrt{\lambda}.$$

Daher findet man

¹⁾ Vgl. z. B. *Bieberbach*, Lehrbuch der Funktionentheorie Bd. I. 2. Aufl. S. 185.

$$(16a) \quad G(x, \xi, \lambda) =$$

$$\left[\begin{aligned} & e^{-\frac{1}{4}(x)} \sin \left\{ \sqrt{\lambda} \int_{x_0}^x \sqrt{\varrho} dt \right\} + \frac{\exp \left\{ \beta \int_{x_0}^x \sqrt{\varrho} dt \right\}}{\sqrt{\lambda}} O(1) \left| \left| e^{-\frac{1}{4}(\xi)} \sin \left\{ \sqrt{\lambda} \int_{x_1}^{\xi} \sqrt{\varrho} dt \right\} + \frac{\exp \left\{ \beta \int_{x_1}^{\xi} \sqrt{\varrho} dt \right\}}{\sqrt{\lambda}} O(1) \right. \right. \\ & \left. \left. e^{\frac{1}{4}(x_0)} \sqrt{\lambda} \left[e^{-\frac{1}{4}(x_0)} \sin \left(\sqrt{\lambda} \int_{x_1}^{x_0} \sqrt{\varrho} dt \right) + \frac{\exp \left\{ \beta \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\varrho} dt \right\}}{\sqrt{\lambda}} O(1) \right] \right. \right. \end{aligned} \right]$$

$$\text{für} \quad x_0 \leq x \leq \xi$$

und

$$(16b) \quad G(x, \xi, \lambda) =$$

$$\left[\begin{aligned} & e^{-\frac{1}{4}(\xi)} \sin \left\{ \sqrt{\lambda} \int_{x_0}^{\xi} \sqrt{\varrho} dt \right\} + \frac{\exp \left\{ \beta \int_{x_0}^{\xi} \sqrt{\varrho} dt \right\}}{\sqrt{\lambda}} O(1) \left| \left| e^{-\frac{1}{4}(x)} \sin \left\{ \sqrt{\lambda} \int_{x_1}^x \sqrt{\varrho} dt \right\} + \frac{\exp \left\{ \beta \int_{x_1}^x \sqrt{\varrho} dt \right\}}{\sqrt{\lambda}} O(1) \right. \right. \\ & \left. \left. - e^{\frac{1}{4}(x_1)} \sqrt{\lambda} \left[e^{-\frac{1}{4}(x_1)} \sin \left(\sqrt{\lambda} \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\varrho} dt \right) + \frac{\exp \left\{ \beta \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\varrho} dt \right\}}{\sqrt{\lambda}} O(1) \right] \right. \right. \end{aligned} \right]$$

$$\text{für} \quad \xi \leq x \leq x_1$$

Dabei soll natürlich λ kein Eigenwert sein.

Ich bemerke nun zunächst, daß die so bestimmte Greensche Funktion bei festem (x, ξ) in der ganzen endlichen λ -Ebene bis auf Pole regulär ist. Wegen (7) S. 163 genügt es dazu zu zeigen, daß $\sqrt{\lambda} Z_1(x, \lambda)$ und $\sqrt{\lambda} Z_2(x, \lambda)$ ganze Funktionen von λ sind. Ich führe den Beweis für $\sqrt{\lambda} Z_1(x, \lambda)$ durch. Diese Funktion

$$\mathfrak{z}_1(x, \lambda) = \sqrt{\lambda} Z_1(x, \lambda)$$

ist durch die Anfangsbedingungen

$$\mathfrak{z}_1(x_0, \lambda) = 0$$

$$\mathfrak{z}_1'(x_0, \lambda) = \lambda \varrho^{\frac{1}{4}}(x_0)$$

festgelegt [vgl. (15)]. Der nach λ genommene Differenzenquotient für λ und $\lambda + \Delta \lambda$ werde mit

$$\bar{\mathfrak{z}}_1(x, \lambda, \Delta \lambda)$$

bezeichnet. Er genügt der Differentialgleichung

$$(17) \quad \bar{\mathfrak{z}}_1'' + (\sigma + \lambda \varrho) \bar{\mathfrak{z}}_1 + \varrho \bar{\mathfrak{z}}_1(x, \lambda + \Delta \lambda).$$

Dabei ist $\bar{\mathfrak{z}}_1$ durch die folgenden Anfangsbedingungen festgelegt

$$(18) \quad \bar{\mathfrak{z}}_1(x_0, \lambda, \Delta \lambda) = 0$$

$$\bar{\mathfrak{z}}_1'(x_0, \lambda, \Delta \lambda) = \lambda \varrho^{\frac{1}{4}}(x_0).$$

Ich stütze mich nun auf die bekannte übrigens analog beweisbare Tatsache, daß

$$\lim_{\Delta \lambda \rightarrow 0} \bar{\mathfrak{z}}_1(x, \lambda, \Delta \lambda) = \mathfrak{z}_1(x, \lambda)$$

gleichmäßig in x ist und vergleiche die durch (18) bestimmte Lösung von (17) mit der durch die gleichen Anfangsbedingungen festgelegten Lösung von

$$(19) \quad \bar{\mathfrak{z}}_0'' + (\sigma + \lambda \varrho) \bar{\mathfrak{z}}_0 + \varrho \bar{\mathfrak{z}}_1(x, \lambda) = 0.$$

Das ist die Differentialgleichung, der der Differentialquotient von $\bar{\mathfrak{z}}_1(x, \lambda)$ nach λ genügen muß, wenn er existiert. Für $\bar{\mathfrak{z}} = \bar{\mathfrak{z}}_1 - \bar{\mathfrak{z}}_0$ gilt dann

$$(20) \quad \bar{\mathfrak{z}}'' + (\sigma + \lambda \varrho) \bar{\mathfrak{z}} + \varrho (\bar{\mathfrak{z}}_1(x, \lambda + \Delta \lambda) - \bar{\mathfrak{z}}_1(x, \lambda)) = 0$$

mit den Anfangsbedingungen

$$(21) \quad \begin{aligned} \bar{\mathfrak{z}}(x_0, \lambda, \Delta \lambda) &= 0 \\ \bar{\mathfrak{z}}'(x_0, \lambda, \Delta \lambda) &= 0. \end{aligned}$$

Zieht man nun ein Fundamentalsystem von

$$\mathfrak{z}'' + (\sigma + \lambda \varrho) \mathfrak{z} = 0$$

heran, so sieht man an Hand von (4) S. 158 sofort ein, daß wegen (21)

$$\lim_{\Delta \lambda \rightarrow 0} \bar{\mathfrak{z}}_1(x, \lambda, \Delta \lambda) = \bar{\mathfrak{z}}_0(x, \lambda)$$

gleichmäßig in x gilt. D.h. $\bar{\mathfrak{z}}_1(x, \lambda)$ ist für jedes λ nach λ differenzierbar, ist also eine ganze Funktion.

$G(x, \xi, \lambda)$ ist somit eine meromorphe Funktion, deren Pole bei den Nullstellen von

$$\sqrt{\lambda} Z_1(x_0, \lambda)$$

liegen. Das sind aber die Eigenwerte ($\lambda = 0$ gehört nicht dazu, weil der Faktor λ dazu nötig ist, erst aus $Z_1(x_0, \lambda)$ eine ganze Funktion zu machen).

Man kann also, um den meromorphen Charakter deutlich zu machen, so schreiben

$$\begin{aligned} G(x, \xi, \lambda) &= \frac{\bar{\mathfrak{z}}_1(x, \lambda) \bar{\mathfrak{z}}_2(\xi, \lambda)}{\bar{\mathfrak{z}}_1'(x_0, \lambda) \bar{\mathfrak{z}}_2(x_0, \lambda)} \quad x_0 \leq x \leq \xi \\ &= \frac{\bar{\mathfrak{z}}_1(\xi_1, \lambda) \bar{\mathfrak{z}}_2(x_1, \lambda)}{-\bar{\mathfrak{z}}_1(x_1, \lambda) \bar{\mathfrak{z}}_2'(x_1, \lambda)} \quad \xi \leq x \leq x_1. \end{aligned}$$

Hier ist

$$\bar{\mathfrak{z}}_1(x, \lambda) = \sqrt{\lambda} Z_1(x, \lambda)$$

und

$$\bar{\mathfrak{z}}_2(x, \lambda) = \sqrt{\lambda} Z_2(x, \lambda)$$

gesetzt.

Die Eigenwerte sind alle einfach, d. h. einfache Nullstellen der Nenners d. h. von $\bar{\mathfrak{z}}_2(x_0, \lambda)$ oder was dasselbe ist von $\bar{\mathfrak{z}}_1(x_1, \lambda)$. Denn die eben bestimmte, der Differentialgleichung (19) für $\lambda = \lambda_i$ genügende Ableitung

$$\bar{\mathfrak{z}}_0(x, \lambda_i) = \frac{\partial}{\partial \lambda} (\bar{\mathfrak{z}}_1(x, \lambda_i))$$

der i -ten Eigenfunktion kann jedenfalls für $x = x_1$ nicht verschwinden. Denn wegen der Anfangsbedingungen (18) wäre dann für $\lambda = \lambda_i$ auch

für die inhomogene Gleichung (19) die erste Randwertaufgabe lösbar. Das kann aber nach S. 159 oben nur dann der Fall sein, wenn

$$\delta_1(x, \lambda_i)$$

zur i -ten Eigenfunktion orthogonal ist. Nun ist aber $\delta_1(x, \lambda_i)$ gerade die i -te Eigenfunktion. Sie kann aber wegen $q > 0$ nicht zu sich selbst orthogonal sein. Das Residuum wird daher für $\xi \leqq x \leqq x_1$

$$\frac{\delta_1(\xi, \lambda_i) \delta_2(x, \lambda_i)}{-\delta_0(x_1, \lambda_i) \lambda_i q^{\frac{1}{2}}(x_1)}$$

Ich führe nun statt der Eigenfunktion

$$\delta_1(x, \lambda_i)$$

die durch

$$\int_{x_0}^x q(t) \varphi_i(t) \varphi_i(t) dt = 1$$

normierte Eigenfunktion ein.

Es ist

$$(22) \quad \varphi_i(x) = \frac{\delta_1(x, \lambda_i)}{\int_0^{x_1} q(t) \delta_1(t, \lambda_i) \delta_1(t, \lambda_i) dt}$$

Aus (19) folgt aber wegen (18)

$$\delta_0(x_1, \lambda_i) = \frac{\int_0^{x_1} q(t) \delta_1(t, \lambda_i) \delta_2(t, \lambda_i) dt}{\lambda_i q^{\frac{1}{2}}(x_1)}$$

Dies folgt aus der Formel (4) von S. 158, wenn man im Nenner derselben x_0 durch x_1 ersetzt.

Daher wird das Residuum für $\xi \leqq x \leqq x_1$

$$\frac{\delta_1(\xi, \lambda_i) \delta_2(x, \lambda_i)}{\int_{x_0}^{x_1} q(t) \delta_1(t, \lambda_i) \delta_2(t, \lambda_i) dt}$$

Da aber

$$G(x, \xi, \lambda) = G(\xi, x, \lambda),$$

so gilt diese Darstellung des Residuums auch für $x_0 \leqq x \leqq \xi$. Nun aber gibt es, da $\delta_1(t, \lambda_i)$ Eigenfunktion ist, eine Konstante h , so daß

$$\delta_2(t, \lambda_i) = h \delta_1(t, \lambda_i).$$

Daher kann man für das Residuum auch schreiben

$$\begin{aligned} & \frac{\delta_1(\xi, \lambda_i) \delta_2(x, \lambda_i)}{\int_{x_0}^{x_1} q(t) \delta_1^2(t, \lambda_i) dt \int_{x_0}^{x_1} q(t) \delta_2^2(t, \lambda_i) dt} \\ &= -\varphi_i(x) \varphi_i(\xi). \end{aligned}$$

Für alle Nullstellen von $\varphi_i(x)$ oder $\varphi_i(\xi)$ kommt also der sonst bei λ_i gelegene einfache Pol von $G(x, \xi, \lambda)$ in Wegfall.

Aus (22) können wir nun auch eine asymptotische Darstellung der normierten Eigenfunktionen $\varphi_i(x)$ entnehmen. Wegen der auf S. 168 gegebenen Definition von $\mathfrak{z}_1(x, \lambda_i)$ kann man darin, statt $\mathfrak{z}_1(x, \lambda_i)$ auch $Z_1(x, \lambda_i)$ schreiben und also an die S. 166 gegebene asymptotische Darstellung (13) von $Z_1(x, \lambda)$ anknüpfen. Da hier $x = \lambda_i$ zu nehmen ist, und λ_i reell also $\beta = 0$ ist, so entnimmt man aus (13)

$$Z_1(x, \lambda_i) = e^{-\frac{1}{4}} \sin \left\{ \sqrt{\lambda_i} \int_{x_0}^x \sqrt{\varrho} dt \right\} + \frac{O(1)}{\sqrt{\lambda_i}}.$$

Daher ist

$$Z_1^2(x, \lambda_i) = e^{-\frac{1}{2}} \sin^2 \left\{ \sqrt{\lambda_i} \int_{x_0}^x \sqrt{\varrho} dt \right\} + \frac{O(1)}{\sqrt{\lambda_i}}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \varrho Z_1^2 dx &= \int_{x_0}^{x_1} e^{\frac{1}{2}} \sin^2 \left\{ \sqrt{\lambda_i} \int_{x_0}^x \sqrt{\varrho} dt \right\} dx = \int_0^{u_1} \frac{\sin^2 u du}{\sqrt{\lambda_i}}, \quad u_1 = \sqrt{\lambda_i} \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\varrho} dt \\ &= \frac{-\cos u_1 \sin u_1 + u_1}{2\sqrt{\lambda_i}}. \end{aligned}$$

Daher wird

$$\int_{x_0}^{x_1} \varrho Z_1^2 dx = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\varrho} dt + \frac{O(1)}{\sqrt{\lambda_i}}.$$

Daher ist

$$\varphi_i(x) = \frac{2e^{-\frac{1}{4}} \sin \left\{ \sqrt{\lambda_i} \int_{x_0}^x \sqrt{\varrho} dt \right\}}{\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\varrho} dt} + \frac{O(1)}{\sqrt{\lambda_i}} = O(1).$$

Daraus folgt nach S. 163, daß $\sum \frac{\varphi_i(x) \varphi_i(\xi)}{\lambda - \lambda_i}$ in x, ξ, λ gleichmäßig konvergiert. Die vorhin durchgeführte Residuenbestimmung gibt nun auch die Möglichkeit, die Partialbruchdarstellung der Greenschen Funktion zu gewinnen. Zu dem Zwecke hat man das über eine geeignete geschlossene Kurve zu erstreckende Integral

$$(23) \quad \frac{1}{2\pi i} \int \frac{G(x, \xi, \mu)}{\mu - \lambda} d\mu$$

zu betrachten. Es erweist sich als zweckmäßig als Integrationsweg der μ -Ebene eine positive durchlaufene Kurve zu nehmen, die sich beim Übergang zu $\sqrt{\mu}$ auf die der Halbebene der positiven Imaginärteile von $\sqrt{\mu}$ angehörige Hälfte eines Quadrates abbildet, das den Koordinatenachsen parallel orientiert ist, das den Ursprung zum Mittelpunkt hat und dessen Kantenlänge

$$\binom{n+1}{2} \pi \left(\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\varrho} dt \right) \quad (n > 0, \text{ ganz})$$

ist. Dann ist nämlich auf den vertikalen Kanten des Quadrates

$$\Re V \lambda \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\varrho} dt = \pm \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi.$$

In den Treffpunkten des Quadratrandes mit der reellen λ -Achse ist daher der Sinus des Nenners von (16) von Null verschieden. Für genügend große n ist daher in diesen Punkten (wegen $\beta = 0$) der Nenner überhaupt von Null verschieden¹⁾. Da aber die Nullstellen des Nenners die Eigenwerte sind, und da diese alle reell sind, so ist somit für jedes genügend große n die Greensche Funktion auf dem Quadratrand regulär und somit ist dieser als Integrationsweg brauchbar. Der Wert des Integrals (23) ist gleich der Summe der Residuen an den im Quadratinnern gelegenen Polen des Integranden. An den Eigenwerten wird das Residuum

$$-\frac{\varphi_i(x) \varphi_i(\xi)}{\lambda_i - \lambda}.$$

Außerdem liefert noch $\mu = \lambda$ einen Pol vom Residuum

$$G(x, \xi, \lambda).$$

So findet man

$$(24) \quad G(x, \xi, \lambda) = \sum \frac{\varphi_i(x) \varphi_i(\xi)}{\lambda_i - \lambda} + \frac{1}{2\pi i} \int_{Q_n} \frac{G(x, \xi, \mu)}{\mu - \lambda} d\mu.$$

Dabei ist über die im Quadratinnern gelegenen Eigenwerte zu summieren. Die asymptotische Darstellung (16) läßt nun aber erkennen, daß für $n \rightarrow \infty$ das in (24) vorkommende Integral verschwindet, daß daher

$$(25) \quad G(x, \xi, \lambda) = \sum \frac{\varphi_i(x) \varphi_i(\xi)}{\lambda_i - \lambda}$$

erstreckt über alle Eigenwerte gilt. Hier steht rechts, wie wir schon von S. 170 wissen und wie wir hier aufs neue erkennen, eine für alle $x_0 \leq x \leq x_1$, $x_0 \leq \xi \leq x_1$, $|\lambda| < M$, ($M > 0$, beliebig) gleichmäßig konvergente Reihe, wenn man die endlich vielen Glieder beseitigt, für die $|\lambda_i| \leq M$ ist. Wir haben also nun, um (25) zu beweisen, auf Grund von (16) $G(x, \xi, \mu)$ auf Q_n abzuschätzen. Wegen der Symmetrieeigenschaft

$$G(x, \xi, \mu) = G(\xi, x, \mu)$$

genügt es, dies für $\xi \leq x \leq x_1$ zu leisten.

¹⁾ Der Rouchésche Satz der Funktionentheorie läßt erkennen, daß

$$\lambda_n \sim \frac{n^2 \pi^2}{\left(\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\varrho} dt \right)^2}.$$

Den absoluten Betrag des Nenners (16b) kann man wie folgt schreiben

$$|\sqrt{\mu}| \exp \left\{ \beta \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\varrho} dt \right\} \left\{ \frac{1 - \exp \left(2i \sqrt{\mu} \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\varrho} dt \right)}{2} \right\} + O(1).$$

Zur Abschätzung betrachte man das Verhalten von

$$\exp \left\{ 2i \sqrt{\mu} \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\varrho} dt \right\}$$

auf dem der $\sqrt{\mu}$ -Ebene angehörigen Bild des Integrationsweges. Auf den vertikalen Rändern ist

$$\sqrt{\mu} = \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\varrho} dt} + i\beta, \quad \beta \geq 0,$$

also

$$2i \sqrt{\mu} \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\varrho} dt = 2i \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi - 2\beta \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\varrho} dt.$$

D. h.

$$\exp \left\{ 2i \sqrt{\mu} \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\varrho} dt \right\} = - \exp \left(-2\beta \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\varrho} dt \right).$$

Also

$$\frac{1 - \exp \left\{ 2i \sqrt{\mu} \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\varrho} dt \right\}}{2} > \frac{1}{2}.$$

Auf dem horizontalen Rande aber ist $\sqrt{\mu} = \alpha + i\beta$, $\beta > 0$,

$$\frac{\left| 1 - \exp \left\{ 2i \sqrt{\mu} \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\varrho} dt \right\} \right|}{2} \geq \frac{1 - \exp \left\{ -2\beta \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\varrho} dt \right\}}{2} = \frac{1}{2} + O(1).$$

Also gilt auf dem Integrationsweg jedenfalls für den Nenner von (16b) die asymptotische Darstellung

$$|\sqrt{\mu}| \exp \left\{ \beta \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\varrho} dt \right\} \left\{ \frac{1}{2} + O(1) \right\}.$$

Daher hat man

$$G(x, \xi, \mu) = \frac{\exp \left\{ \beta \int_{x_0}^{\xi} \sqrt{\varrho} dt \right\} \left\{ \varrho^{-\frac{1}{4}}(\xi) + O(1) \right\} \exp \left\{ \beta \int_x^{x_1} \sqrt{\varrho} dt \right\} \left\{ \varrho^{-\frac{1}{4}}(x) + O(1) \right\}}{|\sqrt{\mu}| \exp \left\{ \beta \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\varrho} dt \right\} \left\{ \frac{1}{2} + O(1) \right\}}.$$

Nun beachte man, daß in (16b) $\xi \leq x$ ist. Dann ist

$$G(x, \xi, \mu) = \frac{O(1)}{\sqrt{\mu}}.$$

Also wird

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{Q_n} \frac{G(x, \xi, \mu)}{\mu - \lambda} d\mu &= \frac{O(1)}{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{Q_n} \frac{2\sqrt{\mu} d\sqrt{\mu}}{\mu - \lambda} \\ &= \frac{O(1)}{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi} \frac{O(1) \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2} 4 \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{n} = \frac{O(1)}{n}. \end{aligned}$$

Daher bleibt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{Q_n} \frac{G(x, \xi, \mu)}{\mu - \lambda} d\mu = O(n).$$

Also ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{Q_n} \frac{G(x, \xi, \mu)}{\mu - \lambda} d\mu = 0,$$

und damit ist die „Bilinearformel“ (25) bewiesen.

Bemerkung: Auf die zu Beginn erwähnte Differentialgleichung lassen sich alle *Sturm-Liouvilleschen* Differentialgleichungen zurückführen. Diese sind im allgemeinsten Fall von der Form

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dy}{dx} \right) + \sigma(x)y + \lambda \varrho(x)y = 0,$$

$k(x)$, $\varrho(x)$ sollen dabei positive stetig differenzierbare Funktionen sein. Macht man hier die Substitution

$$z = \int^x \frac{dx}{k},$$

so geht die Gleichung in die seither immer behandelte spezielle

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \sigma(x)k(x)y + \lambda \varrho(x)k(x)y = 0$$

über. Daher gelten alle bisher bewiesenen Sätze auch für die allgemeine *Sturm-Liouvilleschen* Differentialgleichung.

§ 5. Über die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den Eigenfunktionen eines Randwertproblem.

Wenn wir insbesondere die Differentialgleichung

$$y'' + \lambda y = 0$$

betrachten und für das Intervall $0 \leq x \leq \pi$ die erste Randwertaufgabe vorlegen, so sind

$$\lambda_n = n^2$$

die Eigenwerte und

$$y = \sin nx$$

sind die zugehörigen Eigenfunktionen.

Es ist bekannt, daß man jede samt ihrer ersten Ableitung bis auf endlich viele Sprünge stetige Funktion $f(x)$ im Intervall $0 \leq x \leq \pi$ in eine Reihe von der Form

$$(1) \quad f(x) = \Sigma a_n \cdot \sin nx$$

entwickeln kann¹⁾. Die Koeffizienten ergeben sich leicht aus den Orthogonalitätsbedingungen

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^\pi \sin nx \cdot \sin mx dx = 0, \\ \int_0^\pi \sin^2 nx dx = \frac{\pi}{2}. \end{array} \right. \quad n \neq m$$

Setzt man nämlich die Reihe (1) als gleichmäßig konvergent voraus, multipliziert sie mit $\sin vx$ und integriert von 0 bis π , so erhält man wegen (2)

$$(3) \quad a_v = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin vx dx.$$

Ganz analog kann man auch die Koeffizienten einer nach beliebigen Eigenfunktionen fortschreitenden Reihe unter Verwendung der Orthogonalitätsbedingungen ausdrücken. Es seien etwa

$$\psi_1(x), \psi_2(x) \dots$$

eine Folge von Funktionen, welche den Orthogonalitätsbedingungen

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{x_0}^{x_1} \psi_n \psi_m \varrho dx = 0, \\ \int_{x_0}^{x_1} \psi_n^2 \varrho dx = 1 \end{array} \right. \quad n \neq m$$

genügen. Nimmt man an, die Reihe

$$f(x) = \Sigma a_n \psi_n(x)$$

konvergiere gleichmäßig, so gewinnt man, genau wie oben, die Koeffizientendarstellung

$$(5) \quad a_n = \int_{x_0}^{x_1} f(x) \psi_n(x) \varrho(x) dx.$$

Es handelt sich aber nun darum, festzustellen, *unter welchen Voraussetzungen eine gegebene Funktion in eine nach Eigenfunktionen fort-*

¹⁾ Man vergleiche z. B. die Seiten 79—96ff. meines Leitfadens der Integralrechnung.

schreitende Reihe entwickelt werden kann. Ich nehme dabei an, die $\psi_n(x)$ seien die Eigenfunktionen der ersten Randwertaufgabe einer Differentialgleichung $y'' + (\sigma + \lambda \varrho) y = 0$, wo $\varrho(x) > 0$ sei. Unter Verwendung der Greenschen Funktion $G(x, \xi, \lambda)$ für irgendein von jedem Eigenwert verschiedenes λ_0 kann man leicht den folgenden **Entwicklungssatz** aufstellen:

Eine jede Funktion $f(x)$, die eine Integraldarstellung

$$(6) \quad f(x) = \int_{x_0}^{x_1} G(x, \xi, \lambda_0) h(\xi) d\xi$$

besitzt, kann in eine gleichmäßig konvergente Reihe

$$f(x) = \sum a_n \psi_n(x)$$

entwickelt werden. Einer solchen Integraldarstellung sind aber namentlich die zweimal stetig differenzierbaren Funktionen fähig, welche am Rand des Intervalles verschwinden.

Denn eine solche Funktion $f(x)$ kann als Lösung einer Differentialgleichung

$$(7) \quad y'' + (\sigma + \lambda_0 \varrho) y = f'' + (\sigma + \lambda_0 \varrho) f = -h(x)$$

aufgefaßt werden, und dann kann man sie in der Form

$$f(x) = \int_{x_0}^{x_1} G(x, \xi, \lambda_0) h(\xi) d\xi$$

darstellen.

Der ausgesprochene Entwicklungssatz wird bewiesen sein, sowie es gelungen ist, die Greensche Funktion selbst in eine solche Reihe zu entwickeln. Denn wenn etwa

$$G(x, \xi) = \sum c_r(\xi) \psi_r(x)$$

eine in ξ gleichmäßig konvergente Darstellung der Greenschen Funktion ist, so trage man das in (6) ein. Dann wird

$$f(x) = \sum \psi_r(x) \cdot \int_{x_0}^{x_1} c_r(\xi) h(\xi) d\xi.$$

Daß hier die Koeffizienten in anderer Gestalt erscheinen, ist unwesentlich und besagt nichts gegen die *Möglichkeit*, die Koeffizienten *auch* in der vorhin gewonnenen Form darzustellen, wofern die Reihe in x gleichmäßig konvergiert.

Eine solche Darstellung der Greenschen Funktion haben wir aber in der S. 173 gewonnenen Bilinearformel kennen gelernt, so daß nun der Entwicklungssatz vollständig bewiesen ist.

§ 6. Die *Besselsche* Differentialgleichung

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0.$$

Ich behandle sie als Beispiel zu den allgemeinen Erörterungen der vorstehenden Paragraphen, obwohl dabei nicht alle Voraussetzungen jenes Paragraphen erfüllt sind. n sei eine reelle, nicht notwendig ganze Zahl.

Zunächst wollen wir feststellen, daß diese Differentialgleichung stets ein bei $x = 0$ endliches Integral besitzt. Zu dem Zweck machen wir den Ansatz

$$y = x^n \cdot v \quad (n \geq 0).$$

Für v ergibt sich dann die Differentialgleichung

$$xv'' + (2n + 1)v' + xv = 0.$$

Wir versuchen nun, derselben durch eine Potenzreihe

$$v = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

zu genügen. Setzt man sie ein, so erhält man

$$\begin{aligned} xv &= a_0 x + a_1 x^2 + \dots + a_{2m} x^{2m+1} + a_{2m+1} x^{2m+2} + \dots \\ (2n + 1)v' &= (2n + 1)a_1 + 2(2n + 1)a_2 x + 3(2n + 1)a_3 x^2 + \dots \\ &\quad + (2n + 1)(2m + 2)a_{2m+2} x^{2m+1} \\ &\quad + (2n + 1)(2m + 3)a_{2m+3} x^{2m+2} + \dots \\ xv'' &= 2a_2 x + 6a_3 x^2 + \dots + (2m + 2)(2m + 1)a_{2m+2} x^{2m+1} \\ &\quad + (2m + 3)(2m + 2)a_{2m+3} x^{2m+2} \dots \end{aligned}$$

Da die Summe Null sein soll, so genügt man der Gleichung, wenn man die Koeffizienten der einzelnen x -Potenzen Null setzt. Das führt zu den Gleichungen

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ a_0 + 4(n + 1)a_2 &= 0 \\ a_1 + 3(2n + 3)a_3 &= 0 \\ &\vdots \\ a_{2m} + a_{2m+2} \cdot 2(2m + 2)(m + n + 1) &= 0 \\ a_{2m+1} + a_{2m+3} (2m + 3)(2(n + m) + 3) &= 0. \\ &\dots \end{aligned}$$

Man berechnet daraus

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ a_2 &= -\frac{1}{4} \frac{1}{n + 1} a_0 \\ &\vdots \\ a_{2m} &= (-1)^m \cdot \frac{1}{2^{2m}} \frac{1}{m!} \cdot \frac{1}{n + 1} \cdot \frac{1}{n + 2} \dots \frac{1}{n + m} \cdot a_0 \\ a_{2m+1} &= 0. \end{aligned}$$

So findet man als Lösung schließlich

$$(1) \quad v = a_0 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{2^{2m}} \frac{1}{m!} \frac{1}{h(m+h)} \cdot x^{2m}.$$

Da diese Potenzreihe nun offenbar einen von Null verschiedenen Konvergenzradius hat, so ist nachträglich einzusehen, daß unser Verfahren, das ein gliedweises Differenzieren der Reihe usw. benutzte, in Ordnung ist.

Die Methode, die wir hier verwendeten, heißt Methode der unbestimmten Koeffizienten. Wir werden sie noch häufig bei der Integration der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung verwenden.

Ich setze nun noch wie üblich

$$a_0 = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)}$$

und bezeichne

$$(2) \quad J_n(x) = \frac{x^n}{2^n \Gamma(n+1)} \cdot v = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{2^{n+2m}} \frac{1}{\Gamma(m+1)} \frac{1}{\Gamma(m+n+1)} \cdot x^{n+2m}.$$

Man nennt die hierdurch dargestellte ganze Funktion die *Besselsche Funktion n-ter Ordnung*¹⁾.

Über ihre Nullstellen bekommen wir Aufschluß, wenn wir durch die Substitution

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot z$$

von der *Besselschen* Differentialgleichung zu einer anderen übergehen, in der die erste Ableitung fehlt. Die durch

$$z = \sqrt{x} \cdot J_n(x)$$

erklärte²⁾ Funktion genügt dann der Differentialgleichung

$$(3) \quad z'' + \left(1 - \frac{4n^2 - 1}{4x^2}\right) z = 0.$$

Da mit wachsendem x der Koeffizient gegen Eins strebt, so strebt

¹⁾ Wir wollen uns jetzt nicht dabei aufhalten, nachzuweisen, daß das gefundene das einzige bei $x=0$ endliche Integral ist. Denn später, S. 197, wird sich das aus allgemeinen Methoden ganz von selbst ergeben. Bei nicht ganzzahligem n allerdings kann man sich davon sehr leicht im Rahmen der eben angestellten Rechnung überzeugen. Man braucht nur, statt wie eben in dem Ansatz $y = x^n v$ n positiv zu nehmen, $y = x^{-n} v$ ($n > 0$) anzusetzen. Man findet dann wieder für v eine konvergente Potenzreihe. Aber y wird nun bei $x=0$ unendlich, unterscheidet sich also von der ersten Lösung nicht bloß um einen konstanten Faktor und bildet daher mit dieser zusammen ein Fundamentalsystem. Daher sind alle anderen Lösungen bei $x=0$ unendlich. Die Durchführung zeigt, daß nur für nicht ganzzahliges n ein neues Integral gefunden wird. Für ganzzahlige n aber wird $J_{-n}(x)$ sinnlos. Wie man hier ein zweites nicht endliches Integral findet, wird sich S. 197 ergeben.

²⁾ Unter \sqrt{x} sei der positive Wert verstanden.

nach S. 153 der Abstand zweier auseinanderfolgender Nullstellen mit wachsender Nummer gegen π . Ich betrachte die positiven Nullstellen α_μ von $z(x)$ und denke sie mir der Größe nach numeriert. Da sie sich im Endlichen nach S. 151 nirgends häufen, und alle einfach sind, so bilden sie eine monoton gegen Unendlich wachsende Zahlenfolge. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gehört eine ganze positive Zahl $k = k(\varepsilon)$, so daß

$$1 - \varepsilon < 1 - \frac{4n^2 - 1}{4x^2} < 1 + \varepsilon \quad \text{für } x \geq \alpha_k.$$

Für die μ -te auf α_k folgende Nullstelle ist daher nach S. 154

$$\frac{\alpha_{k+\mu} - \alpha_k}{\pi} (1 - \varepsilon) < \mu < \frac{\alpha_{k+\mu} - \alpha_k}{\pi} (1 + \varepsilon).$$

Daher ist

$$\left(1 - \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+\mu}}\right) (1 - \varepsilon) + \frac{k\pi}{\alpha_{k+\mu}} < \frac{(\mu + k)\pi}{\alpha_{\mu+k}} < \left(1 - \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+\mu}}\right) (1 + \varepsilon) + \frac{k\pi}{\alpha_{k+\mu}}.$$

Daher gibt es eine positive Zahl $\mu(\varepsilon)$, so daß für $\mu > \mu(\varepsilon)$

$$1 - 2\varepsilon < \frac{(\mu + k)\pi}{\alpha_{\mu+k}} < 1 + 2\varepsilon,$$

Daher ist

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\alpha_\nu}{\nu\pi} = 1,$$

wofür man $\alpha_\nu \sim \nu\pi$ zu schreiben pflegt.

Nunmehr betrachte ich die Funktion

$$(4) \quad \psi(x) = z(\lambda x) = \sqrt{\lambda x} J_n(\lambda x).$$

Sie genügt der Differentialgleichung

$$(5) \quad \psi'' + \left(\lambda^2 - \frac{4n^2 - 1}{4x^2}\right) \psi = 0.$$

Ich fasse λ als Parameter auf und suche ihn so zu bestimmen, daß die Differentialgleichung Lösungen besitzt, welche bei $x = 0$ und bei $x = 1$ verschwinden. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn λ einer Nullstelle α_μ von $J_n(x)$ gleichgesetzt wird. Denn $\sqrt{\alpha_\mu x} J_n(\alpha_\mu x)$ ist bei $x = 0$ Null; aber es ist auch für $x = 1$ Null. Denn es ist $J_n(\alpha_\mu) = 0$. Ist aber $\varphi(1) = 0$, so ist $\sqrt{\lambda} J_n(\lambda) = 0$, d. h. λ einer der Nullstellen von $J_n(x)$ gleich (oder Null). Diese Eigenfunktionen sind nach S. 160 zueinander orthogonal. Daher sind alle α_μ reell. Die Eigenfunktionen sind aber noch nicht normiert. λ_μ und λ_ν seien zwei beliebige Werte des Parameters λ , also nicht gerade Eigenwerte. Ich setze

$$\psi_\mu = \sqrt{\lambda_\mu x} J_n(\lambda_\mu x) \quad \text{und} \quad \psi_\nu = \sqrt{\lambda_\nu x} J_n(\lambda_\nu x).$$

Ich schreibe die beiden Differentialgleichungen

$$\psi_\mu'' + \left(\lambda_\mu^2 - \frac{4n^2 - 1}{4x^2}\right) \psi_\mu = 0$$

$$\psi_\nu'' + \left(\lambda_\nu^2 - \frac{4n^2 - 1}{4x^2}\right) \psi_\nu = 0$$

an, multipliziere die erste mit ψ_r , die zweite mit ψ_μ und subtrahiere

$$\psi_\mu'' \psi_r - \psi_r'' \psi_\mu = (\lambda_r^2 - \lambda_\mu^2) \psi_\mu \psi_r.$$

Nun integriere ich von Null bis Eins und erhalte

$$\psi_\mu'(1) \psi_r(1) - \psi_r'(1) \psi_\mu(1) = (\lambda_r^2 - \lambda_\mu^2) \int_0^1 \psi_\mu \psi_r dx.$$

Wenn insbesondere λ_r und λ_μ zwei verschiedene Eigenwerte sind, dann ist

$$\psi_r(1) = \psi_\mu(1) = 0,$$

$$\int_0^1 \psi_\mu \psi_r dx = 0$$

und wir haben aufs neue die Orthogonalitätseigenschaft. Nun schreibe ich aber bei beliebigen λ_μ, λ_r das Resultat unter Verwendung von (4) so:

$$\frac{\lambda_\mu \lambda_r}{\lambda_\mu + \lambda_r} \frac{\lambda_\mu J_n'(\lambda_\mu) J_n(\lambda_r) - \lambda_r J_n'(\lambda_r) J_n(\lambda_\mu)}{\lambda_r - \lambda_\mu} = \int_0^1 \psi_\mu \cdot \psi_r dx$$

und mache den Grenzübergang $\lambda_r \rightarrow \lambda_\mu$. Nach den Regeln der Differentialrechnung erhält man dann

$$\frac{1}{2} \lambda_\mu J_n'^2(\lambda_\mu) - J_n'(\lambda_\mu) J_n(\lambda_\mu) - \lambda_\mu J_n''(\lambda_\mu) J_n(\lambda_\mu) = \int_0^1 \psi_\mu^2 dx.$$

Wählt man nun für λ_μ einen Eigenwert α_μ , so hat man wegen $J_n(\alpha_\mu) = 0$

$$\int_0^1 \psi_\mu^2 dx = \frac{1}{2} \alpha_\mu \cdot J_n'^2(\alpha_\mu).$$

Dividiert man also die

$$\psi_\mu(x)$$

durch

$$\sqrt{\frac{\alpha_\mu}{2}} \cdot J_n'(\alpha_\mu),$$

so erhält man die normierten Eigenfunktionen

$$\varphi_\mu(x) = \sqrt{\frac{2}{\alpha_\mu}} \frac{1}{J_n'(\alpha_\mu)} \psi_\mu(x) = \frac{\sqrt{2x}}{J_n'(\alpha_\mu)} \cdot J_n(\alpha_\mu x),$$

deren Quadrat von Null bis Eins integriert den Wert 1 liefert.

In den $J_n(\alpha_\mu x)$ schreiben sich die abgeleiteten Orthogonalitätsrelationen so:

$$\int_0^1 x J_n(\alpha_\mu x) \cdot J_n(\alpha_\nu x) dx = 0 \quad (\mu \neq \nu)$$

$$\int_0^1 x J_n^2(\alpha_\mu x) dx = \frac{1}{2} J_n'^2(\alpha_\mu).$$

Nun erhebt sich weiter die Frage nach den Entwicklungen nach diesem Orthogonalsystem. Die Überlegungen des § 5 sind hier nicht verwendbar. Denn die dort gemachten Voraussetzungen sind nicht er-

füllt. In der Tat bemerkten wir ja schon S. 177 und werden es S. 197 näher bestätigt finden, daß es bis auf einen konstanten Faktor nur eine bei $x = 0$ endliche Lösung von (5) gibt. Dementsprechend haben wir es hier mit einem anderen Randwertproblem zu tun, als dem in § 5 behandelten. Es handelt sich hier darum, Funktionen zu betrachten, die bei $x = 0$ endlich bleiben und die bei $x = 1$ verschwinden.

Ein ähnliches Randwertproblem kommt auch bei den Kugelfunktionen vor. Hier bei den *Legendreschen* Polynomen handelt es sich um die bei $x = +1$ und bei $x = -1$ endlichen Lösungen von

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dy}{dx} \right) + \lambda y = 0.$$

Wir werden sie später S. 212ff. bestimmen lernen.

Wir dürfen hier um so eher auf eine weitere Darlegung verzichten, als die Entwicklung nach Besselschen Funktionen in dem schon mehr erwähnten, dieser Sammlung angehörigen Buch von *Courant* und *Hilbert*: *Methoden der mathematischen Physik*, eine ausführliche Darstellung gefunden hat. Zugleich möchte ich noch auf die sehr einfache und elegante Darstellung hinweisen, die Herr *Prüfer* kürzlich in den *Mathematischen Annalen* Bd. 95 gegeben hat.

§ 7. Zusammenhang mit der Theorie der Integralgleichungen.

Die hier dargestellte Methode zur Behandlung der Randwertaufgaben und des Entwicklungssatzes ist sehr weiter Verallgemeinerungen fähig und man kann auf ihr eine volle Theorie aller Randwertaufgaben aufbauen. Von *Kneser*¹⁾, *Poincaré*²⁾ und *Stekloff*³⁾ ausgehend ist das neuerdings namentlich in Arbeiten von *Birkhoff*²⁾ und von *Hilb*³⁾ hervorgetreten. Auch greift diese Theorie in die allgemeinen Theorien ein, denen wir uns nun zuwenden wollen.

Wir dürfen nämlich dieses Gebiet nicht verlassen, ohne wenigstens in großen Zügen den Zusammenhang der Randwertprobleme mit der Theorie der *Integralgleichungen* aufzudecken. Wir zeigen ihn wieder am Beispiel der ersten Randwertaufgabe. Es sei in der Differentialgleichung

$$(1') \quad y'' + (\sigma + \lambda \rho) y = 0$$

σ so beschaffen, daß für $y'' + \sigma y = 0$ die erste Randwertaufgabe nicht lösbar ist (also z. B. $\sigma \equiv 0$). Dann besitzt diese Gleichung, wie wir wissen, eine *Greensche* Funktion $G(x, \xi)$. Somit gilt nach (6) S. 159 für

¹⁾ *A. Kneser*: *Annalen* 58, 60, 63; *Poincaré*: *Pal. Rend.* 8, *Acta* 20; *Stekloff*: *Ann. d. Toulouse* (2), 3.

²⁾ *American Transactions*, Bd. 9.

³⁾ *Math. Annalen* 71.

die an den Intervallenden verschwindende Lösung von (1') die homogene Integralgleichung

$$(2') \quad y(x) = \lambda \int_{x_0}^{x_1} G(x, \xi) \varrho(\xi) y(\xi) d\xi.$$

Ebenso findet man für die an den Rändern verschwindende Lösung der inhomogenen Gleichung

$$(1'') \quad y'' + (\sigma + \lambda \varrho) y = h(x)$$

die inhomogene Integralgleichung

$$(2'') \quad y = \lambda \int_{x_0}^{x_1} G(x, \xi) \varrho(\xi) y(\xi) d\xi - \int_{x_0}^{x_1} G(x, \xi) h(\xi) d\xi.$$

Unsere Sätze lehren also, daß die Alternative besteht, wonach entweder die homogene oder die inhomogene Integralgleichung lösbar ist. Beide zugleich sind aber nur für gewisse Funktionen $h(x)$ lösbar. Ferner wissen wir, daß die homogene Gleichung nur für gewisse Eigenwerte λ_i durch gewisse Eigenfunktionen $\varphi_i(x)$ lösbar ist. Diese Sätze sind Spezialfälle der gleichlautenden Sätze über allgemeinere lineare Integralgleichungen mit symmetrischem Kern $K(x, \xi)$. Symmetrisch soll dabei der Kern heißen, wenn $K(x, \xi) = K(\xi, x)$ ist.

Wir betrachten dann die beiden Integralgleichungen:

$$(3') \quad \varphi(x) - \lambda \int_{x_0}^{x_1} K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi = 0,$$

$$(3'') \quad \varphi(x) - \lambda \int_{x_1}^{x_0} K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi = \psi(x).$$

Über den Kern ist dabei vorauszusetzen, daß er stetig ist für $x_0 \leq x \leq x_1$, $x_0 \leq \xi \leq x_1$ oder daß er doch wenigstens quadratisch integrierbar ist, d. h. daß das Integral

$$\int_{x_0}^{x_1} \int_{x_0}^{x_1} [K(x, \xi)]^2 dx d\xi$$

konvergiert. Die von unseren Randwertproblemen herkommenden Integralgleichungen sind anscheinend nicht mit einem symmetrischen Kern versehen. Denn der Kern scheint $G(x, \xi) \varrho(\xi)$ zu sein. Man kann aber, z. B. die Integralgleichung (2') sofort auch so schreiben

$$(2'') \quad y(x) V \varrho(x) - \lambda \int_{x_0}^{x_1} V \varrho(x) G(x, \xi) V \varrho(\xi) \cdot y(\xi) V \varrho(\xi) d\xi = 0.$$

Setzt man dann

$$y(x) V \varrho(x) = \varphi(x), \quad V \varrho(x) G(x, \xi) V \varrho(\xi) = K(x, \xi)$$

so geht sie in die Gleichung (3') über. Man kann die Theorie dieser Integralgleichungen selbstständig entwickeln, wie es *Fredholm*, *Hilbert*,

E. Schmidt getan haben, und hat damit einen neuen Zugang zu den Randwertproblemen. Auch der Entwicklungssatz gilt für die Eigenfunktionen dieser allgemeineren Integralgleichungen. Jede in der Form

$$f(x) = \int_{x_0}^{x_1} K(x, \xi) h(\xi) d\xi$$

darstellbare stetige Funktion $f(x)$ läßt sich nach Eigenfunktionen entwickeln.

Es ist hier nicht der Ort, diese allgemeine Theorie der Integralgleichungen zu entwickeln, obwohl uns später bei den partiellen Differentialgleichungen ein etwas allgemeinerer Typus begegnen wird. Hier werde nur noch auf ein gewisses Analogon zum Entwicklungssatz, die sogenannte *Vollständigkeitsrelation*, hingewiesen. Auch im allgemeinen Fall sind die Eigenwerte alle reell und die Eigenfunktionen zueinander orthogonal. Daher gelten auch für die Darstellung der Koeffizienten bei der Entwicklung einer Funktion nach Eigenfunktionen die bekannten Integraldarstellungen. Sei nun etwa $u(x)$ eine nach Eigenfunktionen entwickelbare und $v(x)$ eine beliebige stetige Funktion. Dann ist jedenfalls

$$u(x) = \sum \varphi_r(x) \cdot \int_{x_0}^{x_1} u(\xi) \varphi_r(\xi) d\xi.$$

Daher wird

$$\int_{x_0}^{x_1} u(x) v(x) dx = \sum \int_{x_0}^{x_1} v(x) \varphi_r(x) dx \cdot \int_{x_0}^{x_1} u(\xi) \varphi_r(\xi) d\xi.$$

Die Sache ist nun die, daß diese „*Vollständigkeitsrelation*“ in den hier betrachteten zu Differentialgleichungen gehörigen Fällen auch dann gilt, wenn $u(x)$ eine beliebige stetige Funktion ist. Ich gehe auf den Beweis nicht ein, sondern bemerke nur, daß er darauf beruht, daß man jede stetige Funktion durch eine entwickelbare mit beliebiger Genauigkeit approximieren kann. Ihren Namen *Vollständigkeitsrelation* hat sie daher, daß sie das System der Eigenfunktionen als ein vollständiges charakterisiert. Fehlte darin eine Funktion, so könnte die Relation offenbar nicht richtig sein. Denn fehlte z. B. $\varphi_1(x)$, so könnte nicht

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi_1^2 dx = \sum_{\substack{r \\ \neq 1}} \left\{ \int_{x_0}^{x_1} \varphi_1(x) \varphi_r(x) dx \right\}^2$$

sein, denn rechts stehen lauter Nullen.

Bei genauerem Zusehen kann man erkennen, daß sich die verschiedenen für den Entwicklungssatz bekannten Beweismethoden wesentlich durch den Weg unterscheiden, auf dem diese *Vollständigkeitsrelation* gewonnen wird.

IV. Kapitel.

Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung
im komplexen Gebiet.

§ 1. Lage der Singularitäten der Lösung.

w und z mögen zwei komplexe Variable bedeuten. Dann erklärt, wie wir schon von S. 116 wissen, die Differentialgleichung

$$f(w'', w', w, z) = 0,$$

in welcher $f(w'', w', w, z)$ eine analytische Funktion ihrer Argumente sein möge, eine oder mehrere zweiparametrische Scharen analytischer Funktionen. Will man, ausgehend von der Differentialgleichung, die Natur dieser Lösungen untersuchen, so ist es eine *Hauptaufgabe, die Lage der singulären Stellen und nächst dem ihre Natur festzustellen*. Diese Aufgabe ist im allgemeinen recht kompliziert. Darauf deutet schon der Umstand hin, daß gewöhnlich die Lage der Singularitäten der Partikularintegrale von den Anfangswerten abhängt, durch welche dieselben festgelegt sind. Betrachtet man z. B. die zweiparametrische Schar von Funktionen

$$w = \frac{1}{z - \alpha} + \beta \quad (\alpha, \beta \text{ Scharparameter}),$$

so sieht man, daß dieselben der Differentialgleichung

$$w''^2 + 4w'^3 = 0$$

genügen. Man kennt allgemein durch die Untersuchungen von *Painlevé*¹⁾ die Bedingungen, die bestehen müssen, wenn die Lösungen eine Differentialgleichung zweiter Ordnung nur *feste*, also nicht mit den Anfangsbedingungen *verschiebbare* Verzweigungspunkte und wesentlich singuläre Stellen besitzen sollen. Doch wollen wir hier auf diese schönen, aber schwierigen Untersuchungen nicht näher eingehen, sondern uns mit der Feststellung begnügen, daß bei den *linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung nur feste Singularitäten* auftreten. Diese Bemerkung ist analog der, die wir schon S. 146/147 für reelle Gebiete machten und wird auch analog bewiesen. Ich betrachte die Differentialgleichung

$$w'' + p(z)w' + q(z)w + r(z) = 0.$$

Ich gehe von irgendeiner Stelle z_0 aus, an der alle Koeffizienten der Differentialgleichung regulär sind und betrachte eine Potenzreihe, die in der Umgebung von z_0 ein reguläres Funktionselement²⁾ einer Lösung darstellt. Nun betrachte man irgendeine in z_0 beginnende stetige Kurve.

1) Man vgl. die Literaturangaben in der Enzyklopädie, Bd. II, 2, S. 590ff.

2) Vgl. zu diesem Begriff: *Bieberbach*: Lehrbuch der Funktionentheorie Bd. I, 2. Aufl., S. 201.

auf der keine Singularitäten der Koeffizienten liegen. Jeder Stelle dieser Kurve gehören zwei reguläre Funktionselemente eines Fundamentalsystems der Differentialgleichung zu. Daher kann man die um z_0 erklärte Lösung längs des Weges fortsetzen, wie man analog wie S. 147 erkennt.

Wir haben also den Satz: *An allen Stellen der z -Ebene, über welchen keine Singularitäten der Koeffizienten von (1) liegen, sind die sämtlichen Lösungen dieser Differentialgleichung regulär.*

An den singulären Stellen der Koeffizienten selbst können Singularitäten der Lösungen auftreten. Es kann aber auch geschehen, daß einzelne Lösungen da noch regulär sind. Insofern erweisen sich auch hier die Singularitäten noch als beweglich. Auch ist die Natur der Singularitäten für die einzelnen Lösungen verschieden. Fest sind die Singularitäten nur insofern, als nur über einer ganz bestimmten Kategorie von z -Stellen Singularitäten liegen können.

Über die Natur der Singularitäten kann man auch relativ leicht Aufschluß gewinnen. Das soll im folgenden Paragraphen geschehen. Es genügt, wenn wir dabei nur auf die homogenen Differentialgleichungen achten, weil wir ja seit S. 129 wissen, wie man die Integration der inhomogenen Differentialgleichung auf die der homogenen zurückführen kann.

§ 2. Die Natur der Singularitäten.

Wir betrachten nur isolierte Singularitäten der Koeffizienten. Hier dürfen wir uns auf solche beschränken, in deren Umgebung die Koeffizienten eindeutig sind. Denn die Mehrdeutigkeit kann man bekanntlich durch Einführung geeigneter uniformisierender Parameter auf Eindeutigkeit zurückführen. Es mögen also in der Umgebung von $z = a$ die Koeffizienten der Differentialgleichung

$$(1) \quad w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$$

eindeutig und regulär sein. Im Punkte $z = a$ selbst soll aber für einen oder für beide die Regularität aufhören. Betrachten wir nun irgendein Fundamentalsystem $w_1(z)$ und $w_2(z)$ der Differentialgleichung und sehen zu, wie sich die Funktionen beim Umlauf um die singuläre Stelle ändern. Ich schlage um $z = a$ einen Kreis, in dem die Koeffizienten mit Ausnahme der Stelle $z = a$ keine weiteren Singularitäten haben sollen. $z = z_0$ sei eine Stelle in diesem Kreis. Ich betrachte zwei zum Punkte z_0 gehörige Funktionselemente $\mathfrak{P}_1(z - z_0)$ und $\mathfrak{P}_2(z - z_0)$ des Fundamentalsystems $w_1(z)$, $w_2(z)$ und setze diese beiden Elemente längs eines Weges fort, der $z = a$ einmal im positiven Sinne umschließt. Dadurch entstehen aus den Ausgangselementen zwei neue Elemente, deren Quotient nicht konstant ist, die also auch ein Fundamentalsystem ausmachen. Da man alle Lösungen aus dem Fundament-

system durch Kombination mit konstanten Koeffizienten erhält, so erfährt jedes Fundamentalsystem beim positiven Umlauf um die singuläre Stelle eine lineare Substitution

$$\begin{aligned} W_1(z) &= aw_1 + bw_2 \\ W_2(z) &= cw_1 + dw_2. \end{aligned}$$

Wenn erst einmal für eine Fundamentalsystem diese Umlaufssubstitution bekannt ist, so kann man aus ihr entnehmen, welchen Einfluß ein positiver Umlauf um die singuläre Stelle auf irgendeine andere Lösung

$$w(z) = \alpha w_1 + \beta w_2$$

besitzt. Sie geht nämlich durch den Umlauf in

$$\alpha(aw_1 + bw_2) + \beta(cw_1 + dw_2)$$

über. Man kann nun stets mindestens eine Lösung auswählen, die sich beim positiven Umlauf um die Stelle mit einem Faktor multipliziert. Dazu hat man nur die α , β so zu wählen, daß

$$(2) \quad \alpha(aw_1 + bw_2) + \beta(cw_1 + dw_2) = \lambda(\alpha w_1 + \beta w_2)$$

ist. Dabei ist λ ein noch zu bestimmender Faktor. Schreibt man die Gleichung anders, so lautet sie

$$w_1(\alpha(a - \lambda) + \beta c) + w_2(\alpha b + \beta(d - \lambda)) = 0.$$

Da aber w_1 und w_2 ein Fundamentalsystem bilden, so kann sie nur dann erfüllt sein, wenn

$$(3) \quad \begin{aligned} \alpha(a - \lambda) + \beta c &= 0 \\ \alpha b + \beta(d - \lambda) &= 0 \end{aligned}$$

ist. Sollen aber diese beiden Gleichungen durch Werte α und β lösbar sein, die nicht beide verschwinden, so muß λ eine Wurzel von

$$(4) \quad \begin{vmatrix} a - \lambda & c \\ b & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

sein. Bestimmt man λ aus dieser Gleichung und trägt einen der gefundenen Werte in (3) ein, so kann man aus diesen Gleichungen die α , β bestimmen und erhält damit diejenigen Lösungen, die beim positiven Umlauf sich nur mit einem Faktor multiplizieren. Es wird *zwei* solche Lösungen geben, wenn die beiden Wurzeln λ_1 und λ_2 der *Fundamentalgleichung* (4) *verschieden* sind. Diese beiden Funktionen machen dann selbst ein Fundamentalsystem aus, denn ihr Quotient kann dann nicht konstant sein.

Wir wollen noch einen Augenblick bei diesem Fall stehen bleiben und uns die Gestalt dieser multiplikativen Lösungen noch etwas näher überlegen. Die Funktion

$$(5) \quad (z - a)^{\frac{\log \lambda_1}{2\pi i}} (z - a)^{r_1} \quad \left(r_1 = \frac{\log \lambda_1}{2\pi i} \right)$$

multipliziert sich ebenfalls mit dem Faktor λ_1 , wenn z die Stelle a im positiven Sinne einmal umläuft. Wenn also ein Element von $w_1(z)$ sich beim positiven Umlauf auch mit λ_1 multipliziert, so ist

$$\frac{w_1(z)}{(z-a)^{r_1}}$$

in der Umgebung von $z = a$ eindeutig und kann also in der Umgebung dieser Stelle in eine *Laurent*-Reihe entwickelt werden. Daher hat jede multiplikative Lösung die Gestalt

$$(z-a)^{r_1} \cdot \sum_{r \rightarrow -\infty}^{+\infty} a_r (z-a)^r.$$

Wie man aber, ausgehend von der Differentialgleichung, die Exponenten r und die Koeffizienten der *Laurent*-Reihe wirklich ermittelt, wird im nächsten Paragraphen darzulegen sein.

Jetzt wollen wir uns den Fall, daß die *Fundamentalgleichung* zwei gleiche Wurzeln besitzt, etwas näher ansehen. Man wird dann im allgemeinen nur eine multiplikative Lösung zur Verfügung haben. Tatsächlich zeigt die nähere Betrachtung, daß in die anderen Lösungen dann im allgemeinen ein Logarithmus eingeht. Um das einzusehen, wähle ich ein passendes Fundamentalsystem. Als erste Funktion eines solchen nehme ich nämlich die eine sicher vorhandene multiplikative Lösung. Die andere lasse ich beliebig. Dann erfährt das neu gewählte Fundamentalsystem beim Umlauf eine Substitution dieser Art:

$$\begin{aligned} W_1 &= \lambda_1 w_1 \\ W_2 &= c w_1 + d w_2. \end{aligned}$$

Frage ich hier wieder nach den multiplikativen Lösungen, so müssen das natürlich die gleichen sein wie bisher. D. h. die zur neuen Substitution gehörige Fundamentalgleichung muß auch zwei gleiche Wurzeln haben. Sonst gäbe es zwei Lösungen mit verschiedenen Multiplikatoren, und die hätten sich dann auch schon aus der ersten Fundamentalgleichung ergeben müssen. Die neue Fundamentalgleichung wird aber

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & c \\ 0 & d - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Damit ihre beiden Wurzeln λ_1 sind, muß $d = \lambda_1$ sein. Unser Fundamentalsystem erfährt also die folgende Umlaufsubstitution

$$\begin{aligned} W_1 &= \lambda_1 w_1 \\ W_2 &= c w_1 + \lambda_1 w_2. \end{aligned}$$

Der Quotient

$$\frac{w_2}{w_1}$$

hat daher diese Umlaufsubstitution

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{w_2}{w_1} + \frac{c}{\lambda_1}.$$

Er erfährt also beim Umlauf einen Zuwachs um $\frac{c}{\lambda_1}$, genau wie

$$\frac{c}{\lambda_1 \cdot 2\pi i} \log(z - a).$$

Daher ist die Differenz

$$w_2 - \frac{c}{\lambda_1 \cdot 2\pi i} \log(z - a)$$

in der Umgebung der singulären Stelle eindeutig und kann somit wieder in eine *Laurent*-Reihe entwickelt werden. Daher besitzt w_2 diese Gestalt

$$(z - a)^{r_1} \left\{ A \cdot \log(z - a) + \sum_{-\infty}^{+\infty} a_r (z - a)^r + \sum_{-\infty}^{+\infty} b_r (z - a)^r \right\}.$$

Somit haben wir den folgenden Satz:

Man kann in der Umgebung einer singulären Stelle ein Fundamentalsystem stets so wählen, daß seine Lösungen in der Umgebung der singulären Stelle entweder Entwicklungen von der Form

$$(6a) \quad \begin{cases} w_1 = (z - a)^{r_1} \sum_{-\infty}^{+\infty} a_r (z - a)^r \\ w_2 = (z - a)^{r_2} \sum_{-\infty}^{+\infty} b_r (z - a)^r \end{cases}$$

oder *Entwicklungen von der Form*

$$(6b) \quad \begin{cases} w_1 = (z - a)^{r_1} \sum_{-\infty}^{+\infty} a_r (z - a)^r \\ w_2 = (z - a)^{r_1} \left\{ A \log(z - a) + \sum_{-\infty}^{+\infty} a_r (z - a)^r + \sum_{-\infty}^{+\infty} b_r (z - a)^r \right\} \end{cases}$$

besitzen.

Wie bestimmt man nun r_1, r_2, A und die Koeffizienten der *Laurent*-Reihen aus der Differentialgleichung? Bevor wir dazu übergehen, wird es nützlich sein, noch ein Wort über das Verhalten der Lösungen im Unendlichen zu sagen. Um im Unendlichen eine Funktion zu untersuchen, hat man erst

$$z = \frac{1}{\xi}$$

einzuführen. Durch diese Substitution geht die Differentialgleichung (1) in die folgende über:

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} + \frac{dw}{d\xi} \left[\frac{2}{\xi} - \frac{1}{\xi^2} p \left(\frac{1}{\xi} \right) \right] + \frac{1}{\xi^4} q \left(\frac{1}{\xi} \right) w = 0.$$

Ihre Lösungen hat man dann in der Umgebung von $\xi = 0$ zu betrachten.

§ 3. Außerwesentliche und wesentliche Singularitäten.

Wenn die in den Lösungen des vorigen Paragraphen vorkommenden *Laurent*-Reihen höchstens endlich viele negative Potenzen enthalten, so wollen wir sagen, es liege eine *außerwesentliche Singularität* der

Differentialgleichung vor; enthält aber auch nur eine derselben unendlich viele negative Potenzen, so sagen wir, es liege eine *wesentliche Singularität* der Differentialgleichung vor. Statt „außerwesentlich singuläre Stelle“, sagt man auch „Stelle der Bestimmtheit“, weil dann die Lösungen bei Annäherung an diese Stelle im Falle reeller r_1 und r_2 bestimmten Grenzwerten zustrebt.

Wenn eine Differentialgleichung an der Stelle $z = a$ eine *außerwesentliche* Singularität besitzen soll, so müssen die Koeffizienten gewissen Bedingungen genügen, die wir jetzt angeben wollen, um alsdann die im vorigen Paragraphen gestellte Aufgabe für die außerwesentlichen Singularitäten zu lösen.

Nehmen wir also an, die *Laurent*-Reihen enthielten nur endlich viele negative Potenzen. Dann bilden wir den Quotienten $\frac{w_2}{w_1}$. Da aber das reziproke einer *Laurent*-Reihe mit endlich vielen negativen Potenzen sich als Potenzreihe mit nur positiven Potenzen darstellen läßt, so läßt sich $\frac{w_2}{w_1}$ so schreiben

$$(1) \quad \frac{w_2}{w_1} = (z - a)^{r_2 - r_1} \{A \log(z - a) + (z - a)^\nu \mathfrak{P}(z - a)\} (\mathfrak{P}(0) \neq 0),$$

wo ν eine passende ganze Zahl ist und wo mit $\mathfrak{P}_\nu(z - a)$ weiterhin stets eine keine negative Potenzen enthaltende Potenzreihe bezeichnet werden soll. Das Glied mit dem Logarithmus kann dabei evtl. wegfallen. Steht es da, so ist überdies $r_2 = r_1$ zu nehmen. Nun wissen wir aber von S. 128 her, daß man mit Hilfe irgend zweier unabhängiger Partikularlösungen einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$$

für $p(z)$ die Darstellung hat

$$(2) \quad p(z) = -\frac{w_2''w_1 - w_1''w_2}{w_2'w_1 - w_1'w_2} = -\frac{d}{dz} \left\{ \log \left[w_1^2 \frac{d}{dz} \left(\frac{w_2}{w_1} \right) \right] \right\}.$$

Nun rechnet man aber aus

$$(3) \quad \frac{d}{dz} \left(\frac{w_2}{w_1} \right) = (r_2 - r_1) (z - a)^{r_2 - r_1 - 1} \{A \log(z - a) + (z - a)^\nu \mathfrak{P}(z - a)\} \\ + (z - a)^{r_2 - r_1} \left\{ \frac{A}{z - a} + \nu (z - a)^{\nu - 1} \mathfrak{P}(z - a) + (z - a)^\nu \mathfrak{P}'(z - a) \right\}$$

$$(4) \quad w_1^2 = (z - a)^{2r_1 + \mu} \mathfrak{P}_0(z - a) (\mathfrak{P}_0(0) \neq 0)^1.$$

In (3) kommt nun aber tatsächlich kein Logarithmus vor. Denn entweder ist $A = 0$, oder es ist $r_1 = r_2$. Daher hat $\frac{d}{dz} \left(\frac{w_2}{w_1} \right)$ die Gestalt

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{w_2}{w_1} \right) = (z - a)^\lambda \cdot \mathfrak{P}(z - a), \quad (\mathfrak{P}(0) \neq 0).$$

¹⁾ μ ist also eine passende ganze Zahl.

Also besitzt sowohl die logarithmische Ableitung von (3) wie die von (4) bei $z = a$ einen Pol von höchstens erster Ordnung. Somit hat auch $p(z)$ bei $z = a$ einen Pol von höchstens erster Ordnung.

Aus der Gleichung

$$w_1'' + p(z)w_1' + q(z)w_1 = 0$$

gewinnt man

$$q(z) = -\frac{w_1''}{w_1} - p(z) \frac{w_1'}{w_1}.$$

Nun ist aber

$$w_1 = (z - a)^{r_1+k} \cdot \mathfrak{P}(z - a).$$

Daher hat $\frac{w_1'}{w_1}$ bei $z = a$ einen Pol von höchstens erster Ordnung, während $\frac{w_1''}{w_1}$ bis $z = a$ einen Pol von höchstens zweiter Ordnung hat. Daher hat auch $q(z)$ einen Pol von höchstens zweiter Ordnung.

So hat man den Satz: *Wenn die Differentialgleichung*

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$$

an der Stelle $z = a$ nur Lösungen mit außerwesentlichen Singularitäten besitzt, so muß sie in der Umgebung von $z = a$ die Gestalt

$$(5) \quad w'' + \frac{\mathfrak{P}_1(z-a)}{z-a} w' + \frac{\mathfrak{P}_2(z-a)}{(z-a)^2} w = 0$$

haben. D. h. der erste Koeffizient hat dort einen Pol von höchstens erster Ordnung, der zweite Koeffizient einen Pol von höchstens zweiter Ordnung.

Daß die hier für eine Stelle der Bestimmtheit gefundene Bedingung auch hinreichend ist, hat *Fuchs* durch Aufstellung der Potenzreihenentwicklung der Lösungen bewiesen. Man sieht es aber nach einem von *Schlesinger* und in besonders einfacher Form von *Birkhoff*¹⁾ herührenden Verfahren am schnellsten so ein: Man führe die Differentialgleichung (5) durch die Substitution $w_1 = w$, $w_2 = (z - a)w'$ in das System

$$w_1' = \frac{w_2}{z-a}, \quad w_2' = w_2 \frac{(1 - \mathfrak{P}_1)}{z-a} - \frac{w_1 \mathfrak{P}_2}{z-a}$$

über. Seine Koeffizienten, das sind die Faktoren, mit denen w_1 und w_2 multipliziert sind, haben Pole höchstens erster Ordnung und somit gibt es eine Zahl $M > 1$, so daß in der Umgebung $|z - a| \leq r_0$ dieser Stelle die Koeffizienten unter $\frac{M}{|z-a|}$ bleiben. Daher hat man

$$w_1' < \frac{M}{|z-a|} (|w_1| + |w_2|), \quad w_2' < \frac{M}{|z-a|} (|w_1| + |w_2|).$$

Setzt man nun $W = |w_1|^2 + |w_2|^2$, so ist weiter für $|z - a| = r$

$$\frac{\partial W}{\partial r} \leq 2 \{ |w_1| \cdot |w_1'| + |w_2| \cdot |w_2'| \} \leq \frac{4M}{r} W.$$

¹⁾ Man vgl. *G. D. Birkhoff*: Trans. of the Am. math. Soc. 11 (1910).

Also ist

$$-\frac{4M}{r} \leq \frac{\partial \log W}{\partial r} \leq \frac{4M}{r}$$

und daher

$$W \leq W_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-4M}. \quad (0 < r < r_0)$$

Daraus folgt sofort, daß für $r < r_0$ auch $|w_1|^2 < W_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-4M}$ ist.

D. h. also: Das Produkt

$$|w_1|^2 |z - a|^{4M}$$

bleibt in der Umgebung von $z = a$ unter einer festen Schranke und daher können wegen $M > 1$ in der Entwicklung von w_1 nach Potenzen von $z - a$ nur endlich viele negative Potenzen auftreten, so daß eine außerwesentlich singuläre Stelle vorliegt.

§ 4. Auflösung einer Differentialgleichung in der Nähe einer außerwesentlichen singulären Stelle.

Die weitere Aufgabe der Theorie ist es nun, über das Verhalten der Lösungen in der Nähe einer außerwesentlichen oder einer wesentlichen Singularität näheren Aufschluß zu gewinnen. Wir werden uns in diesem Buche auf die ausführliche Behandlung der außerwesentlich singulären Stellen beschränken und gelegentlich nur kurz über die entsprechenden Verhältnisse bei wesentlich singulären Stellen referieren.

Zur Berechnung der Lösungen bedient man sich der Methode der unbestimmten Koeffizienten. Es liege bei $z = a$ eine außerwesentlich singuläre Stelle vor.

Ich schreibe die Differentialgleichung so:

$$\mathfrak{Q}(w) \equiv (z - a)^2 w'' + (z - a) \mathfrak{P}_1(z - a) w' + \mathfrak{P}_2(z - a) w = 0$$

und setze

$$\mathfrak{P}_1(z - a) = \sum \alpha_r (z - a)^r, \quad \mathfrak{P}_2(z - a) = \sum \beta_r (z - a)^r$$

und bilde zunächst

$$\mathfrak{Q}(z - a)^\lambda = (z - a)^\lambda \cdot f(z, \lambda).$$

Hier ist

$$f(z, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\lambda) (z - a)^k$$

und man hat

$$\begin{aligned} f_0(\lambda) &= \lambda(\lambda - 1 + \lambda\alpha_0 + \beta_0) \\ f_k(\lambda) &= \lambda\alpha_k + \beta_k \end{aligned} \quad k = 1, 2, \dots$$

Macht man nun den Ansatz

$$w = (z - a)^\varrho \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} c_r (z - a)^r,$$

Wir haben so scheinbar unsere Aufgabe gelöst und aufs neue erkannt, daß Differentialgleichungen von der im vorigen Paragraphen bestimmten Gestalt tatsächlich bei $z = a$ nur eine außerwesentliche Singularität aufweisen. Aber es bleibt noch eine Lücke: Konvergiert denn auch die gefundene Reihe? Dies verstünde sich nach den allgemeinen Resultaten von S. 184ff. von selbst, wenn wir hätten zeigen können, daß die eben gefundenen Lösungen c_k die einzigen Lösungen der Gleichungen (1) sind. Aber gerade das ist nicht geschehen und auch nicht immer der Fall¹⁾. Es bleibt uns somit nichts weiter übrig, als den Konvergenzbeweis direkt zu erbringen. Da

$$f_0(\varrho + n) = (\varrho + n)(\varrho + n - 1) + (\varrho + n)\alpha_0 + \beta_0$$

ist, so hat man von einem gewissen $n = N$ an:

$$|f_0(\varrho + n)| > |\varrho + n|.$$

Daher ist von $n = N$ an

$$(\varrho + n)|c_n| < c_{n-1}|f_1(\varrho + n - 1)| + c_{n-2}|f_2(\varrho + n - 2)| + \dots + c_0|f_n(\varrho)|.$$

Also

$$c_n < c_{n-1}[|\alpha_1| + |\beta_1|] + c_{n-2}[|\alpha_2| + |\beta_2|] + \dots + c_0[|\alpha_n| + |\beta_n|].$$

Aus den N ersten Gleichungen ergeben sich gewisse Werte c_1, c_2, \dots, c_{N-1} . Man wähle N positive Zahlen $d_0, d_1, d_2, \dots, d_{N-1}$ irgendwie so, daß

$$|c_0| < d_0, |c_1| < d_1, |c_2| < d_2, \dots, |c_{N-1}| < d_{N-1}$$

gilt. Nun bestimme man unendlich viele positive Zahlen d_N, d_{N+1}, \dots , aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} (3) \quad d_N &= d_{N-1}\{|\alpha_1| + |\beta_1|\} + d_{N-2}\{|\alpha_2| + |\beta_2|\} + \dots + d_0\{|\alpha_N| + |\beta_N|\} \\ &\vdots \\ d_n &= d_{n-1}\{|\alpha_1| + |\beta_1|\} + d_{n-2}\{|\alpha_2| + |\beta_2|\} + \dots + d_0\{|\alpha_n| + |\beta_n|\}. \\ &\dots \end{aligned}$$

Dann hat man auch

$$|c_N| < d_N, \quad |c_{N+1}| < d_{N+1}, \dots$$

Wenn man nun zeigen kann, daß die Reihe

$$\sum d_n(z - a)^n$$

in einem gewissen Kreis um $z = a$ konvergiert, so gilt das auch für die Reihe

$$\sum c_n(z - a)^n.$$

¹⁾ Denn es ist bisher kein Grund dafür angegeben worden, daß gerade die eben getroffene Entscheidung für diejenige Wurzel ϱ von (2), welche den größeren Realteil besitzt zu einer brauchbaren Bestimmung, der c_k führt. Es könnte sehr wohl sein, daß gerade die Wurzel vom kleineren Realteil bei passender Wahl der c_k zu einer konvergenten Reihe führte. Das ist z. B. dann der Fall, wenn die auf S. 187 vorkommende Zahl A verschwindet, obwohl $\varrho_1 - \varrho_2$ ganz ist.

Setzt man nun noch

$$(4) \quad \begin{aligned} b_0 &= d_0 \\ b_1 &= d_1 - d_0 \{ |\alpha_1| + |\beta_1| \} \\ \vdots \\ b_{N-1} &= d_{N-1} - d_{N-2} \{ |\alpha_1| + |\beta_1| \} - \dots - d_0 \{ |\alpha_{N-1}| + |\beta_{N-1}| \} \end{aligned}$$

und entwickelt den Quotienten

$$\frac{b_0 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \dots + b_{N-1}(z-a)^{N-1}}{1 - (c_1 + \beta_1)(z-a) - \dots - (c_n + \beta_n)(z-a)^n \dots}$$

nach Potenzen von $z - a$, so erhält man eine Potenzreihe

$$e_0 + c_1(z-a) + \dots + c_n(z-a)^n + \dots$$

Für ihre Koeffizienten erhält man aber die Gleichungen

$$\begin{aligned} b_0 &= e_0 \\ b_1 &= c_1 - e_0 \{ |\alpha_1| + |\beta_1| \} \\ \vdots \\ b_{N-1} &= c_{N-1} - c_{N-2} \{ |\alpha_1| + |\beta_1| \} - \dots - e_0 \{ |\alpha_{N-1}| + |\beta_{N-1}| \} \\ 0 &= c_N - c_{N-1} \{ |\alpha_1| + |\beta_1| \} - \dots - e_0 \{ |\alpha_N| + |\beta_N| \} \\ &\dots \end{aligned}$$

Das sind aber gerade die Gleichungen (3) und (4), welchen die d_n genügen. Daher gilt

$$c_n = d_n \quad (n = 0, 1, \dots)$$

Nachdem wir so gezeigt haben, daß durch die gefundene Reihe ein Element der Lösung dargestellt wird, steht natürlich aus allgemeinen funktionentheoretischen Gründen fest, daß der Konvergenzkreis der Reihe bis zum nächsten singulären Punkt reicht. Die Gleichung

$$\varrho(\varrho - 1) + \varrho\alpha_0 + \beta_0 = 0,$$

aus welcher wir ϱ bestimmen, heißt die *Fundamentalgleichung*. Wenn dieselbe zwei Wurzeln hat, deren *Differenz keine ganze Zahl* ist, so liefert unsere Betrachtung gleich die beiden Lösungen eines Fundamentalsystems. Unterscheiden sich aber die beiden Wurzeln um eine ganze Zahl, so erhalten wir nur eine Lösung. Dieselbe ist durch diejenige der beiden Wurzeln bestimmt, welche den größeren Realteil besitzt. Die bedeutsame Rolle, die hier die Wurzeln spielen, deren Differenz eine ganze Zahl ist, kann nicht überraschen. Denn von (5) S. 185 her wissen wir ja schon, daß die Exponenten nur bis auf ganze Zahlen bestimmt sind. Dem trugen wir auch schon Rechnung, indem wir die Lösung in der Form

$$w = (z - a)^e \mathfrak{F}(z - a)$$

ansetzten.

Wenn nun also die Differenz der Wurzeln eine ganze Zahl ist, so wird es sich darum handeln, eine weitere Lösung zu finden, die mit

der schon bekannten zusammen ein Fundamentalsystem bildet. Die Mittel dazu stehen seit S. 128 bereit, denn damals lernten wir schon durch Kenntnis einer Lösung die Ordnung der Differentialgleichung reduzieren. Wir lernten:

Wenn w_1 eine Lösung der Differentialgleichung

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$$

ist, und wenn man $w = w_1 \int u dz$ setzt, so genügt u der linearen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$u' + u \left(\frac{2w_1'}{w_1} + p \right) = 0.$$

Tragen wir hier

$$w_1 = (z - a)^{\varrho_1} \mathfrak{P}(z - a), \quad p = \frac{\mathfrak{P}_1(z - a)}{z - a} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1(z - a) + \dots}{z - a}$$

ein, so wird die Gleichung

$$u' + u \left(\frac{2\varrho_1 + \alpha_0}{z - a} + \mathfrak{P}_3(z - a) \right) = 0.$$

Bezeichnet man die zweite „kleinere“ Wurzel der Fundamentalgleichung (2) mit ϱ_2 , so kann man hierfür schreiben:

$$u' + u \left(\frac{1 + \varrho_1 - \varrho_2}{z - a} + \mathfrak{P}_3(z - a) \right) = 0.$$

Hier ist aber, wegen der Wahl von ϱ_1

$$\varrho_1 - \varrho_2$$

eine nicht negative und damit

$$1 + \varrho_1 - \varrho_2 = \nu$$

eine positive ganze Zahl. Aus der Gleichung für u findet man sofort

$$u = (z - a)^{-\nu} \mathfrak{P}_4(z - a).$$

Somit wird die andere Lösung des Fundamentalsystems

$$\begin{aligned} w &= w_1 \int u dz = w_1 \{ A \log(z - a) + (z - a)^{-\nu+1} \mathfrak{P}_5(z - a) \} \\ &= (z - a)^{\varrho_1} \cdot A \cdot \log(z - a) \cdot \mathfrak{P}(z - a) + (z - a)^{\varrho_2} \cdot \mathfrak{P}_6(z - a). \end{aligned}$$

Wir können das Resultat so aussprechen:

ϱ_1 und ϱ_2 seien die beiden Wurzeln der Fundamentalgleichung (2). Es möge $\Re(\varrho_1) \geq \Re(\varrho_2)$ sein. Dann besitzt die Differentialgleichung

$$w'' + w' \frac{\mathfrak{P}_1(z - a)}{z - a} + w \frac{\mathfrak{P}_2(z - a)}{(z - a)^2} = 0$$

in der Umgebung von $z = a$ stets ein Fundamentalsystem von der Gestalt

$$\begin{aligned} w_1 &= (z - a)^{\varrho_1} \mathfrak{P}(z - a) \\ w_2 &= (z - a)^{\varrho_1} \cdot A \cdot \log(z - a) \cdot \mathfrak{P}(z - a) + (z - a)^{\varrho_2} \mathfrak{P}^*(z - a). \end{aligned}$$

Wenn die Differenz $\varrho_1 - \varrho_2$ keine ganze Zahl ist, so fällt stets das mit dem Logarithmus behaftete Glied weg. Man hat dann die Konstante A gleich

Null zu setzen. Wenn aber die Differenz $q_1 - q_2$ eine ganze Zahl ist, dann ist im allgemeinen A von Null verschieden. Der Konvergenzkreis der beiden hier vorkommenden Potenzreihen reicht bis zum nächsten singulären Punkt.

Bemerkung: Es kann sehr wohl der Fall eintreten, daß an einer singulären Stelle der Differentialgleichung alle Lösungen regulär sind. Das trifft z. B. bei $z = 0$ für

$$w'' - w' \frac{2}{z} + w \frac{2}{z^2} = 0$$

zu. Denn ein Fundamentalsystem derselben ist

$$\begin{aligned} w_1 &= z, \\ w_2 &= z^2. \end{aligned}$$

Eine singuläre Stelle, in der sich alle Integrale regulär verhalten, nennt man einen *Nebenpunkt*.

Nun berichte ich kurz über die Ergebnisse, welche bei wesentlich singulären Stellen erzielt worden sind. Den Anschluß an das vorhergehende gewinnt man durch die Frage, ob es nicht auch im Falle wesentlich singulärer Stellen einzelne Integrale gibt, die sich in deren Umgebung bestimmt verhalten, die sich also durch eine Reihe

$$(z - a)^{\alpha} \cdot \mathfrak{P}(z - a)$$

darstellen lassen. Man kennt aus Arbeiten von *H. v. Koch und Perron*¹⁾ die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Vorhandensein solcher Integrale. Aber man bekommt so eben nur in seltenen Fällen Aufschluß über ein oder das andere Integral. Einen Schritt weiter kommt man durch die *Thoméschen Normalreihen*²⁾. Um sie zu finden, macht man den Ansatz

$$y = e^{g(z)} u.$$

Dabei wird schon angenommen, daß der singuläre Punkt im Unendlichen liegt. Das ist ja auch keine Beschränkung der Allgemeinheit. In dem Ansatz bedeutet $g(z)$ ein Polynom; dies ist so zu bestimmen, daß für u eine Differentialgleichung herauskommt, der man durch eine Reihe

$$u = z^{\alpha} \mathfrak{P} \left(\frac{1}{z} \right)$$

formal genügen kann. Aber auch nur formal, denn die Reihen divergieren im allgemeinen. Trotzdem liefern diese Reihen, welche also die Form

$$e^{g(z)} \cdot z^{\alpha} \cdot \mathfrak{P} \left(\frac{1}{z} \right)$$

haben, gewissen Aufschluß über das Verhalten der Lösungen in der Nähe der wesentlich singulären Stelle. Sie sind nämlich *asymptotische Darstellungen* derselben bei zunächst geradliniger Annäherung.

1) *H. v. Koch*: Acta math., Bd. 18. *O. Perron*: Math. Ann. 70. *E. Hilb*: Math. Ann. 82.

2) *Crelles Journal* von Bd. 83 an.

Damit ist folgendes gemeint. Zu jeder Normalreihe

$$e^{g(z)} \cdot z^{\alpha} \left(c_0 + c_1 \frac{1}{z} + \dots \right)$$

gehört ein Integral y derart, daß für jedes m

$$y = e^{g(z)} \cdot z^{\alpha} \left(c_0 + \dots + \frac{c_m}{z^m} + \frac{\varepsilon_m}{z^m} \right)$$

ist, wo $\varepsilon_m \rightarrow 0$ für $z \rightarrow \infty$. Diesen Satz hat *Poincaré* für den Fall bewiesen, daß die Koeffizienten der zu behandelnden Differentialgleichung

$$p_0(z)w'' + p_1(z)w' + p_2(z)w = 0$$

ganze rationale Funktionen sind. Für diesen Fall kann man auch noch eine einfache Aussage über die Bestimmung von $g(z)$ machen. Es werde angenommen, daß die Grade der p_i höchstens $h + ik$ seien. Dann sei C_i der Koeffizient von z^h in p_i und man betrachte die Gleichung

$$C_0\alpha^2 + C_1\alpha + C^2 = 0.$$

Sind ihre Wurzeln voneinander verschieden und bezeichnet man dieselben mit α_k , so gibt es genau zwei Normalreihen, deren exponentielle Bestandteile die $e^{\alpha_k z}$ sind, die also so aussehen

$$e^{\alpha_k z} z^{\alpha} \mathfrak{P} \left(\frac{1}{z} \right).$$

Der Zusammenhang mit den durch die Reihen asymptotisch dargestellten Integralen wird in diesem Falle durch den folgenden Satz von *Poincaré* hergestellt. Zu jedem α_k gehört genau ein Integral y_k , für das die Beziehung gilt:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{y_k'}{y_k} = \alpha_k.$$

Zur Behandlung allgemeinerer Differentialgleichungen mit nicht-rationalen Koeffizienten sind zwei Schritte nötig. Einmal übertrage man — was keine sonderliche Mühe macht — die hier geschilderten Dinge auf Systeme von zwei linearen Gleichungen erster Ordnung mit zwei unbekannt Funktionen und mit rationalen Koeffizienten. Als deren Spezialfall hat man ja bekanntlich die Gleichungen zweiter Ordnung aufzufassen. Dann aber wird der Anschluß an diese Übertragung durch einen grundlegenden Satz von *Birkhoff* erzielt, der lehrt, daß man jede Gleichung zweiter Ordnung (oder allgemeiner jedes System) durch eine lineare Transformation

$$Y_i = \alpha_{i1} \cdot y + \alpha_{i2} y' \quad (i = 1, 2)$$

auf ein System transformieren kann, dessen Koeffizienten im Unendlichen regulär sind. Wegen der einzelnen Zitate verweise ich auf den Enzyklopädieartikel von *Hilb*.

§ 5. Anwendung auf die *Besselsche* Differentialgleichung.

Die *Besselsche* Differentialgleichung

$$w'' + \frac{1}{z} w' + \frac{z^2 - n^2}{z^2} w = 0$$

besitzt bei $z = 0$ eine außerwesentlich singuläre Stelle. Die Fundamentalgleichung wird:

$$\varrho(\varrho - 1) + \varrho - n^2 = 0.$$

Ihre beiden Wurzeln sind somit

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= n \\ \varrho_2 &= -n \end{aligned} \quad (\text{wenn } \Re(n) \geq \Re(-n)).$$

Schon diese kurze Bemerkung lehrt nach einem Blick auf die Formeln des vorigen Paragraphen, daß es, falls nicht gerade n rein imaginär ist, tatsächlich stets nur eine Lösung (die erste oben aufgeschriebene) gibt, welche bei $z = 0$ endlich bleibt. Damit haben wir eine Frage beantwortet, die wir auf S. 177 vertagt hatten.

Es wird eine nützliche Übung für den Leser sein, das folgende Ergebnis selbständig zu gewinnen:

Wenn n keine ganze Zahl ist, dann sind $J_n(z)$ und $J_{-n}(z)$ die beiden Lösungen eines Fundamentalsystems. Wenn aber n eine ganze Zahl ist, dann verliert $J_{-n}(z)$ seinen Sinn, weil einige seiner Koeffizienten unendlich werden. Alsdann wird die zweite Lösung des Fundamentalsystems:

$$\begin{aligned} & J_n(z) \cdot \log z \\ & - \left\{ \frac{2^{n-1} (n-1)! z^{-n}}{1!} + \frac{2^{n-3} (n-2)! z^{-n+2}}{2!} + \frac{2^{n-5} (n-3)! z^{-n+4}}{3!} + \dots + \frac{z^{n-2}}{2^{n-1} (n-1)!} \right\} \\ & + \frac{z}{1} \left[\frac{(-1)^{m-1} z^{n+2m}}{2^{n+2m} m! (n+m)!} \cdot \sum_{\mu=0}^m \frac{1}{2^\mu} \binom{m}{\mu} \right]. \end{aligned}$$

Ich will dem Leser zur Herleitung dieses letzten Ergebnisses eine auch sonst nützliche Anleitung geben. Wenn wir nach der im vorigen Paragraphen verwendeten Methode rechnen wollten, so hätten wir die Unbequemlichkeit, erst den Quotienten $\frac{J_n'(z)}{J_n(z)}$ in eine Potenzreihe entwickeln zu müssen. Das vermeidet man, wenn man in die Gleichung mit dem durch unser allgemeines Resultat nahegelegten Ansatz

$$w_3 = z^n \cdot \sum (a_m + b_m \log z) z^m$$

hineingeht. Die Methode der unbestimmten Koeffizienten liefert dann leicht das gewünschte Ergebnis. Wir haben diese Methode nicht im vorigen Paragraphen angewandt, weil wir sonst die Rechnung wieder durch einen Konvergenzbeweis hatten ergänzen müssen. Der ergab sich bei der Betrachtung des vorigen Paragraphen ganz von selbst.

Der Leser sieht aber an diesem Beispiel, daß es in praxi bequemer sein kann, Wege einzuschlagen deren *direkte* theoretische Begründung schwieriger wäre.

§ 6. Differentialgleichungen der *Fuchsschen Klasse*.

Man sagt, eine Differentialgleichung $w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$ gehöre der *Fuchsschen Klasse* an, wenn sie *nur* außerwesentlich singuläre Stellen besitzt. Der erste Koeffizient besitzt dann im endlichen nur Pole höchstens erster Ordnung, der zweite nur Pole höchstens zweiter Ordnung. Über das Verhalten der Koeffizienten im Unendlichen müssen wir jetzt noch Aufschluß gewinnen. Schon S. 187 haben wir durch die Substitution

$$z = \frac{1}{\delta}$$

das Unendliche nach 0 gebracht. Wir werden sagen bei $z = \infty$ liege eine außerwesentliche Singularität, wenn die S. 187 angegebene transformierte Differentialgleichung bei $\delta = 0$ eine außerwesentliche Singularität besitzt. Damit nun aber der erste Koeffizient

$$\frac{2}{\delta} - \frac{1}{\delta^2} p\left(\frac{1}{\delta}\right)$$

der transformierten Gleichung bei $\delta = 0$ einen Pol höchstens erster Ordnung habe, muß die Entwicklung von $p\left(\frac{1}{\delta}\right)$ so aussehen:

$$p\left(\frac{1}{\delta}\right) = a_1 \delta + a_2 \delta^2 + \dots$$

D. h. in der Umgebung von $z = \infty$ muß die Entwicklung von $p(z)$ so aussehen

$$p(z) = a_1 \frac{1}{z} + a_2 \frac{1}{z^2} + \dots,$$

$p(z)$ hat also dort eine Nullstelle mindestens erster Ordnung. Somit muß $p(z)$ eine rationale Funktion mit nur Polen erster Ordnung sein, welche im Unendlichen verschwindet. Versteht man unter $\alpha_1 \dots \alpha_n$ die Gesamtheit der Stellen, an welchen $p(z)$ oder $q(z)$ Pole haben, so besitzt $p(z)$ folgende Gestalt:

$$(1) \quad p(z) = \frac{g(z)}{\varphi(z)} \quad (\varphi(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n)),$$

wo der Zählergrad um mindestens eins kleiner ist als der Nennergrad. Man braucht natürlich an sich in den Nenner nur die α_i zu schreiben, die wirklich Pole von $p(z)$ sind. Für die weitere Betrachtung ist es zweckmäßiger, Zähler und Nenner noch mit den Faktoren $z - \alpha_i$ zu erweitern, die von Polen des $q(z)$ herrühren.

Untersuchen wir nun den zweiten Koeffizienten

$$\frac{1}{\delta^4} q \left(\frac{1}{\delta} \right)$$

der transformierten Gleichung. Soll er bei $\frac{1}{\delta} = 0$ einen Pol von höchstens zweiter Ordnung haben, so muß die Entwicklung von $q \left(\frac{1}{\delta} \right)$ so aussehen

$$q \left(\frac{1}{\delta} \right) = \beta_2 \delta^2 + \dots$$

Also folgt

$$q(z) = \frac{\beta_2}{z^2} + \dots$$

Daraus findet man, daß $q(z)$ eine rationale Funktion von folgender Gestalt sein muß

$$(2) \quad p(z) = \frac{h(z)}{(\varphi(z))^2} \quad (\varphi(z) = (z - \alpha_1) \dots (z - \alpha_n)).$$

Der Zählergrad muß dabei um mindestens zwei Einheiten kleiner sein als der Nennergrad. Dabei ist wieder $\alpha_1 \dots \alpha_n$ die Gesamtheit der Stellen, an welchen $p(z)$ oder $q(z)$ Pole besitzen.

Umgekehrt gehört nach § 3 auch eine Differentialgleichung, deren Koeffizienten die eben angegebene Gestalt besitzen, der *Fuchsschen* Klasse an. Man kann die gefundenen Bedingungen auch mit Hilfe der Partialbruchzerlegung zum Ausdruck bringen.

Sind nämlich

$$(3) \quad \begin{aligned} p(z) &= \sum \frac{A_k}{z - \alpha_k} \\ q(z) &= \sum \left\{ \frac{B_k}{(z - \alpha_k)^2} + \frac{C_k}{z - \alpha_k} \right\} \end{aligned}$$

die Partialbruchzerlegungen für die Koeffizienten einer Differentialgleichung

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$$

der *Fuchsschen* Klasse, so muß

$$\lim_{z \rightarrow \infty} p(z) = 0 \quad \lim_{z \rightarrow \infty} q(z) = 0 \quad \lim_{z \rightarrow \infty} z \cdot q(z) = 0$$

sein¹⁾. So kann man nämlich die gefundenen Bedingungen ausdrücken. Den beiden ersten Bedingungen haben wir schon dadurch Rechnung getragen, daß wir in den obigen Partialbruchzerlegungen keine additiven ganzen Funktionen angebracht haben. Die letzte Bedingung aber führt zu der Gleichung

$$\sum C_k = 0.$$

1) Unsere Betrachtung läßt überdies erkennen, daß $z = \infty$ nur dann eine reguläre Stelle der Differentialgleichung ist, wenn überdies noch $\lim_{z \rightarrow \infty} z p(z) = 2$ und $\lim_{z \rightarrow \infty} z^3 q(z) = 0$ gilt.

Wir wollen noch die Fundamentalgleichung des unendlich fernen Punktes aufschreiben. Dazu müssen wir nur die Fundamentalgleichung der transformierten Gleichung bei $\mathfrak{z} = 0$ aufschreiben. Setzen wir

$$\lim_{\mathfrak{z} \rightarrow 0} \left\{ 2 - \frac{1}{\mathfrak{z}} p \left(\frac{1}{\mathfrak{z}} \right) \right\} = \lim_{z \rightarrow \infty} \{ 2 - z p(z) \} = \alpha$$

$$\lim_{\mathfrak{z} \rightarrow 0} \frac{1}{\mathfrak{z}^2} q \left(\frac{1}{\mathfrak{z}} \right) = \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 q(z) = \beta,$$

so wird die Fundamentalgleichung

$$\varrho(\varrho - 1) + \alpha\varrho + \beta = 0.$$

Das Fundamentalsystem des unendlich fernen Punktes sieht dann so aus

$$w_1 = \frac{1}{z^{21}} \mathfrak{P} \left(\frac{1}{z} \right)$$

$$w_2 = \frac{1}{z^{21}} A \log z \cdot \mathfrak{P} \left(\frac{1}{z} \right) + \frac{1}{z^{22}} \mathfrak{P}^* \left(\frac{1}{z} \right).$$

Dabei sind ϱ_1 und ϱ_2 die beiden Wurzeln der Fundamentalgleichung und es ist $R(\varrho_1) \geq R(\varrho_2)$. Die Zahl A ist stets Null, wenn $\varrho_1 - \varrho_2$ keine ganze Zahl ist.

Ist n die Anzahl der im endlichen gelegenen singulären Stellen, so hat man noch den Satz, daß die Summe aller Wurzeln aller charakteristischen Gleichungen $n - 1$ beträgt. Er beruht auf dem funktionentheoretischen Satz, daß die Summe der Residuen einer rationalen Funktion Null ist. Nun aber ist die Fundamentalgleichung der singulären Stelle α_k , wenn man die Darstellungen (1), (2) verwendet

$$\varrho(\varrho - 1) + \frac{g(\alpha_k)}{\varphi'(\alpha_k)} \varrho + \frac{h(\alpha_k)}{\{\varphi'(\alpha_k)\}^2} = 0.$$

Andererseits ist aber

$$\frac{g(\alpha_k)}{\varphi'(\alpha_k)}$$

das Residuum von $p(z)$ bei α_k , während die Summe der beiden Wurzeln der Fundamentalgleichung

$$1 - \frac{g(\alpha_k)}{\varphi'(\alpha_k)}$$

wird. Im Unendlichen ist das Residuum $\alpha - 2$, die Summe der Wurzeln $1 - \alpha$. Daher wird die Summe aller Wurzeln vermehrt um die Summe aller Residuen gleich $n - 1$. Daher ist die Summe aller Wurzeln aller charakteristischen Gleichungen gleich $n - 1$, da die Summe aller Residuen verschwindet.

Schreiben wir noch die Fundamentalgleichungen unter Verwendung der Partialbruchzerlegungen (3) auf. Sie lauten:

$$\varrho(\varrho - 1) + A_k \varrho + B_k = 0 \text{ für die Stelle } z = \alpha_n,$$

$$\varrho(\varrho - 1) + (2 - \sum A_k) \varrho + \sum (B_k + C_k \alpha_k) = 0 \text{ für } z = \infty.$$

§ 7. Die hypergeometrische Differentialgleichung.

Eine jede Differentialgleichung der *Fuchsschen* Klasse muß im Endlichen mindestens eine singuläre Stelle haben. Denn sonst wären die Koeffizienten konstant. Aber die Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten gehören nicht der *Fuchsschen* Klasse an, es sei denn, daß $w'' = 0$ vorgelegt ist. Denn die Koeffizienten anderer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten werden ja im Unendlichen nicht Null und ihre Integrale haben, wie wir von S. 127 wissen, im Unendlichen wesentlich singuläre Stellen.

Differentialgleichungen aber, welche im Endlichen gerade einen singulären Punkt haben, sind von der Form

$$w'' + \frac{A}{z-a} w' + \frac{B}{(z-a)^2} w = 0.$$

Auch sie haben wir schon S. 131 zu integrieren gelernt. Diese Differentialgleichung hat überdies noch $z = \infty$ als singuläre Stelle, falls nicht $A = 2$, $B = 0$ ist. Denn dies ist nach Fußnote 1 von S. 199 die Bedingung dafür, daß $z = \infty$ eine reguläre Stelle ist.

Der nächst einfachste Fall ist also der, daß drei singuläre Punkte vorhanden sind. Sie mögen bei 0 , 1 , ∞ liegen¹⁾. Die Wurzeln ihrer Fundamentalgleichungen mögen

$$(\varrho_{01}, \varrho_{02}), (\varrho_{11}, \varrho_{12}), (\varrho_{\infty 1}, \varrho_{\infty 2})$$

sein. Seit *Riemann* bezeichnet man eine jede Lösung einer solchen Differentialgleichung mit

$$P \begin{pmatrix} 0, & 1, & \infty \\ \varrho_{01} & \varrho_{11} & \varrho_{\infty 1}, z \\ \varrho_{02} & \varrho_{12} & \varrho_{\infty 2} \end{pmatrix}.$$

Man zählt nämlich leicht nach, daß die Anzahl der in die Koeffizienten der Differentialgleichung eingehenden Parameter fünf ist, nämlich zwei Koeffizienten im Zähler von $p(z)$ und drei im Zähler von $q(z)$. Ebenso groß ist aber die Zahl der in den Ausdruck der P -Funktion eingehenden Parameter: 6 Fundamentalwurzeln ϱ_{ik} , deren Summe 1 ist. Man wird somit erwarten, daß man die Koeffizienten der Differentialgleichung durch diese 5 neuen Parameter ausdrücken kann. Wir wollen das nachher auch tun, vorab aber bemerken, daß ein gleiches Resultat bei mehr als drei singulären Stellen nicht zu erwarten ist. Denn bei n im endlichen gelegenen Singularitäten hat man in den Differentialgleichungskoeffizienten

$$n + n + 2n - 1 = 4n - 1$$

Parameter. Ferner hat man n singuläre Stellen und $2n + 2$ Funda-

¹⁾ Das läßt sich ja durch eine lineare Transformation stets erreichen.

mentalwurzeln. Da aber die Summe derselben wieder fest ist, so sind das noch $2n + 1$ Parameter. Daher hat man bei dieser Zählung

$$3n + 1$$

Parameter. Beide Zahlen stimmen nur für $n = 2$ überein. Die überschüssigen in die Differentialgleichung eingehenden $n - 2$ heißen die *akzessorischen Parameter*. Man kann — ähnlich wie bei Randwertaufgaben — versuchen, sie durch weitere den Lösungen auferlegte Bedingungen zu bestimmen. Man erhält so mannigfache Oszillationstheoreme, die später noch ein wenig näher berührt werden können.

Vorab wollen wir bei den Differentialgleichungen mit drei singulären Punkten stehen bleiben. Durch die Substitution

$$w = z^i(1 - z)^u \cdot W$$

kann man erreichen, daß bei 0 und 1 je eine der Fundamentalwurzeln verschwindet. Die beiden charakteristischen Wurzeln bei ∞ bezeichnet man dann mit α, β , die zweite Fundamentalwurzel von 0 hat man sich gewöhnt, mit $1 - \gamma$ zu bezeichnen. Berücksichtigt man dann noch, daß die Summe aller 1 sein muß, so wird die zweite Wurzel des Punktes 1:

$$\gamma - \alpha - \beta.$$

Das Symbol der neuen P -Funktion wird also

$$P \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \alpha & z \\ 1 - \gamma & \gamma - \alpha - \beta & \beta \end{pmatrix}.$$

Nun sollen die Koeffizienten der Differentialgleichung durch α, β, γ ausgedrückt werden. Das gelingt am besten durch Heranziehen der Partialbruchzerlegung der Koeffizienten und unter Verwendung der Schlußformeln des letzten Paragraphen. Denn dort kann man direkt die Ausdrücke der Koeffizienten der Partialbruchzerlegung durch die Fundamentalwurzeln ablesen¹⁾. Man findet so als Ausdruck der Differentialgleichung

$$w'' + \frac{-\gamma + (1 + \alpha + \beta)z}{z(z-1)} w' + \frac{\alpha\beta}{z(z-1)} w = 0.$$

Sie heißt „*hypergeometrische Differentialgleichung*“ aus einem bald anzugebenden Grunde.

Unsere nächste Aufgabe ist es, die Fundamentalsysteme der drei singulären Punkte anzugeben. Ich beginne mit $z = 0$, und will annehmen, daß γ keine negative ganze Zahl und nicht Null ist. Dann gehört zu der Fundamentalwurzel 0 ein bei $z = 0$ reguläres, dort nicht verschwindendes Integral. Man kann es somit nach S. 190 mit der

¹⁾ C_0 bleibt so zunächst unbestimmt. Aber da der Zählergrad von $q(z)$ um mindestens 2 kleiner ist als der Nennergrad, findet man nachträglich $C_0 = \alpha\beta$.

Methode der unbestimmten Koeffizienten berechnen und darf dabei annehmen, daß es bei $z = 0$ den Wert Eins hat. Die so normierte Funktion bezeichnet man mit

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z).$$

Die Methode der unbestimmten Koeffizienten liefert wie der Leser selbst nachrechnen möge,

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} z + \frac{\alpha(\alpha+1) \cdot \beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma \cdot (\gamma+1)} z^2 + \dots$$

Diese Reihe heißt die *hypergeometrische Reihe*, geht sie doch für $\alpha = 1$, $\beta = \gamma$ in die geometrische Reihe über. Ihr Konvergenzkreis ist der Einheitskreis.

Zur Berechnung der zweiten Funktion des Fundamentalsystems führt im Falle, wo γ keine ganze Zahl ist, die folgende Bemerkung. Wenn man in der hypergeometrischen Differentialgleichung die Substitution

$$W = z^{\gamma-1} \cdot w$$

macht, so erhält man eine neue hypergeometrische Differentialgleichung. Denn die Fundamentalwurzeln werden jetzt: Bei $z = 0$: $\gamma - 1$, 0 , bei $z = 1$: 0 , $\gamma - \alpha - \beta$, bei $z = \infty$: $\alpha - \gamma + 1$, $\beta - \gamma + 1$: Setzt man daher

$$\alpha_1 = \alpha - \gamma - 1, \quad \beta_1 = \beta - \gamma + 1, \quad \gamma_1 = 2 - \gamma,$$

so erkennt man, daß der neuen Differentialgleichung die hypergeometrische Funktion $F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, z)$ genügt. Daher ist

$$w_2 = z^{1-\gamma} \cdot F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, z)$$

das andere Integral des Fundamentalsystems der gegebenen Differentialgleichung. Natürlich kann man dies auch auf dem Wege der Rechnung bestätigen.

Nunmehr ist es auch leicht, für die Stellen Eins und Unendlich Fundamentalsysteme anzugeben. Macht man nämlich in der hypergeometrischen Differentialgleichung die Substitution

$$\delta = 1 - z,$$

so wird dieselbe

$$w'' + \frac{-\gamma + \alpha + \beta + 1 - (1 + \alpha + \beta)\delta}{\delta(\delta-1)} w' + \frac{\alpha\beta}{\delta(\delta-1)} w = 0.$$

Setzt man nun

$$\alpha_1 = \alpha, \quad \beta_1 = \beta, \quad \gamma_1 = 1 + \alpha + \beta - \gamma,$$

so kann man sie auch so schreiben:

$$w'' + \frac{-\gamma_1 + (1 + \alpha_1 + \beta_1)\delta}{\delta(\delta-1)} w' + \frac{\alpha\beta}{\delta(\delta-1)} w = 0.$$

1) Wenn z. B. $w = \left(\frac{1}{z}\right)^\alpha \cdot \mathfrak{F}\left(\frac{1}{z}\right)$ ist, so wird $W = \left(\frac{1}{z}\right)^{\alpha-\gamma+1} \mathfrak{F}\left(\frac{1}{z}\right)$.

Demnach ist

$$F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta), \quad \delta^{1-\gamma_1} F(\alpha_1 - \gamma_1 + 1, \beta_1 - \gamma_1 + 1, 2 - \gamma_1, \delta)$$

ein Fundamentalsystem derselben bei $\delta = 0$, falls γ_1 keine ganze Zahl ist. Daher wird

$$F(\alpha, \beta, 1 + \alpha + \beta - \gamma, 1 - z) \\ (1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \beta, \gamma - \alpha, 1 - \alpha - \beta + \gamma, 1 - z)$$

ein Fundamentalsystem der ursprünglichen bei $z = 1$, falls nicht $\gamma - \alpha - \beta$ eine ganze Zahl ist.

Macht man andererseits die Substitution

$$\delta = \frac{1}{z},$$

so entsteht eine Differentialgleichung mit drei singulären Punkten $0, 1, \infty$, deren Fundamentalwurzeln

$$(\alpha, \beta), \quad (0, \gamma - \alpha - \beta), \quad (0, 1 - \gamma)$$

sind. Setzt man daher

$$W = \delta^{-\alpha} \cdot w,$$

so wird die Differentialgleichung hypergeometrisch mit den Fundamentalwurzeln: $(0, \beta - \alpha), (0, \gamma - \alpha - \beta), (\alpha, \alpha - \gamma + 1)$. Daher ist

$$F(\alpha, \alpha - \gamma + 1, 1 + \alpha - \beta, \delta) \\ \delta^{\beta - \alpha} \cdot F(\beta, \beta - \gamma + 1, 1 - \alpha + \beta, \delta)$$

ein Fundamentalsystem derselben bei $\delta = 0$, falls $\beta - \alpha$ keine ganze Zahl ist. Daher ist

$$\left(\frac{1}{z}\right)^\alpha F\left(\alpha, \alpha - \gamma + 1, 1 + \alpha - \beta, \frac{1}{z}\right) \\ \left(\frac{1}{z}\right)^\beta F\left(\beta, 1 + \beta - \gamma, 1 + \beta - \alpha, \frac{1}{z}\right)$$

ein Fundamentalsystem der ursprünglichen bei $z = \infty$, falls $\alpha - \beta$ nicht ganzzahlig ist.

§ 8. Analytische Fortsetzung einer einzelnen Lösung.

Es ist in diesem einführenden Buche nicht meine Aufgabe, eine erschöpfende Theorie der hypergeometrischen Differentialgleichung zu geben. Vielmehr sehe ich meine Aufgabe darin, einen Überblick über die wesentlichsten bisher behandelten Probleme und einen Einblick in die zu ihrer Lösung ersonnenen Methoden zu geben. Daher will ich auch nicht näher auf die Bestimmung der Fundamentalsysteme in den Fällen eingehen, wo die bisher bestimmten Fundamentalsysteme versagen, wenn also z. B. γ eine ganze Zahl ist. Methodisch würden ja diese Fälle nichts Neues mehr bieten.

Lieber will ich mich jetzt der Frage zuwenden, wie man die analytische Fortsetzung einer einzelnen Lösung bestimmen kann. Wenn z. B. $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ vorgelegt ist, so erhebt sich beispielsweise die Frage, wie sich dieselbe in der Nähe von $z=1$ oder von $z=\infty$ verhält, überhaupt allgemein die Frage nach ihrer Änderung, wenn z einen geschlossenen Weg in seiner Ebene beschreibt.

Nun kann nach S. 184 jede Lösung auf jedem Wege fortgesetzt werden, der keine singuläre Stelle des Koeffizienten trifft. Daher ist jede Lösung in demjenigen Stern eindeutig, den man erhält, wenn man den Mittelpunkt eines sie definierenden regulären Funktionselementes mit den Stellen 0 und 1 verbindet und die Ebene längs der Verlängerungen dieser beiden Linien über 0 und 1 hinaus aufschneidet. Es wird also nur darauf ankommen, Umläufe um einzelne singuläre Punkte zu untersuchen. Es ist dazu zweckmäßig, nicht $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ für sich zu untersuchen, sondern die beiden Funktionen

$$\begin{aligned} w_1 &= F(\alpha, \beta, \gamma, z) \\ w_2 &= z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, z), \end{aligned}$$

welche das Fundamentalsystem bei $z=0$ bilden, gleichzeitig nebeneinander zu betrachten. Am bequemsten gelangt man zum Ziele, wenn man den Quotienten

$$w = \frac{w_2}{w_1}$$

heranzieht. Wir wollen untersuchen, *welche Abbildung diese Funktion von der oberen Halbebene $\Im(z) > 0$ vermittelt. Ich setze die α, β, γ als reell voraus. Wir werden erkennen, daß die Halbebene in ein schlichtes Kreisbogendreieck übergeführt wird.*

Es leuchtet ein, daß Zähler und Nenner von w auf der Strecke $0 < z < 1$ reell sind, wenn man sich für den reellen Zweig von $z^{1-\gamma}$ entscheidet. Ferner ist die Ableitung von w niemals Null, besitzt also stets einerlei Vorzeichen. Denn es ist ja

$$w' = \frac{w_1 w_2' - w_2 w_1'}{w_1^2}.$$

Nach S. 128 hat man aber

$$w_1 w_2' - w_2 w_1' = c e^{-\int p(z) dz}.$$

Dieser Ausdruck kann nur an einer singulären Stelle der Differentialgleichung verschwinden, wenn er nicht identisch verschwindet. Dann aber wäre w konstant. Daraus folgt, daß durch w das Stück $0 < z < 1$ der reellen Achse in ein monoton durchlaufenes Stück der reellen w -Achse übergeführt wird, wofern man sich für denjenigen Zweig von $z^{1-\gamma}$ entscheidet, der für $0 < z < 1$ positiv reell ist.

Was wird nun aus der negativen reellen Achse? Setzt man in der oberen Halbebene $z = r e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, so wird für negative z

$$z = r e^{i\pi}.$$

Daher hat man

$$z^{1-\gamma} = r^{1-\gamma} e^{i\pi(1-\gamma)}$$

zu nehmen. Da wieder $w' = 0$ ist, so geht die negative reelle Achse in ein monoton durchlaufenes Stück der Geraden

$$\arg w = \pi(1 - \gamma)$$

der w -Ebene über. Beide bisher genannten Geradenstücke bilden also einen Winkel von $\pi(1 - \gamma)$ miteinander. Nun bleibt noch die reelle Achse

$$z > 1$$

übrig. Betrachten wir zunächst einmal in der Umgebung von $z = 1$ den Quotienten der beiden Funktionen, durch die wir vorhin S. 204 in der Umgebung dieses Punktes ein Fundamentalsystem darstellten. Dann erkennt man genau wie eben, daß durch diesen Quotienten $z > 1$ in eine gerade Strecke übergeführt wird. Da nun aber w_1 und w_2 bei der Fortsetzung in der Umgebung von $z = 1$ in lineare Funktionen der eben benutzten beiden Lösungen übergehen, so wird w eine gebrochene lineare Funktion des eben benutzten Quotienten. Und daher wird durch w die Strecke $z > 1$ auf einen Kreisbogen abgebildet. Derselbe muß mit den beiden schon eingeführten Strecken zusammen ein Dreieck bilden. Denn wenn z die reelle Achse durchläuft, so muß sich w aus funktionentheoretischen Gründen reproduzieren. Denn sonst enthielte die obere Halbebene weitere Singularitäten. Daher wird die reelle Achse auf eine geschlossene Kurve abgebildet, und zwar wie wir sahen, auf den Rand eines Kreisbogensdreiecks. Somit wird wieder aus funktionentheoretischen Gründen die obere Halbebene auf dies Kreisbogensdreieck selbst abgebildet. Welche Winkel besitzt dasselbe nun in den zwei noch übrigen Ecken? Zur Beantwortung dieser Frage hat man nur den Charakter der Abbildung zu untersuchen, die der Quotient der beiden in der Umgebung von $z = 1$ und $z = \infty$ betrachteten ausgezeichneten Lösungen vermittelt. Denn unser Quotient $\frac{w_2}{w_1}$ ist ja bei $z = 1$ und $z = \infty$ als lineare Funktion dieser Quotienten darstellbar und lineare Abbildungen sind ja winkeltreu. Nun aber wird jener Quotient bei $z = 1$

$$(1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta} \frac{F(\gamma - \beta, \gamma - \alpha, 1 - \alpha - \beta + \gamma, 1 - z)}{F(\alpha, \beta, 1 + \alpha + \beta - \gamma, 1 - z)}.$$

Bei $z = \infty$ aber wird er

$$\left(\frac{1}{z}\right)^{\beta - \alpha} \frac{F\left(\beta, 1 + \beta - \gamma, 1 + \beta - \alpha, \frac{1}{z}\right)}{F\left(\alpha, \alpha - \gamma + 1, 1 + \alpha - \beta, \frac{1}{z}\right)}.$$

Man erkennt sofort, daß dadurch die reelle Achse bei $z = 1$ in zwei unter dem Winkel $\pi(\gamma - \alpha - \beta)$ aneinanderstoßende Geraden über-

geführt wird, während bei $z = \infty$ der Winkel $\pi(\beta - \alpha)$ herauskommt. So haben wir das Resultat:

Durch die Abbildung

$$w = \frac{w_2}{w_1} = z^{1-\gamma} \frac{F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, z)}{F(\alpha, \beta, \gamma, z)}$$

wird die Halbebene auf ein Kreisbogendreieck abgebildet, das die drei Winkel $\pi(1-\gamma)$, $\pi(\gamma-\alpha-\beta)$, $\pi(\beta-\alpha)$ besitzt. Ich kürze ab $\lambda = 1-\gamma$, $\mu = \gamma-\alpha-\beta$, $\nu = \beta-\alpha$.

Die mehr funktionentheoretische Frage nach der Berechnung der Eckenkoordinaten dieses Dreiecks will ich nicht anschneiden; auch die damit zusammenhängende Frage nach den Änderungen, die unser Quotient und damit auch der Zähler w_2 und der Nenner w_1 bei Umlaufung der singulären Stellen erfahren, will ich nicht behandeln. Es mag genügen, die allgemeine Natur des Ergebnisses festgestellt zu haben. Jedenfalls wird einem Umlauf von z um einen singulären Punkt eine lineare Substitution des Quotienten entsprechen.

Ich will nur in gewissen Spezialfällen die qualitative Natur des Ergebnisses noch etwas weiter verfolgen. Nach dem Spiegelungsprinzip geht nämlich die untere Halbebene gleichfalls in ein Kreisbogendreieck über. Denke ich mir weiter die *Riemannsche* Fläche von $w(z)$ in ihre Halbebenen zerlegt und diese längs der drei Strecken $0 < z < 1$, $z > 1$, $z < 0$ jeweils aneinandergeheftet, so erhalte ich als Bild der *Riemannschen* Fläche einen aus lauter Kreisbogendreiecken aufgebauten Bereich.

Besonderes Interesse bietet nun der Fall, wo dieser Bereich schlicht ist, wo also kein Stück der Ebene mehrfach von den Kreisbogendreiecken bedeckt wird. Es ist dies der Fall, wo die Umkehrfunktion von $\frac{w_2}{w_1}$ eindeutig ist. Es ist lediglich erforderlich, daß die Winkel $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ von der Form

$$\frac{\pi}{l}, \quad \frac{\pi}{m}, \quad \frac{\pi}{n}$$

sind, wo l , m , n ganze Zahlen bedeuten. Durch sukzessive Spiegelung der Dreiecke an den freien Rändern erhält man nämlich ein Dreiecksnetz. Man wird vor allen Dingen verlangen müssen, daß dieses Netz in der Umgebung eines jeden Eckpunktes eines Dreiecks die Ebene einfach und lückenlos bedeckt. Dies wird aber gerade durch die eingeführte Winkelbedingung gewährleistet. Betrachten wir z. B. die Ecke, an der der Winkel $\frac{\pi}{n}$ liegt, und spiegeln das Dreieck an einer von dieser Ecke ausgehenden Seite, so erhalten wir ein weiteres Dreieck, das an das erste anstößt. Der von beiden gebildete Bereich ist unter anderem von zwei von der Ecke ausgehenden Kreisbogen begrenzt,

welche einen Winkel von $\frac{2\pi}{n}$ gegeneinander bilden. Beiläufig bemerkt, ist dieses Doppeldreieck nun das Bild einer vollen längs eines Stücks der reellen Achse aufgeschnittenen z -Ebene. Spiegele ich das Doppeldreieck erneut an einem seiner von der gleichen Ecke ausgehenden Kreisbogen, so erhalte ich ein neues an diese Ecke wieder mit dem Winkel $2\frac{\pi}{n}$ anstoßendes Doppeldreieck. Wenn ich so an den freien Rändern im ganzen n -mal spiegele, so erhalte ich n jeweils mit dem Winkel $2\frac{\pi}{n}$ an die Ecke anstoßende Doppeldreiecke, deren jedes aus zwei zueinander spiegelbildlichen Kreisbogendreiecken besteht. Diese $2n$ Dreiecke bedecken die ganze Umgebung der Ecke gerade einmal lückenlos.

Schraffiert man diejenigen Hälften der Doppeldreiecke, welche Bilder der oberen Halbebene sind, so besteht jedes Doppeldreieck aus einer schraffierten und einer nicht schraffierten Hälfte. (Vgl. Abb. 14, die für $n = 4$ gezeichnet ist.) Je zwei schraffierte Hälften gehen durch eine gerade Anzahl von Spiegelungen auseinander hervor. Eine solche gerade Anzahl von Spiegelungen ist aber gleichbedeutend mit einer linearen Abbildung, welche die gemeinsame Ecke festläßt. Die so erhaltenen linearen Abbildungen lassen sich alle als Wiederholungen (Potenzen) einer derselben darstellen. Wenn man nämlich zwei benachbarte schraffierte Bereiche ins Auge faßt, so hängen sie durch eine lineare Abbildung zusammen, deren Wiederholungen die übrigen linearen Abbildungen ergeben. Natürlich handelt es sich um elliptische lineare Abbildungen, deren n -te Potenz die identische Abbildung ist, also um Substitutionen der Periode n .

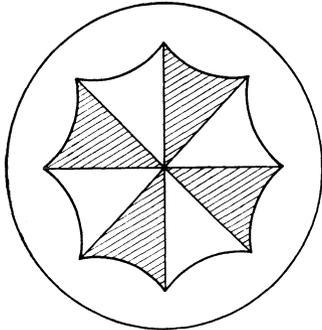


Abb. 14.

In diesen Betrachtungen liegt begründet, daß die Abbildung in der Umgebung einer jeden Ecke einen schlichten Bildbereich liefert. Man kann weiter schließen, daß der ganze Bildbereich schlicht ist. Ich will diesen Beweis nicht völlig durchführen, sondern nur einige Gesichtspunkte hervorheben, die bei der Anlage des Beweises zur Geltung kommen. Insbesondere hat man die nachstehend unterschiedenen drei Fälle auch beim Beweis gesondert zu behandeln. Als Muster dient dabei immer die Beweisführung, die man in meinem Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. I, S. 239/240, für die Schlichtheit der durch das elliptische Integral erster Gattung vermittelten Abbildung findet. In dem Falle, wo die Dreiecke nur eine endliche Kreisscheibe erfüllen, hat man den dort benutzten Rationalitätsradius im kreisgeometrischen Sinne zu nehmen. Im Falle der Vollebene hat man sich der auf einer Kugeloberfläche üblichen (elliptischen) Maßbestimmung zu bedienen.

Die erwähnte Tatsache der Schlichtheit hat zunächst zur Folge, daß die Umkehrungsfunktion unserer Abbildungsfunktion eindeutig ist. Sie ist weiter eine automorphe Funktion. Die linearen Abbildungen nämlich, welche die verschiedenen Bilddreiecke der z -Ebene ineinander überführen, bilden eine Gruppe. Da in jedem der Bildbereiche die Umkehrungsfunktion dieselben Werte annimmt, so bleibt sie ungeändert, wenn man auf ihr Argument irgendeine Transformation dieser Gruppe ausübt. Solche Funktionen nennt man aber automorphe. Somit führen unsere an die Differentialgleichung anschließenden Überlegungen hinüber zur Theorie der automorphen Dreiecksfunktionen.

Ich will noch ein Wort über ihre Klassifikation anschließen. Diese hängt von dem Wert der Summe

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \quad .$$

ab. Ist diese gleich Eins, so ist die Winkelsumme unseres Dreiecks π . Daraus erschließt man, daß dasselbe geradlinig angenommen werden kann. Man kann nämlich durch eine lineare Substitution stets erreichen, daß eine Ecke ins Unendliche fällt, wodurch zwei seiner Seiten geradlinig werden. Nimmt man nun eine weitere Ecke beliebig an, so muß durch dieselbe unter vorgeschriebenem Winkel gegen die schon vorhandene gerade Seite desselben ein Kreisbogen gelegt werden, der die dritte Seite wieder unter vorgeschriebenem Winkel trifft. Dadurch ist aber, wie man leicht einsieht, der Kreisbogen bestimmt. Daß aber in unserem Falle eine dritte gerade Dreiecksseite die Winkelsumme zu π , d. h. $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ zu 1 macht, ist selbstverständlich. Durch Ausübung der zugehörigen Gruppe erhält man eine lückenlose Bedeckung der vollen Ebene mit unendlich vielen kongruenten Dreiecken.

Es kommen nur die folgenden endlich vielen Kombinationen von Zahlen l, m, n in Betracht:

l	m	n
2	4	4
2	3	6
3	3	3

Ein weiterer Fall ist der, daß

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} > 1$$

ist. Hier kommen nur die folgenden Fälle in Betracht:

l	m	n
2	2	beliebig
2	3	3
2	3	4
2	3	5

Dann ergibt sich, daß die ganze Ebene mit endlich vielen entsprechenden Dreiecken bedeckt wird. Stereographische Projektion und der Anblick der Tabelle lehrt, daß man es mit den aus der Theorie der regulären Körper bekannten Gruppen zu tun hat. Man denke sich in den Seitenflächen eines Tetraeders, Oktaeders oder Ikosaeders die drei Höhen errichtet, so daß jede Seitenfläche in sechs kleinere Dreiecke zerfällt, beschreibe dann dem regulären Körper eine Kugel um und projiziere das auf dem Körper entstandene Netz vom Mittelpunkt aus auf die Kugel. Dort entstehen dann lauter kongruente sphärische Dreiecke, deren Winkel die an zweiter, dritter und vierter Stelle in unserer Tabelle verzeichneten sind. Da aber ein Kreisbogendreieck durch seine Winkel bestimmt ist (bis auf lineare Transformation), so ist in diesen drei Fällen die Behauptung bewiesen. Der erste Fall entspricht den Diederern. Das sind einer Kugel einbeschriebene gerade Doppelpyramiden, die über einem regelmäßigen n -Eck errichtet sind. Man zerlege jedes Seitendreieck durch seine Höhe in zwei Dreiecke und projiziere wieder auf die umbeschriebene Kugel.

Nun bleibt noch der Fall

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1.$$

Alsdann gibt es einen Kreis, der auf den drei Dreiecksseiten senkrecht steht. Zwei der Dreiecksseiten darf man nämlich wieder geradlinig annehmen. Ihr Schnittpunkt werde als Mittelpunkt des gesuchten Orthogonalkreises gewählt. Zieht man nun von ihm aus die beiden Tangenten nach dem Kreise, welchem die dritte Dreiecksseite angehört, so steht der mit der Tangentenlänge als Radius beschriebene Kreis auf dem Seitenkreis senkrecht. So kann man bei jedem nicht geradlinigen Dreiecke schließen, also auch dann, wenn die Winkelsumme π übertrifft. Hier aber, wo sie kleiner als π ist, kann man weiter schließen, daß unser Kreisbogendreieck völlig dem Innern des Orthogonalkreises angehört. Denn wegen der Winkelsumme liegt das Dreieck ganz im Inneren des geradlinigen Dreiecks mit den gleichen Ecken. Die Tangenten berühren somit jedenfalls außerhalb dieses Dreiecks den Kreis. Daher liegt der die Seite enthaltende Kreisbogen und damit das ganze Dreieck im Inneren des Orthogonalkreises. Durch eine Spiegelung an einer Dreiecksseite geht aber nun der Orthogonalkreis in sich über. Daher liegen alle Dreiecke des Netzes ganz im Inneren des Orthogonalkreises, und man kann, wie hier nicht näher ausgeführt werden soll, unter Heranziehung der auf diesen Kreis gegründeten kreisgeometrischen Maßbestimmung, zeigen¹⁾, daß sie dies Innere einfach und lückenlos bedecken.

¹⁾ Man umgebe durch sukzessives Spiegeln das erste Dreieck mit einem Kranz weiterer, so daß jeder Randpunkt innerer Punkt wird. Um den so erhaltenen Bereich lagere man einen neuen Kranz usw. Nun gibt es eine Zahl $r > 0$ derart, daß jeder um einen Randpunkt eines Dreiecks geschlagene Kreis vom kreisgeometrischen Radius r bei Anlagerung eines Kranzes vollständig überdeckt wird.

Die Peripherie des Orthogonalkreises ist natürliche Grenze für die automorphe Funktion, weil sich gegen jeden Punkt der Peripherie die Dreiecke häufen und die Funktion in einem jeden Doppeldreieck jeden Wert annimmt.

Ich schließe diese Darlegungen mit einem knappen Hinweis auf die allgemeinen Probleme, die sich ergeben, wenn die Differentialgleichung mehr als drei singuläre Punkte besitzt. Wir haben schon oben (S. 202) festgestellt, daß dann die Koeffizienten nicht eindeutig durch die singulären Stellen und die Wurzeln ihrer Fundamentalgleichungen festgelegt sind, sondern daß dann noch akzessorische Parameter bleiben. Beispielsweise hat eine Differentialgleichung der Fuchs'schen Klasse mit vier singulären Stellen a, b, c, ∞ die Gestalt

$$w'' + w' \left(\frac{1-\alpha}{z-a} + \frac{1-\beta}{z-b} + \frac{1-\gamma}{z-c} \right) + \frac{w}{(z-a)(z-b)(z-c)} (Az + B) = 0.$$

a, b, c besitzen die fundamentalen Wurzelpaare

$$(0, \alpha), \quad (0, \beta), \quad (0, \gamma),$$

während die fundamentalen Wurzeln δ_1, δ_2 des unendlich fernen Punktes sich aus den Gleichungen $\alpha + \beta + \gamma + \delta_1 + \delta_2 = 2$, $\delta_1 \delta_2 = A$ ergeben. B fungiert als *akzessorischer Parameter*. Wenn alles reell ist, kann man B z. B. durch die Zahl der Nullstellen festlegen, die eine Lösung der Gleichung in einem gegebenen Intervall haben soll. Das wäre eine Festlegung im Rahmen eines Oszillationstheorems. Man kann aber auch nach funktionentheoretischen Gesichtspunkten vorgehen. Wenn wieder die Gleichung z. B. reell ist, so wird wieder die obere Halbebene auf ein Kreisbogenviereck abgebildet. Zu diesem gehört aber im allgemeinen kein Kreis, der auf seinen sämtlichen Seiten senkrecht steht. Man kann aber verlangen, den akzessorischen Parameter so zu bestimmen, daß ein Orthogonalkreis auftritt. Fordert man außerdem noch, daß die Umkehrung des Quotienten zweier Lösungen eine eindeutige automorphe Funktion wird, so ist dadurch der akzessorische Parameter sogar eindeutig festgelegt. Ich begnüge mich damit, den Charakter der Probleme anzudeuten. Ein weiteres Eindringen in dieselben muß dem Spezialstudium des Lesers vorbehalten bleiben. Man vergleiche dazu insbesondere *Klein*: Math. Ann. 64 und *Hilb*: Math. Ann. 66, 68.

In einer letzten Bemerkung dieses Paragraphen werde noch auf ein berühmtes Problem hingewiesen. Unsere Darlegungen haben klar

Hieraus folgt sofort, daß bei sukzessivem Anlagern von Kränzen kein Punkt aus den Inneren des Orthogonalkreises unbedeckt bleiben kann. Daß kein Punkt mehrfach bedeckt wird, lehrt die Anwendung des Monodromiesatzes der Funktionentheorie auf die Umkehrung von $\frac{w_2}{w_1}$, die in der Umgebung jeder Stelle eindeutig ist. Man kann auch ohne Verwendung der Umkehrungsfunktion mit dem Beweisgedanken des Monodromiesatzes arbeiten.

gezeigt, daß jeder Differentialgleichung eine bestimmte Gruppe von linearen Substitutionen zugehört. Das ist die Gruppe derjenigen linearen Substitutionen, welche ein Fundamentalsystem erfährt, wenn man z irgendwelche Wege in seiner Ebene durchlaufen läßt. Diese Gruppe heißt *Monodromiegruppe* der Differentialgleichung.

Unter dem Namen *Riemannsches Problem* ist nun die folgende umgekehrte Frage geläufig: Wenn man Monodromiegruppe und singuläre Stellen $a_1 \dots a_n$ einer Differentialgleichung der *Fuchsschen Klasse* vorgibt, gehört dann dazu auch immer bei passender Wahl der akzessorischen Parameter eine Differentialgleichung, die diese singulären Punkte und diese Monodromiegruppe besitzt? *Hilbert* und *Plemelj* haben mit Hilfe der Theorie der Integralgleichungen dies Problem gelöst, und der letztere hat sogar einen Überblick über die Mannigfaltigkeit der Lösungen geben können. *Birkhoff* hat ein analoges Problem für Differentialgleichungen mit wesentlich singulären Stellen gegebener Natur formuliert und gelöst. Wegen der Literaturangaben werde wieder auf die Enzyklopädie verwiesen.

§ 9. Legendresche Polynome.

Besonderes Interesse verdienen die Polynome, welche der hypergeometrischen Differentialgleichung genügen. Die Methode der unbestimmten Koeffizienten, welche immer auf die hypergeometrische Reihe führt, lehrt dann, daß diese Reihe abbrechen muß. Dies ist aber nur dann möglich, wenn α oder β eine negative ganze Zahl ist. Die so entstehenden Polynome nennt man nach *Jacobi*, der sie zuerst allgemein betrachtet hat, *Jacobische Polynome*. *Jacobi* hat auch eine zu (I) von S. 214 analoge interessante Darstellung derselben als mehrfache Ableitung angegeben. Wir wollen dieselbe für den wichtigsten Spezialfall der älteren *Legendreschen Polynome* hernach herleiten. Diese *Legendreschen Polynome* erhält man, wenn man in der hypergeometrischen Reihe

$$\alpha = k + 1, \quad \beta = -k, \quad \gamma = 1$$

($k > 0$ ganze Zahl) setzt. Genau genommen sind dies allerdings noch nicht die *Legendreschen Polynome*, sondern der den *Legendreschen* entsprechende Spezialfall der *Jacobischen*. Die *Legendreschen* selbst erhält man, wenn man die singulären Punkte der Differentialgleichung nach $-1, +1, \infty$ legt, statt nach $0, 1, \infty$. Macht man somit in der hypergeometrischen Differentialgleichung der S. 202 die Substitution

$$z = \frac{1 - \tau}{2},$$

so geht sie in die Differentialgleichung

$$(1 - \tau^2) \frac{d^2 w}{d\tau^2} - 2\tau \frac{dw}{d\tau} + k(k + 1)w = 0$$

der Legendreschen Polynome über. Das k -te derselben ist durch

$$P_k(\tau) = F\left(k+1, -k, 1, \frac{1-\tau}{2}\right)$$

gegeben. Die Jacobische Darstellung derselben erhält man wie folgt:

Wenn man die hypergeometrische Reihe nach z differenziert, so erkennt man sofort, daß die Ableitung als hypergeometrische Funktion

$$\frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, z)$$

geschrieben werden kann. Durch Wiederholung dieses Differenzierens erkennt man allgemein die Richtigkeit der Gleichung

$$\frac{d^n F(\alpha, \beta, \gamma, z)}{dz^n}$$

$$= \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1) \cdot \frac{\beta(\beta+1) \dots (\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1) \dots (\gamma+n-1)} F(\alpha+n, \beta+n, \gamma+n, z).$$

Die Ableitungen der hypergeometrischen Reihe sind also selbst hypergeometrische Funktionen, und zwar genügt die n -te $w^{(n)}$ derselben der Differentialgleichung

$$z(z-1) \frac{d^2 w^{(n)}}{dz^2} + [(\alpha + \beta + 2n + 1)z - \gamma - n] \frac{d w^{(n)}}{dz} + (\alpha + n)(\beta + n) w^{(n)} = 0.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit

$$z^{\gamma+n-1} \cdot (z-1)^{\alpha+\beta-\gamma+n},$$

so erkennt man leicht, daß man sie in der Form

$$\frac{d}{dz} \left\{ z^{\gamma+n} (z-1)^{\alpha+\beta-\gamma+n+1} \frac{d w^{(n)}}{dz} \right\} = -(\alpha+n)(\beta+n) z^{\gamma+n-1} (z-1)^{\alpha+\beta-\gamma+n} w^{(n)}$$

schreiben kann. Differenziert man dies n -mal, so erhält man

$$\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}} \left\{ z^{\gamma+n} (z-1)^{\alpha+\beta-\gamma+n+1} \frac{d w^{(n)}}{dz} \right\} = -(\alpha+n)(\beta+n) \frac{d^n}{dz^n} \left\{ z^{\gamma+n-1} (z-1)^{\alpha+\beta-\gamma+n} w^{(n)} \right\}.$$

Bildet man diese Gleichung der Reihe nach für die Werte $n=0, 1, \dots, k-1$ und multipliziert sie miteinander, so erhält man

$$\frac{d^k}{dz^k} \left\{ z^{\gamma+k-1} (z-1)^{\alpha+\beta-\gamma+k} w^{(k)} \right\} = (-1)^k \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+k-1) \beta(\beta+1) \dots (\beta+k-1) z^{\gamma-1} \cdot (z-1)^{\alpha+\beta-\gamma} w.$$

Wenn nun insbesondere die hypergeometrische Reihe mit dem Glied k -ten Grades abbricht, so wird die k -te Ableitung eine Konstante und man kann der letzten Gleichung eine Darstellung von w als k -te

Ableitung entnehmen. Für den Fall der *Legendreschen* Polynome werde dies noch fertig ausgerechnet. Die k -te Ableitung von

$$F(k+1), \quad -k, \quad 1, \quad z$$

wird aber ersichtlich

$$\frac{(k+1)(k+2)\dots(2k)(-1)^k \cdot k!}{k!} = (-1)^k \cdot \frac{(2k)!}{k!}.$$

Somit erhält man die Darstellung

$$(-1)^k \frac{(2k)!}{k!} \frac{d^k}{dz^k} (z^k (z-1)^k) = (k+1)(k+2)\dots(2k) k! w.$$

Also wird

$$w = \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k}{dz^k} (z^k (z-1)^k).$$

Geht man von hier durch die Substitution $z = \frac{1-\tau}{2}$ zu den echten *Legendreschen* Polynomen über, so findet man

$$(1) \quad P_k(\tau) = \frac{1}{k!} \frac{1}{2^k} \frac{d^k}{d\tau^k} (\tau^2 - 1)^k.$$

Man kann die Differentialgleichung derselben auch in der Form

$$\frac{d}{d\tau} \left[(1-\tau^2) \frac{dw}{d\tau} \right] + k(k+1)w = 0$$

schreiben. Mit ihrer Hilfe leitet man leicht nach den Regeln der partiellen Integration die Orthogonalitätseigenschaften derselben her. Man findet

$$\int_{-1}^{+1} P_k^2(\tau) d\tau = \frac{2}{2k+1}, \quad \int_{-1}^{+1} P_n(\tau) P_m(\tau) d\tau = 0. \quad (n \neq m)$$

Man kann jede in dem Intervall $-1 \leq \tau \leq +1$ zweimal stetig differenzierbare Funktion $f(\tau)$ in eine nach *Legendreschen* Polynomen fortschreitende Reihe entwickeln:

$$f(\tau) = \sum a_n P_n(\tau), \quad \text{wo } a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(\tau) P_n(\tau) d\tau.$$

Ich bemerke noch, daß die *Legendreschen* Polynome die Lösungen der folgenden Randwertaufgabe sind:

Wie muß man den Parameter λ wählen, damit die Differentialgleichung

$$(D) \quad \frac{d}{d\tau} \left[(1-\tau)^2 \frac{dw}{d\tau} \right] + \lambda w = 0$$

Lösungen besitzt, welche in dem abgeschlossenen Intervall

$$-1 \leq \tau \leq +1$$

endlich sind?

Die bisherigen Darlegungen zeigen, daß jedenfalls für $\lambda = k(k+1)$ mit ganzem positiven k solche Lösungen in den *Legendreschen* Polynomen vorliegen. Sie sind aber zugleich, wie man beweisen kann, die einzigen Lösungen der Randwertaufgabe.

Ich will indessen diese Betrachtungen nicht weiter ausführen. Ich will auch darauf verzichten, hier den Entwicklungssatz zu beweisen. Er würde entweder etwas tiefer, als bisher geschehen, in die Theorie der Integralgleichungen hineinführen oder aber noch weitere Entwicklungen über die *Legendreschen* Polynome erfordern. Zunächst nämlich würde es sich darum handeln, die $P_n(\tau)$ abzuschätzen, um die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(x) P_n(\xi)}{n(n+1)}$$

und der Reihe $\sum a_n P_n(x)$ zu gewinnen, welche $f(x)$ darstellen soll. Von hier an kann man dann den Darstellungssatz entweder ganz ähnlich beweisen, wie das z. B. für *Fouriersche* Reihen in meinem Leitfaden der Integralrechnung dargelegt ist, oder man kann den Darstellungsbeweis der Theorie der Integralgleichungen entnehmen, oder auch die Methoden der Variationsrechnung verwenden. Als Bindeglied ist dann der Nachweis nötig, daß die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(x) P_n(\xi)}{n(n+1)}$$

mit der *Greenschen* Funktion des Randwertproblems identisch ist. Dabei aber ergeben sich einige Schwierigkeiten, weil nämlich die Gleichung

$$\frac{d}{d\tau} \left((1-\tau^2) \frac{dw}{d\tau} \right) = 0$$

selbst die Lösung $w = \text{konst.}$ besitzt, welche der Randbedingung genügt. Es liegt also gerade der Ausnahmefall vor, den wir oben beiseite ließen.

Hier hilft man sich nun so: Man wähle einen Wert von λ aus, der *nicht* Eigenwert der Differentialgleichung (D) ist. Er sei $\lambda = \alpha$. Alsdann schreibe man die Differentialgleichung so

$$\frac{d}{d\tau} \left((1-\tau^2) \frac{dw}{d\tau} \right) + (\alpha + \mu) w = 0. \quad (\mu = \lambda - \alpha)$$

Sie ist alsdann vom *Sturm-Liouvilleschen* Typus, den wir S. 173 besprachen. Die Eigenfunktionen sind nach wie vor $P_n(\tau)$ und diese gehören zu den Eigenwerten $n(n+1) - \alpha$. Es erscheint auch aussichtsvoll, die in den §§ 4 und 5 des vorigen Kapitels entwickelte Methode zu übertragen.

Auch zu diesem Paragraphen vgl. man das schon S. 180 genannte Werk von *Courant* und *Hilbert*, sowie die dort erwähnte Arbeit von *Prüfer*.

Dritter Abschnitt.

Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung und Systeme von gewöhnlichen Differential- gleichungen.

§ 1. Lineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung.

Unter einer *partiellen Differentialgleichung* versteht man eine Relation zwischen einer unbekanntem Funktion von mehreren unabhängigen Veränderlichen, gewissen ihrer Ableitungen nach diesen Veränderlichen und den unabhängigen Veränderlichen selbst. Sie heißt insbesondere von der *ersten Ordnung*, wenn nur partielle Ableitungen erster Ordnung vorkommen. Es müssen natürlich Ableitungen nach mehr als einer solchen Veränderlichen vorkommen, wenn es nötig sein soll, Betrachtungen anzustellen, die aus dem Gebiet der gewöhnlichen Differentialgleichungen herausführen. *Linear* heißt eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, wenn die erwähnte Relation durch Nullsetzen einer linearen Funktion der Ableitungen zum Ausdruck gebracht wird. Die unbekanntem Funktion selbst darf bei dieser Begriffsbestimmung in beliebiger Weise in die Koeffizienten dieser linearen Funktion eingehen.

Die Theorie dieser linearen partiellen Differentialgleichungen steht zur Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen in unmittelbarem Zusammenhang. Betrachten wir nämlich eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

und einen Bereich B der (x, y) Ebene, in dem $f(x, y)$ samt seinen partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig und eindeutig erklärt ist. Wir wissen, daß es dann eine wohlbestimmte Lösung

$$(2) \quad y = \varphi(x_0, y_0; x)$$

gibt, die für $x = x_0$ den Wert $y = y_0$ besitzt. Man kann sie auch in der Form

$$(3) \quad y_0 = \varphi(x, y; x_0)$$

schreiben. $\varphi(x, y; x_0)$ besitzt stetige partielle Ableitungen erster Ordnung

nach einem jeden seiner Argumente, solange (x, y) ein Punkt aus B ist und x_0 einem nicht zu großen Intervall mit dem Mittelpunkt x angehört. Denkt man sich (2) in (3) eingetragen und differenziert dann nach x , so kommt

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

oder

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} f(x, y).$$

D. h. aber die Funktion $\varphi(x, y) = z$ ist eine Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(4) \quad \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} f(x, y) = 0$$

oder wie man unter Verwendung der üblichen Abkürzungen

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q$$

auch schreibt

$$(4) \quad p + qf(x, y) = 0.$$

Ist umgekehrt eine partielle Differentialgleichung (4) vorgelegt, so gewinnt man mit Hilfe der gewöhnlichen Differentialgleichung (1) in der dargelegten Weise ein Integral

$$z = w(x, y)$$

derselben. Kennt man so erst ein Integral von (4), so kennt man auf Grund der folgenden Bemerkung sofort beliebig viele. Es sei nämlich

$$w(\varphi)$$

irgendeine in einem gewissen φ -Intervall mit einer stetigen ersten Ableitung versehene eindeutige stetige Funktion. Diesem Intervall mögen die Werte angehören, die $\varphi(x, y)$ im Bereich B , oder einem Teilbereich derselben annimmt. Dann ist auch

$$z = w\{\varphi(x, y)\}$$

ein in jenem Teilbereich eindeutig und stetig erklärtes mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung versehenes Integral von (4). Ein paar Worte der Beweisführung brauchen wir nur der Behauptung zu widmen, daß

$$z = w\{\varphi(x, y)\}$$

eine Lösung von (4) sei. Man findet nämlich

$$p = w'\{\varphi\} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$q = w'\{\varphi\} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Also

$$p + fq = w'\{\varphi_x + f\varphi_y\} = 0,$$

womit der Beweis schon erbracht ist. Daß so nun *alle Lösungen* von (4) gefunden sind, erhellt aus folgender Betrachtung: Man denke sich eine beliebige stetig differenzierbare über dem Bereich B verlaufende Kurve:

$$(5) \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad (x'^2 + y'^2 + z'^2 \neq 0).$$

Hier sollen $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ samt ihren ersten Ableitungen für ein gewisses Intervall

$$t_0 \leq t \leq t_1$$

eindeutig und stetig sein und

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

soll eine dem Bereich B angehörige Kurve sein. Dann kann man stets die Funktion $w(\varphi)$ so bestimmen, daß

$$(6) \quad z(t) = w\{\varphi[x(t), y(t)]\}$$

ist für $t_0 \leq t \leq t_1$, wofern die Ableitung

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varphi_x x' + \varphi_y y'$$

in diesem Intervall nirgends verschwindet. Denn unter dieser Voraussetzung kann man die Gleichung

$$\varphi[x(t), y(t)] = \varphi$$

eindeutig nach t auflösen. Man erhält eine mit stetiger erster Ableitung versehene Funktion

$$t = t(\varphi)$$

und kann mit ihrer Hilfe statt (6) schreiben

$$z\{t(\varphi)\} = w(\varphi),$$

womit die stetige mit stetiger erster Ableitung versehene Funktion $w(\varphi)$ eindeutig bestimmt ist.

Die über $\frac{d\varphi}{dt} \neq 0$ gemachte Voraussetzung bedeutet, daß die Projektion der gegebenen Kurve (5), d. h. die Kurve $x = x(t)$, $y = y(t)$, keine Lösung von (1) berühren darf. Wir nennen die Lösungen von (1) die *Charakteristiken* oder *charakteristischen Kurven* von (4) und haben dann zur einen Hälfte den folgenden Satz: *Durch jede stetig differenzierbare Kurve (5), die über einen Bereich B verläuft, in dem der Koeffizient $f(x, y)$ von (4) samt seinen Ableitungen erster Ordnung eindeutig und stetig ist, geht genau eine Lösung von (4), wofern die Kurve (5) keine Charakteristik berührt.*

Es bleibt noch zu zeigen, daß es nicht mehr als eine Lösung durch die gegebene Kurve gibt. Betrachten wir die Höhenlinien einer Integralfläche, d. i. die Kurven

$$w\{\varphi(x, y)\} = \text{konst.},$$

an einer Stelle, wo $w'(\varphi) \neq 0$ ist, so sieht man sofort, daß dies gerade die Charakteristiken sind. Somit erkennt man, daß auch durch Kurven (5), deren Projektion eine Charakteristik ist, Integralflächen hindurchgehen, wofern man nur in diesem Fall das $z(t)$ von (5) konstant wählt. Aber durch eine solche Kurve geht nicht nur eine, sondern es gehen beliebig viele Integralflächen hindurch. Wir modifizieren den Begriff Charakteristik ein wenig und nennen fortan *Charakteristiken* diejenigen Raumkurven

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = \text{konst.},$$

deren Projektion $x = x(t), y = y(t)$ eine Lösung von (1) ist. Dann lehrt unsere Betrachtung, daß man die durch (5) gehende Integralfläche dadurch gewinnen kann, daß man durch die einzelnen Punkte von (5) die Charakteristiken legt. Nach dem für (1) geltenden Existenzsatz sind diese ja durch ihren Anfangspunkt eindeutig bestimmt.

Nun sieht man auch sofort, daß es durch eine Kurve, deren x - y -Projektion die x - y -Projektion keiner Charakteristik berührt, nur eine Lösung geben kann. Denn sei x_0, y_0, z_0 irgendein Punkt einer Lösung $z = z(x, y)$, so geht durch denselben genau eine Charakteristik. Diese liegt vollständig auf der Fläche $z = z(x, y)$. Denn trägt man ihre Gleichungen (2) in $z(x, y)$ ein und differenziert nach x , so kommt

$$p + qf.$$

Dies ist aber längs der Charakteristik Null, weil für $z(x, y)$ die partielle Differentialgleichung (4) gilt. Also ist z längs der Projektion der Charakteristik konstant. Also liegt die Charakteristik auf $z = z(x, y)$. Jede Integralfläche durch eine gegebene Kurve enthält also auch die durch die Punkte derselben gehenden Charakteristiken und ist also mit der vorhin bestimmten Integralfläche identisch.

Als ein wesentlicher Unterschied gegenüber den gewöhnlichen Differentialgleichungen fällt uns auf, daß in die Lösungen der partiellen Differentialgleichungen willkürliche Funktionen eingehen, während bei gewöhnlichen Differentialgleichungen nur willkürliche Parameter vorkamen. Dementsprechend können wir jetzt auch durch willkürliche *Anfangskurven* Integralflächen legen, während bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen nur Punkte oder Richtungen vorgeschrieben werden konnten.

Unsere Betrachtungen haben noch nicht die allgemeinste lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit einer unbekanntem Funktion z von zwei unabhängigen Veränderlichen x, y erfaßt. Aber unsere Betrachtungen sind verallgemeinerungsfähig. Nach der S. 216 gegebenen Definition sieht die allgemeinste lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung für eine unbekanntem Funktion z von zwei unabhängigen Veränderlichen x, y so aus:

$$(7) \quad a_1(x, y, z)p + a_2(x, y, z)q + a_3(x, y, z) = 0.$$

Dabei sollen die Koeffizienten in einem gewissen Bereich K der x, y, z samt ihren Ableitungen erster Ordnung eindeutig und stetig sein, und wir betrachten überdies nur die Umgebung eines Punktes x_0, y_0, z_0 , wo nicht alle drei Koeffizienten zugleich verschwinden. Es ist zulässig anzunehmen, daß $a_0(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ sei. Denn ist zunächst einer der beiden Koeffizienten a_0 oder a_1 von Null verschieden, so ist es keine Beschränkung der Allgemeinheit $a_0 \neq 0$ zu nehmen. Ist aber $a_3(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, so kann man z und x vertauschen oder z und y vertauschen, weil $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ an der Stelle x_0, y_0, z_0 dann nicht beide verschwinden können.

Ist z. B. $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, so kann man

$$z = z(x, y)$$

in der Umgebung dieser Stelle sich nach x aufgelöst denken:

$$x = x(y, z).$$

Aus

$$z = z\{x(y, z), y\}$$

folgt dann

$$= 1 \cdot p \cdot \frac{\partial x}{\partial z}$$

und

$$0 = p \frac{\partial x}{\partial y} + q.$$

Also

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial z} &= \frac{1}{p}, & p &= \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial z}} \\ \frac{\partial x}{\partial y} &= -\frac{q}{p}, & q &= -\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial z}. \end{aligned}$$

Aus (7) wird dann

$$a_1(x, y, z) - a_2(x, y, z) \frac{\partial x}{\partial y} + a_3(x, y, z) \frac{\partial x}{\partial z} = 0.$$

Knüpfen wir also weiter an (7) an und nehmen

$$a_1(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

an. Dann kann man in der Umgebung dieser Stelle die Gleichung durch $a_1(x, y, z)$ dividieren und sie so schreiben:

$$(8) \quad p + g(x, y, z)q = h(x, y, z).$$

In dem vorhin behandelten Spezialfall ist also $h \equiv 0$, und $g(x, y, z) = f(x, y)$ hängt von z nicht ab.

$g(x, y, z)$, $h(x, y, z)$ sind nun wieder in einem gewissen Bereich K der x, y, z eindeutig und somit ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig.

Die Gleichung (8) steht nun aber zu dem System

$$(9) \quad \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= g(x, y, z) \\ \frac{dz}{dx} &= h(x, y, z) \end{aligned}$$

in dem gleichen engen Zusammenhang, in dem (4) zu (1) stand.

Nachdem für das System (9) geltenden Existenzsatz gibt es zu jedem Punkt x_0, y_0, z_0 aus K genau ein Paar eindeutiger mit stetigen ersten Ableitungen nach sämtlichen Argumenten versehener Lösungen

$$(11) \quad \begin{aligned} y &= \varphi(x_0, y_0, z_0; x) \\ z &= \psi(x_0, y_0, z_0; x) \end{aligned}$$

von (9). Man kann nach y_0 und z_0 auflösen und schreiben

$$(12) \quad \begin{aligned} y_0 &= \varphi(x, y, z; x_0) \\ z_0 &= \psi(x, y, z; x_0). \end{aligned}$$

Denn die durch x, y, z gehende Lösung geht auch durch x_0, y_0, z_0 hindurch, wenn (11) besteht. Daraus entnimmt man, daß namentlich auch in der Umgebung jeder Stelle von K

$$(13) \quad \frac{d(y, z)}{d(y_0, z_0)} \neq 0 \quad \text{und} \quad \frac{d(y_0, z_0)}{d(y, z)} \neq 0$$

ist. Man trage zum Beweise nur (12) in (11) ein und beachte, daß sich bei solchem Einsetzen die Funktionaldeterminanten miteinander multiplizieren.

Trägt man die Lösungen (11) von (9) in (12) ein, und differenziert nach x , so kommt

$$(14) \quad \begin{aligned} 0 &= \varphi_x + \varphi_y g + \varphi_z h \\ 0 &= \psi_x + \psi_y g + \psi_z h. \end{aligned}$$

Nun ist wegen (13), wie auch x_0, y_0, z_0, x, y, z gemäß (12) gewählt sein mögen, stets entweder

$$\varphi_z \neq 0 \quad \text{oder} \quad \psi_z \neq 0.$$

Nehmen wir z. B. an, es sei $\varphi_z \neq 0$. Dann kann man aus der ersten Gleichung (12) eine mit stetigen ersten Ableitungen versehene Funktion $z(x, y)$ bestimmen. Für sie wird durch Differentiation von (12)

$$\begin{aligned} \varphi_x + \varphi_z p &= 0 \\ \varphi_y + \varphi_z q &= 0. \end{aligned}$$

Daher folgt aus (14)

$$0 = p + qg - h.$$

D. h. die durch Auflösung von

$$y_0 = \varphi(x, y, z; x_0)$$

bestimmte Funktion

$$z = z(x, y)$$

ist eine Lösung von (8). Ebenso gewinnt man aus

$$z_0 = \psi(x, y, z; x_0)$$

eine Lösung von (8), wenn $\psi_z \neq 0$ ist.

Ist weiter

$$w\{\varphi, \psi\}$$

eine Funktion von φ, ψ , die für diejenigen Werte, welche φ und ψ in K oder einem Teilbereich von K annehmen, stetig und eindeutig erklärt ist, und die daselbst stetige erste Ableitungen hat, und ist w_0 ein Wert, den $w(\varphi, \psi)$ an einer gewissen Stelle x_0, y_0, z_0 annimmt, so kann man

$$w\{\varphi, \psi\} = w_0$$

in der Umgebung von x_0, y_0, z_0 nach z auflösen, falls

$$\frac{\partial w}{\partial z} \neq 0$$

ist an dieser Stelle. Man erhält so eine eindeutige mit stetigen ersten Ableitungen versehene Funktion

$$(15) \quad z = z(x, y),$$

die eine Lösung von (8) darstellt.

Trägt man nämlich in $w\{\varphi, \psi\}$ die durch x_0, y_0, z_0 bestimmte Lösung (11) ein, so bekommt längs derselben, wegen (12)

$$w\{\varphi, \psi\}$$

den konstanten Wert w_0 . Differenziert man dann nach x , so kommt

$$(16) \quad w_\varphi \varphi_x + w_\varphi \varphi_y g + w_\varphi \varphi_z h + w_\psi \psi_x + w_\psi \psi_y g + w_\psi \psi_z h = 0.$$

Trägt man anderseits in

$$w\{\varphi, \psi\} = w_0$$

(15) ein und differenziert, so kommt

$$\begin{aligned} (w_\varphi \psi_x + w_\psi \psi_x) + (w_\varphi \varphi_z + w_\psi \varphi_z) p &= 0 \\ (w_\varphi \varphi_y + w_\psi \varphi_y) + (w_\varphi \varphi_z + w_\psi \varphi_z) q &= 0. \end{aligned}$$

Da aber nach Voraussetzung

$$w_\varphi \varphi_z + w_\psi \varphi_z \neq 0$$

ist, so kann man für (16) auch schreiben

$$p + gq - h = 0$$

und erkennt, daß die durch Auflösung von

$$w\{\varphi, \psi\} = w_0$$

nach z gewonnene Funktion (15) der partiellen Differentialgleichung (8) genügt.

Daß man so die allgemeinste Lösung derselben gewonnen hat, erhellt aus den folgenden Betrachtungen:

Wir nennen die Lösungen von (9) wieder die *Charakteristiken* von (8) in genauer Verallgemeinerung der bei (4) eingeführten Benennung.

Wir betrachten wieder eine beliebige stetig differenzierbare Kurve

$$(17) \quad \begin{aligned} x &= x(t), & y &= y(t), & z &= z(t) \\ t_0 &\leq t \leq t_1, & x'^2 &+ y'^2 &+ z'^2 &\neq 0 \end{aligned}$$

aus K , die keine Charakteristik berührt, und zwar soll folgende Voraussetzung gelten. Die Gleichungen

$$(18a) \quad q_x x' + q_y y' + q_z z' = 0$$

$$(18b) \quad \psi_x x' + \psi_y y' + \psi_z z' = 0$$

sollen in keinem Punkte der Kurve (17) gleichzeitig erfüllt sein. Diese Annahme ist wegen (13) z. B. für jede Kurve einer Ebene $x = x_0$ erfüllt. Betrachten wir z. B. einen Bogen, längs dessen (18a) nirgends erfüllt ist. Dann kann man längs dieses Bogens die Gleichung

$$q\{x(t), y(t), z(t)\} = \varphi$$

nach t auflösen und erhält eine eindeutige mit stetiger Ableitung versehene Funktion $t = t(\varphi)$. Längs dieses Bogens kann man daher weiter die eindeutige stetig differenzierbare Funktion $w_1(\varphi)$ so bestimmen, daß

$$(19) \quad w_1\{q[x(t), y(t), z(t)]\} - \psi[x(t), y(t), z(t)] = 0$$

wird. Denn trägt man $t = t(\varphi)$ ein, so wird aus (19)

$$w_1\{\varphi\} = \psi[x(t(\varphi)), y(t(\varphi)), z(t(\varphi))],$$

womit $w_1\{\varphi\}$ schon bestimmt ist. Man kann also durch Auflösung von

$$w_1(\varphi) - \psi = 0$$

nach z eine Lösung von (8) bestimmen, die durch (17) geht, wofern noch längs dieser Kurve:

$$\frac{\partial [w_1 - \psi]}{\partial z} \neq 0$$

ist. Dies wird aber

$$\frac{\partial w_1}{\partial \varphi} q_z - \psi_z \neq 0.$$

Das ist wieder eine neue Voraussetzung, die sicher erfüllt ist, wenn man als Anfangskurve (17) eine Kurve der Art

$$(17') \quad x = x_0, \quad z = z(y), \quad a \leq y \leq b$$

aus K wählt. $z(y)$ ist dabei eine eindeutige mit stetiger erster Ableitung versehene Funktion. Dann wird nämlich aus (18)

$$(18'a) \quad \varphi_y + \varphi_z z' = 0$$

$$(18'b) \quad \psi_y + \psi_z z' = 0$$

und diese beiden Gleichungen sind wegen (13) in keinem Punkte von (17') gleichzeitig erfüllt. Man beachte einen Bogen längs dessen (18'a) nirgends gilt. Längs ihm kann man

$$q(x_0, y, z(y)) = \varphi$$

nach y auflösen. Das gibt eine mit stetiger erster Ableitung versehene Funktion $y(\varphi)$. Längs dieses Bogens kann man daher weiter eine ein-

deutige mit stetiger erster Ableitung versehene Funktion $w_1(\varphi)$ so bestimmen, daß

$$(19') \quad w_1\{\varphi(x_0, y, z(y))\} - \psi\{x_0, y, z(y)\} = 0$$

längs (17') richtig wird. Man trage nur $y(\varphi)$ ein. Dann wird aus (19')

$$(19'') \quad w_1(\varphi) = \psi\{x_0, y(\varphi), z\{y(\varphi)\}\}$$

womit $w_1(\varphi)$ schon bestimmt ist. Nun kann man auch

$$w_1\{\varphi(x, y, z)\} - \psi(y, x, z) = 0$$

längs (17') nach z auflösen. Denn längs (17') ist die Ableitung

$$(20) \quad \frac{dw_1}{d\varphi} \varphi_z - \psi_z \neq 0.$$

Wegen (19'') ist nämlich

$$\frac{dw_1}{d\varphi} = \frac{\psi_y y' + \psi_z z'}{\varphi_y y' + \varphi_z z'} = \frac{\psi_y + \psi_z \frac{dz}{dy}}{\varphi_y + \varphi_z \frac{dz}{dy}}.$$

Also wird aus (20)

$$\left(\psi_y + \psi_z \frac{dz}{dy}\right) \varphi_z - \psi_z \left(\varphi_y + \varphi_z \frac{dz}{dy}\right) \neq 0.$$

In der Tat wird dies ja zu

$$\psi_y \varphi_z - \psi_z \varphi_y \neq 0,$$

was mit (13) übereinstimmt. Damit haben wir zur einen Hälfte den folgenden Satz bewiesen:

Die Koeffizienten $g(x, y, z)$, $h(x, y, z)$ von

$$(8) \quad p + gq = h$$

seien in einem Bereich K der x, y, z eindeutig und stetig und mit stetigen ersten Ableitungen versehen. Es sei

$$(17') \quad x = x_0, \quad z = z(y), \quad a \leq y \leq b$$

eine Kurve aus K , die keine Charakteristik berührt. $z(y)$ sei eine eindeutige mit stetiger erster Ableitung versehene Funktion. Dann gibt es genau eine Lösung von (8), die durch (17') hindurchgeht, d. h. genau eine mit stetigen ersten Ableitungen versehene eindeutige Funktion $z = z(x, y)$, die (8) genügt, und für die

$$z(y) = z(x_0, y), \quad a \leq y \leq b$$

gilt.

Bewiesen ist bisher nur, daß man durch gewisse Teilbogen mindestens eine solche Lösung legen kann. Es war nämlich ein Teilbogen betrachtet, längs dem (18'a) nicht gilt. Betrachtet man statt dessen einen Teilbogen, längs dem (18'b) nicht gilt, so sieht man ebenso ein, daß man eine Lösung durch ihn in der Form

$$\varphi - w_2\{\psi\} = 0$$

gewinnen kann. Solche Bogen bedecken in ihrer Gesamtheit die ganze Kurve (17'). Und wo Bogen übereinandergreifen, stimmen auch die auf beide Weisen gewonnenen Integralflächen überein. Man kann sie nämlich wieder als geometrischen Ort der Charakteristiken auffassen, die durch die einzelnen Punkte von (17') gehen. Längs einer jeden Charakteristik hat nämlich eine beliebige Funktion

$$w\{\varphi, \psi\}$$

einen unveränderlichen Wert. Denkt man sich nämlich w als eine differenzierbare Funktion, und trägt die Gleichungen (12) einer Charakteristik ein und differenziert dann nach x , so findet man

$$\frac{\partial w}{\partial \varphi} (\varphi_x + \varphi_y g + \varphi_z h) + \frac{\partial w}{\partial \psi} (\psi_x + \psi_y g + \psi_z h) = 0,$$

was wegen (14) verschwindet. Ist also $w(\varphi, \psi) = 0$ längs der Anfangskurve oder eines Bogens desselben, so bleibt es auch Null längs der durch die Punkte dieses Bogens bestimmten Charakteristiken. Damit ist zugleich erkannt, daß es durch (17') nur eine Integralfläche gibt, und unser Satz ist nun restlos bewiesen.

Beispiel. Wenn die Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{vmatrix}$$

identisch verschwindet, so ist f eine Funktion von φ . Denn die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

besitzt das Integral

$$z = w\{\varphi\},$$

wo $w\{\varphi\}$ eine willkürliche stetig differenzierbare Funktion von φ bedeutet. Weiter ist $z = f(x, y)$ ein Integral. Dies läßt sich aber auf die Form $z = w\{\varphi\}$ bringen. Man bestimme nämlich $w\{\varphi\}$ aus $w\{\varphi(x_0, y_0)\} = f(x_0, y_0)$, indem man dabei x_0 als fest, y_0 als variabel ansieht. Durch die angegebene Gleichung ist jedenfalls $w\{\varphi\}$ als eindeutige stetig differenzierbare Funktion in jedem Intervall der y_0 bestimmt, in dem $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ nicht verschwindet. Man kann bei dieser Überlegung auch x_0 und y_0 in ihren Rollen vertauschen und erkennt so, daß f eine Funktion von φ ist, in der Umgebung einer jeden Stelle, wo die partiellen Ableitungen von φ nicht beide verschwinden.

Daher ist

$$z = w\{\varphi\}$$

das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung. Auch der Satz über die Funktionaldeterminante ist damit bewiesen.

§ 2. Geometrische Deutung. Verallgemeinerung.

Vielen Lesern, die den Darlegungen des ersten Paragraphen aufmerksam gefolgt sind, werden gewisse Mängel an Eleganz der Darstellung aufgefallen sein. Der innere Grund und die Mittel zur Abhilfe werden

am raschesten klar, wenn wir uns der geometrischen Deutung des Vorgetragenen zuwenden. Zunächst geben $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ und $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ die Stellung der Tangentialebene an die Fläche $z = z(x, y)$ an. Sie sind Koordinaten einer Ebene mit der Gleichung

$$z - z_0 = p_0(x - x_0) + q_0(y - y_0).$$

Zwischen diesen Ebenenkoordinaten ist durch die lineare partielle Differentialgleichung eine lineare Gleichung vorgeschrieben. Das besagt geometrisch, daß die Tangentialebenen, welche für Integralfächen im Punkte x_0, y_0, z_0 möglich sind, alle in einem Büschel von Ebenen enthalten sind.

Denn wenn

$$p_0 = h - gq_0$$

ist, so sind in

$$z - z_0 = h(x - x_0) + q_0(y - y_0 - g(x - x_0))$$

bei beliebigem q_0 alle in Betracht kommenden Ebenen anhalten. Sie gehen alle durch die Gerade

$$z - z_0 = h(x - x_0)$$

$$y - y_0 = g(x - x_0)$$

und es kommen auch alle Ebenen durch diese Gerade mit Ausnahme der Ebene

$$y - y_0 = g(x - x_0)$$

vor. Daß diese nicht vorkommt, liegt daran, daß sie nicht Tangentialebene an einer Fläche $z = z(x, y)$ sein kann. Man erkennt gleichzeitig, daß durch die gewöhnlichen Differentialgleichungen (9) gerade jedem Punkte die durch ihn gehende Trägergerade seines Büschels von Tangentialebenen zugeordnet wird. Charakteristiken sind also Kurven, die in jedem Punkte die zugehörige Trägergerade berühren. Unter den Trägergeraden kommen parallele zur z -Achse nicht vor. Nennen wir einen Punkt und eine durchgehende Ebene ein Flächenelement, so wird also durch (8) jedem Punkt ein „Büschel“ von Flächenelementen zugeordnet, und die Aufgabe der Integration ist es, Flächen zu finden, die in jedem Punkte ein zugeordnetes Flächenelement berühren. Diese geometrische Fassung läßt es sofort als einen Mangel erscheinen, daß wir nur Fragmente von Büscheln den einzelnen Punkten zuordneten, sowie daß wir nur Flächen suchen, die von dem zugrundegelegten Koordinatensystem insofern abhängen, als sie sich in demselben vermittelt eindeutiger Funktionen $z(x, y)$ sollen darstellen lassen. Die Geometrie hat längst gelernt, durch Abstellung solcher Mängel zu einer eleganten Darstellung ihrer Beweisführungen zu gelangen. Sehen wir zu, was wir hier aus einer Kenntnis geometrischer Dinge an Vorteil ziehen können. Jedem Punkt erscheint dann durch eine lineare homogene Gleichung

$$(1) \quad a_1(x_1, x_2, x_3) \xi_1 + a_2(x_1, x_2, x_3) \xi_2 + a_3(x_1, x_2, x_3) \xi_3 = 0$$

ein Büschel von Einheitsvektoren $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ zugeordnet. Die $a_1(x_1, x_2, x_3)$ seien in einem gewissen Bereich k der x_1, x_2, x_3 stetig und mögen in keinem Punkte gleichzeitig verschwinden. Es sollen Flächen

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u, v)$$

gefunden werden, wo $\mathfrak{r} = (x_1, x_2, x_3)$ ein Vektor ist, dessen Endpunkt die Fläche beschreibt, wenn sein Anfangspunkt im Ursprung der Koordinaten liegt, derart, daß der Flächennormalvektor

$$\xi = \frac{\mathfrak{r}_u \times \mathfrak{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad \begin{aligned} E &= \mathfrak{r}_u^2 \\ F &= \mathfrak{r}_u \cdot \mathfrak{r}_v \\ G &= \mathfrak{r}_v^2 \end{aligned}$$

in jedem Punkte mit einem der durch (1) vorgeschriebenen zusammenfällt. Anders ausgedrückt: (1) soll erfüllt sein, wenn man

$$\xi(u, v) \quad \text{und} \quad \mathfrak{r}(u, v)$$

einträgt.

Charakteristiken nennen wir dann wieder die Kurven, welche in jedem Punkte auf allen ihm zugeordneten Vektoren ξ senkrecht stehen. Also sind

$$(2) \quad \frac{dx_1}{dt} = a_1(x_1, x_2, x_3), \quad \frac{dx_2}{dt} = a_2(x_1, x_2, x_3), \quad \frac{dx_3}{dt} = a_3(x_1, x_2, x_3)$$

die Differentialgleichungen der Charakteristiken

$$(3) \quad \begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, t - t_0) \\ x_2 &= \varphi_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, t - t_0) \\ x_3 &= \varphi_3(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, t - t_0) \end{aligned}$$

oder anders geschrieben

$$(4) \quad \begin{aligned} x_1^{(0)} &= \varphi_1(x_1, x_2, x_3, t_0 - t) \\ x_2^{(0)} &= \varphi_2(x_1, x_2, x_3, t_0 - t) \\ x_3^{(0)} &= \varphi_3(x_1, x_2, x_3, t_0 - t) \end{aligned}$$

sei die durch den Punkt $x^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}$, bestimmte Charakteristik. Jede mit stetigen ersten Ableitungen versehene Funktion

$$w(x_1, x_2, x_3),$$

die von t unabhängig wird, wenn man (3) einträgt, definiert an jeder Stelle, wo nicht alle drei Ableitungen $\frac{\partial w}{\partial x_i} = 0$ sind, eine Integralfläche, wenn man $w = 0$ setzt. Denn nach Voraussetzung soll

$$(5) \quad \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial w}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial w}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt} = 0$$

sein. Wegen (2) aber wird dies zu

$$(6) \quad a_1 \frac{\partial w}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial w}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial w}{\partial x_3} = 0,$$

Die $\frac{\partial w}{\partial x_i}$ definieren aber bekanntlich die Flächennormale ξ , und es ist bei dieser Darstellung ins Belieben gestellt, welches Koordinatenpaar man als Parameterpaar u, v nehmen will. Das wird man sich je nach der Ableitung $\frac{\partial w}{\partial x_k}$ aussuchen, die sich als von Null verschieden erweist.

Sei nun durch

$$x_i = x_i(\tau) \quad \tau_0 \leq \tau \leq \tau_1$$

eine stetig differenzierbare Kurve gegeben, die in keinem Punkte eine Charakteristik berührt, d. h. so, daß der Rang der Matrix

$$(7) \quad \begin{pmatrix} x_1'(\tau), & x_2'(\tau), & x_3'(\tau) \\ a_1(x_1(\tau) \dots), & a_2(x_1(\tau) \dots), & a_3(x_1(\tau) \dots) \end{pmatrix}$$

stets 2 ist, dann lege man durch die einzelnen Punkte dieser Kurve die Charakteristiken. Ihr geometrischer Ort ist dann eine Integralfläche. Denn der geometrische Ort ist

$$x_i = \varphi_i(x_1(\tau), x_2(\tau), x_3(\tau); t - t_0). \quad (i = 1, 2, 3)$$

Hier ist
$$\varphi_t = \frac{\partial x_i}{\partial t} = a_i(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \quad (i = 1, 2, 3)$$

und
$$\varphi_\tau = \frac{\partial x_i}{\partial \tau} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \cdot \frac{d x_k}{d \tau}.$$

Also ist die Flächennormale

$$\varphi_t \times \varphi_\tau = \begin{pmatrix} \left| \begin{matrix} x_{2t} x_{3t} \\ x_{2\tau} x_{3\tau} \end{matrix} \right|, & \left| \begin{matrix} x_{3t} x_{1t} \\ x_{3\tau} x_{1\tau} \end{matrix} \right|, & \left| \begin{matrix} x_{1t} x_{2t} \\ x_{1\tau} x_{2\tau} \end{matrix} \right| \end{pmatrix}$$

und diese zweireihigen Determinanten sind für genügend kleine $|t - t_0|$ nicht alle Null. Denn für $t = t_0$ sind sie nach Voraussetzung (7) nicht alle Null. Damit haben wir durch jede Raumkurve, die keine Charakteristik berührt, eine Integralfläche von (1) oder was dasselbe ist, von (6) gelegt. Ähnlich wie in § 1 erkennt man wieder, daß es nur diese eine Integralfläche durch die gegebene Raumkurve geben kann. Denn jede Charakteristik, die einen Punkt mit einer Integralfläche gemein hat, gehört ihr vollständig an. Sei nämlich durch

$$w(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

eine Integralfläche dargestellt, und sei $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}$ einer ihrer Punkte, in dem mindestens eine der Ableitungen $\frac{\partial w}{\partial x_k} \neq 0$ ist. Man trage (3) in $w(x_1, x_2, x_3)$ ein und differenziere nach t : Das liefert

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial w}{\partial x_i} a_i$$

und das ist nach (6) Null. Wenn also der Punkt x der Charakteristik $w = 0$ angehört, so ist dies für die ganze Charakteristik so.

Die Verallgemeinerung dieser Betrachtungen auf mehr als zwei unabhängige Veränderliche liegt nun so auf der Hand, daß wir das nicht weiter verfolgen müssen.

Es bedarf auch kaum einer besonderen Hervorhebung, daß unsere Betrachtung im komplexen Gebiet ohne weiteres gelten, und daß also bei analytischen Koeffizienten und analytischer Anfangskurve auch die Lösung analytisch ausfällt.

§ 3. Vorläufige Betrachtung der allgemeinen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung.

Unter einer partiellen Differentialgleichung verstanden wir eine Gleichung zwischen den unabhängigen Variablen, einer unbekanntem Funktion derselben und ihren partiellen Ableitungen nach diesen unabhängigen Variablen. Dabei wurde angenommen, daß mehr als eine unabhängige Variable vorkommt. Anderenfalls läge nämlich eine gewöhnliche Differentialgleichung vor. Insbesondere hieß die Gleichung von der ersten Ordnung, wenn sie nur Ableitungen erster Ordnung erhält. Eine Gleichung erster Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen x, y und einer abhängigen Veränderlichen z sieht also aus:

$$(1) \quad f(x, y, z, p, q) = 0.$$

Dabei sind wieder in üblicher Abkürzung mit p und q die Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ der gesuchten Funktion $z(x, y)$ bezeichnet worden. Die Funktion $f(x, y, z, p, q)$ soll in einem gewissen Bereich der x, y, z, p, q eindeutig und stetig sein und daselbst stetige erste Ableitungen besitzen. Es soll außerdem vorausgesetzt werden, daß für ein der Gleichung (1) genügendes Wertesystem dieses Bereiches niemals $\frac{\partial f}{\partial p}$ und $\frac{\partial f}{\partial q}$ beide zugleich verschwinden. Es ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir in der Umgebung der zu betrachtenden Stelle $\frac{\partial f}{\partial p}$ als von Null verschieden voraussetzen. Dann kann man nach dem Satz über implizite Funktionen in der Umgebung eines jeden der Gleichung (1) genügenden Wertesystemes die Gleichung (1) nach p auflösen und so q als eindeutige, stetige, mit stetigen ersten Ableitungen versehene Funktion

$$(2) \quad p = \varphi(x, y, z, q)$$

darstellen. Dabei ist dann $\varphi(x, y, z, q)$ in einem gewissen Bereich seiner Variablen x, y, z, q eindeutig und stetig erklärt und mit stetigen ersten Ableitungen versehen.

Was ist die *geometrische Bedeutung* einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung? Eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung ordnet jedem Punkte ein oder mehrere Linienelemente

zu. Die Differentialgleichung integrieren heißt da, Kurven zu finden, die aus lauter Linienelementen der Differentialgleichung aufgebaut sind. Hier liegen die Dinge ähnlich. Den Inbegriff von fünf Zahlen x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 nennen wir ein Flächenelement. Der Punkt x_0, y_0, z_0 ist sein Trägerpunkt. p_0 und q_0 geben die Stellung der hindurchgehenden Ebene $z - z_0 = p_0(x - x_0) + q_0(y - y_0)$ an. Rechtwinklige cartesische Koordinaten x, y, z mögen dabei der Betrachtung zugrunde liegen. Einem jeden Punkte eines zugrunde gelegten Bereiches B der x, y, z ordnet also die partielle Differentialgleichung Flächenelemente zu. Vorauszusetzen ist dabei, daß die Differentialgleichung einem gegebenen Punkte x_0, y_0, z_0 des zugrunde gelegten Bereiches überhaupt ein Flächenelement zuordne, daß es also zwei weitere Zahlen p_0 und q_0 gebe, so daß (1) erfüllt ist. Nach unseren Voraussetzungen lehrt dann der Satz über implizite Funktionen, daß, wie es insbesondere Gleichung (2) zum Ausdruck bringt, allen hinreichend wenig von q_0 verschiedenen Werten von q genau ein der Differentialgleichung (1) genügender, wenig von p_0 verschiedener Wert p zugeordnet ist. Mit anderen Worten: die dem Punkte x_0, y_0, z_0 zugeordneten sich stetig an p_0, q_0 anschließenden Flächenelemente bilden eine einparametrische Schar. Sie umhüllen, wie wir uns ausdrücken wollen, einen Kegel, dessen Spitze im Punkte x_0, y_0, z_0 liegt. Freilich kann dieser Kegel auch ausarten. Wenn z. B. die gegebene Differentialgleichung eine lineare Beziehung zwischen p und q ist, wenn sie also die Form $p + g(x, y)q = h(x, y)$ besitzt, dann gehen alle Flächenelemente durch eine Gerade. Solche Differentialgleichungen nannten wir daher *linear*. Der Kegel artet also hier in ein *Büschel* aus¹⁾.

Was bedeutet es nun, die Differentialgleichung zu integrieren? Man soll eindeutige Funktionen $z = z(x, y)$ finden, die der Differentialgleichung genügen. Geometrisch bedeutet das die Auffindung von Flächen, welche aus Flächenelementen der Differentialgleichung aufgebaut sind, oder anders ausgedrückt, welche in jedem ihrer Punkte den zugehörigen Kegel berühren.

Aus diesen Bemerkungen kann man schon einige Anhaltspunkte für die Integration gewinnen. Nehmen wir irgendeine Integralfäche als gegeben an. Ich betrachte einen ihrer Punkte. Dort besitzt sie ein bestimmtes Flächenelement, welches den Kegel dieses Punktes in einer Mantellinie berührt oder durch die Achse des Büschels geht. Jedem Punkt der Fläche ist so eine Fortschrittsrichtung zugeordnet. Man kann auf der Fläche durch Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen diejenigen Kurven bestimmen, welche diese Richtungen stets einhalten. Bringt man dann noch in jedem ihrer Punkte das Flächenelement der Integralfäche an, so erhält man einen Integral-

¹⁾ Näheres siehe S. 226.

streifen. Unter Streifen also sollen die längs einer beliebigen Kurve aneinandergereihten Flächenelemente einer Fläche verstanden sein. Daher dürfen sie längs der Kurve nicht ganz beliebig gewählt werden, sondern so, daß man den Streifen auf eine Fläche legen kann. Ist also

$$(2) \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad p = p(t), \quad q = q(t)$$

die Parameterdarstellung eines Streifens und $z = z(x, y)$ eine Fläche, der er angehört, so muß die Beziehung $z(t) = z\{x(t), y(t)\}$ gelten. Daraus folgt durch Differentiation, daß für einen Streifen die Relation $z' = px' + qy'$ erfüllt sein muß. Das führt uns zu der

Definition: *Unter einem Streifen verstehen wir eine einparametrische Schar von Flächenelementen (2). Die Funktionen (2) sollen eindeutig und stetig sein und stetige Ableitungen besitzen für ein bestimmtes Intervall $a \leq t \leq b$, und es soll in diesem Intervall für sie die Beziehung $z' = px' + qy'$ bestehen. Die Ableitungen $x'(t)$, $y'(t)$, sollen in keinem Punkte von $a \leq t \leq b$ zugleich verschwinden.*

Ein solcher Streifen soll insbesondere ein *Integralstreifen* heißen, wenn seine Flächenelemente der Differentialgleichung genügen, wenn also identisch in t die Beziehung $f\{x(t), y(t), z(t), p(t), q(t)\} = 0$ besteht. Wir werden erkennen, daß man gewisse Integralstreifen, die wir *charakteristische* nennen werden, durch Integration eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen *ohne* vorherige Kenntnis einer Integralfläche gewinnen kann, und daß man jede Integralfläche dann aus solchen Streifen aufbauen kann. Damit wird es dann ein Hauptergebnis unserer Untersuchung sein, daß man die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung auf die eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückführen kann oder anders ausgedrückt, daß die Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung und die eines gewissen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen äquivalente Probleme sind.

§ 4. Die allgemeine Gleichung erster Ordnung.

Wir betrachten irgendeine Integralfläche. Auf ihr wählen wir einen beliebigen Punkt (x_0, y_0, z_0) . Das Element $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ dieser Fläche in diesem Punkt gehört einem gewissen Kegel von Flächenelementen an, welche alle der gegebenen partiellen Differentialgleichung genügen. Diese sei

$$(1) \quad f(x, y, z, p, q) = 0.$$

f möge dabei in einem Bereich B der x, y, z, p, q samt seinen partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig sein und insbesondere sei

$$\frac{\partial f}{\partial p}(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) \neq 0.$$

Das Flächenelement wird eine bestimmte Mantellinie des Kegels berühren. Durch dieselbe wird auf der Fläche eine bestimmte Fortschreitungsrichtung festgelegt. Wir werden diese Richtung bestimmen und erhalten so auf der Fläche Differentialgleichungen einer Kurvenschar. Dann aber wird sich ein Unterschied gegen den linearen Fall ergeben. Dort konnten die so festgelegten Charakteristiken auch ohne Kenntnis der Integralfäche aus diesen Differentialgleichungen bestimmt werden. Denn jedem Raumpunkt war da ganz unabhängig von der gewählten Integralfäche nur eine bestimmte Richtung zugeordnet, weil der Kegel in ein Bündel ausartete, dessen Trägergrade die angegebene Richtung festlegte. Hier aber ist jedem Punkt ein ganzer Kegel von möglichen Richtungen zugeteilt. Man kann aber annehmen, daß man eine Auswahl unter diesen Fortschreitungsrichtungen wird treffen können, wenn man statt der charakteristischen Kurven die charakteristischen Streifen betrachtet. Denn dann hat man in der Streifenbedingung $z' = p x' + q y'$ das Fortschreitungs-gesetz der Streifenebenen zur Verfügung und mit deren Hilfe wird man dann die richtigen Mantellinien ausfindig machen können. Wir schreiten zur Durchführung.

Die dem Punkte x_0, y_0, z_0 zugeordneten Ebenen haben die Gleichungen

$$(2) \quad p(x - x_0) + q(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

$$(3) \quad f(x_0, y_0, z_0, p, q) = 0.$$

Nach Definition verstehen wir unter den Mantellinien des Kegels diejenigen Geraden, für die auch die durch Differentiation von (2) nach dem Parameter q sich ergebende Gleichung besteht. Das ist wegen (3)

$$(4) \quad \frac{\partial f}{\partial q}(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial p}(y - y_0) = 0.$$

Aus (2) und (4) folgt

$$x - x_0 : y - y_0 : z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial p} : \frac{\partial f}{\partial q} : \left(p \frac{\partial f}{\partial p} + q \frac{\partial f}{\partial q} \right)$$

als Gleichung der auf dem Element p, q gelegenen Mantellinie. Somit muß für eine Kurve $x(t), y(t), z(t)$, welche im Punkte x, y, z diese Mantellinie berühren soll — das wird ja von den Charakteristiken verlangt — die Proportion

$$\frac{dx}{dt} : \frac{dy}{dt} : \frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p} : \frac{\partial f}{\partial q} : \left(p \frac{\partial f}{\partial p} + q \frac{\partial f}{\partial q} \right)$$

bestehen. Nun wählen wir den Kurvenparameter t so, daß

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p}$$

ist. Das ist möglich, denn nach Voraussetzung soll im Punkt x_0, y_0, z_0

für das Element p_0, q_0 , in dessen Umgebung sich die Betrachtung bewegt $\frac{\partial f}{\partial p} \neq 0$ sein. Dann haben wir diese 3 Gleichungen¹⁾:

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_p, \\ \frac{dy}{dt} = f_q, \\ \frac{dz}{dt} = pf_p + qf_q. \end{cases}$$

Gehen wir nun wieder zurück zu der Integralfäche, auf der wir einen charakteristischen Integralstreifen bestimmen wollten. Sie genügt der Gleichung (1). Daher sind auch die Gleichungen richtig, welche sich hieraus durch Differentiation nach x und nach y ergeben:

$$\begin{aligned} f_z + f_z \cdot p + f_p \cdot p_x + f_q \cdot q_x &= 0, \\ f_y + f_z \cdot q + f_p \cdot p_y + f_q \cdot q_y &= 0. \end{aligned}$$

$x = x(t)$, \dots , $q = q(t)$ seien nun die Gleichungen des gesuchten Streifens. Dann müssen für diesen auch die beiden eben aufgeschriebenen Gleichungen erfüllt sein. Das führt nach Berücksichtigung von $q_x = p_y$ und von (5) zu

$$\begin{aligned} f_x + f_z \cdot p + \frac{dp}{dt} &= 0, \\ f_y + f_z \cdot q + \frac{dq}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

Also haben wir nun im ganzen für die 5 Streifenkoordinaten x, y, z, p, q die 5 Differentialgleichungen

$$(6) \quad \begin{cases} x' = f_p, \\ y' = f_q, \\ z' = pf_p + qf_q, \\ p' = -f_x - pf_z, \\ q' = -f_y - qf_z. \end{cases}$$

Unter geringer Abänderung des bisherigen Sprachgebrauches *definiere* ich nun: *Unter einem charakteristischen Streifen ist ein Streifen zu verstehen, welcher diesen fünf Differentialgleichungen (3) genügt.*

Inwieweit ein solcher Streifen tatsächlich die Eigenschaften besitzt, von denen wir vorhin ausgingen, wird nun weiter zu überlegen sein. Zuvor aber müssen wir die Voraussetzungen angeben, auf die wir uns weiter stützen wollen. In einem gewissen Bereiche der

$$x, y, z, p, q$$

sei $f(x, y, z, p, q)$ samt seinen Ableitungen der *beiden* ersten Ordnungen

¹⁾ Der Kürze halber bezeichnen wir dabei die Ableitungen von f durch angefügte Fußmarken, also z. B. $f_p = \frac{\partial f}{\partial p}$ usw.

eindeutig und stetig. Es sei außerdem, wie wir schon S. 231 festlegten, für die zu betrachtenden Flächenelemente¹⁾ $\frac{\partial f}{\partial p} = 0$. Die Voraussetzung betreffend die Ableitungen der *beiden* ersten Ordnungen hat zur Folge, daß wieder alle die Stetigkeitssätze über die Lösungen des Systems (6) von gewöhnlichen Differentialgleichungen verfügbar werden, von denen auch bei den linearen Differentialgleichungen Gebrauch gemacht wurde. Die Stetigkeit der ersten Ableitungen würde dazu nicht reichen.

Als erste Frage legen wir uns die vor, ob jeder charakteristische Streifen ein Integralstreifen sei. Tragen wir, um das zu sehen, in die linke Seite von (1) die Koordinaten eines Streifens ein, so findet man durch Differentiation nach dem Streifenparameter t

$$f_x \cdot x' + f_y \cdot y' + f_z \cdot z' + f_p \cdot p' + f_q \cdot q'.$$

Nach den Differentialgleichungen (6) ist das aber Null. Somit hat f längs eines jeden charakteristischen Streifens einen konstanten Wert. Man drückt das auch dadurch aus, daß man sagt: f sei ein Integral der Differentialgleichungen (6). Wenn also ein charakteristischer Streifen durch ein Integralelement hindurchgelegt wird, so ist er ein Integralstreifen. Denn in diesem Anfangselement ist $f = 0$ und daher gilt längs des ganzen Streifens $f = 0$.

Wir suchen nun ähnlich wie bei den linearen Differentialgleichungen durch eine Anfangskurve eine Integralfläche zu legen. Wir wählen zu dem Zwecke eine Anfangskurve $x = x(\tau)$, $y = y(\tau)$, $z = z(\tau)$. Dabei sollen diese drei Funktionen samt ihren ersten Ableitungen in einem Intervalle $\alpha \leq \tau \leq \beta$ eindeutig und stetig sein. Die Ableitungen $x'(\tau)$, $y'(\tau)$ sollen in keinem Punkte aus $\alpha \leq \tau \leq \beta$ zugleich verschwinden. Unsere erste Aufgabe muß es nun sein, durch diese Anfangskurve einen Anfangsstreifen zu legen, damit wir zur Integration des Systems (6) die richtigen Anfangsbedingungen bekommen. Dieser Anfangsstreifen muß natürlich ein Integralstreifen sein. Zur Bestimmung der beiden weiteren Funktionen $p(\tau)$ und $q(\tau)$ des Anfangsstreifens bekommen wir somit die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} f(x(\tau), y(\tau), z(\tau), p(\tau), q(\tau)) &= 0, \\ z'(\tau) - p(\tau)x'(\tau) - q(\tau)y'(\tau) &= 0. \end{aligned}$$

Um nach dem Satze über implizite Funktionen ihrer Auflösbarkeit sicher zu sein, muß man erst einmal in einem Punkt τ_0 eine Auflösung p_0, q_0 besitzen²⁾, und man muß weiter voraussetzen, daß die Funktionaldeterminante

1) Flächenelemente, für die neben $f = 0$ auch $\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\partial f}{\partial q} = 0$ ist, heißen *singulär*. Vgl. die entsprechende Definition bei gewöhnlichen Differentialgleichungen.

2) Das ist z. B. der Fall, wenn als Anfangskurve: $z = w(y)$ in der Ebene $x = x_0$, als Differentialgleichung eine von der Form $p = g(x, y, z, q)$ gewählt wird.

$$(7) \quad \frac{\partial f}{\partial p} y'(\tau) - \frac{\partial f}{\partial q} x'(\tau) \neq 0$$

längs des Kurvenbogens ist. Diese letztere Voraussetzung besagt, daß die *Anfangskurve nicht nur keine charakteristische Kurve sein soll, sondern daß sie keine Mantellinie eines der Kegel von Integralelementen berühren soll*. Die andere Bedingung besagt aber, daß ihre Richtung in einem Punkt zum zugehörigen Kegel so liegen soll, daß man durch sie eine Tangentialebene an den Kegel legen kann, eine Bedingung, die ganz und gar nicht immer erfüllt ist. Sind aber beide Bedingungen erfüllt, so erhält man anschließend an die gewählte zu τ_0 gehörige Lösung zwei in $\alpha \leq \tau \leq \beta$ samt den ersten Ableitungen stetig differenzierbare Funktionen $p(\tau)$, $q(\tau)$, die mit den drei gegebenen $x(\tau)$, $y(\tau)$, $z(\tau)$ einen Anfangsstreifen von Integralelementen festlegen.

Wir haben damit durch die Anfangskurve einen stetig differenzierbaren Integralstreifen gelegt. Durch jedes seiner Flächenelemente geht nun ein einziger charakteristischer Streifen hindurch. Ich werde zeigen, daß diese Streifen eine Integralfäche bilden. Seien etwa

$$(8) \quad x = x(t, \tau), \quad y = y(t, \tau), \quad z = z(t, \tau), \quad p = p(t, \tau), \quad q = q(t, \tau)$$

die charakteristischen Streifen. Dann geben die drei ersten Funktionen eine Parameterdarstellung der durch die Charakteristiken gebildeten Fläche. Die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial \tau} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial \tau} \end{vmatrix}$$

ist nämlich in einer gewissen Umgebung des Anfangsstreifens $t = 0$ von Null verschieden. Denn auf $t = 0$ ist sie wegen (7) und (6) von Null verschieden, und daher ist dies aus Stetigkeitsgründen auch für genügend kleine Werte von t der Fall. Man kann daher aus den beiden ersten Gleichungen t und τ eindeutig durch x und y ausdrücken und in die dritte eintragen und bekommt so die Darstellung der Fläche durch eine eindeutige Funktion $z = z(x, y)$. Es ist nun aber zu beweisen, daß die beiden anderen Funktionen die Tangentialebenen der Fläche festlegen. Sowie wir das eingesehen haben, ist die Überzeugung, daß eine Integralfäche vorliegt, gefestigt.

Nach *Cauchy*, von dem die Theorie der Charakteristiken herrührt, erbringt man diesen Nachweis wie folgt. Man hat zu zeigen, daß für die fünf Funktionen diese beiden Gleichungen

$$(9) \quad \frac{\partial z}{\partial t} = p \frac{\partial x}{\partial t} + q \frac{\partial y}{\partial t},$$

$$(10) \quad \frac{\partial z}{\partial \tau} = p \frac{\partial x}{\partial \tau} + q \frac{\partial y}{\partial \tau}$$

richtig sind. Denn dann muß eben p die x -Ableitung, q die y -Ab-

leitung von z sein. Die erste der beiden Gleichungen ist wegen des Systems der gewöhnlichen Differentialgleichungen von selbst erfüllt. Die zweite aber ist wenigstens längs des Ausgangsstreifens richtig. Wenn wir den Parameterpunkt $t = 0$ der Charakteristiken stets auf der Ausgangskurve wählen, so ist also die zweite Gleichung für $t = 0$ richtig. Um zu sehen, daß sie auch für die anderen t -Werte richtig ist, betrachten wir

$$H = \frac{\partial z}{\partial \tau} - p \frac{\partial x}{\partial \tau} - q \frac{\partial y}{\partial \tau}$$

und zeigen zunächst, daß

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

ist. Diese Ableitung wird nämlich¹⁾

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial \tau} - \frac{\partial p}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial \tau} - p \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial \tau} - \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial \tau} - q \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial \tau}.$$

Differenziert man aber (9) nach τ , so erhält man

$$0 = \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial \tau} - \frac{\partial p}{\partial \tau} \frac{\partial x}{\partial t} - p \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial \tau} - \frac{\partial q}{\partial \tau} \frac{\partial y}{\partial t} - q \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial \tau}.$$

Subtrahiert man dies von $\frac{\partial H}{\partial t}$, so bekommt man

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} &= \frac{\partial p}{\partial \tau} \frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial q}{\partial \tau} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial \tau}, \\ &= f_p \frac{\partial p}{\partial \tau} + f_q \frac{\partial q}{\partial \tau} + (f_x + p f_z) \frac{\partial x}{\partial \tau} + (f_y + q f_z) \frac{\partial y}{\partial \tau}. \end{aligned}$$

Da aber nun $f(x, y, z, p, q) = 0$ wird²⁾, wenn man $x(t, \tau)$ usw. einträgt, so hat man noch

$$f_x \frac{\partial x}{\partial \tau} + f_y \frac{\partial y}{\partial \tau} + f_z \frac{\partial z}{\partial \tau} + f_p \frac{\partial p}{\partial \tau} + f_q \frac{\partial q}{\partial \tau} = 0.$$

Also wird

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} &= p f_z \frac{\partial x}{\partial \tau} + q f_z \frac{\partial y}{\partial \tau} - f_z \frac{\partial z}{\partial \tau}, \\ &= -f_z \cdot H. \end{aligned}$$

Daher ist

$$H = H(0) e^{-\int_0^t f_z dt}.$$

¹⁾ Daß diese Ableitungen existieren, folgt aus unserer Annahme, daß $f(x, y, z, p, q)$ samt seinen Ableitungen der beiden ersten Ordnungen stetig sein soll. Daraus ergab sich schon, daß $x(t, \tau)$, $y(t, \tau)$ usw. stetige Ableitungen nach τ haben. Da aber nun z. B. $\frac{dx}{dt} = f_p(x, y, z, p, q)$ ist, so sieht man sofort, daß auch $\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{dx}{dt} \right)$ existiert und stetig ist. (Vgl. auch S. 239.)

²⁾ Weil dies für $t = 0$ gilt und weil f längs (6) konstant ist.

Da aber nun, wie gesagt, $H(0) = 0$ ist, so ergibt sich hieraus, daß für alle t und τ

$$H = 0$$

ist. Damit haben wir erkannt, daß wir tatsächlich eine Integralfläche durch die Ausgangskurve legen können. Es fragt sich nun, ob es die einzige ist, oder ob es mehrere gibt. Wir werden erkennen, daß die Integralfläche eindeutig bestimmt ist, sowie man sich für einen bestimmten Anfangsstreifen durch die Anfangskurve entschieden hat. Hier hat man ja im allgemeinen die Wahl zwischen mehreren Möglichkeiten. Um also zu beweisen, daß es nur eine Integralfläche durch einen gegebenen Anfangsstreifen gibt, werde ich zeigen, daß zwei Integralflächen, welche ein nichtsinguläres Flächenelement x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 gemeinsam haben, sich längs des ganzen durch dieses Element bestimmten charakteristischen Streifens berühren. Zu diesem Zwecke betrachte ich die folgende durch den Trägerpunkt des gemeinsamen Elementes gehende Kurve auf einer jeden der beiden Integralflächen: Die x - y -Projektion der Kurve soll den Bedingungen

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_p(x, y, z(x, y), p(x, y), q(x, y)) \\ \frac{dy}{dt} = f_q(x, y, z(x, y), p(x, y), q(x, y)) \end{cases}$$

genügen. Für diese ist dann naturgemäß

$$\frac{dz}{dt} = p f_p + q f_q$$

und längs derselben ist dann nach der S. 233 angestellten Überlegung auch

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -f_x - f_z p, \\ \frac{dq}{dt} &= -f_y - f_z q. \end{aligned}$$

D. h. also, an jenes gemeinsame Element schließt sich auf beiden Flächen derjenige charakteristische Streifen an, der durch das gemeinsame Element bestimmt ist. Alle vorausgehenden Überlegungen bleiben richtig, wenn $\frac{\partial f}{\partial q}$ statt $\frac{\partial f}{\partial p}$ von Null verschieden angenommen wird. Aber die zuletzt angestellten Überlegungen versagen, wenn das gegebene Element singulär ist, weil dann in ihm f_p und f_q verschwinden. Dann liegt nämlich ein singulärer Punkt der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_q}{f_p}$$

vor, welche mit den beiden vorhin angeschriebenen gleichbedeutend ist. Es ist ja dann unsicher, ob durch den Punkt x_0, y_0 eine Lösung geht. Zwar haben die Gleichungen (11) Lösungen, die für $t = t_0$ die

Werte $x = x_0$, $y = y_0$ haben. Indessen fallen dieselben für alle t mit $x = x_0$, $y = y_0$ zusammen.

Wir wollen zusammenfassen und zugleich noch einmal die Voraussetzungen hervorheben, die man machen muß, damit alle vorgenommenen Operationen legal sind. Auch soll der Bereich der x - y -Ebene festgestellt werden, für den wir die partielle Differentialgleichung gelöst haben.

In einem gewissen Bereich (B) des x - y - z - p - q -Raumes möge $f(x, y, z, p, q)$ samt seinen partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung endlich und stetig sein. Dadurch wird erreicht, daß für die Differentialgleichungen der charakteristischen Streifen alle die Voraussetzungen erfüllt sind, die wir früher für die Integration der Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen gemacht haben. Wenn z. B. $f(x, y, z, p, q)$ und die Ableitungen, sowie die rechten Seiten der gewöhnlichen Differentialgleichungen für

$$(K) \quad |x - x_0| < d, \quad |y - y_0| < d, \quad |z - z_0| < d, \quad |p - p_0| < d, \quad |q - q_0| < d$$

dem Betrage nach unter $M > 1$ liegen, so geht durch das *nichtsinguläre* Flächenelement x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 ein einziger Streifen, welcher den Ungleichungen

$$(12) \quad \begin{aligned} |x - x_0| < \frac{d}{M}, \quad |y - y_0| < \frac{d}{M}, \quad |z - z_0| < \frac{a}{M}, \quad |p - p_0| < \frac{d}{M}, \\ |q - q_0| < \frac{d}{M} \end{aligned}$$

genügt. Es möge nun ein von singulären Elementen freier Anfangsstreifen in (K) gegeben sein:

$$x = x(\tau), \quad y = y(\tau), \quad z = z(\tau), \quad p = p(\tau), \quad q = q(\tau), \quad (\alpha \leq \tau \leq \beta).$$

Die fünf Funktionen mögen eindeutig sein und stetige Ableitungen besitzen. Ferner sei d der Abstand des Streifens vom Rand des Körpers K .

Dann geht durch jedes Element τ des Anfangsstreifens ein einziger charakteristischer Streifen $x = x(t, \tau)$ usw., der den Bedingungen

$$|x(t, \tau) - x(\tau)| < \frac{d}{M} \text{ usw.}$$

genügt. Diese Streifen ergeben in ihrer Gesamtheit eine Integralfläche (8).

Der Nachweis, daß hiermit eine Integralfläche gewonnen ist, benutzte auf S. 236 die ersten Ableitungen der fünf Funktionen nach t und τ sowie die Ableitungen

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t \partial \tau}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial \tau}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial \tau}$$

nebst der Vertauschbarkeit der Differentiationsfolge. Tatsächlich folgt

aus unseren Annahmen, daß die genannten ersten Ableitungen stetig sind und daß

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)$$

stetig ist. Daraus ergibt sich aber bekanntlich die Vertauschbarkeit der Reihenfolge der Differentiationen. Daß die ersten Ableitungen der fünf Funktionen nach τ stetig sind, wurde S. 236 schon erwähnt. Daß die ersten Ableitungen nach t stetig sind, ergibt sich aus den Differentialgleichungen sofort, da durch diese ja $\frac{dx}{dt}$ usw. durch $x(t)$ usw. selbst dargestellt sind. Daher ergibt die Differentiation der Differentialgleichungen nach τ auch die Stetigkeit von $\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)$ usw.

Durch den Anfangsstreifen geht daher eine einzige Integralfläche. Diese Aussage ist im folgenden Sinne zu verstehen: Zwei Integralflächen, welche den Anfangsstreifen enthalten, enthalten auch die ganzen an seine Elemente anschließenden charakteristischen Streifen für

$$x(t, \tau) - x(\tau) < \frac{d}{M} \text{ usw.}$$

Wenn man die hiermit abgeschlossene allgemeine Theorie auf die früher behandelten speziellen Fälle anwendet, so findet man die damaligen Resultate wieder. Das möge etwa an

$$p + f(x, y)q = g(x, y)$$

kurz dargelegt werden. Für die charakteristischen Streifen findet man zunächst die fünf Gleichungen

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = f, \quad \frac{dz}{dt} = g, \quad \frac{dp}{dt} = -qf_x + g_x, \quad \frac{dq}{dt} = -qf_y + g_y.$$

Da aber die drei ersten nur x, y, z enthalten, so können sie zur Bestimmung der charakteristischen *Kurven* dienen und man kann daher auf die beiden letzten verzichten, da schon diese Kurven zum Aufbau der Integralflächen ausreichen.

Immerhin mag es auffallen, daß wir damals eine von zwei Integrationskonstanten abhängige, also zweiparametrische Schar von charakteristischen Kurven erhielten, während wir im allgemeinen Falle eine dreiparametrische Schar von charakteristischen Streifen bekommen. Der Grund dafür ist der, daß in jenen speziellen Fällen durch jede charakteristische Kurve eine einparametrische Schar von charakteristischen Streifen geht, während im allgemeinen Fall verschiedene charakteristische Streifen auch längs verschiedenen Kurven aufgereiht sind.

Ähnlich wie bei den linearen Differentialgleichungen kann man die Theorie auch hier verallgemeinern, indem man sie mehr ins Geometrische wendet und die Beschränkung auf Flächenstücke fallen läßt, die sich durch eindeutige Funktionen $z(x, y)$ darstellen lassen. Näheres siehe S. 281.

§ 5. Überbestimmte Systeme von partiellen Differentialgleichungen.

Wir werden im § 6 die Integration der charakteristischen Gleichungen näher betrachten. Es ist zweckmäßig, dem einige Betrachtungen über ein gewisses System von zwei partiellen Differentialgleichungen vorausszuschicken.

Für eine unbekannte Funktion mögen zwei partielle Differentialgleichungen vorgelegt sein. Man nennt das System überbestimmt, um auszudrücken, daß die Zahl der unbekannt Funktionen kleiner ist als die Zahl der Gleichungen. Es handelt sich darum, die gemeinsamen Integrale dieser beiden Differentialgleichungen zu finden. Man überzeugt sich leicht, daß nicht immer solche gemeinsame Integrale vorhanden sind. Wir wollen annehmen, daß die beiden Gleichungen nach $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ aufgelöst seien. Es sei das System

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \varphi_1(x, y, z), \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi_2(x, y, z) \end{cases}$$

gegeben. φ_1 und φ_2 sollen dabei samt ihren partiellen Ableitungen der vier ersten Ordnungen in einem gewissen Bereiche B des x - y - z -Raumes eindeutig und stetig sein. Dann leuchtet ein, daß es nur dann stetige Funktionen $z(x, y)$ geben kann, die diesen beiden Differentialgleichungen genügen, wenn das Gesetz von der Vertauschung der Reihenfolge der Differentiationsfolge erfüllt ist. Das liefert die „Integritätsbedingung“

$$(2) \quad \varphi_{1y} + \varphi_{1z} \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi_{2x} + \varphi_{2z} \frac{\partial z}{\partial x}$$

oder

$$(3) \quad \varphi_{1y} + \varphi_{1z} \cdot \varphi_2 = \varphi_{2x} + \varphi_{2z} \cdot \varphi_1.$$

Hier sind nun zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem diese Gleichung (3) identisch in x, y, z erfüllt ist oder nicht. Im letzteren Falle ist sie eine neue Gleichung für ein eventuelles gemeinsames Integral der beiden gegebenen Gleichungen (1) und man kann nun durch reine Eliminationsprozesse entscheiden, ob eine dann durch (3) definierte Funktion ein Integral von (1) ist.

Der andere Fall, den wir weiter betrachten wollen, ist der, daß die Gleichung (3) identisch für alle x, y, z eines gewissen Bereiches B erfüllt ist.

Es sei x_0, y_0, z_0 ein Punkt aus B . Wir werden zeigen, daß es in einer gewissen Umgebung von (x_0, y_0, z_0) genau eine mit ihren ersten Ableitungen stetige Funktion $z(x, y)$ gibt, die (1) genügt, und für die $z_0 = z(x_0, y_0)$ ist. Dies Ergebnis wird dadurch plausibel, daß man be-

achtet, daß durch (1) jedem Punkt aus B genau ein Flächenelement zugeordnet wird. Zur Bewältigung des Integrationsproblems kann man ähnlich verfahren, wie in dem bekannten Fall der Quadratur, wo z nicht selbst vorkommt. Wir geben also erst einmal in der ersten der beiden Gleichungen y den Wert y_0 . Sie ist dann als gewöhnliche Differentialgleichung

$$(4) \quad \frac{dz}{dx} = \varphi_1(x, y_0, z)$$

für die Schnittkurve der Ebene $y = y_0$ mit der gesuchten Fläche aufzufassen. $z = z(x)$ sei die Gleichung dieser Schnittkurve. Ihr Integral, welches für $x = x_0$ den Wert z_0 annimmt, sei

$$(5) \quad z = \varphi(x, x_0, y_0, z_0) = z(x), \quad z(x_0) = z_0.$$

Alsdann betrachten wir die ebenen Schnitte $x = \text{konst.}$ der Integralfläche und bestimmen somit dasjenige Integral

$$(6) \quad z = \psi(x, y, x_0, y_0, z_0)$$

der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$(7) \quad \frac{dz}{dy} = \varphi_2(x, y, z),$$

das für $y = y_0$ der Anfangsbedingung

$$(8) \quad \psi(x, y, x_0, y_0, z_0) = z(x)$$

genügt. Man hat also auch

$$(6') \quad z_0 = \psi(x, y_0, x, y, z),$$

wo $\psi(x_0, y_0, x, y, z)$ stetige Ableitungen erster bis vierter Ordnung nach allen Argumenten hat. Nun ist zu zeigen, daß die bestimmte Funktion (6) ein Integral von (1) ist, für das

$$(9) \quad z_0 = \psi(x_0, y_0, x_0, y_0, z_0)$$

gilt. Zunächst folgt (9) aus (3) und (8). Weiter sind (6) und seine partiellen Ableitungen nach x, y, x_0, y_0, z_0 stetige Funktionen dieser fünf Veränderlichen. Dies gilt nämlich nach S. 39 für die Lösung (5) von (4) und gilt aus demselben Grund weiter für (6) als Lösung von (8). Da wir (6) aus (7) gewonnen haben, ist für (6) die zweite Gleichung (1) erfüllt, und es bleibt nur noch zu zeigen, daß auch die erste Gleichung (1) für (6) gilt. Wegen (8) und (4) ist dies jedenfalls für $y = y_0$ der Fall. Tragen wir nun (6) für beliebiges y in die erste Gleichung (1) ein, so möge sich

$$(10) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \varphi_1(x, y, z) = u(x, y)$$

ergeben. Hier ist jedenfalls

$$(11) \quad u(x, y_0) = 0,$$

und es ist zu zeigen, daß für alle y

$$(12) \quad u(x, y) = 0$$

gilt. Jedenfalls sind u und seine partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige Funktionen von x und y . Um (12) zu beweisen, differenzieren wir (10) nach y und finden

$$(13) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \varphi_2 + \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Differenziert man aber die zweite Gleichung (1), die ja für (6) gilt, nach x , so kommt

$$(14) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \varphi_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} u.$$

In (13) und (14) sind die linken Seiten gleich, weil rechts stetige Funktionen von x und y stehen. Daher folgt durch Vergleich beider wegen (3)

$$(15) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = u \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}.$$

u ist wegen (11) dasjenige Integral von (15), das für $y = y_0$ verschwindet. Also ist wegen der Stetigkeit von $\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}$ und seiner Ableitung nach y (12)

richtig und damit ist gezeigt, daß (6) das gesuchte Integral von (1) ist. Unsere Überlegung zeigt auch, daß (6) das einzige der Anfangsbedingung (9) genügende Integral von (1) ist. Denn unser Ansatz hat zwangsweise und eindeutig bestimmt, die Schnittkurve $x = x_0$ und die Schnittkurven $x = \text{konst.}$ der Integralfläche ergeben. Also gilt der

Satz: *Durch jeden Punkt x_0, y_0, z_0 des Bereiches B geht genau eine Lösung des Systems (1), die eindeutig und stetig differenzierbar von x, y, x_0, y_0, z_0 abhängt.*

Es gibt noch eine zweite, die *Mayersche Methode* zur Integration der Gleichungen (1).

Die *Mayersche Methode* geht darauf aus, unmittelbar die Schnittkurven zu bestimmen, die eine durch den Punkt x_0, y_0, z_0 gelegte zur z -Achse parallele Ebene aus der Integralfläche ausschneidet. Die Gleichung einer solchen Ebene sei

$$x - x_0 = \lambda t,$$

$$y - y_0 = \mu t.$$

Schneidet man sie mit der Fläche

$$z = z(x, y),$$

so erhält man für die Schnittkurve

$$z = z(x_0 + \lambda t, y_0 + \mu t).$$

Differenziert man nach t , so erhält man

$$\frac{dz}{dt} = \varphi_1(x_0 + \lambda t, y_0 + \mu t, z) \lambda + \varphi_2(x_0 + \lambda t, y_0 + \mu t, z) \mu$$

als Differentialgleichung der Schnittkurven. Für $t = 0$ wird $x = x_0$ und $y = y_0$. Daher benötigen wir diejenige eindeutig bestimmte Lösung,

welche für $t = 0$ den Wert z_0 annimmt. Aus den so bestimmten Schnittkurven

$$\begin{aligned}x &= x_0 + \lambda t, \\y &= y_0 + \mu t, \\z &= f(z_0, t, \lambda, \mu)\end{aligned}$$

kann man durch Elimination von t und des Richtungsparameters $\lambda:\mu$ die Gleichung der Integralfläche gewinnen.

§ 6. Über die Integration der für die charakteristischen Streifen aufgestellten Differentialgleichungen.

Jede Beziehung

$$\varphi(x, y, z, p, q) = 0,$$

die als Identität in t zwischen den fünf Funktionen $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $p(t)$, $q(t)$ besteht, welche den charakteristischen Gleichungen genügen, nennen wir ein Integral derselben. Ein solches Integral kennen wir schon lange:

$$f(x, y, z, p, q) = c.$$

Wir haben ja schon auf S. 234 festgestellt, daß längs eines jeden charakteristischen Streifens $f(x, y, z, p, q)$ einen festen Wert hat. Da uns aber nur Integralstreifen interessieren, so lautet unser erstes Integral:

$$(1) \quad f(x, y, z, p, q) = 0.$$

Die Sache ist nun die, daß man nun eigentlich noch vier weitere Integrale nötig hätte, um die fünf unbekanntenen Funktionen bestimmen zu können. Man kann aber beweisen, daß durch die Kenntnis eines weiteren von (1) unabhängigen Integrals das System der fünf Differentialgleichungen (6) auf S. 233 auf ein anderes System von nur zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen zurückgeführt werden kann. Die Bestimmung aller Integralflächen der partiellen Differentialgleichung erfordert nach der Integration der beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen nur noch Eliminationsprozesse. Sei nämlich

$$(2) \quad f_1(x, y, z, p, q) = a$$

ein weiteres Integral, so kann man im allgemeinen p und q aus den zwei Gleichungen (1), (2) ausrechnen und erhält dann zwei Differentialgleichungen¹⁾:

¹⁾ Der Kürze der Darstellung zuliebe sei im folgenden angenommen, daß f , f_1 , f_2 usw. in einem gewissen Bereich B der x, y, z, p, q viermal stetig differenzierbar seien. An sich würde oft auch die Existenz einer geringeren Zahl von Ableitungen ausreichen. Ich möchte aber keinen Wert darauf legen, diese Seite der Sache zu weit ins einzelne zu verfolgen.

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \varphi_1(x, y, z) \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi_2(x, y, z). \end{cases}$$

Ihre Integration kann (§ 5) auf die zweier gewöhnlichen Differentialgleichungen zurückgeführt werden. Damit die Auflösung der zwei Gleichungen nach p , q möglich sei, darf die Funktionaldeterminante¹⁾

$$\begin{vmatrix} f_p & f_q \\ f_{1p} & f_{1q} \end{vmatrix}$$

nicht identisch in x, y, z, p, q verschwinden. Das meinen wir, wenn wir sagen, die zwei Integrale sollten von einander unabhängig sein. Das identische Verschwinden der Funktionaldeterminante würde nämlich nach S. 225 bedeuten, daß man eine der zwei Funktionen f, f_1 als Funktion der anderen auffassen kann. Wir beschränken nun überdies die Betrachtung auf die Umgebung solcher Flächenelemente, für die die Funktionaldeterminante nicht verschwindet. Die φ_1 und φ_2 sind ihrer Herkunft nach in einem gewissen weiter zugrunde zu legenden Bereich mit ihren Ableitungen der vier ersten Ordnungen stetig.

Zum Beweise knüpfen wir an den naheliegenden Gedanken an, die Integration der Differentialgleichungen der charakteristischen Streifen mit der einer linearen partiellen Differentialgleichung in Zusammenhang zu bringen. Jene fünf Differentialgleichungen sind nämlich nach S. 229 zugleich die Differentialgleichungen der Charakteristiken der linearen partiellen Differentialgleichung

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} \cdot f_p + \frac{\partial f_1}{\partial y} \cdot f_q + \frac{\partial f_1}{\partial z} (pf_p + qf_q) + \frac{\partial f_1}{\partial p} (-f_x - f_z q) \\ + \frac{\partial f_1}{\partial q} (-f_y - f_z p) = 0 \end{aligned}$$

für eine unbekannte Funktion

$$(5) \quad f_1(x, y, z, p, q).$$

(4) bringt nämlich zum Ausdruck, daß (2) ein Integral der fünf Differentialgleichungen (6) von S. 233 ist, d. h. daß (5) längs jeder Lösung $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $p = p(t)$, $q = q(t)$ derselben konstant ist: (4) ist also notwendig und hinreichend dafür, daß (2) ein Integral der Differentialgleichungen der charakteristischen Streifen ist. Sei also (5) eine Lösung von (4) und gehen wir nun in der schon angegebenen Weise von (1) und (2) zu (3) über.

¹⁾ Mit f_{1p} , f_{1q} usw. bezeichne ich im folgenden die Ableitungen von f_1 nach p , q usw.

Damit es nun aber Funktionen $z(x, y)$ gebe, die den beiden Gleichungen (3) genügen, muß eine Integrabilitätsbedingung:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

oder ausführlicher geschrieben:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \varphi_2 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \varphi_1$$

für die durch $z = z(x, y)$ verbundenen x, y, z erfüllt sein. Dies ist aber der Fall. Differenziert man nämlich die beiden Gleichungen (1) und (2), durch deren Auflösung nach p und q ja (3) entstand, nach x und y , so erhält man:

$$(6) \quad \begin{aligned} f_x + f_z \cdot p + f_p \cdot p_x + f_q \cdot q_x &= 0 & f_y + f_z \cdot q + f_p \cdot p_y + f_q \cdot q_y &= 0 \\ f_{1x} + f_{1z} \cdot p + f_{1p} \cdot p_x + f_{1q} \cdot q_x &= 0 & f_{1y} + f_{1z} \cdot q + f_{1p} \cdot p_y + f_{1q} \cdot q_y &= 0. \end{aligned}$$

Bestimmt man hieraus p_y und q_x und setzt die gefundenen Werte einander gleich, so erhält man die Integrabilitätsbedingung

$$(4') \quad [f, f_1] \equiv (f_y + f_z \cdot q) f_{1q} - f_q (f_{1y} + f_{1z} \cdot q) + f_{1p} (f_x + f_z p) - (f_{1x} + f_{1z} \cdot p) f_p = 0$$

was nur eine andere Schreibweise für (4) ist. Da aber f_1 ein Integral von (4) war, so ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt, und der Satz von S. 242 wird anwendbar. Damit ist auch der S. 243 oben ausgesprochene Satz bewiesen. Auf die weitere dort bezüglich der Integration von (1) gemachte Bemerkung gehen wir erst im nächsten Paragraphen ein. Hier sei nur noch die selbstverständliche Bemerkung gemacht, daß die Integrale von (3) auch Integrale von (1) sind, denn für jede Funktion $z(x, y)$, die (3) genügt, sind auch (1) und (2) erfüllt. Da man an einer Stelle x_0, y_0 den Wert z_0 beliebig vorschreiben kann, so gewinnt man aus (3) eine einparametrische Schar von Integralen von (1).

Man nennt $[f, f_1]$ einen *Klammerausdruck* und sagt, f und f_1 lägen in *Involution*, wenn $[f, f_1] = 0$ ist. Da $[f, f_1] = -[f_1, f]$, so ist $f = \text{konst.}$ auch ein Integral der zu $f_1 = 0$ gehörigen charakteristischen Differentialgleichungen.

Unsere Betrachtungen beweisen gleichzeitig noch einen etwas anderen Satz: Jedes gemeinsame Integral zweier partiellen Differentialgleichungen $F = 0$ und $F_1 = 0$ genügt auch der Gleichung $[F, F_1] = 0$. Ist diese also nicht wie in den Fällen, auf die es uns eben ankommt, identisch erfüllt, so ist sie eine neue Gleichung für die gesuchten gemeinsamen Integrale und wir haben damit jetzt drei Gleichungen, welchen dieselben genügen müssen. Nunmehr aber kann man offenbar schon durch reine Eliminationsprozesse entscheiden, ob überhaupt ein gemeinsames Integral vorhanden ist.

Man kann die Integrationsarbeit ganz sparen, wenn man noch ein weiteres Integral f_2 von $[f, \varphi] = 0$ kennt, das überdies mit f_1 in Involution liegt. Denn dann gelten für die charakteristischen Integralstreifen die drei Gleichungen

$$(7) \quad f = 0, \quad f_1 = a_1, \quad f_2 = a_2.$$

Kann man sie nach p, q, z auflösen, so hat man damit ein von zwei Parametern abhängendes Integral von $f = 0$ ohne jede Integrationsarbeit. Um das einzusehen, betrachte man ein Element x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 , das den Gleichungen (7) bei passender Wahl der a_1, a_2 genügt und setze voraus, daß für dies Element die Funktionaldeterminante

$$\frac{d(f, f_1, f_2)}{d(z, p, q)} \neq 0$$

sei. Durch Auflösung möge sich in der Umgebung dieses Elementes

$$z = \varphi(x, y), \quad p = \varphi_1(x, y), \quad q = \varphi_2(x, y)$$

ergeben. Ich zeige, daß die drei Funktionen $z - \varphi(x, y), p - \varphi_1(x, y), q - \varphi_2(x, y)$ gleichfalls in Involution liegen, d. h. daß $z_x = p, z_y = q, p_y = q_x$ ist. Zum Nachweis differenziere man die drei Gleichungen (7) nach x und y . So erhält man

$$a) \quad f_x + f_z(z_x - p) + f_z \cdot p + f_p \cdot p_x + f_q q_x = 0,$$

$$b) \quad f_{1x} + f_{1z}(z_x - p) + f_{1z}p + f_{1p}p_x + f_{1q}q_x = 0,$$

$$c) \quad f_{2x} + f_{2z}(z_x - p) + f_{2z}p + f_{2p}p_x + f_{2q}q_x = 0,$$

$$d) \quad f_y + f_z(z_y - q) + f_zq + f_p p_y + f_q q_y = 0,$$

$$e) \quad f_{1y} + f_{1z}(z_y - q) + f_{1z}q + f_{1p}p_y + f_{1q}q_y = 0,$$

$$f) \quad f_{2y} + f_{2z}(z_y - q) + f_{2z}q + f_{2p}p_y + f_{2q}q_y = 0.$$

Man multipliziere a) mit $\frac{\partial f_1}{\partial p}$, d) mit $\frac{\partial f_1}{\partial q}$, b) mit $\frac{\partial f}{\partial p}$, e) mit $\frac{\partial f}{\partial q}$. Dann berechne man

$$a) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial p} + d) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial q} - b) \cdot \frac{\partial f}{\partial p} - e) \cdot \frac{\partial f}{\partial q}.$$

Das liefert

$$[f, f_1] + (z_x - p)(f_z f_{1p} - f_{1z} f_p) + (z_y - q)(f_z f_{1q} - f_{1z} f_q) + (q_x - p_y)(f_q f_{1p} - f_{1q} f_p) = 0.$$

Ebenso findet man analoge Relationen durch Verbindung von f mit f_2 , und f_1 mit f_2 . Da aber die drei Funktionen f, f_1, f_2 in Involution liegen, so kommen schließlich diese linearen Gleichungen heraus.

$$\text{I. } (z_x - p)(f_z f_{1p} - f_{1z} f_p) + (z_y - q)(f_z f_{1q} - f_{1z} f_q) + (q_x - p_y)(f_q f_{1p} - f_{1q} f_p) = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{II. } (z_x - p) (f_z f_{2p} - f_{2z} f_p) + (z_y - q) (f_z f_{2q} - f_{2z} f_q) \\ + (q_x - p_y) (f_q f_{2p} - f_{2q} f_p) = 0, \\ \text{III. } (z_x - p) (f_{1z} f_{2p} - f_{2z} f_{1p}) + (z_y - q) (f_{1z} f_{2q} - f_{2z} f_{1q}) \\ + (q_x - p_y) f_{1q} f_{2p} - f_{2q} f_{1p} = 0. \end{aligned}$$

Um zu erkennen, daß nach diesen Gleichungen $z_x = p$, $z_y = q$, $q_x = p_y$ sein muß, hat man nur zu bemerken, daß die Matrix dieses Gleichungssystems aus den zweireihigen Unterdeterminanten der Funktionaldeterminante besteht und daher wie diese von Null verschieden ist.

§ 7. Das vollständige Integral.

Wir wenden uns der Bemerkung von S. 243 zu, wo behauptet wurde, daß nach Integration der dort angegebenen beiden Differentialgleichungen (3) zur Bestimmung aller Integrale von (1) S. 243 nur noch Eliminationsprozesse nötig seien. Ihrer Herkunft aus (1) und (2) von § 6 entsprechend enthalten die Gleichungen (3) noch einen Parameter a den wir hinfort mit a_1 bezeichnen wollen. Die Integration von (3) läßt einen weiteren Parameter a_2 hinzutreten, da man an eine Stelle (x_0, y_0) den Wert z_0 beliebig vorschreiben kann. Wir erhalten also durch Integration von (3) eine zweiparametrische Schar

$$(8) \quad z = V(x, y, a_1, a_2)$$

von Integralflächen. Bei gegebenem a_1 kann man nach den Ergebnissen von §§ 5, 6 immer a_2 auf eine Weise so bestimmen, daß die Fläche durch den Punkt x_0, y_0, z_0 geht. Wegen (2) kann man aber den Parameter a_1 so wählen, daß im Punkte x_0, y_0, z_0 dabei ein beliebiges der ihm durch (1) zugeordneten Flächenelemente auftritt. Daher umfaßt die Schar (8) in einer gewissen Umgebung U von x_0, y_0, z_0 sämtliche Flächenelemente der partiellen Differentialgleichung. Daher nennt man (8) ein vollständiges Integral der partiellen Differentialgleichung (1) S. 243.

Aus dem vollständigen Integral muß man jedenfalls die ursprüngliche partielle Differentialgleichung wieder gewinnen können. Denn die Gleichungen

$$(9) \quad \begin{cases} z = V(x, y, a_1, a_2), \\ p = \frac{\partial V}{\partial x}(x, y, a_1, a_2), \\ q = \frac{\partial V}{\partial y}(x, y, a_1, a_2) \end{cases}$$

sind doch weiter nichts als eine auf die Parameter a_1, a_2 bezogene für einen gewissen Elementebereich gültige Parameterdarstellung der partiellen Differentialgleichung $f(x, y, z, p, q) = 0$.

Aus den drei Gleichungen (9) sind ja in der Tat a_1 und a_2 als eindeutige, stetige, mit stetigen Ableitungen versehene Funktionen der x, y, z ,

p, q bestimmt. Denn nach der in den vorigen Paragraphen beendeten Herleitung des vollständigen Integrals wird a_2 durch (6') von S. 241 ausgedrückt, eine Formel bei der wir aber jetzt noch die hier vorliegende Abhängigkeit von a_1 kenntlich machen müssen. Somit wird

$$(10) \quad a_2 = \psi(x_0, y_0, x, y, z, a_1)$$

Freilich steckt hierin noch a_1 . Und zwar hängt ψ stetig differenzierbar von a_1 ab. Aber nach S. 244 wissen wir schon, daß

$$(11) \quad a_1 = f_1(x, y, z, p, q).$$

Aus dem Gesagten ergibt sich, daß der Rang der Matrix

$$(12) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial V}{\partial a_1} & \frac{\partial V}{\partial a_2} \\ \frac{\partial V_x}{\partial a_1} & \frac{\partial V_x}{\partial a_2} \\ \frac{\partial V_y}{\partial a_1} & \frac{\partial V_y}{\partial a_2} \end{vmatrix}$$

stets zwei ist. Da nämlich (10) nach z auslösbar ist:

$$z = \psi(x, y, x_0, y_0, a_2, a_1),$$

so ist

$$(13) \quad \frac{\partial z}{\partial a_2} = \frac{\partial V}{\partial a_2} \neq 0.$$

Weiter sind

$$f(x, y, z, p, q) = 0$$

$$f_1(x, y, z, p, q) = a_1$$

identisch erfüllt, wenn man (9) einträgt. Daher ist

$$(14a) \quad f_{1z} \frac{\partial V}{\partial a_1} + f_{2p} \frac{\partial V_x}{\partial a_1} + f_{1q} \frac{\partial V_y}{\partial a_1} = 1$$

$$(14b) \quad f_{1z} \frac{\partial V}{\partial a_2} + f_{1p} \frac{\partial V_x}{\partial a_2} + f_{1q} \frac{\partial V_y}{\partial a_2} = 0.$$

Wäre nun der Rang der Matrix (12) kleiner als 2, so gäbe es zwei Zahlen λ_1 , und λ_2 , die nicht beide verschwinden, derart, daß

$$(15) \quad \begin{aligned} \lambda_1 \frac{\partial V}{\partial a_1} + \lambda_2 \frac{\partial V}{\partial a_2} &= 0 \\ \lambda_1 \frac{\partial V_x}{\partial a_1} + \lambda_2 \frac{\partial V_x}{\partial a_2} &= 0 \\ \lambda_1 \frac{\partial V_y}{\partial a_1} + \lambda_2 \frac{\partial V_y}{\partial a_2} &= 0 \end{aligned}$$

wäre. Wegen (13) muß also jedenfalls $\lambda_1 \neq 0$ sein. Multipliziert man (14a) mit λ_1 und (14b) mit λ_2 und addiert, so kommt wegen (15) links Null heraus; rechts aber steht das von Null verschiedene λ_1 . Daher war die Annahme, der Rang von (12) sei kleiner als zwei, falsch. Der Rang der Matrix (12) ist also zwei.

Man kann noch hinzufügen, daß wegen der S. 231 gemachten Annahme $f_p \neq 0$, jedenfalls

$$(16) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial V}{\partial a_1} & \frac{\partial V}{\partial a_2} \\ \frac{\partial V_y}{\partial a_1} & \frac{\partial V_y}{\partial a_2} \end{vmatrix} \neq 0$$

ist. Denn sei z. B.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial a_1} & \frac{\partial V_x}{\partial a_2} \\ \frac{\partial V_y}{\partial a_1} & \frac{\partial V_y}{\partial a_2} \end{vmatrix} \neq 0,$$

so löse man die zweite und dritte Gleichung (6) nach a_1 und a_2 auf und trage in die erste ein. Das so entstehende $z - V$ muß eine von Null verschiedene Ableitung nach p haben. Diese ist aber

$$\frac{\partial V}{\partial a_2} \frac{\partial V_y}{\partial a_1} - \frac{\partial V}{\partial a_1} \frac{\partial V_y}{\partial a_2} \\ \frac{\partial V_x}{\partial a_1} \frac{\partial V_y}{\partial a_2} - \frac{\partial V_y}{\partial a_1} \frac{\partial V_x}{\partial a_2}.$$

Ebenso schließt man in dem Falle, wo

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial V}{\partial a_1} & \frac{\partial V}{\partial a_2} \\ \frac{\partial V_x}{\partial a_1} & \frac{\partial V_x}{\partial a_2} \end{vmatrix} \neq 0$$

ist. Man kann also die partielle Differentialgleichung in der Form

$$p = \varphi(x, y, z, q)$$

wiederherstellen, indem man die erste und die dritte Gleichung (9) nach a_1 und a_2 auflöst und das Ergebnis in die zweite Gleichung (9) einträgt.

Noch sei bemerkt, daß man das vollständige Integral auch nach dem zweiten in § 6 angegebenen, jede weitere Integration vermeidenden Weg aus drei in Involution liegenden Integralen $f = 0$, $f_1 = a_1$, $f_2 = a_2$ gewinnen kann, wobei dann die Auflösungen nach a_1 und a_2 auf der Hand liegen.

Wir behaupten, daß man aus diesem vollständigen Integral (8) durch Eliminationsprozesse alle Integrale von (1) erhalten kann. Dieselben können in der Tat stets als Enveloppen einer passend gewählten einparametrischen im vollständigen Integral enthaltenen Schar von Integralflächen aufgefaßt werden. Um das einzusehen, gehen wir von einem Anfangsstreifen aus, der eine gewisse Integralfläche bestimmen möge. Durch ein jedes Element dieses Streifens geht genau eine Fläche aus dem vollständigen Integral. Nach S. 237 hat dieselbe mit der durch den Anfangsstreifen bestimmten Integralfläche den ganzen durch das

Ausgangselement bestimmten charakteristischen Streifen gemeinsam, berührt letzteren also längs der Trägerkurve des Streifens. Den verschiedenen Elementen des Ausgangsstreifens entsprechend erhalten wir so eine einparametrische Schar von Flächen aus dem vollständigen Integral, welche die gewünschte Integralfäche einhüllt. Wenn $x = x(\tau)$, $y = y(\tau)$, $z = z(\tau)$, $p = p(\tau)$, $q = q(\tau)$ der Ausgangsstreifen ist, so kann man nach den dargelegten Eigenschaften des vollständigen Integrales a_1 und a_2 als eindeutige Funktionen aus

$$(17) \quad \begin{cases} z(\tau) = V(x(\tau), y(\tau), a_1, a_2), \\ p(\tau) = V_x(x(\tau), y(\tau), a_1, a_2), \\ q(\tau) = V_y(x(\tau), y(\tau), a_1, a_2) \end{cases}$$

berechnen. Nach (7) und (8) wird nämlich

$$\begin{aligned} a_1(\tau) &= f_1(x(\tau), y(\tau), z(\tau), p(\tau), q(\tau)) \\ a_2(\tau) &= \psi(x_0, y_0, x(\tau), y(\tau), z(\tau), a_1(\tau)). \end{aligned}$$

$a_1(\tau)$, $a_2(\tau)$ ergeben sich somit als stetig differenzierbare Funktionen, falls $x(\tau)$, $y(\tau)$, $z(\tau)$, $p(\tau)$, $q(\tau)$ stetige erste Ableitungen besitzen.

Also stellt nun

$$(18) \quad z = V(x, y, a_1(\tau), a_2(\tau))$$

die gesuchte einparametrische Teilschar des vollständigen Integrales dar.

Wenn also der Anfangsstreifen den S. 238 angegebenen Bedingungen genügt, und also durch ihn eine Integralfäche eindeutig bestimmt ist, so berührt bei festem $\tau = \tau_0$ die Fläche (14) diese Integralfäche längs desjenigen charakteristischen Streifens, der durch das Element $\tau = \tau_0$ des Anfangsstreifens bestimmt ist. Diesen charakteristischen Streifen wollen wir nun bestimmen. Es wird sich zeigen, daß aus der Kenntnis eines vollständigen Integrals sich die Kenntnis aller charakteristischen Streifen sofort ergibt.

Aus (9) haben wir die partielle Differentialgleichung in der Form

$$p = \varphi(x, y, z, q)$$

rekonstruiert. Man überzeugt sich sofort, daß die zu

$$g(x, y, z, p, q) \equiv p - \varphi(x, y, z, q) = 0$$

gehörigen charakteristischen Differentialgleichungen, mit den zu

$$f(x, y, z, p, q) = 0$$

gehörigen identisch sind. Denn es ist identisch

$$f(x, y, z, \varphi, q) = 0.$$

Also wird

$$\begin{aligned} f_x - f_p g_x &= 0 \\ f_y - f_p g_y &= 0 \\ f_q - f_p g_q &= 0 \\ f_p - f_p g_p &= 0 \\ pf_p + qf_q - f_p(pg_p - qg_q) &= 0, \end{aligned}$$

so daß die zu $g = 0$ gehörigen charakteristischen Gleichungen von den zu $f = 0$ gehörigen sich nur durch den von Null verschiedenen Faktor f_p unterscheiden. Das bedeutet aber nur eine andere Wahl des Parameters t . Also wird in den Differentialgleichungen der charakteristischen Streifen

$$\frac{dx}{dt} = 1.$$

Wir nehmen daher $t = x$ an. Weiter wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{V_{a_2} V_{x a_1} - V_{a_1} V_{x a_2}}{V_{a_1} V_{y a_2} - V_{a_2} V_{y a_1}}$$

oder

$$V_{a_2} V_{x a_1} - V_{a_1} V_{x a_2} + (V_{a_2} V_{y a_1} - V_{a_1} V_{y a_2}) \frac{dy}{dx} = 0.$$

D. h. längs der charakteristischen Streifen ist

$$\frac{V_{a_1}}{V_{a_2}}$$

konstant. Nach (10) ist ja $V_{a_2} \neq 0$. Wir schreiben dies so

$$V_{a_1} + a_3 V_{a_2} = 0.$$

Zusammenfassend haben wir somit über die Integration der charakteristischen Differentialgleichungen das folgende Ergebnis gewonnen:

Wenn man neben

$$f(x, y, z, p, q) = 0$$

ein weiteres Integral

$$f_1(x, y, z, p, q) = a_1$$

der charakteristischen Differentialgleichungen gefunden hat, so ist neben Eliminationsprozessen und einer Quadratur zur Bestimmung der Charakteristiken nur noch die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung zu leisten¹⁾. Man bekommt alle charakteristischen Integralstreifen aus dem vollständigen Integral

$$z = V(x, y, a_1, a_2),$$

wenn man die Gleichungen

$$z = V(x, y, a_1, a_2),$$

$$0 = V_{a_1} + V_{a_2} \cdot a_3,$$

$$p = V_x(x, y, a_1, a_2),$$

$$q = V_y(x, y, a_1, a_2)$$

nach x, y, z, p, q auflöst. a_1, a_2, a_3 sind dabei willkürliche Konstanten.

Während wir ursprünglich die Differentialgleichungen der charakteristischen Streifen als ein Mittel zur Integration der partiellen Diffe-

¹⁾ Man denke an die Mayersche Methode.

rentialgleichungen einführen, haben wir nun umgekehrt gelernt, daß die partielle Differentialgleichung durch ein vollständiges Integral ein mächtiges Hilfsmittel zur Integration jenes Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen an die Hand gibt.

Wir schließen noch einige Bemerkungen an, deren Zweck es ist, dem bisher benutzten Begriff des vollständigen Integrales eine etwas größere Allgemeinheit zu geben. Bis jetzt waren die vollständigen Integrale als zweiparametrische Scharen von Integralflächen erklärt, wie sie durch das Verfahren von § 5 und 6 erhältlich waren. Wenn uns aber nun eine zweiparametrische Schar von Integralflächen vorgelegt ist, die in einem gewissen Elementebereich alle nichtsingulären Elemente umfaßt, so stellen wir uns die Frage, inwieweit wir diese Schar zu den in diesem Paragraphen dargelegten Zwecken verwenden können. Dies ist stets dann der Fall, wenn eine Parameterdarstellung (9) der partiellen Differentialgleichung vorliegt, für die alle Überlegungen des § 7 in Ordnung gehen. Dazu sollen die in (9) vorkommenden Funktionen für einen gewissen Bereich B der x, y, z, p, q, a_1, a_2 mit stetigen Ableitungen erster und zweiter Ordnung versehen sein, sie sollen eine eindeutige mit stetigen Ableitungen erster und zweiter Ordnung versehene Auflösung nach a_1, a_2 zulassen. Endlich soll der Rang der Matrix (12) gleich zwei sein. Mit a_2 werde immer der Parameter bezeichnet, für den $\frac{\partial V}{\partial a_2} \neq 0$ ist.

In den ganzen vorstehenden Erörterungen waren Integralelemente, für die neben $f = 0$ auch $f_p = 0$ und $f_q = 0$ ist, ausgeschlossen. Man nennt sie *singuläre* Elemente und eine aus ihnen aufgebaute Fläche eine *singuläre* Integralfläche. Natürlich kann man ohne Integrationen aus den aufgegebenen drei Gleichungen für die singulären Elementen heraus — ähnlich wie bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen — entscheiden, ob es singuläre Integralflächen gibt.

§ 8. Integration einiger spezieller Differentialgleichungen.

Es gibt verschiedene Sorten von partiellen Differentialgleichungen, für die man leicht ein vollständiges Integral finden kann.

Wenn z. B. die *Clairautsche Differentialgleichung*

$$z = xp + yq + f(p, q)$$

vorgelegt ist, so ist die zweiparametrische Ebenenschar

$$z = a_1 x + a_2 y + f(a_1, a_2)$$

ein vollständiges Integral. Denn tatsächlich umfassen diese Ebenen die sämtlichen Flächenelemente der partiellen Differentialgleichung.

Die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} z &= a_1 x + a_2 y + f(a_1, a_2) \\ p &= a_1 \\ q &= a_2 \end{aligned}$$

erfüllen auch offenbar alle am Ende von § 7 aufgezählten Voraussetzungen.

Wenn weiter eine Differentialgleichung der Form

$$p = f(q, x)$$

vorgelegt ist, so hat man zur Bestimmung weiterer Integrale der charakteristischer Gleichungen die lineare Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} f_q + \frac{\partial u}{\partial z} (-p + q f_q) - \frac{\partial u}{\partial p} f_x = 0$$

zu betrachten. Ersichtlich ist

$$u = q$$

ein Integral derselben. Daher hat man zur Bestimmung eines vollständigen Integrales p und q aus

$$\begin{aligned} p &= f(q, y), \\ q &= a_1 \end{aligned}$$

auszurechnen. Also ist aus

$$\begin{aligned} q &= a_1, \\ p &= f(a_1, x) \end{aligned}$$

das vollständige Integral zu ermitteln. Man findet

$$z = a_1 y + \int f(a_1, x) dx + a_2.$$

Als *drittes* Beispiel wähle ich eine Verallgemeinerung des vorigen.

$$f(x, p) = g(y, q).$$

Man sagt hier, die *Variablen seien getrennt*.

Ein Integral von

$$\frac{\partial u}{\partial x} f_p - \frac{\partial u}{\partial y} g_q + \frac{\partial u}{\partial z} (p f_p - q g_q) - \frac{\partial u}{\partial p} f_x + \frac{\partial u}{\partial q} g_y = 0$$

ist hier offenbar

$$u = f(x, p).$$

Zur Bestimmung des vollständigen Integrales hat man somit p und q aus

$$\begin{aligned} f(x, p) &= a_1, \\ g(y, q) &= a_1 \end{aligned}$$

zu ermitteln, ein Ergebnis, das man auch unmittelbar aus der partiellen Differentialgleichung entnehmen kann. Man möge etwa

$$\begin{aligned} p &= \varphi(x, a_1), \\ q &= \psi(y, a_1) \end{aligned}$$

finden. Dann ist

$$z = \int \varphi(x, a_1) dx + \int \psi(y, a_1) dy + a_2$$

das vollständige Integral.

Sei *viertens*

$$f(z, p, q) = 0$$

vorgelegt, so hat man

$$\frac{\partial u}{\partial x} f_p + \frac{\partial u}{\partial y} f_q + \frac{\partial u}{\partial z} (p f_p + q f_q) - \frac{\partial u}{\partial p} p f_z - \frac{\partial u}{\partial q} q f_z = 0$$

zu betrachten. Ein Integral ist jedenfalls

$$u = \frac{q}{p}.$$

Die Auflösung der Gleichungen

$$\begin{aligned} q - a_1 p &= 0, \\ f(z, p, q) &= 0 \end{aligned}$$

möge

$$\begin{aligned} p &= \varphi(a_1, z), \\ q &= a_1 \varphi(a_1, z) \end{aligned}$$

ergeben. Dann bekommt man das vollständige Integral in der Form

$$\int \frac{dz}{\varphi(a_1, z)} = x + a_1 y + a_2.$$

Bemerkung: Man kann übrigens die letzte Differentialgleichung auch auf den schon behandelten Typus

$$F(y, p, q) = 0$$

umformen, indem man x und z ihre Rollen vertauschen läßt. Soll nämlich durch

$$z = z(x, y)$$

x als abhängige, z als unabhängige Variable eingeführt werden, so hat man

$$\begin{aligned} 1 &= p \cdot \frac{\partial x}{\partial z}, \\ 0 &= p \frac{\partial x}{\partial y} + q. \end{aligned}$$

Also wird die Differentialgleichung

$$f\left(z, \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial z}}, -\frac{\frac{\partial x}{\partial y}}{\frac{\partial x}{\partial z}}\right) = 0,$$

ist also vom angegebenen Typus, der dadurch ausgezeichnet ist, daß außer den partiellen Ableitungen nur eine der unabhängigen Variablen, die abhängige gar nicht vorkommt.

§ 9. Differentialgleichungen, in welchen die unbekannte Funktion nicht explizite vorkommt.

Es sollen Differentialgleichungen der Form

$$h(x, y, p, q) = 0$$

untersucht werden. Zunächst bemerkt man sofort, daß die fünf charakteristischen Gleichungen in zwei Gruppen zerfallen. Sie werden nämlich

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= h_p, & \frac{dy}{dt} &= h_q, \\ \frac{dp}{dt} &= -h_x, & \frac{dq}{dt} &= -h_y, \\ \frac{dz}{dt} &= p h_p + q h_q. \end{aligned}$$

Da aber z selbst in h nicht vorkommt, so kann man aus dieser letzten Gleichung z durch eine Quadratur bestimmen, sobald erst die vier anderen Funktionen aus den vier übrigen Gleichungen bestimmt sind.

Kennt man vollends irgendeine einparametrische Schar von Integralen

$$z = V(x, y, a)$$

der partiellen Differentialgleichung, und zwar so, daß in einem gewissen Bereich der x, y, a eine der Ableitungen $\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)$, $\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)$ stetig und von Null verschieden ist, so ist

$$\frac{\partial V}{\partial a} = c$$

ein Integral der charakteristischen Gleichungen.

Unter unseren Voraussetzungen ist nämlich

$$z = V(x, y, a) + b$$

nach S. 252 ein vollständiges Integral der partiellen Differentialgleichung. Denn man kann $z = V + b$, $p = V_x$, $q = V_y$ nach a, b auflösen.

Daher kann man den S. 251 aufgestellten Satz anwenden. Danach findet man die Charakteristiken aus

$$\begin{aligned} z &= V(x, y, a) + b \\ \frac{\partial V}{\partial a} &= c. \end{aligned}$$

Hier also ergeben sich ihre x - y -Projektionen aus

$$\frac{\partial V}{\partial a} = c.$$

§ 10. Anwendungen in der Mechanik.

Die Betrachtungen des vorigen Paragraphen sind von besonderer Wichtigkeit für die ebene Bewegung eines Massenpunktes, auf welchen eine zeitlich konstante Kraft wirkt, welche ein Potential $U(x, y)$ be-

sitzt. Die Bewegungsgleichungen werden nämlich dann, wenn die Masse des Punktes Eins gesetzt wird,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial x},$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial y}.$$

Setzt man $\frac{dx}{dt} = p$ und $\frac{dy}{dt} = q$ und führt noch die kinetische Energie

$$T = \frac{p^2 + q^2}{2}$$

ein, so hat man außerdem

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial T}{\partial q},$$

während man die ersten beiden Gleichungen so schreiben kann:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial x},$$

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial y}.$$

Führt man nun noch die Energie

$$E = T + U$$

ein, so hat man schließlich für die Bewegung diese vier Gleichungen:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = E_p, \\ \frac{dy}{dt} = E_q, \\ \frac{dp}{dt} = -E_x, \\ \frac{dq}{dt} = -E_y. \end{cases}$$

Das sind aber nach § 9 die vier ersten zu

$$(2) \quad \frac{z_x^2 + z_y^2}{2} + U(x, y) = 2c \quad (c = \text{konst.})$$

gehörigen charakteristischen Gleichungen, so daß also die Integration der Bewegungsgleichungen gleichwertig ist mit der partiellen Differentialgleichung (2). Man nennt sie die *Hamiltonsche Gleichung* der Bewegung. (Ihr Bestehen bringt den Energiesatz zum Ausdruck.) Die Bahnkurven der Bewegung sind dann die x - y -Projektionen der Charakteristiken dieser Differentialgleichung. Zur Lösung des mechanischen Problems bedarf man also nur eines vollständigen Integrales dieser Gleichung. Zu seiner Auffindung ist oft die Einführung neuer unabhängiger Variabler zweckmäßig, weil man dadurch z. B. oft die Gleichung auf eine der in § 8 behandelten zurückführen kann.

Als Beispiel werde die Anziehung eines Massenpunktes nach zwei festen Zentren betrachtet. Die beiden Zentren sollen bei ± 1 auf der x -Achse liegen. Man führt elliptische Koordinaten ein. Dazu betrachtet man die konfokalen Kegelschnitte

$$(3) \quad \frac{x^2}{a_1 + \lambda} + \frac{y^2}{a_2 + \lambda} = 1 \quad (a_1 > a_2 > 0 \text{ und } a_1 - a_2 = 1)$$

mit den Brennpunkten $x = \pm 1, y = 0$. Durch jeden Punkt der Ebene gehen zwei Kegelschnitte der Schar hindurch, einer Ellipse und eine Hyperbel. Die Ellipse kommt heraus, wenn der Parameter λ der Ungleichung

$$(4') \quad a_2 + \lambda > 0$$

genügt. Hyperbeln erscheinen, wenn

$$(4'') \quad -a_1 < \lambda < -a_2$$

ist. Ist aber x, y ein beliebiger Punkt der Ebene, so besitzt die Gleichung

$$(5) \quad x^2(a_2 + \lambda) + y^2(a_1 + \lambda) - (a_1 + \lambda)(a_2 + \lambda) = 0$$

für λ stets zwei Wurzeln λ_1 und λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$), von welchen jeder der beiden Ungleichungen (4'), (4'') je eine genügt. Man erkennt das, wenn man das Vorzeichen der linken Seite von (5) für $\lambda \rightarrow +\infty, \lambda = -a_2, \lambda = -a_1$ betrachtet. Setzt man dann die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} x^2(a_2 + \lambda_1) + y^2(a_1 + \lambda_1) &= (a_1 + \lambda_1)(a_2 + \lambda_1) \\ x^2(a_2 + \lambda_2) + y^2(a_1 + \lambda_2) &= (a_1 + \lambda_2)(a_2 + \lambda_2) \end{aligned}$$

an, so kann man daraus x^2 und y^2 durch λ_1 und λ_2 ausdrücken. Man führt die Rechnung am bequemsten durch, indem man für (5)

$$x^2(a_2 + \lambda) + y^2(a_1 + \lambda) - (a_1 + \lambda)(a_2 + \lambda) = -(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$

schreibt und dann nacheinander $\lambda = -a_1$ und $\lambda = -a_2$ setzt. So findet man

$$(6) \quad \begin{cases} x^2 = \frac{(a_1 + \lambda_1)(a_1 + \lambda_2)}{a_1 - a_2} = (a_1 + \lambda_1)(a_1 + \lambda_2) \\ y^2 = \frac{(a_2 + \lambda_1)(a_2 + \lambda_2)}{a_2 - a_1} = -(a_2 + \lambda_1)(a_2 + \lambda_2). \end{cases}$$

Durch λ_1 und λ_2 ist also in jedem Quadranten genau ein Punkt festgelegt. Man nennt λ_1 und λ_2 seine elliptischen Koordinaten.

Wir müssen nun die Entfernungen r und R des Punktes (x, y) von den beiden Zentren in elliptischen Koordinaten ausdrücken. Man hat

$$\begin{aligned} r^2 &= (x - 1)^2 + y^2 = x^2 + y^2 - 2x + 1 \\ R^2 &= (x + 1)^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 2x + 1. \end{aligned}$$

Nun folgt aus (6) daß

$$x^2 + y^2 = a_1 + a_2 + \lambda_1 + \lambda_2$$

ist. Daher findet man

$$r^2 = 2a_1 + \lambda_1 + \lambda_2 - 2\sqrt{(a_1 + \lambda_1)(a_1 + \lambda_2)} = \{\sqrt{a_1 + \lambda_1} - \sqrt{a_1 + \lambda_2}\}^2$$

$$R^2 = 2a_1 + \lambda_1 + \lambda_2 + 2\sqrt{(a_1 + \lambda_1)(a_1 + \lambda_2)} = \{\sqrt{a_1 + \lambda_1} + \sqrt{a_1 + \lambda_2}\}^2.$$

Also

$$r = \sqrt{a_1 + \lambda_1} - \sqrt{a_1 + \lambda_2}$$

$$R = \sqrt{a_1 + \lambda_1} + \sqrt{a_1 + \lambda_2}.$$

Betreffs der Vorzeichen der Wurzeln ist dabei folgendes zu bemerken: Zunächst ist $\operatorname{sgn} \sqrt{(a_1 + \lambda_1)(a_1 + \lambda_2)} = \operatorname{sgn} x$, also durch den Quadranten bestimmt, den man gerade betrachtet. Die Vorzeichen der beiden Wurzeln $\sqrt{a_1 + \lambda_1}$ und $\sqrt{a_1 + \lambda_2}$ sind dann so zu wählen, daß das Vorzeichen ihres Produktes wieder mit dem von x übereinstimmt.

Daher wird nun das Potential

$$U = -\frac{m_1}{r} - \frac{m_2}{R} = -\frac{(m_1 + m_2)\sqrt{a_1 + \lambda_1} + (m_1 - m_2)\sqrt{a_1 + \lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Für die partielle Differentialgleichung benötigen wir weiter den Ausdruck von $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ durch $\frac{\partial z}{\partial \lambda_1}$ und $\frac{\partial z}{\partial \lambda_2}$. Man findet aber aus (6)

$$2x = (a_1 + \lambda_2) \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} + (a_1 + \lambda_1) \frac{\partial \lambda_2}{\partial x}$$

$$0 = (a_2 + \lambda_2) \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} + (a_2 + \lambda_1) \frac{\partial \lambda_2}{\partial x}$$

$$0 = (a_1 + \lambda_2) \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} + (a_1 + \lambda_1) \frac{\partial \lambda_2}{\partial y}$$

$$-2y = (a_2 + \lambda_2) \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} + (a_2 + \lambda_1) \frac{\partial \lambda_2}{\partial y}.$$

Also

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial x} = \frac{2x(a_2 + \lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} = -\frac{2x(a_2 + \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial y} = \frac{2y(a_1 + \lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad \frac{\partial \lambda_2}{\partial y} = -\frac{2y(a_1 + \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Nun wird

$$z_x^2 + z_y^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda_1}\right)^2 (\lambda_{1x}^2 + \lambda_{1y}^2) + 2 \frac{\partial z}{\partial \lambda_1} \frac{\partial z}{\partial \lambda_2} (\lambda_{1x} \lambda_{2x} + \lambda_{1y} \lambda_{2y})$$

$$+ \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda_2}\right)^2 (\lambda_{2x}^2 + \lambda_{2y}^2).$$

Daraus findet man

$$\frac{z_x^2 + z_y^2}{4} = \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda_1}\right)^2 \cdot \frac{(a_1 + \lambda_1)(a_2 + \lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} - \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda_2}\right)^2 \cdot \frac{(a_1 + \lambda_2)(a_2 + \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Die *Hamiltonsche* Gleichung wird also

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \lambda_1}\right)^2 (a_1 + \lambda_1)(a_2 + \lambda_1) - \frac{m_1 + m_2}{2} \sqrt{a_1 + \lambda_1} - \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda_2}\right)^2 (a_1 + \lambda_2)(a_2 + \lambda_2)$$

$$+ \frac{(m_2 - m_1)}{2} \sqrt{a_1 + \lambda_2} = c(\lambda_1 - \lambda_2).$$

Hier sind aber die *Variablen getrennt*, und daher findet man nach S. 253 durch Einführung zweier neuen Integrationskonstanten a und b das vollständige Integral:

$$z = \int d\lambda_1 \sqrt{\frac{a + c\lambda_1 + \frac{m_1 + m_2}{2} \sqrt{a_1 + \lambda_1}}{(a_1 + \lambda_1)(a_2 + \lambda_1)}} + \int d\lambda_2 \sqrt{\frac{a + c\lambda_2 + \frac{m_2 - m_1}{2} \sqrt{a_1 + \lambda_2}}{(a_1 + \lambda_2)(a_2 + \lambda_2)}} + b.$$

Daher wird unter Benutzung der weiteren Integrationskonstanten β

$$\frac{\partial z}{\partial a} = \beta$$

die Gleichung der Bahnkurven. Soll der Massenpunkt die Stelle x_0, y_0 mit gegebener Geschwindigkeit passieren, so ist die Bahnkurve eindeutig bestimmt. Denn aus der Energiegleichung

$$x'^2 + y'^2 - 2\left(\frac{m_1}{r} + \frac{m_2}{R}\right) = 4c$$

entnimmt man den Wert von c . Trägt man den in die Gleichung der Bahnkurve ein, so liefert die Bedingung, daß der Massenpunkt mit gegebener Geschwindigkeit durch den Punkt x_0, y_0 gehen soll, die Bestimmung der Integrationskonstanten a und β .

Um nun auch noch den zeitlichen Ablauf der Bewegung zu erkennen, achten wir darauf, wie die Lösungen der partiellen Differentialgleichung (2) von c abhängen. Wir fügen also dies c den unabhängigen Variablen zu und beachten, daß dann die Ableitung von z nach dieser neuen unabhängigen Variablen in (2) nicht vorkommt. Stellt man für die so aufgefaßte partielle Differentialgleichung (2) die charakteristischen Differentialgleichungen auf¹⁾, so sind die Gleichungen (1) noch durch die beiden folgenden zu ergänzen:

$$\frac{dc}{dt} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial z}{\partial c} \right) = 1.$$

Daraus entnimmt man also, daß

$$\frac{\partial z}{\partial c} = t + \tau$$

ist, und damit ist dann noch der zeitliche Ablauf der Bewegung geregelt. τ ist dabei eine neue Integrationskonstante, durch die der Nullpunkt der Zeitzählung bestimmt wird. Die Bahnkurven der Bewegung lassen sich eingehend diskutieren. Man vgl. z. B. *Charlier*: „Die Mechanik des Himmels“.

¹⁾ Die hier im Vorbeigehen benutzte Theorie der partiellen Differentialgleichungen mit mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen wird S. 260 ff. näher begründet werden.

§ 11. Die Charakteristikentheorie im Fall von n unabhängigen Veränderlichen.

x_1, x_2, \dots, x_n seien n unabhängige Veränderliche, z sei die gesuchte Funktion derselben. Zur Abkürzung werde

$$(1) \quad \frac{\partial z}{\partial x_k} = p_k \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

gesetzt. Dann sei die Differentialgleichung

$$(2) \quad f(x_1 \dots x_n; p_1, p_2, \dots, p_n) = 0 \quad \text{oder kurz } f(x, z, p) = 0$$

vorgelegt. $f(x_1, x_2, \dots, x_n; z; p_1, \dots, p_n)$ und seine Ableitungen erster und zweiter Ordnung sollen in einem gewissen Bereich B der $2n + 1$ Variablen x, z, p stetige Funktionen sein. $x_1^{(0)} \dots x_n^{(0)}; z^{(0)}; p_1^{(0)} \dots p_n^{(0)}$ sei eine Stelle des Bereiches, an der (2) gilt. An dieser Stelle sei $\frac{\partial f}{\partial p_1} \neq 0$.

Ohne uns auf geometrische Betrachtungen einzulassen, definieren wir in Analogie zu dem in § 3 und 4 Bewährten: Unter einem *Element* verstehen wir einen Punkt des genannten Bereiches B . Unter einem *Integralelement* verstehen wir ein Element, das (2) genügt. Unter einem *k -dimensionalen Streifen* verstehen wir eine von k -Parametern τ_1, \dots, τ_k abhängige Schar von Elementen

$$(3) \quad x_\nu = \varphi_\nu(\tau_1, \dots, \tau_k), \quad z = \varphi(\tau_1, \dots, \tau_k), \quad p_\nu = \psi_\nu(\tau_1, \dots, \tau_k). \quad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

Hier sind die $\varphi_\nu, \varphi, \psi_\nu$ samt ihren ersten Ableitungen in einem gewissen Bereich T der Parameter stetig und es gelten die Relationen

$$(4) \quad \frac{\partial z}{\partial \tau_\mu} = p_1 \frac{\partial x_1}{\partial \tau_\mu} + \dots + p_n \frac{\partial x_n}{\partial \tau_\mu} \quad (\mu = 1, 2, \dots, k)$$

Endlich soll der Rang der Matrix

$$(5) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau_k} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau_k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial \tau_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial \tau_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial \tau_k} \end{vmatrix}$$

genau k sein.

Wir nennen einen Streifen *Integralstreifen*, wenn er aus lauter Integralelementen besteht.

Ein eindimensionaler Streifen

$$(6) \quad x_\nu = \varphi_\nu(t), \quad z = \varphi(t), \quad p_\nu = \psi_\nu(t), \quad (\nu = 1, \dots, n)$$

heißt *charakteristisch*, wenn er den folgenden Differentialgleichungen genügt:

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{dx_k}{dt} = f_{p_k}; & \frac{dp_k}{dt} = -f_{x_k} - p_k f_z \quad (k = 1, 2, \dots, n) \\ \frac{dz}{dt} = p_1 f_{p_1} + \dots + p_n f_{p_n}. \end{cases}$$

Als Aufgabe werde gestellt, durch eine $n - 1$ -dimensionale Mannigfaltigkeit R_{n-1} des $n + 1$ -dimensionalen R_{n+1} der (x, y) eine n -dimensionale Integralfläche zu legen. Diese R_{n-1} sei durch

$$(8) \quad \begin{cases} x_k = \varphi_k(\tau_1 \dots \tau_{n-1}) \\ z = \varphi(\tau_1 \dots \tau_{n-1}) \end{cases} \quad (k = 1, \dots, n)$$

gegeben. Dabei seien die φ in einem gewissen Bereich T der τ samt ihren ersten Ableitungen stetig. Der Rang der Matrix

$$(9) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau_{n-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial \tau_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial \tau_{n-1}} \end{vmatrix}$$

sei $n - 1$.

Zunächst müssen wir noch voraussetzen, daß sich durch diese R_{n-1} ein Anfangsintegralstreifen legen lasse. Dieser Streifen ist an die Bedingungen

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial \tau_k} = p_1 \frac{\partial x_1}{\partial \tau_k} + \dots + p_n \frac{\partial x_n}{\partial \tau_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n - 1) \\ f(x, z, p) = 0 \end{cases}$$

gebunden. Nehmen wir an, für $\tau_k = \tau_k^{(0)}$, d. h. $x_k = x_k^{(0)}$, $z = z^{(0)}$, gebe es eine Lösung $p_k = p_k^{(0)}$ dieser Gleichungen und die Funktionaldeterminante

$$(11) \quad \begin{vmatrix} f_{p_1} & \dots & f_{p_n} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \tau_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \tau_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial \tau_{n-1}} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \tau_{n-1}} \end{vmatrix}$$

sei an dieser Stelle von Null verschieden¹⁾. Dann gibt es nach bekannten Sätzen eine Umgebung jener Stelle $(x^{(0)}, z^{(0)})$ der R_{n-1} , für die die Gleichungen lösbar sind. Die Lösungen hängen stetig und differenzierbar von den Parametern ab. Nehmen wir die eben für $x_k^{(0)}, z^{(0)}$ ausgesprochenen Bedingungen längs ganz (8) als erfüllt an, so sind wir damit in der Lage, durch (8) einen Anfangsintegralstreifen zu legen. Er sei

1) Dies ist z. B. wegen $\frac{\partial f}{\partial p_1} \neq 0$ stets dann der Fall, wenn die R_{n-1} diese ist:
 $x_1 = \text{konst.}, \quad z = \varphi(x_2, \dots, x_n).$

$$(12) \quad \begin{aligned} x_k &= \varphi_k(\tau_1 \dots \tau_{n-1}) \\ z &= \varphi(\tau_1 \dots \tau_{n-1}) \\ \dot{p}_k &= \psi_k(\tau_1 \dots \tau_{n-1}). \end{aligned}$$

Hier sind die φ_k , φ , ψ_k in T samt ihren ersten Ableitungen stetig und der Rang von (9) ist $n - 1$.

Ein Element eines solchen Anfangsstreifens ist durch $2n + 1$ Anfangswerte $x^{(0)}$, $z^{(0)}$, $p^{(0)}$ charakterisiert. Wir legen durch dasselbe einen charakteristischen Streifen, indem wir diejenige Lösung der charakteristischen Differentialgleichungen bestimmen, welche für $t = 0$ in $x^{(0)}$, $z^{(0)}$, $p^{(0)}$ übergehen. *Ein solcher charakteristischer Streifen ist ein Integralstreifen, weil sein zu $t = 0$ gehöriges Anfangselement der partiellen Differentialgleichung $f(x^{(0)}, z^{(0)}, p^{(0)}) = 0$ genügt.* Trägt man nämlich in $f(x, z, p)$ die $2n + 1$ den Streifen bestimmenden Funktionen $x = x(t)$, $z = z(t)$, $p = p(t)$ ein und differenziert nach t , so kommt

$$\begin{aligned} & \sum f_{x_k} \cdot \frac{dx_k}{dt} + f_z \frac{dz}{dt} + \sum f_{p_k} \frac{dp_k}{dt} \\ &= \sum f_{x_k} \dot{x}_k + f_z \dot{z} + \sum \dot{p}_k f_{p_k} - \sum f_{p_k} (\dot{x}_k + \dot{z} p_k) = 0. \end{aligned}$$

Daher ändert sich $f(x, z, p)$ mit t nicht. Da aber für $t = 0$ das verschwindende $f(x_0, z_0, p_0)$ herauskommt, so ist $f(x, z, p) = 0$ für alle t , d. h. die in der angegebenen Weise bestimmten charakteristischen Streifen sind lauter Integralstreifen.

Nach den Existenz- und Stetigkeitssätzen über gewöhnliche Differentialgleichungen hängen die charakteristischen Streifen für einen gewissen Bereich der Parameter (τ, t) stetig und stetig differenzierbar von den Parametern ab:

$$(13) \quad \left. \begin{aligned} x_k &= \varphi_k(\tau, t) \\ z &= \varphi(\tau, t) \\ \dot{p}_k &= \psi_k(\tau, t) \end{aligned} \right\} \quad (k = 1, \dots, n).$$

Die den charakteristischen Streifen angehörigen Elemente (x, z, p) sind somit lauter Integralelemente. Erfüllen sie aber auch eine Integralfläche? Um hier etwas beweisen zu können, müssen wir erst den *Begriff der Integralfläche* genau feststellen. Wir definieren: Unter einer Integralfläche verstehen wir einen n -dimensionalen Integralstreifen. Wir wollen nun zeigen, daß die Gleichungen (13) eine Integralfläche darstellen.

Für jede einparametrische Schar aus (13) ist die Streifenbedingung erfüllt. Für die Schar, die durch Konstanthalten aller τ charakterisiert ist, sahen wir das eben schon. Für die Schar, welche durch Konstanthalten von irgend $n - 1$ anderen der n -Parameter τ , t erhalten wird, ist es noch zu zeigen. Wir haben also zu zeigen, daß z. B.

$$(14) \quad \frac{\partial z}{\partial \tau_k} = \sum \dot{p}_i \frac{\partial x_i}{\partial \tau_k}$$

gilt. Für $t = 0$ ist das richtig. Um es allgemein zu bestätigen, setze man

$$(15) \quad \frac{\partial z}{\partial \tau_k} - \sum p_i \frac{\partial x_i}{\partial \tau_k} = u$$

und differenziere (15) nach t und beachte die charakteristischen Differentialgleichungen. Man bekommt so:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial \tau_k} - \sum \frac{\partial p_i}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial \tau_k} + \sum p_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial \tau_k} \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial \tau_k} + \sum f_{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \tau_k} + f_z \sum p_i \frac{\partial x_i}{\partial \tau_k} - \sum p_i \frac{\partial f_{p_i}}{\partial \tau_k} \end{aligned}$$

oder

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum f_{p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \tau_k} + \sum f_{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \tau_k} + f_z \frac{\partial z}{\partial \tau_k}.$$

Die rechte Seite aber ist Null, da ihr Verschwinden ja nur die schon bekannte Tatsache zum Ausdruck bringt, daß ein charakteristischer Streifen, der ein Integralelement enthält, ein Integralstreifen ist. Da aber $u = 0$ für $t = 0$ gilt, so folgt aus $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, daß $u \equiv 0$ für alle t . Damit ist noch immer nicht erkannt, daß die gefundene n -parametrische Schaar von Integralelementen (13) eine Integralfläche ausmacht. Hierzu ist vielmehr noch zu zeigen, daß

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau_{n-1}} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial t} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial \tau_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial \tau_{n-1}} \end{vmatrix} \neq 0$$

ist. Wegen (7) folgt dies aber unmittelbar aus (10/11) längs $t = 0$ und ist daher aus Stetigkeitsgründen auch in eine gewisse Umgebung von $t = 0$ richtig. Man kann somit aus den n ersten Gleichungen (13) $\tau_1 \dots \tau_{n-1}, t$ eindeutig ausrechnen und in $z = \varphi(\tau, t)$ eintragen und bekommt so die Darstellung der Fläche durch eine eindeutige Funktion

$$z = z(x_1, \dots, x_n).$$

Der Nachweis, daß die gefundene Integralfläche die einzige durch die gegebene R_{n-1} ist, ergibt sich daraus, daß zwei Integralflächen, welche ein Flächenelement gemein haben, auch den ganzen durch dies Element bestimmten charakteristischen Streifen gemein haben.

Es sei

$$(16) \quad x_i^{(0)}, z^{(0)}, p_i^{(0)} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

irgendein nicht singuläres Element einer Integralfläche

$$(17) \quad z = z(x_1, \dots, x_n).$$

Ich zeige, daß dann der durch (16) bestimmte charakteristische Streifen der Fläche (17) angehört. Da für diese (2) gilt, so gelten auch die daraus durch Differentiation noch $x_1 \dots x_n$ sich ergebenden Gleichungen (18) längs der Integralfläche:

$$(18) \quad f_{x_k} + f_z \cdot p_k + \sum_{i=1}^n f_{x_i} \frac{\partial p_i}{\partial x_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Nun betrachte man auf der Integralfläche diejenige Kurve durch den Punkt $x_i^{(0)}, z^{(0)}$, für die

$$(19) \quad \frac{dx_k}{dt} = f_{x_k}(x; z(x); p(x))$$

gilt. Längs dieser Kurve ist dann natürlich durch Differentiation von (14) nach t auch

$$(20) \quad \frac{dz}{dt} = \sum_{i=1}^n p_i f_{x_i}$$

erfüllt. Beachtet man nun, daß

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial x_i},$$

so kann man statt (18) auch schreiben

$$(18') \quad f_{x_k} + f_z \cdot p_k + \sum_{i=1}^n f_{x_i} \frac{\partial p_k}{\partial x_i} = 0$$

oder wegen (19)

$$f_{x_k} + f_z \cdot p_k + \frac{dp_k}{dt} = 0$$

oder

$$(21) \quad \frac{dp_k}{dt} = -f_{x_k} - f_z \cdot p_k.$$

(19), (20), (21) aber besagen, daß der durch (21) bestimmte Teilstreifen der Integralfläche gerade der durch (16) bestimmte charakteristische Streifen ist. Derselbe gehört also jeder Integralfläche an, die das Element (15) enthält. Und daher ist durch den Anfangsstreifen (12) eine Integralfläche eindeutig bestimmt.

§ 12. Das vollständige Integral im Falle von n unabhängigen Veränderlichen.

Wir haben uns vorab, bevor wir zu unserer eigentlichen Aufgabe übergehen, mit einem überbestimmten Gleichungssystem

$$(1) \quad \begin{aligned} p_1 &= \varphi_1(x_1, \dots, x_n; z) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ p_n &= \varphi_n(x_1, \dots, x_n; z) \end{aligned}$$

zu befassen. Hier sollen die φ_k samt ihren ersten und zweiten Ableitungen in einem gewissen Bereich B der x, z eindeutig und stetig sein. Die Integrabilitätsbedingungen

$$(1') \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} \varphi_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \varphi_k \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

mögen identisch in B erfüllt sein.

Jedem Punkt desselben wird durch (1) ein Flächenelement zugeordnet. Daher ist zu erwarten, daß durch jeden Punkt $(c_1, \dots, c_n; c)$ von B genau eine Integralfäche von (1) geht. Das läßt sich analog wie S. 241/242 beweisen. Wir gehen folgendermaßen vor:

Zunächst integrieren wir

$$(2) \quad \frac{\partial z}{\partial x_1} = \varphi_1(x_1, c_2, \dots, c_n; z)$$

unter der Anfangsbedingung

$$z = c \quad \text{für} \quad x_1 = c_1.$$

Das möge eine Funktion

$$(3) \quad z = \psi_1(x_1, c_2, \dots, c_n; c; c_1); \quad c = \psi_1(c_1, \dots, c_n; c; c_1)$$

liefern. Sie ist samt ihren ersten und zweiten Ableitungen in einer gewissen Umgebung von $(c_1, \dots, c_n; c)$ stetig. So haben wir die Schnittkurve der Integralfäche mit $x_2 = c_2, \dots, c_n = c_n$ erhalten. Wir schneiden nun weiter bei festem x_1 mit $x_2 = c_2, \dots, x_n = c_n$ so, daß für $x_2 = c_2$

$$z = \psi_1(x_1, c_2, \dots, c_n; c; c_1)$$

herauskommt. Dazu integrieren wir

$$(4) \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} = \varphi_2(x_1, x_2, c_3, \dots, c_n; z)$$

durch eine Funktion

$$(5') \quad z = \psi_2(x_1, x_2, c_3, \dots, c_n; c; c_1, c_2),$$

wo

$$(5'') \quad \psi_1(x_1, c_2, \dots, c_n; c; c_1) = \psi_2(x_1, c_2, \dots, c_n; c; c_1, c_2).$$

In dieser Weise setzen wir das Verfahren fort. Es erreicht seinen Abschluß durch die Integration von

$$(6) \quad \frac{\partial z}{\partial x_n} = \varphi_n(x_1, \dots, x_n; z)$$

durch eine Funktion

$$(7) \quad z = \psi_n(x_1, \dots, x_n; c; c_1, c_2, \dots, c_n)$$

mit der Anfangsbedingung

$$(8) \quad \begin{aligned} & \psi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, c_n; c; c_1, \dots, c_{n-1}) \\ &= \psi_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, c_n; c; c_1, \dots, c_n). \end{aligned}$$

Dabei besitzt ψ_n stetige erste und zweite Ableitungen nach allen seinen Argumenten. Nach (7) ist auch

$$c = \psi_n(c_1, \dots, c_n; z; x_1, \dots, x_n),$$

so daß hier

$$(8') \quad \frac{\partial \psi_n}{\partial c} (x_1, \dots, x_n; c; c_1, \dots, c_n) \neq 0$$

ist in einer gewissen Umgebung von $x_1 = c_1, \dots, x_n = c_n, z = c$, was für später nützlich zu bemerken ist. Nun hat man zu zeigen, daß die durch (7) erklärte Funktion das gesuchte Integral von (1) ist. Zunächst folgt aus der Stetigkeit von ψ_n , daß

$$\begin{aligned} \psi_n(c_1, \dots, c_n; c; c_1, \dots, c_n) &= \psi_{n-1}(c_1, \dots, c_n; c; c_1, \dots, c_{n-1}) \\ &= \psi_{n-2}(c_1, \dots, c_n; c; c_1, \dots, c_{n-2}) = \dots = \psi_1(c_1, \dots, c_n; c; c_1) = c. \end{aligned}$$

Die vorgeschriebene Anfangsbedingung ist also erfüllt. Weiter ist sofort ersichtlich, daß (7) der letzten Gleichung (1) genügt. Denn diese ist mit (6) identisch und aus dieser wurde (7) gewonnen. Um zu sehen, daß (7) auch der vorletzten Gleichung (1) genügt, beachten wir, daß dieser die Funktion $\psi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}; c_n; c; c_1, \dots, c_{n-1})$ genügt, mit der (7) für $x_n = c_n$ nach (8) übereinstimmt. Die Differenz

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial x_{n-1}} - \varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_n; \psi_n) = u$$

ist also für $x_n = c_n$ Null; man differenziere sie nach x_n :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_n} &= \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x_n \partial x_{n-1}} - \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_n} - \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi_n}{\partial x_n} \\ &= \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi_n}{\partial x_{n-1}} - \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_n} - \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi_n}{\partial x_n} \\ &= \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_{n-1}} - \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} \varphi_{n-1} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} \cdot u \\ &\quad - \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_n} - \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial z} \varphi_n \\ &= \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} u \quad (\text{wegen (1')}). \end{aligned}$$

Da aber $u \equiv 0$ das einzige Integral von

$$\frac{\partial u}{\partial x_n} = \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} u$$

ist, das für $x_n = c_n$ verschwindet, so ist $u \equiv 0$ und also genügt (7) auch der vorletzten Gleichung (1). Analog führt man auch den Nachweis, daß (7) allen Gleichungen (1) genügt. *Es gibt also in der Tat ein einziges Integral (7) von (1), das für $x_1 = c_1, \dots, x_n = c_n$ den Wert $z = c$ hat. $\psi_n(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ ist dabei samt seinen ersten und zweiten Ableitungen nach $x_1, \dots, x_n; \lambda; \lambda_1, \dots, \lambda_n$ stetig in einer gewissen Umgebung des Anfangspunktes $(c_1, \dots, c_n; c; c_1, \dots, c_n)$.*

Wir wenden uns einer zweiten Vorbereitung zur Konstruktion eines vollständigen Integrales zu: Jedes Integral

$$(9) \quad f_k(x_1, \dots, x_n; z; p_1, \dots, p_n) = a_k$$

ist nach S. 245 ein Integral der linearen partiellen Differentialgleichung

$$(10) \quad [f, f_k] = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{df_k}{dx_i} - \frac{\partial f_k}{\partial p_i} \frac{df}{dx_i} \right) = 0$$

wo

$$\frac{du}{dx_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial u}{\partial z}$$

gesetzt ist. Wir nennen $[f, f_k]$ wieder einen Klammerausdruck und sagen f und f_k lägen in Involution, wenn $[f, f_k] = 0$ ist.

Ich nehme nun an, man hätte n paarweise in Involution liegende Integrale

$$(11) \quad f = 0, \quad f_1 = a_1 \dots f_{n-1} = a_{n-1}$$

der charakteristischen Gleichungen, wo also, wenn $f_0 = f$ gesetzt wird,

$$[f_i, f_k] = 0 \quad \text{ist für } (i, k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Ich nehme weiter an, daß für einen gewissen Bereich B von Elementen (x, z, p)

$$(12) \quad \frac{d(f, f_1 \dots f_{n-1})}{d(p_1 \dots p_n)} \neq 0$$

sei und daß

$$(13) \quad f(x^{(0)}, z^{(0)}, p^{(0)}) = 0$$

sei. Endlich seien in B die $f, f_1 \dots f_{n-1}$ mit ihren Ableitungen der beiden ersten Ordnungen stetig. Dann kann man in einer gewissen Umgebung U des Elementes $(x^{(0)}, z^{(0)}, p^{(0)})$ die Gleichungen (11) eindeutig nach p_1, \dots, p_n auflösen und erhält

$$(14) \quad p_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n; z; a_1, \dots, a_{n-1}), \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

wo die φ_i samt ihren Ableitungen der beiden ersten Ordnungen in einem gewissen Bereich G der Veränderlichen $x_1, \dots, x_n; z; a_1, \dots, a_{n-1}$ stetige Funktionen sind. Für diese Gleichungen (14) sind nun die Integrabilitätsbedingungen

$$(15) \quad \frac{d\varphi_i}{dx_k} = \frac{d\varphi_k}{dx_i} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

erfüllt. Trägt man nämlich (14) in (11) ein, so entstehen Identitäten in x_1, x_2, \dots, x_n, z . Differentiation ergibt:

$$\frac{df_i}{dx_{\mu}} + \sum_{\lambda=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial p_{\lambda}} \frac{dp_{\lambda}}{dx_{\mu}} = 0.$$

Also wird

$$0 = [f_i f_k] = - \sum_{\mu=1}^n \sum_{\lambda=1}^n \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial p_\lambda} \frac{\partial f_k}{\partial p_\mu} \left(\frac{d p_\lambda}{d x_\mu} - \frac{d p_\mu}{d x_\lambda} \right) \right\}.$$

($i, k = 0, 1, \dots, n-1$).

Durch zweimalige Anwendung von (12) folgt hieraus (15). Man kann somit die erste Vorbemerkung anwenden. Es gibt also genau ein Integral

$$(16) \quad z = V(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_n)$$

von (14), das an einer passenden Stelle $x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ den willkürlich vorgeschriebenen Wert $z = a_n$ annimmt. V ist samt seinen Ableitungen der beiden ersten Ordnungen eine stetige Funktion von $x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_n$ in einem gewissen Bereich dieser Variablen und Parameter. Wir nennen (16) ein vollständiges Integral von

$$f = 0,$$

weil

$$(17) \quad \begin{aligned} z &= V(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_n) \\ p_k &= V_{x_k}(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_n) \end{aligned} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

eine Parameterdarstellung von $f = 0$ ist und als solche in einem gewissen Bereich der (x, z, p) bei passender Weite der Parameter a_1, \dots, a_n alle Elemente von $f = 0$ darstellt. Man kann nämlich die Gleichungen (17) nach den a_1, \dots, a_n eindeutig auflösen und so die partielle Differentialgleichung $f = 0$ in der Form

$$p_1 = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n; z; p_2, \dots, p_n)$$

wieder gewinnen. Wie S. 260 soll nämlich vorausgesetzt sein, daß $\frac{\partial f}{\partial p_1} \neq 0$ ist in dem zu betrachtenden Elementebereich. Dann beweist man die eben ausgesprochene Behauptung ganz analog wie im Falle zweier unabhängiger Variabler auf S. 249. Es folgt aus (8')¹⁾ von S. 266 und (10) von S. 267. Zunächst folgt nämlich aus (8'), daß der Rang der Matrix

$$(18) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial V}{\partial a_1} & \dots & \frac{\partial V}{\partial a_n} \\ \frac{\partial V_{x_1}}{\partial a_1} & \dots & \frac{\partial V_{x_1}}{\partial a_n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial V_{x_n}}{\partial a_1} & \dots & \frac{\partial V_{x_n}}{\partial a_n} \end{vmatrix}$$

n ist. Anderenfalls gäbe es zu jeder Stelle n nicht sämtlich verschwindende Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ derart, daß

¹⁾ Dort ist c durch a_n zu ersetzen.

$$(19) \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial V}{\partial a_i} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial V_{x_k}}{\partial a_i} = 0. \quad (k=1, \dots, n)$$

Wegen (8') ist hier insbesondere mindestens eine der Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ von Null verschieden. Weiter aber sind die (11) identisch erfüllt, wenn man die (17) einträgt. Daher ist

$$(20) \quad f_{kz} \frac{\partial V}{\partial a_\lambda} + \sum_{i=1}^n f_{kx_i} \frac{\partial V_{x_i}}{\partial a_\lambda} = \varepsilon_{k\lambda}, \quad \begin{matrix} (k=0, 1, \dots, n-1) \\ (\lambda=1, 2, \dots, n) \end{matrix}$$

wo $\varepsilon_{k\lambda} = 0$, wenn $\lambda \neq k$, $\varepsilon_{k\lambda} = 1$, wenn $\lambda = k$.

Man wähle nun k so, daß

$$\lambda_k \neq 0$$

ist. Für dies k multipliziere man die Gleichungen (20) der Reihe nach mit $\lambda_1 \dots \lambda_n$ und addiere sie. Dann entsteht wegen (19) links Null, aber rechts $\lambda_k \neq 0$.

Man zeigt nun weiter auf Grund von (10) S. 267, daß gerade

$$(21) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial V}{\partial a_1} & \dots & \frac{\partial V}{\partial a_n} \\ \frac{\partial V_{x_2}}{\partial a_1} & \dots & \frac{\partial V_{x_2}}{\partial a_n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial V_{x_n}}{\partial a_1} & \dots & \frac{\partial V_{x_n}}{\partial a_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

ist. Denn wäre z. B.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial V_{x_1}}{\partial a_1} & \dots & \frac{\partial V_{x_1}}{\partial a_n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial V_{x_n}}{\partial a_1} & \dots & \frac{\partial V_{x_n}}{\partial a_n} \end{vmatrix} \neq 0,$$

so könnte man die Gleichungen

$$(22) \quad p_k = V_{x_k}(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_n)$$

nach den a_1, \dots, a_n auflösen und in $z = V(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_n)$ eintragen. So hätte man $f = 0$ in der Form $z - V = 0$ zurückgewonnen. Wegen

$f_{p_1} \neq 0$ aber ist $\frac{\partial V}{\partial p_1} \neq 0$. Man bekommt aber

$$\frac{\partial V}{\partial p_1} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial a_i} \frac{\partial a_i}{\partial p_1}$$

und aus (22)

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial V_{x_k}}{\partial a_i} \frac{\partial a_i}{\partial p_1} = \varepsilon_{1k} \quad (k = 1, \dots, n)$$

wo $\varepsilon_{1k} = 1$ für $k = 1$, $\varepsilon_{1k} = 0$ für $k > 1$.

Daher wird

$$\frac{\partial V}{\partial p_1} = \frac{d(V, V_{x_2}, \dots, V_{x_n})}{d(a_1, \dots, a_n)} : \frac{d(V_{x_1}, \dots, V_{x_n})}{d(a_1, \dots, a_n)},$$

womit (21) bewiesen ist.

Abschließend werde noch zur Begriffsbestimmung des vollständigen Integrales folgendes bemerkt: Wir nennen weiterhin eine Funktion

$$z = V(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_n)$$

ein vollständiges Integral für einen gewissen Elementebereich, wenn sie in demselben, für a -Werte aus einem gewissen Bereich, der partiellen Differentialgleichung

$$f(x, z, p) = 0$$

genügt, für die $\frac{\partial f}{\partial p_1} \neq 0$ vorausgesetzt ist und wenn dazu der Rang von (18) in diesen Bereichen n ist. Mit a_n werde stets ein Parameter bezeichnet, für den $\frac{\partial V}{\partial a_n} \neq 0$ ist. Dann lehren die vorstehenden Betrachtungen, daß es vollständige Integrale für die Umgebung jedes regulären Elementes gibt.

Wir machen nun Anwendungen auf die Integrationstheorie zunächst der partiellen Differentialgleichung $f = 0$. Wenn ein Anfangsstreifen derselben gegeben ist, durch den eine Lösung eindeutig bestimmt ist, so ist durch jedes Element derselben auch eine Fläche des vollständigen Integrales bestimmt, die die gesuchte Integralfläche längs des charakteristischen Streifens berührt, der durch jenes Anfangselement festgelegt ist. Macht man dies für alle Elemente des Anfangsstreifens, so erscheint die Integralfläche als Enveloppe einer Teilschar des vollständigen Integrales. Um diese Enveloppe zu bestimmen, legen wir noch dar, wie man vermittelst des vollständigen Integrales, den durch ein Anfangselement bestimmten charakteristischen Streifen darstellen kann. Das belegt dann wieder zugleich den Nutzen, den die Theorie der partiellen Differentialgleichungen für die Integration der Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen bietet.

Aus (17) haben wir nämlich die partielle Differentialgleichung in der Form

$$p_1 = \varphi(x_1, \dots, x_n; z; p_2, \dots, p_n)$$

darstellen können, indem wir die erste und die $n - 1$ letzten dieser Gleichungen nach den a_1, \dots, a_n auflösten und das Ergebnis in die zweite Gleichung eintrugen. Diese Form der Differentialgleichung benutzen wir jetzt zur Aufstellung und Integration der Differentialgleichungen der charakteristischen Streifen¹⁾. Die erste derselben wird jetzt

$$\frac{dx_1}{dt} = 1,$$

so daß wir weiterhin $t = x_1$ nehmen wollen. Dann wird für $k=2, 3, \dots, n$

$$(23) \quad \frac{dx_k}{dx_1} = -\frac{\partial \varphi}{\partial p_k} = -\sum_{\lambda=1}^n \frac{\partial V_{x_1}}{\partial a_\lambda} \cdot \frac{\partial a_\lambda}{\partial p_k}.$$

Weiter hat man zu beachten, daß die partielle Differentialgleichung identisch erfüllt ist, wenn man darin (17) einträgt. Das gibt die für a_1, \dots, a_n geltende Identität

$$V_{x_1}(x; a) - V_{x_1}\{x; a[z(x, a); p(x, a)]\} = 0.$$

Also sind auch für alle x und a die Gleichungen erfüllt, die sich hieraus durch Differentiation nach den a ergeben. Das liefert

$$0 = \frac{\partial V_{x_1}}{\partial a_j} - \sum_{\lambda=1}^n \frac{\partial V_{x_1}}{\partial a_\lambda} \left(\frac{\partial a_\lambda}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial a_j} + \frac{\partial a_\lambda}{\partial p_2} \frac{\partial V_{x_1}}{\partial a_j} + \dots + \frac{\partial a_\lambda}{\partial p_n} \frac{\partial V_{x_1}}{\partial a_j} \right) \\ (j = 1, 2, \dots, n).$$

Dies gilt also namentlich auch längs eines jeden charakteristischen Streifens. Beachtet man (23), so gilt also längs eines jeden charakteristischen Streifens — für ihn haben ja die a unveränderliche Werte —

$$(24) \quad 0 = \frac{\partial V_{x_1}}{\partial a_j} - \sum_{\lambda=1}^n \frac{\partial V_{x_1}}{\partial a_\lambda} \frac{\partial a_\lambda}{\partial z} \cdot \frac{\partial V}{\partial a_j} + \sum_{k=2}^n dx_k \frac{\partial V_{x_k}}{\partial a_j} \\ (j = 1, 2, \dots, n).$$

Faßt man dies als ein homogenes lineares Gleichungssystem für

$$1, \frac{dx_2}{dx_1}, \dots, \frac{dx_n}{dx_1}$$

auf, so ist seine Determinante Null. Es ist also stets eine der Gleichungen, eine Folge der übrigen, so daß man sich zur Bestimmung der $\frac{dx_n}{dx_1}$ auf $n - 1$ passende aus diesen Gleichungen linear kombinierte beschränken darf. Wegen (8') ist

$$\frac{\partial V}{\partial a_n}$$

nun von Null verschieden.

¹⁾ Daß zu $f = 0$ und zu $p_1 - \varphi = 0$ dieselben charakteristischen Streifen gehören, erkennt man wie S. 246 im Falle zweier unabhängiger Veränderlicher.

Um nun $n - 1$ Gleichungen aus den (24) herzustellen, welche die zu $j = 1$ gehörige zur Folge haben, müssen wir nur solche $n - 1$ lineare Kombinationen derselben bilden, in welchen die $\frac{dx_k}{dx_1}$ mit von Null verschiedener Determinante eingehen. Nun kann man aber jedenfalls $n - 1$ Zahlen b_j so bestimmen, daß für das Anfangselement des charakteristischen Streifens die $n - 1$ Gleichungen

$$(25) \quad \frac{\partial V}{\partial a_j} + \frac{\partial V}{\partial a_n} b_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n - 1)$$

erfüllt sind. Dementsprechend multipliziere man die Gleichung $j = n$ von (24) mit b_j und füge sie zur j -ten Gleichung hinzu. So erhält man die folgenden $n - 1$ Gleichungen

$$(26) \quad 0 = \frac{\partial V_{x_1}}{\partial a_j} + b_j \frac{\partial V_{x_1}}{\partial a_n} + \sum_{k=2}^n \frac{dx_k}{dx_1} \left(\frac{\partial V_k}{\partial a_j} + b_j \frac{\partial V_k}{\partial a_n} \right) \\ (j = 1, 2, 3, \dots, n - 1).$$

Hier ist aber die Determinante

$$(27) \quad \left\| \frac{\partial V_{x_k}}{\partial a_j} + b_j \frac{\partial V_{x_k}}{\partial a_n} \right\| \neq 0 \quad \left(\begin{array}{l} k = 2, 3, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, n - 1 \end{array} \right)$$

Dies lehrt wegen $\frac{\partial V}{\partial a_n} \neq 0$ ein Blick auf (21). Die b_j werden dabei längs des Streifens unverändert fest gehalten. Zur Bestimmung der x -Koordinaten der charakteristischen Streifen reichen also die (26) völlig aus. Diese aber kann man sofort integrieren. Ihnen genügt nämlich die durch die Gleichungen (25) bestimmte Kurve, welche zum gleichen Anfangselement wie der betrachtete charakteristische Streifen gehört. Zunächst kann man nämlich in der Umgebung dieses Anfangselementes die (25) eindeutig nach x_2, \dots, x_n auflösen, denn die Funktionaldeterminante hinsichtlich x_2, \dots, x_n ist gerade (27). Des weiteren lehrt Differentiation nach x_1 , daß für die durch (25) bestimmte Kurve gerade (26) gilt. Damit ist nun folgendes Ergebnis gewonnen:

Zu jedem charakteristischen Streifen gehören $2n - 1$ Zahlen

$$a_1, \dots, a_n; \quad b_1, \dots, b_{n-1},$$

derart, daß sich mit Hilfe eines vollständigen Integrales der charakteristische Streifen in der Umgebung jenes Elementes so darstellen läßt:

$$z = V(x_1, \dots, x_n; \quad a_1, \dots, a_n) \\ p_\lambda = V_{x_\lambda}(x_1, \dots, x_n; \quad a_1, \dots, a_n) \\ 0 = \frac{\partial V}{\partial a_j} + b_j \frac{\partial V}{\partial a_n}$$

wo $\lambda = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n - 1$ ist.

Die Theorie des vollständigen Integrales hat uns gelehrt, daß man durch die Kenntnis von $n - 1$ Integralen

$$f_k = a_k \quad (k = 1, 2, \dots, n - 1),$$

die mit $f = 0$ und untereinander in Involution liegen, die Integration der $2n + 1$ Differentialgleichungen der charakteristischen Streifen auf die von n gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$(14) \quad p_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n; z; a_1, \dots, a_{n-1}),$$

die sich durch Auflösung der

$$f = 0, \quad f_k = a_k, \quad k = 1, 2, \dots, k - 1$$

nach den p_i ergeben, zurückführen kann.

Von besonderer Wichtigkeit ist der Spezialfall, daß in f die unbekannte Funktion z explizite nicht vorkommt, sondern daß sie nur durch ihre Ableitungen in f eingeht. In diesem Falle kann man die Differentialgleichungen der charakteristischen Streifen in zwei Gruppen zerlegen:

$$(15) \quad x'_k = f_{p_k}, \quad p'_k = -f_{x_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

und

$$z' = \sum_{k=1}^n p_k f_{p_k}.$$

Die ersten $2n$ Differentialgleichungen enthalten z nicht, können also für sich betrachtet werden. Wir nennen sie die *kanonischen* Differentialgleichungen. Auf sie bezieht sich die *Hamilton-Jacobische* Theorie. Ein Hauptergebnis derselben entnehmen wir dem vorhin bewiesenen als Spezialfall. Vermittelt eines vollständigen Integrales

$$z = V(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_n), \quad \frac{\partial V}{\partial a_n} \neq 0$$

von $f = 0$, lassen sich die Lösungen der kanonischen Differentialgleichungen (15) in der folgenden Weise darstellen

$$\frac{\partial V}{\partial a_k} + b_k \frac{\partial V}{\partial a_n} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n - 1)$$

$$p_\lambda = \frac{\partial V}{\partial x_\lambda}(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_n) \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n).$$

Unsere bisherigen Betrachtungen lassen noch die Frage offen, welchen Vorteil man aus der Kenntnis *einiger* mit f und untereinander in Involution liegenden Integrale ziehen kann. Sie enthalten nämlich die Antwort auf diese Frage nur für den Fall, daß man n solche in Involution liegende Integrale kennt. Früheren Erwägungen kann man ja die Antwort auf diese Frage entnehmen für den Fall, daß man n solche in Involution liegende Integrale kennt, und unter der Annahme, daß man die Gleichungen

$$f = 0, \quad f_1 = a_1, \dots, f_{n-1} = a_{n-1}$$

(unter f_i die Integrale verstanden) nach den p_i auflösen kann. Dann kann man nach S. 267 durch eine Quadratur ein vollständiges Integral bestimmen. Wir wollen aber nun die Frage allgemein aufrollen. Wir wollen die Methode angeben, auf die die Untersuchungen von *Lie* geführt haben. Sie führt zu einer sehr eleganten Antwort auf die Frage, welchen Vorteil man aus der Kenntnis einiger in Involution liegenden Integrale für die Integration ziehen kann.

Gegeben seien die in Involution liegenden Integrale

$$(16) \quad f = 0, f_1 = a_1, \dots, f_k = a_k.$$

Zunächst kann man nun einen ersten Schritt machen, der genau dem entspricht, den wir in dem Falle machten, wo n in Involution liegende Integrale gegeben sind. Wir suchen die $k + 1$ Gleichungen nach $k + 1$ der Ableitungen aufzulösen. Zu dem Zweck müssen wir noch annehmen, daß die f_i mit den Ableitungen der beiden ersten Ordnungen in einem gewissen Gebiet der x, z, p stetig und eindeutig sind, sowie daß die Matrix

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial p_n} \\ \frac{\partial f_k}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial f_k}{\partial p_n} \end{vmatrix}$$

den Rang $k + 1$ besitzt. Es ist dann keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir annehmen, daß man die Gleichungen (16) nach den p_1, \dots, p_{k+1} auflösen kann. Diese Auflösung möge ergeben

$$(17) \quad \begin{cases} p_1 = \varphi_1(x, z, p_{k+2} \dots p_n) \\ p_2 = \varphi_2(x, z, p_{k+2} \dots p_n) \\ \vdots \\ p_{k+1} = \varphi_{k+1}(x, z, p_{k+2} \dots p_n). \end{cases}$$

In dem Falle, wo $n + 1$ Integrale bekannt sind, kann man wie S. 249 ein gemeinsames Integral aller bestimmen, und dies erweist sich als das vollständige Integral. Es ist eben dann allen diesen Gleichungen bei festen a_1, \dots, a_n nur ein einziges Integral gemeinsam. Im Falle, wo n Integrale bekannt waren, war ihnen eine einparametrische Schar von Integralen gemeinsam. Heranziehung der übrigen a_i führte wieder zum vollständigen Integral. Diese Erfahrungen legen es nahe, nun nach einer $n - k$ -parametrischen, den Gleichungen (17) gemeinsamen Schar von Integralen zu fragen in der Hoffnung, so wieder zu einem vollständigen Integral zu gelangen. Nun aber wissen wir von S. 245, daß jedes den Gleichungen (17) gemeinsame Integral auch den Gleichungen $[p_i - \varphi_i, p_i - \varphi_i] = 0$ genügt. Im Bestreben, diese Klammerausdrücke zu bilden, werden wir gewahr, daß sie identisch verschwinden, daß also auch die Funktionen $p_i - \varphi_i$ paarweise in Involution liegen.

Die rechten Seiten der Gleichungen (17) also, die wir oben durch Auflösung des Involutionssystemes (16) erhalten haben, liegen selbst in Involution. Unser Ziel ist es, ein von $n - k$ Parametern abhängiges gemeinsames Integral dieser Gleichungen zu finden. Es liegt nahe, den Gleichungen ein Integral abzugewinnen, das für $x_1 = x_1^{(0)}, \dots, x_{k+1} = x_{k+1}^{(0)}$ in

$$z = a_{k+1} + a_{k+2} x_{k+2} + \dots + a_n x_n$$

übergeht. Dabei sind a_{k+1}, \dots, a_n die gewünschten Parameter. Wir werden das ein vollständiges Integral des Involutionssystemes nennen. Es liegt nahe, mit der sogenannten Mayerschen Transformation

$$x_1 = x_1^{(0)} + y_1, \quad x_2 = x_2^{(0)} + y_1 y_2, \quad \dots, \quad x_{k+1} = x_{k+1}^{(0)} + y_1 y_{k+1}$$

in die Gleichungen hineinzugehen. Dabei gehen die Gleichungen (17) in die folgenden über

$$(20) \quad \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial y_1} = \varphi_1 + y_2 \varphi_2 + \dots + y_{k+1} \varphi_{k+1} = \Phi_1, \\ \frac{\partial z}{\partial y_2} = y_1 \varphi_2 = \Phi_2, \\ \frac{\partial z}{\partial y_{k+1}} = y_1 \varphi_{k+1} = \Phi_{k+1}. \end{cases}$$

Wenn es nun tatsächlich ein der angegebenen Anfangsbedingung genügendes Integral gibt, so muß dies schon durch die erste Gleichung bestimmt sein. Denn die Anfangsbedingung lautet jetzt

$$(20') \quad z = a_{k+1} + a_{k+2} x_{k+2} + \dots + a_n x_n \text{ für } y_1 = 0, \text{ d. h. für } x_1 = x_1^{(0)}.$$

Wir werden dies Integral der ersten Gleichung bestimmen und nachweisen, daß es von selbst auch den anderen Gleichungen genügt.

Dies Integral der ersten Gleichung gewinnt man nach S. 262 dadurch, daß man durch die Anfangsmannigfaltigkeit einen Anfangsstreifen legt. Nach S. 261 geht das bei unserer Wahl des Anfangsstreifens immer. So gehören nun zu dem Anfangspunkt $x_{k+2} = b_{k+2}, \dots, x_n = b_n$ Anfangs- p -Werte $p_{k+2} = a_{k+2}, \dots, p_n = a_n$. Der Anfangs- z -Wert ist dann $a_{k+1} + a_{k+2} b_{k+2} + \dots + a_n b_n$. Durch diese Anfangswerte für $t = 0$ ist eine Lösung der zur ersten partiellen Differentialgleichung gehörigen charakteristischen Gleichungen

$$(21) \quad \frac{\partial x_\rho}{\partial y_1} = - \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_\rho}, \quad \frac{\partial p_\rho}{\partial y_1} = \frac{d \Phi_1}{a x_\rho} \quad (\rho = k+2, \dots, n)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y_1} = \sum_{k+2}^n p_\rho \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_\rho} \text{ usw.}$$

bestimmt. Diese sei

$$x_\rho = x_\rho(y_1, y_2, \dots, y_n, a_{k+1} \dots a_n, b_{k+2} \dots b_n)$$

$$z_\rho = z(y_1, y_2, \dots, y_n, a_{k+1} \dots a_n, b_{k+2} \dots b_n)$$

usw.

Dann ist durch diese Gleichungen unmittelbar eine Parameterdarstellung der durch unsere Anfangsbedingung festgelegten Integralfäche gegeben. Die b_i sind dabei die Parameter der Darstellung. Nun ist es leicht, zu verifizieren, daß dieses Integral auch den übrigen partiellen Differentialgleichungen genügt. Um das einzusehen, bilde ich

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y_1 \partial y_i} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_i} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y_i} = \frac{d \Phi_1}{d y_i}.$$

Aus $\left[\frac{\partial z}{\partial y_1} - \Phi_1, p_i - \Phi_i \right] = 0^1$ folgt aber

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_1} - \frac{d \Phi_1}{d y_i} + \sum_{\varrho=k+2}^n \left(\frac{d \Phi_1}{d x_\varrho} \frac{\partial \Phi_i}{\partial p_\varrho} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_\varrho} \frac{d \Phi_i}{d x_\varrho} \right) = 0.$$

Wegen der charakteristischen Gleichungen aber ist dies

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_1} - \frac{d \Phi_1}{d y_i} + \sum_{\varrho=k+2}^n \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial p_\varrho} \frac{d p_\varrho}{d t} - \frac{d \Phi_i}{d x_\varrho} \frac{d x_\varrho}{d t} \right) = 0.$$

Also wird

$$\frac{d \Phi_1}{d y_i} = \frac{d \Phi_i}{d y_1}.$$

Also wird durch Integration nach t

$$\frac{\partial z}{\partial y_i} = \Phi_i + C.$$

Da aber für $t = 0$ die Integrationskonstante Null ist, so ist sie überhaupt Null und wir haben

$$\frac{\partial z}{\partial y_i} = \Phi_i,$$

wie wir sie beweisen wollten.

Das gefundene Integral ist ein vollständiges Integral der ersten partiellen Differentialgleichungen (20) in einer gewissen Umgebung der Anfangsmannigfaltigkeit. Denn für $t = 0$ hat die Funktionaldeterminante der z, p_ϱ ($\varrho = k+2, \dots, n$) hinsichtlich der a_ϱ den Wert Eins. Somit kann man die Gleichungen

$$(22) \quad \begin{cases} Z &= V(y_1, y_2, \dots, y_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n), \\ p_{k+2} &= \frac{\partial V}{\partial x_{k+2}}, \\ &\vdots \\ p_n &= \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{cases}$$

nach den a_ϱ^2 auflösen. Von oben wissen wir bereits, daß auch die Gleichungen

¹⁾ Bei Änderung der Variablen bleibt die Involutionsbeziehung erhalten.

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial V}{\partial x_1}, \\ &\vdots \\ p_{k+1} &= \frac{\partial V}{\partial x_{k+1}} \end{aligned}$$

nach $a_1 \dots a_k$ auflösbar sind. Denn diese waren ja aus den Gleichungen $f = 0$, $f_1 = a_1 \dots f_k = a_k$ durch Auflösung nach den $p_1 \dots p_{k+1}$ entstanden. Diese Werte der $a_1 \dots a_k$ kann man in (22) eintragen. Damit hat man das Ergebnis, daß man die Gleichungen

$$Z = V(y_1, y_2 \dots y_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n),$$

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial V}{\partial x_1}, \\ &\vdots \\ p_n &= \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{aligned}$$

nach den $a_1 \dots a_n$ auflösen kann. Damit aber erweist sich

$$z = V_1(x_1 \dots x_n) = V(y_1, y_2 \dots y_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n)$$

nicht nur als Integral der ursprünglichen partiellen Differentialgleichung $f = 0$, sondern sogar als vollständiges Integral derselben. Somit ist bewiesen, daß die Kenntnis von $k + 1$ in Involution liegenden Integralen von $f = 0$, also die Kenntnis der Integrale $f = 0$, $f_1 = a_1 \dots f_k = a_k$ es erlaubt, die Integration von $f = 0$ auf die Integration einer einzigen partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial z}{\partial y_1} = \Phi_1$ mit $n - k$ unabhängigen Variablen zurückzuführen. Gleichzeitig aber lehrt unsere Betrachtung, daß die Kenntnis von $k + 1$ in Involution liegenden Integralen der charakteristischen Gleichungen (7) S. 261, nämlich der Integrale $f = a$, $f_1 = a_1 \dots f_k = a_k$ es erlaubt, dies System auf ein nur noch $2n - k - 1$ Gleichungen umfassendes (21) zurückzuführen, das wieder als System der charakteristischen Gleichungen einer partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial z}{\partial y_1} = \Phi_1$ auftritt.

Ich schließe diesem Hauptergebnis unserer bisherigen Erörterungen einige Bemerkungen an. Zunächst enthalten unsere Betrachtungen eine *Integrationstheorie des Systeme partieller Differentialgleichungen mit einer unbekanntem Funktion*. Man kann nämlich die Untersuchung eines beliebigen solchen Systems von partiellen Differentialgleichungen stets auf die Integration eines Involutionssystems zurückführen. Dies geht deshalb, weil doch für jedes gemeinsame Integral zweier Gleichungen auch der betreffende Klammerausdruck verschwinden muß. Mehr als $n + 1$ voneinander unabhängiger solcher Gleichungen können aber für ein Integral nicht bestehen. Denn aus $n + 1$ solchen voneinander unabhängigen Gleichungen kann man durch Auflösung schon z und die Ableitungen p eindeutig finden. Entweder

sind dann für diese die übrigen Gleichungen von selbst erfüllt, und dann hat man ein Integral oder man kommt zu Widersprüchen, die sich auch schon darin äußern können, daß die gefundenen p nicht die Ableitungen des gefundenen z sind. Dazu ist nämlich nach S. 267 gerade notwendig und hinreichend, daß die Klammerausdrücke der zur Auflösung benutzten Gleichungen verschwinden. So schließt man leicht, daß man in dem Falle, wo überhaupt gemeinsame Lösungen da sind, nach endlich vielen Schritten auf ein Involutionssystem geführt wird. Und dies kann man nach den vorstehenden Betrachtungen behandeln. Wegen weiterer Einzelheiten muß auf Spezialwerke, wie z. B. *Goursat*: Vorlesungen über die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung verwiesen werden.

Eine *zweite Bemerkung*: Unsere seitherigen Betrachtungen geben noch keinen Aufschluß darüber, welchen Vorteil man aus der Kenntnis einiger untereinander *nicht* in Involution liegenden Integrale für die Integration ziehen kann. Darüber liegen abschließende Untersuchungen von *Lie* vor, die auch in dem erwähnten Werke von *Goursat* zur Darstellung gebracht sind. Sie gipfeln darin, daß der Vorteil, den man aus ihrer Kenntnis ziehen kann, bestimmt ist durch die Zahl der in Involution liegenden Integrale, welche man aus den gegebenen zu bilden vermag. Diese Andeutung mag hier genügen.

Ein aus $k + 1$ Gleichungen von n unabhängigen Veränderlichen bestehendes Involutionssystem hat nach unseren Überlegungen ein von $n - k$ Parametern abhängendes Integral gemeinsam. Es hat die Eigentümlichkeit, daß man die Gleichungen (22) nach diesen $n - k$ Parametern auflösen kann. Eliminiert man nun aus den $k + 1$ Gleichungen des Involutionssystems die k ersten Ableitungen, so erhält man eine partielle Differentialgleichung für z als Funktion der $n - k$ letzten Ableitungen, in die $x_1 \dots x_k$ nur als Parameter eingehen. Das gefundene $n - k$ -parametrische gemeinsame Integral genügt auch dieser neuen Gleichung, und zwar ist es nach der Definition des vollständigen Integrales ein vollständiges Integral dieser neuen Gleichung. Die hinsichtlich der $x_{k+1} \dots x_n$ gebildeten charakteristischen Gleichungen der neuen partiellen Differentialgleichung können daher mit Hilfe dieses vollständigen Integrales in bekannter Weise integriert werden:

$$(23) \quad \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial a_q} + b_q \frac{\partial V}{\partial a_{k+1}} = 0, & (q = k + 2, \dots, n) \\ z = V(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n), \\ p_q = \frac{\partial V}{\partial x_i} & (q = k + 1, \dots, n). \end{cases}$$

Dabei sind b_k neue willkürliche Konstanten. Man gewinnt die Lösungen der charakteristischen Gleichungen als Funktionen von x_k durch Auflösung dieser Gleichungen nach den $x_{k+1}, \dots, x_n, z, p_{k+1}, \dots, p.$

Nun aber wissen wir, daß uns mit diesem vollständigen Integral der neuen partiellen Differentialgleichung zugleich ein vollständiges Integral der ursprünglichen gegeben ist, wofern wir nur noch die k im Involutionssystem steckenden Parameter $a_1 \dots a_k$ mit heranziehen. Die Lösungen der ursprünglichen charakteristischen Gleichungen gewinnt man dann durch Auflösung aus dem nachfolgenden Gleichungssystem:

$$(24) \quad \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial a_\varrho} + b_\varrho \frac{\partial V}{\partial a_k} = 0 & (\varrho = 1, 2, \dots, n, \varrho \neq k) \\ z = V & (x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n) \\ \underline{p}_\varrho = \frac{\partial V}{\partial x_\varrho} & (\varrho = 1, 2, \dots, n). \end{cases}$$

In diesen Gleichungen sind die Gleichungen (22) enthalten.

Wir können den Zusammenhang, der hiernach zwischen den charakteristischen Gleichungen der neuen partiellen Differentialgleichung und den charakteristischen Gleichungen der alten besteht, noch deutlicher hervortreten lassen. Hat man nämlich die neuen charakteristischen Gleichungen integriert, so kennt man hiernach die Auflösungen der Gleichungen (22). Man kennt also die Koordinaten $x_{k+1} \dots x_n$ der Charakteristiken, allerdings noch nicht als Funktionen des Parameters x_{k+1} allein, sondern es gehen noch die k ersten Koordinaten als Parameter ein. Diese aber kann man dann als Funktionen des Parameters x_{k+1} bestimmen, ohne noch einmal auf die Gleichungen zurückgehen zu müssen. Man kann vielmehr aus den Integralen der neuen charakteristischen Gleichungen jedes Integral der neuen partiellen aufbauen. Namentlich also kann man dann auch ihr durch die Anfangsbedingung (20') bestimmtes, vollständiges Integral angeben. Dies ist aber gerade das dem ganzen Involutionssystem gemeinsame vollständige Integral, das also auch der ursprünglichen partiellen Differentialgleichung genügt. Und zwar ist es ein vollständiges Integral derselben, wenn man noch die Parameter $a_1 \dots a_k$ beachtet, von denen es ja auch abhängt. Mit anderen Worten also kann man aus der Kenntnis irgendeines vollständigen Integrales der neuen partiellen erst die Lösungen der neuen charakteristischen Differentialgleichungen, aus diesen alsdann ein vollständiges Integral der alten partiellen, und daraus endlich die Lösungen der gegebenen charakteristischen Gleichungen gewinnen. Damit ist also folgende Regel zu deren Integration gewonnen: *Falls man k mit j und untereinander in Involution liegende unabhängige Integrale kennt, so eliminiert man aus dem Involutionssystem k der Ableitungen der unbekanntenen Funktion. Für die so entstandene neue partielle Differentialgleichung bilde man das System der charakteristischen Gleichungen. Auf ihre Integration ist damit bis auf Eliminationsprozesse die Integration des vorgelegten Systems zurückgeführt.*

§ 13. Kanonische Transformationen und Berührungstransformationen.

Es ist zweckmäßig, auf die Sonderstellung der einen Raumkoordinaten z und damit auf die Darstellung der Integralflächen durch eindeutige Funktionen

$$z = z(x_1, \dots, x_n)$$

zu verzichten.

Wir denken uns vielmehr die Flächen in beliebiger Lage zum Koordinatensystem durch Gleichungen

$$(1) \quad u(x_1, x_2, \dots, x_n; z) = 0$$

dargestellt sind, lassen es dementsprechend dahingestellt, nach welcher Koordinate gerade im einzelnen Punkt die Auflösung möglich ist. Es ist also nur anzunehmen, daß in einem regulären Punkt nicht sämtliche ersten Ableitungen von u gleichzeitig verschwinden. Aus (1) ergibt sich durch Differentiation nach x_k

$$(2) \quad u_{x_k} + u_z \frac{\partial z}{\partial x_k} = 0.$$

Setzen wir für den Augenblick

$$\dot{p}_k = \frac{\partial z}{\partial x_k}$$

$$u_{x_k} = \dot{p}_k, \quad u_z = \dot{p}_0, \quad z = x_0$$

und betrachten den Fall $u_z \neq 0$, der uns bisher allein interessierte, so ist

$$(3) \quad \dot{p}_k = - \frac{p_k}{p_0}$$

und die Differentialgleichung

$$(4) \quad f(x_1, \dots, x_n; z; \dot{p}_1, \dots, \dot{p}_n) = 0$$

wird zu

$$(5) \quad f\left(x_1, \dots, x_n, x_0, - \frac{p_1}{p_0}, \dots, - \frac{p_n}{p_0}\right) = 0.$$

Dies ist eine Differentialgleichung, die nur die unabhängigen Veränderlichen x und die Ableitungen von u enthält, in der aber u selbst nicht explizite vorkommt. Sie ist außerdem homogen von der nullten Dimension in den Ableitungen. Wenn wir uns also weiterhin mit der Theorie von Differentialgleichungen

$$(6) \quad f(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = 0,$$

welche die abhängige Veränderliche nicht explizit enthalten, befassen, so sind darin die Differentialgleichungen (4) bzw. (5) für einen um eins kleineren Wert von n als den in (6) fixierten enthalten. Die unabhängige Variable in (6) wollen wir wieder mit z bezeichnen, so daß in (6)

$$\dot{p}_k = \frac{\partial z}{\partial x_k}$$

ist.

Außer dem schon erwähnten Vorzug, nämlich der Aufhebung der Sonderstellung der einen Raumkoordinate, sprechen noch einige weitere Momente für den in Aussicht genommenen Ansatz. Einmal läßt sich die Theorie viel eleganter und einfacher entwickeln als bei explizitem Vorkommen der unbekanntem Funktion. Des weiteren bietet sich in den Anwendungen in der Mechanik der Fall (6) unmittelbar dar. Aus diesen Gründen ziehen wir es vor, (6) als den allgemeinen Fall und (4) als den sich daraus für kleineres n ergebenden Spezialfall anzusehen, statt, wie es auch möglich wäre (6) als Spezialfall von (4) für das gleiche n anzusehen.

Zur Gleichung (6) gehören gewisse Differentialgleichungen für die charakteristischen Streifen:

$$(7) \quad \frac{dx_k}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial x_k},$$

$$(8) \quad \frac{dz}{dt} = \sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial f}{\partial p_k}.$$

Da in den Gleichungen (7) z nicht vorkommt, so können diese Gleichungen von (8) getrennt für sich untersucht werden. Wir nennen sie die zu (6) gehörigen *kanonischen* Gleichungen.

Unsere Aufgabe ist es im folgenden, diejenigen Transformationen zu untersuchen, welche die Form der kanonischen Gleichungen un geändert lassen. Wir nennen sie *kanonische Transformationen*. Es sind Transformationen

$$(9) \quad \begin{aligned} X_k &= \varphi_k(x_1, \dots, x_n; p_1, \dots, p_n) \\ P_k &= \psi_k(x_1, \dots, x_n; p_1, \dots, p_n) \end{aligned} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

mit zweimal stetig differenzierbaren φ_k und ψ_k und mit einer Funktionaldeterminante, die in dem betrachteten Bereich der x und p nicht verschwindet. Es ist nämlich natürlich, alle unbekanntem Funktionen der kanonischen Gleichungen (7) an der Transformation zu beteiligen. Durch die Transformation (7), deren Umkehrung durch

$$(10) \quad \begin{aligned} x_k &= \Phi_k(X_1, \dots, X_n; P_1, \dots, P_n) \\ p_k &= \Psi_k(X_1, \dots, X_n; P_1, \dots, P_n) \end{aligned} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

gegeben sei, geht

$$(11) \quad f(x_1, \dots, x_n; p_1, \dots, p_n)$$

in

$$(12) \quad \begin{aligned} &F(X_1, \dots, X_n; P_1, \dots, P_n) \\ &= f(\Phi_1, \dots, \Phi_n; \Psi_1, \dots, \Psi_n) \end{aligned}$$

über, und wir verlangen, daß die kanonischen Gleichungen von f in die von F übergehen sollen und zwar soll die Transformation (9) erst dann kanonisch heißen, wenn sie dies für beliebige Wahl von (11) leistet.

f soll immer samt seinen partiellen Ableitungen der beiden ersten Ordnungen in dem zu betrachtenden Bereiche stetig sein. Wir definieren also:

Eine Transformation (9) heißt kanonisch, wenn sie die kanonischen Gleichungen von f in die von F überführt, wo F durch (11) erklärt ist, und zwar bei beliebiger Wahl von f .

Wir verzichten also darauf, auch solche Transformationen zu untersuchen, die nur für gewisse f das gleiche leisten. Bezeichnet man die in den kanonischen Gleichungen vorkommenden Ableitungen nach t durch beigesetzte Striche, bezeichnet man ferner die Ableitungen nach x_λ oder X_λ durch einen unten beigesetzten Index λ , und zwar durch den an zweiter Stelle stehenden, wenn eine schon mit einem Index versehene Funktion zu differenzieren ist und bezeichnet man endlich die Differentiation nach p_λ oder P_λ durch den unten an erster oder zweiter Stelle angefügten Index $n + \lambda$, so bekommt man

$$(13) \quad X'_k = \sum_{\lambda=1}^n (\varphi_{k\lambda} x'_\lambda + \varphi_{k, n+\lambda} p'_\lambda) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

$$P'_k = \sum_{\lambda=1}^n (\psi_{k\lambda} x'_\lambda + \psi_{k, n+\lambda} p'_\lambda)$$

$$(14) \quad F_k = \sum_{\lambda=1}^n (f_\lambda \Phi_{\lambda k} + f_{n+\lambda} \Psi_{\lambda k}) \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

$$F_{n+k} = \sum_{\lambda=1}^n (f_\lambda \Phi_{\lambda, n+k} + f_{n+\lambda} \Psi_{\lambda, n+k})$$

Daher wird

$$(15) \quad \begin{aligned} X'_k - F_{n+k} &= \sum_{\lambda=1}^n (x'_\lambda - f_{n+\lambda}) \Psi_{\lambda, n+k} \\ &\quad - \sum_{\lambda=1}^n (p'_\lambda + f_\lambda) \Phi_{\lambda, n+k} \\ &= \sum_{\lambda=1}^n x'_\lambda (\varphi_{k\lambda} - \Psi_{\lambda, n+k}) \\ &\quad + \sum_{\lambda=1}^n p'_\lambda (\varphi_{k, n+\lambda} - \Phi_{\lambda, n+k}). \end{aligned}$$

$$(16) \quad \begin{aligned} p'_k + f_k &= \sum_{\lambda=1}^n (x'_\lambda - f_{n+\lambda}) \Psi_{\lambda k} \\ &\quad + \sum_{\lambda=1}^n (p'_\lambda + f_\lambda) \Phi_{\lambda k} \\ &\quad + \sum_{\lambda=1}^n x'_\lambda (\psi_{k\lambda} + \Psi_{\lambda k}) \\ &\quad + \sum_{\lambda=1}^n p'_\lambda (\psi_{k, n+\lambda} - \Phi_{\lambda, k}). \end{aligned}$$

Sollen nun die kanonischen Gleichungen von f in die von F übergehen, so müssen in (15) und (16) rechts die an dritter und vierter stehenden Summen stets dann verschwinden, wenn (7) gilt, d. h. wenn $x_k' = f_k$, $p_k' = -f_k$ gilt. Da aber f beliebig gewählt werden darf, so müssen die dritten und vierten Summanden bei beliebiger Wahl von x_λ' , p_λ' verschwinden. Daher ergibt sich:

Eine Transformation (9), (10), mit nicht verschwindender Funktionaldeterminante ist dann und nur dann kanonisch, wenn

$$(17) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_\lambda} &= \frac{\partial \Psi_\lambda}{\partial P_k}, & \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_\lambda} &= -\frac{\partial \Phi_\lambda}{\partial P_k} \\ \frac{\partial \psi_k}{\partial x_\lambda} &= -\frac{\partial \Psi_\lambda}{\partial X_k}, & \frac{\partial \psi_k}{\partial p_\lambda} &= \frac{\partial \Phi_\lambda}{\partial X_k} \end{aligned} \quad (\lambda, k = 1, 2, \dots, n)$$

ist.

Auch hat sich ergeben:

Eine Transformation (9), (10) mit nicht verschwindender Determinante ist dann und nur dann kanonisch, wenn die

$$(18) \quad \dots \quad -x_k' \quad p_k'$$

die gleiche Transformation erfahren wie die

$$(19) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial p_k}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_k},$$

und zwar bei beliebiger Wahl von f oder, wie wir in üblicher Weise sagen wollen, wenn die beiden Größenreihen (18), (19) kogredient transformiert werden.

Wir haben nun gleich auch kontragrediente lineare Transformationen zu betrachten. Die ξ_k mögen in $\bar{\xi}_k$, η_k in $\bar{\eta}_k$ linear transformiert werden ($k = 1, 2, \dots, n$) derart, daß

$$(20) \quad \sum_{k=1}^n \xi_k \eta_k = \sum_{k=1}^n \bar{\xi}_k \bar{\eta}_k.$$

Dann sagen wir, die beiden linearen Transformationen seien kontragredient.

Trägt man in (12) für die x und p differenzierbare Funktionen eines Parameters τ ein und differenziert dann (12) nach demselben, was durch aufgesetzte Punkte bezeichnet sei, so erhält man

$$(21) \quad \begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} \dot{x}_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial p_k} \dot{p}_k \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial X_k} \dot{X}_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial P_k} \dot{P}_k. \end{aligned}$$

Nach (20) werden also die

$$(22) \quad \dot{x}_k, \quad \dot{p}_k$$

kontragredient zu den

$$(23) \quad \frac{\partial f}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial f}{\partial p_k}$$

transformiert. Sie werden also nach (18), (19) auch kontragredient zu den

$$(24) \quad p'_k - x'_k$$

transformiert. *Daher gilt wegen (20)*

$$(25) \quad \sum_{k=1}^n (P'_k \dot{X}_k - \dot{P}_k X'_k) = \sum_{k=1}^n (\dot{p}'_k \dot{x}_k - \dot{p}_k \dot{x}'_k)$$

für jede kanonische Transformation. Umgekehrt ist aber auch jede Transformation, für die (25) gilt, kanonisch. Denn (25) besagt, daß (22) und (24) kontragredient transformiert werden. Wegen (21) werden (22) und (23) bei beliebigen f kontragredient transformiert und daher werden (18) und (19) kogredient transformiert.

Aus (25) folgt die Existenz einer Funktion $\Phi(x_1, \dots, x_n; p_1, \dots, p_n)$ derart, daß

$$(26) \quad \sum_{k=1}^n (P_k X'_k - p_k x'_k) = \Phi'$$

ist. Denn (25) besagt, daß

$$(27) \quad \frac{d}{d\tau} \sum_{k=1}^n (P_k X'_k - p_k x'_k) = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n (P_k \dot{X}_k - p_k \dot{x}'_k)$$

ist. Umgekehrt folgt (27) aus (26) und (27) ist mit (25) gleichbedeutend. Daher haben wir das Ergebnis:

Eine Transformation (9), (10) mit nicht verschwindender Funktionaldeterminante ist dann und nur dann kanonisch, wenn es eine Funktion Φ gibt, für die (26) gilt.

Hier kann nun aber die Beifügung „mit nicht verschwindender Funktionaldeterminante“ weggelassen werden. Denn wenn zu Funktionen (10) eine Φ gehört, so daß (26) gilt, so ist die Funktionaldeterminante von Null verschieden, wie wir jetzt zeigen wollen.

Zunächst ergibt sich aus (26) auch jetzt wieder (27) und daraus (25). Nun wende man (25) unter der Annahme an, daß die aufgesetzten Punkte Ableitung nach x_i oder p_i bedeuten. Dann wird

$$(28) \quad \begin{aligned} \dot{p}'_i &= \sum_{k=1}^n \left(P'_k \frac{\partial X_k}{\partial x_i} - X'_k \frac{\partial P_k}{\partial x_i} \right) \\ \dot{x}'_i &= \sum_{k=1}^n \left(-P'_k \frac{\partial X_k}{\partial p_i} + X'_k \frac{\partial P_k}{\partial p_i} \right). \end{aligned}$$

Dies sind somit die hiernach eindeutig bestimmten Auflösungen der Gleichungen (13). Das Produkt der Determinanten von (13) und (28) ist Eins, wie man durch Einsetzen von (28) und (13) erkennt. Daher ist die Funktionaldeterminante von Null verschieden. Beachtet man noch, daß die Determinante von (28) der von (13) gleich ist, weil sie durch gewisse Vertauschungen und Vorzeichenänderungen aus jener hervorgeht, so erkennt man, daß die Funktionaldeterminante einer kanonischen Transformation stets ± 1 ist. Dies hätte man auch aus (17) ablesen können, doch dort nur mit der hier beseitigten Voraussetzung einer nicht verschwindenden Funktionaldeterminante.

Man kann auch leicht zeigen, daß die Funktionaldeterminante stets ± 1 ist. Man vgl. dazu z. B. *Goursat, Leçons sur le problème de Pfaff, Paris 1922, S. 204.*

Betrachten wir nun zwei stetig differenzierbare Funktionen

$$\begin{aligned} g(x_1, \dots, x_n; p_1, \dots, p_n) \\ h(x_1, \dots, x_n; p_1, \dots, p_n), \end{aligned}$$

die durch (10) in

$$\begin{aligned} (29) \quad & G(X_1, \dots, X_n; P_1, \dots, P_n) \\ &= g(\Phi_1, \dots, \Phi_n; \Psi_1, \dots, \Psi_n) \\ & \quad H(X_1, \dots, X_n; P_1, \dots, P_n) \\ &= h(\Phi_1, \dots, \Phi_n; \Psi_1, \dots, \Psi_n) \end{aligned}$$

übergehen mögen.

Die

$$\frac{\partial g}{\partial x_k} \quad \frac{\partial g}{\partial p_k}$$

werden kontragredient zu

$$x'_k \quad p'_k$$

transformiert, und diese kogredient zu

$$\frac{\partial h}{\partial p_k}, \quad - \frac{\partial h}{\partial x_k}.$$

Daher ist

$$\begin{aligned} (30) \quad & \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial G}{\partial X_k} \frac{\partial H}{\partial P_k} - \frac{\partial G}{\partial P_k} \frac{\partial H}{\partial X_k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial x_k} \frac{\partial h}{\partial p_k} - \frac{\partial g}{\partial p_k} \frac{\partial h}{\partial x_k} \right). \end{aligned}$$

Wir setzen ähnlich wie S. 267 abkürzend

$$(g, h) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial x_k} \frac{\partial h}{\partial p_k} - \frac{\partial g}{\partial p_k} \frac{\partial h}{\partial x_k} \right)$$

und können dann für (30) auch schreiben

$$(31) \quad (G, H) = (g, h).$$

Das Bestehen von (31) für beliebige g, h ist nun aber auch wieder hinreichend dafür, daß Transformationen (9), (10) mit nichtverschwindender Funktionaldeterminante kanonisch wird. Denn (30) besagt, daß

$$(32) \quad \begin{array}{cc} \frac{\partial g}{\partial x_k} & \frac{\partial g}{\partial p_k} \\ \text{kontragredient zu} & \end{array}$$

transformiert werden. Wendet man (11) auf h an, so sieht man, daß

$$(33) \quad \begin{array}{cc} \frac{\partial h}{\partial p_k} & - \frac{\partial h}{\partial x_k} \\ \text{kontragredient zu} & \\ p'_k & - x'_k \end{array}$$

transformiert werden. Also werden tatsächlich (32) und (33) kogredient transformiert.

Setzt man in (30) für g und h die Funktionen φ_k, ψ_k ein, so erhält man

$$(34) \quad \begin{array}{l} (\varphi_i, \varphi_k) = 0 \\ (\psi_i, \psi_k) = 0 \\ (\varphi_i, \psi_k) = 0 \\ (\varphi_i, \psi_i) = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ (i \neq k) \\ (i, k = 1, 2, \dots, n). \end{array}$$

Dies sind wieder notwendige Bedingungen dafür, daß die (9) eine kanonische Transformation darstellen. Sie sind aber für Funktionen X, P mit nicht verschwindender Funktionaldeterminante auch hinreichend. Man berechne zum Beweis nach (29) die

$$\frac{\partial G}{\partial X_k}, \quad \frac{\partial G}{\partial P_k}, \quad \frac{\partial H}{\partial X_k}, \quad \frac{\partial H}{\partial P_k}$$

und trage sie in

$$(G, H)$$

ein und beachte (34); damit findet man wieder (31).

Ergänzt man nun die (9) noch durch

$$(35) \quad Z = z - \Phi,$$

so wird

$$(36) \quad Z' = \sum P_k X'_k = z' - \sum p_k x'_k.$$

Daher sind die P_k die Ableitungen von Z nach den X_k , wenn für p_k die Ableitungen von u nach den x_k genommen werden.

Transformationen, die der Bedingung (36) genügen, rechnet man zu den *Berührungstransformationen*, weil (36) u. a. sagt, daß jeder Streifen in einen Streifen übergeht.

Ich gebe einige *Beispiele von kanonischen Transformationen* an.

$$(37) \quad \begin{array}{l} X_k = p_k \\ P_k = -x_k \end{array}$$

definiert eine solche kanonische Transformation. Denn es ist

$$\sum P_k X'_k - \sum p_k x'_k = -\frac{d}{dt} \sum x_k p_k.$$

Geometrisch bedeutet diese Transformation den Übergang von Punkt- zu Ebenenkoordinaten. Man nennt sie auch die *Eulersche Transformation*.

Ein weiteres Beispiel einer kanonischen Transformation ist die folgende von *Poincaré* angegebene:

$$(38) \quad \begin{aligned} x_k &= \sqrt{2X_k} \cos P_k \\ p_k &= \sqrt{2X_k} \sin P_k \end{aligned} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Es ist nämlich

$$p'_k x_k - \dot{p}_k x'_k = P'_k \dot{X}_k - \dot{P} X'_k.$$

Ich gebe nun einige *Beispiele von kanonischen Transformationen* an. Bedeutet

$$(39) \quad \Omega(x_1, \dots, x_n; X_1, \dots, X_n)$$

eine beliebige zweimal stetige Funktion der x, X , so wird durch

$$(40) \quad \begin{aligned} p_i &= -\frac{\partial \Omega}{\partial x_i} \\ P_i &= \frac{\partial \Omega}{\partial X_i} \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

eine kanonische Transformation definiert, sofern

$$(41) \quad \left\| \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_i \partial X_k} \right\| \neq 0$$

ist. Es ist nämlich

$$(42) \quad \sum P_i X'_i - \sum p_i x'_i = \Omega'.$$

Freilich ist hier Ω anders wie in (26) eine Funktion der x, X . Aber man kann wegen (41) die X aus den n ersten Gleichungen (40) durch die p, x ausdrücken und in (39) eintragen.

Um aus (42) auf (40) schließen zu können, müssen die X' von den x' unabhängig sein. Diese Bemerkung führt zu einer Erweiterung des Ansatzes.

Man nehme nämlich an, daß zwischen den x, X die folgenden ν Relationen

$$(43) \quad \Omega_k(x_1, \dots, x_n; X_1, \dots, X_n) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, \nu)$$

bestehen. Sie mögen voneinander unabhängig sein, d. h. der Rang von

$$(44) \quad \begin{pmatrix} \partial \Omega_k \\ \partial X_i \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (i = 1, \dots, n) \\ (k = 1, \dots, \nu) \end{matrix}$$

möge ν sein.

Dann hat man neben (42) die Relation

$$(45) \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Omega_k}{\partial X_i} X'_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Omega_k}{\partial x_i} x'_i = 0.$$

Es mögen $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ noch unbestimmte Funktionen sein. Man bilde aus (42) und (45)

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \left(P_i - \frac{\partial \Omega}{\partial X_i} + \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial \Omega_k}{\partial X_i} \right) X'_i \\ & - \sum_{i=1}^n \left(p_i + \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} - \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial \Omega_k}{\partial x_i} \right) x'_i = 0. \end{aligned}$$

Wegen der Annahme über den Rang von (44) kann man dann die λ_k so bestimmen, daß

$$(46) \quad \begin{aligned} P_i &= \frac{\partial \Omega}{\partial X_i} - \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial \Omega_k}{\partial X_i} \\ p_i &= - \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial \Omega_k}{\partial x_i} \quad (i = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

gilt. Diese zusammen mit (43) definieren eine kanonische Transformation stets dann, wenn sie überhaupt eine Transformation bestimmen.

Wenn z. B. $r = 1$ ist, also nur eine Relation (43) besteht, so gehen die einem Punkte x angehörigen Elemente in die Elemente X, P über, welche der Fläche $\Omega_1(x, X) = 0$ angehören.

Jeder Punkt x geht also kurz gesagt in eine Fläche über. Bestehen z. B. für drei unabhängige Variable zwei Relationen

$$\Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = 0,$$

so wird jedem Punkt x eine Kurve X zugeordnet.

Bestehen endlich bei drei unabhängigen Variablen drei Relationen, so liegen Punkttransformationen vor.

Man entnimmt dann unserer eben abgeschlossenen Betrachtung, wie man eine Punkttransformation zur kanonischen Transformation erweitert. In diesem Falle sind nämlich durch (43) die X als Funktionen der x gegeben.

Man nehme etwa

$$\begin{aligned} \Omega_k &\equiv X_k - \Phi_k(x_1, \dots, x_n) \\ \Omega &\equiv 0 \end{aligned}$$

an. Dann folgt aus (46)

$$\lambda_k = - P_k$$

und

$$p_i = \sum_{k=1}^n P_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i},$$

woraus man die Darstellung der P_k durch die x, p ablesen kann. Im Falle linearer Φ erleiden also, wie es sein muß, die P die zu den X kontragrediente Transformation.

Man kann diese Betrachtungen zu einer integrallosen Darstellung aller kanonischen Transformationen ausbauen. Uns genügt es aber hier, Beispiele von kanonischen Transformationen gewonnen zu haben.

Die bisher betrachteten kanonischen Transformationen fallen als Spezialfall unter den allgemeinen Begriff der *Berührungstransformation*. Darunter versteht man Transformationen der x, z, p in die X, Z, P , die Streifen in Streifen überführen, für die also eine nichtverschwindende Funktion

$$q(x_1, \dots, x_n; p_1, \dots, p_n)$$

existiert, derart, daß

$$(47) \quad Z' - \sum P_k X'_k = q(z' - \sum p_k x'_k)$$

gilt. Die bisher von uns betrachteten Transformationen sind vor allem dadurch ausgezeichnet, daß in den Transformationsformeln

$$(48) \quad \begin{aligned} Z &= \varphi(x_1, \dots, x_n; z; p_1, \dots, p_n) \\ X_k &= \varphi_k(x_1, \dots, x_n; z; p_1, \dots, p_n) \quad (k = 1, 2, \dots, n) \\ P_k &= \psi_k(x_1, \dots, x_n; z; p_1, \dots, p_n) \end{aligned}$$

die φ_k und ψ_k von z unabhängig sind. Dann ist aber notwendig

$$q = \text{konst.}$$

Bezieht man nämlich in (47) die Striche auf eine Differentiation nach z , so folgt

$$(49) \quad q = \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Bezieht man die Striche auf eine Differentiation nach p_λ , so erhält man rechts Null und daher lehrt (47), daß

$$(50) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p_\lambda} = \sum \varphi_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_\lambda}.$$

Differenziert man (50) nach z und beachtet, daß die rechte Seite von z unabhängig ist, so bekommt man

$$\frac{\partial q}{\partial p_\lambda} = \frac{\partial}{\partial p_\lambda} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_\lambda} \right) = 0$$

und daher ist q von p_λ unabhängig.

Bezieht man die Striche in (47) auf eine Differentiation nach x_λ , so folgt

$$(51) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_\lambda} - \sum \varphi_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_\lambda} = -q p_\lambda.$$

Differenziert man (51) nach p_λ , so kommt rechts nach dem eben bewiesenen $-q$ heraus; links kann man $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\lambda \partial p_\lambda}$ aus (50) durch Differen-

tion nach x_i ausdrücken. Daher läßt sich ϱ allein durch die φ_k und ihre Ableitungen ausdrücken, hängt also von z nicht ab. Differenziert man nun (51) nach z , so erhält man

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) = 0$$

oder es ist auch

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = \frac{\partial \varrho}{\partial x_i} = 0.$$

Also hängt ϱ auch von x_i nicht ab. Daher ist ϱ konstant.

Wir sehen aber auch, daß

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

von z unabhängig ist. Daher ist

$$(53) \quad Z = \varrho z + \Phi(x_1, \dots, x_n; p_1, \dots, p_n).$$

Die Konstanz von ϱ ermöglicht es, die eben betrachteten Berührungstransformationen auf die kanonischen zu reduzieren. Setzt man nämlich

$$\begin{aligned} \xi_k &= x_k \\ \pi_k &= \varrho p_k \\ \zeta &= \varrho z, \end{aligned}$$

so wird nach (47) und (53)

$$\begin{aligned} Z' - \sum P_k X'_k &= \zeta' - \sum p_k x'_k \\ Z &= \zeta + \Phi(x_1, \dots, x_n; p_1, \dots, p_n). \end{aligned}$$

Also

$$\sum P_k X'_k = \sum p_k x'_k + \Phi'.$$

Auch die allgemeinsten durch (47), (48) definierten Berührungstransformationen kann man auf die kanonischen Transformationen reduzieren, wenn man die Zahl der x und p um je eine vermehrt.

Man setze nämlich

$$z = x_0, \quad Z = X_0, \quad p_r = -\frac{y_r}{y_0}, \quad P_r = -\frac{Y_r}{Y_0}, \quad \varrho = \frac{y_0}{Y_0}.$$

Dann wird (47), (48) zu

$$\begin{aligned} Y_0 X'_0 + Y_1 X'_1 + \dots + Y_n X'_n &= y_0 x'_0 + \dots + y_n x'_n \\ X_0 &= \varphi \left(x_1, \dots, x_n; x_0; -\frac{y_1}{y_0}, \dots, -\frac{y_n}{y_0} \right) \\ Y_0 &= \frac{y_0}{\varrho} \\ X_k &= \varphi_k \left(x_1, \dots, x_n; x_0; -\frac{y_1}{y_0}, \dots, -\frac{y_n}{y_0} \right) \\ P_k &= \varphi_k \left(x_1, \dots, x_n; x_0; -\frac{y_1}{y_0}, \dots, -\frac{y_n}{y_0} \right) \quad (k = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Man kann daher die Theorie der allgemeinen Berührungstransformationen aus der Theorie der kanonischen Transformationen entnehmen, statt sie direkt in Analogie zu der der kanonischen Transformationen herzuleiten.

Der eben betrachtete Übergang entspricht durchaus dem zu Beginn dieses Paragraphen an Hand der partiellen Differentialgleichungen dargelegten.

Durch diesen Ansatz findet man, daß bei einer Berührungstransformation, die

$$x'_\nu, \quad p'_\nu$$

kogredient zu

$$\frac{\partial h}{\partial p_\nu}, \quad - \frac{d h}{d x_\nu}$$

und kontragredient zu

$$\frac{d h}{d x_\nu}, \quad \frac{\partial h}{\partial p_\nu}$$

transformiert werden, daß also die charakteristischen Gleichungen von

$$F(X_k, Z, P_k) = 0$$

in die von

$$f(x_k, z, p_k) \equiv F(\varphi_k, \varphi, \psi_k) = 0$$

übergehen, sowie daß

$$[g, h] = \varrho[G, H]$$

ist.

Zu einer Differentialgleichung (6) gehört ein System kanonischer Differentialgleichungen

$$(54) \quad \frac{d x_k}{d t} = \frac{\partial f}{\partial p_k}, \quad \frac{d p_k}{d t} = - \frac{\partial f}{\partial x_k} \quad (k = 1, \dots, n).$$

Für einen gewissen Bereich der x, p gilt der Existenzsatz für Systeme von Differentialgleichungen, wenn man annimmt, daß f mit seinen Ableitungen der drei ersten Ordnungen stetig ist. Schreibt man daher für $t = 0$, die Werte X_k, P_k der x_k, p_k vor, so werden

$$(55) \quad \begin{aligned} x_k &= \Phi_k(t, X_1, \dots, X_n; P_1, \dots, P_n) \\ p_k &= \Psi_k(t, X_1, \dots, X_n; P_1, \dots, P_n) \end{aligned} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Die Gleichungen (55) definieren dann für jedes genügend kleine t eine kanonische Transformation. Die Φ_k, Ψ_k sind nämlich nach unserer Annahmen über f samt den Ableitungen der beiden ersten Ordnungen stetig, und es gilt

$$\frac{d}{d t} \sum_{k=1}^n (\dot{p}_k x'_k - p'_k \dot{x}_k) = 0.$$

Daher ist

$$\sum_{k=1}^n (\dot{p}_k \dot{x}'_k - p'_k \dot{x}_k) = \sum_{k=1}^n (\dot{P}_k \dot{X}'_k - P'_k \dot{X}_k).$$

Die Transformation ist also kanonisch.

Kanonische Transformationen sind auch eng mit dem vollständigen Integral von (6) verknüpft. Sei

$$(55) \quad z \equiv V(x_1, x_2, \dots, x_n; X_1, \dots, X_n)$$

ein solches, so daß

$$(56) \quad \begin{aligned} \dot{p}_1 &= \frac{\partial V}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n; X_1, \dots, X_n) \\ &\vdots \\ \dot{p}_n &= \frac{\partial V}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n; X_1, \dots, X_n) \end{aligned}$$

nach den X_1, \dots, X_n auflösbar ist. Dann ist (56) zusammen mit

$$(57) \quad P_k = - \frac{\partial V}{\partial X_k}(x_1, \dots, x_n; X_1, \dots, X_n)$$

eine kanonische Transformation. Denn es ist

$$\sum \dot{p}_k \dot{x}'_k - \sum P_k \dot{X}'_k = V'.$$

Da aber die Gleichung (6) durch (56) identisch in den x , P befriedigt wird, so wird $F \equiv 0$. Und von F sind die transformierten kanonischen Gleichungen zu bilden. Man erhält nämlich F aus f , indem man in dieses (56) einträgt und darin noch die aus (57) errechneten x einsetzt. Die neuen kanonischen Gleichungen werden daher

$$\frac{dX_k}{dt} = 0, \quad \frac{dP_k}{dt} = 0.$$

Also

$$X_k = a_k, \quad P_k = b_k \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

wo a_k, b_k Konstanten sind, werden die Lösungen der kanonischen Gleichungen. Man erhält daher die Lösungen der alten kanonischen Gleichungen, indem man in (56), (57) die X_k, P_k als Integrationskonstanten ansieht. Wir haben bei dieser Überlegung den Begriff des vollständigen Integrals etwas anders gefaßt als auf S. 268, in dem wir jetzt annehmen, daß man (56) nach dem X_k auflösen könne. Dies wird bei der früheren Definition des vollständigen Integrals nicht stets der Fall sein. Dann geben (56), (57) auch keine kanonische Transformation.

Man kann mit Hilfe der Theorie der Berührungstransformationen auch das S. 272 gewonnene Ergebnis über die Integration der charakteristischen Differentialgleichungen mit Hilfe eines vollständigen Integrals wiederfinden. Ich begnüge mich mit der folgenden kurzen Andeutung.

$$(58) \quad z = V(x_1, \dots, x_n, P_1, \dots, P_n)$$

sei ein vollständiges Integral von

$$f(x_1, \dots, x_n, z, \dot{p}_1, \dots, \dot{p}_n) = 0.$$

Es soll also möglich sein, die Gleichungen (58) und

$$(59) \quad \phi_1 = \frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \phi_n = \frac{\partial V}{\partial x_n}$$

für die $f=0$ genügenden x, z, ϕ aus einem gewissen Bereich nach den P aufzulösen. Für n der $n+1$ Gleichungen (58), (59) sei die zugehörige Funktionaldeterminante von Null verschieden. Die Ableitungen der beiden ersten Ordnungen seien für V stetig. Wir setzen

$$(60) \quad X_1 = \frac{\partial V}{\partial P_1}, \dots, X_n = \frac{\partial V}{\partial P_n},$$

$$(61) \quad \Phi = X_1 P_1 + X_2 P_2 + \dots + X_n P_n,$$

$$(62) \quad Z = z - V + \Phi.$$

Dann ist durch (59), (60), (62) eine Berührungstransformation erklärt. Die transformierte Differentialgleichung gewinnt man durch Elimination von ϕ_1, \dots, ϕ_n aus (58), (60) und (62).

Dieselbe wird

$$(63) \quad Z = X_1 P_1 + \dots + X_n P_n,$$

also eine *Clairautsche* Differentialgleichung. Die transformierten charakteristischen Differentialgleichungen werden daher

$$\begin{aligned} X_i' &= -X_i \\ Z' &= -Z \\ P_i' &= 0 \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Also werden die Charakteristiken

$$(64) \quad \begin{cases} X_k + m_k X_n = 0 & (k = 1, \dots, n-1) \\ Z + m X_1 = 0 \\ P_i = a_i & (i = 1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

wo die a_i, m_k und m willkürliche Konstanten sind. Für die Integralstreifen liefert (63) insbesondere

$$(65) \quad m = -a_1 + a_2 m_2 + a_3 m_3 + \dots + a_n m_n.$$

Daher werden die Lösungen der ursprünglichen zu $f(x, y, z, \phi, q) = 0$ gehörigen charakteristischen Differentialgleichungen gegeben durch (59) und durch

$$(66) \quad \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial P_k} m_k + \frac{\partial V}{\partial P_n} = 0 & (k = 1, \dots, n-1) \\ z - V(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n) + a_1 \frac{\partial V}{\partial P_1} + \dots + a_n \frac{\partial V}{\partial P_n} + m \frac{\partial V}{\partial P_1} = 0. \end{cases}$$

Insbesondere werden also die charakteristischen *Integralstreifen* gegeben durch

$$(67) \quad \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial a_k} + m_k \frac{\partial V}{\partial a_n} = 0 & (k = 1, \dots, n-1) \\ z - V(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n) = 0 \\ \dot{p}_i = \frac{\partial V}{\partial x_i}(x, a) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{cases}$$

Bemerkung. Ein Leser, der sich über die hier besprochenen Dinge aus der *Hamilton-Jacobischen* Theorie noch weiter informieren will, sei auch auf das Buch von *Whittaker*, *Analytische Dynamik*, aus dieser Sammlung verwiesen. In der Dynamik liegt auch das Hauptanwendungsgebiet der kanonischen Transformationen vor. Es sind dort praktische Zwecke der Umformung der Integrationsprobleme, die die kanonischen Transformationen als sehr nützlich erscheinen lassen. Für Fragen mehr prinzipieller Erkenntnis wird davon nur ein bescheidener Gebrauch gemacht.

§ 14. Systeme gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Die Theorie solcher Systeme ist ganz unabhängig von den übrigen Erörterungen dieses Kapitels. Es handelt sich wesentlich um eine Verallgemeinerung des Ansatzes, den wir auch bei den linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten auf S. 123 ff. verwendeten. *Camille Jordan* hat in Erweiterung jenes Ansatzes das folgende elegante Verfahren erdnen. Es sei zunächst eine einzelne lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung für die unbekannte Funktion z vorgelegt:

$$(1) \quad a_0 \frac{d^n z}{dt^n} + \dots + a_n z = 0,$$

wo a_0, \dots, a_n Konstanten sind. Für die Methode ist ein ausgiebiges Rechnen mit Differentialausdrücken charakteristisch. Wir bezeichnen mit

$$Dz$$

den auf der linken Seite von (1) stehenden Differentialausdruck. Wir nennen Dz das (symbolische) Produkt von

$$(1') \quad D \equiv a_0 \frac{d^n}{dt^n} + \dots + a_n$$

und z . Analog erklären wir das (symbolische) Produkt

$$D \cdot D_1,$$

wo

$$D_1 \equiv b_0 \frac{d^m}{dt^m} + \dots + b_m$$

ein zweiter Differentialausdruck ist, durch formales ausmultiplizieren. Unter der charakteristischen Gleichung von (1) verstehen wir die Gleichung

$$(2) \quad a_0 q^n + \dots + a_n = 0.$$

Ihrer Zerlegung

$$a_0(\varrho - \varrho_1)^{\mu_1} \dots (\varrho - \varrho_\nu)^{\mu_\nu} = 0$$

in Linearfaktoren, entspricht die symbolische Zerlegung

$$a_0 \left(\frac{d}{dt} - \varrho_1 \right)^{\mu_1} \dots \left(\frac{d}{dt} - \varrho_\nu \right)^{\mu_\nu} z = 0$$

von (1). Die ϱ_k sollen hier voneinander verschieden sein. Daher hat (1) als Lösungen auch die Lösungen der Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} - \varrho_1 \right)^{\mu_1} z &= 0 \\ \left(\frac{d}{dt} - \varrho_\nu \right)^{\mu_\nu} z &= 0. \end{aligned}$$

Denn die Reihenfolge der Faktoren in der Zerlegung ist gleichgültig, und wenn

$$\left(\frac{d}{dt} - \varrho_\nu \right)^{\mu_\nu} z = 0$$

ist, so führen auch alle darauf angewendeten homogenen Differentialprozesse zu Null. Um aber

$$(3) \quad \left(\frac{d}{dt} - \varrho_k \right)^{\mu_k} z = 0$$

zu integrieren, mache man den Ansatz

$$z = e^{\varrho_k t} \cdot y.$$

Dann wird
$$\left(\frac{d}{dt} - \varrho_k \right) z = e^{\varrho_k t} \frac{dy}{dt}.$$

Also
$$\left(\frac{d}{dt} - \varrho_k \right)^{\mu_k} z = e^{\varrho_k t} \cdot \frac{d^{\mu_k} y}{dt^{\mu_k}}.$$

Daher muß y ein Polynom von höchstens $\mu_k - 1$ -tem Grad sein, das also μ_k Parameter enthält. Nennen wir die allgemeinste so gefundene Lösung von (3) z_k , so wird

$$(4) \quad z = z_1 + \dots + z_\nu^2$$

eine Lösung von (1), die

$$\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_\nu = n$$

Parameter enthält. Sie ist die allgemeinste Lösung von (1). Um das einzusehen, bemerke ich zunächst, daß eine jede Lösung durch ihren Wert bei $t = 0$ und den Wert ihrer $n - 1$ ersten Ableitungen an dieser Stelle bestimmt ist. Die Gesamtheit der Lösungen bedeckt also diesen $2n$ -dimensionalen Bereich vollständig. Ich werde weiter zeigen, daß zwei Lösungen (4), welche sich in ihren Parametern unterscheiden, auch verschieden sind: Daraus folgt, daß die linearen Gleichungen durch die die Anfangswerte der Lösung und ihrer $n - 1$ ersten Ableitungen dargestellt werden, eine von Null verschiedene Determinante besitzen, und daß man daher durch passende Wahl der Parameter jede Lösung herstellen kann.

Es bleibt also zu zeigen, daß in der Form (4) die Null nicht dargestellt werden kann. Wäre aber

$$z \equiv z_1 + z_2 \dots + z_r \equiv 0,$$

so betrachte man den Differentialausdruck

$$D = \left(\frac{d}{dt} - \varrho_1\right)^{\mu_1} \dots \left(\frac{d}{dt} - \varrho_r\right)^{\mu_r}.$$

Dann ist

$$(5) \quad Dz = Dz_1 = 0,$$

weil $z \equiv 0$ sein soll. Man betrachte ferner

$$D_1 = \left(\frac{d}{dt} - \varrho_1\right)^{\mu_1}.$$

Es ist

$$(6) \quad D_1 z_1 = 0.$$

Nun ersetze man $\frac{d}{dt}$ durch eine Variable ϱ ; dann sind die Polynome D und D_1 teilerfremd und es gibt daher zwei andere Polynome P und Q derart, daß

$$(7) \quad PD + QD_1 = 1$$

ist. Man ersetze wieder ϱ durch $\frac{d}{dt}$, dann sind P und Q zwei Differentialausdrücke für die (7) gilt. Daher ist

$$(PD + QD_1) z_1 = 1,$$

wofern z_1 nicht identisch Null ist. Nach (5) und (6) aber wäre

$$(PD + QD_1) z_1 = 0.$$

Daher ist $z_1 \equiv 0$ und daher sind in dem in z_1 vorkommenden Polynom alle Koeffizienten Null.

Nun betrachten wir ein beliebiges System linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

$$(8) \quad \begin{aligned} L_{11} x_1 + L_{12} x_2 + \dots + L_{1n} x_n &= 0 \\ L_{21} x_1 + L_{22} x_2 + \dots + L_{2n} x_n &= 0 \\ L_{n1} x_1 + L_{n2} x_2 + \dots + L_{nn} x_n &= 0. \end{aligned}$$

Hier sollen L_{ik} lineare Differentialausdrücke von der durch (1') erklärten Art sein und x_1, \dots, x_n sind die gesuchten Funktionen von t . Es sei

$$\Delta = \|\| L_{ik} \|\|$$

und δ der größte gemeinschaftliche Teiler aller L_{ik} . Dann multiplizieren wir die Gleichungen (8) der Reihe nach mit

$$\frac{L_{1k}}{\delta}, \quad \frac{L_{2k}}{\delta} \dots \frac{L_{nk}}{\delta} \quad (k = 1, \dots, n)$$

und addieren sie. Dann findet man

$$(9) \quad \frac{\Delta}{\delta} x_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Daher ist jedes x_k notwendig Lösung der einen Differentialgleichung (9). Diese haben wir vorab zu integrieren gelernt. Es mögen wieder $\varrho_1 \dots \varrho_\nu$ die Wurzeln ihrer charakteristischen Gleichung sein und μ_α die Vielfachheit von ϱ_α . Dann gibt es Polynome $P_\alpha^{(k)}$ vom Grade $\mu_\alpha - 1$, so daß

$$(10) \quad x_k = P_1^{(k)} e^{\varrho_1 t} + \dots + P_\nu^{(k)} e^{\varrho_\nu t} \quad (k = 1, \dots, n).$$

Die Koeffizienten der $P_\alpha^{(k)}$ sind noch nicht ganz willkürlich, sondern noch an die Bedingung geknüpft, daß bei Einsetzen von (10) die Gleichungen (8) erfüllt werden. Aber unsere Betrachtung lehrt, daß man stets alle Lösungen in der Form (10) darstellen kann.

Ein wichtiger Spezialfall ist durch die Gleichungen

$$(11) \quad \frac{d x_k}{d t} = a_{k1} x_1 + \dots + a_{kn} x_n \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

gegeben. Hier ist

$$L_{ik} \equiv -a_{ik} \quad (i \neq k)$$

$$L_{kk} = \frac{d}{d t} - a_{kk}.$$

$$\delta \equiv 1$$

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \frac{d}{d t} - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \frac{d}{d t} - a_{nn} & \dots \end{vmatrix}$$

Bilden insbesondere die a_{ik} eine symmetrische Matrix, so sind alle Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$(12) \quad \begin{vmatrix} \varrho - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \varrho - a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

reell und für eine Wurzel ϱ_k der Vielfachheit μ_k wird der Rang der Determinante auf der linken Seite von (12) $n - \mu_k$. (Man vgl. z. B. *Fricke*: Lehrbuch der Algebra, Bd. I, S. 213 oder *Mises-Frank*: Die Differential- und Integralgleichungen der Physik, Bd. I, S. 57 und S. 260.) Trägt man daher die Ausdrücke (10) in die Gleichungen (11) ein, so erkennt man, daß alle Polynome $P_\alpha^{(k)}$ Konstanten sein müssen. Man mache nämlich in (11) den Ansatz

$$x_k = A_{ki} e^{\varrho_i t} \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

wo die A_{ki} Konstanten sind. Dies führt auf die linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} (a_n - \varrho_i) A_{1i} + a_{12} A_{2i} + \dots + a_{1n} A_{ni} &= 0 \\ \vdots & \\ a_{n1} A_{i1} + a_{n2} A_{2i} &+ (a_{nn} - \varrho_i) A_{ni} = 0. \end{aligned}$$

Da dies lineare Gleichungssystem den Rang $n - \mu_i$ hat, besitzt sein Lösungssystem den Rang μ_i , hängt also von μ_i linear unabhängigen Parametern ab. Durch Addition der zu den einzelnen i so gehörigen Lösungen erhält man eine n -parametrische Schar von Lösungen von (II). Die die einzelne Lösung bestimmenden Anfangswerte hängen wieder linear von den Parametern ab. Jedes einzelne x_k genügt der Gleichung

$$\Delta x_k = 0,$$

und wie oben erkennt man, daß eine solche Lösung

$$\sum A_i e^{i t}$$

nur verschwinden kann, wenn alle A_i verschwinden. Daher ist die Determinante jenes linearen Gleichungssystems von Null verschieden, und man kann die A_i so wählen, daß die die Lösung bestimmenden Anfangswerte beliebig gegebenen Werten gleich werden.

Wären also die Koeffizienten der $e^{i t}$ nicht notwendig Konstanten, so müßte man gegen die uns bekannten Tatsachen einzelne Lösungen auf mehrere verschiedene Weisen darstellen können.

Vierter Abschnitt.

Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

I. Kapitel.

Allgemeines.

§ 1. Existenzsatz.

Unsere Ergebnisse im Gebiete der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung legen es nahe, zunächst einmal den Versuch eines ähnlichen Vorgehens zu wagen. Wir wollen also auch jetzt durch Anfangsstreifen Lösungsflächen hindurchlegen. Ich setze dabei voraus, daß die Funktion

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t),$$

durch deren Nullsetzen die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(1) \quad F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0$$

entsteht, eine eindeutige analytische Funktion ihrer Argumente in einem gewissen für dieselben zugrunde gelegten Bereich sei. Zur Abkürzung werden wir häufig setzen

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Unter einem Streifen verstehen wir fünf analytische Funktionen

$$x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = z(u), \quad p = p(u), \quad q = q(u),$$

die für einen gewissen Bereich des Parameters u eindeutig und regulär sind, und die noch der Streifenbedingung

$$(2) \quad z' = p x' + q y'$$

genügen. Bei Gleichungen erster Ordnung ergab sich die Möglichkeit, im allgemeinen durch eine gegebene Kurve einen Integralstreifen hindurchzulegen. Die partielle Differentialgleichung und die Streifenbedingung ergaben nämlich zwei Gleichungen, aus welchen man im

allgemeinen zwei der fünf Funktionen, z. B. p und q , durch die drei anderen ausdrücken kann. Hier bei den Gleichungen zweiter Ordnung entfällt diese Möglichkeit wegen des Auftretens der zweiten Ableitungen r, s, t . Daher erweitern wir unsere Begriffsbildung durch Einführung von *Streifen zweiter Ordnung* und nennen zur Unterscheidung die bisher schlechthin Streifen genannten Gebilde *Streifen erster Ordnung*. Unter einem Streifen zweiter Ordnung verstehen wir nun acht in einem gewissen Bereich des Parameters u eindeutige reguläre analytische Funktionen

$$\begin{aligned} x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = z(u), \quad p = p(u), \quad q = q(u), \quad r = r(u), \\ s = s(u), \quad t = t(u), \end{aligned}$$

die noch gewissen Streifenbedingungen genügen müssen. Eine solche ist zunächst einmal die für die fünf ersten Funktionen bestehende Gleichung (2), die auch jetzt wieder erfüllt sein soll. Dazu kommen aber noch zwei weitere, die aus der gleichen Quelle fließen. Wir finden sie, wenn wir uns vorstellen, daß der durch die fünf ersten Funktionen bestimmte Streifen erster Ordnung einer Fläche angehört, deren zweite Ableitungen r, s, t sind. Dann muß längs des Streifens

$$(3) \quad \begin{cases} p' = r x' + s y', \\ q' = s x' + t y' \end{cases}$$

sein, und das sind die beiden neuen Streifenbedingungen.

Nunmehr wollen wir versuchen, durch einen Streifen erster Ordnung eine Integralfläche zu legen. Wir werden damit beginnen, erst einmal einen Integralstreifen zweiter Ordnung hindurchzulegen. Es gilt jetzt, drei Funktionen

$$r(u), \quad s(u), \quad t(u)$$

aus den drei Gleichungen (1) und (3) zu gewinnen. Bei der Frage nach der Möglichkeit, die drei Gleichungen aufzulösen, spielt ihre Funktionaldeterminante eine Rolle. Ich setze zur Abkürzung

$$R = \frac{\partial F}{\partial r}, \quad S = \frac{\partial F}{\partial s}, \quad T = \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Dann ist diese Funktionaldeterminante

$$(4) \quad \begin{vmatrix} x' & y' & 0 \\ 0 & x' & y' \\ R & S & T \end{vmatrix} = R y'^2 - S x' y' + T x'^2.$$

Setzt man nun voraus, daß man ein erstes Element zweiter Ordnung

$$x_0 = x(u_0), \quad \dots, \quad t_0 = t(u_0)$$

hat, das den drei Gleichungen genügt und für das die Determinante nicht verschwindet, so kann man nach einem bekannten Satz über implizite Funktionen für einen gewissen Bereich $|u - u_0| < \delta$ die

Auflösung bewerkstelligen und für diesen Parameterbereich einen Integralstreifen zweiter Ordnung bestimmen. Man sieht, wie hier diejenigen Integralstreifen zweiter Ordnung eine gewisse Ausnahmerolle spielen werden, für die die Gleichung

$$(5) \quad R y'^2 - S x' y' + T x'^2 = 0$$

besteht. Diese wollen wir *charakteristische Streifen* zweiter Ordnung nennen.

Es wäre nun weiter zu zeigen, daß durch einen nichtcharakteristischen Streifen zweiter Ordnung genau eine Integralfläche hindurchgeht. Um aber bei diesem Nachweis unangenehmer Rechnerei auszuweichen, will ich durch eine gewisse Transformation zu einem einfacheren Fall übergehen. Zunächst will ich die Trägerkurve des nicht charakteristischen Streifens in die x -Achse überführen. Zu dem Zwecke führe ich statt x den Parameter u als eine unabhängige Veränderliche ξ ein und setze außerdem $\eta = y - y(u)$, $\zeta = z - z(u)$. Dies setzt voraus, daß man $x = x(u)$ nach u auflösen kann, d. h. daß die Ableitung $x'(u)$ nicht verschwindet. Durch diese Transformation geht unser Streifen in einen neuen Streifen über. Er erstreckt sich längs eines Stückes der ξ -Achse. Soll er kein charakteristischer Streifen sein, so darf jene Determinante (4) nicht verschwinden. Da aber jetzt längs des Streifens $\eta' = 0$ ist, so darf jetzt T nicht verschwinden. Daher kann man in der Umgebung des gegebenen Streifens die partielle Differentialgleichung nach t auflösen. Wir dürfen daher die weitere Betrachtung an eine Differentialgleichung der Gestalt

$$(6) \quad t = f(x, y, z, p, q, r, s)$$

anknüpfen. Hier ist $f(x, y, z, p, q, r, s)$ eine eindeutige analytische Funktion in einem gewissen Bereich ihrer Argumente; gegeben ist ein längs einer Strecke der x -Achse erstreckter Streifen erster Ordnung. Durch ihn geht, wie wir schon wissen, gerade ein Streifen zweiter Ordnung. Es soll gezeigt werden, daß durch diesen genau eine Integralfläche geht. Dieser Nachweis kann jetzt ohne sonderliche rechnerische Schwierigkeit erbracht werden. Es handelt sich darum, eine Lösung $z(x, y)$ von (6) zu finden, für die $z(x, 0) = 0$, $p(x, 0) = 0^1$, $q(x, 0) = q(x)$ gegeben ist. Durch eine weitere Transformation kann man die Aufgabe erneut ein wenig vereinfachen. Ich setze nämlich an

$$z_1 = z - yq(x).$$

Dann wird

$$\begin{aligned} p_1 &= p - yq', & q_1 &= q - q(x), \\ r_1 &= r - yq'', & s_1 &= s - q', & t_1 &= t. \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung geht dadurch in eine neue derselben Art über.

¹⁾ Dies folgt daraus, daß jedes Element des Streifens durch die x -Achse geht.

Die Aufgabe lautet jetzt: Es ist ein Integral von (6) zu bestimmen, so daß

$$z(x, 0) = 0, \quad p(x, 0) = 0, \quad q(x, 0) = 0$$

ist. Diese Aufgabe kann nun leicht durch Potenzreihenentwicklung gelöst werden. Es ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, anzunehmen, daß das Intervall der x -Achse, in dem der Streifen gegeben ist, den Punkt $x = 0$ enthält. Dann ist die Aufgabe die, das gesuchte Integral nach Potenzen von x und y zu entwickeln. Für die zweiten Ableitungen erhält man zunächst die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} t &= f(x, y, z, p, q, r, s), \\ p' &= r x' + s y', \\ q' &= s x' + t y', \end{aligned}$$

wie sie ja für einen Streifen zweiter Ordnung gelten müssen. Trägt man hier die Bestimmungsstücke des Streifens erster Ordnung bei $x = 0, y = 0$ ein, so werden diese Gleichungen

$$\begin{aligned} t &= f(0, 0, 0, 0, 0, r, s), \\ 0 &= r, \\ 0 &= s, \end{aligned}$$

und man entnimmt ihnen $r = 0, s = 0, t = f(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Man sieht ohne weiteres ein, daß die Ableitungen $\frac{\partial^\mu z}{\partial x^\mu}$ und $\frac{\partial^\mu z}{\partial y \cdot \partial x^{\mu-1}}$ für $\mu > 2$ in $x = y = 0$ alle verschwinden, denn sie können durch Differentiation von $z(x, 0)$ und von $q(x, 0)$ nach x erhalten werden. Da aber beide zu differenzierende Funktionen identisch in x verschwinden, so sind diese Ableitungen auch Null. Die noch zu berechnenden Ableitungen enthalten also alle eine mindestens zweimalige Differentiation nach y . Somit können sie durch Differentiation von t erhalten werden. In

$$t = f(x, y, z, p, q, r, s)$$

stehen aber rechts nur Ableitungen, die eine höchstens einmalige Differentiation nach y enthalten. Differenziert man also t z. B. n -mal nach x , so läßt sich diese Ableitung somit durch andere ausdrücken, die eine höchstens einmalige Differentiation nach y enthalten. Diese sind aber, wie schon festgestellt, bei $x = y = 0$ alle Null. Somit sind auch alle Ableitungen bekannt, in welchen eine höchstens zweimalige Differentiation nach y vorkommt. Differenziert man aber t n -mal nach x und m -mal nach y , so erscheint diese Ableitung ausgedrückt durch andere, in welchen eine höchstens $(m - 1)$ -malige Differentiation nach y vorkommt. Somit kann man auch diese Ableitungen rekurrent ausrechnen. Somit sind bei $x = y = 0$ alle Ableitungen des gesuchten Integrales eindeutig bestimmt, und es fehlt nun nur noch der Nachweis, daß die so für die Integralfäche gefundene Potenzreihe

konvergiert. Dieser Nachweis wird mit Hilfe der von *Cauchy* erfundenen *Majorantenmethode* geführt. Diese Methode knüpft daran an, daß sich nach der eben angestellten Überlegung die höheren Ableitungen linear aus gewissen niedrigeren ausdrücken lassen, mit gewissen Koeffizienten, welche weiter nichts sind als die Werte von $f(x, y, z, p, q, r, s)$ und seinen Ableitungen an der Stelle $x = y = z = p = q = r = s = 0$. Wir ziehen daher zum Vergleich eine andere partielle Differentialgleichung heran, deren Funktion $f(x, y, z, p, q, r, s)$ bei $x = y = 0$ lauter größere Ableitungen hat. Dann hat die nach dem gleichen Verfahren für ihre den gleichen Anfangsbedingungen genügende Lösung zu findende Potenzreihe sicher größere Koeffizienten. Können wir nun aber irgendwie die Konvergenz dieser neuen Reihe in einem gewissen Bereich der x und y feststellen, so folgt daraus auch die Konvergenz derjenigen Reihe, welche der ersten Differentialgleichung genügt. Um eine geeignete derartige Majorante angeben zu können, nehme ich an, $f(x, y, z, p, q, r, s)$ sei für $|x| < \varrho$, $|y| < \varrho$, ..., $|s| < \varrho$ regulär¹⁾ und der Betrag von f läge in diesem Bereiche unter M . Dann lehrt der *Cauchysche* Koeffizientensatz der Funktionentheorie, daß bei $x = y = 0$

$$\frac{1}{\nu_1! \dots \nu_7!} \left| \frac{\partial^{\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_7} f}{\partial x^{\nu_1} \partial y^{\nu_2} \dots \partial s^{\nu_7}} \right| < M$$

ist. Die entsprechenden Ableitungen von

$$V = \frac{M}{(1-x)(1-y) \dots (1-s)}$$

sind nun aber gerade diesen Schranken gleich. Es ist nämlich

$$V = \sum_{\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_7 \geq 0} M \cdot x^{\nu_1} \dots s^{\nu_7}.$$

Daher ist

$$t = V$$

als majorante Gleichung zu brauchen. Aber man übersieht nicht sofort, daß sie ein unseren Anfangsbedingungen genügendes Integral besitzt. Daher benutzen wir eine andere Majorante.

Am einfachsten ist wohl der folgende Weg. Man gehe zunächst zu einem System über, das mit der Gleichung

$$(7) \quad t = V(x, y, z, p, q, r, s)$$

gleichbedeutend ist²⁾. Dies System ist

$$(8) \quad \begin{aligned} z_{1y} &= z_3, \\ z_{2y} &= z_{3x}, \\ z_{3y} &= V(x, y, z_1, z_2, z_3, z_{2x}, z_{3x}). \end{aligned}$$

¹⁾ Da es natürlich keine Beschränkung der Allgemeinheit ist, aber formale Vereinfachungen mit sich bringt, werde weiterhin $\varrho = 1$ angenommen.

²⁾ Man hätte natürlich auch von Anfang an zu einem System übergehen können.

Es ist unter den Anfangsbedingungen

$$(9) \quad z_1(x, 0) = 0, \quad z_2(x, 0) = 0, \quad z_3(x, 0) = 0$$

zu integrieren und entsteht offenbar aus der Gleichung zweiter Ordnung (7), indem man

$$z = z_1, \quad p = z_2, \quad q = z_3$$

setzt. Umgekehrt stehen drei Funktionen, welche dem System (8) und den Anfangsbedingungen (9) genügen, in der Beziehung zueinander, daß $z_2 = z_{1x}$, $z_3 = z_{1y}$ ist. Es ist nämlich nach (8) $z_{2y} = z_{1xy}$. Also ist $z_2 = z_{1x} + f(x)$, wo $f(x)$ gemäß (9) zu bestimmen ist. Das liefert aber $f(x) = 0$. Daher genügt die durch (8), (9) bestimmte Funktion $z = z_1(x, y)$ auch der Gleichung (7). Wir denken uns nun M so gewählt, daß auch z_3 und z_{3x} , d. i. s. für hinreichend kleine $|y|$ dem Betrag nach kleiner als M sind. Dazu muß offenbar nur $M > 1$ gewählt werden, was ohne Beschränkung der Allgemeinheit geschehen kann. Alsdann setzen wir folgende majoranten Gleichungen an

$$(10) \quad \begin{cases} z_{1y} = \frac{M}{(1-x)(1-y)(1-z_1)(1-z_2)(1-z_3)(1-z_{2x})(1-z_{3x})}, \\ z_{2y} = \frac{M}{(1-x)(1-y)(1-z_1)(1-z_2)(1-z_3)(1-z_{2x})(1-z_{3x})}, \\ z_{3y} = \frac{M}{(1-x)(1-y)(1-z_1)(1-z_2)(1-z_3)(1-z_{2x})(1-z_{3x})}. \end{cases}$$

Daß das wirklich Majoranten sind, bestätigt man ohne weiteres, denn bei der Entwicklung der rechten Seiten, d. i.

$$M \sum x^k \sum y^k \sum z_1^k \sum z_2^k \sum z_3^k \sum z_{2x}^k \sum z_{3x}^k,$$

kommen doch alle möglichen Potenzprodukte wirklich vor und ihre Koeffizienten sind alle positive ganze Zahlen.

Die majoranten Gleichungen sind unter den Anfangsbedingungen (9) zu integrieren. Da auch diese wie die drei Gleichungen völlig symmetrisch in den drei unbekanntenen Funktionen aufgebaut sind, ist der Ansatz $z_1 = z_2 = z_3 = \beta$ erlaubt, und es bleibt somit nur die eine Gleichung erster Ordnung

$$\frac{\partial \beta}{\partial y} = \frac{M}{(1-x)(1-y)(1-\beta)^3(1-\beta x)^2}$$

unter der Anfangsbedingung $\beta(x, 0) = 0$ zu integrieren und zu zeigen, daß die Lösung in der Umgebung von $x = y = 0$ nach Potenzen von x und y entwickelt werden kann. Daß aber die Lösungen von analytischen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit analytischen Anfangsbedingungen analytisch sind, läßt die früher gegebene Integrationstheorie erkennen.

§ 2. Charakteristiken.

Im Laufe unserer Betrachtungen über das Existenztheorem sind wir auf die Charakteristiken geführt worden. Und zwar verstanden wir unter einem charakteristischen Streifen zweiter Ordnung die acht Funktionen

$$x(u), \dots, s(u), t(u),$$

welche der partiellen Differentialgleichung (1) bzw. (5), den drei Streifenbedingungen (2), (3) und der Gleichung (4) genügten. Ähnlich wie die charakteristischen Streifen erster Ordnung bei den partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, spielten auch hier diese Streifen eine Ausnahmerolle beim Existenzsatz. Es gelten auch weiterhin für sie ähnliche Sätze wie bei den Gleichungen erster Ordnung. Ich will aber nur kurz bei diesen Dingen verweilen, so interessant sie an sich sein mögen. Der Grund ist der, daß die Betrachtungen zu einer Integrationstheorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung nicht ausgebaut werden konnten. Es ist nicht gelungen, die allgemeine Gleichung zweiter Ordnung auf ein System von gewöhnlichen zurückzuführen. Ob das überhaupt möglich ist, ist noch eine offene Frage. Das ist auch der Grund, aus dem wir mit dem Existenzsatz nicht wie bei den Gleichungen erster Ordnung über den analytischen Fall hinausgedeihen konnten, und daß sich hier nicht der Existenzsatz organisch einer Integrationstheorie einfügt. Ich will somit nur ohne Beweis einige Sätze über Charakteristiken hervorheben. Zunächst sieht man, daß es zwei Scharen von Charakteristiken gibt, da die Gleichung (4) vom zweiten Grade ist. Verfolgt man aber die Sache näher, so erkennt man, daß aus unserer Definition nur sechs gewöhnliche Differentialgleichungen für die acht Streifenfunktionen fließen. Ein Streifen zweiter Ordnung ist also nicht durch eines seiner Elemente bestimmt. Wenn man auch beweisen kann, daß auf jeder Integralfäche durch jedes ihrer Elemente ein ihr angehöriger charakteristischer Streifen zweiter Ordnung gelegt werden kann, so erhält man damit doch keine Integrationstheorie, wie bei den Gleichungen erster Ordnung, wo man nur durch die Elemente eines nichtcharakteristischen Anfangsstreifens die dadurch bestimmten charakteristischen Streifen hindurchlegen mußte. Durch einen jeden charakteristischen Streifen zweiter Ordnung kann man unendlich viele Integralfächen hindurchlegen. Sie haben längs dieses Streifens eine Berührung zweiter Ordnung. Falls zwei Charakteristiken zweiter Ordnung verschiedenen Scharen angehören und ein Element zweiter Ordnung gemeinsam haben, so geht durch beide genau eine Integralfäche hindurch. Diese Bemerkung fließt aus einem allgemeinen von *Goursat* angegebenen Existenzsatz, den wir auch bald bei gewissen linearen Differentialgleichungen bestätigt finden werden. Dieser Satz sagt kurz aus, daß man durch zwei ein-

ander schneidende Raumkurven genau eine Integralfläche legen kann. Genauer formuliert sind die folgenden Voraussetzungen zu machen. *Die beiden gegebenen analytischen Raumkurven sollen von einem Punkte ausgehen und zwei von diesem Punkte ausgehende Trägerkurven von charakteristischen Streifen berühren.* Diese beiden Streifen sollen verschiedenen Scharen angehören. *Dann geht durch beide Kurven gerade eine Integralfläche,* welche sich in der Umgebung der Koordinaten x_0, y_0 des Schnittpunktes nach Potenzen von $x - x_0$ und $y - y_0$ entwickeln läßt. Zunächst kann man durch eine Transformation der x, y erreichen, daß die beiden Kurven der x -z- bzw. y -z-Ebene angehören. Denn durch eine lineare Transformation der x, y kann man zunächst bewerkstelligen, daß die Tangenten der beiden Kurven in diese Ebenen fallen und daß der Schnittpunkt beider Kurven auf die z -Achse fällt. Die Gleichungen der beiden Kurven sehen dann so aus:

$$\begin{cases} y = a_2 x^2 + \dots, \\ z = f(x) \end{cases} \quad \begin{cases} x = b_2 y^2 + \dots, \\ z = g(y) \end{cases}$$

und nun mache man die neue Transformation

$$\begin{aligned} y_1 &= y - a_2 x^2 \dots, \\ x_1 &= x - b_2 y^2 \dots \end{aligned}$$

Damit fallen die beiden Kurven in die beiden erwähnten Ebenen hinein. Nun kann man endlich noch durch eine Transformation von z allein erreichen, daß die beiden Kurven in die x - und in die y -Achse fallen. Wenn nämlich jetzt $z = f(x)$ und $z = g(y)$ die beiden Kurven sind und also $z(x, y)$ der Bedingung

$$z(0, 0) = z_0, \quad z(0, y) = g(y), \quad z(x, 0) = f(x)$$

genügt, so setze man

$$z_1 = z - f(x) - g(y) + z_0,$$

und nun ist $z_1(0, y) = 0, z_1(x, 0) = 0$. Somit kann man sich beim Beweis auf den Fall beschränken, daß ein Integral der Differentialgleichung (5) durch die x - und die y -Achse hindurchgelegt werden soll. Es soll also $z(x, 0) = z(0, y) = 0$ sein. Nun aber war noch angenommen, daß die beiden gegebenen Kurven in ihrem Schnittpunkt Charakteristiken berühren. Somit muß die Gleichung (5), welche die Richtungen der Charakteristiken im Koordinatenanfangspunkt bestimmt, durch $x' = 0$ sowohl wie durch $y' = 0$ erfüllt sein. Wenn nun aber im Ursprung die Integralfläche durch die beiden Koordinatenachsen hindurchgehen soll, so muß die x - y -Ebene dort ihre Tangentialebene sein, also ist im Ursprung $p = q = 0$. Das erkennt man ja auch durch Differentiation von $z(x, 0)$ bzw. $z(0, y)$. Ebenso folgt, daß im

Ursprung auch $r = t = 0$ sein muß, sowie daß im Ursprung $\frac{\partial^r z}{\partial x^r} = \frac{\partial^r z}{\partial y^r} = 0$ ist für alle r . Soll nun also (5) im Ursprung durch $x' = 0$ sowohl wie durch

$y' = 0$ erfüllt sein, so muß im Ursprung $R = 0$ und $T = 0$ sein. Dabei sind diese Funktionen für die Werte $x = y = z = p = q = r = t = 0$ und für $s = f(0, 0, \dots, 0)$ zu bilden. Da aber $R = -\frac{\partial f}{\partial r}$ und $T = -\frac{\partial f}{\partial t}$ ist, so muß in der Umgebung des Ursprungs die Differentialgleichung (5) so aussehen

$$(11) \quad s = a + bx + cy + dz + ep + fq + \dots$$

Die Glieder r und t fehlen, a, b, c, \dots sind Konstanten, und die nicht aufgeschriebenen Glieder sind alle vom zweiten oder höheren Grade. Nunmehr kann der Beweis durch die Majorantenmethode zu Ende geführt werden.

Man kann nämlich aus (11) sämtliche Ableitungen der Lösung im Ursprung durch sukzessives Differenzieren nach x und y bestimmen, da wir schon wissen, daß die Ableitungen nach den x oder nach den y allein alle verschwinden. Daher lassen sich alle Ableitungen additiv aus solchen niedrigerer Ordnung aufbauen und man bekommt sicherlich Majoranten für diese Koeffizienten, wenn man den Koeffizientenbestimmungsprozeß auf eine Gleichung anwendet, die aus (11) dadurch hervorgeht, daß man alle Koeffizienten von (11) durch positive absolut genommen nicht kleinere ersetzt. Die majorante Differentialgleichung muß dazu so beschaffen sein, daß man die Konvergenz der Lösungsreihe übersieht.

Zunächst schätzen wir die Koeffizienten von (11) ab. Ich nehme dazu an, daß die rechte Seite von (11) absolut genommen kleiner als M sei, während

$$|x| < \varrho, \quad |y| < \varrho, \quad |z| < \varrho, \quad |p| < \varrho, \quad |q| < \varrho, \quad |r| < \varrho, \quad |t| < \varrho$$

ist.

Die Abschätzungen sollen für beliebige komplexe Variablenwerte gelten. Dann ergibt sich rechts in (11) für den Koeffizienten eines jeden Gliedes, in das die Variablen zur Exponentensumme ν eingehen, als majoranter Wert

$$\frac{M}{\varrho^\nu}$$

Eine majorante Differentialgleichung ist dann

$$(12) \quad s = \frac{M}{\left(1 - \frac{x+y}{\varrho}\right) \left(1 - \frac{z}{\varrho}\right) \left(1 - \frac{p+q}{\varrho}\right) \left(1 - \frac{r+t}{\varrho}\right)} - M \left(1 + \frac{r+t}{\varrho}\right).$$

Zur Integration von (12) machen wir den Ansatz

$$z = f(u), \quad u = x + y.$$

Dadurch geht (12) in (13) über:

$$(13) \quad z'' = \frac{M}{\left(1 - \frac{u}{\varrho}\right) \left(1 - \frac{z}{\varrho}\right) \left(1 - \frac{z}{\varrho} z'\right) \left(1 - \frac{z}{\varrho} z''\right)} - M \left(1 + \frac{2}{\varrho} z''\right)$$

oder anders geschrieben

$$z'' \left(1 - \frac{2}{\varrho} z''\right) + M \left(1 - \left(\frac{2}{\varrho}\right)^2 (z'')^2\right) = \frac{M}{\left(1 - \frac{u}{\varrho}\right) \left(1 - \frac{z}{\varrho}\right) \left(1 - \frac{2}{\varrho} z'\right)}$$

oder

$$-(z'')^2 \left(\frac{2}{\varrho} + M \left(\frac{2}{\varrho}\right)^2\right) + z'' = \frac{M}{\left(1 - \frac{u}{\varrho}\right) \left(1 - \frac{z}{\varrho}\right) \left(1 - \frac{2}{\varrho} z'\right)} - M.$$

Diese Gleichung kann man um $u = z = z' = 0$ nach z'' auflösen:

$$z'' = \varphi(u, z, z'),$$

wo φ nach Potenzen von u, z, z' fortschreitet und lauter positive Koeffizienten besitzt. Nach der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen besitzt diese Gleichung eine wohlbestimmte Lösung, welche nach Potenzen von u in der Umgebung von $u = 0$ entwickelt werden kann und die bei $u = 0$ verschwindet. Ihre Koeffizienten bekommt man durch sukzessives Differenzieren von φ . Sie sind also alle positiv. Ersetzt man u durch $x + y$, so hat man eine Lösung von (12) mit lauter positiven Koeffizienten, die größer sind als die der gesuchten Reihe, die (11) befriedigt. Denn die Koeffizienten von x^n und y^n sind in der neuen Reihe positiv und die übrigen Koeffizienten gewinnt man aus diesen als ganze rationale Funktionen mit positiven Koeffizienten.

§ 3. Monge-Ampèresche Differentialgleichungen.

Das sind Differentialgleichungen von folgender Gestalt:

$$(14) \quad 0 = A + Br + Cs + Dt + E(rt - s^2).$$

Die Koeffizienten sind analytische Funktionen von x, y, z, p, q . Sie umfassen also namentlich auch die in den Ableitungen r, s, t linearen Differentialgleichungen, für die $E = 0$ ist. Diesem wichtigen Sonderfall werden wir uns bald zuwenden. Hier soll es sich um die Feststellung handeln, daß man in gewissen Fällen die Integration auf die von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführen kann. Dies hängt mit Besonderheiten zusammen, welche die Charakteristiken der Monge-Ampèreschen Gleichungen aufweisen. Man kann nämlich Streifen erster Ordnung angeben, welche Träger aller charakteristischen Streifen zweiter Ordnung sind. Für einen charakteristischen Streifen zweiter Ordnung müssen neben der partiellen Differentialgleichung (14) noch die beiden Gleichungen (3) sowie die Gleichung (5) gelten. Diese letztere lautet hier so:

$$(15) \quad (B + Et)y'^2 + (C - 2Es)x'y' + (D + Er)x'^2 = 0.$$

Nun folgt aber aus (3), daß

$$ty'^2 + 2sx'y' + rx'^2 = x'p' + y'q'$$

ist. Daher kann man statt (12) auch schreiben

$$(16) \quad By'^2 + Cx'y' + Dx'^2 + E(x'p' + y'q') = 0.$$

Löst man endlich (3) nach r und t auf und trägt das Gefundene in (11) ein, so wird wegen (13) auch noch

$$(17) \quad A x' y' + B p' y' + D q' x' + E p' q' = 0.$$

Ein Streifen erster Ordnung nun, für welchen die beiden Gleichungen (16) und (17) gelten, soll ein charakteristischer Streifen erster Ordnung heißen. Aus der eben angestellten Betrachtung folgt, daß jeder charakteristische Streifen zweiter Ordnung einen solchen erster Ordnung enthält, oder mit anderen Worten, daß die fünf ersten Funktionen eines charakteristischen Streifens zweiter Ordnung einen charakteristischen Streifen erster Ordnung bestimmen. Umgekehrt kann man auch zeigen, daß unter der Zusatzannahme, daß $C^2 - 4BD + 4EA \neq 0$ ist, d. h. nach (15), daß die beiden Scharen der Streifen zweiter Ordnung nirgends zusammenfallen, jeder charakteristische Streifen erster Ordnung in einem charakteristischen Streifen zweiter Ordnung enthalten ist; die zu einem charakteristischen Streifen erster Ordnung gehörigen charakteristischen Streifen zweiter Ordnung hängen noch von einem Parameter ab. Doch will ich dem nicht weiter nachgehen. Die charakteristischen Streifen erster Ordnung müssen sich nun ebenso wie die Streifen zweiter Ordnung in zwei Scharen zerlegen lassen. Diese Zerlegung bewerkstelligt man leicht, wenn man von der Zerlegung der Streifen zweiter Ordnung in zwei Scharen ausgeht. Zu dem Zweck löse man die Gleichung (15) nach $y': x'$ auf. Man findet wegen (14)

$$(18) \quad \frac{y'}{x'} = \frac{C - 2Es \pm \sqrt{C^2 - 4BD + 4EA}}{2(B + Et)}$$

als die beiden Wurzeln. Nennt man nun die beiden Wurzeln der Gleichung

$$(18') \quad \lambda^2 + C\lambda + BD - EA = 0$$

λ_1 und λ_2 , so kann man für (18) auch kurz schreiben

$$y' (B + Et) + Es x' + \lambda_1 x' = 0$$

$$y' (B + Et) + Es x' + \lambda_2 x' = 0.$$

Wegen (3) kann man dafür aber wieder schreiben

$$(19a) \quad y' B + E q' + \lambda_1 x' = 0$$

$$(19b) \quad y' B + E q' + \lambda_2 x' = 0.$$

Verwendet man nun (19a) oder (19b) genau so wie vorhin (18), so findet man unter Berücksichtigung von (17), daß neben (19a) auch

$$(20a) \quad x' D + E p' + \lambda_2 y' = 0$$

gelten muß, und daß neben (19b) auch noch

$$(20b) \quad x' D + E p' + \lambda_1 y' = 0$$

sein muß. Damit sind die beiden Scharen der Charakteristiken erster Ordnung getrennt. Die eine Schar ist definiert durch (2), (19a), (20a), die andere durch (2), (19b), (20b).

Auf jeder Integralfläche von (14) liegen sowohl Charakteristiken der ersten wie der zweiten Art. Beide fallen übrigens für $\lambda_1 = \lambda_2$ zusammen.

An der Spitze der Integrationstheorie steht der Satz, daß eine jede Fläche, welche aus solchen Charakteristiken erster Ordnung aufgebaut ist, eine Integralfläche von (14) ist. Ich will also annehmen, ein Flächenstück werde durch eine einparametrische Schar von Charakteristiken erster Ordnung lückenlos überdeckt, und zwar sei

$$x = x(u, v), \dots, \quad q = q(u, v)$$

eine Parameterdarstellung des Flächenstückes und seiner Ableitungen, wobei diese Funktionen analytische Funktionen und $v = \text{konst.}$ die Charakteristiken seien. Also gelten für jedes v längs eines Streifens der Fläche die Gleichungen

$$\begin{aligned} y' B + E q' + \lambda_1 x' &= 0 \\ E p' + y' \lambda_2 &+ D x' = 0 \\ p' - y' s &- r x' = 0 \\ - y' t &+ q' - s x' = 0. \end{aligned}$$

Dabei nehme ich an, es läge gerade ein Streifen der ersten Sorte vor. Im anderen Falle schließt man ganz analog. Die beiden letzten Gleichungen bringen ja nur zum Ausdruck, daß ein Streifen auf einer Fläche vorliegt. Faßt man die vier Gleichungen als vier lineare Gleichungen für x', y', p', q' auf und beachtet, daß längs eines Streifens einer Fläche $z = f(x, y)$ diese Funktionen nicht alle verschwinden können, so muß die Determinante des Gleichungssystemes Null sein. Diese ist aber wegen (18')

$$- E \{A + B r + C s + D t + E (r t - s^2)\}.$$

Im Fall $E \neq 0$, in dem Falle also, wo (14) nichtlinear ist, ist also (11) erfüllt. Ist aber (14) linear, so gilt der Schluß nicht. Will man auch in diesem somit hier unerledigten Fall einer in den Ableitungen linearen Differentialgleichung zu einer Charakteristikentheorie gelangen, so muß man wesentlich umständlicher verfahren. Man vgl. das Werk von *Goursat* über diesen Gegenstand.

Daß auch umgekehrt jede Integralfläche so entsteht, beruht auf der früher angeführten Bemerkung, daß eine jede Integralfläche von (14) aus charakteristischen Streifen zweiter Ordnung aufgebaut ist, in Verbindung mit der anderen Bemerkung, daß jeder Streifen zweiter Ordnung von einem der ersten getragen wird.

Die ganze weitere Schwierigkeit der Integration liegt jetzt darin, die Charakteristiken erster Ordnung zu bestimmen und aus ihnen Flächen aufzubauen. Diese Aufgabe erinnert an die analoge, welche wir bei den partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung bereits gelöst haben. Tatsächlich kann man nun unsere jetzige etwas kompliziertere Aufgabe auf die frühere zurückführen und damit gleichzeitig

auch angeben, inwiefern die jetzige Aufgabe schwieriger ist als die frühere. Die Zurückführung gelingt dadurch, daß man partielle Differentialgleichungen erster Ordnung angibt, deren Charakteristiken sämtlich in einer der beiden Scharen unserer jetzigen Charakteristiken erster Ordnung enthalten sind. Sei also

$$(21) \quad V(x, y, z, p, q) = 0$$

eine solche partielle Differentialgleichung erster Ordnung. Die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$(22) \quad \begin{cases} x' = \frac{\partial V}{\partial p} \\ y' = \frac{\partial V}{\partial q} \\ z' = p \frac{\partial V}{\partial p} + q \frac{\partial V}{\partial q} \\ p' = -\frac{\partial V}{\partial x} - p \frac{\partial V}{\partial z} \\ q' = -\frac{\partial V}{\partial y} - q \frac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

bestimmen ihre Charakteristiken. Die Frage lautet: wann sind mit diesen Gleichungen notwendig auch die drei Gleichungen (2), (19a), (20a) oder (2), (19b), (20b) einer unserer Scharen von Charakteristiken erster Ordnung der Gleichung (14) erfüllt? Tragen wir, um das zu erkennen, die Gleichungen (19) z. B. in die erste der beiden Gruppen, also in (2), (19a), (20a) ein, so ist (2) von selbst erfüllt, und die beiden anderen führen zu den beiden linearen partiellen Differentialgleichungen

$$(23a) \quad \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} + p \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{D}{E} \frac{\partial V}{\partial p} - \frac{\lambda_2}{E} \frac{\partial V}{\partial q} &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial y} + q \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\lambda_1}{E} \frac{\partial V}{\partial p} - \frac{B}{E} \frac{\partial V}{\partial q} &= 0, \end{aligned}$$

welchen V genügen muß. Aus der anderen Schar von Charakteristiken werden die beiden Gleichungen

$$(23b) \quad \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} + p \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{D}{E} \frac{\partial V}{\partial p} - \frac{\lambda_1}{E} \frac{\partial V}{\partial q} &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial y} + q \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\lambda_2}{E} \frac{\partial V}{\partial p} - \frac{B}{E} \frac{\partial V}{\partial q} &= 0 \end{aligned}$$

gewonnen. Wenn somit die Charakteristiken von (21) sämtlich in einer unserer beiden Scharen von Charakteristiken erster Ordnung enthalten sein sollen, so muß notwendig V entweder den beiden partiellen Differentialgleichungen (23a) oder den beiden (23b) genügen. Diese notwendige Bedingung ist aber auch hinreichend. Nehmen wir also z. B. an, V genüge den beiden Gleichungen (23a), dann sind für die durch (22) bestimmten Charakteristiken von $V = 0$ notwendig auch die Gleichungen (2), (19a), (20a) erfüllt. Für (2) ist das wieder selbstverständlich, und die beiden

anderen verifiziert man einfach durch Einsetzen von u in (19a) und (20a). Da nun aber nach S. 311 jede aus einer der beiden Charakteristiken-scharen erster Ordnung aufgebaute Fläche eine Integralfläche von (14) ist, so können wir unser Ergebnis nun auch so aussprechen: *Falls V einem der beiden Gleichungspaare (23a) oder (23b) genügt, so ist jede Integralfläche von (21) auch Integralfläche von (14).* Wir nennen dann V ein erstes Integral von (14).

Man kann auch umgekehrt aus unseren Betrachtungen leicht den Schluß ziehen, daß die sämtlichen Integrale von (18) nur dann auch (14) genügen können, wenn V einem der beiden Gleichungspaare (23a) oder (23b) genügt. Je nach der Zahl von unabhängigen Integralen eines der beiden Paare linearer partieller Differentialgleichungen (23a) oder (23b), die man zu bestimmen in der Lage ist, wird man nun die Integration der Gleichung (14) mehr oder weniger vollständig beherrschen. Kennt man insbesondere zwei unabhängige Integrale eines der beiden Systeme (23a) oder (23b), V_1 und V_2 , so genügt auch $V_1 - \varphi(V_2)$ dem gleichen System, wenn φ eine willkürliche Funktion ist. Dann ist neben $V_1 = 0$ und $V_2 = 0$ auch $V_1 - \varphi(V_2) = 0$ ein Integral von (14), d. h. jede Lösung von $V_1 - \varphi(V_2) = 0$ genügt auch (14). Dann ist die Integration von (14) erledigt. Nach S. 302 ist nämlich jede Lösung von (14) durch einen Anfangsstreifen bestimmt. Man wähle dann die willkürliche Funktion φ so, daß für den gegebenen Anfangsstreifen $V_1 - \varphi(V_2) = 0$ ist und lege dann durch seine Elemente die charakteristischen Streifen von

$$V_1 - \varphi(V_2) = 0.$$

Das für die Integration der Systeme von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit einer Unbekannten Erforderliche ist bereits früher vorgebracht worden.

Es ist aber zu bemerken, daß die Zahl der überhaupt vorhandenen unabhängigen Integrale von vornherein feststeht. Sie ist von Fall zu Fall verschieden. Nach S. 245 genügt nämlich jedes Integral, das zwei linearen partiellen Differentialgleichungen $A(V) = 0$ und $B(V) = 0$ genügt, auch der Gleichung $[A, B] = 0$ und das kann eine neue, nicht-von selbst erfüllte sein¹⁾. Die Methode führt daher nicht immer zum Ziel. Mehr als ein gemeinsames Integral der beiden Gleichungen (23a) kann nämlich nur dann vorhanden sein, wenn die Integrabilitätsbedingung $AB_{\xi} = 0$ identisch erfüllt ist.

Wir betrachten nun noch ein Beispiel aus der Flächentheorie, die auch das Hauptanwendungsgebiet dieser Theorien ist. Es handelt sich darum, die Differentialgleichung der abwickelbaren Flächen zu integrieren, also um den Nachweis, daß alle Flächen mit lauter parabo-

¹⁾ Der eben benutzte Klammerausdruck wurde S. 245 erklärt.

lischen Punkten abwickelbar sind. Diese Aufgabe läuft auf die Integration der Differentialgleichung

$$(24) \quad rt - s^2 = 0$$

hinaus. Die beiden Scharen von Charakteristiken erster Ordnung fallen hier zusammen. Denn die Gleichung (18') wird hier $\lambda^2 = 0$ und ihre beiden Wurzeln sind also $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Daher sind jetzt die Charakteristiken erster Ordnung aus den Gleichungen

$$q' = 0, \quad p' = 0, \quad z' - px' - qy' = 0$$

zu bestimmen. Für die Integrale V ergeben sich die Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial x} + p \frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} + q \frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

Wir erkennen sofort, daß $V_1 = p$, $V_2 = q$, $V_3 = z - px - qy$ drei Integrale sind. Also sind auch

$$q = f(p), \quad z - px - qy = g(p)$$

Integrale von (21). Die zweite ist eine *Clairautsche* Differentialgleichung, und deren Theorie lehrt, daß man alle Integrale derselben als Einhüllende der Ebenenschar

$$z - cx - w(c)y = g(c),$$

wo $w(c)$ eine willkürliche Funktion ist, erhält. Die Integralfächen sind also alle abwickelbare Flächen. Aber $z = cx + f(c)y + d$ ist auch ein vollständiges Integral der Gleichung $q = f(p)$, so daß diese auch nichts Neues mehr liefert.

§ 4. Lineare Differentialgleichungen.

Darunter versteht man eine Differentialgleichung, welche die unbekanntete Funktion z und ihre sämtlichen Ableitungen nur linear enthält. Sie ist also von der Form

$$(25) \quad a_0 r + a_1 s + a_2 t + b_1 p + b_2 q + cz + d = 0.$$

Die Koeffizienten a_0, \dots, d sind stetige Funktionen der unabhängigen Veränderlichen x, y .

Die Charakteristiken erfahren hier eine weitere Spezialisierung. Die Gleichung (5)

$$(26) \quad a_0 y'^2 - a_1 x' y' + a_2 x'^2 = 0$$

nämlich, welche die Charakteristiken definierte, enthält jetzt nur noch x, y , legt also gewisse Kurven der x - y -Ebene fest, die wir jetzt kurz als Charakteristiken bezeichnen wollen. Wir werden dieselben jetzt nur dazu verwenden, um eine Einteilung der linearen Gleichungen anzugeben und um dieselben auf gewisse Normalformen zu transformieren. Dabei benutze ich die leicht zu verifizierende Tatsache,

daß bei Koordinatentransformation Charakteristiken in Charakteristiken übergehen¹⁾. Ich nehme zunächst an, die beiden Scharen von Charakteristiken fielen nicht zusammen. Dann kann ich dieselben als Koordinatenlinien nehmen und mir die Frage vorlegen, wie eine auf ihre Charakteristiken $x = \text{konst.}$ und $y = \text{konst.}$ als Koordinatenlinien bezogene lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung aussieht. Soll aber die Gleichung (25) sowohl für $x' = 0$ wie für $y' = 0$ erfüllt sein, so muß $a_0 = 0$ und $a_2 = 0$ sein. Somit sieht die Gleichung dann so aus

$$(27) \quad a_1 s + b_1 p + b_2 q + cz + d = 0.$$

Diese Normalform wollen wir nun beibehalten, wenn die Charakteristiken reell sind. Wir wollen dann sagen, die Gleichung sei vom *hyperbolischen* Typus und (27) sei eine Normalform derselben. Sind die Charakteristiken imaginär, so sagen wir, die Gleichung sei vom *elliptischen* Typus. Hier kommt man leicht zu einer reellen Normalform, indem man verlangt, $x + iy = \text{konst.}$ und $x - iy = \text{konst.}$ sollten die Charakteristiken sein. Dann muß die Gleichung (25) so aussehen: $a(x'^2 + y'^2) = 0$, d. h. es muß $a_0 = a_2 = a$ und $a_1 = 0$ sein. Dann wird also

$$a(r + t) + b_1 p + b_2 q + cz + d = 0$$

eine Normalform des elliptischen Typus. Auf ähnliche Weise kann man leicht eine weitere Normalform des hyperbolischen Typus bekommen. Man verlange, daß $x + y = \text{konst.}$ und $x - y = \text{konst.}$ die Charak-

¹⁾ Führt man nämlich durch

$$\begin{aligned} x &= x(\xi, \eta) \\ y &= y(\xi, \eta) \end{aligned}$$

neue Koordinaten ein, so setze man

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix}$$

Man bezeichne die durch Vertauschen der Zeilen und Kolonnen entstehenden transponierten Matrizen mit A_1 und S_1 und setze ferner

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_2 & -a_1 \\ -a_1 & a_0 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial x}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{pmatrix}.$$

Dann sind die Koeffizienten der Glieder zweiter Ordnung nach der Transformation die Koeffizienten der Matrix

$$A' = S_1 A S$$

und es ist

$$(A')^{-1} = S^{-1} A^{-1} S_1^{-1}$$

die Matrix der aus (23) bei der Transformation entstehenden Gleichung. Dieser Sachverhalt beweist die ausgesprochene Behauptung.

teristiken seien. Dann muß (25) so aussehen: $a(x'^2 - y'^2) = 0$, d. h. es ist $a_0 = -a_2 = a$ und $a_1 = 0$. Also wird

$$a(r - t) + b_1 p + b_2 q + cz + d = 0$$

eine weitere Normalform des hyperbolischen Typus.

Den noch übrigen Fall, wo die beiden Scharen von Charakteristiken zusammenfallen, nennt man den parabolischen Fall. Jetzt nehmen wir $x = \text{konst.}$ als Charakteristikenschar doppeltzählend. Dann muß sich (25) auf $a_2 x'^2 = 0$ reduzieren. Also wird

$$a_2 t + b_1 p + b_2 q + cz + d = 0$$

Normalform des *parabolischen Typus*.

II. Kapitel.

Hyperbolische Differentialgleichungen.

§ 1. Die *Laplacesche Kaskadenmethode*.

Ihr Ziel ist es, durch Quadraturen eine hyperbolische Differentialgleichung zu integrieren. Die Gleichung

$$(1) \quad \frac{c^2 z}{\partial x \partial y} + a(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} + c(x, y)z + d(x, y) = 0,$$

deren Koeffizienten stetige differenzierbare Funktionen sein sollen, kann man leicht auf die Form bringen

$$(2) \quad \frac{c}{\partial x} \left(\frac{c z}{\partial y} + a z \right) + b \left(\frac{c z}{\partial y} + a z \right) - h z + d = 0.$$

Dabei ist zur Abkürzung

$$(3) \quad h = \frac{\partial a}{\partial x} + ab - c$$

gesetzt. Man kann dafür auch schreiben

$$(4) \quad \frac{\partial z_1}{\partial x} + b z_1 - h z + d = 0,$$

indem man

$$(5) \quad z_1 = \frac{c z}{\partial y} + a z$$

setzt. Ist dann $h = 0$, so ist (4) eine Gleichung für z_1 allein, die man als gewöhnliche lineare Differentialgleichung erster Ordnung integrieren kann. Hat man z_1 bestimmt, so erhält man aus (5) z .

Ist aber $h \neq 0$, so eliminiere man z aus (4) und (5), um eine Gleichung für z_1 allein zu erhalten. Sie ist wieder vom hyperbolischen Typus und kann ganz analog weiter behandelt werden. Wenn ihr h Null ist, kann sie durch Quadratur gelöst werden. Sonst führt der Ansatz auf eine neue Gleichung usw. Es werden aber nur vereinzelt Fälle

sein, denen man so beikommen wird. Immerhin hat man noch einen zweiten analogen Prozeß zur Verfügung, indem man die Rollen von x und y vertauscht.

Ist z. B.

$$(1') \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + e^x \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

vorgelegt, so wird $h = 0$. Man hat

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} - z_1 = 0.$$

Also wird $z_1 = e_x \cdot \varphi(y)$, wo $\varphi(y)$ eine „willkürliche“ Funktion von y ist. Demnach findet man für z die Differentialgleichung

$$\frac{\partial z}{\partial y} + e^x z = e^x \cdot \varphi(y).$$

Demnach wird

$$z = \exp(-ye^x) \cdot \left\{ \psi(x) + e^x \int \varphi(y) \exp(ye^x) dy \right\}$$

mit einer zweiten willkürlichen Funktion $\psi(x)$ die allgemeinste Lösung von (1'). $\exp(x)$ bedeutet dabei wieder e^x .

§ 2. Die Riemannsche Integrationsmethode.

Ihr Ziel ist es, durch einen gegebenen Streifen erster Ordnung ein Integral von (1) zu legen. Dabei werde angenommen, daß dieser Streifen über keiner Charakteristik liegt. D. h. also: Es seien längs einer stetig differenzierbaren Kurve $\mathfrak{C} : x = x(t), y = y(t) (a \leq t \leq b)$, die nirgends der x -Achse oder der y -Achse parallel sein möge, die Werte von z, p, q vorgeschrieben, derart, daß die Streifenbedingung

$$z'(t) = p'(t)x'(t) + q(t)y'(t)$$

erfüllt ist. Diese stetig differenzierbare Kurve wird also von keiner Parallelen zu einer Koordinatenachse in mehr als einem Punkte getroffen. \mathfrak{C} gehöre weiter einem Bereiche an, in welchem die Koeffizienten von (1) stetige Funktionen seien, und längs der Kurve seien auch z', p', q' als stetige Funktionen vorgeschrieben.

Man kann z. B. den Ansatz so machen: Längs der Kurve sei $z = \varphi(x) + \psi(y), p = \varphi'(x), q = \psi'(y)$. Ein erstes Verfahren zur Lösung dieses Problemes wird durch die Methode der sukzessiven Approximationen geliefert. Zunächst ist es leicht, die Gleichung $\frac{\partial^2 z_0}{\partial x \partial y} + d = 0$ unter der angegebenen Anfangsbedingung zu integrieren. Denn ihr genügt

$$z_0 = \varphi(x) + \psi(y) - \iint d \cdot dx dy.$$

Dabei ist das Doppelintegral über den in Abb. 15 schraffierten Bereich G zu erstrecken.

Als nächsten Schritt integrieren wir

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial z_0}{\partial x} + b \frac{\partial z_0}{\partial y} + c z_0 = 0$$

mit der folgenden Anfangsbedingung: z_1 soll auf \mathfrak{C} verschwinden. Ihre Lösung im Punkte (ξ, η) ist

$$(6) \quad z_1 = - \iint \left(a \frac{\partial z_0}{\partial x} + b \frac{\partial z_0}{\partial y} + c z_0 \right) dx dy,$$

wo das Integral über den in Abb. 15 schraffierten Bereich G zu erstrecken ist. Rekurrent wird

$$(7) \quad z_n = - \iint \left(a \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} + b \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y} + c z_{n-1} \right) dx dy$$

gesetzt, wo wieder das Integral über den Bereich G der Abb. 15 zu erstrecken ist.

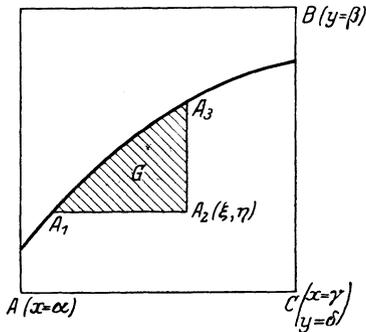


Abb. 15.

Dann läßt sich beweisen, daß die Reihe

$$(8) \quad z_0 + z_1 + \dots$$

gleichmäßig konvergiert und der gegebenen Gleichung (1) unter den vorgeschriebenen Anfangsbedingungen genügt.

Ich zeige zunächst, daß die Reihe (8) und die Reihen ihrer Ableitungen nach x und nach y gleichmäßig im abgeschlossenen G enthaltenden Teilbereich

des Rechtecks (A, B, C) konvergieren. In diesem Bereich mögen die absoluten Beträge von $a, b, c, \frac{\partial z_0}{\partial x}, \frac{\partial z_0}{\partial y}$ unter der Schranke M liegen. F sei der Flächeninhalt des schraffierten Gebietes G . Dann ist nach (6)

$$|z_1| < M^2 F < 3M^2 (\xi - \alpha) (\beta - \eta).$$

Ferner ist

$$(9) \quad \frac{\partial z_n}{\partial x} = - \int_{\eta}^{A_3} \left(a \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} + b \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y} + c z_{n-1} \right) dy,$$

wo im Integranden x durch ξ zu ersetzen ist. Ferner ist

$$(10) \quad \frac{\partial z_n}{\partial y} = \int_{A_1}^{\xi} \left(a \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} + b \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y} + c z_{n-1} \right) dx,$$

wo im Integranden y durch η zu ersetzen ist. Daher wird

$$\left| \frac{\partial z_1}{\partial x} \right| < 3M^2 (\beta - \eta),$$

$$\left| \frac{\partial z_1}{\partial y} \right| < 3M^2 (\xi - \alpha).$$

Ich setze fortan

$$\mu = \xi - \alpha + \beta - \eta, \quad N = \max\left(3M, \frac{(\gamma - a)(\beta - \delta)}{\gamma - a + \beta - \delta} 3M\right).$$

Dann ist in G

$$z < MN\mu, \quad \left| \frac{\partial z_1}{\partial x} \right| < MN\mu, \quad \left| \frac{\partial z_1}{\partial y} \right| < MN\mu.$$

Wir wollen nun zeigen, daß allgemein in G

$$z_n < \frac{MN^n \mu^n}{n!}, \quad \frac{\partial z_n}{\partial x} < \frac{MN^n \mu^n}{n!}, \quad \left| \frac{\partial z_n}{\partial y} \right| < \frac{MN^n \mu^n}{n!}$$

gilt. Zu dem Zwecke nehme ich an, diese für $n = 1$ richtige Abschätzung sei bereits für $n = v - 1$ bewiesen und schließe daraus auf ihre Geltung für $n = v$. Nach (7) wird nämlich für $n = v$

$$\begin{aligned} z_v &< 3M \cdot \frac{MN^{v-1}}{(v-1)!} \iint_G (x - \alpha + \beta - y)^{v-1} dx dy, \\ &< 3M \cdot \frac{MN^{v-1}}{(v-1)!} \iint_{\alpha, \eta}^{\xi, \beta} (x - \alpha + \beta - y)^{v-1} dx dy, \\ &\leq 3M \cdot \frac{MN^{v-1}}{v!} \frac{(\xi - \alpha + \beta - \eta)^{v+1} - (\xi - \alpha)^{v+1} - (\beta - \eta)^{v+1}}{v+1}, \\ &\leq (\xi - \alpha)(\beta - \eta)(\xi - \alpha + \beta - \eta)^{v-1}, \\ &\leq \frac{(\gamma - a)(\beta - \delta)}{\gamma - a + \beta - \delta} \mu^v. \end{aligned}$$

Also

$$z_v \leq \frac{MN^v \mu^v}{v!}.$$

Ferner wird nach (9)

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial z_v}{\partial x} \right| &\leq 3M \frac{MN^{v-1}}{(v-1)!} \int_{\eta}^{\beta} (\xi - \alpha + \beta - y)^{v-1} dy, \\ &\leq 3M \cdot \frac{MN^{v-1}}{v!} \left((\xi - \alpha + \beta - \eta)^v - (\xi - \alpha)^v \right), \\ &\leq \frac{MN^v \mu^v}{v!}. \end{aligned}$$

Ebenso findet man

$$\left| \frac{\partial z_v}{\partial y} \right| \leq \frac{MN^v \mu^v}{v!}.$$

Aus der gleichmäßigen Konvergenz von (8) im abgeschlossenen Bereich folgt sofort, daß sie den vorgeschriebenen Randbedingungen genügt und folgt auch, daß die gefundene Reihe (1) genügt. Dies erkennt man, indem man (1) so schreibt

$$z(\xi, \eta) = - \iint \left(a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz + d \right) dx dy,$$

wo das Integral wieder über den in Abb. 15 schraffierten Bereich zu erstrecken ist.

Die *Riemannsche* Integrationsmethode, der ich mich jetzt zuwende, gestattet es oft, ohne solche Reihenentwicklungen das Problem zu lösen. Ich knüpfe zunächst an die homogene Gleichung an. Ich nehme also in (I) $d = 0$ an, und will somit die Differentialgleichung

$$(11) \quad s + ap + bq + cz = 0$$

behandeln. Die *Riemannsche* Integrationsmethode geht von der sogenannten *Greenschen* Formel aus. Ich bezeichne den Differentialausdruck auf der linken Seite von (11) abkürzend mit $\mathfrak{L}(z)$. Versucht man dann partielle Integration auf $\iint v \mathfrak{L}(u) dx dy$ anzuwenden, so wird man auf die *Greensche* Formel geführt:

$$(12) \quad \iint (v \mathfrak{L}(u) - u \mathfrak{M}(v)) dx dy = \int (P dy - Q dx).$$

Hier ist das Doppelintegral über einen Bereich, in dem die Koeffizienten und die Funktionen u und v mit den vorkommenden Ableitungen stetig sind, zu erstrecken. Es ist \mathfrak{M} der adjungierte Differentialausdruck

$$\mathfrak{M}(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial (av)}{\partial x} - \frac{\partial (bv)}{\partial y} + cv$$

und es ist

$$P = \frac{1}{2} \frac{\partial (uv)}{\partial y} - u \left(\frac{\partial v}{\partial y} - av \right)$$

$$Q = \frac{1}{2} \frac{\partial (uv)}{\partial x} - u \left(\frac{\partial v}{\partial x} - bv \right).$$

Das Kurvenintegral ist über den Bereichrand zu erstrecken, so daß das Innere zur Linken bleibt. Wir werden die Formel hernach ausschließlich auf einen Bereich G (Abb. 15) anwenden, der einesteils von einem Bogen der Kurve \mathfrak{C} begrenzt ist, auf dem die Anfangsbedingungen für u vorgeschrieben sind, und von zwei Charakteristiken durch einen Punkt (ξ, η) , in welchem wir die Lösung u zu berechnen wünschen. Für u wähle ich die gesuchte Lösung von $\mathfrak{L}(u) = 0$ und für v wähle ich eine noch näher zu bestimmende Lösung von $\mathfrak{M}(v) = 0$. Dann ist

$$\int (P dy - Q dx) = 0,$$

mit anderen Worten ist nach Abb. 15

$$\int_{A_2}^{A_3} P dy - \int_{A_1}^{A_2} Q dx + \int_{A_3}^{A_1} (P dy - Q dx) = 0$$

oder

$$(uv)_{A_2} = \frac{1}{2} (uv)_{A_1} + \frac{1}{2} (uv)_{A_3} - \int_{A_2}^{A_3} u(v_y - av) dy + \int_{A_1}^{A_2} u(v_x - bv) dx$$

$$+ \int_{A_3}^{A_1} (P dy - Q dx).$$

Nun wähle ich insbesondere v so, daß auf A_2A_3

$$v_y - av = 0$$

und daß auf A_1A_2 :

$$v_x - bv = 0$$

ist. Das ist also gleichbedeutend damit, zu fordern: Auf A_2A_3 sei $v = \exp\left(\int_{\eta}^y a(\xi, y) dy\right)$; auf A_1A_2 sei $v = \exp\left(\int_{\xi}^x b(x, \eta) dx\right)^1$. Daß es solche Integrale von $\mathfrak{M}(v) = 0$ stets gibt, ist schon auf S. 307 bewiesen worden. Somit wird schließlich²⁾

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(uv)_{A_1} + \frac{1}{2}(uv)_{A_3} + \int_{A_3}^{A_1} (P dy - Q dx).$$

Daß die so gefundene Lösung wirklich den Anfangsbedingungen und der Gleichung genügt, bedarf keiner näheren Erörterung, weil wir ja gerade vorher sahen, daß man mit Hilfe der Methode der sukzessiven Approximationen den Existenzbeweis der Lösung erbringen kann. Die jetzige Betrachtung fügt den Nachweis hinzu, daß es nur eine solche Lösung gibt. Denn jede muß durch die gefundene Formel dargestellt werden. Übrigens könnte man auch unschwer direkt an der gefundenen Formel verifizieren, daß sie die gestellte Aufgabe löst.

Unsere Methode gestattet auch die Lösung der inhomogenen Gleichung unter den vorgeschriebenen Anfangsbedingungen. Man trage in (12) für u die betreffende Lösung ein, und findet dann durch die gleiche Betrachtung diese Lösung von (1)

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(uv)_{A_1} + \frac{1}{2}(uv)_{A_3} + \int_{A_3}^{A_1} (P dy - Q dx) + \iint v d \cdot dx dy.$$

Unschwer kann man übrigens ganz analoge Formeln auch für die andere hyperbolische Normalform gewinnen. Es sei also jetzt

$$(13) \quad \mathfrak{L}(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu.$$

Dann hat man

$$\mathfrak{M}(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial(av)}{\partial x} - \frac{\partial(bv)}{\partial y} + cv$$

$$P = \frac{\partial(uv)}{\partial y} - 2u \left(v_x - \frac{1}{2} - av \right)$$

$$Q = -\frac{\partial(uv)}{\partial x} + 2u \left(v_y + \frac{1}{2} bv \right)$$

und die Greensche Formel (12).

Mit ihr verfährt man genau wie eben und erhält schließlich als Lösung von $\mathfrak{L}(u) = 0$ diesen Ausdruck

¹⁾ Vgl. die Erklärung dieses Zeichens auf S. 317.

²⁾ Im Punkte A_2 ist nämlich $v(\xi, \eta) = 1$.

$$u(\xi, \eta) = \frac{(uv)_{A_1} + (uv)_{A_3}}{2} + \frac{1}{2} \int_{A_1}^{A_3} P(dy - Qdx).$$

An Stelle der Abb. 15 tritt jetzt die Abb. 16, wo die Geraden wieder Charakteristiken sind. v ist wieder bestimmt durch die Forderung

$$\mathfrak{M}(v) = 0 \quad \text{und} \quad v = \exp \left(\int_{\xi}^x \frac{a(x, \eta + \frac{x-\xi}{2})}{2} dx \right) \text{ auf } (A_1 A_2)$$

$$z = \exp \left(\int_{\eta}^y \frac{b(\xi - \frac{y-\eta}{2} + \eta, y)}{2} dy \right) \text{ auf } (A_2 A_3).$$

Zum Schluß dieses Paragraphen möge noch angegeben werden, wie man auch mit Hilfe der sukzessiven Approximationen das Anfangswertproblem löst, auf das wir bei der Riemannschen Methode gestoßen sind. Es soll sich also um die Aufgabe handeln, die Gleichung (11) unter den Anfangsbedingungen $z = f(x)$ für $y = y_0$ und $z = \varphi(x)$ für $x = x_0$ zu lösen. Dabei sollen diese Bedingungen auf gewissen von (x_0, y_0) ausgehenden Strecken der Geraden $x = x_0$ und $y = y_0$ erfüllt sein. Diese sollen in

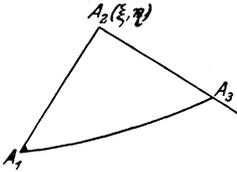


Abb. 16.

die Richtung der wachsenden x bzw. y weisen und einem Bereiche angehören, in dem die Koeffizienten der Gleichung stetig sind. Damit im Punkte (x_0, y_0) die Stetigkeit keine Unterbrechung erleidet, soll noch vorausgesetzt werden, daß $f(x_0) = \varphi(y_0)$ ist. Dann ist jedenfalls $z_0 = f(x) + \varphi(y) - f(x_0)$ eine Funktion, welche die Anfangsbedingungen erfüllt. Sie genügt der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 z_0}{\partial x \partial y} = 0$. Als dann bestimme man z_1 aus der Gleichung

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial z_0}{\partial x} + b \frac{\partial z_0}{\partial y} + c z_0 = 0,$$

so daß es auf $x = x_0$ und auf $y = y_0$ verschwindet, setze also

$$z_1 = - \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y (a z_{0x} + b z_{0y} + c z_0) dx \cdot dy.$$

Als dann bestimme man analog z_2 und allgemein werde z_n aus

$$(14) \quad \frac{\partial^2 z_n}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} + b \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y} + c z_{n-1} = 0$$

so bestimmt, daß es auf $x = x_0$ und auf $y = y_0$ verschwindet. Dann ist

$$z = z_0 + z_1 + \dots$$

die gewünschte Lösung von (11). Dies ist bewiesen, sowie nur erkannt ist, daß diese Reihe samt den Reihen ihrer ersten Ableitungen

gleichmäßig konvergiert. Es gilt doch für eine jede Teilsumme $s_n = z_0 + z_1 + \dots + z_n$

$$s_n = z_0 - \iint_{x_0 y_0}^{x y} \left(a \frac{c^s z_{n-1}}{c^x} + b \frac{c^s z_{n-1}}{c^y} + c z_{n-1} \right) dx dy$$

und daraus folgt durch Grenzübergang zu $n \rightarrow \infty$

$$z = z_0 - \iint_{x_0 y_0}^{x y} \left(a \frac{c^z}{c^x} + b \frac{\partial z}{c^y} + c z \right) dx dy$$

und daraus durch Differentiation

$$\frac{c^2 z}{c^x c^y} + a \frac{c^z}{\partial x} + b \frac{c^z}{c^y} + c z = 0.$$

Auf den Konvergenzbeweis selbst will ich nicht näher eingehen. Er unterscheidet sich nicht von den Betrachtungen, die wir bereits in diesem Paragraphen zu gleichem Zweck angestellt haben. Dazu ist ja das hier zur Betrachtung stehende Randwertproblem schon auf S. 307 für allgemeinere Differentialgleichungen gelöst worden.

Der eben besprochene Ansatz ist auf die homogene Gleichung besonders zugeschnitten. Man kann ihn aber durch geringe Abänderung so einrichten, daß er für die inhomogene Gleichung (1) und für noch allgemeinere Gleichungen zum Ziel führt. Man gehe nur dazu von der gleichen ersten Näherung z_0 aus wie eben, bestimme auch jetzt wieder rekurrent die n -te Näherung aus der $n-1$ -ten durch die Gleichung

$$\frac{c z_n}{c^x c^y} + a \frac{c^z z_{n-1}}{c^x} + b \frac{c^z z_{n-1}}{c^y} + c z_{n-1} + d = 0,$$

indessen so, daß sie auf $x = x_0$ und auf $y = y_0$ die verlangten Anfangsbedingungen besitzt. Man hat also

$$(15) \quad z_n = z_0 - \iint_{x_0 y_0}^{x y} \left(a \frac{c^z z_{n-1}}{c^x} + b \frac{c^z z_{n-1}}{c^y} + c z_{n-1} + d \right) dx dy$$

zu setzen. Jetzt wird die gesuchte Lösung nicht mehr die Summe der z_n , sondern vielmehr der Grenzwert der z_n oder, anders ausgedrückt, die Summe der Reihe

$$z = z_0 + (z_1 - z_0) + \dots + (z_n - z_{n-1}) + \dots$$

Denn es ist ja durch Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ aus (15) zu finden

$$z = z_0 - \iint_{x_0 y_0}^{x y} (a z_x + b z_y + c z + d) dx dy$$

und daraus durch Differentiation alles Gewünschte.

Dieser Ansatz nun ist es, der auch für allgemeinere Gleichungen wie z. B. die in der Flächentheorie wichtige

$$(16) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \sin z$$

zur Lösung des gleichen Problemes führt.

Ein Wort ist nur noch darüber zu sagen, daß die Lösungen durch die Anfangsbedingungen eindeutig bestimmt sind. Man kann sie im Rahmen der Methode der sukzessiven Approximationen durch die gleichen Überlegungen gewinnen, die zum Konvergenzbeweis führen. Wenn nämlich z eine beliebige, den Anfangsbedingungen genügende Lösung z. B. von (16) ist, so ist jedenfalls

$$z = z_0 + \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y \sin z \, dx \, dy,$$

wo wieder $z_0 = f(x) + \varphi(y) - f(x_0)$ sei. Ferner gilt auch für die n -te Näherung

$$z_n = z_0 + \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y \sin z_{n-1} \, dx \, dy;$$

also haben wir

$$z - z_n = \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y (\sin z - \sin z_{n-1}) \, dx \, dy.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} |z - z_0| &= \left| \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y \sin z \, dx \, dy \right| < |x - x_0| |y - y_0| \\ |z - z_1| &= \left| \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y (\sin z - \sin z_0) \, dx \, dy \right| \\ &= \left| \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y 2 \sin \frac{z - z_0}{2} \cos \frac{z + z_0}{2} \, dx \, dy \right| \\ &< \left| \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y |x - x_0| |y - y_0| \, dx \, dy \right| = \frac{|x - x_0|^2 |y - y_0|^2}{2^2}. \end{aligned}$$

Daraus gewinnt man durch vollständige Induktion

$$|z - z_n| < \frac{|x - x_0|^{n+1} |y - y_0|^{n+1}}{[(n+1)!]^2},$$

so daß es also nur eine Lösung gibt, weil hiernach $z_n \rightarrow z$ strebt. Ähnlich schließt man auch in anderen Fällen.

§ 3. Die Differentialgleichung der schwingenden Saite.

Die freien Schwingungen einer längs der x -Achse ausgespannten Saite werden durch die Differentialgleichung

$$(17) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

beschrieben. t bedeutet darin die Zeit, z die Entfernung von der geradlinigen Gleichgewichtslage. In $a^2 = \frac{S}{\rho}$ bedeutet S die Spannung, ρ die Masse der Längeneinheit, so daß also in dem von uns allein zu betrachtenden Fall der homogenen Saite a^2 eine positive Konstante ist. Die Charakteristiken sind in diesem Falle $x + at = \text{konst.}$ und $x - at = \text{konst.}$ Das bedingt einen geringen Unterschied gegenüber den bisher betrachteten Fällen. Man überträgt aber auch auf ihn ohne sonderliche Schwierigkeit die angestellten Betrachtungen.

Wir betrachten nun eine an ihren beiden Enden bei $x = 0$ und bei $x = l$ eingeklemmte Saite. Es soll also für alle t : $z(0, t) = 0$ und $z(l, t) = 0$ sein. Ferner ist die Anfangslage und die Anfangsgeschwindigkeit der Saite gegeben. D. h. für $t = 0$ soll $z(x, 0) = f(x)$ und

$\frac{\partial z}{\partial t}(x, 0) = F(x)$ sein. Zunächst kann man die *Riemanns*

Methoden anwenden, um in einem beliebigen Punkte (x, t) des in Abb. 17 schraffierten Bereiches die Lösung zu berechnen. Dieser Bereich ist nämlich seitlich von den beiden durch die Saitenenden gehenden Charakteristiken begrenzt. In einem inneren Punkte ist nach dem *Riemanns*chen Verfahren die Lösung durch $f(x)$ und $F(x)$ allein bestimmt.

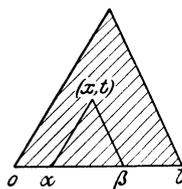


Abb. 17.

Man findet nämlich in dem Punkte (x, t) , dessen Charakteristiken $t = 0$ in $\alpha = x - at$ und $\beta = x + at$ treffen mögen,

$$(18) \quad z(x, t) = \frac{f(x - at) + f(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(\xi) d\xi.$$

Damit ist das Problem nun erst für gewisse x und t gelöst und es gilt nun, unter Berücksichtigung der an den Saitenenden vorgeschriebenen Bedingungen den Bewegungsverlauf auch für andere Zeiten zu bestimmen. Dies erzwingt man nach *Riemann* durch einen Kunstgriff. Daß nämlich die *Riemanns*che Methode nicht zur Berechnung der Lösung in einem größeren Bereiche brauchbar ist, liegt darin begründet, daß $f(x)$ und $F(x)$ nur für $0 \leq x \leq l$ gegeben sind. Man erklärt nun in einer zweckmäßigen Weise diese Funktionen über dies Intervall hinaus, so daß die zugehörigen Lösungen bei $x = 0$ und bei $x = l$ für alle Zeiten verschwinden. Zu dem Zweck setze man fest

$$\begin{aligned} f(-x) &= -f(x) & f(x+2l) &= f(x) \\ F(-x) &= -F(x) & F(x+2l) &= F(x). \end{aligned}$$

Damit sind dann die beiden Funktionen für alle x erklärt, wenn man sie für $0 \leq x \leq l$ kennt. Die *Riemannsche* Lösung (18) verschwindet dann, wie man sich leicht überzeugt, tatsächlich bei $x = 0$ und bei $x = l$ für alle t . Ähnliche Überlegungen führen auch zur Beherrschung des Falles, wo an den Saitenenden ein anderer Bewegungszustand vorgeschrieben ist.

Ich will nun noch auf eine etwas andere Methode hinweisen. Das ist die Trennung der Variablen. Geht man nämlich mit dem Ansatz

$$z = u(x)v(t)$$

in die Gleichung der schwingenden Saite hinein, so geht diese in

$$\frac{1}{a^2} \frac{v''}{v} = \frac{u''}{u}$$

über. Da die rechte Seite nur von x , die linke nur von t abhängt, so müssen beide ein und derselben Konstanten: $-\lambda^2$ gleich sein. Also erhalten wir die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} u'' + \lambda^2 u &= 0 \\ v'' + \lambda^2 a^2 v &= 0 \end{aligned}$$

und sind damit in der Lage, einige Lösungen der Gleichung zu bestimmen. Es sind die Lösungen

$$\begin{aligned} u &= c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x \\ v &= d_1 \cos a\lambda t + d_2 \sin a\lambda t, \end{aligned}$$

die man so erhält. Sollen dieselben aber bei $x = 0$ und bei $x = l$ verschwinden, so muß $c_1 = 0$ und $\lambda = \frac{n\pi}{l}$ sein, und es bleiben nur diese Lösungen als brauchbar übrig:

$$\sin \frac{n\pi}{l} x \left(d_1 \cos \frac{an\pi}{l} t + d_2 \sin \frac{an\pi}{l} t \right).$$

Da nun aber die Gleichung (17) linear und homogen ist, so kann man durch Addition bekannter Lösungen neue finden, und somit sind auch die Summen

$$\sum_n \sin \frac{n\pi}{l} x \left(d_{1n} \cos \frac{an\pi}{l} t + d_{2n} \sin \frac{an\pi}{l} t \right)$$

Lösungen. Nunmehr ist man auch in der Lage, durch passende Bestimmung der Koeffizienten beliebige Anfangszustände der Lösung vorzuschreiben. Man wird nämlich durch die Anfangsbedingungen auf die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum d_{1n} \sin \frac{n\pi}{l} x \\ F(x) &= - \sum d_{2n} \frac{an\pi}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x \end{aligned}$$

geführt und steht so vor dem bekannten Problem aus der Theorie der *Fourierschen* Reihen. Freilich enthält dieser Gedankengang nur dann die volle Lösung des Problems, wenn diejenigen Reihen, welche aus für den $f(x)$ und $F(x)$ erhaltenen durch zweimalige Differentiation entstehen, selbst gleichmäßig konvergieren.

III. Kapitel.

Elliptische Differentialgleichungen.

Die Theorie der elliptischen Differentialgleichungen ist viel gestaltenreicher als die der hyperbolischen. Es kann sich in dieser einführenden Darstellung nur darum handeln, einen Überblick über die Probleme und die Wege zu ihrer Lösung zu geben. Z. B. ist die Potentialtheorie weiter nichts als die Theorie der speziellen elliptischen Differentialgleichung

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Es ist auch nicht unsere Absicht, hier eine volle Potentialtheorie zu entwickeln. Vielmehr wollen wir, allerdings gerade an Hand dieser Differentialgleichung, einen Überblick zu gewinnen suchen. Diese Bevorzugung der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ rechtfertigt sich auch dadurch, daß der Ausdruck einer jeden elliptischen Differentialgleichung in der Normalform mit Δu beginnt.

§ 1. Die Greensche Formel.

$u(x, y)$ und $v(x, y)$ seien beide in einem gewissen Bereiche G und an seinem Rande zweimal stetig differenzierbar. Eine geschlossene abteilungsweise stetig differenzierbare Kurve besteht aus endlich vielen in Ecken zusammenstoßenden Bogen differenzierbarer Kurven. Sie sei frei von Selbstüberkreuzungen, gehöre dem Inneren von G an und begrenze einen Teil B dieses Bereiches. Dann gewinnt man durch partielle Integration die folgenden Formeln

$$(1) \quad \iint_B u \Delta v \, dx \, dy = \int (u v_x \, dy - u v_y \, dx) - \iint_B (u_x v_x + u_y v_y) \, dx \, dy,$$

$$(2) \quad \iint_B v \Delta u \, dx \, dy = \int (v u_x \, dy - v u_y \, dx) - \iint_B (u_x v_x + u_y v_y) \, dx \, dy.$$

Aus (1) und (2) folgt die *Greensche* Formel:

$$(3) \quad \iint (u \Delta v - v \Delta u) \, dx \, dy = \int \{(u v_x - v u_x) \, dy - (u v_y - v u_y) \, dx\},$$

In (1), (2), (3) ist das Kurvenintegral so über den Rand zu erstrecken, daß dabei das Innere zur Linken bleibt.

Die Formel behält unverändert ihre Gültigkeit auch für mehrfach zusammenhängende Integrationsbereiche, die von mehreren Kurven begrenzt werden. Das Kurvenintegral ist dann über den vollen Rand zu erstrecken und zwar immer so, daß dabei das Innere zur Linken bleibt. Führt man in jedem von einer Ecke verschiedenen Randpunkt zwei neue Koordinaten s und n ein, so daß die mit der Durchlaufungsrichtung gleichgerichtete Tangente s -Achse und die nach innen gerichtete Normale n -Achse wird, so ist im Punkte x_0, y_0 :

$$\begin{aligned}x - x_0 &= \cos(xs) s - \sin(xs) n \\y - y_0 &= \sin(xs) s + \cos(xs) n.\end{aligned}$$

Somit ist

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial y}{\partial n}, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = -\frac{\partial x}{\partial n},$$

also ist

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial s}.$$

Führt man s als neue Integrationsvariable ein, so kann man die *Green*-sche Formel auch so schreiben:

$$(4) \quad \iint (u \Delta v - v \Delta u) dx dy = \int \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds.$$

Trägt man in ihr für u eine beliebige Lösung der Gleichung $\Delta u = 0$ und $v = 1$ ein, so kommt

$$(5) \quad \int \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0.$$

Eine weitere Anwendung ist diese: Man bestätigt leicht, daß

$$v_0 = \log \frac{1}{r}$$

eine Potentialfunktion ist, d. h. der Potentialgleichung

$$\Delta v_0 = 0$$

genügt. Dabei ist r die positive Entfernung des variablen Punktes x, y von einem festen Punkte ξ, η , also

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2.$$

Diese Potentialfunktion $\log \frac{1}{r}$ ist nicht durchweg regulär. Sie weist vielmehr bei $(x, y) = (\xi, \eta)$ eine Unterbrechung der Stetigkeit auf. Ich will nun in (1)

$$v = \log \frac{1}{r} + v_1$$

eintragen, wo v_1 eine reguläre Potentialfunktion sein möge. Damit die Formel anwendbar wird, muß man einen Bereich zugrunde legen, in welchem der Punkt (ξ, η) nicht enthalten ist. Einen solchen kann

man aus einem Bereich B , welcher ξ, η enthält, dadurch herstellen, daß man aus ihm eine genügend kleine Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt ξ, η wegläßt, über deren Rand dann auch das Kurvenintegral zu erstrecken ist. Somit folgt aus der Greenschen Formel

$$\int_{\mathfrak{C}} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds + \int_{\mathfrak{C}} \left(v \frac{\partial u}{\partial r} - u \frac{\partial v}{\partial r} \right) ds = 0.$$

Dabei ist das erste Integral über den Rand \mathfrak{C} des Bereiches B , das zweite über den Kreis zu erstrecken (Abb. 18). Das Kreisintegral ist aber

$$\int_0^{2\pi} \left\{ \log \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - u \frac{\partial}{\partial r} \left(\log \frac{1}{r} \right) \right\} r d\varphi + \int_0^{2\pi} \left\{ v_1 \frac{\partial u}{\partial r} - u \frac{\partial v_1}{\partial r} \right\} r d\varphi.$$

Für $r \rightarrow 0$ ist $r \cdot \log \frac{1}{r} \rightarrow 0$. Daher wird für $r \rightarrow 0$ der erste Summand des ersten Integrales zu Null. Es ist aber $-r \frac{\partial}{\partial r} \log \left(\frac{1}{r} \right) \rightarrow 1$ für $r \rightarrow 0$ und daher wird bei diesem Grenzübergang der zweite Summand des ersten Integrales $2\pi u(\xi, \eta)$. Das letzte Integral endlich wird für $r \rightarrow 0$ wieder Null. Da dabei aber das über den Rand \mathfrak{C} erstreckte Integral nicht beeinflußt wird, so kommt heraus

$$(6) \quad u(\xi, \eta) = - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{C}} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds.$$

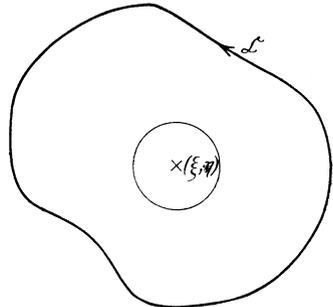


Abb. 18.

Somit sind wir in der Lage, eine Potentialfunktion im Inneren eines Bereiches durch ihre Werte und die Werte ihrer Ableitungen am Rande des Bereiches darzustellen und wir sind im Einklang mit dem Satze von S. 302, wonach die Lösung durch einen Streifen bestimmt sein muß. Die Funktion ist, wie wir wenigstens für analytische Streifen noch von damals wissen, durch diesen Streifen eindeutig bestimmt. Das hat aber hier zur Folge, daß man den Randstreifen einer Potentialfunktion, welche im Inneren von B regulär sein soll, nicht beliebig vorschreiben kann. Denn auch die Funktion $\log \frac{1}{r}$ mit Unstetigkeitspunkt im Bereichinneren ist ja durch ihren Randstreifen bestimmt. Zu diesem gehört also keine im Inneren des Bereiches reguläre Potentialfunktion. Es erhebt sich also die Frage, zu welchen Randstreifen Potentialfunktionen gehören, welche im ganzen Bereichinneren regulär sind. Die Antwort auf diese Frage gewinnt man durch weitere Spezialisierung der Funktion v , die bisher bis auf ihre logarithmische Unstetigkeit

ganz willkürlich war. Wäre es möglich, sie so einzurichten, daß sie am Rande verschwindet, so würde sich die Formel

$$(7) \quad u(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} u \frac{\partial v}{\partial n} ds$$

ergeben, und wir hätten den Satz, daß eine in B und an seinem Rande reguläre Potentialfunktion durch ihre Randwerte bestimmt ist. Eine solche Funktion v wollen wir als Greensche Funktion des Bereiches bezeichnen. Wir schreiben

$$v = G(x, y; \xi, \eta),$$

um auch ihren Aufpunkt (ξ, η) kenntlich zu machen. Dort wird sie unendlich wie $\log \frac{1}{r}$, und am Rande verschwindet sie. Die Frage ist aber nun, ob eine solche Greensche Funktion stets existiert. Vor der allgemeinen Erörterung dieser Frage weise ich auf einen besonderen Fall hin. Es sei z. B. ein Kreis vom Radius R vorgelegt und ξ, η sei sein Mittelpunkt. Dann ist

$$v = G(x, y; \xi, \eta) = \log \frac{R}{r} \quad (r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2).$$

Dann wird $\frac{\partial v}{\partial n} = -\frac{\partial v}{\partial r} = +\frac{1}{r}$ (weil n die innere Normale ist). Wir haben somit für den Wert einer Potentialfunktion im Mittelpunkt eines Kreises diesen Ausdruck durch die Randwerte

$$(8) \quad u(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R; \varphi) d\varphi.$$

Der Wert im Mittelpunkt ist somit das arithmetische Mittel der Randwerte. Er ist daher stets kleiner als der größte Randwert und diesem nur dann gleich, wenn die Funktion am Rande konstant ist. Schon diese Bemerkung genügt nun aber, um tatsächlich zu beweisen, daß es nicht mehr als eine in einem Bereiche B reguläre Potentialfunktion gibt, welche am Rande des Bereiches gegebene Randwerte besitzt, und welche im Bereiche und an seinem Rande stetig ist. Denn wenn u_1 und u_2 zwei in B reguläre Potentialfunktionen gleicher Randwerte sind, so ist $u_1 - u_2$ eine im Bereiche reguläre einschließlich des Randes stetige Potentialfunktion, welche am Rande des Bereiches verschwindet. Wäre sie nun nicht im Bereiche überall Null, so müßte sie in seinem Inneren ein Maximum oder ein Minimum haben und es ist keine Beschränkung der Allgemeinheit anzunehmen, daß es ein positives Maximum sei. Alsdann schlage man um eine Stelle, wo die Funktion diesem Maximum gleich ist, einen dem Bereiche angehörigen Kreis. Da sie im Mittelpunkt dem arithmetischen Mittel der Randwerte gleich ist, ihren größten Wert aber daselbst annimmt, so muß sie am Rande überall diesem größten Werte gleich sein. Da dies für jeden Kreis um den Maxi-

mumpunkt gilt, so ist sie im größten um diesen in B schlagbaren Kreis konstant. Durch Heranziehung weiterer Kreisscheiben schließt man hieraus leicht, daß die Funktion im ganzen Bereiche konstant sein muß. Da sie aber am Rande verschwindet und im abgeschlossenen Bereiche stetig ist, so muß sie auch im Inneren verschwinden. *Eine im Bereiche B reguläre einschließlich des Randes stetige Potentialfunktion ist also durch ihre Randwerte eindeutig bestimmt*¹⁾. Die gleiche Schlußweise führt auch zu dem allgemeinen Satz, daß keine nichtkonstante Potentialfunktion im Inneren eines Regularitätsbereiches ihren größten oder kleinsten Wert annimmt.

Zur Entscheidung der Frage, ob eine Potentialfunktion durch ihre Randwerte bestimmt ist, haben wir die Greensche Funktion in ihrer Allgemeinheit nicht nötig. Sie kann aber dazu dienen, die Funktion in ihrer Bestimmtheit durch die Randwerte wirklich aufzuschreiben. Dabei erhebt sich aber dann die weitere Frage, ob etwa diese Randwerte willkürlich vorgeschrieben werden können, ob es also Potentialfunktionen gibt, die in B regulär sind, und die am Rande von B gegebene Werte haben.

§ 2. Die erste Randwertaufgabe beim Kreis.

Die eben formulierte Aufgabe nennt man die *erste Randwertaufgabe*. Sie entspricht der ersten Randwertaufgabe, mit der wir uns schon bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen befaßt haben. Damals waren bei der ersten Randwertaufgabe die Werte der Funktion an den Rändern (Enden) eines Intervalles gegeben. Bei anderen Randwertaufgaben kamen auch noch die Randwerte der Ableitungen vor. Solche Probleme haben auch hier Analoga.

Am einfachsten gelingt nun die Lösung der ersten Randwertaufgabe im Falle des Kreises. Ich wähle den Kreis $|z| < R$ der komplexen z -Ebene ($z = x + iy$) und befaße mich zunächst mit der Konstruktion der Greenschen Funktion. Man wird am leichtesten durch die folgende heuristische Betrachtung daraufgeführt: Es ist aus der Funktionentheorie geläufig, daß jede zweimal differenzierbare Potentialfunktion Realteil einer bis auf eine rein imaginäre additive Konstante bestimmten analytischen Funktion der komplexen Variablen $z = x + iy$ ist²⁾. So gibt es auch zur Greenschen Funktion $G(x, y; \xi, \eta)$ eine konjugierte Potentialfunktion $H(x, y; \xi, \eta)$, so daß $G + iH$ eine analytische Funktion $f(z)$ ist. Auch $e^{-f(z)} = \varphi(z)$ ist eine analytische Funktion und dann ist $G = -\log |\varphi(z)|$. Somit ist $\varphi(z)$ eine im Kreise analy-

1) Wird nicht Stetigkeit im abgeschlossenen Bereich verlangt, so gilt dieser Satz nicht, wie z. B. die Funktion $u = J(z) = y (z = x + iy)$ in der Halbebene $y > 0$ lehrt.

2) Sie ist somit beliebig oft stetig differenzierbar.

tische Funktion, welche an seinem Rande den konstanten absoluten Betrag Eins hat und welche im Punkte $\zeta = \xi + i\eta$ desselben verschwindet. Sie hat dort zudem eine einfache Nullstelle und hat keine anderen Nullstellen im Bereiche. Die Funktion $w = \varphi(z)$ leistet somit eine schlichte Abbildung des Kreises auf den Kreis $|w| < 1$. Daher muß $\varphi(z)$ eine lineare Funktion sein, und zwar ist $\varphi(z) = \frac{R(z - \zeta)}{R^2 - \bar{\zeta}z}$ die gewünschte lineare Funktion. Sie ist nicht die einzige, die unseren Zwecken genügt. Man erhält andere, wenn man die angegebene mit einer Zahl vom Betrage Eins multipliziert. Aber diese führen natürlich zu derselben Greenschen Funktion. Für diese findet man somit die Darstellung

$$(9) \quad G(x, y; \xi, \eta) = -\log \left| \frac{|z - \zeta| \cdot R}{|z - \zeta_1| \cdot |\zeta|} \right| \left(\zeta_1 = \frac{R^2}{\bar{\zeta}} \right).$$

Man verifiziert leicht, daß die auf diesem heuristischen Wege gefundene, durch (9) dargestellte Funktion wirklich alle Eigenschaften der Greenschen Funktion besitzt. Die Nachprüfung sei dem Leser überlassen. Zur Lösung der ersten Randwertaufgabe durch die Formel (7) benötigen wir nun noch die Ableitung der Greenschen Funktion nach der nach innen gerichteten Normalen.

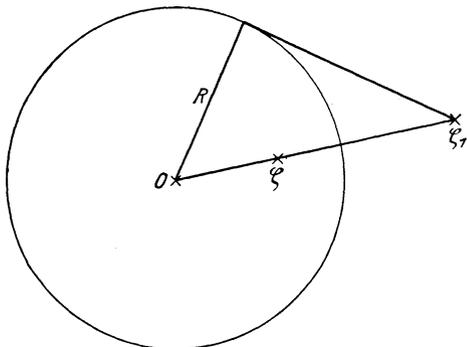


Abb. 19.

gebildet für $r = R$. Da liefert aber leichte Rechnung das Ergebnis

$$(10) \quad \frac{\partial G}{\partial n} = \frac{R^2 - |\zeta|^2}{R|z - \zeta|^2}.$$

Setzt man noch $\zeta = \varrho e^{i\vartheta}$, so kann man nach dem Kosinussatz der Trigonometrie auch schreiben:

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{R^2 - \varrho^2}{R(R^2 + \varrho^2 - 2R\varrho \cos(\vartheta - \varphi))}$$

und somit wird die erste Randwertaufgabe durch das folgende *Poisson'sche Integral* gelöst:

$$(11) \quad u(\varrho, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - \varrho^2) u(R, \varphi)}{R^2 + \varrho^2 - 2R\varrho \cos(\vartheta - \varphi)} d\varphi.$$

Freilich ist diese Formel bisher nur unter der Voraussetzung bewiesen, daß es eine reguläre Potentialfunktion gibt, welche die ge-

Setzt man $z = r e^{i\varphi}$, so ist $\frac{\partial G}{\partial n}$ weiter nichts als die negative Ableitung von G nach r

gegebenen Randwerte besitzt. Aber man kann nun nachträglich unter ziemlich allgemeinen Annahmen über die Randwerte zeigen, daß das *Poissonsche* Integral eine Potentialfunktion darstellt, welche die gegebenen Randwerte besitzt. Dazu würde z. B. die Annahme ausreichen, daß die Randwerte abteilungsweise stetig sind. Ich ziehe es indessen vor, auf einem etwas anderen Wege die Existenz einer Potentialfunktion mit gegebenen Randwerten nachzuweisen. Ich betrachte dazu eine analytische Funktion, deren Realteil die gesuchte Potentialfunktion mit den gegebenen Randwerten sein soll. Da diese analytische Funktion nun im Kreise regulär ist, so kann man sie in eine in diesem Kreise reguläre Potenzreihe entwickeln. Dann hat man also eine Potenzreihe dieser Form

$$(12) \quad \sum a_n z^n \quad (a_n = a_n' + i a_n'').$$

Ihr Realteil ist die gesuchte Potentialfunktion. Für diese hat man daher die Reihe

$$(13) \quad \sum r^n (a_n' \cos n\varphi - a_n'' \sin n\varphi).$$

Für $r = R$ ist dies eine trigonometrische Reihe, welche die gegebenen Randwerte darstellt, falls sie da noch konvergiert. Es ist auch leicht zu sehen, daß jede Reihe (13) in ihrem Konvergenzkreis eine Potentialfunktion darstellt. Ohne weiteres leuchtet das in dem Falle ein, wo auch die konjugierte Reihe

$$(14) \quad i \sum r^n (a_n' \sin n\varphi + a_n'' \cos n\varphi)$$

konvergiert. Dann ist nämlich die Summe beider die Potenzreihe (12), welche eine analytische Funktion darstellt, deren Realteil jene Reihe ist. Nur dieser Fall ist für das folgende nötig. Ich nehme nun an, die Randwerte seien so beschaffen, daß die sie darstellende *Fouriersche* Reihe (13) die nötigen Konvergenzeigenschaften hat. Das ist z. B. dann der Fall, wenn die Randwerte als Funktion von φ mit ihren Ableitungen der beiden ersten Ordnungen stetig sind. Alsdann folgt aus der Integraldarstellung der Koeffizienten, daß ihre Summe wie $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergiert¹⁾. Und daraus ergibt sich, daß auch die konjugierte Reihe und damit die Potenzreihe im abgeschlossenen Kreise $|z| \leq R$ gleichmäßig konvergiert.

Daher konvergiert auch die Reihe, welche die Potentialfunktion darstellt, im abgeschlossenen Kreise $|z| \leq R$ gleichmäßig und stellt daher eine im abgeschlossenen Kreise stetige Potentialfunktion dar. Sie besitzt daher die gegebenen Randwerte, und die Randwertaufgabe ist für diesen allerdings ziemlich speziellen Fall gelöst. Dieser Weg ist mancherlei Verallgemeinerungen fähig. Ich will aber diesen Betrachtungen nicht nachgehen, sondern nur noch das weitestgehende Resultat

¹⁾ Vgl. meinen Leitfaden der Integralrechnung S. 82.

erwähnen, über das man heute verfügt: *Wenn die Randwerte durch irgendeine im Lebesgueschen Sinne integrierbare Funktion gegeben sind, so stellt das Poissonsche Integral im Kreisinneren eine reguläre Potentialfunktion dar, welche bei radialer Annäherung an einen, nicht einer gewissen Ausnahmemenge vom Maß Null angehörigen Randpunkt den gegebenen Randwerten zustrebt.*

Soviel über die Lösung der ersten Randwertaufgabe für den Kreis. Nun ist leicht zu sehen, daß damit die erste Randwertaufgabe auch für alle diejenigen einfachzusammenhängenden Bereiche gelöst ist, die man auf die Fläche eines Kreises so konform abbilden kann, daß dabei die Stetigkeit der Abbildung am Rande gewahrt bleibt. Denn wenn $w = \varphi(z; \zeta)$ diejenige analytische Funktion ist, welche den Bereich so auf $|w| < 1$ abbildet, daß dabei der Aufpunkt ζ in $w = 0$ übergeht, so ist $-\log |\varphi(z; \zeta)|$ die Greensche Funktion des Bereiches, und man kann eine dem Poissonschen Integral ähnliche Formel ansetzen¹⁾.

Man kann aber auch die Lösbarkeit der Randwertaufgabe sofort erschließen. Durch die Abbildung $w = \varphi(z; \zeta)$ geht der Rand des Bereiches in stetiger Weise in die Peripherie des Kreises über. Die am Rande des Bereiches vorgeschriebenen Randwerte gehen somit in bestimmte Werte am Rande des Kreises über. Man löse mit diesen Randwerten die Randwertaufgabe für den Kreis. Diese Potentialfunktion ist Realteil einer analytischen Funktion $\psi(w)$. Dann ist $\psi\{\varphi(z; \zeta)\}$ eine im Bereiche analytische Funktion, deren Realteil eine Potentialfunktion ist, welche die gegebenen Randwerte besitzt. Das ist ohne weiteres klar.

Da man nun aber heute aus der Theorie der konformen Abbildung weiß¹⁾, daß man jeden von einer Jordanschen Kurve, d. h. einer stetigen Kurve ohne Selbstüberschneidungen begrenzten Bereich auf einen Kreis so konform abbilden kann, daß auch am Rande noch die Stetigkeit der Abbildung gewahrt bleibt, so ist auch für solche Bereiche die erste Randwertaufgabe lösbar, für Randwerte, welche den gleichen Bedingungen genügen, wie sie beim Kreise angegeben wurden.

Bemerkungen. 1. Dem direkten Beweis, daß das Poissonsche Integral zum Beispiel für stetige Randwerte eine Potentialfunktion dieser Randwerte darstellt, liegen folgende Gedanken zugrunde. Zunächst ergibt sich durch Differentiation unter dem Integralzeichen, daß eine Potentialfunktion vorliegt. Daß sie aber die gegebenen Randwerte besitzt, zeigt man so: Durch konforme Abbildung wird aus einer Potentialfunktion wieder eine Potentialfunktion. Soll man nun in einem Punkte P , der einem Peripheriepunkte nahe liegt, die Potentialfunktion berechnen, um zu erkennen, daß sie daselbst von dem vorgeschriebenen Randwerte nur wenig abweicht, so mache man eine konforme Abbildung des Kreises, die P in den Mittelpunkt überführt. Der Wert im Mittelpunkt wird dann das arithmetische Mittel der durch die Abbildung abgeänderten Randwerte. Bei dieser Abbildung geht nun aber ein gewisses Kreisbüschel in die Geraden durch den Mittelpunkt über. Es sind die Kreise, welche

¹⁾ Man vgl. Bd. II meines Lehrbuches der Funktionentheorie.

durch P gehen und die Peripherie senkrecht durchsetzen. Die Winkel, welche sie in P miteinander bilden, sind den Winkeln ihrer geradlinigen Bilder im Mittelpunkt gleich. Je näher nun P an der Peripherie liegt, um so größer ist der Winkelraum derjenigen Geraden, welche aus Kreisen hervorgehen, welche in der Nähe von P die Peripherie treffen. Die verpflanzten Randwerte werden also auf sehr großen Bogen der Peripherie nahezu dem Wert gleich sein, welcher in dem P benachbarten Peripheriepunkt vorgeschrieben ist, und das arithmetische Mittel wird also auch diesem Werte um so mehr gleichkommen, je näher P an dem Rande liegt.

2. *H. A. Schwarz*, dem die Theorie der Potentialfunktionen so viel zu danken hat, hat als Erster die Lösbarkeit der Randwertaufgabe für allgemeinere Klassen von Bereichen auf einem Wege erkannt, den wir noch kurz skizzieren wollen. Es ist die berühmte *Methode des alternierenden Verfahrens*. Sie ist auf Bereiche zugeschnitten, die man mit endlich vielen anderen dachziegelartig so bedecken kann, daß für jeden dieser Ziegel die Randwertaufgabe lösbar ist. Die Ziegel dürfen dabei nicht über den Bereichrand hinübergreifen. Die Methode ist also z. B. anwendbar, wenn der Rand aus endlich vielen Bogen analytischer Kurven besteht. Denn eine analytische Kurve ist dadurch definiert, daß man sie durch eine in ihrer Umgebung analytische Funktion auf eine gerade Linie abbilden kann¹⁾. Dadurch geht aber auch ein gewisser an einem genügend kleinen Bogen derselben nach dem Bereichinneren zu gelegener Bereich in einen Halbkreis über, den man dann leicht auf einen Vollkreis abbilden kann. Nehmen wir also nun einen Bereich an, der von endlich vielen solcher Ziegel bedeckt ist. Dann ist offenbar nur zu zeigen, daß man auch für einen aus zwei solchen Ziegeln aufgebauten Bereich die Randwertaufgabe lösen kann. Und da setzt nun das alternierende Verfahren ein. In Abb. 20 sind zwei solche Dachziegel gezeichnet. Wir sehen vier Kurvenstücke.

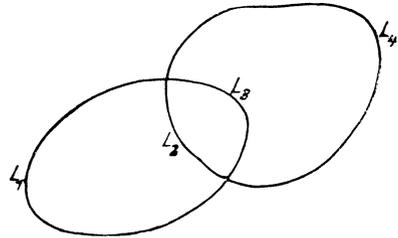


Abb. 20.

Auf L_1 und L_4 sind Randwerte gegeben, zu denen eine im großen Bereich reguläre Potentialfunktion konstruiert werden soll. Man gebe zunächst auf L_3 irgendwelche Randwerte vor, so daß dann auf $L_1 + L_3$ eine stetige Randfunktion des linken Ziegels gegeben ist. Man bestimme die in diesem Ziegel reguläre Funktion, welche die erwähnten Randwerte hat. Diese Funktion u_1 hat auf L_2 gewisse Werte, die die auf L_4 schon gegebenen zu stetigen Randwerten am rechten Ziegel ergänzen. Mit diesen Randwerten löse man für den rechten Ziegel die Randwertaufgabe und erhält eine Funktion u_2 , die wieder auf L_3 gewisse Werte hat, die die auf L_1 gegebenen zu Randwerten am linken Ziegel ergänzen. Mit diesen löse man wieder die Randwertaufgabe für den linken Ziegel und fahre so immer mit beiden Ziegeln abwechselnd fort. Dann konvergieren die so erhaltenen Potentialfunktionen in einem jeden Ziegel gegen eine Potentialfunktion, und beide Grenzfunktionen stimmen in dem beiden Ziegeln gemeinsamen Gebiete überein, so daß wir also eine im großen Bereich reguläre Potentialfunktion mit den gegebenen Randwerten erhalten haben.

3. Älter noch als diese Methode ist die Methode des *Dirichletschen Prinzips*. Sie beruht auf der Betrachtung des Variationsproblems

$$D(u, u) = \iint_B \left\{ \left(\frac{cu}{cx} \right)^2 + \left(\frac{cu}{cy} \right)^2 \right\} dx dy = \text{Min.}$$

¹⁾ Ihre Koordinaten sind also analytische Funktionen eines reellen Parameters: t

Die Aufgabe ist die: Man soll eine in einem Bereich B zweimal stetig differenzierbare Funktion finden, welche diesem Integral einen kleineren Wert erteilt als alle anderen zweimal stetig differenzierbaren Funktionen, welche am Rande von B dieselben Werte haben wie die gesuchte. Wenn es eine solche Lösung gibt, so schließt man ähnlich wie auf S. 132, daß die betreffende Funktion der Gleichung $\Delta u = 0$ genügen muß. Es ist aber nicht von vornherein einleuchtend, daß es unter allen Funktionen gegebener Randwerte eine gibt, welche dem Integral einen kleineren Wert erteilt als die übrigen. Schlußmethoden, welche von der Evidenz dieser Tatsache ausgingen, wurden durch die Kritik von *Weierstraß* zu Fall gebracht. *Schwarz* ersann als Ersatz seine Methode des alternierenden Verfahrens. Inzwischen aber ist es im Anschluß an *Hilbert* gelungen, den fehlenden Existenzbeweis nachzutragen. Es gibt somit unter allen in einem Bereiche zweimal stetig differenzierbaren Funktionen mit gegebenen Randwerten eine, welche dem *Dirichletschen* Integral einen möglichst kleinen Wert erteilt. Das ist die Potentialfunktion, welche diese Randwerte besitzt. Auf den Beweis will ich nicht näher eingehen, zumal ja ein anderes Buch dieser Sammlung sich ausführlich mit diesen Dingen beschäftigt. (Vgl. *Courant-Hilbert*: Methoden der mathematischen Physik.)

Sehr einfach ist es allerdings, einzusehen, daß eine am Rande reguläre Potentialfunktion dem *Dirichletschen* Integral einen kleineren Wert erteilt, als jede andere reguläre Funktion gleicher Randwerte. Denn sei u eine Potentialfunktion und $u + v$ irgendeine andere reguläre Funktion gleicher Randwerte, also $v = 0$ am Rande, dann ist

$$D(u + v, u + v) = D(u, u) + 2D(u, v) + D(v, v).$$

Hier ist

$$D(u, v) = \iint (u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y) dx dy$$

gesetzt. Nun ist aber

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} D(u + \varepsilon v, u + \varepsilon v) \Big|_{\varepsilon=0} &= 2 \iint (u_x v_x + u_y v_y) dx dy = 2 \iint \Delta u \cdot v dx dy \\ &+ 2 \int v (u_x dy - u_y dx). \end{aligned}$$

Hier ist das Linienintegral über den Bereichrand zu erstrecken. Da hier $v = 0$ ist, so ist es Null, und wegen $\Delta u = 0$ verschwindet auch das Doppelintegral. Also ist

$$D(u + v, u + v) = D(u, u) + D(v, v) > D(u, u).$$

4. Auf einem ganz anderen Wege hat kürzlich *Perron* die Randwertaufgabe gelöst (*Math. Ztschr.*, Bd. 18, 1923). Er gewinnt die Potentialfunktion als untere Grenze derjenigen stetigen Funktionen, die am Rande zu große Werte annehmen, und im Inneren der Ungleichung $\Delta u \leq 0$ genügen.

Durch eine jede dieser Methoden erscheint nun auch die Existenz der *Greenschen* Funktion von $\Delta u = 0$ sichergestellt. Denn nach ihrer auf S. 331 gegebenen Definition läuft ihre Bestimmung auf die Berechnung einer im Bereiche regulären Funktion hinaus, deren Randwerte die von $\log \frac{1}{r}$ zu Null ergänzen. Mit der Lösung der ersten Randwertaufgabe ist also auch die Existenz der *Greenschen* Funktion gesichert. Sie spielt für die Gleichung $\Delta u = 0$ eine analoge Rolle, wie die früher eingeführte *Greensche* Funktion eines Randwertproblems einer gewöhnlichen Differentialgleichung. Eine Anwendung mag das

noch erhärten. Es möge sich darum handeln, diejenige Lösung der inhomogenen Gleichung

$$(15) \quad \Delta u = f(x, y)$$

zu bestimmen, welche am Rande des Bereiches gegebene Werte besitzt. Zu dem Zweck bezeichne ich mit u_0 die Potentialfunktion, welche diese Randwerte besitzt, und setze $u = u_0 + u_1$. Dann genügt u_1 wieder der Differentialgleichung (15) und hat die Randwerte Null. Nur um die Bestimmung von u_1 handelt es sich also noch. Ich knüpfe an die Greensche Formel S. 327 an und setze darin für u die gesuchte Lösung u_1 von (15) ein, für v wähle ich die Greensche Funktion, die ich wieder in der Form $G = \log \frac{1}{r} + v_1$ schreibe. Dann muß man zunächst wieder um den Aufpunkt (ξ, η) der Greenschen Funktion einen kleinen Kreis schlagen, sein Inneres vom Bereich weglassen, im Doppelintegral über diesen Restbereich und im Kurvenintegral über seinen vollen Rand integrieren. Das Kreisintegral wird ganz auf dieselbe Weise wie S. 329 berechnet, und man findet dafür den Wert

$$2 \pi u_1(\xi, \eta).$$

Das Randintegral wird zu Null und das Doppelintegral zu

$$- \iint G \cdot f \, dx \, dy,$$

und so hat man diese Darstellung der Lösung unserer Aufgabe

$$u_1(\xi, \eta) = - \frac{1}{2\pi} \iint G(x, y; \xi, \eta) f(x, y) \, dx \, dy.$$

Sie ist abgeleitet unter der Voraussetzung, daß eine Lösung existiert. Man muß also nur noch hinterher verifizieren, daß u_1 der Differentialgleichung genügt. Das gelingt durch direktes Differenzieren, wie der Leser selbst nachprüfen möge.

§ 3. Die Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$.

Wir legen uns für diese Differentialgleichung wieder die erste Randwertaufgabe vor. Von vornherein wird man erwarten, daß wie bei der ersten Randwertaufgabe bei gewöhnlichen Differentialgleichungen, nicht immer eine nicht identisch verschwindende Lösung existiert. Wir können mit Hilfe der uns zur Verfügung stehenden Methoden einen vollen Einblick in die Verhältnisse gewinnen. Nach den Schlußbetrachtungen des vorigen Paragraphen genügt nämlich jede im abgeschlossenen Bereiche B stetige, am Rande desselben verschwindende Lösung von

$$(16) \quad \Delta u + \lambda u = 0$$

der linearen homogenen Integralgleichung¹⁾

¹⁾ Durch Differenzieren unter dem Doppelintegral kann man hieraus den Schluß ziehen, daß u zweimal stetig differenzierbar ist.

$$(16') \quad u(\xi, \eta) = \frac{\lambda}{2\pi} \iint_B G(x, y; \xi, \eta) u(x, y) dx dy.$$

Aus der S. 180 vorgetragene Theorie derselben folgt der volle Aufschluß über unser Randwertproblem. Daß damals alles für einfache Integrale ausgesprochen wurde, macht keinen Unterschied aus. Alles bleibt unverändert bestehen, auch für Doppelintegrale, welche über beliebige Bereiche erstreckt werden. Zwar ist hier der Kern $G(x, y; \xi, \eta)$ nicht stetig, aber er ist quadratisch integrierbar, d. h.

$$\iint_B \iint_B [G(x, y; \xi, \eta)]^2 dx dy d\xi d\eta$$

konvergiert, und daher bleibt die damalige Theorie unverändert verwendbar. Somit folgt, daß nur für gewisse Werte des Parameters λ , die sogenannten *Eigenwerte*, das Problem durch eine nicht überall in B verschwindende, im Inneren zweimal stetig differenzierbare, im abgeschlossenen Bereich stetige Funktion lösbar ist. Daß diese Eigenwerte sämtlich positiv sind, ist vor vornherein leicht einzusehen. Denn nehmen wir an, zu einem negativen Werte von λ gehöre eine Eigenfunktion, welche im Bereiche irgendwo ein positives Maximum besitze. Dann ist einmal nach den Regeln der Differentialrechnung in diesem Punkte $\Delta u \leq 0$, andererseits aber wegen $\lambda < 0$ und $u > 0$ auch $\lambda u < 0$, so daß an dieser Stelle die Summe beider nicht Null sein könnte. Also sind alle reellen Eigenwerte positiv oder Null: $\lambda = 0$ ist aber nach dem uns über $\Delta u = 0$ bereits bekannten sicher kein Eigenwert. Also sind alle Eigenwerte positiv. Die Eigenwerte λ_k sind weiter alle reell und häufen sich nirgends im Endlichen, ja sie sind so verteilt, daß $\sum \frac{1}{\lambda_k^2}$ konvergiert. Dies sowie die Existenz der Eigenwerte entnehmen wir der Theorie der linearen Integralgleichungen. Wegen der Behauptung, daß alle Eigenwerte reell sind, vgl. man auch S. 160 dieses Buches. Wegen der sonstigen Behauptungen lese man *E. Schmidt*, Annalen 63 nach. Das gilt auch für die in dem nun folgenden Absatz angeführten Tatsachen. Man vgl. auch *Courant-Hilbert*, Methoden der mathematischen Physik.

Zu jedem Eigenwert gehören endlich viele linear unabhängige Eigenfunktionen, und man darf annehmen, daß dieselben zueinander orthogonal sind. Ebenso sind die zu verschiedenen Eigenwerten gehörigen Eigenfunktionen orthogonal, d. h. es ist

$$\iint_B \varphi_n(x, y) \varphi_m(x, y) dx dy = 0,$$

und man hat den Entwicklungssatz, wonach man jede zweimal stetig differenzierbare, am Rande verschwindende Funktion in eine nach Eigenfunktionen fortschreitende Reihe entwickeln kann. Denn jede zweimal stetig differenzierbare Funktion $\varphi(x, y)$, welche am Bereich-

rand verschwindet, kann mit Hilfe der Greenschen Funktion, also des Kernes der Integralgleichung, so darstellen

$$\varphi(\xi, \eta) = - \iint_B G(x, y, \xi, \eta) f(x, y) dx dy.$$

Dabei ist $f(x, y) = \Delta \varphi$ gesetzt.

Ich will nun diese Folgerungen aus der allgemeinen Theorie durch ein weiteres Eingehen auf die Besonderheiten der Differentialgleichung (16) noch etwas ergänzen.

Zunächst will ich auf das physikalische Problem hinweisen, dem diese Differentialgleichung entspringt. Es ist das Problem der Schwingungen einer Membran, die an ihrem Rande eingespannt ist. An sich werden diese Schwingungen durch die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \Delta z$$

beschrieben. Dabei ist c^2 eine von Spannungszustand und Material abhängige Konstante. Ähnlich wie S. 326 bei der schwingenden Saite führt der Ansatz

$$z = \cos k(t + h) u(x, y) \quad (k \text{ und } h \text{ konstant})$$

zur Trennung der Variablen. Er liefert für $u(x, y)$ die Differentialgleichung

$$\Delta u = \frac{1}{c^2} k u,$$

die also mit der hier betrachteten übereinstimmt.

Aus den hieraus gefundenen Einzellösungen, d. i. den Eigenfunktionen setzt man, genau wie bei der schwingenden Saite, allgemeinere Lösungen additiv zusammen. Dem Entwicklungssatz entspricht wieder die Aufgabe, eine solche Lösung den Anfangsbedingungen anzupassen.

Des weiteren will ich in einem speziellen Fall die Lösungen des Problems wirklich angeben. Es sei der Fall der quadratischen Membran. Hier liegt es nahe, in (13) den Ansatz $u = f(x) \cdot g(y)$ zu machen. Man nimmt dabei an, daß das Quadrat parallel zu den Koordinatenachsen orientiert ist.

Dadurch findet man für f und g die beiden Differentialgleichungen

$$f'' + a^2 f = 0, \quad g'' + b^2 g = 0, \quad \text{wo} \quad a^2 + b^2 = \lambda$$

und schließt so, daß die folgenden Lösungen in Betracht kommen:

$$u = (c_1 \cos ax + c_2 \sin ax) (d_1 \cos by + d_2 \cos by).$$

Das Quadrat sei nun von den Geraden

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x = \pi, \quad y = \pi$$

begrenzt. Sollen dann die Lösungen am Rande des Quadrates verschwinden, so zeigt sich, daß allein noch

$$(17) \quad c \sin ax \sin by$$

übrig bleibt und daß dabei $a = m$ und $b = n$ sein muß, wo m und n ganze Zahlen sind. Für λ kommen somit nur die Werte

$$\lambda_{m, n} = m^2 + n^2$$

in Betracht. Das sind die Eigenwerte. Freilich steht zunächst noch dahin, ob wir so alle Eigenwerte gefunden haben. Dies aber folgt sofort daraus, daß man willkürliche Funktionen nach unseren Eigenfunktionen (17) entwickeln kann. Ein solcher Entwicklungssatz gilt nämlich nur für das vollständige System aller Eigenfunktionen. Tatsächlich aber läßt sich ganz analog wie in der Theorie der *Fourierschen* Reihen beweisen, daß man jede zweimal stetig differenzierbare Funktion $f(x, y)$, welche am Rande des Quadrates verschwindet, in eine Reihe

$$f(x, y) = \sum c_{m, n} \sin m x \sin n y$$

entwickeln kann, deren Koeffizienten

$$c_{m, n} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi f(x, y) \sin m x \sin n y \, dx \, dy$$

sind. Wir finden auch hier bestätigt, daß verschiedene Eigenfunktionen zueinander orthogonal sind, denn es ist ja

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \int_0^\pi \sin m x \sin n y \sin k x \sin l y \, dx \, dy \\ &= \int_0^\pi \sin m x \sin k x \, dx \cdot \int_0^\pi \sin n y \sin l y \, dy = 0, \end{aligned}$$

falls entweder $m^2 \neq k^2$ oder $n^2 \neq l^2$ ist. Zum gleichen Eigenwert $\lambda = m^2 + n^2$ gehören offenbar alle die Eigenfunktionen $\sin m x \sin n y$, für welche $\lambda = m^2 + n^2$ den gleichen Wert hat. Zur gleichen durch den Eigenwert bestimmten Schwingungsdauer gehören daher oft mehrere linear unabhängige Eigenfunktionen. Auch deren lineare Kombinationen gehören zur gleichen Schwingungsdauer. Sucht man diejenigen Stellen der Membran auf, für welche während der ganzen Schwingung Ruhe herrscht, also die Knotenlinien der Schwingung, so erhält man die in der Akustik unter dem Namen Klangfiguren bekannten Kurven, deren mannigfaches Aussehen dem Umstande entspringt, daß zu einem und demselben Eigenwert verschiedene Eigenfunktionen gehören können.

Ich wende mich nun wieder allgemeineren Fragen zu und stelle mir die Aufgabe, Aufschluß über die Verteilung der Eigenwerte und ihre Abhängigkeit vom Gebiet zu gewinnen. Es handelt sich hier um die Übertragung derjenigen Ergebnisse, welche wir früher anlässlich des Oszillationstheorems über die Verteilung der Eigenwerte der Differentialgleichung $y'' + \lambda \rho y = 0$ gewonnen hatten. Neuerdings sind in der uns

hier beschäftigenden Frage durch Arbeiten von Weyl¹⁾ und Courant²⁾ erhebliche Fortschritte erzielt worden, um deren Darstellung es sich hier handeln soll. Ich berichte über die von Courant entwickelte Methode der Variationsrechnung. Diese Beziehungen zu einem Variationsproblem beruhen auf dem folgenden Satz: *Denkt man sich die Eigenwerte der Größe nach geordnet, und dabei jeden Eigenwert seiner Vielfachheit³⁾ nach aufgeschrieben $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$, so ist der n -te Eigenwert λ_n der kleinste Wert, welchen das Dirichletsche Integral*

$$D(\varphi, \varphi) = \iint_B \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy$$

annehmen kann, wenn zum Vergleich alle im abgeschlossenen Bereich stetigen und mit stetigen ersten und zweiten Ableitungen versehenen am Rande verschwindenden Funktionen zugelassen werden, welche den weiteren Bedingungen

$$(18) \quad \iint_B \varphi u_i dx dy = 0, \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

$$(19) \quad \iint_B \varphi^2 dx dy = 1$$

genügen. Die u_i sind dabei die zu den λ_i gehörigen durch

$$\iint_B u_i^2 dx dy = 1$$

normierten Eigenfunktionen, wobei also jetzt jedem λ_i gerade eine Eigenfunktion zugeordnet ist. Das Minimum von $D(\varphi, \varphi)$ wird für die n -te Eigenfunktion u_n angenommen.

Der Beweis dieses Satzes kann folgendermaßen geführt werden: Aus (1) von S. 327 folgt⁴⁾

$$D(\varphi, \varphi) = - \iint_B \varphi \Delta \varphi dx dy.$$

Wir bedienen uns nun der von S. 182 bekannten Vollständigkeitsrelation

$$\iint_B \varphi \Delta \varphi dx dy = \sum_i \iint_B \varphi u_i dx dy \cdot \iint_B \Delta \varphi \cdot u_i dx dy.$$

Nun ist aber wegen des Verschwindens von φ und u_i am Rande nach der Greenschen Formel (3) von S. 327

$$\iint_B \Delta \varphi \cdot u_i dx dy = \iint_B \varphi \cdot \Delta u_i dx dy = - \lambda_i \iint_B \varphi u_i dx dy.$$

1) H. Weyl: Math. Annalen Bd. 71, Crelles Journ. Bd. 141, 143.

2) R. Courant: Math. Zeitschr. Bd. 7.

3) Das ist die Zahl der linear unabhängigen zu ihm gehörigen Eigenfunktionen. Daß diese Anzahl endlich ist, wird in der Theorie der Integralgleichungen bewiesen. Man vgl. (16'). Siehe z. B. E. Schmidt: Math. Ann. Bd. 63. S. 445.

4) B möge wie S. 327 von endlich vielen Bögen stetig differenzierbarer Kurven begrenzt sein. Daran werde in der Folge festgehalten.

Somit wird

$$(20) \quad D(\varphi, \varphi) = \sum_i \lambda_i \left\{ \iint_B \varphi u_i dx dy \right\}^2.$$

Nun ist aber nach der Vollständigkeitsrelation wegen (19)

$$1 = \iint_B \varphi^2 dx dy = \sum_i \left\{ \iint_B \varphi u_i dx dy \right\}^2.$$

Weiter aber ist nach (18)

$$\iint_B \varphi u_i dx dy = 0 \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Daher wird

$$D(\varphi, \varphi) \geq \lambda_n.$$

Das Gleichheitszeichen kann hierbei nur stehen, wenn in (20) nur eines der Integrale von Null verschieden sind, welche zu den λ_n gleichen Eigenwerten gehören. Dann ist aber wegen des Entwicklungssatzes φ eine der zugehörigen Eigenfunktionen, für die also allein das Minimum angenommen wird. *Courant* hat diese schon länger bekannte Extremaleigenschaft der Eigenfunktionen so umgestaltet, daß sie für die weiteren Schlüsse brauchbar wird. Sie krankt nämlich noch an dem Übelstand, daß man zur Charakterisierung der n -ten Eigenfunktion sich auf die Eigenfunktionen mit kleinerer Nummer beziehen muß. Zu dieser Umgestaltung gelangt man durch die folgenden Überlegungen. Statt der Nebenbedingungen (12), (19) wollen wir der Funktion φ die Zusatzbedingungen (19) und

$$(21) \quad \iint_B \varphi v_i dx dy = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

aufzulegen. Dabei sollen die v_i irgendwelche in B stetige Funktionen sein. Für hiernach zulässige Funktionen φ besitzt das Integral $D(\varphi, \varphi)$ eine untere Grenze, welche von den $v_1 \dots v_{n-1}$ abhängt und daher mit $d(v_1 \dots v_{n-1})$ bezeichnet werden soll. Dann ist

$$d(v_1 \dots v_{n-1}) \leq \lambda_n = d(u_1 \dots u_{n-1}).$$

Zum Beweise ist nur zu zeigen, daß man bei beliebiger Wahl der $v_1 \dots v_{n-1}$ eine Funktion φ bestimmen kann, für die $D(\varphi, \varphi) \leq \lambda_n$ ist. Eine solche Funktion φ kann man z. B. als lineare Verbindung

$$(22) \quad \varphi = c_1 u_1 + \dots + c_n u_n$$

der u_i herstellen. Denn die ihr aufzuerlegenden Bedingungen (21) und (19) bedeuten $n-1$ lineare homogene Gleichungen für die c_i ($i = 1, 2, \dots, n$) nebst der Gleichung $\sum c_i^2 = 1$. Dem kann man aber durch passende c_i stets genügen. Die Funktion (22) verschwindet auch am Rande und ist wie die Eigenfunktionen u_i zweimal stetig differenzierbar. Für sie wird aber nach (20)

$$D(\varphi, \varphi) = \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i^2.$$

Also ist $D(\varphi, \varphi) \leq \lambda_n$ wegen $\lambda_i \leq \lambda_{i+1}$ und $c_1^2 + \dots + c_n^2 = 1$. Somit haben wir den folgenden Satz: *Es seien $v_1 \dots v_{n-1}$ in B stetige Funktionen, und $d(v_1 \dots v_{n-1})$ sei die untere Grenze der Werte, welche $D(\varphi, \varphi)$ annimmt, wenn φ irgendeine in B zweimal stetig differenzierbare am Rande verschwindende Funktion ist, welche den Bedingungen (19), (21) genügt. Dann ist λ_n gleich dem Maximum, welches $d(v_1 \dots v_{n-1})$ bei beliebiger Wahl der $v_1 \dots v_{n-1}$ annehmen kann. Das Maximum wird erreicht für $v_1 = u_1, \dots, v_{n-1} = u_{n-1}, \varphi = u_n$.*

In diesem Satz kann man die Voraussetzungen noch ein wenig erweitern. Nach einer in der Variationsrechnung viel verwandten Schlußweise kann man nämlich eine jede stetige abteilungsweise stetig differenzierbare Funktion beliebig genau approximieren, und daraus ergibt sich die Gültigkeit des Satzes auch für solche Funktionenklassen φ , die zwar stetig, aber nur einmal abteilungsweise stetig differenzierbar sind.

Diesen Satz koppelt man nun nach *Courant* mit folgendem *allgemeinen Prinzip*. Man stelle sich vor, daß man zur Konkurrenz nur solche Funktionen zuläßt, welche außer den ihnen bisher auferlegten Bedingungen noch einigen weiteren genügen. Innerhalb dieser engeren Klasse von Funktionen φ werde das Maximum jener unteren Grenze gesucht. Für eine engere Funktionenklasse kann aber die untere Grenze nicht kleiner sein als für die weitere Funktionenklasse, und daher kann das Maximum der unteren Grenze nicht abnehmen. Ebenso nimmt das Maximum der unteren Grenze nicht zu, wenn die Konkurrenzbedingungen für φ erleichtert werden, d. h. wenn umfassendere Funktionenklassen zur Konkurrenz zugelassen werden.

Aus diesen Betrachtungen kann man nun den Schluß ziehen, daß *bei Vergrößerung des Gebietes die Eigenwerte nicht zunehmen*. Betrachtet man nämlich zwei Gebiete B_1 und B_2 , von denen das zweite ein Teil des ersten sein möge, und die beiden den bisher immer gemachten Voraussetzungen genügen mögen¹⁾. Dann können die in B_2 zweimal stetig differenzierbaren Funktionen φ , welche am Rande von B_2 verschwinden, offenbar aufgefaßt werden als Funktionen, welche in dem größeren Gebiete B_1 abteilungsweise stetig differenzierbar sind, dazu aber am Rande von B_2 und in dem nicht zu B_2 gehörigen Teile von B_1 verschwinden. Das ist eine engere Funktionenklasse als die zur Definition der Eigenwerte für B_1 benutzte. Daher sind die Eigenwerte des kleineren Gebietes sicher nicht kleiner als die Eigenwerte des größeren. Genauer: *der n -te Eigenwert des kleineren Gebietes ist nicht kleiner als der n -te Eigenwert des größeren Gebietes*.

Man kann diesen Schluß leicht für den Fall verallgemeinern, daß jenes Teilgebiet von B_1 nicht aus einem Stücke, sondern aus mehreren

¹⁾ Man vgl. z. B. Fußnote 4 auf S. 341.

punktfremden Teilgebieten von B_1 besteht. Für dieses aus mehreren Teilen bestehende Gebiet erhält man aber die Eigenwerte als Gesamtheit der Eigenwerte der einzelnen Teilgebiete. Somit ist der n -te Eigenwert des großen Gebietes nicht größer als die n -te Zahl in der Reihe der der Größe nach geordneten Eigenwerte der Teilgebiete.

Andersgewendet kann man sagen: *Die Anzahl der unterhalb einer Schranke λ liegenden Eigenwerte eines Gebietes B ist nicht kleiner als die Summe der entsprechenden Anzahlen für eine Menge irgendwie gewählter punktfremder Teilgebiete.* Zerlegt man insbesondere B durch stetig differenzierbare Jordankurven in eine Anzahl ν von Teilgebieten und bezeichnet mit $A(\lambda)$ die Anzahl der zu B gehörigen Eigenwerte, die unter λ liegen, mit $A_k(\lambda)$ die Anzahl der zum k -ten Teilgebiet gehörigen Eigenwerte, die unter λ liegen, so ist nach dem bewiesenen

$$(23) \quad A_1(\lambda) + \dots + A_\nu(\lambda) \leq A(\lambda)$$

Wir schließen die Feststellung an, daß der n -te Eigenwert sich stetig mit dem Gebiete ändert. Dabei wird unter einer „Gebietsänderung unter ε “ eine Abbildung

$$\begin{aligned} x' &= x + g(x, y), \\ y' &= y + h(x, y) \end{aligned}$$

des abgeschlossenen Gebietes B auf ein anderes B' verstanden, die jedem Punkt um weniger als ε aus seiner Lage verschiebt und bei der sich die ersten Ableitungen von g und h von den ersten Ableitungen von x und y selbst um weniger als ε unterscheiden. Dabei unterscheidet sich also die Funktionaldeterminante der Abbildung von 1 um weniger als eine mit ε gleichmäßig in B gegen Null strebende Zahl $o(1)$ ¹⁾. Jede in B erklärte Funktion geht bei der Abbildung in eine in B' erklärte über, und das *Dirichletsche* Integral der in B erklärten Funktion φ unterscheidet sich von dem *Dirichletschen* Integral der in B' erklärten transformierten Funktion φ nur durch einen Faktor, der nach 1 strebt, wenn $\varepsilon \rightarrow 0$ konvergiert. Wenn nämlich M die Funktionaldeterminante bedeutet, so wird

$$D_B(\varphi, \varphi) = \iint_{B'} \left[\left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x'} \left(1 + \frac{\partial g}{\partial x} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial y'} \frac{\partial h}{\partial x} \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x'} \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y'} \left(1 + \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right\}^2 \right] \frac{dx' dy'}{|M|}$$

$$(M = (1 + g_x)(1 + h_y) - g_y h_x).$$

Also

$$\begin{aligned} D_B(\varphi, \varphi) &= (1 + o(1)) \iint_{B'} \left[\left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x'} \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial y'} \right\}^2 \right] dx' dy' + o(1) \iint_{B'} \frac{\partial \varphi}{\partial x'} \frac{\partial \varphi}{\partial y'} dx' dy' \\ &= (1 + o(1)) D_{B'}(\varphi, \varphi) + o(1) \iint_{B'} \frac{\partial \varphi}{\partial x'} \frac{\partial \varphi}{\partial y'} dx' dy'. \end{aligned}$$

¹⁾ Damit soll immer eine mit ε gegen Null strebende Zahl bezeichnet werden.

Nun ist aber

$$2 \iint_{B'} \frac{\partial \varphi}{\partial x'} \frac{\partial \varphi}{\partial y'} dx' dy' \leq D_{B'}(\varphi, \varphi).$$

Also

$$D_B(\varphi, \varphi) = (1 + o(1)) D_{B'}(\varphi, \varphi).$$

Ferner wird bei der Transformation

$$\begin{aligned} \iint_B \varphi^2 dx dy &= \iint_{B'} \varphi^2 \frac{dx' dy'}{|M|}, \\ \iint_B \varphi v_i dx dy &= \iint_{B'} \varphi v_i \frac{dx' dy'}{|M|} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \end{aligned}$$

Nun ersetze man die Funktionen v_i durch $v_i |M|^{-1} = v_i'$ und multipliziere φ mit einem für $\varepsilon \rightarrow 0$ wenig von 1 verschiedenen *konstanten* Faktor — so entstehe φ' — daß wieder

$$\begin{aligned} \iint_{B'} \varphi'^2 dx' dy' &= 1, \\ \iint_{B'} \varphi' v_i' dx' dy' &= 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \end{aligned}$$

gilt. Dann wird

$$D_B(\varphi, \varphi) = (1 + o(1)) D_{B'}(\varphi', \varphi').$$

Da nun aber weiter mit den v_i auch die v_i' alle möglichen Systeme zweimal stetig differenzierbarer Funktionen durchlaufen, so kann sich das Maximum der unteren Grenze der rechten Seite von dem der linken nur um einen Faktor unterscheiden, der nach 1 strebt, wenn $\varepsilon \rightarrow 0$ rückt. Damit ist die stetige Änderung der Eigenwerte mit dem Gebiet erkannt.

Die gewonnenen Ergebnisse werden wir nun für die *Frage einer Abschätzung des n -ten Eigenwertes* dadurch ausnützen, daß wir das Gebiet durch andere, bequemer zugängliche approximieren. Als solche bieten sich Quadratpackungen dar. Wir werden nämlich jetzt gleich sehen, daß man für solche aus aneinandergelegten Quadraten aufgebaute Bereiche die Eigenwerte leicht abschätzen kann.

Vorher muß indessen noch auf eine Verallgemeinerung hingewiesen werden, deren Beweis dem hier vorgeführten durchaus analog ist. Diese Verallgemeinerung bezieht sich auf die zweite Randwertaufgabe, bei der das Verschwinden der Normalableitung $\frac{\partial u}{\partial n}$ am Rande gefordert wird. Die k -ten Eigenwerte können auch bei diesem Problem ganz analog durch Extremaleigenschaften charakterisiert werden. Die betreffenden Sätze lauten ganz analog wie bei der ersten Randwertaufgabe, nur daß der Funktion φ stets die zweite Randbedingung aufzuerlegen ist.

Etwas mehr Aufmerksamkeit müssen wir auf die Größenänderung der Eigenwerte bei Änderung des Gebietes verwenden. In der Tat liegen hier die Verhältnisse durchaus anders wie bei der ersten Randwertaufgabe.

Das Gebiet B werde durch gewisse stetig differenzierbare *Jordan-Kurven* in eine Anzahl Teilgebiete B_i zerlegt. Dann ist der n -te Eigenwert λ_n' der zweiten Randwertaufgabe des ganzen Gebietes nicht kleiner als der n -te Wert in der Reihe der der Größe nach geordneten entsprechenden Eigenwerte aller dieser Teilgebiete. Während bei der Bestimmung von λ_n' von den Vergleichsfunktionen außer dem Verschwinden der Normalableitung am Rande von B die zweimalige stetige Differenzierbarkeit in B verlangt wird, lasse man jetzt zum Vergleich alle Funktionen zu, die zwar in den Teilgebieten B_i stetig und abteilungsweise stetig differenzierbar sind und deren Normalableitung an den Rändern aller Teilgebiete verschwinden. Beim Übergang von einem Teilgebiet in ein benachbartes dürfen sie also einen Sprung erleiden¹⁾. Das zu diesem erweiterten Bereich von Vergleichsfunktionen gehörige Maximum der unteren Grenze sei λ_n'' . Dann ist jedenfalls nach S. 343 $\lambda_n'' \leq \lambda_n'$. Die Zahl λ_n'' erweist sich als die n -te Zahl in der Reihe der Eigenwerte der B_i . Sie ist also nicht größer als der n -te Eigenwert des Gesamtgebietes B . Das Ergebnis kann man auch so aussprechen:

$$(24) \quad A_1^*(\lambda) + \dots + A_\nu^*(\lambda) \geq A^*(\lambda).$$

Hier ist $A_k^*(\lambda)$ die Zahl der Eigenwerte der zweiten Randwertaufgabe von B_k , welche unter λ liegen. ν ist die Zahl der Teilgebiete. $A^*(\lambda)$ ist die Anzahl der Eigenwerte von B , die unter λ liegen.

Was weiter die stetige Abhängigkeit der Eigenwerte vom Gebiet anlangt, so muß man bei der Übertragung dieses Satzes auf die zweite Randwertaufgabe dafür Sorge tragen, daß die Randkurven der approximierenden Gebiete sich auch in ihren Richtungen approximieren. Dann läßt sich der Satz wieder übertragen.

Wir sind nun auch imstande, die zu verschiedenen Randwertproblemen gehörigen n -ten Eigenwerte miteinander zu vergleichen. Hier gilt der Satz, daß der n -te Eigenwert λ_n der ersten Randwertaufgabe nie kleiner ist als der n -te k_n der zweiten. Man nehme ein Teilgebiet B' von B und λ_n' sei sein n -ter auf die erste Randwertaufgabe bezüglicher Eigenwert. In dem Extremalproblem nun, welches den n -ten Eigenwert k_n der zweiten Randwertaufgabe für B charakterisiert, werde der Funktion φ die zweite Bedingung auferlegt, in B außerhalb von B' zu verschwinden. Dadurch wird das zugehörige Extremum nicht verkleinert. Es ist aber mit dem Eigenwert λ_n' identisch, der sich also als nicht

¹⁾ Die Funktionen dieser erweiterten Klasse können daher — anders wie bei der ersten Randwertaufgabe — nicht durch Funktionen der engeren Klasse beliebig genau approximiert werden.

kleiner wie k_n erweist. Wenn man nun das Gebiet B' hinreichend wenig von B verschieden wählt, so ist auch λ_n' von λ_n beliebig verschieden. Also ist auch dieser n -te Eigenwert von B bei der ersten Randwertaufgabe nicht kleiner als der n -te Eigenwert von B bei der zweiten Randwertaufgabe. Ist $A(\lambda)$ die Zahl der Eigenwerte der ersten Randwertaufgabe unter λ , $A^*(\lambda)$ die Zahl der Eigenwerte der zweiten Randwertaufgabe unter λ , so kann man das Ergebnis durch

$$(25) \quad A(\lambda) \leq A^*(\lambda)$$

ausdrücken.

Nun sind wir gerüstet, um zur Abschätzung der Eigenwerte zu schreiten.

Wir hatten schon auf S. 339 die zur ersten Randwertaufgabe gehörigen Eigenfunktionen des Quadrates von der Kantenlänge 1 bestimmt. Durch ganz analoge Betrachtungen würden wir bei einem Quadrat der Kantenlänge a die $\sin \frac{l\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{a}$ als Eigenfunktionen und die Zahlen $\frac{\pi^2}{a^2} (l^2 + m^2)$, $l, m, = 1, 2, 3 \dots$ als Eigenwerte finden. Als Eigenfunktionen der zweiten Randwertaufgabe findet man auf dem gleichen Weg $\cos \frac{l\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{a}$, und $\frac{\pi^2}{a^2} (l^2 + m^2)$, $l, m = 0, 1, 2 \dots$ sind die zugehörigen Eigenwerte. Die Zahl der Eigenwerte, die kleiner als λ sind, ist also mit der Zahl der ganzzahligen Lösungen der Ungleichung

$$l^2 + m^2 < \lambda \frac{a^2}{\pi^2}$$

identisch. Dabei sind bei der ersten Randwertaufgabe nur solche Lösungen zu nehmen, deren ganze Zahlen beide größer als Null sind. Bei der zweiten Randwertaufgabe sind dagegen alle nichtnegativen Werte zu nehmen. Die Anzahlen $A(\lambda)$ und $A^*(\lambda)$ kann man leicht schätzungsweise bestimmen. Man findet

$$A(\lambda) = \frac{a^2}{4\pi} \lambda - \vartheta ca \sqrt{\lambda} \quad \text{und} \quad A^*(\lambda) = \frac{a^2}{4\pi} \lambda + \vartheta' ca \sqrt{\lambda}.$$

Dabei ist c eine von a und λ unabhängige Zahl, ϑ und ϑ' liegen zwischen -1 und $+1$. Das erkennt man etwa so: Man denke sich in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Geraden parallel zu den Koordinatenachsen gezeichnet, welche diese Achsen in ganzzahligen Punkten treffen. Die Schnittpunkte dieser Geraden sind die Punkte mit ganzzahligen Koordinaten. Wir wollen sie üblicherweise Gitterpunkte nennen. Die Frage ist nun, wieviele Gitterpunkte innerhalb des ersten Quadranten im Kreise vom Radius $\lambda \frac{a^2}{\pi^2}$ liegen, und je nachdem, ob es sich um $A^*(\lambda)$ handelt oder um $A(\lambda)$, sind die am Rande des Quadranten gelegenen Gitterpunkte mitzuzählen oder nicht. Betrachten wir erst den Fall $A^*(\lambda)$. Die Anzahl ist kleiner als der vierte Teil aller

im Kreise gelegenen Gitterpunkte. Diese Anzahl ist nun aber gleich der Anzahl derjenigen Gitterquadrate, welche ganz dem Kreisinneren angehören. Diese Anzahl ist aber gleich dem Kreisinhalt vermindert um die Anzahl derjenigen Quadrate, welche Punkte mit der Kreisperipherie gemein haben. Diese Anzahl ist aber höchstens gleich dem Kreisumfang dividiert durch die Kantenlänge des Quadrates, die aber hier Eins ist. Daraus fließt sofort die für $A^*(\lambda)$ angegebene Formel. Im Falle $A(\lambda)$ sind außerdem noch die auf den Koordinatenachsen gelegenen Gitterpunkte abzuziehen, deren Anzahl aber höchstens dem Radius des Kreises gleich ist und das gibt wieder nur eine Anzahl von der Größenordnung $a\sqrt{\lambda}$. So folgt auch die für $A(\lambda)$ gegebene Formel.

Nun betrachten wir ein Gebiet, das aus ν Quadraten der Kantenlänge a aufgebaut ist. Diese Quadrate seien Q_k und $A_k(\lambda)$ und $A_k^*(\lambda)$ seien die zugehörigen Anzahlen. Dann ist nach (23), (24)

$$A_{Q_1}(\lambda) + \dots + A_{Q_n}(\lambda) \leq A(\lambda)$$

$$A_{Q_1}^*(\lambda) + \dots + A_{Q_n}^*(\lambda) \leq A^*(\lambda).$$

Andererseits ist nach (25) $A(\lambda) \leq A^*(\lambda)$. Also haben wir

$$A_{Q_1}(\lambda) + \dots + A_{Q_n}(\lambda) \leq A(\lambda) \leq A_{Q_1}^*(\lambda) + \dots + A_{Q_n}^*(\lambda).$$

Daraus folgt aber

$$A(\lambda) = \frac{f}{4\pi} \lambda + \Theta C a \sqrt{\lambda}.$$

Hier ist f der Flächeninhalt des Gebietes, C wieder eine feste von a und λ unabhängige Zahl. Θ aber liegt zwischen -1 und $+1$.

Denkt man nun daran zurück, daß die Eigenwerte stetig vom Gebiete abhängen und daß man jedes Gebiet durch eine Quadratpackung approximieren kann, so ergibt sich für jedes Gebiet vom Inhalt f bei der ersten Randwertaufgabe

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{A(\lambda)}{\lambda} = \frac{f}{4\pi}.$$

Erwähnt sei noch, daß diese asymptotische Formel unverändert auch für die Eigenwerte der zweiten und der dritten Randwertaufgabe gilt, daß sich also im asymptotischen Verhalten der Eigenwerte die verschiedenen Randwertaufgaben gar nicht unterscheiden.

§ 4. Verallgemeinerungen.

Die im Vorstehenden gewonnenen Ergebnisse sind in vieler Beziehung typisch. Man kann sie zu erweitern suchen z. B. durch Verallgemeinerung der zugrunde gelegten elliptischen Differentialgleichung, aus der wir ja immer die Glieder mit den ersten Ableitungen weggelassen haben. Ferner sind Verallgemeinerungen mög-

lich durch Heranziehung allgemeiner Bereiche, da wir uns ja bisher wesentlich auf einfach zusammenhängende, nicht zu kompliziert berandete beschränkt haben. Endlich kann man an die Betrachtung allgemeinerer Randwertprobleme herantreten. Wir haben uns ja im allgemeinen auf das erste beschränkt und nur gelegentlich andere erwähnt. Die Ergebnisse, die sich in diesen anderen Fällen erzielen lassen, sind mutatis mutandis die gleichen, wie wir sie in unseren Fällen gewonnen haben. Methodisch verlangen die allgemeineren Probleme manch anderes Hilfsmittel. Sukzessive Approximationen führen nun in gewissen Fällen, z. B. bei genügend kleinen Bereichen, zum Ziel. Zugkräftiger ist diese Methode bei gewissen nichtlinearen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus, aus denen ich z. B. die vielbehandelte $\Delta u = e^u$ nennen möchte. Das alternierende Verfahren bleibt gleichfalls anwendbar. Aber erschwert wird immer alles durch die Möglichkeit, daß gerade für die vorgelegte Differentialgleichung das betreffende Randwertproblem nicht lösbar ist. Das hängt mit den Eigenwerten zusammen, die man erhält, wenn man in die Differentialgleichung noch einen Parameter einführt. Die Theorie der Integralgleichungen oder die Methode der unendlich vielen Variablen führt hier überall zum Ziel, sobald man sich nur in diesen allgemeineren Fällen ein Fundament geschaffen hat, das in der direkten Behandlung einer Differentialgleichung vom Typus

$$L(u) = \Delta u + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

besteht. Hier ist die erste Randwertaufgabe genau wie bei $\Delta u = 0$ stets lösbar, man erhält eine *Greensche* Funktion und kann dann an die allgemeinere Differentialgleichung

$$L(u) + cu + d = 0$$

beispielsweise mit der Methode der Integralgleichungen erfolgreich herangehen. Der allgemeinste Satz, den man bisher für $L(u) = 0$ erhalten hat, ist dieser: Vorgelegt sei ein beschränkter irgendwie — nur niemals durch einzelne isolierte Punkte¹⁾ — begrenzter Bereich B . In einem Kreise, der diesen Bereich umfaßt, sei eine zweimal stetig diffe-

¹⁾ Z. B. gibt es keine in $0 < x^2 + y^2 \leq 1$ reguläre Potentialfunktion, die in dem Kreis $x^2 + y^2 \leq 1$ stetig ist, für $x^2 + y^2 = 1$ den Wert Eins hat und die für $x = y = 0$ verschwindet. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gehörte dann nämlich ein $r_0(\varepsilon)$, so daß die Funktion für $x^2 + y^2 = r_0^2$ einen Betrag unter ε hätte. Daher wäre sie in dem Ring $r_0^2 < x^2 + y^2 < 1$ kleiner als die Potentialfunktion

$$\log \frac{r_0}{r} + \eta \log r_0 \\ (1 + \eta) \log r_0, \text{ wo } \frac{\eta}{1 + \eta} = \varepsilon$$

und größer als die Potentialfunktion

renzierbare Funktion $\varphi(x, y)$ gegeben, die also am Rande des Bereiches B gewisse Werte annimmt. Dann besitzt diese Gleichung $L(u) = 0$ genau eine im Bereiche B zweimal stetig differenzierbare Lösung, die im Bereiche und an seinem Rande stetig ist und am Rande mit der gegebenen φ übereinstimmt. Man verdankt dies Ergebnis wesentlich *Lebesgue* und *Lichtenstein* (vgl. z. B. des letzteren zusammenfassende Darstellung in Bd. 15 der Sitzungsberichte der Berliner mathematischen Gesellschaft).

Für die zweite und dritte Randwertaufgabe läßt sich bei der Differentialgleichung $L(u) = 0$ kein ganz so glattes Ergebnis aussprechen, weil für sie schon das Problem unlösbar sein kann. Statt dessen ist es dann natürlich für jede zugehörige inhomogene Gleichung lösbar, wie das ja zu erwarten ist.

Will man die Theorie von (1) an die von $\Delta u = 0$ anschließen, so wird unter Verwendung der Formel 16' von S. 328 auf die *Integro-differentialgleichung*

$$u = -\frac{1}{r\pi} \iint G(x, y; \xi, \eta) \left[a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu + d \right] dx dy$$

geführt.

IV. Kapitel.

Parabolische Differentialgleichungen.

§ 1. Existenz und Unität der Lösungen.

Die Theorie der parabolischen Differentialgleichungen ist bei weitem nicht so durchgearbeitet und entwickelt, wie die der hyperbolischen oder die der elliptischen. Schon bei den einfachsten Fragen der Existenz und Unität stößt man auf unerledigte Probleme. Ich will mich im folgenden damit begnügen, an Hand der Differentialgleichung der linearen Wärmeleitung einen Einblick in die Verhältnisse zu geben. Es ist dabei keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn ich die Differentialgleichung

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

zugrunde lege. Charakteristiken sind jetzt die Geraden $t = \text{konst.}$ Die

$$\frac{\log \frac{r_0}{r} + \sigma \log r_0}{(1 + \sigma) \log r_0}, \quad \text{wo } \frac{-\sigma}{1 + \sigma} = \varepsilon.$$

Beide haben auf $x^2 + y^2 = 1$ den Wert 1. Auf $x^2 + y^2 = r_0^2$ hat die erste den Wert ε , die zweite den Wert $-\varepsilon$. Für $\varepsilon \rightarrow 0$ gilt $r_0 \rightarrow 0$. Für jedes $r \neq 1$ streben aber beide Funktionen nach Null. Also muß auch die zwischen beiden gelegene gesuchte Potentialfunktion an jedem inneren Punkte des Bereiches verschwinden.

Analogie der hyperbolischen Differentialgleichungen legt die folgende Frage nahe: Man betrachte einen Bereich B , wie ihn Abb. 21 zeigt. Er ist außer durch eine Charakteristik noch durch einen Kurvenbogen L begrenzt. Nach den allgemeinen Existenzsätzen ist eine Lösung der Gleichung (1) jedenfalls bestimmt, wenn man einen nicht-charakteristischen Anfangsstreifen vorgibt. Die Lösung muß also bestimmt sein, wenn man längs L die Werte von u und von $\frac{\partial u}{\partial x}$ vor-

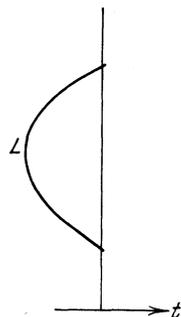


Abb. 21.

schreibt. Zunächst will ich auf einen merkwürdigen Umstand hinweisen, welcher der Stellung der parabolischen Differentialgleichung zwischen den hyperbolischen und den elliptischen entspricht: Es reichen nämlich manchmal die Werte von u selbst längs der Kurve hin, um die Lösung zu bestimmen, falls man noch die Zusatzforderung stellt, daß sie in dem von der Kurve L und der Charakteristik begrenzten Bereiche und auf seinem Rand zweimal stetig differenzierbar sein soll. Auf der Charakteristik hat man also ebensowenig wie bei den elliptischen Gleichungen etwas vorzuschreiben. Dort sind ja auch die Charakteristiken imaginär. Allerdings ist die Lösung durch ihre Werte auf L nur in einem besonderen Fall bestimmt, nämlich dann, wenn die Kurve wie in der Abbildung *links* von der Charakteristik liegt.

Liegt sie rechts, so ist die Lösung nicht bestimmt. Nach *Volterra*, dem man diese Bemerkung verdankt, beweist man die Unität der Lösung im ersten Falle (Abb. 21) folgendermaßen. Man nehme an, es gäbe zwei Lösungen, die im abgeschlossenen Bereiche regulär sind und auf L die gleichen Werte haben¹⁾. Dann verschwindet ihre Differenz u auf L und genügt im abgeschlossenen Bereiche der Gleichung (1). Demnach ist

$$\begin{aligned}
 0 &= \iint_B u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) dx dt \\
 &= \iint_B \left\{ \frac{c}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial t} \right\} dx dt - \iint_B \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx dt \\
 &= \int_{\text{Rand}} u \frac{cu}{\partial x} dt - \frac{1}{2} \int_{\text{Rand}} u^2 dx - \iint_B \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\uparrow} u^2 dx - \iint_B \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx dt.
 \end{aligned}$$

1) Sind die Voraussetzungen nur im offenen Bereich erfüllt, so gilt der Unitätssatz nicht. Vgl. *Doetsch*: Math. Ztschr. Bd. 22, S. 299. 1925.

Daher muß $u = 0$ sein auf der Charakteristik und $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ im Bereiche. Also ist $u = 0$ im Bereiche.

Anders im zweiten Falle. Dann erscheinen die obigen Randintegrale mit entgegengesetzten Vorzeichen, und man kann daher nicht den gleichen Schluß ziehen. Betrachten wir z. B. die Lösung

$$u = \cos x e^{-t} - \frac{1}{2} \cos 2x e^{-4t}$$

der Gleichung (1). Sie verschwindet auf der Kurve

$$t = \frac{1}{3} \log \frac{1}{2} \frac{\cos 2x}{\cos x}.$$

Ein Stück derselben ist in der schematischen Abb. 22 zur Anschauung gebracht.

In den physikalischen Problemen der Wärmeleitung sind es andere Randwertprobleme, die im Vordergrund des Interesses stehen. Dort

handelt es sich um die Wärmeleitung, in einem längs der x -Achse erstreckten linearen Leiter. In diesem Leiter ist $u = f(x)$ für $t = 0$ vorgeschrieben.

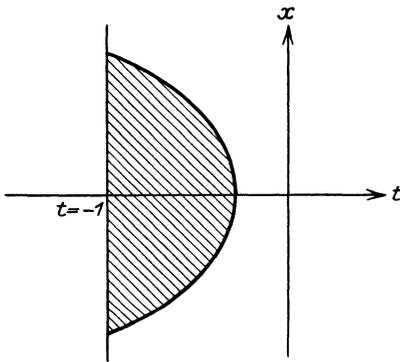


Abb. 22.

Handelt es sich außerdem um einen bei $x=0$ und $x=l$ begrenzten Leiter, so ist weiter noch der Wärmezustand an den Enden für alle Zeiten vorgeschrieben, also z. B. $u(0, t) = \varphi(t)$, $u(l, t) = \psi(t)$. Durch diese Anfangsbedingungen ist im begrenzten Leiter die Lösung eindeutig bestimmt, falls wieder angenommen

wird, daß sie in einem abgeschlossenen¹⁾ Bereich $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$ mit ihren Ableitungen der beiden ersten Ordnungen stetig ist. Ob es stets eine den Bedingungen genügende Lösung gibt, soll uns hernach erst, im Anschluß an die Methoden zu ihrer wirklichen Aufstellung beschäftigen. Hier soll nun erst die Unität der Lösung erörtert werden. Man beweist sie folgendermaßen: Gäbe es zwei Lösungen gleicher Anfangs- und Randbedingungen, so wäre auch die Differenz eine Lösung, welche nun an den Leiterenden für alle Zeiten verschwindet und welche auch für $t = 0$ verschwindet. Diese Differenzlösung werde mit u bezeichnet. Man betrachte das Integral

$$(2) \quad J(t) = \int_0^l \frac{u^2}{2} dx.$$

¹⁾ Gilt die Voraussetzung nur im gegen $t=0$ offenen Bereich, so ist der Unitätssatz nicht richtig. Vgl. *Doetsch*: Math. Ztschr. Bd. 22, S. 299. 1925.

Dann wird

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= \int_0^l u \frac{\partial u}{\partial t} dx = \int_0^l u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \\ &= u \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0^l - \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx = - \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx. \end{aligned}$$

Demnach ist $\frac{dJ}{dt} \leq 0$ und weil $J(0) = 0$ ist, so wäre $J \leq 0$. Nach Formel (2) ist aber $J \geq 0$. Also muß $J = 0$ sein. Also ist $u \equiv 0$.

§ 2. Der lineare begrenzte Leiter.

Ähnlich wie bei der schwingenden Saite bedient man sich am besten der Methode der Partikularlösungen, um in dem letztbehandelten Randwertproblem neben einem Beweis für die Existenz der Lösung auch diese selbst sofort zu gewinnen. Machen wir nämlich in (1) den Ansatz

$$u = v(x)w(t),$$

so erhalten wir

$$\frac{v''}{v} = \frac{w'}{w}$$

und daher muß es eine Konstante λ geben, so daß

$$v'' + \lambda v = 0,$$

$$w' + \lambda w = 0$$

ist. Somit sind die Funktionen

$$u = (a_1 \cos \sqrt{\lambda} x + a_2 \sin \sqrt{\lambda} x) e^{-\lambda t}$$

Lösungen. Sollen sie für $x = 0$ und für $x = l$ bei beliebigem t verschwinden, so muß $a_1 = 0$, $\lambda = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) sein. Durch Addition mehrerer Lösungen erhält man neue Lösungen. Also ist

$$u(x, t) = \sum c_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cdot e^{-\frac{n^2 \pi^2}{l^2} t}$$

eine Lösung, immer dann, wenn diese Reihe samt ihren in der Differentialgleichung vorkommenden Ableitungen für $0 \leq x \leq l$ und ein gewisses t -Intervall gleichmäßig konvergiert. Diese Lösung passe man nun dem Anfangszustand an. Für $t = 0$ sollte $u(x, 0) = f(x)$ sein. Das liefert die Gleichung

$$f(x) = \sum c_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

und wir haben wieder Anschluß an die Theorie der *Fourierschen* Reihen.

Wenn die Enden nicht ständig auf der Temperatur Null gehalten werden, sondern wenn etwa an dem Ende $x = 0$ die konstante Tem-

peratur u_0 an dem Ende $x = l$ die konstante Temperatur u_1 vorgeschrieben ist, so führt der Gedanke, daß sich nach hinreichend langer Zeit eine proportionale Temperaturverteilung einstellen wird, dazu, die Lösung in der Form

$$u = u_0 + \frac{x}{l} (u_1 - u_0) + v$$

anzusetzen. Da aber, wie man sofort sieht,

$$u_0 + \frac{x}{l} (u_1 - u_0)$$

selbst eine Lösung ist, so genügt v der gleichen Differentialgleichung, und wir sind auf das gerade behandelte Problem zurückgekommen. Denn v muß bei $x = 0$ und bei $x = l$ für alle Zeiten verschwinden.

§ 3. Der unbegrenzte Leiter.

Hier soll längs der ganzen unbegrenzten x -Achse eine stetige Funktion $f(x)$ gegeben sein, und es fragt sich, ob man stets eine Lösung von (1) finden kann, für die $u(x, 0) = f(x)$ ist, und weiter, ob diese Lösung eindeutig bestimmt ist. Man bedient sich einer Erweiterung der Methode der Partikulärlösungen und schließt so: Die Funktion

$$u = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

genügt jedenfalls der Differentialgleichung. Daher ist auch

$$f(\xi) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}$$

eine Lösung. Und daher dürfte

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi$$

der Differentialgleichung genügen. Tatsächlich kann man nun, wie ich hier nicht näher ausführen will, unter der Voraussetzung eines stetigen und beschränkten $f(x)$ beweisen, daß diese Funktion der Differentialgleichung genügt und daß für $t \rightarrow 0$ gilt.

$$f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi.$$

Unser Problem wäre damit gelöst. Aber die Unität der Lösung, die man nach physikalischer Analogie vermuten möchte, bleibt unbewiesen und ist auch nach der im vorigen Paragraphen benutzten Methode jedenfalls nicht ohne weitere Einschränkungen für die Anfangsfunktion $f(x)$ zu beweisen.

Ähnlich gelingt es auch, das im ersten Paragraphen schon erwähnte Problem der durch einen Anfangsstreifen bestimmten Lösung zu lösen. Wir knüpfen also wieder an den dort in Abb. 21 dargestellten Bereich an und werden zunächst eine Greensche Formel für den Bereich gewinnen. Wir bezeichnen

$$\mathfrak{L}(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t}$$

und nennen

$$\mathfrak{M}(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{dv}{dt}$$

den adjungierten Differentialausdruck. Dann ist

$$\begin{aligned} \iint (v \mathfrak{L}(u) - u \mathfrak{M}(v)) d\xi dt &= \iint \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (v u_x - u v_x) - \frac{\partial (uv)}{\partial t} \right\} d\xi dt \\ &= \int_{(L)} (v u_x - u v_x) dt + \int_{(L)} uv d\xi + \int uv d\xi. \end{aligned}$$

Nun wähle man als u eine Lösung von $\mathfrak{L}(u) = 0$ und für v eine noch näher festzulegende Lösung von $\mathfrak{M}(v) = 0$. Dann wird

$$\int_{(L)} uv d\xi = \int_{(L)} (v u_x - u v_x) d\tau + \int_{(L)} uv d\xi.$$

Kann man nun die Lösung v so wählen, daß

$$(3) \quad \lim_{t \rightarrow t^+} \int uv d\xi = u(x, t)$$

wird, so gewinnen wir eine Formel, die unser Problem löst. Wir wählen nach den Erfahrungen zu Beginn dieses Paragraphen

$$v(\xi, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{(y-\xi)^2}{4\pi(t-\tau)}}.$$

Wirklich läßt sich dann bei stetiger Funktion $u(\xi, \tau) = f(\xi)$ (3) beweisen.

Daher finden wir

$$u(x, t) = \int_{(L)} (v u_x - u v_x) d\tau + \int_{(L)} uv d\xi.$$

Es fällt auf, daß hier auch die Ableitung $\frac{\partial u}{\partial x}$ vorkommt, während doch im Falle der Abb. 21 die Lösung schon durch ihre Werte auf L bestimmt war. Aber unsere Formel gilt ja allgemein, also auch für den Fall der Abb. 22, wo die Kurve L rechts von der Charakteristik liegt.

Offen blieb bisher noch die Frage, ob man im Falle der Abb. 21 auf der Kurve L die Werte der Lösung als stetige Funktion beliebig vorschreiben kann, so daß dazu immer eine im Gebiete reguläre Lö-

sung dieser Randwerte gehört. Ich füge an, daß der Beweis für die Existenz dieser Lösung von *Holmgren* (Arkiv för matematik, Bd. 3, 4, 5), von *E. E. Levi* (Annali di matematica, ser. 3, Bd. 14) erbracht wurde, sowie in zwei Arbeiten von *F. Bernstein* und *G. Doetsch*, und von *G. Doetsch* in Math. Ztschr. Bd. 22. 1925.

Die vorstehenden Ausführungen werden einen unfertigen Eindruck hinterlassen. Das ist ihre Absicht, und ich nehme es gern mit in Kauf, wenn ein unfertigerer Eindruck entsteht, als es dem heutigen Stand der Dinge vielleicht entspricht. Es mag noch manche erwähnenswerte Einzelheit geben. Aber es ist mir nur erwünscht, wenn meine Darstellung den Leser veranlaßt, sich an den Quellen noch näher zu orientieren und wenn er so weiter in diesen Gegenstand eindringt, der noch manchen Forscher beschäftigen kann. Übrigens liegt eine Rechtfertigung für die Knappheit der Darstellung in den letzten Kapiteln besonders auch darin, daß das Buch von *Courant* und *Hilbert*, das der gleichen Sammlung wie das vorliegende angehört, gerade den Gegenstand dieser letzten Kapitel mit besonderer Ausführlichkeit behandelt. So mögen auch diese letzten Kapitel des meinigen die Lust dazu heben helfen, sich der Lektüre jenes Werkes zu widmen. Für die parabolischen Differentialgleichungen sei auch besonders auf *Goursat*, Cours d'analyse III verwiesen, wo auch der Gegenstand dieses § 3 ausführlich behandelt wird.

Sachverzeichnis.

Die Zahlen geben die Seiten an.

- Adjungierter Differentialausdruck 320.
akzessorische Parameter 202.
allgemeines Integral 18.
automorphe Funktionen 209.
Bernoullische Differentialgleichung 12.
Berührungstransformation 281, 291.
bewegliche Singularität 100.
Besselsche Differentialgleichung 176, 197.
— Funktion 177, 197.
Bilinearformel 173.
Charakteristik 218 ff., 260.
charakteristische Gleichung 57.
Clairautsche Differentialgleichung 20.
Dirichletsches Prinzip 335.
Eigenfunktionen 156, 338.
Eigenwerte 156, 338.
elementare Integrationsmethoden 6 ff., 119 f.
elliptische Differentialgleichung 315.
Entwicklungssatz 175.
Envelope 21, 97.
Eulersche Gleichung der Variationsrechnung 132 ff.
— Transformation 241.
exakte Differentialgleichungen 15.
Existenz der Lösungen 26, 43.
Extremalen 133.
Feste Singularität 100.
Flächenelement 226.
Fundamentalgleichung 185, 193.
Fundamentalsystem 126.
Geodätische Linien 134 ff.
gewöhnliche Differentialgleichung 1.
graphische Darstellung einer Differentialgleichung 33 ff.
— Integration 3.
Greensche Formel 320, 327.
— Funktion 159, 330.
Grenzykel 66.
Homogene Differentialgleichung 8, 11, 123.
hyperbolische Differentialgleichung 315.
hypergeometrische Differentialgleichung 201.
— Reihe 203.
Jacobische Polynome 212.
Integral einer Differentialgleichung 2, 18.
Integralgleichung 180.
Integralkurve 2.
Integration durch Potenzreihen 47.
integrierender Faktor 16.
Involution 245.
Isoklinen 30, 33.
Kanonische Transformation 281 ff.
Kettenlinie 121.
Klammerausdruck 245.
Knotenpunkt 55.
Kurvenscharen 12.
Lagrangesche Differentialgleichung 23.
Legendresche Polynome 180, 212.
lineare Differentialgleichung 10, 34, 123, 216.
Linienelement 3, 33.
Lipschitzsche Bedingung 26.
Lösung 2.
Majorantenmethode 304.
Methode der unbestimmten Koeffizienten 48, 177, 190.
Minimaxprinzip 139.
Multiplikator 16.
Nebenpunkt 195.
Normalreihen 195.
Ordnung einer Differentialgleichung 1.
orthogonal 160.
Oszillationstheorem 155.
Parabolische Differentialgleichung 316.
partielle Differentialgleichung 1.
partikuläres Integral 21.
Poissonsches Integral 332.
Polygonmethode 41.
Randwertaufgabe 157, 292.
Riccatische Differentialgleichung 24, 131.
Richtungsfeld 2.
Riemannsches Problem 212.
Runge-Kuttasche Formel 50.
Sattelpunkt 55.
Simpsonsche Regel 49.
singuläre Stelle 32, 54, 61, 109.
singuläre Lösung 21, 94, 95.
Stelle der Bestimmtheit 173.
Streifen 231.
Strudelpunkt 56.
Sturm-Liouvillesche Differentialgleichung 156.
sukzessive Approximationen 25 ff., 115 f.
Trennung der Variablen 3, 253.
Variation der Konstanten 11, 129.
Variationsrechnung 132 ff.
vollständiges Integral 247, 265.
Vollständigkeitsrelation 182.
Wirbelpunkt 55.

Namenverzeichnis.

Die Zahlen geben die Seiten an.

- Ampère 309.
Bendixson 61, 70, 74, 77,
79, 80, 81, 82, 83, 85,
88, 89, 93, 103.
Bernoulli 12.
Bernstein 356.
Bessel 176, 177, 197.
Bieberbach 13, 69, 166,
174, 183, 334.
Birkhoff 90, 132, 134, 138,
139, 141, 142, 143, 146,
180, 189, 196, 212.
Bolza 135, 139.
Bouquet 103.
Brauer 137.
Briot 71, 142.
Brouwer 71, 142.
Cauchy 41, 69, 235, 304.
Charlier 259.
Clairaut 20, 94, 252, 314.
Courant 133, 147, 180, 215,
336, 338, 341, 342, 343,
356.
Dirichlet 335, 336, 344.
Doetsch 351, 352, 356.
Dulac 88, 103.
Emde 123.
Euler 25, 41, 42, 43, 92,
132.
Fourier 215, 327, 353.
Frank 298.
Fredholm 181.
Fricke 298.
Fuchs 104, 189, 198, 199,
201, 212.
Gauß 145.
Goursat 279, 286, 356.
Green 159, 161, 166, 167,
170, 171, 175, 180, 215,
320, 321, 327, 329, 330,
331, 332, 334, 336, 337,
338, 355.
Hamilton 256, 295.
Hermite 108.
Hilb 180, 196, 211.
Hilbert 133, 180, 196, 211,
215, 336, 356.
Holmgren 356.
Horn 356.
Jacobi 212, 213, 295.
Jahnke 123.
Jordan 64, 334.
Kerékjártó 142.
Klein 155, 211.
A. Kneser 180.
H. Kneser 54.
Koch 191, 193.
H. König 51.
Kutta 49, 50.
Lagrange 21, 23.
Laplace 316.
Laurent 107, 186, 191.
Legendre 180, 212, 213,
214, 215.
Lebesgue 350.
Levi 356.
Lichtenstein 350.
Lie 26, 279.
Lindelöf 108, 110, 114.
Liouville 24, 25, 173, 215.
Lipschitz 26, 27, 30, 32,
42, 53, 54, 71, 90, 92,
97, 103.
Malmquist 103, 106, 107,
108.
Mayer 242, 251, 276.
Mises 298.
Monge 309.
Morse 140.
Osgood 54.
Painlevé 107.
Peano 30.
Perron 30, 74, 89, 195,
336.
Picard 103, 105, 107.
Plemelj 212.
Poincaré 85, 88, 90, 103,
104, 143, 146, 180,
196, 288.
Poisson 334.
Pringsheim 69.
Prüfer 180, 215.
Riccati 24, 25, 104, 105,
106, 107, 131.
Riemann 201, 207, 212,
317, 320, 322, 324, 325,
326.
Rouché 166, 171.
Runge 49, 50, 51.
Scheffers 26.
Schlesinger 189.
Schmidt, E. 64, 182, 338,
341.
Schwarz 335, 336.
Signorini 135.
Simpson 49.
Stekloff 180.
Sturm 173, 215.
Taylor 21, 50.
Thomé 195.
Urysohn 142.
Volterra 351.
Weyl 341.
Weierstraß 69, 336.
Whittaker 295.

Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen

mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete

Gemeinsam mit

W. Blaschke, Hamburg, **M. Born**, Göttingen, **C. Runge**, Göttingen

herausgegeben von **R. Courant**, Göttingen

- Bd. I: **Vorlesungen über Differentialgeometrie** und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie. Von **Wilhelm Blaschke**, Professor der Mathematik an der Universität Hamburg. I. Elementare Differentialgeometrie. Zweite, verbesserte Auflage. Mit einem Anhang von Kurt Reidemeister, Professor der Mathematik an der Universität Wien. Mit 40 Textfiguren. (254 S.) 1924.
RM. 11.—; gebunden RM. 12.—
- Bd. II: **Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen**. Von Dr. **Konrad Knopp**, ord. Professor der Mathematik an der Universität Königsberg. Zweite, erweiterte Auflage. Mit 12 Textfiguren. (536 S.) 1924.
RM. 27.—; gebunden RM. 28.—
- Bd. III: **Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen**. Von **Adolf Hurwitz**, weil. ord. Professor der Mathematik am Eidgenössischen Polytechnikum Zürich. Herausgegeben und ergänzt durch einen Abschnitt über:
Geometrische Funktionentheorie von **R. Courant**, ord. Professor der Mathematik an der Universität Göttingen. Zweite, vollständig umgearbeitete und vermehrte Auflage. Mit 128 Textfiguren. (508 S.) 1925.
RM. 23.40; gebunden RM. 25.—
- Bd. IV: **Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers**. Von Dr. **Erwin Madelung**, ord. Professor der Theoretischen Physik an der Universität Frankfurt a. M. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 20 Textfiguren. (298 S.) 1925.
RM. 13.50; gebunden RM. 15.—
- Bd. V: **Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung** mit Anwendungen auf algebraische Zahlen und Gleichungen sowie auf die Kristallographie. Von **Andreas Speiser**, ord. Professor der Mathematik an der Universität Zürich. (202 S.) 1923.
RM. 7.—
- Bd. VII: **Vorlesungen über Differentialgeometrie** und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie. Von **Wilhelm Blaschke**, Professor der Mathematik an der Universität Hamburg. II. Affine Differentialgeometrie. Bearbeitet von Kurt Reidemeister, Professor der Mathematik an der Universität Wien. Erste und zweite Auflage. Mit 40 Textfiguren. (268 S.) 1923.
RM. 8.50; gebunden RM. 10.—
- Bd. VIII: **Vorlesungen über Topologie**. Von **B. v. Kerékjártó**. I. Flächentopologie. Mit 60 Textfiguren. (277 S.) 1923.
RM. 11.50; gebunden RM. 13.—
- Bd. IX: **Einleitung in die Mengenlehre**. Eine elementare Einführung in das Reich des Unendlichgroßen. Von **Adolf Fraenkel**, a. o. Professor an der Universität Marburg. Zweite, erweiterte Auflage. Mit 13 Textfiguren. (259 S.) 1923.
RM. 10.80
- Bd. X: **Der Ricci-Kalkül**. Eine Einführung in die neueren Methoden und Probleme der mehrdimensionalen Differentialgeometrie. Von **J. A. Schouten**, ord. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Delft in Holland. Mit 7 Textfiguren. (321 S.) 1924.
RM. 15.—; gebunden RM. 16.20

Siehe auch umstehende Seite.

Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in

Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Gemeinsam mit **W. Blaschke**-Hamburg, **M. Born**-Göttingen, **C. Runge**-Göttingen herausgegeben von **R. Courant**-Göttingen.

- Bd. XI: **Vorlesungen über numerisches Rechnen.** Von **C. Runge**, o. Professor der Mathematik an der Universität Göttingen, und **H. König**, o. Professor der Mathematik an der Bergakademie Clausthal. Mit 13 Abbildungen. (379 S.) 1924. RM. 16,50; gebunden RM. 17,70
- Bd. XII: **Methoden der mathematischen Physik.** Von **R. Courant**, ord. Professor der Mathematik an der Universität Göttingen, und **D. Hilbert**, Geh. Reg.-Rat, ord. Professor der Mathematik an der Universität Göttingen. Erster Band. Mit 29 Abbildungen. (463 S.) 1924. RM. 22,50; geb. RM. 24.—
- Bd. XIII: **Vorlesungen über Differenzenrechnung.** Von **Niels Erik Nörlund**, ord. Professor der Mathematik an der Universität Kopenhagen. Mit 54 Textfiguren. (560 S.) 1924. RM. 24.—; gebunden RM. 25,20
- Bd. XIV: **Elementarmathematik** vom höheren Standpunkte aus. Von **Felix Klein**. Dritte Auflage. Erster Band: **Arithmetik — Algebra — Analysis**. Ausgearbeitet von E. Hellinger. Für den Druck fertig gemacht und mit Zusätzen versehen von Fr. Seyfarth. Mit 125 Abbildungen. (333 S.) 1924. RM. 15.—; gebunden RM. 16,50
- Bd. XV: **Elementarmathematik** vom höheren Standpunkte aus. Von **Felix Klein**. Dritte Auflage. Zweiter Band: **Geometrie**. Ausgearbeitet von E. Hellinger. Für den Druck fertig gemacht und mit Zusätzen versehen von Fr. Seyfarth. Mit 157 Abbildungen. (314 S.) 1925. RM. 15.—; gebunden RM. 16,50
- Bd. XVI: **Elementarmathematik** vom höheren Standpunkte aus. Von **Felix Klein**. Dritte Auflage. Dritter Band: **Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie**. In Vorbereitung.
- Bd. XVII: **Analytische Dynamik der Punkte und starren Körper.** Mit einer Einführung in das Dreikörperproblem und mit zahlreichen Übungsaufgaben. Von **E. T. Whittaker**, Professor der Mathematik an der Universität Edinburgh. Nach der zweiten Auflage übersetzt von Dr. F. und K. Mittelsten Scheid, Marburg a. d. L. (474 S.) 1924. RM. 21.—; geb. RM. 22,50
- Bd. XVIII: **Relativitätstheorie in mathematischer Behandlung.** Von **A. S. Eddington**, Plumian Professor of Astronomy and experimental Philosophy in the University of Cambridge. Autorisierte, mit Zusätzen und Erläuterungen versehene Übersetzung von Dr. Alexander Ostrowski, Privatdozent an der Universität Göttingen, und Prof. Dr. Harry Schmidt, Dozent am Friedrichs-Polytechnikum Cöthen. Mit einem Anhang: Eddingtons Theorie und Hamiltonsches Prinzip von **Albert Einstein**. (391 S.) 1925. RM. 18.—; gebunden RM. 19,50
- Bd. XIX: **Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis.** Von **G. Pólya**, tit. Professor an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich, und **G. Szegő**, Privatdozent an der Friedrich-Wilhelms-Universität Berlin. Erster Band: **Reihen-Integralrechnung. Funktionentheorie**. (354 S.) 1925. RM. 15.—; gebunden RM. 16,50
- Bd. XX: **Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis.** Von **G. Pólya**, tit. Professor an der Eidgen. Technischen Hochschule Zürich, und **G. Szegő**, Privatdozent an der Friedrich-Wilhelms-Universität Berlin. Zweiter Band: **Funktionentheorie. Nullstellen. Polynome. Determinanten. Zahlentheorie**. (417 S.) 1925. RM. 18.—; gebunden RM. 19,50
- Bd. XXI: **Einführung in die analytische Geometrie der Ebene und des Raumes.** Von **A. Schoenflies**, ord. Professor der Mathematik an der Universität Frankfurt. Mit 83 Textfiguren. (314 S.) 1925. RM. 15.—; gebunden RM. 16,50

Felix Klein, Gesammelte mathematische Abhandlungen.

In drei Bänden.

Erster Band: **Liniengeometrie — Grundlegung der Geometrie — Zum Erlanger Programm.** Herausgegeben von **R. Fricke** und **A. Ostrowski.** (Von F. Klein mit ergänzenden Zusätzen versehen.) Mit einem Bildnis. (624 S.) 1921. RM. 30.—

Zweiter Band: **Anschauliche Geometrie — Substitutionsgruppen und Gleichungstheorie — Zur mathematischen Physik.** Herausgegeben von **R. Fricke** und **H. Vermeil.** (Von F. Klein mit ergänzenden Zusätzen versehen.) Mit 185 Textfiguren. (720 S.) 1922. RM. 33.—

Dritter Band: **Elliptische Funktionen, insbesondere Modulfunktionen, hyperelliptische und Abelsche Funktionen, Riemannsche Funktionentheorie und automorphe Funktionen.** Anhang: Verschiedene Verzeichnisse. Herausgegeben von **R. Fricke, H. Vermeil** und **E. Bessel-Hagen.** (Von F. Klein mit ergänzenden Zusätzen versehen.) Mit 138 Textfiguren. (783 S.) 1923. RM. 30.—

Schwarz-Festschrift. Mathematische Abhandlungen, Hermann Amandus Schwarz zu seinem fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 6. August 1914 gewidmet von Freunden und Schülern. Mit dem Bildnis von H. A. Schwarz und 53 Figuren im Text. (459 S.) 1914. RM. 24.—

Gesammelte mathematische Abhandlungen. Von **H. A. Schwarz,** Professor an der Universität Göttingen. In zwei Bänden. Mit 93 Textfiguren und 4 Figurentafeln. (349 S. u. 377 S.) 1890. RM. 25.—

Vorlesungen über die Zahlentheorie der Quaternionen. Von Dr. **Adolf Hurwitz,** Professor der Höheren Mathematik an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich. (78 S.) 1919. RM. 4.—

Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie. Von Dr. **Edmund Landau,** o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Göttingen. Mit 11 Textfiguren. (110 S.) 1916. RM. 4,80

Die mathematische Methode. Logisch-erkenntnistheoretische Untersuchungen im Gebiete der Mathematik, Mechanik und Physik. Von Dr. **Otto Hölder,** o. Professor an der Universität Leipzig. Mit 235 Abbildungen. (573 S.) 1924. RM. 26,40

Mathematische Analyse des Raumproblems. Vorlesungen gehalten in Barcelona und Madrid. Von Dr. **Hermann Weyl,** Professor der Mathematik an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich. Mit 8 Abbildungen. (124 S.) 1923. RM. 5.—

Zum Vertrieb habe ich übernommen:

Carl Friedrich Gauss' Werke

Herausgegeben von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen

Bd. I. **Disquisitiones arithmeticae.**
Zweiter Abdruck. (478 S.) 1870.

RM. 48.—

Bd. II. **Höhere Arithmetik.** Zweiter
Abdruck. (528 S.) 1876. 53 Reichsmark
Nachtrag zum ersten Abdruck des
zweiten Bandes. (S. 495—518.) 1876.

RM. 3.80

Bd. III. **Analysis.** Zweiter Abdruck.
(499 S.) 1876.

RM. 50.—

Bd. IV. **Wahrscheinlichkeitsrechnung
und Geometrie.** Zweiter
Abdruck. (492 S.) 1880.

RM. 50.—

Bd. V. **Mathematische Physik.**
Zweiter Abdruck. (642 S.) 1877.

RM. 64.—

Bd. VI. **Astronomische Abhandlungen
und Aufsätze.** (664 S.)
1874.

RM. 69.—

Bd. VII. **Theoria Motus und theoretisch
astronomischer Nachlaß.**
(Parabolische Bewegung, Störungen
der Ceres und der Pallas. Theorie des
Mondes. (650 S.) 1906.

RM. 65.—

Bd. VIII. **Arithmetik, Analysis,
Wahrscheinlichkeitsrechnung,
Geometrie.** (Nachträge zu Band
I—IV.) (458 S.) 1900.

RM. 46.—

Bd. IX. **Geodäsie.** (Fortsetzung von
Band IV.) (528 S.) 1903.

RM. 53.—

Bd. X. Abteilung I. **Nachlaß und
Briefwechsel zur reinen Mathematik.**
(Nachträge zu Band I—IV
und VIII.) **Tagebuch.** (586 S.)
1917.

RM. 59.—

Abteilung II. **Abhandlungen über**

**Gauss' wissenschaftliche Tätigkeit
auf den Gebieten der
reinen Mathematik.**

Abhandlung I u. V. **Über Gauss'
zahlentheoretische Arbeiten
und die Variationsrechnung**
von Oscar Bolza. (95 S.) 1922.

RM. 17.—

Abhandlung IV. **Gauss als Geometer**
von Paul Stäckel. (123 S.)
1923.

RM. 12.50

Nachbildung des Tagebuchs (Notizenjournals) 1796—1814. RM. 1.20

Bd. XI. Abteilung I: **Nachlaß und
Briefwechsel zur Physik, Astronomie
und Chronologie.**
(Nachträge zu Band V—VII *Varia.*)
Unter der Presse.

Abteilung II: **Abhandlungen über
Gauss' wissenschaftliche Tätigkeit
auf den Gebieten der
angewandten Mathematik.**

(Geodäsie, Physik, Astronomie).
Abhandlung I: **Über die geodätischen
Arbeiten von Gauss**
von A. Galle. (165 S.) 1924.

RM. 17.—

Abhandlung II: In Vorbereitung.
*Die Bände X₂ und XI₂ bestehen aus einzelnen
Abhandlungen (Essays), die besonders paginiert
sind und in der Reihenfolge ihrer Fertigstellung
auch gesondert ausgegeben werden. Mit der
letzten Abhandlung eines Bandes wird Titelblatt
und Inhaltsverzeichnis geliefert.*

Band XII. **Biographisches nebst
einem Generalregister.**

In Vorbereitung.

Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauss

Gesammelt von F. Klein, M. Brendel und L. Schlesinger

Heft 1. **Über Gauss' zahlentheoretische
Arbeiten.** Von P. Bachmann,
Weimar. (57 S.) 1911.

RM. 2.80

Heft 2/3. **C. F. Gauss' Fragmente
zur Theorie des arithmetisch-
geometrischen Mittels aus den
Jahren 1797—1799. — Über Gauss'
Arbeiten zur Funktionentheorie.**
Von L. Schlesinger, Gießen.
(146 S.) 1912.

RM. 9.—

Heft 4/5. **C. F. Gauss als Zahlen-
rechner.** Von A. Galle, Potsdam.
— **C. F. Gauss als Geometer.**
Von P. Stäckel, Heidelberg. (146 S.)
1918.

RM. 7.20

Heft 6. **Die Wechselwirkung
zwischen Zahlenrechnen und
Zahlentheorie bei C. F. Gauss.**
Von Ph. Maennchen, Gießen.
(51 S.) 1918.

RM. 2.40

Heft 7. **Über die astronomischen
Arbeiten von Gauss.** Von
M. Brendel, Frankfurt a. M. Erster
Abschnitt: Theoretische Astronomie.
(110 S.) 1919.

RM. 5.60

Heft 8. **Zahlbegriff und Algebra
bei Gauss.** Von A. Fraenkel,
Marburg a. d. Lahn. Mit einem
Anhang von A. Ostrowski, Göttingen.
Zum ersten und vierten Gauss'schen
Beweise des Fundamentalsatzes der
Algebra. (62 S.) 1920.

RM. 3.—