

Проф. С. П. ТИМОШЕНКО

# ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО  
проф. Н. А. ШОШИНА

Издание второе  
исправленное

ЦЕНА 7 Р. ПЕРЕПЛЕТ 1 Р. 50 К.



ОНТИ • ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
ЛЕНИНГРАД • 1937 • МОСКВА

Prof. S. TIMOSHENKO

# THEORY OF ELASTICITY

First Edition

LONDON

1934

NEW-YORK

Книга представляет собой существенно переработанную первую часть курса теории упругости, изданную на русском языке в 1914 г.

Она является полным курсом теории упругости, четко построенным, отражающим все новейшие достижения последних двадцати лет, истекших с момента выхода в свет первой части на русском языке.

Строгость научного изложения делает эту книгу классическим трудом по теории упругости.

Книга предназначена для студентов вузов и втузов и научных работников.

## ПРЕДИСЛОВИЕ.

За последние годы теория упругости стала находить значительное применение при решении задач техники. Во многих случаях элементарные методы сопротивления материалов оказываются недостаточными для получения удовлетворительных представлений относительно распределения напряжений в инженерных сооружениях, и приходится прибегать к более совершенным методам теории упругости.

Элементарной теории недостаточно, чтобы составить представление о местных напряжениях вблизи точек приложения грузов и вблизи опор балок. Равным образом она не может дать удовлетворительного объяснения в тех случаях, когда исследуется распределение напряжений в телах, все размеры которых являются величинами одинакового порядка. Напряжения в катках и в шариках подшипников можно найти лишь при помощи теории упругости. Элементарная теория не дает возможности исследовать напряжения в местах резкой перемены поперечного сечения балок и валов. Известно, что во входящих углах получаются очень высокие местные напряжения, и в конечном результате именно от этих углов обычно начинают появляться трещины, особенно, если конструкция подвергается действию знакопеременных напряжений. Большинство поломок частей машин в работе может быть отнесено на счет этих трещин.

За последние годы достигнуты значительные успехи при решении подобных, практически важных задач. В тех случаях, где точное решение не может быть получено без затруднений, применяются приближенные способы решения. В некоторых случаях решение получается экспериментальным путем.

В качестве примера можно привести оптический метод решения плоских задач упругости. Приборы для измерения напряжений оптическим путем можно найти теперь в высших учебных заведениях, а также во многих производственных испытательных лабораториях. Результаты оптических исследований оказались особенно полезными при изучении различных случаев концентрации напряжений в местах резкого изменения размеров поперечного сечения и в выкружках малого радиуса во входящих углах. Несомненно эти результаты оказали значительное влияние на современное конструирование машинных частей и способствовали во многих случаях улучшению конструкции путем устранения слабых точек, от которых могут начаться трещины.

Другим примером успешного применения опытных данных при решении задач упругости является способ мыльной пленки для определения напряжений при изгибе и кручении призматических стержней. Решения дифференциальных уравнений в частных производных при данных усло-

виях на контуре, представляющие значительные трудности, заменяются в этом случае измерением уклонов и прогибов соответственным образом натянутой и нагруженной мыльной пленки. Опыты показывают, что таким путем не только можно получить наглядную картину распределения напряжений, но также иметь необходимые данные относительно величины напряжений с точностью, достаточной для практических целей.

Затем, представляет интерес электрическая аналогия, которая дает возможность исследования напряжений от кручения в валах переменного диаметра в выкружках и выточках. Аналогия между задачей изгиба пластинок и плоской задачей теории упругости также с успехом может быть использована при решении существенных задач техники.

При составлении этой книги имелось в виду изложить в простой форме необходимые для инженеров основные знания по теории упругости. Кроме того, предполагалось привести в этой книге решения тех специальных задач, которые могут иметь практическое значение, и описать приближенные способы и опытные методы решения задач теории упругости.

Имея в виду практическое применение теории упругости, автор выпустил вопросы, имеющие преимущественно теоретический характер, и такие, которые в настоящее время не находят непосредственного применения в технике, с тем, чтобы уделить больше внимания рассмотрению особых частных случаев. Только на основании изучения таких случаев со всеми подробностями и с сравнением результатов точных исследований с приближенными решениями, обычно приводимыми в элементарных курсах сопротивления материалов, проектирующий может получить полное представление о распределении напряжений в инженерных сооружениях и научиться целесообразно пользоваться более точными методами анализа напряжений.

Для решения частных задач в большинстве случаев избран путь определения непосредственно напряжений при помощи уравнений совместности, выраженных в зависимости от составляющих напряжения. Такой ход решения более обычен для инженеров, интересующихся главным образом величиной напряжений. Кроме того, при введении соответственно подобранных функций напряжений, он часто оказывается более простым, чем использование уравнений равновесия, выраженных в зависимости от перемещений.

Во многих случаях применялся также способ решения задач упругости путем рассмотрения потенциальной энергии деформации. Этим путем интегрирование дифференциальных уравнений заменяется исследованием условий минимума определенных интегралов. При помощи метода Ритца, эта задача вариационного исчисления приводится к решению простой задачи нахождения минимума функции. Этим способом можно получить удобные приемы приближенных вычислений во многих практически важных случаях.

Чтобы упростить изложение, книга начинается с рассмотрения плоских задач, и лишь затем, когда читатель освоился с различными способами, применяемыми при решении задач теории упругости, рассматриваются задачи в трех измерениях. Те части книги, которые хотя и имеют практическое значение, но при первом ознакомлении могут быть выпу-

щены, набраны петитом. К изучению этих вопросов читатель может вернуться, овладев более существенными разделами книги.

Математические выводы изложены в элементарном виде и в большинстве случаев не требуют математических знаний больших, чем те, которые даются в высших технических учебных заведениях. Для более сложных задач приводятся все необходимые пояснения и промежуточные выкладки, с тем, чтобы читатель без затруднений мог следить за всеми выводами. Лишь в немногих случаях даны окончательные результаты без полных выводов. Но при этом всегда даются необходимые указания статей, в которых можно найти выводы.

В многочисленных выносках указываются статьи и книги по теории упругости, которые могут иметь практическое значение. Эти указания могут представить интерес для инженеров, которые желают изучить некоторые частные задачи более подробно. Кроме того эти ссылки на литературу дают представление о современном состоянии теории упругости и могут быть полезны кончающим студентам, которые намерены работать в этой области знаний.

При составлении этой книги, автором было широко использовано его предыдущий труд<sup>1)</sup>, представляющий собой курс лекций по теории упругости, читанный в нескольких русских высших технических учебных заведениях.

*С. Тимошенко.*

Мичиганский университет,  
декабрь, 1933 г.

---

<sup>1)</sup> „Курс теории упругости“, часть 1, издание Института инженеров путей сообщения, С.-Петербург, 1914 г.

## К ПЕРВОМУ РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Для советских читателей книга эта по существу является повторным изданием первой части Курса теории упругости проф. С. П. Тимошенко, появившейся в печатном виде ровно двадцать три года назад.

Новейшие запросы техники, новейшие достижения теоретической мысли и особенно новейшие приемы экспериментального решения задач теории упругости нашли самое широкое отражение в этом издании.

Порядок изложения материала несколько видоизменен автором. Сначала во всей полноте рассматривается плоская задача теории упругости. Особое внимание уделено решению задачи в полярных координатах. Новая отдельная глава посвящена решению плоской задачи при помощи функции комплексного переменного.

Во второй половине книги автор излагает теорию упругости в трех измерениях. Очень сильно, против предыдущего, развит в этом издании отдел кручения и симметричного относительно оси распределения напряжений в телах вращения.

В заключительной главе автор рассматривает распространение колебаний в упругой среде, отсылая по вопросам вообще колебаний к своей книге: „Теория колебаний в инженерном деле“ (3-е русское издание выходит одновременно с этой книгой).

Особенно ценны указания литературы, которые доведены вплоть до начала 1934 года и охватывают всю мировую печать. В частности широко использована и литература на русском языке до самых последних наших изданий.

В работе по переводу принял активное участие проф. В. А. Гастев, прочитавший в том или другом виде весь текст перевода.

Значительный объем работы, крайне стесненные сроки ее выполнения являются некоторым оправданием возможных недочетов, вкравшихся в это издание. За сообщение замеченных опечаток и недостатков издания заранее приношу благодарность. Они будут учтены при первом же повторном переиздании, к которому перевод мой, надеюсь, будет просмотрен и самим автором.

*Н. Шошин.*

Ленинград,  
20 августа 1934 г.

---

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие автора . . . . .	Стр. 3
К первому русскому изданию . . . . .	6
Обозначения . . . . .	11

### Введение.

1. Упругость . . . . .	13
2. Напряжение . . . . .	14
3. Обозначения для сил и напряжений . . . . .	15
4. Составляющие напряжения . . . . .	16
5. Составляющие деформации . . . . .	17
6. Закон Гука . . . . .	19

### Глава первая.

#### Плоское напряженное состояние и плоская деформация.

7. Плоское напряженное состояние . . . . .	24
8. Плоская деформация . . . . .	24
9. Напряжения в точке . . . . .	26
10. Дифференциальные уравнения равновесия . . . . .	32
11. Условия на контуре . . . . .	33
12. Условие совместности . . . . .	33
13. Функция напряжений . . . . .	36

### Глава вторая

#### Плоская задача в прямоугольных координатах.

14. Решение при помощи целых полиномов . . . . .	38
15. Принцип Сен-Венана . . . . .	42
16. Определение перемещений . . . . .	43
17. Изгиб консоли, нагруженной на конце . . . . .	44
18. Изгиб балки равномерно распределенной нагрузкой . . . . .	49
19. Другие случаи балок со сплошной нагрузкой . . . . .	53
20. Решение плоской задачи при помощи рядов Фурье . . . . .	56

### Глава третья.

#### Плоская задача в полярных координатах.

21. Общие уравнения в полярных координатах . . . . .	64
22. Распределение напряжений, симметричное относительно оси . . . . .	67
23. Чистый изгиб кривых брусьев . . . . .	70
24. Составляющие деформации в полярных координатах . . . . .	75
25. Перемещения при симметричном распределении напряжений . . . . .	77
26. Вращающиеся диски . . . . .	79
27. Изгиб кривого бруса силой на конце . . . . .	83

28. Влияние круглых отверстий на распределение напряжений в пластинках	89
29. Сосредоточенная сила, приложенная к точке прямолинейного края пластинки	96
30. Любая вертикальная нагрузка по прямолинейному краю	102
31. Сила, действующая на острие клина	107
32. Сосредоточенная сила, действующая на балку	109
33. Напряжения в круглом диске	118
34. Сила, приложенная в точке бесконечной пластинки	125
35. Общее решение плоской задачи в полярных координатах	129
36. Примеры применения общего решения плоской задачи в полярных координатах	134
37. Клин под действием нагрузки, приложенной по наклонным граням	137
38. Оптический метод измерения напряжений	139

#### Глава четвертая.

##### Потенциальная энергия деформации.

39. Общие выражения	153
40. Начало возможных перемещений	156
41. Теорема Кастильяно	164
42. Начало наименьшей работы	170
43. Применение начала наименьшей работы к прямоугольным пластинкам	171
44. Полезная ширина полок широкополых балок	177

#### Глава пятая.

##### Решение плоской задачи при помощи функций комплексного переменного.

45. Уравнения равновесия в зависимости от перемещений	183
46. Функции комплексного переменного	185
47. Перемещения при плоской деформации и плоском напряженном состоянии	187
48. Криволинейные ортогональные координаты	190
49. Составляющие деформации в ортогональных криволинейных координатах	194
50. Плоская задача в эллиптических координатах	198
51. Конформное отображение	201

#### Глава шестая.

##### Исследование напряжений и деформаций в трех измерениях.

52. Напряженное состояние в точке тела	206
53. Главные напряжения	207
54. Эллипсоид напряжений и направляющая поверхность напряжений	208
55. Определение главных напряжений	210
56. Определение наибольшего касательного напряжения	211
57. Однородная деформация	212
58. Исследование деформации в точке тела	214
59. Главные оси деформации	217

#### Глава седьмая.

##### Общие теоремы.

60. Дифференциальные уравнения равновесия	219
61. Условия совместности	221
62. Определение перемещений	224
63. Уравнения равновесия в зависимости от перемещений	225

64. Однозначность решения . . . . .	227
65. Температурные напряжения . . . . .	229
66. Начальные напряжения . . . . .	239

## Глава восьмая.

**Простейшие задачи теории упругости в трех измерениях.**

67. Равномерно напряженное состояние . . . . .	243
68. Растяжение призматического стержня под действием собственного веса . . . . .	244
69. Кручение круглых валов постоянного сечения . . . . .	247
70. Чистый изгиб призматических стержней . . . . .	248
71. Чистый изгиб пластинок . . . . .	253

## Глава девятая.

**Кручение.**

72. Кручение призматических стержней . . . . .	256
73. Перемещения при кручении призматических стержней . . . . .	260
74. Стержни эллиптического поперечного сечения . . . . .	261
75. Другие элементарные решения задач на кручение призматических стержней . . . . .	263
76. Аналогия с мембраной . . . . .	267
77. Кручение стержня узкого прямоугольного сечения . . . . .	271
78. Кручение прямоугольных стержней . . . . .	274
79. Дополнительные данные по кручению стержней . . . . .	278
80. Решение задач на кручение с помощью рассмотрения потенциальной энергии . . . . .	280
81. Кручение стержней прокатных профилей . . . . .	286
82. Применение мыльных пленок для решения задач на кручение . . . . .	289
83. Гидродинамические аналогии . . . . .	292
84. Кручение полых валов . . . . .	294
85. Кручение тонкостенных труб . . . . .	299
86. Кручение стержня, одно из поперечных сечений которого остается плоским . . . . .	303
87. Кручение круглых валов переменного диаметра . . . . .	305

## Глава десятая.

**Изгиб призматических стержней.**

88. Изгиб консоли . . . . .	315
89. Функция напряжений . . . . .	317
90. Круглое поперечное сечение . . . . .	318
91. Эллиптическое поперечное сечение . . . . .	320
92. Прямоугольное поперечное сечение . . . . .	321
93. Дальнейшие выводы . . . . .	328
94. Несимметричные поперечные сечения . . . . .	330
95. Решение задач на изгиб способом мыльной пленки . . . . .	332
96. Перемещения . . . . .	336
97. Дальнейшие исследования изгиба . . . . .	337

## Глава одиннадцатая.

**Симметричное относительно оси распределение напряжений в телах вращения.**

98. Общие уравнения . . . . .	339
99. Решение при помощи целых полиномов . . . . .	343
100. Изгиб круглой пластинки . . . . .	345

	Стр.
101. Вращающийся диск как задача в трех измерениях . . . . .	348
102. Сосредоточенная сила в точке тела бесконечных размеров . . . . .	350
103. Сферический сосуд под действием внутреннего или внешнего равномерного давления . . . . .	353
104. Местные напряжения вокруг сферической полости . . . . .	357
105. Сосредоточенная сила, действующая на плоскость, ограничивающую полубесконечное тело . . . . .	360
106. Нагрузка, распределенная по части плоскости, ограничивающей полубесконечное тело . . . . .	365
107. Давление между двумя соприкасающимися сферическими телами . . . . .	372
108. Общий случай давления между двумя соприкасающимися телами . . . . .	378
109. Удар шаров . . . . .	384
110. Симметричная деформация круглого цилиндра . . . . .	386
111. Скручивание сектора кругового кольца . . . . .	390
112. Чистый изгиб сектора кругового кольца . . . . .	395
113. Температурные напряжения в тонких круглых дисках . . . . .	398
114. Температурные напряжения в длинных круглых цилиндрах . . . . .	401
115. Температурные напряжения шара . . . . .	411

#### Глава двенадцатая.

##### Распространение волн колебаний в сплошной упругой среде.

116. Общие замечания . . . . .	416
117. Продольные волны в призматических стержнях . . . . .	416
118. Продольный удар стержней . . . . .	423
119. Волны расширения и волны искажения в изотропной упругой среде . . . . .	433
120. Плоские волны . . . . .	435
121. Распространение волн по поверхности упругого сплошного тела . . . . .	438
<b>Указатель имен . . . . .</b>	<b>442</b>
<b>Предметный указатель . . . . .</b>	<b>445</b>

## ОБОЗНАЧЕНИЯ.

- $x, y, z$  — прямоугольные координаты.  
 $r, \theta$  — полярные координаты;  
 $R, \psi, \vartheta$  — сферические координаты;  
 $N$  — внешняя нормаль к поверхности тела;  
 $l, m, n$  — направляющие косинусы внешней нормали;  
 $F$  — площадь поперечного сечения;  
 $I_x, I_y$  — моменты инерции поперечного сечения относительно осей  $x$  и  $y$ ;  
 $I_p$  — полярный момент инерции поперечного сечения;  
 $g$  — ускорение силы тяжести;  
 $\rho$  — плотность;  
 $q$  — интенсивность равномерно распределенной нагрузки;  
 $p$  — давление;  
 $X, Y, Z$  — составляющие объемной силы, отнесенной к единице объема;  
 $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$  — составляющие поверхностной силы, отнесенной к единице площади;  
 $M$  — изгибающий момент;  
 $M_z$  — крутящий момент;  
 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  — нормальные составляющие напряжения, параллельные осям  $x, y$  и  $z$ ;  
 $\sigma_n$  — нормальная составляющая напряжения, параллельная направлению  $n$ ;  
 $\sigma_r, \sigma_\theta$  — радиальное и тангенциальное нормальные напряжения в полярных координатах;  
 $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$  — составляющие нормального напряжения в цилиндрических координатах;  
 $\Sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z$ ;  
 $\tau$  — касательное напряжение;  
 $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  — составляющие касательного напряжения в прямоугольных координатах;  
 $\tau_{r\theta}$  — касательное напряжение в полярных координатах;  
 $\tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}, \tau_{rz}$  — составляющие касательного напряжения в цилиндрических координатах;  
 $\sigma$  — полное напряжение на площадку;  
 $u, v, w$  — составляющие перемещения;  
 $\epsilon$  — относительное удлинение;  
 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$  — относительные удлинения в направлении осей  $x, y, z$ ;  
 $\epsilon_r, \epsilon_\theta$  — радиальное и тангенциальное относительные удлинения в полярных координатах;

$\Delta = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$  — относительное объемное расширение;

$\gamma$  — относительный сдвиг;

$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{rz}$  — составляющие сдвига в прямоугольных координатах;

$\gamma_{r\theta}, \gamma_{\theta z}, \gamma_{zz}$  — составляющие сдвига в цилиндрических координатах;

$E$  — модуль упругости на растяжение и сжатие;

$G$  — модуль упругости на сдвиг;

$\nu$  — Пуассоново отношение;

$\mu, \lambda$  — постоянные Ляме:  $\mu = G$ ;  $\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$ ;

$\varphi$  — функция напряжений;

$C$  — жесткость при кручении;

$\theta$  — угол скручивания на единицу длины;

$A = 2G\theta$  — величина, применяемая при задачах кручения;

$U$  — потенциальная энергия деформации;

$U_0$  — потенциальная энергия, отнесенная к единице объема;

$t$  — время;

$T$  — промежуток времени, температура;

$V$  — скорость.

## ВВЕДЕНИЕ.

**1. Упругость.** Все строительные материалы обладают в известной мере свойством *упругости*, которое состоит в том, что если внешние силы, вызывающие *деформацию* элемента конструкции, не превосходят определенной границы, то деформация исчезает после прекращения действия сил. В настоящем труде принято, что тела, подвергающиеся действию внешних сил, являются *совершенно упругими*, т. е. полностью возвращаются к своей первоначальной форме после устранения сил.

При этом молекулярное строение упругих тел во внимание не принимается. Предполагается, что материя упругого тела *однородна* и непрерывно распределена по его объему, так что малейший элемент, вырезанный из тела, обладает теми же самыми особенными физическими свойствами, что и все тело. Чтобы упростить исследование, допущено также, что тело *изотропно*, т. е. что упругие свойства его одинаковы во всех направлениях.

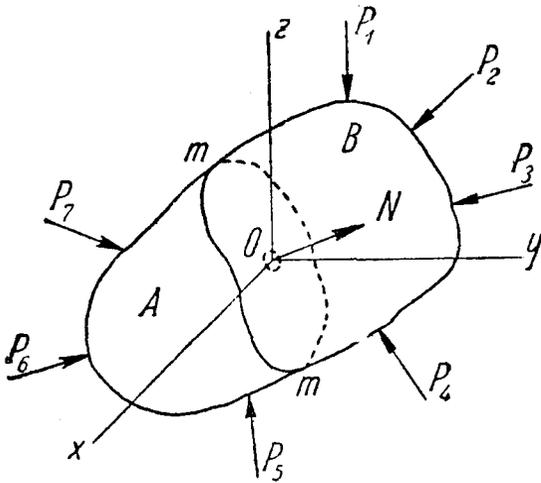
Строительные материалы обыкновенно не удовлетворяют принятым выше допущениям. Например, такой важный для техники материал, как сталь, при исследовании его под микроскопом оказывается состоящим из кристаллов различного вида и различного положения. Материал оказывается далеко не однородным, однако опыт показывает, что выводы теории упругости, основанные на предположениях об однородности и изотропности тел, могут применяться к конструкциям из стали с достаточной точностью.

Объясняется это тем, что кристаллы очень малы: число их в одном кубическом сантиметре исчисляется обыкновенно миллионами. Хотя упругие свойства отдельного кристалла в разных направлениях чрезвычайно различны, однако кристаллы в большинстве случаев размещены в беспорядке, так что упругие свойства больших кусков металла являются средними значениями свойств отдельных кристаллов. Если только геометрические размеры, определяющие форму тела, велики по сравнению с размерами отдельного кристалла, то предположением об однородности можно пользоваться с уверенностью в большой точности; если к тому же кристаллы расположены в беспорядке, то материал может рассматриваться и как изотропный.

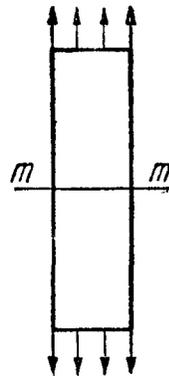
Если, вследствие каких-нибудь технологических процессов, например прокатки, в металле некоторое определенное расположение кристаллов оказывается преобладающим, то упругие свойства металла становятся отличными по разным направлениям, и его следует рассматривать как *анизотропный*. Такой случай имеем, например, для прокатанной в холодном состоянии меди.

**2. Напряжение.** Пусть фиг. 1 представляет тело, находящееся в равновесии. Под действием внешних сил  $P_1, P_2, \dots, P_7$  возникнут внутренние усилия между частями тела. Чтобы изучить величину этих усилий в любой точке  $O$ , представим тело разделенным на две части  $A$  и  $B$  сечением  $mn$ , проходящим через эту точку.

Рассматривая одну из этих частей, например часть  $A$ , можем сказать, что она находится в равновесии под действием внешних сил  $P_6, P_7$  и  $P_5$  и внутренних усилий, распределенных по сечению  $mn$  и представляющих действие части  $B$  на часть  $A$ . Допустим, что эти силы непрерывно распределены по площади  $mn$  таким же образом, как непре-



Фиг. 1



Фиг. 2.

рывно распределяются гидростатическое давление или давление ветра по поверхностям, на которые они действуют.

Как известно, величины таких усилий характеризуются их *интенсивностью*, т. е. величиной усилия на единицу площади поверхности, на которую они действуют. При рассмотрении внутренних усилий эта интенсивность называется *напряжением*.

В простейшем случае призматического стержня, подвергающегося растяжению силами, равномерно распределенными по концам (фиг. 2), внутренние усилия также равномерно распределены по любому сечению  $mn$ . Следовательно, интенсивность таким образом распределенных усилий, т. е. напряжение, может быть получено делением всей растягивающей силы  $P$  на площадь сечения  $F$ .

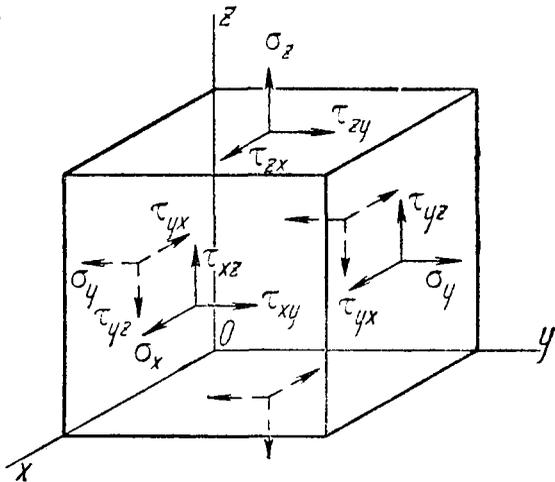
В только что рассмотренном случае напряжения были равномерно распределены по сечению. В общем случае, показанном на фиг. 1, напряжения не являются равномерно распределенными по сечению  $mn$ . Чтобы получить величину напряжения, действующего по элементарной площадке  $\delta F$ , вырезанной из поперечного сечения  $mn$  в точке  $O$ , пред-

положим, что усилия, возникающие по этой площадке вследствие воздействия части  $B$  на часть  $A$ , могут быть приведены к равнодействующей  $\delta P$ .

Если мы будем постепенно уменьшать элементарную площадку  $\delta F$ , то предельное значение отношения  $\delta P : \delta F$  даст нам величину напряжения, действующего по сечению  $mn$  в точке  $O$ . Направление равнодействующей  $\delta P$  при этом предельном значении является направлением напряжения. В общем случае направление напряжения является наклонным по отношению к площадке  $\delta F$ , по которой оно действует, и его обычно раскладывают на две составляющие: *нормальное* напряжение, перпендикулярное к площадке, и *касательное* напряжение, действующее в плоскости площадки  $\delta F$ .

### 3. Обозначения для сил и напряжений.

Существует два рода внешних сил, которые могут действовать на тело. Силы, распределенные по поверхности тела, например, давление одного тела на другое, или гидростатическое давление, называются *поверхностными силами*. Силы, распределенные по объему тела, например, сила тяжести, магнитные силы, или для тела, находящегося в движении, силы инерции, называются *объемными силами*.



Фиг. 3.

Поверхностную силу, приходящуюся на единицу площади, мы будем обычно раскладывать на три составляющие, параллельные осям координат и примем для этих составляющих обозначения  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$  и  $\bar{Z}$ . Объемную силу приходящуюся на единицу объема, мы также будем раскладывать на три составляющие, и обозначать эти составляющие через  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ .

Буквой  $\sigma$  мы будем пользоваться для обозначения нормального напряжения, а буквой  $\tau$  — для касательного напряжения. Чтобы указать положение площадки, по которой действует напряжение, воспользуемся нижними значками при этих буквах.

Если взять очень малый элемент объема в виде куба вблизи точки  $O$  (фиг. 1), со сторонами, параллельными осям координат, то обозначения для составляющих напряжения, действующих по граням этого элемента, и положительные направления их будем принимать такими, как показано на фиг. 3.

Для граней элемента, перпендикулярных к оси  $u$ , например нормаль-

ные составляющие напряжения, действующие по этим граням, обозначаются  $\sigma_y$ . Значок  $y$  указывает, что напряжение действует по площадке, нормальной к оси  $y$ . Нормальное напряжение принято положительным, когда оно вызывает растяжение, и отрицательным, когда оно вызывает сжатие.

Касательное напряжение раскладывается на три составляющих, параллельных осям координат. В этом случае пользуются нижним значком из двух букв: первая указывает направление нормали к рассматриваемой площадке, а вторая — направление составляющей напряжения.

Например, если мы снова рассмотрим грани, перпендикулярные оси  $y$ , то составляющая в направлении оси  $x$  обозначается  $\tau_{yx}$ , а составляющая в направлении оси  $z$  —  $\tau_{yz}$ .

За положительные направления составляющих касательного напряжения, действующего по любой грани элементарного кубика, принимаются направления осей координат, если растягивающее напряжение по той же грани имеет направление, совпадающее с положительным направлением соответствующей оси. Если растягивающее напряжение имеет направление, противоположное положительному направлению оси, то за положительное направление составляющих касательного напряжения следует взять обратное направлению оси.

Согласно этому правилу, положительные направления всех составляющих напряжения, действующего по правой грани элементарного кубика (фиг. 3), совпадают с положительными направлениями координатных осей. Если мы будем рассматривать левую грань этого кубика, то положительными будут обратные направления.

**4. Составляющие напряжения.** Из изложенного в предыдущем параграфе видно, что для каждой пары параллельных граней элементарного кубика, показанного на фиг. 3, необходимо одно обозначение для нормальной составляющей напряжения, и еще два обозначения для двух составляющих касательного напряжения.

Чтобы изобразить напряжения, действующие на все шесть граней элементарного кубика, требуются три обозначения:  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$  для нормальных напряжений, и шесть обозначений:  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yx}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{yz}$  и  $\tau_{zy}$  для касательных напряжений.

Путем непосредственного рассмотрения равновесия элемента число обозначений для касательных напряжений может быть уменьшено до трех.

Если мы возьмем момент сил, действующих на элемент, например, относительно оси  $x$ , то придется принять во внимание только те напряжения по граням элемента, которые показаны на фиг. 4. Объемными силами, например, весом элемента, можно в таком случае пренебречь.

Это вытекает из того обстоятельства, что при уменьшении размеров элемента объемные силы, действующие на него, уменьшаются пропорционально кубу линейных размеров, тогда как поверхностные силы уменьшаются пропорционально квадрату этих измерений. Следовательно, для бесконечно малого элемента объемные силы являются бесконечно малыми величинами высшего порядка малости по сравнению с поверхностными силами, и ими можно пренебречь при рассмотрении равновесия этого элемента.

Подобным же образом можно показать, что моменты вследствие неравномерности распределения нормальных усилий являются величинами высшего порядка малости, чем моменты касательных усилий, и в пределе обращаются в нуль.

Поэтому усилия, действующие на каждую грань, можно считать равными напряжению в центре грани, умноженному на площадь последней.

Тогда, обозначив размеры бесконечно малого элемента фигуры 4 через  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  и взяв моменты сил относительно оси  $x$ , получим уравнение равновесия этого элемента в следующем виде:

$$\tau_{xy} dx dy dz = \tau_{yx} dx dy dz.$$

Два других уравнения получатся таким же образом. Из этих уравнений мы находим, что

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}. \quad [1]$$

Следовательно, для двух взаимно перпендикулярных граней элементарного кубика составляющие касательного напряжения, перпендикулярные линии пересечения этих граней, равны между собой.

Поэтому, для того, чтобы охарактеризовать напряжения, действующие по координатным площадкам, проходящим через какую-нибудь точку, достаточно шести величин:

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z; \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy};$$

эти величины мы будем называть *составляющими напряжения* в данной точке.

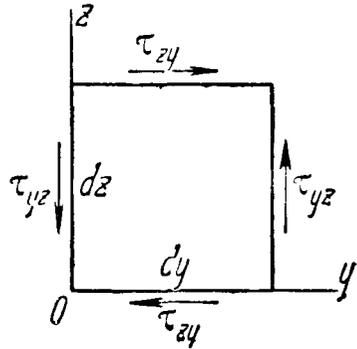
Ниже в параграфе 52 будет показано, что при помощи этих шести составляющих напряжения можно выразить напряжение по любой наклонной площадке, проведенной через ту же точку.

### 5. Составляющие деформации.

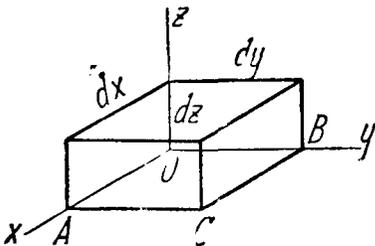
При исследовании деформаций упругого тела будем исходить из допущения, что налицо имеется достаточное число связей для того, чтобы предотвратить движение тела, как свободного твердого тела, так что никакие перемещения частиц тела невозможны без деформации его.

В этом труде будут рассматриваться только малые деформации, которые встречаются в инженерных сооружениях.

Малые перемещения частиц деформированного тела обычно раскладываются на составляющие  $u$ ,  $v$  и  $w$ , параллельные соответственным осям



Фиг. 4.



Фиг. 5.

координат  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Предположим, что эти составляющие имеют очень малую величину, непрерывно изменяющуюся по объему тела.

Рассмотрим бесконечно малый элемент  $dx dy dz$  упругого тела (фиг. 5). Если тело подвергается деформации и величины  $u$ ,  $v$  и  $w$  являются составляющими перемещения точки  $O$ , то перемещение в направлении оси  $x$  бесконечно близкой точки  $A$ , лежащей на оси  $x$ , равно



Фиг. 6.

$$\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Таким же образом можно показать, что относительные удлинения по направлениям осей  $y$  и  $z$  представляются производными

$$\frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Рассмотрим теперь искажение угла между элементарными отрезками  $OA$  и  $OB$  (фиг. 6). Если  $u$  и  $v$  являются перемещениями точки  $O$  в направлении осей  $x$  и  $y$ , то перемещения точки  $A$  в направлении оси  $y$  и точки  $B$  в направлении оси  $x$  будут соответственно

$$v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$$

и

$$u + \frac{\partial u}{\partial y} dy.$$

Вследствие этих перемещений новое направление  $O'A'$  элемента  $OA$  будет составлять со своим первоначальным направлением показанный на чертеже малый угол, равный

$$\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Таким же образом, направление  $O'B'$  будет составлять с направлением  $OB$  малый угол

$$\frac{du}{dy}.$$

Отсюда следует, что первоначально прямой угол  $AOB$  между элементами  $OA$  и  $OB$  уменьшается на угол

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Это и есть *деформация сдвига* между плоскостями  $xz$  и  $yz$ . Деформации сдвига между плоскостями  $xu$  и  $xz$  и плоскостями  $ux$  и  $uz$  можно получить тем же самым путем.

Для обозначения относительного удлинения будем пользоваться буквой  $\epsilon$ , а для относительного сдвига — буквой  $\gamma$ . Чтобы обозначить направления деформаций, будем применять те же значки при этих буквах, как и для составляющих напряжения. Тогда, на основании изложенного

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{du}{dx}; & \gamma_{xy} &= \frac{du}{dy} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; & \gamma_{xz} &= \frac{du}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}; \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \right\} [2]$$

В дальнейшем будет показано, что, имея три относительных удлинения по трем взаимно перпендикулярным направлениям и три относительных сдвига, соответствующих этим же направлениям, можно найти (см. параграф 58) удлинение по любому направлению и изменение угла между любыми двумя направлениями. Эти шесть величин:

$$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z; \quad \gamma_{xy}, \gamma_{xz} \text{ и } \gamma_{yz}$$

называются *составляющими деформации*.

**6. Закон Гука.** Зависимость между составляющими напряжения и составляющими деформации установлена опытным путем и известна под названием *закона Гука*.

Вообразим элементарный прямоугольный параллелепипед с гранями, параллельными осям координат, подвергающийся действию нормального напряжения  $\sigma_x$ , равномерно распределенного по двум противоположным граням. опыты показывают, что в случае изотропного материала эти нормальные напряжения не вызывают никакого изменения углов элемента. Величина относительного удлинения элемента представится формулой

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \quad [a]$$

где  $E$  — *модуль упругости при растяжении*.

Материалы, применяемые в технике, обладают модулями упругости очень большими по сравнению с допускаемыми напряжениями, и потому относительное удлинение  $[a]$  — очень небольшая величина. Например, для стали это удлинение обычно меньше 0,001.

Увеличение размеров элемента в направлении оси  $x$  сопровождается поперечными сужениями:

$$\epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E}, \quad \epsilon_z = -\nu \frac{\sigma_y}{E}, \quad [b]$$

где  $\nu$  — постоянная величина, называемая *Пуассоновым отношением*.

Для многих материалов Пуассоново отношение можно принять равным 0,25. Для стали его обычно принимают равным 0,3.

Формулами  $[a]$  и  $[b]$  можно пользоваться также и при простом сжатии. В пределах упругости модуль упругости и Пуассоново отношение при сжатии те же, что при растяжении.

Если рассмотренный выше элемент подвергнуть действию нормальных напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$ , равномерно распределенных по его граням, то суммарную величину составляющих деформаций можно найти с помощью формул  $[a]$  и  $[b]$ . Опыты показывают, что для получения этих составляющих мы должны сложить составляющие деформаций, вызываемых каждым из трех напряжений. Основываясь таким образом на принципе сложения действия сил, мы получим следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]; \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]; \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]. \end{aligned} \right\} [3]$$

В дальнейшем изложении мы будем часто применять *принцип сложения действия сил*, для определения суммарных деформаций и напряжений, возникающих при действии нескольких сил. Этим принципом можно пользоваться лишь до тех пор, пока деформации невелики и соответствующие им малые перемещения не оказывают существенного влияния на действие внешних сил. В таких случаях мы пренебрегаем небольшими изменениями в размерах деформированного тела, а также небольшими перемещениями точек приложения внешних сил, и исходим в своих вычислениях из начальных размеров и начальной формы тела. Общие перемещения мы получим тогда в виде линейных функций от внешних сил посредством сложения отдельных перемещений таким же путем, как это было сделано при выводе формул  $[3]$ .

Есть, однако, исключительные случаи, в которых нельзя пренебречь и малыми деформациями и приходится принимать их во внимание.

Примером такого рода может служить совместное действие на тонкий стержень осевых и боковых сил. Одни осевые силы вызывают только растяжение или сжатие, но при одновременном их действии

с боковыми силами они могут оказать существенное влияние на изгиб стержня. Для определения деформации стержней в этом случае следует принять во внимание влияние прогиба на момент внешних сил, хотя бы эти прогибы и были очень малы <sup>1)</sup>.

Тогда полный прогиб уже не является линейной функцией от внешних сил и не может быть получен простым сложением действия отдельных сил.

Формулы [3] представляют собой общее выражение закона Гука для изотропных материалов. Из этих формул видно, что зависимости между удлинениями и напряжениями полностью определяются двумя физическими величинами, характеризующими свойства материалов, модулем упругости  $E$  и Пуассоновым отношением  $\nu$ . Теми же величинами можно воспользоваться и для определения зависимости между деформацией сдвига и касательным напряжением.

Рассмотрим частный случай деформации прямоугольного параллелепипеда, когда

$$\sigma_y = -\sigma_x \text{ и } \sigma_z = 0.$$

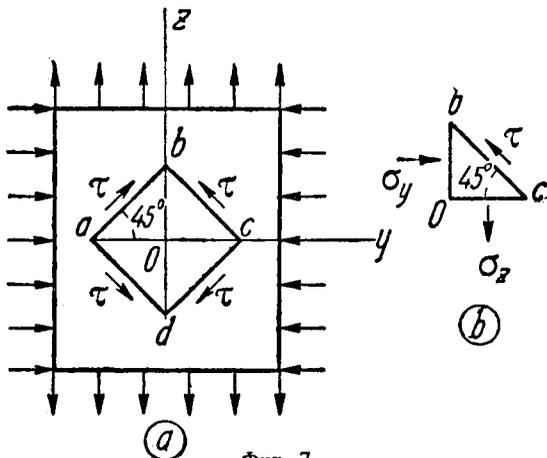
Вырезав элемент  $abcd$  при помощи плоскостей, параллельных оси  $x$  и составляющих угол в  $45^\circ$  с осями  $y$  и  $z$  (фиг. 7), найдем из фиг. 7b, проектируя все силы на направление  $bc$  и на перпендикуляр к нему, что нормальные напряжения, действующие по граням этого элемента, равны нулю, касательные же напряжения по тем же граням равны:

$$\tau = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) = \sigma_x. \quad [c]$$

Такое напряженное состояние называется *чистым сдвигом*. Удлинение вертикального элемента  $Ob$  равно укорочению горизонтальных элементов  $Oa$  и  $Oc$ . Пренебрегая бесконечно малыми второго порядка, можно отсюда сделать заключение, что измерения  $ab$  и  $bc$  элемента не меняются при деформации. Но угол между гранями  $ab$  и  $bc$  меняется, и соответствующая величина деформации сдвига  $\gamma$  может быть найдена из треугольника  $Obc$ . После деформации мы имеем:

$$\frac{Oc}{Ob} = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{1 + \epsilon_y}{1 + \epsilon_z}.$$

<sup>1)</sup> Некоторые примеры такого рода можно найти в труде автора Сопротивление материалов, часть II, русское издание 1934 г., стр. 17 — 27.



Фиг. 7.

Подставив в формулы [3]  $\sigma_y = -\sigma_x$ ,  $\sigma_z = 0$ , получим:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu\sigma_y) = \frac{(1 + \nu)\sigma_x}{E};$$

$$\epsilon_y = -\frac{(1 + \nu)\sigma_x}{E}.$$

Заметив, что для малых значений угла  $\gamma$

$$\tau \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}} = \frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}},$$

найдем:

$$\tau = \frac{2(1 + \nu)\sigma_x}{E} = \frac{2(1 + \nu)\tau}{E}. \quad [4]$$

Таким образом, зависимость между деформацией сдвига и касательным напряжением определяется с помощью постоянных  $E$  и  $\nu$ .

Часто пользуются обозначением

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad [5]$$

Тогда формула [4] получает такой вид:

$$\gamma = \frac{\tau}{G}.$$

Величина  $G$ , отвечающая выражению [5], называется *модулем упругости при сдвиге*.

Если касательное напряжение действует по грани элемента, показанного на фиг. 3, то изменение угла между любыми двумя координатными осями зависит только от составляющих напряжения, параллельных этим осям, и мы получаем

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}; \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}; \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}. \quad [6]$$

Удлинения [3] и искажения углов [6] независимы друг от друга. Следовательно, в общем случае деформацию, происходящую от действия трех нормальных и трех касательных составляющих напряжения, можно получить с помощью принципа сложения действия сил: три удлинения по формулам [3] сложить с тремя сдвигами по формулам [6].

Выражения [3] и [6] дают составляющие деформации в функциях от составляющих напряжения. Иногда является необходимым выразить составляющие напряжения в функциях от составляющих деформации.

Эти выражения можно получить следующим образом. Складывая формулы [3] и пользуясь обозначениями:

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z; \\ \Sigma &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \end{aligned} \right\} \quad [7]$$

мы получим следующую зависимость между объемным расширением и суммой нормальных напряжений:

$$\Delta = \frac{1 - 2\nu}{E} \Sigma. \quad [8]$$

При равномерном гидростатическом давлении  $p$  имеем

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p,$$

и выражение [8] дает

$$\Delta = -\frac{3(1 - 2\nu)p}{E},$$

что и представляет собою зависимость между относительным расширением и гидростатическим давлением  $p$ .

Величина

$$\frac{E}{3(1 - 2\nu)}$$

называется *модулем объемного расширения*.

Применяя обозначения [7] и решая уравнения [3] относительно  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$ , находим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \Delta + \frac{E}{1 + \nu} \varepsilon_x; \\ \sigma_y &= \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \Delta + \frac{E}{1 + \nu} \varepsilon_y; \\ \sigma_z &= \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \Delta + \frac{E}{1 + \nu} \varepsilon_z. \end{aligned} \right\} \quad [9]$$

Или, пользуясь обозначением

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad [10]$$

и выражением [5], получим формулы [9] в таком виде:

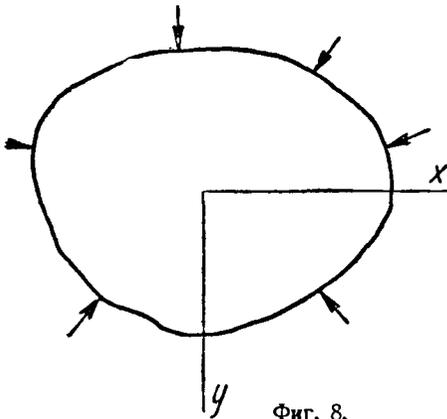
$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \Delta + 2G\varepsilon_x; \\ \sigma_y &= \lambda \Delta + 2G\varepsilon_y; \\ \sigma_z &= \lambda \Delta + 2G\varepsilon_z. \end{aligned} \right\} \quad [11]$$

## ГЛАВА ПЕРВАЯ.

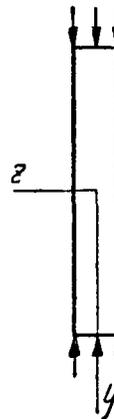
### ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ И ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ.

**7. Плоское напряженное состояние.** Задачи теории упругости значительно упрощаются, если напряжения параллельны одной плоскости. Есть много технических задач, в которых распределение напряжений по существу является плоским.

Такой случай имеет место, если тонкая пластинка подвергается действию сил, приложенных к ее контуру, параллельных плоскости пластинки



Фиг. 8.



и равномерно распределенных по ее толщине (фиг. 8). Тогда составляющие напряжения  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yx}$  равны нулю на обеих поверхностях пластинки, и без существенной ошибки можно принять, что эти составляющие равны нулю и по всей толщине пластинки<sup>1)</sup>, т. е. распределение напряжений является плоским.

Можно также предположить, что другие три составляющих напряжения,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  и  $\tau_{xy}$ , не зависят от координаты  $z$ , т. е. остаются постоянными по всей толщине пластинки. Размеры пластинки в направлении оси  $z$  в таком случае не имеют значения, и в дальнейшем это измерение обычно принимается равным единице.

**8. Плоская деформация.** С таким же упрощением задачи, как и для тонких пластинок, мы встретимся при рассмотрении другого крайнего случая, когда размеры тела в направлении оси  $z$  очень велики. Если длинное цилиндрическое или призматическое тело нагружено силами, не меняющимися по длине тела и перпендикулярными к этому направлению, то часть тела, находящаяся на значительном расстоянии от концов

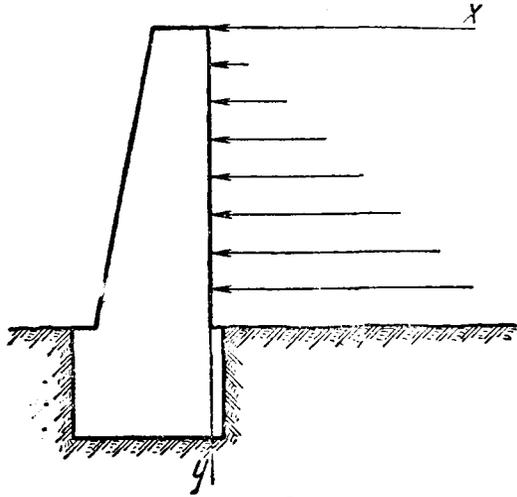
<sup>1)</sup> Более детальное исследование этого вопроса было дано *Файлоном* (L. N. G. Filon) „Phil. Trans. Roy. Soc.“, London, vol. 201, 1903, p. 67.

его, подвергается по существу *плоской деформации*, и перемещения всех точек деформированного тела происходят в плоскостях, перпендикулярных длине тела.

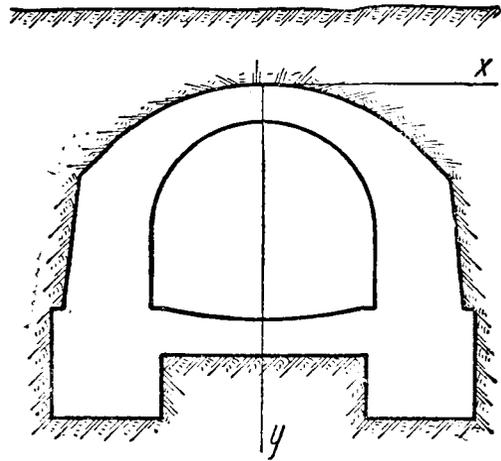
Есть много имеющих важное значение задач, в которых деформация является по существу плоской. Примером такого рода задач является подпорная стенка, подвергающаяся действию бокового давления, постоянного по величине вдоль стенки (фиг. 9). Легко видеть, что при этом деформация имеет место в плоскостях, перпендикулярных к длине стенки. Сечения, удаленные от концов стенки, остаются плоскими, и при изучении распределения напряжений достаточно рассмотреть только один элемент стенки между двумя смежными поперечными сечениями. Другим примером плоской деформации может служить труба, нагрузка которой не меняется по длине ее оси (фиг. 10).

Задача не усложнится, если к плоской деформации присоединится равномерное растяжение в направлении оси тела. Примером является цилиндрическая труба, подвергающаяся действию равномерно распределенного внутреннего давления.

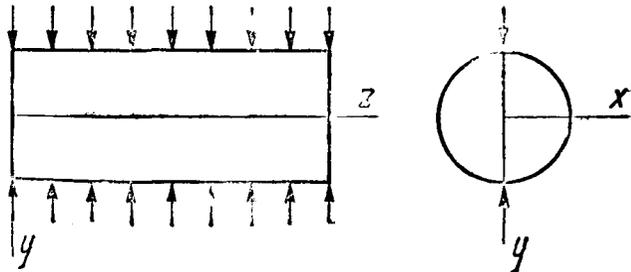
Другим примером может быть цилиндрический каток, сжимаемый по диаметральному сечению силами, равно-



Фиг. 9.



Фиг. 10.



Фиг. 11.

мерно распределенными по длине цилиндра (фиг. 11). Поперечные сечения цилиндра, удаленные от концов, будут подвергаться плоской деформации, к которой присоединяется равномерное расширение в направлении оси цилиндра.

Если мы примем продольное направление элементов за ось  $z$ , то тогда во всех случаях плоской деформации размер в направлении оси  $z$  не имеет значения, и в дальнейшем мы будем обычно рассматривать элемент, заключенный между двумя поперечными сечениями, перпендикулярными к оси  $z$  и отстоящими друг от друга на расстоянии, равном единице.

Из приведенных выше примеров очевидно, что деформация одинакова во всех поперечных сечениях призматического тела, испытывающего плоскую деформацию. Следовательно, составляющие  $u$  и  $v$  перемещения являются функциями от координат  $x$  и  $y$  и не зависят от продольной координаты  $z$ . Перемещение  $w$  равно нулю.

Тогда из выражений [2] находим:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0; \\ \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{aligned} \right\} [a]$$

Если к плоской деформации присоединяется равномерное расширение в направлении оси  $z$ , то тогда удлинение  $\epsilon_z = e$  является постоянным. Из первых двух формул [a] можно заключить, что касательные напряжения  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$ , пропорциональные деформациям  $\gamma_{xz}$  и  $\gamma_{yz}$ , равны нулю.

Нормальное напряжение  $\sigma_z$  можно найти в зависимости от  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  на основании закона Гука (формулы [3]). Если продольное перемещение предотвращено, то из того обстоятельства, что

$$\epsilon_z = 0,$$

найдем.

$$\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) = 0,$$

откуда

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y). [b]$$

Эти нормальные напряжения действуют по поперечным сечениям и сохраняют деформацию плоской.

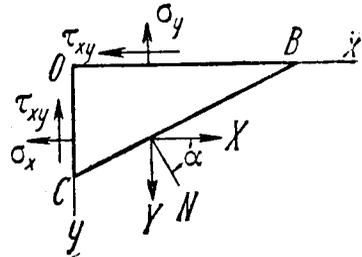
Отсюда следует, что решение задачи в случае плоской деформации сводится, подобно случаю плоского напряженного состояния, к определению только трех составляющих напряжений:  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$ .

**9. Напряжения в точке.** Зная составляющие напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  в любой точке пластинки, находящейся в плоском напряженном состоянии или испытывающей плоскую деформацию, можем определить, из уравнений статики, напряжения, действующие по любой площадке, проходящей через эту точку перпендикулярно к пластинке и наклонно к осям  $x$  и  $y$ .

Пусть точка  $O$  является точкой напряженной пластинки и предположим, что составляющие напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  известны (фиг. 12).

Чтобы найти напряжение по любой площадке, проходящей через ось  $z$  и наклонной к осям  $x$  и  $y$ , возьмем плоскость  $BC$ , параллельную оси  $z$  и находящуюся на небольшом расстоянии от точки  $O$  так, что эта плоскость, вместе с координатными плоскостями, вырезывает из пластинки очень небольшую треугольную призму  $OBC$ . Так как напряжения изменяются непрерывно по объему тела, то напряжение, действующее в плоскости  $BC$ , будет приближаться к напряжению в параллельной плоскости, проходящей через точку  $O$ , по мере уменьшения элемента.

При рассмотрении условий равновесия бесконечно малой треугольной призмы, объемной силой можно пренебречь, как бесконечно малой величиной высшего порядка (стр. 16). Равным образом, если элемент бесконечно мал, мы можем пренебречь изменением напряжений по граням и допустить, что напряжения распределены равномерно. Поэтому силы, действующие на треугольную призму, можем определить, умножая составляющие напряжения на площади граней.



Фиг. 12.

Пусть  $N$  — направление нормали к плоскости  $BC$ ; обозначим косинусы углов между нормалью  $N$  и осями  $x$  и  $y$  соответственно:

$$\cos(N, x) = l; \quad \cos(N, y) = m.$$

Тогда, если  $F$  обозначает площадь грани  $BC$  элемента, то площади двух других граней будут равны  $F l$  и  $F m$ .

Если мы обозначим через  $X$  и  $Y$  составляющие напряжения, действующего на грань  $BC$ , то уравнения равновесия призматического элемента будут иметь такой вид:

$$\left. \begin{aligned} X &= l\sigma_x + m\tau_{xy}; \\ Y &= m\sigma_y + l\tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad [12]$$

Таким образом, составляющие напряжения по любой площадке, определяемой направляющими косинусами  $l$  и  $m$ , можно легко найти из уравнений [12], если только нам будут известны три составляющие напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  в точке  $O$ .

Назвав через  $\alpha$  угол между нормалью  $N$  и осью  $x$ , так что

$$l = \cos \alpha \quad \text{и} \quad m = \sin \alpha,$$

получим на основании уравнений [12] нормальную и касательную составляющие напряжения, действующего по площадке  $BC$ , в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= X \cos \alpha + Y \sin \alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha; \\ \tau &= Y \cos \alpha - X \sin \alpha = \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (\sigma_y - \sigma_x) \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad [13]$$

Из этого следует, что угол  $\alpha$  можно выбрать таким, чтобы касательное напряжение  $\tau$  стало равным нулю. В этом случае мы имеем

$$\tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (\sigma_y - \sigma_x) \sin \alpha \cos \alpha = 0,$$

или

$$\frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\alpha. \quad [14]$$

Из этого уравнения можно найти два взаимно перпендикулярных направления, для которых касательное напряжение равно нулю. Эти направления называются *главными направлениями*, а соответствующие нормальные напряжения — *главными напряжениями*.

Если главные направления принять за координатные оси  $x$  и  $y$ , то  $\tau_{xy}$  будет равно нулю, и выражения [13] упрощаются:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha; \\ \tau &= \frac{1}{2} \sin 2\alpha (\sigma_y - \sigma_x). \end{aligned} \right\} [13']$$

Изменение величины составляющих напряжения  $\sigma$  и  $\tau$  с изменением угла  $\alpha$  можно легко представить графически, если построить диаграмму, в которой  $\sigma$  и  $\tau$  приняты за координаты <sup>1)</sup>. Каждой площадке будет соответствовать на этой диаграмме точка, координаты которой представляют величины напряжений  $\sigma$  и  $\tau$  по этой площадке. Фигура 13 и является такой диаграммой.

Для площадок, перпендикулярных к главным направлениям, мы получим точки  $A$  и  $B$  с абсциссами, соответственно  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ . Можно показать, что составляющие напряжений по любой площадке  $BC$  с углом  $\alpha$  (фиг. 12) будут представляться координатами точки окружности, имеющей отрезок  $AB$  диаметром. Чтобы найти эту точку, необходимо только отложить от точки  $A$  в том же самом направлении, как угол  $\alpha$  на фиг. 12, дугу, соответствующую углу, равному  $2\alpha$ . Если точка  $D$  на фиг. 13а есть точка, полученная таким путем, то тогда, на основании чертежа, имеем:

$$\overline{OF} = \overline{OC} + \overline{CF} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha;$$

$$\overline{DF} = \overline{CD} \sin 2\alpha = \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha.$$

Сравнивая полученные выражения с формулами [13'], мы видим, что координаты точки  $D$  дают абсолютные величины составляющих напряжения по площадке  $BC$  при угле  $\alpha$ . Чтобы привести в совпадение знак касательной составляющей, примем значение  $\tau$  положительным в направлении вверх (фиг. 13) и будем считать касательные напряжения положительными, когда они дают момент в направлении по часовой стрелке,

<sup>1)</sup> Этот графический способ следует приписать *О. Мору* (*O. Mohr*), „Zivilingenieur“, 1882, S. 113. См. также его *Technische Mechanik*, 2 Aufl., 1914.

как, например, напряжения по граням  $bc$  и  $ad$  элемента  $abcd$  (фиг. 13b). Касательные напряжения противоположного направления, например, действующие по граням  $ab$  и  $dc$  элемента, будем считать отрицательными <sup>1)</sup>.

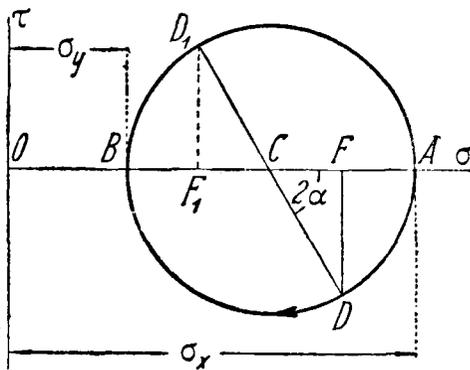
Когда плоскость  $BC$  вращается относительно оси, перпендикулярной к плоскости  $xu$  (фиг. 12), по часовой стрелке и угол  $\alpha$  меняет свое значение от нуля до

$$\frac{\pi}{2},$$

точка  $D$  на фиг. 13a перемещается от точки  $A$  к точке  $B$ , так что нижняя половина окружности определяет изменения напряжения для всех значений угла  $\alpha$  в указанных пределах. Верхняя половина окружности дает напряжения при

$$\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi.$$

Продолжив радиус  $CD$  до точки  $D_1$  (фиг. 13), т. е. взяв угол  $\pi + 2\alpha$ , вместо  $2\alpha$ , получим напряжения по площадке, перпендикулярной к плоскости  $BC$  (фиг. 12). Это показывает, что касательные напряжения по двум взаимно перпендикулярным площадкам равны по абсолютной величине, как это было ранее доказано.



Фиг. 13.

Что касается нормальных напряжений, то мы видим из чертежа, что

$$\overline{OF_1} + \overline{OF} = 2\overline{OC},$$

т. е. сумма нормальных напряжений по двум взаимно перпендикулярным площадкам остается постоянной при изменении угла  $\alpha$ .

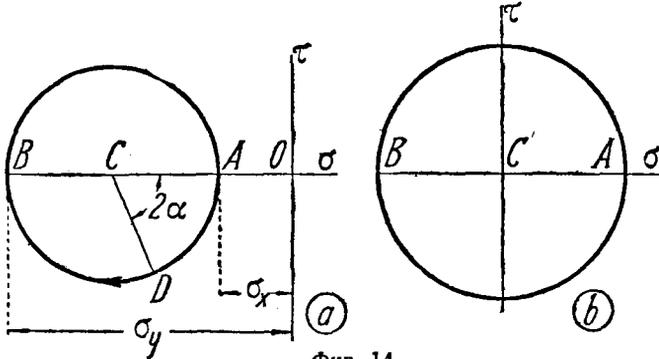
Наибольшее касательное напряжение определяется на диаграмме (фиг. 13) наибольшей ординатой окружности, т. е. равно радиусу круга. Следовательно

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}. \tag{15}$$

Это напряжение действует по площадке, для которой угол  $\alpha = \pi/4$ , т. е. в плоскости, делящей пополам угол между двумя главными напряжениями.

<sup>1)</sup> Это правило применяется только при построении круга Мора. В других случаях следует придерживаться правила, указанного на стр. 16.

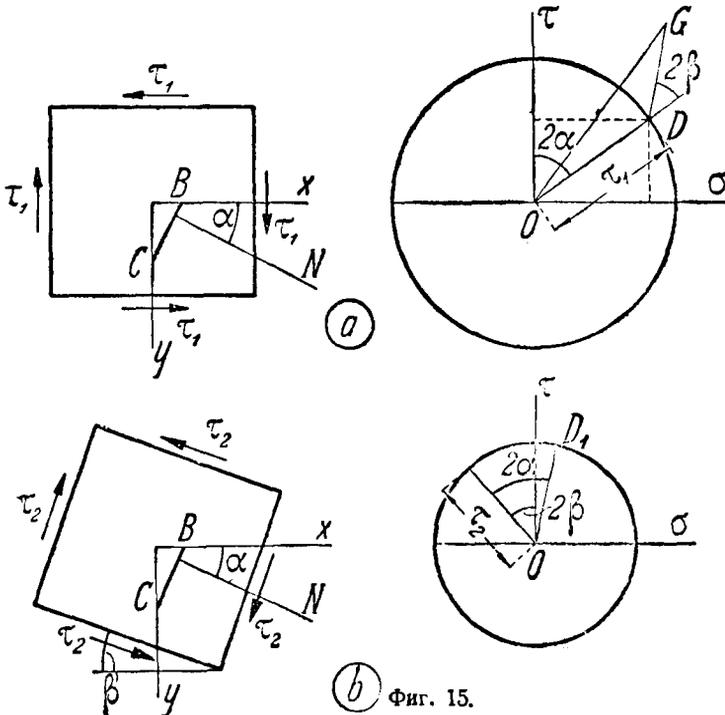
Описанной выше диаграммой можно пользоваться также и тогда, когда одно из главных напряжений отрицательно, т. е. является сжимающим. Необходимо только для сжимающего напряжения переменить знак абсцисс. Таким образом, фиг. 14а представляет случай, когда оба главных напряжения отрицательны, а фиг. 14б — случай чистого сдвига.



Фиг. 14.

знак абсцисс. Таким образом, фиг. 14а представляет случай, когда оба главных напряжения отрицательны, а фиг. 14б — случай чистого сдвига.

Из диаграмм фиг. 13 и 14 видно, что напряжение в данной точке можно разложить на две части: одна — равномерное растяжение или сжатие, величина



Фиг. 15.

которого определяется абсциссой центра круга, и другая — чистый сдвиг, величина которого определяется величиной радиуса круга.

Когда складываются несколько плоских напряжений, то равномерные растяжения или сжатия можно сложить алгебраически вместе. Чистые сдвиги мы должны складывать друг с другом, приняв во внимание направление плоскостей, в которых они действуют. Можно показать, что, если мы соединим вместе две системы чистого сдвига, для которых плоскости наибольшего сдвига составляют угол  $\beta$  друг с другом, то получающаяся в результате система будет также представлять собою чистый сдвиг.

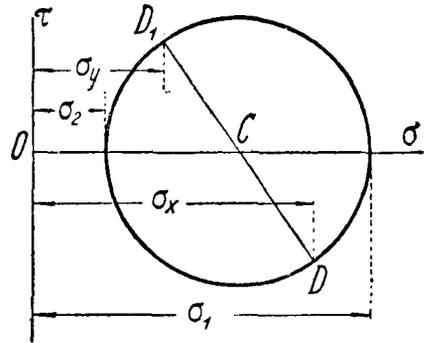
Например, фиг. 15 представляет определение по площадке, наклоненной под углом  $\alpha$  к оси  $y$ , напряжений, возникающих при двух чистых сдвигах величиною  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , действующих один в плоскостях  $xz$  и  $yz$  (фиг. 15a) и другой — в плоскостях, наклоненных к плоскостям  $xz$  и  $yz$  (фиг. 15b). На фиг. 15a координаты точки  $D$  представляют касательное и нормальное напряжения по плоскости  $CB$  от первой системы, тогда как координаты точки  $D_1$  (фиг. 15b) дают напряжения по этой же плоскости от второй системы.

Складывая геометрически отрезки  $OD$  и  $OD_1$ , получим  $\overline{OG}$  — равнодействующее напряжение по плоскости  $CB$  от обеих систем; координаты точки  $G$  дадут нам касательное и нормальное напряжения. Заметим, что величина  $\overline{OG}$  не зависит от угла  $\alpha$ .

Следовательно, в результате сложения двух сдвигов, мы получим круг Мора для чистого сдвига, величина которого определяется отрезком  $\overline{OG}$ , причем плоскости наибольших касательных напряжений наклонены к плоскостям  $xz$  и  $yz$  под углом, равным половине угла  $GOD$ .

Диаграммой, показанной на фиг. 13, можно пользоваться также для определения главных напряжений, если известны составляющие напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  по любым двум взаимно перпендикулярным площадкам (фиг. 12).

В этом случае мы начинаем с нанесения двух точек  $D$  и  $D_1$ , представляющих напряженные состояния по двум координатным плоскостям (фиг. 16). Таким образом получается диаметр  $DD_1$  круга. Построив круг, найдем главные напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  на пересечении окружности с осью абсцисс. По чертежу имеем:



Фиг. 16.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \overline{OC} + \overline{CD} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}; \\ \sigma_2 &= \overline{OC} - \overline{CD} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \end{aligned} \right\} \quad [16]$$

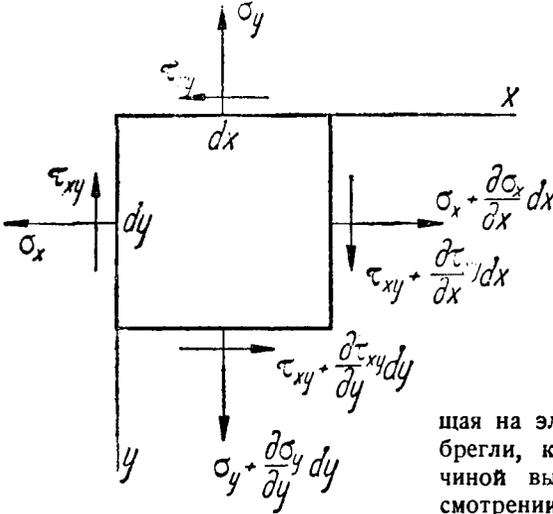
Наибольшее касательное напряжение представится радиусом круга, т. е.

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \quad [17]$$

Таким образом получаются все необходимые характеристики напряженного состояния в данной точке, если только известны три составляющие напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$ .

**10. Дифференциальные уравнения равновесия.** Рассмотрим теперь изменения составляющих напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  с изменением положения точки.

С этой целью выведем уравнения равновесия для малого прямоугольного параллелепипеда со сторонами  $dx$ ,  $dy$  и 1 (фиг. 17). Напряжения, действующие в центрах граней этого бесконечно малого элемента, и их положительные направления показаны на чертеже. Примем во внимание бесконечно малые изменения составляющих напряжения вследствие бесконечно малых приращений  $dx$  и  $dy$  координат.



Фиг. 17.

При определении усилий, действующих на грани элемента, будем полагать грани бесконечно малыми, так что усилия получаются умножением напряжения в центре грани на площадь этой грани.

Следует заметить, что объемная сила, действующая на элемент, которой мы пренебрегли, как бесконечно малой величиной высшего порядка, при рассмотрении равновесия треугольной призмы (фиг. 12), должна быть теперь принята во внимание, так как

она будет здесь величиной того же порядка, что и члены, зависящие от рассматриваемых изменений составляющих напряжения.

Если обозначить через  $X$  и  $Y$  составляющие этой силы, отнесенной к единице объема элемента, то уравнение равновесия получится путем суммирования всех сил, действующих на элемент в направлении оси  $x$ :

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dy - \sigma_x dy + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy\right) dx - \tau_{xy} dx + X dx dy = 0.$$

Таким же образом найдется и второе уравнение равновесия. Эти уравнения приводятся к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y &= 0. \end{aligned} \right\} [18]$$

При практических задачах объемной силой обычно является лишь вес тела. Тогда, взяв ось  $y$  направленной вниз и обозначив через  $p$

массу, заключающуюся в единице объема тела, получим уравнения [18] в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho g &= 0. \end{aligned} \right\} [19]$$

Эти уравнения являются дифференциальными уравнениями равновесия в случае плоской задачи.

**11. Условия на контуре.** Уравнения [18] или [19] должны быть удовлетворены во всех точках внутри объема тела. Составляющие напряжения изменяются по объему пластинки, и когда мы подходим к контуру, то они должны быть таковы, чтобы находиться в равновесии с внешними силами, приложенными по контуру пластинки, так что внешние силы можно рассматривать, как продолжение внутреннего распределения напряжений.

Условия равновесия на контуре можно получить на основании выражений [12]. Взяв небольшую треугольную призму  $OBC$  (фиг. 12) таким образом, чтобы сторона  $BC$  совпадала с контуром пластинки, как показано на фиг. 18, и обозначив через  $\bar{X}$  и  $\bar{Y}$  составляющие отнесенных к единице площади поверхностных сил в этой точке контура, получим уравнения [12] в следующем виде

$$\left. \begin{aligned} \bar{X} &= l\sigma_x + m\tau_{xy}; \\ \bar{Y} &= m\tau_y + l\tau_{xy}; \end{aligned} \right\} [20]$$

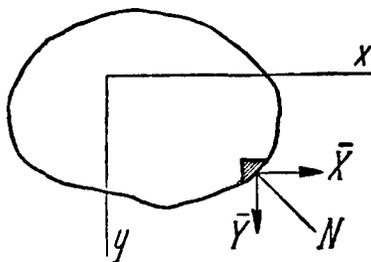
где  $l$  и  $m$  — направляющие косинусы нормали  $N$  к контуру.

В частном случае прямоугольной пластинки координатные оси принято брать параллельными сторонам пластинки, и условия на контуре [20] можно упростить. Взяв, например, сторону пластинки, параллельную оси  $x$ , мы имеем для этой части контура нормаль  $N$ , параллельную оси  $y$ ; следовательно,  $l = 0$  и  $m = \pm 1$ . Выражения [20] принимают поэтому вид:

$$\bar{X} = \pm \tau_{xy}; \quad \bar{Y} = \pm \sigma_y,$$

где положительный знак следует брать тогда, когда нормаль  $N$  имеет направление положительной оси  $y$ , и отрицательный знак при противоположном направлении нормали  $N$ . Отсюда следует, что на контуре составляющие напряжения становятся равными составляющим поверхностных сил, отнесенных к единице площади контура.

**12. Условие совместности.** Задачей теории упругости обычно является определение напряженного состояния в теле, подвергающемся



Фиг. 18.

действию данных сил. В случае плоской задачи необходимо решить дифференциальные уравнения равновесия [18] и решение должно быть таково, чтобы были удовлетворены условия на контуре [20].

Указанных уравнений, выведенных при помощи уравнений статики для абсолютно твердых тел и содержащих три составляющих напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$ , недостаточно для определения этих составляющих. Задача является статически неопределимой, и для того, чтобы получить решение, следует рассмотреть кроме того и упругую деформацию.

Математическое выражение условия совместности напряженного состояния с существованием непрерывных функций  $u$ ,  $v$  и  $w$ , определяющих деформацию, получится на основании выражений [2]. В случае плоской задачи следует рассмотреть только три составляющих деформации, а именно:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad [a]$$

Эти три составляющие деформации выражаются при помощи двух функций  $u$  и  $v$ . Следовательно, последние не могут быть взяты произвольно, и имеется определенная зависимость между составляющими деформации, которую легко получить из выражений [a]. Дифференцируя первое из выражений [a] дважды по  $y$ , второе — дважды по  $x$  и третье — один раз по  $x$  и один раз по  $y$ , найдем:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad [21]$$

Эта дифференциальная зависимость, называемая *условием совместности*, должна быть удовлетворена составляющими деформации для того, чтобы обусловить существование функций  $u$  и  $v$ , связанных с составляющими деформации уравнениями [a]. На основании закона Гука (выражения [13]) условие [21] можно преобразовать в зависимость между составляющими напряжения.

В случае плоского напряженного состояния (параграф 7), выражения [3] приводятся к такому виду:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y); \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x); \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{xy}. \end{aligned}$$

Подставив их в уравнение [21], найдем:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x - \nu \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y - \nu \sigma_x) = 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad [b]$$

Это уравнение можно написать в другой форме, пользуясь уравнениями равновесия. В случае, когда вес тела является единственной

объемной силой, дифференцируя первое из уравнений [19] по  $x$  и второе — по  $y$  и затем складывая их, найдем:

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = - \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}.$$

Подстановкой в уравнение [6] получим уравнение совместности, выраженное через составляющие напряжения:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad [22]$$

Поступив таким же образом с общими уравнениями равновесия [18], найдем:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = - (1 + \nu) \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right). \quad [23]$$

В случае плоской деформации (параграф 8), мы имеем:

$$\sigma_z = \nu (\sigma_x + \sigma_y)$$

и, на основании закона Гука (формулы [13]), найдем:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [(1 - \nu^2) \sigma_x - \nu (1 + \nu) \sigma_y];$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [(1 - \nu^2) \sigma_y - \nu (1 + \nu) \sigma_x];$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{xy}.$$

Подставив найденные выражения в уравнение [21] и пользуясь, как и раньше, уравнениями равновесия [19], мы найдем, что уравнение совместности [22] справедливо и в случае плоской деформации. Для общего случая объемных сил мы получим, из уравнений [21] и [18], уравнение совместности в следующем виде:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = - \frac{1}{1 - \nu} \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right). \quad [24]$$

Уравнения равновесия [18] или [19], вместе с условиями на контуре [20] и одним из написанных выше уравнений совместности, дают нам систему уравнений, которой обычно достаточно для полного выяснения распределения напряжений в плоской задаче. Частные случаи, при которых необходимы некоторые дополнительные рассуждения, будут рассмотрены далее (стр. 132).

Интересно отметить, что, при постоянных объемных силах, уравнения, устанавливающие распределение напряжений, не содержат упругих постоянных материала. Следовательно, распределение напряжений будет одинаково для всех изотропных материалов, если только полученных уравнений достаточно для полного определения напряжений.

Это заключение имеет важное практическое значение: мы увидим дальше, что в случае прозрачных материалов, например, стекла или ксилонита, возможно определение напряжений оптическим способом, при помощи поляризованного света (стр. 139). Из изложенного выше очевидно, что результаты опытов, произведенных с прозрачным материалом, в большинстве случаев можно непосредственно применить к любому другому материалу, например, к стали.

Следует заметить также, что, при наличии постоянных объемных сил, уравнение совместности [22] справедливо в обоих случаях: и при плоском напряженном состоянии, и при плоской деформации. Следовательно, распределение напряжений одинаково в обоих этих случаях, если только форма контура и внешние силы тоже одинаковы.

**13. Функция напряжений.** Мы показали, что решение плоских задач, задач в двух измерениях, сводится к интегрированию дифференциальных уравнений равновесия вместе с уравнением совместности и условиями на контуре.

Если мы начнем со случая, когда вес тела является единственной объемной силой, то уравнения, которые нужно удовлетворить, будут (см. уравнения [19] и [22]):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho g &= 0; \end{aligned} \right\} \quad [a]$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad [b]$$

К этим уравнениям следует присоединить условия на контуре [20].

Обычным приемом решения этих уравнений является введение новой функции, так называемой *функции напряжений*<sup>1)</sup>.

Как легко проверить, уравнения [a] будут удовлетворены, если взять любую функцию  $\varphi$  от координат  $x$  и  $y$  и принять следующие выражения для составляющих напряжения:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \rho g x. \quad [25]$$

Таким образом, мы можем получить целый ряд решений уравнений равновесия [a]. Действительное решение задачи будет то, которое удовлетворяет также уравнению совместности [b]. Подставив выражения [25] вместо составляющих напряжения в уравнение [b], найдем, что функция напряжений  $\varphi$  должна удовлетворять уравнению:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad [26]$$

<sup>1)</sup> Эта функция была введена при решении плоской задачи Эри (G. V. Airy), „British Assoc. Adv. Sci. Rept.“, 1862, и иногда называется *функцией напряжений Эри*.

Таким образом, решение плоской задачи в том случае, когда единственной объемной силой является вес тела, сводится к нахождению решения уравнения [26], которое удовлетворяло бы условиям на контуре [20]. В следующих главах этот способ решения применен к некоторым примерам, представляющим практический интерес.

Рассмотрим более общий случай объемных сил и предположим, что эти силы имеют потенциал. Тогда составляющие  $X$  и  $Y$  в уравнениях [18] определяются следующими уравнениями:

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x};$$

$$Y = -\frac{\partial U}{\partial y},$$

в которых  $U$  — потенциальная функция. Уравнения [18] принимают вид:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x - U) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\sigma_y - U) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0.$$

Эти уравнения имеют ту же форму, что уравнения [а] и могут быть удовлетворены, если принять:

$$\sigma_x - U = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y - U = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \quad [27]$$

где  $\varphi$  — функция напряжений. Подставляя выражения [27] в уравнение совместности [23] при плоском напряженном состоянии, находим:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = - (1 - \nu) \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right). \quad [28]$$

Аналогичное уравнение можно получить также и в случае плоской деформации.

## ГЛАВА ВТОРАЯ.

### ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ.

14. Решение при помощи целых полиномов. Мы показали, что решение плоской задачи, когда объемные силы или отсутствуют, или постоянны, сводится к интегрированию дифференциального уравнения:

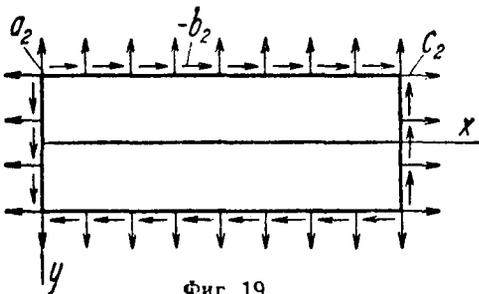
$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0, \quad [a]$$

с учетом условий на контуре [20]. В случае длинных прямоугольных полос представляет интерес решение уравнения [a] в виде целого полинома. Если брать полиномы различных степеней и соответственно подбирать их коэффициенты<sup>1)</sup>, то может быть решен ряд практически важных задач.

Начав с полинома второй степени:

$$\varphi_2 = \frac{a_2}{2} x^2 + b_2 xy + \frac{c_2}{2} y^2, \quad [b]$$

который, очевидно, удовлетворяет уравнению [a], найдем по формулам [25], если примем  $\rho g = 0$ :



Фиг. 19.

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} = c_2;$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} = a_2;$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} = -b_2.$$

Все три составляющие напряжения являются постоянными по всему объему тела, т. е. функция напряжений [b] представляет совместное действие равномерно распределенных растяжений или сжатий<sup>2)</sup> по двум взаимно перпендикулярным направлениям и чистого

<sup>1)</sup> А. Менаже (A. Mesnager), „Comptes rendus“, t. 132, 1901, p. 1475. См. также А. Тимпе (A. Timpe), „Z. Math. Physik“, Bd 52, 1905, S. 348.

<sup>2)</sup> Это зависит от знака коэффициентов  $a_2$  и  $b_2$ . Направления напряжений, указанные на фиг. 19, соответствуют положительным значениям коэффициентов  $a_2$ ,  $b_2$  и  $c_2$ .

сдвига. Усилия, действующие на контуре, должны быть равны напряжениям в соответствующих точках, как это было выяснено на стр. 33. Для прямоугольной пластинки со сторонами, параллельными осям координат, эти усилия показаны на фиг. 19.

Рассмотрим теперь функцию напряжений в виде полинома третьей степени:

$$\varphi_3 = \frac{a_3}{3 \cdot 2} x^3 + \frac{b_3}{2} x^2 y + \frac{c_3}{2} x y^2 + \frac{d_3}{3 \cdot 2} y^3. \quad [c]$$

Этот полином также удовлетворяет уравнению [a]. Пользуясь выражениями [25] и положив  $\rho g = 0$ , найдем:

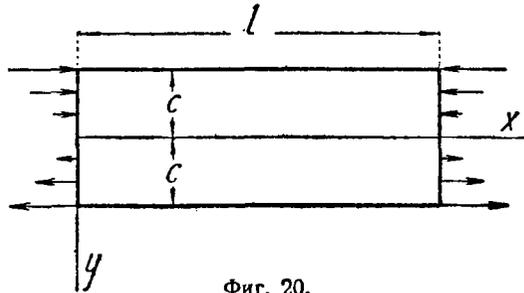
$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} = c_3 x + d_3 y;$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} = a_3 x + b_3 y;$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial y} = -b_3 x - c_3 y.$$

Для прямоугольной пластинки, изображенной на фиг. 20, предполагая все коэффициенты за исключением  $d_3$  равными нулю, мы получим чистый изгиб. Если только один коэффициент  $a_3$  отличен от нуля, то мы имеем чистый изгиб с нормальными напряжениями, приложенными по сторонам  $y = \pm c$  пластинки.

Если взять отличными от нуля коэффициенты  $b_3$  или  $c_3$ , то мы получим не только нормальные, но также и касательные напряжения, действующие по сторонам пластинки.

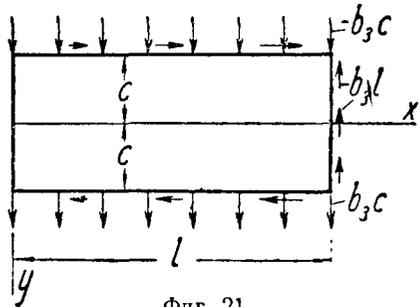


Фиг. 20.

Например, на фиг. 21 представлен случай, когда все коэффициенты в функции [c], за исключением  $b_3$ , равны нулю. Направления напряжений показаны при положительном значении коэффициента  $b_3$ . По сторонам  $y = \pm c$  мы имеем равномерно распределенные растягивающие и соответственно сжимающие напряжения, а также касательные напряжения, пропорциональные абсциссе  $x$ .

По стороне  $x = l$  имеется только постоянное касательное напряжение  $-b_3 l$ , по стороне же  $x = 0$  никаких напряжений нет.

Подобное же распределение напряжений получится, если взять отличным от нуля один только коэффициент  $c_3$ .



Фиг. 21.

Принимая функцию напряжений в виде полиномов второй и третьей степени, мы совершенно свободны при выборе величин коэффициентов, так как уравнение [а] будет удовлетворено, каковы бы ни были значения этих коэффициентов.

В случае многочленов высших степеней, уравнение [а] удовлетворяется только при том условии, если существуют известные зависимости между коэффициентами. Взяв, например, функцию напряжения в виде полинома четвертой степени:

$$\varphi_4 = \frac{a_4}{4 \cdot 3} x^4 + \frac{b_4}{3 \cdot 2} x^3 y + \frac{c_4}{2} x^2 y^2 + \frac{d_4}{3 \cdot 2} x y^3 + \frac{e_4}{4 \cdot 3} y^4, \quad [d]$$

и подставив его в уравнение [а], мы найдем, что уравнение это удовлетворяется только при условии

$$e_4 = -(2c_4 + a_4).$$

Составляющие напряжения в этом случае будут:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial y^2} = c_4 x^2 + d_4 x y - (2c_4 + a_4) y^2;$$

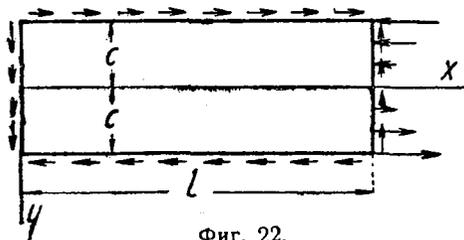
$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial x^2} = a_4 x^2 + b_4 x y + c_4 y^2;$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial x \partial y} = -\frac{b_4}{2} x^2 - 2c_4 x y - \frac{d_4}{2} y^2.$$

Коэффициенты  $a_4$ ,  $b_4$ ,  $c_4$  и  $d_4$  в этих выражениях — произвольны, и при соответственном выборе их мы получим различные условия нагрузки, действующей на прямоугольную пластинку.

Например, принимая все коэффициенты, за исключением  $d_4$ , равными нулю, найдем

$$\sigma_x = d_4 x y; \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = -\frac{d_4}{2} y^2. \quad [e]$$



Фиг. 22.

Если предположить, что коэффициент  $d_4$  — положителен, то усилия, действующие на прямоугольную пластинку, изображенную на фиг. 22, и вызывающие напряжения согласно выражениям [e], будут следующими.

По продольным сторонам  $y = \pm c$  действуют равномерно распределенные касательные усилия; по обоим концам пластинки касательные усилия распределены по параболическому закону.

Касательные усилия, действующие по контуру пластинки, приводятся к паре сил <sup>1)</sup>:

$$M = \frac{d_4 c^2 l}{2} \cdot 2c - \frac{1}{3} \frac{d_4 c^2}{2} \cdot 2c \cdot l = \frac{2}{3} d_4 c^3 l.$$

Эта пара сил уравнивается парой, образуемой нормальными усилиями, действующими по стороне  $x = l$  пластинки.

Рассмотрим функцию напряжений в виде полинома пятой степени:

$$\begin{aligned} \varphi_5 = & \frac{a_5}{5 \cdot 4} x^5 + \frac{b_5}{4 \cdot 3} x^4 y + \frac{c_5}{3 \cdot 2} x^3 y^2 + \frac{d_5}{3 \cdot 2} x^2 y^3 + \\ & + \frac{e_5}{4 \cdot 3} x y^4 + \frac{f_5}{5 \cdot 4} y^5. \end{aligned} \quad [f]$$

Подставив его в уравнение [a], мы найдем, что это уравнение будет удовлетворено, если:

$$e_5 = -(2c_5 + 3a_5);$$

$$f_5 = -\frac{1}{3}(b_5 + 2d_5).$$

Соответствующие составляющие напряжения будут:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi_5}{\partial y^2} = \frac{c_5}{3} x^3 + d_5 x^2 y - (2c_5 + 3a_5) x y^2 - \frac{1}{3} (b_5 + 2d_5) y^3;$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi_5}{\partial x^2} = a_5 x^3 + b_5 x^2 y + c_5 x y^2 + \frac{d_5}{3} y^3;$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi_5}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{3} b_5 x^3 - c_5 x^2 y - d_5 x y^2 + \frac{1}{3} (2c_5 + 3a_5) y^3.$$

Здесь также коэффициенты  $a_5$ ,  $b_5$ ,  $c_5$  и  $d_5$  — произвольны, и, путем подбора их, мы получим решения для различных условий нагрузки пластинки.

Взяв, например, все коэффициенты, за исключением  $d_5$ , равными нулю, мы найдем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= d_5 \left( x^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right); \\ \sigma_y &= \frac{1}{3} d_5 y^3; \\ \tau_{xy} &= -d_5 x y^2. \end{aligned} \right\} \quad [g]$$

Нормальные усилия равномерно распределены по продольным сторонам пластинки (фиг. 23a). По стороне  $x = l$  нормальные усилия состоят из двух частей: одной — следующей линейному закону, и дру-

<sup>1)</sup> Толщина пластинки принята равной единице.

гой — изменяющейся по закону кубической параболы. Касательные усилия пропорциональны абсциссе  $x$  на продольных сторонах пластинки и следуют

параболическому закону на стороне  $x = l$ . Распределение этих напряжений показано на фиг. 23*b*.

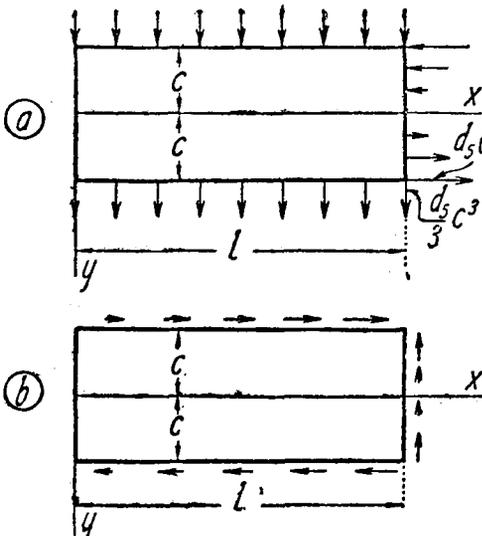
Так как уравнение [а] — линейное дифференциальное уравнение, то можно заключить, что сумма нескольких решений этого уравнения является также решением его. Мы можем наложить одно на другое элементарные решения, рассмотренные в этом параграфе, и таким образом придем к новым решениям, имеющим практическое значение.

Несколько примеров применения этого метода наложения мы рассмотрим ниже.

**15. Принцип Сен-Венана<sup>1)</sup>.** В предыдущем параграфе мы рассмотрели несколько случаев, в которых точные решения для прямоугольных пластинок были получены с помощью функции напряжений  $\varphi$  очень простого вида. В каждом случае все уравнения упругости были удовлетворены, но решения являлись точными только при условии, что поверхностные усилия распределены заданным образом.

Например в случае чистого изгиба (фиг. 20) изгибающий момент должен возникать от растягивающих и сжимающих усилий по концам пластинки; эти усилия должны быть пропорциональны расстоянию от нейтральной оси. Заделка конца, если таковая имеется, должна быть такой, чтобы она не препятствовала перекоосу пластинки по заделанному концу. Если перечисленные условия не выполнены, т. е. если изгибающий момент приложен каким-нибудь иным образом, или если заделка такова, что она вызывает еще какие-нибудь усилия в конечном сечении, то решение, приведенное в параграфе 14, уже не является точным решением задачи.

Практическая применимость решения, однако, не ограничивается этим особым случаем. Решение можно применить с достаточной точностью и к случаям изгиба, для которых условия по концам не строго выполнены.



Фиг. 23.

<sup>1)</sup> Этот принцип установлен им в знаменитом мемуаре о кручении в „Mém. des savants étrangers“, t. 14, 1855.

Такое расширение применения решения обычно обосновывают с помощью так называемого *принципа Сен-Венана*.

Этот принцип состоит в том, что если усилия, действующие на небольшую часть поверхности упругого тела, заменить другой, статически эквивалентной системой усилий, действующей на ту же часть поверхности, то это перераспределение нагрузки вызовет существенные изменения местных напряжений, но окажет ничтожное влияние на напряжения в точках, расстояние до которых достаточно велико по сравнению с линейными размерами поверхности, на которой усилия были изменены.

Например, в случае чистого изгиба прямоугольной полосы (фиг. 20), размеры поперечного сечения которой малы по сравнению с ее длиной, способ приложения внешнего изгибающего момента влияет на распределение напряжений только по соседству с концами и не имеет значения для сечений, удаленных от концов. Распределение напряжений по этим последним сечениям практически таково же, как это получается из решения, относящегося к фигуре 20.

Сказанное справедливо и для случая осевого растяжения. Только вблизи нагруженного конца распределение напряжений действительно зависит от способа приложения растягивающей силы, в поперечных же сечениях, находящихся на некотором расстоянии от конца, напряжения по существу оказываются равномерно распределенными.

Несколько примеров, иллюстрирующих это положение и показывающих, насколько быстро распределение напряжений становится практически равномерным, будут рассмотрены ниже (см. стр. 63).

**16. Определение перемещений.** Если составляющие напряжения найдены из предыдущих уравнений, то можно получить, на основании закона Гука (формула [3]), составляющие деформации. Тогда перемещения  $u$  и  $v$  найдутся из уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \epsilon_x; & \frac{\partial v}{\partial y} &= \epsilon_y; \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \gamma_{xy}. \end{aligned} \right\} [a]$$

Интегрирование этих уравнений в каждом частном случае не представляет какой-либо трудности, и мы в дальнейшем приедем несколько примеров применения этих уравнений.

Можно сразу видеть, что составляющие деформации [a] останутся неизменными, если мы прибавим к величинам  $u$  и  $v$  линейные функции:

$$u_1 = a + by; \quad v_1 = c - bx, \quad [b]$$

где  $a$ ,  $b$  и  $c$  — постоянные коэффициенты.

Это указывает, что перемещения не вполне определяются напряжениями и деформациями. К перемещениям от внутренних деформаций можно присоединить перемещения самого рассматриваемого тела как твердого тела. Коэффициенты  $a$  и  $c$  в функциях [b] представляют поступательное движение тела, а коэффициент  $b$  — малый угол поворота твердого

тела относительно оси  $z$ . Если тело в действительности совершенно не может двигаться как твердое тело, то коэффициенты  $a$ ,  $b$  и  $c$  должны равняться нулю.

Было показано (см. стр. 35), что в случае постоянных объемных сил распределение напряжений одинаково, как при плоском напряженном состоянии, так и при плоской деформации. Однако, перемещения в этих двух задачах будут различными, так как, при плоском напряженном состоянии, составляющие деформации, входящие в уравнения [а], определяются следующими выражениями:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y);$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x);$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy},$$

в случае же плоской деформации составляющие деформации будут:

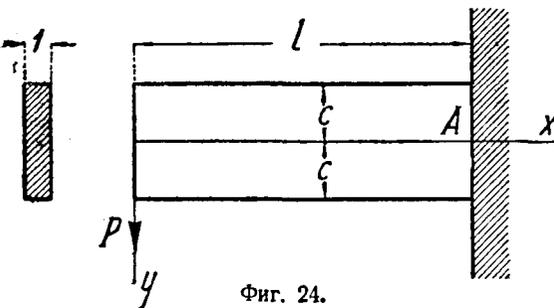
$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1}{E} [(1 - \nu^2) \sigma_x - \nu (1 + \nu) \sigma_y];$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)] = \frac{1}{E} [(1 - \nu^2) \sigma_y - \nu (1 + \nu) \sigma_x];$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}.$$

Интегрирование уравнений [а] будет рассмотрено ниже, при решении частных задач.

**17. Изгиб консоли, нагруженной на конце.** Рассмотрим консоль, имеющую узкое прямоугольное сечение, шириною единица. Консоль изгибается силой  $P$ , приложенной на конце (фиг. 24). Верхний и нижний края свободны от нагрузки, и касательные усилия, равнодействующей которых является сила  $P$ , распределены по концу  $x = 0$ .



Фиг. 24.

Эти условия могут быть удовлетворены соответственным сочетанием

чистого сдвига с напряжениями по формулам [е] параграфа 14, представленными на фиг. 22. Наложив чистый сдвиг  $\tau_{xy} = -b_2$  на напряжения по формулам [е], найдем

$$\sigma_x = d_4 xy; \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = -b_2 - \frac{d_4}{2} y^2. \quad [а]$$

Для того чтобы продольные стороны  $y = \pm c$  были свободны от усилий, мы должны иметь

$$(\tau_{xy})_{y = \pm c} = -b_2 - \frac{d_4}{2} c^2 = 0,$$

откуда

$$d_4 = -\frac{2b_2}{c^2}.$$

Чтобы условие на нагруженном конце было удовлетворено, сумма касательных усилий, действующих на этом конце, должна быть приравнена силе  $P$ . Следовательно <sup>1)</sup>:

$$-\int_{-c}^c \tau_{xy} \cdot dy = \int_{-c}^c \left( b_2 - \frac{b_2}{c^2} y^2 \right) dy = P,$$

откуда

$$b_2 = \frac{3}{4} \frac{P}{c}.$$

Подставив найденные значения коэффициентов  $d_4$  и  $b_2$  в выражения [а], найдем:

$$\sigma_x = -\frac{3}{2} \frac{P}{c^3} xy, \quad \sigma_y = 0;$$

$$\tau_{xy} = -\frac{3P}{4c} \left( 1 - \frac{y^2}{c^2} \right).$$

Заметив, что

$$\frac{2}{3} c^3$$

— момент инерции  $I$  поперечного сечения консоли, имеем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Pxy}{I}, & \sigma_y &= 0; \\ \tau_{xy} &= -\frac{P}{I} \cdot \frac{1}{2} (c^2 - y^2), \end{aligned} \right\} [б]$$

что вполне совпадает с элементарным решением, приводимым в курсах сопротивления материалов.

Следует заметить, что это решение является точным решением только тогда, когда касательные усилия по концам распределяются по тому же параболическому закону, как и касательные напряжения  $\tau_{xy}$ , и интенсивность нормальных усилий в заделанном конце пропорциональна ординате  $y$ .

Если усилия по концам распределены каким-либо другим образом,

<sup>1)</sup> Знак минус перед интегралом следует поставить согласно правилу знаков для касательных напряжений. Напряжение  $\tau_{xy}$  на конце  $x = 0$  положительно, если оно направлено снизу вверх (см. стр. 16).

то распределение напряжений, отвечающее выражениям [b], уже не является правильным для концов консоли, но, на основании принципа Сен-Венана, его можно считать удовлетворительным для поперечных сечений, находящихся на значительном расстоянии от концов.

Рассмотрим теперь перемещения, соответствующие напряжениям [b]. Применяя закон Гука, находим:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sigma_x}{E} = -\frac{Pxy}{EI}; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\nu\sigma_x}{E} = \frac{\nu Pxy}{EI}; \quad [c]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\tau_{xy}}{G} = -\frac{P}{2IG} (c^2 - y^2). \quad [d]$$

Процесс определения составляющих  $u$  и  $v$  перемещения заключается в интегрировании уравнений [c] и [d]. Интегрируя уравнения [c], получим:

$$u = -\frac{Px^2y}{2EI} + f(y); \quad v = \frac{\nu Pxy^2}{2EI} + f_1(x),$$

где функции  $f(y)$  и  $f_1(x)$  являются неизвестными функциями от координат  $y$  и  $x$ .

Подставив найденные значения  $u$  и  $v$  в уравнение [d], найдем:

$$\frac{\partial f(y)}{\partial y} = -\frac{\nu Py^2}{2EI} + \frac{Py^2}{2IG} + e;$$

$$\frac{\partial f_1(x)}{\partial x} = \frac{Px^2}{2EI} + d.$$

Здесь  $e$  и  $d$  постоянные, удовлетворяющие равенству:

$$e + d = -\frac{Pc^2}{2IG}. \quad [e]$$

Следовательно функции  $f(y)$  и  $f_1(x)$  равны:

$$f(y) = -\frac{\nu Py^3}{6EI} + \frac{Py^3}{6IG} + ey + g;$$

$$f_1(x) = \frac{Px^3}{6EI} + dx + h.$$

Подставив эти функции в выражения для  $u$  и  $v$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{Px^2y}{2EI} - \frac{\nu Py^3}{6EI} + \frac{Py^3}{6IG} + ey + g; \\ v &= \frac{\nu Pxy^2}{2EI} + \frac{Px^3}{6EI} + dx + h. \end{aligned} \right\} [g]$$

Постоянные  $d$ ,  $e$ ,  $g$  и  $h$  можно теперь определить из уравнения [e] и из трех уравнений связей, которые необходимы, чтобы удержать балку от движения как свободного твердого тела в плоскости  $xy$ .

Предположим, что точка  $A$  — центр тяжести концевого поперечного сечения — закреплена. Тогда составляющие перемещения  $u$  и  $v$  должны быть равны нулю, при  $x=l$ ;  $y=0$ , и мы найдем из выражений [g]:

$$g = 0; \quad h = -\frac{Pl^3}{6EI} - d \cdot l.$$

Уравнение изогнутой оси балки получится при подстановке  $y=0$  во второе из выражений [g]. Следовательно

$$(v)_{y=0} = \frac{Px^3}{6EI} - \frac{Pl^3}{6EI} - d(l-x). \quad [h]$$

Для определения постоянной  $d$  в этом уравнении мы должны воспользоваться уравнением третьей связи, устраняющей возможность поворота балки в плоскости  $xu$  относительно закрепленной точки  $A$ .

Эта связь может быть осуществлена различными способами. Рассмотрим два случая.

Первый — когда на конце  $A$  заделан элемент оси балки. Тогда уравнение связи напишется так:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{\substack{x=l \\ y=0}} = 0. \quad [k]$$

Второй — когда в точке  $A$  закреплён вертикальный элемент поперечного сечения. Тогда уравнение связи будет таково:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{\substack{x=l \\ y=0}} = 0. \quad [l]$$

В первом случае мы получим из уравнения [h]:

$$d = -\frac{Pl^2}{2EI},$$

а из равенства [e] найдем:

$$e = \frac{Pl^2}{2EI} - \frac{Pc^2}{2IG}.$$

Подставив найденные значения постоянных в выражения [g], имеем:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{Px^2y}{2EI} - \frac{\sqrt{3}Py^3}{6EI} + \frac{Py^3}{6IG} + \left(\frac{Pl^2}{2EI} - \frac{Pc^2}{2IG}\right)y; \\ v &= \frac{\sqrt{3}Pxy^2}{2EI} + \frac{Px^3}{6EI} - \frac{Pl^2x}{2EI} + \frac{Pl^3}{3EI}. \end{aligned} \right\} [m]$$

Уравнение изогнутой оси балки получает вид:

$$(v)_{y=0} = \frac{Px^3}{6EI} - \frac{Pl^2x}{2EI} + \frac{Pl^3}{3EI}. \quad [n]$$

Оно дает для прогиба нагруженного конца ( $x=0$ ) величину

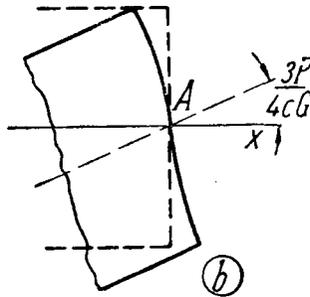
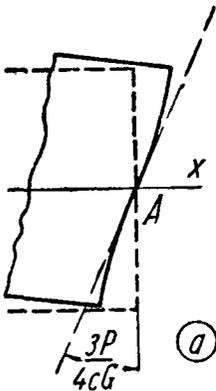
$$\frac{Pl^3}{3EI},$$

что совпадает с выражением, которое обыкновенно выводится в элементарных курсах сопротивления материалов.

Чтобы выяснить искажение поперечного сечения, возникающее под действием касательных напряжений, рассмотрим перемещение в заданном конце ( $x=l$ ). Для этого конца мы имеем из выражений [m]:

$$\left. \begin{aligned} (u)_{x=l} &= -\frac{\nu Py^3}{6EI} + \frac{Py^3}{6IG} - \frac{Pc^2y}{2IG}; \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x=l} &= -\frac{\nu Py^2}{2EI} + \frac{Py^2}{2IG} + \frac{Pc^2}{2IG}; \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x=l, y=0} &= -\frac{Pc^2}{2IG} = -\frac{3}{4} \frac{P}{cG}. \end{aligned} \right\} [o]$$

Вид сечения после искажения показан на фиг. 25а. Вследствие наличия касательного напряжения



Фиг. 25.

$$\tau_{xy} = -\frac{3P}{4c}$$

в точке  $A$ , элемент поперечного сечения в этой точке поворачивается в плоскости  $xy$  относительно точки  $A$  на угол

$$\frac{3P}{4cG}$$

в направлении вращения часовой стрелки.

Если закреплен вертикальный элемент по-

перечного сечения в точке  $A$  (фиг. 25b), вместо горизонтального элемента оси, то из уравнения связи [l] и первого из выражений [g] найдем

$$e = \frac{Pl^2}{2EI}$$

и, на основании равенства [e], будем иметь:

$$d = -\frac{Pl^2}{2EI} - \frac{Pc^2}{2IG}.$$

Подставив найденные значения во второе из выражений [g], найдем

$$(v)_{y=0} = \frac{Px^3}{6EI} - \frac{Pl^2x}{2EI} + \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{Pc^2}{2IG}(l-x). \quad [p]$$

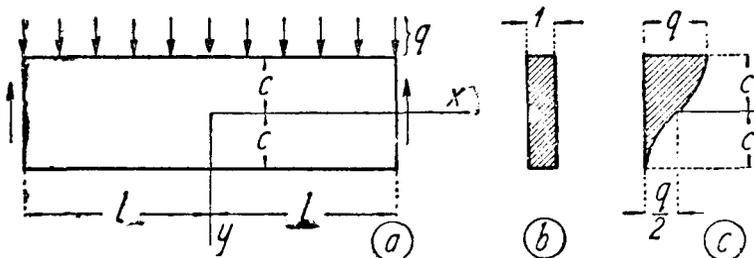
Из сопоставления полученного уравнения с уравнением [л] можно заключить, что, вследствие поворота конца оси в точке *A* (фиг. 25*b*), прогибы оси консоли возрастают на величину:

$$\frac{Pc^2}{2IG}(l-x) = \frac{3P}{4cG}(l-x). \quad [r]$$

В этом и выражается так называемое *влияние перерезывающей силы на прогиб* балки.

В действительности, в заделанном конце мы имеем условия, отличные от показанных на фиг. 25. Заделанное сечение обычно не может свободно искажаться, и распределение усилий в этом конце отлично от того, что дают формулы [б]. Решение [б], однако, являясь удовлетворительным для сравнительно длинных консолей на значительном расстоянии от концов. Более подробное исследование распределения напряжений в заделанном конце и дополнительного прогиба от перерезывающей силы будет дано ниже (см. параграф 41, стр. 169).

**18. Изгиб балки равномерно распределенной нагрузкой.** Пусть балка с узким прямоугольным сечением, с шириною равной единице, свободно опертая по концам, изгибается равномерно распределенной нагрузкой интенсивности *q*, как показано на фиг. 26.



Фиг. 26.

Условия по верхнему и нижнему краям балки будут таковы:

$$(\tau_{xy})_{y=\pm c} = 0; \quad (\sigma_y)_{y=\pm c} = 0; \quad (\varphi)_{y=-c} = -q. \quad [a]$$

Условия на концах, при  $x = \pm l$ , имеют следующий вид:

$$\int_{-c}^c \tau_{xy} dy = \mp ql; \quad \int_{-c}^c \sigma_x dy = 0; \quad \int_{-c}^c \sigma_x y dy = 0. \quad [b]$$

Последние два из уравнений [б] показывают что в данном случае на концах балки не приложено ни продольной силы, ни изгибающего момента.

Всем условиям [а] и [б] можно удовлетворить, комбинируя некоторые решения в виде полиномов, подобные полученным в параграфе 14.

Начнем с решения [г], иллюстрацией к которому служит фигура 23. Чтобы устранить растягивающие напряжения вдоль стороны  $y = c$  и касательные напряжения по сторонам  $y = \pm c$ , наложим на это решение:

простое сжатие  $\sigma_y = a_2$ , согласно решению [b] (параграфа 14), и напряжения по фиг. 21:

$$\sigma_y = d_5 y \quad \text{и} \quad \tau_{xy} = -b_3 x.$$

Таким образом получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= d_5 \left( x^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right); \\ \sigma_y &= \frac{1}{3} d_5 y^3 + b_3 y + a_2; \\ \tau_{xy} &= -d_5 x y^2 - b_3 x. \end{aligned} \right\} [c]$$

Из условий [a] имеем:

$$\begin{aligned} -d_5 c^2 - b_3 &= 0; \\ \frac{1}{3} d_5 c^3 + b_3 c + a_2 &= 0; \\ -\frac{1}{3} d_5 c^3 - b_3 c + a_2 &= -q, \end{aligned}$$

откуда

$$a_2 = -\frac{q}{2}; \quad b_3 = \frac{3}{4} \frac{q}{c}; \quad d_5 = -\frac{3}{4} \frac{q}{c^3}.$$

Подставив найденные значения в формулы [c] и заметив, что

$$\frac{2}{3} c^3$$

равно моменту инерции  $I$  прямоугольного поперечного сечения шириною единица, получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{3}{4} \frac{q}{c^3} \left( x^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right) = -\frac{q}{2I} \left( x^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right); \\ \sigma_y &= -\frac{3}{4} \frac{q}{c^3} \left( \frac{1}{3} y^3 - c^2 y + \frac{2}{3} c^3 \right) = \\ &= -\frac{q}{2I} \left( \frac{1}{3} y^3 - c^2 y + \frac{2}{3} c^3 \right); \\ \tau_{xy} &= -\frac{3}{4} \frac{q}{c^3} (c^2 - y^2) x = -\frac{q}{2I} (c^2 - y^2) x. \end{aligned} \right\} [d]$$

Легко проверить, что эти составляющие напряжения удовлетворяют не только условиям [a] по продольным сторонам балки, но также и первым двум условиям [b] на концах.

Для устранения моментов по концам балки, мы присоединим к решению [d] представленный на фиг. 20 чистый изгиб:

$$\sigma_x = d_3 y; \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0,$$

и определим коэффициент  $d_3$  из условия, что при  $x = \pm l$ :

$$\int_{-c}^c \sigma_x y dy = \int_{-c}^c \left[ -\frac{3}{4} \frac{q}{c^3} \left( l^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right) + d_3 y \right] y dy = 0,$$

откуда

$$d_3 = \frac{3}{4} \frac{q}{c} \left( \frac{l^2}{c^2} - \frac{2}{5} \right).$$

Таким образом окончательно имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{3}{4} \frac{q}{c^3} \left( x^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right) + \frac{3}{4} \frac{q}{c} \left( \frac{l^2}{c^2} - \frac{2}{5} \right) y = \\ &= \frac{q}{2I} (l^2 - x^2) y + \frac{q}{2I} \left( \frac{2}{3} y^3 - \frac{2}{5} c^2 y \right). \end{aligned} \quad [29]$$

Первый член этого выражения представляет напряжения, получаемые на основании обычной элементарной теории изгиба, а второй член дает необходимую поправку. Эта поправка не зависит от абсциссы  $x$  и незначительна по сравнению с наибольшими напряжениями от изгиба, если только пролет балки велик по сравнению с ее высотой. Для таких балок элементарная теория изгиба дает для напряжений достаточно точные значения.

Следует отметить, что выражение [29] является точным решением только в том случае, когда на концах  $x = \pm l$  нормальные усилия распределены согласно следующему закону:

$$\bar{X} = \frac{3}{4} \frac{q}{c^3} \left( \frac{2}{3} y^3 - \frac{2}{5} c^2 y \right),$$

т. е. если нормальные усилия по концам будут таковы же, как и напряжения  $\sigma_x$  при  $x = \pm l$  по формуле [29]. Эти усилия имеют равнодействующую и момент равные нулю. Следовательно, согласно принципу Сен-Венана, мы можем заключить, что их влиянием на напряжения, на значительных расстояниях от концов, т. е. при расстояниях больших, чем толщина балки, можно пренебречь. Поэтому решение [29] для таких точек является достаточно точным для случая, когда нет сил  $\bar{X}$ .

Расхождение между точным решением [29] и приближенным, выражающимся первым членом формулы [29], получается вследствие принятого при выводе приближенного решения предположения, что продольные волокна балки подвергаются лишь продольному растяжению или сжатию.

Из решения [d] видно, что между волокнами будут действовать также и сжимающие напряжения  $\sigma_y$ . Эти напряжения обуславливают поправку, представляемую вторым членом решения [29]. Распределение сжимающих напряжений  $\sigma_y$  по высоте балки показано на фиг. 26с.

Распределение по поперечному сечению балки касательных напряжений  $\tau_{xy}$ , отвечающее третьему из выражений [d], совпадает с тем, которое дает обычная элементарная теория.

Перемещения  $u$  и  $v$  определим способом, указанным в предыдущем параграфе. Предположим, что в центре тяжести среднего сечения ( $x=0$ ,  $y=0$ ) горизонтальное перемещение равно нулю, а вертикальное перемещение равно прогибу  $\delta$ . На основании выражений [d] и [29] находим:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{q}{2EI} \left[ \left( l^2 x - \frac{x^3}{3} \right) y + x \left( \frac{2}{3} y^3 - \frac{2}{5} c^2 y \right) + \right. \\ &\quad \left. + v x \left( \frac{1}{3} y^3 - c^2 y + \frac{2}{3} c^3 \right) \right]; \\ v &= -\frac{q}{2EI} \left\{ \frac{y^4}{12} - \frac{c^2 y^2}{2} + \frac{2}{3} c^3 y + \right. \\ &\quad \left. + v \left[ (l^2 - x^2) \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{6} - \frac{1}{5} c^3 y \right] \right\} - \\ &\quad - \frac{q}{2EI} \left[ \frac{l^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{1}{5} c^2 x^2 + \left( 1 + \frac{1}{2} v \right) c^2 x^2 \right] + \delta. \end{aligned} \right\} [e]$$

Из выражения для перемещения  $u$  видно, что нейтральная поверхность балки не совпадает с осевой линией. Вследствие сжимающего напряжения

$$(\sigma_y)_{y=0} = -\frac{q}{2}$$

осевая линия имеет удлинение

$$\frac{vq}{2E};$$

и мы получаем:

$$(u)_{y=0} = \frac{vqx}{2E}.$$

Из выражения для перемещения  $v$  мы найдем уравнение изогнутой оси балки:

$$(v)_{y=0} = \delta - \frac{q}{2EI} \left[ \frac{l^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{1}{5} c^2 x^2 + \left( 1 + \frac{1}{2} v \right) c^2 x^2 \right]. [f]$$

Предполагая, что прогиб на концах ( $x = \pm l$ ) осевой линии равен нулю, получим:

$$\delta = \frac{5}{24} \frac{ql^4}{EI} \left[ 1 + \frac{12}{5} \frac{c^2}{l^2} \left( \frac{4}{5} + \frac{v}{2} \right) \right]. [30]$$

Множитель перед скобками представляет собою прогиб, который был выведен элементарным путем, в предположении, что поперечные сечения балки остаются при изгибе плоскими. Второй член в скобках представляет собою поправку, обычно называемую *влиянием перерезывающей силы*.

Путем двойного дифференцирования уравнения изогнутой оси балки по  $x$  получим следующее выражение для кривизны:

$$\left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right)_{y=0} = \frac{q}{EI} \left[ \frac{l^2 - x^2}{2} + c^2 \left( \frac{4}{5} + \frac{v}{2} \right) \right]. [31]$$

Отсюда видно, что кривизна не вполне пропорциональна изгибающему моменту <sup>1)</sup>

$$\frac{q(l^2 - x^2)}{2}.$$

Дополнительный член в скобках представляет собою необходимую поправку к обычной элементарной формуле. Более общее исследование кривизны балки показывает <sup>2)</sup>, что членом, представляющим поправку в выражении [31], можно также воспользоваться для любого случая непрерывно меняющейся интенсивности нагрузки. Влияние перерезывающей силы на прогиб в случае сосредоточенного груза будет рассмотрено ниже (стр. 118).

Элементарный вывод формулы, выражающей влияние перерезывающей силы на кривизну оси балки, был сделан Ренкином <sup>3)</sup> в Англии и Грасгофом <sup>4)</sup> в Германии.

Принимая выражение для наибольшей деформации сдвига по нейтральной оси прямоугольной балки шириною единица в виде:

$$\frac{3}{2} \frac{Q}{2cG},$$

где  $Q$  — перерезывающая сила, получим, что соответствующее изменение кривизны представится производной от вышеуказанной деформации сдвига по абсциссе  $x$ , что дает

$$\frac{3}{2} \frac{q}{2cG}.$$

Таким образом, на основании элементарного анализа, получается следующее выражение для кривизны с поправкой на влияние перерезывающей силы:

$$\frac{q}{EI} \frac{l^2 - x^2}{2} + \frac{3}{2} \frac{q}{2cG} = \frac{q}{EI} \left[ \frac{l^2 - x^2}{2} + c^2(1 + \nu) \right].$$

Сравнивая это выражение с формулой [31], видим, что элементарное решение дает преувеличенную величину поправки. Более точное значение поправки получится, если вместо наибольшей деформации сдвига мы воспользуемся известным средним значением этой деформации, получающимся при рассмотрении потенциальной энергии деформации [см. стр. 169] и равным:

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{2cG}.$$

Поправочный член в формуле для кривизны [31] не может быть приписан только одной перерезывающей силе. Он частично зависит от сжимающих напряжений  $\sigma_y$ . Эти напряжения распределены неравномерно по высоте балки. Поперечное расширение в направлении оси  $x$ , возникающее под действием этих напряжений, уменьшается от верха к низу балки и таким образом вызывает обратную кривизну (выпуклостью вверх). Эта кривизна, вместе с влиянием перерезывающей силы, обуславливает поправочный член в формуле [31].

**19. Другие случаи балок со сплошной нагрузкой.** Повышая степень полиномов, представляющих решения плоской задачи (пара-

<sup>1)</sup> Это было впервые доказано Пирсоном (*K. Pearson*), „Quart. Journ. Math.“, vol. 24, 1889, p. 63.

<sup>2)</sup> См. статью Кармана (*Th. v. Kármán*), „Abh. aerodynam. Inst. Hochschule, Aachen“, Bd 7, 1927, S. 3.

<sup>3)</sup> Ренкин (*Rankine*), Applied Mechanics, 14 ed., 1895, p. 344.

<sup>4)</sup> Грасгоф (*Grashof*), Elastizität und Festigkeit, 2 Aufl., 1878.

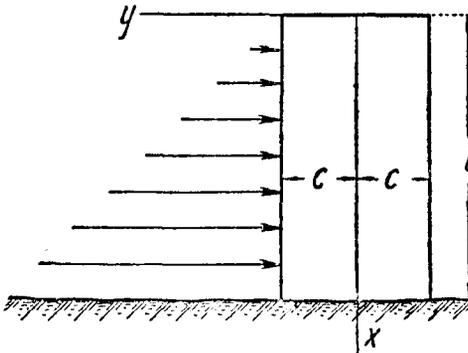
граф 14), мы можем получить решения задач об изгибе балок от сплошных различным образом меняющихся нагрузок<sup>1)</sup>.

Взяв, например, решение в виде полинома шестой степени и комбинируя его с решениями параграфа 14, мы можем получить напряжения в вертикальной консоли от нагрузки, изменяющейся по гидростатическому закону, как показано на фиг. 27.

В таком случае можно доказать, что все условия на продольных сторонах консолей будут удовлетворены при следующих выражениях для напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{qx^3y}{4c^3} + \frac{q}{4c^3} \left( -2xy^3 + \frac{6}{5} c^2xy \right); \\ \sigma_y &= -\frac{qx}{2} + qx \left( \frac{y^3}{4c^3} - \frac{3y}{4c} \right); \\ \tau_{xy} &= \frac{3qx^2}{8c^3} (c^2 - y^2) - \frac{q}{8c^3} (c^4 - y^4) + \\ &\quad + \frac{q}{4c^3} \frac{3}{5} c^2 (c^2 - y^2). \end{aligned} \right\} [a]$$

Здесь  $q$  — вес единицы объема жидкости, так что интенсивность нагрузки на глубине  $x$  равна  $qx$ . Перерезывающая сила и изгибающий момент на той же глубине соответственно равны:



Фиг. 27.

$$\frac{qx^2}{2} \quad \text{и} \quad \frac{qx^3}{6}.$$

Очевидно, что первые члены в выражениях для напряжений  $\sigma_x$  и  $\tau_{xy}$  представляют собою величины напряжений, получаемые на основании обычных элементарных формул.

На верхнем конце балки ( $x = 0$ ) нормальное напряжение равно нулю. Касательное напряжение равно:

$$\tau_{xy} = -\frac{q}{8c^3} (c^4 - y^4) + \frac{q}{4c^3} \frac{3}{5} c^2 (c^2 - y^2).$$

Хотя эти напряжения отличны от нуля, они очень малы по всему сечению, и их равнодействующая равна нулю, так что условия приближаются к тем, которые мы имеем на конце балки, свободном от внешних усилий.

Присоединяя к напряжению  $\sigma_x$  по формулам [a] член  $-q_1x$ , где  $q_1$  —

<sup>1)</sup> См. статью А. Тимпе (A. Timpe), цитированную выше в выноске на стр. 38.

вес единицы объема материала консоли, мы учтем влияние веса балки на распределение напряжений.

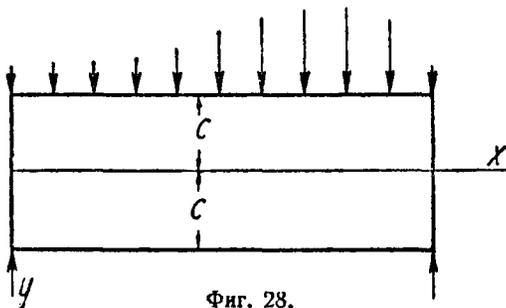
Было предложено<sup>1)</sup> использовать решение, полученное таким путем, для определения напряжений в плитах из каменной кладки прямоугольного сечения.

Следует заметить, что это решение не удовлетворяет условиям по подошве плиты. Решение [a] является точным, если по подошве действуют усилия, распределенные таким же образом, как напряжения  $\sigma_x$  и  $\tau_{xy}$  в этом решении. В действительности, подошва плиты связана с фундаментом, и условия отличаются от тех, которые выражаются этим решением. На основании принципа Сен-Венана можно сказать, что влиянием закрепления по подошве на больших расстояниях от последней можно пренебречь, но в плитах из каменной кладки размер поперечного сечения  $2c$  обычно нельзя считать малым по сравнению с высотой плиты  $l$ , а потому этим влиянием пренебречь нельзя<sup>2)</sup>.

Взяв для функции напряжений полином седьмой степени, можем получить напряжения в балке, несущей распределенную по параболическому закону нагрузку.

В общем случае непрерывного распределения нагрузки  $q$  (фиг. 28), напряжения в любом сечении на значительном расстоянии от концов, т. е. на расстоянии большем, чем высота балки, можно приближенно определить по следующим формулам<sup>3)</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{My}{I} + q \left( \frac{y^3}{2c^3} - \frac{3y}{10c} \right); \\ \sigma_y &= -\frac{q}{2} + q \left( \frac{3y}{4c} - \frac{y^3}{4c^3} \right); \\ \tau_{xy} &= \frac{Q}{2I} (c^2 - y^2). \end{aligned} \right\} [32]$$



Фиг. 28.

где  $M$  и  $Q$  — изгибающий момент и перерезывающая сила, найденные обычным путем, а  $q$  — интенсивность нагрузки в рассматриваемом поперечном сечении. Эти формулы согласуются с полученными ранее формулами для равномерно нагруженной балки (см. параграф 18).

<sup>1)</sup> См. *Леви (M. Levy)*, „Comptes Rendus“, t. 126, 1898, p. 1235.

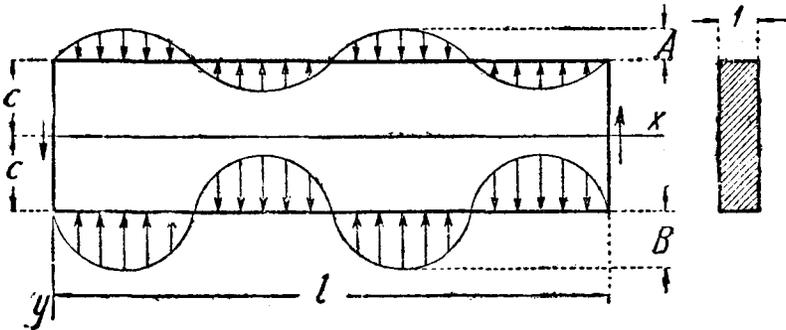
<sup>2)</sup> Задача о распределении напряжений в плитах из каменной кладки представляет большой практический интерес и рассматривалась рядом авторов. См. *К. Пирсон (K. Pearson)*, On Some Disregarded Points in the Stability of Masonry Dams, Draper's Co. Research Memos, 1904; *К. Пирсон и К. Поллард (K. Pearson and C. Pollard)*, An Experimental Study of the Stresses in Masonry Dams, Draper's Co. Research Memos, 1907. См. также статьи *Ричардсона (L. F. Richardson)*, „Phil. Trans. Roy. Soc. Edinburgh“, vol 210, series A, 1910, p. 307, и *Каро-зерса (S. D. Carothers)*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh“, vol. 33, 1913, p. 292; *Мюллера (I. Muller)*, Publications du laboratoire de photo-elasticité, Zürich, 1930; *Филлунгера (Fillunger)*, „Oesterr. Wochenschr. öffentl. Baudienst“, 1913, H. 45; *К. Вольфа (K. Wolf)*, „Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien“, Bd 123, 1914.

<sup>3)</sup> *Ф. Зеевальд (F. Seewald)*, „Abh. aerodynam. Inst., Techn. Hochschule. Aachen“, Bd 7, 1927, S. 11.

Если нагрузка интенсивности  $q$ , действующая по направлению вниз, распределена по нижнему краю ( $y = +c$ ) балки, то выражения для напряжений получаются по формулам [32] путем присоединения равномерного растягивающего напряжения  $\sigma_y = q$ :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{My}{I} + q \left( \frac{y^3}{2c^3} - \frac{3}{10} \frac{y}{c} \right); \\ \sigma_y &= \frac{q}{2} + q \left( \frac{3y}{4c} - \frac{y^3}{4c^3} \right); \\ \tau_{xy} &= \frac{Q}{2I} (c^2 - y^2). \end{aligned} \right\} [32']$$

20. Решение плоской задачи при помощи рядов Фурье. Было показано, что если нагрузка непрерывно распределена по длине балки, имеющей сечение



Сиг. 29.

в виде узкого прямоугольника, то можно, для получения решения задачи, принять функцию напряжений в виде полинома. Если нагрузка не является непрерывной, то для функции напряжений следует воспользоваться тригонометрическими рядами<sup>1)</sup>.

Уравнение для функции напряжений:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0 \quad [a]$$

может быть удовлетворено, если принять функцию  $\varphi$  в таком виде:

$$\varphi = \sin \frac{m\pi x}{l} f(y), \quad [b]$$

где  $m$  — любое целое число и  $f(y)$  — функция одной только ординаты  $y$ .

Подставив функцию [b] в уравнение [a] и пользуясь обозначением:

$$\frac{m\pi}{l} = \alpha,$$

1) Первое применение тригонометрических рядов к решению задач об изгибе балок было сделано *М. Рибьером* (*M. C. Ribière*) в диссертации: *Sur divers cas de la flexion des prismes rectangles*, Bordeaux, 1899. См. также его статью в „Comptes Rendus“, t. 126, pp. 402—404 и 1190—1192. Дальнейшее развитие этого способа решения принадлежит *Файлону* (*L. N. G. Filon*), „Phil. Trans.“, vol. 201, series A, 1903, p. 63. Некоторые частные примеры применения рассматриваемого метода даны *Ф. Блейхом* (*F. Bleich*), „Bauingenieur“, Bd 4, 1923, S. 255.

найдем следующее уравнение для определения  $f(y)$ :

$$\alpha^4 f(y) - 2\alpha^2 f''(y) + f^{IV}(y) = 0. \quad [c]$$

Общий интеграл этого линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами выражается так:

$$f(y) = C_1 \cosh \alpha y + C_2 \sinh \alpha y + C_3 y \cosh \alpha y + C_4 y \sinh \alpha y.$$

Тогда функция напряжений получает следующий вид:

$$\varphi = \sin \alpha x (C_1 \cosh \alpha y + C_2 \sinh \alpha y + C_3 y \cosh \alpha y + C_4 y \sinh \alpha y), \quad [d]$$

и соответствующие напряжения будут равны

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \sin \alpha x [C_1 \alpha^2 \cosh \alpha y + C_2 \alpha^2 \sinh \alpha y + \\ &+ C_3 \alpha (2 \sinh \alpha y + \alpha y \cosh \alpha y) + C_4 \alpha (2 \cosh \alpha y + \alpha y \sinh \alpha y)]; \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\alpha^2 \sin \alpha x (C_1 \cosh \alpha y + C_2 \sinh \alpha y + \\ &+ C_3 y \cosh \alpha y + C_4 y \sinh \alpha y); \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = -\alpha \cos \alpha x [C_1 \alpha \sinh \alpha y + C_2 \alpha \cosh \alpha y + \\ &+ C_3 (\cosh \alpha y + \alpha y \sinh \alpha y) + C_4 (\sinh \alpha y + \alpha y \cosh \alpha y)]. \end{aligned} \right\} [e]$$

Рассмотрим частный случай балки прямоугольного сечения, свободно опертой по концам и подвергающейся по верхнему и нижнему краям действию равномерно распределенных вертикальных усилий интенсивностью соответственно:

$$A \sin \alpha x \quad \text{и} \quad B \sin \alpha x.$$

Фиг. 29 представляет случай, когда

$$\alpha = \frac{4\pi}{l},$$

а кроме того постоянные  $A$  и  $B$  имеют положительные значения.

Распределение напряжений в этом случае легко получить на основании решения [e]. Произвольные постоянные интегрирования  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  и  $C_4$  можно найти из условий по верхнему и нижнему краям балки ( $y = \pm c$ ). Эти условия таковы:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } y = +c: & \quad \tau_{xy} = 0, \quad \sigma_y = -B \sin \alpha x; \\ \text{при } y = -c: & \quad \tau_{xy} = 0, \quad \sigma_y = -A \sin \alpha x. \end{aligned} \right\} [f]$$

Подставив эти значения в третье из уравнений [e], найдем:

$$\begin{aligned} C_1 \alpha \sinh \alpha c + C_2 \alpha \cosh \alpha c + C_3 (\cosh \alpha c + \alpha c \sinh \alpha c) + C_4 (\sinh \alpha c + \alpha c \cosh \alpha c) &= 0; \\ -C_1 \alpha \sinh \alpha c + C_2 \alpha \cosh \alpha c + C_3 (\cosh \alpha c + \alpha c \sinh \alpha c) - C_4 (\sinh \alpha c + \alpha c \cosh \alpha c) &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} C_3 &= -C_2 \frac{\alpha \cosh \alpha c}{\cosh \alpha c + \alpha c \sinh \alpha c}; \\ C_4 &= -C_1 \frac{\alpha \sinh \alpha c}{\sinh \alpha c + \alpha c \cosh \alpha c}. \end{aligned} \right\} [g]$$

Пользуясь условиями по краям  $y = \pm c$  в применении ко второму из напряжений [e], получим:

$$\alpha^2 (C_1 \cosh \alpha c + C_2 \sinh \alpha c + C_3 c \cosh \alpha c + C_4 c \sinh \alpha c) = B;$$

$$\alpha^2 (C_1 \cosh \alpha c - C_2 \sinh \alpha c - C_3 c \cosh \alpha c + C_4 c \sinh \alpha c) = A.$$

Складывая и вычитая эти выражения и пользуясь формулами [g], имеем:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{A+B}{a^2} \cdot \frac{\sinh ac + ac \cosh ac}{\sinh 2ac + 2ac}; \\ C_2 &= \frac{A-B}{a^2} \cdot \frac{\cosh ac + ac \sinh ac}{\sinh 2ac - 2ac}; \\ C_3 &= -\frac{A-B}{a^2} \cdot \frac{a \cosh ac}{\sinh 2ac - 2ac}; \\ C_4 &= -\frac{A+B}{a^2} \cdot \frac{a \sinh ac}{\sinh 2ac + 2ac}. \end{aligned} \right\} [h]$$

Подставив найденные значения произвольных постоянных в выражения [e], получим следующие формулы для составляющих напряжения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= + (A+B) \frac{(ac \cosh ac - \sinh ac) \cosh ay - ay \sinh ay \sinh ac}{\sinh 2ac + 2ac} \sin ax + \\ &+ (A-B) \frac{(ac \sinh ac - \cosh ac) \sinh ay - ay \cosh ay \cosh ac}{\sinh 2ac - 2ac} \sin ax; \\ \sigma_y &= - (A+B) \frac{(ac \cosh ac + \sinh ac) \cosh ay - ay \sinh ay \sinh ac}{\sinh 2ac + 2ac} \sin ax - \\ &- (A-B) \frac{(ac \sinh ac + \cosh ac) \sinh ay - ay \cosh ay \cosh ac}{\sinh 2ac - 2ac} \sin ax; \\ \tau_{xy} &= - (A+B) \frac{ac \cosh ac \sinh ay - ay \cosh ay \sinh ac}{\sinh 2ac + 2ac} \cos ax - \\ &- (A-B) \frac{ac \sinh ac \cosh ay - ay \sinh ay \cosh ac}{\sinh 2ac - 2ac} \cos ax. \end{aligned} \right\} [k]$$

Эти напряжения удовлетворяют условиям, показанным на фиг. 29 по краям  $y = \pm c$ .

По концам балки, при  $x = 0$  и  $x = l$ , напряжения  $\sigma_x$  равны нулю, и имеется только касательное напряжение  $\tau_{xy}$ .

Это напряжение представляется двумя членами (см. последнюю из формул [k]).

Первый член, пропорциональный сумме  $A+B$ , представляет напряжения, которые для верхней и нижней половин концевого сечения имеют одну и ту же величину, но обратный знак. Равнодействующая этих напряжений на конце балки равна нулю.

Второй член, пропорциональный разности  $A-B$ , имеет равнодействующие по концам балки, которые находятся в равновесии с нагрузками, приложенными по продольным сторонам ( $y = \pm c$ ).

Если эти нагрузки одинаковы для обеих граней, то коэффициент  $A$  равен коэффициенту  $B$ , и реактивные усилия по концам равны нулю. Рассмотрим этот частный случай более подробно, в предположении, что длина балки велика по сравнению с ее высотой.

Согласно второй из формул [k], нормальные напряжения  $\tau_y$  по срединной плоскости ( $y = 0$ ) балки равны:

$$\sigma_y = -2A \frac{ac \cosh ac + \sinh ac}{\sinh 2ac + 2ac} \sin ax. \quad [l]$$

Для длинных балок величина  $ac$ , равная

$$\frac{\pi c}{l},$$

мала, если только число волн  $m$  не велико. Тогда, подставив в выражение [L]:

$$\sinh \alpha c = \alpha c + \frac{(\alpha c)^3}{6} + \frac{(\alpha c)^5}{120} + \dots;$$

$$\cosh \alpha c = 1 + \frac{(\alpha c)^2}{2} + \frac{(\alpha c)^4}{24} + \dots,$$

и пренебрегая малыми величинами порядка высшего, чем  $(\alpha c)^4$ , найдем:

$$\sigma_y = -A \sin \alpha x \left( 1 - \frac{(\alpha c)^4}{24} \right).$$

Следовательно, при небольших значениях величины  $\alpha c$  распределение напряжений по срединной плоскости практически будет одинаковым для обоих горизонтальных краев ( $y = \pm c$ ) балки.

Из этого можно заключить, что давления передаются через балку или пластинку без какого-либо существенного изменения, если только изменение самих давлений по длине сторон балки не происходит слишком резко.

Касательные напряжения  $\tau_{xy}$  в этом случае очень малы. В верхней и нижней половинах концевых сечений они дают в результате небольшие равнодействующие, необходимые для того, чтобы уравновесить небольшую разность между давлениями по горизонтальным краям ( $y = \pm c$ ) и по срединной плоскости ( $y = 0$ ).

В самом общем случае распределение вертикальной нагрузки по верхней и нижней граням балки (фиг. 30) можно представить следующими рядами<sup>1)</sup>: для верхней грани:

$$q_u = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin \frac{m\pi x}{l} + \sum_{m=1}^{\infty} A'_m \cos \frac{m\pi x}{l},$$

для нижней грани:

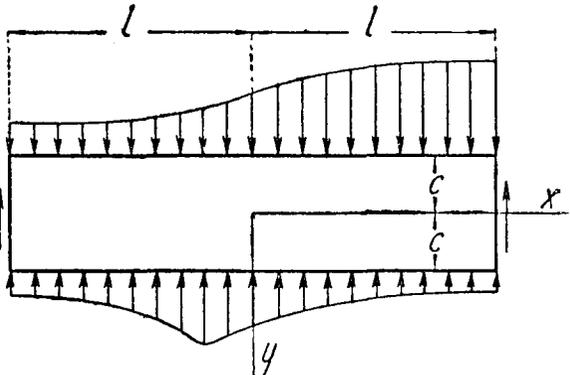
$$q_l = B_0 + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin \frac{m\pi x}{l} + \sum_{m=1}^{\infty} B'_m \cos \frac{m\pi x}{l}.$$

[M]

Постоянные члены  $A_0$  и  $B_0$  представляют равномерную нагрузку балки, которая была рассмотрена в параграфе 18. Напряжения, происходящие от членов, содержащих

$$\sin \frac{m\pi x}{l},$$

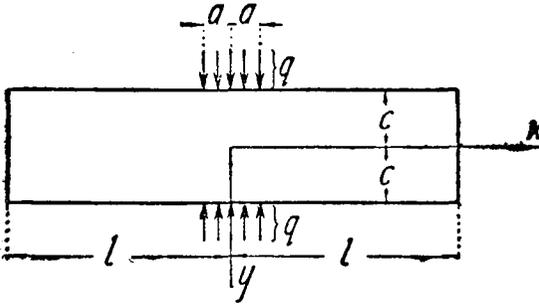
<sup>1)</sup> Относительно рядов Фурье см. *Озгуд (Osgood), Advanced Calculus, 1928;* или *Байерли (Byerly), Fourier Series and Spherical Harmonics, 1902.*



Фиг. 30.

получаются суммированием решений [k]. Напряжения, зависящие от членов, содержащих

$$\cos \frac{m\pi x}{l},$$



Фиг. 31.

без затруднений найдутся из формул [k] путем замены  $\sin \alpha x$  через  $\cos \alpha x$  и наоборот, и путем перемены знака касательного напряжения  $\tau_{xy}$ .

Чтобы пояснить применение этого общего способа определения напряжений в прямоугольных пластинках, рассмотрим случай, представленный на фиг. 31. В этом случае симметричной нагрузки члены, содержащие

$$\sin \frac{m\pi x}{l},$$

исчезают из выражений [m], и коэффициенты  $A_0$  и  $A'_m$  получаются обычным путем:

$$A_0 = B_0 = \frac{qa}{l}; \quad A'_m = B'_m = \frac{1}{l} \int_{-a}^a q \cos \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{2q \sin \frac{m\pi a}{l}}{m\pi}. \quad [n]$$

Члены  $A_0$  и  $B_0$  представляют собою равномерную сжимающую нагрузку в направлении оси  $y$ , равную

$$\frac{qa}{l}.$$

Напряжения, зависящие от тригонометрических членов ряда, получатся из решений [k] путем замены в последних  $\sin \alpha x$  через  $\cos \alpha x$  и изменения знака касательного напряжения  $\tau_{xy}$ .

Рассмотрим срединную плоскость ( $y=0$ ), по которой действует только нормальное напряжение  $\sigma_y$ . На основании второго из выражений [k] найдем:

$$\sigma_y = -\frac{qa}{l} - \frac{4q}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi a}{l}}{m} \cdot \frac{m\pi c}{l} \frac{\cosh \frac{m\pi c}{l} + \sinh \frac{m\pi c}{l}}{\sinh \frac{2m\pi c}{l} + 2 \frac{m\pi c}{l}} \cdot \cos \frac{m\pi x}{a}. \quad [o]$$

Это напряжение было вычислено Файлоном<sup>1)</sup> для бесконечно длинной пластинки, когда размер  $a$  очень мал, т. е. для сосредоточенной силы  $P = 2qa$ . Результаты этих вычислений представлены диаграммой на фиг. 32. Из нее видно,

1) Файлон (L. N. G. Filon), см. его статью, упомянутую выше в выноске на стр. 24. Та же задача была рассмотрена также Тимпе (A. Timpe) „Z. Math. Physik“, Bd 55, 1907, S. 149; Месмером (G. Mesmer) Vergleichende spannungsoptische Untersuchungen..., Dissert., Göttingen, 1929, Зеевальдом (F. Seewald) „Abh. Aerodynam. Inst., Techn. Hochschule, Aachen“, Bd 7, 1927, S. 11, и Баем (H. Bay), „Ingenieur-Archiv“, Bd 3, 1932, S. 435. Приближенное решение этой задачи было дано М. Пижо (M. Pigeaud), „Comptes rendus“, t. 161, 1915, p. 673. Исследование задачи для прямоугольной пластинки конечной длины было выполнено Гудьером (J. N. Goodier), „Trans. Am. Soc. Mech. Eng.“, Applied Mechanics, vol. 54, n° 18, 1932, p. 173.

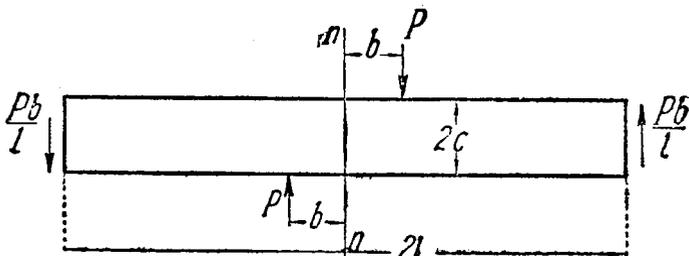
что напряжение  $\sigma_y$  уменьшается очень быстро с увеличением абсциссы  $x$ . При значении отношения  $x:c=1,35$ , оно становится равным нулю, и затем сменяется растяжением.

Файлон исследовал также случай, представленный на фиг. 33, когда силы  $P$  смещены одна относительно другой. Распределение касательных напряжений по поперечному сечению  $ll$  для этого случая представляет практический интерес и показано на фиг. 34.

Из этой диаграммы видно, что при небольших значениях отношения  $b:c$  это распределение не похоже на распределение напряжений по параболическому закону, получающееся по элементарной теории, и что в рассматриваемом случае появляются очень большие напряжения вверху и внизу балки, тогда как средняя часть ее практически свободна от касательных напряжений.

Рассмотрим теперь другой крайний случай, когда высота пластинки  $2c$  велика по сравнению с ее длиной  $2l$  (фиг. 35). Мы воспользуемся этим случаем для того, чтобы показать, что распределение напряжений по сечениям быстро приближается к равномерному, с увеличением расстояния от точки приложения сил  $P$ .

Пользуясь вторым из выражений [k], с подстановкой  $\cos ax$  вместо  $\sin ax$



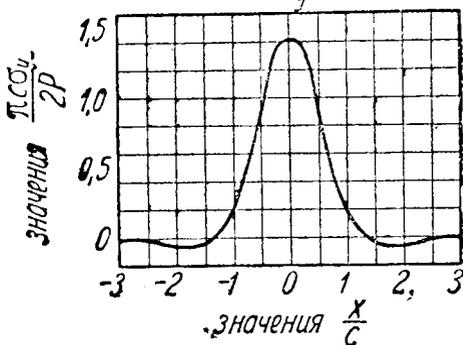
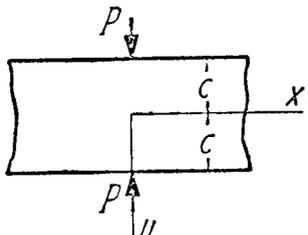
Фиг. 33.

и формулами [n] для коэффициентов  $A'_m$ , равных  $B'_m$ , найдем:

$$\sigma_y = -\frac{qa}{l} - \frac{4q}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin ma}{m} \times \frac{(ac \cosh ac + \sinh ac) \cosh ay - ay \sinh ay \sinh ac}{\sinh 2ac + 2ac} \cdot \cos ax, \quad [p]$$

где

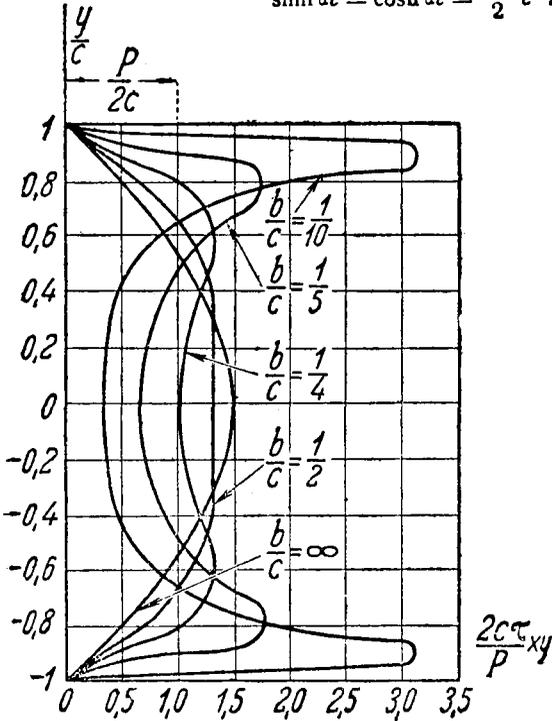
$$qa = \frac{P}{2}$$



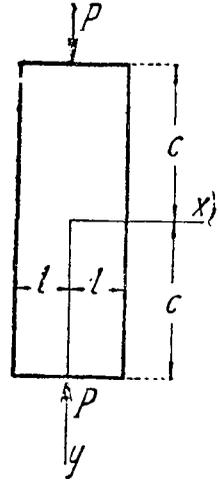
Фиг. 32.

Если длина  $l$  мала по сравнению с размером  $c$ , то  $ac$  — большое число и ит можно пренебречь по сравнению с величиной  $\sinh ac$ . Мы можем также положить

$$\sinh ac = \cosh ac = \frac{1}{2} e^{ac}.$$



Фиг. 34.



Фиг. 35.

Для сечений, находящихся на большом расстоянии от середины пластинки, можно принять

$$\sinh ay = \cosh ay = \frac{1}{2} e^{ay}.$$

Подставив эти значения в формулу [p], найдем:

$$\begin{aligned} \sigma_y &= -\frac{qa}{l} - \frac{4q}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha a}{2m} \left[ (ac + 1) e^{\alpha(y-c)} - \alpha y e^{\alpha(y-c)} \right] \cos \alpha x = \\ &= -\frac{qa}{l} - \frac{4q}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi a}{l}}{2m} \left[ \frac{m\pi}{l} (c-y) + 1 \right] e^{\frac{m\pi}{l}(y-c)} \cos \frac{m\pi x}{l}. \end{aligned}$$

Если величина  $(c-y)$  не очень мала, например

$$c-y \geq \frac{l}{2},$$

то этот ряд очень быстро сходится, и при вычислении напряжения  $\sigma_y$  достаточно взять небольшое число членов. При этом мы можем принять

$$\sin \frac{m\pi a}{l} = \frac{m\pi a}{l}$$

и, положив  $2aq = P$ , найдем:

$$\sigma_y = -\frac{P}{2l} - \frac{P}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{m\pi}{l} (c-y) + 1 \right] e^{\frac{m\pi}{l}(y-c)} \cos \frac{m\pi x}{l}.$$

При  $y = c - l$ , например, напряжение

$$\sigma_y = -\frac{P}{2l} - \frac{P}{l} \left( \frac{\pi+1}{e^\pi} \cos \frac{\pi x}{l} + \frac{2\pi+1}{e^{2\pi}} \cos \frac{2\pi x}{l} + \frac{3\pi+1}{e^{3\pi}} \cos \frac{3\pi x}{l} + \dots \right).$$

Чтобы получить хорошее приближение, достаточно взять первые три члена ряда. Распределение напряжений в этом случае показано на фиг. 36*b*. На той же фигуре представлены также распределения напряжений при 1)

$$c-y = \frac{l}{2} \quad \text{и} \quad c-y = 2l.$$

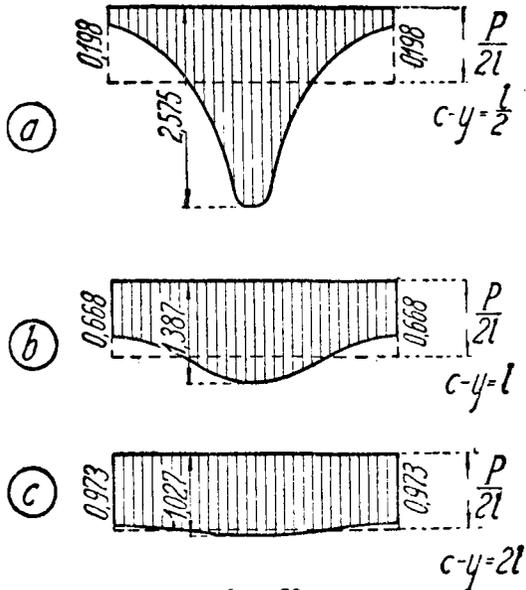
Отсюда видно, что на расстоянии от конца, равном ширине пластинки, распределение напряжений практически является равномерным, что подтверждает заключение, обычно принимаемое на основании принципа Сен-Венана.

При предыдущем рассмотрении мы не принимали во внимание условия по вертикальным граням ( $x = \pm l$ ). Для этих граней

$$\sin \alpha x = 0; \quad \cos \alpha x = \pm 1,$$

и общее решение показывает, что  $\tau_{xy} = 0$ , и что  $\sigma_x$  отлично от нуля.

Но для длинной пластинки, показанной на фиг. 35, можно принять, что напряжения  $\sigma_x$  будут передаваться через пластинку, не претерпевая существенного изменения своей величины, и не будут заметным образом влиять на распределение напряжений  $\sigma_y$ , так что величины напряжений  $\sigma_y$ , определенные выше, можно считать точными для полоски с продольными гранями, свободными от внешних усилий. Напряжения вблизи точек приложения грузов  $P$  будут рассмотрены ниже (см. стр. 96).



Фиг. 36.

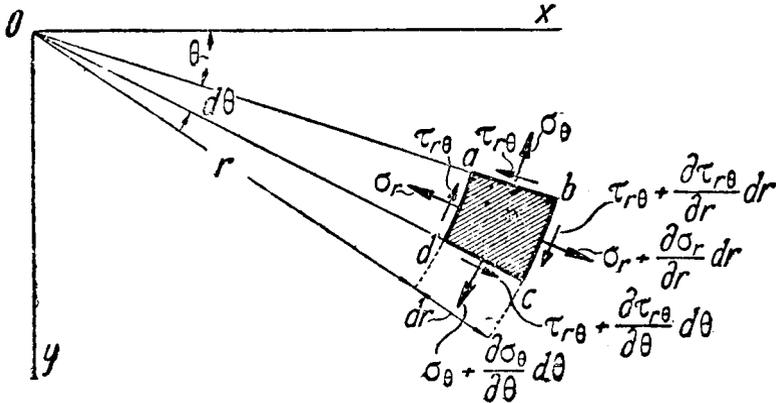
1) См. статью Ф. Блейха, упомянутую выше, в выписке на стр. 56.

## ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

### ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ.

**21. Общие уравнения в полярных координатах.** При исследовании напряжений в круглых кольцах и дисках, в кривых брусках узкого прямоугольного сечения с круговой осевой линией и т. д. представляется выгодным пользоваться полярными координатами.

Положение точки на срединной плоскости пластинки определяется расстоянием  $r$  от начала координат  $O$  (фиг. 37) и углом  $\theta$  между этим



Фиг. 37.

направлением  $r$  и некоторой осью  $Ox$ , занимающей определенное положение на плоскости.

Рассмотрим теперь равновесие малого элемента  $abcd$ , вырезанного из пластинки радиальными сечениями  $Oc$  и  $Ob$ , перпендикулярными к пластинке, и двумя нормальными к пластинке цилиндрическими поверхностями  $ad$  и  $bc$ , радиусы которых равны  $r$  и  $r + dr$ . Составляющие нормальных напряжений в радиальном направлении мы будем обозначать  $\sigma_r$ , а составляющие нормальных напряжений в тангенциальном направлении —  $\sigma_\theta$ . Для составляющей касательного напряжения будем пользоваться обозначением  $\tau_{r\theta}$ . Положительные направления составляющих напряжения указаны на фиг. 37.

Предполагая, что напряжения равномерно распределяются по сторонам рассматриваемого элемента, получим, что нормальное усилие в радиальном направлении, действующее на сторону  $ad$  элемента, равно

$$\sigma_r r d\theta$$

(толщину пластинки принимаем равной единице).

Нормальное усилие по стороне  $bc$  элемента, с учетом изменения составляющей напряжения  $\sigma_r$ , будет равно:

$$\left( \sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta.$$

Нормальные усилия, действующие на стороны  $ab$  и  $cd$ , будут соответственно

$$\sigma_\theta dr \quad \text{и} \quad \left( \sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) dr,$$

и равнодействующая их в радиальном направлении будет равна

$$\sigma_\theta dr d\theta,$$

если пренебречь бесконечно малыми величинами высших порядков малости.

Касательные усилия, действующие по сторонам  $ab$  и  $cd$ , дадут в радиальном направлении равнодействующую, равную

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta dr.$$

Предполагается также, что имеется и объемная сила  $R$ , отнесенная к единице объема, действующая в радиальном направлении; объемная сила, действующая на элемент  $abcd$ , будет таким образом равна

$$R r dr d\theta.$$

Суммируя все усилия, действующие в радиальном направлении, получим следующее уравнение равновесия:

$$\left( \sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta - \sigma_r r d\theta - \sigma_\theta dr d\theta + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} dr d\theta + R r dr d\theta = 0.$$

Таким же образом можем написать уравнение равновесия элемента, рассматривая усилия, действующие в тангенциальном направлении. Пренебрегая бесконечно малыми величинами высших порядков и сокращая множитель  $dr d\theta$ , приходим к следующим двум уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R &= 0; \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad [33]$$

Эти уравнения заменяют собой уравнения [18] (см. стр. 32), когда мы рассматриваем плоскую задачу в полярных координатах.

Если объемная сила  $R$  отсутствует, то можно применить для решения уравнений [33] функцию напряжений  $\varphi(r, \theta)$ . Подстановкой можно показать, что эти уравнения будут удовлетворены, если принять напряжения равными:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}; \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}; \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \right\} [34]$$

Любая функция  $\varphi$  от переменных  $r$  и  $\theta$ , подставленная в формулы [34], даст составляющие напряжения, удовлетворяющие уравнениям равновесия [33], когда объемная сила  $R$  равна нулю.

Для того, чтобы получить распределение напряжений, которое может иметь место в упругом теле, должно быть также удовлетворено условие совместности. При декартовых координатах, это условие требует (см. стр. 36), чтобы функция напряжений удовлетворяла уравнению:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad [a]$$

В рассматриваемом случае нам необходимо это уравнение представить в полярных координатах. Зависимость между полярными и декартовыми координатами определяется формулами:

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \theta = \arctg \frac{y}{x},$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{r} = \cos \theta; & \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{r} = \sin \theta; \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin \theta}{r}; & \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r}. \end{aligned}$$

Пользуясь этими выражениями и рассматривая  $\varphi$ , как функцию от  $r$  и  $\theta$ , найдем:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \sin \theta.$$

Чтобы получить вторую производную по  $x$ , необходимо лишь повторить предыдущее действие:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= \left( \frac{\partial}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \sin \theta \right) = \\ &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \cos^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta \partial r} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\sin^2 \theta}{r} + \\ &+ 2 \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \frac{\sin^2 \theta}{r^2}. \end{aligned} \quad [b]$$

Таким же образом мы найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \sin^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta \partial r} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\cos^2 \theta}{r} - \\ & - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \frac{\cos^2 \theta}{r^2}. \end{aligned} \quad [c]$$

Складывая вместе выражения [b] и [c], получим

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}. \quad [d]$$

Пользуясь тождеством

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)$$

и выражением [d], найдем уравнение совместности [a] в полярных координатах:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad [35]$$

Из различных решений этого дифференциального уравнения в частных производных мы получим решения плоской задачи в полярных координатах для разных условий на контуре. Рассмотрим несколько примеров таких задач.

**22. Распределение напряжений, симметричное относительно оси.** Если распределение напряжений симметрично относительно оси, проходящей через точку  $O$  перпендикулярно плоскости  $xu$  (фиг. 37), то составляющие напряжения не зависят от угла  $\theta$  и являются функциями одного лишь  $r$ . Из условий симметрии следует также, что касательное напряжение  $\tau_{r\theta}$  должно быть равно нулю. Тогда останется только первое из двух уравнений равновесия [33], и мы имеем:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R = 0. \quad [36]$$

Если объемная сила  $R$  равна нулю, мы можем воспользоваться функцией напряжений  $\varphi$ . Вследствие симметрии, эта функция зависит только от  $r$ , и уравнение совместности [35] получается таким:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = \\ & = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0. \end{aligned} \quad [37]$$

Это — обыкновенное дифференциальное уравнение, которое можно привести к линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами введением новой переменной  $t$ , определяемой формулой:

$$r = e^t.$$

Таким образом общее решение уравнения [37] можно получить без затруднений. Это решение будет содержать четыре произвольных постоянных интегрирования, которые надлежит определить из условий на контуре. Путем подстановки легко показать, что

$$\varphi = A \ln r + Br^2 \ln r + Cr^2 + D \quad [38]$$

является общим решением.

Из этого решения можно получить решения всех задач, относящихся к симметричному распределению напряжений, при отсутствии объемных сил. Соответствующие составляющие напряжения, на основании формул [34], равны:

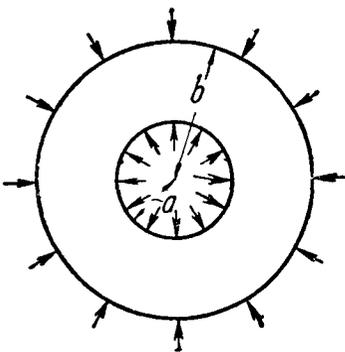
$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{A}{r^2} + B(1 + 2 \ln r) + 2C; \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = -\frac{A}{r^2} + B(3 + 2 \ln r) + 2C; \\ \tau_{r\theta} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad [39]$$

Если в начале координат нет отверстия, то произвольные постоянные  $A$  и  $B$  обращаются в нуль, так как, в противном случае, составляющие напряжения [39] обращаются в бесконечность при  $r = 0$ .

Следовательно, для пластинки, не имеющей отверстия в начале координат и не испытывающей действия объемных сил, может существовать лишь один случай напряженного состояния, симметричного относительно оси, а именно когда

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \text{const},$$

и пластинка находится в состоянии равномерного растяжения или равномерного сжатия по всем направлениям в своей плоскости.



Фиг. 38.

Если в начале координат имеется отверстие, то из выражений [39] можно получить решения, отличные от случаев равномерного растяжения или сжатия.

Приняв, например,  $B$  равным нулю, получаем выражения [39] в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{A}{r^2} + 2C; \\ \sigma_\theta &= -\frac{A}{r^2} + 2C. \end{aligned} \right\} \quad [40]$$

Это решение может быть подбором коэффициентов приведено к такому виду, что оно будет представлять распределение напряжений в полном цилиндре, подвергающемся равномерному давлению по внутренней и внешней своим поверхностям<sup>1)</sup> (фиг. 38).

<sup>1)</sup> Решение этой задачи принадлежит Ляме (Lamé), *Leçons sur la théorie... de l'élasticité*, Paris, 1852.

Пусть  $a$  и  $b$  обозначают внутренний и наружный радиусы цилиндра, а  $p_i$  и  $p_o$  — равномерное внутреннее и внешнее давления. Тогда условия на контуре будут:

$$(\sigma_r)_{r=a} = -p_i, \quad (\sigma_r)_{r=b} = -p_o. \quad [a]$$

Пользуясь первой из формул [40], мы получим отсюда следующие уравнения для определения  $A$  и  $C$ :

$$\frac{A}{a^2} + 2C = -p_i;$$

$$\frac{A}{b^2} + 2C = -p_o,$$

откуда

$$A = \frac{a^2 b^2 (p_o - p_i)}{b^2 - a^2};$$

$$2C = \frac{p_i a^2 - p_o b^2}{b^2 - a^2}.$$

Подставив эти значения в формулы [40], найдем следующие выражения для составляющих напряжения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{a^2 b^2 (p_o - p_i)}{b^2 - a^2} \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{p_i a^2 - p_o b^2}{b^2 - a^2}; \\ \sigma_\theta &= -\frac{a^2 b^2 (p_o - p_i)}{b^2 - a^2} \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{p_i a^2 - p_o b^2}{b^2 - a^2}. \end{aligned} \right\} [41]$$

Интересно отметить, что сумма  $\sigma_r + \sigma_\theta$  — постоянна по всей толщине стенок цилиндра. Поэтому напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  вызывают равномерное расширение или укорочение в направлении оси цилиндра, и сечения перпендикулярные к ней остаются плоскими. Следовательно, деформация, возникающая вследствие напряжений [41] в элементе цилиндра, вырезанном двумя смежными сечениями, не препятствует деформации смежных элементов. Вследствие этого мы имеем право считать элемент находящимся в плоском напряженном состоянии, что нами и было предположено при предыдущем исследовании.

В частном случае, когда  $p_o = 0$ , и цилиндр подвергается лишь внутреннему давлению, формулы [41] принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{a^2 p_i}{b^2 - a^2} \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right); \\ \sigma_\theta &= \frac{a^2 p_i}{b^2 - a^2} \left( 1 + \frac{b^2}{r^2} \right). \end{aligned} \right\} [42]$$

Эти выражения показывают, что напряжение  $\sigma_r$  всегда — сжимающее, а  $\sigma_\theta$  — растягивающее. Последнее достигает наибольшего значения на внутренней поверхности цилиндра, где оно равно

$$(\sigma_\theta)_{\max} = \frac{p_i (a^2 + b^2)}{b^2 - a^2}. \quad [43]$$

Напряжение  $(\sigma_\theta)_{\max}$  всегда по абсолютной величине больше, чем внутреннее давление. Оно приближается к величине последнего с увеличением радиуса  $b$ , но никогда не может оказаться ниже  $p_1$ , как бы мы ни увеличивали количество материала снаружи.

Различные применения выражений [42] и [43] при расчете машин обычно рассматриваются в элементарных курсах сопротивления материалов<sup>1)</sup>.

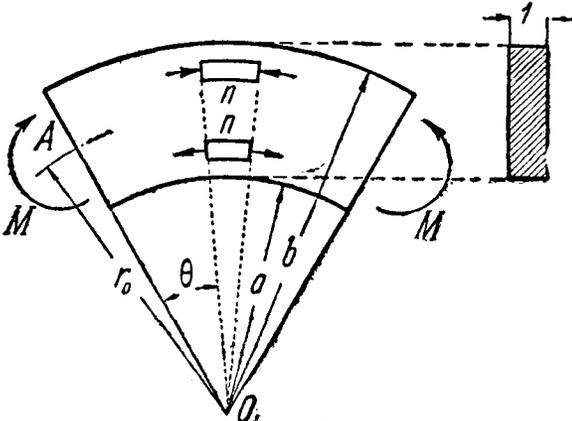
Соответствующая задача для цилиндра с эксцентричным отверстием была решена Джеффри<sup>2)</sup>. Если радиус отверстия равен  $a$ , радиус наружной поверхности —  $b$ , а расстояние между их центрами равно  $e$ , то наибольшим напряжением в случае цилиндра, подвергающегося внутреннему давлению  $p_1$ , будет напряжение в тангенциальном направлении на внутренней поверхности в наиболее тонкой части, при

$$e < \frac{1}{2} a.$$

Величина его будет равна

$$\sigma = p_1 \left[ \frac{2b^2(b^2 + a^2 - 2ae - e^2)}{(a^2 + b^2)(b^2 - a^2 - 2ae - e^2)} - 1 \right].$$

Если  $e=0$ , то это выражение совпадает с формулой [43].



Фиг. 39.

### 23. Чистый изгиб кривых брусьев.

Рассмотрим кривой брус постоянного сечения в виде узкого прямоугольника<sup>3)</sup>, с круговой осевой линией, изгибаемый в плоскости своей кривизны парами сил  $M$ , приложенными по концам (фиг. 39). Изгибающий момент в этом случае будет постоянным по длине бруса, и естественно ожидать, что распределение на-

пряжения окажется одинаковым во всех радиальных сечениях, и что, следовательно, решение задачи можно получить с помощью выражения [36].

<sup>1)</sup> См. например, книгу автора, Сопротивление материалов, часть II, русское издание, 1934 г., стр. 134.

<sup>2)</sup> См. G. B. Jeffery, „Phil. Trans. Roy. Soc., London“, series A, vol. 221, 1921, p. 265. См. также „British Assoc. Adv. Sci. Repts.“, 1921.

<sup>3)</sup> Из общего рассмотрения плоской задачи (параграф 12) следует, что решение, полученное ниже, применимо также для другого крайнего случая, когда размер сечения, перпендикулярный к плоскости кривизны, будет очень велик, как, например, в случае туннельного свода (см. фиг. 10, стр. 25), если нагрузка одинакова по всей длине туннеля.

Обозначив через  $a$  и  $b$  внутренний и наружный радиусы контуров бруса и приняв толщину прямоугольного сечения за единицу, получим следующие условия на контуре:

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad \sigma_r &= 0 && \text{при } r = a \text{ и } r = b; \\ 2) \quad \int_a^b \sigma_\theta dr &= 0, && \int_a^b \sigma_\theta r dr = -M \\ 3) \quad \tau_{r\theta} &= 0 && \text{на контуре.} \end{aligned} \right\} [a]$$

Первое условие обозначает, что выпуклая и вогнутая поверхности бруса свободны от нормальных усилий; второе условие показывает, что нормальные напряжения по концам сводятся к паре сил с моментом  $M$ , и третье условие, — что на контуре тангенциальных усилий нет.

Пользуясь первым из выражений [39] и первым условием на контуре [a], получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{A}{a^2} + B(1 + 2 \ln a) + 2C &= 0; \\ \frac{A}{b^2} + B(1 + 2 \ln b) + 2C &= 0. \end{aligned} \right\} [b]$$

Из второго условия на контуре [a], найдем:

$$\int_a^b \sigma_\theta dr = \int_a^b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} dr = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_a^b = 0.$$

Или, подставив вместо функции  $\varphi$  ее выражение [38], имеем:

$$\left[ \frac{A}{b} + B(b + 2b \ln b) + 2Cb \right] - \left[ \frac{A}{a} + B(a + 2a \ln a) + 2Ca \right] = 0. [c]$$

Сравнивая это уравнение с уравнениями [b], легко заметить, что оно удовлетворяется тождественно, и все силы по концам сводятся к паре сил, если только выполнены условия [b].

Чтобы изгибающая пара сил равнялась изгибающему моменту  $M$ , должно быть выполнено следующее условие:

$$\int_a^b \sigma_\theta r dr = \int_a^b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} r dr = -M. [d]$$

Выполнив интегрирование, имеем:

$$\int_a^b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} r dr = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial r} r \right|_a^b - \int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial r} dr = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial r} r \right|_a^b - \left| \varphi \right|_a^b.$$

Заметив, что согласно уравнению [c],

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial r} r \right|_a^b = 0,$$

найдем, на основании уравнения [d], что

$$|\varphi|_a^b = M,$$

или, подставив выражение [38] вместо  $\varphi$ , имеем:

$$A \ln \frac{b}{a} + B(b^2 \ln b - a^2 \ln a) + C(b^2 - a^2) = M. \quad [e]$$

Это уравнение, вместе с двумя уравнениями [b], вполне определяет произвольные постоянные  $A$ ,  $B$  и  $C$ , и мы находим:

$$\left. \begin{aligned} A &= -\frac{4M}{N} a^2 b^2 \ln \frac{b}{a}; \\ B &= -\frac{2M}{N} (b^2 - a^2); \\ C &= \frac{M}{N} [b^2 - a^2 + 2(b^2 \ln b - a^2 \ln a)], \end{aligned} \right\} [f]$$

где для упрощения принято обозначение:

$$N = (b^2 - a^2)^2 - 4a^2 b^2 \left( \ln \frac{b}{a} \right)^2. \quad [g]$$

Подставив найденные значения произвольных постоянных [f] в выражения [39] для составляющих напряжения, получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{4M}{N} \left( \frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} + b^2 \ln \frac{r}{b} + a^2 \ln \frac{a}{r} \right); \\ \sigma_\theta &= -\frac{4M}{N} \left( -\frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} + b^2 \ln \frac{r}{b} + a^2 \ln \frac{a}{r} + b^2 - a^2 \right); \\ \tau_{r\theta} &= 0. \end{aligned} \right\} [44]$$

Эти выражения дают распределение напряжений, удовлетворяющее всем условиям на контуре [a]<sup>1)</sup> для чистого изгиба, и представляет

<sup>1)</sup> Это решение принадлежит *Х. Головину*, „Известия Технологического Института“, Петербург, 1881 г. Статья, опубликованная на русском языке, осталась неизвестной в других странах, и ту же задачу решил позднее *М. Рибьер* (*M. C. Ribière*) „Comptes Rendus“, t. 108, 1889 и t. 132, 1901, и *Л. Прандтль* (*L. Prandtl*). См. *А. Фёппль* (*A. Föppel*), Vorlesungen über technische Mechanik, Bd 5, 1907, S. 72, а также статью *А. Тимпе*, упомянутую выше в выноске на стр. 38.

собой точное решение задачи, если только распределение нормальных усилий по концам таково, как это следует по второму из выражений [44].

Если усилия, образующие изгибающую пару  $M$ , распределены по концам стержня каким-нибудь иным образом, то распределение напряжений у концов будет отличным от того, которое дает решение [44]. Но на основании принципа Сен-Венана можно заключить, что отклонения от решения [44] очень невелики, и ими можно пренебречь на значительном расстоянии от концов, т. е. при расстояниях больших, чем высота сечения стержня.

Практически представляется интересным сравнить решение [44] с элементарными решениями, которые обычно даются в курсах сопротивления материалов.

Если высота стержня  $(b - a)$  мала по сравнению с радиусом его осевой линии

$$\frac{b + a}{2},$$

то обычно предполагают распределение напряжений одинаковым с прямолинейным брусом.

Если эта высота не мала, обычно на практике допускают, что сечения бруса остаются при изгибе плоскими, откуда выводят, что распределение нормальных напряжений в любом сечении следует гиперболическому закону <sup>1)</sup>.

Во всех случаях, наибольшие и наименьшие значения напряжения  $\sigma_0$  могут быть представлены в следующем виде:

$$\sigma_0 = m \frac{M}{a^3}. \quad [h]$$

Таблица 1 дает значения коэффициента  $m$ , вычисленные по обоим упомянутым выше элементарным способам и по точной формуле [44] <sup>2)</sup>

ТАБЛИЦА 1.

Значения коэффициента  $m$  в формуле [h].

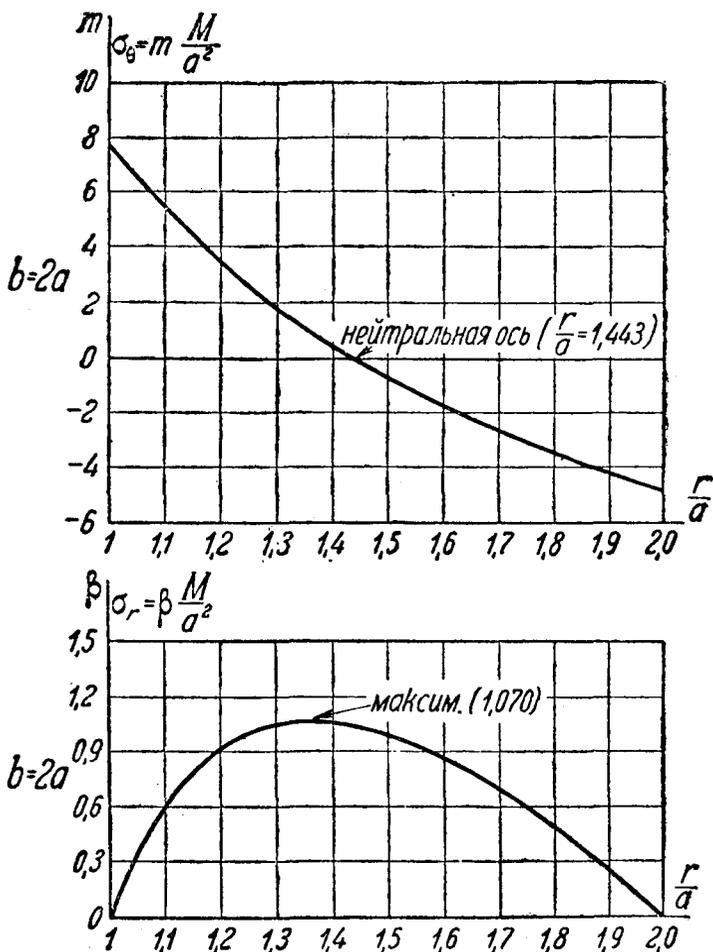
$\frac{b}{a}$	Линейное распределение напряжений	Распределение напряжений по гиперболическому закону	Точное решение
1,3	$\pm 66,67$	$+ 72,98, \quad - 61,27$	$+ 73,05, \quad - 61,25$
2	$\pm 6,000$	$+ 7,725, \quad - 4,863$	$+ 7,755, \quad - 4,917$
3	$\pm 1,500$	$+ 2,285, \quad - 1,095$	$+ 2,292, \quad - 1,130$

<sup>1)</sup> Эта приближенная теория была предложена *Резалем* (*H. Résal*), „Ann. mines“ 1862, p. 617, и *Винклером* (*E. Winkler*), „Zivilingenieur, Bd 5, 1858, S. 232. См. также его книгу *Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit*, Kap. 15, Prag, 1867. Дальнейшее развитие этой теории принадлежит *Грасгофу* (*F. Grashof*), *Elastizität und Festigkeit*, 1878, S. 251, и *Пирсону*, см. книгу *Тоддэнтера и Пирсона* (*I. Toddhunter and K. Pearson*), *History of the Theory of Elasticity*, vol. 2, pt. 1, 1893, p. 422.

<sup>2)</sup> Эти данные взяты из докторской диссертации *В. Билевича* (*Billewicz*), Univ. Michigan, 1931.

Из этой таблицы видно, что элементарное решение, основанное на гипотезе плоских сечений, дает очень точные результаты.

Ниже будет показано, что в случае чистого изгиба сечения действительно остаются плоскими, и расхождение между элементарным и



Фиг. 40.

точным решениями: происходит оттого, что при элементарном решении пренебрегают составляющей напряжения  $\sigma_r$  и предполагают, что продольные волокна изогнутого бруса испытывают простое растяжение или сжатие.

С помощью первой из формул [44] можно показать, что напряжение  $\sigma_r$  всегда положительно при направлении изгиба, представленном на фиг. 39. То же самое можно заключить непосредственно по направлению напряжений  $\sigma_\theta$ , действующих на элементы  $n, n$  на фиг. 39.

Соответствующие тангенциальные усилия дают равнодействующую в радиальном направлении, стремящуюся отделить продольные волокна и вызывающую растягивающее напряжение в радиальном направлении. Это напряжение увеличивается по направлению к нейтральной поверхности и достигает максимума вблизи этой поверхности. Названный максимум всегда много меньше, чем  $(\sigma_\theta)_{\max}$ .

Например: при  $b : a = 1,3$   $(\sigma_r)_{\max} = 0,60 (\sigma_\theta)_{\max}$ ; при  $b : a = 2$   $(\sigma_r)_{\max} = 0,138 (\sigma_\theta)_{\max}$ ; при  $b : a = 3$   $(\sigma_r)_{\max} = 0,193 (\sigma_\theta)_{\max}$ .

На фиг. 40 показано распределение напряжений  $\sigma_\theta$  и  $\sigma_r$  при  $b : a = 2$ . Из второй диаграммы этой фигуры мы видим, что точка, соответствующая наибольшему значению напряжения  $\sigma_r$ , несколько смещена с нейтральной оси в направлении к центру кривизны.

**24. Составляющие деформации в полярных координатах.** При рассмотрении перемещения в полярных координатах, обозначим через  $u$  и  $v$  составляющие перемещения, соответственно в радиальном и тангенциальном направлениях.

Если  $u$  — радиальное перемещение стороны  $ad$  элемента  $abcd$  (фиг. 37), то радиальное перемещение стороны  $bc$  равно:

$$u + \frac{\partial u}{\partial r} r.$$

Тогда относительное удлинение элемента  $abcd$  в радиальном направлении

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}. \quad [45]$$

Что касается деформации в тангенциальном направлении, то следует заметить, что она зависит не только от перемещения  $v$ , но также и от радиального перемещения  $u$ .

Предположим, например, что точки  $a$  и  $d$  элемента  $abcd$  (фиг. 37) имеют одно лишь радиальное перемещение  $u$ ; тогда новая длина дуги  $ad$  будет

$$(r + u) d\theta,$$

и тангенциальная деформация поэтому равна

$$\frac{(r + u) d\theta - r d\theta}{r d\theta} = \frac{u}{r}.$$

Разность тангенциальных перемещений сторон  $ab$  и  $cd$  элемента  $abcd$  будет

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} d\theta,$$

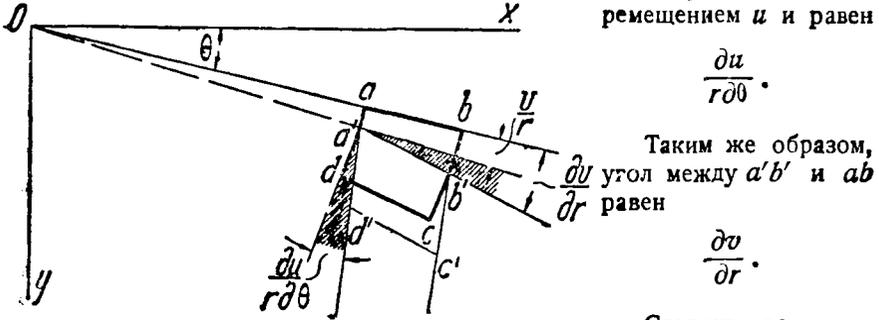
и, соответственно этому, тангенциальная деформация от перемещения  $v$  имеет величину

$$\frac{\partial v}{r \partial \theta}.$$

Таким образом полная тангенциальная деформация равна

$$\epsilon_{\theta} = \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta}. \quad [46]$$

Рассмотрим теперь сдвиг. Пусть  $a'b'c'd'$  — положение элемента  $abcd$  после деформации (фиг. 41). Угол между направлением  $ad$  и  $a'd'$  вызывается радиальным перемещением  $u$  и равен



Фиг. 41.

Следует заметить, что лишь часть этого угла (заштрихованная на чертеже) соответствует сдвигу, другая же часть, равная

$$\frac{v}{r},$$

представляет собою угловое перемещение вследствие поворота элемента  $abcd$ , как твердого тела, относительно оси, проходящей через точку  $O$ .

Следовательно, полное изменение угла  $dab$ , являющееся деформацией сдвига, равно

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}. \quad [47]$$

Подставив теперь выражения для составляющих деформаций [45], [46] и [47] в формулы закона Гука <sup>1)</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_{\theta}); \\ \epsilon_{\theta} &= \frac{1}{E} (\sigma_{\theta} - \nu \sigma_r); \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{G} \tau_{r\theta}, \end{aligned} \right\} \quad [48]$$

<sup>1)</sup> Здесь предположено, что мы имеем дело с плоским напряженным состоянием, и что напряжений  $\sigma_z$ , перпендикулярных к плоскости пластинки, нет (см. стр. 24).

получим достаточное число уравнений для определения перемещений  $u$  и  $v$ .

**25. Перемещения при симметричном распределении напряжений.** Подставив в первую из формул [48] составляющие напряжения по выражениям [39], найдем:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{E} \left[ \frac{(1+\nu)A}{r^2} + 2(1-\nu)B \ln r + (1-3\nu)B + 2(1-\nu)C \right].$$

Интегрируя, получим

$$u = \frac{1}{E} \left[ -\frac{(1+\nu)A}{r} + 2(1-\nu)Br \ln r - B(1+\nu)r + 2C(1-\nu)r \right] + f(\theta), \quad [a]$$

где  $f(\theta)$  — функция от одного только  $\theta$ .

Из второго выражения [48] имеем, пользуясь формулой [46]:

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{4Br}{E} - f(\theta),$$

откуда, интегрируя, получаем

$$v = \frac{4Br\theta}{E} - \int f(\theta) d\theta + f_1(r), \quad [b]$$

где  $f_1(r)$  — функция одного лишь  $r$ .

Подставив найденные значения перемещений [a] и [b] в выражение [47] и заметив, что  $\gamma_{r\theta}$  равно нулю, так как  $\tau_{r\theta}$  нуль, найдем:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial f_1(r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \int f(\theta) d\theta - \frac{1}{r} f_1(r) = 0,$$

откуда

$$f_1(r) = Fr, \quad f(\theta) = H \sin \theta + K \cos \theta, \quad [c]$$

где  $F$ ,  $H$  и  $K$  — постоянные, которые подлежат определению из уравнений связей для кривого бруса или кольца.

Подставив выражения [c] в формулы [a] и [b], получим следующие выражения для перемещений:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{E} \left[ -\frac{(1+\nu)A}{r} + 2(1-\nu)Br \ln r - B(1+\nu)r + \right. \\ &\quad \left. + 2C(1-\nu)r \right] + H \sin \theta + K \cos \theta; \\ v &= \frac{4Br\theta}{E} + Fr + H \cos \theta - K \sin \theta; \end{aligned} \right\} [49]$$

в эти выражения должны быть подставлены значения постоянных  $A$ ,  $B$  и  $C$  для каждого частного случая.

Рассмотрим, например, чистый изгиб. Приняв центр тяжести  $A$  сечения, от которого измеряется угол  $\theta$  (фиг. 39), а также элемент радиуса, проходящего через эту точку, жестко закрепленными, получим следующие уравнения связей:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = 0, \quad [d]$$

при

$$\theta = 0 \quad \text{и} \quad r = r_0 = \frac{a+b}{2}.$$

Применяя эти условия к выражениям [49], получим следующие уравнения для определения произвольных постоянных интегрирования  $F$ ,  $H$  и  $K$ :

$$\begin{aligned} -\frac{(1+\nu)A}{r_0} + 2(1-\nu)Br_0 \ln r_0 - B(1+\nu)r_0 + 2C(1-\nu)r_0 + EK &= 0, \\ Fr_0 + H &= 0; \\ F &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $F = H = 0$ , и для перемещения  $v$  мы имеем:

$$v = \frac{4Br\theta}{E} - K \sin \theta. \quad [50]$$

Это выражение показывает, что перемещение любого сечения состоит из поступательного перемещения  $-K \sin \theta$ , одинакового для всех точек сечения, и из поворота сечения на угол:

$$\frac{4B\theta}{E}$$

относительно центра кривизны  $O$  (фиг. 39). Мы видим, что сечения остаются при чистом изгибе плоскими, как это обычно и предполагается в элементарной теории изгиба кривых брусьев.

При рассмотрении симметричного распределения напряжений в сплошном кольце (стр. 68), постоянная  $B$  в общем решении [39], была принята равной нулю, и таким образом мы пришли к решению задачи Ляме.

Теперь, после получения выражений [49] для перемещений, мы видим, какой смысл имеет предположение, что  $B$  равно нулю. Постоянная  $B$  входит в выражение для перемещения  $v$  в составе члена

$$\frac{4Br\theta}{E}.$$

Этот член *не является однозначным*, так как он изменяется, когда мы увеличим угол  $\theta$  на  $2\pi$ , т. е. если мы придем к данной точке, сделав полный круг по кольцу. Такое *многозначное* выражение для перемещения в случае сплошного кольца физически невозможно, и поэтому мы должны в этом случае принять  $B$  равным нулю в общем решении [39].

Сплошное кольцо является примером *многосвязного* тела, т. е. такого тела, в котором можно провести сечения, не делящие тело на две части. При определении напряжений в таких телах, мы обычно приходим к заключению, что условия на контуре для напряжений не являются достаточными для полного выяснения напряженного состояния, и необходимо принять во внимание добавочные уравнения, выражающие те условия, что перемещения должны являться однозначными (см. стр. 133).

Физическое значение многозначности решений можно объяснить путем рассмотрения начальных напряжений, возможных в многосвязном теле.

Если вырезать часть кольца между двумя смежными сечениями (фиг. 42) и концы кольца соединить снова спайкой или иным путем, в кольце появятся начальные напряжения, т. е. в этом случае в кольце будут напряжения при отсутствии внешних сил.

Если  $\alpha$  — малый угол, измеряющий ту часть кольца, которая нами вырезана, то тангенциальное перемещение, необходимое для соединения концов кольца вместе, равно

$$v = ar. \quad [e]$$

То же перемещение, полученное по формуле [50], если положить угол  $\theta$  равным  $2\pi$ , будет

$$v = 2\pi \frac{4Br}{E}. \quad [f]$$

Из выражений [e] и [f] находим

$$B = \frac{\alpha E}{8\pi}. \quad [g]$$

Постоянная  $B$ , входящая в состав многозначного члена выражения для перемещения [50], имеет теперь определенную величину, зависящую от того способа, которым были вызваны начальные напряжения в кольце.

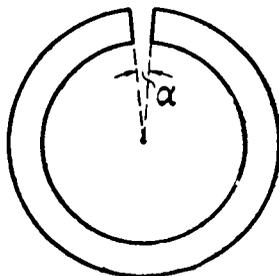
Подставив значение [g] во второе выражение [f] параграфа 23 (см. стр. 72), мы найдем, что изгибающий момент, необходимый для соединения вместе концов кольца (фиг. 42), равен

$$M = -\frac{\alpha E}{8\pi} \frac{(b^2 - a^2)^2 - 4a^2 b^2 \left( \ln \frac{b}{a} \right)^2}{2(b^2 - a^2)}. \quad [h]$$

Из этого выражения легко получить начальные напряжения в кольце при помощи решения [44] для случая чистого изгиба.

**26. Вращающиеся диски.** Распределение напряжений во вращающихся круглых дисках имеет большое практическое значение<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Полное исследование этой задачи и библиографию по этому вопросу можно найти в широко известной книге А. Стодола (A. Stodola), Dampf- und Gas-Turbinen, 6 Aufl., 1924, S. 312 und 889.



Фиг. 42.

Если толщина диска мала по сравнению с его радиусом, то изменениями радиальных и тангенциальных напряжений по толщине диска можно пренебречь<sup>1)</sup>, и задачу нетрудно решить<sup>2)</sup>.

Если толщина диска постоянна, то можно применить уравнение [36], причем необходимо лишь принять во внимание объемную силу, равную силе инерции<sup>3)</sup>. Тогда

$$R = \rho \omega^2 r, \quad [a]$$

где  $\rho$  — масса единицы объема материала диска, и  $\omega$  — угловая скорость вращения диска.

Уравнение [36] можно тогда написать в следующем виде:

$$\frac{d}{dr}(r\sigma_r) - \sigma_\theta + \rho\omega^2 r^2 = 0. \quad [b]$$

Это уравнение удовлетворяется, если мы выразим составляющие напряжения в зависимости от функции напряжений  $\varphi$  следующим образом:

$$\sigma_r = \varphi; \quad \sigma_\theta = \frac{d\varphi}{dr} + \rho\omega^2 r^2. \quad [c]$$

Составляющие деформации, в случае симметрии, будут согласно выражений [45] и [46] равны:

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \epsilon_\theta = \frac{u}{r}.$$

Исключая перемещение  $u$  из этих уравнений, мы найдем:

$$\epsilon_\theta - \epsilon_r + r \frac{d\epsilon_\theta}{dr} = 0. \quad [d]$$

Подставив вместо составляющих деформации их выражения в зависимости от составляющих напряжений [48] и пользуясь формулами [c], найдем, что функция напряжений  $\varphi$  должна удовлетворять следующему уравнению:

$$r^2 \frac{d^2\varphi}{dr^2} + r \frac{d\varphi}{dr} - \varphi + (3 + \nu)\rho\omega^2 r^3 = 0. \quad [e]$$

Подстановкой можно убедиться в том, что общим решением этого уравнения является функция

$$\varphi = Cr + C_1 \frac{1}{r} - \frac{3 + \nu}{8} \rho\omega^2 r^3, \quad [f]$$

<sup>1)</sup> Точное решение задачи для диска, имеющего вид плоского эллипсоида вращения, было получено Кпу (C. Chree), см. „Proc. Roy. Soc., London“, vol. 58, 1895, p. 39. Оно показывает, что разница между наибольшим и наименьшим напряжениями по оси вращения составляет всего лишь 5% наибольшего напряжения в диске постоянной толщины, составляющей одну восьмую его диаметра.

<sup>2)</sup> Более детальное исследование этой задачи будет приведено ниже (см. параграф 101).

<sup>3)</sup> Весом диска пренебрегаем.

после чего из выражений [c] найдем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= C + C_1 \frac{1}{r^2} - \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 r^2; \\ \sigma_\theta &= C - C_1 \frac{1}{r^2} - \frac{1+3\nu}{8} \rho \omega^2 r^2. \end{aligned} \right\} [g]$$

Произвольные постоянные интегрирования  $C$  и  $C_1$  определяются из условий на контуре.

При сплошном диске мы должны принять  $C_1$  равным нулю, так как в противном случае напряжения [g] становятся бесконечно большими в центре диска. Произвольная постоянная  $C$  определится из условия на наружном контуре ( $r=b$ ) диска. Если по этому контуру не приложено никаких сил, то

$$(\sigma_r)_{r=b} = C - \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 b^2 = 0,$$

откуда

$$C = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 b^2,$$

и составляющие напряжения, на основании выражений [g] равны:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 (b^2 - r^2); \\ \sigma_\theta &= \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 b^2 - \frac{1+3\nu}{8} \rho \omega^2 r^2. \end{aligned} \right\} [51]$$

Эти напряжения будут наибольшими в центре диска, где

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 b^2. [52]$$

В случае диска с круглым отверстием радиуса  $a$  в центре, произвольные постоянные интегрирования в формулах [g] получатся из условий на внутреннем и внешнем контурах диска. Если по этим контурам не действуют никакие силы, то мы имеем:

$$(\sigma_r)_{r=a} = 0 \quad \text{и} \quad (\sigma_r)_{r=b} = 0, [h]$$

откуда находим, что:

$$C = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 (b^2 + a^2); \quad C_1 = -\frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 a^2 b^2.$$

Подставив в выражения [g] для напряжений, получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \left( b^2 + a^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2} - r^2 \right); \\ \sigma_\theta &= \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \left( b^2 + a^2 + \frac{a^2 b^2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu} r^2 \right). \end{aligned} \right\} [53]$$

При  $r = \sqrt{ab}$ , мы найдем наибольшее радиальное напряжение:

$$(\sigma_r)_{\max} = \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 (b - a)^2. \quad [54]$$

Наибольшее тангенциальное напряжение будет на внутреннем контуре, где оно равно:

$$(\sigma_\theta)_{\max} = \frac{3 + \nu}{4} \rho \omega^2 \left( b^2 + \frac{1 - \nu}{3 + \nu} a^2 \right). \quad [55]$$

Очевидно, что это последнее напряжение больше, чем  $(\sigma_r)_{\max}$ .

Когда величина радиуса  $a$  отверстия приближается к нулю, наибольшее тангенциальное напряжение приближается к значению вдвое большему, чем получающееся для сплошного диска по формуле [52]; т. е. сделав небольшое круглое отверстие в центре сплошного вращающегося диска, мы удваиваем наибольшие напряжения. Это явление *концентрации напряжений у отверстия* будет рассмотрено ниже (см. стр. 89).

Если предположить, что напряжения не меняются по толщине диска, то показанный выше способ определения напряжений для дисков постоянной толщины может быть распространен также и на случай *дисков переменной толщины*. Если  $h$  — толщина диска, изменяющаяся с изменением величины радиуса  $r$ , то уравнение равновесия элемента, подобного показанному на фиг. 37 (стр. 64), будет таково:

$$\frac{d}{dr} (hr \sigma_r) - h \sigma_\theta + h \rho \omega^2 r^3 = 0. \quad [k]$$

Это уравнение удовлетворяется, если положить:

$$hr \sigma_r = \varphi; \quad h \sigma_\theta = \frac{d\varphi}{dr} + h \rho \omega^2 r^3,$$

где  $\varphi$ , как и раньше, является функцией напряжений.

Подставив эти выражения для составляющих напряжения в уравнение совместности [d], мы приходим к следующему уравнению для функции напряжений  $\varphi$ :

$$r^2 \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + r \frac{d\varphi}{dr} - \varphi + (3 + \nu) h \rho \omega^2 r^3 - \frac{r}{h} \frac{dh}{dr} \left( r \frac{d\varphi}{dr} - \nu \varphi \right) = 0. \quad [l]$$

Таким образом, задача нахождения распределения напряжений в диске переменной толщины сводится к решению уравнения [l].

В частном случае, когда толщина меняется по уравнению

$$h = Cr^n, \quad [m]$$

где  $C$  — постоянная и  $n$  — любое число, уравнение [l] может быть легко проинтегрировано<sup>1)</sup>. Общее решение имеет следующий вид:

$$\varphi = mr^{n+3} + Ar^k + Br^p,$$

<sup>1)</sup> Этот случай был исследован А. Стодолой (A. Stodola), см. труд его, упомянутый выше, в выноске на стр. 79. См. также Гольцер (H. Holzer), „Z. ges. Turbinenwesen“, 1915.

где

$$m = - \frac{(3 + \nu) \rho \omega^2 C}{(\nu n + 3n + 8)},$$

показатели степеней  $\alpha$  и  $\beta$  — корни квадратного уравнения:

$$x^2 - nx + \nu n - 1 = 0,$$

а величины  $A$  и  $B$  являются произвольными постоянными интегрирования, которые определяются из условий на контуре.

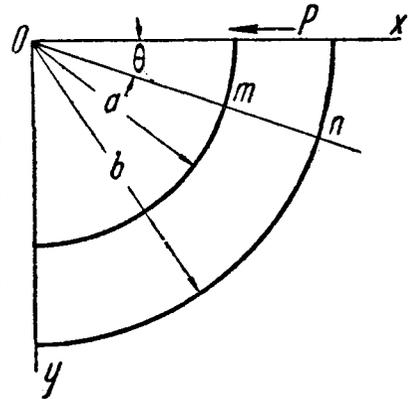
Хорошее приближение к действительным формам вращающихся дисков можем получить, разделив диск на части и подобрав приближенно для каждой части кривую типа  $[m]$ <sup>1)</sup>.

Случай конического диска был рассмотрен несколькими авторами<sup>2)</sup>.

Очень часто при определении напряжений в дисках делят диск на части и рассматривают каждую часть, как диск постоянной толщины<sup>3)</sup>.

**27. Изгиб кривого бруса силой на конце**<sup>4)</sup>. Начнем с простейшего случая, изображенного на фиг. 43. Стержень поперечного сечения в виде узкого прямоугольника с круговой осевой линией заделан нижним концом и изгибается силой  $P$ , приложенной к верхнему концу и действующей в радиальном направлении.

Изгибающий момент в любом поперечном сечении  $mn$  бруса пропорционален  $\sin \theta$ , и, согласно элементарной теории изгиба кривых брусьев, нормальное напряжение  $\sigma_\theta$  пропорционально изгибающему моменту. Предположим, что это имеет силу также и при точном решении (допущение, оправдываемое результатами). Тогда найдем, по второму из выражений [34], что функция напряжений  $\varphi$ , удовлетворяющая уравнению:



Фиг. 43.

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0, \quad [a]$$

должна быть пропорциональна  $\sin \theta$ .

<sup>1)</sup> См. Грюблер (M. Grüber), „V. D. I.“, Bd 50, 1906, S. 535.

<sup>2)</sup> См. А. Фишер (A. Fischer), „Z. österr. Ing. Arch. Vereins“, Bd 74, 1922, S. 46; Г. Мартин (H. M. Martin), „Engineering“, vol. 115, 1923, p. 1; Б. Годкинсон (B. Hodgkinson), „Engineering“, vol. 116, 1923, p. 274.

<sup>3)</sup> Этот способ был предложен М. Донатом (M. Donath). См. его книгу Die Berechnung rotierender Scheiben und Ringe, Berlin 1912. На английском языке этот способ описан Гурлем (H. Hearle) в „Engineering“, vol. 106, 1918, p. 131. Дальнейшее развитие этого способа было предложено Р. Граммелем (R. Grammel), „Dinglers polytechn. Journ“, Bd 338, 1923, S. 217. Диски, материал которых не следует закону Гука, были исследованы М. Грюблером (M. Grüber), „V. D. I.“, Bd 41, 1897, S. 860, и Bd 44, 1900, S. 1157. (см. также Г. Шлехтвег (H. Schlechtweg), „Z. angew. Math. u. Mech.“, Bd 11, 1931, S. 17 и „Ingenieur-Archiv“, Bd 2, 1931, S. 212.

<sup>4)</sup> Х. Головин, см. статью, упомянутую выше в выноске на стр. 72.

Приняв

$$\varphi = f(r) \sin \theta \quad [b]$$

и подставив это значение в уравнение [a], получим, что функция  $f(r)$  должна удовлетворять следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) \left( \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{f}{r^2} \right) = 0. \quad [c]$$

Это уравнение может быть преобразовано в линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами (см. стр. 67), и общее его решение будет таким:

$$f(r) = Ar^3 + B \frac{1}{r} + Cr + Dr \ln r, \quad [d]$$

где  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  — произвольные постоянные интегрирования, которые определяются из условий на контуре.

Подставив решение [d] в выражение [b] для функции напряжений и пользуясь общими формулами [34], найдем следующие значения составляющих напряжения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = \left( 2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r} \right) \sin \theta; \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = \left( 6Ar + \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r} \right) \sin \theta; \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = -\left( 2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r} \right) \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad [56]$$

Из того условия, что наружный и внутренний контуры кривого бруса (фиг. 43) свободны от внешних сил, заключаем, что

$$\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{при} \quad r = a \quad \text{и} \quad r = b,$$

или, согласно выражений [56]:

$$\left. \begin{aligned} 2Aa - \frac{2B}{a^3} + \frac{D}{a} &= 0; \\ 2Ab - \frac{2B}{b^3} + \frac{D}{b} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad [e]$$

Наконец, последнее условие состоит в том, что сумма касательных усилий, распределенных по верхнему краю стержня, должна быть равна силе  $P$ . Приняв толщину сечения равной единице, или, иначе говоря, считая

силу  $P$  как силу, отнесенную к единице толщины пластинки, получим, при  $\theta = 0$ , следующее уравнение:

$$\int_a^b \tau_{r\theta} dr = - \int_a^b \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) dr = \left| \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right|_b^a =$$

$$= \left| Ar^2 + \frac{B}{r^2} + C + D \ln r \right|_b^a = P,$$

или

$$-A(b^2 - a^2) + B \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2} - D \ln \frac{b}{a} = P. \quad [f]$$

Из уравнений [e] и [f] находим:

$$A = \frac{P}{2N}, \quad B = -\frac{Pa^2 b^2}{2N}, \quad D = -\frac{P}{N}(a^2 + b^2), \quad [g]$$

где

$$N = a^2 - b^2 + (a^2 + b^2) \ln \frac{b}{a}.$$

Подставляя значения [g] произвольных постоянных интегрирования в формулы [56], получим выражения для составляющих напряжения.

Для верхнего конца стержня, при  $\theta = 0$ , найдем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\theta} &= 0; \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{P}{N} \left[ r + \frac{a^2 b^2}{r^3} - \frac{1}{r} (a^2 + b^2) \right]. \end{aligned} \right\} \quad [h]$$

Для нижнего конца, при  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , имеем:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{r\theta} &= 0; \\ \sigma_{\theta} &= \frac{P}{N} \left[ 3r - \frac{a^2 b^2}{r^3} - (a^2 + b^2) \frac{1}{r} \right]. \end{aligned} \right\} \quad [k]$$

Выражения [56] представляют точное решение задачи, если только усилия по концам кривого бруса распределены таким образом, как это следует из выражений [h] и [k].

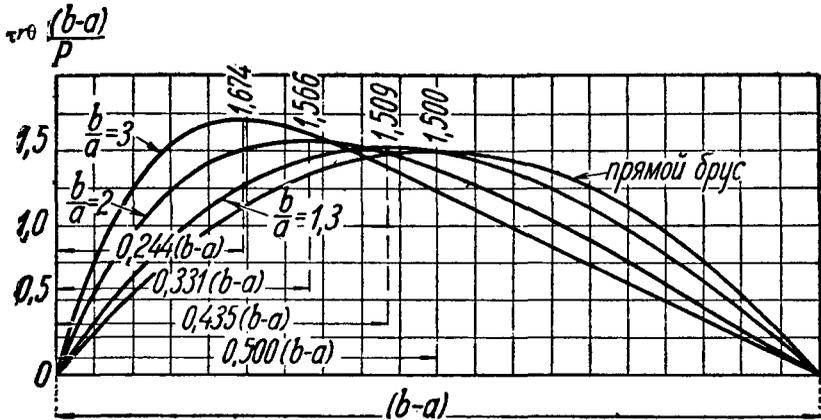
При любом другом распределении усилий, распределение напряжений вблизи концов будет отличаться от того, какое получается по решению [56], но на более значительных расстояниях от концов это решение будет пригодно на основании принципа Сен-Венана.

Подсчеты показывают, что элементарная теория, базирующаяся на допущении, что поперечные сечения остаются плоскими при изгибе, и в этом случае дает очень удовлетворительные результаты.

На диаграмме (фиг. 44) представлено распределение касательного напряжения  $\tau_{\theta}$  по сечению, для которого  $\theta = 0$  (для случаев:  $b = 3a$ ,  $2a$  и  $1,3a$ ). Абсциссы изображают радиальные расстояния от внутреннего контура ( $r = a$ ). Ординаты представляют числовые множители, на которые следует помножить среднее значение касательного напряжения

$$\frac{P}{b-a},$$

чтобы получить касательное напряжение в рассматриваемой точке.



Фиг. 44.

Значение множителя, равное 1,5, дает наибольшее касательное напряжение для прямоугольных прямых брусков в предположении параболического распределения напряжений.

Из диаграммы можно заключить, что распределение касательных напряжений приближается к параболическому, когда высота поперечного сечения мала. Для соотношений размеров, применяемых обыкновенно в арках и сводах, можно считать распределение касательных напряжений следующим параболическому закону, как в прямых прямоугольных стержнях, и это допущение дает достаточную точность.

Рассмотрим теперь перемещения, возникающие при действии силы  $P$  (фиг. 43). Пользуясь формулами с [45] по [48] и подставив значения составляющих напряжения по формулам [56], найдем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\sin \theta}{E} \left[ 2Ar(i-3\nu) - \frac{2B}{r^3} (1+\nu) + \frac{D}{r} (1-\nu) \right]; \\ \frac{\partial v}{\partial \theta} &= r\varepsilon_0 - u; \\ \tau_{\theta} &= \frac{\partial u}{r\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}. \end{aligned} \right\} [7]$$

Из первого уравнения мы получим путем интегрирования следующее значение перемещения  $u$ :

$$u = \frac{\sin \theta}{E} \left[ Ar^2(1 - 3\nu) + \frac{B}{r^2}(1 + \nu) + D(1 - \nu) \ln r \right] + f(\theta), \quad [m]$$

где  $f(\theta)$  — функция одного лишь угла  $\theta$ .

Подставив это значение  $[m]$ , а также и выражение для деформации  $\epsilon$ , во второе из уравнений  $[l]$  и проинтегрировав, находим:

$$v = -\frac{\cos \theta}{E} \left[ Ar^2(5 + \nu) + \frac{B}{r^2}(1 + \nu) - D \ln r(1 - \nu) + D(1 - \nu) \right] - \int f(\theta) d\theta + F(r), \quad [n]$$

где  $F(r)$  является функцией одного только  $r$ .

Подставив теперь выражения  $[m]$  и  $[n]$  в третье из уравнений  $[l]$ , мы приходим к следующему уравнению:

$$\int f(\theta) d\theta + f'(\theta) + rF'(r) - F(r) = -\frac{4D \cos \theta}{E}. \quad [o]$$

Это уравнение будет удовлетворено, если положить:

$$F(r) = Hr, \quad f(\theta) = -\frac{2D}{E} \theta \cos \theta + K \sin \theta + L \cos \theta, \quad [p]$$

где  $H$ ,  $K$  и  $L$  — произвольные постоянные, подлежащие определению из уравнений связей.

Составляющие перемещения, на основании формул  $[m]$  и  $[n]$ , выражаются в таком случае следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{2D}{E} \theta \cos \theta + \frac{\sin \theta}{E} \left[ D(1 - \nu) \ln r + A(1 - 3\nu)r^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{B(1 + \nu)}{r^2} \right] + K \sin \theta + L \cos \theta; \\ v &= \frac{2D}{E} \theta \sin \theta - \frac{\cos \theta}{E} \left[ A(5 + \nu)r^2 + \frac{B(1 + \nu)}{r^2} - D(1 - \nu) \ln r \right] + \\ &\quad + \frac{D(1 + \nu)}{E} \cos \theta + K \cos \theta - L \sin \theta + Hr. \end{aligned} \right\} [q]$$

Радиальное отклонение верхнего конца стержня получится, если положить в выражении для перемещения  $u$  угол  $\theta$  равным нулю. Это дает:

$$(u)_{\theta=0} = L. \quad [r]$$

Постоянная  $L$  найдется из условий в заделанном конце (фиг. 43). При

$$\theta = \frac{\pi}{2},$$

мы имеем

$$v = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial r} = 0;$$

следовательно, согласно второй из формул [q],

$$H = 0, \quad L = \frac{D\pi}{E}. \quad [s]$$

Отклонение верхнего конца поэтому, на основании выражений [g], равно:

$$(u)_{\theta=0} = \frac{D\pi}{E} = - \frac{P\pi (a^2 + b^2)}{E \left[ (a^2 - b^2) + (a^2 + b^2) \ln \frac{b}{a} \right]}. \quad [57]$$

Применение этой формулы будет показано ниже.

Когда величина  $b$  приближается к  $a$  и высота кривого бруса  $h = b - a$  мала по сравнению с радиусом  $a$ , то мы можем воспользоваться разложением в ряд:

$$\ln \frac{b}{a} = \ln \left( 1 + \frac{h}{a} \right) = \frac{h}{a} - \frac{1}{2} \frac{h^2}{a^2} + \frac{1}{3} \frac{h^3}{a^3} - \dots$$

Подставляя этот ряд в формулу [57] и пренебрегая членами высшего порядка малости, получим:

$$(u)_{\theta=0} = - \frac{3\pi a^3 P}{E h^3},$$

что совпадает с элементарной формулой для этого случая <sup>1)</sup>.

Взяв функцию напряжений в виде

$$\varphi = f(r) \cos \theta,$$

и поступая так же, как раньше, мы приходим к решению для того случая, когда к верхнему концу стержня приложены вертикальная сила и момент (фиг. 43). Вычитая из выражений, полученных по этому решению, напряжения, возникающие под действием момента (см. параграф 23), получим в остатке напряжения от вертикальной силы, приложенной к верхнему концу стержня. Имея решения для горизонтальной и для вертикальной силы, мы можем получить решение при любой наклонной силе на основании принципа сложения действия сил.

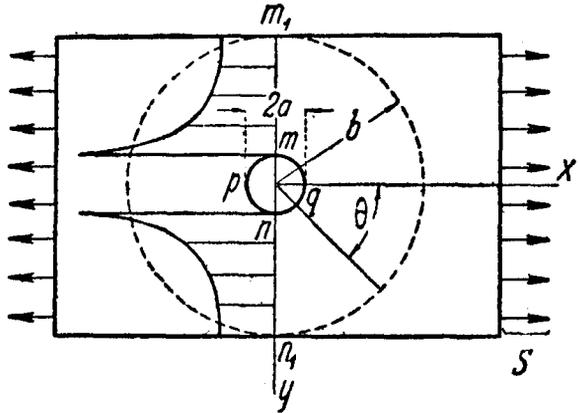
В предыдущих исследованиях всюду предполагалось, что уравнения [e] удовлетворены, и что круговые контуры стержня свободны от внешних сил. Принимая выражения [e] отличными от нуля, получим тот

<sup>1)</sup> См. книгу автора Соппротивление материалов, часть II, русское издание 1934 г., стр. 39.

случай, когда по круговым контурам стержня распределены нормальные и касательные усилия, пропорциональные  $\sin \theta$  и  $\cos \theta$ . Комбинируя такие решения с решениями, полученными ранее для чистого изгиба и для изгиба силой, приложенной в конце бруса, мы можем приблизиться к тем условиям нагрузки, которые имеются в своде, покрытом песком или землей <sup>1)</sup>.

**28. Влияние круглых отверстий на распределение напряжений в пластинках.** Фигура 45 представляет пластинку, подвергающуюся

действию равномерного растягивающего усилия напряженностью  $S$  в направлении оси  $x$ . Если по середине пластинки устроено небольшое круглое отверстие, то распределение напряжений вблизи отверстия изменится, но мы, на основании принципа Сен-Венана, можем заключить, что этим изменением можно пренебречь на больших по сравнению с величиной  $a$  радиуса отверстия расстояниях.



Фиг. 45

Рассмотрим часть пластинки внутри концентрической окружности радиуса  $b$ , большего по сравнению с  $a$ . Напряжения по окружности радиуса  $b$  по существу будут теми же самыми, что и в пластинке без отверстия, и поэтому их можно представить так:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_r)_{r=b} &= S \cos^2 \theta = \frac{1}{2} S (1 + \cos 2\theta); \\ (\tau_{r\theta})_{r=b} &= -\frac{1}{2} S \sin 2\theta. \end{aligned} \right\} [a]$$

Эти усилия, действующие по внешнему контуру кольца, имеющего внутренний и наружный радиусы соответственно равными  $r = a$  и  $r = b$ , создают распределение напряжений внутри кольца, которое мы можем рассматривать состоящим из двух частей.

Первая — от постоянной составляющей

$$\frac{1}{2} S$$

<sup>1)</sup> Несколько примеров этого рода было исследовано *Х. Головиним*, см. его работу, упомянутую выше, в выноске на стр. 72. и *М. Рибьером (M. C. Ribière)*, см. его статью, упомянутую выше, в выноске на стр. 72. и статью в „Comptes Rendus“, t. 132, 1901, p. 315.

нормальных усилий. Напряжения, возникающие под действием этой составляющей, можно определить при помощи выражений [41] (стр. 69).

Остальная часть, состоящая из нормальных усилий

$$\frac{1}{2} S \cos 2\theta,$$

вместе с касательными усилиями

$$-\frac{1}{2} S \sin 2\theta$$

вызывает напряжения, выражения для которых можно вывести при помощи функции напряжений следующего вида:

$$\varphi = f(r) \cos 2\theta. \quad [b]$$

Подставив это выражение в уравнение совместности:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0,$$

найдем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение для определения функции  $f(r)$ :

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2} \right) \left( \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{4f}{r^2} \right) = 0.$$

Общее решение этого уравнения:

$$f(r) = Ar^2 + Br^4 + C \frac{1}{r^2} + D.$$

Следовательно, функция напряжений будет иметь вид:

$$\varphi = \left( Ar^2 + Br^4 + C \frac{1}{r^2} + D \right) \cos 2\theta, \quad [c]$$

и соответствующие составляющие напряжения, на основании формул [34], представятся так:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = - \left( 2A + \frac{6C}{r^4} + \frac{4D}{r^2} \right) \cos 2\theta; \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = \left( 2A + 12Br^2 + \frac{6C}{r^4} \right) \cos 2\theta; \\ \tau_{r\theta} &= - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = \left( 2A + 6Br^2 - \frac{6C}{r^4} - \frac{2D}{r^2} \right) \sin 2\theta. \end{aligned} \right\} [d]$$

Произвольные постоянные интегрирования определяются теперь из условий [а] для наружного контура кольца и на основании того, что края отверстия свободны от внешних сил. Эти условия дают:

$$2A + \frac{6C}{b^4} + \frac{4D}{b^2} = -\frac{1}{2}S;$$

$$2A + \frac{6C}{a^4} + \frac{4D}{a^2} = 0;$$

$$2A + 6Bb^2 - \frac{6C}{b^4} - \frac{2D}{b^2} = -\frac{1}{2}S;$$

$$2A + 6Ba^2 - \frac{6C}{a^4} - \frac{2D}{a^2} = 0.$$

Решая эти уравнения и полагая  $a : b = 0$ , т. е. предполагая пластинку бесконечно большой, получим:

$$A = -\frac{S}{4}; \quad B = 0; \quad C = -\frac{a^4}{4}S; \quad D = \frac{a^2}{2}S. \quad [e]$$

Подставив эти значения произвольных постоянных в выражения [d] и сложив с напряжениями, возникающими от равномерного растяжения

$$\frac{1}{2}S$$

по внешнему контуру круга и определяемыми по формулам [41], найдем<sup>1)</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{S}{2} \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{S}{2} \left( 1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta; \\ \sigma_\theta &= \frac{S}{2} \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{S}{2} \left( 1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta; \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{S}{2} \left( 1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2} \right) \sin 2\theta. \end{aligned} \right\} [58]$$

Если  $r$  очень велико, то напряжения  $\sigma_r$  и  $\tau_{r\theta}$  приближаются по своим значениям к величинам, полученным нами из выражений [а]. На краю отверстия  $r = a$ , и мы получим:

$$\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0, \quad \sigma_\theta = S - 2S \cos 2\theta.$$

Отсюда видно, что напряжение  $\sigma_\theta$  будет наибольшим, когда

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{или} \quad \theta = \frac{3\pi}{2},$$

т. е. по концам  $m$  и  $n$  диаметра, перпендикулярного к направлению растяжения (фиг. 45). В этих точках

$$(\sigma_\theta)_{\max} = 3S.$$

<sup>1)</sup> Это решение было получено проф. Г. Киршем (G. Kirsch); см. „V. D. L.“, Bd 42, 1898.

Это напряжение является наибольшим растягивающим напряжением и оно в три раза больше равномерного напряжения  $S$  по концам пластинки.

В точках  $p$  и  $q$  соответственно  $\theta = \pi$  и  $\theta = 0$ , и мы имеем:

$$\sigma_{\theta} = -S,$$

т. е. в этих точках в тангенциальном направлении получается сжимающее напряжение.

Для сечения пластинки, проходящего через центр отверстия и перпендикулярного к оси  $x$ ,

$$\theta = \frac{\pi}{2},$$

и из выражения [58] имеем:

$$\tau_{r\theta} = 0, \quad \sigma_{\theta} = \frac{S}{2} \left( 2 + \frac{a^2}{r^2} + 3 \frac{a^4}{r^4} \right).$$

Отсюда видно, что влияние отверстия носит ярко выраженный *местный характер*, и, по мере увеличения радиуса  $r$ , напряжения  $\sigma_{\theta}$  приближаются очень быстро к величине  $S$ . Распределение этих напряжений показано на чертеже заштрихованной площадью.

Местный характер напряжений вокруг отверстия оправдывает применение решения [e], выведенного для бесконечно большой пластинки к пластинке конечной ширины. Если ширина пластинки не меньше пяти диаметров отверстия, то ошибка при определении по формулам [58] напряжения

$$(\sigma_{\theta})_{\max}$$

не превосходит 6% <sup>1)</sup>.

Высокие *местные напряжения* по краям круглого отверстия имеют очень большое практическое значение. Как на пример можно указать на отверстия в палубах кораблей. Когда корпус корабля изгибается, в перекрытиях палуб возникает растяжение или сжатие и около отверстий появляются высокие местные напряжения. Под действием периодических изменений в напряжен"ых, вызываемых волнами, явление усталости металла в перенапряженных частях перекрытия может повести в конце концов к появлению трещин усталости <sup>2)</sup>.

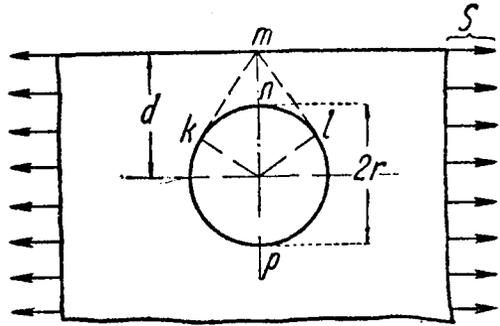
Чтобы устранить высокие напряжения, края отверстий можно усиливать утолщением <sup>3)</sup>.

<sup>1)</sup> См. статью автора в „Известиях Киевского политехнического института“ за 1907 г. Напряжение  $S$  следует принимать равным силе, разделенной на площадь брутто пластинки.

<sup>2)</sup> См. доклад *Т. Вильсона* (*T. L. Wilson*), *The S. S. Leviathan Damage, Repairs and Strength Analysis*, на собрании Американского общества корабельных архитекторов и морских инженеров, в ноябре 1930 г.

<sup>3)</sup> Рассмотрение влияния утолщения на распределение напряжений вокруг отверстия дано в статье автора в „*Journ. Franklin Inst.*“, vol. 197, 1924, p. 505. См. также книгу автора *Сопrotивление материалов*, часть II, русское издание 1934 г., стр. 59.

Круглое отверстие вблизи прямолинейной стороны растянутой бесконечной пластинки, представляющей собой полуплоскость (фиг. 46), было рассмотрено Д. Джеффри<sup>1)</sup>. Если  $S$  — равномерно распределенное растягивающее напряжение, параллельное прямолинейному краю пластинки,  $d$  — расстояние центра отверстия от этого края, и  $r$  — радиус отверстия, то наибольшие напряжения будут в точках  $n$ . Напряжения в точках  $m$ ,  $n$  и  $p$  для различных значений отношения  $d:r$  приведены в нижеследующей таблице 2.



Фиг. 46.

ТАБЛИЦА 2.

Величины напряжений у круглого отверстия вблизи края (в долях среднего растягивающего напряжения).

Напряжения в точках	Величина отношения $p:r$					
	1,34	1,54	1,81	2,15	2,58	3,11
$m$	-1,96	-0,895	-0,269	0,134	0,405	0,591
$n$	4,37	3,92	3,61	3,40	3,25	3,16
$p$	3,27	3,20	3,15	3,12	3,09	3,07

Из этой таблицы видно, что по мере того, как расстояние отверстия от прямолинейного края пластинки увеличивается, напряжения в точках  $n$  и  $p$  приближаются к величине  $3S$ , полученной для отверстия при очень большом расстоянии от краев пластинки.

Д. Джеффри исследовал также случай равномерного нормального давления  $p_i$ , действующего по контуру отверстия. Эта задача представляет практический интерес. Решение этой задачи дает напряжение у заклепочной дыры, когда раскаленная, находящаяся в пластическом состоянии заклепка расклепывается под давлением. Если дыра очень далека от прямолинейного края, то напряжения по контуру дыры, на основании формул [42] (стр. 69), равны:

$$\sigma_\theta = p_i, \quad \sigma_r = -p_i.$$

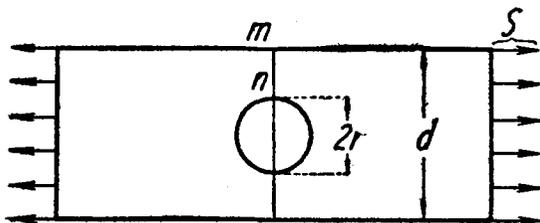
Если дыра находится вблизи прямолинейного края пластинки, то тангенциальные напряжения не будут уже постоянными по контуру отвер-

<sup>1)</sup> G. B. Jeffery, Phil. Trans. Roy. Soc., London, A, vol. 221, 1921, p. 265.

стия. Наибольшее тангенциальное напряжение появится в точках  $k$  и  $l$ , и его величина выразится формулой:

$$(\sigma_\theta)_{\max} = p_1 \frac{d^2 + r^2}{d^2 - r^2}. \quad [59]$$

Это напряжение следует сравнить с растягивающим напряжением в точке  $m$  прямолинейного края пластинки, определяемым по формуле:



Фиг. 47.

$$\sigma_0 = \frac{4p_1 r^2}{d^2 - r^2}. \quad [60]$$

При

$$d = r\sqrt{3}$$

оба эти выражения дают одну и ту же величину напряжения. Если расстояние  $d$  больше указанного, то наибольшее напряжение

будет на окружности отверстия, а если оно меньше, то наибольшее напряжение получится в точке  $m$ .

Случай пластинки конечной ширины с круглым отверстием по оси симметрии (фиг. 47) был рассмотрен Р. Гауландом <sup>1)</sup>. Он нашел, например, что при  $2r = 0,5d$ ,  $\sigma_0 = 4,3\sigma$  в точке  $n$  и  $\sigma_0 = 0,75\sigma$  в точке  $m$ .

Имея решение [d] для растяжения или сжатия в одном направлении, мы легко можем получить, на основании принципа сложения действия сил, решение для случая растяжения или сжатия по

двум взаимно перпендикулярным направлениям.

Приняв, например, растягивающие напряжения по двум взаимно-перпендикулярным направлениям равными  $\sigma$ , мы найдем по контуру отверстия растягивающее напряжение  $\sigma_\theta = 2\sigma$  (см. стр. 69). Взяв растягивающее напряжение  $\sigma$  в направлении оси  $x$  (фиг. 48) и сжимающее напряжение  $-\sigma$  в направлении оси  $y$ , мы получим случай чистого сдвига. Тангенциальные напряжения по контуру отверстия будут, на основании выражений [58], равны:

$$\sigma_\theta = \sigma - 2\sigma \cos \theta = [\sigma - 2\sigma \cos (2\theta - \pi)].$$

При

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{или} \quad \theta = \frac{3\pi}{2},$$

<sup>1)</sup> R. C. J. Howland, Phil. Trans. Roy. Soc., London A, vol. 229, 1930, p. 49.

т. е. в точках  $n$  и  $m$ , находим

$$\sigma_0 = 4\sigma.$$

При  $\theta = 0$  или  $\theta = \pi$ , т. е. в точках  $n_1$  и  $m_1$ , напряжение

$$\sigma_0 = -4\sigma.$$

Следовательно, для большой пластинки, находящейся в условиях чистого сдвига, наибольшее тангенциальное напряжение по контуру отверстия в четыре раза больше напряжений, вызывающих этот чистый сдвиг.

Способ исследования напряжений вокруг небольшого круглого отверстия, использованный в этом параграфе, можно применить также и к случаю, когда пластинка подвергается чистому изгибу <sup>1)</sup>.

Теоретическое распределение напряжений вокруг круглого отверстия было проверено опытным путем при помощи очень чувствительного экстенсометра Е. Прейсом <sup>2)</sup>. Оно было также проверено при помощи оптического метода с применением прозрачных моделей и поляризованного света <sup>3)</sup>. Случай пластинки с двумя одинаковыми круглыми отверстиями был исследован К. Вебером <sup>4)</sup>. Случай ряда круглых отверстий рассмотрен М. Садовским <sup>5)</sup>.

Бесконечно большая пластинка с круглым отверстием, когда усилия приложены по контуру отверстия, была подвергнута исследованию В. Беклеем <sup>6)</sup>.

Случай эллиптического отверстия рассмотрен Г. Колосовым <sup>7)</sup>, К. Инглисом <sup>8)</sup> и Т. Пёшлем <sup>9)</sup>.

Если одна из главных осей эллиптического отверстия совпадает с направлением растяжения  $\sigma$ , то напряжения по краям оси отверстия, перпендикулярной к направлению растяжения, будут равны:

$$\sigma_1 = \sigma \left( 1 + 2 \frac{a}{b} \right), \quad [61]$$

где  $2a$  — диаметр эллипса, перпендикулярный направлению растяжения, а  $2b$  — другой диаметр эллипса (см. стр. 198). Когда полуоси  $a$  и  $b$  равны, то мы приходим к результату, полученному раньше для круглого

<sup>1)</sup> См. Туцци (Z. Tuzi), „Phil. Mag.“, February, 1930, p. 210, см. также „Scient. Papers“, Inst. Phys. Chem. Research, Tokyo, vol. 9 1928, p. 65. См. также Р. Гауланд и А. Стеренсон (R. C. J. Howland and A. C. Sterenson), „Phil. Trans. Roy. Soc.“, London A, vol. 232, 1933, p. 155.

<sup>2)</sup> См. Прейс (E. Preuss), „V. D. I.“, Bd 56, 1912, S. 1349; Bd 57, 1913, S. 664. См. также Forschungsarbeiten, № 126, 1912.

<sup>3)</sup> См. Кокер (E. G. Coker), „Gen. Electr. Review“, vol. 23, 1920, p. 870. Случай круглого отверстия в пластинке, испытывающей чистый сдвиг, был рассмотрен Туцци (Tuzi), Repts. Intern. Cong. Metallic Structures, Liège, September, 1930.

<sup>4)</sup> См. К. Вебер (C. Weber), „Z. angew. Math. u. Mech.“, Bd 2, 1922, S. 267.

<sup>5)</sup> См. М. Садовский (M. Sadowsky), „Z. angew. Math. u. Mech.“, Bd 8, 1928, S. 107.

<sup>6)</sup> W. G. Bickley, „Phil. Trans. Roy. Soc.“, London, A, vol. 227, 1928, p. 383.

<sup>7)</sup> Г. Колосов, Диссертация, —Петербург, 1910 г.

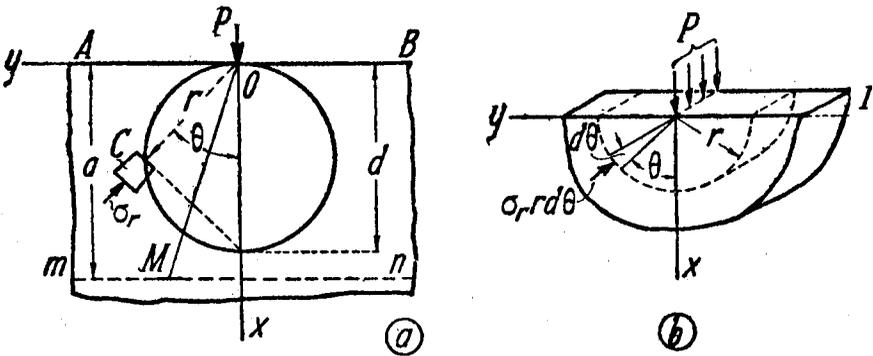
<sup>8)</sup> Инглис (C. E. Inglis), „Engineering“, vol. 95, 1913, p. 415, и „Trans. Inst. Naval Arch.“, London, 1913.

<sup>9)</sup> См. Т. Пёшьль (Th. Pöschl), „Math. Z.“, Bd 11, 1921, S. 95.

отверстия. Если полуось  $a$  очень велика по сравнению с другой полуосью  $b$ , то наибольшее напряжение у эллиптического контура становится очень большим.

Очень узкое отверстие, перпендикулярное направлению растяжения, вызывает чрезвычайно высокую концентрацию напряжений <sup>1)</sup>. Это объясняет, почему трещины, перпендикулярные к направлениям приложенных усилий, стремятся распространиться. Это распространение можно остановить, если просверлить отверстия по концам трещины, чтобы устранить резкую кривизну, являющуюся причиной высокой концентрации напряжений.

29. Сосредоточенная сила, приложенная к точке прямолинейного края пластинки. Рассмотрим теперь сосредоточенную вертикальную силу  $P$ , действующую на горизонтальный прямолинейный край  $AB$  бес-



Фиг. 49.

конечно большой пластинки (фиг. 49a). Распределение груза по толщине пластинки — равномерное, как показано на фиг. 49b. Толщина пластинки принята равной единице, так что  $P$  есть сила, приходящаяся на единицу толщины пластинки.

Распределение напряжений оказывается в этом случае очень простым <sup>2)</sup> и называется *простым радиальным распределением*. Любой элемент  $C$  на расстоянии  $r$  от точки приложения груза испытывает простое сжатие в радиальном направлении, по величине равное

$$\sigma_r = -\frac{2P \cos \theta}{\pi r}. \quad [62]$$

<sup>1)</sup> Задача об узкой щели, перпендикулярной к направлению растяжения, была решена *М. Садовским (M. Sadowsky)*, „Z. angew. Math. u. Mech.“, Bd 10, 1930, S. 77.

<sup>2)</sup> Решение этой задачи помощью применения решения в трех измерениях *Я. Буссинёка (J. Boussinesq)* (см. ниже стр. 360) было получено *Фламаном (Flamant)*, „Comptes rendus“, t. 114, Paris, 1892, p. 1465. Распространение этого решения на случай наклонной силы дано *Я. Буссинёком (J. Boussinesq)*, „Comptes Rendus“, t. 114, 1892, p. 1510. См. также статью *Мичеля (J. H. Michell)*, „Proc. London Math. Soc.“ vol. 32, 1900, p. 35. Опытное исследование распределения напряжений, которое привело к вышеупомянутой теоретической работе, было выполнено *Карусом Вильсоном (Carus Wilson)*, „Phil. Mag.“, vol. 32, 1891, p. 481.

Тангенциальное напряжение  $\sigma_\theta$  и касательное напряжение  $\tau_{r\theta}$  в этом случае равны нулю. Легко видеть, что эти значения составляющих напряжения удовлетворяют уравнениям равновесия [33] (стр. 65).

Условия на контуре будут также выполнены, вследствие того, что напряжения  $\sigma_\theta$  и  $\tau_{r\theta}$  равны нулю вдоль прямого края пластинки, который свободен от внешних сил.

В точке приложения силы ( $r=0$ ) напряжение  $\sigma_r$  становится равным бесконечности. Равнодействующая усилий, действующих по цилиндрической поверхности радиуса  $r$  (фиг. 49 б), должна уравновешивать силу  $P$ . Эта равнодействующая получается суммированием вертикальных составляющих

$$\sigma_r r d\theta \cos \theta,$$

действующих на каждый элемент  $r d\theta$  поверхности. Таким образом находим:

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma_r \cos \theta \cdot r d\theta = - \frac{4P}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = -P.$$

Чтобы доказать, что решение [62] является точным решением задачи, нам следует рассмотреть и уравнение совместности [35] (см. стр. 67).

Решение [62] выведено при помощи следующей функции напряжений:

$$\varphi = - \frac{P}{\pi} r \theta \sin \theta. \tag{a}$$

Мы можем удостовериться в этом, пользуясь формулами [34], которые дают следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = - \frac{2P \cos \theta}{\pi r}; \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = 0; \\ \tau_{r\theta} &= - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0. \end{aligned} \right\} \tag{62'}$$

Это совпадает с решением [62]. Подстановкой функции [a] в уравнение [35] мы легко можем показать, что последнее выполняется. Следовательно, функция [a] является истинной функцией напряжений, и выражения [62'] дают действительное распределение напряжений.

Взяв касающийся оси  $y$  в точке  $O$  (фиг. 49а) круг диаметра  $d$  с центром, лежащим на оси  $x$ , мы имеем для любой точки  $C$  окружности этого круга

$$d \cos \theta = r.$$

Отсюда, согласно формуле [62],

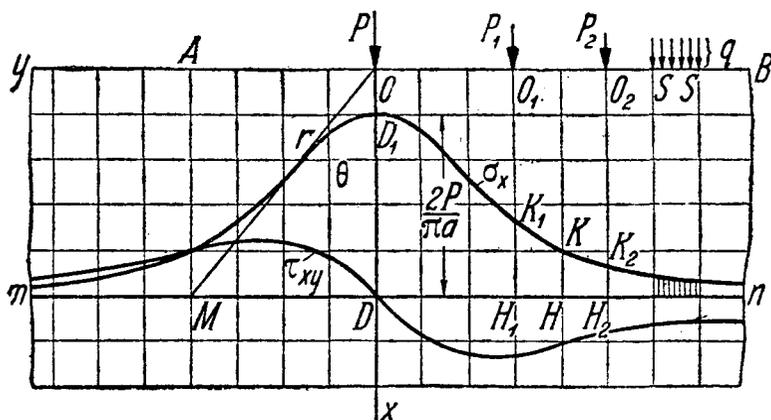
$$\sigma_r = - \frac{2P}{\pi d},$$

т. е. напряжение одинаково во всех точках круга, за исключением точки  $O$  — точки приложения сосредоточенного груза.

Проведя горизонтальную плоскость  $mn$  в расстоянии  $a$  от прямолинейного края пластинки, можем определить нормальную и касательную составляющие напряжения в этой плоскости для любой точки  $M$  (фиг. 49a) из формул для простого сжатия по радиальному направлению:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_r \cos^2 \theta = -\frac{2P \cos^3 \theta}{\pi r} = -\frac{2P}{\pi a} \cos^4 \theta; \\ \sigma_y &= \sigma_r \sin^2 \theta = -\frac{2P}{\pi a} \sin^2 \theta \cos^2 \theta; \\ \tau_{xy} &= \sigma_r \sin \theta \cos \theta = -\frac{2P}{\pi} \frac{\sin \theta \cos^3 \theta}{r} = -\frac{2P}{\pi a} \sin \theta \cos^3 \theta. \end{aligned} \right\} [63]$$

На фиг. 50 распределение напряжений  $\sigma_x$  и  $\tau_{xy}$  по горизонтальной плоскости  $mn$  представлено графически.



Фиг. 50.

В точке приложения груза напряжение теоретически бесконечно велико, так как конечная сила действует на бесконечно малую площадку. В действительности, в точке приложения обычно появляется некоторая текучесть материала, и в результате груз оказывается распределенным по площадке конечной величины.

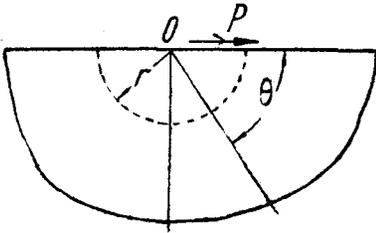
Представим себе, что часть материала, испытывающая пластическую деформацию, вырезана из пластинки из круглой цилиндрической поверхности малого радиуса, как показано на фиг. 49b. Тогда к остающейся части пластинки можно применить уравнения упругости.

Подобное же решение можно получить для горизонтальной силы  $P$ , приложенной к прямолинейному контуру полубесконечной пластинки (фиг. 51). Составляющие напряжения в этом случае получатся по тем же самым формулам [62']. Необходимо только измерять угол  $\theta$  с направле-

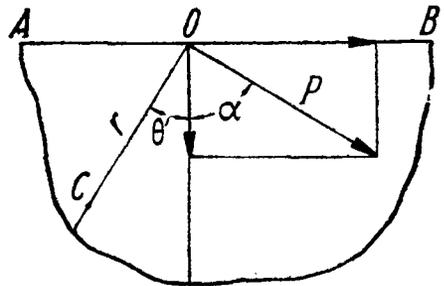
нием силы так, как показано на чертеже. Определив равнодействующую усилий, действующих по цилиндрической поверхности, показанной на фиг. 51 пунктиром, найдем:

$$-\frac{2P}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^2 \theta d\theta = -P.$$

Эта равнодействующая уравнивается внешней силой  $P$ , и так как составляющие напряжения  $\tau_{\theta}$  и  $\sigma_r$  по прямолинейному краю равны нулю, то решение [62'] удовлетворяет условиям на контуре.



Фиг. 51.



Фиг. 52.

Имея решения для вертикальных и горизонтальных сосредоточенных сил, на основании принципа сложения действия сил получим решение для наклонных сил. Разложив наклонную силу  $P$  на две составляющие (фиг. 52):

вертикальную —  $P \cos \alpha$   
и горизонтальную —  $P \sin \alpha$ ,

найдем, по формулам [62'], радиальное напряжение в любой точке  $C$ :

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{2}{\pi r} \left[ P \cos \alpha \cos \theta + P \sin \alpha \cos \left( \frac{\pi}{2} + \theta \right) \right] = \\ &= -\frac{2P}{\pi r} \cos(\alpha + \theta). \end{aligned} \quad [64]$$

Следовательно мы можем пользоваться формулами [62'] при любом направлении силы, если только в каждом случае будем измерять угол  $\theta$  от направления последней.

Функция напряжений [a] может быть применена также и в случае, когда на прямолинейный контур бесконечно большой пластинки (фиг. 53a) действует пара сил. Легко видеть, что функция напряжений для того случая, когда растягивающая сила  $P$  находится в точке  $O_1$  на расстоянии  $a$  от начала координат, получится из выражения [a] для функции  $\varphi$ , рассматриваемой, как функция от координат  $x$  и  $y$  вместо  $r$  и  $\theta$ , при подстановке  $y + a$  вместо координаты  $y$ , а также  $-P$  вместо  $P$ .

Эта функция, а также первоначальная функция напряжений  $\varphi$  могут быть соединены вместе, и мы тогда получим функцию напряжений для двух равных и противоположных сил, приложенных в точках  $O$  и  $O_1$ , в следующем виде:

$$-\varphi(x, y+a) + \varphi(x, y).$$

Когда расстояние  $a$  очень мало, значение этой функции приближается к значению

$$\varphi_1 = -a \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad [b]$$

Подставив выражение [a] в уравнение [b] и заметив (см. стр. 66), что

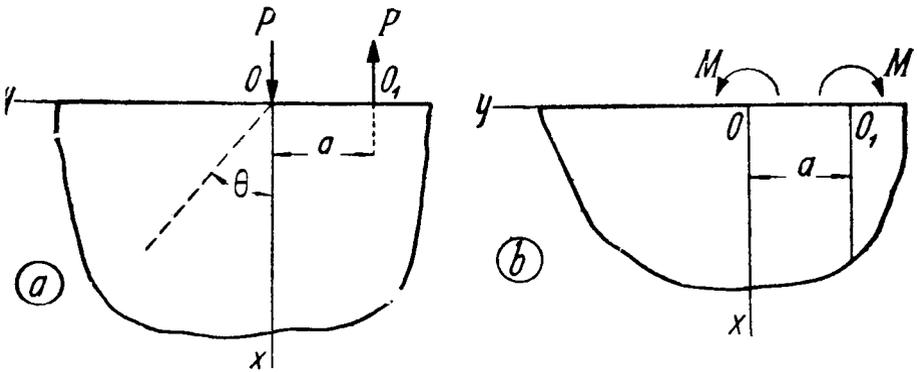
$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r},$$

найдем

$$\varphi_1 = \frac{Pa}{\pi} (\theta + \sin \theta \cos \theta) = \frac{M}{\pi} (\theta + \sin \theta \cos \theta), \quad [65]$$

где  $M$  — момент внешней пары сил.

Рассуждая таким же образом, мы найдем дифференцированием функции  $\varphi_1$  функцию напряжений  $\varphi_2$  для случая приложения двух равных и противополож-



Фиг. 53.

ных пар  $M$ , действующих в двух точках  $O$  и  $O_1$ , находящихся друг от друга на очень малом расстоянии (фиг. 53b). Таким образом получим:

$$\varphi_2 = \varphi_1 - \left( \varphi_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} a \right) = -a \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = -\frac{2Ma}{\pi r} \cos^3 \theta. \quad [66]$$

Если направление действия пар сил изменится, окажется необходимым лишь изменить знак функции [66].

Зная распределение напряжений, мы можем получить соответствующие перемещения обычным путем, при помощи формул [45] — [47]. В случае силы, нормальной к прямолинейной грани (фиг. 49), имеем

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{2P}{\pi E} \frac{\cos \theta}{r}; \\ \epsilon_\theta &= \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} = \nu \frac{2P}{\pi E} \frac{\cos \theta}{r}; \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = 0. \end{aligned} \right\} [c]$$

Интегрируя первое из этих уравнений, находим:

$$u = -\frac{2P}{\pi E} \cos \theta \ln r + f(\theta), \quad [d]$$

где  $f(\theta)$  является функцией одного только угла  $\theta$ . Подставив полученное выражение во второе из уравнений [c] и интегрируя, имеем:

$$v = \frac{2\nu P}{\pi E} \sin \theta + \frac{2P}{\pi E} \ln r \sin \theta - \int f(\theta) d\theta + F(r), \quad [e]$$

где  $F(r)$  — функция одного только  $r$ .

Подставив значения [d] и [e] в третье из уравнений [c], приходим к заключению, что

$$f(\theta) = -\frac{(1-\nu)P}{\pi E} \theta \sin \theta + A \sin \theta + B \cos \theta; \quad F(r) = Cr, \quad [f]$$

где  $A$ ,  $B$  и  $C$  — произвольные постоянные интегрирования, которые подлежат определению из уравнений связи.

Выражения для перемещений, на основании формул [d] и [e], представятся так:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{2P}{\pi E} \cos \theta \ln r - \frac{(1-\nu)P}{\pi E} \theta \sin \theta + A \sin \theta + B \cos \theta; \\ v &= \frac{2\nu P}{\pi E} \sin \theta + \frac{2P}{\pi E} \ln r \sin \theta - \frac{(1-\nu)P}{\pi E} \theta \cos \theta + \\ &\quad + \frac{(1-\nu)P}{\pi E} \sin \theta + A \cos \theta - B \sin \theta + Cr. \end{aligned} \right\} [g]$$

Предположим, что связи полубесконечной пластинки (фиг. 49) таковы, что точки, лежащие по оси  $x$ , не имеют бокового перемещения. Тогда перемещение  $v$  равно нулю, при  $\theta$  равном нулю, и по второй из формул [g] мы найдем, что  $A = 0$  и  $C = 0$ . При таких значениях произвольных постоянных интегрирования, вертикальное перемещение точек, лежащих на оси  $x$ , будет:

$$(u)_{\theta=0} = -\frac{2P}{\pi E} \ln r + B. \quad [h]$$

Чтобы найти произвольную постоянную  $B$ , допустим, что некоторая точка, лежащая на оси  $x$ , в расстоянии  $d$  от начала координат, не имеет вертикального движения. Тогда, на основании выражения [h], мы найдем:

$$B = \frac{2P}{\pi E} \ln d.$$

Имея значения всех произвольных постоянных интегрирования, мы можем определить, по формулам [g], перемещения любой точки полубесконечной пластинки.

Рассмотрим, например, перемещения точек прямолинейной грани пластины. Горизонтальные перемещения получатся подстановкой

$$\theta = \pm \frac{\pi}{2}$$

в первое из уравнений [g]. Находим:

$$(u)_\theta = \frac{\pi}{2} = -\frac{(1-\nu)P}{2E}, \quad (u)_\theta = \frac{\pi}{2} = -\frac{(1-\nu)P}{2E}. \quad [67]$$

Таким образом прямолинейный край по каждую сторону от начала координат имеет во всех точках постоянное перемещение [67], направленное к началу координат. Такое перемещение можно считать физически возможным, если вспомнить, что вокруг точки приложения груза  $P$  мы удалили часть материала, ограниченную цилиндрической поверхностью малого радиуса (фиг. 49b), причем для этой части материала не применимы уравнения упругости.

В действительности этот материал находится в состоянии пластической деформации и допускает перемещение (см. формулу [67]) вдоль прямолинейной грани.

Вертикальные перемещения по прямолинейной грани получатся из второй формулы [g]. Вспомнив, что  $\nu$  — положительно, если перемещение совершается в направлении увеличения угла  $\theta$ , и что деформация симметрична относительно оси  $x$ , найдем для вертикального перемещения по направлению вниз, на расстоянии  $r$  от начала координат, следующее выражение:

$$(\nu)_r = -\frac{\pi}{2} = -(\nu)_\theta = \frac{\pi}{2} = \frac{2P}{\pi E} \ln \frac{d}{r} - \frac{(1+\nu)P}{\pi E}. \quad [68]$$

В начале координат написанное выражение дает бесконечно большое перемещение. Чтобы устранить это затруднение, мы должны предположить, как и ранее, что часть материала вокруг точки приложения груза вырезана по цилиндрической поверхности малого радиуса. Для протеч точек края формула [68] дает конечные перемещения.

### 30. Любая вертикальная нагрузка по прямолинейному краю.

Кривыми предыдущего параграфа для напряжений  $\sigma_x$  и  $\tau_{xy}$  (фиг. 50) можно пользоваться, как *линиями влияния*. Предположим, что эти кривые представляют напряжения для силы  $P$ , равной единице, например, 1 кг. Тогда для любой другой величины силы  $P$ , напряжение  $\sigma_x$  в любой точке  $H$  плоскости  $mn$  получится умножением ординаты  $\overline{HK}$  кривой на величину силы  $P$ .

Если на горизонтальный прямолинейный край  $AB$  полубесконечной пластины действует несколько вертикальных сил  $P, P_1, P_2, \dots$ , то напряжения по горизонтальной плоскости  $mn$  получатся суммированием напряжений, возникающих от каждой из этих сил.

Для каждой из них кривые напряжений  $\sigma_x$  и  $\tau_{xy}$  получатся перенесением кривых  $\sigma_x$  и  $\tau_{xy}$ , построенных для силы  $P$ , в новые начала координат  $O_1, O_2, \dots$ . Отсюда следует, что напряжение  $\sigma_x$ , вызываемое, например, силой  $P$ , на плоскости  $mn$  в точке  $D$ , получится умножением

ординаты  $\overline{H_1K_1}$  на  $P_1$ . Таким же образом, напряжение  $\sigma_x$  в точке  $D$  под действием силы  $P_2$  равно  $\overline{H_2K_2} \cdot P_2$ , и так далее.

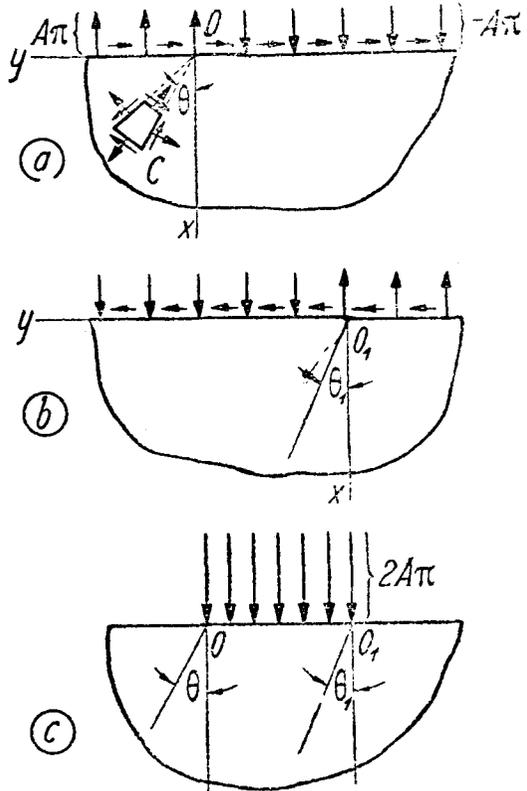
Полное нормальное напряжение в точке  $D$  на плоскости  $mn$ , возникающее под действием сил  $P, P_1, P_2, \dots$ , равно

$$\sigma_x = \overline{DD_1} \cdot P + \overline{H_1K_1} \cdot P_1 + \overline{H_2K_2} \cdot P_2 + \dots$$

Следовательно, кривая напряжения  $\sigma_x$ , изображенная на фиг. 50, является *линией влияния* для нормального напряжения  $\sigma_x$  в точке  $D$ . Таким же образом, мы приходим к заключению, что кривая напряжения  $\tau_{xy}$  является *линией влияния* для касательного напряжения по плоскости  $mn$  в точке  $D$ .

Имея эти кривые, можно легко получить составляющие напряжения в точке  $D$  для любого рода вертикальной нагрузки по краю  $AB$  пластинки.

Если вместо сосредоточенных сил мы имеем равномерную нагрузку интенсивности  $q$ , распределенную по части  $SS$  прямолинейного края (фиг. 50), то нормальное напряжение  $\sigma_x$ , возникающее от этой нагрузки в точке  $D$ , получится умножением соответствующей площади линии влияния, заштрихованной на чертеже, на интенсивность  $q$ .



Фиг. 54.

Задача о действии равномерно распределенной нагрузки может быть решена и другим способом, если принять функцию напряжений в таком виде:

$$\varphi = Ar^2\theta, \tag{a}$$

где  $A$  — постоянная.

Соответствующие составляющие напряжения будут равны:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 2A\theta; \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = 2A\theta; \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = -A. \end{aligned} \right\} \tag{b}$$

Применяя это решение к полубесконечной пластинке, мы придем к распределению нагрузок, показанному на фиг. 54а. На прямолинейном краю пластинки действуют: равномерно распределенное касательное усилие интенсивности  $A$  и равномерно распределенное нормальное усилие интенсивности  $A\pi$ , резко меняющее знак у начала координат  $O$ . Направление этих усилий вытекает из положительных направлений составляющих напряжения, действующих на элемент  $C$ .

Перенося начало координат в точку  $O_1$  и меняя знак функции напряжений  $\varphi$ , мы придем к распределению нагрузок, показанному на фиг. 54b. Налагая друг на друга оба случая распределения нагрузки (фиг. 54а и 54b), получим равномерную нагрузку части прямолинейной грани полубесконечной пластинки, показанную на фиг. 54с.

Чтобы получить заданную интенсивность  $q$  равномерно распределенной нагрузки, примем

$$2A\pi = q,$$

откуда

$$A = \frac{1}{2\pi} q.$$

Напряжение в любой точке пластинки определится тогда следующей функцией напряжений<sup>1)</sup>:

$$\varphi = A (r^{2\theta} - r_1^2 \theta_1) = \frac{q}{2\pi} (r^{2\theta} - r_1^2 \theta_1). \quad [c]$$

Из выражений [b] мы видим, что первый член функции напряжений [c] дает в любой точке  $M$  пластинки (фиг. 55а) равномерное растяжение по всем направлениям в плоскости пластинки, равное  $2A\theta$ , и чистый сдвиг  $A$ . Таким же образом второй член функции напряжений дает равномерное сжатие  $-2A\theta_1$  и чистый сдвиг  $A$ . Равномерное растяжение и сжатие можно просто сложить друг с другом, и мы найдем равномерное сжимающее напряжение:

$$\sigma = 2A\theta - 2A\theta_1 = 2A(\theta - \theta_1) = -2A\alpha, \quad [d]$$

где  $\alpha$  — угол между радиусами  $r$  и  $r_1$ .

Для наложения друг на друга двух родов чистого сдвига: одного, соответствующего направлению радиуса  $r$ , и другого — направлению радиуса  $r_1$ , мы воспользуемся кругом Мора (фиг. 55b), который в данном случае имеет радиус, равный численной величине чистого сдвига  $A$ .

Беря два диаметра: диаметр  $DD_1$ , параллельный радиусу  $r$ , и диаметр  $FF_1$ , перпендикулярный к этому радиусу, за оси напряжений  $\tau$  и  $\sigma$ , мы получим диаграмму чистого сдвига, соответствующего направлению  $r$ . Радиусы  $CF$  и  $CF_1$  представляют главные напряжения  $A$  и  $-A$ , которые образуют углы в  $45^\circ$  с радиусом  $r$  в точке  $M$ , в соответствии с этим случаем чистого сдвига, а радиус  $CD$  представляет касательное напряжение  $A$  по плоскости  $mn$ , перпендикулярной к  $r$ .

Для любой плоскости  $m_1n_1$ , наклоненной под углом  $\beta$  к плоскости  $mn$  (фиг. 55а), составляющие напряжения определяются координатами  $\sigma$  и  $\tau$  точки  $G$  окружности, при угле  $GCD$ , равном  $2\beta$ .

Тем же кругом можем воспользоваться для определения составляющих напряжения от чистого сдвига в направлении радиуса  $r_1$  (см. стр. 30).

Рассматривая снова плоскость  $m_1n_1$  и отмечая, что нормаль к этой плоскости образует угол  $(\alpha - \beta)$  с направлением радиуса  $r_1$  (фиг. 55а), находим, что составляющие напряжения представляются координатами точки  $H$  окружности.

<sup>1)</sup> Это решение задачи принадлежит Мичелю (*J. H. Michell*), „Proc. London Math Soc.“, vol. 34, 1902, p. 134.

Чтобы определить знак чистого сдвига, соответствующего направлению радиуса  $r_1$ , мы должны изменить знаки составляющих напряжения, и таким путем мы получим на окружности точку  $H_1$ .

Полное напряжение, действующее по плоскости  $m_1n_1$ , изобразится вектором  $CK$ , компоненты которого определяют нормальное напряжение  $-(\tau + \sigma_1)$  и касательное напряжение  $(\tau_1 - \tau)$ . Вектор  $CK$  имеет одинаковую величину для всех значений угла  $\beta$ , так как длина компонентов  $CH_1$  и  $CG$ , равно как и угол между ними  $(\pi - 2\alpha)$ , не зависят от угла  $\beta$ . Следовательно, соединяя вместе оба чистых сдвига, мы получим снова чистый сдвиг (см. стр. 31).

Если  $\tau_1 - \tau = 0$ , то угол  $\beta$  определяет направление одного из главных напряжений в точке  $M$ . Из чертежа мы видим, что  $\tau$  и  $\tau_1$  численно равны, если  $2\beta = \pi - 2(\alpha - \beta)$ , откуда

$$\beta = \frac{\alpha}{2}.$$

Итак направление главного напряжения делит пополам угол между радиусами  $r$  и  $r_1$ . Величины же главных напряжений следовательно равны:

$$\begin{aligned} \pm 2\tau &= \pm 2A \sin 2\beta = \\ &= \pm 2A \sin \alpha. \end{aligned} \quad [e]$$

Суммируя эти напряжения с равномерным сжатием [d], мы найдем полные величины главных напряжений в точке  $M$ :

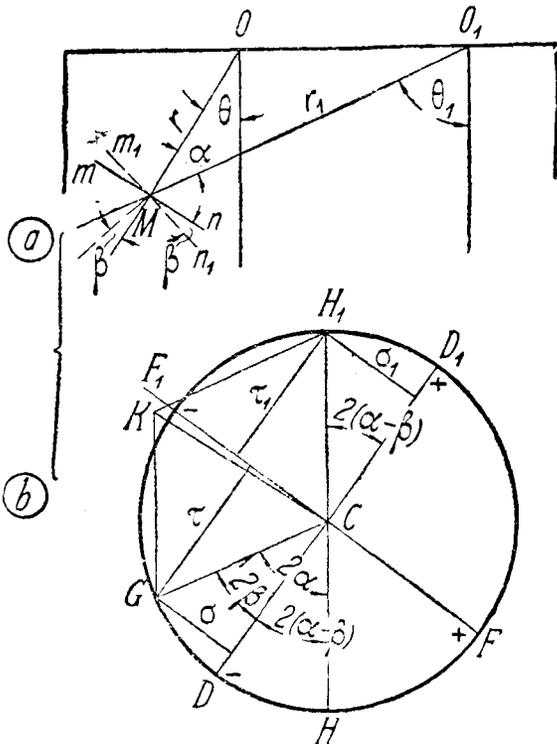
$$\begin{aligned} -2A(\alpha + \sin \alpha), \\ -2A(\alpha - \sin \alpha). \end{aligned} \quad [f]$$

Для любой окружности, проходящей через точки  $O$  и  $O_1$ , угол  $\alpha$  остается постоянным, и таким образом, главные напряжения [f] также остаются постоянными.

На контуре, между точками  $O$  и  $O_1$  (фиг. 55a), угол  $\alpha$  равен  $\pi$ , и мы видим, по формулам [f], что оба главных напряжения равны  $-2A = -q$ . Для прочих частей контура  $\alpha = 0$ , и оба главных напряжения равны нулю.

Несколько других случаев распределения нагрузок по прямолинейному контуру полубесконечной пластинки были рассмотрены С. Карозерсом<sup>1)</sup> и М. Садовским<sup>2)</sup>. Иной способ решения таких задач будет рассмотрен ниже (см. стр. 139).

Прогибы прямолинейного края пластинки можно найти для любого распределения нагрузки, при помощи формул [68], выведенных для случая сосредоточенной силы. Если  $q$  — интенсивность вертикальной нагрузки (фиг. 56), то прогиб, возникающий в точке  $O$  на расстоянии



Фиг. 55.

1) S. D. Carothers, „Proc. Roy. Soc.“, London, A, vol. 97, 1920, p. 110.

2) M. Sadowsky, „Z. angew. Math. u. Mech.“, Bd 8, 1928, S. 107.

$r$  от заштрихованного элемента  $qdr$  нагрузки, согласно формуле [68], равен

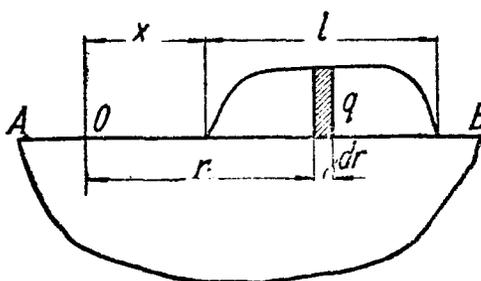
$$\frac{2q}{\pi E} \ln \frac{d}{r} dr - \frac{1+\nu}{\pi E} q dr,$$

и полный прогиб в точке  $O$

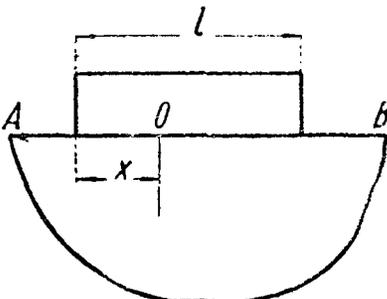
$$v_0 = \frac{2}{\pi E} \int_x^{l+x} q \ln \frac{d}{r} dr - \frac{1+\nu}{\pi E} \int_x^{l+x} q dr. \quad [g]$$

В случае равномерно распределенной нагрузки, интенсивность  $q$  — величина постоянная, и мы найдем:

$$v_0 = \frac{2q}{\pi E} \left[ (l+x) \ln \frac{d}{l+x} - x \ln \frac{d}{x} \right] + \frac{1-\nu}{\pi E} ql. \quad [h]$$



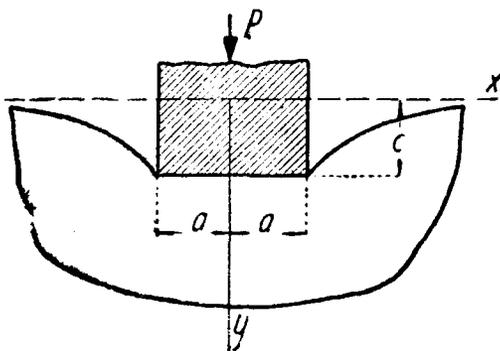
Фиг. 56.



Фиг. 57.

Таким образом, для точки, находящейся в пределах нагруженной части (фиг. 57), получим:

$$v_0 = \frac{2q}{\pi E} \left[ (l-x) \ln \frac{d}{l-x} + x \ln \frac{d}{x} \right] + \frac{1-\nu}{\pi E} ql. \quad [i]$$



Фиг. 58.

Формулой [g] можно пользоваться также для нахождения интенсивности  $q$  распределения нагрузки, которая вызывает данный прогиб прямолинейного края.

Предположив, например, что прогиб  $v_0$  постоянен по длине нагруженной части прямолинейного края (фиг. 58), можем показать, что распределение давления вдоль этой части представится

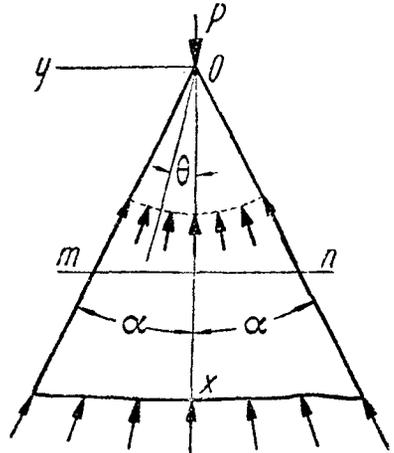
выражением <sup>1)</sup>):

$$q = \frac{P}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

**31. Сила, действующая на острие клина.** Простое радиальное распределение напряжений, рассмотренное в параграфе 29, может быть использовано также при исследовании напряжений в клине, под действием сосредоточенной силы, приложенной к его вершине. Рассмотрим симметричный клин, изображенный на фиг. 59. Толщину клина в направлении, перпендикулярном к плоскости  $xu$ , примем равной единице.

Условия на гранях клина  $\theta = \pm \alpha$  будут выполнены, если мы примем для составляющих напряжения следующие величины:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{kP \cos \theta}{r}, \\ \sigma_\theta &= 0, \\ \tau_{r,\theta} &= 0. \end{aligned} \right\} [a]$$



Фиг. 59.

Теперь нужно подобрать постоянную  $k$  так, чтобы удовлетворить условиям равновесия в точке  $O$ . Приравняв равнодействующую давлений на цилиндрическую поверхность, показанную пунктирной линией на чертеже, величине  $-P$ , найдем:

$$-2 \int_0^\alpha \frac{kP \cos^2 \theta}{r} r d\theta = -kP \left( \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) = -P,$$

откуда

$$k = \frac{1}{\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha}.$$

Тогда, на основании выражений [a], имеем <sup>2)</sup>:

$$\sigma_r = -\frac{P \cos \theta}{r \left( \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right)}. \quad [69]$$

Принимая

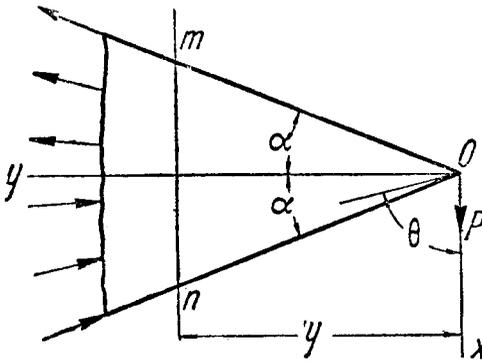
$$\alpha = \frac{\pi}{2},$$

<sup>1)</sup> М. Садовский (M. Sadowsky), см. его статью, указанную в выноске на стр. 95.

<sup>2)</sup> Это решение предложено Мичелем (J. H. Michell), см. его статью, упомянутую выше в выноске на стр. 104. См. также А. Менаже (A. Menager) „Ann. des ponts et chaussées“, 1901.

мы приходим к решению [62] для полубесконечной пластинки, которая была уже рассмотрена. Из этого можно видеть, что распределение нормальных напряжений в любом поперечном сечении  $mn$  не является равномерным, и отношение нормального напряжения в точках  $m$  или  $n$  к наибольшему напряжению в центре поперечного сечения получается равным  $\cos^4 \alpha$ .

Если сила перпендикулярна к оси клина (фиг. 60), то можно воспользоваться тем же решением [а], если угол  $\theta$  отсчитывать от направления силы. Постоянный множитель  $k$  найдется из уравнения равновесия:



Фиг. 60.

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} \sigma_r \cos \theta r d\theta = -P,$$

откуда

$$k = \frac{1}{\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha},$$

и радиальное напряжение равняется

$$\sigma_r = - \frac{P \cos \theta}{r \left( \alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right)}. \quad [70]$$

Нормальное и касательное напряжения в любом поперечном сечении  $mn$  будут равны:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y &= - \frac{P y x \sin^4 \theta}{y^3 \left( \alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right)}; \\ \tau_{xy} &= - \frac{P x^2 \sin^4 \theta}{y^3 \left( \alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right)}. \end{aligned} \right\} \quad [b]$$

При малых углах  $\alpha$ , можно положить:

$$2\alpha - \sin 2\alpha = \frac{(2\alpha)^3}{6}.$$

Тогда, обозначив через  $I$  момент инерции поперечного сечения  $mn$ , мы найдем, по формулам [b], что:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y &= - \frac{P y x}{I} \left( \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha} \right)^3 \sin^4 \theta; \\ \tau_{xy} &= - \frac{P x^2}{I} \left( \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha} \right)^3 \sin^4 \theta. \end{aligned} \right\} \quad [c]$$

При малых величинах угла  $\alpha$  у вершины клина множитель

$$\left( \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha} \right)^3 \sin^4 \theta$$

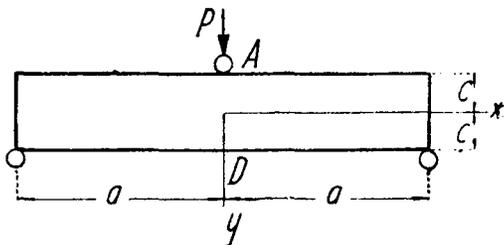
можно считать приблизительно равным единице. Тогда выражение для напряжения  $\sigma_y$  совпадет с тем, что дает нам элементарная формула для изгиба балок. Наибольшее касательное напряжение имеет место в точках  $m$  и  $n$ , и оно вдвое больше того, что нам дает элементарная теория для центра тяжести прямоугольного сечения балки.

Так как мы имеем решение для двух случаев, представленных на фигурах 59 и 60, то мы можем справиться с любым направлением силы  $P$  в плоскости  $xu$ , раскладывая эту силу на две составляющих и пользуясь принципом сложения действия сил<sup>1)</sup>.

Следует заметить, что решения [69] и [70] представляют точное решение только в том случае, когда в заделанном конце клин испытывает радиально направленные усилия, распределенные таким образом, как это получается по этим решениям. В противном случае, решения будут точными только для точек, расположенных на больших расстояниях от заделанного конца.

**32. Сосредоточенная сила, действующая на балку.** Задача распределения напряжений в балке, подвергающейся действию сосредоточенной силы, имеет очень большое практическое значение. Ранее было показано (параграф 19), что в балках узкого прямоугольного сечения, нагруженных сплошной нагрузкой, распределение напряжений получается с достаточной точностью на основании элементарной теории изгиба.

Вблизи точки приложения сосредоточенной силы, однако, следует ожидать серьезных местных отклоне-



Фиг. 61

ний в распределении напряжений, и становится необходимым дальнейшее исследование этого вопроса. Первое изучение этих местных напряжений было произведено опытным путем Карусом Вильсоном<sup>2)</sup>.

Оперируя с прямоугольной балкой из стекла, свободно лежащей на двух опорах (фиг. 61) и нагруженной по середине, и пользуясь поляризованным светом (см. ниже стр. 139), он показал, что в точке приложения груза  $A$  распределение напряжений приближается к тому, какое имеет место в полубесконечной пластинке от нормальной сосредоточенной силы.

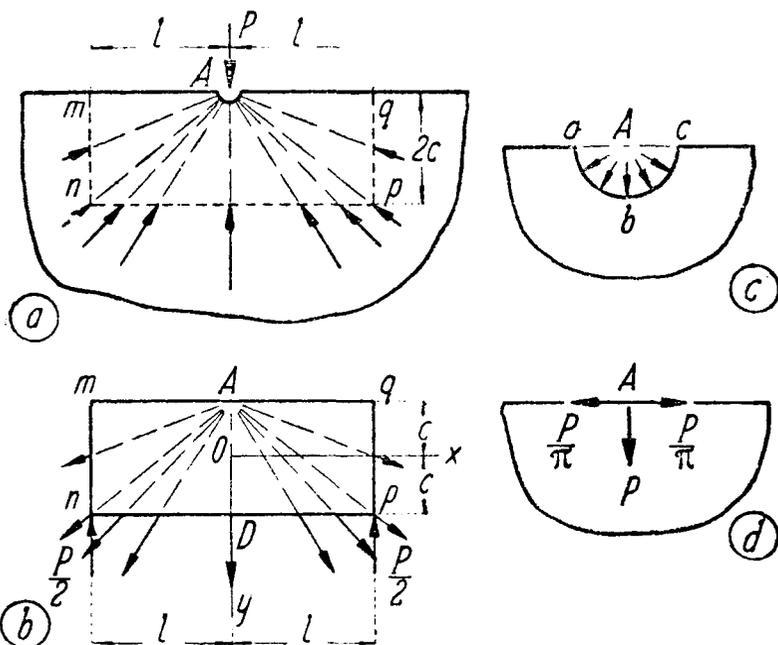
По поперечному сечению  $AD$  нормальное напряжение  $\sigma_x$  не следует линейному закону, и в точке  $D$ , противоположной точке  $A$ , растягивающее напряжение меньше, чем следовало бы ожидать на основании элементарной теории изгиба балок.

<sup>1)</sup> Несколько примеров распределения напряжений в клиньях рассмотрены Акирой Миура (*Akira Miura*), *Spannungskurven in rechteckigen und keilförmigen Trägern*, Berlin, 1928.

<sup>2)</sup> См. статью Вильсона (*Carus Wilson*), упомянутую выше в выноске на стр. 96.

Эти результаты были объяснены на основании некоторых эмпирических предположений Стоксом<sup>1</sup>).

Система, представленная на фиг. 61, может быть получена соединением вместе двух систем, показанных на фиг. 62. Радиальные сжимающие напряжения, действующие на сечения  $mn$ ,  $pr$  и  $rq$  полубесконечной пластинки (фиг. 62а), уравниваются равными им радиальными растягивающими напряжениями, действующими по граням прямоугольной балки, опирающейся в точках  $n$  и  $p$  (фиг. 62б). Чтобы прийти к случаю,



Фиг. 62.

рассмотренному Стоксом, напряжения в этой балке следует сложить с напряжениями в полубесконечной пластинке.

При определении напряжений в балке, применим элементарную формулу изгиба балок. Изгибающий момент в среднем поперечном сечении  $AD$  балки получится, если относительно этого сечения взять момент опорной реакции  $0,5P$  и вычесть из него момент всех радиально направленных растягивающих усилий, приложенных к одной половине балки.

Последний момент легко определить, если мы заметим, что радиально распределенные растягивающие усилия статически эквивалентны распределению давления по квадранту  $ab$  цилиндрической поверхности  $abc$

<sup>1</sup> См. статью Каруса Вильсона (Carus Wilson), упомянутую выше в выноске на стр. 96, а также статью Стокса (G. G. Stokes), *Mathematics Physics Papers*, vol. 5, p. 238.

у точки  $A$  (фиг. 62с), т. е., в соответствии с формулой [62], эквивалентны горизонтальной силе

$$\frac{P}{\pi}$$

и вертикальной силе

$$\frac{P}{2},$$

приложенным в точке  $A$  (фиг. 62d).

Тогда изгибающий момент, т. е. момент относительно точки  $O$ , получится равным

$$\frac{P}{2} l - \frac{P}{\pi} c,$$

и соответствующие напряжения от изгиба будут)<sup>1</sup>

$$\sigma_x = \frac{P}{I} \left( \frac{l}{2} - \frac{c}{\pi} \right) y = \frac{3P}{2c^3} \left( \frac{l}{2} - \frac{c}{\pi} \right) y.$$

К этим напряжениям от изгиба следует прибавить равномерно распределенное растягивающее напряжение

$$\frac{P}{2\pi c},$$

возникающее под действием растягивающей силы

$$\frac{P}{\pi}.$$

Нормальные напряжения по поперечному сечению  $AD$ , получаемые этим элементарным путем, следовательно, равны

$$\sigma_x = \frac{3P}{2c^3} \left( \frac{l}{2} - \frac{c}{\pi} \right) y + \frac{P}{2\pi c}.$$

Это выражение совпадает с формулой, предложенной Стоксом.

Лучшее приближение получится, если мы заметим, что к низу балки приложена непрерывно распределенная нагрузка (фиг. 62b), и воспользуемся выражениями [32'] (см. стр. 56). Интенсивность этой нагрузки в точке  $D$ , согласно формуле [62], равна

$$\frac{P}{\pi c}$$

<sup>1</sup>) Как и раньше, мы считаем силу  $P$  отнесенной к толщине пластинки равной единице.

Подставив это значение в формулы [32'] и к найденным по ним напряжениям присоединив величину напряжения  $\sigma_x$ , полученную выше, найдем следующее второе приближение для напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{3P}{2c^3} \left( \frac{l}{2} - \frac{c}{\pi} \right) y + \frac{P}{2\pi c} + \frac{P}{\pi c} \left( \frac{y^3}{2c^3} - \frac{3}{10} \frac{y}{c} \right); \\ \sigma_y &= \frac{P}{2\pi c} + \frac{P}{\pi c} \left( \frac{3y}{4c} - \frac{y^3}{4c^3} \right). \end{aligned} \right\} [a]$$

Эти напряжения следует прибавить к напряжениям:

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = \frac{2P}{\pi(c - y)}, \quad [b]$$

получающимся для полубесконечной пластинки, с тем, чтобы найти полные напряжения по сечению  $AD$ .

Сравнение с более точным решением, приведенным ниже (см. таблицу 3 на стр. 117), показывает, что выражения [a] и [b] дают напряжения с очень хорошей точностью во всех точках за исключением точки  $D$  снизу балки, где поправка к обыкновенной формуле изгиба балок дает:

$$-\frac{3P}{2\pi c} + \frac{P}{2\pi c} + \frac{1}{5} \frac{P}{\pi c} = -0,254 \frac{P}{c},$$

тогда как более точное решение дает лишь

$$-0,133 \frac{P}{c}.$$

Первая попытка получить более точное решение задачи была сделана Я. Буссинеском<sup>1)</sup>. Он воспользовался решением Фламана (см. параграф 29) для полубесконечной пластинки.

Чтобы аннулировать напряжения на контуре  $pr$  (фиг. 62a), он присоединил равную и прямо противоположную систему напряжений и воспользовался снова решением Фламана, т. е. рассматривал балку, как полубесконечную пластинку, простирающуюся выше линии  $pr$ . Эта поправочная система вводит добавочные напряжения по верху балки, которые снова можно устранить повторным применением решения Фламана, и так далее. Решение, получаемое таким образом, является слишком медленно сходящимся и не приводит к удовлетворительным результатам.

Решение задачи при помощи тригонометрических рядов было получено Л. Файлоном<sup>2)</sup>. Он применил это решение к случаю сосредоточенных грузов и произвел выкладки для нескольких частных случаев (см. параграф 20), которые хорошо согласуются с более поздними исследованиями.

<sup>1)</sup> См. *J. Boussinesq*, „Comptes rendus“, t. 114. 1892, p. 1510.

<sup>2)</sup> См. его статью, упомянутую выше в выноске на стр. 56.

Дальнейшее развитие решения задачи было дано Г. Ламбом <sup>1)</sup>. Рассматривая бесконечно длинную балку, нагруженную на равных расстояниях одинаковыми сосредоточенными силами, действующими попеременно то в направлении вверх, то в направлении вниз, Ламб упростил решение плоской задачи и получил для некоторых случаев выражения для упругой линии.

Таким путем было доказано, что элементарная теория Бернулли—Эйлера об изгибе балок достаточно точна, если высота балки мала по сравнению с ее длиной. Кроме того Ламбом было установлено также, это поправка на перерезывающую силу, получающаяся по элементарной теории Ренкина и Грасгофа (см. выше стр. 53), несколько преувеличена, и ее следует уменьшить примерно до 0,75 ее величины <sup>2)</sup>.

Более детальное изучение распределения напряжений и кривизны вблизи точки приложения сосредоточенного груза было произведено Т. Карманом и Ф. Зеевальдом <sup>3)</sup>.

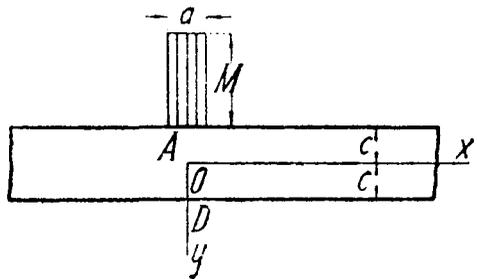
Карман рассматривает бесконечно длинную балку и применяет решение для полубесконечной пластинки с двумя равными и прямо противоположными моментами, действующими в двух смежных точках ее прямолинейной грани (см. фиг. 53b). Напряжения по низу балки, которые вводятся таким приемом, можно устранить, если воспользоваться решением в форме тригонометрических рядов (параграф 20), представляющихся для бесконечно длинной балки интегралами Фурье.

Таким путем Карман приходит к следующей функции напряжений:

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{Ma}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(x \cosh ac + \sinh ac) \cosh ay - \sinh ac \sinh ay \cdot ay}{\sinh 2ac + 2ac} \cos ax \, dx - \\ & - \frac{Ma}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(x \sinh ac + \cosh ac) \sinh ay - \cosh ac \cosh ay \cdot ay}{\sinh 2ac - 2ac} \cos ax \, dx. \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\frac{Ma}{\pi}} \right\} [c]$$

Эта функция дает распределение напряжений в балке, когда эпюра изгибающих моментов представляет собой очень узкий прямоугольник, как изображено на фиг. 63.

Для более общего случая загрузки балки вертикальными силами, приложенными кверху балки <sup>4)</sup>, соответствующая эпюра изгибающих моментов может быть разделена на элементарные прямоугольники, подобные показанным на фиг. 63, и соответствующая функция напряжений получится интегрированием выражения [c] по длине балки.



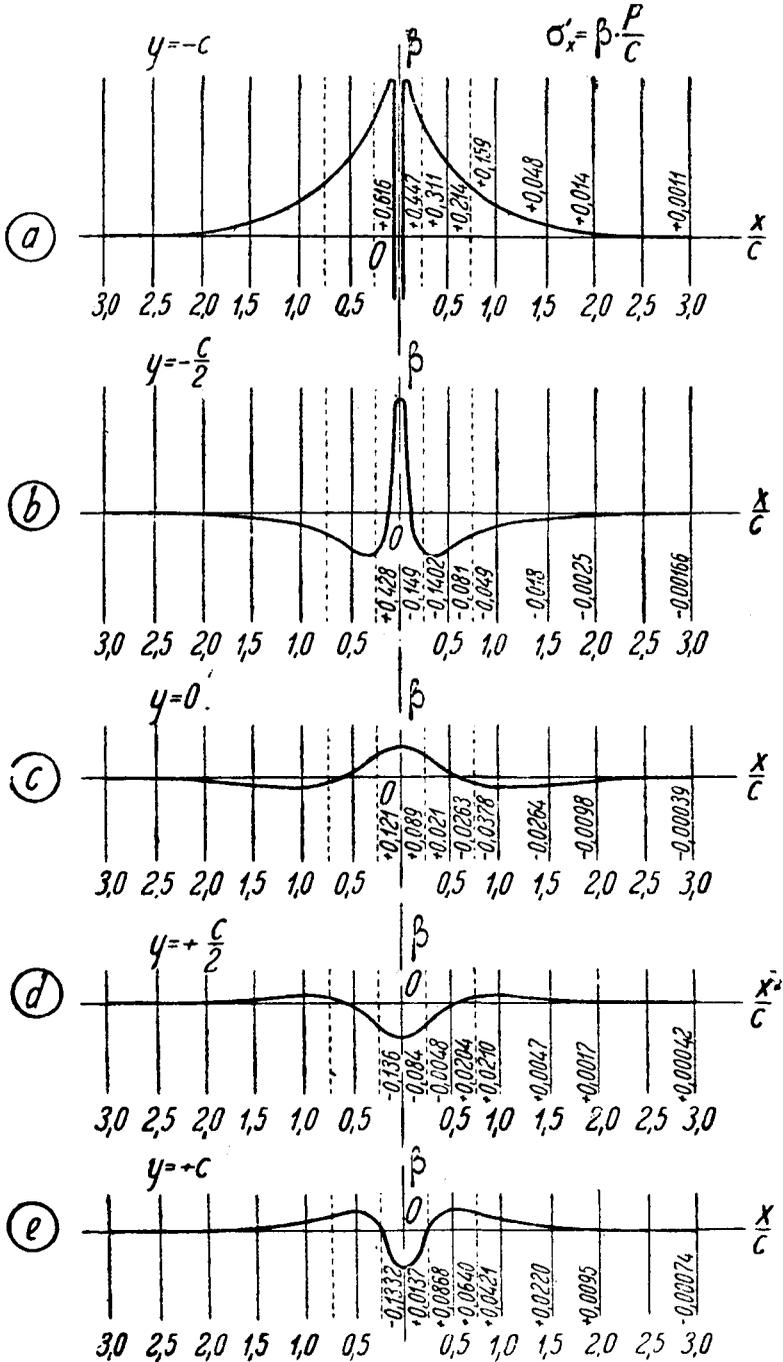
Фиг. 63

<sup>1)</sup> См. Г. Ламб (*H. Lamb*), *Atti IV Congr. Intern. Matem.*, vol. 3, Roma, 1909, p. 12.

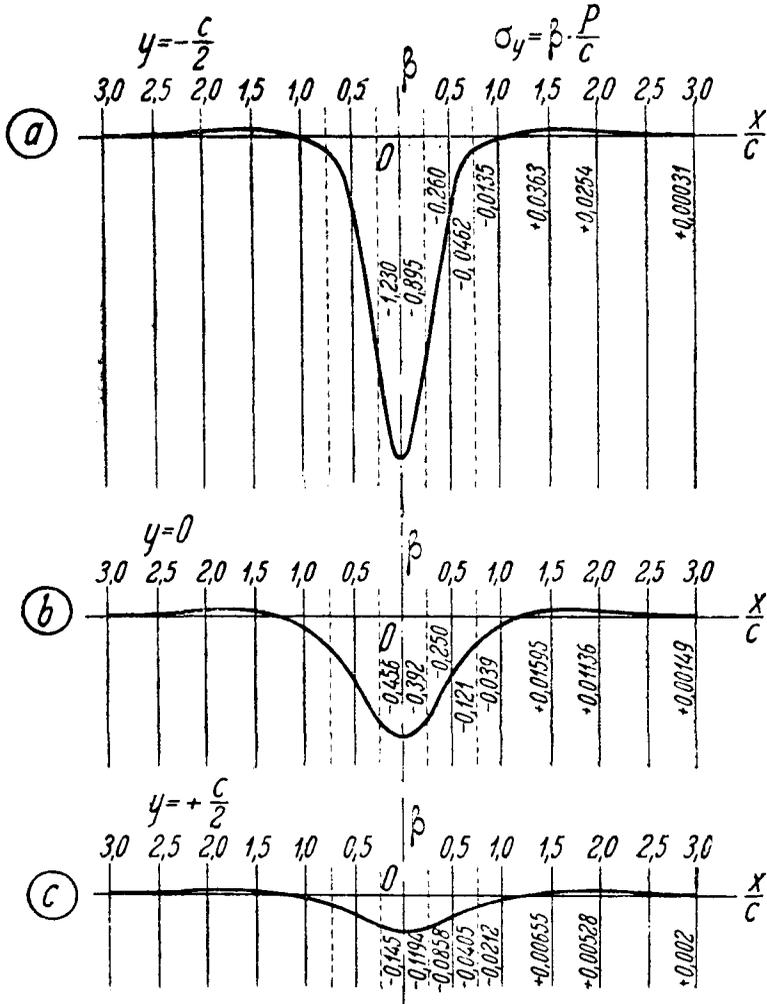
<sup>2)</sup> Файлон пришел в своей статье к тому же заключению (см. выноски выше, на стр. 56).

<sup>3)</sup> См. статьи этих авторов, упомянутые выше в выносках на стр. 53 и 55 соответственно.

<sup>4)</sup> Случай сосредоточенного груза, приложенного на половине расстояния между верхом и низом балки, был рассмотрен Р. Гауландом (*R. C. J. Howland*), *Proc. Roy. Soc.*, London, vol. 124, 1929, p. 89.



Этот метод решения был применен Зеевальдом к случаю балки, нагруженной сосредоточенной силой  $P$  (фиг. 61). Зеевальд показал, что напряжение  $\sigma_x$  можно разделить на две части: одну, которая определяется при помощи обычных



Фиг. 65.

элементарных формул для изгиба балок, и другую, которая представляет местное напряжение вблизи точки приложения груза.

Эта последняя часть, обозначенная им через  $\sigma'_x$ , может быть представлена в виде:

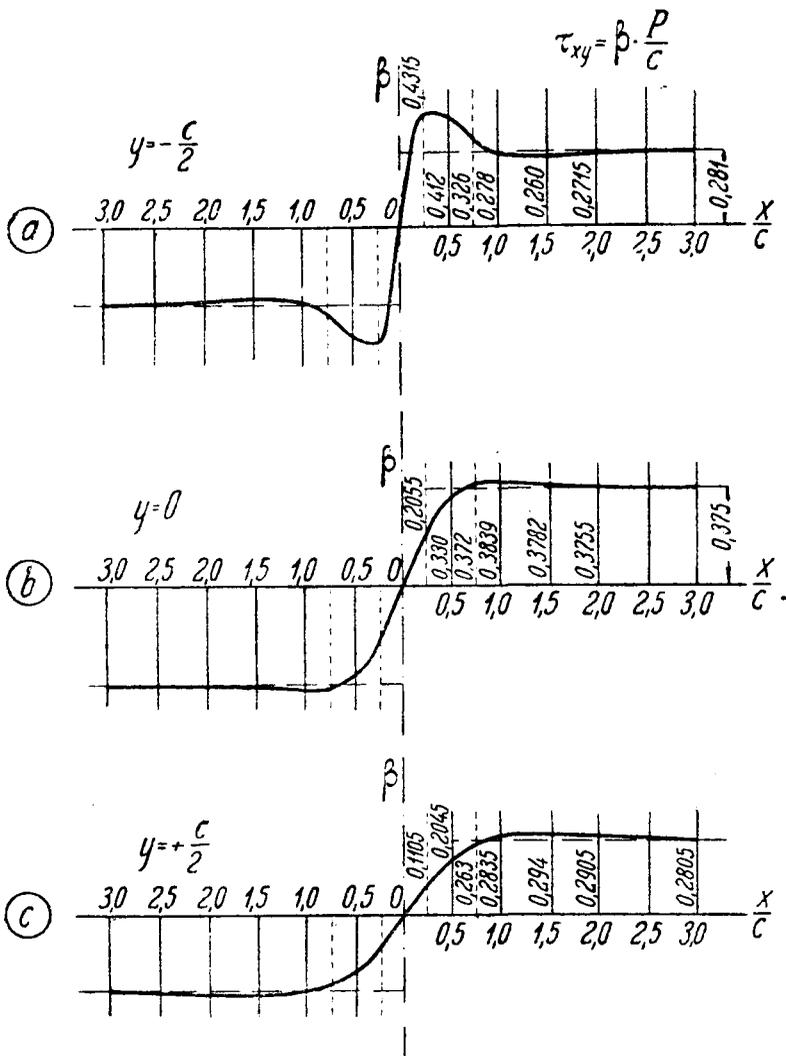
$$\beta \frac{P}{c},$$

где  $\beta$  — числовой коэффициент, зависящий от положения точки, для которой определяются местные напряжения. Значения этого коэффициента даны на фиг. 64.

Две других составляющих напряжения  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  можно также представить в виде:

$$\beta \frac{P}{c}$$

$$\tau_{xy} = \beta \cdot \frac{P}{c}$$



Фиг. 66.

Соответствующие значения коэффициента  $\beta$  приведены на диаграммах фигур 65 и 66. Из этих диаграмм можно видеть, что местные напряжения уменьшаются очень быстро с увеличением расстояния от точки приложения груза, и на расстоянии, равном толщине балки, ими обычно можно пренебречь.

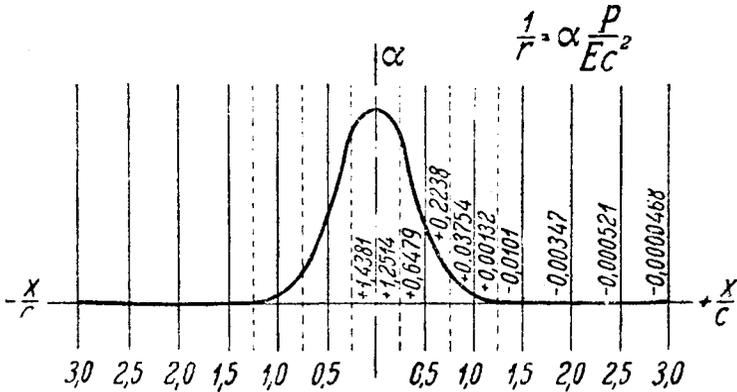
Найденные с помощью значений коэффициента  $\beta$  при  $x = 0$  местные напряжения для пяти точек поперечного сечения  $AD$  под грузом (фиг. 61) приводятся

в таблице 3, помещенной ниже. Для сравнения с местными напряжениями <sup>1)</sup>, получающимися по формулам [a] и [b] (стр. 112), последние также помещены в этой таблице. Из таблицы 3 видно, что формулы [a] и [b] дают значения местных напряжений с достаточной точностью.

Т А Б Л И Ц А 3.  
Значения коэффициента  $\beta$  для середины пролета.

$y$	$-c$	$-\frac{c}{2}$	0	$\frac{c}{2}$	$c$
точное решение					
$\sigma'_x$	...	0,428	0,121	-0,136	-0,133
$\sigma_y$	$\infty$	-1,23	-0,456	-0,145	0
приближенное решение					
$\sigma'_x$	0,573	0,426	0,159	-0,108	-0,254
$\sigma_y$	$\infty$	-1,22	-0,477	-0,155	0

Зная напряжения, можем определить кривизну и прогиб балки без какого-либо затруднения. Эти выкладки показывают, что кривизна упругой линии может быть также разделена на две части. Одна — та, которая получается по эле-



Фиг. 67.

ментарной теории изгиба балок, и другая — представляющая местное влияние сосредоточенного груза  $P$ . Эта дополнительная кривизна осевой линии может быть представлена формулой:

$$\frac{1}{r} = \alpha \frac{P}{E c^2}, \quad \{d\}$$

где  $\alpha$  — числовой коэффициент, изменяющийся по длине балки.

<sup>1)</sup> Т. е., точнее, с теми напряжениями, которые должны быть прибавлены к получающимся по элементарным формулам изгиба.

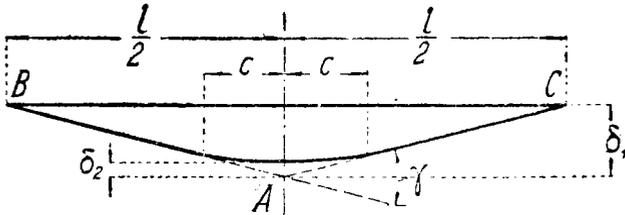
Некоторые значения этого коэффициента даны на диаграмме фиг. 67. Из нее видно, что для поперечных сечений, находящихся на расстоянии, большем половины высоты балки, добавочной кривизной можно пренебречь.

Вследствие указанного выше местного влияния на кривизну, две ветви упругой линии  $AB$  и  $AC$  (фиг. 68) можно рассматривать сходящимися под углом, равным

$$\gamma = \frac{P}{c} \left( \frac{3}{4G} - \frac{3}{10E} - \frac{3\nu}{4E} \right). \quad [e]$$

Соответствующий прогиб по середине пролета, следовательно, равен:

$$\delta_1 = \frac{\gamma l}{4} = \frac{Pl}{4c} \left( \frac{3}{4G} - \frac{3}{10E} - \frac{3\nu}{4E} \right). \quad [f]$$



Фиг. 68.

Из этого прогиба следует вычесть небольшую дальнейшую поправку  $\delta_2$ , устраняющую резкое изменение угла наклона упругой линии в точке  $A$ . Эта величина была также определена Зеевальдом и оказалась равной:

$$\delta_2 = 0,21 \frac{P}{E}.$$

Обозначив теперь через  $\delta_0$  прогиб, получаемый на основании элементарной теории, найдем общий прогиб под грузом

$$\delta = \delta_0 + \delta_1 - \delta_2 = \frac{Pl^3}{48EI} + \frac{Pl}{4c} \left( \frac{3}{4G} - \frac{3}{10E} - \frac{3\nu}{4E} \right) - 0,21 \frac{P}{E}. \quad [71]$$

Принимая  $\nu = 0,3$  имеем

$$\delta = \frac{Pl^3}{48EI} \left[ 1 + 2,85 \left( \frac{2c}{l} \right)^2 - 0,84 \left( \frac{2c}{l} \right)^3 \right]. \quad [71']$$

Элементарная теория Ренкина — Грасгофа (см. выше стр. 53) дает в этом случае

$$\delta = \frac{Pl^3}{48EI} \left[ 1 + 3,90 \left( \frac{2c}{l} \right)^2 \right]. \quad [g]$$

Прогиб, получающийся при применении теоремы Кастильяно (см. ниже параграф 41), равен

$$\delta = \frac{Pl^3}{48EI} \left[ 1 + 3,12 \left( \frac{2c}{l} \right)^2 \right]. \quad [h]$$

Оказывается, что выражение [g] дает преувеличенное значение поправки на действие сдвига. Выражение [h] дает более удовлетворительные результаты. Во всех этих формулах не приняты во внимание прогиб от местных деформаций у опор.

**33. Напряжения в круглом диске.** Начнем с простейшего случая двух равных и прямо противоположных сил  $P$ , действующих по диаметру  $AB$  (фиг. 69).

Допустим, что каждая из этих сил вызывает простое радиальное распределение напряжений (см. формулу [62]). Мы можем найти, какие усилия следует приложить по окружности диска, чтобы удержать такое распределение напряжений.

В любой точке  $M$  на окружности диска мы имеем напряжения сжатия в направлениях  $r$  и  $r_1$ , равные:

$$\frac{2P \cos \theta}{\pi r} \quad \text{и} \quad \frac{2P \cos \theta_1}{\pi r_1}$$

соответственно<sup>1)</sup>.

Так как направления  $r$  и  $r_1$  взаимно перпендикулярны друг к другу, и

$$\frac{\cos \theta}{r} = \frac{\cos \theta_1}{r_1} = \frac{1}{d}, \quad [a]$$

где  $d$  — диаметр диска, то можно сделать заключение, что оба главных напряжения в точке  $M$  являются двумя равными сжимающими напряжениями величиной

$$\frac{2P}{\pi d}.$$

Следовательно, такое же сжимающее напряжение действует по любой плоскости, проходящей через точку  $M$  перпендикулярно к плоскости диска. Чтобы сохранить оба принятые нами простые радиальные распределения напряжений, следует приложить к окружности диска нормальные сжимающие усилия постоянной интенсивности

$$\frac{2P}{\pi d}.$$

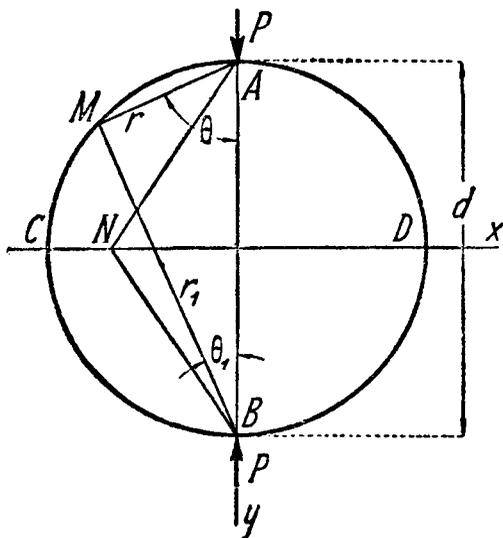
Если контур диска свободен от внешних усилий, то напряжение в любой точке получится присоединением равномерного растяжения в плоскости диска, величиною

$$\frac{2P}{\pi d},$$

к двум найденным выше простым радиальным распределениям напряжений.

Рассмотрим напряжение по горизонтальному диаметральному сечению диска в точке  $N$ . Вследствие симметрии можно сделать заключение, что

<sup>1)</sup> Здесь принято, что сила  $P$  отнесена к единице толщины диска.



Фиг. 69.

по этому сечению не будет касательных напряжений. Нормальное напряжение, возникающее от двух одинаковых радиальных сжатий, равно:

$$-2 \cdot \frac{2P \cos \theta}{\pi r} \cdot \cos^2 \theta,$$

где  $r$  — расстояние  $\overline{AN}$  и  $\theta$  — угол между  $AN$  и вертикальным диаметром.

Присоединяя сюда равномерное растяжение

$$\frac{2P}{\pi d},$$

получим полное нормальное напряжение в точке  $N$

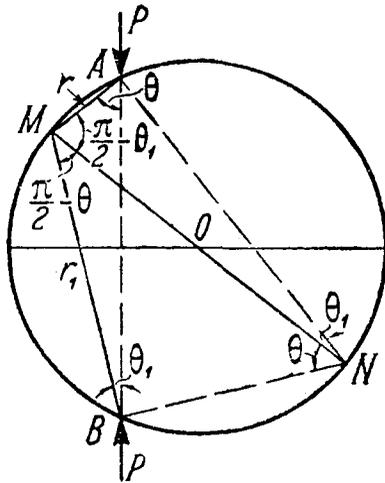
$$\sigma_y = -\frac{4P \cos^3 \theta}{\pi r} + \frac{2P}{\pi d},$$

или, на основании того, что

$$\cos \theta = \frac{d}{\sqrt{d^2 + 4x^2}},$$

имеем:

$$\sigma_y = \frac{2P}{\pi d} \left[ 1 - \frac{4d^4}{(d^2 + 4x^2)^2} \right] \quad [6]$$



Фиг. 70.

Наибольшее сжимающее напряжение по длине диаметра  $CD$  будет в центре диска, где оно равно:

$$\sigma_y = -\frac{6P}{\pi d}.$$

На концах диаметра сжимающее напряжение  $\sigma_y$  равно нулю.

Рассмотрим теперь случай двух равных и прямо противоположных сил, действующих по хорде  $AB$  (фиг. 70). Предполагая снова наличие двух простых радиальных распределений напряжений, расходящихся от точек  $A$  и  $B$ , получим напряжение по плоскости касательной к окружности в точке  $M$  путем соединения двух радиальных сжатий

$$\frac{2P \cos \theta}{\pi r} \quad \text{и} \quad \frac{2P \cos \theta_1}{\pi r_1},$$

действующих соответственно по направлениям  $r$  и  $r_1$ .

Перпендикуляр  $MN$  к касательной в точке  $M$  является диаметром диска. Следовательно, треугольники  $MAN$  и  $MBN$  являются прямо-

угловыми, и углы, составляемые перпендикуляром  $MO$  и направлениями  $r$  и  $r_1$ , равны соответственно:

$$\frac{\pi}{2} - \theta_1 \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{2} - \theta.$$

Нормальное и касательное напряжения, действующие на элемент контура диска в точке  $M$ , равны таким образом:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= -\frac{2P \cos \theta}{\pi} \frac{\cos \theta}{r} \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} - \theta_1 \right) - \frac{2P \cos \theta_1}{\pi} \frac{\cos \theta_1}{r_1} \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) = \\ &= -\frac{2P}{\pi} \left( \frac{\cos \theta \sin^2 \theta_1}{r} + \frac{\cos \theta_1 \sin^2 \theta}{r_1} \right); \\ \tau &= -\frac{2P}{\pi} \left( \frac{\cos \theta}{r} \sin \theta_1 \cos \theta_1 - \frac{\cos \theta_1}{r} \sin \theta \cos \theta \right). \end{aligned} \right\} [c]$$

Эти выражения можно упростить, если мы заметим, что из треугольников  $MAN$  и  $MBN$

$$r = d \sin \theta_1 \quad \text{и} \quad r_1 = d \sin \theta.$$

Подставив эти значения в выражения [c], найдем:

$$\sigma = -\frac{2P}{\pi d} \sin(\theta + \theta_1); \quad \tau = 0. \quad [d]$$

По чертежу фиг. 70 видно, что  $\sin(\theta + \theta_1)$  остается постоянным по всему контуру. Следовательно, для того, чтобы сохранить принятые радиальные распределения напряжений, необходимо приложить к контуру равномерно распределенные сжимающие усилия с интенсивностью, равной

$$\frac{2P}{\pi d} \sin(\theta + \theta_1).$$

Чтобы получить решение для диска с контуром, свободным от равномерного сжатия, необходимо только присоединить к вышерассмотренным двум простым радиальным распределениям напряжений равномерное растяжение интенсивности

$$\frac{2P}{\pi d} \sin(\theta + \theta_1).$$

Задача о распределении напряжений в диске может быть решена и для общего случая, когда любая система сил, находящаяся в равновесии, действует по контуру диска <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Задачи, рассмотренные в этом параграфе, были решены Г. Герцем (*H. Herz*) *Z. Math. Physik*\*, Bd 28, 1883 или *Gesammelte Werke*, Bd 1, S. 283, и Мичеллем (*J. H. Michell*), *Proc. London Math. Soc.*\*, vol. 32, 1900, p. 44 и vol. 31, 1901, p. 134.

Возьмем одну из этих сил, приложенную в точке  $A$  и действующую по направлению хорды  $AB$  (фиг. 71).

Предположив снова простое радиальное распределение напряжений, мы получим в точке  $M$  простое радиальное сжатие величиною

$$\frac{2P \cos \theta_1}{\pi r_1},$$

действующее по направлению  $AM$ .

Возьмем за начало полярных координат центр  $O$  диска и будем измерять угол  $\theta$  в направлении, показанном на чертеже. Тогда нормальную и касательную составляющие напряжения по элементарной площадке, касающейся контура в точке  $M$ , можно легко найти, если мы заметим, что угол между нормалью  $MO$  к элементу и направлением  $r_1$  сжатия равен

$$\frac{\pi}{2} - \theta_2.$$

Тогда:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{2P \cos \theta_1}{\pi r_1} \sin^2 \theta_2; \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{2P \cos \theta_1}{\pi r_1} \sin \theta_2 \cos \theta_2. \end{aligned} \right\} [e]$$

Так как из треугольника  $AMN$   $r_1 = d \sin \theta_2$ , то выражения  $[e]$  можно написать в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{P}{\pi d} \sin(\theta_1 + \theta_2) - \frac{P}{\pi d} \sin(\theta_2 - \theta_1); \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{P}{\pi d} \cos(\theta_1 + \theta_2) - \frac{P}{\pi d} \cos(\theta_2 - \theta_1). \end{aligned} \right\} [f]$$

Эти напряжения, действующие по элементарной площадке, касающейся контура в точке  $M$ , можно получить наложением друг на друга следующих трех напряжений, действующих на элемент:

1) нормального напряжения, равномерно распределенного по контуру:

$$-\frac{P}{\pi d} \sin(\theta_1 + \theta_2); \quad [g]$$

2) касательного напряжения, равномерно распределенного по контуру;

$$-\frac{P}{\pi d} \cos(\theta_1 + \theta_2); \quad [h]$$

3) напряжения, нормальная и касательная составляющие которого равны:

$$-\frac{P}{\pi d} \sin(\theta_2 - \theta_1) \quad \text{и} \quad -\frac{P}{\pi d} \cos(\theta_2 - \theta_1). \quad [k]$$

Заметив, что угол между силой  $P$  и касательной в точке  $M$  равен  $\theta_1 - \theta_2$ , можем сделать заключение, что напряжение  $[k]$  равно по величине

$$\frac{P}{\pi d}$$

и действует в направлении, противоположном направлению действия силы  $P$ .

Допустим теперь, что мы имеем несколько сил, действующих на диск, и каждая из них вызывает простое радиальное распределение напряжений.

Тогда усилия, которые нужно приложить к контуру диска, чтобы сохранить это распределение напряжений, должны состоять из:

1) нормальных равномерно распределенных по контуру усилий интенсивности:

$$-\sum \frac{P}{\pi d} \sin(\theta_1 + \theta_2); \quad [N]$$

2) касательных усилий с интенсивностью, равной:

$$-\sum \frac{P}{\pi d} \cos(\theta_1 + \theta_2); \quad [m]$$

3) усилий, интенсивность и направление которых получатся геометрическим суммированием выражений [k].

Это суммирование должно быть распространено на все силы, действующие по контуру.

Момент всех внешних сил относительно точки O, согласно фиг. 71, равен

$$\sum \frac{P \cos(\theta_1 + \theta_2) \cdot d}{2}.$$

Так как этот момент должен быть равен нулю для системы, находящейся в равновесии, то касательные усилия [m] равны нулю. Усилия, получающиеся путем суммирования напряжений [k], пропорциональные геометрической сумме внешних сил, также равны нулю для системы, находящейся в равновесии.

Следовательно, необходимо лишь приложить к контуру диска равномерное сжатие [l], чтобы сохранить простые радиальные распределения напряжений.

Если контур свободен от равномерного сжатия, то напряжение в любой точке диска получится присоединением к простым радиальным распределениям напряжений равномерно растяжения, равного по величине

$$\sum \frac{P}{\pi d} \sin(\theta_1 + \theta_2).$$

При помощи этого общего метода можно легко решить и различные другие задачи распределения напряжений в дисках <sup>1)</sup>.

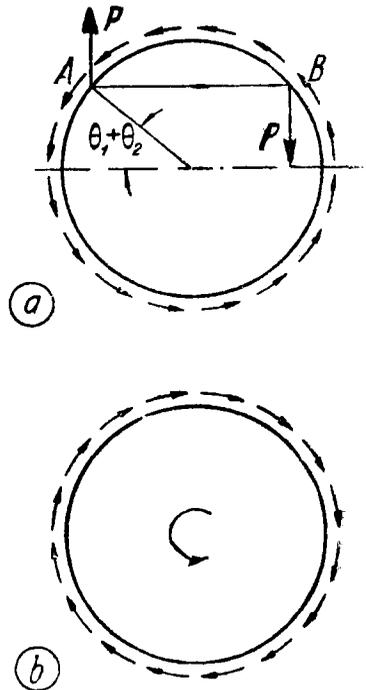
Мы можем выбрать, например, случай пары сил, действующей на диск (фиг. 72) и уравновешенной моментом, приложенным к центру диска.

Предположив два одинаковых радиальных распределения напряжений в точках A и B, мы видим, что в этом случае усилия [l] и геометрическая сумма напряжений [k] равны нулю, и к контуру диска нужно приложить, чтобы сохранить простые радиальные распределения напряжений, одни лишь касательные усилия [m]. Интенсивность этих усилий, на основании выражения [m], равна:

$$-\frac{2P}{\pi d} \cos(\theta_1 + \theta_2) = -\frac{2M_t}{\pi d^2}, \quad [m]$$

где  $M_t$  — момент пары сил.

<sup>1)</sup> Несколько интересных примеров рассмотрено Мичелем в цитированной выше его статье.



Фиг. 72.

Для того, чтобы освободить контур диска от касательных усилий и перенести момент, уравнивающий пару сил  $P$ , с окружности диска к его центру, необходимо присоединить к простым радиальным распределениям напряжений те напряжения, которые показаны на фиг. 72*b*.

Эти последние напряжения, возникающие под действием чистого сдвига по окружности, можно легко найти, если мы заметим, что для каждой концентрической окружности радиуса  $r$  касательные напряжения должны давать в сумме крутящий момент  $M_t$ . Следовательно:

$$\tau_{r\theta} 2\pi r^2 = M_t,$$

откуда

$$\tau_{r\theta} = \frac{M_t}{2\pi r^2}. \quad [p]$$

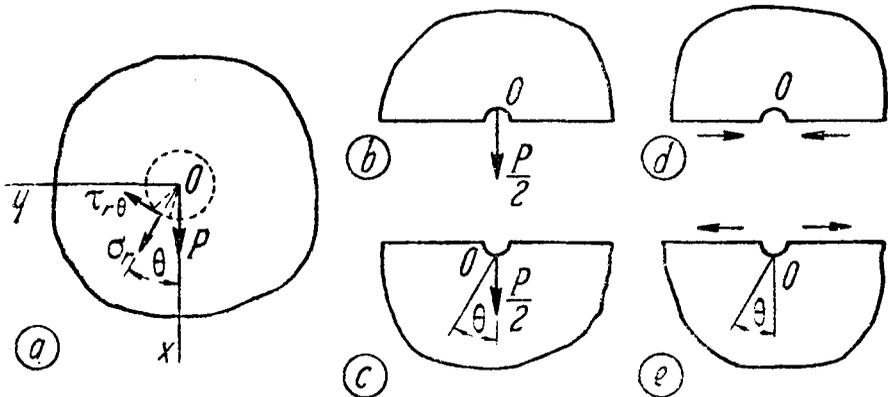
Эти напряжения можно также вывести из общих выражений [34], если принять функцию напряжений в таком виде:

$$\varphi = \frac{M_t \theta}{2\pi}, \quad [q]$$

откуда следует, что

$$\sigma_r = \sigma_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = \frac{M_t}{2\pi r^2}.$$

**34. Сила, приложенная в точке бесконечной пластинки.** Если сила  $P$  действует в срединной плоскости бесконечно большой пластинки (фиг. 73*a*), то распределение напряжений легко получить путем наложения систем, которые мы уже рассмотрели.



Фиг. 73.

Однако, мы не можем построить решение простым наложением двух решений для полубесконечных пластинок, показанных на фиг. 73*b* и 73*c*. Хотя вертикальные перемещения — одни и те же в обоих этих случаях, но горизонтальные перемещения вдоль прямолинейных краев — различны.

В то время как в случае, представленном на фиг. 73*b*, это последнее направлено от точки  $O$ , в случае, изображенном на фиг. 73*c*, оно направлено к точке  $O$ .

Абсолютная величина этих перемещений в обоих случаях, на основании формул [67], равна

$$\frac{1-\nu}{4E} \cdot P. \quad [a]$$

Эта разница в направлении горизонтальных перемещений двух полу-пластинок может быть устранена путем присоединения к нагрузкам, представленным на фиг. 73*b* и 73*c*, систем нагрузок, изображенных на фиг. 73*d* и 73*e*, в которых вдоль прямолинейных краев действуют касательные усилия.

Перемещения для этих последних двух случаев можно получить из рассмотренной нами задачи изгиба кривого бруса, показанного на фиг. 43 (см. стр. 83). Принимая внутренний радиус кривого стержня приближающимся в пределе к нулю, а внешний радиус возрастающим до бесконечности, мы приходим к случаю полубезконечной пластинки.

Перемещение вдоль прямолинейного края этой пластинки, в направлении касательных усилий, действующих по краю, равно, на основании формулы [57] (стр. 88),

$$\frac{D\pi}{E}. \quad [b]$$

Произвольная постоянная интегрирования  $D$  должна быть подобрана так, чтобы общая сумма перемещений по формулам [a] и [b] обращалась в нуль. Таким образом имеем:

$$\frac{D\pi}{E} = \frac{1-\nu}{4E} P,$$

откуда

$$D = \frac{1-\nu}{4\pi} P. \quad [c]$$

При таком подборе, в результате наложения случаев, представленных на фиг. 73*b*, 73*c*, 73*d* и 73*e*, получим бесконечно большую пластинку, несущую нагрузку в одной точке (фиг. 73*a*).

Распределение напряжений в пластинке легко получить теперь наложением напряжений в полубезконечной пластинке, возникающих под действием нормальной силы  $0,5P$ , приложенной к прямолинейному контуру ее (см. параграф 29), на напряжения в кривом стержне, формулы которых содержат произвольную постоянную интегрирования  $D$ .

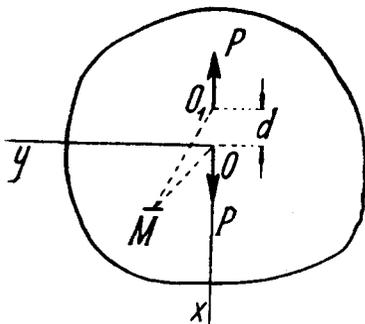
Отметив различие в измерении угла  $\theta$  для случаев, представленных на фиг. 43 и 73, и пользуясь выражениями [56], получим напряжения в кривом стержне при угле  $\theta$ , взятом по фиг. 73:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{D \cos \theta}{r} = \frac{1-\nu}{4\pi} \cdot \frac{P \cos \theta}{r}; \\ \sigma_\theta &= \frac{D \cos \theta}{r} = \frac{1-\nu}{4\pi} \cdot \frac{P \cos \theta}{r}; \\ \tau_{r\theta} &= \frac{D \sin \theta}{r} = \frac{1-\nu}{4\pi} \cdot \frac{P \sin \theta}{r}. \end{aligned}$$

Присоединяя к этим напряжениям напряжения по формулам [62'], найденные для силы  $0,5P$ , получим следующее распределение напряжений в бесконечно большой пластинке:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1-\nu}{4\pi} \cdot \frac{P \cos \theta}{r} - \frac{P \cos \theta}{\pi r} = -\frac{3+\nu}{4\pi} \cdot \frac{P \cos \theta}{r}; \\ \sigma_\theta &= \frac{1-\nu}{4\pi} \cdot \frac{P \cos \theta}{r}; \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1-\nu}{4\pi} \cdot \frac{P \sin \theta}{r}. \end{aligned} \right\} [72]$$

Вырезав из пластинки у точки  $O$  (фиг. 73а) малый элемент, ограниченный цилиндрической поверхностью радиуса  $r$ , и спроектировав на оси  $x$  и  $y$  все усилия, действующие на цилиндрический контур элемента, найдем соответственно:



Фиг. 74.

$$X = 2 \int_0^\pi (\sigma_r \cos \theta - \tau_{r\theta} \sin \theta) r d\theta = P,$$

$$Y = 2 \int_0^\pi (\sigma_r \sin \theta + \tau_{r\theta} \cos \theta) r d\theta = 0;$$

т. е. равнодействующая усилий, действующих по цилиндрической поверхности на вырезанный элемент, представляет собой силу  $P$ , приложенную в точке  $O$ .

При помощи выражений [13] (см. стр. 27) для составляющих напряжения в декартовых координатах получим на основании формул [72] следующие значения напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{P \cos \theta}{4\pi} \frac{1}{r} [- (3 + \nu) + 2(1 + \nu) \sin^2 \theta]; \\ \sigma_y &= \frac{P \cos \theta}{4\pi} \frac{1}{r} [1 - \nu - 2(1 + \nu) \sin^2 \theta]; \\ \tau_{xy} &= -\frac{P \sin \theta}{4\pi} \frac{1}{r} [1 - \nu + 2(1 + \nu) \cos^2 \theta]. \end{aligned} \right\} [73]$$

Из решения [73] для одной сосредоточенной силы можно получить, на основании принципа сложения действия сил, решения для других родов нагрузок.

Возьмем, например, случай, представленный на фиг. 74, когда к бесконечно большой пластинке приложены две равные и прямо противоположные силы в точках  $O$  и  $O_1$ , отстоящих друг от друга на очень малом расстоянии  $d$ . Напряжение в любой точке  $M$  получится путем наложения напряжения, возникающего под действием силы, приложенной

в точке  $O$ , с напряжением, вызываемым другой силой, приложенной в точке  $O_1$ .

Рассмотрим элементарную площадку в точке  $M$ , перпендикулярную к оси  $x$ , и обозначим через  $\sigma_x$  нормальное напряжение, появляющееся на площадке под действием силы, приложенной в точке  $O$ . Тогда нормальное напряжение  $\sigma'_x$ , появляющееся в результате действия обеих сил, изображенных на чертеже, будет равно

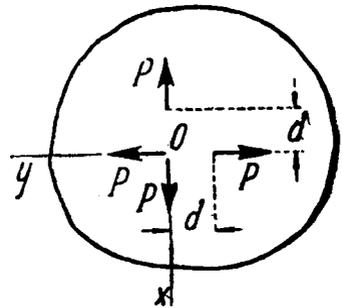
$$\sigma'_x = \sigma_x - \left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} d \right) = -d \cdot \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -d \cdot \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial \sigma_x}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \right).$$

Итак, составляющие напряжения для случая, представленного на фиг. 74, получаются путем дифференцирования выражений [73]. Таким путем находим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{Pd}{4\pi r^2} [-(3 + \nu) \cos^2 \theta + (1 - \nu) \sin^2 \theta + \\ &\quad + 8(1 + \nu) \sin^2 \theta \cos^2 \theta]; \\ \sigma_y &= \frac{Pd}{4\pi r^2} [(1 - \nu) \cos^2 \theta + \\ &\quad + (1 + 3\nu) \sin^2 \theta - 8(1 + \nu) \sin^2 \theta \cos^2 \theta]; \\ \tau_{xy} &= \frac{Pd}{4\pi r^2} [-(6 + 2\nu) + 8(1 + \nu) \sin^2 \theta] \sin \theta \cos \theta. \end{aligned} \right\} [74]$$

Отсюда следует, что составляющие напряжения быстро уменьшаются при возрастании расстояния  $r$ , и ими можно пренебречь, когда расстояние  $r$  велико по сравнению с расстоянием  $d$ . Подобный результат и следовало ожидать в соответствии с принципом Сен-Венана, если две уравновешивающие друг друга силы приложены очень близко одна от другой.

Помощью наложения друг на друга двух распределений напряжений, выражающихся формулами [74], получим решение задачи, представленной на фиг. 75. Составляющие напряжения в таком случае будут равны:

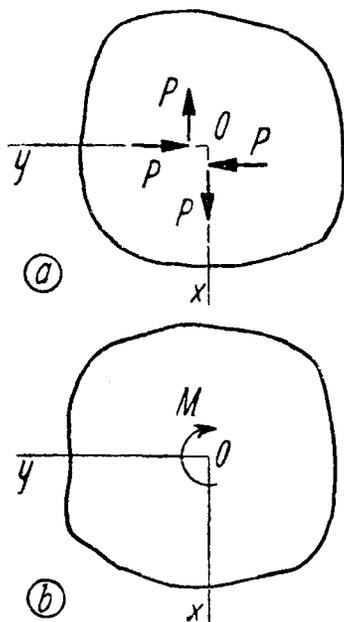


Фиг. 75.

$$\sigma_x = -2(1 - \nu) \frac{Pd}{4\pi r^2} (1 - 2 \sin^2 \theta);$$

$$\sigma_y = 2(1 - \nu) \frac{Pd}{4\pi r^2} (1 - 2 \sin^2 \theta);$$

$$\tau_{xy} = -2(1 - \nu) \frac{Pd}{4\pi r^2} \sin 2\theta.$$



Фиг. 76.

Если вместо бесконечно большой пластинки мы имеем дело с бесконечно длинной полосой, подвергающейся действию продольной силы  $P$  (фиг. 77), мы можем начать с решения [73], как если бы пластинка была бесконечной по всем направлениям. Полученные таким путем напряжения по краям полосы можно устранить наложением системы равных, но прямо противоположных им усилий. Возникающие под действием этой поправочной системы усилий напряжения можем определить, пользуясь общим способом, описанным выше в параграфе 20.

Выкладки, выполненные Р. Гаулантом<sup>2)</sup>, показали, что местные напряжения, возникающие при действии сосредоточенной силы  $P$ , быстро уменьшаются по мере увеличения расстояния от точки приложения груза, и на расстояниях больших, чем ширина полосы, распределение напряжений по ее поперечному сечению практически можно считать равномерным.

В помещенной ниже таблице 4 приведены некоторые значения отношения напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  к средней величине, получаемой делением силы  $P$  на площадь поперечного сечения полосы шириною  $2c$ . Вычисления произведены в предположении, что полоса заделана концом  $x = +\infty$ , и что Пуассоновое отношение  $\nu$  равно 0,25.

Это распределение напряжений выразится в полярных координатах так:

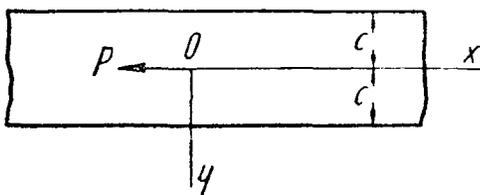
$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -2(1-\nu) \frac{Pd}{4\pi r^2}; \\ \sigma_\theta &= 2(1-\nu) \frac{Pd}{4\pi r^2}; \\ \tau_{r\theta} &= 0. \end{aligned} \right\} [75]$$

Полученное решение можно привести к согласованию с решением [42] для толстостенного цилиндра, подвергающегося действию внешнего давления, если внешний диаметр цилиндра принять бесконечно большим.

Таким же образом мы можем получить решение и для случая, изображенного на фиг. 76a. Составляющие напряжения равны<sup>1)</sup>:

$$\sigma_r = \sigma_\theta = 0; \quad \tau_{r\theta} = -\frac{M}{2\pi r^2} [76]$$

и представляют напряжения, возникающие под действием момента  $M$ , приложенного в начале координат (фиг. 76b).



Фиг. 77.

<sup>1)</sup> См. А. Лове (A. E. H. Love), Theory of Elasticity, Cambridge, 1927, p. 214.

<sup>2)</sup> См. Гауланд (R. C. J. Howland), „Proc. Roy. Soc.“, London, A, vol. 124, 1929, p. 89. См. также статью Е. Мелана (E. Melan), Z. angew. Math. u. Mech., Bd 5, 1925, S. 314.

Напряжения, возникающие в полубесконечной пластинке под действием силы, приложенной на некотором расстоянии от края, были рассмотрены (Е. Меланом <sup>1)</sup>).

ТАБЛИЦА 4.

Значения отношения напряжений в бесконечно длинной полосе (фиг. 77) к средней величине продольного напряжения.

Отношение	$x : c$		$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{9}$	$-\frac{\pi}{18}$	$-\frac{\pi}{30}$	0
	$y$						
$\sigma_x : \frac{P}{2c}$	0		-0,118	-0,992	...	...	$\infty$
$\sigma_x : \frac{P}{2c}$	$c$		+0,159	+0,511	0,532	0,521	0,500
$\sigma_y : \frac{P}{2c}$	0		+0,110	+0,364	...	...	...
Отношение	$x : c$		$+\frac{\pi}{30}$	$+\frac{\pi}{18}$	$+\frac{\pi}{9}$	$+\frac{\pi}{3}$	$+\frac{\pi}{2}$
	$y$						
$\sigma_x : \frac{P}{2c}$	0		...	...	1,992	1,118	1,002
$\sigma_x : \frac{P}{2c}$	$c$		0,479	0,468	0,489	0,841	0,973
$\sigma_y : \frac{P}{2c}$	0		...	...	-0,364	-0,110	-0,049

35. Общее решение плоской задачи в полярных координатах. Имея решения различных частных случаев плоской задачи в полярных координатах, мы теперь в состоянии дать общее решение задачи.

Общее выражение для функции напряжений, удовлетворяющее уравнению совместности [35], представится так <sup>2)</sup>:

$$\left. \begin{aligned}
 \varphi = & a_0 \ln r + b_0 r^2 + c_0 r^2 \ln r + d_0 r^2 \theta + a_0' \theta + \\
 & + \frac{a_1}{2} r^0 \sin \theta + (b_1 r^3 + a_1' r^{-1} + b_1' r \ln r) \cos \theta - \\
 & - \frac{c_1}{2} r^0 \cos \theta + (d_1 r^3 + c_1' r^{-1} + d_1' r \ln r) \sin \theta + \\
 & + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n r^n + b_n r^{n+2} + a_n' r^{-n} + b_n' r^{-n+2}) \cos n\theta + \\
 & + \sum_{n=2}^{\infty} (c_n r^n + d_n r^{n+2} + c_n' r^{-n} + d_n' r^{-n+2}) \sin n\theta.
 \end{aligned} \right\} [77]$$

<sup>1)</sup> См. Е. Мелан (E. Melan), „Z. angew. Math. u. Mech.“, Bd 12, 1932, S. 343.

<sup>2)</sup> Это решение было дано Мичелем (J. H. Michell), „Proc. London Math. Soc.“, vol. 31, 1899, p. 100. См. также статью А. Тимпе, упомянутую выше в выноске на стр. 38. Аналогичное решение для случая эллиптического кольца было выведено А. Тимпе (A. Timpe), „Math. Z.“, Bd 17, 1923, S. 189.

Первые три члена первой строки этого выражения представляют собой решение при распределении напряжений, симметричном относительно начала координат (см. параграф 22, стр. 67). Четвертый член дает распределение напряжений для случая, показанного на фиг. 54 (стр. 103). Пятый член дает решение для чистого сдвига (фиг. 72*b*, стр. 123).

Первый член второй строки — простое радиальное распределение напряжений при силе, действующей в направлении  $\theta = 0$ . Оставшиеся члены второй строки представляют собою решение для части кругового кольца, изгибаемого радиальной силой (фиг. 43, стр. 83). Все члены второй строки в совокупности дают решение для силы, действующей на бесконечно большую пластинку (параграф 34, стр. 124).

Подобные же решения выражаются также и третьей строкой формулы [77], с той лишь разницей, что направление силы повернуто на угол  $\frac{\pi}{2}$ .

Остальные члены выражения [77] представляют собой решения для касательных и нормальных усилий, пропорциональных  $\cos n\theta$  и  $\sin n\theta$ , действующих на внутренний и наружный контуры кругового кольца. У нас был пример такого рода при рассмотрении распределения напряжений вокруг малого круглого отверстия (параграф 28, стр. 89).

Для части кругового кольца постоянные интегрирования в выражении [77] можно найти без затруднений из условий на контурах.

Что касается полного кольца, то иногда необходимы некоторые дополнительные исследования перемещений для определения этих произвольных постоянных.

Рассмотрим общий случай полного кольца и допустим что интенсивности нормальных и касательных усилий по контурам  $r = a$  и  $r = b$  выражаются следующими тригонометрическими рядами:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma)_{r=a} &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\theta; \\ (\sigma_r)_{r=b} &= A'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A'_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} B'_n \sin n\theta; \\ (\tau_{r\theta})_{r=a} &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin n\theta; \\ (\tau_{r\theta})_{r=b} &= C'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C'_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} D'_n \sin n\theta, \end{aligned} \right\} [a]$$

где произвольные постоянные  $A_0, A_n, B_n, \dots$  определяются обычным путем по данному распределению усилий на контурах (см. стр. 59).

Определив составляющие напряжений из выражения [77] при помощи формул [34] и приравняв величины этих составляющих при  $r = a$  и  $r = b$  величинам по формулам [a], получим достаточное число уравнений для определения произвольных постоянных интегрирования во всех случаях, когда  $n \geq 2$ .

При  $n = 0$ , т. е. для членов первой строки выражения [77], и при  $n = 1$ , т. е. для членов второй и третьей строк, необходимы дальнейшие исследования.

Если за функцию напряжений принять первую строку выражения [77], то постоянная  $a'_0$  определится величиной касательных усилий, равномерно распределенных по контурам (см. стр. 123). Распределение напряжений, представляемое членом с коэффициентом  $a_0$ , является *многозначным* (см. стр. 78). При полном кольце мы должны предположить  $a_0$  равным нулю.

Для определения остальных трех постоянных  $a_0, b_0$  и  $c_0$  первой строки, мы имеем лишь два уравнения:

$$(\sigma_r)_{r=a} = A_0 \quad \text{и} \quad (\sigma_r)_{r=b} = A'_0.$$

Дополнительное уравнение для определения этих постоянных получим из рассмотрения перемещений. Перемещения в полном кольце должны выражаться *однозначной* функцией от угла  $\theta$ . Наше предыдущее исследование показало (см. параграф 25, стр. 78), что это условие выполнится, если мы положим  $c_0$  равным нулю. После этого остающиеся две постоянные  $a_0$  и  $b_0$  определяются из двух вышеуказанных условий на контуре.

Рассмотрим теперь более детально члены выражения [77], для которых  $n = 1$ . Для определения восьми произвольных постоянных  $a_1, b_1, a'_1, b'_1, c_1, d_1, c'_1$  и  $d'_1$ , заключающихся во второй и третьей строках выражения [77], найдем составляющие напряжения  $\sigma_r$  и  $\tau_{r\theta}$ , пользуясь этой частью функции  $\varphi$ . Затем, воспользовавшись выражениями [a] и приравняв соответственные коэффициенты при  $\sin n\theta$  и  $\cos n\theta$  на внутреннем и внешнем контурах, получим следующие восемь уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (a_1 + b'_1) a^{-1} + 2b_1 a - 2a'_1 a^{-3} &= A_1; \\ (a_1 + b'_1) b^{-1} + 2b_1 b - 2a'_1 b^{-3} &= A'_1; \\ (c_1 + d'_1) a^{-1} + 2d_1 a - 2c'_1 a^{-3} &= B_1; \\ (c_1 + d'_1) b^{-1} + 2d_1 b - 2c'_1 b^{-3} &= B'_1; \end{aligned} \right\} [b]$$

$$\left. \begin{aligned} 2d_1 a - 2c'_1 a^{-3} + d'_1 a^{-1} &= -G_1; \\ 2d_1 b - 2c'_1 b^{-3} + d'_1 b^{-1} &= -C'_1; \\ 2b_1 a - 2a'_1 a^{-3} + b'_1 a^{-1} &= D_1; \\ 2b_1 b - 2a'_1 b^{-3} + b'_1 b^{-1} &= D'_1. \end{aligned} \right\} [c]$$

Сравнивая уравнения [b] с уравнениями [c], мы видим, что они совместны лишь при условии, если

$$\left. \begin{aligned} a_1 a^{-1} &= A_1 - D_1; \\ a_1 b^{-1} &= A'_1 - D'_1; \\ c_1 a^{-1} &= B_1 + C_1; \\ c_1 b^{-1} &= B'_1 + C'_1. \end{aligned} \right\} [d]$$

Из этого следует, что

$$\left. \begin{aligned} a(A_1 - D_1) &= b(A'_1 - D'_1); \\ a(B_1 + C_1) &= b(B'_1 + C'_1). \end{aligned} \right\} [e]$$

Можно показать, что уравнения [e] всегда будут удовлетворены, если усилия действующие на кольцо, находятся в равновесии. Приравняв, например, сумму проекций всех усилий на направление оси  $x$  нулю, найдем:

$$\int_0^{2\pi} \{ [b(\sigma_r)_{r=b} - a(\sigma_r)_{r=a}] \cos \theta - [b(\tau_{r\theta})_{r=b} - a(\tau_{r\theta})_{r=a}] \sin \theta \} d\theta = 0.$$

Подставив значения напряжений  $\sigma_r$  и  $\tau_{r\theta}$  по формулам [a], мы придем к первому из уравнений [e]. Таким же образом, взяв сумму проекций всех сил на ось  $y$ , получим второе из уравнений [e].

Когда  $a_1$  и  $c_1$  найдены по уравнениям [d], обе системы уравнений [b] и [c] становятся тождественными, и мы имеем всего лишь четыре уравнения для определения остающихся шести произвольных постоянных

Два необходимых дополнительных уравнения получатся из рассмотрения перемещений. Члены второй строки выражения [77] представляют функцию напряжений для совместного с напряжениями от изгиба простого радиального распределения напряжений в кривом брус (фиг. 43).

Наложив друг на друга <sup>1)</sup> общие выражения для перемещений в этих двух случаях, а именно, выражения [g] (стр. 101) и выражения [q] (стр. 87), и подставив

$$\frac{a_1}{2} \quad \text{вместо} \quad -\frac{P}{\pi}$$

в выражения [g] и  $b'_1$  вместо  $D$  в выражения [q], найдем следующие многозначные члены в выражениях для перемещений  $u$  и  $v$  соответственно:

$$\frac{a_1}{2} \cdot \frac{1-\nu}{E} \theta \sin \theta + \frac{2b'_1}{E} \theta \sin \theta;$$

$$\frac{a_1}{2} \cdot \frac{1-\nu}{E} \theta \cos \theta + \frac{2b'_1}{E} \theta \cos \theta.$$

Эти члены, в случае полного кольца, должны обращаться в нуль. Следовательно,

$$\frac{a_1}{2} \cdot \frac{1-\nu}{E} + \frac{2b'_1}{E} = 0,$$

откуда

$$b'_1 = -\frac{a_1(1-\nu)}{4}. \quad [f]$$

Рассмотрев таким же путем третью строку выражения [77], мы найдем

$$d'_1 = -\frac{c_1(1-\nu)}{4}. \quad [g]$$

Уравнений [f] и [g], вместе с уравнениями [b] и [c], достаточно для определения всех постоянных в функции напряжений, представленной второй и третьей строками выражения [77].

Итак, мы приходим к заключению, что в случае полного кольца условий на контуре [a] недостаточно для отыскания распределения напряжений и необходимо рассмотреть перемещения.

Эти последние в полном кольце должны быть однозначными. Чтобы удовлетворить этому условию, мы должны иметь:

$$c_0 = 0; \quad b'_1 = -\frac{a_1(1-\nu)}{4}; \quad d'_1 = -\frac{c_1(1-\nu)}{4}. \quad [78]$$

Мы видим, что величины постоянных  $b'_1$  и  $d'_1$  зависят от Пуассонова отношения. В соответствии с этим, распределение напряжений в полном кольце при обычных условиях зависит от упругих свойств материала. Распределение станет независимым от упругих постоянных лишь тогда, когда коэффициенты  $a_1$  и  $c_1$  обратятся в нуль, так что, согласно уравнениям [78],  $b'_1 = d'_1 = 0$ . Этот частный случай будет иметь место, если (см. уравнение [d])

$$A_1 = D_1 \quad \text{и} \quad B_1 = -C_1.$$

<sup>1)</sup> Следует заметить, что вместо  $\theta$  следует подставить

$$\theta + \frac{\pi}{2}.$$

если угол измеряется от вертикальной оси, как показано на фиг. 49, вместо того, чтобы измерять его от горизонтальной оси, как это сделано на фиг. 43.

Мы имеем такое состояние, когда равнодействующая усилий, приложенных к каждому контуру кольца, обращается в нуль. Возьмем, например, проекцию на ось  $x$  равнодействующей всех усилий, приложенных к контуру  $r = a$ . Эта проекция, согласно формулам [а], равна

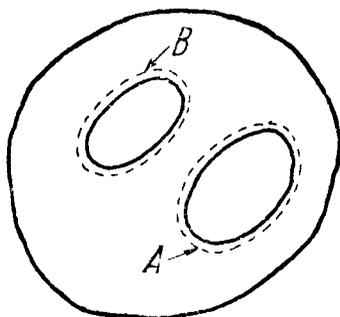
$$\int_0^{2\pi} (\tau_r \cos \theta - \tau_{r\theta} \sin \theta) a \, d\theta = a\pi (A_1 - D_1).$$

Если она обращается в нуль, то  $A_1 = D_1$ . Таким же образом, взяв проекции всех сил на направление оси  $y$ , получим  $B_1 = -C_1$ , когда проекция равнодействующей на ось  $y$  равна нулю.

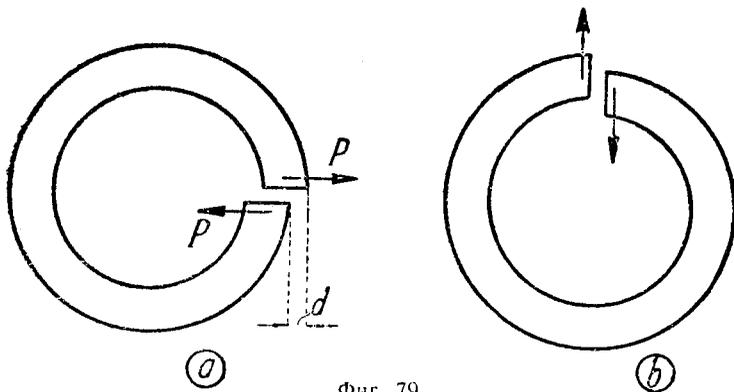
Из этого мы можем заключить, что распределение напряжений в полном кольце не зависит от упругих постоянных материала, если равнодействующая сил, приложенных к каждому контуру, равна нулю. Момент этих сил может и не равняться нулю.

Эти заключения, полученные для случая круглого кольца, имеют силу также и в самом общем случае плоской задачи для многосвязного тела.

На основании общих исследований, выполненных Мичелем <sup>1)</sup>, следует, что для многосвязных тел (фиг. 78) для каждого независимого контура, как пока данные на чертеже пунктиром контуры  $A$  и  $B$ , надлежит вывести зависимости



Фиг. 78.



Фиг. 79.

подобные уравнения [78] и выражающие то условие, что перемещения должны быть однозначными.

Распределение напряжений в таких телах, вообще говоря, зависит от упругих постоянных материала. Оно не будет зависеть от этих постоянных лишь тогда, когда равнодействующая по каждому контуру обращается в нуль <sup>2)</sup>.

В количественном отношении, влияние упругих постоянных на наибольшее напряжение обычно получается очень малым, и на практике им можно пренебречь <sup>3)</sup>. Это обстоятельство имеет следующее практическое значение.

Мы увидим далее, что в случае прозрачных материалов, как стекло или кристаллит, возможно определение напряжений оптическим методом, при помощи

<sup>1)</sup> См. статью его, упомянутую выше в выноске на стр. 129.

<sup>2)</sup> Следует помнить, что объемные силы были приняты равными нулю.

<sup>3)</sup> Исследование этого вопроса сделано Л. Файлоном (L. N. G. Filon), „British Assoc. Adv. Sc. Rept.“, 1921.

поляризованного света (см. ниже стр. 139). Отмеченное выше обстоятельство указывает, что полученные на прозрачном материале результаты опытов можно, если внешние силы останутся теми же самыми, применить непосредственно к любому другому материалу, например, к стали.

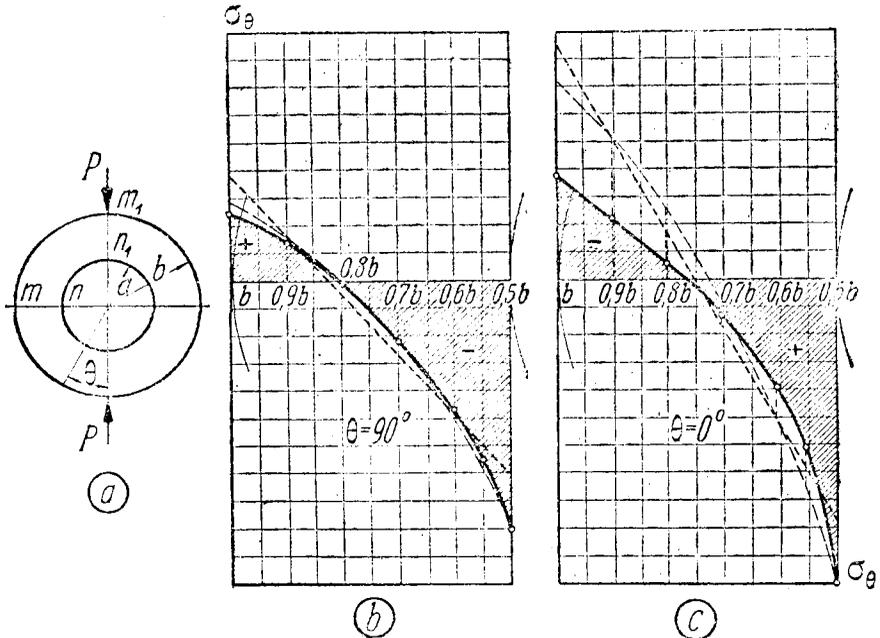
Выше было упомянуто (см. стр. 79), что физический смысл многозначных решений можно выяснить путем рассмотрения *начальных напряжений* в много-связном теле.

Предположим, например, что приведенное выше уравнение  $[f]$  не удовлетворяется. Соответствующее перемещение показано на фиг. 79a. Такое перемещение может возникнуть, если мы разрежем кольцо и приложим усилия  $P$ . Если теперь концы кольца снова соединить вместе при помощи сварки или другим каким-нибудь способом, то мы получим кольцо, имеющее начальные напряжения. Величины этих напряжений зависят от начального перемещения  $d$  <sup>1)</sup>.

Такой же эффект получится, если мы произведем разрез по вертикальному радиусу и придадим некоторое начальное перемещение одному концу кольца относительно другого в вертикальном направлении (фиг. 79b).

Начальные напряжения, возникающие в случаях, изображенных на фиг. 79a и 79b, соответствуют многозначным членам общего решения, когда не выполнены уравнения  $[f]$  и  $[g]$ .

**36. Примеры применения общего решения плоской задачи в полярных координатах.** В качестве первого примера применения общего решения плоской



Фиг. 80.

<sup>1)</sup> Такие напряжения рассмотрены А. Тимпе (A. Timpe), см. статью его, упомянутую выше в выноске на стр. 38. Общая теория этих напряжений дана В. Вольтерра (V. Volterra), Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexés, „Ann. école norm.“, Paris, sér. 3, t. 24, 1907, pp. 401—517. См. также А. Лозе (A. E. H. Love), Mathematical Theory of Elasticity, 4 ed., 1927, p. 221.

задачи в полярных координатах, рассмотрим круговое кольцо, сжимаемое двумя равными и прямо противоположными силами, действующими по диаметру (фиг. 80) <sup>1)</sup>.

Начнем с решения для сплошного диска (параграф 33). Вырезав концентрическое отверстие радиуса  $a$  в диске, найдем нормальные и касательные усилия, распределенные по краю отверстия. Усилия эти можно устранить присоединением равной и прямо противоположной системы внешних усилий. Последняя может быть представлена с достаточной точностью при помощи первых пяти членов ряда Фурье.

Тогда соответствующие напряжения в кольце получатся на основании общего решения предыдущего параграфа. Эти напряжения, вместе с напряжениями, определенными для сплошного диска, составят полные напряжения в кольце.

Определенные таким образом для различных точек поперечных сечений  $m$  и  $m_1 n_1$  (фиг. 80a) при  $b = 2a$  величины отношений

$$k = \sigma_{\theta} : \frac{2P}{\pi b}$$

приведены в нижеследующей таблице 5 <sup>2)</sup>

ТАБЛИЦА 5.

Значения отношений  $k$  для кругового кольца.

Сечение	Величина $r$ в долях от $b$					
	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5
	по точной теории					
$m$	2,610	1,477	-0,113	-2,012	-4,610	-8,942
$m_1 n_1$	-3,788	-2,185	-0,594	1,240	4,002	10,147
	при распределении напряжений по гиперболическому закону					
$m$	2,885	1,602	0,001	-2,060	-4,806	-8,653
$m_1 n_1$	-7,036	-5,010	-2,482	0,772	5,108	11,180
	при распределении напряжений по линейному закону					
$m$	3,90	1,71	-0,48	-2,67	-4,86	-7,04
$m_1 n_1$	-8,67	-5,20	-1,73	1,73	5,20	8,67

Для сравнения, в таблице 5 даны значения отношения  $k$  для напряжений, определенных по двум элементарным теориям, основанным на следующих допущениях.

<sup>1)</sup> См. статьи автора в „Известиях Киевского политехнического института“ за 1910 г. и в „Phil. Mag.“, vol. 44, 1922, p. 1014. См. также *K. Wieghardt* (*K. Wieghardt*), „Sitzungsb. Akad. Wissen.“, Wien, Bd 124, Abt. II, 1915, S. 1119.

<sup>2)</sup> Толщина диска принята равной единице.

Первое допущение: поперечные сечения остаются плоскими; в таком случае, нормальные напряжения по сечению следуют гиперболическому закону.

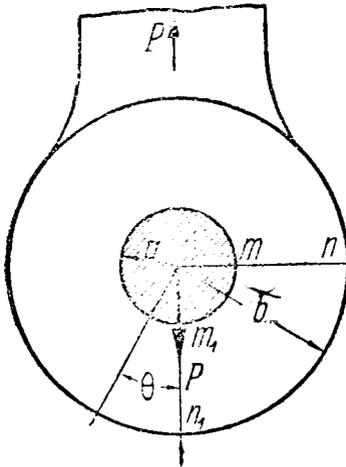
Второе допущение: напряжения распределяются по линейному закону.

Таблица 5 показывает, что для поперечного сечения  $m_1$ , которое находится на сравнительно большом расстоянии от точек приложения сил  $P$ , распределение напряжений по гиперболическому закону дает результаты, очень близкие к точным значениям. Ошибка для наибольшего напряжения составляет лишь около 3%.

Для поперечного сечения  $m_1 n_1$  ошибки приближенного решения получаются значительно большими.

Интересно отметить, что равнодействующая нормальных напряжений по сечению  $m_1 n_1$  равна

$$\frac{P}{\pi}$$



Фиг. 81.

Это и следовало ожидать, если вспомнить подобное клину действие сосредоточенной силы, представленное на фиг. 62а (см. стр. 110). Распределения нормальных напряжений по сечению

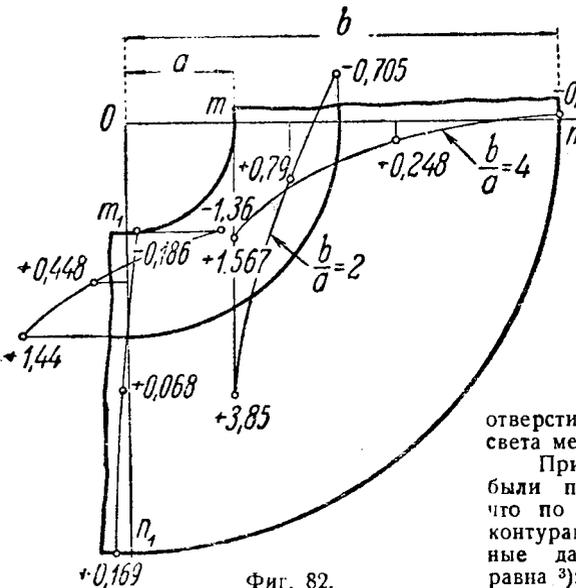
$m_1 n_1$ , полученные тремя упомянутыми выше способами, показаны на диаграммах фигур 80b и 80c.

Примененный выше к случаю двух равных и прямо противоположных сил метод решения может быть использован и для общего случая нагрузки кругового кольца сосредоточенными силами<sup>1)</sup>.

В качестве второго примера рассмотрим один из концов двухочкового элемента цепи (фиг. 81)<sup>2)</sup>. Распределение давлений по краю

отверстия зависит от величины просвета между болтом и отверстием.

Приводимые ниже результаты были получены в предположении, что по внутреннему и наружному контурам действуют лишь нормальные давления, величина которых равна<sup>3)</sup>:



Фиг. 82.

<sup>1)</sup> См. Файлон (L. N. G. Filon), The Stresses in a Circular Ring, Selected Engineering Papers, № 12, London, 1924, издание организации гражданских инженеров (Institution of Civil Engineers).

<sup>2)</sup> См. Г. Рейснер (H. Reissner), Jahrb. wiss. Gesellsch. Luftfahrt, 1928, S. 126.

<sup>3)</sup> Величина силы  $P$  отнесена к единице толщины элемента цепи.



Если, например, условия на контуре таковы, что:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_\theta)_{\theta=\alpha} &= N_0 + N_1 r + N_2 r^2 + \dots; \\ (\tau_{r\theta})_{\theta=\beta} &= N'_0 + N'_1 r + N'_2 r^2 + \dots; \\ (\tau_{r\theta})_{\theta=\alpha} &= S_0 + S_1 r + S_2 r^2 + \dots; \\ (\sigma_\theta)_{\theta=\beta} &= S'_0 + S'_1 r + S'_2 r^2 + \dots, \end{aligned} \right\} [a]$$

то, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях аргумента  $r$ , имеем:

$$\left. \begin{aligned} 2(b_0 + d_0 \alpha + a_2 \cos 2\alpha + c_2 \sin 2\alpha) &= N_0; \\ 6(b_1 \cos \alpha + d_1 \sin \alpha + a_3 \cos 3\alpha + c_3 \sin 3\alpha) &= N_1; \end{aligned} \right\} [b]$$

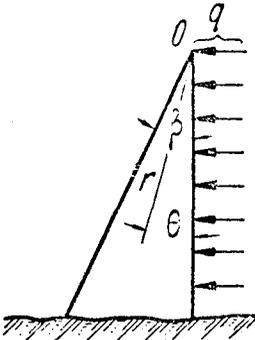
и вообще

$$(n+2)(n+1)[b_n \cos n\alpha + d_n \sin n\alpha + a_{n+2} \cos(n+2)\alpha + c_{n+2} \sin(n+2)\alpha] = N_n,$$

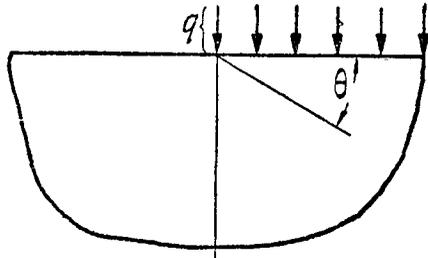
а, кроме того, три другие группы уравнений из выражения для напряжения  $\sigma_\theta$  при  $\theta = \beta$  и для напряжения  $\tau_{r\theta}$  при  $\theta = \alpha$  и  $\theta = \beta$ .

Этих уравнений достаточно для определения произвольных постоянных, заключающихся в решении [79].

Рассмотрим, в качестве примера, случай, представленный на фиг. 83. Равномерное нормальное давление  $q$  действует на грань  $\theta = 0$  клина, а другая грань



Фиг. 83.



Фиг. 84.

$\theta = \beta$  свободна от внешних усилий. Пользуясь лишь первыми строками выражений [79] для напряжений  $\sigma_\theta$  и  $\tau_{r\theta}$ , получим уравнения для определения произвольных постоянных  $b_0$ ,  $d_0$ ,  $a_2$  и  $c_2$  в таком виде:

$$\begin{aligned} 2b_0 + 2a_2 &= -q; \\ 2b_0 + 2d_0\beta + 2a_2 \cos 2\beta + 2c_2 \sin 2\beta &= 0; \\ -d_0 - 2c_2 &= 0; \\ -d_0 + 2a_2 \sin 2\beta - 2c_2 \cos 2\beta &= 0, \end{aligned}$$

откуда, приняв обозначение  $k = \operatorname{tg} \beta - \beta$ , найдем:

$$c_2 = \frac{q}{4k}; \quad a_2 = -\frac{q \operatorname{tg} \beta}{4k}; \quad d_0 = -\frac{q}{2k}; \quad 2b_0 = -q + \frac{q \operatorname{tg} \beta}{2k}.$$

Подставив эти значения в выражения [79], получим<sup>1)</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\theta} &= \frac{q}{k} \left( -k + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \beta - \theta - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \beta \cos 2\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right); \\ \tau_{r\theta} &= \frac{q}{k} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \beta \sin 2\theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta \right); \\ \sigma_r &= \frac{q}{k} \left( -k + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \beta - \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \beta \cos 2\theta \right). \end{aligned} \right\} [c]$$

Для любого другого члена, выраженного в виде полиномов распределения нагрузки [a], составляющие напряжения получатся подобным же образом.

Вышеизложенный способ определения напряжений в клине применим также к полубесконечной пластинке, если принять угол  $\beta$  клина равным  $\pi$ . Напряжения для случая, показанного на фиг. 84, например, получатся по формулам [c] путем подстановки в них  $\beta = \pi$ . Тогда:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\theta} &= -\frac{q}{\pi} \left( \pi - \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right); \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{q}{2\pi} (1 - \cos 2\theta); \\ \sigma_r &= -\frac{q}{\pi} \left( \pi - \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right). \end{aligned} \right\} [d]$$

**38. Оптический метод измерения напряжений.** Во многих случаях пластинки, на которые действуют лежащие в их плоскости внешние силы, имеют такой вид, что аналитическое исследование распределения напряжений становится затруднительным и приходится прибегать к исследованию опытным путем. Весьма пригодным для этой цели оказался оптический метод.

Давид Брюстер<sup>2)</sup> первым открыл, что когда кусок стекла находится в напряженном состоянии и освещается *поляризованным светом*, то он представляет собой окрашенную в яркие цвета фигуру, зависящую от величины напряжений. Он предложил пользоваться этими цветными фигурами для определения напряжений в таких инженерных сооружениях, как каменные мосты, при помощи изготовления модели сооружения из стекла и исследования последней в поляризованном свете в различных условиях нагрузки.

В то время это предложение инженерами не было использовано, и только много позднее Карус Вильсон применил этот способ для изучения напряжений в балке, нагруженной сосредоточенной силой<sup>3)</sup>, и А. Менаже — при изучении напряженного состояния в арочных мостах<sup>4)</sup>.

Дальнейшее усовершенствование этого метода принадлежит Е. Ко-

<sup>1)</sup> Это решение было другим способом получено *М. Леви (M. Levy)*, „Compt. rend.“, t. 126, 1898, p. 1235. См. также *П. Филлунгер (P. Fillunger)*, „Z. Math. Physik“, Bd 60, 1912.

<sup>2)</sup> См. *Д. Брюстер (D. Brewster)*, „Phil. Trans. Roy. Soc.“, London, 1816, p. 156.

<sup>3)</sup> См. его статью, упомянутую выше в выноске на стр. 96.

<sup>4)</sup> *А. Менаже (A. Mesnager)*, „Ann. des ponts et chaussées“, 4 trim. 1901, p. 129, и 9 sér., t. 16, 1913, p. 135.

керу<sup>1)</sup>, который предложил употреблять целлулоид в качестве материала для моделей и разработал технику измерения напряжений.

В последующем изложении мы рассматриваем луч обыкновенного света состоящим из световых колебаний по всем направлениям в плоскости, перпендикулярной к направлению луча. Отражая луч от зеркального стекла, покрытого с одной стороны черной краской, или пропуская его через *призму Николя*, мы получим луч более или менее поляризованного света, у которого преобладают световые колебания в одном определенном направлении. Такого рода свет и применяется при исследовании напряженного состояния в пластинках.

На фиг. 85  $abcd$  представляет собой малый элемент, вырезанный из прозрачной пластинки, находящейся в напряженном состоянии. Предположим, что стороны элемента параллельны главным направлениям и что напряжения  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  являются главными напряжениями.

Точка  $O$  является точкой пересечения с пластинкой пучка поляризованного света, перпендикулярного к пластинке. Предположим, что мы имеем *монохроматический* свет с колебанием в плоскости  $OA$  и что отрезок  $OA$  представляет амплитуду этого колебания. Колебание считаем простым гармоническим, так что поперечные перемещения могут быть представлены выражением:

$$s = a \cos pt, \quad [a]$$

где  $p$  пропорционально частоте колебания, зависящей от окраски света, а  $t$  — время.

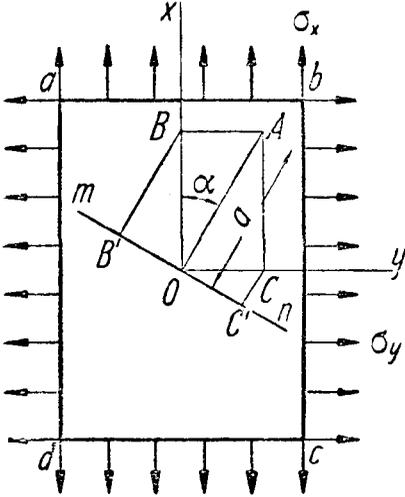
Простое колебание в плоскости  $OA$  разложим на два составляющих колебания с амплитудами в плоскостях  $Ox$  и  $Oy$  соответственно:

$$\overline{OB} = a \cos \alpha \quad \text{и} \quad \overline{OC} = a \sin \alpha.$$

Соответствующие перемещения будут равны:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \alpha \cos pt; \\ y &= a \sin \alpha \cos pt. \end{aligned} \right\} [b]$$

<sup>1)</sup> Многочисленные работы проф. Кокера (*E. G. Coker*) объединены в его статьях: в „Gen. Electr. Review“, vol. 23, 1920, p. 870 и в „Journ. Franklin Inst.“, vol. 199, 1925, p. 289. См. также новую книгу *E. Кокера* и *Л. Файлона* (*E. G. Coker and L. N. G. Filon*), Photo-Elasticity, Cambridge University Press, 1931.



Фиг. 85.

Если главные напряжения  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  — различной величины, то оптические свойства материала становятся различными в этих двух взаимно перпендикулярных направлениях.

Пусть  $V_x$  и  $V_y$  обозначают скорости света в плоскостях  $Ox$  и  $Oy$  соответственно. Если  $h$  — толщина пластинки, то промежутки времени, необходимые для прохождения пластинки этими двумя составляющими колебания, равняются:

$$t_1 = \frac{h}{V_x} \quad \text{и} \quad t_2 = \frac{h}{V_y}. \quad [c]$$

Колебания [b] после прохода через пластинку можно выразить следующими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a \cos \alpha \cos p(t - t_1); \\ y_1 &= a \sin \alpha \cos p(t - t_2). \end{aligned} \right\} \quad [d]$$

Мы видим, что эти колебания вследствие разности скоростей имеют сдвиг фаз, равный  $p(t_2 - t_1)$ .

Опыты показывают, что разность рассматриваемых скоростей света пропорциональна разности главных напряжений. Тогда, приняв во внимание то обстоятельство, что изменение скорости света очень мало, и обозначив через  $V$  скорость света при напряжении равном нулю, мы получим следующее приближенное выражение:

$$t_2 - t_1 = \frac{h}{V_y} - \frac{h}{V_x} \approx \frac{h(V_x - V_y)}{V^2} = k(\sigma_x - \sigma_y), \quad [e]$$

где  $k$  — коэффициент, зависящий от физических особенностей материала пластинки и от толщины последней  $h$ .

Мы видим, что разность между двумя главными напряжениями найдется, если измерить сдвиг фаз двух колебаний [d].

Это измерение можем выполнить, подвергнув колебания интерференции в той же плоскости. С этой целью сзади пластинки помещается вторая<sup>1)</sup> призма Николя, называемая *анализатором*, в таком положении, что она пропускает колебания только в плоскости  $mn$ , перпендикулярной к плоскости  $OA$ .

Составляющие колебаний [d], которые прошли через анализатор, имеют следующие амплитуды:

$$\left. \begin{aligned} \overline{OB}_1 &= \overline{OB} \sin \alpha = \frac{a}{2} \sin 2\alpha; \\ \overline{OC}_1 &= \overline{OC} \cos \alpha = \frac{a}{2} \sin 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad [f]$$

<sup>1)</sup> Первая призма Николя, вызывающая поляризацию, обыкновенно называется *поляризатором*.

Равнодействующее колебание в плоскости  $mn$ , поэтому, выразится таким уравнением:

$$\begin{aligned} & \frac{a}{2} \sin 2\alpha [\cos p(t - t_1) - \cos p(t - t_2)] = \\ & = a \sin 2\alpha \sin \left( p \frac{t_1 - t_2}{2} \right) \sin p \left( t - \frac{t_1 + t_2}{2} \right). \quad [g] \end{aligned}$$

Это — простое гармоническое колебание, амплитуда которого пропорциональна

$$\sin \left( p \cdot \frac{t_1 - t_2}{2} \right).$$

Следовательно интенсивность света является функцией сдвига фаз  $p(t_1 - t_2)$  или, на основании выражения  $[e]$ , функцией разности главных напряжений.

Если напряжения  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  равны, то промежутки времени  $t_1$  и  $t_2$  равны, и амплитуда равнодействующего колебания  $[g]$  равна нулю, т. е. в точке  $O$  свет через пластинку не проходит, и мы получаем темное пятно на экране, помещенном за анализатором.

Затемнения получатся также во всех случаях, когда разность напряжений такова, что

$$p \cdot \frac{t_1 - t_2}{2} = n\pi, \quad [h]$$

где  $n$  — целое число.

Наибольшая интенсивность света получится, когда разность напряжений такова, что

$$p \cdot \frac{t_1 - t_2}{2} = n\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Представим, что, вместо элемента  $abcd$  (фиг. 85), мы имеем полосу прозрачного материала, подвергающегося простому растяжению. При постепенном увеличении растягивающего напряжения мы будем получать темное изображение полосы на экране каждый раз, когда будет выполняться условие  $[h]$ .

Таким образом, мы можем установить опытным путем для данного материала, при данной толщине полоски, напряжение, соответствующее промежутку времени между двумя последовательными темными изображениями образца.

Например, для пластинки одного из сортов фенолита, толщиной в 1 мм, было найдено<sup>1)</sup>, что это напряжение равно 113,2 кг/см<sup>2</sup>. Следовательно, для пластинки толщиной в 6 мм соответствующее напряжение будет равно 113,2 : 6 = 18,9 кг/см<sup>2</sup>.

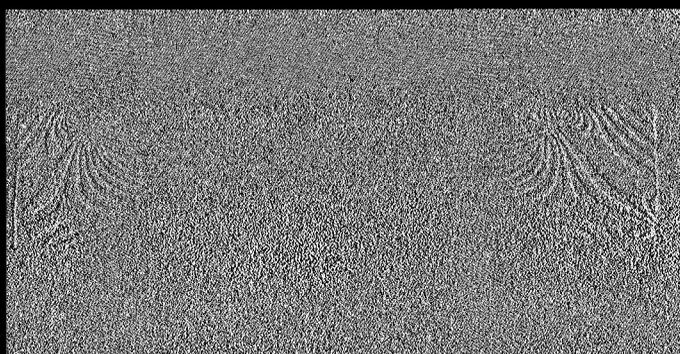
Зная это, мы можем определить полное напряжение в полоске, испытывающей осевое растяжение, отсчитав число промежутков между

<sup>1)</sup> См. статью Туци (*Z. Tuzi*), „Scient. Papers“, Inst. Phys. Chem. Research, Tokyo, vol. 12, 1929, p. 247.

последовательными темными изображениями, появляющимися при постепенном увеличении нагрузки образца.

Если мы возьмем полосу, испытывающую чистый изгиб, то мы получим фигуру, подобную представленной на фиг. 36. Параллельность темных полосок указывает, что в части полосы, отстоящей на значительном расстоянии от точек приложения грузов, распределение напряжений одинаково для всех вертикальных поперечных сечений полосы.

Сосчитав число полосок, мы можем определить величину напряжений, так как разность напряжений между двумя последовательными полосками будет такой же, как разность напряжений между двумя последовательными темными изображениями при простом растяжении.



Фиг. 36.

Наблюдая за полосой тогда, когда груз постепенно нарастает, мы можем видеть, как число темных полосок увеличивается с увеличением груза. Новые полоски всегда появляются сверху и снизу полосы и постепенно движутся по направлению к нейтральной плоскости, так что полоски становятся все более и более тесно расположенными.

Напряжения в любой точке получаются при помощи подсчета числа полосок, которые прошли через точку. Подсчет можно очень сильно упростить путем киносъемки полосы при постепенном возрастании нагрузки<sup>1)</sup>.

Этот способ подсчета числа темных полосок, прошедших через выбранную точку, применим и при любом плоском напряженном состоянии.

Как можно видеть из нашего предыдущего рассмотрения, число полосок дает, вообще говоря, разность  $\sigma_x - \sigma_y$  между двумя главными напряжениями в данной точке. Для полного определения напряжения в этой точке, остается найти направление главных напряжений и их сумму.

Уравнение  $[g]$  показывает, что амплитуда колебания света, прошедшего через анализатор, пропорциональна  $\sin 2\alpha$ , где  $\alpha$  — угол между плоскостью поляризации и плоскостью одного из главных напряжений (фиг. 35).

<sup>1)</sup> Этот метод был разработан Туути (Z. Tuuti), см. „Scient. Papers“, Inst. Phys. Chem. Research, Tokyo, vol. 12, 1929, p. 21.

Если обе эти плоскости совпадают, то  $\sin 2\alpha$  равен нулю, и мы получим темное пятно на экране.

Следовательно, изучая напряженную прозрачную модель в поляризованном свете, мы наблюдаем не только темные полосы, рассмотренные ранее, но также и темные линии, соединяющие точки, где одно из главных направлений напряжения совпадает с плоскостью поляризации.

Вращая обе призмы Никола и отмечая темные линии на изображении напряженной пластинки при различных направлениях плоскости поляризации, мы получим систему *изоклинных линий*, которые соединяют между собой точки с одинаковыми направлениями главных напряжений.

Имея эти линии, мы можем провести линии, касательные в каждой точке к главным осям напряжений. Эти последние называются *траекториями главных напряжений*. Итак, опытным путем могут быть получены и направления главных напряжений в каждой точке пластинки.

Измерением изменения толщины пластинки под действием напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  мы можем из опыта получить также сумму главных напряжений<sup>1)</sup>.

Если нам известно Пуассоново отношение для материала пластинки, то мы можем воспользоваться следующим выражением для определения уменьшения толщины пластинки:

$$\delta h = \frac{h\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y). \quad [k]$$

Из этого уравнения мы можем найти сумму главных напряжений  $(\sigma_x + \sigma_y)$ , если для каждой точки мы измерим изменение толщины пластинки.

Для производства таких измерений Е. Кокер сконструировал особый укрепляемый сбоку экстенсометр<sup>2)</sup>.

Другим путем получения главных напряжений является путь вычислений<sup>3)</sup>. Из уравнений равновесия [18] (см. стр. 32) в случае отсутствия объемных сил действующих на пластинку, имеем:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}, \quad [l]$$

1) Этот метод был предложен А. Менаже (A. Mesnager). См. его статьи, упомянутые выше в выноске на стр. 139.

2) Описание этого прибора см. в статье Кокера (E. G. Coker) в „Proc. Inst. Mech. Eng.“, London, 1922, p. 567. А. Менаже пользовался другим методом для измерения суммы главных напряжений, см. его статьи, упомянутые выше в выноске на стр. 139. См. также статью Ж. Деланга (G. Delanghe) в „Génie civil“, t. 91, 1927, p. 243, и статью Г. Фавра (Henri Favre), „Schweiz. Bauzeitung“, Bd 20, 1927, S. 291.

3) Этот метод был впервые указан Клерком Максвеллом (Clerk Maxwell), „Trans. Roy. Soc.“, Edinburgh, vol. 20, 1850. Дальнейшее развитие этому способу дал Л. Файлон (L. N. G. Filon), „British. Assoc. Adv. Scient. Rept.“, Liverpool, 1923, p. 350, и „Engineering“, vol. 116, 1923, p. 511.

откуда, интегрируя, получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= (\sigma_x)_0 - \int_0^x \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dx; \\ \sigma_y &= (\sigma_y)_0 - \int_0^y \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dy. \end{aligned} \right\} [m]$$

Обозначив через  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  главные напряжения, мы найдем, на основании формул [13'] (стр. 28):

$$2\tau_{xy} = (\sigma_2 - \sigma_1) \sin 2\alpha, \quad [n]$$

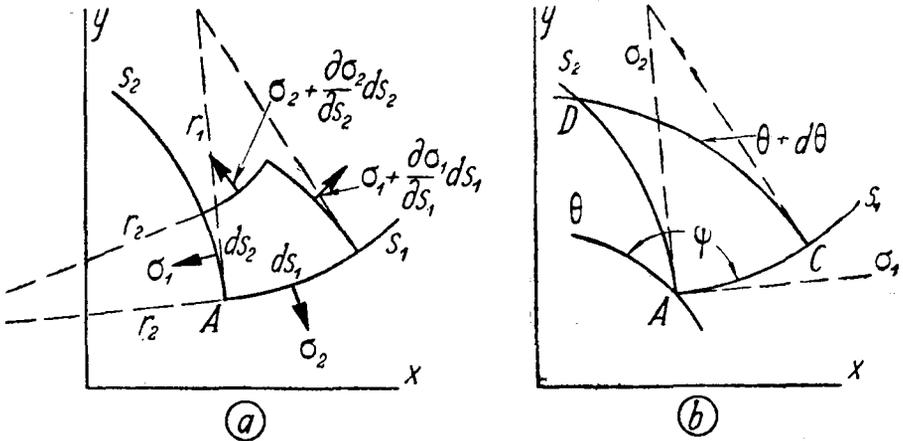
где  $\alpha$  — угол между напряжением  $\sigma_1$  и осью  $u$ .

Разность между главными напряжениями в каждой точке и направление этих напряжений могут быть определены оптическим путем, как объяснено выше, а тогда можно определить напряжение  $\tau_{xy}$  по формуле [n].

Зная величины напряжения  $\tau_{xy}$  для различных точек, мы можем найти приближенные значения производных:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}.$$

Подставив найденные значения в выражения [m], определим составляющие напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  по любой линии, параллельной осям координат, при помощи



Фиг. 87.

приближенного интегрирования, если только нам известны начальные значения напряжений  $(\sigma_x)_0$  и  $(\sigma_y)_0$ .

Предпочтительно начинать вычисление с точки на свободном от внешних усилий контуре, где одно из главных напряжений равно нулю. Тогда второе главное напряжение в направлении, касательном к контуру, можно измерить непосредственно оптическим методом.

Начальные составляющие напряжения  $(\sigma_x)_0$  и  $(\sigma_y)_0$  найдутся при помощи выражений [13'].

Файлон предлагает другой способ определения этих напряжений. На чертеж наносятся изоклинные линии и траектории главных напряжений, а разности между главными напряжениями находятся оптическим путем.

Представим теперь элемент в точке A напряженной пластинки (фиг. 87a),

ограниченный двумя смежными траекториями системы  $s_1$  и двумя траекториями системы  $s_2$ .

На основании самого определения понятия траектории можно заключить, что по сторонам такого элемента могут появиться лишь нормальные напряжения, а именно, главные напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ .

Обозначая соответственно через  $r_1$  и  $r_2$  радиусы кривизны дуг  $s_1$  и  $s_2$  в точке  $A$  и суммируя все силы, действующие на элемент в направлении напряжения  $\sigma_1$ , находим:

$$\sigma_1 ds_2 - \left( \tau_1 + \frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1} ds_1 \right) ds_2 \left( 1 + \frac{ds_1}{r_2} \right) + \sigma_2 ds_1 \frac{ds_2}{r_2} = 0.$$

Подобное же уравнение получится для направления напряжения  $\sigma_2$ . Пренебрегая бесконечно малыми величинами высших порядков, мы можем написать эти уравнения в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{r_2} &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial s_2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{r_1} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad [o]$$

Интегрируя, найдем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= (\tau_1)_0 - \int_0^A \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{r_2} ds_1; \\ \sigma_2 &= (\sigma_2)_0 - \int_0^A \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{r_1} ds_2. \end{aligned} \right\} \quad [p]$$

Интегралы правой стороны этих формул можно представить в форме более удобной для вычислений. Пусть  $\theta$  представляет собой угол между напряжением  $\sigma_1$  в точке  $A$  и осью  $x$ , а кривая  $\theta$  — соответствующую изоклинную линию (фиг. 87b). Ближайшая изоклинная линия  $\theta + d\theta$  пересекает траектории напряжений  $s_2$  и  $s_1$  в точках  $D$  и  $C$ , и мы имеем

$$\overline{AD} = ds_2 \quad \text{и} \quad \overline{AC} = ds_1.$$

Заметив, что угол между касательными к кривой  $s_2$  в точках  $A$  и  $D$  равен  $d\theta$ , мы найдем кривизну

$$\frac{1}{r_2} = \frac{d\theta}{ds_2}.$$

Таким же путем получим кривизну

$$\frac{1}{r_1} = \frac{d\theta}{ds_1}.$$

Пусть  $\psi$  — угол, измеряемый против движения часовой стрелки между направлением напряжения  $\sigma_1$  и изоклиной  $\theta$ . Тогда, из элементарного треугольника  $CAD$ , имеем:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \operatorname{tg} \angle CDA = \operatorname{tg} \left( \psi - \frac{\pi}{2} \right) = -\operatorname{ctg} \psi.$$

Итак, пользуясь найденными зависимостями, получим:

$$\frac{1}{r_2} ds_1 = \frac{d\theta}{ds_2} ds_1 = d\theta \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = -d\theta \operatorname{ctg} \psi.$$

Таким же образом, обозначив через  $\psi_1$  угол между напряжением  $\sigma_2$  и изоклиной  $\theta$ , найдем:

$$\frac{1}{r_1} ds_2 = \frac{d\theta}{ds_1} ds_2 = d\theta \operatorname{ctg} \psi_1.$$

Подставив найденные значения в выражения [р], получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= (\sigma_1)_0 + \int_{\theta_0}^{\theta_1} (\sigma_1 - \sigma_2) \operatorname{ctg} \psi \, d\theta; \\ \sigma_2 &= (\sigma_2)_0 - \int_{\theta_0}^{\theta_1} (\sigma_1 - \sigma_2) \operatorname{ctg} \psi_1 \, d\theta. \end{aligned} \right\} [q]$$

Теперь, начиная с точки на контуре, где  $(\sigma_1)_0$  и  $(\sigma_2)_0$  известны, и продвигаясь по траектории, которая проходит через эту точку, можем подсчитать приближенное значение интегралов правой части формул [q], если только изоклины, траектории и разности напряжений  $(\sigma_1 - \sigma_2)$  определены описанным выше оптическим методом<sup>1)</sup>.

Способ определения суммы  $\Sigma$  главных напряжений, в применении к мембране, был предложен Дж. Ден-Гартогом<sup>2)</sup>.

На основании выражений [25] и [26] (стр. 36), можем заключить, что эта сумма удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial y^2} = 0. \quad [r]$$

На контуре сумма главных напряжений может быть получена оптическим методом, как объяснено выше, и нам нужно решить уравнение [r] для того случая, когда величины суммы  $\Sigma$  по контуру известны.

Уравнение [r] одинаково с уравнением изогнутой поверхности равномерно растянутой мембраны.

Приняв, что поверхность мембраны соответствует виду исследуемой модели, и сделав, путем подбора соответственного масштаба, ординаты поверхности мембраны равными величинам суммы  $\Sigma$  на контуре, получим, что прогиб мембраны в любой точке дает соответствующее значение суммы  $\Sigma$  в этой точке.

Выполнение всех этих операций при помощи мыльной пленки<sup>3)</sup> в качестве мембраны (см. стр. 332) не представит никаких затруднений.

Оптический метод дал особо важные результаты при изучении концентрации напряжений по краям отверстий и во входящих углах. В подобных случаях наибольшее напряжение получается на контуре, и его можно непосредственно измерить оптическим методом, так как на свободном контуре одно из главных напряжений обращается в нуль.

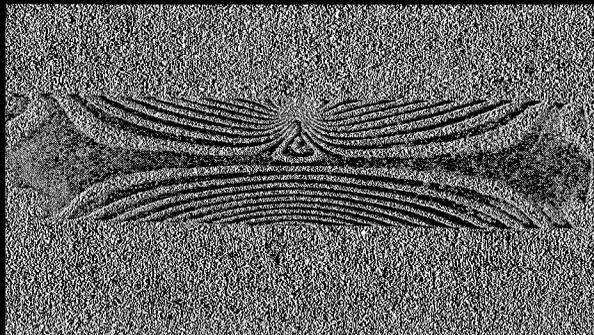
На помещенных ниже фигурах показано несколько примеров изображений напряженного состояния, полученных оптическим методом. Фигуры

<sup>1)</sup> Этот способ подсчетов с успехом применялся Е. Кокером (E. G. Coker), „Engineering“, vol. 116, 1923, p. 512, и Туци (Z. Tuzi), см. его статью, упомянутую выше в выноске на стр. 143.

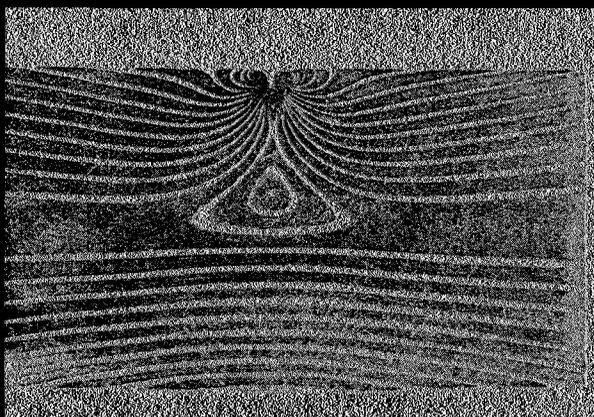
<sup>2)</sup> См. Дж. Ден-Гартог (J. P. Den Hartog), „Z. angew. Math. u. Mech.“, Bd 11, 1931, S. 156.

<sup>3)</sup> Этим методом пользовался Е. Е. Вейбель (E. E. Weibel) в своей диссертации, представленной в Мичиганский университет в 1933 г. См. также его доклад на годовичном собрании Американского общества инженеров-механиков в декабре 1933 г.

33а и 33б представляют<sup>1)</sup> случай изгиба балки силой, приложенной по середине. Густота распределения темных полосок указывает на высокие напряжения вблизи точки приложения груза. Число полосок, пересекаю-



Фиг. 33а.

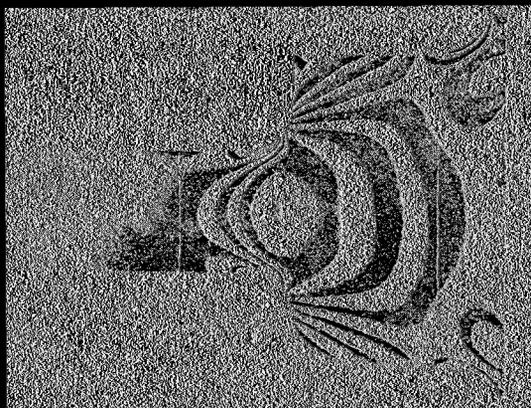


Фиг. 33б.

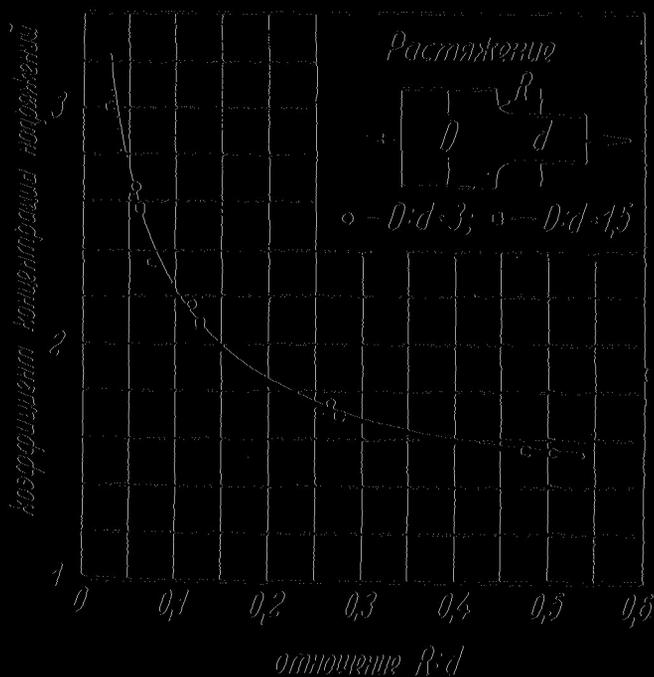
щих поперечное сечение, уменьшается с увеличением расстояния поперечного сечения от середины балки. Это происходит вследствие уменьшения изгибающего момента.

Фигура 33а представляет распределение напряжений в пластинке, имеющей две части разной ширины и подвергающейся осевому растяже-

<sup>1)</sup> См. М. Фрохт (M. M. Frocht), "Trans. Am. Soc. Mech. Eng.", vol. 53, 1931.



Фиг. 89а.



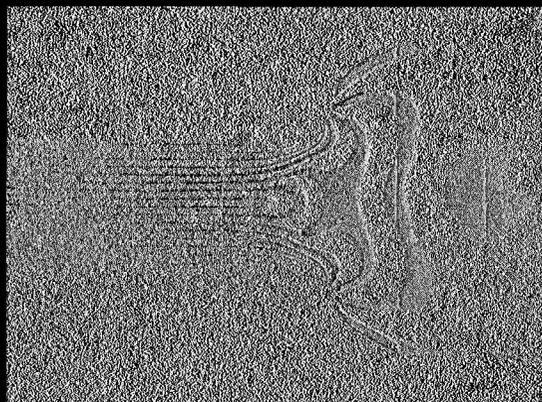
Фиг. 89б.

нию. Из этой фотографии видно, что наибольшее напряжение имеет место у концов закружек.

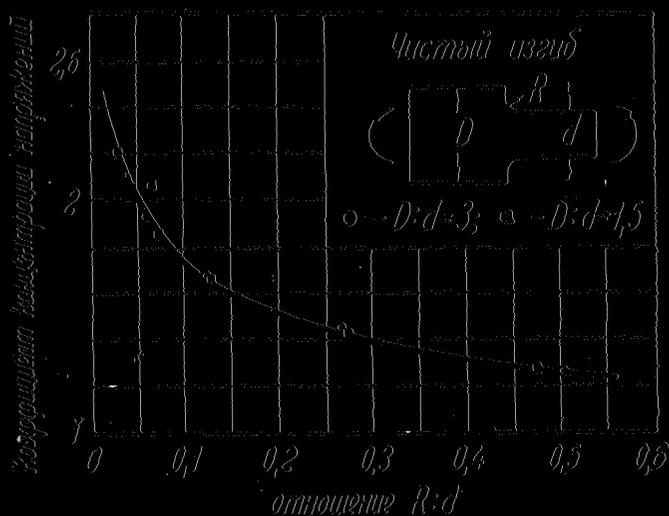
Отношение наибольшего напряжения к среднему напряжению в более узкой части пластинки называется коэффициентом концентрации

напряжений. Последний зависит от отношения радиуса  $R$  выкружки к ширине  $d$  пластины.

Некоторые значения коэффициента концентрации напряжений, полученные опытным путем<sup>1)</sup>, представлены в виде диаграммы на фиг. 39б,



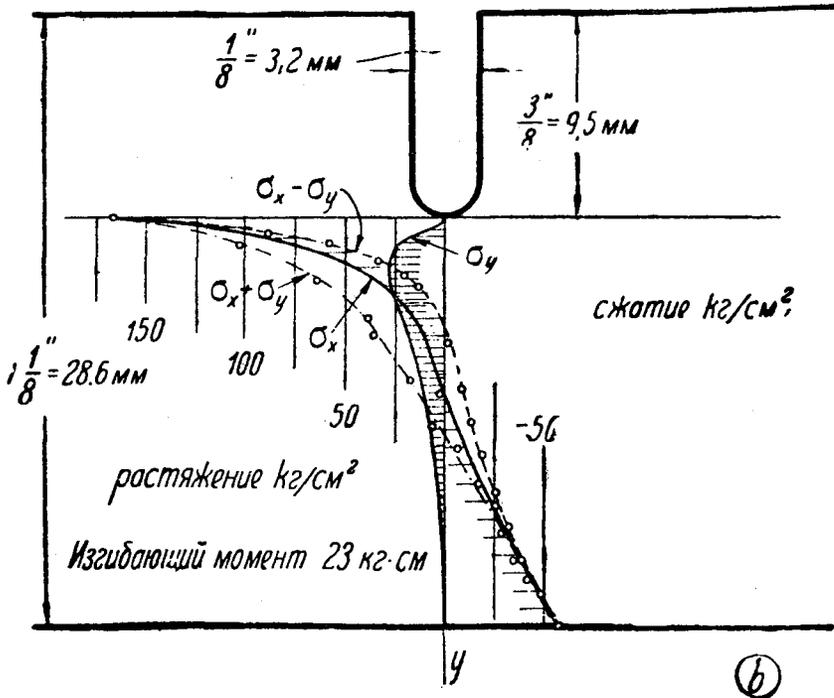
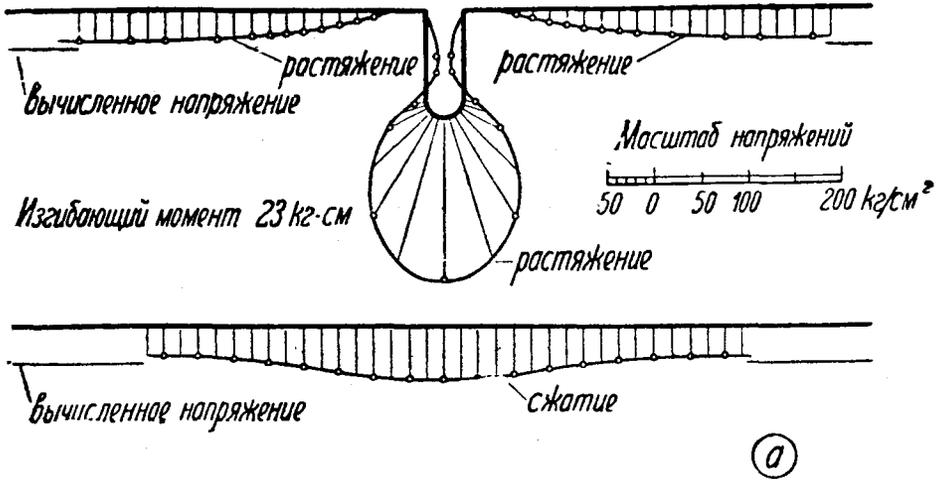
Фиг. 39а.



Фиг. 39б.

Из этой диаграммы видно, что наибольшее напряжение быстро увеличивается с уменьшением отношения  $R:d$ . При  $R:d = 0,1$ , наибольшее

<sup>1)</sup> См. доклад В. В. Вейбгеля, упомянутый выше в выноске на стр. 147.



Фиг. 90.

напряжение больше чем в два раза превосходит среднее растягивающее напряжение.

Фигура 89с представляет ту же пластинку, подвергнутую действию чистого изгиба от пары сил, приложенных к концу пластинки и действующих в срединной ее плоскости. Фиг. 89d дает диаграмму коэффициента концентрации напряжений в этом случае.

На фигуре 90 изображены результаты оптического исследования распределения напряжений в испытываемом чистый изгиб стержне прямоугольного сечения с глубокой выточкой<sup>1)</sup>. На фиг. 90a показаны напряжения по контуру пластинки. Из этой фигуры видно, что значительная концентрация напряжений имеет место в глубине выточки. Фигура 90b представляет распределение напряжений по поперечному сечению, проведенному через выточку. Полученные опытным путем величины разности ( $\sigma_x - \sigma_y$ ) и суммы ( $\sigma_x + \sigma_y$ ) напряжений показаны на чертеже пунктирными линиями.

При изложенных выше исследованиях предполагалось применение монохроматического света. Допустим теперь, что вместо одноцветного света мы имеем дело с пучком белого света, состоящим из лучей разных цветов, различной частоты. Предыдущие рассуждения применимы к каждому из этих цветов. Вследствие интерференции, описанной выше, при любой данной разности напряжений, некоторые из цветов исчезнут, а остальные останутся без изменения, так что свет, выходящий из анализатора, будет окрашен.

Если пластинку данного материала и данной толщины подвергнуть растяжению и напряжение постепенно увеличивать, то получится *шкала цветов*, в которой каждый цвет отвечает определенному напряжению. Окраска света, проходящего через нагруженную прозрачную модель, изменится по длине модели с изменением разности главных напряжений. Поэтому эту последнюю для каждой точки можно получить путем сравнения окраски проходящего через пластинку света со шкалой цветов<sup>2)</sup>.

---

<sup>1)</sup> См. Е. Кокер (E. G. Coker), „Trans. Inst. Naval Arch.“, vol. 72, 1930.

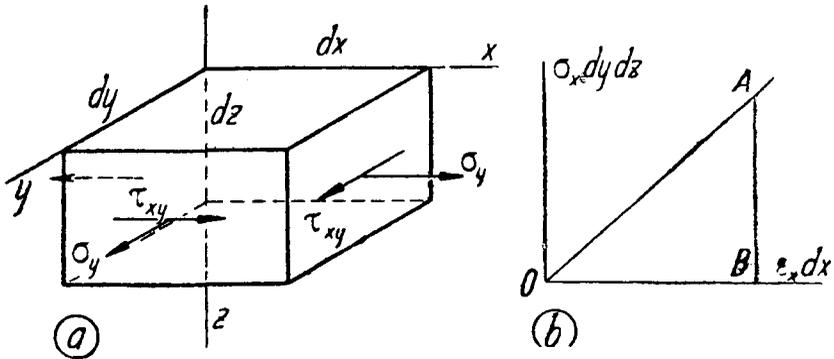
<sup>2)</sup> Различные приемы выполнения такого сравнения описаны в статьях Менаже и Е. Кокера, упомянутых выше в выдосках на стр. 139 и 140 соответственно.

## ГЛАВА ЧЕТВЕРТА .

### ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ.

**39. Общие выражения.** Под действием внешних сил упругое тело испытывает деформацию, при которой силы совершают некоторое количество работы. Эта работа превращается в *потенциальную энергию деформации* тела.

Для определения величины потенциальной энергии деформации рассмотрим элементарный прямоугольный параллелепипед (фиг. 91). Если



Фиг. 91.

на элемент действуют только нормальные напряжения  $\sigma_x$ , то усилие, растягивающее элемент в направлении оси  $x$ , равно:

$$\sigma_x dy dz.$$

Соответствующее удлинение элемента будет:

$$\epsilon_x dx.$$

Зависимость между этими двумя величинами выражается диаграммой, изображенной на фиг. 91b, и работа, совершенная при деформации, представится площадью треугольника  $OAB$ :

$$\frac{\sigma_x dy dz \cdot \epsilon_x dx}{2}.$$

Эта работа равна потенциальной энергии деформации, накопленной элементом. Приняв обозначение  $dU$  для потенциальной энергии деформации элемента  $dx dy dz$ , имеем:

$$dU = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x dx dy dz. \quad [a]$$

То же самое рассуждение применимо и к более общему случаю плоского напряженного состояния, когда на элемент действуют напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  (фиг. 91a). Количество энергии не зависит от порядка, в каком приложены усилия, а только от их конечной величины.

Допустим, что все внешние силы нарастают одновременно в одинаковом отношении. Тогда зависимость между каждой силой и соответствующим ей перемещением может быть представлена диаграммой, подобно изображенной на фиг. 91b.

Работа, совершенная всеми силами, равная потенциальной энергии деформации, накопленной в элементе, получится путем суммирования выражений, подобных [a], причем удлинение  $\epsilon_x$  теперь представляет деформацию по направлению оси  $x$  от всех трех напряжений, действующих одновременно.

Тогда для плоского напряженного состояния находим:

$$dU = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy dz. \quad [b]$$

Подобно этому, для напряженного состояния в трех измерениях мы получим:

$$dU = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dx dy dz. \quad [c]$$

Обозначив через  $U_0$  потенциальную энергию деформации, отнесенную к единице объема, мы имеем для напряженного состояния в трех измерениях

$$U_0 = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}). \quad [d]$$

Пользуясь законом Гука, согласно формул [3] и [6] (стр. 20 и 22), мы можем представить  $U_0$  в функции только составляющих напряжения:

$$U_0 = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2). \quad [80]$$

В случае плоского напряженного состояния  $\sigma_z = 0$ ;  $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ , и

$$U_0 = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - \frac{\nu}{E} \sigma_x \sigma_y + \frac{1}{2G} \tau_{xy}^2. \quad [81]$$

На основании выражений [11] (стр. 23), мы получим, согласно формуле [d],  $U_0$  в функции одних только составляющих деформации:

$$U_0 = \frac{1}{2} \lambda \Delta^2 + G (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \frac{1}{2} G (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2), \quad [82]$$

где

$$\Delta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad \text{и} \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

Легко показать, что производная потенциальной энергии деформации [82] по любой составляющей деформации дает соответствующую составляющую напряжения.

Возьмем, например, производную по  $\varepsilon_x$  и, пользуясь выражением [11] найдем

$$\frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_x} = \lambda \Delta + 2G\varepsilon_x = \sigma_x.$$

Полная потенциальная энергия деформации упругого тела получится из выражения для потенциальной энергии деформации, отнесенной к единице объема,  $U_0$ , путем интегрирования:

$$U = \iiint U_0 dx dy dz. \quad [83]$$

Пользуясь формулами [80] или [82], это выражение можем представить или в функции от составляющих напряжения, или в функции от составляющих деформации. Применение обоих этих видов выражения [83] будет показано в последующем изложении.

Количество потенциальной энергии деформации, накопленной в единице объема материала, иногда принимается за основу для определения того предельного напряжения, при котором происходит разрушение <sup>1)</sup>.

Чтобы привести эту теорию в согласование с тем, что изотропные материалы могут выдержать очень большие гидростатические давления без появления текучести, предполагают, что потенциальная энергия деформации разделяется на две части: одна — происходящая от изменения объема тела, и другая — от искажения формы тела, и рассматривают, для определения прочного сопротивления, только эту вторую часть <sup>2)</sup>.

Мы знаем, что объем тела изменяется пропорционально сумме трех составляющих нормального напряжения (см. формулу [8], стр. 23), так что, если эта сумма равна нулю, то деформация состоит только из искажения формы тела.

Мы можем разложить каждую составляющую напряжения на две части:

$$\sigma_x = \sigma'_x + p; \quad \sigma_y = \sigma'_y + p; \quad \sigma_z = \sigma'_z + p.$$

где

$$p = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3} \Sigma. \quad [e]$$

<sup>1)</sup> Различные теории прочности рассмотрены автором в его книге Сопротивление материалов, часть II, русское издание 1934 г., стр. 271.

<sup>2)</sup> См. М. Губер (M. T. Huber), „Czasopismo techniczne“, Lwow, 1904. См. также Р. Мизес (R. v. Mises), „Göttingen Nachrichten“, Math.-phys. Klasse, 1913, S. 582. Ф. Шлейхер (F. Schleicher), „Z. angew. Math. u. Mech.“, Bd 5, 1925, S. 199.

Так как, на основании вышеизложенного,

$$\sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z = 0,$$

то напряженное состояние  $\sigma'_x$ ,  $\sigma'_y$  и  $\sigma'_z$  вызывает одно только искажение формы тела, а изменение объема зависит полностью от величины равномерного растягивающего напряжения  $p$  1). Часть полной потенциальной энергии, соответствующая этому изменению объема, будет равна, на основании выражения [8]:

$$\frac{\Delta p}{2} = \frac{3(1-2\nu)}{2E} p^2 = \frac{(1-2\nu)}{6E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2. \quad [A]$$

Вычитая полученное выражение из выражения [80] и пользуясь тождеством:

$$\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x = -\frac{1}{2} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2,$$

мы можем представить часть полной потенциальной энергии, зависящую от искажения формы тела, в следующем виде:

$$U_0 - \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 = \\ = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2). \quad [84]$$

В случае простого растяжения в направлении оси  $x$ , одно только напряжение  $\sigma_x$  отлично от нуля, и потенциальная энергия искажения формы тела [84] равна

$$\frac{1+\nu}{3E} \sigma_x^2$$

В случае чистого сдвига, например, между плоскостями  $xz$  и  $yz$ , только одно касательное напряжение  $\tau_{xy}$  отлично от нуля, и энергия искажения в этом случае равна

$$\frac{1}{2G} \tau_{xy}^2$$

Если верно то, что каково бы ни было напряжение в системе, разрушение происходит тогда, когда потенциальная энергия искажения формы тела достигает известного предела (являющегося характерным для данного материала), то зависимость между критическим значением одного только растягивающего напряжения и одного только касательного напряжения найдется из уравнения

$$\frac{1}{2G} \tau_{xy}^2 = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_x^2$$

откуда

$$\tau_{xy} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_x = 0,577 \sigma_x, \quad [8]$$

Опыты со сталью показывают 2), что зависимость между пределом текучести при растяжении и пределом текучести при сдвиге очень хорошо согласуется с тем, что дает формула [8].

**40. Начало возможных перемещений.** При решении задач теории упругости представляется иногда выгодным пользоваться *началом возможных перемещений*.

1) Составляющие касательного напряжения  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  вызывают деформацию сдвига, которая не дает никакого изменения объема.

2) См. статьи В. Лоде (W. Lode), „Z. Physik“. Bd 36, 1928, S. 913, и Forschungsarbeiten, № 303, Berlin, 1928.

По отношению к материальной точке этот принцип состоит в том, что если точка находится в равновесии, то полная сумма работ всех внешних сил, действующих на точку, на любом *возможном перемещении*, равна нулю. За возможное перемещение точки, могущей свободно перемещаться в любом направлении, можно взять любое малое перемещение.

Если  $\delta u$ ,  $\delta v$  и  $\delta w$  — проекции возможного перемещения на направления осей  $x$ ,  $y$  и  $z$ , а  $\sum X$ ,  $\sum Y$  и  $\sum Z$  — суммы проекций на эти направления внешних сил, действующих на точку, то начало возможных перемещений дает нам:

$$\delta u \cdot \sum X = 0; \quad \delta v \cdot \sum Y = 0; \quad \delta w \cdot \sum Z = 0.$$

Эти уравнения будут удовлетворены при любом возможном перемещении, если

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum Z = 0.$$

Таким образом мы приходим к известным уравнениям равновесия материальной точки.

При применении начала возможных перемещений, действующие внешние силы рассматриваются постоянными при выполнении возможного перемещения. Если некоторые из сил, действующих на точку, являются упругими реакциями, как, например, усилия в стержнях шарнирной фермы, то мы предположим, что возможные перемещения настолько малы, что изменением в величинах или направлениях реакций можно пренебречь.

Упругое тело в состоянии покоя, вместе с его поверхностными и объемными силами, представляет собою систему материальных точек, на каждую из которых действует некоторое число сил, находящихся в равновесии. На любом возможном перемещении полная работа, совершаемая внешними силами, для любой точки, обращается в нуль, и, стало быть, полная работа, совершаемая всеми силами, приложенными к системе, также обращается в нуль.

*Возможное перемещение* в случае упругого тела — это любое малое перемещение, совместимое с условием непрерывности материала и с условиями перемещений на поверхности тела, если такие условия чем-нибудь ограничены.

Если дано, например, что некоторая часть поверхности тела, например, заделанный конец балки, неподвижна, или имеет данное перемещение, то возможное перемещение для этой части должно быть равно нулю.

Рассмотрим, в качестве примера, случай плоского напряженного состояния в пластинке. Обозначим через  $u$  и  $v$  составляющие действительных перемещений под действием нагрузок, и через  $\delta u$  и  $\delta v$  — составляющие возможного перемещения от положения равновесия при нагрузке. Эти последние составляющие являются произвольными малыми величинами, удовлетворяющими условиям непрерывности упругой деформации, т. е. они являются непрерывными функциями от  $x$  и  $y$ .

Для любой системы перемещений работа, затрачиваемая на преодоление взаимодействия между частицами тела, равна накопленной потен-

циальной энергии, т. е. потенциальной энергии деформации, соответствующей этим перемещениям.

Поэтому, если мы заменим  $u$  и  $v$  через  $\delta u$  и  $\delta v$ , то работа, затраченная на преодоление взаимодействия между частицами, будет равна разности между потенциальной энергией деформации, соответствующей перемещениям  $u + \delta u$  и  $v + \delta v$ , и потенциальной энергией, соответствующей перемещениям  $u$  и  $v$ . Возможные перемещения  $\delta u$  и  $\delta v$  вызывают такие изменения в составляющих деформации:

$$\delta \varepsilon_x = \frac{\partial \delta u}{\partial x}; \quad \delta \varepsilon_y = \frac{\partial \delta v}{\partial y}; \quad \delta \gamma_{xy} = \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \frac{\partial \delta u}{\partial y}.$$

Соответствующее изменение потенциальной энергии деформации на единицу объема, согласно выражению [82], будет равно

$$\delta U_0 = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_x} \delta \varepsilon_x + \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_y} \delta \varepsilon_y + \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{xy}} \delta \gamma_{xy} = \sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}. \quad [a]$$

Изменение полной потенциальной энергии деформации тела, следовательно, равно

$$\iint \delta U_0 dx dy,$$

где интегрирование распространяется на всю площадь пластинки.

Как раньше было указано, это изменение потенциальной энергии деформации измеряется работой, затраченной на преодоление взаимодействия между частицами тела. Чтобы получить работу, совершенную взаимодействиями между частицами, знак надлежит изменить на обратный. Следовательно, работа, совершенная этими усилиями на возможном перемещении, равна

$$- \iint \delta U_0 dx dy. \quad [b]$$

При определении работы, совершенной внешними силами на каком-либо возможном перемещении, следует принять во внимание силы, приложенные по контуру пластинки, а также объемные силы.

Приняв толщину пластинки за единицу и обозначив через  $\bar{X}$  и  $\bar{Y}$  составляющие поверхностных усилий, отнесенных к единице площади, можем сразу представить работу, совершаемую этими силами на возможных перемещениях, имеющих составляющие  $\delta u$  и  $\delta v$ , в следующем виде:

$$\int (\bar{X} \delta u + \bar{Y} \delta v) ds, \quad [c]$$

где интегрирование распространяется по всему контуру  $s$  пластинки.

Точно так же работа, совершаемая объемными силами, представится формулой

$$\iint (X \delta u + Y \delta v) dx dy, \quad [d]$$

где  $X$  и  $Y$  — составляющие объемной силы, отнесенной к единице объема пластинки, а интегрирование распространяется по всей площади пластинки.

Таким образом, то условие, что вся работа, совершаемая на возможном перемещении, обращается в нуль, на основании выражений [b], [c] и [d], принимает следующий вид:

$$\int (\bar{X}\delta u + \bar{Y}\delta v) ds + \int \int (X\delta u + Y\delta v) dx dy - \int \int \delta U_0 dx dy = 0. [85]$$

Так как, при применении начала возможных перемещений, данные силы и действительные составляющие напряжения, соответствующие положению равновесия, рассматривались постоянными при этом возможном перемещении, то в выражении [85] значок приращения  $\delta$  может быть поставлен перед знаками интегралов, и меняя все знаки на обратные, имеем:

$$\delta \left[ \int \int U_0 dx dy - \int \int (Xu + Yv) dx dy - \int (\bar{X}u + \bar{Y}v) ds \right] = 0. [85']$$

Первый член в скобках представляет собою потенциальную энергию деформации, второй и третий члены вместе представляют потенциальную энергию сил, действующих на тело, если потенциальную энергию этих сил для ненапряженного состояния ( $u = 0, v = 0$ ) принять равной нулю. Полное выражение в скобках представляет *полную потенциальную энергию системы*.

Следовательно, при сравнении различных значений перемещений  $u$  и  $v$ , можно сказать, что перемещения, которые действительно происходят в упругой системе под действием данных внешних сил, являются такими, которые обращают в нуль приращение полной потенциальной энергии системы на любом возможном перемещении от положения равновесия, т. е. полная потенциальная энергия системы в положении равновесия является либо максимальным, либо минимальным ее значением.

Чтобы решить, достигает ли энергия своего наибольшего или наименьшего значения, следует рассмотреть малые величины высших порядков, которыми мы пренебрегли<sup>1)</sup> в наших предыдущих рассуждениях.

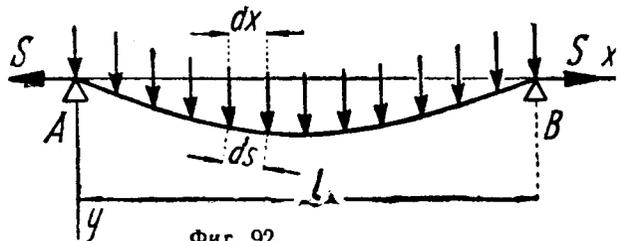
Если таким путем можно показать, что при любом возможном перемещении изменение всей потенциальной энергии системы — положительно, то мы имеем минимум. Если это изменение — отрицательно, то мы имеем максимум.

Для устойчивого равновесия всегда необходимо, чтобы работа была положительной на любом возможном перемещении системы от положения равновесия. Следовательно, полная потенциальная энергия системы в состоянии устойчивого равновесия имеет *минимальную величину*.

Уравнение, подобное уравнению [85], легко написать и для напряженного состояния в трех измерениях.

Начало возможных перемещений особенно удобно для нахождения деформации упругого тела под действием данных сил. Чтобы показать применение этого способа, рассмотрим здесь несколько простых примеров, решения которых уже общеизвестны.

Первым примером возьмем упругую линию совершенно гибкой эластичной нити  $AB$ , натянутой силами  $S$  между неподвижными точками  $A$  и  $B$  (фиг. 92) и нагруженной равномерно распределенной вертикальной нагрузкой интенсивности  $q$ .



Фиг. 92.

<sup>1)</sup> Мы пренебрегли ими тогда, когда предположили составляющие напряжения и сил остающимися постоянными при любом возможном перемещении.

Предположим, что начальное растяжение нити настолько велико, что увеличением растягивающей силы вследствие добавочного натяжения от прогиба можно пренебречь.

Тогда увеличение потенциальной энергии деформации вследствие прогиба получится путем умножения начальных растягивающих сил  $S$  на удлинение нити от прогиба.

Взяв координаты так, как показано на фиг. 92, находим

$$ds - dx = dx \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} - dx = \frac{1}{2} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx.$$

Удлинение нити равно

$$\int_0^l (ds - dx) = \frac{1}{2} \int_0^l \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx,$$

и соответствующее увеличение потенциальной энергии нити будет

$$\frac{S}{2} \int_0^l \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx. \quad [e]$$

Чтобы получить полное значение потенциальной энергии деформации нити, следует к выражению [e] прибавить постоянную величину потенциальной энергии от начального натяжения.

Начало возможных перемещений в этом случае дает следующее уравнение, аналогичное уравнению [85]:

$$\int_0^l q \delta y dx - \frac{S}{2} \int_0^l \delta \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx = 0. \quad [f]$$

Вычислив приращение второго члена этого уравнения, имеем

$$\int_0^l \delta \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx = 2 \int_0^l \frac{dy}{dx} \delta \frac{dy}{dx} dx = 2 \int_0^l \frac{dy}{dx} \frac{d\delta y}{dx} dx.$$

Интегрируя по частям и приняв во внимание, что на концах нити  $\delta y = 0$ , находим:

$$2 \int_0^l \left( \frac{dy}{dx} \right) \frac{d\delta y}{dx} dx = 2 \left( \left. \frac{dy}{dx} \delta y \right|_0^l - \int_0^l \frac{d^2 y}{dx^2} \delta y dx \right) = -2 \int_0^l \frac{d^2 y}{dx^2} \delta y dx.$$

Подставив найденное значение в уравнение [f], получим:

$$S \int_0^l \frac{d^2 y}{dx^2} \delta y dx + \int_0^l q \delta y dx = 0,$$

ИЛИ

$$\int_0^l \left( S \frac{d^2 y}{dx^2} + q \right) \delta y dx = 0.$$

Это уравнение будет выполняться при любом возможном перемещении  $\delta y$  только в том случае, если:

$$S \frac{d^2 y}{dx^2} + q = 0. \quad [g]$$

Таким образом, мы получили известное дифференциальное уравнение натянутой нити, несущей вертикальную нагрузку.

Началом возможных перемещений можно пользо-

ваться не только для получения дифференциальных уравнений упругих линий, как в предыдущем примере, но также для непосредственного определения прогибов<sup>1)</sup>.

Возьмем, например, призматический брус, опертый по концам и нагруженный силой  $P$  (фиг. 93). В наиболее общем случае упругая линия такого бруса может быть представлена в виде тригонометрического ряда:

$$y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + a_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots \quad [h]$$

Подставив этот ряд в общеизвестную формулу потенциальной энергии изогнутого призматического бруса<sup>2)</sup>, найдем:

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^l \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{\pi^4 EI}{4l^3} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 a_n^2. \quad [k]$$

Рассмотрим возможное перемещение от действительной упругой линии, получающееся, если любому коэффициенту  $a_n$  ряда  $[h]$  дать приращение  $\delta a_n$ . Тогда

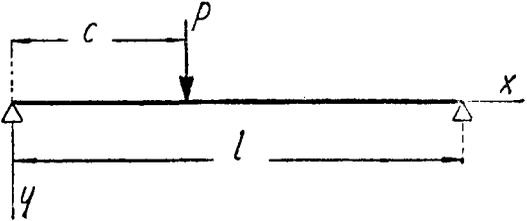
$$\delta y = \delta a_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad [l]$$

Соответствующее приращение потенциальной энергии деформации, на основании выражения  $[k]$ , будет

$$\frac{\partial U}{\partial a_n} \delta a_n = \frac{\pi^4 EI}{2l^3} n^4 a_n \delta a_n. \quad [m]$$

1) См. статью автора в „Известиях Киевского политехнического института“ за 1909 г., а также его книгу Сопrotивление материалов, часть II, русское издание 1934 г., стр. 22.

2) См. книгу автора Сопrotивление материалов, часть I, третье русское издание, 1934 г., стр. 278.



Фиг. 93.

Работа, совершаемая внешней силой  $P$  на возможном перемещении  $[l]$ , равна

$$P\delta a_n \sin \frac{n\pi c}{l}. \quad [n]$$

На основании выражений  $[m]$  и  $[n]$ , получаем уравнение работы на возможном перемещении в таком виде:

$$\frac{\pi^4 EI}{2l^3} n^4 a_n \delta a_n - P\delta a_n \sin \frac{n\pi c}{l} = 0,$$

откуда

$$a_n = \frac{2Pl^3 \sin \frac{n\pi c}{l}}{\pi^4 n^4 EI}.$$

Подставив это значение в ряд  $[h]$ , найдем уравнение упругой линии:

$$y = \frac{2Pl^3}{\pi^4 EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}}{n^4}. \quad [o]$$

Этот ряд — быстро сходящийся, и несколько членов ряда дают удовлетворительное приближение. Если взять, например, груз по середине пролета ( $c = 0,5l$ ), то прогиб под грузом равняется

$$(y)_{x=0,5l} = \frac{2Pl^3}{\pi^4 EI} \left( 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots \right).$$

Взяв только первый член этого ряда, получим:

$$(y)_{x=0,5l} = \frac{Pl^3}{48,7EI}.$$

В знаменателе мы имеем множитель 48,7, тогда как точное значение его — 48, так что ошибка при использовании одного только первого члена ряда составляет всего лишь около 1,5%.

Общее рассмотрение полной энергии системы было применено А. Гриффисом при разработке им теории разрушения хрупких материалов<sup>1)</sup>.

Известно, что материалы всегда дают много меньшее сопротивление, чем можно ожидать на основании рассмотрения молекулярных сил. Для определенного сорта стекла Гриффис нашел теоретическое сопротивление растяжению порядка 112 000 кг/см<sup>2</sup>, тогда как испытания на растяжение со стержнями из этого стекла дали только 1820 кг/см<sup>2</sup>.

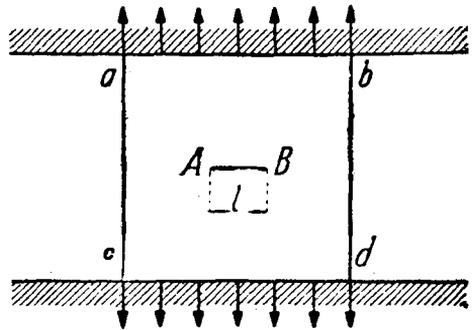
<sup>1)</sup> См. А. Гриффис (A. A. Griffith), „Phil. Trans. Roy. Soc.“, London, A, vol. 221, 1921, p. 163. См. также его статью в Proc. Intern. Congr. Appl. Mech., Delft, 1924. Полную библиографию по этому вопросу можно найти в книге Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik, Bd 4, 2 Teil, 1931, в статье Адольфа Смекала (Adolf Smekal).

Он показал, что это расхождение между теорией и опытами можно объяснить, если мы допустим, что в таких материалах, как стекло, существуют микроскопические трещины или пустоты, вызывающие появление высоких местных напряжений и, следовательно, дальнейшее распространение этих трещин.

В целях учета влияния этих трещин Гриффис взял трещину в виде очень узкого эллиптического отверстия, большая ось которого перпендикулярна к направлению растягивающей силы, и рассмотрел пластинку, закрепленную по сторонам  $ab$  и  $cd$  и натянутую равномерно распределенными растягивающими усилиями  $S$ , действующими по тем же сторонам (фиг. 94).

Если в пластинке сделать микроскопическое эллиптическое отверстие  $AB$  длиной  $l$ , то первоначальная потенциальная энергия от растягивающих усилий  $S$  уменьшится. Воспользовавшись решением для эллиптического отверстия<sup>1)</sup>, найдем это уменьшение. Для пластинки толщиной единица оно равно

$$U = \frac{\pi l^2 S^2}{4E}. \quad [p]$$



Фиг. 94.

Критическая величина растягивающего напряжения  $S$ , при котором трещина  $AB$  начнет распространяться, может быть теперь найдена на основании уравнения [85]. Так как нагруженные края пластинки заделаны и объемными силами можно пренебречь, то внешние усилия не произведут работы тогда, когда трещина распространится, и уравнение [85] для такого перемещения получит вид:

$$\iint \delta U_0 dx dy = 0. \quad [q]$$

Следовательно, потенциальная энергия остается без перемен.

При применении этого положения к случаю, когда имеется трещина, мы должны рассмотреть не только потенциальную энергию деформации  $[p]$ , но также *поверхностную энергию*.

На поверхностях, ограничивающих твердые тела, существует поверхностное натяжение так же, как и у жидкостей. Это обуславливает существование известного количества потенциальной энергии на поверхности. Гриффис нашел, например, что для того рода стекла, с которым он производил опыты, потенциальная энергия  $T$  на единицу площади поверхности была следующего порядка:

$$T = 0,00022 \text{ кг/см}^2. \quad [r]$$

<sup>1)</sup> См. стр. 199 ниже.

На основании уравнения  $[q]$ , мы заключаем теперь, что критическое значение растягивающего напряжения  $S$  будет тем значением, при котором уменьшение потенциальной энергии деформации от расширения трещины будет равно увеличению поверхностной потенциальной энергии. На основании выражения  $[p]$ , получаем:

$$\frac{dU}{dl} dl = \frac{\pi l S_{кр}^2}{2E} dl = 2T dl,$$

откуда

$$S_{кр} = \sqrt{\frac{4ET}{\pi l}}. \quad [s]$$

Опыты, при которых трещины известной длины были устроены при помощи столярного алмаза, показали достаточно удовлетворительное совпадение результатов с формулой  $[s]$ .

Опытным путем было показано также, что если принять меры предосторожности для устранения микроскопических трещинок, то можно получить значительно большее сопротивление, чем обычно. Некоторые стеклянные стержни, испытанные Гриффисом, дали временное сопротивление порядка  $63\,000 \text{ кг/см}^2$ , что составляет больше чем половину теоретического сопротивления, о котором упоминалось выше.

**41. Теорема Кастильяно.** В предыдущем параграфе форма равновесия упругого тела, подвергающегося действию объемных сил и находящегося в определенных условиях на поверхности, была сопоставлена со смежными формами, получающимися при возможных перемещениях  $\delta u$  и  $\delta v$  от положения равновесия. Было установлено, что действительные перемещения, соответствующие устойчивому положению равновесия, будут такими, при которых полная потенциальная энергия системы получает наименьшее значение.

Рассмотрим теперь, вместо перемещений, напряжения, соответствующие положению равновесия. Возьмем снова, в качестве примера, случай плоского напряженного состояния.

Мы знаем, что дифференциальные уравнения равновесия  $[18]$  (стр. 32) вместе с условиями на контуре  $[20]$  (стр. 33) недостаточны для определения составляющих напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$ .

Путем подбора различных выражений для функции напряжения  $\varphi$  в формулах  $[25]$  (стр. 36) мы можем найти несколько различных распределений напряжений, удовлетворяющих уравнениям равновесия и условиям по контуру, и возникает вопрос, как отличить истинное напряженное состояние от всех прочих статически возможных распределений напряжений.

Пусть  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  будут истинными составляющими напряжения, соответствующими положению равновесия, и пусть  $\delta\sigma_x$ ,  $\delta\sigma_y$  и  $\delta\tau_{xy}$  — такие малые приращения этих составляющих, что новые составляющие напряжения  $\sigma_x + \delta\sigma_x$ ,  $\sigma_y + \delta\sigma_y$  и  $\tau_{xy} + \delta\tau_{xy}$ , удовлетворяют тем же уравнениям равновесия  $[18]$ .

Тогда, вычтя уравнения для первых напряжений из уравнений для новых, найдем, что приращения составляющих напряжений удовлетворяют следующим уравнениям равновесия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \delta \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta \tau_{xy}}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial \delta \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \delta \tau_{xy}}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} [a]$$

Соответственно этому приращению составляющих напряжения произойдет некоторое изменение и в поверхностных силах.

Пусть  $\delta \bar{X}$  и  $\delta \bar{Y}$  будут малыми приращениями поверхностных сил. Тогда, на основании условий на контуре [20], находим

$$\left. \begin{aligned} \delta \sigma_x l + \delta \tau_{xy} m &= \delta \bar{X}; \\ \delta \sigma_y m + \delta \tau_{xy} l &= \delta \bar{Y}. \end{aligned} \right\} [b]$$

Рассмотрим теперь приращение потенциальной энергии деформации тела вследствие вышеупомянутых приращений составляющих напряжения. Взяв потенциальную энергию деформации на единицу объема в функции составляющих напряжения [81], получим приращение этой энергии в таком виде:

$$\delta U_0 = \frac{\partial U_0}{\partial \sigma_x} \delta \sigma_x + \frac{\partial U_0}{\partial \sigma_y} \delta \sigma_y + \frac{\partial U_0}{\partial \tau_{xy}} \delta \tau_{xy}, \quad [c]$$

где

$$\frac{\partial U_0}{\partial \sigma_x} = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) = \varepsilon_x;$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial \sigma_y} = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) = \varepsilon_y;$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial \tau_{xy}} = \frac{1}{G} \tau_{xy} = \gamma_{xy}.$$

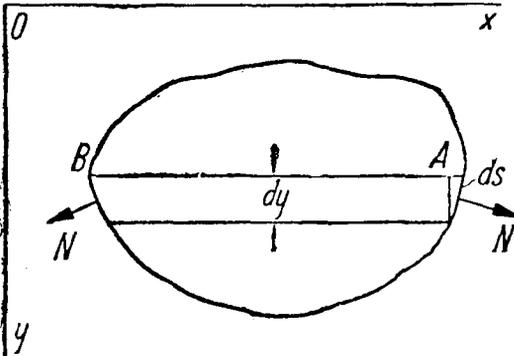
Это нам дает

$$\delta U_0 = \varepsilon_x \delta \sigma_x + \varepsilon_y \delta \sigma_y + \gamma_{xy} \delta \tau_{xy},$$

и полное приращение потенциальной энергии деформации вследствие приращений, составляющих напряжения, будет равно:

$$\delta U = \iint \delta U_0 dx dy = \iint (\epsilon_x \delta \sigma_x + \epsilon_y \delta \sigma_y + \epsilon_z \delta \sigma_z) dx dy. \quad [d]$$

Определим это приращение потенциальной энергии, приняв во внимание условия на контуре [b]. Первый член выражения [d] дает по-  
мощью интегрирования по частям:



$$\begin{aligned} & \iint \epsilon_x \delta \sigma_x dx dy = \\ & = \int dy \int \frac{\partial u}{\partial x} \delta \sigma_x dx = \\ & = \int dy |u \delta \sigma_x| - \\ & - \iint u \frac{\partial \delta \sigma_x}{\partial x} dx dy, \quad [e] \end{aligned}$$

Фиг. 95.

где выражение  $|u \delta \sigma_x|$  представляет разность значений функций  $u \delta \sigma_x$  для двух взаимно противоположных точек контура, например точек  $A$  и  $B$  на фиг. 95. В таком случае имеем:

$$\begin{aligned} dy |u \delta \sigma_x| &= dy (u \delta \sigma_x)_A - dy (u \delta \sigma_x)_B = \\ &= ds [u \delta \sigma_x \cos(N, x)]_A + ds [u \delta \sigma_x \cos(N, x)]_B, \quad [f] \end{aligned}$$

где  $\cos(N, x) = l$  — косинус угла между внешней нормалью  $N$  и осью  $x$ , а  $ds$  — элемент контура.

Суммируя такие выражения, как выражение [f], находим

$$\int dy |u \delta \sigma_x| = \int u \delta \sigma_x l ds.$$

а потому уравнение [e] получает следующий вид:

$$\iint \epsilon_x \delta \sigma_x dx dy = \int u \delta \sigma_x l ds - \iint u \frac{\partial \delta \sigma_x}{\partial x} dx dy, \quad [g]$$

где первый интеграл распространяется по всему контуру, а второй — по всей площади пластинки.

Таким же образом могут быть преобразованы второй и третий члены правой части выражения [d], и мы получим:

$$\left. \begin{aligned}
 \iint \varepsilon_y \delta \sigma_y dx dy &= \int dx \int \frac{\partial v}{\partial y} \delta \sigma_y dy = \\
 &= \int dx |v \delta \sigma_y| - \iint v \frac{\partial \delta \sigma_y}{\partial y} dx dy = \\
 &= \int v \delta \sigma_y m ds - \iint v \frac{\partial \delta \sigma_y}{\partial y} dx dy; \\
 \iint \gamma_{xy} \delta \tau_{xy} dx dy &= \int dy \int \frac{\partial v}{\partial x} \delta \tau_{xy} dx + \\
 + \int dx \int \frac{\partial u}{\partial y} \delta \tau_{xy} dy &= \int dy |v \delta \tau_{xy}| - \\
 - \iint v \frac{\partial \delta \tau_{xy}}{\partial x} dx dy + \int dx |u \delta \tau_{xy}| - \\
 - \iint u \frac{\partial \delta \tau_{xy}}{\partial y} dx dy &= \int v \delta \tau_{xy} l ds + \\
 + \int u \delta \tau_{xy} m ds - \iint v \frac{\partial \delta \tau_{xy}}{\partial x} dx dy - \\
 - \iint u \frac{\partial \delta \tau_{xy}}{\partial y} dx dy.
 \end{aligned} \right\} [h]$$

Подставив выражения [g] и [h] в формулу [d], найдем

$$\begin{aligned}
 \delta U &= \int [u (\delta \sigma_x l + \delta \tau_{xy} m) + v (\delta \sigma_y m + \delta \tau_{xy} l)] ds - \\
 - \iint &\left[ u \left( \frac{\partial \delta \sigma_y}{\partial x} + \frac{\partial \delta \tau_{xy}}{\partial y} \right) + v \left( \frac{\partial \delta \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \delta \tau_{xy}}{\partial x} \right) \right] dx dy,
 \end{aligned}$$

где первый интеграл распространяется по контуру, а второй — по площади пластинки.

Воспользовавшись уравнениями [a] и [b], мы окончательно получим следующее выражение для приращения потенциальной энергии деформации, происходящее от приращения составляющих напряжения:

$$\delta U = \int (u \delta \bar{X} + v \delta \bar{Y}) ds. \quad [86]$$

Правая часть этого выражения представляет работу, производимую приращениями внешних сил на действительных перемещениях.

Если мы имеем сосредоточенные силы вместо непрерывно распределенных поверхностных усилий, то интегрирование в выражении [86] должно быть заменено суммированием.

Пусть  $P_1, P_2, \dots$  — независимые сосредоточенные силы, а  $d_1, d_2, \dots$  — действительные перемещения точек приложения этих сил в направлении их действия. Тогда выражение [86] получает такой вид:

$$\delta U = d_1 \delta P_1 + d_2 \delta P_2 + \dots \quad [87]$$

При этих наших рассуждениях мы взяли приращения составляющих напряжения, удовлетворяющие уравнениям равновесия  $[a]$ , в самом общем виде.

Рассмотрим теперь частный случай, когда приращения составляющих напряжения таковы, что они действительно могут быть вызваны в упругом теле соответственным приращением внешних сил.

Предположим, что составляющие напряжения выражены в функциях внешних сил  $P_1, P_2, \dots$ , и возьмем также приращения составляющих напряжения, которые являются следствием приращений  $\delta P_1, \delta P_2, \dots$  этих сил. Рассматривая только случаи, когда составляющие напряжения являются линейными функциями от внешних сил <sup>1)</sup>  $P_1, P_2, \dots$ , и подставив эти функции в формулу [80], мы получим выражение для потенциальной энергии деформации в виде однородной функции второй степени от внешних сил.

Следует заметить, что реакции опор, которые можно определить из условий равновесия твердого тела, могут быть выражены в функциях данных сил  $P_1, P_2, \dots$ , и не войдут в выражение для потенциальной энергии деформации. Если имеются лишние связи, то соответствующие реакции должны быть рассмотрены вместе с силами  $P_1, P_2, \dots$ , как статически независимые силы.

Имея выражение для потенциальной энергии деформации в зависимости от внешних сил, получим приращение этой энергии вследствие приращения этих сил равным

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial P_1} \delta P_1 + \frac{\partial U}{\partial P_2} \delta P_2 + \dots$$

Подставив это значение в выражение [87], найдем:

$$\left( \frac{\partial U}{\partial P_1} - d_1 \right) \delta P_1 + \left( \frac{\partial U}{\partial P_2} - d_2 \right) \delta P_2 + \dots = 0. \quad [i]$$

Эти силы  $P_1, P_2, \dots$  являются, как пояснено выше, статически независимыми, и их приращения  $\delta P_1, \delta P_2, \dots$  — вполне произвольны. Мы можем принять все приращения кроме одного равными нулю. Следовательно, уравнение [i] требует:

$$\frac{\partial U}{\partial P_1} = d_1; \quad \frac{\partial U}{\partial P_2} = d_2; \quad \dots \quad [88]$$

<sup>1)</sup> Мы исключаем, например, такие случаи, как изгиб тонких стержней поперечными силами, при одновременном действии осевого растяжения или сжатия. В этих случаях напряжения, возникающие от действия осевых сил, зависят от прогибов, происходящих под влиянием поперечных сил, и уже не являются линейными функциями от внешних сил.

Мы видим, что, если потенциальная энергия деформации  $U$  упругой системы представлена в виде функции статически независимых внешних сил  $P_1, P_2, \dots$ , то частные производные этой функции относительно любой из этих сил дают действительные перемещения точки приложения этой силы по линии ее действия. Это и есть общеизвестная *теорема Кастильяно*.

В качестве примера приложения этой теоремы рассмотрим прогиб нагруженного конца консоли (фиг. 24, стр. 44). Было показано (см. формулы [б], стр. 45), что составляющие напряжения в этом случае равны

$$\sigma_x = -\frac{Pxy}{I}; \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = -\frac{P}{2I}(c^2 - y^2). \quad [j]$$

Подставив эти значения в выражение [82] и проинтегрировав, получим полную потенциальную энергию деформации:

$$U = \int_0^l \int_{-c}^c \left[ \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - \frac{\nu}{E} \sigma_x \sigma_y + \frac{1}{2G} \tau_{xy}^2 \right] dx dy,$$

откуда

$$U = \frac{P^2 l^3}{6EI} + \frac{P^2 l c^2}{5GI}.$$

Следовательно, на основании теоремы Кастильяно, прогиб конца консоли равен

$$d = \frac{dU}{dP} = \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{2}{5} \frac{Plc^2}{GI}. \quad [l]$$

Второй член этого выражения представляет влияние перерезывающей силы на прогиб. Этот результат не совпадает с прогибом, полученным ранее (см. стр. 48), где влияние перерезывающей силы выражалось членом

$$\frac{1}{2} \frac{Plc^2}{GI}.$$

Расхождение это легко объяснить, если мы вспомним, что при нашем предыдущем исследовании связь в заделанном конце была принята такой, что концевое поперечное сечение могло свободно искривляться (фиг. 25б). Перемещение в этом конце, на основании формул [m] параграфа 17 (стр. 47), равны:

$$u = -\frac{\nu Py^3}{6EI} + \frac{Py^3}{6GI}; \quad v = \frac{\nu Pl y^2}{2EI}. \quad [m]$$

Приращения поверхностных сил в этом поперечном сечении, на основании выражений [i], равны:

$$\left. \begin{aligned} \delta X &= \delta (\sigma_x)_{x=l} = -\frac{\delta Pl y}{I} \\ \delta Y &= \delta (\tau_{xy})_{x=l} = -\frac{\delta P}{2I} (c^2 - y^2). \end{aligned} \right\} \quad [n]$$

Подставив найденные значения  $[k]$ ,  $[m]$  и  $[n]$  в выражение [86], найдем:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{2}{5} \frac{Plc^2}{GI} \right) \delta P = \\ & = \int_{-c}^{+c} \left[ \left( -\frac{\nu Py^3}{6EI} + \frac{Py^3}{6GI} \right) \left( -\frac{\delta Pl y}{I} \right) - \frac{\nu Pl^2 y^2}{2EI} \cdot \frac{\delta P}{2I} (c^2 - y^2) \right] dy + \delta Pd = \\ & = -\frac{1}{10} \cdot \frac{P \delta Plc^2}{GI} + \delta Pd, \end{aligned}$$

откуда

$$= d \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{1}{2} \frac{Plc^2}{GI}. \quad [o]$$

Очевидно, что разница между прогибами  $[l]$  и  $[o]$  является следствием разницы в способах закрепления. Прогиб  $[l]$  получается, если в заделанном конце нет никаких перемещений, а прогиб  $[o]$  представляет правильное решение задачи, если заделанный конец может свободно искривляться.

Следует заметить, что выражения  $[j]$  представляют правильные составляющие напряжения только в этом последнем случае. Если же в заделанном конце нет перемещений, то распределение напряжений  $[j]$  требует внесения поправки, прежде чем на основании его искать точное значение прогиба.

**42. Начало наименьшей работы.** При выводе формулы [86] мы предположили, что любое приращение составляющих напряжения удовлетворяет уравнениям равновесия.

Если мы допустим теперь, что приращения таковы, что поверхностные силы остаются без изменения, то тогда, вместо уравнений  $[b]$  предыдущего параграфа, мы получим:

$$\begin{aligned} \delta \sigma_x l + \delta \tau_{xy} m &= 0; \\ \delta \sigma_y m + \delta \tau_{xy} l &= 0, \end{aligned}$$

и выражение [86] обращается в нуль:

$$\delta U = 0. \quad [89]$$

Это показывает, что, если мы имеем тело, на которое действуют по контуру данные внешние силы, и если мы рассматриваем такие приращения составляющих напряжения, которые не оказывают влияния на уравнение равновесия и условия на контуре, то действительными составляющими напряжения будут те, которые обращают приращение потенциальной энергии в нуль.

Можно показать, что эти истинные значения составляющих напряжения дают *наименьшее значение* потенциальной энергии деформации. Тогда уравнение [89] выражает так называемое *начало наименьшей работы*.

Это уравнение имеет силу также и в том случае, если часть контура жестко закреплена связями и приращения составляющих напряжения таковы, что вызывают приращение поверхностных сил по связанной части контура. Действительно, так как перемещение по связанному кон-

туру равно нулю, правая часть выражения [86] обращается в нуль, и мы придем снова к уравнению [89].

Начало наименьшей работы очень часто применяется при элементарном рассмотрении статически неопределимых систем <sup>1)</sup>.

Если  $X, Y, Z, \dots$  — силы или моменты, действующие в лишних элементах или в лишних закреплениях упругой системы, то значения этих статически неопределимых величин могут быть определены из того условия, что потенциальная энергия деформации системы, представленная в виде функции от  $X, Y, Z, \dots$ , должна получать наименьшее значение. Таким образом мы имеем следующие уравнения:

$$\frac{\partial U}{\partial X} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial Y} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial Z} = 0; \quad \dots \quad [90]$$

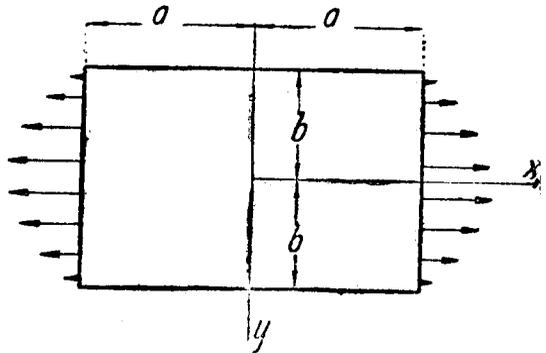
Несколько примеров применения начала наименьшей работы к решению плоских задач рассмотрим в следующих параграфах.

**43. Применение начала наименьшей работы к прямоугольным пластинкам.** В качестве примера рассмотрим прямоугольную пластинку. Выше (см. стр. 56) было показано, что при помощи тригонометрических рядов могут быть удовлетворены условия по двум краям прямоугольной пластинки. Решения, полученные этим путем, могут представить практический интерес в применении к пластинке, ширина которой мала по сравнению с ее длиной.

Если оба измерения пластинки — величины одинакового порядка, то следует рассмотреть условия по всем четырем сторонам контура. При решении подобного рода задач можно в некоторых случаях с успехом применить начало наименьшей работы.

Рассмотрим испытывающую растяжение прямоугольную пластинку, когда растягивающие усилия по концам распределены по параболическому закону (фиг. 96) <sup>2)</sup>. Условия на контуре в этом случае будут:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } x = \pm a: \\ \tau_{xy} = 0; \quad \sigma_x = S \left( 1 - \frac{y^2}{b^2} \right); \\ \text{при } y = \pm b: \\ \tau_{xy} = 0; \quad \sigma_y = 0. \end{array} \right\} [a]$$



Фиг. 96.

<sup>1)</sup> См. например, книгу автора Соппротивление материалов, часть I, третье русское издание 1934 г., стр. 295.

<sup>2)</sup> См. статью автора в „Phil. Mag.“, vol. 47, 1924, p. 1095.

Потенциальная энергия деформации для пластинки толщиной единица, на основании формулы [81], равна

$$U = \frac{1}{2E} \iint [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu\sigma_x\sigma_y + 2(1+\nu)\tau_{xy}^2] dx dy. \quad [b]$$

Следует заметить, что для односвязного контура, с которым мы имеем дело в настоящем случае, напряженное состояние не зависит от упругих постоянных материала (см. стр. 35), и дальнейшие выкладки мы можем поэтому упростить, приняв Пуассоново отношение  $\nu$  равным нулю.

Тогда, введя функцию напряжений  $\varphi$  и подставив в формулу [b] значения:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}; \quad \nu = 0,$$

найдем

$$U = \frac{1}{2E} \iint \left[ \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy. \quad [c]$$

Истинное выражение для функции напряжений будет то, которое удовлетворяет условиям [a] и при котором потенциальная энергия деформации [c] достигает наименьшего значения.

Если мы применим вариационное исчисление к определению наименьшего значения потенциальной энергии [c], мы придем для функции напряжений  $\varphi$  к выражению [26] (см. стр. 36).

Вместо этого мы воспользуемся следующим приемом приближенного решения этой задачи.

Возьмем функцию напряжений в виде такого ряда:

$$\varphi = \varphi_0 + \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \alpha_3 \varphi_3 + \dots, \quad [d]$$

чтобы условия на контуре [a] были удовлетворены; постоянные  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$  подлежат определению в дальнейшем.

Подставив этот ряд в выражение [c], мы найдем  $U$  в функции второй степени от постоянных  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$  Величина этих постоянных может быть тогда определена из условий минимума потенциальной энергии деформации:

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha_1} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial \alpha_2} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial \alpha_3} = 0; \quad \dots, \quad [e]$$

которые являются линейными уравнениями относительно постоянных  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ .

Соответствующим подбором функций  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$  мы можем, вообще говоря, получить удовлетворительное приближенное решение, вос-

пользовавшись лишь небольшим числом членов ряда [d]. В нашем случае условия на контуре [a] будут удовлетворены, если принять

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} S y^2 \left( 1 - \frac{1}{6} \frac{y^2}{b^2} \right),$$

так как это значение функции  $\varphi_0$  дает:

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} = 0; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial y} = 0;$$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} = S \left( 1 - \frac{y^2}{b^2} \right).$$

Остальные функции  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$  должны быть выбраны так, чтобы напряжения, соответствующие им, обращались в нуль на контуре. Для того, чтобы обеспечить это, мы возьмем выражение

$$(x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2$$

в качестве множителя во всех этих функциях.

Вторая производная этого выражения по  $x$  обращается в нуль на сторонах  $y = \pm b$ , а вторая производная по  $y$  обращается в нуль на сторонах  $x = \pm a$ . Вторая производная

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$$

обращается в нуль на всех четырех сторонах пластинки.

Итак, функция напряжений может быть принята такой:

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{1}{2} S y^2 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{y^2}{b^2} \right) + \\ & + (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2 (\alpha_1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 y^2 + \dots). \end{aligned} \quad [f]$$

В этом ряду взяты только четные степени координат  $x$  и  $y$ , так как распределение напряжений симметрично относительно осей  $x$  и  $y$ .

Ограничившись первым членом  $\alpha_1$  в ряду [f], имеем:

$$\varphi = \frac{1}{2} S y^2 \left( 1 - \frac{1}{6} \frac{y^2}{b^2} \right) + \alpha_1 (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2.$$

Первое из уравнений [e] получается в таком виде:

$$\alpha_1 \left( \frac{64}{7} + \frac{256}{49} \frac{b^2}{a^2} + \frac{64}{7} \frac{b^4}{a^4} \right) = \frac{S}{a^4 b^2}.$$

Для квадратной пластинки ( $a = b$ ) находим

$$\alpha_1 = 0,04253 \frac{S}{a^6},$$

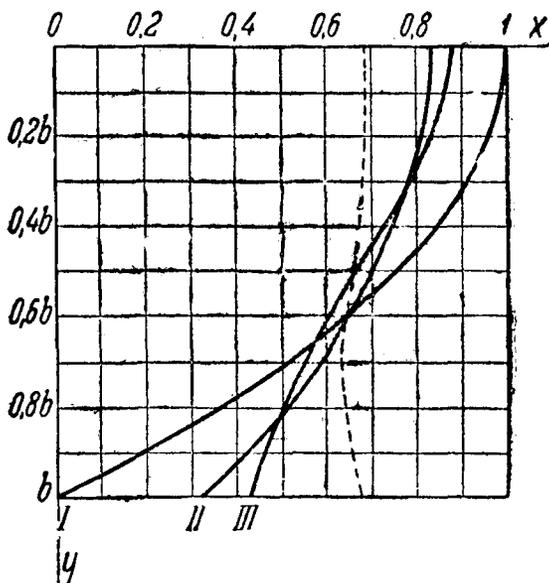
и составляющие напряжения будут:

$$\sigma_x = S \left( 1 - \frac{y^2}{a^2} \right) - 0,1702 S \left( 1 - \frac{3y^2}{a^2} \right) \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^2;$$

$$\sigma_y = -0,1702 S \left( 1 - \frac{3x^2}{a^2} \right) \left( 1 - \frac{y^2}{a^2} \right)^2;$$

$$\tau_{xy} = -0,6805 S \frac{xy}{a^2} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \left( 1 - \frac{y^2}{a^2} \right).$$

Распределение нормального напряжения  $\sigma_x$  по сечению  $x = 0$  представлено кривой II <sup>1)</sup> (фиг. 97).



Фиг. 97.

Чтобы получить более точное приближение, мы возьмем теперь три члена в ряду [f]. Тогда уравнения [e], для определения постоянных  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$ , будут таковы:

1) Кривая I представляет распределение напряжений по концам пластинки по параболическому закону.

$$\left. \begin{aligned}
 & \alpha_1 \left( \frac{64}{7} + \frac{256}{49} \frac{b^2}{a^2} + \frac{64}{7} \frac{b^4}{a^4} \right) + \alpha_2 a^2 \left( \frac{64}{77} + \frac{64}{49} \frac{b^4}{a^4} \right) + \\
 & \quad + \alpha_3 a^2 \left( \frac{64}{49} \frac{b^2}{a^2} + \frac{64}{77} \frac{b^6}{a^6} \right) = \frac{S}{a^4 b^2}; \\
 & \alpha_1 \left( \frac{64}{11} + \frac{64}{7} \frac{b^4}{a^4} \right) + \alpha_2 a^2 \left( \frac{192}{143} + \frac{256}{77} \frac{b^2}{a^2} + \frac{192}{7} \frac{b^4}{a^4} \right) + \\
 & \quad + \alpha_3 a^2 \left( \frac{64}{77} \frac{b^2}{a^2} + \frac{64}{77} \frac{b^6}{a^6} \right) = \frac{S}{a^4 b^2}; \\
 & \alpha_1 \left( \frac{64}{7} + \frac{64}{11} \frac{b^4}{a^4} \right) + \alpha_2 a^2 \left( \frac{64}{77} + \frac{64}{77} \frac{b^4}{a^4} \right) + \\
 & \quad + \alpha_3 a^2 \left( \frac{192}{7} \frac{b^2}{a^2} + \frac{256}{77} \frac{b^4}{a^4} + \frac{192}{143} \frac{b^6}{a^6} \right) = \frac{S}{a^4 b^2}.
 \end{aligned} \right\} [g]$$

При квадратной пластинке эти уравнения дают:

$$\alpha_1 = 0,04040 \frac{S}{a^8}; \quad \alpha_2 = \alpha_3 = 0,01174 \frac{S}{a^8}.$$

Распределение нормального напряжения  $\sigma_x$  по сечению  $x=0$  представится выражением:

$$\begin{aligned}
 (\sigma_x)_{x=0} = S \left( 1 - \frac{y^2}{a^2} \right) - 0,1616 S \left( 1 - 3 \frac{y^2}{a^2} \right) + \\
 + 0,0235 S \left( 1 - 12 \frac{y^2}{a^2} + 15 \frac{y^4}{a^4} \right).
 \end{aligned}$$

На фиг. 97 это распределение напряжений показано кривой III<sup>1)</sup>.

По мере увеличения длины пластинки, распределение напряжений по сечению  $x=0$  становится все более равномерным. Если мы возьмем, например,  $a=2b$ , то получим из уравнений [g];

$$\alpha_1 = 0,07983 \frac{S}{a^4 b^2}; \quad \alpha_2 = 0,1250 \frac{S}{a^6 b^2}; \quad \alpha_3 = 0,01826 \frac{S}{a^6 b^2}.$$

Соответствующие значения нормального напряжения  $\sigma_x$  для сечения  $x=0$  приведены ниже:

$$\begin{array}{cccccc}
 y:b = & 0; & 0,2 & 0,4; & 0,6 & 0,8; & 1,0 \\
 \sigma_x = & 0,690 S; & 0,684 S; & 0,669 S; & 0,653 S; & 0,649 S; & 0,675 S.
 \end{array}$$

Это распределение напряжений представлено на фиг. 97 пунктирной линией. Мы видим, что в этом случае отклонение от среднего значения напряжения

$$\frac{2}{3} S$$

очень мало.

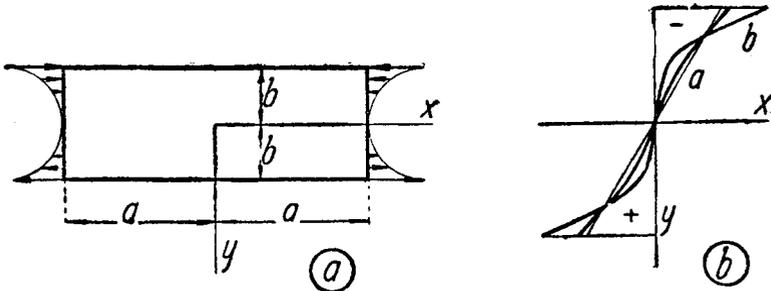
<sup>1)</sup> Подобные же результаты были получены проф. Инглисом (C. E. Inglis), Proc. Roy. Soc., London, A, vol. 103, 1923.

Для того, чтобы перейти к другим симметричным распределениям усилий по краям  $x = \pm a$ , нам остается только изменить вид функции  $\varphi_0$  в выражении [f], и переменятся лишь правые части в уравнениях [g].

В качестве примера распределения напряжений, несимметричного относительно оси  $x$ , рассмотрим случай изгиба, показанный на фиг. 98<sup>1)</sup>, при котором усилия, приложенные по концам, равны

$$(\sigma_x)_{x=\pm a} = Ay^3$$

(кривая  $b$  на фиг. 98b).



Фиг. 98.

Ясно, что система напряжений будет нечетной относительно оси  $x$  и четной относительно оси  $y$ . Эти условия будут выполнены, если функцию напряжений взять в следующем виде:

$$\varphi = \frac{1}{20} Ay^5 + (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2 \cdot (\alpha_1 y + \alpha_2 yx^2 + \alpha_3 y^3 + \alpha_4 x^2 y^3 + \dots). \quad [h]$$

Первый член, как и выше удовлетворяет условиям на контуре для  $\varphi$ .

Подставив выражение [h] с четырьмя коэффициентами  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  и  $\alpha_4$  в уравнения [e], найдем для квадратной пластинки ( $a = b$ ):

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 2Aa^2 \left\{ \frac{1}{2} \eta^3 - (1 - \xi^2)^2 [0,08392(5\eta^3 - 3\eta) + 0,004108(21\eta^5 - 20\eta^3 + 3\eta)] - \xi^2 (1 - \xi^2)^2 [0,07308(5\eta^3 - 3\eta) + 0,04179(21\eta^5 - 20\eta^3 + 3\eta)] \right\}, \quad [k]$$

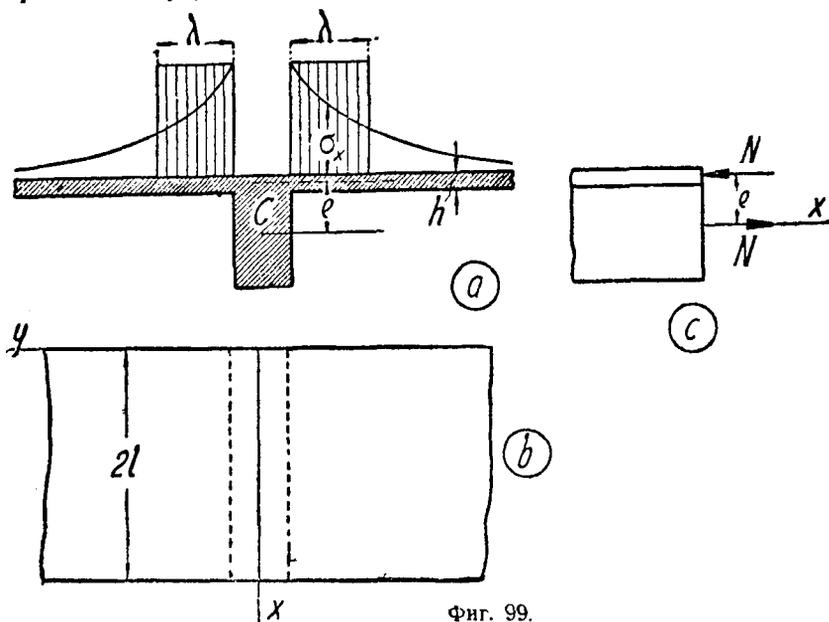
где

$$\xi = \frac{x}{a} \quad \text{и} \quad \eta = \frac{y}{b}.$$

<sup>1)</sup> Эти вычисления взяты из докторской диссертации Дж. Гудьера (J. N. Goodier), Мичиганский университет, 1931 г. См. также „Trans. Am. Soc. Mech. Eng.“, vol. 54, 1931, p. 173.

Распределение напряжений по среднему поперечному сечению  $x = 0$  приближается к распределению по линейному закону. Это показано на фиг. 98b кривой *a*.

44. Полезная ширина полок широкополых балок. В качестве другого примера применения начала наименьшей работы к плоской задаче о балках прямоугольного сечения, рассмотрим балку с очень широкими полками (фиг. 99). Такие балки часто встречаются в железобетонных сооружениях и в конструкциях корабельных корпусов.



Фиг. 99.

Элементарная теория изгиба предполагает, что напряжения от изгиба пропорциональны расстоянию от нейтральной оси, т. е. что напряжения не меняются по ширине полки. Но если эта ширина очень велика, то ясно, что части полки на некотором расстоянии от стенки не участвуют в полной мере в сопротивлении изгибающему моменту, и балка оказывается слабее, чем это следует по элементарной теории изгиба.

Обычно принято, при определении напряжений в таких балках, действительную ширину полки заменять настолько уменьшенной шириной, чтобы элементарная теория изгиба, в применении к балкам с преобразованным сечением, давала верные значения наибольших напряжений при изгибе. Эта уменьшенная ширина полки называется *полезной шириной*. В дальнейшем приводится теоретическое обоснование определения этой полезной ширины <sup>1)</sup>.

В целях возможного упрощения задачи, предположим, что мы имеем бесконечно длинную неразрезную балку на равноотстоящих опорах. Все пролеты загружены одинаково, грузами, симметричными относительно середины пролета.

Одну из опор пролета, показанного на фиг. 99b, возьмем за начало координат, с осью  $x$  в направлении оси балки. Благодаря симметрии достаточно рассмо-

<sup>1)</sup> Этот вопрос был исследован *Т. Карманом* (*Th. v. Kármán*), см. Festschrift August Föppl, 1923, S. 114; см. также *Г. Шнадель* (*G. Schnadel*), „Werft und Reederei“, Bd 9, 1928, S. 92.

треть лишь один пролет и одну половину, скажем ту, которая соответствует положительным ординатам  $y$ . Ширина полки предполагается бесконечно большой, а ее толщина  $h$  — очень малой по сравнению с высотой балки.

Изгибом полок, как тонкой плиты, можно пренебречь и допустить, что при изгибе балки силы передаются полкам по срединной плоскости, так что распределение напряжений в полках является плоской задачей.

Соответствующая функция напряжений  $\varphi$ , удовлетворяющая дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0, \quad [a]$$

может быть принята для нашего симметричного случая в виде ряда:

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) \cos \frac{n\pi x}{l}. \quad [b]$$

где  $f_n(y)$  являются функциями одной лишь ординаты  $y$ .

Подставив в уравнение [a], найдем следующее выражение для  $f_n(y)$ :

$$f_n(y) = A_n e^{-\frac{n\pi y}{l}} + B_n \left(1 + \frac{n\pi y}{l}\right) e^{-\frac{n\pi y}{l}} + C_n e^{\frac{n\pi y}{l}} + D_n \left(1 + \frac{n\pi y}{l}\right) e^{\frac{n\pi y}{l}}. \quad [c]$$

Чтобы удовлетворить тому условию, что напряжения должны обращаться в нуль при бесконечно большом значении ординаты  $y$ , примем  $C_n = D_n = 0$ . Тогда выражение для функции напряжений будет таким:

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n e^{-\frac{n\pi y}{l}} + B_n \left(1 + \frac{n\pi y}{l}\right) e^{-\frac{n\pi y}{l}} \right] \cos \frac{n\pi x}{l}. \quad [d]$$

Произвольные постоянные  $A_n$  и  $B_n$  определяются из условия, что действительное распределение напряжений является таким, при котором потенциальная энергия деформации полки вместе с потенциальной энергией стенки достигает наименьшего значения. Подставив

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$$

в выражение для потенциальной энергии деформации:

$$U_1 = 2 \cdot \frac{h}{2E} \int_0^{\infty} \int_0^{2l} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu \sigma_x \sigma_y + 2(1-\nu) \tau_{xy}^2] dx dy$$

и воспользовавшись выражением [d] для функции напряжений, получим потенциальную энергию деформации полки, равной<sup>1)</sup>:

$$U_1 = 2h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 \pi^3}{l^2} \left( \frac{B_n^2}{E} + \frac{A_n B_n}{2G} + \frac{A_n^2}{2G} \right). \quad [e]$$

Рассматривая потенциальную энергию отдельно одной стенки, обозначим через  $F$  — площадь поперечного сечения ее, через  $I$  — момент инерции относи-

<sup>1)</sup> Интегралы, входящие в состав выражения потенциальной энергии деформации, вычислены в статье Кармака, упомянутой выше в выводе на предыдущей странице.

тельно горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести  $C$ , и через  $e$  — расстояние от центра тяжести стенки до срединной плоскости полки (фиг. 99a).

Полный изгибающий момент, передающийся в любом сечении стенке вместе с полкой, может быть представлен в нашем симметричном случае, рядом:

$$M = M_0 + M_1 \cos \frac{\pi x}{l} + M_2 \cos \frac{2\pi x}{l} + \dots \quad [f]$$

В этом ряду  $M_0$  — статически неопределимая величина, зависящая от величины изгибающего момента на опорах, а все прочие множители  $M_1, M_2, \dots$  определяются из условий нагрузки.

Предположив, что  $N$  обозначает сжимающее усилие в полке (фиг. 99c), мы можем изгибающий момент  $M$  разбить на две части: часть  $M'$ , которую берет на себя стенка, и часть  $M''$ , равная  $N \cdot e$ , от продольных усилий  $N$  в стенке и полке. Из условий статики следует, что нормальные напряжения в любом сечении всей балки дают пару сил  $M$ ; следовательно:

$$\left. \begin{aligned} N + 2h \int_0^{\infty} \sigma_x dy &= 0; \\ M' - 2he \int_0^{\infty} \sigma_x dy &= M, \end{aligned} \right\} \quad [g]$$

где

$$-2he \int_0^{\infty} \sigma_x dy = M''$$

— часть изгибающего момента, принимаемая на себя полкой.

Потенциальная энергия деформации стенки равна:

$$U_2 = \int_0^{2l} \frac{N^2 dx}{2EF} + \int_0^{2l} \frac{(M')^2 dx}{2EI} \quad [h]$$

По первому из уравнений [g] найдем:

$$N = -2h \int_0^{\infty} \sigma_x dy = -2h \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} dy = 2h \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right]_0^{\infty}.$$

Из выражения [d] для функции напряжений можно заключить, что

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{y=\infty} = 0; \quad \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{y=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{l} A_n \cos \frac{n\pi x}{l}.$$

Следовательно

$$N = 2h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{l} A_n \cos \frac{n\pi x}{l};$$

$$M' = M + 2he \int_0^{\infty} \sigma_x dy = M + Ne = M + 2he \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{l} A_n \cos \frac{n\pi x}{l},$$

т.е., пользуясь обозначением

$$2h \cdot \frac{n\pi}{l} A_n = X_n,$$

можем написать

$$\left. \begin{aligned} N &= \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cos \frac{n\pi x}{l}; \\ M' &= M + e \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cos \frac{n\pi x}{l} = M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (M_n + eX_n) \cos \frac{n\pi x}{l}. \end{aligned} \right\} [h]$$

Поставив эти значения в выражение [h] и заметив, что, при  $m$  не равном 0,

$$\int_0^{2l} \cos^2 \frac{n\pi x}{l} dx = l; \quad \int_0^{2l} \cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} dx = 0,$$

получим:

$$U_2 = \frac{l}{2EF} \sum_{n=1}^{\infty} X_n^2 + \frac{M_0^2 l}{EI} + \frac{l}{2EI} \sum_{n=1}^{\infty} (M_n + eX_n)^2.$$

Прибавляя это к выражению [e] потенциальной энергии деформации полки и вводя в последнее обозначения:

$$2h \frac{n\pi}{l} A_n = X_n \quad \text{и} \quad 2h \frac{n\pi}{l} B_n = Y_n$$

найдем следующую величину полной потенциальной энергии деформации:

$$\begin{aligned} U &= \frac{\pi}{2hE} \sum_{n=1}^{\infty} n [Y_n^2 + (1+\nu) X_n Y_n + (1+\nu) X_n^2] + \\ &+ \frac{l}{2EF} \sum_{n=1}^{\infty} X_n^2 + \frac{M_0^2 l}{EI} + \frac{l}{2EI} \sum_{n=1}^{\infty} (M_n + eX_n)^2. \end{aligned} \quad [l]$$

Величины  $M_0$ ,  $X_n$  и  $Y_n$  определяются из условия минимума потенциальной энергии [l]. Легко убедиться, что момент  $M_0$  имеется только в члене

$$\frac{M_0^2 l}{EI}.$$

и, на основании условия минимума энергии [l], следует, что  $M_0 = 0$ .

Из того, что

$$\frac{\partial U}{\partial Y_n} = 0,$$

получаем:

$$2Y_n + (1+\nu) X_n = 0,$$

откуда

$$Y_n = -\frac{1+\nu}{2} X_n.$$

Подставив это значение и  $M_0 = 0$  в формулу [l], мы приходим к следующему выражению для потенциальной энергии деформации:

$$U = \frac{\pi}{2hE} \cdot \frac{3+2\nu-\nu^2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} n X_n^2 + \frac{l}{2EF} \sum_{n=1}^{\infty} X_n^2 + \frac{l}{2EI} \sum_{n=1}^{\infty} (M_n + eX_n)^2. \quad [m]$$

Из того условия, что значение потенциальной энергии  $U$  должно обращаться в минимум, вытекает также, что

$$\frac{\partial U}{\partial X_n} = 0$$

откуда находим

$$X_n = -\frac{M_n}{e} \cdot \frac{I}{1 + \frac{I}{e^2 F} + \frac{\pi I}{e^2 h l} \cdot \frac{3 + 2\nu - \nu^2}{4}}. \quad [n]$$

Рассмотрим частный случай, когда эпюра изгибающих моментов является простой косинусоидой:

$$M = M_1 \cos \frac{\pi x}{l}.$$

Тогда, по формуле [n] имеем:

$$X_1 = -\frac{M_1}{e} \cdot \frac{I}{1 + \frac{I}{e^2 F} + \frac{\pi I}{e^2 h l} \cdot \frac{3 + 2\nu - \nu^2}{4}}, \quad [o]$$

а на основании выражений [k] момент от продольного усилия  $N$  в полке равен

$$M'' = -eN = -eX_1 \cos \frac{\pi x}{l} = \frac{M}{1 + \frac{I}{e^2 F} + \frac{\pi I}{e^2 h l} \cdot \frac{3 + 2\nu - \nu^2}{4}}. \quad [p]$$

Теперь можно найти распределение напряжений  $\sigma_x$  по ширине полки из выражений [a], если принять все коэффициенты  $A_n$  и  $B_n$ , за исключением  $A_1$  и  $B_1$ , равными нулю, и воспользоваться, согласно нашим обозначениям, следующими выражениями:

$$A_1 = \frac{IX_1}{2\pi h}; \quad B_1 = -\frac{1 + \nu}{2} A_1 = -\frac{(1 + \nu)IX_1}{4\pi h}.$$

Полученное таким путем распределение напряжений  $\sigma_x$  по ширине полки показано кривыми над фиг. 99a. Напряжения  $\sigma_x$  уменьшаются с увеличением расстояния от стенки.

Теперь определим такую ширину  $2\lambda$  полки (фиг. 99a) тавровой балки, при которой равномерное распределение напряжений по этой части сечения полки, находящейся под вертикально заштрихованной на чертеже площадью, даст найденный выше по формуле [p] момент  $M''$ . Эта ширина будет полезной шириной полки.

Обозначив, как и раньше, через  $M'$  и  $M''$  части изгибающего момента, принимаемые на себя стенкой и полкой, через  $\sigma_c$  — напряжение в центре тяжести  $C$  стенки и через  $\sigma_e$  — напряжение по срединной плоскости полки, найдем, на основании элементарной теории изгиба:

$$\sigma_e = \sigma_c + \frac{M'e}{I}. \quad [q]$$

Из уравнений статики получим:

$$\left. \begin{aligned} 2\lambda h \sigma_e + \sigma_c F &= 0; \\ 2\lambda h \sigma_e &= M''. \end{aligned} \right\} \quad [r]$$

Выражения для двух частей изгибающего момента на основании уравнений [q] и [r] получаются в следующем виде:

$$M' = \frac{I}{e} (\sigma_e - \sigma_c) = \frac{I}{e} \left( 1 + \frac{2\lambda h}{F} \right) \sigma_e;$$

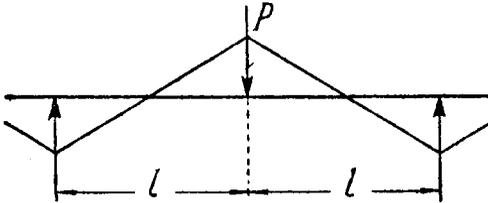
$$M'' = 2\lambda h e \sigma_e.$$

Отношение части  $M''$  к полному изгибающему моменту равно:

$$\frac{M''}{M' + M''} = \frac{2\lambda h e \sigma_e}{2\lambda h e \sigma_e + \frac{I}{e} \left(1 + \frac{2\lambda h}{F}\right) \sigma_e} = \frac{1}{1 + \frac{I}{e^2 F} + \frac{I}{2\lambda h e^2}}. \quad [5]$$

Чтобы сделать это отношение равным отношению  $M'' : M$ , получающемуся по точному решению [р], мы должны принять:

$$\frac{I}{2\lambda h e^2} = \frac{\pi I}{e^2 h l} \cdot \frac{3 + 2\nu - \nu^2}{4}.$$



Фиг. 100.

Из этого получим следующее выражение для полезной ширины  $2\lambda$  полки:

$$2\lambda = \frac{4l}{\pi(3 + 2\nu - \nu^2)}.$$

Взяв, например,  $\nu = 0,3$  найдем:

$$2\lambda = 0,181(2l),$$

т. е., при принятой эпюре изгибающих моментов, полезная

ширина полки составляет приблизительно 18% от длины пролета.

В случае неразрезной балки с одинаковыми сосредоточенными грузами, расположенными по серединам пролетов, эпюра изгибающих моментов будет такой, как показано на фиг. 100. Выразив эту эпюру изгибающих моментов рядом Фурье и пользуясь изложенным выше общим методом, мы найдем, что полезная ширина полки у опор равна

$$2\lambda = 0,85 \cdot \frac{4l}{\pi(3 + 2\nu - \nu^2)}.$$

т. е. несколько меньше, чем для эпюры изгибающих моментов по коси нусонде

## ГЛАВА ПЯТАЯ.

### РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ПРИ ПОМОЩИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО.

45. Уравнения равновесия в зависимости от перемещений. До сих пор мы пользовались дифференциальными уравнениями равновесия, выраженными в зависимости от напряжений. При помощи закона Гука (см. выражения [11], стр. 23), эти же уравнения можно выразить в функциях от перемещений. При плоской деформации имеем:

$$\sigma_x = \lambda \Delta + 2G \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \sigma_y = \lambda \Delta + 2G \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \tau_{xy} = G \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad [a]$$

где

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}. \quad [b]$$

Подставив эти значения в уравнения равновесия [18] (стр. 32) и предположив отсутствие объемных сил, найдем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= 0; \\ \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad [91]$$

Таким образом, уравнения равновесия оказались выраженными функциями двух величин:

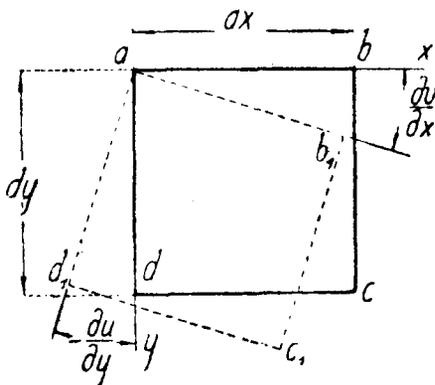
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \Delta \quad \text{и} \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\omega. \quad [c]$$

Первое представляет собой объемное расширение. Второе также имеет простой физический смысл.

Рассмотрим небольшой поворот в плоскости  $xu$  бесконечно малого элемента  $abcd$ . Если  $u$  и  $v$  — составляющие перемещения, то угол поворота, как это видно из фиг. 101, равен

$$\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{или} \quad -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Следовательно, величина  $\omega$  во втором выражении [c] представляет собой поворот элемента, как свободного твердого тела. Форма второго выражения [c] такова, что она применима также и в том случае, когда элемент  $abcd$  не твердое тело и испытывает



Фиг. 101.

упругую деформацию. В этом случае углы  $bab_1$  и  $dad_1$  — различны, и угол  $\omega$  в выражении [с] является средним значением этих двух углов и дает угол поворота относительно главной оси деформации.

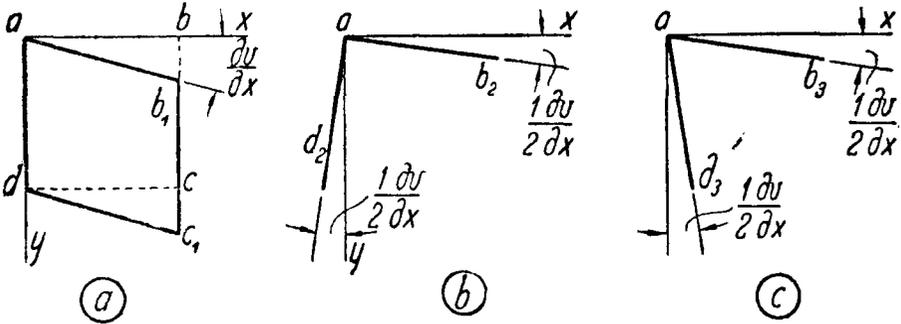
Возьмем, например, случай, показанный на фиг. 102, когда

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Положение, показанное на фиг. 102а, можно получить наложением вращения как свободного твердого тела

$$\frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x},$$

согласно выражению [с] (фиг. 102b) на чистый сдвиг (фиг. 102c), при котором главные оси деформации не испытывают вовсе поворота.



Фиг. 102.

Уравнения [91] можно написать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial \Delta}{\partial x} - \frac{\partial \omega}{\partial y} &= 0; \\ \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial \Delta}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad [91']$$

Дифференцируя первое уравнение по абсциссе  $x$ , а второе по ординате  $y$  а затем складывая их, найдем:

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial y^2} = 0 \quad [a]$$

Подобным же образом получим:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0. \quad [e]$$

Итак, обе величины  $\Delta$  и  $\omega$  удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению в частных производных, которое называется *уравнением Лапласа*. Функции, которые удовлетворяют этому уравнению, называются *плоскими гармоническими функциями*.

В случае плоского напряженного состояния

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y); \quad \epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x); \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy},$$

так что

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x).$$

Подставив в уравнения равновесия [18] (стр. 32) и предположив снова, что нет объемных сил, найдем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{1 - \nu} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= 0; \\ \frac{2}{1 - \nu} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad [92]$$

Эти уравнения имеют тот же вид, как и полученные выше при плоской деформации. Таким образом, решение плоской задачи сводится к решению уравнений [91] или [92], содержащих функции двух переменных  $u$  и  $v$ .

46. **Функции комплексного переменного.** Решение уравнений [91] и [92] облегчается при пользовании функциями комплексного переменного. Пусть  $x + iy$  — комплексное переменное, где  $x$  и  $y$  имеют любое вещественное значение, а  $i = \sqrt{-1}$  — мнимая единица. Мы получим геометрическое представление о комплексном переменном  $x + iy$ , если возьмем  $x$  и  $y$  за прямоугольные координаты точки в плоскости  $xu$  (фиг. 103). Тогда любому четному значению комплексного переменного  $x + iy$  соответствует некоторая точка  $A$ .

Иногда предпочтительнее пользоваться полярными координатами вместо прямоугольных. Тогда  $x = r \cos \theta$  и  $y = r \sin \theta$ , так что, обозначив комплексное переменное через  $\alpha$ , имеем:

$$\alpha = x + iy = r (\cos \theta + i \sin \theta). \quad [a]$$

Иначе, пользуясь известными рядами:

$$e^{\theta} = 1 + \theta + \frac{1}{2} \theta^2 + \frac{1}{2 \cdot 3} \theta^3 + \dots;$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{1}{2} \theta^2 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \theta^4 - \dots;$$

$$\sin \theta = \theta - \frac{1}{2 \cdot 3} \theta^3 + \dots$$

получим

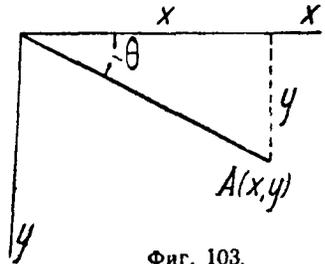
$$\alpha = r (\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta}. \quad [b]$$

Мы называем  $f(\alpha)$  функцией комплексного переменного для определенной части плоскости  $xu$ , если каждой точке  $A$  этой части (фиг. 103) отвечает определенное значение функции  $f(\alpha)$ .

Обычно мы функцию комплексного переменного делим на две части: вещественную и мнимую, и пишем функцию в таком виде:

$$f(\alpha) = f(x + iy) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y), \quad [c]$$

где  $\varphi$  и  $\psi$  являются функциями вещественных переменных  $x$  и  $y$ .



Фиг. 103.

Взяв, например,

$$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha},$$

найдем

$$f(\alpha) = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2},$$

или, в полярных координатах:

$$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha} = \frac{\cos \theta}{r} - i \frac{\sin \theta}{r}. \quad [d]$$

По определению, функция  $f(\alpha)$  комплексного переменного имеет производную в некоторой точке  $\alpha = x + iy$ , если отношение

$$\frac{f(\alpha + d\alpha) - f(\alpha)}{d\alpha}$$

имеет определенный предел с приближением величины  $d\alpha = dx + idy$  к нулю.

Этот предел должен быть независимым от того способа, каким мы даем приращение переменному  $\alpha$ . Меняя только вещественную часть комплексного переменного, т. е. полагая  $d\alpha = dx$ , получим, на основании выражения [c]:

$$\frac{df(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\varphi(x + dx, y) - \varphi(x, y) + i[\psi(x + dx, y) - \psi(x, y)]}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad [e]$$

Если меняется только мнимая часть комплексной переменной, то мы имеем  $d\alpha = idy$  и соответственно:

$$\begin{aligned} \frac{df(\alpha)}{d\alpha} &= \frac{\varphi(x, y + dy) - \varphi(x, y) + i[\psi(x, y + dy) - \psi(x, y)]}{idy} \\ &= \frac{\partial \varphi}{i \partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \end{aligned} \quad [f]$$

На основании выражений [e] и [f] мы заключаем, что вещественная и мнимая части функции комплексного переменного, представленной выражением [c], должны удовлетворять уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial y}; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad [93]$$

Это — так называемые *уравнения Коши — Римана*.

Дифференцируя первое из этих уравнений по  $x$ , а второе по  $y$ , а затем складывая, найдем:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Таким же образом получим:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0.$$

Мы видим, что обе функции  $\varphi$  и  $\psi$ , вещественная и мнимая части функции комплексного переменного [c], удовлетворяют уравнению Лапласа. Две такие функции называются *сопряженными гармоническими функциями*.

Дифференцируя функцию комплексного переменного, мы получим снова функцию комплексного переменного. Правила дифференцирования остаются теми же, как и для функции вещественного переменного.

Взяв, например,

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

и пользуясь формулой [b], найдем:

$$\frac{df(z)}{dz} = -\frac{1}{z^2} = -\frac{1}{r^2 e^{2\theta i}} = -\frac{1}{r^2} (\cos 2\theta - i \sin 2\theta).$$

Интегрируя функцию комплексного переменного, мы снова получим функцию комплексного переменного

$$\int f(z) dz = F(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y), \quad [g]$$

причем

$$\frac{dF(z)}{dz} = f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y).$$

Заметив, что величина производной не зависит от того способа, которым меняется комплексное переменное, мы найдем:

$$\frac{dF(z)}{dz} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} + i \frac{\partial\Psi}{\partial x} = \frac{\partial\Phi}{i\partial y} + \frac{\partial\Psi}{\partial y} = \varphi(x, y) + i\psi(x, y),$$

откуда:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial x} &= \frac{\partial\Psi}{\partial y} = \varphi(x, y); \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} &= -\frac{\partial\Psi}{\partial x} = -\psi(x, y). \end{aligned} \right\} \quad [h]$$

Взяв снова, для примера,

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{\cos\theta}{r} - i \frac{\sin\theta}{r},$$

получим:

$$F(z) = \int f(z) dz = \ln z = \ln(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + i \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{y}{x} \right), \quad [i]$$

где

$$\ln \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{и} \quad \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{y}{x} \right)$$

сопряженные гармонические функции.

47. Перемещения при плоской деформации и плоском напряженном состоянии. Сопоставляя уравнения [91] и [92] с уравнениями [93], мы приходим к заключению, что эти системы уравнений имеют все одинаковую форму. Это указывает, что мы можем воспользоваться свойствами функций комплексного переменного для решения плоской задачи.

Рассматривая, например, случай плоского напряженного состояния, мы получим решение уравнений [92], если возьмем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{1-\nu} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= \varphi(x, y); \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} &= \psi(x, y). \end{aligned} \right\} \quad [a]$$

В этих выражениях  $\varphi$  и  $\psi$  — сопряженные гармонические функции, т. е. такие функции, что

$$\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = f(z),$$

где  $z$  — комплексное переменное.

Чтобы получить перемещения  $u$  и  $v$ , нам надлежит проинтегрировать уравнения [а]. Частные решения этих уравнений мы получим составлением функции

$$F(\alpha) = \int f(\alpha) d\alpha = \Phi + i\Psi,$$

при помощи выражений [h] предыдущего параграфа.

Таким образом, мы можем показать, путем подстановки, что система выражений:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{1+\nu}{4} y\psi + \frac{1}{2} \Phi; \\ v &= -\frac{1+\nu}{5} y\varphi + \frac{1-\nu}{4} \Psi \end{aligned} \right\} \quad [б]$$

является частным решением уравнений [а].

К этому частному решению мы можем присоединить общее решение однородных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad [с]$$

Эта последняя система уравнений имеет тот же вид, что и уравнения Коши—Римана [93], и решение ее мы получим, взяв любую функцию

$$f_1(x, y) = \varphi_1(x, y) + i\psi_1(x, y)$$

комплексного переменного и приняв

$$u = \psi_1(x, y) \quad \text{и} \quad v = \varphi_1(x, y). \quad [д]$$

Тогда общее решение уравнений [а] получит такой вид:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{1+\nu}{4} y\psi + \frac{1}{2} \Phi + \psi_1; \\ v &= -\frac{1+\nu}{4} y\varphi + \frac{1-\nu}{4} \Psi + \varphi_1. \end{aligned} \right\} \quad [е]$$

Для иллюстрации способа решения плоской задачи, возьмем, например, следующую функцию комплексного переменного:

$$f(\alpha) = \frac{A}{\alpha} = \frac{A}{r} \cos \theta - \frac{iA}{r} \sin \theta, \quad [ж]$$

где  $A$  — постоянная, подлежащая в дальнейшем определению. Итак

$$\varphi = \frac{A}{r} \cos \theta \quad \text{и} \quad \psi = -\frac{A}{r} \sin \theta. \quad [з]$$

При помощи интегрирования находим

$$F(\alpha) = \int f(\alpha) d\alpha = A \ln \alpha = A \ln r + iA\theta, \quad [и]$$

откуда

$$\Phi = A \ln r \quad \text{и} \quad \Psi = A\theta. \quad [к]$$

Подставив выражения [з] и [к] в формулы [е] и положив  $\varphi_1 = \psi_1 = 0$ , мы найдем следующее решение:

$$\left. \begin{aligned} u &= A \frac{1+\nu}{4} \sin^2 \theta + \frac{1}{2} A \ln r; \\ v &= -A \frac{1+\nu}{4} \sin \theta \cos \theta + A \frac{1-\nu}{4} \theta. \end{aligned} \right\} \quad [л]$$

Чтобы перейти к соответствующим напряжениям, определим производные:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \sin \theta = \frac{A}{2r} \cos \theta - A \frac{1+\nu}{2r} \sin^2 \theta \cos \theta; \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \sin \theta = A \frac{1+\nu}{4r} \cos 2\theta \sin \theta - A \frac{1-\nu}{4r} \sin \theta. \end{aligned} \right\} [l]$$

Пользуясь выражениями [a] и [f], получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{A}{r} \sin \theta + \frac{\partial v}{\partial x} = A \frac{3+\nu}{4r} \sin \theta + A \frac{1+\nu}{4r} \cos 2\theta \sin \theta; \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= A \frac{1-\nu}{2r} \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial x} = -A \frac{\nu}{2r} \cos \theta + A \frac{1+\nu}{2r} \sin^2 \theta \cos \theta. \end{aligned} \right\} [m]$$

Подставив значения производных [l] и [m] в выражения для составляющих напряжения, найдем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{AE}{2r} \cos^3 \theta; \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{AE}{2r} \sin^2 \theta \cos \theta; \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{AE}{2r} \sin \theta \cos^2 \theta. \end{aligned} \right\} [n]$$

Этот результат совпадает с решением [63], полученным ранее для полубесконечной пластинки, на которую действует сосредоточенная сила, перпендикулярная к прямолинейному краю пластинки (см. стр. 98), если мы приравняем постоянную  $A$  величине

$$-\frac{4P}{\pi E}.$$

Если сосредоточенная сила действует на любую внутреннюю точку бесконечной пластинки, то можно воспользоваться той же функцией  $f(\alpha)$  (см. формулу [e]).

Функции  $\varphi_1$  и  $\psi_1$ , однако, не могут быть в данном случае приняты равными нулю, так как соответствующее перемещение  $v$ , согласно формулам [k], содержит член

$$A \frac{1-\nu}{4} \theta,$$

который является многозначным и физически не может иметь места в непрерывной пластинке. Чтобы исключить этот член, мы возьмем в общем выражении [94]

$$\varphi_1 = -A \frac{1-\nu}{4} \theta.$$

Заметив, что функция  $\varphi_1$  является вещественной частью функции

$$f_1(\alpha) = \varphi_1 + i\psi_1,$$

мы легко получим мнимую часть этой же функции при помощи уравнений Коши — Римана [93].

Мы придем к тому же результату, если заметим, что полученное выше значение функции  $\varphi_1$  находится умножением мнимой части функции [i] предыдущего параграфа на величину

$$iA \frac{1-\nu}{4}.$$

Тогда

$$f_1(z) = \varphi_1 + i\psi_1 = -A \frac{1-\nu}{4} \theta + iA \frac{1-\nu}{4} \ln r,$$

и функция  $\psi_1$  получится в таком виде:

$$\psi_1 = A \frac{1-\nu}{4} \ln r.$$

Подставив найденные значения  $\varphi_1$  и  $\psi_1$  в общее решение [94] и взяв функции  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\Phi$ ,  $\Psi$  такими же, как раньше (см. выражения [k]), найдем:

$$u = A \frac{1+\nu}{4} \sin^2 \theta + A \frac{3-\nu}{4} \ln r;$$

$$v = -A \frac{1+\nu}{4} \sin \theta \cos \theta.$$

Чтобы получить соответствующее распределение напряжений, найдем производные:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial v}{r \partial \theta} \sin \theta = A \frac{1+\nu}{4r} \cos 2\theta \sin \theta; \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial v}{r \partial \theta} \cos \theta = -A \frac{1+\nu}{4r} \cos 2\theta \cos \theta. \end{aligned} \right\} [o]$$

На основании уравнений [a] имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1-\nu}{2} \varphi - \frac{\partial v}{\partial y} = A \frac{1-\nu}{2r} \cos \theta + A \frac{1+\nu}{4r} \cos 2\theta \cos \theta; \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\psi + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{A}{r} \sin \theta + A \frac{1+\nu}{4r} \cos 2\theta \sin \theta. \end{aligned} \right\} [p]$$

Подставив значения производных [o] и [p] в выражения для составляющих напряжения, получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{AE}{2r} \cos^3 \theta + \frac{AE(1-\nu)}{4r(1+\nu)} \cos \theta; \\ \sigma_y &= \frac{AE}{2r} \cos \theta \sin^2 \theta - \frac{AE(1-\nu)}{4r(1+\nu)} \cos \theta; \\ \tau_{xy} &= \frac{AE}{2r} \cos^2 \theta \sin \theta + \frac{AE(1-\nu)}{4r(1+\nu)} \sin \theta. \end{aligned} \right\} [n]$$

Приняв

$$A = -\frac{P(1+\nu)}{\pi E},$$

приведем это решение к совпадению с решением [73] (см. стр. 126).

**48. Криволинейные ортогональные координаты.** Разберем те задачи, для которых выгоднее пользоваться, вместо *декартовых координат, криволинейными координатами.*

Те полярные координаты, например, которыми мы пользовались, являются простейшим примером системы криволинейных координат. При переходе к полярным координатам мы применяли формулы (см. стр. 66):

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r \quad \text{и} \quad \arctg \frac{y}{x} = \theta. \quad [a]$$

Придавая радиусу  $r$  различные величины, мы получим совокупность концентрических кругов. Различные значения угла  $\theta$  дают пучок радиусов. Через выбранную на плоскости точку проходит по одной линии каждой из перечислен-

ных систем, и точка может быть определена значениями координат  $r$  и  $\theta$ , которые относятся к линиям, проходящим через нее.

В полярных координатах выражение условий на контуре для таких задач, как круглые кольца, круглые отверстия и круглые диски, получают очень простой вид, и решение этих задач оказывается много проще, чем при помощи прямоугольных координат.

Вообще говоря, решение задач теории упругости может быть значительно упрощено при применении в каждом частном случае надлежащим образом подобранной системы координат<sup>1)</sup>.

Пусть  $f(x, y) = \alpha$  [b]

является уравнением кривой в плоскости  $xy$ . Если мы будем придавать величине  $\alpha$  различные значения, то мы получим систему кривых. В общем случае, через каждую выбранную точку с координатами  $x$  и  $y$  пройдет одна только кривая этой системы.

Если мы возьмем бесконечно близкую точку с координатами  $x + dx$  и  $y + dy$ , то кривая системы [b], которая проходит через эту новую точку, будет иметь параметр  $\alpha + d\alpha$ , причем  $\alpha$  является функцией  $x$  и  $y$ . На основании уравнения [b] имеем:

$$dx = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx + \frac{\partial \alpha}{\partial y} dy. \quad [c]$$

Если мы возьмем две системы кривых, отвечающих уравнениям:

$$f_1(x, y) = \alpha \quad \text{и} \quad f_2(x, y) = \beta, \quad [d]$$

таких, что вообще только по одной линии каждой системы проходит через выбранную точку, то тогда любая точка может быть определена значениями параметров  $\alpha$  и  $\beta$  кривых [d], которые проходят через нее, точно так же, как  $r$  и  $\theta$  определяют положение точки в полярных координатах. Величины  $\alpha$  и  $\beta$  называются *криволинейными координатами* точки.

В дальнейшем мы будем рассматривать только такие системы кривых [d], которые пересекаются друг с другом всегда под прямыми углами. Тогда величины  $\alpha$  и  $\beta$  можно назвать *ортогональными криволинейными координатами*.

Направляющие косинусы  $l$  и  $m$  нормали к кривой [b] пропорциональны производным:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Условие взаимной перпендикулярности кривых [d], следовательно, будет:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0,$$

или

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \beta}{\partial y} = 0. \quad [e]$$

Из того условия, что сумма квадратов направляющих косинусов равна единице, мы найдем величины этих косинусов для кривых [d] в следующем виде:

$$l_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \alpha}{\partial x}, \quad m_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \alpha}{\partial y}; \quad l_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial \beta}{\partial x}, \quad m_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial \beta}{\partial y}, \quad [95]$$

где

$$h_1^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)^2; \quad h_2^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial \beta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \beta} \right)^2. \quad [96]$$

<sup>1)</sup> Общая теория криволинейных координат была дана Ляме (Lamé). См. его книгу *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, Paris, 1859. См. также А. Лове (A. E. H. Love), *Mathematical Theory of Elasticity*, 4 ed., Cambridge, 1927.

На фиг. 104 показан элемент  $abcd$ , ограниченный двумя смежными кривыми системы  $\alpha$  и двумя смежными кривыми системы  $\beta$ .

Пренебрегая бесконечно малыми величинами высшего порядка, получим размер  $dn_1$  этого элемента в направлении нормали  $n_1$  к кривой  $a$ , проектируя на нормаль  $n_1$  соответствующие координаты  $dx$  и  $dy$  точки  $c$  относительно точки  $a$ . На основании формул [95], имеем.

$$dn_1 = l_1 dx + m_1 dy = \frac{1}{h_1} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx + \frac{\partial \alpha}{\partial y} dy \right) = \frac{d\alpha}{h_1}. \quad [97]$$

Таким же образом, найдем размер  $dn_2$  в направлении нормали  $n_2$ :

$$dn_2 = \frac{d\beta}{h_2}.$$

Расстояние  $ds$  между двумя смежными точками  $a$  и  $c$  представится тогда таким выражением:

$$ds^2 = dn_1^2 + dn_2^2 = \left( \frac{d\alpha}{h_1} \right)^2 + \left( \frac{d\beta}{h_2} \right)^2. \quad [98]$$

Чтобы построить различные системы ортогональных криволинейных координат, мы воспользуемся функциями комплексного переменного. Разделив такую функцию на вещественную и мнимую части:

$$f(x + iy) = f_1(x, y) + if_2(x, y),$$

мы получим, на основании уравнений [93] (см. стр. 186), что кривые

$$f_1(x, y) = \alpha \quad \text{и} \quad f_2(x, y) = \beta$$

удовлетворяют условию их взаимной перпендикулярности [e].

Возьмем, например,

$$f(x + iy) = \frac{1}{x + iy} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \cdot \frac{y}{x^2 + y^2}; \quad [7]$$

тогда

$$\frac{x}{x^2 + y^2} = \alpha \quad \text{и} \quad -\frac{y}{x^2 + y^2} = \beta. \quad [8]$$

Для любого данного значения параметра  $\alpha$  мы получим круг радиуса

$$\frac{1}{2\alpha},$$

касательный к оси  $y$  в начале координат (фиг. 105). Придавая параметру  $\alpha$  различные значения, мы получим систему таких кругов.

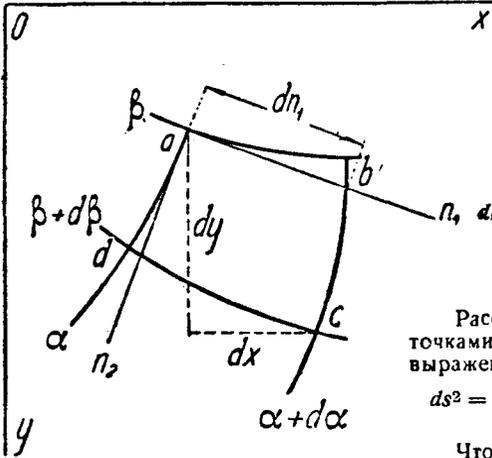
Таким же образом, придавая различные значения параметру  $\beta$ , получим систему кругов, касательных к оси  $x$  в начале координат. Эти две системы окружностей пересекаются друг с другом всегда под прямыми углами.

Зависимость между декартовыми и криволинейными координатами можно представить в такой форме:

$$x + iy = F(\alpha + i\beta).$$

Например, на основании формулы [f], имеем:

$$x + iy = \frac{1}{\alpha + i\beta}.$$



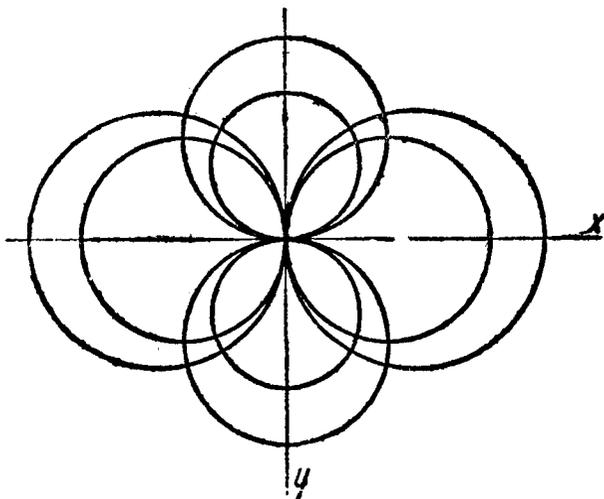
Фиг. 104.

Взяв другой пример:

$$x + iy = c \cosh(\alpha + i\beta) = \frac{c}{2} \left[ e^{\alpha + i\beta} + e^{-(\alpha + i\beta)} \right] = \frac{c}{2} \left[ e^{\alpha} (\cos \beta + i \sin \beta) + e^{-\alpha} (\cos \beta - i \sin \beta) \right] = c \cos \beta \cosh \alpha + i \cdot c \sin \beta \sinh \alpha,$$

найдем

$$x = c \cos \beta \cosh \alpha \quad \text{и} \quad y = c \sin \beta \sinh \alpha. \quad [h]$$



Фиг. 105.

Исключив параметр  $\beta$  из уравнений [h], получим:

$$\frac{x^2}{c^2 \cosh^2 \alpha} + \frac{y^2}{c^2 \sinh^2 \alpha} = 1. \quad [k]$$

Очевидно, что, придавая различные значения параметру  $\alpha$ , мы будем иметь систему эллипсов с полуосями  $c \cosh \alpha$  и  $c \sinh \alpha$  при фокусном расстоянии  $2c$ . Исключая параметр  $\alpha$  из уравнений [k] и пользуясь тем, что

$$\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1,$$

найдем:

$$\frac{x^2}{c^2 \cos^2 \beta} - \frac{y^2}{c^2 \sin^2 \beta} = 1. \quad [l]$$

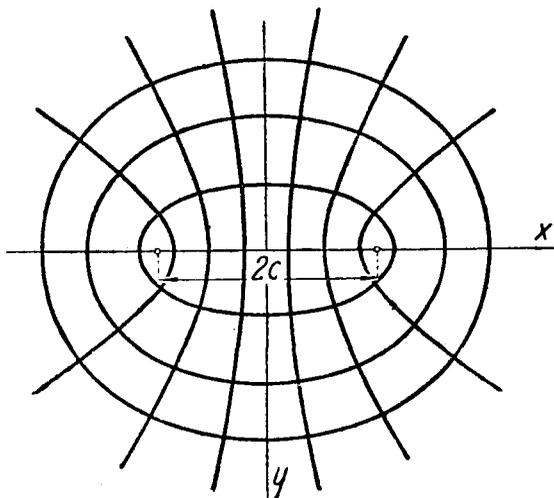
Придавая параметру  $\beta$  различные значения, получим систему гипербол, перпендикулярных к ранее найденным эллипсам (фиг. 106).

Когда параметр  $\alpha$  мал, то  $\sinh \alpha$  также мал, тогда как  $\cosh \alpha$  приближается в пределе к единице. Отношение между наибольшей и наименьшей осями эллипса [k] становится большим, и мы получаем очень узкий эллипс. При больших значениях параметра  $\alpha$ , значение  $\sinh \alpha$  приближается к значению  $\cosh \alpha$ , а эллипс приближается к кругу.

Гиперболы [l] в пределе обращаются в ось  $x$  при малом параметре  $\beta$ . Когда параметр  $\beta$  приближается к  $\pi/2$ , гипербола в пределе обращается в ось  $y$ .

Криволинейные координаты  $\alpha$  и  $\beta$  называются в этом случае *эллиптическими координатами*. Определив из уравнения [k]

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \beta}{\partial y}$$



Фиг. 106.

из уравнения [l] и подставив найденные значения в уравнения [96], найдем для этого случая:

$$h_1^2 = h_2^2 = \frac{2}{c^2 (\cosh 2\alpha - \cos 2\beta)}. \quad [m]$$

Применение эллиптических координат будет показано ниже.

49. Составляющие деформации в ортогональных криволинейных координатах. Рассмотрим деформацию элемента  $abcd$ , вырезанного из пластинки двумя смежными кривыми  $\alpha$  и двумя смежными кривыми  $\beta$  (фиг. 104). Если  $u_\alpha$  и  $u_\beta$  — составляющие перемещения точки  $a$  по направлениям нормалей  $n_1$  и  $n_2$ , то криволинейные координаты точки  $a$  после деформации будут, согласно уравнению [97], равны:

$$\alpha_1 + h_1 u_\alpha \quad \text{и} \quad \beta + h_2 u_\beta. \quad [a]$$

Пользуясь обозначением  $h_1 dn_1 = \delta$ , начальные координаты точки  $b$  получим равными  $\alpha + \delta$  и  $\beta$ .

После деформации координаты этой точки получатся:

$$\alpha + \delta + h_1 u_\alpha + \frac{\partial (h_1 u_\alpha)}{\partial \alpha} \delta; \quad \beta + h_2 u_\beta + \frac{\partial (h_2 u_\beta)}{\partial \beta} \delta, \quad [b]$$

так что разность между координатами  $\alpha$  для двух точек  $a$  и  $b$  после деформации будет равна

$$\delta + \frac{\partial (h_1 u_\alpha)}{\partial \alpha} \delta. \quad [c]$$

Соответствующее удлинение линейного элемента  $ab$  может быть определено при помощи уравнения [97]. Начальная длина элемента равна

$$\frac{\delta}{h_1}.$$

При определении длины элемента после деформации нам нужно будет воспользоваться выражением [с] вместо величины  $\delta$ .

Мы должны также принять во внимание приращение величины  $1:h_1$  вследствие представленных формулами [а] приращений координат после деформации, т. е. вместо  $1:h_1$  нам следует взять:

$$\frac{1}{h_1} + \frac{\partial \left( \frac{1}{h_1} \right)}{\partial \alpha} h_1 u_\alpha + \frac{\partial \left( \frac{1}{h_1} \right)}{\partial \beta} h_2 u_\beta.$$

Тогда длина элемента  $ab$  (фиг. 104) после деформации будет равна

$$\left[ \delta + \frac{\partial (h_1 u_\alpha)}{\partial \alpha} \delta \right] \cdot \left[ \frac{1}{h_1} + \frac{\partial \left( \frac{1}{h_1} \right)}{\partial \alpha} h_1 u_\alpha + \frac{\partial \left( \frac{1}{h_1} \right)}{\partial \beta} h_2 u_\beta \right].$$

Вычтя из этого значения первоначальную длину элемента и разделив полученную разность на ту же длину, получим, пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка, следующее выражение для относительного удлинения по направлению нормали  $n_1$ :

$$\epsilon_o = \frac{\partial (h_1 u_\alpha)}{\partial \alpha} + h_1^2 u_\alpha \frac{\partial \left( \frac{1}{h_1} \right)}{\partial \alpha} + h_1 h_2 u_\beta \frac{\partial \left( \frac{1}{h_1} \right)}{\partial \beta} = h_1 \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + h_1 h_2 u_\beta \frac{\partial \left( \frac{1}{h_1} \right)}{\partial \beta}. [a]$$

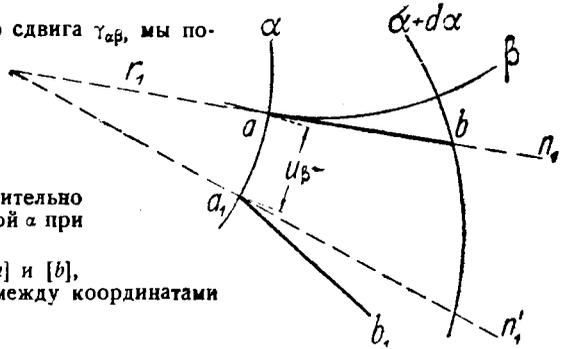
Подобным же образом мы можем получить относительное удлинение  $\epsilon_\beta$  в направлении нормали  $n_2$ .

Чтобы найти деформацию сдвига  $\gamma_{\alpha\beta}$ , мы поступим так же, как мы делали и раньше при декартовых координатах (см. стр. 18).

Рассмотрим угловое перемещение линейного элемента  $ab$  (фиг. 107) относительно положения нормали  $n'_1$  к кривой  $a$  при новом положении точки  $a$ .

На основании формул [а] и [б], после деформации разность между координатами  $\beta$  точек  $b$  и  $a$  будет равна

$$\frac{\partial (h_2 u_\beta)}{\partial \alpha} \cdot \delta.$$



Фиг. 107.

Разделив эту разность на  $h_2$  (см. уравнение [97]), мы получим перемещение точки  $b$  перпендикулярно к нормали  $n'_1$  для нового положения точки  $a$ .

Угловое перемещение элемента  $ab$  относительно той же нормали, следовательно, равно:

$$\frac{\partial (h_2 u_\beta)}{\partial \alpha} \frac{\delta}{h_2} : \frac{\delta}{h_1} = \frac{h_1}{h_2} \cdot \frac{\partial (h_2 u_\beta)}{\partial \alpha}. [e]$$

Таким же путем мы можем найти угловое перемещение линейного элемента  $a_1 b_1$  относительно нового положения нормали  $n_2$ . Деформация сдвига  $\gamma_{\alpha\beta}$  является суммой этих двух угловых перемещений.

На основании этого мы найдем следующие выражения для составляющих деформации в криволинейных координатах:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_\alpha &= h_1 \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + h_1 h_2 u_\beta \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{h_1} \right); \\ \epsilon_\beta &= h_2 \frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} + h_1 h_2 u_\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{h_2} \right); \\ \gamma_{\alpha\beta} &= \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial (h_2 u_\beta)}{\partial \alpha} + \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial (h_1 u_\alpha)}{\partial \beta}. \end{aligned} \right\} [99]$$

Применяя эти выражения к случаю полярных координат, мы имеем:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} &= r, & \arctg \left( \frac{y}{x} \right) &= \theta; \\ h_1^2 &= \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 = 1; & h_2^2 &= \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 = \frac{1}{r^2}; \\ dn_1 &= dr, & dn_2 &= r d\theta; \\ \epsilon_r &= h_1 \frac{\partial u_r}{\partial r} + h_1 h_2 u_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{h_1} \right) = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \\ \epsilon_\theta &= h_2 \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + h_1 h_2 u_r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{h_2} \right) = \frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} + \frac{u_r}{r}; \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial (h_2 u_\theta)}{\partial r} + \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial (h_1 u_r)}{\partial \theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_r}{r \partial \theta}. \end{aligned}$$

Эти результаты совпадают с полученными выше на стр. 75 и 76.

Для наших дальнейших выводов необходимо иметь выражения для объемного расширения  $\Delta$  и для угла поворота  $\omega$ . При плоской деформации мы имеем:

$$\begin{aligned} \Delta &= \epsilon_\alpha + \epsilon_\beta = h_1 \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + h_1 h_2 u_\beta \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{h_1} \right) + h_2 \frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} + h_1 h_2 u_\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{h_2} \right) = \\ &= h_1 h_2 \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{u_\alpha}{h_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u_\beta}{h_1} \right) \right]. \end{aligned} \quad [100]$$

Тем же выражением определяется величина  $\epsilon_\alpha + \epsilon_\beta$  и для случая плоского напряженного состояния.

Угол поворота в декартовых координатах (см. стр. 183) равен:

$$\omega = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Он представляет собою среднее значение углов поворота двух взаимно перпендикулярных элементов  $ab$  и  $ad$  (фиг. 101) и имеет одно и то же значение для данной точки, независимо от того, какие оси координат мы выбрали.

Мы можем поэтому определить угол поворота в ортогональных криволинейных координатах, взяв среднее значение угла поворота двух взаимно перпендикулярных элементов  $ab$  и  $ad$  (фиг. 104).

При этом определении нам необходимо знать выражения для кривизны

$$\frac{1}{r_1} \quad \text{и} \quad \frac{1}{r_2}$$

кривых  $\alpha$  и  $\beta$  в точке  $a$  (фиг. 104).

Если мы рассматриваем одно лишь перемещение  $u_\beta$ , то кривизну

$$\frac{1}{r_1}$$

легко получить из выражения [e]. Это выражение представляет собой малый угол между новым положением  $a_1b_1$  элемента  $ab$  (фиг. 107)<sup>1)</sup> и нормалью  $n'_1$  в точке  $a_1$  и может быть написано в следующем виде:

$$\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial (h_2 u_\beta)}{\partial \alpha} = h_1 \frac{\partial u_\beta}{\partial \alpha} + \frac{h_1}{h_2} u_\beta \frac{\partial h_2}{\partial \alpha}. \quad [f]$$

Заметив, что

$$\frac{d\alpha}{k_1}$$

— длина элемента  $ab$ , мы видим, что член

$$h_1 \frac{\partial u_\beta}{\partial \alpha} \quad [g]$$

выражения [f] представляет собой угол между элементами  $a_1b_1$  и  $ab$ .

Тогда, на основании чертежа, мы можем заключить, что величина

$$-\frac{h_1}{h_2} u_\beta \frac{\partial h_2}{\partial \alpha}$$

равна углу между нормальми  $n_1$  и  $n'_1$  и кривизна  $1:r_1$  кривой  $\alpha$  в точке  $a$  следовательно, равна:

$$-\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \alpha}.$$

Таким же образом, рассматривая перемещения  $u_\alpha$  и элемент  $ad$  (фиг. 104), найдем

$$\frac{1}{r_2} = -\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \beta}. \quad [h]$$

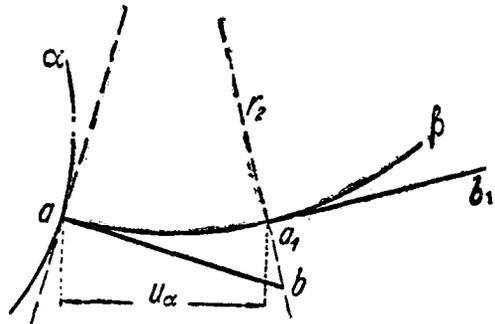
Имея выражения для кривизны

$$\frac{1}{r_1} \quad \text{и} \quad \frac{1}{r_2},$$

мы можем найти теперь углы поворота элементов  $ab$  и  $ad$  из-за перемещений  $u_\beta$  и  $u_\alpha$ .

Рассматривая элемент  $ab$ , найдем, что его угол поворота из-за перемещения  $u_\beta$  представится выражением [g] и имеет направление по движению часовой стрелки (фиг. 107). Поворот того же элемента из-за перемещения  $u_\alpha$  показан на фиг. 108. Он имеет направление против часовой стрелки и равен

$$\frac{u_\alpha}{r_2} = -u_\alpha \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \beta}. \quad [k]$$



Фиг. 108.

<sup>1)</sup> Малый криволинейный элемент  $ab$  (фиг. 104) мы принимаем прямолинейным и касательным к кривой в точке  $a$  (фиг. 107).

Таким образом, полный угол поворота элемента  $ab$  в направлении по часовой стрелке, согласно формул [g] и [k], равен

$$h_1 \frac{\partial u_\beta}{\partial x} + u_\alpha \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \beta}. \quad [l]$$

Подобный же полный угол поворота элемента  $ad$ , также в направлении по часовой стрелке, равен

$$-h_2 \frac{\partial u_\alpha}{\partial \beta} - u_\beta \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \alpha}. \quad [m]$$

Угол поворота  $\omega$  равняется среднему значению углов [l] и [m]:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{2} \left( h_1 \frac{\partial u_\beta}{\partial x} + u_\alpha \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \beta} - h_2 \frac{\partial u_\alpha}{\partial \beta} - u_\beta \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \alpha} \right) = \\ &= \frac{h_1 h_2}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u_\beta}{h_2} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u_\alpha}{h_1} \right) \right]. \end{aligned} \quad [101]$$

Эти формулы [100] и [101] для относительного объемного расширения  $\Delta$  и для угла поворота  $\omega$  дают нам возможность приступить к решению различных плоских задач в криволинейных координатах.

**50. Плоская задача в эллиптических координатах.** В случае плоской деформации мы будем исходить из уравнений [91']. Эти уравнения будут удовлетворены, если, как это показано в параграфе 47, взять

$$(1 - \nu)(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta) + i(1 - 2\nu)\omega$$

за функцию комплексного переменного  $x + iy$ .

Так как  $\alpha + i\beta$  является функцией комплексного переменного  $x + iy$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  — ортогональные координаты, то любая функция от  $\alpha + i\beta$  является также функцией от  $x + iy$ . В качестве попытки предположим, что<sup>1)</sup>

$$(1 - \nu)(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta) + i(1 - 2\nu)\omega = c_n \frac{e^{-n(\alpha + i\beta)}}{\sinh(\alpha + i\beta)}, \quad [a]$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — эллиптические координаты (см. стр. 194),  $n$  — любое целое положительное или отрицательное число, и  $c_n$  — постоянная. Разделив правую сторону уравнения [a] на его вещественную и мнимую части, найдем:

$$\left. \begin{aligned} (1 - \nu)(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta) &= c_n \frac{e^{-(n-1)\alpha} \cos(n+1)\beta - e^{-(n+1)\alpha} \cos(n-1)\beta}{\cosh 2\alpha - \cos 2\beta}; \\ (1 - 2\nu)\omega &= -c_n \frac{e^{-(n-1)\alpha} \sin(n+1)\beta - e^{-(n+1)\alpha} \sin(n-1)\beta}{\cosh 2\alpha - \cos 2\beta}. \end{aligned} \right\} [b]$$

Подставив вместо  $\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta$  и  $\omega$  их общие выражения [100] и [101], в которых при эллиптических координатах (см. стр. 194)

$$h_1^2 = h_2^2 = h^2 = \frac{2}{c^2 (\cosh 2\alpha - \cos 2\beta)}, \quad [c]$$

и пользуясь обозначениями

$$\frac{u_\alpha}{h} = u \quad \text{и} \quad \frac{u_\beta}{h} = v, \quad [d]$$

<sup>1)</sup> К. Инглис (С. Е. Inglis), см. его статью, упомянутую выше, в выноске на стр. 95. См. также статью Н. Мухелишвили в *З. angew. Math. u. Mech.*, Bd 13, 1933, S. 264, а также (прим. перев.) труд его — Некоторые основные задачи математической теории упругости, изд. Академии наук СССР, Ленинград, 1933.

получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial \beta} &= \frac{c^2 c_n}{2(1-\nu)} [e^{-(n-1)\alpha} \cos(n+1)\beta - e^{-(n+1)\alpha} \cos(n-1)\beta]; \\ \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{\partial u}{\partial \beta} &= \frac{c^2 c_n}{1-2\nu} [-e^{-(n-1)\alpha} \sin(n+1)\beta - e^{-(n+1)\alpha} \sin(n-1)\beta]. \end{aligned} \right\} [e]$$

Решение этих двух уравнений дает:

$$\left. \begin{aligned} u &= a_n [(n+p) e^{-(n-1)\alpha} \cos(n+1)\beta + (n-p) e^{-(n+1)\alpha} \cos(n-1)\beta] + \varphi; \\ v &= a_n [(n-p) e^{-(n-1)\alpha} \sin(n+1)\beta + (n+p) e^{-(n+1)\alpha} \sin(n-1)\beta] + \psi, \end{aligned} \right\} [f]$$

где через  $p$  обозначена величина  $3 - 4\nu$ ,  $a_n$  — постоянная, а  $\varphi$  и  $\psi$  — сопряженные функции координат  $\alpha$  и  $\beta$  (см. стр. 186).

Подходящими значениями для функций  $\varphi$  и  $\psi$  будут следующие:

$$b_n e^{-n\alpha} \cos n\beta \quad \text{и} \quad b_n e^{-n\alpha} \sin n\beta,$$

где  $b_n$  — постоянная.

Имея  $u$  и  $v$ , мы можем найти перемещения  $u_\alpha$  и  $u_\beta$  на основании выражений [a] и [c]. Далее, подставив эти перемещения в формулы [99], мы получим соответствующие составляющие деформации  $\epsilon_\alpha$ ,  $\epsilon_\beta$  и  $\gamma_{\alpha\beta}$ .

Составляющие напряжения получатся теперь при помощи закона Гука. Для случая плоской деформации мы, на основании выражений, приведенных на стр. 23, имеем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{E}{1+\nu} \left( \epsilon_\alpha + \frac{\nu}{1-2\nu} \Delta \right); \\ \sigma_\beta &= \frac{E}{1+\nu} \left( \epsilon_\beta + \frac{\nu}{1-2\nu} \Delta \right); \\ \tau_{\alpha\beta} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{\alpha\beta}. \end{aligned} \right\} [g]$$

Придавая различные значения числу  $n$  в решении [f] и суммируя эти различные решения, мы получим более общее решение в виде ряда, содержащего некоторое число произвольных постоянных, которые подлежат определению из условий на контуре.

Рассмотрим частный случай пластинки, имеющей небольшое эллиптическое отверстие и подвергающейся равномерному растягивающему напряжению  $\sigma$  во всех направлениях. Допустим, что эллипс, ограничивающий отверстие, представляется частным значением параметра  $\alpha_0$  координаты  $\alpha$ . Если край отверстия свободен от внешних сил, то условия по контуру будут:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha = 0 \quad \text{и} \quad \tau_{\beta\alpha} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = \alpha_0; \\ \sigma_\alpha = \tau_\beta = \sigma \quad \text{и} \quad \tau_{\alpha\beta} = 0, \quad \text{когда} \quad \alpha \text{ — велико.} \end{aligned}$$

Подходящее решение для этого случая получится, если в решении [f] взять  $n = 1$  и  $n = -1$ . Составляющие напряжения получатся равными:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{\sigma \sinh 2\alpha (\cosh 2\alpha - \cosh 2\alpha_0)}{(\cosh 2\alpha - \cos 2\beta)^2}; \\ \sigma_\beta &= \frac{\sigma \sinh 2\alpha (\cosh 2\alpha + \cosh 2\alpha_0 - 2 \cos 2\beta)}{(\cosh 2\alpha - \cos 2\beta)^2}; \\ \tau_{\alpha\beta} &= \frac{\sigma \sin 2\beta (\cosh 2\alpha - \cosh 2\alpha_0)}{(\cosh 2\alpha - \cos 2\beta)^2}. \end{aligned} \right\} [h]$$

Легко убедиться, что когда  $\alpha = \alpha_0$ , то  $\sigma_\alpha = 0$  и  $\tau_{\alpha\beta} = 0$ , и условия по краю отверстия удовлетворены.

Когда  $\alpha$  становится большим, то напряжения  $\sigma_\alpha$  и  $\sigma_\beta$  приближаются к значению  $\sigma$ , а  $\tau_{\alpha\beta}$  приближается к нулю, т. е. на большом расстоянии от отверстия мы имеем равномерное по всем направлениям растяжение, равное  $\sigma$ . Следовательно, все условия задачи выполнены.

Тангенциальное напряжение  $\sigma_\beta$  по краю отверстия, на основании второго из выражений [k], равно:

$$(\sigma_\beta)_\alpha = \sigma_0 = \frac{2\sigma \sinh 2\alpha_0}{\cosh 2\alpha_0 - \cos 2\beta}. \quad [k]$$

Наибольшее напряжение будет иметь место на конце большой оси ( $\beta = 0$ ):

$$(\sigma_\beta)_{\max} = \frac{2\sigma \sinh 2\alpha_0}{\cosh 2\alpha_0 - 1}. \quad [l]$$

На конце малой оси  $\left[\beta = \frac{\pi}{2}\right]$  напряжение будет наименьшим:

$$(\sigma_\beta)_{\min} = \frac{2\sigma \sinh 2\alpha}{\cosh 2\alpha_0 + 1}. \quad [m]$$

Когда отверстие приближается по форме к круглому, то значение  $\cosh \alpha_0$  приближается в пределе к значению  $\sinh \alpha_0$ . Это показывает, что  $\alpha_0$  — велико и следовательно,  $\cosh 2\alpha_0$  и  $\sinh 2\alpha_0$  также велики (см. стр. 193).

Поэтому, согласно выражений [l] и [m], напряжения  $\sigma_\beta$  на контуре в пределе равно  $2\sigma$ . Это — то значение, которое мы получили раньше для круглого отверстия (см. стр. 94).

В случае очень узкого эллиптического отверстия,  $\cosh \alpha_0$  очень велик по сравнению с  $\sinh \alpha_0$ . Это указывает, что  $\alpha_0$  очень мало и, следовательно,  $\sinh 2\alpha_0$  — величина малая, а  $\cosh 2\alpha_0$  — близок к единице.

Следовательно, напряжение  $(\sigma_\beta)_{\max}$  становится в этом случае очень большим, а напряжение  $(\sigma_\beta)_{\min}$  — очень малым.

Отношение между длинами главных осей отверстия равно  $\operatorname{tgh} \alpha_0$ . При любом данном значении этого отношения, мы можем легко найти по таблицам соответствующие значения параметра  $\alpha_0$ ,  $\cosh 2\alpha_0$  и  $\sinh 2\alpha_0$ , а по формулам [l] и [m] получим величины напряжений  $(\sigma_\beta)_{\max}$  и  $(\sigma_\beta)_{\min}$ .

Когда пластинка подвергается действию простого растяжения  $\sigma$  в направлении, перпендикулярном большой оси отверстия, т. е. в направлении  $\beta = 0,5\pi$ , решение задачи получится, если в выражении [f] положить  $n = -1$ ,  $n = 1$  и  $n = -3$ .

Тангенциальное напряжение  $\sigma_\beta$  на контуре отверстия в этом случае равно:

$$\sigma_\beta = \frac{\sigma (\sinh 2\alpha_0 + e^{2\alpha_0} \cos 2\beta - 1)}{\cosh 2\alpha_0 - \cos 2\beta}. \quad [n]$$

На конце большой оси ( $\beta = 0$ ) имеем:

$$(\sigma_\beta)_{\max} = \sigma \cdot \frac{\sinh 2\alpha_0 + e^{2\alpha_0} - 1}{\cosh 2\alpha_0 - 1} = \sigma (2 \operatorname{ctgh} \alpha_0 + 1) = \sigma \left( \frac{2a}{b} + 1 \right). \quad [o]$$

где  $a$  и  $b$  обозначают длину большой и малой осей эллиптического отверстия. На конце меньшей оси ( $\beta = 0,5\pi$ ) получается:

$$(\sigma_\beta)_{\min} = \frac{\sigma (\sinh 2\alpha_0 - e^{2\alpha_0} - 1)}{\cosh 2\alpha_0 + 1} = -\sigma. \quad [p]$$

В вышеупомянутой статье К. Инглиса рассмотрено несколько других частных случаев. В этой же статье даны также общие выражения для составляющих напряжения в эллиптических координатах.

**51. Конформное отображение.** Представим точку  $A$  с полярными координатами  $r$  и  $\theta$  или с декартовыми координатами  $x = r \cos \theta$  и  $y = r \sin \theta$  (фиг. 109).

*Конформное отображение* — такое геометрическое преобразование, при котором для каждой точки  $A$  строится новая точка  $A_1$ , которая имеет ту же координату  $\theta$ , что точка  $A$ , а радиус вектор  $r_1$  точки  $A_1$  определяется по формуле:

$$r_1 = \frac{k^2}{r}, \quad [a]$$

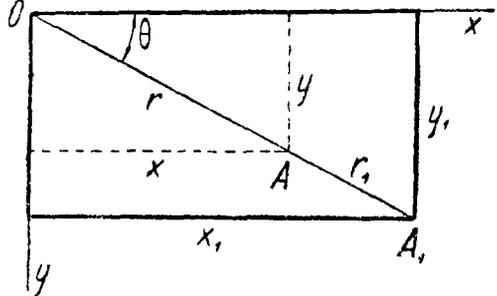
где  $k^2$  — квадрат некоторой постоянной длины.

Декартовы координаты новой точки  $A_1$  будут:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{k^2}{r} \cos \theta = \frac{k^2 x}{r^2}; \\ y_1 &= \frac{k^2}{r} \sin \theta = \frac{k^2 y}{r^2}. \end{aligned} \right\} [b]$$

В частном случае, когда  $k$  равно единице длины, имеем:

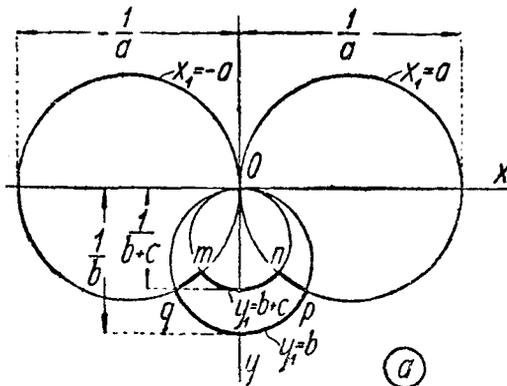
$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{x}{r^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}; \\ y_1 &= \frac{y}{r^2} = \frac{y}{x^2 + y^2}. \end{aligned} \right\} [c]$$



Фиг. 109.

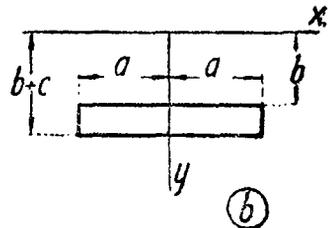
Мы рассматривали такие выражения в качестве примера криволинейных координат (см. стр. 192).

Мы показали, что, придавая известную величину координате  $x_1$ , например, взяв  $x_1 = \pm a$ , мы получим два круга с диаметрами



$$\pm \frac{1}{a}.$$

касательные к оси ординат в начале координат (фиг. 110а).



Фиг. 110.

Приняв  $y_1 = b$  и  $y_1 = b + c$ , мы получим два круга с диаметрами

$$\frac{1}{b} \quad \text{и} \quad \frac{1}{b+c}.$$

касательные к оси абсцисс в начале координат.

Итак если мы возьмем координаты  $x$  и  $y$  и придадим им значения  $x = \pm a$ ,  $y = b$  и  $y = b + c$ , то получим прямоугольник, показанный на фиг. 110б. Когда

мы берем криволинейные координаты  $x_1$  и  $y_1$  и придаем им те же значения, как и выше, то мы приходим к криволинейному прямоугольнику, показанному на фиг. 110а жирными линиями.

Это преобразование очень выгодно при решении плоской задачи.

В главе второй было решено несколько задач для пластинок с прямоугольными контурами. Пользуясь конформным отображением, эти решения мы можем преобразовать для пластинок с криволинейными контурами.

Если  $\varphi$  — функция напряжений, представляющая решение плоской задачи в полярных координатах  $r$  и  $\theta$ , при отсутствии объемных сил, то она удовлетворяет уравнению:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad [d]$$

Если же ввести, вместо координат  $r$  и  $\theta$ , новые переменные  $r_1$  и  $\theta_1$ , определяемые формулой [a], то можно показать, что уравнение [d] получит следующий вид<sup>1)</sup>:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r_1^2} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} + \frac{1}{r_1^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} \right) \left( \frac{\partial^2 (r_1^2 \varphi)}{\partial r_1^2} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial (r_1^2 \varphi)}{\partial r_1} + \frac{1}{r_1^2} \frac{\partial^2 (r_1^2 \varphi)}{\partial \theta_1^2} \right) = 0. \quad [e]$$

Из этого, рассматривая  $\varphi$  как функцию от  $r_1$  и  $\theta_1$ , мы находим, что  $r_1^2 \varphi$  является функцией напряжения для новых координат  $r_1$  и  $\theta_1$ , и соответствующие составляющие напряжения, согласно формулам [34] (см. стр. 66), будут:

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_{r_1} &= \frac{1}{r_1^2} \frac{\partial^2 (r_1^2 \varphi)}{\partial \theta_1^2} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial (r_1^2 \varphi)}{\partial r_1}; \\ \sigma'_{\theta_1} &= \frac{\partial^2 (r_1^2 \varphi)}{\partial r_1^2}; \\ \tau'_{r_1 \theta_1} &= -\frac{\partial}{\partial r_1} \left[ \frac{1}{r_1} \frac{\partial (r_1^2 \varphi)}{\partial \theta_1} \right]. \end{aligned} \right\} \quad [f]$$

Приняв

$$r_1 = \frac{1}{r},$$

имеем

$$\frac{\partial}{\partial r_1} = -\frac{1}{r_1^2} \frac{\partial}{\partial r} = -r^2 \frac{\partial}{\partial r}; \quad \frac{\partial^2}{\partial r_1^2} = r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right).$$

Следовательно, на основании формул [f], получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_{r_1} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} - r^3 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\varphi}{r^2} \right) = r^2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) - 2 \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \varphi \right); \\ \sigma'_{\theta_1} &= r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\varphi}{r^2} \right) \right] = r^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - 2 \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \varphi \right); \\ \sigma'_{r_1 \theta_1} &= r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \right\} \quad [k]$$

<sup>1)</sup> См. статью Дж. Мичеля (J. H. Michell), „Proc. London Math. Soc.“, vol. 34, 1901, p. 134, и А. Лове (A. E. H. Love), Mathematical Theory of Elasticity, 4 ed., Cambridge, 1927, p. 215.

Сопоставляя найденные значения с составляющими напряжения, выведенными для функции  $\varphi$ , выраженной в координатах  $r$  и  $\theta$  (формулы [74]), находим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_{r_1} &= r^2 \sigma_r + 2 \left( \varphi - r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right); \\ \sigma'_{\theta} &= r^2 \sigma_\theta + 2 \left( \varphi - r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right); \\ \tau'_{r,\theta} &= -r^2 \tau_{r,\theta}. \end{aligned} \right\} [4]$$

Таким образом, составляющие напряжения в новой системе координат  $(r_1, \theta)$  отличаются от составляющих напряжения в системе  $(r, \theta)$  умножением последних на множитель  $r^2$ , с переменной знака касательного напряжения, и с добавлением растяжения

$$2 \left( \varphi - r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right),$$

одинакового для всех направлений.

Из этого следует, что контур, свободный от внешних усилий, преобразуется в контур, находящийся под действием одного только растяжения

$$2 \left( \varphi - r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right).$$

При помощи условий [12] на контуре (см. стр. 27), можно показать, что это растяжение является постоянной величиной.

Выражая составляющие напряжения в зависимости от функции напряжения  $\varphi$  в декартовых координатах, получим уравнения [12] для свободного контура  $s$ :

$$l \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - m \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0, \quad m \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - l \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0. \quad [m]$$

Так как

$$l = \frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{и} \quad m = - \frac{\partial x}{\partial s},$$

эти уравнения получают следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = 0.$$

Следовательно

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

постоянны на свободном контуре, и мы находим:

$$\frac{d}{ds} \left( \varphi - r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = \frac{d}{ds} \left( \varphi - x \frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = \frac{d\varphi}{ds} - \frac{dx}{ds} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{dy}{ds} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\varphi - r \frac{\partial \varphi}{\partial r}$$

— величина постоянная, и контур, свободный от внешних усилий в системе координат  $(r, \theta)$ , преобразуется в контур с равномерно распределенным нормальным напряжением в системе координат  $(r_1, \theta)$ .

В качестве примера применения вышеизложенной теории рассмотрим случай простого растяжения. Если растягивающие напряжения равномерно распределены

по концам прямоугольной полоски (фиг. 111b), то соответствующая функция напряжений будет

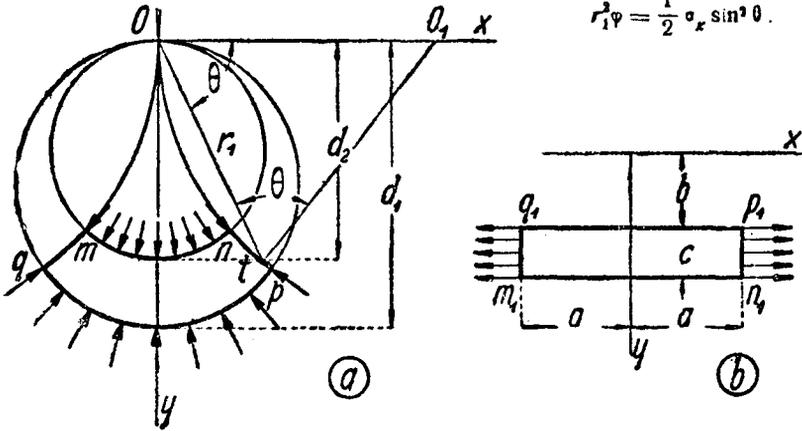
$$\frac{1}{2} \sigma_x y^2$$

(см. стр. 38) или в полярных координатах

$$\varphi = \frac{1}{2} \sigma_x r^2 \sin^2 \theta. \quad [n]$$

После конформного преобразования мы получим криволинейный прямоугольник, изображенный на фиг. 111a, и соответствующая функция напряжений будет

$$r_1^2 \varphi = \frac{1}{2} \sigma_x \sin^2 \theta. \quad [p]$$



Фиг. 111.

Составляющие напряжения, на основании формул [f], будут равны:

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_{r_1} &= \sigma_x \cdot \frac{\cos 2\theta}{r_1^2}; \\ \sigma'_\theta &= 0; \\ \tau_{r_1\theta} &= \frac{\sigma_x}{2} \frac{\sin 2\theta}{r_1^2}. \end{aligned} \right\} \quad [q]$$

Эти выражения дают напряжения в криволинейном прямоугольнике  $mnpq$  (фиг. 111a). Стороны  $p_1q_1$  и  $m_1n_1$  прямоугольной полоски  $m_1n_1p_1q_1$  (фиг. 111b), свободные от внешних сил, преобразуются в дуги кругов  $p_1q_1$  и  $m_1n_1$  с диаметрами

$$d_1 = \frac{1}{b} \quad \text{и} \quad d_2 = \frac{1}{b+c}.$$

По контуру будет действовать равномерное нормальное растяжение

$$2 \left( \varphi - r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = -\sigma_x r^2 \sin^2 \theta = -\frac{\sigma_x \sin^2 \theta}{r_1^2},$$

равное по дугам  $p_1q_1$  и  $m_1n_1$  соответственно:

$$-\frac{\sigma_x}{d_1^2} \quad \text{и} \quad -\frac{\sigma_x}{d_2^2}.$$

Концы  $pr$  и  $mq$  криволинейной пластинки  $mprq$  получатся из равномерно нагруженных сторон  $p_1r_1$  и  $m_1q_1$  прямоугольника  $m_1p_1r_1q_1$  (фиг. 111б).

Из общих выражений [1] следует, что линии главных напряжений (траектории) остаются траекториями напряжений и после преобразования. Следовательно, концы  $pr$  и  $mq$  испытывают лишь нормальные напряжения.

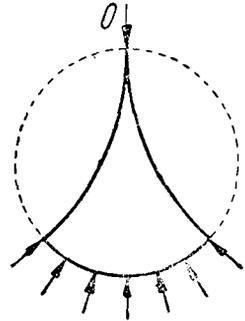
Величина этих напряжений для любой точки  $t$  равна, согласно формуле [16] (см. стр. 31),

$$\frac{1}{2} \sigma'_{r_1} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} \sigma'_{r_1}\right)^2 + \left(\tau'_{r_1 t}\right)^2} = -\frac{\sigma_x}{2r_1^2} (1 \pm \cos 2\theta).$$

Эти нормальные напряжения, распределенные по сторонам  $pr$  и  $mq$ , удерживают в равновесии равномерно распределенные по сторонам  $mp$  и  $rq$  нагрузки.

Присоединяя к распределению напряжений [1] равномерное растяжение

$$\frac{\sigma_x}{d^2}$$



Фиг. 112.

по всем направлениям, получим контур  $mp$  свободным от внешних сил, и найдем решение для криволинейного прямоугольника, нагруженного по стороне  $rq$  и краям  $pr$  и  $mq$ .

Таким же способом можно исследовать клин<sup>1)</sup>, ограниченный двумя дугами окружностей, касающихся друг друга в точке  $O$  (фиг. 112). Несколько примеров применения криволинейных координат к решению плоских задач разобрано А. Лове<sup>2)</sup>. Задачи относящиеся к двум неконцентрическим окружностям, решены Джеффри<sup>3)</sup>.

<sup>1)</sup> Несколько примеров этого рода рассмотрены А. Тимпе (A. Timpe), см. Z. Math. Physik\*, Bd 52, 1905, S. 348.

<sup>2)</sup> См. А. Лове (A. E. H. Love), Mathematical Theory of Elasticity, 4 ed., 1927, pp. 219 and 272.

<sup>3)</sup> См. статью Джеффри (G. B. Jeffery), упомянутую выше в выноске на стр. 93.

## ГЛАВА ШЕСТАЯ.

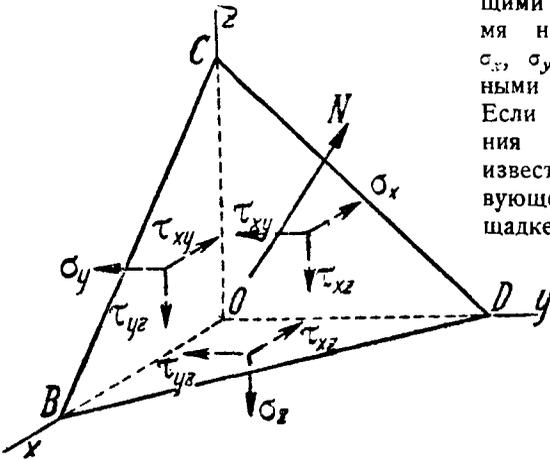
### ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ В ТРЕХ ИЗМЕРЕНИЯХ.

**52. Напряженное состояние в точке тела.** Наши предыдущие исследования ограничивались плоскими задачами, задачами в двух измерениях. Рассмотрим теперь общий случай напряженного состояния в трех измерениях.

Было показано (см. параграф 4), что напряжения, действующие на шесть граней элементарного куба, можно выразить шестью составляющими напряжения, а именно, тремя нормальными напряжениями  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$  и тремя касательными напряжениями  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$ .

Если эти составляющие напряжения для какой-нибудь точки известны, то напряжение, действующее по любой наклонной площадке, проходящей через эту точку, можно определить из уравнений статики.

Пусть  $O$  — точка напряженного тела. Предположим, что для координатных плоскостей  $xu$ ,  $xz$  и  $yz$  (фиг. 113) напряжения известны. Чтобы получить напряжение по какой-либо наклонной



Фиг. 113.

площадке, проходящей через точку  $O$ , проведем параллельную площадке плоскость  $BCD$  на малом расстоянии от точки  $O$ . Эта плоскость, вместе с плоскостями координат, вырежет из тела очень малый четырехгранник  $BCDO$ . Так как напряжения меняются непрерывно по объему тела, то напряжение, действующее по плоскости  $BCD$ , будет в пределе равно напряжению по параллельной ей площадке, проходящей через точку  $O$ , если только четырехгранник принять бесконечно малым.

Рассматривая условия равновесия элементарного четырехгранника, можем пренебречь объемными силами (см. стр. 16). Так как элемент очень мал, то мы можем пренебречь также изменениями напряжений по его граням и допустить, что напряжения распределены равномерно.

Усилия, действующие на четырехгранник, можно поэтому получить умножением составляющих напряжений на величину площадей граней. Если через  $F$  обозначить площадь грани  $BCD$  тетраэдра, то площади трех других граней получатся, если взять проекции площади  $F$  на три координатные плоскости.

Если  $N$  — нормаль к плоскости  $BCD$  и условиться обозначать:

$$\cos(N, x) = l; \quad \cos(N, y) = m; \quad \cos(N, z) = n, \quad [a]$$

то площади прочих граней тетраэдра выразятся так:

$$Fl; \quad Fm; \quad Fn.$$

Если затем обозначим через  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  три составляющие напряжения, параллельные осям координат и действующие на наклонную грань  $BCD$ , то тогда составляющая усилия, действующая на грань  $BCD$  в направлении оси  $x$ , будет  $FX$ . Точно также составляющие в направлении оси  $x$  усилий, действующих на три других грани тетраэдра, равны соответственно:

$$-Fl\sigma_x; \quad -Fm\tau_{xy}; \quad -Fn\tau_{xz}.$$

Соответствующее уравнение равновесия четырехгранника напишется следующим образом:

$$FX - Fl\sigma_x - Fm\tau_{xy} - Fn\tau_{xz} = 0.$$

Таким же путем получатся и два других уравнения равновесия, если взять проекции всех сил на оси  $y$  и  $z$ .

После сокращения множителя  $F$  эти уравнения равновесия четырехгранника можно представить в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} X &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n; \\ Y &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n; \\ Z &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n. \end{aligned} \right\} [102]$$

Итак, составляющие напряжения по любой площадке, определяемой направляющими косинусами  $l$ ,  $m$  и  $n$ , могут быть легко найдены по формулам [102], если в данной точке  $O$  известны шесть составляющих напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$ .

**53. Главные напряжения.** Рассмотрим нормальную составляющую напряжения  $\sigma_n$ , действующую на плоскость  $BCD$  (фиг. 113). Пользуясь обозначениями [a] для направляющих косинусов, найдем:

$$\sigma_n = Xl + Ym + Zn,$$

или, подставив значения  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ , из выражений [102] получим:

$$\sigma_n = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{xz} ln + 2\tau_{xy} lm. \quad [103]$$

Изменение напряжения  $\sigma_n$  с изменением направления нормали  $N$  можно представить геометрически следующим образом. В направлении нормали  $N$  отложим вектор, длина которого  $r$  обратно пропорциональна квадратному корню из абсолютной величины напряжения  $\sigma_n$ , т. е.:

$$r = \frac{k}{\sqrt{|\sigma_n|}}, \quad [b]$$

где  $k$  — постоянный коэффициент. Координаты конца вектора будут:

$$x = lr; \quad y = mr; \quad z = nr. \quad [c]$$

Подставив в уравнение [103]

$$\sigma_n = \pm \frac{k^2}{r^3},$$

согласно формуле [b], и величины косинусов  $l$ ,  $m$  и  $n$  по выражениям [c], найдем:

$$\pm k^2 = \sigma_x x^2 + \sigma_y y^2 + \sigma_z z^2 + 2\tau_{yz}yz + 2\tau_{xz}xz + 2\tau_{xy}xy. \quad [104]$$

При поворачивании плоскости  $BCD$  относительно точки  $O$ , поворачивается и вектор, причем конец вектора всегда лежит на поверхности второй степени, представляемой уравнением [104].

Эта поверхность полностью определяется напряженным состоянием в точке  $O$ . При изменении направления координатных осей  $x$ ,  $y$  и  $z$ , поверхность останется совершенно неизменной, лишь составляющие напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{xy}$ , а в силу этого, и коэффициенты уравнения [104] будут другими.

Известно, что в случае поверхности второй степени, соответствующей уравнению [104], всегда возможно найти такие направления для осей  $x$ ,  $y$  и  $z$ , что члены этого уравнения, содержащие произведения координат, исчезнут.

Это показывает, что можно всегда найти три взаимно перпендикулярные плоскости, для которых касательные напряжения  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{xy}$  обращаются в нуль, и остаются лишь напряжения, нормальные к площадкам, на которые они действуют.

Эти напряжения называются *главными напряжениями* в данной точке, их направления — *главными осями*, и плоскости, на которые они действуют, — *главными плоскостями*. Легко убедиться, что напряженное состояние в данной точке вполне определится, если даны направления главных осей и величины трех главных напряжений.

**54. Эллипсоид напряжений и направляющая поверхность напряжений.** Если за координатные оси  $x$ ,  $y$  и  $z$  взять главные оси, то определение напряжений по любой наклонной площадке становится особенно простым. В этом случае касательные напряжения  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{xy}$  равны нулю, и выражения [102] обращаются в такие:

$$X = \sigma_x l; \quad Y = \sigma_y m; \quad Z = \sigma_z n. \quad [105]$$

Подставив значения величин  $l$ ,  $m$  и  $n$  из этих выражений в общеизвестную зависимость  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ , найдем:

$$\frac{X^2}{\sigma_x^2} + \frac{Y^2}{\sigma_y^2} + \frac{Z^2}{\sigma_z^2} = 1. \quad [106]$$

Это указывает, что если для каждой наклонной площадки, проходящей через точку  $O$ , напряжение представить вектором, отложенным от точки  $O$ , с составляющими  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ , то концы всех таких векторов будут лежать на поверхности эллипсоида, отвечающего уравнению [106].

Этот эллипсоид называется *эллипсоидом напряжений*. Его полуоси представляют главные напряжения в данной точке. Отсюда можно заключить, что наибольшим напряжением в любой точке будет наибольшее из трех главных напряжений в этой точке.

Если два из трех главных напряжений равны по абсолютной величине, то эллипсоид напряжения обращается в эллипсоид вращения. Если эти численно равные главные напряжения имеют одинаковый знак, то по всем площадкам, проходящим через ось симметрии эллипсоида, напряжения будут одинаковы и перпендикулярны площадкам, на которые они действуют. В этом случае напряжения по любым двум взаимно перпендикулярным площадкам, проходящим через эту ось, можно рассматривать как главные напряжения.

Если все три главных напряжения равны между собой и одинаковы по знаку, то эллипсоид напряжений становится шаром, и любые три взаимно перпендикулярные направления можно взять за главные оси.

Когда одно из главных напряжений равно нулю, то эллипсоид напряжений обращается в эллипс, и векторы, представляющие напряжения по всем площадкам, проходящим через точку, лежат в одной плоскости — в плоскости эллипса. Такое напряженное состояние называется *плоским напряженным состоянием* и было уже рассмотрено в предыдущих главах книги.

Когда два главных напряжения равны нулю, мы имеем случай простого растяжения или сжатия.

Каждый радиус-вектор эллипсоида напряжений представляет в известном масштабе напряжение по одной из площадок, проходящих через центр эллипсоида. Чтобы найти эту площадку, пользуются, вместе с эллипсоидом напряжений [106], *направляющей поверхностью напряжений*, определяемой уравнением:

$$\frac{x^2}{\sigma_x} + \frac{y^2}{\sigma_y} + \frac{z^2}{\sigma_z} = 1. \quad [107]$$

Напряжение, представленное радиусом-вектором эллипсоида напряжений, действует по площадке, параллельной плоскости, касательной к направляющей поверхности напряжений в точке пересечения ее с данным радиусом-вектором.

Это можно доказать следующим образом. Уравнение плоскости, касательной к направляющей поверхности напряжений [107] в какой-либо точке с координатами  $x_0, y_0$  и  $z_0$ , представится так:

$$\frac{xx_0}{\sigma_x} + \frac{yy_0}{\sigma_y} + \frac{zz_0}{\sigma_z} = 1. \quad [a]$$

Обозначив через  $h$  длину перпендикуляра, опущенного из начала координат на вышеупомянутую касательную плоскость, и через  $l, m$  и  $n$  — направляющие косинусы этого перпендикуляра, напишем уравнение этой касательной плоскости в следующем виде:

$$lx + my + nz = h. \quad [b]$$

Сравнивая уравнения [a] и [b], найдем:

$$\sigma_x = \frac{x_0 h}{l}; \quad \sigma_y = \frac{y_0 h}{m}; \quad \sigma_z = \frac{z_0 h}{n}. \quad [c]$$

Подставив эти значения в формулы [105], получим:

$$X = x_0 h; \quad Y = y_0 h; \quad Z = z_0 h;$$

т. е. составляющие напряжения по площадке с направляющими косинусами  $l$ ,  $m$  и  $n$  будут пропорциональны координатам точки касания  $x_0$ ,  $y_0$  и  $z_0$ . Следовательно, радиус-вектор, представляющий напряжение по рассматриваемой площадке, проходит через точку касания  $(x_0, y_0, z_0)$ , как это было указано выше <sup>1)</sup>.

**55. Определение главных напряжений.** Если составляющие напряжения по трем координатным плоскостям известны, то мы можем определить по направлению и величине главные напряжения, пользуясь тем их свойством, что главные напряжения перпендикулярны к площадкам, по которым они действуют.

Пусть  $l$ ,  $m$  и  $n$  — направляющие косинусы главной плоскости, и  $S$  — величина главного напряжения, действующего по этой площадке.

Тогда составляющие этого напряжения будут:

$$X = Sl; \quad Y = Sm; \quad Z = Sn.$$

Подставив эти значения в уравнения [102], найдем:

$$\left. \begin{aligned} (S - \sigma_x)l - \tau_{xy}m - \tau_{xz}n &= 0; \\ -\tau_{xy}l + (S - \sigma_y)m - \tau_{yz}n &= 0; \\ -\tau_{xz}l - \tau_{yz}m + (S - \sigma_z)n &= 0. \end{aligned} \right\} [a]$$

Это три однородных линейных уравнения, относительно  $l$ ,  $m$  и  $n$ . Они дадут решение отличное от нуля в том случае только, если определитель этих уравнений равен нулю. Составив этот определитель и приравняв его нулю, получим следующее кубическое уравнение относительно напряжения  $S$ :

$$S^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)S^2 + (\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{yz}^2 - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2)S - (\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{yz}\tau_{xz}\tau_{xy} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2) = 0. \quad [108]$$

Три корня этого уравнения дают нам значения трех главных напряжений. Подставляя каждое из трех напряжений в уравнения [a] и пользуясь зависимостью

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1,$$

мы найдем три группы направляющих косинусов, определяющих положение трех главных плоскостей.

Отметим, что уравнение [108] для определения главных напряжений не должно зависеть от выбора системы координат  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Следовательно, множители в скобках этого уравнения должны оставаться постоянными при любом изменении направлений координатных осей.

<sup>1)</sup> Другой прием графического изображения напряжения в данной точке упругого тела помощью кругов был предложен *О. Мором* (*O. Mohr*), *Technische Mechanik*, 2 Aufl., 1914, S. 192. См. также *А. Фёппль* и *Л. Фёппль* (*A. Föppl und L. Föppl*), *Drang und Zwang*, Bd I, S. 9, в русском переводе: *Сила и деформация*, том 1, 1933 г., стр. 24; и *Г. Вестергард* (*H. M. Westergaard*), *„Z. angew. Math. u. Mech.“*, Bd 4, 1924, S. 520. Круги Мора были нами применены при рассмотрении плоской задачи (см. параграф 9).

Поэтому, являясь инвариантами, коэффициенты уравнения [108]:

- a)  $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ ;
- b)  $\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2$ ;
- c)  $\sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{yz} \tau_{xz} \tau_{xy} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2$

не должны меняться с изменением направлений координатных осей.

Это означает, что сумма  $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$  трех нормальных составляющих напряжения в любой точке тела по трем взаимно перпендикулярным направлениям остается постоянной и равна сумме главных напряжений в этой точке.

### 56. Определение наибольшего касательного напряжения.

Пусть  $x$ ,  $y$  и  $z$  — главные оси, а  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$  — главные напряжения. Пусть  $l$ ,  $m$  и  $n$  — направляющие косинусы, определяющие положение данной площадки.

Тогда, на основании формул [105], квадрат полного напряжения по этой площадке равен

$$S^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = \sigma_x^2 l^2 + \sigma_y^2 m^2 + \sigma_z^2 n^2.$$

Квадрат нормальной составляющей напряжения по этой же площадке будет, согласно формуле [103], равен:

$$\sigma_n^2 = (\sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2)^2.$$

Тогда квадрат касательного напряжения по той же площадке должен быть равен

$$\tau^2 = S^2 - \sigma_n^2 = \sigma_x^2 l^2 + \sigma_y^2 m^2 + \sigma_z^2 n^2 - (\sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2)^2. \quad [a]$$

Исключим теперь один из косинусов, например  $n$ , из этого уравнения, при помощи зависимости:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1,$$

после чего определим косинусы  $l$  и  $m$  таким образом, чтобы касательное напряжение  $\tau$  получало максимальное значение.

После подстановки

$$n^2 = 1 - l^2 - m^2$$

в выражение [a], составим производные последнего по  $l$  и  $m$ , и приравняем эти производные нулю. Получим следующие два уравнения для направляющих косинусов  $l$  и  $m$ , определяющие положение площадок, по которым напряжение  $\tau$  получает максимальное или минимальное значение:

$$\left. \begin{aligned} l \left[ (\sigma_x - \sigma_z) l^2 + (\sigma_y - \sigma_z) m^2 - \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \right] &= 0; \\ m \left[ (\sigma_x - \sigma_z) l^2 + (\sigma_y - \sigma_z) m^2 - \frac{1}{2} (\sigma_y - \sigma_x) \right] &= 0. \end{aligned} \right\} [b]$$

Одно из решений этих уравнений получится, если приравнять  $l$  и  $m$  нулю. Можно также получить решения и отличные от нуля. Взяв, например,  $l$  равным нулю, мы найдем по второму из уравнений [b]

$$m = \pm \sqrt{\frac{1}{2}},$$

а взяв  $m$  равным нулю, найдем по первому из уравнений [b]

$$l = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Повторяя приведенные выше выкладки при исключении из выражения [a] косинуса  $m$ , а затем и косинуса  $l$ , мы, в конечном итоге, получим следующую таблицу 6 значений косинусов углов, при которых напряжение  $\tau$  получает максимальное или минимальное значения.

ТАБЛИЦА 6.

Значения направляющих косинусов для площадок  $\tau_{\max}$  и  $\tau_{\min}$ .

$l$	0	0	$\pm 1$	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$
$m$	0	$\pm 1$	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$
$n$	$\pm 1$	0	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	0

Первые три столбца дают площадки, совпадающие с плоскостями координат, которые, как это было вначале принято, являются главными плоскостями. По этим площадкам касательные напряжения обращаются в нуль, т. е. выражение [a] получает минимальное значение.

Три остальных столбца дают площадки, проходящие через одну из трех главных осей и делящие угол между двумя другими главными осями пополам. Подставив направляющие косинусы, определяющие положение этих трех площадок, в выражение [a], найдем следующие значения касательных напряжений по этим трем плоскостям:

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \pm \frac{1}{2} (\sigma_y - \sigma_x); \\ \tau &= \pm \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_z); \\ \tau &= \pm \frac{1}{2} (\sigma_z - \sigma_y). \end{aligned} \right\} [109]$$

Это показывает, что наибольшее касательное напряжение действует по площадке, делящей пополам угол между наибольшим и наименьшим главными напряжениями, и что оно равно половине разности между этими двумя главными напряжениями.

**57. Однородная деформация.** Мы будем рассматривать лишь такие малые деформации, какие имеют место в инженерных сооружениях.

Малые перемещения материальных точек деформированного тела обычно раскладывают на составляющие  $u$ ,  $v$  и  $w$ , параллельные осям

координат  $x$ ,  $y$  и  $z$ , соответственно. Будем предполагать, что эти составляющие являются очень малыми величинами, непрерывно меняющимися по объему тела.

Рассмотрим, например, осевое растяжение призматического стержня, заделанного верхним концом (фиг. 114). Пусть  $\epsilon$  — относительное удлинение стержня в направлении оси  $x$ , а  $\nu\epsilon$  — относительное поперечное сужение. Тогда составляющие перемещения точки с координатами  $x$ ,  $y$  и  $z$  равны:

$$u = \epsilon x; \quad v = -\nu\epsilon y; \quad w = -\nu\epsilon z.$$

Обозначив через  $x'$ ,  $y'$  и  $z'$  координаты точки после деформации, имеем

$$\left. \begin{aligned} x' &= x + u = x(1 + \epsilon); \\ y' &= y + v = y(1 - \nu\epsilon); \\ z' &= z + w = z(1 - \nu\epsilon). \end{aligned} \right\} [a]$$

Если мы рассмотрим плоскость в стержне, которая до деформации определялась уравнением:

$$ax + by + cz + d = 0, \quad [b]$$

то точки этой плоскости останутся в одной плоскости и после деформации. Уравнение в этой новой плоскости получится подстановкой в уравнение [b] значений  $x'$ ,  $y'$  и  $z'$  по формулам [a]. Таким же путем легко доказать, что параллельные плоскости остаются параллельными и после деформации, и параллельные линии — параллельными.

Если мы возьмем в стержне шаровую поверхность, до деформации определяемую уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad [c]$$

то после деформации этот шар станет эллипсоидом, уравнение которого найдется подстановкой в уравнение [c] для координат  $x$ ,  $y$  и  $z$  выражений, получаемых по формулам [a], что даст:

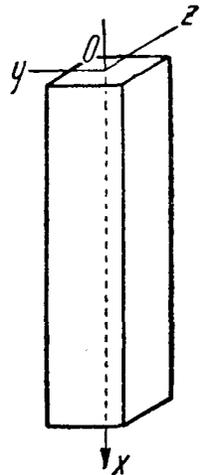
$$\frac{x'^2}{r^2(1 + \epsilon)^2} + \frac{y'^2}{r^2(1 - \nu\epsilon)^2} + \frac{z'^2}{r^2(1 - \nu\epsilon)^2} = 1. \quad [d]$$

Таким образом, шаровая поверхность радиуса  $r$  превращается в поверхность эллипсоида с полуосями:

$$r(1 + \epsilon); \quad r(1 - \nu\epsilon); \quad r(1 - \nu\epsilon).$$

Осевое растяжение и поперечное сужение, рассмотренные выше, представляют лишь частный случай более общего вида деформации, при котором составляющие перемещения  $u$ ,  $v$  и  $w$  являются линейными функциями координат.

Поступая так же, как и раньше, мы можем показать, что этот вид деформации обладает всеми теми особенностями, какие были найдены



Фиг. 114.

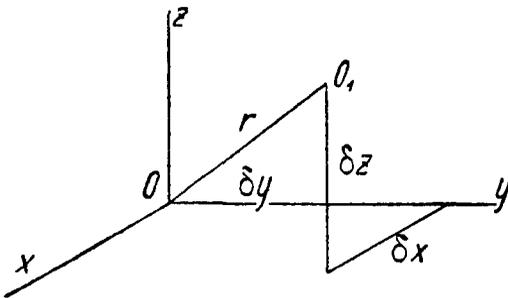
выше для простого растяжения. Плоскости и прямые линии остаются плоскостями и прямыми после деформации. Параллельные плоскости и параллельные прямые остаются параллельными после деформации. Шар обращается после деформации в эллипсоид. Такого рода деформация называется *однородной деформацией*.

Ниже будет показано, что в этом случае деформация в любом данном направлении будет одна и та же для всех точек деформированного тела. Два геометрически подобных и одинаково расположенных элемента тела остаются при однородной деформации и после искажения геометрически подобными.

В более общих случаях деформация меняется по объему деформированного тела. Например, когда изгибается балка, удлинения и сужения продольных волокон зависят от их расстояний от нейтральной поверхности; деформация сдвига в элементах скручиваемого круглого вала пропорциональна их расстояниям от оси вала. Подобные случаи неоднородной деформации требуют рассмотрения деформации вблизи данной точки.

**58. Исследование деформации в точке тела.** При исследовании деформации вблизи точки  $O$  деформированного тела (фиг. 115), рассмотрим

малый линейный элемент  $OO_1$  длиной  $r$ , с направляющими косинусами  $l$ ,  $m$  и  $n$ . Проекции этого элемента на координатные оси будут:



$$\delta x = rl; \quad \delta y = rm; \quad \delta z = rn. \quad [a]$$

Эти проекции являются координатами точки  $O_1$  относительно осей  $x$ ,  $y$  и  $z$ , проходящих через точку  $O$ , рассматриваемую как начало координат.

Если  $u$ ,  $v$  и  $w$  — составляющие перемещения точки  $O$  при деформации тела, то соответствующие перемещения весьма близкой к ней точки  $O_1$  можно представить следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= u + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \delta z; \\ v_1 &= v + \frac{\partial v}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \delta z; \\ w_1 &= w + \frac{\partial w}{\partial x} \delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \delta z. \end{aligned} \right\} [b]$$

Здесь предполагается, что величины  $\delta x$ ,  $\delta y$  и  $\delta z$  — малы, и поэтому членами высших степеней и произведениями этих величин можно в выражениях [b] пренебречь, как малыми величинами высших порядков.

Координаты точки  $O_1$  после деформации становятся такими:

$$\left. \begin{aligned} \delta x + u_1 - u &= \delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \delta z; \\ \delta y + v_1 - v &= \delta y + \frac{\partial v}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \delta z; \\ \delta z + w_1 - w &= \delta z + \frac{\partial w}{\partial x} \delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \delta z. \end{aligned} \right\} [c]$$

Отметим, что эти координаты являются линейными функциями начальных координат  $\delta x$ ,  $\delta y$  и  $\delta z$ . Следовательно, деформацию очень малого элемента тела в точке  $O$  можно считать *однородной* (параграф 57).

Рассмотрим удлинение линейного элемента  $r$  вследствие этой деформации. Квадрат длины этого элемента после деформации равен сумме квадратов координат [c]. Следовательно, если  $\varepsilon$  — относительное удлинение элемента, то мы получим:

$$\begin{aligned} (r + \varepsilon r)^2 &= \left( \delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \delta z \right)^2 + \\ &+ \left( \delta y + \frac{\partial v}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \delta z \right)^2 + \\ &+ \left( \delta z + \frac{\partial w}{\partial x} \delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \delta z \right)^2, \end{aligned}$$

или, разделив на  $r^2$  и пользуясь формулами [a], имеем:

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon)^2 &= \left[ l \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + m \frac{\partial u}{\partial y} + n \frac{\partial u}{\partial z} \right]^2 + \\ &+ \left[ l \frac{\partial v}{\partial x} + m \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + n \frac{\partial v}{\partial z} \right]^2 + \\ &+ \left[ l \frac{\partial w}{\partial x} + m \frac{\partial w}{\partial y} + n \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right]^2. \end{aligned} \quad [d]$$

Вспомнив, что  $\varepsilon$  и производные

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \dots, \quad \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial z}$$

— малые величины, квадратами и произведениями которых можно пренебречь, и пользуясь выражением

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1,$$

получим формулу [d] в следующем виде:

$$\begin{aligned} \epsilon = l^2 \frac{\partial u}{\partial x} + m^2 \frac{\partial v}{\partial y} + n^2 \frac{\partial w}{\partial z} + \\ + lm \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + ln \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + mn \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad [110]$$

Следовательно удлинение элемента  $r$  можно найти, если только известны величины:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Пользуясь обозначениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_x; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \epsilon_y; \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \epsilon_z; \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \gamma_{xz}; \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \gamma_{yz}, \end{aligned} \right\} [e]$$

можем представить формулу [110] в таком виде:

$$\epsilon = l^2 \epsilon_x + m^2 \epsilon_y + n^2 \epsilon_z + lm \gamma_{xy} + ln \gamma_{xz} + mn \gamma_{yz}. \quad [111]$$

Физический смысл величин  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\epsilon_z$ ,  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{xz}$  и  $\gamma_{yz}$  был рассмотрен выше (см. параграф 5), и было показано, что  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  и  $\epsilon_z$  — относительные удлинения по направлениям осей  $x$ ,  $y$  и  $z$ , а  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{xz}$  и  $\gamma_{yz}$  — три относительные деформации сдвига, взятые по тем же направлениям.

Мы видим, что удлинение любого линейного элемента, проходящего через точку  $O$ , можно найти по формуле [111], если только известны шесть составляющих деформации.

В частном случае однородной деформации, составляющие перемещения  $u$ ,  $v$  и  $w$  являются линейными функциями координат, и, согласно выражениям [e], составляющие деформации остаются постоянными по всему объему тела, т. е. в этом случае каждый элемент тела испытывает одну и ту же деформацию.

При исследовании деформации вблизи точки  $O$ , иногда представляется необходимым знать изменение угла между двумя линейными элементами, проходящими через эту точку.

Пользуясь выражениями [c] и [a] и считая  $\epsilon$  малой величиной, мы получим направляющие косинусы, определяющие положение элемента  $r$  (фиг. 115) после деформации равными:

$$\left. \begin{aligned} l_1 = \frac{\delta_x + u_1 - u}{r(1 + \epsilon)} = l \left( 1 - \epsilon + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + m \frac{\partial u}{\partial y} + n \frac{\partial u}{\partial z}; \\ m_1 = \frac{\delta_y + v_1 - v}{r(1 + \epsilon)} = l \frac{\partial v}{\partial x} + m \left( 1 - \epsilon + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + n \frac{\partial v}{\partial z}; \\ n_1 = \frac{\delta_z + w_1 - w}{r(1 + \epsilon)} = l \frac{\partial w}{\partial x} + m \frac{\partial w}{\partial y} + n \left( 1 - \epsilon + \frac{\partial w}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} [f]$$

Беря другой элемент  $r'$ , проходящий через ту же точку, с направляющими косинусами  $l'$ ,  $m'$  и  $n'$ , найдем величины этих косинусов после деформации в виде выражений, подобных выражениям [f].

Поэтому косинус угла между двумя элементами после деформации будет равен:

$$\cos(r, r') = l_1 l_1' + m_1 m_1' + n_1 n_1'.$$

Полагая удлинения  $\epsilon$  и  $\epsilon'$  по этим двум направлениям малыми величинами и пользуясь выражениями [f], найдем:

$$\begin{aligned} \cos(r, r') = & (ll' + mm' + nn')(1 - \epsilon - \epsilon') + 2(\epsilon_x ll' + \epsilon_y mm' + \epsilon_z nn') + \\ & + \gamma_{yz}(mn' + m'n) + \gamma_{xz}(nl' + n'l) + \gamma_{xy}(lm' + l'm). \end{aligned} \quad [112]$$

Если направления элементов  $r$  и  $r'$  взаимно перпендикулярны, то тогда

$$ll' + mm' + nn' = 0,$$

и формула [112] даст нам величину сдвига между этими направлениями.

**59. Главные оси деформации.** Пользуясь формулой [111], легко можем дать геометрическое представление об изменениях деформации в точке.

С этой целью отложим по направлению каждого линейного элемента  $r$  (фиг. 115) радиус-вектор длиной

$$R = \frac{k}{\sqrt{|\epsilon|}}.$$

Тогда, поступая так же, как было изложено в параграфе 53, можем показать, что концы всех этих радиусов лежат на поверхности, представляемой уравнением:

$$\pm k^2 = \epsilon_x x^2 + \epsilon_y y^2 + \epsilon_z z^2 + \gamma_{yz} yz + \gamma_{xz} xz + \gamma_{xy} xy. \quad [113]$$

Эта поверхность вполне определяется деформированным состоянием в данной точке и не зависит от выбора координатных осей.

Всегда возможно выбрать такие направления осей ортогональных координат, чтобы члены с произведениями координат в уравнении [113] пропали, т. е. чтобы деформации сдвига для таких направлений обратились в нуль.

Выбранные таким образом оси называются *главными осями деформации*, соответствующие им: плоскости — *главными плоскостями деформации* и удлинения — *главными удлинениями*.

Из предыдущего следует, что главные оси деформации остаются и после деформации перпендикулярными друг к другу, прямоугольный параллелепипед с гранями, параллельными главным плоскостям, остается и после деформации прямоугольным параллелепипедом.

Если оси  $x$ ,  $y$  и  $z$  — главные оси деформации, то уравнение [113] становится таким:

$$\pm k^2 = \epsilon_x x^2 + \epsilon_y y^2 + \epsilon_z z^2.$$

В этом случае удлинение любого линейного элемента с направляющими косинусами  $l$ ,  $m$  и  $n$  получается, согласно формуле [111], равным

$$\varepsilon = l^2 \varepsilon_x + m^2 \varepsilon_y + n^2 \varepsilon_z, \quad [114]$$

а сдвиг, соответствующий двум взаимно перпендикулярным направлениям  $r$  и  $r'$ , становится, согласно формуле [112], равным

$$\gamma_{rr'} = 2 (ll' \varepsilon_x + mm' \varepsilon_y + nn' \varepsilon_z). \quad [115]$$

Из этого можно видеть, что деформация в любой точке вполне определится, если мы будем знать направления главных осей деформации и величины главных удлинений.

Определение главных осей деформации и величин главных удлинений можно произвести таким же путем, как указывалось в параграфе 55.

Можно также показать, что сумма

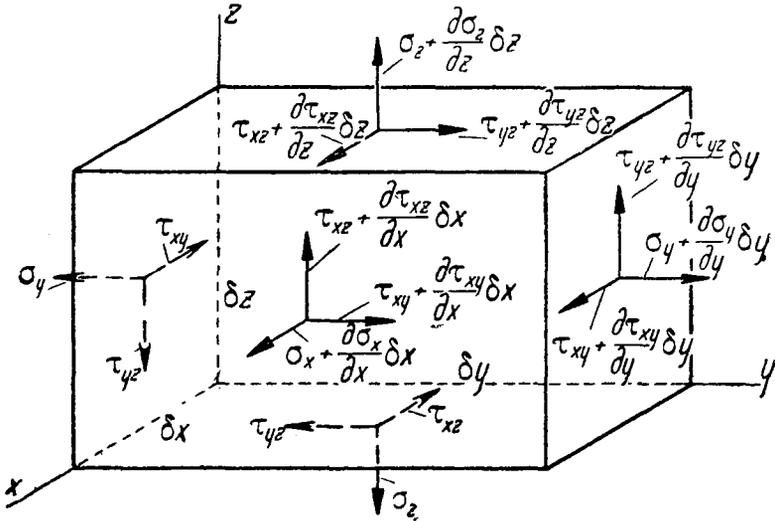
$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

остаётся постоянной при повороте системы координатных осей. Эта сумма имеет, как мы знаем, простой физический смысл: она является относительным объёмным расширением вследствие деформации в данной точке.

---

ГЛАВА СЕДЬМАЯ.  
ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ.

**60. Дифференциальные уравнения равновесия.** В параграфе 52 мы рассмотрели напряженное состояние в определенной точке упругого тела. Рассмотрим теперь изменение напряженного состояния с изменением положения точки. С этой целью надлежит изучить условия равновесия малого прямоугольного параллелепипеда со сторонами  $\delta x$ ,  $\delta y$  и  $\delta z$  (фиг. 116).



Фиг. 116.

Составляющие напряжений, действующие по граням этого малого элемента <sup>1)</sup> и их положительные направления указаны на чертеже. Здесь мы примем во внимание малые изменения составляющих напряжения вследствие малых приращений  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  координат. При определении *усилий*, действующих на элемент, мы считаем грани очень малыми, и усилия получаем умножением напряжения в центре тяжести грани на ее площадь.

<sup>1)</sup> Составляющие напряжения, показанные на фиг. 116, приложены в центрах граней.

Необходимо отметить, что объемную силу, действующую на элемент, которой, при рассмотрении равновесия тетраэдра (фиг. 113), мы пренебрегли, как малой величиной высшего порядка малости, теперь следует принять во внимание, так как она будет величиной того же порядка, что и учитываемые нами члены, выражающие изменения составляющих напряжения.

Если мы через  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  обозначим составляющие этой силы, отнесенные к единице объема элемента, то тогда уравнение равновесия получится суммированием проекций всех сил, действующих на элемент, на направление оси  $x$ :

$$\begin{aligned} & \left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \delta x \right) \delta y \delta z - \sigma_x \delta y \delta z + \\ & + \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \delta y \right) \delta x \delta z - \tau_{xy} \delta x \delta z + \\ & + \left( \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \delta z \right) \delta x \delta y - \tau_{xz} \delta x \delta y + X \delta x \delta y \delta z = 0. \end{aligned}$$

Подобным же образом получатся два других уравнения равновесия.

После сокращений эти уравнения можно представить в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad [116]$$

Уравнения [116] должны быть удовлетворены для всех точек по объему тела. Напряжения меняются по объему тела, и когда мы приходим к поверхности его, то они должны быть таковы, чтобы уравновешивать внешние силы, действующие по поверхности тела.

Эти условия равновесия по поверхности можно получить на основании уравнений [102]. Взяв тетраэдр  $OBCD$  (фиг. 113) так, чтобы грань  $B CD$  совпадала с поверхностью тела, и обозначив через  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$  и  $\bar{Z}$  отнесенные к единице площади составляющие поверхностных сил в данной точке, получим уравнения [102] в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \bar{X} &= l \sigma_x + m \tau_{xy} + n \tau_{xz}; \\ \bar{Y} &= m \sigma_y + n \tau_{yz} + l \tau_{xy}; \\ \bar{Z} &= n \sigma_z + l \tau_{xz} + m \tau_{yz}, \end{aligned} \right\} \quad [117]$$

где  $l$ ,  $m$  и  $n$  — направляющие косинусы, определяющие положение внешней нормали к поверхности тела в рассматриваемой точке.

Если задача состоит в определении напряженного состояния тела, подвергающегося действию данных сил, то нужно решить уравнения [116], и это решение должно быть таким, чтобы удовлетворялись условия на поверхности [117].

Эти уравнения, содержащие шесть составляющих напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$ , недостаточны для определения последних. Задача является статически неопределимой. Чтобы получить решение, мы должны поступить так же, как в случае плоской задачи, т. е. принять во внимание также упругие деформации тела.

**61. Условия совместности.** Следует отметить, что шесть составляющих деформации в каждой точке вполне определяются тремя функциями  $u$ ,  $v$  и  $w$ , представляющими составляющие перемещения. Следовательно, составляющие деформации не могут быть приняты произвольными функциями от  $x$ ,  $y$  и  $z$ , но должны быть подчинены зависимостям, которые вытекают из формул [2] (см. стр. 19).

Итак, на основании формул [2], имеем:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}; \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}; \quad \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y},$$

откуда

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad [a]$$

Две дальнейших зависимости такого же рода мы получим круговой перестановкой букв  $x$ ,  $y$  и  $z$ .

Составив производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}; & \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; & \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}, \end{aligned}$$

мы найдем, что:

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right). \quad [b]$$

Две других зависимости того же вида [b] можно получить перестановкой букв  $x$ ,  $y$  и  $z$ .

Таким образом, мы придем к следующим шести дифференциальным зависимостям между составляющими деформации, которые в силу формул [2] должны быть удовлетворены:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}; \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right); \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right); \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} [118]$$

Эти дифференциальные зависимости называются *условиями совместности*.

На основании закона Гука (формулы [3], стр. 20), условия [118] можно преобразовать в зависимости между составляющими напряжения. Возьмем, например, условие

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}. \quad [c]$$

По формулам [3] и [4] и при помощи обозначений [7] (стр. 22 и 23) имеем:

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [(1 + \nu) \sigma_y - \nu \Sigma];$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [(1 + \nu) \sigma_z - \nu \Sigma];$$

$$\gamma_{yz} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{yz}.$$

Подставив эти выражения в условие [c], получим:

$$(1 + \nu) \left( \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} \right) - \nu \left( \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial y^2} \right) = 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z}. \quad [d]$$

Правая сторона этого уравнения может быть преобразована при помощи уравнений равновесия [116]. Из этих уравнений найдем:

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = -\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - Z;$$

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - Y.$$

Дифференцируя первое из этих равенств по  $z$ , а второе по  $y$ , а затем складывая их вместе, имеем:

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z} = -\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) - \frac{\partial Z}{\partial z} - \frac{\partial Y}{\partial y},$$

или, на основании первого из уравнений [116], получим:

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} + \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial z}.$$

Подставив найденное выражение в уравнение [d] и пользуясь в целях сокращения для оператора Лапласа символом:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

найдем:

$$\begin{aligned} (1 + \nu) \left( \nabla^2 \Sigma - \nabla^2 \sigma_x - \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x^2} \right) - \nu \left( \nabla^2 \Sigma - \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x^2} \right) = \\ = (1 + \nu) \left( \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad [e]$$

Подобные же два уравнения получатся из двух других условий совместности вида [c].

Складывая вместе все три уравнения вида [e], найдем:

$$(1 - \nu) \nabla^2 \Sigma = - (1 + \nu) \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right).$$

Подставив это выражение вместо  $\nabla^2 \Sigma$  в уравнение [e], имеем:

$$\nabla^2 \sigma_x + \frac{1}{1 + \nu} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x^2} = - \frac{\nu}{1 - \nu} \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial X}{\partial x}. \quad [f]$$

Мы можем получить три уравнения такого вида, соответственно первым трем уравнениям [118]. Таким же образом можем преобразовать три остающиеся условия [118] в уравнения следующего вида:

$$\nabla^2 \tau_{yz} + \frac{1}{1 + \nu} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial y \partial z} = - \left( \frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial z} \right). \quad [g]$$

Если объемные силы отсутствуют или если эти силы постоянны по величине, то уравнения  $[f]$  и  $[g]$  получают такой вид:

$$\left. \begin{aligned} (1 + \nu) \nabla^2 \sigma_x + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x^2} &= 0; & (1 + \nu) \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial y \partial z} &= 0; \\ (1 + \nu) \nabla^2 \sigma_y + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial y^2} &= 0; & (1 + \nu) \nabla^2 \tau_{xz} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x \partial z} &= 0; \\ (1 + \nu) \nabla^2 \sigma_z + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial z^2} &= 0; & (1 + \nu) \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x \partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} [119]$$

Мы видим, что, в дополнение к уравнениям равновесия [116] и к условиям на поверхности [117], составляющие напряжения в любом изотропном теле должны удовлетворять шести условиям совместности  $[f]$  и  $[g]$  или [119]. Эта система уравнений, вообще говоря, достаточна для определения составляющих напряжений с полной точностью (см. параграф 64).

Условия совместности содержат лишь вторые производные составляющих напряжения. Следовательно, если внешние силы таковы, что уравнения равновесия [116] вместе с условиями на поверхности [117] могут быть удовлетворены, когда мы возьмем составляющие напряжения либо постоянными, либо линейными функциями координат, то уравнения совместности обращаются в тождества. Эта система напряжений явится правильным решением задачи. Несколько примеров таких задач будет рассмотрено в восьмой главе.

**62. Определение перемещений.** Когда составляющие напряжения получены из предыдущих уравнений, то при помощи закона Гука (формулы [3] и [4], стр. 20 и 22) можем найти составляющие деформации. Затем, для определения перемещений  $u$ ,  $v$  и  $w$ , можем воспользоваться формулами [2] (стр. 19).

Дифференцируя выражения [2] по  $x$ ,  $y$  и  $z$ , мы получим 18 уравнений, содержащих 18 вторых производных  $u$ ,  $v$  и  $w$ . По этим уравнениям найдем все 18 производных. Например, для перемещения  $u$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x}; & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial x}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y}; & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} [a]$$

Вторые производные для двух других составляющих перемещения  $v$  и  $w$  можно получить круговой перестановкой в уравнениях [a] букв  $x$ ,  $y$  и  $z$ .

Затем при помощи двойного интегрирования этих вторых производных, можно найти перемещения  $u$ ,  $v$  и  $w$ . Введение произвольных постоянных интегрирования будет иметь результатом прибавление к величинам  $u$ ,  $v$  и  $w$  линейных функций от  $x$ ,  $y$  и  $z$ , так как очевидно, что такие функции могут быть прибавлены к величинам  $u$ ,  $v$  и  $w$ , без влияния на уравнения [а].

Чтобы составляющие деформации (см. формулы [2]) остались неизменными при таком добавлении, необходимо, чтобы дополнительные линейные функции имели вид:

$$\left. \begin{aligned} u' &= a + by - cz; \\ v' &= d - bx + ez; \\ w' &= f + cx - ey. \end{aligned} \right\} [b]$$

Это значит, что перемещения не всецело определяются напряжениями и деформациями. К перемещениям, найденным по дифференциальным уравнениям [116], [117] и [119], можно присоединить перемещения, соответствующие перемещениям свободного твердого тела.

Постоянные  $a$ ,  $d$  и  $f$  в выражениях [b] представляют поступательное движение тела, а постоянные  $b$ ,  $c$  и  $e$  — являются тремя вращательными движениями твердого тела относительно координатных осей.

Когда имеется достаточное число связей для предотвращения движения тела как свободного твердого тела, то тогда шесть постоянных в уравнениях [b] определятся без затруднений так, чтобы удовлетворялись уравнения связей. Несколько примеров таких выкладок будут приведены ниже.

### 63. Уравнения равновесия в зависимости от перемещений.

Один из способов решения задач теории упругости состоит в исключении составляющих напряжения из уравнений [116] и [117], на основании закона Гука, и в выражении составляющих деформации в зависимости от перемещений по формулам [2]. Таким образом мы приходим к трем уравнениям равновесия, содержащим только три неизвестные функции:  $u$ ,  $v$  и  $w$ .

Подставив в первое из уравнений [116] нормальное напряжение  $\sigma_x$ , по формуле [11] (см. стр. 23):

$$\sigma_x = \lambda \Delta + 2G \frac{\partial u}{\partial x} \quad [a]$$

и по формулам [4]:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} = G \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); \\ \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} = G \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \end{aligned} \right\} [b]$$

найдем

$$(\lambda + G) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + G \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + X = 0.$$

Таким же образом могут быть преобразованы и два других уравнения [116].

Пользуясь символом  $\nabla^2$  (см. стр. 223), представим уравнения равновесия [116] в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + G) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + G \nabla^2 u + X &= 0; \\ (\lambda + G) \frac{\partial \Delta}{\partial y} + G \nabla^2 v + Y &= 0; \\ (\lambda + G) \frac{\partial \Delta}{\partial z} + G \nabla^2 w + Z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad [120]$$

а в случае отсутствия объемных сил:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + G) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + G \nabla^2 u &= 0; \\ (\lambda + G) \frac{\partial \Delta}{\partial y} + G \nabla^2 v &= 0; \\ (\lambda + G) \frac{\partial \Delta}{\partial z} + G \nabla^2 w &= 0. \end{aligned} \right\} \quad [121]$$

Дифференцируя эти уравнения, первое по  $x$ , второе по  $y$  и третье по  $z$ , и складывая вместе, найдем, что

$$(\lambda + 2G) \nabla^2 \Delta = 0,$$

т. е. что объемное расширение  $\Delta$  удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial z^2} = 0. \quad [122]$$

То же заключение имеет силу и тогда, когда объемные силы постоянны по всему объему тела.

Подставив величины напряжений по таким формулам, как [a] и [b], в условия на поверхности [117], найдем:

$$\left. \begin{aligned} \bar{X} &= l\lambda\Delta + G \left( l \frac{\partial u}{\partial x} + m \frac{\partial u}{\partial y} + n \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \\ &+ G \left( l \frac{\partial u}{\partial x} + m \frac{\partial v}{\partial y} + n \frac{\partial w}{\partial z} \right); \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad [123]$$

Уравнения [120] вместе с условиями на поверхности [123] вполне определяют все три переменные функции  $u$ ,  $v$  и  $w$ . Зная их, получим составляющие деформации по формулам [2] и составляющие напряжения по формулам [9] и [4]. Применение этих уравнений будет показано в параграфе 65, а также в главе двенадцатой.

**64. Однозначность решения.** Докажем теперь следующее положение. Если силы, действующие на упругое тело, нам даны, то решение уравнений [116], удовлетворяющее известным нам условиям на поверхности [117] и уравнениям совместности [119], является однозначным, т. е. напряженное состояние получает вполне определенное значение.

Начнем с рассмотрения упругого тела в *ненапряженном, естественном состоянии*. Если тело свободно от действия всех внешних сил, то оно не испытывает деформации, и напряжения во всех точках объема тела равны нулю.

Предположим теперь, что у нас имеются два различных решения вышеупомянутых уравнений. Пусть  $\sigma'_x, \dots, \tau''_{xy}$  — составляющие напряжения одного из этих решений, а  $\sigma_x, \dots, \tau_{xy}$  — другого. Уравнения [116] и [117] получаются тогда, для первого напряженного состояния, такими:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial z} + X &= 0; \\ \dots & \dots; \\ \bar{X} &= l\sigma'_x + m\tau'_{xy} + n\tau'_{xz}; \\ \dots & \dots; \end{aligned}$$

Для второго напряженного состояния имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma''_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau''_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau''_{xz}}{\partial z} + X &= 0; \\ \dots & \dots; \\ \bar{X} &= l\sigma''_x + m\tau''_{xy} + n\tau''_{xz}; \\ \dots & \dots; \end{aligned}$$

Вычитая эти уравнения одни из других, найдем, что распределение напряжений, определяемое разностями

$$(\sigma'_x - \sigma''_x), \quad \dots, \quad (\tau'_{xy} - \tau''_{xy}),$$

удовлетворяет уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\sigma'_x - \sigma''_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\tau'_{xy} - \tau''_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial (\tau'_{xz} - \tau''_{xz})}{\partial z} &= 0; \\ \dots & \dots; \\ l(\sigma'_x - \sigma''_x) - m(\tau'_{xy} - \tau''_{xy}) + n(\tau'_{xz} - \tau''_{xz}) &= 0; \\ \dots & \dots; \end{aligned}$$

которые не заключают внешних сил. Тогда из сказанного выше о ненапряженном, естественном состоянии тела следует, что все разности

$$(\sigma'_x - \sigma''_x), \quad \dots, \quad (\tau'_{xy} - \tau''_{xy})$$

обращаются в нуль, и обе системы распределения напряжений должны совпадать<sup>1)</sup>.

Теорема относительно однозначности решения может быть точно также доказана, если вместо внешних сил нам будут даны перемещения  $u$ ,  $v$  и  $w$  по поверхности тела.

При выводе теоремы мы воспользовались *принципом сложения действия сил*, и на основании его распределение напряжений, для случая:

$$(\sigma'_x - \sigma''_x), \quad \dots, \quad (\tau'_{xy} - \tau''_{xy}),$$

было получено простым вычитанием.

Применение этого принципа возможно лишь постольку, поскольку малые перемещения при деформации не влияют существенным образом на действие внешних сил.

Однако встречаются случаи, при которых и малыми деформациями нельзя пренебречь, и приходится принимать их во внимание при выводе уравнений равновесия. Тогда предыдущее доказательство однозначности решения не годится, и для одной и той же системы внешних нагрузок возможны несколько различных форм равновесия.

Примеры такого рода мы имеем в задачах, относящихся к устойчивости упругих тонких стержней и тонкостенных конструкций.

Доказательство однозначности решения было основано на предположении, что напряжения в теле исчезают, когда оно свободно от внешних сил. Однако, есть случаи, когда в теле могут существовать *начальные напряжения* в отсутствии внешних сил.

Пример такого случая мы встретили при изучении круглого кольца (см. параграф 35). Если вырезана часть кольца между двумя смежными бесконечно близкими сечениями, и концы кольца соединены вновь при помощи сварки или каким-либо другим способом, то получается кольцо, имеющее начальные напряжения<sup>2)</sup>. Несколько примеров этого рода было рассмотрено при решении плоских задач.

1) Эта теорема доказана *Г. Кирхгофом* (*G. Kirchhoff*). См. его *Vorlesungen über Math. Phys., Mechanik*.

2) Кольцо представляет простейший пример многосвязного тела. Для таких тел общие уравнения упругости, выраженные в зависимости от составляющих напряжения, недостаточны для определения напряжений, и, для получения полного решения, необходимо прибегнуть к дополнительному исследованию перемещений. Первые исследования такого рода были выполнены *Дж. Мичеллом* (*J. H. Michell*), „Proc. London Math Soc.“, vol. 30, 1900, p. 103. См. также *Л. Файлон* (*L. N. Filon*), „British Assoc. Adv. Scient. Rept.“, 1921, p. 305, и *В. Вольтерра* (*V. Volterra*), *Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexés*, „Ann. école normale“ série 3, t. 24, Paris 1907, pp. 401—517. Новейшая литература по вопросу о начальных напряжениях приведена в статье *П. Немени* (*P. Neuenyi*), „Z. angew. Math. u. Mech.“, Bd 11, 1931, S. 59.

Мы можем встретить начальные напряжения и в односвязном теле, вследствие некоторых неупругих деформаций в процессе изготовления тела. Мы можем получить, например, значительные начальные напряжения в больших поковках и отливках вследствие неравномерного охлаждения, а также в прокатных металлических профилях, вследствие пластической деформации, возникающей при холодной обработке.

Для определения этих начальных напряжений недостаточно уравнений упругости, и необходимо получение дополнительных сведений относительно процессов образования тела.

Следует заметить, что во всех случаях, когда можно применить принцип сложения действия сил, деформации и напряжения, возникающие под действием внешних сил, не зависят от начальных напряжений и могут быть определены точно таким же образом, как если бы начальных напряжений не было. Тогда полные напряжения получатся наложением напряжений, возникающих под действием внешних сил, на начальные напряжения.

В тех случаях, когда принцип сложения действия сил не применим, напряжений, возникающих от внешних нагрузок, нельзя определить, не зная начальных напряжений. Мы, например, не можем найти напряжения от изгиба под действием поперечных нагрузок в тонком стержне, если стержень имел начальное осевое растяжение или сжатие, и нам неизвестна величина этих начальных напряжений.

**65. Температурные напряжения.** Одной из причин появления начальных напряжений в теле является неравномерное его нагревание. С повышением температуры элементы тела расширяются. Такое расширение, вообще говоря, не может происходить свободно в непрерывном теле, а потому при нагревании возникают напряжения<sup>1)</sup>.

*Температурные напряжения* имеют большое практическое значение во многих случаях проектирования и расчета машин, как, например, при расчете паровых турбин и дизельных двигателей, и их следует рассмотреть более детально.

Представим себе малый элемент, вырезанный из тела, подвергающегося изменению температуры. Если температура меняется непрерывно по всему объему тела, то температуру этого малого элемента можно рассматривать равномерной. Если элемент может свободно расширяться и если через  $T$  обозначить изменение его температуры<sup>2)</sup> и через  $\alpha$  — коэффициент линейного расширения от температуры (который будем считать постоянным), то составляющие деформации от изменения температуры будут равны:

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \alpha T; \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0. \quad [a]$$

<sup>1)</sup> Общие выражения для определения температурных напряжений были выведены Ж. Дюгамелем (*J. M. C. Duhamel*), „Mémoires... par divers savants“, t. 5, Paris, 1838, p. 440, и Францем Нейманом (*Franz Neuman*), „Abh. Akad. Wiss.“, Berlin, 1841; см. также его Vorlesungen über die Theorie der Elastizität der festen Körper, Leipzig, 1885

<sup>2)</sup> Величина  $T$  является температурой в какой-либо точке, отсчитываемой от известной равномерной начальной температуры тела.





Таким образом, полное напряжение от неравномерного нагревания получается наложением гидростатического давления  $[f]$  на напряжения от сил: объемных  $[a]$  и поверхностных  $[e]$ .

К тому же заключению можно прийти и другим путем. Представим себе, что тело, подвергающееся неравномерному нагреванию, разделено на бесконечно малые частицы, и допустим, что деформация от температуры  $[a]$  этих частиц уравнивается путем приложения к каждой частице равномерного давления, величина которого, согласно формуле [8] (стр. 23), определяется выражением  $[f]$ . Таким образом устраняется деформация от температуры, и частицы тела смыкаются друг с другом, образуя непрерывное тело первоначального вида.

Распределение давления  $[f]$  может быть получено путем приложения некоторых объемных сил и поверхностных давлений к упомянутому выше телу, образованному из частиц. Эти силы должны удовлетворять уравнениям равновесия [116] и условиям на поверхности [117]. Подставив в эти уравнения следующие значения напряжений:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p = -\frac{\alpha E T}{1 - 2\nu}, \quad \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0,$$

мы найдем, что для сохранения телом, образованным из частиц своего первоначального вида, необходимо приложить следующие объемные силы:

$$X = \frac{\alpha E}{1 - 2\nu} \frac{\partial T}{\partial x}; \quad Y = \frac{\alpha E}{1 - 2\nu} \frac{\partial T}{\partial y}; \quad Z = \frac{\alpha E}{1 - 2\nu} \frac{\partial T}{\partial z}, \quad [g]$$

а кроме того, по поверхности — давление  $[f]$ .

Предположим теперь, что частицы соединены вместе, и устраним силы  $[g]$  и давление по поверхности  $[f]$ . Тогда, очевидно, температурные напряжения получатся наложением давления  $[f]$  на напряжения, которые возникают в упругом теле при действии объемных сил:

$$X = -\frac{\alpha E}{1 - 2\nu} \frac{\partial T}{\partial x}; \quad Y = -\frac{\alpha E}{1 - 2\nu} \frac{\partial T}{\partial y}; \quad Z = -\frac{\alpha E}{1 - 2\nu} \frac{\partial T}{\partial z},$$

и нормального растяжения по его поверхности, равного

$$\frac{\alpha E T}{1 - 2\nu}.$$

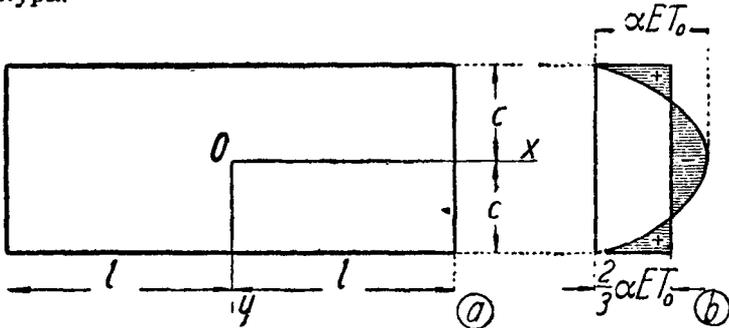
Эти последние напряжения удовлетворяют уравнениям равновесия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} - \frac{\alpha E}{1 - 2\nu} \frac{\partial T}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} - \frac{\alpha E}{1 - 2\nu} \frac{\partial T}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} - \frac{\alpha E}{1 - 2\nu} \frac{\partial T}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad [126]$$

и условиям на поверхности:

$$\left. \begin{aligned} l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{xz} &= l \frac{\alpha ET}{1-2\nu}; \\ m\sigma_y + n\tau_{yz} + l\tau_{xy} &= m \frac{\alpha ET}{1-2\nu}; \\ n\sigma_z + l\tau_{xz} + m\tau_{yz} &= n \frac{\alpha ET}{1-2\nu}. \end{aligned} \right\} [127]$$

вместе с условиями совместности, рассмотренными выше, в параграфе 61. Решение этих уравнений, с присоединением к нему давления [1] даст нам напряжения, возникающие в теле под действием изменения температуры.



Фиг. 117.

В качестве примера применения изложенной выше теории, рассмотрим температурные напряжения в тонкой прямоугольной пластинке (фиг. 117), распределение температуры в которой определяется уравнением:

$$T = T_0 \left( 1 - \frac{y^2}{c^2} \right). \quad [k]$$

Легко видеть, что, задаваясь напряжениями:

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_x &= 2\nu \frac{\alpha ET_0}{1-2\nu} \left( 1 - \frac{y^2}{c^2} \right); \\ \sigma'_y = \sigma'_z &= \frac{\alpha ET_0}{1-2\nu} \left( 1 - \frac{y^2}{c^2} \right); \\ \tau'_{xy} = \tau'_{yz} = \tau'_{xz} &= 0, \end{aligned} \right\} [k]$$

мы удовлетворим уравнениям [126].

Определив составляющие деформации, соответствующие напряжениям [k], и рассматривая задачу, как плоскую, найдем, что уравнение

совместности [21] (см. стр. 34) также будет удовлетворено. Чтобы выполнить условия на поверхности [127], которые требуют нормального растяжения по поверхности тела, равного

$$\frac{\alpha ET}{1 - 2\nu},$$

необходимо лишь наложить напряжения от растягивающих усилий

$$\alpha ET_0 \left( 1 - \frac{y^2}{c^2} \right),$$

приложенных к концам пластинки  $x = \pm l$ , на напряжения [k].

Напряжения, появляющиеся от таких растягивающих усилий, рассмотрены выше, в параграфе 43, где было показано, что с увеличением расстояния от концов, распределение напряжений становится все более и более равномерным.

Предположим, что длина пластинки велика по сравнению с ее шириной, и рассмотрим точки на значительных расстояниях от концов. Тогда напряжения от действия растягивающих усилий, распределенных по параболическому закону, получатся равными:

$$\sigma_x'' = \frac{1}{2c} \int_{-c}^{+c} \alpha ET_0 \left( 1 - \frac{y^2}{c^2} \right) dy = \frac{2}{3} \alpha ET_0. \quad [l]$$

Наложив напряжения [k] и [l] на сжатие, определяемое формулой [f] и равное в данном случае:

$$p = \frac{\alpha ET_0}{1 - 2\nu} \left( 1 - \frac{y^2}{c^2} \right),$$

мы приходим окончательно к следующим температурным напряжениям для точек, находящихся на значительном расстоянии от концов пластинки;

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x' + \sigma_x'' - \frac{\alpha ET_0}{1 - 2\nu} \left( 1 - \frac{y^2}{c^2} \right) = \\ &= \frac{2}{3} \alpha ET_0 - \alpha ET_0 \left( 1 - \frac{y^2}{c^2} \right); \\ \sigma_y &= \sigma_z = 0; \quad \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \end{aligned} \right\} [m]$$

Распределение напряжений представлено диаграммой на фиг. 117b.

Чтобы получить напряжения вблизи концов пластинки, следует найти так, как изложено в параграфе 43, напряжения, возникающие от растягивающих усилий, распределенных по концам пластинки по параболическому закону, и найденные напряжения подставить вместо простого растяжения [l] в вышеприведенные формулы.

Способ, показанный на рассмотренном выше примере, применим во всех тех случаях, когда температура  $T$  в длинной пластинке выражается функцией четной степени от ординаты  $y$  (см. уравнение [h]).

К решению подобных задач мы можем прийти также при помощи следующего рассуждения.

Если распределение температуры не зависит от абсциссы  $x$ , то поперечные сечения пластинки на достаточном расстоянии от концов должны оставаться плоскими. Приложив сжимающие напряжения

$$\sigma'_x = -\alpha ET, \quad [n]$$

мы полностью уничтожим деформацию  $\epsilon_x$  от изменения температуры.

Тогда, для того, чтобы удовлетворить условиям равновесия, мы на сжатия  $[n]$  наложим равномерное растяжение такой величины, чтобы обратить в нуль равнодействующую нормальных усилий в поперечном сечении пластинки. Полное нормальное напряжение в любой точке сечения, получающееся таким путем, будет:

$$\sigma_x = \frac{1}{2c} \int_{-c}^{+c} \alpha ET dy - \alpha ET. \quad [o]$$

Полученное выше решение  $[m]$  является лишь частным случаем найденного сейчас решения  $[o]$ .

Если температура  $T$  не симметрична относительно оси  $x$ , то мы начнем снова со сжимающих напряжений  $[n]$ , устраняющих деформацию  $\epsilon_x$ . В несимметричных случаях эти напряжения дают не только увеличение равнодействующей силы на

$$-\int_{-c}^{+c} \alpha ET dy,$$

но также и увеличение равнодействующей пары сил на

$$-\int_{-c}^{+c} \alpha ET y dy.$$

Чтобы удовлетворить условиям равновесия, мы должны на сжимающие напряжения  $[n]$  наложить равномерное растяжение, такое же, как найденное выше, и напряжения от изгиба:

$$\sigma''_x = \sigma \frac{y}{c},$$

определяемые из того условия, что момент всех усилий, распределенных по сечению, должен равняться нулю.

Это условие выразится так:

$$\int_{-c}^{+c} \frac{\sigma y^2 dy}{c} - \int_{-c}^{+c} \alpha ET y dy = 0,$$

откуда

$$\frac{\sigma}{c} = \frac{3}{2c^3} \int_{-c}^{+c} \alpha ET y dy$$

$$\sigma'_x = \frac{3y}{2c^3} \int_{-c}^{+c} \alpha ET y dy.$$

Тогда полное напряжение получится равным:

$$\sigma_x = -\alpha ET + \frac{1}{2c} \int_{-c}^{+c} \alpha ET dy + \frac{3y}{2c^3} \int_{-c}^{+c} \alpha ET y dy. \quad [p]$$

В нашем рассуждении мы предполагали, что пластинка в направлении оси  $z$  тонка. Рассмотрим теперь случай, когда размер пластинки в направлении оси  $z$  велик (фиг. 117). Таким образом мы получим пластинку, срединная плоскость которой совпадает с плоскостью  $xz$ , а толщина пластинки равна  $2c$ .

Если распределение температуры не зависит от координат  $x$  и  $z$ , и величина  $T$  является функцией четной степени от ординаты  $y$ , так что среднее значение изменения температуры  $T$  по толщине пластинки равно нулю, то поперечные сечения пластинки, перпендикулярные к осям  $x$  и  $z$ , остаются плоскими, и перемещения  $u$  и  $w$  равны нулю.

Так как в рассматриваемом случае не имеется сил, приложенных к поверхностям пластинки  $y = \pm c$ , то мы можем положить  $\sigma_y$  равным нулю. Две других составляющих нормального напряжения, которые необходимы для устранения деформаций  $\epsilon_x$  и  $\epsilon_z$  от температуры, согласно формулам [c] будут равны:

$$\sigma_x = \sigma_z = -\frac{\alpha ET}{1 - \nu}. \quad [n']$$

Края пластинки предположены свободными от внешних сил, а потому формула [n'] не может быть применена для определения напряжений вблизи краев пластинки<sup>1)</sup>.

Если средняя величина изменений температуры не равна нулю, то на напряжения сжатия [n'] нужно наложить напряжения от равномерных растяжений в направлении осей  $x$  и  $z$  с тем, чтобы выполнить условия равновесия. Если, к тому же, температура не симметрична относительно

1) Здесь появляются местные неправильности такого же порядка, как рассмотренные выше в связи с распределением температуры по параболическому закону.

плоскости  $xz$ , то мы должны прибавить напряжения от изгиба. Таким путем мы окончательно придем к следующему выражению:

$$\sigma_x = \sigma_z = -\frac{\alpha ET}{1-\nu} + \frac{1}{2c(1-\nu)} \int_{-c}^{+c} \alpha ET dy + \frac{3y}{2c^3(1-\nu)} \int_{-c}^{+c} \alpha ET y dy, \quad [r]$$

которое аналогично полученному выше выражению [p].

Пользуясь формулой [r], мы можем легко найти температурные напряжения в пластинке, если нам известно распределение температуры  $T$  по толщине пластинки.

Рассмотрим, например, пластинку, первоначально имевшую равномерную температуру  $T_0$  и охлаждаемую так, что по поверхностям  $y = \pm c$  устанавливается постоянная температура  $T_1$ <sup>1)</sup>. При помощи рядов Фурье, распределение температуры в любой момент времени  $t$  можно представить следующим образом:

$$T = T_1 + \frac{4}{\pi} (T_0 - T_1) \left( e^{-p_1 t} \cos \frac{\pi y}{2c} - \frac{1}{3} e^{-p_3 t} \cos \frac{3\pi y}{2c} + \dots \right), \quad [s]$$

где

$$p_1; \quad p_3 = 3^2 p_1; \quad \dots; \quad p_n = n^2 p_1; \quad \dots$$

— некоторые постоянные величины.

Подставив это значение в выражение [r], найдем

$$\sigma_x = \sigma_z = \frac{4\alpha E (T_0 - T_1)}{\pi(1-\nu)} \left[ e^{-p_1 t} \left( \frac{2}{\pi} - \cos \frac{\pi y}{2c} \right) + \frac{1}{3} e^{-p_3 t} \left( \frac{2}{3\pi} + \cos \frac{3\pi y}{2c} \right) + \frac{1}{5} e^{-p_5 t} \left( \frac{2}{5\pi} - \cos \frac{5\pi y}{2c} \right) + \dots \right]. \quad [t]$$

По истечении некоторого времени первый член получает преобладающее значение, и мы можем положить

$$\sigma_x = \sigma_z = \frac{4\alpha E (T_0 - T_1)}{\pi(1-\nu)} \cdot e^{-p_1 t} \left( \frac{2}{\pi} - \cos \frac{\pi y}{2c} \right).$$

При  $y = \pm c$  мы имеем растягивающие напряжения:

$$\sigma_x = \sigma_z = \frac{4\alpha E (T_0 - T_1)}{\pi(1-\nu)} \cdot e^{-p_1 t} \cdot \frac{2}{\pi}.$$

По срединной плоскости, при  $y = 0$ , получим сжимающие напряжения

$$\sigma_x = \sigma_z = -\frac{4\alpha E (T_0 - T_1)}{\pi(1-\nu)} \cdot e^{-p_1 t} \left( 1 - \frac{2}{\pi} \right).$$

<sup>1)</sup> Эта задача была рассмотрена лордом Рэйлеем (Lord Rayleigh). „Phil. Mag.“, series 6, vol. 1, 1901, p. 169.

Точки нулевых напряжений найдутся из уравнения:

$$\frac{2}{\pi} - \cos \frac{\pi y}{2c} = 0,$$

откуда

$$y = \pm 0,560 c.$$

Это распределение температурных напряжений в случае пластинки из прозрачного материала можно исследовать оптическим методом.

Если по поверхностям  $y = \pm c$  пластинки поддерживаются две различных температуры  $T_1$  и  $T_2$ , то, по истечении известного промежутка времени, создается устойчивое состояние теплового потока, и температура пластинки выразится линейной функцией:

$$T = \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{(T_1 - T_2)y}{2c} = 0. \quad [u]$$

Такое распределение температуры, как мы убедились, не вызывает температурных напряжений, если только пластинка может свободно расширяться.

Если края пластинки заделаны при нулевой температуре, то для устранения деформации от температуры необходимо предположить наличие температурных напряжений. Эти напряжения можно определить подстановкой выражения  $[u]$  в формулу  $[n']$ .

Взяв, например,  $T_2 = -T_1$ , имеем:

$$T = \frac{2T_1 y}{2c},$$

и формула  $[n']$  даст нам:

$$\sigma_x = \sigma_z = - \frac{\alpha E \cdot 2T_1 \cdot y}{2c(1-\nu)}. \quad [v]$$

Наибольшее напряжение будет равно

$$(\sigma_x)_{\max} = (\sigma_z)_{\max} = \frac{\alpha E (2T_1)}{2(1-\nu)}. \quad [w]$$

Толщина пластинки явным образом не входит в эту формулу, но при более толстой пластинке получается большая разница температур между обеими поверхностями. Таким образом, толстая пластинка из хрупкого материала подвергается большей опасности излома от температурных напряжений, чем тонкая пластинка.

Иногда поверхность пластинки подвергается действию газов с периодически меняющейся температурой. Если колебания этих температурных изменений — высокой частоты, то распределение температуры в пластинке, по истечении определенного промежутка времени, представляет собой установившийся тепловой поток, рассмотренный выше, на который накладываются колебания температуры.

Амплитуда колебаний температуры материала пластинки по поверхности ее обычно мала сравнительно с колебаниями температуры газов.

Эта амплитуда быстро уменьшается с увеличением расстояния от поверхности <sup>1)</sup>.

Если края пластинки свободны от внешних сил, то установившийся поток тепла не вызывает температурных напряжений, и следует рассмотреть только периодические колебания температуры. Вследствие быстрого уменьшения амплитуды этих колебаний, с увеличением расстояния от поверхности, вторым и третьим членами в выражении [7] можно пренебречь, и мы найдем, что наибольшее напряжение в данной точке пропорционально амплитуде колебания температуры в этой точке.

Взяв, например,  $T = \pm 10^\circ \text{C}$  и приняв для стали

$$\alpha = 0,0000125; \quad E = 2\,100\,000 \text{ кг/см}^2 \quad \text{и} \quad \nu = 0,3,$$

найдем

$$\sigma_x = \sigma_y = - \frac{\alpha E T}{1 - \nu} = \pm 375 \text{ кг/см}^2.$$

Подобным же приемом можно воспользоваться для определения температурных напряжений в скалах из-за ежедневного колебания температуры. На высоких горах и в пустынях, где колебания температуры велики, растягивающие напряжения при наименьших температурах иногда оказываются достаточными, чтобы вызвать появление трещин в скалах.

Аналогичную задачу мы встретим при рассмотрении температурных напряжений в таких бетонных сооружениях, как дамбы, своды и колонны <sup>2)</sup>.

**66. Начальные напряжения.** Способ, примененный выше для определения температурных напряжений, можно применить и к более общей задаче нахождения *начальных напряжений*.

Представим тело разделенным на малые частицы и предположим, что каждая из этих частиц претерпевает определенную остаточную пластическую деформацию или искажение своего вида, вследствие изменений в структуре металла при обработке. Допустим, что эта деформация определяется составляющими

$$\epsilon'_x, \quad \epsilon'_y, \quad \epsilon'_z, \quad \gamma'_{xy}, \quad \gamma'_{xz}, \quad \gamma'_{yz}. \quad [a]$$

Предположим, что эти составляющие деформации малы и выражаются непрерывными функциями от координат. Если они, кроме того, удовлетворяют условиям совместности [118], то частицы, на которые разделено тело, сомкнутся друг с другом после остаточной деформации [a], и в этом случае начальные напряжения не возникнут.

<sup>1)</sup> Распределение температуры при таких условиях рассматривается в сочинениях, посвященных вопросам передачи тепла. См., например, *Л. Ингерсолл и О. Цобель* (L. R. Ingersoll and O. J. Zobel), Theory of Heat Conduction, 1913, и *Г. Грёбер* (H. Gröber), Wärmeübertragung, 1926. Исследования *Г. Эйхельберга* (G. Eichelberg), Forschungsarbeiten, № 263, 1923, показали, что для стальных и чугунных пластинок, толщиной в 35 мм и при 110 периодах в минуту, амплитуда колебания температуры на поверхности пластинки равна  $\pm 10^\circ \text{C}$ , при амплитуде температуры газов, равной  $\pm 640^\circ \text{C}$ . При толщине пластинки в 5 мм, амплитуда колебания температуры составляет всего лишь  $\pm 0,33^\circ \text{C}$ . С увеличением частоты циклов, амплитуда колебания температуры материала пластинки уменьшается и является обратно пропорциональной квадратному корню из этой частоты, так что температурные напряжения при периодических колебаниях температуры получают большое практическое значение для сравнительно медленно движущихся машин.

<sup>2)</sup> Некоторые данные относительно суточных и годовых колебаний температуры можно найти в книге *Ингерсолля и Цобеля* (см. предыдущую выписку).

Рассмотрим теперь общий случай, когда составляющие деформации [a] не удовлетворяют условиям совместности, так что частицы, на которые подразделяется тело, не смыкаются друг с другом после остаточной деформации, и необходимо приложить по поверхности этих частиц усилия, чтобы уравнения совместности были удовлетворены.

Предположив, что после остаточной деформации [a] материал остается вполне упругим, и применив закон Гука, найдем на основании формул [11] и [4], что остаточная деформация [a] может быть устранена, если приложить к каждой частице следующие поверхностные усилия:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon'_x &= -(\lambda\Delta' + 2G\epsilon'_x), & \dots, & \dots; \\ \tau'_{xy} &= -G\gamma'_{xy}, & \dots, & \dots. \end{aligned} \right\} \quad [б]$$

где

$$\Delta' = \epsilon'_x + \epsilon'_y + \epsilon'_z.$$

Поверхностные усилия [б] можно вызвать приложением некоторых объемных и поверхностных сил к телу, составленному из малых частиц. Эти силы должны удовлетворять уравнениям равновесия [116] и условиям на поверхности [117]. Подставив составляющие напряжения [б] в эти уравнения, найдем, что объемные силы должны быть равны:

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{\partial}{\partial x} (\lambda\Delta' + 2G\epsilon'_x) + \frac{\partial}{\partial y} (G\gamma'_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z} (G\gamma'_{xz}); \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots; \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots. \end{aligned} \right\} \quad [с]$$

а поверхностные силы должны равняться:

$$\left. \begin{aligned} \bar{X} &= -l(\lambda\Delta' + 2G\epsilon'_x) - mG\gamma'_{xy} - nG\gamma'_{xz}; \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots; \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots. \end{aligned} \right\} \quad [д]$$

Приложением объемных [с] и поверхностных [д] сил мы устраняем начальную остаточную деформацию [a], так что частицы сомкнутся друг с другом и образуют непрерывное тело.

Допустим теперь, что частицы, на которые было разделено тело, соединены вместе, а силы [с] и [д] устранены. Очевидно, что тогда начальные напряжения получатся наложением на напряжения [б] напряжений, которые возникнут в упругом теле под действием объемных сил:

$$\left. \begin{aligned} X &= -\frac{\partial}{\partial x} (\lambda\Delta' + 2G\epsilon'_x) - \frac{\partial}{\partial y} (G\gamma'_{xy}) - \frac{\partial}{\partial z} (G\gamma'_{xz}); \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots; \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots. \end{aligned} \right\} \quad [е]$$

и поверхностных сил:

$$\left. \begin{aligned} \bar{X} &= l(\lambda\Delta' + 2G\epsilon'_x) + mG\gamma'_{xy} + nG\gamma'_{xz}; \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots; \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots. \end{aligned} \right\} \quad [ф]$$

Таким образом, задача отыскания начальных напряжений приводится к обычной системе уравнений теории упругости, которыми величины фиктивных введенных нами объемных и поверхностных сил вполне определяются, если известна остаточная деформация [a].

В частном случае, когда

$$\epsilon_x = \epsilon'_y = \epsilon'_z = \alpha T \quad \text{и} \quad \gamma'_{xy} = \gamma'_{xz} = \gamma'_{yz} = 0,$$

предыдущие уравнения совпадают с полученными ранее для определения температурных напряжений.

Рассмотрим обратную задачу, когда известны начальные напряжения и желательно найти остаточную деформацию  $[a]$ , вызывающую эти напряжения.

В случае прозрачных материалов, например, стекла, начальные напряжения можно определить, если разрезать тело на малые частицы и измерить деформации, появляющиеся в результате освобождения этих частиц от поверхностных усилий, представляющих собою начальные напряжения в неразрезанном теле.

На основании предыдущего ясно, что начальная деформация вызывает начальные напряжения, если только составляющие деформации  $[a]$  не удовлетворяют уравнениям совместности. В противном случае эти деформации могут существовать и не вызывать начальных напряжений.

Из этого следует, что знания начальных напряжений недостаточно для определения составляющих деформации  $[a]$ . Если нами найдено для этих составляющих какое-нибудь решение, то к этому решению мы можем присоединить любую систему остаточных деформаций, удовлетворяющую уравнениям совместности, и это не окажет влияния на величину начальных напряжений <sup>1)</sup>.

Начальные напряжения, вызывающие свойства двойной преломляемости в стекле, представляют большие затруднения при изготовлении оптических приборов. Чтобы уменьшить эти напряжения, обычно прибегают к отжигу стекла. Предел упругости стекла при высоких температурах очень низок, и материал начинает течь под действием начальных напряжений. При достаточной длительности отжига пластическая деформация материала при высокой температуре приводит в результате к значительному уменьшению начальных напряжений.

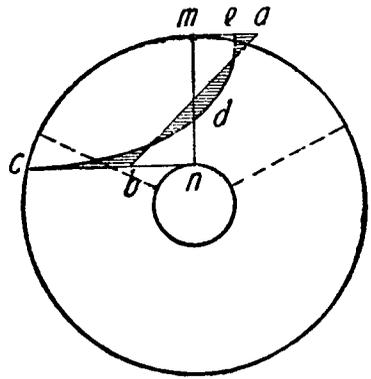
Аналогичное действие отжиг оказывает и на разные металлические отливки и поковки.

Разрезом больших тел на меньшие части можно понизить начальные напряжения по поверхностям разреза и уменьшить общее количество потенциальной энергии, являющейся следствием наличия начальных напряжений, но величина наибольшего начального напряжения далеко не всегда сокращается при таком разрезе.

Например, предположим, что круглое кольцо (фиг. 118) имеет начальные напряжения, симметрично распределенные относительно его центра, и что составляющая  $\sigma_\theta$  начального напряжения изменяется по поперечному сечению  $mn$  кольца, следуя линейному закону (линия  $ab$  на чертеже).

Если кольцо разрезать по радиусам, как показано на чертеже пунктирными линиями, то напряжения  $\sigma_\theta$  по этим разрезам уменьшаются. Это равносильно приложению к концам каждой части кольца двух равных и прямо противоположных пар сил, вызывающих чистый изгиб.

Распределение напряжения  $\sigma_\theta$  по сечению  $mn$  от этого изгиба примерно следует



Фиг. 118.

<sup>1)</sup> То обстоятельство, что остаточная деформация  $[a]$  не определяется вполне величинами начальных напряжений, детально рассмотрено в статье *Г. Рейсснера H. Reissner*, см. „Z. angew. Mech. u. Math.“, Bd 11, 1931, S. 1.

гиперболическому закону (см. параграф 23, стр. 70), что и показано на чертеже кривой  $cde$ . Остаточное напряжение по сечению  $mn$  после разреза будет равно тогда  $\sigma_0 + \sigma'_0$ , что и представлено на чертеже заштрихованной площадью.

Если внутренний радиус кольца мал, то на внутреннем контуре появятся высокие местные напряжения, и наибольшее начальное напряжение после разреза, измеряющееся на фиг. 118 отрезком  $\bar{bc}$ , может оказаться больше максимального начального напряжения до разреза. Это или подобные ему рассуждения объясняют, почему стекло иногда после разреза дает трещины<sup>1)</sup>.

---

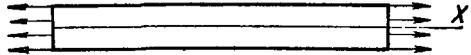
<sup>1)</sup> Несколько примеров определения начальных напряжений в частях, вырезанных из круглой пластинки, дано в статье *M. Laue* (*M. V. Laue*, „Z. techn. Physik“, Bd 11, 1930, S. 385. Некоторые приемы определения остаточных напряжений в холодно-тянутых трубах рассмотрены в статье *Н. Давиденкова*, „Z. Metallkunde“, Bd 24, 1932, S. 25.

## ГЛАВА ВОСЬМАЯ.

### ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ТРЕХ ИЗМЕРЕНИЯХ.

**67. Равномерно напряженное состояние.** При рассмотрении уравнений равновесия [116] и условий на поверхности [117], было отмечено, что правильное решение задачи должно удовлетворять не только уравнениям [116] и [117], но также условиям совместности (см. параграф 61).

Когда отсутствуют объемные силы, или когда объемные силы являются постоянными, эти последние условия содержат лишь вторые производные составляющих напряжения. Следовательно, если мы можем удовлетворить уравнениям [116] и условиям [117], приняв составляющие напряжения либо постоянными, либо в виде линейных функций от координат, то условия совместности обратятся в тождества, и принятые напряжения являются точным решением задачи.



Фиг. 119.

В качестве наиболее простого примера мы можем взять растяжение призматического стержня в осевом направлении (фиг. 119). Пренебрежем объемными силами. Уравнения равновесия удовлетворятся, если принять:

$$\sigma_x = \text{const}; \quad \sigma_y = \sigma_z = 0; \quad \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \quad [a]$$

Очевидно, что условия [117] для боковых поверхностей стержня, свободных от внешних сил, удовлетворяются, так как все составляющие напряжения, за исключением  $\sigma_x$ , равны нулю. Условия на поверхности для концов стержня сводятся к уравнению:

$$\sigma_x = \bar{X}, \quad [b]$$

т. е. мы имеем равномерное распределение растягивающих напряжений по сечению призматического стержня, если только растягивающие напряжения равномерно распределены по концам.

В этом случае решение [a] удовлетворяет уравнениям [116] и [117] и представляет точное решение задачи, так как условия совместности [119] обращаются в тождества.

Если растягивающие напряжения распределены неравномерно по концам, то решение [a] не является точным решением, так как оно не удовлетворяет условиям на поверхности по концам стержня. Правильное решение

оказывается более сложным, так как напряжения по сечению уже не распределяются равномерно. Примеры такого неравномерного распределения мы встречали при рассмотрении плоской задачи (см. стр. 62 и 172).

В качестве второго примера рассмотрим случай равномерного гидростатического сжатия при отсутствии объемных сил. Уравнения равновесия [116] будут удовлетворены, если принять:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p; \quad \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \quad [c]$$

Эллипсоид напряжений в этом случае представляет собою шар. Любые три взаимно перпендикулярные направления можно принять за главные направления, и напряжение по любой плоскости является нормальным сжимающим напряжением, равным давлению  $p$ . Условия на поверхности [117] будут очевидно удовлетворены, если давление  $p$  равномерно распределено по поверхности тела.

**66. Растяжение призматического стержня под действием собственного веса.** Если  $\rho g$  — вес единицы объема стержня (фиг. 120), то объемные силы равняются:

$$\left. \begin{aligned} X &= Y = 0; \\ Z &= -\rho g. \end{aligned} \right\} [a]$$

Дифференциальные уравнения равновесия [116] будут удовлетворены, если принять:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \rho g z; \quad \sigma_x = \sigma_y = 0; \\ \tau_{xy} &= \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \end{aligned} \right\} [b]$$

т. е. в предположении, что по каждому сечению мы имеем равномерное растяжение от веса нижней части стержня.

Легко убедиться, что условия [117] по боковым поверхностям стержня, свободным от внешних сил, выполняются. Для нижнего конца стержня условия на поверхности дают напряжения, равные нулю, а для верхнего — равномерно распределенное растягивающее напряжение  $\sigma_z = \rho g l$ , где  $l$  — длина стержня.

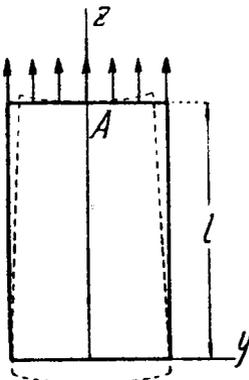
Уравнения совместности [119] также удовлетворяются решением [b].

Следовательно, это последнее является точным решением задачи для равномерного распределения усилий по верху стержня. Оно совпадает с решением, которое обычно приводится в элементарных курсах сопротивления материалов.

Рассмотрим теперь перемещения (см. параграф 62). На основании закона Гука, при помощи формул [3] и [4] (см. стр. 20 и 22) получим

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{\rho g z}{E}; \quad [c]$$

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\nu \frac{\rho g z}{E}; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\nu \frac{\rho g z}{E}; \quad [d]$$



Фиг. 120.

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \quad [e]$$

Перемещения  $u$ ,  $v$  и  $w$  найдем путем интегрирования уравнений [c], [d] и [e]. Интегрирование уравнения [c] дает

$$w = -\frac{\rho g z^2}{2E} + w_0, \quad [f]$$

где  $w_0$  — функция от координат  $x$  и  $y$ , подлежащая в дальнейшем определению.

Подставив выражение [f] во второе и третье из уравнений [e], получим:

$$\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0,$$

откуда

$$u = -z \frac{\partial w_0}{\partial x} + u_0; \quad v = -z \frac{\partial w_0}{\partial y} + v_0, \quad [g]$$

где  $u_0$  и  $v_0$  являются функциями одних только координат  $x$  и  $y$ .

Подставив выражения [g] в уравнения [d] найдем:

$$-z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial u_0}{\partial x} = -\nu \frac{\rho g z}{E}; \quad -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = -\nu \frac{\rho g z}{E}. \quad [h]$$

Так как  $u_0$  и  $v_0$  не зависят от  $z$ , то уравнениям [h] мы сможем удовлетворить, лишь приняв:

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = \nu \frac{\rho g}{E}. \quad [k]$$

Подставив выражения [g] для  $u$  и  $v$  в первое из уравнений [e], найдем:

$$-2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0,$$

а так как  $u_0$  и  $v_0$  не зависят от  $z$ , то должны быть выполнены условия:

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0. \quad [l]$$

На основании уравнений [k] и [l] можем написать общие выражения для функций  $u_0$ ,  $v_0$  и  $w_0$ . Нетрудно видеть, что все эти уравнения удовлетворяются, если положить:

$$\begin{aligned} u_0 &= b_1 y + c_2; \\ v_0 &= -b_1 x + c_1; \\ w_0 &= \frac{\nu \rho g}{2E} (x^2 + y^2) + ax + by + c, \end{aligned}$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $b_1$ ,  $c_1$  и  $c_2$  — произвольные постоянные.

На основании выражений [f] и [g], общие формулы для перемещений представляются в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\nu \rho g x z}{E} - az + b_1 y + c_2; \\ v &= -\frac{\nu \rho g y z}{E} - bz - b_1 x + c_1; \\ w &= \frac{\rho g z^2}{2E} + \frac{\nu \rho g}{2E} (x^2 + y^2) + ax + by + c. \end{aligned} \right\} [n]$$

Шесть произвольных постоянных надлежит определить из условий заделки стержня. Заделка должна быть такова, чтобы предотвращать любое движение стержня, как твердого тела.

Для устранения поступательного движения стержня, предположим центр тяжести  $A$  верхнего конца стержня заделанным так, что

$$u = v = w = 0 \quad \text{при} \quad x = y = 0 \quad \text{и} \quad z = l.$$

Чтобы исключить возможность вращения стержня относительно осей, проходящих через точку  $A$  и параллельных осям  $x$  и  $y$ , закрепим линейный элемент оси  $z$  в точке  $A$ . Тогда в этой точке

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

Возможность вращения относительно оси  $z$  устранится закреплением элементарной площадки, проходящей через точку  $A$  и параллельной плоскости  $xz$ . Тогда в точке  $A$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Пользуясь формулами [m], получим вышеприведенные шесть условий в точке  $A$  в таком виде:

$$\begin{aligned} -al + c_2 &= 0; & -bl + c_1 &= 0; & \frac{\rho g l^2}{2E} + c &= 0; \\ a &= 0; & b &= 0; & b_1 &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$c_2 = 0; \quad c_1 = 0; \quad c = -\frac{\rho g l^2}{E},$$

и окончательно для перемещений получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\nu \rho g x z}{E}; \\ v &= -\frac{\nu \rho g y z}{E}; \\ w &= \frac{\rho g z^2}{2E} + \frac{\nu \rho g}{2E} (x^2 + y^2) - \frac{\rho g l^2}{2E}. \end{aligned}$$

Легко убедиться, что точки, лежащие на оси  $z$ , имеют одни лишь вертикальные перемещения:

$$w = -\frac{\rho g}{2E} (l^2 - z^2).$$

Другие же точки стержня, вследствие поперечного сужения, имеют не только вертикальные, но и горизонтальные перемещения.

Линии, параллельные оси  $z$  до деформации, становятся после деформации наклонными к этой оси, и вид деформированного стержня получается таким, как представлено на фиг. 120 пунктирными линиями.

Поперечные сечения стержня, перпендикулярные к оси  $z$ , после деформации искривляются по поверхности параболоида. Например, точки сечения  $z = c$  после деформации будут находиться на поверхности:

$$z = c + w = c + \frac{\rho g c^2}{2E} + \frac{\nu \rho g}{2E} (x^2 + y^2) - \frac{\rho g l^2}{2E}.$$

Эта поверхность — перпендикулярна всем продольным волокнам стержня, которые после деформации будут наклонными к оси  $z$ , так что здесь не появятся деформации сдвига  $\gamma_{xy}$  и  $\gamma_{xz}$ .

**69. Кручение круглых валов постоянного сечения.** Элементарная теория кручения круглых валов устанавливает, что касательное напряжение  $\tau$  в любой точке сечения (фиг. 121) перпендикулярно к радиусу  $r$  и пропорционально длине его, и что угол скручивания  $\theta$  на единицу длины вала таков, что:

$$\tau = G\theta r, \quad [a]$$

где  $G$  — модуль упругости при сдвиге.

Раскладывая это напряжение на две составляющие, параллельные осям  $x$  и  $y$ , найдем:

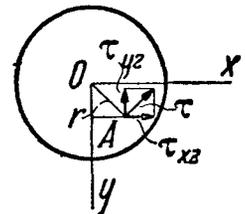
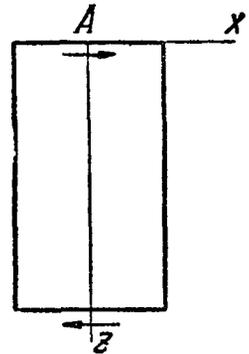
$$\left. \begin{aligned} \tau_{yz} &= G\theta r \cdot \frac{x}{r} = G\theta x; \\ \tau_{xz} &= -G\theta r \cdot \frac{y}{r} = -G\theta y. \end{aligned} \right\} [b]$$

Элементарная теория предполагает также, что

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0; \quad \tau_{xy} = 0.$$

Мы можем доказать, что это элементарное решение при известных условиях является точным решением. Так как все составляющие напряжения либо линейные функции от координат, либо равны нулю, то уравнения совместности [119] удовлетворяются, и необходимо лишь рассмотреть уравнения равновесия [116] и условия на поверхности [117].

Подставив полученные выше выражения для составляющих напряжений в уравнения [116], мы найдем, что эти уравнения будут удовлетворены, если только нет объемных сил.



Фиг. 121.

Боковая поверхность вала свободна от внешних сил, и условия [117], если вспомнить, что для цилиндрической поверхности

$$\cos(N, z) = n = 0,$$

сводятся к уравнению:

$$\tau_{xz} \cos(N, x) + \tau_{yz} \cos(N, y) = 0. \quad [c]$$

В случае круглого цилиндра имеем кроме того:

$$\cos(N, x) = \frac{x}{r}; \quad \cos(N, y) = \frac{y}{r}. \quad [d]$$

Подставив эти значения и выражения [b] для составляющих напряжения в уравнение [c], убедимся в том, что это условие выполняется.

Очевидно также, что для сечений, отличных от круглого, для которых формулы [d] не имеют силы, составляющие напряжения не удовлетворяют условию на поверхности [c], а поэтому решение [a] не применимо. Эти более сложные задачи кручения рассмотрим далее (см. главу девятую).

Рассмотрим теперь условия на поверхности для концов вала. Мы видим, что приложенные к поверхности концов вала касательные усилия должны быть распределены точно таким же образом, как напряжения  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  по любому промежуточному сечению вала. Только в этом случае распределение напряжений согласно формулам [b] является точным решением задачи.

Однако практическое применение решения не ограничивается только такими случаями. На основании принципа Сен-Венана можно заключить, что для длинного скручиваемого стержня, на достаточном расстоянии от концов, напряжения зависят лишь от величины крутящего момента  $M_t$  и практически не зависят от того, каким образом распределяются усилия по концам стержня.

Перемещения в рассматриваемом случае могут быть найдены таким же путем, как в предыдущем параграфе.

Приняв те же условия заделки в точке А, как и для предыдущей задачи, найдем

$$u = -\theta yz; \quad v = \theta xz; \quad w = 0.$$

Это указывает на правильность предположения, что поперечные сечения остаются плоскими, а радиусы — прямолинейными, как это обычно принимается при элементарном изложении теории кручения.

**70. Чистый изгиб призматических стержней.** Рассмотрим призматический стержень, изгибаемый в одной из его главных плоскостей двумя равными и прямо противоположными парами сил  $M$  (фиг. 122).

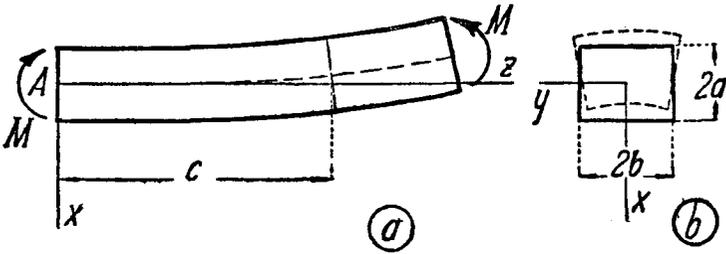
Взяв начало координат в центре тяжести сечения и приняв за плоскость  $xz$  главную плоскость изгиба, получим составляющие напряжения по обычной элементарной теории изгиба:

$$\sigma_z = \frac{E x}{R}, \quad \sigma_y = \sigma_x = 0; \quad \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \quad [a]$$

где  $R$  — радиус кривизны стержня после изгиба.

Подставив выражения [a] для составляющих напряжения в уравнения равновесия [116], найдем, что эти уравнения будут удовлетворены, если только нет объемных сил. Точно также для боковых поверхностей стержня, свободных от внешних сил, выполняются и условия на контуре [117].

По концам стержня условия на контуре [117] требуют, чтобы поверхностные силы распределялись по конечным сечениям таким же образом, как напряжения  $\sigma_z$ . Только при этом условии распределение напряжений [a] представляет точное решение задачи.



Фиг. 122.

Изгибающий момент  $M$  отвечает следующему выражению:

$$M = \int \sigma_z x dF = \int \frac{E x^2 dF}{R} = \frac{E I_y}{R},$$

где  $I_y$  — момент инерции сечения балки относительно нейтральной оси, параллельной оси  $y$ . Из этого выражения находим:

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{E I_y},$$

что является общеизвестной формулой элементарной теории изгиба.

Рассмотрим теперь перемещения, возникающие при чистом изгибе стержня. На основании закона Гука и формул [2] (см. стр. 19) находим согласно решению [a]:

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{x}{R}; \tag{b}$$

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\nu \frac{x}{R}; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\nu \frac{x}{R}; \tag{c}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \tag{d}$$

При помощи этих дифференциальных уравнений и приняв во внимание условия закрепления стержня, получим перемещения таким же путем, как в параграфе 68.

Из уравнения [b] найдем:

$$w = \frac{xz}{R} + w_0,$$

где  $w_0$  — функция одних лишь координат  $x$  и  $y$ .

Второе и третье уравнения [d] дают:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z}{R} - \frac{\partial w_0}{\partial x}; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w_0}{\partial y},$$

откуда

$$u = -\frac{z^2}{2R} - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + u_0; \quad v = -z \frac{\partial w_0}{\partial y} + v_0. \quad [e]$$

Здесь  $u_0$  и  $v_0$  обозначают неизвестные пока функции координат  $x$  и  $y$ , которые подлежат определению в дальнейшем.

Подставив выражения [e] в уравнения [c], имеем:

$$-z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial u_0}{\partial x} = -\nu \frac{x}{R}, \quad -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = -\nu \frac{x}{R}.$$

Эти уравнения должны удовлетворяться при любом значении  $z$ . Следовательно:

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0, \quad [f]$$

а потому

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = -\nu \frac{x}{R}; \quad \frac{\partial v_0}{\partial y} = -\nu \frac{x}{R}.$$

Интегрируя, получим:

$$u_0 = -\frac{\nu x^2}{2R} + f_1(y); \quad v_0 = -\frac{\nu xy}{R} + f_2(x). \quad [g]$$

Теперь, подставив выражения [e] и [g] в первое из уравнений [d], найдем:

$$2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - \frac{\partial f_1(y)}{\partial y} - \frac{\partial f_2(x)}{\partial x} + \frac{\nu y}{R} = 0.$$

Заметив, что лишь первый член этого уравнения зависит от  $z$ , заключаем, что необходимо существование следующих условий:

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial f_1(y)}{\partial y} + \frac{\partial f_2(x)}{\partial x} - \frac{\nu y}{R} = 0.$$

Эти уравнения и уравнения [f] требуют, чтобы

$$w_0 = mx + ny + p,$$

$$f_1(y) = \frac{\nu y^2}{2R} + qy + r,$$

$$f_2(x) = -qx + s,$$

где  $m$ ,  $n$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $r$  и  $s$  — произвольные постоянные.

Таким образом для перемещений получатся следующие выражения:

$$u = -\frac{z^3}{2R} - mz - \frac{vx^2}{2R} + \frac{vy^2}{2R} + qy + r;$$

$$v = -nz - \frac{vxy}{2R} - qx + s;$$

$$w = \frac{xz}{R} + mx + ny + p.$$

Произвольные постоянные найдутся из условий закрепления. Допустим, что точка  $A$  — центр тяжести левого конца стержня, а также линейный элемент оси  $z$  и элементарная площадка, лежащая в плоскости  $xz$ , закреплены. Тогда при  $x = y = z = 0$  имеем:

$$u = v = w = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Эти условия выполняются, если взять все произвольные постоянные равными нулю. Тогда выражения для перемещений примут такой вид:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{1}{2R} [z^3 + v(x^2 - y^2)]; \\ v &= -v \frac{xy}{R}; \\ w &= \frac{xz}{R}. \end{aligned} \right\} [h]$$

Чтобы получить уравнение упругой линии стержня, подставим в выше-найденные выражения [h]  $x = y = 0$ :

$$u = -\frac{z^3}{2R} = -\frac{Mz^3}{2EI_y}; \quad v = w = 0.$$

Это представляет собой уравнение упругой линии в том же самом виде, как его дает элементарная теория изгиба.

Рассмотрим теперь какое-нибудь сечение  $z = c$  на расстоянии  $c$  от левого конца стержня. После деформации точки поперечного сечения будут находиться в плоскости:

$$z = c + w = c + \frac{cx}{R},$$

т. е. при чистом изгибе поперечное сечение остается плоским, как и предполагает элементарная теория.

Чтобы исследовать искажение поперечного сечения в его плоскости, рассмотрим стороны его  $y = \pm b$  (фиг. 122b). После изгиба получается

$$y = \pm b + v = \pm b \left( 1 - \frac{vx}{R} \right).$$

Стороны становятся наклонными, как показано на чертеже пунктирными линиями.

Две других стороны сечения  $x = \pm a$  представляются после изгиба уравнениями:

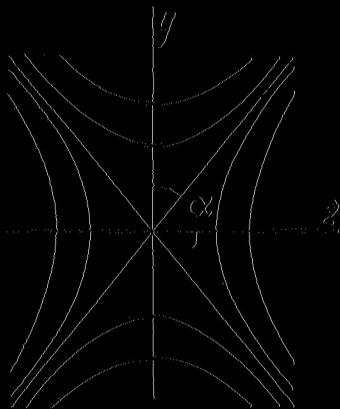
$$x = \pm a + a - \frac{1}{2R} [c^2 + y(a^2 - y^2)],$$

Таким образом, эти стороны изгибаются по параболическим кривым, которые можно заменить, с достаточной точностью, дугой круга радиуса

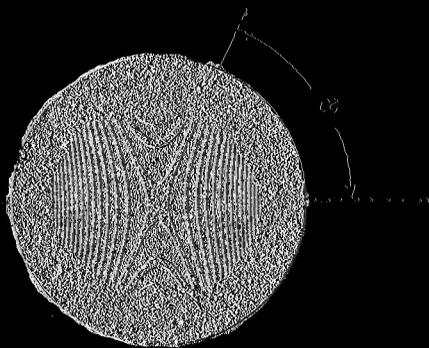
$$\frac{R}{y},$$

если деформация мала.

Из рассмотрения верхней или нижней грани стержня видно, что тогда как кривизна этих граней в продольном направлении после изгиба



Фиг. 123а.



Фиг. 123б.

обращена выпуклостью вниз, кривизна их в поперечном направлении обращена выпуклостью вверх. Горизонтали этой седлообразной поверхности показаны на фиг. 123а.

Приняв  $x$  и  $a$  постоянными в первом из уравнений [4], найдем, что уравнение для горизонталей напишется так:

$$z^2 - yu^2 = \text{const.}$$

Следовательно, горизонтали являются гиперболой с асимптотами

$$z^2 - yu^2 = 0.$$

Из этого уравнения получим для угла  $\alpha$  (фиг. 123а) выражение:

$$\text{tg}^2 \alpha = \frac{1}{y}.$$

Эта зависимость была использована для установления величины Пуассонова отношения  $\nu$ <sup>1)</sup>.

Если отполировать верхнюю поверхность балки и положить на нее стеклянную пластинку, то после изгиба между стеклянной пластинкой и искривленной поверхностью балки получится промежуток переменной толщины.

Эту последнюю можно измерить оптическим путем. Пучок монохроматического света, например желтого цвета натрия, перпендикулярный к стеклянной пластинке, отражается частично пластинкой, а частично поверхностью балки. Два отраженных луча света интерферируют друг с другом в точках, где толщина промежутка такова, что разность между направлениями этих двух лучей равна нечетному числу полуволн колебаний данного света. Снимок на фиг. 123*b*, представляющий гиперболические горизонталы верхней грани изогнутого стержня, был получен таким именно образом.

**71. Чистый изгиб пластинок.** Выводы предыдущего параграфа можно применить и к изгибу пластинок постоянной толщины.

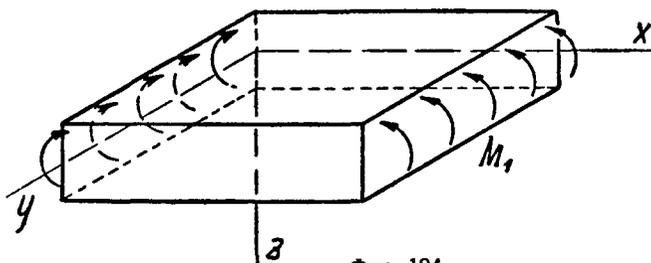
Если напряжения

$$\sigma_x = \frac{Ez}{R}$$

распределены по краям пластинки, параллельным оси  $y$  (фиг. 124), то поверхность пластинки становится<sup>2)</sup> седлообразной, и кривизна последней в плоскостях, параллельных  $xz$ , равна

$$\frac{1}{R}, \quad \text{а} \quad -\frac{\nu}{R}$$

представляет кривизну ее в перпендикулярном направлении.



Фиг. 124.

Если  $h$  обозначает толщину пластинки,  $M_1$  — изгибающий момент на единицу длины краев, параллельных оси  $y$ , а

$$I_y = \frac{1 \cdot h^3}{12}$$

<sup>1)</sup> См. А. Корню (A. Cornu), „Compt. rend.“, t. 69, 1869, p. 333. См. также Р. Штраубель (R. Straubel), „Wied. Ann.“, Bd 68, 1899, S. 369.

<sup>2)</sup> Предполагается, что прогибы малы по сравнению с толщиной пластинки.

— момент инерции сечения пластинки на единицу его длины, то зависимость между  $M_1$  и  $R$  на основании предыдущего параграфа выразится так:

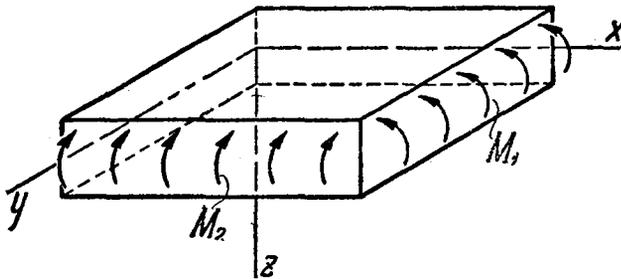
$$\frac{1}{R} = \frac{M_1}{EI_y} = \frac{12M_1}{Eh^3}. \quad [a]$$

Когда имеются изгибающие моменты по двум взаимно перпендикулярным направлениям (фиг. 125), то кривизна упругой поверхности может быть получена наложением.

Пусть

$$\frac{1}{R_1} \quad \text{и} \quad \frac{1}{R_2}$$

являются кривизной упругой поверхности в плоскостях, параллельных координатным плоскостям  $xz$  и  $yz$ , соответственно, и пусть  $M_1$  и



Фиг. 125.

$M_2$  — изгибающие моменты на единицу длины краев, параллельных осям  $y$  и  $x$ , соответственно.

Тогда, на основании выражения [a] и применяя принцип сложения действия сил, найдем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R_1} &= \frac{12}{Eh^3} (M_1 - \nu M_2); \\ \frac{1}{R_2} &= \frac{12}{Eh^3} (M_2 - \nu M_1). \end{aligned} \right\} [b]$$

Моменты считаются положительными, если они вызывают прогиб пластинки выпуклостью вниз.

Решая уравнения [b] относительно  $M_1$  и  $M_2$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{1}{R_1} + \nu \frac{1}{R_2} \right), \\ M_2 &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{1}{R_2} + \nu \frac{1}{R_1} \right). \end{aligned} \right\} [c]$$

При малых прогибах мы можем воспользоваться приближенными значениями:

$$\frac{1}{R_1} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \frac{1}{R_2} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Тогда, пользуясь обозначением:

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = D, \quad [128]$$

найдем:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_2 &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \end{aligned} \right\} [129]$$

Постоянная величина  $D$  называется *жесткостью на изгиб пластинки (цилиндрической жесткостью)*.

В частном случае, когда пластинка изгибается по цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси  $y$ , имеем:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

и на основании выражений [129], получим:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \\ M_2 &= -\nu D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \end{aligned} \right\} [130]$$

В частном случае, когда  $M_1 = M_2 = M$ , имеем:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R}.$$

Пластинка изгибается по сферической поверхности, и зависимость между кривизной и изгибающим моментом, на основании выражений [c], представится так:

$$M = \frac{Eh^3}{12(1-\nu)} \cdot \frac{1}{R} = \frac{D(1+\nu)}{R}. \quad [131]$$

Этими результатами мы будем в дальнейшем пользоваться.

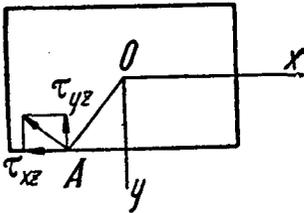
## ГЛАВА ДЕВЯТАЯ.

### КРУЧЕНИЕ.

**72. Кручение призматических стержней.** Было уже показано (параграф 69), что точное решение задачи кручения круглого вала получится, если предположить, что сечения вала остаются плоскими и поворачиваются при скручивании без какого-либо искажения.

Эта теория, предложенная Кулоном <sup>1)</sup>, позднее была применена Навье <sup>2)</sup> к призматическим стержням не круглого поперечного сечения. Основываясь на упомянутых выше предположениях, Навье пришел к ошибочным заключениям, что, при данной величине крутящего момента, угол скручивания стержней обратно пропорционален центральному полярному моменту инерции поперечного сечения и что наибольшее касательное напряжение получается в точках, наиболее удаленных от центра тяжести сечения.

Нетрудно видеть, что указанные выше предположения находятся в прямом противоречии с условиями на поверхности.



Фиг. 126.

Возьмем, например, стержень прямоугольного сечения (фиг. 126). Из предположений, принятых Навье, следует, что в любой точке *A* контура касательное напряжение должно действовать по направлению, перпендикулярному к линии *OA*.

Раскладывая это напряжение на два составляющих напряжения  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$ , убедимся в необходимости наличия здесь дополнительного касательного напряжения, равного напряжению  $\tau_{yz}$  и действующего на элементарную

площадку, лежащую на боковой поверхности стержня в точке *A* (см. стр. 17), что противоречит отсутствию внешних сил по боковой поверхности стержня, так как скручивание предполагается происходящим под действием пар сил, приложенных по концам.

Простейший опыт с прямоугольным стержнем, представленным на фиг. 127, показывает, что поперечные сечения стержня не остаются при кручении плоскими и что искажения прямоугольных элементов на поверхности стержня больше всего у середин сторон стержня, т. е. в точках, ближайших к оси стержня.

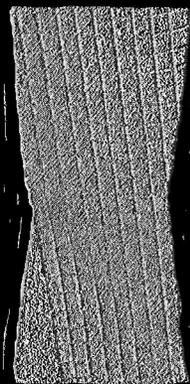
<sup>1)</sup> См. Кулон (*Coulomb*), *Histoire de l'Académie*, 1784, Paris, 1787, pp. 229—269.

<sup>2)</sup> См. Навье (*Navier*), *Résumé des leçons sur l'application de la mécanique*, 3 издание под редакцией Сен-Венана (*Saint-Venant*), Paris, 1864.

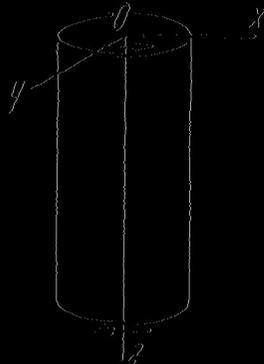
Правильное решение задачи о кручении призматических стержней парами сил, приложенными к концам, было дано Сен-Венаном <sup>1)</sup>.

Он применил так называемый *полуобратный способ*, а именно, вначале он предполагает, что некоторые составляющие напряжения равны нулю, и доказывает, что остальные составляющие напряжения можно подобрать таким образом, чтобы удовлетворялись уравнения равновесия [116], условия на поверхности [117] и уравнения совместности [119]. Тогда из однозначности решения уравнений упругости (параграф 64), он приходит к заключению, что начальное предположение относительно составляющих напряжения — правильно, а полученное решение является точным решением задачи кручения.

Рассмотрим призматический стержень, скрученный парами сил, приложенными по его концам (фиг. 128). Руководствуясь решением для круглого вала, Сен-Венан допустил, что, в более общем случае призматического стержня любого поперечного сечения, все составляющие напряжения за исключением  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  обращаются в нуль, так что остается лишь исследовать распределение касательных напряжений по поперечным сечениям стержня <sup>2)</sup>.



Фиг. 127.



Фиг. 128.

Подставив

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0; \quad \tau_{xy} = 0, \quad [a]$$

в дифференциальные уравнения равновесия [116] и предположив, что объемных сил, действующих на стержень, нет, найдем:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \quad [b]$$

Первые два из этих уравнений показывают, что распределение напряжений не зависит от координаты  $z$ , а следовательно оно одинаково для всех поперечных сечений стержня. Распределение по сечению должно быть таким, чтобы удовлетворялось третье из уравнений [b]. Это требование легко может быть удовлетворено введением такой функции напряжений  $\phi$  от координат  $x$  и  $y$ , что:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y}; \quad \tau_{yz} = - \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad [132]$$

<sup>1)</sup> *St. Venant (Saint-Venant)*, *Mémoires savants étrangers*, t. 14, 1855. См. также примечание Сен-Венана к упомянутому выше, на противоположной странице, труду *Навье*, и книгу *Тоддлнера и Персона* (*J. Toddhunter and K. Pearson*), *History of the Theory of Elasticity*, vol. 2.

<sup>2)</sup> Сен-Венан в своем решении делает, собственно говоря, допущения относительно перемещений  $u$ ,  $v$  и  $w$ , равносильные вышеуказанному предположению относительно составляющих напряжений.

Обратимся теперь к уравнениям совместности [119]. Первые три и последнее из этих уравнений обращаются в тождества в силу нашего предположения относительно напряжений  $[a]$ , а остальные два уравнения приводятся к следующему виду:

$$\frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial y^2} = 0. \quad [c]$$

Подставив в эти уравнения выражения [132] для напряжений, найдем:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = 0. \quad [d]$$

Следовательно

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = A, \quad [133]$$

где  $A$  — постоянная величина.

Итак, функция напряжений, которая вводится при помощи выражений [132], должна удовлетворять дифференциальному уравнению [133] в частных производных.

Рассмотрим теперь условия на контуре [117]. Для боковой поверхности стержня, которая свободна от внешних сил, и нормаль к которой перпендикулярна к оси  $z$ , мы имеем:

$$\bar{X} = \bar{Y} = \bar{Z} = 0$$

и

$$\cos(N, z) = n = 0.$$

Первые два из уравнений [117] обращаются в тождества, а третье — приводится к следующему виду:

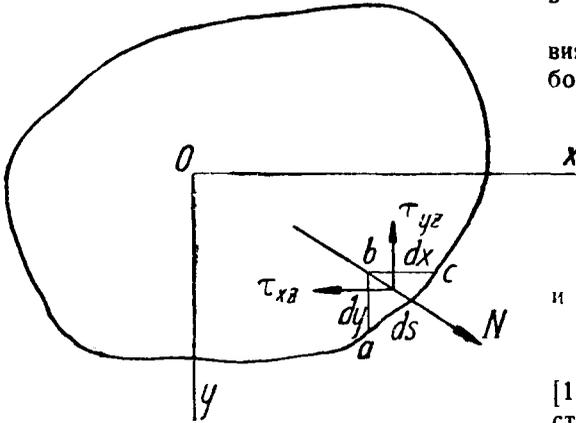
$$l \tau_{xz} + m \tau_{yz} = 0. \quad [e]$$

Это означает, что равнодействующее касательное напряжение на контуре направлено по касательной к контуру (фиг. 129).

Мы видели на стр. 256, что это условие может быть выполнено, если боковая поверхность стержня свободна от внешних усилий.

Рассматривая бесконечно малый элемент  $abc$  у боковой поверхности (фиг. 129) со сторонами  $dx$ ,  $dy$  и  $ds$ , имеем:

$$l = \cos(N, x) = \frac{dy}{ds}; \quad m = \cos(N, y) = -\frac{dx}{ds}.$$



Фиг. 129.

Тогда, на основании этих значений и выражений [132] условие на контуре [e] представится так:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} = 0. \quad [134]$$

Это означает, что функция напряжений  $\varphi$  на контуре поперечного сечения должна иметь постоянное значение.

В случае односвязных контуров, т. е. для сплошных стержней, величина этой постоянной может быть выбрана произвольно, и в дальнейшем мы будем ее принимать равной нулю.

Таким образом, чтобы найти распределение напряжений по поперечному сечению скручиваемого стержня, следует подыскать такую функцию  $\varphi$ , которая удовлетворяла бы уравнению [133] и обращалась бы в нуль на контуре. Несколько примеров применения этой общей теории к частным случаям сечений различного вида будет приведено ниже.

Рассмотрим теперь условия по концам скручиваемого стержня. Нормали к концевым сечениям параллельны оси  $z$ . Следовательно,  $l = m = 0$ ,  $n = \pm 1$  и уравнения [117] становятся такими:

$$\bar{X} = \pm \tau_{xz}, \quad \bar{Y} = \pm \tau_{yz}, \quad [f]$$

где знак  $\pm$  надлежит брать для того конца стержня, внешняя нормаль которого имеет направление положительной оси  $z$ , например, для нижнего конца стержня, изображенного на фиг. 128.

Мы видим, что по концам касательные усилия распределяются таким же образом, как касательные напряжения по поперечным сечениям стержня.

Легко проверить, что эти усилия приводятся к скручивающей паре сил. Подставив в уравнение [f] значения напряжений [132] и заметив, что функция  $\varphi$  на контуре равна нулю, найдем:

$$\begin{aligned} \iint X \, dx \, dy &= \iint \tau_{xz} \, dx \, dy = \iint \frac{\partial \varphi}{\partial y} \, dx \, dy = \int dx \int \frac{\partial \varphi}{\partial y} \, dy = 0, \\ \iint \bar{Y} \, dx \, dy &= \iint \tau_{yz} \, dx \, dy = - \iint \frac{\partial \varphi}{\partial x} \, dx \, dy = \\ &= - \int dy \int \frac{\partial \varphi}{\partial x} \, dx = 0. \end{aligned}$$

Таким образом равнодействующая усилий, распределенных по концевым сечениям стержня, равна нулю, и эти усилия представляют собой, пару сил, величина которой равна:

$$M_t = \iint (\bar{Y}x - \bar{X}y) \, dx \, dy = - \iint \frac{\partial \varphi}{\partial x} x \, dx \, dy - \iint \frac{\partial \varphi}{\partial y} y \, dx \, dy.$$

Выполнив интегрирование по частям и учтя, что на контуре  $\varphi = 0$  найдем:

$$M_t = 2 \iint \varphi \, dx \, dy. \quad [135]$$

Мы видим, что, принимая четыре составляющих напряжения  $[a]$  равными нулю и определив остальные две составляющие из уравнений [132], [133] и [134], мы получим распределение напряжений, которое удовлетворяет уравнениям равновесия [116] и условиям совместности [119], оставляет боковую поверхность стержня свободной от внешних сил и дает по концам крутящий момент, величина которого определяется выражением [135]. Итак, все уравнения упругости выполнены, и полученное таким путем решение является точным решением задачи о кручении.

Было отмечено, что решение требует, чтобы усилия по концам стержня были распределены определенным образом; но практическое применение этого решения не ограничивается подобными случаями. На основании принципа Сен-Венана следует, что в длинном скручиваемом стержне, на достаточном расстоянии от концов, напряжение зависит лишь от величины крутящего момента  $M_t$  и практически не зависит от того, каким образом приводящие вал в движение силы приложены к концевым сечениям.

### 73. Перемещения при кручении призматических стержней

На основании выражений для составляющих напряжения, найденных в предыдущем параграфе, и по закону Гука, имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \quad [a]$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{G} \tau_{xz}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{G} \tau_{yz}. \quad [b]$$

Для поперечных сечений, имеющих две оси симметрии, из условий симметрии следует, что поперечные сечения поворачиваются при скручивании относительно центров их тяжести, и осевая линия стержня остается прямолинейной.

Полагая верхний конец этой оси (фиг. 128) закрепленным таким же образом, как было предположено раньше для круглого вала (параграф 69), найдем, что уравнения [a] и условия закрепления будут удовлетворены, если принять:

$$u = -\theta yz; \quad v = \theta xz, \quad [136]$$

где  $\theta$  — угол скручивания на единицу длины стержня.

В случае несимметричных поперечных сечений, или сечений с одной осью симметрии, поворот поперечных сечений при скручивании получается относительно точки, которая, вообще говоря, не совпадает с центром тяжести и которая называется *центром скручивания*.

Если мы закрепим центр скручивания верхнего сечения (фиг. 128) таким же точно образом, как раньше, и возьмем эту точку за начало координат, то мы можем пользоваться и в этом случае формулами [136].

Подставив значения перемещений по формулам [136] в выражения [b], находим:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{G} \tau_{xz} + \theta y, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{G} \tau_{yz} - \theta x. \quad [137]$$

Эти уравнения дают перемещения  $w$ , определяющие *искривление* сечений при скручивании, если известны напряжения.

Это искривление Навье не учел, но оно было принято во внимание Сен-Венаном. Несколько примеров определения перемещений  $w$  будет рассмотрено ниже.

Чтобы получить угол скручивания  $\theta$ , мы продифференцируем первое из уравнений [b] по ординате  $y$ , а второе по абсциссе  $x$ , и вычтем одно из другого. Это дает:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1}{G} \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} \right). \quad [c]$$

При помощи формул [132] и [136], это уравнение приведем к следующему виду:

$$-2G\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}. \quad [138]$$

Итак, если на основании уравнений [133] и [134] найдена функция напряжений, то угол скручивания можно определить без затруднений.

Из уравнения [138] мы видим, что постоянная  $A$  в выражении [133] имеет очень простое значение:

$$A = -2G\theta. \quad [139]$$

**74. Стержни эллиптического поперечного сечения.** Пусть контур поперечного сечения (фиг. 130) задан уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \quad [a]$$

Тогда мы удовлетворим уравнению [133] и условию на контуре [134], если возьмем функцию напряжений в следующем виде:

$$\varphi = m \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right), \quad [b]$$

где  $m$  — постоянная. Подставив выражение [b] в основное уравнение [133], найдем:

$$m = \frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)} A.$$

Следовательно:

$$\varphi = \frac{a^2 b^2 A}{2(a^2 + b^2)} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right). \quad [c]$$

Величина постоянной  $A$  определится из выражения [135]. Подставив в него значение функции  $\varphi$  по формуле [c], найдем

$$M_t = \frac{a^2 b^2 A}{a^2 + b^2} \left( \frac{1}{a^2} \iint x^2 dx dy + \frac{1}{b^2} \iint y^2 dx dy - \iint dx dy \right). \quad [d]$$

Так как:

$$\iint x^2 dx dy = I_y = \frac{\pi b a^3}{4};$$

$$\iint y^2 dx dy = I_x = \frac{\pi a b^3}{4};$$

$$\iint dx dy = \pi ab,$$

то по формуле [d] получим:

$$M_t = -\frac{\pi a^3 b^3 A}{2(a^2 + b^2)},$$

откуда

$$A = -\frac{2M_t(a^2 + b^2)}{\pi a^3 b^3}. \quad [e]$$

Тогда на основании выражения [c] имеем:

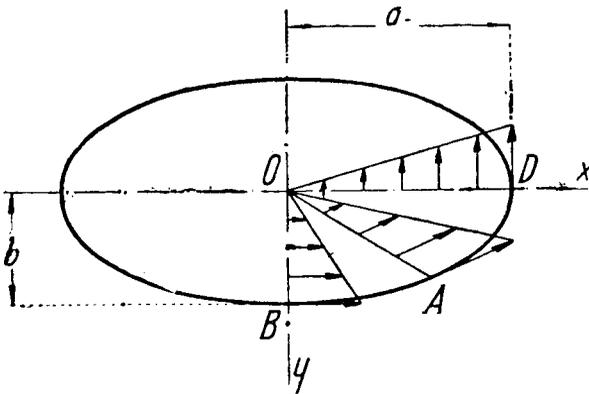
$$\varphi = -\frac{M_t}{\pi ab} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right). \quad [f]$$

Подставив это значение функции  $\varphi$  в формулы [132], найдем составляющие напряжения:

$$\tau_{xz} = -\frac{2M_t y}{\pi a b^3}; \quad \tau_{yz} = \frac{2M_t x}{\pi a^3 b}. \quad [140]$$

Отношение между составляющими напряжений пропорционально  $y : x$  и, следовательно, оно остается постоянным по длине радиуса, например радиуса  $OA$  (фиг. 130).

Это значит, что равнодействующая касательных напряжений по любому радиусу  $OA$  имеет постоянное направление, которое очевидно совпадает с направлением касательной к контуру в точке  $A$ . По вертикальной оси  $OB$  составляющая напряжения  $\tau_{yz}$  равна нулю, и равнодействующая напряжений равна  $\tau_{xz}$ . По горизонтальной оси  $OD$  равнодействующее касательное напряжение равно  $\tau_{yz}$ .



Фиг. 130.

Очевидно, что наибольшее напряжение будет на контуре, и легко можно доказать, что этот максимум имеет место на концах меньшей оси.

Очевидно, что наибольшее напряжение будет на контуре, и легко можно доказать, что этот максимум имеет место на концах меньшей оси.

эллипса. Подставив  $y = b$  в первое из выражений [140], найдем, что абсолютная величина этого максимума равна:

$$\tau_{\max} = \frac{2M_t}{\pi ab^2}. \quad [141]$$

При  $a = b$  эта формула совпадает с общеизвестной формулой для круглого сечения.

Подставив постоянную  $A$  по формуле [e] в выражение [139], получим выражение для угла скручивания:

$$\theta = M_t \cdot \frac{a^2 + b^2}{\pi a^3 b^3 G}. \quad [142]$$

Множитель, на который нужно разделить крутящий момент, чтобы получить угол скручивания на единицу длины вала, называется *жесткостью при кручении*. Обозначив ее через  $C$ , найдем, по формуле [142], ее величину для эллиптического сечения:

$$C = \frac{\pi a^3 b^3 G}{a^2 + b^2} = \frac{G}{4\pi^2} \frac{(F)^4}{I_p}, \quad [143]$$

где

$$F = \pi ab; \quad I_p = \frac{\pi ab^3}{4} + \frac{\pi ba^3}{4},$$

соответственно — площадь и центральный полярный момент инерции поперечного сечения.

Зная составляющие напряжения [140], легко получим перемещения. Составляющие  $u$  и  $v$  определяются по формулам [136].

Перемещение  $w$  найдется по уравнениям [137]. Подставив значения составляющих напряжений [140] и угла скручивания [142] в эти уравнения, после интегрирования получим:

$$w = M_t \cdot \frac{(b^2 - a^2)xy}{\pi a^3 b^3 G}. \quad [144]$$

Это показывает, что горизонтали искривленного поперечного сечения являются гиперболами, асимптотами которых являются главные оси эллипса.

75. Другие элементарные решения задач на кручение призматических стержней. При изучении задачи о кручении Сен-Венан рассмотрел несколько решений уравнения [133] в виде целых полиномов.

Чтобы решить задачу, представим функцию напряжений в следующем виде:

$$\psi = \varphi_1 + \frac{A}{4} (x^2 + y^2). \quad [a]$$

Тогда, на основании уравнения [133], получим:

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} = 0, \quad [b]$$

а на контуре, согласно уравнению [134], имеем:

$$\varphi_1 + \frac{A}{4} (x^2 + y^2) = \text{const.} \quad [c]$$

Таким образом задача кручения сводится к получению решений уравнения [b], удовлетворяющих условиям на контуре [c]. Чтобы получить решения в виде многочленов, возьмем функцию комплексного переменного

$$(x + iy)^n. \quad [d]$$

Вещественная и мнимая части этого выражения каждая являются решением уравнения [b] (см. стр. 186). Взяв, например,  $n = 2$ , мы получим решения:

$$x^2 - y^2 \quad \text{и} \quad 2xy.$$

При  $n = 3$  мы получим решения:

$$x^3 - 3xy^2 \quad \text{и} \quad 3x^2y - y^3.$$

При  $n = 4$  мы придем к решениям в виде однородных функций четвертой степени, и так далее.

Суммируя такие решения, мы получим различные решения в виде целых полиномов. Взяв, например:

$$\varphi = \frac{A}{4} (x^2 + y^2) + \varphi_1 = \frac{A}{4} \left[ \frac{1}{2} (x^2 + y^2) - \frac{1}{2a} (x^3 - 3xy^2) + b \right], \quad [e]$$

мы получим решение уравнения [133] в виде полинома третьей степени относительно постоянных  $a$  и  $b$ , которые будут подобраны далее.

Этот полином является решением задачи кручения, если он удовлетворяет условию на контуре [134], т. е. если контур поперечного сечения стержня отвечает уравнению:

$$\frac{1}{2} (x^2 + y^2) - \frac{1}{2a} (x^3 - 3xy^2) + b = 0. \quad [f]$$

Меняя постоянную  $b$  в этом уравнении, мы получим различные виды сечений. Взяв

$$b = -\frac{2}{27} a^2,$$

мы получим решение для равностороннего треугольника. Уравнение [f] в этом случае представится в следующем виде:

$$\left(x - \sqrt{3}y - \frac{2}{3}a\right) \left(x + \sqrt{3}y - \frac{2}{3}a\right) \left(x + \frac{1}{3}a\right) = 0,$$

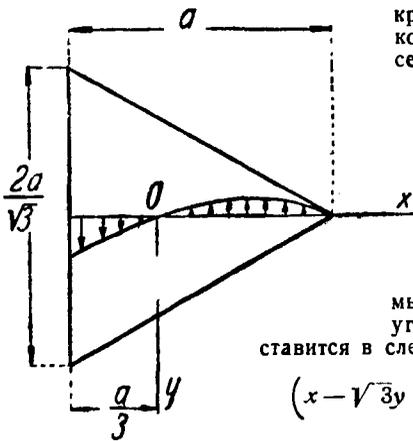
что является произведением уравнений трех сторон треугольника, показанного на фиг. 131.

Учтя, что  $A = -2G\theta$  и подставив:

$$= -G\theta \left[ \frac{1}{2} (x^2 + y^2) - \frac{1}{2a} (x^3 - 3xy^2) - \frac{2}{27} a^2 \right] \quad [g]$$

в выражения [132], мы получим составляющие напряжения  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$ . По оси  $x$ , из условий симметрии, напряжение  $\tau_{xz} = 0$ , и мы получим, по уравнению [g]:

$$\tau_{yz} = \frac{3G\theta}{2a} \left( \frac{2ax}{3} - x^2 \right). \quad [h]$$



Фиг. 131.

Наибольшее напряжение получится по середине сторон треугольника, где, согласно формуле [h],

$$\tau_{\max} = \frac{G\theta a}{2}. \quad [k]$$

В углах треугольника касательное напряжение равно нулю (см. фиг. 131). Подставив функцию  $\varphi$  [g] в формулу [135], найдем:

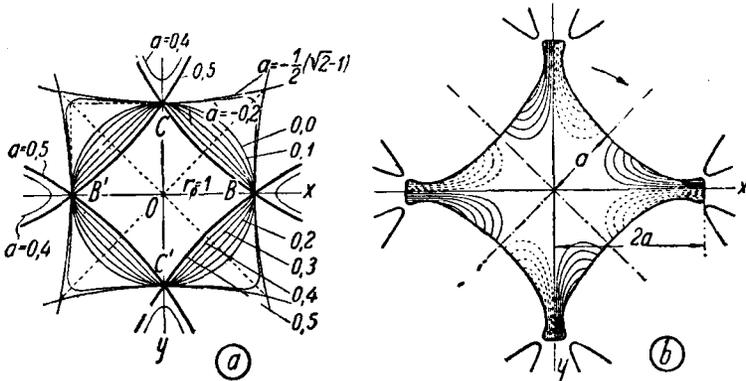
$$M_t = \frac{G\theta a^4}{15\sqrt{3}} = \frac{3}{5} \theta G I_p. \quad [l]$$

Взяв решение уравнения [133] в виде полинома четвертой степени, содержащего лишь четные степени координат  $x$  и  $y$ , мы получим функцию напряжений:

$$\varphi = -G\theta \left[ \frac{1}{2} (x^2 + y^2) - \frac{a}{2} (x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + \frac{1}{2} (a - 1) \right].$$

Условие на контуре [134] будет удовлетворено, если контур сечения отвечает уравнению:

$$x^2 + y^2 - a(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + a - 1 = 0.$$



Фиг. 132.

Меняя величину  $a$ , Сен-Венан получил семейство поперечных сечений, показанных на фиг. 132a.

Комбинируя решения в виде полиномов четвертой и восьмой степеней, Сен-Венан пришел к поперечному сечению, показанному на фиг. 132b.

На основании этих исследований, Сен-Венан пришел к некоторым общим важным для практических приложений заключениям.

Он показал, что, в случае односвязных контуров, при одной и той же площади поперечного сечения, жесткость на кручение увеличивается, если полярный момент инерции сечения уменьшается.

Таким образом, из валов с одинаковым количеством затраченного на них материала круглый вал дает наибольшую жесткость на кручение.

К подобным же заключениям можно прийти и относительно наибольшего значения касательных напряжений. При данной величине скручивающего момента и данной площади поперечного сечения наименьшее значение максимальных напряжений будем иметь для сечения с наименьшим полярным моментом инерции.

Сравнивая различные поперечные сечения с односвязными контурами, Сен-Венан нашел, что жесткость при кручении можно определить приближенно по формуле [143], т. е. путем замены данного вала валом эллиптического поперечного сечения, имеющим ту же площадь сечения и тот же полярный момент инерции, что и данный вал.

Наибольшие напряжения во всех случаях, рассмотренных Сен-Венаном, были получены им на контуре в тех точках, которые ближе всего находятся от центра тяжести сечения.

Более детальное исследование этого вопроса Файлоном <sup>1)</sup> показало однако, что есть случаи, когда точки максимального напряжения, хотя и остаются всегда на контуре, но уже не являются точками, ближайшими к центру тяжести сечения.

Приняв в выражении [d]  $n = 1$  и  $n = -1$ , и пользуясь полярными координатами  $r$  и  $\psi$ , мы получим следующие решения уравнения [b]:

$$\varphi_1 = r \cos \psi, \quad \varphi_1 = \frac{1}{r} \cos \psi.$$

Тогда функцию напряжений [a] можно взять в следующем виде:

$$\varphi = \frac{A}{4} (x^2 + y^2) - \frac{Aa}{2} r \cos \psi + \frac{Ab^2}{2} \frac{a}{r} \cos \psi - \frac{A}{4} b^2, \quad [m]$$

где  $a$  и  $b$  — постоянные. Эта функция удовлетворяет условию [134], если на контуре поперечного сечения она обращается в нуль, т. е., согласно выражению [m], выполняется такое условие:

$$r^2 - b^2 - 2a(r^2 - b^2) \frac{\cos \psi}{r} = 0 \quad [n]$$

или иначе:

$$(r^2 - b^2) \left( 1 - \frac{2a \cos \psi}{r} \right) = 0, \quad [o]$$

что представляет собой уравнение контура поперечного сечения, показанного на фиг. 133 <sup>2)</sup>.

Приняв

$$r^2 - b^2 = 0,$$

мы получим круг радиуса  $b$  с центром в начале координат, а взяв

$$1 - \frac{2a \cos \psi}{r} = 0,$$

мы имеем круг радиуса  $a$ , касающийся оси  $y$  в начале координат.

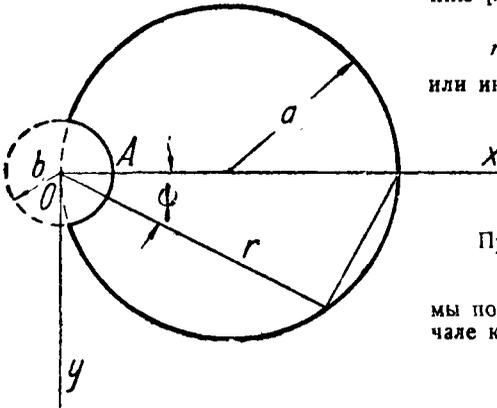
Наибольшее касательное напряжение будет в точке  $A$ , и оно равно:

$$\tau_{\max} = G\theta(2a - b). \quad [p]$$

Когда  $b$  очень мало по сравнению с  $a$ , т. е. когда мы имеем в валу полукруглый продольный паз очень малого радиуса, то напряжение на дне этого паза вдвое больше максимального напряжения в круглом валу радиуса  $a$  без паза.

<sup>1)</sup> См. Л. Файлон (L. N. G. Filon), „Trans. Roy. Soc.“ London, A, vol. 193, 1900. См. также статью Г. Полиа (G. Polya), „Z. angew. Math. u. Mech.“, Bd 10, 1930, S. 353.

<sup>2)</sup> Эта задача была рассмотрена К. Вебером (C. Weber), Forschungsarbeiten, № 249, 1921.



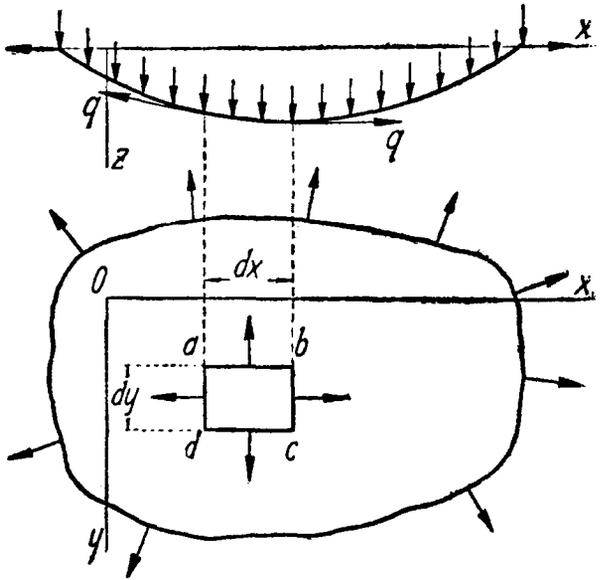
Фиг. 133.

**76. Аналогия с мембраной.** При решении задач на кручение, оказалась особенно полезной *аналогия с мембраной*, установленная Л. Прандтлем<sup>1)</sup>.

Представим себе мембрану из однородного материала (фиг. 134), опертую по контуру, того же очертания, как поперечное сечение скручиваемого стержня, подвергающуюся равномерному растяжению по контуру и равномерному поперечному давлению.

Если  $p$  — давление на единицу площади мембраны и  $q$  — равномерное растяжение на единицу длины ее контура, то растягивающие усилия, действующие на стороны  $ad$  и  $bc$  бесконечно малого элемента  $abcd$  (фиг. 134), дают, при малых прогибах мембраны, равнодействующую, направленную вверх:

$$-q \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx dy.$$



Фиг. 134.

Таким же образом растягивающие усилия, действующие на две другие стороны элемента, дают равнодействующую:

$$-q \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dx dy,$$

и уравнение равновесия элемента получает такой вид:

$$p dx dy + q \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx dy + q \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dx dy = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{p}{q}. \quad [145]$$

<sup>1)</sup> См. Л. Прандтль (L. Prandtl), „Physik. Z.“, Bd 4, 1903. См. также Антес (Anthes), „Dinglers polytechn. Journ.“, 1906, S. 342. Дальнейшее развитие этой аналогии и применение ее к различным случаям см. в статьях А. Гриффиса и Дж. Тейлора (A. A. Griffith and G. I. Taylor), „Tech. Rept. Adv. Comm. Aeronautics“, vol. 3. 1917—1918, pp. 910 and 938.

На контуре прогиб мембраны равен нулю. Сравнивая уравнение [145] и условие на контуре относительно прогибов  $z$  мембраны с уравнением [133] и условием на контуре [134] (см. стр. 258) для функции напряжений  $\varphi$ , мы приходим к заключению, что обе эти задачи тождественны.

Следовательно, по прогибам мембраны мы можем получить значения функции  $\varphi$  при замене величины

$$-\frac{p}{q}$$

уравнения [145] величиной

$$A = -2G\theta$$

уравнения [133].

Представив упругую поверхность мембраны в горизонталях (фиг. 135), можно сделать несколько имеющих существенное значение заключений относительно распределения напряжений при кручении.

Рассмотрим какую-либо точку  $B$  мембраны.

Прогиб мембраны по горизонтали, проходящей через эту точку, является постоянной величиной, и мы имеем:

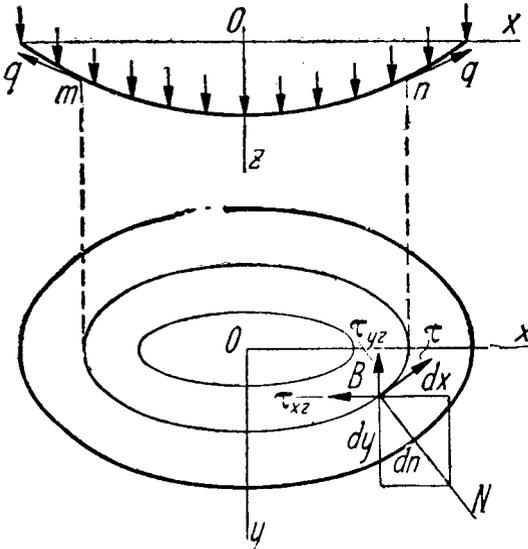
$$\frac{\partial z}{\partial s} = 0.$$

Соответствующее уравнение для функции напряжений  $\varphi$  будет:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} \right) = \tau_{xz} \frac{dy}{ds} - \tau_{yz} \frac{dx}{ds} = 0.$$

Это уравнение является выражением того, что проекция равнодействующего касательного напряжения в точке  $B$  на нормаль  $N$  к горизонтали равна нулю. Следовательно, можно заключить, что касательное напряжение в точке  $B$  скручиваемого стержня имеет направление касательной к горизонтали, проходящей через эту точку.

Кривые, нанесенные на поперечном сечении скручиваемого стержня таким образом, чтобы равнодействующая касательного напряжения в любой точке кривой имела направление касательной к кривой, называются *траекториями касательного напряжения*.



Фиг. 135.

Итак, горизонтالي изогнутой поверхности мембраны соответствуют траекториям касательного напряжения для поперечного сечения скручиваемого стержня.

Величина равнодействующего напряжения  $\tau$  в точке  $B$  (фиг. 135) получится, если спроектировать на касательную составляющие напряжения  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$ :

$$\tau = \tau_{yz} \cos(N, x) - \tau_{xz} \cos(N, y).$$

Подставив

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad \tau_{yz} = - \frac{\partial \varphi}{\partial x};$$

$$\cos(N, x) = \frac{dx}{dn}; \quad \cos(N, y) = \frac{dy}{dn},$$

получим

$$\tau = - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dn} \right) = - \frac{d\varphi}{dn}.$$

Таким образом, величина касательного напряжения в точке  $B$  соответствует наибольшему уклону поверхности мембраны в этой точке. Необходимо лишь в выражении для угла наклона заменить

$$\frac{q}{p}$$

на  $2G\theta$ .

На основании этого приходим к заключению, что наибольший сдвиг получается в тех точках, где горизонтали наиболее тесно сближены друг с другом.

Затем из выражения [135] можно прийти к выводу, что удвоенный объем, заключающийся между изогнутой мембраной и плоскостью  $xu$  (фиг. 135), представляет собой крутящий момент, если только

$$\frac{p}{q}$$

заменить через  $2G\theta$ .

Рассмотрим теперь условия равновесия части  $mn$  мембраны, ограниченной горизонталью (фиг. 135). Уклон поверхности мембраны пропорционален в каждой точке, взятой на горизонтали, касательному напряжению  $\tau$  и равен:

$$\tau \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{1}{2G\theta}.$$

Обозначив через  $F$  площадь горизонтальной проекции части  $mn$  мембраны, получим уравнение равновесия этой части:

$$\int q \left( \tau \frac{p}{q} \frac{1}{2G\theta} \right) ds = p \cdot F,$$

или

$$\int \tau ds = 2G\theta F. \quad [146]$$

Из этого уравнения найдем среднюю величину касательного напряжения по горизонтали.

Приняв  $p = 0$ , т. е. рассматривая мембрану без поперечной нагрузки, мы придем к уравнению:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad [147]$$

которое совпадает с уравнением [b] предыдущего параграфа для функции  $\varphi$ .

Придав ординатам мембраны по контуру такие значения, чтобы

$$z + \frac{A}{4}(x^2 + y^2) = \text{const}, \quad [148]$$

найдем, что условия на контуре [c] предыдущего параграфа также будут выполнены.

Таким образом мы можем получить функцию  $\varphi$  по упругой поверхности и ненагруженной мембраны, если только ординаты поверхности мембраны на контуре имеют определенные значения.

Ниже будет показано, что обе, и нагруженная и ненагруженная, мембраны могут быть использованы для отыскания опытным путем распределения напряжений в скручиваемых стержнях.

Аналогия с мембраной полезна не только тогда, когда стержень скручивается в пределах упругости, но также и тогда, когда материал в некоторых частях поперечного сечения находится в состоянии текучести<sup>1)</sup>.

Предположив, что касательное напряжение остается постоянным при появлении текучести, получим, что распределение напряжений в упругой зоне сечения будет представляться мембраной так же, как и раньше, а в зоне пластических деформаций напряжение изобразится поверхностью, имеющей постоянный наибольший угол наклона, отвечающий пределу текучести.

<sup>1)</sup> На это указал Л. Прандтль; см. А. Надаи (A. Nádai), „Z. angew. Math. u. Mech.“, Bd 3, 1923, S. 442. См. также Е. Треффц (E. Trefftz); „Z. angew. Math. u. Mech.“, Bd 5, 1925, S. 64.

Вообразим, что эта поверхность построена в виде крыши над поперечным сечением стержня, и возьмем натянутую и нагруженную мембрану так, как делали выше.

При увеличении давления мы приходим к такому положению, когда мембрана начнет касаться этой крыши. Этот момент соответствует началу текучести в скручиваемом стержне. При увеличении давления, некоторые части мембраны войдут в соприкосновение с крышей. Части, находящиеся в соприкосновении с крышей, представляют участки, где имеет место пластическая деформация в скручиваемом стержне. Интересные опыты, иллюстрирующие это положение, были выполнены А. Надаи<sup>1)</sup>.

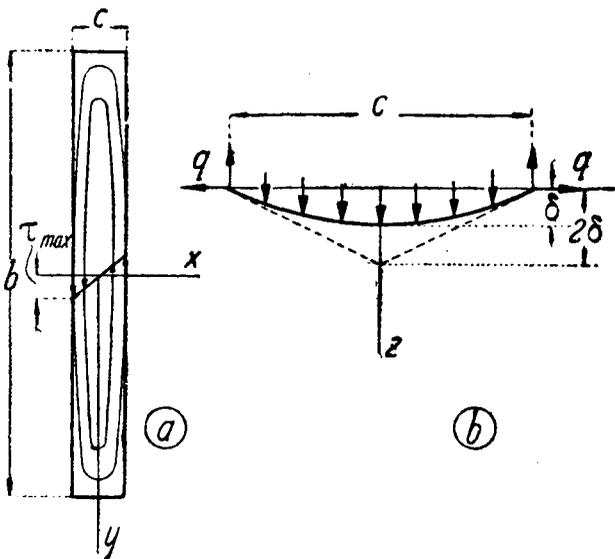
**77. Кручение стержня узкого прямоугольного сечения.** Для стержня с поперечным сечением в виде узкого прямоугольника, аналогия с мембраной дает очень простое решение задачи на кручение.

Пренебрегая влиянием коротких сторон прямоугольника и предполагая, что поверхность слегка изогнутой мембраны является цилиндрической (фиг. 136а), получим прогиб мембраны по элементарной формуле<sup>2)</sup> для параболической упругой линии гибкой нити, несущей равномерную нагрузку (фиг. 136б):

$$\delta = \frac{pc^2}{8q}. \quad [a]$$

На основании известных свойств параболических кривых, наибольшее значение тангенса угла наклона касательной, которое будет иметь место в средних частях длинных сторон прямоугольника, получится равным

$$\frac{4\delta}{c} = \frac{pc}{2q}. \quad [b]$$



Фиг. 136.

Объем, заключенный между изогнутой мембраной и плоскостью  $xu$ , вычислим так же, как определяется объем параболического цилиндра, и получим его равным

$$\frac{2}{3} c\delta b = \frac{pbc^3}{12q}. \quad [c]$$

<sup>1)</sup> См. А. Надаи (A. Nádai), Trans. Am. Soc. Mech. Eng., Applied Mechanics Division, 1930. См. также А. Надаи (A. Nádai), Plasticity, 1931, p. 132.

<sup>2)</sup> См. книгу автора Сопротивление материалов, часть I, 3 изд. русского перевода, 1934 г., стр. 39.

Пользуясь аналогией с мембраной и подставив в выражения [b] и [c]  $2G\theta$  вместо

$$\frac{p}{q},$$

находим:

$$\tau_{\max} = cG\theta; \quad M_i = \frac{bc^3}{3} G\theta, \quad [d]$$

откуда

$$\theta = \frac{M_i}{\frac{bc^3}{3} G} \quad [149]$$

и

$$\tau_{\max} = \frac{M_i}{\frac{bc^2}{3}}. \quad [150]$$

Для параболической упругой линии (фиг. 136b)

$$z = \frac{4\delta}{c^2} \left( \frac{c^2}{4} - x^2 \right),$$

и уклон поверхности мембраны в какой-либо точке равен:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{8\delta x}{c^2} = -\frac{p}{q} x.$$

Соответствующее напряжение в скручиваемом стержне:

$$\tau_{yz} = 2G\theta x.$$

Распределение напряжений следует линейному закону, что показано на фиг. 136a.

Определив величину крутящего момента, соответствующего этому распределению напряжений, найдем:

$$\frac{\tau_{\max}}{4} \cdot c \cdot \frac{2}{3} c \cdot b = \frac{bc^2}{6} \tau_{\max}.$$

Это — лишь половина полного крутящего момента по формуле [150].

Вторая половина получится от составляющих напряжения  $\tau_{yz}$ , которыми мы полностью пренебрегли, когда предположили, что поверхность изогнутой мембраны является цилиндрической. Хотя эти напряжения имеют заметную величину лишь вблизи коротких сторон прямоугольника, и их наибольшие значения меньше найденного выше напряжения  $\tau_{\max}$ , но они действуют на большем расстоянии от оси стержня, и их момент дает вторую половину крутящего момента  $M_i$ <sup>1)</sup>.

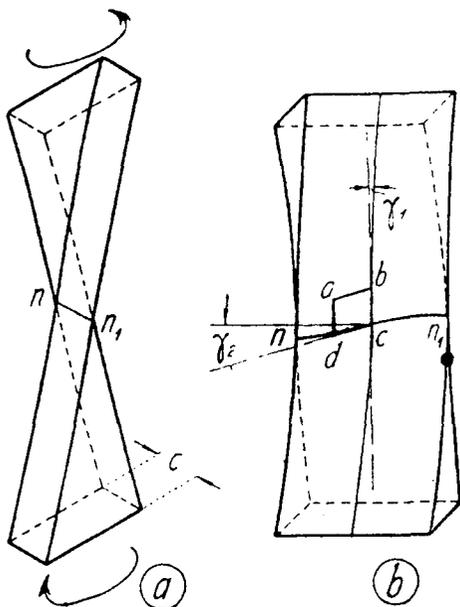
<sup>1)</sup> Этот вопрос был освещен лордом Кельвином, см. лорд Кельвин и Тэйт (Lord Kelvin and Tait), Natural Philosophy, vol. 2, p. 267.

Интересно отметить, что напряжение  $\tau_{\max}$  по первому из выражений [d] вдвое больше, чем в случае круглого вала с диаметром равным  $c$ , испытывающего то же скручивание  $\theta$ .

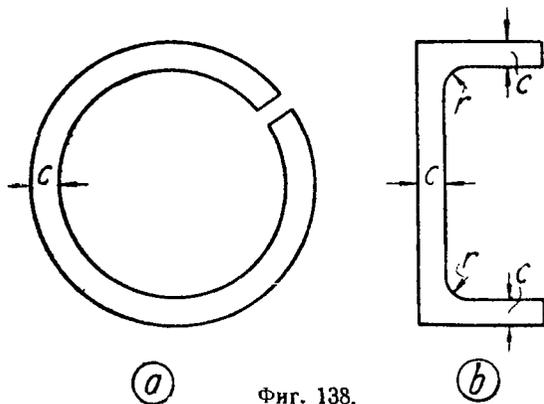
Это можно объяснить, если мы рассмотрим искривление поперечных сечений. Такие стороны поперечных сечений, как сторона  $nn_1$  (фиг. 137), остаются нормальными к продольным волокнам стержня в углах сечения в точках  $n$  и  $n_1$ , что и показано на чертеже.

Полный сдвиг такого элемента, как  $abcd$ , состоит из двух частей: части  $\gamma_1$  — от поворота сечения относительно оси стержня, равной сдвигу в круглом стержне с диаметром  $c$ , и части  $\gamma_2$  — от искривления поперечного сечения. В случае узкого прямоугольного сечения  $\gamma_2 = \gamma_1$ , и полный сдвиг вдвое больше, чем в случае круглого поперечного сечения диаметра  $c$ .

Полученные выше для узкого прямоугольника формулы [149] и [150] могут быть использованы и в применении к тонкостенным стержням поперечных сечений, показанных на фиг. 138, если считать размер  $b$  равным развернутой длине поперечного сечения.



Фиг. 137.



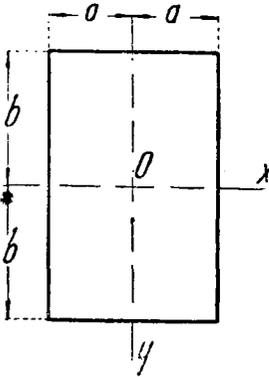
Фиг. 138.

Это является следствием того, что если толщина  $c$  трубы с продольной щелью (фиг. 138a) мала по сравнению с диаметром, то наибольший уклон поверхности мембраны и объем, ограниченный мембраной и плоскостью  $xy$ , будут почти такими же, как для узкого прямоугольного сечения шириной  $c$  и длиной, равной длине окружности срединной поверхности трубы.

К подобному заключению придем и относительно корытного сечения (фиг. 138b). Следует однако отметить, что в этом последнем случае

имеет место значительная концентрация напряжений во входящих углах, зависящая от величины радиуса  $r$  закруглений, и выражение [150] к этим точкам не применимо. Более детальное исследование этого вопроса будет дано ниже в параграфе 81.

**78. Кручение прямоугольных стержней.** Если воспользоваться аналогией с мембраной, то задача сведется к нахождению прогибов равномерно нагруженной прямоугольной мембраны, показанной на фиг. 139.



Фиг. 139.

Эти прогибы должны удовлетворять уравнению [145]:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{p}{q} \quad [a]$$

и равняться нулю на контуре.

Условие симметрии относительно оси  $y$  и условия на контуре по сторонам  $x = \pm a$  прямоугольника будут выполнены, если принять  $z$  в виде ряда:

$$z = \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} b_n Y_n \cos \frac{n\pi x}{2a}, \quad [b]$$

в котором  $b_1, b_3, \dots$  — постоянные коэффициенты, а  $Y_1, Y_3, \dots$  — функции одного лишь  $y$ .

Подставив ряд [b] в уравнение [a] и заметив, что правая сторона последнего может быть представлена в виде ряда<sup>1)</sup>:

$$-\frac{p}{q} = - \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{p}{q} \frac{4}{n\pi} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \frac{n\pi x}{2a}, \quad [c]$$

мы приходим к следующему уравнению для определения  $Y_n$ :

$$Y_n'' - \frac{n^2 \pi^2}{4a^2} Y_n = -\frac{p}{q} \frac{4}{n\pi b_n} (-1)^{\frac{n-1}{2}}, \quad [d]$$

откуда

$$Y_n = A \sinh \frac{n\pi y}{2a} + B \cosh \frac{n\pi y}{2a} + \frac{16pa^2}{qn^3 \pi^3 b_n} (-1)^{\frac{n-1}{2}}. \quad [e]$$

Из условия симметрии изогнутой поверхности мембраны относительно оси  $x$  следует, что постоянная интегрирования  $A$  должна быть равна нулю.

<sup>1)</sup> См. Пирс (B. O. Pierce), A Short Table of Integrals, 1910, p 95.

Постоянная  $B$  определится из того условия, что прогибы мембраны равны нулю, при  $y = \pm b$ , т. е.:

$$(Y_n)_{y = \pm b} = 0.$$

В результате получим

$$Y_n = \frac{16pa^2}{qn^3\pi^3b_n} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left( 1 - \frac{\cosh \frac{n\pi y}{2a}}{\cosh \frac{n\pi b}{2a}} \right), \quad [f]$$

и общее выражение для изогнутой поверхности мембраны, согласно формуле [b], представится в следующем виде:

$$z = \frac{16pa^2}{q\pi^3} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left( 1 - \frac{\cosh \frac{n\pi y}{2a}}{\cosh \frac{n\pi b}{2a}} \right) \cos \frac{n\pi x}{2a}.$$

Заменив

$$\frac{p}{q}$$

через  $2G\theta$ , найдем следующее выражение для функции напряжений:

$$\varphi = \frac{32G\theta a^2}{\pi^3} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left( 1 - \frac{\cosh \frac{n\pi y}{2a}}{\cosh \frac{n\pi b}{2a}} \right) \cos \frac{n\pi x}{2a}. \quad [g]$$

Выполнив дифференцирование по формулам [132], получим теперь составляющие напряжения. Например,

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{16G\theta a}{\pi^2} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left( 1 - \frac{\cosh \frac{n\pi y}{2a}}{\cosh \frac{n\pi b}{2a}} \right) \sin \frac{n\pi x}{2a}. \quad [h]$$

При  $b > a$ , наибольшее касательное напряжение, соответствующее наибольшему углу наклона поверхности мембраны, будет в средних точках длинных сторон  $x = \pm a$  прямоугольника. Подставив  $x = a$  и  $y = 0$  в формулу [h], найдем

$$\tau_{\max} = \frac{16G\theta a}{\pi^2} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left( 1 - \frac{1}{\cosh \frac{n\pi b}{2a}} \right),$$

или, заметив, что

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8},$$

имеем

$$\tau_{\max} = 2G\theta a - \frac{16G\theta a}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cosh \frac{n\pi b}{2a}}. \quad [151]$$

Бесконечный ряд правой стороны, при  $b > a$ , очень быстро сходится и не представит затруднений для вычисления напряжения  $\tau_{\max}$  с достаточной точностью, при любом частном значении отношения  $b : a$ .

Например, в случае очень узкого прямоугольника, отношение  $b : a$  получается большим числом, так что суммой бесконечного ряда в выражении [151] можно пренебречь и мы найдем:

$$\tau_{\max} = 2G\theta a.$$

Это совпадает с первым из выражений [d] предыдущего параграфа. Для квадратного сечения, при  $a = b$ , найдем, по формуле [151],

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= 2G\theta a \left[ 1 - \frac{8}{\pi^2} \left( \frac{1}{\cosh \frac{\pi}{2}} + \frac{1}{9 \cosh \frac{3\pi}{2}} + \dots \right) \right] = \\ &= 2G\theta a \left[ 1 - \frac{8}{\pi^2} \left( \frac{1}{2,509} + \frac{1}{9 \cdot 55,67} + \dots \right) \right] = 1,351 G\theta a. \end{aligned} \quad [152]$$

Вообще можем написать:

$$\tau_{\max} = k \cdot 2G\theta a, \quad [153]$$

где  $k$  — числовой коэффициент, зависящий от отношения  $b : a$ . Несколько значений этого коэффициента приведены ниже в таблице 7.

ТАБЛИЦА 7.

Таблица коэффициентов при кручении прямоугольного стержня.

$b : a$	$k$	$k_1$	$k_2$	$b : a$	$k$	$k_1$	$k_2$
1,0	0,675	0,1406	0,208	3	0,985	0,263	0,267
1,2	0,759	0,166	0,219	4	0,997	0,281	0,282
1,5	0,848	0,196	0,231	5	0,999	0,291	0,291
2,0	0,930	0,229	0,246	10	1,000	0,312	0,312
2,5	0,968	0,249	0,258	$\infty$	1,000	0,333	0,333

Выразим крутящий момент  $M_t$  в функции угла скручивания  $\theta$ . Пользуясь с этой целью формулой [135], найдем:

$$M_t = 2 \int_{-a-b}^{+a+b} \int_{-a-b}^{+a+b} \varphi \, dx dy =$$

$$= \frac{64G\theta a^2}{\pi^3} \int_{-a-b}^{+a+b} \int_{-a-b}^{+a+b} \left[ \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left( 1 - \frac{\cosh \frac{n\pi y}{2a}}{\cosh \frac{n\pi b}{2a}} \right) \cos \frac{n\pi x}{2a} \right] dx dy =$$

$$= \frac{32G\theta(2a)^3(2b)}{\pi^4} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} - \frac{64G\theta(2a)^4}{\pi^5} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \operatorname{tgh} \frac{n\pi b}{2a},$$

или, заметив, что<sup>1)</sup>

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots = \frac{\pi^4}{96},$$

имеем:

$$M = \frac{G\theta(2a)^3(2b)}{3} \left( 1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{a}{b} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \operatorname{tgh} \frac{n\pi b}{2a} \right). \quad [154]$$

Ряд правой стороны этого выражения сходится очень быстро, и потому крутящий момент  $M_t$  можно вычислить без затруднений при любой величине отношения  $b : a$ .

Для узкого прямоугольника мы можем принять:

$$\operatorname{tgh} \frac{n\pi b}{2a} = 1.$$

Тогда

$$M_t = \frac{G\theta(2a)^3(2b)}{3} \left( 1 - 0,630 \frac{a}{b} \right). \quad [155]$$

Для квадрата, при  $a = b$ , формула [154] дает:

$$M_t = 0,1406G\theta(2a)^4. \quad [156]$$

В общем, крутящий момент можно представить формулой:

$$M_t = k_1 G\theta(2a)^3(2b), \quad [157]$$

где  $k_1$  — числовой коэффициент, зависящий от величины отношения  $b : a$ . Некоторые значения этого коэффициента приведены в таблице 7.

<sup>1)</sup> Пирс (B. O. Pierce), A Short Table of Integrals, 1910, p. 90.

Подставив значение угла скручивания  $\theta$  из выражения [157] в формулу [153], получим наибольшее касательное напряжение в функции от крутящего момента:

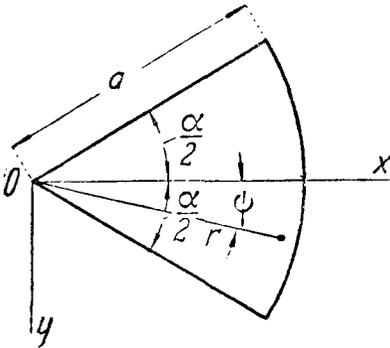
$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{k_2(2a)^2(2b)}, \tag{158}$$

где  $k_2$  — числовой коэффициент, значения которого могут быть взяты по помещенной выше таблице 7.

79. Дополнительные данные по кручению стержней. Пользуясь бесконечными рядами, как показано в предыдущем параграфе, мы можем решить задачу кручения для нескольких других видов поперечных сечений.

В случае *кругового сектора*<sup>1)</sup> (фиг. 140), стороны его могут быть представлены уравнениями

$$\psi = \pm \frac{\alpha}{2}; \quad r = 0; \quad r = a.$$



Фиг. 140.

Возьмем функцию напряжений в следующем виде:

$$\varphi = \varphi_1 + \frac{A}{4}(x^2 + y^2) = \varphi_1 - \frac{G\theta r^2}{2}.$$

Функция  $\varphi_1$  должна удовлетворять уравнению Лапласа (см. параграф 75). Взяв решение этого уравнения в виде ряда:

$$\varphi_1 = \frac{G\theta}{2} \left[ \frac{r^2 \cos 2\psi}{\cos \alpha} + a^2 \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} A_n \left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}} \cos \frac{n\pi\psi}{\alpha} \right],$$

мы приходим к функции напряжений такого вида:

$$\varphi = \frac{G\theta}{2} \left[ -r^2 \left(1 - \frac{\cos 2\psi}{\cos \alpha}\right) + a^2 \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} A_n \left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}} \cos \frac{n\pi\psi}{\alpha} \right].$$

Это выражение равно нулю на сторонах контура:

$$\psi = \pm \frac{\alpha}{2}.$$

Для того чтобы обратить его в нуль и по круговой части контура ( $r = a$ ), мы должны принять:

$$\sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi\psi}{\alpha} = 1 - \frac{\cos 2\psi}{\cos \alpha},$$

1) Эта задача была рассмотрена Сен-Венаном (Saint Venant), „Compt. rend.“, t. 87, 1878, pp. 849 et 893. См также А. Гринхилл (A. G. Greenhill), „Messenger of Math.“, vol. 9, 1879, p. 35. Другой метод решения при помощи Бесселевых функций был дан А. Динником, „Известия Донского политехнического института“, Новочеркасск, том I, стр. 309. См. также А. Фёппль и Л. Фёппль (A. Föppl und L. Föppl), Drang und Zwang, Bd 2, 1928, S. 96.

откуда мы получим обычным путем:

$$A_n = \frac{16a^2}{\pi^3} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{1}{n \left( n + \frac{2\alpha}{\pi} \right) \left( n - \frac{2\alpha}{\pi} \right)}$$

Таким образом, функция напряжений получает следующий вид:

$$\varphi = \frac{G\theta}{2} \left[ -r^2 \left( 1 - \frac{\cos 2\psi}{\cos^2 \alpha} \right) + \frac{16a^2 r^2}{\pi^3} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \left( \frac{r}{a} \right)^{\frac{n\pi}{\alpha}} \cdot \frac{\cos \frac{n\pi\psi}{\alpha}}{n \left( n + \frac{2\alpha}{\pi} \right) \left( n - \frac{2\alpha}{\pi} \right)} \right].$$

Подставив найденное значение функции  $\varphi$  в формулу [135], найдем:

$$M_t = 2 \iint \varphi r \, d\psi \, dr = kG\theta a^4,$$

где  $k$  — коэффициент, зависящий от величины угла  $\alpha$  сектора.

Некоторые значения коэффициента  $k$ , вычисленные Сен-Венаном, приведены в таблице 8.

ТАБЛИЦА 8.

Значения коэффициентов при кручении для кругового сектора.

$\alpha$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$2\pi$
$k$	0,0181	0,0349	0,0825	0,148	0,296	0,528	0,686	0,87*1)
$k_1$	...	0,452	...	0,622	0,719	...	...	...
$k_2$	...	0,490	...	0,652	0,849	...	...	—

Наибольшее касательное напряжение по круговой и радиальной частям контура выражается формулами:

$$k_1 G\theta a \quad \text{и} \quad k_2 G\theta a,$$

соответственно. Несколько значений коэффициентов  $k_1$  и  $k_2$  приведено в таблице 8.

Решение задачи на кручение криволинейного прямоугольника, ограниченного двумя концентрическими дугами круга и двумя радиусами, получается точно таким же путем 2).

В случае равнобедренного прямоугольного треугольника 3), угол скручивания представится формулой:

$$\theta = 38,3 \frac{M_t}{Ga^4},$$

1) Эта цифра была исправлена А. Динником, см. его статью, упомянутую выше, в выноске на предыдущей странице.

2) См. работу Сен-Венана, упомянутую в выноске на предыдущей странице. См. также А. Лове (А. Е. Н. Love), Mathem. Theory of Elasticity, 4 ed., 1927, p. 319.

3) Б. Г. Галеркин, «Известия Академии наук», Петроград, 1919, стр. 111. Г. Колосов, «Compt. rend.», t. 178, 1924, p. 2057.

где  $a$  — длина равных катетов треугольника. Наибольшее касательное напряжение будет по середине гипотенузы, и оно равно

$$\tau_{\max} = 18,02 \frac{M_t}{a^3}.$$

Несколько других поперечных сечений было исследовано при помощи криволинейных координат. Взяв эллиптические координаты (см. стр. 193) и пользуясь сопряженными функциями  $\alpha$  и  $\beta$ , отвечающими уравнению:

$$x + iy = c \cosh(\alpha + i\beta),$$

мы приходим к поперечным сечениям, ограниченными эллипсами и гиперболами<sup>1)</sup>, имеющими общие фокусы.

Пользуясь уравнением<sup>2)</sup>:

$$x + iy = \frac{(\alpha + i\beta)^2}{2},$$

получим сечения, ограниченные взаимно перпендикулярными параболоми.

Поперечные сечения, ограниченные многоугольником, были рассмотрены Ф. Кёттером и Е. Треффцем<sup>3)</sup>. Первый дал также решение для сечения в виде уголка<sup>4)</sup>.

**80. Решение задач на кручение помощью рассмотрения потенциальной энергии.** Мы видели, что решение задач на кручение сводится в каждом частном случае к определению функции напряжений, удовлетворяющей дифференциальному уравнению [133] и условию на контуре [134].

При выводе приближенного решения задачи полезно, вместо того, чтобы иметь дело с дифференциальным уравнением, найти функцию напряжений из условий минимума некоторого интеграла<sup>5)</sup>, который можно получать из рассмотрения потенциальной энергии скручиваемого стержня.

Потенциальная энергия скручиваемого стержня на единицу длины на основании формулы [80] (см. стр. 154), равна:

$$U = \frac{1}{2G} \iint (\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) dx dy = \frac{1}{2G} \iint \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

Если мы придадим функции напряжений  $\varphi$  некоторое малое приращение  $\delta\varphi$ , которое обращается в нуль на контуре<sup>6)</sup>, то приращение потенциальной энергии будет равно:

$$\frac{1}{2G} \delta \iint \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy,$$

<sup>1)</sup> А. Гринхилл (A. G. Greenhill), „Quart. Journ. Math.“, vol. 16, 1879. См. также Л. Файлон (L. N. G. Filon), „Phil. Trans. Roy. Soc.“, London. A., vol. 193, 1900.

<sup>2)</sup> Е. Андерсон и Д. Голл (E. W. Anderson and D. L. Holl), „Iowa State Coll. Journ. Scient.“, vol. 3, 1929, p. 231.

<sup>3)</sup> Е. Треффц (E. Trefftz), „Math. Annalen“, Bd 82, 1921, S. 97. См. также Риман — Вебер (Riemann — Weber), Differentialgleichungen der Physik, под ред. Ф. Франка и Р. Мизеса (Ph. Frank und R. v. Mises), Bd 2, 1927, S. 645.

<sup>4)</sup> Ф. Кёттер (F. Kötter), „Sitzungsb. Akad. Wiss.“, Berlin, Bd 2, 1908, S. 935.

<sup>5)</sup> Этот способ был предложен В. Ритцем (W. Ritz), который воспользовался им при решении задач изгиба и колебаний прямоугольных пластинок; см. „Journ. reine angew. Math.“, Bd 135, 1908, и „Ann. Physik“ (4), Bd 28, 1909, S. 737.

<sup>6)</sup> Если  $\delta\varphi$  принято равным нулю на контуре, то по боковой поверхности стержня приращение функции  $\varphi$  не вызовет появления усилий.

и приращение крутящего момента, согласно формуле [135], будет равно:

$$2 \iint \delta\varphi dx dy.$$

Тогда, рассуждая таким же образом, как мы рассуждали при выводе уравнения [86] (стр. 167), мы приходим к заключению, что:

$$\frac{1}{2G} \delta \iint \left[ \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = 2\theta \iint \delta\varphi dx dy,$$

или

$$\delta \iint \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)^2 \right] - 2G\theta\varphi \right\} dx dy = 0.$$

Таким образом, истинным выражением функции напряжений  $\varphi$  будет то выражение, которое обращает в нуль приращение интеграла

$$U' = \iint \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)^2 \right] - 2G\theta\varphi \right\} dx dy. \quad [159]$$

К тому же заключению мы придем, пользуясь аналогией с мембраной и началом возможных перемещений (параграф 40). Если  $q$  — равномерное растяжение в мембране, то увеличение потенциальной энергии мембраны при прогибе получится умножением растяжения  $q$  на приращение поверхности мембраны. Таким образом мы получим

$$\frac{1}{2} q \iint \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy,$$

где  $z$  — прогиб мембраны.

Если мы теперь возьмем возможное перемещение мембраны от положения равновесия, то приращение потенциальной энергии мембраны на таком перемещении должно быть равно работе, совершаемой равномерной нагрузкой  $p$  на этом возможном перемещении. На основании этого получим:

$$\frac{1}{2} q \delta \iint \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \iint p \delta z dx dy,$$

и определение упругой поверхности мембраны приводится к нахождению того значения функции  $z$ , при котором интеграл

$$\iint \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] - \frac{p}{q} z \right\} dx dy$$

получает минимальное значение. Если мы подставим в этот интеграл  $2G\theta$  вместо

$$\frac{p}{q},$$

то мы придем к полученному выше интегралу [159].

При приближенном решении задач на кручение мы заменим вышеизложенную задачу вариационного исчисления простой задачей определения минимума функции.

Возьмем функцию напряжений в виде ряда:

$$\varphi = a_0 \varphi_0 + a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + \dots, \quad [a]$$

где  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$  — функции, удовлетворяющие условиям на контуре, т. е. обращающиеся на контуре в нуль.

При выборе этих функций следует руководствоваться аналогией с мембраной и брать их в виде, подходящем для выражения функции  $\varphi$ .

Величины  $a_0, a_1, a_2, \dots$  — числовые коэффициенты, подлежащие определению из условия минимума интеграла [159].

Подставив в этот интеграл ряд [a], мы получим, после интегрирования, функцию второй степени относительно коэффициентов  $a_0, a_1, a_2, \dots$ , и условие минимума этой функции представится в следующем виде:

$$\frac{\partial U'}{\partial a_0} = 0; \quad \frac{\partial U'}{\partial a_1} = 0; \quad \frac{\partial U'}{\partial a_2} = 0; \quad [b]$$

Таким образом мы получим систему линейных уравнений, из которых можно найти коэффициенты  $a_0, a_1, a_2, \dots$ .

С увеличением числа членов ряда [a], мы повышаем точность нашего, приближенного решения и, пользуясь бесконечным рядом, можем прийти к точному решению задачи на кручение <sup>1)</sup>.

Для примера возьмем случай прямоугольного поперечного сечения <sup>2)</sup> (фиг. 139). Контур пластинки выражается уравнениями  $x = \pm a$  и  $y = \pm b$ , и функция

$$(x^2 - a^2)(y^2 - b^2)$$

обращается в нуль на контуре.

Ряд [a] можно взять в следующем виде:

$$\varphi = (x^2 - a^2)(y^2 - b^2) \sum \sum a_{mn} x^m y^n, \quad [c]$$

где по условиям симметрии числа  $m$  и  $n$  должны быть четными.

Предполагая, что мы имеем квадратное сечение, и ограничившись первым членом ряда [c], возьмем

$$\varphi = a_0 (x^2 - a^2)(y^2 - a^2). \quad [d]$$

Подставив это выражение в формулу [159], найдем, из условия минимума, что

$$a_0 = \frac{5}{8} \frac{G\theta}{a^2}.$$

<sup>1)</sup> Условие сходимости этого способа решения было исследовано *Ритцем*, см. его статьи, упомянутые выше, в выноске на стр. 280. См. также *Е. Треффц* (*E. Trefftz*), *Handbuch der Physik*, Bd 6, 1928, S. 130.

<sup>2)</sup> См. статьи автора в „Сборниках института инженеров путей сообщения“, С.-Петербург, 1913 г., и в „Proc. London Math. Soc.“, series 2, vol. 20, 1920, p. 389.

Величина крутящего момента, на основании формулы [135], равна в таком случае:

$$M_t = 2 \iint \varphi dx dy = \frac{20G\theta a^4}{9} = 0,1388 (2a)^4 G\theta.$$

Сравнивая полученное выражение с точным решением [156], мы видим, что ошибка в величине крутящего момента составляет около 1,33%.

Для получения лучшего приближения возьмем первые три члена ряда [c]. Тогда, на основании условий симметрии, получим

$$\varphi = (x^2 - a^2)(y^2 - a^2)[a_0 + a_1(x^2 + y^2)]. \quad [e]$$

Подставив это значение в формулу [159] и пользуясь уравнениями [b], найдем:

$$a_0 = \frac{5}{8} \cdot \frac{259}{277} \cdot \frac{G\theta}{a^2}; \quad a_1 = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{35}{277} \cdot \frac{G\theta}{a^4}.$$

Подставив в свою очередь эти значения в выражение [135] для крутящего момента, получим

$$M_t = \frac{20}{9} \left( \frac{259}{277} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{35}{277} \right) G\theta a^4 = 0,1404 G\theta (2a)^4.$$

Эта величина всего лишь на 0,15% меньше точного значения.

Значительно бóльшая ошибка получается в величине наибольшего напряжения. Подставив значение функции [e] в выражение [132] для составляющих напряжения, мы найдем, что ошибка в наибольшем напряжении составляет около 4%, и чтобы получить лучшую точность, придется брать большее число членов ряда [c].

Из рассмотрения аналогии с мембраной мы можем прийти к заключению, что, поступая как описано выше, мы вообще получим для крутящего момента значения, меньшие точной его величины.

Действительно, вполне гибкая мембрана, равномерно растянутая по контуру и равномерно нагруженная, является системой с бесконечно большим числом степеней свободы. Если мы ограничимся несколькими членами ряда [c], то это будет равносильно введению в систему нескольких связей, что приведет ее к системе с небольшим лишь числом степеней свободы.

Подобные связи могут лишь понизить гибкость системы и уменьшить объем, ограниченный изогнутой мембраной. Следовательно, крутящий момент, полученный по величине этого объема, вообще говоря, будет меньше истинного своего значения.

Е. Треффц предложил<sup>1)</sup> другой способ приближенного определения функции напряжений  $\varphi$ . По этому способу, приближенная величина крутящего момента получается больше действительного значения. Следова-

<sup>1)</sup> См. Е. Треффц (E. Trefftz), Proc. 2 Intern. Cong. Appl. Mech., Zürich, 1926, p. 131. См. также Н. Базу (N. M. Basu), „Phil. Mag.“, vol. 10, 1930, p. 886.

тельно, пользуясь способами Ритца и Треффца совместно, можно установить пределы ошибки приближенного решения.

При применении способа Ритца, мы не ограничены в нашем выборе только полиномами [с]. Мы можем взять функции  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$  ряда [а] и в другом виде, пригодном для выражения функции напряжений  $\varphi$ .

Взяв, например, тригонометрические функции и обратив внимание на условия симметрии (фиг. 139), получим

$$\varphi = \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} a_{mn} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2a}. \quad [f]$$

Подставив это значение в формулу [159] и выполнив интегрирование, найдем, что

$$\begin{aligned} U' &= \frac{\pi^2 ab}{8} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} a_{mn} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) - \\ &- 2G\theta \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} a_{mn} \cdot \frac{16ab}{mn\pi^2} (-1)^{\frac{m+n}{2}-1}. \end{aligned}$$

Уравнения [b] получают следующий вид:

$$\frac{\pi^2 ab}{4} a_{mn} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) - 2G\theta \frac{16ab}{mn\pi^2} (-1)^{\frac{m+n}{2}-1} = 0,$$

откуда

$$a_{mn} = \frac{128G\theta b^2 (-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{\pi^4 mn (m^2 a^2 + n^2)},$$

где

$$\alpha = \frac{b}{a}.$$

Подставив найденное значение в выражение [f], получим точное решение задачи в виде бесконечного тригонометрического ряда.

Крутящий момент будет тогда равен:

$$M_t = 2 \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} \varphi \, dx dy = \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{128 G\theta b^2}{\pi^4 mn (m^2 a^2 + n^2)} \cdot \frac{32ab}{mn\pi^2}. \quad [g]$$

Это выражение можно привести к совпадению с выражением [154], полученным раньше, если мы заметим, что

$$\frac{1}{m^2} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{n^2 (m^2 a^2 + n^2)} = \frac{\pi^4}{96 m^2} \frac{\operatorname{tgh} \frac{m a \pi}{2} - \frac{m a \pi}{2}}{-\frac{1}{3} \left( \frac{m a \pi}{2} \right)^3}.$$

В качестве второго примера рассмотрим стержень, имеющий поперечное сечение в виде узкого прямоугольника, когда  $b$  — очень велико по сравнению с  $a$  (фиг. 139). В этом случае мы можем принять в первом приближении

$$\varphi = G\theta (a^2 - x^2), \quad [h]$$

что совпадает с решением, рассмотренным выше (параграф 77).

Чтобы получить лучшее приближение, удовлетворяющее условиям на контуре по коротким сторонам прямоугольника, возьмем

$$\varphi = G\theta (a^2 - x^2) [1 - e^{-\beta (b - y)}] \quad [k]$$

и подберем величину  $\beta$  таким образом, чтобы интеграл [159] получал наименьшее значение. Таким путем найдем

$$\beta = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Благодаря наличию члена с показателем степени в квадратных скобках выражения [k], мы получим распределение напряжений, которое практически совпадает с распределением, получающимся по решению [h] во всех точках, отстоящих на значительном расстоянии от коротких сторон прямоугольника.

Вблизи этих сторон функция напряжений [k] удовлетворяет условию на контуре [134].

Подставив значение [k] в формулу [135] для крутящего момента, найдем

$$M_t = 2 \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} \varphi dx dy = \frac{G\theta (2a)^3 (2b)}{3} \left( 1 - 0,632 \frac{a}{b} \right),$$

что находится в очень хорошем согласовании с выражением [155], полученным выше при помощи бесконечного ряда.

Выражение функции напряжений, в виде целого полинома, аналогичное выражению [c], взятому выше для прямоугольника, может быть применено последовательно для всех точек поперечных сечений, ограниченных выпуклым многоугольником.

Если

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0; \quad a_2 x + b_2 y + c_2 = 0; \quad \dots$$

являются уравнениями сторон многоугольника, то функция напряжений может быть взята в следующем виде:

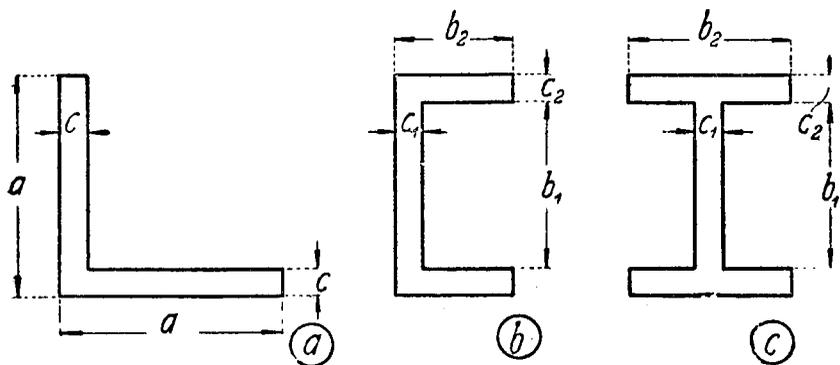
$$\varphi = (a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) \cdots (a_nx + b_ny + c_n) \sum \sum a_{mn}x^n y^m,$$

и достаточно небольшого числа первых членов ряда, чтобы получить удовлетворительную точность.

Еще один способ приближенного решения задач кручения, основанный на теории конечных разностей, был предложен К. Рунге<sup>1)</sup>. Он применил этот способ для исследования кручения стержня с сечением в виде креста, образованного из пяти квадратов.

**81. Кручение стержней прокатных профилей.** При исследовании кручения стержней прокатных профилей: уголков, швеллеров и двутавров, можно пользоваться формулами, выведенными для узких прямоугольных стержней (параграф 77).

Когда поперечное сечение — постоянной толщины, как показано на фиг. 141а, то угол скручивания уголкового профиля получится с доста-



Фиг. 141.

точной точностью по формуле [149], если подставить вместо  $b$  в эту формулу развернутую длину осевой линии<sup>2)</sup>, а именно  $b = 2a - c$ .

Для корытного сечения [фиг. 141б], грубое приближение получится, если принять для полок среднюю толщину  $c_2$ , разделить сечение на три прямоугольника и подставить в уравнение [149]  $b_1c_1^3 + 2b_2c_2^3$  вместо  $bc^3$ ,

<sup>1)</sup> См. К. Рунге (C. Runge), „Z. Math. Physik“, Bd 56, 1908, S. 225. См. также Е. Шнейдер (E. Schneider), Dissertation, Jena, 1917, Помчунер (Rottsieper), Dissertation, Göttingen, 1914, Г. Либман (H. Liebman), „Sitzungsb. Bayer. Akad. Wiss.“, München, 1918, SS. 385, 489.

<sup>2)</sup> Более сложная формула, учитывающая повышенную жесткость от соединения вместе прямоугольников, была предложена, на основании наблюдений над мыльной пленкой и испытаний на кручение, Трейером и Марчем (G. W. Trauer and H. W. March), Nat. Adv. Comm. Aeronautics, Rept. 334, 1930.

т. е. предположить, что жесткость на кручение корыта равна сумме жесткостей на кручение трех прямоугольников<sup>1)</sup>. Тогда

$$\theta = \frac{3M_t}{(b_1c_1^3 + 2b_2c_2^3)G} \quad [a]$$

Для вычисления напряжения на контуре в точках на значительном расстоянии от углов поперечного сечения, мы можем снова воспользоваться формулой для узкого прямоугольника и принять

$$\tau = c\theta G.$$

Тогда, на основании выражения [a], для полок корыта получим:

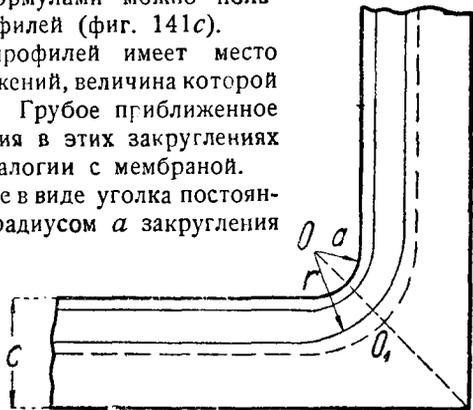
$$\tau = \frac{3M_t c_2}{b_1 c_1^3 + 2b_2 c_2^3} \quad [b]$$

Теми же приближенными формулами можно пользоваться и для двутавровых профилей (фиг. 141с).

Во входящих углах этих профилей имеет место значительная концентрация напряжений, величина которой зависит от радиуса закругления. Грубое приближенное значение наибольшего напряжения в этих закруглениях можно получить при помощи аналогии с мембраной.

Рассмотрим поперечное сечение в виде уголка постоянной толщины  $c$  [фиг. 142] и с радиусом  $a$  закругления

во входящем углу. Допустив, что поверхность мембраны по биссектрисе  $OO_1$  выкружки приближенно можно считать поверхностью вращения с осью, перпендикулярной к плоскости чертежа в точке  $O$ , и, пользуясь полярными координатами, получим уравнение [145] упругой поверхности мембраны (см. стр. 66) в следующем виде:



Фиг. 142.

$$\frac{d^2z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dz}{dr} = -\frac{p}{q} \quad [c]$$

Вспомнив, что уклон поверхности мембраны дает нам касательное напряжение  $\tau$ , т. е. что

$$\frac{dz}{dr} = \tau, \quad \text{и заменив} \quad \frac{p}{q}$$

1) Сравнение жесткостей на кручение, полученных этим путем, с жесткостями, найденными опытным путем, приведено для некоторых видов прокатных профилей, при различных размерах, в статье А. Фёппля (A. Föppl), „Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss.“, München, 1921, S. 295; см. также „Bauingenieur“, (5), Bd 3, 1922, S. 42.

через  $2G\theta$ , мы найдем, на основании уравнения [c], следующее уравнение для определения касательного напряжения:

$$\frac{d\tau}{dr} + \frac{1}{r} \tau = -2G\theta. \quad [d]$$

Соответствующее уравнение для касательного напряжения в полках уголка на значительном расстоянии от углов, т. е. там, где мембрана будет представлять примерно цилиндрическую поверхность, представится в таком виде:

$$\frac{d\tau}{dn} = -2G\theta, \quad [e]$$

где  $n$  — нормаль к контуру.

Обозначив через  $\tau_1$  — напряжение на контуре, мы найдем по первой из формул [d] полученного выше (см. стр. 272) решения для узкого прямоугольника:

$$\tau_1 = G\theta c.$$

Пользуясь этим значением, представим уравнение [d] в таком виде:

$$\frac{d\tau}{dr} + \frac{1}{r} \tau = -\frac{2\tau_1}{c}, \quad [d']$$

откуда, интегрируя, найдем:

$$\tau = \frac{A}{r} - \frac{\tau_1 r}{c}, \quad [f]$$

где  $A$  — постоянная интегрирования.

Для определения этой постоянной предположим, что касательное напряжение становится равным нулю в точке  $O_1$  на расстоянии  $0,5c$  от контура <sup>1)</sup> (фиг. 142).

Тогда, на основании выражения [f], имеем:

$$\frac{A}{a + \frac{c}{2}} - \frac{\tau_1 \left(a + \frac{2}{c}\right)}{c} = 0,$$

$$A = \frac{\tau_1}{c} \left(a + \frac{2}{c}\right)^2.$$

Подставив найденное значение в формулу [f] и приняв  $r = a$ , находим:

$$\tau_{\max} = \tau_1 \left(1 + \frac{c}{4a}\right). \quad [g]$$

<sup>1)</sup> Такое предположение приводит нас к результатам, дающим, при обычных размерах радиусов закруглений, удовлетворительное приближение к более точному решению, и согласующаяся с опытами над мыльной пленкой.

При  $a = 0,5c$ , как это взято на фиг. 142, мы получаем:

$$\tau_{\max} = 1,5\tau_1.$$

При очень малых радиусах закругления, наибольшее напряжение становится очень высоким. Например, если взять  $a = 0,1c$ , то найдем  $\tau_{\max} = 3,5\tau_1$ .

Более строгое исследование концентрации напряжений во входящих углах при малых радиусах закруглений (например,  $a = 0,1c$ ) было выполнено Е. Треффцем<sup>1)</sup>, который получил следующее выражение для наибольшего напряжения:

$$\tau_{\max} = 1,74\tau_1 \sqrt[3]{\frac{c}{a}}. \quad [160]$$

Когда радиус  $a$  — величина порядка  $0,1c$ , то результаты, получаемые по этой формуле, удовлетворительно согласуются с получаемыми по вышеприведенной формуле  $[g]$ .

Местные напряжения во входящем угле были изучены также опытным путем<sup>2)</sup> при помощи мыльной пленки (см. параграф 82).

Значения отношения  $\tau_{\max} : \tau_1$  для некоторых величин отношения  $a : c$  приводятся в нижеследующей таблице 9.

ТАБЛИЦА 9.

Значение отношения  $\tau_{\max} : \tau_1$   
для входящего угла.

$a : c$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
$\tau_{\max} : \tau_1$	2,50	2,25	2,00	1,75

При малых радиусах закруглений, эти отношения  $\tau_{\max} : \tau_1$  значительно меньше получаемых по вышеприведенным теоретическим формулам, вероятно в силу того, что при малых радиусах закруглений очень затруднительно получить из опытов с мыльной пленкой надежную величину  $\tau_{\max}$ .

**82. Применение мыльных пленок для решения задач на кручение.** Мы видели, что аналогия с мембраной очень полезна тем, что дает наглядное представление о распределении напряжений по сечению скручиваемого вала.

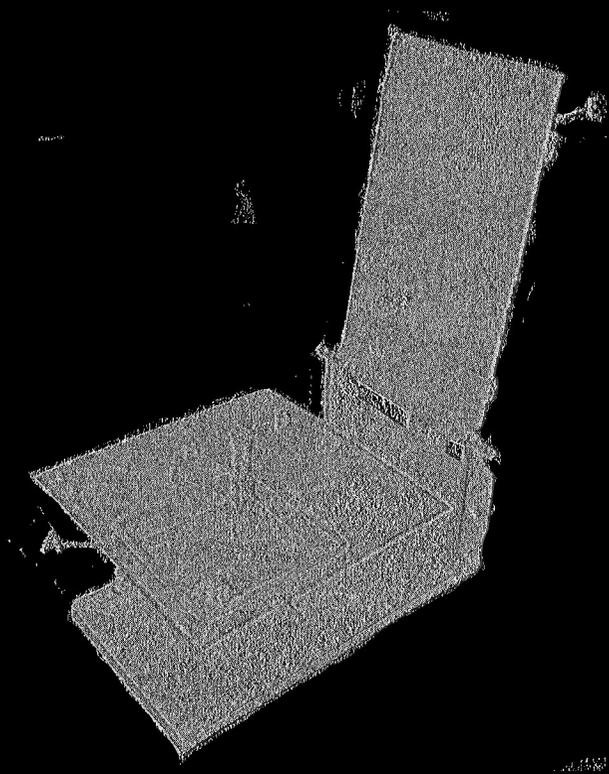
Точно также с большим успехом для непосредственного измерения напряжений пользуются мембранами в виде мыльных пленок<sup>3)</sup>.

1) См. Е. Треффц (E. Trefftz), „Z. angew. Math. u. Mech.“, Bd 2, 1922, S. 263. См. также статью К. Дассена (C. Dassen), „Z. angew. Math. u. Mech.“, Bd 3, 1923, S. 258.

2) См. статью Тейлора и Гриффиса (G. I. Taylor and A. A. Griffith), „Tech. Rept. Nat. Adv. Comm. Aeronautics“, vol. 3, 1917—1918, p. 920; а также статью П. Кушмана (P. A. Cushman), „Trans. Am. Soc. Mech. Eng.“, 1932. Цифры таблицы 9 взяты из этой последней статьи.

3) См. статьи Тейлора и Гриффиса, упомянутые выше, в выноске, на стр. 267, а также статью Трейера и Марча, упомянутую выше, в выноске на стр. 286.

Шлипки получают над отверстиями требуемого вида, вырезанными в плоских листах. Чтобы сделать возможным непосредственное определение напряжений, оказывается необходимым иметь для сравнения в том же листе круглое отверстие, представляющее круглое поперечное сечение вала.



Фиг. 143. Прибор для занесения горизонтальной мыльняк шлипок.

Подвергая обе шлипки одинаковому давлению, мы получаем одинаковые величины отношения  $p:q^2$ , что соответствует одинаковым значениям  $S\theta$  для обоек скручиваемых стержней.

Следовательно, измеряя углы обоек мыльняк шлипок, мы можем сопоставить напряжения в стержне данного поперечного сечения с напряжением в круглом валу, при том условии, что у обоек валов один и тот же угол скручивания  $\theta$  на единицу длины и одинаковой модуль упругости на сдвиг  $S$ .

4) Предполагается, что поверхностное натяжение одинаково в обоях мыльняк. Это было с достаточной точностью подтверждено опытами.

Соответствующее соотношение между крутящими моментами определяется из сопоставления объемов между мыльной пленкой и плоскостью пластинки.

Для нанесения горизонталей пленок на чертеж применяется прибор, изображенный на фиг. 143<sup>1)</sup>.

Алюминиевый лист с отверстиями закрепляется между двумя половинами чугунного ящика *A*. Нижняя часть ящика, имеющая форму неглубокого подноса, поддерживается установочными винтами.

Нанесение горизонталей производится при помощи винта *B*, проходящего через отверстие в пластинке зеркального стекла, достаточно большой, чтобы покрыть ящик в любом возможном ее положении. Нижний конец винта снабжен острием из твердой стали, расстояние которого от стеклянной пластинки регулируется этим винтом. Острие, приближают к пленке, передвигая стеклянную пластинку, до тех пор, пока искажение вида пленки не покажет, что острие коснулось пленки. Запись производится на листе бумаги, прикрепленном к доске *E*, которая может поворачиваться относительно горизонтальной оси, расположенной на той же высоте как записывающее стальное острие *D* сверху винта *B*.

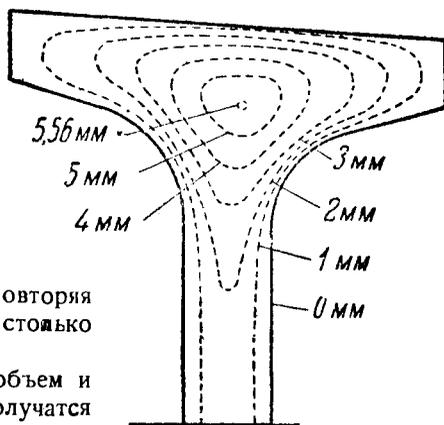
Чтобы отметить любое положение винта *B*, необходимо лишь поворотом вниз доски записывающим острием наколоть на бумаге точку. После того, как нижнее острие мы заставили коснуться к пленке в достаточном числе мест, наколотые на бумаге точки могут быть использованы для нанесения горизонталей.

Подвинчивая винт *B*, мы можем, повторяя операцию, изложенную выше, получить столько горизонталей, сколько требуется.

Когда горизонтали нанесены, то объем и соответствующий крутящий момент получатся непосредственно суммированием. Уклоны поверхности мембраны и соответствующие напряжения получатся путем измерения расстояний между смежными горизонталями.

С гораздо большей точностью угол наклона можно получить оптическим путем, если направить луч света на поверхность пленки и измерить угол отраженного луча. Нормаль к пленке будет занимать положение биссектрисы угла между падающим и отраженным лучами. С этой целью Гриффисом и Тейлором был сконструирован особый прибор.

Фигура 144 представляет чертеж в горизонталях, полученный для части двутавровой балки (деревянный шпангоут крыла аэроплана).



Фиг. 144.

<sup>1)</sup> См. статью Тейлора и Гриффиса, упомянутую выше, в выписке на стр. 267.

По густоте расположения горизонталей у выкружек входящих углов двутавра и на середине верхней его поверхности можно заключить, что касательные напряжения в этих местах высоки. Выступающие части полки очень слабо напряжены. Наибольшее напряжение средней части стенки является почти постоянным по высоте стенки и равным напряжению в узком прямоугольнике при том же угле скручивания.

Применение измерений при помощи мыльных пленок к таким поперечным сечениям, как эллипсы и прямоугольники, для которых известны точные решения, показывает, что наибольшее напряжение и наибольший крутящий момент получаются с точностью до одного-двух процентов. Однако в точках значительной концентрации напряжений, например, в выкружках очень малых радиусов, получить точность такого порядка нелегко (см. стр. 289)<sup>1)</sup>.

**83. Гидродинамические аналогии.** Существует несколько аналогий между задачами на кручение и задачами гидродинамики о движении жидкости в трубах.

Лорд Кельвин<sup>2)</sup> установил, что функция  $\varphi_1$  (см. выражение [a] параграфа 75), которая иногда применяется при решении задач на кручение, тождественна с *функцией потока* для установившегося невихревого движения *идеальной жидкости*, по трубе того же поперечного сечения, что и скручиваемый стержень.

На другую аналогию указал Буссинек<sup>3)</sup>. Он доказал, что дифференциальное уравнение и условия на контуре, служащие для определения функции напряжений  $\varphi$  (см. уравнения [133] и [134] параграфа 72), тождественны с уравнениями для определения скоростей движения различных слоев вязкой жидкости по трубе того же поперечного сечения, что и скручиваемый стержень<sup>4)</sup>.

Гринхилл показал, что функция напряжений  $\varphi$  математически тождественна с функцией потока при движении идеальной жидкости, циркулирующей с постоянной *вращательной скоростью*<sup>5)</sup> по трубе того же сечения, что и скручиваемый стержень<sup>6)</sup>.

Пусть  $u$  и  $v$  — составляющие скорости циркулирующей жидкости в точке  $A$  (фиг. 145). Тогда, из условия несжимаемости идеальной жидкости, имеем:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = 0. \quad [a]$$

<sup>1)</sup> См. статью К. Биецено и Я. Радемакера (С. В. Biezeno and J. M. Rademaker), „De Ingenieur“, № 52, 1931. См. также статью П. Кушмана (P. A. Cushman), „Trans. Am. Soc. Mech. Eng.“, 1932, и Г. Квеста (H. Quest), „Ingenieur-Archiv“, Bd 4, 1933, S. 510.

<sup>2)</sup> См. Кельвин и Тэм (Lord Kelvin and Tait), Natural Philosophy, part 2, p. 242.

<sup>3)</sup> См. Буссинек (J. Boussinesq), „Journ. math. pure et appl.“, série 2, t. 16, 1871.

<sup>4)</sup> Этой аналогией пользовался М. Пашу (M. Paschoud), „Compt. rend.“, t. 179, 1924, p. 451; см. также „Bull. techn. Suisse Rom.“, Lausanne, novembre, 1925.

<sup>5)</sup> Аналитическое выражение для вращательной скорости одинаково с выражением для углового вращения  $\omega$ , рассмотренным выше на стр. 183, если только величинами  $u$  и  $v$  обозначить составляющие скорости жидкости.

<sup>6)</sup> А. Гринхилл (A. G. Greenhill), см. статью Hydromechanics в Британской энциклопедии, 9 изд.

Условие равномерности вращательного движения таково:

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \text{const.} \quad ]b)$$

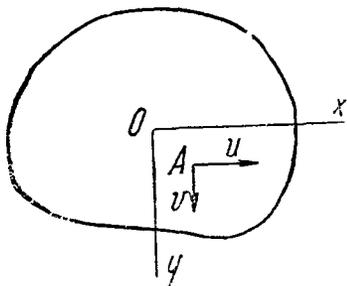
Приняв

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \text{и} \quad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad [c]$$

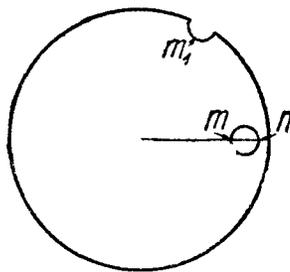
мы удовлетворим уравнению [a], а уравнение [b] получим в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \text{const}, \quad [d]$$

что совпадает с уравнением [133] для функции напряжений при кручении.



Фиг. 145.



Фиг. 146.

На контуре скорость циркулирующей жидкости имеет направление касательной к контуру, и условие на контуре для задачи гидродинамики одинаково с условием [134] для задачи на кручение.

Следовательно, распределение скоростей гидродинамической задачи математически тождественно с распределением напряжений при кручении, и, на основании известных решений гидродинамики, можно получить несколько практически важных заключений в отношении кручения.

В качестве первого примера мы возьмем малое *круглое отверстие* в скручиваемом круглом валу <sup>1)</sup> (фиг. 146).

Влияние этого отверстия на распределение напряжений подобно введению неподвижного сплошного цилиндра того же диаметра, как отверстие в поток циркулирующей жидкости, при гидродинамической задаче.

Такой цилиндр значительно изменяет скорость жидкости в непосредственной близости к нему. Скорости в передних и задних точках цилиндра уменьшаются до нуля, тогда как скорости на боковых точках *m* и *n* удваиваются.

Следовательно такого рода отверстие удваивает касательное напряжение в той части вала, где оно расположено.

<sup>1)</sup> См. Дж. Лармор (J. Larmor), „Phil. Mag.“, vol. 33, 1892, p. 76.

Небольшой полукруглый паз на поверхности, параллельный длине вала (фиг. 146), оказывает такое же влияние. Касательное напряжение в глубине паза, в точке  $m_1$ , примерно вдвое больше напряжения на поверхности вала вдали от паза.

Та же гидродинамическая аналогия объясняет влияния на распределение напряжений малого *отверстия эллиптического сечения или паза полуэллиптического сечения*.

Если одна из главных осей  $a$  малого эллиптического отверстия направлена по радиусу, а другая главная ось —  $b$ , то напряжения по краю отверстия, по концам оси  $a$ , увеличиваются в отношении

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right) : 1.$$

Итак, наибольшее напряжение, возникающее в этом случае, зависит от величины отношения  $a:b$ . Влияние отверстия на напряжения будет больше, когда большая ось эллипса направлена по радиусу, чем тогда, когда она лежит на касательной к окружности.

Этим объясняется, почему радиальные трещины так сильно влияют на понижение сопротивления вала.

Подобное же влияние на распределение напряжений получается и при подуэллиптическом пазе, параллельном оси вала.

На основании гидродинамической аналогии можно прийти также к заключению, что в выступающих углах поперечного сечения скручиваемого стержня касательное напряжение обращается в нуль, а во входящих углах это напряжение становится теоретически бесконечно большим, т. е. даже самый малый крутящий момент может вызвать явление текучести материала или трещину в подобных углах.

В случае *прямоугольного паза*, поэтому, высокие местные напряжения получаются во входящих углах, в глубине паза. Эти высокие напряжения можно понизить закруглением углов <sup>1)</sup>.

**84. Кручение полых валов.** До сих пор изложение вопросов кручения ограничивалось валами, поперечные сечения которых имели контур в виде одной сомкнутой кривой. Рассмотрим теперь полые валы, поперечные сечения которых имеют два или больше контура.

Простейшей задачей этого рода является полый вал с внутренним контуром, совпадающим с одной из *траекторий напряжений* (см. стр. 268) сплошного вала, имеющего такое же внешнее очертание своего поперечного сечения как наружный контур сечения полого вала.

Возьмем, например, вал эллиптического поперечного сечения (фиг. 130) (см. стр. 262). Функция напряжений для сплошного вала равна:

$$\varphi = \frac{a^2 b^2 A}{2(a^2 + b^2)} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right). \quad [a]$$

<sup>1)</sup> Напряжение в таких пазах было исследовано при помощи мыльных пленок. См. статью А. Гриффиса и Д. Тейлора (A. A. Griffith and G. I. Taylor), „Techn. Rept. Adv. Comm. Aeronautics“, vol. 3, 1917—1918, p. 938. Та же задача была рассмотрена оптическим методом, см. статью А. Солакяна и Г. Карелица (A. G. Solakian and G. B. Karelitz), „Trans. Am. Soc. Mech. Eng., Applied Mechanics Division, 1931.

Кривая

$$\frac{x^2}{(ak)^2} + \frac{y^2}{(bk)^2} = 1 \quad [b]$$

представляет собой эллипс, геометрически подобный наружному контуру сечения.

По этому эллипсу функция напряжений  $[a]$  остается постоянной, и, следовательно, при  $k$  меньшем единицы, *этот эллипс* является траекторией напряжений для сплошного эллиптического вала.

Касательное напряжение в любой точке траектории направлено по касательной к ней.

Представим теперь цилиндрическую поверхность, имеющую в качестве направляющей эту траекторию напряжения, а ось, параллельную оси вала. Тогда, в соответствии с вышеприведенным заключением относительно направления касательных напряжений, делаем вывод, что напряжений, действующих поперек этой цилиндрической поверхности, не будет.

Мы можем поэтому представить часть вала, ограниченную этой поверхностью, отделенной от остальной части вала, без какого-либо изменения в распределении напряжений. Следовательно, функция напряжений  $[a]$  применима также и к полюму валу.

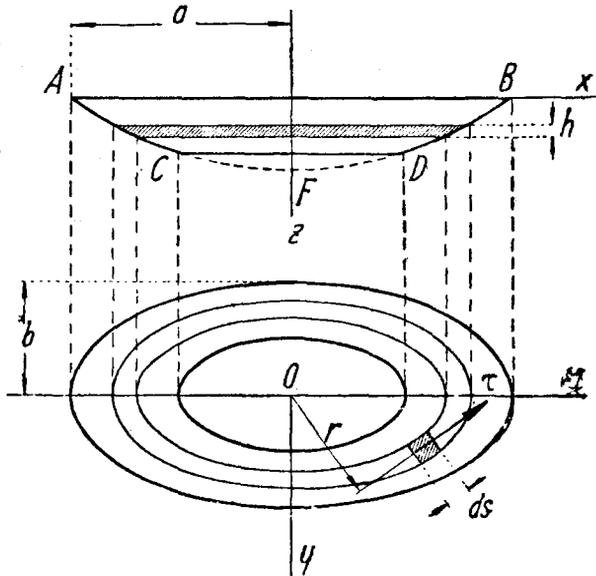
При выборе произвольной постоянной  $A$  этой функции необходимо помнить, что вал теперь полый. Этот выбор может быть облегчен, если прибегнуть к аналогии с мембраной.

Средняя часть мембраны, соответствующая отверстию вала (фиг. 147), должна быть заменена горизонтальной пластинкой  $CD$ . Уклон этой пластинки равен нулю, что соответствует нулевым напряжениям по отверстию.

Найдем крутящий момент, возникающий при наличии касательных напряжений, распределенных по элементарному кольцу между двумя смежными траекториями напряжений.

Обозначив через  $\delta$  переменную ширину кольца и рассматривая такой элемент, как заштрихованный на фигуре, получим, что касательное усилие, действующее на элемент, равно

$$\tau \delta ds,$$



Фиг. 147.

а его момент относительно точки  $O$  равен:

$$r\tau\delta ds.$$

Тогда крутящий момент элементарного кольца равен:

$$dM_t = \int r\tau\delta ds, \quad [c]$$

где интегрирование должно быть распространено на всю длину кольца.

Обозначив через  $F$  площадь, ограниченную кольцом, и заметив, что  $\tau$  — уклон поверхности мембраны, так что  $\tau\delta$  — разность уровней  $h$  двух смежных горизонталей, найдем, согласно выражению [c]:

$$dM_t = 2hF, \quad [d]$$

т. е. крутящий момент, соответствующий элементарному кольцу, равен удвоенному объему, заштрихованному на чертеже.

Полный крутящий момент равен удвоенному объему  $ABDC$ , который является разностью между объемом  $AFB$  для сплошного вала и объемом  $CFD$ , соответствующим отверстию и представляющим собой объем для сплошного вала с полуосями  $ka$  и  $kb$ .

Тогда, вместо выражения [d] (см. стр. 261), получим, что

$$M_t = \frac{a^2b^2A}{a^2 + b^2} \iint \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) dx dy - \\ - \frac{k^2a^2b^2A}{a^2 + b^2} \iint \left( \frac{x^2}{a^2k^2} + \frac{y^2}{b^2k^2} - 1 \right) dx dy = - \frac{\pi a^3 b^3 A}{2(a^2 + b^2)} (1 - k^4),$$

откуда

$$A = - \frac{2M_t(a^2 + b^2)}{\pi a^3 b^3 (1 - k^4)}.$$

Подставив это значение в выражение [a], имеем:

$$\varphi = - \frac{M_t}{\pi ab(1 - k^4)} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right),$$

откуда

$$\tau_{\max} = \frac{2M_t}{\pi ab^2} \cdot \frac{1}{1 - k^4}.$$

Возвращаясь к аналогии с мембраной, мы отметим, что равномерное давление, распределенное по части  $CFD$  мембраны, статически эквивалентно давлению той же величины, равномерно распределенному по пластинке  $CD$ , и растягивающие усилия  $q$  в мембране, действующие по краю этой пластинки, находятся в равновесии с равномерной нагрузкой на пластинке.

Следовательно в рассматриваемом случае можно применить, как и раньше, тот же экспериментальный способ определения напряжений при помощи мыльной пленки, так как замена части  $CFD$  мембраны пластин-

кой  $CD$  не вызывает изменений ни в условиях по контуру, ни в условиях равновесия остающейся части мембраны.

Рассмотрим теперь более общий случай, когда контуры отверстий уже не являются траекториями напряжений сплошного вала.

Из общей теории кручения мы знаем (см. параграф 72), что функция напряжений должна оставаться постоянной по каждому контуру, но эта постоянная не может быть взята произвольной.

При рассмотрении многосвязных контуров в плоской задаче было указано, что в этих случаях следует обратиться к выражениям для напряжений и постоянные интегрирования подобрать таким образом, чтобы обратить эти выражения в однозначные.

Подобный же прием необходимо применить и при рассмотрении кручения полых валов. Постоянные значения функции напряжений по контурам должны быть определены таким образом, чтобы перемещения получались однозначными. Тогда мы получим достаточное число уравнений для определения этих постоянных.

На основании уравнений [137] имеем:

$$\tau_{xz} = G \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \theta y \right), \quad \tau_{yz} = G \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \theta x \right). \quad [f]$$

Выполним теперь вычисление интеграла

$$\int \tau ds \quad [g]$$

по каждому контуру.

Пользуясь формулами [f] и разложив полное напряжение на его составляющие, найдем:

$$\begin{aligned} \int \tau ds &= \int \left( \tau_{xz} \frac{dx}{ds} + \tau_{yz} \frac{dy}{ds} \right) ds = \\ &= G \int \left( \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy \right) - G\theta \int (y dx - x dy). \end{aligned}$$

Первый интеграл должен обращаться в нуль, в силу того обстоятельства, что интегрирование производится по замкнутому контуру кривой, а перемещение  $w$  является однозначной функцией.

Следовательно:

$$\int \tau ds = G\theta \int (x dy - y dx).$$

Интеграл правой части одинаков с интегралом

$$\int r ds$$

наших предыдущих выкладок (см. выражение [c]) и равен  $2F$  — удвоенной площади отверстия. Поэтому

$$\int \tau ds = 2G\theta F. \quad [h]$$

Итак, постоянные значения функции напряжений по контурам отверстий необходимо подобрать так, чтобы для каждого контура удовлетворялось выражение [h].

Физический смысл выражения [h] уже был подвергнут рассмотрению (см. уравнение [146], стр. 270). Из него следует, что, при пользовании аналогией с мембраной, уровень каждой пластинки, например, пластинки CD (фиг. 147), должен быть подобран так, чтобы полное вертикальное давление на пластинку было равно и прямо противоположно вертикальной составляющей равнодействующей растягивающих усилий, передающихся на пластинку от мембраны.

Если контуры отверстий совпадают с траекториями напряжений соответствующего сплошного вала, то изложенное выше условие будет достаточным для удержания пластинок в равновесии.

В общем случае, это условие, однако, не является достаточным, и, чтобы удержать пластинку в равновесии в горизонтальном положении, становится необходимым прибегать к особым направляющим приспособлениям. Это усложняет опыты с мыльными пленками для полых валов.

Чтобы устранить это затруднение, можно прибегнуть к следующему приему <sup>1)</sup>.

Устраиваем в пластинке отверстие (фиг. 143), соответствующее наружному контуру вала. Каждый из внутренних контуров, соответствующих полостям вала, устанавливаем на вертикальной подвижной стоечке, так что его высоту можно легко отрегулировать.

Взяв эти высоты произвольно и натягивая пленку по контурам, мы получим поверхность, которая удовлетворяет уравнению [133] и условиям на контуре [134]; однако, вышеприведенное выражение [h], вообще говоря, может и не быть удовлетворено, и пленка не будет представлять распределения напряжений в полом валу.

Повторяя такой прием столько раз, каково число контуров, каждый раз с другой установкой высоты внутренних контуров, и производя измерения в каждом случае на плеске, мы получим достаточно данных для определения правильных высот внутренних контуров и сможем в конце концов натянуть мыльную пленку нужным нам образом.

Это можно доказать следующим путем.

Если  $i$  — число контуров и  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_i$  — поверхности пленок, полученных при  $i$  различных установках высот контуров, то тогда функция

$$\varphi = m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2 + \dots + m_i\varphi_i, \quad [k]$$

где  $m_1, m_2, \dots, m_i$  — числовые коэффициенты, является также решением уравнения [133], если только

$$m_1 + m_2 + \dots + m_i = 1.$$

Заметив теперь, что касательное напряжение равно уклону поверхности мембраны, и подставив выражение [k] в уравнение [h], получим  $i$  уравнений следующего вида:

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = 2G\theta F_i.$$

откуда можно получить  $i$  коэффициентов  $m_1, m_2, \dots, m_i$  в функциях от угла скручивания  $\theta$ .

<sup>1)</sup> См. А. Гриффис и Дж. Тейлор (A. A. Griffith and G. I. Taylor), Techn. Rept. Nat. Adv. Comm. Aeronautics\*, vol. 3, 1917—1918, p. 938.

После этого действительная функция напряжений получится по формуле [h] <sup>1)</sup>.

Этот прием был применен Триффисом и Тейлором для определения напряжений в полом круглом валу, имеющем прямоугольный паз. Помощью этого же приема было доказано, что наибольшее напряжение можно значительно понизить и тем повысить сопротивление вала, если его полость устроить не центрально относительно оси вала.

**85. Кручение тонкостенных труб.** Приближенное решение задачи на кручение тонкостенных труб можно без затруднений получить, пользуясь аналогией с мембраной.

Пусть *AB* и *CD* (фиг. 148) представляют уровни наружного и внутреннего контуров трубы, а *AC* и *DB* — поперечное сечение ее с натянутой мембраной между этими контурами.

В случае вала с тонкими стенками мы можем пренебречь изменениями уклона мембраны по толщине стенки и предположить, что *AC* и *BD* являются прямыми линиями. Это равнозначно предположению, что касательные напряжения распределяются равномерно по толщине стенки.

Тогда, обозначив через *h* разность уровней двух контуров и через  $\delta$  — переменную толщину стенок трубы, получим в любой точке напряжение, выражающееся уклоном поверхности мембраны, в следующем виде:

$$\tau = \frac{h}{\delta}. \quad [a]$$

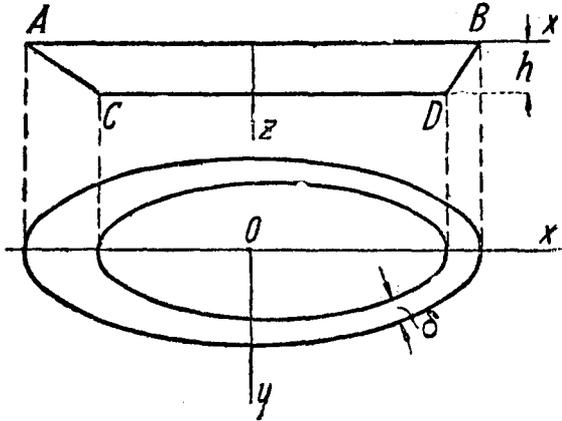
Напряжение это обратно пропорционально толщине стенки и, следовательно, будет тем больше, чем меньше толщина стенок трубы.

Чтобы установить зависимость между напряжением и крутящим моментом *M<sub>t</sub>*, прибегнем снова к аналогии с мембраной и определим крутящий момент по объему *ACDB*. Итак,

$$M_t = 2Fh = 2F\delta\tau, \quad [b]$$

где *F* — средняя арифметическая площадей, охваченных наружным и внутренним контурами поперечного сечения трубы.

<sup>1)</sup> *Гриффис* и *Тейлор* заключили из этих опытов, что, вместо пленок, находящихся под постоянным давлением, более удобно пользоваться для изучения распределения напряжений в полах валов пленками с нулевым давлением (см. стр. 270). Подробное изложение порядка вычисления коэффициентов  $\tau_1, \tau_2, \dots$  приводится в их статье, упомянутой в предыдущей выноске.



Фиг. 148.

На основании выражения [b], мы получаем простую формулу для определения касательных напряжений

$$\tau = \frac{M_t}{2F\delta}. \quad [161]$$

Для получения угла скручивания  $\theta$  применим уравнение [146]. Тогда

$$\int \tau ds = \frac{M_t}{2F} \int \frac{ds}{\delta} = 2G\theta F, \quad [c]$$

откуда <sup>1)</sup>

$$\theta = \frac{M_t}{4F^2G} \int \frac{ds}{\delta}. \quad [162]$$

Для трубы со стенками постоянной толщины,  $\delta$  — постоянная величина, и формула [162] дает нам:

$$\theta = \frac{M_t s}{4F^2G\delta}, \quad [163]$$

где  $s$  — длина осевой линии кольцевого сечения трубы.

Если труба имеет входящие углы, как например в случае, представленном на фиг. 149, то в этих углах может иметь место значительная концентрация напряжений.

Наибольшее напряжение оказывается выше напряжений, определяемых напряжением [161], и зависит от радиуса  $a$  закругления во входящем углу (фиг. 149b).

Для определения этого наибольшего напряжения воспользуемся аналогией с мембраной, как мы это делали для входящих углов прокатных профилей (параграф 81).

Уравнение мембраны у входящего угла может быть взято в следующем виде:

$$\frac{d^2z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dz}{dr} = -\frac{p}{q}.$$

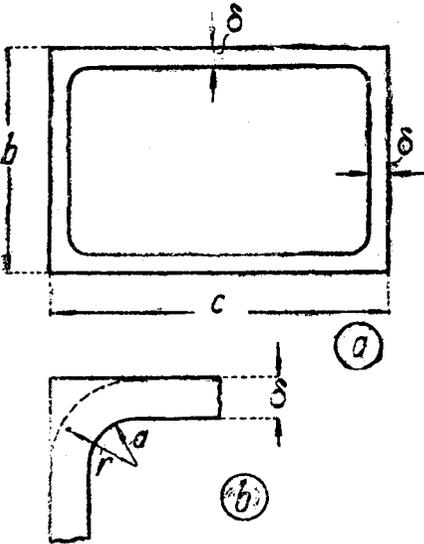
Заменив

$$\frac{p}{q}$$

через

$$2G\theta$$

<sup>1)</sup> Формулы [161] и [162] для тонкостенных трубчатых сечений были получены Р. Бредтом (R. Bredt), V. D. I\*, Bd 40, 1896, S. 815.



Фиг. 149.

и заметив (см. фиг. 148), что

$$\tau = -\frac{dz}{dr},$$

найдем:

$$\frac{d\tau}{dr} + \frac{1}{r}\tau = 2G\theta. \quad [d]$$

Допустив, что наша труба имеет постоянную толщину стенок  $\delta$ , и обозначив через  $\tau_0$  напряжение, определенное по формуле [161] для точек, находящихся на значительном расстоянии от угла, получим из уравнения [c]:

$$2G\theta = \frac{\tau_0 s}{F}.$$

Подставив это значение в уравнение [d], имеем:

$$\frac{d\tau}{dr} + \frac{1}{r}\tau = \frac{\tau_0 s}{F}. \quad [e]$$

Общее решение этого уравнения:

$$\tau = \frac{A}{r} + \frac{\tau_0 sr}{2F}. \quad [f]$$

Предположив, что выступающие углы поперечного сечения имеют закругления радиуса  $(a + \delta)$ , как указано на чертеже пунктиром<sup>1)</sup>, можем определить постоянную интегрирования  $A$  из уравнения:

$$\int_a^{a+\delta} \tau dr = \tau_0 \delta. \quad [g]$$

Это выражение является следствием гидродинамической аналогии (параграф 83). Действительно, если идеальная жидкость циркулирует по лотку, имеющему вид кольцевого сечения части трубы, то количество жидкости, проходящее через каждое сечение лотка, должно оставаться постоянным, что и выражено уравнением [g]. Подставив выражение [f] вместо  $\tau$  в уравнение [g] и выполнив интегрирование, найдем

$$A = \tau_0 h \frac{1 - \frac{s}{4F}(2a + \delta)}{\ln \frac{a + \delta}{a}}$$

и, на основании формулы [f], получим:

$$\tau = \frac{\tau_0 h}{r} \frac{1 - \frac{s}{4F}(2a + \delta)}{\ln \frac{a + \delta}{a}} + \frac{\tau_0 sr}{2F}. \quad [h]$$

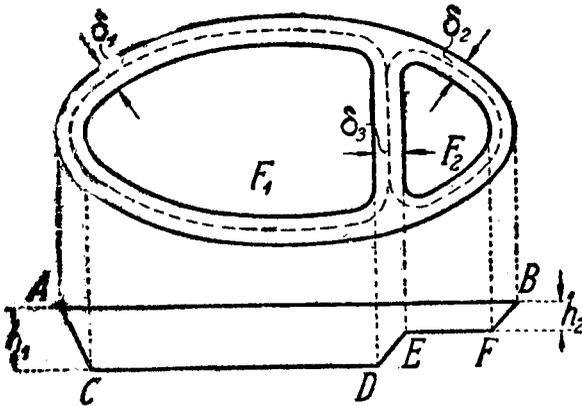
<sup>1)</sup> Это предположение не повлияет существенным образом на распределение напряжений у входящего угла.

Подставив в это выражение  $r = a$ , найдем наибольшее напряжение, во входящем углу.

Взяв, например, на фиг. 149,  $b = c = 10$  см,  $\delta = 1$  см,  $a = 0,5$  см получим  $F = 80,2$  см<sup>2</sup> и  $s = 34,2$  см. Тогда по формуле  $[h]$  найдем  $\tau = 1,54 \tau_0$ .

Рассмотрим теперь тот случай, когда сечение трубчатого элемента имеет больше двух контуров. Взяв, например, сечение трубы, представленное на фиг. 150, и допустив, что толщина стенок очень мала,

найдем, по аналогии с мембраной, что касательные напряжения в отдельных частях стенки будут равны:



$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{h_1}{\delta_1}; \\ \tau_2 &= \frac{h_2}{\delta_2}; \\ \tau_3 &= \frac{h_1 - h_2}{\delta_3} = \\ &= \frac{\tau_1 \delta_1 - \tau_2 \delta_2}{\delta_3}, \end{aligned} \right\} [k]$$

Фиг. 150.

где  $h_1$  и  $h_2$  — отметки уровней внутренних контуров  $CD$  и  $EF$ <sup>1)</sup> относительно горизонтальной плоскости  $AB$ .

Величина крутящего момента определится по объему  $ACDEFB$ :

$$M_t = 2(F_1 h_1 + F_2 h_2) = 2F_1 \delta_1 \tau_1 + 2F_2 \delta_2 \tau_2, \quad [l]$$

где  $F_1$  и  $F_2$  — площади, заключенные в контурах, обозначенных на чертеже пунктирными линиями.

Дальнейшие зависимости для решения приведенной выше задачи получатся при применении уравнения [146] к замкнутым кривым, показанным на чертеже пунктиром. Допустив, что толщины  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  и  $\delta_3$  являются постоянными, и обозначив через  $s_1$ ,  $s_2$  и  $s_3$  длины соответствующих пунктирных кривых, найдем, согласно фигуре 150:

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 s_1 + \tau_3 s_3 &= 2G\theta F_1; \\ \tau_2 s_2 - \tau_3 s_3 &= 2G\theta F_2. \end{aligned} \right\} [m]$$

Пользуясь последней из формул  $[k]$  и выражениями  $[l]$  и  $[m]$ , получим напряжения  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  и  $\tau_3$  в функции от крутящего момента:

$$\tau_1 = \frac{M_t [\delta_3 s_2 F_1 + \delta_2 s_3 (F_1 + F_2)]}{2 [\delta_1 \delta_3 s_2 F_1^2 + \delta_2 \delta_3 s_1 F_2^2 + \delta_1 \delta_2 s_3 (F_1 + F_2)^2]}; \quad [n]$$

<sup>1)</sup> Предполагается, что пластинки поддерживаются так, что остаются горизонтальными (см. стр. 298).

$$\tau_2 = \frac{M_t [\delta_3 s_1 F_2 + \delta_1 s_3 (F_1 + F_2)]}{2 [\delta_1 \delta_3 s_2 F_1^2 + \delta_2 \delta_3 s_1 F_2^2 + \delta_1 \delta_2 s_3 (F_1 + F_2)^2]} ; \quad [o]$$

$$\tau_3 = \frac{M_t (\delta_1 s_2 F_1 - \delta_2 s_1 F_2)}{2 [\delta_1 \delta_3 s_2 F_1^2 + \delta_2 \delta_3 s_1 F_2^2 + \delta_1 \delta_2 s_3 (F_1 + F_2)^2]} . \quad [p]$$

При симметричном сечении  $s_1 = s_2$ ,  $\delta_1 = \delta_2$ ,  $F_1 = F_2$  и  $\tau_3 = 0$ . В этом случае крутящий момент воспринимается наружной стенкой трубы, а промежуточная стенка остается ненапряженной<sup>1)</sup>.

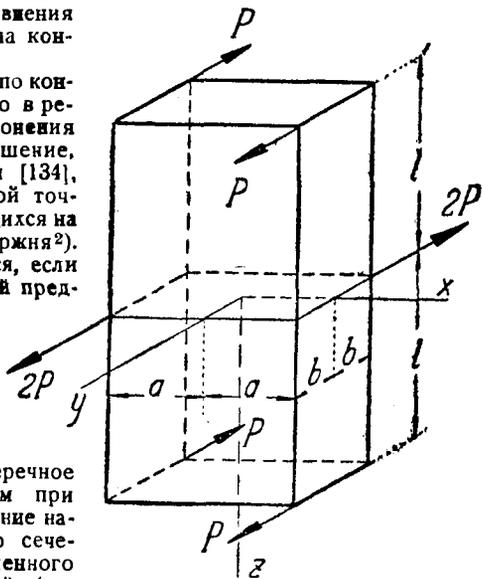
Чтобы получить угол скручивания для любого подобного показанному на фиг. 150 сечения, следует подставить величины найденных напряжений в уравнения [m]. Таким образом получим угол скручивания  $\theta$  в функции крутящего момента  $M_t$ .

**86. Кручение стержня, одно из поперечных сечений которого остается плоским.** При рассмотрении задач на кручение, обычно предполагают, что крутящий момент приложим при помощи касательных напряжений, распределенных по конечным сечениям стержня в известном порядке, отвечающем решению уравнения [133] и удовлетворяющему условию на контуре [134].

Если распределение напряжений по концам различно от вышеизложенного, то в результате получаются местные отклонения от распределения напряжений, и решение, полученное по уравнениям [133] и [134], может быть применено с достаточной точностью лишь для частей вала, находящихся на некотором расстоянии от концов стержня<sup>2)</sup>.

Подобные отклонения получаются, если при помощи некоторых закреплений предотвращена возможность искривления какого-либо сечения скручиваемого стержня. Задачи такого рода встречаются иногда в технике<sup>3)</sup>.

Простейший пример показан на фиг. 151. Из условий симметрии можно заключить, что среднее поперечное сечение стержня остается плоским при кручении. Следовательно, распределение напряжений вблизи этого поперечного сечения должно быть отличным от полученного выше для прямоугольных стержней (параграф 78).



Фиг. 151.

1) Малыми напряжениями, отвечающими изменению уклона поверхности мембраны по толщине стенки, при этом выводе мы пренебрегли.

2) Местные неправильности в распределении напряжений по концам круглого цилиндра были рассмотрены Ф. Пурсером (F. Purser), „Proc. Roy. Irish. Acad.“, Dublin, vol. 26, series A, 1906, p. 54. См. также К. Вольф (K. Wolf), „Sitzungsb. Acad. Wiss.“, Wien, Bd 122, 1916, S. 1149, и А. Тимпе (A. Timpe), „Math. Annalen“, Bd 71, 1912, S. 480.

3) Кручение двутавровых балок, поставленных в такие условия, было рассмотрено автором, „Z. Math. Physik“, Bd 58, 1910, S. 361; см. также К. Вебер (C. Weber), „Z. angew. Math. u. Mech.“, Bd 6, 1926, S. 85.

Для исследования этих напряжений рассмотрим сперва очень узкий прямоугольник<sup>1)</sup> и предположим, что размер  $a$  велик по сравнению с размером  $b$ . Если поперечные сечения могут свободно искривляться, то напряжения, согласно параграфу 77, равны

$$\tau_{xz} = -2G\theta y; \quad \tau_{yz} = 0, \quad [a]$$

и соответствующие перемещения, на основании формул [136] и уравнений [137], будут:

$$u = -\theta yz; \quad v = \theta xz; \quad w = -\theta xy. \quad [b]$$

Чтобы предотвратить искривление сечений, выражающееся перемещением  $w$ , по поперечным сечениям должны быть распределены нормальные напряжения  $\sigma_z$ .

Приближенное решение мы получим, если предположим, что  $\sigma_z$  — пропорционально перемещению  $w$  и что оно уменьшается с увеличением расстояния  $z$  от среднего поперечного сечения. Эти предположения будут выполнены, если принять

$$\sigma_z = -mE\theta e^{-mz} xy, \quad [c]$$

где  $m$  — коэффициент, подлежащий в дальнейшем определению.

Из-за наличия множителя  $e^{-mz}$  напряжение  $\sigma_z$  уменьшается с увеличением  $z$ , и им становится возможным пренебречь на некотором расстоянии, зависящем от величины коэффициента  $m$ .

Остальные составляющие напряжения должны быть выбраны таким образом, чтобы удовлетворялись дифференциальные уравнения равновесия [116] и условия на контуре. Не трудно доказать, что эти требования будут выполнены, если принять:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = 0; \\ \tau_{xy} = -\frac{Em^3}{8} \theta e^{-mz} (a^2 - x^2)(b^2 - y^2); \\ \tau_{xz} = \frac{Em^2}{4} \theta e^{-mz} (a^2 - x^2)y - 2G\theta y; \\ \tau_{yz} = \frac{Em^2}{4} \theta e^{-mz} (b^2 - y^2)x. \end{aligned} \right\} [d]$$

При больших значениях ординаты  $z$ , это распределение напряжений приближается к распределению напряжений [a] для простого кручения.

Составляющая напряжения  $\tau_{xy}$  становится равной нулю на контуре при

$$x = \pm a \quad \text{и} \quad y = \pm b;$$

напряжения  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  равны нулю соответственно при

$$x = \pm a \quad \text{и} \quad y = \pm b.$$

Следовательно, условия на контуре выполнены, и боковая поверхность стержня свободна от усилий.

Для определения коэффициента  $m$  рассмотрим потенциальную энергию деформации стержня и подберем величину  $m$  так, чтобы эта энергия получила наименьшее значение. На основании выражения [80] на стр. 154, имеем:

$$U = \frac{1}{2G} \int_{-l}^{+l} \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} \left[ \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 + \frac{1}{2(1+\nu)} \sigma_z^2 \right] dx dy dz.$$

<sup>1)</sup> См. статью автора, „Proc. London Math. Soc.“, series 2, vol. 20, 1921, p. 389.

Подставив напряжения по формулам [d] и заметив, что для длинного стержня мы с достаточной точностью можем принять

$$\int_0^l e^{-mz} dz = \frac{1}{m}.$$

получим

$$U = \frac{E\theta^2 a^3 b^3}{9} \left\{ -3m + (1 + \nu) \left[ \frac{2a^2 b^2 m^5}{25} + \frac{(a^3 + b^3) m^3}{5} + \frac{12}{(1 + \nu)^2} \cdot \frac{l}{a^2} \right] \right\}. \quad [e]$$

Условие минимума дает нам следующее уравнение для определения коэффициента  $m$ :

$$(1 + \nu) \left[ \frac{2a^2 b^2 m^4}{5} + \frac{3(a^3 + b^3) m^2}{5} \right] = 3,$$

из которого, при узком прямоугольнике, приближенно получается:

$$m^2 = \frac{5}{(1 + \nu) a^3}. \quad [f]$$

Подставив это значение коэффициента  $m$  в формулы [c] и [d], найдем распределение напряжений в том случае, когда среднее поперечное сечение стержня остается плоским.

Для определения угла скручивания  $\psi$ , приравняем потенциальную энергию деформации [e] работе, совершаемой крутящим моментом  $M_t$ :

$$\frac{M_t \psi}{2} = U,$$

откуда угол скручивания получается равным:

$$\psi = \frac{3M_t}{16G a b^3} \left[ l - \frac{\sqrt{5(1 + \nu)}}{6} a \right]. \quad [g]$$

Сравнивая этот результат с формулой [149] (см. стр. 272), мы приходим к заключению, что предотвращением искривления среднего поперечного сечения мы увеличиваем жесткость стержня на кручение.

Влияние местных irregularностей в распределении напряжений на величину угла скручивания  $\psi$  равноценно влиянию уменьшения длины  $l$  на величину

$$a \frac{\sqrt{5(1 + \nu)}}{6}.$$

Приняв  $\nu$  равным 0,3, мы это уменьшение длины  $l$  получим равным 0,425  $a$ . Мы видим, что влияние закрепления среднего поперечного сечения на угол скручивания мало, если размер  $a$  сечения вала мал по сравнению с длиной  $l$ .

Подобным же образом может быть исследовано скручивание стержня эллиптического поперечного сечения<sup>1)</sup>.

Большее влияние оказывает закрепление среднего поперечного сечения на скручивание стержня двутаврового сечения. Приближенный прием определения угла скручивания для этого последнего случая состоит в рассмотрении изгиба полки при кручении<sup>2)</sup>.

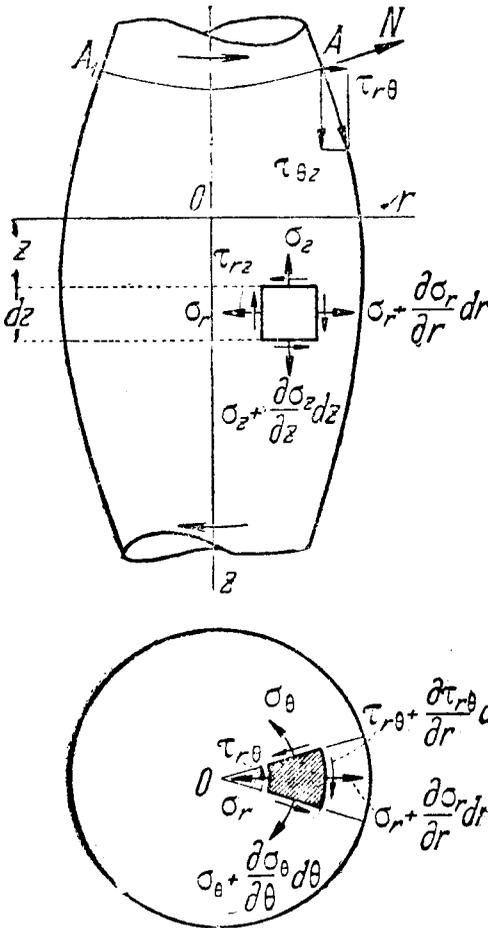
**87. Кручение круглых валов переменного диаметра.** Рассмотрим вал, представляющий собой тело вращения, скручиваемый парами сил, приложенными по его концам (фиг. 152).

1) См. А. Фёппль (A. Förpl), „Sitzungsb. Bayer. Akad. Wiss., Math.-phys. Klasse, München, 1920, S. 261.

2) См. статью автора, упомянутую выше, в выписке на стр. 304.

Мы можем принять ось вала за ось  $z$ , а для определения положения любого элемента в плоскости поперечного сечения воспользоваться полярными координатами  $r$  и  $\theta$ . В таком случае обозначения составляющих напряжения будут:

$$\begin{matrix} \sigma_r, & \sigma_\theta, & \sigma_z; \\ \tau_{rz}, & \tau_{r\theta}, & \tau_{\theta z}. \end{matrix}$$



Фиг. 152.

Составляющие перемещения в радиальном и тангенциальном направлениях обозначим через  $u$  и  $v$ , а составляющую в направлении оси  $z$  — через  $w$ . Тогда, пользуясь формулами, полученными ранее при решении плоской задачи (параграф 24), найдем следующие выражения для составляющих деформации:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}, \\ \epsilon_\theta &= \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta}; \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}; \\ \gamma_{rz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}; \\ \gamma_{z\theta} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{r \partial \theta}. \end{aligned} \right\} [164]$$

Написав уравнения равновесия для какого-либо элемента (фиг. 152) так, как мы это делали раньше при плоской задаче (параграф 21), и предположив, что объемные силы здесь отсутствуют, мы придем к следующим дифференциальным уравнениям равновесия <sup>1)</sup>:

<sup>1)</sup> Эти уравнения были получены Ламе (Lamé) и Клапейроном (Clapeyron); см. „Crelle's Journ.“, t. 7, 1831.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} &= 0. \end{aligned} \right\} [165]$$

При применении этих уравнений к задаче кручения мы воспользуемся *полуобратным способом* (см. стр. 257) и предположим, что  $u$  и  $w$  равны нулю, т. е. что при скручивании частицы вала могут перемещаться лишь в тангенциальных направлениях.

Это допущение отличается от предположения для круглого вала постоянного диаметра тем, что тангенциальные перемещения уже не предполагаются более пропорциональными расстоянию от оси. Поэтому радиусы поперечного сечения при скручивании становятся изогнутыми.

На следующих страницах будет показано, что решение, полученное на основе такого предположения, удовлетворяет всем уравнениям упругости и поэтому представляет правильное решение задачи.

Подставив в выражения [164]  $u = w = 0$  и приняв во внимание то обстоятельство, что, по условиям симметрии, перемещение  $v$  не зависит от угла скручивания  $\theta$ , мы найдем, что:

$$\epsilon_r = \epsilon_\theta = \epsilon_z = 0; \quad \gamma_{rz} = 0; \quad \gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}; \quad \gamma_{\theta z} = \frac{\partial v}{\partial z}. \quad [a]$$

Следовательно, из всех составляющих напряжения лишь составляющие  $\gamma_{r\theta}$  и  $\gamma_{\theta z}$  отличны от нуля. Первые два уравнения [165] обращаются в тождества, а третье из этих уравнений дает:

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0. \quad [b]$$

Это уравнение можно написать в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{\partial}{\partial z} (r^2 \tau_{\theta z}) = 0. \quad [c]$$

Ясно, что это уравнение будет удовлетворено, если воспользоваться такой функцией напряжения  $\varphi$  от координат  $r$  и  $z$ , чтобы:

$$r^2 \tau_{r\theta} = - \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \quad r^2 \tau_{\theta z} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}. \quad [d]$$

Чтобы удовлетворить условиям совместности, необходимо принять во внимание, что напряжения  $\tau_{r\theta}$  и  $\tau_{\theta z}$  являются функциями перемещения  $v$ . На основании выражений [a] и [d], найдем:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{r\theta} &= G \gamma_{r\theta} = G \left( \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) = Gr \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v}{r} \right) = - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \\ \tau_{\theta z} &= G \gamma_{\theta z} = G \frac{\partial v}{\partial z} = Gr \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v}{r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial r}. \end{aligned} \right\} [e]$$

Из этих уравнений следует, что:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r^3} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r^3} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0, \quad [f]$$

или

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad [g]$$

Рассмотрим теперь условия на контуре для функции  $\varphi$ . Из того обстоятельства, что боковая поверхность вала свободна от внешних сил, мы приходим к заключению, что в любой точке  $A$  на контуре осевого сечения (фиг. 152) полное касательное напряжение должно быть направлено по касательной к контуру, а его проекция на нормаль  $N$  к контуру должна быть равна нулю. Следовательно:

$$\tau_{r\theta} \frac{dz}{ds} - \tau_{\theta z} \frac{dr}{ds} = 0,$$

где  $ds$  — элемент контура.

Подставив значения напряжений по выражениям [d], мы найдем, что:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{dr}{ds} = 0, \quad [h]$$

откуда выводим заключение, что функция  $\varphi$  — постоянна по контуру осевого сечения вала.

Уравнение [g], вместе с условием на контуре [h], вполне определяет функцию напряжений  $\varphi$ . Зная последнюю, получим напряжения, удовлетворяющие уравнениям равновесия, уравнениям совместности и условию на боковой поверхности вала<sup>1)</sup>.

Величина крутящего момента получится, если взять поперечное сечение и найти момент, который дают касательные напряжения  $\tau_{\theta z}$ . Тогда

$$M_t = \int_0^a 2\pi r^2 \tau_{\theta z} dr = 2\pi \int_0^a \frac{\partial \varphi}{\partial r} dr = 2\pi \left[ \varphi \right]_0^a, \quad [k]$$

где  $a$  — наружный радиус поперечного сечения.

Таким образом, крутящий момент найдется без затруднений, если нам известна разность между значениями функции напряжений на внешнем контуре и в центре поперечного сечения.

При рассмотрении перемещений от скручивания вала, воспользуемся для угла поворота элементарного кольца радиуса  $r$  поперечного сечения вала обозначением:

$$\psi = \frac{\varphi}{r}.$$

<sup>1)</sup> Это общее решение задачи принадлежит Дж. Мичелю (J. H. Michell), „Proc. London Math. Soc.“, vol. 31, 1901, p. 149. См. также А. Фёппль (A. Förpl), „Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss.“, München, Bd. 35, 1905, SS. 249 und 504. Обзор литературы по этому вопросу дан Т. Пёшлем (Th. Pöschl), „Z. angew. Math. Mech.“, Bd. 2, 1922, S. 137.

Это кольцо можно рассматривать как поперечное сечение одной из многих тонких элементарных трубок, на которые разделен вал.

Тогда  $\psi$  будет являться углом скручивания такой трубки. Из того обстоятельства, что радиусы поперечных сечений искривляются, следует, что угол  $\psi$  меняется с изменением радиуса  $r$ , и углы скручивания элементарных трубок для одного и того же поперечного сечения вала не будут равны друг другу.

Уравнения [e] напишем теперь в следующем виде:

$$Gr^3 \frac{\partial \psi}{\partial r} = - \frac{\partial \varphi}{\partial z};$$

$$Gr^3 \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial r},$$

откуда:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^3 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( r^3 \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = 0,$$

или, иначе:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0. \quad [l]$$

Решение этого уравнения даст нам угол скручивания в функции от  $r$  и  $z$ .

Если положить в этом решении

$$\psi = \text{const}, \quad [m]$$

то мы получим поверхность, все точки которой имеют один и тот же угол скручивания.

На фиг. 152 линия  $AA_1$  представляет пересечение такой поверхности с осевым сечением вала. Из условий симметрии следует, что поверхности, отвечающие уравнению [m], являются поверхностями вращения, и линия  $AA_1$  является меридианом, проведенным через точку  $A$ .

При скручивании, эти поверхности поворачиваются относительно оси  $z$  с некоторым искажением, таким же точно образом, как плоские поперечные сечения в случае круглых цилиндрических валов.

Следовательно, полная деформация в любой точке меридиана  $AA_1$  представляет собой деформацию чистого сдвига в плоскости, перпендикулярной к меридиану, и соответствующее касательное напряжение в осевом сечении вала направлено по нормали к меридиану. На боковой поверхности вала эти напряжения направлены по касательным к контуру осевого сечения, меридианы же перпендикулярны к контуру.

Если мы перейдем от поверхности  $\psi = \text{const}$  к смежной поверхности, то приращение угла  $\psi$  на контуре осевого сечения вала будет равно

$$\frac{d\psi}{ds},$$

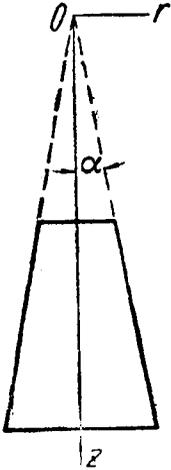
и точно так же, как для цилиндрического вала круглого сечения (параграф 69), имеем

$$\tau = Gr \frac{d\psi}{ds}, \quad [n]$$

где

$$\tau = \tau_{r0} \frac{dr}{ds} + \tau_{\theta z} \frac{dz}{ds}$$

является равнодействующим касательным напряжением на контуре. Очевидно, что величину этого касательного напряжения легко получить, если мы найдем опытным путем значения производной <sup>1)</sup>:



Фиг. 153.

$$\frac{d\psi}{ds}.$$

Рассмотрим теперь частный случай конического вала <sup>2)</sup> (фиг. 153). В этом случае отношение

$$\frac{z}{(r^2 + z^2)^{1/2}}$$

является постоянным на контуре осевого сечения и равняется  $\cos \alpha$ .

Любая функция от этого отношения будет удовлетворять условию на контуре  $[h]$ . Чтобы удовлетворить также уравнению  $[g]$ , мы возьмем функцию напряжений в таком виде:

$$\varphi = A \left\{ \frac{z}{(r^2 + z^2)^{1/2}} - \frac{1}{3} \left[ \frac{z}{(r^2 + z^2)^{1/2}} \right]^3 \right\}, \quad [o]$$

где  $A$  — постоянная.

Тогда, дифференцируя, имеем:

$$\tau_{\theta z} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = - \frac{Arz}{(r^2 + z^2)^{3/2}}. \quad [p]$$

Постоянную  $A$  найдем из выражения  $[k]$ . Подставив функцию  $[o]$  в это выражение, получим:

$$A = - \frac{M_t}{2\pi (2/3 \cos \alpha + 1/3 \cos^3 \alpha)}.$$

Чтобы определить угол скручивания, воспользуемся формулами  $[e]$ , из которых найдем выражение для  $\psi$ , удовлетворяющее уравнению  $[l]$  и условию на контуре:

$$\psi = \frac{A}{3G (r^2 + z^2)^{3/2}}. \quad [q]$$

Из этого видно, что поверхности равного угла скручивания являются сферическими поверхностями, центр которых совпадает с началом координат  $O$ .

<sup>1)</sup> Такие опыты были выполнены *Р. Зонтагом* (*R. Sonntag*), „Z. angew. Math. Mech.“, Bd 9, 1929, S. 1.

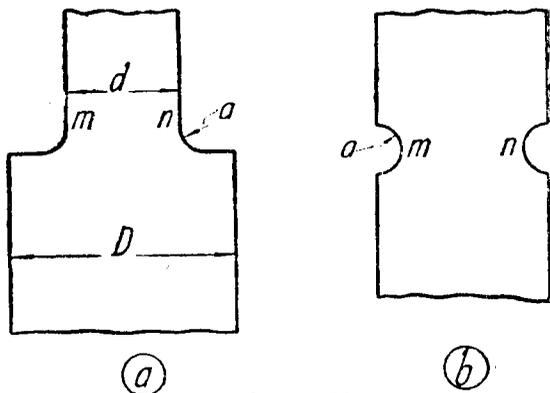
<sup>2)</sup> См. статью *А. Фёпеля*, упомянутую в выноске на стр. 308.

Таким же путем можно рассмотреть валы в виде эллипсоида, гиперболоида или параболоида вращения<sup>1)</sup>.

Задачи, встречающиеся на практике, оказываются более сложными. Диаметр вала обычно меняется резко, как показано на фиг. 154а. Первое исследование таких задач было выполнено А. Фёпплем.

К. Рунге предложил численный метод приближенного решения этих задач<sup>2)</sup> и показал, что в таких точках, как *m* и *n*, имеет место значительная концентрация напряжений, и что величина наибольшего напряжения для вала с двумя различными диаметрами *d* и *D* (фиг. 154а) зависит от отношения между радиусом *a* выкружки и диаметром *d* вала, в также от отношения между диаметрами вала *d*:*D*.

При полукруглой выточке очень малого радиуса *a*, наибольшее напряжение в глубине выточки (фиг. 154б) вдвое



Фиг. 154.

больше напряжения на поверхности цилиндрического вала без выточки.

При рассмотрении местных напряжений в выкружках и выточках скручиваемых круглых валов оказалось очень полезным применение электрической аналогии<sup>3)</sup>. Общее уравнение для электрического тока в тонкой однородной пластинке переменной толщины представится в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( h \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0, \quad [r]$$

где *h* — переменная толщина пластинки и  $\psi$  — функция потенциала.

Предположим, что пластинка имеет такое же очертание, как и осевое сечение вала (фиг. 155), что оси *x* и *y* совпадают с осями *z* и *r*, и что толщина пластинки пропорциональна кубу радиального расстояния *r*, так что

$$h = \alpha r^3.$$

1) См. статьи *Е. Мелана* (*E. Melan*), „Techn. Blätter“, Prag, 1920, *А. Н. Динника*, „Известия Донского политехнического института“, Новочеркасск, 1912 г., *В. Арндта* (*W. Arndt*), „Die Torsion von Wellen mit achsensymmetrischen Bohrungen und Hohlräumen. Dissertation, Göttingen, 1916, и *А. Тимпе* (*A. Timpe*), „Math. Annalen“, 1911, S. 480.

2) См. *Ф. Виллерс* (*F. A. Willers*), „Z. Math. Physik.“, Bd 55, 1907, S. 225. Другой приближенный метод был предложен *Л. Фёпплем* (*L. Föppl*), „Sitzungsb. Bayer. Akad. Wiss.“, München, Bd 51, 1921, S. 61 и *Р. Зонntagом* (*R. Sonntag*), „Z. angew. Math. u. Mech.“, Bd 9, 1929, S. 1.

3) См. статью *Л. Якобсена* (*L. S. Jacobsen*), „Trans. Am. Soc. Mech. Eng.“, vol. 47, 1925, p. 619.

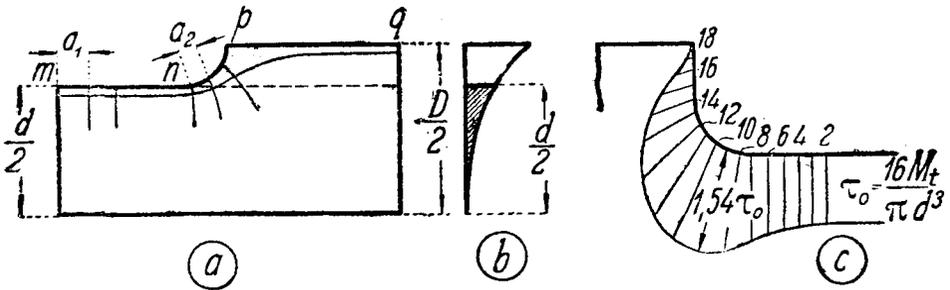
Тогда уравнение [r] получает такой вид:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = 0.$$

Оно совпадает с уравнением [l], и мы приходим к выводу, что линии равного потенциала пластинки выражаются тем же уравнением, что и линии равных углов скручивания в случае вала переменного диаметра.

Если предположить, что концы пластинки, соответствующие концам вала, удерживаются на определенной величине разности потенциалов, так что электрический ток идет вдоль оси  $z$ , то линии равного потенциала будут перпендикулярны к боковым сторонам пластинки, т. е. мы получаем те же условия на контуре, как и для линий равного угла скручивания.

Если дифференциальные уравнения и условия на контуре одинаковы для этих двух родов линий, то линии тождественны.



Фиг. 155.

Таким образом, путем исследования распределения потенциала по пластинке можно получить ценные указания относительно распределения напряжений в скручиваемом валу.

Наибольшее напряжение получается на поверхности вала, и мы его найдем по формуле [n]. Из этого выражения, в применении к электрической аналогии, следует, что напряжение пропорционально относительной величине падения потенциала по краю пластинки.

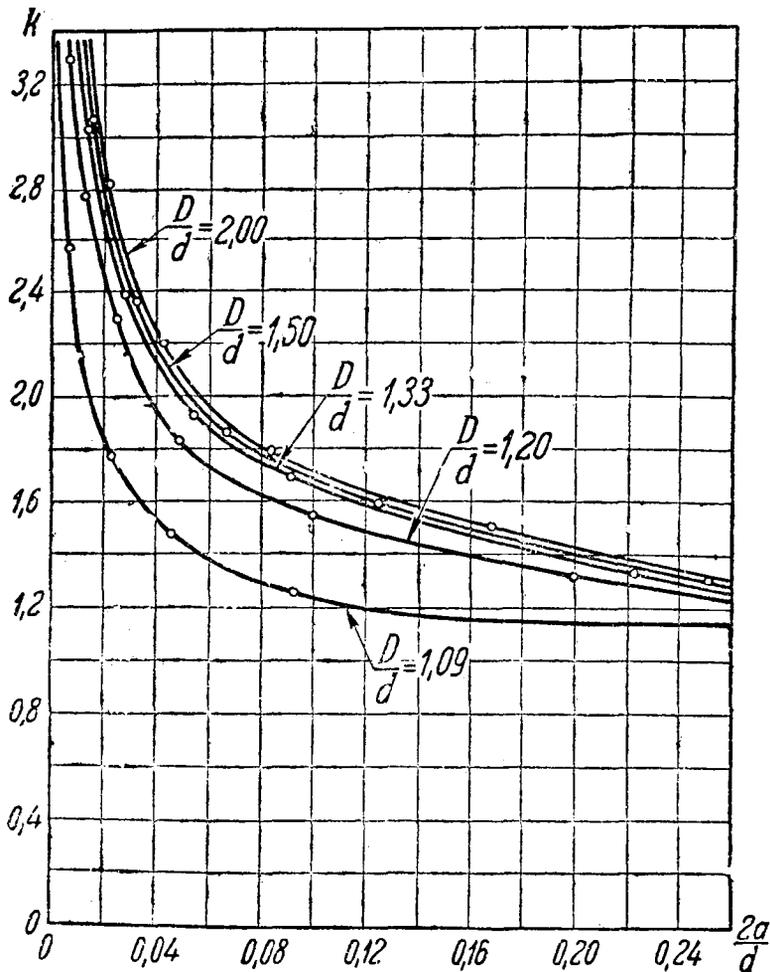
Фактические измерения были произведены над стальным образцом длиной 24 дюйма (60,96 см), шириной 6 дюймов (15,24 см) в широком конце, с наибольшей толщиной в 1 дюйм (2,54 см) (фиг. 155).

Падение потенциала по краю  $mnpq$  образца исследовалось при помощи чувствительного гальванометра, к контактам которого были присоединены две острые иглы, наглухо закрепленные на неизменном расстоянии в 2 мм друг от друга.

При касании к пластинке иглками, гальванометр показывал падение потенциала на расстоянии между остриями иглонок. Перемещая иглолки по длине выкружки, получаем возможность найти место наибольшего падения вольтажа и измерить его. Отношение между этим наибольшим падением и падением вольтажа у отдаленной от выкружки точки  $m$

(Фиг. 155а) даст нам величину коэффициента концентрации напряжений  $k^1$ ) в выражении:

$$\tau_{\max} = k \frac{16M_t}{\pi d^3}$$



Фиг. 156.

Результаты подобных исследований представлены для одного частного случая диаграммой (фиг. 155с), на которой измеренное для каждой точки падение потенциала изображено длиной перпендикуляра к краю пластинки

<sup>1)</sup> В этом случае малыми изменениями радиуса  $r$  (см. выражение [л]) можно пренебречь.

в этой точке. По построенной таким образом диаграмме коэффициент концентрации напряжения найден равным 1,54.

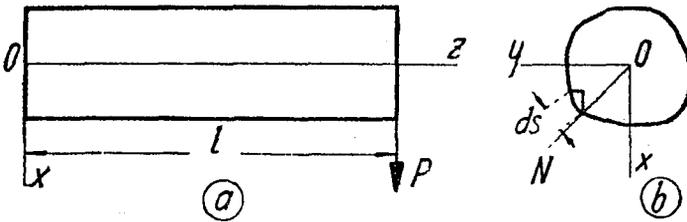
Величины этого коэффициента, полученные для различных соотношений в размерах валов, показаны на фиг. 156 в виде графика, где абсциссы представляют отношения между радиусом выкружки и меньшим радиусом вала, а ординаты—коэффициент концентрации напряжений при различных значениях отношения  $D:d$  (см. фиг. 154). Помощью интерполяции между этими кривыми можно найти с достаточной точностью коэффициент концентрации напряжений в любом частном случае.

---

## ГЛАВА ДЕСЯТАЯ.

### ИЗГИБ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ БРУСЬЕВ.

**88. Изгиб консоли.** При рассмотрении чистого изгиба (параграф 70) было показано, что, если призматический брус изгибается в одной из своих главных плоскостей двумя равными и прямо противоположными парами сил, приложенными к концам бруса, то прогиб получается в той же плоскости, и из шести составляющих напряжения отличным от нуля является лишь нормальное напряжение, параллельное оси стержня. Это



Фиг. 157.

напряжение пропорционально расстоянию от нейтральной оси. Таким образом, в этом случае точное решение совпадает с элементарной теорией изгиба.

При рассмотрении изгиба консоли узкого прямоугольного сечения силой, приложенной в конце ее (параграф 17), было показано, что, кроме нормальных напряжений, пропорциональных в каждом сечении изгибающему моменту, будут действовать также касательные напряжения, пропорциональные перерезывающей силе.

Рассмотрим теперь более общий случай изгиба консоли постоянного сечения произвольного вида при силе  $P$ , приложенной к концу консоли и параллельной одной из главных осей поперечного сечения <sup>1)</sup> (фиг. 157).

Возьмем начало координат в центре тяжести заделанного конца. Пусть ось  $z$  совпадает с осевой линией бруса, а оси  $x$  и  $y$  совпадают с главными осями поперечного сечения.

К решению этой задачи применим полуобратный способ Сен-Венана и с самого начала сделаем некоторые предположения относительно

<sup>1)</sup> Эта задача была решена Сен-Венаном (Saint-Venant), „Journal mathématique. (Liouville), série 2, t. 1, 1856.

напряжений. Допустим, что нормальные напряжения по сечению на расстоянии  $z$  от закрепленного конца распределяются таким же образом, как и в случае чистого изгиба:

$$\sigma_z = - \frac{P(l-z)x}{I}. \quad [a]$$

Допустим также, что имеются касательные напряжения, действующие в тех же сечениях, которые мы разложим в каждой точке на составляющие  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$ . Предположим, что остальные три составляющих напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  — равны нулю.

Можно показать, что, на основании этих предположений, мы придем к решению, которое удовлетворяет всем уравнениям теории упругости и которое, следовательно, является точным решением задачи.

При таких предположениях, пренебрегая объемными силами, получим дифференциальные уравнения равновесия [116] в следующем виде:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0; \quad [b]$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = - \frac{Px}{I}. \quad [c]$$

Из уравнений [b] заключаем, что касательные напряжения не зависят от координаты  $z$  и одинаковы для всех поперечных сечений бруса.

Рассмотрим теперь условия [117] и применим их к боковой поверхности бруса, свободной от внешних сил. Мы найдем, что первые два из этих уравнений обращаются в тождества, а третье дает:

$$\tau_{xz}l + \tau_{yz}m = 0.$$

Из чертежа фиг. 157b мы видим, что:

$$l = \cos(N, x) = \frac{dy}{ds}; \quad m = \cos(N, y) = - \frac{dx}{ds},$$

где  $ds$  — элемент кривой, ограничивающей поперечное сечение.

Тогда условие на контуре сечения будет таким:

$$\tau_{xz} \frac{dy}{ds} - \tau_{yz} \frac{dx}{ds} = 0. \quad [d]$$

Обращаясь к уравнениям совместности [119], мы видим, что первые три из этих уравнений, содержащие составляющие нормального напряжения, и последнее уравнение, содержащее напряжение  $\tau_{xy}$ , обращаются в тождества. Система уравнений [119] приводится таким образом к двум уравнениям:

$$\nabla^2 \tau_{yz} = 0; \quad \nabla^2 \tau_{xz} = - \frac{P}{I(1+\nu)}. \quad [e]$$

Итак, решение задачи изгиба призматической консоли любого сечения сводится к нахождению для напряжений  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  таких функций от ординат  $x$  и  $y$ , которые удовлетворяли бы уравнению равновесия [c], условию на контуре [d] и уравнениям совместности [e].

**89. Функция напряжений.** При рассмотрении задач на изгиб мы снова будем пользоваться функцией напряжений  $\varphi(x, y)$ . Легко видеть, что дифференциальные уравнения равновесия [b] и [c] предыдущего параграфа будут удовлетворены, если принять:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{Px^2}{2I} + f(y); \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad [166]$$

где  $\varphi$  — функция напряжений от координат  $x$  и  $y$ , а функция  $f(y)$  является подлежащей в дальнейшем определению из условий на контуре функцией одной лишь ординаты  $y$ .

Подставив выражения [166] в уравнения совместности [e] предыдущего параграфа, мы получим:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{P}{I} - \frac{d^2 f}{dy^2}.$$

Из этих уравнений мы приходим к заключению, что:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{Py}{I} - \frac{df}{dy} + c, \quad [a]$$

где  $c$  — произвольная постоянная интегрирования.

Эта постоянная имеет очень простой физический смысл. Рассмотрим вращение элементарной площадки в плоскости поперечного сечения консоли. Угол поворота ее представится выражением (см. стр. 183):

$$2\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Производную этого угла по координате  $z$  можно написать следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}.$$

На основании закона Гука и выражений [166] для составляющих напряжения получим:

$$\frac{\partial}{\partial z} (2\omega) = \frac{1}{G} \left( \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} \right) = -\frac{1}{G} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{df}{dy} \right).$$

Подставив найденное выражение в уравнение [a], имеем:

$$-G \frac{\partial}{\partial z} (2\omega) = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{Py}{I} + c.$$

Из этого следует, что производная угла поворота по координате  $z$  состоит из двух частей: одна часть — постоянная величина, а вторая — функция ординаты  $y$ .

Первая часть является такого же рода вращением поперечного сечения, как и в случае скручиваемого стержня.

Вторая часть представляет поворот элементарных площадок от искажений в плоскости поперечного сечения, показанных на фиг. 122*b* (см. стр. 249).

При нашем рассмотрении будем предполагать, что, помощью простого переноса груза  $P$  параллельно самому себе в плоскости концевое сечения, скручивание консоли устранено. Тогда постоянная интегрирования  $c$  в уравнении [a] может быть принята равной нулю, и мы получим:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\nu}{1 + \nu} \frac{Py}{I} - \frac{df}{dy}. \quad [167]$$

Подставив выражения [166] в условие на контуре [d] предыдущего параграфа, найдем:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \left[ \frac{Px^2}{2I} - f(y) \right] \frac{dy}{ds}. \quad [168]$$

Из этого уравнения можно получить значения функции  $\varphi$  на контуре поперечного сечения, если подобрана функция  $f(y)$ .

Уравнение [167], вместе с условием на контуре [168], определяет функцию напряжений  $\varphi$ .

В задачах, которые мы будем рассматривать ниже, мы будем выбирать функцию  $f(y)$  таким образом, чтобы правая часть уравнения [168] обращалась в нуль <sup>1)</sup>.

В рассматриваемом случае функция  $\varphi$  остается постоянной по длине контура. Приняв эту постоянную равной нулю, мы сведем задачу на изгиб к решению дифференциального уравнения [167], при условии, что на контуре функция  $\varphi$  равна нулю.

Эта задача аналогична задаче прогиба равномерно растянутой мембраны, имеющей такое же очертание, как и поперечное сечение изгибаемого бруса, и нагруженной непрерывной нагрузкой, выражаемой правой частью уравнения [167]. Несколько примеров применения этой аналогии показано ниже.

**90. Круглое поперечное сечение.** Пусть контур поперечного сечения задан уравнением:

$$x^2 + y^2 = r^2. \quad [a]$$

Правая часть условия на контуре [168] обращается в нуль, если мы примем:

$$f(y) = \frac{P}{2I} (r^2 - y^2). \quad [b]$$

Подставив это выражение в уравнение [167], получим функцию напряжений  $\varphi$  из уравнения:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{1 + 2\nu}{1 + \nu} \frac{Py}{I} \quad [c]$$

и из того условия, что эта функция равна нулю на контуре.

<sup>1)</sup> См. статью автора в „Сборнике института инженеров путей сообщения“, С.-Петербург, 1913 г., а также в „Proc. London Math. Soc.“, series 2, vol. 20, 1922, p. 398.

Таким образом, функция напряжений отвечает прогибам мембраны с круговым контуром радиуса  $r$ , равномерно растянутой и несущей поперечную нагрузку с интенсивностью, пропорциональной

$$-\frac{1 + 2\nu Py}{1 + \nu I}.$$

Нетрудно убедиться, что уравнение [c] и условие на контуре будут выполнены в том случае, если принять

$$\varphi = m(x^2 + y^2 - r^2)y, \quad [d]$$

где  $m$  — постоянный множитель. Эта функция равна нулю на контуре [a] и удовлетворяет уравнению [c], если мы положим

$$m = \frac{(1 + 2\nu)P}{8(1 + \nu)I}.$$

Тогда выражение [d] получится таким:

$$\varphi = \frac{(1 + 2\nu)P}{8(1 + \nu)I}(x^2 + y^2 - r^2)y. \quad [e]$$

Далее по формулам [166] получим составляющие напряжения:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{(3 + 2\nu)P}{8(1 + \nu)I} \left( r^2 - x^2 - \frac{1 - 2\nu}{3 + 2\nu} y^2 \right); \\ \tau_{yz} &= -\frac{(1 + 2\nu)Pxy}{4(1 + \nu)I}. \end{aligned} \right\} \quad [169]$$

Вертикальная составляющая касательного напряжения является функцией четной степени относительно координат  $x$  и  $y$ , а горизонтальная составляющая  $\tau_{yz}$  — функцией нечетной степени тех же переменных. Следовательно, распределение напряжений [169] дает равнодействующую, направленную по вертикальному диаметру круглого сечения.

На горизонтальном диаметре сечения при  $x = 0$  найдем по формулам [169]:

$$\tau_{xz} = \frac{(3 + 2\nu)P}{8(1 + \nu)I} \left( r^2 - \frac{1 - 2\nu}{3 + 2\nu} y^2 \right); \quad \tau_{yz} = 0. \quad [f]$$

Наибольшее касательное напряжение получится в центре ( $y = 0$ ), где оно равно

$$(\tau_{xz})_{\max} = \frac{(3 + 2\nu)Pr^2}{8(1 + \nu)I}. \quad [g]$$

Касательное напряжение по концам горизонтального диаметра ( $y = \pm r$ ) равно:

$$(\tau_{xz})_{y = \pm r} = \frac{(1 + 2\nu)Pr^2}{4(1 + \nu)I}. \quad [h]$$

Из этого заключаем, что величина касательных напряжений зависит от величины Пуассонова отношения. Взяв его равным 0,3, получим по формулам [g] и [h]:

$$(\tau_{xz})_{\max} = 1,38 \frac{P}{F}; \quad (\tau_{xz})_{y=\pm r} = 1,23 \frac{P}{F}, \quad [k]$$

где  $F$  — площадь поперечного сечения бруса. Элементарная теория изгиба, основанная на допущении, что касательное напряжение  $\tau_{xz}$  равномерно распределено по горизонтальному диаметру сечения, дает:

$$\tau_{xz} = \frac{4}{3} \frac{P}{F}.$$

Таким образом в этом случае погрешность элементарного решения в величине наибольшего напряжения составляет около 40%.

91. **Эллиптическое поперечное сечение.** Способ, изложенный в предыдущем параграфе, можно применить также и к брусу эллиптического сечения. Пусть

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad [a]$$

представляет собой уравнение контура поперечного сечения.

Правая часть уравнения [168] обратится в нуль, если примем

$$f(y) = -\frac{P}{2I} \left( \frac{a^2}{b^2} y^2 - a^2 \right). \quad [b]$$

Подставив это значение в уравнение [167], найдем:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{P y}{I} \left( \frac{a^2}{b^2} + \frac{\nu}{1+\nu} \right). \quad [c]$$

Это уравнение, вместе с условием  $\varphi = 0$  на контуре, определяет функцию напряжений  $\varphi$ .

Условие на контуре и уравнение [c] будут удовлетворены, если взять

$$\varphi = \frac{(1+\nu) a^2 + \nu b^2}{2(1+\nu)(3a^2 + b^2)} \cdot \frac{P}{I} \left( x^2 + \frac{a^2}{b^2} y^2 - a^2 \right) y. \quad [d]$$

При  $a = b$ , это решение совпадает с решением [c] предыдущего параграфа.

Подставив выражения [b] и [d] в формулы [166], найдем составляющие напряжения:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{2(1+\nu) a^2 + b^2}{(1+\nu)(3a^2 + b^2)} \cdot \frac{P}{2I} \left[ a^2 - x^2 - \frac{(1-2\nu) a^2}{2(1+\nu) a^2 + b^2} y^2 \right]; \\ \tau_{yz} &= -\frac{(1+\nu) a^2 + \nu b^2}{(1+\nu)(3a^2 + b^2)} \frac{P x y}{I}. \end{aligned} \right\} [170]$$

На горизонтальной оси эллиптического поперечного сечения ( $x = 0$ ) получим:

$$\tau_{xz} = \frac{2(1+\nu)a^2 + b^2}{(1+\nu)(3a^2 + b^2)} \frac{P}{2I} \left[ a^2 - \frac{(1-2\nu)a^2}{2(1+\nu)a^2 + b^2} y^2 \right];$$

$$\tau_{yz} = 0.$$

Наибольшее напряжение будет в центре ( $y = 0$ ) и оно выразится так:

$$(\tau_{xz})_{\max} = \frac{Pa^2}{2I} \left( 1 - \frac{a^2 + \frac{\nu}{1+\nu} b^2}{3a^2 + b^2} \right).$$

Если  $b$  очень мало по сравнению с  $a$ , то мы можем пренебречь членами, содержащими отношение  $b^2 : a^2$ . Таким образом, получим:

$$(\tau_{xz})_{\max} = \frac{Pa^2}{3I} = \frac{4}{3} \frac{P}{F},$$

что совпадает с решением элементарной теории изгиба.

Если  $b$  очень велико по сравнению с  $a$ , то мы имеем при  $y = 0$ :

$$(\tau_{xz})_{\max} = \frac{2}{1+\nu} \frac{P}{F}.$$

Напряжение по концам горизонтального диаметра ( $y = \pm b$ ) в этом случае равно:

$$\tau_{xz} = \frac{4\nu}{1+\nu} \frac{P}{F}.$$

Распределение напряжений по горизонтальному диаметру оказывается очень далеким от равномерного и зависит от величины Пуассонова отношения  $\nu$ . Приняв  $\nu = 0,30$ , найдем:

$$(\tau_{xz})_{\max} = 1,54 \frac{P}{F}; \quad (\tau_{xz})_{x=0, y=b} = 0,92 \frac{P}{F}.$$

Максимальное напряжение примерно на 14% больше напряжения, получаемого по элементарным формулам.

92. Прямоугольное поперечное сечение. Уравнение для линии контура в случае прямоугольника, изображенного на фиг. 158, напишется так:

$$(x^2 - a^2)(y^2 - b^2) = 0. \quad [a]$$

Если мы подставим в уравнение [168], вместо  $f(y)$ , постоянную величину

$$\frac{Pa^2}{2I},$$

то выражение

$$\frac{Px^2}{2I} - \frac{Pa^2}{2I}$$

становится равным нулю по сторонам  $x = \pm a$  прямоугольника.

По вертикальным сторонам  $y = \pm b$  производная

$$\frac{dy}{ds}$$

равна нулю.

Таким образом, правая сторона уравнения [168] на контуре обращается в нуль, а потому мы можем принять на контуре  $\varphi = 0$ .

Дифференциальное уравнение [167] получает следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\nu}{1 + \nu} \frac{Py}{I}. \quad [b]$$

Это уравнение вместе с условием на контуре вполне определяет функцию напряжений.

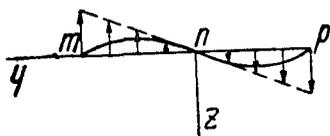
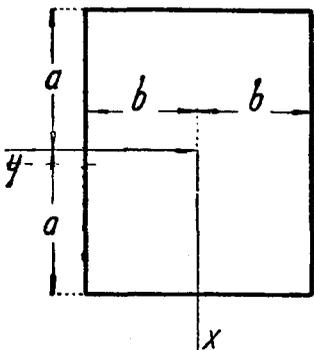
Задача сводится к определению прогибов равномерно натянутой прямоугольной мембраны под действием сплошной нагрузки, интенсивность которой пропорциональна

$$-\frac{\nu}{1 + \nu} \frac{Py}{I}.$$

Кривая  $mnp$  на фиг. 158 представляет пересечение мембраны с плоскостью  $yz$ .

Из выражений [166] мы видим, что касательные напряжения могут быть разложены на две следующие системы:

$$\left. \begin{aligned} \tau'_{xz} &= \frac{P}{2I} (a^2 - x^2); & \tau'_{yz} &= 0; \\ \tau''_{xz} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y}; & \tau''_{yz} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x}. \end{aligned} \right\} [c]$$



Фиг. 158.

Первая система представляет собой распределение напряжений по параболическому закону, получающееся на основании обыкновенной элементарной теории изгиба. Вторая система, зависящая от функции напряжений  $\varphi$ , является необходимой поправкой к элементарному решению. Величины этих поправок выражаются уклоном поверхности мембраны.

Вдоль оси  $y$ , на основании симметрии:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0,$$

и поправки к элементарной теории являются вертикальными касательными напряжениями, величина которых равна уклону:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Согласно фиг. 158,  $\tau''_{xz}$  — положительно в точках  $m$  и  $p$  и — отрицательно в точке  $n$ . Таким образом, распределение напряжений по гори-

зонтальной оси симметрии не является равномерным, как это предполагает элементарная теория. Наибольшим касательным напряжением будет по концам оси, в точках  $m$  и  $p$ , а наименьшим — в центре  $n$ .

Из рассмотрения состояния нагрузки мембраны можно заключить, что  $\varphi$  является функцией четной степени от  $x$  и нечетной — от  $y$ . Это требование, а также условие на контуре выполняются, если принять функцию напряжений  $\varphi$  в виде ряда Фурье:

$$\varphi = \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} A_{(2m+1), n} \cos \frac{(2m+1)\pi x}{2a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad [d]$$

Подставив этот ряд в уравнение [b] и применив обычный способ определения коэффициентов ряда Фурье, мы придем к следующим выражениям:

$$A_{(2m+1), n} \pi^2 ab \left[ \left( \frac{2m+1}{2a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right] = - \frac{\nu}{1+\nu} \frac{P}{I} \int_{-a}^a \int_{-b}^b y \cos \frac{(2m+1)\pi x}{2a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy,$$

откуда

$$A_{(2m+1), n} = - \frac{\nu}{1+\nu} \frac{P}{I} \frac{8b (-1)^{m+n-1}}{\pi^4 (2m+1)n \left[ \left( \frac{2m+1}{2a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]}.$$

Подставив в ряд [d], найдем:

$$\varphi = - \frac{\nu}{1+\nu} \frac{P}{I} \frac{8b^3}{\pi^4} \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{m+n-1} \cos \frac{(2m+1)\pi x}{2a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{(2m+1)n \left[ (2m+1)^2 \frac{b^2}{4a^2} + n^2 \right]}.$$

Имея это выражение функции напряжений, найдем составляющие касательного напряжения по формулам [c].

Выведем поправки к напряжениям по оси  $y$ , получаемым по элементарной теории. Из рассмотрения прогиба мембраны (фиг. 158) можно заключить, что по этой оси поправки имеют наибольшие величины, и поэтому наибольшее напряжение имеет место в средних точках сторон  $y = \pm b$ . Найдя производную

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

и приняв  $x=0$ , получим, что

$$(\tau_{xz})_{x=0} = - \frac{\nu}{1+\nu} \frac{P}{I} \frac{8b^2}{\pi^2} \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{m+n-1} \cos \frac{n\pi y}{b}}{(2m+1) \left[ (2m+1)^2 \frac{b^2}{4a^2} + n^2 \right]}.$$

Отсюда находим следующие выражения для напряжений в центре сечения ( $y=0$ ) и для середины вертикальных сторон прямоугольника:

$$(\tau_{xz})_{x=0, y=0} = -\frac{\nu}{1+\nu} \frac{P}{I} \frac{8b^2}{\pi^3} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n-1}}{(2m+1) \left[ (2m+1)^2 \frac{b^2}{4a^2} + n^2 \right]}$$

$$(\tau_{xz})_{x=0, y=b} = -\frac{\nu}{1+\nu} \frac{P}{I} \frac{8b^2}{\pi^3} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m+1) \left[ (2m+1)^2 \frac{b^2}{4a^2} + n^2 \right]}$$

Суммирование этих рядов значительно упрощается, если мы воспользуемся следующими известными формулами<sup>1)</sup>:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12};$$

<sup>1)</sup> Последнюю формулу (см. вверху стр. 325) можно получить следующим образом. Пользуясь тригонометрическим рядом  $[h]$  (стр. 161) для случая стержня, нагруженного поперечной силой  $P$  и осевой растягивающей силой  $S$ , найдем

$$y = \frac{2Pc^3}{EI\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}}{n(n^2+k^2)},$$

где

$$k^2 = \frac{Sl^2}{EI\pi^2},$$

а  $c$  — расстояние груза  $P$  от левой опоры (фиг. 93, стр. 161).

Приняв теперь  $c=0$  и  $Pc=M$ , приходим к следующему уравнению изогнутой оси под действием пары сил  $M$ , приложенной к левому концу балки:

$$y = \frac{2Ml^2}{EI\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{l}}{n(n^2+k^2)}.$$

Прогиб по середине пролета равен

$$\delta = \frac{2Ml^2}{EI\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2m+1) [(2m+1)^2 + k^2]}. \quad [a]$$

Тот же прогиб, полученный интегрированием дифференциального уравнения изогнутой оси, выражается так:

$$\delta = \frac{Ml^3}{2EI\pi^2 k^2} \left( 1 - \operatorname{sech} \frac{k\pi}{2} \right). \quad [b]$$

Упомянутая выше формула получится, если приравнять выражения  $[a]$  и  $[b]$ .

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)[(2m+1)^2+k^2]} = \frac{\pi^3}{32} \frac{(1 - \operatorname{sech} \frac{k\pi}{2})}{\frac{1}{2} \left(\frac{k\pi}{2}\right)^2}.$$

Тогда:

$$\left. \begin{aligned} (\tau_{xz}')_{x=0, y=0} &= -\frac{\nu}{1+\nu} \frac{3P}{2F} \frac{b^2}{a^2} \left[ \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \cosh \frac{n\pi a}{b}} \right]; \\ (\tau_{xz}')_{x=0, y=b} &= \frac{\nu}{1+\nu} \frac{3P}{2F} \frac{b^2}{a^2} \left[ \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2 \cosh \frac{n\pi a}{b}} \right], \end{aligned} \right\} [171]$$

где  $F = 4ab$  — площадь поперечного сечения.

Ряды быстро сходятся, и не представит затруднений вычисление поправок  $\tau_{xz}'$  при любой величине отношения  $a : b$ . Эти поправки должны быть прибавлены к величине

$$\frac{3P}{2F},$$

получающейся по элементарной формуле.

В первых строках приведенной ниже таблицы 10 даны числовые коэффициенты, на которые должно быть помножено элементарное значение касательного напряжения

$$\frac{3P}{2F},$$

чтобы получить точную величину этого напряжения<sup>1)</sup>. Пуассоновое отношение  $\nu$  принято при этих вычислениях равным одной четверти.

ТАБЛИЦА 10.

Коэффициенты для касательного напряжения.

Точки	$\frac{a}{b}$	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$x = 0, y = 0$	точное	0,983	0,940	0,856	0,805
	приблж.	0,981	0,936	0,856	0,826
$x = 0, y = b$	точное	1,033	1,126	1,396	1,988
	приблж.	1,040	1,143	1,426	1,934

Из таблицы видно, что элементарная теория дает очень точные величины касательных напряжений при  $a : b \geq 2$ . Для квадратного сечения

<sup>1)</sup> Цифры таблицы 10 несколько отличаются от тех цифр, которые дает Сен-Венан. Проверка вычислений Сен-Венана показала, что в них акралась числовая ошибка.

ошибка в наибольшем напряжении, получающаяся по элементарным формулам, составляет около 10%.

Если ширина прямоугольника велика по сравнению с высотой, то элементарная формула оказывается неудовлетворительной, и действительная величина наибольшего напряжения значительно превышает величину

$$\frac{3P}{2F}.$$

При помощи аналогии с мембраной можно вывести удобные приближенные формулы для определения касательных напряжений.

Если  $a$  — велико по сравнению с  $b$  (фиг. 158), то мы можем допустить, что в точках, достаточно удаленных от коротких сторон прямоугольника, поверхность мембраны по существу является цилиндрической.

Тогда уравнение [b] получает следующий вид:

$$\frac{d^2\varphi}{dy^2} = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{Py}{I},$$

и мы найдем:

$$\varphi = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{P}{6I} (y^3 - b^2y). \quad [e]$$

Подставив найденное значение в формулы [c], получим напряжения по оси  $z$ :

$$\tau_{xz} = \frac{P}{2I} \left[ a^2 + \frac{\nu}{1+\nu} \left( y^2 - \frac{b^2}{3} \right) \right]. \quad [f]$$

Отсюда видно, что для узкого прямоугольника поправка к элементарной формуле, выражающаяся вторым членом в квадратных скобках, всегда мала.

Если  $b$  велико по сравнению с  $a$ , то прогибы мембраны в точках, удаленных от коротких сторон прямоугольника, могут быть приняты в виде линейных функций от ординаты  $y$ , и на основании уравнения [b] получим:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{Py}{I},$$

откуда

$$\varphi = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{Py}{2I} (x^2 - a^2). \quad [g]$$

Подставив эту функцию в формулы [c], найдем составляющие касательного напряжения:

$$\tau_{xz} = \frac{1}{1+\nu} \frac{P}{2I} (a^2 - x^2); \quad \tau_{yz} = -\frac{\nu}{1+\nu} \frac{P}{I} xy.$$

В центре тяжести поперечного сечения ( $x = 0$ ;  $y = 0$ ):

$$\tau_{xz} = \frac{1}{1+\nu} \frac{Pa^2}{2I}, \quad \tau_{yz} = 0.$$

В сравнении с обычным элементарным решением, напряжение в этой точке понижается в отношении

$$\frac{1}{1+\nu}.$$

Чтобы удовлетворить условию на контуре по коротким сторонам прямоугольника, мы возьмем, вместо выражения  $[g]$ , функцию напряжений в следующем виде:

$$\varphi = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{Py}{2I} (x^2 - a^2) [1 - e^{-(b-y)m}], \quad [h]$$

где  $m$  подлежит определению из условия минимума потенциальной энергии деформации (см. параграф 80).

Такии путем найдем

$$m = \frac{1}{2a} \sqrt{10}.$$

При этом значении  $m$  и при помощи выражения  $[h]$  мы можем определить с достаточной точностью наибольшее касательное напряжение, которое имеет место по середине коротких сторон прямоугольника.

Если обе стороны прямоугольника — величины одного и того же порядка, то мы можем получить приближенное решение для распределения напряжений в виде целого полинома, если примем функцию напряжений равной

$$\varphi = (x^2 - a^2)(y^2 - b^2)(my + ny^3). \quad [k]$$

Определив коэффициенты  $m$  и  $n$  из условий минимума потенциальной энергии, получим<sup>1)</sup>:

$$m = -\frac{\nu}{1+\nu} \frac{P}{8Ib^2} \frac{\frac{1}{11} + \frac{8a^2}{b^2}}{\left(\frac{1}{7} + \frac{3a^2}{5b^2}\right)\left(\frac{1}{11} + \frac{8a^2}{b^2}\right) + \frac{1}{21} + \frac{9a^2}{35b^2}};$$

$$n = -\frac{\nu}{1+\nu} \frac{P}{8Ib^4} \frac{1}{\left(\frac{1}{7} + \frac{3a^2}{5b^2}\right)\left(\frac{1}{11} + \frac{8a^2}{b^2}\right) + \frac{1}{21} + \frac{9a^2}{35b^2}}.$$

Касательные напряжения, найденные на основании выражения  $[k]$ , равны:

$$\left. \begin{aligned} (\tau_{xz})_{x=0, y=0} &= \frac{Pa^2}{2I} + ma^2b^2; \\ (\tau_{xz})_{x=0, y=b} &= \frac{Pa^2}{2I} - 2a^2b^2(m + nb^2). \end{aligned} \right\} \quad [l]$$

Приближенные значения касательных напряжений, приведенные во вторых строках таблицы 10 (см. стр. 325), были вычислены при помощи

<sup>1)</sup> См. статью автора, упомянутую выше, в выноске на стр. 318.

вышенайденных формул. Из таблицы 10 видно, что приближенные формулы [4] дают во всех случаях удовлетворительную точность.

93. Дальнейшие выводы. Рассмотрим поперечное сечение, контур которого состоит из двух вертикальных прямых  $y = \pm a$  (фиг. 159) и двух гипербол<sup>1)</sup>:

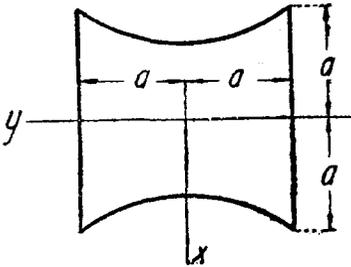
$$(1 + \nu) x^2 - \nu y^2 = a^2. \quad [a]$$

Легко показать, что правая сторона уравнения [168] (см. стр. 318) обращается в нуль на контуре, если мы примем

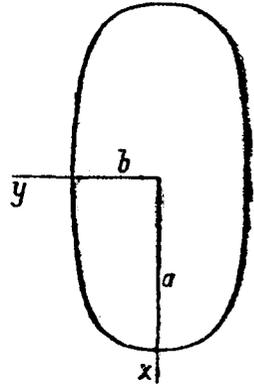
$$f(y) = \frac{P}{2I} \left( \frac{\nu}{1 + \nu} y^2 + \frac{a^2}{1 + \nu} \right).$$

Подставив это значение в уравнение [167], найдем:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$



Фиг. 159.



Фиг. 160.

Этому уравнению и условию по контуру [168] мы удовлетворим, если положим  $\varphi = 0$ .

Тогда составляющие касательного напряжения, на основании формул [166], будут равны:

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{P}{2I} \left( -x^2 + \frac{\nu}{1 + \nu} y^2 + \frac{a^2}{1 + \nu} \right); \\ \tau_{yz} &= 0. \end{aligned}$$

В каждой точке поперечного сечения направление касательного напряжения — вертикально. Наибольшее значение этого напряжения — по середине вертикальных сторон поперечного сечения и равно:

$$\tau_{\max} = \frac{Pa^2}{2I}.$$

Задача может быть также легко решена, если контур поперечного сечения задан уравнением:

$$\left( \pm \frac{y}{b} \right)^{\frac{1}{\nu}} = \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right). \quad [b]$$

где  $a > x > -a$ .

При  $\nu = 0,25$  этот криволинейный контур сечения имеет вид, изображенный на фиг. 160.

<sup>1)</sup> Эта задача была решена Ф. Грасгофом (F. Grashof), см. его *Elastizität und Festigkeit*, 1878, S. 246.

Если взять

$$f(y) = \frac{Pa^2}{2I} \left[ 1 - \left( \pm \frac{y}{b} \right)^{\frac{1}{\nu}} \right],$$

то левая часть условия на контуре [168] обращается в нуль, т. е. функция  $\varphi$  должна быть постоянной на контуре.

Уравнение [167] получится в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{Py}{I} \pm \frac{Pa^2}{2bI\nu} \left( \pm \frac{y}{b} \right)^{\frac{1}{\nu}-1}.$$

Это уравнение и условие на контуре будут удовлетворены, если принять

$$\varphi = \frac{Pa^{2\nu}}{2(1+\nu)I} \left[ y \left( \frac{x^2}{a^2} - 1 \right) \pm b \left( \pm \frac{y}{b} \right)^{\frac{1}{\nu} + 1} \right].$$

Подставив это выражение в формулы [166], найдем:

$$\tau_{xz} = \frac{P}{2(1+\nu)I} (a^2 - x^2); \quad \tau_{yz} = -\frac{P\nu}{(1+\nu)I} xy. \quad [c]$$

Мы можем прийти к такому же результату и другим путем. При рассмотрении напряжений в прямоугольной балке, ширина которой велика по сравнению с высотой, мы пользовались в качестве приближенного решения для функции напряжений (см. выражение [g] параграфа 92), выражением:

$$\varphi = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{Py}{2I} (x^2 - a^2),$$

откуда можно вывести формулы [c] для составляющих напряжения.

Уравнение контура можно найти из того обстоятельства, что на контуре направление касательного напряжения совпадает с касательной к контуру. Следовательно:

$$\frac{dx}{\tau_{xz}} = \frac{dy}{\tau_{yz}}.$$

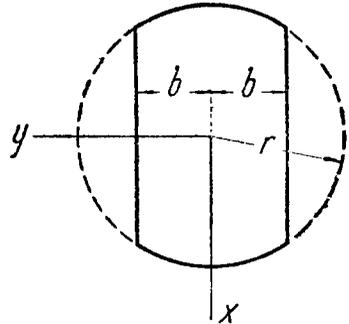
Подставив значения напряжений по формулам [c] и интегрируя, мы приходим к такому уравнению для контура:

$$y = b(a^2 - x^2)^\nu.$$

Пользуясь способом рассмотрения потенциальной энергии деформации (стр. 327), мы можем получить приближенное решение и во многих других случаях.

Рассмотрим, например, сечение, показанное на фиг. 161. Вертикальные стороны контура выражаются уравнением  $y = \pm b$ , а две других стороны являются дугами круга:

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0. \quad [d]$$



Фиг. 161.

Правая часть уравнения [168] обратится в нуль, если мы возьмем

$$f(y) = \frac{P}{2I} (r^2 - y^2).$$

Тогда приближенное выражение для функции напряжений представится в следующем виде:

$$\varphi = (y^2 - b^2)(x^2 + y^2 - r^2)(Ay + By^3 + \dots),$$

где коэффициенты  $A, B, \dots$  подлежат определению из условия минимума потенциальной энергии.

При решении задач на изгиб можно воспользоваться криволинейными координатами (см. параграф 48). Таким путем были решены задачи для сечения, ограниченного двумя имеющими общий фокус эллипсами<sup>1)</sup>, и для сечения, ограниченного эллипсом и гиперболой, имеющими общий фокус<sup>2)</sup>.

94. Несимметричные поперечные сечения. В качестве первого примера рассмотрим равнобедренный треугольник (фиг. 162). Контур поперечного сечения выразится уравнением:

$$(y - a)[x + (2a + y) \operatorname{tg} \alpha][x - (2a + y) \operatorname{tg} \alpha] = 0.$$

Правая часть уравнения [168] будет равна нулю, если мы положим

$$f(y) = \frac{P}{2I} (2a + y)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

Уравнение [167] для определения функции напряжений  $\varphi$  получится в таком виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= \\ &= \frac{\nu}{1 + \nu} \frac{Py}{I} - \frac{P}{I} (2a + y) \operatorname{tg}^2 \alpha. \end{aligned} \quad [a]$$

Приближенное решение можно найти при помощи рассмотрения потенциальной энергии.

В частном случае, когда

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\nu}{1 + \nu} = \frac{1}{3}, \quad [b]$$

точное решение уравнения [a] получится, если для функции напряжений взять выражение:

$$\varphi = \frac{P}{6I} \left[ x^2 - \frac{1}{3} (2a + y)^2 \right] (y - a).$$

Составляющие напряжения по формулам [166] получатся тогда равными:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{Px^2}{2I} + \frac{P}{6I} (2a + y)^2 = \frac{2\sqrt{3}P}{27a^3} [-x^2 + a(2a + y)]; \\ \tau_{yz} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{2\sqrt{3}P}{27a^3} x(a - y). \end{aligned} \right\} [c]$$

По оси  $y$ , при  $x = 0$ , равнодействующая касательного напряжения — вертикальна и выражается линейной функцией:

$$(\tau_{xz})_{x=0} = -\frac{2\sqrt{3}P}{27a^3} (2a + y).$$

Наибольшее значение этого напряжения, по середине вертикальной стороны сечения, равно:

$$\tau_{\max} = \frac{2\sqrt{3}P}{9a^2}. \quad [d]$$

<sup>1)</sup> См. А. Лове (A. E. H. Love), *Mathematical Theory of Elasticity*, 4 ed., 1927, p. 336.

<sup>2)</sup> См. Б. Г. Галеркин, „Сборник Ленинградского института инженеров путей сообщения“, выпуск 96, Ленинград, 1927 г.

Определением момента относительно оси  $z$  от касательных усилий, получающихся при наличии напряжений  $[\sigma]$ , можно доказать, что в этом случае равнодействующая перерезывающей силы проходит через центр тяжести  $S$  поперечного сечения.

Вторым примером рассмотрим поперечное сечение в виде полукруга (фиг. 163).

На основании решения [169] для круглой балки (см. стр. 318) приходим к заключению, что в ней не будет напряжений, действующих по вертикальному диаметальному сечению  $xz$ . Мы можем поэтому представить круглую балку разделенной плоскостью  $xz$  на две половины, из которых каждая изгибается силой  $0,5 P$ .

Следовательно, распределение напряжений для балок с сечением в виде полукруга будет одинаково с распределением напряжений в круглой балке.

Момент относительно оси  $z$  распределенных по сечению касательных напряжений будет равен:

$$M_z = \iint (\tau_{yz}x - \tau_{xz}y) dx dy.$$

Пользуясь решением [169] и интегрируя по площади полукруга нашего поперечного сечения, найдем, что

$$M_z = \frac{4(3+4\nu)Pr}{15\pi(1+\nu)}.$$

Следовательно, равнодействующая перерезывающая сила  $0,5 P$  приложена в точке  $S_1$ , расстояние которой  $e$  от начала координат  $O$  равно

$$e = \frac{2M_z}{P} = \frac{8}{15\pi} \frac{3+4\nu}{1+\nu} r.$$

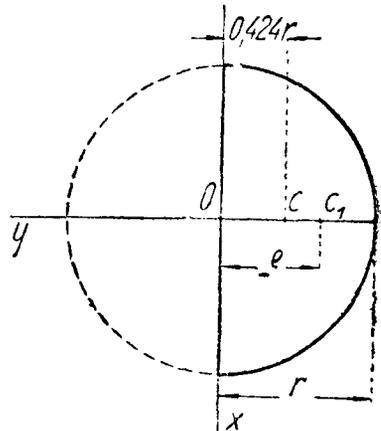
Эта точка не совпадает с центром тяжести  $S$  полукруглого поперечного сечения, и расстояние между этими двумя точками зависит от величины Пуассона отношения.

Точка  $S_1$  называется *центром скручивания*.

Изгиб консоли не сопровождается кручением только тогда, когда точка приложения силы совпадает с центром скручивания (см. параграф 89). На основании теоремы взаимности можно заключить, что, если крутящий момент приложен к консоли, то он не вызовет изгиба продольного волокна, соответствующего центру скручивания, и каждое поперечное сечение лишь повернется относительно своего центра скручивания (см. параграф 73).

Консоль, поперечное сечение которой — круговой сектор или ограничено двумя концентрическими окружностями и двумя радиусами, была исследована М. Сигаром и К. Пирсоном<sup>1)</sup>. Несколько других случаев рассмотрено Б. Г. Галеркиным<sup>2)</sup>.

Положение центра скручивания при тонкостенных поперечных сечениях имеет важное практическое значение и обычно рассматривается элементарным способом<sup>3)</sup>.



Фиг. 163.

<sup>1)</sup> См. статью М. Сигара и К. Пирсона (M. Seegar and K. Pearson), „Proc. Roy. Soc., London“, series A, vol. 96, 1920, p. 211.

<sup>2)</sup> Б. Г. Галеркин, „Сборник Ленинградского института инженеров путей сообщения“, Ленинград, 1927 г.

<sup>3)</sup> Ссылки на литературу по этому вопросу можно найти в книге автора „Сопrotивление материалов, часть 1, 3-е русское изд., 1934 г., стр. 179.

**95. Решение задач на изгиб способом мыльной пленки.**

Точные решения задач на изгиб известны лишь для немногих частных случаев, когда поперечные сечения имеют определенный простой вид.

Для практических целей важно иметь способ решения задачи для любого вида поперечного сечения. Оказывается, что такое решение может быть получено опытным порядком путем рассмотрения деформаций мыльной пленки <sup>1)</sup>, аналогично способу, применяемому при решении задач на кручение (см. стр. 289).

Для обоснования способа мыльной пленки мы воспользуемся формулами [166], уравнениями [167] и [168] (см. параграф 89).

Если положить

$$f(y) = \frac{\nu}{2(1+\nu)} \frac{Py^2}{I},$$

то уравнение [167] для функции напряжений получится таким:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad [a]$$

Это — то же самое уравнение, что и уравнение ненагруженной поперечной нагрузкой, равномерно растянутой мембраны (см. стр. 270).

Условие на контуре [168] получится в таком виде:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \left[ \frac{Px^2}{2I} - \frac{\nu}{2(1+\nu)} \frac{Py^2}{I} \right] \frac{dy}{ds}. \quad [b]$$

Интегрируя по контуру  $s$ , найдем следующее выражение:

$$\varphi = \frac{P}{I} \int \frac{x^2 dy}{2} - \frac{\nu}{2(1+\nu)} \frac{Py^3}{3I} + \text{const}, \quad [c]$$

из которого можно определить величину функции  $\varphi$  для каждой точки контура.

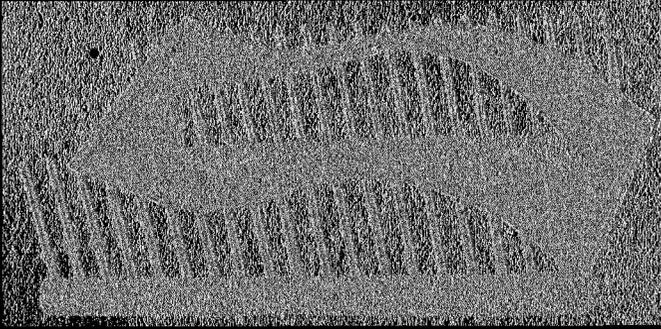
Если интегрирование производится на протяжении всего контура, то интеграл

$$\int \frac{x^2}{2} dy$$

обращается в нуль, так как он выражает собой статический момент поперечного сечения относительно оси  $y$ , проходящей через центр тяжести сечения. Следовательно, функция  $\varphi$ , определяемая выражением [c], представится по длине контура замкнутой кривой.

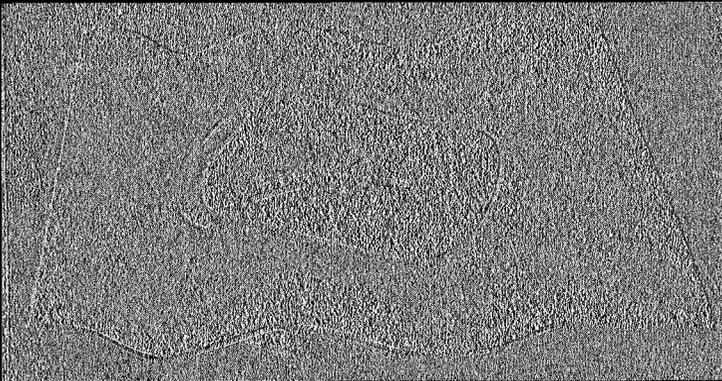
<sup>1)</sup> Этот способ был впервые указан *Венингом Мейнезом (Vening Meinesz)*, „De Ingenieur“, 1911, p. 108 (Голландия). Независимо от него способ этот был разработан *А. Гриффитсом и Дж. Тейлором (A. A. Griffith and G. I. Taylor)*, „Techn. Rept. Nat. Adv. Comm. Aeronautics“, vol. 3, 1917—1918, p. 950. Приведенные здесь результаты взяты из этой последней статьи.

Вообразим теперь, что по этой кривой натянута мыльная пленка. Тогда поверхность пленки удовлетворяет уравнению  $[a]$  и условию по контуре  $[c]$ . Следовательно, ординаты пленки выражают функцию напряжений  $\varphi$  во всех точках поперечного сечения в масштабе, принятом для изображения изменения функции  $\varphi$  по контуру (выражение  $[c]$ ).



Фиг. 164а.

Фотография фиг. 164а иллюстрирует один из способов, применяемых для получения необходимого контура мыльной пленки. Отверстие вырезается в целлюлозной пластинке такого вида, что после изгиба пластинки проекция края отверстия на горизонтальную плоскость имеет то же очертание, что и контур поперечного сечения балки.



Фиг. 164б.

Пластинка укрепляется на вертикальных стойках и усаживается при помощи гайк и шайб таким образом, чтобы ординаты по краю отверстия представляли в известном масштабе значения функции  $\varphi$ , получаемые по выражению  $[c]$ .

Фотография на фиг. 164*b* иллюстрирует другой способ получения контура для пленки при помощи тонких листов отожженной латуни <sup>1)</sup>. Небольшие поправки ординат по краю отверстия могут быть выполнены при помощи легкого выгиба контура.

Аналогия между выражениями для мыльной пленки и для задач на изгиб, строго говоря, применима лишь в случае бесконечно малых прогибов мембраны.

При выполнении опытов желательно, чтобы наибольшая разность ординат была не больше одной десятой наибольшего горизонтального ее размера.

Если это потребуется, то амплитуда ординат функции  $\varphi$  по контуру может быть уменьшена введением новой функции  $\varphi_1$ , вместо  $\varphi$ , при помощи подстановки:

$$\varphi = \varphi_1 + ax + by, \quad [d]$$

где  $a$  и  $b$  — произвольные постоянные.

Из этого выражения следует, что функция  $\varphi_1$  также удовлетворяет уравнению мембраны [a]. Величины функции  $\varphi_1$  по контуру, на основании выражений [c] и [d], будут выражаться уравнением:

$$\varphi_1 = \frac{P}{I} \int \frac{x^2}{2} dy - \frac{\nu}{2(1+\nu)} \frac{Py^3}{3I} - ax - by + \text{const.}$$

Уменьшение амплитуды ординат функции  $\varphi_1$  по контуру может быть достигнуто соответствующим подбором постоянных  $a$  и  $b$ .

Когда для мыльной пленки функция  $\varphi_1$  найдена, то функция  $\varphi$  определится выражением [d]. Зная же функцию напряжений  $\varphi$ , получим составляющие касательного напряжения по формулам [166], которые теперь будут иметь следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{Px^2}{2I} + \frac{\nu}{2(1+\nu)} \frac{Py^2}{I}; \\ \tau_{yz} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x}. \end{aligned} \right\} [e]$$

Составляющие напряжения можно легко найти для каждой точки сечения, если только мы будем знать для этих точек величины производных

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Эти производные получатся по уклону поверхности мыльной пленки в направлении осей  $y$  и  $x$ .

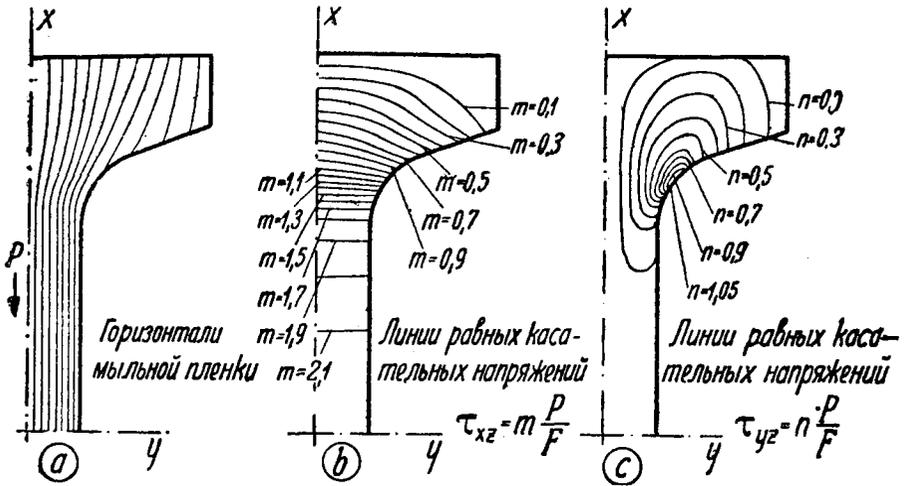
Для определения уклона мы поступим так же, как в случае задач на кручение, и сперва изобразим в горизонталях поверхность пленки. По изображению же в горизонталях уклоны поверхности найдем, нанеся прямые линии, параллельные осям координат, и построив кривые, изображающие соответствующие сечения мыльной пленки.

<sup>1)</sup> См. доклад П. Кушмана (P. A. Cushman), представленный им на собрании Американского общества инженеров-механиков (Am. Soc. Mech. Eng.) в июне 1932 г.

Найденные таким путем величины уклонов поверхности пленки следует затем подставить в выражения [e] для составляющих касательного напряжения.

Точность выполнения этой операции может быть проверена подсчетом равнодействующей всех касательных напряжений, распределенных по сечению. Эта равнодействующая должна быть равна изгибающей силе  $P$ , приложенной к концу консоли.

Опыты показывают, что при способе мыльной пленки можно достигнуть удовлетворительной точности в определении напряжений.



Фиг. 165.

Результаты, полученные для двутаврового сечения <sup>1)</sup>, показаны на чертежах фиг. 165. Из этих чертежей видим, что обычные предположения элементарной теории о том, что стенка двутавровой балки принимает на себя большую часть перерезывающей силы, и о том, что касательные напряжения постоянны по толщине стенки, полностью подтверждаются.

Величина наибольшего касательного напряжения по нейтральной плоскости очень хорошо согласуется с вычисленной по элементарной теории.

Составляющая  $\tau_{yz}$  практически равна нулю в стенке и достигает максимума во входящем углу. Этот максимум находится в зависимости от радиуса закругления во входящем углу. Для принятых соотношений в размерах этот максимум составляет лишь около половины наибольшего напряжения  $\tau_{xz}$  по нейтральной плоскости.

<sup>1)</sup> При симметричном поперечном сечении подлежит исследованию только четверть его.

На чертежах фиг. 165*b* и 165*c* нанесены линии равных составляющих касательного напряжения, дающие отношение этих составляющих к среднему значению касательного напряжения

$$\frac{P}{F}.$$

Местные напряжения во входящем углу были изучены для тавровой балки. Радиус закругления входящего угла увеличивался постепенно, и для каждого случая наносились горизонталы. Таким путем было показано, что наибольшее напряжение в углах равно наибольшему напряжению в стенке, когда радиус закругления составляет примерно одну шестнадцатую толщины стенки.

**96. Перемещения.** Когда составляющие напряжений найдены, то тем же способом, как и в случае чистого изгиба (см. стр. 248), можно определить перемещения  $u$ ,  $v$  и  $w$ .

Рассмотрим изогнутую ось консоли. Кривизна этой линии в плоскостях  $xz$  и  $yz$  представится с достаточной точностью величинами вторых производных:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

при  $x = 0$  и  $y = 0$ .

Эти величины можно найти из следующих уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial x} = \frac{1}{G} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} - \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma_z}{\partial x} = \frac{P(l-z)}{EI}; \\ \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial y} = 0. \end{aligned} \right\} [a]$$

Мы видим, что осевая линия консоли изгибается в плоскости  $xz$ , в которой действует груз, и кривизна в любой точке пропорциональна изгибающему моменту в этой точке, как это обычно предполагается в элементарной теории изгиба.

Путем интегрирования первого из уравнений [a] найдем:

$$u = \frac{Plz^2}{2EI} - \frac{Pz^3}{6EI} + cz + d, \quad [b]$$

где  $c$  и  $d$  — постоянные интегрирования, которые должны быть определены из условий в заделанном конце консоли.

Если заделан конец осевой линии, то при  $z = 0$

$$u \quad \text{и} \quad \frac{du}{dz}$$

равны также нулю, и, следовательно, постоянные  $c$  и  $d$  уравнения [b] должны равняться нулю.

Поперечные сечения балки не остаются плоскими: они искривляются под влиянием касательных напряжений. Угол наклона к изогнутой осевой линии элементарной площадки поверхности искривленного поперечного сечения у центра тяжести равен

$$\frac{\pi}{2} - \frac{(\tau_{xz})_{x=0, y=0}}{G}$$

и может быть найден, если известны касательные напряжения в центре тяжести сечения.

**97. Дальнейшие исследования изгиба.** В предыдущих параграфах мы рассматривали задачу изгиба консоли, заделанной одним концом и нагруженной поперечной силой в другом конце.

Полученные решения задач изгиба являются точными, если только внешние силы распределяются по концевым поперечным сечениям таким же образом, как напряжения  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yx}$ , найденные по этим решениям.

Если это условие не будет выполнено, то появятся местные отклонения в распределении напряжений вблизи концов балки. Однако, на основании принципа Сен-Венана, мы можем предположить, что наши решения на достаточно большом расстоянии от концов, т. е. на расстоянии большем, чем размеры поперечного сечения балки, будут удовлетворительны по своей точности.

Пользуясь этим же принципом, мы можем распространить применение найденных нами выше решений на прочие виды нагрузки и на иные способы опирания балок.

Мы можем допустить, с гарантией в достаточной точности, что напряжения в любом поперечном сечении балки, на значительном расстоянии от грузов, зависят только от величины изгибающего момента и перерезывающей силы в этом сечении и могут быть определены наложением друг на друга полученных выше для консоли решений.

Если изгибающие силы наклонны к главным осям поперечного сечения балки, то их всегда можно разложить на две составляющие, действующие в направлении главных осей. И можно рассмотреть изгиб отдельно в каждой из двух главных плоскостей. Полные напряжения и перемещения получатся затем на основании принципа сложения действия сил.

Вблизи точек приложения внешних сил имеются отклонения в распределении напряжений, которые мы исследовали выше в частном случае узкого прямоугольного сечения балки (см. параграф 32). Подобные исследования других видов поперечных сечений показывают, что эти отклонения всегда носят местный характер <sup>1)</sup>.

Задача изгиба решена также и для нескольких случаев распределенной нагрузки <sup>2)</sup>. При этом было показано, что в таких случаях осевая линия

<sup>1)</sup> См. Л. Похгаммер (L. Pochhammer), Untersuchungen über das Gleichgewicht des elastischen Stabes, Kiel, 1879. См. также статью Дж. Дуггеля (J. Duggall), Trans. Roy. Soc. Edinburgh\*, vol. 49, 1914, p. 895.

<sup>2)</sup> См. Дж. Мичель (J. H. Michell), Quart. Journ. Math., vol. 32, 1901; см. также К. Пирсон (K. Pearson), Quart. Journ. Math., vol. 24, 1889, и К. Пирсон (K. Pearson) и Л. Файлон (L. N. G. Filon), Quart. Journ. Math., vol. 31, 1900.

балки обычно растягивается или укорачивается, как и в рассмотренном нами выше случае узкого прямоугольного сечения (см. параграф 18).

Кривизна осевой линии в этих случаях уже не является пропорциональной изгибающему моменту, но необходимые поправки малы, и ими можно пренебречь для практических задач.

Например, в случае круглой балки, изгибаемой своим собственным весом <sup>1)</sup>, кривизна у заделанного конца представится таким выражением:

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI} \left[ 1 - \frac{7 + 12\nu + 4\nu^2}{6(1 + \nu)} \frac{a^2}{l^2} \right],$$

где  $a$  — радиус поперечного сечения, а  $l$  — длина консоли.

Второй член в скобках представляет поправку в величине кривизны, зависящую от распределения нагрузки. Эта поправка невелика, величина ее порядка отношения  $a^2 : l^2$ .

Полученное нами заключение справедливо также и для балок других видов сечения, изгибаемых своим собственным весом <sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Эта задача рассмотрена А. Лове (A. E. H. Love), *Mathematical Theory of Elasticity*, 4 ed., 1927, p. 326.

<sup>2)</sup> Консоль эллиптического поперечного сечения была рассмотрена А. М. Хлытцевым, „Известия Петроградского политехнического института“, т. 23, Петроград, 1915 г., стр. 441.

## ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ.

### СИММЕТРИЧНОЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ТЕЛАХ ВРАЩЕНИЯ.

**98. Общие уравнения.** Многие задачи анализа напряженного состояния, имеющие практическое значение, касаются тел вращения, деформирующихся симметрично относительно оси вращения.

Простейшими примерами являются круглый цилиндр, деформирующийся под действием равномерного внутреннего или наружного давления, и вращающийся круглый диск (см. параграфы 22 и 26).

При решении задач этого рода часто удобно пользоваться цилиндрическими координатами (см. уравнения [165], стр. 307).

Из того, что деформация симметрична относительно оси  $z$ , следует, что составляющие напряжения не зависят от угла  $\theta$ , и все производные по  $\theta$  обращаются в нуль. Составляющие касательного напряжения  $\tau_{r\theta}$  и  $\tau_{\theta z}$  также обращаются в нуль вследствие симметрии. Таким образом, уравнения [165] приводятся к следующим уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad [172]$$

Составляющие симметричной относительно оси деформации равны согласно выражениям [164]:

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \epsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}. \quad [173]$$

И в этом случае представляется выгодным ввести функцию напряжений  $\varphi$ .

Можно проверить подстановкой, что уравнения [172] будут удовлетворены, если мы примем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right); \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \nabla^2 \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right); \\ \sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ (2 - \nu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right]; \\ \tau_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[ (1 - \nu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right]; \end{aligned} \right\} \quad [174]$$

Символ  $\nabla^2$  обозначает операцию:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad [a]$$

что соответствует оператору Лапласа

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

в прямоугольных координатах (см. уравнение [a], стр. 67).

Следует заметить, что функция напряжений  $\varphi$  не зависит от угла  $\theta$ , так что третий член выражения [a] обращается в нуль при выполнении операции в применении к функции  $\varphi$ .

Преобразуем теперь уравнения совместности [119] (см. выше, стр. 224) для цилиндрических координат.

Так как  $\tau_{r\theta}$  равно нулю, то напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  являются главными. Обозначив далее через  $\theta$  угол между направлением  $r$  и осью  $x$ , имеем (см. выражения [13], стр. 27):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_r \cos^2 \theta + \sigma_\theta \sin^2 \theta; \\ \sigma_y &= \sigma_r \sin^2 \theta + \sigma_\theta \cos^2 \theta. \end{aligned} \right\} \quad [b]$$

Тогда

$$\begin{aligned} \nabla^2 \sigma_x &= \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (\sigma_r \cos^2 \theta + \sigma_\theta \sin^2 \theta) = \\ &= \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (\sigma_r \cos^2 \theta + \sigma_\theta \sin^2 \theta) - \frac{2}{r^2} \cos 2\theta (\sigma_r - \sigma_\theta). \end{aligned} \quad [c]$$

Пользуясь обозначением  $\Sigma$  для суммы трех нормальных составляющих напряжения и применяя уравнение [b] (см. выше, стр. 66), получим, при симметричном распределении напряжений:

$$\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial r^2} \cos^2 \theta + \frac{\partial \Sigma}{\partial r} \frac{\sin^2 \theta}{r}. \quad [d]$$

Подставив выражения [c] и [d] в первое из уравнений [119], имеем:

$$\begin{aligned} & \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \sigma_r - \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial r^2} \right] \cos^2 \theta + \\ & + \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \sigma_\theta + \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial \Sigma}{\partial r} \right] \sin^2 \theta = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение сохраняет силу при любом значении угла  $\theta$ , следовательно:

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \sigma_r - \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial r^2} &= 0; \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \sigma_\theta + \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial \Sigma}{\partial r} &= 0. \end{aligned} \right\} [e]$$

Тот же результат получится при рассмотрении второго из уравнений [119], так что при симметричной деформации уравнения [e] занимают место первых двух уравнений системы [119]. Третье уравнение [119] сохраняет прежний вид и в цилиндрических координатах.

Рассмотрим теперь остальные три уравнения системы [119], содержащие составляющие касательного напряжения.

При симметричной деформации одно лишь касательное напряжение  $\tau_{rz}$  отлично от нуля, и составляющие напряжения  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$ , действующие в плоскости, перпендикулярной к оси  $z$ , получатся разложением напряжения  $\tau_{rz}$  на две составляющих, параллельных соответственно оси  $x$  и  $y$ :

$$\tau_{xz} = \tau_{rz} \cos \theta; \quad \tau_{yz} = \tau_{rz} \sin \theta.$$

Мы имеем также:

$$\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial r \partial z} \cos \theta;$$

$$\nabla^2 \tau_{xz} = \nabla^2 (\tau_{rz} \cos \theta) = \left( \nabla^2 \tau_{rz} - \frac{\tau_{rz}}{r^2} \right) \cos \theta.$$

Подставив эти значения в пятое уравнение [119], найдем:

$$\nabla^2 \tau_{rz} - \frac{1}{r^2} \tau_{rz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial r \partial z} = 0. \quad [f]$$

Тот же результат получится и при рассмотрении четвертого уравнения [119].

Последнее уравнение системы [119] может быть также преобразовано в цилиндрических координатах при помощи подстановки:

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2} (\sigma_r - \sigma_\theta) \sin 2\theta.$$

Таким путем найдем:

$$(1 + \nu) \nabla^2 \left[ \frac{1}{2} (\sigma_r - \sigma_\theta) \sin 2\theta \right] + \frac{\sin 2\theta}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \Sigma = 0.$$

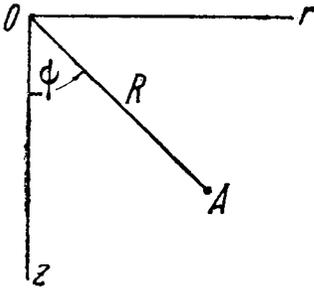
Это уравнение непосредственно вытекает из уравнений [e], если вычесть одно из другого.

Следовательно, уравнения совместности [119], в случае деформации, симметричной относительно некоторой оси, в цилиндрических координатах получают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \sigma_r - \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial r^2} &= 0; \\ \nabla^2 \sigma_\theta + \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial \Sigma}{\partial r} &= 0; \\ \nabla^2 \sigma_z + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial z^2} &= 0; \\ \nabla^2 \tau_{rz} - \frac{1}{r^2} \tau_{rz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial r \partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} [g]$$

Можно показать, что все эти уравнения будут удовлетворены, если функция напряжений  $\varphi$  удовлетворяет уравнению:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right) = \nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0. \quad [175]$$



Фиг. 166.

Мы видим, что рассмотрение задач, заключающих распределение напряжений, симметричное относительно какой-либо оси, сводится к нахождению в каждом частном случае решения уравнения [175], удовлетворяющего условиям на контуре данной задачи <sup>1)</sup>.

В некоторых случаях оказывается полезным уравнение [175] выразить в полярных (сферических) координатах  $R$  и  $\psi$  (фиг. 166) вместо цилиндрических координат  $r$  и  $z$ . Это преобразование выполнится без затруднений при помощи формул параграфа 21. В результате имеем:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2};$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{R \sin \psi} \left( \frac{\partial}{\partial R} \sin \psi + \frac{\cos \psi}{R} \frac{\partial}{\partial \psi} \right) = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\operatorname{ctg} \psi}{R^2} \frac{\partial}{\partial \psi}.$$

Подставив найденные значения в уравнение [175], получим:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \operatorname{ctg} \psi \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right) \times$$

$$\times \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \operatorname{ctg} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} \right) = 0. \quad [176]$$

В последующих параграфах мы применим некоторые решения этого уравнения к исследованию частных задач, относящихся к деформации, симметричной относительно оси.

Другим путем решения этих задач является рассмотрение самих перемещений. При помощи выражений [173] составляющие напряжения можно представить в функциях от перемещений  $u$  и  $w$ . Подставив эти функции в уравнения [172], мы придем к двум дифференциальным уравнениям в частных производных второго порядка, содержащим две функции  $u$  и  $w$ . Задача, таким образом, приводится к решению этих двух уравнений.

<sup>1)</sup> Этот метод выражения всех составляющих напряжения в зависимости от одной только функции напряжений, которая удовлетворяет уравнению [175], был детально разработан А. Лове (A. E. H. Love), *Mathematical Theory of Elasticity*, 4 ed., 1927, p. 274. Другой способ выражения задачи в зависимости от функции напряжений был предложен Дж. Мичеллем (J. H. Michell), „Proc. London Math. Soc.“, vol. 31, 1900, p. 144. Соотношение между функцией напряжений при плоской задаче и таковой же функцией, рассматриваемой в этой главе, было исследовано К. Вебером (C. Weber), „Z. angew. Math. u. Mech.“, Bd 5, 1925.

**99. Решение при помощи целых полиномов.** Рассмотрим те решения уравнения [176], которые одновременно являются решениями уравнения:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \operatorname{ctg} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} = 0. \quad [177]$$

Частное решение этого последнего уравнения можно принять в следующем виде:

$$\varphi_n = R^n \Psi_n, \quad [a]$$

где  $\Psi_n$  — функция одного лишь угла  $\psi$ .

Подставив выражение [a] в уравнение [177], найдем для функции  $\Psi_n$  следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{1}{\sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \sin \psi \frac{\partial \Psi_n}{\partial \psi} \right) + n(n+1) \Psi_n = 0. \quad [b]$$

Это уравнение можно упростить введением новой переменной

$$x = \cos \psi.$$

Тогда:

$$\frac{\partial \Psi_n}{\partial \psi} = - \frac{\partial \Psi_n}{\partial x} \sin \psi; \quad \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial \psi^2} = \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial x^2} \sin^2 \psi - x \frac{\partial \Psi_n}{\partial x}.$$

Подставив эти значения в уравнение [b], получим:

$$(1-x^2) \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial \Psi_n}{\partial x} + n(n+1) \Psi_n = 0. \quad [178]$$

Решим последнее уравнение помощью ряда<sup>1)</sup>. Допустим, что

$$\Psi_n = a_1 x^{m_1} + a_2 x^{m_2} + a_3 x^{m_3} + \dots, \quad [c]$$

и подставив это выражение в уравнение [178], найдем:

$$\begin{aligned} & n(n+1)(a_1 x^{m_1} + a_2 x^{m_2} + a_3 x^{m_3} + \dots) = \\ & = m_1(m_1+1)a_1 x^{m_1} - m_1(m_1-1)a_1 x^{m_1-2} + \\ & + m_2(m_2+1)a_2 x^{m_2} - m_2(m_2-1)a_2 x^{m_2-2} + \dots \end{aligned} \quad [d]$$

Для того, чтобы это уравнение могло быть удовлетворено при любом значении  $x$ , должны существовать следующие зависимости между показателями степеней  $m_1, m_2, m_3, \dots$ :

$$m_2 = m_1 - 2; \quad m_3 = m_2 - 2; \quad \dots$$

Отсюда следует, что ряд [c] расположен по нисходящим степеням  $x$ . Определим теперь величину показателя  $m_1$ , приравнявая коэффициенты при  $x^{m_1}$  в уравнении [d]:

$$n(n+1) - m_1(m_1+1) = (n-m_1)(m_1+n+1) = 0.$$

<sup>1)</sup> Это уравнение известно как *уравнение Лежандра*. Полное исследование этого уравнения можно найти в книге А. Форсайта (A. R. Forsyth), A Treatise on Differential Equations, 1903, p. 155.

Это дает для показателя  $m_1$  два решения:

$$m_1 = n; \quad m_1 = -(n + 1). \quad [e]$$

По первому из этих решений:

$$m_1 = n; \quad m_2 = n - 2; \quad m_3 = n - 4; \quad \dots$$

Коэффициенты  $a_2, a_3, \dots$  в уравнении [d] найдутся, если приравнять нулю коэффициенты каждой степени переменной  $x$ .

Взяв, например, члены, содержащие  $x^{m_1 - 2r + 2}$ , найдем, для определения коэффициента  $a_r$ , следующее уравнение:

$$n(n + 1) a_r = (m_1 - 2r + 2)(m_1 - 2r + 3) a_r - (m_1 - 2r + 4)(m_1 - 2r + 3) a_{r-1},$$

откуда, при помощи подстановки  $m_1 = n$ , имеем:

$$a_r = -\frac{(n - 2r + 4)(n - 2r + 3)}{2(r - 1)(2n - 2r + 3)} a_{r-1}.$$

Теперь ряд [c] можно представить в следующем виде:

$$\Psi_n = a_1 \left[ x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \dots \right], \quad [f]$$

и он является решением уравнения [178].

Подставив это решение в выражение [a] и помня, что

$$x = \cos \psi; \quad Rx = z; \quad R = \sqrt{r^2 + z^2},$$

получим, при  $n$  равном соответственно: 0, 1, 2, 3, ..., следующие частные решения уравнения [177] в виде полиномов:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0 &= A_0; \\ \varphi_1 &= A_1 z; \\ \varphi_2 &= A_2 \left[ z^2 - \frac{1}{3} (r^2 + z^2) \right]; \\ \varphi_3 &= A_3 \left[ z^3 - \frac{3}{5} z (r^2 + z^2) \right]; \\ \varphi_4 &= A_4 \left[ z^4 - \frac{6}{7} z^2 (r^2 + z^2) + \frac{3}{35} (r^2 + z^2)^2 \right]; \\ \varphi_5 &= A_5 \left[ z^5 - \frac{10}{9} z^3 (r^2 + z^2) + \frac{5}{21} z (r^2 + z^2)^2 \right]; \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad [179]$$

В этих выражениях  $A_0, A_1, \dots$  — произвольные постоянные.

Эти полиномы являются также решениями уравнения [176]. Из них мы можем получить новые решения уравнения [176], которые уже не будут решениями уравнения [177].

Если  $R^n \Psi_n$  является решением уравнения [177], то можно показать, что  $R^{n+2} \Psi_n$  является решением уравнения [176]. Выполняя операцию, указанную в первых скобках уравнения [176], имеем:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \operatorname{ctg} \psi \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right) R^{n+2} \Psi_n = 2(2n+3) R^n \Psi_n. \quad [g]$$

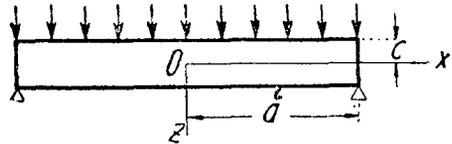
Повторив снова ту же операцию, как указывается в уравнении [176], мы получим в результате нуль, так как выражение [g] является решением уравнения [177]. Итак,  $R^{n+2} \Psi_n$  будет решением уравнения [176].

Из этого следует, что умножением решений [179] на  $R^2 = r^2 + z^2$  мы можем получить такие новые решения:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_2 &= B_2 (r^2 + z^2); \\ \varphi_3 &= B_3 z (r^2 + z^2); \\ \varphi_4 &= B_4 (2z^2 - r^2) (r^2 + z^2); \\ \varphi_5 &= B_5 (2z^3 - 3r^2 z) (r^2 + z^2); \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad [180]$$

**100. Изгиб круглой пластинки.** При помощи предыдущих решений можно решить несколько задач, имеющих практическое значение. Среди них — различные случаи изгиба симметрично нагруженных круглых пластинок (фиг. 167).

Взяв, например, полиномы третьей степени по формулам [179] и [180], мы получим функцию напряжений:



Фиг. 167.

$$\varphi = a_3 (2z^3 - 3r^2 z) + b_3 (r^2 z + z^3). \quad [a]$$

Подставив ее в выражения [174], найдем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= 6a_3 + (10\nu - 2) b_3; \\ \sigma_\theta &= 6a_3 + (10\nu - 2) b_3; \\ \sigma_z &= -12a_3 + (14 - 10\nu) b_3; \\ \tau_{rz} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad [181]$$

Составляющие напряжения являются, таким образом, постоянными по всей пластинке. Соответственным подбором постоянных  $a_3$  и  $b_3$  мы можем получить напряжения в пластинке, когда на поверхности ее заданы любые постоянные значения напряжений  $\sigma_z$  и  $\sigma_r$ .

Возьмем теперь полиномы четвертой степени по формулам [179] и [180]. Это дает нам:

$$\varphi = a_4 (8z^4 - 24r^2 z^2 + 3r^4) + b_4 (2z^4 + r^2 z^2 - r^4). \quad [b]$$

Подставив эту функцию в выражения [174], получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= 96a_4z + 4b_4(14\nu - 1)z; \\ \sigma_z &= -192a_4z + 4b_4(16 - 14\nu)z; \\ \tau_{rz} &= 96a_4r - 2b_4(16 - 14\nu)r. \end{aligned} \right\} [182]$$

Положив

$$96a_4 - 2b_4(16 - 14\nu) = 0,$$

имеем:

$$\sigma_z = \tau_{rz} = 0; \quad \sigma_r = 28(1 + \nu)b_4z. \quad [c]$$

Если  $z$  — расстояние от срединной плоскости пластинки, то решение [c] представляет чистый изгиб пластинки моментами, равномерно распределенными по ее контуру.

Чтобы подойти к решению для круглой равномерно нагруженной пластинки, мы возьмем функцию напряжений в виде полинома шестой степени.

Поступая так, как изложено в предыдущем параграфе, найдем:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{3}a_6(16z^6 - 120z^4r^2 + 90z^2r^4 - 5r^6) + \\ &+ b_6(8z^6 - 16z^4r^2 - 21z^2r^4 + 3r^6). \end{aligned}$$

Подставив эту функцию в выражения [174], имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= a_6(320z^3 - 720r^2z) + b_6[64(2 + 11\nu)z^3 + (504 - 48 \cdot 22\nu)r^2z]; \\ \sigma_z &= a_6(-640z^3 + 960r^2z) + b_6\{[-960 + 32 \cdot 22(2 - \nu)]z^3 + \\ &+ [384 - 48 \cdot 22(2 - \nu)]r^2z\}; \\ \tau_{rz} &= a_6(960rz^2 - 240r^3) + b_6\{(-672 + 48 \cdot 22\nu)z^2r + \\ &+ (432 - 12 \cdot 22\nu)r^3\}. \end{aligned}$$

К этим напряжениям прибавим напряжения:

$$\sigma_r = 96a_4z; \quad \sigma_z = -192a_4z; \quad \tau_{rz} = 96a_4r,$$

получаемые по формулам [182], если принять  $b_4 = 0$ , и равномерное в направлении оси  $z$  растяжение  $\sigma_z = b$ , которое может быть получено по формулам [181].

Таким образом, мы приходим к выражениям для составляющих напряжения, содержащим четыре постоянных:  $a_6$ ,  $b_6$ ,  $a_4$  и  $b$ . Эти постоянные можно подобрать таким образом, чтобы удовлетворялись граничные условия на верхней и нижней поверхностях пластинки (фиг. 167). Эти условия таковы:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= 0 && \text{при} && z = c; \\ \sigma_z &= -q && \text{при} && z = -c; \\ \tau_{rz} &= 0 && \text{при} && z = c; \\ \tau_{rz} &= 0 && \text{при} && z = -c. \end{aligned} \right\} [d]$$

Здесь  $q$  обозначает интенсивность равномерной нагрузки, а  $2c$  — толщину пластинки.

Подставив в эти уравнения выражения для составляющих напряжения, найдем значения четырех постоянных  $a_6$ ,  $b_6$ ,  $a_4$  и  $b_4$ .

При помощи этих значений выражения для составляющих напряжения, удовлетворяющие условиям [d], представляются в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= q \left[ \frac{2 + \nu z^3}{8} \frac{z^3}{c^3} - \frac{3(3 + \nu) r^2 z}{32} \frac{r^2 z}{c^3} - \frac{3}{8} \frac{z}{c} \right]; \\ \sigma_z &= q \left( -\frac{z^3}{4c^3} + \frac{3}{4} \frac{z}{c} - \frac{1}{2} \right); \\ \tau_{rz} &= \frac{3qr}{8c^3} (c^2 - z^2). \end{aligned} \right\} [e]$$

Из этого следует, что напряжения  $\sigma_z$  и  $\tau_{rz}$  распределяются точно таким же образом, как и в случае равномерно нагруженной балки узкого прямоугольного сечения (см. выше, параграф 18, стр. 49).

Радиальные напряжения выражаются функциями нечетной степени относительно  $z$ , и на контуре пластинки они дают изгибающие моменты, равномерно распределенные по контуру.

Чтобы получить решение для свободно опертой пластинки (фиг. 167), мы присоединим напряжение чистого изгиба [c] и подберем постоянную  $b_4$  так, чтобы на контуре ( $r = a$ )

$$\int_{-c}^c \sigma_r z dz = 0.$$

Тогда окончательное выражение для напряжения  $\sigma_r$  получится таким:

$$\sigma_r = q \left[ \frac{2 + \nu z^3}{8} \frac{z^3}{c^3} - \frac{3(3 + \nu) r^2 z}{32} \frac{r^2 z}{c^3} - \frac{3}{8} \frac{2 + \nu}{5} \frac{z}{c} + \frac{3(3 + \nu) a^2 z}{32} \frac{a^2 z}{c^3} \right], [183]$$

и в центре пластинки

$$(\sigma_r)_{r=0} = q \left( \frac{2 + \nu z^3}{8} \frac{z^3}{c^3} - \frac{3}{8} \frac{2 + \nu}{5} \frac{z}{c} + \frac{3(3 + \nu) a^2 z}{32} \frac{a^2 z}{c^3} \right). [f]$$

Элементарная теория изгиба пластинок, основанная на допущении, что линейные элементы пластинки, перпендикулярные к *срединной плоскости* ( $z = 0$ ), остаются прямолинейными и нормальными к изогнутой при изгибе поверхности пластинки<sup>1)</sup>, дает для радиальных напряжений в центре пластинки следующую величину:

$$\sigma_r = \frac{3(3 + \nu) a^2 z}{32} \frac{a^2 z}{c^3}. [g]$$

<sup>1)</sup> Это допущение аналогично гипотезе *плоских поперечных сечений* теории изгиба балок. Точная теория изгиба пластинок была изложена Дж. Мичеллом (J. H. Michell), Proc. London Math. Soc., vol. 31, 1900, и А. Лове (A. E. H. Love), Mathematical Theory of Elasticity, 4 ed., 1927, p. 465.

Сравнивая эту формулу с найденным ранее выражением  $[f]$ , мы видим, что дополнительные члены точного решения малы, если толщина пластинки  $2c$  мала по сравнению с радиусом  $a$ .

Следует заметить, что помощью наложения чистого изгиба мы устранили изгибающие моменты по контуру пластинки, но радиальные напряжения не обращаются в нуль на контуре, а равны:

$$(\sigma_r)_{r=a} = q \left( \frac{2 + \nu}{8} \frac{z^3}{c^3} - \frac{3}{8} \frac{2 + \nu}{5} \frac{z}{c} \right). \quad [h]$$

Равнодействующая этих напряжений на единицу длины линии контура и ее момент, однако, равны нулю. Следовательно, на основании принципа Сен-Венана, мы можем утверждать, что устранение этих напряжений не повлияет на распределение напряжений в пластинке на некотором расстоянии от краев.

Если для функции напряжений взять полиномы степени выше шестой, то можно исследовать случаи изгиба круглых пластинок неравномерно распределенной нагрузкой.

Взяв вместо решения  $[f]$  (см. стр. 344) иное решение уравнения [177], мы можем получить также решения для круглой пластинки с отверстием в центре ее<sup>1)</sup>.

Все эти решения являются удовлетворительными лишь в том случае, если прогиб остается малым по сравнению с толщиной. При больших прогибах представляется необходимым учесть натяжение срединной плоскости пластинки<sup>2)</sup>.

**101. Вращающийся диск как задача в трех измерениях.** Выше (см. параграф 26, стр. 79) при решении этой задачи было предположено, что напряжения не меняются по толщине диска. Рассмотрим теперь ту же задачу, ограничившись предположением, что распределение напряжений симметрично относительно оси вращения.

Дифференциальные уравнения равновесия получатся включением в уравнения [172] центробежной силы. Тогда

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho \omega^2 r &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad [184]$$

где  $\rho$  — масса единицы объема и  $\omega$  — угловая скорость вращения диска.

Уравнения совместности также необходимо видоизменить. Вместо системы [119] мы будем иметь три уравнения вида  $[f]$  (см. стр. 223) и три уравнения вида  $[g]$  (там же).

Подставив в эти уравнения составляющие объемной силы

$$X = \omega^2 x; \quad Y = \omega^2 y; \quad Z = 0, \quad [a]$$

<sup>1)</sup> Некоторые решения для круглой пластинки, симметрично нагруженной, были рассмотрены А. Коробовым, „Известия Киевского политехнического института“ за 1913 г. Такого же рода решения были получены независимо от этого А. Тимпе (A. Timpe). „Z. angew. Math. u. Mech.“, Bd 4, 1924.

<sup>2)</sup> См. лорд Кельвин и Тэм (Lord Kelvin and Tait), Natural Philosophy, vol. 2, 1903, p. 171.

найдем, что три последние уравнения, содержащие составляющие касательного напряжения, остаются такими же, как и в системе [119], а первые три уравнения получатся (см. уравнения [e], параграф 98, стр. 340) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \sigma_r - \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial r^2} &= -\frac{2\rho\omega^2}{1-\nu}; \\ \nabla^2 \sigma_\theta + \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial \Sigma}{\partial r} &= -\frac{2\rho\omega^2}{1-\nu}; \\ \nabla^2 \tau_{rz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial z^2} &= -\frac{2\nu\rho\omega^2}{1-\nu}. \end{aligned} \right\} [b]$$

Начнем с частного решения уравнений [184], удовлетворяющего уравнениям совместности. К этому решению мы присоединим решения в виде полиномов [179] и [180] и подберем постоянные этих полиномов так, чтобы удовлетворялись условия задачи на поверхности.

За частное решение мы примем следующие выражения:

$$\sigma_r = Br^2 + Dz^2; \quad \sigma_z = Ar^2; \quad \sigma_\theta = Cr^2 + Dz^2; \quad \tau_{rz} = 0. \quad [c]$$

Нетрудно видеть, что эти выражения удовлетворяют второму уравнению равновесия. Они удовлетворяют также уравнениям совместности, заключающим составляющие касательного напряжения (см. уравнения [f] и [g] параграфа 98).

Остается определить постоянные  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  так, чтобы удовлетворились остающиеся четыре уравнения, а именно: первое уравнение [184] и уравнения [b]. Подставив выражения [c] в эти уравнения, найдем:

$$A = \frac{\rho\omega^2(1+3\nu)}{6\nu}; \quad B = -\frac{\rho\omega^2}{3}; \quad C = 0; \quad D = -\frac{\rho\omega^2(1+2\nu)(1+\nu)}{6\nu(1-\nu)}.$$

Частное решение получится тогда в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{\rho\omega^2}{3} r^2 - \frac{\rho\omega^2(1+2\nu)(1+\nu)}{6\nu(1-\nu)} z^2; \\ \sigma_z &= \frac{\rho\omega^2(1+3\nu)}{6\nu} r^2; \\ \sigma_\theta &= -\frac{\rho\omega^2(1+2\nu)(1+\nu)}{6\nu(1-\nu)} z^2; \\ \tau_{rz} &= 0. \end{aligned} \right\} [185]$$

Этим решением можно пользоваться при исследовании напряжений в любом, вращающемся относительно своей оси, теле вращения.

В случае круглого диска постоянной толщины, мы наложим на решение [185] распределение напряжений, полученное при помощи функции напряжений, имеющей вид полинома пятой степени (см. уравнения [179] и [180]):

$$\varphi = a_5(8z^5 - 40r^2z^3 + 15r^4z) + b_5(2z^5 - r^2z^3 - 3r^4z). \quad [d]$$

Тогда, на основании выражений [174], находим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -a_5(180r^2 - 240z^2) + b_5[(36 - 54\nu)r^2 + (1 + 18\nu)6z^2]; \\ \sigma_z &= -a_5(-240r^2 + 480z^2) + b_5[(96 - 108\nu)z^2 + (-102 + 54\nu)r^2]; \\ \sigma_\theta &= a_5(-60r^2 + 240z^2) + b_5[(6 + 108\nu)z^2 + (12 - 54\nu)r^2]; \\ \tau_{rz} &= 480a_5rz - b_5(96 - 108\nu)rz. \end{aligned} \right\} [e]$$

Прибавив эти напряжения к напряжениям по формулам [185] и определив постоянные  $a_3$  и  $b_3$  таким образом, чтобы равнодействующие напряжения  $\tau_{rz}$  и  $\sigma_z$  обращались в нуль, получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\rho\omega^2 \left[ \frac{\nu(1+\nu)}{2(1-\nu)} z^2 + \frac{3+\nu}{8} r^2 \right]; \\ \sigma_\theta &= -\rho\omega^2 \left[ \frac{(1+3\nu)}{8} r^2 + \frac{\nu(1+\nu)}{2(1-\nu)} z^2 \right]. \end{aligned} \right\} [1]$$

Чтобы устранить равнодействующее радиальное сжатие по контуру, т. е. чтобы обратить в нуль интеграл

$$\left( \int_{-c}^c \sigma_r dz \right)_{r=a} = 0,$$

мы наложим на напряжения [f] равномерное радиальное растяжение, величина которого равна

$$\frac{\rho\omega^2}{8} (3+\nu) a^2 + \rho\omega^2 \frac{\nu(1+\nu)}{2(1-\nu)} \frac{c^2}{3}.$$

Тогда окончательно напряжения получатся в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \rho\omega^2 \left[ \frac{3+\nu}{8} (a^2 - r^2) + \frac{\nu(1+\nu)}{6(1-\nu)} (c^2 - 3z^2) \right]; \\ \sigma_\theta &= \rho\omega^2 \left[ \frac{3+\nu}{8} a^2 - \frac{1+3\nu}{8} r^2 + \frac{\nu(1+\nu)}{6(1-\nu)} (c^2 - 3z^2) \right]; \\ \sigma_z &= 0; \\ \tau_{rz} &= 0. \end{aligned} \right\} [186]$$

Сопоставляя эти выражения с полученным ранее решением [51] (см. стр. 81), мы видим, что здесь имеются дополнительные члены с множителем  $(c^2 - 3z^2)$ . Соответствующие напряжения — малы в случае тонкого диска, а их равнодействующая по толщине диска равна нулю.

Если контур диска свободен от внешних сил, то решение [186] представляет напряженное состояние во внутренней части диска на некотором расстоянии от краев.

Распределение напряжений во вращающемся диске, имеющем вид плоского эллипсоида вращения, было рассмотрено К. Кри<sup>1)</sup>.

**102. Сосредоточенная сила в точке тела бесконечных размеров.** При рассмотрении этой задачи мы снова воспользуемся уравнением [177] (см. стр. 343).

Приняв  $m_1 = -(n+1)$  (см. выражение [e], стр. 344), мы получим второй интеграл уравнения [178] в виде следующего ряда:

$$\Psi_n = a \left[ x^{-(n+1)} + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)} x^{-(n+3)} + \right. \\ \left. + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2 \cdot 4(2n+3)(2n+5)} x^{-(n+5)} + \dots \right].$$

<sup>1)</sup> К. Кри (C. Chree), „Proc. Roy. Soc. London“, vol. 58, 1895, p. 39.

Полагая  $n$  равным  $-1$ ;  $-2$ ,  $-3$ ,  $\dots$ , мы получим из этого выражения следующие частные решения уравнения [177]:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= A_1 (r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}; \\ \varphi_2 &= A_2 z (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}; \\ \varphi_3 &= A_3 \left[ z^2 (r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} - \frac{1}{3} (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right]; \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} [187]$$

которые являются также решениями уравнения [176].

Путем умножения выражения [187] на двучлен  $r^2 + z^2$  (см. стр. 345), получим другой ряд решений уравнения [176], а именно:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= B_1 (r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}; \\ \varphi_2 &= B_2 z (r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}; \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} [188]$$

Каждое из решений [187] и [188] и любая линейная комбинация из этих решений могут быть приняты за функцию напряжений, и, путем соответствующего подбора постоянных  $A_1, A_2, \dots; B_1, B_2, \dots$ , можно найти решения для разных задач.

В случае сосредоточенной силы мы возьмем первое из решений [188] и предположим, что функция напряжений равна

$$\varphi = B (r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}},$$

где  $B$  — постоянная, подлежащая в дальнейшем подбору.

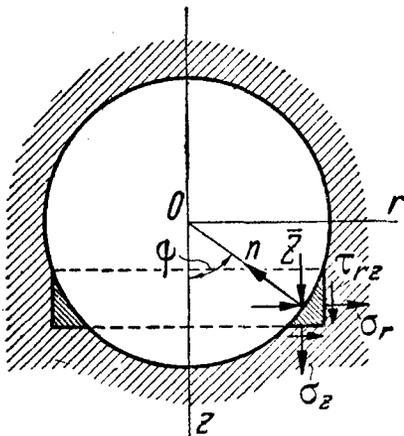
Подставив эту функцию в выражения [174], найдем соответствующие составляющие напряжения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= B \left[ (1 - 2\nu) z (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} - 3r^2 z (r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \right]; \\ \sigma_\theta &= B (1 - 2\nu) z (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}; \\ \sigma_z &= -B \left[ (1 - 2\nu) z (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3z^3 (r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \right]; \\ \tau_{rz} &= -B \left[ (1 - 2\nu) r (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3rz^2 (r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \right]. \end{aligned} \right\} [189]$$

Все эти напряжения в пределе, с приближением к началу координат, где приложена сосредоточенная сила, равняются бесконечности.

Чтобы избежать необходимости рассмотрения бесконечно больших напряжений, мы предположим, что начало координат является центром малой сферической полости (фиг. 168), и рассмотрим усилия по поверхности этого пустого пространства, определив их по формулам [189].

Можно доказать, что равнодействующая этих усилий является силой, приложенной в начале координат в направлении оси  $z$ .



Фиг. 168.

Из условия равновесия кольцеобразного элемента, смежного выделенной нами полости (фиг. 168), получим составляющую поверхностных усилий в направлении оси  $z$  равной:

$$\bar{Z} = -(\tau_{rz} \sin \psi + \sigma_z \cos \psi).$$

Пользуясь выражениями [189] и формулами:

$$\sin \psi = r(r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}};$$

$$\cos \psi = z(r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}},$$

найдем, что:

$$\bar{Z} = B[(1 - 2\nu)(r^2 + z^2)^{-1} + 3z^2(r^2 + z^2)^{-2}].$$

Равнодействующая этих усилий, приложенных по поверхности пустого пространства, равна:

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \bar{Z} \sqrt{r^2 + z^2} \cdot d\psi \cdot 2\pi r = 8B\pi(1 - \nu).$$

Из условий симметрии равнодействующая поверхностных усилий в радиальном направлении равна нулю. Если  $P$  — величина приложенной силы, то мы имеем:

$$P = 8B\pi(1 - \nu).$$

Подставив

$$B = \frac{P}{8\pi(1 - \nu)} \quad [190]$$

в выражения [189], мы получим напряжения, возникающие под действием силы  $P$ , приложенной в начале координат и направленной по оси  $z^1$ .

<sup>1)</sup> Решение этой задачи было дано лордом Кельвином (Lord Kelvin), „Cambridge and Dublin Math. Journ.“, 1848; см. также его Mathematical and Physical Papers, vol. 1, p. 37. Из этого решения следует, что перемещения, соответствующие напряжениям [189], являются однозначными, а это доказывает, что решение [189] — точное решение задачи (см. выше, параграф 64, стр. 227).

Это решение в трех измерениях является аналогией решения плоской задачи, рассмотренной в параграфе 34 (см. стр. 124).

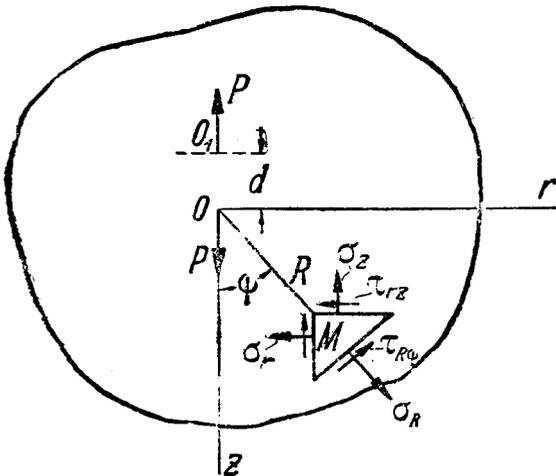
Подставив  $z=0$  в выражения [189], мы найдем, что в плоскости координат ( $z=0$ ) нет нормальных напряжений. Касательные напряжения в той же плоскости равны:

$$\tau_{rz} = -\frac{B(1-2\nu)}{r^2} = -\frac{P(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)r^2}. \quad [a]$$

Эти напряжения обратно пропорциональны квадрату расстояния  $r$  от точки приложения сосредоточенной силы.

**103. Сферический сосуд под действием внутреннего или внешнего равномерного давления.** Путем наложения мы можем получить из решения предыдущего параграфа несколько новых практически важных решений.

Начнем со случая двух равных и прямо противоположных сил, приложенных на малом расстоянии  $d$  друг от друга к бесконечно большому упругому телу (фиг. 169).



Фиг. 169.

Напряжения, возникающие в любой точке под действием силы  $P$ , приложенной в начале координат  $O$ , определяются выражениями [189] и [190] предыдущего параграфа.

Пользуясь этими же выражениями, можно определить также напряжения, возникающие под действием силы  $P$ , приложенной в точке  $O_1$ . Вспомнив, что вторая сила действует в прямо противоположном направлении, и рассматривая расстояние  $d$  как величину бесконечно малую, мы должны заменить любой член выражения [189], представляющий собою функцию  $f(r, z)$ , членом

$$-\left( f + \frac{\partial f}{\partial z} d \right).$$

Сложив напряжения, возникающие под действием обеих этих сил, и пользуясь обозначением  $A$  для произведения  $Bd$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -A \frac{\partial}{\partial z} \left[ (1-2\nu) z (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} - 3r^2 z (r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \right]; \\ \sigma_\theta &= -A \frac{\partial}{\partial z} \left[ (1-2\nu) z (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right]; \\ \sigma_z &= A \frac{\partial}{\partial z} \left[ (1-2\nu) z (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3z^3 (r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \right]; \\ \tau_{rz} &= A \frac{\partial}{\partial z} \left[ (1-2\nu) r (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3rz^2 (r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \right]. \end{aligned} \right\} [191]$$

Рассмотрим (фиг. 169) составляющие напряжения  $\sigma_R$  и  $\tau_{R\psi}$ , действующие в точке  $M$  на элементарную площадку, перпендикулярную к радиусу  $OM$ , длину которого обозначим через  $R$ .

Из условия равновесия показанного на чертеже малого треугольного элемента найдем <sup>1)</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= \sigma_r \sin^2 \psi + \sigma_z \cos^2 \psi + 2\tau_{rz} \sin \psi \cos \psi; \\ \tau_{R\psi} &= (\sigma_r - \sigma_z) \sin \psi \cos \psi - \tau_{rz} (\sin^2 \psi - \cos^2 \psi). \end{aligned} \right\} [a]$$

Пользуясь выражениями [191] и приняв:

$$\sin \psi = r (r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{r}{R}; \quad \cos \psi = z (r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{z}{R},$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= -\frac{2(1+\nu)A}{R^3} \left[ -\sin^2 \psi + \frac{2(2-\nu)}{1+\nu} \cos^2 \psi \right]; \\ \tau_{R\psi} &= -\frac{2(1+\nu)A}{R^3} \sin \psi \cos \psi. \end{aligned} \right\} [b]$$

Распределение этих напряжений — симметрично относительно оси  $z$  и относительно плоскости координат, перпендикулярной к этой оси.

Представим теперь, что мы имеем в начале координат, кроме системы двух сил  $P$ , действующих по оси  $z$ , такую же систему по оси  $r$  и другую такую же по оси, перпендикулярной к плоскости  $rz$ . В виду отмеченной выше симметрии мы получим, таким образом, распределение напряжений, симметричное относительно начала координат.

Если мы рассмотрим шар с центром в начале координат, то по поверхности этого шара мы обнаружим только нормальное равномерно

<sup>1)</sup> Составляющие напряжения  $\sigma_\theta$ , действующие по граням элемента в меридиональных сечениях тела, дают равнодействующую малой величины высшего порядка, и при выводе уравнений равновесия ею можно пренебречь.

распределенное напряжение. Величина этого напряжения может быть найдена при помощи первого из выражений [b].

Рассматривая напряжение в точках окружности в плоскости  $rz$ , мы по первому из выражений [b] получим часть его от действия *двойной силы*, направленной по оси  $z$ .

Взаимной перестановкой  $\sin \psi$  на  $\cos \psi$  мы получим нормальное напряжение на той же окружности, возникающее под действием двойной силы, направленной по оси  $r$ .

Нормальное напряжение от действия двойной силы, перпендикулярной к плоскости  $rz$ , получится путем подстановки в то же выражение

$$\psi = \frac{\pi}{2}.$$

Соединяя вместе действия всех трех взаимно перпендикулярных двойных сил, мы найдем следующее значение нормального напряжения на поверхности шара:

$$\sigma_R = - \frac{4(1 - 2\nu) A}{R^3}. \quad [c]$$

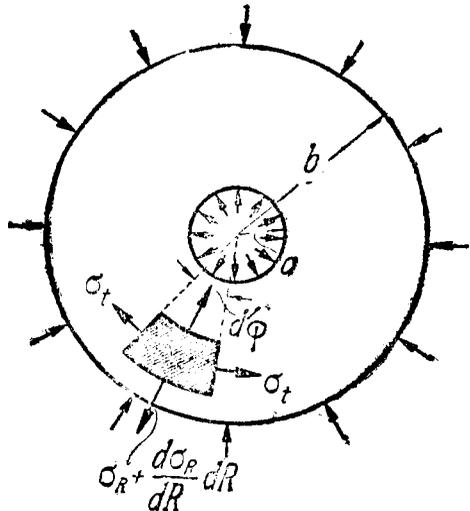
*Совокупность* трех взаимно перпендикулярных двойных сил образует так называемый *центр сжатия*. Мы видим из выражения [c], что соответствующее сжимающее напряжение в радиальном направлении зависит только от расстояния от центра сжатия, а именно обратно пропорционально кубу этого расстояния.

Рассмотренным выше решением можно воспользоваться для определения напряжений в сферическом сосуде, подвергающемся действию внутреннего или внешнего равномерного давления.

Пусть  $a$  и  $b$  обозначают соответственно внутренний и наружный радиусы шара (фиг. 170), а  $p_i$  и  $p_o$  — наружное и внутреннее равномерное давление.

Наложив на напряжение [c] равномерное растяжение или сжатие по всем направлениям, мы можем принять общее выражение для радиального нормального напряжения в следующем виде:

$$\sigma_R = \frac{C}{R^3} + D. \quad [d]$$



$C$  и  $D$  — произвольные постоянные, величина которых определится из условий на внутренней и наружной поверхностях сосуда. Эти условия дают:

$$\frac{C}{a^3} + D = -p_i; \quad \frac{C}{b^3} + D = -p_o.$$

Тогда:

$$\left. \begin{aligned} C &= \frac{(p_i - p_o)a^3b^3}{a^3 - b^3}; \\ D &= \frac{p_o b^3 - p_i a^3}{a^3 - b^3}; \\ \sigma_R &= \frac{p_o b^3 - (R^3 - a^3)}{R^3(a^3 - b^3)} + \frac{p_i a^3(b^3 - R^3)}{R^3(a^3 - b^3)}. \end{aligned} \right\} [192]$$

Давления  $p_o$  и  $p_i$  вызывают в шаре также и нормальные напряжения  $\sigma_t$  в тангенциальном направлении, величину которых найдем из условия равновесия элемента, вырезанного из шара двумя концентрическими сферическими поверхностями радиуса  $R$  и  $R + dR$  и круговым конусом с бесконечно малым центральным углом  $d\psi$  (фиг. 170).

Уравнение равновесия этого элемента дает:

$$\sigma_t \frac{\pi R}{2} dR(d\psi)^2 = \frac{d\sigma_R}{dR} \frac{\pi R^2}{4} dR(d\psi)^2 + \sigma_R \frac{\pi R}{2} dR(d\psi)^2,$$

откуда

$$\sigma_t = \frac{d\sigma_R}{dR} \frac{R}{2} + \sigma_R. \quad [e]$$

Пользуясь выражением [192] для напряжений  $\sigma_R$ , последнюю формулу получим в таком виде:

$$\sigma_t = \frac{p_o b^3 (2R^3 + a^3)}{2R^3 (a^3 - b^3)} - \frac{p_i a^3 (2R^3 + b^3)}{2R^3 (a^3 - b^3)}. \quad [193]$$

Если  $p_i = 0$ , то тогда:

$$\sigma_t = \frac{p_i a^3}{2R^3} \cdot \frac{(2R^3 + b^3)}{b^3 - a^3}.$$

Из этого видно, что наибольшее тангенциальное растяжение в рассматриваемом случае будет на внутренней поверхности, где оно равно:

$$(\sigma_t)_{\max} = \frac{p_i}{2} \frac{2a^3 + b^3}{b^3 - a^3}.$$

Все эти результаты получены Ляме<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> См. Ляме (Lamé), Leçons sur la théorie... de l'élasticité, Paris, 1852.

104. Местные напряжения вокруг сферической полости. В качестве второго примера рассмотрим распределение напряжений вокруг малой сферической полости в стержне, подвергающемся равномерному растяжению величиной  $S$  (фиг. 171) <sup>1)</sup>.

В случае сплошного растянутого стержня, нормальная и касательная составляющие напряжения, действующего на сферическую поверхность, равны:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= R \cos^2 \psi; \\ \tau_{R\psi} &= -S \sin \psi \cos \psi. \end{aligned} \right\} [a]$$

Чтобы получить решение для случая малой сферической полости радиуса  $a$ , мы должны присоединить к простому растяжению систему напряжений, составляющие которых по сферической поверхности равны и прямо противоположны составляющим по выражениям [a] и которые обращаются в нуль на бесконечно большом расстоянии.

Взяв из предыдущего параграфа напряжения [b] от действия двойной силы по направлению оси  $z$  и напряжения [c] от центра сжатия, можем представить соответствующие действующие на сферическую поверхность радиуса  $a$  напряжения в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_R &= -\frac{2(1+\nu)A}{a^3} \left( -1 + \frac{5-\nu}{1+\nu} \cos^2 \psi \right); \\ \tau'_{R\psi} &= -\frac{2(1+\nu)A}{a^3} \sin \psi \cos \psi; \end{aligned} \right\} [b]$$

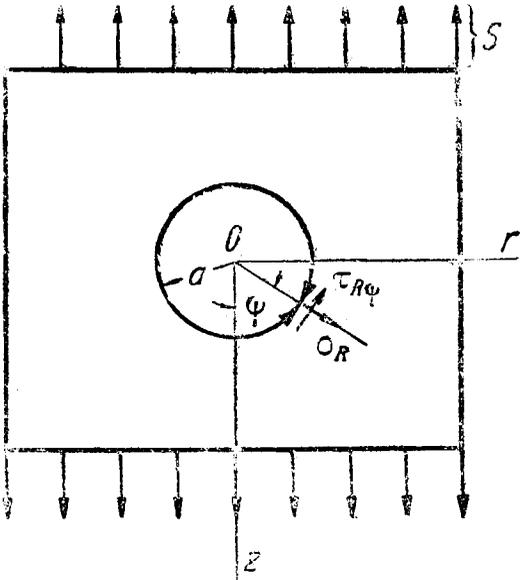
$$\sigma''_R = \frac{B}{a^3}; \quad \tau''_{R\psi} = C \quad [c]$$

где  $A$  и  $B$  — постоянные, которые в дальнейшем должны быть подобраны.

Из этих выражений видно, что, комбинируя напряжения [b] и [c], мы не сможем обратить в нуль напряжения [a], возникающие от растяжения, и что необходима дополнительная система напряжений.

Взяв из решений [187] функцию напряжений

$$\varphi = Cz(r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}},$$



Фиг. 171.

<sup>1)</sup> Решение этой задачи принадлежит *P. Саусвеллу* (*R. V. Southwell*), „Phil. Mag.“ 1926; см. также *Дж. Гудьер* (*J. N. Goodier*), „Trans. Am. Soc. Mech. Eng.“, vol. 55, 1933, p. 39.

получим соответствующие составляющие напряжения по выражениям [174]:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{3C}{R^5} (1 - 5 \cos^2 \psi - 5 \sin^2 \psi + 35 \sin^2 \psi \cos^2 \psi); \\ \sigma_z &= \frac{3C}{R^5} (3 - 30 \cos^2 \psi + 35 \cos^4 \psi); \\ \sigma_\theta &= \frac{3C}{R^5} (1 - 5 \cos^2 \psi); \\ \tau_{rz} &= \frac{15C}{R^5} (-3 \sin \psi \cos \psi + 7 \sin \psi \cos^3 \psi). \end{aligned} \right\} [d]$$

Теперь, пользуясь формулами [a] предыдущего параграфа, получим составляющие напряжения, действующие по сферической поверхности радиуса  $a$ :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R''' &= \frac{12C}{a^5} (-1 + 3 \cos^2 \psi); \\ \tau_{R\psi}''' &= \frac{24C}{a^5} \sin \psi \cos \psi. \end{aligned} \right\} [e]$$

Соединяя системы напряжений [b], [c] и [e], найдем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= \frac{2(1+\nu)A}{a^3} - 2(5-\nu) \frac{A}{a^3} \cos^2 \psi + \frac{B}{a^3} - \frac{12C}{a^5} + \frac{36C}{a^5} \cos^2 \psi; \\ \tau_{R\psi} &= -\frac{2(1+\nu)A}{a^3} \sin \psi \cos \psi + \frac{24C}{a^5} \sin \psi \cos \psi. \end{aligned} \right\} [f]$$

Наложив эти напряжения на напряжения [a], мы получим сферическую поверхность полости свободной от усилий, если будут выполнены следующие условия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{2(1+\nu)A}{a^3} + \frac{B}{a^3} - \frac{12C}{a^5} &= 0; \\ -2(5-\nu) \frac{A}{a^3} + \frac{36C}{a^5} &= -S; \\ -\frac{2(1+\nu)A}{a^3} + \frac{24C}{a^5} &= S, \end{aligned} \right\} [g]$$

откуда

$$\frac{A}{a^3} = \frac{5S}{2(7-5\nu)}; \quad \frac{B}{a^3} = \frac{S(1-5\nu)}{7-5\nu}; \quad \frac{C}{a^5} = \frac{S}{2(7-5\nu)}. \quad [h]$$

Полное напряжение в любой точке получится теперь наложением на простое растяжение  $S$  напряжений по формулам [d], напряжений по выражениям [191] от двойной силы и напряжений от центра сжатия, определяемых выражениями [c] и [e] предыдущего параграфа.

Рассмотрим, например, напряжения, действующие в плоскости  $z=0$ . Из условия симметрии следует, что по этой плоскости не будет касательных напряжений. Из выражений [d], подставив

$$\psi = \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad R = r,$$

получим

$$\sigma_z' = \frac{9C}{r^5} = \frac{9Sa^5}{2(7-5\nu)r^5}. \quad [k]$$

Из выражений [191] при  $z = 0$  имеем:

$$\sigma'' = \frac{A(1-2\nu)}{r^3} = \frac{5(1-2\nu)S a^3}{2(7-5\nu)r^3}. \quad [l]$$

Из выражения [e] предыдущего параграфа следует, что

$$\sigma_z''' = (\sigma_t)_{z=0} = -\frac{B}{2r^3} = -\frac{S(1-5\nu)a^3}{2(7-5\nu)r^3}. \quad [m]$$

Полное напряжение в плоскости  $z = 0$ , таким образом, будет равно:

$$\sigma_z = \sigma_z' + \sigma_z'' + \sigma_z''' + S = S \left[ 1 + \frac{4-5\nu}{2(7-5\nu)} \frac{a^3}{r^3} + \frac{9}{2(7-5\nu)} \frac{a^5}{r^5} \right]. \quad [n]$$

При  $r = a$  найдем:

$$(\sigma_z)_{\max} = \frac{27-15\nu}{2(7-5\nu)} S. \quad [o]$$

Приняв  $\nu = 0,3$ , имеем:

$$(\sigma_z)_{\max} = \frac{45}{22} S.$$

Наибольшее напряжение, таким образом, примерно вдвое больше равномерного растяжения, приложенного к стержню. Это увеличение напряжения имеет резко выраженный местный характер.

С увеличением расстояния  $r$  напряжение [n] быстро приближается к величине  $S$ . Взяв, например,  $r = 2a$ ,  $\nu = 0,3$ , получим:  $\sigma_z = 1,054 S$ .

Таким же образом, найдем для точек, лежащих в плоскости  $z = 0$ ,

$$(\sigma_\theta)_{z=0} = \frac{3C}{r^3} - \frac{A(1-2\nu)}{r^3} - \frac{B}{2r^3}.$$

Подставив значения произвольных постоянных по формулам [h] и приняв  $r = a$ , получим, что растягивающее напряжение по экватору полости, при

$$\psi = \frac{\pi}{2},$$

равно

$$(\sigma_\theta)_{z=0, r=a} = \frac{15\nu-3}{2(7-5\nu)} S.$$

На полюсах полости ( $\psi = 0$  или  $\psi = \pi$ ) имеем:

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \frac{2(1-2\nu)A}{a^3} - \frac{12C}{a^3} - \frac{B}{2a^3} = -\frac{3+15\nu}{2(7-5\nu)} S.$$

Таким образом, продольное растяжение  $S$  вызывает в этих точках сжатие.

Комбинируя растяжение  $S$  в одном направлении со сжатием в направлении перпендикулярном, мы можем получить решение распределения напряжений вокруг сферической полости в случае чистого сдвига<sup>1)</sup>.

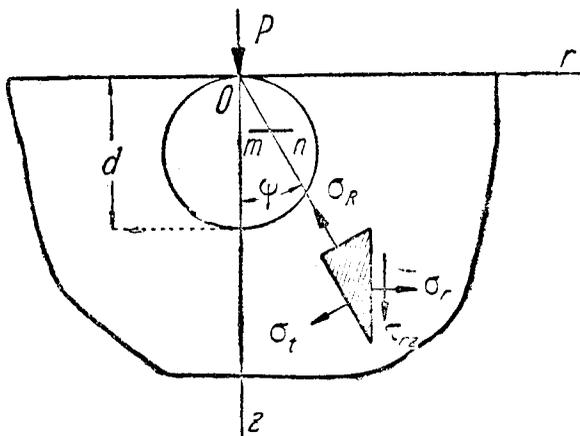
Этим путем можно показать, что наибольшее касательное напряжение будет равно

$$\tau_{\max} = \frac{15(1-\nu)}{7-5\nu} S. \quad [p]$$

<sup>1)</sup> Эта задача была решена Дж. Лармором (J. Larmor), „Phil. Mag.“, series 5, vol. 33, 1892. См. также А. Лове (A. E. H. Love), „Mathematical Theory of Elasticity“, 4 ed., 1927, p. 252.

Выводы этого параграфа могут представить некоторый практический интерес при рассмотрении влияния малых полостей<sup>1)</sup> на предел выносливости образцов, подвергающихся действию напряжений с переменными циклами.

**105. Сосредоточенная сила, действующая на плоскость, ограничивающую полубесконечное тело.** Представим себе, что плоскость  $z=0$  является гранью полубесконечного сплошного тела и что на эту плоскость действует сосредоточенная сила  $P$  по оси  $z$  (фиг. 172)<sup>2)</sup>.



Фиг. 172.

В параграфе 102 было показано, что распределение напряжений, представленное выражениями [189] и [190], может возникнуть в полубесконечном теле под действием сосредоточенной силы в начале координат и касательных усилий по плоскости контура  $z=0$ , отвечающих следующему закону:

$$\tau_{rz} = - \frac{E(1-2\nu)}{r^2}. \quad [a]$$

Чтобы устранить эти усилия и прийти к решению задачи, изображенной на фиг. 172, мы воспользуемся распределением напряжений, соответствующим центру сжатия (см. стр. 355). В полярных координатах это распределение напряжений дает:

$$\sigma_r = \frac{A}{R^3}; \quad \sigma_t = \frac{d\sigma_r}{dR} \frac{R}{2} + \sigma_r = - \frac{1}{2} \frac{A}{R^3},$$

где  $A$  — постоянная.

<sup>1)</sup> Такие полости, например, наблюдаются при сварке, и испытания на усталость показывают, что разрушение обычно начинается у этих полостей.

<sup>2)</sup> Решение этой задачи было дано Я. Буссинеском (J. Boussinesq), см. Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques, Paris, 1885.

В цилиндрических координатах (фиг. 172) мы имеем следующие выражения для составляющих напряжения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_R \sin^2 \psi + \sigma_t \cos^2 \psi = A \left( r^2 - \frac{1}{2} z^2 \right) (r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}; \\ \sigma_z &= \sigma_R \cos^2 \psi + \sigma_t \sin^2 \psi = A \left( z^2 - \frac{1}{2} r^2 \right) (r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}; \\ \tau_{rz} &= \frac{1}{2} (\sigma_R - \sigma_t) \sin 2\psi = \frac{3}{2} A r z (r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}; \\ \sigma_\psi &= \sigma_t = -\frac{1}{2} \frac{A}{R^3} = -\frac{1}{2} A (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned} \right\} [194]$$

Предположим теперь, что центры сжатия равномерно распределены по оси  $z$  от  $z=0$  до  $z=-\infty$ . Тогда, пользуясь принципом сложения действия сил, получим составляющие напряжения в бесконечном сплошном теле, согласно выражениям [194], в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= A \int_z^\infty \left( r^2 - \frac{1}{2} z^2 \right) (r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} dz = \\ &= \frac{A}{2} \left[ \frac{1}{r^3} - \frac{z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} - z (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right]; \\ \sigma_z &= A \int_z^\infty \left( z^2 - \frac{1}{2} r^2 \right) (r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} dz = \frac{A}{2} z (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}; \\ \tau_{rz} &= \frac{3}{2} A \int_z^\infty r z (r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} dz = \frac{A}{2} r (r^2 - z^2)^{-\frac{3}{2}}; \\ \sigma_\psi &= -\frac{1}{2} A \int_0^\infty (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} dz = -\frac{A}{2} \left[ \frac{1}{r^3} - \frac{z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned} \right\} [195]$$

Из рассмотрения напряженного состояния по плоскости  $z=0$  найдем, что нормальное напряжение по этой плоскости равно нулю, а касательное

$$(\tau_{rz})_{z=0} = \frac{1}{2} \frac{A}{r^3}. \quad [b]$$

Оказывается, что, комбинируя решения [189] и [195], мы можем, путем соответствующего подбора постоянных  $A$  и  $B$ , получить такое распределение напряжений, что плоскость  $z = 0$  будет свободна от напряжений, и в начале координат будет действовать сосредоточенная сила  $P$ .

Из выражений  $[a]$  и  $[b]$  видим, что касательные усилия по граничной плоскости устроятся, если

$$-B(1 - 2\nu) + \frac{A}{2} = 0,$$

откуда

$$A = 2B(1 - 2\nu).$$

Подставив это значение в выражение [195] и сложив вместе напряжения по формулам [189] и [195], найдем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= B \left\{ (1 - 2\nu) \left[ \frac{1}{r^2} - \frac{z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \right] - 3r^2 z (r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \right\}; \\ \sigma_z &= -3Bz^3 (r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}; \\ \sigma_\theta &= B(1 - 2\nu) \left[ -\frac{1}{r^2} + \frac{z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} + z (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right]; \\ \tau_{rz} &= -3Brz^2 (r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}. \end{aligned} \right\} [c]$$

Это распределение напряжений удовлетворяет условиям на поверхности, так как, при  $z = 0$ ,  $\sigma_z = \tau_{rz} = 0$ .

Теперь нам остается определить постоянную  $B$  так, чтобы усилия, распределенные по полусферической поверхности с центром в начале координат, статически уравнивались силой  $P$ , действующей по оси  $z$ .

Рассматривая условия равновесия элемента, показанного на фиг. 168, найдем составляющую в направлении оси  $z$  усилий на полусферической поверхности:

$$\bar{Z} = -(\tau_{rz} \sin \psi + \sigma_z \cos \psi) = 3Bz^2 (r^2 + z^2)^{-2}.$$

Для определения  $B$  получим следующее уравнение:

$$P = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \bar{Z} r (r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} d\psi = 6\pi B \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \psi \sin \psi d\psi = 2\pi B,$$

откуда

$$B = \frac{P}{2\pi}.$$

Окончательно, подставив в выражение  $[c]$  найденное значение  $B$ , имеем следующие выражения для составляющих напряжения от нор-

мальной силы  $P$ , действующей на плоскую грань полубесконечного сплошного тела:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{P}{2\pi} \left\{ (1-2\nu) \left[ \frac{1}{r^2} - \frac{z}{r^2} (r^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} \right] - 3r^2z (r^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} \right\}; \\ \sigma_z &= -\frac{3P}{2\pi} z^3 (r^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}; \\ \sigma_\theta &= \frac{P}{2\pi} (1-2\nu) \left[ -\frac{1}{r^2} + \frac{z}{r^2} (r^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} + z (r^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \right]; \\ \tau_{rz} &= -\frac{3P}{2\pi} rz^2 (r^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}. \end{aligned} \right\} [196]$$

Это решение в трех измерениях аналогично решению, полученному нами для полуплоскости (см. выше, параграф 29, стр. 96).

Если мы возьмем элементарную площадку  $mn$ , перпендикулярную оси  $z$  (фиг. 172), то отношение между нормальной и касательной составляющими напряжения по этой площадке, на основании выражений [196], равно:

$$\frac{\sigma_z}{\tau_{rz}} = \frac{z}{r}. \quad [d]$$

Следовательно, направление равнодействующего напряжения проходит через начало координат  $O$ . Величина этого напряжения равна:

$$S = \sqrt{\sigma_z^2 + \tau_{rz}^2} = \frac{3P}{2\pi} \frac{z^2}{(r^2+z^2)^2} = \frac{3P}{2\pi} \frac{\cos^2 \psi}{(r^2+z^2)}. \quad [197]$$

Таким образом, напряжение обратно пропорционально квадрату расстояния от точки приложения силы  $P$ .

Представим сферическую поверхность диаметром  $d$ , касающуюся плоскости  $z=0$  в начале координат  $O$ . Для каждой точки этой поверхности

$$r^2 + z^2 = d^2 \cos^2 \psi. \quad [e]$$

Подставив это значение в выражение [197], мы приходим к заключению, что для точек сферической поверхности полное напряжение по горизонтальным плоскостям постоянно и равно

$$\frac{3P}{2\pi d^2}.$$

Рассмотрим теперь перемещения, возникающие в полубесконечном сплошном теле под действием силы  $P$ . Согласно выражениям [173] (стр. 339) для составляющих деформации, имеем:

$$u = \epsilon_0 r = \frac{r}{E} [\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)].$$

Подставив значения составляющих напряжения по формулам [196], получим:

$$u = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)P}{2\pi Er} \left[ z(r^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} - 1 + \right. \\ \left. + \frac{1}{1-2\nu} r^2 z (r^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \right]. \quad [198]$$

Для определения вертикального перемещения  $w$  мы имеем, на основании выражений [173], следующие уравнения:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)], \\ \frac{\partial w}{\partial r} = \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Подставив для составляющих напряжения и для перемещения  $u$  величины, найденные нами выше, получим:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{P}{2\pi E} \left\{ 3(1+\nu) r^2 z (r^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} - \right. \\ \left. - [3\{1+\nu(1-2\nu)\} z (r^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}] \right\}; \\ \frac{\partial w}{\partial r} = - \frac{P(1+\nu)}{2\pi E} \left[ 2(1-\nu) r (r^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3r z^2 (r^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} \right],$$

откуда, проинтегрировав, имеем

$$w = \frac{P}{2\pi E} \left[ (1+\nu) z^2 (r^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + 2(1-\nu^2) (r^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} \right]. \quad [199]$$

Для граничной плоскости ( $z=0$ ) перемещения получаются равными:

$$\left. \begin{aligned} (u)_{z=0} &= - \frac{(1-2\nu)(1+\nu)P}{2\pi Er}; \\ (w)_{z=0} &= \frac{P(1-\nu^2)}{\pi Er}. \end{aligned} \right\} \quad [200]$$

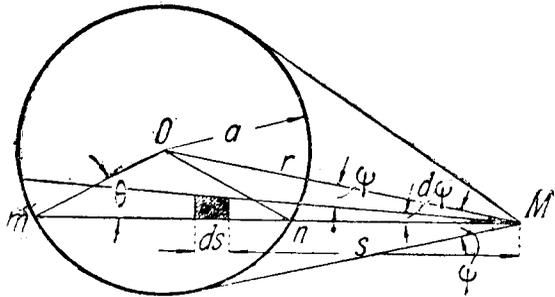
Это показывает, что произведение  $wr$  на граничной плоскости остается постоянным. Следовательно, радиусы, проведенные через начало координат в этой плоскости, после деформации становятся гиперболами с асимптотами  $Or$  и  $Oz$ .

У начала координат перемещения и напряжения становятся бесконечно большими. Чтобы избежать затруднений при применении наших выражений, мы можем представить, что у начала координат материал вырезан полусферической поверхностью малого радиуса, и что сосредоточенная сила  $P$  заменена статически эквивалентными усилиями, распределенными по этой поверхности.

106. **Нагрузка, распределенная по части плоскости, ограничивающей полубесконечное тело.** Имея решение для сосредоточенной силы, действующей на плоскую грань полубесконечного тела, мы можем найти перемещения и напряжения, возникающие под действием распределенной нагрузки, на основании принципа сложения действия сил.

В качестве простейшего примера возьмем случай равномерной нагрузки  $p$ , распределенной по площади круга радиуса  $a$  (фиг. 173), и рассмотрим деформацию в направлении действия нагрузки точки  $M$ , находящейся на поверхности тела, в расстоянии  $r$  от центра круга.

Возьмем малую элементарную площадку нагруженной площади, показанную заштрихованной на чертеже, ограниченную двумя радиусами, образующими угол  $d\psi$ , и двумя дугами окружностей с радиусами  $s$  и  $s + ds$



Фиг. 173.

(все радиусы имеют центром точку  $M$ ). Нагрузка, приходящаяся на эту элементарную площадку, равна

$$ps \, d\psi \, ds,$$

и соответствующая деформация в точке  $M$ , согласно второму из выражений [200], равна

$$\frac{(1 - \nu^2) p}{\pi E} \cdot \frac{s \, d\psi \, ds}{s} = \frac{(1 - \nu^2) p}{\pi E} \, d\psi \, ds.$$

Полная деформация получится двойным интегрированием:

$$w = \frac{(1 - \nu^2) p}{\pi E} \int \int d\psi \, ds.$$

Интегрируя по  $s$  и принимая во внимание то обстоятельство, что длина хорды  $mn$  равна

$$2 \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \psi},$$

найдем:

$$w = \frac{4(1 - \nu^2) p}{\pi E} \int_0^{\psi_1} (\sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \psi}) \, d\psi, \quad [a]$$

где  $\psi_1$  — наибольшая величина  $\psi$ , т. е. угол между  $r$  и касательной к кругу.

Определение величины интеграла  $[a]$  упрощается, если ввести, вместо переменной  $\psi$ , переменный угол  $\theta$ . По чертежу имеем

$$a \sin \theta = r \sin \psi,$$

откуда

$$d\psi = \frac{a \cos \theta d\theta}{r \cos \psi} = \frac{a \cos \theta d\theta}{r \sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2} \sin^2 \theta}}.$$

Подставив это значение в интеграл  $[a]$  и помня, что угол  $\theta$  меняется от нуля до

$$\frac{\pi}{2},$$

когда угол  $\psi$  меняется от нуля до  $\psi_1$ , найдем:

$$w = \frac{4(1-\nu^2)p}{\pi E} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 \cos^2 \theta d\theta}{r \sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2} \sin^2 \theta}} =$$

$$= \frac{4(1-\nu^2)pr}{\pi E} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2} \sin^2 \theta} \right) d\theta - \left(1 - \frac{a}{r}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2} \sin^2 \theta}} \right] \quad [201]$$

Интегралы, получившиеся в этом выражении, известны под названием *эллиптических интегралов*, и их величины, при любом значении отношения  $a:r$ , могут быть найдены по таблицам <sup>1)</sup>.

Чтобы найти деформацию по окружности нагруженного круга, положим  $r=a$  в выражении [201] и получим

$$(w)_{r=a} = \frac{4(1-\nu^2)pa}{\pi E}. \quad [202]$$

Если точка  $M$  заключается внутри нагруженной площади (фиг. 174а), мы опять рассмотрим деформацию, возникающую от действующей на заштрихованную элементарную площадку нагрузки

$$ps ds d\psi.$$

Тогда полная деформация будет равна

$$w = \frac{(1-\nu^2)p}{\pi E} \iint ds d\psi.$$

Длина хорды  $mn$  равна  $2a \cos \theta$ , и угол  $\psi$  меняется от нуля до

$$\frac{\pi}{2}.$$

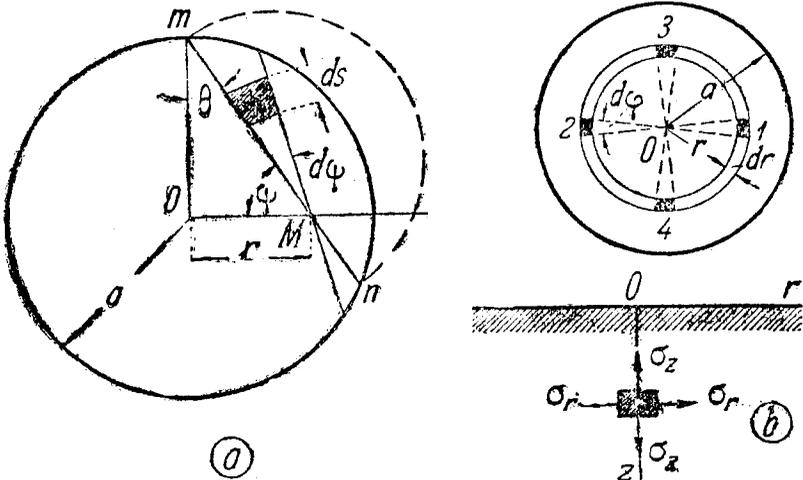
<sup>1)</sup> См., например, *Е. Янке и Ф. Эмде (E. Jahnke und F. Emde), Funktionentafeln, Berlin, 1909, или Пирс (Pierce), Short Table of Integrals, 1910.*

Таким образом,

$$\omega = \frac{4(1-\nu^2)p}{\pi E} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos \theta \, d\psi,$$

или, так как  $a \sin \theta = r \sin \psi$ , имеем

$$\omega = \frac{4(1-\nu^2)pa}{\pi E} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2} \sin^2 \psi} \right) d\psi. \quad [203]$$



Фиг. 174.

Итак, деформацию можно легко вычислить, при любой величине отношения  $r : a$ , при помощи таблиц эллиптических интегралов.

Наибольшая деформация имеет место, конечно, в центре круга. Подставив  $r = 0$  в выражение [203], найдем:

$$(\omega)_{\max} = \frac{2(1-\nu^2)pa}{E}. \quad [204]$$

Сравнивая это выражение с деформацией на окружности круга, мы видим, что последняя составляет  $2 : \pi$  от наибольшей деформации <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Решение этой задачи было дано Я. Буссинеком (J. Boussinesq) (см. его статью, упомянутую выше, в выноске на стр. 360). См. также Г. Ламб (H. Lamb), „Proc. London Math. Soc.“, vol. 34, 1902, p. 276; К. Теразава (K. Terazawa), „Journ. Coll. Scient., Univ. Tokyo“; Ф. Шлейхер (F. Schleicher), „Bauingenieur“, Bd 7, 1926, und „Bauingenieur“, Bd 14, 1933, S. 242. Более полное исследование этой задачи, а также случая, когда нагрузка распределена по прямоугольнику, дано в статье А. Лове (A. E. H. Love), „Phil. Trans. Roy. Soc.“, London, series A, vol. 228, 1929.

Интересно отметить, что, при данной интенсивности нагрузки  $p$ , наибольшая деформация не является постоянной, а увеличивается в том же самом отношении, как и радиус занятого нагрузкой круга.

Пользуясь принципом сложения действия сил, мы можем определить также и напряжения. Рассмотрим, например, напряжения в точке, лежащей на оси  $z$  (фиг. 174b).

Напряжение  $\sigma_z$ , возникающее в такой точке от нагрузки  $p$ , распределенной по кольцевой площади радиуса  $r$  и шириной  $dr$ , получится подстановкой во второе из выражений [196] вместо груза  $P$

$$2\pi r dr p.$$

Когда напряжение  $\sigma_z$ , получающееся под действием равномерной нагрузки, распределенной по всей площади круга радиуса  $a$ , будет равно:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= - \int_0^a 3pr dr z^3 (r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} = pz^3 \left| (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right|_0^a = \\ &= p \left[ -1 + \frac{z^3}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right]. \end{aligned} \quad [b]$$

Это напряжение на поверхности тела равно  $-p$  и постепенно уменьшается с увеличением расстояния  $z$ .

Для определения напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  в этой же точке, рассмотрим две элементарных площадки 1 и 2 загруженной площади (фиг. 174b) с нагрузкой на каждую

$$pr d\varphi dr.$$

Напряжения, возникающие под действием этих двух элементарных нагрузок в точке, лежащей на оси  $z$ , на основании второго и третьего выражений [196], равны:

$$\left. \begin{aligned} d\sigma'_r &= \frac{pr d\varphi dr}{\pi} \left\{ (1 - 2\nu) \left[ \frac{1}{r^2} - \frac{z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \right] - \right. \\ &\quad \left. - 3r^2 z (r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \right\}; \\ d\sigma'_\theta &= \frac{pr d\varphi dr}{\pi} (1 - 2\nu) \left[ -\frac{1}{r^2} + \frac{z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} + \right. \\ &\quad \left. + z (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right]. \end{aligned} \right\} [c]$$

Нормальные напряжения, возникающие на тех же площадках от элементарных нагрузок в точках 3 и 4, равны:

$$\left. \begin{aligned} d\sigma_r'' &= \frac{pr d\varphi dr}{\pi} (1-2\nu) \left[ -\frac{1}{r^2} + \frac{z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} + \right. \\ &\quad \left. + z (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right]; \\ d\sigma_\theta'' &= \frac{pr d\varphi dr}{\pi} \left\{ (1-2\nu) \left[ \frac{1}{r^2} - \frac{z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \right] - \right. \\ &\quad \left. - 3r^2 z (r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \right\}. \end{aligned} \right\} [d]$$

Суммируя напряжения [c] и [d], найдем, что нагрузки по четырем элементарным площадкам, указанным на чертеже сплошной заливкой, вызывают напряжения:

$$\begin{aligned} d\sigma_r = d\sigma_\theta &= \frac{pr d\varphi dr}{\pi} \left[ (1-2\nu) z (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} - 3r^2 z (r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \right] = \\ &= \frac{pr d\varphi dr}{\pi} \left[ -2(1+\nu) z (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3z^3 (r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \right]. \end{aligned} [e]$$

Чтобы получить напряжения от всей нагрузки, равномерно распределенной по площади круга радиуса  $a$ , нам надлежит проинтегрировать выражение [e] по аргументу  $\varphi$  в пределах от нуля до  $\pi/2$  и по аргументу  $r$  от нуля до  $a$ . Тогда:

$$\begin{aligned} \sigma_r = \sigma_\theta &= \frac{p}{2} \int_0^a \left[ -2(1+\nu) z (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3z^3 (r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \right] r dr = \\ &= \frac{p}{2} \left[ -(1+2\nu) + \frac{2(1+\nu)z}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \left( \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right)^3 \right]. \end{aligned} [f]$$

Для точки  $O$ , центра нагруженного круга, найдем по формулам [b] и [f]:

$$\sigma_z = -p; \quad \sigma_r = \sigma_\theta = -\frac{p(1+2\nu)}{2}.$$

Приняв  $\nu = 0,3$ , имеем  $\sigma_r = \sigma_\theta = -0,8p$ . Наибольшее касательное напряжение в точке  $O$ , по площадкам, наклоненным под  $45^\circ$  к оси  $z$ , равно  $0,1p$ .

Если сделать предположение, что явление текучести материала зависит от наибольшего касательного напряжения, то можно показать, что точка  $O$ , рассмотренная выше, не является наиболее неблагоприятной точкой на оси  $z$ .

Наибольшее касательное напряжение в любой точке оси  $z$  (фиг. 174б) на основании выражений [b] и [f] равно

$$\frac{1}{2}(\sigma_\theta - \sigma_z) = \frac{p}{2} \left[ \frac{1-2\nu}{2} + (1+\nu) \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}} - \frac{3}{2} \left( \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}} \right)^3 \right] \cdot [g]$$

Это выражение достигает максимума, когда

$$\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}} = \frac{1}{3} \sqrt{2(1+\nu)},$$

т. е. при

$$z = a \sqrt{\frac{2(1+\nu)}{7-2\nu}}. \quad [h]$$

Подставив это значение в выражение [g], имеем:

$$\tau_{\max} = \frac{p}{2} \left[ \frac{1-2\nu}{2} + \frac{2}{9}(1+\nu) \sqrt{2(1+\nu)} \right]. \quad [k]$$

Полагая  $\nu = 0,3$ , найдем по формулам [h] и [k]:

$$z = 0,638a; \quad \tau_{\max} = 0,33p.$$

Это показывает, что наибольшее касательное напряжение для точек оси  $z$  находится на известной глубине, примерно равной двум третям радиуса нагруженного круга, а величина этого наибольшего значения составляет примерно одну треть приложенного равномерного давления  $p$ .

В случае равномерного давления, распределенного по поверхности квадрата со сторонами  $2a$ , наибольшая деформация в центре его равна:

$$\omega_{\max} = \frac{8}{\pi} \ln(\sqrt{2} + 1) \cdot \frac{pa(1-\nu^2)}{E} = 2,24 \frac{pa(1-\nu^2)}{E}. \quad [205]$$

Эта деформация в углах квадрата составляет лишь половину деформации в центре, а средняя величина деформации равна:

$$\omega_{\text{ср}} = 1,90 \frac{pa(1-\nu^2)}{E}. \quad [206]$$

Подобные же вычисления были выполнены для равномерного давления, распределенного по прямоугольникам с различными соотношениями сторон  $\alpha = a:b$ .

Полученные результаты можно представить в следующем виде<sup>1)</sup>:

$$\omega_{\text{ср}} = m \frac{P(1-\nu^2)}{E\sqrt{F}}, \quad [207]$$

где  $m$  — числовой коэффициент, зависящий от отношения  $\alpha$ ,  $F$  — величина площади, на которую действует нагрузка, и  $P$  — вся нагрузка в целом. Некоторые значения коэффициента  $m$  приведены в таблице 11.

<sup>1)</sup> См. статью Ф. Шлейхера (F. Schleicher), упомянутую выше, в выноске на стр. 367.

ТАБЛИЦА 11.  
Значение коэффициента  $m$  в формуле [207].

Круг	Квадрат	Прямоугольник при разных значениях отеснения $\alpha = a : b$					
		1,5	2	3	5	10	100
0,96	0,95	0,94	0,92	0,88	0,82	0,71	0,37

Из таблицы видно, что, при данном грузе и площади, деформация увеличивается с уменьшением отношения периметра загруженной площадки к ее площади.

Выражением [207] иногда пользуются при исследовании осадок фундаментов инженерных сооружений. Чтобы получить одинаковую осадку различных частей сооружения, среднее значение давления по подошве основания должно находиться в известном соотношении с видом и величиной нагруженной площади.

В предыдущем изложении было предположено, что нагрузка дана, и мы нашли перемещения, ею вызываемые. Рассмотрим теперь случай, когда известны перемещения, а необходимо найти распределение давлений по плоской грани.

Возьмем, например, абсолютно твердый штамп, в виде круглого цилиндра, вдавливаемый в плоскую грань полубесконечного упругого сплошного тела. В таком случае перемещение  $w$  является постоянным по круглой подошве штампа.

Распределение давлений не будет постоянным, и их интенсивность отвечает следующему выражению <sup>1</sup>):

$$p = \frac{P}{2\pi a \sqrt{a^2 - r^2}}, \quad [208]$$

где  $P$  — полная нагрузка на штамп,  $a$  — радиус штампа и  $r$  — радиус круга, на который действует давление.

Это распределение давлений — явно неравномерное, и наименьшее его значение будет в центре ( $r = 0$ ), где

$$p_{\min} = \frac{P}{2\pi a^2},$$

т. е. наименьшее давление равно половине среднего давления по круговой площади подошвы штампа.

На контуре этой площади ( $r = a$ ) давление становится бесконечно большим.

В действительности, на контуре мы будем иметь явление текучести материала. Эта текучесть, однако, имеет местный характер и не оказы-

<sup>1</sup>) Это решение было дано Я. Буссинеском (J. Boussinesq), см. его статью, упомянутую выше на стр. 360.

вает существенного влияния на распределение давлений [208] в точках, находящихся на некотором расстоянии от окружности круга.

Перемещение штампа выражается формулой:

$$w = \frac{P(1 - \nu^2)}{2aE}. \quad [209]$$

Мы видим, что, при данной величине среднего давления на единицу площади плоского контура, деформация не является постоянной, а увеличивается в том же отношении, как и радиус штампа.

Для сравнения приведем также среднюю величину деформации в случае равномерного распределения давлений (см. формулу [203]):

$$w_{\text{ср}} = \frac{\int_0^a w 2\pi r dr}{\pi a^2} = \frac{16}{3\pi^2} \frac{P(1 - \nu^2)}{aE} = 0,54 \frac{P(1 - \nu^2)}{aE}. \quad [210]$$

Эта средняя величина деформации не очень сильно отличается от перемещения [209] абсолютно твердого штампа.

**107. Давление между двумя соприкасающимися сферическими телами.** Выводами предыдущего параграфа можно воспользоваться для исследования распределения давления между двумя соприкасающимися телами<sup>1)</sup>.

Предположим, что у точки касания эти тела имеют сферические поверхности, радиусы которых равны  $R_1$  и  $R_2$  (фиг. 175). Если между телами нет давления, то у нас будет касание в одной точке  $O$ .

Расстояния от касательной плоскости, проходящей через точку  $O$ , точек  $M$  и  $N$ , лежащих в меридиональном сечении сферических поверхностей, на очень малом<sup>2)</sup> расстоянии  $r$  от осей  $z_1$  и  $z_2$ , могут быть представлены с достаточной точностью следующими формулами:

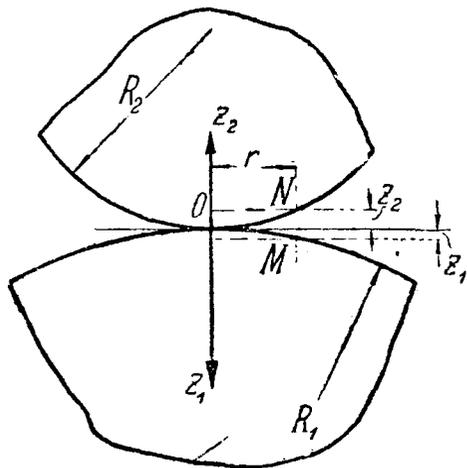
$$z_1 = \frac{r^2}{2R_1}; \quad z_2 = \frac{r^2}{2R_2} \cdot [a]$$

Взаимное расстояние между этими точками равняется

$$z_1 + z_2 = r^2 \left( \frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_2} \right) = \frac{r^2 (R_1 + R_2)}{2R_1 R_2} \quad [b]$$

<sup>1)</sup> Эта задача была решена *Г. Герцем (H. Herz)*, „Journ. Math. (Crelle's, Journ.)“, Bd 92, 1881. См. также его *Gesammelte Werke*, Bd 1, Leipzig, 1895. S. 155.

<sup>2)</sup> Расстояние  $r$  — мало по сравнению с радиусами  $R_1$  и  $R_2$ .



Фиг. 175.

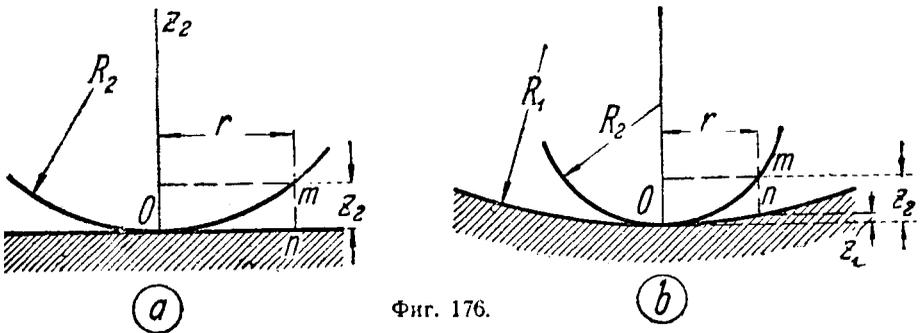
В частном случае касания между шаром и плоскостью (фиг. 176а)  $R_1 = \infty$ , и выражение [b] для расстояния  $mn$  дает величину

$$\frac{r^2}{2R_2}. \quad [c]$$

В случае касания между шаром и сферической впадиной (фиг. 176б) радиус  $R_1$  в выражении [b] будет отрицательным, и расстояние между точками  $m$  и  $n$  будет равно

$$z_2 - z_1 = \frac{r^2 (R_1 - R_2)}{2R_1 R_2}. \quad [c']$$

Если тела давят друг на друга по нормали в точке  $O$ , с силой  $P$ , то здесь возникает местная деформация вблизи точки касания, что вызо-



Фиг. 176.

вет касание по малой поверхности с круговым контуром, которая называется *поверхностью касания*.

Допустим, что радиусы кривизны  $R_1$  и  $R_2$  очень велики по сравнению с радиусом контура поверхности касания.

Тогда мы можем применить, при рассмотрении местной деформации, выводы, полученные ранее для полубесконечного тела.

Пусть  $w_1$  обозначает перемещение от местной деформации в направлении  $z_1$  точки  $M$ , лежащей на поверхности нижнего шара (фиг. 175), и пусть  $w_2$  обозначает такое же перемещение в направлении  $z_2$  для точки  $N$  верхнего шара. Допустим, что касательная плоскость в точке  $O$  остается неподвижной при местном сжатии.

Тогда, из-за этого сжатия, любые две точки тел, лежащие на осях  $z_1$  и  $z_2$ , на значительных расстояниях<sup>1)</sup> от точки  $O$ , сблизятся на некоторую величину  $\alpha$ , а расстояние между такими двумя точками, как  $M$  и  $N$  (фиг. 175), уменьшится на:

$$\alpha - (w_1 + w_2).$$

<sup>1)</sup> На таких расстояниях, чтобы деформациями от сжатия в этих точках можно было пренебречь.

Если в конце концов, вследствие местного сжатия, точки  $M$  и  $N$  попадут в пределы поверхности касания, то мы получим:

$$\alpha - (\omega_1 + \omega_2) = z_1 + z_2 = \beta r^2, \quad [d]$$

где  $\beta$  — постоянная величина, зависящая от радиусов  $R_1$  и  $R_2$  и выражающаяся формулами [b], [c] или [c'].

Таким образом, из геометрического рассмотрения мы нашли, для любой точки поверхности касания, такую зависимость:

$$\omega_1 + \omega_2 = \alpha - \beta r^2. \quad [e]$$

Рассмотрим теперь местные деформации. Из условий симметрии можно заключить, что интенсивность  $p$  давления между телами в месте касания и соответствующая деформация — симметричны относительно центра  $O$  поверхности касания.

Положим, что фиг. 174а представляет поверхность касания, а  $M$  — точка на поверхности касания нижнего шара. Тогда перемещение  $\omega_1$  этой точки, на основании предыдущего параграфа, выразится так:

$$\omega_1 = \frac{(1 - \nu_1^2)}{\pi E_1} \iint p \, ds \, d\psi, \quad [f]$$

где  $\nu_1$  и  $E_1$  — упругие постоянные для нижнего шара, а интегрирование распространяется на всю площадь касания.

Подобную же формулу мы получим также и для верхнего шара. Тогда

$$\omega_1 + \omega_2 = (k_1 + k_2) \iint p \, ds \, d\psi, \quad [g]$$

где

$$k_1 = \frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} \quad \text{и} \quad k_2 = \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2}. \quad [211]$$

Согласно выражениям [e] и [g], имеем:

$$(k_1 + k_2) \iint p \, ds \, d\psi = \alpha - \beta r^2. \quad [h]$$

Таким образом, нам необходимо найти такое выражение для  $p$ , которое удовлетворяло бы уравнению [h].

Покажем теперь, что это требование будет выполнено, если положить, что распределение давления  $p$  по поверхности касания представляется ординатами полушара радиуса  $a$ , построенного на поверхности касания.

Если  $p_0$  — давление в центре  $O$  поверхности касания, то

$$p_0 = ka,$$

где

$$k = \frac{p_0}{a}$$

— постоянный коэффициент, представляющий масштаб нашего изображения, принятого для распределения давления.

По хорде  $mn$  давление  $p$  меняется так, как показано на фиг. 174а пунктирной полуокружностью. Выполняя интегрирование по этой хорде, найдем:

$$\int p ds = \frac{p_0}{a} F,$$

где  $F$  — площадь полукруга, показанного пунктиром, равная

$$\frac{\pi}{2} (a^2 - r^2 \sin^2 \psi).$$

Подставив это значение в уравнение  $[h]$ , мы получим, что

$$\frac{\pi(k_1 + k_2)p_0}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 - r^2 \sin^2 \psi) d\psi = \alpha - \beta r^2,$$

или

$$(k_1 + k_2) \frac{p_0 \pi^2}{4a} (2a^2 - r^2) = \alpha - \beta r^2.$$

Это уравнение удовлетворяется при любой величине расстояния  $r$ , и, следовательно, предположенное распределение давлений является правильным, если между перемещением  $\alpha$  и радиусом  $a$  поверхности касания существуют следующие зависимости:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= (k_1 + k_2) p_0 \frac{\pi^2 a}{2}; \\ a &= (k_1 + k_2) \frac{\pi^2 p_0}{4\beta}. \end{aligned} \right\} \quad [212]$$

Величина наибольшего давления  $p_0$  получится, если приравнять сумму давлений по площади касания сжимающей силе  $P$ . Тогда, при распределении давлений по полушару, это дает:

$$\frac{p_0}{a} \cdot \frac{2}{3} \pi a^3 = P,$$

откуда

$$p_0 = \frac{3P}{2\pi a^2}, \quad [213]$$

т. е. наибольшее давление в полтора раза больше среднего давления на поверхности касания.

Подставив в формулы [212] найденную величину и взяв, согласно выражению  $[b]$ ,

$$\beta = \frac{R_1 + R_2}{2R_1 R_2},$$

найдем при касании двух шаров (фиг. 175):

$$\left. \begin{aligned} a &= \sqrt[3]{\frac{3\pi P(k_1 + k_2) R_1 R_2}{4(R_1 + R_2)}}; \\ \alpha &= \sqrt[3]{\frac{9\pi^2 P^2 (k_1 + k_2)^2 (R_1 + R_2)}{16 R_1 R_2}}. \end{aligned} \right\} \quad [214]$$

Если предположить, что оба шара обладают одинаковыми упругими свойствами, и принять  $\nu = 0,3$ , получим предыдущие выражения в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} a &= 1,109 \sqrt[3]{\frac{P}{E} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}; \\ \alpha &= 1,23 \sqrt[3]{\frac{P^2 R_1 + R_2}{E^2 R_1 R_2}}. \end{aligned} \right\} \quad [215]$$

Соответствующее значение наибольшего давления равно:

$$p_0 = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi a^2} = 0,388 \sqrt[3]{\frac{P E^2 (R_1 + R_2)^2}{R_1^2 R_2^2}}. \quad [216]$$

Для шара, вдавливаемого в плоскую поверхность, если предположить одинаковыми упругие свойства материалов обоих тел, мы найдем, при помощи подстановки  $R_1 = \infty$  в формулы [215] и [216]:

$$\left. \begin{aligned} a &= 1,109 \sqrt[3]{\frac{P R_2}{E}}; \\ \alpha &= 1,23 \sqrt[3]{\frac{P^2}{E^2 R_2}}; \\ p_0 &= 0,388 \sqrt[3]{\frac{P E^2}{R_2}}. \end{aligned} \right\} \quad [217]$$

Если взять  $R_1$  отрицательным, то мы можем написать также формулы для шара в сферической впадине (фиг. 176b).

Зная размеры поверхности касания и величину давления, действующего на нее, мы можем определить напряжения, пользуясь методом, изложенным в предыдущем параграфе 1).

Результаты таких подсчетов для точек, расположенных по осям  $Oz_1$  и  $Oz_2$ , показаны в виде диаграмм на фиг. 177.

Наибольшее давление  $p_0$  в центре поверхности касания взято за единицу напряжений. При измерении расстояний по осям  $z$  принят за единицу радиус  $a$  этой поверхности.

1) Такие подсчеты выполнены А. Н. Динником. „Известия Киевского политехнического института“ за 1909 г. См. также М. Губер (M. T. Huber), „App. Physik“, Bd 14, 1904, S. 153; С. Фукс (S. Fuchs), „Physik Z.“, Bd 14, 1913, S. 1282; М. Губер и С. Фукс (M. T. Huber und S. Fuchs), „Physik Z.“, Bd 15, 1914, S. 298; В. Мортон и Л. Клоз (W. B. Morton and L. J. Close), „Phil. Mag.“, vol. 43, 1922, p. 320.

Наибольшим является сжимающее напряжение  $\sigma_z$  в центре поверхности касания. Два прочих главных напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  в той же точке равны

$$\frac{1 + 2\nu}{2} \sigma_z.$$

Следовательно, наибольшее касательное напряжение, от которого зависит появление текучести в таком материале, как сталь, в этой точке сравнительно мало.

Точка, где касательное напряжение является наибольшим, лежит на оси  $z$  на глубине, равной примерно половине радиуса поверхности касания. Эту точку следует рассматривать как самую опасную точку для такого материала, как сталь. Наибольшее касательное напряжение в этой точке (при  $\nu = 0,3$ ) составляет примерно  $0,31p_0$ .

При хрупких материалах, таких как стекло, разрушение происходит под действием наибольшего растягивающего напряжения. Это напряжение имеет место по окружности поверхности касания. Оно направлено по радиусу и по величине равно

$$\sigma_r = \frac{1 - 2\nu}{3} p_0.$$

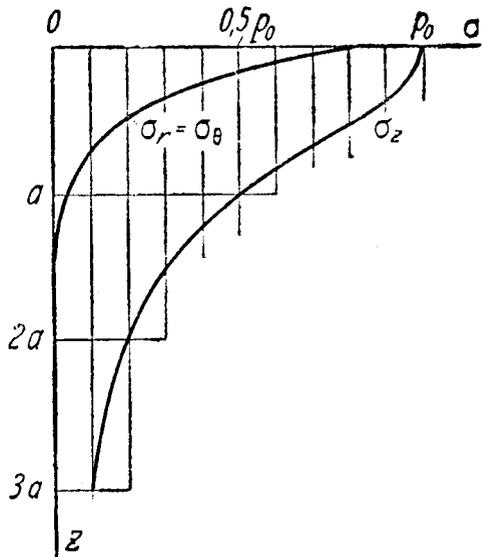
Другое главное напряжение, действующее по окружности, по абсолютной величине равно вышеупомянутому радиальному напряжению, но обратно по знаку.

Следовательно, по окружности поверхности касания, где нормальное давление на поверхность становится равным нулю, мы имеем чистый сдвиг, величина которого равна:

$$\frac{p_0(1 - 2\nu)}{3}.$$

Если принять  $\nu = 0,3$ , то этот сдвиг получается равным  $0,133 p_0$ . Это напряжение много меньше ранее вычисленного наибольшего касательного напряжения, но оно больше касательного напряжения в центре поверхности касания, где нормальное давление является наибольшим.

Многочисленные опыты подтвердили теоретические заключения Герца для материалов, следующих закону Гука, и при напряжениях в пределах упругости <sup>1)</sup>.



Фиг. 177.

<sup>1)</sup> Ссылки на соответствующую литературу можно найти в статье Г. Берндта (G. Berndt), „Z. techn. Physik“, Bd 3, 1922, S. 14. См. также Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik, Bd 3, S. 120.

**108. Общий случай давления между двумя соприкасающимися телами**<sup>1)</sup>. В общем случае сжатия при касании упругих тел можно вести рассуждения тем же путем, как при рассмотренном в предыдущем параграфе сжатии двух сферических тел.

Плоскость, касательную к обоим телам в точке их касания  $O$ , примем за плоскость  $xu$  (фиг. 175). Поверхности тел вблизи точки касания, если пренебречь малыми величинами высшего порядка, можно представить следующими уравнениями<sup>2)</sup>:

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= A_1x^2 + A_2xy + A_3y^2; \\ z_2 &= B_1x^2 + B_2xy + B_3y^2. \end{aligned} \right\} [a]$$

Расстояние между двумя точками  $M$  и  $N$  в таком случае будет равно

$$z_1 + z_2 = (A_1 + B_1)x^2 + (A_2 + B_2)xy + (A_3 + B_3)y^2. [b]$$

Мы можем всегда осям  $x$  и  $y$  придать такие направления, чтобы член, заключающий произведение  $xy$ , пропал. Тогда:

$$z_1 + z_2 = Ax^2 + By^2, [c]$$

где  $A$  и  $B$  являются постоянными, зависящими от величины главных кривизн соприкасающихся поверхностей и от угла между плоскостями главных кривизн обеих поверхностей.

Если через  $R_1$  и  $R_1'$  обозначить главные радиусы кривизны в точке касания одного из тел, а через  $R_2$  и  $R_2'$  — другого<sup>3)</sup>, и через  $\psi$  — угол между главными плоскостями, заключающими радиусы кривизны  $R_1$  и  $R_2$ , то постоянные  $A$  и  $B$  определяются из следующих уравнений:

$$\left. \begin{aligned} A + B &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2'} \right); \\ B - A &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1'} \right)^2 + \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2'} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2 \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1'} \right) \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2'} \right) \cos 2\psi \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \right\} [d]$$

Можно доказать, что  $A$  и  $B$  в уравнении [c] одинакового знака. Из этого делаем вывод, что все точки с одинаковым значением суммы  $z_1 + z_2$  лежат на одном эллипсе. Следовательно, если мы сдавим тела в на-

<sup>1)</sup> Эта теория предложена Г. Герцем (*H. Herz*), см. его работы, упомянутые выше в выноске на стр. 372.

<sup>2)</sup> Предполагается, что точка  $O$  не является особенной точкой поверхностей этих тел, а прилегающие к точке касания части поверхностей имеют плавную форму и могут рассматриваться поверхностями второго порядка.

<sup>3)</sup> Кривизна тела считается положительной, если соответственный центр кривизны находится внутри тела. На фиг. 175 кривизны обоих тел — положительные. На фиг. 176б шаровая впадина имеет отрицательную кривизну.

правления, перпендикулярном к касательной плоскости, проходящей через точку  $O$ , то поверхность касания будет иметь эллиптическое очертание.

Пусть  $\alpha$ ,  $w_1$ ,  $w_2$  имеют то же значение, что и в предыдущем параграфе. Тогда, для точек, находящихся на поверхности касания, имеем, как это следует из геометрического рассмотрения:

$$\left. \begin{aligned} w_1 + w_2 + z_1 + z_2 &= \alpha, \\ w_1 + w_2 &= \alpha - Ax^2 - By^2. \end{aligned} \right\} [e]$$

Рассмотрим теперь местную деформацию поверхности касания. Предположим, что эта поверхность очень мала, и применим уравнение [200], полученное нами для полубесконечных тел. Тогда сумма перемещений  $w_1$  и  $w_2$  точек поверхности касания будет равна:

$$w_1 + w_2 = \left( \frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2} \right) \iint \frac{pdF}{r}, \quad [f]$$

где  $pdF$  — давление, проходящееся на бесконечно малую элементарную площадку поверхности касания, и  $r$  — расстояние этой площадки от рассматриваемой точки.

Интегрирование должно распространяться на всю поверхность касания. Пользуясь обозначениями [211], получим на основании уравнений [e] и [f] следующее выражение:

$$(k_1 + k_2) \iint \frac{pdF}{r} = \alpha - Ax^2 - By^2. \quad [g]$$

Итак, задача сводится к тому, чтобы подыскать такое распределение давлений  $p$ , чтобы оно удовлетворяло уравнению [g].

Герц показал, что это требование будет выполнено, если предположить, что интенсивность давлений  $p$  по поверхности касания представляется ординатами полуэллипсоида, построенного на поверхности касания.

Наибольшее давление очевидно приходится в центре поверхности касания. Обозначив его через  $p_0$ , а через  $a$  и  $b$  полуоси эллиптического контура поверхности касания, найдем величину наибольшего давления из уравнения:

$$P = \iint pdF = \frac{2}{3} \pi ab p_0,$$

откуда

$$p_0 = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi ab}. \quad [218]$$

Мы видим, что наибольшее давление в полтора раза превышает среднее давление по поверхности касания. Чтобы определить это давление, мы должны знать величины полуосей  $a$  и  $b$  эллипса касания.

Способом, подобным тому, каким мы пользовались для сферических тел, найдем, что

$$\left. \begin{aligned} a &= m \sqrt[3]{\frac{3\pi P (k_1 + k_2)}{4 (A + B)}}; \\ b &= n \sqrt[3]{\frac{3\pi P (k_1 - k_2)}{4 (A - B)}}; \end{aligned} \right\} \quad [219]$$

где сумма  $(A + B)$  определяется первым выражением  $[d]$ , а коэффициенты  $m$  и  $n$  являются числами, зависящими от отношения

$$\frac{(B - A)}{(A - B)}.$$

Пользуясь обозначением

$$\cos \theta = \frac{B - A}{A + B}, \quad [h]$$

получим различные значения коэффициентов  $m$  и  $n$  в зависимости от угла  $\theta$ . Эти данные приведены в нижеследующей таблице (12<sup>1</sup>).

ТАБЛИЦА 12.  
Коэффициенты  $m$  и  $n$  при различных углах  $\theta$ .

$\theta$	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°
$m$	2,731	2,397	2,136	1,926	1,754	1,611	1,486	1,378	1,284	1,202	1,128	1,061	1,000
$n$	0,493	0,530	0,567	0,604	0,641	0,678	0,717	0,759	0,802	0,846	0,893	0,944	1,000

Например, в случае касания колеса с цилиндрическим ободом радиуса  $R_1 = 40$  см с рельсом, имеющим радиус головки  $R_2 = 30$  см, найдем, при подстановке  $R_1 = R_2 = \infty$  и  $\psi = 90^\circ$ , из выражений  $[d]$ :

$$A + B = \frac{7}{240}; \quad B - A = \frac{1}{240},$$

откуда по формуле  $[h]$  получим

$$\cos \theta = \frac{1}{7}; \quad \theta = 81^\circ 47'.$$

Далее путем интерполяции по таблице 12 имеем:

$$m = 1,104; \quad n = 0,911.$$

Подставив найденные значения в формулы  $[219]$  и приняв  $E = 2\,100\,000$  кг/см<sup>2</sup> и  $\nu = 0,25$ <sup>2</sup>), найдем:

$$a = 0,0314 \sqrt[3]{P}; \quad b = 0,0259 \sqrt[3]{P}.$$

<sup>1</sup>) Эта таблица взята из статьи Г. Виттемора и С. Петренко (H. L. Whittemore and S. N. Petrenko), U. S. Bur. Standards, Techn Paper 201, 1921.

<sup>2</sup>) Если  $\nu$  взять равным не 0,25, а 0,30, то полуоси эллипса касания по формуле  $[219]$  уменьшатся примерно на 1%, а наибольшее давление  $p_0$  увеличится примерно на 2%.

При силе  $P$ , равной 450 кг, полуоси получатся равными:

$$a = 0,241 \text{ см} \quad \text{и} \quad b = 0,198 \text{ см},$$

а площадь поверхности касания

$$\pi ab = 0,150 \text{ см}^2;$$

и на большее давление в центре будет:

$$p_0 = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi ab} = 4500 \text{ кг/см}^2.$$

Зная распределение давления, можно подсчитать напряжения в любой точке<sup>1)</sup>.

Этим путем было доказано, что точка с наибольшим касательным напряжением расположена на оси  $z$ , на некоторой небольшой глубине  $z_1$ , зависящей от величины полуосей  $a$  и  $b$ . Например,

$$z_1 = 0,47a, \quad \text{при} \quad \frac{b}{a} = 1,$$

и

$$z_1 = 0,24a, \quad \text{при} \quad \frac{b}{a} = 0,34.$$

Соответствующие величины наибольшего касательного напряжения (при  $\nu = 0,3$ ) равны:

$$\tau_{\max} = 0,31p_0 \quad \text{и} \quad \tau_{\max} = 0,32p_0.$$

Рассматривая точки, лежащие на эллиптической поверхности касания, и принимая оси  $x$  и  $y$  направленными по полуосям  $a$  и  $b$  соответственно, получим главные напряжения в центре поверхности касания равными:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -2\nu p_0 - (1 - 2\nu) p_0 \frac{b}{a + b}; \\ \sigma_y &= -2\nu p_0 - (1 - 2\nu) p_0 \frac{a}{a + b}; \\ \sigma_z &= -p_0. \end{aligned} \right\} [k]$$

На концах осей эллипса найдем:

$$\sigma_x = -\sigma_y \quad \text{и} \quad \tau_{xy} = 0,$$

т. е. растягивающее напряжение в радиальном направлении равно сжимающему напряжению, действующему по направлению окружности. Таким образом, в этих точках имеет место чистый сдвиг.

<sup>1)</sup> Такие исследования были выполнены проф. *Н. М. Беллевым*, см. „Сборник института инженеров путей сообщения“, Петроград, 1917 г., и сборник статей „Инженерные сооружения и строительная механика“, Ленинград, 1924 г.; см. также *Томас и Гёрш* (*H. R. Thomas and V. A. Hoersch*), „Univ. Illinois. Eng. Expt. Stat.“ Bull. 212, 1930, и *Лундберг* (*G. Lundberg*) и *Одквист* (*F. K. G. Odqvist*), „Proc. Ingeniörs Vetenskaps Akad.“, № 116, Stockholm 1932.

Величина касательного напряжения равна при этом: для концов большей оси ( $x = \pm a, y = 0$ )

$$\tau = (1 - 2\nu) p_0 \frac{\beta}{e^2} \left( \frac{1}{e} \operatorname{arc} \operatorname{tgh} e - 1 \right), \quad [l]$$

а для концов малой оси ( $x = 0, y = \pm b$ )

$$\tau = (1 - 2\nu) p_0 \frac{\beta}{e^2} \left( 1 - \frac{\beta}{e} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{e}{\beta} \right), \quad [m]$$

где

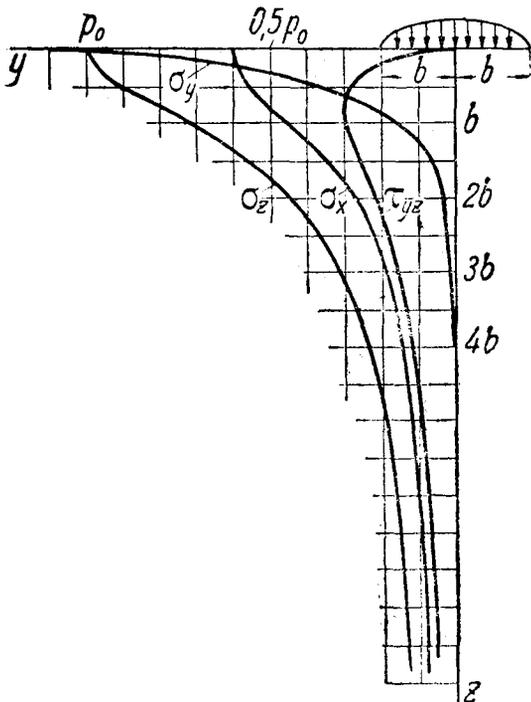
$$\beta = \frac{b}{a}; \quad e = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Когда размер малой полуоси  $b$  приближается к размеру большой полуоси  $a$ , а очертание поверхности касания — к круговому контуру, то

напряжения, выражающиеся формулами [k], [l] и [m], приближаются по своей величине к напряжениям, полученным в предыдущем параграфе для случая сжатия шаров.

Более детальное исследование напряжений для всех точек, лежащих на поверхности касания, показывает <sup>1)</sup>, что, при  $e < 0,89$ , наибольшее касательное напряжение выражается формулой [l]. При  $e > 0,89$ , наибольшее касательное напряжение будет в центре эллипса и может быть определено по приведенным выше формулам [k].

При увеличении отношения  $a : b$ , мы будем получать все более узкие эллипсы касания, и в пределе, при  $a : b = \infty$ , мы придем к случаю касания двух цилиндров с параллельными осями. Поверхность касания в этом случае — узкий прямоугольник.



Фиг. 178.

Распределение давления  $p$  по ширине поверхности касания (фиг. 178) представится полуэллипсом. Если ось  $x$  перпендикулярна плоскости чертежа,  $b$  — половина ширины поверхности касания и  $q$  — нагрузка, приходящаяся на единицу длины поверхности касания, то мы получим, на

<sup>1)</sup> См. статьи *Н. М. Беляева*, упомянутые выше в предыдущей выноске.

основании диаграммы распределения давления, представляющей полуэллипс:

$$q = \frac{1}{2} \pi b p_0,$$

откуда

$$p_0 = \frac{2q}{\pi b}. \quad [220]$$

Исследование местной деформации дает для величины  $b$  такую формулу:

$$b = \sqrt{\frac{4q(k_1 + k_2)R_1R_2}{R_1 + R_2}}, \quad [221]$$

где  $R_1$  и  $R_2$  — радиусы цилиндров, а  $k_1$  и  $k_2$  — коэффициенты, определяемые по формулам [211].

Если оба цилиндра из одинакового материала и  $\nu = 0,3$ , то

$$b = 1,52 \sqrt{\frac{qR_1R_2}{E(R_1 + R_2)}}. \quad [222]$$

В случае цилиндров с одинаковыми радиусами, т. е. при  $R_1 = R_2 = R$ ,

$$b = 1,08 \sqrt{\frac{qR}{E}}. \quad [223]$$

В случае касания цилиндра с плоской поверхностью

$$b = 1,52 \sqrt{\frac{qR}{E}}. \quad [224]$$

Подставив величину  $b$  по формуле [221] в выражение [220], найдем

$$p_0 = \sqrt{\frac{q(R_1 + R_2)}{\pi^2(k_1 + k_2)R_1R_2}}. \quad [225]$$

Если оба цилиндра из одинакового материала и  $\nu = 0,3$ , то

$$p_0 = 0,418 \sqrt{\frac{qE(R_1 + R_2)}{R_1R_2}}. \quad [226]$$

В случае касания цилиндра с плоской поверхностью:

$$p_0 = 0,418 \sqrt{\frac{qE}{R}}. \quad [227]$$

Зная  $p_0$  и  $b$ , можно определить напряжение в любой точке. Подсчеты показывают <sup>1)</sup>, что точка наибольшего касательного напряжения лежит на оси  $z$ , на некоторой глубине. Изменение составляющих напряжений на разной глубине, при  $\nu = 0,3$ , показано на диаграмме фиг. 178. Наи-

<sup>1)</sup> См. статьи *Н. М. Беляева*, упомянутые выше в выноске на стр. 381.

большое касательное напряжение получается на глубине  $z_1 = 0,78b$ , а его величина равна  $0,304 p_0$ .

109. Удар шаров. Результаты двух последних параграфов можно воспользоваться для исследования удара упругих тел.

Рассмотрим, например, удар двух шаров (фиг. 179). Как только шары, при их движении навстречу друг другу, придут в соприкосновение в точке  $O$ <sup>1)</sup>, то появятся сжимающие силы  $P$  и изменятся скорости шаров.

Если  $V_1$  и  $V_2$  — величины этих скоростей, то быстрота изменения их при ударе представится выражениями:

$$m_1 \frac{dV_1}{dt} = -P; \quad m_2 \frac{dV_2}{dt} = -P, \quad [a]$$

где  $m_1$  и  $m_2$  обозначают массы шаров. Пусть  $a$  — расстояние, на которое сближаются оба шара один с другим вследствие местного сжатия в точке  $O$ . Тогда скорость этого сближения шаров представится следующей формулой:

$$a' = V_1 + V_2,$$

и мы найдем на основании уравнений [a], что ускорение сближения равно

$$a'' = -P \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}. \quad [b]$$

Исследование показывает, что продолжительность удара, т. е. время, в течение которого шары находятся в соприкосновении, очень велико по сравнению с периодом наименьшего вида колебания шаров<sup>2)</sup>. Колебаниями можно поэтому пренебречь и принять, что при ударе сохраняют силу выражения [214], которые были установлены в условиях покоя.

Пользуясь обозначениями:

$$n = \sqrt{\frac{16}{9\pi^2} \frac{R_1 R_2}{(k_1 + k_2)^2 (R_1 + R_2)}}; \quad n_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}, \quad [c]$$

найдем, на основании формул [214]:

$$P = n\alpha^{\frac{3}{2}}, \quad [d]$$

и выражение [b] получит следующий вид:

$$a'' = -nn_1\alpha^{\frac{3}{2}}. \quad [e]$$

Умножая обе части этого выражения на  $a'$ , получим:

$$\frac{1}{2} d(a')^2 = -nn_1\alpha^{\frac{3}{2}} d\alpha,$$

откуда, при помощи интегрирования, имеем:

$$\frac{1}{2} [(a')^2 - V^2] = -\frac{2}{5} nn_1\alpha^{\frac{5}{2}}, \quad [f]$$

где  $V$  — скорость сближения обоих шаров в начале удара.

<sup>1)</sup> Мы предполагаем, что движение обоих шаров совершается по линии, соединяющей центры шаров.

<sup>2)</sup> См. лорд Рэйлей (Lord Rayleigh), „Phil Mag.“, series 6, vol. 11, 1906, p. 283.

Если мы подставим  $a' = 0$  в это уравнение, то найдем величину расстояния, на которое сближаются друг с другом оба шара в момент наибольшей деформации сжатия:

$$a_1 = \left( \frac{5}{4} \frac{V^2}{nn_1} \right)^{\frac{2}{5}}. \quad [g]$$

По этой величине мы можем найти из формул [214] величину наибольшей сжимающей силы  $P$ , возникающей между шарами при ударе, а также величину соответственного радиуса  $a$  поверхности касания.

Для определения продолжительности удара перепишем уравнение [f] в следующем виде:

$$dt = \frac{da}{\sqrt{V^2 - \frac{4}{5} nn_1 a^{\frac{5}{2}}}}.$$

Обозначив  $a : a_1 = x$  и пользуясь формулой [g], найдем:

$$dt = \frac{a_1}{V} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^{\frac{5}{2}}}},$$

откуда получим длительность удара

$$t = \frac{2a_1}{V} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^{\frac{5}{2}}}} = 2,94 \frac{a_1}{V}. \quad [228]$$

В частном случае двух шаров из одного и того же материала, одинакового радиуса  $R$ , мы имеем, на основании выражения [g]:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \left( \frac{5\sqrt{2}\pi\rho}{4} \frac{1-\nu^2}{E} V^2 \right)^{\frac{2}{5}} R; \\ t &= 2,94 \left( \frac{5\sqrt{2}\pi\rho}{4} \frac{1-\nu^2}{E} \right)^{\frac{2}{5}} \frac{R}{V^{\frac{1}{5}}}, \end{aligned} \right\} [229]$$

где  $\rho$  обозначает массу единицы объема шаров.

Мы видим, что продолжительность удара пропорциональна радиусу шаров и обратно пропорциональна

$$V^{\frac{1}{5}}.$$

Этот результат был проверен несколькими исследователями на опыте<sup>1)</sup>.

В случае длинных стержней со сферическими концами, период основного вида колебания может быть величиной того же порядка, что и продолжитель-

<sup>1)</sup> См. *М. Гамбургер (M. Hamburger)*, „Wied. Ann.“, Bd 28, 1886, S. 653; *А. Динник*, „Записки Русского физико-химического общества“, т. 38, 1906 г., стр. 242, и т. 41, 1909 г., стр. 57. Дальнейший перечень литературы по этому вопросу приведен в *Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik*, Bd 3, 1927, S. 448.

ность удара, и при исследовании местного сжатия в точке касания эти колебания надлежит учитывать<sup>1)</sup>.

110. Симметричная деформация круглого цилиндра. Если круглый цилиндр подвергается действию сил, приложенных по его боковой поверхности и распределенных симметрично относительно оси цилиндра, то мы воспользуемся функцией напряжений  $\varphi$  в цилиндрических координатах и применим уравнение [175]<sup>2)</sup>.

Это уравнение будет удовлетворено, если мы примем для функции напряжений  $\varphi$  решение уравнения:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad [a]$$

Указанное решение можно взять в следующем виде:

$$\varphi = f(r) \sin kz, \quad [b]$$

где  $f$  — функция одного лишь  $r$ . Подставив функцию [b] в уравнение [a], мы придем к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению для определения  $f(r)$ :

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - k^2 f = 0. \quad [c]$$

Возьмем интеграл этого уравнения в виде ряда:

$$f(r) = a_0 + a_1 r^2 + a_2 r^4 + a_3 r^6 + \dots \quad [d]$$

Подставив этот ряд в уравнение [c], найдем следующую зависимость между последовательными коэффициентами ряда:

$$(2n)^2 a_n - k^2 a_{n-1} = 0,$$

откуда

$$a_1 = \frac{k^2}{2^2} a_0; \quad a_2 = \frac{k^2}{4^2} a_1 = \frac{k^4}{2^2 \cdot 4^2} a_0; \quad \dots$$

Подставив найденные коэффициенты в ряд [d], имеем:

$$f(r) = a_0 \left( 1 + \frac{k^2 r^2}{2^2} + \frac{k^4 r^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{k^6 r^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots \right). \quad [e]$$

Второй интеграл уравнения [c] можно также получить в виде ряда и можно показать, что этот второй интеграл обращается в бесконечность при  $r=0$ , а, следовательно, его не надлежит учитывать при рассмотрении деформации сплошного цилиндра.

Ряд в скобках выражения [e] является Бесселевой функцией нулевой степени и с мнимым аргументом  $ikr^3$ .

<sup>1)</sup> См. ниже, стр. 433. Продольный удар стержней со сферическими поверхностями на концах был рассмотрен *Сирсом* (*J. E. Sears*), „Proc. Cambridge Phil. Soc.“, vol. 14, 1908, p. 257, и „Trans. Cambridge Phil. Soc.“, vol. 21, 1912, p. 49. Боковой удар стержней, с учетом местного сжатия, был рассмотрен автором, см. „Z. Math. Phys.“, Bd 62, 1914, S. 198.

<sup>2)</sup> Вопрос о деформации круглого цилиндра, находящегося под действием сил, приложенных по поверхности его, был рассмотрен впервые *Л. Похгаммером* (*L. Pochhammer*), „Crelle's Journ.“, Bd 81, 1876. Несколько задач относительно симметричной деформации цилиндров решены *Кри* (*C. Chree*), „Trans. Cambridge Phil. Soc.“, vol. 14, 1889, p. 250. См. также статью *Л. Файлона* (*L. N. G. Filon*), „Phil. Trans. Roy. Soc., London“, series A, vol. 198, 1902, которая содержит решения нескольких задач, представляющих практический интерес и относящихся к симметричной деформации цилиндра.

<sup>3)</sup> Рассмотрение дифференциального уравнения [c] и функций Бесселя можно найти в следующих книгах: *А. Форсайт* (*A. R. Forsyth*), *A Treatise on Differential Equations*, и *А. Грей и Г. Мэтьюс* (*A. Gray and G. B. Matthews*), *A Treatise on Bessel Functions*. Числовые таблицы для функций Бесселя можно найти в книге *Е. Янке и Ф. Эмде* (*E. Jahnke und F. Emde*), *Funktionentafeln mit Formeln und Kurven*, Berlin, 1909.

В дальнейшем будем пользоваться для обозначения этой функции символом  $J_0(ikr)$  и писать функцию напряжений  $[b]$  в следующем виде:

$$\varphi_1 = a_0 J_0(ikr) \sin kz. \quad [f]$$

Уравнение [175] имеет также решения, отличные от решений уравнения [a]. Одно из этих решений может быть выведено из приведенной выше функции  $J_0(ikr)$ . Дифференцируя, имеем:

$$\frac{dJ_0(ikr)}{d(ikr)} = -\frac{ikr}{2} \left( 1 + \frac{k^2 r^2}{2 \cdot 4} + \frac{k^4 r^4}{2 \cdot 4^2 \cdot 6} + \frac{k^6 r^6}{2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} + \dots \right). \quad [g]$$

Эта производная с отрицательным знаком называется Бесселевой функцией первого порядка и обозначается через  $J_1(ikr)$ .

Рассмотрим теперь функцию

$$f_1(r) = r \frac{d}{dr} J_0(ikr) = -ikr J_1(ikr) = \frac{k^2 r^2}{2} \left( 1 + \frac{k^2 r^2}{2 \cdot 4} + \frac{k^4 r^4}{2 \cdot 4^2 \cdot 6} + \dots \right). \quad [h]$$

Помощью дифференцирования можно показать, что:

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - k^2 \right) f_1(r) = 2k^2 J_0(ikr).$$

Далее, заметив, что  $J_0(ikr)$  является решением уравнения [c], получим как следствие, что функция  $f_1(r)$  является решением уравнения:

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - k^2 \right) \left( \frac{d^2 f_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df_1}{dr} - k^2 f_1 \right) = 0.$$

Следовательно, решение уравнения [175] может быть взято в следующем виде:

$$\varphi_2 = a_1 \sin kz(ikr) J_1(ikr). \quad [i]$$

Соединяя решения [f] и [k], мы можем принять функцию напряжений в таком виде:

$$\varphi = \sin kz [a_0 J_0(ikr) + a_1 ikr J_1(ikr)]. \quad [j]$$

Подставив эту функцию напряжений в формулы [174], найдем следующие выражения для составляющих напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \cos kz [a_0 F_1(r) + a_1 F_2(r)]; \\ \tau_{rz} &= \sin kz [a_0 F_3(r) + a_1 F_4(r)], \end{aligned} \right\} \quad [k]$$

где  $F_1(r), \dots, F_4(r)$  — определенные функции от  $r$ , включающие в себе

$$J_0(ikr)$$

и

$$J_1(ikr).$$

Пользуясь таблицами Бесселевых функций, можем легко вычислить значения функций  $F_1(r), \dots, F_4(r)$  при любой величине  $r$ .

Обозначив через  $a$  внешний радиус цилиндра, мы получим, что усилия, приложенные к поверхности цилиндра на основании формул [k], определяются следующими величинами составляющих напряжения:

$$\left. \begin{aligned} \tau_r &= \cos kz [a_0 F_1(a) + a_1 F_2(a)]; \\ \tau_{rz} &= \sin kz [a_0 F_3(a) + a_1 F_4(a)]. \end{aligned} \right\} \quad [l]$$

При соответствующем подборе постоянных  $k, a_0, a_1$ , можно исследовать различные случаи симметричной нагрузки цилиндра.

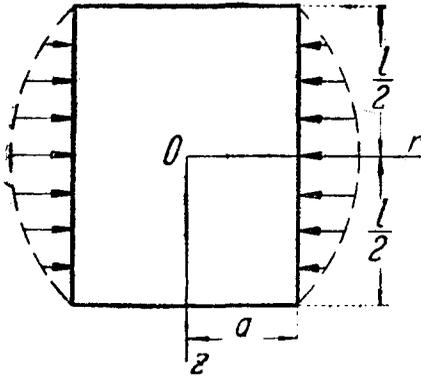
Обозначив длину цилиндра через  $l$  и приняв

$$k = \frac{n\pi}{l},$$

$$a_0 F_1(a) + a_1 F_2(a) = -A_n,$$

$$a_0 F_3(a) + a_1 F_4(a) = 0,$$

получим величины постоянных  $a_0$  и  $a_1$  для того случая, когда на боковую поверхность цилиндра действуют нормальные давления



Фиг. 180.

$$A_n \cos \frac{n\pi z}{l}.$$

Случай, когда  $n = 1$ , изображен на фиг. 180.

Подобным же образом мы можем прийти к решению для того случая, когда на боковую поверхность цилиндра действуют тангенциальные усилия интенсивностью

$$B_n \sin \frac{n\pi z}{l}.$$

Полагая последовательно  $n = 1, 2, 3, \dots$ , и пользуясь принципом сложения действия сил, мы приходим к решению задач, где нормальные давления на поверхность цилиндра могут быть представлены рядом:

$$A_1 \cos \frac{\pi z}{l} + A_2 \cos \frac{2\pi z}{l} + A_3 \cos \frac{3\pi z}{l} + \dots, \quad [m]$$

а касательные усилия — рядом:

$$B_1 \sin \frac{\pi z}{l} + B_2 \sin \frac{2\pi z}{l} + B_3 \sin \frac{3\pi z}{l} + \dots. \quad [n]$$

Если мы возьмем для функции напряжений  $\varphi$ , вместо выражения [b], выражение

$$\varphi = f(r) \cos kz$$

и поступим, как раньше, то мы найдем, вместо выражения [j], функцию напряжений в следующем виде:

$$\varphi = \cos kz [b_0 J_0(ikr) + b_1 ikr J_1(ikr)]. \quad [o]$$

Соответствующим подбором постоянных  $k$ ,  $b_0$ ,  $b_1$  получим решение для случая, при котором нормальные давления на цилиндр представляются рядом, содержащим синусы, а касательные усилия — рядом, содержащим косинусы.

На основании этого, комбинируя решения [j] и [o], мы можем получить любое распределение нормальных и касательных усилий по поверхности цилиндра, симметричное относительно оси последнего.

Одновременно здесь могут быть также некоторые усилия, распределенные по концам цилиндра.

Накладывая простое растяжение или сжатие на распределение усилий по концам цилиндра, мы можем всегда устроить так, чтобы равнодействующая всех усилий обращалась в нуль. В силу этого на основании принципа Сен-Венана

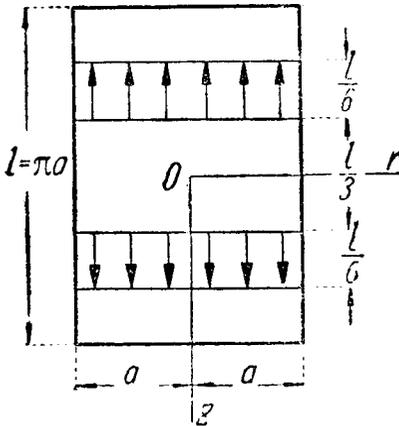
влиянием концевых усилий на напряжения в некотором расстоянии от концов можно пренебречь.

Несколько примеров симметричной нагрузки цилиндров рассмотрены Л. Файлоном в только-что упомянутой его статье <sup>1)</sup>.

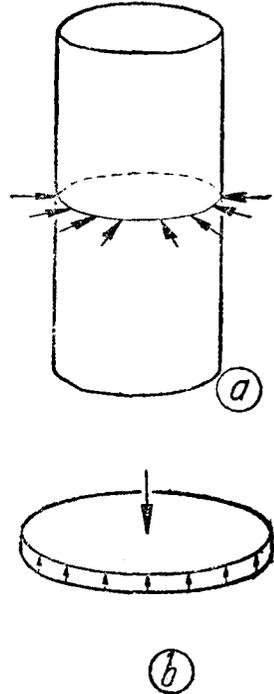
Приведем здесь окончательные результаты найденного решения для случая, представленного на фиг. 181.

Цилиндр, длина которого равна  $\pi a$ , подвергается растягивающему действию касательных усилий, равномерно распределенных по указанным на чертеже частям поверхности цилиндра.

Распределение нормальных напряжений  $\sigma_z$  по поперечным сечениям цилиндра представляет практический интерес, и приведенная ниже таблица 13 дает отношения этих напряжений к среднему растягивающему напряжению, полученному путем деления полного растягивающего усилия на площадь сечения цилиндра.



Фиг. 181.



Фиг. 182.

ТАБЛИЦА 13.

Коэффициенты для определения напряжений в цилиндре.

$z$	$r = 0$	$r = 0,2 a$	$r = 0,4 a$	$r = 0,6 a$	$r = a$
0	0,689	0,719	0,810	0,962	1,117
0,05 l	0,673	0,700	0,786	0,937	1,163
0,10 l	0,631	0,652	0,720	0,859	1,344
0,15 l	0,582	0,594	0,637	0,737	2,022
0,20 l	0,539	0,545	0,565	0,617	1,368

Из таблицы видно, что местные растягивающие напряжения вблизи нагруженных частей поверхности резко уменьшаются с увеличением расстояния от этих частей и приближаются к среднему значению.

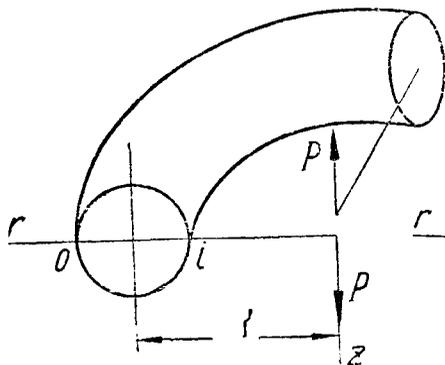
<sup>1)</sup> См. выноску на стр. 386.

Длинный цилиндр, сжатый равномерно распределенными по окружности усилиями (фиг. 182а), был рассмотрен А. Фёпплем и Л. Фёпплем<sup>1)</sup>. Эта задача имеет большое практическое значение в связи с исследованием давлений от насаживания.

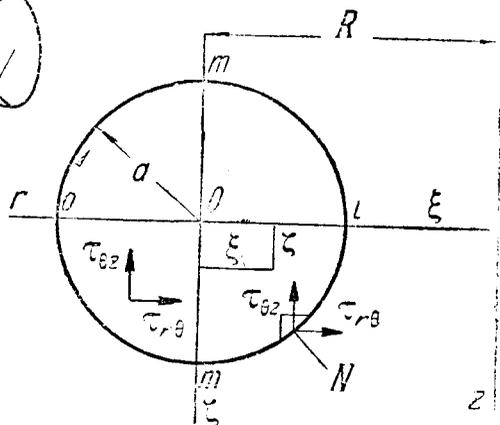
Другой пример применения общего решения задачи в виде функций Бесселя предложен А. Надаи<sup>2)</sup> при исследовании изгиба круглой пластинки сосредоточенной силой, приложенной в центре (фиг. 182б).

III. Скручивание сектора кругового кольца. Эта задача имеет большое практическое значение в связи с определением напряжений в плотно скрученных винтовых пружинах.

Рассмотрим сектор кольца, находящегося под действием двух равных и прямо противоположных сил  $P$ , приложенных по оси, проходящей через центр кольца и перпендикулярной к плоскости кольца (фиг. 183). Эти силы вызывают одинаковый крутящий момент  $M_t = PR$  во всех поперечных сечениях кольца.



Фиг. 183.



Фиг. 184.

Если размеры поперечного сечения кольца малы по сравнению с радиусом  $R$ , то при определении напряжений формулы, выведенные для кручения прямолинейных призматических стержней, могут дать достаточную точность.

В случае мощных винтовых пружин размеры поперечного сечения уже не являются малыми, и должна быть учтена разность в длинах между наружными и внутренними кольцевыми волокнами. Путем таких подсчетов можно показать, что у внутренних точек, например у точки  $i$ , касательное напряжение значительно больше, чем это дает теория кручения прямолинейных стержней<sup>3)</sup>.

Для более строгого решения задачи мы применим общие уравнения теории упругости в цилиндрических координатах (уравнения [165], стр. 307)<sup>4)</sup>.

1) См. А. Föppl und L. Föppl, Zwang und Drang, Bd 2, 1928, S. 168. См. также статью Фрейдентала (A. Freudenthal), „Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Eisenbetons“, № 40, Berlin, 1933.

2) См. А. Надаи (A. Nádai), Elastische Platten, 1925, S. 315.

3) Элементарная теория кручения кольцевого сектора предложена была В. Рёвсроном (V. Roever), „V. D. I.“, Bd 57, 1913. См. также М. Пильграм (M. Pilgram), „Artill. Monatshefte“, 1913. Опытное определение наибольшего напряжения путем измерения деформаций по поверхности витка было выполнено А. Валем (A. M. Wahl), „Trans. Am. Soc. Mech. Eng.“, 1928.

4) Это решение принадлежит О. Гёхнеру (O. Göhner), „Ingenieur-Archiv“, Bd 1, 1930, S. 619 und Bd 2, 1931, SS. 1 und 381.

Допустив, что в этом случае кручения отличными от нуля являются лишь составляющие касательного напряжения  $\tau_{\theta z}$  и  $\tau_{r\theta}$  (фиг. 184), найдем, по уравнениям [165]:

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0. \quad [a]$$

Рассмотрим теперь уравнения совместности [119] (см. стр. 224)). По чертежу (фиг. 185) имеем:

$$\begin{aligned} \tau_{yz} &= \tau_{\theta z} \cos \theta; \\ \tau_{xy} &= \tau_{r\theta} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = \tau_{r\theta} \cos 2\theta. \end{aligned}$$

Подставив эти значения в четвертое и шестое уравнения [119] и вспомнив, что  $\Sigma = \sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z = 0$ , найдем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau_{\theta z}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \tau_{\theta z}}{\partial z^2} - \frac{\tau_{\theta z}}{r^2} &= 0; \\ \frac{\partial^2 \tau_{r\theta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \tau_{r\theta}}{\partial z^2} - \frac{4\tau_{r\theta}}{r^2} &= 0. \end{aligned} \right\} [b]$$

Четыре остальных уравнения совместности (см. уравнения [g], стр. 311) будут удовлетворены в силу нашего допущения, что

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z = \tau_{rz} = 0.$$

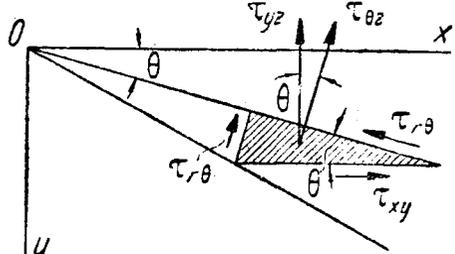
Итак, задача сводится к решению уравнений [a] и [b]. Для получения этого решения мы воспользуемся функцией напряжений  $\varphi$ . Мы удовлетворим уравнению [a], если примем:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{r\theta} &= \frac{GR^2}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \\ \tau_{\theta z} &= -\frac{GR^2}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \end{aligned} \right\} [c]$$

где  $G$  — модуль упругости при сдвиге, и  $R$  — радиус осевой линии кольца.

Подставив значения [c] в уравнения [b], найдем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) &= 0, \end{aligned}$$



Фиг. 185.

откуда мы выводим заключение, что выражение в скобках должно быть постоянным.

Обозначив эту постоянную величину через  $-2c$ , получим уравнение для определения функции напряжений  $\varphi$  в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + 2c = 0. \quad [d]$$

Введем теперь вместо координат  $r$  и  $z$  (фиг. 184) новые координаты  $\xi$  и  $\zeta$ :

$$\xi = R - r \quad \text{и} \quad \zeta = z.$$

Тогда уравнение [d] получится таким:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} + \frac{3}{R \left(1 - \frac{\xi}{R}\right)} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + 2c = 0. \quad [e]$$

Считая

$$\frac{\xi}{R}$$

малой величиной и пользуясь разложением в ряд:

$$\frac{1}{1 - \frac{\xi}{R}} = 1 + \frac{\xi}{R} + \frac{\xi^2}{R^2} + \dots \quad [f]$$

мы перейдем теперь к решению уравнения [e] путем последовательных приближений.

Предположим, что

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots, \quad [g]$$

и определим  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$  таким образом, чтобы удовлетворялись следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \zeta^2} + 2c &= 0; \\ \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \zeta^2} + \frac{3}{R} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi} &= 0; \\ \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \zeta^2} + \frac{3}{R} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} + \frac{3\xi}{R^2} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi} &= 0; \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad [h]$$

Тогда, по мере увеличения числа членов ряда [g], сумма уравнений [h] приближается все ближе и ближе к уравнению [e], а ряд [g] — к точному значению функции напряжений  $\varphi$ .

Рассмотрим теперь условия на контуре. равнодействующее касательное напряжение на контуре должно быть направлено по касательной к последнему. Следовательно:

$$\tau_{r\theta} \cos(N, \xi) - \tau_{\theta z} \cos(N, \zeta) = 0,$$

или, на основании выражений [c], имеем:

$$\frac{GR^2}{r^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{d\xi}{ds} \right) = 0.$$

Это указывает, что функция  $\varphi$  должна равняться постоянной величине на контуре, и мы выполним это условие, приняв решения уравнений [h] такими, чтобы  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$  обращались в нуль на контуре.

Получив значения  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ , найдем теперь дальнейшие приближения для составляющих напряжения по формулам [c]. Вводя новые переменные  $\xi$  и  $\zeta$ , представим эти уравнения в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{r\theta} &= \frac{G}{\left(1 - \frac{\xi}{R}\right)^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}; \\ \tau_{\theta z} &= \frac{G}{\left(1 - \frac{\xi}{R}\right)^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}. \end{aligned} \right\} \quad [i]$$

Пользуясь разложением в ряд:

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{\xi}{R}\right)^2} = 1 + \frac{2\xi}{R} + \frac{3\xi^2}{R^2} + \dots$$

и рядом [g], найдем в качестве первого приближения:

$$(\tau_{r\theta})_0 = G \frac{\partial \varphi_0}{\partial \zeta}; \quad (\tau_{\theta z})_0 = G \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi}. \quad [j]$$

Для второго приближения получим из выражений [i]:

$$\left. \begin{aligned} (\tau_{r\theta})_1 &= G \left[ \left(1 + \frac{2\xi}{R}\right) \frac{\partial \varphi_0}{\partial \zeta} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \zeta} \right]; \\ (\tau_{\theta z})_1 &= G \left[ \left(1 + \frac{2\xi}{R}\right) \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} \right]. \end{aligned} \right\} [k]$$

Для третьего приближения получим:

$$\left. \begin{aligned} (\tau_{r\theta})_2 &= G \left[ \left(1 + \frac{2\xi}{R} + \frac{3\xi^2}{R^2}\right) \frac{\partial \varphi_0}{\partial \zeta} + \left(1 + \frac{2\xi}{R}\right) \frac{\partial \varphi_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \zeta} \right]; \\ (\tau_{\theta z})_2 &= G \left[ \left(1 + \frac{2\xi}{R} + \frac{3\xi^2}{R^2}\right) \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi} + \left(1 + \frac{2\xi}{R}\right) \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} \right]. \end{aligned} \right\} [l]$$

Применим это общее исследование к частному случаю кольца круглого поперечного сечения с радиусом  $a$ . Уравнение контура (фиг. 184) будет:

$$\xi^2 + \zeta^2 - a^2 = 0, \quad [m]$$

и решение первого из уравнений [h], удовлетворяющее условиям на контуре примет вид:

$$\varphi_0 = -\frac{c}{2} (\xi^2 + \zeta^2 - a^2).$$

Первые приближенные значения составляющих напряжений, на основании формул [j], будут:

$$(\tau_{r\theta})_0 = -cG\zeta; \quad (\tau_{\theta z})_0 = -cG\xi. \quad [n]$$

Это распределение напряжений одинаково с распределением для круглого вала. Соответствующая величина крутящего момента равна:

$$M_t = -\iint (\tau_{r\theta} \zeta + \tau_{\theta z} \xi) d\xi d\zeta. \quad [o]$$

Подставив величину напряжений из выражений [n], получим:

$$(M_t)_0 = \frac{cG\pi a^4}{2}; \quad c = \frac{2(M_t)_0}{G\pi a^4}.$$

Чтобы прийти ко второму приближению, мы воспользуемся вторым из уравнений [h]. Подставив вместо  $\varphi_0$  полученное выше выражение, найдем:

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \xi^2} - \frac{3c\xi}{R} = 0.$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее тому условию, что  $\varphi_1$  обращается в нуль на контуре, представится в таком виде:

$$\varphi_1 = \frac{3}{8} \frac{c\xi}{R} (\xi^2 + \zeta^2 - a^2).$$

Подставив найденное значение функции  $\varphi_1$  в выражения [k], найдем второе приближение для составляющих напряжения:

$$\left. \begin{aligned} (\tau_{r\theta})_1 &= -cG \left( \zeta + \frac{5}{4} \frac{\xi^2}{R} \right); \\ (\tau_{\theta z})_1 &= -cG \left[ \xi + \frac{7}{8} \frac{\xi^2}{R} - \frac{3}{8R} (\zeta^2 - a^2) \right]. \end{aligned} \right\} [p]$$

Подставив  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  в третье уравнение [h], найдем:

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \zeta^2} + \frac{3c}{8R^2} (\xi^2 + 3\zeta^2 - 3a^2) = 0.$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям на контуре, будет:

$$\varphi_2 = -\frac{c}{64R^2} (\xi^2 + 5\zeta^2 - 15a^2) (\xi^2 + \zeta^2 - a^2).$$

Пользуясь выражениями [l], найдем третье приближение для составляющих напряжения:

$$\left. \begin{aligned} (\tau_{r\theta})_2 &= -cG \left[ \zeta + \frac{5}{4} \frac{\xi\zeta}{R} + \frac{\zeta}{16R^2} (27\xi^2 + 5\zeta^2 - 10a^2) \right]; \\ (\tau_{\theta z})_2 &= -cG \left[ \xi + \frac{7}{8} \frac{\xi^2}{R} - \frac{3}{8R} (\zeta^2 - a^2) + \frac{13}{16} \frac{\xi^3}{R^2} - \frac{9}{16} \frac{\xi\zeta^2}{R^2} + \frac{1}{4} \frac{a^2\xi}{R^2} \right]. \end{aligned} \right\} [q]$$

Подставив эти выражения для составляющих напряжения в формулу [o], найдем соответствующий крутящий момент:

$$(M_t)_2 = \frac{cG\pi a^4}{2} \left( 1 + \frac{3}{16} \frac{a^2}{R^2} \right). \quad [r]$$

Определив из этого выражения постоянную  $c$  и подставив ее в выражения [q], найдем составляющие напряжения в функциях от приложенного крутящего момента  $(M_t)_2$ . По горизонтальному диаметру поперечного сечения кольца (фиг. 184)  $\zeta = 0$  и  $\tau_{r\theta} = 0$ , и по второму выражению [q] получим

$$(\tau_{\theta z})_2 = -cG \left( \xi + \frac{7}{8} \frac{\xi^2}{R} + \frac{13}{16} \frac{\xi^3}{R^2} + \frac{3}{8} \frac{a^2}{R} + \frac{a^2\xi}{4R^2} \right).$$

Для внутренней точки  $i$   $\xi = a$ , и мы имеем

$$(\tau_{\theta z})_i = -cGa \left( 1 + \frac{5}{4} \frac{a}{R} + \frac{17}{16} \frac{a^2}{R^2} \right).$$

Для наружной точки  $o$   $\xi = -a$ , и

$$(\tau_{\theta z})_o = cGa \left( 1 - \frac{5}{4} \frac{a}{R} + \frac{17}{16} \frac{a^2}{R^2} \right).$$

Пользуясь выражением [r], получим такие величины этих напряжений:

$$(\tau_{\theta z})_i = -\frac{2M_t}{\pi a^3} \cdot \frac{1 + \frac{5}{4} \frac{a}{R} + \frac{17}{16} \frac{a^2}{R^2}}{1 + \frac{3}{16} \frac{a^2}{R^2}} = -\frac{2M_t}{\pi a^3} \left( 1 + \frac{5}{4} \frac{a}{R} + \frac{7}{8} \frac{a^2}{R^2} \right);$$

$$(\tau_{\theta z})_o = \frac{2M_t}{\pi a^3} \left( 1 - \frac{5}{4} \frac{a}{R} + \frac{7}{8} \frac{a^2}{R^2} \right).$$

Вычисление дальнейших приближений указывает, что окончательное выражение для наибольшего касательного напряжения может быть принято в следующем виде <sup>1)</sup>:

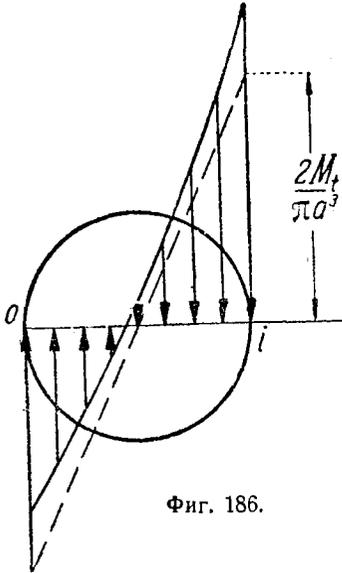
$$(\tau_{\theta z})_i = -\frac{2PR}{\pi a^3} \cdot \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{4} \frac{a}{R} + \frac{1}{14} \left( \frac{a}{R} \right)^2}{1 - \frac{13}{16} \frac{\left( \frac{a}{R} \right)^2}{1 - \left( \frac{a}{R} \right)^3}}. \quad [230]$$

<sup>1)</sup> Эта формула была сообщена автору в письме *О. Гёнером (O. Göhner)*.

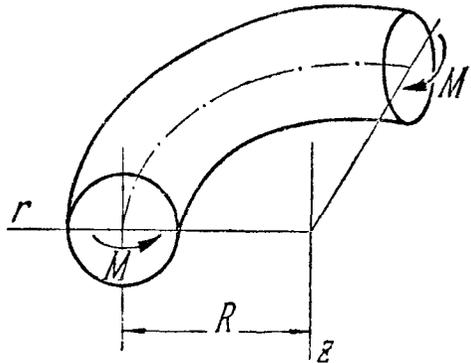
Распределение касательных напряжений по горизонтальному диаметру показано для частного случая  $a:R=0,2$  диаграммой на фиг. 186. Для сравнения, на этой же диаграмме пунктиром показано первое приближение, полученное при применении формулы кручения для круглого вала<sup>1)</sup>.

Описанный способ был применен также к задаче кручения сектора кольца эллиптического и прямоугольного поперечных сечений<sup>2)</sup>. Для квадратного сечения, со сторонами длиной  $2a$ , третье приближение дает для напряжения во внутренней точке следующую величину:

$$(\tau_{\theta z})_i = -\frac{0,6PR}{a^3} \left( 1 + 1,20 \frac{a}{R} + 0,56 \frac{a^2}{R^2} \right). \quad [231]$$



Фиг. 186.



Фиг. 187.

**112. Чистый изгиб сектора кругового кольца.** Примененный в предыдущем параграфе способ постепенных приближений может быть использован также для исследования чистого изгиба сектора кругового кольца<sup>3)</sup>.

Если к концам сектора кругового кольца, в плоскости осевой линии последнего (фиг. 187), приложены по концам две равных и прямо противоположных пары сил  $M$ , то они вызовут деформацию, симметричную относительно оси  $z$ , и касательные напряжения  $\tau_{r\theta}$  и  $\tau_{\theta z}$  в меридиональных поперечных сечениях кольца будут равны нулю. Остальные четыре составляющих напряжения должны удовлетворять уравнениям равновесия для случая симметричной деформации (см. параграф 98):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad [a]$$

<sup>1)</sup> Упомянутые выше (см. стр. 390) элементарные решения дают для  $(\tau_{\theta z})$  величины, хорошо согласующиеся с результатами, получающимися по формуле [230].

<sup>2)</sup> См. статью *О. Гёнера (O. Göhner)*, упомянутую выше, в выноске на стр. 390.

<sup>3)</sup> См. ту же статью *О. Гёнера (O. Göhner)*, упомянутую в выноске на стр. 390.

и соответствующим уравнениям совместности (см. уравнения [g] параграфа 98, стр. 341):

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \sigma_r - \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial r^2} &= 0; \\ \nabla^2 \sigma_\theta + \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial \Sigma}{\partial r} &= 0; \\ \nabla^2 \sigma_z + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial z^2} &= 0; \\ \nabla^2 \tau_{rz} - \frac{1}{r^2} \tau_{rz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial r \partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} [b]$$

Взяв, например, кольцо постоянного круглого поперечного сечения и введя вместо  $r$  и  $z$  новые координаты (фиг. 184):

$$\xi = R - r; \quad \zeta = z, \quad [c]$$

получим уравнения [a] и [b] в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_\xi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \tau_{\xi\zeta}}{\partial \zeta} - \frac{\sigma_\xi - \sigma_\theta}{R - \xi} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{\xi\zeta}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_\zeta}{\partial \zeta} - \frac{\tau_{\xi\zeta}}{R - \xi} &= 0 \end{aligned} \right\} [d]$$

и

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_\xi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \tau_{\xi\zeta}}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{R - \xi} \frac{\partial \sigma_\xi}{\partial \xi} - \frac{2}{(R - \xi)^2} (\sigma_\xi - \sigma_\theta) + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \xi^2} &= 0; \\ \frac{\partial^2 \sigma_\theta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \sigma_\theta}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{R - \xi} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \xi} + \frac{2}{(R - \xi)^2} (\sigma_\xi - \sigma_\theta) - \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{R - \xi} \frac{\partial \Sigma}{\partial \xi} &= 0; \\ \frac{\partial^2 \sigma_\zeta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \sigma_\zeta}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{R - \xi} \frac{\partial \sigma_\zeta}{\partial \xi} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \zeta^2} &= 0; \\ \frac{\partial^2 \tau_{\xi\zeta}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \tau_{\xi\zeta}}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{R - \xi} \frac{\partial \tau_{\xi\zeta}}{\partial \xi} - \frac{1}{(R - \xi)^2} \tau_{\xi\zeta} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \xi \partial \zeta} &= 0. \end{aligned} \right\} [e]$$

В качестве первого приближения возьмем то распределение напряжений, какое получается при чистом изгибе призматических стержней. Тогда:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_\xi)_0 &= (\sigma_\tau)_0 = (\tau_{\xi\zeta})_0 = 0; \\ (\sigma_\theta)_0 &= -cE\xi, \end{aligned} \right\} [f]$$

где

$$c = \frac{4M}{\pi a^4 E}.$$

Чтобы прийти ко второму приближению, примем, что  $\xi$  — мало по сравнению с  $R$ , и пренебрежем произведениями отношения  $(\xi : R)$  на малые поправки к напряжениям, как величинами высшего порядка малости. Тогда уравнения [d] и [e] получатся в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial (\sigma_\xi)_1}{\partial \xi} + \frac{\partial (\tau_{\xi\zeta})_1}{\partial \zeta} - \frac{cE\xi}{R} &= 0; \\ \frac{\partial (\tau_{\xi\zeta})_1}{\partial \xi} + \frac{\partial (\sigma_\zeta)_1}{\partial \zeta} &= 0. \end{aligned} \right\} [d']$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla(\sigma_{\xi})_1 + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2(\Sigma)_1}{\partial \xi^2} &= 0; \\ \nabla(\sigma_{\theta})_1 + \frac{1}{R} \left( 1 + \frac{1}{1+\nu} \right) cE &= 0; \\ \nabla(\sigma_{\zeta})_1 + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2(\Sigma)_1}{\partial \zeta^2} &= 0; \\ \nabla(\tau_{\xi\zeta})_1 + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2(\Sigma)_1}{\partial \xi \partial \zeta} &= 0, \end{aligned} \right\} [e']$$

где символ  $\nabla$  обозначает операцию:

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}.$$

Введем теперь функцию напряжений  $\varphi_1$ . Приняв:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_{\xi})_1 &= \frac{cE}{2R} (\xi^2 + \zeta^2 - a^2) + \frac{cE}{R} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \xi^2}; \\ (\sigma_{\zeta})_1 &= \frac{cE}{R} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \zeta^2}; \\ (\tau_{\xi\zeta})_1 &= -\frac{cE}{R} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \xi \partial \zeta}, \end{aligned} \right\} [g]$$

мы удовлетворим уравнениям [d'].

Подставив значения напряжений [g] в уравнения [e'], найдем, что функция напряжений  $\varphi_1$  должна удовлетворять уравнению:

$$\nabla \nabla \varphi_1 = -\frac{1+2\nu}{1+\nu}. \quad [h]$$

Условия на контуре для функции  $\varphi_1$  получатся по уравнениям [12] (стр. 27) Так как первый член выражения для  $(\sigma_{\xi})_1$  равен нулю на контуре круга, а

$$l = \frac{d\zeta}{ds}; \quad m = -\frac{d\xi}{ds},$$

то найдем, что:

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right) = 0; \quad \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} \right) = 0.$$

Итак,

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \zeta} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi}$$

являются постоянными на контуре, и мы можем допустить, что

$$\varphi_1 \quad \text{и} \quad \frac{d\varphi_1}{dn}$$

равны нулю на контуре.

Уравнение [h] вместе с условиями на контуре вполне определяют функцию напряжений  $\varphi_1$ . Интересно отметить, что уравнение [h] и приведенные выше условия на контуре тождественны с уравнениями для равномерно нагруженной пластинки, заделанной по краям.

Для круглой пластинки мы знаем уравнение упругой поверхности. Это уравнение дает нам выражение для функции напряжений:

$$\varphi_1 = -\frac{1+2\nu}{64(1+\nu)} (\xi^2 + \zeta^2 - a^2)^2. \quad [k]$$

Поставив эту функцию в выражения  $[g]$ , найдем следующие формулы для составляющих напряжения:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_{\xi})_1 &= \frac{cE}{16R(1+\nu)} [(7+6\nu)(\xi^2 - a^2) + (5+2\nu)\zeta^2]; \\ (\sigma_{\zeta})_1 &= -\frac{cE(1+2\nu)}{16R(1+\nu)} (3\xi^2 + \zeta^2 - a^2); \\ (\tau_{\xi\zeta})_1 &= \frac{cE(1+2\nu)}{8R(1+\nu)} \xi\zeta. \end{aligned} \right\} [d]$$

Подставив эти выражения в уравнения  $[e']$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\sigma_{\theta})_1}{\partial\xi^2} &= -\frac{cE(4+5\nu+2\nu^2)}{2R(1+\nu)}; \\ \frac{\partial^2(\sigma_{\theta})_1}{\partial\zeta^2} &= \frac{cE(3\nu+2\nu^2)}{2R(1+\nu)}; \\ \frac{\partial^2(\sigma_{\theta})_1}{\partial\xi\partial\zeta} &= 0. \end{aligned}$$

Интегрируя эти уравнения и подобрав постоянные интегрирования так, чтобы распределение нормальных напряжений по поперечным сечениям кольца было статически эквивалентно изгибающему моменту  $M$ , найдем:

$$(\sigma_{\theta})_1 = -\frac{4M}{\pi a^4} \left[ \xi + \frac{(8+10\nu+4\nu^2)\xi^2 - (6\nu+4\nu^2)\zeta^2 - (2+\nu)a^2}{8(1+\nu)R} \right]. \quad [m]$$

Положив  $\zeta = 0$  и  $\xi = a$ , получим напряжение во внутренней точке  $l$  (фиг. 184):

$$(\sigma_{\theta})_1 = -\frac{4M}{\pi a^3} \left[ 1 + \frac{6+9\nu+4\nu^2}{8(1+\nu)} \cdot \frac{a}{R} \right].$$

При  $\nu = 0,3$  это выражение принимает такой вид:

$$(\sigma_{\theta})_1 = -\frac{4M}{\pi a^3} \left( 1 + 0,87 \frac{a}{R} \right). \quad [n]$$

Вычисление дальнейших приближений приводит в конечном результате к следующему выражению для напряжения во внутренней точке ( $\xi = a$ )<sup>1)</sup>:

$$\sigma_{\theta} = -\frac{4M}{\pi a^3} \left[ 1 + 0,87 \frac{a}{R} + \frac{0,64 \left( \frac{a}{R} \right)^2}{1 - \frac{a}{R}} \right]. \quad [p]$$

Элементарная теория изгиба кривых брусьев, основанная на предположении, что поперечные сечения остаются плоскими, и пренебрегающая напряжениями  $\tau_r$ , дает в этом случае <sup>2)</sup>:

$$\sigma_{\theta} = -\frac{4M}{\pi a^3} \left[ 1 + 0,75 \frac{a}{R} + 0,50 \frac{a^2}{R^2} + \dots \right].$$

### 113. Температурные напряжения в тонких круглых дисках.

Рассмотрим тот случай, когда температура  $T$  является функцией одного лишь радиального расстояния  $r$ <sup>3)</sup>.

<sup>1)</sup> Эта формула была сообщена автору в письме *О. Гёнером (O. Göhner)*.

<sup>2)</sup> См. книгу автора—Сопrotивление материалов, часть II, русское издание 1934 г., стр. 36.

<sup>3)</sup> Температура  $T$  измеряется от определенной начальной равномерной температуры, при которой в теле нет напряжений.

В этих условиях мы получаем плоскую задачу симметричного относительно центра диска распределения напряжений. Температурное напряжение в любой точке состоит из двух частей (см. параграф 65, стр. 229):

1) из равномерного растяжения или сжатия по всем направлениям, величиной

$$-\frac{\alpha TE}{1-2\nu}, \quad [a]$$

которые полностью уничтожают температурное расширение,

и 2) из возникающего от объемных сил напряжения в радиальном направлении интенсивностью, равной

$$-\frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{dT}{dr},$$

вместе с нормальными поверхностными усилиями интенсивностью

$$\frac{\alpha TE}{1-2\nu}. \quad [b]$$

Обозначив составляющие этого последнего напряжения через  $\sigma'_r$  и  $\sigma'_\theta$  и пользуясь уравнением равновесия [36] (стр. 67), найдем:

$$\frac{d\sigma'_r}{dr} + \frac{\sigma'_r - \sigma'_\theta}{r} - \frac{\alpha E}{1-2\nu} \cdot \frac{dT}{dr} = 0,$$

или

$$\frac{d}{dr}(r\sigma'_r) - \sigma'_\theta - \frac{\alpha E}{1-2\nu} r \frac{dT}{dr} = 0.$$

Чтобы решить это уравнение, введем такую функцию напряжений  $\varphi$ , что:

$$\sigma'_r = \frac{1}{r} \varphi; \quad \sigma'_\theta = \frac{d\varphi}{dr} - \frac{\alpha E}{1-2\nu} r \frac{dT}{dr}. \quad [c]$$

Тогда уравнение равновесия будет удовлетворено.

Условие совместности в случае деформации, симметричной относительно центра (см. параграф 26, стр. 80), представится в таком виде:

$$\varepsilon_\theta - \varepsilon_r + r \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} = 0.$$

Подставив вместо составляющих деформации их выражения в зависимости от составляющих напряжения [48] (стр. 76) и пользуясь выражениями [c], получим, что функция напряжений  $\varphi$  должна удовлетворять следующему уравнению:

$$r^2 \frac{d^2\varphi}{dr^2} + r \frac{d\varphi}{dr} - \varphi = \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha E r^2 \frac{dT}{dr} + r^2 \frac{d}{dr} \left( \frac{\alpha E r}{1-2\nu} \frac{dT}{dr} \right),$$

которое можно представить в таком виде:

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\varphi) \right] = \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha E \frac{dT}{dr} + \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right). \quad [d]$$

Из этого уравнения найдем:

$$\varphi = \frac{\alpha E}{1-2\nu} \left[ rT - (1-\nu) \frac{1}{r} \int_0^r Tr dr \right] + \frac{C_1 r}{2} + \frac{C_2}{r}. \quad [e]$$

Подставив эту функцию в первое из уравнений [c] и прибавив напряжение [a], найдем полное радиальное напряжение:

$$\sigma_r = \frac{\varphi}{r} - \frac{\alpha TE}{1-2\nu} = \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{r^2} - \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\alpha E}{r^2} \int_0^r Tr dr. \quad [f]$$

Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  должны быть определены из условий на контуре.

При *сплошном диске* мы должны принять  $C_2 = 0$ , чтобы в центре диска получились конечные значения напряжений. По краям диска усилия [a] и [b] обращаются в нуль, а потому  $\sigma_r = 0$ .

Следовательно, обозначив наружный радиус диска через  $b$ , имеем:

$$C_1 = \frac{2(1-\nu)\alpha E}{1-2\nu} \frac{1}{b^2} \int_0^b Tr dr,$$

и окончательное выражение для  $\sigma_r$  получается в следующем виде:

$$\sigma_r = \frac{1-\nu}{1-2\nu} \alpha E \left( \frac{1}{b^2} \int_0^b Tr dr - \frac{1}{r^2} \int_0^r Tr dr \right). \quad [232]$$

Подставив выражение [e] во второе из уравнений [c], найдем:

$$\sigma_\varphi = \frac{(1-\nu)\alpha E}{1-2\nu} \left( \frac{\nu T}{1-\nu} + \frac{1}{b^2} \int_0^b Tr dr + \frac{1}{r^2} \int_0^r Tr dr \right).$$

Присоединяя к этому напряжению напряжение [a], получим полное напряжение в тангенциальном направлении:

$$\sigma_\theta = \frac{(1-\nu)\alpha E}{1-2\nu} \left( -T + \frac{1}{b^2} \int_0^b Tr dr + \frac{1}{r^2} \int_0^r Tr dr \right). \quad [233]$$

Первый интеграл в выражении [232] можно представить в следующем виде:

$$\frac{1}{2\pi b^2} \int_0^b T 2\pi r dr,$$

и он равен половине средней температуры диска. Второй интеграл равен половине средней температуры внутренней части диска, очерченной радиусом  $r$ .

Отсюда мы можем сделать заключение, что напряжение  $\sigma_r$  на расстоянии  $r$  от центра является растягивающим, если средняя температура

диска больше средней температуры внутренней части диска. В противном случае,  $\sigma_r$  — сжимающее напряжение.

Выражение в скобках правой части формулы [233] представляет собой разность между полусуммой средней температуры всего диска и средней температуры внутренней части радиуса  $r$  и температурой  $T$  на расстоянии  $r$  от центра. Знак тангенциального напряжения  $\sigma_\theta$  зависит от знака этой разности.

При исследовании температурных напряжений поляризованным светом мы измеряли разность двух главных напряжений, которая выражается следующей формулой:

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \frac{(1-\nu)\alpha E}{1-2\nu} \left( \frac{2}{r^2} \int_0^r T r dr - T \right). \quad [234]$$

Из этой формулы видно, что эта разность пропорциональна разности между средней температурой внутренней части диска и температурой на контуре этой части.

**114. Температурные напряжения в длинных круглых цилиндрах.** Описанный в предыдущем параграфе способ определения температурных напряжений можно применить также и к случаю длинного круглого цилиндра, если распределение температуры  $T$  симметрично относительно оси цилиндра и не претерпевает изменений в направлении его оси.

Мы можем полагать, что на достаточном расстоянии от концов поперечные сечения цилиндра остаются плоскими, и рассматривать часть цилиндра между двумя смежными поперечными сечениями как диск, испытывающий плоскую деформацию. При этом возникнут нормальные напряжения  $\sigma_z$ , распределенные по торцам диска, такой величины, чтобы удерживать эти торцы плоскими.

При рассмотрении напряжений, возникающих от объемных усилий, действующих в радиальном направлении, имеющих интенсивность

$$-\frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{dT}{dr},$$

и от нормальных поверхностных усилий, интенсивность которых равна

$$\frac{\alpha E T}{1-2\nu},$$

мы можем воспользоваться уравнением равновесия для составляющих напряжения  $\sigma'_r$  и  $\sigma'_\theta$  и выражениями [c] предыдущего параграфа.

Уравнение совместности:

$$\varepsilon_\theta - \varepsilon_r + r \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} = 0 \quad [a]$$

также имеет силу, но, вследствие наличия напряжений  $\sigma'_z$ , выражения для составляющих деформаций будут отличаться от выражений [48], которыми мы пользовались в предыдущем параграфе.

Обозначим через  $\varepsilon_z$  постоянную величину деформации в направлении оси цилиндра и, пользуясь законом Гука, найдем:

$$\sigma'_z = \varepsilon'_z E + \nu(\sigma'_r + \sigma'_\theta). \quad [b]$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\theta &= \frac{1-\nu^2}{E} \sigma'_\theta - \frac{\nu(1+\nu)}{E} \sigma'_r - \nu\varepsilon_z; \\ \varepsilon_r &= \frac{1-\nu^2}{E} \sigma'_r - \frac{\nu(1+\nu)}{E} \sigma'_\theta - \nu\varepsilon_z. \end{aligned} \right\} \quad [c]$$

Подставив эти значения в уравнение [a] и пользуясь выражениями [c] предыдущего параграфа, мы получим следующее уравнение для функции напряжений  $\varphi$ :

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\varphi) \right] = \frac{\alpha E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \frac{dT}{dr} + \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right),$$

откуда

$$\varphi = \frac{\alpha E r T}{1-2\nu} - \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{r} \int_0^r T r dr + \frac{C_1 r}{2} + \frac{C_2}{r}. \quad [d]$$

Полное напряжение в радиальном направлении будет равно:

$$\sigma_r = \frac{\varphi}{r} - \frac{\alpha T E}{1-2\nu} = -\frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \int_0^r T r dr + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{r^2}. \quad [e]$$

Постоянные интегрирования должны быть определены из условий на контуре.

*Сплошной цилиндр.* В этом случае постоянная  $C_2$  должна быть равна нулю. Постоянная  $C_1$  найдется из того условия, что боковая поверхность цилиндра свободна от внешних сил. Подставив в выражение [e] наружный радиус  $b$  цилиндра вместо  $r$  и положив  $C_2 = 0$ , найдем

$$C_1 = \frac{2\alpha E}{1-\nu} \cdot \frac{1}{b^2} \int_0^b T r dr. \quad [f]$$

Тогда

$$\sigma_r = \frac{\alpha E}{1-\nu} \left( \frac{1}{b^2} \int_0^b T r dr - \frac{1}{r^2} \int_0^r T r dr \right). \quad [235]$$

Полное напряжение в тангенциальном направлении, согласно выражениям [c] предыдущего параграфа, равно:

$$\sigma_\theta = -\frac{\alpha T E}{1-2\nu} + \frac{d\varphi}{dr} - \frac{\alpha E}{1-2\nu} r \frac{dT}{dr}$$

или, на основании выражений [d] и [f], получим:

$$\sigma_{\theta} = \frac{\alpha E}{1-\nu} \left( -T + \frac{1}{b^2} \int_0^b T r dr + \frac{1}{r^2} \int_0^r T r dr \right). \quad [236]$$

Из формул [235] и [236] видно, что составляющие напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_{\theta}$  не зависят от постоянной составляющей деформации  $\epsilon_z$  и отличаются лишь постоянным множителем от соответствующих напряжений, найденных для случая тонкого диска (см. выражения [232] и [233]).

Полное напряжение  $\sigma_z$  по направлению оси цилиндра получим при помощи выражения [b]:

$$\sigma_z = \sigma'_z - \frac{\alpha TE}{1-2\nu} = \epsilon_z E + \frac{\alpha E}{1-\nu} \left( -T + \frac{2\nu}{b^2} \int_0^b T r dr \right). \quad [8]$$

В каждом частном случае мы можем так подобрать постоянную продольную деформацию  $\epsilon_z$ , чтобы равнодействующая нормальных усилий, распределенных по площади поперечного сечения цилиндра, обращалась в нуль.

Возьмем, например, длинный цилиндр с постоянной начальной температурой  $T_0$ . Если, начиная с некоторого момента времени  $t = 0$ , боковую поверхность цилиндра будем поддерживать при температуре равной нулю<sup>1)</sup>, то распределение температуры для какого-нибудь момента  $t$  представится в виде ряда<sup>2)</sup>:

$$T = T_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0 \left( \beta_n \frac{r}{b} \right) e^{-p_n t}, \quad [h]$$

где

$$J_0 \left( \beta_n \frac{r}{b} \right)$$

— Бесселева функция нулевого порядка (см. стр. 386) и величины  $\beta$  — корни уравнения

$$J_0(\beta) = 0.$$

Коэффициенты ряда [h] равны

$$A_n = \frac{2}{\beta_n J_1(\beta_n)},$$

а величины  $p_n$  имеют следующие значения:

$$p_n = \frac{k}{c\varrho} \cdot \frac{\beta_n^2}{b^2}, \quad [k]$$

где  $k$  — удельная теплопроводность,  $c$  — удельная теплоемкость материала и  $\varrho$  — плотность.

1) Предполагается, что температура поверхности цилиндра внезапно становится равной нулю. Если температура поверхности окажется равной  $T_1$  вместо нуля, то тогда следует в наших выражениях взять  $T_0 - T_1$  вместо  $T_0$ .

2) См. *Байерли (Byerly), Fourier Series and Spherical Harmonics*, p. 229. Определение температурных напряжений для этого случая выполнено А. Динником в его труде: *Применение Бесселевых функций к задачам упругости*, часть II, Екатеринбург, 1915 г., стр. 95. См. также *К. Лис (C. H. Lees), Proc. Roy. Soc., London*, vol. 101, 1922, p. 411.

Подставив ряд [h] в выражение [235] и приняв во внимание то обстоятельство, что <sup>1)</sup>

$$\int_0^r J_0\left(\beta_n \frac{r}{b}\right) r dr = \frac{br}{\beta_n^2} J_1\left(\beta_n \frac{r}{b}\right),$$

найдем

$$\sigma_r = \frac{2\alpha ET_0}{1-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-p_n t} \left[ \frac{1}{\beta_n^2} - \frac{1}{\beta_n^2} \frac{b}{r} \frac{J_1\left(\beta_n \frac{r}{b}\right)}{J_1(\beta_n)} \right]. \quad [l]$$

Таким же образом, подставив ряд [h] в выражение [236], получим:

$$\sigma_\theta = \frac{2\alpha ET_0}{1-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-p_n t} \left[ \frac{1}{\beta_n^2} + \frac{1}{\beta_n^2} \frac{b}{r} \frac{J_1\left(\beta_n \frac{r}{b}\right)}{J_1(\beta_n)} - \frac{J_0\left(\beta_n \frac{r}{b}\right)}{\beta_n J_1(\beta_n)} \right]. \quad [m]$$

Подставив ряд [h] в выражение [g] и пользуясь тем, что

$$2\pi \int_0^b \sigma_z r dr = 0, \quad [n]$$

найдем

$$\varepsilon_z = 4\alpha T_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-p_n t}}{\beta_n^2}.$$

После подстановки в выражение [g] этой величины постоянной деформации  $\varepsilon_z$ , получим:

$$\tau_z = \frac{2\alpha ET_0}{1-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-p_n t} \left[ \frac{2}{\beta_n^2} - \frac{J_0\left(\beta_n \frac{r}{b}\right)}{\beta_n J_1(\beta_n)} \right]. \quad [o]$$

Формулы [l], [m] и [o] представляют полное решение задачи.

Несколько числовых примеров можно найти в упомянутых выше статьях А. Динника и К. Лиса <sup>2)</sup>.

Диаграмма, представленная на фиг. 188, изображает <sup>3)</sup> распределение температуры в стальном цилиндре. Предполагается, что цилиндр имел равномерную начальную температуру, равную нулю, и что, начиная от момента  $t=0$ , поверхность цилиндра поддерживается при темпера-

<sup>1)</sup> См. Е. Янке и Ф. Емде (E. Jahnke und F. Emde), Functionentafeln, Berlin, 1909, S. 165.

<sup>2)</sup> Распределение температуры в сплошных телах при нагревании и охлаждении было исследовано Вильямсоном и Адамсом (Williamson and Adams), „Phys. Review“, series 2, vol. 14, 1919, p. 99. Опытное исследование воздействия огня и воды на колонны было выполнено Ингбергом, Грифффином, Робинсоном и Вильсоном (Ingberg, Griffin, Robinson and Wilson), см. U. S. Bur. Standards, Techn. Paper 184, 1921.

<sup>3)</sup> Эта диаграмма взята из книги А. Стодолы (A. Stodola), Dampf- und Gasturbinen, 6 Aufl., 1924, S. 961.

туре  $T_1$ . Распределение температуры по длине радиуса, при различных значениях отношения

$$\frac{t}{b^2}$$

( $t$  измеряется в секундах, а наружный радиус цилиндра  $b$  — в сантиметрах), изображено кривыми.

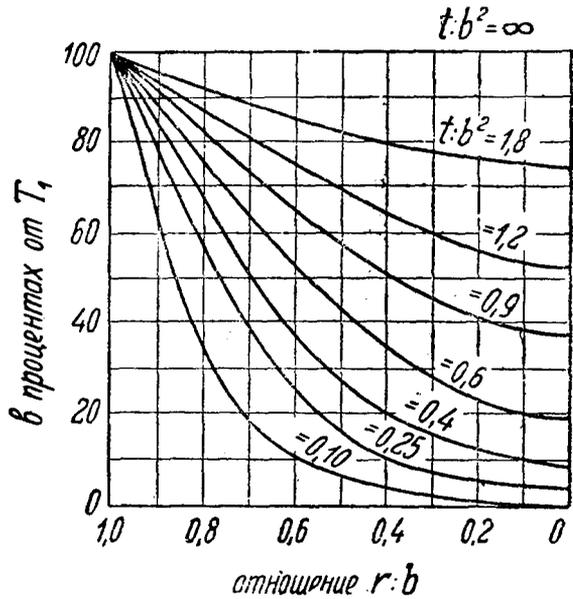
Непосредственно из формул  $[h]$  и  $[k]$  видно, что распределение температуры для цилиндров различных диаметров получается одинаковым, если время нагревания  $t$  пропорционально квадрату диаметра.

При помощи диаграммы можно определить среднюю температуру как всего цилиндра, так и отдельно внутренней части цилиндра радиуса  $r$ . Зная эти температуры, найдем температурные напряжения по формулам [235], [236] и  $[g]$ .

Если мы промежуток времени  $t$  возьмем очень малой величины, то средние температуры, упомянутые выше, в пределе обращаются в нуль, и мы найдем, что на поверхности

$$\sigma_r = 0;$$

$$\sigma_l = \sigma_z = - \frac{\alpha E T_1}{1 - \nu}.$$



Фиг. 188.

Эта последняя величина является абсолютным максимумом температурных напряжений, возникающих в цилиндре при нагревании. Она равна напряжению, необходимому, чтобы полностью предотвратить температурное расширение на поверхности цилиндра. При нагревании это напряжение — сжимающее, при охлаждении — растягивающее.

Чтобы уменьшить наибольшие напряжения, на практике обычно начинают нагревание валов и роторов при несколько более низкой температуре, чем окончательная температура  $T_1$ , и увеличивают время нагревания пропорционально квадрату диаметра.

*Цилиндр с центральным круглым отверстием*<sup>1)</sup>. Обозначив радиус отверстия через  $a$  и внешний радиус цилиндра через  $b$ , найдем произвольные постоянные  $C_1$  и  $C_2$  в выражении  $[e]$  из того условия,

<sup>1)</sup> См. Р. Лоренц (R. Lorenz), „Z. Ver. deutsch. Ing.“, Bd 51, 1907, S. 743.

что напряжение  $\sigma_r$  равно нулю на внутренней и внешней поверхностях цилиндра. Итак:

$$-\frac{\alpha E}{1-\nu} \cdot \frac{1}{a^2} \int_0^a Tr dr + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{a^2} = 0;$$

$$-\frac{\alpha E}{1-\nu} \cdot \frac{1}{b^2} \int_0^b Tr dr + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{b^2} = 0,$$

откуда:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{2\alpha E}{(1-\nu)(b^2-a^2)} \int_a^b Tr dr; \\ C_2 &= \frac{\alpha E}{(1-\nu)(b^2-a^2)} \left( b^2 \int_0^a Tr dr - a^2 \int_0^b Tr dr \right). \end{aligned} \right\} [p]$$

Подставив найденные значения постоянных в выражение [e], получим

$$\sigma_r = \frac{\alpha E}{(1-\nu)r^2} \left( \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b Tr dr - \int_a^r Tr dr \right). \quad [237]$$

Полное напряжение в тангенциальном направлении, на основании второго из выражений [c] предыдущего параграфа, равно:

$$\sigma_\theta = -\frac{\alpha ET}{1-2\nu} + \frac{d\varphi}{dr} - \frac{\alpha E}{1-2\nu} r \frac{dT}{dr}.$$

Подставив выражение [d] вместо функции  $\varphi$  и воспользовавшись значениями постоянных [p], получим:

$$\sigma_\theta = \frac{\alpha E}{(1-\nu)r^2} \left( \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b Tr dr + \int_a^r Tr dr - Tr^2 \right). \quad [238]$$

При помощи выражений [237] и [238] можно определить, при любом распределении температуры  $T$ , радиальную и тангенциальную составляющие напряжения.

Затем можно определить напряжение  $\sigma_z$  в осевом направлении при помощи выражения [b], откуда

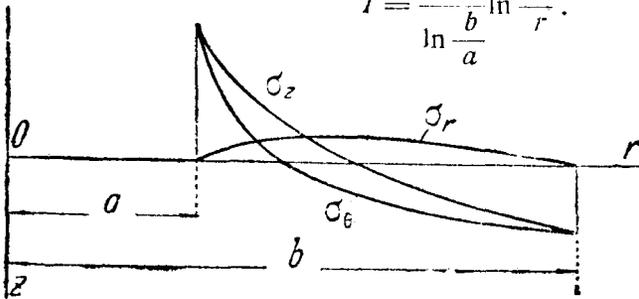
$$\sigma_z = E\varepsilon_z - \frac{\alpha ET}{1-\nu} + \frac{2\nu\alpha E}{(1-\nu)(b^2-a^2)} \int_a^b Tr dr. \quad [239]$$

Постоянная продольная деформация  $\varepsilon_z$  в каждом частном случае должна быть подобрана так, чтобы равнодействующая усилий, распределенных по поперечному сечению цилиндра, обращалась в нуль.

Рассмотрим, например, *установившийся тепловой поток*. Если  $T_i$  — температура на внутренней поверхности цилиндра, а температура

на внешней поверхности равна нулю, то температура  $T$  на каком-либо расстоянии  $r$  от центра представится следующим выражением:

$$T = \frac{T_i}{\ln \frac{b}{a}} \ln \frac{b}{r}. \quad [9]$$



Фиг. 189.

Подставив это значение в формулы [237], [238] и [239], найдем следующие выражения для температурных напряжений<sup>1)</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\alpha E T_i}{2(1-\nu) \ln \frac{b}{a}} \left[ -\ln \frac{b}{r} - \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \ln \frac{b}{a} \right]; \\ \sigma_\theta &= \frac{\alpha E T_i}{2(1-\nu) \ln \frac{b}{a}} \left[ 1 - \ln \frac{b}{r} - \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left( 1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \ln \frac{b}{a} \right]; \\ \sigma_z &= \frac{\alpha E T_i}{2(1-\nu) \ln \frac{b}{a}} \left[ 1 - 2 \ln \frac{b}{r} - \frac{2a^2}{b^2 - a^2} \ln \frac{b}{a} \right]. \end{aligned} \right\} [240]$$

Если  $T_i$  — положительно, то радиальное напряжение для всех точек — сжимающее и обращается в нуль на внутренней и внешней поверхностях цилиндра. Составляющие напряжения  $\sigma_\theta$  и  $\sigma_z$  достигают своих наибольших по абсолютной величине значений на внутренней и внешней поверхности цилиндра. Взяв  $r = a$ , найдем, что

$$(\sigma_\theta)_{r=a} = (\sigma_z)_{r=a} = \frac{\alpha E T_i}{2(1-\nu) \ln \frac{b}{a}} \left( 1 - \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \ln \frac{b}{a} \right). \quad [241]$$

При  $r = b$  получим:

$$(\sigma_\theta)_{r=b} = (\sigma_z)_{r=b} = \frac{\alpha E T_i}{2(1-\nu) \ln \frac{b}{a}} \left( 1 - \frac{2a^2}{b^2 - a^2} \ln \frac{b}{a} \right). \quad [242]$$

Распределение температурных напряжений по толщине стенок цилиндра для частного случая представлено на фиг. 189.

<sup>1)</sup> Номограммы для быстрого подсчета напряжений по формулам [240] даны Л. Баркером (L. Barker), „Engineering“, vol. 124, 1927, p. 443.

Если температура  $T_i$  — положительна, то напряжения будут сжимающими на внутренней поверхности и растягивающими на внешней. В случае таких материалов, как камень, кирпич или бетон, которые слабо сопротивляются растяжению, трещины при описанных выше условиях появляются обычно на наружной поверхности цилиндра.

Если толщина стенки мала сравнительно с внешним радиусом цилиндра, то мы можем упростить формулы [241] и [242], приняв

$$\frac{b}{a} = 1 + m; \quad \ln \frac{b}{a} = m - \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{3} - \dots$$

и считая  $m$  малой величиной. Тогда

$$(\sigma_\theta)_{r=a} = (\sigma_z)_{r=a} = -\frac{\alpha E T_i}{2(1-\nu)} \left( 1 + \frac{m}{3} \right); \quad [241']$$

$$(\sigma_\theta)_{r=b} = (\sigma_z)_{r=b} = \frac{\alpha E T_i}{2(1-\nu)} \left( 1 - \frac{m}{3} \right). \quad [242']$$

Если температура наружной поверхности цилиндра отлична от нуля, то можно воспользоваться приведенными выше формулами, при помощи подстановки во все выражения, вместо  $T_i$ , разности между внутренней и наружной температурами  $T_i - T_o$ .

В случае очень тонких стенок мы получим дальнейшее упрощение, если пренебрежем членом

$$\frac{m}{3}$$

по сравнению с единицей в выражениях [241'] и [242']. Тогда:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_\theta)_{r=a} = (\sigma_z)_{r=a} &= -\frac{\alpha E T_i}{2(1-\nu)}; \\ (\sigma_\theta)_{r=b} = (\sigma_z)_{r=b} &= \frac{\alpha E T_i}{2(1-\nu)}, \end{aligned} \right\} [243]$$

и распределение температурных напряжений по толщине стенки будет тем же, что в случае плоской пластинки толщиной  $2c = b - a$ , когда температура отвечает уравнению (см. фиг. 117, стр. 233):

$$T = \frac{y T_i}{b - a},$$

и края закреплены, так что изгиб пластинки от неравномерного нагревания предотвращен (см. формулу [v], стр. 238).

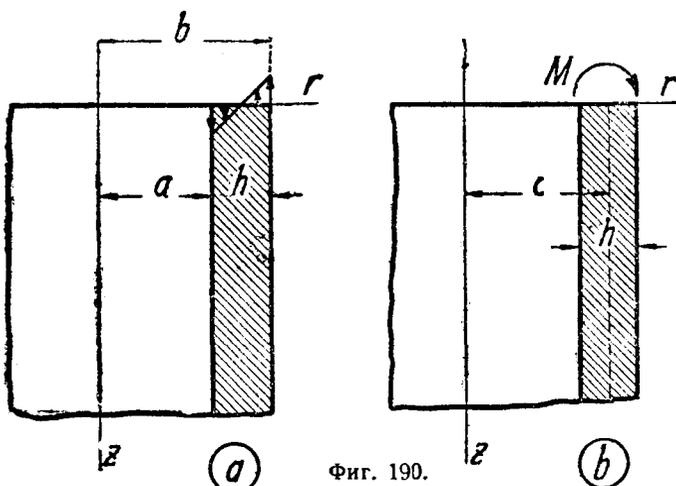
Если наложить на установившийся поток тепла колебания температуры высокой частоты, то возникающие при этих колебаниях температурные напряжения можно определить тем же путем, как пояснено для случая плоских пластинок<sup>1)</sup> (см. параграф 65, стр. 239).

<sup>1)</sup> Температурные напряжения в стенках цилиндра имеют важное практическое значение при расчетах дизельных двигателей. Графическое решение задачи, когда толщина стенки цилиндра и температура меняются по длине цилиндра,

В предыдущем исследовании было допущено, что цилиндр — значительной длины и что мы рассматриваем напряжения вдали от концов. Вблизи концов задача распределения температурных напряжений более сложна из-за местных отклонений.

Рассмотрим эту задачу для случая цилиндра с тонкими стенками. Решение [243] требует, чтобы по концам цилиндра были распределены нормальные усилия, показанные на фиг. 190а.

Чтобы найти напряжения в цилиндре со свободными концами, мы должны наложить на напряжения [243] напряжения, возникающие от усилий равных и прямо противоположных показанным на фиг. 190а.



Фиг. 190.

При тонких стенках толщиной  $h$ , эти усилия можно привести к изгибающим моментам  $M$ , показанным на фиг. 190b, равномерно распределенным по краю цилиндра и равным

$$M = \frac{\alpha E T_i}{2(1-\nu)} \frac{h^2}{6} \quad [r]$$

на единицу длины края.

Чтобы определить напряжения, возникающие от этих моментов, рассмотрим вырезанную из цилиндрической оболочки продольную полоску, шириной равную единице. Такая полоска может считаться балкой на упругом основании. Упругая линия этой полоски представится уравнением <sup>1)</sup>:

$$u = \frac{M e^{-\beta z}}{2\beta^2 D} (\cos \beta z - \sin \beta z), \quad [s]$$

было предложено Г. Эйхельбергом (G. Eichelberg), см. его статью, упомянутую выше, в выноске на стр. 239. Некоторые сведения относительно распределения температуры в дизельмоторах можно найти в следующих статьях: Г. Летсон (H. F. G. Letson), „Proc. Mech. Eng.“, London, 1925, p. 19; А. Нёгель (A. Nügel), „Engineering“, vol. 127, 1929, pp. 59, 179, 279, 466, 626.

<sup>1)</sup> См. книгу автора — Сопротивление материалов, часть 2, русское издание 1934 г., стр. 115.

где

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{c^2 h^2}}; \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad [f]$$

и  $c$  — средний радиус цилиндрической оболочки.

Зная упругую линию, мы можем определить для любого значения координаты  $z$  соответствующие напряжения  $\sigma_z$  от изгиба и тангенциальные напряжения  $\sigma_\theta$ .

Наибольший прогиб полосы очевидно будет на конце при  $z = 0$ , где:

$$(u)_{z=0} = \frac{M}{2\beta^2 D} = \frac{\alpha c T_i \sqrt{1-\nu^2}}{2\sqrt{3}(1-\nu)}.$$

Соответствующая составляющая деформации в тангенциальном направлении:

$$\epsilon_\theta = \frac{u}{c} = \frac{\alpha T_i \sqrt{1-\nu^2}}{2\sqrt{3}(1-\nu)}. \quad [u]$$

Составляющая напряжения в тангенциальном направлении по наружной поверхности стенки получится, на основании закона Гука, такой:

$$\sigma_\theta = \epsilon_\theta E = \nu \sigma_z = \frac{\alpha E T_i \sqrt{1-\nu^2}}{2\sqrt{3}(1-\nu)} - \frac{\nu \alpha E T_i}{2(1-\nu)}.$$

Прибавив это напряжение к соответствующему напряжению, вычисленному по выражению [243], найдем наибольшее тангенциальное напряжение на свободном конце тонкостенного цилиндра:

$$(\sigma_\theta)_{\max} = \frac{\alpha E T_i}{2(1-\nu)} \left( \frac{\sqrt{1-\nu^2}}{\sqrt{3}} - \nu + 1 \right). \quad [244]$$

Положив  $\nu = 0,3$ , найдем:

$$(\sigma_\theta)_{\max} = 1,25 \frac{\alpha E T_i}{2(1-\nu)}.$$

Таким образом, величина наибольшего растягивающего напряжения на свободном конце цилиндра на 25% больше получающейся по формуле [243] для напряжений в точках, удаленных от концов.

На основании уравнения [s] можно доказать, что увеличение напряжения вблизи свободных концов цилиндра в силу того, что оно зависит от прогиба  $u$ , имеет местный характер и быстро уменьшается с увеличением расстояния  $z$  от конца.

Приближенный способ определения температурных напряжений в тонкостенных цилиндрах при помощи изогнутой оси балки, лежащей на упругом основании, можно применить также и в том случае, когда температура меняется вдоль оси цилиндрической оболочки<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> См. С. Тимошенко и Дж. Лессельс, Прикладная теория упругости, русское издание 1930 г., стр. 140 (S. Timoshenko and J. M. Lessels, Applied Elasticity, 1925, p. 147), и статью К. Кента (C. H. Kent), Trans. Am. Soc. Mech. Eng., Applied Mechanics Division, vol. 53, 1931, p. 167.

**115. Температурные напряжения шара.** Рассмотрим здесь простейший случай, когда распределение температуры симметрично относительно центра шара <sup>1)</sup> и температурные напряжения зависят лишь от радиального расстояния  $r$ .

Полное температурное напряжение получится, как раньше, наложением гидростатического давления

$$-\frac{\alpha E T}{1-2\nu}$$

на напряжения, возникающие под действием объемных сил в радиальном направлении, интенсивностью

$$-\frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{dT}{dr}$$

и от нормальных поверхностных усилий, интенсивностью

$$\frac{\alpha E T}{1-2\nu}.$$

Пусть  $\sigma'_r$  и  $\sigma'_t$  — радиальная и тангенциальная составляющие этой последней системы напряженного состояния. Тогда, из условия равновесия в радиальном направлении любого элемента (фиг. 170, стр. 355), мы найдем (см. формулу [e], стр. 356), что:

$$\frac{d\sigma'_r}{dr} + \frac{2}{r}(\sigma'_r - \sigma'_t) - \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{dT}{dr} = 0. \quad [a]$$

Из условий симметрии мы приходим к заключению, что единственными перемещениями являются радиальные перемещения  $u$ , и, на основании закона Гука, найдем следующие выражения для составляющих деформации:

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr} = \frac{1}{E} (\sigma'_r - 2\nu\sigma'_t);$$

$$\epsilon_t = \frac{u}{r} = \frac{1}{E} [(1-\nu)\sigma'_t - \nu\sigma'_r].$$

Из этих уравнений получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_r &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ 2\nu \frac{u}{r} + (1-\nu) \frac{du}{dr} \right]; \\ \sigma'_t &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( \frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} \right). \end{aligned} \right\} \quad [b]$$

<sup>1)</sup> Эта задача рассмотрена Дюгамелем (*Duhamel*), см. статью его, упомянутую выше, в выноске на стр. 229, и Францем Нейманом (*Franz Neumann*), см. статью его, упомянутую в той же выноске. Тот же вопрос был рассмотрен независимо Дж. Гопкинсоном (*J. Hopkinson*), „*Messenger Math.*“, vol. 8, 1879, p. 168. Случай несимметричного распределения температуры рассмотрен Борхардтом (*Borchardt*), „*Monatsb. Akad. Wiss.*“, Berlin, 1873, S. 9.

Подставив эти значения в уравнение [a], имеем:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} - \frac{2u}{r^2} = \frac{\alpha(1+\nu)}{1-\nu} \cdot \frac{dT}{dr}. \quad [c]$$

Это уравнение можно представить в таком виде:

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 u) \right] = \frac{\alpha(1+\nu)}{1-\nu} \cdot \frac{dT}{dr}.$$

Отсюда найдем:

$$u = \frac{\alpha(1+\nu)}{1-\nu} \int_0^r T r^2 dr + C_1 r + \frac{C_2}{r^2}, \quad [d]$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные интегрирования, подлежащие в дальнейшем определению из условий на контуре.

Подставив значение [d] в выражение [b], получим:

$$\sigma'_r = -\frac{2\alpha E}{(1-\nu)r^3} \int_0^r T r^2 dr + \frac{C_1 E}{1-2\nu} - \frac{2C_2 E}{(1+\nu)r^3} + \frac{\alpha E T}{1-2\nu};$$

$$\sigma'_t = \frac{\alpha E}{(1-\nu)r^3} \int_0^r T r^2 dr + \frac{C_1 E}{1-2\nu} + \frac{C_2 E}{(1+\nu)r^3} + \frac{\alpha E T \nu}{(1-\nu)(1-2\nu)}.$$

Наложив на эти напряжения гидростатическое давление

$$-\frac{\alpha E T}{1-2\nu},$$

найдем следующие выражения для полных составляющих напряжения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{2\alpha E}{(1-\nu)r^3} \int_0^r T r^2 dr + \frac{C_1 E}{1-2\nu} - \frac{2C_2 E}{(1+\nu)r^3}; \\ \sigma_t &= \frac{\alpha E}{(1-\nu)r^3} \int_0^r T r^2 dr + \frac{C_1 E}{1-2\nu} + \frac{C_2 E}{(1+\nu)r^3} - \frac{\alpha E T}{1-\nu}. \end{aligned} \right\} [e]$$

Рассмотрим теперь несколько частных случаев.

**Сплошной шар.** Чтобы получить конечные значения для составляющих напряжения в центре, мы должны, в выражениях [e], положить  $C_2$  равным нулю. Постоянная  $C_1$  определится из того условия, что внешняя поверхность шара свободна от усилий.

Обозначив наружный радиус шара через  $b$ , найдем, по первой из формул [e], что

$$\frac{C_1 E}{1-2\nu} = \frac{2\alpha E}{(1-\nu)b^3} \int_0^b T r^2 dr,$$

и составляющее напряжения будут

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{2\alpha E}{1-\nu} \left( \frac{1}{b^3} \int_0^b Tr^2 dr - \frac{1}{r^3} \int_0^r Tr^2 dr \right); \\ \sigma_t &= \frac{\alpha E}{1-\nu} \left( \frac{2}{b^3} \int_0^b Tr^2 dr + \frac{1}{r^3} \int_0^r Tr^2 dr - T \right). \end{aligned} \right\} [245]$$

Средняя температура шара в пределах сферической поверхности радиуса  $r$  будет равна:

$$\frac{4\pi \int_0^r Tr^2 dr}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3}{r^3} \int_0^r Tr^2 dr.$$

Следовательно, напряжение  $\sigma_r$ , при любом радиусе  $r$ , пропорционально разности между средней температурой всего шара и средней температурой шара радиуса  $r$ .

Тангенциальное напряжение в любой точке будет равно

$$\frac{2\alpha E}{3(1-\nu)},$$

умноженному на выражение:

[средняя температура всего шара плюс половина средней температуры внутри шара радиуса  $r$  минус полтора  $T$ ].

Если распределение температуры известно, то подсчеты напряжений в каждом частном случае не встретят затруднений<sup>1)</sup>.

Интересный пример таких вычислений выполнен Г. Грюнбергом<sup>2)</sup>, в связи с исследованием сопротивления изотропных материалов, подвергающихся одинаковому растяжению по трем взаимно перпендикулярным направлениям.

Если сплошной шар, равномерной начальной температуры  $T_0$ , поместить в жидкость с более высокой температурой  $T_1$ , то наружная часть шара расширится и вызовет у центра шара равномерное растяжение по всем направлениям.

Максимальное значение этого растяжения будет иметь место по истечении промежутка времени

$$t = 0,0574 \frac{b^2 c_p}{k}. \quad [f]$$

<sup>1)</sup> Несколько примеров таких вычислений приведено в статье *Е. Гонеггера* (E. Honegger), Festschrift Prof. A. Stodola, Zürich, 1929. Таблица для вычисления распределения температуры при охлаждении сплошного шара дана *Адамсом и Вильямсоном* (Adams and Williamson), см. статью, упомянутую выше, в выноске на стр. 404.

<sup>2)</sup> См. *Г. Грюнберг* (G. Grünberg), „Z. Physik“, Bd 35, 1925, S. 548.

Здесь  $b$  — радиус шара,  $k$  — теплопроводность,  $c$  — удельная теплоемкость материала и  $\rho$  — плотность.

Величина этого максимального растягивающего напряжения равна<sup>1)</sup>

$$\sigma_r = \sigma_t = 0,771 \frac{\alpha E}{2(1-\nu)} (T_1 - T_0). \quad [g]$$

Наибольшее сжимающее напряжение будет иметь место на поверхности шара в момент, когда температура ее достигнет  $T_1$ , и равняется

$$\frac{\alpha E (T_1 - T_0)}{1 - \nu}.$$

Это напряжение одинаково с найденным ранее для цилиндра (см. стр. 405).

Применив формулы [f] и [g] к стальному шару и приняв  $b = 10$  см и  $T_1 - T_0 = 100^\circ \text{C}$ , найдем:

$$\sigma_r = \sigma_t = 1270 \text{ кг/см}^2 \quad \text{и} \quad t = 33,4 \text{ сек.}$$

*Шар с пустотой в центре.* Обозначив через  $a$  и  $b$  внутренний и наружный радиусы полого шара, определим постоянные интегрирования выражения [e] из тех условий, что напряжение  $\sigma_r$  равно нулю и на внутренней и на внешней поверхностях.

Тогда, по первому из выражений [e], имеем:

$$-\frac{2\alpha E}{(1-\nu)a^3} \int_0^a Tr^2 dr + \frac{C_1 E}{1-2\nu} - \frac{2C_2 E}{(1+\nu)a^3} = 0;$$

$$-\frac{2\alpha E}{(1-\nu)b^3} \int_0^b Tr^2 dr + \frac{C_1 E}{1-2\nu} - \frac{2C_2 E}{(1+\nu)b^3} = 0.$$

Решив эти уравнения относительно  $C_1$  и  $C_2$  и подставив их значения в выражения [e], найдем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{2\alpha E}{1-\nu} \left[ \frac{r^3 - a^3}{(b^3 - a^3)r^3} \int_a^b Tr^2 dr - \frac{1}{r^3} \int_a^r Tr^2 dr \right]; \\ \sigma_t &= \frac{2\alpha E}{1-\nu} \left[ \frac{2r^3 + a^3}{2(b^3 - a^3)r^3} \int_a^b Tr^2 dr + \frac{1}{2r^3} \int_a^r Tr^2 dr - \frac{1}{2} T \right]. \end{aligned} \right\} [246]$$

Таким образом, если известно распределение температуры, то составляющие напряжения можно определить по этим формулам.

Рассмотрим в качестве примера установившийся поток тепла. Обозначим температуру на внутренней поверхности через  $T_i$ , а температуру

<sup>1)</sup> При этом рассмотрении допущено, что поверхность шара сразу же принимает температуру  $T_1$  жидкости.

на внешней поверхности примем равной нулю. Тогда температура на каком-либо расстоянии  $r$  от центра будет равна:

$$T = \frac{\alpha T_i}{b-a} \left( \frac{b}{r} - 1 \right). \quad [h]$$

Подставив это значение в формулу [246], получим:

$$\sigma_r = \frac{\alpha E T_i}{1-\nu} \frac{ab}{b^3-a^3} \left[ a+b - \frac{1}{r} (b^2+ab+a^2) + \frac{a^2b^2}{r^3} \right];$$

$$\sigma_t = \frac{\alpha E T_i}{1-\nu} \frac{ab}{b^3-a^3} \left[ a+b - \frac{1}{2r} (b^2+ab+a^2) - \frac{a^2b^2}{2r^3} \right].$$

Мы видим, что напряжение  $\sigma_r$  равно нулю при  $r=a$  и  $r=b$ . Оно становится максимальным или минимальным, когда

$$r^2 = \frac{3a^2b^2}{a^2+ab+b^2}.$$

Напряжение  $\sigma_t$  при  $T_i$  большею нуля увеличивается с увеличением расстояния  $r$ . При  $r=a$  имеем:

$$\sigma_t = - \frac{\alpha E T_i}{2(1-\nu)} \frac{b(b-a)(a+2b)}{b^3-a^3}. \quad [k]$$

При  $r=b$  получим

$$\sigma_t = \frac{\alpha E T_i}{2(1-\nu)} \frac{a(b-a)(2a+b)}{b^3-a^3}. \quad [l]$$

При сферической оболочке малой толщины положим

$$b = (1+m)a,$$

где  $m$  — малая величина. Подставив это значение в формулы [k] и [l] и пренебрегая высшими степенями величины  $m$ , найдем: при  $r=a$

$$\sigma_t = - \frac{\alpha E T_i}{2(1-\nu)} \left( 1 + \frac{2m}{3} \right);$$

при  $r=b$

$$\sigma_t = \frac{\alpha E T_i}{2(1-\nu)} \left( 1 - \frac{2m}{3} \right).$$

Если пренебречь величиной

$$\frac{2m}{3},$$

то мы приходим к тем же значениям тангенциальных напряжений, какие мы получили выше для тонкой цилиндрической оболочки (см. формулы [243]) и для тонкой пластинки с закрепленными краями.

## ГЛАВА ДВЕНАДЦАТАЯ.

### РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН КОЛЕБАНИЙ В СПЛОШНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ.

**116. Общие замечания.** В предыдущих главах предполагалось вообще, что упругое тело находится в покое, под действием внешних сил, и в результате рассматривавшиеся задачи являлись задачами статики.

Однако встречаются случаи, при которых движение, возникающее в упругом теле от внезапно приложенных сил или под действием переменных сил, должно быть принято во внимание.

Действие внезапно-приложенной силы не передается мгновенно всем частицам тела. Вначале отдаленные части тела остаются ненапряженными, и деформации, возникающие под действием силы, распространяются по телу в виде упругих волн.

Если размеры тела велики, то промежуток времени, необходимый для того, чтобы волны прошли через тело, получается такой продолжительности, что он становится практически существенным и должен быть учтен. Такие задачи мы встретим, например, при исследовании действия удара или волн, возникающих при землетрясениях.

Исследование распространения волн в упругой среде и является предметом дальнейшего изложения<sup>1</sup>).

Мы начнем с простейшей задачи распространения продольных волн в длинном призматическом стержне.

**117. Продольные волны в призматических стержнях.** Приняв ось стержня за ось  $x$  (фиг. 191) и предположив, что поперечные сечения стержня остаются плоскими при деформации, найдем, что относительное удлинение от продольного перемещения  $u$  в любом поперечном сечении  $mn$  равно

$$\frac{du}{dx},$$

а соответствующее растягивающее усилие в стержне равно

$$EF \frac{du}{dx},$$

---

<sup>1</sup> Задачи установившихся колебаний упругих тел (установившиеся волны) были рассмотрены автором в Теории колебаний в инженерном деле, третье русское издание 1934 г. (*S. Timoshenko, Vibration Problems in Engineering, New York, 1928*).

где  $F$  — площадь поперечного сечения<sup>1)</sup>.

Рассмотрим элемент стержня между двумя смежными поперечными сечениями  $m$  и  $m_1$ . Разность усилий, действующих на грани  $m$  и  $m_1$  элемента, будет равна

$$EF \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \partial x \right) - EF \frac{\partial u}{\partial x} = EF \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \partial x,$$

и уравнение движения элемента представится в таком виде:

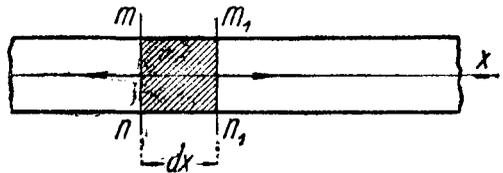
$$\rho F dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = EF \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \partial x,$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad [247]$$

где  $\rho$  — масса, приходящаяся на единицу объема тела, и

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad [248]$$



Фиг. 191.

Непосредственной подстановкой можно показать, что любая функция

$$f(x + ct)$$

является решением этого уравнения. Любая функция

$$f_1(x - ct)$$

будет также решением этого уравнения, а потому общее решение уравнения [247] можно представить в следующем виде:

$$u = f(x + ct) + f_1(x - ct). \quad [249]$$

Это решение имеет очень простой физический смысл, который легко пояснить следующим образом.

<sup>1)</sup> Предполагается, что у нас имеется здесь простое растяжение в направлении оси  $x$  и что удлинение

$$\frac{\partial u}{\partial x}$$

сопровождается поперечным сужением величиной

$$\nu \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Силами инерции, соответствующими движению частиц в поперечных направлениях, при нашем выводе мы пренебрегаем.

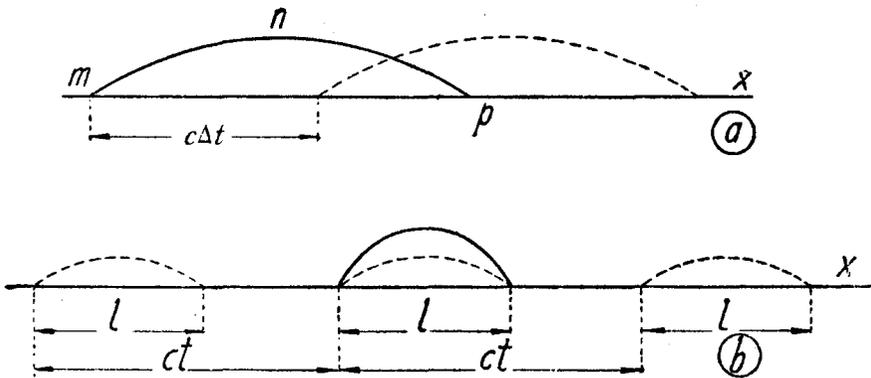
Это приближенное решение является достаточно точным до тех пор, пока длина волн не мала по сравнению с размерами поперечного сечения стержня. В случае коротких волн, следует принять во внимание движение частиц в направлении, перпендикулярном оси стержня. См. лорд Рэйлей (Lord Rayleigh), Theory of Sound, Chap. 7; Л. Похгаммер (L. Pochhammer), „Journ. Math. (Crelle's Journ.)“, Bd 81, 1876; К. Крү (C. Chree), „Quart. Journ. Math.“, vol. 21, 1886 and vol. 24, 1890.

Рассмотрим второй член правой стороны выражения [249]. Для определенного момента времени  $t$  этот член является функцией одной лишь абсциссы  $x$  и может быть представлен некоторой определенной кривой, например кривой  $mnp$  (фиг. 192а), вид которой зависит от функции  $f_1$ .

После истечения некоторого промежутка времени  $\Delta t$ , аргумент функции  $f_1$  становится равным

$$x - c(t + \Delta t).$$

Функция  $f_1$  останется без изменения, если только, одновременно с приращением времени  $t$  на  $\Delta t$ , абсциссы возрастут на величину  $\Delta x$ , равную  $c\Delta t$ .



Фиг. 192.

Это указывает, что кривая  $mnp$ , построенная для момента времени  $t$ , может быть также применена и для момента  $t + \Delta t$ , если только ее переместить в направлении оси  $x$  на расстояние

$$\Delta x = c\Delta t,$$

что и показано пунктиром на фиг. 192а.

Из этого рассуждения следует, что второй член решения [249] представляет собою волну, перемещающуюся в направлении оси  $x$  с постоянной скоростью  $c$ .

Таким же образом можно показать, что первый член решения [249] отвечает волне, распространяющейся в прямо противоположном направлении.

Итак, общее решение [249] представляет две волны, распространяющиеся вдоль оси  $x$  по двум противоположным направлениям с постоянной скоростью  $c$ , отвечающей формуле [248].

Эта скорость зависит только от модуля упругости  $E$  и от плотности  $\rho$  материала стержня.

Для стали, например, мы можем принять  $c = 5120$  м/сек.

Функции  $f$  и  $f_1$  следует определять в каждом частном случае из на-

чальных условий для момента  $t = 0$ . Для этого момента по выражению [249] имеем:

$$\left. \begin{aligned} (u)_{t=0} &= f(x) + f_1(x); \\ \left(\frac{du}{dt}\right)_{t=0} &= c[f'(x) - f_1'(x)] \end{aligned} \right\} [a]$$

Предположим, например, что начальная скорость вдоль стержня равна нулю. В этом случае начальное перемещение представится выражением:

$$(u)_{t=0} = F(x).$$

Условия [a] будут удовлетворены, если принять:

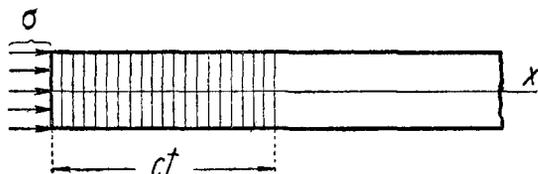
$$f(x) = f_1(x) = \frac{1}{2} F(x).$$

Итак, в этом случае начальное перемещение может быть разбито на две половины, которые будут распространяться в виде волн по двум прямо противоположным направлениям (фиг. 192b).

Скорость распространения волн в призматических стержнях может быть получена на основании элементарных соображений.

Допустим, что внезапно приложено к левому концу призматического стержня равномерно распределенное сжимающее напряжение (фиг. 193).

Оно вызовет в первый момент равномерное сжатие бесконечно тонкого слоя у конца стержня. Это сжатие передастся смежному слою, и так далее.



Фиг. 193.

Волна сжатия начнет распространяться вдоль

стержня с определенной скоростью  $c$  и, по истечении промежутка времени  $t$ , будет сжата часть стержня длиной  $ct$ , а остающаяся часть будет находиться в покое, в ненапряженном состоянии.

Скорость  $c$  распространения волны следует отличать от скорости  $V$ , которую сообщают частицам в сжатой зоне стержня сжимающие усилия. Скорость частиц  $V$  найдем, приняв во внимание то обстоятельство, что сжатая зона (заштрихованная на чертеже) укорачивается, вследствие сжимающего напряжения  $\sigma$ , на величину:

$$\frac{\sigma}{E} ct.$$

Следовательно, скорость левой части стержня, равная скорости частиц сжатой зоны, будет:

$$V = \frac{c\sigma}{E}. \quad [b]$$

Скорость  $c$  распространения волны можно найти из уравнения количества движения. Вначале заштрихованная часть стержня находится

в покое. По истечении промежутка времени  $t$ , она приобретает скорость  $V$ , и количество движения ее будет равно

$$\rho FctV.$$

Приравняв его импульсу сжимающей силы, получим:

$$\sigma Ft = \rho FctV, \quad [c]$$

На основании выражения  $[b]$ , найдем для  $c$  значение, отвечающее выражению  $[248]$  <sup>1)</sup>, а для скорости частиц получим выражение:

$$V = \frac{\sigma}{\sqrt{E\rho}}. \quad [250]$$

Отсюда следует, что в то время, как скорость распространения волны не зависит от сжимающей силы, скорость  $V$  частиц пропорциональна напряжению  $\sigma$ .

Если, вместо сжатия, внезапно приложена к концу стержня растягивающая сила, то растяжение распространяется по длине стержня со скоростью  $c$ . Скорость частиц выразится снова формулой  $[250]$ . Но направление этой скорости будет прямо противоположным направлению оси  $x$ .

Итак, при волне сжатия, скорость  $V$  частиц имеет то же направление, что и скорость  $c$  распространения волны, а при волне растяжения скорость  $V$  частиц имеет направление, прямо противоположное направлению распространения волны.

На основании выражений  $[248]$  и  $[250]$  имеем:

$$c = E \frac{V}{\sigma}. \quad [251]$$

Таким образом, напряжение в волне определяется величиной отношения между обеими скоростями и величиной модуля упругости  $E$  материала.

Если абсолютно твердое тело, движущееся со скоростью  $V$ , ударит вдоль призматического стержня, то сжимающее напряжение на поверхности касания в первый момент представится выражением  $[251]$  <sup>2)</sup>.

Если скорость  $V$  тела окажется превышающей некоторый определенный предел, зависящий от механических свойств материала стержня, то в нем появятся остаточные деформации, даже если масса ударяющего тела и будет очень мала <sup>3)</sup>.

Рассмотрим теперь энергию волны, заштрихованной на фиг. 193. Эта энергия состоит из двух частей: из потенциальной энергии деформации, равной

$$\frac{Fct\sigma^2}{2E},$$

<sup>1)</sup> Этот элементарный вывод формулы скорости распространения волн дан *Бабине (Babinet)*; см. *Клебш (Clebsch)*, *Théorie de l'élasticité des corps solides*, перевод *Сен-Венана (Saint-Venant)*, 1883, p. 480d.

<sup>2)</sup> Это заключение принадлежит *Томасу Юнгу (Thomas Young)*; см. его *Course of Lectures on Natural Philosophy ...*, vol. 1. 1807, pp. 135 and 144.

<sup>3)</sup> Предполагается, что касание происходит одновременно по всем точкам концевое сечения стержня.

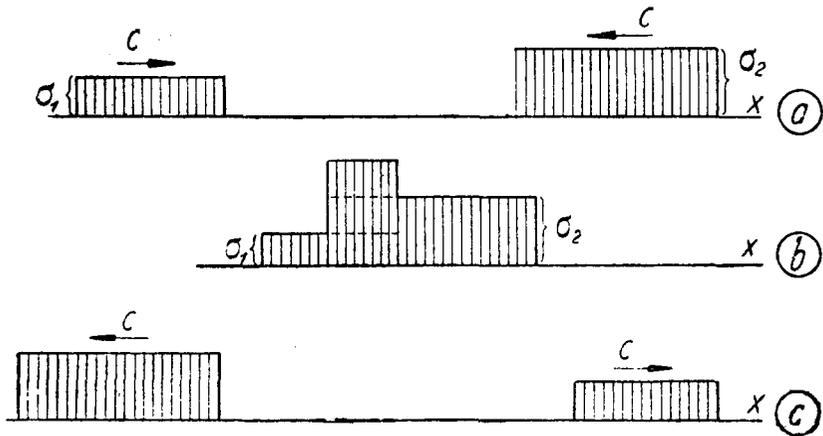
и кинетической энергии, равной

$$\frac{\rho FctV^2}{2} = \frac{Fct\sigma^2}{2E}.$$

Отсюда следует, что полная энергия волны, равная работе, совершаемой сжимающей силой  $F\sigma$  на расстоянии

$$\frac{\sigma}{E} ct,$$

состоит из двух равных половин: потенциальной и кинетической энергии.



Фиг. 194.

Уравнение [247], выражающее закон распространения волн, является линейным уравнением, так что, если мы найдем два решения этого уравнения, то их сумма также является его решением. Из этого следует, что при рассмотрении распространения волн по стержню, мы можем пользоваться принципом сложения действия сил.

Если две волны, распространяющиеся по прямо противоположным направлениям (фиг. 194а), сходятся вместе, то равнодействующее напряжение и равнодействующая скорость частиц получатся путем наложения.

Если обе волны являются, например, волнами сжатия, то равнодействующее сжатие получится простым сложением, как показано на фиг. 194b, а равнодействующая скорость частиц — путем вычитания. После скрещения друг с другом, волны возвращаются к своему первоначальному виду, как показано на фиг. 194c.

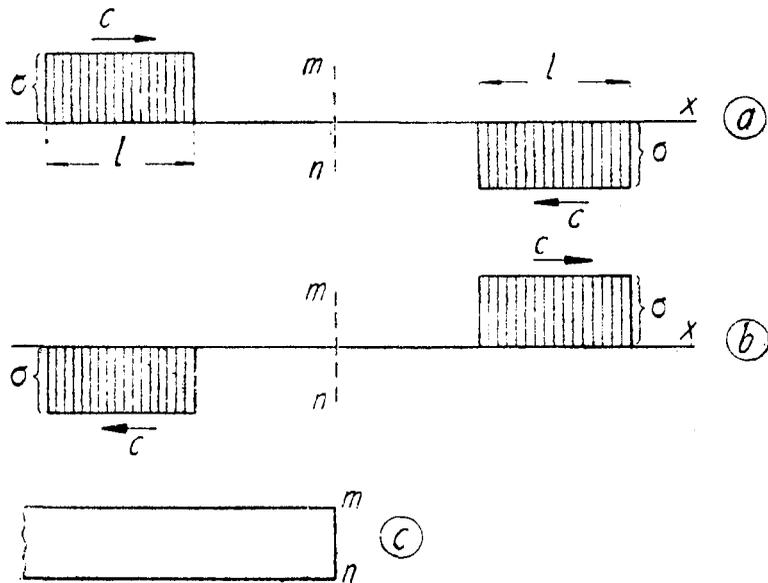
Предположим, что вдоль стержня, в направлении оси  $x$ , движется волна сжатия, а в прямо противоположном направлении перемещается волна растяжения той же длины и с той же величиной напряжения (фиг. 195а).

Когда волны встретятся друг с другом, то растяжение и сжатие взаимно уничтожатся, и в той части стержня, где обе волны будут на-

ложены друг на друга, напряжение будет равно нулю. В то же время скорость частиц в этой части стержня удвоится и будет равна  $2V$ . После скрещения волны вернутся к их первоначальному виду, как показано на фиг. 195*b*.

В среднем поперечном сечении  $mn$  в этом случае все время напряжения будут равны нулю, и мы можем его рассматривать как *свободный конец* стержня (фиг. 195*c*).

Сравнивая фигуры 195*a* и 195*b*, придем к заключению, что в свободном конце стержня волна сжатия отражается в виде такой же волны растяжения, и наоборот.



Фиг. 195.

Если две тождественных волны, двигающиеся навстречу друг другу (фиг. 196*a*), встречаются, то в этом месте напряжение удваивается, а скорость части стержня, где волны накладываются друг на друга, обращается в нуль.

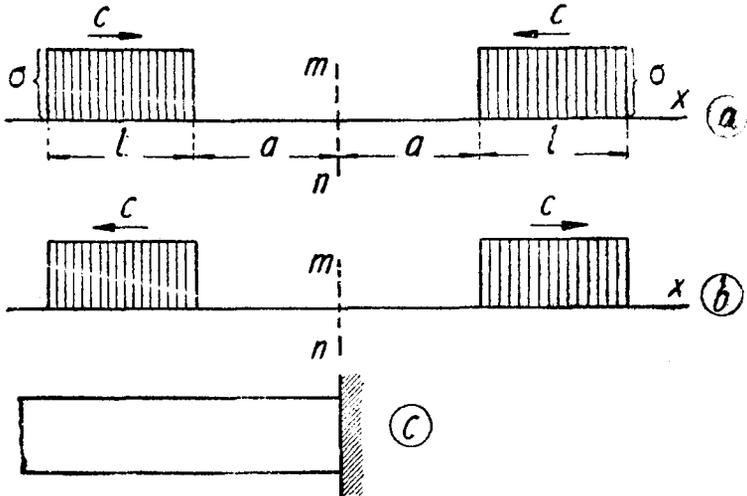
В среднем поперечном сечении  $mn$  мы таким образом всегда имеем скорость, равную нулю. Это сечение остается неподвижным при проходе волн, и мы можем рассматривать его как *заделанный конец стержня* (фиг. 196*c*).

Тогда из сопоставления фигур 196*a* и 196*b* можно сделать заключение, что волна отражается от заделанного конца без каких бы то ни было изменений.

До сих пор мы рассматривали волны, возникающие под действием постоянных сил. Напряжение  $\sigma$  и скорость частиц  $V$  оставались постоянными по длине волны.

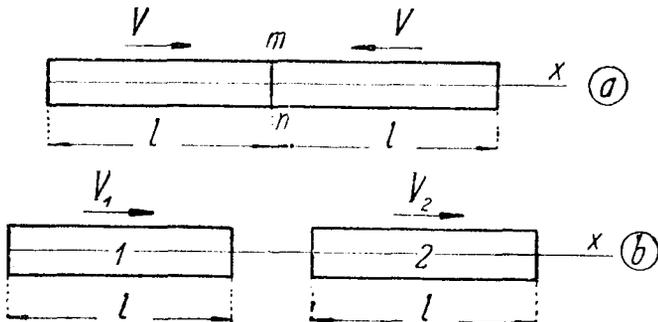
В случае переменной силы, возникает волна, при которой и напря-

жение  $c$  и скорость  $V$  меняются по ее длине. Заключение, полученные нами выше относительно распространения, наложения друг на друга и отражения волн, можно применить также и к этому, более общему, случаю.



Фиг. 196.

118. Продольный удар стержней. Если два одинаковых стержня одного и того же материала ударяют одно вдоль другого с одинаковой скоростью  $V$  (фиг. 197а), то плоскость касания не будет двигаться при



Фиг. 197.

ударе <sup>1)</sup>, и две тождественных волны сжатия начнут распространяться вдоль обоих стержней с одинаковыми скоростями  $c$ .

Скорости частиц при этих волнах, наложенные на начальную скорость

<sup>1)</sup> Предполагается, что касание происходит в один и тот же момент по всей поверхности концов стержней.

стержней, дают зоны волн, находящиеся в покое, и в тот момент, когда волны достигают свободных концов стержней, при

$$t = \frac{l}{c},$$

оба стержня будут равномерно сжаты и будут находиться в покое.

Далее, волны сжатия отразятся от свободных концов в виде волн растяжения, которые будут распространяться в обратном направлении — к поперечному сечению касания стержней  $mn$ . При этих волнах скорости частиц, равные  $V$ , будут теперь иметь направление от сечения  $mn$ , и когда волны достигнут плоскости касания, то стержни отделятся друг от друга со скоростью, равной их первоначальной скорости  $V$ .

Продолжительность удара в этом случае очевидно равна

$$\frac{2l}{c},$$

а сжимающее напряжение, на основании выражения [250], будет равно

$$V\sqrt{\rho E}.$$

Рассмотрим теперь более общий случай, когда стержни 1 и 2 (фиг. 197b) двигаются<sup>1)</sup> с разными скоростями  $V_1$  и  $V_2$  ( $V_1 > V_2$ ).

В момент удара начнут распространяться вдоль обоих стержней две тождественных волны сжатия.

Соответствующие скорости частиц, относительно ненапряженных частей движущихся стержней, равны друг другу и направлены в каждом стержне от поверхности касания. Величина этих скоростей должна быть равна

$$\frac{V_1 - V_2}{2},$$

чтобы по поверхности касания абсолютные скорости частиц обоих стержней получились одинаковыми.

По истечении промежутка времени, равного

$$\frac{l}{c},$$

волны сжатия доходят до свободных концов стержней. Оба стержня в этот момент находятся в состоянии равномерного сжатия, и абсолютные скорости всех частиц стержней будут равны

$$V_1 - \frac{V_1 - V_2}{2} = V_2 + \frac{V_1 - V_2}{2} = \frac{V_1 + V_2}{2}.$$

Волны сжатия отразятся затем от свободных концов в виде волн растяжения, и в момент

$$t = \frac{2l}{c},$$

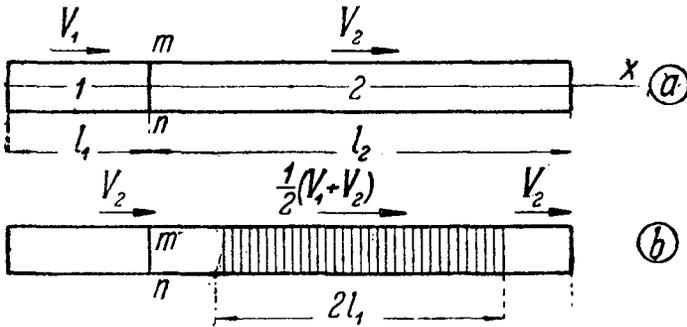
<sup>1)</sup> Скорости считаются положительными, если они имеют направление оси  $x$ .

когда эти волны дойдут до поверхности касания обеих стержней, скорости стержней 1 и 2 станут равными соответственно:

$$\frac{V_1 + V_2}{2} - \frac{V_1 - V_2}{2} = V_2;$$

$$\frac{V_1 + V_2}{2} + \frac{V_1 - V_2}{2} = V_1.$$

Таким образом, стержни, при ударе, меняются своими скоростями.



Фиг. 198.

Если рассматриваемые стержни — разной длины  $l_1$  и  $l_2$  (фиг. 198a), то условия удара будут сначала теми же, что и в предыдущем случае. Но, по истечении промежутка времени

$$\frac{2l_1}{c},$$

когда отраженная волна более короткого стержня 1 дойдет до поверхности касания  $mn$ , она распространится через поверхность касания по более длинному стержню, и условия будут такими, как показано на фиг. 198b.

Волна растяжения стержня  $l_1$  уничтожает давление между стержнями, но последние остаются в соприкосновении до тех пор, пока волна сжатия в более длинном стержне  $l_2$  (заштрихованная на чертеже) не вернется после отражения к поверхности касания в момент времени, равный

$$t = \frac{2l_2}{c}.$$

При двух стержнях равной длины, каждый из них, после отталкивания их друг от друга, будет иметь одинаковую скорость во всех точках и будет двигаться как твердое тело. Полная энергия его будет энергией поступательного движения.

При стержнях разной длины, более длинный стержень, после отталкивания, будет иметь волну, распространяющуюся в нем, и при опре-

делении полной энергии стержня должна быть учтена энергия этой волны <sup>1)</sup>.

Рассмотрим теперь более сложную задачу стержня с заделанным концом, ударяемого движущейся массой по другому концу (фиг. 199) <sup>2)</sup>.

Пусть  $M$  — масса движущегося тела, отнесенная к единице площади поперечного сечения стержня, и пусть  $V_0$  — начальная скорость этого тела. Рассматривая тело абсолютно твердым, получим, что скорость частиц конца стержня

в момент удара ( $t=0$ ) равна  $V_0$ , и начальное сжимающее напряжение, согласно формуле [250], равно

$$\sigma_0 = V_0 \sqrt{\rho E}. \quad [a]$$

Вследствие противодействия стержня, скорость движущегося тела, а следовательно и давление на стержень, постепенно уменьшается, и мы получим волну сжатия с уменьшающимися сжимающими напряжениями, распространяющуюся по длине стержня (фиг. 199b).

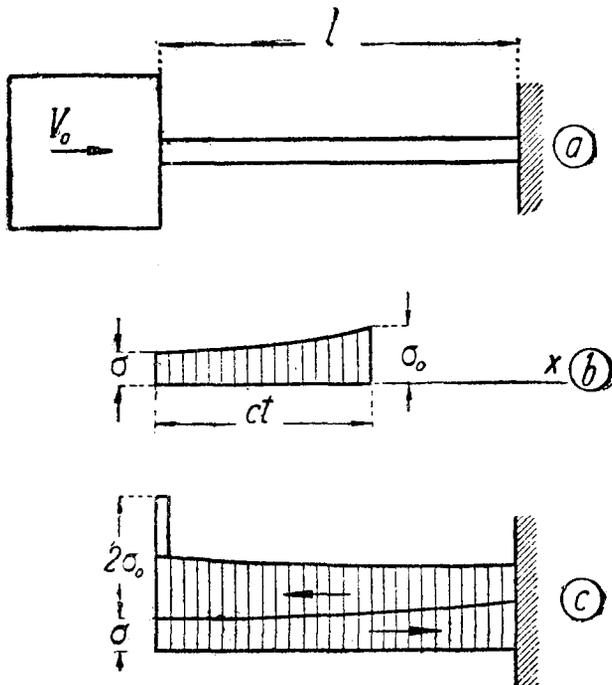
Изменение сжатия с течением времени можно легко найти из уравнения движения тела. Обозначив через  $\sigma$  переменное сжимающее

напряжение на конце стержня и через  $V$  — переменную скорость тела, найдем

$$M \frac{dV}{dt} + \sigma = 0, \quad [b]$$

<sup>1)</sup> Вопрос о потерях кинетической энергии поступательного движения при продольном ударе стержней был рассмотрен Коши (Cauchy), Пуассоном (Poisson) и, наконец, Сен-Венаном (Saint-Venant); см. „Compt. rend.“, 1866, p. 1108, и „Journ. mathemat. (Liouville)“, 1867, pp. 257 et 376.

<sup>2)</sup> Эта задача рассмотрена несколькими авторами. Окончательное решение дано Я. Буссинеском (J. Boussinesq), „Compt. rend.“, 1883, p. 154. Историю этого вопроса можно найти в книге Клебша (Clebch), Théorie de l'élasticité des corps solides, переведенной Сен-Венаном (Saint-Venant), см. примечание к параграфу 60. В последнее время задача была рассмотрена Л. Доннелем (L. Donnell). Пользуясь законами распространения волн, он упростил решение и распространил его на случай конического стержня; см. „Trans. Am. Soc. Mech. Eng.“, Applied Mechanics Division, 1930.



Фиг. 199.

или, подставив вместо скорости  $V$  ее выражение по формуле [250] имеем

$$\frac{M}{\sqrt{\rho E}} \frac{d\sigma}{dt} + \sigma = 0,$$

откуда

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{t\sqrt{\rho E}}{M}}.$$

Этим выражением можно пользоваться до тех пор, пока

$$t < \frac{2l}{c}.$$

При

$$t = \frac{2l}{c}$$

волна сжатия с давлением  $\sigma_0$  впереди возвращается к концу стержня который находится в соприкосновении с движущимся телом.

Скорость тела не может измениться внезапно, а поэтому волна отразится как от закрепленного конца, и сжимающее напряжение по поверхности касания внезапно возрастет до  $2\sigma_0$ , как показано на фиг. 199с.

Такое внезапное увеличение давления имеет место при ударе в конце каждого промежутка времени

$$T = \frac{2l}{c},$$

и мы должны получить отдельное для каждого из этих промежутков выражение для напряжения.

Для первого промежутка  $0 < t < T$  мы воспользуемся выражением [с]. Для второго промежутка  $T < t < 2T$  мы получаем условия, представленные на фиг. 199с, и сжимающее напряжение  $\sigma$  вызывается двумя волнами, движущимися от ударяемого конца, и одной волной, направляющейся к этому концу.

Обозначим через  $s_1(t)$ ,  $s_2(t)$ ,  $s_3(t)$ , ... полное сжимающее напряжение, возникающее в ударяемом конце от всех волн, движущихся от этого конца, по истечении промежутков времени  $T$ ,  $2T$ ,  $3T$ , ..., соответственно.

Волны, возвращающиеся к ударяемому концу, являются волнами, возникшими лишь в течение предыдущего промежутка времени и отстающими на промежуток времени  $T$  вследствие прохода ими вдоль стержня и обратно. Следовательно, сжатие, возникающее от этих волн в ударяемом конце, получится помощью подстановки  $t - T$  вместо  $t$  в выражение для сжатия от волн, возникших в предшествующий промежуток времени.

Общее выражение для полного сжимающего напряжения для любого промежутка времени  $nT < t < (n+1)T$  поэтому представится в следующем виде:

$$\sigma = s_n(t) + s_{n-1}(t - T). \quad [d]$$

Скорость частиц в ударяемом конце получится как разность между скоростью от давления  $s_n(t)$  волн, направленных от конца, и скоростью от давления  $s_{n-1}(t-T)$  от волн, направляющихся к концу стержня. Тогда, на основании формулы [250], имеем:

$$V = \frac{1}{\sqrt{\rho E}} [s_n(t) - s_{n-1}(t-T)]. \quad [e]$$

Зависимость между  $s_n(t)$  и  $s_{n-1}(t-T)$  получим, воспользовавшись уравнением движения [b] ударяющего тела. Обозначив через  $\alpha$  отношение массы стержня к массе ударяющего тела, имеем:

$$\alpha = \frac{\rho l}{M}; \quad \frac{\sqrt{\rho E}}{M} = \frac{\rho l c}{Ml} = \frac{2\alpha}{T} \quad [f]$$

При помощи этих значений, а также выражений [d] и [e], уравнение [b] получим в следующем виде:

$$\frac{d}{dt} [s_n(t) - s_{n-1}(t-T)] + \frac{2\alpha}{T} [s_n(t) - s_{n-1}(t-T)] = 0.$$

Умножая на

$$e^{\frac{2\alpha t}{T}},$$

найдем

$$\begin{aligned} e^{\frac{2\alpha t}{T}} \cdot \frac{ds_n(t)}{dt} + \frac{2\alpha}{T} e^{\frac{2\alpha t}{T}} \cdot s_n(t) &= e^{\frac{2\alpha t}{T}} \cdot \frac{ds_{n-1}(t-T)}{dt} + \\ + \frac{2\alpha}{T} e^{\frac{2\alpha t}{T}} \cdot s_{n-1}(t-T) - \frac{4\alpha}{T} e^{\frac{2\alpha t}{T}} \cdot s_{n-1}(t-T), \end{aligned}$$

или

$$\frac{d}{dt} \left[ e^{\frac{2\alpha t}{T}} s_n(t) \right] = \frac{d}{dt} \left[ e^{\frac{2\alpha t}{T}} s_{n-1}(t-T) \right] - \frac{4\alpha}{T} e^{\frac{2\alpha t}{T}} s_{n-1}(t-T),$$

откуда

$$s_n(t) = s_{n-1}(t-T) - \frac{4\alpha}{T} e^{-\frac{2\alpha t}{T}} \left[ \int e^{\frac{2\alpha t}{T}} s_{n-1}(t-T) dt + C \right], \quad [g]$$

где  $C$  — произвольная постоянная интегрирования.

Этим уравнением и воспользуемся теперь для вывода выражений последовательных значений  $s_1, s_2, s_3, \dots$ .

В течение первого промежутка  $0 < t < T$  сжимающее напряжение представится выражением [c], и мы можем принять:

$$s_0 = \sigma_0 e^{-\frac{2\alpha t}{T}}. \quad [h]$$

Подставив это значение вместо  $s_{n-1}$  в формулу [g], получим:

$$s_1(t) = \sigma_0 e^{-2\alpha\left(\frac{t}{T}-1\right)} - \frac{4\alpha}{T} e^{-\frac{2\alpha t}{T}} \left[ \int \sigma_0 e^{2\alpha} dt + C \right] = \\ = \sigma_0 e^{-2\alpha\left(\frac{t}{T}-1\right)} \left( 1 - \frac{4\alpha}{T} \right) - C \frac{4\alpha}{T} e^{-\frac{2\alpha t}{T}} \quad [k]$$

Постоянная интегрирования  $C$  найдется из того условия, что в момент  $t = T$  сжимающее напряжение в ударяемом конце внезапно увеличивается до  $2\sigma_0$  (фиг. 199c). Следовательно, на основании выражения [d], имеем:

$$\left[ \sigma_0 e^{-\frac{2\alpha t}{T}} \right]_{t=T} + 2\sigma_0 = \\ = \left[ \sigma_0 e^{-2\alpha\left(\frac{t}{T}-1\right)} + \sigma_0 e^{-2\alpha\left(\frac{t}{T}-1\right)} \left( 1 - \frac{4\alpha}{T} \right) - C \frac{4\alpha}{T} e^{-\frac{2\alpha t}{T}} \right]_{t=T},$$

откуда

$$C = -\frac{\sigma_0 T}{4\alpha} (1 + 4\alpha e^{2\alpha}).$$

Подставив найденное значение произвольной постоянной в выражение [k], получим:

$$s_1 = s_0 + \sigma_0 e^{-2\alpha\left(\frac{t}{T}-1\right)} \left[ 1 + 4\alpha \left( 1 - \frac{t}{T} \right) \right]. \quad [l]$$

Поступая и дальше таким же образом и подставив  $s_1$  вместо  $s_{n-1}$  в выражение [g], найдем:

$$s_2 = s_1 + \sigma_0 e^{-2\alpha\left(\frac{t}{T}-1\right)} \left[ 1 + 2 \cdot 4\alpha \left( 2 - \frac{t}{T} \right) + 2 \cdot 4\alpha^2 \left( 2 - \frac{t}{T} \right)^2 \right]. [m]$$

Продолжая, таким же образом получим:

$$s_3 = s_2 + \sigma_0 e^{-2\alpha\left(\frac{t}{T}-1\right)} \left[ 1 + 3 \cdot 4\alpha \left( 3 - \frac{t}{T} \right) + \right. \\ \left. + 2 \cdot 3 \cdot 4\alpha^2 \left( 3 - \frac{t}{T} \right)^2 + \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 3} 8\alpha^3 \left( 3 - \frac{t}{T} \right)^3 \right]. \quad [n]$$

и так далее.

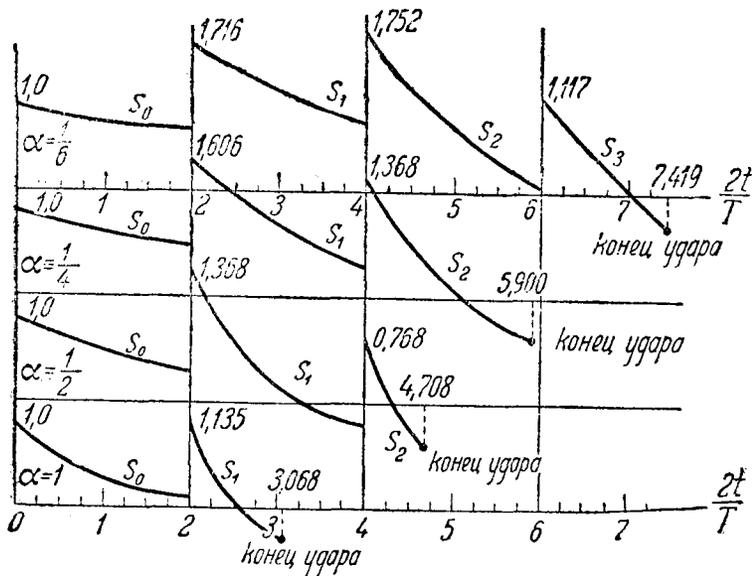
На фиг. 200 функции  $s_0, s_1, s_2, \dots$  представлены графически при  $\sigma_0 = 1$ , и для четырех различных величин отношения  $\alpha^1$ :

$$\frac{1}{6}; \quad \frac{1}{4}; \quad \frac{1}{2}; \quad 1.$$

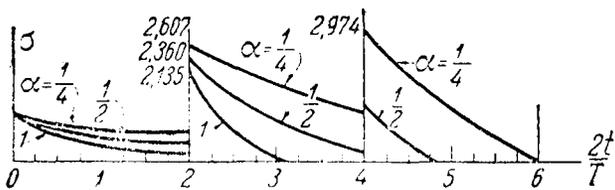
<sup>1)</sup> Эти кривые получены Сен-Венаном и Фламаном (Saint-Venant et Flamant). см. „Compt. rend.“, 1883, pp. 127, 214, 281 et 353.

Пользуясь этими кривыми, без затруднений можно найти по формуле [d] сжимающее напряжение  $\sigma$  в ударяемом конце. На фиг. 201 это напряжение представлено графически при  $\sigma_0 = 1$  и для

$$\alpha = \frac{1}{4}; \quad \frac{1}{2}; \quad 1.$$



Фиг. 200.



Фиг. 201.

Оно меняется в конце промежутков времени  $T, 2T, \dots$  скачками. Наибольшая величина этого напряжения зависит от отношения  $\alpha$ . При  $\alpha = 0,5$  и  $\alpha = 1$  напряжение достигает наибольшего значения при  $t = T$ . В случае  $\alpha = 0,25$ , наибольшее напряжение имеет место при  $t = 2T$ .

Момент, когда напряжение  $\sigma$  обращается в нуль, указывает на окончание удара.

Из диаграммы фиг. 201 видим, что продолжительность удара увеличивается с уменьшением отношения  $\alpha$ .

Подсчеты Сен-Венана дают для продолжительности удара значения, приведенные в таблице 14.

ТАБЛИЦА 14.  
Продолжительность удара.

$\alpha$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{2t}{T}$	7,419	5,900	4,708	3,068

При очень малой величине отношения  $\alpha$  продолжительность касания можно определить по элементарной формуле:

$$t = \frac{\pi l}{c} \sqrt{\frac{1}{\alpha}}, \quad [p]$$

которая получается, если совершенно пренебречь массой стержня и предположить, что продолжительность удара равна половине периода простого гармонического колебания тела, укрепленного на стержне.

Функции  $s_1, s_2, s_3, \dots$ , найденные выше, можно применить также для определения напряжений и в любых других поперечных сечениях стержня.

Полная величина напряжения всегда равна сумме двух значений функции  $s$  (выражение  $[d]$ ): одно значение — от равнодействующей волны, движущейся к закрепленному концу, и другое значение — от равнодействующей волны противоположного направления.

Когда к закрепленному концу доходит и здесь отражается часть волны, отвечающая наибольшей величине функции  $s$  (т. е. наивысшей точке одной из кривых на фиг. 200), то обе упомянутые выше волны достигают своей максимальной величины: полное сжимающее напряжение в этой точке и в этот момент является наибольшим, какое может иметь место при ударе.

Отсюда мы видим, что наибольшее напряжение при ударе получается в закрепленном конце и равно удвоенному максимальному значению функции  $s$ .

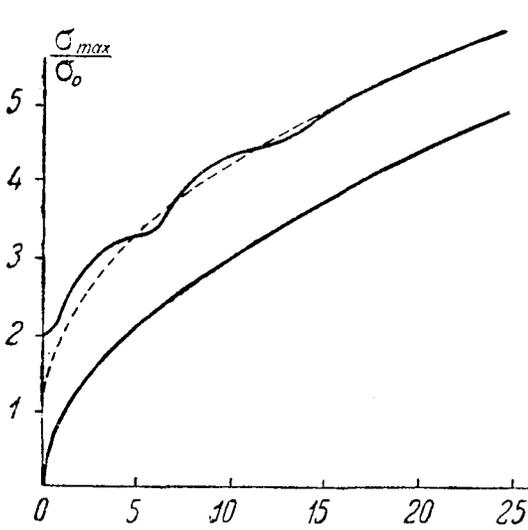
Из диаграммы фиг. 200 можно вывести непосредственно заключение, что, при

$$\alpha = \frac{1}{6}; \quad \frac{1}{4}; \quad \frac{1}{2}; \quad 1,$$

наибольшие сжимающие напряжения будут равны соответственно:

$$2 \cdot 1,752\sigma_0; \quad 2 \cdot 1,606\sigma_0; \quad 2 \cdot 1,368\sigma_0; \quad 2 \cdot 1,135\sigma_0.$$

На фиг. 202 показаны величины отношения  $\sigma_{max} : \sigma_0$  при различных значениях отношения <sup>1)</sup>



Фиг. 202.

$$\alpha = \frac{\rho l}{M}.$$

Для сравнения на этом чертеже нанесена кроме того нижняя параболическая кривая, отвечающая уравнению:

$$\sigma = \sigma_0 \sqrt{\frac{M}{\rho l}} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{\alpha}}, \quad [q]$$

которое можно непосредственно получить элементарным путем, если полностью пренебречь массой стержня и приравнять потенциальную энергию деформации стержня кинетической энергии ударяющего тела.

Пунктиром показана параболическая кривая <sup>2)</sup>, отвечающая уравнению:

$$\sigma = \sigma_0 \left( \sqrt{\frac{M}{\rho l}} + 1 \right). \quad [r]$$

Из диаграммы фиг. 202 следует, что, при больших значениях

$$\frac{1}{\alpha},$$

эта последняя формула дает очень хорошее приближение.

Изложенная выше теория удара основана на предположении, что в один и тот же момент касание происходит по всей поверхности конца стержня. Это условие трудно выполнимо на практике, и опыты не дают достаточно удовлетворительного совпадения с результатами теории <sup>3)</sup>.

Значительно лучшее согласование с теорией получается, если вместо стержней взять винтовые пружины <sup>4)</sup>.

<sup>1)</sup> См. статью Сен-Венана и Фламана (Saint-Venant et Flamant), упомянутую выше, в выноске на стр. 429.

<sup>2)</sup> Эта кривая предложена Буссинеском (J. Boussinesq), см. „Compt. rend.“, 1883, p. 154.

<sup>3)</sup> См. В. Фойгт (W. Voigt), „Ann. Physik“, Bd 19, 1883, S. 44, и Bd 46, 1915, S. 657. Полный обзор литературы по удару см. в статье Т. Пёшля (T. Pöschl) в Handbuch der Physik, Bd 6, Berlin, 1928, S. 525.

<sup>4)</sup> Такие опыты были выполнены К. Рамзауером (C. Ramsauer), „Ann. Physik“, Bd 30, 1909, S. 416.

В этом случае скорость распространения продольных волн мала, и промежуток времени  $T$ , необходимый для того, чтобы волна прошла по стержню и обратно, велик по сравнению с промежутком времени, требующимся для того, чтобы малые неровности концевых сечений стержня успели выровняться.

Другим путем получения опытных данных в определенных условиях является применение стержней с полусферическими концами при учете местных деформаций, что можно выполнить по формулам Герца<sup>1)</sup> (см. стр. 372).

**119. Волны расширения и волны искажения в изотропной упругой среде.** При рассмотрении распространения волн в упругой среде представляется выгодным пользоваться дифференциальными уравнениями, выраженными в зависимости от перемещений (уравнения [120], стр. 226).

Чтобы получить уравнения движения из этих уравнений равновесия необходимо лишь прибавить к ним силы инерции. Тогда, предположив отсутствие объемных сил, получим уравнения движения в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + G) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + G \nabla^2 u - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0; \\ (\lambda + G) \frac{\partial \Delta}{\partial y} + G \nabla^2 v - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0; \\ (\lambda + G) \frac{\partial \Delta}{\partial z} + G \nabla^2 w - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad [252]$$

где  $\Delta$  — относительное объемное расширение, а символ  $\nabla^2$  представляет сокращенное обозначение операции:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Предположим сперва, что деформация, возникающая под действием волн, такова, что относительное объемное расширение равно нулю, и деформация состоит лишь из искажения от сдвига и поворота. Тогда уравнения [252] получат следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} G \nabla^2 u - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0; \\ G \nabla^2 v - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0; \\ G \nabla^2 w - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad [253]$$

<sup>1)</sup> Такое исследование произведено Дж. Сирсом (J. E. Sears), „Trans. Cambridge Phil. Soc.“, vol. 21, 1908, p. 49. См. также Дж. Вегстефф (J. E. P. Wagstaff), „Proc. Roy. Soc., London“, A, vol. 103, 1924, p. 544.

Эти уравнения являются уравнениями волн, называемых *волнами искажения*.

Рассмотрим теперь случай, когда деформация, возникающая от волн, не сопровождается поворотом. При рассмотрении плоских задач мы нашли (см. стр. 183) для поворота элемента относительно оси  $z$  выражение:

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad [a]$$

Подобные же выражения можно получить для поворота относительно оси  $x$  и  $y$ . Условия, что деформация не сопровождается поворотом, можно, следовательно, представить в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad [b]$$

Эти уравнения будут удовлетворены, если перемещения  $u$ ,  $v$  и  $w$  будут выражены в зависимости от одной функции  $\varphi$  следующим образом:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad [c]$$

Тогда

$$\Delta = \nabla^2 \varphi; \quad \frac{\partial \Delta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \varphi = \nabla^2 u.$$

Подставив эти значения в уравнения [252], найдем, что:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + 2G) \nabla^2 u - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0; \\ (\lambda + 2G) \nabla^2 v - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0; \\ (\lambda + 2G) \nabla^2 w - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad [254]$$

Эти уравнения являются уравнениями *волн расширения*, или, иначе, *волн, не сопровождающихся поворотом*.

Более общий случай распространения волн в упругой среде получится наложением волн искажения на волны расширения. Для обоих видов волн уравнения движения имеют общий вид:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 \psi, \quad [255]$$

где:

$$a = c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}} \quad [256]$$

для волн расширения, и

$$a = c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad [257]$$

для волн искажения. Покажем теперь, что  $c_1$  и  $c_2$  являются соответственно скоростями распространения волн расширения и волн искажения.

**120. Плоские волны.** Если в какой-либо точке упругой среды возникнет возмущение, то волны расходятся от этой точки по всем направлениям. Однако, на значительном расстоянии от центра возмущения такие волны можно рассматривать *плоскими волнами*, и можно предположить, что все частицы движутся параллельно направлению распространения волны (продольные волны) или перпендикулярно этому направлению (поперечные волны). В первом случае мы имеем *волны расширения*, а во втором — *волны искажения*.

Если за направление оси  $x$  принять направление распространения волн, то тогда, рассматривая *продольные волны*, получим  $v = w = 0$  и перемещение  $u$  выразится функцией одного лишь  $x$ . Уравнения [254] дают в этом случае:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad [a]$$

Это — то же уравнение, что мы получили выше, при рассмотрении продольных волн в призматических стержнях (см. уравнение [247] стр. 417), за исключением того, что величина

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

заменяется величиной

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}}.$$

Подставив вместо  $\lambda$  и  $G$  их выражения в зависимости от модуля упругости  $E$  и Пуассонова отношения  $\nu$  (см. стр. 22 и 23), величину  $c_1$  можем представить в следующем виде:

$$c_1 = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho}}. \quad [258]$$

Мы видим, что  $c_1$  больше, чем  $c$ . Этот результат является следствием того, что боковое перемещение в этом случае невозможно, тогда как в случае стержня было предположено, что продольная деформация сопровождается боковым сужением или расширением.

Отношение  $c_1 : c$  зависит от величины Пуассонова отношения. При  $\nu = 0,25$ ,  $c_1 : c = 1,095$ ; при  $\nu = 0,30$ ,  $c_1 : c = 1,16$ .

Все полученные ранее заключения относительно распространения и

наложения друг на друга продольных волн можно применить также и к этому случаю.

Рассмотрим теперь *поперечные волны*. Предположив, что направление оси  $x$  является направлением распространения волн, а направление оси  $y$  — направлением поперечного перемещения, найдем, что перемещения  $u$  и  $w$  равны нулю, а перемещение  $v$  является функцией от абсциссы  $x$  и от времени  $t$ . Тогда, на основании уравнений [253] имеем:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c_2^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad [b]$$

Снова мы получили уравнение того же вида, как выше, и мы можем вывести заключение, что волны искажения распространяются вдоль оси  $x$  со скоростью

$$c^2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}},$$

или, в соответствии с выражением [258]:

$$c_2 = c_1 \sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}}. \quad [259]$$

При  $\nu = 0,25$ , это выражение дает:

$$c_2 = \frac{c_1}{\sqrt{3}}.$$

Любая функция

$$f(x - c_2 t) \quad [c]$$

является решением уравнения [b] и представляет волну, распространяющуюся в направлении оси  $x$  со скоростью  $c_2$ .

Возьмем, например, решение [c] в таком виде:

$$v = v_0 \sin \left[ \frac{2\pi}{l} (x - c_2 t) \right]. \quad [d]$$

Волна в этом случае имеет вид синусоиды. Длина волны равна  $l$  и амплитуда —  $v_0$ .

Скорость поперечного движения равна

$$\frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{2\pi c_2}{l} v_0 \cos \left[ \frac{2\pi}{l} (x - c_2 t) \right]. \quad [e]$$

Она равна нулю, когда перемещение [d] достигает своего наибольшего значения, и имеет наибольшую величину, когда перемещение равно нулю.

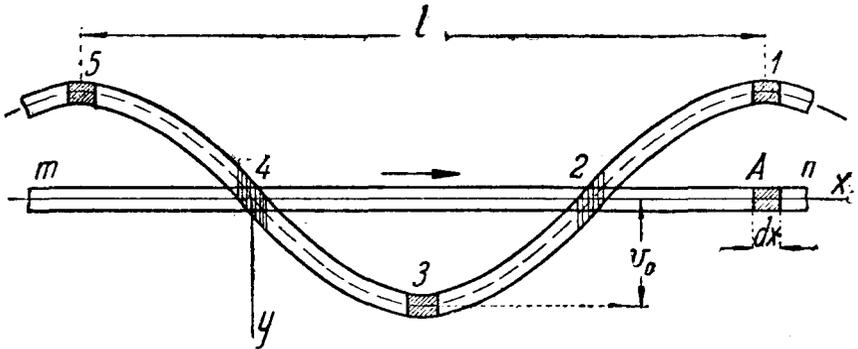
Деформация сдвига, возникающая под действием волны, будет равна:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2\pi v_0}{l} \cos \left[ \frac{2\pi}{l} (x - c_2 t) \right]. \quad [f]$$

Отсюда видно, что наибольшее искажение [f] и максимум абсолютной величины скорости [e] получаются в данной точке одновременно.

Представим этот вид распространения волн следующим образом. Пусть  $mn$  (фиг. 203) будет тонкой нитью в упругой среде. Когда по оси  $x$  распространяется синусоидальная волна [д], любой элемент  $A$  нити испытывает перемещения и искажения, последовательные значения которых показаны на чертеже заштрихованными площадками 1, 2, 3, 4, 5, . . . .

В момент  $t=0$  элемент  $A$  занимает положение, указанное номером 1. В этот момент его искажение и его скорость равны нулю.



Фиг. 203.

Затем он приобретает положительную скорость и его искажение показано площадкой 2 по истечении промежутка времени, равного

$$\frac{1}{4} \frac{l}{c_2}.$$

В этот момент перемещение элемента равно нулю, а его скорость достигает максимума.

По истечении промежутка времени, равного

$$\frac{1}{2} \frac{l}{c_2},$$

условия будут таковы, как показано площадкой 3, и так далее.

Предположив, что площадь поперечного сечения нити равна единице, получим кинетическую энергию элемента  $A$  равной

$$\frac{\rho dx}{2} \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 = \frac{\rho dx}{2} \cdot \frac{4\pi^2 c_2^2}{l^2} v_0^2 \cos^2 \left[ \frac{2\pi}{l} (x - c_2 t) \right],$$

а его потенциальная энергия деформации будет равна:

$$\frac{1}{2} G \gamma_{xy}^2 dx = \frac{G dx}{2} \cdot \frac{4\pi^2 v_0^2}{l^2} \cos^2 \left[ \frac{2\pi}{l} (x - c_2 t) \right].$$

Вспомнив, что:

$$c_2^2 = \frac{G}{\rho},$$

можем прийти к заключению, что в любой момент кинетическая и потенциальная энергии элемента равны. Это — то же самое заключение, что мы получили выше, при рассмотрении продольных волн в призматических стержнях (см. стр. 421).

При землетрясении оба рода волн — и волны расширения, и волны искажения — распространяются в массе земли со скоростями  $c_1$  и  $c_2$ . Эти волны можно записать при помощи *сейсмографа*, и промежуток времени между моментами записи этих двух видов волн дает некоторое указание относительно расстояния станции, ведущей запись, от центра землетрясения <sup>1)</sup>.

**121. Распространение волн по поверхности упругого сплошного тела.** В предыдущем параграфе мы рассмотрели распространение волн в упругой среде вдали от поверхности.

На поверхности упругого тела возможно появление волн различного типа, которые распространяются по поверхности и которые проникают, но на небольшое расстояние, во внутренность тела. Эти волны подобны волнам, которые возникают на гладкой поверхности воды, когда в нее брошен камень.

Лорд Рейлей, который первый исследовал эти волны <sup>2)</sup>, говорит:

„Не исключена возможность, что рассматриваемые здесь поверхностные волны играют важную роль при землетрясениях и при ударе упругих тел. Распространяясь лишь в двух измерениях, они должны приобретать на значительном расстоянии от источника непрерывно возрастающее преобладание“.

Изучение записей сейсмических волн подтверждает предположения Рейлей.

На значительном расстоянии от источника, деформацию, возникающую под действием этих волн, можно считать плоской. Предположим, что тело ограничено плоскостью  $y = 0$ , и примем положительным направление оси  $y$  во внутрь тела, а направление оси  $x$  — положительным по направлению распространения волн.

Выражения для перемещений получатся соединением вместе волн расширения (выражения [254]) и волн искажения (выражения [253]).

Допустив, что в обоих случаях перемещение  $w$  равно нулю, можем принять решение уравнений [254], представляющих волны расширения, в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= se^{-ry} \sin(pt - sx); \\ v_1 &= -re^{-ry} \cos(pt - sx), \end{aligned} \right\} [a]$$

где  $p$ ,  $r$  и  $s$  — постоянные.

Показатель степени в этих выражениях указывает, что при вещественных положительных значениях величины  $r$  амплитуда волн быстро

<sup>1)</sup> Волны, возникающие в грунте под действием машин, имеющих движущиеся взад и вперед части, рассмотрены в следующих статьях: Л. Минтрон (L. Mintrop), Dissertation, Göttingen, 1911; А. Гейнрих (A. Heinrich), Dissertation, Breslau, 1930; Г. Борниц (G. Bornitz), Über die Ausbreitung von Bodenschwingungen, Berlin, 1932.

<sup>2)</sup> См. лорд Рейлей (Lord Rayleigh), „Proc. London Math. Soc.“, vol. 17, 1887.

уменьшается с увеличением ординаты  $y$ . Аргумент  $(pt - sx)$  тригонометрических функций показывает, что волны распространяются в направлении оси  $x$  со скоростью

$$c_3 = \frac{p}{s}. \quad [260]$$

Подставив выражения  $[a]$  в уравнения  $[254]$ , найдем, что эти уравнения будут удовлетворены, если взять:

$$r^2 = s^2 - \frac{\rho p^2}{\lambda + 2G}.$$

Иначе, пользуясь обозначением:

$$\frac{\rho p^2}{\lambda + 2G} = \frac{p^2}{c_1^2} = h^2, \quad [b]$$

имеем

$$r^2 = s^2 - h^2. \quad [c]$$

Решения уравнений  $[253]$ , представляющих волны искажения, возьмем в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= A b e^{-by} \sin(pt - sx); \\ v_2 &= -A s e^{-by} \cos(pt - sx), \end{aligned} \right\} [d]$$

где  $A$  — постоянная, а  $b$  — положительное число.

Можно показать, что относительное объемное расширение, соответствующее перемещениям  $[d]$ , равно нулю, и что уравнения  $[253]$  будут удовлетворены, если мы примем:

$$b^2 = s^2 - \frac{\rho p^2}{G}.$$

Пользуясь обозначением

$$\frac{\rho p^2}{G} = \frac{p^2}{c_2^2} = k^2, \quad [e]$$

получим:

$$b^2 = s^2 - k^2. \quad [f]$$

Соединяя вместе решения  $[a]$  и  $[d]$  и принимая

$$u = u_1 + u_2, \quad v = v_1 - v_2,$$

определим теперь постоянные  $A$ ,  $b$ ,  $p$ ,  $r$  и  $s$  таким образом, чтобы удовлетворялись условия на поверхности.

Поверхность тела свободна от внешних сил; следовательно, при  $y = 0$ :

$$\bar{X} = 0 \quad \text{и} \quad \bar{Y} = 0.$$

Подставив эти значения в выражения  $[123]$  (см. стр. 226) и приняв  $l = n = 0$  и  $m = -1$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= 0; \\ \lambda \Delta + 2G \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} [g]$$

Первое из этих уравнений указывает, что на поверхности тела касательные напряжения равны нулю, а второе — что там же нормальные напряжения тоже равны нулю.

Подставив найденные выше выражения вместо  $u$  и  $v$  в эти уравнения, найдем, что:

$$\left. \begin{aligned} 2rs + A(b^2 + s^2) &= 0; \\ \left(\frac{k^2}{h^2} - 2\right)(r^2 - s^2) + 2(r^2 + Abs) &= 0, \end{aligned} \right\} [h]$$

где на основании выражений  $[b]$  и  $[e]$

$$\frac{k^2}{h^2} - 2 = \frac{\lambda}{G}.$$

Исключив постоянную  $A$  из уравнений  $[h]$  и пользуясь выражениями  $[c]$  и  $[f]$ , получим

$$(2s^2 - k^2)^2 = 4brs^2,$$

или, на основании выражений  $[c]$  и  $[f]$ , имеем:

$$\left(\frac{k^2}{s^2} - 2\right)^4 = 16\left(1 - \frac{h^2}{s^2}\right)\left(1 - \frac{k^2}{s^2}\right). \quad [k]$$

При помощи выражений  $[b]$ ,  $[e]$  и  $[260]$ , все величины в этом уравнении можно выразить через скорости:  $c_1$  — волн расширения,  $c_2$  — волн искажения и  $c_3$  — поверхностных волн. В результате получим:

$$\left(\frac{c_3^2}{c_2^2} - 2\right)^4 = 16\left(1 - \frac{c_3^2}{c_1^2}\right)\left(1 - \frac{c_3^2}{c_2^2}\right). \quad [l]$$

Пользуясь обозначением

$$\frac{c_3}{c_2} = \alpha$$

и вспомнив, что

$$\frac{c_2^2}{c_1^2} = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)},$$

представим уравнение  $[l]$  в следующем виде:

$$\alpha^6 - 8\alpha^4 + 8\left(3 - \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu}\right)\alpha^2 - 16\left(1 - \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}\right) = 0 \quad [m]$$

Взяв, например,  $\nu = 0,25$ , получим

$$3\alpha^6 - 24\alpha^4 + 56\alpha^2 - 32 = 0$$

или

$$(x^2 - 4)(3x^4 - 12x^2 + 8) = 0.$$

Три корня этого уравнения равны:

$$\alpha^2 = 4; \quad \alpha^2 = 2 + \frac{2}{\sqrt{3}}; \quad \alpha^2 = 2 - \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Из этих трех корней лишь один последний удовлетворяет тому условию, что величины  $r^2$  и  $b^2$ , определяемые выражениями  $[c]$  и  $[f]$ , должны быть положительными числами. Следовательно,

$$c_3 = \alpha c_2 = 0,9194 \sqrt{\frac{G}{\rho}}.$$

Взяв как крайний случай  $\nu = 0,5$ , получим уравнение  $[m]$  в таком виде:

$$\alpha^6 - 8\alpha^4 + 24\alpha^2 - 16 = 0.$$

и найдем

$$c_3 = 0,9553 \sqrt{\frac{G}{\rho}}.$$

В обоих случаях скорость поверхностных волн несколько меньше скорости волн искажения, распространяющихся в теле. Зная отношение  $\alpha$ , можем без затруднений вычислить отношение между амплитудами горизонтального и вертикального перемещений на поверхности тела. При  $\nu = 0,25$ , например, это отношение равно 0,681.

Найденную выше скорость распространения поверхностных волн можно получить также при рассмотрении колебаний тела, ограниченного двумя параллельными плоскостями<sup>1)</sup>.

---

<sup>1)</sup> См. Г. Ламб (H. Lamb), Proc. Roy. Soc. London, A. vol. 93, 1922, p. 114. См. также статью автора в Phil. Mag., vol. 43, 1922, p. 126.

## УКАЗАТЕЛЬ ИМЕН.

- Адамс** (Adams, L. H.) 404, 413.  
**Андерсон** (Anderson, E. W.) 280.  
**Антес** (Anthes) 267.  
**Арндт** (Arndt, W.) 311.
- Бабине** (Babinet) 420.  
**Бай** (Bay, H.) 60.  
**Байерли** (Byerly) 59, 403.  
**Базу** (Bazu, N. M.) 283.  
**Баркер** (Barker, L. H.) 407.  
**Беклей** (Bickley, W. G.) 95.  
**Беляев, Н. М.** 381, 382, 383.  
**Берндт** (Berndt, G.) 377.  
**Биецено** (Biezeno, C. B.) 292.  
**Билевич** (Billevicz, V.) 73.  
**Блейх** (Bleich, Fr.) 56, 63.  
**Борниц** (Bornitz, G.) 438.  
**Борхардт** (Borchardt, C. W.) 411.  
**Бредт** (Bredt, R.) 300.  
**Брусстер** (Brewster, D.) 139.  
**Буссинек** (Boussinesq, J.) 96, 112, 292, 360, 367, 371, 426, 432.
- Валь** (Wahl, A. M.) 390.  
**Вебер** (Weber, C.) 95, 266, 280, 303, 342.  
**Вейбель** (Weibel, E. E.) 147, 150.  
**Вестергард** (Westergaard, H. M.) 210.  
**Виггардт** (Wieghardt, K.) 135.  
**Виллерс** (Willers, F. A.) 311.  
**Вильсон, Карус** (Wilson, Carus) 96, 109, 110, 139.  
**Вильсон** (Wilson, R. E.) 404.  
**Вильсон** (Wilson, T. L.) 92.  
**Вильямсон** (Williamson, E. D.) 404, 413.  
**Винклер** (Winkler, E.) 73.  
**Витмор** (Whittemore, H. L.) 380.  
**Вольтерра** (Volterra, V.) 134, 228.  
**Вольф** (Wolf, K.) 55, 303.  
**Вэгстафф** (Wagstaff, J. E. P.) 433.
- Галеркин, Б. Г.** 279, 330, 331.  
**Гамбургер** (Hamburger, M.) 385.  
**Гаулянд** (Howland, R. C. J.) 94, 95, 113, 128.  
**Гейнрих** (Heinrich, A.) 438.  
**Гёнер** (Göhner, O.) 390, 394, 395, 398.  
**Герц** (Herz, H.) 121, 372, 378.
- Гёрш** (Hoersch, V. A.) 381.  
**Гирль** (Hearle, H.) 83.  
**Годкинсон** (Hodkinson, B.) 83.  
**Голл** (Holl, D. L.) 280.  
**Головин, X.** 72, 83, 89.  
**Гольцер** (Holzer, H.) 82.  
**Гоннегер** (Honegger, E.) 413.  
**Гопкинсон** (Hopkinson, J.) 411.  
**Граммель** (Grammel, R.) 83.  
**Грасгоф** (Grashof, F.) 53, 73, 113, 328.  
**Грёбер** (Gröber, H.) 239.  
**Грей** (Gray, A.) 386.  
**Гринхилл** (Greenhill, A. G.) 278, 280, 292.  
**Гриффин** (Griffin, H. K.) 404.  
**Гриффис** (Griffith, A. A.) 162, 267, 289, 291, 294, 298, 299, 332.  
**Грюблер** (Grübler, M.) 83.  
**Грюнберг** (Grünberg, G.) 413.  
**Губер** (Huber, M. T.) 155, 376.  
**Гудьер** (Goodier, J. N.) 60, 176, 357.
- Давиденков, Н. Н.** 242.  
**Дассен** (Dassen, C.) 289.  
**Деланг** (Delanghe, G.) 144.  
**Ден-Гартог** (Den Hartog, J. P.) 147.  
**Джеффри** (Jeffery, G. B.) 70, 93, 205.  
**Динник, А. Н.** 278, 279, 311, 376, 385, 403.  
**Донат** (Donath, M.) 83.  
**Доннель** (Donnell, L. H.) 426.  
**Дугель** (Dougall, J.) 337.  
**Дюгамель** (Duhamel, J. M. C.) 229, 411.
- Зеевальд** (Seewald, F.) 55, 60, 113.  
**Зонтар** (Sonntag, R.) 310, 311.
- Ингберг** (Ingberg, S. H.) 400.  
**Ингерсолл** (Ingersoll, L. R.) 239.  
**Инглис** (Inglis, C. E.) 95, 175, 198.
- Карелиц** (Karelitz, G. B.) 294.  
**Карман** (Kármán, Th. v.) 53, 113, 177, 178.  
**Карозерс** (Carothers, S. D.) 55, 105.  
**Кастильяно** (Castigliano, A.) 164.  
**Квест** (Quest, H.) 292.  
**Кельвин** (Kelvin, Lord) 272, 292, 348, 352.  
**Кент** (Kent, C. H.) 410.  
**Кёттер** (Kötter, -F.) 280.

- Кирхгоф (Kirchhoff, G.) 228.  
 Кирш (Kirsch, G.) 91.  
 Клапейрон (Clapeyron, B. P. E.) 306.  
 Клебш (Clebsch, A.) 420, 426.  
 Клоз (Close, L. J.) 376.  
 Кокер (Coker, E. G.) 95, 137, 140, 144, 147, 152.  
 Колосов, Г. 95, 279.  
 Корню (Cognu, A.) 253.  
 Коробов, А. 348.  
 Коши (Cauchy) 186, 426.  
 Кри (Chree, C.) 80, 350, 386, 417.  
 Кулон (Coulomb) 256.  
 Кушман (Cushman, P. A.) 289, 292, 334.  
  
 Ламб (Lamb, H.) 113, 367, 441.  
 Лармор (Larmor, J.) 293, 359.  
 Лауе (Laue, M. V.) 242.  
 Леви (Levy, M.) 55, 139.  
 Лессельс (Lessels, J. M.) 410.  
 Летсон (Letson, H. F. G.) 409.  
 Либман (Liebman, H.) 286.  
 Лис (Lees, C. H.), 403.  
 Лове (Love, A. E. H.) 128, 134, 191, 202, 205, 279, 330, 338, 342, 347, 359, 367.  
 Лодэ (Lode, W.) 156.  
 Лоренц (Lorenz, R.) 405.  
 Лундберг (Lundberg, G.) 381.  
 Ляме (Lamé, G.) 68, 191, 306, 356.  
  
 Максвелл, Клерк (Maxwell, J. C.) 144.  
 Мартин (Martin, H. M.) 83.  
 Марч (March, H. W.) 286, 289.  
 Матар (Mathar, J.) 137.  
 Матьюс (Mathews, G. B.) 386.  
 Мейнез (Meinesz, V.) 332.  
 Мелан (Melan, E.) 128, 129, 311.  
 Менаже (Mesnager, A.) 38, 107, 139, 144, 152.  
 Месмер (Mesmer, G.) 60.  
 Мизес (Mises, R. V.) 155, 280.  
 Минтроп (Mintrop, G.) 438.  
 Миура (Miura, Akira) 109.  
 Мичель (Michell, H.) 96, 104, 107, 121, 123, 129, 133, 202, 228, 308, 337, 342, 347.  
 Мор (Mohr, O.) 28, 210.  
 Мортон (Morton, W. B.) 376.  
 Мухелишвили, Н. 198.  
 Мюллер (Müller, I.) 55.  
  
 Навье (Navier) 256.  
 Надаи (Nádai, A.) 270, 271, 390.  
 Нёгель (Nägel, A.) 409.  
 Нейман (Neumann, F. E.) 229, 411.  
 Немёный (Neményi, P.) 228.  
  
 Одквист (Odqvist, K. G.) 381.  
 Озгуд (Osgood, W. F.) 59.  
  
 Пашу (Paschoud, M.) 292.  
 Петренко, С. Н. 380.  
  
 Пёшль (Pöschl, Th.) 95, 308, 432.  
 Пижо (Pigeaud, M.) 60.  
 Пильграм (Pigram, M.) 390.  
 Пирс (Pierce, B. O.) 274, 277, 366.  
 Пирсон (Pearson, K.) 53, 55, 73, 257, 331, 337.  
 Полия (Polya, G.) 266.  
 Поллард (Pollard, C.) 55.  
 Похгаммер (Pochhammer, L.) 337, 386, 417.  
 Прайдтль (Prandtl, L.) 72, 267, 270.  
 Преис (Preuss, E.) 95.  
 Пуассон (Poisson) 426.  
 Пурсер (Purser, F.) 303.  
  
 Радемакер (Rademaker, J. M.) 292.  
 Рамзауер (Ramsauer, C.) 432.  
 Рёвер (Roever, V.) 390.  
 Рейлей, лорд (Rayleigh, Lord) 237, 384, 417, 438.  
 Рейсснер (Reißner, H.) 136, 241.  
 Резаль (Résal, H.) 73.  
 Ренкин (Rankine, W. J. M.) 53, 113.  
 Рибьер (Ribièrre, M. C.) 56, 72, 89.  
 Риман (Riemann) 186, 280.  
 Ритц (Ritz, W.) 280, 282.  
 Ричардсон (Richardson, L. F.) 55.  
 Робинсон (Robinson, W. C.) 404.  
 Ротсипер (Rottsieper) 286.  
 Рунге (Runge, C.) 286.  
  
 Садовский (Sadowsky, M.) 95, 96, 105, 107.  
 Саусвелл (Southwell, R. V.) 357.  
 Сен-Венан (Saint Venant) 42, 256, 257, 263, 265, 278, 279, 315, 325, 420, 426, 429, 432.  
 Сигар (Seegar, M.) 331.  
 Сирс (Sears, J. E.) 386, 433.  
 Смекал (Smekal, Adolf) 162.  
 Солакиан (Solakian, A. G.) 294.  
 Стеренсон (Sterenson, A. C.) 95.  
 Стодола (Stodola, A.) 79, 82, 404.  
 Стокс (Stokes, G. G.) 110.  
  
 Такемура (Takemura, K.) 137.  
 Тейлор (Taylor, G. I.) 267, 289, 291, 294, 298, 299, 332.  
 Теразава (Terazawa, K.) 367.  
 Тимпе (Timpe, A.) 38, 54, 60, 72, 129, 134, 205, 303, 311, 348.  
 Тодгёнтер (Todhunter) 73, 257.  
 Томас (Thomas, H. R.) 381.  
 Трайер (Trauer, G. W.) 286, 289.  
 Треффц (Treffitz, E.) 270, 280, 282, 283, 289.  
 Тузи (Tuzi, Z.) 95, 142, 143, 147.  
 Тэт (Tait) 272, 292, 348.

- Фавр (Favre, Henri) 144.  
 Файлон (Filon, L. N. G.) 24, 56, 60, 112,  
 113, 133, 136, 140, 144, 228, 266, 280,  
 337, 386, 389.  
 Фёппль, А. (Föppl, A.) 72, 210, 278, 287,  
 305, 308, 310, 390.  
 Фёппль, Л. (Föppl, L.) 210, 278, 311, 390.  
 Филлунгер (Fillunger, P.) 55, 139.  
 Фишер (Fischer, A.) 83.  
 Фламан (Flamant) 96, 429, 432.  
 Фойгт (Voigt, W.) 432.  
 Форсайт (Forsyth, A. R.) 343, 386.  
 Франк (Frank, Ph.) 280.  
 Фрейденталь (Freudenthal, A.) 390.  
 Фрохт (Frocht, M. M.) 148.  
 Фукс (Fuchs, S.) 376.  
 Хлытчиев, А. М. 338.  
 Хосокава (Hosokawa, J.) 137.  
 Цобель (Zobél, O. J.) 239.  
 Шлейхер (Schleicher, F.) 155, 367, 370  
 Шлехтвег (Schlechtweg, H.) 83.  
 Шнадель (Schnadel, G.) 177.  
 Шнейдер (Schneidel, E.) 286.  
 Штраубель (Straubel, R.) 253.  
 Юнг (Young, Thomas) 420.  
 Эйхельберг (Eichelberg, G.) 239, 409.  
 Эмде (Emde) 366, 386, 404.  
 Эри (Airy, G. B.) 36.  
 Якобсон (Jacobsen, L. S.) 311.  
 Янке (Jahnke) 366, 386, 404.
-

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ.

- Анализатор** 141.
- Аналогии гидродинамические** 292.
- Аналогия с мембраной, применение:**
- к изгибаемой балке 318:
    - определение напряжений 332;
    - прямоугольного сечения 322, 326;
  - к скручиваемому валу 267:
    - измерение напряжений 289;
    - при различных видах поперечного сечения:
      - полые валы 295;
      - прокатные профили 287;
      - тонкостенные трубы 299;
      - узкий прямоугольник 271;
    - при оптическом методе 147;
- Аналогия с электрическим током** 311.
- Анизотропные тела** 13.
- Балки:**
- действие сосредоточенной силы 109;
  - искажение поперечного сечения 48, 337;
  - касательные напряжения 45, 50, 54, 116, 319, 320, 325, 335;
  - кривизна 52, 117, 336;
  - прогиб 48, 52, 118, 336.
- Валов кручение** см. кручение.
- Валы переменного диаметра** 305.
- Вес:**
- изгиб балок под действием собственного веса 338;
  - растяжение стержней под действием собственного веса 244.
- Винтовые пружины** 390.
- Влияние**
- круглого отверстия на распределение напряжений 89;
  - перерезывающей силы на прогиб 49, 52, 118.
- Влияния линии** 102.
- Возможные перемещения:**
- наименьшая работа на них 173;
  - применение при задачах о кручении 280;
  - начало 156.
- Волны:**
- искажения 434;
  - плоские 435;
  - поверхностные 438;
  - продольные в призматических стержнях 416;
  - наложение их 421;
  - отражение их 422;
  - расширения 434.
- Вращательная скорость** 292.
- Вращающиеся диски** см. диски.
- Временное сопротивление** 155.
- Входящие углы, концентрация напряжений:**
- в валах 287, 294;
  - в двутавровых балках 335;
  - в пластинках 149, 150.
- Выкружки, концентрация напряжений:**
- в валах переменного диаметра 311
  - при изгибе и растяжении пластинок 149, 150;
  - при кручении призматических стержней 287, 292.
- Выточки глубокие**
- напряжения в них при изгибе 152;
  - полукруглые в валах 266, 294, 311.
- Гармонические функции** 186.
- Герца задача** 372, 378.
- Гидродинамические аналогии** 292.
- Главные деформации** 217.
- Главные направления** 28.
- Главные напряжения** 28, 207;
- определение их 210.
- Главные оси**
- деформации 217;
  - напряжений 28, 208.
- Главные плоскости деформации** 217;
- напряжений** 208.
- Главные удлинения** 217.
- Граничные условия**
- на поверхности в зависимости от перемещений 226;
  - при задачах в трех измерениях 220;
  - при изгибе 316;
  - при кручении 259;
  - при плоской задаче 33.
- Гука закон** 19.
- Давление:**
- возникающее под абсолютно твердым штампом 106; 371;

- гидростатическое 23;  
напряжения, им вызываемые 244;  
на сферические сосуды 353;  
на толстостенные цилиндры 68;  
по поверхности касания между двумя телами 372, 379.
- Двойная сила, действующая  
на бесконечно большое тело 353;  
на пластинку 126.
- Двухочковые элементы целей, напряжения в них 136.
- Деформация  
в точке 214;  
главные оси ее 217;  
главные плоскости 217;  
не сопровождающаяся вращением 434;  
плоская 24;  
однородная 212;  
сдвига см. сдвига деформация;  
составляющие ее 17, 216;  
в полярных координатах 75;  
отнесенные к ортогональным криволинейным координатам 195;  
тождественные зависимости между ними 33, 221, 340.
- Диск:  
вращающийся 79, 348;  
переменной толщины 82;  
температурные напряжения 398.
- Дифференциальные уравнения равновесия:  
в двух измерениях 32, 65;  
в трех измерениях 219, 307, 339;  
выраженные в зависимости от перемещений 183, 225.
- Дополнительная кривизна балок 117.
- Дополнительный прогиб от перерезывающей силы 49, 118.
- Закон Гука 19.
- Землетрясение, волны его 438.
- Жесткость:  
на изгиб пластинок 255;  
при кручении 263.
- Изгибающий момент, зависимость его от кривизны 336, 338.
- Изгиб балок:  
консоли грузом на конце 44, 315;  
равномерно распределенной нагрузкой 49;  
разных поперечных сечений:  
других видов 328, 330;  
круглого 318;  
прямоугольного 321;  
узкого прямоугольного 44, 49, 53, 107;  
эллиптического 320;  
распределенной нагрузкой 53;  
решение помощью мыльной пленки 332;  
сосредоточенной силой 107.
- Изгиб призматических брусьев 315 (см. также изгиб балок).
- Изоклины 144.
- Изотропные материалы 13.
- Инварианты уравнения, определяющего главные напряжения 211.
- Искажение поперечных сечений изогнутой балки 48, 337;  
скручиваемого стержня (искривление) 261, 263.
- Искажения  
волны 434;  
потенциальная энергия деформации 155.
- Искривление поперечных сечений призматических стержней при кручении 256, 261, 263.
- Касания поверхность между сжимаемыми телами 373.
- Касательные напряжения 15:  
влияние их на прогиб балок 49, 118;  
наибольшие 29, 211;  
распределение их в балках:  
разных видов поперечного сечения:  
двутаврового 335;  
круглого 319;  
прямоугольного 324;  
эллиптического 320;  
узкого прямоугольного сечения 61, 62;  
составляющие 17;  
траектории их 268, 294;
- Кастильяно теорема 164;  
применение для определения прогиба 169.
- Катки, сжатие их 25, 118, 382.
- Клин:  
с криволинейными боковыми гранями 205;  
с нагрузкой  
на острие 107;  
по боковым граням 137.
- Колебания температуры, напряжения от них:  
в пластинках 238;  
в цилиндрических оболочках 408.
- Кольца сектор:  
изгиб 395;  
скручивание 390.
- Кольцо — см. круговое кольцо.
- Комплексное переменное, функция его 185.
- Консоли:  
искажение поперечного сечения 48, 337;  
напряжения 45, 315;

- прогиб 48, 336;  
разные виды поперечных сечений  
    круглое 318;  
    прочие формы 328, 330;  
    прямоугольное 321;  
    узкое прямоугольное 44;  
    эллиптическое 320.
- Конуса кручение 310.
- Комформное отображение при плоской деформации 201.
- Концентрация напряжений  
    в выкружках 149, 150, 152, 266, 287, 292, 294, 300, 311, 312, 313, 335;  
    у отверстий 82, 89, 293;  
    у сферической полости 357.
- Координаты:  
    криволинейные ортогональные 190;  
    полярные 64;  
    сферические 342;  
    цилиндрические 306, 339;  
    эллиптические 194.
- Коши — Римана уравнения 186.
- Коэффициент линейного расширения от температуры 229.
- Кривизна балок 52, 336;  
    влияние перерезывающей силы 53;  
    дополнительная 117;  
    зависимость от изгибающего момента 336, 337.
- Кривой брус  
    изгиб сосредоточенной силой, приложенной в конце 83;  
    напряжения 72, 85;  
    переменной высоты 204;  
    прогиб 77, 87;  
    чистый изгиб 70.
- Криволинейные ортогональные координаты 190;  
    составляющие деформации в этих координатах 194.
- Криволинейный прямоугольник, напряжения в нем 204.
- Круглая пластинка, изгиб ее 345.
- Круглое отверстие, влияние его на напряжение  
    в валах 293;  
    во вращающихся дисках 81;  
    в пластинках 89.
- Круглый вал переменного диаметра 305.
- Круглый диск:  
    вращающийся 79;  
    действие сил, находящихся в его плоскости 118;  
    температурные напряжения 398.
- Круглый цилиндр:  
    изгиб 318;  
    симметричная деформация 386.
- Круговое кольцо:  
    начальные напряжения 134;  
    общее решение 130;
- разрезанное под действием двух прямопротивоположных сил 134.
- Круговой сектор, кручение вала такого сечения 278.
- Крутящий момент 259;  
    определение его помощью аналогии с мембраной 269.
- Кручение:  
    валов переменного сечения 305;  
    жесткость 263;  
    перемещения 260;  
    приближенный способ определения напряжений 280;  
    призматических стержней 256;  
    различные виды поперечных сечений  
        круглое 247;  
        круговой сектор 278;  
        прокатные профили 289;  
        прочих видов 263, 278, 280;  
        прямоугольное 274, 282;  
        узкое прямоугольное 271;  
        эллиптическое 261;  
    тонкостенных труб 299;  
    функция напряжений 257.
- Лапласа оператор 223, 340;  
    уравнение 184.
- Линии равных касательных напряжений при кручении 268.
- Линия ввинтия 102.
- Ляме задача 68, 353.
- Местные напряжения:  
    в выкружках  
        при изгибе и растяжении 149, 150;  
        при кручении 266, 287, 292, 300, 311, 312, 313;  
    в выточках  
        при изгибе 151, 152;  
        при кручении 311;  
    у круглого отверстия 82, 89;  
    у отверстий в валу 293;  
    у сферической полости 357.
- Местный характер распределения напряжений у отверстия 92, 357.
- Мембрана, аналогия с ней, применение:  
    к изогнутой балке 318;  
    определение напряжений 332;  
    прямоугольного поперечного сечения 322, 326;  
    к скручиваемому валу 267;  
    для измерения напряжений:  
        в полых валах 295;  
        в тонкостенных скручиваемых трубах 299;  
    от кручения вообще 289;  
    при различных видах поперечного сечения:  
        прокатных профилей 287;

- узкого прямоугольного 271;  
при оптическом методе 147.
- Многосвязные тела 79, 133, 228, 302.
- Модуль:  
объемного расширения 23;  
упругости при растяжении 19;  
упругости при сдвиге 22.
- Мора круг 28, 210.
- Мыльной пленки способ, решение по-  
мощью его задач на:  
изгиб 332;  
кручение 289.
- Нагревание, напряжения от неравномер-  
ного нагревания 229:  
в дисках 398;  
в длинных цилиндрах 401;  
в пластинках 233;  
в шарах 411.
- Наименьшей работы начало 170  
и его применения 171.
- Направляющая поверхность напряжен-  
ный 209.
- Напряжение и деформация, зависимость  
между ними — см. закон Гука.
- Напряжений концентрация  
в выкружках:  
вала переменного диаметра 311;  
растянутых элементов 149;  
изгибаемых стержней 150, 152;  
во входящих углах скручиваемого  
стержня 289;  
в пазах валов 266; 294;  
применение для их определения:  
гидродинамической аналогии 293;  
электрической аналогии 311;  
у круглого отверстия 82, 89;  
у отверстий в валах 293, 294;  
у сферической полости 357;  
у эллиптического отверстия 95.
- Напряжений направляющая поверх-  
ность 209.
- Напряжений функция 36, 66, 97, 103,  
129, 257, 263, 317, 339;  
определение ее способом мыльной  
пленки 289, 332.
- Напряжений эллипсод 208.
- Напряжения:  
в точке 26, 206;  
главные 28, 207;  
касательные 15;  
нормальные 15;  
при касании двух сжимаемых тел  
377, 381;  
составляющие 16, 206;  
температурные 229, 398, 401, 411.
- Начало возможных перемещений 156.
- Начало наименьшей работы 170.
- Начальные напряжения:  
в кольцах 79, 134;  
в стеклянных пластинках 241;  
общие уравнения для их определе-  
ния 239;  
устранение их отжигом 241.
- Нейтральная поверхность 52.
- Неполного кругового круглого кольца:  
изгиб 395;  
скручивание 390.
- Непрерывно распределенная нагрузка  
балки 49, 53, 59, 337.
- Николя призма при оптическом методе  
измерения напряжений 140.
- Нити прогиб 159.
- Общее решение:  
плоской задачи в полярных коорди-  
натах 129;  
для клина 137.
- Общие уравнения равновесия:  
в ортогональных координатах 220;  
в цилиндрических координатах 307,  
339;  
при переменной температуре 230,  
232.
- Объемные силы 15.
- Однозначность решения 227.
- Однозначные перемещения 78, 132.
- Однородная деформация 212.
- Однородный материал 13.
- Оптический метод измерения напряже-  
ний 139, 238, 401.
- Ортогональные криволинейные коорди-  
наты 190.
- Осадка фундаментов 371 (см. также  
балки).
- Осевая линия призматического стержня  
315;  
ее удлинение 52; 337.
- Оси главные деформации 217.
- Остаточные напряжения — см. начальные  
напряжения.
- Отверстие:  
в скручиваемом валу 293;  
круглое в пластинке 89;  
эллиптическое в пластинке 95.
- Отжиг, устранение с его помощью на-  
чальных напряжений 241.
- Относительное удлинение 18.
- Отображение конформное при плоской  
деформации 201.
- Охлаждение, напряжения от неравно-  
мерности его:  
в валах 405;  
в пластинках 237.
- Пазы глубокие  
напряжения в них при изгибе 152,  
полукруглые в валах 266, 294.
- Передача сосредоточенной силы  
в балке 109;

- в бесконечно большой пластинке 124, 189;  
 в бесконечно большом теле 350;  
 в диске 118;  
 в длинной полосе 128;  
 в клане через острне 107;  
 в полубесконечной пластинке 96;  
 в полубесконечном теле 360.  
 Переменного диаметра валы 305.  
 Перемещения:  
 в полубесконечном теле 363;  
 в полубесконечной пластинке 101, 106;  
 при задачах в трех измерениях 224;  
 при изгибе призматических стержней 336;  
 при кручении призматических стержней 260;  
 при плоской деформации 187;  
 при плоской задаче 43:  
 в балке узкого прямоугольного сечения 52;  
 в консоли 46;  
 в кривом брусе 86;  
 в случае симметричного распределения напряжений 77;  
 при плоском напряженном состоянии 187.  
 Пластинка:  
 изгибаемая парами сил 253;  
 круглая, симметрично нагруженная 345  
 Пластическая деформация:  
 начальные напряжения из за нее 239;  
 в скручиваемых валах 270.  
 Пленка — см. мыльная пленка.  
 Плоская деформация 24;  
 уравнения совместности 33.  
 Плоские волны 435.  
 Плоские гармонические функции 184.  
 Плоское напряженное состояние 24, 209;  
 напряжения в точке 26;  
 уравнения равновесия 32;  
 функции напряжений 36.  
 Плоскости главных напряжений 208, 217.  
 Плотины каменные, напряжения в них 55.  
 Поверхностная потенциальная энергия 163.  
 Поверхностные силы 15.  
 Поверхность касания 373.  
 Поворот  
 в криволинейных координатах 193;  
 составляющие его 183.  
 Полезная ширина полок широкополной балки 177.  
 Полномы, решение при помощи их:  
 задач на кручение 263, 285;  
 задач симметричного относительно оси распределения напряжений 343;  
 плоской задачи 38.  
 Полки балок, полезная их ширина 177;  
 Полубесконечная пластинка 96, 102, 189.  
 Полубесконечное тело,  
 распределенная на части его грани нагрузка 365;  
 сосредоточенная сила на его плоской грани 360.  
 Полуобратный способ:  
 при изгибе 315;  
 при кручении 257;  
 валов переменного диаметра 307.  
 Полуплоскость — см. полубесконечная пластинка.  
 Полюс вал, кручение его 294.  
 Поляризатор 141.  
 Поляризованный свет для измерения напряжений 139, 238, 401.  
 Полярные координаты:  
 в задачах трех измерений 342;  
 при плоской задаче 64.  
 Поперечные волны 436.  
 Постоянные упругие 19 (см. также закон Гука).  
 Потенциальная энергия деформированного тела 153;  
 изменения объема 155;  
 искажения формы 156;  
 наименьшее ее значение 170;  
 применение этого значения 170, 280.  
 Призма николя 140.  
 Потока функция 292.  
 Призматические стержни:  
 изгиб 315;  
 кручение 256.  
 Принцип Сен-Венана 42.  
 Принцип сложения действия сил 20, 229.  
 Продольные волны 435.  
 Продольные колебания призматических стержней 416.  
 Прокатные профили:  
 при изгибе 335;  
 при кручении 286.  
 Прочность, теории ее для хрупких материалов 162;  
 основанные на потенциальной энергии деформации 155.  
 Прямоугольные стержни:  
 изгиб 321;  
 кручение 271, 274, 284, 303.  
 Пуассоново отношение 20;  
 определение его величины 253.  
 Работа на возможных перемещениях — начало наименьшей работы 170.  
 Равновесия общие уравнения 220;  
 в полярных координатах 65;  
 в случае неравномерного нагревания 230, 232;  
 в цилиндрических координатах 307;

- выраженные в перемещениях 183, 225.
- Радиальная деформация 75.
- Радиальное перемещение 75.
- Радиальное распределение напряжений 96.
- Радиальные напряжения 64.
- Распространение волн:  
в сплошных телах 416;  
по поверхности тел 438.
- Разрушение гипотезы относительно условий его 155;  
напряжение, при котором оно происходит 155, см. временное сопротивление;
- хрупких материалов 162.
- Растяжение призматического стержня:  
распределенными усилиями 171;  
силой тяжести 244;  
сосредоточенной силой 63;  
равномерное 243.
- Расширение:  
объемное 23;  
в криволинейных координатах 196;  
от температуры 229.
- Расширения:  
волны 434;  
колебания растянутых стержней 416.
- Рейлея волны 438.
- Свет поляризованный, применение его при измерении напряжений 139, 238, 401.
- Сдвига деформация 19, 216.
- Сдвиг чистый 21, 30, 184.
- Сжатие:  
катков 25, 382;  
сосредоточенной силой  
диска 118;  
клина 107;  
прямоугольной пластинки 60, 61;  
сплошных тел, общий случай 378;  
шаров 372.
- Седлообразная поверхность при изгибе стержней 252.
- Сейсмограф 438.
- Сектор круга, кручение стержней с поперечным сечением в виде с. к. 278.
- Сектор кругового кольца:  
скручивание 390;  
чистый изгиб 395.
- Сен-Венана  
задача кручения призматических стержней 257;  
задача на изгиб консоли постоянного сечения 315;  
принцип 42.
- Симметричное относительно оси распределение напряжений в задачах в трех измерениях 339;  
в круглом цилиндре 386;  
при плоской задаче 67.
- Скорость:  
волн искажения 436;  
волн расширения 435;  
поверхностных волн 440;  
распространения волн в призматических стержнях 419;
- Скручивание:  
валов — см. кручение;  
сектора кругового кольца 390.
- Скручивания центр 260, 331.
- Сложения действия сил принцип 20.
- Совместности условия:  
в цилиндрических координатах 340;  
при задачах в трех измерениях 221;  
при плоской задаче 33.
- Сосредоточенная сила — см. передача сосредоточенной силы.
- Составляющие:  
деформации 17;  
в криволинейных координатах 194;  
напряжения 16.
- Средняя плоскость пластинки 347.
- Сферическая полость в бесконечно большом сплошном теле 357.
- Сферические координаты 312.
- Сферические тела, сжатие их 372.
- Сферический сосуд под внешним или внутренним давлением 353;  
температурные напряжения в нем 414.
- Твердого тела геремещения, наложение их на перемещения от упругой деформации 225.
- Температура, напряжения от неравномерности ее распределения 229.
- Температурное расширение, коэффициент его 229.
- Температурные напряжения 229:  
в дисках 398;  
в длинных полосках 234;  
в пластинках 233;  
в цилиндре 401;  
в шаре 411;  
дифференциальные уравнения для их определения 230, 232.
- Температуры колебания, напряжения, возникающие от них:  
в пластинках 238;  
в цилиндрических оболочках 408.
- Тепловой установившийся поток:  
в пластинках 238;  
в цилиндрических оболочках 406.
- Тожественные зависимости между составляющими перемещения — см. совместности условия.
- Тонкостенные трубы, их кручение 299.

- Траектории:**  
 главных напряжений 144;  
 касательных напряжений 268, 294.
- Треугольная призма:**  
 при изгибе 330;  
 при кручении 264, 279.
- Трещины:**  
 в растянутых элементах 96;  
 в скручиваемых элементах 294;  
 их влияние на уменьшение сопротивления хрупких материалов 163.
- Трубы,**  
 кручение их 299;  
 подвергающиеся внутреннему и внешнему давлению 68.
- Угол скручивания на единицу длины**  
 247, 260, 263, 272, 279, 287, 300.
- Удар:**  
 напряжения от него 419, 430;  
 поперечный, стержней 386;  
 продолжительность его 385, 430;  
 продольный, стержней вообще 423;  
 стержней с закругленными концами 385, 433;  
 шаров 384.
- Упругость** 13.
- Условия совместности** — см. **совместности условия**.
- Усталости трещины** 92.
- Установившийся тепловой поток** — см. **тепловой уст. п.**
- Фундаменты:**  
 осадка 371;  
 распределение давления 371.
- Функция напряжений** 36:  
 в полярных координатах 66;  
 общее выражение для нее 129;  
 при действие на полуплоскость: сосредоточенной силы 97;  
 равномерно распределенной нагрузки 103;  
 при изгибе призматических брусьев 317;  
 при кручении 257;  
 в целых полиномах 263;  
 при симметричном распределении напряжений в телах вращения 339.
- Функция потока** 292.
- Фурье ряды:**  
 при задачах на изгиб 323;  
 при задачах на кручение 284;  
 при плоской задаче 56, 129;  
 упругая линия, выраженная ими 161.
- Холоднотянутые трубы, остаточные напряжения в них** 242.
- Центр**  
 сжатия 355;  
 скручивания 260;  
 при изгибе 331.
- Цилиндрическая жесткость на изгиб** 255.
- Цилиндрические координаты** 306, 339.
- Цилиндрические оболочки — трубы:**  
 кручение их 299;  
 под внутренним и внешним давлением 68;  
 температурные напряжения 405.
- Цилиндрическое тело любого поперечного сечения:**  
 изгиб 248, 315;  
 кручение 256;  
 растяжение 243, 244.
- Цилиндр круглый:**  
 температурные напряжения 401;  
 толстостенный под давлением 68;  
 симметричная деформация 386;  
 с эксцентричным отверстием 70.
- Чистый изгиб:**  
 кривых брусьев 70;  
 пластинок 253;  
 сектора кругового кольца 395;  
 призматических стержней 248.
- Чистый сдвиг** 21, 30, 184.
- Шаровой сосуд** — см. **сферический сосуд**.
- Шары:**  
 их сжатие 372;  
 температурные напряжения 411;  
 удар 384.
- Электрический ток, аналогия с ним при кручении вала переменного диаметра** 311.
- Эллипсоид напряжений** 203.
- Эллиптические координаты** 194;  
 плоская задача, выраженная в них 198.
- Эллиптические цилиндры:**  
 изгиб 320;  
 кручение 261.
- Эллиптическое отверстие:**  
 в пластинке 95, 163, 199;  
 в скручиваемом валу 294.
- Энергия деформации** — см. **потенциальная энергия**.
- Энергия:**  
 упругих волн 420, 437;  
 упругой деформации 153.
- Юнга модуль** — см. **модуль упругости при растяжении**.

Редактор *Н. А. Шошин.*

Сдано в набор 27/III 1935 г.

Формат 62х84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.

Ленгорлит № 1678.

Печ. листов 28<sup>1</sup>/<sub>4</sub>.

ГТТИ № 310.

Тираж 10000.

Бум. листов 14<sup>1</sup>/<sub>8</sub>.

Уч.-авт. листов 39.

*Техн. редактор Р. В. Эндина.*

Подписано к печати 22/III 1937 г.

Тип. знак. в 1 бум л. 110976.

Заказ № 2639.

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать	По чьей вине
169	10 сверху	$\tau_{xy}$	$\tau_{yx}$	ред.
214	4 снизу	$\dots + \frac{\partial w}{\partial y} \delta x$	$\dots + \frac{\partial w}{\partial y} \delta y$	ред.
222	5 сверху	$= \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z}$	$= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}$	ред.
297	11 снизу	$\dots + \frac{\partial w}{\partial y} dy$	$\dots + \frac{\partial w}{\partial y} dy$	ред.

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать	По чьей вине
185	4 сверху	$(\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x)$	$(\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y)$	ред.

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать	По чьей вине
436	12 сверху	$\varepsilon_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$	$\varepsilon_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$	ред.

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать	По чьей вине
44	1 снизу	$\varepsilon = d_4 xy$	$\varepsilon_x = d_4 xy$	тип.

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать	По чьей вине
356	7 снизу	$p_i = 0$	$p_o = 0$	ред.