

Theoretische Einführung in die Gasdynamik

Von

Dr. Robert Sauer

o. Professor für angewandte Mathematik
an der Technischen Hochschule Aachen

Mit 99 Abbildungen im Text



Berlin
Springer-Verlag
1943

ISBN-13: 978-3-642-98272-9 e-ISBN-13: 978-3-642-99083-0
DOI: 10.1007/978-3-642-99083-0

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung
in fremde Sprachen, vorbehalten.
Copyright 1943 by Springer-Verlag OHG., Berlin

Vorwort.

Das vorliegende Buch über Gasdynamik geht auf eine Vortragsreihe zurück, die der Verfasser im Sommer 1940 in Göttingen auf Veranlassung von CARL WIESELSBERGER für das Aachener Aerodynamische Institut gehalten hat. Dem Gedächtnis dieses leider so früh verstorbenen Kollegen möge es gewidmet sein.

Zweck des Buches ist es, eine zusammenfassende Darstellung zu geben für die in zahlreichen Zeitschriftenaufsätzen verstreuten neueren theoretischen Untersuchungen über die Gasströmung bei hohen Geschwindigkeiten; der Einfluß der Kompressibilität wird hierbei wesentlich und es kommen völlig andere Gesetze als in der gewöhnlichen Aerodynamik und Hydrodynamik ins Spiel. Die aktuelle Bedeutung dieses verhältnismäßig jungen Zweiges der Strömungslehre für Luftfahrt und Ballistik liegt auf der Hand. In erster Linie wendet sich das Buch an die im praktischen Forschungsbetrieb stehenden Ingenieure und technischen Physiker sowie an Studierende der Aerodynamik, um ihnen die zeitraubende und oft mühsame Durcharbeitung des Originalschrifttums zu ersparen oder zu erleichtern. Dieser Zielsetzung entsprechend wurde soweit als möglich eine anschauliche, dem ingenieurmäßigen Denken angepaßte Darstellungsweise erstrebt.

Wie der Titel „Theoretische Einführung“ ausdrückt, erstreckt sich der Inhalt lediglich auf die theoretisch-mathematische Behandlung der Probleme. Die experimentellen und meßtechnischen Fragen bleiben außer Betracht. Weitere Beschränkungen liegen in der Voraussetzung stationärer Strömung und in der Vernachlässigung der Reibung und Wärmeleitung. Dagegen werden wir uns nicht auf die ebene Strömung beschränken, sondern auch die achsensymmetrische Strömung als den praktisch wichtigsten Sonderfall der räumlichen Strömung ausführlich erörtern.

Für freundliche Mithilfe bei den Korrekturen danke ich den Herren Prof. Dr. J. LENSE, Dozent Dr. habil. A. NAUMANN und Prof. Dr. H. PETERS sowie Frau Dr. E. LENSE. Bei der Durchsicht des Manuskripts sowie bei der Herstellung der Zeichnungen und der Durchführung von Zahlenrechnungen haben mir meine Assistenten Dr.-Ing. H. PÖSCH, Dipl.-Ing. C. HEINZ und Dipl.-Ing. K. W. BRÜCKER wertvolle Dienste geleistet. Besonderer Dank gebührt dem Springer-Verlag, der von Anfang an meinen Plan verständnisvoll gefördert und trotz der kriegsbedingten Schwierigkeiten das Buch in verhältnismäßig kurzer Zeit und in der üblichen vorzüglichen Ausstattung herausgebracht hat.

Aachen, im November 1942.

R. SAUER.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung	1
I. Abschnitt: Grundbegriffe	2
§ 1. Grundgleichungen der Strömung	2
1. EULERSche Bewegungsgleichung. Impulssatz.	2
2. Kontinuitätsgleichung und Bedingung der Wirbelfreiheit.	4
§ 2. Thermodynamische Grundbegriffe.	5
1. Zustandsgleichung und Adiabatangleichung der vollkommenen Gase	5
2. $p(w)$ und $c(w)$ für vollkommene Gase.	6
3. MACHSche Zahl.	7
4. Ähnlichkeitsbetrachtung.	8
5. Geometrische Darstellung der Funktion $p(w)$	9
6. Druckintegral und Wärmehalt, für vollkommene Gase.	10
§ 3. Stromlinienverlauf bei Unter- und Überschallgeschwindigkeit	10
1. Stromdichte	10
2. Eindimensionale Strömung.	12
3. Anwendung auf Lavaldüsen	13
4. Stromlinienverlauf der 2- und 3-dimensionalen Strömung	14
5. Beispiele: Quelle, Senke und Wirbel	15
§ 4. Potentialgleichung	17
1. Potentialgleichung der allgemeinen räumlichen Strömung	17
2. Potential und Stromfunktion der achsensymmetrischen räumlichen Strömung	18
3. Potential und Stromfunktion der ebenen Strömung	20
II. Abschnitt: Linearisierte Strömung	22
§ 5. Linearisierung der Potentialgleichung	22
1. Voraussetzung für die Linearisierung	22
2. Durchführung der Linearisierung	24
§ 6. Linearisierte ebene Unterschallströmung.	24
1. Affine Beziehung zwischen der kompressiblen und inkompressiblen ebenen Strömung.	24
2. Quell-Senken-Verfahren für Profilströmungen	25
3. Inkompressible und kompressible Umströmung von Profilen	27
4. Abklingen von Störungen bei inkompressibler und kompressibler Strömung	28
5. Beispiel: Ebene Strömung längs einer welligen Wand	29

	Seite
§ 7. Linearisierte räumliche Unterschallströmung	30
1. Affine Beziehung zwischen der kompressiblen und der inkompressiblen räumlichen Strömung	30
2. Quell-Senken-Verfahren für Strömungen um Drehkörper	31
3. Inkompressible und kompressible Umströmung von Drehkörpern	33
4. Abklingen von Strömungen bei inkompressibler und kompressibler räumlicher Strömung	33
5. Anwendung auf die Strömung um Tragflügel und Rumpf	34
§ 8. Linearisierte ebene Überschallströmung	34
1. Allgemeine Lösung der Potentialgleichung	34
2. MACHSche Linien und MACHScher Winkel	35
3. Linearisierte Strömung an einer flachen Ecke	37
4. Fortpflanzung schwacher Störungen; Störungslinien und Schallgeschwindigkeit	38
5. Linearisierte Umströmung eines schlanken Profils	40
6. Auftrieb und Widerstand für linearisierte Überschallströmungen	42
7. Charakteristikentheorie der hyperbolischen Differentialgleichungen	44
§ 9. Linearisierte räumliche Überschallströmung	46
1. Diskussion der Potentialgleichung; MACHSche Linien	46
2. Quell-Senken-Verfahren für räumliche Überschallströmungen.	47
3. Linearisierte Umströmung eines Drehkegels	47
4. Linearisierte Umströmung eines beliebigen zugespitzten Drehkörpers	50
III. Abschnitt: Nichtlinearisierte Strömung an Ecke und Kegel; Verdichtungsstoß	53
§ 10. Stetige Verdünnungsströmung an einer konvexen Ecke	53
1. Veranschaulichung durch Grenzübergang	53
2. Analytische Behandlung des Problems	54
3. Geschwindigkeitsbild $M^* = M^*(\theta)$	58
4. Zeichnerische Behandlung des Problems	61
§ 11. Verdichtungsstoß an einer konkaven Ecke	61
1. Zustandekommen des Verdichtungsstoßes.	61
2. Grundgleichungen des Verdichtungsstoßes	62
3. Berechnung des Verdichtungsstoßes	64
4. Senkrechter Verdichtungsstoß.	66
5. Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Verdichtungsstößen und Grenzübergang zu kleinen Verdichtungen	68
§ 12. Stoßpolarendiagramm	69
1. Definition und Gleichung der Stoßpolaren	69
2. Geometrische Eigenschaften der Stoßpolaren	70
3. Aufbau des Stoßpolarendiagramms.	72
§ 13. Geometrische und thermodynamische Beziehungen beim Verdichtungsstoß	73
1. Abflachung des Druckbergs und Entropiezunahme	73
2. Geometrische Deutung der Grundgleichungen des Verdichtungsstoßes	73

	Sei
3. Spezialisierung für vollkommene Gase	7
4. Berechnung des Ruhedruckverhältnisses $\hat{p}_0 : p_0$	7
5. Druckerhöhung vor einem Staupunkt in Überschallströmung	7
§ 14. Verdichtungsstoß und stetige Verdichtungsströmung an einem axial angeblasenen Drehkegel	8
1. Gegenüberstellung der Überschallströmung um Keil und Kegel	8
2. Zurückführung der Potentialgleichung auf eine gewöhnliche Dif- ferentialgleichung	8
3. Geschwindigkeitsbild der Stromlinien	8
4. Festlegung der Anfangsbedingungen durch den Verdichtungsstoß	8
IV. Abschnitt: Nichtlinearisierte Strömung für allgemeine Rand- bedingungen	8
§ 15. Berechnung von Strömungen durch Iteration oder durch Potenz- entwicklung des Potentials	8
1. Iterationsverfahren nach RAYLEIGH und JANZEN für Unterschall- strömungen	8
2. Iterationsverfahren nach PRANDTL	9
3. Potenzentwicklung beim Durchgang durch die Schallgeschwindig- keit	9
§ 16. Potential und Stromfunktion in der Geschwindigkeitsebene	9
1. Übergang von der Strömungsebene zur Geschwindigkeitsebene	9
2. Linearisierung mittels MOLENBROEK-Transformation	9
3. Linearisierung mittels LEGENDRE-Transformation	9
4. MACHSches Kurvennetz; Grenzlinien der adiabatischen Strömung	9
5. Geometrische Konstruktion neuer Strömungsfelder durch Linear- verbindung	9
§ 17. Anwendung der MOLENBROEK-Transformation auf die Berechnung ebener Strömungen	10
1. Unterschallströmungen bei geradlinig approximierter Adiabate	10
2. Überschallströmungen bei geradlinig approximierter Adiabate	10
3. Potenzentwicklung in der Geschwindigkeitsebene	10
§ 18. Charakteristikenverfahren von PRANDTL und BUSEMANN für ebene Überschallströmungen	10
1. Reziproke Beziehung zwischen MACHSchem Netz und Hauptnetz	10
2. Haupttangentialkurven des Druckbergs.	11
3. Charakteristikendiagramm	11
4. Zusammenhang mit der Charakteristikentheorie der hyperboli- schen Differentialgleichungen	11
5. Näherungskonstruktion ebener Strömungsfelder zu vorgegebenen Anfangsbedingungen	11
6. Beispiele	11
§ 19. Ebene Überschallströmungen mit Verdichtungsstößen	11
1. Ergänzung des Charakteristikenverfahrens durch Hinzunahme des Stoßpolarendiagramms	11
2. Zusammentreffen von Stoßlinien und MACHSchen Linien	11
3. Beispiele	11

4. Auftrieb und Widerstand für Überschallströmungen in strenger Behandlung	128
5. Profilpaare mit verschwindendem Widerstand	131
§ 20. Ebene und räumliche Strömungen mit Wirbeln	132
1. Aerodynamische und thermodynamische Grundgleichungen . . .	132
2. Ebene Strömungen mit Wirbeln	135
3. Achsensymmetrische räumliche Strömungen mit Wirbeln	136
§ 21. Charakteristikenverfahren für achsensymmetrische räumliche Über- schallströmungen	137
1. Geometrische Deutung der Potentialgleichung	137
2. Näherungskonstruktion achsensymmetrischer räumlicher Strö- mungsfelder zu vorgegebenen Anfangsbedingungen	141
3. Beispiel	143
Namen- und Sachverzeichnis	145

Einleitung.

Wenn die Strömungsgeschwindigkeit eines Gases im Vergleich zur Schallgeschwindigkeit klein ist, kann man das Gas als inkompressibel betrachten. Die Aerodynamik fällt bei dieser die mathematische Behandlung sehr vereinfachenden Annahme zusammen mit der Hydrodynamik der volumenbeständigen Flüssigkeiten. Wir werden sehen, daß der durch Vernachlässigung der Kompressibilität des Gases in der Kontinuitätsgleichung hervorgerufene Fehler unter 1 v. H. bleibt, wenn die Strömungsgeschwindigkeit etwa $\frac{1}{7}$ der Schallgeschwindigkeit des ruhenden Gases, also für Luft von Atmosphärendruck und 15°C etwa 50 [m/s] , nicht übersteigt.

Bei größeren Geschwindigkeiten, d. h. bei Zunahme des Verhältnisses der Strömungsgeschwindigkeit zur Schallgeschwindigkeit, wird der Einfluß der Kompressibilität auf den Stromlinienverlauf immer stärker und nach Überschreitung der Schallgeschwindigkeit treten völlig neue Erscheinungen auf. Insbesondere pflanzen sich Störungen dann nicht mehr in das ganze Strömungsfeld, sondern nur in ein sich stromabwärts erstreckendes Teilgebiet aus und zu den stetigen Geschwindigkeits- und Druckänderungen kommen gewisse unstetige Zustandsänderungen, die sog. „Verdichtungsstöße“, hinzu. Der mathematische Grund für dieses wesentlich verschiedene Verhalten der „Unterschall“- und „Überschallströmungen“ liegt darin, daß die Potentialgleichung im Unterschallgebiet ebenso wie bei inkompressiblen Medien vom elliptischen, im Überschallgebiet dagegen vom hyperbolischen Typus ist.

Für die Aerodynamik der „kompressiblen Strömungen“, die man vielfach auch kurz als „Gasdynamik“ bezeichnet, werden im vorliegenden Buch die grundlegenden theoretischen Zusammenhänge behandelt und die für den Praktiker wichtigsten mathematischen Theorien und zeichnerisch-rechnerischen Näherungsmethoden entwickelt¹. Zur Ver-

¹ Als kurze Einführungen in die Gasdynamik seien genannt: ACKERET, J.: Handbuch der Physik, VII, S. 289—342. Berlin 1927 (kurz „ACKERET“). — BUSEMANN, A.: Handbuch der Experimentalphysik, IV 1, S. 341—460. Leipzig 1931. — PRANDTL, L.: Abriß der Strömungslehre, S. 180—218, Braunschweig 1931 (kurz „PRANDTL“) und Z. angew. Math. Mech. 16 (1936), S. 129—142. — DURAND, W. J.: Aerodynamic Theory, III H, S. 209—252. Berlin 1935. — Außerdem finden sich zusammenfassende Berichte in den Atti dei Convegni 5 (1936), R. Accademia d'Italia (kurz „Volkongreß“).

einfachung werden hierbei ähnlich wie in der gewöhnlichen Aerodynamik der inkompressiblen Strömungen einige einschränkende Voraussetzungen getroffen, nämlich:

- (a) Beschränkung auf wirbelfreie Strömungen (Potentialströmungen),
- (b) Vernachlässigung der Reibung des strömenden Gases,
- (c) Vernachlässigung der Schwerkraft und sonstiger äußeren Kräfte,
- (d) Beschränkung auf stationäre Vorgänge,
- (e) Beschränkung auf adiabatische Zustandsänderungen mit umkehrbar eindeutiger Beziehung zwischen Druck und Dichte des strömenden Gases, abgesehen von den unstetigen, mit Entropiezunahme verbundenen Verdichtungsstößen.

In § 20 werden wir die Voraussetzung (a) fallen lassen und einige allgemeine Beziehungen für kompressible Strömungen mit Wirbeln herleiten.

Praktische Anwendung findet die Aerodynamik der kompressiblen Strömungen vor allem in der Ballistik für die Geschößbewegung und in der Flugtechnik für die Bewegung schneller Flugzeuge bzw. Flugzeugteile (Luftschrauben), außerdem auch im Maschinenbau für die Strömungen in Dampfturbinen. Da im Zuge der modernen Entwicklung sowohl die Geschößgeschwindigkeit wie auch die Flugzeuggeschwindigkeiten immer größer geworden ist, hat in gleichem Maße die Wichtigkeit der Aerodynamik der kompressiblen Strömungen für den Ballistiker¹ und den Flugzeugbauer zugenommen.

In erster Linie werden wir ebene und achsensymmetrische räumliche Strömungen behandeln, daneben aber auch allgemeinere räumliche Strömungen, wie sie bei schlanken und spitzen Drehkörpern unter kleinem Anstellwinkel vorkommen.

I. Abschnitt:

Grundbegriffe.

Ausgehend von der EULERSchen Bewegungsgleichung werden die strömungsdynamischen und thermodynamischen Grundbegriffe entwickelt und zur Untersuchung der einfachsten Fälle (eindimensionale Rohrströmung, Quell- und Wirbelströmung) herangezogen. Außerdem wird die Potentialgleichung für das allgemeine räumliche Problem und für die Spezialfälle der achsensymmetrischen räumlichen und der ebenen Strömung hergeleitet.

§ 1. Grundgleichungen der Strömung.

1. EULERSche Bewegungsgleichung. Impulssatz. Wir wenden das Grundgesetz der Mechanik: „Kraft = Masse \times Beschleunigung“ auf ein

¹ CRANZ, C.: Ballistik, Ergänzungsband, S. 1—58. Berlin 1936.

Massenteilchen des strömenden Gases an und erhalten bei Vernachlässigung der Reibung und Schwerkraft gemäß den Voraussetzungen (b) und (c) der Einleitung die EULERSche Bewegungsgleichung¹:

$$\rho \frac{d\mathfrak{w}}{dt} = - \text{grad } p. \quad (1)$$

Hierbei ist \mathfrak{w} der Vektor der Strömungsgeschwindigkeit, t die Zeit, ρ die Dichte und p der Druck.

Bei Beschränkung auf stationäre Vorgänge nach Voraussetzung (d) sind \mathfrak{w} , ρ und p lediglich Funktionen des Ortes. Wir führen rechtwinklig kartesische Ortskoordinaten x, y, z ein und bezeichnen die entsprechenden Geschwindigkeitskomponenten mit w_1, w_2, w_3 (Abb. 1), die Größe der Geschwindigkeit mit w . Der Beschleunigungsvektor eines strömenden Gasteilchens ist dann gegeben durch

$$\frac{d\mathfrak{w}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial x} w_1 + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial y} w_2 + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z} w_3$$

und die Vektorgleichung (1) läßt sich zerlegen in die drei Komponenten-gleichungen

$$\begin{aligned} w_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} + w_2 \frac{\partial w_1}{\partial y} + w_3 \frac{\partial w_1}{\partial z} &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ w_1 \frac{\partial w_2}{\partial x} + w_2 \frac{\partial w_2}{\partial y} + w_3 \frac{\partial w_2}{\partial z} &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ w_1 \frac{\partial w_3}{\partial x} + w_2 \frac{\partial w_3}{\partial y} + w_3 \frac{\partial w_3}{\partial z} &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}$$

Die drei Ausdrücke der linken Seite können in der Form

$$\mathfrak{w} \text{ grad } w_1 \text{ bzw. } \mathfrak{w} \text{ grad } w_2 \text{ bzw. } \mathfrak{w} \text{ grad } w_3$$

geschrieben und daher im Vektor $\mathfrak{w} \cdot \nabla \mathfrak{w}$ zusammengefaßt werden. Mit Berücksichtigung der Identität

$$\mathfrak{w} \cdot \nabla \mathfrak{w} = \text{rot } \mathfrak{w} \times \mathfrak{w} + \text{grad } \frac{w^2}{2}$$

erhält man daher die Vektorgleichung

$$\text{grad } \frac{w^2}{2} + \text{rot } \mathfrak{w} \times \mathfrak{w} = - \frac{1}{\rho} \text{grad } p. \quad (1^*)$$

Ebenso wie in der Aerodynamik der inkompressiblen Medien folgt auf der EULERSchen Gleichung der Impulssatz für stationäre Strömungen¹:

Der Impulsfluß durch eine raumfeste Kontrollfläche ist gleich dem Druckintegral auf der Kontrollfläche.

¹ Vgl. z. B. PRANDTL-TIETJENS: Hydro- und Aeromechanik, Bd. I, S. 101 bzw. S. 221. Berlin 1929.

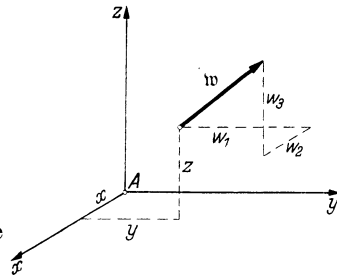


Abb. 1. Komponenten des Geschwindigkeitsvektors.

2. Kontinuitätsgleichung und Bedingung der Wirbelfreiheit. Für ein singularitätenfreies, d. h. keine Quellen und Senken enthaltendes Raumgebiet wird die Konstanz der Masse des strömenden Gases durch die „Kontinuitätsgleichung“

$$\operatorname{div}(\rho \mathfrak{w}) = 0 \quad (2)$$

ausgedrückt, die sich in der gewöhnlichen Aerodynamik mit $\rho = \text{const}$ zu $\operatorname{div} \mathfrak{w} = 0$ spezialisiert.

Die in Voraussetzung (a) der Einleitung geforderte Wirbelfreiheit ist durch die Bedingung

$$\operatorname{rot} \mathfrak{w} = 0 \quad (3)$$

gegeben, welche die Dichte ρ nicht enthält und in gleicher Weise für kompressible und inkompressible Strömungen gilt.

In rechtwinkligen Koordinaten folgt aus Gl. (2) und (3)

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho w_1) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho w_2) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w_3) = 0, \quad (2^*)$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial z} - \frac{\partial w_3}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w_3}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial w_2}{\partial x} = 0 \quad (3^*)$$

3. BERNOULLISCHE GLEICHUNG. Die EULERSche Gleichung (1*) spezialisiert sich mit Gl. (3) zu

$$\operatorname{grad} \frac{w^2}{2} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p, \quad (4)$$

d. h. die Flächen $p = \text{const}$ sind identisch mit den Flächen $w = \text{const}$, der Druck ist also eine Funktion $p(w)$ des Geschwindigkeitsbetrags. Diese Funktion ergibt sich durch Integration der mit Gl. (4) gleichwertigen Differentialgleichung

$$w dw + \frac{dp}{\rho} = 0, \quad (4^*)$$

die als „BERNOULLISCHE Gleichung“ bezeichnet wird und in der Druck und Dichte durch eine als vorgegeben zu betrachtende, je nach der Art des Gases verschiedene „Adiabatengleichung“

$$p = p(\rho), \quad \rho = \rho(p) \quad (5)$$

verknüpft zu denken sind.

Statt in der Differentialform (4*) wird die BERNOULLISCHE Gleichung vielfach auch in der Integralform

$$\frac{1}{2} (\bar{w}^2 - w^2) + \int_p^{\bar{p}} \frac{dp}{\rho(p)} = 0 \quad (4^{**})$$

benutzt, wobei \bar{w}, \bar{p} und ebenso w, p irgend zwei zusammengehörige Werte der Geschwindigkeit und des Druckes sind.

Bei inkompressiblen Medien vereinfacht sich Gl. (4**) mit $\varrho = \text{const}$ zu

$$\frac{\varrho}{2} w^2 + p = \frac{\varrho}{2} \bar{w}^2 + \bar{p},$$

bei kompressiblen Strömungen dagegen läßt sich das „Druckintegral“

$\int \frac{dp}{\varrho(p)}$ erst nach Vorgabe der Adiabatengleichung (5) auswerten.

Eine wichtige Rolle bei allen gasdynamischen Untersuchungen spielt die Größe

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\varrho}}. \quad (6)$$

Sie hat die Dimension einer Geschwindigkeit und ist vermöge Gl. (5) eine Funktion von ϱ bzw. p oder auch mit Rücksicht auf Gl. (4) eine Funktion von w . Auf S. 39 werden wir c als Schallgeschwindigkeit d. h. als Fortpflanzungsgeschwindigkeit kleiner Störungen erkennen und wollen daher c schon jetzt als Schallgeschwindigkeit bezeichnen. Im inkompressiblen Fall ist $\frac{d\varrho}{dp} = 0$ und $c = \infty$, kleine Störungen breiten sich hier momentan auf den ganzen Raum aus.

Die bisherigen Betrachtungen gelten für beliebige Adiabatengleichungen (5). Sie werden in § 2 durch Übergang zur Adiabatengleichung (8) der vollkommenen Gase spezialisiert, wobei Gl. (6) in die bekannte Schallgeschwindigkeitsformel (15) übergeht.

§ 2. Thermodynamische Grundbegriffe.

1. Zustandsgleichung und Adiabatengleichung der vollkommenen Gase. Bei vollkommenen Gasen sind Druck p , Dichte ϱ und absolute Temperatur T verknüpft durch die Zustandsgleichung (7)

$$p = Rg\varrho T; \quad (7)$$

$g = 9,81$ [m/s²] ist die Schwerebeschleunigung, also $g\varrho = \gamma$ [kg/m³] das spezifische Gewicht, R [m⁰] die sog. Gaskonstante.

Die Adiabatengleichung (5) für Zustandsänderungen ohne Wärmeleitung spezialisiert sich bei vollkommenen Gasen zur Poissonschen Gleichung

$$\frac{p}{\bar{p}} = \left(\frac{\varrho}{\bar{\varrho}}\right)^k = \left(\frac{T}{\bar{T}}\right)^{\frac{k}{k-1}}. \quad (8)$$

Hierbei beziehen sich $\bar{p}, \bar{\varrho}, \bar{T}$ auf einen beliebigen Ausgangszustand und $k = c_p/c_v$ ist das Verhältnis der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck bzw. konstantem Volumen. c_p und c_v sind Konstante.

Bei Einführung des mechanischen Wärmeäquivalents

$$J \approx 427 \text{ [mkg/Cal]}$$

besteht die Beziehung

$$R = J (c_p - c_v); \quad (9)$$

für Luft ist im folgenden zugrunde gelegt

$$R = 29,27 \text{ [m}^3\text{]}, \quad k = 1,405.$$

Der erste Hauptsatz der Thermodynamik gibt die Energiebilanz

$$J dQ = J c_v dT + p d(1/g\rho), \quad (10)$$

wobei $1/g\rho$ das Volumen und dQ die zugeführte Wärmemenge in [Cal] für 1 kg Gewicht des Gases ist.

dQ ist kein vollständiges Differential. Man erhält jedoch durch Division mit T unter Berücksichtigung von Gl. (7) das vollständige Differential

$$J dS \equiv J \frac{dQ}{T} = J c_v \frac{dT}{T} + \frac{p}{T} d(1/g\rho) = J c_v \frac{dT}{T} - R \frac{d\rho}{\rho}, \quad (11)$$

woraus sich mit Hilfe von Gl. (7) und (9) das Integral

$$JS \equiv J \int \frac{dQ}{T} = \frac{R}{k-1} \ln \left(\frac{p}{\rho^k} \right) + \text{const} \quad (12)$$

ergibt. Die Funktion S ist eine Zustandsfunktion, d. h. bis auf eine additive Konstante durch zwei der Zustandsveränderlichen p, ρ, T bestimmt und heißt Entropie.

Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik besagt

$$dS \geq 0, \quad (13)$$

d. h. die Entropie eines abgeschlossenen Systems nimmt niemals ab. Bei adiabatischen Zustandsänderungen, die wir bis auf weiteres ausschließlich betrachten, gilt in Gl. (13) infolge Gl. (8), (9) und (12) das Gleichheitszeichen, die Entropie bleibt hier also konstant.

2. $p(w)$ und $c(w)$ für vollkommene Gase. Durch Einsetzen von (8) in die BERNOULLISCHE Gleichung (4**) kommt nach einer einfachen Rechnung die grundlegende Formel von DE SAINT-VENANT und WANTZEL

$$w^2 = \frac{2k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right] = w_{\max}^2 \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]. \quad (14)$$

Dabei bezieht sich hier und im folgenden der Zeiger Null stets auf den Ruhezustand $w = 0$ (Ruhedruck p_0 , Ruhedichte ρ_0 usw.); über w_{\max} vgl. Gl. (16).

Aus Gl. (6), (8) und (7) folgt für die Schallgeschwindigkeit die bekannte Formel

$$c^2 = k \frac{p_0}{\rho_0} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} = k p / \rho = k g R T, \quad (15)$$

aus der sich mittels Gl. (14) die weitere Beziehung

$$c^2 = k \frac{p_0}{\rho_0} - \frac{k-1}{2} w^2 = k g R T_0 - \frac{k-1}{2} w^2 = \frac{k-1}{2} (w_{\max}^2 - w^2) \quad (15^*)$$

ergibt.

$$\frac{c}{c_0} = \left[1 - \frac{k-1}{2} M_0^2 \left(\frac{v^2}{c_0^2} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{k}}$$

Durch Gl. (14) und (15*) sind der Druck p und die örtliche Schallgeschwindigkeit c als Funktionen der Strömungsgeschwindigkeit w dargestellt; p hängt außerdem noch vom Ruhedruck p_0 und der Ruhedichte ϱ_0 ab, c dagegen nur von dem Verhältnis p_0/ϱ_0 oder, was nach Gl. (7) auf dasselbe hinausläuft, von der Ruhetemperatur T_0 .

Die Strömungsgeschwindigkeit w kann nach Gl. (14) von $w = 0$ bei $p = p_0$ an nicht unbegrenzt, sondern nur bis zur Höchstgeschwindigkeit

$$w_{\max} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_0}{\varrho_0}} \quad (16)$$

anwachsen, die für $p = 0$, also bei Ausströmen ins Vakuum, erreicht wird.

Die Schallgeschwindigkeit c hat nach Gl. (15*) im Ruhezustand $w = 0$ den Höchstwert

$$c_0 = c_{\max} = \sqrt{k \frac{p_0}{\varrho_0}} = \sqrt{kgRT_0} = \sqrt{\frac{k-1}{2}} w_{\max} \quad (17)$$

und sinkt mit zunehmendem w bis auf $c = 0$ für $w = w_{\max}$.

Für die sog. „kritische Geschwindigkeit“

$$w^* = c^* = \sqrt{\frac{2k}{k+1} \frac{p_0}{\varrho_0}} = \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} w_{\max} = \sqrt{\frac{2}{k+1}} c_0 \quad (18)$$

sind nach Gl. (15*) Strömungs- und Schallgeschwindigkeit einander gleich; Druck, Dichte und Temperatur nehmen die „kritischen“ Werte an

$$p^* = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} p_0, \quad \varrho^* = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} \varrho_0, \quad T^* = \frac{2}{k+1} T_0. \quad (19)$$

Man beachte, daß c^* und w_{\max} lediglich vom Verhältnis p_0/ϱ_0 , d. h. lediglich von der Ruhetemperatur T_0 abhängen. Für Luft ($k = 1,405$) mit $T_0 = 288^\circ$ hat man

$$w_{\max} = 757 \text{ [m/s]}, \quad \frac{w_{\max}}{c^*} = 2,437.$$

3. MACHSche Zahl. Die Strömungsgeschwindigkeit w läßt sich dimensionslos machen durch Bezug entweder auf die örtliche Schallgeschwindigkeit c oder auf die kritische Geschwindigkeit c^* . Wir benutzen hierbei die Bezeichnungen

$$M = w/c, \quad M^* = w/c^* \quad (20)$$

und nennen M nach E. MACH (vgl. S. 34, Fußnote) die MACHSche Zahl der Strömung.

Da c^* konstant ist, c sich aber mit w ändert, ist M^* zu w proportional, M dagegen nicht. Nach Gl. (15*) und (18) sind w , M und M^* verknüpft durch

$$\left. \begin{aligned} M^{*2} &= \frac{w^2}{c^{*2}} = \frac{(k+1) M^2}{(k-1) M^2 + 2}, \\ M^2 &= \frac{2 M^{*2}}{(k+1) - (k-1) M^{*2}} = \frac{2 w^2}{(k+1) c^{*2} - (k-1) w^2}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Mit Hilfe dieser Beziehungen folgt aus Gl. (14)

$$\left. \begin{aligned} \frac{p_0}{p} &= \left[\frac{k-1}{2} M^2 + 1 \right]^{\frac{k}{k-1}} = \left[\frac{k+1}{(k+1) - (k-1) M^{*2}} \right]^{\frac{k}{k-1}}, \\ M^{*2} &= \frac{k+1}{k-1} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right], \quad M^2 = \frac{2}{k-1} \left[\left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]. \end{aligned} \right\} (22)$$

Vgl. zu Gl. (21) und (22) die Zahlentafel 1 und 2 (S. 11 und 57).

Die kritische Geschwindigkeit trennt die Bereiche der Unter- und Überschallgeschwindigkeiten. Man hat

$$\text{im Unterschall: } 0 \leq w < c^*, \quad 0 \leq M < 1, \quad 0 \leq M^* < 1;$$

$$\text{im Überschall: } c^* < w \leq w_{\max}, \quad 1 < M \leq \infty, \quad 1 < M^* \leq \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}.$$

In der gewöhnlichen Aerodynamik der inkompressiblen Strömungen ist $c = \infty$ (vgl. S. 5) und demnach $M = M^* = 0$; die inkompressiblen Strömungen erscheinen dadurch als Grenzfall der kompressiblen Unterschallströmungen.

4. Ähnlichkeitsbetrachtung. Die grundlegende Bedeutung der MACH'schen Zahl zeigt sich in folgender Ähnlichkeitsbetrachtung:

Vorgegeben sei eine bestimmte Gasströmung, d. h. ein Lösungssystem der Grundgleichungen (1) bis (3). Wir gehen hierauf zu einem geometrisch ähnlichen Modell über, indem wir alle Abmessungen mit einem konstanten Faktor m_l verändern. Es entsteht nun die Frage: Lassen sich auch für die Geschwindigkeit w , den Druck p und die Dichte ρ konstante Faktoren m_w , m_p und m_ρ so wählen, daß die Grundgleichungen (1) bis (3) erfüllt bleiben und demnach ein zu der vorgegebenen Strömung ähnliches Strombild entsteht?

Die Gl. (2), (3) liefern für die konstanten Faktoren keine einschränkenden Bedingungen, aus Gl. (1*) dagegen erhält man die Forderung

$$m_w^2 = m_p / m_\rho, \quad m_w = \sqrt{\frac{m_p}{m_\rho}}.$$

Da nach Gl. (6) auch die Schallgeschwindigkeit c sich mit dem Faktor $\sqrt{\frac{m_p}{m_\rho}} = m_w$ multipliziert, hat man als Bedingung ähnlicher Strömungen die Übereinstimmung der MACH'schen Zahlen $M = \frac{w}{c}$ für je zwei entsprechende Punkte der Ausgangsströmung und der Modellströmung.

Ähnlichkeitsbetrachtungen dieser Art¹ sind für das Meßwesen unentbehrlich, da sie Messungen am natürlichen Gegenstand durch Modellmessungen zu ersetzen gestatten und die Anzahl der erforderlichen Mes-

¹ Vgl. z. B. ACKERET: S. 294—296.

sungen auf ein Mindestmaß einschränken. Außerdem führen sie zu einer sachgemäßen Darstellung der Ergebnisse in dimensionslosen Veränderlichen.

5. Geometrische Darstellung der Funktion $p(w)$. Die Kurve $p = p(w)$ (Abb. 2) beginnt nach Gl. (14) auf der p -Achse mit dem Ruhedruck p_0 und fällt ständig bis auf $p = 0$ für die Maximalgeschwindigkeit w_{\max} .

Nach Gl. (4*) ist

$$\operatorname{tg} \tau = -\frac{dp}{dw} = w \varrho, \quad (23)$$

d. h.: Die Neigung der $p(w)$ -Kurve gibt die Stromdichte $w \varrho$ an.

Die Differentiation von Gl. (23) liefert mit Berücksichtigung von Gl. (6) und (23)

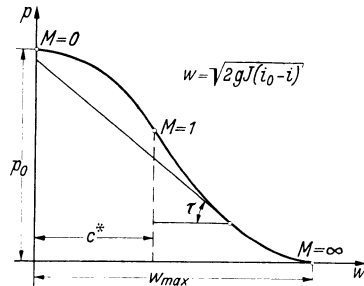


Abb. 2. $p(w)$ -Kurve.

$$\frac{d \operatorname{tg} \tau}{dw} = \varrho + w \frac{d \varrho}{dp} \frac{dp}{dw} = \varrho \left(1 - \frac{w^2}{c^2} \right) = \varrho (1 - M^2) \left. \begin{array}{l} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} < 1 \\ = 1 \\ > 1 \end{array} \quad (24)$$

Daraus folgt für beliebige Adiabatengleichungen (5):

Im Unterschallbereich $0 \leq w < c^*$ weist die $p(w)$ -Kurve mit der hohlen Seite nach unten, im Überschallbereich $c^* < w \leq w_{\max}$ nach oben; der Übergangspunkt $w = c^*$ ist ein Wendepunkt.

Bei ebenen Strömungen liegen alle Geschwindigkeitsvektoren w in derselben Ebene, d. h. bei geeigneter Stellung des Koordinatensystems ist durchwegs $w_3 = 0$. In der w_1, w_2 -Ebene, die wir Geschwindigkeitsebene oder auch Hodographenebene nennen wollen, hat man als Unterschallbereich ($M < 1$) die Kreisfläche $\sqrt{w_1^2 + w_2^2} < c^*$ und als Überschallbereich ($M > 1$) das Ringgebiet $c^* < \sqrt{w_1^2 + w_2^2} \leq w_{\max}$ (vgl. Grundriß von Abb. 3). Trägt man über jedem Punkt w_1, w_2 des

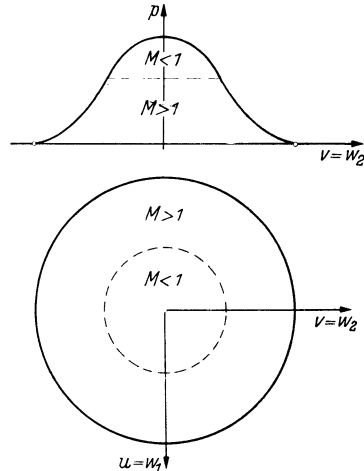


Abb. 3. Druckberg für ebene Strömungen.

Unter- und Überschallbereichs der Geschwindigkeitsebene gemäß Gl. (14) den Druck p auf, so entsteht der „Druckberg“, d. h. eine Drehfläche mit der $p(w)$ -Kurve als Meridian und der p -Achse als Drehachse (Abb. 3). Der Breitenkreis $w = c^*$ trennt die positiv gekrümmte

Bergkuppe des Unterschalls von dem negativ gekrümmten Bergfuß des Überschalls.

6. Druckintegral und Wärmeinhalt für vollkommene Gase. Der Wärmeinhalt (Enthalpie) für 1 kg Gewicht eines vollkommenen Gases wird durch

$$i = c_p T \quad (25)$$

definiert. Mit Hilfe von Gl. (7), (9) und (8) hat man

$$\begin{aligned} J di &= J c_p dT = J \frac{c_p}{gR} \left(\frac{dp}{\varrho} - \frac{p}{\varrho^2} d\varrho \right) = \frac{c_p}{c_p - c_v} \frac{dp}{g\varrho} \left(1 - \frac{p}{\varrho} \frac{d\varrho}{dp} \right) \\ &= \frac{k}{k-1} \frac{dp}{g\varrho} \left(1 - \frac{1}{k} \right) = \frac{dp}{g\varrho}, \end{aligned}$$

d. h. bei adiabatischen Zustandsänderungen sind der Wärmeinhalt i und das in der BERNOULLISCHEN Gleichung (4**) vorkommende Druckintegral durch die einfache Beziehung

$$J (i - i_0) = \frac{1}{g} \int_{p_0}^p \frac{dp}{\varrho} \quad (26)$$

verknüpft. Die BERNOULLISCHE Gleichung geht dadurch in den Energiesatz über

$$\frac{w^2}{2g} + J (i - i_0) = 0. \quad (27)$$

Nach Gl. (27) kann man im p, w -Diagramm (vgl. Abb. 2) die w -Achse auch nach dem Wärmeinhalt i eichen, wodurch das p, w -Diagramm zum p, i -Zustandsdiagramm wird.

§ 3. Stromlinienverlauf bei Unter- und Überschallgeschwindigkeit.

1. Stromdichte. Maßgebend für den im folgenden zu untersuchenden Stromlinienverlauf ist die Abhängigkeit der Stromdichte ϱw vom Druck p bzw. der Strömungsgeschwindigkeit w . Für die durch Division mit $\varrho^* w^*$ dimensionslos gemachte Stromdichte Θ ergeben sich aus Gl. (8), (22) und (19) die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} \Theta &= \frac{\varrho w}{\varrho^* w^*} = \sqrt{\frac{\left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}}{\frac{k-1}{2}} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{k}} \sqrt{1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}} } \\ &= \sqrt{\frac{\left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}}{\left(\frac{k-1}{2} M^2 + 1\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}}} \cdot \frac{M}{\left(\frac{k-1}{2} M^2 + 1\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}}, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

die für Luft ($k = 1,405$) graphisch in Abb. 4 und zahlenmäßig in Zahlentafel I dargestellt wird; vgl. hierzu auch die Beziehung (21) zwischen M und M^* .

Zahlentafel 1 für Luft ($k = 1,405$).

Stromdichte Θ bei Unter- und Überschallgeschwindigkeit.

Unterschallbereich:

Überschallbereich:

$\frac{p}{p_0}$	M	M^*	$\Theta = \frac{\rho w}{\rho^* w^*}$	$\frac{p}{p_0}$	M	M^*	$\Theta = \frac{\rho w}{\rho^* w^*}$
1,000	0,000	0,000	0,000	$\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}$ = 0,527	1,000	1,000	1,000
0,998	0,054	0,059	0,094	0,500	1,045	1,073	0,998
0,996	0,077	0,083	0,130	0,450	1,131	1,105	0,987
0,990	0,120	0,131	0,212	0,400	1,221	1,174	0,964
0,980	0,170	0,186	0,289	0,350	1,319	1,245	0,930
0,970	0,208	0,228	0,351	0,300	1,430	1,319	0,883
0,960	0,241	0,264	0,404	0,250	1,559	1,398	0,826
0,950	0,271	0,295	0,451	0,200	1,708	1,484	0,745
0,940	0,298	0,324	0,489	0,150	1,898	1,581	0,646
0,920	0,347	0,376	0,558	0,100	2,157	1,698	0,520
0,900	0,390	0,422	0,617	0,080	2,304	1,753	0,458
0,890	0,367	0,443	0,642	0,060	2,484	1,816	0,387
0,860	0,468	0,503	0,712	0,050	2,602	1,853	0,347
0,830	0,522	0,557	0,770	0,040	2,748	1,895	0,302
0,800	0,573	0,608	0,817	0,020	3,211	2,004	0,195
0,760	0,638	0,672	0,872	0,010	3,699	2,089	0,124
0,750	0,653	0,687	0,883	0,008	3,863	2,112	0,108
0,700	0,731	0,762	0,932	0,006	4,079	2,140	0,085
0,650	0,808	0,833	0,966	0,004	4,394	2,168	0,067
0,600	0,885	0,902	0,988	0,002	4,967	2,224	0,042
$\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}$ = 0,527	1,000	1,000	1,000	0,000	∞	$\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$ = 2,437	0,000

Nach Gl. (23) und (24) ist $\frac{d\Theta}{dw} = 0$ für $M = 1$ und $\frac{d\Theta}{dw} \geq 0$ für $M \leq 1$. Dementsprechend wächst die Stromdichte Θ im Unterschallbereich von $\Theta = 0$ bis $\Theta_{\max} = 1$ und sinkt im Überschallbereich von $\Theta_{\max} = 1$ wieder bis auf $\Theta = 0$; zu jedem Zwischenwert der Stromdichte gehören zwei Geschwindigkeiten, nämlich eine Unterschall- und eine Überschallgeschwindigkeit.

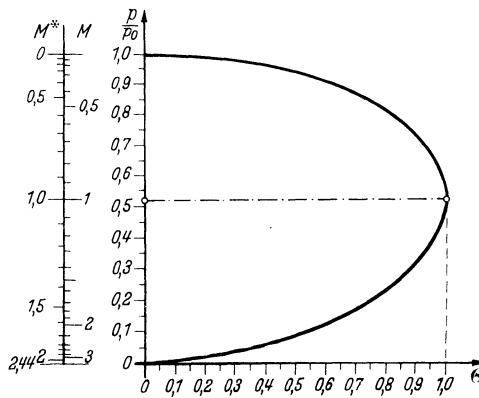


Abb. 4. Stromdichte Θ als Funktion von p/p_0 , M bzw. M^* für Luft ($k = 1,405$).

2. Eindimensionale Strömung. Wir betrachten die Strömung durch eine Düse oder eine Röhre mit geradliniger Achse und machen hierbei die für viele Zwecke ausreichende vereinfachende Annahme, daß die Abweichung der Geschwindigkeitsrichtung von der Achse vernachlässigt werden darf und daß in jeder zur Achse senkrechten Querschnittsebene die Größe der Geschwindigkeit, also auch Druck, Dichte usw. konstant sind. Bei dieser sog. „hydraulischen Behandlung“ der Strömung wird das Problem eindimensional; an Stelle des Geschwindigkeitsvektors \mathbf{w} geht lediglich die Größe w der Geschwindigkeit in die Untersuchung ein. Über die Abweichungen der eindimensionalen Näherung vom tatsächlichen Strömungsverlauf vgl. S. 92 und 118.

Bei stationärer Strömung ist für alle Querschnitte die Durchflußmasse Q in der Sekunde konstant, die veränderliche Querschnittsfläche f und Q, ρ, w sind also verknüpft durch die Kontinuitätsgleichung

$$Q = f \rho w = \text{const.} \quad (29)$$


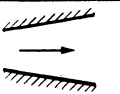
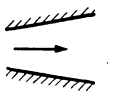
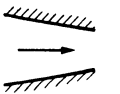
w	$M < 1$	$M > 1$
nimmt zu		
nimmt ab		

Abb. 5. Geschwindigkeitsverlauf bei Unter- und Überschallgeschwindigkeit.

Für inkompressible Strömungen ($\rho = \text{const}$) folgt aus Gl. (29) die triviale Tatsache, daß die Geschwindigkeit w mit wachsender Querschnittsfläche abnimmt und umgekehrt. Bei kompressiblen Strömungen (ρ veränderlich) ist der Zusammenhang weniger ein-

fach. Hier ergibt sich durch logarithmische Differentiation von Gl. (29)

$$\frac{df}{f} + \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dw}{w} = 0$$

und mit Hilfe von Gl. (4*) und (6) erhält man die Gleichung von HUGONIO

$$\frac{df}{f} = \frac{dw}{w} \left[\left(\frac{w}{c} \right)^2 - 1 \right] = \frac{dw}{w} (M^2 - 1). \quad (30)$$

Sie besagt (Abb. 5):

a) Im Unterschallbereich ($M < 1$) nimmt ebenso wie im Grenzfall der inkompressiblen Strömung die Geschwindigkeit bei sich erweiterndem Querschnitt ab und bei sich verengendem Querschnitt zu.

b) Im Überschallbereich ($M > 1$) entspricht umgekehrt einer Querschnittserweiterung eine Geschwindigkeitszunahme und einer Verengung eine Geschwindigkeitsabnahme.

c) Die kritische Geschwindigkeit ($M = 1$) kann nur für $df = 0$, d. h. für extreme und zwar wegen a) und b) nur für kleinste Querschnittsflächen erreicht werden. Umgekehrt folgt aus $df = 0$ entweder $M = 1$ oder $dw = 0$, d. h. im engsten Querschnitt wird entweder die kritische

Geschwindigkeit erreicht oder die Geschwindigkeit hat einen Extremwert.

Die Änderung der Geschwindigkeit und des Druckes für die einzelnen Querschnitte einer vorgegebenen Düse oder Röhre ist durch die mit Gl. (29) gleichwertige Bedingung

$$f\Theta = \bar{f}\bar{\Theta} = \text{const} \tag{31}$$

bestimmt. Wenn für einen Anfangsquerschnitt \bar{f} die Stromdichte $\bar{\Theta}$ vorgegeben wird, liefert zu jedem weiteren Querschnitt f Gl. (31) die Stromdichte Θ und Gl. (28) bzw. Abb. 4 oder Zahlentafel 1 die MACHsche Zahl M und den Druck p/p_0 .

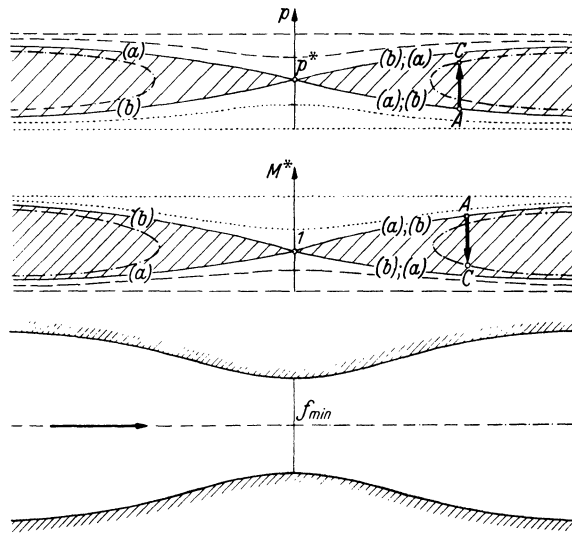


Abb. 6. Geschwindigkeits- und Druckverlauf in einer Lavaldüse.

3. Anwendung auf Lavaldüsen. Von besonderer praktischer Wichtigkeit sind die nach dem Schweden DE LAVAL benannten Lavaldüsen, bei denen sich der Querschnitt zuerst verengt und dann wieder erweitert. Vorbehaltlich einer strengen zweidimensionalen Behandlung (vgl. S. 92 und 118) wenden wir hier die hydraulische Betrachtungsweise der Ziff. 2 S. 12 auf die Lavaldüsen an (Abb. 6):

Die maximale Durchflußmasse Q_{max} ergibt sich offenbar für $\Theta = \Theta_{max} = 1$ bei $f = f_{min}$, also für die Durchströmung des engsten Querschnitts mit der kritischen Geschwindigkeit $w = c^* (M = 1)$. Dabei sind die beiden in Abb. 6 durch die Kurven (a) und (b) dargestellten Strömungsverläufe möglich: Bei (a) geht die Strömung von hohem Druck im Unterschall zu kleinem Druck im Überschall oder wieder zu hohem Druck im

Unterschall, bei (b) von kleinem Druck im Überschall zu hohem Druck im Unterschall oder wieder zu kleinem Druck im Überschall.

Bei kleinerer Durchflußmenge $Q < Q_{\max}$ wird der engste Querschnitt und die ganze Düse entweder mit Unter- oder mit Überschallgeschwindigkeit durchströmt; auf den ersten Fall beziehen sich die gestrichelten, auf den zweiten Fall die punktierten Kurven in Abb. 6. Als Grenzfälle für $Q = 0$ hat man im Unterschallbereich die Ruhe (— gestrichelte Geraden in Abb. 6 —) und im Überschallbereich die Strömung mit Maximalgeschwindigkeit bei verschwindendem Druck (— punktierte Geraden in Abb. 6 —).

Bei größerer Durchflußmenge $Q > Q_{\max}$ ist eine adiabatische Durchströmung der ganzen Düse unmöglich. Hier tritt $\Theta_{\max} = 1$ nicht am engsten Querschnitt, sondern rechts oder links von ihm ein und für M und p ergeben sich Kurven in dem schraffierten Bereich von Abb. 6. Diesen in Abb. 6 strichpunktierten Kurven entspricht eine an dem zu $\Theta = 1$ gehörenden Querschnitt umkehrende Strömung, die sich natürlich physikalisch nicht realisieren läßt. Wie sich später zeigen wird (vgl. S. 68), können durch Verdichtungsstöße Teile der in Abb. 6 strichpunktierten Kurven physikalische Realität erhalten.

4. Stromlinienverlauf der 2- und 3-dimensionalen Strömung. Im dreidimensionalen Fall der allgemeinen räumlichen Strömung betrachten wir die durch eine kleine geschlossene Kurve hindurchgehenden Stromlinien. Sie erzeugen eine im allgemeinen gekrümmte Stromröhre, welche unter der Voraussetzung stationärer Strömung zeitlich unveränderlich ist und das im Innern strömende Gas wie eine feste Röhre einschließt. Auf hinreichend enge Stromröhren kann man die hydraulischen eindimensionalen Ergebnisse unmittelbar übertragen: Einer Verengung (bzw. Erweiterung) einer Stromröhre entspricht im Unterschall eine Zunahme (bzw. Abnahme) und im Überschall eine Abnahme (bzw. Zunahme) der Strömungsgeschwindigkeit, wie dies in Abb. 5 schematisch dargestellt ist; in einem kleinsten Querschnitt wird entweder die kritische Geschwindigkeit erreicht oder die Geschwindigkeit hat einen Extremwert.

Im zweidimensionalen Fall der ebenen Strömung gelten die analogen Aussagen, wenn man an Stelle der Stromröhren die von benachbarten Stromlinien begrenzten Stromstreifen betrachtet.

Man beachte, daß bei den adiabatischen reversiblen Zustandsänderungen jede Strömung auch in umgekehrter Richtung durchlaufen werden kann; denn die Grundgleichungen (1*), (2) und (3) bleiben erfüllt, wenn man durchwegs w durch $(-w)$ ersetzt. Bei den später hinzukommenden Verdichtungsstößen (vgl. § 11) ist eine solche Umkehrung nicht mehr möglich.

Um den Einfluß der Kompressibilität bei kleinen MACHschen Zahlen

abzuschätzen, entwickeln wir die erste Gl. (22) nach Potenzen von M^2 und erhalten bei gleichzeitiger Berücksichtigung von Gl. (8)

$$\frac{p}{p_0} = 1 - \frac{k}{2} M^2 + \dots, \quad \frac{\rho}{\rho_0} = 1 - \frac{M^2}{2} + \dots$$

Hiernach gibt, wenn man die Entwicklung mit M^2 abbricht, $\frac{M^2}{2}$ die relative Dichteänderung oder mit anderen Worten den Fehler, den man in der gewöhnlichen Aerodynamik bei der Kontinuitätsgleichung durch die Annahme konstanter Dichte begeht. Der Fehler bleibt unter 1 vH für

$$\frac{M^2}{2} < 0,01, \text{ also } M < 0,14,$$

d. h. für Luft unter Atmosphärendruck und 15°C ($c = 340 \text{ [m/s]}$) etwa bis zur Geschwindigkeit $w = 48 \text{ [m/s]}$, und wächst bis zu 4 vH bei Geschwindigkeiten von rd. 100 [m/s] .

5. Beispiel: Quelle, Senke und Wirbel. Zur Anwendung betrachten wir die einfachsten Beispiele kompressibler Strömungen:

a) *Quelle und Senke in räumlicher und ebener Strömung* (Abb. 7).

Die Stromlinien sollen geradlinig sein und ein Bündel bzw. Büschel mit dem Scheitel A bilden. Außerdem soll die Geschwindigkeit w auf jeder Kugel bzw. jedem Kreis um A konstant sein. Bei Einführung eines Polarkoordinatensystems mit dem Nullpunkt A sind dann w, ρ, p usw. lediglich Funktionen des Radiusvektors r und die Bedingung Gl. (3) der Wirbelfreiheit ist von vornherein erfüllt. Die Kontinuitätsgleichung (2) spezialisiert sich beim räumlichen bzw. ebenen Problem zu

$$\frac{d}{dr} (\rho w) = -2 \frac{\rho w}{r} \text{ bzw. } = -\frac{\rho w}{r}.$$

Die Integration liefert

$$r^2 = \frac{\text{const}}{\rho w} \text{ bzw. } r = \frac{\text{const}}{\rho w},$$

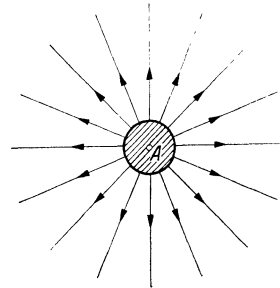


Abb. 7. Quelle (Senke) in räumlicher oder ebener Strömung.

was sich auch unmittelbar aus der Forderung konstanter Durchflußmenge durch die konzentrischen Kugeln bzw. Kreise um den Nullpunkt ergibt. Mit Hilfe von Gl. (28) kommt

$$r^v = C \cdot \frac{\sqrt{\left(\frac{k-1}{2} M^2 + 1\right)^{\frac{k+1}{k-1}}}}{M} \text{ mit } \begin{cases} v = 2 \text{ beim räumlichen Problem,} \\ v = 1 \text{ beim ebenen Problem.} \end{cases} \quad (32)$$

Nach S. 11 hat der Ausdruck auf der rechten Seite und infolgedessen auch r ein Minimum für $M = 1$, also

$$r_{\min}^v = C \sqrt{\left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}},$$

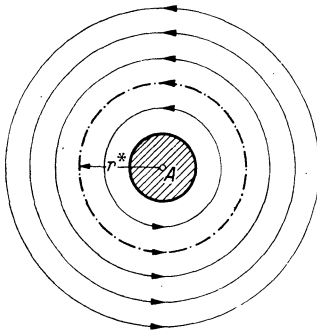
so daß Gl. (32) übergeht in

$$r^v = r_{\min}^v \frac{\sqrt{\left(\frac{k-1}{k+1} M^2 + \frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}}}{M} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} v=2 \text{ beim räumlichen Problem,} \\ v=1 \text{ beim ebenen Problem.} \end{cases} \quad (33)$$

Die durch Gl. (33) gegebene „Quellströmung“ oder „Senkenströmung“ existiert nur außerhalb der Kugel bzw. des Kreises $r = r_{\min}$. An Stelle der punktförmigen Quelle und Senke der inkompressiblen Strömung tritt hier also ein kugel- bzw. kreisförmiger Kern, in dessen Inneres die Strömung nicht fortgesetzt werden kann (Abb. 7). Am Kern wird die kritische Geschwindigkeit ($M=1$) erreicht und im ganzen Strömungsfeld außerhalb des Kerns hat man entweder ständig abnehmende Geschwindigkeiten bis zu $M=0$ für $r = \infty$ (reine Unterschallströmung) oder ständig zunehmende Geschwindigkeiten bis zu $M = \infty$ für $r = \infty$ (reine Überschallströmung). Man findet hierbei das in Abb. 5 dargestellte typische Verhalten der Stromlinien bei Unter- und Überschallströmung bestätigt und überzeugt sich leicht, daß ein Durchgang durch die Schallgeschwindigkeit mit Abb. 5 unverträglich wäre.

Ausschnitte aus Quell- und Senkenströmungen kommen in konische Röhren und Düsen vor (vgl. Abb. 78, 79).

b) *Wirbel in ebener Strömung* (Abb. 8). Die Stromlinien sollen konzentrische Kreise mit dem Mittelpunkt A sein und die Geschwindigkeit w wieder nur von r abhängen. Dann ist die Kontinuitätsgleichung (2) von vornherein erfüllt und die Bedingung Gl. (3) der Wirbelfreiheit spezialisiert sich genau so wie im inkompressiblen Fall zu



$$r = \frac{\text{const}}{w} = \frac{\text{const}}{M^*}.$$

Mit Hilfe von Gl. (21) kommt

$$r^2 = C \frac{(k-1) M^2 + 2}{(k+1) M^2}. \quad (34)$$

Abb. 8. Wirbel in ebener Strömung.

Für $M = \infty$ hat der Ausdruck auf der rechten Seite ein Minimum, also

$$r_{\min}^2 = C \frac{k-1}{k+1},$$

so daß Gl. (34) übergeht in

$$r^2 = r_{\min}^2 \left(1 + \frac{2}{(k-1) M^2} \right). \quad (35)$$

Auch die durch Gl. (35) gegebene ebene „Wirbelströmung“ existiert nur außerhalb des vom Kreis $r = r_{\min}$ begrenzten Kerns (Abb. 8). Die Geschwindigkeit nimmt mit zunehmendem Radius fortgesetzt ab und

$M = \infty$ am Kern bei $r = r_{\min}$ bis zu $M = 0$ bei $r = \infty$. Bei

$$r^* = r_{\min} \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$$

wird die kritische Geschwindigkeit ($M=1$) durchschritten, das Strömungsfeld zerfällt demnach in den dem Kern anliegenden Überschallbereich $r_{\min} \leq r < r^*$ und den sich ins Unendliche erstreckenden Unterschallbereich $r > r^*$.

Für jeden von zwei benachbarten Stromlinien begrenzten Stromstreifen ist in Übereinstimmung mit S. 12 die Querschnittsfläche und die Geschwindigkeit konstant, die HUGONIOT-Gleichung (30) wird also durch $df = dw = 0$ erfüllt.

§ 4. Potentialgleichung.

1. Potentialgleichung der allgemeinen räumlichen Strömung. Aus der Bedingung Gl. (3) der Wirbelfreiheit folgt die Existenz einer nur vom Ort abhängigen Potentialfunktion $\varphi(x, y, z)$, aus der man mittels Gradientbildung den Geschwindigkeitsvektor

$$w = \text{grad } \varphi; \quad w_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad w_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (36)$$

erhält. Infolgedessen bezeichnet man bekanntlich die wirbelfreien Strömungen auch als Potentialströmungen.

Aus Gl. (2) und (36) folgt

$$0 = (\rho w_1)_x + (\rho w_2)_y + (\rho w_3)_z = \rho (\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}) + \rho_x \varphi_x + \rho_y \varphi_y + \rho_z \varphi_z, \quad (37)$$

wobei die unteren Zeiger x, y, z partielle Differentiation bedeuten. Aus Gl. (4*) und (6) erhält man

$$d\rho = \frac{d\rho}{d\rho} d\rho = -\frac{\rho}{c^2} w dw = -\frac{\rho}{c^2} d\left(\frac{w^2}{2}\right),$$

also

$$\left. \begin{aligned} \rho_x &= -\frac{\rho}{2c^2} (\varphi_x^{\ddot{}} + \varphi_y^{\ddot{}} + \varphi_z^{\ddot{}})_x, & \rho_y &= -\frac{\rho}{2c^2} (\varphi_x^{\ddot{}} + \varphi_y^{\ddot{}} + \varphi_z^{\ddot{}})_y, \\ \rho_z &= -\frac{\rho}{2c^2} (\varphi_x^{\ddot{}} + \varphi_y^{\ddot{}} + \varphi_z^{\ddot{}})_z. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Durch Einsetzen von Gl. (38) in Gl. (37) ergibt sich die Potentialgleichung

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{xx} \left(1 - \frac{\varphi_x^{\ddot{}}}{c^2}\right) + \varphi_{yy} \left(1 - \frac{\varphi_y^{\ddot{}}}{c^2}\right) + \varphi_{zz} \left(1 - \frac{\varphi_z^{\ddot{}}}{c^2}\right) \\ - 2 \varphi_{yz} \frac{\varphi_y \varphi_z}{c^2} - 2 \varphi_{zx} \frac{\varphi_z \varphi_x}{c^2} - 2 \varphi_{xy} \frac{\varphi_x \varphi_y}{c^2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Man beachte, daß c^2 in der Potentialgleichung (39) nicht konstant, sondern nach S. 5 eine Funktion von $w^2 = \varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2$ ist; insbeson-

dere gilt nach Gl. (15*) für vollkommene Gase

$$c^2 = \frac{k-1}{2} (w_{\max}^2 - \varphi_x^2 - \varphi_y^2 - \varphi_z^2)$$

Da die Ableitungen von φ in nichtlinearen Verbindungen wie z. B. $\varphi_{xx} \frac{\varphi_x^2}{c^2}$ vorkommen, ist die Potentialgleichung (39) eine nichtlineare Differentialgleichung. Im Grenzfall $c = \infty$ der inkompressiblen Strömung

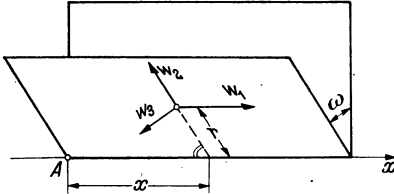


Abb. 9. Zylinderkoordinaten.

spezialisiert sie sich zur linearen Potentialgleichung

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0$$

der gewöhnlichen Aerodynamik.

Zuweilen werden wir die Potentialgleichung zweckmäßiger in Zylinderkoordinaten x, r, ω (Abb. 9)

schreiben. An Stelle von Gl. (36) und (37) hat man dann

$$w_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad w_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad w_3 = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \omega}, \quad (36^*)$$

$$(\rho w_1)_x + \frac{1}{r} (r \rho w_2)_r + \frac{1}{r} (\rho w_3)_\omega = 0 \quad (37^*)$$

und an Stelle von Gl. (38) kommt

$$\left. \begin{aligned} \rho_x &= -\frac{\rho}{2c^2} \left(\varphi_x^2 + \varphi_r^2 + \frac{1}{r^2} \varphi_\omega^2 \right)_x, & \rho_r &= -\frac{\rho}{2c^2} \left(\varphi_x^2 + \varphi_r^2 + \frac{1}{r^2} \varphi_\omega^2 \right)_r, \\ \rho_\omega &= -\frac{\rho}{2c^2} \left(\varphi_x^2 + \varphi_r^2 + \frac{1}{r^2} \varphi_\omega^2 \right)_\omega, \end{aligned} \right\} (38^*)$$

woraus sich durch Einsetzen in Gl. (37*) die Potentialgleichung in Zylinderkoordinaten

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{xx} \left(1 - \frac{\varphi_x^2}{c^2} \right) + \varphi_{rr} \left(1 - \frac{\varphi_r^2}{c^2} \right) + \frac{\varphi_{\omega\omega}}{r^2} \left(1 - \frac{\varphi_\omega^2}{r^2 c^2} \right) \\ - 2 \varphi_{r\omega} \frac{\varphi_r \varphi_\omega}{r^2 c^2} - 2 \varphi_{\omega x} \frac{\varphi_\omega \varphi_x}{r^2 c^2} - 2 \varphi_{xr} \frac{\varphi_x \varphi_r}{c^2} + \frac{\varphi_r}{r} \left(1 + \frac{\varphi_\omega^2}{r^2 c^2} \right) = 0 \end{aligned} \right\} (39^*)$$

ergibt.

2. Potential und Stromfunktion der achsensymmetrischen räumlichen Strömung. Der wichtigste Sonderfall der räumlichen Strömung ist die achsensymmetrische räumliche Strömung, wie sie z. B. bei axial angeblasenen Drehkörpern vorkommt. Wir benutzen hier die soeben eingeführten Zylinderkoordinaten und lassen die x -Achse mit der Symmetrieachse der Strömung zusammenfallen. Der Geschwindigkeitsvektor w hängt dann nicht mehr vom Drehwinkel ω , sondern lediglich von x, r ab und liegt stets in einer Meridianebene (= Ebene durch die x -Achse). Infolgedessen ist die Strömung in allen Meridianebenen die

selbe und braucht nur in einer festen Meridianebene untersucht zu werden.

Wir benutzen bei der achsensymmetrischen Strömung stets die Bezeichnungen $w_1 = u$, $w_2 = v$. Da die dritte Komponente w_3 identisch verschwindet und u, v sowie φ Funktionen lediglich von x, r sind, spezialisiert sich Gl. (39*) zu

$$\varphi_{xx} \left(1 - \frac{\varphi_x^2}{c^2}\right) + \varphi_{rr} \left(1 - \frac{\varphi_r^2}{c^2}\right) - 2 \varphi_{xr} \frac{\varphi_x \varphi_r}{c^2} + \frac{\varphi_r}{r} = 0. \quad (40)$$

Ebenso wie Gl. (39) und (39*) ist auch Gl. (40) eine nichtlineare Differentialgleichung, aber nicht mehr mit drei, sondern nur noch mit zwei unabhängigen Veränderlichen x, r .

Die Kontinuitätsbedingung Gl. (37*) spezialisiert sich zur Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x} (r \varrho u) + \frac{\partial}{\partial r} (r \varrho v) = 0$$

und wird durch den Ansatz

$$r \varrho u = a \psi_r, \quad r \varrho v = -a \psi_x \quad (a = \text{const})$$

befriedigt, so daß man bei der Normierung $a = \varrho_0$ das grundlegende Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} u = \varphi_x = \frac{1}{r} \frac{\varrho_0}{\varrho} \psi_r, \quad v = \varphi_r = -\frac{1}{r} \frac{\varrho_0}{\varrho} \psi_x; \\ w^2 = u^2 + v^2 = \varphi_x^2 + \varphi_r^2 = \left(\frac{\varrho_0}{\varrho r}\right)^2 (\psi_x^2 + \psi_r^2) \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

erhält. Es definiert die sog. Stromfunktion $\psi(x, r)$, zu der es im allgemeinen räumlichen Fall kein Analogon gibt.

Die Bedingung Gl. (3) der Wirbelfreiheit

$$\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

liefert dann

$$\varrho r (\psi_{xx} + \psi_{rr}) - r (\psi_x \varrho_x + \psi_r \varrho_r) - \varrho \psi_r = 0. \quad (42)$$

An Stelle von Gl. (38) erhält man aus

$$d\varrho = -\frac{\varrho}{c^2} d\left(\frac{w^2}{2}\right) = -\frac{\varrho}{c^2} d\left[\frac{1}{2r^2} \frac{\varrho_0^2}{\varrho^2} (\psi_x^2 + \psi_r^2)\right]$$

die Gleichungen

$$\begin{aligned} \varrho_x &= -\left(\frac{\varrho_0}{r\varrho c}\right)^2 \left[\varrho (\psi_x \psi_{xx} + \psi_r \psi_{xr}) - \varrho_x (\psi_x^2 + \psi_r^2) \right], \\ \varrho_r &= -\left(\frac{\varrho_0}{r\varrho c}\right)^2 \left[\varrho (\psi_x \psi_{xr} + \psi_r \psi_{rr}) - \left(\varrho_r + \frac{\varrho}{r}\right) (\psi_x^2 + \psi_r^2) \right], \end{aligned}$$

deren Auflösung

$$\frac{\varrho_x}{\varrho} = - \left(\frac{\varrho_0}{r \varrho c} \right)^2 \frac{\psi_x \psi_{xx} + \psi_r \psi_{xr}}{1 - \left(\frac{\varrho_0}{r \varrho c} \right)^2 (\psi_x^2 + \psi_r^2)},$$

$$\frac{\varrho_r}{\varrho} = - \left(\frac{\varrho_0}{r \varrho c} \right)^2 \frac{\psi_x \psi_{xr} + \psi_r \psi_{rr} - \frac{1}{r} (\psi_x^2 + \psi_r^2)}{1 - \left(\frac{\varrho_0}{r \varrho c} \right)^2 (\psi_x^2 + \psi_r^2)}$$

ergibt. Durch Einsetzen in Gl. (42) folgt für die Stromfunktion ψ die nichtlineare Differentialgleichung

$$\left. \begin{aligned} \psi_{xx} \left[1 - \left(\frac{\varrho_0}{r \varrho c} \right)^2 \psi_r^2 \right] + \psi_{rr} \left[1 - \left(\frac{\varrho_0}{r \varrho c} \right)^2 \psi_x^2 \right] \\ + 2 \left(\frac{\varrho_0}{r \varrho c} \right)^2 \psi_{xr} \psi_x \psi_r - \frac{\psi_r}{r} = 0, \end{aligned} \right\} (43)$$

wobei $\left(\frac{\varrho_0}{\varrho c} \right)^2$ eine Funktion von w oder nach Gl. (41) eine Funktion von $\frac{1}{r^2} (\psi_x^2 + \psi_r^2)$ ist.

3. Potential und Stromfunktion der ebenen Strömung. Die räumliche Strömung wird zur ebenen Strömung, wenn die z -Komponente w_3 des Geschwindigkeitsvektors identisch verschwindet und die Strömung in allen Ebenen $z = \text{const}$ dieselbe ist. Die Strömung braucht dann nur in der x, y -Ebene untersucht zu werden.

Wir bezeichnen bei der ebenen Strömung die x - und y -Komponente des Geschwindigkeitsvektors ebenso wie im achsensymmetrischen räumlichen Fall mit $w_1 = u$, $w_2 = v$. Da u, v sowie φ lediglich Funktionen von x, y sind, spezialisiert sich Gl. (39) zur nichtlinearen Differentialgleichung

$$\varphi_{xx} \left(1 - \frac{\varphi_x^2}{c^2} \right) + \varphi_{yy} \left(1 - \frac{\varphi_y^2}{c^2} \right) - 2 \varphi_{xy} \frac{\varphi_x \varphi_y}{c^2} = 0 \quad (44)$$

mit den zwei unabhängigen Veränderlichen x, y .

Gl. (44) unterscheidet sich von Gl. (40), abgesehen vom Wechsel der Bezeichnung y und r , nur durch den Wegfall des letzten Gliedes $\frac{\varphi_r}{r}$. Wir werden später sehen (vgl. S. 46 und 138), daß der Wegfall dieses Gliedes für die Integration der Potentialgleichung von großer Tragweite ist.

Auch bei der ebenen Strömung existiert eine Stromfunktion ψ . An Stelle der Gl. (41), (42) und (43) des räumlichen achsensymmetrischen Falls treten hier die Beziehungen

$$\begin{aligned} u = \varphi_x = \frac{\varrho_0}{\varrho} \psi_y, \quad v = \varphi_y = - \frac{\varrho_0}{\varrho} \psi_x; \\ w^2 = u^2 + v^2 = \varphi_x^2 + \varphi_y^2 = \left(\frac{\varrho_0}{\varrho} \right)^2 (\psi_x^2 + \psi_y^2), \end{aligned} \quad (45)$$

$$\varrho (\psi_{xx} + \psi_{yy}) - (\varrho_x \psi_x + \varrho_y \psi_y) = 0, \quad (46)$$

$$\psi_{xx} \left[1 - \left(\frac{\varrho_0}{\varrho c} \right)^2 \psi_y^2 \right] + \psi_{yy} \left[1 - \left(\frac{\varrho_0}{\varrho c} \right)^2 \psi_x^2 \right] + 2 \left(\frac{\varrho_0}{\varrho c} \right)^2 \psi_{xy} \psi_x \psi_y = 0, \quad (47)$$

wobei $\left(\frac{\varrho_0}{\varrho c} \right)^2$ eine Funktion von w oder nach Gl. (45) eine Funktion von $\psi_x^2 + \psi_y^2$ ist.

Sowohl im ebenen wie im achsensymmetrischen räumlichen Fall haben die Kurven $\psi = \text{const}$ nach Gl. (41) bzw. (45) in jedem Punkt den Geschwindigkeitsvektor als Tangente und sind daher die Stromlinien der Strömung. Sie stehen senkrecht zu den Potentiallinien $\varphi = \text{const}$. Greift man aus dem kontinuierlichen rechtwinkligen Kurvennetz der Stromlinien und Potentiallinien die diskreten Kurven

$$\begin{aligned} \varphi = \varphi_0, \varphi = \varphi_0 + \varepsilon, \varphi = \varphi_0 + 2\varepsilon, \dots; \quad \psi = \psi_0, \psi = \psi_0 + \varepsilon, \\ \psi = \psi_0 + 2\varepsilon, \dots \end{aligned}$$

heraus, wobei φ_0, ψ_0 und die „Maschenweite“ ε beliebige Konstanten sind, so ergibt sich ein i. a. krummliniges Rechtecksnetz (Abb. 10). Bei fortgesetzter Verengung dieses Netzes durch den Grenzprozeß $\varepsilon \rightarrow 0$ strebt das Seitenverhältnis der Rechtecksmaschen dem von Punkt zu Punkt veränderlichen Grenzwert zu:

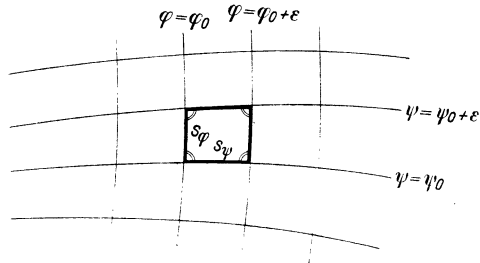


Abb. 10. Potential- und Stromlinien der ebenen oder achsensymmetrischen räumlichen Strömung.

$$\left(\frac{s_\varphi}{s_\psi} \right)_{\varepsilon \rightarrow 0} = \begin{cases} \frac{\varrho_0}{\varrho r} & \text{im räumlichen achsensymmetrischen Fall,} \\ \frac{\varrho_0}{\varrho} & \text{im ebenen Fall.} \end{cases}$$

Wir betrachten die Durchflußmasse Q in der Zeiteinheit zwischen zwei Stromlinien $\psi = \psi_a$ und $\psi = \psi_b$ im ebenen Fall bzw. zwischen den beiden Umdrehungsflächen der Stromlinien $\psi = \psi_a$ und $\psi = \psi_b$ im räumlichen achsensymmetrischen Fall. Aus den Linienintegralen

$$Q = \int_A^B \varrho (u dy - v dx) \quad \text{bzw.} \quad Q = \int_A^B 2 r \pi \varrho (u dr - v dx)$$

zwischen irgend zwei Punkten A, B der beiden Stromlinien ergibt sich mit Hilfe von Gl. (45) bzw. (41)

$$Q = \int_A^B \varrho_0 d\psi = \varrho_0 (\psi_b - \psi_a) \quad \text{bzw.} \quad Q = \int_A^B 2 \pi \varrho_0 d\psi = 2 \pi \varrho_0 (\psi_b - \psi_a),$$

d. h.: In beiden Fällen ist die Durchflußmenge bis auf einen unwesentlichen konstanten Faktor gleich der Differenz $\psi_b - \psi_a$.

Bei der inkompressiblen Strömung werden wegen $\frac{\rho_0}{\rho} = \text{const} = 1$ sämtliche Rechtecksmaschen quadratisch. Hierbei spezialisieren sich in der Ebene die Beziehungen Gl. (45) zu den CAUCHY-RIEMANNschen Gleichungen

$$\varphi_x = \psi_y, \quad \varphi_y = -\psi_x$$

und die Differentialgleichungen (44) und (47) zu den LAPLACESchen Gleichungen

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad \psi_{xx} + \psi_{yy} = 0.$$

Als Beispiel seien Potential und Stromfunktion für die ebene Quellströmung und die Wirbelströmung (vgl. S. 15) angegeben:

In Polarkoordinaten r, ω hat die ebene Quell- oder Senkenströmung die Stromfunktion

$$\psi = \text{const.} \cdot \omega = \text{const.} \cdot \text{arc tg } y/x$$

und die Wirbelströmung das Potential

$$\varphi = \text{const.} \cdot \omega = \text{const.} \cdot \text{arc tg } y/x.$$

Mit Hilfe von Gl. (45) folgt hieraus für die ebene Quellströmung

$$w\varrho = \varrho_0 \sqrt{\psi_x^2 + \psi_y^2} = \frac{\text{const.}}{r}$$

und für die Wirbelströmung

$$w = \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2} = \frac{\text{const.}}{r}$$

in Übereinstimmung mit S. 15 und 16.

II. Abschnitt:

Linearisierte Strömung:

In diesem Abschnitt werden die von der ungestörten Parallelströmung nur wenig abweichenden Strömungen behandelt, wie sie bei spitzen und schlanken, unter kleinem Anstellwinkel angeblasenen Profilen oder Drehkörpern vorkommen. An Stelle der strengen nichtlinearen Potentialgleichung wird eine erheblich vereinfachte linearisierte Potentialgleichung zugrunde gelegt.

§ 5. Linearisierung der Potentialgleichung.

1. Voraussetzung für die Linearisierung. Wir bezeichnen mit \bar{w} und $\bar{\varphi}$ den Geschwindigkeitsvektor und das Potential der in Richtung der positiven x -Achse verlaufenden ungestörten Grundströmung und setzen

für die entsprechenden Größen w, φ der zu untersuchenden gestörten Strömung (Abb. 11)

$$\left. \begin{aligned} w &= \bar{w} + w'; & w_1 &= \bar{w} + w'_1, & w_2 &= w'_2, & w_3 &= w'_3; \\ \varphi &= \bar{\varphi} + \varphi' = \bar{w}x + \varphi', \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

wobei \bar{w} eine gegebene Konstante ist und w'_1, w'_2, w'_3 bzw. φ' als Funktionen von x, y, z zu betrachten sind.

Die in diesem ganzen Abschnitt zugrunde gelegte Voraussetzung, daß sich die zu untersuchende Strömung von der Grundströmung nach Größe und Richtung des Geschwindigkeitsvektors nur wenig unterscheidet, soll folgendermaßen präzisiert werden:

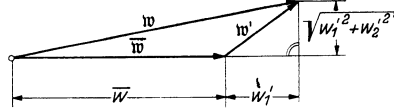


Abb. 11. Geschwindigkeitsvektor der gestörten Strömung.

Die zweiten und höheren Potenzen der kleinen Größen w'_1, w'_2, w'_3 und demgemäß auch von φ' und den Ableitungen von φ' werden vernachlässigt.

Bei Berücksichtigung dieser Voraussetzung hat man für den Geschwindigkeitsbetrag w und die Schallgeschwindigkeit c der gestörten Strömung

$$\begin{aligned} w^2 &= (\bar{w} + w'_1)^2 + w'^2_2 + w'^2_3 = \bar{w}^2 + 2\bar{w}w'_1, \\ c^2 &= k \frac{p_0}{\rho_0} - \frac{k-1}{2} w^2 = k \frac{p_0}{\rho_0} - \frac{k-1}{2} \bar{w}^2 - (k-1)\bar{w}w'_1 = \bar{c}^2 - (k-1)\bar{w}w'_1 \end{aligned}$$

und daher

$$w = \bar{w} + w'_1, \quad c = \bar{c} - \frac{k-1}{2} \frac{\bar{w}}{\bar{c}} w'_1, \quad M = \frac{w}{c} = \bar{M} \left[1 + \left(1 + \frac{k-1}{2} \bar{M}^2 \right) \frac{w'_1}{\bar{w}} \right], \quad (49)$$

wenn mit \bar{c} und \bar{M} die Schallgeschwindigkeit und die MACHsche Zahl der Grundströmung bezeichnet werden.

Außerdem ergibt sich aus der BERNOULLI'schen Gl. (4*) die wichtige Näherungsbeziehung für den Über- bzw. Unterdruck gegenüber der Grundströmung

$$\Delta p = p - \bar{p} = - \int_{\bar{w}}^w \rho w dw = - \bar{\rho} \bar{w} (w - \bar{w}) = - \bar{\rho} \bar{w} w'_1 \quad (50)$$

oder nach Division mit dem Staudruck der Grundströmung in dimensionsloser Darstellung

$$\frac{\Delta p}{\frac{\rho}{2} \bar{w}^2} = - 2 \frac{w'_1}{\bar{w}}. \quad (50^*)$$

Die oben präzisierte Voraussetzung wird näherungsweise erfüllt bei der Strömung um spitze und schlanke Körper mit kleinem Anstellwinkel. Die Umgebung etwaiger Staupunkte muß allerdings ausgeschlossen werden, da dort wegen $w'_1 \approx -\bar{w}$ die Größe w'_1 nicht mehr als klein gegenüber \bar{w} betrachtet werden kann.

2. Durchführung der Linearisierung. Auf Grund der Voraussetzungen von S. 23 vereinfacht sich die Potentialgleichung (39) bzw. (39*) der allgemeinen räumlichen Strömung zu

$$\varphi_{xx}(1 - \bar{M}^2) + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0 \quad (51)$$

für rechtwinklige Koordinaten und zu

$$\varphi_{xx}(1 - \bar{M}^2) + \varphi_{rr} + \frac{1}{r^2} \varphi_{\omega\omega} + \frac{\varphi_r}{r} = 0 \quad (51^*)$$

für Zylinderkoordinaten.

Für achsensymmetrische räumliche Strömungen geht Gl. (40) über in

$$\varphi_{xx}(1 - \bar{M}^2) + \varphi_{rr} + \frac{\varphi_r}{r} = 0 \quad (52)$$

und für ebene Strömungen erhält man aus Gl. (44) (vgl. hierzu auch S. 90).

$$\varphi_{xx}(1 - \bar{M}^2) + \varphi_{yy} = 0. \quad (53)$$

Die vereinfachten Gl. (51) bis (53) sind im Gegensatz zu den strengen Gl. (39), (40), (44) lineare Differentialgleichungen. Wir bezeichnen daher die auf den Voraussetzungen der S. 23 begründete Näherung als „Linearisierung“ und die entsprechende Strömung als „linearisierte Strömung“. Wegen der Linearität der Differentialgleichungen (51) bis (53) gelten sie sowohl für das Gesamtpotential φ als auch für das Zusatzpotential $\varphi' = \varphi - \bar{\varphi}$.

Die linearen partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung (51) bis (53) sind für $\bar{M} < 1$ (Unterschall) vom elliptischen und für $\bar{M} > 1$ (Überschall) vom hyperbolischen Typus (vgl. S. 44). Hierauf beruht das wesentlich verschiedene Verhalten der Unter- und Überschallströmungen.

Im folgenden untersuchen wir die linearisierte Strömung zunächst für Unter- und dann für Überschallgeschwindigkeit; Durchgänge durch die Schallgeschwindigkeit sind bei der Linearisierung nicht erfaßbar.

§ 6. Linearisierte ebene Unterschallströmung.

1. Affine Beziehung zwischen der kompressiblen und inkompressiblen ebenen Strömung. Nach L. PRANDTL¹ führen wir die elliptische Differentialgleichung (53)

$$\frac{\partial^2 \varphi'_k}{\partial x_k^2} (1 - \bar{M}^2) + \frac{\partial^2 \varphi'_k}{\partial y_k^2} = 0$$

für das Zusatzpotential φ'_k bei kompressibler Strömung mittels der Transformation

$$x_i = x_k, \quad y_i = y_k \sqrt{1 - \bar{M}^2}; \quad \varphi'_i = \lambda \varphi'_k \quad (54)$$

¹ PRANDTL, L.: Journ. of Aeronaut. Research Inst., Tokyo Imp. Univ. n. 65 (1930), S. 14; vgl. auch GLAUERT, H.: Proc. Roy. Soc. A, 118 (1928), S. 113 sowie PISTOLESI, E.: Voltakongreß, S. 283—326.

in die LAPLACESche Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi'_i}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 \varphi'_i}{\partial y_i^2} = 0$$

für das Zusatzpotential φ'_i bei inkompressibler Strömung über, wobei λ eine zunächst willkürliche Konstante bedeutet. Hieraus folgt die PRANDTLsche Regel (Abb. 12):

Aus einer vorgegebenen inkompressiblen Strömung in einer x_i, y_i -Ebene erhält man eine linearisierte kompressible Unterschallströmung

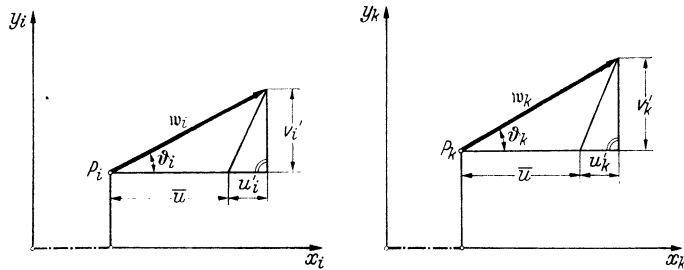


Abb. 12. PRANDTLsche Affinverzerrung.

in einer x_k, y_k -Ebene, wenn man die x_i, y_i -Ebene gemäß Gl. (54) affin verzerrt, d. h. die y -Koordinate jedes Punktes im Verhältnis $\sqrt{1-M^2} : 1$ vergrößert, und gleichzeitig das Zusatzpotential φ'_i mit einem beliebigen konstanten Faktor $\frac{1}{\lambda}$ multipliziert.

Wenn wir, wie früher verabredet, für w_1, w_2 wieder u, v schreiben, ergibt sich in affin entsprechenden Punkten P_i, P_k für die zugeordneten Geschwindigkeitsvektoren (Abb. 12)

$$\left. \begin{aligned} u'_i &= \frac{\partial \varphi'_i}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial \varphi'_k}{\partial x_k} = \lambda u'_k, \\ v'_i &= \frac{\partial \varphi'_i}{\partial y_i} = \lambda \frac{\partial \varphi'_k}{\partial y_k} \frac{dy_k}{dy_i} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-M^2}} v'_k, \\ \vartheta'_i &= \operatorname{tg} \vartheta_i = \frac{v'_i}{u'_i} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-M^2}} \frac{v'_k}{u'_k} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-M^2}} \vartheta_k, \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

d. h.: In affin entsprechenden Punkten P_i, P_k stehen die Anstellwinkel ϑ_i, ϑ_k im konstanten Verhältnis $\lambda : \sqrt{1-M^2}$.

2. Quell-Senken-Verfahren für Profilströmungen. Auf Grund der Transformation Gl. (54) gehen die Potentiallinien $\varphi_i = \text{const}$ der x_i, y_i -Ebene durch die affine Verzerrung $y_i : y_k = \sqrt{1-M^2} : 1$ in die Potentiallinien $\varphi_k = \text{const}$ der x_k, y_k -Ebene über; die zu den Potentiallinien senkrechten Stromlinien dagegen sind nicht zueinander affin. Wenn man daher aus einer vorgegebenen inkompressiblen Umströmung eines schlan-

ken Profils (II_i) nach Gl. (54) eine kompressible Strömung herleitet, so ist für die Ermittlung des entsprechenden Profils (II_k) eine nähere Untersuchung erforderlich.

Wir knüpfen hierbei an das in der gewöhnlichen Aerodynamik viel benutzte Quell-Senken-Verfahren an, bei dem die durch ein Profil (II_i) hervorgerufene inkompressible Zusatzströmung durch eine geeignete kontinuierliche Verteilung von Quellen und Senken auf der x -Achse ersetzt wird. Für das Zusatzpotential φ'_i hat man dann die bekannte Integraldarstellung

$$\varphi'_i = \frac{1}{2\pi} \int_a^b f(\xi) \ln \sqrt{(x_i - \xi)^2 + y_i^2} d\xi \quad (56)$$

mit $f(\xi)$ als Quellstärke je Längeneinheit.

Durch die Transformation Gl. (54) ergibt sich aus Gl. (56) für die entsprechende kompressible Strömung

$$\varphi'_k = \frac{1}{2\pi\lambda} \int_a^b f(\xi) \ln \sqrt{(x_k - \xi)^2 + \beta^2 y_k^2} d\xi \quad \text{mit } 0 < \beta^2 = 1 - \overline{M}^2 < 1. \quad (57)$$

Der Ansatz Gl. (57) gilt im Bereich der linearisierten Näherung auch für schief gestellte Profile, wenn man für die Ober- und Unterseite des Profils verschiedene Quell-Senken-Verteilungen zugrunde legt. Dabei ist allerdings vorauszusetzen, daß die in Anströmrichtung verlaufende Gerade durch die Spitze im Innern des Profils liegt.

Durch Differentiation nach x_k und y_k folgen die Geschwindigkeitskomponenten

$$u'_k = \frac{1}{2\pi\lambda} \int_a^b \frac{f(\xi) (x_k - \xi) d\xi}{(x_k - \xi)^2 + \beta^2 y_k^2}, \quad v'_k = \frac{\beta^2 y_k}{2\pi\lambda} \int_a^b \frac{f(\xi) d\xi}{(x_k - \xi)^2 + \beta^2 y_k^2},$$

welche für $y_k \rightarrow 0$ den Grenzwerten

$$(u'_k)_0 = \frac{1}{2\pi\lambda} \int_a^b \frac{f(\xi) d\xi}{x_k - \xi}, \quad (v'_k)_0 = \frac{1}{2\lambda} \beta f(x_k) \quad (58)$$

zustreben.

Das uneigentliche Integral $(u'_k)_0$ ist durch den Hauptwert

$$\int_a^b \frac{f(\xi) d\xi}{x_k - \xi} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_a^{x_k - \epsilon} \frac{f(\xi) d\xi}{x_k - \xi} - \int_{x_k + \epsilon}^b \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - x_k} \right\}$$

definiert. $(v'_k)_0$ ergibt sich mit der Substitution (Abb. 13)

$$R_k = \frac{\beta y_k}{\sin \eta}, \quad d\xi = \frac{R_k d\eta}{\sin \eta} = \frac{\beta y_k}{\sin^2 \eta} d\eta \quad (59)$$

aus der Beziehung

$$v'_k = \frac{\beta^2 y_k}{2 \pi \lambda} \int_0^{\pi} \frac{f(\eta) y_k d\eta}{\sin^2 \eta R_k^2} = \frac{\beta}{2 \pi \lambda} \int_0^{\pi} f(\eta) d\eta \rightarrow \frac{\beta}{2 \lambda} f(x_k).$$

3. Inkompressible und kompressible Umströmung von Profilen. Nach S. 26 erhält man folgende Beziehungen zwischen der inkompressiblen und kompressiblen Umströmung von Profilen¹:

a) *Inkompressible und kompressible Umströmung desselben Profils:* $\beta = \lambda$. Für eine vorgegebene Profilkurve mit der Gleichung

$$y_k = F(x_k).$$

folgt aus Gl. (58₂) die Quell-Senken-Belegung

$$f(x_k) = \frac{2 \lambda}{\beta} (v'_k)_0 = \frac{2 \lambda}{\beta} \bar{u} \frac{dF}{dx_k},$$

welche durch die nachträgliche Normierung

$$\lambda = \beta$$

von β unabhängig wird.

Aus Gl. (58₁) folgt dann für die Zusatzgeschwindigkeit in der x -Richtung

$$(u'_k)_0 = \frac{1}{2 \pi \beta} \int_a^b \frac{f(\xi) d\xi}{x_k - \xi}. \tag{60}$$

Nach Gl. (50) ist der Zusatzdruck $(\Delta p)_0$ proportional zu $(u'_k)_0$ und ändert sich daher ebenfalls nach dem Faktor $1/\beta$.

Da der grundlegende Ansatz Gl. (57) auch für schiefgestellte Profile gilt, hat man zusammenfassend folgendes Ergebnis:

Aus einer inkompressiblen Umströmung eines schlanken Profils erhält man eine linearisierte kompressible Unterschallströmung um dasselbe Profil mit demselben Anstellwinkel durch die affine Transformation (Gl. 54) mit $\lambda = \sqrt{1 - \overline{M}^2}$. Der Zusatzdruck Δp und die Zusatzgeschwindigkeit u' werden hierbei längs des Profils im Verhältnis $\sqrt{1 - \overline{M}^2}:1$ vergrößert.

Als unmittelbare Folgerung dieses Satzes ergibt sich, daß die bekannten Formeln für Auftrieb A und Widerstand W eines Profils der Länge l

$$A = \rho \bar{u} \Gamma, \quad W = 0 \tag{61}$$

¹ Vgl. PRANDTL: S. 207—210.

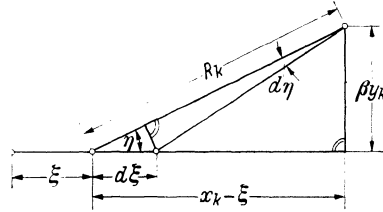


Abb. 13. Erläuterung zur Integraldarstellung von v'_k .

mit Zirkulation $\Gamma = \oint w d\bar{s}$ ebenso wie für inkompressible Strömungen auch für kompressible Unterschallströmungen gelten. Durch weitergehende potentialtheoretische Untersuchungen¹ läßt sich nachweisen daß Gl. (61) auch für die nichtlinearisierte strenge Theorie in Kraft bleibt

b) *Inkompressible und kompressible Profilströmung mit derselben Druckverteilung*: $\lambda = 1$. Mit $\lambda = 1$ ergibt sich aus (58₁) für alle Werte von β dieselbe Geschwindigkeit

$$(u'_k)_0 = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{f(\xi) d\xi}{x_k - \xi}$$

und nach Gl. (50) dann auch derselbe Druck, wenn man die Funktion $f(\xi)$ festhält. Nach Gl. (58₂) folgt für das Profil

$$\bar{u} \frac{dy_k}{dx_k} = (v'_k)_0 = \frac{\beta}{2} f(x_k), \quad \text{also} \quad y_k = F(x_k) = \frac{\beta}{2\bar{u}} \int_a^{x_k} f(\xi) d\xi$$

und wir haben zusammenfassend das Ergebnis:

Aus einer inkompressiblen Umströmung eines schlanken Profils erhält man eine linearisierte kompressible Unterschallströmung mit derselben Druckverteilung durch die affine Transformation Gl. (54) mit $\lambda = 1$. Das Profil wird hierbei senkrecht zur Anströmrichtung im Verhältnis $1 : \sqrt{1 - \overline{M}^2}$ zu einem schlankeren Profil zusammengedrückt und der Anstellwinkel im gleichen Verhältnis verkleinert.

4. Abklingen von Störungen bei inkompressibler und kompressibler Strömung. Um die Strömung in großer Querentfernung vom Profil zu untersuchen, betrachten wir neber

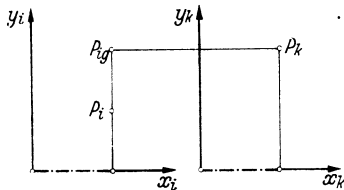


Abb. 14. Affin entsprechende und gleichliegende Punkte.

den affin entsprechenden Punkten P_i, P_k mit

$$x_i = x_k, \quad y_i = y_k \sqrt{1 - \overline{M}^2}$$

auch die gleichliegenden Punkte P_{ig} P_{kg} mit

$$x_{ig} = x_i = x_k,$$

$$y_{ig} = y_i / \sqrt{1 - \overline{M}^2} = y_k$$

der inkompressiblen und kompressiblen Strömung (Abb. 14).

In den beiden vorher betrachteten Fällen a) und b) hat man nach Gl. (55) für affin entsprechende Punkte

$$\Delta p_k : \Delta p_i = u'_k : u'_i = \begin{cases} 1 : \sqrt{1 - \overline{M}^2} & \text{bei a) d. h. mit } \lambda = \beta, \\ 1 & \text{bei b) d. h. mit } \lambda = 1. \end{cases} \quad (62)$$

Für die inkompressible Zusatzströmung gilt in Punkten großer Quer

¹ FRANKL, E. und M. KELDYSCH: Bull. Acad. Sci. URSS. (1934), S. 561—601

entfernung, da sie dort durch eine Doppelquelle auf der x -Achse ersetzt werden kann,

$$(\Delta p_i)_\infty : (\Delta p_{ig})_\infty = u'_i : u'_{ig} = \frac{1}{y'_i} : \frac{1}{y'_{ig}} = \left(\frac{y_k}{y_i}\right)^2 = \frac{1}{1-\bar{M}^2} \quad (63)$$

Durch Vergleich von Gl. (62) und (63) erhält man für die Drucke in gleichliegenden Punkten großer Querentfernung

$$(\Delta p_k)_\infty : (\Delta p_{ig})_\infty = \begin{cases} (1-\bar{M}^2)^{-3/2} & \text{bei a) d. h. für geometrisch} \\ & \text{gleiche Profile} \\ (1-\bar{M}^2)^{-1} & \text{bei b) d. h. für Profile mit glei-} \\ & \text{cher Druckverteilung.} \end{cases} \quad (64)$$

Nach Aussage a) von Gl. (64) klingt die Störung durch ein vorgegebenes Profil im kompressiblen Fall im Verhältnis $1 : (1-\bar{M}^2)^{3/2}$ langsamer ab als im inkompressiblen Fall; im Grenzfall $\bar{M} \rightarrow 1$ der An-

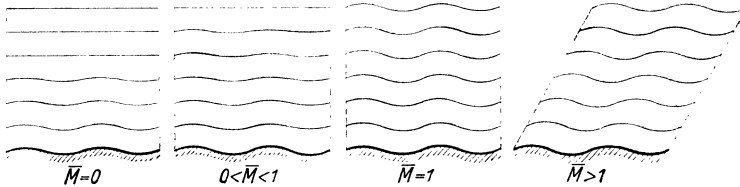


Abb. 15. Inkompressible und linearisierte kompressible Strömung längs einer welligen Wand (vgl. PRANDL, S. 209).

näherung an die kritische Geschwindigkeit und bei Überschallgeschwindigkeit $\bar{M} > 1$ (vgl. § 8) klingen die Störungen überhaupt nicht mehr ab, sondern pflanzen sich ins Unendliche mit voller Stärke fort (vgl. Abb. 15).

5. Beispiel: Ebene Strömung längs einer welligen Wand. Als analytisch einfaches Beispiel betrachten wir die Strömung längs einer welligen Wand¹ (Abb. 15) und gehen dabei aus von einer inkompressiblen Strömung mit dem Zusatzpotential

$$\varphi'_i = a \cos 2\pi \frac{x_i}{l} \cdot e^{-2\pi \frac{y_i}{l}},$$

welches offenbar die LAPLACESche Differentialgleichung erfüllt. Aus

$$v'_i = \frac{\partial \varphi'_i}{\partial y_i} = -2\pi \frac{a}{l} \cos 2\pi \frac{x_i}{l} \cdot e^{-2\pi \frac{y_i}{l}}$$

erhält man für die Stromlinien die Differentialgleichung

$$\frac{dy_i}{dx_i} = \frac{v'_i}{u'_i} = -\frac{2\pi a}{\bar{u}} \cos 2\pi \frac{x_i}{l} \cdot e^{-2\pi \frac{y_i}{l}}$$

¹ PRANDTL: S. 209 und J. ACKERET: Helv. phys. Acta 1 (1928), S. 301–322.

Die Integration liefert mit $y_i \approx \text{const} = y_0$ angenähert

$$y_i = -\frac{a}{u} \sin 2\pi \frac{x_i}{l} \cdot e^{-2\pi \frac{y_0}{l}} \quad (65)$$

die Stromlinien sind also Wellenlinien von der Wellenlänge l und einer mit dem Abstand y_0 von der x -Achse exponentiell abklingenden Ausschlag.

Wenn man die Stromlinie Gl. (65) mit $y_0 = 0$ durch eine feste Wand ersetzt, stellt unser Beispiel die inkompressible Strömung längs dieser Wand dar. Für die kompressible Strömung längs derselben Wand hat man gemäß Absatz a) von S. 27 und Gl. (54)

$$\varphi'_k = \frac{1}{\sqrt{1-\bar{M}^2}} a \cos 2\pi \frac{x_k}{l} \cdot e^{-2\pi \sqrt{1-\bar{M}^2} \frac{y_k}{l}},$$

woraus für die Stromlinien angenähert folgt

$$y_k = -\frac{a}{u} \sin 2\pi \frac{x_k}{l} \cdot e^{-2\pi \sqrt{1-\bar{M}^2} \frac{y_0}{l}} \quad (66)$$

In Übereinstimmung mit S. 29 zeigt die Gegenüberstellung von Gl. (65) und (66) das langsamere Abklingen bei der kompressiblen Unterschallströmung ($0 < \bar{M} < 1$) gegenüber dem inkompressiblen Fall ($\bar{M} = 0$) und die Ausbreitung der Störung ohne Abklingen bei der Annäherung an die kritische Geschwindigkeit ($\bar{M} = 1$). Über die Behandlung des Beispiels für Überschallgeschwindigkeit ($\bar{M} > 1$) vgl. S. 41; bezüglich der nichtlinearisierten strengen Lösung vgl. S. 91.

§ 7. Linearisierte räumliche Unterschallströmung.

1. Affine Beziehung zwischen der kompressiblen und der inkompressiblen räumlichen Strömung. An Stelle von Gl. (54) hat man im Raum die Transformation

$$x_i = x_k, \quad y_i = y_k \sqrt{1-\bar{M}^2}, \quad z_i = z_k \sqrt{1-\bar{M}^2}; \quad \varphi'_i = \lambda \varphi'_k, \quad (67)$$

d. h.: Der Raum wird beim Übergang von der inkompressiblen zur kompressiblen Strömung senkrecht zur x -Achse im Verhältnis $\sqrt{1-\bar{M}^2}$: affin auseinandergezerrt und das Zusatzpotential φ'_i mit einem beliebigen konstanten Faktor $1/\lambda$ multipliziert.

In Zylinderkoordinaten (vgl. S. 18) ist die affine Verzerrung gegeben durch

$$x_i = x_k, \quad r_i = r_k \sqrt{1-\bar{M}^2}, \quad \omega_i = \omega_k. \quad (68)$$

Für die Geschwindigkeit gilt an Stelle von Gl. (55) sowohl in kartesischen

als auch in Zylinderkoordinaten

$$\left. \begin{aligned} w'_{1i} &= \lambda w'_{1k}, & w'_{2i} &= \frac{\lambda}{\sqrt{1-\overline{M}^2}} w'_{2k}, & w'_{3i} &= \frac{\lambda}{\sqrt{1-\overline{M}^2}} w'_{3k}, \\ \vartheta_i &= \frac{1}{w} \sqrt{w'^2_{2i} + w'^2_{3i}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\overline{M}^2}} \vartheta_k. \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Hierbei ist ϑ wie in der Ebene der Winkel des Geschwindigkeitsvektors gegen die x -Achse.

2. Quell-Senken-Verfahren für Strömungen um Drehkörper. Das auf S. 26 für ebene Profilströmungen benutzte Quell-Senken-Verfahren läßt sich in ähnlicher Weise auf räumliche Strömungen um Drehkörper¹ übertragen. Hierbei muß für schiefe Anströmung zur Quell-Senken-Belegung noch eine Doppelquellen-Belegung der x -Achse hinzugenommen werden.

a) *Axiale Anströmung.* Wir gehen von der Potentialgleichung (52) der linearisierten achsensymmetrischen räumlichen Strömung aus und erhalten an Stelle von Gl. (56) und (57) die Integraldarstellungen

$$\varphi'_i = -\frac{1}{4\pi} \int_a^b \frac{f(\xi) d\xi}{\sqrt{(x_i - \xi)^2 + r_i^2}}, \quad \varphi'_k = -\frac{1}{4\pi\lambda I} \int_a^b \frac{f(\xi) d\xi}{(x_k - \xi)^2 + \beta^2 r_k^2} \quad (70)$$

mit $0 < \beta^2 = 1 - \overline{M}^2 < 1$ und $\lambda = \lambda^I$.

Durch Differentiation folgen die Geschwindigkeitskomponenten

$$u'_k = \frac{1}{4\pi\lambda I} \int_a^b \frac{(x_k - \xi) f(\xi) d\xi}{[(x_k - \xi)^2 + \beta^2 r_k^2]^{3/2}}, \quad v'_k = \frac{\beta^2 r_k}{4\pi\lambda I} \int_a^b \frac{f(\xi) d\xi}{[(x_k - \xi)^2 + \beta^2 r_k^2]^{3/2}},$$

welche für $r_k \rightarrow 0$ den Grenzwerten

$$(u'_k)_0 = \frac{1}{4\pi\lambda I} \int_a^b \frac{\pm f(\xi) d\xi}{(x_k - \xi)^2}, \quad (v'_k)_0 = \frac{1}{2\pi\lambda I r_k} f(x_k) \quad (71)$$

zustreben.

Das uneigentliche Integral $(u'_k)_0$ ist durch denselben Grenzprozeß wie bei Gl. (58) definiert; hierbei ist in Gl. (71) das Pluszeichen für $a \leq \xi < x_k - \varepsilon$ und das Minuszeichen für $x_k + \varepsilon < \xi \leq b$ zu nehmen. $(v'_k)_0$ ergibt sich vermöge der Substitution Gl. (59) mit r_k statt y_k aus

$$v'_k = \frac{\beta^2 r_k}{4\pi\lambda I} \int_0^\pi \frac{f(\eta) \beta r_k d\eta}{\sin^2 \eta R_k^3} = \frac{1}{4\pi\lambda I r_k} \int_0^\pi f(\eta) \sin \eta d\eta \rightarrow \frac{1}{2\pi\lambda I r_k} f(x).$$

b) *Schiefe Anströmung.* Die Achse des Drehkörpers soll nach wie vor mit der x -Achse zusammenfallen, die Grundströmung mit dem Geschwin-

¹ v. KÁRMÁN, TH.: Abh. aus dem Aerodyn. Inst. Aachen 6 (1927), S. 3—17 und C. FERRARI: Aerotecnica 17 (1937), S. 507—518.

digkeitsvektor \bar{w} verläuft jetzt aber nicht axial, sondern unter dem Anstellwinkel $\bar{\vartheta}$ gegen die x -Achse und parallel zur Meridianebene $\omega = 0$. Der Vektor \bar{w} hat demnach in Zylinderkoordinaten die Komponenten

$$\begin{aligned}\bar{w}_1 &= \bar{w} \cos \bar{\vartheta} = \bar{w}, & \bar{w}_2 &= \bar{w} \sin \bar{\vartheta} \cos \omega = \bar{w} \bar{\vartheta} \cos \omega, \\ \bar{w}_3 &= -\bar{w} \sin \bar{\vartheta} \sin \omega = -\bar{w} \bar{\vartheta} \sin \omega\end{aligned}\quad (72)$$

und als Potential der Grundströmung kommt

$$\bar{\varphi} = \bar{w} (x + \bar{\vartheta} r \cos \omega).$$

Diesem Potential überlagert sich zunächst das Zusatzpotential φ'_k der axialen Anströmung gemäß Absatz a) sowie ein weiteres Zusatzpotential φ''_k , welches die r -Komponente des Geschwindigkeitsvektors \bar{w} der Grundströmung an der Oberfläche des Drehkörpers aufheben muß. Beide Zusatzpotentiale φ'_k, φ''_k genügen der Potentialgleichung (51*) der linearisierten allgemeinen räumlichen Strömung.

Auch das zweite Zusatzpotential φ''_k können wir aus einem bekannten Ansatz der gewöhnlichen Aerodynamik entwickeln:

Bei inkompressibler Strömung denken wir uns die x -Achse mit senkrecht gestellten Doppelquellen in der Ebene $\omega = 0$ belegt. Für das Potential dieser Doppelquellen hat man die Integraldarstellung

$$\varphi''_i = \frac{1}{4\pi} r_i \cos \omega \int_a^b \frac{m(\xi) d\xi}{[x_i - \xi]^2 + r_i^2]^{3/2}} \quad (73)$$

mit $m(\xi)$ als Moment je Längeneinheit.

Durch die Transformation Gl. (67) bzw. (68) ergibt sich aus Gl. (73) für die entsprechende kompressible Strömung

$$\varphi''_i = \frac{1}{4\pi \lambda^{II}} \beta r_k \cos \omega \int_a^b \frac{m(\xi) d\xi}{[(x_k - \xi)^2 + \beta^2 r_k^2]^{3/2}} \quad \text{mit } \lambda = \lambda^{II}; \quad (74)$$

für jedes der beiden Zusatzpotentiale φ'_k, φ''_k geben wir also in Gl. (70) bzw. (74) der Konstanten λ einen besonderen Wert λ^I bzw. λ^{II} .

Wegen der Analogie des Integrals φ''_k in Gl. (74) und des Integrals für v'_k in Absatz a) hat man für $r_k \rightarrow 0$ den Grenzwert

$$(\varphi''_k)_0 = \frac{\cos \omega}{2\pi \lambda^{II} r_k \beta} m(x), \quad (75)$$

woraus durch Differentiation nach x_k bzw. r_k

$$(u''_k)_0 = \frac{\cos \omega}{2\pi \lambda^{II} r_k \beta} \frac{dm(x_k)}{dx_k}, \quad (v''_k)_0 = -\frac{\cos \omega}{2\pi \lambda^{II} r_k^2 \beta} m(x_k) \quad (76)$$

folgt. Hierbei ist ebenso wie im achsensymmetrischen Fall u, v an Stelle von w_1, w_2 geschrieben, da die dritte Geschwindigkeitskomponente w für die Untersuchung belanglos ist.

Die Forderung, daß die radialen Komponenten der Grundgeschwindigkeit \bar{w} und der zweiten Zusatzgeschwindigkeit $w''_k = \text{grad } \varphi''_k$ sich an der Oberfläche des Drehkörpers aufheben sollen, liefert auf Grund von Gl. (72) und (76) die Bedingung

$$\bar{w} \bar{\vartheta} = \frac{m(x_k)}{2 \pi \lambda^{II} r_k^2 \beta}, \quad (77)$$

die in jedem Punkt der Drehkörperoberfläche erfüllt sein muß.

3. Inkompressible und kompressible Umströmung von Drehkörpern: $\lambda^I = 1, \lambda^{II} = 1/\beta$. Für einen vorgegebenen Drehkörper mit der Meridianequation

$$r_k = F(x_k)$$

folgt aus Gl. (71₂) die Quell-Senken-Belegung

$$f(x_k) = 2 \pi \lambda^I r_k (v'_k)_0 = 2 \pi \lambda^I F(x_k) \frac{dF}{dx_k}$$

und aus Gl. (77) die Doppelquellen-Belegung

$$m(x_k) = 2 \pi \lambda^{II} \beta \bar{w} \bar{\vartheta} r_k^2 = 2 \pi \lambda^{II} \beta \bar{w} \bar{\vartheta} F^2(x_k).$$

Die Belegungen werden von β unabhängig durch die nachträgliche Normierung

$$\lambda^I = 1, \quad \lambda^{II} = 1/\beta$$

und liefern dann für die Zusatzgeschwindigkeiten in der x -Richtung die ebenfalls von β unabhängigen Ausdrücke

$$(u'_k)_0 = \frac{1}{4 \pi} \int_a^b \frac{\pm f(\xi) d\xi}{(x_k - \xi)^2}, \quad (u''_k)_0 = \frac{\cos \omega}{2 \pi r_k} \frac{dm(x_k)}{dx_k}. \quad (78)$$

Zusammenfassend haben wir sonach folgendes Ergebnis:

Aus einer inkompressiblen Umströmung eines schlanken Drehkörpers erhält man eine linearisierte kompressible Unterschallströmung um denselben Drehkörper mit demselben Anstellwinkel durch die affine Transformation Gl. (67) mit $\lambda^I = 1$ für das Zusatzpotential φ' und $\lambda^{II} = 1/\sqrt{1-M^2}$ für das Zusatzpotential φ'' . Der Zusatzdruck Δp und die Zusatzgeschwindigkeit $u' + u''$ bleiben hierbei an der Oberfläche des Drehkörpers un geändert.

Ebenso wie auf S. 27 folgt hieraus, daß auch die räumliche Unterschallströmung keinen Widerstand liefert.

4. Abklingen von Strömungen bei inkompressibler und kompressibler räumlicher Strömung. Ähnlich wie in S. 29 können wir in großer Querenfernung vom Drehkörper die Quell-Senken-Verteilung durch eine Doppelquelle auf der x -Achse und die Doppelquellen-Verteilung durch eine zur x -Achse senkrechte Doppelquelle in der Ebene $\omega = 0$ ersetzen.

Die erste Doppelquelle liefert die zu Gl. (63) analoge Beziehung

$$(\Delta p_i)_\infty : (\Delta p_{ig})_\infty = u'_i : u'_{ig} = \frac{1}{y_i^3} : \frac{1}{y_{ig}^3} = \left(\frac{y_k}{y_i}\right)^3 = \frac{1}{(1 - \bar{M}^2)^{3/2}}; \quad (79)$$

die quergestellte zweite Doppelquelle gibt wegen $(u'')_\infty = 0$ für $x=0$ keinen Beitrag zu $(\Delta p)_\infty$. Analog zu Gl. (64) kommt mit $\lambda^1 = 1$

$$(\Delta p_k)_\infty : (\Delta p_{ig})_\infty = (1 - \bar{M}^2)^{-3/2}. \quad (80)$$

Nach Gl. (80) klingt die Störung durch einen vorgegebenen Drehkörper im kompressiblen Fall langsamer ab als im inkompressiblen Fall und zwar im gleichen Verhältnis $1 : (1 - \bar{M}^2)^{-3/2}$ wie beim ebenen Problem (vgl. S. 29).

5. Anwendung auf die Strömung um Tragflügel und Rumpf. Die Strömung um den Tragflügel kann in genügendem Abstand von den Flügelenden als eben, der Rumpf in grober Näherung als Drehkörper betrachtet werden. Nach Ziff. 2 S. 27 und Ziff. 3 S. 33 vergrößert die Kompressibilität die Übergeschwindigkeit und den Überdruck am Tragflügel im Verhältnis $\sqrt{1 - \bar{M}^2} : 1$, am Rumpf dagegen nicht. Infolgedessen führt die Kompressibilität nur am Tragflügel, nicht aber am Rumpf zu einer früheren Ablösung der Grenzschicht und die Gefahr der Annäherung an die kritische Geschwindigkeit ist am Tragflügel größer als am Rumpf.

§ 8. Linearisierte ebene Überschallströmung.

1. Allgemeine Lösung der Potentialgleichung. Für Überschallströmungen ($\bar{M} > 1$) ist die linearisierte Potentialgleichung (53)

$$\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} (\bar{M}^2 - 1) - \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y^2} = 0$$

für das der Grundströmung zu überlagernde Zusatzpotential φ' vom hyperbolischen Typus und läßt sich daher nicht wie bei Unterschallströmungen durch eine reelle Affintransformation (vgl. S. 24) auf die LAPLACESche Differentialgleichung zurückzuführen. Sie hat, wie man durch Einsetzen leicht bestätigen kann, das allgemeine Integral

$$\varphi' = f_1(y - x \operatorname{tg} \bar{\alpha}) + f_2(y + x \operatorname{tg} \bar{\alpha}), \quad (81)$$

wobei der sog. MACHSche¹ Winkel $\bar{\alpha}$ durch

$$\sin \bar{\alpha} = \frac{1}{\bar{M}} = \frac{\bar{c}}{\bar{w}} < 1 \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{tg} \bar{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\bar{M}^2 - 1}} \quad (82)$$

definiert wird.

f_1 und f_2 sind willkürliche Funktionen der einen Veränderlichen

¹ MACH, E.: Sitzungsber. der Wiener Akad. IIa 95 (1887), S. 164; 98 (1889), S. 1310 und 105 (1896), S. 605.

$y \mp x \operatorname{tg} \alpha$ und müssen jeweils aus den Randbedingungen des gestellten Problems bestimmt werden (vgl. S. 37 und 45).

Aus Gl. (81) ergeben sich durch Differentiation nach x bzw. y die Komponenten der Zusatzgeschwindigkeit

$$u' = (\dot{f}_2 - \dot{f}_1) \operatorname{tg} \bar{\alpha}, \quad v' = \dot{f}_1 + \dot{f}_2; \quad (83)$$

die Punkte bedeuten Differentiation nach $y \mp x \operatorname{tg} \bar{\alpha}$.

2. MACHSche Linien und MACHscher Winkel. Die beiden Parallelgeradenscharen

$$\begin{aligned} y - x \operatorname{tg} \bar{\alpha} &= \text{const}, \\ y + x \operatorname{tg} \bar{\alpha} &= \text{const}, \end{aligned}$$

die gegen den Anströmvektor \bar{w} unter dem Winkel $\pm \bar{\alpha}$ geneigt sind, nennt man MACHSche Linien; sie erzeugen das geradlinige MACHSche Netz der linearisierten Überschallströmung (Abb. 16). Die Richtungen der MACHSchen Linien sollen kurz MACHSche Richtungen heißen.

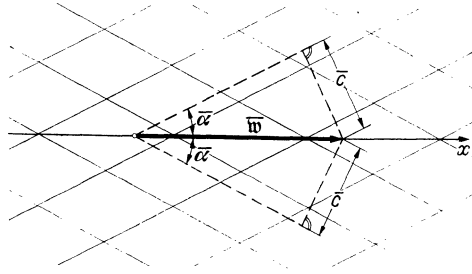


Abb. 16. Geradliniges MACHSches Netz der linearisierten Überschallströmung.

Für die Projektionen des Geschwindigkeitsvektors $w = \bar{w} + w'$ (vgl. S. 23) auf die MACHSchen Linien (Abb. 17) erhält man mit Berücksichtigung von Gl. (83)

$$\begin{aligned} p &= (\bar{u} + u') \cos \bar{\alpha} - v' \sin \bar{\alpha} = \bar{u} \cos \bar{\alpha} - 2 \dot{f}_1 \sin \bar{\alpha}, \\ q &= (\bar{u} + u') \cos \bar{\alpha} + v' \sin \bar{\alpha} = \bar{u} \cos \bar{\alpha} + 2 \dot{f}_2 \sin \bar{\alpha}. \end{aligned}$$

Längs der MACHSchen Linien der ersten (bzw. zweiten) Schar ist $y - x \operatorname{tg} \bar{\alpha}$ und f_1, \dot{f}_1 (bzw. $y + x \operatorname{tg} \bar{\alpha}$ und f_2, \dot{f}_2) konstant, es gilt also der Satz (Abb. 18):

Die Projektionen p (bzw. q) sind konstant längs einer MACHSchen Linie der ersten (bzw. zweiten) Schar.

Der MACHSche Winkel $\bar{\alpha}$ steht mit \bar{w} und \bar{c} in der durch Gl. (82)

gegebenen Beziehung, wonach die Projektion des Geschwindigkeitsvektors senkrecht zu einer MACHSchen Richtung stets gleich der Schallgeschwindigkeit ist (Abb. 16). Ebenso wie \bar{c} ist auch $\bar{\alpha}$ eine durch die jeweilige Adiabatangleichung (5) bestimmte Funktion von \bar{w} .

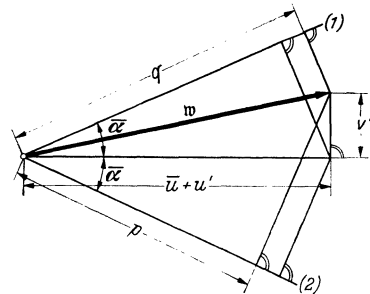


Abb. 17. Projektionen des Geschwindigkeitsvektors auf die MACHSchen Linien.

Für die Adiabaten Gleichung der vollkommenen Gase ergibt sich die Funktion $\bar{\alpha}(\bar{w})$ nach Gl. (15*) aus

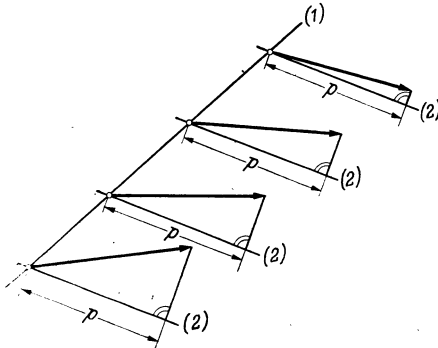


Abb. 18. Konstanz von p (bzw. q) längs einer MACHschen Linie der ersten (bzw. zweiten) Schar.

$$\sin^2 \bar{\alpha} = \frac{\bar{c}^2}{\bar{w}^2} = \frac{k-1}{2} \frac{w_{\max}^2 - \bar{w}^2}{\bar{w}^2}$$

Wir betrachten $\bar{\alpha}$ und \bar{w} als Polarkoordinaten und erhalten durch Übergang zu den rechtwinkligen Koordinaten $\bar{u} = \bar{w} \cos \bar{\alpha}$, $\bar{v} = \bar{w} \sin \bar{\alpha}$ die Gleichung $\bar{v}^2 = \frac{k-1}{2} [w_{\max}^2 - (\bar{u}^2 + \bar{v}^2)]$, aus der mit Rücksicht auf Gl. (18) die grundlegende Beziehung folgt

$$\frac{\bar{u}^2}{w_{\max}^2} + \frac{\bar{v}^2}{c^{*2}} = 1; \quad (84)$$

d. h.: Bei Zugrundelegung der Adiabaten Gleichung der vollkommenen Gase ist die Kurve $\bar{w} = \bar{w}(\bar{\alpha})$ eine Ellipse mit den Halbachsen w_{\max} und c^* ; wir werden sie kurz Adiabatenellipse nennen (Abbildung 19).

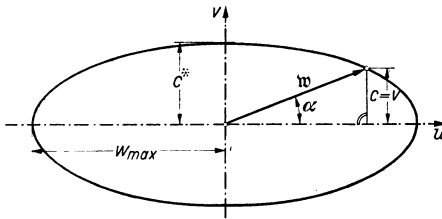


Abb. 19. Adiabatenellipse der vollkommenen Gase.

In den Abb. 19 und 20 sind die Querstriche über w , α und v weggelassen, da wir die Bilder später auch für die nichtlinearierte strenge Theorie (vgl. S. 97) benutzen.

Mit Hilfe der Adiabatenellipse Gl. (84) kann man zu jedem Punkt P' des ringförmigen Überschallbereichs der Geschwindigkeitsebene (vgl. S. 9) die MACHschen Richtungen folgendermaßen finden (Abb. 20):

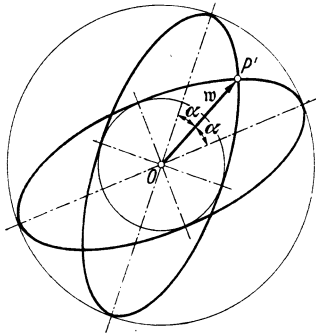


Abb. 20. Konstruktion der MACHschen Richtungen für einen vorgegebenen Geschwindigkeitsvektor.

Man legt den Mittelpunkt der Adiabatenellipse in den Mittelpunkt des Ringbereichs, so daß die Ellipse in ihren Scheiteln die beiden Begrenzungskreise $\bar{w} = c^*$ und $\bar{w} = w_{\max}$ des Ringbereichs berührt, und dreht die Ellipse so lange, bis sie durch den Endpunkt P' des gegebenen Geschwindigkeitsvektors \bar{w} hindurchgeht. In den beiden so bestimmten Stellungen der Adiabatenellipse sind die großen Ellipsenachsen parallel zu den zu \bar{w} gehörigen MACHschen Richtungen.

Für die Maximalgeschwindigkeit w_{\max} wird $\bar{\alpha} = 0$ und für die kritische Geschwindigkeit c^* ist $\bar{\alpha} = \frac{\pi}{2}$. Das MACHsche Netz klappt hierbei in eine einzige Geradenschar parallel bzw. senkrecht zum Geschwindigkeitsvektor \bar{w} zusammen.

Man beachte, daß nach Gl. (18) das Achsenverhältnis

$$w_{\max} : c^* = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$$

der Adiabatenellipse nur von k , d. h. von der Art des Gases, nicht aber von den Ruhewerten p_0, ρ_0, T_0 abhängt. Infolgedessen kann man bei geeigneter Verfügung über den Maßstab, z. B. indem man c^* als Einheit nimmt und demgemäß w durch M^* ersetzt, mit einer ein für allemal festen Adiabatenellipse auskommen. Für Luft ($k=1,405$) ist nach S. 11 das Achsenverhältnis $w_{\max} : c^* = 2,437$.

3. Linearisierte Strömung an einer flachen Ecke. Als einfachstes Beispiel behandeln wir die Strömung an einer flachen Ecke E (Abb. 21), an der die in der positiven x -Richtung ankommende Grundströmung um den kleinen Winkel $\Delta\vartheta$ abgelenkt werden soll. $\Delta\vartheta$ wird positiv für konvexe und negativ für konkave Ecken gerechnet. Durch Zusammenfassen von zwei derartigen Strömungen ergibt sich die axiale oder schiefe Strömung um einen spitzen Keil.

Die geforderten einfachen Randbedingungen lassen sich erfüllen, indem man in Gl. (81) setzt

$$f_1 \begin{cases} = 0 \\ = -(y - x \operatorname{tg} \bar{\alpha}) \bar{u} \Delta\vartheta \end{cases} \quad \text{für} \begin{cases} x \operatorname{tg} \bar{\alpha} < y \\ x \operatorname{tg} \bar{\alpha} > y \end{cases}, \quad f_2 = 0 \quad \text{für die ganze Ebene.}$$

Dann kommt nur die von der Ecke E stromabwärts laufende MACHsche Linie m der ersten Schar ins Spiel und aus Gl. (83) folgt

$$\left. \begin{aligned} u' &= 0 \\ v' &= 0 \end{aligned} \right\} \text{stromaufwärts von } m, \\ \left. \begin{aligned} u' &= + \Delta\vartheta \bar{u} \operatorname{tg} \bar{\alpha} \\ v' &= - \Delta\vartheta \bar{u} \end{aligned} \right\} \text{stromabwärts von } m; \quad (85)$$

d. h.: Stromaufwärts von m bleibt die Grundströmung ungestört, strom-

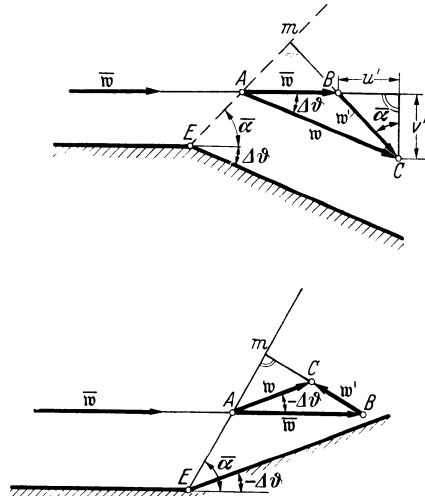


Abb. 21. Linearisierte Überschallströmung an einer Ecke.

abwärts von m überlagert sich eine konstante Zusatzströmung. Wegen

$$\frac{v'}{\bar{u} + u'} \approx \frac{v'}{\bar{u}} = -\Delta\vartheta$$

erzeugt diese Zusatzströmung eine um den Winkel $\Delta\vartheta$ abgelenkte Parallelströmung; für den Zuwachs des Geschwindigkeitsbetrags hat man nach Gl. (49)

$$\Delta w = u' = \bar{u} \operatorname{tg} \bar{\alpha} \Delta\vartheta. \quad (85^*)$$

Der konstante Zusatzvektor w' steht wegen

$$\frac{u'}{v'} = -\operatorname{tg} \bar{\alpha}$$

senkrecht zur MACHSchen Linie m . Infolgedessen kann der Geschwindigkeitsvektor w der abgelenkten Strömung aus \bar{w} und $\bar{\alpha}$ unmittelbar konstruiert werden; denn das Dreieck ABC (vgl. Abb. 21) ist durch die Seite $AB = \bar{w} = u$, den Winkel $\sphericalangle A = \Delta\vartheta$ und die zu m senkrechte Richtung der Seite BC vollständig bestimmt.

Die Orthogonalität von w' und m ergibt sich auch aus der physikalischen Überlegung, daß längs m ein konstanter Drucksprung vorliegt und demnach grad p , also nach der EULERSchen Gl. (1) auch der Beschleunigungsvektor und der zu ihm proportionale Zusatzvektor w' auf der MACHSchen Linie m senkrecht stehen müssen. Außerdem folgt die Orthogonalität auch unmittelbar aus S. 35: Beim Überschreiten der MACHSchen Linie m längs einer MACHSchen Linie der anderen Schar bleibt die Projektion q des Geschwindigkeitsvektors auf m ungeändert, der Zuwachsvektor w' muß also senkrecht zu m gerichtet sein.

Aus der linearisierten BERNOULLISchen Gl. (50) erhält man mit Hilfe von Gl. (85*) für den Druckunterschied vor und hinter der MACHSchen Linie m

$$\Delta p = -\bar{\rho} \bar{u}^2 \operatorname{tg} \bar{\alpha} \Delta\vartheta = -2\bar{q} \operatorname{tg} \bar{\alpha} \Delta\vartheta \quad (86)$$

mit dem Staudruck $\bar{q} = \frac{\bar{\rho}}{2} \bar{u}^2$ der Grundströmung. Nach Gl. (85*) und (86)

hat man an einer konvexen Ecke ($\Delta\vartheta > 0$) eine Geschwindigkeitszunahme und Druckabnahme, an einer konkaven Ecke ($\Delta\vartheta < 0$) eine Geschwindigkeitsabnahme und Druckzunahme. Die MACHSche Linie m ist daher im ersten Fall eine „Verdünnungslinie“ und im zweiten Fall eine „Verdichtungslinie“. Wir werden in den Bildern Verdünnungslinien stricheln und Verdichtungslinien dünn durchziehen.

4. Fortpflanzung schwacher Störungen; Störungslinien und Schallgeschwindigkeit. Wie an dem Beispiel der Strömung an einer flachen Ecke bzw. einem spitzen Keil zu sehen ist, pflanzen sich in einer Überschallströmung schwache Störungen, wie sie die linearisierte Theorie zu erfassen gestattet, längs der vom Störungsort E ausgehenden MACHSchen Linien stromabwärts fort und klingen hierbei nicht ab. Die MACH-

schen Linien haben daher als „Störungslinien“ eine unmittelbare physikalische Bedeutung. Die durch die Fortpflanzung der Störung bewirkten Dichteänderungen machen die MACHschen Linien photographisch erfaßbar (TÖPLERSche Schlierenmethode, vgl. Abb. 88).

Außerhalb des Wirkungsbereichs, der von den beiden vom Störungs-ort stromabwärts gehenden MACHschen Linien begrenzt wird (Abb. 22), ist die Störung ohne jeden Einfluß¹. Dieses Verhalten der Überschallströmungen ist grundverschieden von dem Verhalten der Unterschallströmungen; bei diesen wirkt wie im Grenzfall der inkompressiblen Strömung eine Störung auf das ganze Strömungsfeld stromauf- und stromabwärts ein, klingt aber mit zunehmender Entfernung ab. Wir werden auf diesen Unterschied, der durch den hyperbolischen bzw. ellip-tischen Typus der Potentialgleichung bedingt ist, bei der Charakte-ristikentheorie (vgl. S. 44) noch ausführlich zurückkommen.

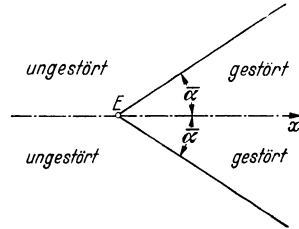


Abb. 22. Einflußgebiet einer Störung in der linearisierten Überschallströmung.

Nunmehr sind wir auch imstande, die in Gl. (6) eingeführte Geschwindigkeit c als Fortpflanzungsgeschwindigkeit schwacher Störungen („Schallgeschwindigkeit“) zu erkennen²:

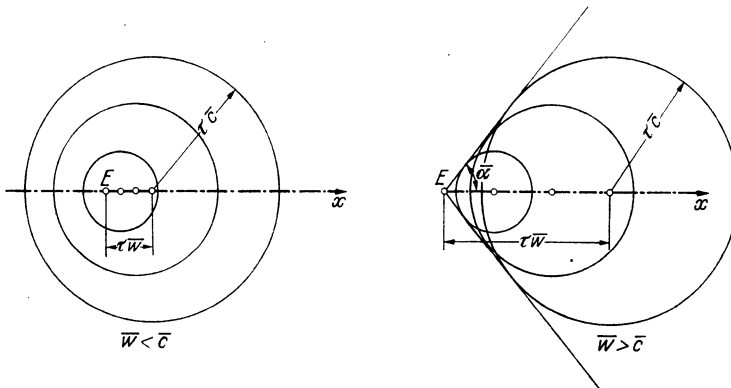


Abb. 23. Ausbreitung einer schwachen Störung in einer Unter- bzw. Überschallströmung.

Wir denken uns wieder von einem festen Punkt E eine zeitlich unveränderliche schwache Störung ausgehen, wie sie etwa durch eine flache Ecke oder einen spitzen Keil hervorgerufen wird. Die Störung pflanzt sich relativ zum strömenden Gas nach allen Richtungen mit einer konstanten Geschwindigkeit fort, die wir zunächst mit \bar{c} bezeichnen wollen. Die Störung wird zu einer Zeit τ auf dem Umfang eines Kreises ange-

¹ Vgl. Fußnote S. 34.

² Vgl. auch PRANDTL: S. 182.

kommen sein, dessen Radius $\tau\bar{c}$ ist und dessen Mittelpunkt vom raumfesten Störungszentrum E den Abstand $\tau w \approx \tau\bar{w}$ hat (Abb. 23).

Für $\bar{w} < \bar{c}$, d. h. wenn die Strömungsgeschwindigkeit kleiner ist als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Störung, erfüllt das Kreissystem die ganze Ebene, die Störung gelangt also nach hinreichend langer Zeit zu jedem Punkt. Für $\bar{w} > \bar{c}$ dagegen erfüllen die Kreise einen durch

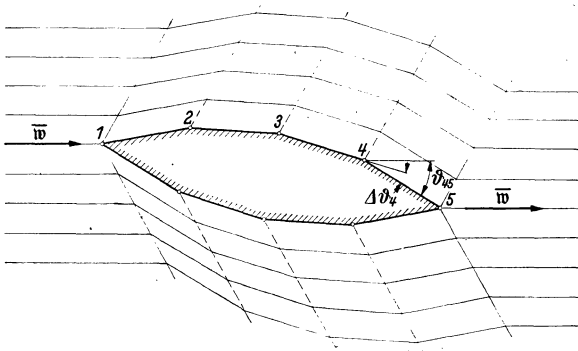
$$\sin \tilde{\alpha} = \frac{\bar{c}}{\bar{w}}$$

bestimmten Winkel $2\tilde{\alpha}$, die Störungen bleiben also auf diesen Winkel beschränkt. Da wir nun aber aus dem Vorangehenden wissen, daß bei Überschallgeschwindigkeit die Fortpflanzungslinien der Störungen die MACHschen Linien sind, muß $\tilde{\alpha} = \bar{\alpha}$ und demnach $\bar{c} = \bar{c}$ gesetzt werden, die in Gl. (6) definierte Geschwindigkeit \bar{c} ist also gleich der Fortpflanzungsgeschwindigkeit \bar{c} kleiner Störungen.

Derselbe Gedankengang liegt folgender Überlegung zugrunde:

Wir gehen von der stationären Strömung um eine Ecke E zu einer instationären Strömung über, indem wir ein mit der Grundströmung starr verbundenes Bezugssystem benützen. In diesem Bezugssystem ist das anströmende Gas in Ruhe, während das Störungszentrum E mit der Geschwindigkeit $-\bar{w}$ sich fortbewegt. Nach S. 35 und Abb. 16 ist dann $\bar{w} \sin \bar{\alpha} = \bar{c}$ die Fortschrittsgeschwindigkeit der von E ausgehenden Störungsfrent in der Grundströmung.

5. Linearisierte Umströmung eines schlanken Profils. Wir untersuchen jetzt die Überschallströmung um ein spitzes und schlankes Profil. Indem wir dieses durch ein Polygon annähern, wird die Aufgabe auf die



Strömung an flachen Ecken (vgl. S. 37) zurückgeführt. Die vorderste Ecke, die mit dem Grundvektor \bar{w} angeströmt wird, und die hinterste Ecke, an der die Strömung parallel zu \bar{w} abgehen soll, sind in Abb. 24 konkave Ecken, die zwischenliegenden Ecken dagegen konvex. Infolgedessen gehen von der Vorder- und Hinterecke Verdichtungslinien, von den Zwischenecken Verdünnungslinien aus.

Abb. 24. Linearisierte Überschallströmung um ein Profil.

Für jede Ecke des Profils ergibt sich aus Gl. (86) der Druckzuwachs, z. B.

$$\Delta p_4 = -2 \bar{q}_{34} \operatorname{tg} \bar{\alpha}_{34} \Delta \vartheta_4.$$

Hierbei ist der Knickwinkel $\Delta \vartheta_4$ wie vorher positiv für Verdünnung und negativ für Verdichtung gerechnet; der Staudruck \bar{q}_{34} und der MACHsche Winkel $\bar{\alpha}_{34}$ beziehen sich auf die Parallelströmung längs der vorangehenden Polygonseite 34. Bei Beschränkung auf kleine Größen erster Ordnung können wir \bar{q}_{34} und $\bar{\alpha}_{34}$ durch die entsprechenden Werte \bar{q} und $\bar{\alpha}$ der Grundströmung ersetzen und haben dann

$$\Delta p_i = -2 \bar{q} \operatorname{tg} \bar{\alpha} \Delta \vartheta_i \quad \text{mit } i = 1, 2, 3, \dots$$

Durch Addition ergibt sich hieraus für jede Polygonstrecke an der Oberseite bzw. Unterseite des Profils die gesamte Druckdifferenz Δp_o bzw. $\Delta p_u = \Sigma \Delta p_i$ gegenüber der Grundströmung:

$$\Delta p_o = -2 \bar{q} \operatorname{tg} \bar{\alpha} \vartheta_o, \quad \Delta p_u = +2 \bar{q} \operatorname{tg} \bar{\alpha} \vartheta_u, \quad (87)$$

wobei ϑ_o, ϑ_u den in üblicher Weise positiv bzw. negativ gezählten Anstellwinkel der betreffenden Polygonseite bedeutet ($\vartheta_o = +\Sigma \vartheta_i, \vartheta_u = -\Sigma \vartheta_i$).

Beim Grenzübergang vom Polygon zum stetig gekrümmten Profil bleibt Gl. (87) unverändert bestehen, wenn man unter ϑ den örtlichen Anstellwinkel der Profiltangenten versteht.

Für die Strömung hinter dem Profil hat man $\vartheta = 0$, folglich $\Delta p = 0$ und $w = \bar{w}$. Die Strömung geht sonach hinter dem Profil ungestört weiter, die Störung beschränkt sich also auf den Bereich zwischen den von der Vorder- und Hinterecke stromabwärts laufenden MACHschen Linien und klingt in diesem Bereich nicht ab (vgl. S. 29). Die Stromlinien des Störungsbereichs sind kongruent und gehen aus dem Profil durch Parallelverschiebung in Richtung der MACHschen Linien hervor. Als Anwendung ist in Abb. 15 die Überschallströmung längs einer welligen Wand sowie der Grenzfall der Strömung mit der kritischen Geschwindigkeit ($\bar{\alpha} = \frac{\pi}{2}$) dargestellt (vgl. S. 29). Über die strenge Behandlung von Profilströmungen vgl. S. 126.

Die Umströmung eines Profils kann statt durch Grenzübergang aus der Umströmung eines Polygons auch unmittelbar aus Gl. (81) hergeleitet werden mit

$$f_1 \begin{cases} = 0 & \text{im ungestörten Bereich,} \\ = f(y - x \operatorname{tg} \bar{\alpha}) & \text{im gestörten Bereich,} \end{cases} \quad f_2 = 0 \text{ in der ganzen Ebene.}$$

Aus Gl. (83) folgt dann

$$\begin{aligned} u' &= 0, \quad v' = 0 & \text{im ungestörten Bereich,} \\ u' &= -f \operatorname{tg} \bar{\alpha}, \quad v' = f & \text{im gestörten Bereich.} \end{aligned}$$

Die Funktion $f(y - x \operatorname{tg} \bar{\alpha})$ ist durch den örtlichen Anstellwinkel ϑ des

vorgegebenen Profils bestimmt vermöge

$$\frac{f}{u} = \frac{v'}{u} = \pm \vartheta \quad (\text{— für Oberseite, + für Unterseite}),$$

wonach durch Einsetzen von

$$u' = \pm \bar{u} \operatorname{tg} \bar{\alpha} \vartheta$$

in die BERNOULLISCHE Gl. (50) sich von neuem die Beziehung Gl. (87) ergibt.

6. Auftrieb und Widerstand für linearisierte Überschallströmungen¹

Während nach S. 27 bei Unterschallströmungen ebenso wie im Grenzfall der inkompressiblen Strömung kein Widerstand auftritt, liefert bei Überschallströmungen die Druckverteilung längs des Profils neben dem Auftrieb senkrecht zur Anströmrichtung auch einen Widerstand entgegen gesetzt der Anströmrichtung, den man als „Wellenwiderstand“ zu bezeichnen pflegt. Dieses grundsätzlich verschiedene Verhalten der Unter- und Überschallströmungen hängt eng mit der verschiedenen Art der Ausbreitung von Störungen nach S. 29 zusammen.

Überschallprofile haben stet eine scharfe Vorder- und Hinterkante und eine dadurch eindeutig bestimmte Profilschne von der Länge L (Abb. 25). Wir bezeichnen mit $\bar{\vartheta}$ den Anstellwinkel der Profilschne und setzen für die

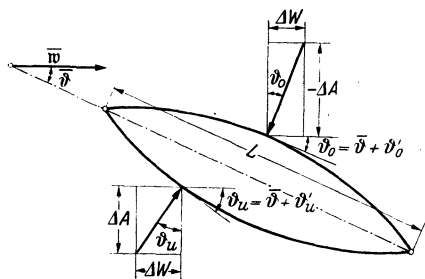


Abb. 25. Zerlegung des Druckes in Auftrieb und Widerstand.

örtlichen Anstellwinkel an der Profiler- bzw. unterseite

$$\vartheta_o = \bar{\vartheta} + \vartheta'_o, \quad \vartheta_u = \bar{\vartheta} + \vartheta'_u, \quad (88)$$

wobei ϑ'_o und ϑ'_u im selben Sinne wie der Anstellwinkel $\bar{\vartheta}$ gezählt wird. Die Grundformel (87) liefert dann für die Ober- bzw. Unterseite des Profils

$$\Delta p_o = -2 \bar{q} \operatorname{tg} \bar{\alpha} (\bar{\vartheta} + \vartheta'_o), \quad \Delta p_u = +2 \bar{q} \operatorname{tg} \bar{\alpha} (\bar{\vartheta} + \vartheta'_u). \quad (89)$$

Durch Integration über die Ober- und Unterseite des Profils erhält man den gesamten Auftrieb und Widerstand

$$\left. \begin{aligned} A &= \int_0^{s_u} \Delta p_u \cos \vartheta_u ds_u - \int_0^{s_o} \Delta p_o \cos \vartheta_o ds_o, \\ W &= \int_0^{s_u} \Delta p_u \sin \vartheta_u ds_u - \int_0^{s_o} \Delta p_o \sin \vartheta_o ds_o, \end{aligned} \right\} (90)$$

¹ ACKERET, J.: Z. Flugtechn. Motorluftsch. 16 (1925), S. 72—74; ferner A. BUSEMANN: Voltakongreß, S. 328—360. — v. KÁRMÁN, TH.: Voltakongreß S. 222—277 und H. SCHLICHTING: Luftf.-Forsch. 13 (1936) S. 320—335.

wobei ds_o, ds_u die Bogenelemente und S_o, S_u die Gesamtbogenlängen der Ober- und Unterseite sind.

In linearer Näherung können wir setzen

$$ds_o = ds_u = \text{Längenelement } dl \text{ der Profilschne,}$$

$$\cos \vartheta_o = \cos \vartheta_u = \cos \vartheta'_o = \cos \vartheta'_u = \cos \bar{\vartheta} = 1,$$

$$\sin \vartheta_o = \vartheta_o, \sin \vartheta_u = \vartheta_u, \sin \vartheta'_o = \vartheta'_o, \sin \vartheta'_u = \vartheta'_u, \sin \vartheta = \vartheta,$$

$$S_o = S_u = L$$

und erhalten dann aus Gl. (90) die Näherungsgleichungen

$$A = \int_0^L (\Delta p_u - \Delta p_o) dl, \quad W = \int_0^L (\Delta p_u \vartheta_u - \Delta p_o \vartheta_o) dl,$$

aus denen durch Einsetzen von Gl. (89)

$$\left. \begin{aligned} A &= 2\bar{q} \operatorname{tg} \bar{\alpha} \int_0^L [2\bar{\vartheta} + (\vartheta'_u + \vartheta'_o)] dl, \\ W &= 2\bar{q} \operatorname{tg} \bar{\alpha} \int_0^L (\vartheta_u^2 + \vartheta_o^2) dl = 2\bar{q} \operatorname{tg} \bar{\alpha} \int_0^L [2\bar{\vartheta}^2 + 2\bar{\vartheta}(\vartheta'_u + \vartheta'_o) \\ &\quad + (\vartheta_u'^2 + \vartheta_o'^2)] dl \end{aligned} \right\} (91)$$

folgt.

Ist nun $y = y_u(l)$ bzw. $y = y_o(l)$ die Gleichung des Profils in einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit der Profilschne als l -Achse, so hat man

$$\vartheta'_u = \frac{dy_u}{dl}, \quad \vartheta'_o = -\frac{dy_o}{dl}, \quad \text{also } \int_0^L \vartheta'_u dl = \int_0^L dy_u = 0, \quad \int_0^L \vartheta'_o dl = -\int_0^L dy_o = 0.$$

Durch Einsetzen in Gl. (91) ergeben sich dann mit Benutzung der Bezeichnungen

$$B_{2u} = \frac{1}{L} \int_0^L \vartheta_u'^2 dl \geq 0, \quad B_{2o} = \frac{1}{L} \int_0^L \vartheta_o'^2 dl \geq 0 \quad (92)$$

für die Beiwerte von Auftrieb und Widerstand die endgültigen Formeln

$$\left. \begin{aligned} c_a &= \frac{A}{L\bar{q}} = 4 \operatorname{tg} \bar{\alpha} \bar{\vartheta}, \\ c_w &= \frac{W}{L\bar{q}} = 4 \operatorname{tg} \bar{\alpha} [\bar{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} (B_{2u} + B_{2o})]. \end{aligned} \right\} (93)$$

Die Integrale B_{2u}, B_{2o} hängen nicht vom Anstellwinkel ab, sondern sind allein von der geometrischen Gestalt des Profils bedingt und verschwinden nur für das geradlinige Profil. Zusammenfassend folgt der Satz:

Bei festem Anstellwinkel und fester MACHscher Zahl haben alle Überschallprofile denselben Auftriebsbeiwert. Der Widerstandsbeiwert hängt

von der Gestalt des Profils ab und ist am kleinsten für das geradlinig Profil, welches sich dadurch als bestes Überschallprofil erweist.

Außerdem ergibt sich aus Gl. (93), daß die Gleitzahl c_w/c_a nur von Anstellwinkel und der geometrischen Gestalt des Profils, nicht aber von der MACHschen Zahl abhängig ist.

Beim Anstellwinkel $\bar{\vartheta} = 0$ liefert in der linearisierten Strömung jede Profil den Auftriebsbeiwert $c_a = 0$, während der Widerstandsbeiwert c_w nur für das geradlinige Profil verschwindet; vgl. hierzu die entsprechenden Aussagen der strengen Theorie in § 19 S. 129.

7. Charakteristikentheorie der hyperbolischen Differentialgleichungen

Wir schicken folgende Begriffe und Sätze aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen¹ voraus und nehmen an, daß die erforderlichen Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsbedingungen erfüllt sind:

a) Die allgemeine lineare partielle Differentialgleichung zweite Ordnung

$$\left. \begin{aligned} a(x, y) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2b(x, y) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + p(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ + q(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} + r(x, y) \varphi + s(x, y) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

heißt elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch für $ac - b^2 > 0$, = 0 oder < 0 .

b) Im hyperbolischen Fall sind durch

$$ady^2 - 2bdxdy + cdx^2 = 0 \quad (95)$$

in der x, y -Ebene zwei reelle Kurvenscharen definiert, die man die Charakteristiken oder charakteristischen Kurven der Differentialgleichung (94) nennt.

c) Existenzsatz:

Wenn längs eines nicht charakteristischen Kurvenstücks AB die Werte der Funktion φ und ihrer ersten Ableitungen gegeben sind, dann ist das Integral φ der Differentialgleichung (94) in dem ganzen Charakteristikenviereck $APBQ$ eindeutig festgelegt (Abb. 26). Vorausgesetzt ist hierbei, daß jede der beiden Charakteristiken

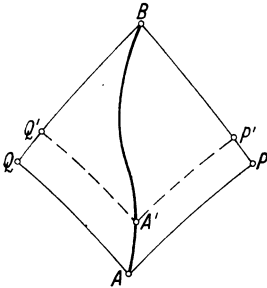


Abb. 26. Erläuterung zum Existenzsatz der Charakteristikentheorie.

d) Aus dem Existenzsatz folgt unmittelbar

¹ HORN, J.: Einf. in die Theorie der part. Diffgl., Sammlung Schubert Bd. 1 (1910), Sammlung Göschen, S. 92—187. — WEBSTER, A. G.: Part. Diffgl. der math. Physik, deutsche Bearb. von SZEGÖ, Leipzig und Berlin 1930. — Vgl. ferne STEICHEN, A.: Diss. Göttingen 1909 und C. PREISWERK: Diss. Techn. Hochschul. Zürich 1938.

Eine Änderung der Anfangswerte $\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}$ in einem kleinen Teilbogen AA' der Kurve AB pflanzt sich lediglich in den schmalen Zonen $APP'A'$ und $AQQ'A'$ fort, während im übrigen Teil des Charakteristikenvierecks $APBQ$ keine Änderung eintritt. Die Charakteristiken erscheinen hiernach als Fortpflanzungslinien für Störungen in den Anfangswerten.

Die Anwendung der Charakteristikentheorie auf die linearisierte Potentialgleichung (53) der ebenen Überschallströmung liefert folgende einfachen Zusammenhänge:

a) Die Bedingung $ac - b^2 \geq 0$ spezialisiert sich zu $1 - \bar{M}^2 \geq 0$; infolgedessen ist in Übereinstimmung mit der auf S. 24 eingeführten Bezeichnung die linearisierte Potentialgleichung bei Unterschall elliptisch und bei Überschall hyperbolisch.

b) Die Charakteristiken sind nach Gl. (95) durch

$$(\bar{M}^2 - 1) dy^2 - dx^2 = 0, \text{ also } \frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{\sqrt{\bar{M}^2 - 1}} = \pm \operatorname{tg} \bar{\alpha} \quad (95^*)$$

definiert und sind daher mit den MACHSchen Linien identisch.

c) Existenzsatz:

Wenn längs eines nicht mit einer MACHSchen Linie zusammenfallenden Kurvenstücks AB die Geschwindigkeitsvektoren w (— also $u = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $v = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$ und demnach auch φ bis auf einen beliebigen konstanten Anfangswert in A —) vorgegeben sind, dann ist w (— also $u = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $v = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$ und bis auf eine additive Konstante auch φ —) in dem ganzen von vier MACHSchen Linien begrenzten Parallelogramm $APBQ$ eindeutig festgelegt (Abb. 27).

Der Beweis des Existenzsatzes ergibt sich hier durch folgende elementare Konstruktion (Abb. 27):

R sei ein beliebiger Punkt des MACHSchen Parallelogrammes, L und M die mit R auf derselben MACHSchen Linie der ersten bzw. zweiten Schar liegenden

Punkte der Kurve AB . Nach S. 35 (vgl. Abb. 18) müssen dann w_L, w_R dieselben Projektionen auf die MACHSchen Linien der zweiten Schar und w_M, w_R dieselben Projektionen auf die MACHSchen Linien der ersten Schar besitzen. Infolgedessen kann w_R aus den beiden Projektionen auf die MACHSchen Linien konstruiert werden.

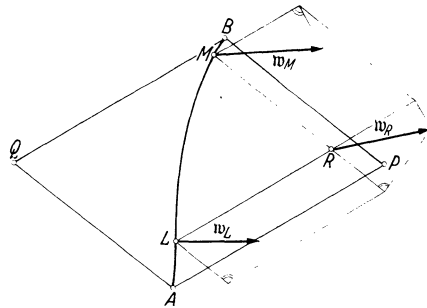


Abb. 27. Konstruktion der linearisierten Strömung in einem MACHSchen Parallelogramm.

d) Aus dem Existenzsatz ergibt sich der strenge Beweis für den aus S. 39 bereits besprochenen Sachverhalt, wonach sich kleine Störungen längs der MACHSchen Linien fortpflanzen und daher lediglich auf den Bereich einwirken, der von den beiden vom Strömungsort stromabwärt laufenden MACHSchen Linien eingeschlossen wird.

§ 9. Linearisierte räumliche Überschallströmung.

1. Diskussion der Potentialgleichung; MACHSche Kegel. Das Potential φ der allgemeinen linearisierten räumlichen Überschallströmung genügt der Differentialgleichung (51*)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} (\bar{M}^2 - 1) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0$$

und ist eine Funktion der drei Veränderlichen x, r, ω . Das allgemeine Integral von Gl. (51*) läßt sich nicht in geschlossener Form wie beim ebenen Problem (vgl. S. 34) angeben. Wir können aber die gesuchte Funktion φ der drei Veränderlichen x, r, ω durch zwei Funktionen $\bar{\varphi}$ und χ , die nur von den zwei Veränderlichen x, r abhängen, ausdrücken. Zu diesem Zwecke zerlegen wir das Gesamtpotential ebenso wie bei der Unterschallströmung (vgl. S. 31) durch den Ansatz

$$\varphi(x, r, \omega) = \bar{\varphi} + \varphi'(x, r) + \varphi''(x, r, \omega). \quad (96)$$

Dabei ist wieder $\bar{\varphi} = \bar{w}(x + \bar{\vartheta} r \cos \omega)$ das Potential der Grundströmung $\varphi'(x, r)$ das achsensymmetrische Zusatzpotential und

$$\varphi'' = \chi(x, r) \cos \omega \quad (97)$$

das bei gestörter Achsensymmetrie noch hinzukommende zweite Zusatzpotential.

Durch Einsetzen von Gl. (96) und (97) in Gl. (51*) ergibt sich

$$[\varphi'_{xx} (\bar{M}^2 - 1) - \varphi'_{rr} - \frac{1}{r} \varphi'_r] + \cos \omega [\chi_{xx} (\bar{M}^2 - 1) - \chi_{rr} - \frac{1}{r} \chi_r + \frac{1}{r^2} \chi] = 0$$

woraus durch Nullsetzen der beiden Klammerausdrücke für φ' die Potentialgleichung (52) des achsensymmetrischen Problems

$$\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} (\bar{M}^2 - 1) - \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi'}{\partial r} = 0$$

und für χ die lineare Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} (\bar{M}^2 - 1) - \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \chi = 0 \quad (98)$$

folgt.

Die Gl. (52) und (98) unterscheiden sich durch das letzte Glied bzw. die beiden letzten Glieder von der Potentialgleichung (53) der ebenen Überschallströmung. Dieser Unterschied verhindert, daß im Raum ein ähnlich einfacher geometrischer Zusammenhang besteht, wie er für die ebene Strömung durch Abb. 18 und 27 ausgedrückt wurde.

Sowohl die Differentialgleichung (52) für φ' als auch die Differentialgleichung (98) für χ hat die MACHSchen Linien der x, r -Ebene

$$r - x \operatorname{tg} \bar{\alpha} = \text{const}, \quad r + x \operatorname{tg} \bar{\alpha} = \text{const}$$

als charakteristische Kurven. Die von einem Punkt der x -Achse ausgehenden MACHSchen Linien erzeugen einen Drehkegel um die x -Achse mit dem MACHSchen Winkel $\bar{\alpha}$ als halbem Öffnungswinkel. Diese MACHSchen Kegel begrenzen in derselben Weise die Wirkungsbereiche von Störungen wie die von dem Störungszentrum stromabwärts laufenden MACHSchen Linienpaare beim ebenen Problem (vgl. Abb. 22).

2. Quell-Senken-Verfahren für räumliche Überschallströmungen.

Nach v. KÁRMÁN und TSIEN¹ übertragen wir das auf S. 31 für räumliche Unterschallströmungen entwickelte Quell-Senken-Verfahren formal analog auf Überschallströmungen, indem wir Gl. (70) und (74) ersetzen durch

$$\varphi' = \frac{1}{4\pi} \int_0^{x-\tilde{\beta}r} \frac{f(\xi) d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - \tilde{\beta}^2 r^2}} \quad \text{mit } \tilde{\beta}^2 = \bar{M}^2 - 1 > 0, \quad (99)$$

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \tilde{\beta} r \int_0^{x-\tilde{\beta}r} \frac{m(\xi) d\xi}{[(x-\xi)^2 - \tilde{\beta}^2 r^2]^{3/2}}, \quad \varphi'' = \chi \cos \omega. \quad (100)$$

Diese Integraldarstellungen befriedigen, wie man durch Einsetzen bestätigen kann, die Potentialgleichung (52) bzw. (98). Während bei Gl. (70) und (74) die Integrationsgrenzen a, b konstant waren, ist bei Gl. (99) und (100) nur die untere Grenze konstant (— etwa $a=0$ —), die obere Grenze dagegen von x und r abhängig. Dies beruht wieder auf dem verschiedenen Verhalten der Ausbreitung von Störungen bei Unter- und Überschallgeschwindigkeit. Im letzten Fall breitet sich nach S. 39 jede von einem Punkte ξ der x -Achse ausgehende Störung lediglich im Innern des stromabwärts laufenden MACHSchen Kegels

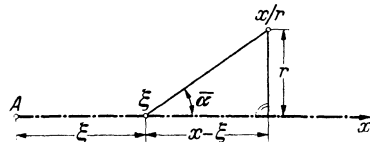


Abb. 28. Integrationsbereich bei Überschallgeschwindigkeit.

$$\frac{r}{x-\xi} \leq \operatorname{tg} \bar{\alpha} = \frac{1}{\tilde{\beta}}$$

aus, auf einen Aufpunkt x, r des Strömungsfeldes wirken also nur Störungen ein, die von Punkten $\xi \leq x - \tilde{\beta}r$ der x -Achse ausgehen (Abb. 28).

3. Linearisierte Umströmung eines Drehkegels. Wenn wir in (99) und (100)

$$f(\xi) = \xi \cdot f', \quad m(\xi) = \xi \cdot m' \quad \text{mit } f' = \text{const}, \quad m' = \text{const}, \quad \xi \geq 0$$

¹ v. KÁRMÁN, TH. und N. B. MOORE: Trans. Amer. Soc. mech. Engr. (Juni 1932). — TSIEN, SHUE-SHEN: J. Aeron. Sciences 5 (1938), S. 480—483.

setzen, also die Quellstärke f und das Moment m stromabwärts proportional mit ξ wachsen lassen, ergibt sich nach Ausführung der Quadraturen¹

$$\left. \begin{aligned} \varphi' &= \frac{f'}{4\pi} \left[\sqrt{x^2 - \tilde{\beta}^2 r^2} - x \operatorname{Ar} \operatorname{Co} \int \left(\frac{x}{\tilde{\beta} r} \right) \right], \\ \chi &= \frac{m'}{8\pi} \left[x \sqrt{\left(\frac{x}{\tilde{\beta} r} \right)^2 - 1} - \tilde{\beta} r \operatorname{Ar} \operatorname{Co} \int \left(\frac{x}{\tilde{\beta} r} \right) \right]. \end{aligned} \right\} (101)$$

Durch Differentiation nach x bzw. r erhält man mit denselben Bezeichnungen wie auf S. 31, 32 für die x - und r -Komponenten der Zusatzgeschwindigkeiten

$$\left. \begin{aligned} u' &= -\frac{f'}{4\pi} \operatorname{Ar} \operatorname{Co} \int \left(\frac{x}{\tilde{\beta} r} \right), & v' &= \frac{f' \tilde{\beta}}{4\pi} \sqrt{\left(\frac{x}{\tilde{\beta} r} \right)^2 - 1}, \\ u'' &= \frac{m'}{4\pi} \cos \omega \sqrt{\left(\frac{x}{\tilde{\beta} r} \right)^2 - 1}, \\ v'' &= -\frac{m' \tilde{\beta}}{8\pi} \cos \omega \left[\frac{x}{\tilde{\beta} r} \sqrt{\left(\frac{x}{\tilde{\beta} r} \right)^2 - 1} + \operatorname{Ar} \operatorname{Co} \int \left(\frac{x}{\tilde{\beta} r} \right) \right]. \end{aligned} \right\} (102)$$

Der Geschwindigkeitsvektor ist hiernach nur von x/r und ω abhängig, d. h. er bleibt konstant für jede durch den Anfangspunkt E gehende Gerade („konisches Strömungsfeld“).

Die Konstanten f' , m' lassen sich so wählen, daß die Geschwindigkeitsvektoren einen vorgegebenen, unter dem kleinen Anstellwinkel ϑ angeblasenen Drehkegel mit dem kleinen Öffnungswinkel $2\vartheta'$ berühren, daß also durch Gl. (102) die linearisierte Überschallströmung um einen Drehkegel geliefert wird. Zu diesem Zweck haben wir ähnlich wie auf S. 31, 33 die Randbedingungen

$$\operatorname{tg} \vartheta' = \frac{v'}{w + u'}, \quad \bar{w} \vartheta \cos \omega = -v' \quad (103)$$

zu erfüllen. Sie liefern mit $x/r = \operatorname{ctg} \vartheta'$ nach kurzer Rechnung

$$\left. \begin{aligned} \frac{f'}{4\pi w} &= \frac{\operatorname{tg} \vartheta'}{\sqrt{\operatorname{cotg}^2 \vartheta' - \tilde{\beta}^2 + \operatorname{tg} \vartheta' \operatorname{Ar} \operatorname{Co} \int \left(\frac{\operatorname{cotg} \vartheta'}{\tilde{\beta}} \right)}}, \\ \frac{m'}{4\pi w \vartheta} &= \frac{\beta}{\operatorname{cotg} \vartheta' \sqrt{\operatorname{cotg}^2 \vartheta' - \tilde{\beta}^2 + \tilde{\beta}^2 \operatorname{Ar} \operatorname{Co} \int \left(\frac{\operatorname{cotg} \vartheta'}{\tilde{\beta}} \right)}} \end{aligned} \right\} (104)$$

Nach Festlegung der Konstanten f' und m' gemäß Gl. (104) folgt aus Gl. (50*) für den durch Division mit dem Staudruck der Grundströmung dimensionslos gemachten Überdruck am Kegel

$$\frac{\Delta p}{\frac{\rho}{2} w^2} = -\frac{2u'}{w} - \frac{2u''}{w} = \frac{f'}{2\pi w} \operatorname{Ar} \operatorname{Co} \int \left(\frac{\operatorname{cotg} \vartheta'}{\tilde{\beta}} \right) - \frac{m' \cos \omega}{2\pi w \tilde{\beta}} \sqrt{\operatorname{cotg}^2 \vartheta' - \tilde{\beta}^2}. \quad (105)$$

¹ FERRARI, C.: Aerotecnica 17 (1937), S. 507—518.

Im Gültigkeitsbereich der linearisierten Theorie kann man in erster Näherung

$$\begin{aligned} \operatorname{ArCoj}\left(\frac{\cotg \vartheta'}{\tilde{\beta}}\right) &\approx \operatorname{ArCoj}\left(\frac{1}{\vartheta' \tilde{\beta}}\right) = -\ln \vartheta' + \ln 2 - \ln \tilde{\beta} \approx -\ln \vartheta' = \ln\left(\frac{1}{\vartheta'}\right), \\ \sqrt{\cotg^2 \vartheta' - \tilde{\beta}^2} &\approx \frac{1}{\vartheta'} \sqrt{1 - (\tilde{\beta} \vartheta')^2} \approx \frac{1}{\vartheta'} \end{aligned}$$

ersetzen und erhält dann aus Gl. (104) und (105) die genäherten Formeln

$$\begin{aligned} \frac{f'}{4\pi w} &= \frac{\vartheta'^2}{1 - \vartheta'^2 \ln \vartheta'} = \vartheta'^2, & \frac{m'}{8\pi w \bar{\vartheta}} &= \frac{\tilde{\beta} \vartheta'^2}{1 - \vartheta'^2 \tilde{\beta}^2 \ln \vartheta'} = \tilde{\beta} \vartheta'^2, \\ \frac{\Delta p}{\frac{\rho}{2} \bar{w}^2} &= 2 \vartheta'^2 \ln\left(\frac{1}{\vartheta'}\right) - 4 \bar{\vartheta} \vartheta' \cos \omega. \end{aligned}$$

Daraus folgt in Übereinstimmung mit dem entsprechenden auf S. 33 für Unterschallströmungen gewonnenen Ergebnis:

Bei der linearisierten Überschallströmung um einen Drehkegel ist die Druckverteilung an der Kegeloberfläche nur vom Öffnungswinkel $2\vartheta'$ und Anstellwinkel $\bar{\vartheta}$ des Kegels, nicht aber von der MACHschen Zahl abhängig.

Man beachte den Unterschied zwischen der ebenen Strömung um einem flachen Keil (vgl. S. 37) und der räumlichen Strömung um einen schlanken Drehkegel:

Beim Keil sind die Stromlinien parallele Geraden mit Knicken an den von der Keilkante stromabwärts laufenden MACHschen Linien (vgl. Abb. 21). Beim Kegel sind die Stromlinien stromabwärts des von der Kegelspitze ausgehenden MACHschen Kegels in jeder Meridianebene $\omega = \text{const}$ gekrümmte Kurven, die sich am MACHschen Kegel tangential, d. h. ohne Knick, an die geradlinigen Stromlinien der Grundströmung ansetzen und stromabwärts sich dem umströmten Kegel asymptotisch nähern (Abb. 29).

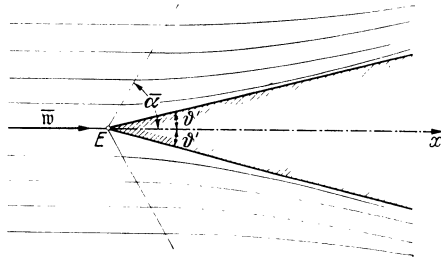


Abb. 29. Linearisierte axiale Überschallströmung um einen Drehkegel.

Daß die Stromlinien am MACHschen Kegel keinen Knick haben, ergibt sich nach Gl. (102) aus $v' + v'' = 0$ für $x - \tilde{\beta}r = 0$. Durch Entwicklung von $u' + u''$ nach Potenzen von $x - \tilde{\beta}r$ erhält man aus Gl. (102)

$$\begin{aligned} u' + u'' &= -\frac{f'}{4\pi} \operatorname{ArCoj}\left(1 + \frac{x - \tilde{\beta}r}{\tilde{\beta}r}\right) + \frac{m'}{4\pi} \cos \omega \sqrt{\left(1 + \frac{x - \tilde{\beta}r}{\tilde{\beta}r}\right)^2 - 1} \\ &= \frac{m' \cos \omega - f'}{4\pi} \sqrt{\frac{2(x - \tilde{\beta}r)}{\tilde{\beta}r}} (1 + \dots). \end{aligned}$$

Für $r = \text{const}$ liefert diese Formel den Druckverlauf im Strömungsfeld längs einer zur Kegelachse parallelen Geraden (Abb. 30). Während bei der ebenen Strömung um einen Keil der Druck plötzlich vom konstanten Wert der Grundströmung auf den konstanten Wert hinter der MACHSchen Linie ansteigt, erfolgt der Druckanstieg beim Kegel nach einer Kurve, die mit senkrechter Tangente beginnt und sich schnell dem Endwert am Kegel annähert.

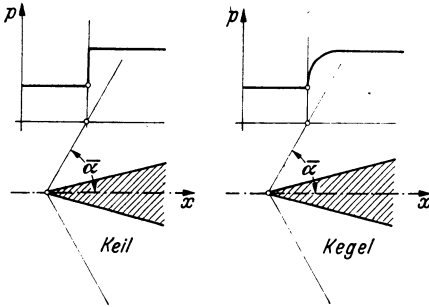


Abb. 30. Druckverteilung längs einer x -Parallelen bei der linearisierten Überschallströmung um Keil und Kegel.

4. Linearisierte Umströmung eines beliebigen zugespitzten Drehkörpers.

Die Umströmung eines beliebigen zugespitzten Drehkörpers (achsial oder schief angeblasene Geschößspitze) läßt sich durch Überlagerung konischer Strömungen folgendermaßen näherungsweise erzeugen¹:

Die beiden zunächst unbekannt, nachträglich aus der Gestalt des vorgegebenen Drehkörpers zu bestimmenden Kurven $f = f(\xi)$ und $m = m(\xi)$ der Quell-Senken-Verteilung bzw. Doppelquellen-Verteilung werden durch Polygone $F_1 F_2 F_3 \dots$ bzw. $M_1 M_2 M_3 \dots$ ersetzt gedacht, deren Eckpunkte beide Male dieselben Abszissen $\xi_1 = 0, \xi_2, \xi_3, \dots$ haben (Abb. 31). Analytisch heißt dies, daß $f(\xi), m(\xi)$ durch Überlagerung der Linearfunktionen

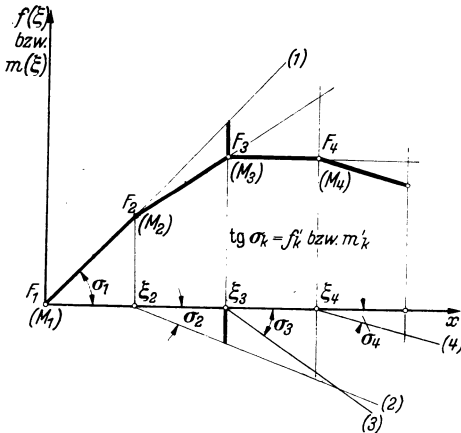


Abb. 31. Polygonale Quell-Senken- bzw. Doppelquellen-Verteilung.

$$\begin{aligned}
 f_1 &= (\xi - \xi_1) f'_1, & m_1 &= (\xi - \xi_1) m'_1 & \text{für } \xi \geq \xi_1, \\
 f_2 &= (\xi - \xi_2) f'_2, & m_2 &= (\xi - \xi_2) m'_2 & \text{für } \xi \geq \xi_2, \\
 f_3 &= (\xi - \xi_3) f'_3, & m_3 &= (\xi - \xi_3) m'_3 & \text{für } \xi \geq \xi_3, \\
 & \dots & & \dots & \dots
 \end{aligned}$$

entstehen mit den noch unbestimmten Konstanten f'_k bzw. $m'_k = \text{tg } \sigma_k$.

¹ v. KÁRMÁN, TH. und N. B. MOORE: Trans. Amer. Soc. Mech. Eng. (Juni 1932). — TSIEN, SHUE-SHEN: J. Aeron. Sciences 5 (1938), S. 480—483. — FERRARI, C.: Aerotecnica 17 (1937), S. 507—518.

Jedes der linearen Funktionspaare stellt nach S. 48 ein konisches Strömungsfeld dar. Nach Gl. (102) ergibt sich für irgend einen Aufpunkt x/r

$$\left. \begin{aligned} u' &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^n f'_k \mathfrak{A}r\mathfrak{C}\mathfrak{v} \left[\frac{x - \xi_k}{\tilde{\beta}r} \right], \quad v' = \frac{\tilde{\beta}}{4\pi} \sum_{k=1}^n f'_k \left[\left(\frac{x - \xi_k}{\tilde{\beta}r} \right)^2 - 1 \right], \\ u'' &= \frac{\cos \omega}{4\pi} \sum_{k=1}^n m'_k \left[\left(\frac{x - \xi_k}{\tilde{\beta}r} \right)^2 - 1 \right], \\ v'' &= -\frac{\tilde{\beta} \cos \omega}{8\pi} \sum_{k=1}^n m'_k \left[\frac{x - \xi_k}{\tilde{\beta}r} \sqrt{\left(\frac{x - \xi_k}{\tilde{\beta}r} \right)^2 - 1} + \mathfrak{A}r\mathfrak{C}\mathfrak{v} \left[\frac{x - \xi_k}{\tilde{\beta}r} \right] \right]; \end{aligned} \right\} (106)$$

hierbei ist über alle $\xi_k < x - \tilde{\beta}r$ zu summieren, d. h. über alle Punkte ξ_k , die stromaufwärts der durch den Aufpunkt x/r gehenden MACHSchen Linie liegen (vgl. Abb. 28).

Die zunächst unbestimmt angesetzten Konstanten f'_k, m'_k müssen jetzt so festgelegt werden, daß durch Gl. (106) angenähert die Strömung um den vorgegebenen Drehkörper unter dem vorgegebenen Anstellwinkel ϑ gegeben wird. Zu diesem Zwecke greifen wir einige Punkte $x_1/r_1, x_2/r_2, x_3/r_3, \dots$ der Meridiankurve des Drehkörpers in der Ebene $\omega = 0$ in hinreichend enger Aufeinanderfolge, sonst aber beliebig, heraus und bezeichnen die Neigungswinkel der Tangenten dieser Punkt mit ϑ'_i (Abb. 32).

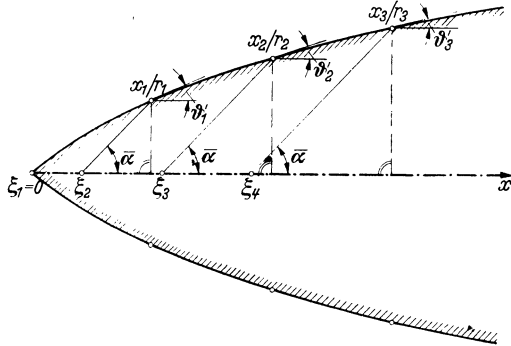


Abb. 32. Linearisierte Überschallströmung um einen zugespitzten Drehkörper.

Die Punkte ξ_k (vgl. Abb. 31) wählen wir gemäß

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = x_1 - r_1 \operatorname{ctg} \bar{\alpha} = x_1 - \tilde{\beta}r_1, \quad \xi_3 = x_2 - \tilde{\beta}r_2, \dots$$

und verlangen, daß in den Aufpunkten x_i/r_i der Geschwindigkeitsvektor in die Richtung der Meridiantangente fällt. Aus den Randbedingungen Gl. (103) mit ϑ'_i an Stelle von ϑ' erhält man mit Berücksichtigung von Gl. (106) die Bestimmungsgleichungen für die Konstanten f'_k :

$$\left. \begin{aligned} \frac{f'_1}{4\pi\tilde{w}} \{1,1\} &= \operatorname{tg} \vartheta'_1, \\ \frac{f'_1}{4\pi\tilde{w}} \{2,1\} + \frac{f'_2}{4\pi\tilde{w}} \{2,2\} &= \operatorname{tg} \vartheta'_2, \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} (107)$$

und für die Konstanten m'_k :

$$\left. \begin{aligned} \frac{m'_1}{8\pi w \vartheta} [1,1] &= \frac{1}{\beta}, \\ \frac{m'_1}{8\pi w \vartheta} [2,1] + \frac{m'_2}{8\pi w \vartheta} [2,2] &= \frac{1}{\beta}, \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} (108)$$

wobei die Abkürzungen

$$\begin{aligned} \{i, k\} &= \tilde{\beta} \sqrt{\left(\frac{x_i - \xi_k}{\tilde{\beta} r_i}\right)^2 - 1} + \operatorname{tg} \vartheta'_i \operatorname{ArCo} \left(\frac{x_i - \xi_k}{\tilde{\beta} r_i}\right), \\ [i, k] &= \frac{x_i - \xi_k}{\tilde{\beta} r_i} \sqrt{\left(\frac{x_i - \xi_k}{\tilde{\beta} r_i}\right)^2 - 1} + \operatorname{ArCo} \left(\frac{x_i - \xi_k}{\tilde{\beta} r_i}\right) \end{aligned}$$

benutzt sind.

Aus den linearen Gleichungssystemen (107) und (108) lassen sich die Unbekannten f'_k bzw. m'_k einzeln nacheinander berechnen, da die jeweils erste Gleichung nur die eine Unbekannte f'_1 bzw. m'_1 und jede folgende Gleichung genau eine weitere Unbekannte enthält.

Nach Berechnung der f'_k und m'_k folgt aus Gl. (50*) für den Überdruck in den Punkten x_i/r_i des Drehkörpers die zu Gl. (105) analoge Beziehung

$$\frac{\Delta p}{\rho w^2} = \frac{1}{2\pi w} \sum_{k=1}^{k=i} f'_k \operatorname{ArCo} \left(\frac{x_i - \xi_k}{\tilde{\beta} r_i}\right) - \frac{\cos \omega}{2\pi w} \sum_{k=1}^{k=i} m'_k \sqrt{\left(\frac{x_i - \xi_k}{\tilde{\beta} r_i}\right)^2 - 1}. \quad (109)$$

Man beachte, daß die einfache Beziehung Gl. (87), wonach der Überdruck zum örtlichen Anstellwinkel ϑ proportional ist, bei der räumlichen Strömung nicht mehr gilt. Die Ursache hierfür liegt darin, daß der Geschwindigkeitsvektor sich im Raume nicht in der einfachen, durch Abb. 18 und 27 dargestellten Weise, sondern nach einem verwickelteren Gesetz ändert (vgl. Abb. 94)

Die analoge Übertragung des hier entwickelten Näherungsverfahrens auf die Umströmung von Drehkörpern mit Unterschallgeschwindigkeit¹ bietet keine grundsätzliche Schwierigkeit. Die praktische Durchführung wird jedoch bei Unterschallgeschwindigkeit erheblich mühsamer; an Stelle der linearen Gl. (107) und (108), aus denen die Unbekannten einzeln der Reihe nach berechnet werden können, treten nämlich lineare Gleichungssysteme, bei denen jede einzelne Gleichung sämtliche Unbekannten enthält. Darin zeigt sich erneut das verschiedene Verhalten der Potentialgleichungen vom hyperbolischen Typus für Überschall- und vom elliptischen Typus für Unterschallströmungen.

Über die Ermittlung strenger, nicht linearisierter Überschallströmungen um einen axial angeblasenen Drehkörper vgl. S. 144.

¹ v. KÁRMÁN, TH.: Abh. aus dem Aerodyn. Inst. Aachen 6 (1927), S. 3—17 und C. FERRARI: Aerotecnica 17 (1937), S. 507—518.

III. Abschnitt:

Nichtlinearisierte Strömung an Ecke und Kegel; Verdichtungsstoß.

Nachdem wir im letzten Abschnitt die ebene Überschallströmung an einer flachen Ecke und die räumliche Überschallströmung an einem flachen Kegel in linearisierter Näherung untersucht haben, wenden wir uns jetzt zu den entsprechenden Problemen in strenger, nicht linearisierter Behandlung. Neben stetigen Verdünnungen und Verdichtungen treten hierbei auch unstetige „Verdichtungsstöße“ auf, die für das Verständnis der kompressiblen Strömungen von grundlegender Bedeutung sind. Je nach dem Knickwinkel der Ecke bzw. dem Öffnungswinkel des Kegels bleibt die gestörte Strömung entweder ebenso wie in der linearisierten Theorie im Überschallbereich oder erstreckt sich in den Unterschallbereich hinein.

§ 10. Stetige Verdünnungsströmung an einer konvexen Ecke.

1. Veranschaulichung durch Grenzübergang. Bei der linearisierten Umströmung einer flachen konvexen Ecke (vgl. S. 37 und Abb. 21) ergab sich eine Ablenkung der Grundströmung um den Winkel $\Delta\vartheta$ längs der von der Ecke E ausgehenden MACHSchen Linie m_1 (Abb. 33). Wenn wir nun die abgelenkte Parallelströmung, deren MACHSche Zahl M_2 größer ist als die MACHSche Zahl M_1 der Grundströmung, abermals um den Winkel $\Delta\vartheta$ an der Ecke E ablenken, so erfolgt diese Ablenkung jetzt längs der zu M_2 gehörigen MACHSchen Linie m_2 . Für die entsprechenden MACHSchen Winkel α_1, α_2 folgt aus $M_2 > M_1$ die Ungleichung (vgl. Abb. 33).

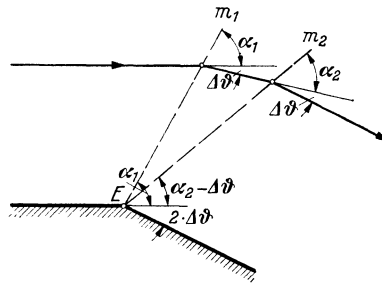


Abb. 33. Wiederholte Ablenkung einer Parallelströmung.

$$\alpha_2 - \Delta\vartheta < \alpha_2 < \alpha_1,$$

d. h. die MACHSche Linie m_2 liegt stromabwärts der MACHSchen Linie m_1 .

Wiederholt man diese Ablenkung um den Winkel $\Delta\vartheta$ an der Ecke E n -mal, so ergibt sich mit dem Grenzprozeß $\Delta\vartheta \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ eine kontinuierliche Verdünnungsströmung, bei der die Grundströmung insgesamt um einen beliebigen endlichen Winkel $\vartheta = n\Delta\vartheta$ abgelenkt wird. Die linearisierte Theorie führt auf diese Weise durch einen einfachen Grenz-

prozeß zur strengen Behandlung der nicht linearisierten Strömung an einer konvexen Ecke.

Diese durch Grenzübergang entwickelte Strömung beginnt mit der ungestörten Grundströmung bis zur MACHSchen Linie \bar{m} (Abb. 34). Hier-

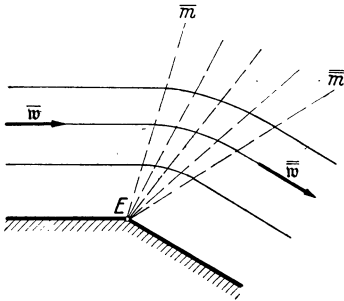


Abb. 34. Stetige Verdünnungsströmung an einer konvexen Ecke.

an schließt sich eine stetige Verdünnung bis zu einer MACHSchen Linie \bar{m} , hinter der die Strömung wieder als Parallelströmung mit entsprechend höherer Geschwindigkeit und kleinerem Druck abfließt. In dem Winkelraum zwischen \bar{m} und \bar{m} ist jede Gerade durch die Ecke E MACHSche Linie und längs jeder dieser MACHSchen Linien ist der Geschwindigkeitsvektor w nach Größe und Richtung konstant. Die Stromlinien sind daher ähnliche Kurven mit der Ecke E als Ähnlichkeitszentrum und setzen sich tangential an die geradlinigen Stromlinien stromaufwärts von \bar{m} und stromabwärts von \bar{m} an.

2. Analytische Behandlung des Problems¹. Da der Geschwindigkeitsvektor w längs jeder Geraden durch E konstant ist, führen wir Polarkoordinaten r, ω mit E als Nullpunkt ein (Abb. 35).

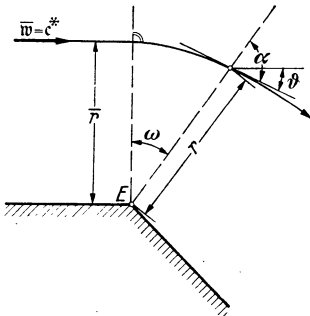


Abb. 35. Erläuterung der Bezeichnungen.

Dann sind die Geschwindigkeitskomponenten

$$u(\omega) = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad v(\omega) = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} \quad (110)$$

in Richtung der Radien und senkrecht zu den Radien Funktionen nur der einen Veränderlichen ω , für das Potential φ hat man also den Ansatz

$$\varphi = r \cdot \Phi(\omega). \quad (111)$$

Das Problem reduziert sich hierdurch auf die Bestimmung der Funktion $\Phi(\omega)$, die ebenso wie u und v nur die eine Veränderliche ω enthält und demgemäß aus einer gewöhnlichen statt partiellen Differentialgleichung gefunden werden kann. Zu dieser gewöhnlichen Differentialgleichung gelangt man durch die Bedingung

$$v = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} = c, \quad (112)$$

¹ MEYER, TH.: Diss. Göttingen 1908. Vgl. auch A. HIRSCH in A. STODOLA: Dampf- und Gasturbinen, VI. Auflage (1924), S. 805—809.

welche den aus § 8 S. 35 (vgl. Abb. 16) bekannten Sachverhalt ausdrückt, daß die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur MACHSchen Richtung stets gleich der Schallgeschwindigkeit ist.

Aus Gl. (112) ergibt sich nach Einsetzen von Gl. (15*)

$$\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \omega} \right)^2 = c^2 = \frac{k-1}{2} w_{\max}^2 - \frac{k-1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \omega} \right)^2 \right]$$

und unter Berücksichtigung von Gl. (111)

$$\frac{k+1}{k-1} \Phi'^2 + \Phi^2 = w_{\max}^2, \quad (113)$$

wobei der Strich gewöhnliche Differentiation nach ω bedeutet.

Wie man durch Einsetzen leicht bestätigt, hat Gl. (113) die partikuläre Lösung

$$\Phi = w_{\max} \sin \left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \omega \right),$$

woraus nach Gl. (111) für das Potential

$$\varphi = w_{\max} r \sin \left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \omega \right) \quad (114)$$

und nach Gl. (110) mit Rücksicht auf Gl. (18) für die Geschwindigkeit

$$u = w_{\max} \sin \left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \omega \right), \quad v = c^* \cos \left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \omega \right) \quad (115)$$

folgt.

Für $\omega = 0$ wird $u = 0$, $v = c^*$, d. h. die Zählung des Winkels ω beginnt an der die Stromlinien senkrecht schneidenden MACHSchen Linie \bar{m} , an der gerade die kritische Geschwindigkeit c^* erreicht wird (vgl. Abb. 35). Nachträglich kann man natürlich die Verdünnung statt an \bar{m} auch an irgendeiner stromabwärts von \bar{m} liegenden MACHSchen Linie beginnen lassen, was einer Anströmungsgeschwindigkeit $\bar{w} > c^*$ entspricht.

Aus Gl. (115) folgt für die Größe der Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} w^2 = u^2 + v^2 &= c^{*2} \left| \frac{k+1}{k-1} \sin^2 \left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \omega \right) + \cos^2 \left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \omega \right) \right| = \\ &= c^{*2} \left| 1 + \frac{2}{k-1} \sin^2 \left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \omega \right) \right| \end{aligned}$$

und mit Hilfe von Gl. (21)

$$M^{*2} = 1 + \frac{2}{k-1} \sin^2 \left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \omega \right), \quad M^2 = \frac{(k+1) - 2 \cos^2 \left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \omega \right)}{(k-1) \cos^2 \left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \omega \right)}. \quad (116)$$

Für den Druck kommt aus Gl. (22)

$$\frac{p_0}{p} = \left[\frac{k+1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \omega \right)} \right]^{\frac{k}{k-1}}. \quad (117)$$

Der MACHSche Winkel α ist durch

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{u} = \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \operatorname{ctg} \left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \omega \right) \quad (118)$$

bestimmt, woraus dann auch der Neigungswinkel der Stromlinien

$$\vartheta = \alpha + \omega - \frac{\pi}{2}$$

berechnet werden kann. Der Zusammenhang zwischen p , w und ϑ läßt sich jedoch einfacher durch Grenzübergang aus der linearisierten Druckgleichung (86) herleiten, wobei sich die Differentialgleichung

$$\frac{d p}{d \vartheta} = -2 q \operatorname{tg} \alpha = -\frac{\rho w^2}{\sqrt{M^2-1}} \quad (119)$$

ergibt, die mit Rücksicht auf Gl. (4*) auch in der Form

$$\frac{d w}{d \vartheta} = w \operatorname{tg} \alpha = \frac{w}{\sqrt{M^2-1}} \quad (119^*)$$

geschrieben werden kann. Nach Division durch die Konstante c^* kommt mit Hilfe von Gl. (21)

$$\frac{d M^*}{d \vartheta} = M^* \sqrt{\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} M^{*2}}{M^{*2} - 1}}$$

woraus man durch Integration unter der Anfangsbedingung $\vartheta = 0$, $M^* = 1$ die Beziehung

$$\begin{aligned} 2 \vartheta &= \arccos \left[k - (k+1) \frac{1}{M^{*2}} \right] \\ + \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \arccos [k - (k-1) M^{*2}] - \pi \end{aligned} \quad (119^{**})$$

für die Funktion $M^* = M^*(\vartheta)$ erhält.

Für die Stromlinien hat man die Differentialgleichung (Abb. 36)

$$\frac{1}{r} \frac{d r}{d \omega} = \operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \omega \right);$$

sie läßt sich durch Trennung der Variablen integrieren mit dem Ergebnis

$$r = \bar{r} \left[\cos \left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \omega \right) \right]^{-\frac{k+1}{k-1}} \quad (120)$$

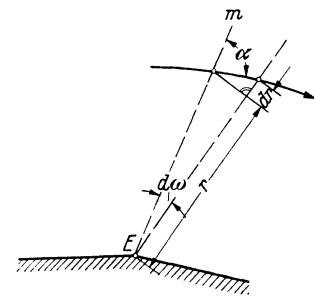


Abb. 36. Herleitung der Differentialgleichung der Stromlinien.

Wie auf S. 54 vorausgesehen, sind die Stromlinien ähnliche Kurven in bezug auf E .

Nach Gl. (117) und (116) wird $p = 0$ und $M = \infty$ für

$$\omega_{\max} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}, \quad \vartheta_{\max} = \omega_{\max} - \frac{\pi}{2}, \quad (121)$$

Zahlentafel 2 für Luft ($k = 1,405$).
Strömung mit Überschallgeschwindigkeit.

s	$\vartheta [^\circ]$	$\omega [^\circ]$	$\alpha [^\circ]$	p/p_0	M	M^*	T/T_0	$\Theta = \frac{\rho w}{\rho^* w^*}$
1000	0	0,00	90,00	0,527	1,000	1,000	0,832	1,000
999	1	23,72	67,28	0,477	1,084	1,068	0,808	0,994
998	2	30,04	61,96	0,449	1,133	1,107	0,794	0,986
997	3	34,82	58,18	0,424	1,178	1,141	0,781	0,976
996	4	38,88	55,12	0,401	1,220	1,173	0,768	0,965
995	5	42,34	52,66	0,381	1,258	1,201	0,757	0,953
994	6	45,42	50,58	0,363	1,295	1,227	0,747	0,940
993	7	48,30	48,70	0,345	1,332	1,253	0,736	0,926
992	8	50,93	47,07	0,329	1,366	1,276	0,726	0,912
991	9	53,46	45,54	0,313	1,401	1,299	0,716	0,897
990	10	55,84	44,16	0,298	1,435	1,322	0,706	0,882
989	11	58,16	42,84	0,284	1,470	1,344	0,696	0,865
988	12	60,38	41,62	0,270	1,505	1,366	0,686	0,849
987	13	62,49	40,51	0,257	1,539	1,387	0,676	0,832
986	14	64,52	39,48	0,245	1,572	1,407	0,667	0,815
985	15	66,53	38,47	0,233	1,608	1,428	0,657	0,797
984	16	68,47	37,53	0,221	1,641	1,448	0,647	0,779
983	17	70,33	36,67	0,210	1,675	1,467	0,638	0,762
982	18	72,18	35,82	0,199	1,710	1,486	0,628	0,743
981	19	73,98	35,02	0,189	1,744	1,504	0,619	0,725
980	20	75,74	34,26	0,179	1,779	1,523	0,609	0,707
979	21	77,49	33,51	0,170	1,815	1,541	0,600	0,689
978	22	79,20	32,80	0,161	1,850	1,559	0,591	0,670
977	23	80,90	32,10	0,153	1,884	1,576	0,582	0,653
976	24	82,55	31,45	0,145	1,918	1,592	0,573	0,635
975	25	84,20	30,80	0,137	1,954	1,609	0,564	0,617
974	26	85,81	30,19	0,130	1,989	1,625	0,555	0,600
973	27	87,42	29,58	0,123	2,025	1,641	0,546	0,582
972	28	89,02	28,98	0,116	2,062	1,657	0,537	0,564
971	29	90,58	28,42	0,110	2,098	1,673	0,529	0,547
970	30	92,12	27,88	0,104	2,135	1,688	0,520	0,530
969	31	93,66	27,34	0,097	2,174	1,704	0,511	0,512
968	32	95,18	26,82	0,092	2,214	1,720	0,502	0,494
967	33	96,68	26,32	0,086	2,251	1,735	0,493	0,477
966	34	98,20	25,80	0,080	2,296	1,752	0,483	0,459
965	35	99,67	25,33	0,075	2,339	1,767	0,474	0,442
964	36	101,13	24,87	0,071	2,378	1,781	0,466	0,426
963	37	102,58	24,42	0,066	2,422	1,795	0,457	0,410
962	38	104,02	23,98	0,062	2,466	1,810	0,448	0,394
961	39	105,46	23,54	0,058	2,508	1,824	0,440	0,379
960	40	106,88	23,12	0,054	2,550	1,837	0,432	0,364
959	41	108,30	22,70	0,051	2,595	1,851	0,423	0,349
958	42	109,71	22,29	0,047	2,640	1,864	0,415	0,335
957	43	111,11	21,89	0,044	2,689	1,878	0,406	0,320
956	44	112,51	21,49	0,041	2,734	1,891	0,398	0,306
955	45	113,89	21,11	0,038	2,778	1,903	0,390	0,294
954	46	115,27	20,73	0,036	2,826	1,917	0,382	0,281

s	$\vartheta [^\circ]$	$\omega [^\circ]$	$\alpha [^\circ]$	p/p_0	M	M^*	T/T_0	$\Theta = \frac{\varrho w}{\varrho^* w^*}$
953	47	116,63	20,37	0,033	2,873	1,928	0,374	0,269
952	48	118,00	20,00	0,031	2,920	1,939	0,367	0,257
951	49	119,36	19,64	0,029	2,968	1,951	0,359	0,246
950	50	120,71	19,29	0,027	3,021	1,963	0,351	0,234
949	51	122,07	18,93	0,025	3,074	1,975	0,343	0,222
948	52	123,41	18,59	0,023	3,131	1,987	0,335	0,211
947	53	124,74	18,26	0,021	3,188	1,999	0,327	0,200
946	54	126,03	17,97	0,019	3,350	2,012	0,319	0,188
870,68	129,32	219,32	0,00	0,000	∞	2,437	0,000	0,000

bei Luft ($k=1,405$) also für $\omega_{\max} = 219,32^\circ$, $\vartheta_{\max} = 129,32^\circ$. Die Verdünnungsströmung um eine Ecke ins Vakuum erfüllt infolgedessen nicht den ganzen freien Raum, sondern endet mit $\omega = \omega_{\max}$. An der Grenze $\omega = \omega_{\max}$ ist $u = w_{\max}$, $v = 0$, d. h. die Linie $\omega = \omega_{\max}$ ist zugleich MACHsche Linie und Stromlinie.

In Zahlentafel 2 sind für Luft ($k=1,405$) zusammengehörige Werte von ϑ , ω , α , $\frac{p}{p_0}$, M , M^* , $\frac{T}{T_0}$ und $\Theta = \frac{\varrho w}{\varrho^* w^*}$ zusammengestellt; über die Bedeutung von s in Zahlentafel 2 vgl. S. 112.

3. Geschwindigkeitsbild $M^* = M^*(\vartheta)$. Wir stellen für die kontinuierliche Verdünnungsströmung um eine Ecke E die Änderung der Strö-

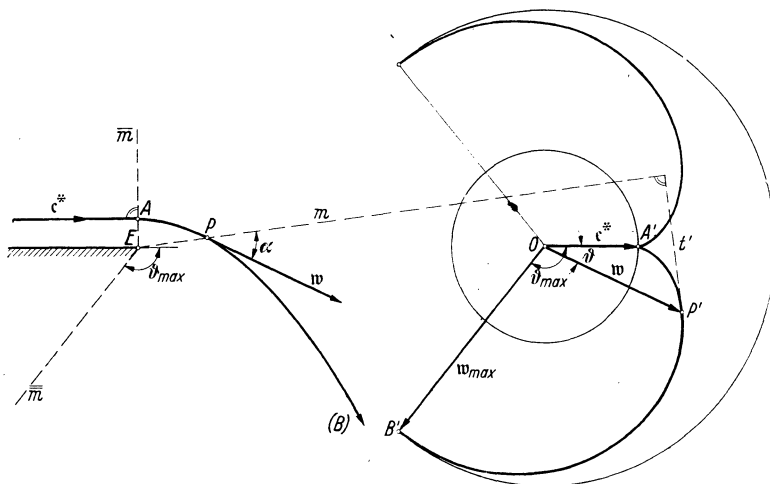


Abb. 37. Geschwindigkeitsbild der Stromlinien.

mungsgeschwindigkeit w längs einer Stromlinie dar, indem wir in einer zweiten Ebene, der sog. „Geschwindigkeitsebene“ (oder Hodographenebene) von einem festen Nullpunkt O aus die Geschwindigkeitsvektoren w auftragen (Abb. 37). Die Endpunkte P' dieser Vektoren beschreiben eine

Kurve, die punktweise eindeutig auf die vorgegebene Stromlinie bezogen ist und als „Geschwindigkeitsbild“ (oder Hodograph) der Stromlinie bezeichnet werden soll. Da längs jeder Geraden durch die Ecke E der Geschwindigkeitsvektor w nach Größe und Richtung konstant ist, haben alle Stromlinien dasselbe Geschwindigkeitsbild.

Den Stromlinien des kontinuierlichen Verdünnungsbereichs von der kritischen Geschwindigkeit c^* bei \bar{m} bis zur Maximalgeschwindigkeit w_{\max} bei \bar{m} entspricht das Geschwindigkeitsbild von A' mit $w = c^*$ bis zu B' mit $w = w_{\max}$, wozu nach Gl. (121) der Zentriwinkel $\sphericalangle A'OB' = \vartheta_{\max}$ gehört. Bezieht man die Geschwindigkeit auf c^* als Einheit, so wird $OA' = 1$ und nach Gl. (18) $OB' = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$ und $M^* = M^*(\vartheta)$ ist die Gleichung des Geschwindigkeitsbildes in Polarkoordinaten.

Im vorigen Absatz haben wir die Funktion $M^*(\vartheta)$ analytisch bestimmt; einige Funktionswerte sind in Zahlentafel 2 angegeben. Wesentlich einfacher und eleganter läßt sich das Geschwindigkeitsbild jedoch nach PRANDTL und BUSEMANN mit Hilfe geometrischer Überlegungen diskutieren:

a) Wir denken uns die kontinuierliche Verdünnungsströmung wie auf S. 53 wieder durch Grenzübergang aus unendlich vielen kleinen unstetigen Verdünnungen entstanden. Da nun bei einer kleinen unstetigen Verdünnung nach S. 38 der Vektor des Geschwindigkeitszuwachses senkrecht auf der zugehörigen MACHschen Linie steht und beim Grenz-

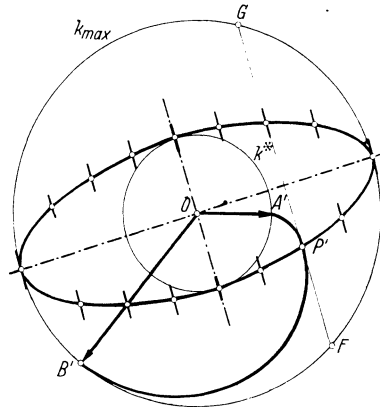


Abb. 38. Richtungsfeld des Geschwindigkeitsbildes.

übergang der Geschwindigkeitszuwachs in die Richtung der Tangente des Geschwindigkeitsbildes fällt, erhält man den Satz:

Die Tangente t' in einem Punkt P' des Geschwindigkeitsbildes steht senkrecht auf der durch den entsprechenden Punkt P der Stromlinie hindurchgehenden MACHschen Linie m .

b) Auf S. 36 wurde die Adiabatenellipse mit den Halbachsen w_{\max}, c^* eingeführt. Stellt man diese Ellipse auf einen Punkt P' des Überschall-Ringgebietes der Geschwindigkeitsebene ein, so liegt nach S. 36 die große Achse parallel zur entsprechenden MACHschen Linie und wegen a) demnach die kleine Achse parallel zur Tangente t' des Geschwindigkeitsbildes in P' . Dies führt zu folgender Erzeugung des Geschwindigkeitsbildes (Abb. 38):

Die mit Linienelementen parallel zur kleinen Achse ausgestattete

Adiabatenellipse mit den Halbachsen w_{\max}, c^* wird um den Nullpunkt O der Geschwindigkeitsebene gedreht und erzeugt hierbei ein Richtungsfeld in dem ringförmigen Überschallgebiet. Die Geschwindigkeitsbilder sind die Integralkurven dieses Richtungsfeldes.

Jeder Innenpunkt P' des Überschallgebietes wird zweimal von der Adiabatenellipse erfaßt (vgl. Abb. 20), d. h. das Überschallgebiet wird

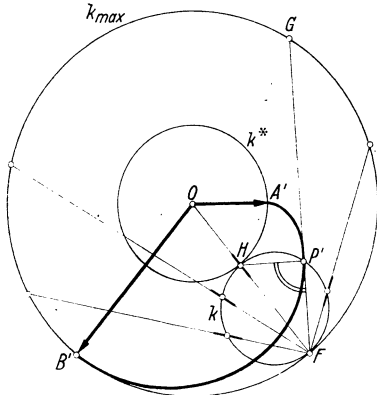


Abb. 39. Erzeugung des Geschwindigkeitsbildes als Rollkurve.

von dem Richtungsfeld doppelt überdeckt. Alle Integralkurven sind kongruent bzw. spiegelbildlich und gehen durch Drehung um O mit oder ohne Umklappung an einer Geraden durch O auseinander hervor.

c) Das in b) durch Drehung einer Ellipse erzeugte Richtungsfeld läßt sich auch auf folgende Weise gewinnen (Abb. 39): Man teilt jede Sehne FG des äußeren Begrenzungskreises k_{\max} des Überschall-Ringgebietes im konstanten Verhältnis

$$FG : FP' = 2 w_{\max} : (w_{\max} - c^*) = \lambda$$

und ordnet dem Teilpunkt P' die Richtung der Sehne zu. Führt man diese Konstruktion für alle von einem festen Punkt F des Kreises k_{\max} ausgehenden Sehnen durch, so liegen die entsprechenden Teilpunkte P' auf einem Kreis k , der aus k_{\max} durch ähnliche Verkleinerung im Verhältnis $\lambda:1$ in bezug auf F als Ähnlichkeitszentrum hervorgeht und in F den Kreis k_{\max} und im Gegenpunkt H den inneren Begrenzungskreis k^* des Überschallgebietes berührt. Die Linienelemente der Punkte P' des Kreises k liegen auf den Geraden FP' und infolgedessen senkrecht zu den Verbindungslinien HP' . Dieselben Linienelemente ergeben sich, wenn man den Kreis k am Kreis k^* abrollt; denn hierbei bewegt sich jeder Punkt P' in senkrechter Richtung zur Verbindungslinie HP' mit dem augenblicklichen Drehzentrum H der Rollbewegung. Die Integralkurven des Richtungsfeldes sind daher identisch mit den bei der Abrollung von k an k^* von den Punkten P' des Rollkreises k beschriebenen Bahnkurven, die in der Kinematik unter dem Namen Epizykloiden bekannt sind. Wir haben hiermit folgendes Ergebnis:

Das Geschwindigkeitsbild ist eine Epizykloide, welche durch äußeres Abrollen eines Kreises vom Durchmesser $w_{\max} - c^*$ an dem inneren Begrenzungskreis k^* des Überschall-Ringgebietes entsteht. Der kritischer Geschwindigkeit $w=c^*$ entspricht die Spitze A' und der Maximalgeschwindigkeit $w = w_{\max}$ der Scheitel B' der Epizykloide.

4. Zeichnerische Behandlung des Problems. Mit Hilfe der im vorigen Abschnitt als Geschwindigkeitsbild der Stromlinien gefundenen Epizykloide kann man die auf S. 56 durchgeführte analytische Behandlung des Problems durch eine zeichnerische Behandlung ersetzen:

Die Epizykloide, die sich in einfacher Weise als Rollkurve konstruieren läßt, sei vorgegeben und von der Spitze A' bis zum Scheitel B' in mehrere kleine Teilbogen zerlegt. Jeder Teilpunkt P' liefert dann nach Abb. 37 durch die Epizykloidentangente t' in P' und die zu ihr senkrechte MACHSche Linie m ein zusammengehöriges Wertesystem $\omega, \alpha, \vartheta, w$; die Tangentenrichtung läßt sich hierbei nach Abb. 38 durch Einstellen der Adiabatenellipse auf den Teilpunkt P' genau bestimmen.

Bezeichnet man mit P'_1, P'_2, P'_3, \dots die Teilpunkte auf der Epizykloide und mit m_1, m_2, m_3, \dots die entsprechenden MACHSchen Linien, so erhält man eine gute zeichnerische Näherung für die Stromlinien, wenn man diese zwischen je zwei aufeinanderfolgenden MACHSchen Linien m_i, m_{i+1} durch Geraden ersetzt, die zur Halbierenden des Winkels $\sphericalangle P'_i O P'_{i+1}$ parallel laufen.

Tritt an Stelle der Adiabaten Gleichung (8) der vollkommenen Gase irgendeine andere Adiabaten Gleichung (5), so ist die Adiabatenellipse durch eine entsprechende andere Adiabatenkurve $M^* = M^*(\alpha)$ zu ersetzen.

§ 11. Verdichtungsstoß an einer konkaven Ecke.

1. Zustandekommen des Verdichtungsstoßes. Nachdem in § 10, ausgehend von der linearisierten Theorie, mittels eines Grenzüberganges die Verdünnungsströmung um eine konvexe Ecke in strenger, nicht linearisierter Behandlung entwickelt wurde, soll nun die entsprechende Aufgabe für die Verdichtungsströmung um eine konkave Ecke erörtert werden¹.

Hierbei ergibt sich sofort ein grundsätzlicher Unterschied: Bei der stetigen Verdünnung divergieren die MACHSchen Linien in der Richtung der Strömung von der Anfangslinie \bar{m} bis zur Endlinie \bar{m} (vgl. Abb. 34). Bei dem Versuch, eine analoge stetige Verdichtungsströmung zu konstruieren, zeigt sich, daß die MACHSchen Linien entgegengesetzt der Strömungsrichtung divergieren. Dadurch ergibt sich ein physikalisch unmögliches Strömungsbild

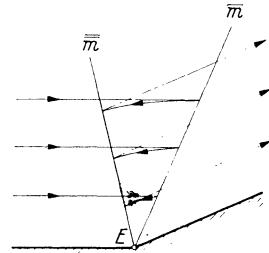


Abb. 40. Physikalisch unbrauchbare rückläufige Verdichtung.

¹ MEYER, TH.: Diss. Göttingen 1908. Vgl. auch A. HIRSCH in A. STODOLA: Dampf- und Gasturbinen. II. Aufl. (1924), S. 805—809. — BUSEMANN, A.: Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik. Aachen 1929. Herausgeg. von GILLES, HOFF und v. KÁRMÁN, S. 162. Berlin 1930.

(Abb. 40), bei dem die Strömung zwischen den MACHschen Linien \bar{m} , \bar{m} rückläufig ist. Die Stromlinien zwischen \bar{m} und \bar{m} sind dabei identisch mit den Stromlinien [Gl. (120)] der Verdünnungsströmung, werden jedoch rückwärts durchlaufen und setzen sich an die geraden Stromlinien der ankommenden und abgehenden Parallelströmung gegenläufig an.

An Stelle dieser physikalisch unmöglichen stetigen Verdichtung werden wir im Folgenden einen unstetigen Übergang von der ankommenden zur abgehenden Parallelströmung durch einen sog. Verdichtungsstoß kennen lernen, der längs einer zwischen \bar{m} und \bar{m} verlaufenden Stoßlinie erfolgt. Die Geschwindigkeit nimmt an der Stoßlinie plötzlich ab, während Druck und Dichte plötzlich anwachsen. Physikalisch hat man natürlich diese momentane, unstetige Zustandsänderung, auf deren Möglichkeit bereits RIEMANN¹ hingewiesen hat, lediglich als Idealisierung einer sich sehr schnell vollziehenden stetigen Zustandsänderung zu betrachten.

Im Gegensatz zu den bisher ausschließlich betrachteten stetigen und adiabatischen Strömungen ist die unstetige Zustandsänderung beim Verdichtungsstoß nicht mehr adiabatisch, sondern mit einer Entropiezunahme verbunden. Der Strömungsverlauf ist infolgedessen nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik (vgl. S. 6) nicht umkehrbar, d. h. unstetige Verdünnungsstöße sind unmöglich.

Bei einer von TH. v. KÁRMÁN und E. PREISWERK entwickelten Analogie² zwischen der kompressiblen Gasströmung und der Wasserströmung in offenen Gerinnen entspricht dem Verdichtungsstoß der sog. Wassersprung.

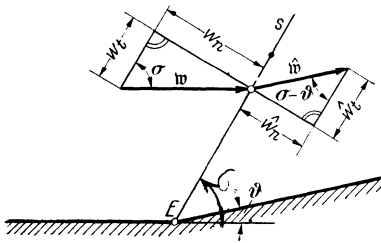


Abb. 41. Bezeichnungen beim Verdichtungsstoß.

2. Grundgleichungen des Verdichtungsstoßes. Zunächst setzen wir folgende Bezeichnungen fest (Abb. 41):

Stoßwinkel $\sigma =$ Winkel der Stoßlinie s gegen die Anströmrichtung,

$$\left. \begin{matrix} p, \varrho, T, w, \dots \\ \hat{p}, \hat{\varrho}, \hat{T}, \hat{w}, \dots \end{matrix} \right\} = \text{Zustandswerte} \begin{cases} \text{vor der Stoßlinie } s, \\ \text{hinter der Stoßlinie } s, \end{cases}$$

Ablenkungswinkel $\vartheta =$ Winkel von w gegen \hat{w} ,

$$\left. \begin{matrix} w_n \\ \hat{w}_n \end{matrix} \right\} = \text{Komponenten von } \begin{cases} w \\ \hat{w} \end{cases} \begin{matrix} \text{senkrecht bzw.} \\ \text{parallel zur Stoßlinie } s. \end{matrix}$$

Außerdem verabreden wir, daß die Stoßlinien in den Bildern stärker

¹ Vgl. z. B. RIEMANN, B. und H. WEBER: Die part. Diffgl. der math. Physik, Bd. 2, S. 503. Braunschweig 1919.

² v. KÁRMÁN, TH.: Z. angew. Math. Mech. 18 (1938), S. 49—56 und E. PREISWERK: Diss. Techn. Hochsch. Zürich 1938.

als die MACHSchen Verdichtungslinien (vgl. S. 38) durchgezogen werden sollen.

Zur Herleitung der Grundgleichungen des Verdichtungsstoßes legen wir einen Bereich des Strömungsfeldes zugrunde (Abb. 42), der von zwei Stromlinien und je einer Parallelen zur Stoßlinie stromaufwärts und stromabwärts begrenzt ist.

Die Kontinuitätsgleichung liefert

$$\rho w_n = \hat{\rho} \hat{w}_n. \quad (122a)$$

Aus dem Impulssatz folgt in Richtung senkrecht zur Stoßlinie

$$\rho w_n^2 + p = \hat{\rho} \hat{w}_n^2 + \hat{p} \quad (122b)$$

und in Richtung parallel zur Stoßlinie

$$\rho w_n w_t = \hat{\rho} \hat{w}_n \hat{w}_t. \quad (122c)$$

Schließlich hat man noch nach Gl. (27) den Energiesatz

$$Ji + \frac{1}{2g} (w_n^2 + w_t^2) = J\hat{i} + \frac{1}{2g} (\hat{w}_n^2 + \hat{w}_t^2).$$

Aus Gl. (122a) und (122c) ergibt sich die wichtige Beziehung

$$w_t = \hat{w}_t, \quad (123)$$

d. h.: Die zur Stoßlinie parallele Geschwindigkeitskomponente bleibt beim Verdichtungsstoß ungeändert. Dies führt zu einer einfachen geometrischen Beziehung zwischen w , \hat{w} , σ und ϑ (Abb. 43).

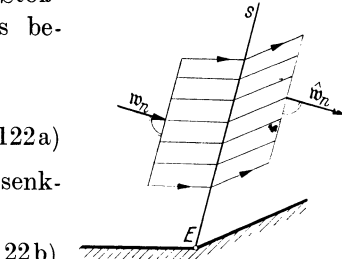


Abb. 42. Erläuterung zur Herleitung der Stoßgleichungen.

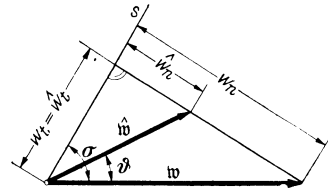


Abb. 43. Geometrische Beziehung zwischen w , \hat{w} , σ und ϑ .

Mit Berücksichtigung von Gl. (123) vereinfacht sich der Energiesatz zu

$$Ji + \frac{1}{2g} w_n^2 = J\hat{i} + \frac{1}{2g} \hat{w}_n^2. \quad (122d)$$

Aus Gl. (122a) und (122b) erhält man für die Änderungen $\Delta p = \hat{p} - p$, $\Delta \rho = \hat{\rho} - \rho$, $\Delta w_n = \hat{w}_n - w_n$ der Zustandswerte vor und hinter dem Verdichtungsstoß

$$w_n^2 = \frac{\hat{\rho}}{\rho} \frac{\Delta p}{\Delta \rho}, \quad \hat{w}_n^2 = \frac{\rho}{\hat{\rho}} \frac{\Delta p}{\Delta \rho}, \quad w_n \hat{w}_n = \frac{\Delta p}{\Delta \rho}, \quad \Delta p = -\rho w_n \Delta w_n. \quad (124)$$

Denkt man sich die Strömung sowohl vor als auch hinter dem Verdichtungsstoß adiabatisch in den Ruhezustand übergeführt, so kommt

$$Ji_0 = Ji + \frac{1}{2g} (w_n^2 + w_t^2), \quad J\hat{i}_0 = J\hat{i} + \frac{1}{2g} (\hat{w}_n^2 + \hat{w}_t^2),$$

also mit Berücksichtigung von Gl. (122d) sowie von Gl. (25) und (7)

$$i_0 = \hat{i}_0, \quad T_0 = \hat{T}_0, \quad \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{\hat{p}_0}{\hat{\rho}_0}, \quad (125)$$

d. h.: Der Ruhewärmeinhalt i_0 , die Ruhetemperatur T_0 und das Verhältnis von Ruhedruck p_0 und Ruhedichte ρ_0 ändern sich beim Verdichtungsstoß nicht.

Nach Gl. (18) folgt dann weiter, daß auch die kritische Geschwindigkeit c^* und die Maximalgeschwindigkeit w_{\max} für die adiabatischen Zustandsänderungen vor und hinter dem Verdichtungsstoß dieselben sind

3. Berechnung des Verdichtungsstoßes. Mit Berücksichtigung der aus Gl. (25), (7) und (9) folgenden bzw. aus Abb. 43 ablesbaren Beziehungen

$$Jg_i = \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho}, \quad Jg_i^{\hat{}} = \frac{k}{k-1} \frac{\hat{p}}{\hat{\rho}}, \quad \operatorname{tg} \sigma = \frac{w_n}{w_t}, \quad \operatorname{tg} (\sigma - \vartheta) = \frac{\hat{w}_n}{w_t}$$

lassen sich die Grundgleichungen (122) nach einiger Rechnung¹ umformen in

$$\frac{\Delta p}{\Delta \rho} = k \frac{p + \frac{\Delta p}{2}}{\rho + \frac{\Delta \rho}{2}}, \quad (126a)$$

$$\Delta p = \rho w^2 \sin^2 \sigma \frac{\Delta \rho}{\rho + \Delta \rho}, \quad (126b)$$

$$\frac{\rho + \Delta \rho}{\rho} = \frac{\operatorname{tg} \sigma}{\operatorname{tg} (\sigma - \vartheta)}. \quad (126c)$$

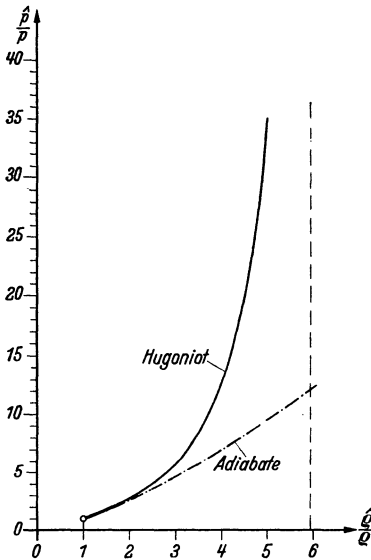


Abb. 44. Hugoniot-Kurve und Adiabate.

Aus diesen Gleichungen kann man zu p, ρ, w und entweder Δp oder $\Delta \rho$ oder ϑ die übrigen Größen berechnen d. h.: Der Verdichtungsstoß ist vollständig festgelegt, wenn man die Zustandsgrößen p, ρ, w vor dem Stoß und außerdem entweder die Druckzunahme Δp oder die Dichtezunahme $\Delta \rho$ oder den Ablenkungswinkel ϑ kennt

Durch Gl. (126a) ist $\frac{\hat{p}}{p}$ als Funktion von $\frac{\hat{\rho}}{\rho}$ bestimmt gemäß

$$\frac{\hat{p}}{p} - \frac{\hat{\rho}}{\rho} = \frac{k-1}{2} \left(1 + \frac{\hat{p}}{p} \right) \left(\frac{\hat{\rho}}{\rho} - 1 \right). \quad (127)$$

Die Diagrammdarstellung dieser Funktion heißt HUGONIOT-Kurve (Abb. 44).

Mit $\frac{\hat{p}}{p}$ nimmt auch $\frac{\hat{\rho}}{\rho}$ ständig zu bis zum Grenzwert

$$\left(\frac{\hat{\rho}}{\rho} \right)_{\max} = \frac{k+1}{k-1} \quad (128)$$

¹ v. KÁRMÁN, TH.: Voltakongreß, S. 249.

für $\frac{\hat{p}}{p} \rightarrow \infty$, die HUGONIOT-Kurve hat also eine lotrechte Asymptote. Für Luft ($k=1,405$) ist $\left(\frac{\hat{p}}{p}\right)_{\max} \approx 6$, d. h. Luft kann durch einen Verdichtungsstoß höchstens auf das Sechsfache verdichtet werden.

Zum Vergleich ist in Abb. 44 strichpunktiert auch die Adiabate

$$\frac{\hat{p}}{p} = \left(\frac{\hat{p}}{p}\right)^k$$

ingezeichnet. Da Gl. (126 a) durch den Grenzprozeß $\Delta p \rightarrow 0$, $\Delta \rho \rightarrow 0$ in die der Adiabatenbeziehung zugrundeliegende Differentialgleichung

$$\frac{d\hat{p}}{d\hat{\rho}} = k \frac{\hat{p}}{\hat{\rho}}$$

übergeht, haben die HUGONIOT-Kurve und die Adiabate im Anfangspunkt $\frac{\hat{p}}{p} = \frac{\hat{\rho}}{\rho} = 1$ dieselbe Tangente. Im weiteren Verlauf steigt dann aber die HUGONIOT-Kurve steiler an als die Adiabate, d. h.: Das Verhältnis $\frac{\hat{p}}{\hat{\rho}}$ und demnach auch die Temperatur T wachsen für gleiche Dichteänderungen beim Verdichtungsstoß schneller als bei der adiabatischen Zustandsänderung.

Aus Gl. (126 a), (126 b) und (14) ergibt sich nach einfacher Rechnung¹

$$\sin^2 \sigma = \frac{\left[(k-1) + (k+1) \frac{\hat{p}}{p} \right] (k-1)}{4k \left[\left(\frac{p_0}{p} \right)^{k-1} - 1 \right]}, \quad (129)$$

während man aus Gl. (126 a) und (126 c) unmittelbar

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{(k-1)p + (k+1)\hat{p}}{(k-1)\hat{p} + (k+1)p} \operatorname{tg}(\sigma - \vartheta) \quad (130)$$

erhält. Sowohl mittels Gl. (129) als auch mittels Gl. (130) läßt sich der Stoßwinkel σ berechnen und zwar bei Gl. (129) aus p , \hat{p} und dem Ruhedruck p_0 vor dem Verdichtungsstoß bzw. aus p , \hat{p} und dem Ablenkungswinkel ϑ bei Gl. (130).

Zur Berechnung der Zustandsgrößen hinter dem Verdichtungsstoß aus ihren Endwerten und Ruhewerten vor dem Stoß und dem Stoßwinkel σ dienen die Formeln

$$w_n \hat{w}_n = c^{*2} - \frac{k-1}{k+1} w_i^2, \quad (131)$$

$$\frac{\hat{p}}{p_0} = \frac{k+1}{k-1} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{k}} \left[\frac{4k \sin^2 \sigma}{(k+1)^2} \cdot \left(\frac{k-1}{k+1} \right)^2 \left(1 + \frac{4k \sin^2 \sigma}{(k-1)^2} \right) \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right], \quad (132)$$

¹ MEYER, TH.: Diss. Göttingen 1908; vgl. auch A. HIRSCH in A. STODOLA: Dampf- und Gasturbinen, I. Aufl. (1924), S. 805—809.

$$\frac{\hat{\varrho}}{\varrho_0} = \frac{k+1}{k-1} \frac{\varrho}{\varrho_0} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{k-1}}{1 + \operatorname{ctg}^2 \sigma \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{k-1}}, \quad (133)$$

$$\frac{\hat{T}}{T_0} = \frac{1 + \operatorname{ctg}^2 \sigma \frac{T}{T_0}}{1 - \frac{T}{T_0}} \left[\frac{4k \sin^2 \sigma}{(k+1)^2} - \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2 \left(1 + \frac{4k \sin^2 \sigma}{(k-1)^2} \frac{T}{T_0}\right) \right]. \quad (134)$$

Da im folgenden nur Gl. (131) benutzt wird, beschränken wir uns auf die Herleitung dieser Formel und überlassen die Herleitung der übrigen Beziehungen aus den Grundgleichungen (122) dem Leser. Durch Einsetzen von

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} \frac{k}{k-1} \frac{p}{\varrho} &= Ji = Ji_0 - \frac{1}{2g} (w_n^2 + w_i^2), \\ \frac{1}{g} \frac{k}{k-1} \frac{\hat{p}}{\hat{\varrho}} &= \hat{Ji} = Ji_0 - \frac{1}{2g} (\hat{w}_n^2 + \hat{w}_i^2) \end{aligned}$$

in Gl. (122b) ergibt sich

$$\begin{aligned} &\varrho \left[w_n^2 + Jg \frac{k-1}{k} i_0 - \frac{k-1}{2k} (w_n^2 + w_i^2) \right] \\ &= \hat{\varrho} \left[\hat{w}_n^2 + Jg \frac{k-1}{k} i_0 - \frac{k-1}{2k} (\hat{w}_n^2 + \hat{w}_i^2) \right] \end{aligned}$$

Mit Berücksichtigung von Gl. (122a), (123) und

$$c^* = \sqrt{\frac{2k}{k+1} \frac{p_0}{\varrho_0}} = \sqrt{2g \frac{k-1}{k+1} Ji_0}$$

kommt dann weiter

$$\begin{aligned} &\hat{w}_n \left[w_n^2 + \frac{k+1}{2k} c^{*2} - \frac{k-1}{2k} (w_n^2 + w_i^2) \right] \\ &= w_n \left[\hat{w}_n^2 + \frac{k+1}{2k} c^{*2} - \frac{k-1}{2k} (\hat{w}_n^2 + \hat{w}_i^2) \right] \end{aligned}$$

woraus nach Division mit $\hat{w}_n - w_n$ die Behauptung [Gl. (131)] folgt.

Mit Rücksicht auf Gl. (124) läßt sich Gl. (131) umformen in

$$\frac{\Delta p}{\Delta \varrho} = c^{*2} - \frac{k-1}{k+1} w_i^2. \quad (135)$$

4. Senkrechter Verdichtungsstoß. Der bisher betrachtete allgemein oder schiefe Verdichtungsstoß spezialisiert sich mit Ablenkungswinkel $\vartheta = 0$ und Stoßwinkel $\sigma = \frac{\pi}{2}$ zum senkrechten Verdichtungsstoß¹. Dieser entsteht beispielsweise bei der eindimensionalen Strömung durch

¹ Vgl. HUGONIOU, H.: Journ. éc. polyt. 58 (1889), S. 80. Ferner STODOLA, A. Dampf- und Gasturbinen, S. 68. Berlin 1922.

ein zylindrisches Rohr konstanten Querschnitts, wenn stromabwärts ein höherer Druck als stromaufwärts vorgegeben ist (Abb. 45).

Die Grundgleichungen des senkrechten Verdichtungsstoßes ergeben sich aus Gl. (122) mit

$$w_t = \hat{w}_t = 0, \quad w_n = w, \quad \hat{w}_n = \hat{w};$$

wegen Gl. (123) läßt sich aus dem senkrechten der schiefe Verdichtungsstoß durch Überlagerung einer beliebigen zur Stoßlinie parallelen Strömung mit $w_t = \hat{w}_t$ herleiten.

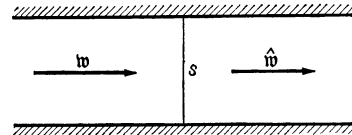


Abb. 45. Senkrechter Verdichtungsstoß.

Der senkrechte Verdichtungsstoß ist durch die Zustandswerte vor dem Stoß vollständig bestimmt. Die Zustandswerte hinter dem Stoß lassen sich z. B. als Funktionen der Geschwindigkeit w und Dichte ρ vor dem Stoß ausdrücken gemäß

$$\Delta p = \rho w^2 \left(1 - \frac{c^{*2}}{w^2}\right), \quad \Delta \rho = \rho \left(\frac{w^2}{c^{*2}} - 1\right), \quad J \Delta T = \frac{w^2}{2 g_p^c} \left(1 - \frac{c^{*4}}{w^4}\right). \quad (136)$$

Die einfache Herleitung dieser Formeln aus den Grundgleichungen bleibe dem Leser überlassen.

Durch Übergang von c^{*2} zu c^2 nach Gl. (21) erhält man aus Gl. (136) die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} \Delta p &= \frac{2 \rho w^2}{k+1} \left(1 - \frac{1}{M^2}\right), \quad \Delta \rho = \rho \frac{1 - \frac{1}{M^2}}{\frac{k-1}{2} + \frac{1}{M^2}}, \\ J \Delta T &= \frac{2 k}{(k+1)^2} \frac{w^2}{g_p^c} \left(1 - \frac{1}{M^2}\right) \left(1 + \frac{1}{k M^2}\right), \end{aligned} \right\} (137)$$

welche für hohe Überschallgeschwindigkeiten ($M \rightarrow \infty$) zu den Näherungsformeln

$$\Delta p = \frac{2 \rho w^2}{k+1}, \quad \Delta \rho = \frac{2 \rho}{k-1}, \quad J \Delta T = \frac{2 k}{(k+1)^2} \frac{w^2}{g_p^c} \quad (138)$$

führen.

Die Gl. (131) bis (134) spezialisieren sich beim senkrechten Verdichtungsstoß zu

$$w \hat{w} = c^{*2}, \quad (139)$$

$$\frac{\hat{p}}{p_0} = \frac{k+1}{k-1} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{k}} \left[\frac{4 k}{(k+1)^2} \dots \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} \right] = \frac{\frac{2 k}{k+1} M^2 - \frac{k-1}{k+1}}{\left(\frac{k-1}{2} M^2 + 1\right)^{\frac{k}{k-1}}}, \quad (140)$$

$$\frac{\hat{\rho}}{\rho_0} = \frac{k+1}{k-1} \frac{\rho}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} \right], \quad (141)$$

$$\frac{\hat{T}}{T_0} = \frac{\frac{4 k}{(k+1)^2} \frac{T}{T_0}}{1 - \frac{T}{T_0}}. \quad (142)$$

Nach Gl. (139) folgt aus $w > c^*$ notwendig $\hat{w} < c^*$, d. h. der senkrechte Verdichtungsstoß führt stets von Über- zu Unterschallgeschwindigkeit. Beim schiefen Verdichtungsstoß dagegen, der durch Überlagerung einer beliebigen Strömung $w_t = \hat{w}_t$ entsteht, kann hinter der Stoßlinie sowohl Unter- als auch Überschallgeschwindigkeit herrschen.

Durch den senkrechten Verdichtungsstoß erfahren die Untersuchungen auf S. 14 über eindimensionale Rohrströmungen eine wesentliche Ergänzung:

Bei hinreichend hohem Druck am Ende des Rohres kann sich unterhalb des engsten Querschnitts ein Verdichtungsstoß ausbilden, der die Überschallströmung in eine Unterschallströmung überführt. Hierbei springt in Abb. 6 die der Überschallströmung zugeordnete ausgezogene oder punktierte Druckkurve in A plötzlich bis zu einer der strichpunktierten Druckkurven an und setzt sich dann in C mit dieser Druckkurve fort; das analoge Verhalten gilt für den Geschwindigkeitsverlauf. Auf diese Weise erhalten, wie bereits auf S. 14 angekündigt, Teile der in Abb. 6 strichpunktierten Kurven physikalische Realität und es werden dadurch auch zwischen (a) und (b) liegende Drucke unterhalb des engsten Querschnitts erreichbar.

5. Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Verdichtungsstößen und Grenzübergang zu kleinen Verdichtungen. Ebenso wie im Schlußabsatz von Ziff. 4, S. 40 beziehen wir uns auf ein mit der Grundströmung fest verbundenes Koordinatensystem. Dann breitet sich in dem gegenüber diesem Koordinatensystem ruhenden Gas die unstetige Verdichtung mit der Geschwindigkeit w_n aus und das von der Verdichtung erfaßte Gas strömt mit der Geschwindigkeit $(w_n - \hat{w}_n)$ nach. Die Geschwindigkeit w_n ist hierdurch als Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer unstetigen Verdichtung gedeutet. Die umgekehrte Annahme, wonach das verdichtete Gas als ruhend betrachtet wird, ist unzulässig, da sich dann in dem ruhenden Gas eine unstetige Verdünnung ausbreiten würde, was wegen der hiermit verbundenen Entropieabnahme (vgl. S. 73) dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik widerspricht.

Wegen $\frac{\hat{p}}{p} > 1$ und wegen des im Vergleich zur Adiabate steileren Anstiegs der HUGONIOT-Kurve (vgl. Abb. 44) folgt aus Gl. (124)

$$w_n^2 > \frac{\Delta p}{\Delta \rho} > \frac{dp}{d\rho} = c^2,$$

d. h.: Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit w_n unstetiger Verdichtungen ist größer als die Schallgeschwindigkeit c , mit der sich unendlich kleine Verdichtungen oder Verdünnungen ausbreiten¹.

¹ Vgl. z. B. RIEMANN, B. und H. WEBER: Die part. Diffgl. der math. Physik, Bd. 2, S. 503. Braunschweig 1919.

In enger Beziehung hiermit steht der Satz:
Der Stoßwinkel σ ist stets größer als der zur gleichen Anströmgeschwindigkeit w gehörige MACHSche Winkel α .

Der Beweis dieser Behauptung folgt aus Gl. (126 b), wonach

$$\sin^2 \sigma = \frac{\Delta p}{\Delta \varrho} \frac{\varrho + \Delta \varrho}{\varrho} \frac{1}{w^2} > \frac{c^2}{w^2} = \sin^2 \alpha$$

gilt (vgl. hierzu auch S. 71 und Abb. 48).

Beim Grenzübergang $\Delta p \rightarrow 0$ zu unendlich kleinen, d. h. stetigen Verdichtungen ergibt sich aus Gl. (126 a, b) und der dritten Gl. (124)

$$\frac{\Delta p}{\Delta \varrho} \rightarrow k \frac{p}{\varrho} = \frac{dp}{d\varrho} = c^2, \quad w_n \rightarrow c, \quad \sigma \rightarrow \alpha,$$

während die letzte Gl. (124) wegen $\Delta w_t = 0$ in die BERNOULLISCHE Gleichung

$$\frac{dp}{\varrho} = -w_n dw_n = -w dw$$

übergeht.

§ 12. Stoßpolarendiagramm.

1. Definition und Gleichung der Stoßpolaren. Zur Darstellung der Beziehungen zwischen den physikalischen und geometrischen Größen beim Verdichtungsstoß sind verschiedene Diagramme eingeführt worden. So kann man beispielsweise nach dem Vorgang von TH. MEYER¹ auf Grund von Gl. (129) und (130) Kurventafeln entwerfen für die Beziehungen zwischen p/p_0 , \hat{p}/p_0 , σ und ϑ . Eine besonders anschauliche und übersichtliche Darstellung bietet das Stoßpolarendiagramm von A. BUSEMANN², das wir hier entwickeln und im folgenden ausschließlich benutzen wollen.

In der u, v -Geschwindigkeitsebene werden zu einem festen Geschwindigkeitsvektor $w = OP$ vor dem Verdichtungsstoß die ∞^1 möglichen, von dem Stoßwinkel σ als Parameter abhängigen Geschwindigkeitsvektoren \hat{w} hinter dem Verdichtungsstoß von dem festen Anfangspunkt O aus auf-

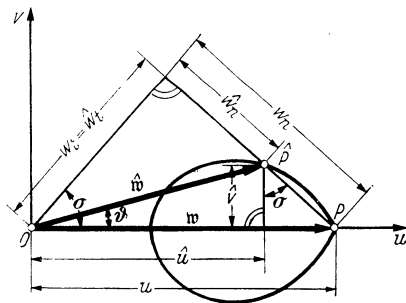


Abb. 46. Stoßpolare.

getragen. Die von den Endpunkten \hat{P} der Vektoren \hat{w} erzeugte Kurve

¹ MEYER, TH.: Diss. Göttingen 1908. Vgl. auch HIRSCH, A. in A. STODOLA: Dampf- und Gasturbinen, VI. Aufl. (1924), S. 805–809. — ACKERET: S. 331.

² BUSEMANN, A.: Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik. Aachen 1929. Herg. von GILLES, HOFF und v. KÁRMÁN, S. 162. Berlin 1930.

soll als die zu w gehörige Stoßpolare bezeichnet werden (Abb. 46). Sie zeigt gemäß Abb. 43 die geometrischen Beziehungen zwischen w , \hat{w} , σ und ϑ .

Legt man die u -Achse des Koordinatensystems in den Vektor w , dann hat man (vgl. Abb. 46)

$$w_t = \hat{w}_t = u \cos \sigma, \quad w_n = u \sin \sigma, \quad \hat{w}_n = u \sin \sigma - \frac{\hat{v}}{\cos \sigma}, \quad \operatorname{tg} \sigma = \frac{u - \hat{u}}{\hat{v}}.$$

Durch Einsetzen in Gl. (131) ergibt sich

$$\begin{aligned} u^2 \sin^2 \sigma - u \hat{v} \operatorname{tg} \sigma &= c^{*2} - \frac{k-1}{k+1} u^2 \cos^2 \sigma, \\ \frac{u^2 \operatorname{tg}^2 \sigma}{1 + \operatorname{tg}^2 \sigma} - u \hat{v} \operatorname{tg} \sigma &= c^{*2} - \frac{k-1}{k+1} \frac{u^2}{1 + \operatorname{tg}^2 \sigma}, \\ \frac{u^2 (u - \hat{u})^2}{\hat{v}^2 + (u - \hat{u})^2} - u (u - \hat{u}) &= c^{*2} - \frac{k-1}{k+1} \frac{u^2 \hat{v}^2}{\hat{v}^2 + (u - \hat{u})^2} \end{aligned}$$

und schließlich nach einfacher Umformung

$$\hat{v}^2 \left[\frac{c^{*2}}{u} + \frac{2}{k+1} u - u \right] = (u - \hat{u})^2 \left(\hat{u} - \frac{c^{*2}}{u} \right) \quad (143)$$

als Gleichung der Stoßpolaren in den Koordinaten \hat{u} , \hat{v} der Punkte \hat{P} . Man sieht, daß die Stoßpolare durch die Konstanten u und c^* , d. h. durch die Geschwindigkeit vor dem Stoß und die beim Stoß ungeändert bleibende kritische Geschwindigkeit vollständig bestimmt ist.

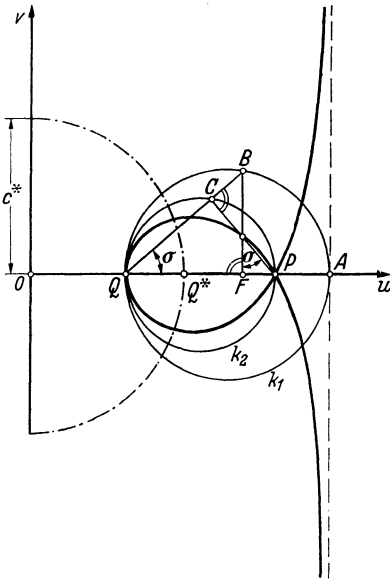


Abb. 47. Erzeugung der Stoßpolaren als Cartesisches Blatt.

2. Geometrische Eigenschaften der Stoßpolaren. Nach (143) ist die Stoßpolare eine Kurve dritter Ordnung mit der u -Achse als Symmetrieachse. Wegen $\hat{v} \rightarrow \pm \infty$ für

$$\hat{u} = \frac{c^{*2}}{u} + \frac{2}{k+1} u = OA$$

hat sie die Parallele zur v -Achse durch den Punkt A als Asymptote (Abb. 47).

Die beiden Schnittpunkte mit der u -Achse

$$\hat{u} = u = OP, \quad \hat{u} = \frac{c^{*2}}{u} = OQ$$

sind reziprok bezüglich des Kreises $w = c^*$. Dieser Kreis schneidet demnach die Stoßpolare und zerlegt sie in zwei Teile, denen Verdichtungsstöße mit Unter- bzw. Überschall-

geschwindigkeit \hat{w} nach dem Stoß entsprechen (vgl. S. 68). Dem Punkt Q ist der zu w gehörige senkrechte Verdichtungsstoß zugeordnet.

Die Stoßpolare läßt sich als „Cartesisches Blatt“ folgendermaßen punktweise konstruieren (Abb. 47).

Über den Durchmessern QA und QP schlägt man die Kreise k_1, k_2 . Von einem beliebigen Punkt B von k_1 wird das Lot BF auf die u -Achse gefällt und die Verbindungslinie BQ gezogen, welche den Kreis k_2 in C schneidet. Der Schnittpunkt \hat{P} von BF und CP ist ein Punkt der Stoßpolaren; denn nach Konstruktion ist

$$\hat{v} : FP = QF : FB,$$

also in Übereinstimmung mit Gl. (143)

$$\hat{v}^2 = \frac{FP^2 \cdot QF^2}{FB^2} = \frac{FP^2 \cdot QF^2}{QF \cdot FA} = FP^2 \cdot \frac{QF}{FA}.$$

Der Ausgangspunkt P der Stoßpolaren ist Doppelpunkt des Cartesischen Blattes; die Fortsetzung über den Doppelpunkt hinaus zur Asymptote hin hat keine physikalische Bedeutung.

Für $\hat{P} \rightarrow P$ ergibt sich als Grenzfall des Verdichtungsstoßes die unendlich kleine adiabatische Verdichtung. Der Stoßwinkel σ muß hierbei nach S. 69 in den MACHSchen Winkel α übergehen, d. h. die Doppelpunkt tangente der Stoßpolaren bilden mit der u -Achse den Winkel $\frac{\pi}{2} - \alpha$ (Abb. 48). Daraus folgt eine neue Bestätigung der auf S. 69 hergeleiteten Ungleichung $\sigma > \alpha$.

Der kritische Winkel ϑ_k ist der Winkel der Tangente aus O an die Stoßpolare (Abb. 48). Der zugehörige Berührungspunkt T teilt die Stoßpolare in die Bögen TP und TQ . Für $\vartheta < \vartheta_k$ ergeben sich zwei Schnittpunkte mit der Stoßpolaren; die Erfahrung zeigt, daß bei

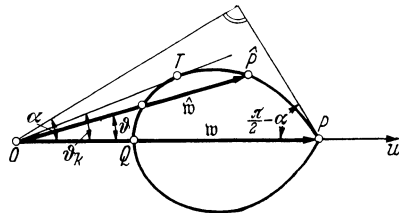


Abb. 48. MACHScher Winkel α und kritischer Winkel ϑ_k .

der Strömung an einer Ecke mit dem Winkel ϑ derjenige Verdichtungsstoß tatsächlich eintritt, der dem im Bogen PT liegenden Schnittpunkt \hat{P} entspricht. Für $\vartheta > \vartheta_k$ existiert kein Schnittpunkt mit der Stoßpolaren. In diesem Fall, der bei einem hinreichend stumpfen Hindernis vorliegt, kann daher die Ablenkung nicht durch einen von der Ecke E des Hindernisses ausgehenden Verdichtungsstoß verwirklicht werden. Es bildet sich vielmehr bereits bei einem stromaufwärts liegenden Punkt V ein Verdichtungsstoß aus, längs dessen gekrümmter Stoßfront alle Winkel σ von $\frac{\pi}{2}$ bis α und demgemäß die den sämtlichen Punkten der Stoßpolaren von Q über T

bis P entsprechenden Zustände vorkommen (Abb. 49). In diesem Sinne hat nicht nur der dem senkrechten Verdichtungsstoß zugeordnete Punkt Q sondern der ganze Bogen QT der Stoßpolaren ebenso physikalische Realität wie der Bogen PT (vgl. hierzu auch S. 78).

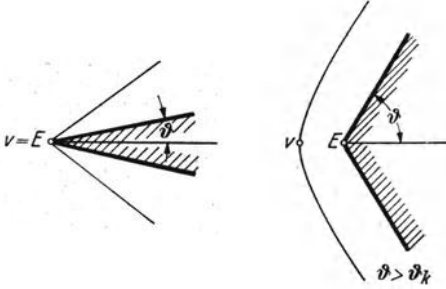


Abb. 49. Verdichtungsstoß an spitzem und stumpfem Hindernis.

3. Aufbau des Stoßpolendiagramms. Das Stoßpolendiagramm (Abb. 50) enthält zu mehreren Punkten des Überschallbereichs $c^* < u \leq w_{\max}$ der u -Achse die zugehörigen Stoßpolaren. Für $u = c^*$ entartet die Stoßpolare in

einen Punkt Q^* (vgl. Abb. 47) und für $u = w_{\max}$ geht sie in einen Kreis über. Alle übrigen Stoßpolaren liegen im Innern dieses Kreises und umschließen den Punkt Q^* .

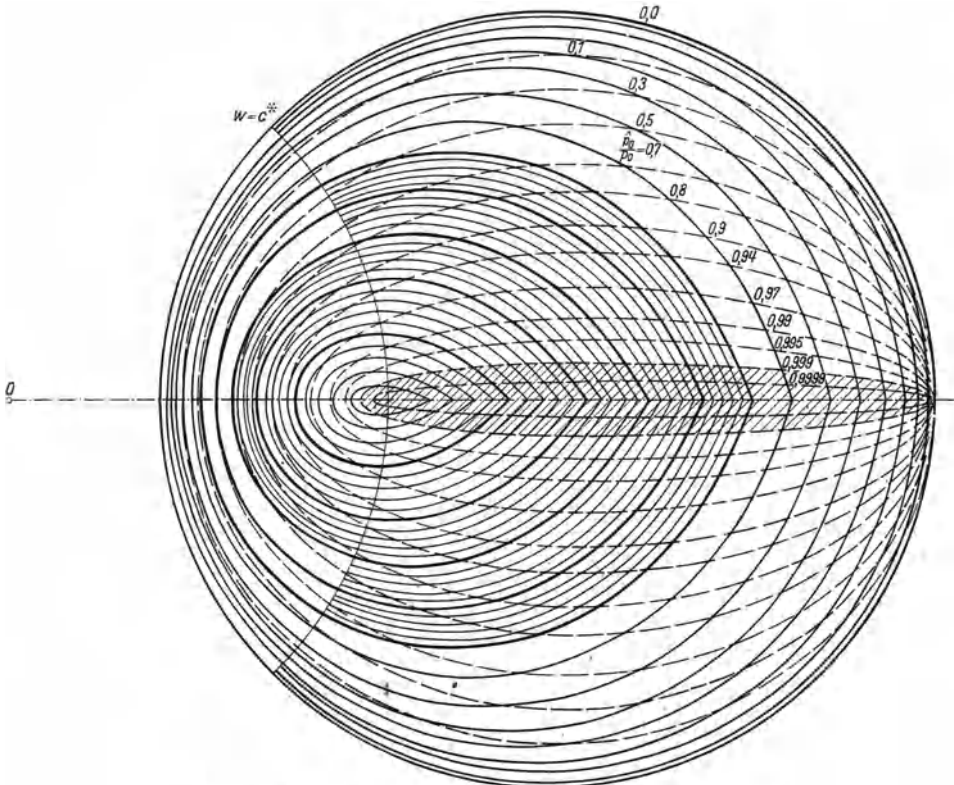


Abb. 50. Stoßpolendiagramm für Luft ($k = 1,405$) (nach A. BUSEMANN)

Aus dem Stoßpolarendiagramm läßt sich zu jedem Stoß- oder Ablenkungswinkel unmittelbar die Änderung der Geschwindigkeit ablesen. Die Änderung des Druckes ergibt sich hierauf mit Hilfe der gestrichelten „Ruhedruckkurven“, die wir auf S. 77 besprechen werden, sowie mit Hilfe des auf S. 111 entwickelten Charakteristikendiagramms.

§ 13. Geometrische und thermodynamische Beziehungen beim Verdichtungsstoß.

1. Abflachung des Druckbergs und Entropiezunahme. Die stetigen, adiabatischen Zustandsänderungen vor und hinter dem Verdichtungsstoß lassen sich unter Voraussetzung ebener Strömungen nach S. 9 (vgl. Abb. 3) durch Druckberge darstellen. Aus den Gleichungen

$$u^2 + v^2 = w_{\max}^2 \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right], \quad \hat{u}^2 + \hat{v}^2 = w_{\max}^2 \left[1 - \left(\frac{\hat{p}}{\hat{p}_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right] \quad (144)$$

dieser beiden Druckberge folgt:

Der Druckberg hinter dem Stoß entsteht aus dem Druckberg vor dem Stoß durch affine Verzerrung parallel zur p -Achse im Verhältnis $p_0 : \hat{p}_0$.

Das Verzerrungsverhältnis $p_0 : \hat{p}_0$ werden wir auf S. 76 berechnen. Hier wollen wir vorläufig nur einen allgemeinen Zusammenhang zwischen dem Verhältnis $p_0 : \hat{p}_0$ und der mit jedem Verdichtungsstoß verbundenen Entropiezunahme $\hat{S} - S$ herleiten.

Durch Integration der Definitionsgleichung (11) vom Ruhezustand vor bis zum Ruhezustand hinter dem Stoß erhält man mit Berücksichtigung von Gl. (125)

$$J(\hat{S} - S) = J c_v \ln \left(\frac{\hat{T}_0}{T_0} \right) - R \ln \left(\frac{\hat{p}_0}{p_0} \right) = R \ln \left(\frac{\hat{p}_0}{p_0} \right) = R \ln \left(\frac{p_0}{\hat{p}_0} \right). \quad (145)$$

Hiernach muß wegen $\frac{p_0}{\hat{p}_0} \neq 1$ (vgl. S. 75) eine Entropieänderung eintreten und, da nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik eine Entropieabnahme verboten ist, folgt $\hat{S} - S > 0$ und $p_0 : \hat{p}_0 > 1$, d. h.:

Beim Verdichtungsstoß nimmt die Entropie zu und der Druckberg wird in dem durch die Entropiezunahme gemäß Gl. (145) festgelegten Verzerrungsverhältnis $p_0 : \hat{p}_0 > 1$ abgeflacht.

Als praktisch wichtige Folgerung ergibt sich hieraus, daß zu gleichen Geschwindigkeiten hinter dem Verdichtungsstoß kleinere Drücke gehören als vorher.

2. Geometrische Deutung der Grundgleichungen des Verdichtungsstoßes. Mit Hilfe der Druckberge lassen sich die Grundgleichungen des Verdichtungsstoßes anschaulich-geometrisch deuten¹ (Abb. 51):

¹ BUSEMANN, A.: Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik. Aachen 1929, Hrsg. von GILLES, HOFF und v. KÁRMÁN, S. 162. Berlin 1930.

Wir legen die u -Achse parallel zur Stoßlinie und haben dann

$$u = w_t, \quad v = w_n.$$

Nach Gl. (123) ist $u = \hat{u}$, d. h. die den Zuständen unmittelbar vor und hinter dem Verdichtungsstoß entsprechenden Punkte P, \hat{P} der beiden Druckberge liegen in einer zur v, p -Aufrißebene parallelen Schnittebene $u = \hat{u} = \text{const}$. Die von dieser Ebene aus den beiden Druckbergen aus-

geschnittenen Kurven sind der Deutlichkeit halber in Abb. 51 nicht im Aufriß eingetragen, sondern unterhalb des Grundrisses gesondert angegeben.

Nach Gl. (4*) hat man für die Schnittkurven die Gleichungen

$$\frac{w_n^2}{2} + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = \dots = \frac{w_t^2}{2} = \text{const},$$

$$\frac{\hat{w}_n^2}{2} + \int_{\hat{p}_0}^{\hat{p}} \frac{d\hat{p}}{\hat{\rho}} = \dots = \frac{\hat{w}_t^2}{2} = \text{const}.$$

Hieraus folgt wie in Gl. (23)

$$\text{tg } \tau = \dots = \frac{dp}{dw_n} = \rho w_n,$$

$$\text{tg } \hat{\tau} = \dots = \frac{d\hat{p}}{d\hat{w}_n} = \hat{\rho} \hat{w}_n$$

und nach Grundgleichung (122a)

$$\tau = \hat{\tau}. \quad (146)$$

Für die Abschnitte der die Schnittkurven in P bzw. \hat{P} berührenden Tangenten auf der p -Achse erhält man

$$s = p + w_n \text{tg } \tau = p + \rho w_n^2,$$

$$\hat{s} = \hat{p} + \hat{w}_n \text{tg } \hat{\tau} = \hat{p} + \hat{\rho} \hat{w}_n^2$$

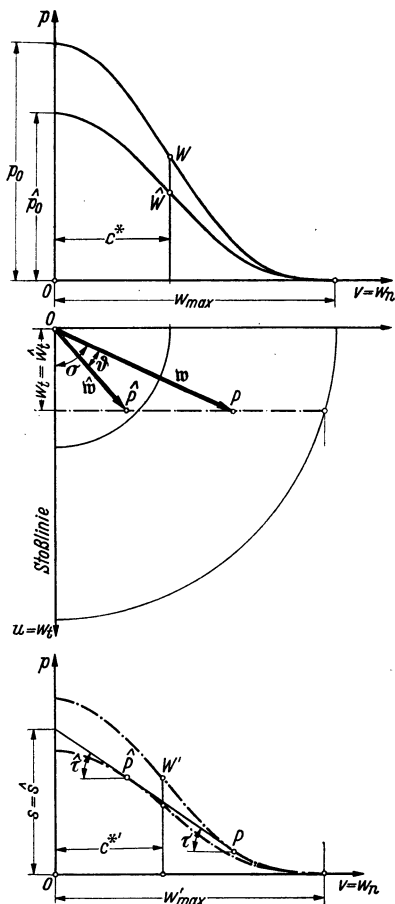


Abb. 51. Geometrische Deutung des Verdichtungsstoßes mittels der Druckberge.

und nach Grundgleichung (122b)

$$s = \hat{s}. \quad (147)$$

Aus Gl. (146) und (147) ergibt sich der Satz:

Die Zustände unmittelbar vor und hinter dem Verdichtungsstoß werden in der Schnittebene $w_t = \hat{w}_t = \text{const}$ der beiden Druckberge durch die Berührungspunkte der gemeinsamen Tangente dargestellt.

Hieraus folgt der für den vorhergegangenen Absatz noch ausstehende Beweis, daß der Ruhedruck und die Entropie sich beim Verdichtungsstoß tatsächlich ändern. Für $\frac{p_0}{\hat{p}_c} = 1$ würden nämlich die beiden Druckberge und damit auch die beiden Schnittkurven sowie die Punkte P, \hat{P} zusammenrücken und die unstetige Verdichtung in den Grenzfall der stetigen Verdichtung übergehen.

Zu einem festen Punkt P des Ausgangsdruckbergs erhält man alle möglichen zugeordneten Punkte \hat{P} , indem man von P aus die gemeinsamen Tangenten an den Ausgangsdruckberg und die unendlich vielen affin abgeflachten Druckberge legt, d. h. für das von P ausgehende Tangentenbüschel des Ausgangsdruckbergs die Berührungspunkte auf den affin abgeflachten Druckbergen ermittelt. Diese Punkte bilden eine in der Tangentenebene des Punktes P liegende Kurve, deren Grundriß in der u, v -Ebene offensichtlich die dem Vektor u zugehörige Stoßpolare ist.

3. Spezialisierung für vollkommene Gase. Bei vollkommenen Gasen spezialisieren sich die Gleichungen der Schnittkurven der Druckberge mit den Ebenen $w_t = \hat{w}_t = \text{const}$ zu

$$w_n^2 = w_{max}^2 \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right] \quad w_t^2 = w_{max}^2 \left[1 - \lambda^2 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right],$$

$$\hat{w}_n^2 = w_{max}^2 \left[1 - \left(\frac{\hat{p}}{\hat{p}_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right] \quad w_t^2 = w_{max}^2 \left[1 - \lambda^2 \left(\frac{\hat{p}}{\hat{p}_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]$$

mit den Abkürzungen

$$w_{max}^2 = w_{max}^2 - w_t^2, \quad \lambda = \frac{w_{max}}{w_t} \geq 1.$$

Hieraus folgt:

Die Schnittkurven entstehen im Falle der vollkommenen Gase aus den Meridianen der Druckberge, indem man diese in der w_n -Richtung im Verhältnis $\lambda:1$ und in der p -Richtung im Verhältnis $\lambda^{\frac{2k}{k-1}}:1$ affin zusammendrückt.

Wegen der affinen Beziehung liegen ebenso wie die Wendepunkte W, \hat{W} der Meridiane auch die Wendepunkte W', \hat{W}' der Schnittkurven (vgl. Abb. 51) lotrecht übereinander. Für die gemeinsame Abszisse c^{*2} der Punkte W', \hat{W}' hat man

$$c^{*2} = \frac{c^{*2}}{\lambda^2} = \frac{w_{max}^2}{w_{max}^2} c^{*2} = \frac{w_{max}^2 - w_t^2}{w_{max}^2} c^{*2} = c^{*2} - \frac{c^{*2}}{w_{max}^2} w_t^2$$

und demnach nach Gl. (18)

$$c^{*2} = c^{*2} - \frac{k-1}{k+1} w_t^2.$$

Durch Gegenüberstellung mit Gl. (131) und (124) folgt weiter

$$c^{*2} = w_n \hat{w}_n = \frac{\Delta p}{\Delta \varrho}, \quad (14)$$

wodurch die geometrische Größe c^* eine physikalische Deutung erhält. Außerdem liefert Gl. (148) wegen $w_n > \hat{w}_n$ die Ungleichungen

$$w_n > c^*, \quad \hat{w}_n < c^*,$$

d. h.: P liegt rechts von W' , \hat{P} links von \hat{W}' (vgl. Abb. 51).

Beim senkrechten Verdichtungsstoß ($w_t = \hat{w}_t = 0$) ist $c^* = c^*$, $w'_m = w_{\max}$ und die Schnittkurven fallen mit den Meridianen der Druckberge zusammen.

4. Berechnung des Ruhedruckverhältnisses $\hat{p}_0 : p_0$. Während nach Gl. (125) beim Verdichtungsstoß der Ruhe-Wärmeinhalt i_0 , die Ruhetemperatur T_0 und das Verhältnis $\frac{p_0}{\varrho_0}$ von Ruhedruck zu Ruhedichte erhalten bleiben, verkleinert sich sowohl der Ruhedruck p_0 als auch die Ruhedichte ϱ_0 in einem bestimmten Verhältnis. Das Verkleinerungsverhältnis $\frac{\hat{p}_0}{p_0} = \frac{\hat{\varrho}_0}{\varrho_0}$ wurde auf S. 73 als Verzerrungsverhältnis für die Abflachung des Druckbergs gedeutet und soll jetzt aus den Bestimmungswerten des Stoßes, z. B. der Geschwindigkeit vor dem Stoß und dem Stoßwinkel, berechnet werden.

Zunächst läßt sich das Ruhedruckverhältnis durch den Temperatur- und Dichtesprung am Verdichtungsstoß selbst ausdrücken auf Grund der Formel

$$\frac{\hat{p}_0}{p_0} = \left(\frac{\hat{T}}{T}\right)^{\frac{1}{k-1}} \cdot \left(\frac{\hat{\varrho}}{\varrho}\right). \quad (14)$$

Sie ergibt sich aus der bereits auf S. 73 benutzten Definitionsgleichung (1

$$J dS = J c_v \frac{dT}{T} - R \frac{d\varrho}{\varrho}.$$

Während wir aber auf S. 73 das Integral vom Ruhezustand vor \mathcal{L} zum Ruhezustand nach dem Verdichtungsstoß gebildet hatten, integrieren wir jetzt über die Änderung vom Zustand unmittelbar vor \mathcal{L} unmittelbar nach dem Stoß und erhalten dabei

$$J(\hat{S} - S) = J c_v \ln \left(\frac{\hat{T}}{T}\right) - R \ln \left(\frac{\hat{\varrho}}{\varrho}\right),$$

woraus mittels Gl. (145) und (9) die zu beweisende Beziehung Gl. (14) folgt.

Wir formen Gl. (149) um in

$$\frac{\hat{p}_0}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{k-1}} \cdot \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right) \left(\frac{\hat{T}}{T_0}\right)^{-\frac{1}{k-1}} \left(\frac{\hat{\varrho}}{\varrho_0}\right)$$

und erhalten auf Grund von Gl. (133) und (134) sowie mit Hilfe der Adiabatengleichung (8) nach elementarer Rechnung

$$\frac{\hat{p}_0}{p_0} = \frac{k+1}{k-1} \cdot \frac{\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{k}}}{1 + \operatorname{ctg}^2 \sigma \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} \left|\frac{k}{k-1}\right|} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} \left|\frac{k}{k-1}\right|} \quad (150)$$

$$\left[\frac{4k \sin^2 \sigma}{(k+1)^2} - \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2 \left(1 + \frac{4k \sin^2 \sigma}{(k-1)^2}\right) \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} \right]^{\frac{1}{k-1}}$$

Ersetzt man hierin $\frac{p}{p_0}$ nach Gl. (22) durch M bzw. M^* , so wird durch Gl. (150) das gesuchte Ruhedruckverhältnis $\frac{\hat{p}_0}{p_0}$ als Funktion von M , σ bzw. M^* , σ gegeben.

Für den senkrechten Verdichtungsstoß ($\sigma = \frac{\pi}{2}$) spezialisiert sich Gl. (150) zu

$$\frac{\hat{p}_0}{p_0} = \frac{k+1}{k-1} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{k}} \cdot \frac{1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} \left|\frac{k}{k-1}\right|}{\left[\frac{4k}{(k+1)^2} - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} \left|\frac{k}{k-1}\right| \right]^{\frac{1}{k-1}}} \quad (151)$$

bzw. nach Einführung von M bzw. M^* an Stelle von $\frac{p}{p_0}$ zu

$$\frac{\hat{p}_0}{p_0} = \left[\frac{\frac{k+1}{2} M^2}{\frac{k-1}{2} M^2 + 1} \right]^{\frac{k}{k-1}} \cdot \left[\frac{\frac{k+1}{2}}{k M^2 - \frac{k-1}{2}} \right]^{\frac{1}{k-1}} \quad (152)$$

$$= M^* \left[\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} M^{*2}}{M^{*2} - \frac{k-1}{k+1}} \right]^{\frac{1}{k-1}}$$

Es empfiehlt sich, die komplizierte Formel (150) durch eine geeignete zeichnerische Darstellung zu ersetzen. Zu diesem Zwecke wird das Stoßpolarendiagramm durch Hinzufügung der „Ruhedruckkurven“ $\frac{\hat{p}_0}{p_0} = \text{const.}$ ergänzt (vgl. die gestrichelten Kurven in Abb. 50), so daß dann zu jedem durch einen Punkt im Stoßpolarendiagramm gekennzeichneten Verdichtungsstoß das zugeordnete Ruhedruckverhältnis $\frac{\hat{p}_0}{p_0}$ unmittelbar abgelesen werden kann. Die Kurven $\frac{\hat{p}_0}{p_0} = \text{const}$ können dadurch gewonnen

werden, daß man auf einzelnen Stoßpolaren, d. h. für gewisse feste Werte $\frac{p}{p_0}$, nach Gl. (150) das Verhältnis $\frac{\hat{p}_0}{p_0}$ berechnet und zwischen den so ermittelten Punkten mit bekannten Werten $\frac{\hat{p}_0}{p_0}$ in geeigneter Weise interpoliert.

Ebenso wie die Stoßpolaren umschließen auch die Ruhedruckkurve den Punkt Q^* (vgl. Abb. 47). Für $\frac{\hat{p}_0}{p_0} = 1$ entartet die Ruhedruckkurve zu Strecke Q^*A , für $\frac{\hat{p}_0}{p_0} = 0$ geht sie ebenso wie die Stoßpolare des Punktes A in einen Kreis über.

In einem verhältnismäßig großen Gebiet ist $\frac{\hat{p}_0}{p_0} \approx 1$; vgl. z. B. das in Abb. 50 schraffierte Gebiet des Stoßpolarendiagramms mit $\frac{\hat{p}_0}{p_0} > 0,99$. Man wird in diesem Gebiet die Ruhedruckänderung durch den Verdichtungsstoß im allgemeinen vernachlässigen, die Zustandsänderung als angenähert als adiabatisch betrachten können.

5. Druckerhöhung vor einem Staupunkt in Überschallströmung. Auf S. 71 war bereits von der Überschallströmung um ein stumpfes Hindernis die Rede, dessen Ablenkungswinkel ϑ größer ist als der kritische Winkel ϑ_c . Hierher gehört insbesondere die Überschallströmung vor einem Staupunkt S an einem quergestellte

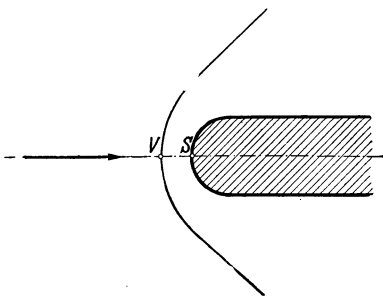


Abb. 52. Verdichtungsstoß vor einem Staupunkt.

Flächenelement (Abb. 52). In der Umgebung des Staupunktes S bildet sich Unterschallströmung, die stromaufwärts durch einen Verdichtungsstoß gegen das mit Überschallgeschwindigkeit anströmende Gas abgegrenzt wird.

Die theoretische Untersuchung des vor dem Staupunkt eintretenden Verdichtungsstoßes begegnet wegen des zunächst unbekanntem Verlaufs der Stoßlinie großen mathematischen Schwierigkeiten. Die Druckerhöhung auf der Symmetrieachse von der Grundströmung über den Verdichtungsstoß bei V bis zum Staupunkt S kann jedoch in einfacher Weise berechnet werden¹:

Wir bezeichnen wieder mit p und $M > 1$ den Druck und die MACHsche Zahl der Grundströmung, ferner mit \hat{p} den Druck unmittelbar hinter der Verdichtungsstoß beim Punkt V auf der Symmetrieachse und mit \hat{p}_0 den Ruhedruck hinter dem Verdichtungsstoß, der sich an dem Staupunkt

¹ PRANDTL: S. 210—212 und ACKERET: S. 334.

tatsächlich einstellt. Dann ist nach Gl. (152) und (22)

$$\frac{\hat{p}_0}{p} = \frac{\hat{p}_0}{p_0} \cdot \frac{p_0}{p} = \frac{k+1}{2} M^2 \left[\frac{(k+1)^2 M^2}{4kM^2 - 2(k-1)} \right]^{\frac{1}{k-1}}. \quad (153)$$

Der gesamte Druckanstieg

$$\hat{p}_0 - p = (\hat{p} - p) + (\hat{p}_0 - \hat{p}) = \frac{\rho w^2}{2} (n_1 + n_2) \quad (154)$$

setzt sich aus dem unstetigen Druckanstieg $\frac{\rho w^2}{2} n_1$ beim Verdichtungsstoß im Punkt V und dem stetigen, adiabatischen Druckanstieg $\frac{\rho w^2}{2} n_2$ hinter dem Verdichtungsstoß von V bis zum Staupunkt S zusammen. Aus Gl. (137) erhält man für den unstetigen Anteil

$$n_1 = \frac{\hat{p} - p}{\frac{\rho}{2} w^2} = \frac{4}{k+1} \left(1 - \frac{1}{M^2} \right) \quad (M > 1). \quad (155)$$

Für den stetigen Teil setzen wir mit Benutzung von Gl. (8) und (14)

$$\frac{\hat{p}_0 - \hat{p}}{\frac{\rho}{2} w^2} = \left(\frac{\hat{p}_0}{p_0} - \frac{\hat{p}}{p_0} \right) \cdot \left(\frac{p_0}{\frac{\rho}{2} w^2} \right) \cdot \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right) = \left(\frac{\hat{p}_0}{p_0} - \frac{\hat{p}}{p_0} \right) \cdot \frac{k-1}{k} \cdot \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right] \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{k}}}$$

und erhalten aus Gl. (152) und (140) mit Hilfe der Substitution Gl. (22)

$$n_2 = \frac{\hat{p}_0 - \hat{p}}{\frac{\rho}{2} w^2} = \frac{k+1}{k} \left[\frac{(k+1)^2 M^2}{4kM^2 - 2(k-1)} \right]^{\frac{1}{k-1}} - \frac{4kM^2 - 2(k-1)}{k(k+1)M^2} \quad (M > 1). \quad (156)$$

Dadurch ist n_1, n_2 als Funktion von M und demnach gemäß Gl. (154) der gesamte Druckanstieg als Funktion der MACHschen Zahl $M > 1$ und des Staudrucks $\frac{\rho}{2} w^2$ der Grundströmung gegeben (Abb. 53).

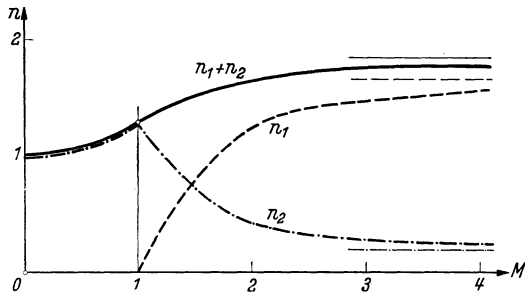


Abb. 53. Stetiger und unstetiger Anteil des Druckanstiegs vor einem Staupunkt.

Bei Anströmung mit

Unterschallgeschwindigkeit tritt naturgemäß kein Verdichtungsstoß auf. Der Staudruck ist dann gleich dem Ruhedruck p_0 der Grundströmung

und an Stelle von Gl. (153) tritt Gl. (22), an Stelle von Gl. (155) und (156) hat man

$$n_1 = 0, \quad n_2 = \frac{p_0 - p}{\frac{\rho}{2} w^2} = \frac{2}{k M^2} \left[\left(\frac{k-1}{2} M^2 + 1 \right)^{\frac{k}{k-1}} - 1 \right] \quad (M < 1). \quad (157)$$

Für $M=1$ liefern Gl. (155), (156) und (157) dieselben Werte

$$n_1 = 0, \quad n_2 = \frac{2}{k} \left[\left(\frac{k+1}{2} \right)^{\frac{k}{k-1}} - 1 \right].$$

Die Formeln (155), (156) für Überschallströmung und (157) für Unterschallströmung sind von praktischer Wichtigkeit für die Druck- bzw. Geschwindigkeitsmessung mit einem Pitotrohr.

§ 14. Verdichtungsstoß und stetige Verdichtungsströmung an einem axial angeblasenen Drehkegel.

1. Gegenüberstellung der Überschallströmung um Keil und Kegel. Unter Vorwegnahme der im folgenden hergeleiteten Ergebnisse schicken wir zunächst eine lediglich qualitative Betrachtung voraus über den Unterschied zwischen der ebenen Strömung an einem Keil und der räum-

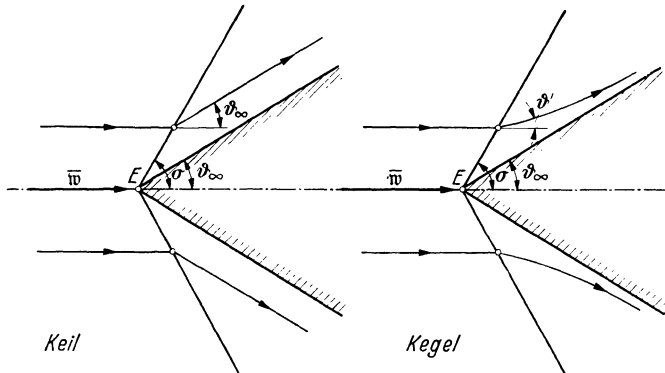


Abb. 54. Gegenüberstellung der Überschallströmung um Keil und Kegel.

lichen Strömung an einem Drehkegel. Die Anströmung soll axial und mit Überschallgeschwindigkeit erfolgen und der halbe Öffnungswinkel ϑ_∞ des Keils bzw. Kegels soll kleiner sein als der kritische Winkel (vgl. S. 1).

Die ebene Strömung um einen Keil (Abb. 54 links) hat nach § 11 auf jeder der beiden Keilseiten einen schiefen Verdichtungsstoß. Die Stoßlinien sind Geraden und gehen von der Keilkante nach beiden Seiten hin ins Unendliche. Die Grundströmung wird an den Stoßlinien um den halben Keilwinkel ϑ_∞ unstetig abgelenkt und verläuft dann weiter als

reine Parallelströmung mit Überschallgeschwindigkeit parallel zu den beiden Keilseiten.

Die räumliche achsensymmetrische Strömung um einen Drehkegel (Abb. 54 rechts) enthält einen Verdichtungsstoß an einem zum umströmten Kegel coaxialen Stoßkegel mit dem zunächst noch unbekanntem Stoßwinkel $\sigma > \vartheta_\infty$ als halbem Öffnungswinkel. Am Stoßkegel wird die Grundströmung wie beim Keil um einen konstanten Winkel ϑ' abgelenkt, der jedoch kleiner ist als der halbe Öffnungswinkel ϑ_∞ des umströmten Kegels. Demgemäß sind die Stromlinien hinter dem Stoßkegel gekrümmt und nähern sich dem umströmten Kegel asymptotisch. Hierbei tritt eine zusätzliche Verdichtung ein, die stetig und adiabatisch verläuft und zu der es beim Keil kein Analogon gibt. Diese stetige Verdichtung kann unter Umständen zu einer Verminderung der Strömungsgeschwindigkeit bis in den Unterschallbereich hinein führen. Ebenso wie die Stromlinien sind auch die MACHschen Linien des Überschallbereichs gekrümmt und gehen durch Ähnlichkeitstransformation mit der Kegelspitze E als Ähnlichkeitszentrum auseinander hervor.

Die auf S. 49 entwickelte linearisierte Theorie gibt die Verhältnisse bei der Umströmung des Kegels qualitativ und für Öffnungswinkel bis zu etwa $2\vartheta_\infty \approx 30^\circ$ auch quantitativ in guter Annäherung wieder (vgl. Abb. 29). Sowohl in der linearisierten Näherungstheorie als auch bei der strengen Behandlung des Problems hat man ein „konisches Strömungsfeld“ mit konstantem Geschwindigkeitsvektor nach Größe und Richtung längs jeder Geraden durch die Kegelspitze E , die Stromlinien sind also ähnliche Kurven mit E als Ähnlichkeitszentrum und Geschwindigkeitsbetrag und Druck sind konstant für die ganze Oberfläche des umströmten Kegels. An Stelle des Stoßkegels tritt jedoch in der linearisierten Theorie der MACHsche Kegel mit der Spitze E und an Stelle des Ablenkungswinkels ϑ' hat man ein tangenciales Ansetzen der Stromlinien; der unetetige Druckanstieg des Verdichtungsstoßes wird durch eine sehr schnell verlaufende stetige Druckänderung angenähert (vgl. Abb. 30). Ein Durchgang durch die kritische Geschwindigkeit in den Unterschallbereich hinein ist in der linearisierten Theorie naturgemäß ausgeschlossen.

2. Zurückführung der Potentialgleichung auf eine gewöhnliche Differentialgleichung. Ähnlich wie bei der ebenen stetigen Verdünnungsströmung an einer konvexen Ecke (vgl. S. 54) läßt sich auch bei der räumlichen achsensymmetrischen stetigen Verdichtungsströmung an einem Drehkegel die Potentialgleichung auf eine gewöhnliche Differentialgleichung zurückführen.

Wir benutzen die Polarkoordinaten:

r = Radiusvektor von der Kegelspitze E aus,

ω = Winkel gegen die Kegelachse,

$\gamma =$ Winkel der Meridianebenen gegen eine feste Meridianebene als Nullebene

und bezeichnen mit u, v die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors t in Richtung des Radiusvektors und senkrecht dazu (Abb. 55).

Wegen der Achsensymmetrie und der Voraussetzung eines konischen Strömungsfeldes (vgl. S. 81) sind u, v Funktionen lediglich der Veränderlichen ω , die Untersuchung braucht also nur in einer Meridianebene durchgeführt zu werden. Die Bedingung Gl. (3) der Wirbelfreiheit

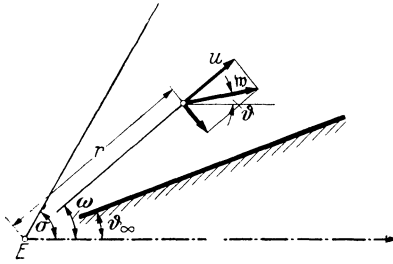


Abb. 55. Erläuterung der Bezeichnungen.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \omega} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) = 0$$

spezialisiert sich zu

$$v = \frac{du}{d\omega} \quad (158)$$

und die Kontinuitätsbedingung (2)

$$\frac{\partial}{\partial r} (\rho u) + \frac{2}{r} \rho u + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \omega} (\rho v) + \frac{\text{ctg} \omega}{r} \rho v = 0$$

liefert

$$2 \rho u \sin \omega + \frac{d}{d\omega} (\rho v \sin \omega) = 0. \quad (159)$$

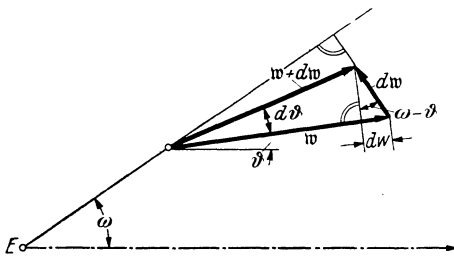


Abb. 56. Änderung des Geschwindigkeitsvektors.

Die Gl. (158) und (159) lassen sich auch durch folgende unmittelbar anschauliche Überlegungen gewinnen:

a) Da auf den Kegeln $\omega = \text{const}$ der Geschwindigkeitsbetrag w und der Druck p konstant ist, muß grad p nach der EULERSchen Bewegungsgleichung (1) dann auch

der Vektor dw des Geschwindigkeitszuwachses senkrecht auf den Geraden durch die Kegelspitze E stehen. Aus diesem geometrischen Zusammenhang (Abb. 56) folgt

$$w \cos (\omega - \vartheta) = (w + dw) \cos (\omega - \vartheta - d\vartheta),$$

was nach Einsetzen von

$$u = w \cos (\omega - \vartheta), \quad v = -w \sin (\omega - \vartheta) \quad (160)$$

sogleich auf Gl. (158) führt.

b) Die Kontinuitätsbedingung liefert für den Gasstrom zwischen dem umströmten Kegel und der durch Rotation einer Stromlinie

um die Kegelachse entstehenden Umdrehungsfläche die Forderung (Abb. 57)

$$r^2 \pi \sin \omega \cdot w \cdot \sin(\omega - \vartheta) \cdot \rho$$

$$= r'^2 \pi \sin(\omega + d\omega) \cdot (w + dw) \cdot \sin(\omega + d\omega - \vartheta - d\vartheta) \cdot (\rho + d\rho),$$

woraus sich mit Hilfe des Sinusatzes für das in Abb. 57 schraffierte Dreieck

$$\frac{r}{r'} = \frac{\sin(\omega - \vartheta + d\omega - d\vartheta)}{\sin(\omega - \vartheta - d\vartheta)}$$

und unter Berücksichtigung von Gl. (160) nach einfacher Rechnung die Gl. (159) ergibt.

Mittels der gemäß Gl. (15*) umgeformten BERNOULLISCHEN Gl. (4*)

$$0 = w dw + \frac{dp}{\rho} = u du + v dv + c^2 \frac{d\rho}{\rho}$$

$$= u du + v dv + \frac{k-1}{2} \left| w_{\max}^2 - (u^2 + v^2) \right| \frac{d\rho}{\rho}$$

geht Gl. (159) über in

$$\frac{k-1}{2} \left(2u + v \operatorname{ctg} \omega + \frac{dv}{d\omega} \right) (w_{\max}^2 - u^2 - v^2) - v \left(u \frac{du}{d\omega} + v \frac{dv}{d\omega} \right) = 0, \quad (161)$$

woraus man durch Einsetzen von Gl. (158) für u die gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung erhält¹:

$$\frac{d^2 u}{d\omega^2} \left[\frac{k+1}{2 w_{\max}^2} \left(\frac{du}{d\omega} \right)^2 - \frac{k-1}{2} \left(1 - \frac{u^2}{w_{\max}^2} \right) \right] = (k-1) u \left(1 - \frac{u^2}{w_{\max}^2} \right)$$

$$+ \frac{k-1}{2} \left(1 - \frac{u^2}{w_{\max}^2} \right) \operatorname{ctg} \omega \frac{du}{d\omega} - \frac{k u}{w_{\max}^2} \left(\frac{du}{d\omega} \right)^2 - \frac{k-1}{2 w_{\max}^2} \operatorname{ctg} \omega \left(\frac{du}{d\omega} \right)^3. \quad (162)$$

Da durch

$$\varphi(r, \omega) = r u(\omega)$$

das Potential der achsensymmetrischen konischen Strömung gegeben ist, liefert Gl. (162) zugleich mit $u(\omega)$ auch das Potential $\varphi(r, \omega)$, d. h. die Potentialgleichung (39) ist auf die gewöhnliche Differentialgleichung (162) zurückgeführt.

Wie BUSEMANN² streng bewiesen hat, ist es unmöglich, die parallel zur Kegelachse ankommende Grundströmung ohne Knick der Strom-

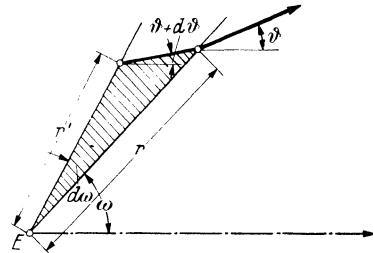


Abb. 57. Erläuterung der Kontinuitätsbedingung.

¹ TAYLOR, G. I. und J. W. MACCOLL: Proc. Roy. Soc. A. 139 (1933), S. 278 bis 311.

² BUSEMANN, A.: Z. angew. Math. Mech. 9 (1929), S. 496—498 und Lufo 19 (1942), S. 137—144. Vgl. ferner BOURQUARDT, M. F.: Comptes rendus Paris 194 (1932), S. 846.

linien in die stetige Verdichtungsströmung um den Kegel überzuführen. Die notwendige Knickung der Stromlinien muß durch einen Verdichtungsstoß bewerkstelligt werden.

3. Geschwindigkeitsbild der Stromlinien. Durch rechnerische oder zeichnerische Integration der gewöhnlichen Differentialgleichung (162) läßt sich der Stromlinienverlauf und der am umströmten Kegel herrschende konstante Druck ermitteln, wenn die Anfangsbedingungen unter Berücksichtigung der Grundgleichungen des Verdichtungsstoßes gewählt werden. Wesentlich einfacher als dieser von **G. I. TAYLOR** und **J. W. MACCOLL**¹ beschrittene Weg ist nach dem Vorgang von **A. BUSEMANN**² die Zurückführung des Problems auf das Geschwindigkeitsbild der Stromlinien, wie wir dies in ähnlicher Weise auch bei der ebenen Verdünnungsströmung um eine Ecke durchgeführt haben (vgl. S. 58). Da der Geschwindigkeitsvektor längs jeder Geraden durch die Kegelspitze konstant bleibt, hat man wieder für alle Stromlinien einer Meridianebene dasselbe Geschwindigkeitsbild.

Zur Ermittlung des Geschwindigkeitsbildes führen wir an Stelle von u, v nach Gl. (160) die Polarkoordinaten w, ϑ des Geschwindigkeitsvektors ein. Die Gl. (158) und (161) gehen dann über in

$$\frac{dw}{d\vartheta} + w \operatorname{tg}(\omega - \vartheta) = 0,$$

$$\left(\frac{k+1}{2}w^2 - \frac{k-1}{2}w_{\max}^2\right) \sin(\omega - \vartheta) \frac{dw}{d\vartheta} + \frac{k-1}{2}w(w_{\max}^2 - w^2) \cdot \left[\frac{\sin\vartheta}{\sin\omega} \frac{d\omega}{d\vartheta} + \cos(\omega - \vartheta)\right] = 0,$$

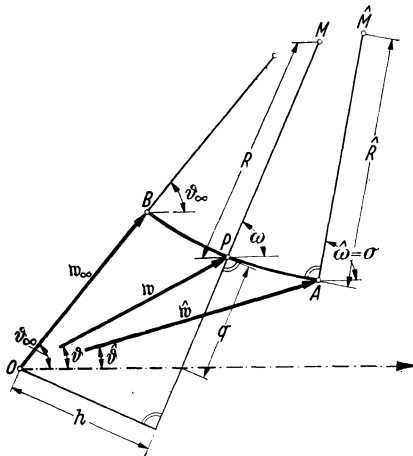


Abb. 58. Geschwindigkeitsbild der Stromlinien.

woraus durch Elimination von $d\vartheta$ folgt

$$\frac{dw}{d\omega} = \frac{w \sin(\omega - \vartheta) \frac{d\vartheta}{d\omega}}{1 - \frac{k-1}{2}(w_{\max}^2 - w^2)}. \quad (163)$$

Für die Bogenlänge s des Geschwindigkeitsbildes hat man (vgl. Abb. 56)

$$ds = |dw| = \frac{dw}{\sin(\omega - \vartheta)},$$

während $d\omega$ dem Winkel benachbarter Normalen bzw. benachbarter Tangenten des Geschwin-

¹ TAYLOR, **G. I.** und **J. W. MACCOLL**: Proc. Roy. Soc. A. 139 (1933), S. 278—311.

² Vgl. Fußnote ² S. 83.

digkeitsbildes gleich ist. Daher liefert Gl. (163) den Krümmungsradius

$$R = \frac{ds}{d\omega} = \frac{w \frac{\sin \vartheta}{\sin \omega}}{1 - \frac{k-1}{2} (w_{\max}^2 - w^2)} = \frac{q}{h^2} \frac{1}{1 - \frac{k-1}{2} (w_{\max}^2 - w^2)} \quad (164)$$

des Geschwindigkeitsbildes, wobei h und q die in Abb. 58 angegebene Bedeutung haben.

Auf Grund von Gl. (164) läßt sich das Geschwindigkeitsbild aus sich berührenden kurzen Kreisbogen mit beliebiger Genauigkeit konstruieren (Abb. 58):

Der erste Kreisbogen AP ist auf Grund der Anfangsbedingungen $\hat{w}, \hat{\vartheta}, \hat{\omega} = \sigma$ am Stoßkegel durch den Anfangspunkt A , den Normalenwinkel σ und den aus Gl. (164) zu berechnenden Krümmungsradius $\hat{R} = A \hat{M}$ festgelegt; \hat{M} und P müssen oberhalb von A liegen, da ϑ zunimmt und ω abnimmt. Durch die im Endpunkt P des ersten Kreisbogens sich ergebenden Werte w, q und h ist nach Gl. (164) der Krümmungsradius für den in P tangential anzusetzenden zweiten Kreisbogen bestimmt. Das Verfahren läuft analog weiter bis zum Endpunkt B , der durch $\omega = \vartheta$ gekennzeichnet ist, d. h. dessen Normale durch den Nullpunkt O der Geschwindigkeitsebene hindurchgeht.

Aus dem Geschwindigkeitsbild (Abb. 58) ist ϑ als Funktion von ω festgelegt und läßt sich in das Strömungsfeld der Meridianebene (Abb. 54 rechts) übertragen. Dadurch wird die Meridianebene mit einem Richtungsfeld überzogen und die Stromlinien können aus diesem Richtungsfeld durch graphische Integration gefunden werden.

4. Festlegung der Anfangsbedingungen durch den Verdichtungsstoß.

Nachdem im vorangehenden Absatz die stetige Verdichtungsströmung um den Kegel erledigt wurde, müssen wir jetzt noch den Verdichtungsstoß, durch den die Anfangsbedingungen der stetigen Verdichtungsströmung festgelegt werden, näher untersuchen. Wir benutzen hierbei das in § 12 eingeführte Stoßpolarendiagramm.

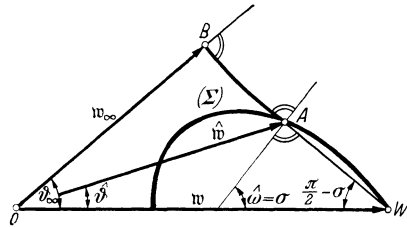


Abb. 59. Ermittlung des umströmten Kegels bei vorgegebenem Stoßkegel.

a) Zunächst nehmen wir den Stoßkegel als gegeben an und suchen hierzu den umströmten Kegel (Abb. 59).

Durch den Geschwindigkeitsvektor $w = OW$ der Grundströmung ist die Stoßpolare (Σ) und durch den vorgegebenen Stoßwinkel $\hat{\omega} = \sigma$ der Anfangspunkt A auf der Stoßpolare festgelegt (vgl. hierzu auch

Abb. 46). Ausgehend von diesem Anfangspunkt A kann dann das Geschwindigkeitsbild gezeichnet werden. Der durch $\omega = \vartheta$ gekennzeichnete Endpunkt B des Geschwindigkeitsbildes liefert den gesuchten umströmten Kegel mit dem halben Öffnungswinkel $\omega = \vartheta = \vartheta_\infty$.

b) Die umgekehrte Aufgabe, zu einem vorgegebenen, mit bekannter Überschallgeschwindigkeit w axial angeströmten Kegel den zugehörigen

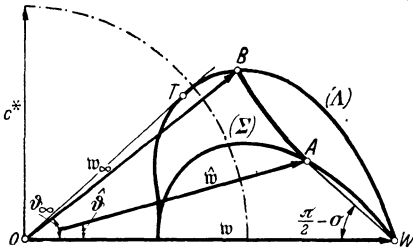


Abb. 60. Ermittlung des Stoßkegels bei vorgegebenem umströmten Kegel.

Stoßkegel zu finden, wird durch Interpolation auf die vorangehende einfachere Aufgabe zurückgeführt (Abb. 60):

Man konstruiert zu mehreren, auf der Stoßpolaren (Σ) beliebig angenommenen Anfangspunkten A die Geschwindigkeitsbilder, deren Endpunkte B eine Kurve (A) erzeugen. Auf (A) wird dann der dem gegebenen

halben Öffnungswinkel ϑ_∞ des zu umströmenden Kegels zugeordnete Punkt B aufgesucht, worauf man rückwärts längs des in B endenden Geschwindigkeitsbildes zu einem bestimmten Anfangspunkt A auf der Stoßpolaren (Σ) gelangt. Durch diesen Punkt A sind der Stoßwinkel σ und die Anfangsbedingungen der stetigen Verdichtungsströmung festgelegt. Neuerdings hat A. BUSEMANN¹ die Kurve (A) näher untersucht.

Wir bezeichnen mit ϑ_k den Winkel der Tangente aus O an die Kurve (A) und mit T den Berührungspunkt. Der Winkel ϑ_k hat für die Umströmung des Kegels die analoge Bedeutung wie der auf S. 71 (vgl. Abb. 48) eingeführte gleichbezeichnete kritische Winkel für die Umströmung des Keils. Für $\vartheta < \vartheta_k$ ergeben sich zwei Schnittpunkte mit der Kurve (A), von denen jedoch nur der auf dem Bogen WT liegende Punkt B physikalische Bedeutung hat. Für $\vartheta > \vartheta_k$ existiert keine Strömung der bisher betrachteten Art; der Stoßkegel rückt stromaufwärts und deformiert sich dabei zu einer nicht mehr konischen Drehfläche, wodurch der konische Charakter auch der stetigen Verdichtungsströmung hinter dem Verdichtungsstoß zerstört wird.

Die Anströmung des Kegels erfolgt voraussetzungsgemäß mit Überschallgeschwindigkeit. Das Geschwindigkeitsbild der stetigen Verdichtungsströmung hinter dem Verdichtungsstoß kann jedoch entweder ganz außerhalb oder ganz innerhalb des (in Abb. 60 strichpunktierten) Kreises $w = c^*$ liegen oder auch von diesem Kreis durchsetzt werden; d. h.: Die Strömung hinter dem Stoßkegel ist eine reine Überschall- oder eine reine Unterschallströmung oder geht von Überschall- zu Unterschallgeschwindigkeit über.

¹ A. BUSEMANN: Lufo 19 (1942), S. 132—144.

IV. Abschnitt.

Nichtlinearisierte Strömung für allgemeine Randbedingungen.

Im vorhergehenden Abschnitt wurden für die nichtlinearisierte Strömung bei besonders einfachen Randbedingungen (Keil und Kegel) strenge analytische Lösungen gefunden. Der vorliegende letzte und umfangreichste Abschnitt des Buches ist der nichtlinearisierten Strömung bei allgemeinen Randbedingungen gewidmet. An Stelle strenger analytischer Lösungen werden wir uns im allgemeinen mit rechnerischen oder zeichnerischen Näherungsverfahren begnügen müssen. Die mathematischen Schwierigkeiten sind bei den Unterschallströmungen (elliptische Potentialgleichung) erheblich größer als bei den Überschallströmungen (hyperbolische Potentialgleichung), für welche die Charakteristikentheorie zu sehr einfachen Näherungsverfahren führt.

Wir beschränken uns im folgenden zunächst auf ebene Strömungen. Lediglich im letzten Teil des Abschnitts ist von räumlichen Strömungen die Rede.

§ 15. Berechnung von Strömungen durch Iteration oder durch Potenzentwicklung des Potentials.

1. Iterationsverfahren nach RAYLEIGH und JANZEN für Unterschallströmungen¹. Die Potentialgleichung (44) der ebenen Strömung wird umgeformt in

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = \frac{1}{c^2} (\varphi_{xx} \varphi_x^2 + \varphi_{yy} \varphi_y^2 + 2 \varphi_{xy} \varphi_x \varphi_y), \quad (165)$$

wobei infolge von Gl. (15*)

$$c^2 = \bar{c}^2 \frac{k-1}{2} (w^2 - \bar{w}^2), \quad w^2 = \varphi_x^2 + \varphi_y^2$$

zu setzen ist und \bar{w} und \bar{c} die Strömungsgeschwindigkeit bzw. Schallgeschwindigkeit der ungestörten Grundströmung bedeutet.

Für die inkompressible Strömung ($c = \infty$) verschwindet die rechte Seite von Gl. (165), wodurch sich Gl. (165) zur LAPLACESchen Differentialgleichung

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0 \quad (166)$$

spezialisiert.

Für „nahezu inkompressible“ Strömungen, d. h. für Unterschallströmungen, bei denen überall die Strömungsgeschwindigkeit klein ist im

¹ JANZEN, O.: Physik. Z. 14 (1913), S. 639. — Lord RAYLEIGH: Philos. Mag. 32 (1916), S. 1 und Scient. Papers 6. S. 402.

Vergleich zur Schallgeschwindigkeit, ist die rechte Seite von Gl. (165) zwar nicht genau Null, jedoch dem Betrage nach klein. Hierauf beruht folgendes von RAYLEIGH und JANZEN entwickelte Iterationsverfahren

a) Die 1. Näherung $\varphi_1(x, y)$ wird auf Grund der vorgegebenen Randbedingungen mit den üblichen Hilfsmitteln der Potential- bzw. Funktionentheorie aus der Potentialgleichung (166) der inkompressiblen Strömung bestimmt.

b) Durch Einsetzen der 1. Näherung $\varphi_1(x, y)$ in die rechte Seite von Gl. (165) ergibt sich eine Funktion $F_1(x, y)$.

c) Die 2. Näherung $\varphi_2(x, y)$ wird auf Grund der vorgegebenen Randbedingungen als Lösung der aus Gl. (165) folgenden Differentialgleichung

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = F_1(x, y)$$

berechnet. Diese Differentialgleichung ist linear und daher einfacher als die nichtlineare strenge Potentialgleichung (165).

Das Verfahren läßt sich im Prinzip in analoger Weise zu beliebiger weiteren Näherungen fortsetzen, wobei die Frage der Konvergenz von Fall zu Fall untersucht werden muß. Der Rechenaufwand ist sehr erheblich und steigert sich bei jeder weiteren Näherung.

RAYLEIGH und JANZEN haben das Verfahren auf die kompressible Umströmung des Kreises angewandt. Es zeigte sich, daß die Iterationen nur solange konvergierten, als an keiner Stelle die kritische Geschwindigkeit erreicht wurde; das Verfahren lieferte also nur die reine Unterschallströmung um den Kreis.

Das Versagen des Verfahrens bei Überschallgeschwindigkeit hat keinen physikalischen, sondern einen rein formal-mathematischen Grund; nämlich die Gleichungen des Iterationsprozesses durchwegs vom elliptischen Typus sind, können sie nicht zur Lösung der hyperbolischen Potentialgleichung der Überschallströmungen führen.

H. J. TAYLOR¹ hat das Iterationsverfahren mechanisiert mit Hilfe der folgenden elektrischen Analogie:

Die Gleichungen des elektrischen Stroms in einer leitenden Schicht von der veränderlichen Dicke h :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= -\sigma q, & \frac{\partial V}{\partial y} &= -\sigma r; \\ \frac{\partial W}{\partial x} &= hr, & \frac{\partial W}{\partial y} &= -hq \end{aligned}$$

(q, r = Komponenten des Stromdichtevektors, σ = spezifischer Widerstand, V = elektrisches Potential, W = elektrische Stromfunktion) wer

¹ TAYLOR, G. J. und C. F. SHARMAN: Proc. Roy. Soc. A 121 (1928), S. 194. — TAYLOR, G. J.: Z. angew. Math. Mech. 10 (1930), S. 334—345 und Voltakongreß S. 198—214.

den den Gl. (44) der kompressiblen Strömung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v;$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\rho}{\rho_0} v, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\rho}{\rho_0} u$$

gegenübergestellt. Die beiden möglichen Zuordnungen

$$\varphi = V, \quad \psi = W; \quad u = -\sigma q, \quad v = -\sigma r; \quad \frac{\rho}{\rho_0} u = -h q, \quad \frac{\rho}{\rho_0} v = -h r$$

bzw.

$$\varphi = W, \quad \psi = -V; \quad u = h r, \quad v = -h q, \quad \frac{\rho}{\rho_0} u = \sigma r, \quad \frac{\rho}{\rho_0} v = -\sigma q$$

liefern dann zwei Analogien, bei denen die Dicke h der leitenden Schicht und die Dichte ρ des strömenden Gases durch

$$h = \frac{\rho}{\rho_0} \sigma \quad \text{bzw.} \quad h = \frac{\rho_0}{\rho} \sigma$$

verknüpft werden müssen.

Mit Hilfe dieser Analogien lassen sich die langwierigen rechnerischen Iterationen durch eine geeignete elektrische Apparatur mechanisieren. Hierbei benutzt man Gl. (165) zweckmäßig in der Umformung

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = -\frac{1}{\rho} (\rho_x \varphi_x + \rho_y \varphi_y) \quad (165^*)$$

mit

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{k-1}{2} \frac{w^2 - \bar{w}^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{k-1}}, \quad c^2 = \bar{c}^2 - \frac{k-1}{2} (w^2 - \bar{w}^2), \quad w^2 = \varphi_x^2 + \varphi_y^2, \quad (167)$$

wobei sich $\bar{\rho}$, \bar{w} und \bar{c} wieder auf die Grundströmung beziehen. Das mechanisierte Iterationsverfahren verläuft dann folgendermaßen:

a) Die 1. Näherung $\varphi_1(x, y)$ ist bei konstanter Schichtdicke h durch die Stromlinien des elektrischen Modells experimentell gegeben und ist identisch mit der 1. Näherung φ_1 bei RAYLEIGH und JANZEN.

b) Zur 1. Näherung φ_1 wird ρ_1 aus Gl. (167) berechnet.

c) Die 2. Näherung $\varphi_2(x, y)$ wird mit der jetzt veränderlichen Schichtdicke $h = \frac{\rho_1(x, y)}{\rho_0} \sigma$ bzw. $h = \frac{\rho_0}{\rho_1(x, y)} \sigma$ wieder experimentell bestimmt. Sie stellt eine Lösung der aus Gl. (165*) durch Einsetzen von $\rho = \rho_1(x, y)$ sich ergebenden linearen Differentialgleichung dar und ist nicht identisch mit der 2. Näherung bei RAYLEIGH und JANZEN, welche sich durch Einsetzen nicht nur von $\rho_1(x, y)$ sondern auch von $\varphi_1(x, y)$ in die rechte Seite von Gl. (165*) ergibt.

Ein wesentlicher Vorteil des experimentellen elektrischen Verfahrens von TAYLOR gegenüber dem rein rechnerischen Verfahren von RAYLEIGH und JANZEN besteht darin, daß der Arbeitsaufwand beim Übergang zu höheren Näherungen nicht zunimmt, sondern stets gleichbleibt.

2. Iterationsverfahren nach PRANDTL. Während im vorhergehenden Absatz von der inkompressiblen Strömung ausgegangen wurde, soll jetzt nach PRANDTL¹ die linearisierte Strömung als 1. Näherung eines Iterationsverfahren benutzt werden, wodurch sich bei erheblich von Null abweichenden MACHSchen Zahlen von vornherein eine bessere Anpassung an die gesuchte strenge Lösung ergibt.

Die ungestörte Grundströmung nehmen wir wieder parallel zur x -Achse an mit der Strömungsgeschwindigkeit $\bar{w} = \bar{u}$, der Schallgeschwindigkeit \bar{c} und der MACHSchen Zahl $\bar{M} = \frac{\bar{u}}{\bar{c}}$. Außerdem setzen wir wie auf S. 23

$$\varphi = \bar{\varphi} + \varphi' = \bar{u}x + \varphi'; \quad u = \bar{u} + u', \quad v = v'$$

und formen unter Berücksichtigung von

$$c^2 = \bar{c}^2 - \frac{k-1}{2} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 - \bar{w}^2) = \bar{c}^2 - \frac{k-1}{2} [(\bar{u} + \varphi'_x)^2 + \varphi_y'^2 - \bar{u}^2]$$

die Potentialgleichung (44) um in

$$(1 - \bar{M}^2) \varphi'_{xx} + \varphi'_{yy} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\varphi'_{rx}}{\bar{c}^2} \left[(k+1) \bar{u} \varphi'_x + \frac{k+1}{2} \varphi_x'^2 + \frac{k-1}{2} \varphi_y'^2 \right] \\ + \frac{\varphi'_{ry}}{\bar{c}^2} \left[(k-1) \bar{u} \varphi'_x + \frac{k-1}{2} \varphi_x'^2 + \frac{k+1}{2} \varphi_y'^2 \right] \\ + 2 \frac{\varphi'_{ry}}{\bar{c}^2} [\bar{u} \varphi'_y + \varphi'_x \varphi'_y] \end{array} \right\} \quad (168)$$

Bei Beschränkung auf kleine Störungen und demgemäß Berücksichtigung nur der Glieder 1. Ordnung in den Ableitungen von φ' ergibt sich aus Gl. (168) die bereits im Abschnitt II erörterte linearisierte Potentialgleichung

$$(1 - \bar{M}^2) \varphi'_{xx} + \varphi'_{yy} = 0. \quad (53)$$

Nimmt man dagegen noch die Glieder zweiter Ordnung hinzu, so erhält man die genauere Gleichung

$$(1 - \bar{M}^2) \varphi'_{xx} + \varphi'_{yy} = \frac{\bar{u}}{\bar{c}^2} [(k+1) \varphi'_x \varphi'_{xx} + (k-1) \varphi'_x \varphi'_{yy} + 2 \varphi'_y \varphi'_{xy}], \quad (169)$$

während bei Berücksichtigung auch der Glieder dritter Ordnung die strenge Differentialgleichung (168) bestehen bleibt.

Die Iteration verläuft nun folgendermaßen:

a) Die 1. Näherung $\varphi'_1(x, y)$ wird aus der linearisierten Differentialgleichung (53) gemäß Abschnitt II ermittelt.

b) Durch Einsetzen der 1. Näherung $\varphi'_1(x, y)$ in die rechte Seite von Gl. (169) ergibt sich eine Funktion $F_1(x, y)$.

c) Die 2. Näherung $\varphi'_2(x, y)$ wird als Lösung der aus Gl. (169) folgender linearen Differentialgleichung

$$(1 - \bar{M}^2) \varphi'_{xx} + \varphi'_{yy} = F_1(x, y)$$

berechnet.

¹ PRANDTL, L.: Voltakongreß, S. 180.

d) Für die weiteren Iterationen muß die strenge Gl. (168) verwendet werden, da die in der rechten Seite von Gl. (169) auftretenden Störungs- glieder bereits von höherer als zweiter Ordnung sind. Durch Einsetzen der 2. Näherung $\varphi'_2(x, y)$ in die rechte Seite von Gl. (168) ergibt sich eine Funktion $F_2(x, y)$ und die 3. Näherung $\varphi_3(x, y)$ erhält man hierauf als Lösung der aus Gl. (168) folgenden linearen Differentialgleichung

$$(1 - \overline{M}^2) \varphi'_{xx} + \varphi'_{yy} = F_2(x, y) :$$

usw. für höhere Näherungen.

Ist φ'_1 von der Größenordnung ε , dann enthält φ'_2 auch Glieder mit ε^2 , die nach d) berechnete 3. Näherung dagegen nicht nur Glieder mit ε^3 , sondern auch Glieder mit höheren Potenzen von ε . Zur Vereinfachung der Rechnung und zur besseren Trennung der Größenordnungen empfiehlt es sich, für die 3. Näherung nur die Glieder bis einschließlich ε^3 zu berücksichtigen und analog bei den höheren Näherungen zu verfahren. Das Verfahren liefert dann bei jeder Iteration genau ein weiteres Glied in der Potenzentwicklung der Lösung nach dem Störungsparameter ε .

In der angegebenen Fassung wurde das Verfahren von H. GÖRTLER¹ entwickelt und auf die Strömung längs einer welligen Wand (linearisierte Näherung vgl. S. 29 und 41 sowie Abb. 15) sowie zwischen zwei welligen Wänden angewandt, wobei sich Konvergenz auch bei Durchgängen durch die kritische Geschwindigkeit einstellte (Abb. 61).



Neuerdings haben W. HANTZSCHE und H. WENDT² ein weiteres von der PRANDTLschen Näherung ausgehendes Verfahren angegeben, bei dem die Stromfunktion nach einem Parameter entwickelt wird, der die Abweichung des Profils vom nichtangestellten Streckenprofil kennzeichnet.

Abb. 61. Nichtlinearisierte Strömung längs welliger Wand (nach H. GÖRTLER).

3. Potenzentwicklung beim Durchgang durch die Schallgeschwindigkeit. Bei der „eindimensionalen Strömung“ durch Düsen (vgl. S. 13) ergab sich der Durchgang durch die Schallgeschwindigkeit im engsten Düsenquerschnitt. Bei der zweidimensionalen strengen Behandlung des Problems tritt nun die Frage auf, längs welcher Kurve in der Nähe des engsten Querschnitts die kritische Geschwindigkeit tatsächlich erreicht wird und der Übergang von der Unterschallströmung zur Überschallströmung erfolgt.

Zur Beantwortung dieser Frage wurde von TH. MEYER³ unter der

¹ GÖRTLER, H.: Z. angew. Math. Mech. 20 (1940), S. 254—262.

² HANTZSCHE, W. und H. WENDT: Z. angew. Math. Mech. 22 (1942), S. 72—86.

³ MEYER, TH.: Diss. Göttingen 1908. Vgl. auch HIRSCH, A. in A. STODOLA: Dampf- und Gasturbinen, VI. Aufl. (1924), S. 805—809.

Annahme einer zur x -Achse symmetrischen Strömung für das Potential φ der Doppelreihenansatz

$$\varphi = a_{10}x + a_{20}x^2 + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + a_{12}xy^2 + a_{40}x^4 + a_{22}x^2y^2 + a_{04}y^4 + a_{50}x^5 + a_{32}x^3y^2 + a_{14}xy^4 + \dots$$

zugrunde gelegt. Aus ihm ergeben sich die Geschwindigkeitskomponenten

$$u = a_{10} + 2a_{20}x + 3a_{30}x^2 + a_{12}y^2 + 4a_{40}x^3 + 2a_{22}xy^2 + 5a_{50}x^4 + 3a_{32}x^2y^2 + a_{14}y^4 + \dots,$$

$$v = 2a_{02}y + 2a_{12}xy + 2a_{22}x^2y + 4a_{04}y^3 + 2a_{32}x^3y + 4a_{14}xy^3 + \dots$$

Setzt man außerdem im Nullpunkt $x = y = 0$ die kritische Geschwindigkeit

$$u = c^*, \quad v = 0$$

und längs der x -Achse eine lineare Zunahme der Geschwindigkeit, also

$$u = c^*(1 + x)$$

voraus, so ist

$$a_{30} = a_{40} = a_{50} = \dots = 0.$$

Bei Abbrechen der Potenzentwicklung für φ nach den Potenzen sechsten Grades bleiben neun freie Koeffizienten übrig, die sich durch Einsetzen in die Potentialgleichung (44) unter Berücksichtigung von

$$c^2 = \frac{k+1}{2} c^{*2} - \frac{k-1}{2} (u^2 + v^2)$$

mittels Koeffizientenvergleich bestimmen lassen. Durch Auswahl zweier zur x -Achse spiegelbildlicher Stromlinien erhält man eine Düsen-

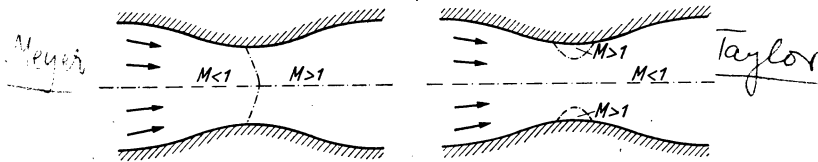


Abb. 62. Durchgänge durch die kritische Geschwindigkeit in einer Lavaldüse (nach H. J. TAYLOR und H. GÖRTLER).

strömung, welche an einer in der Umgebung des engsten Querschnitts von der einen Düsenwand zur anderen verlaufenden Kurve von Unterschall- in Überschallgeschwindigkeit übergeht (Abb. 62 links).

In ähnlicher Weise untersuchte H. J. TAYLOR¹ Düsenströmungen mit Symmetrie zur x - und zur y -Achse. Hierbei herrscht längs der Düsenachse durchwegs Unterschallgeschwindigkeit, während an den Düsenwänden zwei Überschallbereiche auftreten (Abb. 62 rechts). H. GÖRTLER² hat die Möglichkeit eines analytischen Übergangs von den zur y -Achse symmetrischen TAYLORSchen zu den unsymmetrischen MEYERSchen Lösungen diskutiert.

¹ TAYLOR, G. J.: Aeronaut. Research Comm. Rep. and Mem. Nr. 1381. London 1930.

² GÖRTLER, H.: Z. angew. Math. Mech. 19 (1939), S. 325—337.

§ 16. Potential und Stromfunktion in der Geschwindigkeitsebene.

1. Übergang von der Strömungsebene zur Geschwindigkeitsebene. Im Abschnitt II wurde die Potentialgleichung der kompressiblen Strömung durch Vernachlässigung gewisser Glieder linearisiert; die sich ergebende lineare Differentialgleichung war demgemäß nur näherungsweise gültig und zwar für Strömungen, die von der Parallelströmung nur wenig abwichen.

Bei Beschränkung auf die ebene Strömung werden wir jetzt eine andere Möglichkeit der Linearisierung kennen lernen. Sie beruht nicht auf irgendwelchen Vernachlässigungen, sondern auf Transformationen des Potentials und der Stromfunktion von den Ortskoordinaten x, y (Strömungsebene) auf die Geschwindigkeitskoordinaten u, v bzw. w, ϑ (Geschwindigkeitsebene); die sich hier ergebenden linearen Differentialgleichungen sind streng gültig auch für beliebig stark von der Parallelströmung abweichende Strömungen.

Es gibt zwei Transformationen¹, welche die geforderte Linearisierung leisten:

a) die MOLENBROEK-Transformation, bei der als Funktionen der Geschwindigkeitskoordinaten Potential und Stromfunktion selbst benutzt werden,

b) die LEGENDRE-Transformation, bei der in der Geschwindigkeitsebene an Stelle von Potential und Stromfunktion „konjugierte“ Potential- und Stromfunktionen treten.

Auf beiden Transformationen lassen sich Verfahren zur Ermittlung kompressibler Strömungen begründen (§§ 17, 18). Da eine analoge Linearisierung für räumliche Strömungen nicht möglich ist, gelten diese Verfahren nur für die Ebene.

2. Linearisierung mittels MOLENBROEK-Transformation. Wie auf S. 58 einzelne Kurven der Strömungsebene in die Geschwindigkeitsebene abgebildet wurden, führen wir jetzt für den ganzen betrachteten zweidimensionalen ebenen Strömungsbereich das „Geschwindigkeitsbild“ ein (Abb. 63): Jedem Punkt P des in Frage stehenden Bereichs der Strömungsebene wird der Endpunkt P' des vom Nullpunkt O der Geschwindigkeitsebene aufgetragenen Geschwindigkeitsvektors \mathfrak{w} zugeordnet.

¹ MOLENBROEK, P.: Arch. Math. Phys., Grunert Hoppo, Reihe 2, Bd. 9 (1890), S. 157. — TSCHAPLIGIN, A.: Wiss. Ann. Univ. Moskau, Math. Phys. 21 (1904), S. 1—121. — RIABOUCHINSKI, D.: C. r. Sci., Paris 194 (1932), S. 1215. — DEMTSCHENKO, B.: Ebenda 194 (1932), S. 1218 und 1720 sowie Publ. Math. Univ. Belgrade 2 (1933), S. 85. — STEICHEN, A.: Diss. Göttingen 1909.

Wir setzen hier und im folgenden stets voraus, daß die punktweise Zuordnung zwischen Strömungsfeld und Geschwindigkeitsbild umkehrbar eindeutig ist, daß also sowohl jedem Punkt P ein bestimmter Punkt P' als auch jedem Punkt P' ein und nur ein Punkt P entspricht. Dann

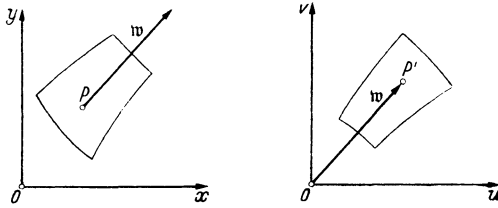


Abb. 63. Strömungsfeld und Geschwindigkeitsbild.

bildet sich jede Kurve der Strömungsebene wieder in eine Kurve und jedes zwei-dimensionale Flächenstück wieder in ein Flächenstück ab. Ausnahmefälle, bei denen das zweidimensionale Geschwindigkeitsbild

in eine Kurve bzw. einen Punkt entartet, wie bei der Strömung um eine konvexe Ecke (vgl. S. 58) bzw. der ungestörten Parallelströmung, bleiben von der Betrachtung ausgeschlossen.

Aus den Definitionsgleichungen (45) des Potentials φ und der Stromfunktion ψ einer ebenen Strömung folgt

$$d\varphi = u dx + v dy, \quad d\psi = \frac{Q}{Q_0} (-v dx + u dy)$$

und durch Auflösen nach dx, dy :

$$\left. \begin{aligned} dx &= \frac{1}{u^2 + v^2} \left(u d\varphi - \frac{Q_0}{Q} v d\psi \right) = \frac{1}{w} \left(\cos \vartheta d\varphi - \frac{Q_0}{Q} \sin \vartheta d\psi \right), \\ dy &= \frac{1}{u^2 + v^2} \left(v d\varphi + \frac{Q_0}{Q} u d\psi \right) = \frac{1}{w} \left(\sin \vartheta d\varphi + \frac{Q_0}{Q} \cos \vartheta d\psi \right). \end{aligned} \right\} (170)$$

Infolge der vorausgesetzten umkehrbar eindeutigen Zuordnung von P und P' kann man x, y und φ, ψ als Funktionen der Geschwindigkeitskoordinaten w, ϑ auffassen. Durch Einsetzen von

$$\begin{aligned} dx &= x_w dw + x_\vartheta d\vartheta, & dy &= y_w dw + y_\vartheta d\vartheta, \\ d\varphi &= \varphi_w dw + \varphi_\vartheta d\vartheta, & d\psi &= \psi_w dw + \psi_\vartheta d\vartheta \end{aligned}$$

in Gl. (170) und Gleichsetzen der Koeffizienten von dw bzw. $d\vartheta$ auf beiden Seiten der Gleichungen ergibt sich dann

$$\left. \begin{aligned} x_w &= \frac{1}{w} \left(\cos \vartheta \varphi_w - \frac{Q_0}{Q} \sin \vartheta \psi_w \right), & x_\vartheta &= \frac{1}{w} \left(\cos \vartheta \varphi_\vartheta - \frac{Q_0}{Q} \sin \vartheta \psi_\vartheta \right), \\ y_w &= \frac{1}{w} \left(\sin \vartheta \varphi_w + \frac{Q_0}{Q} \cos \vartheta \psi_w \right), & y_\vartheta &= \frac{1}{w} \left(\sin \vartheta \varphi_\vartheta + \frac{Q_0}{Q} \cos \vartheta \psi_\vartheta \right). \end{aligned} \right\} (171)$$

Die Integrierbarkeitsbedingungen von Gl. (171)

$$x_{w\vartheta} = x_{\vartheta w}, \quad y_{w\vartheta} = y_{\vartheta w}$$

liefern mit Berücksichtigung der aus der BERNOULLISCHEN Gl. (4*) folgenden Beziehung

$$\frac{d}{dw} \left(\frac{Q_0}{Q} \right) = - \frac{Q_0}{Q^2} \frac{dQ}{dp} \frac{dp}{dw} = \frac{Q_0}{Q^2} \frac{1}{c^2} w Q = \frac{Q_0}{Q} \frac{w}{c^2} \quad (172)$$

für φ und ψ nach einfacher Rechnung

$$\varphi_w = \frac{q_0}{c} \left(1 - \frac{w^2}{c^2} \right) \frac{\psi_v}{w}, \quad \varphi_v = \frac{q_0}{c} w \psi_w. \quad (173)$$

Aus den Integrierbarkeitsbedingungen von Gl. (173)

$$\varphi_{w\delta} = \varphi_{\delta w}, \quad \psi_{w\delta} = \psi_{\delta w}$$

folgt schließlich bei abermaliger Berücksichtigung von Gl. (172) einerseits nach Elimination von ψ die Potentialgleichung

$$\left(1 - \frac{w^2}{c^2} \right) w^2 \varphi_{ww} + w \left(1 + \frac{w^4}{c^4} \right) \varphi_w + \left(1 - \frac{w^2}{c^2} \right)^2 \varphi_{\delta\delta} = 0 \quad (174)$$

und andererseits nach Elimination von φ die Stromfunktionsgleichung von TSCHAPLIGIN¹

$$w^2 \psi_{ww} + w \left(1 + \frac{w^2}{c^2} \right) \psi_w + \left(1 - \frac{w^2}{c^2} \right) \psi_{\delta\delta} = 0. \quad (175)$$

Wie bereits S. 93 angekündigt war, sind die transformierte Potentialgleichung (174) und die transformierte Stromfunktionsgleichung (175) lineare Differentialgleichungen im Gegensatz zu den entsprechenden nichtlinearen Differentialgleichungen (44) und (47) in den Ortskoordinaten x, y ; die Schallgeschwindigkeit c ist in Gl. (174) und (175) eine Funktion von w , während c in Gl. (44) und (47) als Funktion von $\varphi_x^2 + \varphi_y^2$ bzw. von $\psi_x^2 + \psi_y^2$ aufzufassen war.

3. Linearisierung mittels Legendre-Transformation. Eine zweite Möglichkeit der Linearisierung bietet die in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen grundlegende, nach LEGENDRE benannte Berührungstransformation

$$u = \varphi_x, \quad v = \varphi_y, \quad \Phi = x\varphi_x + y\varphi_y - \varphi, \quad (176)$$

durch die an Stelle des Potentials φ in Abhängigkeit von den Ortskoordinaten x, y das „konjugierte Potential“ Φ als Funktion der Geschwindigkeitskoordinaten u, v eingeführt wird. Wir verzichten auf ein tieferes Eindringen in die mathematischen Zusammenhänge und beschränken uns auf die formale Anwendung der LEGENDRE-Transformation:

Unter Berücksichtigung von Gl. (45) folgt aus Gl. (176)

$$d\Phi = u dx + v dy - d\varphi + x du + y dv = x du + y dv,$$

woraus sich die mit Gl. (176) gleichwertigen Beziehungen

$$x = \Phi_u, \quad y = \Phi_v, \quad \varphi = u\Phi_u + v\Phi_v - \Phi \quad (176^*)$$

ergeben. Aus Gl. (176*) erhält man dann weiter

$$dx = \Phi_{uu} du + \Phi_{uv} dv, \quad dy = \Phi_{uv} du + \Phi_{vv} dv$$

¹ TSCHAPLIGIN, C. A.: Wiss. Ann. Univ. Moskau. Math. Phys. 21 (1904), S. 1—121.

und durch Auflösung nach du, dv

$$du = \frac{1}{N} (\Phi_{vv} dx - \Phi_{uv} dy), \quad dv = \frac{1}{N} (-\Phi_{uv} dx + \Phi_{uu} dy) \quad (177)$$

mit der Abkürzung

$$N = \Phi_{uu} \Phi_{vv} - \Phi_{uv}^2.$$

Der Vergleich von Gl. (177) mit den aus Gl. (176) folgenden Differentialen

$$du = \varphi_{xx} dx + \varphi_{xy} dy, \quad dv = \varphi_{xy} dx + \varphi_{yy} dy$$

liefert für die zweiten Ableitungen von φ und Φ die Beziehungen

$$\varphi_{xx} = \frac{1}{N} \Phi_{vv}, \quad \varphi_{yy} = \frac{1}{N} \Phi_{uu}, \quad \varphi_{xy} = -\frac{1}{N} \Phi_{uv}. \quad (178)$$

Mit Hilfe von Gl. (176) und (178) geht die Potentialgleichung (44) in die lineare Differentialgleichung

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \Phi_{uu} + \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \Phi_{vv} + \frac{2uv}{c^2} \Phi_{uv} = 0 \quad (179)$$

über, die in Polarkoordinaten w, ϑ die Form

$$w^2 \Phi_{ww} + w \left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right) \Phi_w + \left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right) \Phi_{\vartheta\vartheta} = 0 \quad (179^*)$$

annimmt.

In analoger Weise läßt sich die Stromfunktionsgleichung (47) durch die LEGENDRE-Transformation

$$q = \psi_y, \quad r = -\psi_x, \quad \Psi = x\psi_x + y\psi_y - \psi \quad (180)$$

bzw.

$$x = -\Psi_r, \quad y = \Psi_q, \quad \psi = q\Psi_q + r\Psi_r - \Psi \quad (180^*)$$

in die lineare Differentialgleichung

$$\left(1 - \frac{\varrho_0^2}{\varrho^2 c^2} q^2\right) \Psi_{qq} + \left(1 - \frac{\varrho_0^2}{\varrho^2 c^2} r^2\right) \Psi_{rr} - 2 \frac{\varrho_0^2}{\varrho^2 c^2} qr \Psi_{qr} = 0 \quad (181)$$

verwandeln, wobei $\frac{\varrho_0}{\varrho c}$ eine Funktion von $q^2 + r^2$ ist (vgl. S. 21).

Die Veränderlichen q, r sind die Komponenten des Stromdichtevektors $\frac{\varrho}{\varrho_0} w$, d. h. die LEGENDRE-Transformation Gl. (180) führt von der Strömungsebene nicht zur Geschwindigkeitsebene, sondern zur Stromdichteebene. Nachteilig ist hierbei, daß nach Gl. (23) sowohl im Unter- wie im Überschallbereich das Intervall $0 \leq \varrho w < \varrho^* w^*$ durchlaufen wird (vgl. Abb. 2).

4. MACHSches Kurvennetz; Grenzlinien der adiabatischen Strömung

Wir betrachten den Überschallbereich einer vorgegebenen ebenen Strömung in der x, y -Ebene und den zugeordneten Bildbereich in der u, v -Ebene. In jedem Punkt P des x, y -Bereichs sind zwei MACHSche Richtungen bestimmt, die mit dem dortigen Geschwindigkeitsvektor w den MACHSchen Winkel $\alpha = \arcsin \frac{c}{w} < \frac{\pi}{2}$ einschließen. Die Integralkurve

dieses den x, y -Bereich doppelt überdeckenden Richtungsfeldes heißen MACHSche Kurven, das von den beiden MACHSchen Kurvenscharen erzeugte Kurvennetz soll kurz als MACHSches Netz bezeichnet werden. Im u, v -Geschwindigkeitsbild entsprechen den MACHSchen Richtungen und Kurven und dem MACHSchen Netz die sog. Hauptrichtungen und Hauptkurven und das sog. Hauptnetz.

In ähnlicher Weise hatten wir bereits in der linearisierten Näherungstheorie des Abschnitts II MACHSche Richtungen und Linien und ein MACHSches Netz (vgl. S. 35) eingeführt; dabei wurde aber an Stelle des von Punkt zu Punkt veränderlichen örtlichen Geschwindigkeitsvektors w der konstante Vektor \bar{w} der Grundströmung benutzt, so daß man in der ganzen x, y -Ebene dieselben MACHSchen Richtungen hatte und demgemäß als MACHSches Netz ein geradliniges Parallelogrammnetz erhielt. In der hier zu erörternden strengen Theorie dagegen wird das MACHSche Netz von zwei beliebigen Kurvenscharen erzeugt und es entsteht die Frage nach den Begrenzungslinien des krummlinigen MACHSchen Kurvennetzes.

Als Begrenzungslinien können auftreten:

a) die Durchgangslinie durch die kritische Geschwindigkeit, d. h. die Trennungslinie des Unter- und Überschallbereichs (Abb. 64);

b) etwaige Hüllkurven der beiden MACHSchen Kurvenscharen, die wir kurz als Grenzlinien der adiabatischen Strömung bezeichnen wollen (Abb. 65).

An der Durchgangslinie durch die kritische Geschwindigkeit ist $\alpha = \frac{\pi}{2}$; die beiden MACHSchen Richtungen fallen daher zusammen und die MACHSchen Kurven haben Rückkehrpunkte, während die Stromlinien die Durchgangslinie ohne Singularität senkrecht zu den Rückkehrtangenten der MACHSchen Kurven durchsetzen.

An den Grenzlinien, auf deren Auftreten erstmals W. TOLLMIE¹

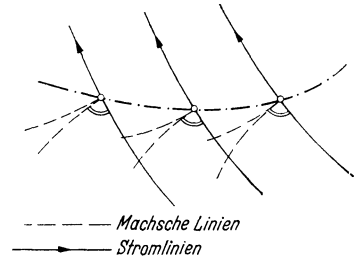


Abb. 64. Durchgangslinie durch die kritische Geschwindigkeit.

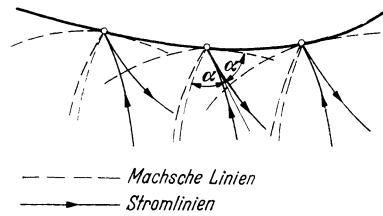


Abb. 65. Grenzlinie der adiabatischen Strömung.

¹ TOLLMIE, W.: Z. angew. Math. Mech. 17 (1937), S. 117—136 und 21 (1941), S. 140—152 u. S. 308. Vgl. außerdem RINGLEB, F.: Z. angew. Math. Mech. 20 (1940), S. 185—198 und Deutsche Mathematik 5 (1940), S. 377—384 sowie GURBERLEY, G.: Zeitschr. angew. Math. Mech. 22 (1942), S. 121—126.

hingewiesen und für die er neuerdings eine strenge Theorie entwickelt hat geht die adiabatische Strömung von einem Blatt der nach Art eine RIEMANNschen Fläche mehrfach überdeckten Strömungsebene zu einer anderen Blatt über. Die eine MACHsche Kurvenschar berührt definitions gemäß die Grenzlinie, während die andere MACHsche Kurvenschar und die Stromlinien nicht berühren, sondern mit Rückkehrpunkten auf da andere Blatt übergehen. Natürlich ist diese „analytische Fortsetzung“ der Strömung durch Umflanschen an der Grenzlinie auf ein anderes Blatt physikalisch nicht realisierbar. Die physikalische Bedeutung der Grenzlinien und die Fortsetzbarkeit einer Strömung über die Grenzlinien hinaus hat G. GUDERLEY¹ untersucht. Ein Beispiel für das Auftreten einer Grenzlinie haben wir bereits bei der Quellströmung (vgl. S. 15 kennengelernt; die Grenzlinie war dort der Grenzkreis $r=r_{\min}$ des Querkerns und fiel mit der Durchgangslinie durch die kritische Geschwindigkeit zusammen.

Mit Hilfe der MOLENBROEK-Transformation (vgl. S. 94) kommt man nach F. RINGLEB² zu einer einfachen analytischen Darstellung des MACHschen Netzes bzw. Hauptnetzes und der Grenzlinien der adiabatischen Strömung:

Es sei $y=y(x)$ eine MACHsche Kurve oder Grenzlinie und ds das Linienelement dieser Kurve. Dann ist $(dy \cos \vartheta - dx \sin \vartheta)$ die Projektion des Linienelements ds auf die zum Geschwindigkeitsvektor senkrechte Richtung und nach Definition des MACHschen Winkels (vgl. Abb. 16) hat man

$$\frac{c}{w} = \sin \alpha = \pm \frac{dy \cos \vartheta - dx \sin \vartheta}{ds}$$

oder umgeformt

$$\frac{c^2}{w^2} (dx^2 + dy^2) = (dy \cos \vartheta - dx \sin \vartheta)^2.$$

Nach Einsetzen von Gl. (170) ergibt sich

$$\frac{c^2}{w^2} d\varphi^2 - \left(1 - \frac{c^2}{w^2}\right) \frac{\varrho_0^2}{\varrho^2} d\psi^2 = 0$$

oder

$$\left[\frac{c^2}{w^2} \varphi_w^2 - \left(1 - \frac{c^2}{w^2}\right) \frac{\varrho_0^2}{\varrho^2} \psi_w^2 \right] dw^2 + \left[\frac{c^2}{w^2} \varphi_\vartheta^2 - \left(1 - \frac{c^2}{w^2}\right) \frac{\varrho_0^2}{\varrho^2} \psi_\vartheta^2 \right] d\vartheta^2 + 2 \left[\frac{c^2}{w^2} \varphi_w \varphi_\vartheta - \left(1 - \frac{c^2}{w^2}\right) \frac{\varrho_0^2}{\varrho^2} \psi_w \psi_\vartheta \right] dw d\vartheta = 0.$$

Mit Berücksichtigung der Integrierbarkeitsbedingungen Gl. (173) folgt hieraus nach kurzer Rechnung

$$\left[\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{w^2} \right) dw^2 - d\vartheta^2 \right] \left[\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{w^2} \right) \varphi_\vartheta^2 - \varphi_w^2 \right] = 0.$$

¹ GUDERLEY, G.: Z. angew. Math. Mech. 22 (1942), S. 121—126.

² RINGLEB, F.: Z. angew. Math. Mech. 20 (1940), S. 185—198 und Dtsch. Math. 5 (1940), S. 377—384.

Das Nullsetzen des ersten Faktors liefert die Differentialgleichung für die beiden Kurvenscharen des Hauptnetzes

$$d\vartheta = \pm \frac{1}{w} \sqrt{\frac{w^2}{c^2} - 1} dw \quad (182)$$

und durch Rückgang zur x, y -Ebene die Differentialgleichungen des MACHSchen Netzes, während man durch Nullsetzen des zweiten Faktors die Grenzlinien bzw. deren Geschwindigkeitsbild erhält:

$$\varphi_w = \pm \frac{1}{w} \sqrt{\frac{w^2}{c^2} - 1} \varphi_\vartheta. \quad (183)$$

Gl. (182) ist naturgemäß identisch mit der auf S. 56 gefundenen Beziehung Gl. (119*) und hat daher bei vollkommenen Gasen Epizykloiden als Integralkurven (vgl. S. 60 und 112).

Man kann die Grenzlinien auch als den geometrischen Ort der Punkte des Überschallbereichs des Strömungsfeldes mit unendlich großer Beschleunigung der strömenden Gasteilchen definieren:

Aus Gl. (170) ergibt sich mit $\psi = \text{const}$, also $d\psi = 0$ für ein Linienelement $d\sigma$ einer Stromlinie

$$d\sigma = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{1}{w} d\varphi = \frac{1}{w} (\varphi_w dw + \varphi_\vartheta d\vartheta).$$

Da längs einer Stromlinie w und ϑ durch

$$d\psi = \psi_w dw + \psi_\vartheta d\vartheta = 0$$

verknüpft sind, läßt sich $d\sigma$ umformen in

$$d\sigma = \frac{\varphi_w \psi_\vartheta - \varphi_\vartheta \psi_w}{w \varphi_\vartheta} dw,$$

woraus mit Hilfe von Gl. (173) nach kurzer Rechnung

$$d\sigma = \frac{1}{w \varphi_w} \left[\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{w^2} \right) \varphi_\vartheta^2 - \varphi_w^2 \right] dw$$

folgt. Die Tangentialbeschleunigung

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{d\sigma} w = \left[\frac{w^2 \varphi_w}{\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{w^2} \right) \varphi_\vartheta^2 - \varphi_w^2} \right]$$

wird daher in der Tat unendlich groß für alle Punkte der Grenzlinien Gl. (183), wobei $\varphi_w = \varphi_\vartheta = 0$ wegen der geforderten punktweise umkehrbar eindeutigen Zuordnung zwischen Strömungsfeld und Geschwindigkeitsbild (vgl. S. 94) ausgeschlossen bleibt.

5. Geometrische Konstruktion neuer Strömungsfelder durch Linearverbindung. Wegen der Linearität der transformierten Potentialgleichung (174) bzw. (179*) ergeben sich aus den Potentialfunktionen zweier gegebener Strömungen durch die Linearverbindung

$$\varphi = \lambda_1 \varphi_1(w, \vartheta) + \lambda_2 \varphi_2(w, \vartheta) \quad \text{bzw.} \quad \Phi = \lambda_1 \Phi_1(w, \vartheta) + \lambda_2 \Phi_2(w, \vartheta)$$

mit den beliebigen Konstanten λ_1, λ_2 einfach unendlich viele neue Potentialfunktionen (Parameter $\lambda_1:\lambda_2$). Dieselbe Linearverbindung gilt nach Gl. (171) bzw. (176*) auch für die Ortskoordinaten, also

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \quad y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2. \quad (184)$$

Dies liefert folgende einfache geometrische Konstruktion¹ (Abb. 66):

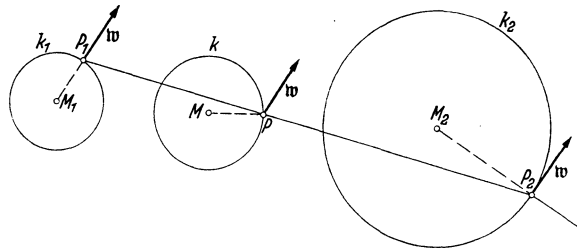


Abb. 66. Linearverbindung von Strömungsfeldern.

Vorgegeben seien zwei Strömungsfelder, deren Punkte P_1, P_2 sich umkehrbar eindeutig durch gleiche Geschwindigkeitsvektoren $w_1 = w_2$ entsprechen. Die Verbindungsstrecken $P_1 P_2$ werden in einem beliebigen, aber konstanten Teilverhältnis $\lambda_1:\lambda_2$ innen oder außen geteilt. Ordnet man dann jedem Teilpunkt P den Geschwindigkeitsvektor $w = w_1 = w_2$ der Ausgangspunkte P_1, P_2 zu, so bestimmen diese Vektoren eine neue kompressible Strömung.

Alle auf diese Weise miteinander „linearverbundenen“ Strömungsfelder haben dasselbe Geschwindigkeitsbild. Es entsprechen sich daher die Unterschallbereiche, die Überschallbereiche und die Durchgangslinien durch die kritische Geschwindigkeit. Dagegen werden die Grenzlinien im allgemeinen nicht ineinander übergeführt, sondern der Grenzlinie, an der zwei Blätter eines Strömungsfeldes zusammenhängen, ist in den linearverbundenen Strömungsfeldern im allgemeinen eine schlichte, d. h. im Innern eines Blattes verlaufende Kurve zugeordnet.

Beispiel: Wirbelquelle.

Zur Verdeutlichung betrachten wir die Linearverbindung einer Quellströmung und Wirbelströmung (vgl. S. 15). Jedem Kreis k_1 der Quellströmung entspricht ein Kreis k_2 der Wirbelströmung mit demselben $w = \text{const}$, wobei die Punkte P_1, P_2 mit gleichen Geschwindigkeitsvektoren w_1, w_2 jeweils zu senkrechten Kreisradien $M_1 P_1, M_2 P_2$ gehören (vgl. Abb. 66). Die Teilpunkte P liegen wieder auf einem Kreis k und die dem Betrage nach konstanten Geschwindigkeitsvektoren w der Punkte P sind gegen den Kreis k unter einem konstanten Winkel geneigt. Die so erzeugte neue Strömung soll kurz Wirbelquelle bzw. Wirbelsenke heißen.

¹ SAUER, R.: Z. angew. Math. Mech. 21 (1941) S. 313—315.

Bei der reinen Quelle erstreckt sich der Überschallbereich vom Durchgangskreis durch die kritische Geschwindigkeit bis ins Unendliche. Der Durchgangskreis ist zugleich Grenzlinie, d. h. Berührlinie des MACHSchen Netzes, und die Strömung flanscht an ihm auf ein zweites Blatt über, welches von der Unterschallströmung bis ins Unendliche ausgefüllt wird.

Beim reinen Wirbel ist der Überschallbereich ringförmig und wird außen von der Durchgangslinie durch die kritische Geschwindigkeit und innen von der Grenzlinie abgeschlossen. Da die Strömung an der Grenzlinie die Maximalgeschwindigkeit ($M = \infty$) erreicht, ist der ganze Überschallbereich beim Erreichen der Grenzlinie erschöpft. Der Unterschallbereich geht von der Durchgangslinie durch die kritische Geschwindigkeit bis ins Unendliche.

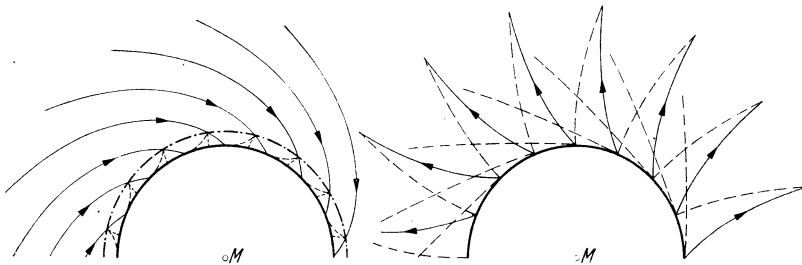


Abb. 67. Wirbelquelle.

Bei der Wirbelquelle (Abb. 67) hat man im Ausgangsblatt wiederum einen ringförmigen Überschallbereich, an den sich außen der bis ins Unendliche reichende Unterschallbereich anschließt. Die Geschwindigkeit an der Grenzlinie ist kleiner als die Maximalgeschwindigkeit; die Strömung flanscht daher auf ein zweites Blatt der Strömungsebene über, wo sie die Maximalgeschwindigkeit erst im Unendlichen erreicht.

Weitere einfache Beispiele kann man mit der von W. TOLLMEN¹ gefundenen „Spiralströmung“ bilden. Bei dieser Strömung existiert ein System konzentrischer und kongruenter logarithmischer Spiralen, für welche jeweils sowohl die Größe der Geschwindigkeit als auch der Winkel gegen den Geschwindigkeitsvektor konstant ist. Eine der logarithmischen Spiralen ist Grenzlinie, eine andere ist Durchgangslinie durch die kritische Geschwindigkeit.

§ 17. Anwendungen der Molenbroek-Transformation auf die Berechnung ebener Strömungen.

1. Unterschallströmungen bei geradlinig approximierter Adiabate. An Stelle der strengen Behandlung des Problems tritt hier eine Näherung,

¹ TOLLMEN, W.: Z. angew. Math. Mech. 17 (1937) S. 117—136. — SAUER, R.: Z. angew. Math. Mech. 21 (1941), S. 313—315.

indem nach C. A. TSCHAPLIGIN¹ und TSIEN² die Adiabate in der $\frac{1}{\varrho}$, p -Ebene durch ihre Tangente in dem der Grundströmung entsprechenden Punkt \bar{A} ersetzt wird (Abb. 68). Diese Annahme kann als nächst einfachste Verbesserung der Voraussetzung $\varrho = \text{const}$ der inkompressiblen Strömung gelten und ermöglicht, wie sich im folgenden zeigen wird, die Zurückführung des Problems auf die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen der inkompressiblen Strömung, wodurch die Hilfsmittel der Funktionentheorie zugänglich werden.

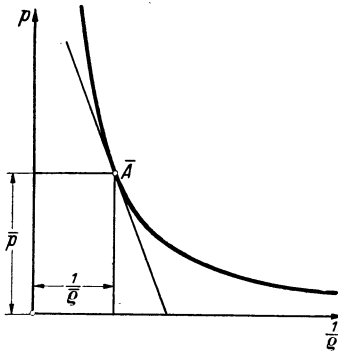


Abb. 68. Ersatz der Adiabate durch eine Tangente.

Wir beziehen \bar{p} , $\bar{\varrho}$ und \bar{c} wieder auf die Grundströmung und haben dann für die Neigung der Adiabate in \bar{A}

$$\left[\frac{dp}{d(1/\varrho)} \right]_{\bar{A}} = -\bar{\varrho}^2 \left[\frac{d\bar{p}}{d\bar{\varrho}} \right]_{\bar{A}} = -\bar{\varrho}^2 \bar{c}^2.$$

Hieraus folgt als Gleichung der Tangente

$$p - \bar{p} = \bar{c}^2 \bar{\varrho}^2 \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\bar{\varrho}} \right); \quad (185)$$

sie wird der weiteren Betrachtung als Adiabatengleichung an Stelle von Gl. (5) bzw. (8) zugrunde gelegt.

Die Adiabatengleichung (185) liefert für die Schallgeschwindigkeit

$$c^2 = \frac{dp}{d\varrho} = \bar{c}^2 \left(\frac{\bar{\varrho}}{\varrho} \right)^2$$

oder

$$c^2 \varrho^2 = \bar{c}^2 \bar{\varrho}^2 = \text{const}, \quad (186)$$

während aus der BERNOULLISchen Gl. (4**)

$$w^2 - \bar{w}^2 = \bar{c}^2 \bar{\varrho}^2 \left(\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{\bar{\varrho}^2} \right) \quad (187)$$

und demgemäß

$$c^2 = w^2 + (\bar{c}^2 - \bar{w}^2), \quad \left(\frac{\varrho}{\bar{\varrho}} \right)^2 = 1 - \frac{w^2 - \bar{w}^2}{\bar{c}^2}, \quad \left(\frac{\bar{\varrho}}{\varrho} \right)^2 = 1 + \frac{w^2 - \bar{w}^2}{\bar{c}^2} \quad (188)$$

folgt.

Da wir in § 18 für Überschallströmungen ein einfacheres Verfahren kennen lernen werden, beschränken wir uns hier auf die Annahme $w < \bar{c}$, d. h. die Grundströmung soll eine Unterschallströmung sein. Unter dieser

¹ TSCHAPLIGIN, C. A.: Wiss. Ann. Univ. Moskau. Math. Phys. 21 (1904), S. 1—121.

² TSIEN, SHUE-SHEN: J. Aeron. Sciences 6 (1939), S. 399—407. — Vgl. auch BUSEMANN, A.: Z. angew. Math. Mech. 17 (1937), S. 73—79.

Voraussetzung lassen sich Gl. (187) und (188) umformen in

$$w^2 = c_0^2 \varrho_0^2 \left(\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{\varrho_0^2} \right), \tag{187*}$$

$$c^2 = w^2 + c_0^2, \quad \left(\frac{\varrho}{\varrho_0} \right)^2 = 1 - \frac{w^2}{c^2}, \quad \left(\frac{\varrho_0}{\varrho} \right)^2 = 1 + \frac{w^2}{c_0^2}, \tag{188*}$$

wobei sich ϱ_0 und c_0 auf den der geradlinigen Adiabate Gl. (185) entsprechenden Ruhezustand beziehen.

Durch Gl. (188*) ist ein völlig anderes Verhalten als bei der wirklichen Adiabate Gl. (8) der vollkommenen Gase gegeben. Im Gegensatz zu Gl. (15*) wächst die Schallgeschwindigkeit vom Ruhewert c_0 an mit zunehmender Strömungsgeschwindigkeit w und erreicht den Zustand der „kritischen Geschwindigkeit“ erst mit $w = c = \infty$; die Forderung $w > c$ führt auf ein imaginäres $\frac{\varrho}{\varrho_0}$. Infolgedessen gibt es nur Unterschallgeschwindigkeiten und zwar, wie aus Gl. (185) und (187) mit $p=0$ folgt, nicht bis zur „kritischen Geschwindigkeit“ $w = \infty$, sondern lediglich bis zur Maximalgeschwindigkeit

$$w_{\max} = \bar{c} \sqrt{\left(\frac{\bar{p}}{c^2 \varrho} + 1 \right)^2 - \left(1 - \frac{\bar{w}^2}{c^2} \right)}.$$

Wir gehen nun zur Herleitung des Näherungsverfahrens über, das auf dem Ersatz der wirklichen Adiabate Gl. (8) durch die Tangente Gl. (185) beruht:

Mit Berücksichtigung von Gl. (188*) spezialisiert sich Gl. (173) zu

$$\varphi_w = - \sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}} \frac{\psi_\vartheta}{w}, \quad \varphi_\vartheta = \frac{w}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} \psi_w$$

und vereinfacht sich durch die Substitution

$$d\omega = \sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}} \frac{dw}{w} \tag{189}$$

für die Geschwindigkeit zu den CAUCHY-RIEMANNSchen Differentialgleichungen

$$\varphi_\omega = - \psi_\vartheta, \quad \varphi_\vartheta = \psi_\omega.$$

Infolgedessen ist $\varphi + i\psi$ eine analytische Funktion von $\omega - i\vartheta$ bzw. von $e^{\omega - i\vartheta}$.

Setzt man also (Abb. 69)

$$\Omega = U + iV = c_0 e^{\omega + i\vartheta} = W e^{i\vartheta}, \quad W = c_0 e^\omega = \sqrt{U^2 + V^2},$$

so hat man

$$\begin{aligned} \varphi + i\psi &= F(U - iV) = F(\bar{\Omega}), \\ \varphi - i\psi &= \bar{F}(U + iV) = \bar{F}(\Omega); \end{aligned}$$

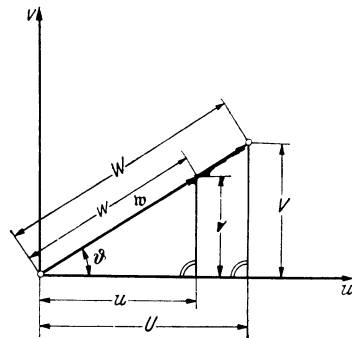


Abb. 69. Erläuterung der Bezeichnungen.

hierbei bedeutet das Ringelzeichen jeweils den konjugiert komplexen Ausdruck und für W folgt aus Gl. (188*) und (189) die Beziehung

$$W = \frac{2c_0 w}{c_0 + \sqrt{c_0^2 + w^2}}, \quad w = \frac{4c_0^2 W}{4c_0^2 - W^2}. \quad (190)$$

Die x, y -Ebene und die U, V -Ebene sind verknüpft durch die aus Gl. (171) mit Berücksichtigung von Gl. (188*) nach kurzer Rechnung sich ergebenden Beziehungen,

$$\begin{aligned} dx &= \frac{U}{W^2} \left(1 - \frac{W^2}{4c_0^2}\right) d\varphi - \frac{V}{W^2} \left(1 + \frac{W^2}{4c_0^2}\right) d\psi, \\ dy &= \frac{V}{W^2} \left(1 - \frac{W^2}{4c_0^2}\right) d\varphi + \frac{U}{W^2} \left(1 + \frac{W^2}{4c_0^2}\right) d\psi, \end{aligned}$$

die sich komplex zusammenfassen lassen in

$$dz = dx + idy = \frac{1}{\tilde{\Omega}} dF(\tilde{\Omega}) - \frac{\Omega}{4c_0^2} d\tilde{F}(\Omega). \quad (191)$$

Wir haben somit folgendes Ergebnis:

Bei Zugrundelegung einer geradlinigen Adiabate Gl. (185) läßt sich zu jeder analytischen Funktion $F(\Omega)$ eine ebene Unterschallströmung durch Quadraturen herleiten. Die Ortskoordinaten x, y des Strömungsfeldes ergeben sich aus Gl. (191) als Funktionen von W und ϑ , der wahren Geschwindigkeitsbetrag w folgt aus Gl. (190).

Falls man die Randbedingungen aus der z -Ebene in die Ω -Ebene vornehmlich übertragen kann, wie dies bei freien Oberflächen bekanntlich gelingt, ist die analytische Funktion $F(\Omega)$ durch die Randbedingungen in der Ω -Ebene funktionentheoretisch festgelegt. Wenn dagegen die Randbedingungen in der Ω -Ebene nicht als gegeben vorausgesetzt werden dürfen, wie dies z. B. bei der Frage nach der Umströmung eines Profils der Fall ist, verfährt man folgendermaßen:

Man bestimmt zunächst funktionentheoretisch die inkompressible Umströmung des vorgegebenen Profils (II) und setzt

$$\left. \begin{array}{l} \Omega = \text{wirkliche Geschwindigkeit} \\ F(\tilde{\Omega}) = \text{komplexes Potential} \end{array} \right\} \text{ der inkompressiblen Umströmung von } (II).$$

Aus Gl. (191) ergibt sich dann die kompressible Umströmung eines von (II) mehr oder weniger abweichenden Profils (II'). Durch systematische Änderung des Ausgangsprofils sucht man schließlich zu erreichen, daß das Profil (II') in hinreichender Annäherung mit dem vorgegebenen Profil zusammenfällt.

Über bemerkenswerte Zusammenhänge mit der Theorie der Minimalflächen vgl. die grundlegende Arbeit von TSCHAPLIGIN¹.

¹ TSCHAPLIGIN, C. A.: Wiss. Ann. Univ. Moskau. Math. Phys. 21 (1904) S. 1—121.

2. Überschallströmungen bei geradlinig approximierter Adiabate. Obwohl für eine Übertragung des soeben entwickelten Verfahrens von Unter- auf Überschallströmungen kein praktisches Bedürfnis vorliegt, sollen einige theoretisch bemerkenswerte Beziehungen für Überschallströmungen mit geradliniger Adiabate erwähnt werden¹.

Falls die Grundströmung eine Überschallströmung ist, wird das Glied $\bar{c}^2 - \bar{w}^2$ in Gl. (188) negativ und an Stelle der ersten Gl. (188*) tritt

$$c^2 = w^2 - w_{\min}^2. \quad (192)$$

Während es also auf S. 103 nur Unterschallgeschwindigkeiten gab, existieren jetzt nur Überschallgeschwindigkeiten.

An Stelle des ringförmigen Überschallbereichs $c^* < w \leq w_{\max}$ der vollkommenen Gase (vgl. S. 9) liefert Gl. (192) den ganzen Außenbereich des Kreises $w = w_{\min}$ als Überschallbereich im Geschwindigkeitsbild. Die Adiabatenellipse Gl. (84) der vollkommenen Gase entartet in ein Paralleleradenpaar vom Abstand $2w_{\min}$, welches den Begrenzungskreis $w = w_{\min}$ des Überschallbereichs berührt. Ebenso gehen die Epizykloiden, die sich S. 60 als Geschwindigkeitsbild der Stromlinien bei der Verdünnungsströmung um eine Ecke ergeben hatten, in die Tangenten des Kreises $w = w_{\min}$ über. Der gekrümmte Teil der Stromlinien (vgl. Abb. 34 und 37) schrumpft infolgedessen zu einem Punkt ein, d. h. die stetige Verdünnung entartet zu einer unstetigen Verdünnung längs einer MACHSchen Linie. Diese unstetigen Verdünnungen ebenso wie die entsprechend sich ergebenden unstetigen Verdichtungen sind hier im Gegensatz zu den wirklichen Verdichtungsstößen der vollkommenen Gase adiabatisch-isentropisch.

3. Potenzentwicklung in der Geschwindigkeitsebene. Nachdem in den vorhergehenden Absätzen die Adiabatenkurve durch eine Gerade näherungsweise ersetzt worden war, wenden wir uns jetzt zur strengen Lösung der linearen Differentialgleichung (174) bzw. (175) mittels Potenzentwicklungen für das Potential oder die Stromfunktion in der Geschwindigkeitsebene. Eingehende Untersuchungen hierüber, allerdings mit Beschränkung auf Unterschallgeschwindigkeit, finden sich bei C. A. TSCHAPLIGIN²; neuerdings haben F. RINGLEB³ und C. FERRARI⁴ das Verfahren für den praktischen Gebrauch zugänglich gemacht. Die nachfolgende Darstellung schließt sich an RINGLEB an.

¹ BUSEMANN, A.: Voltakongreß, S. 353.

² TSCHAPLIGIN, C. A.: Wiss. Ann. Univ. Moskau. Math. Phys. 21 (1904), S. 1—121.

³ RINGLEB, F.: Z. angew. Math. Mech. 20 (1940), S. 185—198 und Dtsch. Math. 5 (1940), S. 377—384.

⁴ FERRARI, C.: Aerotecn. 18 (1938), S. 400—411.

Bei der inkompressiblen Strömung folgt aus der komplexen Darstellung des Potentials

$$\varphi + i\psi = \zeta^p \sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n$$

mit $\zeta = we^{-i\vartheta}$ für ψ die Potenzentwicklung

$$\left. \begin{aligned} \psi &= w^p \sum_{n=0}^{\infty} w^n [a_n \cos(n+p)\vartheta + b_n \sin(n+p)\vartheta] \\ &= \sum_{\nu=p}^{\infty} w^\nu (a_\nu \cos \nu \vartheta + b_\nu \sin \nu \vartheta) \end{aligned} \right\} \quad (195)$$

mit $\nu = p + n$; der erste Exponent $\nu = p \geq 0$ soll eine beliebige ganze oder nicht ganze Zahl sein, der Punkt $\zeta = 0$ ist demzufolge regulär oder ein Verzweigungspunkt.

Für die kompressible Strömung machen wir den zu Gl. (193) analogen Ansatz

$$\psi = \sum_{\nu=p}^{\infty} Q_\nu(w) (a_\nu \cos \nu \vartheta + b_\nu \sin \nu \vartheta), \quad (194)$$

wobei die an Stelle der Potenzen w^ν tretenden Funktionen $Q_\nu(w)$ auf Grund von Gl. (175) zu bestimmen sind:

Nach Einsetzen eines Einzelgliedes $Q_\nu \cos \nu \vartheta$ bzw. $Q_\nu \sin \nu \vartheta$ läßt sich auf der linken Seite von Gl. (175) der Faktor $\cos \nu \vartheta$ bzw. $\sin \nu \vartheta$ vorziehen und durch Nullsetzen des anderen, von ϑ freien Faktors ergibt sich für Q_ν die gewöhnliche Differentialgleichung

$$w^2 Q_\nu'' + w \left(1 + \frac{w^2}{c^2}\right) Q_\nu' - v^2 \left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right) Q_\nu = 0,$$

die sich mit Berücksichtigung von

$$c^2 = c_0^2 - \frac{k-1}{2} w^2$$

umformen läßt in

$$w^2 (1 - Aw^2) Q_\nu'' + w (1 - Bw^2) Q_\nu' - v^2 (1 - Cw^2) Q_\nu = 0; \quad (195)$$

hierbei bedeuten die Striche Ableitungen nach w und zur Abkürzung ist gesetzt

$$A = \frac{k-1}{2c_0^2}, \quad B = \frac{k-3}{2c_0^2}, \quad C = \frac{k+1}{2c_0^2}$$

mit der Schallgeschwindigkeit c_0 des ruhenden Gases.

Durch die Substitution

$$Q_\nu = w^\nu f_\nu(w^2)$$

geht Gl. (195) in eine hypergeometrische Differentialgleichung für $f_\nu(w^2)$ über, die von TSCHAPLIGIN an Stelle von Gl. (195) benutzt wird.

Nach der Theorie der linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen hat Gl. (195) eine Lösung von der Form

$$Q_\nu = c_\nu w^\nu + c_{\nu+1} w^{\nu+1} + c_{\nu+2} w^{\nu+2} + \dots \quad (196)$$

Nach Einsetzen von Gl. (196) in Gl. (195) liefert die Koeffizientenvergleichung

$$c_{\nu+1} = c_{\nu+3} = c_{\nu+5} = \dots = 0;$$

c_ν bleibt beliebig und kann etwa durch $c_\nu = 1$ normiert werden, für die anderen Koeffizienten kommt

$$c_{\nu+2} = -\frac{1}{c_0^2} \frac{\nu}{4} c_\nu, \quad c_{\nu+4} = \frac{A(\nu+2)(\nu+1) + B(\nu+2) - C\nu^2}{(\nu+4)^2 - \nu^2} c_{\nu+2} \dots$$

gemäß der allgemeinen Rekursionsformel

$$c_{\nu+2\sigma+2} = \frac{A(\nu+2\sigma)(\nu+2\sigma-1) + B(\nu+2\sigma) - C\nu^2}{(\nu+2\sigma+2)^2 - \nu^2} c_{\nu+2\sigma}.$$

Die Reihe Gl. (196) für Q_ν konvergiert für alle $w < w_{\max}$, d. h. im ganzen Unter- und Überschallbereich mit Ausschluß der Maximalgeschwindigkeit. Da sich wegen der Linearität von Gl. (175) die Teillösungen $Q_\nu \cos \nu \vartheta$ bzw. $Q_\nu \sin \nu \vartheta$ linear überlagern lassen, hat man für die Linearkombination Gl. (194) schließlich folgenden Satz:

Jede gleichmäßig konvergente Reihe Gl. (194), in der die Funktionen Q_ν selbst durch die gleichmäßig konvergenten Reihen Gl. (196) definiert sind, stellt die Stromfunktion ψ einer ebenen kompressibler Strömung dar. Das zugehörige Potential φ und die Ortskoordinaten x, y ergeben sich aus Gl. (173) und (171) mittels Quadraturen.

Mit $c_0 \rightarrow \infty$ geht die kompressible Strömung in eine inkompressible und die Funktion $Q_\nu(w)$ in w^ν über. Infolgedessen lassen sich die inkompressiblen Strömungen folgendermaßen zu kompressiblen Strömungen verallgemeinern:

Eine inkompressible Stromfunktion $\psi^{(i)} = \sum_{\nu=p}^{\infty} w^\nu (a_\nu \cos \nu \vartheta + b_\nu \sin \nu \vartheta)$

liefert eine zugeordnete kompressible Stromfunktion $\psi^{(k)}$, wenn man unter Beibehaltung der Koeffizienten a_ν, b_ν die Potenzen w^ν durch die in Gl. (196) definierten Funktionen $Q_\nu(w)$ ersetzt. Vorausgesetzt ist hierbei, daß die so bestimmte Potenzreihe Gl. (194) für $\psi^{(k)}$ gleichmäßig konvergiert.

Während die Potenzentwicklungen von RAYLEIGH und JANZEN (vgl. S. 88) nur auf reine Unterschallströmungen führten, kann man mit den hier besprochenen Potenzentwicklungen auch Strömungen mit Durchgang durch die kritische Geschwindigkeit erfassen.

Beispiel: Doppelquelle¹.

Die inkompressible Doppelquelle ist bekanntlich durch das komplexe Potential

$$F(z) = \varphi^{(i)} + i \psi^{(i)} = \frac{1}{z}$$

¹ RINGLEB, F.: Z. angew. Math. Mech. 20 (1940).

gegeben, das sich mit Hilfe der komplexen Geschwindigkeit

$$w e^{-i\vartheta} = \frac{dF}{dz} = -\frac{1}{z^2}$$

umformen läßt in

$$\varphi^{(i)} + i\psi^{(i)} = w^{1/2} e^{-\frac{i}{2}(\vartheta + \pi)}.$$

Für die Stromfunktion der inkompressiblen Doppelquelle folgt hieraus

$$\psi^{(i)} = -w^{1/2} \cos \frac{\vartheta}{2}.$$

Die entsprechende kompressible Strömung, die wir kurz als kompressible Doppelquelle bezeichnen wollen, ist nach der vorhergehenden Vorschrift durch die Stromfunktion

$$\psi^{(k)} = -Q_{1/2} \cos \frac{\vartheta}{2}$$

gekennzeichnet. Hierbei hat man nach Gl. (196) mit $\nu = \frac{1}{2}$ bei Beschränkung auf die drei ersten Glieder

$$Q_{1/2} \approx w^{1/2} \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{w}{c_0} \right)^2 + 0,00969 \left(\frac{w}{c_0} \right)^4 \right],$$

woraus sich nach (Gl. 171) die Ortskoordinaten in der Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} x &= +\frac{1}{2} \frac{Q_0}{Q} \left[2 \left(Q'_{1/2} + \frac{Q_{1/2}}{2w} \right) \sin \frac{\vartheta}{2} + \frac{2}{3} \left(Q'_{1/2} - \frac{Q_{1/2}}{2w} \right) \sin \frac{3\vartheta}{2} \right], \\ y &= -\frac{1}{2} \frac{Q_0}{Q} \left[2 \left(Q'_{1/2} + \frac{Q_{1/2}}{2w} \right) \cos \frac{\vartheta}{2} + \frac{2}{3} \left(Q'_{1/2} - \frac{Q_{1/2}}{2w} \right) \cos \frac{3\vartheta}{2} \right] \end{aligned}$$

ergeben.

Ebenso wie die kompressible Quelle und der kompressible Wirbel (vgl. S. 15) existiert auch die Doppelquelle nur außerhalb einer Grenzlinie, in deren Inneres eine adiabatische Fortsetzung nicht möglich ist.

§ 18. Charakteristikenverfahren von PRANDTL und BUSEMANN für ebene Überschallströmungen.

1. Reziproke Beziehung zwischen MACHSchem Netz und Hauptnetz

Die linearisierte Theorie der ebenen Überschallströmung (vgl. § 8) führt auf anschauliche Weise zur strengen Theorie, wenn man die Strömung nicht im ganzen Bereich mit einer konstanten Grundströmung linearisiert, sondern für die Umgebung jedes Punktes eine „berührende“, von Ort zu Ort veränderliche linearisierte Strömung benutzt. An Stelle des konstanten Grundgeschwindigkeitsvektors \bar{w} , der konstanten Schallgeschwindigkeit \bar{c} und des konstanten MACHSchen Winkels $\bar{\alpha}$ treten dann die örtlich veränderlichen Werte w, c, α und an Stelle des geradlinigen MACHSchen Parallelogramm-Netzes ergibt sich das bereits S. 97 bespro-

ebene, im allgemeinen krummlinige MACHsche Kurvennetz. Es liegt im Gegensatz zur linearisierten Theorie nicht von vornherein fest, sondern kann erst nach Ermittlung der örtlichen Strömungsgeschwindigkeit bestimmt werden.

Ebenso wie in der linearisierten Theorie (vgl. S. 39) sind auch hier die MACHschen Linien „Störungslinien“, längs denen sich kleine Störungen fortpflanzen (vgl. hierzu auch S. 114). Das Einflußgebiet einer Störung wird wieder von den beiden vom Störungsort stromabwärts laufenden MACHschen Linien begrenzt, die jetzt aber im allgemeinen nicht mehr wie in Abb. 22 geradlinig, sondern gekrümmt sind.

Bei Festhaltung an der Forderung einer punktwise umkehrbar eindeutigen Zuordnung zwischen Strömungsfeld (x, y -Ebene) und Geschwindigkeitsbild (u, v -Ebene) entsprechen nach S. 97 den MACHschen Kurven bzw. dem MACHschen Netz die Hauptkurven bzw. das Hauptnetz des Geschwindigkeitsbildes. Die linearisierte Theorie (vgl. S. 36, Abb. 18), jeweils auf die Umgebung eines Punktes des Strömungsfeldes

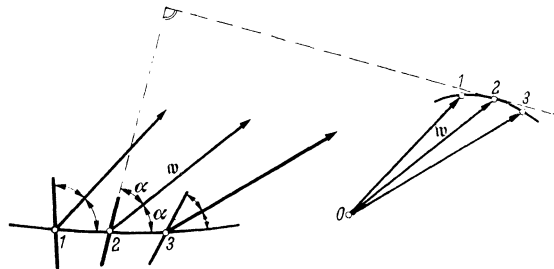


Abb. 70. Abbildung der MACHschen Kurven auf die Hauptkurven.

angewandt, liefert unmittelbar folgenden Satz (Abb. 70):

Der Geschwindigkeitsvektor w ändert sich längs einer MACHschen Kurve der einen Schar senkrecht zu den MACHschen Kurven der anderen Schar. Die Tangenten der zugeordneten Hauptkurve des Geschwindig-

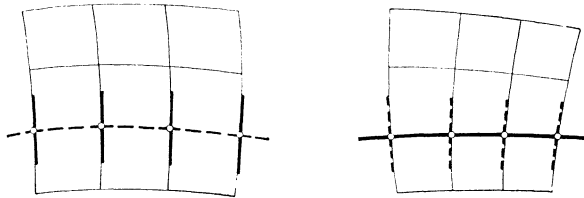


Abb. 71. Reziproke Beziehung zwischen dem MACHschen Netz und Hauptnetz.

keitsbildes stehen also senkrecht zu den Tangenten der MACHschen Kurven der anderen Schar.

Hieraus ergibt sich für das MACHsche Netz und das Hauptnetz eine reziproke Beziehung (Abb. 71), die auch sonst bei Fragen der Differentialgeometrie und der Mechanik eine Rolle spielt:

Jeder Tangente des einen Netzes entspricht eine senkrechte Tangente des anderen Netzes. Die „Längstangenten“ einer Kurve des einen Netzes

stehen senkrecht zu den „Quertangenten“ der zugehörigen Kurve des anderen Netzes.

Wegen des Senkrechtstehens zu den MACHSchen Richtungen kann man die Richtungen der Hauptkurven bei Zugrundelegung der Adiabaten-gleichung (8) der vollkommenen Gase mittels der Adiabatenellipse nach S. 36 konstruieren. Bei Einstellung der Adiabatenellipse auf einen Punkt P' des Überschall-Ringbereichs ist die kleine Ellipsenachse jeweils parallel zur Tangente einer der beiden durch P' hindurchgehenden Hauptkurven. Die Hauptkurven sind demnach identisch mit den auf S. 58 ermittelten Bildkurven der Stromlinien bei der Umströmung einer konvexen Ecke, womit folgender Satz bewiesen ist (vgl. auch Gl. (182) auf S. 99):

Im Falle der vollkommenen Gase sind die Hauptkurven kongruente Epizykloiden, welche den Kreis $w = w_{\max}$ berühren und auf dem Kreis $w = c^*$ Rückkehrpunkte haben.

Man beachte, daß das Hauptnetz ein für allemal fest vorliegt, während das MACHSche Netz erst nach Vorgabe von Randbedingungen bestimmt ist (vgl. S. 115).

2. Haupttangentenkurven des Druckbergs. Die Hauptkurven des Geschwindigkeitsbildes stehen in einer auch für beliebige Adiabatengleichungen (5) gültigen einfachen differentialgeometrischen Beziehung zum „sattelförmigen“ Teil des Druckbergs (vgl. Abb. 3) über dem Überschall-Ringgebiet.

In jedem Punkt einer „sattelförmigen“ Fläche gibt es zwei die Fläche durchsetzende sog. Haupttangenten. Sie sind identisch mit den Wendetangenten der Kurven, die aus der gegebenen Fläche durch Ebenen ausgeschnitten werden. Die Haupttangenten erzeugen auf der Fläche ein zweifaches Richtungsfeld, dessen Integralkurven in der Differentialgeometrie unter der Bezeichnung als Haupttangentenkurven eine wichtige Rolle spielen.

Wir betrachten nun einen Punkt P' einer Hauptkurve (vgl. Abb. 37 rechts) und legen die u -Achse senkrecht zur Tangente t' von P' . Die u -Achse bildet dann mit dem Radiusvektor w den MACHSchen Winkel α und als Ordinate von P' hat man daher $v = w \sin \alpha = c$. Die Lotebene $u = \text{const}$ über der Tangente t' schneidet den Druckberg gemäß Gl. (4*) nach der Kurve

$$\frac{v^2}{2} = - \int \frac{dp}{\rho} + \text{const},$$

woraus analog zu Gl. (23) und (24) durch zweimaliges Differenzieren

$$\frac{d^2 p}{dv^2} = - \rho \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)$$

folgt. Die Bedingung $v = c$ des Berührungspunktes P' ist also gleich-

bedeutend mit der Wendepunktbedingung $\frac{d^2p}{dv^2} = 0$ der Schnittkurve $p = p(v)$ und auf Grund der vorangestellten Definition der Haupttangentialkurven hat man den Satz:

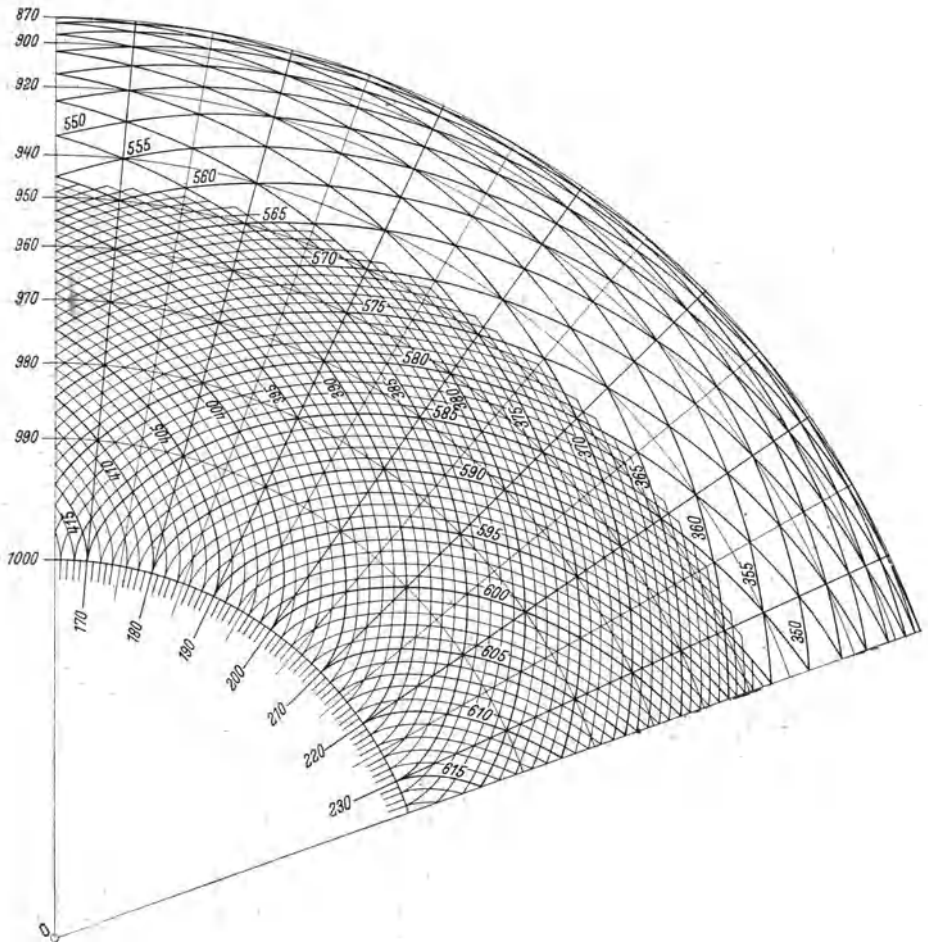


Abb. 72. Charakteristikendiagramm für Luft ($k = 1,405$) (nach PRANDTL und BUSEMANN).

Die Haupttangentialkurven des sattelförmigen Teiles des Druckbergs haben die Hauptkurven im Überschall-Ringgebiet der Geschwindigkeits-ebene zum Grundriß.

3. Charakteristikendiagramm. Zur Darstellung des Hauptnetzes dient das sog. Charakteristikendiagramm¹ (Abb. 72). Es besteht bei vollkommenen Gasen aus kongruenten und gespiegelten Epizykloidenbögen des

¹ PRANDTL, L. und A. BUSEMANN: STODOLA-Festschrift, Zürich 1929, S. 499.

Überschall-Ringgebiets, die durch Drehung um Vielfache eines festen Winkels (z. B. $\varepsilon = 2^\circ$ in Abb. 72) auseinander hervorgehen und gegenläufig beziffert sind. Die gezeichneten Epizykloiden erzeugen ein krummliniges Vierecksnetz mit konzentrischen Kreisen und Radien als Diagonalen. Den Kreisen sind konstante Ziffernsummen s der Epizykloiden und den Radien konstante Zifferndifferenzen d zugeordnet.

Da längs der Kreise jeweils der Geschwindigkeitsbetrag w und der Druck p , längs der Radien dagegen die Geschwindigkeitsrichtung konstant ist, lassen sich die Geschwindigkeitsbeträge und Drucke nach d und die Richtungswinkel ϑ des Geschwindigkeitsvektors nach d eicher.

Wenn die Ziffern der Epizykloiden wie in Abb. 72 nach Drehwinkel von 2° fortschreiten und für $w = c^*$ die Ziffernsumme $s = 1000$ gewählt wird, bestehen längs der Epizykloide 600 zwischen Ziffernsumme s und Zifferndifferenz d und dem Ablenkungswinkel ϑ in Grad (vgl. S. 5 Zahlentafel 2) die Beziehungen

$$d = \vartheta + 200, \quad s = 1000 - \vartheta, \quad s_{\min} = 1000 - \vartheta_{\max}.$$

Diese Ziffernsummen s sind in der ersten Spalte der Zahlentafel 2 eingetragen.

Das Charakteristikendiagramm bildet zusammen mit dem Stoßpolardiagramm (Abb. 50) das wesentliche Hilfsmittel für die im folgende hergeleitete Näherungskonstruktion ebener Überschallströmungen bei vorgegebenen Randbedingungen. Da nach S. 71 (vgl. Abb. 48) die Stoßpolare im Doppelpunkt den Radiusvektor unter dem Winkel $\frac{\pi}{2}$ — schneidet, berühren sich dort die Stoßpolare und die Hauptkurve. Man kann sogar noch weitergehend zeigen, daß auch in den Krümmungen Übereinstimmung besteht. Hieraus folgt das praktisch wichtige Ergebnis, daß der Ersatz der für unstetige Zustandsänderungen geltenden Stoßpolaren durch die berührenden, stetigen Zustandsänderungen liefernden Kurven des Charakteristikendiagramms in weiten Grenzen mit ausreichender Annäherung zulässig ist.

Bei der Herstellung des Charakteristikendiagramms kann man die Epizykloiden entweder als Rollkurven konstruieren (vgl. S. 60) oder punktweise aus Zahlentafel 2 (vgl. S. 57) ermitteln, indem man zusammengehörige Wertepaare der Polarkoordinaten M^* und ϑ aufträgt.

4. Zusammenhang mit der Charakteristikentheorie der hyperbolischen Differentialgleichungen. Die gewonnenen Ergebnisse sollen jetzt in Zusammenhang gebracht werden mit der Charakteristikentheorie der hyperbolischen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung (vgl. S. 44

a) Ebenso wie bei den linearen unterscheiden wir auch bei den nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung durch

$ac - b^2 \geq 0$ den elliptischen und hyperbolischen Fall. Hierbei ist die Differentialgleichung in der Form

$$F\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \varphi, x, y\right) = 0$$

vorausgesetzt und a, b, c durch

$$a = \frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)}, \quad 2b = \frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right)}, \quad c = \frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)}$$

definiert. Dann ist auch die strenge, nichtlineare Potentialgleichung (44) der ebenen Strömung im Unterschallbereich elliptisch und im Überschallbereich hyperbolisch wegen

$$\left(1 - \frac{\varphi_x^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{\varphi_y^2}{c^2}\right) - \left(\frac{\varphi_x \varphi_y}{c^2}\right)^2 = 1 - \frac{w^2}{c^2} \geq 0.$$

b) Wenn wir auch die Definition der Charakteristiken auf nichtlineare Differentialgleichungen übertragen, hat man im Überschallbereich wieder reelle Charakteristiken, die gemäß Gl. (95) durch

$$\left(1 - \frac{\varphi_x^2}{c^2}\right) dy^2 + \left(1 - \frac{\varphi_y^2}{c^2}\right) dx^2 + 2 \frac{\varphi_x \varphi_y}{c^2} dx dy = 0 \quad (197)$$

gegeben sind.

Dabei zeigt sich aber ein wesentlicher Unterschied gegenüber der linearisierten Theorie: Während die Koeffizienten der Charakteristiken-gleichung bei Gl. (95) bekannte Ortsfunktionen bzw. bei Gl. (95*) sogar Konstante sind, hängen sie bei Gl. (197) nicht nur von den Ortskoordinaten x, y , sondern auch von dem gesuchten Potential ab. Die Charakteristiken lassen sich daher in der strengen Theorie nicht von vornherein, sondern erst nach Ermittlung des Potentials aus den vorgeschriebenen Randbedingungen angeben.

Die Charakteristiken, Gl. (197), sind identisch mit den MACHSchen Kurven. Dies folgt unmittelbar aus dem entsprechenden Satz der linearisierten Theorie, wenn man nach S. 108 die von Punkt zu Punkt veränderliche „berührende“ linearisierte Strömung betrachtet.

Die Charakteristiken der Stromfunktionsgleichung (47) sind durch

$$\left[1 - \left(\frac{\rho_0}{\rho c}\right)^2 \psi_y^2\right] dy^2 + \left[1 - \left(\frac{\rho_0}{\rho c}\right)^2 \psi_x^2\right] dx^2 - 2 \left(\frac{\rho_0}{\rho c}\right)^2 \psi_x \psi_y dx dy = 0$$

gegeben und infolge von Gl. (45) mit den Charakteristiken, Gl. (197), der Potentialgleichung (44) identisch.

Die durch Anwendung der MOLENBROEK-Transformation bzw. LEGENDRE-Transformation gewonnenen Differentialgleichungen (174), (175) bzw. (179), (181) des Potentials und der Stromfunktion liefern alle dieselben Charakteristiken-gleichung

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) dv^2 + \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) du^2 - 2 \frac{uv}{c^2} du dv = 0 \quad (198)$$

in kartesischen Geschwindigkeitskoordinaten u, v bzw.

$$\left(\frac{w^2}{c^2} - 1\right) dw^2 - w^2 d\vartheta^2 = 0 \quad (198^*)$$

in polaren Geschwindigkeitskoordinaten w, ϑ .

Durch Vergleich von Gl. (198*) mit (182) erkennt man, daß die durch Gl. (198) bzw. (198*) definierten Charakteristiken identisch sind mit den Hauptkurven des Geschwindigkeitsbildes, denen im Strömungsfeld die MACHSchen Kurven entsprechen. Dasselbe folgt auch unmittelbar aus der Reziprozitätsbeziehung des MACHSchen Netzes und des Hauptnetzes (vgl. S. 109), da die Bedingung

$$\frac{dv}{du} = -\frac{dx}{dy}$$

für das Senkrechtstehen reziproker Linienelemente sofort Gl. (197) in (198) transformiert.

c) *Existenzsatz*. Da die transformierten Differentialgleichungen (174) (175) für φ, ψ bzw. (179), (181) für Φ, Ψ linear sind, läßt sich auf sie der Existenzsatz c) von S. 45 (vgl. Abb. 26) anwenden. Hiernach ist, wenn wir etwa von Gl. (174) ausgehen, das Potential $\varphi(w, \vartheta)$ in einem Viereck des Hauptnetzes des Geschwindigkeitsbildes bestimmt, falls φ samt der ersten Ableitungen längs einer Diagonalkurve k' dieses Vierecks vorgegeben wird. Mit Hilfe von Gl. (173) und (171) läßt sich hieraus $x = x(w, \vartheta)$, $y = y(w, \vartheta)$ in dem zugeordneten MACHSchen Viereck des Strömungsfeldes durch Quadraturen finden. Wir setzen hierbei voraus, daß das MACHSche Viereck nicht von der Grenzlinie (vgl. S. 97) durchsetzt wird.

Der Diagonalkurve k' des Hauptnetzvierecks entspricht eine Diagonalkurve k des zugeordneten MACHSchen Vierecks. Wenn die Geschwindigkeitsverteilung längs k vorgegeben wird, ist dadurch auch die Kurve k sowie bis auf eine unwesentliche additive Konstante das Potential längs k als Funktion von w, ϑ samt den ersten Ableitungen bekannt. Der Existenzsatz liefert somit folgendes der linearisierten Theorie analoge Ergebnis:

Wenn längs eines nicht mit einer MACHSchen Linie zusammenfallenden Kurvenstücks AB die Geschwindigkeitsvektoren w vorgegeben sind, dann ist w in dem ganzen, im allgemeinen krummlinigen MACHSchen Viereck über der Diagonale AB festgelegt, vorausgesetzt, daß das Viereck nicht von der Grenzlinie der adiabatischen Überschallströmung durchschnitten wird.

Auf S. 116 werden wir den Existenzsatz noch durch eine Näherungskonstruktion anschaulich-geometrisch plausibel machen.

d) Aus dem Existenzsatz folgt ebenso wie S. 46 der strenge Nachweis für die Fortpflanzung kleiner Störungen längs der MACHSchen Linien.

5. Näherungskonstruktion ebener Strömungsfelder zu vorgegebenen Anfangsbedingungen. Der Grundgedanke der Konstruktion ist folgender: Das Hauptnetz des Geschwindigkeitsbildes liegt ein für allemal fest. Das zugeordnete MACHsche Netz des Strömungsfeldes wird auf Grund der S. 109 erläuterten reziproken Beziehung, ausgehend von den gegebenen Anfangsbedingungen, konstruiert. Durch das MACHsche Netz ist dann der örtliche Geschwindigkeitsvektor und somit die gesuchte Strömung vollständig bestimmt.

Für die Durchführung der Konstruktion ersetzen wir das MACHsche Netz und das zugeordnete Hauptnetz durch Streckenzugnetze mit folgender reziproker Beziehung (Abb. 73):

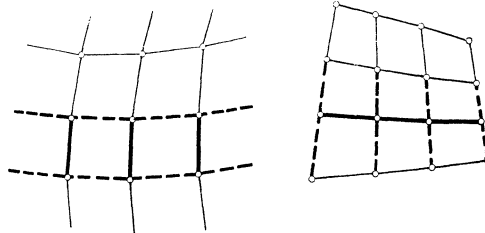


Abb. 73. Reziproke Streckenzugnetze.

Jedem Streckenzug des einen Netzes entspricht eine zu ihm streckenweise senkrechte Querseitenfolge des anderen Netzes und jedem Viereck ein zu ihm seitenweise senkrecht Vierkreuz. Durch Drehung des einen der beiden Netze um 90° entsteht die bekannte reziproke Beziehung der

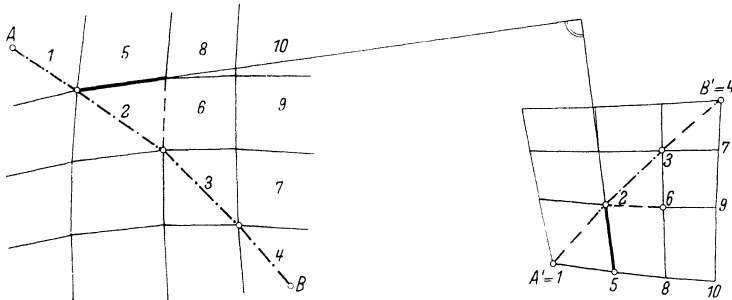


Abb. 74. Konstruktion reziproker Netze aus gegebenen Anfangsbedingungen.

graphischen Statik zwischen Kräfteplan und Lageplan eines ebenen Fachwerks.

Wie auf S. 114 soll nun als Anfangsbedingung die Verteilung der Geschwindigkeit längs einer von einer MACHschen Linie verschiedenen Kurve AB des Strömungsfeldes vorgegeben sein. Die nach dem Existenzsatz im MACHschen Viereck über der Diagonale AB festgelegte Strömung kann dann durch folgende Näherungskonstruktion ermittelt werden (Abb. 74):

a) Die Kurve AB wird durch einen Streckenzug und die kontinuierliche Geschwindigkeitsverteilung längs AB durch eine diskontinuierliche, streckenweise konstante Verteilung ersetzt, d. h. jeder Strecke des Streckenzugs AB wird ein gewisser Geschwindigkeitsvektor w zugeordnet.

b) Die längs des Streckenzugs AB vorgegebenen Vektoren w werden ins Geschwindigkeitsbild übertragen, wodurch sich ein Streckenzug $A'B'$ ergibt (Punkte 1—4 in Abb. 74).

c) Die von den Punkten des Streckenzugs $A'B'$ des Geschwindigkeitsbildes ausgehenden Hauptkurven (Epizykloiden) bilden ein krummliniges Vierecksnetz über dem Streckenzug $A'B'$ als Diagonale und mit den Schnittpunkten der Epizykloiden als Knotenpunkten (Punkte 1—10 in Abb. 74).

d) Das von Epizykloidenbögen erzeugte krummlinige Vierecksnetz wird durch das Streckenzugnetz der Sehnen ersetzt.

e) Zu dem in d) genannten Sehnennetz läßt sich in eindeutiger Weise über dem vorgegebenen Streckenzug AB des Strömungsfeldes als Diagonale schrittweise Masche für Masche ein senkrecht reziprokes Streckenzugnetz konstruieren (Maschen 1—10 in Abb. 74).

Die so konstruierten, im Sinne von Abb. 73 reziproken Streckenzugnetze stellen als Ersatz des MACHSchen Netzes und Hauptnetzes die gesuchte Strömung näherungsweise dar. Jeder Masche des MACHScher Streckenzugnetzes ist ein Knotenpunkt des reziproken Netzes des Geschwindigkeitsbildes und demgemäß ein konstanter Geschwindigkeitsvektor w zugeordnet. Der Grenzübergang mit kleiner und kleiner werdenden Maschenseiten führt zu einer anschaulich-geometrischen Erläuterung des auf S. 114 bewiesenen Existenzsatzes.

Die Näherungskonstruktion läßt sich sinngemäß auch an andere Randbedingungen anschließen, wie die Beispiele auf S. 117—121 zeigen werden.

Wichtig für die praktische Durchführung ist folgende Schematisierung der Konstruktion:

Um das Hauptnetz im Geschwindigkeitsbild nicht jedesmal neu zeichnen zu müssen, benutzt man das ein für allemal vorliegende Charakteristikendiagramm (vgl. Abb. 72), indem man den Maßstab durch Wahl von c^* als Einheit, d. h. durch Messung der Geschwindigkeiten in M^* , normiert und die Randbedingungen in Anpassung an die Maschenweite des Charakteristikendiagramms approximiert:

a), b), c) Die Randwerte w werden durch die Radienvektoren der nächstgelegenen Knotenpunkte im Charakteristikendiagramm ersetzt. Es treten dann auch im ganzen weiteren Konstruktionsgang nur Knotenpunkte und Epizykloiden auf, die im Charakteristikendiagramm gezeichnet vorliegen.

d), e) Bei der Konstruktion des reziproken Netzes im Strömungsfeld kann man, statt Lote zu den kurzen Epizykloidensehnen zu errichten zur Erzielung einer größeren Genauigkeit die Adiabatenellipse benutze (vgl. S. 110): Bei Einstellung auf den Mittelpunkt einer Maschenseite des Charakteristikendiagramms ist die kleine Ellipsenachse angenähert parallel zu dieser Seite und die reziprok entsprechende Strecke des MACHS

schen Streckenzugnetzes kann daher parallel zur großen Ellipsenachse angenommen werden.

Die Übersicht wird erleichtert, wenn man die Maschen des MACHschen Streckenzugnetzes mit den beiden Ziffern der im zugeordneten Punkt des Charakteristikendiagramms sich schneidenden Epizykloiden versieht (Abb. 75). Nachbarmaschen, welche Nachbarknotenpunkten

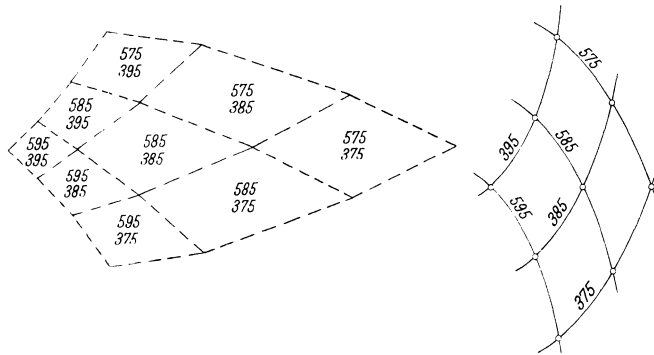


Abb. 75. Bezifferung der Netzmaschen.

des Charakteristikendiagramms entsprechen, haben dann eine der beiden Ziffern gemeinsam. Wenn in Strömungsrichtung die gemeinsame Ziffer wächst (bzw. fällt), handelt es sich um eine Verdichtungslinie (bzw. Verdünnungslinie). Die Verdichtungslinien sollen wie früher durchgezogen, die Verdünnungslinien gestrichelt werden.

6. Beispiele. a) *Strömung längs einer festen Wand.* Die in § 10 durch Grenzübergang aus der linearisierten Theorie entwickelte Überschallströmung an einer Ecke läßt sich auf eine einseitig durch eine beliebige krummlinige Wand begrenzte Überschallströmung verallgemeinern. Die

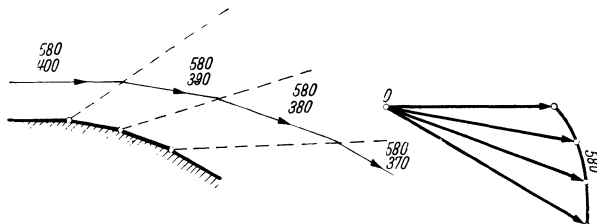


Abb. 76. Überschallströmung längs einer festen Wand.

MACHschen Linien bleiben dabei geradlinig, gehen aber nicht mehr von dem festen Eckpunkt E (vgl. Abb. 34), sondern jeweils von den veränderlichen Punkten der Wand aus (Abb. 76). Sie divergieren bei Verdünnung und konvergieren bei Verdichtung. Im Gegensatz zur Umströmung der Ecke sind hier auch stetige Verdichtungen möglich, nämlich in der Um-

gebung der Wand bis an die von den Verdichtungslinien umhüllte Grenzlinie.

Die Stromlinien sind „Parallelkurven“ bezüglich der MACHschen Linien, jedoch nicht mehr ähnliche Kurven wie bei der Eckenströmung (vgl. Abb. 34) oder parallele kongruente Kurven wie bei der linearisierten Näherung (vgl. Abb. 24 und Abb. 15 rechts). Sie haben alle dieselbe

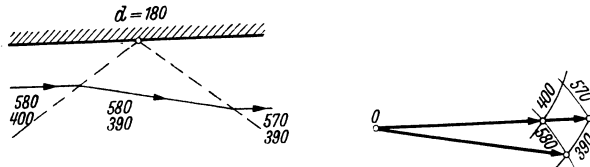


Abb. 77. Reflexion einer MACHschen Linie an einer Wand.

Epizykloide als gemeinsames Geschwindigkeitsbild. In diese Epizykloide entartet das sonst flächenhafte Hauptnetz und das auf S. 115 entwickelte allgemeine Näherungsverfahren spezialisiert sich gemäß Abb. 76; bei Einschrumpfen der Wand auf einem festen Eckpunkt *E* ergibt sich im wesentlichen die auf S. 61 beschriebene Konstruktion. Die zweite Schar der MACHschen Linien geht weder bei der Wand- noch bei der Ecken-

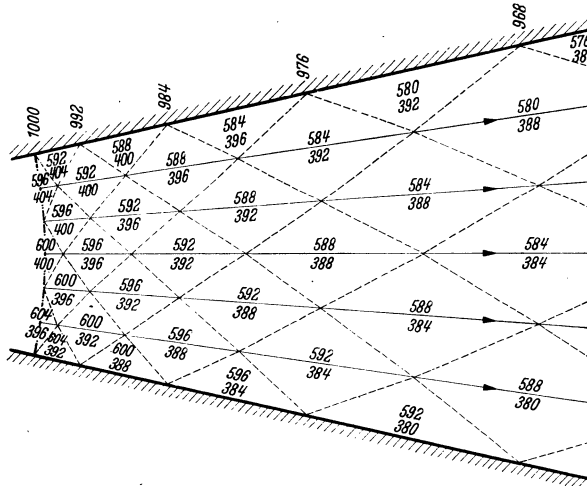


Abb. 78. Ebene Überschall-Quellströmung zwischen zwei Wänden.

strömung in die Konstruktion ein, da der Geschwindigkeitsvektor längs der MACHschen Linien der ersten Schar konstant ist.

b) *Strömung zwischen zwei festen Wänden.* Wir wenden uns jetzt zur strengen zweidimensionalen Behandlung der ebenen Überschallströmung durch Düsen und ergänzen dadurch die vorläufigen eindimensionalen Betrachtungen von S. 12 und 13.

Als Randbedingungen haben wir die als bekannt angenommene Geschwindigkeitsverteilung längs eines Anfangsquerschnitts und die Richtungen der Geschwindigkeit längs der Düsenwände, die durch die im Charakteristikendiagramm vorkommenden nächstgelegenen diskreten Richtungen angenähert werden.

Eine MACHsche Linie, die eine gerade Stelle der Wand trifft, wird so reflektiert, daß der Geschwindigkeitsvektor w nach Überschreiten der reflektierten MACHschen Linie wieder mit der Wandrichtung übereinstimmt (Abb. 77). Die Zifferndifferenz d bleibt hierbei konstant. Wie man sich mit Hilfe von Abb. 77 klarmachen kann, wird eine Verdichtungsline wieder als Verdichtungsline und eine Verdünnungsline als Verdünnungsline reflektiert.

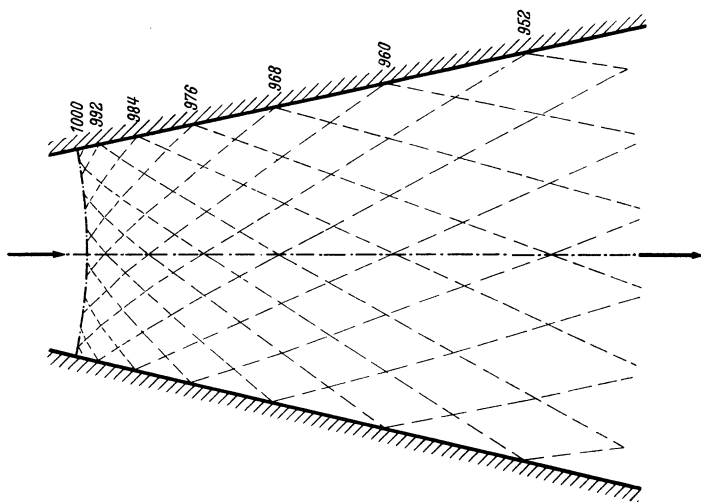


Abb. 79. Räumliche Überschall-Quellströmung in einem konischen Rohr.

Abb. 78 zeigt eine nach der Näherungskonstruktion von S. 115 ermittelte Quellströmung zwischen geradlinigen divergierenden Wänden. Da die Quellströmung streng berechnet werden kann (vgl. S. 15), eignet sich dieses Beispiel zur Feststellung der sehr hohen Genauigkeit des Näherungsverfahrens. In Abb. 79 ist vergleichsweise die nach S. 15 berechnete räumliche Quellströmung in einem divergierenden konischen Rohr dargestellt; die Geschwindigkeitszunahme erfolgt hier naturgemäß erheblich schneller als im ebenen Fall. Mit Hilfe der am Rand angegebenen Druckzahlen kann man die Geschwindigkeitszunahme in beiden Düsen vergleichen.

c) *Ergänzung einer Düse auf paralleles Ausströmen.* Wenn eine MACHsche Linie die Wand nicht an einer glatten Stelle, sondern an einem

Knick trifft, wird sie wieder nach Abb. 77 so reflektiert, daß der Geschwindigkeitsvektor w nach Überschreiten der reflektierten Linie parallel zur Wand ist. Falls nun im besonderen der Knick so bemessen ist daß w schon nach Überschreiten der einfallenden MACHSchen Linie die Wandrichtung annimmt, wird der reflektierte Strahl ausgelöscht. Durch

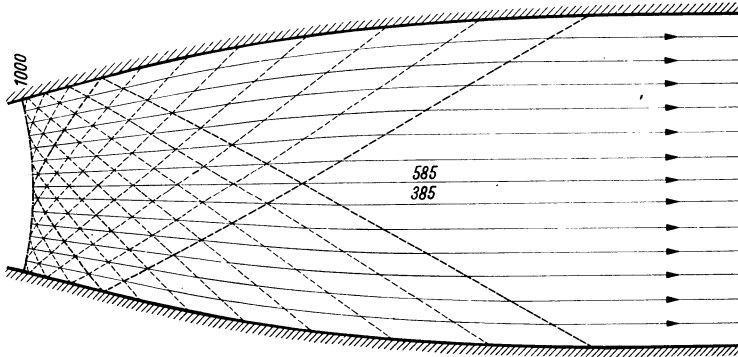


Abb. 80. Ergänzung einer ebenen Düse auf paralleles Ausströmen.

wiederholtes Anbringen derartiger Knicke kann man nacheinander alle MACHSchen Linien beseitigen und erhält dadurch eine auf paralleles Ausströmen korrigierte Düse.

Ein Beispiel ist in Abb. 80 dargestellt; als Ausgangsströmung wurde hierbei die ebene Überschall-Quellströmung von Abb. 78 zugrunde gelegt.

Das Verfahren wird gewöhnlich in der Weise angewandt, daß man aus einer Schlierenaufnahme der zu korrigierenden Düse die Verdünnungslinien empirisch entnimmt und hierauf entweder, wie oben angegeben die Konstruktion rein zeichnerisch durchführt oder an Stelle der schrittweisen zeichnerischen Richtungsbestimmungen der korrigierten Wand die Zahlentafel 2 für den Zusammenhang zwischen dem MACHSchen Winkel α und dem Stromlinienwinkel ϑ benutzt.

d) *Ausströmen gegen Unterdruck.* An Stelle der Strömung zwischen festen Wänden soll jetzt die Strömung im freien Strahl untersucht werden. Wir setzen hierbei voraus, daß der Außendruck kleiner ist als der Druck des ausströmenden Gases; über den komplizierteren Fall des Ausströmens gegen Überdruck, wobei Verdichtungsstöße an der Düsenmündung auftreten, vgl. S. 127, Beispiel c.

Als Randbedingungen haben wir die als bekannt vorausgesetzte Geschwindigkeitsverteilung im Ausgangsquerschnitt und den durch den Außendruck bestimmten konstanten Geschwindigkeitsbetrag an der freien Oberfläche; er wird durch den im Charakteristikendiagramm nächstgelegenen Kreis $s = \text{const}$ angenähert.

Eine MACHSche Linie, die eine freie Strahlgrenze trifft, wird so

reflektiert, daß der Geschwindigkeitsvektor w nach Überschreiten der reflektierten MACHschen Linie wieder den ursprünglichen absoluten Betrag erhält (Abb. 81). Die Ziffernsumme s bleibt hierbei konstant. Wie

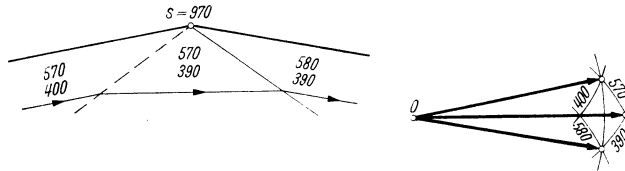


Abb. 81. Reflexion einer MACHschen Linie an einer freien Strahlgrenze.

man sich aus Abb. 81 klarmachen kann, wird eine Verdünnungslinie als Verdichtungslinie reflektiert und umgekehrt.

Abb. 82 zeigt eine nach S. 115 konstruierte Ausströmung eines Parallelstrahls gegen Unterdruck. Von den Ecken der Mündung gehen so viele Verdünnungslinien aus, wie der Übergang zu dem vorgegebenen Unter-

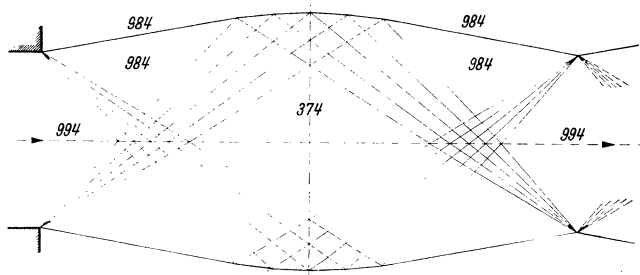


Abb. 82. Austritt eines Parallelstrahls aus einer ebenen Düse gegen Unterdruck (nach A. BUSEMANN).

druck an der freien Oberfläche erfordert. Das Strömungsbild wiederholt sich periodisch.

Bei hinreichend starkem Unterdruck überschneiden sich die an der Strahlgrenze reflektierten MACHschen Linien vor dem Erreichen der Symmetrieachse und erzeugen dadurch eine Grenzlinie der adiabatischen Strömung (vgl. S. 97); infolgedessen treten in diesem Falle Verdichtungsstöße auf.

§ 19. Ebene Überschallströmungen mit Verdichtungsstößen.

1. Ergänzung des Charakteristikenverfahrens durch Hinzunahme des Stoßpolarendiagramms. Die Untersuchungen in § 18 bezogen sich ausschließlich auf stetige adiabatische Zustandsänderungen; sie sollen hier auf Strömungen mit Verdichtungsstößen verallgemeinert werden, wie sie bei Ablenkungen an konkaven Ecken sowie in der Umgebung der Grenzlinien der adiabatischen Strömung entstehen).

Während bei dem in § 11 betrachteten einfachsten Fall die unstetige Verdichtung längs einer geradlinigen Stoßlinie mit konstantem Sprung der Geschwindigkeit, Dichte, Entropie usw. eintritt, hat man im allgemeinen Fall mit einer gekrümmten Stoßlinie zu rechnen. Für jedes Linienelement dieser Stoßlinie sind dann die in §§ 11—13 entwickelten Stoßgesetze anzuwenden, wobei sich Stoß- und Ablenkungswinkel und demzufolge auch der Geschwindigkeits-, Dichte-, Entropiesprung usw. von Ort zu Ort ändern. Hieraus wird sich die Tatsache ergeben, daß eine Potentialströmung an einer gekrümmten Stoßlinie notwendig in eine nicht mehr wirbelfreie Strömung übergeht (vgl. S. 125); praktisch werden wir allerdings in vielen Fällen die Strömung auch hinter der Stoßlinie mit ausreichender Genauigkeit als Potentialströmung behandeln können.

Um dem Charakteristikenverfahren von PRANDTL und BUSEMANN (vgl. § 18) Überschallströmungen mit Verdichtungsstößen zugänglich zu machen, muß zum Charakteristikendiagramm das im gleichen Geschwindigkeitsmaßstab gezeichnete Stoßpolarendiagramm (vgl. S. 72 und 77)

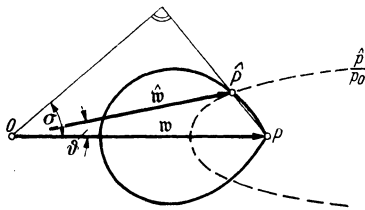


Abb. 83. Erläuterung zur Anwendung des Stoßpolarendiagramms.

hinzugenommen werden:

Das Stoßpolarendiagramm liefert (Abb. 83) entweder

$$\hat{w}, \vartheta, \frac{\hat{p}_0}{p_0} \quad \text{zu vorgegebenen } w, \sigma$$

oder

$$\hat{w}, \sigma, \frac{\hat{p}_0}{p_0} \quad \text{zu vorgegebenen } w, \vartheta.$$

Aus dem Charakteristikendiagramm erhält man zum Endpunkt P von \hat{w} die Ziffernsumme \hat{s} , zu der man aus Zahlentafel 2 (vgl. S. 57) das Druckverhältnis \hat{p}/\hat{p}_0 entnimmt. Um den Druck \hat{p} hinter dem Stoß durch den Ruhedruck p_0 vor dem Stoß auszudrücken, bildet man

$$\frac{\hat{p}}{p_0} = \frac{\hat{p}}{\hat{p}_0} \cdot \frac{\hat{p}_0}{p_0},$$

wobei sich das Ruhedruckverhältnis \hat{p}_0/p_0 mit Hilfe der im Stoßpolarendiagramm gestrichelten Linien ergibt.

In einem verhältnismäßig großen Gebiet des Stoßpolarendiagramms kann mit ausreichender Genauigkeit $\frac{\hat{p}_0}{p_0} = 1$ gesetzt werden (vgl. S. 78);

nach Gl. (145) hat man dann keine merkliche Entropiezunahme, also praktisch eine adiabatische Zustandsänderung. Außerdem sei daran erinnert, daß wegen der Übereinstimmung in Tangente und Krümmung (vgl. S. 112) die Stoßpolaren bei schwachen Stößen durch die Kurven des Charakteristikendiagramms ersetzt werden können.

2. Zusammentreffen von Stoßlinien und MACHschen Linien. Die Anwendung des durch Hinzunahme des Stoßpolarendiagramms ergänzten Charakteristikenverfahrens beruht auf der Lösung der im folgenden zusammengestellten Grundaufgaben für die Reflexion, das Durchkreuzen und Einholen von Stoßlinien (Abb. 84).

In Abb. 84 ist jeweils oben das Strömungsfeld und darunter das Geschwindigkeitsbild dargestellt. Die Stoßlinien und zugeordneten Stoßpolaren sind stark ausgezogen, die MACHschen Verdünnungslinien und die entsprechenden Hauptkurven dünn gestrichelt, die „Wirbelschichten“, an denen Strömungen mit verschiedenem Geschwindigkeitsbetrag aneinander vorbeigleiten, durch Doppellinien angedeutet.

Wir behandeln nun die einzelnen Grundaufgaben¹:

a) *Reflexion einer Stoßlinie an einer Wand.* Gegeben sind mit der einfallenden Stoßlinie die Strömungen 1, 2, denen im Geschwindigkeitsbild die gleichbezahlten Punkte 1, 2 entsprechen; Punkt 2 liegt auf der Stoßpolaren des Punktes 1. Vom Punkt 2 aus geht man auf der Stoßpolaren dieses Punktes weiter bis zum Schnittpunkt 3 mit dem Strahl $O1$; durch 3 ist der reflektierte Verdichtungsstoß festgelegt.

Wenn die gegebene Stoßlinie zu steil einfällt, existiert kein reeller Schnittpunkt 3, die verlangte

¹ Vgl. PREISWERK, F.: Diss. Techn. Hochsch. Zürich 1938.

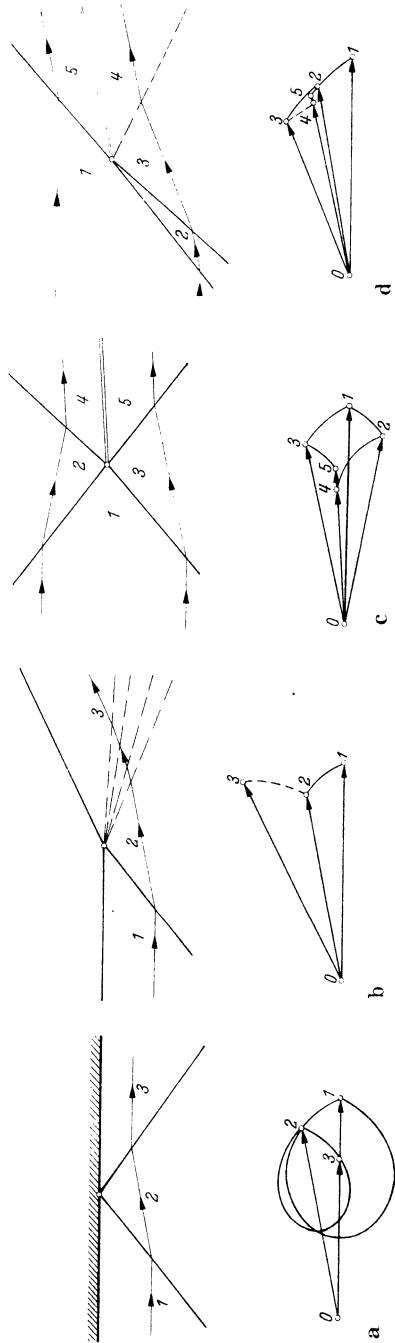


Abb. 84. Reflexion, Durchkreuzen und Einholen von Stoßlinien.

Grenzbedingung ist dann nicht erfüllbar. Bei schwachen Verdichtungsstößen kann man die Stoßpolaren durch Hauptkurven ersetzen und Abb. 84a spezialisiert sich zu Abb. 77.

b) *Reflexion einer Stoßlinie an einer freien Strahlgrenze.* Gegeben sind wie bei a) die Strömungen bzw. Punkte 1, 2. Der einfallende Verdichtungsstoß wird als stetige Verdünnung reflektiert, der im Geschwindigkeitsbild die vom Punkt 2 ausgehende Hauptkurve entspricht. Der Endpunkt 3 liegt auf dem Kreis, dessen Radius $\overline{O3} = w$ durch den vorgegebenen Außendruck bestimmt ist.

Bei schwachen Verdichtungsstößen spezialisiert sich Abb. 84b zu Abb. 81.

c) *Durchkreuzen zweier Stoßlinien.* Gegeben sind mit den beiden ankommenden Stoßlinien die Strömungen 1, 2, 3 und die entsprechenden gleichbezahlten Punkte im Geschwindigkeitsbild; die Punkte 2 und 3 liegen auf der Stoßpolaren des Punktes 1. Die Konstruktion erfolgt mittels der vom Punkt 2 bzw. 3 ausgehenden Stoßpolaren 24 bzw. 35. Die Endpunkte 4, 5 müssen auf demselben Strahl durch O liegen und denselben Druck liefern. Den Punkten 4, 5 entsprechen dann zwei Strömungen gleichen Drucks und gleicher Geschwindigkeitsrichtung, die längs der in Abb. 84c durch eine Doppellinie dargestellten Wirbelschicht mit einem Sprung im Geschwindigkeitsbetrag aneinander vorbeigleiten.

Bei Symmetrie gegenüber $O1$ werden die Strömungen 4 und 5 miteinander identisch und die Wirbelschicht verschwindet.

Wenn eine der beiden einfallenden Stoßlinien in eine MACHsche Linie entartet, gilt dasselbe auch für eine der beiden Stoßlinien nach der Durchkreuzung; die zugeordneten Stoßpolaren spezialisieren sich dabei zu Hauptkurven.

d) *Einholen zweier Stoßlinien.* Gegeben sind mit den beiden ankommenden Stoßlinien die Strömungen bzw. Punkte 1, 2, 3; Punkt 2 liegt auf der Stoßpolaren von 1, Punkt 3 auf der Stoßpolaren von 2. Die Konstruktion erfolgt mittels der Stoßpolaren bzw. Hauptkurve 34 und der Fortsetzung der von 1 ausgehenden Stoßpolaren über Punkt 2 hinaus bis zu Punkt 5. Die Endpunkte 4, 5 müssen wie bei c) auf demselben Strahl durch O liegen und denselben Druck liefern; die zugeordneten Strömungen gleiten wieder längs einer Wirbelschicht aneinander vorüber.

Wie bei c) kann eine der beiden ankommenden Stoßlinien zu einer MACHschen Linie und die entsprechende Stoßpolare zu einer Hauptkurve entarten.

Von grundsätzlicher Wichtigkeit ist die durch Unstetigkeit des Geschwindigkeitsbetrags hervorgerufene Wirbelschicht, die nach c) und d) beim Zusammentreffen von Stoßlinien miteinander oder von Stoßlinien und MACHschen Linien ausgelöst wird. Da eine stetig gekrümmte Stoß-

linie sich durch Grenzübergang aus dem wiederholten Zusammentreffen von Stoßlinien mit MACHSchen Linien ergibt (vgl. Abb. 86), so erhält man durch fortgesetzte Anwendung der Konstruktion d) immer neue Wirbelschichten, die schließlich beim Grenzübergang das ganze Strömungsfeld stromabwärts der Stoßlinie erfüllen. Hieraus folgt der bereits auf S. 122 angekündigte Satz:

Eine Potentialströmung geht an einer gekrümmten Stoßlinie in eine von Wirbelschichten durchzogene, also nicht mehr wirbelfreie Strömung über.

In § 20 werden wir diesen Satz streng beweisen und das Wirbelfeld näher untersuchen.

Der Geschwindigkeitssprung an der Wirbelschicht wird bei c) und d) sehr gering, wenn die eine der beiden ankommenden Stoßlinien sich zu

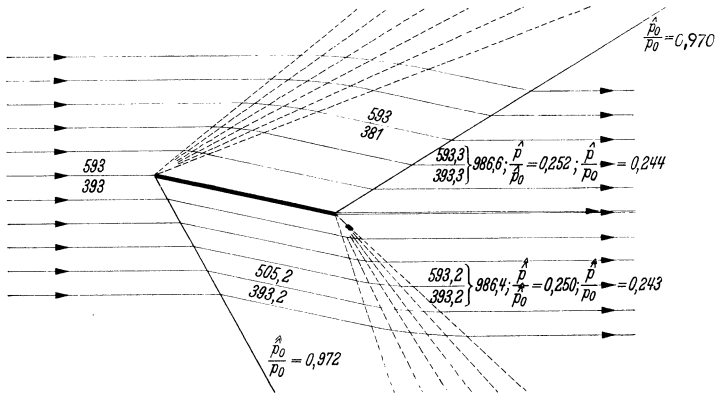


Abb. 85. Überschallströmung um ein geradliniges Profil (nach A. BUSEMANN).

einer MACHSchen Linie spezialisiert. Infolgedessen werden wir beim Zusammentreffen einer Stoßlinie und einer MACHSchen Linie die Wirbelschicht in den folgenden Beispielen vernachlässigen. Außerdem ist bei d), wenn eine der beiden ankommenden Stoßlinien zu einer MACHSchen Linie entartet, der Geschwindigkeitsunterschied in den Strömungen 3 und 4 so gering, daß wir auch die MACHSche Linie zwischen den Gebieten 3 und 4 vernachlässigen können, so daß schließlich die drei Strömungen 3, 4 und 5 in eine einzige verschmelzen.

3. Beispiele. a) *Überschallströmung um ein geradliniges Profil.* Als Randbedingungen hat man stromaufwärts die vorgegebene Grundströmung, der im Charakteristikendiagramm der Punkt $\begin{pmatrix} 593 \\ 393 \end{pmatrix}$ entsprechen möge, ferner längs des Profils die Geschwindigkeitsrichtung und stromabwärts ebenfalls die Geschwindigkeitsrichtung, die naturgemäß parallel zur Grundströmung angenommen wird (Abb. 85).

Auf der Oberseite des Profils ergibt sich vorne eine stetige Verdünnung von $\begin{pmatrix} 593 \\ 393 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} 593 \\ 381 \end{pmatrix}$ mittels Charakteristikendiagramm und hinten ein

Verdichtungsstoß von $\left(\begin{smallmatrix} 593 \\ 381 \end{smallmatrix}\right)$ auf $\left(\begin{smallmatrix} 593,3 \\ 393,3 \end{smallmatrix}\right)$ mit $\frac{\hat{p}_0}{p_0} = 0,970$ mittels Stoßpolarendiagramm. Auf der Unterseite kommt vorne ein Verdichtungsstoß von $\left(\begin{smallmatrix} 593 \\ 393 \end{smallmatrix}\right)$ auf $\left(\begin{smallmatrix} 505,2 \\ 393,2 \end{smallmatrix}\right)$ mit $\frac{\hat{p}_0}{p_0} = 0,972$ und hinten eine stetige Verdünnung von $\left(\begin{smallmatrix} 505,2 \\ 393,2 \end{smallmatrix}\right)$ auf $\left(\begin{smallmatrix} 593,2 \\ 393,2 \end{smallmatrix}\right)$.

Hinter dem Profil folgt hieraus für den Geschwindigkeitsbetrag oben $\hat{s} = 986,6$ und unten $\hat{s} = 986,4$, d. h. von der Hinterkante geht stromabwärts eine Wirbelschicht aus. Der Druck zu beiden Seiten der Wirbel-

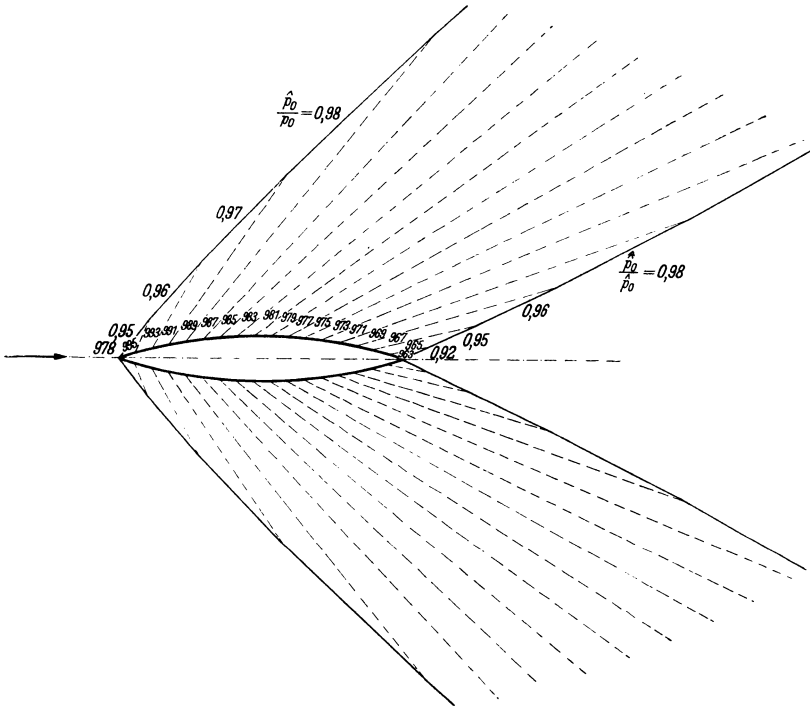


Abb. 86. Überschallströmung um ein nicht geradliniges Profil (nach A. BUSEMANN).

schicht kann mit ausreichender Genauigkeit als gleich betrachtet werden. Auf der oberen Seite hat man nämlich nach Zahlentafel 2 zu $\hat{s} = 986,6$ das Druckverhältnis $\frac{\hat{p}}{p_0} = 0,252$, also

$$\frac{\hat{p}}{p_0} = \frac{\hat{p}}{\hat{p}_0} \cdot \frac{\hat{p}_0}{p_0} = 0,252 \cdot 0,970 = 0,244,$$

während auf der unteren Seite zu $\hat{s} = 986,4$ das Druckverhältnis $\frac{\hat{p}}{p_0} = 0,250$, also

$$\frac{\hat{p}}{p_0} = \frac{\hat{p}}{\hat{p}_0} \cdot \frac{\hat{p}_0}{p_0} = 0,250 \cdot 0,972 = 0,243 \approx \frac{\hat{p}}{p_0}$$

folgt.

b) *Überschallströmung um ein nicht geradliniges Profil.* Wir wenden uns jetzt zur strengen Behandlung der auf S. 40 in linearisierter Näherung besprochenen Überschallströmung um ein nicht geradliniges Profil (Abb. 86).

Die Randbedingungen sind dieselben wie bei a). Auf der Ober- und auf der Unterseite des Profils hat man zunächst vorne einen mittels Stoßpolarendiagramm zu konstruierenden Verdichtungsstoß, dann längs des Profils stetige Verdünnungen, die sich wie bei der Strömung längs einer festen Wand ergeben (vgl. Abb. 76), und schließlich hinten nochmals einen Verdichtungsstoß, der wie bei a) ein zur Grundströmung paralleles Abströmen bewirkt.

Die geradlinigen Verdünnungslinien treffen auf die von der Vorderkante und Hinterkante des Profils ausgehenden Stoßlinien. Hierbei ist jedesmal die Grundkonstruktion d) von S. 124 mit den auf S. 125 angegebenen Vernachlässigungen durchzuführen.

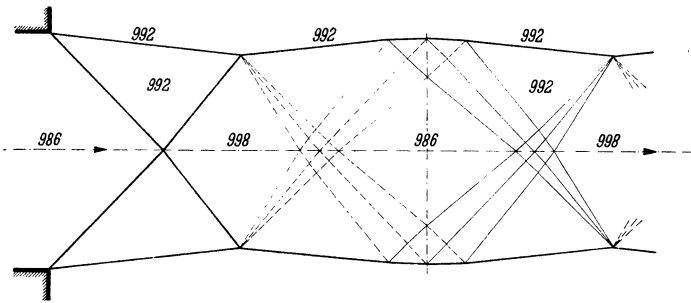


Abb. 87. Austritt eines Parallelstrahls aus einer ebenen Düse gegen Überdruck (nach A. BUSEMANN).

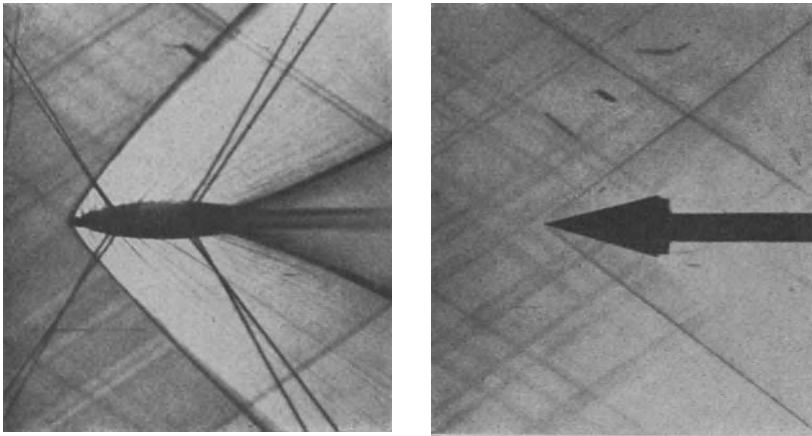
Beim Grenzübergang zum stetig gekrümmten Profil werden auch die vorderen und hinteren Stoßlinien („Kopfwelle“ und „Schwanzwelle“) stetig gekrümmte Kurven und an Stelle der Potentialströmung treten hinter den Stoßlinien wirbelige Strömungen, deren Wirbelstärke allerdings in dem vorliegenden Beispiel vernachlässigbar klein ist.

c) *Ausströmen gegen Überdruck.* Die Randbedingungen sind dieselben wie im Beispiel d) von S. 121 mit dem Unterschied, daß jetzt der Außendruck größer ist als der Druck des ausströmenden Gases (Abb. 87).

Von den Ecken der Düsenmündung gehen Verdichtungsstöße aus, die sich nach Grundaufgabe c) von S. 124 durchkreuzen und nach Grundaufgabe b) an den freien Strahlengrenzen als stetige Verdünnungen reflektiert werden. Der weitere Verlauf ist dann derselbe wie beim Austritt eines Parallelstrahls gegen Unterdruck (vgl. Abb. 82).

Bei dem in Abb. 87 dargestellten Beispiel ist die Ruhedruckänderung bei den von der Düsenmündung ausgehenden Verdichtungsstößen vernachlässigt. Wegen der Symmetrie zur Düsenachse tritt beim Durchkreuzen der Stoßlinien keine Wirbelschicht auf.

In Abb. 88 sind zwei Schlierenaufnahmen (vgl. S. 39) angegeben. Aufnahme (a) zeigt die ebene Strömung um ein Kreisbogenprofil, für welche in Abb. 86 die Konstruktion durchgeführt worden war. Koppwelle und Schwanzwelle sowie mehrere vom Profil ausgehende MACHsche Linien sind deutlich zu erkennen, ebenso das MACHsche Netz der Grundströmung. In Aufnahme (b) sieht man den von der Spitze eines axial angeströmten Kegels ausgehenden drehsymmetrischen Verdichtungsstoß (vgl. Abb. 54 rechts). Die von der Kegeloberfläche ausgehenden MACH



(a) Abb. 88. Schlierenaufnahmen. (b)

schen Linien werden wegen ihrer geringen Intensität vom MACHschen Netz der Grundströmung verdeckt. Die Aufnahmen wurden vom Aerodynamischen Institut Aachen freundlicherweise zur Verfügung gestellt.

4. Auftrieb und Widerstand für Überschallströmungen in strenger Behandlung. Während auf S. 42 die Druckverteilung an einem Profil linearisierter Näherung betrachtet wurde, sollen jetzt die entsprechenden Beziehungen der strengen Theorie zusammengestellt werden¹. Die praktische Bedeutung der strengen Formeln ist nur gering, da in Anbetracht der anderweitigen Vernachlässigungen, insbesondere der vernachlässigten Reibung in der Grenzschicht, die Verschärfung der linearisierten Theorie keinen nennenswerten Gewinn bringt. Wir werden deshalb in folgenden die Herleitung der Formeln unter Weglassung der Zwischerechnungen nur kurz andeuten.

Wir sehen zunächst von Verdichtungsstößen ab und ersetzen die linearisierte Gl. (87) durch die aus Gl. (119) folgende strenge Druckgleichung

¹ BUSEMANN, A.: Voltakongreß, S. 328—360.

$$\Delta p = - \int_0^{\vartheta} 2 q \operatorname{tg} \alpha d\vartheta = - \int_0^{\vartheta} \frac{\rho w^2 d\vartheta}{\sqrt{M^2 - 1}},$$

wobei zwischen ρ, w, M und ϑ die auf S. 56 auseinandergesetzten Beziehungen bestehen.

Durch Entwicklung des Integrals in eine Potenzreihe nach ϑ kommt

$$\Delta p = \bar{q} (\pm C_1 \vartheta + C_2 \vartheta^2 \pm C_3 \vartheta^3 + \dots) \geq 0 \quad (199)$$

mit

$$C_1 = \frac{2}{\sqrt{M^2 - 1}}, \quad C_2 = \frac{(\bar{M}^2 - 2)^2 + k \bar{M}^4}{2(\bar{M}^2 - 1)^2},$$

$$C_3 = \frac{\bar{M}^4 \left[\frac{k+1}{4} \left(\bar{M}^2 + \frac{5+7k-2k^2}{2(k+1)} \right)^2 + \frac{-4k^4 + 28k^3 + 11k^2 - 8k - 3}{24(k+1)} \right] + \frac{3}{4} (\bar{M}^2 - \frac{4}{3})^2}{(\bar{M}^2 - 1)^{7/2}}. \quad (200)$$

Hierbei bezieht sich die MACHSche Zahl \bar{M} und der Staudruck \bar{q} auf die Grundströmung. Der Neigungswinkel ϑ wird wieder in derselben Weise wie der Anstellwinkel des Tragflügels gezählt; das Plus- bzw. Minuszeichen in Gl. (199) gilt für die Unterseite bzw. Oberseite des Profils, ebenso wie in Gl. (89).

Wenn an Stelle einer stetigen adiabatischen Verdichtung ein Verdichtungsstoß mit demselben Ablenkungswinkel ϑ tritt, ergibt sich mit Hilfe der Stoßbeziehung die Potenzentwicklung

$$\Delta p_{\text{stoss}} = \bar{q} (\pm C_1 \vartheta + C_2 \vartheta^2 + (C_3 - D) \vartheta^3 + \dots) > 0 \quad (201)$$

mit

$$D = \frac{\frac{k+1}{12} \bar{M}^4 \left[\frac{5-3k}{4} \left(\bar{M}^2 - \frac{6-2k}{5-3k} \right)^2 - \frac{k^2+1}{5-3k} \right]}{(\bar{M}^2 - 1)^{7/2}} \geq 0. \quad (202)$$

Die Faktoren C_1, C_2, C_3 sind für alle vollkommenen Gase mit $1 \leq k \leq 1,667$ bemerkenswerter Weise positiv, während der Faktor D auch negativ werden kann. Die Gegenüberstellung von Gl. (199) und (201) zeigt eine Abweichung erst in den Gliedern dritter Ordnung. Außerdem beachte man, daß bei der Rückkehr zur Ausgangsrichtung die Druckänderung Δp gemäß Gl. (199) wegen der Reversibilität der adiabatischen Zustandsänderungen wieder verschwindet, während bei der Druckänderung Δp_{stoss} gemäß Gl. (201) das irreversible Glied mit dem Faktor D bestehen bleibt.

Aus den Druckformeln (199) bzw. (201) lassen sich ähnlich wie in der linearisierten Theorie Auftrieb und Wellenwiderstand berechnen. Die Berücksichtigung der höheren Glieder in den Potenzreihen erfordert jetzt aber eine entsprechende Genauigkeit auch bei der Integration der Drucke

längs des Profils. Infolgedessen muß zwischen den Bogenelementen ds_o, ds_u der Profillober- und -unterseite und deren Projektionen dl auf die Profiltiefe L (vgl. Abb. 89) unterschieden werden, d. h. wir dürfen die strengen Formeln (90) nicht mehr durch Näherungsformeln wie auf S. 43 ersetzen.

Nach längerer Rechnung ergeben sich aus den Druckformeln (199), (201) für Auftriebs- und Widerstandsbeiwert folgende Potenzentwicklungen nach dem Anstellwinkel ϑ gegen die Profiltiefe:

$$c_a = [(B_{1u} + B_{1o}) C_1 + (B_{2u} - B_{2o}) C_2 + (B_{3u} + B_{3o}) (C_3 - \frac{1}{2} C_1)] + [(B_{0u} + B_{0o}) C_1 + (B_{1u} - B_{1o}) C_2 + 3 (B_{2u} + B_{2o}) (C_3 - \frac{1}{2} C_1)] \bar{\vartheta} + [3 (B_{1u} + B_{1o}) (C_3 - \frac{1}{2} C_1)] \bar{\vartheta}^2 + 2 (C_3 - \frac{1}{2} C_1) \bar{\vartheta}^3 - D \left[\frac{\vartheta_{vu}^3 + |\vartheta_{vu}|^3}{2} + \frac{\vartheta_{vo}^3 - |\vartheta_{vo}|^3}{2} \right], \tag{203}$$

$$c_w = [(B_{2u} + B_{2o}) C_1 + (B_{3u} - B_{3o}) C_2 + (B_{4u} + B_{4o}) (C_3 - \frac{1}{6} C_1)] + [2 (B_{1u} + B_{1o}) C_1 + 3 (B_{2u} - B_{2o}) C_2 + 4 (B_{3u} + B_{3o}) (C_3 - \frac{1}{6} C_1)] \bar{\vartheta} + [(B_{0u} + B_{0o}) C_1 + 3 (B_{1u} - B_{1o}) C_2 + 6 (B_{2u} + B_{2o}) (C_3 - \frac{1}{6} C_1)] \bar{\vartheta}^2 + [4 (B_{1u} + B_{1o}) (C_3 - \frac{1}{6} C_1)] \bar{\vartheta}^3 + 2 (C_3 - \frac{1}{6} C_1) \bar{\vartheta}^4 - D \left[\frac{\vartheta_{vu}^3 + |\vartheta_{vu}|^3}{2} + \frac{\vartheta_{vo}^3 - |\vartheta_{vo}|^3}{2} \right] \bar{\vartheta}.$$

Hierbei ist angenommen, wie dies vernünftigen Tragflügelprofilen entspricht, daß nur an der Vorderkante Verdichtungsstöße auftreten, und zwar unten bzw. oben mit den Ablenkungswinkeln $\vartheta_{vu}, \vartheta_{vo}$. Der untere Verdichtungsstoß ist nur für positives ϑ_{vu} , der obere nur für negatives ϑ_{vo} vorhanden; dementsprechend ist in den Formeln (203)

$$\frac{\vartheta_{vu}^3 + |\vartheta_{vu}|^3}{2} = \begin{cases} \vartheta_{vu}^3 & \text{für } \vartheta_{vu} > 0 \\ 0 & \text{für } \vartheta_{vu} < 0 \end{cases},$$

$$\frac{\vartheta_{vo}^3 - |\vartheta_{vo}|^3}{2} = \begin{cases} 0 & \text{für } \vartheta_{vo} > 0 \\ \vartheta_{vo}^3 & \text{für } \vartheta_{vo} < 0 \end{cases}.$$

Die in Gl. (203) vorkommenden Größen B_{nu}, B_{no} ($n = 0, 1, 2, \dots$) sind in Verallgemeinerung von Gl. (92) durch die Integrale

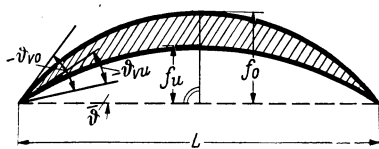


Abb. 89. Sichelförmiges Kreisbogenprofil.

$$B_{nu} = \frac{1}{L} \int_{s_o}^{s_u} (\vartheta'_u)^n ds_u,$$

$$B_{no} = \frac{1}{L} \int_0^{s_o} (\vartheta'_o)^n ds_o$$

definiert und hängen demgemäß nur von der geometrischen Gestalt des Profils ab.

Die Auftriebs- und Widerstandsformeln (93) der linearisierten Theorie ergeben sich aus Gl. (203) durch Abbrechen mit $\bar{\vartheta}$ bei c_a und mit $\bar{\vartheta}^2$ bei c_w

Als Beispiel betrachten wir die Überschallströmung um ein sichelförmiges Kreisbogenprofil (Abb. 89):

Aus den dimensionslosen Pfeilhöhen

$$\delta_o = \frac{f_o}{L}, \quad \delta_u = \frac{f_u}{L}$$

erhält man die Ablenkungswinkel an der Vorderkante

$$\vartheta_{vu} = \bar{\vartheta} - 4 \delta_u, \quad \vartheta_{vo} = \bar{\vartheta} - 4 \delta_o$$

und für die geometrischen Größen B_{no} , B_{nu} mit geradem n

$$\begin{aligned} B_{0u} &= 1 + \frac{8}{3} \delta_u^2, & B_{0o} &= 1 + \frac{8}{3} \delta_o^2, \\ B_{2u} &= \frac{16}{3} \delta_u^2, & B_{2o} &= \frac{16}{3} \delta_o^2, \\ B_{4u} &= \frac{64}{5} \delta_u^4, & B_{4o} &= \frac{64}{5} \delta_o^4; \end{aligned}$$

die B_{nu} , B_{no} mit ungeradem n sind hier wie für alle zur Hochachse symmetrischen Profile gleich Null. Man beachte, daß im Gegensatz zur Formel (93) der linearisierten Theorie der Auftriebsbeiwert c_a für Anstellwinkel $\bar{\vartheta} = 0$ in der strengen Theorie nicht verschwindet.

5. Profilpaare mit verschwindendem Widerstand¹. Während ein Einzelprofil sowohl in der linearisierten Näherung (vgl. S. 40) als auch in der strengen Theorie (vgl. S. 126) bei Überschallströmung einen Wellenwiderstand hervorruft, kann man Profilpaare konstruieren, für welche bei Anstellwinkel Null der Wellenwiderstand verschwindet.

Solche Profilpaare liegen offenbar vor:

a) wenn von den Außenseiten der Profile keine MACHschen Linien ausgehen,

b) wenn die MACHschen Linien zwischen den beiden Profilen sich gegenseitig auslöschen, so daß die Strömungsgeschwindigkeit des zwischen die beiden Profile eintretenden Parallelstrahls gleich der Austrittsgeschwindigkeit ist,

c) wenn keine Verdichtungsstöße vorkommen.

Man hat dann nämlich auf den Außenseiten des Profilpaares keinen Über- oder Unterdruck und im Zwischengebiet des Profils ergibt sich bei Anwendung des Impulssatzes (vgl. S. 3) keine resultierende Druckkraft, also weder Auftrieb noch Widerstand.

Die Forderung a) ist erfüllt, wenn die Außenseiten der Profile unter dem Anstellwinkel Null angestellte Gerade sind. Die gekrümmten Innenseiten des Profilpaares müssen wegen c) vorne und hinten „unendlich dünn“ sein, d. h. die geradlinigen Außenseiten berühren. Um b) zu befriedigen, nimmt man das Profilpaar symmetrisch zur Hochachse und korrigiert nach Beispiel c) von S. 120 für eine beliebig vorgegebene ungestörte Überschallgeschwindigkeit im mittleren Querschnitt einen eben-

¹ BUSEMANN, A.: Voltakongreß, S. 328—360.

falls beliebigen Anfangsbogen auf paralleles Ausströmen (Abb. 90). Die Innenseiten der Profile können als die Wände einer ebenen „Venturidüse“ betrachtet werden, welche einen mit Überschallgeschwindigkeit ein-

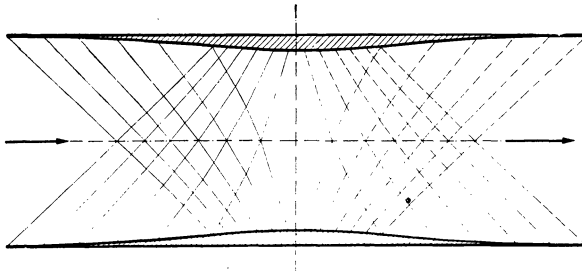


Abb. 90. Profilvereinigung mit verschwindendem Widerstand (nach A. BUSEMANN).

tretenden Parallelstrahl bis zum engsten Querschnitt auf geringere Überschallgeschwindigkeit abbremsen und hernach wieder auf die Eintrittsgeschwindigkeit beschleunigen.

Man beachte, daß die Forderung des verschwindenden Wellenwiderstands nur für den Anstellwinkel Null und die bei der Konstruktion der Profillinenseiten zugrundegelegte Anblasgeschwindigkeit erfüllt ist.

§ 20. Ebene und räumliche Strömungen mit Wirbeln.

1. Aerodynamische und thermodynamische Grundgleichung. In § 19 wurde festgestellt, daß eine ebene Potentialströmung an einer gekrümmten Stoßlinie in eine nicht mehr wirbelfreie Strömung übergeht. Dieses Ergebnis soll jetzt analytisch streng begründet und gleichzeitig auch auf räumliche Strömungen sowie auf Strömungen mit Unterschallgeschwindigkeit hinter der Stoßlinie verallgemeinert werden. Das Problem wurde erstmals von L. CROCCO¹ behandelt, die folgenden Untersuchungen schließen sich jedoch an eine freundlicher Weise zur Verfügung gestellte briefliche Mitteilung von W. TOLLMIE² an, durch welche die Entwicklungen vereinfacht werden.

Wir gehen aus von der allgemeinen EULERSchen Bewegungsgleichung (1*)

$$\text{grad} \frac{w^2}{2} + \text{rot } w \times w = - \frac{1}{\rho} \text{grad } p,$$

der Kontinuitätsgleichung (2)

$$\text{div} (\rho w) = 0$$

und der aus Gl. (12) folgenden Entropiegleichung

$$\frac{p}{\rho^k} = f(S) \equiv e^{\frac{k-1}{R} JS} = e^{\frac{S}{c_v}}, \quad (20\pm)$$

¹ CROCCO, L.: Z. angew. Math. Mech. 17 (1937), S. 1–7, und Aerotecn. 17 (1937), S. 519–534.

² TOLLMIE, A.: Lufu 19 (1942), S. 145–147.

die für isentropische Zustandsänderungen mit $S = \text{const}$ in die Adiabaten-
gleichung (8) übergeht.

Außerdem setzen wir einen für die ganze Strömung konstanten Ruhe-
Wärmeinhalt voraus und benutzen die Energiegleichung (14) in der Form

$$\frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} + \frac{w^2}{2} = \frac{w_{\max}^2}{2}, \quad (205)$$

die sich aus Gl. (14) und (16) durch Elimination von p_0 ergibt, sowie die
Gl. (15) bzw. (15*)

$$c^2 = k \frac{p}{\rho} = \frac{k-1}{2} (w_{\max}^2 - w^2)$$

für die Schallgeschwindigkeit.

Aus Gl. (204) und (205) folgt

$$\begin{aligned} \rho &= \left[\frac{k-1}{2k} (w_{\max}^2 - w^2) \right]^{\frac{1}{k-1}} \cdot f^{-\frac{1}{k-1}}, \\ p &= \left[\frac{k-1}{2k} (w_{\max}^2 - w^2) \right]^{\frac{k}{k-1}} \cdot f^{-\frac{1}{k-1}} \end{aligned} \quad (206)$$

und danach

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \text{grad } p &= \frac{1}{\rho} \text{grad} \left\{ \left[\frac{k-1}{2k} (w_{\max}^2 - w^2) \right]^{\frac{k}{k-1}} f^{-\frac{1}{k-1}} \right\} \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{1}{k-1} f^{-\frac{k}{k-1}} \left[\frac{k-1}{2k} (w_{\max}^2 - w^2) \right]^{\frac{k}{k-1}} \text{grad } f \\ &\quad - \frac{1}{\rho} f^{-\frac{1}{k-1}} \left[\frac{k-1}{2k} (w_{\max}^2 - w^2) \right]^{\frac{1}{k-1}} \text{grad } \frac{w^2}{2} \\ &= -\frac{1}{2k} (w_{\max}^2 - w^2) \frac{\text{grad } f}{f} - \text{grad } \frac{w^2}{2}. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in die Bewegungsgleichung (1**) kommt unter Berücksichtigung von Gl. (204) und (15*) die „Wirbelgleichung“

$$\text{rot } \mathbf{w} \times \mathbf{w} = \frac{1}{2k} (w_{\max}^2 - w^2) \text{grad } \ln f = \frac{c^2}{kR} \text{grad } (JS). \quad (207)$$

Auf Grund der Wirbelgleichung hat $S \neq \text{const}$ notwendig $\text{rot } \mathbf{w} \neq 0$
und umgekehrt $\text{rot } \mathbf{w} = 0$ notwendig $S = \text{const}$ zur Folge; wir haben
damit den wichtigen Satz:

Eine Strömung, die nicht im ganzen Strömungsfeld isentropisch ist,
kann nicht wirbelfrei sein, ist also keine Potentialströmung. Umgekehrt
ist eine Potentialströmung stets isentropisch und daher reversibel.

Dieser Satz enthält die angekündigte strenge Begründung für das
bereits in § 19 plausibel gewonnene Ergebnis, daß eine Parallelströmung
an einer gekrümmten Stoßlinie in eine nicht mehr wirbelfreie Strömung
verwandelt wird; denn nach Gl. (150) ändert sich der Ruhedruck \hat{p}_0 und
nach Gl. (145) auch die Entropie S längs der Stoßlinie als Funktion des
Stoßwinkels σ .

Durch skalare Multiplikation von Gl. (207) mit w kommt

$$w \operatorname{grad} f = 0, \quad w \operatorname{grad} S = 0; \quad (208)$$

d. h. $f = \frac{p}{\rho^k}$ und S sind konstant längs jeder Stromlinie, ändern aber im allgemeinen den Wert der Konstanten von Stromlinie zu Stromlinie. Mit anderen Worten:

Die betrachtete Strömung ist zwar nicht im ganzen Strömungsbereich, wohl aber längs jeder Stromlinie adiabatisch und isentropisch.

Ebenso wie die EULERSche Bewegungsgleichung (1**) soll nun auch die Kontinuitätsgleichung (2) umgeformt werden:

Nach Gl. (206) hat man

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\rho w) &= \left(\frac{k-1}{2k}\right)^{\frac{1}{k-1}} f^{-\frac{1}{k-1}} \operatorname{div} \left[(w_{\max}^2 - w^2)^{\frac{1}{k-1}} w \right] \\ &\quad - \left(\frac{k-1}{2k}\right)^{\frac{1}{k-1}} \frac{1}{k-1} f^{-\frac{k}{k-1}} (w_{\max}^2 - w^2)^{\frac{1}{k-1}} w \operatorname{grad} f, \end{aligned}$$

so daß die Kontinuitätsbedingung (2) mit Berücksichtigung von Gl. (208) in

$$\operatorname{div} \left[(w_{\max}^2 - w^2)^{\frac{1}{k-1}} w \right] = 0 \quad (209)$$

übergeht.

Die Wirbelgleichung (207) und die Kontinuitätsgleichung (209) bilden die Grundlage für die weitere Untersuchung der nicht wirbelfreien kompressiblen Strömungen. Sie gelten natürlich nur für stetige Zustandsänderungen, also für Strömungsverläufe zwischen aufeinanderfolgenden Verdichtungsstößen.

Im folgenden werden die Betrachtungen auf ebene und auf achsensymmetrische räumliche Strömungen spezialisiert. Zur Vereinfachung der Formeln benutzen wir hierbei die dimensionslose Strömungsgeschwindigkeit

$$\mathfrak{B} = \frac{w}{w_{\max}}, \quad W = \frac{w}{w_{\max}} = M^* \left| \frac{k-1}{k+1} \right|$$

und die dimensionslose Schallgeschwindigkeit

$$C = \frac{c}{w_{\max}},$$

so daß Gl. (207), (209) und (15*) zu ersetzen sind durch

$$\operatorname{rot} \mathfrak{B} \times \mathfrak{B} = \frac{1}{2k} (1 - W^2) \operatorname{grad} \ln f, \quad (207^*)$$

$$\operatorname{div} \left[\mathfrak{B} (1 - W^2)^{\frac{1}{k-1}} \right] = 0, \quad (209^*)$$

$$C^2 = \frac{k-1}{2} (1 - W^2). \quad (15^{**})$$

2. Ebene Strömungen mit Wirbeln. Für ebene Strömungen wird die Kontinuitätsgleichung (209*) durch den Ansatz

$$\left. \begin{aligned} U(1 - W^2)^{\frac{1}{k-1}} &= \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ -V(1 - W^2)^{\frac{1}{k-1}} &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \right\} (210)$$

befriedigt. Die hierdurch definierte „Stromfunktion“ $\psi(x, y)$ liefert mit $\psi = \text{const}$ die Stromlinien und spezialisiert sich bei wirbelfreien, also isentropischen Strömungen nach Gl. (206) mit

$$(1 - W^2)^{\frac{1}{k-1}} = a\rho \quad (a = \text{const}),$$

also

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -a\rho V, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = a\rho U$$

zu der auf S. 20 eingeführten Stromfunktion, abgesehen von einem belanglosen konstanten Faktor; es ist somit gelungen die Stromfunktion ψ von wirbelfreien auf nicht wirbelfreie Strömungen zu verallgemeinern.

Die Wirbelgleichung (207*) gibt die beiden Komponentengleichungen

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) V &= \frac{1}{2k}(1 - W^2) \frac{d \ln f(\psi)}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) U &= \frac{1}{2k}(1 - W^2) \frac{d \ln f(\psi)}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial y}; \end{aligned}$$

hierbei ist berücksichtigt, daß f längs jeder Stromlinie konstant und demgemäß eine Funktion von ψ ist. Drückt man V bzw. U mittels Gl. (210) durch $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ bzw. $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ aus, so erhält man die Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{2k}(1 - W^2)^{\frac{k}{k-1}} \frac{d \ln f(\psi)}{d\psi}. \quad (211)$$

Durch Umformung von Gl. (211) suchen wir nun eine Differentialgleichung für die Stromfunktion ψ zu gewinnen:

Aus Gl. (210) ergibt sich

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\psi_{xx}(1 - W^2)^{-\frac{1}{k-1}} - \frac{\psi_x}{k-1}(1 - W^2)^{-\frac{k}{k-1}} \frac{\partial(W^2)}{\partial x}$$

und weiter mit Hilfe von Gl. (15**)

$$-(1 - W^2)^{\frac{1}{k-1}} \frac{\partial V}{\partial x} = \psi_{xx} + \frac{\psi_x}{2C^2} \frac{\partial(W^2)}{\partial x} = \psi_{xx} - \frac{V(1 - W^2)^{\frac{1}{k-1}} \partial(W^2)}{2C^2 \partial x}. \quad (212)$$

Analog kommt

$$(1 - W^2)^{\frac{1}{k-1}} \frac{\partial U}{\partial y} = \psi_{yy} + \frac{\psi_y}{2C^2} \frac{\partial(W^2)}{\partial y} = \psi_{yy} + \frac{U(1 - W^2)^{\frac{1}{k-1}} \partial(W^2)}{2C^2 \partial y}. \quad (213)$$

Zur Umformung von $\frac{\partial (W^2)}{\partial x}$ und $\frac{\partial (W^2)}{\partial y}$ benutzen wir

$$W^2 = U^2 + V^2 = (1 - W^2)^{-\frac{2}{k-1}} (\psi_x^2 + \psi_y^2),$$

$$W^2 (1 - W^2)^{\frac{2}{k-1}} = \psi_x^2 + \psi_y^2,$$

woraus durch Differentiation nach x

$$\begin{aligned} & \left[(1 - W^2)^{\frac{2}{k-1}} - \frac{2 W^2}{k-1} (1 - W^2)^{-\frac{k-1}{k-1}} \right] \frac{\partial (W^2)}{\partial x} \\ (1 - W^2)^{\frac{2}{k-1}} \left(1 - \frac{2 W^2}{k-1} \frac{W^2}{1 - W^2} \right) \frac{\partial (W^2)}{\partial x} &= (1 - W^2)^{\frac{2}{k-1}} \left(1 - \frac{W^2}{C^2} \right) \frac{\partial (W^2)}{\partial x} \\ &= 2 (\psi_x \psi_{xx} + \psi_y \psi_{xy}) = 2 (1 - W^2)^{\frac{1}{k-1}} (-V \psi_{xx} + U \psi_{xy}), \end{aligned}$$

also

$$(1 - W^2)^{\frac{1}{k-1}} \left(1 - \frac{W^2}{C^2} \right) \frac{\partial (W^2)}{\partial x} = 2 (-V \psi_{xx} + U \psi_{xy}) \quad (214)$$

und analog durch Differentiation nach y

$$(1 - W^2)^{\frac{1}{k-1}} \left(1 - \frac{W^2}{C^2} \right) \frac{\partial (W^2)}{\partial y} = 2 (-V \psi_{xy} + U \psi_{yy}) \quad (215)$$

folgt.

Die vier Gl. (212) bis (215) liefern

$$\begin{aligned} & - (1 - W^2)^{\frac{1}{k-1}} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) \\ &= \psi_{xx} + \psi_{yy} + \frac{1}{C^2 - W^2} (V^2 \psi_{xx} + U^2 \psi_{yy} - 2 U V \psi_{xy}) \\ &= \frac{1}{C^2 - W^2} [(C^2 - U^2) \psi_{xx} + (C^2 - V^2) \psi_{yy} - 2 U V \psi_{xy}]. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen von Gl. (211) ergibt sich schließlich nach kurzer Rechnung für die Stromfunktion ψ die gesuchte Differentialgleichung

$$\left. \begin{aligned} & \psi_{xx} \left(1 - \frac{U^2}{C^2} \right) + \psi_{yy} \left(1 - \frac{V^2}{C^2} \right) - 2 \frac{U V}{C^2} \psi_{xy} \\ &= \frac{1}{2 k} \left(\frac{W^2}{C^2} - 1 \right) (1 - W^2)^{\frac{k+1}{k-1}} \frac{d \ln f(\psi)}{d \psi}; \end{aligned} \right\} (216)$$

sie spezialisiert sich im isentropischen, wirbelfreien Sonderfall mit $f = \text{const}$ zur Stromfunktionsgleichung (47) von S. 21.

3. Achsensymmetrische räumliche Strömungen mit Wirbeln. Für achsensymmetrische räumliche Strömungen schreiben wir die Kontinuitätsgleichung (209*) in Zylinderkoordinaten:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[r U (1 - W^2)^{\frac{1}{k-1}} \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[r V (1 - W^2)^{\frac{1}{k-1}} \right] = 0$$

und befriedigen sie durch den zu Gl. (210) analogen Ansatz

$$\left. \begin{aligned} rU(1-W^2)^{\frac{1}{k-1}} &= \frac{\partial \psi}{\partial r}, \\ -rV(1-W^2)^{\frac{1}{k-1}} &= \frac{\partial \psi}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (217)$$

An Stelle von Gl. (211) kommt

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{r}{2k}(1-W^2)^{\frac{k}{k-1}} \frac{d \ln f(\psi)}{d \psi} \quad (218)$$

und nach längerer, zu S. 136 analoger Rechnung an Stelle von Gl. (216) die Differentialgleichung

$$\left. \begin{aligned} \psi_{xx} \left(1 - \frac{U^2}{C^2}\right) + \psi_{rr} \left(1 - \frac{V^2}{C^2}\right) - 2 \frac{UV}{C^2} \psi_{xr} - \frac{\psi_r}{r} \\ = \frac{r^2}{2k} \left(\frac{W^2}{C^2} - 1\right) (1 - W^2)^{\frac{k+1}{k-1}} \frac{d \ln f(\psi)}{d \psi}. \end{aligned} \right\} \quad (219)$$

Im Sonderfall der wirbelfreien Strömung spezialisiert sich, wieder abgesehen von einem belanglosen konstanten Faktor, die durch Gl. (217) definierte Stromfunktion ψ zu der auf S. 19 eingeführten Stromfunktion und die Differentialgleichung (219) zu Gl. (43).

§ 21. Charakteristikenverfahren für achsensymmetrische räumliche Überschallströmungen.

1. Geometrische Deutung der Potentialgleichung. Wir wenden uns jetzt wieder zur Potentialströmung, also wirbelfreien und isentropischen Strömung zurück und versuchen, das in § 18 und § 19 für ebene Überschallströmungen entwickelte Charakteristikenverfahren auf räumliche achsensymmetrische Überschallströmungen zu übertragen¹. Von praktischer Bedeutung ist das räumliche Problem in der Ballistik für die Untersuchung des Widerstands von Geschossen und in der Windkanal-Meßtechnik für die Herstellung drehsymmetrischer Überschalldüsen.

Das Charakteristikenverfahren für die Ebene beruht nach § 18 auf der Tatsache, daß dem mit den Randbedingungen veränderlichen MACHschen Netz der Strömungsebene ein festes, von den Randbedingungen unabhängiges Hauptnetz im Geschwindigkeitsbild entspricht. Analytisch bedeutet dies, daß die nichtlineare Potentialgleichung (44) durch die Legendre-Transformation (176) in die lineare Differentialgleichung (179) übergeführt werden kann. Eine analoge Linearisie-

¹ Über eine Verallgemeinerung auf nahezu achsensymmetrische Überschallströmungen vgl. R. SAUER: Lufo 19 (1942), S. 148—152. W. TOLLMIEß behandelt achsensymmetrische Strömungen mit stetig verteilten Wirbeln, E. GÜNDERLEY wendet das Charakteristikenverfahren noch allgemeiner an.

nung ist weder im allgemeinen noch im achsensymmetrischen räumlichen Fall möglich; die Legendre-Transformation verwandelt hier nämlich die Potentialgleichung (40) in die abermals nichtlineare Differentialgleichung

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \Phi_{uu} + \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \Phi_{vv} + 2 \frac{uv}{c^2} \Phi_{uv} + v \frac{1}{\Phi_v} (\Phi_{uu} \Phi_{vv} - \Phi_{uv}^2) = 0.$$

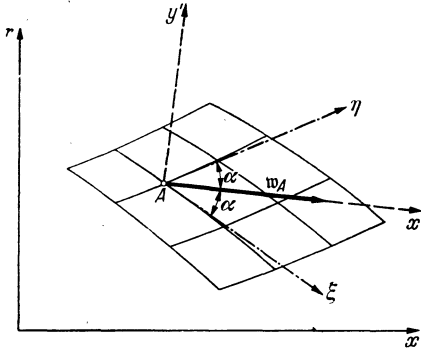


Abb. 91. Berührsysteme des MACHschen Netzes.

Man sieht, daß das letzte Glied in dem die Potentialgleichung (40) sich von Gl. (44) unterscheidet die Linearisierung verhindert.

Um trotzdem zu einem praktisch brauchbaren Charakteristikenverfahren auch im achsensymmetrischen räumlichen Fall zu gelangen, soll zunächst ein anschaulich-geometrische Deutung der Potentialgleichung (40) entwickelt werden¹:

Wegen der Achsensymmetrie kann die Untersuchung auf eine fest Meridianebene (x, r -Ebene) beschränkt bleiben. Wie auf S. 108 ersetzen wir die Strömung in der Umgebung eines jeden zu betrachtenden

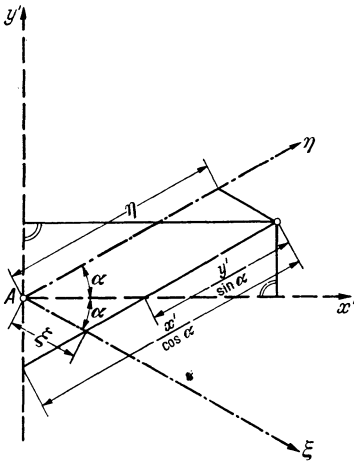


Abb. 92. Koordinatentransformation.

Punktes A durch die dort „berührende“ linearisierte Strömung und führen dem gemäß in der Umgebung von A an Stelle des strengen, krummlinigen MACHschen Netzes das geradlinige Berührsystem ein (Abb. 91); d. h. wir beziehen die Umgebung von A auf ein festes kartesisches ξ, η -Koordinatensystem mit dem Punkt A als Nullpunkt und den stromabwärts weisenden MACHschen Tangenten in A als Koordinatenachsen

Außerdem benutzen wir neben der ursprünglichen x, r -System noch das von den Winkelhalbierenden des ξ, η -Systems erzeugte rechtwinklige x', y' -Koordinatensystem (Abb. 92). Hierbei bestehen die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2} \left(\frac{x'}{\cos \alpha} - \frac{y'}{\sin \alpha} \right) = \frac{1}{\sin 2\alpha} (x' \sin \alpha - y' \cos \alpha), \\ \eta &= \frac{x'}{\cos \alpha} + \xi = \frac{1}{\sin 2\alpha} (x' \sin \alpha + y' \cos \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

¹ Vgl. hierzu auch FERRARI, C.: *Aerotecn.* 16 (1936), S. 121–130, und 1 (1937), S. 507–518, sowie *Atti di Torino* 72 (1936/37), S. 140–163.

Wir transformieren nun die Potentialgleichung (40) zunächst auf das x', y' -System und dann auf das ξ, η -System. Nach Weglassen des letzten Gliedes geht Gl. (40) in die ebene Potentialgleichung (44) über und ändert daher wie diese beim Übergang zu einem anderen rechtwinkligen Koordinatensystem die Gestalt nicht. Man hat also

$$\left[1 - \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x'}\right)^2}{c^2} \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} + \left[1 - \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y'}\right)^2}{c^2} \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2} - \frac{2}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x'} \frac{\partial \varphi}{\partial y'} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x' \partial y'} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0.$$

Da die x' -Achse mit der Strömungsrichtung in A zusammenfällt, reduziert sich im Punkt A diese Differentialgleichung mit

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'} = w, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y'} = 0, \quad 1 - \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x'}\right)^2}{c^2} = 1 - \frac{w^2}{c^2} = -\operatorname{ctg}^2 \alpha$$

zu der einfacheren Beziehung

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}. \tag{221}$$

Für die weitere Transformation auf das schiefwinklige ξ, η -Koordinatensystem erhält man aus Gl. (220) die Differentiationsregeln

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'} &= \frac{1}{\sin 2\alpha} \left(\sin \alpha \frac{\partial}{\partial \xi} + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial \eta} \right) = \frac{1}{2 \cos \alpha} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right), \\ \frac{\partial}{\partial y'} &= \frac{1}{\sin 2\alpha} \left(-\cos \alpha \frac{\partial}{\partial \xi} + \cos \alpha \frac{\partial}{\partial \eta} \right) = \frac{1}{2 \sin \alpha} \left(-\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right), \end{aligned} \right| \tag{222}$$

durch deren zweimalige Anwendung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} = \frac{1}{4 \cos^2 \alpha} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} \right),$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2} = \frac{1}{4 \sin^2 \alpha} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} \right)$$

folgt. Durch Einsetzen in Gl. (221) ergibt sich schließlich die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\sin^2 \alpha}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \tag{223}$$

die gemäß ihrer Herleitung nur im betrachteten Punkt A für das dort berührende ξ, η -System gilt.

Für die beabsichtigte geometrische Deutung führen wir jetzt den Geschwindigkeitsvektor w eines Punktes P der Umgebung von A ein. Die Komponenten von w im x', y' -System bezeichnen wir mit u', v' und die Projektionen von w parallel bzw. senkrecht zur ξ - und η -Achse mit p, q bzw. p_{\perp}, q_{\perp} (Abb. 93).

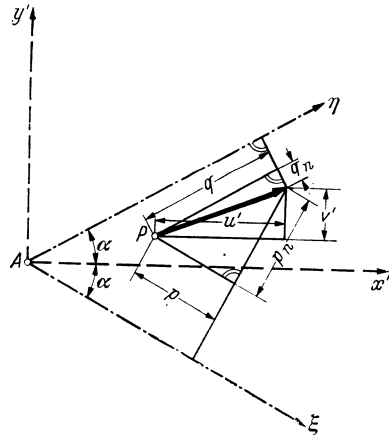


Abb. 93. Projektionen des Geschwindigkeitsvektors.

Aus Gl. (222) folgt dann

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = u' \cos \alpha - v' \sin \alpha = p,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = u' \cos \alpha + v' \sin \alpha = q,$$

so daß Gl. (223) gleichwertig ist mit den Bedingungen

$$\left. \begin{aligned} dp &= \frac{\sin^2 \alpha}{r} v d\eta, \\ dq &= \frac{\sin^2 \alpha}{r} v d\xi. \end{aligned} \right\} (224)$$

Hierbei ist das Differential dp der Zuwachs, den die Projektion $p_A = w_A \cos \alpha$ des Geschwindigkeitsvektors w_A im festen ξ, η -System des Punktes A erfährt beim Übergang zu einem Nachbarpunkt C auf der

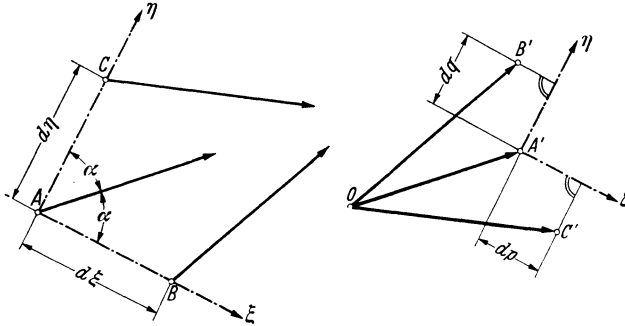


Abb. 94. Änderung der Geschwindigkeit längs der MACHschen Linien beim räumlichen Problem.

η -Achse mit der Koordinate $d\eta$; ebenso bedeutet dq den Zuwachs der Projektion $q_A = w_A \cos \alpha$ beim Übergang zu einem Nachbarpunkt B auf der ξ -Achse mit der Koordinate $d\xi$ (Abb. 94). Wir haben somit folgende Deutung gewonnen:

Bei der räumlichen achsensymmetrischen Überschallströmung ändert sich beim Fortschreiten längs einer MACHschen Linie die Projektion des Geschwindigkeitsvektors auf die festgehaltene Ausgangstangente der anderen MACHschen Linie um das durch Gl. (224) bestimmte Differential dp bzw. dq .

Über die Änderung der zu den MACHschen Linien senkrechten Geschwindigkeitsprojektionen p_n, q_n sagt die Potentialgleichung (223) unmittelbar nichts aus.

Zur Verdeutlichung seien die entsprechenden Beziehungen für das ebene Problem gegenübergestellt: Da in der Ebene das letzte Glied der Potentialgleichung (40) fehlt, treten an Stelle von Gl. (223) und (224) die

einfacheren Beziehungen

$$\frac{\partial^2 q}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \quad dp = dq = 0.$$

Sie enthalten die schon auf S. 35 gewonnene Aussage (Abb. 95):

Bei der ebenen Überschallströmung bleibt beim Fortschreiten längs einer MACHSchen Linie die Projektion des Geschwindigkeitsvektors auf die festgehaltene Ausgangstangente der anderen MACHSchen Linie in erster Ordnung un-
geändert.

Wegen $dp = dq = 0$ sind beim ebenen Problem die Richtungen der Hauptkurven des Geschwindigkeitsbildes senkrecht zu den zuge-

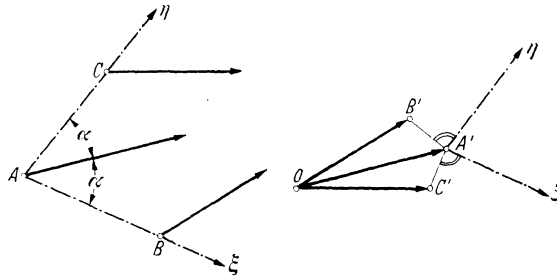


Abb. 95. Änderung der Geschwindigkeit längs der MACHSchen Linien beim ebenen Problem.

ordneten MACHSchen Richtungen (vgl. S. 110) und infolgedessen in jedem Punkt der u, v -Ebene ein für allemal bestimmt. Beim achsensymmetrischen räumlichen Problem dagegen sind die Hauptrichtungen wegen $dp \neq 0, dq \neq 0$ auf Grund von Gl. (224) auch von Elementen des Strömungsfeldes abhängig. Infolgedessen ändert sich mit den Randbedingungen der Strömung nicht nur das MACHSche Netz des Strömungsfeldes, sondern auch das Hauptnetz des Geschwindigkeitsbildes, wie dies bereits eingangs aus dem Versagen der Linearisierung mittels LEGENDRE-Transformation erkennbar war.

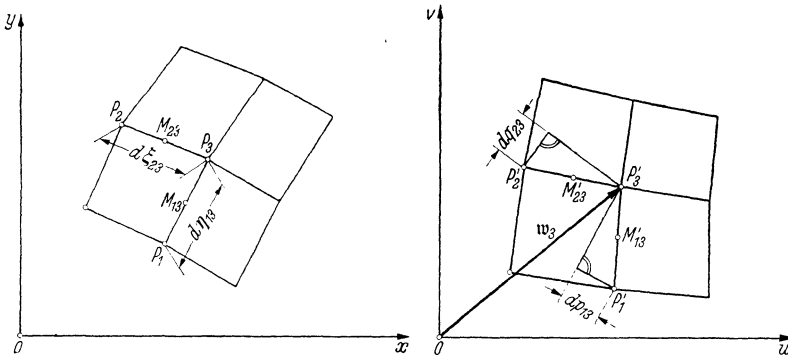


Abb. 96. Zugeordnete Streckenzugnetze beim räumlichen Problem.

2. Näherungskonstruktion achsensymmetrischer räumlicher Strömungsfelder zu vorgegebenen Anfangsbedingungen. Wie auf S. 115 so setzen wir auch hier das MACHSche Netz und das zugeordnete Hauptnetz durch Streckenzugnetze. Im Gegensatz zu S. 115 ist jetzt aber das

Hauptnetz nicht von vornherein gegeben, sondern muß Schritt für Schritt zusammen mit dem MACHSchen Netz konstruiert werden. Da außerdem die einfache reziproke Orthogonalbeziehung nicht mehr besteht, sollen nunmehr die Knotenpunkte des Hauptnetzes nicht wie auf S. 115 den Maschen, sondern den Knotenpunkten des MACHSchen Netzes zugeordnet werden.

Für die beiden durch entsprechende Knotenpunkte aufeinander bezogenen Streckenzugnetze führen wir folgende Bezeichnungen ein (Abb. 96):

$$\left. \begin{matrix} P_i \\ P'_i \end{matrix} \right\} = \text{zugeordnete Knotenpunkte des} \quad \left. \begin{matrix} \text{MACHSchen Netzes,} \\ \text{Hauptnetzes,} \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} M_{ik} \\ M'_{ik} \end{matrix} \right\} = \text{Mittelpunkte der Seiten} \quad \left. \begin{matrix} P_i P_k \text{ des MACHSchen Netzes,} \\ P'_i P'_k \text{ des Hauptnetzes,} \end{matrix} \right.$$

$$d\xi_{ik} \text{ bzw. } d\eta_{ik} = \text{Längen der Seiten } P_i P_k \text{ des MACHSchen Netzes,}$$

$$\left. \begin{matrix} r_{ik} \\ v_{ik} \end{matrix} \right\} = \text{Koordinaten der Seitenmitten} \quad \left. \begin{matrix} M_{ik} \text{ im } x, r\text{-System,} \\ M'_{ik} \text{ im } u, v\text{-System,} \end{matrix} \right.$$

$$\alpha_{ik} = \text{MACHScher Winkel zum Geschwindigkeitsvektor } w_{ik} = \overrightarrow{OM'_{ik}}.$$

Die Zuordnung der beiden Streckenzugnetze wird durch folgende Vorschriften definiert:

a) Von den beiden zum Punkt M'_{ik} des Hauptnetzes gehörigen MACHSchen Richtungen ist die eine parallel zur entsprechenden Seite P_i von der Länge $d\xi_{ik}$ bzw. $d\eta_{ik}$ des MACHSchen Netzes, auf der anderen liegt die Projektion dq_{ik} bzw. dp_{ik} der Seite $P'_i P'_k$ des Hauptnetzes.

b) Die Größen dp_{ik} , dq_{ik} , $d\xi_{ik}$, $d\eta_{ik}$, r_{ik} , v_{ik} und α_{ik} sind verknüpft durch die Beziehungen Gl. (224).

Die auf diese Weise einander zugeordneten Streckenzugnetze lassen sich ähnlich wie die reziproken Streckenzugnetze des ebenen Problems (vgl. S. 115) bei vorgegebenen Anfangsbedingungen schrittweise Knotenpunkt für Knotenpunkt konstruieren, wobei allerdings die Konstruktionen im einzelnen etwas verwickelter sind und zusätzliche Rechnungen erfordern. Die Konstruktion beruht im wesentlichen auf der wiederholten Durchführung folgender Grundaufgabe (Abb. 96):

Vorgegeben sind zwei diametrale Knotenpunkte P_1, P_2 einer Masche des MACHSchen Netzes und die zwei entsprechenden Knotenpunkte P'_1, P'_2 des Hauptnetzes; gesucht sind die Nachbarknotenpunkte P_3, P'_3 .

Bei der Lösung dieser Aufgabe ist zunächst klar, daß nach Festlegung des Punktes P'_3 die Punkte M'_{13}, M'_{23} und damit die zu diesen Punkten gehörigen MACHSchen Richtungen, folglich also auch der Punkt P_3 und die Längen $d\xi_{23}, d\eta_{13}, dp_{13}, dq_{23}$ sowie die Punkte M_{13}, M_{23} bestimmt

sind. Daher sind alle in Gl. (224) vorkommenden Größen Funktionen der beiden einzigen Unbekannten u_3, v_3 (= Koordinaten des Punktes P'_3) und die Beziehungen Gl. (224) lassen sich als Bestimmungsgleichungen für die Berechnung dieser beiden Unbekannten auffassen. Die Berechnung kann folgendermaßen durch Iteration geschehen:

1. *Näherung:* $P_3^{(1)}$ wird mittels der MACHSchen Richtungen in den vorgegebenen Punkten P'_1, P'_2 statt in den noch unbekanntenen Punkten M'_{13}, M'_{23} konstruiert. Dann werden zu den durch den Punkt $P_3^{(1)}$ bestimmten Längen $d\xi_{23}^{(1)}, d\eta_{13}^{(1)}, r_{13}^{(1)}, r_{23}^{(1)}$ und den zu den Punkten P'_1, P'_2 gehörigen Größen $v_1, v_2, \alpha_1, \alpha_2$ aus Gl. (224) die Projektionen $dp_{13}^{(1)}, dq_{23}^{(1)}$ berechnet. Sie legen, jeweils aufgetragen in der einen MACHSchen Richtung zu P'_1 bzw. P'_2 , den Punkt $P_3^{(1)}$ des Hauptnetzes fest.

2. *Näherung:* $P_3^{(2)}$ wird mittels der MACHSchen Richtungen zu $M'_{13}^{(1)}, M'_{23}^{(1)}$ und $P_3^{(1)}$ mittels $d\xi_{23}^{(2)}, d\eta_{13}^{(2)}, r_{13}^{(2)}, r_{23}^{(2)}, v_{13}^{(1)}, v_{23}^{(1)}, \alpha_{13}^{(1)}, \alpha_{23}^{(1)}$ gefunden.

3. *und weitere Näherungen:* analog.

3. **Beispiele.** a) *Ausströmen aus einer drehsymmetrischen Düse.* Wir übertragen das auf S. 121, Absatz d) (vgl. Abb. 82) behandelte Problem von der ebenen auf die achsensymmetrische räumliche Strömung, d. h. wir behandeln den Austritt eines Parallelstrahls aus einem Drehzylinder gegen Unterdruck (Abb. 97).

Die Anfangsbedingungen sind bei Abb. 82 und 97 dieselben; Verdichtungsstöße treten nicht auf. Während in Abb. 82 die MACHSchen Linien bis zur gegenseitigen Überschneidung geradlinig sind, hat man in Abb. 97 von vornherein gekrümmte MACHSche Linien, abgesehen von der jeweils ersten Linie.

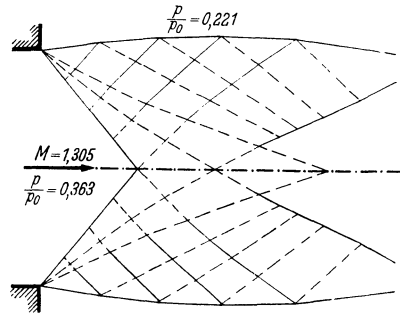


Abb. 97. Austritt eines Parallelstrahls aus einer drehsymmetrischen Düse gegen Unterdruck.

In der Umgebung des Rohrrandes vereinfachen sich die Beziehungen Gl. (224) mit $d\xi \rightarrow 0$ bzw. $d\eta \rightarrow 0$ zu den Gleichungen $dq = 0$ bzw. $dp = 0$ des ebenen Problems. Infolgedessen kann dort die räumliche achsensymmetrische Strömung in jeder Meridianebene durch die ebene Strömung mit denselben Randbedingungen ersetzt werden; d. h.: Die Beziehung zwischen den Winkeln, unter denen die MACHSchen Linien vom Rand ausgehen, einerseits und der Geschwindigkeit und dem Druck andererseits ist im Raum dieselbe wie in der Ebene.

b) *Überschallströmung um eine axial angeblasene Geschößspitze.* Die auf S. 127, Absatz b) (vgl. Abb. 86) behandelte Überschallströmung um ein nicht geradliniges Profil hat als achsensymmetrisch-räumliches Ana-

logon die Überschallströmung um eine axial angeblasene Geschößspitze (Abb. 98).

Als Geschößspitze ist ein Ogival genommen mit Ogivalradius = 5,295 Kaliber. Die von der Spitze ausgehende gekrümmte Stoßlinie muß mit

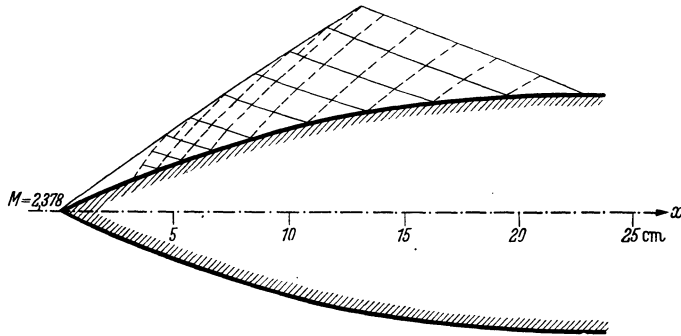


Abb. 98. Überschallströmung um eine axial angeblasene Geschößspitze.

Hilfe des Stoßpolarendiagramms punktwiese konstruiert werden, derart, daß in jedem konstruierten Punkt einerseits die eine Bedingung Gl. (224) und andererseits die Grundgleichungen des Verdichtungsstoßes erfüllt sind. Ebenso wie beim ebenen Problem bleiben auch hier die Wirbelbildungen hinter dem Verdichtungsstoß vernachlässigt.

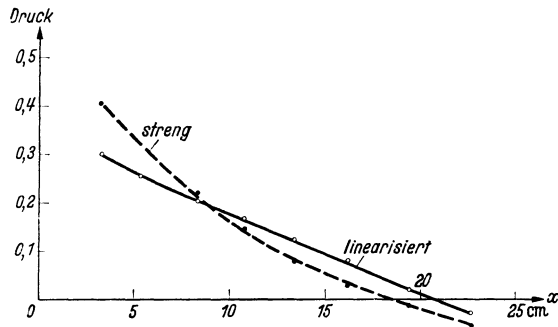


Abb. 99. Gegenüberstellung der Druckverteilung bei strenger Behandlung und bei linearisierter Näherung.

Bei Gegenüberstellung des hier gewonnenen strengen Ergebnisses mit dem Ergebnis bei Anwendung des auf S. 50 beschriebenen Verfahrens der linearisierten Näherung zeigt sich eine hinlängliche Übereinstimmung in der Druckverteilung längs des Meridians (Abb. 99); die Drucke sind in Abb. 99 durch Division mit dem Staudruck der Grundströmung dimensionslos gemacht.

Sachverzeichnis.

- ACKERET, J.** 1, 8, 29, 42, 69, 78.
 Adiabate, geradlinige 101, 105.
 Adiabatenellipse 36, 59.
 Adiabatengleichung 4, 5, 102.
 Ähnlichkeit 8.
 Auftrieb 27, 33, 42, 128.

Bernoullische Gleichung 4, 10.
BOURQUARDT, M. F. 83.
BUSEMANN, A. 1, 42, 59, 61, 69, 72, 73, 83, 84, 86, 102, 105, 108, 111, 128, 131.

Cauchy-Riemannsche Gleichungen 22, 102, 103.
Charakteristiken-diagramm 111, 117.
Charakteristikentheorie 44, 112.
Charakteristikenverfahren f. achsensymmetrische Überschallströmung 137.
 — von PRANDTL u. BUSEMANN 108.
CRANZ, C. 2.
CROCCO, L. 132.

DEMTSCHENKO, B. 93.
Doppelquelle, kompressible 107.
Druckberg 9, 74, 110.
Düsenströmung 13, 120.
DURAND, W. J. 1.

 Sauer, Gasdynamik.
- Energiesatz** 6, 10.
Enthalpie (= Wärmeinhalt) 10.
Entropie 6, 73.
Epizykloiden 60, 99, 110, 111, 112.
Eulersche Bewegungsgleichung 3.

FERRARI, C. 31, 48, 50, 52, 105, 138.
Fortpflanzung schwacher Störungen 38.
 — von Verdichtungsstößen 68.
FRANKL, E. 28.

Geschoßspitze, axial angeblasene 51, 144.
 — schief angeblasene 51.
Geschwindigkeitsbild 58, 84, 93.
GLAUERT, H. 24.
GÖRTLER, H. 91, 92.
Grenzlinien der adiabatischen Strömung 96.
GUDERLEY, G. 97, 98, 137.

HANTZSCHE, W. 91.
Hauptkurven 97.
Hauptnetz 97, 109.
Haupttangentenkurven 110.
Höchstgeschwindigkeit 7.
HUGONOT, H. 12, 64, 66.
Hugoniot-Kurve 64.

Impulssatz 3.
Iterationsverfahren 87, 90.
- JANZEN, O.** 87.

KÁRMÁN, TH. V. 31, 42, 47, 50, 52, 62, 64.
KELDYSCH, M. 28.
Kopfwelle 127.
Kontinuitätsgleichung 4, 12.
kritische Geschwindigkeit 7.
kritischer Winkel 71, 86.

Laplacesche Gleichung 22, 87.
Lavaldüse 13.
Legendre-Transformation 95.
Linearisierung durch Molenbroek-Transformation 93.
 — — Näherung 22.

MACCOLL, J. C. 83.
MACH, E. 7, 34, 39.
Machsche Linien 35, 39, 45, 47, 97.
Machsches Netz 35, 96, 109.
Machscher Winkel 34, 39, 96.
Machsche Zahl 7.
MEYER, TH. 54, 61, 65, 69, 91.
MOLENBROEK, P. 93.
Molenbroek-Transformation 93, 101.
MOORE, N. B. 47, 50.

PISTOLESI, E. 24.
Poissonsche Gleichung 5.

- Potenzentwicklungen 91, 105.
- PRANDTL, L. 1, 3, 24, 27, 29, 39, 59, 78, 90, 108, 111.
- Prandtsche Regel 25.
- PREISWERK, E. 44, 62, 123
- Profilpaare mit verschwindendem Widerstand 131.
- Quelle, kompressible 15, 118, 119.
- Quell-Senken-Verfahren 25, 31, 47.
- RAYLEIGH (J. W. STRUTT) Lord 87.
- Reflexion einer Machschen Linie 118, 121.
- Reziprokbeziehung zwischen Machschem Netz u. Hauptnetz 109, 115.
- RIABOUCHINSKI, D. 93.
- RIEMANN, B. 68.
- RINGLEB, F. 97, 98, 105, 107.
- Ruhedruckverhältnis 76.
- SAINT-VENANT u. WANTZEL, Formel von 6.
- SAUER, R. 100, 101, 137.
- Schallgeschwindigkeit 5, 7, 39, 69.
- SCHLICHTING, H. 42.
- Schlierenaufnahmen 39, 128.
- Schwanzwelle 127.
- Senke, kompressible 15.
- SHARMAN, C. F. 88.
- Staupunkt 78.
- STEICHEN, A. 44, 93.
- STODOLA, A. 66.
- Stoßpolarendiagramm 69, 72, 77, 112, 122.
- Stromdichte 10.
- Stromfunktion 19, 93.
- Stromlinien 10.
- Strömung, achsensymmetrische 18, 137.
- um Drehkegel 47, 80.
- um Drehkörper 31, 50, 137.
- an Ecke bzw. Keil 37, 53.
- um Profile 27, 40, 125, 126, 127.
- TAYLOR, H. J. 83, 84, 88 92.
- Töplersche Schlierenmethode 39.
- TOLLMIEB, W. 97, 101 132, 137.
- TSCHAPLIGIN, A. 93, 95 102, 104, 105, 106.
- Tsien, Shue-Shen 47, 50 102.
- Verdichtungslinien 38.
- Verdichtungsstoß 61, 85 121.
- senkrechter 66.
- Verdünnungslinien 38.
- Wärmeinhalt (= Enthalpie) 10.
- WENDT, H. 91.
- Widerstand 27, 33, 42, 128
- Wirbel, kompressibler 16
- Wirbelbehaftete Strömung 122, 127, 137.
- Wirbelquelle, kompressibel 100.
- Zustandsgleichung der vollkommenen Gase 5

Flüssigkeiten und Gase. 634 Aufgaben nebst Lösungen und einer Formelsammlung. (Aufgaben aus der technischen Mechanik, Band III.) Von Prof. *Ferd. Wittenbauer* †, Graz. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 433 Textfiguren. VIII, 390 Seiten. 1921. Unveränderter Neudruck 1922.
Halbleinen RM 7.—

Spezifische Wärme, Enthalpie, Entropie und Dissoziation technischer Gase. Von Dozent Dr. phil. habil. *E. Justi*, Berlin. Mit 43 Abbildungen im Text und 116 Tabellen. VI, 157 Seiten. 1938. RM 18.—

Der Wärme- und Stoffaustausch. Dargestellt im Mollierschen Zustandsdiagramm für Zweistoffgemische. Von Priv.-Doz. Dr.-Ing. *Adolf Busemann*, Dresden. Mit 51 Textabbildungen. VIII, 76 Seiten. 1933. RM 6.—

Absolute thermische Daten und Gleichgewichtskonstante. Anleitung, Tabellen und Nomogramme zur praktischen Durchführung von Berechnungen. Von Dr.-Ing. *Rudolf Doczekal* VDI unter Mitarbeit von Ing *Heinrich Pitsch*, Wien. Mit 32 Textabbildungen, 22 Tabellen und 3 Tafeln. IV, 69 Seiten. 1935. (Springer-Verlag / Wien.) RM 6.60

Thermodynamik. Die Lehre von den Kreisprozessen, den physikalischen und chemischen Veränderungen und Gleichgewichten. Eine Hinführung zu den thermodynamischen Problemen unserer Kraft- und Stoffwirtschaft. Von Prof. Dr. *W. Schottky*. In Gemeinschaft mit Priv.-Doz. Dr. *H. Ulich* und Priv.-Doz. Dr. *C. Wagner*. Mit 90 Abbildungen und einer Tafel. XXV, 619 Seiten. 1929. RM 50.40

Die Grundsätze der Wärmeübertragung. Von Prof. Dr.-Ing. *H. Gröber*, Berlin, und Reg.-Rat Dr.-Ing. *S. Erk*, Berlin. Zugleich zweite, völlig neubearbeitete Auflage des Buches: H. Gröber, Die Grundgesetze der Wärmeleitung und des Wärmeüberganges. Mit 113 Textabbildungen. XI, 259 Seiten. 1933. Halbleinen RM 22.20

Turbulenz. Physikalische Statistik und Hydrodynamik. Von Dr. *Hans Gebelein* VDI, Stuttgart. Mit 40 Textabbildungen. VIII, 177 Seiten. 1935. RM 12.50

Mathematische Strömungslehre. Von Privat-Dozent Dr. *Wilhelm Müller*, Hannover. Mit 137 Textabbildungen. IX, 239 Seiten. 1928.
RM 16.20

Technisch-physikalisches Praktikum. Ausgewählte Untersuchungsmethoden der technischen Physik. Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. phil. Dr.-Ing. e. h. *Oscar Knoblauch* VDI, München, und Dr.-Ing. *We. Koch* VDI. Mit 104 Textabbildungen. V, 167 Seiten. 1934.
RM 12.—

Gas, Dampf und Flüssigkeit. Von Hofrat Ingenieur Prof. *Hans von Jüptner*. (Monographien zur Feuerungstechnik, Bd. 8). Mit 7 Abbildungen und 34 Tabellen. 61 Seiten. 1925.
RM 4.50

Neue Tabellen und Diagramme für technische Feuergase und ihre Bestandteile von 0° bis 4000° C mit Einschluß der Dissoziation nebst Begründung und Anwendungen von Prof. Dipl.-Ing. *W. Schüle*. Mit 51 Textabbildungen und zwei Tafeln. VI, 116 Seiten. 1929.
RM 10.35; Ganzleinen RM 11.70

Explosions- und Verbrennungsvorgänge in Gasen. Von Prof. Dr. sc. nat. *Wilhelm Jost*, Leipzig. Mit 277 Abbildungen im Text. VIII, 608 Seiten. 1939.
RM 46.50

36-Tafel für Luft und Verbrennungsgase. Von Dozent Dr.-Ing. habil. *O. Lutz* und Dipl.-Ing. *F. Wolf*, Braunschweig. Mit 4 Abbildungen und 5 Kurventafeln im Text sowie einer zweifarbigen Tafel. 14 Seiten. 1938.
RM 3.—; Tafel gesondert RM 1.50

Verbrennungsmotoren. Thermodynamische und versuchsmäßige Grundlagen unter besonderer Berücksichtigung der Flugmotoren. Von Dozent Dr.-Ing. habil. *Fritz A. F. Schmidt*, Berlin. Mit 159 Abbildungen im Text. VIII, 326 Seiten. 1939.
RM 33.—
