

Einführung in die Finanz- und Wirtschaftsmathematik

Von

Dr. phil. A. Timpe

o. Professor an der Technischen Hochschule
Berlin

Mit 70 Textabbildungen



Berlin
Verlag von Julius Springer
1934

ISBN-13: 978-3-642-90470-7 e-ISBN-13: 978-3-642-92327-2
DOI: 10.1007/978-3-642-92327-2

Alle Rechte, insbesondere das
der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.
Copyright 1934 by Julius Springer in Berlin.

Vorwort.

Der vorliegende Leitfaden ist hervorgegangen aus Vorlesungen und Vorträgen, die ich in den letzten Jahren an der Technischen Hochschule Berlin und am Außeninstitut derselben für Wirtschaftsingenieure, Versicherungswissenschaftler und Lehramtsanwärter gehalten habe, und aus der Arbeit, die in dem von mir geleiteten Seminar für Wirtschaftsmathematik in dieser Zeit zur Durchführung kam. Er will einführen in die mathematische Erfassung einzelwirtschaftlicher und volkswirtschaftlicher Beziehungen metrischen Charakters, die gerade in jüngster Zeit bedeutsame Fortschritte gemacht hat. In der gegenwärtigen Kampfesphase unseres Wirtschaftslebens dürfte es als eine besonders zeitgemäße Aufgabe anzusehen sein, mit dem Rüstzeug zur Darstellung und Klärung von Wirtschaftsbeziehungen sich zu beschäftigen.

Der erste Hauptteil umfaßt im wesentlichen die Mathematik des Geldverkehrs, eine im ganzen heute ziemlich abgeschlossene Disziplin. Eine scharfe Abtrennung dieses auch als Finanzmathematik bezeichneten Gebiets, in dem man es mit der Ware „Geld“, aber auch mit gewissen, geldmäßig fest zu bewertenden Wirtschaftsobjekten (z. B. Erbaurecht) zu tun hat, gegenüber der Wirtschaftsmathematik im engeren Sinne ist schwer möglich. Abschreibungswesen, Elemente der Versicherungsrechnung und Bausparkassenfragen wurden in diesen ersten Hauptteil verwiesen. Von originalen Beiträgen erwähne ich die von mir konstruierten Kursnomogramme. Gewissermaßen als Übergang zu der noch sehr im Ausbau begriffenen Wirtschaftsmathematik wird das Tarifwesen behandelt. Die daran anschließende eingehende Darstellung der einzelwirtschaftlichen Selbstkosten- und Erfolgsanalyse ist von dem Bestreben geleitet, zur Herstellung gesunder Grundlagen für die gegenseitige Befruchtung betriebswirtschaftlicher Empirie und mathematischer Methodik beizutragen. Der Abschnitt über mathematische Statistik und Korrelationsrechnung gibt die Plattform für die Behandlung von Problemen der Großzahlforschung (Massenfabrikation, Versicherungsfragen), der Marktforschung und Konjunkturanalyse. — Zahlreiche durchgerechnete Beispiele und graphische Darstellungen wurden eingefügt, um die für viele noch ungewohnten Verbindungen zwischen Mathematik und Wirtschaft lebendiger werden zu lassen.

Was die beim Leser vorausgesetzten mathematischen Kenntnisse angeht, so gehen sie im allgemeinen nicht über das hinaus, was beim

Absolventen eines guten Realgymnasiums erwartet werden kann. Das Buch wendet sich daher nicht etwa nur an Mathematiker, sondern ebenso sehr an solche, die an Hochschulen oder in der Praxis in wirtschaftswissenschaftlicher Richtung arbeiten. Vielleicht bietet es auch Oberlehrern der höheren Schulen und der Handelsschulen einige Anregungen für die Ausgestaltung des Unterrichts.

Aufrichtig danken möchte ich an dieser Stelle meinem Assistenten Herrn Studienreferendar A. Komischke für seine treue Hilfe bei der Bearbeitung des Aufgabenmaterials und der Herstellung der Abbildungen. Der Verlagsbuchhandlung, die sich um den sorgfältigen Druck und die Ausstattung des Buches sehr bemüht hat, sei ebenfalls bester Dank ausgesprochen.

Berlin-Schlachtensee, im September 1933.

A. Timpe.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
I. Einfacher Geldverkehr. Wertpapiere	1
§ 1. Zahlungsmittel. Geld- und Devisenkurs. Devisenarbitrage. Die Goldpunkte	1
§ 2. Einfacher Zins. Kontokorrent	12
§ 3. Effektenrechnung	17
§ 4. Diskont. Wechselrechnung. Mittlerer Zahlungstermin	22
II. Zinseszins- und Rentenrechnung. Versicherungsrechnung	33
§ 5. Das Zinseszinsgesetz	33
Unterjährige, kontinuierliche zusammengesetzte Verzinsung . .	40
§ 6. Rentenrechnung	43
§ 7. Versicherungsrechnung	55
III. Tilgungs- und Abschreibungswesen	63
§ 8. Schuldtilgung	63
Tilgung mit Aufgeld	68
§ 9. Tilgung von Anleihen	70
§ 10. Tilgung der Bausparkassen-Darlehen	73
§ 11. Abschreibungen	77
IV. Kurs und Rentabilität von Tilgungsanleihen	86
§ 12. Allgemeines. Zinsanleihe	86
§ 13. Annuitätenanleihen	92
§ 14. Kurs und Tilgungsverlauf. Kursanteil von Zinsen und Rückzahlungen	96
V. Tarifmathematik	99
§ 15. Grundlegendes zum Tarifwesen	99
§ 16. Systematik der Tarifbildung	104
Übergang zu Teilstreckentarifen	112
VI. Erfolgsrechnung	112
§ 17. Die Erfassung der Erfahrungsziffern: Kosten—Beschäftigungsgrad. Grundlegende Beziehungen	112
§ 18. Kosten und Gewinn bei wechselndem Beschäftigungsgrad: Fall des linearen Kostenanstiegs bei konstanten Preisen	122
Ermittlung der Konstanten U_0 , i bei linearem Kostenanstieg	129
§ 19. Strukturelle Betriebsänderungen. Lineare Stückkostensenkung	132
§ 20. Weitere Beispiele zur Erfolgsrechnung. Preis konstant oder linear abnehmend	135
§ 21. Mathematisches Gesetz und Empirie. Remanenzerscheinungen. Budgetierung	142
VII. Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik in Anwendung auf Wirtschaftsprobleme	147
§ 22. Wahrscheinlichkeitsrechnung	147
1. Wahrscheinlichkeit a priori und a posteriori	147
2. Binomialverteilung und Wahrscheinlichkeitsintegral	154

	Seite
§ 23. Mathematische Statistik	158
§ 24. Ausgleichungs- und Korrelationsrechnung	173
VIII. Die Analyse von Zeitreihen	190
§ 25. Allgemeine Konjunkturanalyse	190
§ 26. Korrelation von Zeitreihen. Betriebswirtschaftlicher Konjunktur- dienst	199
Anhang: Tabellen.	207
Namen- und Sachverzeichnis	214

Druckfehlerberichtigung.

S. 23, Abb. 3: Die links von 0 stehenden Abszissenwerte zählen ebenfalls positiv.
S. 103, Z. 5 v. u. lies: 100 statt: 110.

I. Einfacher Geldverkehr. Wertpapiere.

§ 1. Zahlungsmittel. Geld- und Devisenkurs. Devisenarbitrage. Die Goldpunkte.

Als Vermittler für den Austausch von Gütern und Leistungen im Wirtschaftsleben dient das Geld. Sein als Kaufkraft in Erscheinung tretender Wert unterliegt, wie der jeder anderen Ware, den Gesetzen von Angebot und Nachfrage. Zu einem einigermaßen stabilen Geldwert kamen Länder, in denen der Staat ein bestimmtes Metall, im allgemeinen Gold, zur gesetzlichen Grundlage des Zahlungsmittelumschlages erhob (Goldwährung); bare Zahlungsmittel können hierbei die in dem betreffenden Metall geprägten Münzen, aber auch aus anderem Metall hergestellte sogenannte Scheidemünzen und Papiergeld (Noten) sein, sofern nur ihr gesamter Nennwert in angemessenem Verhältnis zu dem als Deckung bereitgehaltenen Quantum an Währungsmetall steht. Schwankungen in der Bewertung des Währungsmetalls übertragen sich natürlich auf den Geldwert. Größere Schwankungen des Geldwerts treten naturgemäß bei Papierwährung ohne ausreichende Deckung durch Sachpfand auf; Änderungen des Notenumschlages, die mit den wirtschaftlichen Gesamtleistungen des Landes nicht im Einklang stehen, Störungen des Gleichgewichts im Austausch von Gütern und Leistungen mit den anderen Ländern spiegeln sich wider in Schwankungen des Geldwerts des betreffenden Landes, der, gemessen an ausländischen Zahlungsmitteln, als *Valuta* bezeichnet wird.

Bei den Schwankungen der *Valuta* spielt die Menge der neben den baren Zahlungsmitteln umlaufenden Ersatzzahlungsmittel eine große Rolle.

Eine im allgemeinen durchaus normale, d. h. im Sinne stationärer Entwicklung des Geldmarkts sich auswirkende Entlastung des Bedarfs an baren Zahlungsmitteln bringt der durch Banken und Post vermittelte Scheck- und Überweisungsverkehr mit sich. Er hilft örtliche und zeitliche Stauungen im Zahlungsverkehr (Lohnauszahlungen großer Betriebe, Monats-, Quartalschluß) überwinden, fördert die Liquidität der Geldinstitute und kommt somit wirtschaftlichen Unternehmungen besonders bei starker Inanspruchnahme des Geldmarkts zugute. Für Rückwirkungen auf die *Valuta* kommt er, weil mit kurzen Fristen arbeitend, nur sekundär, in Verbindung mit anderen Faktoren, in Frage, wenn er in größerem Umfange zu einer in den wirtschaftlichen Verhältnissen nicht begründeten Kreditausweitung herangezogen wird.

Von primärer Bedeutung für Valutaschwankungen ist der Umlauf von Wechseln, in denen sich der größte Teil des internationalen Zahlungsverkehrs vollzieht. Die gebräuchlichste Form ist der Primawechsel. Er enthält den Auftrag des Trassanten (Gläubigers) an den Bezogenen oder Trassaten (Schuldner), an die von ihm bezeichnete Persönlichkeit, den Remittenten, zu einem bestimmten Zeitpunkt die auf dem Wechsel angegebene Summe zu zahlen. Der Trassat setzt den Annahme- oder Akzeptvermerk quer auf die Vorderseite des Wechsels. Damit wird dieser nach Übermittlung an den Remittenten zu einer veräußerbaren Schuldurkunde, jetzt auch Rimesse genannt. Die Abtretung an einen neuen Gläubiger erfolgt durch Indossament, d. h. Vermerk auf der Rückseite des Wechsels, der so als Zahlungsmittel von Hand zu Hand weitergegeben werden kann. Der letzte Inhaber der Rimesse, der sich durch eine fortlaufende Kette ordnungsgemäßer Indossamente ausweist, präsentiert sie am Fälligkeitstage dem Trassaten.

Der Inhaber einer Rimesse, der keine Möglichkeit besitzt, sie zur Begleichung von Verbindlichkeiten weiterzugeben, kann sich mit ihrer Hilfe bares Geld verschaffen, indem er sie einer Bank zur Beleihung oder Veräußerung übergibt. Im Falle des Verkaufs wird er sich einen Abzug vom Nennwert, den sog. Diskont, gefallen lassen müssen, der sich nach den in § 4 zu besprechenden Regeln aus dem Nennbetrage, der Laufzeit (Sicht) und dem geltenden Diskontsatz errechnet. Dem Handel mit Wechseln dienen die in verschiedenen größeren Städten für den Geldmarkt überhaupt (Geldsorten, Wechsel, Wertpapiere) organisierten Versammlungen von Firmenvertretern und Maklern, die Börsen. Als bedeutendste Käufer von Wechseln betätigen sich, im Interesse der stetigen Entwicklung und Wettbewerbsfähigkeit der heimischen Volkswirtschaft, die Zentralnotenbanken. Nach dem von ihnen festgesetzten Diskontsatz (in Deutschland: Reichsbankdiskontsatz) richten sich im allgemeinen die übrigen Banken des Landes.

Die ausländischen Wechsel haben sich zu einem Hauptmittel, die Forderungen und Verbindlichkeiten der Volkswirtschaften verschiedener Länder auszugleichen, entwickelt. Da der wesentliche Zweck des Wechsels in der mit besonderen Sicherungen umgebenen Erleichterung des Kreditverkehrs und der Umsetzung von befristeten Schuldforderungen in bares Geld besteht, müssen alle Faktoren, die die beim wirtschaftlichen Austausch zwischen zwei Ländern in Frage kommenden Kreditverhältnisse bestimmen, auf die gegenseitige Bewertung der Wechsel und damit auch der Geldsorten selbst zurückwirken.

Neben ausländischen Wechseln und Schecks spielen sog. Auszahlungen im internationalen Zahlungsverkehr die Hauptrolle. Darunter versteht man: ausländischen Banken usw. schriftlich,

telephonisch oder telegraphisch erteilte Aufträge, einer bestimmten Person eine gewisse Summe in der betreffenden ausländischen Währung ausbezahlen, was in der Regel kurzfristig zu erfolgen hat, so daß durch Laufzeit bedingte Abzüge keinerseits in Frage kommen. Sie können indossierbar ausgestellt werden. Für Auszahlungen, ausländische Wechsel und Schecks, die unter dem Namen Devisen zusammengefaßt werden, sowie die meist nur in geringeren Mengen vorhandenen ausländischen Noten (Geldsorten) ergeben sich im Börsenhandel aus Angebot und Nachfrage Kurse, die für die verschiedenen Länder im Devisenkurszettel zusammengestellt laufend veröffentlicht werden. Als Beispiel sei der Berliner Kurszettel vom 9. September 1932 und einige Kursnotierungen ausländischer Plätze vom gleichen Tage wiedergegeben.

Berliner Devisen-Kurse vom 9. 9. 32.

	Einheit	Geld	Brief	
Buenos-Aires	1 Pap.-Pes.	0,928	0,932	
Kanada	1 k. Doll.	3,816	3,824	
Stambul	1 türk. Pfd.	20,08	20,12	
Japan	1 Yen	0,989	0,991	
Kairo	1 ägypt. Pfd.	15,04	15,08	
London	1 Lstr.	14,66	14,70	
New York	1 Dollar	4,209	4,217	
Rio de Janeiro	1 Milreis	0,316	0,318	
Uruguay	1 G.-Peso	1,738	1,747	
Amsterdam-Rotterdam	100 Gulden	169,23	169,57	Zürich 9. 9. 32
Athen	100 Drachm.	2,697	2,703	Berlin . . 123,00
Brüssel und Antwerpen	100 Belga	58,31	58,43	Amsterdam 208,05
Bukarest	100 Lei	2,518	2,524	Paris . . . 20,295
Budapest	100 Pengö	—	—	
Danzig	100 Gulden	81,97	82,13	Amsterdam
Helsingfors	100 Fm.	6,304	6,316	Berlin . . 59,20
Italien	100 Lire	21,615	21,655	Zürich . . 48,09
Jugoslawien	100 Dina	6,493	6,507	Paris . . . 9,76
Kaunas (Kowno)	100 Litas	41,96	42,04	
Kopenhagen	100 Kr.	75,87	76,03	Paris
Lissabon und Opp.	100 Escudo	13,3	13,37	Berlin . . —
Oslo	100 Kr.	73,48	73,62	Zürich . . 492,00
Paris	100 Frcs.	16,485	16,525	Amsterdam 1024,75
Prag	100 Kr.	12,465	12,485	
Riga	100 Latte	79,720	79,880	
Schweiz	100 Frcs.	81,200	81,360	
Sofia	100 Lewa	3,057	3,063	
Spanien	100 Pes.	33,850	33,910	
Stockholm	100 Kr.	75,12	75,28	
Fallinn (Reval)	100 estn. K.	110,59	110,81	
Wien	100 Schilling	51,950	52,054	
Ostdevisen:				
Warschau	Zloty	47,100	47,304	

Hier ist, wie in Deutschland üblich und auch sonst vorherrschend, direkte Notierung der Devisenkurse angewendet: Die Zahlen geben

an, wieviel Einheiten des heimischen Geldes (Mark) für im allgemeinen hundert Einheiten des ausländischen Geldes zu zahlen sind; bei einigen Geldsorten, wie Dollar und Pfund, für eine Einheit. Londoner Kurszettel geben die indirekte Notierung der Devisenkurse, besagen also, wieviel Einheiten der ausländischen Geldsorte für 1 £ erworben werden.

Bei Wechseln, die im engeren Sinne als Devisen bezeichnet werden, geben die Kurszettel je nach der Laufzeit verschiedene Kurse, da in ihnen bereits die nach ihr bemessenen Diskontabzüge (siehe § 4) einbegriffen sind. Unser Musterzettel bezieht sich auf Sichtwechsel, die sofort nach der für die Versendung erforderlichen Zeitspanne fällig sind. Vielfach sind in den Börsennachrichten den Devisen- und Effektenkursen Vermerke bez., G, B beigefügt; bez. heißt, daß die zu dem betreffenden Kurse aufgegebenen Kauf- und Verkaufsaufträge sämtlich ausgeführt wurden; G (Geld) bedeutet, daß erheblicher Nachfrage nur geringes Angebot gegenüberstand, B (Brief) heißt, daß bei großem Angebot keine oder nur geringe Nachfrage herrschte.

Gilt der holländische Gulden (hfl.) in Berlin y Mark, so erhält man für eine Mark $\frac{1}{y}$ Gulden. Offenbar empfiehlt es sich, die Werte $\frac{1}{y}$ für eine Reihe von Werten y , innerhalb deren der Guldenkurs erfahrungsgemäß schwankt, ein für allemal zu berechnen und in einer Tabelle zusammenzustellen. Gilt andererseits die Mark in Amsterdam y' Gulden, so müßte offenbar, wenn die Wertrelation Mark-Gulden in Berlin und Amsterdam gleich beurteilt wird, $y = \frac{1}{y'}$ sein. Man spricht dann von Kursparität. Auf die Tatsache, daß infolge der Verschiedenheit von Devisenangebot und -nachfrage an den beiden Plätzen keineswegs immer Kursparität herrscht, kommen wir unten zurück. Man würde jedenfalls mit Hilfe der bezeichneten Tabelle auch den zum Berliner Guldenkurs paritätischen Amsterdamer Markkurs bestimmen können und umgekehrt¹⁾. Stellen wir die y' als Abszissen, die y als Ordinaten in einem rechtwinkligen Koordinatensystem dar, so ergibt sich als Bild der Relation $y = \frac{1}{y'}$ eine gleichseitige Hyperbel. Um in dem praktisch in Frage kommenden Wertebereich genauere Ablesungen machen zu können, empfiehlt es sich, die Abbildung auf diesen Bereich zu begrenzen. Gegenüber der Tabelle hat die graphische Darstellung den Vorzug der Übersichtlichkeit und bequemerer Interpolationsmöglichkeit. — Bei der Darstellung auf doppelt-logarithmischem Papier, wo die Abszissen $\xi = \log y'$, die Ordinaten $\eta = \log y$ abgetragen, aber mit y' und y beziffert werden, wird die Beziehung der Kursparität $y' y = 1$ oder $\log y' + \log y = 0$, d. h. $\xi + \eta = 0$ durch eine unter 45°

¹⁾ In der Praxis verbreitet: P. Theimer, Paritätstabellen, Prag 1915.

zu den Achsen verlaufende Gerade dargestellt. — Bei Devisen, bei denen der Kurs nicht den Preis y von einer Einheit angibt, sondern den Preis $Y = 100 y$ von 100 Einheiten der fremden Valuta, und bei denen reziprok mit $Y' = 100 y'$ zu rechnen ist, geht die Bedingung der Kursparität $y = \frac{1}{y'}$ über in $Y = \frac{10\,000}{Y'}$. Für Mark-Gulden ergibt sich damit nachstehende Paritätstabelle. Die entsprechende gleichseitige

Paritätstabelle
(Umrechnung von RM in hfl. und umgekehrt).

RM	hfl.	RM	hfl.	RM	hfl.
168,55	59,330	169,05	59,154	169,55	58,980
168,60	59,312	169,10	59,137	169,60	58,961
168,65	59,294	169,15	59,120	169,65	58,944
168,70	59,276	169,20	59,101	169,70	58,928
168,75	59,259	169,25	59,084	169,75	58,910
168,80	59,241	169,30	59,066	169,80	58,892
168,85	59,224	169,35	59,049	169,85	58,875
168,90	59,206	169,40	59,033	169,90	58,859
168,95	59,189	169,45	59,014	169,95	58,841
169,00	59,172	169,50	58,996	170,00	58,823

Hyperbel ist in Abb. 1 für den praktisch in Frage kommenden Wertebereich der Y , Y' dargestellt. Im Diagramm auf doppelt-logarith-

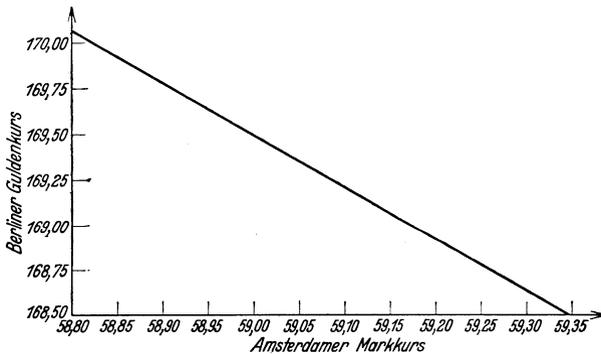


Abb. 1. Kursparität Mark-Gulden.

mischem Papier, wo jetzt $\xi = \log Y'$, $\eta = \log Y$ benutzt wird, hat die der Kursparität entsprechende Gerade die Gleichung $\xi + \eta = 4$. Sie verläuft wieder unter 45° zu den Achsen.

Solche Diagramme werden mit Vorteil bei den Aufgaben der Devisenausgleichsarbitrage und des Differenzarbitragegeschäfts herangezogen. Ein Gläubiger G_i , der im Lande i wohnt, kann auf verschiedene Weisen von einem im Lande k wohnenden Schuldner S_k eine in der Wahrung des Landes k fixierte Forderung einziehen und in der Wahrung seines Landes zu Geld machen.

1. Mit Hilfe von Wechseln:

a) G_i stellt auf S_k einen Wechsel in Höhe der ausländischen Schuldsumme aus (trassiert auf S_k) und verkauft ihn in seinem Lande i zu dem hier geltenden Börsenkurs.

b) S_k kauft in seinem Lande k für den Betrag der Schuldsumme Wechsel auf, die im Lande i in dessen Währung fällig sind, zu dem in k geltenden Kurs und übersendet sie G_i , der sie ohne weiteres in der Währung seines Landes einkassiert. (Der Schuldner remittiert.)

2. Mit Hilfe von Auszahlungen:

a) G_i verkauft in i eine Auszahlung auf eine Bank des Landes k , an die dann S_k seine Schuld in bar zu begleichen hat.

b) S_k kauft in k eine Auszahlung auf, die an eine Bank des Landes i in dessen Währung zu leisten ist, und tritt diese Auszahlung seinem Gläubiger G_i ab.

Wesentlich ist offenbar, daß in den Fällen 1a, 2a die im Lande i , in den Fällen 1b, 2b die im Lande k geltenden Umrechnungskurse für die Einlösung maßgebend sind. Für einen deutschen Gläubiger beispielsweise, der an einen holländischen Schuldner eine auf Gulden lautende Forderung besitzt, kann sich demgemäß der Erlös in Reichsmark verschieden stellen, je nachdem der Begleichungsmodus a, bei dem der Berliner Guldenkurs maßgebend ist, oder der Begleichungsmodus b, bei dem der Amsterdamer Markkurs maßgebend ist, gewählt wird. Die Devisenausgleichsarbtrage befaßt sich nun mit der Aufgabe, in jedem einzelnen Falle die für den Gläubiger (oder, wenn die Schuldsumme in der Währung des Landes i fixiert ist, die für den Schuldner) günstigste Art der Begleichung zu ermitteln.

Wenn in Berlin der holländische Gulden zum Kurse von y Mark notiert, so bringt hier eine auf g Gulden lautende Forderung, beglichen durch Amsterdamer Wechsel oder Auszahlung, $g \cdot y$ Mark. Wenn in derselben Zeit die Mark in Amsterdam y' Gulden notiert, so ist hier der Gegenwert von einem Gulden $\frac{1}{y'}$ Mark; durch die zur Begleichung der Forderung bereitgestellten g Gulden werden hier also $g \cdot \frac{1}{y'}$ Mark, fällig in Berlin auf Wechsel oder als Auszahlung, verfügbar gemacht. Nur im Falle der Devisenkursparität, wo $y = \frac{1}{y'}$, ist es für Gläubiger und Schuldner völlig gleichwertig, ob nach dem Modus a an der Berliner Börse oder nach dem Modus b an der Amsterdamer Börse umgesetzt wird. Ist $y > \frac{1}{y'}$, so ist für den Gläubiger der Modus a (Berliner Börse) vorteilhafter; ist dagegen $y < \frac{1}{y'}$, so ist für ihn der Modus b (Amsterdamer Börse) vorteilhafter. Der Schuldner muß in jedem Falle g Gulden abführen.

Um schnell zu erkennen, welcher der drei Fälle $y \begin{matrix} \geq \\ \equiv \\ < \end{matrix} \frac{1}{y'}$ vorliegt, bedient man sich zweckmäßigerweise einer der Relation $y = \frac{1}{y'}$ entsprechenden „Paritätstabelle“, wie sie oben beschrieben wurde, oder der zugehörigen graphischen Darstellung, in der nur festzustellen ist, ob der zu den Koordinaten y' , y gehörige Punkt über, auf oder unter der Paritätslinie liegt.

Hat ein Berliner Schuldner eine auf g Gulden lautende Schuld an einen Amsterdamer Gläubiger zu begleichen, so ist für ihn im Falle $y > \frac{1}{y'}$ die Umsetzung an der Amsterdamer Börse vorteilhafter: Er wird den Gläubiger dort trassieren bzw. eine Auszahlung Berlin verkaufen lassen, die dann eben von ihm in Berlin in Reichsmark eingelöst werden muß. Im Falle $y < \frac{1}{y'}$ ist für den Berliner Schuldner (natürlich die Umsetzung an der Berliner Börse vorteilhafter: Er wird hier für $g \cdot y$ Mark eine auf Dollar lautende Auszahlung Amsterdam erwerben bzw. remittieren.

Der aus der Verschiedenheit von Angebot und Nachfrage sich ergebende Unterschied der Umrechnungskurse der Devisen an den Börsen der beiden in Frage kommenden Länder i und k wird von den Arbitrageuren berufsmäßig zu sog. Devisendifferenz-Arbitragegeschäften benutzt. Stellt sich der Gulden für den Markbesitzer in Berlin teurer als in Amsterdam, so daß $y > \frac{1}{y'}$, so kann der Berliner Arbitrageur dadurch einen Gewinn erzielen, daß er durch einen Partner in Amsterdam daselbst ein Guthaben von g Gulden bereitstellt und dieses an der Berliner Börse in Mark umsetzt: Er läßt seinen Amsterdamer Partner zum Preise von g Gulden eine auf $g \cdot \frac{1}{y'}$ Mark lautende, von ihm selbst einzulösende Auszahlung Berlin verkaufen und verkauft dann seinerseits an der Berliner Börse für $g \cdot y$ Mark eine auf g Gulden lautende, von seinem Partner einzulösende Auszahlung Amsterdam. Offenbar ist $g\left(y - \frac{1}{y'}\right)$ der Gewinn; er teilt ihn zur Hälfte mit seinem Partner. Ist umgekehrt $y < \frac{1}{y'}$, steht also die Mark zum Gulden in Berlin besser als in Amsterdam, so verschafft sich der Berliner Arbitrageur in Berlin ein Guldenguthaben, das er von seinem Partner in Amsterdam verwerten läßt: Er selbst erwirbt an der Berliner Börse für $g \cdot y$ Mark eine auf g Gulden lautende Auszahlung Amsterdam; diese hebt sein Partner daselbst ab und benutzt sie an der Amsterdamer Börse zum Ankauf einer auf $g \cdot \frac{1}{y'}$ Mark lautenden Auszahlung Berlin. Nach Abhebung dieser Summe hat der Berliner Arbitrageur einen

Gewinn von $g\left(\frac{1}{y} - y\right)$ Mark erzielt, den er zur Hälfte mit seinem Amsterdamer Partner teilt. — Auf die bei Wechseln verschiedener Sicht eintretenden Arbitragemöglichkeiten kommen wir im § 4 zu sprechen.

1. Beispiel: Wird ein Berliner Gläubiger eine Forderung von 5000 hfl. besser durch Trassieren auf den Amsterdamer Schuldner einziehen oder remittieren lassen? (Vgl. obige Kurstabelle.)

Lösung: Man erhält für 5000 hfl. in Amsterdam 8446 RM, in Berlin 8470 RM; der Gläubiger trassiert.

2. Beispiel: Amsterdam schuldet 10000 RM an Berlin; wird der Schuldner Rimessen schicken oder trassieren lassen?

Lösung: Man erhält 10000 RM in Amsterdam für 5920 hfl, in Berlin dagegen für 5903 hfl; der Schuldner läßt mit Vorteil trassieren.

In den bisher behandelten Fällen, wo nur die Devisenkurse des Gläubigerlandes i und des Schuldnerlandes k eine Rolle spielen, also nur direkte Umrechnungen oder Reduktionen zwischen den Währungen dieser beiden Länder in Frage kommen, spricht man von direkter Arbitrage. Wird die Begleichung einer Schuld oder die Ausführung eines Arbitragegeschäfts durch eine Firma in einem dritten Lande j vermittelt, so sind indirekte Reduktionen, d. h. Umrechnungen unter Zwischenschaltung der Kurse des Landes j , heranzuziehen, und man spricht von indirekter Devisenausgleichsarbittage. Ein Berliner, der eine auf f Schweizer Franken lautende Auszahlung Zürich zu Geld machen will, erzielt durch direkten Verkauf an der Berliner Börse $f \cdot y$ Mark, wenn y der Berliner Frankenkurs ist. In Amsterdam würde eine mit ihm in Geschäftsverbindung stehende Firma dieselbe Auszahlung für $f\mu$ Gulden verkaufen können, wenn μ der Amsterdamer Frankenkurs. Das ihm so erwachsende Amsterdamer Guthaben würde er an der Berliner Börse für $f\mu x$ Mark zu Gelde machen können, wenn x der Berliner Kurs für die auf einen Gulden lautende Auszahlung Amsterdam. Wir können also $y_{ijk} = \mu x$ als den indirekten Berliner Kurs für einen Franken Auszahlung Zürich (über Amsterdam) bezeichnen.

Je nachdem $y_{ijk} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} y$ wird der Berliner Gläubiger indirekt über Amsterdam oder direkt an der Berliner Börse seine Forderung zu Geld machen. Wenn andererseits ein Berliner Schuldner eine auf f Schweizer Franken lautende Forderung einzulösen hat, so wird er im Falle $y_{ijk} > y$ den direkten Weg vorziehen, d. h. in Berlin eine auf f Franken lautende Auszahlung Zürich für $f y$ Mark erwerben; im Falle $y_{ijk} < y$ dagegen wird er eine entsprechende Auszahlung Zürich in Amsterdam für $f\mu$ Gulden kaufen lassen und diesen Betrag durch eine in Berlin für $f\mu x = f y_{ijk}$ Mark erworbene Auszahlung Amsterdam decken.

Um schnell prüfen zu können, ob $y_{ijk} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} y$, verschafft man sich für die in Betracht kommenden Kurse μ und x ein Nomogramm (Rechenblatt),

das sog. Arbitragendiagramm (Abb. 2). Deutet man in einem System rechtwinkliger cartesischer Koordinaten x als den direkten Berliner Guldenkurs, y bzw. y_{ijk} als den direkten bzw. durch Vermittlung Amsterdam sich ergebenden Berliner Frankenkurs, so sind die Linien $y_{ijk} = \mu x$ Strahlen, die vom Koordinatenanfangspunkt ausgehen; ihre Richtungskoeffizienten sind μ , d. h. der Amsterdamer (in Gulden ausgedrückte) Schweizer Frankenkurs¹). Man bestimmt den Schnittpunkt der dem Tageskurs x entsprechenden Vertikalen mit demjenigen Strahl, der dem Tageskurs μ zugeordnet ist. Dann ist an der durch diesen Schnittpunkt hindurchgehenden Horizontalen der zugehörige indirekte Kurs y_{ijk} abzulesen, und man kann sofort entscheiden, ob dieser größer oder kleiner ist als der direkte Tageskurs y .

Für den Ausgleich einer Forderung gibt es, wie wir wissen, im wesentlichen zwei verschiedene Wege: Entweder der Gläubiger trassiert auf den Schuldner (bzw. verkauft zu seinen Lasten eine auf das Schuldnerland lautende Auszahlung), oder der Schuldner schickt Rimessen (bzw. erwirbt eine auf das Gläubigerland lautende Auszahlung). Demnach kommen bei Berücksichtigung einer Vermittlung Amsterdam für den deutschen Gläubiger G_i , der von einem Schweizer Schuldner S_k eine auf einen Franken lautende Forderung einziehen will, im wesentlichen sechs verschiedene Wege in Frage. y' bezeichne die Züricher Marknotierung, μ' die Züricher Guldennotierung, x' die Amsterdamer Marknotierung.

1. Direkter Ausgleich.

- a) G_i trassiert in Berlin auf S_k und erzielt y Mark;

¹) Beziehen sich die im Kursblatt bezeichneten Kurse nicht auf eine, sondern auf 100 Einheiten der fremden Währung, z. B. $X =$ Marknotiz für 100 Gulden, so rechne man sie für Herstellung des Diagramms $y_{ijk} = \mu \cdot x$ zunächst auf die Einheit um, also $x = \frac{X}{100}$; analog bei den μ . Die Bezifferung der Abszissen und der Strahlen kann natürlich dem Kursblatt entsprechend genommen werden.

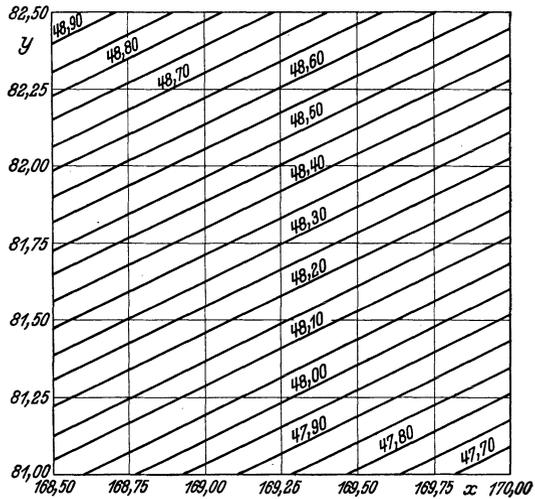


Abb. 2. Arbitragendiagramm.

b) G_i läßt S_k in Zürich Berliner Rimessen in Höhe von $\frac{1}{y}$ Mark kaufen, erhält also $\frac{1}{y}$ Mark.

2. Indirekter Ausgleich.

a) G_i läßt Amsterdam trassieren, Erlös μ Gulden, und trassiert in Berlin auf dies Guldenguthaben zum Kurse x ; Erlös μx Mark;

b) G_i läßt Amsterdam trassieren, Erlös μ Gulden, und läßt Amsterdam für den Erlös Berliner Rimessen in Höhe von $\frac{\mu}{x}$ Mark kaufen; G_i erhält also $\frac{\mu}{x}$ Mark;

c) G_i läßt S_k in Zürich Amsterdamer Rimessen in Höhe von $\frac{1}{\mu'}$ Gulden kaufen; für den Erlös läßt er Amsterdam Berliner Rimessen zum Kurse von $\frac{1}{x'}$ kaufen; G_i erhält also $\frac{1}{\mu' x'}$ Mark.

d) G_i läßt S_k in Zürich Amsterdamer Rimessen in Höhe von $\frac{1}{\mu}$ Gulden kaufen; auf den Erlös $\frac{1}{\mu}$ Gulden trassiert er selbst in Berlin zum Kurse x , erhält also $\frac{x}{\mu}$ Mark.

Statt der Benutzung von Wechseln kann auch jeweils das damit gleichwertige Verfahren mit Auszahlungen (oben in Klammer beigefügt) eingeschlagen werden.

Der Gläubiger wird prüfen, welcher der sechs Werte y , $\frac{1}{y}$; μx , $\frac{\mu}{x}$, $\frac{1}{\mu' x'}$, $\frac{x}{\mu'}$ der größte ist, und sich für den entsprechenden Weg zwecks Einziehung seiner Forderung entscheiden; der Schuldner hat in jedem Fall einen Schweizer Franken zu zahlen.

Hat ein Berliner Schuldner an einen Züricher Gläubiger eine auf einen Schweizer Franken lautende Schuld zu begleichen, so ergeben sich analog sechs Möglichkeiten, von denen der Schuldner die für ihn vorteilhafteste auswählen wird. Der Berufsarbitrageur erlangt durch Einbeziehung eines weiteren Platzes weitere Möglichkeiten, aus der Verschiedenheit der sechs (direkten und indirekten) Einlöskurse Nutzen zu ziehen. — Das Arbitragegeschäft trägt natürlich zum Ausgleich der Kursdifferenzen verschiedener Plätze bei, indem es die Relation Angebot-Nachfrage am Devisenmarkt beeinflusst. Seine Bedeutung ist erheblich zurückgegangen mit der wachsenden Ausdehnung des allgemeinen Nachrichtendienstes und der dadurch bewirkten Tendenz zur Ausgleichung der Kurse verschiedener Plätze.

Beispiel: Ein Berliner will eine Forderung von 50000 Schweizer Franken aus Zürich einziehen, indem er seinen Amsterdamer Geschäftsfreund zum Verkauf telegraphischer Auszahlung Zürich veranlaßt und dann selbst Auszahlung Amster-

dam verkauft. Wie hoch beläuft sich der Gewinn gegenüber direktem Trassieren? (Vgl. obige Kurstabelle.)

Lösung: Durch Verkauf von 50000 Fr. erhält Amsterdam $50000 \cdot 0,4809$ hfl. = 24045 hfl.; hierfür erhält Berlin $24045 \cdot 1,6940$ RM = 40732,23 RM, also 92,30 RM mehr als bei direktem Trassieren, wo $50000 \cdot 81,280 = 40640$ RM erzielt werden.

Wenn die Länder i und k beide Goldwährung haben und Goldankäufe und Goldsendungen nach dem Ausland freigegeben, so sind dem Schwanken der gegenseitigen Devisenkurse Schranken gezogen, weil der Wert der Geldeinheiten beider Länder zum Feingold in fester Relation steht. Beispielsweise ist in Deutschland der Wert einer Goldmark durch Verordnung vom 27. April 1924 (mit dem Vorkriegswert übereinstimmend) auf $\frac{1}{2790}$ kg Feingold festgesetzt, während in England (bis zur Preisgabe der Goldwährung das Pfund den Wert von 0,0073224 kg Feingold hatte. Daraus berechnet sich: $1 \text{ £} = 0,0073224 \cdot 2790 = 20,43$ Goldmark. Wird Gold von England nach Deutschland versendet, so büßt es wegen der damit verbundenen Transport-, Verpackungs- und Versicherungskosten, Zinsverlust und sonstigen Spesen für den, der es in deutscher Münze verwerten will, einen Betrag γ_1 auf 1 £ gerechnet im Werte ein; $20,43 - \gamma_1$ wird als der Goldimportpunkt bezeichnet. Kommt umgekehrt Gold von Deutschland nach England zur Versendung, so muß für den Erwerb von Pfund wegen entsprechender Unkosten ein Aufschlag von γ_2 auf 1 £ in Rechnung gestellt werden; $20,43 + \gamma_2$ wird als der Goldexportpunkt bezeichnet¹⁾. Liegt der Berliner Kurs englischer Devisen unter dem Goldimportpunkt, so wird ein deutscher Gläubiger von einem englischen Schuldner die Bezahlung in bar beanspruchen und in Gold überführen lassen, da er durch Verkauf englischer Devisen einen geringeren Marktbetrag erhält. Liegt der Berliner Kurs englischer Devisen über dem Goldexportpunkt, so wird ein deutscher Schuldner eine in englischer Währung fixierte Schuld lieber durch Versendung von Gold begleichen, weil er für den Erwerb englischer Devisen mehr anlegen muß. Im ersten Falle wird es für einen Berliner Arbitrageur gewinnbringend, englische Devisen zu erwerben und den in England erzielten Golderlös nach Deutschland verschicken zu lassen; im zweiten Falle wird er Gold nach England schicken und dort zum Ankauf von englischen Devisen benutzen, die er dann an der Berliner Börse mit Nutzen verkauft. Solche Arbitragegeschäfte wirken darauf hin, daß die Kurse englischer Devisen wieder auf den normalen Spielraum zwischen $20,43 - \gamma_1$ und $20,43 + \gamma_2$ sich einstellen.

Das Schwanken der Goldpunkte hängt damit zusammen, daß die mit der Umsetzung von Gold in Zahlungsmittel und umgekehrt verbundenen Spesen verschieden ausfallen, je nachdem aus den augen-

¹⁾ Vor dem Kriege handelte es sich bei γ_1 und γ_2 um Beträge von 0,08—0,10 M.

blicklichen Vorräten des Heimatlandes Gold in Barren oder in der Münze des eigenen oder des Ziellandes für die Versendung greifbar ist. Steht nur Münze des Heimatlandes zur Verfügung, so muß man sich beim Verkauf im Zielland einen Abzug für Abnützung der Münzen und sog. Toleranz (die beim Prägen gesetzlich zugelassene geringe Abweichung vom Sollgewicht) gefallen lassen. Etwas geringer wird bei Barrengold, das man im allgemeinen teurer einkauft als verkauft, der zu tragende Verlust sein.

§ 2. Einfacher Zins. Kontokorrent.

Wir haben gesehen, daß Ortsunterschiede, also Verschiedenheit des Verkehrsplatzes, sich in Kursdifferenzen der Zahlungsmittel auswirken können. Grundsätzlich spielen Zeitunterschiede eine ähnliche Rolle. Der Wert eines Guthabens, dessen Verfalltag in der Zukunft liegt, wird niedriger veranschlagt als der des tatsächlichen gegenwärtigen Besitzes der gleichen Summe. Denn in der Zwischenzeit kann mit dieser Summe gewinnbringend gewirtschaftet werden; außerdem ist die Rückzahlung seitens des Schuldners stets mehr oder minder unsicher. Als Entschädigung wird vom Gläubiger eine Leihgebühr beansprucht, die als Zins (lat. census = Steuer) bezeichnet wird und nach der Höhe des Schuldbetrags und der Dauer der Leihfrist bemessen wird. Die Zinszahlung erfolgt vielfach am Beginn der Leihfrist: vorschüssig, antizipativ, pränumerando, oder am Schluß derselben: nachschüssig, dekursiv, postnumerando; vielfach aber auch, besonders bei länger währendender oder noch unbestimmter Leihfrist, zu bestimmten kalendermäßig festgelegten Terminen in sog. Zinsperioden, wobei für die einzelnen Perioden wieder Pränumerando- oder Postnumerandozahlungen vereinbart werden können. Man bezieht den zu zahlenden Zins zunächst auf eine bestimmte Rechnungsperiode als Zeiteinheit und drückt den entsprechenden Betrag Z_0 in Hundertteilen oder Prozenten (lat. pro centum) p der Leihsumme, des Kapitals (lat. capitale = Hauptgut) K aus; dann wird $p = \frac{Z_0}{K} \cdot 100$ als Zinsfuß bezeichnet. Statt p Prozent schreibt man im allgemeinen $p\%$. Wir wollen den auf die Einheit bezogenen Zins $i = \frac{p}{100}$ den Zinssatz nennen. Für Bruchteile, runde oder unrunde Vielfache n der Rechnungsperiode wird im kaufmännischen Leben die Zinssumme der Zeitspanne einfach proportional gesetzt, also $Z = n Z_0$, so daß

$$Z = \frac{K \cdot p \cdot n}{100} = K \cdot i \cdot n, \quad (1)$$

wobei der Zinsfuß p auf das Jahr als Rechnungsperiode bezogen wird ($p\%$ p. a. = pro anno). Diese Formel für die sog. einfache Verzinsung

läßt es, in Übereinstimmung mit den §§ 289, 608 des Bürgerlichen Gesetzbuchs, als Norm gelten, daß der aus dem Kapital zu ziehende Nutzen als der Leihdauer n proportional zu setzen ist, selbst wenn n die etwa vereinbarte Leihfrist überschreitet oder Zinstermine nicht innegehalten werden.

Die Höhe des Jahreszinsfußes für Leihgeld richtet sich nach dem mit seiner Hilfe zu erwirtschaftenden Ertrage und andererseits nach der Sicherheit, mit der die Rückzahlung gewährleistet wird, im übrigen wie auf allen Märkten nach Angebot und Nachfrage. Steigende wirtschaftliche Aktivität wirkt im Sinne anziehender Zinssätze; Stagnation, Ausbreitung des Rentnertums im Sinne sinkender Zinsfüße. Staatsanleihen, durch Sachpfand gesicherte Darlehen sind niedriger zu verzinsen als persönliche Kredite. Die durch Kriege, gespannte außen- und innenpolitische Verhältnisse und aufgezwungene übermäßige Lasten bedingte Unsicherheit führt, wie harte Erfahrung zeigt, zur Übersteigerung der Zinssätze. Für kapitalarme Zeiten und Länder gelten hohe Zinssätze; Organisation der Kapitalbildung und des Kapitalangebots durch Geldinstitute drückt auf den Zinssatz. Bis zu einem gewissen Grade wirken die Zentralnotenbanken durch Festsetzung des Diskontsatzes für Wechsel reglementierend; ebenso durch Kartellmaßnahmen die übrigen Banken und die Sparkassen, deren Rentabilität sich auf eine angemessene Differenz zwischen den Zinssätzen für Aktiva (Guthaben) und Passiva (Schulden) gründet. Bei großen Leihbeträgen und längeren Kündigungsfristen wird oft eine Erhöhung des Zinssatzes zugebilligt, als Prämie für die Stabilisierung der Wirtschaftsgrundlagen und die Verminderung der Spesen.

Ist die Zeitspanne n , für die Verzinsung zu erfolgen hat, durch bestimmte Kalendertage festgelegt, so wird sie mittels der Zahl der zwischen den beiden Daten liegenden Tage als Jahresbruchteil ausgedrückt; dabei muß Klarheit darüber herrschen, ob von diesen beiden Stichtagen keiner in die Leihdauer eingerechnet wird — wie vielfach im Bank- und Sparkassenverkehr üblich — oder einer — das ist die Regel, insbesondere auch im Wechselverkehr — oder beide — wie im Effektenverkehr üblich. In Deutschland wird bei der Ermittlung der Leihdauer amtlich, z. B. bei gerichtlichen Auseinandersetzungen, jeder Kalendermonat mit der tatsächlich auf ihn entfallenden Zahl von Tagen (28 bzw. 29, 30, 31), das Jahr mit 365 Tagen eingesetzt. Im kaufmännischen Verkehr dagegen rechnet man zur Erzielung numerischer Vereinfachungen das Jahr zu 360 und jeden Monat gleichmäßig zu 30 Tagen. Soll also von den beiden Grenztagen einer auf die Leihdauer zur Anrechnung kommen, so gestaltet sich die Bestimmung von n so, wie aus den folgenden beiden Beispielen ersichtlich:

1. Beispiel: Leihdauer vom 18. Mai 1932 bis 10. November 1932:

$$\frac{XI-V}{10-18} = \frac{X-V}{40-18} = \frac{V}{22};$$

5 Monate 22 Tage = 172 Tage; $n = \frac{172}{360}$.

2. Beispiel: Leihdauer vom 18. September 1932 bis 31. Dezember 1932:

$$\frac{XII-IX}{30-18} = \frac{III}{12};$$

3 Monate 12 Tage = 102 Tage; $n = \frac{102}{360}$.

Bezeichnen wir allgemein mit t die Anzahl der auf die Leihdauer zu verrechnenden Tage, so geht die Formel für die einfache Verzinsung über in

$$Z = \frac{K}{100} t \cdot \frac{p}{360}. \quad (1')$$

Man nennt $\frac{K}{100} t$ die Zinszahl, wofür zur Abkürzung $\#$ gesetzt wird, $\frac{p}{360}$ den Zinsfaktor, $\frac{360}{p}$ den Zinsdivisor. Für viele der gebräuchlichsten Zinsfüße p nimmt der Zinsdivisor wegen der zahlreichen Teiler von 360 einfache ganzzahlige Werte an, z. B.

p	3	$3\frac{1}{3}$	$3\frac{3}{4}$	4	$4\frac{1}{2}$	5	6	$7\frac{1}{2}$	8	9	10
Zinsdivisor	120	108	96	90	80	72	60	48	45	40	36

Die Zinsen können dann nach (1') aus der Zinszahl sozusagen im Kopf ausgerechnet werden. Handelt es sich im ersten Beispiel um ein mit $4\frac{1}{2}\%$ zu verzinsendes Kapital $K = 3500$ M, so ist die Zinszahl $35 \cdot 172 = 6020$, und die Division mit 80 ergibt als Zinssumme $75,25$ M. Das Rechnen mit Zinszahlen hat sich besonders deswegen eingebürgert, weil man auf sie ganz von selbst durch den praktisch sehr oft vorliegenden Fall geführt wird, daß mehrere Beträge $K_1, K_2, \dots, K_\lambda$ von verschiedener Leihdauer $t_1, t_2, \dots, t_\lambda$ zum gleichen Prozentsatz p verzinst werden müssen. Für diesen Fall beträgt die gesamte Zinssumme

$$Z = \left(\frac{K_1}{100} \cdot t_1 + \frac{K_2}{100} \cdot t_2 + \dots + \frac{K_\lambda}{100} \cdot t_\lambda \right) \cdot \frac{p}{360}.$$

In der Klammer steht die Summe der Zinszahlen, die man praktisch im allgemeinen auf ganzzahlige Beträge abrundet, zumal bei einer größeren Postenzahl λ anzunehmen ist, daß die entstehenden Ungenauigkeiten sich ungefähr ausgleichen.

Für häufige Zinsberechnungen empfiehlt sich die Benutzung von Tabellen¹⁾. Beispielsweise gibt die Zinstabelle von Otto Langenbeck

¹⁾ Vgl. die Zusammenstellung von Zinstabellen in „Sparkasse, amtliche Zeitschrift des Deutschen Sparkassen-Bundes“, Hannover, Jahrgang 1907, S. 654—659.

(Berlin, Haude & Spener 1898) für die Zinsfüße 2 , $2\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{2}$, \dots , $6\frac{3}{4}$ die zu den Zinszahlen von 1 — $300\,000$ gehörenden Zinsen. In I. Guyer, Zinszahlen und Zinsen aus Zinszahlen (Zürich: Zürcher & Furrer 1902) finden sich Tabellen der Zinszahlen für 1 — 200 Tage und Kapitalien von 100 — 9900 RM, außerdem Tabellen zur Bestimmung der Zinsen aus Zinszahlen und den praktisch vorkommenden Zinsfüßen zwischen 2% und 7% .

Die Vorteile, die das Arbeiten mit Zinszahlen zur Bestimmung der Zinssumme bietet, werden besonders deutlich beim Kontokorrent (ital. conto corrente). Von Firmen, mit denen man in laufender Geschäftsverbindung steht, erhält man von Zeit zu Zeit, auf alle Fälle am Jahresschluß, einen Rechnungsauszug, der die kalendermäßige Entwicklung von Guthaben und Verbindlichkeiten wiedergibt und, wenn entsprechende Verzinsung vereinbart ist, auch die Zinsberechnung umfaßt. Von dieser Art sind insbesondere die Kontokorrente, die eine Bank an einen Kunden versendet, der bei ihr ein Girokonto unterhält. Wir wollen den Fall annehmen, daß ihm etwa auf Grund von Wertpapierhinterlegung das Recht eingeräumt sei, sein Konto bis zu einem bestimmten Höchstbetrage zu überziehen, d. h. bei der Bank Darlehen aufzunehmen. Derartige Passiva des Kunden sind ihrer Laufzeit entsprechend mit einem Zinsfuß p' zu verzinsen, der höher ist als der Zinsfuß p , den die Bank dem Kunden vergütet, solange sein Konto aktiv ist. Wir bringen S. 16 das Beispiel eines staffelförmigen Kontokorrents, wie es sich von England her auch in Deutschland mehr und mehr eingebürgert hat. In der ersten Spalte sind die Daten der einzelnen Geschäftsvorgänge verzeichnet, in der zweiten (Umsatz) die Posten selbst: Die Unterspalte Soll enthält die Lastschriften, die Unterspalte Haben die Gutschriften. Aus ihnen ergibt sich, ausgehend von dem zu Beginn der Rechnungsperiode vorhandenen Kontobestand (Saldo-Vortrag) durch Subtraktion bzw. Addition der jeweilige positive oder negative Saldo oder Kontostand, der in der nächsten Spalte verzeichnet ist; ein negativer Bestand wird dabei in Rotschrift oder durch ein beigefügtes rot unterstrichenes S (Soll-Saldo) kenntlich gemacht. Die folgende Kolonne mit dem Kopf „Wert“ bringt die für die Zinsberechnung maßgebenden Daten der Geschäftsvorgänge; während die Daten der Gutschriften aus der ersten Kolonne ungeändert übernommen werden, werden die Lastschriften im allgemeinen um einen Tag zurückdatiert, nämlich stets auf den letzten vor dem Vorgang liegenden Werktag. Das kommt natürlich auf eine Begünstigung der Bank bei der Zinsberechnung heraus. Aus den berichtigten Daten ist durch die übliche Differenzbildung (S: 14) die für den jeweiligen Saldo geltende Leihdauer bestimmt, und die entsprechenden Werte t sind in der folgenden Spalte mit dem Kopf „Tage“ vermerkt. Die nächste Kolonne enthält die durch

Multiplikation der in der gleichen Zeile stehenden Saldo- und Tage-Ziffern gewonnenen Zinszahlen, getrennt nach Soll und Haben. In der letzten Spalte sind die Gegenstände der Buchung näher gekennzeichnet.

Rechnungsauszug der Z-Bank für Herrn N. N., Berlin.

Dat.	Umsatz		Saldo S: Kennzeichen für Soll-Saldo	Wert	Tage	Zinszahlen		Gegenstand der Buchung
	Soll	Haben				Soll	Haben	
(1. 1.)			435,20	31.12.	3		13	Saldovortrag
3. 1.		210,—	645,20	3. 1.	96		619	Gehalt
10. 4.	420,50		224,70	9. 4.	56		126	Scheck Nr. 31
5. 6.		85,10	309,80	5. 6.	81		251	Zahlung von X. Y.
27. 8.	287,40		22,40	26. 8.	11		2	Überweisung Nr. 56
8. 9.	104,—		81,60	7. 9.	24	20		Steuerzahlung
1. 10.		680,20	598,60	1.10.	89		533	Effektenverkauf
31. 12.			598,60	30.12.				Kapitalsaldo
					360	20	1544	(Summen)

Kommen bei lebhafterem Geschäftsverkehr derartige Rechnungsauszüge häufiger, z. B. monatlich zur Versendung, so werden die in der letzten Zeile unter dem Strich stehenden Summen als Überträge in einer Kopfzeile des neuen Rechnungsauszuges gebucht. Endigt der Rechnungsauszug wie im obigen Muster mit dem Schluß der Zinsabrechnungsperiode, d. h. hier des Kalenderjahres, so wird ihm eine Abschlußnote beigelegt. In dem einfachsten Falle, wo die Zinsfüße p' , p für Soll- und Habensalden im Laufe des Jahres sich nicht ändern, hat sie etwa die Gestalt wie in nachstehendem Muster.

Abschluß am 31. Dezember 1931. Girokonto Nr. . . .

Gegenstand der Buchung	Soll			Haben			Saldo
	Zins- fuß	Zins- zahlen	Zinsen	Zins- fuß	Zins- zahlen	Zinsen	
Kapitalsaldo							598,60
Zinsen 1. 1.—31. 12. 31..	8	20	0,44	3	1544	12,87	
Handlungskosten.			9,—				
Summen			9,44			12,87	
						9,44	
Übertrag für 1932						3,43	602,03

Berlin, den 31. Dezember 1931.

Z-Bank

Haben sich die Zinsfüße p und p' im Laufe des Rechnungsjahres geändert, so ist die Zinsberechnung dementsprechend für die einzelnen Zeitabschnitte nach Zeilen gegliedert. — Die von den Banken berechneten Handlungskosten umfassen einerseits die tatsächlich von ihnen verauslagten Porti und Spesen, andererseits die sog. Provision, die nach den getätigten Umsätzen bemessen wird. Vielfach wird $10/_{00}$, d. h. ein Promille oder ein Tausendstel der größeren der beiden Summen ge-

rechnet, die sich durch Addition aller Sollposten und andererseits aller Habenposten ergeben.

Instruktiv ist die graphische Darstellung eines Kontokorrents in einem rechtwinkligen Koordinatensystem, in dem die Tage von 1—360 als Abszissen und die Salden als Ordinaten aufgetragen werden: Habensalden positiv, Sallsalden negativ. Die Rechtecke über den einzelnen Zeitspannen veranschaulichen die Zinszahlen.

§ 3. Effektenrechnung.

Unter Effekten versteht man zwei Gruppen von Wertpapieren, die an der Börse als Handelsgegenstand zugelassen sind: Aktien, d. h. Anteilscheine größerer vergesellschafteter wirtschaftlicher Unternehmungen, die ihrem Besitzer Anteil an dem zur Verteilung gelangenden, von Jahr zu Jahr schwankenden Reingewinn der betreffenden Gesellschaft in Form der sog. Dividende bringen; andererseits Obligationen oder Fonds, d. h. Schuldverschreibungen von Gemeinwesen (Staaten, Provinzen, Kreisen, Gemeinden) und anderer über einen größeren Immobilienbesitz verfügender Körperschaften, bei denen dem Inhaber eine feste Verzinsung des Nennbetrages der Schuldverschreibung zugesichert ist. Effekten sind seitens des Besitzers fast stets unkündbar, aber im allgemeinen Inhaberpapiere: Sie können veräußert werden, ohne daß die Stelle, von der sie ausgegeben sind, hiervon benachrichtigt wird; ihre Verkäuflichkeit ist dadurch sehr erleichtert. Andererseits macht dieser Sachverhalt eine besondere Form für die Zuleitung der Dividende bzw. Zinsen an die Bezugsberechtigten erforderlich. Dem Hauptstück des Wertpapiers, dem Mantel, auf dem der (im allgemeinen auf volle Hunderte, z. B. 100, 200, 400, 500, 1000 lautende) Nennwert und die Geschäftsbedingungen angegeben sind, ist ein zweiter Bogen beigefügt, der die Dividendenscheine bzw. Koupons oder Zinsabschnitte enthält. Diese trennt der Inhaber bei Fälligkeit ab und löst sie bei einer der aus den Geschäftsbedingungen ersichtlichen Zahlstellen ein. Der unter dem letzten Abschnitt befindliche Talon berechtigt zum Bezug eines neuen Gewinn- bzw. Zinsscheinbogens.

Der Nennwert K des Wertpapiers ist bei Schuldverschreibungen die Summe, auf die sich die Zinsverpflichtung bezieht und die bei Tilgungsanleihen und vom Schuldner kündbaren Anleihen tatsächlich zur Rückzahlung kommt, während bei unkündbaren Anleihen der Schuldner nur eine laufende Zinsverpflichtung übernimmt. Bei Aktien bedeutet der Nennwert den Anteil am Kapital der Gesellschaft, auf den die Dividende nach dem von der Generalversammlung festgesetzten Prozentsatz verrechnet wird. — Dem Nennwert K des Papiers steht der Effektiv- oder Kurswert K' gegenüber: Der im Börsenhandel durch

Angebot und Nachfrage sich ergebende Preis K' , ausgedrückt in Hundertteilen des Nennwerts, wird als der Kurs C bezeichnet:

$$C = \frac{K'}{K} \cdot 100. \quad (2)$$

Maßgebend für den Kurs sind verschiedene Momente: größeres oder geringeres Vertrauen zur Prosperität des betreffenden Unternehmens, zur Zahlungsfähigkeit der betreffenden Körperschaft, Abweichungen der mit dem betreffenden Wertpapier erzielbaren Verzinsung vom Marktzinsfuß, d. h. von der durchschnittlichen bei Anlagen gleicher Art erzielbaren Verzinsung, allgemeine politische Momente, Überfluß oder Mangel an baren Zahlungsmitteln usw. Stimmen Kurswert und Nennwert überein, so daß $C = 100$, so steht der Kurs pari. Liegt der Kurswert über bzw. unter dem Nennwert, so steht das Papier über bzw. unter dem Parikurs. Die Kurse, die nach der vorläufigen Ermittlung durch die Kursmakler endgültig vom Börsenvorstand festgestellt wurden, werden im Kurszettel der Effektenbörse veröffentlicht, wobei die Vermerke bez., G, B (bzw. P) die gleiche Bedeutung wie im Kurszettel der Devisenbörse (vgl. S. 3) haben.

Berliner Effektenkurse vom Sonnabend, 17. September 1932.

Dividenden		Gesellschaft	Kurs vom	
1930 30/31	1931 31/32		17. 9.	16. 9.
Industrie-Aktien.				
0		Allgem. Elektr.-Ges.	31,25 bez.	32 $\frac{1}{8}$ bez. G.
4		Charl. Wasserwerke	79,50 bez.	78,50 bez.
10	8 $\frac{1}{2}$	Hamb. Elektr.-W.	106 $\frac{7}{8}$ bez.	105,75 bez.
0	0	Harpener Bergbau	78 $\frac{3}{8}$ bez.	79,50 bez.
6	0	Rhein. Stahlwerk	70 $\frac{7}{8}$ bez.	70,75 bez.
9	7	Wasserwerk Gelsenk.	—	100,— bez.
Bank-Aktien.				
6	0	Dtsch. B. und Disk.	76 bez.	76 bez.

Anleihen des Reichs, der Länder usw. mit Zinsberechnung.

Zins-termin	Zinsfuß		Späteste Rückzahlung		Kurs vom	
	alt	neu			17. 9.	16. 9.
A. O.	7 $\frac{1}{2}$	6	61	Mecklb.-Str. R. M.—A. 38	58 bez.	56,5 bez.

Ein Kapital, für das Wertpapiere zum Kurs C erworben werden, verzinst sich effektiv zu einem Prozentsatz p' , der sich aus der für ein Stück vom Nennwert 100 hinzuschreibenden Beziehung $\frac{Cp'}{100} = p$ ergibt:

$$p' = \frac{100}{C} p; \quad (3)$$

dabei bedeutet p den Nominalzinsfuß, d. h. den Zinsfuß, der für die Nennbeträge der Schuldverschreibungen zugesichert ist, bzw. den

Dividendenprozentsatz, der allerdings beim Kauf nur gemutmaßt werden kann. Man bezeichnet p' als die effektive Verzinsung oder die gegenwärtige (von der Bewertung etwaigen künftigen Kapitalgewinns abstrahierende) Rentabilität. Für den Nominalzinssatz $i = \frac{p}{100}$ und den Rentabilitätssatz $i' = \frac{p'}{100}$ gilt die zu (3) analoge Beziehung:

$$i' = \frac{100}{C} \cdot i. \quad (3')$$

Bei zwei Effekten, die die gleiche effektive Verzinsung i' gewähren, spricht man bei Beschränkung der Betrachtung auf die gegenwärtige Rentabilität von Kursparität. Sind i_1, i_2 die Nominalzinssätze, C_1, C_2 die Kurse, so folgt aus $\frac{100}{C_1} \cdot i_1 = \frac{100}{C_2} \cdot i_2$ als Bedingung der Kursparität:

$$C_1 : C_2 = i_1 : i_2. \quad (4)$$

Beim Kauf und Verkauf von Effekten ergeben sich noch gewisse Spesen, berechnet vom Kurswert:

1. Provision, vom Bankier im allgemeinen in Höhe von $4\frac{0}{100}$ des Kurswertes beansprucht; Mindestgebühr 1 M oder 0,50 M.

2. Courtage, d. h. Maklergebühr: $1\frac{0}{100}$.

3. Stempelgebühr (Börsenumsatzsteuer mit 25 % Zuschlag); sie beträgt zur Zeit unter Abrundung von Pfennigbeträgen auf volle 10 Pf.

a) bei Anleihen des Reichs und anderer Gemeinwesen $0,5\frac{0}{100}$; wertbeständige Reichsanleihe steuerfrei;

b) bei sonstigen inländischen Schuldverschreibungen $0,75\frac{0}{100}$;

c) bei Industrieobligationen und ausländischen Anleihen und Fonds $1,25\frac{0}{100}$;

d) bei inländischen und ausländischen Aktien $1,875\frac{0}{100}$.

Sehr einfach gestaltet sich hiernach die Abrechnung der Bank, wenn es sich um den Ankauf oder Verkauf von Aktien handelt, bei denen der Kurs den Wert der stets mitzuliefernden Gewinnscheine mitumfaßt.

Beispiel: Am 17. September 1932 kauft jemand 6000 M Deutsche Bank- und Diskontogesellschaft-Aktien. Die Schlußnote lautet:

M 6000 Deutsche Bank- u. Diskonto-G.-Aktien a 76%: M 4560,—

Provision $4\frac{0}{100}$	M 18,20	
Courtage	M 4,60	
Stempel	M 8,60	M 31,40
		M 4591,40

Der Kurszettel gibt auch das Datum an, an dem zuletzt die Dividende gezahlt wurde, was im allgemeinen einmal im Jahre erfolgt. Wenn man einen gleichmäßigen Wertanstieg des nächstfälligen Gewinnscheins im Laufe des Geschäftsjahrs annimmt und Unterlagen für die Höhe der nächsten Dividende besitzt, kann man danach einigermaßen beurteilen,

wie sich der Kurs in Wert der Aktie selbst und Wert des nächstfälligen Dividendenscheins spaltet. An dem Tage, wo der Gewinnschein abgetrennt wird, muß bei sonst gleichbleibenden Kursfaktoren ein entsprechender Kursabschlag eintreten. In folgendem Beispiel wird ein um den Wert des Dividendenscheins reduzierter Kurs vorausgesetzt.

Beispiel: Man hat die Wahl, eine bestimmte Summe entweder in Hamburger Elektrizitäts-Werke-Aktien à $106\frac{7}{8}\%$ (voraussichtliche Dividende $7\frac{1}{2}\%$) oder in Wasserwerke Gelsenkirchen-Aktien à 100% anzulegen (voraussichtliche Dividende 7%). Auf welchem Weg erzielt man die höhere Verzinsung?

Lösung: Die Rentabilität der Hamburger Elektrizitätswerke beträgt $p' = \frac{100}{C} \cdot p = \frac{100}{106\frac{7}{8}} \cdot 7\frac{1}{2} = 7,02\%$; die der Wasserwerke Gelsenkirchen 7% . Man wird sich also für erstere entscheiden.

Bei Obligationen bezieht sich der Kurs nach der in Deutschland üblichen Notierung stets auf den Wert der Schuldverschreibung allein. Zu diesem sog. Nettokurs C^0 kommt bei Feststellung des Bruttokurses C_t hinzu der jeweilige Wert des nächstfälligen, beim Verkauf mitzuliefernden Zinsscheins; also wenn p der auf den Nennwert der Obligation bezogene Jahreszinsfuß, t die seit dem letzten Zinstermin verstrichene Anzahl von Tagen:

$$C_t = C^0 + p \cdot \frac{t}{360}. \quad (5)$$

In die Zeitspanne t werden beide Grenztage eingerechnet. Die Zinstermine, die meist halbjährlich fallen, sind aus dem Kurszettel ersichtlich.

Beispiel: Jemand verkauft am 17. September 1932 für 4000 M 7% Harpener Bergbau à $73\frac{3}{8}\%$; Zinstermine 1. Januar, 1. Juli. Die Schlußnote lautet:

M 4000	Harpener Bergbau		M 3135,—
	77 Tage 7% Zinsen	M 59,90	
	Provision	M 12,50	
	Courtage	M 3,10	
	Stempel	M 5,90	
		M 21,50	M 38,40
			M 3173,40

Werden Obligationen in den letzten 14 Tagen vor der Zinszahlung gehandelt, so wird der nächstfällige Zinsschein nicht mitgeliefert. Da anderenfalls der Käufer die Verzinsung seines Kapitals bis zu diesem Zinstermin einbüßen würde, so muß sich der Verkäufer einen entsprechenden Stückzinsenabzug gefallen lassen. Hierbei werden Verkaufstag und Zinstermin in die Leihdauer nicht einbezogen.

Bei der Bestimmung der Rentabilität von Obligationen ist zu beachten, daß hier die Bewertung des im Falle der Tilgung etwa eintretenden Kapitalgewinns oder -verlusts eine wichtige Rolle spielt, wovon später (IV. Abschnitt) genauer die Rede ist. Für unkündbare

oder Rentenanleihen, insbesondere auch für sog. ewige Renten, bei denen die Anleihe-scheine nicht auf einen bestimmten Schuldbetrag, sondern nur auf einen bestimmten Zinsgenuß lauten, bleibt ohne weiteres die einfache Formel (3) und die aus ihr folgende Bedingung (4) der Kursparität maßgebend.

Man kann (3') auch in gewissem Sinne umkehren: Ist i' der Zinssatz, der nach der Lage des Finanzmarkts bei einer bestimmten Gruppe festverzinslicher Papiere als Rentabilität erwartet oder beansprucht werden kann, so ist

$$C = 100 \frac{i}{i'} \quad (3'')$$

der Kurs, der einer derartigen, zum Nominalzinssatz i aufgelegten ewigen Rente mathematisch zukommt (Kurs der ewigen Rente).

Beispiel: Französische Rente vom Zinssatz $i_1 = 0,03$ notiert einen Monat nach Abtrennung des fälligen Zinsscheins $C_1 = 64\%$, Stückzinsen eingerechnet. Zu welchem Kurs C_2 müßte eine andere ewige Rente vom Zinssatz $i_2 = 0,04$ am Vortage der Zinszahlung ohne den letzten Coupon gehandelt werden, wenn Kursparität herrschen soll?

Lösung: Nettokurs der französischen Rente: $C_1^0 = C_1 - \frac{100 i_1}{12} = 64 - 0,25 = 63,75$. Nach der Paritätsbedingung: $C_2 = C_1^0 \cdot \frac{i_2}{i_1} = 63,75 \cdot \frac{4}{3} = 85\%$.

Die aus (3) sich ergebende augenblickliche Rentabilität p' bildet aber auch bis zu einem gewissen Grade die Grundlage für die Kursgestaltung von Anleihen, bei denen der Schuldner sich den Termin der Kündigung vorbehält. Das gilt zunächst für den Begebungskurs, d. h. den Kurs C , zu dem die Schuldverschreibungen bei der Emission zur Zeichnung aufgelegt werden und der aus finanztechnischen Gründen meist vom Parikurs abweicht. Ist der gesamte Nennwert der Schuldverschreibungen K , der Nominalzinssatz i , so ist der Anleiheertrag $K' = \frac{C}{100} K$, der für den Zeichner in Frage kommende Rentabilitätssatz $i' = \frac{100}{C} i$. Wenn zwei verschiedenen Begebungsverfahren die Kurse C_1, C_2 und die Zinssätze i_1, i_2 entsprechen, so würde der Schuldner die Nennbeträge $K_1 = \frac{100}{C_1} K'$ und $K_2 = \frac{100}{C_2} K'$ zur Erzielung des gleichen Anleiheertrags K' auflegen können. Der jährliche Zinsdienst wäre in dem einen Fall $K_1 i_1 = \frac{100 i_1}{C_1} \cdot K'$, in dem anderen Fall $K_2 i_2 = \frac{100 i_2}{C_2} \cdot K'$, und diese Beträge würden übereinstimmen im Falle der Kursparität, wo $C_1 : C_2 = i_1 : i_2$. Da in diesem Falle auch vom Anleihezeichner die gleiche augenblickliche Rentabilität erzielt wird, erscheinen beide Begebungsverfahren vom beiderseitigen Standpunkt aus zunächst als gleichwertig.

1. Beispiel: Ein Bankenconsortium B_1 will einem Gemeinwesen einen bestimmten Anleihertrag durch Begebung von Schuldverschreibungen beschaffen, die zum Kurs $C_1 = 92,5\%$ und zum Zinsfuß $p_1 = 4\%$ aufgelegt werden; ein Bankenconsortium B_2 macht ein Angebot auf der Grundlage des Kurses $C_2 = 98\%$ und eines Zinsfußes $p_2 = 4\frac{1}{4}\%$. Für welches Angebot wird sich das Gemeinwesen entscheiden?

Lösung: Der zu $C_2 = 98\%$ paritätische Kurs würde $98 \cdot \frac{4}{4\frac{1}{4}} = 92,2\%$ sein, d. h. unter $C_1 = 92,5\%$ liegen. Beim ersten Angebot ergibt sich also für das Gemeinwesen ein niedrigerer Zinsendienst, was dessen Annahme nahelegen würde.

2. Beispiel: Es notierten im August 1926 Rheinische Stahlwerke Obligationen $7\frac{1}{2}\%$ zu $C_1 = 107,25\%$; Friedrich Krupp-Anleihe 6% zu $C_2 = 85\%$. Für welche der beiden Anleihen entscheidet sich der Anlage suchende Kapitalist?

Lösung: Zum Kurs $C_2 = 85\%$ der Krupp-Anleihe würde $85 \cdot \frac{7,5}{6} = 106,25\%$ der paritätische Kurs sein, also ein unter C_1 liegender Kurs. Die Rentabilität ist also im Falle der Krupp-Anleihe größer, was dem Kapitalisten nahe legen würde, sich für sie zu entscheiden.

In Wirklichkeit muß sowohl vom Erwerber der Schuldverschreibung wie von dem, der die Anleihe aufnimmt, der Fall der Rückzahlung in Rechnung gezogen werden. Wenn der Emissionskurs erheblich unter dem Parikurs liegt, stellt sich die Rückzahlung zum Nennwert teuer. Zu einer erheblich unter dem Parikurs liegenden Emission wird sich daher das Gemeinwesen schwerlich entschließen. Liegt der Anleihekurs über dem Parikurs, so wirkt die Aussicht auf Rückzahlung von Schuldverschreibungen zum Nennwert hemmend in bezug auf Kursbesserung oder selbst herabdrückend. Das beeinflusst zunächst den anlagensuchenden Kapitalisten, führt aber auch dazu, daß Emissionskurse, die erheblich über dem Parikurs liegen, bei der Ausschreibung von Anleihen vermieden werden.

§ 4. Diskont. Wechselrechnung. Mittlerer Zahlungstermin.

Werden bei Postnumerandozinsberechnung die in der Zeitspanne n auflaufenden Zinsen am Schluß derselben zum Kapital K zugeschlagen, so ergibt sich nach (1) ein Endguthaben

$$E^{(n)} = K(1 + in). \quad (6)$$

$E^{(n)}$ ist eine nur für positive Werte von n erklärte lineare Funktion von n ; ihr graphisches Bild in einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit nach rechts zeigender positiver Achse der Abszissen n und den $y = E^{(n)}$ als Ordinaten ist eine gerade Linie, die von dem mit K bezifferten Punkt der Ordinatenachse aus mit dem Neigungskoeffizienten Ki verläuft (Abb. 3). Entsprechend ist natürlich der Barwert einer nach der Zeitspanne n fälligen Zahlung K mit

$$B^{(n)} = \frac{K}{1 + in} \quad (7)$$

anzusetzen. Wir stellen $B^{(n)}$ als Funktion von n in dem gleichen Diagramm wie $E^{(n)}$ dar, nehmen dabei aber die entgegengesetzte Richtung der Abszissenachse als die positive. Das graphische Bild von $y = B^{(n)}$ ist eine gleichseitige Hyperbel, die durch den mit K bezifferten Punkt der Ordinatenachse geht und von der nur die zu positiven n -Werten gehörenden, also links von der y -Achse liegenden Punkte in Frage kommen. Ihre eine Asymptote ist die Zeitachse, während die andere Asymptote die durch Nullsetzen des Nenners $1 + i n$ sich ergebende Gleichung $n = -\frac{1}{i}$ besitzt. (Sie hat nur mathematisch-konstruktive Bedeutung, weil das ihr sich anschmiegende Kurvenstück rechts von der Ordinatenachse im Bereich der negativen n -Werte liegt.) Der linke Hyperbelteil $B^{(n)}$ und die Halbgerade $E^{(n)}$ zusammengenommen er-

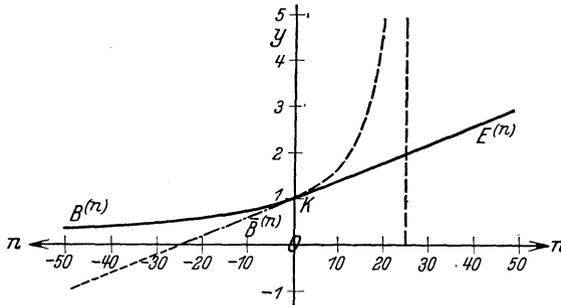


Abb. 3.

geben das vollständige Bild für den Wert, der der Summe K eine gewisse Zeitspanne n vor bzw. nach dem Stichtage $n = 0$ bei Postnummandoverzinsung zukommt.

Bei Pränumerandoverzinsung werden die Zinsen $K i n$ vom Darlehen gleich einbehalten. Hierbei wird also der dem Schuldner tatsächlich zufließende Betrag

$$\bar{B}^{(n)} = K (1 - i n) \quad (8)$$

angesehen als der Barwert seines Zahlungsverprechens, das auf die nach der Zeitspanne n zu zahlende Summe K lautet. Das graphische Bild von (8) ist eine gerade Linie, die von dem mit K bezifferten Punkt der Ordinatenachse aus mit dem Neigungskoeffizienten $-K i$ im Quadranten der positiven n , $\bar{B}^{(n)}$ verläuft und die Abszissenachse im Punkte $n = \frac{1}{i}$ schneidet. Wird sie über den nach links positiv zählenden Abszissenwerten n dargestellt, so ist sie die Fortsetzung der die $E^{(n)}$ veranschaulichenden Halbgeraden. Sie ist Tangente der Hyperbel $y = B^{(n)}$. Denn der Differentialquotient von $B^{(n)}$, nämlich $-\frac{K i}{(1 + i n)^2}$, nimmt für $n = 0$ den Wert $-K i$ an.

Die Formel (7), die man nach dem Verfasser der „Prudentia oeconomiae oder die Klugheit, Haus zu halten“ (1731) auch die Hoffmannsche Formel nennt, und andererseits die Formel (8) benutzt man, um den Betrag einer Forderung, die erst nach der Zeitspanne n fällig ist, zu diskontieren oder abzuzinsen, d. h. ihren augenblicklichen Veräußerungswert zu ermitteln, wobei der vom Verkäufer zu tragende Abzug als Diskont bezeichnet wird. Er hat im ersten Falle den Betrag

$$D = \frac{K i n}{1 + i n} = \frac{K p n}{100 + p n}, \quad (7')$$

der als Diskont auf Hundert bezeichnet wird, im zweiten Falle den Betrag

$$\bar{D} = K i n = \frac{K p n}{100}, \quad (8')$$

den man als Diskont vom Hundert oder kaufmännischen Diskont bezeichnet. Während bei behördlichen Berechnungen, z. B. Erbschaftsregulierungen, gerichtlichen Auseinandersetzungen, das Diskontieren auf Hundert zugrunde gelegt wird, wird im kaufmännischen Verkehr, insbesondere bei der Wechseldiskontierung, durchweg vom Hundert diskontiert. Es ist daher wichtig, klarzustellen, wie sich die verschiedenen Diskontierungsmethoden zueinander verhalten.

Die Tatsache, daß die Diskontierungshyperbel $y = B^{(n)}$ von der Geraden $y = \bar{B}^{(n)}$ im Punkte $(0, K)$ berührt wird, kommt analytisch darin zum Ausdruck, daß für $B^{(n)} = \frac{K}{1 + i n}$ der Ausdruck $\bar{B}^{(n)} = K(1 - i n)$ die erste Annäherung darstellt. Nach der Summenformel für die geometrische Reihe mit ν Gliedern

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{\nu-1} = \frac{1 - q^\nu}{1 - q} \quad (9)$$

ergibt sich nämlich:

$$\frac{1}{1 - q} = 1 + q + q^2 + \dots + q^{\nu-1} + \frac{q^\nu}{1 - q},$$

also wenn $q = -i n$ genommen wird:

$$\frac{1}{1 + i n} = 1 - i n + i^2 n^2 - \dots + (-1)^{\nu-1} i^{\nu-1} n^{\nu-1} + (-1)^\nu \frac{(i n)^\nu}{1 + i n}. \quad (9')$$

Beispielsweise wird für $\nu = 2$

$$\frac{K}{1 + i n} = K \left(1 - i n + \frac{i^2 n^2}{1 + i n} \right). \quad (10)$$

Wie der Vergleich mit den Formeln (7) und (8) zeigt, ist der durch Diskontieren auf Hundert sich ergebende Barwert $B^{(n)}$ größer als der beim kaufmännischen Diskontieren ermittelte Barwert $\bar{B}^{(n)}$. Der Unterschied zwischen den nach den beiden Diskontierungsverfahren erhaltenen Werten beträgt $K \cdot \frac{i^2 n^2}{1 + i n}$, ist also kleiner als $K i^2 n^2$. Nun

ist $Z = K i n$ der Zins, den die Summe K in der Zeitspanne n tragen würde, und $Z' = K i^2 n^2 = Z i n$ der entsprechende Zins vom Zins. Der Unterschied zwischen den beiden Barwerten und demgemäß auch derjenige zwischen den Diskontwerten D und \bar{D} selbst ist also kleiner als der auf K gerechnete Zins vom Zins. Er ist nicht sehr bedeutend, solange $i n$ klein gegen 1. Für größere Werte $i n$ wird das kaufmännische Diskontierungsverfahren unbrauchbar. Für $i n = 1$ würde sich nach (8) der Barwert $\bar{B}^{(n)} = 0$ ergeben, und für $i n > 1$ würden sogar negative Barwerte herauskommen. Praktisch beschränkt sich die Anwendung des kaufmännischen Diskontierens auf Zeitspannen unter einem Jahr. — Da nach (10) der beim Diskontieren auf Hundert eintretende Abzug $D = K \left(i n - \frac{i^2 n^2}{1 + i n} \right)$ beträgt, so ergibt sich für den Fall, daß $i n$ klein gegen 1, eine praktische Näherungsformel für den Diskont auf Hundert:

$$D \approx K i n - K i^2 n^2 = Z - Z', \quad (7'')$$

während für den kaufmännischen Diskont

$$\bar{D} = K i n = Z \quad (8')$$

gilt.

Beispiel: Mit welchem Betrage kann eine nach vier Monaten fällige Schuld $K = 25000$ M sofort abgelöst werden? Zinsfuß 6%.

Lösung: Nach Formel (7) für das Diskontieren auf Hundert ist

$$B^{(n)} = \frac{25000}{1 + 0,06 \cdot \frac{4}{12}} = 24509,80 \text{ M.}$$

Bei kaufmännischem Diskontieren beträgt der Abzug

$$\bar{D} = Z = 25000 \cdot 0,06 \cdot \frac{4}{12} = 500 \text{ M, so daß } \bar{B}^{(n)} = 24500 \text{ M.}$$

Die Näherungsformel für das Diskontieren auf Hundert ergibt

$$D \approx Z - Z' = 500 - 500 \cdot 0,06 \cdot \frac{4}{12} = 500 - 10 = 490 \text{ M,}$$

sodaß $B^{(n)} \approx 24510$ M, ein Betrag, der nur um 20 Pf. vom genauen Wert abweicht.

Allgemein kann die Abweichung des nach der Näherungsformel (7'') errechneten Diskonts auf Hundert vom genauen Wert in der Weise ermittelt werden, daß man in der geometrischen Reihe (9') für $\frac{1}{1 + i n}$ mit dem Gliede 3. Grades abbricht. Der Barwert $B^{(n)}$ schreibt sich dann

$$\frac{K}{1 + i n} = K \left(1 - i n + i^2 n^2 - \frac{i^3 n^3}{1 + i n} \right). \quad (10')$$

Das letzte Glied, das den bei der Anwendung der Näherungsformel begangenen Fehler bedeutet, ist jedenfalls kleiner als $K i^3 n^3$, d. h. als der auf $Z' = K i^2 n^2$ in der Zeitspanne n entfallende Zins, der bei kleinem $i n$ sicherlich unbedeutend ist.

In der Wechselrechnung, in der immer nur Zeitspannen n von höchstens einigen Monaten vorkommen, wird durchweg vom Hundert diskontiert. In die Zahl t der Tage, die man der Zinsberechnung zugrunde legt, wird einer der Grenztage einbezogen, wie bei der üblichen Bestimmung der Leihdauer von Darlehen (S. 14). Neben dem Diskont berechnet sich die diskontierende Bank eine Provision, die meist in Promille des Nennbetrags des Wechsels ausgedrückt wird. Eine auf mehrere Wechseldiskontierungen lautende Abrechnung würde etwa so lauten:

Berlin, 14. September

Zahlungsort	Verfalltag	Bezogene	Betrag M	Diskont zu 5%	
				Tage	Zinszahlen
Hamburg . . .	3. 10.	C. Reimers	7200,—	19	1368
Leipzig	17. 10.	M. Curtius	3000,—	33	990
Brandenburg . .	31. 10.	R. Manow	4200,—	46	1932
Potsdam	8. 11.	L. Wolf	1080,—	54	583
			15480,—		4873
Diskont 5% (Zinsdivisor 72)			67,68		
Provision 2 ⁰ / ₀₀			30,96		
			15381,36		

Bei ausländischen Wechseln kommen die Umrechnungen in deutsche Währung hinzu, wobei die dem Kurszettel zu entnehmenden Devisenkurse maßgebend sind. Notiert werden Kurse für Wechsel kurzer Sicht, deren Laufzeit meist nur 8 Tage (höchstens 14 Tage) beträgt und die vielfach wie Sichtwechsel, d. h. sofort bei Vorzeigen einzulösende Wechsel behandelt werden, andererseits Kurse für Wechsel langer Sicht, deren Laufzeit 1, 2 oder 3 Monate beträgt.

1. Beispiel: Londoner Sichtwechsel notieren in Hamburg 14,650 M, solche von 3 Monaten Laufzeit 14,490 M. Besteht Kursparität? Bankdiskont 5%.

Lösung: Rechnen wir die durch Versendung entstehende Laufzeit eines Sichtwechsels zu 2 Tagen, so müßte sich aus seinem Kurs der des Wechsels von 88 Tagen längerer Laufzeit ergeben durch eine dementsprechende Diskontierung, d. h. durch Abzug von $\frac{14,65 \cdot 88 \cdot 0,05}{360} = 0,179$; der Paritätskurs wäre also 14,471 M. Daß zwischen dem Paritäts- und dem tatsächlichen Kurs Abweichungen auftreten, erklärt sich aus der Verschiedenheit von Angebot und Nachfrage für Wechsel verschiedener Sicht.

Wir wollen zunächst annehmen, daß Parität zwischen den Kursen von Wechseln verschiedener Sicht besteht.

2. Beispiel: Wieviel kostet am 16. September in Hamburg ein englischer Wechsel, lautend auf 250 £, fällig am 28. Oktober? Sichtwechsellkurs 14,650 M; Diskont 5%.

Lösung: Der Preis, der für einen auf 250 £ lautenden Sichtwechsel zu zahlen wäre, ist $250 \cdot 14,650 = 3662,50$ M. Hiervon kommt in Abzug der Diskont, der einer Laufzeit vom 16. September bis zum 28. Oktober, also 42 Tagen entspricht,

d. i. $\frac{3662,50 \cdot 42 \cdot 0,05}{360} = 21,35$ M. Der Barwert des Wechsels beträgt also, wenn von Spesen abgesehen wird, 3641,15 M.

In der Praxis wird, während man bei einem einzelnen Wechsel die Reduktion auf deutsche Währung der Diskontierung des Betrags meist vorangehen läßt, bei einer Abrechnung über Wechsel verschiedener Sicht umgekehrt verfahren¹⁾.

3. Beispiel: Hamburg diskontiert am 1. Juli mehrere Pariser Wechsel verschiedener Sicht auf der Grundlage des Zweimonatkurses 16,480. Diskont 4%.

Verfalltag	Betrag Fr.	Diskont zu 4%	
		Tage	Zinszahlen
1. 8.	1500,—	+ 30	+ 450
21. 8.	6000,—	+ 10	+ 600 + 1050
16. 9.	3500,—	— 15	— 525
21. 9.	5000,—	— 20	— 1000 — 1525
	Fr. 16 000,—		— 475

Diskont 4% (Zinsdivisor 90) „ 5,28

Fr. 15994,72 zu 16,480 : M 2635,93.

Sehr oft jedoch muß beim Devisenhandel die schon oben herausgestellte Tatsache berücksichtigt werden, daß zwischen den Kursen von Wechseln verschiedener Sicht keine Parität herrscht. Das führt zu neuen Problemstellungen der Devisenarbitrage, wie an einem Beispiel erläutert werden möge.

4. Beispiel: Prag hat an Berlin eine sofort fällige, auf Kronen (K.) lautende Forderung. Berlin steht es frei, mit Prager Wechseln kurzer Sicht (8 Tage), Kurs 12,460, oder solchen langer Sicht (3 Monate), Kurs 12,310, zu begleichen; Prager Diskontsatz 4%. Welchen Weg wird Berlin wählen?

Lösung: Im ersten Fall hat Berlin dem Prager Gläubiger den Ausfall zu vergüten, der ihm durch Diskontierung 8 Tage vor Fälligkeit erwächst; im zweiten Fall den für 3 Monate berechneten Diskont.

100 K auf 8 Tage: M 12,460	100 K auf 90 Tage: M 12,310
4% Diskont: M 0,011	4% Diskont: M 0,123
<u>Kurs Sicht: M 12,471</u>	<u>Kurs Sicht: M 12,433</u>

Bare 100 Kronen stellen sich demnach für Berlin bei Ankauf von kurzfristigen Rimessen um M 0,038 teurer als bei Ankauf von Wechseln langer Sicht. Der Schuldner wird sich also für letzteren Weg entscheiden.

Natürlich kann wie bei sofortigen Auszahlungen (vgl. S. 8ff.) noch ein dritter vermittelnder Platz hinzugezogen werden, wodurch die

¹⁾ Der dritte, an sich mögliche Weg, bei dem zunächst die Diskontierung am Kurs (vgl. 1. Beispiel) und dann die Reduktion vorgenommen wird, empfiehlt sich nicht, weil man schlecht übersieht, wieviel Dezimalen im Kurs berücksichtigt werden müssen.

Arbitragemöglichkeiten sich vermehren. Entsprechendes gilt für die Differenzgeschäfte der Berufsarbitrageure.

Das 3. Beispiel, in dem über Wechsel verschiedener Sicht gleichzeitig abgerechnet wird, zeigt, daß in der Praxis der Wechselrechnung die nach dem Postnumerandoprinzip berechneten Zinsen und die auf der Pränumerandogrundlage ermittelten Diskontbeträge unter Zugrundelegung desselben Zinsfußes miteinander verrechnet werden. Man muß sich darüber klar sein, daß Pränumerandoverzinsung zum Zinssatz \bar{i} gleichwertig ist mit Postnumerandoverzinsung zu einem höheren Zinssatz i . Durch Gleichsetzen der nach den beiden Methoden sich ergebenden Barbeträge der nach der Zeitspanne n fälligen Summe 1 erhält man nämlich $1 - \bar{i} \cdot n = \frac{1}{1 + i n}$, woraus $i = \frac{\bar{i}}{1 - \bar{i} n}$ und $\bar{i} = \frac{i}{1 + i n}$ folgt. In der Tat ist $\frac{i}{1 + i n}$ nach (7) der Barwert des Postnumerandozinses i , also selbstverständlich kleiner als der letztere. Dieser Barwert $\bar{i} = \frac{i}{1 + i n}$ dürfte vom Gläubiger einbehalten bzw. bei der Diskontierung von Wechseln in Abzug gebracht werden, wenn folgerichtig auf der Grundlage der Postnumerandoverzinsung i gearbeitet werden soll. — Haben wir insbesondere $n = 1$, so gilt:

$$i = \frac{\bar{i}}{1 - \bar{i}}; \quad \bar{i} = \frac{i}{1 + i}. \quad (11)$$

Beispielsweise entspräche dem Postnumerandozinsfuß 5% p. a. als gleichwertig $\bar{i} = \frac{0,05}{1,05} = 0,047619$, also ein Pränumerandozinsfuß von wenig über $4\frac{3}{4}\%$ p. a. Wer andererseits kaufmännisch mit 5% diskontiert, läßt sich sein Geld in Wirklichkeit zu einem Postnumerandozinsfuß von über $5\frac{1}{4}\%$ p. a. verzinsen, weil $i = \frac{0,05}{0,95} = 0,052632$.

Auf das sog. Diskontieren im Hundert kommt man in der Wechselrechnung, wenn die Frage gestellt wird, auf welchen Nennbetrag K ein nach der Zeitspanne n fälliger Wechsel ausgestellt werden muß, damit er nach Abzug des vom Hundert berechneten Diskonts und der Provision einen bestimmten Barwert \bar{B} ergibt. Ist i der Diskontsatz, g die auf die Summe 1 bezogene Bankprovision, so ist

$$\bar{B} = K(1 - i n - g);$$

also umgekehrt:

$$K = \frac{\bar{B}}{1 - i n - g}. \quad (12)$$

Das durch diese Formel gekennzeichnete „Diskontieren im Hundert“

des gewünschten Jetztwertes \bar{B} kann näherungsweise nach folgender Regel ausgeführt werden:

$$K \approx \bar{B}(1 + in + g + i^2n^2 + 2ing + g^2), \quad (12')$$

eine Formel, die wir in Anlehnung an (10') durch Vernachlässigung des Gliedes 3. Grades erhalten. Nun ist $Z = \bar{B}in$ der Zins, $G = \bar{B}g$ die Provision, beide bezogen auf den gewünschten Barwert; analog $Z' = \bar{B}i^2n^2 = Z \cdot in$ der Zins vom Zins, $G' = \bar{B}g^2 = Gg$ die Provision von der Provision, $Z_g = \bar{B}ing = Zg$ die Provision vom Zins. Schreiben wir also (12') in der Form

$$K \approx \bar{B} + Z + G + Z' + 2Z_g + G', \quad (12'')$$

so haben die Größen Z, G, Z', Z_g, G' die oben angegebene anschauliche Bedeutung.

Beispiel: Eine sofort fällige Schuld $\bar{B} = 18000$ M soll durch einen in 2 Monaten einzulösenden Wechsel beglichen werden. Auf welchen Betrag K muß der Wechsel lauten, wenn 6% Diskont und $2\frac{1}{2}\text{‰}$ Provision gerechnet werden?

Lösung: Barwert	M 18000,—
6% Diskont für 2 Monate	M 180,—
$2\frac{1}{2}\text{‰}$ Provision	M 45,—
Diskont vom Diskont	M 1,80
Zweimal Provision vom Diskont	M 0,90
Provision von der Provision	M 0,15
Nennbetrag des Wechsels	<u>M 18227,85</u>

Der Posten Provision von der Provision kann im allgemeinen als unbedeutend vernachlässigt werden.

Auch wenn folgerichtig nach der Postnumerandomethode gerechnet wird, kommt man mit der Regel, daß nur Kapital Zinsen trägt und Zins vom Zins ausgeschlossen ist, zu gewissen Unstimmigkeiten bzw. Verwicklungen. Am 1. Januar ist der Barwert einer am 1. Juli zu zahlenden Summe $K = 50000$ M, bei einem Zinsfuß von 5%,

$$B^{(\frac{1}{2})} = \frac{50000}{1 + 0,05 \cdot \frac{1}{2}} = 48780,49 \text{ M.}$$

Dieser (etwa durch Veräußerung der

Forderung zu erzielende) Betrag würde bis zum 1. April bei 5% iger Verzinsung auf einen Endwert von 49390,24 M anwachsen. Dagegen ergibt sich, wenn man die zum 1. Juli zahlbaren 50000 M unmittelbar

auf den 1. April mit 5% diskontiert, $B^{(\frac{1}{4})} = \frac{50000}{1 + 0,05 \cdot \frac{1}{4}} = 49382,72 \text{ M!}$

Trotzdem führt der Zinsenlauf bei $B^{(\frac{1}{2})}$ und $B^{(\frac{1}{4})}$ zum 1. Juli auf denselben Endwert 50000 M; in der graphischen Darstellung (Abb. 4)

haben die entsprechenden Geraden die Neigungskoeffizienten $B^{(\frac{1}{2})}i$ und

$B^{(\frac{1}{4})i^1}$) und schneiden sich im Endpunkt der zum 1. Juli gehörenden Ordinate 50000. — Der scheinbare Widerspruch klärt sich dadurch auf, daß in den beiden Fällen die zinspflichtige Summe verschieden ist, im einen Falle $B^{(\frac{1}{2})}$, im anderen Falle $B^{(\frac{1}{4})}$. Wenn auf Grund bereits getätigter Leistung das Schuldverhältnis am 1. Januar beginnt, so ist — was auch der amtlichen Auffassung entspricht — die eigentliche Schuldsumme nicht 50000 M, sondern $B^{(\frac{1}{2})} = 48780,49$ M, und der Schuldner könnte am 1. April seine Verbindlichkeit nur mit 49390,24 M

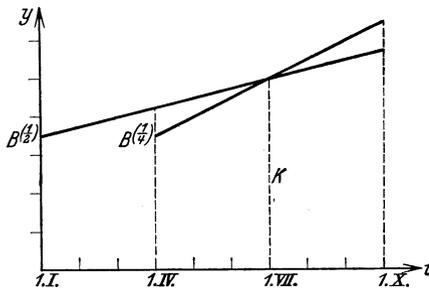


Abb. 4.

abgelten²⁾. Will er mit der Zahlung bis zum 1. Juli warten, so kann andererseits der Gläubiger am 1. April seine Forderung nur für 49382,72 M zu Gelde machen. — Die Sache würde anders liegen, wenn die Leistungen des Gläubigers, wie z. B. bei Bauverträgen, laufend erfolgen und die Zahlungen im wesentlichen Zug um Zug fällig werden sollen, wobei die Zahlungs-

termine im voraus festgesetzt werden. Ist in unserem Beispiel die Zahlung der 50000 M zum 1. Juli als Abgeltung einer kurz vorher erfolgten Leistung des Gläubigers anzusehen, so ist 50000 M die Schuldsumme, die ab 1. Juli zinspflichtig ist.

Die hier dargelegte Untersuchung ist auch bei der Bestimmung des sog. mittleren Zahlungstermins zu beachten. Wird einem Schuldner eingeräumt, eine gegenwärtig fällige Zahlungsverpflichtung in mehreren Raten K_1, K_2, \dots, K_v nach der Zeit n_1, n_2, \dots, n_v abzutragen, so ist der gesamte Gegenwartswert dieser Zahlungen

$$B = \frac{K_1}{1+i n_1} + \frac{K_2}{1+i n_2} + \dots + \frac{K_v}{1+i n_v}.$$

Auf ihn bezieht sich die Zinspflicht. Wünscht nun derselbe Schuldner, seiner Verpflichtung dadurch gerecht zu werden, daß er die Summe $K_1 + K_2 + \dots + K_v$ auf einmal zahlt, so muß dies zu einem Zeitpunkt n geschehen, wo B auf diesen Summenwert angewachsen ist, wo also $B(1+i n)$ gleich dieser Summe ist. Daraus ergibt sich:

$$\frac{K_1}{1+i n_1} + \frac{K_2}{1+i n_2} + \dots + \frac{K_v}{1+i n_v} = \frac{K_1 + K_2 + \dots + K_v}{1+i n};$$

¹⁾ In der Abbildung ist der Unterschied der Neigungen übertrieben dargestellt.

²⁾ Bei „gegenseitigen Handelsgeschäften“ ist nach Handelsgesetzbuch § 352 fünfprozentige Verzinsung vorgesehen.

$$\begin{aligned}
 i n &= \frac{K_1 + K_2 + \dots + K_v}{\frac{K_1}{1 + i n_1} + \frac{K_2}{1 + i n_2} + \dots + \frac{K_v}{1 + i n_v}} - 1 \\
 &= \frac{K_1 \frac{i n_1}{1 + i n_1} + K_2 \frac{i n_2}{1 + i n_2} + \dots + K_v \frac{i n_v}{1 + i n_v}}{\frac{K_1}{1 + i n_1} + \frac{K_2}{1 + i n_2} + \dots + \frac{K_v}{1 + i n_v}}.
 \end{aligned}$$

Mithin

$$n = \frac{\frac{K_1 n_1}{1 + i n_1} + \frac{K_2 n_2}{1 + i n_2} + \dots + \frac{K_v n_v}{1 + i n_v}}{\frac{K_1}{1 + i n_1} + \frac{K_2}{1 + i n_2} + \dots + \frac{K_v}{1 + i n_v}} \quad (13)$$

oder

$$n = \frac{B_1 n_1 + B_2 n_2 + \dots + B_v n_v}{B_1 + B_2 + \dots + B_v}, \quad (13')$$

wo B_1, B_2, \dots, B_v die Barwerte der Zahlungen K_1, K_2, \dots, K_v sind. In (13) bzw. (13') haben wir die sog. amtliche Formel für den mittleren Zahlungstermin.

Liegt jedoch die Sache so, daß die Fälligkeitstermine der einzelnen Zahlungen zugleich den Beginn der entsprechenden Verzinsungspflicht darstellen, so muß ein anderer mittlerer Zahlungstermin \bar{n} gelten. Zinspflichtige Beträge sind jetzt die K_1, K_2, \dots, K_v selbst. Für den Gläubiger muß, wenn er alle Zahlungen alsbald zinstragend anlegt, der bis zu einem Abschlußtermin N erzielte Zinsertrag derselbe sein, gleichgültig, ob sie zu den ursprünglich vereinbarten Terminen n_1, n_2, \dots, n_v oder auf einmal, zum mittleren Zahlungstermin \bar{n} , eingehen. Durch Gleichsetzen dieser Zinsbeträge ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 &K_1 i (N - n_1) + K_2 i (N - n_2) + \dots + K_v i (N - n_v) \\
 &= (K_1 + K_2 + \dots + K_v) i (N - \bar{n});
 \end{aligned}$$

hieraus

$$\bar{n} = \frac{K_1 n_1 + K_2 n_2 + \dots + K_v n_v}{K_1 + K_2 + \dots + K_v}. \quad (14)$$

In (14) haben wir die sog. kaufmännische Formel für den mittleren Zahlungstermin. Nach (13'), (14) ist n bzw. \bar{n} das gewogene arithmetische Mittel der von heute bis zu den einzelnen Zahlungsterminen noch verstreichenden Zeitspannen, wobei als Gewichte im ersten Falle die Barwerte der einzelnen Zahlungsbeträge, im zweiten Falle diese selbst zu nehmen sind. Im Gegensatz zu (13) spielt in (14) der Zinsfuß überhaupt keine Rolle, auch ist es bei (14) gleichgültig, ob man die Zeitspannen von heute ab oder von einem anderen Zeit- anfangspunkt aus rechnet. — Man kann \bar{n} auch als Näherungswert von n herleiten: Ersetzt man in der zur Berechnung von n benutzten

Ausgangsgleichung überall die Quotienten $\frac{1}{1+in_1}, \frac{1}{1+in_2}, \dots, \frac{1}{1+in_r}$; $\frac{1}{1+in}$ näherungsweise durch die Faktoren $1-in_1, 1-in_2, \dots, 1-in_r$; $1-in$, so erhält man sofort für n den der kaufmännischen Formel entsprechenden Wert \bar{n} .

Beispiel: Von drei Forderungen ist die erste im Betrage von 1000 M in 1 Jahr, die zweite im Betrage von 2500 M in 1 Jahr 2 Monaten, die dritte im Betrage von 1800 M in 2 Jahren fällig. Bei einem Zinssatz $i = 0,05$ ist der mittlere Zahlungstermin 1) nach dem amtlichen, 2) nach dem kaufmännischen Verfahren zu berechnen.

Lösung:

$$1) \quad \frac{1000}{1+0,05} + \frac{2500 \cdot \frac{7}{6}}{1+0,05 \cdot \frac{7}{6}} + \frac{1800 \cdot 2}{1+0,05 \cdot 2}$$

$$n = \frac{1000}{1+0,05} + \frac{2500}{1+0,05 \cdot \frac{7}{6}} + \frac{1800}{1+0,05 \cdot 2} = \frac{952,38 + 2755,90 + 3272,72}{952,38 + 2380,94 + 1636,36}$$

$$= \frac{6981,00}{4969,68} = 1,4047 \text{ Jahre} = 1 \text{ Jahr } 146 \text{ Tage.}$$

$$2) \quad \bar{n} = \frac{1000 + 2500 \cdot \frac{7}{6} + 1800 \cdot 2}{1000 + 2500 + 1800} = \frac{7516,67}{5300} = 1,4182 \text{ Jahre} = 1 \text{ Jahr } 151 \text{ Tage.}$$

Verwandte Probleme treten auf bei den heutzutage häufig getätigten Abzahlungsgeschäften.

Beispiel: Eine Bank gewährt einem Beamten, der seine Bezüge regelmäßig auf sein bei dieser Bank geführtes Konto überweisen läßt, einen Vorschuß in Höhe seines Monatsgehaltes $K = 600$ M unter der Bedingung, daß dieser das Darlehen in 10 gleichen Raten, beginnend zwei Monate nach Empfang des Darlehens, wieder zurückzahlt. Wie groß ist der von ihr einbehaltene, mit 9% berechnete Diskont \bar{D} ?

Lösung: Die Zeiträume, die für die 10 Raten zu 60 M in Frage kommen, sind 2, 3, ..., 11 Monate. Die auf sie entfallenden Diskontbeträge sind: $\frac{2}{12} \cdot 60 \cdot 0,09$; $\frac{3}{12} \cdot 60 \cdot 0,09$; ..., $\frac{11}{12} \cdot 60 \cdot 0,09$, bilden also eine arithmetische Reihe mit $v = 10$ Gliedern. Nun hat die arithmetische Reihe

$$a; a + d; a + 2d; \dots; a + \overline{v-1}d$$

die Summe

$$S = v \left(a + \frac{v-1}{2} d \right). \quad (15)$$

Demnach ergibt sich in unserem Falle

$$\bar{D} = \frac{60 \cdot 0,09}{12} \cdot 10 \cdot \frac{13}{2} = 29,25 \text{ M.}$$

II. Zinseszins- und Rentenrechnung. Versicherungsrechnung.

§ 5. Das Zinseszinsgesetz.

Ein Kapital K sei zu einem Postnumerandozinssatz i ausgeliehen. Der Gläubiger sei in der Lage, die am Ende jeder Zinsperiode als Zinsen eingehende Summe selbst wieder zinstragend zum gleichen Zinssatz anzulegen. Das Guthaben, über das er alsdann nach n Zinsperioden verfügt, wird als der durch Zinseszins oder zusammengesetzten Zins erlangte Endwert $K^{(n)}$ seines Kapitals bezeichnet. Offenbar ist

$$K^{(1)} = K + K i = K (1 + i);$$

entsprechend $K^{(2)} = K^{(1)} + K^{(1)}i = K^{(1)} (1 + i) = K (1 + i)^2 :$

.....

$$K^{(n)} = K (1 + i)^n .$$

Wir setzen die Summe, zu der das Kapital 1 nach einer Zinsperiode angewachsen ist, $1 + i = q$. Der gesuchte Endwert schreibt sich dann:

$$K^{(n)} = K \cdot q^n . \quad (1)$$

Das durch (1) dargestellte Zinseszinsgesetz findet praktisch keine Anwendung auf das zwischen Privaten bestehende Schuldverhältnis in dem Fall, wo der Schuldner mit der Zinszahlung in Verzug gerät, da nach § 248 des BGB. Abreden, daß Zinsen wieder Zinsen tragen sollen, nichtig sind. Dagegen bestimmt der zweite Absatz desselben § 248: „Sparkassen, Kreditanstalten und Inhaber von Bankgeschäften können im voraus vereinbaren, daß nicht erhobene Zinsen von Einlagen als neue verzinsliche Einlagen gelten sollen.“ Das Zinseszinsgesetz bleibt maßgebend für alle auf weite Sicht abgestellten Finanzgeschäfte, bei denen zinstragende Begebung von Zinseinnahmen in Rechnung gestellt werden kann und muß, insbesondere im Anleihe- und Versicherungswesen.

Mathematisch stellt sich das Zinseszinsgesetz als Exponentialfunktion mit deren einfachen Eigenschaften dar. Ist $n = n_1 + n_2 + \dots + n_r$, so ist $q^n = q^{n_1} \cdot q^{n_2} \dots q^{n_r}$. Daher führt die in einzelnen Abschnitten n_1, n_2, \dots, n_r nach (1) vorgenommene Aufzinsung des Kapitals K zu demselben Endwert $K^{(n)}$ wie die über den ganzen Zeitraum n erstreckte. Das würde natürlich bei jeweils einfacher Verzinsung nicht der Fall sein, und in dieser Tatsache wurzeln die früher (S. 29 f.) besprochenen im Falle einfacher Verzinsung auftretenden Unstimmigkeiten. Die theoretische Überlegenheit der Zinseszinsformel zeigt sich auch beim Studium des durch sog. Abzinsung sich ergebenden Barwerts. Aus dem nach n Perioden erlangten Endwert $K^{(n)}$ ergibt

sich nach (1) der heutige Wert zu $K = K^{(n)} \cdot q^{-n}$. Demgemäß muß bei zusammengesetzter Verzinsung das Kapital K zu einem n Perioden früher liegenden Zeitpunkt den Wert

$$K^{(-n)} = K \cdot q^{-n} \quad (2)$$

besitzen. Die Formel (2) zur Bestimmung des Barwerts fließt aber unmittelbar aus (1), wenn dort n durch $-n$ ersetzt wird. Also gibt die Formel (1) bei Zulassung von negativen n -Werten ganz allgemein den Wert einer Summe K zu einem beliebigen Termin, der eine ganze Zahl von Perioden vor oder nach dem Stichtag $n = 0$ liegt. Auch bei der Bestimmung des Barwerts einer nach der Zeitspanne n fälligen Summe K kann die Zeitspanne in beliebige Abschnitte zerlegt werden.

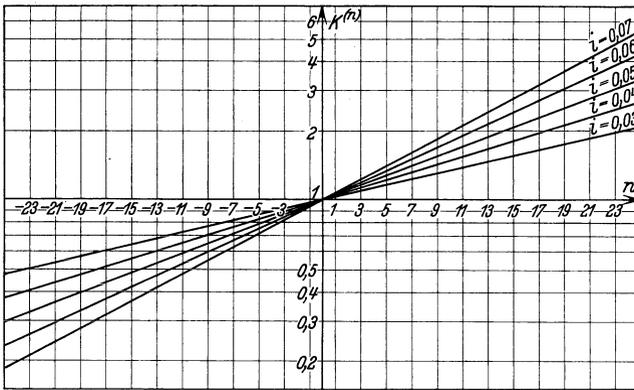


Abb. 5. Zinseszinsnomogramm.

Die einfachste graphische Darstellung des Zinseszinsgesetzes ergibt sich auf einfach-logarithmischem Papier. Die Abszissenachse weist reguläre Teilung auf, auf ihr werden die Zeitwerte n abgebildet. In der Ordinatenrichtung sind von den Funktionswerten $y = K^{(n)}$ die Logarithmen $\eta = \log y = \log K^{(n)}$ abgetragen, aber die Bezifferung auf der Ordinatenachse entspricht den Funktionswerten $y = K^{(n)}$ selbst. Da $\eta = \log K^{(n)} = \log K + n \log q$, so wird das Zinseszinsgesetz durch eine gerade Linie dargestellt, die den Neigungskoeffizienten $\log q$ besitzt und auf der Ordinatenachse die Strecke $\log K$ abschneidet, also durch den mit K bezifferten Punkt derselben geht (Abb. 5 gilt für $K = 1$). Die Abbildung veranschaulicht die Tatsache, daß mit wachsendem Zinsfuß höhere Endwerte, aber niedrigere Barwerte sich ergeben.

Stellen wir in einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit den n als Abszissen die $y = Kq^n$ als Ordinaten dar, wobei wir n alle runden und ununden Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen lassen, so erhalten wir eine Exponentialkurve, die sich der negativen Abszissenachse

asymptotisch anschmiegt und durch den mit K bezifferten Punkt der Ordinatenachse geht. Zum Vergleich sind in Abb. 6 die bei einfacher Postnumerandoverzinsung geltenden Linien eingetragen: die den Endwert $E^{(n)} = K(1 + in)$ darstellende Gerade und die in K ohne Knick in sie übergehende Diskontierungshyperbel $B^{(n)} = \frac{K}{1 + in}$ (vgl. Abb. 3, S. 23). Mit der ersteren hat die Zinseszinskurve die Punkte $(0, K)$ und $(1, Kq)$ gemeinsam, mit der letzteren die Punkte $(0, K)$ und $(-1, Kq^{-1})$. Für $n > 1$ verläuft $y = Kq^n$ oberhalb der Geraden $y = E^{(n)}$. Denn $(1 + i)^n = 1 + in + \frac{n(n-1)}{2}i^2 + \dots > 1 + in$ für $n > 1$. Verstehen wir andererseits unter t einen

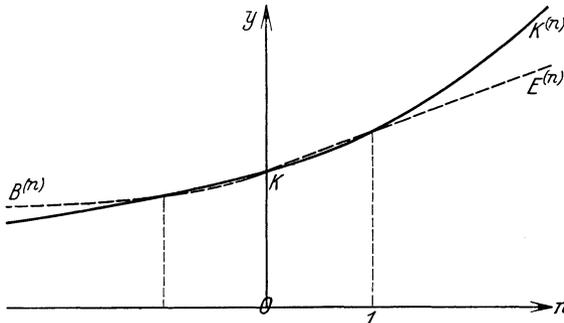


Abb. 6.

positiven echten Bruch, so folgt aus $(1 + i)^t = 1 + ti - \frac{t(1-t)}{2}i^2 + \dots < 1 + ti$, daß im Bereich $0 < n < 1$ die Zinseszinskurve unterhalb der der einfachen Verzinsung entsprechenden Geraden liegt. Während also das Zinseszinsgesetz $y = Kq^n$ für $n > 1$ Endwerte ergibt, die die bei einfacher Verzinsung erhaltenen Endwerte $E^{(n)} = 1 + in$ mit wachsendem n in immer höherem Maße übertreffen, ergibt das Zinseszinsgesetz für das erste Jahr kleinere Werte. — Gerade entgegengesetzt ist sein Verhalten zur Diskontierungshyperbel. Für $n > 1$ haben wir $q^{-n} = \frac{1}{(1 + i)^n} = \frac{1}{1 + ni + \frac{n(n-1)}{2}i^2 + \dots} < \frac{1}{1 + ni}$, so daß der nach

der Zinseszinsformel erhaltene Barwert unterhalb desjenigen bei einfacher Verzinsung liegt. Verstehen wir unter t einen echten Bruch, so ist $q^{-t} = \frac{1}{(1 + i)^t} = \frac{1}{1 + ti - \frac{t(1-t)}{2}i^2 + \dots} > \frac{1}{1 + ti}$, so daß die Ab-

zinsung nach der Zinseszinsformel hier einen größeren Wert liefert als das Diskontieren auf Hundert.

Bei dieser Untersuchung haben wir den mathematischen Ausdruck des Zinseszinsgesetzes (1), das aus den tatsächlichen Gegebenheiten

heraus nur für ganzzahlige positive und negative Werte n begründet worden ist, auch für unrunde n diskutiert. Praktisch liegt die Sache aber so, daß für überschießende Periodenbruchteile t mit einfachen Zinsen gerechnet werden muß. Ist N die größte in n steckende ganze Zahl, also $n = N + t$, so erfolgt zwar die Aufzinsung für den Zeitraum N nach dem Zinseszinsgesetz: $K^{(N)} = K \cdot q^N$; aber da auf den noch anschließenden Periodenbruchteil t der Zinsbetrag $Kq^N \cdot it$ entfällt, so ist der Endwert, der sich durch die sog. gemischte Verzinsung ergibt,

$$K^{[N+t]} = K q^N (1 + it). \quad (1')$$

Dagegen würde das Zinseszinsgesetz liefern:

$$K^{(N+t)} = K q^N (1 + i)^t.$$

Nun sahen wir vorhin, daß $y = 1 + it$ ($0 \leq t \leq 1$) die Sehne der Kurve $y = (1 + i)^t$, die die zu $t = 0$, $t = 1$ gehörenden Kurvenpunkte verbindet, und daß die Sehne über dem Kurvenbogen liegt. Das Rechnen mit gemischtem Zins liefert also einen etwas größeren Endwert als $K^{(n)}$. Daß man statt der Kurvenordinaten die Sehnenordinaten benutzt, läuft rechnerisch auf eine lineare Interpolation zwischen den Funktionswerten q^N , q^{N+1} hinaus. Beim Aufzinsen sind also Rechnen mit gemischtem Zins und lineares Interpolieren gleichbedeutend.

Für die Aufzinsungsfaktoren q^n hat man, da sie mit den verbreiteten Tafeln der 5stelligen Logarithmen nicht mit ausreichender Genauigkeit berechnet werden können, durch schrittweise Multiplikation Tabellen berechnet, im allgemeinen unter Beschränkung auf ganzzahlige Werte n . Wir beziehen uns weiterhin auf die im Anhang wiedergegebenen 6stelligen Tafeln, daneben gelegentlich auf die 8stelligen Tafeln von P. A. Violeine, *Nouvelles tables pour les calculs d'intérêts composés, d'annuités et d'amortissements*, 8. Aufl. von A. Arnaudeau, Paris 1903¹⁾, in denen die Aufzinsungsfaktoren für $n = 1, 2, \dots, 100$, für Zinsfüße p zwischen $\frac{1}{8}\%$ und 15% zusammengestellt sind. Sie enthalten auch Tafeln der q^t für $t = \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \dots, \frac{11}{12}$, liefern also, wenn die Zinsperiode ein Jahr beträgt, die Aufzinsungsfaktoren für irgendeinen volle Monate umfassenden Zeitraum.

Beispiel: Auf welchen Endwert wächst eine Summe $K = 20000$ bei 4% p. a. Zinseszins in 15 Jahren 7 Monaten an?

¹⁾ Weitere Tafeln: S. W. Glover, *Tables of applied Mathematics in Finance, Insurance, Statistics*, A. Arbor, Michigan, G. Wahr 1923; W. Lorey und E. Beyrodt, *Tafeln zur Mathematik des Geldverkehrs und der Versicherung*, Leipzig 1931; H. Murai, *Zinseszinsen-, Einlage-, Renten- u. Amortisationstabellen*, auf 10 Dezimalen berechnet, 2. Aufl. Budapest 1910; Simon Spitzers *Tabellen f. d. Zinseszinsen- und Rentenrechnung*, ergänzt durch Kurstabellen von Dr. E. Förster, Wien u. Leipzig, 6. Aufl. 1922.

Lösung: Wir entnehmen der Tabelle $q^{15} = 1,80094351$, $q^{16} = 1,87298125$. Lineare Interpolation, also gemischte Verzinsung liefert für 15 Jahre 7 Monate den Aufzinsungsfaktor $1,84296553$, also $K \left[15 \frac{7}{12} \right] = 36859,31$ M. Das gleiche Ergebnis liefert $Kq^{15} (1 + \frac{7}{12} \cdot 0,04) = 20000 \cdot 1,80094351 \cdot 1,02333 = 36859,31$ M.

Dagegen würde sich bei reinem Zinseszinsverfahren ergeben: $K \left(15 \frac{7}{12} \right) = K \cdot q^{15 \frac{7}{12}} = 20000 \cdot 1,80094351 \cdot 1,02314248 = 36852,44$ M, also ein etwas kleinerer Wert.

Soll umgekehrt die Zeit n aus gegebenem Anfangswert K , Endwert $K^{(n)}$ und Zinssatz i bestimmt werden, so folgt aus (1)

$$n = \frac{\log K^{(n)} - \log K}{\log q}. \quad (3)$$

Dieser dem reinen Zinseszinsgesetz entsprechende Wert n wird im allgemeinen außer einer ganzen Zahl N von Zinsperioden noch einen Periodenbruchteil umfassen. Das N , das man ihm entnimmt, führt man, wenn gemischte Verzinsung zugrunde gelegt werden soll, in die Formel (1') ein und erhält dann den Bruchteil t aus

$$1 + it = \frac{K^{[N+t]}}{K \cdot q^N}. \quad (3')$$

Oder man benutzt die Tatsache, daß gemischte Verzinsung gleichbedeutend ist mit linearer Interpolation zwischen den Aufzinsungsfaktoren:

Man stellt zu dem bekannten $\frac{K^{[n]}}{K}$ in der Tabelle der q^n die nächstbenachbarten Werte q^N und q^{N+1} fest, womit zunächst N gefunden ist; ist $q^{N+1} - q^N = \Delta$, $\frac{K^{[n]}}{K} - q^N = \delta$, so ist $t = \frac{\delta}{\Delta}$.

Beispiel: $K = 10000$ M; Endwert 15000 M; $i = 0,04$.

Lösung: Nach dem reinen Zinseszinsgesetz wird $n = \frac{\log 15000 - \log 10000}{\log 1,04} = 10,340$ Jahre = 10 Jahre 122 Tage. Wir entnehmen daraus den auch für gemischte Verzinsung geltenden Wert $N = 10$ und berechnen für diesen Fall nach (3'): $1 + it = \frac{K^{[N+t]}}{K q^{10}} = \frac{15000}{10000 \cdot 1,480244} = 1,013346$; also $t = 120$ Tage, d. h. ein etwas kleinerer Wert als vorhin. Einfacher: $\frac{K^{[N+t]}}{K} = \frac{15000}{10000} = 1,5$ findet sich in der Tafel der q^n zwischen $q^{10} = 1,480244$ und $q^{11} = 1,539454$; $\Delta = 0,059210$; $\delta = 0,019756$; mithin $t = \frac{0,019756}{0,059210} = 0,3336 = 120$ Tage, wie oben.

Die Berechnung nach (3') gestaltet sich einfacher, wenn man, statt durch q^N zu dividieren, mit dem Reziprokwert multipliziert, der aus den sogleich zu besprechenden Tabellen der v^n entnommen werden kann.

Setzen wir $\frac{1}{q} = v$, so geht die Formel (2) zur Bestimmung des Barwerts $K^{(-n)}$ einer Summe, die nach n Perioden den Wert K besitzt, über in

$$K^{(-n)} = K \cdot v^n. \quad (4)$$

In den genannten Tabellenwerken und im Anhang sind Tafeln der Abzinsungsfaktoren v^n für die gleichen Zinsfüße und Zeitspannen enthalten wie für die q^n . (Bei der Berechnung der v^n geht man von dem höchsten n , etwa $n = 50$, aus und findet dann die übrigen durch fortgesetzte Multiplikation: $v^{49} = v^{50} \cdot q$; $v^{48} = v^{49} \cdot q$ usw.). — Im Falle einer unrunder Zahl $n = N + t$ schreiben wir, wenn die Berechnung des Barwerts nach dem reinen Zinseszinsverfahren erfolgen soll, $K^{(-n)} = K v^N \cdot v^t = K \cdot v^{N+1} \cdot q^{1-t}$. Zur Berechnung von $K^{(-n)}$ ohne Logarithmen brauchen wir neben den Tafeln der v^n für ganzzahlige n Tafeln der Aufzinsungsfaktoren für Periodenbruchteile; das Violineische Tabellenwerk enthält, wie erwähnt, solche für die Zwölftel. Soll mit gemischtem Zins gerechnet werden, so haben wir $K^{(-n)} = \frac{K v^N}{1+i t}$.

Wie oben dargelegt, ist $v^t = q^{-t} = \frac{1}{(1+i)^t} > \frac{1}{1+i t}$; der zwischen $t=0$ und $t=1$ sich erstreckende Bogen der Diskontierungshyperbel liegt unter dem entsprechenden Bogen der Kurve $y = \frac{1}{(1+i)t}$, und beide liegen unterhalb der die Endpunkte verbindenden Sehne, deren Ordinaten die durch lineare Interpolation erhaltene Funktionswerte darstellen. Bei der Abzinsung sind also lineare Interpolation der Tabellenwerte v^n und Rechnen mit gemischtem Zins nicht gleichbedeutend; erstere würde einen zu großen Barwert liefern¹⁾.

Beispiel: Welchen Barwert hat eine nach 8 Jahren 5 Monaten fällige Versicherungssumme $K = 10000$ M, wenn $i = 0,04$ gerechnet wird?

Lösung: Bei Anwendung des reinen Zinseszinsgesetzes rechnen wir

$$K^{(-8\frac{5}{12})} = K v^9 \cdot q^{\frac{7}{12}} = 10000 \cdot 0,70258674 \cdot 1,02314248 = 7188,46 \text{ M.}$$

Bei gemischter Verzinsung: $K^{[-8\frac{5}{12}]} = \frac{K v^8}{1 + \frac{5}{12} \cdot 0,04} = \frac{10000 \cdot 0,73069021}{1 + \frac{0,2}{12}} = 7187,12 \text{ M,}$

also ein etwas kleinerer Wert als vorher. (Lineare Interpolation würde den zu großen Wert $10000 \cdot 0,71898043 = 7189,80$ M ergeben.)

¹⁾ Falsch würde es daher auch sein, wollte man die S. 37 behandelte Aufgabe, die Zeit $n = N + t$ bei gemischter Verzinsung aus gegebenem Endwert, Barwert und Zinsfuß zu ermitteln, in der Weise lösen, daß man zu dem bekannten $\frac{K^{(-n)}}{K}$ in der Tabelle der v^n die nächstbenachbarten Werte v^N und v^{N+1} aufsucht, womit N bekannt wäre, und dann t durch eine lineare Interpolation ermittelt; man würde dann t zu groß erhalten.

Bei derartigen Aufgaben, die die Multiplikation von Tabellenzahlen erfordern, die eine größere Zahl von Dezimalen hinter dem Komma haben, wird mit Vorteil das Verfahren der abgekürzten Multiplikation angewendet.

Der mittlere Zahlungstermin n von ν Zahlungen K_1, K_2, \dots, K_ν , die zur Zeit n_1, n_2, \dots, n_ν fällig werden, kann bei Voraussetzung des Zinseszinsgesetzes in der Weise ermittelt werden, daß man die Summe der Barwerte dieser Beträge gleichsetzt dem Barwert der zur Zeit n auf einmal geleisteten Zahlung $K_1 + K_2 + \dots + K_\nu$:

$$(K_1 + K_2 + \dots + K_\nu) v^n = K_1 v^{n_1} + K_2 v^{n_2} + \dots + K_\nu \cdot v^{n_\nu}.$$

Hieraus

$$n = \frac{\log(K_1 v^{n_1} + K_2 v^{n_2} + \dots + K_\nu v^{n_\nu}) - \log(K_1 + K_2 + \dots + K_\nu)}{\log v}. \quad (5)$$

Bei Diskontierung auf einen anderen Zeitanfangspunkt würde sich der gleiche mittlere Zahlungstermin ergeben, d. h. dieser ist bei Zinseszinsrechnung unabhängig von der Frage, seit wann das Schuldverhältnis datiert.

Beispielsweise würde sich für den S. 32 behandelten Fall ergeben:

$$\begin{aligned} n &= \frac{\log(952,38 + 2361,68 + 1632,65) - \log(1000 + 2500 + 1800)}{-\log 1,05} \\ &= \frac{3,69431 - 3,79428}{-0,02119} = 1,4144 \text{ Jahre} = 1 \text{ Jahr } 149 \text{ Tage.} \end{aligned}$$

Zu erörtern ist noch, wie man mit Hilfe der Tabellen Aufzinsungs- und Abzinsungsfaktoren für solche Zinsfüße, für die die q^n und v^n nicht tabuliert sind, durch Interpolation finden kann; ebenso die interpolatorische Bestimmung des Zinsfußes p , wenn Barwert, Endwert und Zeit gegeben sind. Die lineare Interpolation liefert zu ungenaue Werte. Dagegen führt hier, wie auch bei den Aufgaben, die an die später zu besprechenden Tabellen anschließen, die Interpolation 2. oder 3. Grades im allgemeinen zu hinreichend genauen Ergebnissen. Wir gehen nach der in mathematischen Lehrbüchern entwickelten Newtonschen Interpolationsformel vor. Zu den Zinsfüßen $p_0, p_1, p_2, p_3 \dots$ mögen die Tabellenwerte $u_0, u_1, u_2, u_3 \dots$ einer dem Zinsfuß p zugeordneten Größe u gehören.

1. Ist u gegeben, p gesucht, so können wir setzen:

$$\begin{aligned} p &= p_0 + p_1' (u - u_0) + p_2'' (u - u_0) (u - u_1) \\ &\quad + p_3''' (u - u_0) (u - u_1) (u - u_2) + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Die Konstanten $p_1', p_2'', p_3''', \dots$ sind aus folgendem Schema erklärt:

u_0	p_0
u_1	$p_1 \quad p_1'$
u_2	$p_2 \quad p_2' \quad p_2''$
u_3	$p_3 \quad p_3' \quad p_3'' \quad p_3'''$
\dots	$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$

In jeder Spalte steht die Differenz des entsprechenden Gliedes der links danebenstehenden Spalte gegen ihr erstes Glied, dividiert durch die Differenz der zugehörigen u -Werte.

Beispiel: Bei welchem Zinsfuß p wächst ein Kapital in 20 Jahren durch Zinseszins auf den doppelten Betrag an?

Wir haben $u = q^{20} = 2$; wir wählen $p_0 = 3\%$; $p_1 = 3,5\%$; $p_2 = 4\%$; $p_3 = 4,5\%$.

u	p	p'	p''	p'''
1,806111	3.			
1,989789	3,5	2,722155		
2,191123	4	2,597322	— 0,620029	
2,411714	4,5	2,476870	— 0,581348	0,175352

Setzen wir in

$$p = 3 + 2,722115(u - 1,806111) - 0,620029(u - 1,806111)(u - 1,989789) + 0,175352(u - 1,806111)(u - 1,989789)(u - 2,191123)$$

den Wert $u = 2$ ein, so erhalten wir $p = 3,526540$. Das Glied 3. Grades bedingt nur noch eine Korrektur um sieben Einheiten in der 5. Dezimale. Wollen wir 4 Stellen genau, so können wir uns im allgemeinen mit einer quadratischen Interpolation begnügen.

2. Ist p gegeben, u gesucht, so kann die zu (6) analoge Interpolationsformel genommen werden, die sich aus ihr ergibt, wenn man die Rollen der p und u vertauscht. Etwas bequemer wird in dem Falle, wo die p -Werte um gleiche Intervalle Δp fortschreiten, folgender Ansatz:

$$u = u_0 + \frac{\Delta' u_0}{\Delta p} \cdot (p - p_0) + \frac{\Delta'' u_0}{\Delta p^2} \cdot \frac{(p - p_0)(p - p_1)}{2} + \frac{\Delta''' u_0}{\Delta p^3} \cdot \frac{(p - p_0)(p - p_1)(p - p_2)}{6} \quad (7)$$

$\Delta' u_0, \Delta'' u_0, \Delta''' u_0$ werden aus dem Differenzschema erhalten:

$$\begin{array}{l|l|l} u_0 & \Delta' u_0 = u_1 - u_0 & \Delta'' u_0 = \Delta' u_1 - \Delta' u_0 \\ u_1 & \Delta' u_1 = u_2 - u_1 & \Delta'' u_1 = \Delta' u_2 - \Delta' u_1 \\ u_2 & \Delta' u_2 = u_3 - u_2 & \Delta''' u_0 = \Delta'' u_1 - \Delta'' u_0 \\ u_3 & & \end{array}$$

Beispiel: Gesucht $u = v^{10}$ für $p = 4\frac{3}{4}\%$ aus den zu $p_0 = 4\%$; $p_1 = 5\%$; $p_2 = 6\%$ gehörenden Werten:

$$\begin{array}{l|l|l} u_0 = 0,675564 & \Delta' u_0 = -0,061651 & \Delta'' u_0 = +0,006132 \\ u_1 = 0,613913 & \Delta' u_1 = -0,055518 & \\ u_2 = 0,558395 & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Lösung: } u &= 0,675564 - 0,061651 \cdot \frac{3}{4} - 0,006132 \cdot \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}}{2} \\ &= 0,628751. \end{aligned}$$

Die Vielinesche Tafel liefert $v^{10} = 0,628723$ für $p = 4\frac{3}{4}\%$. Der durch quadratische Interpolation erhaltene Wert stimmt mit ihm auf 4 Dezimalen überein.

Unterjährige, kontinuierliche zusammengesetzte Verzinsung.

Vielfach wird der für die Kapitaleinheit zu zahlende Jahreszins j in Halbjahresraten $\frac{j}{2}$ oder Vierteljahresraten $\frac{j}{4}$ postnumerando bezahlt.

Ist allgemein $\frac{1}{m}$ Jahr die Zinsperiode, an deren Schluß jeweils der Zinsbetrag $\frac{j}{m}$ für die Kapitaleinheit zu zahlen ist, so wächst diese bei Zinseszins bis zum Ende des Jahres an auf den Betrag:

$$\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m = 1 + j + \frac{1}{2!} \frac{m-1}{m} \cdot j^2 + \frac{1}{3!} \frac{(m-1)(m-2)}{m^2} \cdot j^3 + \dots + \left(\frac{j}{m}\right)^m. \quad (8)$$

Zu dem gleichen Endwert kommen wir bei ganzjähriger Zinszahlung, wenn der Zinssatz

$$i = j + \frac{1}{2!} \frac{m-1}{m} j^2 + \frac{1}{3!} \frac{(m-1)(m-2)}{m^2} j^3 + \dots + \left(\frac{j}{m}\right)^m. \quad (9)$$

Man bezeichnet i als den zum Nominalzinssatz j konformen effektiven Jahreszinssatz; er ist allemal höher als j . Da $\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m = 1 + i$, so ergibt sich

$$1 + \frac{j}{m} = (1 + i)^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{1}{m} i - \frac{1}{2!} \frac{m-1}{m^2} i^2 + \frac{1}{3!} \frac{(m-1)(2m-1)}{m^3} i^3 - \dots \quad (10)$$

Also ist

$$j = i - \frac{1}{2!} \frac{m-1}{m} \cdot i^2 + \frac{1}{3!} \frac{(m-1)(2m-1)}{m^2} \cdot i^3 - \dots \quad (11)$$

der in $\frac{1}{m}$ jährlichen Perioden postnumerando zu zahlende Nominalzinssatz, der zu dem ganzjährig zahlbaren effektiven Zinssatz i konform ist.

Für $m = 4$ beispielsweise ist zu den Zinssätzen unserer Tabellen konform:

Effektiver Zinssatz i	Vierteljährlicher konformer Zinssatz j
0,03	0,029 668
0,04	0,039 414
0,045	0,044 260
0,05	0,049 089
0,055	0,053 901
0,06	0,058 695
0,07	0,068 234

Nehmen wir $j = 1$ (Zinsfuß 100%), so geht (8) über in

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{m}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{2}{m}\right) + \dots + \frac{1}{m!} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{2}{m}\right) \dots \left(1 - \frac{m-1}{m}\right). \quad (12)$$

Beispielsweise haben wir $\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2,25$; $\left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 = 2,441$;
 $\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} = 2,594$; $\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} = 2,704$; $\left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2,7171$;

$\left(1 + \frac{1}{10\,000}\right)^{10\,000} = 2,7182$. Bei wachsendem m wächst der Potenzwert ebenfalls, wie auch die rechte Seite der Entwicklung zeigt, nähert sich dabei aber immer mehr einem Grenzwert, nämlich der Exponentialzahl $e = 2,718281828 \dots$. Man kann diese Zahl auf beliebig viele Stellen genau berechnen mit Hilfe der Reihe, in die die rechte Seite von (12) bei unbegrenzt wachsendem m übergeht, nämlich:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

Wir erkennen: Wenn die Zahl m der auf das Jahr entfallenden Zinsperioden unbegrenzt wächst, so strebt der nach einem Jahr erlangte Endwert der zum nominellen Jahreszinsfuß 100% zu verzinsenden Kapitaleinheit dem endlichen Grenzwert e zu. Man bezeichnet daher auch e als den Endwert bei kontinuierlicher zusammengesetzter Verzinsung zum nominellen Jahreszinsfuß 100%.

Anknüpfend an (8):

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m &= \left[\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{j}}\right]^j = 1 + \frac{j}{1!} + \frac{j^2}{2!} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \\ &+ \frac{j^3}{3!} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{2}{m}\right) + \dots + \frac{j^m}{m} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{2}{m}\right) \dots \left(1 - \frac{m-1}{m}\right) \end{aligned}$$

folgt man ganz ähnlich, daß der nach einem Jahr erlangte Endwert der zum nominellen Jahreszinssatz j zu verzinsenden Kapitaleinheit bei unbegrenzt wachsendem m dem Grenzwert

$$e^j = 1 + \frac{j}{1!} + \frac{j^2}{2!} + \frac{j^3}{3!} + \dots \quad (13)$$

zustrebt. Wird dieser Grenzwert mit dem bei ganzjähriger Verzinsung zum Zinssatz i erlangten Endwert $q = 1 + i$ gleichgesetzt, so ergibt sich

$$i = e^j - 1 = \frac{j}{1!} + \frac{j^2}{2!} + \frac{j^3}{3!} + \dots \quad (14)$$

als der effektive Jahreszinssatz, der mit der kontinuierlichen Verzinsung zum nominellen Jahreszinssatz j gleichwertig ist. Aus $1 + i = e^j$ folgt reziprok, wenn wir die Umkehrung der uns in (13) begegnenden Exponentialfunktion, den natürlichen Logarithmus, einführen:

$$j = \lg(1 + i) = \lg q. \quad (15)$$

Als Endwert der Kapitaleinheit für beliebige Zeitabschnitte $n = \frac{l}{m}$ haben wir

$$\left(1 + \frac{j}{m}\right)^l = \left[\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{l}{m}}\right]^m = \left[\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m\right]^n.$$

Wächst m unbegrenzt, so strebt die rechte Seite dem Grenzwert $(e^j)^n = (1 + i)^n = q^n$ zu. Die kontinuierliche zusammengesetzte Verzinsung

zum nominellen Jahreszinssatz $j = \lg(1 + i)$ liefert also Endwerte, die dem auf beliebige, ganzzahlige und nicht ganzzahlige Zeitwerte n angewendeten Zinseszinsgesetz für den effektiven Jahreszinssatz i entsprechen. Daraus ergibt sich: Wird man bei der Lösung von Aufgaben durch Anwendung des reinen Zinseszinsgesetzes auf Zeitwerte $n = N + t$ geführt, wo N ganzzahlig, t ein echter Bruch, so kann man das, weil $q^n = q^N \cdot q^t$, so deuten, daß für den Bruchteil t kontinuierliche zusammengesetzte Verzinsung zum nominellen Jahreszinssatz $j = \lg(1 + i)$ erfolgt. Das Ergebnis weicht, da $q^t = 1 + ti - \frac{t(1-t)}{2} i^2 + \frac{t(1-t)(2-t)}{3!} i^3 - + \dots$, von dem bei gemischter Verzinsung erhaltenen Wert $q^N (1 + it)$ nur unerheblich ab. Praktisch wird man daher q^n im allgemeinen durch einen auf gemischte Verzinsung abgestellten Zahlungsplan deuten können.

Wir hätten j auch aus (11):

$$j = i - \frac{i^2}{2!} \left(1 - \frac{1}{m}\right) + \frac{i^3}{3!} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{2}{m}\right) - + \dots$$

herleiten können, indem wir m über alle Grenzen wachsen lassen. Der dann sich ergebende Wert

$$j = i - \frac{i^2}{2!} + \frac{i^3}{3!} - + \dots \tag{15'}$$

stellt die Reihenentwicklung von $\lg(1 + i)$ dar.

§ 6. Rentenrechnung.

Unter einer Rente versteht man eine Folge von in regelmäßigen Zeitintervallen fälligen Zahlungen. Ihre Dauer erstreckt sich entweder auf einen von vornherein kalendermäßig festgesetzten Zeitraum (Zeitrente) oder ist abhängig von Leben und Tod einer oder mehrerer Personen (Leibrente). Der letztere Fall bleibt einstweilen außer Betracht. Je nachdem die einzelnen Zahlungen, die Rentenraten, zu Beginn oder zum Schluß des als Rentenperiode bezeichneten Zeitintervalls fällig werden, unterscheidet man vorschüssige und nachschüssige Renten. Die Rentenraten R_1, R_2, \dots, R_n können veränderlich sein, insbesondere steigend oder fallend. Wir beschränken uns auf den Fall gleichbleibender Rentenraten. Ein einfaches Beispiel hierfür sind die pränumerando oder postnumerando in gleichen Perioden fälligen Zinsen eines Kapitals.

Endwert und Barwert einer nachschüssigen Rente werden offenbar:

$$E = R_1 q^{n-1} + R_2 q^{n-2} + \dots + R_n,$$

$$B = R_1 v + R_2 v^2 + \dots + R_n v^n;$$

Dagegen werden Schlußwert und Barwert einer vorschüssigen Rente dargestellt durch

$$E = R_1 q^n + R_2 \cdot q^{n-1} + \dots + R_n q;$$

$$B = R_1 + R_2 v + R_3 v^2 + \dots + R_n v^{n-1}.$$

In beiden Fällen ist Gleichheit von Zins- und Rentenperiode angenommen und nachschüssige Verzinsung zugrunde gelegt. Wir schreiben bei der gleichbleibenden nachschüssigen Rente: $R_1 = R_2 = \dots = R_n = R$; bei der gleichbleibenden vorschüssigen Rente: $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2 = \dots = \mathbf{R}_n = \mathbf{R}$. Wir erhalten dann:

$$(16a) \quad E = R \cdot s_{\overline{n}|}; \quad (16b) \quad \mathbf{E} = \mathbf{R} \cdot s_{\overline{n}|};$$

$$(17a) \quad B = R \cdot a_{\overline{n}|}; \quad (17b) \quad \mathbf{B} = \mathbf{R} \cdot a_{\overline{n}|}.$$

In (16a), (16b) ist

$$s_{\overline{n}|} = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{q^n - 1}{i}; \quad (18a)$$

$$s_{\overline{n}|} = q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{q^n - 1}{vi} = \frac{q^n - 1}{i}, \quad (18b)$$

wobei $i = vi$ den Barwert des Postnumerandozinses i , also den dazu konformen Pränumerandozins bezeichnet. Da $s_{\overline{n+1}|} = s_{\overline{n}|} + q^n$ und ebenso $s_{\overline{n+1}|} = s_{\overline{n}|} + q^{n+1}$, so kann man Tabellen der $s_{\overline{n}|}$ bzw. $s_{\overline{n}|}$ berechnen mit Hilfe der Tafeln der q^n durch Aufaddieren. Die Verknüpfungsformel

$$s_{\overline{n}|} = 1 + s_{\overline{n-1}|} \quad (18^*)$$

zeigt, daß man sich mit der einen oder der anderen Art von Schlußwerttabellen begnügen kann.

In (17a), (17b) ist

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + \dots + v^n = v \frac{1 - v^n}{1 - v} = \frac{1 - v^n}{q - 1} = \frac{1 - v^n}{i}; \quad (19a)$$

$$a_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + \dots + v^{n-1} = \frac{1 - v^n}{1 - v} = \frac{1 - v^n}{vi} = \frac{1 - v^n}{i}. \quad (19b)$$

Da $a_{\overline{n+1}|} = a_{\overline{n}|} + v^{n+1}$ und ebenso $a_{\overline{n+1}|} = a_{\overline{n}|} + v^n$, so kann man Tabellen der $a_{\overline{n}|}$ bzw. $a_{\overline{n}|}$ berechnen mit Hilfe der Tafeln der v^n durch Aufaddieren. Die Verknüpfungsformel

$$a_{\overline{n+1}|} = 1 + a_{\overline{n}|} \quad (19^*)$$

zeigt, daß man sich mit der einen oder der anderen der Barwerttabellen begnügen kann.

Von Bedeutung sind noch folgende Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} s_{\overline{n}|} &= v \cdot s_{\overline{n}|} \text{ oder } s_{\overline{n}|} = q \cdot s_{\overline{n}|}; & a_{\overline{n}|} &= v \cdot a_{\overline{n}|} \text{ oder } a_{\overline{n}|} = q \cdot a_{\overline{n}|} \\ a_{\overline{n}|} &= v^n \cdot s_{\overline{n}|} \text{ oder } s_{\overline{n}|} = q^n \cdot a_{\overline{n}|}; & a_{\overline{n}|} &= v^n \cdot s_{\overline{n}|} \text{ oder } s_{\overline{n}|} = q^n \cdot a_{\overline{n}|} \end{aligned} \right\} (20)$$

Bei Steigerung des Zinssatzes i nehmen die Endwerte $s_{\overline{n}|}$, $s_{\overline{n}|}$ zu, die Barwerte $a_{\overline{n}|}$, $a_{\overline{n}|}$ dagegen ab, wie die Reihenentwicklungen zeigen. Mit wachsendem n werden sowohl die Endwerte wie die Barwerte größer. Im graphischen Bild mit den Zeitwerten n als Abszissen werden die $y = s_{\overline{n}|}$ Kurven von der Art der Exponentialkurven sein, die die Endwerte eines Kapitals darstellen, mit dem gemeinsamen Punkt (1; 1) (Abb. 7).

Die Barwerte konvergieren bei unbegrenzt wachsendem n gegen einen endlichen Grenzwert; denn da $\lim_{n \rightarrow \infty} v^n = 0$, so ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{\overline{n}|} = a_{\infty|} = \frac{1}{i}$;

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{\overline{n}|} = a_{\infty|} = \frac{1}{i}$. Im graphischen Bild (Abb. 8) sind die Horizontalen $y = \frac{1}{i}$ die Asymptoten der Kurven $y = a_{\overline{n}|}$. Für endliche n sind die Barwerte stets kleiner als $\frac{1}{i}$ bzw. $\frac{1}{i}$.

Wir sehen: $\frac{1}{i}$ bzw. $\frac{1}{i}$ stellt den Barwert einer sog. ewigen Rente dar, bei der die fortlaufend nachschüssig oder vorschüssig gezahlten Raten den Betrag 1 haben. Ein Kapital $\frac{1}{i}$ liefert in der Tat bei

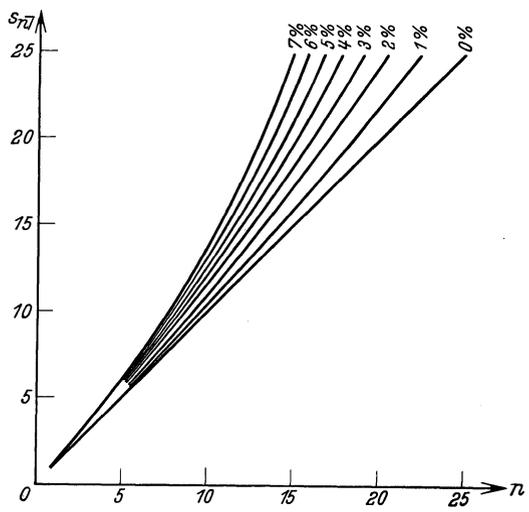


Abb. 7.

nachschüssiger Verzinsung zum Jahreszinssatz i einen jährlichen Ertrag 1; entsprechend das Kapital $\frac{1}{i}$ bei vorschüssiger Verzinsung. Nehmen wir den Zinsfuß 4%, so ist $a_{\infty|} = 25$; also $B = 25 R$.

Tatsächlich wird im Deutschen Reich in verschiedenen gesetzlichen Bestimmungen der Wert immerwährender Nutzungen oder Leistungen auf das Fünfundzwanzigfache des Jahresbetrages festgesetzt.

Der Endwert einer n mal zahlbaren Rente 1 am Schluß des $(n + k)$ ten Jahres ergibt sich, indem man $s_{\overline{n}|}$ bzw. $s_{\overline{n}|}$ noch k Jahre hindurch aufzinst, also mit q^k multipliziert; wir schreiben

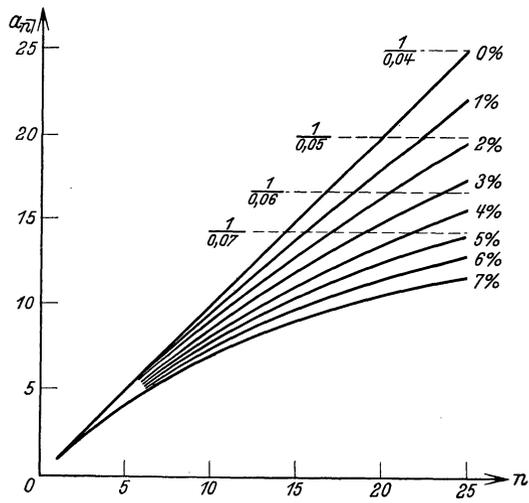


Abb. 8.

${}_k|s_{\overline{n}|} = s_{\overline{n}|} \cdot q^k$; ${}_k|s_{\overline{n}|} = s_{\overline{n}|} \cdot q^k$. Zu demselben Wert muß man gelangen, wenn man von dem Endwert

der $n + k$ mal zahlbaren Rente den Endwert der k letzten Raten abzieht; also

$${}_k|s_{\overline{n}|} = \overline{s_{\overline{n+k}|}} - s_{\overline{k}|}; \quad {}_k|\mathbf{s}_{\overline{n}|} = \mathbf{s}_{\overline{n+k}|} - \mathbf{s}_{\overline{k}|}.$$

Durch Vergleich der Formeln erhält man

$$\overline{s_{\overline{n+k}|}} = \overline{s_{\overline{n}|}} \cdot q^k + s_{\overline{k}|}; \quad \mathbf{s}_{\overline{n+k}|} = \overline{s_{\overline{n}|}} \cdot q^k + \mathbf{s}_{\overline{k}|}. \quad (21)$$

Mit Hilfe von (21) kann man die Schlußwerte von $n + k$ mal zahlbaren Renten berechnen, wenn die Tabellen die Werte für n und k umfassen. Übrigens erkennt man in (21) die Identitäten

$$\frac{q^{n+k}-1}{i} \equiv \frac{q^n-1}{i} \cdot q^k + \frac{q^k-1}{i}; \quad \frac{q^{n+k}-1}{i} \equiv \frac{q^n-1}{i} q^k + \frac{q^k-1}{i}. \quad (21')$$

Die in (21) angegebene Zerlegung bleibt also auch für nicht ganzzahlige Werte n und k bestehen, wenn man für solche, statt auf die Summenformel für geometrische Reihen zurückzugreifen, definitionsweise $s_{\overline{n}|} = \frac{q^n-1}{i}$ bzw. $\mathbf{s}_{\overline{n}|} = \frac{q^n-1}{i}$ setzt. Ist $n = N + t$, wo N die größte in n steckende ganze Zahl, so würde man auf Grund dieser Vereinbarung schreiben können:

$$\overline{s_{\overline{N+t}|}} = \overline{s_{\overline{N}|}} \cdot q^t + s_{\overline{t}|}; \quad \mathbf{s}_{\overline{N+t}|} = \mathbf{s}_{\overline{N}|} \cdot q^t + \mathbf{s}_{\overline{t}|}. \quad (22)$$

Aber die Frage ist, ob bei der neuen Definition die $s_{\overline{n}|}$, $\mathbf{s}_{\overline{n}|}$ im Falle nicht ganzzahliger n die Bedeutung von Rentenschlußwerten behalten. Der bequemeren Ausdrucksweise wegen möge weiterhin das Jahr als Zins- bzw. Rentenperiode genommen werden.

Wir wissen, daß die in ganzjährigen Perioden erfolgende Zahlung von Zinsen Ki ersetzt werden kann durch eine kontinuierliche zusammengesetzte Verzinsung von K zum nominellen Jahreszinssatz j , also durch eine kontinuierlich fließende Rente vom jährlichen Nominalertrage Kj , wo $j = \lg q = \lg(1+i)$. Nehmen wir $K = \frac{1}{i}$, so heißt das, daß die Rente, die aus gleichen am Jahresschluß gezahlten Raten $Ki = 1$ besteht, ersetzt werden kann durch eine kontinuierlich fließende Rente vom jährlichen Nominalertrage $\frac{j}{i}$, vorausgesetzt, daß kontinuierliche zusammengesetzte Verzinsung zum nominellen Jahreszinssatz j erfolgt. Wir erkennen nun, daß $s_{\overline{n}|} = \frac{q^n-1}{i}$ ganz allgemein für beliebige n der Schlußwert dieser kontinuierlich fließenden Rente ist: q^n ist der Endwert des um den Zinseszins vermehrten Kapitals 1, $q^n - 1$ also der Endwert des kontinuierlich fließenden zusammengesetzten Zinses selbst, der dem jährlichen Nominalzinssatz $j = \lg q$ entspricht, aber effektive Jahresraten i ergibt; mithin $\frac{q^n-1}{i}$ der Endwert, wenn effektive Jahresraten 1 aufkommen sollen. — Für $\mathbf{s}_{\overline{n}|} = q s_{\overline{n}|}$ gilt ebenfalls die Deutung als Schlußwert einer kontinuierlich fließenden

Rente vom jährlichen Nominalertrage $\frac{j}{i}$; nur sind alle Zahlungen ein Jahr früher datiert zu denken. — Offenbar schließt die verallgemeinerte Definition der $s_{\overline{n}|}$, $s_{\overline{n}|}$ die frühere spezielle für ganzzahlige n in sich.

Als Ersatz für die kontinuierliche Zahlungsweise kann nun nach (22) folgender Zahlungsplan gewählt werden: Zunächst N reguläre nachschüssige bzw. vorschüssige Jahreszahlungen 1, deren Endwert $s_{\overline{N}|}$ bzw. $s_{\overline{N}|}$ im Bruchteil t des letzten Jahres noch durch kontinuierliche zusammengesetzte Verzinsung zum nominellen Jahreszinssatz $j = \lg(1+i)$ aufgezinst zu denken ist, dann eine irreguläre Schlußzahlung $s_{\overline{t}|}$ bzw. $s_{\overline{t}|}$ zum Termin $N + t$. Da ausführlich geschrieben

$$\left. \begin{aligned} s_{\overline{N+t}|} &= s_{\overline{N}|} \left[1 + ti - t(1-t) \frac{i^2}{2!} + t(1-t)(2-t) \frac{i^3}{3!} - + \dots \right] \\ &\quad + \left[t - t(1-t) \frac{i}{2!} + \dots \right], \\ s_{\overline{N+t}|} &= s_{\overline{N}|} \left[1 + ti - t(1-t) \frac{i^2}{2!} + t(1-t)(2-t) \frac{i^3}{3!} - + \dots \right] \\ &\quad + q \left[t - t(1-t) \frac{i}{2!} + \dots \right], \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

so ergeben sich die Näherungswerte

$$s'_{\overline{N+t}|} = s_{\overline{N}|} (1 + it) + t; \quad s'_{\overline{N+t}|} = s_{\overline{N}|} (1 + it) + qt. \quad (23')$$

Den Näherungsformeln für die Rentenschlußwerte zur Zeit $N + t$ entspricht folgender praktischer Zahlungsplan: Zunächst N reguläre nachschüssige bzw. vorschüssige Jahreszahlungen 1, deren Endwert $s_{\overline{N}|}$ bzw. $s_{\overline{N}|}$ im Bruchteil t des letzten Jahres mit einfachen Zinsen zum Jahreszinssatz i aufgezinst zu denken ist, sodann eine irreguläre Schlußzahlung t bzw. qt zum Termin $N + t$. (Bei der Pränumerandorente kann auch eine irreguläre Abschlußzahlung t zum Termin $N - 1 + t$ eingesetzt werden, die dann noch ein volles Jahr bis zum Termin $N + t$ aufgezinst zu denken ist.) — Die Näherungsformeln ergeben einen mit t linear veränderlichen Schlußwert; für $t = 1$ liefern sie: $s'_{\overline{N+1}|} = s_{\overline{N}|}q + 1 = s_{\overline{N+1}|}$ bzw. $s'_{\overline{N+1}|} = (s_{\overline{N}|} + 1)q = s_{\overline{N+1}|}$, wie es sein muß. Die Näherungswerte sind also allgemein identisch mit den Werten, die man durch lineare Interpolation zwischen den Tabellenwerten $s_{\overline{N}|}$, $s_{\overline{N+1}|}$ bzw. $s_{\overline{N}|}$, $s_{\overline{N+1}|}$ erhält. Praktisch wird man daher im allgemeinen bei Aufgaben, bei denen der Zeitwert n aus $s_{\overline{n}|}$ bzw. $s_{\overline{n}|}$ bestimmt werden soll, die nächst benachbarten Tabellenwerte $s_{\overline{N}|}$, $s_{\overline{N+1}|}$ bzw. $s_{\overline{N}|}$, $s_{\overline{N+1}|}$ aufsuchen, durch Interpolation $N + t$ ermitteln und den oben beschriebenen praktischen Zahlungsplan zugrunde legen.

1. Beispiel: Gesucht $s_{\overline{n}|}$ für $n = 15\frac{7}{12}$; $i = 0,04$.

$$s_{\overline{15\frac{7}{12}}|} = s_{\overline{15}|} \cdot 1,04^{\frac{7}{12}} + s_{\overline{7}|}; \quad \text{die Viellesche Tafel für } q^t \text{ gibt}$$

$s_{\overline{15}|} \cdot 1,04^{\frac{7}{12}} = 20,023\,587\,64 \cdot 1,023\,142\,48 = 20,486\,983\,11$; ferner $s_{\overline{7}|} = \frac{1,04^{\frac{7}{12}} - 1}{0,04}$
 $= 0,023\,142\,48 \cdot 25 = 0,578\,562\,00$; daher $s_{\overline{15\frac{7}{12}}|} = 21,065\,545\,11$. Dagegen $s_{\overline{15\frac{7}{12}}|}$
 $= s_{\overline{15}|} \left(1 + 0,04 \cdot \frac{7}{12} \right) + \frac{7}{12} = 20,023\,587\,64 + 1,800\,943\,51 \cdot \frac{7}{12} = 21,074\,138\,02$,
 was mit dem durch lineare Interpolation erhaltenen Wert übereinstimmt. Beispielsweise würde bei einer Jahresrate $R = 1000$ der Nährungswert um 8,59 gegenüber dem wahren Schlußwert zu groß ausfallen.

2. Beispiel: Eine Aktiengesellschaft will durch jährliche nach(vor-)schüssige Zahlungen von 10000 M einen Wohlfahrtsfonds von 50000 M schaffen. In welcher Zeit erreicht sie dieses Ziel? $i = 0,04$.

1. Postnumerandozahlungen: $s_{\overline{n}|} = \frac{E}{R} = \frac{50\,000}{10\,000} = 5$.

a) Logarithmische Berechnung: $\frac{q^n - 1}{i} = 5$; $q^n = 1 + 5i = 1,2$; $n = \frac{\log 1,2}{\log 1,4} = 4,648\,603$, also $t = 0,648\,603$ Jahre = 7 Monate 23 Tage.

Zahlungsplan: 4 Jahreszahlungen postnumerando zu 10000 M, nach 4 Jahren 7 Monaten 23 Tagen Schlußzahlung: $10\,000 \cdot s_{\overline{t}|} = 10\,000 \cdot \frac{q^t - 1}{i} = 10\,000 \cdot \frac{1,04^{0,648\,603} - 1}{0,04} = 10\,000 \cdot \frac{1,025\,764\,9 - 1}{0,04} = 6441,22$ M.

b) Lineare Interpolation der $s_{\overline{n}|}$: $s_{\overline{4}|} = 4,246\,464$; $s_{\overline{n}|} = 5$; $s_{\overline{5}|} = 5,416\,323$. Also $\Delta = s_{\overline{5}|} - s_{\overline{4}|} = 1,169\,859$; $\delta = s_{\overline{n}|} - s_{\overline{4}|} = 0,753\,536$; $t = \frac{\delta}{\Delta} = 0,644\,126$, d. i. 7 Monate 22 Tage. Dasselbe Ergebnis liefert die lineare Interpolation von q^n zwischen q^4 und q^5 .

Zahlungsplan: Vier Jahreszahlungen postnumerando zu 10000 M, nach 4 Jahren 7 Monaten 22 Tagen Schlußzahlung $10\,000 \cdot t = 6441,26$ M.

2. Pränumerandozahlungen: $s_{\overline{n}|} = \frac{E}{R} = \frac{50\,000}{10\,000} = 5$.

a) Logarithmische Berechnung: $q^n = 1 + i \cdot s_{\overline{n}|} = 1 + 5i = 1,192\,308$;
 $n = \frac{\log 1,192\,308}{\log 1,04} = 4,484\,490$.

Zahlungsplan: 4 Jahreszahlungen pränumerando zu 10000 M, nach 4 Jahren 5 Monaten 24 Tagen Schlußzahlung: $10\,000 \cdot q \cdot s_{\overline{t}|} = 10\,000 \cdot q \cdot \frac{q^t - 1}{i} = 10\,000 \cdot 1,04 \cdot \frac{1,04^{0,484\,490} - 1}{0,04} = 10\,000 \cdot 1,04 \cdot \frac{1,019\,184 - 1}{0,04} = 4987,77$ M.

b) Lineare Interpolation der $s_{\overline{n}|}$: $s_{\overline{4}|} = 4,416\,323$; $s_{\overline{n}|} = 5$; $s_{\overline{5}|} = 5,632\,975$. Also $\Delta = s_{\overline{5}|} - s_{\overline{4}|} = 1,216\,652$; $\delta = s_{\overline{n}|} - s_{\overline{4}|} = 0,583\,677$; $t = \frac{\delta}{\Delta} = 0,479\,740$, d. i. 5 Monate 23 Tage.

Zahlungsplan: 4 Jahreszahlungen pränumerando zu 10000 M; nach 4 Jahren 5 Monaten 23 Tagen Schlußzahlung: $10\,000 \cdot q \cdot t = 4989,30$ M.

Der Barwert einer n mal zahlbaren Rente 1 für einen k Jahre vor dem Beginn der Rente liegenden Termin ergibt sich, indem man $a_{\overline{n}|}$ bzw. $a_{\overline{n}|}$ noch für k Jahre abzinst, also mit v^k multipliziert; wir schreiben

$${}_k|a_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|} \cdot v^k; \quad {}_k|a_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|} \cdot v^k.$$

Zu demselben Wert muß man gelangen, wenn man von dem Barwert der $n + k$ mal zahlbaren Rente den Barwert der ersten k Raten abzieht; also

$${}_k|a_{\overline{n+k}|} = a_{\overline{n+k}|} - a_{\overline{k}|}; \quad {}_k|a_{\overline{n}|} = a_{\overline{n+k}|} - a_{\overline{k}|}.$$

Durch Vergleich der Formeln erhält man

$$a_{\overline{n+k}|} = a_{\overline{n}|} \cdot v^k + a_{\overline{k}|}; \quad a_{\overline{n+k}|} = a_{\overline{n}|} \cdot v^k + a_{\overline{k}|}. \quad (24)$$

Mit Hilfe von (24) kann man die Barwerte von $n + k$ mal zahlbaren Renten berechnen, wenn die Tabellen die Werte für n und k umfassen. Übrigens stellen sich die Gleichungen (24) als Identitäten dar, wenn man in ihnen

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{i} \text{ und die analogen aus der Summenformel für geometrische Reihen erhaltene Ausdrücke einführt. Ähnliche Zerlegungsformeln erhält man für den Fall unrunder Zeitwerte } n = N + t, \text{ sofern man für solche definitionswise } a_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{i}; \mathbf{a}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{i} \text{ setzt. Die Identitäten}$$

$$\frac{1-v^{N+t}}{i} = \frac{1-v^N}{i} + v^{N+t} \cdot \frac{q^t-1}{i}; \quad \frac{1-v^{N+t}}{i} = \frac{1-v^N}{i} + v^{N+t} \cdot \frac{q^t-1}{i}$$

schreiben sich dann so:

$$a_{\overline{N+t}|} = a_{\overline{N}|} + v^{N+t} \cdot s_{\overline{t}|}; \quad \mathbf{a}_{\overline{N+t}|} = \mathbf{a}_{\overline{N}|} + v^{N+t} \cdot \mathbf{s}_{\overline{t}|}. \quad (25)$$

Die rechten Seiten stellen genau die Barwerte dar, die zu den bei der Deutung der $s_{\overline{N+t}|}$, $\mathbf{s}_{\overline{N+t}|}$ besprochenen Zahlungsplänen gehören, wobei für die Diskontierung der zum Termin $N + t$ fälligen irregulären Schlußrate kontinuierliche zusammengesetzte Verzinsung zum jährlichen Nominalzinssatz $j = \lg(1 + i)$ zugrunde gelegt ist. Mithin können die $a_{\overline{N+t}|}$, $\mathbf{a}_{\overline{N+t}|}$ auch angesehen werden als Barwerte der jenen Zahlungsplänen gleichwertigen kontinuierlich fließenden Renten vom jährlichen Nominalertrage $\frac{j}{i}$. Damit ist klar-gestellt, wieso die $a_{\overline{n}|}$, $\mathbf{a}_{\overline{n}|}$ bei der neuen verallgemeinerten Definition — die die frühere spezielle für ganzzahlige n in sich schließt — die Bedeutung als Rentenbarwerte behalten.

Aus (25) gewinnen wir die den Formeln (23') entsprechenden Näherungsformeln, wenn wir $s_{\overline{t}|} \approx t$, $\mathbf{s}_{\overline{t}|} \approx qt$ und $v^t \approx \frac{1}{1+it}$ einführen:

$$a'_{\overline{N+t}|} = a_{\overline{N}|} + \frac{v^N \cdot t}{1+it}; \quad \mathbf{a}'_{\overline{N+t}|} = \mathbf{a}_{\overline{N}|} + \frac{v^{N-1} \cdot t}{1+it}. \quad (25')$$

Diese Formeln entsprechen auch demselben praktischen Zahlungsplan wie (23'); für die Diskontierung der irregulären Schlußrate ist dabei gemischte Verzinsung zugrunde gelegt. Die Werte (25') stimmen nicht überein mit denjenigen, die man durch Interpolation zwischen den für N und $N + 1$ geltenden Werten erhält:

$$\left. \begin{aligned} a''_{\overline{N+t}|} &= a_{\overline{N}|} + t(a_{\overline{N+1}|} - a_{\overline{N}|}) & \mathbf{a}''_{\overline{N+t}|} &= \mathbf{a}_{\overline{N}|} + t(\mathbf{a}_{\overline{N+1}|} - \mathbf{a}_{\overline{N}|}) \\ &= a_{\overline{N}|} + t \cdot v^{N+1}; & &= \mathbf{a}_{\overline{N}|} + t \cdot v^N. \end{aligned} \right\} (25'')$$

Die Interpolationswerte (25'') lassen sich deuten als Barwert einer n mal zahlbaren Rente 1 und einer irregulären Schlußrate t , die ein Jahr später als die letzte reguläre Rate bezahlt wird.

Hieraus ergibt sich, welchen Zahlungsplan man beispielsweise im Falle von nachschüssigen Renten aufzustellen hat, wenn n aus $a_{\overline{n}|} = \frac{B}{R}$ bestimmt werden muß. Der aus $v^n = 1 - ia_{\overline{n}|}$ logarithmisch berechnete Wert $n = N + t$ ist streng genommen nicht zu realisieren; er bezieht sich auf die kontinuierlich fließende Rente vom nominellen Jahresertrag $\frac{j}{i} \cdot R$, die zum Termin $N + t$ aufhört. Praktisch gründet man auf diesen n -Wert den aus (25) hervorgehenden Zahlungsplan der N regulären Raten R und einer zum Termin $N + t$ zu zahlenden Schlußrate $s_{\overline{t}|}R$. Bestimmt man $n = N + t$ nach (25''), indem man zu $a_{\overline{n}|} = \frac{B}{R}$ die nächst benachbarten Tabellenwerte $a_{\overline{N}|}$, $a_{\overline{N+1}|}$ aufsucht und $N + t$ durch Interpolation ermittelt, so ist der Zahlungsplan der N regulären Raten R und der zum Termin $N + 1$ erfolgenden Schlußzahlung tR anzuwenden. Die entsprechend auf $v^n = 1 - ia_{\overline{n}|}$ angewendete Interpolation würde wegen des linearen Charakters dieses Ausdrucks zu demselben $n = N + t$ führen. Dagegen würde man, wenn man die Interpolation auf $q^n = \frac{1}{1 - ia_{\overline{n}|}}$ bezieht, das zum „praktischen Zahlungsplan“ der Formeln (23') und (25') gehörende t erhalten, weil $q^n = 1 + is_{\overline{n}|}$, mithin Interpolation von q^n und $s_{\overline{n}|}$ gleichwertig.

1. Beispiel: Gesucht $a_{\overline{n}|}$ für $n = 15\frac{7}{12}$; $i = 0,05$.

$$\begin{aligned} \text{a) } a_{\overline{15\frac{7}{12}}|} &= a_{\overline{15}|} + v^{15\frac{7}{12}} \cdot \frac{q^{\frac{7}{12}} - 1}{i} = 10,898\ 640\ 94 \\ &+ 0,467\ 522 \cdot \frac{1,028\ 869\ 81 - 1}{0,04761905} = 11,182\ 084. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } a'_{\overline{15\frac{7}{12}}|} &= a_{\overline{15}|} + \frac{v^{14} \cdot \frac{7}{12}}{1 + 0,05 \cdot \frac{7}{12}} = 10,898\ 640\ 94 \\ &+ \frac{0,294\ 622\ 97}{1,029\ 166\ 67} = 11,184\ 914\ 28. \end{aligned}$$

$$\text{c) } a''_{\overline{15\frac{7}{12}}|} = a_{\overline{15}|} + \frac{7}{12} \cdot v^{15} = 10,898\ 640\ 94 + 0,280\ 593\ 31 = 11,179\ 234\ 25.$$

2. Beispiel: Für eine Schule wird ein Legat in Höhe von $B = 50000$ M ausgesetzt, das zu 4% verzinslich angelegt ist, mit der Auflage, daß aus ihm Jahresbeträge postnumerando von $R = 3000$ M gezogen werden sollen. In welchem Zeitraum und nach welchem Zahlungsplan wird das Legat aufgebraucht?

Lösung: a) Logarithmisch: $v^n = 1 - i \cdot a_{\overline{n}|} = 1 - 0,04 \frac{50\,000}{3000} = \frac{1}{3}$;

$$n = \frac{\log \frac{1}{3}}{\log \frac{1}{1,04}} = 28,011\,02 \text{ Jahre, also } t = 0,011\,02.$$

Zahlungsplan: 28 nachschüssige Jahreszahlungen zu 3000 M; nach 28,01102 Jahren = 28 Jahren 4 Tagen Schlußzahlung: $3000 \cdot s_{\overline{t}|} = 3000 \cdot 0,01081 = 32,43 \text{ M.}$

b) Interpolation der $a_{\overline{n}|}$: $a_{\overline{28}|} = 16,663\,063$; $a_{\overline{n}|} = 16,666\,667$; $a_{\overline{29}|} = 16,983\,715$. Also $\Delta = a_{\overline{29}|} - a_{\overline{28}|} = 0,320\,652$; $\delta = a_{\overline{n}|} - a_{\overline{28}|} = 0,003\,604$;

$$t = \frac{\delta}{\Delta} = 0,001\,124.$$

Zahlungsplan: 28 nachschüssige Jahreszahlungen von 3000 M; nach 29 Jahren eine Schlußzahlung $3000 \cdot t = 3,37 \text{ M.}$

c) Interpolation der q^n : $q^{28} = 2,998\,703$; $q^n = \frac{1}{1 - i a_{\overline{n}|}} = 3$; $q^{29} = 3,118\,651$.

Also $\Delta = q^{29} - q^{28} = 0,119\,948$; $\delta = q^n - q^{28} = 0,001\,297$; $t = \frac{\delta}{\Delta} = 0,001\,080$;

d. i. 0,36 Tage.

Zahlungsplan: 28 nachschüssige Jahresleistungen von je 3000 M; in Verbindung mit der letzten eine Sonderleistung von $3000 t = 3,24 \text{ M.}$

Die Rentenrate, die bei n maliger Zahlung zur Erreichung eines bestimmten Endwerts führt, ergibt sich nach (16a), (16b) zu

$$R = E \cdot \frac{1}{s_{\overline{n}|}} = EP_{\overline{n}|}; \quad \mathbf{R} = \mathbf{E} \cdot \frac{1}{s_{\overline{n}|}} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{P}_{\overline{n}|}. \quad (26)$$

Hierin bedeuten $P_{\overline{n}|}$, $\mathbf{P}_{\overline{n}|}$ die jährlich nachschüssig bzw. vorschüssig zu zahlende Rente, die zur Erreichung eines Endguthabens 1 nach Ablauf von n Jahren führt. Offenbar ist $P_{\overline{n}|} = q \cdot \mathbf{P}_{\overline{n}|}$. Beispielsweise sind $EP_{\overline{n}|}$ bzw. $\mathbf{E}\mathbf{P}_{\overline{n}|}$ die Beträge, die man jährlich einem verzinslichen Reservefonds zuführen muß, um nach n Jahren eine Schuld E bzw. \mathbf{E} heimzahlen zu können. Über die Bedeutung für das Abschreibungswesen vgl. § 11. Versicherungsanstalten, die das Geschäft der Kapital-sparversicherung betreiben, berechnen nach (26) die Nettoprämie, die jährlich gezahlt werden muß, wenn nach n Jahren ein Betrag E bzw. \mathbf{E} an den Versicherungsnehmer oder den von ihm bestimmten Empfangsberechtigten zur Auszahlung kommen soll; dabei muß die Prämienzahlung n Jahre hindurch, auch über den etwaigen Tod des Versicherungsnehmers hinaus, verbürgt oder eine Vereinbarung über vorzeitige Rückzahlung der Einlagen getroffen sein. Die Bruttoprämie umfaßt dann noch mit Rücksicht auf die Geschäftskosten des Versicherungsunternehmens einen bestimmten prozentualen Zuschlag zur Nettoprämie.

Beispiel: Jemand wünscht von einer Versicherungsbank, die ihre Kapitalien zu durchschnittlich 4% begibt, nach 18 Jahren den Betrag $\mathbf{E} = 10000 \text{ M}$ ausbezahlt zu erhalten. Welche vorschüssige Prämie hat er zu zahlen, wenn die Bank 6% auf die Nettoprämie aufschlägt?

Lösung: $P_{18} = \frac{1}{s_{18}} = \frac{1}{26,671\,229} = 0,037\,494$. Mithin Nettoprämie $R = 374,94$ M; Bruttoprämie 397,44 M.

Die zur Berechnung der $P_{\overline{n}|}$, $P_{\overline{n}|}$ erforderliche lästige Division vermeidet man durch Heranziehung der weiter unten zu besprechenden Tabellen der $J_{\overline{n}|}$, $J_{\overline{n}|}$.

Man kann die Formeln (26) benutzen, um Renten, die in jährlich postnumerando fälligen Raten R zahlbar sind, umzuwandeln in solche, die in $\frac{1}{m}$ -jährigen Perioden in nachschüssigen oder vorschüssigen Raten $R \frac{1}{m}$ bzw. $R \frac{1}{m}$ zu zahlen sind, z. B. in Quartalsraten. Offenbar ist $R \frac{1}{m} = R \cdot P_{\overline{m}|}$, $R \frac{1}{m} = R \cdot P_{\overline{m}|}$, wobei in $P_{\overline{m}|}$, $P_{\overline{m}|}$ der für die $\frac{1}{m}$ Jahre geltende Zinssatz einzuführen ist. Der nominelle Jahresertrag, d. h. die reine Summe der Ratenbeträge eines Jahres, ist also $m R P_{\overline{m}|}$ bzw. $m R P_{\overline{m}|}$. — Für eine Rente, die in jährlich pränumerando fälligen Raten R zahlbar ist, kann man die entsprechende Umwandlung in Bruchteilraten in der Weise bewirken, daß man R durch Aufzinsen zunächst in eine nachschüssige Jahresrente R verwandelt.

Beispiel: Für ein Anwesen ist jährlich postnumerando eine Pacht $R = 6000$ M zu zahlen. Wie hoch sind die damit gleichwertigen nachschüssigen oder vorschüssigen Quartalspachtbeträge anzusetzen, wenn ein Vierteljahrszinsfuß 1% gerechnet wird?

Lösung: Für $p = 1\%$ ist $P_{\overline{4}|} = \frac{1}{s_{\overline{4}|}} = \frac{1}{1,01^4 - 1} = \frac{1}{100[1,04060401 - 1]}$
 $= \frac{1}{4,060\,401} = 0,246\,281$. Also beträgt die nachschüssige Quartalspacht $R \cdot P_{\overline{4}|}$
 $= 6000 \cdot 0,246\,281 = 1477,69$ M. Mithin ist in diesem Falle die jährliche Nominalpacht 5910,76 M.

Für $p = 1\%$ ist ferner $P_{\overline{4}|} = P_{\overline{4}|} \cdot v = 0,246\,281 \cdot 0,990\,099 = 0,243\,843$. Also beträgt die vorschüssige Quartalspacht: $R P_{\overline{4}|} = 6000 \cdot 0,243\,843 = 1463,06$ M, die jährliche Nominalpacht 5852,24 M.

Die Lösung der Aufgabe, die Jahresrate einer n -jährigen Rente zu bestimmen, die einen vorgeschriebenen Barwert besitzt, erfordert die Umkehrung der Formeln (17a), (17b):

$$R = B \cdot \frac{1}{a_{\overline{n}|}} = B \cdot J_{\overline{n}|}; \quad R = B \cdot \frac{1}{\overline{a}_{\overline{n}|}} = B \cdot \overline{J}_{\overline{n}|}. \quad (27)$$

Hier bedeuten $J_{\overline{n}|}$, $\overline{J}_{\overline{n}|}$ die Jahresaufwendung oder Annuität, d. h. die jährlich nachschüssig oder vorschüssig zu zahlende Rente, durch die in n Jahren eine Schuld samt Zins und Zinseszins getilgt wird, die heute den Betrag 1 hat. Umgekehrt wird z. B. die bei einer Versicherungsbank eingezahlte Mise 1 durch n Jahresabhebungen oder Rentenraten $J_{\overline{n}|}$ bzw. $\overline{J}_{\overline{n}|}$ aufgezehrt. Offenbar ist $J_{\overline{n}|} = q \cdot \overline{J}_{\overline{n}|}$. Der zur Berechnung von $J_{\overline{n}|} = \frac{1}{a_{\overline{n}|}}$ bzw. $\overline{J}_{\overline{n}|} = \frac{1}{\overline{a}_{\overline{n}|}}$ erforderlichen lästigen Divi-

sion wird man entoben durch Benutzung der für diese Größen aufgestellten Tabellen.

Beispiel: Eine Bank bewilligt einem Hauseigentümer auf sein Anwesen eine Hypothek in Höhe von 20000 M, wovon ihm aber nur 95% ausgezahlt werden, zum Zinsfuß $8\frac{1}{2}\%$ postnumerando; fünf Jahre unkündbar. Der Betrag des vom Hauseigentümer zu tragenden „Damnums“ von 5% ist unter Zugrundelegung eines Zinssatzes $i = 0,09$ aufzulösen in eine nachschüssige fünfjährige Rente R , die sich auffassen läßt als Zuschlag zu dem buchmäßig $8\frac{1}{2}\%$ betragenden Zinsfuß.

Lösung: Bei $i = 0,085$ und $K = 20000$ M beträgt die jährliche Zinsleistung $Ki = 1700$ M. Dem Damnum in Höhe von $20000 \cdot 0,05 = 1000$ entspricht die fünfmal zahlbare Rente $R = 1000 \cdot J_{\frac{0,09}{5}} = 1000 \cdot 0,257092 = 257,09$ M. Die Jahresleistung beträgt also $1700 + 257,09 = 1957,09$ M; sie entspricht einer Jahresverzinsung mit $9,785\%$.

Den Zusammenhang zwischen den $J_{\overline{n}|}$, $\mathbf{J}_{\overline{n}|}$ und den $P_{\overline{n}|}$, $\mathbf{P}_{\overline{n}|}$ findet man durch folgende Überlegung. Um in n Jahren die Schuld 1 zu tilgen, kann man entweder an den Gläubiger die Annuitäten $J_{\overline{n}|}$ entrichten, oder man zahlt ihm jährlich nur den Zinsbetrag i und führt andererseits an eine verzinsliche Tilgungsreserve die Annuitäten $P_{\overline{n}|}$ ab, die in n Jahren auf den zur Rückzahlung der Schuld erforderlichen Endwert 1 anwachsen. Da in jedem Fall gleiche Jahresleistungen aufzubringen sind, so ergibt sich die erste der Formeln:

$$J_{\overline{n}|} = i + P_{\overline{n}|}; \quad \mathbf{J}_{\overline{n}|} = i + \mathbf{P}_{\overline{n}|}; \quad (28)$$

Die zweite folgt durch Multiplikation mit v . Übrigens stellen sich beide bei Berücksichtigung von (18a), (18b); (19a), (19b) als Identitäten dar. Der durch (28) festgelegte Zusammenhang zwischen den Größen $J_{\overline{n}|}$, $P_{\overline{n}|}$, $\mathbf{J}_{\overline{n}|}$, $\mathbf{P}_{\overline{n}|}$ in Verbindung mit der Verknüpfungsformel $\mathbf{J}_{\overline{n}|} = v \cdot J_{\overline{n}|}$ ermöglicht es, sich auf die Tabulierung einer dieser vier Größen zu beschränken; die Tafelwerke enthalten in der Regel die $J_{\overline{n}|}$.

Man kann die Formeln (27) benutzen, um Renten, die in jährlich pränumerando fälligen Raten \mathbf{R} zahlbar sind, umzuwandeln in solche, die in $\frac{1}{m}$ -jährigen Perioden in nachschüssigen oder vorschüssigen Raten $R_{\frac{1}{m}}$, $\mathbf{R}_{\frac{1}{m}}$ zu zahlen sind. Offenbar ist $R_{\frac{1}{m}} = \mathbf{R} \cdot J_{\overline{m}|}$, $\mathbf{R}_{\frac{1}{m}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{J}_{\overline{m}|}$, wobei in $J_{\overline{m}|}$, $\mathbf{J}_{\overline{m}|}$ der für die $\frac{1}{m}$ Jahre geltende Zinssatz einzuführen ist. Der nominelle Jahresertrag ist also $m\mathbf{R} \cdot J_{\overline{m}|}$ bzw. $m\mathbf{R} \cdot \mathbf{J}_{\overline{m}|}$.

Beispiel: Jemand hat bei einer Kapitalsparversicherung eine vorschüssige Jahresprämie $\mathbf{R} = 800$ M zu zahlen. Er möchte zur Zahlung von Quartalsprämien übergehen. Wie hoch stellen sich diese bei Postnumerando- bzw. Pränumerando-Zahlung, wenn ein Vierteljahreszinssatz $i = 0,01$ angenommen wird?

1. Berechnung mittels der $J_{\overline{n}|}$.

a) Die nachschüssige Quartalsprämie beträgt: $R_{\frac{1}{4}} = \mathbf{R} \cdot J_{\frac{0,01}{4}} = 800 \cdot 0,256281 = 205,025$; der entsprechende nominelle Jahresaufwand ist also 820,10 M.

b) Die vorschüssige Quartalsprämie beträgt $R \frac{1}{4} = R \frac{1}{4} \cdot v = 205,025 \cdot 0,990099 = 202,995$ M; die entsprechende nominelle Jahresaufwendung ist also 811,98 M.

2. Berechnung mittels der $P_{\overline{n}|}$. Wir verwandeln zunächst R durch Aufzinsen in eine nachschüssige Jahresrente R um: $R = R \cdot 1,01^4 = 800 \cdot 1,04060401 = 832,483208$.

a) Die nachschüssige Quartalsprämie beträgt $R \frac{1}{4} = R \cdot P_{\frac{1}{4}}^{(0,01)} = 832,483208 \cdot 0,246281 = 205,025$ M, wie oben.

b) Hieraus wieder die vorschüssige Quartalsprämie $R \frac{1}{4} = R \frac{1}{4} v = 202,995$ M.

Zu wichtigen Anwendungen der Rentenrechnung führt die Bewertung von Grundstücken (vgl. § 11) oder von Leistungen und Nutzungsrechten von bestimmter Dauer. Beim Erbbaurecht handelt es sich um das gegen einen bestimmten Jahreszins Z für eine begrenzte Zahl n von Jahren gewährte vererbliche und veräußerbare Recht, auf dem Vertragsgrundstück Baulichkeiten zu errichten und zu nutzen. Diese gehen mit Erlöschen des Erbbaurechts, dessen Dauer im allgemeinen 60—80 Jahre umfaßt, in den Besitz des Grundstückseigentümers über. Der jährliche Reinertrag des bebauten Grundstücks nach Abzug aller Lasten einschließlich des Erbbauzinses Z sei R , postnumerando gerechnet. Dauert es noch v Jahre bis zum Erlöschen des Erbbaurechts, so ist sein Wert mit $W_{n-v} = R a_{\overline{v}|}$ anzusetzen. Bei Begründung des Erbbaurechts ist $W_0 = R \cdot a_{\overline{n}|} = R \frac{1-v^n}{i}$, was bei großem n sich nur wenig von dem Wert der ewigen Rente, d. h. $\frac{R}{i}$ unterscheidet. Der Wert des Erbbaurechts sinkt zunächst nur langsam, später in immer schnellerem Tempo. In einem Jahr beträgt die Wertminderung $R(a_{\overline{v}|} - a_{\overline{v-1}|}) = Rv^n$; also im ersten Jahr nur Rv^n , wo v^n ein ziemlich kleiner Bruch; in den letzten Jahren vor Ablauf nähert sie sich dem Betrage R . Die bis zum Termin $n - v$ eingetretene Wertminderung ist

$$R(a_{\overline{n}|} - a_{\overline{v}|}) = R(v^n + v^{n-1} + \dots + v^{v+1}) = Rv^v \cdot a_{\overline{n-v}|}.$$

Der fortschreitenden Entwertung des Erbbaurechts entsprechend kommen für die Beleihung der betreffenden Gebäude nur Tilgungshypothesen in Frage.

Beispiel: Ein auf die Dauer von 75 Jahren abgeschlossenes Erbbaurecht wirft nach Abzug von Steuern usw. einen jährlichen Reinertrag von 12000 M ab; $i = 0,04$. Man berechne: a) seinen heutigen Wert; b) seinen Wert nach 20 Jahren; c) die dann eintretende Wertverminderung in einem Jahr.

Lösung: a) $W_{\overline{75}|} = 12000 [a_{\overline{50}|} + v^{50} a_{\overline{25}|}] = 12000 [21,482185 + 0,140713 \cdot 15,622080] = 284164,90$ M.

b) Wert nach 20 Jahren: $W_{\overline{55}|} = 12000 [a_{\overline{50}|} + v^{50} \cdot a_{\overline{5}|}] = 12000 [21,482185 + 0,140713 \cdot 4,451822] = 265303,35$ M.

c) $W_{\overline{55}|} - W_{\overline{54}|} = 12000 [a_{\overline{55}|} - a_{\overline{54}|}] = 12000 \cdot v^{55} = 12000 \cdot 0,140713 \cdot 0,821927 = 12000 \cdot 0,115656 = 1387,87$ M.

Da die Gebäude nach Ablauf des Vertrages an den Bodeneigentümer fallen, wird sich ein Erbbaurechtnehmer nur dann finden, wenn der Erbbauzins Z niedriger als die Verzinsung Ki des Verkaufswertes G des Grundstücks ist. Der jährliche Verlust, den der Bodeneigentümer erleidet, ist $Gi - Z$, der Barwert des Gesamtverlustes also $(Gi - Z)a_{\overline{n}|}$, wobei mit einem Zinsfuß von 4—5% gerechnet werden kann. Wenn auch die beim Ablauf des Erbbauvertrages dem Bodeneigentümer zufallenden Baulichkeiten eine gewisse Entschädigung für diesen Verlust darstellen, so werden doch zur Erbbaurechtsbewilligung im allgemeinen nur öffentliche Körperschaften bereit sein, denen an einer schnelleren baulichen Erschließung bestimmter Bezirke und an einer Beeinflussung der Boden- und Baupreise gelegen ist.

§ 7. Versicherungsrechnung.

Versicherungen sind Wirtschaftseinrichtungen, die sich auf einmalige oder laufende Zahlungen eines größeren Kreises von versicherten Personen gründen und die dem einzelnen Versicherten für den Fall eines sicher oder möglicherweise eintretenden Ereignisses finanzielle Leistungen zusichern; z. B. Ersatz für Schäden. Allgemein ist Zweck der Versicherung die Vorsorge für künftig zu gewärtigenden finanziellen Bedarf. Man unterscheidet Personen- und Sachversicherungen. Zu der letzteren Gruppe gehören z. B. Feuer-, Einbruchsdiebstahl-, Transport- und Viehversicherungen; zu der ersteren Lebens- und Rentenversicherungen, Kranken-, Unfall- und Invaliditätsversicherungen. Im Deutschen Reich sind durch die gesetzliche Sozialversicherung gewisse Berufsgruppen auf Grund von regelmäßigen Pflichtbeiträgen zwangsversichert (Kranken-, Unfall-, Invaliditäts- und Altersversicherung; Angestellten-, Arbeitslosenversicherung). Die Privatversicherung, von Aktiengesellschaften und Gegenseitigkeitsvereinigungen betrieben, gründet sich in jedem einzelnen Fall auf einen freien Versicherungsvertrag, der mit der Übermittlung des Versicherungsscheins, der Police, an den Versicherungsnehmer in Wirkung tritt. Vom Versicherten ist hiernach zu leisten entweder eine einmalige, als *Mise* bezeichnete Zahlung oder eine regelmäßige Folge von Zahlungen, sog. Prämien. Die Wirtschaftlichkeit der Versicherungseinrichtung verlangt, daß Gleichgewicht herrscht zwischen den Gesamtleistungen der Versicherten und den Gegenleistungen der Versicherungseinrichtung zuzüglich Geschäftskosten, Rücklagen und gegebenenfalls mäßigen Gewinnes.

Da im Einzelfalle die Geschehnisse, die die Leistungspflicht der Versicherungseinrichtung auslösen, unberechenbar sind, so müssen die rechnerischen Grundlagen der Versicherung mit Hilfe der Statistik gewonnen werden. Dabei bleibt stets bis zu einem gewissen Grade unsicher, wieweit die aus der Erfahrung abgeleiteten charakteristischen Durch-

Bei den nachstehend besprochenen Versicherungsarten wird stets nur der Nettobetrag der Mise oder Prämie bestimmt, also von den durch Verwaltungskosten usw. bedingten Zuschlägen abgesehen. Für die Berechnung maßgebend ist das oben erörterte Prinzip der Gleichheit von Leistung und Gegenleistung in dem Verhältnis zwischen der Versicherungsgesellschaft und den Versicherten, und zwar formuliert für die ganze Gruppe von gleichartigen Versicherungsnehmern, die in einem bestimmten Lebensalter x einen und denselben Versicherungsvertrag abschließen wollen. Da Leistungen und Gegenleistungen zu verschiedenen Zeitpunkten erfolgen, so müssen alle in Frage kommenden Beträge unter Berücksichtigung von zusammengesetztem Zins auf denselben Zeitpunkt diskontiert werden; man wählt hierfür den Geburtstermin der Versicherungsnehmer. Praktisch werden im allgemeinen beim Abschluß des Versicherungsvertrages diejenigen als x -jährig gerechnet, deren Lebensalter zwischen $x - \frac{1}{2}$ und $x + \frac{1}{2}$ Jahren liegt.

1. Kapitalversicherung auf den Erlebensfall.

a) Einkauf durch einmalige Zahlung. Ein x -jähriger will durch Zahlung einer Mise A_0 erreichen, daß ihm nach n Jahren der Betrag A_n ausbezahlt wird, falls er diesen Zeitpunkt erlebt. Stirbt er früher, so ist die Versicherungsgesellschaft jeder Leistungspflicht enthoben.

Wenn die Gesamtheit der x -jährigen die geschilderte Kapitalversicherung abschließt, so fließt der Versicherungsgesellschaft die Summe $l_x \cdot A_0$ zu. An die l_{x+n} Versicherungsnehmer, die das $(x+n)$ -te Lebensjahr erreichen, muß insgesamt die Summe $l_{x+n} \cdot A_n$ ausbezahlt werden. Durch Gleichsetzen der auf den Geburtstermin aller diskontierten Beträge ergibt sich

$$\frac{l_x}{q^x} \cdot A_0 = \frac{l_{x+n}}{q^{x+n}} \cdot A_n \quad \text{oder} \quad D_x A_0 = D_{x+n} \cdot A_n;$$

daher

$$A_0 = \frac{D_{x+n}}{D_x} \cdot A_n. \tag{30}$$

Beispiel: $x = 25$; $n = 20$; $A_0 = 3000$ M. Auf welches Kapital A_n kann die Versicherung abgeschlossen werden?

$$A_n = \frac{D_{25}}{D_{45}} A_0 = \frac{368997}{150517} \cdot 3000 = 2,451\,521 \cdot 3000 = 7354,56 \text{ M.}$$

b) Kapitalversicherung durch Prämienzahlung. Ein x -jähriger will durch sofort beginnende vorschüssige jährliche Prämienzahlung P erreichen, daß ihm nach n Jahren das Kapital A_n ausbezahlt wird. Die Prämienzahlungen erfolgen bis zum Tode, aber höchstens m mal, wo $m \leq n$; die Kapitalauszahlung durch die Versicherungsgesellschaft unterbleibt, wenn der Versicherte das $(x+n)$ -te Lebensjahr nicht erreicht. Wie hoch ist P einzusetzen?

Von der Gesamtheit der x -jährigen, die die geschilderte Kapitalversicherung abschließen, fließt der Versicherungsgesellschaft im ersten Jahr die Summe $l_x P$ zu, in den folgenden Jahren die Beträge $l_{x+1} P, l_{x+2} P, \dots, l_{x+m-1} P$. Die auf den Geburtstermin diskontierten Beträge sind $\frac{l_x}{q^x} P, \frac{l_{x+1}}{q^{x+1}} P, \dots, \frac{l_{x+m-1}}{q^{x+m-1}} P$; Gegenleistung der Gesellschaft wie oben; also:

$$(D_x + D_{x+1} + \dots + D_{x+m-1}) P = (N_x - N_{x+m}) P = D_{x+n} \cdot A_n.$$

Mithin

$$P = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+m}} \cdot A_n. \quad (31)$$

Beispiel: $x = 25$; $m = 18$; $n = 23$; $A_n = 8000$ M. Welche Prämie P ist 18 Jahre hindurch zu zahlen?

$$P = \frac{D_{48}}{N_{25} - N_{43}} = \frac{129\,261}{4\,714\,450} \cdot 8000 = 219,34 \text{ M.}$$

2. Rentenversicherung.

a) **Einkauf durch einmalige Zahlung.** Ein x -jähriger will durch Zahlung einer Mise A_0 erreichen, daß ihm vom Termin $x + n$ ab eine Leibrente, d. h. eine bis zu seinem Tode währende Rente zufließt, deren Jahresrate R beträgt. Stirbt er früher, so ist die Versicherungsgesellschaft jeder Leistungspflicht enthoben.

Von der Gesamtheit der x -jährigen fließt der Gesellschaft sofort die Summe $l_x \cdot A_0$ zu. Sie hat auszuführen: zum Termin $x + n$ an die noch lebenden l_{x+n} Versicherungsnehmer den Gesamtbetrag $l_{x+n} \cdot R$; in den folgenden Jahren die Gesamtbeträge $l_{x+n+1} \cdot R, l_{x+n+2} \cdot R, \dots, l_{100} \cdot R$. Durch Gleichsetzen der auf den Geburtstermin diskontierten Beträge ergibt sich

$$D_x A_0 = (D_{x+n} + D_{x+n+1} + \dots + D_{100}) R = N_{x+n} \cdot R;$$

also:

$$A_0 = \frac{N_{x+n}}{D_x} \cdot R. \quad (32)$$

Beispiel: $x = 30$; $n = 30$; $R = 1200$ M. — Die einzuzahlende Mise beträgt:
 $A_0 = \frac{N_{60}}{D_{30}} R = \frac{625\,531,4}{298\,123} \cdot 1200 = 2517,88 \text{ M.}$

b) **Rentenversicherung durch Prämienzahlung.** Ein x -jähriger will durch sofort beginnende vorschüssige jährliche Prämienzahlungen P erreichen, daß ihm vom Termin $x + n$ ab eine Leibrente in Jahresraten R zufließt. Die Prämienzahlungen erfolgen bis zum Tode, aber höchstens m mal, wobei $m \leq n$. Eine Leistungspflicht der Versicherungsgesellschaft unterbleibt, wenn der Versicherte das $(x + n)$ -te Lebensjahr nicht erreicht.

Der auf den Geburtstermin diskontierte Wert der Leistungen aller mit x Jahren sich Versichernden ist, wie in 1b),

$$(N_x - N_{x+m}) P,$$

der diskontierte Wert der von der Gesellschaft gezahlten Rente, wie in 2a), $N_{x+n} \cdot R$. Gleichsetzung der beiden Werte ergibt:

$$P = \frac{N_{x+n}}{N_x - N_{x+m}} \cdot R. \quad (33)$$

Beispiel: $x = 25$; $m = 25$; $n = 35$; $R = 1200$ M.

$$P = \frac{N_{60}}{N_{25} - N_{50}} \cdot 1200 = \frac{625\,531,4}{5\,720\,218} \cdot 1200 = 131,23 \text{ M.}$$

Für den Fall einer temporären, nur k Jahre hindurch zahlbaren Rente wird offenbar:

$$A_o = \frac{N_{x+n} - N_{x+n+k}}{D_x} R; \quad P = \frac{N_{x+n} - N_{x+n+k}}{N_x - N_{x+m}} R. \quad (32'), (33')$$

3. Einfache Todesfallversicherung.

a) Einkauf durch einmalige Zahlung. Ein x -jähriger will durch Zahlung einer Mise A_o erreichen, daß bei seinem Tode seinen Angehörigen die Summe A ausbezahlt wird.

Von der Gruppe der l_x fließt der Versicherungsgesellschaft der Betrag $l_x A_o$ zu; diskontiert auf den Geburtstermin: $D_x \cdot A_o$. Da im ersten Jahr $d_x = l_x - l_{x+1}$ der Versicherten sterben, ist von der Gesellschaft am Schlusse dieses Jahres der Betrag $d_x \cdot A$ auszuführen; diskontiert auf den Geburtstermin: $\frac{d_x}{q^{x+1}} \cdot A$. Die durch die Todesfälle der nächsten Jahre bedingten Auszahlungen sind, diskontiert auf den Geburtstermin: $\frac{d_{x+1}}{q^{x+2}} A, \frac{d_{x+2}}{q^{x+3}} A, \dots$ Nach dem Prinzip der Gleichheit von Leistung und Gegenleistung ergibt sich

$$D_x A_o = (C_x + C_{x+1} + \dots + C_{100}) A = M_x A.$$

Die für die Todesfallversicherung einzuzahlende Mise ist also:

$$A_o = \frac{M_x}{D_x} \cdot A. \quad (34)$$

Beispiel: Jemand ist am 29. Februar 1900 geboren. Durch eine am 1. April 1932 in Kraft tretende Todesfallversicherung versichert er sich in Höhe von 10000 M. Welche Mise hat er zu zahlen?

$$A_o = \frac{M_{32}}{D_{32}} \cdot 10000 = \frac{82\,370,83}{273\,552} \cdot 10000 = 0,301\,115\,8 \cdot 10000 = 3011,16 \text{ M.}$$

Gelegentlich werden Todesfallversicherungen nur auf ein Jahr bzw. auf k Jahre abgeschlossen. Die Mise beträgt dann offenbar

$$A_o = \frac{C_x}{D_x} A \quad \text{bzw.} \quad A_o = \frac{M_x - M_{x+k}}{D_x} A. \quad (34')$$

b) Einfache Todesfallversicherung durch Prämienzahlungen. Ein x -jähriger will durch sofort beginnende vorschüssige jährliche Prä-

mienzahlungen P erreichen, daß bei seinem Tode seinen Angehörigen die Summe A ausbezahlt wird. Die Prämienzahlungen erfolgen bis zum Tode, aber höchstens m mal.

Die auf den Geburtstermin diskontierten Werte der Prämienzahlungen aller mit x Jahren sich Versichernden ist, wie in 1b),

$$(N_x - N_{x+m})P;$$

der diskontierte Wert der von der Versicherungsgesellschaft ausgezahlten Versicherungssummen ist, wie in 3a), $M_x \cdot A$. Also ergibt sich:

$$P = \frac{M_x}{N_x - N_{x+m}} \cdot A. \quad (35)$$

Beispiel: $x = 25$; $m = 25$; $A = 8000$ M.

$$P = \frac{M_{25}}{N_{25} - N_{50}} \cdot 8000 = \frac{90\,082,27}{5\,720\,218} \cdot 8000 = 0,015\,748 \cdot 8000 = 125,98 \text{ M.}$$

4. Die gemischte Versicherung: Todesfall- und Erlebensversicherung.

Es handelt sich um die heute am meisten beliebte Form der Versicherung: Die Versicherungssumme $A_{(n)}$ wird im Todesfalle, spätestens jedoch nach n Jahren ausbezahlt.

a) Einkauf durch einmalige Zahlung. Von der Gruppe der l_x fließt der Versicherungsgesellschaft die Summe $l_x A_0$ zu; diskontiert auf den Geburtstermin: $D_x A_0$. Die durch die Todesfälle im 1., 2., ..., n . Jahr bedingten Auszahlungen ergeben, auf den Geburtstermin diskontiert, die Summe $(C_x + C_{x+1} + \dots + C_{x+n-1}) A_{(n)} = (M_x - M_{x+n}) A_{(n)}$. An die Versicherten, die das $(x+n)$ -te Jahr erleben, wird insgesamt die Summe $l_{x+n} \cdot A_{(n)}$ ausbezahlt, ihr diskontierter Wert ist $D_{x+n} \cdot A_{(n)}$. Mithin

$$D_x A_0 = (M_x - M_{x+n} + D_{x+n}) A_{(n)},$$

also

$$A_0 = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} A_{(n)}. \quad (36)$$

Beispiel: $x = 32$; $n = 20$; $A_{(n)} = 8000$ M.

$$A_0 = \frac{M_{32} - M_{52} + D_{52}}{D_{32}} 8000 = \frac{132\,576,66}{273\,552} 8000 = 3877,19 \text{ M.}$$

b) Gemischte Versicherung auf Grund von Prämienzahlungen. Wenn m Jahre hindurch, höchstens jedoch bis zum Tode Jahresprämien P gezahlt werden, so sind die von der Gruppe der l_x eingehenden Beträge, auf den Geburtstermin diskontiert, insgesamt

$$(D_x + D_{x+1} + \dots + D_{x+m-1})P = (N_x - N_{x+m})P.$$

Da die Gegenleistung der Versicherungsgesellschaft die gleiche wie im Falle 4a), so ergibt sich

$$(N_x - N_{x+m})P = (M_x - M_{x+n} + D_{x+n})A_{(n)}.$$

Hieraus

$$P = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+m}} \cdot A_{(n)}. \quad (37)$$

Beispiel: $x = 30$; $m = 20$; $n = 25$; $A_{(n)} = 8000$ M.

$$P = \frac{M_{30} - M_{55} + D_{55}}{N_{30} - N_{50}} \cdot 8000 = \frac{123\,357,7}{4022\,843} \cdot 8000 = 245,31 \text{ M.}$$

Während bei der Lebensversicherung eine den Durchschnitt über-treffende Langlebigkeit der Versicherten für das Vermögen der Ver-sicherungsgesellschaft sich günstig auswirkt, ist bei der Rentenversiche-rung offenbar das Gegenteil der Fall. Um für Verpflichtungen gerüstet zu sein, die sich aus ungünstigen Abweichungen der Sterbeordnung der Ver-sicherten von derjenigen des Bevölkerungsdurchschnitts ergeben können, wird die Versicherungsgesellschaft für die Prämienberechnung bei der Lebensversicherung durchweg ein etwas früheres, bei der Rentenversiche-rung ein etwas späteres Ableben der Versicherten zugrunde legen, als dem Bevölkerungsdurchschnitt entsprechen würde. Wie die von den Ver-sicherungsgesellschaften geführte Statistik ergeben hat, kommen durch die Selbstauslese der Versicherungslustigen tatsächlich systematische Abweichungen genau in dem eben gekennzeichneten Sinne zustande: Personen, die eine Lebensversicherung abschlossen, waren im Mittel kurzlebiger, solche, die eine Rentenversicherung abschlossen, im Mittel langlebiger als der Bevölkerungsdurchschnitt. In der Versicherungs-praxis werden daher für die beiden Versicherungsarten verschiedene Absterbeordnungen zugrunde gelegt, die aus der eigenen, fortlaufend er-gänzten Statistik von zahlreichen Versicherungsgesellschaften abgeleitet sind; ein Verfahren, das sich bisher durchaus bewährt hat. — Die von den Versicherten erhobene Bruttoprämie enthält neben der bisher ins Auge gefaßten Nettoprämie einen Zuschlag, der etwa bis zu 20% derselben beträgt. Dadurch wird in normalen Jahren neben der Bestreitung der Geschäftskosten und gegebenenfalls der Ausschüttung einer Dividende die Ansammlung von Rücklagen ermöglicht. Aus diesen müssen die Anforderungen gedeckt werden, die in einzelnen Jahren aus einer be-sonders ungünstigen Gestaltung des Absterbeverlaufs erwachsen.

Bei der Begründung der Formeln der Versicherungsrechnung wird durchweg mit zusammengesetztem Zins gerechnet, d. h. es wird voraus-gesetzt, daß die Versicherungseinrichtung in der Lage ist, die laufenden Einlagen einschließlich Zinseinnahmen zinstragend anzulegen; im all-gemeinen in Hypotheken, soweit nicht für die Versicherungsleistungen flüssige Mittel notwendig sind. Von großer Bedeutung ist es, jederzeit beurteilen zu können, ob die Vermögensentwicklung mit den Rechen-voraussetzungen in Einklang bleibt. Aus der Jahresbilanz der Ver-sicherungsgesellschaft muß ersichtlich sein, daß für jeden einzelnen Versicherten das „Guthaben“ sichergestellt ist, das ihm auf Grund der bisherigen im Versicherungsverhältnis erfolgten Leistungen und Gegen-leistungen angerechnet werden muß. Man bezeichnet dies „Guthaben“ als die Prämienreserve oder den Deckungsfonds. Seine Er-

mittlung spielt auch in den Fällen eine Rolle, wo der Versicherte vom Versicherungsvertrag zurücktreten oder zu einer anderen Versicherungsform übergehen will.

Wie groß ist beispielsweise der Deckungsfonds bei einer einfachen Todesfallversicherung k Jahre nach Abschluß derselben? Hat der x -jährige sich durch eine Mise $A_o = \frac{M_x}{D_x} A$ eingekauft, so muß sein Guthaben nach k Jahren dasselbe sein, wie das des $(x+k)$ -jährigen, der eine auf denselben Betrag A lautende Todesfallversicherung durch Zahlung einer Mise $\frac{M_{x+k}}{D_{x+k}} A$ abschließt; sein Deckungsfonds beträgt also $\frac{M_{x+k}}{D_{x+k}} A$. Hat ein x -jähriger Versicherungsnehmer X eine einfache Todesfallversicherung auf die Summe A mit der Verpflichtung abgeschlossen, m Jahre hindurch, jedoch höchstens bis zum Tode die Jahresprämie $P = \frac{M_x}{N_x - N_{x+m}} A$ zu zahlen, so ist für $k < m$ der Vergleich mit dem $(x+k)$ -jährigen Versicherungsnehmer Y heranzuziehen, der eine entsprechende, $m - k$ Prämienzahlungen vorsehende Versicherung abschließt. Dieser würde offenbar die höhere Prämie $P' = \frac{M_{x+k}}{N_{x+k} - N_{x+m}} A$ zu zahlen haben, wenn er es auf die gleiche Versicherungssumme abzieht, mit der Prämie P demnach nur auf den Betrag $\frac{P}{P'} A$ sich versichern können. Der Versicherte X hat also zu diesem Zeitpunkt vor seinem Altersgenossen Y ein Guthaben voraus, das als Mise zum Einkauf auf eine

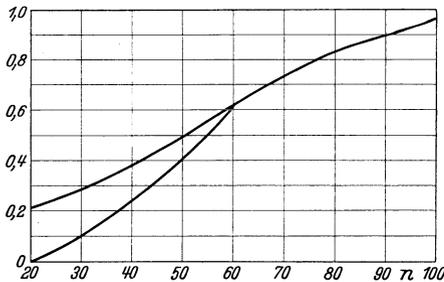


Abb. 9. Deckungsfonds einer einfachen Todesfallversicherung bei temporärer Prämienzahlung.

Todesfallversicherung in Höhe von $A - \frac{P}{P'} A = \frac{P' - P}{P'} A$ ausreichen würde. Der hierfür bei einem $(x+k)$ -jährigen erforderliche Betrag ist $\frac{M_{x+k}}{D_{x+k}} \cdot \frac{P' - P}{P'} A$. Diese Summe stellt demnach den gesuchten Deckungsfonds des Versicherten dar. — Ist $k \geq m$, ruhen also bereits die Prämienzahlungen, so errechnet sich der Deckungsfonds einfach als die

Mise, durch die man sich auf eine Todesfallversicherung in Höhe von A Mark einkauft; er beträgt also $\frac{M_{x+k}}{D_{x+k}} \cdot A$.

Beispiel: $x = 35$, $m = 20$, $k = 10$. $A = 8000$ M.

$$P = \frac{M_{35}}{N_{35} - N_{55}} 8000 = \frac{79040,97}{3173897,9} \cdot 8000 = 199,26 \text{ M.}$$

$$P' = \frac{M_{45}}{N_{45} - N_{55}} 8000 = \frac{65390,00}{1202766} \cdot 8000 = 434,93 \text{ M.}$$

Prämienreserve nach zehnjähriger Versicherungsdauer:

$$\frac{M_{45}}{D_{45}} \cdot \frac{P' - P}{P'} \cdot 8000 = \frac{65390}{150517} \cdot \frac{235,67}{434,93} \cdot 8000 = 1883,22 \text{ M.}$$

In Abb. 9 setzt sich die graphische Darstellung des Deckungsfonds für die von einem 20jährigen auf die Summe 1 abgeschlossene, $k = 40$ Prämienzahlungen vorsehende Todesfallversicherung zusammen aus dem unteren Kurvenast, der für $n = 20$ im Nullpunkt beginnt und bei $n = 60$ endigt, und dem rechten Teil der ohne Knick durchlaufenden Kurve; letztere stellt den Deckungsfonds der einfachen Todesfallversicherung bei Einkauf durch einmalige Zahlung dar.

III. Tilgungs- und Abschreibungswesen.

§ 8. Schuldtilgung.

Für die Tilgung oder Amortisation einer Schuld K einschließlich Zinsendienst soll n Jahre hindurch jährlich postnumerando die gleiche Summe R , die Annuität, aufgewendet werden. Die Eulersche Tilgungsformel bringt zum Ausdruck, daß der Barwert aller Annuitäten R mit K übereinstimmen muß; also mit den in der Rentenrechnung, § 6, eingeführten Bezeichnungen:

$$K = R a_{\overline{n}|}; \quad (1)$$

$$R = K \cdot J_{\overline{n}|} = K(i + P_{\overline{n}|}). \quad (2)$$

Es soll sich nun um die Aufstellung eines genauen Tilgungsplanes handeln, der für den Abschluß jedes Jahres k erkennen läßt, wie groß der nach Zahlung der Annuität R noch bestehende Schuldrest V_k ist und wie sich die Annuität R in Zinsendienst $V_{k-1} \cdot i$ und Rückzahlungsquote Q_k gliedert:

$$R = V_{k-1} \cdot i + Q_k, \text{ wobei } V_0 = K. \quad (3)$$

Die Aufstellung solcher Tilgungspläne entspricht mancherlei praktischen Bedürfnissen. Bei Tilgungsanleihen, die von Gemeinwesen oder Gesellschaften aufgenommen werden, bestimmt der Tilgungsplan den Umfang der zur Rückzahlung aufzurufenden Teilschuldverschreibungen. (Vgl. § 9.) Bei Tilgungshypotheken enthält der Schuldvertrag häufig die Bestimmung, daß der Gläubiger bei Zahlungsverzug des Schuldners sofortige Rückzahlung des gesamten Schuldrestes oder Übergang zu einem höheren Zinsfuß verlangen kann. Nachweis des Schuldrestes und Gliederung der Annuität in Rückzahlung und Zinsendienst ist z. B. auch erforderlich, wenn besondere Gebühren, Abzüge oder Zuschläge in Prozenten des Schuldrestes oder der Zinsen bemessen werden (Verwaltungskostenbeiträge, Steuern).

Ein elementarer Weg zur Aufstellung des Tilgungsplans besteht darin, daß man, mit dem ersten Jahre beginnend, der Reihe nach die Rückzahlungsquoten Q_1, Q_2, \dots nach der aus (3) folgenden Beziehung

$Q_k = R - V_{k-1} \cdot i$ und die Schuldreste V_1, V_2, \dots aus der Beziehung

$$V_k = V_{k-1} - Q_k \quad (4)$$

ausrechnet. Das ist nachstehend erläutert durch einen Tilgungsplan für eine Schuld von $K = 100\,000$ M, die mit 4% verzinslich durch Annuitäten $R = 10\,000$ M amortisiert wird.

Tilgungsplan für eine Schuld von 100 000 M; Zinsfuß 4%;
Annuität 10 000 M.

Jahr k	Schuldrest: V_{k-1}	Jahreszins: $V_{k-1} \cdot i$	Tilgungsquote: Q_k	Schuldrest: V_k
1	100 000	4000	6000	94 000
2	94 000	3760	6240	87 760
3	87 760	3510,40	6489,60	81 270,40
4	81 270,40	3250,82	6749,18	74 521,22
5	74 521,22	2980,85	7019,15	67 502,07
6	67 502,07	2700,08	7299,92	60 202,15
7	60 202,15	2408,08	7591,92	52 610,23
8	52 610,23	2104,41	7895,59	44 714,64
9	44 714,64	1788,58	8211,42	36 503,22
10	36 503,22	1460,13	8539,87	27 963,35
11	27 963,35	1118,53	8881,47	19 081,88
12	19 081,88	763,27	9236,73	9 845,15
13	9 845,15	393,80	9606,20	238,95
14	238,95	9,55	248,50	—

Der nach 13 Jahren verbleibende Schuldrest von $V_{13} = 238,95$ M wird entweder zugleich mit der 13. Annuität zurückgezahlt oder unter Zuschlag einjähriger Zinsen in Höhe von 9,55 M nach Ablauf des 14. Jahres getilgt. — Der Nachteil des elementaren Verfahrens zur Aufstellung eines Tilgungsplans ist, daß Rechenfehler sich durch den ganzen Plan hindurch fortpflanzen. Zweckmäßiger ist es, sich auf die aus (3) und (4) folgenden Zusammenhänge zu stützen.

Da $R = V_{k-1} \cdot i + Q_k = V_k i + Q_{k+1}$, so ist

$$Q_{k+1} = (V_{k-1} - V_k) i + Q_k = Q_k (1 + i) = Q_k \cdot q.$$

Die Q_k bilden also, abgesehen von der noch zu erörternden irregulären Schlußquote für den Fall nicht ganzzahliger $n = N + t$, eine geometrische Reihe:

$$Q_1, Q_1 q, Q_1 q^2, \dots, Q_1 q^{k-1}, \dots, Q_1 q^{N-1}.$$

Hier ist wie früher unter N die größte in n enthaltene ganze Zahl verstanden. Bestimmt man nach (3) bzw. (2) zunächst

$$Q_1 = R - Ki = K \cdot P_{\overline{n}|}, \quad (5)$$

so gibt die Formel

$$Q_k = Q_1 \cdot q^{k-1} \quad (6)$$

die Möglichkeit, die Tilgungsquoten unabhängig von einander durch eine einfache Multiplikation von Q_1 mit den der Tabelle der Aufzinsungs-

faktoren zu entnehmenden q^{k-1} zu berechnen. Damit ist eine Kolonne des Tilgungsplans gewonnen. Der gesamte nach Zahlung der k -ten Annuität getilgte Schuldbetrag, der sog. Tilgungsfonds, ist

$$T_k = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_k = Q_1(1 + q + q^2 + \dots + q^{k-1}) = Q_1 \cdot \frac{q^k - 1}{q - 1},$$

so daß wir erhalten

$$T_k = Q_1 \cdot s_{\overline{k}|}^1. \quad (7)$$

Demnach wird der Schuldrest

$$V_k = K - Q_1 \cdot s_{\overline{k}|}. \quad (8)$$

Die Formel (8) gibt die Möglichkeit, die Schuldreste unabhängig voneinander mit Hilfe der Tabellen der $s_{\overline{k}|}$ zu berechnen. Zur Kontrolle des damit ergänzten Tilgungsplans dient (4). Die Zinsen $V_{k-1} \cdot i$ können nun leicht unmittelbar berechnet und in den Tilgungsplan eingetragen werden. Zur Kontrolle jeder Zeile desselben dient die Formel (3).

Der nach diesem Schema sich ergebende Schuldrest V_N , der kleiner als R ausfällt, wird in der Praxis entweder sofort der N -ten Annuität zugeschlagen oder, zu $R' = qV_N$ aufgezinst, am Schluß des $(N + 1)$ -ten Jahres als irreguläre Schlußquote getilgt. Wie in § 6, Rentenrechnung, gezeigt wurde, liefert der Wert $n = N + t$, der mittels $a_{\overline{n}|} = \frac{K}{R}$ aus der Tabelle der $a_{\overline{n}|}$ durch Interpolation gefunden wird, für die am Schluß des $(N + 1)$ -ten Jahres zu zahlende irreguläre Schlußquote den Betrag $R' = tR$; man erhält also damit die Kontrolle

$$qV_N = tR \quad \text{oder} \quad V_N = vtR. \quad (9)$$

Wird dagegen $n = N + t$ mittels $q^n = \frac{1}{1 - ia_{\overline{n}|}} = \frac{1}{1 - i\frac{K}{R}}$ aus der Ta-

belle der q^n oder mittels $s_{\overline{n}|} = \frac{1}{P_{\overline{n}|}} = \frac{K}{Q_1} = \frac{K}{R - Ki}$ aus der Tabelle der $s_{\overline{n}|}$ durch Interpolation gefunden, so würde es sich um eine zur Zeit $N + t$ zu zahlende irreguläre Schlußquote R' handeln, die näherungsweise $R' \approx tR$ betrüge; man erhält also damit die Kontrolle

$$V_N(1 + it) \approx tR \quad \text{oder} \quad V_N \approx \frac{tR}{1 + it}. \quad (10)$$

Für unser S. 64 behandeltes Beispiel ergibt die Interpolation aus $a_{\overline{13}|} = 9,985648$; $a_{\overline{14}|} = 10$; $a_{\overline{14}|} = 10,563123$: $n = 13,024854$ Jahre; also $R' = tR = 0,024854 \cdot 10000 = 248,54$ M als Schlußrate nach 14 Jahren;

¹⁾ Um die Schuld K in n Jahren zu amortisieren, könnte man auch gemäß (2) an den Gläubiger jährlich nur die Zinsen Ki , dagegen den Betrag $Q_1 = K \cdot P_n$ an eine verzinsliche Rücklage abführen. Diese würde in n Jahren auf den Betrag $K \cdot P_{\overline{n}|} \cdot s_{\overline{n}|} = K$ anwachsen, so daß damit die Schuld auf einmal getilgt werden kann. In k Jahren würde die Rücklage den Bestand $Q_1 \cdot s_{\overline{k}|}$ aufweisen, also eine sofortige Tilgung in dieser Höhe ermöglichen. Das ist aber genau der in (7) für den „Tilgungsfonds“ festgestellte Betrag.

$V_{13} = vtR = 238,97$ M. — Die Interpolation aus $q^{13} = 1,665074$; $q^n = 1,666667$; $q^{14} = 1,731676$ liefert $t = 0,023920 = 9$ Tage; die Schlußrate nach 13 Jahren 9 Tagen wäre $tR = 239,20$ M; $V_{13} = \frac{239,20}{1 + 0,04 \cdot 0,023920} = 238,97$ M. Dasselbe ergibt sich bei der Interpolation der $s_{\overline{n}|}$.

Man möchte geneigt sein, die irreguläre Schlußzahlung dadurch zu vermeiden, daß man von vornherein nicht die Annuität R , sondern die Tilgungsdauer als ganze Zahl festsetzt. Man nimmt damit aber auch bei runden Werten von K nach (2) sich ergebende unrunde Annuitätenwerte R in Kauf, und die Aufstellung des Tilgungsplans erfordert umständliche Multiplikationen. In der Praxis wählt man im allgemeinen für die als Tilgungsfuß bezeichnete Größe $100 P_{\overline{n}|}$ einfache Prozentzahlen, analog den Zinsfußzahlen. Damit erzielt man nach (2) und (5) runde Werte für R und Q_1 , so daß die Q_k bzw. T_k nach (6) bzw. (7) leicht mit Hilfe der Tabellen berechnet werden können¹⁾.

War ursprünglich eine bestimmte, durch eine ganze Zahl n ausgedrückte Tilgungsdauer in Aussicht genommen, die dann im allgemeinen mit einem unrunder Tilgungsfuß $100 P_{\overline{n}|}$ verknüpft sein würde, so wird man praktisch in der Weise verfahren, daß man zu dem nächstbenachbarten runden Tilgungsfuß übergeht; damit nimmt man natürlich eine unrunde Tilgungsdauer in Kauf. Beispielsweise beträgt bei einer mit 5% verzinlichen, in 10 Jahren zu amortisierenden Schuld der aus $J_{\overline{10}|} = i + P_{\overline{10}|}$ zu entnehmende Tilgungsfuß 7,9505%. Wählt man statt dessen den runden Tilgungsfuß $100 P_{\overline{n}|} = 8\%$, so beträgt die Tilgungsdauer $n = 9,95$ Jahre.

Um die Tilgungsdauer aus dem Tilgungsfuß zu ermitteln, können wir, statt nach den schon erwähnten Interpolationsmethoden zu verfahren, auch der logarithmischen Berechnung uns bedienen: Aus $\frac{1-v^n}{i} = a_{\overline{n}|} = \frac{1}{J_{\overline{n}|}} = \frac{1}{i + P_{\overline{n}|}}$ folgt $v^n = 1 - \frac{i}{i + P_{\overline{n}|}} = \frac{P_{\overline{n}|}}{i + P_{\overline{n}|}}$; mithin

$$n = \frac{\log(i + P_{\overline{n}|}) - \log P_{\overline{n}|}}{\log q}. \quad (11)$$

Die Tabellen von Lorey-Beyrodt enthalten das nach dieser Formel berechnete n für Zinsfüße 2, 3, $3\frac{1}{2}$, ..., $7\frac{1}{2}$, 8% und Tilgungsfüße

¹⁾ In dem Werk von H. Muray, Zinseszinsen-, Einlage-, Renten- und Amortisationstabellen, 2. Aufl., Budapest 1910, sind Tilgungspläne durchgerechnet für Zinsfüße $1\frac{1}{2}$, $1\frac{3}{8}$, ..., $2\frac{1}{2}\%$ und Tilgungsfüße $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$, ..., $1\frac{1}{2}\%$. — Vgl. ferner C. Hänig, Amortisationstabellen. Leipzig: Veit & Co. 1905. H. Köhler, Praktischer Wegweiser bei Anfertigung von Schuldentilgungsplänen. Eilenburg: C. W. Offenbauer. H. Lübben, Annuitätentabellen für Kapitalien von 1 M bis 1000000 M für 70 Jahre und für die Zinssätze von 3,5, 3,6 bis 4,5. Oldenburg: G. Stalling. E. Pereire, Tables de l'intérêt composé, des annuités et de l'amortissement, 4. A., Paris 1896. E. Wulfetang, Tilgungstabellen (Annuitätentilgungspläne). Osnabrück: J. G. Kießling 1907.

$\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4}, 2, 3, \dots, 7, 8\%$. Findet sich hiernach für die Tilgungsdauer eine unrunde Zahl $n = N + t$, so ist nach N gleichen Annuitäten R eine irreguläre Restzahlung $R' = R \cdot s_{\overline{n}|} = R \cdot \frac{q^n - 1}{i} \approx Rt$ vorzusehen, zahlbar zum Termin $N + t$. Hiernach ist der Schuldrest $v_{\overline{n}|} = \frac{st \cdot R}{q^t}$, mit dessen Abtragung wie oben besprochen verfahren wird.

In dem S. 64 behandelten Beispiel wird $n = \frac{\log 0,1 - \log 0,06}{\log 1,04} = 13,024\ 410$ Jahre = 13 Jahre 9 Tage; die dann fällige irreguläre Schlußrate $R' = s_{\overline{n}|} \cdot R = \frac{q^{0,024410} - 1}{0,04} \cdot 10000 = 239,35$ M. Also $V_{13} = \frac{239,35}{1,04^{0,024410}} = 239,11$ M. (Näherungswert $R' = tR = 244,10$ M.)

Eine graphische Darstellung der Formeln (6) und (3) zeigt, wie in den ersten Jahren der Zinsendienst $V_{k-1}i = R - Q_k$ den größten Teil der konstanten Annuität R beansprucht, während in den letzten Jahren der auf die Tilgung $Q_k = Q_1 q^{k-1}$ entfallende Anteil von R immer schneller wächst. Da $R = K J_{\overline{n}|}$ und $Q_1 = K P_{\overline{n}|}$, so erhalten wir für einen zweiten Tilgungsplan, der höherem Zinssatz i und gleicher Tilgungsdauer n entspricht, eine größere Annuität R , aber ein kleineres Q_1 . Die Kurve für $Q_k = Q_1 \cdot q^{k-1}$ beginnt also unterhalb derjenigen des ersten Tilgungsplans. Dagegen haben die für $k = n$ erhaltenen Endpunkte die entgegengesetzte Lage zueinander. In der Tat müssen die Differenzen zwischen den Tilgungsquoten der beiden Pläne einmal das Vorzeichen wechseln, weil die Gesamtsumme der Q_k in jedem Falle den Wert K ergeben muß. Die beiden Kurven schneiden sich also. Wählen wir für die beiden Tilgungspläne $i = 0,04$ und $i = 0,05$; $n = 50$, so ergibt sich der Schnittpunkt für $k = 33,14$. Bei der Darstellung auf einfach-logarithmischem Papier (Abb. 10) werden die Kurven zu Geraden gestreckt, so daß die Bestimmung des Schnittpunkts genauer ausfällt.

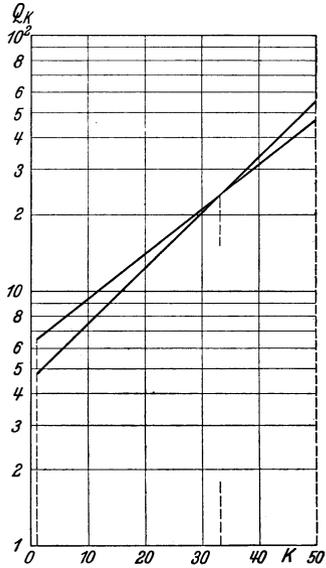


Abb. 10.

Als graphische Darstellung der Formel (8) für die Schuldreste $V_k = K - Q_1 \cdot s_{\overline{k}|}$ ergibt sich in jedem Falle eine im Punkte $(0, K)$ beginnende und im Punkte $(n, 0)$ endigende Kurve. Für alle zwischen 0 und n liegenden Werte von k ergeben sich bei höherem Zinsfuß größere Schuldreste, d. h. der Schuldner hat nicht nur eine höhere Annuität zu

zahlen, sondern im Falle vorzeitiger Beendigung der Amortisation auch den größeren Schuldrest. Wie eine genauere Untersuchung zeigt, ist der Unterschied der für zwei verschiedene Zinsfüße geltenden V_k (Abb. 11) etwa für dasjenige k am größten, das dem Schnittpunkt der beiden Q_k -Kurven entspricht.

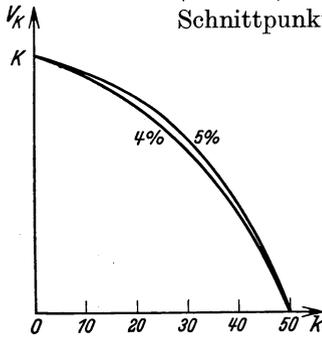


Abb. 11.

Tilgung mit Aufgeld.

In der Anleihepraxis spielt der Fall eine Rolle, daß die einzelnen nach und nach zur Tilgung gelangenden Teilschuldverschreibungen mit einem Aufgelde (Agio) zurückgezahlt werden, das einen gewissen Prozentsatz A ihres Nennwertes ausmacht. Für die gesamte auf K Mark lautende Anleihe kommt also der Betrag $\mathfrak{R} = K(1 + \alpha)$ zur Rückzahlung, wo $\alpha = \frac{A}{100}$. Auf diese

wahre Schuldsomme \mathfrak{R} muß also die Amortisation durch gleiche n Jahre hindurch gezahlte Annuitäten R abgestellt werden. Ist i der auf die Nennbeträge der Schuldverschreibungen bezogene Zinssatz, so führen wir $i = \frac{i}{1 + \alpha}$ als Zinssatz in die dem Tilgungsplan zugrunde liegenden Formeln ein, wobei wir diese Tatsache durch Verwendung deutscher Buchstaben q , v , $a_{\overline{n}|}$, $\mathfrak{S}_{\overline{n}|}$, $\mathfrak{s}_{\overline{n}|}$, $\mathfrak{P}_{\overline{n}|}$, $\mathfrak{D}_{\overline{k}|}$, $\mathfrak{Z}_{\overline{k}|}$, $\mathfrak{B}_{\overline{k}|}$ an Stelle von q , v , $a_{\overline{n}|}$, $J_{\overline{n}|}$, $s_{\overline{n}|}$, $P_{\overline{n}|}$, $Q_{\overline{k}|}$, $T_{\overline{k}|}$, $V_{\overline{k}|}$ zum Ausdruck bringen. Setzen wir

$$\mathfrak{R} = R \cdot a_{\overline{n}|}, \quad (1') \quad R = \mathfrak{R} \cdot \mathfrak{S}_{\overline{n}|} = \mathfrak{R} (i + \mathfrak{P}_{\overline{n}|}), \quad (2')$$

so ergibt sich offenbar ein Tilgungsplan, bei dem das Endziel, die Tilgung von $\mathfrak{R} = K(1 + \alpha)$, erreicht wird, bei dem also alle Rückzahlungen \mathfrak{D}_k und die Tilgungsfonds \mathfrak{Z}_k das $(1 + \alpha)$ -fache der Nennbeträge Q_k und T_k ausmachen. Also ist auch der wahre Schuldrest $\mathfrak{B}_k = \mathfrak{R} - \mathfrak{Z}_k$ das $(1 + \alpha)$ -fache des nominalen Schuldrestes $V_k = K - T_k$, und der dem Tilgungsplan entsprechend zum Zinssatz i getätigte Zinsendienst $\mathfrak{B}_{k-1} \cdot i = V_{k-1} \cdot i$ bedeutet eine Verzinsung der nominellen Schuldreste zum Nominalzinssatz i , so daß dem Wortlaut der Anleihebedingungen durch unsern Tilgungsplan durchweg Rechnung getragen wird.

Ist n gegeben, so berechnen wir zunächst R gemäß (2'), sodann $\mathfrak{D}_1 = R - \mathfrak{R}i = R - K i$; $\mathfrak{D}_k = \mathfrak{D}_1 \cdot q^{k-1}$. Die wahren Schuldreste werden $\mathfrak{B}_k = \mathfrak{R} - \mathfrak{Z}_k = \mathfrak{R} - \mathfrak{D}_1 \mathfrak{s}_{\overline{k}|}$. Wir vermerken im Tilgungsplan auch die nominellen Rückzahlungsquoten $Q_k = \frac{\mathfrak{D}_k}{1 + \alpha} = \frac{\mathfrak{D}_1}{1 + \alpha} \cdot q^{k-1} = Q_1 q^{k-1}$, wo $Q_1 = \frac{R - K i}{1 + \alpha}$, und die nominellen Schuldreste $V_k = \frac{1}{1 + \alpha} (\mathfrak{R} - \mathfrak{D}_1 \mathfrak{s}_{\overline{k}|}) = K - Q_1 \cdot \mathfrak{s}_{\overline{k}|}$.

Beispiel: Eine mit 5% verzinsliche, auf $K = 10\,000\,000$ M lautende Anleihe, deren Schuldverschreibungen mit einem Aufgeld von $A = 20\%$ zur Einlösung gelangen, soll in $n = 20$ Jahren durch gleiche Annuitäten R getilgt werden. Wie hoch stellen sich diese?

Lösung: $\mathfrak{R} = K(1 + \alpha) = 12\,000\,000$ M. Wir haben $i = \frac{i}{1 + \alpha} = \frac{5}{120} = \frac{1}{24}$;
 $v = \frac{1}{1 + \frac{1}{24}} = \frac{24}{25}$; also $R = \mathfrak{R} \mathfrak{F}_{\overline{n}|} = 12\,000\,000 \cdot 0,074\,671\,78 = 896\,061,40$ M.

Stehen Tabellen der $\mathfrak{F}_{\overline{n}|}$ für den Zinssatz $i = \frac{1}{24}$, d. h. den Zinsfuß $4\frac{1}{6}\%$ nicht zur Verfügung, so rechnen wir $R = \mathfrak{R} \cdot \mathfrak{F}_{\overline{n}|} = \frac{\mathfrak{R} i}{1 - v^n} = \frac{500\,000}{1 - \left(\frac{24}{25}\right)^{20}} = \frac{500\,000}{0,557\,9976} = 896\,061,20$ M.

Handelt es sich bei den α - und $(i + \alpha)$ -Werten um Prozentsätze, die in den Tabellen der q^n als Zinsfüße vorkommen, so kann man $q^k = (1 + i)^k = \frac{(1 + i + \alpha)^k}{(1 + \alpha)^k}$, $v^n = \frac{(1 + \alpha)^n}{(1 + i + \alpha)^n}$ setzen und danach $\mathfrak{F}_{\overline{n}|} = \frac{i}{1 - v^n}$ und die \mathfrak{D}_k mit Hilfe von Tabellenwerten berechnen.

Am bequemsten gestaltet sich die Aufstellung des Tilgungsplans, wenn außer geläufigen Zahlen für i und α unter tunlichster Rücksichtnahme auf die gewünschte Tilgungsdauer eine runde Annuität $R = \mathfrak{R}(i + \mathfrak{P}_{\overline{n}|})$ vorgeschrieben wird, da sich dann auch für $\mathfrak{D}_1 = R - K i$ eine für die Berechnung der $\mathfrak{D}_k = \mathfrak{D}_1 \cdot q^{k-1}$ und der $\mathfrak{B}_k = \mathfrak{R} - \mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{s}_{\overline{k}|}$ bequeme Zahl ergeben wird. Das kommt im wesentlichen auf die Wahl eines günstigen wahren Tilgungssatzes $\mathfrak{P}_{\overline{n}|}$ heraus. Für die Tilgungsdauer gilt dann die zu (11) analoge Formel

$$n = \frac{\log(i + \mathfrak{P}_{\overline{n}|}) - \log \mathfrak{P}_{\overline{n}|}}{\log q}. \quad (11')$$

Findet sich hiernach für die Tilgungsdauer eine unrunde Zahl $n = N + t$, so ist theoretisch außer N gleichen Annuitäten R eine irreguläre Restzahlung $R' = R \frac{q^t - 1}{i} \approx Rt$ zur Zeit $N + t$ anzusetzen. Tatsächlich dient diese Beziehung zur Kontrolle des Schuldrestes: $\mathfrak{B}_N = \frac{R'}{q^t} \approx \frac{Rt}{1 + i t}$, mit dessen Abtragung man praktisch wie früher besprochen verfährt.

Beispiel: Eine mit 6% verzinsliche Anleihe von $K = 1\,000\,000$ M soll mit einem Aufgeld von 20% zu einem wahren Tilgungsfuß von 1% amortisiert werden. Wie gestaltet sich der Tilgungsplan?

Lösung: $\mathfrak{R} = K(1 + \alpha) = 1\,200\,000$ M; $i = \frac{i}{1 + \alpha} = \frac{0,06}{1,2} = 0,05$;
 $R = \mathfrak{R}(i + \mathfrak{P}_{\overline{n}|}) = 1\,200\,000 \cdot (0,05 + 0,01) = 72\,000$ M;
 $n = \frac{\log(0,05 + 0,01) - \log 0,01}{\log 1,05} = \log 6 : \log 1,05 = 36,724$ Jahre.

Mit $t = 0,724$ ergibt sich eine irreguläre Schlußzahlung $R' = 51\,768$ M nach 36 Jahren 8 Monaten 21 Tagen.

Tilgungsplan.

Jahr k	Nomineller Schuldrest V_{k-1}	Jahreszins $V_{k-1} \cdot i$	Tilgungsquote		Wahrer Schuldrest \mathfrak{B}_k
			nomineell Q_k	wahr \mathfrak{Q}_k	
1	1 000 000	60 000	10 000	12 000	1 188 000
2	990 000	59 400	10 500	12 600	1 175 400
3	979 500	58 770	11 025	13 230	1 162 170
4	968 475	58 108,50	11 576,25	13 891,50	1 148 278,50
5	956 898,75	57 413,93	12 155,06	14 586,07	1 133 692,43
....

Der für die irreguläre Restzahlung maßgebliche Wert t kann auch in der Weise bestimmt werden, daß man $N + t$ mittels $\mathfrak{s}_{n|} = \frac{1}{\mathfrak{p}_{n|}} = \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{Q}_1} = \frac{\mathfrak{R}}{R - \mathfrak{R}i}$ aus der Tabelle der $\mathfrak{s}_{n|}$ interpoliert. (In unserem Beispiel gibt das $t = 0,7189$, so daß $R' \approx 51\,760,80$ M). — Gelegentlich erhebt sich die Frage, wie groß α zu bemessen ist, wenn Zinsfuß, Tilgungsdauer und Annuität gegeben sind. Nach (2') ist $R = \frac{\mathfrak{R}i}{1 - v^n} = \frac{Ki}{1 - v^n}$; also $v^n = 1 - \frac{K}{R}i$. Hieraus $v = \frac{1}{1 + i}$ und $1 + \alpha = \frac{i}{i}$.

§ 9. Tilgung von Anleihen.

Das in § 8 beschriebene Verfahren der Schuldtilgung führt dem Gläubiger jährlich außer der Zinssumme eine wachsende Rückzahlungsquote zu, dergestalt, daß sein Guthaben sich mehr und mehr verringert und am Schluß gleich Null wird. Will er sein Kapital und seine Bezüge erhalten, so muß er die Rückzahlungsquoten zum gleichen Zinsfuß fortlaufend von neuem zinstragend anlegen. Das ist bei den unrundern Quoten mit Schwierigkeiten verknüpft. Infolgedessen wird dies Tilgungsverfahren zwar von Hypothekenbanken gepflegt, die sich in größerem Umfange der Kapitalbewirtschaftung widmen, ist aber bei privaten Geldgebern unbeliebt. Bei größeren Anleihen, die von Staaten und anderen Gemeinwesen, von industriellen Unternehmungen usw. aufgelegt werden, werden aus diesem Gesichtspunkt heraus Zinsendienst und Tilgung den einzelnen Anleihezeichnern gegenüber völlig voneinander getrennt, während generell der auf gleichen Annuitäten beruhende Tilgungsplan beibehalten wird. Die Anleihe ist in Teilschuldverschreibungen (Obligationen) gestückelt, die im allgemeinen auf 1000 M lauten. Von diesen werden in jedem Jahr so viele Stücke zum vollen Nennbetrage zurückgezahlt, daß der gesamte hierfür aufgewendete Betrag der Tilgungsquote des betreffenden Jahres möglichst gleichkommt. Bei den übrigen, den sog. aufrechten Stücken, werden nur die Zinsscheine eingelöst. Die Auswahl der zur Rückzahlung gelangenden Stücke erfolgt im allgemeinen durch das Los¹⁾.

¹⁾ Gelegentlich behält sich auch der Schuldner das Recht vor, diese Stücke

Da die Rückzahlungsquote Q_k des mathematischen Tilgungsplans im allgemeinen nicht ein ganzzahliges Vielfaches des Obligationen-Nennbetrages ausmachen wird, so werden in der Praxis der Anleihetilgung Abweichungen von diesem Plan erforderlich sein, die an einem Beispiel erläutert werden mögen.

Tilgungsplan einer Anleihe von 10 000 000 M, die mit 5% verzinst und in 10 Jahren getilgt wird. Annuität $R = 1\,295\,045,80$ M.

1	2	3	4	5	6	7	8
Jahr k	Schuldrest V_{k-1}	Zins	Tilgungs- quote Q_k	Für die Tilgung verfügbar [Sp. 4 + (7+8)]	Zu tilgende Stücke	Überschuß Sp. 5 --1000 · Sp. 6	Zins des Über- schusses
1	10 000 000	500 000	795 045,80	795 045,80	795	45,80	2,29
2	9 204 954,20	460 247,71	834 798,09	834 846,18	834	846,18	42,31
3	8 370 156,11	418 507,81	876 537,99	877 426,48	877	426,48	21,32
4	7 493 618 12	374 680,91	920 364,89	920 812,69	920	812,69	40,63
5	6 573 253,23	328 662,66	966 383,14	967 236,46	967	236,46	11,82
6	5 606 870,09	280 343,50	1 014 702,30	1 014 950,58	1 014	950,58	47,53
7	4 592 167,79	229 608,39	1 065 437,41	1 066 435,52	1 066	435,52	21,78
8	3 526 730,38	176 336,52	1 118 709,28	1 119 166,58	1 119	166,58	8,33
9	2 408 021,10	120 401,06	1 174 644,74	1 174 819,65	1 174	819,65	40,98
10	1 233 376,36	61 668,82	1 233 376,98	1 234 237,61	1 234	237,61	

Ist die Anleihe in Teilschuldverschreibungen vom Nennwert 1000 M gestückelt, so können aus der Rückzahlungsquote des ersten Jahres 795 Stücke getilgt werden. Der Rest von 45,80 M (Überschuß) samt Zinsen dient zur Verstärkung der Annuität des zweiten Jahres, an dessen Schluß 834 Stücke ausgelost werden können. Analog in den folgenden Jahren. Dementsprechend ist der die Spalten 1, 2, 3, 4 umfassende mathematische Tilgungsplan durch die Spalten 5, 6, 7, 8 zu ergänzen.

Da man nicht daran vorbeikommt, den idealen mathematischen Tilgungsplan mit seinen gleichbleibenden Annuitäten abzuändern, wird man geneigt sein, zur Vereinfachung der Rechnungen noch einen Schritt weiter zu gehen. Wollte man einfach die Tilgungsquoten auf Vielfache des Stücknennwerts nach oben bzw. unten abrunden, so würde man freilich nicht unerhebliche Abweichungen vom mathematischen Tilgungsplan gewärtigen müssen. Es empfiehlt sich vielmehr, alle Schuldreste auf volle Vielfache des Schuldverschreibungsbetrages nach oben abzurunden. In diesem Falle ist man, wenn wie in unserem Beispiel die Teilschuldverschreibungen auf je 1000 M lauten, stets um weniger als 1000 M mit der Tilgung im Rückstand. Der Zinsendienst würde stets um weniger als 1000 i , hier 50 M, zu hoch ausfallen. Die Rückzahlungsquoten, die ja als Differenzen der Schuldreste erhalten werden, müssen stets um weniger als 1000 M zu groß oder zu klein ausfallen, die gesamte

durch freihändigen Ankauf zu erwerben; er erspart dann bei einem unter pari liegenden Anleihekurs einen Teil der Tilgungsquote. Von diesem Fall sehen wir ab.

auf Zinsendienst und Tilgung entfallende Jahresaufwendung wird die im mathematischen Tilgungsplan vorgesehene Annuität höchstens um einen Betrag übersteigen können, der kleiner ist als $1000 + 1000i$, hier 1050 M. Bei diesem Verfahren ergibt sich durch einfache, am mathematischen Tilgungsplan leicht anzubringende Abänderungen der nachstehende Tilgungsplan:

Praktischer Tilgungsplan einer in Teilschuldverschreibungen von 1000 M gestückelten Anleihe von 10 000 000 M, die mit 5% verzinst und in 10 Jahren getilgt wird.

Jahr k	V_{k-1} aufrechte Stücke	V_k	Zu tilgende Stücke	Zinsen: 1000	Jahresauf- wendung : 1000
1	10000	9205	795	500,—	1295,—
2	9205	8371	834	460,25	1294,25
3	8371	7494	877	418,55	1295,55
4	7494	6574	920	374,70	1294,70
5	6574	5607	967	328,70	1295,70
6	5607	4593	1014	280,35	1294,35
7	4593	3527	1066	229,65	1295,65
8	3527	2409	1118	176,35	1294,35
9	2409	1234	1175	120,45	1295,45
10	1234	—	1234	61,70	1295,70

Die durchschnittliche Jahresaufwendung 1295 070 M weicht von der Annuität des mathematischen Tilgungsplans $R = 1295 045,80$ M nur geringfügig ab.

Bei Anleihen wird häufig das früher geschilderte Verfahren der Rückzahlung mit Aufgeld α angewendet. Die Hoffnung auf baldige Auslösung der erworbenen Teilschuldverschreibungen bietet einen besonderen Anreiz zur Zeichnung auf derartige Anleihen, auch wenn ihre Verzinsung etwas niedriger als marktüblich angesetzt wird. Der praktische Tilgungsplan wird aus dem mathematischen in analoger Weise wie bei aufgeldlosen Anleihen gewonnen. Man hat die wahren Schuldreste \mathfrak{R}_k auf ganzzahlige Vielfache des für jedes Stück einschließlich Aufgeld zu leistenden Rückzahlungsbetrages abzurunden, aus ihren Differenzen die Anzahl der in den einzelnen Jahren zu tilgenden Stücke und nach ihnen selbst den Zinsendienst zum Zinssatz $i = \frac{i}{1 + \alpha}$ zu bestimmen.

Ein anderes Verfahren, Anleihen mit einem besonderen Anreiz für das zur Zeichnung zu gewinnende Publikum auszustatten, ist in den Prämien- oder Lotterieranleihen verkörpert. Bei diesen bestehen für die als Lose bezeichneten, meist nur auf ziemlich niedrige Nennwerte lautenden Stücke nicht nur die jährlichen Tilgungsziehungen, sondern daneben besondere Gewinnziehungen, sei es, daß an ihnen jedesmal alle Lose oder nur die noch nicht getilgten Stücke teilnehmen. Derartige Prämienanleihen sind auf mannigfach verschiedene Weise ausgestattet.

Man hat insbesondere verzinsliche und unverzinsliche Losanleihen zu unterscheiden. Bei letzteren werden jährliche Zinsen nicht bezahlt, aber die kleinsten Treffer (Nieten) mit von Jahr zu Jahr (etwa einfacher Verzinsung entsprechend) wachsenden Beträgen eingesetzt¹⁾.

Wir beschränken uns auf ein Beispiel für eine verzinsliche Prämienanleihe mit gleichbleibender Annuität. Es handelt sich wie in dem S. 71 und S. 72 behandelten Beispiel um einen Anleihebetrag $K = 10\,000\,000$ M, gestückelt in Teilschuldverschreibungen von 1000 M, zu tilgen in 10 Jahren. Außer der 5%igen Verzinsung, die zusammen mit der Tilgung eine Annuität von durchschnittlich 1 295 045,80 M erfordert, sollen jährlich 30 Gewinne ausgelost werden. Diese sollen so bemessen werden, daß die einer 6%igen Verzinsung entsprechende Tilgungsannuität ausreicht, um die Mehraufwendung für die Gewinne mitzudecken. Für $i = 0,06$ finden wir $10\,000\,000 \cdot J_{10} = 1\,358\,679,60$ M. Demnach stehen jährlich 63 633,80 M für die Gewinnausschüttung zur Verfügung. Der Tilgungsplan dieser Prämienanleihe wird also durch eine einfache Abänderung des Plans S. 72 erhalten: Es ist eine Spalte für die konstante, etwa auf 63 640 M abzurundende Gewinnausschüttung einzufügen und die Zahlen der letzten Spalte sind dementsprechend um 63,64 zu erhöhen.

§ 10. Tilgung der Bausparkassen-Darlehen.

Bausparkassen sind Finanzierungsgesellschaften, die den Zweck haben, kapitalschwachen Personen auf der Grundlage planmäßigen Gemeinschaftssparens zu einem Tilgungsdarlehen zu verhelfen, das ihnen den Bau oder Erwerb eines Eigenheims (bzw. die Ablösung einer auf ihrem Hause lastenden Hypothek) ermöglicht. Den Anstoß zur Gründung von Bausparkassen haben sowohl im letzten Jahrzehnt in Deutschland wie früher in England und Amerika widrige wirtschaftliche Verhältnisse gegeben: Schwierigkeiten der Beschaffung von Hypotheken-Darlehen auf dem freien Kapitalmarkt, hohe Zinssätze. Diesen Schwierigkeiten sucht man durch den Gedanken der genossenschaftlichen Selbsthilfe zu begegnen. Durch Anschluß an einen größeren Sparerkreis will man früher zur Verfügung über das für das Eigenheim erforderliche Kapital gelangen, als dies durch isoliertes Sparen möglich ist. Überdies wird Zinslosigkeit oder doch möglichst niedrige Verzinsung der zu übernehmenden Schuldverpflichtung angestrebt; das soll dadurch erreicht werden, daß der Bausparer, solange er Gläubiger der Bausparkasse ist, von ihr keine oder nur sehr mäßige Zinsen erhält²⁾.

Um klarzustellen, wieweit die Ziele des Gemeinschaftssparens verwirklicht werden können, nehmen wir das Beispiel einer Gruppe von vier Sparern, die in der Lage sind, je 1000 M im Jahr zu erübrigen, und sämtlich die Verfügung über ein Kapital von 4000 M erstreben. Offenbar kann aus der gemeinsamen Kasse,

¹⁾ Zinersparendes Hinausschieben der Tilgung, wachsende Annuitäten sind typisch für unverzinsliche Lotterieranleihen. Bei den verzinslichen Prämienanleihen sind die kleinsten Treffer konstant, nämlich gleichbedeutend mit der Einlösung der Stücke zum Nennwert.

²⁾ Zur Technik des deutschen Bausparens vgl. A. Krahn und B. Kaltenboeck, Das deutsche Bausparen, Berlin 1931.

in die die vier Personen in jedem Jahr je 1000 M abführen, alljährlich in die Zuteilung in Höhe von 4000 M gemacht werden, etwa im Auslosungsverfahren. Drei der Bausparer erhalten also das gewünschte Kapital früher zur Verfügung als bei isoliertem Sparen, wobei freilich der Zeitgewinn sehr verschieden verteilt ist; dem letzten aber hat der Anschluß an die Spargemeinschaft überhaupt keinen zeitlichen Gewinn gebracht. Werden Zinsen nicht verrechnet, so wirkt sich das ebenfalls für die vier Bausparer sehr verschieden aus: Von dem mit Zinsen rechnenden Kapitalmarkt aus gesehen gewinnen die beiden ersten Bausparer, die beiden letzten verlieren. Der hier beschriebene Fall des sog. geschlossenen Sparerkreises kann also nicht als eine befriedigende Lösung der den Bausparkassen zufallenden Aufgabe angesehen werden.

Anders, wenn Sparergruppen, die sich zu verschiedener Zeit gebildet haben, fortlaufend verbunden werden. Wir wollen dabei gleich den Fall ins Auge fassen, daß die Tilgungsbeträge größer angesetzt werden als die Sparbeträge. So wird es tatsächlich in der Praxis gehandhabt, weil der Bausparer vor Empfang des Tilgungsdarlehens noch Miete (bzw. Hypothekenzins) aufzubringen hat, was nach Bau oder Kauf des Eigenheims (bzw. Rückzahlung der zu verzinsenden Hypothek) wegfällt. Bleiben wir bei dem Beispiel der Vierergruppen und nehmen die Sparbeträge $S = 1000$ M, die Tilgungsbeträge T , soweit tunlich, gleich 2000 M, so erhalten wir folgendes Schema:

Jahr	1. Gruppe	2. Gruppe	3. Gruppe	4. Gruppe	5. Gruppe	6. Gruppe	Zuteilung	Saldo	
1	S T	1 1 1 1					1	—	
2	S T	1 1 1 1 2	1 1 1 1				2	1	
3	S T	1 1 2 2	1 1 1 1 1	1 1 1 1			3	3	
4	S T	1 2 2	1 1	1 1 1 1	1 1 1 1		4	2	
5	S T		1 1	2 2	1 1	1 1 1 1	4	2	
6	S T			1 1	2 2	1 1	1 1 1 1	4	2

Vom 5. Jahr ab tritt eine stationäre Entwicklung ein, sofern der jährliche Zugang an Bausparern auf derselben Höhe bleibt: Von jeder Gruppe erhalten dabei stets zwei schon nach 2 Jahren, die beiden anderen nach 3 Jahren die Zuteilung von 4000 M. Demnach gelangen alle früher zur Verfügung über ihr Baukapital als bei isoliertem Sparen.

Man kann die Aufgabe der Bausparkasse noch günstiger und in gewissem Sinne gerechter lösen, wenn man nach dem 3. Jahr einmalig 1000 M vom freien Kapitalmarkt verzinslich aufnimmt (siehe das nächste Schema). Die Entwicklung geht jetzt vom 4. Jahr ab stationär, sofern der jährliche Zugang von Bausparern auf der gleichen Höhe bleibt. Von jeder Gruppe erhalten dabei stets drei schon nach 2 Jahren, der letzte nach 3 Jahren die Zuteilung. Die ersten drei haben sich ein Jahr hindurch in den Zinsendienst für die auf dem freien Kapitalmarkt aufgenommenen 1000 M zu teilen, so daß ein gerechter Ausgleich gegenüber dem später zur Zuteilung gelangenden 4. Bausparer geschaffen ist. Ähnlich verfährt man, wenn mehr als 4 Personen je zu einer Jahresgruppe ver-

Jahr	1. Gruppe	2. Gruppe	3. Gruppe	4. Gruppe	5. Gruppe	Zuteilung	Saldo	
1	<i>S</i> <i>T</i>	1 1 1 1				1	—	
2	<i>S</i> <i>T</i>	1 1 1 2	1 1 1 1			2	1	
3	<i>S</i> <i>T</i>	1 1 2 2	1 1 1 1	1 1 1 1		4	—1	
4	<i>S</i> <i>T</i>	1	2 2 2	1 1 1 1	1 1 1 1	4	—1	
5	<i>S</i> <i>T</i>		1	2 2 2	1 1 1 1	1 1 1 1	4	—1

einigt werden. Stets können alle Gruppenmitglieder, abgesehen etwa von einem, bereits nach der Hälfte der Zeit, die sie bei isoliertem Sparen benötigen würden, die Zuteilung erhalten, sofern noch einmalig eine Summe von der Höhe des Sparbetrages verzinslich auf dem freien Kapitalmarkt aufgenommen wird. Der auf den einzelnen entfallende Zinsdienst ermäßigt sich, relativ genommen, bei wachsender Gruppenmitgliederzahl. Wie man sich leicht überzeugt, ergibt sich bei der Gruppenmitgliederzahl 8 vom 7. Jahr ab der stationäre Zustand, daß zwei tilgende und vier sparende Gruppen jährlich eine Zuteilung von 8 Tilgungsdarlehen ermöglichen, ohne daß Leihgeld vom freien Kapitalmarkt aufzunehmen ist; alle Sparer gelangen dann nach 4 Jahren zur Zuteilung, also nach der Hälfte der Zeit, in der sie bei isoliertem Sparen zu einem Kapital von 8000 M kommen würden.

Die englischen Bausparkassen nehmen, um allgemein einen Ausgleich und eine mäßige Abkürzung der Wartezeit zu ermöglichen, auch von Personen, die nicht auf Zuteilung eines Tilgungsdarlehen rechnen, Spareinlagen herein, die marktmäßig verzinst werden, und arbeiten nach dem Listen- und Abrufsystem, das im wesentlichen dem hier geschilderten Verfahren entsprechen dürfte und von vornherein eine ziemlich genaue Angabe der bis zur Zuteilung verstreichenden Wartezeit ermöglicht. Bei den deutschen Bausparkassen sind zahlreiche verschiedene, hier nicht näher zu erörternde Zuteilungsverfahren eingeführt. Neben der nach Gruppen gegliederten Auslosung entscheiden über die Zuteilung meistens gewisse Schlüsselzahlen, die aus den über die tarifmäßigen Sparraten hinaus geleisteten Sonderzahlungen ermittelt werden. Auf diese Weise wird zum Wettsparen angereizt. Im allgemeinen ist bei Abschluß des Sparvertrages der Zeitpunkt der Zuteilung bei diesen Methoden einigermaßen ungewiß, was sicher als Nachteil angesehen werden muß.

Bei allen Bausparverträgen erscheint die Durchführung des Ratenzahlungsplans für den Fall des Ablebens des Bausparers gefährdet, da die als Erben in Frage kommenden Personen oft nicht in der Lage oder nicht willens sind, den von ihm übernommenen Verpflichtungen nachzukommen. Das würde besonders bedenkliche Folgen nach sich ziehen, wenn der Tod in der Tilgungszeit eintritt. Es liegt daher nahe, den Bau-

sparvertrag mit einer Lebensversicherung zu verbinden. In Deutschland lagen gewisse Erfahrungen mit anderen Versuchen vor, die Förderung des Wohnungsbaus mit dem Lebensversicherungsgeschäft zu verknüpfen. Bei den Baulebensversicherungen hatte man Verträge zwischen den Versicherungsgesellschaften und Baugenossenschaften im Auge, bei denen die Mitglieder der letzteren je nach der Höhe des gewünschten Baudarlebens Versicherungen abzuschließen hatten, wogegen die Versicherungsgesellschaften Policendarlehen in Höhe der jeweiligen Prämienreserven gewähren wollten. Diese Baulebensversicherungen, bei denen die Rückzahlung des Baudarlebens aus der Versicherungssumme gedeckt wird, haben sich nicht eingebürgert. Es ergeben sich verhältnismäßige hohe Prämienätze, die nicht der dem Bausparer erwünschten fortlaufenden Tilgung zugute kommen. Die deutschen Bausparkassen bevorzugen daher den Abschluß von Lebensversicherungsverträgen, die nur auf die jeweilige Restschuld des Bausparers abgestellt sind, und behalten als Regelfall die fortlaufende Tilgung bei.

Wir behandeln als Beispiel das Tilgungsverfahren der größten deutschen Bausparkasse (Gemeinschaft der Freunde Wüstenrot). Nach der Zuteilung beträgt hier die regelmäßige Jahresleistung des Bausparers 6% der Bausparsumme. Für den mit der Zuteilung beginnenden Versicherungsschutz hat er einen gleichbleibenden Zuschlag zu leisten, der sich nach dem Alter bei Versicherungsbeginn richtet: bis einschließlich 39 Jahre 0,2% der Bausparsumme, von 40—49 Jahren 0,3%, von 50—54 Jahren 0,4%, von 55—60 Jahren 0,6% derselben. (Hat der Bausparer bei der Zuteilung das 60. Lebensjahr überschritten, so bleibt seine Versicherung besonderer Vereinbarung vorbehalten.) In der gesamten Jahresleistung sind enthalten:

1. Der Darlehenszins mit 5% des jeweiligen Schuldrestes.
2. Der Ausgleichszins mit 1% desselben; er fällt weg, sobald die Restschuld nur noch 30% der Bausparsumme beträgt oder sobald in seiner Gruppe keine wartenden Bausparer mehr vorhanden sind.
3. Die Lebensversicherungsprämie einschließlich Versicherungssteuer. Die Pflichtversicherungssumme beträgt die Hälfte der am Beginn des Jahres bestehenden Restschuld, auf volle 100 M nach unten abgerundet, und fällt weg, wenn der Schuldrest zu Beginn des Jahres weniger als 1000 M beträgt.
4. Der Verwaltungskostenbeitrag von 0,2% der Bausparsumme.
5. Der Tilgungsbetrag in Höhe des verbleibenden Restes.

Die Höhe des durch eine erststellige Hypothek zu sichernden Tilgungsdarlebens errechnet sich als Unterschied der Bausparsumme und des bis zur Zuteilung erreichten Sparguthabens, das eine Vergütung von 4% Zinsen auf die bis dahin gezahlten Sparraten umfaßt, aber um Werbe- und Verwaltungskostenbeitrag gekürzt wird.

Für einen Bausparer, der auf eine Bausparsumme von 20000 M bei der Zuteilung ein Sparguthaben von 6000 M netto besitzt und 30 Jahre alt ist, errechnet sich, einem Tilgungsdarlehen von 14000 M. entsprechend, eine Jahresleistung von 1240 M. Berechnen wir die jährliche Versicherungsprämie nach dem Sondertarif der Versicherungsgesellschaft + 2% Versicherungssteuer, so erhalten wir folgenden Tilgungsplan:

Tilgungsplan für ein Bausparkassen-Darlehen.

Tilgungs- jahr	Alter	Schuldrest am Jahres- anfang	Ver- siche- rungs- summe	5% Dar- lehens- zins	1% Aus- gleichs- zins	Versiche- rungsprä- mie + 2% Vers.-Steuer	Ver- waltungs- kosten- betrag	Tilgungs- betrag
1	30	14 000	7000	700	140	48,00	40	312,00
2	31	13 688,00	6800	684,40	136,90	46,60	40	332,10
3	32	13 355,90	6600	667,40	133,60	45,25	40	353,35
4	33	13 002,55	6500	650,10	130,00	44,55	40	375,35
5	34	12 627,20	6300	631,35	126,30	43,20	40	399,15
6	35	12 228,05	6100	611,40	122,30	41,80	40	424,50
		11 803,55						5000,00
				Sonderleistung				
7	36	6 803,55	3400	340,20	68,05	23,75	40	768,00
8	37	6 035,55	3000	301,80	60,35	21,65	40	816,20
		5 219,35						3000,00
				Sonderleistung				
9	38	2 219,35	1100	111,00	—	8,20	40	1080,80
10	39	1 138,55	500	56,90	—	3,85	40	1138,55

Die Summe der in den letzten fünf Spalten ausgewiesenen Beträge ergibt in jeder Zeile (außer der letzten) 1240 M.

§ 11. Abschreibungen.

Abschreibungen auf Anlagevermögen (Gebäude, Maschinen, sonstige Betriebsmittel) sollen der Wertminderung Rechnung tragen, deren Feststellung einerseits für die korrekte Darstellung der Aktiva und Passiva eines Betriebes im Jahresabschluß, andererseits für kalkulatorische Zwecke, also für die Selbstkostenermittlung und die der Erfolgsrechnung dienende Bilanz erforderlich ist. Praktisch wird die Bemessung der Abschreibungen nicht allein durch die Beurteilung der Wertminderung vom Ingenieurstandpunkt bestimmt, sondern auch durch allgemeine wirtschaftliche Erwägungen und betriebspolitische Gesichtspunkte — Erhaltung der Substanz oder Sicherstellung der Wiederbeschaffungskosten, Schaffung stiller Reserven zur Steigerung der Wettbewerbsfähigkeit und zum Schutz gegen unvorhergesehene Vermögensverluste durch Ausfall von Forderungen, absinkende Konjunktur, vorzeitiges Veralten usw. Aus diesem Zusammenspiel verschiedener Gesichtspunkte ergibt sich die Vielfältigkeit der üblichen Abschreibungsmethoden.

Wenn gefordert wird, daß als Ausgangswert der Abschreibungen der jeweilige Wiederbeschaffungswert, der Tagesanschaffungswert angesetzt werden soll — eine Forderung, die im allgemeinen nur im Falle steigender Wiederbeschaffungskosten erhoben wird — so hat dieses Postulat betriebspolitischen Sinn: Erhaltung der Unternehmung im Sinne der Sicherung des Produktionsumfangs. Die Erfüllung dieser Forderung führt vielfach zu schwankenden Abschreibungsquoten und beeinträchtigt in gewissem Grade die stationäre Entwicklung der Kalkulationsgrundlagen. Gegenüber der Steuerverwaltung wird bei

diesem Verfahren eine Trennung der Abschreibungsquoten in einen der technischen und wirtschaftlichen Entwertung entsprechenden Bestandteil und eine der Verteuerung der Wiederbeschaffung entsprechende Kostenrücklage erforderlich. Die letztere, die von der Unsicherheit der künftigen Wiederbeschaffung und deren Kostenhöhe abhängig ist, wird als zu versteuernde Gewinnrücklage betrachtet.

Folgerichtiger erscheint es, als Ausgangswert der Abschreibungen den Urwert, d. h. den ursprünglichen Beschaffungswert A zu benutzen. Dann gestaltet sich auch, da A eine konstante Größe, die Bemessung der jährlichen Abschreibungsquoten rechnerisch übersichtlicher. Der nach Absetzung der aufgelaufenen Abschreibungen verbleibende Wert des Objekts ist der sog. Buchwert.

In manchen Fällen kommt für die Bemessung der Abschreibungen die Ermittlung des aus dem Objekt noch zu erwartenden künftigen Ertrages in Frage, z. B. bei Zinshäusern. Der Ertragswert umfaßt also neben den Gesteungskosten auch den aus dem Objekt herauszuholenden Gewinn. Der gerichtliche Schätzungswert oder gemeine Wert von Gebäuden beispielsweise wird festgesetzt als Mittelwert aus dem Ertragswert und Boden- und Bauwert, d. h. dem Urwert abzüglich der dem Alter des Baues entsprechenden Abnutzung. Das Verfahren, das die Abschreibungen nach dem Ertragswert oder dem gemeinen Wert bemißt, leidet an der Unsicherheit sowohl der Schätzung der restlichen Lebensdauer als der der künftigen Jahreserträge.

In allen Fällen erfordert die Aufstellung des Abschreibungsplans zunächst die Veranschlagung der Lebensdauer n des Vermögensobjekts und des etwaigen Endwerts (Abbruchwerts usw.). Erstere ist bei rein technischen Abschreibungen der zu schätzende Zeitraum der Gebrauchsfähigkeit, die natürliche Benutzungsdauer. Der Betriebspolitiker dagegen will einen in sicherer Aussicht stehenden Vermögensverlust, dessen Zeitpunkt immerhin ungewiß ist, möglichst schnell erwirtschaften; er setzt demgemäß im Hinblick auf eine vorsichtig zu haltende Selbstkosten- und Erfolgskalkulation die Lebensdauer niedriger an: kaufmännische Abschreibung. Bei diesem Verfahren muß natürlich in besonderen Fällen, z. B. Vermögensauseinandersetzungen mit ausscheidenden Gesellschaftern eines Unternehmens, eine Korrektur eintreten.

Wir haben zu unterscheiden:

a) Ordentliche Abschreibungen, die dem regulären durch das betreffende Objekt geleisteten Betriebsaufwand entsprechen, demgemäß in den Selbstkosten der Unternehmung zu figurieren haben und als solche für die Festsetzung der Erzeugnispreise mitbestimmend sind. Dahin gehören: konstante Stillstandsabschreibungen, entsprechend der allmählichen Brauchbarkeitsminderung durch atmosphärische Einflüsse;

Nutzungsabschreibungen, abhängig von Benutzungsdauer und -intensität (Beschäftigungsgrad); Erschöpfungsabschreibungen, entsprechend einer Verminderung der anstehenden Masse (Kohle, Torf, Erz usw.), proportional der geförderten Menge.

b) Außerordentliche Abschreibungen, die nicht als Bestandteil der Selbstkosten auf die Erzeugnisse umgelegt werden können, sondern unmittelbar aus dem Gesamtertrag des Unternehmens zu decken sind. Dahin gehören außerordentliche Verluste am Anlagevermögen (Betriebsunfälle, Elementarereignisse), Verluste an Guthaben und Forderungen, Konjunkturabschreibungen, bedingt durch vorzeitiges Veralten von Produktionsmitteln, Preisrückgang usw.

Abschreibungspläne.

1. Gleichbleibende Abschreibungen.

Die jährlichen Abschreibungen D mögen in konstanten Bruchteilen des Unterschieds zwischen ursprünglichem Anschaffungswert A und Altmaterialwert W erfolgen. Ist n die angenommene Gesamtlebensdauer des Objekts, k die bei einem bestimmten Bilanztermin seit der Beschaffung verstrichene Anzahl von Jahren, so ist $D = \frac{A - W}{n}$, und der jeweilige Buchwert

$$B_k = (A - W) \left(1 - \frac{k}{n}\right) + W. \quad (12)$$

Der auf den Urwert bezogene Prozentsatz der Abschreibung ist $d = \frac{1}{n} \cdot \frac{A - W}{A} \cdot 100$; also $d \approx \frac{100}{n}$, wenn der Altmaterialwert hierbei, der Praxis entsprechend, vernachlässigt wird.

Beispiel: $A = 1100$; $W = 100$; $n = 10$.

$$\text{Konstante jährliche Abschreibung } D = \frac{1100 - 100}{10} = 100.$$

Jahr	Buchwert zu Beginn des Jahres	Abschreibung am Ende des Jahres	In Prozenten vom Buchwert
1	1100	100	9,1
2	1000	100	10,0
3	900	100	11,1
4	800	100	12,5
5	700	100	14,3
6	600	100	16,7
7	500	100	20,0
8	400	100	25,0
9	300	100	33,3
10	200	100	50,0

Bezogen auf den jeweiligen Buchwert verhalten sich die Abschreibungen progressiv. — Dies weitverbreitete Verfahren der gleichbleibenden Jahresabschreibungen trägt nicht der Tatsache Rechnung, daß die

Abnutzung des Vermögensobjektes in den einzelnen Jahren sehr verschieden ausfällt, je nach dem Beschäftigungsgrad des gesamten Unternehmens, der besonderen Inanspruchnahme der betreffenden Maschine usw. Doch erscheinen derartige konstante Abschreibungen berechtigt, wenn es sich um einen größeren Betrieb handelt, in dem die Erneuerungen ebenfalls in annähernd konstantem Umfange laufend erfolgen, so daß der Gesamtwert des Anlagevermögens erhalten bleibt.

Wenn mit konstanten Abschreibungen von betriebspolitischen Gesichtspunkten aus die gleichmäßige Verteilung des in Aussicht stehenden Vermögensverlustes auf die Lebensdauer n des Objektes im Sinne einer gleichmäßigen Amortisation bezweckt wird, so ist es angemessen, die dem Ersatzbeschaffungsfonds zuzuführenden Jahresquoten mit Zinseszinsen zu verrechnen. Man hat dann $A - W = D s_{\overline{n}|}$, also

$$D = (A - W) P_{\overline{n}|}, \quad (13)$$

Beispielsweise berechnete die preußische Eisenbahnverwaltung die Amortisation der Eisenbahnschienen, Lebensdauer $n = 27$, $p = 3,5\%$, nach der Formel

$$D = L(35,5 \cdot \alpha - 31 \cdot \omega) \frac{0,035}{1,035^{27} - 1};$$

hierin bedeutet L die gesamte Schienenlänge in km, α die Anschaffungskosten, ω den Altmetallerlös für 1000 kg Schienen; 1 m Schienen wiegt neu 35,5 kg, alt 31 kg.

Die Abschreibungsquoten ergeben sich bei diesem Verfahren naturgemäß niedriger als bei der die Verzinsung nicht berücksichtigenden gleichmäßigen Abschreibung; beispielsweise für $A = 1100$, $W = 100$, $n = 10$, $p = 4\%$: $D = 83,29$. — Muß Kreditkapital amortisiert werden, so muß A mit dem Barwert der sämtlichen Abschreibungsquoten und des Restwerts W übereinstimmen: $A = D \cdot a_{\overline{n}|} + W \cdot v^n$. Also ergibt sich

$$D = (A - W v^n) J_{\overline{n}|} = A \cdot J_{\overline{n}|} - W P_{\overline{n}|}. \quad (14)$$

Bei Vernachlässigung des Altmaterialwerts: $D = A J_{\overline{n}|}$. Die Abschreibungsquoten ergeben sich bei diesem Verfahren naturgemäß größer als bei der die Zinsen nicht berücksichtigenden gleichmäßigen Abschreibung; für das behandelte Beispiel: $D = 127,30$.

2. Degressive Abschreibungen.

Das betriebspolitische Ziel, den in Aussicht stehenden Vermögensverlust möglichst rasch zu erwirtschaften, führt dazu, den Abschreibungsplan degressiv zu gestalten. Der mathematisch einfachste Plan ergibt sich, wenn jährlich der gleiche Prozentsatz d vom jeweiligen Buchwert abgeschrieben wird (Saldoabschreibung). Der Buchwert nach k Jahren ist dann

$$B_k = A \left(1 - \frac{d}{100}\right)^k, \quad \text{und} \quad W = A \left(1 - \frac{d}{100}\right)^n \quad (15)$$

der Restwert. Der Abschreibungssatz $\frac{d}{100}$, der den Urwert A in n Jahren auf den Altmaterialwert W reduziert, ist $\frac{d}{100} = 1 - \sqrt[n]{\frac{W}{A}}$. Für den Altmaterialwert 0 würde das $d = 100\%$ ergeben. Das Objekt müßte schon nach einem Jahr vollständig abgeschrieben werden¹⁾.

Beispiel: $A = 1000$; $d = 10\%$; $n = 10$.

Jahr	Buchwert zu Beginn des Jahres	Abschreibung absolut	Abschreibung am Ende des Jahres in Proz. des Urwerts
1	1000	100	10,0
2	900	90	9,0
3	810	81	8,1
4	729	72,90	7,29
5	656,10	65,61	6,56
6	590,49	59,05	5,91
7	531,44	53,14	5,31
8	478,30	47,83	4,78
9	430,47	43,05	4,31
10	387,42	38,74	3,87

Summa 651,32, d. h. 65,13% des Urwerts.

Der Abschreibungsplan würde also einen Altmaterialwert von etwa 35% des Urwerts voraussetzen.

Der Restwert Null würde bei einem beliebigen von 100% verschiedenen Abschreibungsprozentsatz vom jeweiligen Buchwert streng überhaupt nie erreicht werden. Der Wertverlauf folgt eben dem Exponentialgesetz mit negativ wachsendem Exponenten; das graphische Bild ist eine Kurve, die bei wachsendem k der Nulllinie unbegrenzt nahekommt, ohne sie je zu erreichen. (Vgl. Zinseszinsdiskontierung.)

Der besprochene Abschreibungsplan hat die Eigenschaft, daß er die ersten Jahre der Lebensdauer des Vermögensobjekts erheblich stärker belastet als die letzten. Man muß schon etwa den Abschreibungsprozentsatz $d = 20\%$ vom jeweiligen Buchwert wählen und demgemäß die ersten drei Jahre mit der halben Gesamtabschreibung belasten, wenn das Objekt nach 10 Jahren bis auf 10% des Urwertes abgeschrieben sein soll. Derartige Überabschreibungen der ersten Jahre entsprechen auch bei Maschinenanlagen wohl kaum der Wertminderung durch Abnutzung, sind aber hier nicht ungebräuchlich: Der Veräußerungs-

¹⁾ Dieser Folgerung sucht man bisweilen durch eine abwegige Fiktion zu entgehen: daß als Altwert eine sog. Erinnerungsmark einzuführen sei; damit hätte man $\frac{d}{100} = 1 - \sqrt[n]{\frac{1}{A}}$. Für $A = 1000$, $n = 10$ würde das etwa $d = 50\%$ ergeben.

Aber statt den unbedeutenden Restwert durch „ $\frac{1}{1000}$ des Urwerts“ zu repräsentieren, könnte man irgendeinen anderen sehr kleinen Bruch dafür setzen und würde dann, wieder für $n = 10$, zu einem ganz anderen Prozentsatz d gelangen.

wert einer Maschine fällt in den ersten Jahren nach Inbetriebnahme schnell; steuerlich kann z. B. im ersten Betriebsjahre bis zu 20% des Urwerts über die normale Abschreibung hinausgegangen werden. Die dem reinen Exponentialgesetz entsprechenden degressiven Abschreibungen antizipieren in erheblichem Umfange die Selbstkosten künftiger Betriebsjahre. — Das gilt auch für den modifizierten Abschreibungsplan, der auf die Amortisation der Differenz von Urwert und Restwert abgestellt ist. Der jeweilige Buchwert wird hier mit

$$B_k = (A - W) \left(1 - \frac{d}{100}\right)^k + W \quad (15')$$

angesetzt; er strebt mit wachsendem k asymptotisch dem Altmaterialwert W zu, ohne zur genauen Übereinstimmung mit ihm zu gelangen.

Die Berechnung der dem Exponentialgesetz folgenden Abschreibungspläne kann oft einfach mit Hilfe der Tabellen der $v^k = \frac{1}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^k}$

durchgeführt werden. Man prüft demgemäß, ob die Gleichung $1 - \frac{d}{100} = \frac{1}{1 + \frac{p}{100}}$ einen in den Tabellen enthaltenen Zinsfuß p ergibt:

$$\frac{p}{100} = \frac{d}{100 - d}. \quad \text{Beispielsweise erhält man } p = 10\% \text{ für } \frac{d}{100} = \frac{1}{11}.$$

Manchmal identifiziert man zweckmäßig $1 - \frac{d}{100}$ mit einem passenden v^2 , oder v^3 usw.

Die gewöhnlichen Exponentialpläne lassen sich den tatsächlichen Gegebenheiten nur schlecht anpassen. Zu einem mehr befriedigenden Gesetz degressiver Abschreibungen gelangt man nach dem Vorschlag von C. M. Lewin¹⁾ durch Mittelwertbilden zwischen denjenigen Werten, die nach den beiden Verfahren: gleichmäßiger Abschreibungen vom Urwert und solcher vom jeweiligen Buchwert, erhalten werden. Wählt man für beide den gleichen Prozentsatz d , so wird

$$B_k = \frac{A}{2} \left[1 - \frac{d}{100} k + \left(1 - \frac{d}{100}\right)^k \right]. \quad (16)$$

Beispiel: (Abb. 12) $A = 1000$, $d = 10\%$.

Jahr	Buchwert zu Beginn des Jahres	Abschreibung am Ende des Jahres	Jahr	Buchwert zu Beginn des Jahres	Abschreibung am Ende des Jahres
1	1000	100	8	389,15	73,91
2	900	95	9	315,24	71,53
3	805	90,50	10	243,71	69,37
4	714,50	86,45	11	174,34	67,43
5	628,05	82,80	12	106,91	65,69
6	545,25	79,53	13	41,22	—
7	465,72	76,57			

¹⁾ Verhandlungen des Vereins zur Förderung des Gewerbefleißes 1908, S. 145.

Der Abschreibungsprozentsatz d , der bei diesem Verfahren erforderlich ist, um den Wert des Objekts in einer vorgeschriebenen Zahl n von Jahren auf Null zu reduzieren, kann aus der Gleichung $1 - \frac{d}{100} n + \left(1 - \frac{d}{100}\right)^n = 0$ durch Probieren und Interpolieren ermittelt werden (man nehme einige Probewerte $\frac{d}{100}$, die etwas größer als $\frac{1}{n}$ sind)¹⁾. Derselbe Wert für $\frac{d}{100}$ würde zu wählen sein, wenn der Buchwert nach der Formel

$$B_k = \frac{A - W}{2} \left[1 - \frac{d}{100} k + \left(1 - \frac{d}{100}\right)^k \right] + W \quad (16')$$

in n Jahren sich von A auf W reduzieren soll. Da diese Rechnungen etwas umständlich sind, hat sich das Lewinsche Verfahren in der Praxis nicht eingebürgert.

Um den Zweck des Lewinschen Verfahrens, die Milderung der Degression im Vergleich zum gewöhnlichen Exponentialplan und die Ermöglichung exakter Anpassung an den Altmaterialwert 0, zu erreichen, bringen wir folgenden Abschreibungsplan in Vorschlag, der an gewisse in der Praxis gebräuchlich gewordene Auskunftmaßnahmen²⁾ anknüpft: Für den Fall, daß der Altmaterialwert $W = 0$, setzen wir

$$B_k = 2A \left(1 - \frac{d}{100}\right)^k - A, \quad (17)$$

wobei $\frac{d}{100}$ aus der Bedingung $\left(1 - \frac{d}{100}\right)^n = \frac{1}{2}$ bestimmt wird:

$$\frac{d}{100} = 1 - \sqrt[n]{\frac{1}{2}}. \text{ Also}$$

$$B_k = A \left(2^{1 - \frac{k}{n}} - 1\right). \quad (17')$$

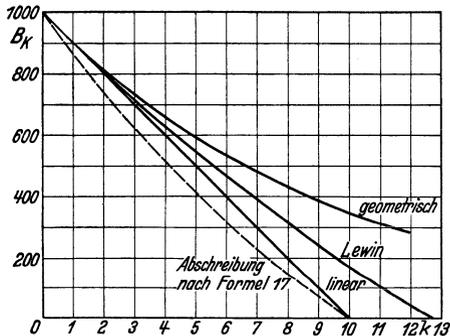


Abb. 12. Verschiedene Abschreibungspläne.

Wir nehmen also einen dem doppelten Objektwert $2A$ entsprechenden gewöhnlichen Exponentialplan, der auf den Restwert A führt, und bringen von dem damit erhaltenen jeweiligen Buchwert durchweg die Konstante A in Abzug.

¹⁾ Über die Auflösung trinomischer Gleichungen vgl. C. F. Gauß, Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen, 1850; Werke III S. 85ff. — S. Gundelfinger, Tafeln zur Berechnung der reellen Wurzeln sämtlicher trinomischer Gleichungen, Leipzig 1897.

²⁾ Einbeziehung sich nicht entwertender Vermögensobjekte in den Ausgangswert der Abschreibung; vgl. E. Schmalenbach, Dynamische Bilanz, 5. Aufl., 1931, S. 145f.

Beispiel (Abb. 12): $A = 1000$; $W = 0$; $n = 10$.

Es ergibt sich $\frac{d}{100} = 1 - \sqrt[10]{\frac{1}{2}} = 1 - 0,93304 = 0,06696$. Der auf $2A = 2000$ anzuwendende Abschreibungssatz ist rund $6\frac{2}{3}\%$ vom jeweiligen Buchwert, ergibt also eine als mäßig zu bezeichnende Degression.

Jahr	Buchwert zu Beginn des Jahres des doppelten Objekts	Buchwert zu Beginn des Jahres des geg. Objekts	Abschreibung am Ende des Jahres
1	2000	1000	133,92
2	1866,08	866,08	124,96
3	1741,12	741,12	116,62
4	1624,50	624,50	108,76
5	1515,74	515,74	101,50
6	1414,24	414,24	94,94
7	1319,30	319,30	88,16
8	1231,14	231,14	82,42
9	1148,72	148,72	76,92
10	1071,80	71,80	71,80

Das Verfahren ist ähnlich einfach zu handhaben wie die in kaufmännischen Kreisen beliebte gewöhnliche geometrisch-degressive Abschreibung. Es besitzt auch den von Schmalenbach¹⁾ dieser letzteren nachgerühmten Vorzug, daß es bei Berücksichtigung der durch Erneuerungskosten kommenden Zugänge Fehlgriffe in der Wahl des Abschreibungsgesetzes automatisch ausgleicht. — Statt des doppelten Ausgangswerts kann man auch $\frac{3}{2}$ oder $\frac{4}{3}$ usw. desselben dem Exponentialgesetz zugrundelegen und erhält dann statt (17') als jeweiligen Buchwert: $B_k = \frac{A}{2} \left(3^{1 - \frac{k}{n}} - 1 \right)$ bzw. $B_k = \frac{A}{3} \left(4^{1 - \frac{k}{n}} - 1 \right)$ usw. Will man in n Jahren bis auf einen Altmaterialwert W abschreiben, so kann man denselben hier vorgeschlagenen Abschreibungsplan benutzen, wobei $A - W$ für A eingesetzt und W im jeweiligen Buchwert hinzugefügt wird.

3. Progressive Abschreibungen.

Steigende Abschreibungen werden in der Praxis am Platze sein, wenn angenommen werden kann, daß die Reparaturen im Laufe der Zeit sich mehren und dabei als Gradmesser der Wertminderung des Objektes zu gelten haben; beispielsweise bei Gebäuden. Die einfachste Annahme ist, daß Reparaturkosten und Entwertung proportional der Zeit wachsen, also eine arithmetische Reihe bilden. Dem entspricht es, wenn wir die gesamte Wertminderung dem Quadrat der Anzahl der Jahre proportional, also, im Falle $W = 0$, gleich $A \frac{k^2}{n^2}$ ansetzen, so daß der jeweilige Buchwert $B_k = A \left(1 - \frac{k^2}{n^2} \right)$. (18)

¹⁾ A. a. O.

Die jeweilige Abschreibung am Schluß des Jahres k ist dann:

$$D_k = B_{k-1} - B_k = \frac{A}{n^2} [k^2 - (k-1)^2] = \frac{A}{n^2} (2k-1).$$

Hiernach würden sich in den ersten Jahren nur sehr geringe Wertminderungen ergeben: Die Kurve des Buchwerts berührt die Gerade, die einem unvermindert bleibenden Wert A entspricht. — Will man bei Gebäuden einer von vornherein einsetzenden gleichmäßigen Wertminderung Rechnung tragen, so kombiniert man mit der diesem Fall entsprechenden Formel für den Buchwert:

$B_k = A \left(1 - \frac{k}{n}\right)$, indem man das arithmetische Mittel nimmt:

$$B_k = A - \frac{A}{2} \left(\frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}\right). \quad (19)$$

Die Kurve des Buchwerts berührt dann die Gerade, die einer gleichmäßigen Wertminderung bis auf den Restwert $\frac{A}{2}$ entspricht. Sie entspricht

einem für Gebäudeabschreibungen gebräuchlichen Abschreibungsplan¹⁾. Will man auf den Restwert W abschreiben, so ist A durch $A - W$ zu ersetzen und W dem jeweiligen Buchwert hinzuzufügen.

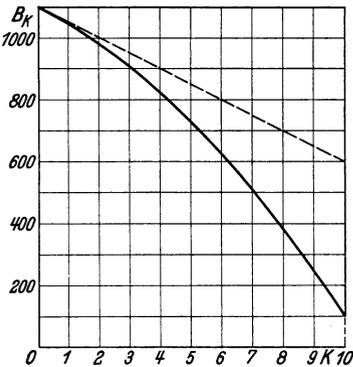


Abb. 13. Progressive Abschreibungen.

Beispiel: (Abb. 13) $A = 1100$; $W = 100$; $n = 10$.

Jahr	$\frac{A-W}{2} \left(1 - \frac{k}{n}\right)$	$\frac{A-W}{2} \left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right)$	Buchwert zu Beginn des Jahres	Abschreibung am Ende des Jahres
1	500	500	1100	55
2	450	495	1045	65
3	400	480	980	75
4	350	455	905	85
5	300	420	820	95
6	250	375	725	105
7	200	320	620	115
8	150	255	505	125
9	100	180	380	135
10	50	95	245	145

Ertragswert von Grundstücken. Der Ertrag eines bebauten Grundstücks sei nach Abzug aller Steuern, Lasten und Erhaltungskosten n Jahre hindurch gleich Z . Der dann verbleibende Restwert (Boden- und Altmaterialwert) sei W . Der Ertragswert E_0 zu Beginn des Zeit-

¹⁾ Vgl. Tonind.-Ztg. 1907 Nr. 134.

raums ist der Barwert einer n mal zahlbaren Rente Z und eines dann fälligen Kapitals W , also

$$E_0 = Z \cdot a_{\overline{n}|} + W \cdot v^n. \quad (20)$$

Analog ist der Ertragswert nach $k - 1$ bzw. k Jahren:

$$E_{k-1} = Z a_{\overline{n-k+1}|} + W v^{n-k+1}; \quad E_k = Z \cdot a_{\overline{n-k}|} + W \cdot v^{n-k}.$$

Die im k -ten Jahre eintretende Wertminderung, die am Schluß desselben abzuschreiben ist, beträgt also

$$D_k = E_{k-1} - E_k = Z v^{n-k+1} - W \cdot i \cdot v^{n-k+1}, \quad \text{oder} \\ D_k = R \cdot q^{k-1}, \quad \text{wo } R = (Z - iW) v^n. \quad (21)$$

Die gesamte am Schluß des k -ten Jahres zu verzeichnende Entwertung ergibt sich durch Aufsummieren der D_k zu $R s_{\overline{k}|}$. Der dann zu notierende Buchwert ist also

$$B_k = E_0 - R \cdot s_{\overline{k}|}. \quad (22)$$

Um die Substanz zu erhalten, genügt es, jährlich die Summe R vom Ertrag Z abzuspalten und einer zinstragenden Rücklage zuzuführen. Diese hat dann nach k Jahren genau den Bestand $R s_{\overline{k}|}$, nach n Jahren:

$$R s_{\overline{n}|} = (Z - iW) v^n \cdot s_{\overline{n}|} = Z a_{\overline{n}|} + W v^n - W = E_0 - W,$$

so daß zusammen mit dem Restwert W sich wieder E_0 ergibt. — Statt R nach (21) mit Hilfe des Jahresertrages Z zu berechnen, kann man natürlich auch nach der zuletzt erhaltenen Relation $R = (E_0 - W) P_{\overline{n}|}$ ansetzen.

Beispiel: Um einen Vergleich mit dem vorhin behandelten Plan progressiver Abschreibungen zu erleichtern, sollen die gleichen Werte $A = E_0 = 1100$; $W = 100$; $n = 10$ zugrunde gelegt werden, so daß Z erst aus ihnen abzuleiten ist; $p = 4\%$.

Lösung: Aus $E_0 = 1100 = Z a_{\overline{n}|} + W v^n = Z \cdot 8,110896 + 100 \cdot 0,675564$ ergibt sich $Z = 127,2909$. Ferner $R = (E_0 - W) P_{\overline{n}|} = 1000 \cdot 0,083291 = 83,291$ M.

Jahr	Ertragswert zu Beginn des Jahres	Abschreibung am Schluß des Jahres	Jahr	Ertragswert zu Beginn des Jahres	Abschreibung am Schluß des Jahres
1	1100	83,29	6	648,87	101,34
2	1016,71	86,62	7	547,53	105,39
3	930,09	90,09	8	442,14	109,60
4	840,00	93,69	9	332,54	113,99
5	746,31	97,44	10	218,55	118,55

IV. Kurs und Rentabilität von Tilgungsanleihen.

§ 12. Allgemeines. Zinsanleihe.

Ergibt sich im Börsenhandel durch Angebot und Nachfrage für ein auf den Nennwert K lautendes Wertpapier der Preis K' , so wird dieser,

in Hundertteilen des Nennwerts ausgedrückt, als Kurs bezeichnet (vgl. § 3):

$$C = \frac{K'}{K} \cdot 100. \quad (1)$$

Bei festverzinslichen Papieren bestimmter Qualität vollzieht sich die Kursgestaltung im wesentlichen in der Weise, daß die Marktlage eine bestimmte Rentabilität, den effektiven oder Marktzinssatz i' , von ihnen zu fordern gestattet. Nach diesem Marktzinssatz werden die gegenwärtigen und künftigen aus der Anleihe fließenden Leistungen bewertet. Bei einer Tilgungsanleihe liegt die Sache nun stets so, daß vom Schuldner für die Abgeltung ihres gesamten Nominalbetrages K oder des noch ausstehenden Schuldrestes zusammen für Rückzahlung und Zinsendienst (ev. auch Aufgeld, Prämien) n Jahresleistungen R_1, R_2, \dots, R_n zugesichert werden derart, daß

$$K = R_1 v + R_2 v^2 + \dots + R_n v^n, \quad (2)$$

wobei in v der Nominalzinssatz i bzw. der Nominalzinsfuß p zugrunde gelegt ist. Marktmäßig bewerten sich diese Jahresleistungen durch den Betrag

$$K' = R_1 v' + R_2 v'^2 + \dots + R_n v'^n, \quad (3)$$

wo im Diskontierungsfaktor v' der effektive Zinssatz i' zugrunde gelegt wird. Durch Einsetzen von (2) und (3) in (1) ergibt sich der mathematische Kurs zu Beginn einer Zinsperiode. Er liegt offenbar unter oder über dem Parikurs 100, je nachdem $i' \gtrless i$. Der Kurs kann nicht über 100 steigen, wenn der Schuldner die Anleihe jederzeit kündigen kann. Er muß mindestens 100 betragen, wenn der Gläubiger jederzeit Einlösung zum Nennwert beanspruchen kann.

Ist seit Beginn der Zinsperiode der Periodenbruchteil t verstrichen, so haben wir, wenn wir in dieser Zeit mit einfachen Zinsen rechnen und der Marktzinsfuß unverändert geblieben ist, als wahren Wert der Schuldverschreibungen $K' + K'i't$. Da der Nennwert nach wie vor gleich K , so ist der Kurs gestiegen auf

$$C_t = C + C'i't = C + (C'i' - p)t + pt = C_t^0 + pt.$$

Nach der Übung der deutschen Börsen wird im Kursblatt nur der Nettokurs

$$C_t^0 = C + (C'i' - p)t \quad (4)$$

notiert; die Stückzinsen sind dann gesondert zu vergüten.

Am Schluß der Zinsperiode, also $t = 1$, würde sich $C_1 = C_1^0 + p$ und nach Abtrennung des Zinsscheines der Kurs C_1^0 ergeben. Dieser würde jedoch nur für die Anleihe im ganzen, d. h. für den Durchschnittswert der einzelnen Schuldverschreibungen gelten. Wird ein Teil derselben zum Zinstermin ausgelost, so daß ihr Kurswert auf 100

springt, so muß bei einer unter pari stehenden Anleihe für die übrigen Schuldverschreibungen ein entsprechender Kursrückgang eintreten, so daß der Kursabschlag den Betrag p übersteigt. Der neue Kurs ist also nicht C_1^0 , sondern errechnet sich wiederum aus dem Gesamtwert der jetzt noch aufrechten Stücke nach den zu (1), (2), (3) analogen Formeln. Bei einer über pari notierenden Anleihe ergibt sich für die von der Auslosung betroffenen Stücke ein Verlust; ihm muß eine Kursbesserung der übrigen Stücke gegenüberstehen derart, daß der Durchschnittswert aller Stücke nach Abtrennung des Zinsscheins dem Kurs C_1^0 entsprechen würde; demgemäß ist hier der Kursabschlag für die nicht ausgelosten Stücke niedriger als p . Findet die Auslosung eine gewisse Zeitspanne vor dem Zinstermine statt, so scheiden sich die Kurse für die zur Auslosung gelangenden und die aufrecht bleibenden Stücke natürlich schon vom Verlosungstermin an. Für die letzteren findet man den Kurs, indem man den Anfangskurs der neuen Periode unter Einrechnung des Zinsscheins zurückdiskontiert.

Wenn K' und C sich auf den Beginn einer n -jährigen Tilgungsdauer einer Anleihe beziehen, ${}_h K'$ und ${}_h C$ dagegen auf den Beginn eines h Jahre umfassenden vorangehenden Zeitraumes, in dem nur Verzinsung erfolgt, so ist offenbar

$${}_h K' = K i a'_{\overline{h}|} + K' v'^h.$$

Denn $K i a'_{\overline{h}|}$ ist für diesen letzteren Zeitpunkt der Barwert der h Zinsraten, $K' v'^h$ der Barwert des für den Beginn der Tilgungsperiode geltenden Effektivwertes der Schuldverschreibung. Nach (1) ergibt sich demgemäß

$${}_h C = p a'_{\overline{h}|} + C v'^h. \quad (5)$$

Für die ewige Rente ($n = \infty$, $R_1 = R_2 = \dots = Ki$) wird $K' = K i a'_{\overline{\infty}|} = K \frac{i}{i'}$; also

$$C = \frac{i}{i'} 100, \quad (6)$$

in Übereinstimmung mit (3'') in § 3. Ferner wird $C_0^t = C + (C i' - p) t = C$, der Nettokurs ist beständig gleich dem für den Zinstermin geltenden Kurs.

Bei der Zinsanleihe, bei der n Jahre nur Zinsen $K i$ gezahlt werden und dann die Rückzahlung mit einem Aufgeld A erfolgt, ergibt sich nach (5)

$$C = p a'_{\overline{n}|} + (100 + A) v'^n. \quad (7)$$

Für $n = \infty$, wo $a'_{\overline{n}|} = \frac{1}{i'}$, $v'^n = 0$, geht C in $\frac{i}{i'} 100$, den Kurs der ewigen Rente, über. — Aus (7) gewinnt man durch einfache Umformung die für manche Zwecke geeignetere Form

$$C = 100 + A - [(1 + \alpha) p' - p] a'_{\overline{n}|}. \quad (7')$$

Beispiel: $i = 0,04$; $i' = 0,06$; $A = 10$; $n = 20$.

$$C = 4 a'_{\overline{20}|} + 110 \cdot v'^{20} = 4 \cdot 11,4699 + 110 \cdot 0,311805 \\ = 45,8796 + 34,2985 \approx 80,18.$$

Für den Inhaber eines auf 100 M lautenden Stückes würde 6%ige Verzinsung des Kaufpreises 80,18 M eine jährliche Zinseinnahme von 4,81 M bedeuten, während in Wirklichkeit nur 4 M vereinnahmt werden. Das Defizit von jährlich 0,81 M wird gedeckt aus dem bei der Rückzahlung erzielten, 29,82 M betragenden Gewinn, der sich tatsächlich in eine Rente von jährlich $29,82 P'_{\overline{20}|} = 29,82 \cdot 0,0272 = 0,81$ M auflösen läßt. — Vier Monate nach dem oben zugrunde gelegten Termin beträgt der Nettokurs der Anleihe $C'_{\frac{1}{3}} = 80,18 + (4,81 - 4) \cdot \frac{1}{3} = 80,45$.

Man kann die Formeln (7), (7') benutzen, um bei einer beliebigen verzinslichen Teilschuldverschreibung den Zusammenhang zwischen dem Ankaufskurs C , dem Erlöskurs $100 + A$ und der vom Inhaber des Stückes tatsächlich erzielten Rentabilität i' festzustellen. In der Tat bestimmt sich zwar bei einer Anleihe, die nach irgendwelchen Bedingungen verzinst und getilgt wird, der jeweilige Kurs durch Bewertung der gesamten vom Schuldner noch aufzubringenden Leistungen nach Maßgabe des Marktzinsfußes, der dann die durchschnittliche Rentabilität der noch aufrechten Stücke darstellt. Aber für den Inhaber einer einzelnen Teilschuldverschreibung, die zum Börsenkurs gekauft und verkauft wird, bzw. ausgelost wird und mit dem Nennwert oder irgendeinem Einlösungsbetrag (Aufschlag, Prämie) herauskommt, liegt die Sache genau so wie bei den Stücken einer Zinsanleihe, und die erzielte Rentabilität ist individuell verschieden. Als mathematische Lebensdauer einer Teilschuldverschreibung bezeichnet man die Laufzeit n einer bei gleichem Gestehungs- und Einlösungskurs zur gleichen Rentabilität führenden gewöhnlichen Zinsanleihe. — Man kann auch bei gegebenem Einkaufskurs C nach (7) den Verkaufskurs $100 + A$ ermitteln, der zu einem bestimmten Termin erreicht werden müßte, wenn der Inhaber der Schuldverschreibung eine gewünschte Rentabilität i' erzielt haben soll.

Beispiel: Jemand kauft am 1. April 1928 eine nominell mit 5% verzinsliche Teilschuldverschreibung zum Kurs $C = 92$; Zinstermin 1. Februar. Welcher Verkaufskurs müßte am 1. August 1933 erreicht werden, wenn die Rentabilität sich auf 6% stellen soll?

Lösung: Am 1. Februar 1928 nach Abtrennung des Zinsscheines ist für die 5 Zinsraten der Kursanteil $5 \cdot a'_{\overline{5}|}$ zu rechnen, am 1. April 1928 also $5 a'_{\overline{5}|} \left(1 + \frac{1}{6} \cdot 0,06\right)$. Für die Bewertung der Rückzahlung $100 + A$ ist an diesem Tage $n = 5 \frac{1}{3}$ einzusetzen. Der entsprechende Kursanteil beträgt also $(100 + A) \frac{v'^5}{1 + \frac{1}{3} \cdot 0,06}$. Mit-

hin ergibt sich:

$$92 = 5 a'_{\overline{5}|} \left(1 + \frac{1}{6} \cdot 0,06 \right) + (100 + A) \frac{v'^5}{1 + \frac{1}{3} \cdot 0,06};$$

$$100 + A = (92 - 5 \cdot 4,2124 \cdot 1,01) \cdot 1,06^5 \cdot 1,02 = 70,7274 \cdot 1,3382 \cdot 1,02 = 96,54.$$

Will man mit Hilfe von (7) die Rentabilität i' aus gegebenem Einkaufskurs C und Erlöskurs $100 + A$ ermitteln, so handelt es sich um die Auflösung einer Gleichung höheren Grades, da i' sowohl in $a'_{\overline{n}|} = \frac{1-v'^n}{i'}$ wie in $v' = \frac{1}{1+i'}$ enthalten ist. Diese gelingt näherungsweise, indem man in die rechte Seite von (7) zur Probe mehrere Rentabilitätswerte i'_1, i'_2, \dots einführt, die entsprechenden Kurswerte ausrechnet und nach dem in § 5 geschilderten Interpolationsverfahren das dem gegebenen Kurswert C entsprechende i' ermittelt. Praktisch begnügt man sich mit linearer Interpolation.

Beispiel: Von einer Annuitätenanleihe, die in ganzjährigen, mit dem 1. April beginnenden Perioden mit nominell 4% verzinst und mit einem Aufgeld $A = 10\%$ getilgt wird, erwirbt jemand am 1. April 1928 ein Stück nach Abtrennung des Zinsscheins zum Kurs $C = 98$. Das Stück wird am 1. April 1934 ausgelost. Welche Rentabilität wurde erzielt?

Lösung: $C = 4 a'_{\overline{6}|} + 110 \cdot v'^6$; die Ansätze $i'_1 = 0,05$; $i'_2 = 0,06$ ergeben:

$$C_1 = 4 \cdot 5,0757 + 110 \cdot 0,746215 = 20,3028 + 82,0837 = 102,3865;$$

$$C_2 = 4 \cdot 4,9173 + 110 \cdot 0,704961 = 19,6692 + 77,5457 = 97,2149;$$

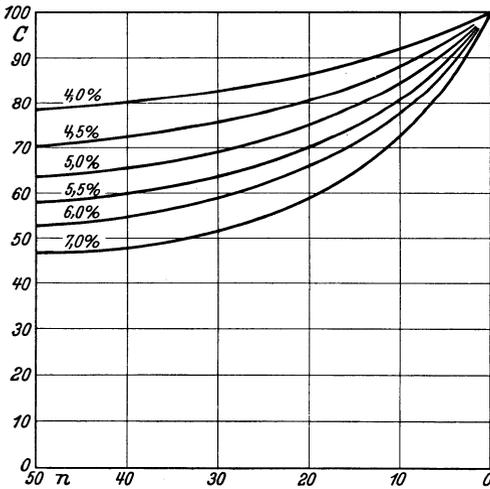


Abb. 14. Kursentwicklung der 3%igen Zinsanleihe.

$$i'_2 - i'_1 = (i'_2 - i'_1) \frac{C - C_2}{C_1 - C_2}$$

$$= 0,01 \cdot \frac{0,7851}{5,1716} = 0,0015.$$

Die Rentabilität beträgt also 5,85%.

Zur Lösung derartiger Aufgaben bedient man sich auch mit Vorteil des in der politischen Arithmetik noch wenig eingebürgerten graphischen Verfahrens. In Abb. 14 stellen die Kurven, die entsprechend den verschiedenen Werten des effektiven Zinsfußes p' beziffert sind, die Entwicklung des Kurses einer nominell mit 3% verzinslichen, zum Parikurs rückzahlbaren Zinsanleihe dar. Die Abszissen n bezeichnen die bis zur Einlösung noch anstehende Laufzeit. Hat

man nun von einer beliebigen Tilgungsanleihe n Jahre vor der Einlösung ein Stück zum Kurse C gekauft, so liest man an der durch den Punkt (n, C) gehenden Kurve (die nötigenfalls zu interpolieren ist) die erzielte Rentabilität p' ab. Beispielsweise findet man für den Fall, daß der Gesteungskurs $C = 75\%$ und die Laufzeit $n = 20$ beträgt, die Rentabilität 5%.

Um beliebige Nominalzinsfüße p zu erfassen, stellt man sich für die Formel (7') ein Nomogramm (Abb. 15) her wie folgt. Sei zunächst $A = 0$, also $100 - C = (p' - p) a'_{\overline{n}|}$. Zu den n als Abszissen trägt man die Kurven $y = a'_{\overline{n}|}$ für die in Frage kommenden Zinsfüße $p' = 2\%, 3\%, 4\%, \dots$ auf. Andererseits stellt man

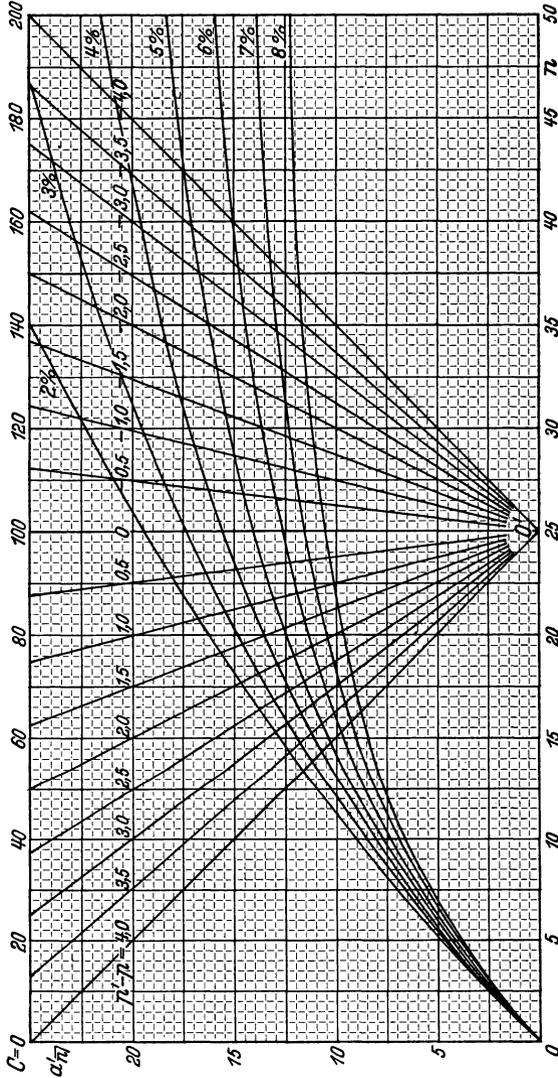


Abb. 15. Kursnomogramm für Zinsanleihen.

auf einer Parallelen zur Abszissenachse die Kurse C nach rechts wachsend dar und denkt sich durch den zu $C = 100, y = 0$ gehörenden Punkt O' eine zur Ordinatenachse parallele Hilfsachse gelegt, so daß die von ihr aus nach links gerechneten Abszissen $x' = 100 - C$. Durch O' zieht man Strahlen, die die Neigung $\mu = p' - p$ gegen die Hilfsachse haben, und beziffert sie entsprechend den Werten von $p' - p$. Aus der Relation $100 - C = \mu a'_{\overline{n}|}$ ergibt sich dann folgende Vor-

schrift: Durch den Endpunkt der zu n gehörenden Ordinate $a'_{\overline{n}}$ lege man die Parallele zur x -Achse (Benutzung von Millimeterpapier!) bis zum Schnittpunkt mit dem die Kote $p' - p$ tragenden Strahl. Seine Abszisse im alten Koordinatensystem ist dann der gesuchte Kurswert C . Beispielsweise findet man zu $p = 5\%$, $p' = 6\%$; $n = 30$ den Kurs $C = 86,2$. In der Figur sind die $a'_{\overline{n}}$ im vierfachen Maßstabe wie die Kurse aufgetragen, dementsprechend die Bezifferung $p' - p$ der durch O' gehenden Strahlen gleich dem Vierfachen ihrer Neigung μ . — Ist $100 + A$ der Rückzahlungskurs, so kann dasselbe Nomogramm benutzt werden. Nur bedeuten dann die Koten der von O' ausgehenden Strahlen $(1 + \alpha) p' - p$, die Abszissen $C - A$.

§ 13. Annuitätenanleihen.

Wird eine Anleihe vom Nominalbetrage K durch n sofort beginnende nachschüssige gleiche Annuitäten R verzinst und ohne Aufgeld getilgt, so daß $K = Ra_{\overline{n}}$, so sind diese Leistungen zu bewerten mit $K' = Ra'_{\overline{n}}$. Der Ausgabekurs der Anleihe errechnet sich also nach (1) zu

$$C = 100 \frac{a'_{\overline{n}}}{a_{\overline{n}}} = 100 \cdot J_{\overline{n}} \cdot a'_{\overline{n}} \quad (8)$$

Für $n = \infty$ geht C in $100 \cdot \frac{1}{\frac{i'}{1}} = 100 \cdot \frac{i}{i'}$, den Kurs der ewigen Rente, über.

Formel (8) gilt auch für den Kurs der Anleihe an einem Tilgungstermin nach Abtrennung des Zinsscheins, wenn noch n Annuitäten ausstehen. Dauert es bis zum Beginn des Tilgungszeitraumes noch h Jahre, in denen nur Zinsen bezahlt werden, so ergibt sich für den Kurs nach (5):

$${}_h C = pa'_{\overline{h}} + 100 \cdot v'^h J_{\overline{n}} \cdot a'_{\overline{n}} \quad (9)$$

Beispiel: Ein Gemeinwesen bringt am 1. Januar 1925 eine auf $K = 10000000$ M lautende, mit 4% verzinsliche Anleihe heraus. Nach einer Sperrfrist von 10 Jahren setzt die Tilgung durch 25 gleiche nachschüssige Annuitäten ein. Man bestimme den Emissionskurs der Anleihe für den Fall, daß eine Rentabilität $i' = 0,05$ geboten werden soll, ferner den durch die Emission erzielten Barerlös, schließlich den Nettokurs am 1. Juni 1925.

$$\begin{aligned} \text{Lösung: } C &= 4 \cdot a'_{\overline{10}} + 100 \cdot v'^{10} \cdot J_{\overline{25}} \cdot a'_{\overline{25}} \\ &= 4 \cdot 7,7217 + 100 \cdot 0,613913 \cdot 0,064012 \cdot 14,093945 \\ &= 30,8868 + 55,3860 = 86,273\% \end{aligned}$$

Der vom Gemeinwesen erzielte Barerlös beträgt demnach 8627300 M. Der Nettokurs am 1. Juni 1925 ist $C_t^0 = C + (C \cdot 0,05 - 4) \cdot \frac{5}{12} = 86,27 + (4,31365 - 4) \cdot \frac{5}{12} = 86,27 + 0,13 = 86,40\%$.

1) Für den nach (8) sich ergebenden Kurs von Schuldverschreibungen ohne Sperrfrist finden sich Tabellen z. B. bei G. Schinkenberger, Handbuch der Berechnung von Anleihen und Annuitäten und der Kurs- und Rentabilitätswerte von Obligationen, Frankfurt a. M. 1888. — S. Spitzer, Tabellen für die Zinseszinsen- und Rentenrechnung, ergänzt durch Kurstabellen von E. Foerster, 6. Aufl., Wien 1922. — W. Lorey — E. Beyrodt, Tafeln zur Mathematik des Geldverkehrs und der Versicherung, Leipzig 1931.

Man kann sich für die Bestimmung des Kurses nach der Formel $C = 100 \cdot \frac{a'_n}{a_n}$ ein Nomogramm (Abb. 16) herstellen wie folgt: Zu den n als Abszissen trägt man die Kurven $y = a_n$ für die in Frage kommenden Zinsfüße $p = 2, 3, 4, \dots$ % auf.

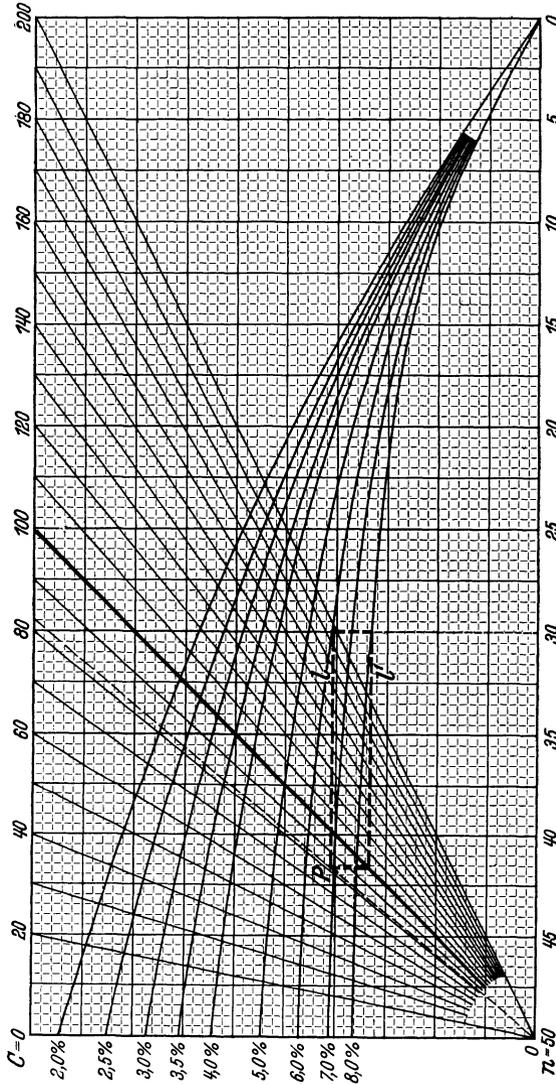


Abb. 16. Kursnomogramm für Annuitätenanleihen.

Durch den Koordinatenanfangspunkt zieht man Strahlen, die die Neigung $\mu = \frac{C}{100}$ gegen die Ordinatenachse haben, und beziffert sie mit den C -Werten. Beispielsweise entspricht dem unter 45° laufenden Strahl der Kurs 100. Aus der Relation $a'_n = \mu a_n$ ergibt sich dann folgende Vorschrift: Durch die Endpunkte der zum gegebenen n gehörenden Ordinaten a_n, a'_n nehme man die Parallelen zur x -Achse

l und l' . Die Vertikale, die durch den Schnittpunkt von l' mit dem zum Kurs 100 gehörenden Strahl geht, schneidet l in einem Punkte P . Der Strahl OP ist dann mit dem gesuchten Kurs C beziffert¹⁾. — Das Verfahren wird durch Verwendung von Millimeterpapier erleichtert. Man kann auch P mittels einer achsenparallel verschobenen graduierten Schiene bestimmen und den Strahl OP durch einen Faden festlegen, der nach dem mit dem zugehörigen C -Wert bezifferten Punkt des Nomogrammrandes gespannt wird. Beispielsweise findet man zu $p = 6\%$, $p' = 8\%$; $n = 30$ den Kurs $C = 81,8$. — Vereinigt man diese Rechentafel mit dem Nomogramm Abb. 15²⁾, so gestaltet sich die Bestimmung der mathematischen Lebensdauer eines Stücks der Annuitätenanleihe besonders bequem. In dem eben betrachteten Beispiel legt man durch den Punkt, in dem die Vertikale $x = 81,8$ den Strahl $p' - p = 2$ schneidet, die Horizontale. Diese schneidet die zu 8% gehörende $a'_{\overline{n}|}$ -Kurve in einem Punkte, in dem man den Abszissenwert $n = 16,9$ als mathematische Lebensdauer abliest.

Ist nicht n , sondern die Annuität R oder der Tilgungsfuß gegeben, so wird zunächst $n = N + t$ aus den Tilgungstabellen bzw. logarithmisch bestimmt (vgl. § 8), sodann C aus der Kurstabelle durch Interpolation zwischen den zu N und $N + 1$ gehörenden Kursen; genauer erhält man C , wenn man in (8) $J_{\overline{n}|} = \frac{R}{K}$ setzt und $a'_{\overline{n}|}$ zwischen $a'_{\overline{N}|}$ und $a'_{\overline{N+1}|}$ interpoliert.

Für zwei Anleihen, die im gleichen Zeitraum n durch gleiche Annuitäten getilgt werden und die gleiche Rentabilität liefern, gilt

$$C_1 = 100 \cdot J_{\overline{n}|}^{(1)} \cdot a'_{\overline{n}|} \quad \text{und} \quad C_2 = 100 \cdot J_{\overline{n}|}^{(2)} \cdot a'_{\overline{n}|}.$$

Bei der Division fällt der von der effektiven Verzinsung abhängende Faktor $a'_{\overline{n}|}$ heraus. Die Bedingung der Kursparität zweier einfacher Annuitätenanleihen

$$C_1 : C_2 = J_{\overline{n}|}^{(1)} : J_{\overline{n}|}^{(2)} = a_{\overline{n}|}^{(2)} : a_{\overline{n}|}^{(1)} \quad (10)$$

ist also ganz unabhängig vom Marktzinsfuß. Für $n = \infty$, wo $a_{\overline{\infty}|}^{(2)} = \frac{1}{i_2}$, $a_{\overline{\infty}|}^{(1)} = \frac{1}{i_1}$, geht sie in $C_1 : C_2 = i_1 : i_2$ über, d. h. die von früher bekannte Bedingung der Kursparität ewiger Renten.

Beispiel: Eine in 25 Jahren zu tilgende Annuitätenanleihe kann untergebracht werden: entweder zum Kurs 95,5 bei Verzinsung mit $4\frac{1}{2}\%$ oder zum Kurs 99,5 bei 5% iger Verzinsung. Welches Angebot ist für den Schuldner günstiger?

Lösung: Nehmen wir $C_1 = 95,5$, so ist der dazu paritätische Kurs C_2 einer 5% igen Anleihe zu bestimmen aus

$$95,5 : C_2 = 14,093945 : 14,828209; \text{ also} \\ C_2 = \frac{14,828209}{14,093945} \cdot 95,5 = 100,475\%.$$

¹⁾ Zur Entlastung der Umgebung des O -Punkts sind in der Abbildung die $a_{\overline{n}|}$ -Kurven mit Beziehung auf eine parallel verschobene Ordinatenachse gespiegelt eingetragen.

²⁾ Universal-Kursnomogramm, D.R.G.M. angemeldet. — Der Grundgedanke des logarithmischen Rechenschiebers wird zur Bestimmung des Kurses von Annuitätenanleihen benutzt beim Tokometer von M. Kraitchik, Les Tables graphiques financières, Paris 1927.

Der dem Schuldner im zweiten Fall angebotene Zuzahlungskurs ist nur 99,5%, mit ihm erzielt er einen geringeren Barerlös. Er wird also das erste Angebot vorziehen.

Die Bestimmung der Rentabilität einer aufgeschobenen Annuitätenanleihe führt, da i' gleichzeitig in $a_{\overline{n}|}^i$, v'^n und $a_{\overline{n}|}^{i'}$ auftritt, auf eine algebraische Gleichung höheren Grades. Diese löst man näherungsweise nach dem bei der Zinsanleihe (§ 12) geschilderten Interpolationsverfahren.

Beispiel: Der Emissionskurs einer mit 4% verzinslichen Anleihe, die vom Ende des 11. Jahres an durch 25 gleiche Annuitäten verzinst und amortisiert wird, beträgt $C = 94$. Welche effektive Verzinsung leistet der Schuldner?

Lösung: $C = 4 \cdot a'_{\overline{10}|} + 100 \cdot v'^{10} \cdot \frac{a'_{\overline{25}|}}{a_{\overline{25}|}}$. Ansätze: $i'_1 = 0,04$; $i'_2 = 0,05$.

$$C_1 = 100;$$

$$C_2 = 4 \cdot 7,7217 + 100 \cdot 0,613913 \cdot 14,093944 \cdot 0,064012 = 86,2730;$$

$$i'_2 - i'_1 = (i'_2 - i'_1) \frac{C - C_2}{C_1 - C_2} = 0,01 \cdot \frac{7,7270}{13,7270} = 0,0056.$$

Die Rentabilität beträgt also 4,44%.

Soll man zu dem festgelegten Kurs einer durch eine gewisse Bedingung gekennzeichnete Annuitätenanleihe mit Sperrfrist den Paritätskurs einer anderen aufgeschobenen Annuitätenanleihe ermitteln, so bestimmt man zunächst nach dem eben beschriebenen Verfahren die Rentabilität i' der ersten Anleihe, sodann den diesem Wert i' entsprechenden Kurs der zweiten Anleihe. (Diesen letzten Schritt wird man, da der ermittelte i' -Wert eine unrunde Zahl sein wird, ebenfalls interpolatorisch durchführen, gestützt auf die beiden benachbarten runden i' -Werte, für die die Tabellen die benötigten Werte v'^n , $a_{\overline{n}|}^{i'}$ enthalten.)

Bei einer Annuitätenanleihe K mit Aufgeld $A = 100\alpha$, die durch n gleiche Annuitäten R verzinst und getilgt wird, legen wir zwecks Kursermittlung den tatsächlichen Rückzahlungsbetrag $\mathfrak{R} = K(1 + \alpha)$ zugrunde. Die Annuität beträgt $R = \mathfrak{R} \mathfrak{S}_{\overline{n}|}^i$, wo in $\mathfrak{S}_{\overline{n}|}^i$ der Zinssatz $i = \frac{i}{1 + \alpha}$ benutzt wird. Der Gesamtwert der Anleihe ist also $K' = R a_{\overline{n}|}^{i'}$ = $\mathfrak{R} \mathfrak{S}_{\overline{n}|}^i \cdot a_{\overline{n}|}^{i'}$. Mithin ist der Kurs

$$\mathfrak{C} = 100 \cdot \frac{K'}{K} = 100(1 + \alpha) \mathfrak{S}_{\overline{n}|}^i \cdot a_{\overline{n}|}^{i'}. \quad (11)$$

Offenbar wird $\mathfrak{C} \geq 100(1 + \alpha)$ ausfallen, je nachdem $i' \leq i$ ist; als Parikurs der Anleihe ist $100(1 + \alpha)$ anzusehen.

Beispiel: Für $i = 0,045$; $i' = 0,06$; $\alpha = 0,125$; $n = 30$ ergibt sich mit $i = 0,04$: $\mathfrak{C} = 112,5 \cdot \mathfrak{S}_{\overline{30}|}^i \cdot a_{\overline{30}|}^{i'} = 112,5 \cdot 0,057830 \cdot 13,764831 = 89,55$.

Der Vergleich mit dem Kurs $C = 100 \cdot J_{\overline{n}|} \cdot a_{\overline{n}|}^{i'}$ der aufgeldlosen Anleihe liegt nahe. Setzt man $\lambda = (1 + \alpha) \mathfrak{S}_{\overline{n}|}^i a_{\overline{n}|}^{i'}$, so ist $\mathfrak{C} = \lambda \cdot C$; hierin ist λ eine von der effektiven Verzinsung i' unabhängige Größe, die für gegebenes α aus der Spitzerschen Tabelle $C II$ durch Interpolation ermittelt werden kann.

Bei Prämienanleihen wird der Kurs C nicht auf den Nennwert 100 bezogen, sondern bezeichnet den Wert des einzelnen Loses. Ist \mathfrak{Q} die Gesamtzahl der Lose, so ist

$$C = \frac{K'}{\mathfrak{Q}}. \quad (12)$$

Vielfach hat man es mit einem unregelmäßigen Annuitätenplan zu tun. Dann muß K' als Summe der Beträge angesetzt werden, die man durch Diskontierung der einzelnen Annuitäten nach Maßgabe des Marktzinsfußes erhält. Haben die Auslosungen und Gewinnausschüttungen bereits begonnen, so muß der Kurs der noch mit Gewinnschein versehenen Lose von dem der anderen gesondert ermittelt werden.

Bei der in § 9 behandelten verzinslichen Prämienanleihe, bei der für Zinsendienst, Tilgung und Gewinne gleiche, auf der Grundlage des Zinssatzes $i = 0,06$ berechnete Annuitäten zur Verfügung stehen sollten, ergibt sich bei Ausgabe von 100000 Losen als Emissionskurs einfach $C = 100 \cdot J_{100} \cdot a'_{100} = 13,5868 \cdot a'_{100}$.

§ 14. Kurs und Tilgungsverlauf. Kursanteil von Zinsen und Rückzahlungen.

Effektivwert und Kurs einer Anleihe lassen sich auch in folgender Weise berechnen. Wenn die nach Erfüllung der fälligen Tilgungsverpflichtungen verbleibenden Schuldreste zu Beginn des 1., 2., ..., n . Jahres V_0, V_1, \dots, V_{n-1} betragen, so ergeben die Zinsverluste der Gläubigerschaft, die die Verzinsung i' beansprucht, aber nur i erhält, den Barwert

$$D = V_0 (i' - i) v' + V_1 (i' - i) v'^2 + \dots + V_{n-1} (i' - i) v'^n. \quad (13)$$

Diesen als Disagio bezeichneten Betrag muß man vom Nominalwert K der Anleihe abziehen, um den Effektivwert K' zu erhalten. Setzen wir die Summe der diskontierten Schuldreste

$$V_0 v' + V_1 v'^2 + \dots + V_{n-1} v'^n = V', \quad (14)$$

so ist $D = (i' - i) V'$ und daher $K' = K - (i' - i) V'$. Dieselbe Formel gilt auch, wenn $i' < i$: Der Barwert der in diesem Falle der Gläubigerschaft zufließenden Zinsgewinne würde $(i - i') V'$ betragen, und diese als Agio bezeichnete Größe müßte dem Schuldner bei Übernahme der Anleihe draufgezahlt werden. In jedem Falle ergibt sich nach (1) als Kurs der Anleihe

$$C = 100 - (p' - p) \frac{V'}{K}. \quad (15)$$

Bei der Aufgeldanleihe, die durch n Annuitäten oder nach n Jahren auf einmal getilgt wird, tritt $\mathfrak{R} = K(1 + \alpha)$ als tatsächlicher Schuldbetrag an die Stelle des Nennwerts K der Anleihe, dementsprechend $i = \frac{i}{1 + \alpha}$ an die Stelle von i , $\mathfrak{B}_k = V_k(1 + \alpha)$ an die Stelle des jeweiligen nominellen

Schuldrestes V_k , dementsprechend $\mathfrak{R}' = V'(1 + \alpha)$ an die Stelle des in (14) definierten V' . Damit ergibt sich

$K' = K(1 + \alpha) - (i' - i)V'(1 + \alpha) = K(1 + \alpha) - [i'(1 + \alpha) - i] \cdot V'$;
demnach als Kurs

$$\mathfrak{C} = 100 \frac{K'}{K} = 100 + A - [p'(1 + \alpha) - p] \frac{V'}{K}. \quad (15')$$

Bei Konvertierung von Anleihen wird oft in der Weise vorgegangen, daß man den Zinsfuß von p auf p_1 herabsetzt, ohne die noch ausstehenden Rückzahlungsquoten zu ändern. Der neue Kurs C_1 wird dann, da V' unverändert bleibt, bei einer aufgeldlosen Anleihe nach (15) durch die Beziehung

$$(100 - C_1) : (100 - C) = (p' - p_1) : (p' - p) \quad (16)$$

bestimmt: Die Abweichungen der Kurse vom Parikurs verhalten sich wie die Abweichungen der Zinsfüße vom Marktzinsfuß. Aus (16) folgt die bei der Konvertierung eintretende Kursänderung:

$$C - C_1 = \frac{p - p_1}{p' - p} (100 - C). \quad (16')$$

Die Konvertierung einer Anleihe kommt im allgemeinen nur in Frage, wenn der Schuldner sich das Kündigungsrecht vorbehalten hat und der Kurs der Anleihe über pari steigt. In diesem Fall liegt die für den Nennwert der Schuldverschreibungen gebotene Verzinsung i über dem Marktzinsfuß i' , der Schuldner kann sich also das zur Rückzahlung des gesamten Anleihebetrages K erforderliche Kapital anderweitig billiger verschaffen. Da die Aufnahme einer neuen Anleihe immerhin mit Unkosten verbunden ist, wird er es vielfach vorziehen, den Inhabern der Stücke der bisherigen Anleihe den Umtausch ihrer Teilschuldverschreibungen gegen solche mit herabgesetztem Zinsfuß anzubieten.

Mit Hilfe der Formel (15) bzw. (15') kann man sich ein Bild von der Kursentwicklung einer Anleihe machen, die nicht mit Prämienauslösung verknüpft ist. Da bei jeder gewöhnlichen Tilgungsanleihe die Schuldreste V_k kleiner sind als diejenigen bei der ewigen Rente vom gleichen Nennbetrage K (anfänglich stimmen sie überein), so gilt das Entsprechende von V' , ihrem Barwert. Mithin liegt der Kurs der Tilgungsanleihe dauernd näher am Parikurs als derjenige der ewigen Rente, d. h.

$C_\infty = 100 \frac{i}{i'}$. Im Verlauf des Tilgungszeitraumes scheiden mehr und mehr der in V' steckenden Glieder aus, während die darin erfaßten Schuldreste jedenfalls nicht wachsen. Mithin wird V' selbst dabei abnehmen, der Kurs C sich also dem Parikurs beständig nähern¹⁾, den er bei Abschluß der Tilgung erreicht. Als Parikurs gilt hier bei aufgeldlosen Anleihen

¹⁾ Bei Prämienanleihen treten gelegentlich Schwankungen in der Kursentwicklung ein, die durch Anhäufung von Gewinnen in einzelnen Jahren bedingt sind.

100, bei Aufgeldanleihen $100 + A$. Abb. 17 stellt die Kursentwicklung der aufgeldlosen Annuitätenanleihe für $n = 100$, $p = 5\%$, $p' = 6\%$ dar. Für die einfache Zinsanleihe vgl. Abb. 14.

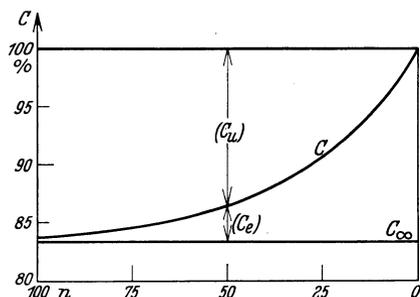


Abb. 17.

Auch für Tilgungsanleihen verschiedener Art, die dem gleichen Tilgungszeitraum n entsprechen, kann man die Kurse auf Grund der Formel (15) vergleichen, z. B. für die Zinsanleihe, die nach n Jahren auf einmal, und für die Annuitätenanleihe, die durch n jährliche wachsende Rückzahlungsquoten getilgt wird. Bei der letzteren sind die Schuldenreste durchweg kleiner als bei

der ersteren, dasselbe gilt also auch von V' . Mithin verläuft für $i' > i$ die den Kurs der Annuitätenanleihe darstellende Kurve durchweg oberhalb derjenigen für den Kurs der Zinsanleihe.

Die Formeln (15), (15') geben auch die Möglichkeit, allgemein festzustellen, wie sich der Anleihekurs C zusammensetzt aus einem Anteil C_u , der dem Wert des Fruchtgenusses, d. h. der künftigen Zinsen entspricht, und einem Anteil C_e , der sich auf das Eigentum, die Rückzahlungsquoten bezieht. Schreiben wir

$$\frac{100 - C}{p' - p} = 100 \cdot \frac{0,01 V'}{K},$$

so bedeutet $0,01 V'$ den Barwert von 1% aller Schuldenreste, d. h. den Barwert des gesamten noch aufkommenden Zinsendienstes, wenn dieser 1% vom jeweiligen Schuldrest betrüge. Die durch Multiplikation mit $\frac{100}{K}$ entstehende Größe würde also den Kursanteil des Fruchtgenusses bei nominell einprozentiger Verzinsung bedeuten. Bei p -prozentiger Verzinsung gilt daher:

$$C_u = \frac{100 - C}{p' - p} \cdot p. \quad (17)$$

Der den Rückzahlungen entsprechende Kursanteil wird

$$C - C_u = C - \frac{100 - C}{p' - p} \cdot p = \frac{C p' - 100 p}{p' - p} = 100 \cdot \frac{C - 100 \cdot \frac{p}{p'}}{100 - 100 \cdot \frac{p}{p'}},$$

also

$$C_e = 100 \cdot \frac{C - C_\infty}{100 - C_\infty}. \quad (18)$$

Nach (17) bzw. (18) kann man die Kursberichtigungen ermitteln, die durch steuerliche Zinskürzungen oder vom Schuldner zu tragende, als Zinszuschläge sich

auswirkende Nebengebühren bzw. durch Spesen bei den Rückzahlungen bedingt sind. — Die Zähler der in (17) und (18) vorkommenden Brüche werden dargestellt durch die beiden Abschnitte, in die die Kurve des Kurses C (Abb. 17) den Abstand zwischen der Linie des Parikurses und des Kurses der ewigen Rente teilt. Legen wir einen festen Nominal- und Marktzinsfuß zugrunde, so können wir sagen: Je stärker die Rückzahlungen auf den Schluß des Tilgungszeitraums hinausgeschoben werden, um so größer $|100 - C|$ und damit C_u , um so kleiner andererseits $|C - C_\infty|$ und damit C_e . Dabei muß für $p' > p$, $C < 100$ der Kursanteil C_u des Fruchtgenusses um weniger wachsen als C_e abnimmt, weil doch $C = C_e + C_u$ abnimmt.

Für $n = 20$, $p = 4\%$, $p' = 5\%$ ergibt sich beispielsweise bei der Annuitätenanleihe: $C = 100 J_{20} \cdot a'_{20} = 91,70$; $C_u = \frac{100 - 91,70}{1} \cdot 4 = 33,2$;

$C_e = 100 \frac{91,70 - 80}{100 - 80} = 58,50$; dagegen bei der gewöhnlichen Zinsanleihe:

$C = 4 a'_{20} + 100 \cdot v'^{20} = 87,54$; $C_u = 49,85$; $C_e = 37,69$.

Für $p' < p$, $C > 100$ muß umgekehrt C_u um mehr wachsen als C_e abnimmt, weil $C = C_e + C_u$ in diesem Falle zunimmt. Bei Aufgeldanleihen erhalten wir $C_u = \frac{100 + A - C}{p'(1 + \alpha) - p} \cdot p$; $C_e = (100 + A) \frac{C - C_\infty}{100 + A - C_\infty}$; es tritt also $100 + A$ an Stelle des Parikurses, die Fallunterscheidung wird durch $i' \geq i$ gegeben.

V. Tarifmathematik¹⁾.

§ 15. Grundlegendes zum Tarifwesen.

Die Tarifmathematik bildet in gewissem Sinne eine Brücke von der Finanzmathematik zur Wirtschaftsmathematik im engeren Sinne. Für die Abgabentarife, die die indirekten und direkten Steuern regeln, gelten gewisse dem Gedanken der Zinspflicht verwandte Grundlagen. Doch kommt in dem Streben, den Gesamtertrag möglichst groß zu gestalten, auch das Wirtschaftsprinzip zur Geltung. Dies tritt in den Vordergrund bei den Preistarifen, die dem Angebot von Waren, Energiemengen, Beförderungsleistungen usw. zugrunde gelegt werden. Ausgangspunkt für die Tarifbildung sind hier die gesamten Selbstkosten des Unternehmens und die auf die Leistungseinheit bezogenen Stückkosten. Die Preisbemessung im einzelnen wird man im allgemeinen abstellen auf die Erzielung größtmöglichen Gesamtgewinnes oder auch größtmöglichen Umsatzes (vgl. § 17). Die der Einflußnahme des Staates unterliegenden Betriebe (z. B. die Reichsbahn) haben dabei auf die Interessen der gesamten Volkswirtschaft besondere Rücksicht zu nehmen. Die Richtsätze der Tarifbildung festzulegen, ist in jedem Falle Sache des Tarifpolitikers.

Die der Größe des Abgabenobjekts, des Leistungsangebotes entsprechenden Zahlen x bezeichnet man als die Indexzahlen, die dafür festgesetzten Abgaben bzw. Preise Y als die Tarifzahlen, das Verhältnis

¹⁾ Vgl. A. Voigt, *Mathematische Theorie des Tarifwesens*, Jena 1912. — P. Riebesell, *Steuermathematik*, Hamburg 1922.

$y = \frac{Y}{x}$ als den Tarifquotienten. Er bedeutet bei Preistarifen den (durchschnittlichen) Stückpreis, bei Abgabentarifen die jeweils auf die Einheit zu entrichtende Abgabe, den sog. Steuerfuß. Wächst Y mit x , so sprechen wir von einem steigenden Tarif, nimmt Y mit x ab, von einem fallenden Tarif¹⁾. Den einfachsten Fall eines steigenden Tarifs haben wir für konstantes $y = y_0$, nämlich $Y = y_0 \cdot x$, den sog. Proportionaltarif, bei dem der Preis, die Abgabe einfach der Leistungsmenge bzw. dem Abgabeobjekt proportional wächst. Stellen wir die x als Abszissen, die Y bzw. y als Ordinaten in einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem dar, so entspricht dem Proportionaltarif im (x, Y) -System eine

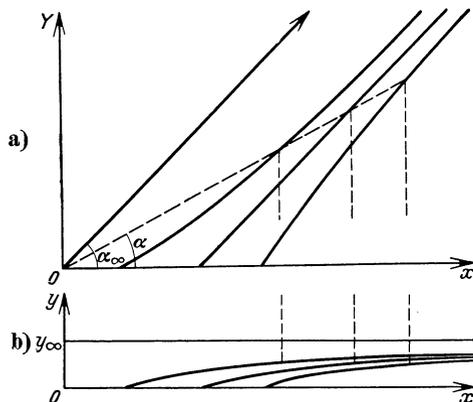


Abb. 18 a/b.

vom O -Punkt auslaufende Gerade mit dem Neigungskoeffizienten y_0 , im (x, y) -System die Parallele zur Abszissenachse $y = y_0$. In der graphischen Darstellung im (x, Y) -System wird der Tarifquotient $y = \frac{Y}{x}$ allgemein durch $\operatorname{tg} \alpha$ veranschaulicht, wo α der Neigungswinkel des vom O -Punkt nach dem Punkt (x, Y) der Tariflinie führenden Fahrstrahls. Nimmt der Tarifquotient $y = \operatorname{tg} \alpha$ mit wachsendem x zu, wie dies bei Abgabentarifen in der Regel der Fall ist, so sprechen wir von einem progressiven Tarif (Abb. 18 a, b). Nimmt der Tarifquotient $y = \operatorname{tg} \alpha$ mit wachsendem x ab, wie dies bei Preistarifen in der Regel zutrifft, so sprechen wir von einem degressiven Tarif (Abb. 19 a, b). In der Praxis zielt man auf einheitlich progressive oder einheitlich degressive Tarife ab, bei denen der Tarifquotient y bei unbegrenzt wachsendem x gegen einen Grenzwert y_∞ konvergiert. Die Tariflinie Y hat dann eine Asymptote, deren Neigungswinkel α_∞ gegen die x -Achse durch $\operatorname{tg} \alpha_\infty = y_\infty$ gegeben ist. Übrigens bestimmt sie — und ebenso die Tariflinie selbst — beim Progressivtarif einen positiven Abschnitt auf der x -Achse, beim Degressivtarif einen positiven Abschnitt auf der y -Achse.

Kriterien für Progression und Degression. Daß ein Tarif für einen Bereich $x_1 < x < x_n$ progressiv verläuft, erkennen wir daran, daß für irgendeine Folge von Indexzahlen $x_1 < x_2 < \dots < x_v < x_{v+1}$

¹⁾ Fallende Tarife kommen praktisch nur indirekt — im Sinne der nachher zu besprechenden Quotiententarife — für die Bildung von Preis- und Abgabentarifen in Frage.

$\dots < x_n$ und die entsprechende Folge von Tarifzahlen $Y_1, Y_2, \dots, Y_v, Y_{v+1}, \dots, Y_n$ die Bedingung gilt: $\frac{Y_v}{x_v} < \frac{Y_{v+1}}{x_{v+1}}$. Schreiben wir $x_{v+1} = x_v + \Delta x_v$, $Y_{v+1} = Y_v + \Delta Y_v$, so folgt aus $\frac{Y_v}{x_v} < \frac{Y_v + \Delta Y_v}{x_v + \Delta x_v}$ sofort $\frac{Y_v}{x_v} < \frac{\Delta Y_v}{\Delta x_v}$ oder $Y_v \Delta x_v < x_v \Delta Y_v$. (1)

Entsprechend ergibt sich als Kriterium für den degressiven Tarif

$$\left. \begin{aligned} \frac{Y_v}{x_v} &> \frac{\Delta Y_v}{\Delta x_v} \\ \text{oder} \\ Y_v \Delta x_v &> x_v \Delta Y_v. \end{aligned} \right\} (2)$$

Bei kleinem $\Delta x_v, \Delta Y_v$ sind diese Kriterien rechnerisch einfacher zu handhaben als die ursprünglichen Bedingungen $Y_v x_{v+1} \leq x_v Y_{v+1}$.

Bei den bisherigen Betrachtungen war an sog. stetige Tarife gedacht, d. h. die Indezahlen x als stetig veränderlich, die Tarifzahl Y als stetige Funktion von x vorgestellt. In Wirklichkeit müssen die bei beiden vorkommenden Änderungen mindestens gleich der Einheit (Münzeinheit usw.) sein. Tritt bei der Tarifzahl erst eine Änderung ein, wenn die Indezahl um mehrere Einheiten gewachsen ist, so spricht man von einem Stufentarif. Viele der gebräuchlichen Tarife, z. B. Beförderungstarife, Steuer- tarife, sind Stufentarife. Handelt es sich um einige wenige Stufen, wie z. B. bei den Portotarifen, den D-Zug-Zuschlägen, so spricht man auch wohl von Zonentarifen. Innerhalb der einzelnen Stufe, wo also

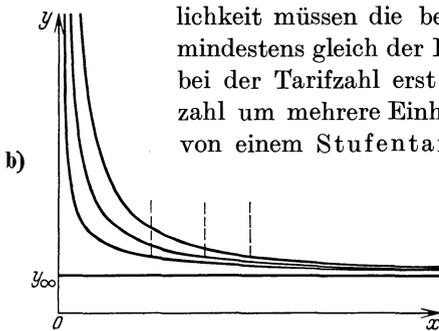
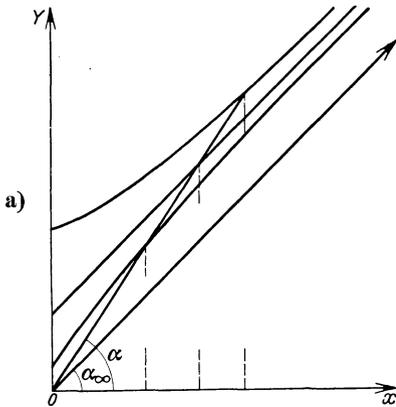


Abb. 19 a/b.

$Y = C$, ist der Stufentarif stets degressiv; der Tarifquotient ist hier $y = \frac{C}{x}$, sein graphisches Bild ist eine gleichseitige Hyperbel. Gilt für $x_1 \leq x < x_2$ die Tarifzahl Y_1 , für $x_2 \leq x < x_3$ die Tarifzahl Y_2 , allgemein für $x_v \leq x < x_{v+1}$ die Tarifzahl Y_v , so setzt sich das graphische Bild des Tarifquotienten aus Teilen der gleichseitigen Hyperbeln $y = \frac{Y_v}{x}$ zusammen. Den Anfangspunkten der Tarifintervalle entsprechen die Quotienten $y_v = \frac{Y_v}{x_v}$, den Endpunkten würden, wenn sie noch zu dem betreffenden Intervall gerechnet werden dürften, die Quotienten

$y'_v = \frac{Y_v}{x_v + \Delta x_v}$ entsprechen. Trotz der in jedem Intervall bestehenden Degressivität spricht man bei Stufentarifen immer noch von einem im wesentlichen progressiven Tarif, wenn $y_1 < y_2 < \dots < y_v < y_{v+1} < \dots < y_n$ (Abb. 20a, b); darüber hinaus von einem vollkommen progressiven Tarif, wenn auch noch $y_1 < y'_2$; $y_2 < y'_3$; \dots ; $y_v < y'_{v+1}$; \dots ; $y_{n-1} < y'_n$.

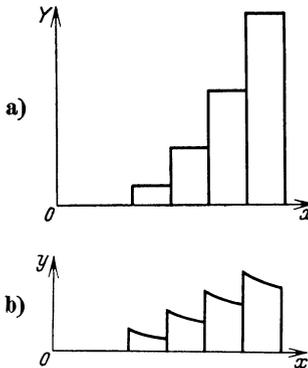


Abb. 20 a/b.

Die Bedingung der vollkommenen Progressivität: $\frac{Y_v}{x_v} < \frac{Y_v + \Delta Y_v}{x_v + \Delta x_v + \Delta x_{v+1}}$ geht durch einfache Umrechnung über in

$$\frac{Y_v}{x_v} < \frac{\Delta Y_v}{\Delta x_v + \Delta x_{v+1}}. \quad (1')$$

Bei gleichen Intervallen $\Delta x_v = \Delta x_{v+1}$ ergibt dies $\frac{Y_v}{x_v} < \frac{1}{2} \frac{\Delta Y_v}{\Delta x_v}$. Bei gegebenem $\frac{Y_v}{x_v}$ und Δx_v , muß man also ΔY_v , beim Stufentarif doppelt so groß nehmen wie beim stetigen Tarif, um vollkommene Progressivität sicherzustellen.

Als Steuertarife bringen die progressiven Stufentarife an den Sprungstellen Disparitäten mit sich, die als Härten empfunden

werden müssen. Beispielsweise läßt die Notverordnung vom 5. Juni 1931 betreffs Einführung der Krisensteuer bei Lohn- und Gehaltsempfängern die Einkommen bis zu 16000 M von dieser Steuer frei, während bei

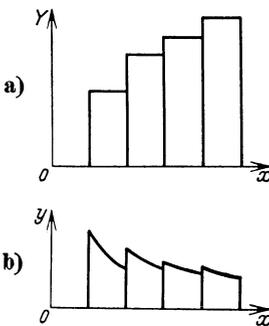


Abb. 21 a/b.

Einkommen über 16000 M bis 20000 M von dem einkommensteuerpflichtigen, auf volle Tausender abgerundeten Teil des Einkommens 1,5% Krisensteuer erhoben werden. Bei Überschreitung der 16000-M-Grenze tritt also ein Rückgang des Nettoeinkommens um annähernd 240 M ein. Auch die in den Durchführungsbestimmungen gegebene Modifikation, wonach „zur Vermeidung von Härten in Grenzfällen“ die Grenze der Steuerfreiheit auf 16300 M Einkommen hinaufgerückt und bei Einkommen über 16300 bis 16600 M der Jahresbetrag der Krisensteuer um

120 M ermäßigt wird, beseitigt offenbar die Disparität keineswegs.

Ein Stufentarif wird als im wesentlichen degressiv bezeichnet, wenn $y_1 > y_2 > \dots > y_v > y_{v+1} > \dots > y_n$ (Abb. 21a, b). Diese Bedingung trifft beispielsweise bei allen Klassen des Normalgütertarifs der Deutschen Reichsbahn zu. Vollkommene Degression würde vorliegen, wenn auch noch $y'_1 > y_2$; $y'_2 > y_3$; \dots ; $y'_v > y_{v+1}$; \dots ; $y'_{n-1} > y_n$; ausführlicher geschrieben: $\frac{Y_v}{x_v + \Delta x_v} > \frac{Y_v + \Delta Y_v}{x_v + \Delta x_v}$. Diese Bedingung kann bei einem steigenden Tarif, bei dem ΔY_v positiv, nicht befriedigt sein.

Vollkommene Degression kann also nur bei fallenden Tarifen vorliegen.

Stufentarife sind für die auf den praktischen Gebrauch zugeschnittene tabellarische Darstellung besonders bequem. Um die unvermeidlichen Härten zu mildern, die die an den Intervallgrenzen auftretenden Sprünge mit sich bringen, steigert man oft die Anzahl der Stufen. Um so umständlicher erscheint es dann aber, die Erfüllung der Bedingung einheitlicher Progressivität oder Degressivität bei der Bildung des Tarifs sicherzustellen. Einen Ausweg aus der Schwierigkeit sucht man gelegentlich in der Weise, daß man vom Quotiententarif ausgeht. Um einen einheitlichen Progressivtarif für Y zu erreichen, gibt

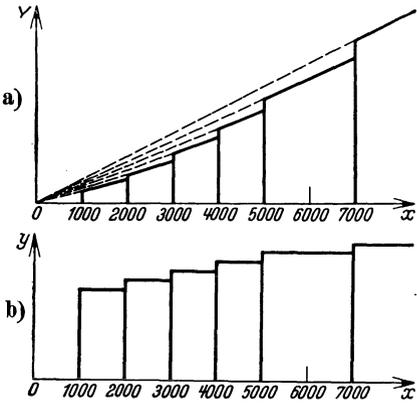


Abb. 22 a/b.

man den Tarifquotienten y in dem in Frage kommenden Intervall $x_1 \leq x \leq x_n$ als monoton wachsende Funktion von x . Um die tabellarische Darstellung zu erleichtern, läßt man y sprungweise wachsen, mit anderen Worten, man schreibt für y einen Stufentarif vor.

Beispiel (Abb. 22 a/b):

Einkommen	1001—2000	2001—3000	3001—4000	4001—5000	5001—7000	über 7000
Steuerfuß	5%	6%	7%	8%	9%	10%

In den einzelnen Intervallen ist y konstant: $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$; dementsprechend die Abgabe $Y = y \cdot x$ einem Proportionaltarif entsprechend. Der Steuertarif zeigt im ganzen progressiven Charakter, aber an den Intervallgrenzen Sprünge, genau wie der gewöhnliche Stufentarif. Er teilt daher auch dessen Mängel: Der Zensit z. B., der 2001 M Einkommen mit (abgerundet) 120 M zu versteuern hat, behält ein geringeres Nettoeinkommen als der Zensit, der auf 2000 M Einkommen eine Steuer von 110 M zu entrichten hat.

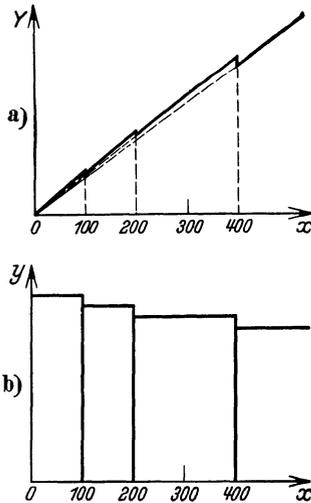


Abb. 23 a/b.

Noch mißlicher ist es, von einem gestuften Quotiententarif y auszugehen, um zu einem einheitlich degressiven Tarif Y zu gelangen.

Beispiel (Abb. 23a/b).

Gasverbrauch	0–100 cbm	101–200 cbm	201–400 cbm	über 400 cbm
Preis pro cbm	18 Pf.	17 Pf.	16 Pf.	15 Pf.

Den konstanten Quotienten $y = y$, der einzelnen Intervalle entsprechen im Preistarif selbst gerade Linien $Y = y \cdot x$, die, nötigenfalls verlängert, durch den O -Punkt gehen. Der Preistarif hat einheitlich degressiven Charakter, aber an den Intervallgrenzen treten plötzliche Abschlüge am Gesamtpreise ein, die als peinliche Disparitäten empfunden werden. Für 100 cbm Gas beispielsweise zahlt man 18 M, für 101 cbm dagegen nur 17,17 M; erst bei einem Verbrauch von 106 cbm Gas wird der Gesamtpreis von 18 M wieder überschritten.

Natürlich lassen sich die mit dem gestuften Quotiententarif verknüpften Disparitäten durch Zusatzbestimmungen beseitigen, wonach z. B. im Falle des Steuertarifs unmittelbar oberhalb der Sprungstellen ein den erwähnten Rückgang des Nettoeinkommens kompensierender Steuernachlaß gewährt wird; im Prinzip wird damit aber der Quotiententarif für die Tarifkonstruktion aufgegeben.

§ 16. Systematik der Tarifbildung.

Man vermeidet die den bisher besprochenen Tarifen anhaftenden Mängel, indem man einerseits zum Teilstreckenprinzip übergeht, andererseits zur Erzielung eines einheitlichen Tarifgesetzes einen stetigen Tarif als Ausgangspunkt wählt.

Lineartarif. Neben dem schon besprochenen gewöhnlichen Proportionaltarif (I in Abb. 24) kommen zwei Grundformen in Frage: $Y = \mu(x - x_1)$ (II in Abb. 24) und $Y = Y_0 + \mu x$ (III in Abb. 24).

Beim Tarif

$$Y = 0 \text{ für } 0 \leq x \leq x_1; \quad Y = \mu(x - x_1) \text{ für } x > x_1 \quad (2)$$

nimmt der Quotient $y = 0$ bzw. $y = \mu - \mu \frac{x_1}{x}$ von 0 aus stetig zu und strebt bei unbegrenzt wachsendem x dem Grenzwert $y_\infty = \mu$ zu. Die in Rede stehende Tarifform eignet sich also für die Bildung eines einheitlich progressiven Steuertarifs, dem zwei Bedingungen auferlegt werden: x_1 als steuerfreies Existenzminimum und μ als Steuerfuß der sehr großen Einkommen.

Beispiel: Für $x_1 = 1200$, $y_\infty \approx 20\%$ erhalten wir
 $Y = 0,2(x - 1200)$; $y = 0,2\left(1 - \frac{1200}{x}\right)$

$x =$	1200	1600	2000	4000	8000	16000	32000
$Y =$	0	80	160	560	1360	2960	6160
$y =$	0	5	8	14	17	18,5	19,25

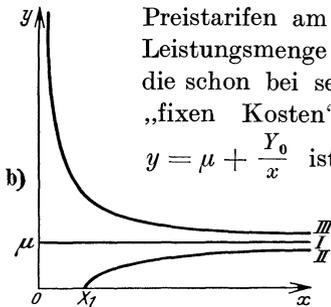
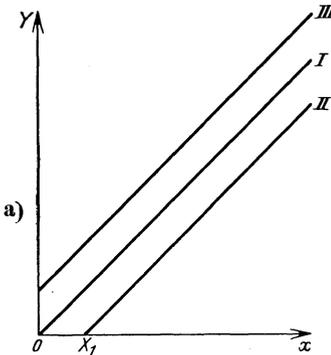
Finanzpolitisch erscheint die Progression bei den kleineren Einkommen zu stark, bei den größeren Einkommen zu schwach. Eine bessere Anpassung an die Leistungsfähigkeit der Zensiten kann mit dem Linearararif, bei dem nur zwei Konstante verfügbar, nicht erreicht werden. — Für die von der Steuerbehörde zu benutzende tabellarische Darstellung würde man etwa Intervalle der x von 500 M einführen, denen jeweils ein Steuerzuwachs von 100 M entspricht, und in einer Sondertabelle für das letzte angebrochene 500-M-Intervall die entsprechenden auf volle Mark abgerundeten Steuerbeträge zusammenstellen. Der durch größere

Disparitäten stets erzeugte Anreiz zur Unterdeklaration kommt bei einem derartig durchkonstruierten Tarif wohl ziemlich in Wegfall.

Der Tarif

$$Y = Y_0 + \mu \cdot x \quad (2')$$

stellt die einfachste Form eines rabattlosen Preistarifs mit Grundgebühr Y_0 dar. Derartige Grundgebühren kommen bei Fernsprechgebühren-, Gas-, Wasser- und Elektrizitätstarifen als Apparat- bzw. Zählermiete, bei Beförderungstarifen als Abfertigungsgebühr vor und sind bei allen



Preistarifen am Platze, bei denen nicht nur die variable Leistungsmenge in Rechnung zu stellen ist, sondern auch die schon bei sehr geringen Leistungsmengen vorhandenen „fixen Kosten“ abzugelten sind. Der Tarifquotient

$y = \mu + \frac{Y_0}{x}$ ist für $x = 0$ unendlich groß, nimmt mit wachsendem x beständig ab und strebt für unbegrenzt wachsende x dem Grenzwert $y_\infty = \mu$ zu.

Auch bei Preistarifen bedingt der Umstand, daß beim Linearararif nur zwei Konstante zur Verfügung stehen, eine geringe Anpassungsfähigkeit dieser Tarifform:

Auf eine bei Bezug größerer Leistungsmengen eintretende Rabattberechnung kann er nicht eingestellt werden. Man könnte versuchen, eine größere Beweglichkeit zu erreichen, indem man Tarife von der Form $Y = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$, $Y = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$ usw. zugrunde legt. Mit ihnen wird jedoch den Bedürfnissen der Praxis nicht entsprochen, wie die Betrachtung des Tarifquotienten:

$y = a_0 x + a_1 + \frac{a_2}{x}$, $y = a_0 x^2 + a_1 x + a_2 + \frac{a_3}{x}$, usw. zeigt. Mit unbegrenzt wachsendem x würde der Tarifquotient ebenfalls über alle Grenzen wachsen. Wohl können derartige Ansätze mit ganzen rationalen Funktionen als Interpolationsformeln für Teilbereiche eines Tarifs dienen, etwa in dem Sinne, daß mit ihnen Abschnitte aus bestehenden Steuer- oder Preistarifen auf Einheitlichkeit (Fehlen von merklichen Dispari-

Abb. 24 a/b.

täten und anderen Härten) nachgeprüft werden. Die Verwendung zu Extrapolationszwecken ist ausgeschlossen.

Das einfachste Hilfsmittel zur Darstellung von Tarifen Y , bei denen der Tarifquotient y mit unbegrenzt wachsendem x einem Grenzwert μ zustrebt, liefern die unecht gebrochenen rationalen Funktionen vom Grade 1. Durch Ausdividieren lassen sie sich stets auf die Form bringen: Summe einer linearen Funktion $\mu x + n$ und einer echt gebrochenen rationalen Funktion. Letztere strebt mit unbegrenzt wachsendem x dem Grenzwert 0 zu; daher stellt erstere die Asymptote der Tariflinie dar, sodaß auf alle Fälle μ den für unendlich große x geltenden Tarifquotienten bedeutet, der stets von vornherein vorgeschrieben sein wird. Die in der echt gebrochenen rationalen Funktion vorkommenden Konstanten kann man dazu benützen, den Tarif weiteren Bedingungen anzupassen.

Beispiel: Elektrizitätstarif.

Wir sehen von der Grundgebühr Y_0 ab, die sich einfach dem zu konstruierenden Tarif überlagert, und setzen fest:

- Anfangssatz für die Kilowattstunde 25 Pf.,
- Endsatz für die Kilowattstunde 22,5 Pf.

Da der Preis für den Elektrizitätsverbrauch x mit x selbst verschwindet, setzen wir an:

$$Y = \mu x + \frac{bx}{cx+1} = \mu x + \frac{b}{c} - \frac{\frac{b}{c}}{cx+1}; \quad (3) \quad y = \mu + \frac{b}{cx+1}. \quad (3')$$

Wir haben dann für $x = 0$: $y_0 = \mu + b = 25$ Pf.; für $x = \infty$: $y_\infty = \mu = 22,5$ Pf. Mithin $b = 2,5$ Pf. Setzen wir weiterhin fest, daß bei einem Verbrauch von $x_1 = 333\frac{1}{3}$ Kilowattstunden $y_1 = 24$ Pf. betragen soll, so gilt: $y = 22,5 + \frac{2,5}{c \cdot 333\frac{1}{3} + 1} = 24$; $2,5 = 1,5 \left(c \cdot 333\frac{1}{3} + 1 \right) = 500c + 1,5$; $c = 0,002$. Der

Tarifquotient wird also allgemein

$$y = 22,5 + \frac{2,5}{0,002x + 1}.$$

Er nimmt mit wachsendem x beständig ab. Für den Elektrizitätstarif selbst erhalten wir

$$Y = x \left(22,5 + \frac{2,5}{0,002x + 1} \right).$$

Als Abschnitt der Asymptote der Tariflinie (Abb. 25) auf der Y -Achse ergibt sich $\frac{b}{c} = 1250$.

Dem Tarif entspricht folgende Tabelle:

Kilowattstundenzahl x	100	200	300	400	500	1000	2000
Preis pro Kilowattstunde y	24,5833	24,2857	24,0625	23,8888	23,7500	23,3333	23,0000
Gesamtpreis Y	2458,33	4857,14	7218,75	9555,52	11875,00	23333,33	46000,00

Kommt noch eine Grundgebühr Y_0 hinzu, so würde der Tarifquotient noch um den beständig abnehmenden Betrag $\frac{Y_0}{x}$ zu vermehren sein. Der Tarif ist auf alle Fälle einheitlich degressiv.

Allgemein würde man $b = y_0 - \mu$ haben und aus $y_1 = \mu + \frac{b}{cx_1 + 1}$ berechnen $cx_1 = \frac{b}{y_1 - \mu} - 1 = \frac{y_0 - \mu - (y_1 - \mu)}{y_1 - \mu} = \frac{y_0 - y_1}{y_1 - \mu}$, würde also für $y_0 > y_1 > \mu$ sicherlich c ebenso wie b als positive Größe erhalten. Der Differentialquotient $y' = -\frac{bc}{(cx + 1)^2}$ fällt allemal negativ aus, was für den einheitlich degressiven Charakter des Tarifs entscheidend ist, und es ist auch ausgeschlossen, daß die Polstelle $x = -\frac{1}{c}$ der gebrochen rationalen Funktion einen positiven Argumentwert x erhält (was den Tarif unbrauchbar machen würde).

Eine derartige Diskussion wird um so umständlicher, je mehr Konstante zur Befriedigung weiterer Tarifbedingungen in die für Y angesetzte unecht gebrochene Funktion vom Grade 1 herangezogen werden, z. B.

$$Y = \mu x + \frac{ax^2 + bx}{cx^2 + dx + 1}.$$

Auf Kurven mit Asymptoten, wie sie für die Darstellung von Tarifen in Frage kommen, führen nun andererseits auch manche einfach zu diskutierende Irrationalausdrücke. Wir betrachten

$$Y = Lx + M - \sqrt{Ax^2 + Bx + C}. \tag{4}$$

Wann hat das entsprechende Kurvenbild den Charakter einer durch den O -Punkt gehenden Hyperbel, die sich für unbegrenzt wachsende positive x ihrer Asymptote von unten her nähert? Offenbar muß $M = \sqrt{C}$, sicher also $C > 0$ sein. Schreiben wir

$$Y = Lx + \sqrt{C} - \sqrt{A\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + \frac{4AC - B^2}{4A}},$$

so erkennen wir, daß der hyperbolische Charakter mit $A > 0$ gesichert ist und daß die Asymptote dargestellt wird durch

$$\bar{Y} = Lx + \sqrt{C} - \sqrt{A}\left(x + \frac{B}{2A}\right) = (L - \sqrt{A})x + \frac{2\sqrt{AC} - B}{2\sqrt{A}}.$$

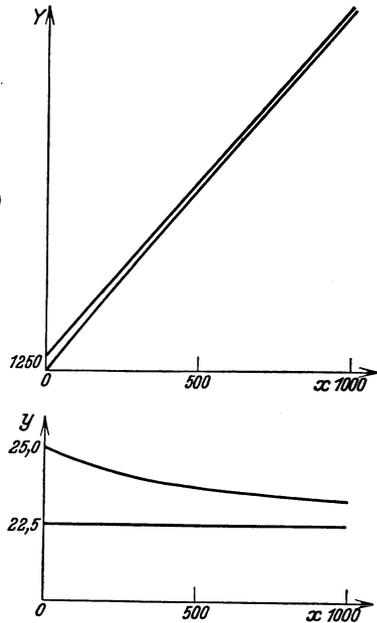


Abb. 25 a/b.

Die Differenz: Asymptotenordinate minus Kurvenordinate:

$$\begin{aligned} & -\sqrt{A} \left(x + \frac{B}{2A} \right) + \sqrt{A \left(x + \frac{B}{2A} \right)^2 + \frac{4AC - B^2}{4A}} \\ & = \frac{\frac{4AC - B^2}{4A}}{\sqrt{A} \left(x + \frac{B}{2\sqrt{A}} \right) + \sqrt{A x^2 + Bx + C}}, \end{aligned}$$

die mit unbegrenzt wachsendem x gegen 0 konvergiert, ist für positive x selbst positiv, wenn die Diskriminante $4AC - B^2 > 0$. Dabei kann B positiv oder negativ sein. Der Tarifquotient für sehr große positive x ist, wie die Asymptote ergibt, $y_\infty = L - \sqrt{A}$.

Den Tarifquotienten für $x = 0$ erhalten wir mit Hilfe des Differentialquotienten:

$$\frac{dY}{dx} = L - \frac{1}{2} \frac{2Ax + B}{\sqrt{Ax^2 + Bx + C}};$$

für $x = 0$ ergibt sich:

$$Y_0 = L - \frac{1}{2} \frac{B}{\sqrt{C}}.$$

Wählen wir B negativ, so bedeutet L eine zwischen y_0 und y_∞ liegende Zahl. Der Tarifquotient

$$\frac{Y}{x} = L + \frac{\sqrt{C}}{x} - \sqrt{A + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2}} \quad (4')$$

nimmt dann diesen Wert für einen positiven x -Wert wirklich einmal an: $y_1 = L$ für $x = x_1$. Es ist also:

$$\begin{aligned} L &= L + \frac{\sqrt{C}}{x_1} - \sqrt{A + \frac{B}{x_1} + \frac{C}{x_1^2}}; & \frac{C}{x_1^2} &= A + \frac{B}{x_1} + \frac{C}{x_1^2}; \\ & & B &= -Ax_1. \end{aligned}$$

Ist y_0 , y_∞ und $y = L$ für $x = x_1$ gegeben, so kann man der Reihe nach $\sqrt{A} = L - y_\infty$, $B = -Ax_1$, $C = \frac{B^2}{4(L - y_0)^2}$ bestimmen. Dann ist einheitliche Degression durch den Hyperbelcharakter der Kurve gesichert. Eine Grundgebühr kann wieder durch Überlagerung einer additiven Konstanten berücksichtigt werden.

Beispiel: Für den Verbrauch von x cbm Gas berechne man den Preis $Y = Lx + \sqrt{C} - \sqrt{Ax^2 + Bx + C}$ unter Zugrundelegung folgender Annahmen¹⁾ für den Tarifquotienten y :

$$\begin{array}{ll} x_0 = 0 & y_0 = 16,7 \text{ Pf.} \\ x_1 = 250 & y_1 = 15,2 \text{ ,,} \\ x_\infty = \infty & y_\infty = 10,64 \text{ ,,} \end{array}$$

Lösung: Aus der Annahme $L = y_1$ folgt: $L = 15,2$. Ferner ist $\sqrt{A} = L - y_\infty = 4,56$; also $A = 20,7936$ und $B = -Ax_1 = -5198,4$. Aus der Gleichung:

$$\sqrt{C} = \frac{B}{2(L - y_0)} \text{ ergibt sich: } \sqrt{C} = 1732,8 \text{ und } C = 3\,002\,600,$$

sodaß endlich: $Y = 15,2x + 1732,8 - \sqrt{20,7936x^2 - 5198,40x + 3\,002\,600}$.

¹⁾ Gasbetriebgesellschaft AG. Berlin.

Die Einführung von Kurven höheren Grades als Tariflinien gibt durch Einbeziehung weiterer Koeffizienten die Möglichkeit, mehr als 5 Tarifbedingungen zu befriedigen, wobei allerdings die Diskussion der praktischen Verwertbarkeit umständlicher wird. Aber auch bei Beschränkung auf eine geringere Koeffizientenzahl und damit auf leichter zu diskutierende Kurventypen führt sie gelegentlich zu einer besseren Anpassung an die Natur des Tarifproblems.

Als Steuerfuß wählt man häufig den Ansatz:

$$y = \mu \left[1 - \left(\frac{x_0 + c}{x + c} \right)^m \right], \quad (5)$$

wo μ , x_0 , c , m vier Konstante. Offenbar bedeutet μ den Steuerfuß y_x für sehr große Einkommen, x_0 das steuerfreie Existenzminimum. Mit c und m befriedigt man zwei weitere Bedingungen. — Diese Tarifform läßt sich bis zu einem gewissen Grade mittels der Bernoullischen Theorie vom Geldwert und der Forderung der grundsätzlichen Gleichheit des von allen Zensiten zu bringenden Opfers begründen¹⁾. Die Progression nimmt von vornherein ab, da $\frac{d^2 y}{dx^2} < 0$ (Abb. 26). In einem Lande mit einigermaßen normaler Einkommenschichtung und nicht zu hohem Bedarf von Steueraufkommen wird diese Formel für den Steuerfuß ausreichende Dienste leisten.

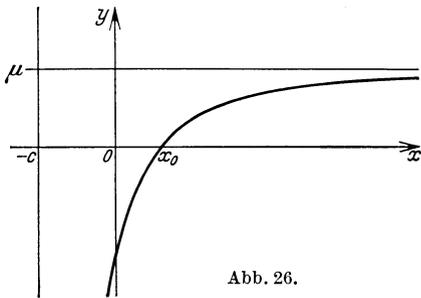


Abb. 26.

Dagegen wird man bei einem in gespannterer Lage befindlichen Land wie Deutschland darauf bedacht sein müssen, die Progression des Steuerfußes zunächst bis über den Bereich der stärksten Zensitenschicht hinaus noch wachsen zu lassen; später muß man sie dann notgedrungen wieder verlangsamen, weil der Steuerfuß den Höchstwert 100% jedenfalls nicht überschreiten kann und normalerweise einen darunter liegenden Höchstwert y_∞ zugewiesen erhält, der mit der Aufrechterhaltung der Unternehmungslust und mit dem Eigentumsgrundrecht vereinbar erscheint. Die den Steuerfuß darstellende Kurve muß also in ihrem Verlauf zwischen $x = x_0$ (Existenzminimum) und $x = \infty$ zunächst konvex, später konkav nach unten gekrümmt sein und schließlich der Horizontalen $y = y_\infty$ asymptotisch zustreben. Zu solchem Kurventyp gelangt man bei Heranziehung einiger einfacher transzendenter Funktionen, die genau tabuliert sind: des Arcustangens und des

¹⁾ Vgl. hierüber P. Riebesell, *Steuermathematik*, Hamburg 1922.

hyperbolischen Tangens. Soll der Wendepunkt der Steuerfußkurve zu einem Einkommen x_1 gehören, so kann man setzen:

$$y = \frac{y_\infty}{1 + \mathfrak{Zg} \lambda (x_1 - x_0)} \cdot [\mathfrak{Zg} \lambda (x - x_1) + \mathfrak{Zg} \lambda (x_1 - x_0)] \quad (6)$$

oder

$$y = \frac{y_\infty}{\frac{\pi}{2} + \arctg \lambda (x_1 - x_0)} \cdot [\arctg \lambda (x - x_1) + \arctg \lambda (x_1 - x_0)]. \quad (6')$$

In beiden Fällen kann man mittels der vier Konstanten x_0 , x_1 , λ , y_∞ vier Bedingungen befriedigen. Insbesondere kann man, außer der

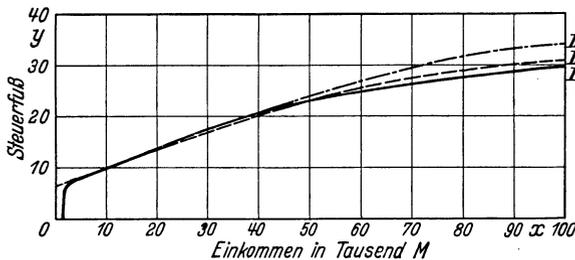


Abb. 27. Reichseinkommensteuertarif.

Festsetzung des steuerfreien Existenzminimums x_0 und des Steuerfuß-Höchstwertes y_∞ , vorschreiben, für welches Einkommen x_1 der Wendepunkt eintreten und wie hoch der zugehörige Steuerfuß y_1 ausfallen soll.

Beispiel: Tarif der deutschen Reichseinkommensteuer (Abb. 27). Der für die niederen Einkommen bis zu 8000 M geltende Tarif weist eine durch die Lohnsteuertechnik bedingte Sonderstruktur auf. Wir richten daher unser Augenmerk auf den Tarif für die Einkommen über 8000 M, bei denen eine besondere Veranlagung zur Einkommensteuer erfolgt. Für $x = 8000$ ist der Steuerfuß 0,0910; für $x = \infty$ ist er $y_\infty = 0,40$. In Anlehnung an die Steuerfußkurve des Reichseinkommensteuertarifs nehmen wir für den Wendepunkt die Koordinaten $x_1 = 20000$; $y_1 = 0,1350$ und setzen an

$$y = 0,0910 + \frac{0,3090}{\frac{\pi}{2} + \arctg \lambda \cdot 12000} [\arctg \lambda (x - 20000) + \arctg \lambda \cdot 12000].$$

Dann bestimmt sich λ aus der Bedingung, daß

$$0,1350 = 0,0910 + \frac{0,3090 \cdot \arctg \lambda \cdot 12000}{\frac{\pi}{2} + \arctg \lambda \cdot 12000}$$

oder $12000 \lambda = \operatorname{tg} \left(\frac{44}{265} \frac{\pi}{2} \right)$ sein muß. Wir erhalten damit

$$y = 0,1350 + 0,1687 \arctg 0,000022 (x - 20000).$$

Ähnlich gelangen wir mit dem hyperbolischen Tangens zu der Darstellung

$$y = 0,1350 + 0,265 \mathfrak{Zg} 0,000014 (x - 20000).$$

In der nachstehenden Tafel sind die nach diesen beiden Formeln errechneten und die im geltenden Tarif festgesetzten Steuerfüße für eine Reihe von Einkommen zusammengestellt. Der Reichseinkommensteuertarif zieht die niederen Einkommen erheblich schärfer heran, wie dies nach den den höheren Einkommen angepaßten Formeltarifen der Fall sein würde.

Einkommen x	I: geltender Steuerfuß y	II: Steuerfuß y nach arctg-Tarif	III: Steuerfuß y nach $\xi\eta$ -Tarif
5 000	0,0850	0,0812	0,0801
8 000	0,0910	0,0910	0,0910
10 000	0,0960	0,0984	0,1003
15 000	0,1167	0,1165	0,1165
20 000	0,1350	0,1350	0,1350
30 000	0,1766	0,1715	0,1719
40 000	0,2075	0,2050	0,2074
50 000	0,2300	0,2335	0,2403
70 000	0,2642	0,2755	0,2950
90 000	0,2890	0,3002	0,3347
∞	0,40	0,40	0,40

Für die Wahl der Wendepunktsabszisse müssen Erwägungen des Tarifpolitikers über das gesamte Steueraufkommen maßgebend sein, die sich auf die Statistik der Zensiten stützen müssen. Pareto hat gezeigt, daß auf Grund der bisherigen Erfahrungen in europäischen Ländern ein einfacher Zusammenhang zwischen dem Einkommen x und der Zahl y derjenigen Zensiten angegeben werden kann, deren Einkommen mehr als x beträgt. Er lautet

$$y = c x^\mu,$$

wo c und μ Konstante bedeuten, die für die verschiedenen Länder und Jahrgänge verschiedene Werte haben¹⁾. Schreibt man

$$\log y = \log c + \mu \log x,$$

so erkennt man, daß man bei der Darstellung auf doppelt-logarithmischem Papier mit den Koordinaten $\xi = \log x$, $\eta = \log y$ eine Gerade, die sog. Paretosche Gerade erhält. Hat man in einer solchen Darstellung nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichen (vgl. § 24), so kann man der Ausgleichsgeraden die Parameter c, μ entnehmen und sich auf sie bei der Tarifkonstruktion stützen.

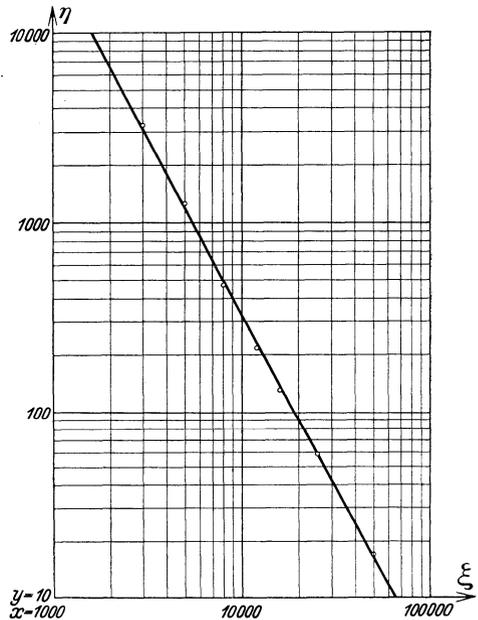


Abb. 28.

¹⁾ Tatsächlich zeigen sich bei den kleinsten Einkommen wesentliche Abweichungen vom Paretoschen Gesetz, entsprechend der Tatsache, daß die Kurve der Zensitenzahlen hier ein Maximum aufweist, das im Paretoschen Gesetz nicht widerspiegelt wird. Vgl. H. Loos, Die Einkommensverteilung im Deutschen Reiche im Jahre 1913, Diss. Frankfurt a. M. 1920.

Beispiel: (Abb. 28). Deutsche Einkommen von 1928 (Statistisches Jahrbuch für das Deutsche Reich 1931).

Einkommensgruppe in RM	Anzahl der Einkommen- bezieher (abgerundet auf 1000)	x : Einkommen in RM über	y :
0—1 200	17 625	0	30 805
1 200—3 000	9 941	1 200	13 180
3 000—5 000	1 991	3 000	3 239
5 000—8 000	780	5 000	1 248
8 000—12 000	251	8 000	468
12 000—16 000	86	12 000	217
16 000—25 000	72	16 000	131
25 000—50 000	42	25 000	59
50 000—100 000	12	50 000	17
über 100 000	5	100 000	5

Die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate ergibt:
 $\log y = 9,964 - 1,863 \log x$, mithin $\mu = -1,863$ und $c = 9,20 \cdot 10^9$.

Übergang zu Teilstreckentarifen.

Für die Praxis ersetzt man einen nach bestimmten Gesichtspunkten konstruierten stetigen Tarif durch einen sog. Teilstreckentarif; geometrisch gesprochen: man führt an Stelle der Tarifkurve ein ihr einbeschriebenes Sehnepolygon ein. Für die Streckenfüße μ , d. h. die Neigungskoeffizienten der Sehnen, hat man $\mu_v = \frac{Y_v - Y_{v-1}}{x_v - x_{v-1}}$. Man kann sie auch aus der Grundgebühr Y_0 und den Werten des Tarifquotienten y für die Teilpunkte berechnen. Setzt man $x_v - x_{v-1} = s_v$, so hat man die Gleichungen

$$\begin{aligned}
 Y_0 + \mu_1 s_1 &= y_1 s_1; \\
 Y_0 + \mu_1 s_1 + \mu_2 s_2 &= y_2 (s_1 + s_2); \\
 Y_0 + \mu_1 s_1 + \mu_2 s_2 + \mu_3 s_3 &= y_3 (s_1 + s_2 + s_3); \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

nacheinander nach den μ aufzulösen. Allgemein gilt dann für die Stelle $x = s_1 + s_2 + \dots + s_{v-1} + x'$:

$$Y = Y_0 + \mu_1 s_1 + \mu_2 s_2 + \dots + \mu_{v-1} s_{v-1} + \mu_v x'.$$

VI. Erfolgsrechnung.

§ 17. Die Erfassung der Erfahrungsziffern:

Kosten — Beschäftigungsgrad. Grundlegende Beziehungen.

Der große Aufschwung, den die wirtschaftlichen Leistungen in Industrie, Handel und Verkehrswesen, Bergbau und Landwirtschaft in den letzten Jahrzehnten genommen haben, gründet sich einerseits auf die wachsende Nutzbarmachung des wissenschaftlich-technischen Fortschritts, andererseits auf die Verbilligung der Leistungseinheiten, die durch betriebswirtschaftliche Verbesserungen, Einführung

der Maschinenkraft an Stelle menschlicher oder tierischer Arbeitsleistung und anderer Kapital beanspruchender Betriebsgrundlagen und Hand in Hand damit durch Steigerung der Anzahl der Leistungseinheiten, des „Beschäftigungsgrades“, erreicht wird. In der Industrie, die für diese Entwicklung besonders typisch ist und an die wir daher der Einfachheit halber in unserer Darstellung im allgemeinen anknüpfen wollen, bedeutet das: Übergang vom handwerklichen Betriebe zur Massenfabrikation. Die fortschreitende Produktionssteigerung findet ihre natürliche Schranke hauptsächlich an der Aufnahmefähigkeit der Konsumenten einerseits und den Möglichkeiten der Kapitalbeschaffung andererseits. Dabei stehen Kapital- und Produktionsvermehrung offenbar in Wechselwirkung miteinander. Die glänzendste Entwicklung haben diejenigen Betriebe gezeigt, bei denen es, wie bei Ford, möglich war, die Produktionssteigerung nicht auf die Hereinnahme neuen fremden, zu verzinsenden Kapitals, sondern auf die herausgewirtschafteten Überschüsse und technische und organisatorische Verbesserungen des Produktionsbetriebes zu stützen.

Die folgenden, der Analyse des wirtschaftlichen Erfolges gewidmeten Ausführungen beschränken sich auf Fragestellungen, die die Heranziehung mathematischer Methoden als erwünscht und angemessen erscheinen lassen. Es handelt sich um das Studium des Verlaufs der Selbstkosten, des Umsatzes und des Gewinnes bei wechselndem Beschäftigungsgrad. Eine gewisse Idealisierung des Wirtschaftsablaufs, beispielsweise die zunächst gemachte Voraussetzung fester Lohnsätze und Preise, die Beschränkung auf Intervalle, die einem gewissen Rahmen „normaler volkswirtschaftlicher Entwicklung“ entsprechen¹⁾, erscheint damit unumgänglich. Das letzte Wort bezüglich der Anwendbarkeit der besprochenen Deduktionen auf die Praxis verbleibt daher dem Betriebswirtschaftler und dem Volkswirtschaftler, die sich über den Einfluß aller von der idealisierenden mathematischen Analyse nicht erfaßten Realitäten Rechenschaft zu geben haben²⁾. Daß in Krisenzeiten, bei bedeutenden strukturellen Änderungen im Wirtschaftsleben alle wissenschaftlichen Erörterungen, soweit sie dem Vorausblick dienen sollen, äußerst unzulänglich bleiben, hat die Wirtschaftsentwicklung der letzten Jahre eindringlich gezeigt. Unbestritten bleibt die deskriptive Bedeutung der Mathematik für die Erfassung des Wirtschaftsablaufs und die Notwendigkeit, die in den Wirtschaftswissenschaften oft

¹⁾ Damit ist z. B. die Einführung von Grenzwerten, die sich auf „unendlich hohen Beschäftigungsgrad“ beziehen, von vornherein als eine nur theoretisch gedachte Extrapolation gekennzeichnet.

²⁾ Vgl. F. Leitner, Die Selbstkostenberechnung industrieller Betriebe, 9. Aufl., Frankfurt a. M. 1930. — E. Schmalenbach, Dynamische Bilanz, 5. Aufl., Leipzig 1931. — Derselbe, Grundlagen der Selbstkostenrechnung und Preispolitik, 5. Aufl., Leipzig 1930.

verschwommen herangezogene mathematische Begriffswelt zu klären.

Der wirtschaftliche Erfolg wird gemessen an dem Gewinn G , der einer bestimmten Ausbringung — Monats-, Quartals-, Jahresproduktion des Gesamtbetriebs, Produktionsmenge eines Einzelauftrags, Leistungseinheit — anhaftet und sich als Differenz aus dem Erlös E und den Selbstkosten S errechnet:

$$E = S + G. \quad (1)$$

Die Nachkalkulation beschäftigt sich mit dem tatsächlich erzielten Erfolg: Betriebsabrechnung der Gesamtunternehmung oder eines Teilbetriebs, Erfolgskontrolle bei einem erledigten Auftrag. Die Vorkalkulation bezieht sich auf den Haushaltsvoranschlag der Gesamtunternehmung oder eines Teilbetriebs, auf die im Angebotswesen zugrunde zu legenden Stückkosten und Stückpreise. Während die Nachkalkulation ihre Unterlagen zweifelsfrei und eindeutig der Buchhaltung des Betriebs entnimmt, arbeitet die Vorkalkulation in weitem Umfange mit Schätzungswerten. Löhne und Kapitalkosten sind nur teilweise durch Verträge festgelegt, Werkstoffkosten¹⁾ und Verkaufspreise schwanken mit der Marktlage, und der die Stückkosten wesentlich beeinflussende Produktionsumfang der Unternehmung ist unsicher. Trotzdem sind natürlich Vorkalkulationen für das Angebotswesen und die Gestaltung der Rentabilität des Betriebes unentbehrlich. Erfolgskalkulationen, die sich auf Beobachtung der Marktentwicklung und auf das Erfahrungsmaterial der eigenen und verwandten Unternehmungen stützen²⁾, sind von entscheidender Bedeutung für Maßnahmen der Betriebsgebarung (Einführung neuer Maschinen oder Arbeitsmethoden, Aufstellung des Fabrikationsprogramms, Aufnahme neuer, Einstellung alter Fertigungszweige, Betriebsweiterung), der Festsetzung von Budgetvorschriften für die einzelnen Teilbetriebe und Kostenstellen und der Preis- und allgemeinen Geschäftspolitik. Die numerische Erfassung der in die Erfolgskalkulation eingehenden Positionen ist Aufgabe der Betriebsstatistik³⁾. Bei der „Einzelkalkulation“, der Vor- und Nachkalkulation eines bestimmten Auftrags interessieren besonders die

¹⁾ Hier muß überprüft werden, wieweit die Selbstkosten des Lagerbestandes und andererseits die Wiederbeschaffungskosten in Rechnung zu stellen sind.

²⁾ Wertvolle Dienste leisten hierbei die Arbeiten des Reichskuratoriums für Wirtschaftlichkeit.

³⁾ Sie bringt ihrerseits natürlich ein neues Kostenelement mit sich, macht sich aber, wenn sie dem Umfang und der Eigenart des Betriebes gut angepaßt ist, bezahlt durch Aufdeckung von Unwirtschaftlichkeitsquellen, z. B. Werkzeugvergeudung, übermäßigen Anwachsens der Hilfslohne und des Materialverbrauchs; allgemein wegen der aus einer korrekten Erfolgskalkulation abzuleitenden Rückschlüsse und Folgerungen. Der Verein Deutscher Maschinenbauanstalten nimmt die Kosten zu 2% der Gehälter an.

„Stückkosten“, d. h. die Selbstkosten der Einzelleistung. Nun kann man aber eigentlich nur die Löhne L und die Werkstoffkosten W unmittelbar zur Stückzahl der Produktionsmenge in eine genaue Beziehung setzen; sie kommt im wesentlichen auf Proportionalität heraus. Die übrigen Kosten, z. B. Kapitalkosten, Gehälter, tauchen zunächst in der Belastung der gesamten Produktion, des ganzen Werks oder eines Teilbetriebs auf. Eine Hauptaufgabe der Erfolgskalkulation bzw. der ihr dienenden Betriebsstatistik besteht nun gerade darin, festzustellen, welcher Anteil U dieser Generalunkosten oder Gemeinschaftskosten auf einen bestimmten Ausschnitt in der Produktion zu verrechnen ist. Wird von dem Werk nur ein einziger Massenartikel fabriziert, so wird diese Aufgabe ohne Schwierigkeit durch eine einfache Division bzw. einen Dreisatz gelöst. Handelt es sich dagegen um verschiedene Erzeugnisse, so muß die Betriebsstatistik versuchen, die auf die Produktion und den Vertrieb eines Artikels entfallenden Kostenelemente zu isolieren. Dazu ist eine ausreichende Aufteilung nach Kostenarten und Kostenstellen vorzunehmen.

Für Maschinenfabriken kommt z. B. folgende Aufteilung nach Kostenarten in Frage, die im wesentlichen der von H. Machts¹⁾ vorgeschlagenen entspricht:

W = Werkstoffkosten: Selbstkosten der in der Produktion verarbeiteten Materialien einschließlich Frachten, Transport-, Feuer- und Diebstahlversicherungen, Zölle, Lagerkosten.

L = Fertigungslöhne einschließlich Steuern und Sozialbeiträge (Produktivlöhne).

U = Gemeinschaftskosten:

a) Betriebsunkosten: Betriebsgehälter, technische Leitung, Hilfslöhne, Kraft, Heizung, Licht, Abschreibungen auf Gebäude und Maschinen, Versicherungen, Hilfsmaterial.

b) Handlungskosten: Allgemeine Verwaltung, kaufmännische Leitung einschließlich Bürokosten, Angestellte, Reisende, Steuern, Abschreibungen.

c) Werbekosten.

d) Sonderkosten: Provisionen, Preisnachlässe, Aufwendungen für Garantie- und Vertragserfüllung, Verluste aus Valuta und Effekten, Bankspesen, Lizenzen, Patente, Versuche usw.

Bei der gesonderten Erfassung der Kosten für die einzelnen Produktionsetappen und Kostenstellen sind Erfahrungen heranzuziehen, die bei Betriebsumstellungen und aus dem Studium verwandter Betriebe gewonnen werden. Auf diese Weise muß es insbesondere gelingen, einen brauchbaren Verteilungsschlüssel zu finden, nach dem die Gemeinschaftskosten auf die einzelnen Werkstätten usw. und letztlich auf die verschiedenen Fabrikate umzulegen sind. Die Durchführung dieser Aufgabe für die verschiedenen Kategorien wirtschaftlicher Unternehmungen ist das weite Feld der betriebswirtschaftlichen Kosten-

¹⁾ Betriebsstatistik in Maschinenfabriken, Schriften des VDMA, Heft 10, 1927.

analyse. Hier ist darauf nicht näher einzugehen. Zur Erläuterung sei nur der in einer gewissen Gattung von Betrieben — z. B. Blechwalzwerken, Ziegeleien, in der Mühlenindustrie — vorliegende einfache Fall erwähnt, daß die verschiedenen Leistungseinheiten durch sog. Äquivalenzziffern zueinander in Beziehung gesetzt werden können. Durch Multiplikation der konstanten Äquivalenzziffern mit der veränderlichen Leistungsmenge wird eine „veränderliche Kostenrechnungsmenge“ (E. Geldmacher) gewonnen, wie dies aus nachstehenden Beispielen verständlich gemacht wird.

1. Beispiel: Verteilung des Stromverbrauchs eines Hammerwerks auf die verschiedenen Gruppen von Hämmern¹⁾. Die tatsächlichen Hammerstunden werden mittels der erfahrungsmäßig festliegenden, dem Bärgewicht proportional angenommenen Äquivalenzziffern in reduzierte Hammerstunden umgerechnet. Aus den aufgelaufenen Gesamtkosten ergibt sich der Preis der reduzierten Hammerstunde, hieraus die Aufteilung der Gesamtkosten und die Kosten der Hammerstunde für die verschiedenen Hämmer.

Hammer	Äquival.- ziffer	tatsächl. Hammerstd.	red. Ham- merstd.	Kosten	Kosten je Hammerstd.
Luppenhamm.	1,5	60	90	70,86	1,18
100 Ztr.-Ham.	5,0	465	2325	1829,80	3,94
60 „ „	3,0	921	2763	2174,50	2,36
30 „ „	1,5	1426,50	2139	1683,59	1,18
22 „ „	1,1	834,75	918	722,64	0,87
8 „ „	0,4	165,75	66	52,16	0,32
			8302	6533,55	

Kosten der reduzierten Hammerstunde: $6533,55 : 8302 = 0,787$.

2. Beispiel: Kostenrechnung eines Blechwalzwerks²⁾:

Blech- stärke mm	Äquival.- Ziffern	Produkt.- Menge t	Reduz. Pro- dukt-Menge t	Kosten	Kosten je Tonne
3,0	0,7	500	350	71 137,50	142,28
2,5	0,75	400	300	60 975,00	152,44
2,0	0,8	600	480	97 560,00	162,60
1,5	0,9	300	270	54 877,50	182,93
1,0	1,0	300	300	60 975,00	203,25
0,75	1,2	400	480	97 560,00	243,90
0,5	1,4	200	280	56 910,00	284,55
			2460	499 995,00	

Kosten der reduzierten Tonne: $499995,00 : 2460 = 203,25$ M.

Wenn zunächst die Gleichung (1) oder die damit gleichbedeutende Gleichung:

$$E = W + L + U + G \quad (1')$$

¹⁾ F. Leitner, a. a. O. S. 450.

²⁾ E. Geldmacher, Betriebswirtschaftslehre, 2. Aufl., Leipzig u. Berlin 1927, S. 11.

für die Jahresbilanz des ganzen Unternehmens zutrifft, so hat doch die eigentliche Selbstkosten- und Erfolgsanalyse die Aufgabe, durch die geschilderte weitgehende Aufgliederung der Kosten den Inhalt dieser Aussage gerade für den Fall der Einzelkalkulation so weit wie möglich zu präzisieren. Beziehen wir $S = W + L + U$ auf einen bestimmten Produktionsausschnitt m von gleichartigen Fabrikaten, so sind die auf die Einzelleistung bezogenen durchschnittlichen Stückkosten:

$$s = \frac{S}{m}. \quad (2)$$

Besonders mit Rücksicht auf das Angebotswesen empfiehlt es sich, die Gemeinschaftskosten U an den ihnen zugeordneten Produktivlöhnen L zu messen; man bezeichnet:

$$u = 100 \frac{U}{L} \quad (3)$$

als den Unkostensatz. Mittels u stellt man dann die Gemeinschaftskosten als prozentualen Zuschlag zu dem entfallenden Lohnbetrag L in Rechnung. Der Erfolg wird durch den Gewinnsatz

$$g = 100 \frac{G}{E} \quad (4)$$

gekennzeichnet, der den Gewinn in Prozenten des gesamten erzielten Erlöses E ausdrückt.

Wird schließlich mit e der Preis der Leistungseinheit bezeichnet, der selbst als Funktion der gesamten Ausbringung anzusehen ist, so gilt

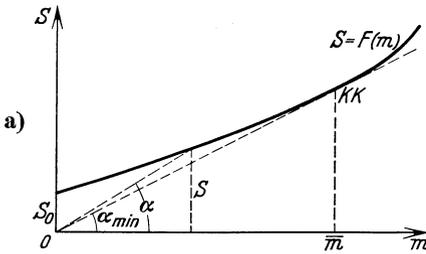
$$E = e \cdot m. \quad (5)$$

Für den Betriebsleiter erheben sich offenbar verschiedene ökonomische Extremalprobleme, die eng miteinander zusammenhängen und darum manchmal durcheinander geworfen werden, die aber wirtschaftsbegrifflich wohl auseinander zu halten sind: Die primäre Aufgabe, den Gesamtgewinn G zu einem Maximum zu machen; die Aufgabe, die durchschnittlichen Stückkosten zu einem Minimum zu machen; die (mit Propagandazielen und sozialen Gesichtspunkten verknüpfte) Aufgabe, den Umsatz E zu einem Größtwert zu steigern. Für die Lösung der ersten und dritten Aufgabe muß außer andern, hier nicht näher zu erörternden Mitteln, wie Absatzpropaganda, Kartellmöglichkeiten usw., eine geschickte, der Aufnahmefähigkeit des Marktes angepaßte Preispolitik hinzugezogen werden.

Der Wirtschaftsmathematiker kann sich bei diesen Fragestellungen dadurch nützlich machen, daß er, typische Fälle der Preis- und Kostenentwicklung herausgreifend, den Verlauf der in die Erfolgsrechnung eingehenden Größen bei wechselndem Beschäftigungsgrad studiert. Bei der Auswahl solcher typischen Fälle wird er sich durch die Erfahrungen des Wirtschaftspraktikers leiten lassen müssen. Trotz alles

Strebens zur Wirklichkeitsnähe wird dabei, wie schon früher betont, eine gewisse Idealisierung des Wirtschaftsablaufs unvermeidlich sein.

Es handelt sich also darum, die in (1') und (5) vorkommenden Größen E, W, L, U, G und die in (2), (3), (4) eingeführten Größen s, u, g als Funktionen des Beschäftigungsgrades zu untersuchen. Gute Dienste leistet hierbei die graphische Darstellung in einem Koordinatensystem x, y . Über die zahlenmäßige Erfassung der als Ordinaten darzustellenden Funktionswerte haben wir ausführlich gesprochen. Wie steht es mit der Messung der durch die Abszissen darzustellenden Argumentwerte, des Beschäftigungsgrades? Dreht es sich bei der



Gesamtproduktion oder beidem betreffenden Produktionsausschnitt (Werkstatt, Auftrag) um einen einzigen Artikel¹⁾, so empfiehlt es sich oft, die Ausbringung selbst, d. h. die Stückzahl der Produktionsmenge auf der Abszissenachse abzutragen.

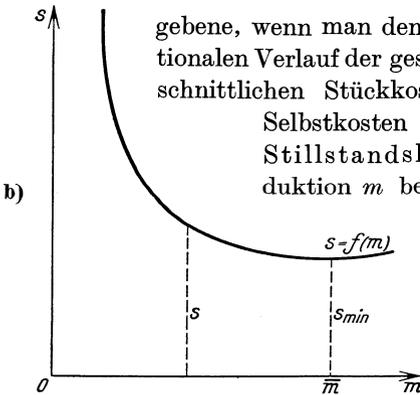


Abb. 29 a/b.

Das ist beispielsweise das Gegebene, wenn man den Zusammenhang zwischen dem funktionalen Verlauf der gesamten Selbstkosten S und der durchschnittlichen Stückkosten s ins Auge fassen will. Die Selbstkosten nehmen von einem Wert S_0 , den Stillstandskosten, aus mit wachsender Produktion m beständig zu (Abb. 29): $S = F(m)$ ist eine monoton wachsende Funktion. Der vom Nullpunkt nach einem beliebigen Punkt (m, S) der Selbstkostenkurve führende Leitstrahl schließt mit der Abszissenachse einen Winkel α ein, für den

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{S}{m} = \frac{F(m)}{m} = s, \quad (6)$$

d. h. die Steigung des Leitstrahls ist gleich den der betreffenden Produktionsmenge zugrunde liegenden Stückkosten, die in Abb. 29 b aufgetragen sind. Den Kleinstwert von α erhalten wir, allgemein zu reden²⁾, indem wir von O aus an die Kurve der Selbstkosten die Tangente legen. Der zu ihrem Berührungspunkt gehörende Abszissenwert \bar{m} ergibt, in das Stückkostenschaubild übertragen, die minimalen Stückkosten s_{\min} . In dem links von \bar{m} liegenden Bereiche, in dem die Stückkosten sinken, sprechen wir von degressiven Kosten, in dem Gebiet

¹⁾ Bzw. einige Artikel mit feststehenden Äquivalenzziffern.

²⁾ Siehe die genauere Diskussion § 21.

rechts von \bar{m} , in dem die Stückkosten steigen, sprechen wir von progressiven Kosten. Die zu minimalen Stückkosten gehörende Ausbringung wird bisweilen¹⁾ zur Kennzeichnung des normalen Beschäftigungsgrades des Werks benutzt, der dann wohl auch als Beschäftigungsgrad 100% oder Einheit des Beschäftigungsgrades angesetzt wird. Das Postulat, daß der „normale Produktionsgrad“ mit der Stelle geringster Stückkosten zusammentreffen soll, läßt sich aber wegen der praktisch dem Absatz gesteckten Grenzen keineswegs immer befriedigen. Beispielsweise würde für die in Abb. 19 dargestellten Selbstkostenkurven der Fall α_{\min} , also geringster Stückkosten, erst für unendlich gesteigerte Produktion erreicht werden. Typisch für solche Fälle beständig degressiver Kostenentwicklung ist die Tatsache, daß die Kostenkurve eine Asymptote besitzt, so zwar, daß diese Asymptote und die Kostenkurve selbst auf der Ordinatenachse einen positiven Abschnitt begrenzen.

Die Regel ist freilich, daß bei wachsender Produktion der degressive Verlauf der durchschnittlichen Stückkosten $s = \frac{F(m)}{m}$ doch schließlich von einem endlichen Abszissenwert \bar{m} aus, der dem s_{\min} entspricht, abgelöst wird durch progressive Kostenentwicklung. Man bezeichnet die zu \bar{m} gehörende Stelle der Kostenkurve als die Kostenkehre KK . Der erste Teil der Kurve $S = F(m)$ (für $m < \bar{m}$) kann von vornherein konvex nach unten gekrümmt sein, wie in Abb. 29 a; er kann aber auch, wie in Abb. 41 a, zunächst konkav und dann konvex nach unten gekrümmt sein. Jedenfalls trifft es nicht, wie in der Literatur vielfach angenommen wird, zu, daß der Wendepunkt, der mathematisch durch $F''(m) = 0$ (Verschwinden des zweiten Differentialquotienten) gekennzeichnet wird, mit der Kostenkehre zusammenfällt, auch nicht, daß wenigstens für das Auftreten einer Kostenkehre das Vorhandensein eines Wendepunkts Vorbedingung sei.

Der hier erörterte Irrtum in der betriebswirtschaftlichen Literatur hängt mit dem andern zusammen, daß die Gesamtkostenkurve $S = F(m)$ bei degressiver Kostenentwicklung stets konkav nach unten, bei progressiver Kostenentwicklung konvex nach unten gekrümmt sei. In Wirklichkeit sind diese Bedingungen nur maßgebend bei Kostenkurven, die vom O -Punkt auslaufen (Abb. 30), ein Fall, der von Schmalenbach als Ausgangspunkt aller Betrachtungen gewählt wurde, der aber in der Praxis bei Gesamtkostenkurven ($S = W + U + L$) eigentlich nie vorkommt. Im allgemeinen gibt es eben Stillstandskosten, Kosten der Fertigungsbereitschaft: $S_0 = U_0$. Daß die Art der Krümmung der Kurve nicht maßgebend ist, erhellt am deutlichsten aus dem Beispiel der linearen Kostenentwicklung. In Abb. 24 a entspricht die Gerade I

¹⁾ Vgl. z. B. M. R. Lehmann, Die industrielle Kalkulation Berlin 1925.

proportionaler, die Gerade *II* progressiver, die Gerade *III* degressiver Kostenentwicklung.

Die die Kostenkehre kennzeichnende Bedingung, daß für sie die durchschnittlichen Stückkosten zum Minimum werden, drückt sich aus durch das Verschwinden des ersten Differentialquotienten von $s = \frac{F(m)}{m}$, also des Ausdrucks $\frac{m \cdot F'(m) - F(m)}{m^2}$. Für ihre Abszisse \bar{m} gilt also

$$\frac{F'(\bar{m})}{\bar{m}} = F'(\bar{m}). \quad (7)$$

Allgemein bedeutet $F'(m)$ den Grenzwert des Quotienten $\frac{\Delta S}{\Delta m}$, d. h. des Quotienten aus dem einer Produktionssteigerung Δm entsprechenden

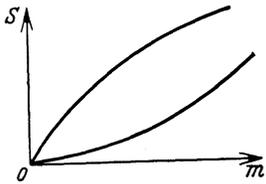


Abb. 30.

Kostenzuwachs ΔS und Δm selbst. Dieser Bruch bedeutet die bei einem zusätzlichen Auftrag je Leistungseinheit aufzuwendenden Neukosten, die besonders bei der Vorkalkulation eines Auftrags eine wichtige Rolle spielen. Ein Unternehmen wird unter Umständen bei Abgabe eines Angebots nicht die durchschnittlichen Stückkosten zugrunde legen, sondern

in der Erwartung, daß die bisher maßgeblichen Gesamtkosten weiterhin von dem bisherigen Abnehmerkreis getragen werden, zwecks Gewinnung neuer Absatzmärkte bzw. aus Prestige Gründen nur die Neukosten für den zu fordernden äußersten Preis zum Ausgang nehmen.

Wir nennen in diesem Sinne $s_p = \frac{dS}{dm} = F'(m)$ die partiellen Stückkosten oder Differentialkosten. Schmalenbach, der sie in die betriebswirtschaftlichen Betrachtungen eingeführt hat, bezeichnet sie als den „proportionalen Satz“. In unserer neuen Bezeichnungsweise können wir den Inhalt der Formel (7) so ausdrücken:

Im Falle des Stückkostenminimums (Kostenkehre) stimmen die durchschnittlichen Stückkosten der Gesamtausbringung mit den partiellen Stückkosten überein.

Die Stelle des Stückkostenminimums wird daher oft zweckmäßigerweise als Schnittpunkt der Kurve $y = \frac{F(m)}{m}$ mit der Kurve $y = F'(m)$ bestimmt. Die letztere durchsetzt hier die erstere von unten her. Denn offenbar liegt die Kostenkehre im Bereich wachsender Differentialkosten.

Geometrisch bedeutet $s_p = \frac{dS}{dm}$ die Steigung der Tangente in einem Punkt der Kostenkurve. Diese ist in dem Gebiet vor der Kostenkehre kleiner als die des Leitstrahls jenes Punktes, hinter der Kostenkehre ist sie größer (vgl. Abb. 29 a). Darin spiegelt sich die optimale Bedeutung wider, die die Kostenkehre eben vom Standpunkt des Selbst-

kostenproblems aus besitzt: An jeder Stelle des vor ihr liegenden Bereichs sind die für zusätzliche Aufträge in Rechnung zu ziehenden Differentialkosten niedriger als die für den betreffenden Produktionsumfang geltenden durchschnittlichen Stückkosten, was zur Produktionssteigerung drängt; hinter ihr ist es umgekehrt. Vom Standpunkt maximalen Gewinns oder maximalen Umsatzes aus gesehen, sehen sich die Dinge natürlich wieder anders an (s. § 20).

In dem Zusammenhang der Kurve der Gesamtkosten $S = F(m)$ und der durchschnittlichen Stückkosten $s = f(m)$ findet sich noch eine Eigentümlichkeit, die gelegentlich mit Nutzen verwerdet wird. Da $S = ms$, so wird $\frac{dS}{dm} = s + m \cdot \frac{ds}{dm}$. Für die Stelle, für die die Gesamtkosten S ein Maximum annehmen, wird $\frac{dS}{dm} = 0$, also $m = -\frac{f(m)}{f'(m)}$.

Nun bedeutet allgemein $-\frac{f(m)}{f'(m)}$ die Subtangente der Kurve $y = f(m)$, gemessen vom Fußpunkt des Kurvenpunkts aus im Sinne der wachsenden m . Soll diese mit der Abszisse des Kurvenpunkts übereinstimmen, so muß auf der Tangente, die in ihm an die Kurve gezogen wird, von den Koordinatenachsen ein Abschnitt begrenzt werden, der im Kurvenpunkt selbst halbiert wird. Nun zeigt die Erfahrung, daß ein Rückgang der Gesamtkosten S mit wachsendem m so gut wie nie vorkommt¹⁾. Da also die Kurve der Gesamtkosten S an der Stelle, wo die Tangente horizontal wird, ihre reale Bedeutung verliert, so gilt bezüglich der Kurve der Stückkosten dasselbe für die Stelle, wo es eine Tangente gibt, deren von den Koordinaten-

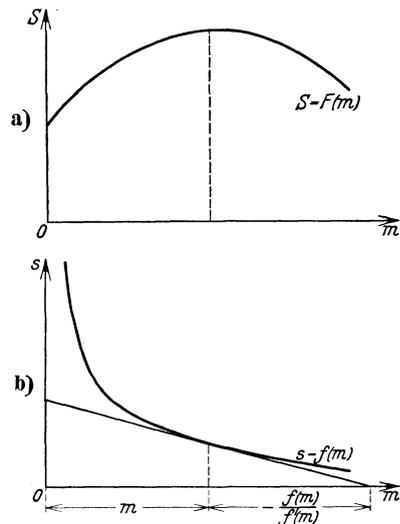


Abb. 31 a/b.

achsen begrenzter Abschnitt im Berührungspunkte halbiert wird (Abb. 31 a, b). Diese Tatsache wurde, in Anlehnung an Gedanken-

¹⁾ Für den ungewöhnlichen Fall „regressiver Kosten“ erwähnt Schmalenbach, Grundlagen der Selbstkostenrechnung und Preispolitik, 5. Aufl., Leipzig 1930, S. 40 das Beispiel hochhitziger Öfen mit sehr hitzebeständigen, aber gegen Schwankungen höchst empfindlichen feuerfesten Steinen. „Eine Produktionsreduktion oder eine Stillstellung einzelner Öfen oder Batterien bringt sofort erhebliche Verluste an solchen Steinen.“

gänge von A. Cournot¹⁾, formuliert von G. Waffenschmidt²⁾. Einen Sonderfall stellt das Beispiel stationärer Gesamtkosten dar, wo also nur eigentlich fixe Kosten in Frage kommen. Hier hat die Stückkostenkurve, eine gleichseitige Hyperbel, die Eigenschaft, daß bei der Tangente jedes Kurvenpunktes der von den Koordinatenachsen begrenzte Abschnitt im Berührungspunkt halbiert wird.

Erzeugt das Werk verschiedene Artikel, so wird man zwar für die Einzelkalkulation, evtl. auch für die Werkstattabrechnung die Stückzahl m als Maß der Produktion, als Abszisse in der Kosten- und Erfolgsdarstellung im allgemeinen beibehalten. Für die Gesamtkalkulation braucht man aber einen „gemeinsamen Nenner“ m . Hierzu eignet sich oft die Zahl der verarbeiteten Werkstoffeinheiten oder auch, je nach der Sachlage mit größerer oder geringerer Vollkommenheit, der Erlös, die ihm im wesentlichen proportionalen Produktivlöhne bzw. -lohnstunden, Maschinenstunden. Schwankungen der Lohnsätze und Preise, Änderungen der Produktionsdurchführung trüben natürlich die Brauchbarkeit des einen oder anderen „Generalnenners“. Den einem bestimmten Produktionsumfang entsprechenden Wert des von der Werksleitung gewählten Generalnenners, dividiert durch seinen Wert für den von ihr angesichts der vorhandenen „Kapazität“ und der Absatzmöglichkeiten als normal angesehenen Produktionsumfang m_1 , bezeichnen wir als den Beschäftigungsgrad x . Für normale Beschäftigung ist dann $x = 1$. Will man lieber mit Prozentzahlen arbeiten, so hat man den Faktor 100 hinzuzufügen. Die bisherigen Betrachtungen lassen sich für diese verallgemeinerte Definition der Abszissen im Prinzip übertragen. Auch jetzt trennt z. B. der Berührungspunkt der von O an die Kurve der Selbstkosten gezogenen Tangente das Gebiet der degressiven Kosten von dem der progressiven. Dabei muß die der normalen Beschäftigung entsprechende Ausbringung, Maschinenstundenzahl usw. als Leistungseinheit aufgefaßt werden.

§ 18. Kosten und Gewinn bei wechselndem Beschäftigungsgrad:

Fall des linearen Kostenanstiegs bei konstanten Preisen.

Das einfachste Beispiel einer Kostenkurve bieten die Kapitalkosten (Grundkosten, Gebäudekosten, Anlagekosten für Maschinen einschl. Fundamente, Montage, Probebetrieb). Verzinsung und Abschreibung ergeben für das Jahr eine feste Summe U_0 , und diese fixen Kosten (eisernen Kosten) sind auf die gefertigten Stücke oder die produktiven

¹⁾ Untersuchungen über die mathematischen Grundlagen der Theorie des Reichtums, Paris 1838 (übersetzt von G. Waffenschmidt, Jena 1924).

²⁾ Vgl. P. Grodzinski, Abhängigkeit der Gesamtkosten und Stückkosten von der Stückzahl, Maschinenbau 1929, H. 15.

Stunden gleichmäßig umzulegen. Nehmen wir als normalen Beschäftigungsgrad den Fall von 300 Betriebstagen zu 24 Arbeitsstunden, so betragen die entsprechenden „Stückkosten“, d. h. die Kosten der Maschinenstunde: $s_1 = \frac{U_0}{7200}$; für einen beliebigen Beschäftigungsgrad x (gemessen als Bruchteil von 7200 Arbeitsstunden) betragen sie

$$s = \frac{s_1}{x}. \tag{8}$$

Die Stückkostenkurve ist also eine gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten die Koordinatenachsen sind.

Beispiel: (Abb. 32¹) Eine 200 pferdige Anlage kostet 50 000 Mark; wie groß sind die Kapitalkosten für die Pferdekraftstunde bei 3600 Betriebsstunden (also $x = \frac{1}{2}$) und durchschnittlich $\frac{3}{4}$ Last sowie 12% Verzinsung, Tilgung usw. ?

Die aufs Jahr bezogenen Kapitalkosten für 1 PS Durchschnittsleistung sind

$$U_0 = \frac{0,12 \cdot 50000}{200} \cdot \frac{4}{3} = 40 \text{ M.}$$

Mithin die „Stückkosten“ (Kosten der Pferdestärkenstunde) für Normalbeschäftigung:

$$s_1 = \frac{4000}{7200} = 0,556 \text{ Pfennig.}$$

Bei 3600 Betriebsstunden:

$$s = \frac{s_1}{\frac{1}{2}} = 1,112 \text{ Pf/PS-Stunde.}$$

Wir sehen, daß bei fixen Gesamtkosten $S = U_0$ die Stückkosten s beständig abnehmen.

Auf den Fall linearen Kostenanstiegs werden wir geführt, wenn zu den fixen Kosten des Unternehmens solche Kosten hinzukommen, die, wie die Werkstoffkosten W und die Löhne L , der Ausbringung m proportional sind. Das ist z. B. auch dann der Fall, wenn die Gemeinschaftskosten U sich aus einem fixen Bestandteil U_0 und einem der Ausbringung m proportionalen Bestandteil zusammensetzen.

Wir nehmen vorweg ein Beispiel, wo schon bei einem einzelnen Aggregat des Werks die Dinge so liegen: Die Betriebskosten einer mittleren Dampfanlage in Abhängigkeit von der Betriebszeit¹⁾, d. h. ihrer dem Beschäftigungsgrad entsprechenden Ausnutzung. Hier überlagern sich über die fixen Kapitalkosten die Kosten für Brennstoffe, Unterhaltung, Schmierung und Löhne, d. h. dem Beschäftigungsgrad im wesentlichen proportionale Kosten. Die Verbilligung der Kraft durch möglichst große zeitliche Ausnutzung der Anlage fällt um so mehr ins

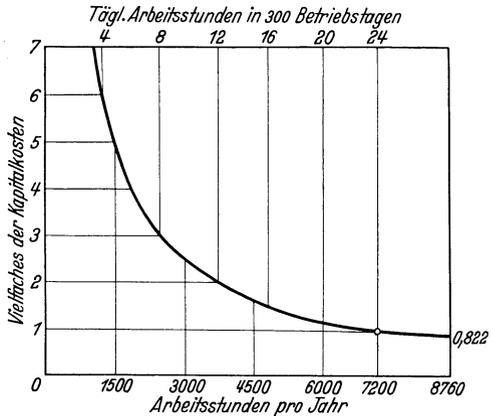


Abb. 32.

¹⁾ Karl Urbahn, Ermittlung der billigsten Betriebskraft für Fabriken, 2. Aufl. von E. Reuttlinger, Berlin 1913, S. 6, 26f., 216.

Gewicht, je höher die auf die einzelne PS-Stunde bezogenen Kapitalkosten bei mäßiger Beschäftigung im Vergleich zu den proportionalen Kosten ausfallen (Abb. 33).

Es gibt nun zahlreiche Beispiele für analoge Gestaltung der Kosten von Gesamtbetrieben. So folgte der Kostenverlauf einer Papierfabrik und einer Pappfabrik¹⁾ dem Gesetz

$$S = U_0 + am, \quad (9)$$

wo m die produzierten Tonnen Papier bzw. Pappe. In dem einen Fall ist $a = 398$, $U_0 = 218000$; im andern Fall $a = 147,3$; $U_0 = 649000$.

Die durchschnittlichen Stückkosten (Kosten pro Tonne) waren also

$$s = a + \frac{U_0}{m} \quad (9')$$

Die Stückkostenkurve ist demnach eine gleichseitige Hyperbel, deren vertikale Asymptote die Ordinatenachse, deren horizontale Asymptote die Gerade $y = a$ ist. Der Grenzwert a , zu dem die Stückkosten bei wachsen-

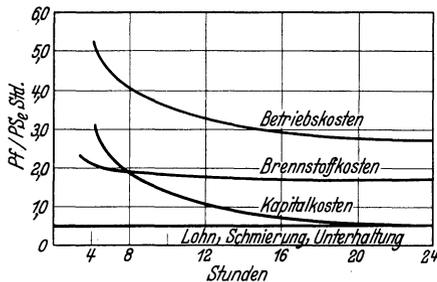


Abb. 33. Betriebskosten einer mittleren Dampfmaschine in Abhängigkeit von der Betriebszeit (Normallast).

der Ausbringung mehr und mehr absinken, stimmt nach (9) überein mit dem Kostenzuwachs $\frac{dS}{dm}$, den die Steigerung der Produktion um ein Stück erfordert. Diese partiellen Stückkosten sind eng verknüpft mit dem einem Angebot zugrunde zu legenden Mindestpreis (s. S. 120).

Ein ebenfalls der Praxis entnommenes, linearem Kostenanstieg entsprechendes Beispiel gibt A. Hildebrandt²⁾ mit genauer Aufgliederung der Kosten in Werkstoffkosten W , Löhne L und Gemeinschaftskosten U (Abb. 34 a, b). Es betrifft eine vorwiegend auf Massenfertigung eingestellte Apparatefabrik und umfaßt einen Zeitraum von etwa 4 Jahren. Da es sich um sehr verschiedenartige Fabrikate von stark schwankender Ausbringungsmenge handelt, wurde für den Beschäftigungsgrad x ein Generalnenner, das Verhältnis des jeweiligen Umsatzes zum Vollumsatz, eingeführt. Die eingetragenen Punkte stellen Durchschnittsergebnisse teils von Monaten und Quartalen, teils von Jahren dar. Der in weitgehender Annäherung lineare Charakter des Kostenverlaufs ist noch herab bis zu einem Beschäftigungsgrad von 20% betriebsstatistisch belegt, und man entnimmt aus dem Diagramm die Stillstandskosten U_0

¹⁾ Nach F. Schiebuhr, Die Verminderung der Selbstkosten in der Papierindustrie, Biberach-Riß 1926, S. 40 f.

²⁾ Mathematisch-graphische Untersuchungen über die Rentabilitätsverhältnisse des Fabrikbetriebes, Berlin 1925.

als Abschnitt der Kostengraden auf der Ordinatenachse; sie betragen 81% der bei Vollumsatz geltenden Gemeinschaftskosten.

Wir wollen weiterhin¹⁾ den nach § 17 fallweise passend definierten Beschäftigungsgrad als Argument x zugrunde legen. Die Stillstandskosten seien $S_0 = U_0$. Für den Beschäftigungsgrad $x = 1$ (Normalbeschäftigung) mögen W_1, L_1, U_1 die Werte der Werkstoffkosten, Löhne, Gemeinschaftskosten sein. Dann haben wir für diese allgemein bei linearem Kostenanstieg: $W = W_1 x$; $L = L_1 x$; $U = U_0 + (U_1 - U_0)x = iU_1 + 1 - iU_1 x$, wenn $U_0 = iU_1$ gesetzt wird. Hier ist i ein echter Bruch, der in der Praxis meist zwischen 0,5 und 0,9 liegt (in obigem Beispiel $i = 0,81$). Wir erhalten:

$$S = iU_1 + (W_1 + L_1 + 1 - iU_1)x, \quad (10)$$

eine mit der Grundgleichung (9) im wesentlichen übereinstimmende Beziehung. Sind E_1, G_1 die Werte von Erlös E und Gewinn G bei normalem Beschäftigungsgrad, so haben wir bei festem Verkaufspreise:

$$E = E_1 x, \quad (11)$$

d. h. ebenfalls linearen Erlösverlauf, und nach (1')

$$E_1 x = iU_1 + (W_1 + L_1 + 1 - iU_1)x + G. \quad (12)$$

Der Gewinn befolgt dann gleichfalls das lineare Gesetz:

$$G = [E_1 - (W_1 + L_1 + 1 - iU_1)]x - iU_1. \quad (12')$$

Erlösgerade und Kostengerade schneiden sich in dem Punkt, für den $G = 0$, dem kritischen Punkt K . Seine Abszisse ist

$$x_k = \frac{iU_1}{E_1 - (W_1 + L_1 + 1 - iU_1)}. \quad (13)$$

Für Beschäftigungsgrade x unterhalb x_k arbeitet der Betrieb mit Verlust, für solche oberhalb x_k mit Gewinn. Man wird bestrebt sein, die Betriebsgrundlagen so zu gestalten, daß x_k dem normalen Beschäftigungsgrade 1 nicht zu nahe kommt, damit ein Rückgang der Beschäftigung nicht sehr bald in das Verlustgebiet führt. Verlangt man außerdem, daß der dem normalen Beschäftigungsgrad 1 entsprechende Gewinn G_1 möglichst groß wird, so kann man als Ziel gesunder Betriebsgebarung die Forderung formulieren: Das durch die Achse des normalen Beschäftigungsgrades, die Kostenlinie und die Erlöslinie bestimmte Gewinn dreieck soll möglichst groß ausfallen. Von gesunden Grundlagen kann man im allgemeinen sprechen, wenn $x_k < 0,6$. Nach Abb. 34 a ist $\frac{1 - x_k}{x_k} = \frac{G_1}{U_0}$, also

$$x_k = \frac{U_0}{U_0 + G_1} = \frac{1}{1 + \frac{G_1}{U_0}}. \quad (13')$$

¹⁾ Vgl. A. Hildebrandt, a. a. O.

Bei Betrieben, die bei normalem Beschäftigungsgrad den gleichen Gewinn G_1 ergeben, ist x_k um so kleiner, je kleiner U_0 . Ist beispielsweise in einem Betrieb $U_0 = \frac{G_1}{2}$, in einem anderen Betrieb $U_0 = G_1$, so haben wir im ersten Fall $x_k = \frac{1}{3}$, im zweiten Fall $x_k = \frac{1}{2}$. Bei festem U_0 und G_1 ist die Lage des kritischen Punktes unabhängig von den proportionalen Kosten und der Art, wie sie aus Werkstoffkosten,

Löhnen und proportionalen Gemeinschaftskosten sich zusammensetzen.

Die Gleichung (13') ist lehrreich für die Gestaltung der Dinge bei wirtschaftlicher Depression. Die Werkstoffkosten, die Löhne und die proportionalen Bestandteile der Gemeinschaftskosten mögen im gleichen Verhältnis gesenkt werden, während der fixe Bestandteil U_0 der letzteren unverändert bleibe. Um eine entsprechende Senkung der Verkaufspreise zu ermöglichen, müßte man jedenfalls G_1 in noch stärkerem Ausmaß reduzieren. Trotzdem würde x_k wachsen und damit die Gefahr, daß bei rückläufiger Beschäftigung sehr bald mit Verlust gearbeitet wird. Das würde auch noch zutreffen, wenn die Gewinnspanne G_1 nur in gleichem Maße wie die proportionalen Kosten gesenkt würde, was auf

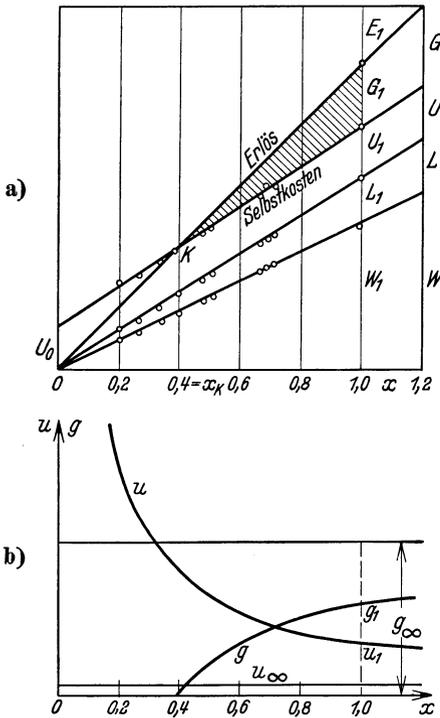


Abb. 34 a/b. Hildebrandt Apparatefabrik.

eine geeignete Reduktion der Verkaufspreise und eine Vergrößerung der Gefahr rückläufiger Beschäftigung hinauslaufen würde. Ausreichende Widerstandsfähigkeit kann offenbar nur durch Verkleinerung von U_0 erreicht werden, in erster Linie also durch Herabsetzung der Kapitalkosten. Die Schwere der Weltwirtschaftskrise kann als ein Ausdruck der Tatsache gelten, daß man überall auf zu hohen fixen Kosten sitzt.

Bestehen für einen Betrieb günstige Aussichten, die Ausbringung dauernd über $x = 1$ hinaus zu steigern, so wird man gerade umgekehrt solche Produktionsbedingungen, bei denen x_k näher an 1 heranrückt, vorziehen; denn für $x > 1$ fällt, wie die Abb. 34 a zeigt, G bei festem G_1

um so größer aus, je näher der kritische Punkt an die Achse des normalen Beschäftigungsgrades $x = 1$ heranrückt. In diesem Sinne ist der für „Rationalisierungen“ typische Fall, daß eine Herabsetzung der proportionalen Kosten durch eine Erhöhung der fixen Kosten und dadurch bedingte Vergrößerung von x_k erkaufte wird, zu beurteilen. Wir kommen hierauf noch zurück.

Für den Unkostensatz erhalten wir:

$$u = 100 \frac{U}{L} = 100 \frac{i U_1 + \overline{1 - i} U_1 x}{L_1 x},$$

oder wenn wir den für normale Beschäftigung geltenden Unkostensatz $u_1 = 100 \frac{U_1}{L_1}$ einführen:

$$u = u_1 \left(1 - i + \frac{i}{x} \right) \tag{14}$$

Die den Unkostensatz darstellende Kurve ist eine gleichseitige Hyperbel, deren eine Asymptote die Ordinatenachse ist, während die andere horizontale Asymptote die Ordinate $u_\infty = \overline{1 - i} u_1$ besitzt. Bei hohem normalem Unkostensatz u_1 verläuft diese Kurve im Bereich der normalen Beschäftigung steiler als bei niedrigem u_1 . Denn der Differentialquotient $\frac{du}{dx} = -\frac{i u_1}{x^2}$ nimmt für $x = 1$ den Wert $-i u_1$ an. Man kann $\frac{du}{dx}$ als die „Unkostenempfindlichkeit“ des Betriebs auffassen.

1. Beispiel: Um welchen Betrag steigt der Unkostensatz, wenn der Beschäftigungsgrad vom Normalwert 100% auf 95% sinkt? $u_1 = 300\%$; $i = 0,8$.

Lösung: $\Delta u \approx -i u_1 \cdot \Delta x = 0,8 \cdot 300 \cdot 0,05 = 12\%$, d. h. der Unkostensatz steigt auf ungefähr 312%.

2. Beispiel: Für einen bei normaler Beschäftigung hereingenommenen Auftrag ergab sich folgende Vorkalkulation:

$$\begin{aligned} W &= 400\,000 \text{ M} \\ L &= 150\,000 \text{ M} \\ U &= 225\,000 \text{ M} \\ G &= 200\,000 \text{ M} \\ E &= 975\,000 \text{ M.} \end{aligned}$$

Für die Ausführung des Auftrages sind 200 000 Lohnstunden erforderlich. Der Rückgang der Aufträge zwingt das Werk im Moment des Ausführungsbeginns, von der 48-Stunden-Woche zur 40-Stunden-Woche bei gleichbleibenden Stundenlohnsätzen überzugehen. Wie stellt sich die Nachkalkulation? $i = 0,8$.

Lösung: Der der normalen Beschäftigung entsprechende Unkostensatz ist

$$u_1 = 100 \cdot \frac{225\,000}{150\,000} = 150\%.$$

Der reduzierte Beschäftigungsgrad beträgt $x = \frac{5}{6}$. Der entsprechende

Unkostensatz ist $u = u_1 \left(0,2 + \frac{0,8}{5/6} \right) = 1,16 u_1 = 174\%$.

Dementsprechend gestaltet sich die Nachkalkulation wie folgt:

$$\begin{aligned} W &= 400\,000 \text{ M} \\ L &= 150\,000 \text{ M} \\ U &= 1,74 L = 261\,000 \text{ M} \\ G &= 164\,000 \text{ M} \\ \hline E &= 975\,000 \text{ M.} \end{aligned}$$

Zu beachten ist, daß für Kalkulationszwecke beim Einsetzen der Unkostensätze nach Werkstätten zu trennen ist.

Um den Gewinnsatz zu erhalten, beachten wir, daß nach Abb. 34a:

$$G : G_1 = (x - x_k) : (1 - x_k),$$

also

$$g = 100 \frac{G}{E} = 100 \frac{G_1}{E_1 x} \cdot \frac{x - x_k}{1 - x_k}.$$

Demgemäß ergibt sich der Gewinnsatz:

$$g = \frac{g_1}{1 - x_k} \left(1 - \frac{x_k}{x} \right). \quad (15)$$

Die den Gewinnsatz darstellende Kurve (Abb. 34b) ist eine gleichseitige Hyperbel, deren eine Asymptote die Ordinatenachse ist, während die andere horizontale Asymptote die Ordinate $g_\infty = \frac{g_1}{1 - x_k}$ besitzt. Der Grenzwert g_∞ , dem der Gewinnsatz bei wachsender Produktion und gleichbleibenden Preisen zustrebt, ist also um so größer, je näher der kritische Punkt an die Achse des normalen Beschäftigungsgrades heranrückt. Die Kurve des Gewinnsatzes schneidet die Abszissenachse in dem (unterhalb des kritischen Punktes liegenden) Punkt mit der Abszisse x_k . Links davon haben wir wachsende Verlustsätze. Auch absolut genommen ist der Verlust für $x = 0$, also Stilllegung des Betriebes, am größten.

Schreiben wir nach (15) den Gewinnsatz g' für den Beschäftigungsgrad x' hin:

$$g' = \frac{g_1}{1 - x_k} \left(1 - \frac{x_k}{x'} \right),$$

so erkennen wir:

$$g' = g \frac{1 - \frac{x_k}{x'}}{1 - \frac{x_k}{x}}, \quad (15')$$

oder wenn wir nach x' auflösen:

$$x' = \frac{g x_k}{g' \cdot \frac{x_k}{x} + g - g'}. \quad (15'')$$

1. Beispiel: Ein Betrieb arbeitet bei halber Beschäftigung ohne Gewinn, bei voller Beschäftigung mit einem Gewinnsatz $g_1 = 15\%$. Wie weit muß der Produktionsgrad gesteigert werden, um einen Gewinnsatz von 20% zu erzielen? Welchem

Grenzwert strebt der Gewinnsatz bei weiterer Steigerung der Beschäftigung zu?

Lösung: Nach (15'') ist: $x' = \frac{15 \cdot \frac{1}{2}}{20 \cdot \frac{1}{2} - 5} = 1,5$. Als Grenzwert des Gewinnsatzes ergibt sich $g_\infty = \frac{15}{1 - \frac{1}{2}} = 30\%$.

2. Beispiel: Ein Werk, in dem die 40-Stunden-Woche eingeführt ist, arbeitet mit einem Gewinnsatz von 5%. Welche Steigerung des Gewinnsatzes erbringt die Rückkehr zur 48-Stunden-Woche und damit zu voller Beschäftigung, wenn $x_k = 0,6$ ist?

Lösung: Nach (15) ist:

$$g_1 = \frac{(1 - 0,6) \cdot 5}{1 - \frac{0,6}{5/6}} = 7,1\%.$$

Ermittlung der Konstanten U_0, i bei linearem Kostenanstieg.

Während die Konstanten W_1, L_1 , d. h. die Parameter des den Werkstoffkosten und den Löhnen entsprechenden Anteils der proportionalen Kosten, durch die Erfahrung ohne weiteres gegeben werden, muß über die Bestimmung der Konstanten U_0, i , die den fixen und proportionalen Teil der Gemeinschaftskosten einer Betriebsabrechnung charakterisieren, noch einiges gesagt werden. Wir knüpfen an ein der Praxis entnommenes Beispiel an.

H. Müller-Bernhardt¹⁾ gibt eine Tabelle für die Gestaltung der Stückkosten s , die in einer Maschinenfabrik für die Herstellung einer bestimmten Maschine B bei verschiedenen, in Prozenten ausgedrückten Beschäftigungsgraden x sich ergeben:

Beschäftigungsgrad x	4,5 %	18 %	54 %	85 %	100 %
Werkstoff	59,00	59,00	59,00	59,00	59,00
Lohn	41,00	41,00	41,00	41,00	41,00
Gemeinschaftskosten . . .	902,00	253,00	111,40	80,00	70,32
Sa.	1002,00	353,00	211,40	180,00	170,32

Berechnet man nach dieser Tabelle unter Voraussetzung einer Ausbringung 100 die Gesamtkosten S , so zeigt die graphische Darstellung, daß die den Einzelwerten entsprechenden Punkte (Abb. 35) zwanglos nach einer geraden Linie ausgeglichen werden können. Das entsprechende lineare Kostengesetz lautet:

$$S = 4019 + 132 x.$$

In Wirklichkeit zeigen nun aber die einzelnen Kostenkomponenten durchaus nicht durchweg das einfache lineare Gesetz. Wenn auch für

¹⁾ Industrielle Selbstkosten bei schwankendem Beschäftigungsgrad, Berlin 1925, S. 12.

die Darstellung der resultierenden Gemeinschaftskosten die Zusammensetzung aus einem fixen und einem proportionalen Bestandteil praktisch genügt, so weisen doch die Elemente, in die sie zerfallen — Material-, Betriebs-, Vertriebsgemeinkosten — mancherlei Schwankungen auf. Die Materialgemeinkosten sinken und steigen wieder und sind am ehesten

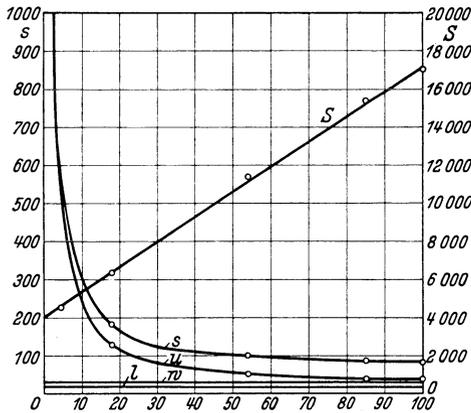


Abb. 35. Müller-Bernhardt Maschine B.

näherungsweise durch eine Konstante anzusetzen. Von den Betriebsgemeinkosten zeigen Hilfsmaterialien und Hilfslöhne annähernd proportionalen Verlauf, die Aufwendungen für Gehälter, Steuern, Versicherungen usw. sind fast gänzlich fest. Die Kraftkosten steigen bei Müller-Bernhardt zunächst und schwanken dann um einen Mittelwert; bei den Abschreibungen muß fallweise beurteilt werden, ob der

Grad der Beanspruchung der einzelnen Anlagen für die Bemessung ihrer Lebensdauer entscheidend ist und daher wechselnde Abschreibungssätze je nach dem Beschäftigungsgrade am Platze sind, oder ob — wie im Müller-Bernhardtschen Beispiel — das schnelle Veralten der Anlagen für die Aufrechterhaltung fester Abschreibungssätze spricht. Die Vertriebsgemeinkosten zerfallen ziemlich deutlich in annähernd konstante und annähernd proportionale.

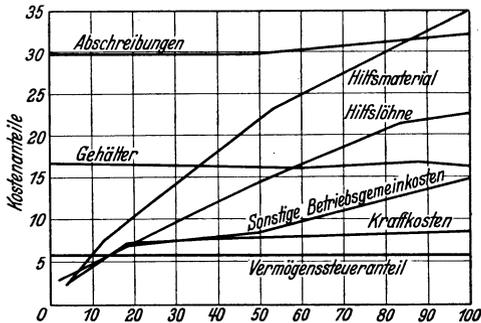


Abb. 36. Betriebsgemeinkosten getrennt nach Arten:
Werk I Müller-Bernhardt.

Trotz all dieser Unregelmäßigkeiten ist es im vorliegenden Fall gerechtfertigt, die der Superposition der verschiedenen Kostenkomponenten entsprechende aus-

gleichende Gerade ohne weiteres zur Bestimmung der Konstanten des linearen Kostenanstiegs zu benutzen, weil dies Gesetz hier herab bis zu dem sehr niedrigen Beschäftigungsgrad 4,5% belegt erscheint. Ist dies nicht der Fall, so wird man nach dem Vorschlag von Müller-Bernhardt eine genaue Analyse der Kostenkomponenten zu Hilfe nehmen. Bei den einzelnen Konstanten

ist es, besonders unter Heranziehung der graphischen Darstellung (Abb. 36), leichter zu schätzen, welcher Prozentsatz des für 100% ige Beschäftigung geltenden Betrages als fester und welcher als im Endeffekt proportionaler Bestandteil anzusehen ist. Im allgemeinen kann man Abschreibungen, Gehälter, Versicherungskosten, Vermögenssteuer als fixe Kosten, die übrigen als teils fest, teils proportional identifizieren. Bei dem Müller-Bernhardtschen Beispiel ergab sich danach für die Betriebsgemeinkosten folgende Aufteilung, wobei der feste Anteil in Prozenten des betreffenden Wertes für Normalbeschäftigung angegeben ist:

In diesem Fall, wo tatsächlich auch für sehrniedrige Beschäftigungsgrade zuverlässige Daten vorliegen, ergibt die graphische Darstellung, daß von den Betriebsgemeinkosten 52,4% als Stillstandskosten anzusehen sind. Die Übereinstimmung mit dem durch Analyse gewonnenen

Kostenart	Fester Anteil %	Als Bruchteil der gesamten Betriebs- gemeinkosten %
Abschreibungen	100	45,0
Verzinsung	100	
Gehälter	100	
Kraftkosten	60	2,9
Vermögenssteuer	100	3,2
Hilfsmaterial	3	0,5
Hilfslöhne	3	0,4
Versicherungskosten	100	0,9
Sonstiges	30	
Summa		52,9

Wert ist demnach sehr befriedigend. Das Verfahren der numerischen Analyse der Kostenkomponenten wird also in ähnlich gearteten Fällen mit Nutzen heranzuziehen sein.

Im Fall linearen Kostenanstiegs, wo die Stückkosten bei wachsender Ausbringung ständig sinken, kann das Wort von der Degression, die nach Sättigung schreit, zu bedenklichen Schlußfolgerungen führen. Praktisch wird für linearen Kosten- und Gewinnanstieg immer nur ein begrenzter Geltungsbereich in Frage kommen können. Eine erhebliche Steigerung des Beschäftigungsgrades und damit der Ausbringung wird vielfach nur durch Reduzierung der — bisher als fest angenommenen — Verkaufspreise zu erzielen sein. Geht wachsender Beschäftigungsgrad mit volkswirtschaftlichem Aufstieg Hand in Hand, so werden auch, allgemein zu reden, die Werkstoffpreise und Lohnsätze steigen, so daß die Entwicklung der „proportionalen Kosten“ in neue Geleise übergeht. Aber auch für den Fall des Beharrungszustandes der allgemeinen volkswirtschaftlichen Verhältnisse wird die Kostenentwicklung sich von dem Lineargesetz trennen, sobald im Beschäftigungsgrad größere Abweichungen (nach oben oder unten) von der der Kapazität des Betriebes entsprechenden Normalziffer auftreten. Neueinstellungen von Personal,

Vergrößerung von Kraftanlagen usw. können bei rückläufiger Beschäftigung nicht ohne weiteres rückgängig gemacht werden. Bei anormaler Steigerung des Beschäftigungsgrades müssen beispielsweise Kraftanlagen durch teure Zusatzkraft ergänzt, höhere Überstundenlöhne gezahlt, teure Nachschichten eingeführt, Überanstrengung der Kraftmaschinen, übermäßiger Brennstoffverbrauch in Kauf genommen werden und dgl. Der Erfolg ist, daß im allgemeinen an die Stelle der Kostengeraden eine nach unten konvex gekrümmte parabelartige Kurve tritt, die praktisch für einen gewissen Bereich durch eine ihrer Tangenten ersetzt werden kann. Freilich weist diese Sachlage darauf hin, daß man Gefahr läuft, bei fortgesetzt steigender Beschäftigung in den Bereich progressiver Kostenentwicklung zu geraten. Für den Leiter der Unternehmung kann sich also die Aufgabe ergeben, zu prüfen, ob die Voraussetzungen für eine Steigerung ihrer Kapazität gegeben sind, die durch strukturelle Betriebsänderungen zu erreichen wäre.

§ 19. Strukturelle Betriebsänderungen. Lineare Stückkostensenkung.

Schon K. Rathenau¹⁾ stellte bei einer Reihe der von ihm untersuchten Betriebe, z. B. der Werkzeugindustrie, fest, daß anscheinend in den Gemeinschaftskosten ein ungewöhnlich hoher Bestandteil von proportionalen Kosten figurierte. In Wirklichkeit waren hier bei fortschreitendem Produktionsgrad durch Einführung von neuen Spezialmaschinen und anderen Kapital erfordernden Verbesserungen die Produktionsgrundlagen verändert worden. Das Wesen derartiger struktureller Betriebsänderungen, wie sie im Zeitalter der Rationalisie-

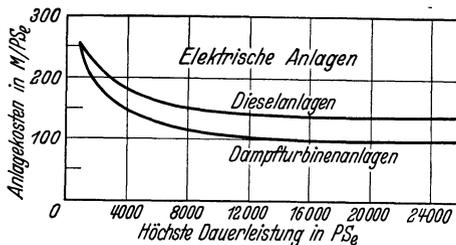


Abb. 37. Mittlere Anlagekosten elektrischer Großkraftwerke.

rungen an der Tagesordnung waren, ist nun aber vielmehr, daß durch die mit den neuen Kapitalinvestitionen verbundene Steigerung der fixen Kosten eine Herabsetzung der proportionalen Kosten erreicht wird. Für die verschiedenen Etappen der Werksentwicklung

wird oft nach wie vor näherungsweise linearer Kostenanstieg gelten, alles in allem aber resultiert ein allgemeineres Kostengesetz. Durch die Diagramme 37, 38 wird erläutert, wie schon bei einzelnen Aggregaten des Betriebs durch erhöhte Kapitalaufwendung eine Senkung der Stückkosten erreicht wird. Die veränderlichen Betriebskosten verschiedener

¹⁾ Der Einfluß der Kapital- und Produktionsvermehrung auf die Produktionskosten in der deutschen Maschinenindustrie, Jena 1906.

Motoren (Dampfkraftanlagen, Gasmaschinen, Dieselmotoren, elektrische Kraftanlagen), bezogen auf die Leistungseinheit (PS-Stunde usw.), nehmen im allgemeinen beim Übergang zu stärkeren Kraftanlagen, d. h. höheren Kapitalkosten ab. Ähnlich liegt nun die Sache fast immer dann, wenn ein Betrieb durch erhöhte Maschinisierung und dergleichen auf einen höheren Beschäftigungsgrad „abgestimmt“ wird. Die partiellen Stückkosten, insbesondere die für menschliche Arbeitskraft zu zahlenden Lohnsummen werden gesenkt, die Kosten der Fertigungsbe-
 reitschaft dagegen erhöht: Kapitalkosten, Abschreibungen wegen verstärkter Abnutzung, Aufwendungen für Arbeitsaufsicht, Gehälter.

Wird nun in diesem Sinne zur Anpassung an fortschreitend steigenden Beschäftigungsgrad, also zur Sicherstellung des fortlaufend degressiven Charakters der Kostenentwicklung eine ganze Folge struktureller Betriebsänderungen durchgeführt, so entspricht dem in der graphischen Darstellung eine Folge von Kostengeraden g_1, g_2, \dots . Ihre Gleichungen seien $S = a_1x + b_1; S = a_2x + b_2; \dots$. Wir wollen diese Geraden als Tangenten einer durch ein mathematisches Gesetz definierten Kurve ansehen. Ihr entspricht dann bezüglich der durchschnittlichen Stückkosten $s = \frac{S}{x}$ ebenfalls eine mathematisch definierte Kurve, und zwar ist diese dann das Umhüllungsgebilde der Stückkostenhyperbeln $s = a_1 + \frac{b_1}{x}; s = a_2 + \frac{b_2}{x}; \dots$

Zur Erläuterung geben wir das Diagramm 39, das M. R. Lehmann¹⁾ auf Grund eines der Praxis entnommenen Beispiels entworfen hat. Um die mit wachsendem Beschäftigungsgrad vielfach einhergehende Tendenz der Steigerung der Werkstoffkosten und Löhne möglichst zu kompensieren, wird man darauf bedacht sein, als Umhüllungskurve der Stückkostenhyperbeln eine Linie beständigen Gefälls zu erhalten.

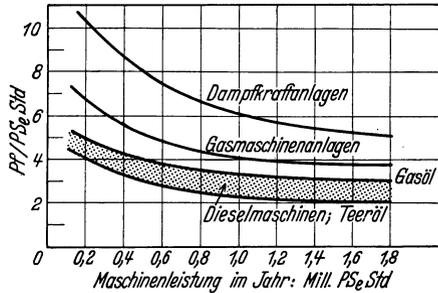


Abb. 38. Veränderliche Betriebskosten (außer Kapitalkosten) in Abhängigkeit von der Jahresleistung.

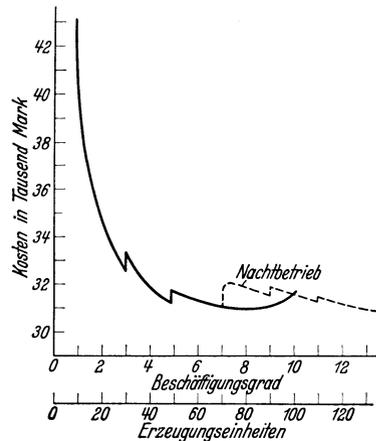


Abb. 39.

Um die mit wachsendem Beschäftigungsgrad vielfach einhergehende Tendenz der Steigerung der Werkstoffkosten und Löhne möglichst zu kompensieren, wird man darauf bedacht sein, als Umhüllungskurve der Stückkostenhyperbeln eine Linie beständigen Gefälls zu erhalten.

¹⁾ a. a. O.

Nehmen wir¹⁾ den einfachsten Fall, daß diese Umhüllungskurve eine gerade Linie l mit der Gleichung $y = C - Dx$ ist, was dem Idealfall einer im ganzen genommen linearen Stückkostensenkung entspricht, einem Fall, der z. B. in den Fordschen Rationalisierungsmaßnahmen eine Rolle gespielt hat. Da für $x = \frac{C}{D}$ sich $y = 0$, also verschwindende Stückkosten ergeben würden, besteht nur für $x < \frac{C}{D}$ die Aussicht, das angenommene Gesetz zu realisieren. Andererseits käme $y = C$ für $x = 0$. Für Betriebe, die mit endlichen Stillstandskosten zu rechnen haben, müssen die Stückkosten für $x = 0$ unendlich groß ausfallen. Das Gesetz wird also auch nur für $x > 0$ zu realisieren sein. Das entsprechende Gesetz der Umhüllungskurve der Gesamtkostengeraden würde lauten:

$$Y = Cx - Dx^2. \quad (16)$$

Im graphischen Bilde (Abb. 40) ergibt sich dafür eine Parabel, die die x -Achse in $x = 0$ und $x = \frac{C}{D}$ schneidet. Ihr Scheitel liegt bei $x_M = \frac{C}{2D}$.

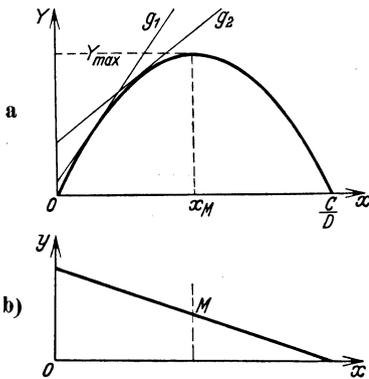


Abb. 40 a/b.

Da die Gesamtkosten bei wachsender Produktion allemal steigen müssen, muß das angenommene Gesetz äußersten Falls für $x = x_M$ seine Gültigkeit verlieren. Wir können das mit Hilfe des S. 121f. besprochenen von Waffenschmidt formulierten Satzes aus der Betrachtung der in toto geltenden Stückkostenkurve, der Geraden l , bestätigen. Danach hört der Geltungsbereich des Kostengesetzes dort auf, wo es eine Tangente der Stückkostenkurve gibt, deren von den Koordinatenachsen begrenzter Abschnitt im Berührungspunkt halbiert wird. Nun fallen hier die Tangenten der Stückkostenkurve, nämlich der Geraden l , mit ihr selbst zusammen; die dem Punkte M entsprechende Tangente wird aber von M halbiert.

Man kann die Parameter a_1, b_1 einer Kostengeraden g_1 durch die Abszisse x_1 ihres Berührungspunktes mit der Parabel ausdrücken. Man erhält:

$$a_1 = C - 2Dx_1; \quad b_1 = Dx_1^2. \quad (17)$$

In der Tat, setzt man diese Werte in die Gleichung der Kostengeraden $S = a_1x + b_1$ ein, so ergibt sich

$$S = (C - 2Dx_1)x + Dx_1^2.$$

¹⁾ P. Grodzinski, Abhängigkeit der Gesamtkosten und Stückkosten von der Stückzahl, Maschinenbau 1929, H. 15.

Der Selbstkostenwert für $x = x_1$ wird also: $Cx_1 - Dx_1^2$, übereinstimmend mit der Parabelordinate für $x = x_1$. Der Richtungskoeffizient der Kostengeraden wird $C - 2Dx_1$; er stimmt, da $Y' = C - 2Dx$ der Differentialquotient von (16), mit dem Richtungskoeffizienten der Tangente der Parabel in dem zu $x = x_1$ gehörenden Kurvenpunkte überein.

Betrachten wir zwei verschiedene Beschäftigungsgrade x_1, x_2 und die auf sie abgestimmten Kostengeraden, so haben wir nach (17):

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{x_2^2}{x_1^2}. \quad (18)$$

Für die partiellen Stückkosten gilt: $a_1 = C - 2Dx_1$; $a_2 = C - 2Dx_2$, also

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{x_M - x_2}{x_M - x_1}. \quad (19)$$

Die Formeln (18) und (19) besagen:

Bei linearer Senkung der durchschnittlichen Stückkosten müssen sich die fixen Kosten der verschiedenen Betriebsstrukturen wie die Quadrate der auf sie abgestimmten Beschäftigungsgrade verhalten. Die den Produktionsgraden x_1, x_2 entsprechenden partiellen Stückkosten verhalten sich wie die Unterschiede dieser Zahlen gegenüber x_M , d. h. dem höchsten bei linearer Stückkostensenkung erreichbaren Beschäftigungsgrad.

Für $x_2 > x_1$ ist $\frac{a_2}{a_1}$ ein echter Bruch, $\frac{b_2}{b_1}$ dagegen ein unechter Bruch. Darin kommt die gegenläufige Tendenz der fixen Kosten und der partiellen Stückkosten zum Ausdruck, die übrigens aus der Betrachtung der die Parabel umhüllenden Tangenten ohne weiteres deutlich wird. Zu beachten ist, daß lineare Stückkostensenkung durch quadratische Steigerung der festen Kosten, also besonders durch stark anwachsende Kapitalinvestitionen erkaufte wird, was natürlich für den Fall wirtschaftlicher Depression, d. h. allgemein rückläufiger Beschäftigung, bedenkliche Folgen zeitigt.

Die Senkung der Gesamtkosten, die durch Übergang von der Kostengeraden (a_1, b_1) zur Kostengeraden (a_2, b_2) bei einem bestimmten Beschäftigungsgrad x erreicht wird, ist:

$$S_1 - S_2 = (a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2).$$

Hierin sind die Beziehungen (18), (19) einzuführen.

§ 20. Weitere Beispiele zur Erfolgsrechnung. Preis konstant oder linear abnehmend.

Der normale Fall der Kostenentwicklung ist der, daß die Stückkostenkurve ein eigentliches Minimum besitzt. Wir behandeln einige

Beispiele, bei denen sich für die Gesamtkosten eine Parabel 3. Grades zugrunde legen läßt.

In der Kunstseidenindustrie können die Spinnereibetriebskosten einschließlich der Löhne bei einer bestimmten Betriebsstruktur als nahezu feste Kosten angesehen werden. Sie seien, bezogen auf eine bestimmte Spinnzentrifuge, U_0 . Die bei ihr in Frage kommenden Rohstoffkosten haben einen der Spinnengeschwindigkeit und damit der Ausbringung proportionalen Betrag am , während der Energiebedarf mit der dritten Potenz der Drehzahl wächst, also gleich cm^3 gesetzt werden kann¹⁾. Die gesamten Selbstkosten betragen also:

$$S = U_0 + am + cm^3. \quad (20)$$

Die durchschnittlichen Stückkosten sind demnach von der Form:

$$s = a + \frac{U_0}{m} + cm^2. \quad (21)$$

Aus dem Nullsetzen von $\frac{ds}{dm} = -\frac{U_0}{m^2} + 2cm$ ergibt sich für das Stückkostenminimum: $\bar{m} = \sqrt[3]{\frac{U_0}{2c}}$.

Wir wollen nun neben dem Kosten- auch das Gewinnproblem studieren und betrachten zunächst den Fall fester Verkaufspreise.

Der gesamte Gewinn ist

$$G = E - S = em - F(m) \quad (22)$$

Bezeichnen wir mit m_1 die Nutzenschwelle, unterhalb deren die gesamten Selbstkosten $S = F(m)$ noch den Erlös $E = em$ übersteigen, und mit m_2 die Nutzenschwelle, von der ab der Betrieb infolge der progressiven Kostenentwicklung erneut mit Verlust arbeitet, so können wir m_1, m_2 als Abszissen derjenigen beiden Punkte bestimmen, in denen die Gerade $Y = em$ von der Kurve der gesamten Selbstkosten $Y = F(m)$ geschnitten wird; oder auch als Abszissen derjenigen Punkte, in denen die Horizontale $y = e$ von der Kurve der durchschnittlichen Stückkosten, $y = \frac{F(m)}{m}$, geschnitten wird. Die Stelle des größten Stücknutzens fällt offenbar mit \bar{m} , der Stelle kleinster durchschnittlicher Stückkosten, zusammen. Der durch (22) dargestellte gesamte Gewinn wird am größten für einen Wert \bar{m} , der sich aus der Gleichung $\frac{dG}{dm} = 0$ oder $e - F'(\bar{m}) = 0$ ergibt. Die Bedingung $\frac{d^2G}{dm^2} < 0$ oder $F''(\bar{m}) > 0$ zeigt, daß die Stelle maximalen Gewinns jedenfalls in den Bereich wachsender Differentialkosten fällt, also rechts vom Wendepunkt der Kostenkurve liegt, wenn ein solcher vorhanden ist. Wir erhalten also:

$$e = F'(\bar{m}). \quad (23)$$

¹⁾ H. Wilbert, Selbstkostenprobleme der Kunstseidenindustrie, S. 94 ff.

Der größte Gesamtnutzen ergibt sich für diejenige Produktion, für die die partiellen Stückkosten mit dem Verkaufspreis übereinstimmen. Bei festem Verkaufspreis wird in der Tat das Hereinnehmen eines neuen Auftrags in dem Augenblick unlohnend, wo die auf das Stück bezogenen zusätzlichen Selbstkosten s_p anfangen, den Verkaufspreis e zu überschreiten. Offenbar ist $\bar{m} > \bar{m}$, d. h. die Stelle \bar{m} liegt bereits in dem Bereich progressiver Kostenentwicklung. In der Tat, da \bar{m}, \bar{m} beide im Bereich der wachsenden Differentialkosten liegen, so muß der Wert \bar{m} , für den Gleichheit der Differentialkosten mit dem Preis besteht, größer sein als der Wert \bar{m} , für den nach § 17, (7) Gleichheit der Differentialkosten mit den hier ihren Kleinstwert annehmenden Stückselbstkosten besteht. Geometrisch können \bar{m}, \bar{m} als Abszissen derjenigen Punkte bestimmt werden, in denen die ansteigende Kurve $y = F'(m)$ von den Horizontalen $y = s_{\min}$ und $y = e$ geschnitten wird.

Eine von F. Leitner¹⁾ wiedergegebene Arbeit des Diplomkaufmanns Vogler (Berlin 1928) untersucht nebenstehende Betriebsstatistik:

Produktionsmenge	Gesamtkosten	Durchschnittl. Stückkosten
0	41 700	∞
60	75 900	1 265,0
100	78 700	787,0
120	88 500	737,5
150	127 200	848,0

Man kann ihr folgende, durch Interpolation gefundene Kostenfunktion zugrunde legen (vgl. Abb. 41 a):

$$S = F(m) = \frac{1}{10}m^3 - 21m^2 + 1470m + 41\,700.$$

Beträgt der Verkaufspreis $e = 850$, ist also $Y = 850m$ die Erlösgerade, so ergeben sich Nutzenschwelle m_1 und Nutzengrenze m_2 aus der Bedingung $S = 850m$, oder

$$\frac{1}{10}m^3 - 21m^2 + 620m + 41\,700 = 0.$$

Die in Frage kommenden Wurzeln dieser Gleichung sind, wie auch aus der graphischen Darstellung hervorgeht, $m_1 = 90,57$; $m_2 = 150,27$. Die Stückkostenfunktion ist:

$$s = \frac{F(m)}{m} = f(m) = \frac{1}{10}m^2 - 21m + 1470 + \frac{41\,700}{m}.$$

Gleichsetzen von s mit $e = 850$ liefert wieder die obigen Werte für m_1, m_2 . Für die Differentialkosten erhalten wir:

$$s_p = F'(m) = \frac{3}{10}m^2 - 42m + 1470.$$

Die durch Nullsetzen von $F''(m) = \frac{3}{5}m - 42$ bestimmte Abszisse des

¹⁾ a. a. O. S. 109.

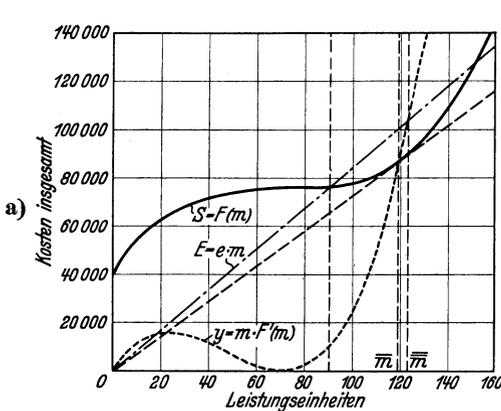
Wendepunktes ist $m_w = 70$; die zugehörige Ordinate ist $S_w = 76\,000$. Für das Stückkostenminimum ist $\frac{F(\bar{m})}{\bar{m}} = F'(\bar{m})$, also

$$\bar{m} \left(\frac{3}{10} \bar{m}^2 - 42 \bar{m} + 1470 \right) - \left(\frac{1}{10} \bar{m}^3 - 21 \bar{m}^2 + 1470 \bar{m} + 41\,700 \right) = 0$$

oder

$$\bar{m}^3 - 105 \bar{m}^2 - 208\,500 = 0.$$

Die Kostenkehre KK (ihre Abszisse wird graphisch durch den Schnittpunkt der Kurven $y = \frac{F(m)}{m}$



und $y = F'(m)$ festgelegt, siehe Abb. 41 b) liegt demgemäß bei $\bar{m} = 119,58$ (einem Wert, der erheblich größer ist als die Abszisse des Wendepunktes). Die entsprechenden Stückkosten sind $s_{\min} = 737,47$. Die Gesamtkosten betragen hier $\bar{S} = 88\,187,64$, der Gewinn $\bar{G} = 13\,455,36$.

Der größte Gesamtnutzen ergibt sich nach (23) durch Gleichsetzung von $e = 850$ mit den Differentialkosten; also

$$\frac{3}{10} \bar{m}^2 - 42 \bar{m} + 620 = 0.$$

Die in Frage kommende Wurzel dieser Gleichung ist $\bar{m} = 123,23$. Die Gesamtkosten betragen hier $\bar{S} = 91\,078$, der Gewinn $\bar{G} = 13\,667$.

Die dem Fall des größten Gewinns entsprechende Formel (23): $e = F'(\bar{m})$

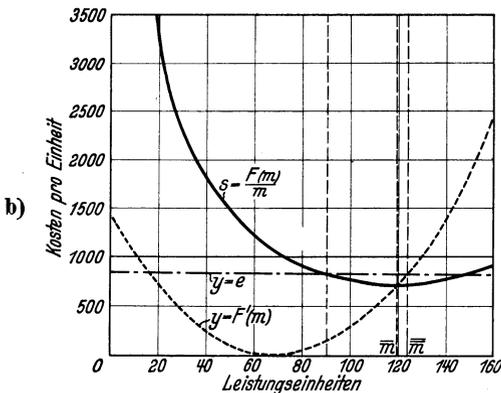


Abb. 41 a/b.

bringt die Tatsache zum Ausdruck, daß eine Steigerung der Produktion über \bar{m} hinaus zweckwidrig ist, weil dann die partiellen Stückkosten den Verkaufspreis übersteigen. Nach dieser Ausdeutung ist man geneigt, die Gleichheit von Differentialkosten und Verkaufspreis als ein allgemein für den Extremalfall größten Gesamtnutzens giltiges Kriterium anzusehen. In Wirklichkeit gilt es nur für den Fall kon-

stanten Verkaufspreises. Ist der Preis eine Funktion der Ausbringung $e = \varphi(m)$, so ist

$$G = E - S = m \cdot \varphi(m) - F(m);$$

$$\frac{dG}{dm} = m \cdot \varphi'(m) + \varphi(m) - F'(m).$$

Das Kriterium für den Fall größten Gesamtnutzens lautet also allgemein:

$$F'(\bar{m}) = e + \bar{m} \cdot \varphi'(\bar{m}). \tag{24}$$

Im allgemeinen wird Steigerung der Ausbringung m mit einer Reduzierung des Preises $\varphi(m)$ Hand in Hand gehen (es sei denn, daß eine günstige Entwicklung der allgemeinen wirtschaftlichen Verhältnisse Konstanz oder gar Steigerung des Preises ermöglicht). Dementsprechend ist $\varphi'(m)$ negativ, die rechte Seite in (24) kleiner als e . Da die in Frage kommenden Extremalstellen schon in den Bereich wachsender Differentialkosten fallen, so ergibt sich aus dem Vergleich der Formeln (23) und (24), daß bei sinkendem Verkaufspreis der zu maximalem Gewinn gehörende Produktionsgrad \bar{m} kleiner als der entsprechende bei konstantem Preis ist. Es kann sogar der Fall eintreten, daß $\bar{m} < \bar{m}$

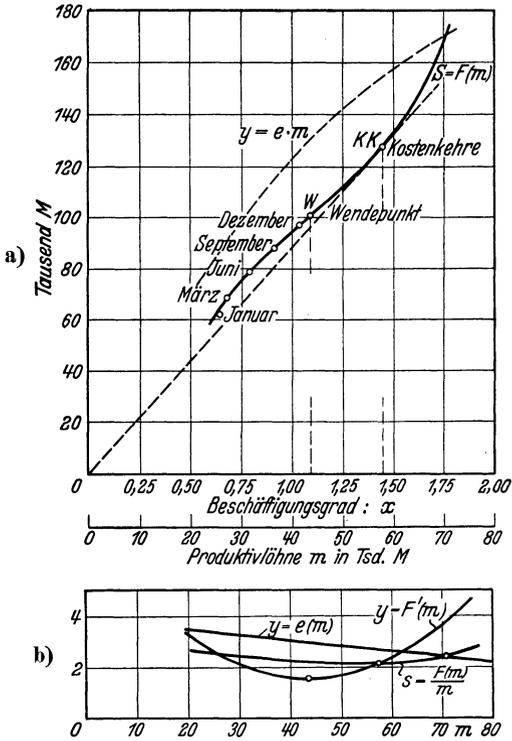


Abb. 42 a/b.

wird, wie aus nachstehendem Beispiel hervorgeht.

Für einen mittleren Betrieb der Textilindustrie gibt F. Leitner¹⁾ eine Kosten- und Umsatzstatistik, aus der wir entnehmen.

1928	Löhne L	Beschäftigungsgrad	Selbstkosten S	Erlös E
Januar	25 500	0,637	63 660	70 800
März	27 100	0,678	69 070	82 200
Juni	31 600	0,790	78 910	98 400
September . .	36 600	0,915	88 160	114 400
Dezember . . .	41 600	1,040	97 320	124 800

¹⁾ a. a. O. S. 376f.

Es wird angenommen, daß die Ausbringung m den produktiven Löhnen proportional sich gestaltet hat, also an ihnen gemessen werden kann: $m = L$; als Einheit des Beschäftigungsgrades x ist derjenige genommen, der der Lohnsumme 40 000 entspricht. Wir stellen für die Selbstkosten mit Hilfe der für März, Juni, September, Dezember geltenden Daten eine Interpolationsformel auf und erhalten (vgl. Abb. 42a, b):

$$S = F(m) = 1,006 \cdot 10^{-9} m^3 - 1,320 \cdot 10^{-4} m^2 + 7,3319 m - 52\,724,4^1).$$

Andererseits können die aus $e = \frac{E}{L}$ errechneten Stückpreise zwanglos nach einem linearen Gesetz (graphisch nach einer Geraden) ausgeglichen werden; wir erhalten: $e = \varphi(m) = 3,95 - 0,22 \cdot 10^{-4} m$ oder $e = 3,95 - 0,87x$. Für den Erlös $E = em$ ergibt sich demnach ein parabolisches Gesetz: $E = 3,95 m - 0,22 \cdot 10^{-4} m^2$. Aus $G = E - S = 0$ ergibt sich für die Nutzensgrenze der Wert $m_2 = 73\,240$. Der entsprechende, mit den Stückkosten übereinstimmende Verkaufspreis ist $e_2 = 2,34$. Die Stückkostenfunktion ist

$$s = 1,006 \cdot 10^{-9} m^2 - 1,320 \cdot 10^{-4} m + 7,3319 m - \frac{52\,724,4}{m}.$$

Für die Differentialkosten erhalten wir:

$$s_p = F'(m) = 3,018 \cdot 10^{-9} m^2 - 2,640 \cdot 10^{-4} m + 7,3319.$$

Durch Nullsetzen von $F''(m) = 6,036 \cdot 10^{-9} m - 2,640 \cdot 10^{-4}$ ergibt sich die Abszisse des Wendepunkts der Kostenkurve zu $m_w = 43\,700$, die zugehörigen Gesamtkosten sind $S_w = 99\,400$. Für das Stückkostenminimum ist $\frac{F(\bar{m})}{\bar{m}} = F'(\bar{m})$, also

$$\begin{aligned} \bar{m} &= (3,018 \cdot 10^{-9} \bar{m}^2 - 2,640 \cdot 10^{-4} \bar{m} + 7,3319) \bar{m} \\ &- (1,006 \cdot 10^{-9} \bar{m}^3 - 1,320 \cdot 10^{-4} \bar{m}^2 + 7,3319 \bar{m} - 52\,724,4) = 0 \end{aligned}$$

oder

$$2,012 \bar{m}^3 - 1,320 \cdot 10^{-4} \bar{m} + 52\,724,4 = 0.$$

Die Kostenkehre liegt demnach bei $\bar{m} = 58\,500$. Die entsprechenden Stückkosten sind $s_{\min} = 2,17$; die Gesamtkosten betragen hier $\bar{S} = 127\,000$, der Erlös $\bar{E} = 155\,785$, der Gewinn also $\bar{G} = 28\,785$.

Um das Maximum des Gesamtnutzens zu bestimmen, ist nach (24) anzusetzen:

$$\begin{aligned} 3,018 \cdot 10^{-9} \bar{m}^2 - 2,64 \cdot 10^{-4} \bar{m} + 7,3319 &= 3,95 - 2 \cdot 0,22 \cdot 10^{-4} \bar{m}; \\ 3,018 \cdot 10^{-9} \bar{m}^2 - 2,21 \cdot 10^{-4} \bar{m} + 3,382 &= 0. \end{aligned}$$

Die in Frage kommende Lösung dieser Gleichung ist $\bar{m} = 50\,863$. Die Gesamtkosten betragen hier $\bar{S} = 111\,080$ M, der Erlös $\bar{E} = 144\,000$ M,

¹⁾ Für kleinere m verliert die Formel offenbar ihre reale betriebspolitische Bedeutung, da sie negative Stillstandskosten ergeben würde. Daher kann mit ihr auch nicht die Frage nach der Nutzenschwelle m_1 beantwortet werden.

der Gewinn also $\bar{G} = 32920$ M. Der größte Gesamtnutzen stellt sich also bei einem Beschäftigungsgrad ein, der noch im Bereiche der degressiven Selbstkostenentwicklung liegt. Ursache ist die im entgegengesetzten Sinne wirkende Degressivität der Preisentwicklung.

Man erkennt allgemein: Während man bei konstantem Verkaufspreis e den dem größten Gesamtnutzen entsprechenden Beschäftigungsgrad erhält, indem man die Preislinie $y = e$ mit der Kurve der Differentialkosten $y = F'(m)$ zum Schnitt bringt und die zugehörige Abszisse \bar{m} entnimmt, muß man im Fall

linearen Preisabfallgesetzes $e = e_0 - \varepsilon m$ die Kurve der Differentialkosten mit der Geraden $y = e_0 - 2\varepsilon m$ zum Schnitt bringen, die das doppelte Gefälle -2ε wie die Preislinie besitzt und vom gleichen Punkt der Ordina-

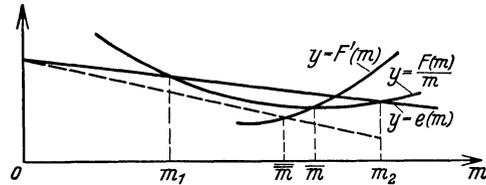


Abb. 43.

tenachse ausläuft (Abb. 43). Die Abszisse \bar{m} des Schnittpunktes ist dann wieder die dem größten Gewinn entsprechende Ausbringung.

Die Stelle des Stückkostenminimums konnte als Schnittpunkt der Kurve der Differentialkosten und der Stückkostenkurve bestimmt werden. Da normalerweise die Preisentwicklung sich so gestalten wird, daß im Fall des Stückkostenminimums noch ein positiver Stücknutzen verbleibt, so werden die Schnittpunkte P_1, P_2 der Preislinie mit der Stückkostenkurve links und rechts von der Minimumstelle liegen, also $m_1 < \bar{m} < m_2$. Die Kurve der Differentialkosten wird dann von der Preislinie $y = e_0 - \varepsilon m$ rechts von der Minimumstelle der Stückkostenkurve geschnitten; aber für den Schnittpunkt mit der Geraden $y = e_0 - 2\varepsilon m$, dessen Abszisse \bar{m} die Stelle größten Gewinns liefert, sind offenbar beide Lagen möglich, diejenige rechts und diejenige links vom Stückkostenminimum. — Zu beachten ist noch, daß bei variablem Preis die Stelle des größten Stücknutzens nicht mit dem Stückkostenminimum zusammenzufallen braucht. Man erhält sie als Berührungspunkt der zur Preislinie parallelen Tangente der Stückkostenkurve. In unserem Beispiel liegt sie also jedenfalls links vom Stückkostenminimum.

Bei variablem Preis hat auch die Frage nach dem größten Umsatz oder Erlös E Bedeutung. Da $E = me = m \cdot \varphi(m)$, so ist

$$\frac{dE}{dm} = \varphi(m) + m \cdot \varphi'(m).$$

Die rechte Seite wird Null für $m = -\frac{\varphi(m)}{\varphi'(m)}$. Da der Ausdruck $-\frac{\varphi(m)}{\varphi'(m)}$

die Subtangente für den betreffenden Punkt der Kurve $y = \varphi(m)$ bedeutet, so ergibt sich eine ähnliche Folgerung wie bei dem von Waffenschmidt formulierten Satz: Die Stelle größten Umsatzes wird auf der Preislinie $e = \varphi(m)$ durch denjenigen Punkt gekennzeichnet, in dem es eine Tangente gibt, deren von den Koordinatenachsen begrenzter Abschnitt im Berührungspunkt halbiert wird (Abb. 44).

In unserm Beispiel, wo die Preislinie die Gerade $e = e_0 - \varepsilon m$ ist, fällt dieser ausgezeichnete Punkt mit dem Mittelpunkt des von den Koordinatenachsen auf der Preisgeraden selbst begrenzten Abschnitts zusammen. Für den Fall des Textilbetriebes, wo $e_0 = 3,95$; $\varepsilon = 0,22 \cdot 10^{-4}$, würde sich $m = 91860$ ergeben, ein Wert, der bereits oberhalb der Nutzengrenze m_2 liegt. Praktisch wird man aber mit der Produktion keinesfalls über die Nutzengrenze hinausgehen.

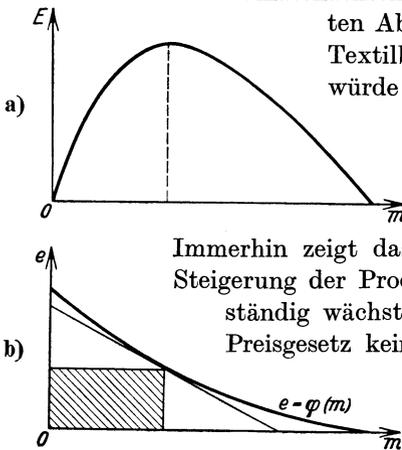


Abb. 44 a/b.

Immerhin zeigt das Ergebnis, daß der Gesamterlös bei Steigerung der Produktion bis zur Nutzengrenze m_2 beständig wächst. In Wirklichkeit wird man mit dem Preisgesetz keine so weitgehenden Extrapolationen, wie sie hier rein rechnerisch zugelassen wurden, vornehmen dürfen. Ähnliche Einschränkungen gelten allgemein für die verschiedenen beim Erfolgsproblem rechnerisch zu gewinnenden Folgerungen.

§ 21. Mathematisches Gesetz und Empirie. Remanenzerscheinungen. Budgetierung.

Die bisherigen Betrachtungen nahmen eine mathematische Gesetzmäßigkeit, die die Abhängigkeit der Erfolgskomponenten vom Beschäftigungsgrad ausdrückt, als Gegebenheit. Es soll nun näher erörtert werden, wie und inwieweit man von den Erfahrungstatsachen aus zu einem mathematisch zu handhabenden Apparat gelangen kann.

Die Betriebsstatistik liefert zunächst alle in die Erfolgsrechnung eingehenden Größen in ihrem zeitlichen Verlauf. Als unabhängige Veränderliche tritt also nicht der Beschäftigungsgrad, sondern die Zeit auf. Von einem der Zeit proportionalen Wachsen des Beschäftigungsgrads kann natürlich keine Rede sein. Will man also beispielsweise die Betriebsunkosten in Abhängigkeit vom Beschäftigungsgrad erfassen, so muß man zunächst beide Größen in ihrer Abhängigkeit von dem Hilfsparameter $t = \text{Zeit}$ darstellen, was zweckmäßig in zwei entsprechenden Diagrammen geschieht, und sodann den Hilfsparameter t eli-

minieren. Zu diesem Zweck überträgt man aus dem Diagramm Zeit-Beschäftigungsgrad die beobachteten Werte des Beschäftigungsgrades x in ihrer natürlichen Größenfolge als Abszissen in ein neues Diagramm und trägt dann als Ordinaten die zugehörigen, d. h. denselben Zeitwerten entsprechenden Werte der Betriebsunkosten U auf. H. Peiser¹⁾, dem wir in der Beschreibung dieses Verfahrens folgen, teilt das in Abb. 45 wiedergegebene Beispiel mit, bei dem die produktiven Löhne als Maßstab des Beschäftigungsgrades genommen wurden, und das sich auf die Entwicklung in den 12 Monaten eines Jahres bezieht. In dem abgeleiteten Diagramm ergibt sich zunächst ein System unregelmäßig verteilter Punkte als Darstellung der Abhängigkeit der Unkosten vom Beschäftigungsgrad. Um zu einer ersten Annäherung für ihre mathematische Erfassung zu gelangen, legt man die in der Figur dargestellte ausgleichende gekrümmte Linie durch das Punktfeld hindurch. Sind bei einigermaßen stationären wirtschaftlichen Verhältnissen die empirischen Grundlagen des Dia-

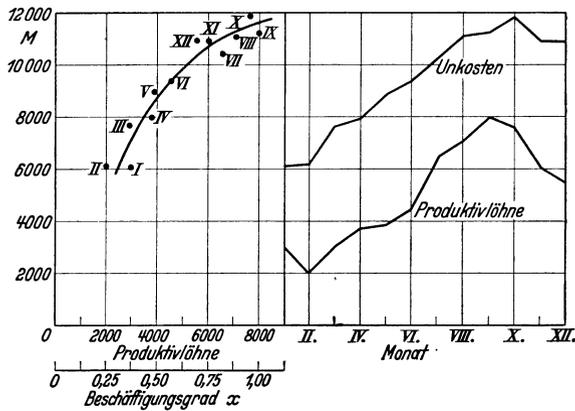


Abb. 45.

gramms durch Wiederholungsbeobachtungen ausreichend gesichert, so kann es auch angebracht sein, das (später in § 24 zu schildernde) rechnerische Ausgleichsverfahren zu benutzen, um einen mathematischen Ausdruck, z. B. eine Potenzdarstellung, für den Verlauf der ausgleichenden Kurve abzuleiten. Auf die Tatsache, daß in dem ursprünglichen Punktfeld gelegentlich zu demselben Beschäftigungsgrad zwei mit verschiedenen Ordinatenwerten ausgestattete Punkte gehören, daß überhaupt nach dem Gesamteindruck die Unkosten vielleicht gar keine eindeutige Funktion des Beschäftigungsgrades darstellen, kommen wir bei Besprechung der Remanenzerscheinungen noch zurück.

Vielfach erscheint es angemessen, statt einer ausgleichenden gekrümmten Linie den durch Verbinden der ursprünglichen Punkte des Diagramms erhaltenen Polygonzug als Kostenlinie zu benutzen. Der Übergang zur Kurve der durchschnittlichen Stückkosten, die ja je-

¹⁾ Der Einfluß des Beschäftigungsgrades auf die industrielle Kostenentwicklung Berlin 1929, S. 37 ff.

weils mit dem Tangens des Winkels zwischen der x -Achse und dem Leitstrahl des betreffenden Punktes der Kostenlinie übereinstimmen, bietet in keinem Fall Schwierigkeiten. Um im Falle des Polygonzuges

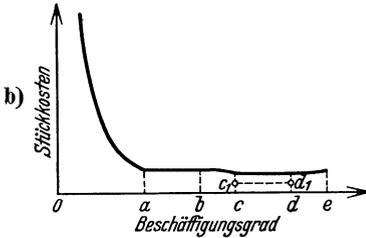
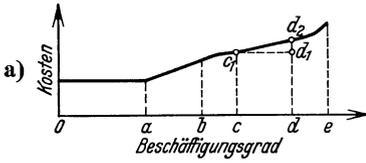


Abb. 46 a/b.

zur Kurve der Differentialkosten s_p zu gelangen, bildet man statt des Differentialquotienten graphisch den Differenzenquotienten, indem man die Steigung der einzelnen Sehnen entnimmt. Für eine aus geraden und gekrümmten Stücken zusammengesetzte Kostenlinie wird der Vorgang durch die Abb. 46 (nach Peiser¹⁾) erläutert. Man entnimmt aus Abb. 46 ohne weiteres, daß im Bereich c, d die Differentialkosten erheblich unter den durchschnittlichen Stückkosten bleiben, woraus für das Angebotswesen die früher erörterten Folgerungen gezogen werden können. Auch für die Bestimmung des Stückkostenminimums ist bei empirischer Kostenlinie zweckmäßig das graphische

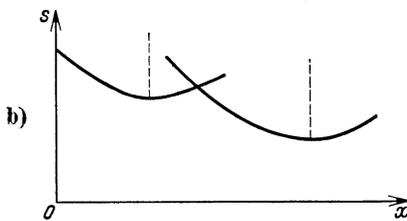
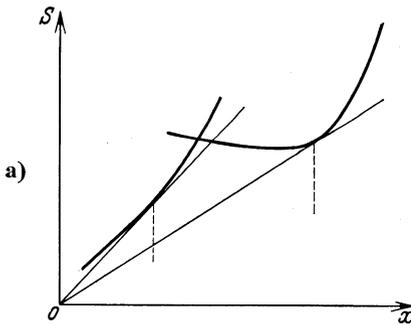


Abb. 47 a/b.

Verfahren heranzuziehen: Man findet die Minimumstelle als Schnittpunkt der Kurve der Differentialkosten und der durchschnittlichen Stückkosten. Bei dem vielfach sehr flachen Verlauf der Stückkostenlinie würde die unmittelbare Angabe der Minimumstelle nach dem Augenschein sehr unsicher sein.

Sind strukturelle Betriebsänderungen vorgekommen, so ist bei der Festlegung der Diagramme darauf zu achten, daß nicht die durch sie bedingten Besonderheiten — Mehrwertigkeit der Kosten für einzelne Beschäftigungsgrade in der Übergangszone, Auftreten mehrerer Stückkostenminima — durch den graphischen

Ausgleich bzw. das in § 24 zu besprechende Verfahren der Korrelationsrechnung verwischt werden. Abb. 47 gibt eine Skizze der Selbstkosten-

¹⁾ a. a. O. S. 11, 16.

und Stückkostenlinien, wie sie bei Aufeinanderfolge von zwei Betriebsstrukturen, deren Geltungsbereiche sich teilweise überschneiden, prinzipiell sich einstellen müssen. Die von Lehmann¹⁾ angeführten Beispiele aus der Praxis stehen hiermit in Übereinstimmung.

In abgeschwächter Form werden sich Mehrdeutigkeiten in der tatsächlichen Kostenentwicklung aus mancherlei Betriebsmaßnahmen von nicht geradezu struktureller Bedeutung ergeben, die bei wachsendem Produktionsumfang eingeführt, aber bei rückläufiger Beschäftigung nicht sofort wieder rückgängig gemacht wurden. Gegen Personalabbau, Abschalten von Hilfsaggregaten u. dgl. bestehen stets gewisse Hemmungen, jedenfalls können mancherlei Zugangskosten nicht von heute auf morgen wieder zum Verschwinden gebracht werden. Wenn also auch bei gewissen Positionen, wie etwa den Kapitalkosten, ein eindeutiger Zusammenhang zwischen Kosten und Beschäftigungsgrad in der Natur der Sache liegt, so werden sich doch in der tatsächlichen Gestaltung des Gesamtverlaufs, der Ist-Kurve, mancherlei Unregelmäßigkeiten zeigen, die auf Grund ihrer Entwicklungsgeschichtlichen Bedingtheit als Remanenzerscheinungen zu bezeichnen sind. Sie sind von H. D. Brasch²⁾ eingehend untersucht worden. Ihre graphische Darstellung (Abb. 48) zeigt typische Schleifen der Kostenkurve und erinnert damit an die Hysteresiserscheinungen im Gebiet des Magnetismus und der Elastizität. Bezüglich der Ursachen bestehen auch wohl gewisse Analogien.

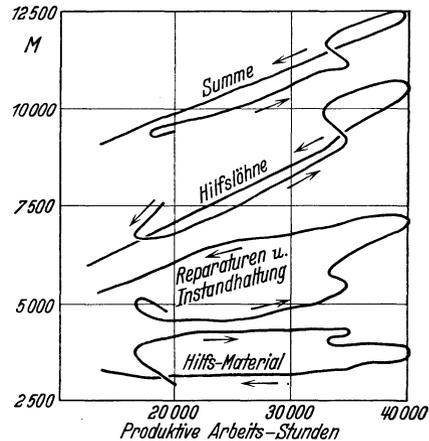


Abb. 48. Remanenzerscheinungen.

Peiser, der die Remanenzerscheinungen bestätigt³⁾ (vgl. S. 143), knüpft an ihre Betrachtung eine wichtige Nutzanwendung. Aufgabe der Betriebsleitung ist es, durch genaue Überwachung des Ist-Verlaufs der einzelnen Kostenkomponenten Klarheit darüber zu erlangen, wie weit die „Auswirkungen des Beharrungsgesetzes“ durch eine weitblickende Betriebspolitik, Zurückhaltung bezüglich Neueinstellungen und neuer Kapitalinvestitionen u. dgl. unterdrückt werden können und wie weit sie in Kauf genommen werden müssen. Die dauernde Über-

¹⁾ a. a. O.

²⁾ Zur Praxis der Unkostenschwankungen und ihrer Erfassung. Betr.wirtsch. Rdsch. 4 (1927), 4./5. Heft, S. 65.

³⁾ a. a. O.

prüfung der den einzelnen Werkstätten, Kostenstellen usw. entsprechenden Unterkonten vermag so zu einer Soll-Kurve der Kostenentwicklung zu führen, einer Norm-Kurve, der man sich immerhin bei wachsendem Beschäftigungsgrad besser wird anpassen können, als bei rückläufiger Beschäftigung. Zeigt die Ist-Kurve Schleifen, so kann man eine vermittelnde Soll-Kurve etwa in der Weise ableiten, daß man die zu wachsendem Beschäftigungsgrad gehörenden Punkte mit doppeltem Gewicht, die zu rückläufiger Beschäftigung gehörenden Punkte mit einfachem Gewicht berücksichtigt. Dies Verfahren in Verbindung mit Ausgleichung wurde auf einige von H. Machts¹⁾ gewonnene Kosten-

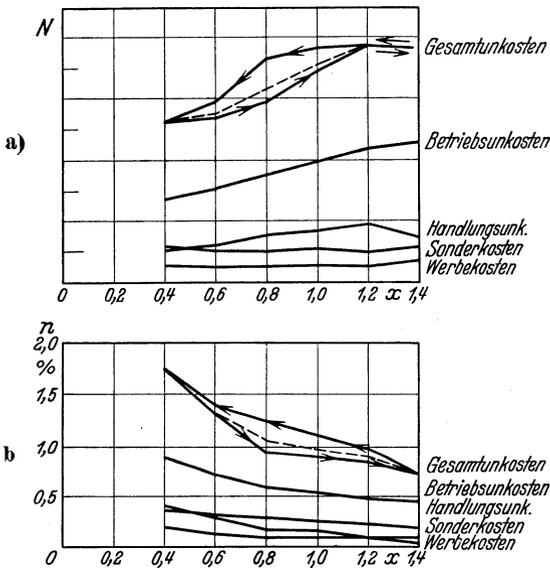


Abb. 49 a/b. Sollkostenlinie bei Remanenzerscheinungen.

kurven angewendet. Das Ergebnis ist in Abb. 49a, b dargestellt. (Abb. 49a bezieht sich auf die Unkosten selbst, Abb. 49b auf ihr Verhältnis zum Fertigungslohn.)

Eine solche Soll-Kurve der Kosten wird man nach dem Vorschlag von Peiser als Grundlage der für die einzelnen Kostenarten (Betriebsstoffe, Gehälter usw.) und für die einzelnen Kostenstellen (Werkstätten usw.) vorzuschreibenden Höchstsätze benutzen, mit anderen

Worten für etwaige betriebspolitische Verbesserungen und für die Budgetierung. Das zuerst in Amerika erprobte Verfahren der Budgetierung findet auch in Deutschland mehr und mehr Anwendung. In der Vermittlung von Erkenntnissen, wie und in welcher Richtung die Kosten der Produktion, der einzelnen Teilbetriebe usw. beeinflußt werden können, vermag die mathematische Analyse der Kostenentwicklung wertvolle Dienste zu leisten.

Über die bisher behandelten Problemstellungen hinaus ergibt sich für die betriebswirtschaftliche Erfolgsrechnung die Aufgabe, die markt- und konjunkturbedingte zeitliche Entwicklung der Werkstoffpreise, Löhne, Gemeinschaftsunkosten und Verkaufspreise gesondert zu erfassen und in Rechnung zu stellen. Mit der

¹⁾ Betriebsstatistik in Maschinenfabriken, VDMA-Schriften Heft 10, 1927.

Beschaffung der betr. allgemeinen Unterlagen befaßt sich die moderne Markt- und Konjunkturforschung, deren Feststellungen jede Betriebsgattung durch die für sie in Frage kommende Sonderanalyse zu ergänzen haben wird. Einige Hinweise hierzu geben wir in § 24 und § 26.

VII. Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik in Anwendung auf Wirtschaftsprobleme.

§ 22. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Für die Erfassung allgemeiner volkswirtschaftlicher Zusammenhänge und die Beschaffung der Kalkulationsgrundlagen wirtschaftlichen Handelns gewinnen Statistik, Wahrscheinlichkeits- und Korrelationsrechnung wachsende Bedeutung. Hingewiesen sei auf das große Gebiet des Versicherungswesens, auf die im Lotteriede- und Anleihewesen auftretenden Wahrscheinlichkeits- und Risikofragen, auf Kontrollwesen, Lieferungsgarantien und damit verbundene Risikoprobleme bei Massenfertigung, sowie auf die moderne Markt- und Konjunkturforschung.

1. Wahrscheinlichkeit a priori und a posteriori.

Der Ausgang eines Versuchs lasse m verschiedene Möglichkeiten zu, von denen keine gegenüber einer anderen a priori bevorzugt erscheint. Von ihnen werden g Fälle als Erfolg gewertet: günstige Fälle. Als mathematische Wahrscheinlichkeit w für das Eintreten des Erfolgs bezeichnet man dann den Bruch

$$w = \frac{g}{m} = \frac{\text{Zahl der günstigen Fälle}}{\text{Zahl der möglichen Fälle}}.$$

So sind beim Werfen des Würfels $m = 6$ Fälle möglich. Wird nur das Werfen einer 5 als Erfolg gewertet, so ist die Zahl der günstigen Fälle $g = 1$. Die Wahrscheinlichkeit, eine 5 zu werfen, beträgt also $w = \frac{1}{6}$. Befinden sich in einer Urne zwei rote und drei schwarze Kugeln, so sind beim Ziehen einer Kugel $m = 5$ Fälle möglich; für das Ziehen einer schwarzen Kugel sind $g = 3$ Fälle günstig. Die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel zu ziehen, beträgt also $w = \frac{3}{5}$.

Für das Eintreten des Mißerfolgs sind, bei der gleichen Berechnungsweise, unter m möglichen Fällen $m - g$ Fälle günstig. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Mißerfolgs ist also $\bar{w} = \frac{m-g}{m} = 1 - \frac{g}{m} = 1 - w$. Mithin gilt $w + \bar{w} = 1$.

Beispiel: Von der Nordecke (0,0) eines Blockes rechtwinklig sich kreuzender Straßen — Straßenschema von Polya — wandert jemand beständig im Zick-

zack gen Süden, ohne jemals umzukehren. Welche Wahrscheinlichkeit w besteht dafür, daß er eine Person trifft, die an der Ecke (n, k) der n -ten Eckenreihe sich aufhält? (Abb. 50).

Lösung: Zu den Ecken $(1,0)$ und $(1,1)$ der ersten Reihe führt je ein Weg. Zu den Ecken $(2,0)$ und $(2,2)$ der zweiten Reihe führt ebenfalls nur ein Weg, aber zu der Ecke $(2,1)$ führen zwei Wege: von $(0,1)$ her und von $(1,1)$ her. Allgemein ergibt sich die Anzahl der Wege, die zur Ecke $(n + 1, k + 1)$ führen, durch Addition der Zahlen der Wege, die zu den Ecken (n, k) und $(n, k + 1)$ führen. Die Betrachtung entspricht nun offenbar genau dem Verfahren, nach dem man die Koeffizienten der Binomialentwicklung gewinnt. Für die Binomialkoeffizienten gilt in der Tat

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot n - 1 \dots n - k + 1}{1 \cdot 2 \dots k} = \frac{n!}{k! (n - k)!}; \quad \binom{n + 1}{k + 1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k + 1}.$$

Die Zahl der Wege, die zur Ecke (n, k) führen, beträgt also $g = \binom{n}{k}$. Da jeder Weg an einer Ecke sich in zwei Wege gabelt, wird die n -te Eckenreihe von $m = 2^n$ Wegen erreicht. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also $w = \frac{1}{2^n} \binom{n}{k}$. — Nebenbei ergibt sich: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$.

Für die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten sind oft die Regeln der Kombinatorik heranzuziehen.

Es gibt offenbar $n(n - 1)$ Möglichkeiten, aus den n Elementen $a,$

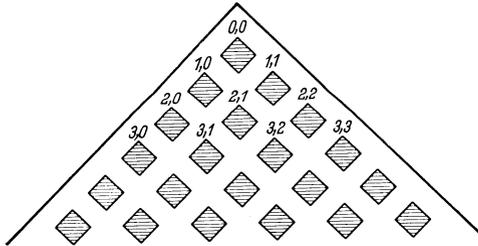


Abb. 50. Straßenschema von Polya.

$b, c, \dots n$ Paare zu bilden, sofern z. B. die Paare ab und ba beide gezählt werden. In demselben Sinne gibt es $n(n - 1)(n - 2)$ Möglichkeiten, aus jenen n Elementen Tripel zu bilden; allgemein $n(n - 1)(n - 2) \dots (n - k + 1)$ Möglichkeiten, Formen zu je k Elementen

aus der Gesamtheit der n Elemente zu konstruieren; man bezeichnet sie als die Variationen der n Elemente zur n -ten Klasse.

Bei einer Gruppe von k Elementen gibt es offenbar $k!$ Permutationen, d. h. Formen, die sich nur durch die Platzordnung der k in ihnen enthaltenen Elemente unterscheiden, wie z. B. $1\ 2\ 3$ und $1\ 3\ 2$.

Unter den je k Elemente umfassenden $n(n - 1)(n - 2) \dots (n - k + 1)$ Variationen der zuerst besprochenen Gesamtheit von n Elementen gibt es demnach nur

$$\frac{n(n - 1) \dots (n - k + 1)}{1 \cdot 2 \dots k} = \frac{n!}{k! (n - k)!} = \binom{n}{k}$$

selbständige, wesentlich voneinander verschiedene Gruppen, d. h. Gruppierungen, bei denen die Reihenfolge der k in ihnen enthaltenen

Elemente als belanglos angesehen wird, sog. Kombinationen zur k -ten Klasse. Denn aus der Anzahl dieser Kombinationen muß man zur Zahl aller Variationen durch Multiplikation mit $k!$, der Anzahl der durch Platzvertauschung entstehenden Möglichkeiten, gelangen.

Beispiel: In einer Urne befinden sich 4 rote und 3 schwarze Kugeln. Man zieht zwei Kugeln. Welche Wahrscheinlichkeit besteht, daß a) zwei schwarze Kugeln gezogen werden, b) eine schwarze, eine rote Kugel, c) zwei rote Kugeln?

Lösung: a) Aus den 7 Kugeln können $\binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ Paare (Kombinationen zur 2. Klasse) gebildet werden: $m = 21$. Aus den 3 schwarzen Kugeln können $\binom{3}{2} = 3$ Paare gebildet werden: $g = 3$. Die Wahrscheinlichkeit, zwei schwarze Kugeln zu ziehen, beträgt also $w_a = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$.

b) $w_b = \frac{3 \cdot 4}{21} = \frac{4}{7}$, c) $w_c = \frac{2}{7}$. — Man beachte: $w_a + w_b + w_c = 1$.

Von den m als Ausgang eines Versuchs möglichen Fällen seien g_1 Fälle für ein Ergebnis E_1 , g_2 Fälle für ein Ergebnis E_2 , ... g_i Fälle für ein Ergebnis E_i günstig, so daß die für diese Ergebnisse bestehenden Wahrscheinlichkeiten $w_1 = \frac{g_1}{m}$, $w_2 = \frac{g_2}{m}$, ... , $w_i = \frac{g_i}{m}$ sind. Wertet man es nun als Erfolg, wenn ein Ergebnis E_1 oder ein Ergebnis E_2 ... erzielt wird, so ist die Gesamtzahl der günstigen Fälle $g = g_1 + g_2 + \dots + g_i$, die Wahrscheinlichkeit des Erfolgs also $w = \frac{g_1 + g_2 + \dots + g_i}{m} = w_1 + w_2 + \dots + w_i$. Damit ergibt sich der

Additionssatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung: Wenn bei einem Versuch für die Ergebnisse E_1, E_2, \dots, E_i die Wahrscheinlichkeiten w_1, w_2, \dots, w_i bestehen und der Eintritt irgendeines dieser Ergebnisse als Erfolg gewertet wird, so ist die Wahrscheinlichkeit w des Erfolgs gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Ergebnisse:

$$w = w_1 + w_2 + \dots + w_i. \quad (1)$$

Z. B. ergibt diese Summe $w = 1$, wenn die Ergebnisse E_1, E_2, \dots, E_i alle bei dem Versuch möglichen Eventualitäten erschöpfen. Vgl. Beispiel betr. Straßenschema von Polya.

Beispiel: In einer Urne befinden sich 4 rote und 3 schwarze Kugeln. Man zieht zwei Kugeln. Welche Wahrscheinlichkeit besteht, daß sie von gleicher Farbe sind?

Lösung: Von den in der oben behandelten Urnen-Aufgabe möglichen drei Eventualitäten werden die Fälle a) und c) beide als Erfolg gewertet. Daher ist $w = w_a + w_c = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$. — Natürlich ist $w + w_b = 1$.

Von den m_1 als Ausgang eines Versuchs möglichen Fällen seien g_1 Fälle für ein Ergebnis E_1 günstig, von den m_2 als Ausgang eines anderen Versuchs möglichen Fälle seien g_2 Fälle für ein Ergebnis E_2 günstig.

Werden beide Versuche angestellt, so sind im ganzen $m_1 \cdot m_2$ Ergebniskopplungen möglich, für das Zusammentreffen der Ergebnisse E_1, E_2 aber nur $g_1 \cdot g_2$ Fälle günstig. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Ergebnisse E_1 und E_2 gekoppelt auftreten, ist also $w = \frac{g_1}{m_1} \cdot \frac{g_2}{m_2} = w_1 \cdot w_2$.

Durch Verallgemeinerung der Schlußweise ergibt sich der

Multiplikationssatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung: Wenn bei i verschiedenen Versuchen für die Ergebnisse E_1, E_2, \dots, E_i die Wahrscheinlichkeiten w_1, w_2, \dots, w_i bestehen und nur das gekoppelte Eintreten der Ergebnisse E_1, E_2, \dots, E_i als Erfolg gewertet wird, so ist die Wahrscheinlichkeit des Erfolgs gleich dem Produkt der für die einzelnen Ergebnisse bestehenden Wahrscheinlichkeiten:

$$w = w_1 \cdot w_2 \cdot \dots \cdot w_i. \quad (2)$$

1. Beispiel: In einer Urne liegen 4 rote und 3 schwarze Kugeln. Man zieht eine Kugel, legt sie in die Urne zurück und zieht abermals eine Kugel. Welche Wahrscheinlichkeit besteht, daß in beiden Fällen eine schwarze Kugel gezogen wird?

Lösung: Offenbar ist $w_1 = w_2 = \frac{3}{7}$, also $w = w_1 \cdot w_2 = \frac{9}{49}$. Dieser Wert ist etwas größer als die oben ermittelte Wahrscheinlichkeit $w_a = \frac{1}{7} = \frac{9}{63}$ für das gleichzeitige Ziehen von zwei schwarzen Kugeln.

2. Beispiel: Ein Würfel werde zweimal geworfen. Welche Wahrscheinlichkeit besteht, daß in beiden Fällen mehr als 4 Augen fallen?

Lösung: In jedem Fall ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, 5 oder 6 zu werfen, nach dem Additionssatz $w_1 = w_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist daher $w = w_1 \cdot w_2 = \frac{1}{9}$.

Ein Versuch, bei dem ein bestimmtes als Erfolg gewertetes Ergebnis mit der Wahrscheinlichkeit w , das Ausbleiben dieses Ergebnisses also mit der Wahrscheinlichkeit $\bar{w} = 1 - w$ eintritt, werde n mal angestellt. Dafür, daß hierbei eine ganz bestimmte Konfiguration von k Erfolgen und $n - k$ Mißerfolgen sich einstellt, besteht offenbar die Wahrscheinlichkeit $w^k (1 - w)^{n-k}$. Stellt man die Konstellation der k Erfolgsnummern unter den n Versuchsnummern frei, so gibt es im ganzen $\binom{n}{k}$ derartiger Kombinationen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß irgendwie bei n Versuchen k Erfolge auftreten, wird also erhalten zu

$$w_k^{(n)} = \binom{n}{k} w^k (1 - w)^{n-k}. \quad (3)$$

Dieser Ausdruck stellt das die Nummer k tragende Glied in der Binomialentwicklung von $(\bar{w} + w)^n$ dar. Da $\bar{w} + w = 1$, so bestätigt man damit, daß $\sum_{k=0}^n w_k^{(n)} = 1$. Ist insbesondere $w = \frac{1}{2}$, so ist stets $w^k (1 - w)^{n-k} = \frac{1}{2^n}$, also $w_k^{(n)} = \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} = \frac{1}{2^n} \binom{n}{n-k} = w_{n-k}^{(n)}$. (Nebenbei bestätigt sich $\sum \binom{n}{k}$)

= 2^n .) Die graphische Darstellung der $w_k^{(n)}$ deckt sich hier, abgesehen vom Maßstabe, mit der der Binomialkoeffizienten, zeigt also symmetrische Gestalt.

Beispiel: Eine Münze wird zehnmal geworfen. Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß 0, 1, 2, . . . , 10mal Schrift fällt?

Lösung: Die Wahrscheinlichkeit des Erfolgs beim einzelnen Versuch ist $w = \frac{1}{2}$. Mithin ergeben sich für die gesamten Wahrscheinlichkeiten die Werte, die man aus den Binomialkoeffizienten $\binom{10}{k}$: 1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, . . . 1, durch Division mit $2^{10} = 1024$ erhält (Abb. 51). Am größten ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß unter 10 Versuchen 5 Erfolge auftreten: $w_5^{(10)} = \frac{252}{1024}$, d. i. rund ein Viertel.

Um allgemein die Frage nach dem größten $w_k^{(n)}$ zu beantworten, bilden wir:

$$w_k^{(n)} : w_{k-1}^{(n)} = \frac{n!}{k!(n-k)!} w^k (1-w)^{n-k} : \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} w^{k-1} (1-w)^{n-k+1} = \frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{w}{1-w}.$$

Mithin wird $w_k^{(n)} \geq w_{k-1}^{(n)}$, je nachdem $\frac{n-k+1}{k} \geq \frac{1-w}{w}$, oder $\frac{n+1}{k} \geq \frac{1}{w}$, also je nachdem $k \leq (n+1)w$. Die Wahrscheinlichkeiten wachsen, solange $k < (n+1)w$, sie fallen, sobald $k > (n+1)w$. Ist $k < (n+1)w$, aber bereits $k+1 < (n+1)w$, so ist $w_k^{(n)}$ die größte der ins Auge gefaßten Wahrscheinlichkeiten. Das kritische k ist die größte in $(n+1)w$ steckende ganze Zahl. Ist $(n+1)w$ selbst eine ganze Zahl k , so stimmt $w_{k-1}^{(n)}$ mit $w_k^{(n)}$ überein und ist größer als alle übrigen ins Auge gefaßten Wahrscheinlichkeiten; der Größtwert wird in diesem Fall an den beiden Stellen $k-1 = nw - (1-w)$ und $k = nw + w$ erreicht. Bei einer im Verhältnis zu $\frac{1}{w}$ großen Zahl n von Versuchen ist 1, daher auch w und $1-w$ klein gegen nw . Man kann also allgemein sagen:

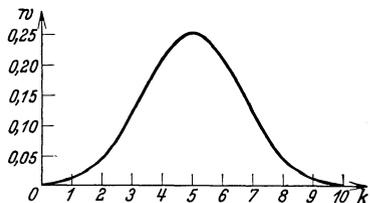


Abb. 51.

Ein Versuch, bei dem ein bestimmtes als Erfolg gewertetes Ergebnis mit der Wahrscheinlichkeit w eintritt, werde n mal angestellt. Ist n eine im Vergleich zu $\frac{1}{w}$ große Zahl, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei dieser Versuchsreihe k Erfolge erzielt werden, am größten für $k \approx nw$, d. h. für die dem Wert nw nächstliegende ganze Zahl.

Stellt man alle ins Auge gefaßten Wahrscheinlichkeiten $w_k^{(n)}$ als Ordinaten zu den Abszissen k dar und legt durch die Ordinatenendpunkte eine Kurve, so ergibt sich für $w \neq \frac{1}{2}$ ein zur Maximumsstelle $k \approx nw$ im ganzen genommen unsymmetrisches Bild.

Beispielsweise ergeben sich für die Wahrscheinlichkeiten, daß beim Würfeln in $n = 120$ Versuchen 10, 11, . . . , 30mal eine 5 fällt, die in Abb. 52 dargestellten Beträge mit dem Maximum etwa bei $k = \frac{1}{6} \cdot 120 = 20$. Die übrigen Wahrscheinlichkeiten fallen sehr niedrig aus.

Die Wahrscheinlichkeiten, beim Würfeln in genau ein Sechstel der Fälle eine 5 zu werfen, betragen:

für $n =$	6	12	24	36	120
$w_{n,6}^{(n)}$	0,402	0,296	0,214	0,176	0,097

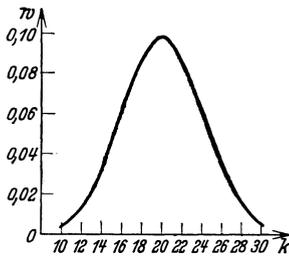


Abb. 52.

Allgemein ergibt sich der Satz: Die maximale Wahrscheinlichkeit W_0 nimmt mit steigender Versuchszahl n ab, und zwar ist sie proportional mit $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Beweis: Wir hatten allgemein

$$w_k^{(n)} = \frac{n!}{k!(n-k)!} w^k (1-w)^{n-k}.$$

Für die maximale Wahrscheinlichkeit W_0 ist näherungsweise $k = n \cdot w$, also $n - k = n(1 - w)$. Mithin:

$$W_0 = \frac{n!}{(nw)![n(1-w)]!} w^{nw} (1-w)^{n(1-w)}.$$

Nach der Stirlingschen Formel ist nun näherungsweise

$$x! = x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x},$$

also

$$\begin{aligned} W_0 &= \frac{n^n e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n} w^{nw} (1-w)^{n(1-w)}}{(nw)^{nw} e^{-nw} \sqrt{2\pi nw} \cdot [n(1-w)]^{n(1-w)} e^{-n(1-w)} \sqrt{2\pi n(1-w)}} \\ &= \frac{n^n (w+1-w) w^{nw} (1-w)^{n(1-w)}}{(nw)^{nw} [n(1-w)]^{n(1-w)} \cdot \sqrt{w \cdot 2\pi n(1-w)}} \\ &= \frac{(nw)^{nw} [n(1-w)]^{n(1-w)}}{(nw)^{nw} [n(1-w)]^{n(1-w)} \cdot \sqrt{w \cdot 2\pi n(1-w)}} \quad \text{oder} \end{aligned}$$

$$W_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi n w \bar{w}}} \tag{4}$$

Der hiermit bewiesene Satz scheint in Widerspruch zu stehen zu dem, was man gefühlmäßig erwartet: daß nämlich (um in unserm Beispiel zu bleiben) die Wahrscheinlichkeit, in ein Sechstel aller Fälle eine 5 zu werfen, mit wachsender Versuchszahl n immer größer wird. Der richtige Kern dieser Erwartung wird zum Ausdruck gebracht durch das

Gesetz der großen Zahlen (Bernoulli-Laplace): Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei n auf ein Ereignis von der Wahrscheinlichkeit w sich beziehenden Versuchen die Zahl k der Erfolge von der Richtzahl nw höchstens um einen vorgegebenen kleinen Bruchteil von nw differiert, wird bei wachsender Versuchszahl n immer größer und strebt der 1 zu.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei einem Ereignis von der Wahrscheinlichkeit w unter n Versuchen die Zahl der Erfolge zwischen $k - \lambda$ und $k + \lambda$ liegt, ergibt sich nach dem Additionssatz zu $w_{k-\lambda}^{(n)} + w_{k-\lambda+1}^{(n)} + \dots + w_k^{(n)} + \dots + w_{k+\lambda-1}^{(n)} + w_{k+\lambda}^{(n)}$. Berechnet man diesen Ausdruck für das die maximale Wahrscheinlichkeit ergebende $k \approx nw$, so gelangt man bei Einführung bestimmter Zahlenwerte n zu Ergebnissen, die auf Grund der tatsächlichen Erfahrungen verallgemeinert das Gesetz der großen Zahlen liefern. — Wir fragen beispielsweise nach der Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei $n = 120$ Würfelversuchen in ungefähr ein Sechstel der Fälle eine 5 geworfen wird, sagen wir in $k = 10$ oder $11 \dots$ oder 30 Fällen, so daß also eine Höchstabweichung $\lambda = 10$ von der die größte Wahrscheinlichkeit genießenden Zahl $k = 20$ zugelassen wird. Wir erhalten dann $w_{10}^{(120)} + w_{11}^{(120)} + \dots + w_{20}^{(120)} + \dots + w_{29}^{(120)} + w_{30}^{(120)} = 0,9859$; also annähernd Gewißheit.

Das Gesetz der großen Zahlen gibt uns die Möglichkeit, aus der bei einer großen Zahl n von Versuchen sich einstellenden Zahl k der Erfolge einen Rückschluß auf die Wahrscheinlichkeit w zu ziehen, mit der das als Erfolg gewertete Ergebnis beim einzelnen Versuch eintritt. Wir erhalten dafür $w \approx \frac{k}{n}$. Diese Folgerung ist wichtig für den Fall, daß über diese Wahrscheinlichkeit a priori, d. h. über den Charakter der Versuchsgrundlage — Zahl der beim einzelnen Versuch an sich möglichen und der für den Erfolg günstigen Fälle — nichts bekannt ist. Es seien beispielsweise in einer Urne 5 Kugeln von verschiedener Farbe, deren Mischungsverhältnis wir nicht kennen. Wenn bei $n = 1000$ Versuchen $k = 203$ mal eine rote Kugel gezogen wird, so wird man auf $w \approx \frac{203}{1000}$ schließen, also da w ein einfacher echter Bruch sein muß, auf $w = \frac{2}{5}$, d. h. man wird das Vorhandensein von 2 roten Kugeln annehmen. Auf diese aus dem Experiment erschlossene Wahrscheinlichkeit, die sog. Wahrscheinlichkeit a posteriori, ist geradezu die neuere Definition des Wahrscheinlichkeitsbegriffs (R. v. Mises) abgestellt; sie spielt praktisch in der Statistik die überragende Rolle, weil hier in der Regel die Grundlagen für die Angabe der mathematischen Wahrscheinlichkeit a priori fehlen. Die in verwickelteren Fällen erforderliche Verschärfung der Bestimmung von w kann dadurch erreicht werden, daß man mehrere Versuchsreihen anstellt und den Mittelwert für w bildet.

2. Binomialverteilung und Wahrscheinlichkeitsintegral.

Die Binomialverteilung, die die Wahrscheinlichkeiten $w_k^{(n)}$ der Erfolgswahlen k bei n ein Ergebnis von der Wahrscheinlichkeit w betreffenden Versuchen veranschaulicht, spiegelt sich erfahrungsgemäß in vielen statistisch gewonnenen Häufigkeitsverteilungen mehr oder minder zutreffend wieder. Sie kann experimentell mit großer Annäherung realisiert werden durch einen von Galton konstruierten, von Pearson verbesserten Apparat. Dieser „Binomialapparat“ ist ein flacher Kasten, dessen Vorderwand von einer Glasscheibe gebildet wird und dessen Rückwand eine große Anzahl regelmäßig angeordneter Keile trägt. Die Keile einer Horizontalreihe stehen über den Lücken der folgenden Reihe. Den unteren Abschluß bildet eine Reihe von Fächern. Am oberen Rande ist eine Trichteröffnung, durch die man Hirse- oder Schrotkörner hineinschüttet. Beim Auftreffen der Körner auf die Keile werden sie jeweils nach links und rechts abgelenkt. Sie sammeln sich in den Fächern am unteren Rande. Bei völlig symmetrischer Anordnung der Versuchsgrundlagen zeigen die Füllmengen deutlich die für $w = \frac{1}{2}$ geltende Binomialverteilung. Die symmetrische Gabelung des Körnerstroms an jedem Keil bewirkt eben einen das Gesetz $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ widerspiegelnden Gesamtverlauf. Durch Vermehrung der Zahl der Keilreihen kann man Binomialverteilungen gewinnen, die einen abgeflachteren Verlauf zeigen. Andererseits kann man durch unsymmetrische Einstellung (Drehung) der Keile auch Füllmengen in den Sammel-fächern erzielen, die einer Binomialverteilung für $w \neq \frac{1}{2}$ entsprechen, bei der also das Maximum nach einer Seite verschoben ist. Dabei bietet ein kleiner das Maximum in der Mitte enthaltender Ausschnitt immer noch eine einigermaßen symmetrische Gestalt dar.

Die Binomialverteilung kann naturgemäß nur bei unstetigen Häufigkeiten, wie bei Würfelversuchen und dgl., Platz greifen. Ihre rechnerische Auswertung ist meist ziemlich mühsam. Wir gelangen zu einem für die Untersuchung statistischer Häufigkeiten wertvollen, für praktische Rechnungen zweckmäßigen Idealbild einer stetigen Verteilung, wenn wir die Zahl n der Binomialverteilung unbegrenzt wachsen lassen.

Wir wollen in der Formel (3)

$$w_k^{(n)} = \binom{n}{k} w^k \bar{w}^{n-k}$$

die Argumente jetzt von der Maximumstelle nw aus messen, also

$$k = nw + x; \quad n - k = n(1 - w) - x = n\bar{w} - x$$

setzen; zugleich schreiben wir, um den Übergang zu stetig veränderlichen Argumenten anzudeuten, W statt $w_k^{(n)}$ und erhalten:

$$W = \frac{n!}{(nw+x)!(nw-x)!} w^{nw+x} \bar{w}^{n\bar{w}-x}.$$

Für die Maximumstelle ist:

$$W_0 = \frac{n!}{(nw)!(n\bar{w})!} w^{nw} \cdot \bar{w}^{n\bar{w}}.$$

Daher ist

$$W = W_0 \cdot \frac{(nw)!(n\bar{w})!}{(nw+x)!(nw-x)!} \left(\frac{w}{\bar{w}}\right)^x.$$

Wir drücken hierin die Fakultäten nach der Stirlingschen Formel aus. Nach einigen Umformungen und Übergang zu $\lim n \rightarrow \infty$ gelangen wir dann, wie hier nicht näher ausgeführt werden soll¹⁾, zu der Näherungsformel:

$$W = W_0 \cdot e^{-\frac{x^2}{2nw \cdot \bar{w}}}; \quad (5)$$

nach (4) ist hierin $W_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi nw \cdot \bar{w}}}$. Durch die Formel (5) würde eine Verteilung dargestellt werden, die für alle, auch noch für die sehr großen positiven und negativen Argumentwerte völlig symmetrisch zur Maximumstelle ausfällt. In Wahrheit zeigt aber doch die Binomialverteilung, außer im Falle $w = \frac{1}{2}$, ein im ganzen genommen unsymmetrisches Bild und je nach dem Verhältnis $w:\bar{w}$ eine Verschiebung der Maximumstelle nach der einen oder der anderen Seite. Tatsächlich ist auch die Formel (5), wie bei der Herleitung ersichtlich wird, eine gute Näherungsdarstellung nur für ein gewisses die Maximumstelle enthaltendes Kernstück: Die Argumentwerte x dürfen absolut genommen nicht größer sein als ein mäßiges Vielfaches, etwa das Drei- bis Vierfache, von $\sqrt{nw\bar{w}}$.

Der Inhalt der Formel (5) läßt sich, ihrer Herleitung entsprechend, wie folgt aussprechen: Ein Versuch, bei dem ein bestimmtes als Erfolg gewertetes Ergebnis mit der Wahrscheinlichkeit w , das Ausbleiben desselben also mit der Wahrscheinlichkeit \bar{w} eintritt, werde n mal angestellt, wo n eine im Vergleich zu $\frac{1}{w}$ sehr große Zahl. Dann ist $W \cdot dx$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei dieser Versuchsreihe die Anzahl der Erfolge in das von $nw+x$ und $nw+x+dx$ begrenzte Intervall fällt.

Wir wollen uns noch überzeugen, daß die Summe aller in diesem Sinne vorkommenden Wahrscheinlichkeiten entsprechend dem Additionssatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung gleich 1 ist, wenn wir das

¹⁾ Vgl. E. Czuber: Die statistischen Forschungsmethoden, Wien 1921, S. 200f.

Intervall von $-\infty$ bis $+\infty$ erstrecken, daß also das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} W dx = 1$ ist. Wir gehen zu diesem Zweck aus von dem Integral

$$J_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \quad (6)$$

Setzen wir in dem rechtwinkligen xyz -Koordinatensystem $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ und lassen die Kurve $z = e^{-x^2}$ um die z -Achse rotieren, so entsteht ein Rotationskörper $z = e^{-\rho^2}$ (Abb. 53). Er setzt sich zusammen aus Kreiszyklindern von der Grundfläche $2\pi\rho \cdot d\rho$ und der Höhe $e^{-\rho^2}$, sein Volumen ist also:

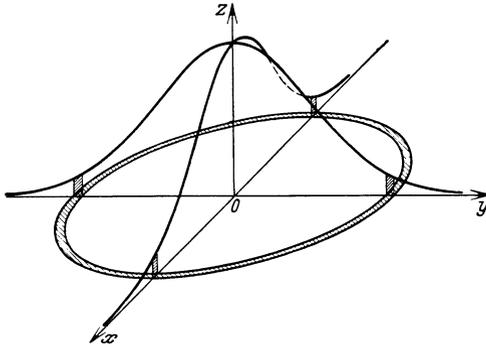


Abb. 53.

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^{\infty} e^{-\rho^2} \rho d\rho \\ &= -\pi [e^{-\rho^2}]_0^{\infty} = \pi. \end{aligned}$$

Denselben Rotationskörper können wir zerlegen in Schichten, deren Begrenzungsebenen der xz -Ebene parallel sind. Das Volumen einer Schicht ist

$$dV = dy \cdot \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \cdot dx = e^{-y^2} dy \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = J_0 \cdot e^{-y^2} dy;$$

das Volumen des ganzen Körpers also

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} J_0 \cdot e^{-y^2} dy = J_0 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = J_0^2.$$

Mithin ist

$$J_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.$$

Um nun

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W dx = 2 \int_0^{\infty} W dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi n w \bar{w}}} \cdot \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2n w \bar{w}}} \cdot dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n w \bar{w}}} \cdot \int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2n w \bar{w}}} \cdot dt$$

zu bestimmen, betrachten wir allgemein den Ausdruck

$$W_{-x}^{+x} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n w \bar{w}}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2n w \bar{w}}} \cdot dt.$$

Er stellt die Wahrscheinlichkeit dafür dar, daß bei der untersuchten Versuchsreihe die Anzahl der Erfolge in das Intervall zwischen $nw - x$ und $nw + x$ fällt. Geometrisch

wird er durch den Flächeninhalt des Gebietes wiedergegeben, das von der x -Achse, der Kurve $y = W$ und den zu $-x$ und $+x$ gehörenden Ordinaten begrenzt wird. Substituieren wir $u = \frac{t}{\sqrt{2nw\bar{w}}}$, so wird

$$W_{-x}^{+x} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{2nw\bar{w}}}} e^{-u^2} du. \tag{7}$$

Mithin ergibt sich für das gesuchte Integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W dx = W_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{J_0}{\sqrt{\pi}} = 1,$$

womit der Beweis geliefert ist. Für das „Wahrscheinlichkeitsintegral“, d. h. die Funktion

$$\Phi(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-u^2} du, \tag{8}$$

mittels der man die für die praktischen Anwendungen sehr bedeutsame Gesamtwahrscheinlichkeit W_{-x}^{+x} mit $\gamma = \frac{x}{\sqrt{2nw\bar{w}}}$ berechnen kann, bestehen zahlreiche Tabellen. Wir geben nachstehend unter Benutzung der Abkürzung $\sigma = \sqrt{nw\bar{w}}$ eine Tafel für $\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right)$ zu gegebenen Argumentwerten $\frac{x}{\sigma}$. Für die letzteren ist als Höchstwert 4 genommen, da hier der Funktionswert praktisch nicht mehr von 1 sich unterscheidet, überdies nach unseren früheren Bemerkungen für höhere Argumentwerte die theoretische Verteilungskurve nicht mehr zutrifft.

$\frac{x}{\sigma}$	$\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right)$	$\frac{x}{\sigma}$	$\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right)$	$\frac{x}{\sigma}$	$\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right)$	$\frac{x}{\sigma}$	$\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right)$
0,0	0,00000	1,0	0,68268	2,0	0,95450	3,0	0,99730
0,1	0,07966	1,1	0,72866	2,1	0,96428	3,1	0,99806
0,2	0,15852	1,2	0,76986	2,2	0,97220	3,2	0,99862
0,3	0,23582	1,3	0,80640	2,3	0,97856	3,3	0,99904
0,4	0,31078	1,4	0,83848	2,4	0,98360	3,4	0,99932
0,5	0,38292	1,5	0,86638	2,5	0,98758	3,5	0,99954
0,6	0,45150	1,6	0,89040	2,6	0,99068	3,6	0,99968
0,7	0,51608	1,7	0,91086	2,7	0,99306	3,7	0,99978
0,8	0,57628	1,8	0,92814	2,8	0,99488	3,8	0,99986
0,9	0,63188	1,9	0,94256	2,9	0,99626	3,9	0,99990
1,0	0,68268	2,0	0,95450	3,0	0,99730	4,0	0,99994

Beispiel: Eine Bank hat $n = 1000$ Stück von einer Anleihe im Depot, von der 8% aller noch aufrechten Stücke im laufenden Jahr zur Auslosung kommen. Wie

groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Abweichung der Anzahl der auf das Depot fallenden Auslosungen von der Erwartungszahl 80 höchstens 10% beträgt¹⁾?

Lösung: Die Auslosungswahrscheinlichkeit beträgt für jedes Stück $w = 0,08$, am größten ist also die Wahrscheinlichkeit, daß $nw = 1000 \cdot 0,08 = 80$ Stücke des Depots ausgelost werden. Die Wahrscheinlichkeit der Nichtauslosung beträgt für jedes Stück $\bar{w} = 0,92$. Daher ist $\sigma = \sqrt{nw\bar{w}} = \sqrt{1000 \cdot 0,08 \cdot 0,92}$. In Frage kommt eine zehnprozentige Abweichung von der Erwartungszahl 80 nach oben oder unten, also $x = 8$, $\frac{x}{\sigma} = 0,933$. Führen wir diesen Wert in $\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2} \cdot \sigma}\right)$ (siehe

obige Tabelle) ein, so erhalten wir: $W_{-8}^{+8} = 0,649$, d. h. die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens 72 und höchstens 88 Auslosungen erfolgen, beträgt rund 65%. — Die Bank ist an Hand dieses Ergebnisses in der Lage, das Risiko zu beurteilen, das sie läuft, wenn sie z. B. mindestens 72 Auslosungen und den damit verbundenen Kursgewinn in Rechnung stellt²⁾.

Unter Benutzung der Hilfsgröße $\sigma = \sqrt{nw\bar{w}}$ kann man die Formel (5) für die Verteilung der Wahrscheinlichkeiten in der Form schreiben

$$W = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}; \quad \text{wo } \sigma = \sqrt{nw\bar{w}}. \quad (9)$$

Durch Vergleich mit den an die Gaußsche Verteilung (s. § 23) anschließenden Betrachtungen folgert man, daß hierin σ als die quadratische Streuung oder Dispersion gedeutet werden kann, mit der die Abweichungen x der tatsächlichen Erfolgswahlen von der Erwartungszahl nw auftreten:

Satz von Bernoulli: Wenn bei einer Beobachtung ein bestimmtes als Erfolg gewertetes Ergebnis mit der Wahrscheinlichkeit w eintritt und $\bar{w} = 1 - w$, so hat man bei Versuchsreihen, die eine große Zahl n von Beobachtungen umfassen, in bezug auf die Erwartungszahl nw mit einer quadratischen Streuung oder Dispersion

$$\sigma = \sqrt{\frac{[x^2]}{w}} = \sqrt{nw\bar{w}} \quad (10)$$

zu rechnen.

Dieses Bernoullische Dispersionsgesetz geht bereits, insofern Wahrscheinlichkeit a posteriori, also statistisch festgestellte Wahrscheinlichkeit in Frage kommt, die mathematische Statistik an, und zwar besonders die sog. alternative Statistik, die sich nur mit der Frage beschäftigt, ob bei den Objekten der Statistik ein bestimmtes Merkmal zutrifft oder nicht.

§ 23. Mathematische Statistik.

Wird eine Beobachtungsgröße l durch sehr zahlreiche Messungen ermittelt, so kann man sich von der relativen Häufigkeit, mit der

¹⁾ Es wird angenommen, daß die Anzahl der zur Auslosung gelangenden Stücke größer ist als die Depotstärke 1000.

²⁾ Wie man leicht nachrechnet, wird das Zahlenergebnis durch die Depotstärke kaum merklich beeinflusst.

die den einzelnen Messungen anhaftenden — kleineren oder größeren, positiven oder negativen — Fehler x auftreten, ein Bild machen mit Hilfe einer Funktion, die im wesentlichen mit dem Limes-Ausdruck (5) der Binomialverteilung übereinstimmt, nämlich mit Hilfe der von Gauß aufgestellten Fehlerfunktion:

$$y = y_0 e^{-h^2 x^2}, \tag{11}$$

worin y_0 und h Konstante bedeuten. Diese Tatsache kann als Ergebnis der Erfahrung angesehen werden und außerdem durch Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen, z. B. mittels der Methode der Elementarfehler, begreiflich gemacht werden. Das graphische Bild ist offenbar zur y -Achse symmetrisch. Aus

$$\frac{dy}{dx} = -2 h^2 y_0 \cdot x e^{-h^2 x^2},$$

$$\frac{dy^2}{dx^2} = -2 h^2 y_0 (1 - 2 h^2 x^2) e^{-h^2 x^2}$$

folgt, daß die Kurve für $x = 0$ ein Maximum mit der Ordinate y_0 besitzt und daß zwei Wendepunkte mit den Abszissen $x_w = \pm \frac{1}{\sqrt{2} h}$ und der Ordinate $y_w = \frac{y_0}{\sqrt{e}}$ vorhanden sind.

Die Konstante y_0 beeinflusst offenbar nur den Maßstab des Kurvenbildes in der y -Richtung. Um die Bedeutung der Konstanten h zu erkennen, betrachten wir die Schar der Kurven für festes y_0 und wechselndes h (Abb. 54). Für den Grenzfall $h = 0$ ergibt sich die Gerade $y = y_0$; für den Grenzfall $h \rightarrow \infty$ ist im allgemeinen $y = 0$, während aus der nur für $y \leq y_0$ erklärten Kurvendarstellung $x = \pm \frac{1}{h} \sqrt{-\lg \frac{y}{y_0}}$ folgt: $x = 0$, so daß sich die Kurve aus der x -Achse und dem Intervall $0 \leq y \leq y_0$ der y -Achse zusammensetzt. Im übrigen folgt aus $x_w = \pm \frac{1}{\sqrt{2} h}$, $y_w = \frac{y_0}{\sqrt{e}}$ daß die Wendepunkte der Scharkurven sämtlich auf der Parallelen zur x -Achse im Abstände $\frac{y_0}{\sqrt{e}}$ liegen und daß ihr Abstand von der y -Achse mit h umgekehrt proportional ist: Für kleine h ist die Kurve sehr flach gestreckt; für große h rücken die Wendepunkte nahe an die y -Achse heran, die Kurve fällt beiderseits vom Maximum steil ab. Die Konstante h mißt also den Grad, in dem sich die Fehler, deren relative Häufigkeit ja durch die Ordinate der Kurve veranschaulicht wird, zum Werte 0

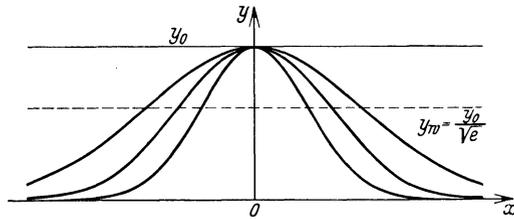


Abb. 54.

zusammendrängen. Man bezeichnet daher die Konstante h als das Genauigkeitsmaß oder die Präzision. Ihr Wert kennzeichnet die Güte des zur Messung von l angewendeten Beobachtungsverfahrens.

Die Präzisierung der Beziehung zwischen Kurvenordinate und relativer Häufigkeit der Fehler erfolgt nun so: Wird eine sehr große Zahl n von Messungen angestellt, so ist die durch n dividierte Anzahl der auf das Intervall von x bis $x + dx$ entfallenden Fehler die für dieses Intervall charakteristische „relative Häufigkeit“; sie wird durch $y dx$ dargestellt, wenn y die Ordinate der Gaußschen Fehlerkurve ist. Die Definitionen für Wahrscheinlichkeit und relative Häufigkeit stimmen also überein, nur daß man in einem Falle einen logischen, im anderen Falle einen empirisch-statistischen Ausgangspunkt nimmt. Also gilt auch bei der Gaußschen Fehlerverteilung der Additionssatz. Die relative Häufigkeit der in das Intervall zwischen x_1 und x_2 fallenden Fehler beträgt $\int_{x_1}^{x_2} y dx$, und wir wollen diese Größe auch bezeichnen als die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Fehler in das Intervall zwischen x_1 und x_2 fällt. Geometrisch wird sie dargestellt durch die Fläche, die von der x -Achse, der Kurve $y = y_0 e^{-h^2 x^2}$ und den zu x_1, x_2 gehörenden Ordinaten begrenzt wird.

Die Summe der relativen Häufigkeiten aller zwischen $-\infty$ und $+\infty$ liegenden Fehler muß 1 sein: $\int_{-\infty}^{+\infty} y dx = 1$; d. h. das gesamte von der Fehlerkurve und der x -Achse begrenzte Gebiet muß den Inhalt 1 haben. Daraus ergibt sich, daß zwischen den Konstanten y_0 und h der Fehlerfunktion $y = y_0 e^{-h^2 x^2}$ dieselbe Beziehung bestehen muß, wie zwischen den Parametern der im vorigen Paragraphen untersuchten Wahrscheinlichkeitsfunktion $W = \frac{1}{\sqrt{2n w \bar{w}} \cdot \sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2n w \bar{w}}}$, bei der ja die Bedingung $\int_{-\infty}^{+\infty} W dx = 1$ erfüllt war. Da h^2 an Stelle von $\frac{1}{2n w \bar{w}}$ steht, muß $y_0 = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$ sein, d. h. die normierte Gaußsche Fehlerfunktion lautet:

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2 x^2}. \quad (11')$$

Damit übertragen sich auch die an das „Wahrscheinlichkeitsintegral“ geknüpften Bemerkungen auf den vorliegenden Fall. Setzen wir, um Übereinstimmung mit der in (9) eingeführten Schreibweise zu erzielen,

$$\sigma = \frac{1}{h \sqrt{2}}, \quad (12)$$

so können wir mittels der Tabelle, die $\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right)$ zu gegebenen $\frac{x}{\sigma}$ darstellt, die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmen, daß ein Fehler in den Bereich

zwischen $-x$ und $+x$ fällt. Beispielsweise ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler zwischen $-\sigma$ und $+\sigma$ liegt, die Wahrscheinlichkeit 0,6826. Da $x_w = \pm \sigma$, so kann man sagen:

Bei der Gaußschen Fehlerverteilung $y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2 x^2}$ liegen rund zwei Drittel der Fehler innerhalb des Bereichs, der von den Wendepunktsabszissen $x_w = \pm \sigma = \pm \frac{1}{h\sqrt{2}}$ begrenzt wird.

$\Phi = 0,5$ ergibt sich zum Argument $\frac{x}{\sigma} = 0,675$; also liegen 50% der Fehler innerhalb des Intervalls, dessen Endpunktsabszissen rund zwei Drittel der Wendepunktsabszissen betragen. Da die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß ein Fehler innerhalb oder außerhalb dieses Bereichs liegt, beide gleich $\frac{1}{2}$ sind, so bezeichnet man $0,675 \sigma$ auch als den wahrscheinlichen Fehler.

Wie kann man nun aus einer Reihe von n eine Größe l betreffenden Beobachtungen X_1, X_2, \dots, X_n , die natürlich mit Fehlern behaftet sind, auf den wahren Wert l und das zugrunde liegende Fehlerverteilungsbild schließen? Den Ausgangspunkt für die Beantwortung der ersten Frage, die das Ziel der sogenannten Ausgleichsrechnung darstellt, bildet die von Gauß axiomatisch eingeführte Methode der kleinsten Quadrate. Hiernach wird bei sehr großem n die Summe der Quadrate derjenigen Beträge, um die die Beobachtungswerte X_1, X_2, \dots, X_n von einem beliebigen Wert X abweichen, zum Minimum, wenn man für X den wahren Wert einsetzt, wodurch jene Differenzbeträge in die wahren Fehler x übergehen. Ist der gesuchte Wert l das Messungsobjekt selbst und nicht erst auf Grund einer Relation daraus herzuleiten, so liefert dies Prinzip den wahren Wert als arithmetisches Mittel \bar{X} der Beobachtungswerte. In der Tat:

$$z = (X_1 - X)^2 + (X_2 - X)^2 + \dots + (X_n - X)^2;$$

$$\frac{dz}{dX} = 2(X - X_1) + 2(X - X_2) + \dots + 2(X - X_n);$$

$$\frac{d^2z}{dX^2} = 2n.$$

Durch Nullsetzen von $\frac{dz}{dX}$ erhalten wir $X = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \bar{X}$,

und da $\frac{d^2z}{dX^2}$ beständig positiv, so liegt wirklich ein Minimum vor. Als wahrer Wert einer Messungsgröße kann also das arithmetische Mittel \bar{X} aus einer sehr großen Zahl n von Beobachtungswerten X_i angesehen werden:

$$l \approx \bar{X}. \tag{13}$$

Welches Fehlerverteilungsbild beiderseits des wahren Wertes l liegt

zugrunde, wenn die den einzelnen Beobachtungswerten anhaftenden Fehler, d. h. ihre Abweichungen vom wahren Wert l , die Werte x_1, x_2, \dots, x_n haben? Dafür, daß ein Fehler in das Intervall zwischen x_i und $x_i + dx$ fällt, besteht von Haus aus die Wahrscheinlichkeit $w_i = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} \cdot dx$. Nach dem Multiplikationssatz ist daher die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei einer Beobachtungsreihe die Fehler x_1, x_2, \dots, x_n (jeweils mit einem Spielraum dx angesetzt) kombiniert auftreten, gegeben durch

$$W_{1, 2, \dots, n} = w_1 w_2 \dots w_n = \frac{h^n}{\sqrt{\pi}^n} e^{-h^2 (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)} \cdot (dx)^n.$$

Wir wollen dasjenige h als das zutreffende ansehen, für das $W_{1, 2, \dots, n}$ am größten wird, bilden also

$$\begin{aligned} \frac{dW_{1, 2, \dots, n}}{dh} &= \left(\frac{dx}{\sqrt{\pi}} \right)^n \left\{ n h^{n-1} \cdot e^{-h^2 [x^2]} - 2h [x^2] h^n e^{-h^2 [x^2]} \right\} \\ &= \left(\frac{dx}{\sqrt{\pi}} \right)^n h^{n-1} e^{-h^2 [x^2]} \cdot \left\{ n - 2h^2 [x^2] \right\}. \end{aligned}$$

Hier ist $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = [x^2]$ gesetzt. Obiger Ausdruck wird 0 für $n - 2h^2 [x^2] = 0$, also für

$$h^2 = \frac{1}{2\sigma^2} = \frac{1}{2} \frac{n}{[x^2]}; \quad \sigma = \sqrt{\frac{[x^2]}{n}}. \quad (14)$$

Damit hat sich ergeben, daß der für die Fehlerverteilung charakteristische, mit der Wendepunktsabszisse x_w übereinstimmende Parameter σ angesehen werden kann als die quadratische Streuung der bei einer sehr großen Zahl n von Beobachtungen auftretenden wahren Fehler x_i . Man bezeichnet daher σ auch als den mittleren Fehler der Beobachtungsreihe.

Bei einer begrenzten Zahl n von Beobachtungen X_i schließt nun die Identifizierung des wahren Wertes l mit dem Mittelwert \bar{X} der Messungswerte immerhin eine gewisse Unsicherheit in sich. Man kann also nicht ohne weiteres die wahren Fehler x_i mit den $v_i = X_i - \bar{X}$, d. h. den Abweichungen der Beobachtungswerte von ihrem arithmetischen Mittel identifizieren. Eine genauere Untersuchung zeigt, daß $[v^2]$ gegenüber $[x^2]$ wahrscheinlich etwas zu klein ausfällt und daß $\sigma = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}$ zu setzen ist. (Haben wir es nicht mit einer, sondern mit ν zu bestimmenden Unbekannten zu tun, so ist $\sigma = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-\nu}}$ zu setzen.)

Wir fassen zusammen: Liegen n Beobachtungswerte X_1, X_2, \dots, X_n für eine Messungsgröße l vor, so kann man als Messungsergebnis (Ausgleichswert) das arithmetische Mittel $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ ansetzen. Folgen die wahren Fehler

$x_i = X_i - l$ dem Gaußschen Verteilungsgesetz, so drückt sich der ihm zugrunde liegende, als Genauigkeitsmaß anzusehende Parameter h nach der Formel $h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$ durch ihre quadratische Streuung $\sigma = \sqrt{\frac{[x^2]}{n}}$ aus, und diese errechnet sich aus den Abweichungen $v_i = X_i - \bar{X}$ der Beobachtungswerte vom arithmetischen Mittel gemäß $\sigma = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}$. Auf die Stelle \bar{X} lege man also den O -Punkt des Verteilungsdiagramms

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \text{ wo } \sigma = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}. \quad (15)$$

Bei einer sehr großen Zahl n von Beobachtungen kann man natürlich auch $\sigma = \sqrt{\frac{[v^2]}{n}}$ setzen. Ob bei einer praktisch erhaltenen Beobachtungsreihe wirklich die Gaußsche Fehlerverteilung zu vermuten ist, kann man durch Stichproben an den aus ihr gezogenen Folgerungen prüfen. Sehr oft angewendet wird die Probe, ob rund zwei Drittel der Beobachtungswerte in das Intervall $\bar{X} - \sigma < X_i < \bar{X} + \sigma$ fallen.

Beispiel: Die Wertrelation Dollar — Mark werde an einem bestimmten Tage (16. April 1933) einmal aus den direkten Kursnotierungen in Berlin und New York entnommen, andererseits auch aus den Kurszetteln verschiedener anderer Börsenplätze hergeleitet durch Kopplung der Dollar- und der Marknotierungen. Man berechne den „wahren“ in Mark ausgedrückten Tageswert des Dollars und die quadratische Streuung.

Lösung:

Börse:	X_i	$v_i = X_i - \bar{X}$	$v_i^2 = (X_i - \bar{X})^2$
London . . .	4,2304	+ 0,0243	0,000590
Amsterdam .	4,2365	+ 0,0304	0,000924
Zürich . . .	4,2289	+ 0,0228	0,000520
Paris	4,2313	+ 0,0252	0,000635
Stockholm . .	4,0435	− 0,1626	0,026439
Kopenhagen .	4,2313	+ 0,0252	0,000635
Oslo	4,2059	− 0,0002	0,000000
Wien	4,2323	+ 0,0262	0,000686
Prag	4,2025	− 0,0036	0,000013
Mailand . . .	4,2116	+ 0,0055	0,000030
Berlin	4,2130	+ 0,0069	0,000048
Summe	46,2672		0,030 520

Der „wahre“ Tageswert des Dollars betrug also $\bar{X} = \frac{46,2672}{11} = 4,2061 \text{ M}$;

ferner: $\sigma = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{1}{10} \cdot 0,030520} = 0,0552$, also: $\bar{X} - \sigma = 4,1509$; $\bar{X} + \sigma = 4,2613$. Im Bereich $\bar{X} - \sigma < X_i < \bar{X} + \sigma$ liegen mithin 10 der berechneten X_i , so daß man auf das Vorliegen einer Gaußschen Verteilung schließen wird.

In der Wirtschaftsmathematik sind die Fälle selten, wo es sich bei einer Statistik dreht um die Bestimmung des „wahren Werts einer Beobachtungsgröße“ und die „Genauigkeit“, mit der sie ermittelt wird. Die bisherigen Untersuchungen behalten aber ihre Bedeutung für die Wirtschaftsstatistik, weil sie mit gewissen Einschränkungen übertragbar sind auf den regulären Fall, wo es sich um ein Kollektiv handelt, d. h. den Inbegriff einer größeren Zahl mit gleichem Namen bezeichneter Objekte, deren kennzeichnende Maßzahlen X_i tatsächlich variieren; z. B. die Sommerarbeitslöhne landwirtschaftlicher Arbeiter in verschiedenen Teilen des deutschen Reiches (S. 169), wobei von der Statistik die Häufigkeit des Vorkommens der einzelnen Lohnstufen erfaßt wird. Bei solchen Kollektiven haben arithmetisches Mittel \bar{X} und quadratische Streuung σ natürlich nicht mehr die Bedeutung eines „wahren Wertes“ und eines „Genauigkeitsmaßes“, sondern vielmehr die einer knapp gefaßten Repräsentation oder Umreißung des Kollektivs „im großen und ganzen“: Sie kennzeichnen gewissermaßen einen Normal- oder Grundwert und das Wesen des Streuungsbildes. In diesem Sinne wird die Methode der kleinsten Quadrate als „Ausgleichsprinzip“ allgemein auf Wirtschaftsreihen zu übertragen sein. Zwischen den x_i und den v_i zu unterscheiden kommt nicht in Frage; im allgemeinen setzt man, insofern wahrscheinlichkeitstheoretische Überlegungen ausscheiden, nicht $\sigma = \sqrt{\frac{[x^2]}{n-1}}$, sondern $\sigma = \sqrt{\frac{[x^2]}{n}}$, unter den x_i die Abweichungen vom arithmetischen Mittel verstanden. Freilich überwiegen in der Wirtschaftsstatistik Häufigkeitsverteilungen, die von dem Bilde, wie es die Gaußsche Fehlerkurve darbietet, erheblich abweichen, z. B. durch starke Unsymmetrie. Man bezeichnet allgemein

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \text{ wo } \sigma = \sqrt{\frac{[x^2]}{n}}, \quad (16)$$

als die normale Häufigkeitsverteilung. Ob eine solche bei einer bestimmten Wirtschaftsreihe vorliegt, wird mit Hilfe der in der Fehlertheorie besprochenen Kriterien zu prüfen sein. Man macht z. B. die Probe, ob rund zwei Drittel der X_i in das von $\bar{X} - \sigma$ und $\bar{X} + \sigma$ begrenzte Intervall fallen. Natürlich ist auch, wenn solche Proben eine Bestätigung liefern, das Vorliegen einer normalen Häufigkeitsverteilung nicht unbedingt gesichert.

Eine ähnliche Anlehnung an wahrscheinlichkeitstheoretische Überlegungen wie bei der Fehlerstatistik findet sich bei manchen Fällen der alternativen Statistik. Hier handelt es sich um Erhebungen darüber, ob bei den Exemplaren eines Kollektivs ein bestimmtes Merkmal zutrifft oder nicht; z. B. die Anzahl der Knabengeburt, die auf Gruppen von je 1000 Geburten entfallen. Objekt der endgültigen Statistik sind hier die den einzelnen Gruppen entsprechenden relativen Häufig-

keiten des betreffenden Merkmals. Derartige Erhebungen spielen in der Versicherungsmathematik eine grundlegende Rolle. Hier liegt es nahe, auch an die Formel (9) für die Verteilung der Wahrscheinlichkeiten anzuknüpfen. Für eine Gruppe von n Exemplaren ist danach

$$W = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad \text{wo } \sigma = \sqrt{nw\bar{w}}. \quad (17)$$

Trifft die Voraussetzung zu, daß die statistisch zu gewinnende Wahrscheinlichkeit w für das Auftreten des in Frage kommenden Merkmals im Grunde genommen für alle untersuchten Gruppen dieselbe ist, so müssen die den k -Gruppen jeweils entsprechenden Häufigkeiten $w_1 n, w_2 n, \dots, w_k n$ eine Verteilung zeigen, die dem hingeschriebenen normalen Häufigkeitsgesetz entspricht. Der O -Punkt ist dabei durch die dem arithmetischen Mittel $w = \frac{w_1 + w_2 + \dots + w_k}{k}$ entsprechende Stelle bestimmt, und σ muß mit der quadratischen Streuung $n \sqrt{\frac{\sum (w_i - w)^2}{k}}$ übereinstimmen, wie schon im Satz von Bernoulli zum Ausdruck gebracht wurde.

Beispiel: Nach E. Blaschke (Vorlesungen über mathematische Statistik, Leipzig 1906, S. 141) ergaben die während der Jahre 1863—1893 angestellten Beobachtungen über Ablebensversicherungen bei 55jährigen Männern, falls diese nach dem Beitrittsalter (Vertragsdauer) gruppiert werden:

Beitrittsalter	Lebende	Tote	Sterbenswahrscheinlichkeit	$10^5 \times$ Abweichung	$10^6 \times$ (Abweichung) ²
50	3405	67	0,01968	— 80	0,6400
49	3256	72	0,02211	163	2,6569
48	3314	70	0,02112	64	0,4096
47	3440	66	0,01919	— 129	1,6641
46	3485	67	0,01923	— 125	1,5625
45	3774	69	0,01828	— 220	4,8400
44	3640	76	0,02085	37	0,1369
43	3635	90	0,02476	428	18,3180
42	3744	65	0,01736	— 312	9,7344
41	3772	90	0,02386	338	11,4245
40	3937	75	0,01905	— 143	2,0449
39	3792	76	0,02004	— 44	0,1936
38	3520	73	0,02074	26	0,0676
Summe . . .	46714	956	0,26627		53,6928
Arithmetisches Mittel:	3593,4	73,5	0,02048		4,1302

$$n \sqrt{\frac{\sum (w_i - w)^2}{k}} = 3593,4 \cdot \sqrt{0,000\,0041302} = 7,303,$$

$$\sigma = \sqrt{nw\bar{w}} = \sqrt{3593,4 \cdot 0,02048 \cdot 0,97952} = 8,490.$$

¹⁾ Das arithmetische Mittel ist hier nicht mit \bar{w} bezeichnet, um Verwechslungen mit der früher eingeführten und auch hier beibehaltenen Bezeichnung $\bar{w} = 1 - w$ zu vermeiden.

Die Übereinstimmung ist also befriedigend. Das bedeutet, daß die Sterbenswahrscheinlichkeit der 55jährigen nicht von der Gruppierung abhängt.

Die Verknüpfung einer in Gruppen durchgeführten alternativen Statistik mit dem Satz von Bernoulli kommt auf die Annahme heraus, daß bei den verschiedenen Gruppen von je n Feststellungen im Grunde genommen doch derselbe „wahre“ Wert der Merkmalswahrscheinlichkeit w dahinter steckt (analog dem wahren Wert bei einer Gaußschen Fehlerverteilung). Weicht die quadratische Streuung merklich von $\sqrt{n \cdot w \bar{w}}$ ab, so beweist das, daß ungleichartige Gruppen vorliegen (allgemeiner Fall des um einen Normalwert streuenden Kollektivs). Die quadratische Streuung bestimmt sich dann nach dem hier beweislos mitgeteilten

Satz von Lexis: Sind w_1, w_2, \dots, w_k die bei k Gruppen von je n Exemplaren ermittelten statistischen Wahrscheinlichkeiten und w ihr arithmetisches Mittel, ferner $\bar{w} = 1 - w$, so gilt für die quadratische Streuung σ_L

$$\sigma_L^2 = n w \bar{w} + \frac{(w_1 - w)^2 + \dots + (w_k - w)^2}{k} (n^2 - n).$$

In unserem Beispiel: $\sigma_L = \sqrt{72,0843 + 4,1302 \cdot 10^{-6} \cdot 156} = 8,4902$, eine Abweichung gegenüber σ besteht nicht.

Die qualitative Statistik befaßt sich unmittelbar mit Maßzahlen der einzelnen Exemplare des Kollektivs und ihren relativen Häufigkeiten. Sie spielt neuerdings z. B. für die Betriebskontrollen und das Angebotswesen der mit Massenfabrikation beschäftigten Unternehmungen und in der Lebensmittelchemie eine bedeutsame Rolle. Für die rechnerische Bestimmung der typischen Repräsentanten des Kollektivs, des arithmetischen Mittels \bar{X} der Maßzahlen X_1, X_2, \dots, X_n von n Exemplaren und ihrer quadratischen Streuung σ , empfiehlt sich bei großen Werten der Maßzahlen eine aus dem folgenden hervorgehende Modifikation.

Es sei X_0 ein schätzungsweise in der Nähe des zu bestimmenden arithmetischen Mittels \bar{X} liegender runder Wert. Schreiben wir $X_1 - X_0 = x'_1, X_2 - X_0 = x'_2, \dots, X_n - X_0 = x'_n$, so ist

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = X_0 + \frac{x'_1 + x'_2 + \dots + x'_n}{n},$$

also wenn das arithmetische Mittel der Abweichungen der Maßzahlen vom Grundwert X_0 mit \bar{x}' bezeichnet wird,

$$\bar{X} = X_0 + \bar{x}'. \quad (18)$$

Für die quadratische Streuung gilt zunächst

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{n} [(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2] \\ &= \frac{1}{n} [X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2] - 2 \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \bar{X} + \bar{X}^2 \\ &= \frac{1}{n} [X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2] - \bar{X}^2. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir also das arithmetische Mittel der X_i^2 mit $\overline{X^2}$, so besteht die Beziehung:

$$\sigma^2 = \overline{X^2} - \bar{X}^2.$$

Andererseits ergibt sich bei Einführung des Grundwertes X_0 :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} [(X_1 - X_0)^2 + (X_2 - X_0)^2 + \dots + (X_n - X_0)^2] \\ &= \frac{1}{n} [X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2] - 2 \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} X_0 + X_0^2 \\ &= \overline{X^2} - 2 \bar{X} \cdot X_0 + X_0^2 = \overline{X^2} + (\bar{X} - X_0)^2 - \bar{X}^2 = \sigma^2 + (\bar{X} - X_0)^2. \end{aligned}$$

Die quadratische Streuung bestimmt sich also durch

$$\sigma^2 = \overline{(X - X_0)^2} - (\bar{X} - X_0)^2 = \overline{x'^2} - \bar{x}'^2, \tag{19}$$

wenn zur Abkürzung das arithmetische Mittel der $(X_i - X_0)^2$ mit $\overline{(X - X_0)^2} = \overline{x'^2}$ bezeichnet wird. Bei der numerischen Ermittlung von \bar{X} und σ nach (18) und (19) hat man es mit kleineren Zahlen zu tun als bei der unmittelbar nach der Definition erfolgenden Rechnung.

Beispiel: Für eine Serie von 10 Glühlampen wurden die in nachstehender Tabelle verzeichneten Werte X_i der Lebensdauer ermittelt. Gesucht die mittlere Lebensdauer \bar{X} und die quadratische Streuung¹⁾.

X_i	$x'_i = X_i - X_0$	$x_i'^2 = (X_i - X_0)^2$	X_i	$x'_i = X_i - X_0$	$x_i'^2 = (X_i - X_0)^2$
1157	- 943	889249	2210	+ 110	12100
1952	- 148	21904	2268	+ 168	28224
2093	- 7	49	2355	+ 255	65025
2159	+ 59	3481	2481	+ 381	145161
2184	+ 84	7056	2703	+ 603	363609
		Summe:	21562	- 1098 + 1660 = 562	1535858
$X_0 = 2100$					

Das arithmetische Mittel bestimmt sich entweder unmittelbar durch $\bar{X} = 21562 : 10 = 2156,2$ oder nach (18): $\bar{X} = 2100 + \frac{562}{10} = 2156,2$. Die quadratische Streuung bestimmt sich nach (19) durch $\sigma^2 = \frac{1\,535\,858}{10} - 56,2^2 \approx 153\,586 - 3136 = 150\,450$; $\sigma \approx 388$. Bei Gaußscher Verteilung müssen innerhalb des Intervalls $2156 - \sigma < \bar{X} < 2156 + \sigma$, also des Intervalls $1768 < \bar{X} < 2544$, rund zwei Drittel der Originalwerte liegen. In Wirklichkeit sind es 8 von 10 Werten, was für Gaußsche Verteilung spricht.

Gelegentlich benutzt man zur Beurteilung des Streuungsbildes des Kollektivs auch die sogenannte lineare Streuung, die durch

$$\sigma_l = \frac{|X_1 - \bar{X}| + |X_2 - \bar{X}| + \dots + |X_n - \bar{X}|}{n} = \frac{[|x|]}{n} \tag{20}$$

¹⁾ Vgl. R. Becker, H. Plaut u. J. Runge, Anwendungen der mathematischen Statistik auf Probleme der Massenfabrikation, Berlin 1927, S. 10.

definiert ist. Ihre Berechnung ist bequemer als die der quadratischen Streuung. Man arbeitet aber lieber mit der letzteren, weil sie mit den Gesetzen der normalen Häufigkeitsverteilung in einfacherem Zusammenhang steht.

Liegt bei einer Statistik eine Gaußsche Verteilung vor, so ist $\sigma = \frac{\sigma_i}{0,798}$. In obigem Beispiel errechnet sich $\sigma_i = 253$, also $\sigma = 316$. Die Übereinstimmung mit dem oben errechneten Wert ist mangelhaft, was bei dem ziemlich kleinen n nicht verwunderlich ist. Immerhin würden auch bei $\sigma = 316$ noch 7 der Originalwerte, also 70%, in das Intervall $2156 - \sigma < \bar{X} < 2156 + \sigma$ fallen.

Handelt es sich um sehr umfangreiche Kollektive, so werden die zur Bestimmung von \bar{X} und σ nach den bisherigen Formeln notwendigen Rechnungen ziemlich umständlich. Für diesen Fall hat sich daher folgendes Verfahren eingebürgert. Aus der primären Verteilungstafel der N Exemplare umfassenden Statistik, in der alle Exemplare X_i des Kollektivs der Größe nach geordnet sind, leitet man eine zweite Tafel ab, in der jeweils die in ein Intervall von bestimmter Breite d fallenden Exemplare zu einer Klasse zusammengefaßt sind. Exemplare, die sich gerade auf der Grenze von zwei Intervallen finden, werden je zur Hälfte

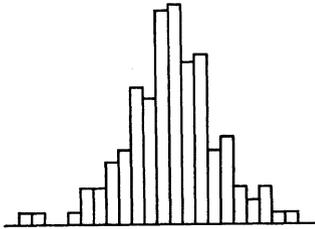


Abb. 55.

auf sie aufgeteilt. Ordnet man jedem Intervall die darauf entfallende Anzahl n von Exemplaren zu, so ergibt sich für die sogenannte sekundäre Verteilungstafel eine Staffeldarstellung (Abb. 55), die bereits ein gutes Bild von der vorliegenden Häufigkeitsverteilung liefert. Da die mit der Gesamtzahl N dividierten Ordinatenwerte n relative Häufigkeiten bedeuten, wird aus dieser Darstellung insbesondere

zu entnehmen sein, ob auf eine normale Häufigkeitsverteilung zu rechnen ist. Man wählt nun die Mitte desjenigen Intervalls, auf das schätzungsweise der Durchschnittswert des Kollektivs entfällt, als Grundwert X_0 . Von diesem Null-Intervall aus führt man für die links und rechts davon liegenden Intervalle Nummern $\varkappa = -1, -2, \dots$ und $\varkappa = +1, +2, \dots$ ein; dann hat die Mitte irgendeines Intervalls die Abszisse $X = X_0 + \varkappa d$. Denkt man nun die Exemplare einer Klasse in der Intervallmitte konzentriert, so ergibt sich, ähnlich wie bei der Herleitung der Formel (18), als arithmetisches Mittel:

$$\bar{X} = \frac{[(X_0 + \varkappa d) \cdot n(\varkappa)]}{N} = X_0 \frac{[n(\varkappa)]}{N} + \frac{[\varkappa \cdot n(\varkappa)]}{N} \cdot d.$$

Hier ist $[n(\varkappa)] = N$, und $\bar{\varkappa} = \frac{[\varkappa \cdot n(\varkappa)]}{N}$ bedeutet den Durchschnittswert der Klassennummern unter Berücksichtigung ihrer Häufigkeit.

Wir erhalten:

$$X' = X_0 + \bar{x}d, \quad \text{wo} \quad \bar{x} = \frac{[x \cdot n(x)]}{N}. \quad (18')$$

Eine ähnliche Rechnung, wie sie zur Formel (19) führte, liefert hier

$$\sigma^2 = (\bar{x}^2 - \bar{x}^2) d^2, \quad \text{wo} \quad \bar{x}^2 = \frac{[x^2 \cdot n(x)]}{N}. \quad (19')$$

Dadurch, daß man die Exemplare einer Klasse in der Intervallmitte konzentriert, kommt natürlich eine Ungenauigkeit in die Rechnung. Sie wird um so geringer ausfallen, je kleiner die Intervallbreite d genommen wird. Die zur Beurteilung des Vorliegens einer normalen Häufigkeitsverteilung dienende Probe, ob rund zwei Drittel der Exemplare des Kollektivs in den Bereich $\bar{X} - \sigma < X < \bar{X} + \sigma$ fallen, wird man nach Möglichkeit an Hand der primären Verteilungstafel vornehmen.

Beispiel: Sommerarbeitslöhne landwirtschaftlicher Arbeiter in verschiedenen Teilen des Deutschen Reiches¹⁾.

Wir knüpfen sofort an die sekundäre Verteilungstafel an; $X_0 = 1,70$.

Klasse	Mitte	Nummer x	$n(x)$	$x \cdot n(x)$	$x^2 \cdot n(x)$
0,60—0,80	0,70	— 5	7	— 35	175
0,80—1,00	0,90	— 4	30	— 120	480
1,00—1,20	1,10	— 3	45	— 135	405
1,20—1,40	1,30	— 2	104	— 208	416
1,40—1,60	1,50	— 1	239	— 239	239
1,60—1,80	1,70	0	247	0	0
1,80—2,00	1,90	+ 1	257	+ 257	257
2,00—2,20	2,10	+ 2	50	+ 100	200
2,20—2,40	2,30	+ 3	79	+ 237	711
2,40—2,60	2,50	+ 4	84	+ 336	1344
2,60—2,80	2,70	+ 5	19	+ 95	475
2,80—3,00	2,90	+ 6	34	+ 204	1224
3,00—3,20	3,10	+ 7	0	0	0
3,20—3,40	3,30	+ 8	3	+ 24	192
3,40—3,60	3,50	+ 9	1	+ 9	81
3,60—3,80	3,70	+ 10	1	+ 10	100
Summe			$N = 1200$	$- 737 + 1272$ $= 535$	6299

$$\bar{x} = \frac{535}{1200} = 0,45; \quad \bar{X} = 1,70 + 0,45 \cdot 0,2 = 1,79;$$

$$\bar{x}^2 = \frac{6299}{1200} = 5,25; \quad \sigma^2 = (5,25 - 0,20) \cdot 0,2^2 = 5,05 \cdot 0,2^2; \quad \sigma = 2,25 \cdot 0,2 = 0,45.$$

In den Bereich $1,34 < \bar{X} < 2,24$ fallen vollständig die das Gebiet $1,40 < \bar{X} < 2,20$ ausfüllenden Klassen mit den Nummern $-1; 0; 1; 2$. Zu den auf sie entfallenden $n(x)$ rechnen wir, in Ermangelung der Kenntnis der primären Verteilungstafel, noch den aus den Grenzen des Bereiches zu entnehmenden Prozentsatz der den Klassen (-2) und $(+3)$ angehörenden Exemplare hinzu und erhalten als Gesamtzahl 840 Exemplare. Das ist 70% des Kollektivs. Das Ergebnis der Probe spricht für eine normale Häufigkeitsverteilung.

Angesichts der Tatsache, daß bei Wirtschaftsreihen in der Mehrzahl der Fälle das normale Verteilungsgesetz nicht oder doch nur mit sehr

¹⁾ A. Mitscherlich, Zeitschr. f. d. ges. Staatswissensch. VIII. Beiheft, 1903.

roher Annäherung zutrifft, ist hier eine weitergehende Prüfung sehr am Platze, die auf einen Vergleich des gesamten tatsächlichen Verteilungsbildes mit einer Gaußschen Kurve hinauskommt. Dabei erscheint es zunächst als das gegebene, diejenige Kurve

$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ zum Vergleich heranzuziehen, die im σ mit dem aus

der Statistik errechneten Wert übereinstimmt. Das würde die Notwendigkeit mit sich bringen, für das betreffende σ die Gaußsche Kurve jedesmal neu zu zeichnen. Einfacher ist es, die theoretische und die tatsächliche Verteilung beide auf einen Normalfall zu transformieren. Setzen wir

$$\xi = \frac{x}{\sigma}; \quad \eta = 2\sqrt{2\pi}\sigma y, \quad (21)$$

so geht das Gaußsche Gesetz über in

$$\eta = 2e^{-\frac{\xi^2}{2}}. \quad (22)$$

In der empirischen Häufigkeitsverteilung sind die vom arithmetischen Mittel aus gemessenen Abszissen $x = (X - \bar{X}) = (\xi - \bar{\xi})d$. Die Ordinaten y müssen, wenn yd die auf das betreffende Intervall entfallende relative Häufigkeit $\frac{n(\xi)}{N}$ darstellen soll, mit $y = \frac{n(\xi)}{Nd}$ angesetzt werden. Die zu (21) analoge Transformation der tatsächlichen Häufigkeitsverteilung lautet also

$$\xi = \frac{(\xi - \bar{\xi})d}{\sigma}; \quad \eta = 2\sqrt{2\pi}\sigma \cdot \frac{n(\xi)}{Nd}. \quad (21')$$

Die Punkte, die durch diese Substitution aus der sekundären Verteilungstafel auf Grund des aus ihr ermittelten σ errechnet wurden, tragen wir

in ein Diagramm ein, in dem die ein für allemal festgelegte normierte Gaußsche Kurve (22) gezeichnet ist. Damit wird deutlich, ob die Abweichungen der empirischen Verteilung von der Gaußschen als erträglich angesehen werden können.

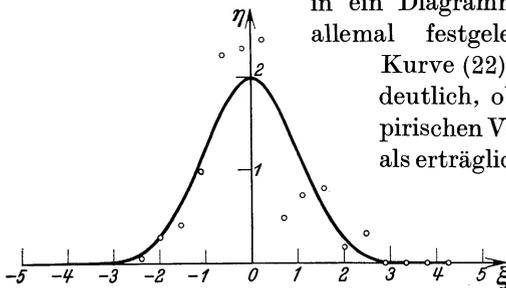


Abb. 56.

Sind derartige Prüfungen häufig durchzuführen, so empfiehlt es sich, die aus der tatsächlichen Statistik abgeleiteten Punkte auf

ein Pausblatt zu übertragen, das man auf das Diagramm der Gaußschen Normalkurve aufdeckt. In unserem Beispiel sind die Abweichungen immerhin bemerkenswert. (In Abb. 56 sind die Ordinaten im doppelten Maßstab wie die Abszissen dargestellt.)

In anderen Fällen, z. B. bei Problemen der Massenfabrikation, empfiehlt es sich, beim Vergleich der empirischen Häufigkeitsverteilung

mit einer Gaußschen nicht das gleiche σ , sondern die gleiche Zentralordinate zugrunde zu legen. Man drückt z. B. alle Ordinaten des Kollektivs in Prozenten der Maximalordinate der sekundären Verteilungstafel bzw. der dem arithmetischen Mittel entsprechenden Ordinate aus und erhält ein Punktbild mit der Zentralordinate 100. Andererseits konstruiert man auf einem durchsichtigen Deckblatt eine Schar Gaußscher Kurven mit der festen Maximalordinate 100 und verschiedenen Streuungen: $\sigma = 5, 10, 15, \dots$. Dann ermittelt man diejenige Gaußsche Kurve, die im Mittelstück die beste Übereinstimmung mit dem aus der empirischen Verteilungstafel abgeleiteten Punktbild aufweist, und liest die zugehörige Streuung ab. Die statistischen Untersuchungen über die Lebensdauer der Glühlampen¹⁾ haben ergeben, daß hier die auf diesem Wege festgestellte Streuung im allgemeinen etwas kleiner ausfällt als die aus der Statistik errechnete. Das hängt mit der Tatsache zusammen, daß hier die „Ausreißer“, deren Maßzahl um mehr als etwa 4σ vom arithmetischen Mittel abweicht, Störungen bezüglich der Anpassung an das ideale Häufigkeitsbild mit sich bringen. Gewisse Analogien mit der Binomial- und Wahrscheinlichkeitsverteilung (vgl. § 22) machen das verständlich. Das bei Berücksichtigung dieser Ausreißer sich errechnende σ würde eine Gaußsche Verteilung ergeben, die der tatsächlich straffen Zusammendrängung der Exemplare des Kollektivs im Mittelstück beim Glühlampenbeispiel nicht gerecht werden würde. Man bevorzugt daher hier oft geradezu einen aus längerer Erfahrung bekannten Wert des Verhältnisses der Streuung σ zum arithmetischen Mittel, nämlich $\frac{\sigma}{\bar{x}} \approx 0,25$ bis $0,30$ und nimmt damit eine mangelhafte Übereinstimmung zwischen empirischer und Gaußscher Verteilung bei etwa 5% der Exemplare, den Ausreißern, in Kauf.

Bei der Massenfabrikation hat man es häufig mit Kollektiven zu tun, die stärkere Abweichungen vom Gaußschen Verteilungsgesetz aufweisen. Trotzdem ergibt sich die Möglichkeit, Mittelwert und Streuung in einer Form zu bestimmen, wie sie für die Aufgaben der Werkstattkontrolle, sowie des Angebots- und Garantiewesens erwünscht ist²⁾. Man bildet auf gut Glück k Serien zu je n Exemplaren. Die den einzelnen Serien entsprechenden Mittelwerte seien $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \dots, \mathfrak{M}_k$, ihre quadratische Streuung, die Serienstreuung, sei σ_s . Wie eine genauere Untersuchung zeigt, genügen dann die Serienmittel \mathfrak{M}_i immer noch den Gesetzen des Zufalls und dem darauf sich gründenden Gaußschen Verteilungsgesetz. Ist also \mathfrak{M} ihr Mittelwert, so kann man ihre Häufigkeitsverteilung kennzeichnen durch

1) Vgl. R. Becker, H. Plaut, J. Runge a. a. O. S. 28ff.

2) Wir folgen im weiteren der Darstellung von R. Becker, H. Plaut, J. Runge a. a. O. S. 35ff.

$$y(\mathfrak{M}_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_s} e^{-\frac{(\mathfrak{M}_i - \mathfrak{M})^2}{2\sigma_s^2}}. \quad (23)$$

Man kann daher sagen, daß mit 68,2% Wahrscheinlichkeit der Mittelwert des Kollektivs in das von $\mathfrak{M} - \sigma_s$ und $\mathfrak{M} + \sigma_s$ begrenzte Intervall fällt. In diesem Sinne schreibt man, ähnlich wie bei dem mit einem „mittleren Fehler“ behafteten Beobachtungsergebnis: Mittelwert = $\mathfrak{M} \pm \sigma_s$. Man kann zeigen¹⁾, daß die Serienstreuung σ_s bei einer sehr großen Zahl von Reihen zu je n Exemplaren im Verhältnis $\frac{1}{\sqrt{n}}$ kleiner ist als die Streuung σ des Kollektivs insgesamt, also $\sigma_s = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Mithin

$$\text{Mittelwert} = \mathfrak{M} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (24)$$

Für das S. 167 behandelte Glühlampenbeispiel würde man also haben: Mittelwert = $\mathfrak{M} \pm \frac{388}{\sqrt{10}} = 2156,2 \pm 128,3$. Man kann ferner zeigen, daß die für σ in Frage kommenden Schwankungen verhältnismäßig groß sind gegenüber denjenigen, die \mathfrak{M} betreffen, entsprechend der Formel:

$$\text{Streuung} = \sigma \pm \frac{\sigma}{\sqrt{2(n-1)}}, \quad (25)$$

in der das Zusatzglied die „Streuung der Streuung“ darstellt. Nimmt man beim Glühlampenbeispiel die Erfahrungsziffer $\sigma = 0,3 \mathfrak{M}$, so wird

$$\text{Mittelwert} = \mathfrak{M} \left(1 \pm \frac{0,3}{\sqrt{n}}\right); \quad \text{Streuung} = \sigma \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}\right).$$

Soll in beiden Fällen die mittlere quadratische Abweichung höchstens 10% betragen, so bedeutet das:

$$\text{bei } \mathfrak{M}: \frac{0,3}{\sqrt{n}} = \frac{1}{10}; \quad n = 100 \cdot 0,09 \approx 10;$$

$$\text{bei } \sigma: \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{1}{10}; \quad n = \frac{100}{2} + 1 \approx 50;$$

Zur Messung der Streuung sind also etwa fünfmal soviel Lampen pro Serie erforderlich wie zur Messung des Mittelwertes, wenn die gleiche relative Genauigkeit erzielt werden soll.

Eine wichtige praktische Bedeutung hat bei der Massenfabrikation die Prüfung der Einheitlichkeit des Kollektivs; ein Problem, das denjenigen Fragestellungen der alternativen Statistik entspricht, die mit dem Satz von Bernoulli und dem von Lexis verknüpft sind. Handelt es sich bei den k Serien zu je n Exemplaren um gleichartige Gruppen, so steht, wie sich zeigen läßt, die aus den Einzelstreuungen der Serien

¹⁾ Vgl. E. Czuber, Die statistischen Forschungsmethoden, Wien 1921, S. 149.

im quadratischen Mittel sich ergebende Größe σ_e zur Serienstreuung σ_s in der Beziehung:

$$\sigma_s^2 = \sigma_e^2 \frac{k-1}{k(n-1)}. \tag{26}$$

Hält sich bei einem Kontrollversuch die Abweichung D zwischen der linken und der rechten Seite dieser Formel in erträglichen Grenzen, so liegt kein Grund gegen die Annahme der Einheitlichkeit des Kollektivs vor. Auf Uneinheitlichkeit kann erst geschlossen werden, wenn D die für σ_s^2 in Frage kommende Streuung $\sigma_s^2 \sqrt{\frac{2}{k-1}}$ überschreitet. Zu beachten ist, daß Abweichungen auch durch Ungleichmäßigkeiten der Versuchsbedingungen herbeigeführt sein können.

§ 24. Ausgleichungs- und Korrelationsrechnung.

Für die Ausgleichung von Beobachtungsfehlern bedient man sich, wie in § 23 dargelegt, der von Gauß eingeführten Methode der kleinsten Quadrate. Eine Messungsgröße drücke sich nach irgendeinem mathematischen Gesetz durch einen oder mehrere zu bestimmende Parameter aus. Man bildet die Summe der Quadrate der Abweichungen der Beobachtungswerte von den Bezugswerten, die man erhält, wenn man in jenen mathematischen Ausdruck beliebige Werte der unbekannt Parameter einsetzt. Die Quadratsumme wird dann zum Minimum, wenn man hierfür die wahren Werte der unbekannt Parameter einführt.

Ist die Unbekannte selbst Objekt der Messung, so liefert dies Prinzip, wie wir gesehen haben, das arithmetische Mittel als wahren Wert. Wie sich die Dinge gestalten, wenn die Abhängigkeit zwischen Messungsgröße und Unbekannt durch einen mathematischen Ausdruck geliefert wird, soll an einem Beispiel aus den Naturwissenschaften erläutert werden.

Der Strom Y , der einen elektrischen Leiter (Faden einer Glühlampe) im luftleeren Raum auf eine bestimmte Temperatur bringt, drückt sich durch den Durchmesser X nach dem Gesetz $Y = a X^{3/2}$ aus, wo a eine vom Material und der Temperatur abhängende, experimentell zu bestimmende Konstante. Werden für n verschiedene Durchmesserwerte X_1, X_2, \dots, X_n die Stromstärken Y_1, Y_2, \dots, Y_n gemessen, so ist zu bilden: $z = (Y_1 - a X_1^{3/2})^2 + (Y_2 - a X_2^{3/2})^2 + \dots + (Y_n - a X_n^{3/2})^2$. Diese Quadratsumme wird zum Minimum, wenn in die Binome $\varepsilon_i = Y_i - a X_i^{3/2}$ für a der wahre Wert eingesetzt wird, womit die ε_i in die wahren Fehler übergehen.

Als Bedingung haben wir das Verschwinden von $\frac{dz}{da}$:

$$0 = -2(Y_1 - a X_1^{3/2}) \cdot X_1^{3/2} - 2(Y_2 - a X_2^{3/2}) \cdot X_2^{3/2} - \dots - 2(Y_n - a X_n^{3/2}) \cdot X_n^{3/2}.$$

Der zweite Differentialquotient ist positiv, die Minimumsbedingung also erfüllt. Wir erhalten:

$$a = \frac{[X^{3/2} Y]_1}{[X^3]_1}. \tag{27}$$

¹⁾ Das Ergebnis stimmt also nicht etwa überein mit dem arithmetischen Mittel der Werte $\frac{Y_i}{X_i^{3/2}}$.

Die Rechnung für ein Zahlenbeispiel (Abb. 57) ist aus folgender Tabelle ersichtlich:

X_i	Y_i	$X_i^{3/2}$	$X_i^{3/2} Y_i$	X_i^3	Y_i ausgegl.	ε_i	ε_i^2
0,02	0,12	0,00283	0,000340	0,000008	0,1263	0,00	0,0000
0,03	0,23	0,00520	0,001196	0,000027	0,2322	0,00	0,0000
0,06	0,66	0,01470	0,009702	0,000216	0,6564	0,00	0,0000
0,08	1,00	0,02263	0,022630	0,000512	1,0104	- 0,01	0,0001
0,10	1,40	0,03162	0,044268	0,001000	1,4118	- 0,01	0,0001
0,20	4,00	0,08944	0,357760	0,008000	3,9935	+ 0,01	0,0001
Summe:			0,435896	0,009763			0,0003

Nach (27) ergibt sich $a = \frac{0,435896}{0,009763} = 44,65$. In den letzten beiden Kolonnen sind die mit diesem Werte a berechneten ε und ε^2 eingetragen. Als quadratische Streuung der Beobachtungswerte um die Kurve $Y = 44,65 X^{3/2}$ ergibt sich: $\sigma = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{0,0003}{5}} = 0,008$.

Ein solcher Fall, wo die Methode der kleinsten Quadrate zur Ausgleichung von „Beobachtungsfehlern“ und zur Bestimmung des „wahren Wertes“ der Parameter dient, die in einem verschiedene Größen ver-

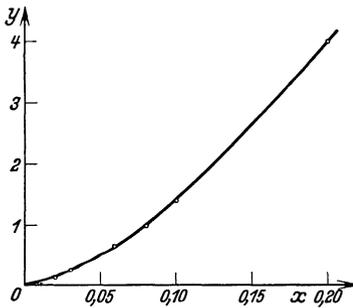


Abb. 57.

knüpfenden mathematischen Gesetze vorkommen, liegt in der Wirtschaftsmathematik kaum je vor, und eben darum wurde zur Erläuterung ein Fall aus der Naturwissenschaft herangezogen, wo mathematische Gesetze, wenigstens, wenn passende Idealisierungen vorgenommen werden, den Regelfall darstellen. Man bedient sich aber ganz analog der Methode der kleinsten Quadrate, um bei einer empirisch festgestellten gegenseitigen Ab-

hängigkeit zweier Größen X , Y deren Verlauf in großen Zügen durch einen einfachen mathematischen Ausdruck darzustellen. Graphisch kommt das darauf hinaus, daß eine durch ein einfaches mathematisches Gesetz definierte Kurve dem Punktsystem angepaßt werden soll, das sich ergibt, wenn man in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die durch die Erfahrung als zusammengehörig festgestellten X_i , Y_i -Werte durch Punkte repräsentiert. Diese Aufgabe der Bestimmung des Haupt- oder Grundverlaufs in der wechselseitigen Abhängigkeit zwischen zwei Veränderlichen, ihres sog. Trend, spielt in der Wirtschaftsmathematik eine große Rolle. Die Bezeichnung „Ausgleichsrechnung“ ist hier vielleicht etwas mißverständlich. Jedenfalls muß man sich darüber im klaren sein, daß bei den Ausgleichungsaufgaben der Naturwissenschaft die Abweichungen ε_i als subjektive Beobachtungsfehler angesehen werden, die gewissermaßen zum Verschwinden gebracht werden sollen, insofern die Ermittlung der den

„wahren Verlauf“ darstellenden Kurve das Endziel bildet; daß dagegen bei der Bestimmung des Trend die Abweichungen ε_i objektive, in der Sache selbst liegende Bedeutung besitzen und in diesem Sinne oft noch einem besonderen Studium vorbehalten werden. Damit hängt zusammen, daß bei der Trendaufgabe stets noch ein gewisser Spielraum verbleibt für die Wahl des mathematischen Ausdrucks der Kurve, an die man das Punktsystem der X_i, Y_i anpassen will.

Wir wollen vorderhand annehmen, daß das System der Punkte X_i, Y_i eine ziemlich einfache Struktur aufweist: Es möge in einen Streifen hineinfallen, den eine ständig vertikal gehaltene, nicht sehr lange Strecke l überstreicht, wenn man einen bestimmten Punkt von l längs einer Kurve C gleiten läßt. Regelfall soll sein, daß zu jedem X_i nur ein Y_i gehört¹). Das wird z. B. immer zutreffen, wenn X die Zeit, Y den zu dem betreffenden Zeitwert gehörigen Wirtschaftswert bedeutet. Es liegt dann in der Natur der Sache, das Trendproblem abzustellen auf die Ordinaten Y_i und ihre Abweichungen ε_i von den Ordinaten einer passend definierten, mit einer hinreichenden Zahl von Parametern ausgestatteten mathematischen Kurve. (Mit dem Fall, wo Ausgleichung nach Abszissen und Ausgleichung nach Ordinaten als gleichberechtigt nebeneinander in Frage kommen, beschäftigen wir uns in der Korrelationsrechnung.) Man bezeichnet den Ausdruck $\sigma = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{n}}$ als die Standardabweichung vom Trend.

1. Beispiel: Eine Statistik, die die Preise X_i (in pence je lb) und den Verbrauch Y_i (in 1000 Ballen) amerikanischer Baumwolle in den Jahren 1920—1929 betrifft²), ergibt bei Übertragung in ein rechtwinkliges Koordinatensystem das in Abb. 58 dargestellte Punktbild. Der Versuch liegt nahe, den typischen Verlauf der gegenseitigen Abhängigkeit der beiden Größen, die sog. Preis-Absatz-Funktion, durch eine gleichseitige Hyperbel $Y = \frac{c}{X}$ wiederzugeben. Dementsprechend ist zum Minimum zu machen:

$$z = \left(Y_1 - \frac{c}{X_1}\right)^2 + \left(Y_2 - \frac{c}{X_2}\right)^2 + \dots + \left(Y_n - \frac{c}{X_n}\right)^2.$$

Die Bedingung $\frac{dz}{dc} = 0$ liefert:

$$\left(Y_1 - \frac{c}{X_1}\right) \frac{1}{X_1} + \left(Y_2 - \frac{c}{X_2}\right) \frac{1}{X_2} + \dots + \left(Y_n - \frac{c}{X_n}\right) \frac{1}{X_n} = 0;$$

$$\frac{Y_1}{X_1} + \frac{Y_2}{X_2} + \dots + \frac{Y_n}{X_n} = c \left[\frac{1}{X_1^2} + \frac{1}{X_2^2} + \dots + \frac{1}{X_n^2} \right];$$

$$c = \frac{\left[\frac{Y}{X} \right]}{\left[\frac{1}{X^2} \right]}. \quad (28)$$

¹) Wenn sehr vielen X_i zwei (bzw. ν) Y_i Werte zugeordnet sind, wird zu prüfen sein, ob sich zwei (bzw. ν) Streifen der oben beschriebenen Art angeben lassen, für die dann die Trends einzeln zu bestimmen sind.

²) Vgl. O. Donner: Vierteljahrshefte zur Konjunkturforschung, Sonderheft 15 (1930) S. 16 u. S. 63. Übernommen wurden die Baumwollpreise in Liverpool.

Die Berechnung ist aus folgender Tabelle ersichtlich:

Jahr	Preis X_i	Ver- brauch Y_i	$\frac{Y_i}{X_i}$	$\frac{1}{X_i^2}$	Y_i ausgegl.	ε_i	ε_i^2
1920/21	11,86	10030	845,70	0,0071095	12834,0	— 2804,0	7862500
1921/22	11,30	12757	1128,95	0,0078314	13469,7	— 712,7	508000
1922/23	14,93	12666	848,36	0,0044862	10195,0	+ 2471,0	6105700
1923/24	17,65	11107	629,29	0,0032101	8623,8	+ 2483,2	6166300
1924/25	13,77	13256	962,68	0,0052740	11053,8	+ 2202,2	4849800
1925/26	10,78	13730	1273,65	0,0086052	14129,7	— 399,7	159800
1926/27	8,17	15780	1931,48	0,0049820	18630,4	— 2850,4	8124600
1927/28	11,17	15407	1379,35	0,0080150	13626,6	+ 1780,4	3169900
1928/29	10,53	15076	1431,70	0,0090186	14454,7	+ 621,3	386000
Summe .			10431,16	0,0685320			37332600

Nach (28) ergibt sich $c = \frac{10431,16}{0,0685320} = 152210$ und damit die Trendgleichung

$$Y = \frac{152210}{X}. \quad (28')$$

Als Standardabweichung vom Trend erhalten wir $\sigma = \sqrt{\frac{37332600}{9}} = 2036,7$,

also einen im Vergleich zu den Wirtschaftswerten Y selbst ziemlich erheblichen Betrag. Die in Abb. 58 eingetragene Trendlinie bestätigt das Bild beträchtlicher Abweichungen zwischen Trendordinaten und Messungswerten. Das führt auf die Vermutung, daß für den Trend ein anderer mathematischer Ansatz gemacht werden kann, der sich den empirischen Werten besser anpaßt. Wir kommen im 3. Beispiel auf die Frage einer besseren Anpassungskurve zurück.

Von großer praktischer Bedeutung ist der Fall, daß als Trend eine gerade Linie

$$Y = aX + b \quad (29)$$

gewählt wird. Da jedes nicht zu lange Kurvenstück durch die Tangente in einem der mittleren Punkte oder eine dazu parallele Sehne näherungsweise ersetzt werden kann, so wird bei vielen Punktsystemen, deren X -Intervall nicht zu ausgedehnt ist, der Ansatz mit einer geraden Trendlinie nach (29) ernstlich in Frage zu ziehen

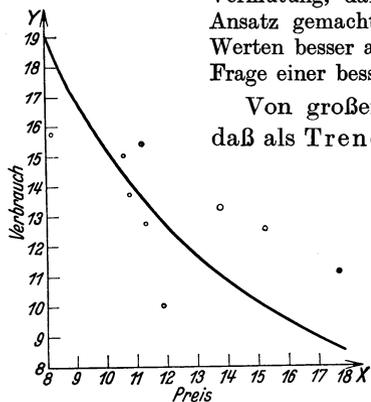


Abb. 58. Preis und Verbrauch amerikanischer Baumwolle.

sein. Die Summe der Quadrate der Abweichungen von dem zu bestimmenden Trend ist dann:

$$z = (Y_1 - aX_1 - b)^2 + (Y_2 - aX_2 - b)^2 + \dots + (Y_n - aX_n - b)^2.$$

Die Minimumsbedingung ist jetzt das Verschwinden der beiden partiellen Ableitungen in bezug auf die zu ermittelnden Parameter a und b :

$$-2(Y_1 - aX_1 - b)X_1 - 2(Y_2 - aX_2 - b)X_2 - \dots - 2(Y_n - aX_n - b)X_n = 0,$$

$$-2(Y_1 - aX_1 - b) - 2(Y_2 - aX_2 - b) - \dots - 2(Y_n - aX_n - b) = 0,$$

oder

$$\left. \begin{aligned} a [X^2] + b [X] &= [XY], \\ a [X] + b \cdot n &= [Y]. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Aus diesen beiden Beziehungen, die man als die Normalgleichungen bezeichnet, ergibt sich:

$$a = \frac{n [XY] - [X] [Y]}{n [X^2] - [X]^2}; \quad b = \frac{[X^2] [Y] - [X] [XY]}{n [X^2] - [X]^2}. \quad (31)$$

Die Trendgleichung erhalten wir, wenn wir diese Werte in (29) einsetzen.

Die Beziehungen (31) vereinfachen sich, wenn wir die Abszissen x vom Mittelwert \bar{X} der X_i , die Ordinaten y vom Mittelwert \bar{Y} der Y_i aus zählen, also $[x] = [y] = 0$ setzen. Dann wird $a = \frac{[xy]}{[x^2]}$, $b = 0$. Die Trendlinie lautet also:

$$y = \frac{[xy]}{[x^2]} \cdot x. \quad (29')$$

Die gerade Trendlinie eines Punktsystems geht stets durch seinen Schwerpunkt M , sofern in jedem Punkte (X_i, Y_i) die Masse 1 angebracht ist.

So wie bei einem einfachen linearen Kollektiv das arithmetische Mittel als primitiver Repräsentant der Gesamtheit erscheint, so ist Fixpunkt der ein Punktsystem repräsentierenden geraden Trendlinie dessen Schwerpunkt M . Man kann nach P. Werkmeister¹⁾ leicht noch einen weiteren Punkt der Trendgeraden festlegen. Schreibt man die Normalgleichungen (30) in der Form:

$$\frac{[XY]}{[X]} = a \frac{[X^2]}{[X]} + b,$$

$$\frac{[Y]}{n} = a \frac{[X]}{n} + b,$$

so sagt die erste von ihnen, wie der Vergleich mit (29) zeigt, die Tatsache aus, daß der Punkt mit den Koordinaten $\frac{[X^2]}{[X]}$, $\frac{[XY]}{[X]}$ auf der Trendgeraden liegt. Es ist dies offenbar der Schwerpunkt des Systems der Punkte X_i, Y_i für den Fall, daß in (X_i, Y_i) die Masse X_i angebracht ist. Die zweite Gleichung bringt erneut die oben anschließend an (29') formulierte Schwerpunktsbeziehung zum Ausdruck.

2. Beispiel: Vgl. S. 129. Nach H. Müller-Bernhardt²⁾ ergeben sich für die Herstellung einer „Maschine B“ bei verschiedenen Beschäftigungsgraden X durch-

¹⁾ Z. f. angew. Math. Mech. 1 (1921), S. 491.

²⁾ Industrielle Selbstkosten bei schwankendem Beschäftigungsgrad, Berlin 1925, S. 12.

schnittliche Stückkosten, aus denen sich für die gesamten Selbstkosten Y die in nachstehender Tabelle verzeichneten Werte ergeben; dabei ist die dem Beschäftigungsgrad 100% entsprechende Ausbringung zu 100 Stück angenommen.

Zählen wir Abszissen x und Ordinaten y vom Schwerpunkt $M(\bar{X}, \bar{Y})$ des Systems der Punkte X_i, Y_i aus, so ist nach (29') die Gleichung der Trendgeraden:

$y = \frac{[xy]}{[x^2]} \cdot x$. Ihre Gleichung in bezug auf den alten Koordinatenanfang ergibt sich dann durch die Substitution $x = X - \bar{X}$, $y = Y - \bar{Y}$.

X_i	Y_i	$x_i = X_i - 52,3$	$y_i = Y_i - 10922,1$	$x_i y_i$	x_i^2	Y_i ausgegl.	ε_i	ε_i^2
4,5	4509,0	-47,8	-6413,1	306550	2284 80	4613	-104	10816
18,0	6354,0	-34,3	-4568,1	156686	1176,46	6395	-41	1681
54,0	11415,6	+ 1,7	+ 493,5	839	2,89	11147	+ 269	72361
85,0	15300,0	+ 32,7	+ 4377,9	143160	1069,30	15239	+ 61	3721
100,0	17032,0	+ 47,7	+ 6109,9	291440	2275,30	17219	-187	34969
261,5	54610,6			898675	6808,75			123548

Wir erhalten $a = \frac{[xy]}{[x^2]} = \frac{898675}{6808,75} = 132,0$. Bezogen auf den Schwerpunkt

$\bar{X} = \frac{261,5}{5} = 52,3$, $\bar{Y} = \frac{54610,6}{5} = 10922,1$ als Koordinatenanfangspunkt lautet also die Gleichung der Trendgeraden:

$$y = 132 x.$$

Bei Einführung der alten Koordinaten:

$$Y - 10922,1 = 132 (X - 52,3) \quad \text{oder}$$

$$Y = 132 X + 4019. \quad (32)$$

Die hiermit berechneten Trendwerte sind in der Kolonne Y_i ausgegl. eingetragen. Durch Vergleich mit den Ursprungswerten Y_i ergeben sich die ε_i . Als Standardabweichung vom Trend ergibt sich:

$$\sigma = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{5}} = \sqrt{\frac{123548}{5}} = 157,2.$$

Zeigt es sich, daß die Annahme eines linearen Trend große Abweichungen ε_i mit sich bringt, so wird es oft angezeigt sein, eine ganze rationale Funktion zweiten oder höheren Grades

$$Y = c_0 + c_1 X + c_2 X^2 + \dots + c_n X^n \quad (33)$$

als Trendausdruck anzusetzen. Die Bedingung, daß die Summe der Quadrate der Abweichungen der Ursprungswerte vom Trend ein Minimum darstellen muß, drückt sich aus durch das Verschwinden der partiellen Ableitungen der Quadratsumme in bezug auf die Parameter c_0, c_1, \dots, c_n . Die Anzahl der dadurch erhaltenen linearen Bedingungs-gleichungen für c_0, c_1, \dots, c_n , stimmt mit der der Parameter überein, sodaß diese ermittelt werden können. Ein Beispiel für diesen Fall behandeln wir in der Konjunkturanalyse.

Vielfach liegt es nahe, den Grundverlauf der Abhängigkeit zwischen den Veränderlichen X und Y durch ein einfaches Potenzgesetz

$$Y = c X^\mu. \quad (34)$$

darzustellen. Für positive μ ist dann die Trendlinie eine allgemeine Parabel, für negative μ eine allgemeine Hyperbel. Dabei kann μ eine ganze oder auch eine unrunde Zahl bedeuten. Ob ein solcher Fall vorliegt, erkennt man am besten aus der Darstellung der Beobachtungswerte X_i, Y_i auf doppelt-logarithmischem Papier. Auf diesem sind die Abszissen $\xi = \log X$ abgetragen, aber mit X bezeichnet; ebenso sind auf ihm die Ordinaten $\eta = \log Y$ abgetragen, aber mit Y bezeichnet. Die Gleichung (34) geht durch Logarithmieren über in $\log Y = \log c + \mu \log X$ oder $\eta = \mu \xi + \gamma$, wo $\gamma = \log c$. Die Potenzkurve wird also auf dem doppelt-logarithmischen Papier abgebildet durch eine Gerade. Die Frage, ob für das System der Werte (X_i, Y_i) ein einfacher Potenzausdruck $Y = c X^\mu$ als Trend gewählt werden kann, läuft somit darauf hinaus zu prüfen, ob die Bilder der (X_i, Y_i) auf dem doppelt-logarithmischen Papier um eine solche Gerade streuen. Ihr Abschnitt auf der Ordinatenachse ist $\gamma = \log c$, ist also beziffert mit c . Ihre Neigung, die beispielsweise als Unterschied der wahren Länge der zu $X = 1$ und $X = 10$ gehörenden Ordinaten entnommen werden kann, ist μ . Beide Parameter sind demnach, wenn man im Diagramm eine anpassende Gerade nach dem Augenschein eingetragen hat, leicht zu entnehmen. Zur rechnerischen Ermittlung kann man ähnlich vorgehen wie bei der Bestimmung der geraden Trendlinie in der Darstellung auf gewöhnlichem Koordinatenpapier.

Die Methode der kleinsten Quadrate, angewendet auf die Quadratsumme

$$z = (\eta_1 - \mu \xi_1 - \gamma)^2 + (\eta_2 - \mu \xi_2 - \gamma)^2 + \dots + (\eta_n - \mu \xi_n - \gamma)^2$$

liefert die Normalgleichungen

$$\left. \begin{aligned} \mu [\xi^2] + \gamma [\xi] &= [\xi \eta], \\ \mu [\xi] + \gamma \cdot n &= [\eta] \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

und daher die Lösung:

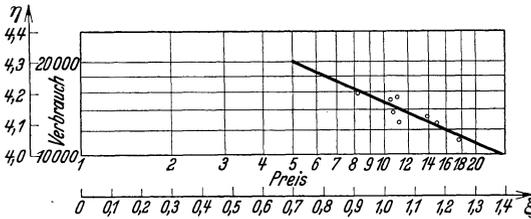
$$\mu = \frac{n [\xi \eta] - [\xi] [\eta]}{n [\xi^2] - [\xi]^2}; \quad \gamma = \frac{[\xi^2] \cdot [\eta] - [\xi] [\xi \eta]}{n [\xi^2] - [\xi]^2}. \quad (36)$$

3. Beispiel: Wir behandeln erneut die im 1. Beispiel untersuchte Statistik der Preise X_i und des Verbrauchs Y_i amerikanischer Baumwolle in den Jahren 1920 bis 1929. (Das Jahr 1920/21 soll besonderer Verhältnisse wegen — amerikanische Wirtschaftskrise, europäische Nachkriegszeit — unberücksichtigt bleiben.) Bei Zugrundelegung einer allgemeinen Hyperbel $Y = c X^\mu$ als Trend ergibt sich für den logarithmischen Ausgleich folgende Tabelle:

Jahr	$\xi = \log X$	ξ^2	$\eta = \log Y$	$\xi \eta$
1921/22	1,05308	1,10897	4,10575	4,32360
1922/23	1,17406	1,37842	4,10264	4,81666
1923/24	1,24674	1,55440	4,04559	5,04377
1924/25	1,13893	1,29712	4,12241	4,69500
1925/26	1,03262	1,06630	4,13767	4,27270
1926/27	0,91222	0,83214	4,19811	3,82955
1927/28	1,04805	1,09840	4,18772	4,38890
1928/29	1,02243	1,04540	4,17828	4,27210
Summe	8,62813	9,38115	33,07817	35,64228

Nach (36) errechnet sich daraus: $\mu = \frac{8 \cdot 35,64228 - 8,62813 \cdot 33,07817}{8 \cdot 9,38115 - 8,62813^2}$
 $= -0,44014; \quad \gamma = \frac{9,38115 \cdot 33,07817 - 8,62813 \cdot 35,64228}{8 \cdot 9,38115 - 8,62813^2} = 4,60948.$

Die ausgleichende Gerade auf dem doppelt-logarithmischen Papier (Abb. 59) hat also die Gleichung:



$$\eta = -0,44014 \xi + 4,60948. \quad (37)$$

Der Trend der ursprünglichen Werte lautet demgemäß:

$$Y = \frac{40689}{X^{0,44014}} \quad (38)$$

Abb. 59. Preis und Verbrauch amerikanischer Baumwolle. Die hierdurch definierte Hyperbel zeigt eine bessere Anpassung an das durch die Statistik gelieferte Punktsystem als die durch (28') gegebene gleichseitige Hyperbel.

Streng genommen sind wir hier von den früher aufgestellten Regeln für die Festlegung des Trend abgewichen. Die die Abweichungen betreffende Minimumberechnung trifft wohl auf die logarithmischen Bilder der (X_i, Y_i) und die ausgleichende Gerade (37), nicht aber auf die Ursprungswerte und die als Trend bezeichnete Kurve (38) zu. Wie H. Schwerdt¹⁾ gezeigt hat, gelangt man zu der den früheren Regeln entsprechenden Ausgleichung auf folgende Weise: Man legt sämtlichen Punkten (ξ_i, η_i) die Gewichte Y_i^2 bei, erhält also statt (35) die Normalgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \mu [Y^2 \xi^2] + \gamma [Y^2 \xi] &= [Y^2 \xi \eta], \\ \mu [Y^2 \xi] + \gamma [Y^2] &= [Y^2 \eta]. \end{aligned} \right\} \quad (35')$$

Daraus kann man wieder μ, γ bestimmen. — Diese Modifikation des Verfahrens ist zweifellos geboten in der Lehre von der Ausgleichung der Beobachtungsfehler, wo es sich um folgerichtige Anwendung eines auf die Ermittlung „wahrer Werte“ abgestellten Prinzips handelt. Bei der Trendberechnung wird man im allgemeinen auf sie verzichten: Sie

¹⁾ Lehrbuch der Nomographie, Berlin 1924, S. 84.

erfordert mehr Rechenaufwand, und letzten Endes haftet ja doch der Wahl des Trends eine gewisse Willkür an. Beispielsweise wählt W. Wirth¹⁾ bei der Darstellung der gegenseitigen Abhängigkeit der Änderungen zweier psychophysischen Größen als ausgleichende Gerade diejenige, für die die Summe der Quadrate der von ihr aus gemessenen Entfernungen der Punkte (X_i, Y_i) zum Minimum wird. Die Mehrdeutigkeit der Ausgleichung tritt entscheidend zutage in den gleich zu besprechenden Fällen, wo von einer nur korrelativen gegenseitigen Abhängigkeit zweier Kollektive voneinander gesprochen werden muß. Vorweg noch ein Beispiel, das zweifellos in das Gebiet der bisher behandelten einfachen Trendprobleme fällt.

4. Beispiel: Aus der dem Reichsbahnhandbuch 1929 entnommenen Stufenstatistik des Güterverkehrs 1928, die über die Struktur des Güterversandes wichtigen Aufschluß gibt, leitet H. Kellerer²⁾ eine Summentabelle ab, die besagt, welcher Prozentsatz Y' des gesamten Güterverkehrs auf die Versandentfernung bis zu X' km entfällt. Die Höchstentfernung beträgt 1499 km. Eine einfache Beziehung ergibt sich, wenn man die auf die Höchstwerte $X' = 1499$, $Y' = 100\%$ bezogenen Komplemente $X = 1499 - X'$, $Y = 100 - Y'$ einführt. Die entsprechende Tafel lautet:

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
100	0,1	700	1,1	1150	13,3	1360	34,2	1460	70,1
200	0,1	800	2,1	1200	16,8	1380	38,8	1470	77,7
300	0,1	900	3,6	1250	20,7	1400	43,8	1480	85,6
400	0,1	1000	6,6	1300	25,0	1420	50,2	1490	93,6
500	0,3	1050	8,6	1320	27,6	1440	57,9	1499	100
600	0,6	1100	10,7	1340	30,6	1450	63,5		

Das zugehörige Kurvenbild hat annähernd den Typ einer Parabel höheren Grades, $Y = cX^\mu$. Bei der Darstellung auf doppelt-logarithmischem Papier $\xi = \log X$, $\eta = \log Y$ wird dementsprechend auf eine ausgleichende Gerade bezogen, die durch den Schwerpunkt des Punktsystems hindurchgeht. Die Ausrechnung nach (35) und (36) ergibt $\mu = 5,148$; $\gamma = -14,541$. Damit wird

$$\eta = 5,148 \xi - 14,541$$

die ausgleichende Gerade. An sie knüpft man zweckmäßigerweise unmittelbar an, wenn man etwa vergleichende Betrachtungen über die Struktur des Güterverkehrs in verschiedenen Ländern anstellen will.

Bei diesem Beispiel liegt es in der Natur der Sache, daß zu jedem Argumentwert tatsächlich nur ein Wert der zugeordneten Größe Y gehören kann. Die Erfahrung liefert nun aber viele Beispiele, wo sich der Zusammenhang zwischen zwei Größen X, Y nicht so einfach darstellt, insofern nämlich die Bilder der Beobachtungswerte X_i, Y_i ein zweifach ausgedehntes Punktsystem ergeben, bei dem von der Zusammendrängung auf einen schmalen Streifen nicht die Rede sein kann. Häufig

¹⁾ In E. Abderhalden, Handbuch der biologischen Arbeitsmethoden, Berlin-Wien 1920.

²⁾ Dissertation Techn. Hochschule Berlin 1931, S. 28.

ist es so, daß den einzelnen X -Werten bereits von Hause aus jeweils eine Vielheit von Y -Werten zugeordnet ist. Oder es handelt sich um sehr umfangreiche Kollektive, so daß eine Übersicht der gegenseitigen Zuordnung der Exemplare nur in der Weise erzielt werden kann, daß man sie in gleich große Klassen aufteilt, im XY -Diagramm ein entsprechendes quadratisches Netz einführt und in jedem Feld die Häufigkeit der darauf entfallenden Wertpaare (X_i, Y_i) einträgt. In all diesen Fällen bedarf die Aufgabe, die gegenseitige Abhängigkeit der Größen X, Y in großen Zügen klarzustellen, erneut der Präzisierung. Damit befaßt sich die Korrelationsrechnung.

Bisweilen ist erkennbar, daß die Bilder der Beobachtungswerte (X_i, Y_i) , wenn auch weitläufig verteilt, doch im Zuge bzw. in der Umgebung einer durch ein einfaches mathematisches Gesetz zu definierenden Kurve sich häufen. Man kann dann darangehen, eine Trendlinie nach den Methoden der Ausgleichsrechnung zu bestimmen. Aber man kann jetzt mit demselben Recht die Abweichungen der X_i von den Trendabszissenwerten, oder die der Y_i von den Trendordinatenwerten ins Auge fassen und ausgleichen. Danach werden wir im allgemeinen zwei verschiedene Trendlinien erhalten. Während wir in unserem 1. Beispiel: Preise X_i und Verbrauch Y_i amerikanischer Baumwolle in den Jahren 1920—29, mit der Forderung

$$\left(Y_1 - \frac{c}{X_1}\right)^2 + \left(Y_2 - \frac{c}{X_2}\right)^2 + \dots + \left(Y_n - \frac{c}{X_n}\right)^2 = \text{Min.}!$$

die Hyperbel $Y = \frac{152210}{X}$ als Trend erhielten, führt die Forderung

$$\left(X_1 - \frac{c}{Y_1}\right)^2 + \left(X_2 - \frac{c}{Y_2}\right)^2 + \dots + \left(X_n - \frac{c}{Y_n}\right)^2 = \text{Min.}!,$$

wie die Durchrechnung zeigt, auf die Hyperbel $X = \frac{168196}{Y}$ oder $Y = \frac{168196}{X}$.

Damit wird deutlich, daß es sich bei Preis und Absatz wie in all solchen Fällen nicht um eine funktionale gegenseitige Abhängigkeit der Größen X, Y handelt. Wenn zu einem Preise X ein bestimmter, durch den einen Trend gegebener Grund- oder Normalwert des Verbrauches Y gehört, so kann doch demselben Y ein von jenem X verschiedener, durch den andern Trend gegebener Grund- oder Normalwert des Preises zugeordnet sein. Man spricht in solchen Fällen von einer korrelativen oder stochastischen Verbundenheit der Größen X und Y .

Bei umfangreichen Kollektiven zeigt das System der N Punkte (X_i, Y_i) bzw. die der Klassenaufteilung entsprechende, mit Häufigkeitszahlen versehene Korrelationstafel nicht ein so einfaches Streuungsbild, daß auf einen bestimmten zugrunde liegenden Kurventyp geschlossen werden kann. Man begnügt sich dann damit, die in großen Zügen herrschende Abhängigkeit durch ein lineares Gesetz anzunähern.

Das wird besonders dann eine befriedigende Darstellung des Zusammenhangs ergeben, wenn die Kollektive der X_i und Y_i beide ausgesprochene Häufungsstellen, Normalwerten entsprechend, zeigen, wie das bei biologischen Beispielen sehr oft der Fall ist. Wir erhalten dann also zwei Trendgeraden. Von der einen, die die Ausgleichung bezüglich der Ordinatenabweichungen leistet, wissen wir nach früherem, daß sie durch den Schwerpunkt M des Systems der Punkte (X_i, Y_i) geht. Da die X und die Y nichts voreinander voraus haben, muß das auch für die andere, die die Ausgleichung bezüglich der Abszissenabweichungen herbeiführt, der Fall sein. Messen wir die Abszissen x und die Ordinaten y vom Schwerpunkt aus, so schreiben sich die beiden Trendlinien, die hier auch als Regressionsgeraden bezeichnet werden, in der Form:

$$x = a_1 y; \quad y = a_2 x. \quad (39)$$

Für die Richtungskoeffizienten ergibt sich nach (29') bzw. aus Reziprozitätsgründen:

$$a_1 = \frac{[xy]}{[y^2]} = \frac{\tau}{\sigma_y^2}; \quad a_2 = \frac{[xy]}{[x^2]} = \frac{\tau}{\sigma_x^2}, \quad (40)$$

wenn die Streuungskennwerte σ_x , σ_y , τ definiert werden durch

$$\frac{[x^2]}{N} = \sigma_x^2, \quad \frac{[y^2]}{N} = \sigma_y^2, \quad \frac{[xy]}{N} = \tau. \quad (41)$$

Es ist bemerkenswert, daß wir auf dieselben beiden Geraden noch durch eine andere Betrachtung geführt werden, die besonders für sehr umfangreiche Kollektive mit Netzaufteilung von Interesse ist. Wir stellen die Mittelwerte \bar{x} der zu jedem y -Werte gehörigen x -Werte fest, ordnen sie den betreffenden y zu und erhalten so eine Verteilung von Schwerpunkten, die wir ihrem Gewicht entsprechend durch eine Gerade $x = a_1 y$ ausgleichen wollen. Die Bedingung ist, daß

$$[m(\bar{x} - a_1 y)^2] = \text{Min.}, \quad (42)$$

wo m jeweils die Anzahl der Punkte in einer Horizontalreihe. Sie liefert $[m(\bar{x} - a_1 y) y] = 0$, woraus $a_1 = \frac{[m\bar{x}y]}{[my^2]}$. Da $m\bar{x}$ die Summe der x -Werte der betreffenden Horizontalreihe darstellt, können wir bei der Summierung nach den einzelnen Elementen auflösen. In diesem Sinne wird $a_1 = \frac{[xy]}{[y^2]}$. Stellen wir andererseits die Schwerpunkte der jedem y -Werte zugeordneten Punkte der Streuungstafel fest und suchen die Gerade $y = a_2 x$, die diese Schwerpunktverteilung ausgleicht, so gilt die zu (42) analoge Minimumsbedingung. Aus ihr ergibt sich $a_2 = \frac{[xy]}{[x^2]}$.

Als Korrelationskoeffizienten definiert man die Größe

$$r = \frac{[xy]}{\sqrt{[x^2]} \sqrt{[y^2]}} = \frac{\tau}{\sigma_x \sigma_y}, \quad (43)$$

wobei die Wurzelausdrücke im Nenner stets positiv genommen werden. Bei Einführung von r gehen die Gleichungen der Regressionsgeraden über in:

$$x = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \cdot y; \quad y = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot x, \quad (39')$$

oder, wenn man die x und y auf ihre Streuungskennwerte σ_x, σ_y bezieht und $\xi = \frac{x}{\sigma_x}, \eta = \frac{y}{\sigma_y}$ als Normalkoordinaten benutzt, in

$$\xi = r \eta; \quad \eta = r \xi. \quad (39'')$$

Der Korrelationskoeffizient r kann nur Werte zwischen -1 und $+1$ annehmen. Um das zu erkennen, betrachten wir die zweifellos positive Summe der Quadrate der Abweichungen der Ursprungswerte von der ersten Trendgeraden, wobei wir (40), (41) und (43) berücksichtigen:

$$\begin{aligned} [(x - a_1 y)^2] &= [x^2] - 2a_1 [xy] + a_1^2 [y^2] = N \left(\sigma_x^2 - 2 \frac{\tau^2}{\sigma_y^2} + \frac{\tau^2}{\sigma_y^2} \right) \\ &= N \left(\sigma_x^2 - \frac{\tau^2}{\sigma_y^2} \right) = N \sigma_x^2 (1 - r^2). \end{aligned}$$

Da N und σ_x^2 positiv sind, muß dasselbe für $1 - r^2$ gelten. Für $r = +1$ oder $r = -1$ folgt aus (40) und (43): $a_1 \cdot a_2 = 1$, d. h. die beiden Regressionsgeraden, deren Neigungen gegen die y - bzw. x -Achse ja durch a_1 bzw. a_2 gegeben sind, fallen zusammen. Man spricht dann von einer vollständigen Korrelation. Sie tritt jedenfalls dann ein, wenn alle Beobachtungswerte x_i, y_i im Sinne einer eigentlichen funktionalen Abhängigkeit $x_i = a_1 y_i$ miteinander verknüpft sind. In der Tat ergibt sich hier nach (43): $r = \frac{a_1 [x^2]}{\sqrt{a_1^2} \sqrt{[x^2]^2}} = \pm 1$ je nach dem Vorzeichen von a_1 . Ist $r = 0$, also auch $a_1 = a_2 = 0$, so divergieren die Regressionsgeraden um 90° voneinander; die Größen x_i, y_i oder, was dasselbe heißt, die Größen X_i, Y_i werden in diesem Fall als korrelationslos bezeichnet, womit nicht behauptet sein soll, daß eine gegenseitige Abhängigkeit tatsächlich ausgeschlossen ist. Um die Bedeutung des Korrelationskoeffizienten für den allgemeinen Fall zu erkennen, wo r als positiver oder negativer echter Bruch errechnet wird, betrachten wir den von den Regressionsgeraden eingeschlossenen Winkel ϑ . Wir haben:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\frac{1}{a_2} - a_1}{1 + \frac{a_1}{a_2}} = \frac{1 - a_1 a_2}{a_1 + a_2} = \frac{1 - r^2}{r \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_x} + \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \right)} \quad (44)$$

Hierin sind $1 - r^2$ und $\frac{\sigma_y}{\sigma_x} + \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ positiv, $\operatorname{tg} \vartheta$ stimmt also im Vorzeichen mit dem Korrelationskoeffizienten r überein. Bei einer positiven Korrelation, d. h. einer solchen mit positivem r , schneiden sich die beiden Regressionsgeraden unter spitzem Winkel (Abb. 60 a). Beide fallen, da a_1 und a_2 positiv, in den ersten bzw. dritten Quadranten des xy -Systems, d. h. die Änderungen der X und Y stimmen im Vorzeichen überein. Bei einer negativen Korrelation, d. h. einer solchen mit negativem r , ist ϑ ein stumpfer Winkel. Beide Regressionsgeraden fallen, da a_1 und a_2 beide negativ, in den zweiten bzw. vierten Quadranten des xy -Systems, d. h. die Änderungen der X und Y (Abb. 60 b) haben auf alle Fälle entgegengesetzte Vorzeichen. Sinkt der Absolutbetrag von r , so steigt bei gleichbleibendem σ_x und σ_y nach (44) derjenige von $\operatorname{tg} \vartheta$.

Alles in allem wird man sagen können, daß man aus der stochastischen Verbundenheit der beiden Größen X, Y um so eher auf eine eigentliche funktionale Abhängigkeit zu schließen hat, je kleiner die Divergenz der beiden Trendgeraden, d. h. der spitz von ihnen eingeschlossene Winkel, je mehr sich also der Korrelationskoeffizient dem Werte $+1$ bzw. -1 nähert. Je größer der Absolutwert des Korrelationskoeffizienten, um so strammer, wie man sagt, die Korrelation.

Der oben erhaltene Ausdruck für die Summe der Quadrate der Abweichungen der Ursprungswerte von der ersten Trendgeraden liefert uns nach Division mit N und Ausziehen der Quadratwurzel die auf sie bezogene erste Standardabweichung σ_1 . Sie drückt aus, in welchem Maße die erste Trendgerade im Sinne ihrer Definition sich den Ursprungswerten anpaßt. Eine analoge Rechnung liefert die Standardabweichung σ_2 bezüglich der zweiten Trendgeraden. Wir erhalten also

$$\sigma_1 = \sigma_x \sqrt{1 - r^2}; \quad \sigma_2 = \sigma_y \sqrt{1 - r^2}. \quad (45)$$

Für die Technik der Berechnung der Koordinaten \bar{X}, \bar{Y} des Schwerpunkts M des Systems der Punkte (X_i, Y_i) und der zur Kennzeichnung der Korrelation erforderlichen Konstanten σ_x, σ_y, τ empfiehlt es sich oft, von einem Punkte M_0 mit den runden Koordinaten X_0, Y_0 auszugehen, der z. B. schätzungsweise in der Nähe des gesuchten Schwerpunkts M liegt. Wie bei den einfachen linearen Kollektiven ergibt sich

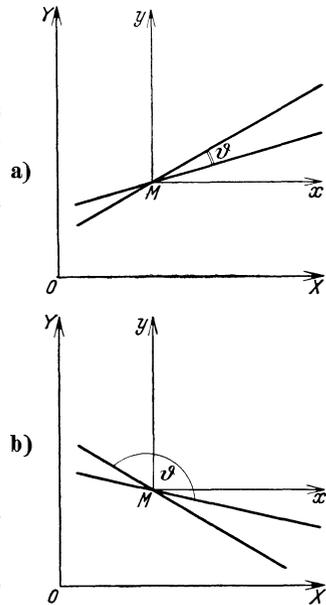


Abb. 60 a/b.

$$\left. \begin{aligned} \bar{X} &= X_0 + \bar{x}' ; & \bar{Y} &= Y_0 + \bar{y}' ; \\ \sigma_x^2 &= \overline{x'^2} - \bar{x}'^2 ; & \sigma_y^2 &= \overline{y'^2} - \bar{y}'^2 , \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

wo \bar{x}' , \bar{y}' die arithmetischen Mittel der auf M_0 als Ursprungspunkt bezogenen Koordinaten x'_i , y'_i der Punkte unseres Wertsystems, $\overline{x'^2}$, $\overline{y'^2}$ die Mittelwerte ihrer Quadrate. Ferner haben wir $x_i = x'_i - \bar{x}'$, $y_i = y'_i - \bar{y}'$, also

$$x'_i y'_i = x_i y_i + \bar{x}' y_i + x_i \bar{y}' + \bar{x}' \bar{y}'$$

und

$$[x' y'] = [x y] + \bar{x}' [y] + [x] \bar{y}' + N \bar{x}' \bar{y}'.$$

Nun ist aber $[x] = [y] = 0$, da M der Schwerpunkt des Punktsystems. Daher ergibt sich $[x' y'] = [x y] + N \bar{x}' \bar{y}'$, und

$$\tau = \frac{[x y]}{N} = \frac{[x' y']}{N} - \bar{x}' \bar{y}'. \quad (47)$$

Es steht beispielsweise nichts im Wege, M_0 mit dem alten Koordinatenanfang O zusammenfallen zu lassen, in den Formeln (46), (47) also $x' = X$, $y' = Y$ zu wählen. Man überzeugt sich leicht, daß damit beispielsweise der Richtungskoeffizient der ersten Trendgeraden, $a_1 = \frac{\tau}{\sigma_y^2}$, in $\frac{N[X Y] - [X][Y]}{N[X^2] - [X]^2}$, also wieder in den durch (31) festgestellten Wert übergeht.

1. Beispiel: In der modernen Marktforschung beschäftigt man sich damit, einerseits die Struktur des Marktes für eine bestimmte Ware, d. h. die auf längere Sicht für die Absatzmöglichkeiten maßgebenden Marktbedingungen zu erkunden, andererseits deren Änderung im Wechsel der Jahreszeiten und der Konjunktur, der Mode und der Gebrauchsgewohnheiten usw. klarzustellen. Auf die strukturellen Absatzbedingungen für Elektro- und Gasapparate bezieht sich eine Studie von E. Schäfer¹⁾, in der insbesondere untersucht wird, wie die Verbreitung von solchen Apparaten in einem bestimmten Gebiet mit dem Grade seiner Elektrizitäts- bzw. Gasversorgung und der Kaufkraft der Bewohner dieses Gebiets zusammenhängt. Verwendet wurde statistisches Material für die 20 Verwaltungsbezirke Großberlins aus den Jahren 1928—30. Bezeichnet X den Grad der Elektrifizierung eines Bezirks (Prozentsatz der elektrifizierten Haushaltungen), Y die Anzahl der in Benutzung befindlichen elektrischen Haushaltapparate pro 100 Haushaltungen, so ergibt die nebenstehende Tabelle als Koordinaten des Schwerpunkts des Streudiagramms $\bar{X} = 58,8$; $\bar{Y} = 85,0$.

Man erhält $\sigma_x = \sqrt{\frac{3548,9}{20}} = 13,3$; $\sigma_y = \sqrt{\frac{33263,2}{20}} = 40,8$; $\tau = \frac{9804,3}{20} = 490,22$.

Damit ergibt sich als Korrelationskoeffizient:

$$r = \frac{\tau}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{490,22}{13,3 \cdot 40,8} = 0,902.$$

Die Regressionsgeraden werden

$$x = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = 0,29 y ;$$

$$y = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = 2,76 x .$$

¹⁾ Die Verbreitung von Elektro- und Gasapparaten, Stuttgart 1933.

Verwaltungsbezirk	X	Y	x	y	x ²	y ²	xy
Friedrichshain .	39,1	41,2	-19,7	- 43,8	388,1	1918,4	+ 862,9
Wedding . . .	40,1	37,9	-18,7	- 47,1	349,7	2218,4	+ 880,8
Kreuzberg . .	42,9	53,1	-15,9	- 31,9	252,8	1017,6	+ 507,2
Mitte	46,2	59,5	-12,6	- 25,5	158,8	650,3	+ 321,3
Prenzlauer Berg	46,5	54,2	-12,3	- 30,8	151,3	948,6	+ 378,8
Weißensee . . .	48,7	61,4	-10,1	- 23,6	102,0	557,0	+ 238,4
Neukölln . . .	50,0	51,6	- 8,8	- 33,4	77,4	1115,6	+ 293,9
Lichtenberg . .	52,9	57,2	- 5,8	- 27,8	33,6	772,8	+ 161,2
Tempelhof . .	55,4	86,1	- 3,4	+ 1,1	11,6	1,2	- 3,7
Tiergarten . . .	56,4	84,4	- 2,4	- 0,6	5,8	0,4	+ 1,4
Treptow	58,1	73,8	- 0,7	- 11,2	0,5	125,4	+ 7,8
Pankow	59,0	74,8	+ 0,2	- 10,2	0,0	104,0	- 2,0
Reinickendorf .	59,9	77,0	+ 1,1	- 8,0	1,2	64,0	- 8,8
Köpenick	63,9	77,5	+ 5,1	- 7,5	26,0	56,3	- 38,3
Schöneberg . .	69,4	108,8	+ 10,6	+ 23,8	112,4	566,4	+ 252,3
Charlottenburg	71,5	140,9	+ 12,7	+ 55,9	161,3	3124,8	+ 702,9
Spandau	73,6	79,2	+ 14,8	- 5,8	219,0	33,6	- 85,8
Steglitz	74,9	122,5	+ 16,1	+ 37,5	259,2	1406,3	+ 603,8
Wilmersdorf . .	82,4	157,4	+ 23,6	+ 72,4	557,0	5241,8	+ 1708,6
Zehlendorf . .	84,9	200,5	+ 26,1	+ 115,5	681,2	13340,3	+ 3014,6
Summe					3548,9	33263,2	+ 9942,9—138,6 = 9804,3

Ihre Divergenz ist wegen der hohen Korrelation sehr gering. Das Streudiagramm (Abb. 61) ließ von vornherein eine sehr stramme stochastische Verbundenheit zwischen dem Grad der Elektrifizierung eines Gebiets und der Verbreitung von Elektroapparaten vermuten. Darüber hinaus liefern aber die gewonnenen Formeln die Möglichkeit, für andere, ähnlichen Bedingungen unterliegende Marktgebiete die Absatzmöglichkeiten für solche Apparate auf Grund der Statistik der Elektrizitätsversorgung zahlenmäßig zu schätzen und ebenso die Genauigkeit dieser Schätzung zu beurteilen. — In ähnlicher Weise untersucht Schäfer die Abhängigkeit des Apparatebedarfs von der Struktur der Kaufkraft.

2. Beispiel: P. Riebesell¹⁾ hat die oft aufgestellte These, daß die Feuerschäden bei schlechter allgemeiner Wirtschaftslage steigen, bei guter fallen, einer Prüfung mit Hilfe der Korrelationsrechnung unterzogen. In der nachfolgenden Statistik sämtlicher von einer Reihe deutscher Versicherungsanstalten gemeldeten Feuerschäden X_i der Jahre 1924—27 benutzt er nach dem Vorgang der Konjunkturforschung als Barometer der Wirtschaftslage den Diskontsatz Y_i , genauer gesagt den Satz für Monatsgeld an der Frankfurter Börse nach den Veröffentlichungen der „Frankfurter Zeitung“ in der Zeitschrift „Die Wirtschaftskurve“. Als Bezugspunkt M_0 wird der Punkt mit den Koordinaten $X_0 = 4, Y_0 = 10$ gewählt.

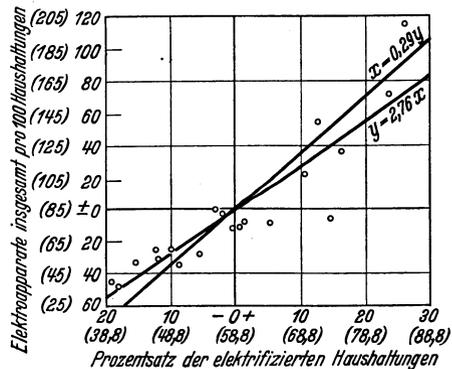


Abb. 61.

¹⁾ Blätter für Versicherungsmathematik 3 (1929) S. 122.

Monat	Schäden X_i in Mill. M.	$x_i' = X_i$ — X_o	Diskont Y_i in % p. a.	$y_i' = Y_i$ — Y_o	$x_i'^2$	$y_i'^2$	$x_i' y_i'$
1	1,3	— 2,7	24,0	+ 14,0	7,3	196,0	— 37,8
2	1,4	— 2,6	24,0	+ 14,0	6,8	196,0	— 36,4
3	1,7	— 2,3	30,0	+ 20,0	5,3	400,0	— 46,0
4	2,6	— 1,4	48,0	+ 38,0	2,0	1444,0	— 53,2
5	2,8	— 1,2	42,0	+ 32,0	1,4	1024,0	— 38,4
6	3,0	— 1,0	30,0	+ 20,0	1,0	400,0	— 20,0
7	2,8	— 1,2	18,0	+ 8,0	1,4	64,0	— 9,6
8	4,0	0,0	12,0	+ 2,0	0,0	4,0	0,0
9	3,3	— 0,7	13,0	+ 3,0	0,5	9,0	— 2,1
10	3,1	— 0,9	12,0	+ 2,0	0,8	4,0	— 1,8
11	3,2	— 0,8	10,0	0,0	0,6	0,0	0,0
12	2,8	— 1,2	10,5	+ 0,5	1,4	0,3	— 0,6
13	2,9	— 1,1	10,8	+ 0,8	1,2	0,6	— 0,9
14	2,6	— 1,4	11,1	+ 1,1	2,0	1,2	— 1,5
15	3,2	— 0,8	10,7	+ 0,7	0,6	0,5	— 0,6
16	3,2	— 0,8	10,2	+ 0,2	0,6	0,0	— 0,2
17	3,7	— 0,3	9,9	— 0,1	0,1	0,0	0,0
18	3,4	— 0,6	10,6	+ 0,6	0,4	0,4	— 0,4
19	4,8	+ 0,8	10,3	+ 0,3	0,6	0,1	+ 0,2
20	5,4	+ 1,4	10,5	+ 0,5	2,0	0,3	+ 0,7
21	5,5	+ 1,5	10,3	+ 0,3	2,3	0,1	+ 0,5
22	4,1	+ 0,1	10,1	+ 0,1	0,0	0,0	+ 0,0
23	5,1	+ 1,1	10,0	0,0	1,2	0,0	0,0
24	4,7	+ 0,7	9,7	— 0,3	0,5	0,1	— 0,2
25	4,0	0,0	8,2	— 1,8	0,0	3,2	0,0
26	3,5	— 0,5	7,5	— 2,5	0,3	6,3	+ 1,3
27	3,5	— 0,5	6,2	— 3,8	0,3	14,4	+ 1,9
28	4,2	+ 0,2	5,6	— 4,4	0,0	19,4	— 0,9
29	2,9	— 1,1	5,3	— 4,7	1,2	22,1	+ 5,2
30	2,1	— 1,9	5,2	— 4,8	3,6	23,0	+ 9,1
31	3,5	— 0,5	5,2	— 4,8	0,3	23,0	+ 2,4
32	3,4	— 0,6	5,3	— 4,7	0,4	22,1	+ 2,8
33	5,0	+ 1,0	5,7	— 4,3	1,0	18,5	— 4,3
34	4,2	+ 0,2	6,1	— 3,9	0,0	15,2	— 0,8
35	4,7	+ 0,7	6,6	— 3,4	0,5	11,6	— 2,4
36	3,1	— 0,9	7,3	— 2,7	0,8	7,3	+ 2,4
37	2,5	— 1,5	5,9	— 4,1	2,3	16,8	+ 6,2
38	2,5	— 1,5	5,8	— 4,2	2,3	17,6	+ 6,3
39	3,2	— 0,8	6,4	— 3,6	0,6	13,0	+ 2,9
40	2,7	— 1,3	6,7	— 3,3	1,7	10,9	+ 4,3
41	2,6	— 1,4	7,0	— 3,0	2,0	9,0	+ 4,2
42	3,4	— 0,6	7,7	— 2,3	0,4	5,3	+ 1,4
43	4,4	+ 0,4	8,0	— 2,0	0,2	4,0	— 0,8
44	4,6	+ 0,6	8,0	— 2,0	0,4	4,0	— 1,2
45	5,1	+ 1,1	8,0	— 2,0	1,2	4,0	— 2,2
46	4,0	+ 0,0	8,5	— 1,5	0,0	2,3	0,0
47	3,9	— 0,1	8,4	— 1,6	0,0	2,6	+ 0,2
48	3,4	— 0,6	8,9	— 1,1	0,4	1,2	+ 0,7
Summe		— 34,8 + 9,8 = — 25,0		— 76,9 + 158,1 = 81,2	59,9	4021,4	— 262,3 + 52,7 = — 209,6

Aus $\bar{x}' = -\frac{25,0}{48} = -0,5$; $\bar{y}' = \frac{81,2}{48} = +1,7$ ergeben sich die Koordinaten des Schwerpunkts: $\bar{X}' = 4 - 0,5 = 3,5$; $\bar{Y}' = 10 + 1,7 = 11,7$. Als Streuungskennwerte erhalten wir:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N} [x'^2] - 0,5^2} = \sqrt{1,25 - 0,25} = \sqrt{1,00} = 1,00.$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N} [y'^2] - 1,7^2} = \sqrt{83,78 - 2,89} = \sqrt{80,89} = 8,99.$$

$$\tau = \frac{[x'y']}{N} + 0,5 \cdot 1,7 = -4,37 + 0,85 = -3,52.$$

Demnach ergibt sich als Korrelationskoeffizient:

$$r = \frac{\tau}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{-3,52}{1,00 \cdot 8,99} = -0,39.$$

Die stochastische Verbundenheit von Wirtschaftslage und Feuerschäden ist nicht sehr stramm. Aber bemerkenswert ist, daß Diskontsatz und Umfang der Feuerschäden sich gegenläufig ändern, d. h. entgegen der vielfach verbreiteten Auffassung gehen die Feuerschäden bei Verschlechterung der

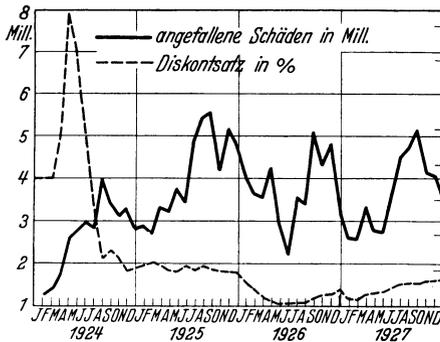


Abb. 62 a.

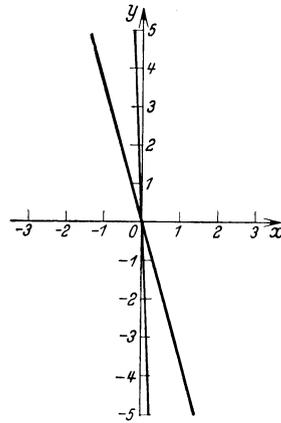


Abb. 62 b.

Wirtschaftslage — allgemein zu reden — zurück. Dies Ergebnis deckt sich mit der Feststellung, die neuerdings P. Moldenhauer¹⁾ auf Grund von Untersuchungen über die letzten Jahre der wirtschaftlichen Depression getroffen hat. Er erklärt die Erscheinung hauptsächlich damit, daß bei notwendig werdenden Entlassungen nach Möglichkeit gerade das umsichtigere Personal gehalten wird und daß bei Stilllegung von Betrieben immerhin auch viele Quellen von Schadensgefahr ausgeschaltet werden. Die verbreiteten falschen Auffassungen dürften, wie Riebesell bemerkt, damit zusammenhängen, daß die im Verlauf der beiden Kurven (Abb. 62 a) zutage tretenden Saisonschwankungen eine falsche Korrelation vortäuschen. — Als Regressionsgeraden (Abb. 62 b) ergeben sich:

$$x = r \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \cdot y = -0,39 \cdot \frac{1,00}{8,99} \cdot y = -0,043 y;$$

$$y = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot x = -0,39 \cdot \frac{8,99}{1,00} \cdot x = -3,507 x.$$

¹⁾ Die Versicherungspraxis, 1933, Heft 1.

Der spitze Kontingenzwinkel ist rund $13\frac{1}{2}^\circ$. Die Korrelation ist also immerhin von Belang.

Eine allgemeine Regel dafür, wie groß r mindestens sein muß, um den Schluß auf einen ernsthaften stochastischen Zusammenhang zu rechtfertigen, läßt sich nicht aufstellen. Gelegentlich bezeichnet man $|r| = 0,3$ als untere Grenze. Zur Beurteilung zieht man auch den „wahrscheinlichen Fehler“ f von r heran, für den sich $f = 0,675 \cdot \frac{1-r^2}{N}$ ergibt. In unserm 2. Beispiel ist $f = 0,021$, eine im Vergleich zu r kleine Größe.

VIII. Die Analyse von Zeitreihen.

§ 25. Allgemeine Konjunkturanalyse.

Statistisch ermittelte Zeitreihen haben die Eigentümlichkeit, daß jedem Wert der unabhängigen Veränderlichen, d. h. der Zeit t , immer nur ein Wert der abhängigen Veränderlichen, also beispielsweise einer Wirtschaftsgröße w , zugeordnet ist und daß wegen des kontinuierlichen zeitlichen Verlaufs alles Geschehens die zu benachbarten Werten von t gehörenden Werte von w , allgemein zu reden, nicht stark differieren. Ferner wählt man bei einer Zeitstatistik i. a. gleiche Dekremente des Arguments: Tage, Wochen, Monate, Jahre¹⁾. Man denke an Preis- und Lohnindexziffern, Beschäftigungsgrad eines Unternehmens, Schadensziffern einer Versicherungsgesellschaft, Ernteerträge, Roheisengewinnung, Außenhandelsvolumen eines Landes usw. Die erwähnten Eigentümlichkeiten der Zeitgrößen bringen es mit sich, daß ihre Untersuchung, verglichen mit anderen Materien der Statistik, in mancher Beziehung vereinfacht und vereinheitlicht werden kann. Dabei beschränkt sich die Aufgabe des Wirtschaftsmathematikers auf die Methodik der Diagnose des Wirtschaftsablaufs. Wieweit die Ergebnisse einer solchen Untersuchung für eine auf mancherlei Momente zu stützende Prognose heranzuziehen sind, das zu entscheiden bleibt dem Volks- und Betriebswirtschaftler überlassen.

Nach dem Vorgang des „Harvard University Committee on Economic Research“²⁾ unterscheidet man bei der Zeitstatistik eines Wirtschaftsvorgangs vier Komponenten: die Saisonschwankung, d. h. die von Jahr zu Jahr ziemlich regelmäßig wiederkehrenden, mit dem Wechsel der Jahreszeiten verknüpften Schwankungen von Monat zu Monat; den Trend, d. h. die in einer langen Reihe von Jahren erkennbare

¹⁾ Die Ungleichheit von Monaten und Jahren kann vielfach vernachlässigt oder durch eine leichte Korrektur der Wirtschaftswerte w berücksichtigt werden.

²⁾ Verwiesen sei hauptsächlich auf die grundlegende Arbeit von M. Persons, *Review of Economic Statistics* 1 (1919) S. 18—31.

Grundströmung, bedingt durch die allgemeine volks- und weltwirtschaftliche Entwicklung; die Konjunkturzyklen, die das periodische Auf und Ab der Wirtschaft widerspiegeln, wie es sich nach den Erfahrungen der letzten Jahrzehnte in Zeiträumen von einigen Jahren ständig wiederholte; schließlich sonstige Schwankungen, die mit Elementarereignissen, Krieg usw. in Zusammenhang stehen, nicht unter eine Regel gebracht werden können, unter Umständen auch strukturelle Änderungen, d. h. den Übergang zu einem andern Trend einleiten können. Erste Aufgabe der „Konjunkturanalyse“ ist es, diese 4 Komponenten aus einer Zeitreihe soweit wie möglich zu isolieren, wobei das Hauptinteresse sich vielfach auf die Konjunkturkomponente richtet. Während die Isolierung der Saisoneinflüsse und des Trend zur Zufriedenheit gelingt, entzieht sich die Aufspaltung des Residuums in Konjunkturkomponente und restliche Einflüsse naturgemäß der genauen rechnerischen Erfassung.

Die Saisonschwankung. Wir stellen uns die Aufgabe, die Monatswerte der Wirtschaftsgröße w in Prozenten eines Jahresdurchschnittswertes auszudrücken. Während nun bei manchen durch unmittelbare Naturbeobachtung festgestellten Größen die Änderung mit dem Wechsel der Jahreszeiten Jahr für Jahr eine leicht zu übersehende Regelmäßigkeit aufweist, muß bei vielen in Monatswerten registrierten Wirtschaftsgrößen eine solche Gleichförmigkeit zunächst als umstritten angesehen werden. Selbst wenn Saisoneinflüsse tatsächlich vorhanden sind, werden sie doch durch die den Jahresdurchschnitt wechselförmig verschiebende, ungleich übers Jahr verteilte Konjunkturkomponente und die nicht genauer zu erfassenden restlichen Faktoren verzerrt bzw. verdeckt. Als brauchbares Mittel zur Beurteilung des Vorhandenseins von Saisonschwankungen und — gegebenenfalls — zur Ableitung von entsprechenden Monatsindexwerten hat sich die Personssche Gliedziffermethode erwiesen, die wir im folgenden zugrunde legen. Sie stützt sich auf die Wahrnehmung, daß ein Saisoneinfluß am klarsten stets in der Änderung der Wirtschaftsgröße von einem Monat zum nächsten sich ausprägt. Als Gliedziffer des v ten Monats eines Jahres wird nun eingeführt $g_v = \frac{w_v}{w_{v-1}}$, d. h. das Verhältnis des diesem Monat entsprechenden Wirtschaftswertes zu dem des Vormonats, wobei w_0 sich auf den Dezember des Vorjahres bezieht. Diese Gliedziffern werden zunächst in einer den ganzen Zeitraum umfassenden, nach Jahren unterteilten Tabelle chronologisch geordnet eingetragen. Um zu prüfen, ob ein ausgeprägter Verlauf der Saisonschwankung vorliegt, überträgt man dann die Gliedziffern in ein sog. Strichbild, d. h. eine Häufigkeitstafel, in der die Gliedziffern in Klassen gleicher Intervallbreite, z. B. 0,01, aufgeteilt sind, während die zugehörige Häufigkeit durch

eine entsprechende Zahl von Strichen gekennzeichnet ist. Nur wenn die Strichbilder der Gliedziffern eines Monats eine deutliche Häufungsstelle erkennen lassen, der sich die Häufungsstellen der Nachbarmonate zwanglos anschließen, erscheint der Schluß auf das Vorhandensein einer Saisonbewegung gerechtfertigt. In der nachstehenden Tabelle¹⁾ sind die Indexziffern der deutschen Produktion an Steinkohlenbriketts 1925 bis 1932 nach Monaten zusammengestellt. Das aus der dazu errechneten Gliedzifferntafel abgeleitete Strichbild (Abb. 63) rechtfertigt offenbar die Annahme einer Saisonbewegung.

Indexziffern der Produktion von Steinkohlenbriketts in Deutschland ab 1925; arbeitstäglich 1928 = 100

	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
1925	104,1	107,2	104,1	98,5	90,4	90,4	95,4	101,6	104,1	103,5	114,7	114,1
1926	120,3	119,7	103,5	93,5	101,0	102,9	106,0	105,4	107,2	109,1	116,0	119,1
1927	119,7	121,6	106,0	95,4	92,3	98,5	97,9	93,5	89,2	98,5	96,0	107,9
1928	104,1	95,4	99,1	99,1	93,5	94,8	101,6	99,8	110,3	109,1	99,8	93,5
1929	109,1	123,4	125,3	100,4	102,2	108,5	112,2	112,8	108,5	115,3	132,2	119,1
1930	98,5	91,6	85,4	84,8	90,4	94,1	92,9	92,9	101,0	106,6	109,1	109,7
1931	108,5	98,5	93,5	91,6	94,8	91,6	96,6	88,5	104,1	98,5	100,4	87,9
1932	91,6	91,6	85,4	81,0	84,8	77,9	86,0	79,8	87,3	106,0	104,7	—

Tafel der Gliedziffern in Prozenten für die Produktion von Steinkohlenbriketts ab 1925

	Jan. Dez.	Febr. Jan.	März Febr.	Apr. März	Mai Apr.	Juni Mai	Juli Juni	Aug. Juli	Sept. Aug.	Okt. Sept.	Nov. Okt.	Dez Nov
1925	—	103,0	97,2	94,6	91,8	100,0	105,6	106,5	102,4	99,4	110,8	99
1926	94,8	99,3	86,4	90,3	108,0	101,8	103,0	99,5	101,6	101,8	106,3	102
1927	100,3	101,5	87,2	90,0	86,8	106,6	99,4	95,5	95,4	110,6	97,5	112
1928	96,5	91,7	103,8	100,0	94,4	101,5	107,1	98,3	110,5	98,8	91,5	93
1929	[116,8]	[113,2]	101,7	[80,1]	101,7	106,2	103,4	100,5	96,2	106,4	114,6	90
1930	[82,7]	93,0	93,3	99,5	106,5	104,1	98,7	100,0	108,7	105,5	102,3	100
1931	98,9	90,8	95,0	98,0	103,6	96,6	105,5	91,6	[117,8]	94,6	102,0	87
1932	104,2	100,0	93,3	94,8	104,8	91,8	110,3	92,8	109,4	[121,3]	98,7	—
Sum.	494,7	679,3	757,9	667,2	797,6	808,6	833,0	784,7	724,2	717,1	823,7	686
Mittel	98,9	97,0	94,7	95,3	99,7	101,1	104,1	98,1	103,5	102,4	103,0	98

Aus der Tafel bzw. dem Strichbild der Gliedziffern leitet man nun Mittelwerte $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \dots, \bar{g}_{12}$ der Gliedziffern für den untersuchten Zeitraum ab. Dabei wird man offenkundige „Ausreißer“, die mit großer Wahrscheinlichkeit auf das Konto störender Einflüsse, d. h. der vierten Komponente zu setzen sind, unberücksichtigt lassen. (In unserem Beispiel sind die entsprechenden Werte in der Tafel eingeklammert, im Strichbild durchgestrichen.) Im übrigen kann man als Mittelwert das arithme-

¹⁾ Nach Sonderheft 31 (1933) der Vierteljahrshefte zur Konjunkturforschung, S. 62.

tische Mittel wählen, wenn man es mit homogenen Reihen zu tun hat, bei denen also allen Einzelbeobachtungen gleiches Gewicht beizumessen ist. Hat man es mit heterogenen Reihen zu tun (etwa solchen, die durch Kombination verschiedener Erhebungen entstanden sind; z. B. Preise auf verschiedenen Märkten), so ist man geneigt, dem Zentralwert den Vorzug zu geben, d. h. demjenigen Gliedziffernwert, der bei den der Größe nach geordneten Einzelwerten in der Mitte der Folge steht. (Bei einer geraden Anzahl von Einzelwerten nimmt man als Zentralwert das arithmetische Mittel der beiden in der Mitte der Folge stehenden Einzelwerte.)

Aus den Mittelwerten der Gliedziffern bildet man durch fortlaufende Multiplikation die Kettenziffern k_v , wodurch man alle Monate auf den Dezember des Vorjahres bezieht: $k_1 = \bar{g}_1$; $k_2 = \bar{g}_1 \bar{g}_2$, $k_3 = \bar{g}_1 \bar{g}_2 \bar{g}_3$, \dots , $k_{12} = \bar{g}_1 \bar{g}_2 \dots \bar{g}_{12}$. Wäre der Trend eine horizontale Gerade, Konjunkturschwankung und störende Einflüsse nicht vorhanden, so würde man $k_{12} = 1$ erwarten. In Wirklichkeit wird sich eine Diskrepanz δ , also $k_{12} = 1 + \delta$ ergeben. Man gelangt zu der berichtigten Kettenziffer k'_v , indem man diese Diskrepanz auf die Monate verteilt: Ent-

weder bildet man $k'_1 = k_1 - \frac{\delta}{12}$; $k'_2 = k_2 - 2\frac{\delta}{12}$; \dots ; $k'_{12} = k_{12} - 12\frac{\delta}{12} = 1$ (arithmetische Methode); oder man bildet $k'_1 = \frac{k_1}{q}$, $k'_2 = \frac{k_2}{q^2}$, \dots , $k'_{12} = \frac{k_{12}}{q^{12}} = 1$, wo $q = \sqrt[12]{1 + \delta}$ (geometrische Methode)¹⁾. Das letztere Verfahren kommt darauf hinaus, daß man die Logarithmen der Kettenziffern, auf die die logarithmische Durchführung der Multiplikation

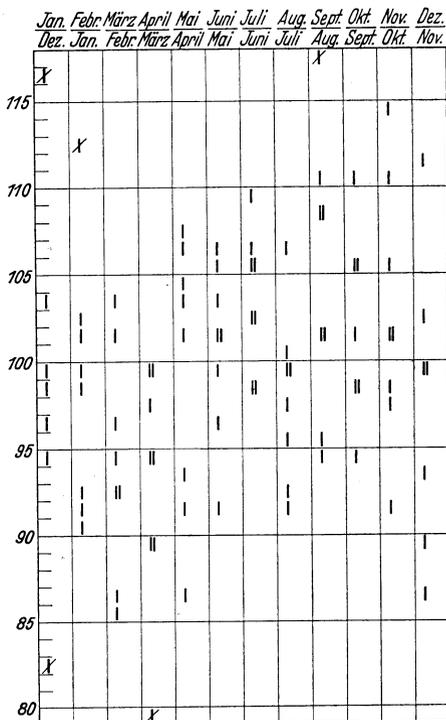


Abb. 63. Strichbild der Gliedziffern.

¹⁾ Die arithmetische Ausgleichung entspricht der Idee, daß der Jahrestrend durch ein lineares Gesetz, die geometrische Ausgleichung der Vorstellung, daß dieser durch ein Exponentialgesetz anzunähern ist.

der Gliedziffern ohnehin führt, um Beträge kürzt, die gleichmäßig um $\frac{1}{12} \log(1 + \delta)$ wachsen. Weiter bestimmt man das arithmetische Mittel der berichtigten Kettenziffern: $\bar{k}' = \frac{k_1' + k_2' + \dots + k_{12}'}{12}$, wodurch das Jahresmittel ebenfalls auf den Dezember des Vorjahres bezogen wird. Zum Schluß bezieht man alle Monate auf das Jahresmittel, indem man bildet:

$$J_1 = \frac{k_1'}{\bar{k}'}, J_2 = \frac{k_2'}{\bar{k}'}, \dots, J_{12} = \frac{k_{12}'}{\bar{k}'}. \tag{1}$$

Damit erhält man die endgültigen Saisonindexwerte der einzelnen Monate. Man drückt sie, ebenso wie die Gliedziffern, oft auch in Prozenten aus. Für unser Beispiel ist das Schema der Rechnung das nachstehende:

Monat	\bar{g}	k	k' arithm.	$\log k$	$\log k'$	k' geom.	J
Jan.	0,989	0,989	0,993	• 9952 — 1	• 9969 — 1	0,993	1,050
Febr.	0,970	0,960	0,967	• 9923 — 1	• 9856 — 1	0,967	1,023
März	0,947	0,909	0,920	• 9586 — 1	• 9636 — 1	0,920	0,974
April	0,953	0,866	0,881	• 9375 — 1	• 9442 — 1	0,879	0,930
Mai	0,997	0,863	0,882	• 9360 — 1	• 9443 — 1	0,880	0,931
Juni	1,011	0,873	0,895	• 9410 — 1	• 9510 — 1	0,893	0,945
Juli	1,041	0,909	0,934	• 9586 — 1	• 9702 — 1	0,934	0,987
Aug.	0,981	0,892	0,922	• 9504 — 1	• 9637 — 1	0,920	0,973
Sept.	1,035	0,923	0,956	• 9652 — 1	• 9802 — 1	0,955	1,011
Okt.	1,024	0,945	0,983	• 9754 — 1	• 9921 — 1	0,982	1,039
Nov.	1,030	0,974	1,015	• 9886 — 1	• 0069	1,016	1,075
Dez.	0,980	0,955	1,000	• 9800 — 1	• 0000	1,000	1,058
		— 0,045 = δ	— 0,946 = \bar{k}'	• 9983 — 1 = — 0,0017 = $\log q$		0,945 = \bar{k}'	

Die letzte Spalte enthält die bei geometrischer Ausgleichung der Kettenziffern sich ergebenden Saisonindexzahlen. Die Abweichungen, die bei arithmetischer Ausgleichung auftreten, betragen höchstens 2‰. In Abb. 64 ist die Saisonbewegung graphisch dargestellt.

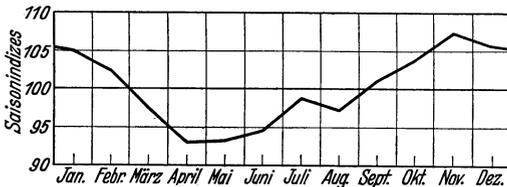


Abb. 64. Saisonbewegung der Produktion von Steinkohlenbriketts.

Die Abweichungen, die bei arithmetischer Ausgleichung auftreten, betragen höchstens 2‰. In Abb. 64 ist die Saisonbewegung graphisch dargestellt.

Der Trend. Für die Bestimmung des Trends ω einer Zeitreihe w gilt das

in der Ausgleichsrechnung (§ 24) dargelegte Verfahren. Sind Jahreswerte registriert, so bezieht sich die Trendanpassung unmittelbar auf sie. Sind Tages-, Wochen- oder Monatswerte gegeben, so führt man an ihrer Stelle, um die Rechnungen abzukürzen, Jahresmittel w_i — jeweils dem 1. Juli zugeordnet — ein, an die man den Trend anpaßt. Zur Ausgleichung wählt man im allgemeinen ganze

rationale Funktionen. Sehr oft kann man sich mit einer Geraden als Trendlinie begnügen. Diese geht dann, wie früher gezeigt, durch den Schwerpunkt der Punkte (t_i, w_i) . Man mißt die Zeit t zweckmäßigerweise von der Mitte des zu untersuchenden, eine runde Zahl n von Jahren umfassenden Zeitraums aus und hat dann nach § 24, (29), (31) als Gleichung der Trendgeraden:

$$\omega = \frac{[t w]}{[t^2]} t + \frac{[w]}{n}. \quad (2)$$

Ist n eine ungerade Zahl, so wählt man das Jahr als Zeiteinheit. Die Abszissen lauten dann:

$$-\frac{n-1}{2}, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, +\frac{n-1}{2}$$

und nach der Reihenlehre ist

$$[t^2] = 2 \left[1^2 + 2^2 + \dots + \left(\frac{n-1}{2} \right)^2 \right] = \frac{1}{12} n (n-1) (n+1).$$

Ist n eine gerade Zahl, so wählt man das Halbjahr als Zeiteinheit. Die Abszissen lauten dann:

$$-(n-1), \dots, -3, -1, +1, +3, \dots, +(n-1),$$

und nach der Reihenlehre ist

$$[t^2] = 2 [1^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2] = \frac{1}{3} n (n-1) (n+1).$$

Für das Beispiel der Produktion von Steinkohlenbriketts ergibt sich das Rechenschema aus nachstehender Tafel:

	t	t^2	w	$t w$	$t^2 w$
1925	-7	49	102,3	-716,1	5012,7
1926	-5	25	108,6	-543,0	2715,0
1927	-3	9	101,4	-304,2	912,6
1928	-1	1	100,0	-100,0	100,0
1929	+1	1	114,1	+114,1	114,1
1930	+3	9	96,4	+289,2	867,6
1931	+5	25	96,2	+481,0	2405,0
1932	+7	49	88,7	+620,9	4346,3
Summe		168	807,7	-158,1	16473,3

Mit $n = 8$ erhalten wir $\frac{[w]}{n} = \frac{807,7}{8} = 100,96$; ferner $\frac{[t w]}{[t^2]} = -\frac{158,1}{\frac{1}{3} \cdot 8 \cdot 7 \cdot 9} = -0,9411$. Die Trendgerade wird also

$$\omega = -0,9411 t + 100,96 \quad (2')$$

(vgl. Abb. 65), wobei t in Halbjahren gerechnet wird. Das durchschnittliche monatliche Gefäll des Produktionsindex beträgt also $-0,1568$.

Man kann die Trendgerade auch graphisch bestimmen. Aus (2) ergeben sich die Trendordinaten zu Beginn und am Schluß des betrachteten Zeitraums:

$$\left. \begin{aligned} \omega_I &= -\frac{[tw]}{[t^2]} \cdot \frac{n}{2} + \frac{[w]}{n}, \\ \omega_{II} &= +\frac{[tw]}{[t^2]} \cdot \frac{n}{2} + \frac{[w]}{n}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Wir setzen dabei den Fall n ungerade voraus; für gerades n läuft die Betrachtung analog. Aus (3) erhalten wir

$$\begin{aligned} \omega_{II} + \omega_I &= 2 \frac{[w]}{n}, \\ \omega_{II} - \omega_I &= \frac{[tw]}{[t^2]} \cdot n = \frac{[tw]}{\frac{1}{12}n(n-1)(n+1)} \cdot n \approx 12 \frac{[tw]}{n^2}. \end{aligned}$$

Nun bedeutet $[tw]$ das statische Moment S der durch die Zeitachse, die Wirtschaftskurve w und die Grenzordinaten ω_I, ω_{II} begrenzten Fläche in bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Vertikalachse, sofern die den einzelnen Jahren entsprechenden Flächenstreifen durch Rechtecke ersetzt werden. Für die statischen Momente in bezug auf die Endordinaten ω_I und ω_{II} gilt entsprechend:



Abb. 65. Trend 1. und 2. Grades für die Produktion von Steinkohlenbriketts.

$$\begin{aligned} S_I &= \left[\left(\frac{n}{2} + t \right) w \right] = \frac{n}{2} [w] + [tw], \\ S_{II} &= \left[\left(\frac{n}{2} - t \right) w \right] = \frac{n}{2} [w] - [tw], \end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned} S_I + S_{II} &= n [w] = \frac{n^2}{2} (\omega_{II} + \omega_I), \\ S_I - S_{II} &= 2 [tw] = \frac{n^2}{6} (\omega_{II} - \omega_I). \end{aligned}$$

Damit gehen die Formeln (3) über in

$$\omega_{II} = \frac{S_{II} - \frac{1}{2} S_I}{\frac{1}{4} n^2}; \quad \omega_I = \frac{S_I - \frac{1}{2} S_{II}}{\frac{1}{4} n^2}. \quad (3')$$

Durch diese beiden Ordinaten ist die Trendgerade bestimmt. Die statischen Momente kann man mit Hilfe von Seilpolygonen ermitteln¹⁾, ein dem Werkingenieur geläufiges Verfahren. Bei längeren Zeitreihen wird man auf die Rechenmaschine zurückgreifen.

Soll der Wirtschaftsvorgang Monat für Monat in seine Komponenten zerlegt werden, wobei für die Abszissen die Monatsmitten in Frage kommen, so berechnet man zunächst nach (2) den Trendwert ω_0 für die Monatsmitte M_0 , die auf die Mitte des untersuchten Zeitraums folgt, und hat dann zur Berechnung der Monatstrendwerte an Stelle von (2) die Formel

$$\omega = a' t' + \omega_0, \quad (2'')$$

wo a' das aus dem Jahres-, bzw. dem Halbjahrsinkrement $a = \frac{[tw]}{[t^2]}$

¹⁾ Bock, A. P.: Technik u. Wirtschaft 24 (1931) S. 74ff.

abgeleitete Monatsinkrement des Trend und t' die in Monaten ausgedrückte, von M_0 aus gemessene Zeit. Für unser Beispiel wird danach

$$\omega = -0,1568 t' + 100,88.$$

Wählen wir als Trend der von den Jahresdurchschnitten gebildeten Zeitreihe w_1, w_2, \dots, w_n eine ganze rationale Funktion zweiten Grades $\omega = at^2 + bt + c$, so bedeutet Anpassung nach der Methode der kleinsten Quadrate, daß

$$[(w - at^2 - bt - c)^2]$$

zum Minimum zu machen ist. Notwendige Bedingung hierfür ist das Verschwinden der partiellen Ableitungen in bezug auf die zu bestimmenden Parameter a, b, c :

$$\left. \begin{aligned} a[t^4] + b[t^3] + c[t^2] &= [t^2 w], \\ a[t^3] + b[t^2] + c[t] &= [t w], \\ a[t^2] + b[t] + c \cdot n &= [w]. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Für den Fall, daß t wieder von der Mitte des untersuchten Zeitraumes aus gezählt wird, ist $[t^3] = [t] = 0$, wodurch sich die Gleichungen erheblich vereinfachen. Wir erhalten dann:

$$a = \frac{n[t^2 w] - [t^2][w]}{n[t^4] - [t^2]^2}; \quad b = \frac{[t w]}{[t^2]}; \quad c = \frac{[t^4][w] - [t^2][t^2 w]}{n[t^4] - [t^2]^2}.$$

Für unser Beispiel, das allerdings angesichts des reichlich kurzen Zeitraums von 8 Jahren für die Bestimmung eines parabolischen Trends kaum in Frage kommt, würde sich mittels der S. 195 tabulierten Werte ergeben:

$$a = \frac{8 \cdot 16473,3 - 807,7 \cdot 168}{8 \cdot 6216 - 28224} = -0,18155;$$

$$b = -\frac{158,1}{168} = -0,9411;$$

$$c = \frac{807,7 \cdot 6216 - 16473,3 \cdot 168}{8 \cdot 6216 - 28224} = 104,78.$$

Dabei sind wieder die Zeiten t in Halbjahren vom 1. Januar 1929 aus gemessen. Die entsprechende Trendgleichung lautet also:

$$\omega = -0,18155 t^2 - 0,9411 t + 104,78.$$

Die entsprechende Kurve ist, ebenso wie die Trendgerade, in Abb. 65 eingetragen.

Weiterführende Untersuchungen über Wesen und Sinn des Trends von Wirtschaftsreihen, seine Berechnung mit Hilfe orthogonaler ganzer rationaler Funktionen und bemerkenswerte Feststellungen über die ihre Koeffizienten betreffenden Zusammenhänge bringen die Arbeiten von P. Lorenz¹⁾, auf die hier verwiesen sei.

¹⁾ Vgl. vor allem Vierteljahrshefte zur Konjunkturforschung Sonderheft 9 (1928), Sonderheft 21 (1931).

Die Konjunkturkomponente. Eine einwandfreie Isolierung der Konjunkturkomponente ist nicht möglich, da wohl Trend und Saisonbewegung, nicht aber die „restlichen Einflüsse“ befriedigend erfaßt werden können. Bei Zeitreihen, die sich auf Monatswerte beziehen, kann man immerhin annehmen, daß bei der Bestimmung der Saisonschwankung durch das Fortlassen der „Ausreißer“ im Strichbild der Gliedziffern ein wesentlicher Teil der „restlichen Faktoren“ ausgeschaltet wird. Gehören zu den Zeitwerten t_k die Ursprungswerte w_k und die Trendordinaten ω_k , so versteht man unter der vom Trend bereinigten Zeitreihe der w_k die Größen $\frac{w_k}{\omega_k} \cdot 100$. Sie drücken die w_k in Prozenten des Trend aus. Für die graphische Darstellung wählt man die Linie 100% als Basis, so daß die Prozentabweichungen vom Trend $\frac{w_k - \omega_k}{\omega_k} \cdot 100$ in großem Maßstab veranschaulicht werden können. In ihnen steckt noch der Saisoneinfluß, der durch den dem betreffenden Monat entsprechenden Saisonindexwert J_k gekennzeichnet ist.

Um auch von der Saisonkomponente zu bereinigen, führt man den normalerweise unter ihrer Einwirkung aus dem Trendwert hervorgehenden Betrag $J_k \cdot \omega_k$ als Bezugswert ein, bildet also $\frac{w_k}{J_k \omega_k} \cdot 100$ bzw. $\varepsilon_k = \left(\frac{w_k}{J_k \omega_k} - 1 \right) \cdot 100 = \frac{w_k - J_k \omega_k}{J_k \omega_k} \cdot 100$. Dann ist ε_k die in Prozenten ausgedrückte Abweichung des Ursprungswerts vom „Normalwert“, veranschaulicht also im wesentlichen die Konjunkturkomponente. Da J_k im allgemeinen nur um einen kleinen Bruch von der Einheit sich unterscheidet, kann man näherungsweise

$$\varepsilon_k = \frac{w_k - J_k \cdot \omega_k}{\omega_k} \cdot 100 = \left(\frac{w_k}{\omega_k} - J_k \right) \cdot 100 = \left(\frac{w_k - \omega_k}{\omega_k} \right) \cdot 100 - (J_k - 1) 100$$

setzen, wodurch die Rechenarbeit erheblich erleichtert wird. Der Minuend rechts bedeutet die oben erwähnte Prozentabweichung vom Trend, der Subtrahend die in Prozenten ausgedrückte Saisonabweichung. Die Differenz, die also die vom Saisoneinfluß bereinigte Prozentabweichung vom Trend veranschaulicht, wurde für unser Beispiel mit Bezug auf den linearen Trend von Monat zu Monat berechnet. Die graphische Darstellung (Abb. 66) berücksichtigt nur die Vierteljahrswerte. Alle vom Saisoneinfluß bereinigten Ursprungswerte, die keine Abweichung vom Trendwert aufweisen, liegen auf der mit 0 bezifferten Basislinie 100%.

Die Kurve der ε_k zeigt bei den meisten Wirtschaftsvorgängen nach den Erfahrungen der letzten Jahrzehnte, dem Auf und Ab des Wirtschaftslebens entsprechend, wellenförmigen Verlauf. Zu den periodischen oder zyklischen Werten gelangen wir, wenn wir aus den ε_k

die Standardabweichung vom Trend nach der Formel $\sigma = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{N}}$ berechnen, wo N der Gesamtumfang der Zeitreihe, und die Quotienten $\frac{\varepsilon_k}{\sigma}$ bilden. Diese Quotienten sind dann reine Zahlen, die das durchschnittliche Ausmaß der Konjunkturschwankung nicht mehr widerspiegeln, also von der sog. Konjunktorempfindlichkeit der betreffenden Wirtschaftsgröße unabhängig sind. Um so deutlicher markieren

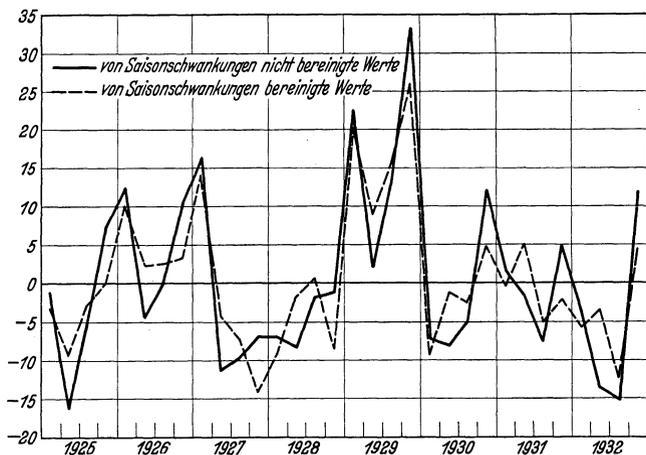


Abb. 66. Produktion von Steinkohlenbriketts: Prozentabweichungen vom linearen Trend.

sie die einzelnen Phasen der Konjunktorentwicklung. Sie eignen sich infolgedessen ganz besonders für vergleichende Untersuchung des Ablaufs verschiedener Wirtschaftsvorgänge.

§ 26. Korrelation von Zeitreihen. Betriebswirtschaftlicher Konjunkturdienst.

Wichtige Arbeitsunterlagen gewinnen Volks- und Betriebswirtschaftler aus der Konjunkturanalyse bei Heranziehung der Korrelationsrechnung. Ziel ist, Zusammenhänge zwischen verschiedenen Wirtschaftsvorgängen zahlenmäßig zu präzisieren und damit gegebenenfalls Material für eine Prognose zu gewinnen, der ein bestimmter Grad von Wahrscheinlichkeit zukommt. Liegen für zwei Wirtschaftsgrößen ausgedehnte Zeitreihen X_k , Y_k für den gleichen Zeitraum vor, so wird es meist nicht sinnvoll sein, die Korrelation dieser Größen selbst zu untersuchen. In den Trendlinien beider werden sich die gleichen großen, den allgemeinen Wirtschaftsablauf bestimmenden Faktoren widerspiegeln, so daß eine verhältnismäßig hohe Korrelation dem Wirtschaftler in der Regel nichts Neues offenbaren wird. Anders steht es mit den Saison- und vor allem mit den Konjunkturkomponenten. Wir

wollen daher bei beiden Wirtschaftsvorgängen die eventuell vom Saisoneinfluß bereinigten Abweichungen x_k, y_k vom Trend ins Auge fassen.

Schon die mit Eintragung der Trendlinien ausgestatteten Kurvenbilder der X_k, Y_k vermögen oft einen Begriff davon zu geben, ob eine mehr oder minder betonte, positive oder negative stochastische Verbundenheit zwischen den Abweichungen besteht. Die in Abb. 67 dargestellte Entwicklung der Roheisengewinnung und des Einfuhrvolumens von Deutschland zwischen 1895 u. 1913¹⁾ mit ihren Trendlinien 2. Grades läßt dies erkennen. Um den Zusammenhang zahlenmäßig festzulegen,

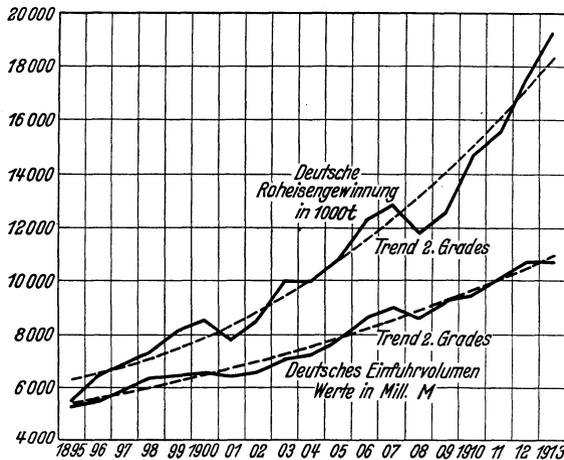


Abb. 67.

führt man in die Korrelationsbetrachtung entweder die x_k, y_k selbst oder die den ε_k des vorigen Paragraphen entsprechenden Größen ein, die die eventuell vom Saisoneinfluß bereinigten Prozentabweichungen der X_k, Y_k vom Trend darstellen; ferner $\xi_k = \frac{x_k}{\sigma_x}, \eta_k = \frac{y_k}{\sigma_y}$, wo σ_x, σ_y die Standardabweichungen vom Trend, also $\sigma_x = \sqrt{\frac{[x^2]}{N}}, \sigma_y = \sqrt{\frac{[y^2]}{N}}$. Die x_k, y_k sind hier also nicht Abweichungen von festen Mittelwerten, wie dies von den x_i, y_i in der Korrelationsrechnung (§ 24) zunächst vorausgesetzt wurde. Sie genügen aber (jedenfalls sofern man sich an die zur Bestimmung der Trendlinie benutzten Jahresdurchschnittswerte hält) den analogen Bedingungen $[x] = [y] = 0$, wie jeweils aus der letzten der zur Bestimmung der Trendlinie füh-

¹⁾ P. Lorenz, Höh. Mathematik für Volkswirte u. Naturwissenschaftler, Leipzig 1929, S. 176ff.; vgl. E. Wagemann, Konjunkturlehre, Berlin 1928, S. 250ff.

renden Bedingungsgleichungen (siehe § 24 [30], § 25 [4]) ersichtlich wird. Demgemäß können wir den Korrelationskoeffizienten r der x_k, y_k und zwei Regressionsgeraden bestimmen. Für das oben angeführte Beispiel sind die Rechnungen aus nachstehender Tabelle¹⁾ ersichtlich.

Jahr	Deutsche Roheisengewinnung in 1000 t			Deutsches Einfuhrvolumen Werte in Millionen Mark		
	Ursprungswerte \bar{X}	Trend 2. Grades ω_x	Abweichungen x	Ursprungswerte \bar{Y}	Trend 2. Grades ω_y	Abweichungen y
1895	5 464	6 276	— 812	5 236	5 414	— 178
1896	6 377	8 484	— 111	5 489	5 592	— 103
1897	6 881	6 746	135	5 909	5 785	124
1898	7 313	7 062	251	6 375	5 993	382
1899	8 143	7 431	712	6 490	6 217	273
1900	8 521	7 854	667	6 514	6 455	59
1901	7 880	8 331	— 451	6 443	6 710	— 267
1902	8 530	8 862	— 332	6 662	6 979	— 317
1903	10 018	9 447	571	7 036	7 263	— 227
1904	10 058	10 086	— 28	7 282	7 563	— 281
1905	10 875	10 778	97	7 828	7 878	— 50
1906	12 293	11 524	769	8 619	8 209	410
1907	12 875	12 324	531	9 091	8 554	537
1908	11 805	13 178	— 1373	8 629	8 915	— 286
1909	12 645	14 086	— 1441	9 298	9 292	6
1910	14 794	15 048	— 254	9 542	9 683	— 141
1911	15 574	16 063	— 489	10 118	10 090	28
1912	17 617	17 132	485	10 721	10 512	209
1913	19 312	18 255	1057	10 770	10 949	— 179

Als Streuungskennwerte erhält man:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{19} \cdot 88670 \cdot 10^2} = 683,1;$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{19} \cdot 12211 \cdot 10^2} = 253,5;$$

$$\tau = \frac{1}{19} \cdot 15309 \cdot 10^2 = 805,7 \cdot 10^2.$$

Als Korrelationskoeffizient ergibt sich danach:

$$r = \frac{\tau}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{805,7 \cdot 10^2}{683,1 \cdot 253,5} = 0,465.$$

Die Korrelation ist, wie nach dem Schaubild zu erwarten war, positiv, aber nicht übermäßig hoch. Bei Benutzung der in § 24, (39'') eingeführten Normal-

Jahr	$x^2 \cdot 10^{-2}$	$y^2 \cdot 10^{-2}$	$xy \cdot 10^{-2}$
1895	6 593	317	1 445
1896	123	106	114
1897	182	154	167
1898	630	1 459	959
1899	5 069	745	1 944
1900	4 449	35	394
1901	2 034	713	1 204
1902	1 102	1 005	1 052
1903	3 260	515	— 1296
1904	8	790	79
1905	94	25	— 49
1906	5 914	1 681	3 153
1907	3 036	2 884	2 959
1908	18 851	878	3 927
1909	20 765	0	— 86
1910	645	199	358
1911	2 391	8	— 137
1912	2 352	437	1 014
1913	11 172	320	— 1892
Summe	88 670	12 211	18 769 — 3460 = 15 309

¹⁾ Siehe Fußnote S. 200.

koordinaten $\xi = \frac{x}{\sigma_x}$, $\eta = \frac{y}{\sigma_y}$ lauten die Gleichungen der beiden Regressionsgeraden: $\xi = 0,465 \eta$; $\eta = 0,465 \xi$.

In Abb. 68 sind diese Regressionsgeraden eingetragen in das Streuungsbild, das sich ergibt, wenn die in der Tabelle gegebenen zusammengehörigen Werte der x_k , y_k in Normalkoordinaten umgerechnet werden.

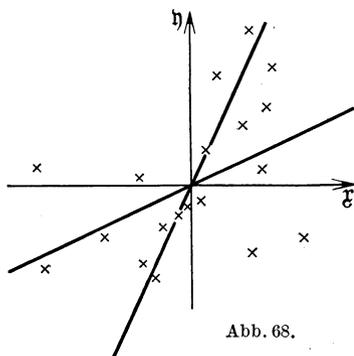


Abb. 68.

Die Benutzung der Normalkoordinaten ξ , η hat den Vorteil, daß sie ebenso wie die zyklischen Werte von dem Maßstab, in dem die x , y gemessen wurden, befreit sind. Dementsprechend tritt in dem auf sie gestützten Diagramm nur der Grad der stochastischen Verbundenheit der beiden Konjunkturkomponenten in die Erscheinung, nicht aber die Ausmaße der letzteren.

Ein wichtiger neuer Gesichtspunkt wird in die korrelative Betrachtung von zwei Zeitreihen dadurch hereingebracht, daß man sie in einem gewissen Phasenunterschied einander gegenüberstellt. Dieser Gedanke wird durch die Betrachtung ihrer Kurvenbilder vielfach nahe gelegt. Das bekannteste Beispiel ist das vom Harvardinstitut für die Vereinigten Staaten von Nordamerika aufgestellte Dreimärktebarometer.

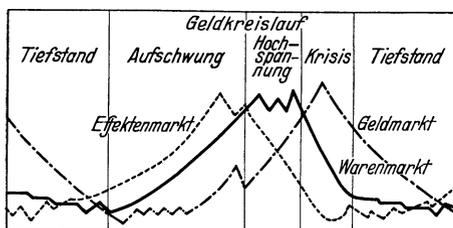


Abb. 69. Dreimärktebarometer.

In Abb. 69 stellt die *A*-Kurve, die aus Zahlenreihen der „Bankdebits“ der New Yorker Banken und Kursen von Industrieaktien abgeleitet ist, einen Gradmesser der Umsätze am Effektenmarkt dar. Die *B*-Kurve, kombiniert aus Zahlenreihen der „Bankdebits“ der Banken außerhalb

New Yorks und der Großhandelspreise, kennzeichnet den Umfang der auf dem Warenmarkt getätigten Umsätze. Die *C*-Kurve, die die Diskontsätze für Warenwechsel darstellt, gibt ein Maß für die jeweilige Beanspruchung des Geldmarkts. Die drei Kurven geben ein Schema des Konjunkturverlaufs im großen und ganzen, das geraume Zeit hindurch mit Erfolg für Prognosezwecke herangezogen wurde. Nach der Periode der Depression, die durch das Tiefliegen der 3 Kurven gekennzeichnet ist, kündigt sich der Aufschwung zunächst durch ein rasches Ansteigen der *A*-Kurve an. Die *B*- und die *C*-Kurve folgen in gewissen Abständen mit der gleichen Tendenz. Dieser Phasenunterschied wiederholt sich

bezüglich des Erreichens der Gipfelpunkte und des Abstiegs. Dieses Dreimärktebarometer, auf Grund dessen man vom Verlauf einer Kurve über den der andern Voraussagen machte, hat sich zwar mit beginnender Weltwirtschaftskrise als eine zu einfache Konstruktion erwiesen. Aber der Hauptgedanke, Korrelationen von Wirtschaftsvorgängen mit Phasenunterschied aufzusuchen, muß nach wie vor als fruchtbar angesehen werden.

An einem andern Beispiel, das sich auf einen Teilausschnitt der Wirtschaft bezieht, möge erläutert werden, wie dieser Gedanke in den privatwirtschaftlichen Konjunkturdienst hinüberspielt. A. Hanau¹⁾ hat nach Anregungen von F. Aereboe die Bestimmungsgründe für die Entwicklung der Schweinepreise in den Jahren 1900—1913 genauer untersucht. Das Angebot, gemessen am Auftrieb lebender Schweine auf 40 deutschen Schlachtviehmärkten, und die Preisgestaltung erwiesen sich, wie zu erwarten, durchweg als gegenläufig. Als wesentlich für die Entwicklung wurde nun die sog. Schweine-Futter Preisrelation festgestellt. Diese bestimmt sich als Quotient aus dem Preis für einen Zentner Schwein-Lebendgewicht und dem gleichzeitig geltenden sog. Futtereinheitspreis, d. h. dem Preis für einen Zentner „Einheitsfutter²⁾“. Je größer der augenblickliche Wert dieses Quotienten, um so höher der Anreiz zur Steigerung der Schweinezucht. Die Auswirkungen zeigen sich in dem nach einer gewissen Zeitspanne einsetzenden erhöhten Auftrieb, der dann wieder die Schweinepreise drückt. Die entgegengesetzten Folgen zeitigt ein augenblicklich niedriger Wert der Schweine-Futter Preisrelation. Hanau hat nun die Zeitreihe der Preisrelationen unter Annahme verschiedener Verzugswerte der Zeitreihe der Schweinepreise gegenübergestellt und die entsprechenden Korrelationskoeffizienten r berechnet. Der absolut genommen größte Wert ergab sich bei Annahme eines Phasenunterschieds von 18 Monaten, nämlich $r = -0,72$. Bei einer entsprechenden Verschiebung der beiden Zeitachsen findet Hanau das in Abb. 70 dargestellte Kurvenbild, das den damit aufgezeigten Zusammenhang anschaulich bestätigt: Auf eine hohe Preisrelation folgen nach 18 Monaten niedrige Schweinepreise, und auf eine niedrige Relation folgen nach 18 Monaten hohe Schweinepreise. Noch eindeutiger gestaltet sich der Zusammenhang zwischen dem Bestand an Muttersauen und dem nach einer gewissen Zeitspanne sich einstel-

¹⁾ Vierteljahrshefte zur Konjunkturforschung, Sonderheft 2, 1927.

²⁾ Im Durchschnitt der Vorkriegsjahre wurden 40% der Schweineproduktion mit Kartoffeln, 60% mit Gerste oder anderem Getreide erzeugt. Die Ergiebigkeit von einem Zentner Gerste kommt der von 4 Zentnern Kartoffeln gleich. Dem entsprechend wurde der Preis von einem Zentner „Einheitsfutter“ errechnet als Summe aus: 60% des Preises für einen Zentner Futtergerste und viermal 40% des Preises für einen Zentner Kartoffeln.

lenden Auftrieb bzw. Schweinepreis. Der absolut genommen höchste Wert des Korrelationskoeffizienten Muttersauenbestand-Schweinepreis ergab sich bei Annahme eines Phasenunterschieds von 12 Monaten, nämlich $r = -0,795$. Die Verzugszeiten erklären sich in beiden Fällen ohne weiteres aus der Trächtigkeitsdauer und der Dauer der Aufzucht.

Man kann die stochastische Verbundenheit zwischen einer Größe x_1 und verschiedenen auf ihre Gestaltung einwirkenden Faktoren in einer

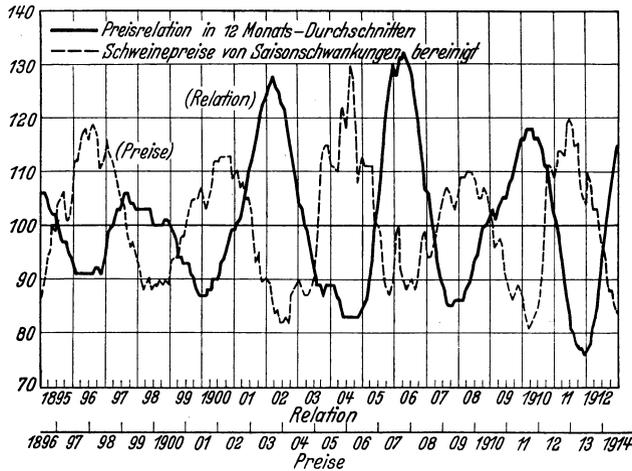


Abb. 70.

diese Mehrfachkorrelation berücksichtigenden Regressionsgleichung zum Ausdruck bringen. Hanau findet für das untersuchte Beispiel:

$$x_1 = -0,120 x_2 + 0,312 x_3 - 0,703 x_4.$$

Hierin bedeutet:

x_1 die Schweinepreise als prozentuale Abweichungen vom Trend, von Saisonschwankungen bereinigt;

x_2 die Schweine-Futter Preisrelation als prozentuale Abweichung vom Trend, mit einer 18monatigen Verschiebung;

x_3 die Futtereinheitspreise als prozentuale Abweichungen vom Trend, mit einem 11monatigem Verzug;

x_4 den Muttersauenbestand, in Prozenten des Vorjahrs ausgedrückt, mit einer 12monatigen Verschiebung.

Die auf Grund der obigen Regressionsgleichung aufgestellte Prognose ergab für 1927 befriedigende Übereinstimmung mit der tatsächlichen Preisentwicklung. Hanau schließt, daß die Kalkulation der Schweinemast vieler Landwirte so lange eine Fehlkalkulation bleibt, wie sie die jeweils gegenwärtigen Schweinepreise in der Preisrelation in Rechnung

stellen statt derjenigen, die sie bei Beendigung der Mast beim Verkauf wahrscheinlich zu erzielen vermögen. Die ganze Problematik der Prognose ergibt sich aber aus der Überlegung, daß, wenn die große Mehrheit der Züchter sich in der Produktion auf etwa nach der Regressionsgleichung zu erwartende künftige günstige Preise in ihrer Produktion einstellt, die in der Stichzeit sich ergebende Steigerung des Auftriebs zwangsläufig wiederum zu großen Enttäuschungen führen muß. Immerhin würde der Erfolg der auf eine vertiefte wissenschaftliche Preisprognose gestützten Beratungstätigkeit landwirtschaftlicher Wirtschaftsberatungsstellen darin bestehen können, daß die starken Konjunkturschwankungen der Preise gemildert werden und die Stabilisierung des Marktes eine mehr gleichmäßige Schweinemast ermöglicht.

Für den privatwirtschaftlichen Konjunkturdienst¹⁾, der besonders in Amerika bereits vor dem Einsetzen der Weltwirtschaftskrise stark ausgebaut war, hat naturgemäß eine weitgehende, den besonderen Verhältnissen angepaßte Spezialisierung in der vergleichenden Untersuchung von Zeitreihen Platz zu greifen. Das Augenmerk richtet sich in erster Linie auf die Bewegung der Absatzgestaltung, der Einkaufsbedingungen und sonstigen Kostenfaktoren, sowie der Verkaufsbedingungen. Die eigene Verkaufskurve des betreffenden Unternehmens zeigt vielfach eine bestimmte Phasenverschiebung gegenüber den die allgemeine Konjunkturbewegung darstellenden Kurven des Aktien- und des Warenumsatzes und des Geldmarkts. Als wertvoll erweist es sich aber, daneben die besonderen vom Werk anzulegenden Kurven der Auftragseingänge, Lagerbestände, Zahlungseingänge und Kassenbestände zum Vergleich heranzuziehen. Dadurch werden Unterlagen für die Betriebspolitik, Lagerhaltung, Budgetaufstellung, langfristige Planungen und Neuinvestitionen gewonnen. Die Vorausbestimmung des weiteren Verlaufs der Trendlinien bleibt naturgemäß höchst unsicher. Günstiger dürfte es bei einigermaßen normalem Wirtschaftsablauf mit der Erfassung der Konjunkturschwankungen stehen. Am zuverlässigsten gestaltet sich die Klarstellung der Saisonbewegung. Sie ermöglicht es beispielsweise, betriebspolitische Ausgleichsmaßnahmen zu treffen und die Inanspruchnahme des Produktionsapparats und die Heranziehung von Arbeitskräften gleichmäßiger zu verteilen.

In Deutschland verfügt die Reichsbahn über einen eigenen planmäßig durchgeführten Konjunkturdienst. Dieser besitzt einmal eine erhebliche volkswirtschaftliche Bedeutung, da der Güterverkehr der Eisenbahnen im allgemeinen ein gutes Kennzeichen für die jeweilige Konjunkturlage darstellt, insbesondere soweit die sog. reagiblen Waren in Frage kommen. Andererseits gewinnt die Reichsbahn mit diesem

¹⁾ Vgl. den Beitrag v. J. F. Feilen in E. Wagemann, Konjunkturlehre, Berlin 1928, S. 269.

Konjunkturdienst auch für ihre eigenen Zwecke wichtige Unterlagen. Das gilt insbesondere von den Saisonindices und der Konjunktur-entwicklung der Wagengestellung¹⁾. Man kann auf sie eine Schätzung des voraussichtlichen finanziellen Jahresergebnisses stützen und danach die Ausgabenpolitik einrichten. Ferner können wichtige Folgerungen für die Betriebsführung gezogen werden. Man kann für die bevorstehenden Monate den ungefähren Wagenbedarf in den einzelnen Direktionsbezirken schätzen, den Wagenumlaufsplan aufstellen, um Leerläufe auf ein Minimum zu reduzieren. Trennt man die Berechnung der Saisonindices nach Wagenarten, so kann über die Aufeinanderfolge der Reparaturzeiten zweckmäßig verfügt werden: Anpassung an die niedrigsten Saisonindexziffern unter Berücksichtigung des Gesichtspunktes einer möglichst gleichmäßig übers Jahr verteilten Ausnutzung der Reparaturwerkstätten. Die Saisonindices geben ferner Anhaltspunkte für die Personalpolitik (Heranziehung von Aushilfsarbeitern), schließlich für Maßnahmen zur Milderung der Saisonschwankungen (Tarifpolitik usw.). Die Bedeutung der Trendberechnung im Zusammenhang mit derjenigen der Konjunkturbewegung erläutert H. Kellerer²⁾ an dem Beispiel des sog. Betriebskoeffizienten, d. h. der in Prozenten der Einnahmen ausgedrückten Ausgaben der deutschen Bahnen im Zeitraum 1883—1913. Auch hier lassen sich bei Trennung nach Direktionsbezirken usw. Unterlagen für Vornahme von Änderungen im Zugdienst, Personaldienst, für Tarifpolitik (Ausnahmetarife usw.) gewinnen.

Verschiedene Anregungen für den Aufbau des Konjunkturdienstes durch die industrielle Werkleitung gibt A. P. Bock³⁾, indem er Verwendungsmöglichkeiten, in der Einkaufsabteilung, in den Kalkulationsabteilungen und für die Budgetierung im einzelnen darlegt.

¹⁾ Vgl. K. Steuernagel, Die Saisonbewegung im Personen- und Güterverkehr; Die Reichsbahn 1926, Berlin.

²⁾ Dissertation Techn. Hochschule Berlin 1931, S. 102.

³⁾ Technik und Wirtschaft 24 (1931), S. 74.

Anhang.

Tabelle I. q^n : Endwert des Kapitals 1 nach n Perioden.

n	3%	4%	4½%	5%	5½%	6%	7%
1	1,03	1,04	1,045	1,05	1,055	1,06	1,07
2	1,0609	1,0816	1,092025	1,1025	1,113025	1,1236	1,1449
3	1,092727	1,124864	1,141166	1,157625	1,174241	1,191016	1,225043
4	1,125509	1,169859	1,192519	1,215506	1,238825	1,262477	1,310796
5	1,159274	1,216653	1,246182	1,276282	1,306960	1,338226	1,402552
6	1,194052	1,265319	1,302260	1,340096	1,378843	1,418519	1,500730
7	1,229874	1,315932	1,360862	1,407100	1,454679	1,503630	1,605781
8	1,266770	1,368569	1,422101	1,477455	1,534687	1,593848	1,718186
9	1,304773	1,423312	1,486095	1,551328	1,619094	1,689479	1,838459
10	1,343916	1,480244	1,552969	1,628895	1,708144	1,790848	1,967151
11	1,384234	1,539454	1,622853	1,710339	1,802092	1,898299	2,104852
12	1,425761	1,601032	1,695881	1,795856	1,901207	2,012196	2,252192
13	1,468534	1,665074	1,772196	1,885649	2,005774	2,132928	2,409845
14	1,512590	1,731676	1,851945	1,979932	2,116091	2,260904	2,578534
15	1,557967	1,800944	1,935282	2,078928	2,232476	2,396558	2,759032
16	1,604706	1,872981	2,022370	2,182875	2,355263	2,540352	2,952164
17	1,652848	1,947901	2,113377	2,292018	2,484802	2,692773	3,158815
18	1,702433	2,025817	2,208479	2,406619	2,621466	2,854339	3,379932
19	1,753506	2,106849	2,307860	2,526950	2,765647	3,025600	3,616528
20	1,806111	2,191123	2,411714	2,653298	2,917757	3,207135	3,869684
21	1,860295	2,278768	2,520241	2,785963	3,078234	3,399564	4,140562
22	1,916103	2,369919	2,633652	2,925261	3,247537	3,603537	4,430402
23	1,973587	2,464716	2,752166	3,071524	3,426152	3,819750	4,740530
24	2,032794	2,563304	2,876014	3,225100	3,614590	4,048935	5,072367
25	2,093778	2,665836	3,005434	3,386355	3,813392	4,291871	5,427433
26	2,156591	2,772470	3,140679	3,555673	4,023129	4,549383	5,807353
27	2,221289	2,883369	3,282010	3,733456	4,244401	4,822346	6,213868
28	2,287928	2,998703	3,429700	3,920129	4,477843	5,111687	6,648838
29	2,356566	3,118651	3,584036	4,116136	4,724124	5,418388	7,114257
30	2,427262	3,243398	3,745318	4,321942	4,983951	5,743491	7,612255
31	2,500080	3,373133	3,913857	4,538039	5,258069	6,088101	8,145113
32	2,575083	3,508059	4,089981	4,764941	5,547262	6,453387	8,715271
33	2,652335	3,648381	4,274030	5,003189	5,852362	6,840590	9,325340
34	2,731905	3,794316	4,466362	5,253348	6,174242	7,251025	9,978114
35	2,813862	3,946089	4,667348	5,516015	6,513825	7,686087	10,676581
36	2,898278	4,103933	4,877378	5,791816	6,872085	8,147252	11,423942
37	2,985227	4,268090	5,096860	6,081407	7,250050	8,636087	12,223618
38	3,074783	4,438813	5,326219	6,385477	7,648803	9,154252	13,079271
39	3,167027	4,616366	5,565899	6,704751	8,069487	9,703507	13,994820
40	3,262038	4,801021	5,816365	7,039989	8,513309	10,285718	14,974458
41	3,359899	4,993061	6,078101	7,391988	8,981541	10,902861	16,022670
42	3,460696	5,192784	6,351615	7,761588	9,475526	11,557033	17,144257
43	3,564517	5,400495	6,637438	8,149667	9,996679	12,250455	18,344355
44	3,671452	5,616515	6,936123	8,557150	10,546497	12,985482	19,628460
45	3,781596	5,841176	7,248248	8,985008	11,126554	13,764611	21,002452
46	3,895044	6,074823	7,574420	9,434258	11,738515	14,590487	22,472623
47	4,011895	6,317816	7,915268	9,905971	12,384133	15,465917	24,045707
48	4,132252	6,570528	8,271456	10,401270	13,065260	16,393872	25,728907
49	4,256219	6,833349	8,643671	10,921333	13,783849	17,377504	27,529930
50	4,383906	7,106683	9,032636	11,467400	14,541961	18,420154	29,457025

Tabelle II. v^n : Barwert des nach n Perioden fälligen Kapitals 1.

n	3%	4%	$4\frac{1}{2}$ %	5%	$5\frac{1}{2}$ %	6%	7%
1	0,970874	0,961538	0,956938	0,952381	0,947867	0,943396	0,934579
2	0,942596	0,924556	0,915730	0,907029	0,898452	0,889996	0,873439
3	0,915142	0,888996	0,876297	0,863838	0,851614	0,839619	0,816298
4	0,888487	0,854804	0,838561	0,822702	0,807217	0,792094	0,762895
5	0,862609	0,821927	0,802451	0,783526	0,765134	0,747258	0,712986
6	0,837484	0,790315	0,767896	0,746215	0,725246	0,704961	0,666342
7	0,813092	0,759918	0,734828	0,710681	0,687437	0,665057	0,622750
8	0,789409	0,730690	0,703185	0,676839	0,651599	0,627412	0,582009
9	0,766417	0,702587	0,672904	0,644609	0,617629	0,591898	0,543934
10	0,744094	0,675564	0,643928	0,613913	0,585431	0,558395	0,508349
11	0,722421	0,649581	0,616199	0,584679	0,554911	0,526788	0,475093
12	0,701380	0,624597	0,589664	0,556837	0,525982	0,496969	0,444012
13	0,680951	0,600574	0,564272	0,530321	0,498561	0,468839	0,414964
14	0,661118	0,577475	0,539973	0,505068	0,472569	0,442301	0,387817
15	0,641862	0,555265	0,516720	0,481017	0,447933	0,417265	0,362446
16	0,623167	0,533908	0,494469	0,458112	0,424581	0,393646	0,338735
17	0,605016	0,513373	0,473176	0,436297	0,402447	0,371364	0,316574
18	0,587395	0,493628	0,452800	0,415521	0,381466	0,350344	0,295864
19	0,570286	0,474642	0,433302	0,395734	0,361579	0,330513	0,276508
20	0,553676	0,456387	0,414643	0,376889	0,342729	0,311805	0,258419
21	0,537549	0,438834	0,396787	0,358942	0,324862	0,294155	0,241513
22	0,521893	0,421955	0,379701	0,341850	0,307926	0,277505	0,225713
23	0,506692	0,405726	0,363350	0,325571	0,291873	0,261797	0,210947
24	0,491934	0,390121	0,347703	0,310068	0,276657	0,246979	0,197147
25	0,477606	0,375117	0,332731	0,295303	0,262234	0,232999	0,184249
26	0,463695	0,360689	0,318402	0,281241	0,248563	0,219810	0,172195
27	0,450189	0,346817	0,304691	0,267848	0,235605	0,207368	0,160930
28	0,437077	0,333477	0,291571	0,255094	0,223322	0,195630	0,150402
29	0,424346	0,320651	0,279015	0,242946	0,211679	0,184557	0,140563
30	0,411987	0,308319	0,267000	0,231377	0,200644	0,174110	0,131367
31	0,399987	0,296460	0,255502	0,220359	0,190184	0,164255	0,122773
32	0,388337	0,285058	0,244500	0,209866	0,180269	0,154957	0,114741
33	0,377026	0,274094	0,233971	0,199873	0,170871	0,146186	0,107235
34	0,366045	0,263552	0,223896	0,190355	0,161963	0,137912	0,100219
35	0,355383	0,253415	0,214254	0,181290	0,153520	0,130105	0,093663
36	0,345032	0,243669	0,205028	0,172657	0,145516	0,122741	0,087535
37	0,334983	0,234297	0,196199	0,164436	0,137930	0,115793	0,081809
38	0,325226	0,225285	0,187750	0,156605	0,130739	0,109239	0,076457
39	0,315754	0,216621	0,179665	0,149148	0,123924	0,103056	0,071455
40	0,306557	0,208289	0,171929	0,142046	0,117463	0,097222	0,066780
41	0,297628	0,200278	0,164525	0,135282	0,111339	0,091719	0,062412
42	0,288959	0,192575	0,157440	0,128840	0,105535	0,086527	0,058329
43	0,280543	0,185168	0,150661	0,122704	0,100033	0,081630	0,054513
44	0,272372	0,178046	0,144173	0,116861	0,094818	0,077009	0,050946
45	0,264439	0,171198	0,137964	0,111297	0,089875	0,072650	0,047613
46	0,256737	0,164614	0,132023	0,105997	0,085190	0,068538	0,044499
47	0,249259	0,158283	0,126338	0,100949	0,080748	0,064658	0,041587
48	0,241999	0,152195	0,120898	0,096142	0,076539	0,060998	0,038867
49	0,234950	0,146341	0,115692	0,091564	0,072549	0,057546	0,036324
50	0,228107	0,140713	0,110710	0,087204	0,068767	0,054288	0,033948

Tabelle III.

 $\overline{s_n}$: Endwert der n mal nachschüssig zahlbaren Rente 1.

n	3%	4%	4 $\frac{1}{2}$ %	5%	5 $\frac{1}{2}$ %	6%	7%
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2,03	2,04	2,045	2,05	2,055	2,06	2,07
3	3,0909	3,1216	3,137025	3,1525	3,168025	3,1836	3,2149
4	4,183627	4,246464	4,278191	4,310125	4,342266	4,374616	4,439943
5	5,309136	5,416323	5,470710	5,525631	5,581091	5,637093	5,705739
6	6,468410	6,632975	6,716892	6,801913	6,888051	6,975319	7,153291
7	7,662462	7,898294	8,019152	8,142008	8,266894	8,393838	8,654021
8	8,892336	9,214226	9,380014	9,549109	9,721573	9,897468	10,259803
9	10,159106	10,582795	10,802114	11,026564	11,256260	11,491316	11,977989
10	11,463879	12,006107	12,288209	12,577893	12,875354	13,180795	13,816448
11	12,807796	13,486351	13,841179	14,206787	14,583498	14,971643	15,783599
12	14,192030	15,025805	15,464032	15,917127	16,385591	16,869941	17,888451
13	15,617790	16,626838	17,159913	17,712983	18,286798	18,882138	20,140643
14	17,086324	18,291911	18,932109	19,598632	20,292572	21,015066	22,550488
15	18,598914	20,023588	20,784054	21,578564	22,408664	23,275970	25,129022
16	20,156881	21,824531	22,719337	23,657492	24,641140	25,672528	27,888054
17	21,761588	23,697512	24,741707	25,840366	26,996403	28,212880	30,840217
18	23,414435	25,645413	26,855084	28,132385	29,481205	30,905653	33,999033
19	25,116868	27,671229	29,063562	30,539004	32,102671	33,759992	37,378965
20	26,870374	29,778079	31,371423	33,065954	34,868318	36,785591	40,995492
21	28,676486	31,969202	33,783137	35,719252	37,786076	39,992727	44,865177
22	30,536780	34,247970	36,303378	38,505214	40,864310	43,392290	49,005739
23	32,452884	36,617889	38,937030	41,430475	44,111847	46,995828	53,436141
24	34,426470	39,082604	41,689196	44,501999	47,537998	50,815577	58,176671
25	36,459264	41,645908	44,565210	47,727099	51,152588	54,864512	63,249038
26	38,553042	44,311745	47,570645	51,113454	54,965981	59,156383	68,676470
27	40,709634	47,084214	50,711324	54,669126	58,989109	63,705766	74,483823
28	42,930923	49,967583	53,993333	58,402583	63,233510	68,528112	80,697691
29	45,218850	52,966286	57,423033	62,322712	67,711354	73,639798	87,346529
30	47,575416	56,084938	61,007070	66,438848	72,435478	78,058186	94,360786
31	50,002678	59,328335	64,752388	70,760790	77,419429	84,801677	102,073041
32	52,502759	62,701469	68,666245	75,298829	82,677498	90,889778	110,218154
33	55,077841	66,209527	72,756226	80,063771	88,224760	97,343165	118,933425
34	57,730177	69,857909	77,030256	85,066959	94,077122	104,183755	128,258765
35	60,462082	73,652225	81,496618	90,320307	100,251364	111,434780	138,236878
36	63,275944	77,598314	86,163966	95,836323	106,765189	119,120867	148,913460
37	66,174223	81,702246	91,041344	101,628139	113,637274	127,268119	160,337402
38	69,159449	85,970336	96,138205	107,709546	120,887324	135,904206	172,561020
39	72,234233	90,409150	101,464424	114,095023	128,536127	145,058458	185,640292
40	75,401260	95,025516	107,030323	120,799774	136,605614	154,761966	199,635112
41	78,663298	99,826536	112,846688	127,839763	145,118923	165,047684	214,609570
42	82,023196	104,819598	118,924789	135,231751	154,100464	175,950545	230,632240
43	85,483892	110,012382	125,276404	142,993339	163,575989	187,507577	247,776497
44	89,048409	115,412877	131,913842	151,143006	173,572669	199,758032	266,120851
45	92,719861	121,029392	138,849965	159,700156	184,119165	212,743514	285,749311
46	96,501457	126,870568	146,098214	168,685164	195,245719	226,508125	306,751763
47	100,396501	132,945390	153,672633	178,119422	206,984234	241,098612	329,224386
48	104,408396	139,263206	161,587902	188,025393	219,368367	256,564529	353,270093
49	108,540648	145,833734	169,859357	198,426663	232,433627	272,958401	378,999000
50	112,796867	152,667084	178,503028	209,347996	246,217476	290,335905	406,528929

Tabelle IV.

 $a_{\overline{n}|}$: Barwert der n mal nachschüssig zahlbaren Rente 1.

n	3%	4%	4 $\frac{1}{2}$ %	5%	5 $\frac{1}{2}$ %	6%	7%
1	0,970874	0,961538	0,956938	0,952381	0,947867	0,943396	0,934579
2	1,913470	1,886095	1,872668	1,859410	1,846320	1,833393	1,808018
3	2,823611	2,775091	2,748964	2,723248	2,697933	2,673012	2,624316
4	3,717098	3,629895	3,587526	3,545951	3,505150	3,465106	3,387211
5	4,579707	4,451822	4,389977	4,329477	4,270284	4,212364	4,100197
6	5,417191	5,242137	5,157872	5,075692	4,995530	4,917324	4,766540
7	6,230283	6,002055	5,892701	5,786373	5,682967	5,582381	5,389239
8	7,019692	6,732745	6,595886	6,463213	6,334566	6,209794	5,971299
9	7,786109	7,435332	7,268791	7,107822	6,952195	6,801692	6,515232
10	8,530203	8,110896	7,912718	7,721735	7,537626	7,360087	7,023582
11	9,252624	8,760477	8,528917	8,306414	8,092536	7,886875	7,498674
12	9,954004	9,385074	9,118581	8,863252	8,618518	8,383844	7,942686
13	10,634955	9,985648	9,682852	9,393573	9,117079	8,852683	8,357651
14	11,296073	10,563123	10,222825	9,898641	9,589648	9,294984	8,745468
15	11,937935	11,118387	10,739546	10,379658	10,037581	9,712249	9,107914
16	12,561102	11,652296	11,234015	10,837770	10,462162	10,105895	9,446649
17	13,166118	12,165669	11,707191	11,274066	10,864609	10,477260	9,763223
18	13,753513	12,659297	12,159992	11,689587	11,246074	10,827603	10,059897
19	14,323799	13,133939	12,593294	12,085321	11,607654	11,158116	10,335585
20	14,877475	13,590326	13,007936	12,462210	11,950382	11,469921	10,594014
21	15,415024	14,029160	13,404724	12,821153	12,275244	11,764077	10,835527
22	15,936917	14,451115	13,784425	13,163003	12,583170	12,041582	11,061241
23	16,443608	14,856842	14,147775	13,488574	12,875042	12,303379	11,272187
24	16,935542	15,246963	14,495478	13,798642	13,151699	12,550358	11,469334
25	17,413148	15,622080	14,828209	14,093945	13,413933	12,783356	11,653583
26	17,876842	15,982769	15,146611	14,375185	13,662495	13,003166	11,825779
27	18,327031	16,329586	15,451303	14,643034	13,898100	13,210534	11,986709
28	18,764108	16,663063	15,742874	14,898127	14,121422	13,406164	12,137111
29	19,188455	16,983715	16,021889	15,141074	14,333101	13,590721	12,277674
30	19,600441	17,292033	16,288889	15,372451	14,533745	13,764831	12,409041
31	20,000428	17,588494	16,544391	15,592811	14,723929	13,929086	12,531814
32	20,388766	17,873552	16,788891	15,802677	14,904198	14,084043	12,646555
33	20,765792	18,147466	17,022862	16,002549	15,075069	14,230230	12,753790
34	21,131837	18,411198	17,246758	16,192904	15,237033	14,368141	12,854009
35	21,487220	18,664613	17,461012	16,374194	15,390552	14,498246	12,947672
36	21,832253	18,908282	17,666041	16,546852	15,536068	14,620987	13,035208
37	22,167235	19,142579	17,862240	16,711287	15,673999	14,736780	13,117017
38	22,492462	19,367864	18,049990	16,867893	15,804738	14,846019	13,193473
39	22,808215	19,584485	18,229656	17,017041	15,928662	14,949075	13,264928
40	23,114772	19,792774	18,401584	17,159086	16,046125	15,046297	13,331709
41	23,412400	19,993052	18,566109	17,294368	16,157464	15,138016	13,394120
42	23,701359	20,185627	18,723550	17,423208	16,262999	15,224543	13,452449
43	23,981902	20,370795	18,874210	17,545912	16,363032	15,306173	13,506962
44	24,254274	20,548841	19,018383	17,662773	16,457851	15,383182	13,557908
45	24,518713	20,720040	19,156347	17,774070	16,547726	15,455832	13,605522
46	24,775449	20,884654	19,288371	17,880067	16,632915	15,524370	13,650020
47	25,024708	21,042936	19,414709	17,981016	16,713664	15,589028	13,691608
48	25,266707	21,195131	19,535607	18,077158	16,790203	15,650027	13,730474
49	25,501657	21,341472	19,651298	18,168722	16,862751	15,707572	13,766799
50	25,729764	21,482185	19,762008	18,255925	16,931518	15,761861	13,800746

Tabelle V.

 J_n : Für die Schuld 1 n mal nachschüssig zahlbare Annuität.

n	3%	4%	4 $\frac{1}{2}$ %	5%	5 $\frac{1}{2}$ %	6%	7%
1	1,03	1,04	1,045	1,05	1,055	1,06	1,07
2	0,522611	0,530196	0,533998	0,537805	0,541618	0,545437	0,553092
3	0,353530	0,360349	0,363773	0,367209	0,370654	0,374110	0,381052
4	0,269027	0,275490	0,278744	0,282012	0,285294	0,288591	0,295228
5	0,218355	0,224627	0,227792	0,230975	0,234176	0,237396	0,243891
6	0,184598	0,190762	0,193878	0,197017	0,200179	0,203363	0,209796
7	0,160506	0,166610	0,169701	0,172820	0,175964	0,179135	0,185553
8	0,142456	0,148528	0,151610	0,154722	0,157864	0,161036	0,167468
9	0,128434	0,134493	0,137574	0,140690	0,143839	0,147022	0,153486
10	0,117231	0,123291	0,126379	0,129505	0,132668	0,135868	0,142378
11	0,108077	0,114149	0,117248	0,120389	0,123571	0,126793	0,133357
12	0,100462	0,106552	0,109666	0,112825	0,116029	0,119277	0,125902
13	0,094030	0,100144	0,103275	0,106456	0,109684	0,112960	0,119651
14	0,088526	0,094669	0,097820	0,101024	0,104279	0,107585	0,114345
15	0,083767	0,089941	0,093114	0,096342	0,099626	0,102963	0,109795
16	0,079611	0,085820	0,089015	0,092270	0,095583	0,098952	0,105858
17	0,075953	0,082199	0,085418	0,088699	0,092042	0,095445	0,102425
18	0,072709	0,078993	0,082237	0,085546	0,088920	0,092357	0,099413
19	0,069814	0,076139	0,079407	0,082745	0,086150	0,089621	0,096753
20	0,067216	0,073582	0,076876	0,080243	0,083679	0,087185	0,094393
21	0,064872	0,071280	0,074601	0,077996	0,081465	0,085005	0,092289
22	0,062747	0,069199	0,072546	0,075971	0,079471	0,083046	0,090406
23	0,060814	0,067309	0,070682	0,074137	0,077670	0,081278	0,088714
24	0,059047	0,065587	0,068987	0,072471	0,076036	0,079679	0,087189
25	0,057428	0,064012	0,067439	0,070952	0,074549	0,078227	0,085811
26	0,055938	0,062567	0,066021	0,069564	0,073193	0,076904	0,084561
27	0,054564	0,061239	0,064719	0,068292	0,071952	0,075697	0,083426
28	0,053293	0,060013	0,063521	0,067123	0,070814	0,074593	0,082392
29	0,052115	0,058880	0,062415	0,066046	0,069769	0,073580	0,081449
30	0,051019	0,057830	0,061392	0,065051	0,068805	0,072649	0,080586
31	0,049999	0,056855	0,060443	0,064132	0,067917	0,071792	0,079797
32	0,049047	0,055949	0,059563	0,063280	0,067095	0,071002	0,079073
33	0,048156	0,055104	0,058745	0,062490	0,066335	0,070273	0,078408
34	0,047322	0,054315	0,057982	0,061755	0,065630	0,069598	0,077797
35	0,046539	0,053577	0,057270	0,061072	0,064975	0,068974	0,077234
36	0,045804	0,052887	0,056606	0,060434	0,064366	0,068395	0,076715
37	0,045112	0,052240	0,055984	0,059840	0,063800	0,067857	0,076237
38	0,044459	0,051632	0,055402	0,059284	0,063272	0,067358	0,075795
39	0,043844	0,051061	0,054856	0,058765	0,062780	0,066894	0,075387
40	0,043262	0,050523	0,054343	0,058278	0,062320	0,066462	0,075009
41	0,042712	0,050017	0,053862	0,057822	0,061891	0,066059	0,074660
42	0,042192	0,049540	0,053409	0,057395	0,061489	0,065683	0,074336
43	0,041698	0,049090	0,052982	0,056993	0,061113	0,065333	0,074036
44	0,041230	0,048665	0,052581	0,056616	0,060761	0,065006	0,073758
45	0,040785	0,048262	0,052202	0,056262	0,060431	0,064701	0,073500
46	0,040363	0,047882	0,051845	0,055928	0,060122	0,064415	0,073260
47	0,039961	0,047522	0,051507	0,055614	0,059831	0,064148	0,073037
48	0,039578	0,047181	0,051189	0,055318	0,059559	0,063898	0,072831
49	0,039213	0,046857	0,050887	0,055040	0,059302	0,063664	0,072639
50	0,038866	0,046550	0,050602	0,054777	0,059061	0,063444	0,072460

Tabelle VI. Einfach abgestufte Sterbetafel (4%).

x	l_x	D_x	N_x	C_x	M_x	x
20	1000 000	456 387	9 351 570	1 434,99	96 711,20	20
21	996 730	437 399	8 895 183	1 375,15	95 276,21	21
22	993 471	419 200	8 457 784	1 322,26	93 901,06	22
23	990 212	401 755	8 038 584	1 271,02	92 578,80	23
24	986 954	385 032	7 636 829	1 225,51	91 307,78	24
25	983 687	368 997	7 251 797	1 185,22	90 082,27	25
26	980 401	353 620	6 882 800	1 145,88	88 897,05	26
27	977 097	338 873	6 529 180	1 111,15	87 751,17	27
28	973 765	324 729	6 190 307	1 083,48	86 640,02	28
29	970 386	311 156	5 865 578	1 065,24	85 556,54	29
30	966 931	298 123	5 554 422	1 057,77	84 491,30	30
31	963 363	285 599	5 256 299	1 062,70	83 433,53	31
32	959 635	273 552	4 970 700	1 078,56	82 370,83	32
33	955 700	261 952	4 697 148	1 105,86	81 292,27	33
34	951 504	250 771	4 435 196	1 145,44	80 186,41	34
35	946 984	239 980	4 184 425	1 193,00	79 040,97	35
36	942 088	229 557	3 944 445	1 240,60	77 847,97	36
37	936 793	219 488	3 714 888	1 287,28	76 607,37	37
38	931 079	209 759	3 495 400	1 327,02	75 320,09	38
39	924 953	200 364	3 285 641	1 364,08	73 993,07	39
40	918 404	191 293	3 085 277	1 396,14	72 628,99	40
41	911 433	182 540	2 893 984	1 421,78	71 232,85	41
42	904 050	174 097	2 711 444	1 446,35	69 811,07	42
43	896 239	165 955	2 537 347	1 472,80	68 364,72	43
44	887 967	158 099	2 371 392	1 501,92	66 891,92	44
45	879 194	150 517	2 213 293	1 535,52	65 390,00	45
46	869 866	143 192	2 062 776	1 573,80	63 854,48	46
47	859 923	136 111	1 919 584	1 614,94	62 280,68	47
48	849 312	129 261	1 783 473	1 656,73	60 665,74	48
49	837 991	122 633	1 654 212	1 696,85	59 009,01	49
50	825 932	116 219	1 531 579	1 734,28	57 312,16	50
51	813 114	110 015	1 415 360	1 769,71	55 577,88	51
52	799 511	104 014	1 305 345	1 804,22	53 808,17	52
53	785 088	98 209,0	1 201 331,1	1 836,70	52 003,95	53
54	769 818	92 595,0	1 103 122,1	1 868,76	50 167,25	54
55	753 660	87 164,9	1 010 527,1	1 899,98	48 298,49	55
56	736 575	81 912,5	923 362,2	1 930,41	46 398,51	56
57	718 522	76 831,6	841 449,7	1 958,46	44 468,10	57
58	699 474	71 918,0	764 618,1	1 983,29	42 509,64	58
59	679 413	67 168,7	692 700,1	2 004,73	40 526,35	59
60	658 324	62 580,5	625 531,4	2 023,60	38 521,62	60
61	636 185	58 150,0	562 950,9	2 037,52	36 498,02	61
62	613 002	53 875,9	504 800,9	2 043,67	34 460,50	62
63	588 819	49 760,1	450 925,0	2 037,79	32 416,83	63
64	563 741	45 808,5	401 164,9	2 019,57	30 379,04	64
65	537 893	42 027,0	355 356,4	1 989,00	28 359,47	65
66	511 418	38 421,6	313 329,4	1 950,28	26 370,47	66
67	484 420	34 993,6	274 907,8	1 907,50	24 420,19	67
68	456 958	31 740,2	239 914,2	1 863,19	22 512,69	68
69	429 061	28 656,2	208 174,0	1 818,82	20 649,50	69
70	400 739	25 735,2	179 517,8	1 771,53	18 830,68	70

Tabelle VI. Einfach abgestufte Sterbetafel (4%). (Fortsetzung.)

x	l_x	D_x	N_x	C_x	M_x	x
71	372 050	22 973,9	153 782,6	1 715,98	17 059,15	71
72	343 149	20 374,3	130 808,7	1 646,78	15 343,17	72
73	314 304	17 943,9	110 434,4	1 563,90	13 696,39	73
74	285 815	15 689,8	92 490,5	1 472,72	12 132,49	74
75	257 914	13 613,6	76 800,7	1 375,78	10 659,77	75
76	230 807	11 714,3	63 187,1	1 274,84	9 283,99	76
77	204 684	9 988,88	51 472,82	1 171,09	8 009,15	77
78	179 727	8 433,59	41 483,94	1 065,41	6 838,06	78
79	156 114	7 043,81	33 050,35	958,750	5 772,647	79
80	134 015	5 814,15	26 006,54	852,668	4 813,897	80
81	113 575	4 737,86	20 192,39	748,720	3 961,229	81
82	94 908,9	3 806,91	15 454,53	647,762	3 212,509	82
83	78 113,8	3 012,73	11 647,62	551,040	2 564,747	83
84	63 255,0	2 345,82	8 634,89	460,547	2 013,707	84
85	50 339,6	1 795,05	6 289,07	377,911	1 553,160	85
86	39 317,7	1 348,10	4 494,02	304,049	1 175,249	86
87	30 095,3	992,197	3 145,916	239,481	871,200	87
88	22 540,8	714,554	2 153,719	184,369	631,719	88
89	16 492,2	502,703	1 439,165	138,490	447,350	89
90	11 767,0	344,878	936,462	101,301	308,860	90
91	8 172,42	230,312	591,584	72,0279	207,5588	91
92	5 514,34	149,426	361,272	50,1467	135,5309	92
93	3 589,73	93,5322	211,8464	33,8954	85,3842	93
94	2 236,80	56,0394	118,3142	22,0472	51,4888	94
95	1 321,59	31,8368	62,2748	13,6601	29,4416	95
96	731,857	16,9522	30,4380	8,00339	15,78149	96
97	372,515	8,29678	13,48577	4,39386	7,77810	97
98	167,345	3,58381	5,18899	2,15787	3,38424	98
99	62,5536	1,28811	1,60518	0,92149	1,22637	99
100	16,0137	0,31707	0,31707	0,30488	0,30488	100

Namen- und Sachverzeichnis.

(Die Zahlen verweisen auf die betreffenden Seiten.)

- Abderhalden, E. 181.
Abschreibung 77ff.; — gleichbleibende 79; — degressive 80; — progressive 84.
Abzahlungsgeschäft 32.
Abzinsungsfaktor 38, 208.
Additionssatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung 149, 160.
Äquivalenzziffer 116.
Aereboe, F. 203.
Agio 96.
Aktie 17ff.
Alternative Statistik 158, 164.
Anlagekosten elektrischer Großkraftwerke 132.
Anleihentilgung 70.
Annuität 52, 63, 211.
Annuitätenanleihe 70ff.; Kurs der — 92ff.
Arbitrage 5ff., 27.
Arbitragendiagramm 9.
Arithmetisches Mittel 161.
Arnaudau, A. 36.
Aufgeld 68ff., 72, 95, 99.
Aufzinsungsfaktor 36, 207.
Ausgleichung von Fehlern 161, 173; — von Wirtschaftsreihen 174ff., 194ff.
Auslosung 70ff., 87, 157.
Auszahlung 2; s. Devisе.
- Barwert bei einfachem Zins 22ff.; — bei Zinseszins 33ff., 208; — einer Rente 43ff., 210.
Baulebensversicherung 76.
Baumwollpreise 175, 179, 182.
Bausparkasse 73ff.
Becker, R. 167, 171.
Bernoulli 153, 158, 165, 166, 172.
Beschäftigungsgrad 118, 122.
Betriebskoeffizient 206.
Betriebskosten einer mittleren Dampfmaschinenanlage 123; — verschiedener Motoren 132.
- Betriebsstatistik 114.
Beyrodt, E. 36, 92.
Bilanz 77, 114.
Binomialverteilung 150ff., 154ff.
Blaschke, E. 165.
Blechwalzwerk 116.
Bock, A. P. 196, 206.
Börse 2, 17, 86.
Brasch, H. D. 145.
Buchwert 78.
Budgetierung 146.
- Cournot, A. 122.
Courtage 19.
Czuber, E. 155.
- Damnum 53.
Deckungsfonds 61.
Degressive Kosten 118.
Degressiver Tarif 100.
Devisе 3ff., 26ff.
Devisenarbitrage 5ff., 27.
Differentialkosten 120; s. Stückkosten, partielle.
Differenz-Arbitragengeschäft 7.
Disagio 96.
Diskont 2, 24ff.
Disparitäten bei Tarifen 102, 104.
Dispersion 158.
Dividende 17ff.
Dollar-Mark-Relation 163.
Donner, O. 175.
Doppelt-logarithmisches Papier 4, 111, 179ff.
Dreimärktebarometer 202.
- Effekten 17ff., 202.
Effektiver Jahreszinssatz 41.
Effektivverzinsung 18, 87ff.
Einfach-logarithmisches Papier 34, 67.
Elektrizitätstarif 106.
Elektroapparate-Verbreitung 186.
Emission von Anleihen 21.

- Endwert bei einfachem Zins 22; — bei Zinseszins 33ff., 207; — bei gemischter Verzinsung 36; — einer Rente 43ff., 209; — bei Abschreibungen 78.
 Erbbaurecht 54.
 Erlebenswahrscheinlichkeit 56.
 Ertragswert 78; — von Grundstücken 85.
 Eulersche Tilgungsformel 63.
 Ewige Rente 21, 45, 88, 97.

 Fehlerfunktion 159ff.
 Feilen, J. F. 205.
 Feuerschäden und Konjunktur 183.
 Fixe Kosten 105, 122, 132, 135.
 Förster, E. 36, 92.
 Fonds 17ff.
 Ford 113, 134.

 Galton 154.
 Gastarif 108.
 Gauß, C. F. 83, 159.
 Geldmacher, E. 116.
 Gemeinschaftskosten 115.
 Gemischte Verzinsung 36.
 Genauigkeitsmaß 160, 163.
 Generalunkosten 115.
 Gesetz der großen Zahlen 153.
 Gewinndreieck 125.
 Gewinnmaximum 117, 136, 138ff.
 Gewinnsatz 117, 128.
 Gliedziffernmethode 191.
 Glover, S. W. 36.
 Glühlampenstatistik 167, 171ff.
 Goldpunkte 11.
 Grodzinski, P. 122, 134.
 Güterverkehr 181.
 Gundelfinger, S. 83.
 Guyer, I. 15.

 Hammerwerk 116.
 Hänig, C. 66.
 Hanau, A. 203, 204.
 Harvardinstitut 190, 202.
 Hildebrandt, A. 124, 125, 126.
 Hoffmannsche Formel 24.
 Hysteresiserscheinungen 145.

 Indirekte Devisenausgleichsarbitrage 8ff.
 Interpolation 39.
 Ist-Kurve 145.
 Kalkulation 77, 114, 127ff.
 Kaltenboeck, B. 73.
 Kapazität eines Unternehmens 132.
 Kapitalkosten 123, 132.
 Kapitalsparversicherung 51ff.
 Kapitalversicherung auf den Erlebensfall 57.
 Kellerer, H. 181, 206.
 Kettenziffern 193.
 Köhler, H. 66.
 Kollektiv 164, 168, 171.
 Kombinatorik 148.
 Konformer Zinssatz 41.
 Konjunkturanalyse 190ff.
 Konjunkturbedingte Kosten- und Preisentwicklung 146.
 Kontinuierliche zusammengesetzte Verzinsung 40, 46, 49.
 Kontinuierlich fließende Rente 46ff.
 Kontokorrent 15ff.
 Konvertierung von Anleihen 97.
 Korrelation 181ff.; — von Zeitreihen 199ff.
 Kostenanalyse 115, 130, 146.
 Kostenkehre 119, 138, 140.
 Krahn, A. 73.
 Kraitchik, M. 94.
 Kreditverkehr 1ff.
 Kritischer Punkt 125.
 Kunstseidenspinnerei 136.
 Kurs 3ff., 18ff., 86ff.
 Kursabschlag 20, 88.
 Kursnomogramm 91, 93.
 Kursparität 4ff., 19ff., 26, 94.
 Kurszettel 3, 18, 163.

 Laplace 153.
 Langenbeck, O. 14.
 Lebensdauer 78, 89.
 Lehmann, M. A. 119, 133, 145.
 Leihdauer 13.
 Leitner, F. 113, 116, 137, 139.
 Lewin, C. M. 82, 83.
 Lexis 166, 172.
 Linearer Kostenanstieg 122ff.
 Lineares Preisgesetz 139ff.
 Lineare Stückkostensenkung 132ff.
 Lineartarif 104.
 Loos, H. 111.
 Lorenz, P. 197, 200.
 Lorey, W. 36, 92.
 Lotterianleihen 72, 96.
 Lübben, H. 66.

- M**achts, H. 115, 146.
 Mantel 17.
 Marktforschung 147, 186.
 Marktzinssatz 87.
 Massenfabrikation 170ff.
 Mathematische Lebensdauer 89.
 Methode der kleinsten Quadrate 161, 173ff.
 Mise 55.
 Mises, R. v. 153.
 Mitscherlich, A. 169.
 Mittlerer Zahlungstermin 30ff., 39.
 Moldenhauer, P. 189.
 Müller-Bernhardt, H. 129ff., 177.
 Multiplikationssatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung 150.
 Murai, H. 36, 66.
- Nennwert 17.
 Nettokurs 20, 87.
 Nominalzinsfuß 18, 87.
 Normale Häufigkeitsverteilung 154, 164, 170.
 Noten 1.
- O**bligation 17ff., 70.
- P**apierfabrik 124.
 Pareto 111.
 Parikurs 18, 21, 97.
 Paritätstabelle 5.
 Pearson 154.
 Peiser, H. 143, 144, 146.
 Pereire, E. 166.
 Periodische Werte 198.
 Persons, M. 190, 191.
 Phasenunterschied korrelierter Zeitreihen 202.
 Plaut, H. 167, 171.
 Police 55.
 Polya 147.
 Postnumerando-Zinsberechnung 22, 28.
 Prämie 51, 55, 61.
 Prämienanleihe 72, 96.
 Prämienreserve 61ff.
 Pränumerando-Verzinsung 23, 28.
 Präzision 160.
 Preis-Absatz-Funktion 175, 179.
 Privatwirtschaftlicher Konjunkturdienst 147, 203ff.
 Produktivlöhne, Lohnstunden 122.
 Progressive Kosten 119.
 Progressiver Tarif 100.
- Proportionale Kosten 115, 120, 126, 131.
 Provision 16, 19, 28.
- Q**ualitative Statistik 166.
 Quotiententarif 103.
- R**athenau, K. 132.
 Regressionsgerade 183.
 Regressive Kosten 121.
 Reichsbahn 181, 205.
 Reichskuratorium für Wirtschaftlichkeit 114.
 Relative Häufigkeit 158.
 Remanenzerscheinungen 145.
 Rentabilität 19ff., 87ff.
 Rente in unterjährigen Raten 52.
 Rentenrechnung 43ff.
 Rentenversicherung 58, 61.
 Reuttlinger, E. 123.
 Riebesell, P. 99, 187, 189.
 Rimesse 2.
 Roheisengewinnung und Einfuhrvolumen 200ff.
 Runge, I. 167, 171.
- Saisonschwankung 191ff.
 Saldo 15.
 Schäfer, E. 186, 187.
 Scheckverkehr 1.
 Schiebuhr, F. 124.
 Schinkenberger, G. 92.
 Schmalenbach, E. 83, 84, 113, 119, 121.
 Schuldtilgung 63, 73.
 Schuldverschreibung 17, 70, 87.
 Schweinepreise 203ff.
 Schwerdt, H. 180.
 Selbstaulesse 61.
 Selbstkosten 114, 178.
 Serienstreuung 171.
 Sichtwechsel 26.
 Soll-Kurve 146.
 Sommerarbeitslöhne landwirtschaftlicher Arbeiter 169.
 Spitzer, S. 36, 92.
 Standardabweichung 175, 185, 199.
 Statistik, Alternative 158, 164.
 — Qualitative 166.
 Steinkohlenbrikett-Produktion 192ff.
 Stempelgebühr 19.
 Sterbenswahrscheinlichkeit 56, 165.
 Sterbetafel 56, 212.
 Stetiger Tarif 101.

- Steuernagel, K. 206.
 Steuertarif 104, 109, 110.
 Stillstandskosten 118, 129ff.
 Stirlingsche Formel 152, 155.
 Stochastische Verbundenheit 182.
 Straßenschema von Polya 147.
 Streuung, lineare 167; — quadratische 158, 162.
 Strichbild 191.
 Strukturelle Betriebsänderungen 132ff., 144.
 Stückkosten, durchschnittliche 117, 132ff., 143; — partielle 120, 124, 132ff., 144.
 Stückkostenminimum 117ff., 136, 138ff., 144.
 Stückpreis 114, 140.
 Stückzinsen 20, 87.
 Stufentarif 101.

Tarifquotient 100.
Tarifwesen 99ff.
Teilstreckentarif 112.
Textilindustrie 139.
Theimer, P. 4.
Tilgungsfonds 65.
Tilgungsfuß 66.
Tilgungshypothek 54, 63.
Tilgungsplan 63ff., 76.
Todesfallversicherung 59, 60.
Toleranz 12.
Trassat 2.
Trend 174ff., 183, 194ff.

Überweisungsverkehr 1.
Umsatzmaximum 117, 141.
Unkostenempfindlichkeit 127.
Unkostensatz 117, 127.
- Unterjährige zusammengesetzte Verzinsung 40ff.
 Urbahn, K. 123.
 Urwert 78.

Valuta 1.
Verein deutscher Maschinenbauanstalten 114.
Versicherungsrechnung 55, 165.
Verteilungstafel, primäre, sekundäre 168.
Violeine, P. A. 36, 38.
Vogler 117.
Voigt, A. 99.

Waffenschmidt, G. 122, 134, 142.
Wagemann, E. 200, 205.
Wahrscheinlichkeit a priori 147ff.; — statistische 153, 160.
Wechsel 2ff., 26ff.
Werkmeister, P. 177.
Werkstoffkosten 115.
Wiederbeschaffungswert 77, 114.
Wilbert, H. 136.
Wirth, W. 181.
Wulfetang, E. 66.

Zahlungsmittel 1.
Zahlungstermin, mittlerer 30, 39.
Zentralordinate 171.
Zentralwert 193.
Zinseszinsnomogramm 34.
Zins, einfacher 12; — zusammengesetzter 33; — gemischter 36.
Zinsanleihe 88.
Zinsdivisor, Zinsfaktor, Zinszahl 14ff.
Zinstabellen 14.
Zyklische Werte 198.