

# Einführung in die klassische Elektrodynamik

von

**Dr. Johannes Fischer**

Dozent

Mit 120 Abbildungen



**Berlin**  
Verlag von Julius Springer  
1936

**Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung  
in fremde Sprachen, vorbehalten.**

ISBN-13: 978-3-642-89680-4

e-ISBN-13: 978-3-642-91537-6

DOI: 10.1007/978-3-642-91537-6

**Copyright 1936 by Julius Springer in Berlin.**

## Vorwort.

Diese Schrift ist mit Bedacht eine Einführung, nicht ein Lehrbuch genannt. Es soll damit ausgedrückt sein, daß für die Darstellung didaktische Gesichtspunkte besonders stark bestimmend waren. Ein Lehrbuch wird, sofern man von einem solchen in erster Linie erwartet, daß es alle zum Gegenstand gehörenden Gedanken in möglichster Vollständigkeit übermittelt, dieser Aufgabe Fragen der Methodik manchmal unterordnen müssen. So sehr es aber einerseits fraglich erscheint, ob es gegenwärtig nützlich wäre, die Anzahl der Lehrbücher der Elektrizitätslehre zu vermehren, so sehr sieht andererseits der Verfasser eine gewisse Rechtfertigung seiner Arbeit in der Erfahrung, daß das Vertrautwerden mit der Feldvorstellung dem Lernenden sehr häufig Schwierigkeiten bereitet. Das ist auch ganz natürlich so, handelt es sich doch hierbei um das Eintreten in eine Gedankenwelt, die zunächst sehr weit entfernt zu sein scheint von dem von Jugend an vertraut und fast unbewußtes Eigentum gewordenen Erfahrungs- und Vorstellungskreis der mechanischen Körperwelt. Entsprechender Sorgfalt bedarf auch die Art der mathematischen Darstellung. Hier ist die Aufgabe der Einführung nicht immer dankbar. Einerseits muß sie wohl auf eine den Lernenden leicht blendende „Eleganz“ der Rechnung Verzicht leisten, andererseits darf sie nicht durch eine dem Lernenden an sich bequeme Weitläufigkeit der Umformungen den Blick vom Ziel ablenken. In der Tatsache, daß die mathematische Prägung der Elektrodynamik durch ihre Kürze, Klarheit und Folgerichtigkeit so reizvoll ist, liegt die Gefahr einer einseitigen Einschätzung verborgen, als sei mit der Aneignung der mathematischen Ausdrucksweise auch der Gedankeninhalt erschöpft. Hier gilt die beherzigenwerte Mahnung Emdes: „Bekanntlich ist es sehr leicht, sich die allgemeinen Gleichungen der Elektrodynamik anzueignen. Aber die Bedeutung dieser Gleichungen im Fall einfacher Experimente und allgemein bekannter Erscheinungen richtig zu erkennen, hat oft nicht nur Anfängern Schwierigkeiten gemacht.“

Es gehört wohl sicher zu den Aufgaben einer Einführung, daß der Lernende das Wesen und den Wert einer naturwissenschaftlichen Theorie nicht etwa in der Sammlung der wichtigeren Berechnungen erblickt, die zu dem betrachteten Gebiet angestellt werden können, sondern vornehmlich in der methodischen Ordnung der Vorstellungen, in der Bildung und Begrenzung der Begriffe und in der bündigen, quantitativen Darstellung der Gesetze. Bei Goethe finden wir hierzu das Wort: „Kein Phänomen erklärt sich an und aus sich selbst; nur viele zusammen überschaut, methodisch geordnet, geben zuletzt etwas, was für Theorie gelten könnte.“

Ein Wort zur Bezeichnung. Die Schrift soll einführen in die quantitative Darstellung der elektromagnetischen Erscheinungen im Großen. Wenn diese elektromagnetische Feldtheorie hier abkürzend „klassische Elektrodynamik“ genannt ist, so soll damit nicht im mindesten ein Werturteil nach irgendeiner Seite hin angedeutet, noch auch irgendein Zwiespalt künstlich konstruiert werden — etwa zwischen klassisch und modern —, sondern es soll damit lediglich ausgesprochen sein, daß nach unserem gegenwärtigen Wissen die Kenntnis dieses Gebietes im wesentlichen abgeschlossen ist, und sein Inhalt samt den zu ziehenden Folgerungen einen wohl-bekanntem und abgegrenzten Platz einnimmt auf dem weiten Felde der Naturbeschreibung.

Zum Gegenstande selbst sei noch bemerkt:

Zum heutigen Bestand der Elektrodynamik gehören ohne jeden Zweifel Begriffe, die aus Bedürfnissen der Elektrotechnik heraus geprägt und entwickelt worden

sind. Um eines von vielen Beispielen zu nennen, sei das Gesetz von Biot und Savart der Abschätzung des magnetischen Kreises nach Hopkinson gegenübergestellt: Dort eine Elementarregel zur Bestimmung eisenfreier Felder, hier eine Anwendung des Durchflutungsgesetzes in einem von Maxwell ausdrücklich hervorgehobenen Sinn, veranlaßt durch die Technik, und heute ein unentbehrlicher Grundpfeiler der Berechnung elektrischer Maschinen. Ganz ebenso verhält es sich mit dem Begriff der Streuung. Es ist darum berechtigt, wenn der Elektrotechniker nach diesen Leistungen eine „eisenfreie“ Elektrodynamik der quasistationären Vorgänge für unvollständig hält. — Das Bedürfnis der Elektrotechnik, das Wesen des Induktionsvorganges vollständig und klar zu erkennen, war es zweifellos, das Emde dazu veranlaßte, in seinen berühmten Arbeiten die Vorstellungen über den Induktionsvorgang im Sinne der Feldtheorie weiter zu entwickeln und damit dieser an einer bei ihrem Schöpfer etwas kurz wegkommenen Stelle einen letzten Baustein einzufügen. — Das praktische Miesche Maßsystem hätte sich nicht so schnell in der Elektrotechnik eingebürgert, wenn es nicht in so hohem Maße der messenden Elektrotechnik und Physik entgegenkäme, und die erstmals von Wallot erhobene Forderung nach einheitenfreier, maßunabhängiger Auffassung von Gleichungen entsprang nicht zuletzt dem praktischen Bedürfnis der Zahlenrechnung im Hinblick auf die Unzahl der erfundenen und erdenkbaren elektromagnetischen Einheiten.

Dieser Wechselwirkung zwischen physikalischer und elektrotechnischer Begriffsbildung will diese Schrift an den entscheidenden Stellen Rechnung tragen.

Wenn wirklich eine Einführung in erhöhtem Maße es mit Fragen der Methodik zu tun hat, so seien die folgenden Einzelheiten hierzu erwähnt:

In einer Elektrodynamik sollte wohl auch deren Schöpfer zu Worte kommen. Worte Maxwells sind entweder nach der alten Übersetzung, oder nach der auszugsweisen Übertragung Emdes angeführt<sup>1</sup>.

An den Anfang der Einführung wurde nicht das Feld stationärer Strömung gestellt, sondern das elektrostatische Feld im leeren Raum. Mag das erste auch hinsichtlich gewisser Benennungen der Vektorenrechnung, wie „Fluß“ eines Vektors, der Vorstellung entgegenkommen, so bietet doch das statische Feld den erheblichen Vorteil, daß die Begriffsbildungen auf sehr einfache Gedankenexperimente gestützt werden können (man denke an die Wirbelfreiheit und an die Gleichung  $\mathfrak{R} = Q \mathfrak{E}$ ); die im Innern der Materie vorstatten gehende Strömung ist dagegen dem unmittelbaren Experiment entzogen. Daß es einerseits für die Feldtheorie unerheblich ist, im einzelnen den Vorgang und das Wesen dessen, was nun eigentlich fließt, zu kennen, und daß andererseits unsere Formulierungen der Zustandsgrößen im Innern der Stoffe letztlich der zweckmäßigen Definition entspringen, braucht nicht verheimlicht zu werden.

Das grundsätzliche Fehlen mechanischer Erklärungen oder Hilfstheorien pflegt dem Anfänger hinsichtlich des „Verschiebungsstromes im leeren Raum“ besonders schmerzlich zu fallen. Wenn man aber im Bewußtsein dieser Schwierigkeit den Verschiebungsstrom zu einer Rechengröße degradiert, die bequem und widerspruchlos ist, so hat man vergessen, daß die Elektrodynamik beschreibt, nicht erklärt, und nur eine Besinnung hierauf hilft weiter. Vom Standpunkt einer beschreibenden Feldtheorie aus kann es gar nicht entschieden werden, ob das magnetische Feld des Leitungsstromes oder des Verschiebungsstromes die unerklärlichere und wunderbarere Tatsache ist.

Damit hängt zusammen, daß das Wort „Äther“ ganz aus dem Spiel bleibt. Mit ihm verbindet sich dem Lernenden nur allzu leicht die Vorstellung des raumerfüllenden, hypothetischen Mittels der verlassenen elastischen (mechanischen) Lichttheorie. Wenn Lorentz definiert: „Äther ist das genannt, was man sich, bei Abwesenheit ponderabler Materie, als Träger der in den elektromagnetischen Feldgleichungen vorkommenden Zustandsgrößen vorstellt“ (Enz. d. math. Wiss. Bd. 5 T. 2 S. 69), so ist in diesem Sinne das Wort eine der Verständigung nützliche Abkürzung, ähnlich wie das Wort von der „induzierten EMK“ eine abgekürzte Redeweise über den Induktionsvorgang vorstellt; indessen brauchen wir hier doch überhaupt nicht mehr als Maxwells klassische Formulierung: „Das elektrische Feld ist der Raum, der einen elektrisch geladenen Körper umgibt, auf seine elektrischen Eigenschaften hin betrachtet. Er kann mit Luft oder anderen Körpern erfüllt sein, er kann aber auch ein sogenanntes Vakuum sein, das heißt ein Raum, aus dem alle Stoffe entfernt sind, auf die wir mit uns zur Verfügung stehenden Mitteln einwirken können.“

Zu der Frage, ob im leeren Raum  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{D}$  einerseits,  $\mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{B}$  andererseits wesensgleich oder wesensverschieden seien, wurde früher häufig bemerkt, daß die Physik diese Felder als wesensgleich auffasse, während die Elektrotechnik zur ursprünglichen Darstellung Maxwells neige, sie als wesensverschieden zu betrachten (je nachdem erscheint dann das Gaußsche oder

<sup>1</sup> Auszüge aus J. C. Maxwells Elektrizität und Magnetismus, übersetzt von H. Barkhausen, herausgegeben von F. Emde, Braunschweig 1915.

das Miesche Maßsystem besonders einleuchtend). Diese Fragestellung trifft aber offenbar den Kern der Sache nicht. Es handelt sich einerseits, um mit Mie zu sprechen, zunächst darum, die unleugbare Tatsache anzuerkennen, daß es für das elektrische Feld zwei grundsätzlich verschiedene Meßverfahren gibt, und ebenso für das magnetische Feld. In beiden Fällen haben die beiden Meßverfahren zu zwei grundsätzlich verschiedenen, gleichberechtigten Definitionen geführt. Es genügt weiter die Feststellung, daß wir z. B. für das elektrische Feld bei Anwesenheit nichtleitender Materie, und nur dann, zur vollständigen Beschreibung der Erscheinungen nötig haben entweder zwei Arten von Feldvektoren und eine Sorte Elektrizität, oder eine Art von Feldvektoren und zwei verschiedene Sorten Elektrizität (wobei die Verschiedenheit der Dimensionen beider Sorten lediglich bei gewissen absoluten Einheiten verschwindet, nicht aber bei anderen). Der Unterschied in beiden Auffassungen „trifft wohl mehr die Ausdrucksweise, als die Sache. Er ist mehr philologischer, als physikalischer Natur“ (Emde).

Von manchen anderen Einzelheiten sei schließlich nur noch bemerkt: Wir halten es gegenwärtig für einen einleuchtenden und erfolgreichen Weg, wenn der Lernende in der Experimentalphysik die Definitionen der magnetischen Vektoren aus jenen Messungen gewinnt, durch welche sie an die elektrischen Größen angeschlossen werden können (§ als Strom/Längeneinheit,  $\mathfrak{B}$  als Spannungstoß/Flächeneinheit). Hier, wie auch an manchen anderen Stellen, erhebt sich aber die Frage, ob der methodische Weg einer Einführung in die Theorie Schritt für Schritt mit dem der Experimentalphysik übereinstimmen müsse. Für die Einführung der magnetischen Vektoren in die theoretische Darstellung hat sich der Verfasser von der Überlegung bestimmen lassen, daß mit dem gekennzeichneten Vorgehen wesentliche Ergebnisse der Theorie, nämlich die Gesetze der Verknüpfung zwischen elektrischen und magnetischen Zustandsgrößen, zum Zwecke der Definition vorweggenommen werden. Hierzu ist man aber von seiten der theoretischen Begriffsbestimmung nicht genötigt; die Leistung der elektromagnetischen Theorie tritt vielmehr weit stärker in Erscheinung, wenn die magnetischen Vektoren zunächst im unverknüpften, statischen Fall vorgestellt werden; der Lernende hat dabei zugleich die Genugtuung zu sehen, daß die in der Elektrostatik erworbenen Kenntnisse nicht auf elektrische Felder beschränkt sind. Gerade eine maßunabhängige Darstellung macht uns das Urteil leicht, daß die didaktisch richtige Definition der magnetischen Feldvektoren nicht mit jener identisch sein muß, durch die wir gegenwärtig die magnetischen Einheiten an die elektrischen anschließen.

Der Einführung ist zum Schluß noch eine Behandlung der bisher gebräuchlichen Einheiten und Maßsysteme und ein Maßsystemschlüssel beigefügt, und zwar unabhängig von jeder grundsätzlichen Stellungnahme aus der einfachen Erwägung heraus, daß die ältere Literatur ohne Kenntnis der Maßsysteme unzugänglich ist. Die schließlich gegebene Zusammenstellung der Beziehungen der Vektorenrechnung macht als Gedächtnishilfe keinerlei Anspruch auf mathematische Vollständigkeit der Gedankengänge.

Karlsruhe i. B., im September 1936.

**Johannes Fischer.**

# Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Voraussetzungen.	
1. Einführung . . . . .	1
2. Ziel und Voraussetzungen der klassischen Elektrodynamik . . . . .	1
3. Geschichtliches . . . . .	3
4. Physikalische Größen in Gleichungen . . . . .	3
<b>I. Elektrische und magnetische Felder ohne wechselseitigen Zusammenhang.</b>	
5. Gleichgewichtszustand und Beharrungszustand . . . . .	5
Das elektrostatische Feld im leeren Raum.	
6. Die elektrische Feldstärke . . . . .	5
7. Der elektrische Fluß und die Quellen des elektrischen Feldes . . . . .	7
8. Die elektrische Spannung und die Wirbelfreiheit des elektrostatischen Feldes . . . . .	10
9. Die Entstehung von Einheiten und Maßsystemen . . . . .	12
10. Kapazität. Kondensator . . . . .	14
11. Kraft und Energie . . . . .	16
Das elektrostatische Feld unter Berücksichtigung der Nichtleiter.	
12. Dielektrizitätskonstante. Elektrische Verschiebung. Eigenschaften der Nichtleiter. Polarisierung . . . . .	20
13. Vergleich des Feldes im leeren und im dielektrischen Raum. Übergang der Feldlinien . . . . .	24
14. Energie und Kraft . . . . .	25
15. Die Faraday-Maxwellschen Spannungen und die mechanischen Kräfte . . . . .	26
16. Der Gleichgewichtszustand des elektrostatischen Feldes . . . . .	29
Rechnerische Verfahren der Elektrostatik.	
17. Die Differentialgleichung des skalaren Potentials . . . . .	31
18. Energie und Potential . . . . .	34
19. Teilkapazitäten . . . . .	35
20. Äquipotentielle Flächen besonderer Form . . . . .	36
21. Das komplexe Potential . . . . .	39
22. Bestimmung von Feldern durch Zeichnung . . . . .	40
Das magnetostatische Feld.	
23. Die Vektoren des magnetischen Feldes . . . . .	41
24. Die magnetischen Eigenschaften der Stoffe . . . . .	45
Das elektrische Strömungsfeld in Leitern.	
25. Die elektrische Strömung in homogenen Leitern. Beharrliche elektrische Strömung . . . . .	48
26. Die elektrische Strömung bei eingepprägten Kräften . . . . .	51
27. Die elektrische Strömung in linearen Leitern . . . . .	53
<b>II. Elektrische und magnetische Felder in wechselseitiger Verkettung.</b>	
Die Verkettungsgesetze.	
28. Das magnetische Feld beharrlicher elektrischer Leitungsströmung. Durchflutungsgesetz. Der magnetische Kreis . . . . .	58
29. Die elektrische Verschiebungsströmung. Erste (Maxwellsche) Hauptgleichung bei ruhenden Körpern . . . . .	66
30. Die Verknüpfung des elektrischen Feldes mit einem veränderlichen magnetischen Felde. Induktionsgesetz. Zweite Hauptgleichung bei ruhenden Körpern . . . . .	69
31. Die beiden Hauptgleichungen bei bewegten Körpern . . . . .	74
Quasistationäre Vorgänge.	
32. Kennzeichnung des quasistationären elektromagnetischen Feldes . . . . .	81
33. Die magnetische Energie. Induktionskoeffizienten . . . . .	82
34. Anwendungen des vektoriellen Potentials . . . . .	87
35. Mehrere Stromkreise. Magnetische Streuung . . . . .	92
36. Magnetische Kräfte, Energie und Arbeit . . . . .	97

	Seite
37. Der elektrische Schwingungskreis . . . . .	103
38. Der Transformator . . . . .	111
39. Stromverdrängung (Wirbelströmung, Hautwirkung) . . . . .	117
<b>Ausbreitungsvorgänge.</b>	
40. Kennzeichnung des elektromagnetischen Feldes im allgemeinen Falle. . . . .	126
41. Energiebeziehungen im allgemeinen Fall. Energieströmung . . . . .	127
42. Ausbreitung elektromagnetischer Störungen in gleichförmigen Stoffen. Wellen- gleichung und Wärmeleitungsgleichung . . . . .	132
43. Ebene Wellen in einem gleichförmigen Nichtleiter . . . . .	136
44. Das Verhalten der Halbleiter und Metalle . . . . .	142
45. Reflexion und Brechung . . . . .	147
46. Vorgänge längs Leitungen . . . . .	152
47. Dynamische Kapazität . . . . .	158
48. Allgemeine Lösung. Ausstrahlung eines schwingenden Dipols . . . . .	160
<b>III. Verschiedenes.</b>	
1'. Die Maßsysteme der Elektrizitätslehre . . . . .	169
(Entstehung, Maßsystemschlüssel, Weiterentwicklung.)	
2'. Darstellung periodischer Vorgänge . . . . .	181
3'. Formeln der Vektorenrechnung . . . . .	184
(Einfache Operationen, Vektorfelder, Rechenregeln.)	
Bedeutung der Formelzeichen . . . . .	192
Namen- und Sachverzeichnis . . . . .	195

### Bemerkungen zur Schreibweise.

Die Art eines Integrales wird am Integranden erkannt, wir schreiben nur einfache Integralzeichen, also  $\int \dots d\mathfrak{s}$  Linienintegral,  $\int \dots d\mathfrak{f}$  Flächenintegral,  $\int \dots d\tau$  Raumintegral,  $\oint \dots d\mathfrak{s}$  Randintegral,  $\oint \dots d\mathfrak{f}$  Hüllenintegral.

$\mathfrak{s}$  Kurve,  $\mathfrak{f}$  Fläche,  $\tau$  Raum. Das vektorielle Längenelement ist häufig  $d\mathfrak{r}$  geschrieben.  $|d\mathfrak{r}| = ds$ . —  $t$  Zeit.

Vektoren sind mit deutschen, Skalare mit lateinischen Buchstaben geschrieben. Das vektorielle (äußere) Produkt ist durch eckige Klammern bezeichnet. Runde Klammern und Punkte sind in gleicher Weise bei Vektoren und Skalaren angewandt.

Die Komponente eines Vektors in bezug auf eine Richtung ist als Skalar definiert, wir schreiben sie daher mit lateinischem Buchstaben, ebenso den Betrag des Vektors.  $A = |\mathfrak{A}|$  ist der Betrag von  $\mathfrak{A}$ ;  $\mathfrak{A}^2 \equiv A^2$ ;  $A_r$  ist die Komponente von  $\mathfrak{A}$  in Richtung  $\mathfrak{r}$ , dagegen ist  $\mathfrak{A}_r = \frac{\mathfrak{r}}{r} A_r$  ein Vektor in Richtung von  $\mathfrak{r}$  vom Betrage  $A_r$ . (So gelegentlich in den Abbildungen.)

$\frac{\mathfrak{r}}{r} \equiv \mathfrak{r}^0$  ist ein Vektor in Richtung  $\mathfrak{r}$  vom Betrage Eins.

Einheitsvektoren haben den Betrag Eins.  $\mathfrak{n}$  und  $\mathfrak{t}$  sind normal und tangential gerichtete Einheitsvektoren. Die Einheitsvektoren  $\mathfrak{i}$ ,  $\mathfrak{j}$ ,  $\mathfrak{k}$  bilden ein rechtwinkeliges, rechtswendiges System, wie die Achsen  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

An Unstetigkeitsflächen, wenn  $\mathfrak{n}_{1/2}$  der von Gebiet 1 nach Gebiet 2 weisende Normalenvektor ist ( $|\mathfrak{n}_{1/2}| = 1$ ), gilt<sup>1</sup>

$Grad a \equiv \mathfrak{n}_{1/2} (a_2 - a_1)$  Differenz (Vektor) der Werte eines Skalars;

$Div \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{n}_{1/2} (\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1)$  Differenz (Skalar) der Normalkomponenten eines Vektors;

$Rot \mathfrak{A} \equiv [\mathfrak{n}_{1/2} (\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1)]$  Differenz (Vektor) der Tangentialkomponenten eines Vektors.

Rechtswendige Zuordnung („Rechtsschraubenregel“) kommt in Gleichungen durch positives Vorzeichen zum Ausdruck!

Steile Buchstaben stellen die Benennungen in bezug auf der Art nach bestimmte Grundeinheiten, insbesondere solche für Ladung (Strom), Spannung, Länge, Zeit,  $Q$ , ( $\int$ )  $U$ ,  $L$ ,  $T$  dar. P.M.S.: praktisches Miesches Maßsystem.

In den Abbildungen bedeutet  $\odot$  einen zur Zeichenebene normalen, nach vorn (auf den Beschauer zu) gerichteten, und  $\otimes$  einen zur Zeichenebene normalen, nach hinten (vom Beschauer weg) gerichteten Vektor.

Die Gleichungen und ebenso die Abbildungen sind abschnittsweise durchgezählt. In den Verweisungen ist zu der Nummer der Gleichung oder Abbildung jeweils die Nummer des Abschnittes angegeben. Die Abschnittsnummern findet man in den Seitenüberschriften innen, die Seitenzahlen außen.

<sup>1</sup> F. Emden: Anhang der „Auszüge“, vgl. Anm. 1, S. IV.



# Voraussetzungen.

## 1. Einführung.

Wer als erster auf einem Gebiet der Naturbeschreibung aus dem Befund messender Versuche zu einer theoretischen Begriffsbildung kommen will, geht so vor, daß er in der großen Zahl der beobachteten Tatsachen das Gemeinsame zu erkennen und auf diese Weise die Vielfältigkeit der Erscheinungen auf wenige einfache Vorstellungen und Begriffe zurückzuführen versucht. Wir können und wollen in dieser Einführung auf einem leichteren und einfacheren Weg vorgehen. Wir wollen unter Voraussetzung der Kenntnis der wichtigsten Beobachtungstatsachen<sup>1</sup> eine besonders kennzeichnende und vor allem hinreichend einfache Grundtatsache oder einen genügend klar und einfach in Gedanken zu vollziehenden Versuch jeweils zum Ausgangspunkt machen, um von hier aus den neu zu bestimmenden Begriff oder das neu zu gewinnende physikalische Gesetz zu finden. Das Ergebnis dieses Vorgehens muß natürlich einerseits die Erscheinungen in Vollständigkeit beschreiben, andererseits sowohl sich allen vorher gefundenen Anschauungen folgerichtig einreihen, also auch mit allen weiter hinzukommenden ohne Widerspruch bestehen. Wenn wir auf diese Weise versuchen, die Vorstellungen und quantitativen Beziehungen zu einem möglichst vollständigen und widerspruchslosen System, einer Theorie, zusammenzubauen, so ist der einzige Beweis für die Richtigkeit der Theorie und der aus ihr zu ziehenden Folgerungen der messende Versuch (während in der Mathematik der Beweis letzten Endes in der logischen Unanfechtbarkeit beruht); gleichwohl mag man sich bewußt bleiben, daß das Experiment lediglich beweist, daß die Theorie richtig ist, nicht daß sie die einzige richtige ist: Die physikalischen Tatsachen, die Naturvorgänge, bestehen nach unserer Überzeugung fest und unabänderlich außerhalb jeder willkürlichen Begriffsbildung; die Theorie aber ist, wie das Wort selbst sagt, unsere „Anschauung“ dieser Tatsachen.

## 2. Ziel und Voraussetzungen der klassischen Elektrodynamik.

Die klassische Elektrodynamik gibt nicht Antwort auf die Frage: „Was ist das Wesen der Elektrizität?“, sondern auf die andere: „Wie gehen die elektrischen und magnetischen Erscheinungen vor sich?“ Sie sucht also nicht nach der Ursache, sondern nach der vollständigen Beschreibung dieser Erscheinungen. Nach ihrer Absicht soll eine solche Beschreibung in erster Linie die Erscheinungen im großen (makroskopisch, summarisch) betreffen; die klassische Elektrodynamik befaßt sich also nicht damit, das Wesen und die Tätigkeit eines einzelnen Elektrizitätsatoms zu erforschen, sondern nimmt es als Voraussetzung hin, daß gewisse elektrische Zustände verknüpft sind mit dem Auftreten elektrischer Ladungen, und es ist ihr ganz gleichgültig, welche Vorstellungen wir im einzelnen von der Natur elektrischer Ladungen haben. Sie verhält sich darin ähnlich, wie die klassische Wärmelehre, die auch nicht die Wärmebewegung der einzelnen Moleküle betrachtet, sondern das örtliche und zeitliche Verhalten von Temperatur und Wärmeströmung im großen zum Gegenstand hat.

Die klassische Elektrodynamik befaßt sich demnach mit der Beschreibung der elektrischen und magnetischen Erscheinungen im großen.

Daraus ergibt sich aber mit Notwendigkeit, daß die klassische Elektrodynamik auch die elektrischen und magnetischen Eigenschaften der Stoffe als gegeben hin- nimmt, und sich nicht darum bekümmert, wie diese durch das Zusammenwirken

<sup>1</sup> Als Lehrbücher seien hervorgehoben: G. Mie: Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus; R. W. Pohl: Einführung in die Elektrizitätslehre.

einzelner kleinster Teilchen (mikroskopisch) zustande kommen. Dieser Standpunkt bringt unserer Theorie den einzigartigen Vorteil, daß sie ihre Gültigkeit behält, auch wenn sich unsere Vorstellung über diese Dinge im einzelnen wandeln. Unsere Erkenntnisse über die verwickelten mikroskopischen Vorgänge und den Feinaufbau der Stoffe sind gegenwärtig keineswegs abgeschlossen; gegenüber dem Wunschziel, die elektrischen und magnetischen Eigenschaften aller Stoffe bis in jede Einzelheit etwa aus Konfiguration und Bewegung der kleinsten Teilchen berechnen zu können, sind wir gegenwärtig weitgehend auf praktische Messungen dieser Eigenschaften angewiesen.

Damit soll natürlich nicht ausgesprochen werden, daß die klassische Elektrodynamik nicht mit Vorteil von den grundlegenden Vorstellungen über die Vorgänge in Körpern, die einem elektrischen oder magnetischen Zustand unterworfen sind, Gebrauch machte, vielmehr haben diese bei ihrer Entstehung entscheidend mitgewirkt. Der geschilderte summarische Standpunkt bedeutet natürlich eine gewisse Beschränkung; es leuchtet ein, daß die Einwirkung elektrischer und magnetischer Zustände auf die Stoffe, deren Aufbau im kleinsten so verwickelt ist, lediglich mit Hilfe der drei Stoffkonstanten, welche die klassische Elektrodynamik benutzt, nicht in jeder Einzelheit vollständig beschrieben werden kann. Es zeigt sich vielmehr, wie hier vorwegnehmend bemerkt sei, daß die makroskopische Elektrodynamik die Vorgänge im leeren Raum am vollkommensten beschreibt<sup>1</sup>, und daß sie dann, wenn Materie vorhanden ist, die Erscheinungen mit um so größerer Genauigkeit wiedergibt, je kleiner und geringfügiger die Störungen sind, welche durch die vorhandene Materie gegenüber den Vorgängen im leeren Raum verursacht sind.

Die grundlegenden Vorstellungen betreffen: die elektrische Ladung, Leiter und Nichtleiter.

**Elektrische Ladung.** Nimmt man zwei Körper aus verschiedenen Stoffen auseinander, nachdem man sie vorher in innige Berührung gebracht hatte (z. B. durch gegenseitige Reibung fester Körper, durch Eintauchen eines festen Körpers in eine Flüssigkeit), so sind in ihrer Umgebung vorher nicht wahrgenommene Kräfte (Bewegungsantriebe) nachweisbar. Diese Erfahrung hat man zunächst dahin erklärt, daß die beiden Körper durch die geschilderten Maßnahmen Träger eines Etwas geworden sind, das die Ursache dieser Kräfte ist, und das Elektrizität genannt wurde. Weiterhin läßt sich eine große Menge experimenteller Erfahrungen dahin deuten, daß die Elektrizität das Wesen einer stofflichen Menge besitzt. Die Elektrizität tritt immer in zwei Arten auf, die man positiv und negativ nennt, und die körperlich voneinander getrennt werden können. Die Summe aller Elektrizitätsmengen, die an einem Vorgang in einem abgeschlossenen Gebiet beteiligt sind, ist konstant (die gleiche Eigenschaft besitzen auch die Materie und die Energie). Diesen Begriff der Elektrizitätsmenge gebraucht die klassische Elektrodynamik; daß wir uns die Elektrizität aus kleinsten, nicht weiter teilbaren Stücken bestehend, also atomistisch geartet denken, tritt in ihr kaum in Erscheinung.

Hinsichtlich der elektrischen Eigenschaften stofflicher Körper geht die klassische Elektrodynamik von Folgendem aus: Wird ein Leiter einem bestimmten elektrischen Zustand ausgesetzt, so verbraucht er fortwährend Energie (wie die Reibung von Gegenständen aneinander), unter gleichen Umständen wird im Nichtleiter (Isolator, Dielektrikum) Energie aufgespeichert und bei Aufhören des elektrischen Zustandes wieder abgegeben (entsprechend der Beanspruchung einer elastischen Feder). In beiden Fällen hängt die Größe der Energie von der Art des Stoffes und dem elektrischen Zustand ab. Um dieses Verhalten zu erklären, hat man sich die summarische Vorstellung gebildet, daß die an dem Aufbau des betreffenden Stoffes beteiligten, in Wechselwirkung mit dem angelegten elektrischen Zustand stehenden elektrisch geladenen Teilchen beim Nichtleiter elastisch an ihren Ort gefesselt sind, beim Leiter dagegen dem elektrischen Zustand fortwährend nachgeben. So entsteht unter

<sup>1</sup> Sofern man hierbei von jenen grundsätzlichen Punkten absieht, an denen die weitere Entwicklung der Physik eingesetzt hat.

Einwirkung der elektrischen Kraft im Nichtleiter durch Verschiebung der elektrischen Teilchen eine Art von elastischem Spannungszustand, beim Leiter eine Bewegung der elektrischen Teilchen in einer bevorzugten Richtung, das ist eine elektrische Strömung (von Ionen in elektrolytischen Leitern, von Elektronen in metallischen Leitern).

Dies sind die wichtigsten Voraussetzungen der klassischen Elektrodynamik, zu denen die magnetischen Erscheinungen keine neuen Vorstellungen hinzufügen, denn ähnlich, wie wir elektrische Wirkungen mit dem Dasein elektrischer Ladungen verknüpft finden, lassen sich die magnetischen Wirkungen deuten als mit der Bewegung elektrischer Ladungen verknüpft.

### 3. Geschichtliche Entwicklung.

Zur geschichtlichen Entwicklung nennen wir zuerst die wichtigsten Entdecker, darauf die Schöpfer der Theorie:

Im Jahre 1820 fand H. C. Oersted das magnetische Feld elektrischer Leitungsströme; seiner Entdeckung kommt die große Bedeutung zu, daß mit ihr zum ersten Male eine Verknüpfung der beiden bis dahin für einander völlig wesensfremd gehaltenen „Naturkräfte“ Magnetismus und Elektrizität gefunden war<sup>1</sup>. Auf experimentellem Weg gewann G. S. Ohm 1827 den Zusammenhang zwischen elektrischer Spannung und Strömung. M. Faraday (1791–1867) entdeckte in den Jahren 1831 bis 1839 die Induktionsströme, die Gesetze der Elektrolyse, die dielektrische Polarisierung; H. Hertz suchte und fand 1887–1889 die elektromagnetischen Wellen.

Faraday war keineswegs bei einer beziehungslosen Feststellung der beobachteten Tatsachen stehengeblieben, vielmehr hat er aus den Erfahrungen ganz bestimmte Begriffe und konkrete qualitative Vorstellungen gebildet, die wir heute durch den Ausdruck „elektromagnetisches Feld“ kennzeichnen. Es ist das Verdienst von J. Clerk Maxwell<sup>2</sup> (1831–1879), nicht allein diese Vorstellungen zu quantitativen Gesetzen in der Form mathematischer Gleichungen erhoben zu haben<sup>3</sup>, sondern auch aus der folgerichtig durchgeführten Theorie Schlüsse von größter Bedeutung gezogen zu haben (1865 sprach Maxwell aus, daß „Licht eine elektromagnetische Störung ist, die sich nach den elektromagnetischen Gesetzen ... fortpflanzt“). Als entscheidende experimentelle Bestätigung der Faraday-Maxwellschen Theorie sieht man die Hertz'schen Entdeckungen an.

Der Ausbau der Maxwell'schen Theorie knüpft sich in erster Linie an die Namen von O. Heaviside, H. Hertz und H. A. Lorentz, der als erster über den Bereich der Faraday-Maxwellschen Vorstellungen hinausging. Von neueren verdanken wir besonders viel auf dem Gebiet der durch die genannten Namen gekennzeichneten „klassischen Elektrodynamik“ F. Emde und G. Mie.

### 4. Physikalische Größen in Gleichungen<sup>4</sup>.

Zur Verhütung von Mißverständnissen treffen wir folgende allgemeinen Festsetzungen:

Eine physikalische Größe wird gekennzeichnet durch eine Aussage über eine Menge, verbunden mit einer Aussage über eine Beschaffenheit oder Eigenschaft.

<sup>1</sup> „Der sich immer mehr an den Tag gebende, und doch immer geheimnisvollere Bezug aller physikalischen Phänomene aufeinander ward mit Bescheidenheit betrachtet ... , als auf einmal in der Entdeckung des Bezuges des Galvanismus auf die Magnetnadel, durch Prof. Oersted, sich uns ein beinahe blendendes Licht auftrat.“ Goethe: Tag- und Jahreshefte 1820.

<sup>2</sup> Doppelname.

<sup>3</sup> „Seitdem die mathematische Interpretation von Faradays Sätzen durch Clerk Maxwell in den methodisch durchgearbeiteten Formen der Wissenschaft gegeben ist, sehen wir freilich, welche eine scharfe Bestimmtheit der Vorstellungen und welche genaue Folgerichtigkeit hinter Faradays Worten verborgen ist, welche seinen Zeitgenossen unbestimmt und dunkel erschienen; und es ist im höchsten Grade merkwürdig zu sehen, welche eine große Zahl umfassender Theoreme, deren mathematischer Beweis das Aufgebot der höchsten Kräfte der mathematischen Analysis erfordert, er durch eine Art innerer Anschauung mit instinktiver Sicherheit gefunden hat, ohne eine einzige mathematische Formel aufzustellen.“ Helmholtz: Faraday-Vorlesung 1881.

<sup>4</sup> Weitere Ausführungen und Begründungen in: Verf.: Physik. Z. Bd. 37 (1936) S. 120–129.

Daher werden in Gleichungen physikalische Größen im allgemeinen verkörpert (dargestellt) durch benannte Zahlen. Eine benannte Zahl hat den Bau: Zahlenwert mal Einheit. Die in Gleichungen zum Ausdruck kommenden Naturgesetze sind unabhängig von der in der Willkür des Darstellenden liegenden Einheitenbestimmung und können daher auch unabhängig von dieser ausgedrückt werden: Physikalische Gesetzmäßigkeiten werden durch Gleichungen sinnvoll ausgedrückt, auch ohne daß die Aufteilung jeder durch ein Formelzeichen dargestellten benannten Zahl in die beiden Faktoren Zahl und Einheit zuvor bekannt ist: maßunabhängige (einheitenfreie, unbedingte) Auffassung von Gleichungen.

Ebenso, wie die einzelnen Größen durch Definitionsgleichungen aus bestimmten Grundgrößen folgen, lassen sich die Einheiten aus gewählten Grundeinheiten ableiten. In den Gleichungen der klassischen Elektrodynamik kommen bei Vermeidung willkürlicher Unterlassungen und Zusätze vier Größen mehr vor, als Gleichungen vorhanden sind. Daher können alle Einheiten aus vier zu gebenden, voneinander unabhängigen Grundeinheiten mit Hilfe der Gleichungen abgeleitet werden. Das praktische Miesche Maßsystem (P. M. S.)<sup>1</sup> geht von der Tatsache aus, daß jede praktische Messung einer elektrischen oder magnetischen Größe auf der Messung von Strömen (Ladungen), Spannungen, Längen und Zeiten beruht. Es benutzt daher als Grundeinheiten: für die elektrische Ladung 1 Coulomb (für den elektrischen Strom 1 Ampere = 1 Coulomb/sec), für die elektrische Spannung 1 Volt, für die Länge 1 cm und für die Zeit 1 sec. (Vgl. Abschnitt 1'. „Maßsysteme“.)

Unter Benennung einer physikalischen Größe in bezug auf ein bestimmtes Maßsystem verstehen wir nach Helmholtz „die besondere Art der Einheiten, die diese zusammenfaßt“, mit anderen Worten die Beziehung der Einheit der Größe zu den gewählten Grundeinheiten, deren zahlenmäßiger Betrag offengelassen ist. Wir bezeichnen demgemäß mit Q (J), U, L, T Einheiten von unbestimmtem Betrag für Ladung (Strom), Spannung, Länge, Zeit. Beispiel: Wir werden die Einheit der elektrischen Leistung als  $1 \frac{\text{Coul} \cdot \text{Volt}}{\text{sec}}$  finden; ihre Benennung in Beziehung auf Q, U, L, T ist demgemäß  $\frac{QU}{T} = J U$ . Die Benennungen der elektrischen und magnetischen Größen in bezug auf das P. M. S. lassen nach dem Gesagten in der Mehrzahl der Fälle unmittelbar das Verfahren erkennen, nach dem die Größen gemessen und definiert werden.

Man kann aber auch so vorgehen, daß man selbst die Wahl der Art der Grundeinheiten bei der Ableitung der Gleichungen völlig offenläßt und einzig dafür Sorge trägt, daß jedes Formelzeichen als benannte Zahl aufgefaßt werden kann und willkürliche Festsetzungen (Zusätze und Unterlassungen) unterbleiben. Dann sind die Gleichungen aufzufassen als unabhängig von der Einheitenbestimmung und daher unempfindlich (invariant) gegen Einheitenwechsel, als maßunabhängig oder einheitenfrei. Die Sorge um die Einheiten beginnt erst beim Zahlenrechnen. (Setzt man in eine  $k$  Größen enthaltende Gleichung  $k-1$  vollständige Produkte: Zahl mal Einheit ein, so ergibt sich die letzte Größe nach Zahl und Einheit). Auf diese Möglichkeit hat namentlich Wallot hingewiesen. Die von uns benutzte Schreibweise der elektromagnetischen Gleichungen hat Heaviside angegeben; sie läßt beide Möglichkeiten offen, entweder die Gleichungen im P. M. S. angeschrieben zu denken oder sie maßunabhängig aufzufassen.

Einzelne elektrische und magnetische Größen für sich können ebensowenig in einer rein mechanischen Einheit gemessen werden, als sie rein mechanisch erklärt werden können.

<sup>1</sup> Mie, G.: Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus. Vorwort. Stuttgart 1910. Als erster verwendete 4 Grundeinheiten G. Giorgi: L'Ellettricista 1902.

# I. Elektrische und magnetische Felder ohne wechselseitigen Zusammenhang.

## 5. Gleichgewichtszustand und Beharrungszustand.

Im Gleichgewichtszustand gibt es keine Änderung oder Umwandlung von Energie. Zustände mit dieser Eigenschaft nennen wir auch starre oder statische Zustände, denn sie sind zeitlich unveränderlich. Im elektrostatischen Feld ändern die elektrischen Ladungen weder Ort noch Größe. Ändert sich der Zustand beliebig, doch so langsam, daß während jedes Zeitelementes und in jeder Lage der Körper der Zustand als statisch betrachtet werden kann, so nennt man ihn quasistatisch.

Der Beharrungszustand ist ein zeitlich unveränderlicher Zustand, dessen Bestehen unmittelbar oder mittelbar an eine Energieänderung oder einen Energieumsatz geknüpft ist (oder wenigstens durch eine Energieänderung eingeleitet ist). Felder im Beharrungszustand nennt man stationäre Felder. Ändert sich der Zustand so langsam, daß während jedes Zeitelementes auf die Vorgänge im ganzen betrachteten Gebiet die für den Beharrungszustand geltenden Gesetze anwendbar bleiben, so heißt der Zustand quasistationär.

## Das elektrostatische Feld im leeren Raum.

### 6. Die elektrische Feldstärke.

Gegeben seien zwei starre, isolierte Körper. Der eine sei groß und unverrückbar aufgestellt, der andere ihm gegenüber sehr klein, beweglich und so befestigt, daß auf ihn wirkende Kräfte gemessen werden können (z. B. Probependel). Der Zwischenraum sei völlig leer (Vakuum<sup>1</sup>). Wenn beide Körper elektrische Ladungen tragen, so üben sie Kräfte aufeinander aus, die man mißt, indem man den kleinen Probekörper an jede Stelle des Raumes bringt.

Man beobachtet im allgemeinen Falle von Ort zu Ort nach Größe und Richtung verschiedene Kräfte; diese bilden somit ein Vektorfeld.

1. Bei einer Ladung  $q$  des Probekörpers seien die Kräfte in den Punkten 1, 2 ...  $n$  gemessen und verzeichnet als  $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \dots \mathfrak{R}_n$ .

2. Bei einer anderen Ladung  $q'$  des Probekörpers werde in den gleichen Punkten erhalten  $\mathfrak{R}'_1, \mathfrak{R}'_2, \dots \mathfrak{R}'_n$ .

a) Wir vergleichen die Richtungen der Kräfte in jedem Punkt in beiden Versuchsreihen miteinander, also die Richtung von  $\mathfrak{R}_1$  mit der von  $\mathfrak{R}'_1$ , usw. Es erweist sich, daß die Richtungen übereinstimmen (es kann höchstens überall das Vorzeichen mit der Art der Ladung des Probekörpers gewechselt haben). Die Krafrichtung ist also unabhängig von der Größe der Ladung des Probekörpers und demnach dem betrachteten Raumpunkt eigentümlich.

b) Wir vergleichen die Beträge der Kräfte in jedem Punkt in beiden Versuchsreihen miteinander und finden dieses Verhältnis für alle Punkte gleich groß und übereinstimmend mit dem Verhältnis der dem Probekörper mitgeteilten Ladungsmengen:

$$\frac{K_1}{K'_1} = \frac{K_2}{K'_2} = \dots = \frac{K_n}{K'_n} = \frac{q}{q'}.$$

Die Größe der Kraft ist demnach in jedem Raumpunkt proportional der Ladung des Probekörpers.

<sup>1</sup> Sehr angenähert durch Luft im Normalzustand.

c) Wir vergleichen die Beträge der Kräfte in zwei beliebig ausgesuchten Punkten  $i$  und  $k$  in beiden Versuchsreihen miteinander; dieses Verhältnis erweist sich als unabhängig von der Ladung des Probekörpers, den Raumpunkten eigentümlich:

$$\frac{K_i}{K_k} = \frac{K'_i}{K'_k}.$$

Ergebnis: Die Größe der Kraft ist einerseits proportional der Ladung  $q$  des Probekörpers, andererseits jedem Raumpunkt eigentümlich. Die Richtung der Kraft ist nur dem Raumpunkt eigentümlich. Die einfachste Darstellung dieses Tatbestandes ist

$$\mathfrak{K} = q \mathfrak{E} \quad (1)$$

für jeden Raumpunkt.  $\mathfrak{E}$  ist als eine mit Richtung und Betrag ausgestattete Größe ein Vektor, der eine Funktion des Ortes ist, also ein Vektorfeld bedeutet, und von der Ladung des Probekörpers unabhängig ist.  $\mathfrak{E}$  heißt daher die Stärke des elektrischen Kraftfeldes, kurz die elektrische Feldstärke.

Wir kombinieren die erste Versuchsreihe mit

3. bei ungeänderter Ladung  $q$  des Probekörpers, aber veränderter Ladung  $Q''$  des festen Ladungsträgers seien die gemessenen Kräfte  $\mathfrak{K}'_1, \mathfrak{K}'_2, \dots, \mathfrak{K}'_n$ . Wir vergleichen wiederum die Richtungen der Kräfte in jedem Raumpunkt in beiden Versuchsreihen miteinander, also die Richtung von  $\mathfrak{K}_1$  mit der von  $\mathfrak{K}'_1$ , usw. Sie stimmen miteinander überein, werden also von der Ladung des festen Ladungsträgers nicht beeinflusst. Wir vergleichen darauf die Beträge der Kräfte in jedem Punkt in beiden Versuchsreihen miteinander und finden

$$\frac{K_1}{K''_1} = \frac{K_2}{K''_2} = \dots = \frac{K_n}{K''_n} = \frac{Q}{Q''}.$$

Die Größe der Kraft ist somit proportional der Ladung des festen Ladungsträgers.

Ergebnis: Die Richtung der elektrischen Feldstärke ist von der Größe der erregenden Ladung unabhängig, ihre Größe ist dieser Ladung proportional.

Als unabhängig von der Ladung des Probekörpers ist die elektrische Feldstärke auch dann vorhanden, wenn gerade keine Probeladung ihr Bestehen markiert. Das elektrische Feld ist nichts anderes als ein physikalischer Zustand des Raumes, denn in ihm nehmen wir andere Vorgänge, Eigenschaften und Zustände wahr, als in einem gewöhnlichen Raum. Dies ist der Fußpunkt der Maxwell'schen Theorie. „Das elektrische Feld ist der Raum, der einen elektrisch geladenen Körper umgibt, auf seine elektrischen Eigenschaften hin betrachtet. Er kann mit Luft oder anderen Körpern erfüllt sein, er kann aber auch ein sogenanntes Vakuum sein, das heißt ein Raum, aus dem alle Stoffe entfernt sind, auf die wir mit uns zur Verfügung stehenden Mitteln einwirken können“ (Maxwell).

Die der Maxwell'schen Feldtheorie vorangegangenen Theorien waren von einer grundsätzlich anderen Anschauung ausgegangen: Hält man geladene Körper in ihrer gegenseitigen Lage fest und bewegt sie insgesamt, so bleiben die zwischen ihnen wirkenden Kräfte völlig unverändert. Daraus hatte man die naheliegende Vorstellung gebildet, daß zwar die elektrischen Kräfte zwischen den einzelnen Ladungen wirken, daß aber der Zwischenraum, der die Wirkungen ungehindert durchläßt, selbst dabei gänzlich unbeteiligt sei und keine Veränderungen erfahre. Diese Auffassung begründet die Fernwirkungstheorie. Statische Felder können mit ihr vollständig beschrieben werden, für schnell veränderliche Felder versagt sie aber ganz und gar. Wir wenden darum die Feldtheorie folgerichtig auch auf die statischen Felder an.

An dem zu Gl. (1) führenden Gedankenexperiment haben wir eine nachträgliche Ergänzung anzubringen: Ebenso, wie der große Ladungsträger, verursacht auch die sehr kleine Probeladung ein elektrisches Feld. Beide überlagern sich, so daß besonders in der Nähe des Probekörpers das wirkliche Feld ein anderes ist:  $\mathfrak{E}'$ ,

als das des festen Ladungsträgers allein:  $\mathcal{E}$ . Wir haben die Verhältnisse schon so getroffen, daß der Unterschied sehr klein ist; er wird beliebig klein, wenn Ladung und Ausdehnung des Probekörpers beliebig klein werden, es ist also genauer

$$\mathcal{E} = \lim_{q \rightarrow dq} \frac{\mathfrak{F}}{q}. \quad (2)$$

„Die elektrische Feldstärke an irgendeinem Punkte ist die Kraft, die auf einen kleinen, mit der positiven Elektrizitätsmenge Eins geladenen Körper ausgeübt würde, wenn er an diesen Punkt gebracht worden wäre, ohne daß dies die vorhandene Elektrizitätsverteilung gestört hätte“ (Maxwell).

(Eine hier nicht durchzuführende Rechnung zeigt, daß in jedem Falle durch die Gesamtkraft auf den Probekörper das ursprüngliche Feld gemessen wird, weil das Störungsfeld keine verschiebenden oder drehenden Kräfte zusätzlich auf ihn verursacht.)

### 7. Der elektrische Fluß und die Quellen des elektrischen Feldes.

Unter Beifügung einer später näher bestimmten „elektrischen Konstanten“  $\varepsilon_0$  nennen wir das Flächenintegral der elektrischen Feldstärke den „elektrischen Fluß“ (Skalar!)

$$\Omega = \int \varepsilon_0 \mathcal{E} d\mathfrak{f} = \int \varepsilon_0 E_n d\mathfrak{f} \quad (1)$$

(zunächst ohne mit der Bezeichnung „Fluß“ die besondere Vorstellung einer Bewegung zu verbinden). Um einen beliebig gestalteten, die konstante Ladung  $Q$  tragenden Körper legen wir in beliebigem Abstand eine beliebig geformte Fläche, die ihn ganz einschließt: eine Hülle, und untersuchen die Feldstärke  $\mathcal{E}$  in jedem Flächenelement dieser Hülle, etwa mit Hilfe eines Probekörpers. Wir finden sie überall entweder von dem Ladungsträger weg, oder zu ihm hin gerichtet. Ein entsprechendes Bild würde eine unzusammendrückbare, aus dem Ladungsträger konstant aus- oder in ihn einströmende Flüssigkeit ergeben, wenn sie für einen Augenblick erstarrt wäre. Im Falle der Flüssigkeit ist klar, daß der Fluß durch die gesamte Hülle, auch wenn er für die einzelnen Flächenelemente verschieden ausfällt, gleich bleibt, ob die Hülle nun groß oder klein gemacht wird. Das gleiche gilt für das elektrostatische Feld: der Wert des „elektrischen Flusses“ durch die gesamte Hülle erweist sich als unabhängig von der Größe und der Gestalt der Hülle. Dagegen ist die Feldstärke nach (6.) in jedem Raumpunkt proportional der erregenden Ladung  $Q$ , und daher ist es auch ihr Integral über die Hülle.

Schließt die Hülle mehrere Ladungsträger ein, so macht man sich leicht durch passende Zerlegung in einzelne Hüllflächen klar, daß das Integral über die Gesamthülle proportional der algebraischen Summe aller eingeschlossenen Ladungen (unter Berücksichtigung ihres Vorzeichens) ist. Wir drücken dies aus durch

$$\oint \varepsilon_0 \mathcal{E} d\mathfrak{f} = \Sigma Q. \quad (2)$$

Bei Hüllen, die keine Ladung einschließen, finden wir daher stets, auch wenn die Hülle in einem elektrischen Felde liegt:

$$\oint \varepsilon_0 \mathcal{E} d\mathfrak{f} = 0. \quad (3)$$

*Der elektrische Hüllenfluß gleicht der eingeschlossenen Ladung.* Diesen Tatbestand drückt die Vektorenrechnung aus, indem sie sagt, daß das betrachtete Feld Quellen hat. Die Quellen des elektrischen Feldes haben wir in den Ladungen zu suchen. Das elektrische Feld entspringt und versiegt auf den Ladungen; da seine Richtung verabredungsgemäß (6.) nach der Kraft auf einen positiv geladenen Probekörper gezählt wird, sind die positiven Ladungen die Quellen, die negativen die Senken des Feldes.

*Das elektrische Feld im Gleichgewichtszustand ist durch Quellen verursacht; nur die Ladungen sind Quellen des Feldes, sonst ist es quellenfrei.*

Linien, die der Richtung des Feldes folgen, heißen *Feldlinien*. Die Bedingung, daß ein *Linienelement*  $d\mathfrak{s}$  einer *Feldlinie* angehört, lautet

$$[\mathfrak{E} d\mathfrak{s}] = 0 \quad (4)$$

oder in rechtwinkligen Komponenten

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}. \quad (5)$$

Man kann auch das Feld in Röhren eingeteilt denken, deren *Wandung* überall mit der Richtung des Feldes übereinstimmt. Solange keine *Quellen* vorhanden sind, ist der *Fluß* in jeder *Feldröhre* konstant:

$$\mathfrak{E} \delta\mathfrak{f} = \text{const}, \quad (6)$$

und der *Querschnitt*  $\delta o$  jeder Röhre ist darum der dort bestehenden *Feldstärke* umgekehrt proportional:

$$E \delta o = \text{const}. \quad (7)$$

Eine sprunghafte Veränderung des *Feldröhrenquerschnittes* bedeutet eine *Quelle* an der *Unstetigkeitsstelle*. „*Einheitsröhren*“ führen den *Fluß* Eins. Meist teilt man so ein, daß alle von einer *Ladung* ausgehenden Röhren den gleichen *Fluß* führen. Ersetzt man dann in der Darstellung jede Röhre durch eine „*mittlere Feldlinie*“, so ist deren *Dichte* ein Maß für die *Feldstärke*.

Die *Faradaysche* Vorstellung des elektrischen *Kraftfeldes* beschreibt Maxwell so: „*Faraday* betrachtet die Körper nie so, als ob nichts anderes zwischen ihnen wirksam wäre, als allein ihr *Abstand*, und als ob sie nur nach irgendeiner *Funktion* des *Abstandes* aufeinander wirkten, sondern er faßt den ganzen *Raum* als *Kraftfeld* auf. In ihm sind die *Kraftlinien* im allgemeinen gekrümmt; von einem Körper ausgehend breiten sie sich nach allen *Richtungen* aus.“ Er denkt sich dabei *Spannungskräfte* im *Felde* vorhanden, und zwar *Zugkräfte* (im Sinne einer *Seilspannung*) in der Richtung der *Feldlinien*, und *Druckkräfte* quer zu dieser<sup>1</sup>. Ihre Bestimmung siehe 15.

Wir betrachten den Fall, daß *isolierte Leiter* Träger der elektrischen *Ladungen* sind. *Faradays Käfigversuch* lehrt, daß in einem *Raum*, der von einer leitenden *Hülle* umschlossen ist, kein elektrisches *Feld* vorhanden ist, wenn keine *Ladungen* eingeschlossen sind; eine auf der *Hülle* selbst vorhandene *Ladung* bringt nur im *Außenraum* ein *Feld* hervor. Dieses ändert sich nicht, wenn die leitende *Hülle* mit einem leitenden *Stoff* ganz ausgefüllt wird. Wir schließen daraus, daß die *Ladungen* ausschließlich auf der *Oberfläche* der *Leiter* sitzen<sup>2</sup>, und im *Leiterinnern* ein elektrisches *Feld* nicht besteht. Ein solches wäre ein *Widerspruch* zu den *Definitionen* des *Gleichgewichtszustandes* (5.) und der elektrischen *Leiter* (2.) als solcher Körper, in denen *Ladung* leicht verschieblich ist; eine *Feldstärke* im *Leiterinnern* müßte die *Ladungen* nach 6. Gl. (1) bewegen, der *Gleichgewichtszustand* wäre noch gar nicht eingetreten. Aus dem gleichen Grunde steht das elektrische *Feld* senkrecht auf der *Oberfläche* von *Leitern*:

$$\mathfrak{E}_i = 0 \quad \text{Gleichgewichtsbedingung für Leiter.} \quad (8)$$

Gl. (2) war eine Aussage in *Integralform* über den *Mittelwert* der *Zustände* über eine beliebig ausgedehntes *Gebiet*. Wir kommen zu dem dazugehörigen *Differentialgesetz* durch Anwendung des *Satzes* von *Gauß*:

$$\Sigma Q = \oint \varepsilon_0 \mathfrak{E} d\mathfrak{f} = \int \text{div } \varepsilon_0 \mathfrak{E} d\tau. \quad (9)$$

<sup>1</sup> Man pflegt dies als *Merkregel* so auszusprechen, daß die *Feldlinien* sich zu verkürzen suchen und sich gegenseitig abstoßen.

<sup>2</sup> Für den *Gleichgewichtszustand* können wir uns die *Elektrizität* grob *sinnenfällig* als äußerst feines *Pulver* vorstellen, dessen *Körnung* nicht in *Erscheinung* tritt.



Wird die Verteilung der Ladung im Raume im allgemeinsten Falle durch die Ladungsdichte  $\eta$  als Funktion des Ortes beschrieben<sup>1</sup>, also  $\sum Q = \int \eta d\tau$ , so wird

$$\operatorname{div} \epsilon_0 \mathfrak{E} = \eta. \quad (10)$$

Bei mit der Dichte  $\sigma$  flächenhaft verteilten Ladungen steht statt Gl. (10):

$$\operatorname{Div} \epsilon_0 \mathfrak{E} = \sigma, \quad (11)$$

so also bei geladenen Leitern, Abb. 1. Da das Leiterinnere feldlos ist:  $\mathfrak{E}_i = 0$ , hat man

$$\begin{aligned} \operatorname{Div} \mathfrak{E} &\equiv n_{1/2} (\mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1) = n_{1/2} \mathfrak{E}_2 = E_n, \\ \epsilon_0 E_n &= \sigma, \end{aligned} \quad (12)$$

die Feldstärke an der Oberfläche ist also der Flächendichte der Ladung proportional.

Beispiel: Das Feld einer mit der Menge  $Q$  geladenen Kugel vom Radius  $a$  ist punktsymmetrisch, wenn sonst keine Körper vorhanden sind. Daher dient als Hüllfläche eine konzentrische Kugel vom Radius  $r$ ; auf ihr hat die Feldstärke überall den gleichen Betrag  $E(r)$  und die gleiche radiale Richtung (Abb. 2). Gl. (2) wird

$$\begin{aligned} 4 \pi r^2 \epsilon_0 E(r) &= Q; \quad E(r) = \frac{1}{4 \pi r^2} \frac{Q}{\epsilon_0}; \\ \mathfrak{E} &= r^0 \frac{1}{4 \pi r^2} \cdot \frac{Q}{\epsilon_0}. \end{aligned} \quad (13)$$

Überall im Raum ist  $\operatorname{div} \epsilon_0 \mathfrak{E} = 0$  und auf der Kugeloberfläche ist

$$\operatorname{Div} \epsilon_0 \mathfrak{E} = \epsilon_0 E(a) = \sigma = \frac{Q}{4 \pi a^2}.$$

Für  $r < a$  versagt Gl. (13), weil das Leiterinnere feldlos ist. Man kann diesen Mangel auch so ausdrücken, daß Gl. (13) nur für einen punktförmigen Ladungsträger uneingeschränkt richtig ist. Ein solcher ist natürlich eine mathematische Fiktion, denn er hat physikalisch unmögliche Eigenschaften. Im Feld Gl. (13) ist die Kraft auf die Ladung  $q$  eines Probekörpers

$$\mathfrak{K} = q \mathfrak{E} = r^0 \frac{1}{4 \pi r^2} \frac{q Q}{\epsilon_0}. \quad (14)$$

Dies ist in Strenge für die mathematische Abstraktion von Punktladungen richtig, angenähert für Ladungsträger, die klein sind gegenüber  $r$ . Gl. (14) war für die historische Entwicklung der Elektrostatik wichtig und heißt das Coulombsche Gesetz. Mit seiner Hilfe die Ladung oder die Feldstärke zu definieren, lehnt man heute ab, weil man die im sonst von Körpern völlig freien unendlich ausgedehnten Raum schwebenden punktförmigen Ladungen als zu weit gehende Abstraktionen gegenüber ausführbaren physikalischen Verhältnissen ansieht.

Ein einzelner, unendlich langer Kreiszyylinder vom Radius  $a$  trage auf der Längeneinheit die Ladung  $Q_1$ . Das Feld ist rein radial gerichtet, daher in allen Querschnitten von der gleichen Struktur, und symmetrisch zur Achse: es ist radialhomogen. Nach Abb. 2 und Gl. (2) wird mit einem konzentrischen Kreiszyylinder vom Radius  $r$  und der Höhe Eins, dessen Grundflächen keinen Beitrag geben, als Hüllfläche:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \epsilon_0 E(r) \cdot 1 \cdot r d\vartheta &= Q_1; \quad E(r) = \frac{1}{2 \pi r} \cdot \frac{Q_1}{\epsilon_0}; \\ \mathfrak{E} &= r^0 \frac{1}{2 \pi r} \cdot \frac{Q_1}{\epsilon_0}. \end{aligned} \quad (15)$$

<sup>1</sup> Die Fälle, in denen gewissermaßen eine Wolke ruhender Ladungen auftritt, sind verhältnismäßig selten; z. B. hat die Atmosphäre eine im Mittel ruhende Raumladung gegenüber der Erde; in der Nachbarschaft glühender Metalloberflächen findet man unter Umständen negative Raumladungen (Elektronenröhren).

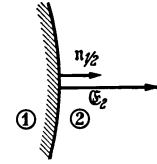


Abb. 7.1. Elektrische Feldstärke an einer Leiteroberfläche bei elektrischem Gleichgewicht.

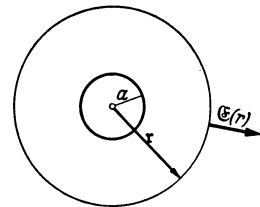


Abb. 7.2. Zur Berechnung der elektrischen Feldstärke.

Überall im Raum ist  $\operatorname{div} \epsilon_0 \mathfrak{E} = 0$  und auf der Zylinderoberfläche ist  $\operatorname{Div} \epsilon_0 \mathfrak{E} = \epsilon_0 E(a) = \sigma = \frac{Q_1}{2\pi a}$  die Flächendichte auf die Längeneinheit. Für  $r < a$  ist Gl. (15) unbrauchbar, sie gilt ohne Einschränkung nur für die mathematische Abstraktion einer „geladenen Linie“. Auf die in Gl. (13) und (15) zum Ausdruck kommende kugelsymmetrische und radialsymmetrische Feldstruktur sei hingewiesen.

### 8. Die elektrische Spannung und die Wirbelfreiheit des elektrostatischen Feldes.

Wir fragen nach der Arbeit beim Verschieben einer konstanten Ladung  $q$  in einem elektrischen Feld  $\mathfrak{E}$  längs eines Weges  $r$  von einem Anfangspunkt 1 zu einem Endpunkt 2. Die Verschiebung gehe so langsam vor sich, daß der Zustand während jedes Zeitelementes statisch ist<sup>1</sup>, und  $\mathfrak{E}$  bleibe bei genügend kleinem  $q$  unverändert. Die Arbeit ist nach 6. Gl. (1):

$$A = \int_1^2 \mathfrak{R} dr = \int_1^2 q \mathfrak{E} dr = q \int_1^2 \mathfrak{E} dr. \quad (1)$$

Das Linienintegral (Skalar!) der elektrischen Feldstärke ist ein für jedes elektrische Feld wichtiger Begriff, es heißt „elektrische Spannung“  $U$ :

$$U \Big|_1^2 \equiv \int_1^2 \mathfrak{E} dr. \quad (2)$$

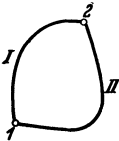


Abb. 8. 1. Zur Bestimmung der elektrischen Umlaufspannung.

Die elektrische Spannung längs eines Weges ist die Arbeit, die beim Verschieben der positiven Elektrizitätsmenge Eins längs dieser Strecke geleistet wird, im Verhältnis zu dieser Elektrizitätsmenge. Die Arbeit ist also

$$A = qU. \quad (3)$$

Im allgemeinen Fall ist die Arbeit (die Spannung) von dem Weg abhängig, dem entlang die Ladung bewegt wird. Das elektrostatische Feld hat die besondere und erstaunliche Eigenschaft, daß die elektrische Spannung, auf beliebigen Wegen zwischen den gleichen Anfangs- und Endpunkten genommen, stets die gleiche ist. Greifen wir zwei beliebige Wege I und II heraus (Abb. 1), so ist beim Durchlaufen des geschlossenen Weges 1 ... 2 ... 1:

$$\int_1^2 \mathfrak{E} dr \Big|_{\text{I}} - \int_1^2 \mathfrak{E} dr \Big|_{\text{II}} \equiv \oint \mathfrak{E} dr = 0. \quad (4)$$

Wäre es anders, so würde beim Durchlaufen des geschlossenen Weges nach Gl. (3) Arbeit fortwährend gewonnen oder vernichtet; Energieänderungen sind aber im statischen Feld durch Definition (5.) ausgeschlossen. Es ist also auf den Wegen I und II einander gleich:

$$\int_1^2 \mathfrak{E} dr \Big|_{\text{I}} = \int_1^2 \mathfrak{E} dr \Big|_{\text{II}}$$

Im elektrostatischen Feld ist die Umlaufspannung [Gl. (4)] auf jedem beliebigem Wege gleich Null; gleichbedeutend mit dieser Aussage ist die andere: das Feld besitzt keine Wirbel (in einem wirbelfreien Feld gibt es z. B. keine geschlossenen, in sich zurücklaufenden Feldröhren). Von der Umlaufspannung als einem durch ein Integral beschriebenen Mittelwert über einen beliebig ausgedehnten Weg kommen

<sup>1</sup> „Quasistatischer Zustand“. Diese Einschränkung ist unbedenklich, denn die Zeitspanne, in der die betrachteten Körper ihre Lage zueinander merklich verändern, ist stets ungemein viel größer als die kurze Zeit, innerhalb der sich die elektrischen Ladungen der jeweiligen Stellung der Körper entsprechend auf den Oberflächen der Leiter anordnen.

wir zur Wirbelstärke als dem entsprechenden Differentialausdruck durch den Satz von Stokes

$$\oint \mathfrak{E} \, d\mathfrak{r} = \int \text{rot } \mathfrak{E} \, d\mathfrak{f},$$

und da das für beliebige Flächen gilt, ist also

$$\text{rot } \mathfrak{E} = 0; \quad \text{Rot } \mathfrak{E} = 0: \quad (5)$$

Das elektrostatische Feld ist wirbelfrei, die elektrische Spannung in ihm ist vom Weg unabhängig: Gleichgewichtsbedingung des elektrischen Feldes.

Rot  $\mathfrak{E} = 0$  weist uns an, die tangentiale Komponente der elektrischen Feldstärke stetig durch die Oberfläche eines Leiters hindurch fortzusetzen; innerhalb des Leiters würde diese Feldstärke Ladungen verschieben, was wir definitionsmäßig ausgeschlossen haben. Aus der Feldlosigkeit des Leiterinnern [7. Gl. (8)] folgt, daß eine Tangentialkomponente an Leiteroberflächen nicht vorhanden sein kann: bezeichnen wir mit 1 den Leiter, mit 2 den Außenraum, so ist  $\mathfrak{E}_1 = 0$  und der Flächenwirbel ist

$$\text{Rot } \mathfrak{E} \equiv [n_{1/2}(\mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1)] = [n_{1/2} \mathfrak{E}_2] = 0. \quad (6)$$

Das vektorielle Produkt verschwindet, wenn die Vektoren parallel zueinander gerichtet sind. Die Feldstärke steht also senkrecht auf der Oberfläche.

Man beachte, daß in der Definition der elektrischen Spannung  $\varepsilon_0$  nicht auftritt.

Beispiel: In dem Feld der geladenen Kugel [7. Gl. (13)] ist die elektrische Spannung zwischen zwei beliebigen Punkten, die den Abstand  $r_1$  und  $r_2$  vom Kugelmittelpunkt haben:

$$\int_{r_1}^{r_2} \mathfrak{E} \, d\mathfrak{s} = \int_{r_1}^{r_2} E(r) \, dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (7)$$

Entsprechend ist im Feld des geladenen Zylinders mit 7. Gl. (15)

$$\int_{r_1}^{r_2} \mathfrak{E} \, d\mathfrak{s} = \int_{r_1}^{r_2} E(r) \, dr = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (8)$$

die Spannung zwischen zwei Punkten, die die Abstände  $r_1$  und  $r_2$  von der Achse haben.

Wenn das Linienintegral  $U$  der Feldstärke nur vom Ausgangs- und Endpunkt des Weges, aber nicht von seinem Verlauf abhängt, liegt es nahe, daß die Feldstärke mit Hilfe einer Funktion errechnet werden kann, die nur vom Orte im Feldraum abhängt: Das wirbelfreie Feld kann durch ein skalares Potential  $\varphi$  mathematisch dargestellt werden vermöge

$$\mathfrak{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (9)^1$$

Die Hilfsgröße  $\varphi$  ist eine Funktion des Ortes im Felde, ihre Benutzung ist rechnerisch vorteilhaft<sup>2</sup>. Umgekehrt: Ein nach Gl. (9) berechnetes Feld  $\mathfrak{E}$  ist wirbelfrei, weil mathematisch notwendig

$$\text{rot grad } \varphi = 0, \quad \oint \text{grad } \varphi \, d\mathfrak{r} = 0.$$

Die elektrische Spannung längs eines Weges  $r$  ergibt sich mit Gl. (9) zu

$$U \Big|_1^2 = \int_1^2 E_r \, dr = - \int_1^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \, dr = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (10)$$

<sup>1</sup> Komponente in Richtung  $\mathfrak{s}$ :  $E_s = -\frac{\partial \varphi}{\partial s}$ .

<sup>2</sup> Im allgemeinen Fall hängt jede Komponente des Vektors  $\mathfrak{E}$  vom Orte ab:

$$\mathfrak{E} = i E_x + j E_y + k E_z; \quad E_x = E_x(x, y, z), \quad E_y = E_y(x, y, z), \quad E_z = E_z(x, y, z).$$

Bei Anwendung des skalaren Potentials  $\varphi = \varphi(x, y, z)$  hat man nur mit einer Größe, statt mit dreien, zu rechnen.

Die elektrische Spannung zwischen den Punkten 1 und 2 stimmt im wirbelfreien Feld mit dem Unterschied der Potentialfunktion an den Punkten 1 und 2 überein. Umgekehrt kann man aus einem gegebenen Feld  $\mathfrak{E}$  den Wert des Potentials  $\varphi$  an jedem Punkt  $P$  bis auf eine Integrationskonstante  $\varphi_0$  ausrechnen, die man als Potentialwert eines gewählten Bezugspunktes auslegen kann:

$$\varphi_P = \varphi_0 - \int_0^P \mathfrak{E} dr. \quad (11)$$

Beispiel: Setzen wir nach Gl. (9) die radial gerichtete Feldstärke  $E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ , so gilt im Feld der geladenen Kugel gemäß 7. Gl. (13)

$$-4\pi r^2 \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial r} = Q, \quad \text{daher} \quad \varphi = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r} + \text{const}, \quad (12)$$

und im Feld des geladenen Zylinders gemäß 7. Gl. (15)

$$-2\pi r \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial r} = Q_1, \quad \text{daher} \quad \varphi = \frac{-Q_1}{2\pi \varepsilon_0} \cdot \ln r + \text{const} \quad (13)$$

für endliche Werte  $r$ . Der Vergleich von Gl. (12) mit Gl. (7) und von Gl. (13) mit Gl. (8) bestätigt die Aussage Gl. (10).

Mit dem für jeden Feldpunkt bekannten Potentialwert kann man das nach 7. Gl. (4) bis (7) gewonnene Feldbild ergänzen, indem man alle Punkte miteinander verbindet, die einen bestimmten, gewählten Potentialwert haben. Diese Flächen konstanten Potentials  $\varphi = \text{const}$ , also gleicher Spannung, nennt man äquipotentielle Flächen oder Niveaulächen. Es kostet keine Arbeit, auf solchen beliebige Ladungen zu verschieben. Nach Gl. (9), (10) steht die Feldstärke senkrecht auf diesen Flächen, denn für jeden Weg  $r$  auf einer Fläche konstanter Spannung ist

$$\mathfrak{E} dr = -d\varphi = 0.$$

Der Abstand dieser Flächen voneinander ist dann nach Gl. (9) ein umgekehrtes Maß für die Größe der Feldstärke.

Leitoberflächen sind demnach stets äquipotentielle Flächen des elektrostatischen Feldes [Gl. (6); 7. Gl. (8)].

Auf die weitere Benutzung der mathematischen Hilfsgröße  $\varphi$  kommen wir in 17.—22. zurück.

Es ist ein naheliegender Irrtum zu glauben, daß das Potential die eigentliche bestimmende elektrische Zustandsgröße sei. Der elektrische Zustand wird aber nicht durch das Potential vollständig gekennzeichnet, sondern durch die örtliche Potentialänderung, also durch die elektrische Feldstärke. Dabei darf nicht vergessen werden, daß es elektrische Felder gibt, die nicht als Potentialgefälle aufgefaßt werden können.

### 9. Die Entstehung von Einheiten und Maßsystemen.

Wir untersuchen, unter welchen Voraussetzungen aus den bisherigen Gleichungen [6. (1); 7. (2); 8. (2), (3)]

$$\mathfrak{E} = q \mathfrak{E}; \quad \sum Q = \varepsilon_0 \oint \mathfrak{E} d\mathfrak{f}; \quad A = q U; \quad U = \frac{A}{q} = \int_1^2 \mathfrak{E} dr$$

Einheiten und Benennungen erhalten werden können. Nach 4. sehen wir jedes Formelzeichen als benannte Zahl an. Wie dort, bezeichnen wir die Grundeinheiten von unbestimmtem Betrag und die Beziehungen auf diese, die Benennungen, durch das gleiche Formelzeichen, wie die betroffene Größe, jedoch durch besondere Buchstaben, z. B. L, M, T für Länge, Masse, Zeit.

a) Es liegt nahe, für Energie (Arbeit  $A$ ) und Kraft  $K$  die Einheiten der Mechanik zu benutzen:

$$A = KL = ML^2 T^{-2}; \quad K = ML T^{-2}.$$

Dazu muß noch eine elektrische Einheit gegeben werden, um alle anderen Einheiten aus den angeschriebenen Gleichungen ermitteln zu können. Wir wählen etwa die Einheit für die elektrische Ladung und erhalten

$$E = \frac{K}{Q}, \quad \epsilon_0 = \frac{Q^2}{K L^2}, \quad U = \frac{K L}{Q} = \frac{A}{Q}.$$

Diese Einheiten enthalten Mischungen aus mechanischen Einheiten und elektrischer Ladungseinheit. So ist man indessen bis heute nicht vorgegangen. Da alle praktischen elektrischen Messungen auf die Messung von Ladung (Strom) und Spannung zurückgehen, gibt man nach G. Mie unabhängig voneinander eine Einheit für die Ladung (den Strom) und eine Einheit für die Spannung. Dann erhalten wir die Benennungen in bezug auf das praktische Miesche Maßsystem mit den vier Grundeinheiten  $Q \equiv J T, U, L, T$ :

$$E = \frac{U}{L}, \quad \epsilon_0 = \frac{Q}{U L} \equiv \frac{J T}{U L}, \quad A = U Q \equiv U J T, \quad K = \frac{U Q}{L} \equiv \frac{U J T}{L}. \quad (1)$$

Energie und Kraft haben also hier nicht aus mechanischen, sondern aus elektrischen Grundeinheiten abgeleitete Einheiten. Auf das Maß für die Feldstärke: Spannung/Längeneinheit sei besonders hingewiesen.

Das P. M. S. verwendet zur Zahlenrechnung die durch Vereinbarung festgelegten Einheiten 1 Coulomb = 1 Ampere sec (1 Coul = 1 Amp sec) für die Ladung, 1 Volt für die Spannung, 1 cm für die Länge, 1 sec für die Zeit.

Die Einheit für  $E$  ist demnach  $1 \frac{\text{Volt}}{\text{cm}}$ , für  $\epsilon_0$  ist sie  $1 \frac{\text{Coul}}{\text{Volt cm}}$ , für  $A$  ist sie

$$1 \text{ Coul} \cdot \text{Volt} \equiv 1 \text{ Joule (elektrisch)},$$

und für  $K$  ist sie

$$1 \frac{\text{Coul} \cdot \text{Volt}}{\text{cm}} \equiv 1 \frac{\text{Joule}}{\text{cm}} \equiv 1 \text{ Sthen}^1.$$

Die elektrische Konstante bestimmt sich aus Messungen mit den gegenwärtigen, international vereinbarten praktischen Einheiten (vgl. 1') zu dem Wert

$$\epsilon_0 = 0,8859 \cdot 10^{-13} \frac{\text{Coul}}{\text{Volt cm}}.$$

Den Anschluß an Mechanik und Wärmelehre geben die Äquivalente

$$1 \text{ Joule} = 1,00043 \cdot 10^7 \text{ Erg} = 0,23899 \text{ cal}$$

$$1 \text{ Sthen} = 10,2 \text{ kg}^*, \quad 1 \text{ kg}^* \text{ m} = 9,81 \text{ Joule}^2.$$

Zu diesen Zahlenwerten muß wohl beachtet werden, daß ihre Größe von der Bestimmung der Beträge der Grundeinheiten abhängig ist und mit diesen sich ändert<sup>3</sup>.

Zwei (Punkt-) Ladungen von der Größe 1 Coul üben demnach in 1 km Entfernung nach 7. Gl. (14) eine Kraft von 89,8 Sthen = 917 kg\* aufeinander aus.

b) Die sogenannten „absoluten elektrostatischen Maßsysteme“ wenden die absolute mechanische Energie- (Kraft-) Einheit an und setzen willkürlich fest, daß  $\epsilon_0$  eine reine Zahl (Symbol [1]) sein soll; aus

$$\epsilon_0 = \frac{Q^2}{K L^2} = [1]$$

folgt dann

$$Q = M^{1/2} L^{3/2} T^{-1} = K^{1/2} L; \quad E = K^{1/2} L^{-1}; \quad U = K^{1/2}.$$

Man hat also nur die drei „absoluten“ Grundeinheiten der Mechanik.

<sup>1</sup> Diesen Namen hat Mie gegeben.

<sup>2</sup> Joule (elektrisch). — g\* = Kraftgramm. Die Benennung der Masse ist hier  $M = \frac{Q U T^2}{L^2}$  und es gilt:

$$1 \text{ g} = \frac{10^{-7}}{1,00043} \frac{\text{Joule sec}^2}{\text{cm}^2}.$$

<sup>3</sup> Verschiedene Möglichkeiten hierzu vgl. 1'. II, III.

Als reine Zahl könnte man statt  $\epsilon_0$  auch etwa  $Q$  festsetzen und würde erhalten

$$E = K, \quad U = A, \quad \epsilon_0 = K^{-1} L^{-2};$$

wählte man  $E$  als reine Zahl, so wäre  $Q = K, U = L, \epsilon_0 = K L^{-2}$ .

Weiteres über Maßsysteme siehe I'.

### 10. Kapazität. Kondensator.

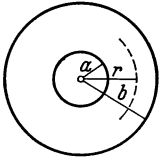
Wir nennen ein Feld vollständig, wenn man eine Begrenzung angeben kann, durch die keine Feldröhren hindurchtreten. Bei allen messenden Versuchen ist das Feld durch eine leitende Hülle nach außen abgegrenzt; ein solches Feld nennen wir geschlossen.

Ein Kondensator ist eine Anordnung aus zwei leitenden Körpern, deren einer die vollständige Quelle, und deren anderer die vollständige Senke des Feldes bildet, beide tragen daher entgegengesetzt gleich große Ladungen. Bestimmen wir bei einem Kondensator das Verhältnis der Ladung  $Q$  des einen Leiters zur elektrischen Spannung  $U$  zwischen beiden, so finden wir, daß der Kapazität genannte Quotient

$$C = \frac{Q}{U} \quad (1)^1$$

stets von der Größe der Feldstärke und dem besonderen Metall des Leiters unabhängig ist und von der Feldstruktur, also der Gestalt der Leiter, bestimmt wird.  $C$  ist demnach eine nur durch die geometrische Gestaltung gegebene Größe.

Abb. 10. 1. Zur Berechnung von Kugel- und Zylinderkondensator.



Die Messung von Kapazitäten erfolgt also durch die Messung von Ladung und Spannung, ihre Berechnung wird einfach, wenn man die Feldstruktur kennt: aus dem Hüllenfluß der Feldstärke um einen Ladungsträger folgt dessen Ladung [7. (Gl. 2)], aus ihrem Linienintegral auf beliebigem Wege die Spannung [8. Gl. (2)]. Beispiele:

1. Zwei konzentrische Kugelflächen (Abb. 1). Im kugelsymmetrischen Feld nach 7. Gl. (13) ist die Spannung zwischen allen Punkten  $a$  und  $b$  [8. Gl. (7)]

$$U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

Daher ist die Kapazität

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}. \quad (2)$$

Ist die isolierende Zwischenschicht sehr dünn:  $s = b - a \ll a$ , so wird

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 a^2}{s} = \frac{\epsilon_0 f}{s} \quad (3)$$

mit der Kugeloberfläche  $4\pi a^2 = f$ . Wird andererseits der Abstand der Hohlkugel vom Radius  $b$  immer größer, so nimmt  $C$  ab bis zu dem endlichen Kleinstwert als Grenzwert

$$\lim_{b \rightarrow \infty} C = 4\pi\epsilon_0 a. \quad (4)$$

In diesem Fall haben wir uns vorzustellen, daß der elektrische Fluß, der z. B. auf der Kugel  $r = a$  versiegt, auf einer so weit entfernten Hülle entspringt, daß deren Gestalt keine Rolle mehr spielt (Zimmerwände oder dgl.); die Kapazität ist also schlecht definiert. Der Grenzvorgang  $b \rightarrow \infty$  muß also so verstanden werden, daß das Feld ein geschlossenes bleibt. Man bezeichnet einen derartigen Grenzwert der Kapazität zweckmäßig als „geometrische Kapazität“.

2. Zwei konaxiale Zylinderflächen. Sie seien so lang (theoretisch unendlich lang), daß längs einer betrachteten endlichen Strecke in allen Querschnitten das

<sup>1</sup> Benennung im P. M. S.:  $C = \frac{Q}{U} = \frac{1\text{T}}{1\text{V}}$ , praktische Einheit 1  $\frac{\text{Coul}}{\text{Volt}} \equiv 1$  Farad.

Feld das gleiche und radialhomogen ist. Die Länge  $l$  eines Zylinders trage die Ladung  $Q_1$  (Abb. 1). Im radialhomogenen Feld nach 7. Gl. (15) ist die Spannung zwischen allen Punkten  $a$  und  $b$  [8. Gl. (8)]

$$U = \frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a},$$

daraus die Kapazität eines Stückes der Länge  $l$ :

$$C = \frac{Q_1 l}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{b}{a}}. \quad (5)$$

Bei sehr geringem Abstand der beiden Zylinder voneinander  $s = b - a \ll a$  ergibt sich mit  $\ln \frac{b}{a} = \frac{s}{a} + \dots$  und der Zylindermantelfläche  $f = 2\pi a l$

$$\text{wiederum} \quad C = \frac{\epsilon_0 f}{s}. \quad (6)$$

Hier ist, im Gegensatz zum Kugelkondensator, das Feld nicht geschlossen, ein Grenzvorgang ergibt keinen endlichen Kapazitätswert.

3. Zwei parallele Platten. Plattenkondensator. Der Abstand  $s$  zweier einander gegenüberstehender gleicher planparalleler Platten von je der Fläche  $f$  sei so gering gegenüber den übrigen Abmessungen, daß die nicht homogenen Teile des Feldes in der Gegend der Plattenränder sehr wenig ausgedehnt sind gegenüber dem im allgemeinen linearhomogenen Feld (Abb. 2). Wegen der linearen Homogenität ist

$$Q = \epsilon_0 E f, \quad E = \frac{Q}{\epsilon_0 f}, \quad U = \int_0^s E dx = E s = \frac{Q s}{\epsilon_0 f},$$

$$C = \frac{\epsilon_0 f}{s}. \quad (7)$$

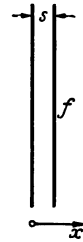


Abb. 10. 2. Zur Berechnung des Plattenkondensators.

Zusammenschalten von Kondensatoren. Zur Berechnung der resultierenden Kapazität  $C_{\text{res}}$  denken wir an ihre Definition Gl. (1) als Quotient der gesamten Ladung und der gesamten Spannung. Bei der Serienschaltung von  $n$  Kondensatoren (Abb. 3) trägt jeder wegen der Unzerstörbarkeit der elektrischen Ladungen die gleiche Ladung  $q$ , die Gesamtspannung  $U$  verteilt sich gemäß den einzelnen Kapazitäten:

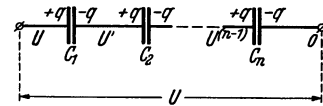


Abb. 10. 3. Serienschaltung von Kondensatoren.

$$U - U' = \frac{q}{C_1}, \quad U' - U'' = \frac{q}{C_2}, \dots, \quad U^{(n-1)} - 0 = \frac{q}{C_n}.$$

Die Gesamtspannung ist daher

$$U = q \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} = \frac{q}{C_{\text{res}}},$$

und daraus die Gesamtkapazität

$$C_{\text{res}} = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{C_i}}; \quad (8)$$

z. B. bei  $n$  gleichen Kondensatoren von der Größe  $C$ :

$$C_{\text{res}} = \frac{C}{n}.$$

Schaltet man eine sehr große Kapazität in Reihe mit einer sehr kleinen, so unterscheidet sich demnach der Wert der gesamten Kapazität kaum vom Wert der kleinen Kapazität. Bei Parallelschaltung (Abb. 4) liegen alle Kondensatoren an der

gleichen Spannung, die Ladungen werden durch die einzelnen Kapazitäten bestimmt, es ist also  $q_1 = C_1 U$ ,  $q_2 = C_2 U$ , ...  $q_n = C_n U$ , die gesamte Ladung ist

$$Q_{\text{res}} = \sum_{i=1}^n q_i = U \sum_i C_i = U C_{\text{res}},$$

und daher ist die Gesamtkapazität

$$C_{\text{res}} = \sum_i C_i; \quad (9)$$

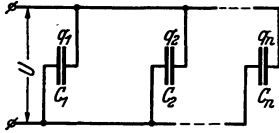


Abb. 10. 4. Parallelschaltung von Kondensatoren.

z. B. bei  $n$  gleichen Kondensatoren:  $C_{\text{res}} = n \cdot C$ .

Schaltet man zu einer sehr großen Kapazität eine sehr kleine parallel, so unterscheidet sich demnach der Wert der Gesamtkapazität kaum vom Wert der großen Kapazität. „Stöpselsätze“ enthalten Parallelschaltungen einzelner Kondensatoren.

## 11. Kraft und Energie.

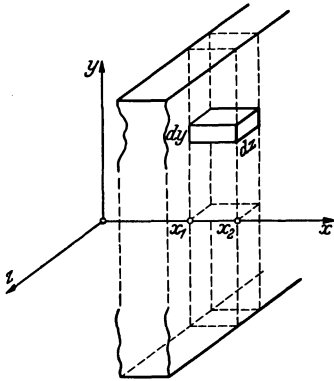
### a) Die Kraft auf eine geladene Leiteroberfläche.

Die Gesamtkraft auf einen die Ladung  $q$  tragenden Körper ist nach 6. Gl. (1)  $\mathfrak{R} = q \mathfrak{E}$ . Ist eine räumliche Ladungsverteilung  $\eta = \text{div } \epsilon_0 \mathfrak{E}$  [7. Gl. (10)] gegeben, so enthält ein Raumelement die Ladung  $dq = \eta d\tau$ ; die hierauf wirkende Kraft ist  $d\mathfrak{R} = \mathfrak{E} dq$ . Der allgemeine Ausdruck für die auf einen geladenen Körper wirkende Kraft ist daher

$$\mathfrak{R} = \int_{\tau} \mathfrak{E} \cdot \eta d\tau = \epsilon_0 \int_{\tau} \mathfrak{E} \cdot \text{div } \mathfrak{E} \cdot d\tau. \quad (1)$$

Wir bestimmen zunächst die Kraft auf eine geladene Fläche als Grenzwert der Kraft, die auf eine mit einer Ladungsverteilung  $\eta$  versehene planparallele Platte wirkt, wenn deren Dicke gegen Null geht, darauf wenden wir das Ergebnis auf die Oberflächen geladener Leiter an und werden dadurch in den Stand gesetzt, die Energie zu formulieren.

Abb. 11. 1. Zur Berechnung der Kraft auf eine geladene Fläche. (Ausschnitt aus einer unendlich ausgedehnten Platte.)



Zur Erledigung der ersten Aufgabe an Hand von Gl. (1) stellen wir ein rechtwinkeliges Achsenkreuz so auf, daß die  $x$ -Achse senkrecht zur Platte steht, deren Dicke  $x_2 - x_1$  ist (Abb. 1). Die tangentialen Komponenten des Feldes:  $E_y$  und  $E_z$  sind an der Oberfläche der Platte stetig, denn im statischen Feld ist erfüllt  $\text{Rot } \mathfrak{E} = 0$  [8. Gl. (5)]. Unstetig kann nur die normale Komponente  $E_x$  sein, weswegen der allgemeine Kraftausdruck Gl. (1) nicht ohne weiteres anwendbar ist. Nehmen wir zunächst an, daß  $E_x$  nicht wirklich unstetig ist, sondern von dem Wert  $E_{x_1}$  auf der einen Seite stetig in den Wert  $E_{x_2}$  auf der anderen Seite der Platte übergeht; erhalten wir dann einen bestimmten Grenzwert für die Kraft, wenn wir die Dicke  $x_2 - x_1$  unbegrenzt abnehmen lassen, so kann diese unzutreffende Annahme keinen Einfluß mehr haben, und wir können den erhaltenen Ausdruck als Kraft auf eine geladene Fläche ansehen.

Wir zerschneiden die Platte in Prismen vom Querschnitt  $dy dz = df$  und heißen  $p$  die Kraft auf die Oberflächeneinheit. Gl. (1) ergibt

$$p df = \epsilon_0 \int_{x_1}^{x_2} \mathfrak{E} \cdot \text{div } \mathfrak{E} \cdot dx df, \quad (2)$$

daher mit  $\text{div } \mathfrak{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$ :

$$p_x = \epsilon_0 \int_{x_1}^{x_2} E_x \cdot dE_x + \epsilon_0 \int_{x_1}^{x_2} E_x \left( \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dx. \quad (3)$$



Von dem zweiten Integral wissen wir, daß  $E_x$  eine endliche Größe hat, und ebenso die Ableitungen von  $E_y$  und  $E_z$ , weil diese Größen selbst stetig sind. Das Integral nimmt darum den Wert Null an, wenn seine Grenzen zusammenfallen, und es bleibt übrig

$$p_x = \frac{\varepsilon_0}{2}(E_{x_2}^2 - E_{x_1}^2), \quad (4)$$

wobei also  $E_{x_2}$  den Wert von  $E_x$  auf der positiven, und  $E_{x_1}$  den auf der negativen Flächenseite bedeutet. Mit der Flächendichte  $\sigma$  der Ladung [7. Gl. (11)]

$$\sigma = \varepsilon_0 \operatorname{Div} \mathfrak{E} = \varepsilon_0 (E_{x_2} - E_{x_1}),$$

kann man die Kraft ausdrücken als

$$p_x = \sigma \frac{E_{x_2} + E_{x_1}}{2}. \quad (5)$$

Auf ein Element einer geladenen Fläche wirkt also eine Kraft, deren Komponente senkrecht zur Fläche gleich ist der Ladung des Flächenelementes multipliziert mit dem arithmetischen Mittel der elektrischen Feldstärke zu beiden Seiten der Fläche.

Ist die geladene Fläche die Oberfläche eines Leiters, so kommt zu der Bedingung  $\operatorname{Rot} \mathfrak{E} = 0$  die Gleichgewichtsbedingung  $\mathfrak{E}_i = 0$ ; die Feldstärke steht senkrecht auf der Leiteroberfläche und hat dort den Betrag  $E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$  [7. Gl. (12)], daher wird die Kraft auf die Flächeneinheit des geladenen Leiters

$$p_n = \frac{\sigma E_n}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2} E_n^2 \quad (6)^1$$

stets nur senkrecht zur Leiteroberfläche als Zug wirkend, unabhängig vom Vorzeichen der Ladung. Die Gesamtkraft hat die Größe

$$K = \int p_n df = \frac{1}{2} \int \sigma E_n df. \quad (7)$$

Im homogenen Feld ist  $E_n = \text{const}$ , daher die Gesamtkraft

$$K = \frac{E_n}{2} \int \sigma df = \frac{Q E_n}{2}. \quad (8)$$

#### b) Die Energie des elektrischen Feldes.

Von den Platten eines Kondensators, dessen Feld wir als linearhomogen betrachten können (Vernachlässigung der Randwirkung), werde die eine festgehalten, die andere um die kleine Wegstrecke  $\delta s$  parallel verschoben (Abb. 2). Gegen die anziehende Kraft  $\frac{Q E_n}{2} = p_n f$  [Gl. (6), (8)] wird dabei die Arbeit geleistet

$$\delta A = K \delta s = \frac{Q E_n}{2} \delta s = p_n f \delta s = \frac{\varepsilon_0}{2} E_n^2 \cdot f \delta s = \frac{\varepsilon_0}{2} E_n^2 \cdot \delta \tau. \quad (9)$$

Beim Zurückschieben der Platte auf die alte Stelle wird diese Arbeit vollkommen zurückgewonnen. Weitere Energieumsetzungen werden nicht beobachtet. Wir nehmen daher mit dem Postulat von der Unzerstörbarkeit der Energie an, daß die Arbeit  $\delta A$  in dem Raumteil  $\delta \tau = f \delta s$  als Energie des elektrischen Feldes aufgespeichert worden ist. (Analogon aus der Mechanik: die Energie der Lage.) Es ist also

$$\delta W_e = \frac{\varepsilon_0}{2} E_n^2 \cdot \delta \tau \quad (10a)$$

die Zunahme an elektrischer Feldenergie. Dadurch aber hat man Anlaß, als gesamte, im Raume des homogenen Feldes des Plattenkondensators aufgespeicherte Energie anzusehen

$$W_e = \frac{\varepsilon_0}{2} E_n^2 \cdot \tau. \quad (10)$$

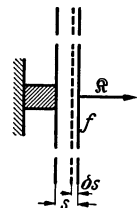


Abb. 11. 2. Zur Bestimmung der elektrischen Feldenergie.

<sup>1</sup> Benennung im P. M. S.:  $p = \frac{Q}{UL} \cdot \frac{U^2}{L^2} = \frac{QU}{L^3} = \frac{K}{L^2}$ , Einheit 1  $\frac{\text{Sthen}}{\text{cm}^2}$ .

Nun betrifft aber der Unterschied zwischen dem homogenen Feld des Plattenkondensators und jedem beliebigen inhomogenen elektrischen Feld nur die Struktur, nicht das Wesen des Feldes; grundsätzlich kann jedes inhomogene Feld ausgemessen werden, indem man es sich in plattenförmige Elemente eingeteilt denkt, die so klein sind, daß das Feld im Innern jedes Elementes als homogen gelten kann, wie in einem kleinen Plattenkondensator. Wir schließen daher, daß Gl. (10) in der für beliebige inhomogene Felder angeschriebenen Form

$$W_e = \int_{\infty}^{\infty} \frac{\epsilon_0}{2} E^2 d\tau = \int_{\infty}^{\infty} \frac{\epsilon_0}{2} \mathfrak{E}^2 d\tau \quad (11)^1$$

als allgemeingültiger Ausdruck für die in einem elektrischen Feld gespeicherte Energie zu betrachten ist (durch das Zeichen  $\infty$  soll ausgedrückt sein, daß das Integral über den ganzen felderfüllten Raum zu erstrecken ist).

Gl. (11) ist eine typische Aussage der Feldtheorie: Träger der Energie ist das elektrische Feld, Energie ist überall im Raum, wo ein elektrisches Feld besteht, aufgespeichert und stetig verteilt. Über die Verteilung im Raume sagt Gl. (11) zunächst nichts aus, sondern nur über den gesamten Energieinhalt des Feldes; das einfachste ist hier anzunehmen, daß in jedem Raumelement  $d\tau$  die Energie  $\frac{\epsilon_0}{2} \mathfrak{E}^2$  aufgespeichert ist; die Energie in der Raumeinheit, das ist die Dichte der Energie, ist demnach

$$w_e = \frac{\epsilon_0}{2} \mathfrak{E}^2; \quad W_e = \int_{\infty} w_e d\tau. \quad (12)^1$$

Diese Auffassung ist, wenn auch nicht streng bewiesen, so doch sicher die vernünftigste; sie verteilt die Energie so über die einzelnen Raumelemente, daß die Gesamtenergie sich stets richtig ergibt. — Wir haben die Zulässigkeit von Gl. (11) und (12) erkannt; ihre Richtigkeit kann als erwiesen gelten, wenn sie überall in Einklang stehen mit der Erfahrung. Hierauf wird noch zurückgekommen. Die klassische Elektrodynamik sieht diese Gleichungen für jedes elektrische Feld, nicht nur für das statische, als Ausdrücke der Feldenergie und der Energiedichte an.

Im Gleichgewichtszustand kann die Energie auch mit Hilfe von Ladungen und Potentialen ausgedrückt werden, vgl. 18.

Zurückkehrend zur Energie des Plattenkondensators

$$W_e = fs \cdot \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \quad (13)$$

führen wir die Spannung  $U = \int_0^s E ds = Es$  und die Ladung  $Q = \int \sigma df = \epsilon_0 E f$  ein und erhalten

$$W_e = \frac{1}{2} QU, \quad (14)$$

mit  $C = \frac{Q}{U}$  also auch

$$W_e = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}. \quad (15)$$

Den obigen analoge Gedankengänge lassen schließen, daß Gl. (14) und (15) nicht nur für den Plattenkondensator die Energie angeben, sondern auch für jede andere Kondensatorform. Die Ausdrücke sind typisch für die Fernwirkungstheorie, indem sie für die Energie Ladung und Spannung verantwortlich machen.

Zur Beurteilung der Energieverteilung im Felde gemäß Gl. (12) dient das Feldbild in folgender Weise: Zerlegen wir das Feld durch Feldröhren, die den Fluß  $\epsilon_0 E \delta o = 1$  Ladungseinheit führen, und ergänzen dieses Bild durch Flächen gleicher

<sup>1</sup> Im P. M. S.: Benennung  $W = \frac{Q}{UL} \cdot \frac{U^2}{L^2} L^3 = QU$ , Einheit 1 Joule,

„  $w = \frac{QU}{L^3}$  „ 1  $\frac{\text{Joule}}{\text{cm}^3}$ .

Spannung im Abstand  $E \delta s = 1$  Spannungseinheit voneinander, so entstehen Zellen, die den gleichen Energieinhalt von 1 Energieeinheit führen; ihre Größe ist daher ein umgekehrtes Maß für die Energiedichte.

Beispiel: Die Energie des unendlich ausgedehnten Feldes der geladenen Kugel ergibt sich aus der Feldstärke  $E(r) = \frac{1}{4 \pi r^2} \frac{Q}{\epsilon_0}$  und der Hohlkugel  $d\tau = 4 \pi r^2 dr$  als Raumelement zu

$$W_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int_a^\infty \left( \frac{1}{4 \pi r^2} \right)^2 \frac{Q^2}{\epsilon_0^2} 4 \pi r^2 dr = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{2a} \tag{16}$$

als endlicher Betrag (für die „Punktladung“  $a \rightarrow 0$  wäre die Energie unendlich groß).

c) Energie- und Arbeitsverhältnisse beim Kondensator.

In dem Diagramm Abb. 3 ist  $tg \alpha = \frac{Q}{U} = C$ , ein Streifen  $U dQ = dW_e$ , daher die Fläche des Dreiecks  $OAD$  proportional der gesamten Feldenergie  $\frac{1}{2} QU$ . Durch Verkleinern des Abstandes der einander anziehenden Ladungsträger wird die Kapazität vergrößert und mechanische Arbeit gewonnen; dies kann unter verschiedenen Bedingungen geschehen:

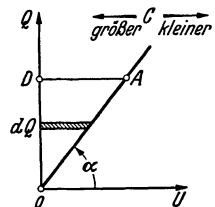


Abb. 11.3. Vorgänge am Kondensator.

1. Der geladene Kondensator ist sich selbst überlassen, daher  $Q = const$  während des Vorganges (Abb. 4). Während der Arbeitsleistung bewegt sich  $A$  längs der waagerechten Geraden  $Q = const$  nach  $B$ . Die Anfangsenergie ist durch das Dreieck  $OAD$ , die Endenergie durch das Dreieck  $OBD$  dargestellt. Die Differenz beider, das Dreieck  $OAB$ , ist daher das Maß für die auf Kosten der Feldenergie unter Verkleinerung der Spannung gewonnene mechanische Arbeit  $A_{mech}$ . Allgemein: Bei  $Q = const$  ist

$$dA_{mech} = -dW_e, \tag{17}$$

demnach die Kraft während der Arbeitsleistung

$$K_s = -\frac{\partial W_e}{\partial s}; \tag{18}$$

z. B. ist für den Plattenkondensator  $W_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2} \frac{s}{\epsilon_0 f}$ , daher

$$K_s = -\frac{Q^2}{2 \epsilon_0 f} \tag{19}$$

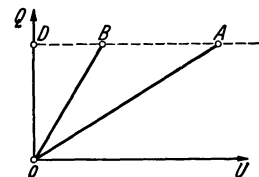


Abb. 11.4. Vorgang bei  $Q = const$ .

unabhängig vom Abstände  $s$  der Platten voneinander.

2. Die Spannung des Kondensators wird durch Energiequellen von außen konstant gehalten:  $U = const$  (Abb. 5). Während der Arbeitsleistung bewegt sich  $A$  längs der senkrechten Geraden  $U = const$  nach  $B$ . Die Anfangsenergie wird durch das Dreieck  $OAQ_1$  dargestellt, die Endenergie durch das Dreieck  $OBQ_2$ . Das Dreieck  $OAB$  als Differenz von Anfangs- und Endenergie bedeutet die mechanische Arbeit  $A_{mech}$ . Nach Ausweis der Figur ist nicht nur die Kapazität, sondern auch die Ladung während des Vorganges größer geworden, dem Kondensator mußte also während des Arbeitsganges Energie zugeführt worden sein. Nach Abb. 5 ist diese  $U(Q_2 - Q_1)$ , dargestellt durch das Rechteck  $Q_1ABQ_2$ . Das die mechanische Arbeit darstellende Dreieck  $OAB$  ist flächengleich dem Dreieck  $Q_1AB$ , also gleich dem halben Rechteck  $Q_1ABQ_2$ . Die gesamte zugeführte Energie ist doppelt so groß wie die mechanische Arbeit. Von ihr ist die eine Hälfte in mechanische Arbeit umgesetzt,

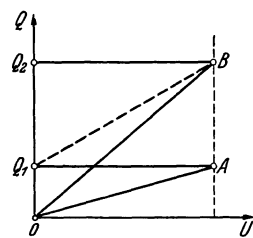


Abb. 11.5. Vorgang bei  $U = const$ .

die andere Hälfte im Feld aufgespeichert worden. Allgemein: Bei  $U = \text{const}$  ist

$$dA_{\text{mech}} = +dW_e, \quad (20)$$

demnach die Kraft während der Arbeitsleistung

$$K_s = + \frac{\partial W_e}{\partial s}; \quad (21)$$

z. B. ist für den Plattenkondensator  $W_e = \frac{U^2 C}{2} = \frac{U^2}{2} \frac{\epsilon_0 f}{s}$ , daher

$$K_s = - \frac{U^2 \epsilon_0 f}{2} \cdot \frac{1}{s^2} \quad (22)$$

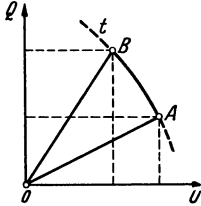


Abb. 11.6. Allgemeiner Vorgang.

umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstandes  $s$  der Platten voneinander.

3. Wenn sowohl Ladung als Spannung sich während der Arbeitsleistung ändern, so verläuft der Vorgang längs einer „Übergangskurve“  $t$  (Abb. 6). Die Fläche  $OAB$  ist ein Maß für die mechanische Arbeit, wie man erkennt, wenn man sich den ganzen Vorgang längs der Kurve  $AB$  in elementare Einzelvorgänge mit  $Q = \text{const}$  und solche mit  $U = \text{const}$  zerlegt.

## Das elektrostatische Feld unter Berücksichtigung der Nichtleiter.

### 12. Dielektrizitätskonstante. Elektrische Verschiebung. Eigenschaften der Nichtleiter. Polarisation.

Faraday entdeckte, daß die Kapazität eines Kondensators vergrößert wird, wenn der Raum zwischen den Ladungsträgern an Stelle von Luft mit einem festen oder flüssigen Nichtleiter ausgefüllt wird. Die Vergrößerung erwies sich als unabhängig von Größe und Gestalt des Kondensators und der Größe der Feldstärke<sup>1</sup>. Bezeichnen wir vorübergehend mit  $C_0$  die Kapazität, wenn der Zwischenraum Vakuum ist, mit  $C_\epsilon$  die Kapazität, wenn der Zwischenraum mit einem Dielektrikum ausgefüllt ist, so ergibt also der Versuch, daß die Verhältniszahl

$$\epsilon = \frac{C_\epsilon}{C_0} \quad (1)$$

einzig von der Art des dielektrischen Stoffes im Feldraum bestimmt wird. Die unbenannte Zahl  $\epsilon$  hat daher den Wert Eins für leeren Raum, sie wird als relative, spezifische oder bezogene Dielektrizitätskonstante (DK), oder auch als relativer Elektrisierungsgrad bezeichnet<sup>2</sup>.

Da Luft im Normalzustand  $\epsilon = 1,0006$  hat, unterscheiden sich die elektrischen Zustände im Luftraum, in dem sie untersucht werden können, nur sehr wenig von den entsprechenden im leeren Raum<sup>3</sup>. Untersuchungen an Gasen haben ergeben, daß die Dielektrizitätskonstanten aller dielektrischen Stoffe mit zunehmender Verdünnung als gemeinsamem Grenzwert der Größe  $\epsilon = 1$  entgegengehen. Diese Erfahrungstatsache ist für die Feldtheorie sehr wichtig: für ihr Vorgehen, auch den leeren Raum, und nicht nur der Materie, elektrische Eigenschaften zuzuschreiben, kann sie als eine weitere Rechtfertigung gelten.

Um die mit Gl. (1) ausgesprochene Erfahrungstatsache in die Theorie einzureihen, ist man gegenüber den Untersuchungen des vorangegangenen Hauptabschnittes (6.—11.) in erhöhtem Maße auf willkürliche, jedoch möglichst zweckmäßig zu treffende Festsetzungen angewiesen, weil man im Innern fester Körper nicht experimentieren kann. Die Spannung  $U$  und die Ladung  $Q$  des Kondensators können

<sup>1</sup> Über eine diesbezügliche Einschränkung siehe unten.

<sup>2</sup> Zahlenbeispiele: Paraffin 2, Papier 2, Petroleum 2, Porzellan 5—6, Glimmer 4—8, Glas 4—10, Äthylalkohol 26, chemisch reines Wasser 81, Luft 1,006, ähnlich die meisten Gase.

<sup>3</sup> Nur für genauere Definitionen ist es nötig, sich nicht auf Luft, sondern auf Vakuum zu beziehen. Vgl. 6. Anm. 1.

in jedem Falle gemessen werden; mit beiden ist aber das elektrische Feld im Feldraum verknüpft durch [8. Gl. (2); 7. Gl. (2)]

$$U = \int_1^2 \mathfrak{E} dr; \quad (2) \quad Q = \oint \varepsilon_0 \mathfrak{E} d\mathfrak{f}. \quad (3)$$

Ist ein Dielektrikum im Feldraum vorhanden, so können nicht beide Gl. (2) und (3) zusammen mit Gl. (1) bestehen. Es sei etwa aus der Spannung mit Gl. (2) die Feldstärke wie bisher berechnet, also ohne Rücksicht auf die Materie im Feldraum, darauf werde mit der so erhaltenen Feldstärke der elektrische Hüllenfluß bestimmt: dann zeigt sich, daß dieser nicht mehr mit der gemessenen Größe  $Q$  der Ladung übereinstimmt:  $\oint \varepsilon_0 \mathfrak{E} d\mathfrak{f} \neq Q$ . Dagegen ist hier stets erfüllt:

$$\oint \varepsilon \varepsilon_0 \mathfrak{E} d\mathfrak{f} = Q.$$

Diese Feststellung wird so formuliert: Die elektrischen Ladungen sind nicht die Quellen der elektrischen Feldstärke  $\mathfrak{E}$ , sondern eines anderen Vektorfeldes

$$\mathfrak{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathfrak{E}. \quad (4)^1$$

$\mathfrak{D}$  nennt man nach Maxwell die „Verschiebung“, genauer die Verschiebungsdichte, oder auch die elektrische Erregung. An die Stelle der bisherigen Aussagen über Quellen des elektrischen Feldes (7.) treten demnach

$$\text{a) } \oint \mathfrak{D} d\mathfrak{f} = \Sigma Q; \quad \text{b) } \operatorname{div} \mathfrak{D} = \eta; \quad \text{c) } \operatorname{Div} \mathfrak{D} = \sigma. \quad (5)$$

Die geschilderte Festsetzung ist zwar willkürlich, aber außerordentlich zweckmäßig<sup>2</sup>, denn mit ihr bleibt die elektrische Spannung im statischen Zustand überall vom Weg unabhängig, das elektrostatische Feld unter allen Umständen vollkommen wirbelfrei; die Ergebnisse von 8. bleiben also unabhängig von verschiedenen Nichtleitern und auch in solchen erhalten:

$$\text{a) } \oint \mathfrak{E} dr = 0; \quad \text{b) } \operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0; \quad \text{c) } \operatorname{Rot} \mathfrak{E} = 0. \quad (6)$$

An Unstetigkeitsflächen ist also nach Gl. (6c) die Tangentialkomponente der Feldstärke stetig:

$$E_{1t} = E_{2t}, \quad (6d)$$

und ebenso nach Gl. (5c) die Normalkomponente der Verschiebung:

$$D_{1n} = D_{2n}, \quad (5d)$$

wenn die Trennfläche keine Flächenladung  $\sigma$  trägt.

Die besonders häufig auftretende Verbindung

$$\varepsilon \varepsilon_0 = \bar{\varepsilon} \quad (7)^3$$

wird absolute oder unbedingte Dielektrizitätskonstante oder absoluter Elektrisierungsgrad genannt,  $\bar{\varepsilon}$  ist eine benannte Zahl mit der Benennung von  $\varepsilon_0$ .

So steht also z. B.  $\bar{\varepsilon}$  an der Stelle von  $\varepsilon_0$  in den Kapazitätsformeln (10.).

Verschiebung hat Maxwell den Feldvektor  $\mathfrak{D}$  auf Grund folgender Vorstellung genannt: Denkt man sich den dielektrischen Stoff aus kleinsten Teilchen und leerem Zwischenraum bestehend (vgl. 2.), so verursacht das elektrische Feld influenzierter

<sup>1</sup> Benennung  $D = \frac{Q}{UL} \cdot \frac{U}{L} = \frac{Q}{L^2} = \frac{IT}{L^2}$ ; Einheit 1  $\frac{\text{Coul}}{\text{cm}^2}$  im P. M. S.

<sup>2</sup> Man hätte an Stelle des oben gezeigten Vorgehens auch aus der gemessenen Ladung mit Gl. (3) ohne Rücksicht auf das Dielektrikum  $\mathfrak{E}$  bestimmen können und hätte gefunden, daß Gl. (2) nicht mehr erfüllt ist, daß also die elektrische Spannung nicht mehr überall vom Wege unabhängig ist. Mit diesem Vorgehen hätte man somit die Wirbelfreiheit des elektrostatischen Feldes aufgegeben.

<sup>3</sup> Gl. (7) wird auch geschrieben  $\Delta = \varepsilon \Delta_0$  mit  $\Delta$  als absoluter,  $\varepsilon$  als relativer DK, oder es wird die von uns  $\varepsilon_0$  geschriebene elektrische Konstante mit  $\Delta$  bezeichnet, also die absolute DK als  $\varepsilon \Delta$  geschrieben. Eine andere Schreibweise ist  $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ , dabei ist  $\varepsilon$  die absolute,  $\varepsilon_r$  die relative DK; demgegenüber wird in der älteren physikalischen und elektrotechnischen Literatur und in den Tabellenwerken mit  $\varepsilon$  stets die relative DK bezeichnet. Welche Schreibung sich allgemein durchsetzen will, läßt sich noch nicht absehen.

Ladungen auf jedem dieser Teilchen, indem jedes auf entgegengesetzten Seiten entgegengesetzt gleiche Ladungen trägt. Zum Unterschied von auf Leiteroberflächen auftretenden Ladungen spricht man hier von Polarisierung (darunter versteht man im allgemeinen das gleichzeitige Bestehen entgegengesetzt gleicher Eigenschaften an zwei ausgezeichneten Stellen eines Körpers, Beispiel: Dauermagnet). Sind etwa schon polarisierte, aber regellos gelagerte Teilchen vorhanden, so werden diese durch das elektrische Feld gerichtet. Jedes Teilchen, und damit der ganze feld erfüllte Nichtleiter, befindet sich somit in einem nach Maßgabe der Feldstärke verursachten quasielastischen Spannungszustand, der mit ihr wächst und abnimmt: im Zustande der Polarisierung<sup>1</sup>. Ihr Auftreten bewirkt also auch Aufladungen der Grenzflächen der Nichtleiter. Umhüllen wir einen beliebigen Raumteil des polarisierten Nichtleiters durch eine (mathematische) geschlossene Fläche, und fragen nach der außen wahrgenommenen Gesamtmenge der influenzierten Einzelladungen, so kommen für diese Summe nur jene Teilchen des Stoffes in Frage, die diese Hülle schneiden. Insgesamt wirkt also die Polarisierung nach außen wie das Einwandern von Elektrizität in die eine, und das Austreten von Elektrizität aus der abgewandten Grenzfläche des Dielektrikums, und nach innen wie die Verrückung oder Verschiebung von Elektrizität in Richtung der Feldstärke. Der Betrag der Verschiebungsdichte wird darum durch die Elektrizitätsmenge bestimmt, die durch eine hinreichend kleine, senkrecht zur Verschiebungsrichtung gelegte Fläche hindurchtritt, im Verhältnis zu dieser Fläche, daher ist ihr Maß: Elektrizitätsmenge/Flächeneinheit.

Die Physik sieht die Faradaysche Entdeckung der Polarisierung geradezu als allgemeinen Beweis dafür an, daß die Nichtleiter aus Teilchen, die elektrische Eigenschaften besitzen, aufgebaut sind<sup>2</sup>.

Wir haben zwei grundsätzlich verschiedene Maße für das elektrische Feld: der Betrag der Feldstärke wird durch die Spannung/Längeneinheit, der Betrag der Verschiebungsdichte durch die Ladung/Flächeneinheit gemessen. Ähnlich wird in der Mechanik der elastische Spannungszustand eines festen Körpers entweder durch die Dehnung in cm, oder durch den Druck in kg/cm<sup>2</sup> beschrieben; beide Angaben werden durch einen Stoffwert miteinander verknüpft, der eine benannte Zahl ist (Hookesches Gesetz), entsprechend der absoluten DK.

Im leeren Raum genügt zur Beschreibung der Erscheinungen selbstverständlich eine Feldgröße; dies hat der erste Hauptabschnitt gezeigt.

Eigenschaften der Nichtleiter. Bislang hatten wir die Richtung der Felder  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{D}$  als gleich, die Beträge als einander proportional, d. h. die DK als konstanten Skalar angesehen. Unter diesen Umständen spricht man von einem idealen, homogenen, isotropen Dielektrikum. In anisotropen Körpern (Kristallen) sind die beiden Felder nicht notwendig gleichgerichtet, vielmehr hängt im allgemeinen Falle jede Komponente von  $\mathcal{D}$  von jeder Komponente von  $\mathcal{E}$  ab:

$$\left. \begin{aligned} D_x : \epsilon_0 &= \epsilon_{11} E_x + \epsilon_{12} E_y + \epsilon_{13} E_z, \\ D_y : \epsilon_0 &= \epsilon_{21} E_x + \epsilon_{22} E_y + \epsilon_{23} E_z, \\ D_z : \epsilon_0 &= \epsilon_{31} E_x + \epsilon_{32} E_y + \epsilon_{33} E_z, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

wobei

$$\epsilon_{12} = \epsilon_{21}, \quad \epsilon_{13} = \epsilon_{31}, \quad \epsilon_{23} = \epsilon_{32}. \quad (8a)$$

<sup>1</sup> Diese innere Veränderung des Dielektrikums tritt auch in der optischen Erscheinung der Doppelbrechung zutage, die ein Dielektrikum im elektrischen Felde zeigt (entdeckt von Kerr 1875).

<sup>2</sup> Mit den gegenwärtigen Modellvorstellungen über den Aufbau der Materie kann man die Polarisierung in folgende Einzelvorgänge trennen: 1. Innerhalb des Atomes werden Elektronenbahnen gegenüber dem Kern verschoben (Elektronenpolarisation). Die Strecke ist selbst gegenüber dem Moleküldurchmesser außerordentlich klein, die Einstellzeit ist sehr gering. 2. Moleküle, bei denen die beiden elektrischen Schwerpunkte nicht von vornherein zusammenfallen, sind dadurch polarisiert, also kleine elektrische Dipole. Im elektrischen Felde wird der Abstand der beiden Pole sich etwas vergrößern (Atompolarisation), die Einstellzeit ist ebenfalls sehr klein. 3. Auf regellos gelagerte Dipolmoleküle übt das elektrische Feld ein richtendes Drehmoment aus (Orientierungspolarisation). Hier hängt die Einstelldauer von der Zähigkeit ab und ist im allgemeinen um Größenordnungen größer.

Durch passende Wahl der Koordinatenrichtungen kann man hieraus auf die Form kommen

$$D_x : \varepsilon_0 = \varepsilon_1 E_x, \quad D_y : \varepsilon_0 = \varepsilon_2 E_y, \quad D_z : \varepsilon_0 = \varepsilon_3 E_z. \quad (8b)$$

Eine solche lineare Vektoroperation wird Tensor genannt<sup>1</sup>.

Den später zu schildernden Vorgängen vorausgreifend bemerken wir, daß die meisten dielektrischen Stoffe keineswegs ideale Nichtleiter sind. Die oft vorhandene Eigenschaft, die Elektrizität mehr oder weniger gut zu leiten, hängt stark von Verunreinigungen und ihre Wirkung von der Feldstärke ab. Die DK selbst ist meist stark temperaturabhängig. Bei zu großen thermischen und elektrischen Beanspruchungen wird daher der Stoff zerstört. Ferner zeigt sich oft eine dielektrische Nachwirkung, die, summarisch beschrieben, darin besteht, daß von den metallischen Belegungen eines Kondensators nach Anlegen der konstanten Spannung Elektrizität langsam in das Dielektrikum eindringt und nach Aufheben des Feldes zurückkriechend eine Restladung der metallischen Belegungen bewirkt (Rückstandsbildung). Diese Erscheinung ist stark zeitabhängig.

Ferner ist in Betracht zu ziehen, daß ein Teil der dem Dielektrikum zugeführten elektrischen Energie für die Polarisation aufgebraucht und (reibungssähnlich) in Wärme umgesetzt wird. Alle diese Erscheinungen bewirken zusammen, daß die DK von der Größe des elektrischen Feldes und der Geschwindigkeit seiner Änderung abhängig erscheint. Die theoretische und experimentelle Untersuchung der dielektrischen Eigenschaften der Stoffe kann gegenwärtig noch nicht als abgeschlossen gelten.

**Polarisation.** Die Erscheinungen bei Vorhandensein von Nichtleitern im Feldraum können vollständig dargestellt werden durch die beiden Vektoren Feldstärke und Verschiebung, von denen der zweite die dielektrischen Eigenschaften der Stoffe zum Ausdruck bringt. Indessen hat auch die erwähnte Vorstellung der Polarisation, die gleichbedeutend ist einer Verschiebung von Ladungen im Innern der Nichtleiter, ihren mathematischen Ausdruck gefunden in dem „Polarisation“ genannten Vektor  $\mathfrak{P}$ . Er wird aus dieser Vorstellung definiert, wie folgt: Im Dielektrikum tritt durch ein beliebiges Flächenelement  $df$ , auf dem der Einheitsvektor  $n$  normal steht, Ladung hindurch, wenn durch Anlegen des elektrischen Feldes der Nichtleiter polarisiert wird. Drehen wir das Flächenelement nach allen Richtungen, so gebe jene Richtung  $n$ , in der die durch  $df$  hindurchgegangene Ladung am größten ist, die Richtung des Vektors  $\mathfrak{P}$  an, sein Betrag stimme mit der Flächendichte der in dieser Stellung durch  $df$  gegangenen Ladung überein:

$$dq' = \sigma' df = P_n df; \quad (9)^2$$

$P$  ist also jene Ladung, die bei Polarisation durch die senkrecht zu  $\mathfrak{P}$  gestellte Flächeneinheit hindurchtritt, im Verhältnis zu dieser Fläche.

Wir teilen ferner den Nichtleiter in kleine zylindrische Raumelemente  $d\tau = h \cdot df$  ein, deren Deckelflächen  $df$  senkrecht zu  $\mathfrak{P}$  stehen. Diese tragen, wenn der Nichtleiter polarisiert wird, nach Gl. (9) die Ladungen  $\pm P df$  im Abstand  $h$ , stellen also kleine elektrische Dipole vom Momente  $m = P df \cdot h$ ,

$$m = \mathfrak{P} d\tau \quad (10)$$

dar.  $\mathfrak{P}$  ist demnach das elektrische Moment der als Dipol gedachten Raumeinheit des polarisierten Nichtleiters.

<sup>1</sup> In einem Raumpunkt kann man einen Vektor durch einen Pfeil, einen Skalar durch eine Kugel, einen Tensor durch ein Ellipsoid versinnbildlichen, doch hat diese Vorstellung höchstens den Wert eines Gleichnisses.

<sup>2</sup> Man hat die als Folge der Polarisation auftretenden Elektrizitätsmengen in der älteren Literatur „freie Ladungen“ genannt. Sie sind begrifflich völlig verschieden von den „wahren Ladungen“, das sind jene, die nach Definition Gl. (5) die Quellen des Feldes  $\mathfrak{D}$  sind. Die Nomenclatur ist unglücklich. Für eine vollständige Beschreibung der Erscheinungen ist der im Grunde der Fernwirkungstheorie zugehörige Begriff entbehrlich und wird daher von uns, obwohl er gewisse mathematische Vorteile bieten kann, nicht weiter gebraucht.

Um den Zusammenhang von  $\mathfrak{P}$  mit  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{D}$  herzustellen, denken wir daran, daß durch die Polarisierung Aufladungen der Grenzflächen der Nichtleiter bewirkt werden. Diese erklären die vergrößerte Kapazität des mit einem Dielektrikum gefüllten Kondensators: Bei gegebener Spannung kann der Kondensator offenbar eine um so größere Ladung aufnehmen, je mehr von dieser zugeführten Elektrizitätsmenge zur Aufhebung der anderen Ladungen gebraucht wird, die von der Polarisierung des Isolators herrühren. Die Polarisierung steigt also mit der Dielektrizitätskonstanten. Die Ladungsdichte auf den Belegungen eines Kondensators gleicht aber der Normalkomponente der Verschiebungsdichte. Wir denken uns die gesamte, bei Vorhandensein des Nichtleiters beobachtete Verschiebungsdichte  $\mathfrak{D}_{\text{diel}}$  bestehend aus zwei Posten, deren einer die bei leerem Feldraum (Vakuum) sich einstellende Verschiebungsdichte  $\mathfrak{D}_{\text{vak}}$  sei. Dann ist der zweite Posten die Polarisierung  $\mathfrak{P}$  nach ihrer ersten obigen Definition:

$$\mathfrak{D}_{\text{diel}} = \mathfrak{D}_{\text{vak}} + \mathfrak{P}. \quad (11)$$

Berücksichtigen wir

$$\mathfrak{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathfrak{E}, \quad (4)$$

so ergibt sich

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{D}_{\text{vak}} (\varepsilon - 1) = \varepsilon_0 \mathfrak{E} (\varepsilon - 1). \quad (12)$$

Man bezeichnet den Zahlenfaktor  $\varepsilon - 1 = \chi$  als „dielektrisches Aufnahmevermögen (Suszeptibilität)“<sup>1</sup>.

### 13. Vergleich des Feldes im leeren und im dielektrischen Raum. Übergang der Feldlinien.

Die Grundgleichungen 12. Gl. (4), (5), (6) reichen zur Beschreibung des allgemeinen elektrostatischen Feldes hin. Gl. (6) fordert Wirbelfreiheit des Feldes  $\mathfrak{E}$  (b), Stetigkeit der Tangentialkomponenten von  $\mathfrak{E}$  (c), Unabhängigkeit der Spannung vom Wege (a). Gl. (5) bedingt Quellenfreiheit des Feldes  $\mathfrak{D}$ , ausgenommen die Ladungen (a, b), Stetigkeit der Normalkomponenten von  $\mathfrak{D}$ , wo keine Flächenladung sitzt (c). Die DK [Gl. (4)] betrachten wir in 13. der Einfachheit halber als örtlich und zeitlich konstanten Skalar. Damit lassen sich die elektrostatischen Aufgaben für den Fall, daß der Feldraum von einem Dielektrikum mit dem Elektrisierungsgrad  $\varepsilon$  erfüllt wird, auf den bekannten Fall des leeren Raumes zurückführen:

1. Sind die Ladungsträger isoliert aufgestellt, bleibt also überall  $Q = \text{const}$ , so bleibt die Verschiebung  $\mathfrak{D}$  ungeändert, demnach wird die Feldstärke  $\mathfrak{E}$ , und darum die Spannung zwischen den Ladungsträgern im Verhältnis  $1 : \varepsilon$  verkleinert. Beispiel: Durch Einschieben eines Nichtleiters in einen Luftkondensator sinkt die Spannung.

2. Werden die Spannungen der Leiter gegeneinander konstant gehalten, so bleibt die Feldstärke unverändert, die Verschiebung  $\mathfrak{D}$  und darum auch die Ladungen werden im Verhältnis  $\varepsilon : 1$  vergrößert. Beispiel: Durch Ausfüllen des Feldraumes mit einem Nichtleiter wird die Kapazität eines Kondensators nach 12. Gl. (1) im Verhältnis  $\varepsilon : 1$  vergrößert, ebenso die Ladung bei konstanter Spannung.

Der allgemeine Fall, daß man ein Dielektrikum ( $\varepsilon_1$ ) mit einem anderen ( $\varepsilon_2$ ) vertauscht, läßt sich hieraus leicht ableiten.

Ferner bestimmen die genannten drei Grundgleichungen den Austritt von Feldlinien aus einem homogenen isotropen Dielektrikum ( $\varepsilon_1$ ) in ein anderes ( $\varepsilon_2$ ). Trägt die Grenzschicht keine fremde Ladung ( $\sigma = 0$ ), so diene dieser Feststellung 12. Gl. (5d) und (6d):  $D_{1n} = D_{2n}$ ,  $E_{1t} = E_{2t}$ . Bezeichnen  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  die Winkel, welche die Tangenten an die Feldlinien in den beiden Nichtleitern an der Grenzschicht mit dem Lot bilden, so sind diese Gleichungen gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned} E_1 \sin \alpha_1 &= E_2 \sin \alpha_2, \\ D_1 \cos \alpha_1 &= D_2 \cos \alpha_2; \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Vielfach ist es üblich, nicht  $\varepsilon - 1$ , sondern  $\frac{1}{4\pi} (\varepsilon - 1)$  als Suszeptibilität zu bezeichnen. Es besteht gegenwärtig kein Grund mehr zu dieser Form, ganz besonders nicht, wenn man die Gleichungen maßunabhängig auffassen will. Vergl. die Anmerkung zu 24. Gl. (6).



dividiert man beide Gleichungen durch einander und beachtet, daß  $\mathfrak{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathfrak{E}$  ist [12. Gl. (4)], so erhält man

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \tag{1}$$

vgl. das Beispiel Abb. 1. Die Feldlinien liegen beiderseits der Trennfläche in der Ebene der Flächennormalen; sie werden beim Eintritt in den Nichtleiter mit der kleineren DK zum Lot hin gebrochen. Die aus einem Nichtleiter in den leeren Raum (Luft) austretenden Feldlinien schließen also mit dem Lot einen um so spitzeren Winkel ein, je größer die DK des Nichtleiters ist. Auf Leitern stehen die Feldlinien senkrecht, und ihr Inneres ist feldfrei [7. Gl. (12); 8. Gl. (6)]. Befinden sich Leiter im elektrostatischen Felde, so rechnet man demnach richtig, wenn man sie zunächst als Nichtleiter ansieht, und darauf ihre Dielektrizitätskonstante unendlich groß werden läßt: dabei werden gerade die oben genannten Gleichgewichtsbedingungen für Leiter hergestellt. Dieser Kunstgriff darf aber nicht zu dem Schluß verleiten, die DK der metallischen Leiter sei physikalisch unendlich groß. Der Gleichgewichtszustand kann vielmehr über die Dielektrizitätskonstante metallischer Leiter keinen Aufschluß geben, denn in ihm ist im Leiterinnern sowohl  $\mathfrak{E} = 0$  als auch  $\mathfrak{D} = 0$ ; ihr Verhältnis, durch das die DK bestimmt ist, hat also im Leiterinnern die unbestimmte Form  $\varepsilon = \frac{\mathfrak{D}}{\varepsilon_0 \mathfrak{E}} = \frac{0}{0}$ .

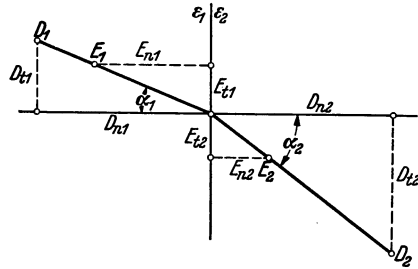


Abb. 13. 1. Übergang des elektrostatischen Feldes an einer ungeladenen Grenzfläche. Gegeben z. B.:  $\varepsilon_2 = 2 \varepsilon_1$ ;  $D_1, E_1, \alpha_1$ .

Leiterinnern sowohl  $\mathfrak{E} = 0$  als auch  $\mathfrak{D} = 0$ ; ihr Verhältnis, durch das die DK bestimmt ist, hat also im Leiterinnern die unbestimmte Form  $\varepsilon = \frac{\mathfrak{D}}{\varepsilon_0 \mathfrak{E}} = \frac{0}{0}$ .

#### 14. Energie und Kraft.

Beim Faradayschen Grundversuch [12. Gl. (1)] mußte durch Vergrößerung der Kapazität im Verhältnis  $\varepsilon:1$  nach Ausweis der Energieformel 11. Gl. (14), (15)

$$W_e = \frac{1}{2} Q U = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

die Energie bei konstanter Spannung (Feldstärke) im gleichen Verhältnis vergrößert, bei konstanter Ladung (Verschiebung) im Verhältnis  $1:\varepsilon$  verkleinert worden sein. Dies wird durch die Erfahrung bestätigt, es steht auch im Einklang mit dem eingangs 13. Gesagten. Dementsprechend muß der Ausdruck für die Feldenergie

$$W_e = \int_{\infty}^{\varepsilon_0} \mathfrak{E}^2 d\tau \tag{11. (12)}$$

ergänzt werden durch Einführen der Verschiebung

$$\mathfrak{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathfrak{E} = \bar{\varepsilon} \mathfrak{E} \tag{12. (4)}$$

zu

$$W_e = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\infty} \varepsilon \mathfrak{E}^2 d\tau = \frac{1}{2 \varepsilon_0} \int_{\infty} \frac{\mathfrak{D}^2}{\varepsilon} d\tau = \frac{1}{2} \int_{\infty} \mathfrak{E} \mathfrak{D} d\tau. \tag{1}$$

Den Ausdruck für die Energiedichte  $w_e$

$$w_e = \frac{\mathfrak{E} \mathfrak{D}}{2}; \quad W_e = \int_{\infty} w_e d\tau \tag{2}^1$$

sieht die Maxwellsche Theorie nicht nur für elektrostatische Felder als gültig an, sondern für elektrische Felder jeder Art, auch wenn zwischen  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{D}$  keine Proportionalität besteht. Die allgemeine Richtigkeit dieser Energieformeln erweist sich

<sup>1</sup> Benennung (vgl. 11.)  $w = \frac{U}{L} \cdot \frac{Q}{L^2} = p$ .

einerseits später aus allgemeinen Energiebetrachtungen (41.) und andererseits daraus, daß die mit ihnen errechneten mechanischen Kräfte im statischen Felde übereinstimmen mit auf anderem Wege gewonnenen (15.). Dementsprechend setzen wir auch für die Kraft auf die Oberflächeneinheit eines geladenen Leiters ebenso, wie in 11. Gl. (6) und (12) den mit der Energiedichte übereinstimmenden Ausdruck

$$p = \frac{\mathfrak{E} \mathfrak{D}}{2}, \quad p_n = \frac{\sigma E_n}{2}. \quad (3)^1$$

Kräfte auf Nichtleiter. Mechanische Kräfte werden nicht nur ausgeübt, wo Quellen des elektrischen Feldes sich befinden [Zugkräfte auf geladenen Leiteroberflächen, 11. Gl. (6)], sondern auch dort, wo die DK sich räumlich ändert, z. B. an der Oberfläche von Nichtleitern (ohne daß diese künstlich mit einer fremden Ladung versehen wurden).

Im Beispiel Abb. 1 ist das linearhomogene Feld eines Plattenkondensators zum Teil mit Luft ( $\varepsilon_1$ ), zum Teil mit Öl ( $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ ) gefüllt. In der Luft ist die Energiedichte  $w_1 = \frac{\varepsilon_0}{2} E_1^2 \varepsilon_1$ , im Öl  $w_2 = \frac{\varepsilon_0}{2} E_2^2 \varepsilon_0$ ; die Verschiebung ist stetig, da Flächenladungen

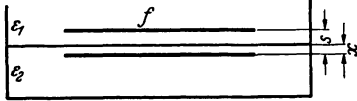


Abb. 14. 1. Elektrische Kraft auf einen Nichtleiter.

fehlen:  $D_1 = D_2$ . Die gesamte Energie ist daher  $W_e = \frac{\varepsilon_0}{2} E_1 E_2 f \{ \varepsilon_2 (s - x) + \varepsilon_1 x \}$ ; aus  $K_x = -\frac{\partial W_e}{\partial x}$  erhält man die Kraft  $p_x$  auf die Oberflächeneinheit in Richtung  $x$

$$p_x = \frac{\varepsilon_0}{2} E_1 E_2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1), \quad (4)$$

was man als Sonderfall der allgemeineren Vektorformel

$$p = \frac{\varepsilon_0}{2} \mathfrak{E}_1 \mathfrak{E}_2 \text{ Grad } \varepsilon \quad (5)^2$$

auffassen kann, die im folgenden Abschnitt 15. bewiesen wird. Diese Kraft sucht den Ölspiegel zu heben ( $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ ), sie wirkt allgemein nach Gl. (4) auf den Körper mit der größeren DK als Zug, treibt also jedes Teilchen in Richtung abnehmender Werte der DK.

Auf ungeladene isolierte nichtleitende oder leitende Körper werden stets Kräfte ausgeübt, wenn sie in ein durch  $\mathfrak{E}_1$  und  $\varepsilon_1$  gekennzeichnetes Feld eingebracht werden und dieses dadurch stören. Die Kraft bestimmt sich als Resultierende der auf jedes Volumenteilchen ausgeübten Kraft, die man aus Energiebetrachtungen, ähnlich wie oben, bestimmen kann. Hat der eingebrachte Körper die DK  $\varepsilon_2$ , so wird jedes Volumenteilchen für sich, unabhängig von der Gestalt des Körpers, zu Stellen stärkeren oder schwächeren Feldes getrieben, je nachdem, ob  $\varepsilon_2$  größer oder kleiner als  $\varepsilon_1$  ist. Mit der in 13. genannten Regel, für Leiter  $\varepsilon_2 : \varepsilon_1 = \infty$  zu setzen, sind auch diese hierin einbegriffen. Der Gesamtbewegungsantrieb läßt sich bei einfachen Körperformen dem Sinne nach bisweilen aus der Regel bestimmen, daß die Bewegungsantriebe der isolierten Körper stets so erfolgen, daß die Energie im betrachteten Raumteil verkleinert wird.

### 15. Die Faraday-Maxwellschen Spannungen und die mechanischen Kräfte.

Nach unseren grundlegenden Vorstellungen, die auf Faraday zurückgehen, werden die elektrischen Kräfte nicht unvermittelt, mit Überspringung des unbeteiligten Zwischenraumes ausgeübt, sondern vielmehr dadurch, daß dieser, mag er stofflich ausgefüllt sein oder nicht, lückenlos in einen eigentümlichen Zustand versetzt ist, den wir „elektrisches Feld“ nennen (6.). Ist diese Vorstellung richtig, so muß es möglich sein, die auf irgendein durch eine Hülle abgegrenztes System,

<sup>1</sup> Benennung (vgl. 11.)  $w = \frac{U}{L} \cdot \frac{Q}{L^2} = p$ .

<sup>2</sup>  $\text{Grad } \varepsilon \equiv n_{1/2} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$ , wenn  $n_{1/2}$  die Normale in Richtung von 1 nach 2 bedeutet.

das z. B. elektrische Ladungen enthält<sup>1</sup>, ausgeübten Kräfte durch Spannungskräfte zu ersetzen, die an den Flächenelementen dieser (mathematischen) Hülle angreifen. Da der allgemeinste Ausdruck der Kräfte das Raumintegral einer räumlichen Kraftdichte  $\mathfrak{k}$  ist, handelt es sich also darum, dieses Raumintegral durch ein unter allen Umständen gleichwertiges Hüllenintegral

$$\mathfrak{K} = \int_{\tau} \mathfrak{k} d\tau = \oint p df \quad (1)$$

auszudrücken. Diesen grundsätzlich wichtigen Nachweis hat Maxwell erbracht, indem er die Kraft auf die Flächeneinheit („Spannung“) angab als

$$p = \frac{1}{2} \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{D} n + \frac{1}{2} [\mathfrak{D} [\mathfrak{E} n]]. \quad (2)$$

Dabei sind  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{D} = \bar{\epsilon} \mathfrak{E}$  die Feldvektoren auf dem Flächenelement  $df$ ,  $n$  dessen Normale,  $\epsilon = const.$  Diese Spannungskräfte können in keiner Weise unmittelbar wahrgenommen werden, da sie sich überall das Gleichgewicht halten, wo auf beiden Seiten des Flächenelementes dieselbe Spannungs-kraft wirkt. Sie werden daher „fiktiv“ genannt. Wahrnehmbare mechanische Kräfte ergeben sich erst dort, wo sich die Spannungskräfte räumlich ändern. Das ist in erster Linie an Unstetigkeitsflächen der Fall. Wir werden daher zu zeigen haben: a) daß der Ausdruck Gl. (2) im Einklang steht mit den bisher entwickelten Vorstellungen vom elektrischen Feld, b) daß sich aus ihm die tatsächlich auftretenden mechanischen Kräfte ableiten lassen. Dies zeigen wir für den in erster Linie wichtigen Fall von Unstetigkeitsflächen (Oberflächen leitender und nichtleitender Körper), und danach c) in Verallgemeinerung für räumlich stetige Änderungen.

a) Wir haben zunächst den Ausdruck Gl. (2) auszulegen. Der Vektor  $p$  der Flächenkraft oder „Spannung“ ist ausgedrückt als die Summe zweier Vektoren, von denen der erste in Richtung von  $\mathfrak{E}$  liegt, der zweite senkrecht zu  $\mathfrak{D}$  in der Ebene von  $\mathfrak{E}$  und  $n$ . Es liegt daher  $p$  in der gleichen Ebene, wie Feldstärke  $\mathfrak{E}$  und Flächennormale  $n$ . Wir entwickeln den zweiten Vektor<sup>2</sup> und finden

$$p = \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{D} n - n \cdot \frac{\mathfrak{E} \mathfrak{D}}{2}. \quad (3)$$

Ist  $\alpha$  der Winkel zwischen  $\mathfrak{D} (\mathfrak{E})$  und  $n$ , so ist  $|\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{D} n| = E D \cos \alpha = 2 w \cos \alpha$ , wenn  $w = \frac{\mathfrak{E} \mathfrak{D}}{2}$  die Energiedichte bedeutet. Daher ist der Betrag

$$p = \frac{\mathfrak{E} \mathfrak{D}}{2} = w. \quad (4)^3$$

Setzen wir  $p$  aus den Vektoren  $\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{D} n$  und  $-n w$  zusammen und beachten seine Größe  $p = w$ , so liest man aus Abb. 1 leicht den geometrischen Beweis dafür ab, daß der Winkel, den  $p$  mit  $\mathfrak{E}$  bildet, und der Winkel zwischen  $\mathfrak{E}$  und  $n$  stets gleich groß sein müssen. Damit ist  $p$  völlig bestimmt: seine Größe ist gleich der Dichte der elektrischen Energie, und seine Richtung wird dadurch bestimmt, daß der Winkel zwischen der Flächenkraft und der Flächennormalen durch die Feldstärke halbiert wird;  $n$ ,  $\mathfrak{E}$ ,  $p$  liegen in derselben Ebene.

<sup>1</sup> Eine räumliche Ladungsverteilung  $\eta = \text{div } \mathfrak{D}$ , die ein Feld  $\mathfrak{E}$  hervorbringt, sei gegeben; durch eine geschlossene Hülle sei ein Gebiet  $\tau$  abgegrenzt. Bei ruhenden Körpern und gleichmäßigem Dielektrikum ist die auf das System ausgeübte Kraft  $\mathfrak{K} = \int_{\tau} \mathfrak{E} \eta d\tau = \int_{\tau} \mathfrak{k} d\tau$ . Alle in

dieser Art als räumlich verteilte auftretenden Kräfte sollen also nach Gl. (1) ersetzbar sein durch Oberflächenkräfte auf die abgrenzende Hülle. (Zu dem Raumintegral sei bemerkt:  $\mathfrak{E}$  bedeutet die gesamte Feldstärke; die Integration beschränkt sich auf den abgegrenzten Raum  $\tau$ ; innerhalb  $\tau$  ist die Wirkung irgendeines Teilchens  $P$  auf ein anderes  $Q$  gleich und entgegengesetzt der Wirkung von  $Q$  auf  $P$ , und da beide Wirkungen ins Integral eingehen, heben sie sich gegenseitig auf, so daß also  $\mathfrak{K}$  in der Tat lediglich die von außen auf  $\tau$  wirkende oder von ihm ausgeübte Kraft bedeutet.)

<sup>2</sup>  $[\mathfrak{D} [\mathfrak{E} n]] = \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{D} n - n \cdot \mathfrak{D} \mathfrak{E}$ .

<sup>3</sup>  $p^2 = |\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{D} n|^2 + n^2 \left( \frac{\mathfrak{E} \mathfrak{D}}{2} \right)^2 - 2 |\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{D} n| \cdot \left| n \frac{\mathfrak{E} \mathfrak{D}}{2} \right| \cdot \cos \alpha = \left( \frac{\mathfrak{E} \mathfrak{D}}{2} \right)^2$ .

Wir betrachten einige Sonderfälle. Es sei erstens das Teilchen  $df$  der Fläche senkrecht zur Feldstärke gestellt: dann wird die äußere Normale  $n$  und der Flächenvektor  $df$  parallel zur Feldstärke  $\mathcal{E}$ , also  $[\mathcal{E} n] = 0$  und nach Gl. (2)

$$p = \frac{1}{2} \mathcal{E} \cdot |\mathcal{D}| = n \cdot \frac{\mathcal{E} \mathcal{D}}{2},$$

wenn  $\mathcal{E}$  nach außen gerichtet ist, und

$$p = \frac{1}{2} \mathcal{E} \cdot (-|\mathcal{D}|) = \frac{1}{2} (-n |\mathcal{E}|) (-|\mathcal{D}|) = n \cdot \frac{\mathcal{E} \mathcal{D}}{2}, \quad (4a)$$

wenn  $\mathcal{E}$  nach innen gerichtet ist; es kommt somit auf den Richtungssinn der Feldstärke nicht an, die Kraft ist hier stets senkrecht zu  $df$  nach außen gerichtet, d. h. sie ist von der Art einer Seilspannung.

Es sei zweitens das Element  $df$  parallel zur Feldstärke gerichtet; dann stehen also  $n$  und  $df$  senkrecht zu  $\mathcal{E}$ . Daher ist  $\mathcal{E} n = 0$  und nach Gl. (3) stets

$$p = -n \cdot \frac{\mathcal{E} \mathcal{D}}{2}. \quad (4b)$$

Der Betrag der Kraft ist in diesem Falle ebenso groß wie im ersten, die Richtung ist aber eine andere, es ist ein Druck, kein Zug. Wir finden somit unsere anfängliche Anschauung (7.) begründet, daß man sich parallel zu den Feldröhren einen Zug, senkrecht zu ihnen einen Druck vorzustellen hat: „Die Feldröhren suchen sich zu verkürzen und einander gegenseitig abzustoßen.“

b) Wir untersuchen die mechanischen Kräfte, die sich aus den Maxwell-Faradayschen Spannungen an einer Unstetigkeitsfläche des Feldes ergeben, welche die Feldgebiete 1 und 2 voneinander scheidet. Die Kraft auf die Flächeneinheit ergibt sich aus den Spannungen zu beiden Seiten der Fläche, sie ist also auf

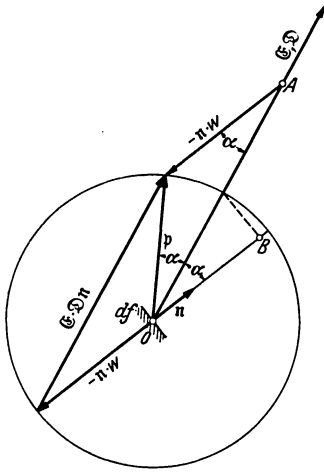


Abb. 15.1. Faraday-Maxwellsche „fiktive“ Spannung.  
 $|\mathcal{E} \cdot \mathcal{D} n| = 2 w \cos \alpha = \overline{OA}$ .  
 $w \cos \alpha = \overline{OB}$ .  $|p| = w$ .

die Oberflächeneinheit  $p_2 - p_1$ . Setzt man beide Spannungen nach Gl. (2) an, so kann man umformen<sup>1</sup> zu

$$2(p_2 - p_1) = (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)(\mathcal{D}_2 - \mathcal{D}_1)n + n(\mathcal{D}_1\mathcal{E}_2 - \mathcal{D}_2\mathcal{E}_1) + [n(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)(\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2)] \quad (5)$$

Hierin ist

$$n(\mathcal{D}_2 - \mathcal{D}_1) = \text{Div } \mathcal{D} = \sigma$$

die Flächendichte der Ladung. Ferner ist

$$[n(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)] = \text{Rot } \mathcal{E}$$

der Flächenwirbel der elektrischen Feldstärke. Außerdem ist

$$\mathcal{D}_1\mathcal{E}_2 - \mathcal{D}_2\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_1\mathcal{E}_2\varepsilon_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$

und

$$n(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) = \text{Grad } \varepsilon$$

der Flächensprung der DK. Somit erhalten wir die wahrnehmbare Kraft auf die Flächeneinheit

$$p_2 - p_1 = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{2} \text{Div } \mathcal{D} - \frac{\varepsilon_0}{2} \mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 \text{Grad } \varepsilon + [\text{Rot } \mathcal{E} \cdot \frac{\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2}{2}]. \quad (6)$$

<sup>1</sup>  $2(p_2 - p_1) = \mathcal{E}_2 \cdot \mathcal{D}_2 n - \mathcal{E}_1 \cdot \mathcal{D}_1 n + [\mathcal{D}_2[\mathcal{E}_2 n]] - [\mathcal{D}_1[\mathcal{E}_1 n]]$ ; indem man  $[\mathcal{D}_2[\mathcal{E}_1 n]] - [\mathcal{D}_1[\mathcal{E}_2 n]]$  addiert und subtrahiert, werden die beiden Vektorprodukte  $[\mathcal{D}_2[\mathcal{E}_1 n]] - [\mathcal{D}_1[\mathcal{E}_2 n]] + [\mathcal{D}_2[(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)n]] + [\mathcal{D}_1[(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)n]] = \mathcal{E}_1 \cdot \mathcal{D}_2 n - \mathcal{E}_2 \cdot \mathcal{D}_1 n - n(\mathcal{D}_2\mathcal{E}_1 - \mathcal{D}_1\mathcal{E}_2) + [n(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)(\mathcal{D}_2 + \mathcal{D}_1)]$ ;

addiert man hierzu

$$\mathcal{E}_2 \cdot \mathcal{D}_2 n - \mathcal{E}_1 \cdot \mathcal{D}_1 n = (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)(\mathcal{D}_2 - \mathcal{D}_1)n + \mathcal{E}_2 \cdot n\mathcal{D}_1 - \mathcal{E}_1 \cdot n\mathcal{D}_2,$$

so folgt Gl. (5).

Bei elektrischem Gleichgewicht ist  $\text{Rot } \mathfrak{E} = 0$ . An der Grenze eines leitenden Körpers (1) gegen einen Nichtleiter (2) ist  $\mathfrak{E}_1 = 0$ , daher die Kraft auf die Flächeneinheit des Leiters

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2} \mathfrak{E}_2 \sigma = n \frac{\mathfrak{E}_2 \mathfrak{D}_2}{2} = n w_2. \quad (7)$$

Daß die Kraft stets senkrecht nach außen gerichtet ist und die Kraftdichte die Größe der Energiedichte hat, wurde früher festgestellt [11. Gl. (6), (12); 14. Gl. (3)]. An der Grenzfläche zweier Nichtleiter ist  $\text{Div } \mathfrak{D} = 0$ , falls diese Fläche nicht künstlich aufgeladen wurde, und daher ist dort

$$p_2 - p_1 = \frac{\epsilon_0}{2} \mathfrak{E}_1 \mathfrak{E}_2 n (\epsilon_1 - \epsilon_2). \quad (8)$$

Die Kraft steht senkrecht zur Grenzfläche und wirkt als Zug auf den Körper mit der größeren DK. Auch dieser Ausdruck ist aus früheren Überlegungen bekannt [14. Gl. (5)].

c) Sind die Ladungen, die Änderungen der DK und die elektrischen Wirbel nicht flächenhaft, sondern räumlich verteilt, so tritt an die Stelle von Gl. (6) der allgemeine Ausdruck Gl. (1) für die wahrnehmbaren räumlichen Kräfte. Dabei hat man für die räumliche Kraftdichte zu setzen

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{E} \cdot \text{div } \mathfrak{D} - \frac{\epsilon_0}{2} \mathfrak{E}^2 \text{grad } \epsilon + [\text{rot } \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{D}]. \quad (9)$$

Daß damit in der Tat in jedem Falle Gl. (1) erfüllt ist, wenn  $p$  nach Gl. (2) angenommen wird, beweist eine einfache Ableitung; da diese aber ausschließlich rechnerisches Interesse bietet und keine weiteren physikalischen Gesichtspunkte erbringt, kann sie hier um so eher übergangen werden, als Gl. (9) vollkommen analog zu Gl. (6) gebaut ist und wir wissen, daß die Flächenoperationen in jedem Falle durch Grenzvorgänge aus den allgemeinen räumlichen Operationen hervorgehen. Das erste Glied von Gl. (9) kann auch geschrieben werden  $\eta \mathfrak{E}$ . Kräfte sind im allgemeinen vorhanden, wo Quellen der Verschiebung, Gefälle der Dielektrizitätskonstanten und Wirbel der Feldstärke bestehen. Die letzte Möglichkeit entfällt im elektrostatischen Feld.

Anmerkung. Zwei Irrtümer müssen hier besonders vermieden werden: 1. Die „fiktiven Spannungen“ im Innern von nichtleitenden Körpern dürfen nicht mit elastischen Spannungen verwechselt werden. 2. Unter der „Spannung“ wird hier im naheliegendsten Wortsinn die Kraft auf die Flächeneinheit verstanden. Unabhängig davon ist der Ausdruck „elektrische Spannung“, wie bekannt, für das Linienintegral der elektrischen Feldstärke gebräuchlich [8. Gl. (2)].

## 16. Der Gleichgewichtszustand des elektrostatischen Feldes.

Im Schwerfeld befinden sich Körper dann im stabilen Gleichgewicht, wenn in dieser Stellung der Körper die Energie der Lage einen Kleinstwert aufweist. Wenn ein elektrostatisches Feld, wie wir von Anfang an voraussetzten, ein Feld im Gleichgewichtszustand ist, so muß seine Energie kleiner sein, als die jeder anderen Art elektrischen Feldes. Den Beweis hierfür hat Thomson erbracht.

In einem elektrischen Feld, das Leiter und Nichtleiter in beliebigen Anordnungen enthält, gelten die Beziehungen

$$\eta = \text{div } \mathfrak{D} \quad (1)$$

für die räumliche Ladungsverteilung,

$$\sigma = \text{Div } \mathfrak{D} \quad (2)$$

für Sprungflächen (Unstetigkeiten) im allgemeinen und im besonderen

$$Q_1 = \oint_1 \mathfrak{D} d\mathfrak{f}_1, \quad Q_2 = \oint_2 \mathfrak{D} d\mathfrak{f}_2, \dots \quad Q_n = \oint_n \mathfrak{D} d\mathfrak{f}_n \quad (3)$$

für die Oberflächen der  $n$  geladenen, leitenden Körper.

Diese allgemeinen Beziehungen lassen sich über jedes elektrische Feld aussagen. Das elektrostatische Feld wird jedoch erst dadurch vollständig beschrieben, daß man sie ergänzt durch die besondere Eigenschaft der Wirbelfreiheit:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0, \quad \operatorname{Rot} \mathfrak{E} = 0, \quad (4)$$

im besonderen für leitende Körper

$$\mathfrak{E}_i = 0. \quad (5)$$

Dazu besteht der allgemeine Zusammenhang

$$\mathfrak{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathfrak{E}. \quad (6)$$

Es sei gegeben: a) ein elektrostatisches Feld  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{D}$  durch die Beziehungen Gl. (1) bis (6), b) ein anderes elektrisches Feld  $\mathfrak{E}'$ ,  $\mathfrak{D}'$  mit denselben Quellen, wie das statische:

$$\eta = \operatorname{div} \mathfrak{D}', \quad (1')$$

$$\sigma = \operatorname{Div} \mathfrak{D}', \quad (2')$$

$$Q_1 = \oint_1 \mathfrak{D} d\mathfrak{f}_1, \quad Q_2 = \oint_2 \mathfrak{D} d\mathfrak{f}_2, \quad \dots \quad Q_n = \oint_n \mathfrak{D} d\mathfrak{f}_n; \quad (3')$$

auch hier gilt

$$\mathfrak{D}' = \varepsilon_0 \varepsilon \mathfrak{E}'; \quad (6')$$

dieses Feld soll aber nichtstatisch sein, daher Gl. (4) und (5) nicht genügen. Dann sagt der Thomsonsche Satz: Die Energie  $W'$  des nichtstatischen Feldes ist unter allen Umständen größer als die Energie  $W$  des statischen Feldes. Zum Beweis betrachten wir in jedem Punkte des Feldraumes die Differenz des statischen und des nichtstatischen Feldes

$$\mathfrak{E}'' = \mathfrak{E}' - \mathfrak{E}; \quad \mathfrak{D}'' = \mathfrak{D}' - \mathfrak{D}. \quad (7)$$

Nach den Voraussetzungen Gl. (1), (2), (3); (1'), (2'), (3') ist das Differenzfeld gänzlich quellenlos:

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{div} \mathfrak{D}'' = 0, \quad \operatorname{Div} \mathfrak{D}'' = 0 \\ \oint_1 \mathfrak{D}'' d\mathfrak{f}_1 = 0, \dots \quad \oint_n \mathfrak{D}'' d\mathfrak{f}_n = 0 \end{array} \right\} \quad (8)$$

Damit berechnen wir die gesuchte Energie des nichtstatischen Feldes

$$W' = \frac{1}{2} \int (\mathfrak{E} + \mathfrak{E}'') (\mathfrak{D} + \mathfrak{D}'') d\tau = W + W'' + \frac{1}{2} \int (\mathfrak{E} \mathfrak{D}'' + \mathfrak{E}'' \mathfrak{D}) d\tau, \quad (9)$$

wobei  $W = \frac{1}{2} \int \mathfrak{E} \mathfrak{D} d\tau$  und  $W'' = \frac{1}{2} \int \mathfrak{E}'' \mathfrak{D}'' d\tau$  bedeuten. Mit Gl. (6) und (6') ist

$$\mathfrak{E} \mathfrak{D}'' + \mathfrak{E}'' \mathfrak{D} = 2 \mathfrak{E} \mathfrak{D}''. \quad (10)$$

Das Raumintegral ist über den ganzen felderfüllten Raum zu erstrecken. Der Integrand Gl. (10) im letzten Glied von Gl. (9) ist das skalare Produkt zweier Vektoren, von denen  $\mathfrak{E}$  nach Voraussetzung Gl. (4) wirbelfrei ist, während  $\mathfrak{D}''$  quellenfrei gefunden wurde [Gl. (8)]. Die Vektorenrechnung beweist den allgemeinen Satz, daß ein derartiges Volumenintegral unabhängig von den besonderen Anordnungen im Feldraum verschwindet, sofern nur die Integration über den ganzen Feldraum ausgedehnt wird, wie wir hier voraussetzen. Somit bleibt übrig

$$W' = W + W'', \quad (11)$$

wobei mit Gl. (7), (6), (6') der Überschuß  $W''$  der Energie des nichtstatischen Feldes über die Energie  $W$  des statischen Feldes

$$W'' = \frac{\varepsilon_0}{2} \int \varepsilon (\mathfrak{E}' - \mathfrak{E})^2 d\tau \quad (12)$$

eine notwendig stets positive Größe ist. Wenn also nur an irgendeiner Stelle das nichtstatische Feld  $\mathfrak{E}'$  vom statischen Feld  $\mathfrak{E}$  verschieden ist, so ist die Energie des nichtstatischen Feldes größer als die Energie des statischen Feldes. *Unter allen elektrischen Feldern*, die den allgemeinen Bedingungen Gl. (1), (2), (3) genügen,

hat das elektrostatische Feld, das außerdem noch der Bedingung Gl. (4) unterworfen ist, die kleinste Energie.

Damit ist auch bewiesen, daß es zu einer gegebenen Ladungsverteilung [Gl. (1), (2), (3)] nur ein einziges, eindeutiges elektrostatisches Feld gibt: Wären zwei verschiedene elektrostatische Felder möglich, so müßte jedes dieser beiden eine kleinere Energie besitzen, als jedes andere elektrische Feld, was nur möglich ist, wenn beide statische Felder identisch gleich sind. Die Gl. (1), (2), (3), (4), (5), (6) kennzeichnen das elektrostatische Feld eindeutig und vollständig.

## Rechnerische Verfahren der Elektrostatik.

### 17. Die Differentialgleichung des skalaren Potentials.

Wegen der in 8. festgestellten Wirbelfreiheit des elektrostatischen Feldes

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0 \quad 8. (5) \quad (1)$$

kann die elektrische Feldstärke  $\mathfrak{E}$  aus einer skalaren Potentialfunktion  $\varphi$  errechnet werden gemäß

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \quad 8. (9) \quad (2)$$

Die elektrischen Ladungen sind die Quellen des Verschiebungsfeldes  $\mathfrak{D}$ :

$$\eta = \operatorname{div} \mathfrak{D} \quad 12. (5) \quad (3)$$

mit der räumlich verteilten Ladungsdichte  $\eta$ . Zwischen  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{D}$  besteht der Zusammenhang

$$\mathfrak{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathfrak{E}. \quad 12. (4) \quad (4)$$

Es ist daher

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \cdot \operatorname{div} \mathfrak{E} + \varepsilon_0 \mathfrak{E} \cdot \operatorname{grad} \varepsilon. \quad (5)^1$$

In einem idealen, homogenen, isotropen Dielektrikum ist  $\varepsilon$  konstant, daher

$$\operatorname{grad} \varepsilon = 0. \quad (6)$$

Dies setzt die mathematische Behandlung der Elektrostatik stets voraus. In Gl. (6) ist für den allgemeinen Fall enthalten, daß  $\varepsilon$  von der Feldstärke nicht abhängt; wir können somit auch ausdrücklich schreiben

$$\varepsilon = \operatorname{const}_{(x, y, z, E)}. \quad (6a)$$

Dann ist also

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \operatorname{div} \mathfrak{E} = \bar{\varepsilon} \operatorname{div} \mathfrak{E}. \quad (7)$$

Aus Gl. (7), (3), (2) folgt die nach Poisson benannte Differentialgleichung für das skalare Potential

$$-\frac{\eta}{\varepsilon} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi \equiv \Delta \varphi. \quad (8)^2$$

Dementsprechend ist die Differentialgleichung des Potentials im quellenfreien Gebiet des wirbelfreien Feldes

$$\Delta \varphi = 0. \quad (9)$$

Sie wird nach Laplace genannt. Wir wiederholen ihre Voraussetzungen:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathfrak{D} = 0, \quad \operatorname{grad} \varepsilon = 0 \quad (\varepsilon = \operatorname{const}_{(x, y, z, E)}). \quad (10)$$

Zur Lösung der Laplaceschen Differentialgleichung untersuchen wir die Eigenschaften des Potentials  $\varphi$ . Das Potential ist eine im allgemeinen stetige Funktion des Ortes, die nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist. Diese wählen wir so, daß das Potential in unendlich großem Abstand Null wird<sup>3</sup>. — Im quellenfreien

<sup>1</sup>  $\operatorname{div} (\varepsilon \mathfrak{E}) = \nabla (\varepsilon \mathfrak{E}) = \varepsilon \cdot \nabla \mathfrak{E} + \mathfrak{E} \cdot \nabla \varepsilon = \varepsilon \cdot \operatorname{div} \mathfrak{E} + \mathfrak{E} \cdot \operatorname{grad} \varepsilon.$

<sup>2</sup> Z. B. ist in rechtwinkligen Koordinaten  $\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$

<sup>3</sup> Aus dem gegebenen Feld  $\mathfrak{E}$  ergibt sich dann gemäß 8. Gl. (9), (11)  $\varphi_P = \int_P^\infty \mathfrak{E} \cdot d\mathbf{r}$ . Dies kann man physikalisch als die Arbeit auslegen, die notwendig ist, um einen punktförmigen Körper, der die Ladungsmenge Eins trägt, vom Punkte  $P$  bis ins Unendliche, wo das Feld verschwindet, zu befördern, im Verhältnis zu dieser Ladungsmenge.

Feldraum, in dem Gl. (9) gilt, können wir zulassen, daß homogene, isotrope Dielektrika aneinander grenzen, jedoch bleibt in jedem Gebiet  $\varepsilon$  örtlich konstant, also Gl. (6) erhalten. An solchen Unstetigkeitsflächen bleibt  $\varphi$  stetig (Linienintegral der Feldstärke!), und aus  $\text{Div } \mathfrak{D} = 0$  folgt als Grenzbedingung

$$\varepsilon_1 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_1 = \varepsilon_2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_2, \quad (11)$$

wenn 1 und 2 die an der Trennfläche zusammenstoßenden Gebiete, und  $n$  die Normale bedeuten. — Im Innern von Leitern besteht im Gleichgewichtszustand kein elektrisches Feld, somit ist nach Gl. (2) das Potential innerhalb jedes Leiters konstant:

$$\mathfrak{E}_i = 0, \quad \varphi_i = \text{const.} \quad \text{Gleichgewichtsbedingung für Leiter.} \quad (12)$$

Daher ist die Oberfläche eines jeden Leiters Äquipotentialfläche. Auf ihr steht das elektrische Feld senkrecht, und die Flächendichte der Ladung gleicht der Verschiebungsdichte, weswegen an Leiteroberflächen gilt

$$-\frac{\partial \varphi_i}{\partial n} = -\frac{\sigma}{\varepsilon} = E_n. \quad (13)$$

Das elektrostatische Feld ist eindeutig bestimmt: durch die vorgeschriebenen Werte des Potentials  $\varphi$  oder der Feldstärke  $-\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  an der Oberfläche der Leiter, durch die Forderung, daß  $\varphi$  an der Oberfläche der Leiter stetig ist, ferner die Forderung, daß  $\varphi$  und seine erste Ableitung im ganzen Feldraum stetig ist, dazu die Bedingung, daß  $\varphi$  außerhalb der Leiter die Laplacesche Gleichung erfüllen muß, schließlich durch die Randbedingungen an Grenzflächen der Dielektrika und die Randbedingung im Unendlichen.

Formal einfache Lösungen der Laplaceschen Gleichung bis auf eine Konstante lassen sich folgendermaßen gewinnen:

a) Für eine einzelne „Punkt“-Ladung  $Q$  im unendlichen Raum im Abstände  $r$  vom „Aufpunkt“  $P$  ist das Potential in  $P$

$$\varphi_P = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{r}, \quad (14)$$

denn es ist

$$\Delta \frac{1}{r} = 0. \quad (15)$$

b) Im Aufpunkt  $P$  ist das Feld von  $n$  diskret verteilten Ladungsträgern  $Q_1 \dots Q_n$  zu bestimmen, wobei  $r_1 \dots r_n$  die großen Abstände der einzelnen Ladungen vom Punkte  $P$  sind. Es ist eine kennzeichnende Eigenschaft der Potentialfunktion, daß sie durch lineare Überlagerung der Einzelpotentiale der einzelnen Ladungen zustande kommt. Also ist offenbar für diesen Fall

$$\varphi_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \sum_{k=1}^n \frac{Q_k}{r_k}. \quad (16)$$

c) Auf Grund dieses Satzes läßt sich sogleich das Potential bei flächenhaft verteilten Ladungen der Flächendichte  $\sigma = \text{Div } \mathfrak{D}$  angeben:

$$\varphi_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \frac{\sigma df}{r}, \quad (17)$$

wobei  $r$  der Abstand jedes Ladungselementes  $\sigma df$  vom Aufpunkt  $P$  ist und über die gesamte geladene Fläche integriert wird.

d) Ganz entsprechend hat man bei räumlich verteilten Quellen der Dichte  $\eta = \text{div } \mathfrak{D}$ :

$$\varphi_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \frac{\eta d\tau}{r}; \quad (18)$$

wieder bedeutet  $r$  den Abstand des Aufpunktes von jedem Ladungselemente  $\eta d\tau$ , und es ist über den ladungserfüllten Raum zu integrieren.

Mit den Gl. (16), (17), (18) läßt sich aus dem Potential das Feld berechnen, wenn die Ladungsverteilung gegeben ist. Kennt man umgekehrt das Feld, so kann



man aus ihm mit Gl. (13) die Ladungsverteilung bestimmen. In der Elektrostatik ist jedoch häufig die Aufgabe so gestellt, daß entweder die konstanten Potentiale der Leiter gegeben sind:  $\varphi_k = \text{const}$ , oder aber die Gesamtladung jedes Leiters, z. B. des  $k$ -ten:

$$Q_k = \int \sigma_k df_k = -\bar{\epsilon} \int \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} df \right)_k. \quad (19)^1$$

Beispiele für die Anwendung der Laplaceschen Gleichung:

a) Das linear-homogene Feld des Plattenkondensators. Das Potential im Feldraum kann nur eine Funktion des Abstandes  $x$  von einer Platte sein, daher lautet die Laplacesche Gleichung

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad (20)^2$$

mit der Lösung

$$\varphi(x) = k_1 + k_2 x; \quad (21)$$

auf der Oberfläche der einen Platte  $x = 0$  ist  $\varphi = \varphi(a)$ , auf der Oberfläche der anderen Platte,  $x = s$ , ist  $\varphi = \varphi(b)$ , und es ist  $U = \varphi(a) - \varphi(b)$ , daher haben wir

$$\varphi(x) = \varphi(a) - \frac{U}{s} x, \quad (22)$$

also ist die Feldstärke

$$E(x) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{U}{s} = \text{const}_x, \quad (23)$$

vgl. 10. Gl. (7).

b) Das punktsymmetrische Feld zwischen zwei konzentrischen Kugelflächen. Das Potential kann nur eine Funktion der Entfernung  $r$  vom Kugelmittelpunkte sein; die Laplacesche Gleichung wird daher

$$\Delta \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0, \quad (24)^3$$

folglich ist  $r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \text{const}$ , also ist die Lösung

$$\varphi(r) = k_1 + k_2 \cdot \frac{1}{r}. \quad (25)$$

Die Grenzbedingungen sind: auf der Oberfläche der einen Kugel  $r = a$  ist  $\varphi = \varphi(a)$ , auf der Oberfläche der anderen Kugel  $r = b$  ist  $\varphi = \varphi(b)$ , und es ist  $U = \varphi(a) - \varphi(b)$ . Damit wird

$$\varphi(r) = \varphi(b) + \frac{U}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right), \quad (26)$$

$$E(r) = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{U}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \cdot \frac{1}{r^2}, \quad (27)$$

vgl. 7. Gl. (13) und 10. Gl. (2).

c) Das radialhomogene Feld zwischen zwei unendlich langen konaxialen Zylinderflächen. Das Potential kann nur vom Abstand  $r$  von der Zylinderachse abhängen, daher lautet hier die Laplacesche Gleichung

$$\Delta \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0, \quad (28)^3$$

folglich ist  $r \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \text{const}$ , daher ist die Lösung

$$\varphi(r) = k_1 + k_2 \cdot \ln r. \quad (29)$$

Die Grenzbedingungen sind: auf der Oberfläche des einen Zylinders  $r = a$  ist  $\varphi = \varphi(a)$ , und auf der Oberfläche des anderen Zylinders  $r = b$  ist  $\varphi = \varphi(b)$ , und es ist  $U = \varphi(a) - \varphi(b)$ . Damit wird

$$\varphi(r) = \varphi(b) + \frac{U}{\ln \frac{b}{a}} \cdot \ln \frac{b}{r}, \quad (30)$$

$$E(r) = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{U}{\ln \frac{b}{a}} \cdot \frac{1}{r}, \quad (31)$$

vgl. 7. Gl. (15) und 10. Gl. (5).

<sup>1</sup> Dabei ist zu beachten, daß für einen isolierten leitenden Körper die Gesamtladung  $Q = 0$  sein kann, ohne daß  $\sigma = 0$  ist: wird ein ungeladener Leiter in ein bestehendes elektrisches Feld gebracht, so lädt er sich „durch Influenz“, d. h., er trägt entgegengesetzt gleich große Flächenladungen auf einander abgewandten Seiten.

<sup>2</sup> Vgl. Anm. 2 zu 17. Gl. (8).

<sup>3</sup>  $\Delta \varphi$  in verschiedenen Koordinatensystemen siehe 3', letzter Absatz.

### 18. Energie und Potential.

Aus dem Ausdruck für die elektrische Feldenergie

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\infty} \mathfrak{E} \mathfrak{D} d\tau \quad 14. (1)$$

ergibt sich eine entsprechende Potentialformel unter der Voraussetzung  $\varepsilon = \text{const}$  mit Hilfe des sogenannten Greenschen Satzes: Für den wirbelfreien Vektor  $\mathfrak{E} = -\text{grad } \varphi$  kann man allgemein ausrechnen

$$\mathfrak{E}^2 = \varphi \text{div } \mathfrak{E} - \text{div} (\varphi \mathfrak{E}), \quad (1)^1$$

daher ist

$$W_e = \frac{\bar{\varepsilon}}{2} \int_{\infty} \mathfrak{E}^2 d\tau = \frac{\bar{\varepsilon}}{2} \int_{\infty} \varphi \text{div } \mathfrak{E} d\tau - \frac{\bar{\varepsilon}}{2} \int_{\infty} \text{div} (\varphi \mathfrak{E}) d\tau. \quad (2)$$

Das zweite Integral verwandeln wir mit dem Satz von Gauß in ein Hüllintegral

$$\int_{\infty} \text{div} (\varphi \mathfrak{E}) d\tau = \oint \varphi E_n df,$$

dabei liegt die Hülle nach Voraussetzung in unendlicher Entfernung, und mit der Randbedingung des Feldes im Unendlichen verschwindet das Integral<sup>2</sup>. Es bleibt übrig

$$W_e = \frac{\bar{\varepsilon}}{2} \int_{\infty} \mathfrak{E}^2 d\tau = \frac{\bar{\varepsilon}}{2} \int_{\infty} \varphi \text{div } \mathfrak{E} d\tau = \frac{1}{2} \int_{\infty} \varphi \eta d\tau, \quad (3)$$

weil  $\bar{\varepsilon} \text{div } \mathfrak{E} = \eta$  die räumliche Ladungsverteilung vorstellt. Für den Sonderfall  $n$  diskret verteilter Ladungsträger kann man hierfür setzen

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \varphi_k Q_k, \quad (4)$$

indem man etwa von der Vorstellung ausgeht, daß die einzelnen Ladungen sich aus einer räumlichen Ladungswolke  $\eta$  nach bestimmter Vorschrift zusammenballen.

Gl. (3), (4) macht für die Energie nicht mehr den elektrischen Zustand im Feldraum verantwortlich, wie 14. Gl. (1), sondern Ladungen und Potentiale, und ist daher der Energieausdruck der Fernwirkungstheorie. Wir werden elektrische Felder kennenlernen, deren Energie durch 14. Gl. (1) richtig angegeben wird, während die Gl. (3), (4) nicht brauchbar sind. Wir merken noch folgende Einzelheiten an: isoliert gebliebene Leiter (Influenzladung  $\sigma \neq 0$ , Gesamtladung  $Q = 0$ ) und Leiter vom Potential  $\varphi = 0$  (geerdete Leiter) tragen zur Energie nichts bei, obwohl sie die Feldstruktur beeinflussen. — Denkt man sich bei Gl. (4) jede einzelne Ladung  $Q_k$  von einer Stelle, der wir das Potential Null beilegen, an den ihr zukommenden Platz gebracht und die dafür notwendige Arbeit nach der Grundgleichung 8. (3) zu  $A_k = Q_k U_k = Q_k (0 - \varphi_k)$  ausgerechnet, so erwartet man den doppelten Betrag von Gl. (4) für die gesamte Energie, doch hat man bei diesem Schluß nicht beachtet, daß das Potential eines jeden Ladungsträgers in dem Maße vergrößert wird, als andere Ladungsträger herangeführt werden. Beispiel aus dem Schwerefeld: Ein Gefäß wird mit der Wassermenge  $Q$  bis zur Höhe  $\varphi$  aufgefüllt. Während des Auffüllens steigt die Höhe ständig an: die gesamte Energie, die beim Ausfließen frei wird, ist daher  $1/2 Q \varphi$ . Entsprechend hier. — Aus Gl. (4) folgt für das vollständige Feld des Kondensators  $n = 2$ ,  $Q_1 = +Q$ ,  $Q_2 = -Q$ , daher  $W_e = Q (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2} Q U$ .

<sup>1</sup> Vgl. Anm. 1 zu 17. Gl. (5) oder 3', Rechenregeln.

<sup>2</sup> Um sich das anschaulich zu machen, denke man an den Verlauf des Integranden bei unbegrenzt wachsender Hülle: ihre Fläche wächst proportional  $R^2$ , aber es fallen  $\varphi$  proportional  $R^{-1}$  und  $E$  proportional  $R^{-2}$ , unter  $R$  den großen Abstand von dem Gebiete verstanden, in dem sich Ladungsträger befinden.

### 19. Teilkapazitäten.

Eine endliche Anzahl  $n$  beliebig verteilter und gestalteter geladener Leiter seien in ein homogenes isotropes Dielektrikum eingebettet. Wir fragen nach der Ladung jedes Leiters, wenn die Potentiale aller Leiter gegeben sind, und umgekehrt. Die Anordnung sei von einer leitenden Hülle begrenzt, der wir den Potentialwert Null beilegen, da es nur auf Potentialdifferenzen ankommt. Wegen des linearen Charakters der Differentialgleichung des Potentials ist das Potential in jedem Raumpunkt die lineare Überlagerung der Potentiale der einzelnen Ladungsträger [diese Tatsache haben wir schon in 17. Gl. (15), (16) benutzt]. Wir zeigen ferner, daß der Zusammenhang zwischen Potential und Ladung linear ist, also dem Grundsatz einfacher Überlagerung gehorcht: Für die gegebene Anordnung sei durch die Potentialwerte  $\varphi_1$  in jedem Punkt ein möglicher Zustand gekennzeichnet, und durch  $\varphi_2$  ein anderer, ebenfalls möglicher. Im ersten Falle ist  $\mathfrak{E}_1 = -\text{grad } \varphi_1$ ,  $\mathfrak{D}_1 = \varepsilon_0 \varepsilon \mathfrak{E}_1$ , ebenso im zweiten Falle  $\mathfrak{E}_2 = -\text{grad } \varphi_2$ ,  $\mathfrak{D}_2 = \varepsilon_0 \varepsilon \mathfrak{E}_2$ . Dann ist ein möglicher Zustand gegeben durch  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ , denn dieses  $\varphi$  erfüllt, was seine Summanden erfüllen: überall ist  $\Delta \varphi = 0$ , und an Leiteroberflächen ist  $\varphi$  konstant. Also gilt  $\mathfrak{E} = -\text{grad } (\varphi_1 + \varphi_2) = \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2$  und  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2$ . Aus der Verschiebungsdichte folgt aber die Ladung der einzelnen Leiter, z. B. des  $k$ -ten, zu

$$Q_k = \int_k \sigma \, d f = \int_k D_n \, d f = \int_k (D_{n1} + D_{n2}) \, d f = (Q_1 + Q_2)_k.$$

Zu dem veränderten Potential  $\varphi_1 + \varphi_2$  gehört also eindeutig  $Q_1 + Q_2$ , die Ladungen addieren sich ebenso, wie die entsprechenden Potentiale, z. B. entspricht also einer Vergrößerung des Potentialwertes in sämtlichen Feldpunkten auf das  $p$ -fache eine ebenso große Vermehrung der  $E$ ,  $D$ ,  $Q$  auf den  $p$ -fachen Betrag, und umgekehrt.

Die Ladung jedes Leiters ergibt sich nach diesem durch die lineare Überlagerung von  $n$  Einzelfeldern, die wir folgendermaßen bestimmen: Es werde von den  $n$  vorhandenen Leitern dem ersten der Potentialwert 1, allen übrigen der Potentialwert Null gegeben. Dabei mögen sich für die  $n$  Leiter der Reihe nach die Ladungen  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{21}$ ,  $\dots$ ,  $\alpha_{n1}$  ergeben. Nun habe zweitens nur der zweite Leiter das Potential 1, alle übrigen das Potential Null; es mögen sich der Reihe nach die Ladungen  $\alpha_{12}$ ,  $\alpha_{22}$ ,  $\dots$ ,  $\alpha_{n2}$  ergeben. So fahren wir bis zum  $n$ -ten Leiter fort, und erhalten, wie ausgeführt, durch einfache Summation die Gesamtladung jedes Leiters, wenn die  $n$  Leiter der Reihe nach die Potentialwerte  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\dots$ ,  $\varphi_n$  haben:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= \alpha_{11} \varphi_1 + \alpha_{12} \varphi_2 + \dots + \alpha_{1n} \varphi_n \\ Q_2 &= \alpha_{21} \varphi_1 + \alpha_{22} \varphi_2 + \dots + \alpha_{2n} \varphi_n \\ &\vdots \\ Q_n &= \alpha_{n1} \varphi_1 + \alpha_{n2} \varphi_2 + \dots + \alpha_{nn} \varphi_n \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Die Ladungen sind linear-homogene Funktionen der Potentiale, und ebenso natürlich umgekehrt. Wir übergehen den Beweis dafür, daß allgemein

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki} \quad (2)$$

ist, an Stelle von  $n^2$  Koeffizienten  $\alpha$  also nur  $\frac{n}{2}(n+1)$  auftreten.  $\alpha_{ik}$  bedeutet die Ladung, welche der Leiter  $i$  besitzt, wenn der Leiter  $k$  das Potential 1 und jeder andere das Potential Null hat.  $\alpha_{ki}$  bedeutet die Ladung, welche der Leiter  $k$  besitzt, wenn er das Potential 1 und jeder andere das Potential Null hat.

Aus Gl. (2) folgt: Betrachten wir ganz willkürlich zwei Leiter  $i$  und  $k$  der  $n$  vorhandenen, so ist die Ladung, welche der Leiter  $i$  besitzt, wenn von den anderen Leitern allein der Leiter  $k$  ein von Null verschiedenes bestimmtes Potential erhält, ebenso groß wie die Ladung, die der Leiter  $k$  annimmt, wenn von allen anderen allein der Leiter  $i$  auf ein von Null verschiedenes Potential gebracht wird, das dem zuvor dem Leiter  $k$  mitgeteilten Potential gleicht.

Aus den  $n$  linearen Gl. (1) lassen sich auch die Potentiale als linear-homogene Funktionen der Ladungen angeben, z. B. für den  $i$ -ten Leiter

$$\varphi_i = \beta_{i1} Q_1 + \beta_{i2} Q_2 + \dots + \beta_{in} Q_n. \quad (1a)$$

Die Koeffizienten  $\beta$  sind durch die  $\alpha$  der Gl. (1) bestimmt, und haben eine entsprechende Bedeutung.

In Gl. (1) bedeuten die  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  die Potentialdifferenzen gegenüber der leitenden Hülle, deren Potential wir mit Null bezeichnet hatten. Für manche Zwecke ist eine andere Form günstiger, in der jeweils die Spannungen zweier Leiter gegeneinander auftreten. Gl. (1) läßt sich umschreiben zu

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= \gamma_{10} \varphi_1 + \gamma_{12} (\varphi_1 - \varphi_2) + \gamma_{13} (\varphi_1 - \varphi_3) + \dots + \gamma_{1n} (\varphi_1 - \varphi_n) \\ Q_2 &= \gamma_{20} \varphi_2 + \gamma_{21} (\varphi_2 - \varphi_1) + \gamma_{23} (\varphi_2 - \varphi_3) + \dots + \gamma_{2n} (\varphi_2 - \varphi_n) \\ &\vdots \\ Q_n &= \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

mit unmittelbar anschaulicher Bedeutung. Es bedeuten:

$$\gamma_{i0} = \alpha_{i1} + \alpha_{i2} + \dots + \alpha_{in}$$

oder allgemein

$$\gamma_{i0} = \alpha_{i1} + \alpha_{i2} + \dots + \alpha_{in}; \quad (3a)$$

ferner

$$\gamma_{i2} = -\alpha_{i2}, \quad \gamma_{i3} = -\alpha_{i3},$$

oder allgemein

$$\gamma_{ik} = -\alpha_{ik} \quad (k \neq i, k \neq 0) \quad (3b)$$

Aus Gl. (3a) folgt

$$\alpha_{i1} = \gamma_{i0} + \gamma_{i2} + \gamma_{i3} + \dots + \gamma_{in}$$

oder allgemein

$$\alpha_{ii} = \gamma_{i0} + \gamma_{i1} + \gamma_{i2} + \dots + \gamma_{in}. \quad (3c)$$

Die Koeffizienten  $\gamma_{ik}$ , die nach Gl. (3) angeben, wie die Ladungen durch die Spannungen gegen die anderen Leiter bestimmt werden, nennt man Teilkapazitäten. (Beispiel: Leitungszug aus mehreren Drähten über dem Erdboden, oder in einem gepanzerten Kabel. Die Ladung jedes Drahtes wird durch das Potential aller Drähte und des Erdbodens oder der Hülle bestimmt.)

Zu einer anschaulichen Deutung der Teilkapazitäten sei bemerkt, daß sie rein geometrisch, nämlich durch die Form der Leiter, ihre gegenseitige Stellung und den Isolator im Feldraum definiert und daher konstant sind, solange hieran nichts geändert wird. Von den Größen der Ladungen und Spannungen hängen sie nicht ab, sind also unabhängig von der Ausbildung des gesamten elektrischen Feldes zwischen den Leitern des Systemes, in der z. B. auch der Fall denkbar ist, daß zwischen zwei Leitern überhaupt kein gemeinsamer elektrischer Fluß besteht. Die Teilkapazität zweier Leiter wird nicht allein durch ihre gegenseitige Lage bestimmt, sondern auch durch die Stellung gegenüber allen übrigen Leitern des Systemes.

Die elektrische Energie bestimmt sich mit Hilfe der Koeffizienten gemäß 18. Gl. (4) nach Gl. (1) zu

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_1^n \sum_1^n \alpha_{ik} \varphi_i \varphi_k. \quad (4)$$

## 20. Äquipotentielle Flächen besonderer Form.

Auf äquipotentiellen Flächen steht das elektrische Feld senkrecht. Oberflächen von Leitern sind materielle äquipotentielle Flächen des elektrostatischen Feldes. Denken wir uns in einem elektrostatischen Feld eine äquipotentielle Fläche durch eine beliebig dünne, leitende Schicht vom Potentialwert Null (Schicht zur Erde abgeleitet) ersetzt, so ändert sich am Feld überhaupt nichts<sup>1</sup>; die Fläche trennt als

<sup>1</sup> Auf der leitenden Schicht befinden sich, wie von Faradays Käfigversuch her bekannt ist, influenzierte Ladungen, deren Größe der Summe der umhüllten Ladungen gleicht.

geschlossene Hülle in ein „äußeres“ und ein „inneres“ Feld und bewirkt lediglich, daß die beiden Felder voneinander unabhängig sind. Füllen wir den Feldraum des einen Feldes durch Metall aus, so bleibt das andere Feld davon völlig unberührt. Ebenso wird ein elektrostatisches Feld dadurch nicht geändert, daß man zwei äquipotentielle Flächen durch leitende Schichten ersetzt. Beide Möglichkeiten führen zur Bestimmung von Feldern in besonderen Fällen, in denen die äquipotentiellen Flächen gewünschte Formen annehmen.

a) Ein „Ladungspunkt“ im Abstand  $a$  von einer leitenden Ebene vom Potential Null. Im unendlichen Raum ist das Potential des sehr kleinen, die Ladung  $Q$  tragenden Körpers im Abstand  $r$  vom Ladungsträger

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{Q}{r}.$$

Dies ist auf der leitenden Ebene nicht konstant, kann daher nicht das Potential für die gewünschte Anordnung sein. Das Feld zweier um die Strecke  $2a$  voneinander entfernter Ladungspunkte, die entgegengesetzt gleiche Ladungen  $|Q|$  tragen, wird durch das Potential

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left( \frac{Q}{r} - \frac{Q}{r'} \right) \quad (1)$$

beschrieben, unter  $r$  und  $r'$  die Abstände des Aufpunktes von den beiden Ladungspunkten verstanden (Abb. 1). Die Fläche  $\varphi = 0$ , also  $r = r'$ , ist eine Ebene in der Mitte zwischen beiden Ladungsträgern. Denken wir sie leitend, so haben wir offenbar das Feld der verlangten Anordnung vor uns, denn das gefundene Potential genügt den Bedingungen, im Unendlichen zu verschwinden, und auf der leitenden Ebene konstant zu sein. In Beziehung zur leitenden Mittelebene liegen die beiden Ladungspunkte spiegelbildlich, analog der Ausdrucksweise in der Optik wird daher der eine Punkt das elektrische Bild des anderen genannt. Auf der Mittelebene ist die Verschiebung normal gerichtet, sie gleicht der Flächendichte der influenzierten Ladung

$$\sigma = -\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{Q}{2\pi} \cdot \frac{a}{r^3}. \quad (2)$$

Die Gesamtmenge ist selbstverständlich  $\int \sigma df = -Q$ .

b) Wir berechnen ferner auf die gleiche Weise das Feld einer unendlich langen Geraden mit der Ladung  $Q_1$  der Längeneinheit, die im Abstande  $a$  der leitenden Ebene vom Potential Null gegenübersteht. Das radial-homogene Feld der Längeneinheit einer einzelnen Geraden ist  $D = \frac{Q_1}{2\pi r}$ ; wir spiegeln an der leitenden Ebene und erhalten als Gesamtfeld mit den Aufpunktsabständen  $r$  und  $r'$  von den beiden Geraden:

$$D = \frac{Q_1}{2\pi r} - \frac{Q_1}{2\pi r'}, \quad (3)$$

insbesondere an der leitenden Mittelebene (Abb. 1)

$$D_n = 2D \cos \alpha = \frac{2Q_1}{2\pi r} \cdot \frac{a}{r}, \quad (4)$$

daher die Flächenladung

$$\sigma = \frac{Q_1}{\pi} \cdot \frac{a}{r^2}. \quad (5)$$

Die Kraft auf die Flächeneinheit der leitenden Ebene wird in beiden Fällen durch  $p_n = E_n \frac{\sigma}{2} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon}$  berechnet [14. Gl. (3)], die Kraft auf die Punkt- und auf die Linienladung durch  $K = QE$  [6. Gl. (1)].

c) Für zwei „Ladungspunkte“ mit ungleichen Ladungen  $Q_1$  und  $Q_2$  entgegengesetzten Vorzeichens ist das Potential in jedem Feldpunkt (Abb. 2)

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left( \frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2} \right). \quad (6)$$

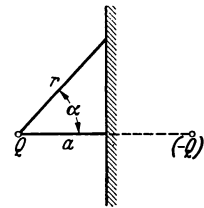
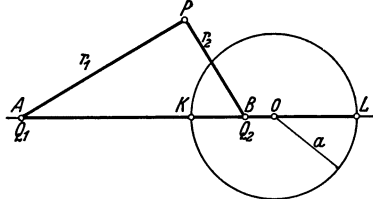


Abb. 20. 1. Spiegelung an einer leitenden Ebene.

Die Äquipotentialflächen  $\varphi = \text{const}$  sind ziemlich verwickelter Art, nur im Falle  $\varphi = 0$  oder

$$\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2} = 0 \quad (7)$$

ergibt sich eine Kugel, die die Ladung vom kleineren Betrag umschließt. Der Radius der Kugel sei mit  $a$  bezeichnet, die Strecke  $\overline{AO} = f_1$ ,  $\overline{BO} = f_2$ . Die Achse  $\overline{ABO}$  schneidet die Kugel in den Punkten  $K$  und  $L$ , für die aus Gl. (7) folgt



$$\frac{Q_1}{f_1 - a} + \frac{Q_2}{a - f_2} = 0 \quad \text{für } K,$$

$$\frac{Q_1}{f_1 + a} + \frac{Q_2}{f_2 + a} = 0 \quad \text{für } L.$$

Indem man  $Q_1$  und  $Q_2$  eliminiert, findet man

$$f_1 f_2 = a^2. \quad (8)$$

Abb. 20. 2. Spiegelung an einer leitenden Kugel.

Ist also erstens die Größe der beiden Ladungen  $Q_1$  und  $Q_2$  und ihr Abstand  $f_1 - f_2$  gegeben, so ergibt sich aus den Gleichungen  $f_1$  und  $f_2$  einzeln, ferner  $a$ , also der Kugelmittelpunkt. Denkt man sich zweitens die Kugeloberfläche leitend und auf  $\varphi = 0$  gebracht, so findet man mit Gl. (6) das Potential in jedem Feldpunkt für den Fall, daß ein Ladungspunkt  $Q_1$  sich im Abstand  $f_1$  vom Mittelpunkt einer leitenden Kugel vom Radius  $a$  befindet. Aus dem gegebenen  $Q_1, f_1, a$  ergeben die Gleichungen

$$Q_2 = -Q_1 \frac{a}{f_1} \quad (9)$$

als das „elektrische Bild“ der Ladung  $Q_1$ , und

$$f_2 = \frac{a^2}{f_1} \quad (8)$$

unabhängig von der Größe der Ladungen; „Bildladung“ und „Gegenstandsladung“ können ihre Rolle vertauschen, es kann auch die Innenladung gegeben und nach dem Feld im Kugellinnern gefragt sein. Daher wird das durch Gl. (8) dargestellte Abbildungsgesetz des Außenraumes auf den Innenraum und umgekehrt das „Gesetz der reziproken Radien“ genannt. In der Optik werden die bei einem leuchtenden Punkt und einem Kugel- (Hohl-) Spiegel auftretenden Erscheinungen durch genau dieselben Beziehungen dargestellt. Auch der Fall, daß die leitende Kugel isoliert ist und eine gegebene Ladung trägt, kann durch entsprechende Überlagerung berücksichtigt werden.

Das Verfahren der Spiegelung hat W. Thomson angegeben; es kann auch in einzelnen Fällen für massive Dielektrika an Stelle massiver Leiter angewendet werden.

d) Zwei parallele Kreiszyylinder (Doppelleitung). Zwei unendlich lange „geladene Gerade“, deren Längeneinheit die Ladung  $Q_1$  trägt, verlaufen parallel im Abstände  $2a$  (Abb. 3). Das Feld ist „eben“, es verläuft in allen Querschnitten senkrecht zu den Achsen gleich. In einem beliebigen Punkte  $P$  verursacht die eine Gerade das Potential  $\varphi_1 = \frac{-Q_1}{2\pi\epsilon} \ln r + \text{const}$  [8. Gl. (13)], und daher ist das Gesamtpotential bei entgegengesetztem Vorzeichen der beiden gleich großen Ladungen

$$\Phi_P = \varphi + \varphi' = \frac{Q_1}{2\pi\epsilon} \cdot \ln \frac{r'}{r}. \quad (10)$$

Wir zeigen, daß die Kurven  $\frac{r'}{r} = \text{const}$  Kreise, die Äquipotentialflächen daher Kreiszyylinder sind. Denken wir uns solche durch Leiter ersetzt, so können wir das Feld der Doppelleitung berechnen.

Mit dem Achsenkreuz der Abb. 3 und  $\frac{r'}{r} = k_1$  ist

$$(a - x)^2 + y^2 = k_1^2 [(a + x)^2 + y^2].$$

Dies läßt sich zu der Kreisgleichung

$$(x + h)^2 + y^2 = R^2 \quad (11)$$

umformen; dabei ist

$$h = a \left| \frac{k_1^2 + 1}{k_1^2 - 1} \right| \quad (12) \quad \text{und} \quad R^2 = h^2 - a^2; \quad (13)$$

der Mittelpunkt des Kreises vom Radius  $R$  liegt um die Strecke  $h$  in der  $\pm x$ -Richtung vom Nullpunkt entfernt. Nehmen wir zwei gleiche Kreiszyylinder an und denken uns diese in der geschilderten Weise als leitende Kreiszyylinder (Drähte): dann ist auf dem einen das Potential  $\Phi = \varphi_1$ , auf dem anderen  $\Phi = \varphi_2 = -\varphi_1$ . Daher ist die Kapazität der Längeneinheit der Kreiszyylinder

$$C = \frac{Q_1}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{2 \pi \bar{\epsilon}}{\ln k_1^2}. \quad (14)$$

Es bleibt noch übrig,  $k_1$  in den Größen Achsenabstand  $2h$  und Radius der Zylinder  $R$  auszudrücken; diese, und nicht  $a$ , sind als gegeben anzusehen. Es ist nach Gl. (13)  $a^2 = h^2 - R^2$ ; damit und aus Gl. (12) kommt

$$k_1^2 = \frac{h + a}{h - a} = \frac{(h + a)^2}{R^2}. \quad (15)$$

Also ist

$$C_1 = \frac{\pi \bar{\epsilon}}{\ln \frac{h + \sqrt{h^2 - R^2}}{R}} \quad (16)$$

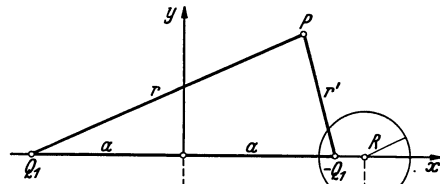


Abb. 20. 3. Zur Berechnung der Kapazität paralleler Kreiszyylinder.

die Kapazität der Längeneinheit zweier paralleler Kreiszyylinder vom Radius  $R$  und dem Achsenabstand  $2h$ . Für großen Abstand  $h \gg R$  ist

$$C_1 = \frac{\pi \bar{\epsilon}}{\ln \frac{2h}{R}}. \quad (17)$$

Die Mittelebene zwischen den beiden gleichen Kreiszyindern hat das konstante Potential  $\varphi_m = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \text{const.}$  Lassen wir diese zu einer leitenden Fläche werden, so bleibt das Feld zwischen jedem Zylinder und der leitenden Ebene unverändert. Bei gleichem  $Q_1$  ist aber die Potentialdifferenz zwischen Zylinder und Ebene halb so groß als die Potentialdifferenz zwischen den beiden gleichen Zylindern, daher ist die Kapazität für die Längeneinheit eines Zylinders, der im Abstand  $h$  seiner Achse einer leitenden Ebene gegenübersteht (Einzeldraht über dem Erdboden), doppelt so groß als die Kapazität Gl. (16), (17).

## 21. Das komplexe Potential.

Häufig hängt das Feld nur von zwei Koordinaten ab, z. B. von  $x$  und  $y$ , so daß die Laplacesche Gleichung lautet

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (1)$$

Lösungen dieser Differentialgleichung erhält man, indem man von einer beliebigen Funktion  $f(z)$  der komplexen Veränderlichen  $z = x + iy$  den reellen oder den imaginären Teil nimmt. Man findet nämlich durch Differenzieren

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad (2)$$

und es ist die Funktion  $f(z)$  komplex, also zu trennen in zwei Funktionen  $u$  und  $v$  von  $x$  und  $y$ :

$$f(x + iy) = u(x, y) + i v(x, y). \quad (3)$$

Daher befriedigt jede der beiden Funktionen  $u(x, y)$  und  $v(x, y)$  für sich die Gleichung  $\Delta \varphi = 0$ , denn es ist

$$0 = \Delta f(x + iy) = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + i \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (4)$$

Die Linien  $u = \text{const}$  stehen senkrecht auf den Linien  $v = \text{const}$ ; stellen also die einen Linien konstanten Potentials vor, so bedeuten die anderen Feldlinien. Nur selten läßt sich eine Funktion  $f(z)$  finden, die die Grenzbedingungen einer bestimmten Anordnung unmittelbar erfüllt; meist wird umgekehrt untersucht, welcher Anordnung eine willkürlich angenommene Funktion  $f(z)$  entspricht.

Beispiel: Die Funktion  $f(x + iy) = k \cdot \ln z$ . Wir wählen Polarkoordinaten durch  $z = r \cdot e^{i\xi}$  mit  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\xi = \arctg \frac{y}{x}$ . Daher ist  $k \cdot \ln z = k \cdot \ln r + ik\xi = u + iv$ . Die Linien  $u = k \cdot \ln r = \text{const}$ , also  $r = \text{const}$  sind konaxiale Kreise, die Linien  $v = k \cdot \xi = \text{const}$  sind Strahlen durch den Nullpunkt. Wählen wir  $u$  als Potentialfunktion, so entspricht diese Darstellung dem Feldbild einer gleichmäßig mit Ladung belegten Geraden, die sich senkrecht zur betrachteten Querschnittsebene unendlich lange erstreckt.

## 22. Bestimmung von Feldern durch Zeichnung.

Das Feldbild sei durch Feldröhren und äquipotentielle Flächen dargestellt;  $\varepsilon = \text{const}$  sei vorausgesetzt. Zwei äquipotentielle Flächen von der Potentialdifferenz  $U_1$  mögen von einer Feldröhre, die den elektrischen Fluß  $\Omega_1$  führt, einen Abschnitt der mittleren Länge  $l$  begrenzen; dann ist

$$U_1 = \int_l \mathcal{E} d\bar{s} = \frac{1}{\varepsilon} \int_l D dl = \frac{\Omega_1}{\varepsilon} \int_l \frac{dl}{f} = \Omega_1 \cdot \frac{1}{A_1}. \quad (1)$$

Daher ist der von der Feldröhre geführte Fluß  $\Omega_1 = U_1 A_1$ ; der gesamte Fluß in dem Raum, der von den beiden äquipotentiellen Flächen begrenzt wird, ist die Summe der Flüsse der einzelnen Feldröhren:

$$\Omega = U_1 \sum A_1 = U_1 \cdot A. \quad (2)$$

Für den häufigsten Fall, daß man jede Feldröhre in  $\nu$  aufeinanderfolgende Abschnitte der Länge  $l$  zerteilen kann, für die der Querschnitt  $f$  konstant ist, wird

$$U_1 = \sum_{\nu} E_{\nu} l_{\nu}, \quad \frac{1}{A} = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{\nu} \frac{l_{\nu}}{f_{\nu}}. \quad (3)$$

Ist das Feld längs einer ausgezeichneten Richtung unveränderlich („ebenes Feld“), so können die Feldröhren in einer Querschnittsebene senkrecht zu dieser Achse zeichnerisch dargestellt werden. Für einen Feldröhrenabschnitt der Tiefe  $L$  senkrecht zum Querschnitt, der mittleren Länge  $a$  und der mittleren Breite  $b$  ist

$$\frac{1}{A_1} = \frac{1}{\varepsilon L} \cdot \frac{a}{b}. \quad (4)$$

Zeichnet man zwischen zwei äquipotentiellen Flächen die Feldröhren so, daß für eine jede die mittlere Breite gleich der mittleren Länge ist:  $a = b$ , so ist für jede dieser Feldröhren  $A_1 = \varepsilon L$ , und für das in  $m$  dieser Feldröhren eingeteilte Feld ist

$$A = m \varepsilon L, \quad (5)$$

daher ist der gesamte elektrische Fluß

$$\Omega = U_1 \cdot m \varepsilon L \quad (6)$$

er gleicht der gesamten Ladung der Leiteroberflächen, auf denen er entspringt oder versiegt. Die Feldstärke an jeder Stelle des Feldbildes hat den Betrag  $E = \frac{U_1}{a}$ .

Die Spannung zwischen zwei Leiteroberflächen, zwischen denen  $n$  äquipotentielle Flächen der Potentialdifferenz  $U_1$  gezeichnet sind, ist  $(n + 1) U_1$ , daher die Kapazität zwischen zwei Leiteroberflächen

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{m \varepsilon L}{n + 1}. \quad (7)$$



Man zeichnet das Feldbild in der Querschnittsebene, indem man ein Netz von Feldlinien und Äquipotentiallinien so entwirft, daß mittlere Länge und mittlere Breite der Zellen übereinstimmen. Die so erhaltenen rechtwinkeligen Kurvenvierecke werden Quadraten um so ähnlicher, je feiner man unterteilt. Dieses Verfahren läßt sich auf alle flächennormalen Felder anwenden. Es ist von beherrschender Wichtigkeit für die Aufgabe der Elektrotechnik, den Fluß des magnetischen Feldes zwischen Eisenkörpern durch die Luft mit guter Annäherung quantitativ zu verfolgen (Streuungsbestimmung usw.). Wir werden hierauf zurückkommen.

## Das magnetostatische Feld.

### 23. Die Vektoren des magnetischen Feldes.

Bekanntlich findet man in der Natur nicht nur Kräfte elektrischer Art, z. B. in der Umgebung ruhender, geladener Körper, sondern auch solche magnetischer Art, z. B. in der Umgebung ruhender Dauermagnete. Auch hier bleiben wir der in 2. genannten Methode treu, indem wir aus möglichst einfachen Grundtatsachen nicht zu einer Erklärung des Wesens, jedoch zu einer vollständigen Beschreibung der magnetischen Erscheinungen fortschreiten wollen. Wir sprechen daher von einem magnetischen Feld als einem physikalischen Zustand des Raumes und definieren dieses Feld als ein magnetostatisches, wenn es sich im Gleichgewichtszustand befindet, also keine Bewegungen und keine Energieänderungen auftreten. In der Beschreibung des magnetostatischen Feldes bestehen weitgehende Analogien zu der des elektrostatischen Feldes, viele dort geprägte Begriffe und gewonnene Rechenverfahren können sinngemäß übertragen werden. Diese Analogien rechtfertigen es, daß wir die magnetischen Feldvektoren zunächst im statischen Fall für sich gesondert betrachten, und sie nicht, wie das häufig geschieht, erst in ihrer Verknüpfung mit elektrischen Feldvektoren einführen<sup>1</sup>.

Beginnen wir mit der Frage nach den magnetischen Ladungen als Ursache für ein Feld, so finden wir hier einen grundlegenden Unterschied gegenüber den elektrischen Erscheinungen: die Erfahrung lehrt, daß eine einzelne magnetische Ladung in der Natur nicht vorkommt, sondern immer nur in stofflicher Verbindung mit einer anderen von entgegengesetzt gleicher Stärke; das gilt, in wie kleine Splitter man auch die magnetische Substanz zerbrechen mag: eine körperliche Trennung, entsprechend der Trennung negativer und positiver elektrischer Ladung, ist nicht möglich, die gesamte Summe der nach außen wirkenden magnetischen Ladung ist immer genau Null. Ein Körper kann wohl magnetisch polarisiert, nicht aber magnetisch geladen sein (vgl. 12., elektrische Polarisation). Wenn es somit ein magnetisches Gegenstück zu isolierbaren, unabhängig beweglichen elektrischen Ladungen nicht gibt, so sind in magnetischer Hinsicht alle Stoffe Isolatoren, denn unter elektrischen Leitern waren jene Stoffe verstanden, in denen wir uns die elektrischen Ladungen unabhängig frei verschiebbar vorstellen (2.). — In gewöhnlichen, elektrisch polarisierten Dielektriken ist der Zustand der Polarisation eine Folge des angelegten elektrischen Feldes. Demgegenüber zeigt der „Dauermagnet“, daß es eine über praktisch beliebig große Zeitspannen konstant bleibende magnetische Polarisation gibt; je mehr diese von äußeren Feldern unabhängig ist, um so „härter“ in magnetischer Hinsicht wird die Substanz des Magneten genannt. (Hierauf werden wir noch später zurückkommen.) — Das kleinste magnetische Teilchen ist somit

<sup>1</sup> Dieses hier nicht eingeschlagene Vorgehen entspricht der heutigen Meßpraxis, welche mit Hilfe dieses Zusammenhanges die magnetischen Einheiten an die elektrischen anschließt; dementsprechend werden wir Benennungen und Einheiten der magnetischen Größen erst nach Kenntnis der allgemeinen Verknüpfungsgesetze im Anschluß an 31. entwickeln. Daß es trotzdem möglich ist, allgemeine Beziehungen formelmäßig auszudrücken, ist der Vorteil der von uns gewählten einheitenfreien (maßunabhängigen) Auffassung der Form der Gleichungen (vgl. 4.). — Daß wir uns hier anfänglich von Analogien leiten lassen, und daß daher die gefundenen Begriffe später ihre Berechtigung erweisen und ihre weitere Bewährung erhalten müssen, darf nicht übersehen werden.

nicht eine isolierte magnetische Menge, sondern die Verbindung zweier entgegengesetzt gleicher Mengen  $\pm m$  im Abstände  $l$  voneinander. Man bezeichnet daher den Vektor  $|m|l$  als das magnetische Moment des Teilchens; das magnetische Moment eines Magneten ist die Summe der Momente aller Teilchen, die im Volumen des Magneten vorhanden sind. Entsprechend der elektrischen Polarisation [12. Gl. 10)] ist die „Magnetisierung“  $\mathfrak{M}$  das magnetische Moment der Volumeneinheit:

$$\mathfrak{M} = \sum_{(\tau=1)} |m| l. \quad (1)$$

Zur Ausmessung eines gegebenen magnetischen Feldes, das gänzlich in Luft (strenger: im leeren Raum) verläuft, benutzen wir eine sehr kleine, magnetisch ideal harte, kurze Magnetnadel, die frei beweglich ist. In jedem Feldpunkt wird auf sie ein Drehmoment  $\mathfrak{Q}$  ausgeübt. Dies schreiben wir einerseits dem oben definierten magnetischen Moment  $m$  der Magnetnadel zu, andererseits dem magnetischen Zustand, der im untersuchten Feldpunkt herrscht. Wir definieren daher analog zur Bestimmung der elektrischen Feldstärke (6.) durch

$$\mathfrak{Q} = [m \mathfrak{H}] \quad (2)$$

die magnetische Feldstärke oder<sup>1</sup> magnetische Erregung  $\mathfrak{H}$ . Richtung und Betrag erhellen aus dem vektoriellen Produkt: die Magnetnadel stellt sich in die Richtung des Feldes ein, genauer: bringen wir die Magnetnadel in eine solche Stellung, daß sie diese unter Einwirkung des magnetischen Zustandes nicht mehr ändert, so stimmt ihre Richtung mit der des magnetischen Feldes überein; die Drehkraft, die die Nadel zurücktreibt, wenn man sie aus dieser Richtung ablenkt, gibt die Stärke des Feldes an.

Ein einzelner magnetischer Probepol könnte durch eine Magnetnadel angenähert verwirklicht werden, die so lang ist, daß einer der beiden Pole weit genug vom betrachteten Feldpunkt entfernt ist, um keinen merkbaren Einfluß mehr auszuüben. Die auf einen Probepol der Polstärke  $p$  ausgeübte Kraft ist ganz entsprechend

$$\mathfrak{R} = p \mathfrak{H}. \quad (3)$$

Analog dem Vorgehen im elektrischen Feld (8.) untersuchen wir das „magnetische Spannung“ genannte Linienintegral der magnetischen Feldstärke zwischen zwei Feldpunkten 1 und 2

$$V = \int_1^2 \mathfrak{H} \, d\mathbf{r}. \quad (4)$$

Wir finden, daß es im magnetostatischen Feld nur vom Ausgangs- und Endpunkt, nicht aber von der Wegkurve abhängt:

$$\oint \mathfrak{H} \, d\mathbf{r} = 0; \quad (5)$$

anders ausgedrückt, *das magnetische Feld im Gleichgewichtszustand hat keine Wirbel:*

$$\text{a) } \text{rot } \mathfrak{H} = 0; \quad \text{b) } \text{Rot } \mathfrak{H} = 0. \quad (6)$$

Daher ist die Feldstärke aus einem Potential  $\psi$ , das eine skalare Funktion des Ortes im Feldraum ist, eindeutig erchenbar:

$$\mathfrak{H} = -\text{grad } \psi, \quad (7)$$

und die für das skalare Potential geltenden Rechenvorschriften (17.) können sinngemäß angewendet werden. Im leeren Feldraum ist das Feld quellenfrei:  $\text{div } \mathfrak{H} = 0$ , daher ist hierfür die Differentialgleichung des Potentials

$$\text{div grad } \psi \equiv \Delta \psi = 0. \quad (8)$$

Bei diesem Vorgehen haben wir also als Ursache des magnetischen Feldes die Magnetisierung  $\mathfrak{M}$  magnetischer Körper angesehen. (Beispiel: Analog zur Abstraktion der elektrischen „Punktladung“ denken wir uns eine Magnetnadel dargestellt durch zwei in festem Abstand voneinander befindliche „Punktpole“  $\pm p$ , die die Abstände

<sup>1</sup> Nach G. Mie.

$r_1$  und  $r_2$  vom Aufpunkt  $P$  haben. In ihm ist das magnetische Potential proportional zu  $p \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$ , vgl. 17. Gl. (16).

Ein in den bis dahin von Substanz freien Feldraum gebrachter Körper (z. B. ein Stück Eisen) verändert in seiner Umgebung Richtung und Betrag des magnetischen Feldes. Ebensovienig, wie im entsprechenden elektrischen Fall, ist für eine vollständige Beschreibung ein einziger Feldvektor ausreichend. Zur Feldstärke  $\mathfrak{H}$  fügen wir einen zweiten magnetischen Feldvektor, die magnetische Induktion  $\mathfrak{B}$ . Um ihn aus seinen Eigenschaften zu kennzeichnen, lassen wir uns zunächst von der Analogie zum elektrostatischen Felde leiten, und setzen ihn demgemäß in Parallele zur elektrischen Verschiebungsdichte  $\mathfrak{D}$  (12.). Bei Wirbelfreiheit der elektrischen Feldstärke  $\mathfrak{E}$  [12. Gl. (6)] waren dort als einzige Quellen des Vektorfeldes  $\mathfrak{D}$  die elektrischen Ladungen festzustellen [12. Gl. (5)]. Genau so wollen wir hier für den ganzen vom magnetischen Feld erfüllten Raum daran festhalten, daß die magnetische Feldstärke  $\mathfrak{H}$  wirbelfrei sein soll [Gl. (5), (6)], daß also z. B. ihre tangentielle Komponente an jeder Trennfläche stetig ist. Die magnetische Induktion  $\mathfrak{B}$  soll analog zur Verschiebungsdichte auf die Ladungen Bezug nehmen. Wir kennen nur Körper, deren nach außen wirkende magnetische Gesamtladung aus zwei entgegengesetzt gleichen Teilen besteht, aber keine Körper, die einen Ladungsüberschuß der einen oder anderen Art tragen. Diese Tatsache stellt zunächst außer Zweifel, daß im leeren Feldraum der Fluß der magnetischen Induktion durch jede geschlossene Hülle Null ist. Sie läßt weiter die Möglichkeit zu, diese Eigenschaft als unter allen Umständen zutreffend zu erachten, d. h. die magnetische Induktion  $\mathfrak{B}$  so zu bestimmen, daß sie in jedem Falle und unabhängig von Materie im Feldraum, daher auch im Inneren stofflicher Körper, und an Grenzflächen, ein quellenfreies Feld ist:

$$\text{a) } \oint \mathfrak{B} \, d\mathfrak{f} = 0, \quad \text{b) } \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0, \quad \text{c) } \operatorname{Div} \mathfrak{B} = 0. \quad (9)$$

*Der magnetische Induktionsfluß ist für jede geschlossene Hülle gleich Null, die magnetische Induktion ist stets quellenfrei.*

Die Röhren des Induktionsfeldes gehen stetig, mit konstantem Induktionsfluß, durch alle Trennflächen hindurch und sind im Endlichen ohne Anfang und Ende. An Trennflächen sind sie im allgemeinen geknickt, jedoch nach Gl. (9c) so, daß ihre Normalkomponente stetig bleibt. In stofflichen Körpern erhält man die magnetische Feldstärke durch stetige Fortsetzung der Tangentialkomponente [Gl. (6b)], die magnetische Induktion durch stetige Fortsetzung der Normalkomponente [Gl. (9c)]. Diese beiden Vorschriften lassen sich auch, unabhängig von der oben ausgeführten, eine Analogie zu Hilfe nehmenden Schlußweise, als definierende Eigenschaften der beiden Feldvektoren ansehen: danach ist definitionsmäßig  $\mathfrak{H}$  wirbelfrei, definitionsmäßig  $\mathfrak{B}$  quellenfrei. Während aber die Wirbelfreiheit eine Eigenschaft lediglich des magnetostatischen Feldes ist, kommt der Quellenfreiheit von  $\mathfrak{B}$  der Wert einer grundsätzlichen Feststellung zu, da wir keine physikalischen Erfahrungen kennen, die sie verändern würde. Wir werden hierauf mehrfach zurückkommen (31., 36.).

Wegen der völligen Quellenfreiheit kann der magnetische Fluß (Skalar) durch eine ungeschlossene Fläche  $f$

$$\Phi = \int \mathfrak{B} \, d\mathfrak{f} = \int B_n \, df \quad (10)$$

durch die Gestalt der Fläche nicht beeinflusst werden, er ist ausschließlich abhängig von der Randkurve (von der Kontur). Von zwei beliebigen Flächen, die die gleiche Randkurve haben, kann nicht durch die eine ein größerer magnetischer Fluß gehen als durch die andere, denn dann müßten in dem durch die beiden Flächen umhüllten Zwischenraum Induktionsröhren anfangen oder endigen (vgl. Abb. 1;  $s_1$  und  $s_2$  sind die Schnitte zweier Flächen gleicher Randkurve, deren Spur  $a \dots a$  ist). Es muß daher möglich sein, den magnetischen Fluß durch ein Verfahren zu bestimmen,

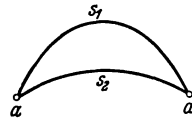


Abb. 23. 1. Zur Bestimmung des Flusses von  $\mathfrak{B}$ .

bei dem nur die Form und die Lage dieser Kurve, nicht aber die Gestalt einer in die Randkurve eingespannten Fläche eine Rolle spielt. Dies geschieht dadurch, daß man die magnetische Induktion  $\mathfrak{B}$  auf Grund ihrer Quellenfreiheit mit Hilfe einer vektoriellen Rechengröße  $\mathfrak{A}$  bestimmt als

$$\mathfrak{B} = \text{rot } \mathfrak{A}, \quad (11)$$

denn es ist mathematisch notwendig  $\text{div } \mathfrak{B} = \text{div rot } \mathfrak{A} \equiv 0$ . Der magnetische Fluß wird dann durch den Satz von Stokes durch  $\mathfrak{A}$  bestimmt zu

$$\Phi = \int \mathfrak{B} \cdot d\vec{\tau} = \int \text{rot } \mathfrak{A} \cdot d\vec{\tau} = \oint \mathfrak{A} \cdot d\vec{r} \quad (12)$$

als Randintegral längs der gegebenen Randkurve, und, wie gewünscht, unabhängig von der eingespannten Fläche.  $\mathfrak{A}$  wird vektorielles Potential genannt, wir werden es später näher kennzeichnen und anwenden.

Die Analogie zwischen dem elektrischen Vektorenpaar  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{D}$  und den magnetischen Vektoren  $\mathfrak{H}$ ,  $\mathfrak{B}$  macht einen Ansatz für die magnetische Energie [vgl. 14. Gl. (2)] von der Form

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{\infty} \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{B} \cdot d\tau \quad (13)$$

als Integral der räumlichen magnetischen Energiedichte

$$w_m = \frac{\mathfrak{H} \cdot \mathfrak{B}}{2}; \quad W_m = \int_{\infty} w_m \cdot d\tau \quad (14)$$

über den ganzen felderfüllten Raum wahrscheinlich. Zur Berechnung der Gesamtenergie des Feldes eines Dauermagneten kann er allerdings nicht dienen, denn das Raumintegral des skalaren Produktes aus einem wirbelfreien Vektor [ $\mathfrak{H}$ , Gl. (6)] und einem quellenfreien Vektor [ $\mathfrak{B}$ , Gl. (9)] verschwindet, wenn es über den unendlichen felderfüllten Raum erstreckt wird. Gl. (13) und (14) werden daher später zu ergänzen und zu rechtfertigen sein.

Was den Zusammenhang von  $\mathfrak{B}$  mit  $\mathfrak{H}$  betrifft, so untersuchen wir im folgenden Abschnitt 24., wie der einfachste, und dem entsprechenden elektrischen [12. Gl. (4)] nachgebildete Ansatz

$$\mathfrak{B} = \mu \mu_0 \mathfrak{H} = \bar{\mu} \mathfrak{H} \quad (15)$$

mit den physikalischen Erfahrungen übereinstimmt.  $\mu$  wird als unbenannte Zahl relative, spezifische oder bezogene Permeabilität, oder auch relativer Magnetisierungsgrad genannt,

$$\bar{\mu} = \mu \mu_0 \quad (16)^1$$

wird als absolute oder unbedingte Permeabilität bezeichnet. Die Permeabilität aller magnetischen Substanzen geht mit zunehmender Verdünnung gegen einen gemeinsamen Grenzwert, den wir durch den Wert  $\mu = 1$  für den leeren Raum kennzeichnen. Die später näher bestimmte „magnetische Konstante“  $\mu_0$  hat mit den Eigenschaften der Materie gar nichts zu tun, sie läßt uns aber die Freiheit, in jedem Falle, also auch im leeren Raum, wo selbstverständlich ein einziger Vektor zur vollständigen Feldbeschreibung ausreicht, für Feldstärke und Induktion verschiedene Einheiten zu gebrauchen.

Wir haben begriffliche Analogien zwischen  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  einerseits,  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{B}$  andererseits kennengelernt. Man kann auch in anderer Weise einander gegenüberstellen: im elektrostatischen Felde hat  $\mathfrak{E}$  keine Wirbel, im magnetischen Felde hat  $\mathfrak{B}$  keine Quellen; im elektrischen Feld sind Quellen von  $\mathfrak{D}$  die Ladungen, im magnetischen Feld sind Wirbel von  $\mathfrak{H}$  die elektrischen Ströme, wie wir später zeigen werden.

<sup>1</sup> Vgl. 12. Gl. (7). — Gl. (16) wird auch geschrieben  $\Pi = \mu \Pi_0$  mit  $\Pi$  als absoluter,  $\mu$  als relativer Permeabilität, oder es wird die von uns  $\mu_0$  geschriebene magnetische Konstante durch  $\Pi$  bezeichnet, also die absolute Permeabilität als  $\mu \Pi$  geschrieben. Eine andere Schreibweise ist  $\mu = \mu_r \mu_0$ , wobei  $\mu$  die absolute,  $\mu_r$  die relative Permeabilität bedeutet; dagegen wird in der älteren Literatur und den Tabellenwerken die relative Permeabilität durchgehend mit  $\mu$  bezeichnet. Welche Schreibung sich allgemein durchsetzen wird, läßt sich noch nicht absehen.

Es entsprechen einander also  $\mathfrak{C}$  und  $\mathfrak{B}$  einerseits,  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{H}$  andererseits, wie Quellenfelder und Wirbelfelder einander entsprechen. Man hat demzufolge an die Stelle von Gl. (2) und (3) gesetzt

$$\mathfrak{D} = [m' \mathfrak{B}]; \quad \mathfrak{H} = p' \mathfrak{B};$$

Drehmoment und Kraft werden hier also definitionsweise nicht der Feldstärke, sondern der Induktion proportional gesetzt. Hält man an der Quellenfreiheit der Induktion fest, so sind diese Definitionen nur möglich, wenn zugleich die magnetischen Momente und Polstärken nicht mehr konstant sind, sondern von der Permeabilität des die permanentmagnetischen Körper umgebenden Stoffes  $\mu_a$  in der Weise abhängen, daß ihre Produkte mit  $\mu_a$  konstant sind:

$$m' \cdot \mu_a = \text{const}; \quad p' \cdot \mu_a = \text{const}.$$

## 24. Die magnetischen Eigenschaften der Stoffe.

In magnetischer Hinsicht zeigen die Stoffe ein viel weniger einfaches Verhalten, als in elektrischer. Man unterscheidet durch die gemessene Permeabilität  $\mu = \frac{B}{\mu_0 H}$ :

1. Diamagnetische Substanzen, bei denen  $\mu < 1$  ist. Dies ist die Mehrzahl aller Stoffe, die Abweichung vom Vakuumwert  $\mu = 1$  ist zahlenmäßig sehr gering. (Beispiel: Wasserstoff, Wismut.)

2. Paramagnetische Substanzen, bei denen  $\mu > 1$  ist. Die auch hier verhältnismäßig kleine Abweichung vom Vakuumwert fällt im allgemeinen mit steigender Temperatur. (Beispiel: Sauerstoff, Platin.)  $\mu > 1$  entspricht qualitativ den dielektrischen Stoffen; dort gibt es nur  $\varepsilon \geq 1$ . Nach Ausweis der Messungen ist  $\mu = \text{const}_H$  bei den dia- wie den paramagnetischen Stoffen, diese verhalten sich also in magnetischer Hinsicht vollkommen elastisch:

$$\mathfrak{B} = \mu_0 \mu \mathfrak{H}; \quad \mu = \text{const}_H. \quad (1)$$

3. Ferromagnetische Substanzen (Eisen, Nickel, Kobalt, einige Legierungen) zeigen ebenfalls  $\mu > 1$ , sind jedoch dadurch ausgezeichnet, daß  $\mu$  von der magnetischen Feldstärke abhängt. Die Permeabilität ist für ein und denselben Körper innerhalb weiter Grenzen veränderlich, mit wachsendem  $H$  kann sie vergleichsweise außerordentlich große Werte annehmen (Größenordnung mehrere Tausend bei Eisen), und geht bei einer technisch leicht erreichbaren Größe von  $H$  auf geringfügige Werte zurück („Sättigung“).  $\mu$  wird häufig durch verschiedene Umstände stark beeinflusst, so durch die mechanische und thermische Vorbehandlung der Körper, durch chemische Zusätze zu den Stoffen, Verunreinigungen usw. Oberhalb einer für jeden Stoff bestimmten Temperatur werden die ferromagnetischen Substanzen normal paramagnetisch.

Im allgemeinen ist das nicht konstante Verhältnis  $\frac{B}{\mu_0 H} = \mu$  aber auch nicht eindeutig durch den Augenblickswert des magnetischen Feldes gegeben, sondern durch die magnetische Vorbehandlung mitbestimmt. Man beschreibt das Verhalten bei veränderter Größe und gleichbleibender Richtung des magnetischen Feldes durch die Magnetisierungskurve und -schleife (Abb. 1). Mit von Null wachsendem  $H$  wächst auch  $B$  zunächst beschleunigt, dann verzögert, bis zur Sättigung  $\mu \rightarrow 1$ . Läßt man aber  $H$  von einem beliebigen Wert aus wieder abnehmen, so fällt  $B$  langsamer ab, als es angestiegen war, und zeigt für  $H = 0$  noch den Wert  $B = M$ , der Remanenz heißt; um  $B = 0$  zu erreichen, muß man eine entgegengesetzt gerichtete Feldstärke vom Betrage  $H = K$ , die Koerzitivkraft, aufwenden.  $M$  und  $K$  sind ein Maß für die „magnetische Härte“ des Stoffes. Für einen Kreisprozeß (eine zyklische Folge von  $H$ -Werten) erhält man also dadurch, daß der spätere Wert

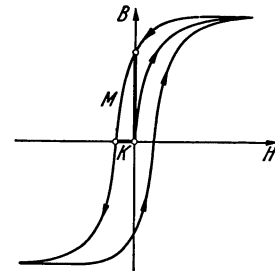


Abb. 24. 1. Magnetisierungskurve (Hysteresis-) Schleife.

der Induktion bei gleicher Feldstärke gegenüber dem früheren zurückbleibt, die in Abb. 1 gezeichnete Hysteresisschleife<sup>1</sup>. Der augenblickliche  $B$ -Wert ist durch den augenblicklichen  $H$ -Wert nicht eindeutig bestimmt, er bleibt aber, wenn ein einmal erreichter  $H$ -Wert erhalten bleibt (z. B.  $H = 0$ ), ebenfalls bestehen. Hierin liegt ein Unterschied gegenüber der dielektrischen Nachwirkung (12.). Allgemein kann die Hysterese nicht in die Theorie einbezogen werden, sie bleibt daher ohne besondere Erwähnung grundsätzlich von den Betrachtungen ausgeschlossen. Jedoch sind zwei praktisch nahezu erreichbare Grenzfälle besonders wichtig:

a) Je schmaler die Hysteresisschleife ist, um so weicher in magnetischer Hinsicht ist der Körper. Es gibt weiche Eisensorten, für die die Hysteresisfläche praktisch Null ist. Dann ist also der durch die Magnetisierungskurve dargestellte funktionale Zusammenhang zwischen  $H$  und  $B$  in praktisch ausreichender Näherung eindeutig; es gilt

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{B} &= \mu_0 \cdot \mu \mathfrak{H} \\ \mu &= F(B) \text{ eindeutige, positive Funktion von } B \text{ oder } H \end{aligned} \right\} \text{ „weich“}. \quad (2)$$

b) Ein magnetisch harter Körper (harter Stahl) hat folgende Eigenschaft: Bringt man ihn, wenn er durch eine frühere Magnetisierung eine Remanenz  $M$  erhalten hat, in ein nicht zu starkes Feld  $H$ , so steigt innerhalb gewisser Grenzen  $B$  proportional zu  $H$  vom Werte  $B=M$  ab:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{B} &= \mathfrak{M} + \mu_0 \cdot \mu \mathfrak{H} \\ \mathfrak{M} &= \text{const}_H, \quad \mu = \text{const}_H \end{aligned} \right\} \text{ „hart“}. \quad (3)$$

$\mathfrak{M}$  wird permanente Magnetisierung genannt.

Aus Gl. (1), (2), (3) folgt: Mit Ausnahme magnetisch harter Körper sind Feldstärke  $\mathfrak{H}$  und Induktion  $\mathfrak{B}$  in jedem Feldpunkt gleichgerichtet,  $\mathfrak{H}$ -Linien und  $\mathfrak{B}$ -Linien fallen zusammen<sup>2</sup>. Im Innern magnetisch harter Körper (Dauermagnete) dagegen verlaufen  $\mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{B}$  keineswegs parallel, sie können sogar einander im wesentlichen entgegengerichtet sein. — Im einzelnen:

1. Es sei  $\mathfrak{M} = 0$ , Dauermagnete seien ausgeschlossen. Aus  $\mathfrak{B} = \bar{\mu} \mathfrak{H}$ , aus der wirbelfreien Fortsetzung der Feldstärke und der quellenfreien Fortsetzung der Induktion [23. Gl. (15), (6b), (9c)] ergibt sich das Brechungsgesetz der Feldlinien an der Trennfläche zweier Substanzen 1 und 2 im statischen Fall

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (4)$$

in zu 13. Gl. (1) völlig analoger Weise. Daraus folgt im besonderen für Eisen, solange man mit großen Werten der Permeabilität rechnen kann (unterhalb der Sättigung): Aus dem Eisen treten die Feldlinien in Luft oder in einen anderen nicht ferromagnetischen Körper entweder nahezu senkrecht zur Oberfläche aus, auch wenn sie im Eisen mit einem beträchtlichen Winkel zum Lot an der Trennfläche verlaufen, oder aber sie gehen im Eisen etwa parallel zur Oberfläche und treten in die Luft überhaupt nicht aus. Beides erlaubt, durch Anwendung von Eisen dem magnetischen Fluß wenigstens größtenteils einen vorgeschriebenen Verlauf zu geben.

<sup>1</sup> Während der Zeitdauer  $T$  eines Kreisprozesses wird magnetische Energie im Eisenkörper aufgespeichert und zurückgegeben, die gesamte Änderung der magnetischen Energie ist daher Null. Für die beim Kreisprozeß zugeführte und nicht zurückgegebene Energie ist ein Maß die Fläche der Hysteresisschleife, und zwar zeigt sich, daß  $\int_0^T \mathfrak{H} \cdot d\mathfrak{B}$ , gleichbedeutend mit dieser

Fläche, die in der Volumeneinheit in Form von Wärme — Hysteresiswärme — vergeudete Energie ist. Für einen symmetrischen Kreisprozeß hat man empirische Formeln aufgestellt, um aus dem erreichten Höchstwert von  $B$  auf den Hysteresisverlust schließen zu können, z. B.  $\alpha B^{1,6}$  und  $\beta B + \gamma B^2$ , unter  $\alpha, \beta, \gamma$  empirische Konstante, unter  $B$  Zahlenwerte der Induktion in einer bestimmten Einheit verstanden.

<sup>2</sup> Dies gilt für magnetisch isotrope Substanzen; in anisotropen Körpern (Kristallen) ist die Richtung nicht notwendig die gleiche, der Zusammenhang zwischen  $\mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{B}$  wird in genau derselben Weise, wie der Zusammenhang zwischen  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{D}$  in anisotropen Isolatoren, durch eine lineare Vektoroperation von der Form der Gleichung (8) in 12. beschrieben (Tensor).

Von der permanenten Magnetisierung  $\mathfrak{M}$  ist begrifflich die temporäre oder induzierte Magnetisierung  $\mathfrak{S}$  zu unterscheiden. Sie entspricht der ebenfalls temporären Polarisation der Dielektrika. Wir definieren daher [vgl. 12. Gl. (11)] die temporäre Magnetisierung als die Differenz zwischen dem wirklich vorhandenen Felde  $\mathfrak{B}$  und dem bei gleichem  $\mathfrak{H}$  im leeren Raume sich einstellenden Feld  $\mathfrak{B}_{\text{vak}}$ :

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{B} - \mathfrak{B}_{\text{vak}}; \quad (5)$$

nach Voraussetzung gilt  $\mathfrak{B} = \mu_0 \mu \mathfrak{H}$ , somit

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{B}_{\text{vak}} (\mu - 1) = \mu_0 \mathfrak{H} (\mu - 1), \quad (6)$$

und es wird der Zahlenfaktor  $\mu - 1 = \chi$  als magnetisches Aufnahmevermögen (Suszeptibilität) bezeichnet<sup>1</sup>. Im Vakuum ist die temporäre Magnetisierung Null, in paramagnetischen Stoffen hat sie die gleiche, in diamagnetischen Stoffen die entgegengesetzte Richtung wie die Feldstärke.

2. Dauermagnete. (So sei jeder magnetisch harte Körper bezeichnet.) Wir untersuchen mit Hilfe der Zustandsgleichung für Dauermagnete

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{B} &= \mathfrak{M} + \bar{\mu} \mathfrak{H} \\ \mathfrak{M} &= \text{const}_H, \quad \mu = \text{const}_H \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

das Feld, wenn der Dauermagnet von einem gleichförmigen Stoff ohne permanente Magnetisierung umgeben ist (z. B. Luft). Zunächst: Setzt man

$$\bar{\mu} \mathfrak{H} = \mathfrak{B}', \quad (7)$$

so ist außerhalb des Magnets, weil  $\mathfrak{M} = 0$ , die Induktion  $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}'$ , Feldstärke und Induktion im Außenfeldraum sind also einander gleichgerichtet, und man erhält aus Gl. (3) für die permanente Magnetisierung

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{B} - \mathfrak{B}' \quad (8)$$

analog zur Definition der temporären Magnetisierung Gl. (5). Weiter: Wegen der (praktischen) Konstanz von  $\mathfrak{M}$  und  $\mu$  liegt es nahe, eine konstante eingeprägte magnetische Feldstärke

$$\frac{\mathfrak{M}}{\mu} = \mathfrak{H}^e = \text{const} \quad (9)$$

in Gl. (3) einzuführen:

$$\mathfrak{B} = \bar{\mu} (\mathfrak{H} + \mathfrak{H}^e); \quad \mathfrak{H} = \frac{\mathfrak{B}}{\bar{\mu}} - \mathfrak{H}^e. \quad (10)$$

Dies ist folgendermaßen zu verstehen: Das Feld  $\mathfrak{B}$  geht, weil quellenfrei, in seinen normalen Komponenten stetig, daher im wesentlichen ohne Richtungswechsel, durch Außenfeldraum und Magnetkörper, in welchem  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{M}$  im wesentlichen gleichgerichtet sind, denn  $\mathfrak{M}$  ist eine Remanenz, d. h. ein Rückstand von einer früheren Magnetisierung her. Das Feld  $\mathfrak{H}$  verläuft definitionsgemäß von der positiven zur negativen magnetischen Ladung („Pole“) sowohl im Außenfeldraum, wo es daher mit  $\mathfrak{B}$  gleichgerichtet ist, wie auch im Magnetkörper, wo es  $\mathfrak{H}^e$  entgegenläuft und daher schwächt. Man spricht deshalb von „Selbstentmagnetisierung“ und bezeichnet auch  $\mathfrak{H}$  als „entmagnetisierende Kraft“. Ein Maß für den Gesamtwert der entmagnetisierenden Wirkung ist die magnetische Spannung im Innern von Pol zu Pol, die wegen  $\text{rot } \mathfrak{H} = 0$  bis auf das Vorzeichen mit der Spannung im Außenfeldraum auf beliebigem Weg übereinstimmt. Denken wir uns einen Dauermagneten so geschlossen, daß seine Pole aufeinanderfallen, so ist daher  $\mathfrak{H} = 0$ , und die Induktion hat nach Gl. (10) ihren Höchstwert  $\mathfrak{B}_{\text{max}} = \bar{\mu} \mathfrak{H}^e = \mathfrak{M}$  („polloser Magnet“, erfahrungsgemäß ohne magnetisches Feld im Außenfeldraum). In dem anderen

<sup>1</sup> Vielfach ist es üblich, nicht  $\mu - 1$ , sondern  $\frac{1}{4\pi} (\mu - 1)$  als Suszeptibilität zu bezeichnen.

Diese Form rührt von der früher sehr verbreiteten Benutzung nicht rationaler *c-g-s*-Einheiten her und ist in einer einheitenfreien Darstellung nicht am Platze. „Ein vernünftiger Grund läßt sich jedenfalls für diese Definition nicht anführen, außer dem einen, daß früher so gerechnet wurde“ (Mie).

Grenzfalle  $\mathfrak{B} = 0$  ist  $\mathfrak{H} = -\mathfrak{H}^e$  (er ist allerdings magnetostatisch nicht zu verwirklichen). Daher ist wegen der Gegenläufigkeit von  $\mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{H}^e$  stets

$$|\mathfrak{H} + \mathfrak{H}^e| < |\mathfrak{H}^e|.$$

Abb. 2 verdeutlicht die Zustandsgleichung (10).

Als „Flächendichte des Magnetismus“  $\sigma_m$  bezeichnet man den Sprung in der Normalkomponente der permanenten Magnetisierung  $\mathfrak{M}^1$ , den wir mit  $Div \mathfrak{B} = 0$  aus Gl. (3) erhalten zu

$$\sigma_m = -Div \mathfrak{M} = Div \bar{\mu} \mathfrak{H}. \tag{11}$$

Wegen  $\mathfrak{M} = 0$  im Außenfeldraum ist auch

$$\sigma_m = \pm M_n,$$

und es ist

$$\sum \sigma_m = 0.$$

„Magnetomotorische Kraft“  $V^e$  wird das Linienintegral der eingepprägten magnetischen Feldstärke zwischen gegebenem Anfangs- und Endpunkt der Integration genannt:

$$V^e = \int_1^2 \mathfrak{H}^e dr. \tag{12}$$

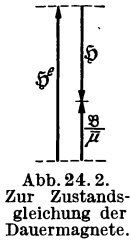


Abb. 24. 2. Zur Zustandsgleichung der Dauermagnete.

## Das elektrische Strömungsfeld in Leitern.

### 25. Elektrische Strömung in homogenen Leitern. Beharrliche elektrische Strömung.

Wir stören den Gleichgewichtszustand eines elektrostatischen Feldes ( $rot \mathfrak{E} = 0$ ,  $\eta = div \mathfrak{D}$ ) dadurch, daß wir auf verschiedener Spannung befindliche, geladene Leiter miteinander leitend verbinden. Als einfachste Anordnung wählen wir das vollständige Feld zwischen den zwei Belegungen eines Kondensators, die wir durch einen Leiter miteinander verbinden (Abb. 1). Man beobachtet:

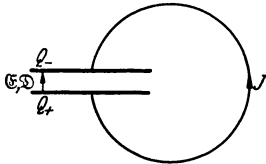


Abb. 25. 1. Kondensatorentladung durch Leitungsstrom.

1. Das elektrische Feld nimmt in seiner Gesamtheit zeitlich ab und verschwindet schließlich gänzlich,

2. während dieses Vorganges sind in der Umgebung der Anordnung sich ändernde magnetische Kraftwirkungen nachweisbar,

3. zugleich erwärmt sich der Leiter.

Zu 1. Wir betrachten die Quellen des Feldes, die Ladungen. Das Feld bleibt während des Abklingens vollständig, die Quellen (die positiven Ladungen) verringern sich genau im gleichen Maße, wie die Senken (die negativen Ladungen) des Feldes. Genau dieser Vorgang wäre das Ergebnis, wenn die Ladungen durch den angebrachten Leiter hindurch, in dem voraussetzungsgemäß Ladungen leicht verschieblich sind, infolge der zwischen den beiden Belegungen und daher auch im verbindenden Leiter herrschenden elektrischen Spannung sich ausgleichen würden. Auf Grund dieser Vorstellung nennt man den Vorgang einen elektrischen Strom. Ein Maß für diesen ist offenbar die Ladungsänderung:

$$\mathbf{J} = -\frac{dQ_+}{dt} = +\frac{dQ_-}{dt} \tag{1}^2$$

(positive Ladung  $Q_+ = -Q_-$  negative Ladung). Nach willkürlicher Verabredung bezeichnet man als positive Stromrichtung die Bewegungsrichtung positiver Ladung. Irgendeine atomistische Deutung des elektrischen Strömungsvorganges ist der makroskopischen Elektrodynamik fremd (vgl. 2.), sie legt auch

<sup>1</sup> Nicht den Sprung der magnetischen Induktion; diese ist ja quellenfrei. — Von Gl. (11) wohl zu unterscheiden ist die Sprungdivergenz der temporären Magnetisierung Gl. (6):

$$-\mu_0 Div (\mu - 1) \mathfrak{H} = -\mu_0 Div \chi \mathfrak{H}.$$

<sup>2</sup> Im P. M. S.: Benennung  $\mathbf{J} = \frac{Q}{T}$ ; Einheit  $1 \frac{Coul}{sec} \equiv 1 \text{ Amp.}$



hier die vollkommen stetige Feldvorstellung zugrunde. Sie kann daher den Strom  $J$  auffassen als den Fluß eines Vektorfeldes  $\mathfrak{G}$  im Innern durchströmter Leiter:

$$J = \int \mathfrak{G} d\mathfrak{f}. \quad (2)^1$$

Die Strömung oder Stromdichte  $\mathfrak{G}$  ist also ihrem Betrage nach gleich dem Strom durch die normal zur Strömungsrichtung gerichtete Flächeneinheit. Tritt aus einem durch eine geschlossene Hülle abgegrenzten Raum Strömung aus (Beispiel: geschlossene Hüllfläche um eine der beiden Kondensatorplatten), so gilt demnach

$$\oint \mathfrak{G} d\mathfrak{f} = - \frac{dQ}{dt}, \quad (3)$$

oder mit dem Satz von Gauß

$$\operatorname{div} \mathfrak{G} = - \frac{d\eta}{dt}; \quad \operatorname{Div} \mathfrak{G} = - \frac{d\sigma}{dt}; \quad (3a)$$

in Worten: *Ladungsänderungen sind Quellen elektrischer Strömung.*

Dieselbe Kontinuitätsgleichung besteht auch zwischen dem Flüssigkeitsinhalt in und der Flüssigkeitsströmung aus einem umhüllten Raum.

Zu 2. und 3.: Der Energieverlust des Kondensators während des Strömungsvorganges, bezogen auf die Zeitspanne  $dt$ , ist mit 10. Gl. (1), 11. Gl. (14), (15):

$$\Psi \equiv - \frac{dW_e}{dt} = - \frac{d}{dt} \left( \frac{Q^2}{2C} \right) = - \frac{Q}{C} \frac{dQ}{dt} = UJ. \quad (4)^2$$

Um den Verbleib dieser elektrischen Leistung einfach erklären zu können, müssen wir die Beobachtung 2. vernachlässigen. Dies ist quantitativ um so unbedenklicher, je langsamer der Strömungsvorgang vor sich geht. Dann kann die elektrisch geleistete Arbeit nur noch der nach 3. beobachteten Wärme gleichen. Die in der Zeitspanne  $dt$  im durchströmten Leiter entwickelte Wärmemenge ist also

$$-dW_e = \Psi dt = UJ dt. \quad (4a)$$

Elektrische Strömung ist mit Energiebewegung verknüpft, elektrische Feldenergie wird in Wärme umgesetzt<sup>3</sup>. Die im Sinne einer einfachen Auslegung der Energieumwandlung getroffene Beschränkung auf zeitlich langsam verlaufende Vorgänge könnte sehr einschneidend erscheinen, wenn es nicht einfache Mittel zur Verwirklichung zeitlich unveränderlicher Strömungen gäbe. Sie werden uns im folgenden Abschnitt beschäftigen. Sie rechtfertigen es, daß wir von hier an, um von einer beliebig angenäherten zu einer strengen Beschreibung der Vorgänge zu kommen, eine zeitlich unveränderliche Strömung bei ruhenden Körpern annehmen:

$\frac{\partial}{\partial t} = 0$ , *Beharrungszustand* oder echt *stationärer Zustand*. Für ihn gilt

$$a) \oint \mathfrak{G} d\mathfrak{f} = 0; \quad b) \operatorname{div} \mathfrak{G} = 0; \quad c) \operatorname{Div} \mathfrak{G} = 0. \quad (6)$$

Die Röhren des Strömungsfeldes gehen stetig, mit konstantem Strom, durch alle Trennflächen hindurch und sind im Endlichen ohne Anfang und Ende. Ladungshäufungen treten weder im Innern [Gl. (6b)], noch an Trennflächen von Leitern [Gl. (6c)] auf, und an der Grenzfläche eines Leiters 1 gegen einen Nichtleiter 2 ist die Strömung ausschließlich parallel zur Leiteroberfläche gerichtet, denn es ist  $\mathfrak{G}_2 = 0$ , daher nach Gl. (6c):

$$\operatorname{Div} \mathfrak{G} = n_{1/2} (0 - \mathfrak{G}_1) = 0; \quad G_{1n} = 0. \quad (7)$$

<sup>1</sup> Im P. M. S.: Benennung  $G = \frac{Q}{\Gamma L^2} = \frac{J}{L^2}$ ; Einheit  $1 \frac{\text{Amp}}{\text{cm}^2}$ .

<sup>2</sup> Im P. M. S.: Benennung  $\Psi = \frac{UQ}{\Gamma} = UJ$ , Einheit  $1 \frac{\text{Joule}}{\text{sec}} \equiv 1 \text{ Watt}$ .

<sup>3</sup> Würde die Ladungsbewegung nicht nur im Leiter als Strömung vor sich gehen, sondern als mechanische Bewegung geladener Körper „konvektiv“, so würde die Energieänderung entsprechend als mechanische Arbeit der Kräfte zu erklären sein, die die geladenen Körper in Bewegung setzen.

Ferner wird im stationären Zustand, weil Energieänderungen im konstanten Feld ausgeschlossen und die Körper in Ruhe sind, von den elektrischen Feldkräften keine mechanische Arbeit geleistet [ $\Psi$ , Gl. (4) stellt die gesamte Leistung dar]. Daher ist ebenso wie im elektrostatischen Zustand und als Folge der gleichen Überlegung, wie dort [8. Gl. (4)], die elektrische Spannung vom Weg unabhängig, die elektrische Feldstärke wirbelfrei:

$$\text{a) } \oint \mathfrak{E} d\mathbf{r} = 0; \quad \text{b) } \text{rot } \mathfrak{E} = 0; \quad \text{c) } \text{Rot } \mathfrak{E} = 0. \quad (8)$$

Die Gleichgewichtsbedingung des elektrostatischen Zustandes, nach welcher im Leiterinnern kein elektrisches Feld besteht und alle Punkte der Leiteroberfläche die gleiche Spannung haben, ist aber hier sicher verletzt; in unserem Grundversuch hatten wir die auf verschiedener Spannung befindlichen Platten eines Kondensators leitend miteinander verbunden. Man findet dementsprechend, daß die elektrische Feldstärke nicht senkrecht auf der Oberfläche durchströmter Leiters steht, sondern schief. Ihre Tangentialkomponente erweist sich proportional der Strömung, die nach Gl. (7) der Oberfläche parallel ist:

$$E_t = \rho G_t, \quad (9)$$

gültig an Leiteroberflächen (Abb. 2). Der skalare Proportionalitätsfaktor  $\rho$  hängt ausschließlich vom Leitermaterial ab, er wird als spezifischer Widerstand, sein Kehrwert

$$\kappa \equiv \frac{1}{\rho} \quad (10)$$

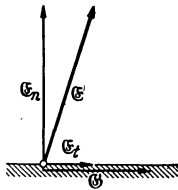


Abb. 25. 2. Gesetz von Ohm.

als spezifische Leitfähigkeit bezeichnet<sup>1</sup>. Die Stetigkeit von  $E_t$  [Gl. (8c)] zusammen mit Gl. (9) und mit der Verletzung der elektrostatischen Gleichgewichtsbedingung veranlaßt uns, als elektrisches Feld im Innern durchströmter Leiter anzusetzen

$$\mathfrak{E} = \rho \mathfrak{G} \quad \text{Gesetz von Ohm in Differentialform.} \quad (11)^{1,2}$$

Das Ohmsche Gesetz ist eines der am weitestgehenden experimentell bestätigten Gesetze der Physik. Gl. (11), (6c), (8c) ergeben in bekannter Weise das Brechungsgesetz für Strömungslinien bei Durchgang durch eine zwei Leiter 1 und 2 trennenden Fläche ( $\alpha_1, \alpha_2$  Winkel zum Lot):

$$\frac{\text{tg } \alpha_1}{\text{tg } \alpha_2} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}. \quad (10a)$$

Die im ganzen durchströmten Leiter in Wärme umgesetzte elektrische Leistung ist gemäß Gl. (4)

$$\Psi = UJ = \int_1^2 \mathfrak{E} d\mathbf{r} \cdot \int \mathfrak{G} d\mathbf{f}.$$

Zerlegen wir den durchströmten Leiter in zylindrische Elemente von der Länge  $d\mathbf{r}$  und dem zu  $d\mathbf{r}$ ,  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{G}$  senkrechten Querschnitt  $d\mathbf{f}$ , so ist mit  $d\mathbf{r} = d\mathbf{r} d\mathbf{f}$ :

$$\Psi = \int_{\tau} \mathfrak{E} \mathfrak{G} d\mathbf{r} = \int_{\tau} \psi d\mathbf{r} \quad \text{mit} \quad \psi = \mathfrak{E} \mathfrak{G}. \quad (12)$$

Dies ist die gesamte, in dem durchströmten System in der Zeiteinheit umgesetzte Energie,  $\psi$  ihre örtliche Dichte. Wir haben sie für stationäre Strömung in homogenen Leitern und bei ruhenden Körpern als Wärmeleistung festgestellt. Wir können daher für diesen Fall mit Gl. (11) schreiben

$$\Psi = \int_{\tau} \rho \mathfrak{G}^2 d\mathbf{r} = \int_{\tau} \kappa \mathfrak{E}^2 d\mathbf{r} \quad \text{Gesetz von Joule in Differentialform.} \quad (13)$$

<sup>1</sup> Im P. M. S.: Benennung  $\rho = \frac{E}{G} = \frac{U}{J} L$ , Einheit  $1 \frac{\text{Volt}}{\text{Amp}} \text{cm} \equiv 1 \text{ Ohm cm}$ . Einige Zahlenwerte für  $\rho$  in  $10^{-6}$  Ohm cm: Silber 1,6; Kupfer 1,7; Eisen 8,6; Platin 10,7; Quecksilber 95,8.

<sup>2</sup> Mit der Einschränkung für nichtisotrope Körper (Kristalle), daß dort  $\rho$  ein Tensor ist, da  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{G}$  nicht notwendig parallel verlaufen.

Die örtliche Dichte der Stromwärmeleistung ist

$$\psi = \rho \mathfrak{G}^2 = \kappa \mathfrak{E}^2. \quad (14)$$

Auch bei beliebig rasch veränderlichen Vorgängen werden die Differentialgesetze Gl. (11) und (14) als bestehend angesehen.

Ein von einem elektrischen Feld erfülltes Dielektrikum sei zugleich leitend: „Halbleiter“. Dann wird (in einem nicht streng stationären Vorgang) die Feldenergie in jedem Raumelement in Wärme umgesetzt:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial w_e}{\partial t} &= \psi; & -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\bar{\epsilon}}{2} \mathfrak{E}^2 \right) &= \frac{1}{\rho} \mathfrak{E}^2; \\ w_{(t)} &= w_{(t=0)} \cdot e^{-2 \frac{t}{\beta \bar{\epsilon}}} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Als Maß für das zeitliche Verklngen des Feldes heißt die in jedem Maßsystem in Zeiteinheiten gemessene Größe

$$\beta \equiv \bar{\epsilon} \rho \quad (16)$$

„Relaxationszeit“. Für Metalle ist sie winzig klein, jedenfalls einer unmittelbaren Messung unzugänglich; für Gase ist sie außerordentlich groß, im übrigen ist  $\beta$  meist nur der Größenordnung nach bestimmbar. Im idealen Isolator (Vakuum) ist  $\beta = \infty$ , elektrische Energie bleibt unbeschränkt lange zeitlich unverändert erhalten (Elektrostatik). Einen idealen Leiter würde man durch  $\beta = 0$  kennzeichnen.

*Faradays Gesetz der Elektrolyse.* Tritt elektrische Strömung durch die Fläche  $f$  in einen Elektrolyten (zersetzbaren Leiter) ein, so ist die in der Zeit  $t$  als elektrochemisches Ion ausgeschiedene Masse  $m$

$$m = \frac{a t}{F} \int \mathfrak{G} d\bar{\gamma} = \frac{a Q}{F}, \quad (17)$$

dabei ist  $a$  das Äquivalentgewicht des Ions,  $F$  eine Konstante, die „Äquivalentladung“<sup>1</sup>. Demnach werden durch dieselbe Elektrizitätsmenge in verschiedenen Elektrolyten stets chemisch äquivalente Mengen ausgeschieden, d. h. solche Mengen, die sich verhalten wie die Äquivalentgewichte. (Es ist also  $m$  unabhängig von Größe und Form der Fläche, unabhängig vom Abstand der „Elektroden“ und der elektrischen Spannung). Faradays Gesetz sehen wir als einen starken Beweis dafür an, daß ebenso, wie die Materie aus Atomen aufgebaut ist, die Elektrizität aus kleinsten Teilen, Elementarquanten, besteht. Diese Erkenntnis wurde zuerst von Helmholtz und gleichzeitig von Stoney ausgesprochen (1881). Die konstante Äquivalentladung erklärt sich leicht damit, daß mit jedem einwertigen Ion eine Elementarladung, mit jedem zweiwertigen Ion zwei Elementarladungen verknüpft sind, usw. Seit den Kathodenstrahluntersuchungen von Lenard kennen wir negative Ladungen losgelöst von gewöhnlicher Materie, als Elektronen, dagegen finden wir positive Ladungen stets unlöslich behaftet mit Materie, als Ionen.

## 26. Elektrische Strömung bei eingepprägten Krften.

Als Ursachen elektrischer Strömung von größerer oder kleinerer zeitlicher Konstanz kennt man seit langem Inhomogenitäten leitender Körper. Diese können chemischer und thermischer Art sein, räumlich stetig oder mehr oder weniger un stetig verteilt sein, dieses hauptsächlich bei schichtweiser Berührung verschiedener leitender Stoffe<sup>2</sup>. Nur chemische und thermodynamische Untersuchungen können über das Wesen dieser Quellen Aufschluß geben; die Elektrodynamik beschränkt sich in ihrem beschreibenden Vorgehen darauf, sie als „eingepprägte Krfte“ in

<sup>1</sup> Ihr Zahlenwert hängt von der Einheitenwahl ab; in praktischen Einheiten ist  $F = 96494$  Coul. Über die elektrolytische Definition der praktischen international vereinbarten Ladungs-(Strom-) Einheit siehe I', II.

<sup>2</sup> Beispiele: Berührung verschiedener Metalle, Berührung von Metall mit Elektrolyt (galvanische Elemente), Metallwechsel bei gleichzeitigem Temperaturgefälle (Thermoelemente), Inhomogenitäten von Metallen, Konzentrationsgefälle in Elektrolyten, Temperaturgefälle.

Betracht zu ziehen, in Analogie zur Mechanik, in der man unter einer eingepprägten Kraft eine solche versteht, die nicht eine notwendige Folge der im betrachteten System geltenden Gesetze ist, sondern nach bestimmten Vorschriften von außen auf das System wirkt. Die Gebiete, in denen die Eigenschaften eines Leiters sich räumlich ändern, sieht man als Sitz einer konstanten, ausschließlich durch den Leiter selbst fest gegebenen elektrischen Kraft an, die man darum als dem Leiterinnern eingepprägte Feldstärke  $\mathfrak{E}^e$  bezeichnet. Sie bewirkt, daß der Leiter auch im stromlosen Zustand Polarität zeigt: denken wir uns den Leiter aus verschiedenen Stoffen aufgeschichtet, so spannt sich zwischen den entgegengesetzt gleiche Ladung tragenden Endschichten durch den Außenraum ein elektrostatisches Feld aus. Man setzt für das Leiterinnere im stromlosen Zustand die Feldstärke

$$\mathfrak{E} = - \mathfrak{E}^e, \quad (1)$$

und hat im ganzen Feldraum Wirbelfreiheit:  $\text{rot } \mathfrak{E} = 0$  und Stetigkeit der Tangentialkomponenten:  $\text{Rot } \mathfrak{E} = 0$ . Die eingepprägte Feldstärke findet man also ihrem Betrag nach gleich der Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke an der Oberfläche des stromlosen inhomogenen Leiters. Für homogene stromlose Leiter ergibt Gl. (1) die alte elektrostatische Gleichgewichtsbedingung  $\mathfrak{E}_t = 0$ .

Ein die beiden Pole durch den Außenraum verbindender homogener Leiter wird von einem stationären Strom durchflossen (vorausgesetzt, daß  $\mathfrak{E}^e$  zeitlich konstant ist). Dann kann offenbar die Gl. (11) in 25.:  $\mathfrak{E} = \rho \mathfrak{G}$  für das Innere des inhomogenen Leiters keine Gültigkeit haben: bei stationärer Strömung ( $\text{div } \mathfrak{G} = 0$ ) wäre danach die elektrische Feldstärke  $\rho \mathfrak{G}$  im Innern des inhomogenen Leiters im wesentlichen entgegengesetzt gerichtet der tangential gerichteten elektrischen Feldstärke an seiner Oberfläche, die Tangentialkomponente von  $\mathfrak{E}$  würde die Oberfläche unstetig durchsetzen. An diesem Orte bei stationärer Strömung und ruhenden Körpern Wirbel der Feldstärke anzunehmen, dafür fehlt jeder Grund. Wir setzen daher für das Innere des inhomogenen Leiters

$$\mathfrak{E} = \rho \mathfrak{G} - \mathfrak{E}^e; \quad \mathfrak{G} = \frac{1}{\rho} (\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^e). \quad (2)$$

Die elektrische Feldstärke  $\mathfrak{E}$  ist dann in jedem Feldpunkt wirbelfrei:  $\text{rot } \mathfrak{E} = 0$ , die Tangentialkomponenten sind überall stetig:  $\text{Rot } \mathfrak{E} = 0$ . Ohne Strömung ergibt sich die elektrostatische Gl. (1); wenn im Außenfeldraum kein elektrisches Feld mehr gefunden wird:  $\mathfrak{E} = 0$ , hat die Stromdichte den Wert  $\mathfrak{G} = \frac{1}{\rho} \mathfrak{E}^e$  („Kurzschluß“). Abb. 1 verdeutlicht die Zustandsgleichung (2); es ist stets  $|\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^e| \leq |\mathfrak{E}^e|$ ,

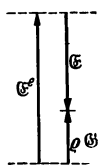


Abb. 26. 1. Verdeutlichung der Gl. (2).

und man kann die Gleichung so lesen: die Strömung ist proportional dem Unterschied der Feldstärke gegenüber ihrem Gleichgewichtswert.

Wir betrachten noch den Energieumsatz in der Zeiteinheit. Nach 25. Gl. (12) ist die in dem Strömungssystem umgesetzte Leistung

$$\Psi = \int \mathfrak{E} \mathfrak{G} d\tau; \quad (3)$$

das ist hier mit Gl. (2)

$$\Psi = \int \rho \mathfrak{G}^2 d\tau - \int \mathfrak{E}^e \mathfrak{G} d\tau; \quad (3a)$$

das erste Glied der rechten Seite, von stets positivem Betrage, kennen wir als die Wärmeleistung der elektrischen Strömung (Joulesche Wärme); das zweite Glied ist Null in homogenen Leitern, in inhomogenen ist es positiv oder negativ, je nachdem, welche Richtung überwiegend die Vektoren  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{E}^e$  gegeneinander haben. Es entspricht den Energieumsetzungen bei allen umkehrbaren Vorgängen innerhalb inhomogener Leiter<sup>1</sup>; solche sind z. B. entstandene oder verschwundene chemische Energie bei Elektrolyten, Peltier-Wärme bei Metallen. Wir bezeichnen daher als

<sup>1</sup> Z. B. ist bei Akkumulatoren  $\mathfrak{E}^e \mathfrak{G}$  negativ, während sie geladen werden.

chemisch-thermische Leistungsdichte

$$\psi = \rho \mathfrak{G}^2 - \mathfrak{E}^2 \mathfrak{G}, \quad (4)$$

und fassen im ersten Glied die Energieumsetzungen aller nichtumkehrbaren, im zweiten die aller umkehrbaren Vorgänge zusammen.

Die Grundgesetze der stationären Strömung bei ruhenden Körpern

$$\text{rot } \mathfrak{E} = 0; \quad \text{div } \mathfrak{G} = 0 \quad (5)$$

ergeben mit Gl. (2) als allgemeine Grundlage der Berechnung von  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{G}$  aus gegebenen  $\mathfrak{E}^e$  und  $\rho$ :

$$\text{rot } \rho \mathfrak{G} = \text{rot } \mathfrak{E}^e; \quad \text{div } \kappa \mathfrak{E} = -\text{div } \kappa \mathfrak{E}^e. \quad (6a, b)$$

### 27. Elektrische Strömung in linearen Leitern.

Lineare Leiter elektrischer Ströme nennen wir solche, deren Länge groß ist gegenüber den anderen Abmessungen (Stab, Draht, Bändchen). Wegen der Quellenlosigkeit der stationären Strömung  $\text{div } \mathfrak{G} = 0$  ist der Gesamtstrom  $J$  in jedem Querschnitt konstant

$$J = Gf = \text{const.} \quad (1)$$

Die normal zum Querschnitt verlaufende Strömung, die Tangentialkomponente der Feldstärke und die Leitlinie des linearen Leiters haben gleiche Richtung. Das Linienintegral der Feldstärke längs der Leitlinie  $s$  eines homogenen linearen Leiters zwischen den Querschnitten 1 und 2 ist mit Gl. (1) und 25. Gl. (11):

$$\int_1^2 E_t ds = J \int_1^2 \frac{\rho}{f} ds \quad (2)$$

oder

$$U_{1..2} = J \cdot R_{1..2}, \quad (3)$$

wenn man, wie bekannt, mit  $U_{1..2} = \int_1^2 E_t ds = \int_1^2 \mathfrak{E} d\tau$  die elektrische Spannung zwischen 1 und 2, und mit

$$R_{1..2} = \int_1^2 \frac{\rho}{f} ds \quad (4)^1$$

den elektrischen Widerstand des betrachteten Stückes bezeichnet. Wir werden späterhin die Zeiger 1..2 weglassen. Für den homogenen linearen Leiter von konstantem Querschnitt  $f$  und der Länge  $l$  ist also

$$R = \frac{\rho l}{f}. \quad (4a)^1$$

In der Integralform der Gl. (3), (4) wurde von Ohm das nach ihm genannte Gesetz experimentell gefunden. Der „Widerstand“ eines beliebigen leitenden Körpers ist demnach nur unter bestimmten Voraussetzungen eine eindeutige Größe; Gl. (3) ist eine Aussage für Drähte, dagegen Gl. (11) in 25.:  $\mathfrak{E} = \rho \mathfrak{G}$  ein allgemeingültiges physikalisches Gesetz. Sind Inhomogenitäten zu berücksichtigen, so ist mit 26. Gl. (2)

$$U_{1..2} = J R_{1..2} - \int_1^2 \mathfrak{E}^e d\tau. \quad (5)$$

Da eingeprägte Feldstärken allgemein vergleichsweise dünnen Übergangsschichten eigentümlich sind, ist die eingeprägte Spannung als das Integral

$$\int_1^2 \mathfrak{E}^e d\tau \equiv U^e, \quad (6)$$

<sup>1</sup> In bezug auf das P. M. S.: Benennung  $R = \frac{U}{J}$ , Einheit  $1 \frac{\text{Volt}}{\text{Amp}} \equiv 1 \text{ Ohm}$ .

durch die Reihenfolge der Übergangsschichten längs der Leitlinie zwischen den Punkten 1 und 2 erstreckt, eine örtlich wohl definierte Größe, die als eingeprägte elektromotorische Kraft (EMK) bezeichnet wird<sup>1</sup>. Aus

$$U = JR - U^e \quad (7)$$

folgt  $U = -U^e$  für den stromlosen Zustand, wodurch  $U^e$  erklärt ist [vgl. § 26. Gl. (1)], und für einen geschlossenen, dem geschlossenen linearen Leiter folgenden Umlauf ist  $\oint \mathcal{E} dr = 0 = JR - U^e$  oder

$$JR = U^e, \quad (8)$$

hierbei ist unter  $U^e$  die gesamte dem Kreis eingeprägte EMK, unter  $R$  der gesamte Widerstand verstanden:  $U^e = \oint \mathcal{E}^e dt$ ,  $R = \oint \frac{\rho ds}{f}$ .

Die umgesetzte Leistung ist

$$\Psi = J^2 R - U^e J, \quad (9)$$

zu erklären entsprechend 26. Gl. (3). Die Joulesche Wärme in einem linearen homogenen Leiterstück vom Widerstande  $R$  ist also

$$UJ = J^2 R, \quad (10)$$

und für einen geschlossenen Kreis vom Widerstande  $R$  wird nach

$$U^e J = J^2 R \quad (11)$$

die gesamte, von der Quelle ( $U^e$ ) gelieferte Energie in Wärme verwandelt.

Für ein Netzwerk aus Drähten gilt Gl. (8) für jeden geschlossenen Umlauf um eine Masche, oder

$$\sum_{\circ} (R_v J_v - U_v^e) = 0; \quad (12)$$

für jeden beliebigen geschlossenen Umlauf ist die Summe der Ohmschen Spannungsabfälle gleich der Summe der eingepprägten Spannungen. Mit dieser Gleichung können jedoch noch nicht sämtliche Ströme des Netzwerkes berechnet werden. Schließen wir einen Knotenpunkt von Drähten in eine geschlossene Hülle ein, so ist im stationären Zustand [25. Gl. (6)]  $\oint \mathcal{E} df = 0$  oder

$$\sum_{\circ} J_v = 0, \quad (13)$$

im Knotenpunkt entstehen oder verschwinden keine Ströme. Gl. (13) ist die erste, und Gl. (12) die zweite Kirchhoffsche Regel; beide gelten im allgemeinen nur für stationäre Ströme in ruhenden Drähten und sind Folgerungen aus den für den stationären Zustand geltenden allgemeineren Gesetzen. Sie bilden die Grundlage für die Berechnung von Leitungsnetzen im Beharrungszustand. In vielen Fällen ist der folgende, von Helmholtz ausgesprochene Überlagerungssatz von Nutzen, der sich auf die Linearität der Zusammenhänge zwischen Strömen und Spannungen gründet: Zwischen zwei Punkten eines gegebenen linearen Netzwerkes mit eingepprägten Spannungen werde eine „Ableitung“ vom Widerstand  $R_n$  angebracht, gesucht ist der sie durchfließende Strom. Diesen berechnet man nach dem Ohmschen Gesetz, wobei man die zwischen den abgeleiteten Punkten ursprünglich (bei  $R_n = \infty$ ) bestehende Spannung als eingepprägte Spannung anzusehen hat und als Schließungswiderstand derselben den Widerstand  $R_n$  der Ableitung, vermehrt um den Widerstand, den das Netzwerk (ohne eingepprägte Spannungen) einer zwischen den Ableitungspunkten wirkenden eingepprägten Spannung bieten würde (das ist also der Widerstand des Netzwerkes, gesehen von den Ableitungspunkten aus).

Der Widerstand eines nicht linearen, sondern beliebig körperlich ausgedehnten Leiters ist nur dann eindeutig, wenn man weiß, durch welche Oberflächenteile die Strömung ein-, und durch welche sie austritt. Sowohl das statische, wie das stationäre elektrische Feld ist, weil wirbelfrei, aus einem Potential errechenbar; bei entsprechen-

<sup>1</sup> Wir stellen sie durch den Buchstaben  $U^e$  an Stelle des gebräuchlichen  $E$  dar, um Verwechslungen mit dem Betrag der Feldstärke zuvorkommen.

den Rand- und Grenzbedingungen kann ein räumlich ausgedehntes Strömungsfeld geometrisch identisch mit einem räumlich ausgedehnten elektrostatischen Feld sein. Dann sind die Äquipotentialflächen identisch, und es entsprechen einander rein formal<sup>1</sup> die folgenden untereinander geschriebenen Größen:

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{D} & Q(\Omega) & \bar{\varepsilon} & C & \text{Leiteroberflächen} \\ \mathfrak{G} & J & \frac{1}{\varrho} & \frac{1}{R} & \text{Stromeintrittsflächen,} \end{array}$$

wobei wir uns der Einfachheit halber auf den Fall homogener Körper, mithin einheitlicher und konstanter DK und Leitfähigkeit beschränken. Ist also die Aufgabe im einen Falle gelöst, so ist die Lösung auf den anderen Fall übertragbar, z. B. ist dabei

$$C R = \bar{\varepsilon} \varrho. \quad (14)$$

Diese Analogie ist auch die Grundlage dafür, daß man verwickelte elektrostatische Felder in einem Elektrolyten durch entsprechend gestaltete Stromeintrittsflächen als Strömungsfelder nachbilden, und die hier mit der Sonde gefundenen Feldwerte auf das statische Feld zurückübertragen kann.

Beispiele:

Leistungsübertragung [Gl. (8) bis (11)]. Wir untersuchen die in einem Verbraucherwiderstand  $R_a$  umgesetzte Leistung als Funktion von  $R_a$ , wenn die eingepreßte Spannung  $U^e$  und der Widerstand  $R_i$  der Stromquelle gegeben sind. Die „Klemmenspannung“ an den Enden des Verbrauchers

$$U = U^e \frac{R_a}{R_i + R_a} \quad (15)$$

stimmt für  $R_a \rightarrow \infty$  (Leerlauf,  $J = 0$ ) mit der „Quellenspannung“  $U^e$  überein, ebenso für  $R_i \rightarrow 0$ , was aber in der Natur nicht vorkommt, und ist Null für  $R_a = 0$  (Kurzschluß). Mit  $\eta = \frac{R_a}{R_i}$  ist die im Verbraucher umgesetzte Leistung

$$N_a = \frac{(U^e)^2}{R_i} \frac{1}{(1 + \eta) \left(1 + \frac{1}{\eta}\right)}. \quad (16)$$

Diese Funktion hat den gleichen Wert für  $\eta$  und seinen Kehrwert, und hat ein flaches Maximum

$$(N_a)_{\max} = \frac{(U^e)^2}{R_i} \cdot \frac{1}{4} \quad \text{bei} \quad \eta = \frac{R_a}{R_i} = 1: \quad (16a)$$

„Leistungsanpassung“: Ist der Verbraucherwiderstand veränderlich, die Quelle gegeben, so wird bei  $R_a = R_i$  dem Verbraucherwiderstand am meisten Leistung zugeführt. Die Voraussetzungen dieses Satzes sind nicht umkehrbar: dem gegebenen Verbraucher wird von jener Quelle am meisten Leistung zugeführt, deren innerer Widerstand bei gleichem  $U^e$  am kleinsten ist. — Im Kurzschlußfall wird in der Stromquelle viermal soviel Energie umgesetzt, als bestenfalls im Verbraucher.

Kondensatorentladung (Grundversuch von 25.). Der die Ladung  $Q_0 = C U_0$  tragende Kondensator werde zur Zeit  $t = 0$  durch den Widerstand  $R$  überbrückt. Nach 25. Gl. (4) und 27. Gl. (10) ist der Energieumsatz in jedem Zeitelement

$$-\frac{dW_e}{dt} = -\frac{Q}{C} \frac{dQ}{dt} = J^2 R, \quad (17)$$

und mit [25. Gl. (1)]  $J = -\frac{dQ}{dt}$  (Abnahme der Ladung):

$$-\frac{Q}{RC} = \frac{dQ}{dt}, \quad (18)$$

daher ist der zeitliche Ablauf

$$\frac{Q(t)}{C U_0} = e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{J(t)}{U_0/R}. \quad (19)$$

Der Verlauf wird durch die „elektrische Zeitkonstante“

$$\tau_e \equiv RC \quad (20)$$

bestimmt. — Ist der Kondensator z. B. ein Plattenkondensator mit der Kapazität  $C = \bar{\varepsilon} \frac{f}{s}$

<sup>1</sup> Nicht etwa hinsichtlich der physikalischen Vorgänge.

[10. Gl. (7)], dessen Dielektrikum zugleich leitend ist und daher den Widerstand  $R = \rho \frac{s}{f}$  hat [27. Gl. (4)], so hat man die in 25. Gl. (15) geschilderten Verhältnisse, es ist

$$\tau_e = \beta; \quad CR = \bar{\epsilon} \rho; \quad (21)$$

der zweite Ausdruck stimmt überein mit der in 27. Gl. (14) ausgesprochenen Analogie. — Vom Anfangswerte  $W_0 = \frac{U_0^2 C}{2}$  an nimmt die Energie ab gemäß

$$W(t) = W_0 \cdot e^{-2 \frac{t}{RC}}, \quad (22)$$

und die mit Gl. (19) errechnete Gesamtmenge an Stromwärme ist

$$\int_0^{\infty} \Psi dt = \frac{U_0^2}{R} \int_0^{\infty} e^{-2 \frac{t}{RC}} dt = W_0 \quad (23)$$

nach dem Energieerhaltungssatz.

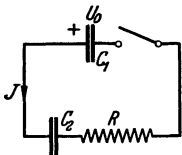


Abb. 27. 1. Kondensatorumladung.

Kondensatorumladung. Ein zur Spannung  $U_0$  aufgeladener Kondensator  $C_1$  werde im Augenblick  $t = 0$  über einen Widerstand  $R$  an einen ladungslosen Kondensator  $C_2$  gelegt (Abb. 1). Der Leitungsstrom bedeutet Ladungsverlust für  $C_1$ , Ladungszuwachs für  $C_2$ , daher ist

$$J = - \frac{dQ_1}{dt} = + \frac{dQ_2}{dt}. \quad (24)$$

Die gesamte Umlaufspannung ist [25. Gl. (8a)] in jedem Augenblick

$$JR + \frac{Q_2}{C_2} - \frac{Q_1}{C_1} = 0. \quad (25)$$

Daraus durch Differenzieren mit Gl. (24):

$$R \frac{dJ}{dt} + \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) J = 0.$$

Der zeitliche Ablauf ist durch die Zeitkonstante  $\tau_e = R \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$  bestimmt; es ergibt sich mit  $Q_0 = U_0 C_1$ :

$$J = \frac{Q_0}{R C_1} \cdot e^{-t/\tau_e} \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= Q_0 \frac{C_2}{C_1 + C_2} e^{-t/\tau_e} + Q_0 \frac{C_1}{C_1 + C_2}, & W_1 &= \frac{Q_1^2}{2 C_1}; \\ Q_2 &= Q_0 \frac{C_2}{C_1 + C_2} (1 - e^{-t/\tau_e}), & W_2 &= \frac{Q_2^2}{2 C_2}, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

so daß

$$U_{1\infty} = \frac{Q_{1\infty}}{C_1} = U_{2\infty} = \frac{Q_{2\infty}}{C_2} = U_0 \frac{C_1}{C_1 + C_2}, \quad W_{1\infty} + W_{2\infty} = W_\infty = \frac{Q_0^2}{2(C_1 + C_2)},$$

ferner  $A = \int_0^{\infty} J^2 R dt = \frac{Q_0^2}{2 C_1} \cdot \frac{C_2}{C_1 + C_2}$ , daher mit der anfänglichen Energie  $W_0 = \frac{Q_0^2}{2 C_1}$ :

$$W_0 - A = W_\infty \quad (28a)$$

nach dem Energieerhaltungssatz, und

$$Q_{1\infty} + Q_{2\infty} = Q_0 \quad (28b)$$

nach dem Satz von der Erhaltung der Ladung.

Die Kirchhoffschen Gleichungen [Gl. (12), (13)] und der Helmholtzsche Überlagerungssatz.

a) Der Gesamtwiderstand  $R_{\text{res}}$  von  $n$  hintereinandergeschalteten Widerstandsstücken ist

$$R_{\text{res}} = \sum_n R_n, \quad (29)$$

z. B. ist bei gleich großen Widerständen  $R_{\text{res}} = nR$ . Der Gesamtwiderstand  $R_{\text{res}}$  von  $n$  parallel geschalteten Widerstandsstücken ist

$$R_{\text{res}} = \frac{1}{\sum_n \frac{1}{R_n}}, \quad (30)$$

z. B. ist bei gleich großen Widerständen  $R_{\text{res}} = \frac{R}{n}$ . Der Kehrwert  $\frac{1}{R}$  eines Ohmschen Widerstandes  $R$  wird als Leitwert bezeichnet. — Man vergleiche das reziproke Verhalten von Kondensatorschaltungen [10. Gl. (8), (9)].



b) Die Wheatstonesche Brückenschaltung. Gesucht ist die Spannung  $u_g$  in der aus 4 Widerständen  $x, r, a, b$  nach Abb. 2 gebildeten Schaltung bei gegebenem  $U$ . Wir wenden z. B. die Maschenregel Gl. (12) dreimal an:

$$U = i_x(x + r), \tag{a)}$$

$$i_x(x + r) = i_a(a + b), \tag{b)}$$

$$i_x x + |u_g| - i_a a = 0; \tag{c)}$$

wir schreiben um:  $|u_g| = i_a a - i_x x,$  (c')

$$i_a = i_x \frac{x + r}{a + b}, \tag{b')}$$

$$i_x = \frac{U}{x + r}, \tag{a')}$$

indem man b') und a') in c') einsetzt, erhält man

$$|u_g| = U \frac{x b - r a}{(x + r)(a + b)}. \tag{31}$$

Bei „Abgleichung“ der Brücke  $x b = r a$  ist  $|u_g| = 0$ . Dies sei für einen bestimmten Wert  $x$  erfüllt; dann ist bei einer kleinen Abweichung  $\Delta x$  von diesem Werte die Brückenspannung angenähert

$$|\Delta u_g| = U \frac{b \cdot \Delta x}{(x + r)(a + b)}. \tag{32}$$

Um mit einem gegebenem  $\Delta x$  ein möglichst großes  $|\Delta u_g|$  zu erzielen, hat man demnach  $r = x$  zu machen, hingegen ist der Wert von  $a$  gänzlich belanglos.

Wir schließen die Klemmen 1, 2 durch einen Widerstand  $g$ . Um den  $\Delta u_g$  entsprechenden Strom  $\Delta i_g$  zu berechnen, wendet man den Satz von Helmholtz an; das Vorgehen ist in Abb. 3 angedeutet. Der Widerstand des Netzwerkes, gesehen von den Klemmen 1, 2 aus, ist bei fast vollkommener Abgleichung nahezu

$$R_i = \frac{(x + a)(r + b)}{x + r + a + b}, \tag{33}$$

daher ist nach dem Satz von Helmholtz

$$|\Delta i_g| = \frac{|\Delta u_g|}{R_i + g}. \tag{34}$$

In diesen mit Gl. (32) und (33) ausgeschriebenem Ausdruck führt man zweckmäßig den Speisestrom durch  $U = R_q J$  ein, dabei ist der Widerstand des Netzwerkes von den Klemmen 3, 4 aus bei nahe erreichter Abgleichung nahezu

$$R_q = \frac{(x + r)(a + b)}{x + r + a + b}.$$

So wird schließlich

$$|\Delta i_g| = J \frac{b \cdot \Delta x}{(x + a)(r + b) + g(x + r + a + b)}. \tag{35}$$

Hier erfordert größtes  $|\Delta i_g|$  bei gegebenem  $J$  und  $g$  einen bestimmten, endlichen Wert für  $a$  und  $r \rightarrow \infty$ .

Widerstand eines räumlichen Leiters aus der Analogie zum elektrostatischen Feld [Gl. (14)]. Aus der Kapazität des Kugelkondensators ( $a$  Innenradius,  $b$  Außenradius) 10. Gl. (2) ergibt sich mit Gl. (14) der Widerstand einer Hohlkugel, bei der die elektrische Strömung senkrecht zu den Kugeloberflächen aus- und eintritt<sup>1</sup>, zu

$$R = \frac{\bar{\epsilon} \varrho}{C} = \frac{\varrho}{4 \pi} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right). \tag{36}$$

Dieser Wert nähert sich bei festem  $a$  um so mehr dem Grenzwert  $\frac{\varrho}{4 \pi a}$ , je weiter die äußere Kugeloberfläche abrückt. Ist sie nur gehörig weit entfernt, so wird das punktsymmetrische Feld in der Umgebung der inneren Kugel davon nicht mehr merklich beeinflusst, ob die äußere Stromeintrittsfläche ebenfalls eine Kugelfläche ist oder irgendeine andere Gestalt hat; sie braucht auch nicht die innere Kugel ganz einzuhüllen. Wir erhalten somit den Widerstand zwischen einer tief ins Erdreich versenkten Metallkugel vom Radius  $a$  und einer sehr weit entfernten Gegenelektrode, wenn wir uns diese ebenfalls als Kugel vom Radius  $d$  denken, zu

$$R = \frac{\varrho}{4 \pi} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{d} \right). \tag{37}$$

Die Entfernung selbst, wenn sie nur groß ist, spielt keine Rolle. Wird nämlich die Entfernung vergrößert, so breitet sich das Strömungsfeld in dem unbegrenzten Erdreich zugleich viel weiter aus, und beide Wirkungen halten einander gerade die Waage. Wäre  $R$  Übergangswiderstand, so würde er der Oberfläche, nicht dem Radius proportional sein.

<sup>1</sup> Um die physikalische Verwirklichung kümmern wir uns nicht.

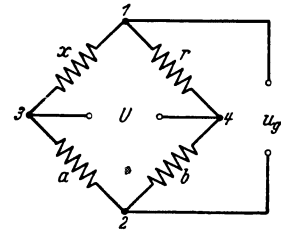


Abb. 27. 2. Wheatstonesche Brückenschaltung, Gl. (31).

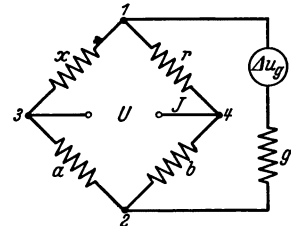


Abb. 27. 3. Wheatstonesche Brückenschaltung, Anwendung des Satzes von Helmholtz.

## II. Elektrische und magnetische Felder in wechselseitiger Verkettung.

### Die Verkettungsgesetze.

#### 28. Das magnetische Feld beharrlicher elektrischer Leitungsströmung. Durchflutungsgesetz. Der magnetische Kreis.

Der Grundversuch, der zu dem Begriffe der elektrischen Leitungsströmung führte (25.), kennzeichnet das Bestehen eines elektrischen Strömungsfeldes im Leiterinnern durch drei Merkmale: 1. Änderung eines elektrischen Feldes, 2. Vorhandensein magnetischer Wirkungen in der Umgebung des durchströmten Leiters, 3. Erwärmung des Leiters. Für den dort anschließend untersuchten beharrlichen (stationären) Strömungszustand [25., von Gl. (6) ab, 26., 27.] traf das erste Merkmal nicht mehr zu. Als „Supraleitfähigkeit“ bezeichnet man die Erscheinung, daß Metalle bei sehr niedrigen absoluten Temperaturen den elektrischen Strom leiten, ohne daß dabei merklich Energie verbraucht wird. Damit trifft auch das dritte Kennzeichen nicht mehr allgemein zu, und es bleibt als wesentliches Merkmal nur das zweite übrig, das Bestehen eines magnetischen Feldes. In der Tat sehen wir den entscheidenden Unterschied zwischen statischen und stationären elektrischen Feldern darin, daß bei diesen letzteren die elektrischen und magnetischen Größen nicht mehr unabhängig voneinander sind; es wird daher der hier begonnene zweite Hauptteil sich mit den Naturgesetzen zu befassen haben, in denen diese wechselseitige Verknüpfung ausgesprochen wird, nachdem mit dem ersten Hauptteil die Bildung der Grundbegriffe im wesentlichen abgeschlossen ist.

Wir untersuchen das magnetische Feld eines einzelnen, langen, geraden, vom konstanten Strom  $J$  durchflossenen kreisrunden Drahtes im Luftraum (leeren Raum) außerhalb des Drahtes, indem wir mit den in 23. gezeigten Hilfsmitteln (Magnetnadel, Probepol [23. Gl. (2), (3)]) die magnetische Feldstärke (Erregung)  $\mathfrak{H}$  bestimmen. Wir finden stets: 1. Der Betrag der magnetischen Feldstärke ist in jedem Raumpunkt proportional zu dem Strom im Draht, 2. Die Richtung der magnetischen Feldstärke ist in jedem Raumpunkt senkrecht zu der Ebene, die durch die Drahtachse und den untersuchten Punkt gegeben ist, 3. Senkrecht zur Drahtachse nimmt der Betrag der Feldstärke umgekehrt proportional dem Abstände ab. Aus 2. ergibt sich: die magnetischen Feldlinien sind geschlossene (in sich zurückkehrende) Kurven, die den Leiter umschlingen. Im Fall des geraden Runddrahtes sind die Feldlinien Kreise, deren Fläche senkrecht zur Drahtachse steht. Bilden wir daher die magnetische Spannung [Arbeit des Probepoles, 23. Gl. (3), (4)] ausgehend von einem beliebigen Feldpunkt (außerhalb des Leiters) längs einer Raumkurve, die den Leiter einmal umschlingend zum Ausgangspunkt zurückkehrt, so ist diese magnetische Umlaufspannung  $\oint \mathfrak{H} dr$  zunächst nach 3. auf allen zur Drahtachse senkrechten und zu ihr konzentrischen Kreisen die gleiche und konstant, und daher muß sie schließlich nach 1., 2., 3. dem Strom  $J$  im Draht proportional sein (auch, wie wir sehen werden, wenn die Umlaufkurve kein Kreis ist). Der Proportionalitätsfaktor kann auf keinerlei Weise physikalisch beeinflusst werden, es bedeutet daher<sup>1</sup> grundsätzlich

<sup>1</sup> Wenn nicht etwa die Einheiten für  $H$  und  $J$  unabhängig voneinander zum voraus festliegen. Jedoch sollte unsere Darstellung maßunabhängig sein (vgl. 4.), d. h. besondere Einheitenfragen nicht zum Ausdruck bringen; der genannte Einwand hätte bei jeder bisher neu aufgestellten Gleichung gemacht werden können. Die gegenwärtige Meßtechnik schließt übrigens die Einheiten der magnetischen Größen an die der elektrischen an. Die praktische Einheit für die magnetische Feldstärke folgt daher aus Gl. (1) und 25. Gl. (1) zu  $1 \frac{\text{Amp}}{\text{cm}}$ , die Benennung ist  $H = \frac{J}{L} = \frac{Q}{rL}$  in bezug auf das P. M. S.

keine Beschränkung, die gefundene Grundtatsache so auszudrücken:

$$\oint \mathfrak{H} \, d\mathbf{r} = J. \tag{1}$$

Wir stellen als zweites Versuchsergebnis fest: die Richtungen der magnetischen Feldstärke  $\mathfrak{H}$  und des elektrischen Stromes  $J$  (genauer der elektrischen Stromdichte  $\mathfrak{G}$ ), die durch frühere Definitionen gegeben sind, sind einander rechtswendig zugeordnet<sup>1</sup>: Regel von Ampère. Dies wird verabredungsgemäß durch das positive Zeichen in Gl. (1) zum Ausdruck gebracht.

Wir bestimmen für unseren Grundversuch die magnetische Feldstärke, indem wir als Integrationskurve für die magnetische Umlaufspannung einen der Kreise benutzen, auf dessen Umfang der Betrag der magnetischen Feldstärke konstant, ihre Richtung tangential ist (Abb. 1). Daher hat man

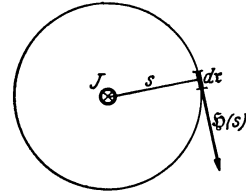


Abb. 28. 1. Zum Grundversuch.

$$J = \oint \mathfrak{H} \, d\mathbf{r} = H(s) \cdot 2\pi s; \quad H(s) = \frac{J}{2\pi s} \tag{2}$$

in Übereinstimmung mit den obigen Sätzen. Hätten wir statt der Kreislinie eine beliebige, einmal geschlossene Raumkurve gewählt, so hätten wir von dieser jedes Linienelement in ein Kreisbogenelement und zwei dazu senkrechte Anteile zerlegen können, die keinen Beitrag ergeben. Das Ergebnis ist also in der Tat von der Gestalt der umschlingenden Kurve unabhängig.

Für den Fall, daß die Kurve mehrere durchströmte Drähte umschlingt, ist die sinngemäße Erweiterung der Gl. (1):

$$\oint \mathfrak{H} \, d\mathbf{r} = \sum J \quad \text{Durchflutungsgesetz.} \tag{3}$$

Man bezeichnet die (algebraische) Summe aller Ströme, die zur magnetischen Umlaufspannung beitragen, als „Durchflutung“  $\Theta$ :

$$\sum J \equiv \Theta. \tag{4}$$

$\Theta$  ist also der Gesamtstrom durch die Fläche, deren Rand die Integrationskurve ist (Beispiel Abb. 2), oder: durch die Integrationskurve, längs der die magnetische Umlaufspannung genommen wird, ist ein „Fenster“ gegeben; die algebraische Summe aller Ströme, die durch dieses Fenster treten, heißt man Durchflutung und nennt das Grundgesetz Gl. (3)

**Durchflutungsgesetz.** Die magnetische Umlaufspannung längs des Randes einer beliebigen Fläche gleicht der elektrischen Durchflutung dieser Fläche.

Ein einfaches Beispiel ist das magnetische Feld einer Ringspule: ein zylindrischer Körper (Grundfläche  $q$ , Höhe  $l$ ;  $q \ll l^2$  sei mit einer großen Anzahl  $z$  Drahtwindungen gleichmäßig bewickelt und zu einem Ring zusammengebogen. Wenn Austritt und Eintritt des in Abb. 3 angegebenen Integrationsweges zusammenfallen, liefert nur der Weg im

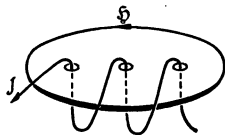


Abb. 28. 2. Verkettung von  $\mathfrak{H}$  mit  $\Theta = 3J$ .

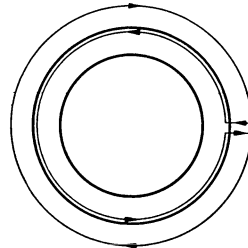


Abb. 28. 3. Ringspule und Integrationsweg.

Spulennern einen Beitrag zum gesamten Umlaufintegral und aus Gl. (3) folgt

$$H_a = 0, \quad H_i = \frac{zJ}{l}; \tag{5}$$

das Feld im Innern ist (nahezu) homogen; für das magnetische Feld ist die Ringspule ein ebenso einfaches Beispiel, wie der Plattenkondensator für das elektrische

<sup>1</sup> Umgekehrt hätte man mit dieser Festsetzung die Richtung von  $\mathfrak{H}$  ( $\mathfrak{G}$ ) aus der Richtung von  $\mathfrak{G}$  ( $\mathfrak{H}$ ) festlegen können.

Feld. Gl. (5) gilt auch für den mittleren Bereich einer hinreichend langen Zylinder-spule um so besser, je länger die Spule ist.

Über die Besonderheit des magnetischen Feldes elektrischer Ströme gibt noch folgende Überlegung Aufschluß: In der unendlichen Summe der Elemente  $\mathfrak{H} \cdot d\mathbf{r}$  der magnetischen Umlaufspannung sind positive Beiträge ( $\curvearrowright \mathfrak{H}, d\mathbf{r}$  spitz) und negative Beiträge ( $\curvearrowleft \mathfrak{H}, d\mathbf{r}$  stumpf) vorhanden. Die Gesamtsumme ist erfahrungsgemäß von Null verschieden, wenn die geschlossene Umlaufkurve elektrische Leitungsströmung umschlingt, und die nähere Untersuchung führt, wie bekannt, auf Gl. (3). Wird keine elektrische Strömung umschlungen, so halten in der Summe die positiven Beiträge den negativen die Waage, auch dann gilt Gl. (3), denn es ist  $\Theta = 0$ .

Die magnetische Spannung zwischen zwei beliebig gewählten Punkten muß in einem so beschaffenen magnetischen Feld vom Wege abhängig sein. Im Beispiel der Abb. 4 ist

$$\int_1^2 \mathfrak{H} d\mathbf{r} + \int_1^2 \mathfrak{H} d\mathbf{r}, \quad (6)$$

(I) (II)

denn man kann beide Wege zu einem geschlossenen Umlauf um den Strom  $J$  zusammenfassen, für den Gl. (3) gilt, also ist

$$\int_1^2 \mathfrak{H} d\mathbf{r} = J + \int_1^2 \mathfrak{H} d\mathbf{r}. \quad (6a)$$

(I) (II)

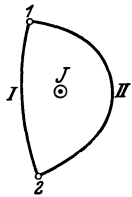


Abb. 28. 4.  
Leitungsstrom  
und magnetische  
Spannung.

Zwischen zwei gewählten Punkten erhält man auf zwei verschiedenen Wegen stets und nur dann verschiedene Werte für die magnetische Spannung, wenn bei der Überführung der einen Integrationslinie durch eine stetige Bewegung aller ihrer Elemente in die andere Integrationslinie der elektrische Strom geschnitten wird. Diese Eigenschaft haben Vektorfelder einzig dann, wenn sie von Wirbeln erzeugt sind. Die Wirbel des magnetischen Feldes können sich offenbar ausschließlich in den stromdurchflossenen Leitern befinden. (In dem Grundversuch kann das magnetische Feld ausschließlich von Wirbeln erzeugt sein, denn wir fanden die magnetischen Feldlinien in sich zurückkehrend, die magnetische Feldstärke quellenfrei. Das gefundene magnetische Feld entspricht dem Feld eines „Wirbelfadens“.)

Über die Wirbelhaftigkeit magnetischer Felder gibt ein Differentialgesetz deutlicher Auskunft, das aus dem Integralgesetz Gl. (3) folgt, wenn man die Durchflutung als Fluß der Stromdichte ansieht [25. Gl. (2)], der durch die Fläche geht, längs deren Rand die magnetische Spannung genommen wird,

$$\Theta = \sum J = \int \mathfrak{G} d\mathfrak{f}, \quad (4a)$$

und für diese selbst den Satz von Stokes anwendet:

$$\Theta = \int \mathfrak{G} d\mathfrak{f} = \oint \mathfrak{H} d\mathbf{r} = \int \text{rot } \mathfrak{H} \cdot d\mathfrak{f},$$

es handelt sich hier für beide Flächenintegrale um die gleiche Fläche  $\mathfrak{f}$ , also ist allgemein

$$\text{rot } \mathfrak{H} = \mathfrak{G}, \quad (7)$$

in Worten etwa: *Nur elektrische Ströme sind Wirbel des magnetischen Feldes, sonst ist das magnetische Feld wirbelfrei; die elektrische Stromdichte gleicht der Wirbelstärke der magnetischen Feldstärke.*

Dies ist ein Grundgesetz für stationäre Felder, für diese gilt es ausnahmslos, z. B. auch im Innern durchströmter elektrischer Leiter. Als Besonderheiten sind hervorzuheben:

1. Dieses Grundgesetz ist unabhängig von allen Stoffwerten. — 2. Aus Gl. (7) kann man Größe und Richtung der Stromdichte, wenn die magnetische Feldstärke in jedem Punkt gegeben ist, unter allen Umständen bestimmen. Das Gesetz beschreibt nicht das magnetische Feld selbst, sondern seine Wirbel, d. h. eine bestimmte Art seiner örtlichen Änderung. Entsprechendes gilt für das Durchflutungsgesetz Gl. (3)

(aus der Durchflutung folgt die magnetische Umlaufspannung, nicht die magnetische Feldstärke selbst)<sup>1</sup>. — 3. Gl. (7) enthält keine Vorschrift über Ursache und Wirkung, sondern läßt beide Möglichkeiten zu. — 4. Das Grundgesetz Gl. (7) und Gl. (3) haben nur dann einen Sinn, wenn die Wirbelstärke quellenlos ist, denn es ist mathematisch notwendig für jedes Vektorfeld  $\text{div rot } \mathfrak{H} = 0$ , es muß also sein

$$\text{div } \mathfrak{H} = 0;$$

dies trifft zu, wenn wir stationäre elektrische Strömung voraussetzen, wie wir von vornherein getan haben, denn diese ist quellenfrei [25. Gl. (6)], die Röhren des stationären elektrischen Strömungsfeldes sind in sich geschlossen, daher sind magnetisches Feld und elektrisches Strömungsfeld miteinander verkettet. — Unter dieser unerläßlichen Voraussetzung ist es also auch für das Durchflutungsgesetz ganz gleichgültig, welche Form die Fläche hat, die in die Randkurve eingespannt ist. Für nichtstationäre Vorgänge kann somit Gl. (7) keine allgemeine Geltung haben, hierüber später (29.). — 5. An Leiteroberflächen hat die stationäre elektrische Strömung keine Normalkomponente [25. Gl. (7)], daher ist an solchen die magnetische Feldstärke gemäß Gl. (7) tangential gerichtet.

Beispiele: 1. Im Innern des vom elektrischen Strome durchflossenen Runddrahtes besteht die magnetische Feldstärke, ebenso wie im Außenfeldraum, nur aus einer zirkularen Komponente, hat daher auf dem Umfang eines konzentrischen Kreises vom beliebigen Radius  $a$  einen konstanten Betrag. Daher ist Gl. (3) anwendbar, sie ergibt

$$H_i(a) \cdot 2\pi a = \pi a^2 G; \quad H_i(a) = \frac{a}{2} G, \tag{8}$$

und aus Gl. (7) folgt  $|\text{rot } \mathfrak{H}| = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H) = G$  im Drahtinnern,  $= 0$  im Außenfeldraum mit Gl. (2). Abb. 5 zeigt die gesamte Feldverteilung  $H(r)$ .

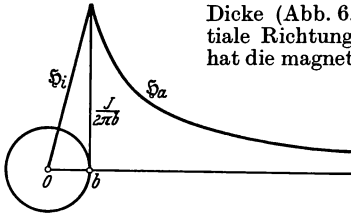


Abb. 28.5. Magnetisches Feld innerhalb und außerhalb des stromdurchflossenen Runddrahtes.

2. Ein ebenes Blech mit gegenüber Länge und Breite kleiner Dicke (Abb. 6.) An der Oberfläche hat das magnetische Feld tangentielle Richtung. Fließt also der Strom nur in der  $+z$ -Richtung, so hat die magnetische Feldstärke ausschließlich die  $y$ -Richtung, ihr Betrag

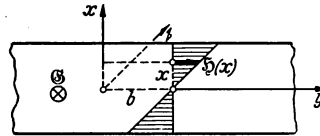


Abb. 28.6. Magnetisches Feld im stromdurchflossenen, ebenen Blech.

aber ist von  $x$  abhängig. Ein beliebig gewählter Querschnitt der Breite  $b$  und der Höhe  $x$  führt den Strom  $x b G_z$ , daher ist mit Gl. (3) (die Wegstücke in der  $x$ -Richtung liefern keine Beiträge):

$$H_y(x) \cdot b = x b G_z, \tag{9}$$

die Feldstärke steigt vom Werte Null linear mit  $x$  an, verläuft also antisymmetrisch zur Mittelebene. Aus Gl. (7) ergibt sich  $|\text{rot } \mathfrak{H}| = \frac{\partial H_y}{\partial x} = G_z$ .

„Flächenwirbel.“ Wird der Querschnitt des durchströmten Drahtes in eine flache Ellipse verwandelt, so sind die Feldlinien in näherer Umgebung der Oberfläche ellipsenähnlich gestreckte Kurven, weil das Feld an der Oberfläche tangential ist; in weiterer Entfernung werden sie wieder kreisförmig. Im Grenzfall möge der Querschnitt in eine unendlich ausgedehnte leitende Ebene so übergehen, daß die Stromdichte sich dem Grenzfall einer Flächenstromdichte  $g$  von endlicher Größe nähert<sup>2,3</sup>:

$$g = \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta \cdot \mathfrak{H}. \tag{10a}$$

<sup>1</sup> Für ein gegebenes Vektorfeld  $\mathfrak{H}$  sind seine Wirbel durch  $\text{rot } \mathfrak{H}$  vollständig bestimmt, dagegen ist durch die gegebenen Wirbel das Feld nicht eindeutig bestimmt, denn zwei Vektorfelder  $\mathfrak{H}'$  und  $\mathfrak{H}''$  mit denselben Wirbeln  $\text{rot } \mathfrak{H}' = \text{rot } \mathfrak{H}''$  können sich um ein beliebiges wirbelfreies Feld unterscheiden:  $\mathfrak{H}' - \mathfrak{H}'' = -\text{grad } \varphi$ .

<sup>2</sup> Benennung  $g = \frac{1}{\text{cm}}$ , Einheit  $1 \frac{\text{Amp}}{\text{cm}}$  im P. M. S.

<sup>3</sup> Über die Joulesche Wärme, also über den spezifischen elektrischen Widerstand der leitenden Ebene, muß eine entsprechende Festsetzung getroffen werden.

Dabei ist  $\delta$  die Höhe der leitenden Schicht. Das magnetische Feld beiderseits der leitenden Ebene ist zu ihr parallel und zum Strome senkrecht gerichtet und homogen (Abb. 7). Beim Durchtritt durch die Ebene springt die magnetische Feldstärke, sie hat einen Flächenwirbel

$$\text{Rot } \mathfrak{H} \equiv [n_{1/2}(\mathfrak{H}_2 - \mathfrak{H}_1)] = g. \tag{10}$$

Den Sinn der Gleichung verdeutlicht Abb. 8 für den allgemeinen Fall. Hier ist der Wirbel anschaulich als die Queränderung des Feldes (Wirbel = „Quirl“<sup>1</sup>). Ein Flächenstrom oder „Strombelag“ kann häufig mit Vorteil in Rechnung oder Anschauung die Stelle einer gleichmäßigen Bewicklung mit Leitungsdrähten einnehmen. Ist ein Strombelag vorhanden, so gehen die Feldlinien aus einem

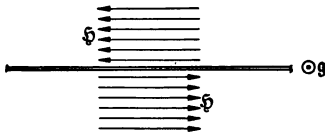


Abb. 28. 7. Magnetisches Feld eines ebenen Flächenstromes (Strombelages).

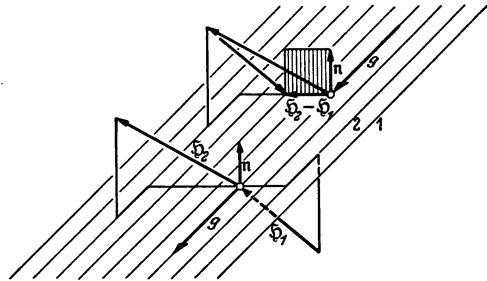


Abb. 28. 8. Sprungwirbel eines magnetischen Feldes gemäß  $g = [n_{1/2}(\mathfrak{H}_2 - \mathfrak{H}_1)]$ .

Stoff ( $\mu_1$ ) in einen anderen ( $\mu_2$ ) nicht mehr nach dem einfachen Winkelgesetz 24. Gl. (4) über, vielmehr gilt hier Gl. (10) neben  $\text{Div } \mathfrak{B} = 0$  [23. Gl. (9c)], also

$$\left. \begin{aligned} B_{2n} &= B_{1n} = B_n, \\ H_{2t} &= H_{1t} + g, \\ \mathfrak{B}_1 &= \bar{\mu}_1 \mathfrak{H}_1, \quad \mathfrak{B}_2 = \bar{\mu}_2 \mathfrak{H}_2; \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

daraus ergibt sich z. B.

$$B_{2t} = \frac{\mu_2}{\mu_1} B_{1t} + \mu_2 \mu_0 g; \quad H_{2n} = \frac{\mu_1}{\mu_2} H_{1n}.$$

Zur Konstruktion der Brechung der Feldlinien vgl. Abb. 9. Bei großem Einfallswinkel zum Lot, und bei kleinen Induktionen, kann der Einfluß des Strombelags bedeutend werden.

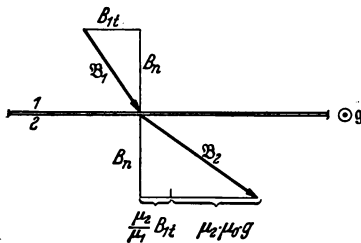


Abb. 28. 9. Übergang des magnetischen Feldes an einer Grenzfläche mit Strombelag.

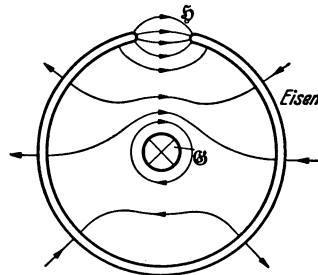


Abb. 28. 10. Merkschema für das Durchflutungsgesetz und den magnetischen Kreis.

Das Grundgesetz über die Wirbelhaftigkeit des magnetischen Feldes ergab sich als unabhängig von allen Stoffwerten. „Das Randintegral  $\oint \mathfrak{H} dr = \sum J$  hängt ganz allein von der Stromstärke und sonst von gar nichts ab. Die Art des Leiters, durch den der Strom fließt, spielt dabei gar keine Rolle, und es ist z. B. ganz gleichgültig, ob er metallisch oder elektrolytisch oder ein schlechter Leiter ist... Der Wert des Randintegrals hängt auch nicht von dem Stoff ab, in dem die geschlossene Kurve liegt; er bleibt derselbe, ob die Kurve ganz in Luft verläuft oder einen Magneten oder ein Stück weiches Eisen oder sonst eine para- oder diamagnetische Substanz durchsetzt“ (Worte Maxwells). Vgl. das Merkschema Abb. 10.

<sup>1</sup> Vgl. 3', Abschn. „Quellenfreie Felder“.

Dieser Satz bildet zusammen mit der Quellenlosigkeit der magnetischen Induktion die Grundlage für die Abschätzung magnetischer Felder in allen den Fällen, in denen das magnetische Feld zum Teil in Luft, zum Teil in Eisen verläuft, und ist damit von höchster Bedeutung für die Technik (Berechnung der magnetischen Verhältnisse in Elektromagneten, in elektrischen Maschinen). Der „geschlitzte magnetische Kreis“, der aus Luft- und Eisenstrecken besteht und auch Dauermagnete mit eingepägten magnetomotorischen Kräften  $V^e$  enthalten kann [24. Gl. (12)], wird nach Hopkinson in folgender Weise abgeschätzt: Sind die Luftspalte nicht zu lang und die Querschnitte einander vergleichbar, so kann man die Leitlinie des magnetischen Kreises, die im wesentlichen parallel zu den Feldlinien verläuft, in Einzelstrecken  $l$  einteilen, längs denen  $H$  im Mittel konstant angesehen werden kann; man ersetzt dann das Integral durch die Summe

$$\Theta = \oint \mathfrak{H} \, dr = \sum_{\circ} \bar{H}_v \cdot l_v.$$

Für jede Strecke vom Querschnitt  $f_v$  ist dann auch die magnetische Induktion im Mittel örtlich konstant:  $\bar{B}_v = \frac{\Phi_v}{f_v}$ . Die zu jedem  $\bar{B}_v$  gehörende Feldstärke  $\bar{H}_v$  läßt sich bestimmen [Luft:  $\bar{\mu} = 1 \cdot \mu_0$ , Eisen: Magnetisierungskurve  $\bar{\mu} = F(B)$ ], daher hat man

$$\sum_{\circ} \bar{H}_v l_v = \sum_{\circ} \left( \frac{l_v}{\bar{\mu}_v f_v} \right) \Phi_v = \Theta, \quad (12)$$

und bei Anwesenheit eingepägter magnetomotorischer Kräfte

$$\sum_{\circ} (P_v \Phi_v - V_v^e) = \Theta \quad \text{Gesetz vom magnetischen Kreis.} \quad (13)$$

Hierbei bezeichnet man

$$P_v \equiv \frac{l_v}{\bar{\mu}_v f_v} \quad (14)$$

als „magnetischen Widerstand“ des  $v$ -ten Abschnittes<sup>1</sup>; für die Luftstrecken gilt also  $P_{v \text{ Luft}} = \frac{l_v}{\mu_0 f_v}$ , für die Eisenstrecken  $P_{v \text{ Eisen}} = \frac{l_v}{f_v \cdot F(B)}$ . Gl. (13) stellt eine magnetische Analogie dar zur zweiten Kirchhoffschen Regel [27. Gl. (12)]. Wegen der Quellenfreiheit der magnetischen Induktion sind die Flüsse  $\Phi_v$  in den einzelnen Abschnitten einander ähnlich, sie unterscheiden sich voneinander durch die abschätzbare „Streuung der Feldlinien“. Ist z. B. ein einziger Luftschlitz vorhanden, in dem es auf den Wert des magnetischen Flusses  $\Phi_h$  ankommt, so bestehen zwischen den  $\Phi_v$  der Eisenstrecken und  $\Phi_h$  Beziehungen von der Form  $\Phi_v = \frac{1}{\sigma_v} \Phi_h$ , wobei die „Streifaktoren“  $\sigma_v$  echte Brüche sind. Ohne Berücksichtigung von Dauermagneten hat man dann

$$\Theta = \Phi_h \left\{ P_{\text{Luft}} + \sum_v \frac{P_{v \text{ Eisen}}}{\sigma_v} \right\}; \quad P_{v \text{ Eisen}} = \frac{l_v}{f_v \cdot F\left(\frac{\Phi_h}{\sigma_v f_v}\right)}. \quad (13a)$$

Dieser Grad der Annäherung ist aber oft nicht erforderlich. Bei ähnlichen Querschnitten überwiegt in Gl. (12), (13) oft der Beitrag, den die Luftstrecken zur Summe liefern, und verdeckt dadurch die Ungenauigkeit in der Abschätzung der vom Eisen herrührenden Anteile. Genügt die Annäherung, den Fluß über den ganzen magnetischen Kreis als im Mittel hinreichend konstant anzusehen:  $\bar{\Phi}$ , so wird (ohne Berücksichtigung von Dauermagneten) einfach

$$\Theta = \bar{\Phi} \sum_{\circ} \frac{l_v}{\bar{\mu}_v f_v}. \quad (15)$$

<sup>1</sup> In Parallele zu 27. Gl. (4a). Die Bezeichnung darf nicht zu falschen Analogievorstellungen zum elektrischen Widerstand verführen. Das elektrische Strömungsfeld wird von andauernder Wärmeentwicklung im elektrischen Widerstand begleitet. Im magnetischen Feld gibt es keinen Energieumsatz, es gibt keine „magnetischen Leiter“.

Auf diese Weise erhält man z. B. die zur Erreichung eines geforderten Flusses nötige Durchflutung.

Ist das Feld im Luftspalt zwischen zwei Eisenflächen längs einer ausgezeichneten Richtung unveränderlich („ebenes Feld“), so können die Feldröhren in einer Querschnittsebene senkrecht zu dieser Richtung nach der in der Elektrostatik in Abschnitt 22. gezeigten Weise zeichnerisch dargestellt werden. Für einen Feldröhrenabschnitt, der senkrecht zum Querschnitt die Tiefe  $L$ , die mittlere Länge  $a$  und die mittlere Breite  $b$  hat, folgt aus Gl. (14)

$$P_1 = \frac{a}{\mu_0 L b}.$$

Zeichnet man die Feldröhren so, daß ihre mittlere Breite gleich ihrer mittleren Länge ist:  $a = b$ , so ist für jede dieser besonderen Feldröhren

$$\frac{1}{P_1} = \mu_0 L, \quad (16)$$

und es gilt für das in  $m$  solcher Röhren eingeteilte gesamte Feld

$$\Phi = \mu_0 m L \cdot V, \quad (17)$$

wobei  $V$  die magnetische Spannung zwischen den Enden der Röhren ist<sup>1</sup>.

Skalares Potential der magnetischen Feldstärke. In solchen Gebieten eines magnetischen Feldes, in denen eine endliche, geschlossene Randkurve zu einem unendlich kleinen Umlauf zusammengezogen werden kann, ohne daß dabei ein elektrischer Strom geschnitten wird, ist

$$\oint \mathfrak{H} \, dr = 0, \quad \text{rot } \mathfrak{H} = 0,$$

das wirbelfreie Feld  $\mathfrak{H}$  ist daher mit Hilfe eines skalaren Potentials erchenbar durch die Operation  $\mathfrak{H} = -\text{grad } \psi$ . Dabei untersteht das skalare Potential  $\psi$  wegen  $\text{div } \mathfrak{H} = 0$  der Differentialgleichung  $\Delta \psi = 0$ , wenn die Permeabilität  $\mu$  des betrachteten Raumes von Ort und Feldstärke nicht abhängt (vgl. 17.), was allerdings die Anwendbarkeit des Potentials für viele Fälle stark einschränkt. Hier ist wegen der in Gl. (3) ausgesprochenen Eigenschaft der magnetischen Spannung das skalare Potential  $\psi$  nicht zugleich eindeutig und stetig, sondern entweder stetig und vieldeutig, oder eindeutig und unstetig. Beide Möglichkeiten sind benutzt worden. Im ersten Fall ist  $\psi$  um einen additiven Faktor vieldeutig, der Anzahl  $n$  und Richtungssinn der Umläufe um den Strom  $J$  zum Ausdruck bringt:  $\psi = \psi' \pm nJ$ , wobei  $\psi'$ : Ortsfunktion. Im anderen Falle müssen wir auf jeder, den Strom umschlingenden Kurve einen beliebigen Punkt bestimmen, bei dessen Überschreitung  $\psi$  um einen durch Gl. (3) gegebenen Betrag springt. Die Gesamtheit aller dieser gewählten Punkte liegt auf einer von dem Strom begrenzten Fläche, welche durchstoßen werden muß, wenn eine geschlossene Kurve um den Strom herum beschrieben werden soll. Natürlich kommt dieser willkürlich festgesetzten Unstetigkeitsfläche keinerlei physikalische Bedeutung zu, sie ermöglicht lediglich die Berechnung der magnetischen Spannung zwischen zwei Feldpunkten als Differenz der Werte einer eindeutigen Potentialfunktion. Das so bestimmte Potential  $\psi$  ist also eindeutig und endlich, genügt der Laplaceschen Differentialgleichung  $\Delta \psi = 0$  und verschwindet im Unendlichen, wenn der Strom ganz im Endlichen liegt; an der Sperrfläche erleidet  $\psi$  einen Sprung vom Betrage  $\pm J$ . — Auf die Gültigkeitsgrenzen sei besonders hingewiesen: im Innern durchströmter Leiter ist die Voraussetzung  $\text{rot } \mathfrak{H} = 0$  nicht mehr erfüllt, dort gibt es daher nichts Derartiges, wie ein skalares magnetisches Potential.

Gleichwertige (äquivalente) Systeme. Wir vergleichen das magnetische Feld  $\mathfrak{H}$ , das von einer Anordnung von Dauermagneten [ $\mathfrak{H}^e$ ; 24. Gl. (9), (10)] herührt, mit dem, das von einer Anordnung elektrischer Strömungen ( $\mathfrak{H}$ ) hervorgebracht

<sup>1</sup>  $\Phi$  bedeutet somit hier den Fluß der magnetischen Induktion; über den Zusammenhang mit dem „Spulenfluß“ vgl. später [30. Gl. (13)].



wird. Die Grundgesetze für das stationäre magnetische Feld sind [23. Gl. (9); 24. Gl. (10), 28. Gl. (7)]:

$$\text{a) } \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0, \quad \text{b) } \mathfrak{B} = \bar{\mu} (\mathfrak{H} + \mathfrak{H}^e), \quad \text{c) } \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \mathfrak{G}. \quad (18)$$

aus b) und c) folgt

$$\operatorname{rot} \frac{\mathfrak{B}}{\bar{\mu}} = \mathfrak{G} + \operatorname{rot} \mathfrak{H}^e. \quad (18d)$$

Man hat also für das System der elektrischen Strömungen:

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0; \quad \operatorname{rot} \frac{\mathfrak{B}}{\bar{\mu}} = \mathfrak{G}, \quad (19a)$$

und für das System der Dauermagnete

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0; \quad \operatorname{rot} \frac{\mathfrak{B}}{\bar{\mu}} = \operatorname{rot} \mathfrak{H}^e. \quad (19b)$$

Man erhält demnach in beiden Fällen ersichtlich das gleiche magnetische Feld  $\mathfrak{B}$ , wenn nur überall erfüllt ist

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H}^e = \mathfrak{G}, \quad \text{also auch} \quad \oint \mathfrak{H}^e d\mathfrak{r} = \int \mathfrak{G} d\mathfrak{f}, \quad \operatorname{Rot} \mathfrak{H}^e = g. \quad (20)$$

Anordnungen, die diese Bedingungen erfüllen, heißen gleichwertig (äquivalent). Beispiel: Ein gerader kreiszylindrischer Körper habe in seinem Innern ein rein axiales homogenes Magnetisierungsfeld  $\mathfrak{M} = \bar{\mu} \mathfrak{H}^e$  [24. Gl. (9),  $\mu = \text{const}$ ], im Außenfeldraum sei  $\mathfrak{H}^e = 0$  (idealisierter Stabmagnet). Dann ist erstens die Flächendichte des Magnetismus nach 24. Gl. (11)

$$\sigma_m = -\operatorname{Div} \mathfrak{M} = n_{1/2} \mathfrak{M} = \pm M = \pm \bar{\mu} H^e \quad (21)$$

auf den Deckflächen des Zylinders,  $\sigma_m = 0$  auf seiner Mantelfläche. Zweitens ist die Flächendichte des äquivalenten Stromes nach Gl. (20)

$$g = \operatorname{Rot} \mathfrak{H}^e = [n_{1/2} \mathfrak{H}^e] \quad (22)$$

auf der Mantelfläche des Zylinders ein  $\mathfrak{H}^e$  rechtswendig zugeordneter Vektor vom Betrage  $g = H^e$ , dagegen ist  $g = 0$  auf den Deckflächen. Der den magnetischen Ladungen auf den Deckflächen gleichwertige Strom  $g$  umkreist  $\mathfrak{H}^e$  rechtswendig auf der Mantelfläche, seine Stärke für die Längeneinheit in axialer Richtung ist

$$g = \frac{J}{l} = H^e, \quad (23)$$

( $l$  Länge in axialer Richtung), es ist somit

$$\sigma_m = \pm M = \bar{\mu} \frac{J}{l}. \quad (24)$$

Der Zylinder habe die kleine Grundfläche  $f$  und die sehr kleine Höhe  $\delta$ ; dann gilt: Ein Strom  $J$ , der die Fläche  $f$  umkreist, und ein scheibenförmiger Magnet der Höhe  $\delta$  sind einander äquivalent, wenn dessen magnetisches Moment rechtswendig normal zu  $f$  gerichtet ist und den Betrag hat

$$\tau M = \delta f \cdot \bar{\mu} H^e = \tau \bar{\mu} \frac{J}{l} = \bar{\mu} J f. \quad (25)$$

$\bar{\mu} J$  ist also das Moment der Flächeneinheit der Magnetscheibe. Daraus folgt: Ein in der geschlossenen Kurve  $s$  umlaufender Strom ist äquivalent einer in axialer Richtung magnetisierten Scheibe der sehr kleinen Höhe  $\delta$  und der Permeabilität  $\bar{\mu}$ , die die Kurve  $s$  zum Rande hat, im übrigen aber beliebig verläuft. Der äquivalente Strom bestimmt das magnetische Moment der Flächeneinheit oder die Stärke der „magnetischen Doppelschicht“ gemäß

$$|\sigma_m| \delta = \bar{\mu} J. \quad (26)$$

Diese Tatsache gewinnt grundsätzliche Bedeutung, wenn man bedenkt, daß man Dauermagnete aus einer sehr großen Anzahl sehr kleiner „Elementarmagnete“ aufgebaut denken kann, deren jeder sich demnach ersetzen läßt durch einen seinen Mantel umkreisenden „Elementarstrom“; nach Ampère schreibt man diese Ströme den einzelnen Molekülen der ferromagnetischen Stoffe zu. Die Molekularströme

aber müssen ohne Energieverbrauch andauernd fließen. Die Elektronentheorie löst diese Schwierigkeit dadurch, daß sie die Molekularmagnete als durch schnell kreisende elektrische Elementarladungen gebildet erklärt. Die aus dieser Anschauung zu ziehende Folgerung, daß vermöge der trägen Masse der rotierenden elektrischen Ladung der Molekularmagnet die mechanischen Erscheinungen eines Kreisels zeigen müsse, hat man durch Versuche bestätigt; man hat z. B. aus ihnen festgestellt, daß die umlaufende Ladung negatives Vorzeichen haben muß. Die Wirkung eines ferromagnetischen Stoffes erklärt sich somit dadurch, daß die an sich völlig ungeordneten Molekularmagnete nur unter Einwirkung eines äußeren magnetischen Feldes merklich ausgerichtet verharren können; permanente Magnetisierung bedeutet das Zurückbleiben eines Restes dieser Ordnung. Weitere Einzelheiten hierüber fallen aus dem Rahmen unserer Untersuchungen; es sei erwähnt, daß auch die dia- und paramagnetischen Eigenschaften der Stoffe eine Beschreibung auf dem Boden der Elektronentheorie des Magnetismus finden.

Auf diese Weise ist der Begriff des Magnetismus aus dem der Elektrizität abgeleitet; zu dem an den Anfang gestellten Satz: es gibt keine elektrische Strömung ohne magnetisches Feld, tritt der andere hinzu: es gibt kein magnetisches Feld ohne elektrische Ladung. Schließlich: elektrische Strömung ist Bewegung elektrischer Ladung, daher: magnetisches Feld ist eine Erscheinungsform bewegter elektrischer Ladung.

### 29. Die elektrische Verschiebungsströmung. Erste (Maxwellsche) Hauptgleichung bei ruhenden Körpern.

Den Geltungsbereich des Gesetzes von den Wirbeln des magnetischen Feldes [28. Gl. (3), (7)] mußten wir auf zeitlich unveränderliche Zustände beschränken, denn nur in solchen ist die geforderte Quellenlosigkeit des elektrischen Strömungsfeldes gewährleistet. Beharrliche elektrische Strömungen, deren Feldröhren somit im Endlichen ohne Anfang und Ende sind, werden in Leitern insbesondere durch eingeprägte Kräfte aufrecht erhalten (26.). Wir fragen nach der Umgestaltung dieses Gesetzes für zeitlich beliebig veränderliche Vorgänge bei ruhenden Körpern.

In dem Grundversuch der Kondensatorentladung (25.) ist der elektrische Leitungsstrom zeitlich veränderlich; aus den Definitionsgleichungen

$$-\frac{dQ}{dt} = J = \int \mathfrak{G} d\mathfrak{f} \quad 25. (1), (2)$$

hatte sich, indem eine geschlossene Hülle um einen Ladungsträger gelegt wurde, die Kontinuitätsgleichung ergeben

$$\oint \mathfrak{G} d\mathfrak{f} = -\frac{dQ}{dt}, \quad 25. (3)$$

wobei nur von Leitungsströmung durchsetzte Flächenelemente zu dem Hüllintegral beitragen. Betrachten wir das erlöschende elektrische Feld im dielektrischen Raume des Kondensators, so ergibt sich mit der Grundgleichung des elektrischen Hüllenflusses [12. Gl. (5)]

$$-\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt} \oint \mathfrak{D} d\mathfrak{f},$$

der Vergleich lehrt

$$\oint \mathfrak{G} d\mathfrak{f} = -\frac{d}{dt} \oint \mathfrak{D} d\mathfrak{f}. \quad (1)$$

Daraus folgt, da es sich beiderseits um die gleiche, unbewegte Hüllfläche handelt,

$$\oint \left\{ \mathfrak{G} + \frac{d\mathfrak{D}}{dt} \right\} d\mathfrak{f} = 0 \quad (2)$$

für jede beliebige, geschlossene, ruhende Hülle, und mit dem Satz von Gauß für jedes (ruhende) Raumelement

$$\text{a) } \text{div} \left\{ \mathfrak{G} + \frac{d\mathfrak{D}}{dt} \right\} = 0; \quad \text{b) } \text{Div} \left\{ \mathfrak{G} + \frac{d\mathfrak{D}}{dt} \right\} = 0. \quad (3)$$

Die „wahre elektrische Strömung“

$$\mathfrak{C} \equiv \mathfrak{G} + \frac{d\mathfrak{D}}{dt} \quad (4)$$

ist also ein unter allen Umständen *quellenfreies Vektorfeld*. Der erste Posten ist die Dichte des elektrischen Stromes in Leitern, der zweite ist die Dichte der Änderung des elektrischen Flusses  $\Omega$  in Nichtleitern; man nennt „Verschiebungsstrom“ die Größe

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{d}{dt} \int \mathfrak{D} d\mathfrak{f}. \quad (5)$$

Dann stellt Gl. (2) bis (4) zunächst nur die Erfahrungstatsache dar, daß Leitungsstrom und Verschiebungsstrom einander quellenfrei fortsetzen<sup>1</sup>.

Den Vorgang des „Verschiebungsstromes“ macht man sich nach Maxwell durch Betrachten der kleinsten Teile eines dielektrischen Stoffes klar: In 12. war gezeigt worden: unter Einwirkung eines statischen elektrischen Feldes befindet sich der Nichtleiter in einem Zustand, dessen Kennzeichnung durch die Verschiebungsdichte  $\mathfrak{D}$  der Vorstellung entspricht, daß die kleinsten Teile des Nichtleiters elektrisch polarisiert sind. Eine Änderung  $\frac{d\mathfrak{D}}{dt}$  ist demnach ein Vorgang, der als eine Änderung des Polarisationszustandes der kleinsten Teilchen einer Bewegung elektrischer Ladungen im Innern des Nichtleiters, wenn auch nur entlang sehr kurzen Wegen, gleichkommen muß, gleichgültig, wie wir uns diese Bewegung im einzelnen vorstellen können oder müssen. „Die Erscheinung, die wir elektrische Verschiebung genannt haben, ist, was immer Elektrizität in Wirklichkeit sein mag, und was wir immer unter Elektrizitätsbewegung verstehen mögen, eine Elektrizitätsbewegung in dem Sinne, wie die Fortführung einer bestimmten Elektrizitätsmenge durch einen Draht eine Elektrizitätsbewegung ist, mit dem einzigen Unterschiede, daß im Dielektrikum eine Kraft besteht, die . . . die Elektrizität zurücktreibt, sobald die Feldstärke aufhört, wohingegen im leitenden Draht . . . ein richtiger Strom zustande kommt.“ — „Die Änderungen der elektrischen Verschiebung bilden offenbar elektrische Ströme.“ — Schließlich als Auslegung unserer Gl. (1) bis (4): „Jede Ladung oder Entladung (eines Kondensators durch einen leitenden Draht) kann daher als eine Elektrizitätsbewegung in einer geschlossenen Bahn angesehen werden, sodaß durch jeden Querschnitt der Bahn in derselben Zeit dieselbe Elektrizitätsmenge hindurchgeht“ (Worte Maxwells). Die Änderung der elektrischen Verschiebung ist also eine Erscheinungsform der Änderung des elektrischen Feldes, diese ist das Wesentliche des Vorganges, nicht etwa das gleichzeitige Vorhandensein eines stofflichen Nichtleiters, durch einen solchen wird der Vorgang lediglich mitbestimmt.

Über die Leitungsströmung ist folgende Auffassung möglich: Das beharrliche elektrische Feld, das im Innern eines durchströmten Leiters bei dauernder Energiezufuhr aus äußeren Energiequellen vorhanden ist, erlischt, wenn die Energiezufuhr aufhört. Diese Erfahrungstatsache läßt sich so auslegen, daß das Wesen der elektrischen Strömung in dem fortwährenden Auslösen des elektrischen Feldes durch die im Leiterinnern wandernden elektrischen Ladungen (oder Ionen) besteht. Stationäre Strömung kommt dadurch zustande, daß das fortwährend erlöschende Feld fortwährend durch Energiezufuhr ergänzt wird. Auch Leitungsströmung ist mit Feldänderung verknüpft, die nur deswegen nicht zum Ausdruck kommt, weil sie von der felderstörenden Wirkung der wandernden elektrischen Ladungen (oder Ionen) verdeckt wird.

Läßt sich somit ein Zusammenhang im Wesen des Leitungs- und des Verschiebungsstromes erkennen, und ergänzen sie einander zu einem quellenfreien Felde  $\mathfrak{C}$

<sup>1</sup> Zur Verdeutlichung sei an folgende Versuche erinnert: 1. Ein Kondensator wird durch Anschluß an eine Spannungsquelle geladen; während der Ladestrom zufließt, schwillt das elektrische Feld an. 2. Die Platten eines Luftkondensators seien durch einen Draht miteinander verbunden. Wird im Zwischenraum der einen Belegung ein elektrisch geladener Körper genähert, ohne sie zu berühren, so fließt während der Bewegung ein Strom durch den Draht.

[Gl. (3), (4)], so ist eine allgemeine Möglichkeit für das gesuchte Gesetz von der Wirbelhaftigkeit des magnetischen Feldes

$$\oint \mathfrak{H} \, dx = \int \mathfrak{G} \, d\mathfrak{f} + \frac{d}{dt} \int \mathfrak{D} \, d\mathfrak{f} = \Theta + \frac{d\Omega}{dt}; \quad (6)$$

daraus folgt mit dem Satz von Stokes, vorausgesetzt, daß keine Bewegungen der Körper erfolgen:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{rot} \mathfrak{H} &= \mathfrak{G} + \frac{d\mathfrak{D}}{dt}. \\ \text{Erste (Maxwellsche) Hauptgleichung für ruhende Körper.} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Maxwell stellte die Behauptung auf, daß diese Gleichung tatsächlich allgemein für ruhende Körper gilt; in ihr unterscheidet sich seine Feldtheorie von den Fernwirkungstheorien: „Eine der hauptsächlichsten Besonderheiten besteht in der Verfechtung des Satzes, daß die „wahre“ elektrische Strömung  $\mathfrak{C}$ , von der die elektromagnetischen Erscheinungen abhängen, nicht mit der Leitungsströmung  $\mathfrak{G}$  identisch ist, sondern daß die zeitlichen Änderungen der elektrischen Verschiebung  $\mathfrak{D}$  bei Bestimmung der gesamten elektrischen Bewegung mit in Betracht gezogen werden müssen.“ Diese Hauptgleichung besagt also: *Magnetische Wirbel befinden sich nicht nur in der elektrischen Strömung im Innern von Leitern, sondern auch in zeitlich veränderlichen elektrischen Feldern. Beide sind von magnetischen Wirbeln ganz und gar durchsetzt. Je stärker ein elektrisches Feld ist und je rascher es schwankt, um so größer ist die Wirbelstärke des magnetischen Feldes.*

Der Gl. (7) haftet keine Beschränkung auf bestimmte zeitliche Vorgänge mehr an; auch für sie gilt, daß sie keine Vorschrift über Ursache und Wirkung enthält, sondern beide Deutungen erlaubt, ferner, daß in ihr nicht das magnetische Feld selbst, sondern dessen Wirbel, also eine bestimmte Art örtlicher Änderung, durch die wahre Stromdichte gegeben ist. In den meisten Fällen ist Gl. (7) alternativ zu verstehen, d. h., es überwiegt bei weitem eines der beiden Summenglieder der rechten Seite. Zu der bekannten Möglichkeit quellenloser, daher beharrlicher Leitungsströmung

$$\frac{d\mathfrak{D}}{dt} = 0, \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{G}, \quad \mathbf{rot} \mathfrak{H} = \mathfrak{G}, \quad \mathbf{div} \mathfrak{G} = 0 \quad (8)$$

tritt der allgemeine Fall nicht stationärer Strömung, in der die Verschiebungsströmung die Fortsetzung der Leitungsströmung bedeutet, wobei die Leitungsströmung im allgemeinen an der Grenzfläche zwischen Leiter und Nichtleiter nicht parallel zur Leiteroberfläche verläuft, denn es ist ja ihre Flächendivergenz nach Gl. (3b) und 25. Gl. (3a) gleich der Änderung der Oberflächenladung:

$$\mathbf{Div} \mathfrak{G} = G_n = - \frac{d\sigma}{dt}. \quad (9)$$

Endlich fordert Gl. (7) die Möglichkeit geschlossener Feldröhren des Verschiebungsstromes in reinen Nichtleitern, denn für diese wird sie mit  $\mathfrak{G} = 0$ ,  $\mathfrak{C} = \frac{d\mathfrak{D}}{dt}$ :

$$\mathbf{rot} \mathfrak{H} = \frac{d\mathfrak{D}}{dt}, \quad (10)$$

die magnetische Wirbelstärke gleicht der Zunahme der Verschiebungsdichte in der Zeiteinheit, und daher muß sein

$$\mathbf{div} \frac{d\mathfrak{D}}{dt} = 0, \quad (11)$$

die Verschiebungsstromdichte muß in diesem Fall ein quellenfreies Feld sein. Veränderliche elektrische Feldröhren im Nichtleiter, die im Endlichen ohne Anfang und Ende, und daher ohne Zusammenhang mit elektrischen Strömen oder Ladungen sind, weil das Feld nicht von Quellen, sondern von Wirbeln hervorgebracht ist, ermöglichen erst die Beobachtungstatsache der elektromagnetischen Wellen sowie deren Struktur und Eigenschaften zu erklären. Aus diesem Grunde muß

deren Erforschung als Beweis für die Zulässigkeit der Maxwell'schen Hauptgleichung Gl. (7) angesehen werden<sup>1</sup>. Hierauf kommen wir später ausführlich zurück.

In einem durch  $\varepsilon$  und  $\rho$  gekennzeichneten Halbleiter ist die räumliche Leistungsdichte

$$\mathfrak{C}\mathfrak{C} = \mathfrak{C}\mathfrak{G} + \mathfrak{C}\frac{d\mathfrak{D}}{dt}. \quad (12)$$

Der erste Anteil ist die Stromwärmeleistung, der zweite der Zuwachs an elektrischer Feldenergie in der Raumeinheit. Ferner ist mit der Relaxationszeit  $\beta = \bar{\varepsilon}\rho$  [25. Gl. (16)]  $\mathfrak{G} = \frac{1}{\beta}\mathfrak{D}$  und daher die Divergenz von Gl. (7):

$$0 = \frac{1}{\beta} \operatorname{div} \mathfrak{D} + \frac{d}{dt} \operatorname{div} \mathfrak{D}. \quad (13)$$

Nun ist aber allgemein  $\operatorname{div} \mathfrak{D} = \eta$  die räumliche Ladungsverteilung [12. Gl. (5)]; ist diese  $\eta_0$  für einen gewählten Anfangszeitpunkt  $t = 0$ , so zeigt das Integral von Gl. (13)

$$\frac{\eta}{\eta_0} = e^{-\frac{t}{\beta}}, \quad (14)$$

daß eine allenfalls vorhandene Ladungsverteilung, und daher die von dieser hervorgerufenen elektrischen Feldgrößen, nach einem lediglich durch den Stoff selbst bestimmten Exponentialgesetz erlöschen [vgl. 25. Gl. (15)].

### 30. Die Verknüpfung des elektrischen Feldes mit einem veränderlichen magnetischen Felde. Induktionsgesetz. Zweite Hauptgleichung bei ruhenden Körpern.

Faraday entdeckte: In einer starren, ruhenden, geschlossenen Drahtschleife (linearer Leiter, 27.) aus homogenem Metall, deren Gestalt genügend genau durch die ihre Fläche  $f$  umrandende geschlossene Leitkurve  $\mathfrak{s}$  beschrieben wird, fließt trotz Fehlens eingepprägter elektrischer Kräfte dann ein elektrischer Leitungsstrom, wenn der ihre Fläche  $f$  durchsetzende magnetische Induktionsfluß  $\Phi = \int \mathfrak{B} d\mathfrak{f}$  sich ändert; dabei ist es ganz gleichgültig, ob diese Änderung des magnetischen Feldes durch Lageänderungen benachbarter Magnete oder Stromkreise oder durch Änderungen der Stärke benachbarter Ströme hervorgebracht wird. Der Augenblickswert dieses „induzierten Stromes“ wird in jedem Falle der Änderungsgeschwindigkeit des magnetischen Flusses unmittelbar und dem elektrischen Widerstand  $R$  der Schleife umgekehrt proportional gefunden. Da der Proportionalitätsfaktor von keinerlei physikalischen Begleitumständen abhängt oder beeinflußt wird, bedeutet es<sup>2</sup> keine Beschränkung, ihn Eins zu setzen; damit lautet der Versuchsbefund:

$$JR = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int \mathfrak{B} d\mathfrak{f}. \quad (1)^2$$

Hiernach ist also nicht etwa der Strom  $J$ , sondern vielmehr die Spannung  $JR$  entlang der geschlossenen Drahtschleife von der Natur des Leiters völlig unabhängig und ausschließlich durch die Änderung des die Schleife durchsetzenden Induktionsflusses bestimmt. Nach früherer Verabredung kommt durch das negative Vorzeichen eine linkswendige Zuordnung zum Ausdruck: in positiver Richtung fließender Strom und zeitlich abnehmender magnetischer Induktionsfluß gehören rechtswendig zueinander<sup>3</sup>. Aus Gl. (1) folgt z. B. die während der Zeitspanne  $dt$  in Bewegung gesetzte Elektrizitätsmenge

$$dQ = -\frac{d\Phi}{R}. \quad (2)$$

<sup>1</sup> Solange der Verschiebungsstrom lediglich als Fortsetzung des Leitungsstromes auftritt, kann kein irgendwie gearteter Versuch, die magnetische Wirkung des Verschiebungsstromes unmittelbar zu beobachten, als hinreichend beweiskräftig angesehen werden.

<sup>2</sup> Vgl. Anm. 1 zu 28. Gl. (1). — Daher in bezug auf das P. M. S. Benennung für  $\int \mathfrak{B} d\mathfrak{f} = \Phi$ :  $\Phi = \text{UT}$ , für  $\mathfrak{B}$ :  $\text{B} = \frac{\text{UT}}{\text{L}^2}$ ; Einheiten 1 Volt sec und  $1 \frac{\text{Volt sec}}{\text{cm}^2}$ . Für 1 Volt sec hat man die Bezeichnung 1 Weber vorgeschlagen.

<sup>3</sup> Der in positiver Richtung (in Richtung der rechtswendig zur Leitkurve  $\mathfrak{s}$  zugeordneten Flächennormale) die Fläche durchsetzende magnetische Fluß muß abnehmen, damit ein Strom in positiver Richtung von  $\mathfrak{s}$  fließt.

Ist in einem geschlossenen Stromkreis eine eingeprägte Kraft  $U^e$  wirksam, so gilt an der Stelle von Gl. (1) in linearer Überlagerung:

$$JR = U^e - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (3)$$

Nach Gl. (1), (3) wird Größe und Verlauf des Stromes durch das Ohmsche Gesetz richtig errechnet, wenn man den Posten  $-\frac{d\Phi}{dt}$  als eine über  $U^e$  hinaus wirksame eingeprägte elektrische Kraft in Rechnung setzt. Diese Vorstellung kommt in der von F. Neumann eingeführten Bezeichnung „Induzierte elektromotorische Kraft“ zum Ausdruck. Man hat indessen zu ihr wohl zu beachten, daß man bei dieser Betrachtungsweise sein Augenmerk ausschließlich auf den Strom gerichtet hat, der durch den geschlossenen linearen Leiter fließt; man kann daher auch nicht erwarten, daß damit der physikalische Vorgang vollständig oder auch nur genügend beschrieben wäre. Hierauf kommen wir zurück.

Wir vergleichen die neu gewonnene Erfahrungstatsache Gl. (3) mit den Aussagen des Ohmschen Gesetzes bei beharrlicher Strömung in ruhenden Körpern. Für lineare Leiter gilt [27. Gl. (5), (6), (7)].

$$RJ = U^e + U_{1..2}, \quad (4)$$

wobei die Spannung  $U_{1..2}$  zwischen zwei Punkten 1, 2 auf der Leitkurve  $\mathfrak{s}$  definiert ist als das Linienintegral der elektrischen Feldstärke

$$U_{1..2} = \int_1^2 E_t ds = \int_1^2 \mathfrak{E} d\mathfrak{r}.$$

Für einen geschlossenen Umlauf ist also ( $R$  Gesamtwiderstand)

$$JR = U^e + \oint \mathfrak{E} d\mathfrak{r}. \quad (5)$$

Bei dem früher ausschließlich betrachteten Beharrungszustand ist grundsätzlich [25. Gl. (8); 27. Gl. (8)]

$$\oint \mathfrak{E} d\mathfrak{r} = 0, \quad \text{daher} \quad JR = U^e. \quad (6)$$

Für den veränderlichen Zustand dagegen gilt Gl. (3); die beiden Erfahrungstatsachen des Ohmschen Gesetzes und der Faradayschen Entdeckung erfordern, um allgemein zusammen bestehen zu können, die Beziehung

$$\oint \mathfrak{E} d\mathfrak{r} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad \text{Induktionsgesetz.} \quad (7)$$

Dieses Ergebnis ist zunächst nur eine Aussage über die elektrische Umlaufspannung entlang einer geschlossenen stromdurchflossenen Drahtschleife. Sie enthält keinerlei Einschränkung hinsichtlich des zeitlichen Ablaufes des Vorganges. Veränderliche Ströme können aber auch in ungeschlossenen Bahnen verlaufen (Beispiel: Kondensatorentladung). Es fragt sich, welche Beziehungen in diesem Falle gelten (im Dielektrikum würde die Spannung  $JR$  ein unbestimmter Ausdruck werden). Ferner: wegen der endlichen Dicke der Leitungsdrähte ist der „durch die Schleife hindurchtretende magnetische Fluß“ niemals scharf definiert. Diese und alle weiteren Schwierigkeiten sind erledigt, sobald man annimmt, daß Gl. (7) nicht allein für leitend geschlossene Schleifen, sondern allgemein für jede geschlossene geometrische Raumkurve gilt. Diese Annahme ist möglich, denn die Gleichung enthält keine Bestimmungsstücke des linearen Leiters, sondern ist eine Aussage über Feldgrößen. In der Tat steht diese Verallgemeinerung nicht nur im völligen Einklang mit der Erfahrung, sondern es können darüber hinaus ohne sie gewisse elektromagnetische Erscheinungen gar nicht vollständig beschrieben werden. Wir betrachten daher mit Recht Gl. (7) als eine uneingeschränkte Ausgabe des Inhalts: Berechnen wir die zeitliche Abnahme des von einer Randkurve umfaßten Flusses der magnetischen Induktion als „magnetischen Schwund“, so lautet das Induktionsgesetz für jede beliebige geometrische geschlossene Kurve, gleichgültig, ob sie ganz oder teilweise in Leitern oder in Nichtleitern verläuft:

Die elektrische Umlaufspannung längs des Randes einer beliebigen Fläche gleicht dem umrandeten magnetischen Schwund.

Wenn die elektrische Umlaufspannung längs gewisser Wege von Null verschieden, die elektrische Spannung daher nicht unabhängig vom Wege ist<sup>1</sup>, so ist das elektrische Feld nicht mehr wirbelfrei. Die Wirbelfreiheit war aber die Gleichgewichtsbedingung des elektrischen Feldes [8. Gl. (4), (5), ferner 25. Gl. (8)]. Zeitliche Änderungen eines magnetischen Feldes sind demnach von elektrischen Spannungen begleitet, die die Gleichgewichtsbedingung nicht erfüllen, daher nicht mehr statisch sind, sondern dynamisch. Zu elektrischen Feldröhren, die in Ladungen als Quellen ihren Ursprung und ihr Ende nehmen, kommen solche hinzu, die im Endlichen ohne Anfang und Ende sind. Stärke und Richtung der elektrischen Wirbel findet man aus Gl. (7) durch Aufstellung des entsprechenden Differentialgesetzes. Für den vorausgesetzten Zustand unbewegter Körper ist

$$\frac{d\Phi}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \int \mathfrak{B} d\mathfrak{f} = \int \frac{d\mathfrak{B}}{dt} d\mathfrak{f}, \quad (8)$$

denn die Flußänderung durch die ruhende Fläche  $f$  kann einzig durch Änderung der magnetischen Induktion selbst bewirkt sein. Dann folgt aus Gl. (7) durch den Satz von Stokes:

$$\oint \mathfrak{E} d\mathfrak{r} = \int_i \text{rot } \mathfrak{E} \cdot d\mathfrak{f} = - \int_i \frac{d\mathfrak{B}}{dt} d\mathfrak{f},$$

und da es sich beiderseits um die gleiche Fläche handelt, ist

$$\text{rot } \mathfrak{E} = - \frac{d\mathfrak{B}}{dt}. \quad (9)$$

Zweite Hauptgleichung für ruhende Körper. }

In Worten etwa: Jedes zeitlich veränderliche magnetische Feld ist von elektrischen Wirbeln ganz und gar durchsetzt; die Abnahme der magnetischen Induktion in der Zeiteinheit stimmt nach Größe und Richtung mit der elektrischen Wirbelstärke überein.

Als Besonderheiten sind hervorzuheben:

1. Für die Ableitung von Gl. (9) war angenommen, daß die beteiligten Körper unbewegt sind. — 2. Das Gesetz beschreibt nicht das elektrische Feld selbst, sondern seine Wirbel, d. h. eine bestimmte Art seiner örtlichen Änderung. Aus der elektrischen Feldstärke kann man unter allen Umständen die magnetische Schwankung bestimmen, dagegen folgt aus dieser lediglich die elektrische Wirbelstärke. Entsprechendes gilt für das Induktionsgesetz (aus dem magnetischen Schwund folgt die elektrische Umlaufspannung, nicht die elektrische Feldstärke selbst). — 3. Gl. (9) enthält keine Vorschrift über Ursache und Wirkung, sondern erlaubt beide Auslegungen. — 4. Aus Gl. (9) folgt mit mathematischer Notwendigkeit  $\text{div rot } \mathfrak{E} = 0$ , daher muß sein  $\text{div } \frac{d\mathfrak{B}}{dt} = 0$ . Dies ist dadurch gewährleistet, daß unter allen Umständen  $\mathfrak{B}$  ein quellenloses Vektorfeld ist:

$$\text{div } \mathfrak{B} = 0.$$

Es ist daher für das Induktionsgesetz ganz gleichgültig, welche Fläche in den Rand eingespannt wird. Elektrische Umlaufspannung und quellenloses Induktionsfeld sind miteinander verkettet. — 5. Daher gilt Gl. (9) für beliebige zeitliche Vorgänge.

Nach der geschilderten Auffassung spielt beim Induktionsvorgang ein anwesender Leiter keine andere Rolle, als die längst vom Ohmschen Gesetz her bekannte [25. Gl. (9), (11)]: die elektrische Feldstärke setzt sich überall an der Oberfläche des Leiters wirbelfrei, also unter Erhaltung der Tangentialkomponenten, ins Innere fort und bewirkt dort die proportionale Stromdichte  $\mathfrak{G} = \frac{1}{\rho} \mathfrak{E}$ . Für die

<sup>1</sup> Technisches Beispiel: „Voltmeterschleife“ im magnetischen Feld von Wechselströmen: die Angabe des Voltmeters ist von der Lage der Zuleitungsdrähte abhängig.

elektrische Seite des Induktionsvorganges, den „induzierten Strom“, kommt es also nicht etwa auf die Änderungen des magnetischen Feldes am Ort des Leiters an, sondern nur auf das dort vorhandene elektrische Feld. Die Induktionswirkung gelangt vom Orte des schwankenden Induktionsflusses nicht magnetisch, sondern elektrisch zum Orte des Leiters.

Beispiele:

1. Beim Transformator mit geschlossenem Eisenweg ist der magnetische Schwund am Ort der Sekundärwicklung sehr viel kleiner, als im Eisen. Idealisierend sei nach Abb. 1 die gesamte magnetische Schwankung ausschließlich in einem abgegrenzten zylindrischen Bereich vorhanden („Kern“, z. B. langes Bündel feiner Eisendrähte). Im Grenzfall möge der eingezeichnete Integrationsweg für die elektrische Spannung so verlaufen, daß der Teil I auf der Oberfläche des Kernes liegt, die beiden axialen Wege sich decken. Dann ist

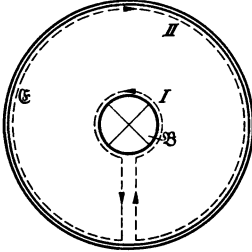


Abb. 30. 1. Beispiel zum Induktionsgesetz.

$$\oint_{\text{I}} \mathcal{E} d\tau = - \frac{d\Phi}{dt}, \quad - \oint_{\text{II}} \mathcal{E} d\tau = - 2\pi s \cdot E(s) = - \frac{d\Phi}{dt},$$

daher für den gesamten Umlauf

$$\oint \mathcal{E} d\tau = \oint_{\text{I}} \mathcal{E} d\tau + \oint_{\text{II}} \mathcal{E} d\tau = 0.$$

Der Außenraum ist wirbelfrei, und daher auch frei von jeder magnetischen Feldänderung<sup>1</sup>. Die elektrische Feldstärke im Abstand  $s$  von der Achse ist

$$E(s) = \frac{1}{2\pi s} \cdot \frac{d\Phi}{dt}, \quad (10)$$

die Feldlinien sind als konaxiale Kreise in sich zurückkehrende Kurven, und für jeden beliebigen Kreis als Randkurve ist die Umlaufspannung dieselbe, nämlich gleich dem umschlossenen magnetischen Schwund. In einem im Abstand  $s$  angebrachten dünnen Drahtring bringt die elektrische Spannung einen Strom hervor von der Dichte  $G = \frac{1}{\rho} E(s)$ .

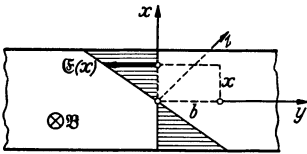


Abb. 30. 2. Elektrisches Feld und magnetischer Schwund im ebenen Blech.

2. Ein ebenes Blech von der kleinen Dicke  $h$  sei von einem rein tangentialen, homogenen, schwankenden magnetischen Feld  $B_z$  (Abb. 2) durchdrungen, sodaß ein Querschnitt der beliebigen Breite  $b$  und der Höhe  $x$  den magnetischen Schwund  $-\frac{dB_z}{dt} \cdot x b$  führt, der der elektrischen Umlaufspannung gleicht. Es besteht daher nach Gl. (7) und Abb. 2 das elektrische Feld nur aus einer von  $x$  abhängigen  $y$ -Komponente gemäß

$$E_y(x) \cdot b = - \frac{dB_z}{dt} \cdot x b, \quad (11)$$

es steigt also linear von Null an und verläuft antisymmetrisch zur Mittelebene. Freilich kann diese Betrachtung nur als Näherung gelten, denn das elektrische Feld bringt eine Strömung hervor, die das magnetische Feld, und daher auch die hier angegebene Verteilung, verändert. Verläuft etwa das magnetische Feld zeitlich gemäß  $B = B_0 \sin \omega t$ , so gilt Gl. (11) als Annäherung für kleine Werte  $\omega$  und  $h$ .

3. Das Induktionsgesetz Gl. (7) gilt für jeden geschlossenen Umlauf; bei einem Netzwerk von Drähten ist es möglich, daß ein Umlauf sich zusammensetzt aus Anteilen, die verschieden große Ströme führen, an die Stelle von Gl. (3) tritt die allgemeinere Form

$$\sum_{\circ} (R_\nu J_\nu - U_\nu^e) = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (12)$$

Diese Gleichung enthält die zweite Kirchhoffsche Regel [27. Gl. (12)], die auf unveränderliche Zustände beschränkt war  $\left(\frac{d}{dt} = 0\right)$ .

4. Als „Spule“ bezeichnen wir eine Drahtschleife mit mehreren oder vielen Drahtwindungen. Man denkt sich in der Technik häufig jede einzelne der  $z$  Windungen der Spule von einem „Windungsfluß“  $\varphi$  durchsetzt; die einzelnen Windungsflüsse sind nicht notwendig gleich groß,

<sup>1</sup> Daß diese Annahme eine Idealisierung ist, sei nochmals hervorgehoben. Das Randintegral ist nach dem Satz von Stokes gleichbedeutend mit dem Flächenintegral  $\oint \mathcal{E} d\tau = \int \text{rot } \mathcal{E} \cdot d\vec{\tau}$ , und der Sinn des Induktionsgesetzes ist, daß alle in dieser Fläche auftretenden magnetischen Feldänderungen zu diesem Flächenintegral beitragen.



da zwischen zwei Windungen ein Teil der Feldröhren abgelenkt und für sich geschlossen sein kann: „Streuung“. Der gesamte Spulenfluß ist dann die Summe der Windungsflüsse

$$\Phi = \sum_1^z \varphi_v. \quad (13)$$

Ist  $\Phi$  und  $z$  bekannt, so ist eine bequeme Rechengröße der mittlere Windungsfluß  $\bar{\varphi}$ , der durch  $\bar{\varphi} = \Phi/z$  bestimmt ist; der Ansatz  $\Phi = z \cdot \bar{\varphi}$  vernachlässigt die Streuung.

Man beachte die formalen Analogien zwischen Induktions- und Durchflutungsgesetz [Abb. 1, 2, 3 vgl. mit 28. Abb. 5, 6, 10; Gl. (7), (10), (11), (12) vgl. mit 28. Gl. (3), (2), (9), (13)]. Abb. 3 zeigt schematisch den Einfluß eines unterbrochenen Drahttringes: Durch das Fließen des induzierten Stromes treten elektrische Ladungen auf, deren quasistatisches Feld sich dem dynamischen elektrischen Feld des magnetischen Schwundes überlagert. Das gesamte elektrische Feld besitzt demnach sowohl Quellen, als Wirbel. Fließt kein induzierter Strom mehr, so ist das Leiterinnere gänzlich feldfrei, das elektrische Feld befindet sich dann, wie man sagen kann, in einem Zustande dynamischen Gleichgewichtes (dies ist für Abb. 3 angenommen).

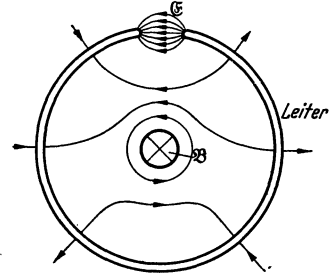


Abb. 30. 3. Merkschema zum Induktionsgesetz.

Das Wort von der „induzierten elektromotorischen Kraft“ haftet an der Vorstellung, daß elektrischer Leitungsstrom lediglich durch eingeprägte Kräfte hervorgerufen sein könne. Aber auch im Kreis einer Kondensatorentladung z. B. fließt ein Leitungsstrom, und man kann hierbei nicht gut ungezwungen von einer eingepprägten elektrischen Kraft sprechen. — Zum Begriff der eingepprägten Kraft gehört, daß ihre örtliche Verteilung angegeben werden kann; die induzierte EMK aber ist immer nur für einen geschlossenen Umlauf entlang einem leitenden linearen Kreis unmittelbar definiert. Aber auch im Innern des geschlossenen Leitungsdrahtes gibt es keine andere elektrische Spannung, als einzig die durch das Ohmsche Gesetz formulierte Spannung  $J R$ , und nichts anderes, als  $J R$ , wird erhalten, wenn man dem Leiter entlang die elektrische Spannung mißt. Dies ist der einfachste Versuchsbefund [Gl. (1)]. Freilich kann man nach dem allgemeinen Induktionsgesetz jedes beliebige Stück des geschlossenen linearen Kreises herausgreifen und zum Teil eines beliebig geometrisch geschlossenen Umlaufes machen, aber auch daraus ergibt sich nicht die induzierte EMK des betrachteten Leiterstückes, denn diese hängt ganz allein von der willkürlichen Annahme des geschlossenen Umlaufes ab. Man kann daher bei einer Stromverzweigung nicht eindeutig angeben, wie angenommene induzierte EMK sich auf die einzelnen Stromzweige verteilen. Die induzierte EMK ist demnach keine eindeutige physikalische Größe. — Nach dem ursprünglichen Sinne des Ohmschen Gesetzes wird Leitungsströmung durch ein elektrisches Feld hervorgebracht. Außerhalb des Leiters ist dieses aber nach Gestalt und Verhalten beim Induktionsvorgang ein anderes, als bei eingepprägten elektrischen Kräften; das mit magnetischen Schwankungen verknüpfte elektrische Feld kann auch nicht durch irgendwelche einigermaßen einfachen Anordnungen eingepprägter Kräfte (Annahme elektrischer Elemente in bestimmter örtlicher Verteilung) nachgeahmt werden. Dies zeigt 38. Der Zusammenhang zwischen elektrischem Feld und magnetischem Schwund entspricht formal völlig dem Zusammenhang zwischen magnetischem Feld und beharrlicher Leitungsströmung [28. Gl. (3)]. Der Redewendung von der induzierten EMK würde es entsprechen, das Durchflutungsgesetz so auszusprechen: In einem Eisenkörper wird „durch einen in seiner Nachbarschaft fließenden Leitungsstrom eine magnetomotorische Kraft induziert“, diese bringt ein magnetisches Feld hervor. Man wird diese Beschreibung des Vorganges nicht als vollständig anerkennen, vielmehr stets die Vorstellung vorziehen, daß das magnetische Feld vom Leitungsstrom hervorgebracht ist, und daß die Ursache des magnetischen Feldes, sein Wirbel, sich am Ort der Leitungsströmung befindet.

Ebenso muß im Bereich des Induktionsgesetzes eine vollständige Beschreibung davon ausgehen, daß die Wirbel des elektrischen Feldes (aber nicht die Feldstärke selbst!) an den Ort der magnetischen Induktionsschwankung gebunden sind; das eigentliche „induzierte“ elektrische Feld befindet sich am Orte des magnetischen Schwundes, das elektrische Feld außerhalb ist nur die wirbelfreie Fortsetzung des induzierten, es vermittelt den Induktionsvorgang nach außen. Daher ist am Orte des Leiters die „induzierte“ Strömung nicht durch eine magnetische Wirkung, sondern durch die elektrische Feldstärke gegeben. „Wenn man das induzierte elektrische Feld nicht beachtet, muß man überhaupt auf eine deutliche Vorstellung von dem Induktionsvorgang verzichten“ (Emde).

### 31. Die beiden Hauptgleichungen bei bewegten Körpern.

Die Integralform der beiden Hauptgleichungen ist [29. Gl. (6); 30. Gl. (8)]

$$\oint \mathfrak{H} d\mathfrak{r} = \frac{d}{dt} \int \mathfrak{D} d\mathfrak{f} + \int \mathfrak{G} d\mathfrak{f}, \quad (1)$$

$$-\oint \mathfrak{E} d\mathfrak{r} = \frac{d}{dt} \int \mathfrak{B} d\mathfrak{f}. \quad (2)$$

In beiden Gleichungen treten zeitliche Änderungen des Flusses auf, den ein Vektorfeld durch eine geschlossene Randkurve sendet. Für die Ableitung der Differentialgesetze [29. Gl. (7); 30. Gl. (9)] war vorausgesetzt worden, daß diese zeitliche Änderung des Flusses durch zeitliche Änderung des Vektorfeldes selbst bei unbewegter, also starrer, ortsfester Randkurve und Fläche geschehe. Der Wert des Flächenintegrals erfährt aber nicht nur durch die Änderung des Integranden eine Veränderung, sondern auch durch Änderungen des Integrationsgebietes, die durch Bewegungen der Randkurve und der Fläche erfolgen. Um diese zweiten Möglichkeiten in die Differentialgesetze einzubeziehen, untersuchen wir zunächst die zeitliche Änderung des Flusses in einem allgemeinen Vektorfeld  $\mathfrak{A}$ .

Das zeitliche Differential des Flusses  $d\int \mathfrak{A} d\mathfrak{f}$  kann in drei Teile zerlegt werden:

1. Ein Teil rührt her von der lokalen Änderung  $\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}$  des Feldes  $\mathfrak{A}$ ; er hat die Größe

$$dt \int \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} d\mathfrak{f}.$$

2. Ein Teil rührt her von der Bewegung der materiellen Randkurve  $\mathfrak{s}$  bei zeitlich konstant gedachtem Feld  $\mathfrak{A}$ .

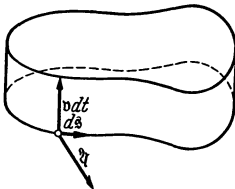


Abb. 31. 1. Flußänderung durch Bewegung der Randkurve.

Die Bewegung sei durch die (überall endliche) Geschwindigkeit  $v$  gegeben. In der Zeitspanne  $dt$  verschiebt sich jedes Flächenelement um  $v \cdot dt$ , die alte und die neue Lage der Fläche bilden einen dosenförmigen Körper, siehe Abb. 1. Um den durch Bewegung der materiellen Randkurve hervorgebrachten Zuwachs des Flusses zu erhalten, betrachten wir die Fläche, die gebildet wird aus der ursprünglichen, durch die Kurve  $\mathfrak{s}$  in ihrer alten Lage berandete Fläche  $\mathfrak{f}$ , vermehrt um den bei der Bewegung von  $\mathfrak{s}$  beschriebenen Streifen.

Dann ist die hier gesuchte Flußänderung durch den Fluß gegeben, der durch diesen Streifen hindurchtritt. Das Element dieser Fläche hat die Gestalt eines Parallelogrammes mit dem Flächeninhalt  $d\mathfrak{f} = v dt \cdot ds \cdot \sin(v, d\mathfrak{s})$  oder, bei Einhaltung der entsprechenden Normalenrichtung,  $d\mathfrak{f} = dt [v d\mathfrak{s}]$ . Daher ist der durch das Flächenelement hindurchtretende Fluß

$$A_n d\mathfrak{f} = \mathfrak{A} d\mathfrak{f} = \mathfrak{A} \cdot dt [v d\mathfrak{s}] = [\mathfrak{A} v] d\mathfrak{s} \cdot dt.$$

Somit ist der gesuchte zweite Teil der Flußänderung die Summe aller dieser Elemente längs der geschlossenen Kurve  $\mathfrak{s}$ , nämlich:  $dt \oint [\mathfrak{A} v] d\mathfrak{s}$ . Mit dem Satz von Stokes läßt sich dies in ein Flächenintegral der betrachteten Fläche  $\mathfrak{f}$  umwandeln:

$$dt \oint [\mathfrak{A} v] d\mathfrak{s} = dt \int \text{rot} [\mathfrak{A} v] d\mathfrak{f}.$$

3. Ein Teil wird bei festgehaltenem zeitlich konstantem Felde  $\mathfrak{A}$  und festgehaltener Lage der Randkurve  $\mathfrak{s}$  hervorgerufen durch die Verschiebung der materiellen Elemente der Fläche  $\mathfrak{f}$ . In Abb. 2 sei wieder  $\mathfrak{f}$  die Lage der Fläche zur Zeit  $t$  und  $\mathfrak{f}'$  ihre Lage zur Zeit  $t + dt$ . Dann ist die gesuchte Flußänderung  $\int \mathfrak{A}' d\mathfrak{f}' - \int \mathfrak{A} d\mathfrak{f}$ , was man mit dem Satz von Gauß als Volumenintegral über den eingeschlossenen Raum schreiben kann als  $\int \text{div } \mathfrak{A} \cdot d\tau$ . Das Raumelement  $d\tau$  ist aber

$$d\tau = d\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{v} dt \cdot \cos(\mathfrak{v}, \mathfrak{n}) = d\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{v} dt.$$

Daher ist der gesuchte dritte Teil der Flußänderung:

$$dt \int \mathfrak{v} \cdot \text{div } \mathfrak{A} \cdot d\mathfrak{f}.$$

Mithin ist die gesamte gesuchte Flußänderung

$$\frac{d}{dt} \int \mathfrak{A} d\mathfrak{f} = \int \left\{ \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + \text{rot} [\mathfrak{A} \mathfrak{v}] + \mathfrak{v} \text{div } \mathfrak{A} \right\} d\mathfrak{f}. \quad (3)$$

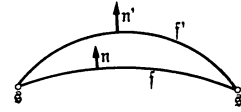


Abb. 31. 2. Flußänderung durch Bewegung der Fläche.

Zweite Hauptgleichung.

Auf die linke Seite von Gl. (2) wenden wir den Satz von Stokes an, für die rechte Seite benutzen wir Gl. (3):

$$-\int \text{rot } \mathfrak{C} \cdot d\mathfrak{f} = \int \left\{ \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + \text{rot} [\mathfrak{B} \mathfrak{v}] + \mathfrak{v} \text{div } \mathfrak{B} \right\} d\mathfrak{f}. \quad (4)$$

Lassen wir die Fläche auf ein Flächenelement zusammenschrumpfen, dann wird mit  $\text{div } \mathfrak{B} = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} -\text{rot } \mathfrak{C} &= \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + \text{rot} [\mathfrak{B} \mathfrak{v}]. \\ \text{Zweite Hauptgleichung für bewegte Körper.} \end{aligned} \right\} \quad (5)^1$$

Bedenkt man die Entstehung des Gliedes  $\mathfrak{v} \text{div } \mathfrak{B}$  in Gl. (4), so erscheint die Quellenlosigkeit der magnetischen Induktion hier als unmittelbare Folge der Beobachtungstatsache, daß in einem unbewegten, geschlossenen homogenen linearen Leiter in einem zeitlich konstanten magnetischen Felde kein Strom fließt. Dies ist eine allgemeine Rechtfertigung für Gl. (9) in 23. — In einem starren Körper sind nach Gl. (5) elektrische Wirbel vorhanden, wenn er sich in einem schwankenden magnetischen Feld befindet, ferner, wenn er sich durch ein magnetisches Feld bewegt, das in der Bewegungsrichtung nicht homogen ist, und wenn er sich in einem magnetischen Felde um eine Achse dreht, die nicht mit der Feldrichtung zusammenfällt. Zu Gl. (5) gehört als Integralform

$$-\oint \mathfrak{C} d\mathfrak{r} = \int \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} d\mathfrak{f} + \oint [\mathfrak{B} \mathfrak{v}] d\mathfrak{r}, \quad (6)$$

und hiermit ist der magnetische Schwund in zwei Teile zerlegt:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{\text{Ruhe}} + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{\text{Bewegung}}.$$

Der erste Teil ist die in 30. behandelte Flußänderung durch zeitliche Änderung der magnetischen Induktion bei ortsfester Fläche, der zweite Teil die Flußänderung infolge Bewegung der dem Körper angehörenden Kurve  $\mathfrak{s}$  durch das konstant gedachte magnetische Feld  $\mathfrak{B}$ , es ist somit

$$-\oint \mathfrak{C} d\mathfrak{r} = \oint [\mathfrak{B} \mathfrak{v}] d\mathfrak{r} \quad \text{bei} \quad \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = 0 \quad (6a)$$

das Induktionsgesetz für stationäre magnetische Felder. Abb. 3 veranschaulicht den Integranden der rechten Seite. Bei der Bewegung einer geschlossenen, materiellen

<sup>1</sup> In einem rechtswendigen, rechtwinkligen Koordinatensystem ist die  $x$ -Komponente

$$\left( -\text{rot } \mathfrak{C} \right)_x \equiv - \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) = \frac{\partial B_x}{\partial t} + \left\{ \frac{\partial}{\partial y} (B_x v_y - B_y v_x) - \frac{\partial}{\partial z} (B_z v_x - B_x v_z) \right\},$$

die anderen Komponenten durch zyklische Vertauschung von  $x, y, z$ .

Kurve<sup>1</sup> vermehrt oder vermindert sich der von ihr umspannte Induktionsfluß um den von der bewegten Kurve durchquerten Induktionsfluß (um die Anzahl der von der Kurve geschnittenen Induktionsröhren). Es sei hervorgehoben, daß die Zulässigkeit dieser Vorstellung ganz und gar auf den Geltungsbereich der Gl. (6a) beschränkt ist. Der Zerlegung, die in den beiden Summanden der rechten Seiten von Gl. (5), (6) zum Ausdruck kommt, ist eine Form der Gleichung übergeordnet [Gl. (2)], die allgemein und unabhängig ist von der besonderen Art, wie der magnetische Schwund hervorgebracht wird. Daher hängen die beiden Anteile in ihrer Größe ab von der in unser Belieben gestellten Wahl des Standpunktes (des „Koordinatensystems“), nicht aber ihre Summe. Da für Gl. (6a) vorausgesetzt war  $\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = 0$ , hat für sie die Geschwindigkeit  $v = 0$  ein solcher Standpunkt, von dem aus gesehen das magnetische Feld zeitlich konstant erscheint. Nur wenn sich ein solcher Standpunkt finden läßt, ist Gl. (6a) anwendbar.

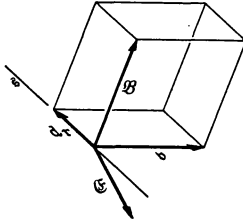


Abb. 31. 3. Zum Induktionsgesetz für stationäre magnetische Felder.

Für ein zeitlich konstantes magnetisches Feld wird aus Gl. (5)

$$\text{rot } \mathfrak{E} = -\text{rot } [\mathfrak{B} v]; \quad \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = 0. \quad (5a)$$

Die beiden Vektorfelder  $\mathfrak{E}$  und  $-\text{rot } [\mathfrak{B} v]$  haben die gleichen Wirbel, sie können sich also nur durch ein Vektorfeld voneinander unterscheiden, das wirbelfrei und daher als Potentialgefälle darstellbar ist; somit hat man

$$\mathfrak{E} = -[\mathfrak{B} v] - \text{grad } \varphi \quad \text{bei} \quad \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = 0. \quad (7)$$

Nur für die Bestimmung der elektrischen Feldstärke in jedem Raumpunkt, nicht aber für die elektrische Umlaufspannung, spielt das skalare Potential  $\varphi$  eine Rolle (es ergibt sich aus der Potentialgleichung und den besonderen Grenzbedingungen der Aufgabe).

Es sei z. B. ein gerader, leitender Stab entlang parallelen leitenden Gleitschienen, die den Abstand  $l$  voneinander haben, mit der Geschwindigkeit  $v$  geradlinig und senkrecht zu einem homogenen konstanten magnetischen Feld  $\mathfrak{B}$  bewegt (Abb. 4). In gehöriger Entfernung seien die Gleitschienen über einen Widerstand  $R$  geschlossen. Hier ist die Flußänderung bei Bewegung des Stabes

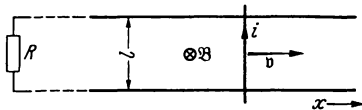


Abb. 31. 4. Bewegung eines Metallstabes im homogenen, konstanten magnetischen Feld.

$$\delta \Phi = B_n \delta f = l B \frac{dx}{dt} = l B v \quad (8)$$

ein Flußzuwachs, wenn der geschlossene Umlauf beliebig links von dem bewegten Stabe gedacht wird, eine Abnahme, wenn er rechts angenommen wird. In beiden Fällen fließt daher bei leitend geschlossenem Kreis der induzierte Strom in der angegebenen Pfeilrichtung, Gl. (8) bezeichnet den Betrag der elektrischen Umlaufspannung. Auch hier kann man nur angeben, wie sich die ganze elektrische Umlaufspannung auf die einzelnen Teile des Stromkreises verteilt, nämlich im Verhältnis der Ohmschen Widerstände dieser Teile, der Sitz einer angenommenen induzierten elektromotorischen Kraft bleibt unklar. Möge z. B. der Stab und die Gleitschienen fast widerstandslos sein, der Schließungswiderstand  $R$  dagegen groß: dann ist die elektrische Feldstärke sowohl entlang dem Stabe, wie auch entlang den Schienen verschwindend klein, und daher ist auch die Spannung zwischen den Enden des bewegten Stabes sehr gering; dagegen ist die Feldstärke, und mit ihr die Spannung, groß im Schließungswiderstande  $R$ , für ihn aber ist  $v = 0$ . (Daher ist dort  $\mathfrak{E} = -\text{grad } \varphi$ .)

<sup>1</sup> Also nicht einer beliebigen gedachten Linie, sondern einer durch die Punkte des bewegten materiellen Körpers festgelegten, an diesen haftenden Kurve. Man kommt zu Fehlschlüssen, wenn man diesen Umstand nicht beachtet (vgl. „unipolare Induktion“).

Aus Gl. (6a) ergibt sich unmittelbar die Umlaufspannung bei Bewegung des Stabes:  $\oint \mathcal{E} dr = I [v \mathfrak{B}]$  — ( $I$ ,  $v$ ,  $\mathfrak{B}$  stehen bei diesem Versuch aufeinander senkrecht). Auf die Beschaffenheit des elektrischen Feldes, falls bei der Bewegung kein Induktionsstrom fließt, kommen wir unten zurück.

Aus Gl. (5), (7) folgt die grundsätzlich wichtige Feststellung, daß ein in einem magnetischen Felde bewegter Isolator durch die in ihm entstehende elektrische Feldstärke elektrisch polarisiert wird (12.). Von H. A. Wilson unternommene Versuche haben bestätigt, daß der durch Bewegung hervorgerufene Anteil der Polarisierung gemäß Gl. (7) und [12. Gl. (12)] durch

$$\mathfrak{P} = \epsilon_0 (\epsilon - 1) [v \mathfrak{B}] \quad (7a)$$

wiederzugeben ist.

Ferner: Wird ein die Ladung  $q$  tragender Körper, der so klein ist, daß seine Gestalt und die Ladungsverteilung auf ihm keine Rolle spielt, mit der Geschwindigkeit  $v$  durch ein magnetisches Feld  $\mathfrak{B}$  bewegt, so ist das entstehende elektrische Feld gemäß Gl. (7) und unabhängig von  $q$

$$\mathcal{E} = [v \mathfrak{B}] \quad (9)$$

rechtswendig senkrecht zu dem durch  $v$  und  $\mathfrak{B}$  gebildeten Parallelogramm, mit dessen Fläche sein Betrag übereinstimmt. Bei der Bewegung wirkt daher auf den Ladungsträger eine Kraft

$$\mathfrak{R} = q \mathcal{E} = -q [\mathfrak{B} v] = q [v \mathfrak{B}]. \quad (9a)$$

Die Kraft, die in einem magnetischen Feld auf ein Element  $dr$  eines linearen Stromes  $J$  ausgeübt wird, werden wir später zu  $d\mathfrak{R} = J [dr \mathfrak{B}]$  finden; sie stimmt mit Gl. (9a) völlig überein, wenn man setzt  $J dr = q v$ ; auf ein in der Richtung der Ladungsbewegung liegendes „Stromelement“ wird dieselbe Kraft ausgeübt, wie auf die bewegte Ladung. Man bezeichnet bewegte elektrische Ladungen als „Konvektionsstrom“. Hier ist also gefunden, falls man die Fiktion von Stromelementen betreffende Überlegungen für beweiskräftig hält, daß hinsichtlich der durch ein magnetisches Feld erlittenen Wirkung Konvektionsstrom und Leitungsstrom äquivalent sind. Entsprechendes wird sich auch für die ausgeübte Wirkung ergeben [Gl. (16), (17)].

Wirbel der elektrischen Feldstärke können dort auftreten, wo die Geschwindigkeit sich sprunghaft ändert, also an der Berührungsfläche zweier Körper, die aneinander gleiten. In vielen Fällen ist der eine Körper fest, der andere die umgebende Luft. Daher werden die Flächenwirbel zur Beschreibung der Induktionswirkung bewegter Körper besonders nützlich sein. An solchen Gleitflächen wird sich die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke sprunghaft ändern, die für ruhende Körper geltende Gleichgewichtsbedingung der Stetigkeit der Tangentialkomponente von  $\mathcal{E}$  [S. Gl. (5)] also nicht mehr erfüllt sein. An die Stelle der Gl. (5a) tritt an der Grenzfläche der Körper 1 und 2

$$\text{Rot } \mathcal{E} = [n_{1/2} \{ [v_2 \mathfrak{B}_2] - [v_1 \mathfrak{B}_1] \}]. \quad (10)$$

Die Entwicklung der doppelten Produkte der rechten Seite vereinfacht sich dadurch, daß die Induktion mit stetiger Normalkomponente durchgeht:

$$B_{1n} = B_{2n} = B_n,$$

ferner dadurch, daß die aneinander gleitenden Körper in Berührung bleiben, also gleiche Normalkomponente der Geschwindigkeit haben:

$$v_{1n} = v_{2n} = v_n.$$

Mit der Definitionsgleichung des Flächenwirbels ergibt sich so

$$\text{Rot } \mathcal{E} \equiv [n_{1/2} (\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)] = (v_2 - v_1) B_n - (\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{B}_1) v_n. \quad (11)$$

Die Vektoren  $\text{Rot } \mathcal{E}$ ,  $v_2 - v_1$  und  $\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{B}_1$  sind tangential zur Gleitfläche gerichtet.

Bewegt man also einen leitenden Stab in einem homogenen magnetischen Feld [vgl. das Beispiel Gl. (8)], so sind zwar im Leiterinnern elektrische Wirbel nicht vorhanden<sup>1</sup>, dagegen befinden sich auf seiner Oberfläche Flächenwirbel der elektrischen Feldstärke. Die elektrischen Feldlinien stehen im allgemeinen schief auf seiner Oberfläche; zu dem von Flächenwirbeln verursachten elektrischen Feld in der Luft tritt ein von den Ladungen der Metalloberfläche herrührendes, normal gerichtetes elektrisches Feld. Fließt kein Induktionsstrom durch den Stab, und wird dieser mit 1, die Luft mit 2 gekennzeichnet, so ist  $\mathfrak{E}_1 = 0$  und  $v_2 = 0$ , mithin

$$[\mathfrak{n}_{1/2} \mathfrak{E}_2] = -v_1 B_n - (\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{B}_1) v_n, \quad (12)$$

das zweite Glied verschwindet bei gleicher Permeabilität der beiden Körper, die Vektoren  $\mathfrak{E}_2$  und  $-[v_1 \mathfrak{B}]$  haben gleiche und gleichgerichtete Tangentialkomponente.

„Unipolare Induktion.“ Ein längsmagnetisierter, zylindrischer Dauermagnet drehe sich um seine Achse. Eine leitende Drahtschleife berühre einerseits die Achse auf der Stirnfläche und schleife andererseits auf der Mantelfläche (Abb. 5). In der Drahtschleife fließt erfahrungsgemäß ein der Drehgeschwindigkeit proportionaler Strom (ist diese konstant, so ist der Strom ein reiner Gleichstrom; „Unipolargenerator“). Sowohl vom Magneten, wie von der Drahtschleife aus gesehen ist das ma-

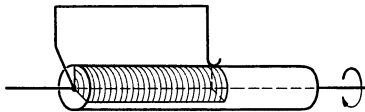


Abb. 31. 5. Beispiel für „unipolare Induktion“.

gnetische Feld zeitlich unveränderlich. Denkt man sich die geschlossene Strombahn aus dem Draht und dem Weg durch den Magneten gebildet, so ändert sich infolge der Rotationssymmetrie des magnetischen Feldes bei Drehung des Magneten der magnetische Fluß durch diese Kurve nicht<sup>2</sup>. Sie ist aber auch für den Induktionsvorgang nicht maßgebend. Möge z. B. die Drahtschleife und die Drehachse in einer Ebene liegen, so daß die anfänglich eingespannte Fläche in dieser Ebene liegt: bei Drehung des Magneten hat sich dann die materielle Spur der Ebene, nämlich die Stoffteilchen des Magneten, bewegt. Die in Rechnung zu setzende umspannte Fläche hat also den in Abb. 5 durch Schraffur angedeuteten Zuwachs erfahren, der magnetische Fluß hat sich verändert (hauptsächlich in dem Sektor der Stirnseite). Das elektrische Feld hat auch hier Flächenwirbel. Wir erkennen sie am einfachsten, wenn wir die stromführende Schleife weglassen. Für den stromlosen Magneten (1) gegen Luft (2) ist dann  $\mathfrak{E}_1 = 0$ ,  $v_2 = 0$  und für die Drehbewegung ist  $v_n = 0$ , somit kommt aus Gl. (11)

$$[\mathfrak{n}_{1/2} \mathfrak{E}_2] = -v_1 B_n. \quad (13)$$

Daraus folgt die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke an der Oberfläche, als Vektor aufgefaßt.

$$t \cdot E_{2t} \equiv [\mathfrak{n} [\mathfrak{E}_2 \mathfrak{n}]] = [\mathfrak{n} v_1] B_n. \quad (13a)$$

Wir betrachten die ebene Grenzschicht eines Leiters gegen einen Nichtleiter in drei Fällen: a) Im Gleichgewichtszustand und bei Ruhe fließt kein Strom, die elektrischen Feldlinien stehen normal auf der geladenen Oberfläche (Abb. 6a). b) Fließt ein Strom durch den unbewegten Leiter, so ist die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes an der Oberfläche durch das Ohmsche Gesetz zu  $E_t = \rho G_t$  gegeben, die Feldlinien sind in Richtung der Strömung geneigt (Abb. 6b). c) Steht senkrecht zur Oberfläche ein homogenes magnetisches Feld  $\mathfrak{B}$ , und wird der Metallkörper senkrecht zu  $\mathfrak{B}$  und zur Oberfläche mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegt, so ist nach Gl. (11)

$$[\mathfrak{n}_{1/2} (\mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1)] = -v_1 B_n, \quad \text{daher} \quad E_{2t} - E_{1t} = -v_1 B_n; \quad (14)$$

<sup>1</sup> Solche sind im allgemeinen im Leiterinnern bei Bewegung in ungleichförmigen Feldern vorhanden und sind dann der Anlaß zu Wirbelströmen.

<sup>2</sup> Die an diese Tatsache anknüpfende Streitfrage, ob bei der Drehung des Magneten die magnetischen Feldlinien mitgenommen würden oder stillständen, wird heute als verfehlt Fragestellung betrachtet. Magnetische Feldlinien sind eine (mathematische) Darstellungsform für die (physikalische) Tatsache des magnetischen Feldes, aber keine wiedererkennbaren Individuen.

Mit  $E_{1t} = \rho G_t$  ist  $E_{2t} = \rho G_t - v_1 B_n$ . Es sei  $G_t$  lediglich durch den Induktionsvorgang selbst bedingt,  $\rho$  sei endlich und  $B_n$  bleibe unverändert. Die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke außerhalb an der Leiteroberfläche hat demnach einen anderen Betrag, als im Fall b). Gl. (14) bestimmt sowohl Richtung als Betrag der Differenz der Tangentialkomponenten: der Betrag ist ausschließlich durch  $-v_1 B_n$  bestimmt, der Vektor  $[n_{1/2} (\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)]$  ist zu  $-v_1$  parallel, demnach haben die tangentielle Feldstärke außerhalb an der Grenzfläche und die Strömung (die tangentielle Feldstärke im Leiterinnern an der Grenzfläche) entgegengesetzte, zu  $v_1$  und zu  $B_n$  senkrechte Richtungen. Die elektrischen Feldlinien außerhalb neigen sich daher im allgemeinen nach der anderen Seite, als im Fall b): Abb. 6 c. Z. B. ist bei stromlosem Leiter  $E_{1t} = 0$ , daher  $E_{2t} = -v_1 B_n$ .

Wir betrachten noch schließlich allgemein den in einem geschlossenen Stromkreis fließenden induzierten Strom. Als Leitungsstrom bedeutet er einen magnetischen Wirbel (28.), beeinflusst also das magnetische Feld. Es ist zwar selbstverständlich, aber doch bemerkenswert, daß für die elektrische Umlaufspannung die Änderungen des resultierenden magnetischen Feldes bestimmend sind. Bei Induktion durch Bewegung wirken die infolge der Strömung auftretenden mechanischen Kräfte stets der die Strömung hervorrufenden Bewegung entgegen: Lenzsche Regel. (Der induzierte Strom fließt in solcher Richtung, daß die kinetische Energie der Bewegung abnimmt; die Arbeit der Feldkräfte ist stets negativ.) Vgl. 36. Gl. (8).

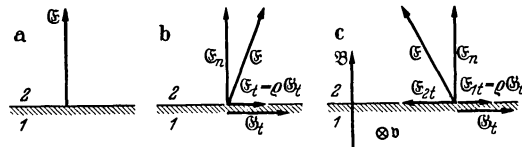


Abb. 31. 6. Das elektrische Feld an einer Leiteroberfläche: a. Im Gleichgewichtszustand (statisches Feld), b. nach dem Ohmschen Gesetz (Beharrungszustand), c. nach dem Induktionsgesetz bei Bewegung in einem homogenen magnetischen Feld.

Erste Hauptgleichung.

Wir wenden auf die linke Seite von Gl. (1) den Satz von Stokes, auf die rechte Seite Gl. (3) an und lassen die Fläche der Integrale zu Flächenelementen zusammenschrumpfen; es ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathfrak{H} &= \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \text{rot } [\mathfrak{D} \mathbf{v}] + \mathbf{v} \text{ div } \mathfrak{D} + \mathfrak{G}. \\ \text{Erste Hauptgleichung für bewegte Körper.} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Das erste Glied der rechten Seite ist die örtliche Schwankung des elektrischen Feldes (29.), das letzte die Leitungsströmung (28.). Bedenkt man, daß nach der Grundgleichung 12. Gl. (5)  $\text{div } \mathfrak{D} = \eta$  die räumliche Dichte elektrischer Ladung ist, so erkennt man, daß

$$\mathbf{v} \cdot \text{div } \mathfrak{D} = \mathbf{v} \cdot \eta \quad (16)$$

die Strömung räumlicher Ladung, die „Konvektionsströmung“, vorstellt. Auch hinsichtlich der von ihm ausgeübten magnetischen Wirkung ist also nach Gl. (15) der Konvektionsstrom dem Leitungsstrom gleichwertig, vgl. Gl. (9a). Diesbezügliche Versuche von H. A. Rowland und A. Eichenwald waren in Übereinstimmung mit der Theorie.

Beispiel: Bewegung eines einzelnen kleinen Ladungsträgers im leeren Raum. Infolge der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  der elektrischen Ladung  $q$  besteht in jedem Raumpunkt eine elektrische Feldänderung und daher ein magnetisches Feld, die miteinander nach Gl. (1) durch

$$\oint \mathfrak{H} \, dx = \frac{d}{dt} \int \mathfrak{D} \, d\tau$$

verknüpft sind. Infolge der Punktsymmetrie verläuft  $\mathfrak{H}$  in Kreisen, deren Mittelpunkte auf der Achse liegen, entlang der die Ladung wandert; magnetisches und elektrisches Feld stehen aufeinander senkrecht. Wir betrachten die Änderung des elektrischen Flusses, der durch eine senkrecht zur Bewegungsrichtung stehende Kreisscheibe vom Radius  $R$  hindurchtritt (Abb. 7): wegen der Quellenlosigkeit von

$\mathfrak{D}$  in dem dosenförmigen Raum von der Höhe  $v dt$  ist nach den eingangs zu Gl. (3) führenden Überlegungen diese Flußänderung gleich dem Fluß, der durch das Band von der Höhe  $v dt$  hindurchtritt:

$$\delta \Omega = v dt \cdot 2 \pi R \cdot D \sin \Theta; \quad D = \frac{q}{4 \pi r^2},$$

daher

$$2 \pi R \cdot H = v \cdot 2 \pi R \cdot D \sin \Theta,$$

$$H = v D \sin \Theta = \frac{q}{4 \pi r^2} v \sin \Theta. \quad (17)$$

Das ist aber das magnetische Feld, das man einem linearen „Stromelement“ zuschreiben kann, wenn man ersetzt  $qv = J dl$ : Leitungsstrom und Konvektionsstrom entsprechen einander hinsichtlich des hervorgebrachten magnetischen Feldes. Man kann Gl. (17) vektoriell schreiben als

$$\mathfrak{H} = [v \mathfrak{D}]. \quad (18)$$

Die magnetische Feldstärke steht rechtswendig senkrecht auf dem durch  $v$  und  $\mathfrak{D}$  gebildeten Parallelogramm, mit dessen Fläche ihr Betrag übereinstimmt [vgl. Gl. (9a)]. — Zu der bei  $v=0$  allein vorhandenen

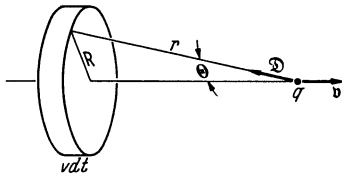


Abb. 31. 7. Das magnetische Feld eines bewegten Ladungsträgers.

elektrischen Feldenergie kommt durch die Bewegung eine Energiespeicherung im magnetischen Feld. Ist der Ladungsträger eine Kugel vom kleinen Radius  $a$ , so ist nach 11. Gl. (16)  $W_e = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{2a}$ ; die magnetische Feldenergie findet man mit Gl. (17) zu

$$W_m = \frac{\mu_0}{2} \int_{\infty} H^2 d \tau = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{3a} \cdot \frac{v^2}{c^2} \quad (19)$$

auf nicht näher auszuführendem Wege ( $c =$  Lichtgeschwindigkeit). Da diese Energieanhäufung nur eine Folge der Ladungsbewegung sein kann, und da sie zu  $v^2$  proportional ist, läßt sich der Vorgang so auffassen, daß die die kinetische Energie  $W_k = \frac{1}{2} m v^2$  bestimmende träge Masse  $m$  um den Betrag

$$m' = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \frac{2 q^2}{3 a c^2} \quad (20)$$

größer erscheint, als wenn der Körper ungeladen ist: „elektromagnetische Masse“; Trägheitswirkung des magnetischen Feldes. (Mechanische Analogie: Wird eine Kugel durch eine dichte Flüssigkeit beschleunigt, so kann der in Richtung der Bewegung vergrößerte Flüssigkeitsdruck durch eine scheinbare Massenvergrößerung der Kugel ausgedrückt werden.) Insofern man diese Überlegungen auf die Elektrizitätsatome beziehen kann, folgt für diese eine elektromagnetische Masse durch das mitgeführte elektromagnetische Feld; man pflegt diese meist als einzige Ursache ihrer trägen Masse anzunehmen.  $m'$  hängt von der Geschwindigkeit nicht ab und ist umgekehrt proportional dem Kugelradius.

Die mit dem zweiten Glied von Gl. (15) ausgesprochene Verknüpfung der Vektoren  $\mathfrak{H}$  und  $[v \mathfrak{D}]$  läßt sich leicht mit Hilfe der formalen Analogie zu Gl. (5a), (10) und der dort besprochenen Erscheinungen überblicken. Demnach kann ein bewegter, elektrisch polarisierter Nichtleiter magnetische Wirkungen ausüben, an Gleitflächen können magnetische Flächenwirbel auftreten. Diese Erscheinung wurde erstmalig von W. C. Röntgen durch Versuch festgestellt und danach von A. Eichenwald gemessen. Dreht sich im homogenen elektrischen Feld eine kreisförmige dielektrische Scheibe normal zur Feldrichtung, so sind nach einem Gl. (11) und (13) genau entsprechenden Ausdruck an der Gleitfläche magnetische Flächenwirbel vorhanden von der Stärke  $g = v D_n$  und in tangentialer Richtung; sie entsprechen völlig einer Flächenstromdichte  $g = \text{Rot } \mathfrak{H}$  [28. Gl. (10)] und können mit einer solchen bezüglich der magnetischen Wirkung unmittelbar verglichen werden. Die Versuchsergebnisse stimmen aber nur dem Sinne, nicht der Größe nach mit der Theorie überein; die



konvektive Mitführung des Polarisationszustandes und ihre magnetische Wirkung waren für die weitere Entwicklung der Theorie von Wichtigkeit.

Die Gl. (15) und (5) oder (1) und (2) für die elektromagnetischen Vorgänge enthalten keinerlei Bezugnahme auf einen besonderen Standpunkt (auf ein bevorzugtes Koordinatensystem). Die in einem beliebigen ruhenden oder bewegten System von Körpern stattfindenden elektromagnetischen Vorgänge werden also davon gar nicht berührt, wenn man dem ganzen System irgendeine Bewegung von der Art mitteilt, wie sie ein starrer Körper annehmen kann. Durch Beobachtungen elektromagnetischer Erscheinungen innerhalb des Körpersystemes läßt sich daher eine solche Bewegung nicht nachweisen. Es gibt mehrere Beobachtungstatsachen der messenden Physik, die uns nötigen, gewisse hieraus zu ziehende, weitgehende Folgerungen abzulehnen; hier setzt die Fortführung der Theorie ein, die zunächst H. A. Lorentz unternommen hat<sup>1</sup>.

Einheiten und Benennungen der magnetischen Größen waren bisher offengelassen (vgl. 23.). Die Hauptgleichungen (1), (2) zeigen, daß für die Feststellung der Einheiten (der Benennungen) der magnetischen Größen zu den bisher gebrauchten vier Grundeinheiten (4.) keine weiteren hinzutreten. Es ergeben sich aus Gl. (1), (2) die folgenden Benennungen der magnetischen Größen in bezug auf das P. M. S., und die entsprechenden Einheiten mit den praktischen Grundeinheiten:

Magnetische Feldstärke  $H = \frac{J}{L} \equiv \frac{Q}{TL}$ , magnetische Induktion  $B = \frac{UT}{L^2}$ ; aus diesen alle anderen: für die magnetische Konstante  $\mu_0$  [23. Gl. (15)] ist  $\mu_0 = \frac{B}{H} = \frac{UT}{JL}$ , für die magnetische Polarisation  $\mathfrak{M} = \mathfrak{B} - \mu \mathfrak{H}$  und die Flächendichte des Magnetismus  $\sigma_m = \pm M_n$  [24. Gl. (3) und (11)] ist  $M = \frac{UT}{L^2}$ , für den magnetischen Fluß  $\Phi = \int \mathfrak{B} d\mathfrak{f}$  [23. Gl. (10)] ist  $\Phi = UT$ , für die räumliche Dichte der magnetischen Feldenergie  $w_m = \frac{\mathfrak{H} \mathfrak{B}}{2}$  [23. Gl. (14)] ist  $w_m = \frac{QU}{L^3}$ . — Mit den gegenwärtigen, international vereinbarten, praktischen Einheiten ist  $\mu_0 = 1,25598 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Volt sec}}{\text{Amp cm}}$ . Dieser Zahlenwert ändert sich natürlich mit den Grundeinheiten, vgl. 9. und 1'.

## Quasistationäre Vorgänge.

### 32. Kennzeichnung des quasistationären elektromagnetischen Feldes.

Ein Vorgang verläuft quasistationär, wenn die Zustandsänderungen so langsam vor sich gehen, daß für jeden Augenblick die Gesetze der stationären Vorgänge gelten (5.). Unter dieser Voraussetzung ist z. B. das magnetische Feld veränderlicher Ströme dasselbe, wie wenn die augenblickliche Stromstärke zeitlich konstant wäre, es wird also nicht von der ersten Maxwell'schen Gleichung [29. Gl. (6), (7)] beherrscht, sondern vom Durchflutungsgesetz [28. Gl. (3), (7)]:

$$\oint \mathfrak{H} dr = \int \mathfrak{G} d\mathfrak{f}. \quad (1)$$

Die Zustandsänderungen sollen also so langsam erfolgen, daß das magnetische Feld vom Verschiebungsstrom nicht beeinflusst wird. Dann bedeutet die mit  $\text{rot } \mathfrak{H} = \mathfrak{G}$  notwendig verbundene Bedingung

$$\text{div } \mathfrak{G} = 0; \quad \text{Div } \mathfrak{G} = \frac{d\sigma}{dt} = 0: \quad (2)$$

die Strömung verläuft in geschlossenen Bahnen und an der Grenzfläche zu Nichtleitern tangential; Oberflächenladungen sind zeitlich konstant; längs unverzweigter, linearer Leiter ist in jedem Augenblick die Stromstärke an allen Orten die gleiche.

<sup>1</sup> Lorentz, H. A.: Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften Bd. 5 (1904), 14. Abschnitt.

Als zweite Verknüpfung gilt das Induktionsgesetz

$$\oint \mathfrak{G} \, d\mathfrak{r} = -\frac{d}{dt} \int \mathfrak{B} \, d\mathfrak{f} \quad (3)$$

mit

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0 \quad (4)$$

und dem Zusammenhang  $\mathfrak{B} = \bar{\mu} \mathfrak{H} + \mathfrak{M}$ ;  $\varrho \mathfrak{G} = \mathfrak{C} + \mathfrak{C}^e$ , wobei  $\mu$ ,  $\varrho$ ,  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{C}^e$  an der Materie haftende Eigenschaften sind. — Voraussetzungsgemäß soll auch das elektrische Feld in jedem Augenblick als quasistatisch betrachtet, und daher nach den Regeln des elektrostatischen Feldes behandelt werden dürfen (obwohl durch das Induktionsgesetz die Gleichgewichtsbedingung des elektrischen Feldes zerstört ist). Bei ruhenden Körpern ist das elektrische Feld im Nichtleiter wegen der konstanten Ladungen [Gl. (2)] an Energieänderungen nicht beteiligt; sein Energieinhalt ist bei geschlossenen quasistationären Stromkreisen vernachlässigbar. — Bei Bewegungen von Körpern sollen die mechanischen Kräfte ebenso berechnet werden, wie im stationären Zustand. — Unter gewissen Umständen können auch ungeschlossene Stromkreise als quasistationär behandelt werden, dann nämlich, wenn der Stromkreis durch Kondensatoren unterbrochen wird. Dann fällt auch die Größe der in diesen vorhandenen elektrischen Energie ins Gewicht; das in ihnen konzentrierte elektrische Feld hat als quasistatisches zu gelten. Es fragt sich, ob nicht hierbei durch die Verletzung der Bedingung  $\operatorname{div} \mathfrak{G} = 0$  die oben gezeigten Vereinfachungen wieder hinfällig gemacht werden: es zeigt aber eine genauere Untersuchung, daß die für quasistationäre Vorgänge bei geschlossenen Strombahnen geltenden Gleichungen auch hier noch genügend genau zutreffen, daß insbesondere die magnetische Energie nach diesen Gleichungen auch hier noch genügend genau definiert ist unter der Bedingung, daß das elektrische Feld ganz vorwiegend in den Kondensatoren konzentriert und als quasistatisches an diese gebunden ist.

Man kann in diesem Zusammenhange fragen, welche Bedeutung es für das Innere metallischer Leiter hat,  $\frac{d\mathfrak{D}}{dt} = \bar{\varepsilon} \frac{d\mathfrak{C}}{dt}$  gegenüber  $\mathfrak{G} = \frac{1}{\varrho} \mathfrak{C}$  zu vernachlässigen; es sind jedoch in der Physik selbst bei den höchsten Änderungsgeschwindigkeiten keinerlei Beobachtungen bekannt, die dazu nötigten, den ersten Posten gegenüber dem zweiten in Rechnung zu stellen<sup>1</sup>.

Wie schon aus Gl. (1) erhellt, treten bei der quasistationären Behandlung die Besonderheiten der Feld- (Nahewirkungs-) Theorie Maxwells nicht in Erscheinung, erst bei den Ausbreitungsvorgängen sind die hier gezeigten Vereinfachungen nicht mehr zulässig.

Eine andere Kennzeichnung elektromagnetischer Vorgänge teilt ein in konzentrierte (gebundene) Felder und Raumbfelder. Sie geht davon aus, daß eine hinreichende Kenntnis der Eigenschaften vieler technischer Schaltungen häufig ohne Kenntnis der genaueren inneren Beschaffenheit des elektromagnetischen Feldes dadurch erworben werden kann, daß man als alleinigen Träger des elektrischen Feldes und Speicher elektrischer Energie den Kondensator einführt, als alleinigen Träger des magnetischen Feldes und Speicher magnetischer Energie, wie wir sehen werden, die Spule, als ausschließlichen Energieverbraucher den Ohmschen Widerstand. Diese Betrachtungsweise der „Ersatzbilder“ ist so weit brauchbar, als die Lokalisierung in den drei genannten Elementen zulässig erscheint.

### 33. Die magnetische Energie. Induktionskoeffizienten.

Für die Untersuchungen dieses Abschnittes, der den bisher noch fehlenden Ausdruck für die Energie des magnetischen Feldes erbringen soll [vgl. 23. Gl. (13), (14)], setzen wir unveränderte Lage aller beteiligten Körper gegeneinander voraus. Wir

<sup>1</sup> Für Vorgänge, die zeitlich harmonisch verlaufen gemäß  $\sin \omega t$ , bedeutet das, daß  $\omega \bar{\varepsilon} \varrho \ll 1$  ist. Dies trifft selbst für die höchsten Frequenzen  $\omega$  zu, falls man für die Dielektrizitätskonstante  $\bar{\varepsilon}$  metallischer Leiter, die bekanntlich nicht gemessen werden kann (vgl. 13.), Werte in der Größenordnung von  $\varepsilon_0$  einsetzt.

bestimmen den Energieausdruck für einen linearen Leiterkreis (a), dann den allgemeinen Ausdruck für die Energiedichte (b) und betrachten schließlich (c) den Sonderfall konstanter Permeabilität.

a) *Linearer Leiterkreis.*

Durch einen starren, ruhenden, linearen geschlossenen Leiterkreis (z. B. Spule) fließe ein Strom. Im magnetischen Feldraum können Eisenkörper vorhanden sein. Die elektrische Umlaufspannung ist in jedem Augenblick nach dem Induktionsgesetz [30. Gl. (7), (12)]

$$RJ - U_e = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

In der Zeitspanne  $dt$  wird von der Stromquelle ( $U^e$ ) die Energie  $N dt = U^e J dt = U^e dQ$  geliefert, also ist

$$U^e J dt - R J^2 dt = J d\Phi. \quad (1)$$

Bekannt ist  $R J^2 dt = \Psi dt$  als die während  $dt$  verlorene Menge Joulescher Wärme [27. Gl. (10)], daher ist die Energiebilanz

$$N dt - \Psi dt = J d\Phi. \quad (2)$$

Im stationären Zustand sind gelieferte Energie und Stromwärmeverlust einander gleich, im quasistationären Zustand übertrifft die elektrisch zugeführte Energie die Stromwärme um den Betrag  $J d\Phi$ . Bis hierher gelten die Überlegungen allgemein. Erst hier müssen wir, um die rechte Seite der Gl. (1), (2) zu deuten, eine Festsetzung treffen. Es sei mechanische Arbeit durch Bewegungen und Formänderungen ausgeschlossen. Dann muß  $J d\Phi$  nach dem Satz von der Erhaltung der Gesamtenergie als Zunahme der magnetischen Feldenergie gedeutet werden:

$$J d\Phi = dW_m, \quad \text{wenn} \quad A_{\text{mech}} = 0. \quad (3)$$

Die vom unmagnetischen Anfangszustand bis zu dem durch  $\Phi$  gekennzeichneten Endzustand im magnetischen Feld aufgespeicherte Energie ist daher

$$W_m = \int_0^\Phi J d\Phi, \quad (4)^1$$

wobei das „ $J, \Phi$ -Diagramm“ meist genügend genau durch Versuch aufgenommen werden kann. Beispiel: Für das geschlossene homogene Feld der mit  $z$  Windungen dicht bewickelten Ringspule (Querschnitt  $f$ , Länge der Leitlinie  $l$ , Volumen  $fl$ ) ist nach 28. Gl. (5):  $J = \frac{Hl}{z}$ , ferner nach Definition  $\Phi = z f B$ , daher

$$W_m = \int_0^\Phi J d\Phi = fl \int_0^B H \cdot dB. \quad (5)$$

Im Falle konstanter Permeabilität ändert sich  $B$ , und daher  $\Phi$ , proportional mit  $J$ , deshalb wird aus Gl. (4):

$$W_m = \frac{1}{2} J \Phi, \quad \text{wenn} \quad \mu = \text{const}_H. \quad (4a)$$

Wir dehnen die Überlegung auf ein gegebenes starres System von  $n$  linearen Stromkreisen mit teilweise gemeinsamem magnetischen Feld aus. Für jeden einzelnen (den  $i$ -ten) Stromkreis ist  $N_i dt = U_i^e J_i dt$  und  $\Psi_i dt = J_i^2 R_i dt$ , daher entsprechend Gl. (2):

$$N_i dt - \Psi_i dt = J_i d\Phi_i,$$

wobei  $d\Phi_i$  die Änderung des gesamten, von der Leitlinie des Stromkreises umfaßten magnetischen Flusses ist. Daher ist die gesamte Energiebilanz

$$\sum_1^n (N_i dt - \Psi_i dt) = \sum_1^n J_i d\Phi_i. \quad (6)$$

<sup>1</sup> Benennung  $W = \int U I dt$ , Einheit 1 Joule in bezug auf das P. M. S.

Unter Ausschluß mechanischer Arbeit ist somit die magnetische Energie des gesamten Systems

$$W_m = \int_0^{\Phi_1} J_1 d\Phi_1 + \int_0^{\Phi_2} J_2 d\Phi_2 + \dots + \int_0^{\Phi_n} J_n d\Phi_n. \quad (7)$$

Bei  $\mu = \text{const}_H$  sind die Verhältnisse linear, daher steht statt Gl. (7)

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n J_i \Phi_i. \quad (8)$$

### b) Magnetische Feldenergie.

Für den vorausgesetzten Zustand der Ruhe sind die differentiellen Feldgesetze des quasistationären Zustandes aus §2. Gl. (1), (3):

$$\mathfrak{G} = \text{rot } \mathfrak{H}, \quad (9) \quad \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = -\text{rot } \mathfrak{E}. \quad (10)$$

Wir vervielfachen Gl. (9) mit  $\mathfrak{E} \cdot d\tau$  und Gl. (10)  $\mathfrak{H} \cdot d\tau$ , addieren und benützen die Rechenregel  $\mathfrak{C} \text{rot } \mathfrak{A} - \mathfrak{A} \text{rot } \mathfrak{C} = \text{div } [\mathfrak{A} \mathfrak{C}]$ ; bei der Integration über den Raum  $\tau$  wenden wir den Satz von Gauß an und erhalten

$$\int_{\tau} \left\{ \mathfrak{E} \mathfrak{G} + \mathfrak{H} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} \right\} d\tau = \int_{\tau} \text{div } [\mathfrak{H} \mathfrak{E}] d\tau = \oint [\mathfrak{H} \mathfrak{E}] d\mathfrak{f}. \quad (11)$$

Bei der Integration über den unendlichen, felderfüllten Raum verschwindet das Flächenintegral über die unendlich ferne Hülle, sofern alle Strombahnen im Endlichen geschlossen sind, weil der Integrand gegen Null geht. Der erste Posten des Raumintegrals der linken Seite ist aber bekannt als die gesamte, chemisch und thermisch umgesetzte Leistung  $\Psi$  [§6. Gl. (3)], daher ist die Energiebilanz für das vollständige Feld

$$\Psi dt + \int_{\infty} \mathfrak{H} \cdot d\mathfrak{B} \cdot d\tau = 0. \quad (12)$$

Mechanische Arbeit ist ausgeschlossen; das elektrische Feld im Nichtleiter beteiligt sich nicht an quasistationären Energieänderungen (§2.), daher kann das zweite Glied lediglich Änderung der magnetischen Energie sein:

$$dW_m = \int_{\infty} \mathfrak{H} \cdot d\mathfrak{B} \cdot d\tau, \quad (13)$$

sodaß die magnetische Energie zu setzen ist

$$W_m = \int_{\infty} w_m \cdot d\tau \quad \text{mit der Energiedichte} \quad w_m = \int \mathfrak{H} \cdot d\mathfrak{B} = \int \mathfrak{H} \cdot d\mathfrak{B}', \quad (14)^1$$

da  $\mathfrak{M}$  eine konstante Größe ist. Die Integration hat bezüglich  $w_m$  längs einer „Magnetisierungskurve“ (§24.) zu geschehen, untere und obere Grenze sind Null und Endinduktion  $B$ . (Hier ist ersichtlich, daß bei ins Gewicht fallender Hysterese die magnetische Energie überhaupt nicht angegeben werden kann.) [Beispiel für Gl. (14): Homogenes Feld der Ringspule Gl. (5).] Damit ist der allgemeine Ausdruck der magnetischen Feldenergie gefunden. Wir werden ihn noch mehrfach anwenden. Für den Sonderfall  $\mu = \text{const}_H$  hat man

$$w_m = \frac{\mu}{2} \mathfrak{H}^2 = \frac{\mathfrak{H} \mathfrak{B}}{2} = \frac{\mathfrak{B}^2}{2\mu} \quad (\mu = \text{const}_H, \quad \mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}). \quad (15)$$

### c) Induktionskoeffizienten.

Unter der sehr einschneidenden Voraussetzung konstanter Permeabilität ist die mit einem einzelnen, geschlossenen Stromkreis verkettete magnetische Feldstärke in jedem Punkt des Feldraumes nach dem Durchflutungsgesetz proportional

<sup>1</sup> Benennung  $w = \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{B} = \frac{J}{L} \cdot \frac{U \Gamma}{L^2} = \frac{QU}{L^3}$ , Einheit l  $\frac{\text{Joule}}{\text{cm}^3}$  im P. M. S.

dem (quasi-) stationären Strom  $J$ ; dies mag durch  $\mathfrak{H} = J \cdot \mathfrak{H}_{(1)}$  ausgedrückt werden. Daher ist die Energiedichte nach Gl. (15) proportional  $J^2$ , und daher ebenso die gesamte magnetische Energie, die wir schreiben

$$W_m = \frac{\mu}{2} \int_{\infty} \mathfrak{H}^2 d\tau = \frac{J^2}{2} \cdot \mu \int_{\infty} \mathfrak{H}_{(1)}^2 d\tau = \frac{J^2}{2} L. \quad (16)$$

Das Integral  $L$ , als die Energie für die Stromstärke Eins, ist eine dem gegebenen Felde, also der Gestalt des Stromkreises eindeutig eigentümliche, von  $J$  unabhängige, konstante Größe, die Selbstinduktivität (Koeffizient der Selbstinduktion oder Eigeninduktivität) genannt wird. Die Definitionsgleichung für  $L$  ist daher

$$W_m = \frac{1}{2} L J^2; \quad L = \frac{2W_m}{J^2} \quad (\mu = \text{const}_H). \quad (17)^1$$

$L$  wird durch die gesamte magnetische Energie definiert. Diese kann man zerlegen in die magnetische Energie im Innern durchströmter Leiter  $W_i$  und die Energie  $W_a$  des äußeren Feldes:  $W_m = W_a + W_i$ . In entsprechender Zerlegung unterscheidet man zweckmäßig „äußere“ Selbstinduktivität  $L_a$  und „innere“ Selbstinduktivität  $L_i$ :

$$L_a = \frac{2W_a}{J^2}, \quad L_i = \frac{2W_i}{J^2}. \quad (18)$$

Wir betrachten zunächst die äußere Feldenergie mit Hilfe von Gl. (16):  $W_a = \frac{1}{2} \int_{\tau_a} \mathfrak{H} \mathfrak{B} d\tau$ . Dazu zerlegen wir den Außenfeldraum  $\tau_a$  in Röhren, deren jede einen konstanten magnetischen Fluß  $\delta\Phi = \mathfrak{B} \delta f = \text{const}$  führt. Wegen der Quellenfreiheit der magnetischen Induktion umschlingen diese Röhren den stromdurchflossenen Leiter und kehren in sich zurück. Mit dem Volumenelement  $\delta\tau = \delta f \cdot dr$  ( $dr$  parallel  $\mathfrak{B}$ ) ist der Energieinhalt einer geschlossenen Röhre

$$\delta W_a = \frac{1}{2} \mathfrak{B} \delta f \cdot \oint \mathfrak{H} d\tau = \frac{1}{2} \delta\Phi \cdot J,$$

und durch Summierung über den ganzen Außenfeldraum ergibt sich

$$W_a = \frac{1}{2} \Phi J. \quad (19)$$

Der Vergleich mit Gl. (18) zeigt

$$\Phi = L_a J \quad (20)$$

als eine Beziehung zwischen äußerer Selbstinduktivität und mit dem Strom im Außenfeldraum verketteten Fluß. Daraus folgt: nur für geschlossene Strombahnen ist die äußere Selbstinduktivität eine definierte Größe. Für jedes Längenelement eines einzelnen stromdurchflossenen Drahtes ist sie unendlich groß (die Energie eines Wirbelfadens ist divergent; bei unendlich weit entfernter „Rückleitung“ des Stromes ist die magnetische Energie des Stromkreises unendlich groß).

Wir betrachten die innere Selbstinduktivität. Für das stromführende Leiterinnere läßt sich eine Gl. (19) und (20) analoge Betrachtung nicht durchführen, weil man sich hier innerhalb des Wirbelgebietes des magnetischen Feldes befindet; man bleibt hier auf Gl. (18) angewiesen. — Man könnte daran denken, Gl. (20) als Definitionsgleichung für die gesamte Selbstinduktivität eines „linearen Leiterkreises“ aufzufassen, indem mit verschwindendem Leiterquerschnitt bei endlichem Strom die innere magnetische Energie unbegrenzt abnehmen würde. Jedoch ist dann auch stets die gesamte magnetische Energie mit der unbegrenzt wachsenden Feldstärke am Leiterumfang divergent, die Abstraktion des unendlich dünnen Leiters daher für die Berechnung von Selbstinduktionskoeffizienten nicht geeignet.

<sup>1</sup> In bezug auf das P. M. S.:

Benennung  $L = \frac{U J T}{J^2} = \frac{U T}{J}$ , Einheit  $1 \frac{\text{Volt sec}}{\text{Amp}} \equiv 1 \text{ Ohm sec} \equiv 1 \text{ Henry}$ .

Unter welchen Umständen  $L_a$  an die Stelle der Gesamtinduktivität  $L$  treten kann, muß demnach aus der einzelnen Aufgabe und den gegebenen Genauigkeitsansprüchen hervorgehen. Bei weiten Schleifen aus dünnen Metalldrähten wird der durch Vernachlässigung von  $L_i$  begangene Fehler gering sein, aber nicht mehr bei Spulen mit großem Wicklungsquerschnitt.

Bei mehreren geschlossenen Stromkreisen entsteht in jedem Raumpunkt bei  $\mu = \text{const}_H$  das gesamte magnetische Feld durch einfache Überlagerung der von den einzelnen Stromkreisen verursachten Einzelfelder. Z. B. hat man bei zwei Kreisen  $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2$ ,

$$W_m = \frac{\mu}{2} \int_{\infty} (\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2)^2 d\tau = \frac{\mu}{2} \int_{\infty} (\mathfrak{H}_1^2 + \mathfrak{H}_2^2 + 2 \mathfrak{H}_1 \mathfrak{H}_2) d\tau, \quad (21)$$

und nach den obigen Überlegungen ist  $H_1$  proportional  $J_1$ ,  $H_2$  proportional  $J_2$ . Daher muß die gesamte magnetische Energie zweier Kreise die Summe der Eigenenergien um einen dem Produkt  $J_1 J_2$  proportionalen Betrag übersteigen, es muß  $W_m$  von der Form sein

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 J_1^2 + \frac{1}{2} L_2 J_2^2 + M J_1 J_2 \quad (\mu = \text{const}_H). \quad (22)$$

$M$  heißt Koeffizient der gegenseitigen Induktion oder Gegen- oder Fremdingduktivität. Indem man diese Überlegung auf  $n$  geschlossene Stromkreise ausdehnt, findet man die mit ihnen verknüpfte magnetische Energie zu

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n L_{ik} J_i J_k \quad (\mu = \text{const}_H). \quad (23)$$

$L_{ii}$  Koeffizient der Selbstinduktion des Kreises  $i$ ,  $L_{ik} = L_{ki}$  Koeffizient der gegenseitigen Induktion zwischen den Kreisen  $i$  und  $k$ .

Wir heben nochmals die Voraussetzungen dieses Abschnittes hervor: keine Bewegung und quasistationärer Zustand, dazu in c): konstante Permeabilität.

Beispiele.

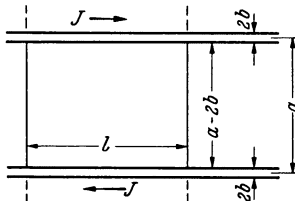


Abb. 33. 1. Zur Berechnung der Selbstinduktionskoeffizienten der Paralleldrahtleitung.

Die Energie im Feldraum der Ringspule 28. Gl. (5) ist bei  $\mu = \text{const}_H$  nach Gl. (16):  $W_m = \frac{1}{2} z^2 J^2 \frac{\mu l}{l}$ , daher ihre äußere Selbstinduktivität

$$L_a = z^2 \frac{\mu l}{l}. \quad (24)$$

Induktivität eines Abschnittes der Länge  $l$  einer langen Doppelleitung aus parallelen Runddrähten, Abstand der Achsen  $a$ , Durchmesser jedes Drahtes  $2b$ ;  $a \gg 2b$ , Abb. 1. Wir zerlegen in äußere und innere Energie:

$$W_i = \frac{\bar{\mu}_i}{2} \int H_i^2 d\tau, \quad d\tau = 2\pi r \cdot dr \cdot l, \quad H_i = \frac{J r}{2\pi b^2} \quad [28. \text{ Gl. } (8)]$$

$$W_i = \frac{\bar{\mu}_i J^2 l}{16\pi} = \frac{J^2}{2} L_i; \quad L_i = \frac{\bar{\mu}_i l}{8\pi}. \quad (25)$$

Die innere Energie und Selbstinduktivität sind vom Drahtquerschnitt unabhängig, daher eine Konstante für alle denkbaren Kreisdrähte.  $L_i$  ist doppelt zu nehmen (für beide Drähte).

$$W_a = \frac{1}{2} \Phi_a J = J \cdot \bar{\mu}_a l \int_b^{a-b} H_a dr, \quad H_a = \frac{J}{2\pi r} \cdot 2 \quad [28. \text{ Gl. } (2)]$$

$$W_a = \frac{\bar{\mu}_a J^2 l}{2\pi} \ln \frac{a-b}{b}; \quad L_a = \frac{\bar{\mu}_a l}{\pi} \ln \frac{a-b}{b}. \quad (26)$$

<sup>1</sup> Einen Beweis für  $L_{ik} = L_{ki}$  siehe 34. Gl. (16). — Für  $n = 2$  zieht man die vereinfachte Schreibweise der Koeffizienten  $L_1 = L_{11}$ ,  $L_2 = L_{22}$ ,  $M = L_{12} = L_{21}$  vor. — Benennung und Einheit der Induktionskoeffizienten siehe Anmerkung zu Gl. (17).

Daher ist die gesamte Selbstinduktion der Länge  $l$

$$L = L_n + L_i = \frac{\mu_0 l}{4\pi} \left\{ \mu_i + 4\mu_a \ln \frac{a-b}{b} \right\}. \quad (27)$$

Bei Eisendrähten  $\mu_i \gg \mu_a$  kann  $L_i$  ins Gewicht fallen oder überwiegen. In welcher Weise bei  $b \rightarrow \infty$  die Berechnung von  $W_m$  und  $L$  vereitelt wird, zeigt Gl. (26), (27). Auf die Berechnung von Fremdinduktivitäten kommen wir zurück.

### 34. Anwendungen des vektoriellen Potentials.

Für die grundsätzliche Wirbelfreiheit eines Feldes im Gleichgewichtszustand, z. B. des elektrostatischen, war Gewähr geleistet, wenn man die Feldstärke abgeleitet hatte als  $\mathfrak{G} = -\text{grad } \varphi$ , denn es ist mathematisch notwendig  $\text{rot grad } \varphi = 0$ . Für das skalare Potential  $\varphi$  ergab sich aus  $\eta = \text{div } \mathfrak{D}$  die Poissonsche Differentialgleichung  $\Delta \varphi = -\frac{\eta}{\epsilon_0}$ , falls  $\epsilon = \text{const}_E$ , und  $\varphi$  war aus der Quellenverteilung  $\eta$  allgemein bestimmt (17.). — Entsprechend: Die grundsätzliche Quellenfreiheit der magnetischen Induktion  $\mathfrak{B}$  ist verbürgt, wenn wir  $\mathfrak{B}$  aus einem Hilfsvektor  $\mathfrak{A}$  ableiten durch

$$\mathfrak{B} = \text{rot } \mathfrak{A}, \quad (1)$$

denn es ist mathematisch notwendig  $\text{div rot } \mathfrak{A} = 0$ ; Gl. (1) ist ein allgemeines Integral der Differentialgleichung  $\text{div } \mathfrak{B} = 0$ , allerdings kein eindeutiges, denn diese wird auch befriedigt durch  $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} + \text{grad } \chi$ , wobei  $\chi$  ganz beliebig sein kann. Durch die zweckmäßige Festsetzung, daß  $\mathfrak{A}$  quellenfrei sein soll:

$$\text{div } \mathfrak{A} = 0, \quad (2)$$

wird das „vektorielle Potential“  $\mathfrak{A}$  eindeutig. (Dadurch ist  $\chi$  aus der Gleichung  $\Delta \chi = 0$  und den Randbedingungen der Aufgabe eindeutig bestimmt.) Um zu einer Differentialgleichung für  $\mathfrak{A}$  zu kommen, setzen wir (quasi-) stationäre Zustände voraus, für diese gilt

$$\text{rot } \mathfrak{H} = \mathfrak{G}, \quad \text{div } \mathfrak{G} = 0. \quad (3)$$

Bei Abwesenheit von Dauermagneten ist  $\mathfrak{B} = \bar{\mu} \mathfrak{H}$ , daher

$$\mathfrak{G} = \text{rot } \mathfrak{H} = \text{rot} \left( \frac{1}{\bar{\mu}} \text{rot } \mathfrak{A} \right). \quad (4)$$

Es ist aber  $\text{rot} \left( \frac{1}{\bar{\mu}} \text{rot } \mathfrak{A} \right) = \frac{1}{\bar{\mu}} \cdot \text{rot rot } \mathfrak{A} + \text{rot } \mathfrak{A} \cdot \text{grad } \frac{1}{\bar{\mu}}$ . Eine hinreichend einfache Differentialgleichung wird nur unter der sehr einschränkenden Bedingung

$$\text{grad } \frac{1}{\bar{\mu}} = 0 \quad \text{oder} \quad \text{grad } \bar{\mu} = 0 \quad (5)$$

erhalten, also unter der Voraussetzung, daß die Permeabilität vom Ort und daher auch von der Feldstärke nicht abhängig ist:

$$\bar{\mu} = \text{const}_{(x, y, z, H)}. \quad (5a)$$

Dann erhält man  $\mathfrak{G} = \frac{1}{\bar{\mu}} \text{rot rot } \mathfrak{A}$  und daraus mit Gl. (2)

$$-\Delta \mathfrak{A} = \bar{\mu} \mathfrak{G}. \quad (6)$$

In Komponenten geschrieben ist dies die Poissonsche Potentialgleichung für jede der Komponenten, deren allgemeines Integral vom skalaren Potential her bekannt ist, daher ist auch notwendig der allgemeine Ausdruck für das vektorielle Potential dem skalaren Potential analog:

$$\mathfrak{A} = \frac{\bar{\mu}}{4\pi} \int \frac{\mathfrak{G} d\tau}{r}. \quad (7)^1$$

Wenn  $\mathfrak{A}$  aus räumlicher Strömung  $\mathfrak{G}$  zu bestimmen ist, so enthält Gl. (7) die Vorschrift: Es soll im Aufpunkt ein Vektor eingezeichnet werden, der nach Größe

<sup>1</sup> In bezug auf das P. M. S.: Benennung  $A = \frac{UT}{L}$ , Einheit 1 Volt  $\frac{\text{sec}}{\text{cm}}$ .

und Richtung ein gegebenes, von  $\mathcal{G}$  durchströmtes Volumenelement  $d\tau$ , geteilt durch den Abstand  $r$  dieses Elementes vom Aufpunkt, darstellt; ist dies für alle durchströmten Elemente durchgeführt, so ist die Summe der so gefundenen Vektoren proportional dem vektoriellen Potential. Seine kennzeichnenden Eigenschaften sind:  $\mathfrak{A}$  untersteht der Differentialgleichung Gl. (6), ist divergenzfrei [Gl. (2)], und verschwindet mit unbegrenzt zunehmender Entfernung des Aufpunktes. — Bei flächenhafter Strömung  $g$  gilt entsprechend Gl. (7):

$$\mathfrak{A} = \frac{\bar{\mu}}{4\pi} \int \frac{g \, d\mathfrak{f}}{r}. \quad (8)$$

Eine lineare Strombahn, als Stromfaden betrachtet, hat bei endlicher Stromstärke  $J$  einen sehr kleinen Querschnitt  $q$ , ihre Kurve sei  $\mathfrak{s}$ . Dann ist  $J = Gq$  und  $d\tau = q \cdot ds$ , also ist das „Stromelement“ der vektoriellen Länge  $d\mathfrak{s}$

$$J \, d\mathfrak{s} = \mathcal{G} \, d\tau. \quad (9)$$

Dann ergibt Gl. (7) für die geschlossene, lineare Strombahn

$$\mathfrak{A} = \frac{\bar{\mu} J}{4\pi} \oint \frac{d\mathfrak{s}}{r}. \quad (10)$$

Aus  $\mathfrak{A}$  bringt Gl. (1), (5) das magnetische Feld nach bekannten Rechenregeln der Vektorenrechnung

$$\mathfrak{H} = \int \frac{[\mathcal{G} \, \mathfrak{r}^0]}{4\pi r^2} \, d\tau; \quad \mathfrak{r}^0 = \frac{\mathfrak{r}}{r} \quad (11)$$

allgemein für räumliche Strömung  $\mathcal{G}$ , und für eine geschlossene lineare Strombahn

$$\mathfrak{H} = J \oint \frac{[d\mathfrak{s} \cdot \mathfrak{r}^0]}{4\pi r^2}, \quad (12)$$

unter  $J \, d\mathfrak{s}$  das Stromelement, unter  $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}^0 r$  den Vektor verstanden, der dessen Abstand vom Aufpunkt darstellt. Nach Gl. (12) scheint die Feldstärke bestimmt zu werden aus einer Summe von Beiträgen  $d\mathfrak{H}$  einzelner „Stromelemente“ gemäß

$$d\mathfrak{H} = \frac{J \, [d\mathfrak{s} \cdot \mathfrak{r}^0]}{4\pi r^2}, \quad (13)$$

wobei in bekannter Weise der Betrag  $dH = \frac{J \cdot ds}{4\pi r^2} \sin(d\mathfrak{s}, \mathfrak{r})$  und die Richtung rechtswendig senkrecht auf der durch  $d\mathfrak{s}$  und  $\mathfrak{r}$  gelegten Ebene ist: Diese Aussage wird als „Biot-Savartsche Regel“ bezeichnet; es handelt sich um eine Regel, nicht um ein Gesetz, denn die Annahme einzelner „Stromelemente“ von selbständigem Dasein widerspricht aufs schärfste der gemachten Voraussetzung stationären Zustandes: stationäre Ströme existieren nach Definition nur in geschlossenen Bahnen. Demgemäß kann auch immer nur das gesamte Feld Gl. (12) festgestellt werden, und die Aufteilung nach Gl. (13) ist zwar einleuchtend, aber willkürlich. Aber wenn auch Gl. (12) diesen grundsätzlichen Mangel vermeidet, so haftet ihr doch ein empfindlicher praktischer Mangel an, den wir erkennen, wenn wir sie dem Durchflutungsgesetz 28. Gl. (3) gegenüberstellen, dessen Rolle sie in den Fernwirkungstheorien gespielt hatte: dieses letzte gilt unabhängig von allen Stoffwerten, daher auch für Eisenkörper, hierauf gründet sich sogar gerade die Abschätzung des magnetischen Kreises [28. Gl. (12) bis (15)]. Die Biot-Savartsche Regel dagegen verbietet grundsätzlich magnetische Körper im Feldraum gemäß Gl. (5), (5a)<sup>1</sup>; das magnetische Feld ohne Eisen hat aber praktisch nur eine kleine Bedeutung.

Es sei nochmals auf den Anwendungsbereich des vektoriellen Potentials hingewiesen: konstante Permeabilität, stationäre (quasistationäre) Zustände sind vorausgesetzt. Die Ausbreitung des Feldes kommt hier nicht zum Ausdruck, die gewonnenen Formeln entsprechen der Fernwirkungs-, nicht der Nahewirkungstheorie. Typisch dafür ist die Anschauung der Stromelemente: das magnetische Feld bei beliebigem

<sup>1</sup> Ihre nachträgliche Berücksichtigung mit Hilfe des durch „influenzierte magnetische Ladungen“ erzeugten „Zusatzfeldes“ ist grundsätzlich möglich, macht aber die Rechnung in vielen Fällen undurchführbar verwickelt.



Aufpunktsabstand ist abhängig von der gleichzeitigen Größe der Stromelemente. Diese Fernwirkungsauffassung wird sich auch bei jeder weiteren Anwendung des vektoriellen Potentials bemerkbar machen.

Beispiele für Gl. (10) bis (13):

1. Feld eines Kreisstromes vom Radius  $a$  in seiner Achse (Abb. 1).

In  $P$  ist  $dH = \frac{J ds}{4\pi r^2} \sin(ds, r)$ , dabei  $r^2 = a^2 + z^2$ ,  $\sin(ds, r) = \frac{a}{r} = \text{const.}$  Bei der Integration entlang dem Kreise nach Gl. (12) bleiben nur die axialen Komponenten in  $P$  übrig, die nach außen gerichtetes heben sich auf, somit wird

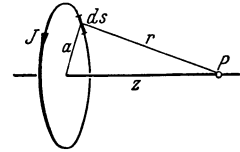


Abb. 34. 1. Magnetisches Feld eines Kreisstromes.

$$H = J \oint \frac{a ds}{4\pi r^2} = J \frac{a^2}{2r^3},$$

z. B. im Mittelpunkt des Kreises ( $z = 0$ ):  $H = \frac{J}{2a}$  (Tangentenbussole).

2. Vektoriell Potential eines langen, dünnen, geraden Runddrahtes. Er liege in der  $z$ -Achse eines rechtwinkligen rechtwinkligen Koordinatensystemes (Einheitsvektoren  $i, j, k$ ). Nach 28. Gl. (2) ist

$$B = \frac{\mu J}{2\pi r}, \mathfrak{B} = i B_x + j B_y; \text{ mit } r^2 = x^2 + y^2 \text{ ist } B_x = -\frac{\mu J}{2\pi} \cdot \frac{y}{r^2}, B_y = \frac{\mu J}{2\pi} \cdot \frac{x}{r^2}.$$

Das Vektorpotential in der Entfernung  $r$  ist  $\mathfrak{A} = i A = -i \frac{\mu J}{2\pi} \ln r$ , denn es ist  $(\text{rot } \mathfrak{A})_x = \frac{\partial A}{\partial y} = B_x, (\text{rot } \mathfrak{A})_y = -\frac{\partial A}{\partial x} = B_y$ , und  $\text{div } \mathfrak{A} = \frac{\partial A}{\partial z} = 0$ .

3. Das Vektorpotential zweier langer, dünner, paralleler gerader Drähte, die von entgegengesetzt gerichteten gleich großen Strömen  $J$  durchflossen sind, ergibt sich durch lineare Überlagerung der Einzelpotentiale. Bezeichnen  $r_1$  und  $r_2$  die Entfernungen des Aufpunktes von jedem der beiden Drähte, und liegt das Koordinatensystem entsprechend, so ist somit einfach  $\mathfrak{A} = -i \frac{\mu J}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2}$ .

Der magnetische Fluß durch alle nur denkbaren Flächen, die eine geschlossene Kurve  $\mathfrak{s}$  zum Rande haben, ist derselbe; mit Hilfe des Vektorpotentials wird er unabhängig von der Fläche ausgedrückt durch Gl. (1) und den Satz von Stokes:

$$\Phi = \int_i \mathfrak{B} d\mathfrak{f} = \int_i \text{rot } \mathfrak{A} \cdot d\mathfrak{f} = \oint \mathfrak{A} d\mathfrak{s}. \tag{14}$$

Er ist ausschließlich abhängig vom Werte des Vektorpotentials am Ort jedes Elementes der geschlossenen Randkurve;  $\mathfrak{A}$  selbst ist aus Gl. (7) bis (10) bestimmt. Daher wird z. B. der magnetische Fluß, den eine lineare, geschlossene Stromschleife ( $J; \mathfrak{s}_i$ ) durch eine geschlossene Kurve  $\mathfrak{s}_k$  hindurchschickt, und der wegen Gl. (5) proportional zu  $J$  ist, mit Gl. (10) und (14) durch ein Doppelintegral errechnet zu

$$\Phi_{ik} = J \cdot L_{ik} = J \cdot \frac{\mu}{4\pi} \oint_{s_i} \oint_{s_k} \frac{d\mathfrak{s}_i \cdot d\mathfrak{s}_k}{r_{ik}}. \tag{15}$$

$r_{ik}$  ist der Abstand der beiden Linienelemente  $d\mathfrak{s}_i$  und  $d\mathfrak{s}_k$ , die einen Winkel  $\vartheta$  einschließen, daher  $d\mathfrak{s}_i \cdot d\mathfrak{s}_k = ds_i ds_k \cos \vartheta$ . Wird nicht  $\mathfrak{s}_i$ , sondern  $\mathfrak{s}_k$  als vom Strom  $J$  durchflossener linearer Leiter (Stromfaden) angesehen, so ist das Ergebnis das gleiche, es ist also

$$L_{ik} = L_{ki}, \tag{16}$$

und dies gilt nicht etwa nur für beliebige, geschlossene „lineare Leiter“, sondern allgemein, wie man erkennt, indem man ausgedehnte Strömungen in einzelne „Stromfäden“ zerlegt. Das Doppelintegral in Gl. (15) ist die zur Berechnung der Koeffizienten  $L_{ik}$  für lineare Stromkreise bei konstanter Permeabilität häufig angewendete „Neumannsche Formel“.

Beispiel: Zwei parallele, konaxiale Kreise aus dünnem Draht. Abstand  $z$ , Durchmesser  $a$  und  $A$  (Abb. 2). Es ist  $d\mathfrak{s}_1 \cdot d\mathfrak{s}_2 = ds_1 ds_2 \cos \vartheta$ , ferner  $r^2 = z^2 + A^2 + a^2 - 2Aa \cos \vartheta$ , daher

$$L_{12} = \frac{\mu}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a d\varphi \cdot A d\vartheta \cdot \cos \vartheta}{r} = \frac{\mu}{2} A a \int_0^{2\pi} \frac{\cos \vartheta \cdot d\vartheta}{\sqrt{z^2 + A^2 + a^2 - 2Aa \cos \vartheta}}.$$

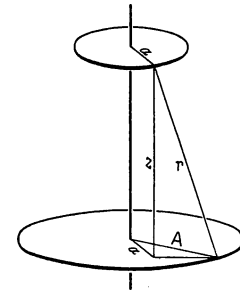


Abb. 34. 2. Gegenseitige Induktivität zweier konaxialer Kreisdrähte.

Das Ergebnis der elementar nicht durchzuführenden Integration lautet

$$L_{12} = \bar{\mu} \frac{\sqrt{Aa}}{k} \{(2 - k^2) K - 2 E\},$$

dabei sind  $K$  und  $E$  die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung vom Modul  $k$ , dessen Quadrat  $k^2 = \frac{4Aa}{(A+a)^2 + z^2}$  ist.

Für das Induktionsgesetz 30. Gl. (7) ergibt Gl. (14)

$$\oint \mathfrak{C} d\mathfrak{s} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \oint \mathfrak{A} d\mathfrak{s}. \quad (17)$$

Die elektrische Umlaufspannung längs  $\mathfrak{s}$  errechnet sich durch die zeitliche Änderung des Umlaufintegrals von  $\mathfrak{A}$ ; bei Bewegung von  $\mathfrak{s}$  mit der Geschwindigkeit  $\mathfrak{v}$  hat man mit 31. Gl. (6a)

$$\oint \mathfrak{C} d\mathfrak{s} = -\oint \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} d\mathfrak{s} - \oint [\mathfrak{B} \mathfrak{v}] d\mathfrak{s}. \quad (17a)$$

Es sei in diesem Zusammenhang darauf hingewiesen, daß der Betrag  $A$  des Vektorpotentials in jedem Feldpunkt nicht etwa dem dort herrschenden Induktionsbetrag  $B$  proportional ist; nach Ausweis von Gl. (1) ist dort, wo  $B$  am größten ist, nicht  $A$ , sondern seine nach Gl. (1) auszurechnende örtliche Änderung am größten.

Die zweite Hauptgleichung bei Ruhe  $\text{rot } \mathfrak{C} = -\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}$  wird durch das vektorielle Potential auf die Form  $\text{rot} \left( \mathfrak{C} + \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} \right) = 0$  gebracht; die geforderte Wirbelfreiheit läßt den Summenvektor als ein Potentialgefälle auffassen, daher kann man schreiben

$$\mathfrak{C} = -\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi, \quad (18)$$

und bei einer durch  $\mathfrak{v}$  beschriebenen Bewegung gemäß 31. Gl. (5):

$$\mathfrak{C} = -\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi - [\mathfrak{B} \mathfrak{v}]. \quad (18a)$$

Diese Gleichung wurde für den Fall stationären magnetischen Feldes  $\left( \frac{\partial}{\partial t} = 0 \right)$  in 31. Gl. (7) erläutert. — Gl. (18) läßt sich mit einiger Willkür<sup>1</sup> folgendermaßen auslegen: Das elektrische Feld besteht aus einem „dynamischen“ und einem „statischen“ Anteil. Der erste Teil  $-\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}$  ist quellenfrei [Gl. (2); geschlossene Feldlinien] und die Schwankungen des magnetischen Feldes sind als seine Wirbel seine Ursache; der zweite Teil  $-\text{grad } \varphi$  ist wirbelfrei, und die elektrischen Ladungen sind als seine Quellen seine Ursache.

Zur Berechnung der magnetischen Energie aus dem Vektorpotential bei konstantem  $\mu$  schreiben wir die Energiedichte [33. Gl. (15)] mit Gl. (1)

$$w_m = \frac{1}{2} \mathfrak{H} \mathfrak{B} = \frac{1}{2} \mathfrak{H} \text{rot } \mathfrak{A}.$$

Es ist aber eine Formel der Vektorenrechnung  $\text{div} [\mathfrak{A} \mathfrak{H}] = \mathfrak{H} \text{rot } \mathfrak{A} - \mathfrak{A} \text{rot } \mathfrak{H}$ ; im quasistationären Zustand ist  $\text{rot } \mathfrak{H} = \mathfrak{C}$ , sodaß die Integration über den unendlichen felderfüllten Raum ergibt

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{\infty} \mathfrak{H} \mathfrak{B} d\tau = \frac{1}{2} \int_{\infty} \mathfrak{A} \mathfrak{C} d\tau + \frac{1}{2} \int_{\infty} \text{div} [\mathfrak{A} \mathfrak{H}] d\tau.$$

Das zweite Integral formen wir mit dem Satz von Gauß in  $\oint [\mathfrak{A} \mathfrak{H}] d\mathfrak{f}$  um. Verlaufen alle Ströme im Endlichen, so verschwindet das Flächenintegral über die

<sup>1</sup> Die Willkür liegt darin, daß die rechnerischen Hilfsgrößen  $\mathfrak{A}$  und  $\varphi$  in hier nicht weiter zu verfolgender Weise näherer Bestimmung bedürfen. Gegenüber den dem Fernwirkungsstandpunkt entsprechenden Gl. (18), (18a) enthält das Induktionsgesetz (30., 31.) als Aussage der Nahewirkungsvorstellung die elektrische Feldstärke selbst als einheitliches Ganzes.

unendlich ferne, geschlossene Hülle, weil der Integrand mit wachsendem Aufpunktsabstand gegen Null geht, und es bleibt

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{\infty} \mathfrak{G} \mathfrak{B} d\tau = \frac{1}{2} \int_{\infty} \mathfrak{A} \mathfrak{G} d\tau. \quad (19)$$

Nur durchströmte Raumteile ( $\mathfrak{G} \neq 0$ ) liefern zu diesem Integral Beiträge, die Integration betrifft also nicht mehr, wie im Feldausdruck der linken Seite, den unendlichen felderfüllten Raum. Gl. (19) ist typisch für die Fernwirkungsvorstellung, denn sie macht für die magnetische Energie nicht das Feld selbst, sondern die elektrische Strömung und das vektorielle Potential verantwortlich [im wirbelfreien Feld drückt die entsprechende Formel Gl. (3), (4) in 18. die Feldenergie durch Ladungen und skalares Potential aus].

Indem man das Vektorpotential nach Gl. (7) in Gl. (19) einsetzt, erhält man das Doppelintegral

$$W_m = \frac{\bar{\mu}}{8\pi} \iint \frac{\mathfrak{G} d\tau \cdot \mathfrak{G}' d\tau'}{r}. \quad (20)$$

Dabei ist  $r$  der Abstand zwischen den beiden durchströmten Raumelementen  $\mathfrak{G} d\tau$  und  $\mathfrak{G}' d\tau'$ . Für einen einzelnen geschlossenen Stromkreis ist aber [33. Gl. (17)]  $W_m = \frac{1}{2} L J^2$ , daher Gl. (20) der allgemeine Ausdruck zur Berechnung von Selbstinduktionskoeffizienten. Bei flächenhafter Strömung an Stelle räumlicher Strömung tritt  $g df$  an die Stelle von  $\mathfrak{G} d\tau$ , also hat man

$$W_m = \frac{\bar{\mu}}{8\pi} \iint \frac{g df \cdot g' df'}{r}, \quad (20a)$$

und schließlich für lineare Leiter (Stromfäden) mit Gl. (9):

$$W_m = \frac{\bar{\mu}}{8\pi} \oint \oint \frac{J d\mathfrak{s} \cdot J' d\mathfrak{s}'}{r}. \quad (20b)$$

Mit Hilfe von Gl. (20a) kann man z. B. die Selbstinduktion einer Zylinderspule errechnen, indem man sie ersetzt durch einen Kreiszyylinder, auf dessen Mantelfläche zirkuläre Flächenströmung kreist. So ist Emde<sup>1</sup> vorgegangen. Gl. (20b) ist ebenso, wie Gl. (10) und (12) nicht für unendlich dünne Drähte zu verstehen, sondern für „Stromfäden“ von sehr kleinem Querschnitt, in die jede räumliche Strömung zerteilt gedacht werden kann. So läßt sich z. B. mit Hilfe von Gl. (19) der Beitrag  $\delta W_m$  angeben, den jeder geschlossene Stromfaden vom Querschnitt  $q$  und der Länge  $\mathfrak{s}$  zur magnetischen Energie beisteuert:

$$\delta W_m = \frac{1}{2} G q \oint \mathfrak{A} d\mathfrak{s} = \frac{1}{2} J \Phi, \quad (21)$$

wobei  $J = Gq$  die „Stromstärke des Stromfadens“ ist, und  $\Phi$  der magnetische Fluß, der durch eine von der geschlossenen Leitkurve  $\mathfrak{s}$  berandete, im übrigen beliebige Fläche hindurchtritt. Die Summation dieser Beiträge über alle Stromfäden aller Stromkreise ergibt für die gesamte magnetische Energie

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_i J_i \Phi_i, \quad (22)$$

wie in anderem Zusammenhang in 33. Gl. (8) gefunden wurde.

Während für die Berechnung von Selbstinduktionskoeffizienten<sup>2</sup> die magnetische Energie zugrunde zu legen war, weil mit unbegrenzt abnehmender Dicke der durchströmten Leiter das magnetische Feld an ihrem Umfang unbegrenzt groß wird, wurde für die Berechnung von Gegeninduktivitäten der magnetische Fluß durch eine geometrische geschlossene Kurve, die Leitlinie eines linearen Leiters ist, benutzt. Tritt an ihre Stelle ein körperlicher Leitungsdraht, so entsteht eine gewisse Un-

<sup>1</sup> Jahnke-Emde: Funktionentafeln (1933) S. 152.

<sup>2</sup> Formeln zur Berechnung von Selbst- und Gegeninduktivitäten z. B. in E. B. Rosa u. F. W. Grover: Bull. Bur. Stand. Bd. 8 (1912) Heft 1.

sicherheit hinsichtlich der Größe der berandeten Fläche. Sie fällt jedoch, wenn die Leiterkreise nicht sehr nahe beieinander liegen, nicht sehr stark ins Gewicht, denn die von einem Stromkreis hervorgebrachte magnetische Induktion wird an den betrachteten Leitungsdrahtstücken des anderen Kreises im allgemeinen keine besonders großen Werte aufweisen. Wollte man andererseits auf entsprechendem Wege die Selbstinduktivität berechnen, so würde die in Kauf zu nehmende Unsicherheit viel größer sein, da es sich hierbei um die unmittelbare Nachbarschaft des durchströmten Drahtes handelt, in der die magnetische Induktion erhebliche Werte aufweist.

### 35. Mehrere Stromkreise. Magnetische Streuung.

Die magnetische Energie eines Systems von  $n$  ruhenden starren linearen Stromkreisen bei konstanter Permeabilität hatten wir sowohl mit Hilfe der umfaßten magnetischen Flüsse [33. Gl. (8)] ausgedrückt, als auch mit Hilfe der Induktionskoeffizienten [33. Gl. (23)], die Übereinstimmung dieser Ausdrücke

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^n J_\nu \Phi_\nu = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n L_{ik} J_i J_k \quad (1)$$

erreicht man, indem man für jeden (den  $i$ -ten) Fluß setzt

$$\Phi_i = \sum_{k=1}^n L_{ik} J_k \quad (2)$$

und außerdem Gl. (16) in 34.:  $L_{ik} = L_{ki}$  berücksichtigt. Damit sind die mit den linearen Kreisen verketteten magnetischen Flüsse durch die Induktionskoeffizienten als Summe von Einzelflüssen ausgedrückt. Den Summanden  $L_{ii} J_i$  bezeichnet man als „Eigenfluß“, er ist der mit dem linearen Kreis  $i$  verkettete Fluß für den Fall, daß alle anderen Ströme Null sind, die übrigen Summanden sind die „Fremdflüsse“, die, von den anderen Strömen herrührend, mit dem Kreis  $i$  verkettet sind. Für zwei lineare Kreise ist somit

$$W_m = \frac{1}{2} (J_1 \Phi_1 + J_2 \Phi_2) = \frac{1}{2} L_1 J_1^2 + \frac{1}{2} L_2 J_2^2 + M J_1 J_2, \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= L_1 J_1 + M J_2, \\ \Phi_2 &= L_2 J_2 + M J_1, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

wobei in üblicher Weise  $L_1 \equiv L_{11}$ ,  $L_2 \equiv L_{22}$ ,  $M \equiv L_{12} = L_{21}$  geschrieben ist. Die Aufteilung der Flüsse ist hier einfach

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1^{(1)} &= L_1 J_1, & \Phi_1^{(2)} &= M J_2, \\ \Phi_2^{(2)} &= L_2 J_2, & \Phi_2^{(1)} &= M J_1, \end{aligned} \right\} \quad (4a)$$

$\Phi_1^{(1)}, \Phi_2^{(2)}$  Eigenflüsse,  $\Phi_1^{(2)}, \Phi_2^{(1)}$  Fremdflüsse.

Der Koeffizient  $M$  der gegenseitigen Induktion ist eine Funktion der gegenseitigen Lage der beiden Stromkreise. Wir fragen nach seinen Grenzwerten. Haben die beiden Stromkreise kein gemeinsames magnetisches Feld, so ist  $M = 0$ . Der andere Grenzwert ergibt sich, wenn man bedenkt, daß die magnetische Energie nur als positive Größe sinnvoll ist:  $W_m \geq 0$ , selbst wenn der Beitrag  $M J_1 J_2$  [Gl. (3)] durch das Vorzeichen eines Stromes negativ ausfällt. Wir untersuchen daher  $W_m$ , wenn bei  $J_1 = \text{const}$  für  $J_2$  alle möglichen Werte durchlaufen werden. Der Kleinstwert ergibt sich aus  $0 = \frac{\partial W_m}{\partial J_2} = M J_1 + L_2 J_2$  für den Stromwert  $J_2 = -\frac{M}{L_2} J_1$ , dabei hat  $W_m$  die Größe

$$W_m = \frac{1}{2} J_1^2 \left( L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right) \geq 0, \quad (5)$$

woraus folgt

$$L_1 L_2 \geq M^2 \geq 0. \quad (6)$$

Für den oberen Grenzwert der Gegeninduktivität  $M$  sagt man, es sei keine Streuung, und für den Kleinstwert, es sei keine Kopplung vorhanden, und definiert daher gemäß Gl. (6) den totalen Streufaktor

$$\sigma = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 L_2}; \quad 0 \leq \sigma < 1 \quad (7)$$

als die relative Abweichung der Gegeninduktion von ihrem oberen Grenzwert, und den Kopplungsfaktor  $k$  durch

$$k^2 = 1 - \sigma = \frac{M^2}{L_1 L_2}; \quad 1 > k \geq 0 \quad (8)$$

als das Verhältnis von  $M$  zu seinem oberen Grenzwert. Manchmal ist es nützlich,  $k^2$  als Produkt aufzufassen:

$$k^2 = k_1 k_2; \quad k_1 = \frac{M}{L_1}, \quad k_2 = \frac{M}{L_2}. \quad (8a)$$

Mit  $\sigma$  und  $k$  kommt man für die meisten Rechnungen aus. Dies zeigen die folgenden Beispiele.

1. Magnetische Energie und Streuung. Zwei lineare Stromkreise seien durch  $L_1, L_2, M$  und die Stromstärken  $J_1, J_2$  gegeben. Dann bestehen die in Gl. (3), (4), (4a) beschriebenen Verhältnisse. Darauf werde  $J_2 = 0$  gemacht. Derselbe magnetische Fluß  $\Phi_1$ , wie vorher, kann durch einen entsprechend veränderten Strom  $J_1^*$  erhalten werden: damit  $L_1 J_1^* = \Phi_1 = L_1 J_1 + M J_2$  ist, muß sein  $J_1^* = J_1 + J_2 \frac{M}{L_1}$ , unter  $J_1$  und  $J_2$  die Stromstärken der vorangegangenen Verhältnisse verstanden. Wegen des gänzlich anderen magnetischen Feldes stimmt die jetzt gespeicherte Energie  $W_1^* = \frac{1}{2} L_1 J_1^{*2}$  nicht mit der Energie  $W_m$  des ersten Falles Gl. (3) überein, der Unterschied beider Energien ist

$$W_m - W_m^* = \frac{1}{2} L_2 J_2^2 \left( 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} \right) = \sigma \cdot \frac{1}{2} L_2 J_2^2 > 0. \quad (9)$$

Wenn aber  $W_m > W_m^*$  bei gleichem  $\Phi_1$  ist, so kann die ausschließlich von  $J_2$  abhängige Differenz einem Flußanteil des Stromes  $J_2$  zugeschrieben werden, der nicht durch die Fläche des Kreises 1 hindurchtritt. Entsprechendes gilt bei Vertauschung der Kreise 1 und 2.

2. Kreis aus  $L$  und  $R$  bei Gleichstrom. In einem durch  $L$  und  $R$  gekennzeichneten Stromkreis (Spule) fließe infolge einer konstanten eingepprägten Spannung  $U^e$  ein Gleichstrom  $J_0 = \frac{U^e}{R}$ ; zur Zeit  $t = 0$  werde  $U^e = 0$  (Abb. 1). Dann ist die elektrische Umlaufspannung in jedem Augenblick

$$JR = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(LJ) = -L \frac{dJ}{dt}.$$

Die Lösung der Differentialgleichung ist

$$J = \frac{U^e}{R} \cdot e^{-t \frac{L}{R}}. \quad (10)$$

Die als Stromwärme verlorene Energie ist  $\int_0^\infty J^2 R dt = J_0^2 \frac{L}{2} = W_0$ .

Der zeitliche Ablauf wird bestimmt durch die „magnetische Zeitkonstante“, die in jedem Maßsystem in Zeiteinheiten gemessen wird,

$$\tau_m \equiv \frac{L}{R}. \quad (11)$$

Wird dem zuvor stromlosen Kreis zur Zeit  $t = 0$  ein  $U^e$  eingepragt, so ist die Umlaufspannung  $JR - U^e = -L \frac{dJ}{dt}$ , und die vollständige Lösung ist

$$J = \frac{U^e}{R} (1 - e^{-t/\tau_m}) \quad (12)$$

(vgl.  $J_1$  für  $k = 0$  in Abb. 3).

3. Zwei gekoppelte Kreise bei Gleichstrom. Die beiden Kreise seien durch ihre Konstanten  $R_1, L_1, M, L_2, R_2$  gekennzeichnet. Für  $t < 0$  sei  $J_1 = 0$  und  $J_2 = 0$ , für  $t = 0$  werde dem

Kreis 1 eine konstante Spannung  $U$  eingepreßt (Abb. 2). Dann ist die elektrische Umlaufspannung in beiden Kreisen mit Gl. (4), (4a):

$$\left. \begin{aligned} J_1 R_1 - U &= -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L_1 \frac{dJ_1}{dt} - M \frac{dJ_2}{dt}, \\ J_2 R_2 &= -\frac{d\Phi_2}{dt} = -L_2 \frac{dJ_2}{dt} - M \frac{dJ_1}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

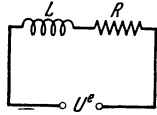


Abb. 35. 1. Stromkreis mit Selbstinduktion und Ohmschen Widerstand.

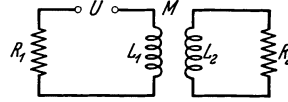


Abb. 35. 2. Zwei magnetisch gekoppelte Stromkreise.

Eine willkürliche Festsetzung des Vorzeichens von  $J_2$  gegenüber  $J_1$  ist nicht notwendig. Geht man mit dem Lösungsansatz von der Form  $e^{pt}$  in das System linearer, simultaner Differentialgleichungen Gl. (13) hinein, so ergibt sich für  $p$  eine quadratische Gleichung mit stets reellen Wurzeln. Wir beschränken uns auf den technisch gerechtfertigten Fall gleicher Zeitkonstanten beider Kreise:  $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ . Es ergibt sich mit Gl. (8)

$$p_1 = \frac{-1}{\tau(1+k)}, \quad p_2 = \frac{-1}{\tau(1-k)}; \quad (14)$$

da  $+1 \geq k \geq 0$ , ist  $|p_2| > |p_1|$ . Die Ströme verlaufen gemäß

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \frac{U}{R_1} \left\{ 1 - \frac{1}{2} (e^{p_1 t} + e^{p_2 t}) \right\}, \\ J_2 &= -\frac{U}{R_1} \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \cdot \frac{1}{2} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}), \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$J_2$  ist also  $J_1$  entgegengerichtet, steigt von Null zu einem Maximum an, das zur Zeit  $t = \frac{1}{p_2 - p_1} \ln \frac{p_1}{p_2}$  erreicht wird, und geht wieder gegen Null. Für  $k \rightarrow 0$  (Kreis 2 fehlt oder ist unterbrochen) wird  $p_1 = p_2 = \frac{-1}{\tau}$ ,  $J_2 = 0$ ;  $J_1$  verläuft daher nach Gl. (12). Für  $k \rightarrow 1$  dagegen wird  $p_1 = \frac{-1}{2\tau}$ ,  $p_2 = -\infty$ , daher

$$J_1 = \frac{U}{R_1} \left( 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2\tau}} \right), \quad J_2 = -\frac{U}{R_1} \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \cdot \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2\tau}}.$$

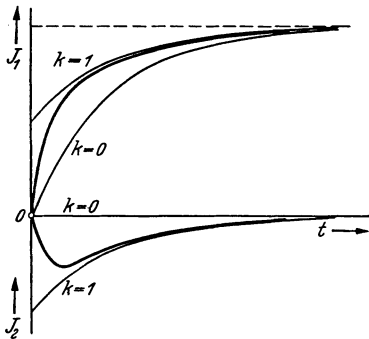


Abb. 35. 3. Verlauf der Ströme bei Einprägen einer konstanten Spannung.

Für die Zwischenwerte der Kopplung verlaufen  $J_1$  und  $J_2$  zwischen diesen Grenzkurven (Abb. 3). Man sieht:  $J_1$  steigt bei  $k > 0$  stets schneller an, als bei Fehlen des zweiten Kreises ( $k = 0$ ). Der mit dem Kreis 1 verkettete Fluß ist

$$\Phi_1 = L_1 J_1 + M J_2 = U \tau \left\{ 1 - \frac{1+k}{2} e^{p_1 t} - \frac{1-k}{2} e^{p_2 t} \right\}. \quad (16)$$

Da  $k \leq 1$  ist, überwiegt das zweite Glied der Klammer mit der gegenüber  $\tau$  vergrößerten Zeitkonstanten  $\tau(1+k)$ , der magnetische Fluß steigt also langsamer an, als bei fehlendem zweiten Kreis ( $k = 0$ ), im Grenzfall  $k = 1$  mit der Zeitkonstanten  $2\tau$ .

4. Eine Spule mit zwei gleichen, bifilaren Wicklungen hat nahezu  $L_1 = L_2 = L$ , daher ist bei Hintereinanderschaltung  $J_1 = J_2 = J$  die magnetische Energie

$$W_m = J^2 (L \pm M) = J^2 \frac{L_{res}}{2}, \quad (3a)$$

je nachdem, ob die beiden Wicklungen gleich- oder gegensinnig vom Strome durchflossen werden. Für  $\sigma \approx 0$  ist daher die resultierende Induktivität im zweiten Falle  $L_{res} \approx 0$ , im ersten  $L_{res} \approx 4L$ .

Von diesen bisher geschilderten Verhältnissen unterscheiden sich die weit wichtigeren praktischen Verhältnisse dadurch, daß die Leiter ausgedehnte, körperliche Spulen (Wicklungen aus vielen Windungen) sind, und daß der magnetische Feldraum Eisenkörper enthält. Z. B. besteht der Transformator in seiner einfachsten Anordnung, auf Grund deren sich die folgenden Begriffe entwickelt haben, aus zwei Spulen mit gemeinsamem, nahezu eisengeschlossenem

magnetischem Kreis. Hierbei gibt es Induktionsröhren, die beide Wicklungen vollkommen umschließen, dazu solche, die nur mit einem Teil beider Wicklungen verkettet sind, ferner Flußanteile, die ausschließlich entweder die eine oder die andere Wicklung jeweils entweder vollkommen oder auch nur Teile dieser umschlingen. Dazu ist die Permeabilität eine Funktion der Feldstärke, also von den Stromstärken abhängig. Da es praktisch aussichtslos erscheint, diese Verhältnisse übersichtlich und allgemein beschreiben zu können, geht man an ihrer Stelle von folgendem Idealbild aus: Ist nur Kreis 1 stromdurchflossen, so sei der mit  $J_1$  verkettete Fluß  $\Phi_1$ ; ein Teil davon:  $\Phi_{1s}$  umschlingt keine einzige Windung des Kreises 2. Diese Flüsse ersetzt man durch Rechenflüsse („fiktive“ Flüsse), die sämtliche  $z_1$  Windungen des Kreises 1 umschlingen, mittels der Vorschrift  $\Phi_1 = z_1 \varphi_1$ ;  $\Phi_{1s} = z_1 \varphi_{1s}$ . Dann kann man schreiben  $\varphi_1 = \varphi_{1h} + \varphi_{1s}$ . Ist nur Kreis 2 stromdurchflossen, so gewinnen wir ebenso  $\varphi_2 = \frac{\Phi_2}{z_2} = \varphi_{2h} + \varphi_{2s}$ . Ferner halten wir daran fest, daß die Einzelwirkungen sich linear überlagern. Dann ist der Fluß

$$\varphi_h = \varphi_{1h} + \varphi_{2h} \tag{17}$$

beiden Wicklungen gemeinsam. Er sei mit beiden Wicklungen vollkommen verkettet. Wir haben damit das Schema Abb. 4 gewonnen. Führen beide Spulen Strom, so setzt sich der Fluß jedes der beiden Kreise zusammen aus „Nutzfluß (gemeinsamem Fluß, Hauptfluß)“ und „Streufluß“ gemäß

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= z_1 \varphi_h + \Phi_{1s} , \\ \Phi_2 &= z_2 \varphi_h + \Phi_{2s} . \end{aligned} \right\} \tag{18}$$

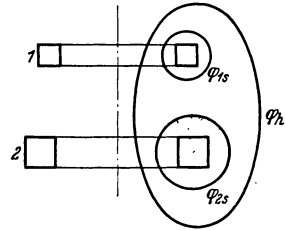


Abb. 35.4. Schema der Rechenflüsse „Hauptfluß“ und „Streufluß“ bei zwei magnetisch gekoppelten Kreisen.

Nutz- und Streufluß sind im allgemeinen Falle Rechengrößen, d. h., es handelt sich hier um eine Hilfsvorstellung, die nicht in ihren Einzelheiten, sondern nur mit ihrem Endergebnis mit den tatsächlich vorhandenen Verhältnissen in Übereinstimmung stehen soll. Beim Transformator mit geschlossenem Eisenkreis ist jedoch der Nutzfluß praktisch identisch mit dem wirklichen Fluß im Eisenkern. Da die Streuflüsse sicher mindestens zu einem Teil außerhalb des Eisens verlaufen, werden sie von der Schwankung der Eisenpermeabilität wenig beeinflusst und können daher den Strömen proportional gesetzt werden:

$$\Phi_{1s} = A_1 J_1, \quad \Phi_{2s} = A_2 J_2. \tag{19}$$

$A_1$  und  $A_2$  werden Streuinduktivitäten genannt, sie sind z. B. beim Transformator erfahrungsgemäß von den Stromstärken praktisch unabhängig. Wegen der beanspruchten linearen Überlagerung aber können wir  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  auch mit Gl. (4), (4a) ausdrücken, die gänzlich unabhängig von jeder willkürlichen Feldeinteilung allgemein gelten. Die fiktiven Flüsse müssen so groß sein, daß die wirklichen Induktionswirkungen durch sie zahlenmäßig richtig beschrieben werden. (Wir haben also hier, streng genommen, den Gültigkeitsbereich der Induktionskoeffizienten  $L_1, L_2, M$  auf den Fall  $\mu \neq const_H$  ausgedehnt.) Somit ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= L_1 J_1 + M J_2 = z_1 \varphi_h + A_1 J_1, \\ \Phi_2 &= L_2 J_2 + M J_1 = z_2 \varphi_h + A_2 J_2. \end{aligned} \right\} \tag{20}$$

Damit sind aber die Beziehungen der drei Unbekannten  $\varphi_h, A_1, A_2$  zu den wirklichen Flüssen  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  noch nicht eindeutig. Als dritte Gleichung zieht man nach W. Rogowski den Satz hinzu, daß

$$\varphi_h = 0 \quad \text{für} \quad z_1 J_1 = -z_2 J_2, \tag{21}$$

in Worten: ist die gesamte Durchflutung  $\Theta = z_1 J_1 + z_2 J_2 = 0$ , was durch Gegen-schaltung experimentell verwirklicht werden kann (nahezu erreicht bei Kurzschluß-schaltung), so sind die beiden Kreise nur mit ihren Streuflüssen verkettet, ein

gemeinsamer Fluß fehlt. Mit Gl. (21) ergibt sich aus Gl. (20) die Größe der „Streuinduktivitäten“

$$A_1 = L_1 - \frac{z_1}{z_2} M, \quad A_2 = L_2 - \frac{z_2}{z_1} M. \quad (22)$$

Somit sind die wirklichen Flüsse ausdrückbar als

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= L_1 J_1 + M J_2 = \left( L_1 - \frac{z_1}{z_2} M \right) J_1 + M \left( \frac{z_1}{z_2} J_1 + J_2 \right), \\ \Phi_2 &= L_2 J_2 + M J_1 = \left( L_2 - \frac{z_2}{z_1} M \right) J_2 + M \left( J_1 + \frac{z_2}{z_1} J_2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Daher ist der gemeinsame Fluß

$$\varphi_h = \frac{M}{z_1 z_2} (z_1 J_1 + z_2 J_2). \quad (24)$$

Mit Gl. (23) sind die Gesamtflüsse  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  in Streu- und Nutzflüsse aufgeteilt; die Aufteilung ist im allgemeinen fiktiv, so z. B. bei Luftspulen, wo der Begriff eines gemeinsamen Flusses sinnlos sein kann, dagegen ist sie beim eisengeschlossenen Transformator weitgehend verwirklicht. Zu den in Gl. (22) definierten Streuinduktivitäten  $A_1 = \frac{z_1 \varphi_{1s}}{J_1}$ ,  $A_2 = \frac{z_2 \varphi_{2s}}{J_2}$  und den Selbstinduktivitäten  $L_1 = \frac{z_1 \varphi_1}{J_1}$ ,  $L_2 = \frac{z_2 \varphi_2}{J_2}$  treten die Haupt- oder Nutzinduktivitäten

$$L_{1h} = L_1 - A_1 = \frac{z_1}{z_2} M, \quad L_{2h} = L_2 - A_2 = \frac{z_2}{z_1} M. \quad (25)$$

Bezeichnet man als Streuziffern die Verhältnisse

$$\sigma_1 = \frac{A_1}{L_{1h}}, \quad \sigma_2 = \frac{A_2}{L_{2h}}, \quad (26)$$

so besteht zu dem totalen Streufaktor und dem Kopplungsfaktor Gl. (7), (8) die Beziehung

$$\left. \begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} k_1 &= \frac{1}{1 + \sigma_1}, & \frac{z_2}{z_1} k_2 &= \frac{1}{1 + \sigma_2}, \\ (1 + \sigma_1)(1 + \sigma_2) &= \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1 - \sigma}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Für den Fall der Gl. (21), Gegenschaltung, ist die magnetische Energie nur im Streufeld gespeichert und insgesamt vom Betrage

$$W_m = \frac{1}{2} (A_1 J_1^2 + A_2 J_2^2) = \frac{J_1^2}{2} \left\{ A_1 + \left( \frac{z_1}{z_2} \right)^2 A_2 \right\} = \frac{J_1^2}{2} A_{1\text{res}}. \quad (28)$$

Gl. (28) und (21) sind die Grundlagen für die Bestimmung von  $A_1$ ,  $A_2$  (meist genügt die Kenntnis von  $A_{1\text{res}}$ ). Für einige Fälle hat Rogowski die Streuinduktivitäten durch Berechnung bestimmt. — Ein der Gegenschaltung Gl. (21) Rechnung tragendes Feldbild weist für jede Wicklung eine Flußverkettung auf, die gleich dem Streufluß jeder Spule ist. Nach Herleitung der Gl. (22), (23) ist der mit jeder Spule verkettete Fluß, der aus dem Feldbild gewonnen wird, stets in Übereinstimmung mit der Rechnung. Zur Bestimmung von  $\Phi_{1s}$  und  $\Phi_{2s}$  kann man das Feldbild bei einseitiger Erregung, d. h. bei Fehlen jeweils des anderen Stromes, benutzen, was bei linearen Leitern durch Auszählen der nach Definition zum Streufluß zu rechnenden Feldröhren ohne Schwierigkeiten geschieht. [Das bei einem beliebigen Stromverhältnis  $J_1/J_2$  vorhandene augenblickliche Feldbild ist so wenig maßgebend, als aus dem elektrischen Feldbild einer augenblicklichen Ladungsverteilung auf die Teilkapazitäten (19.) geschlossen werden kann.] Nach Ausweis von Gl. (22) kann eine Streuinduktivität einen negativen Wert besitzen, der betreffende Streufluß also negativ sein. Die Bedeutung dieses Umstandes erklärt die Gegenschaltung: mit Gl. (21) ist z. B.  $\Phi_1 = L_1 J_1 + M J_2 = L_1 J_1 - z_1/z_2 \cdot M J_1 = A_1 J_1$ . Negativer Streufluß bedeutet somit lediglich, daß der Fremdfuß der betreffenden Spule größer ist, als der Eigenfluß; da bei Gegenschaltung die Differenz beider zur Wirkung kommt, erscheint der resultierende Spulenfluß mit negativem Vorzeichen.



Schließlich darf nicht vergessen werden, daß die Induktionswirkungen nicht durch den Feldzustand, der z. B. aus einem gezeichneten Feldbild erkannt werden kann, sondern durch Zustandsänderungen hervorgebracht werden. Nur dann, wenn in jeder Zeitspanne sich alle Ströme im gleichen Verhältnis ändern, bleibt die Struktur des Feldes bei Intensitätsänderungen erhalten. Bei phasenverschobenen Wechselströmen z. B. ändert sich das Feldbild stetig. Es bleibt dann in schwierigen Einzelfällen nur übrig, auf das Induktionsgesetz selbst zurückzugehen, in welchem irgendeine der beschriebenen oder denkbaren Aufteilungen des magnetischen Flusses nicht enthalten ist.

### 36. Magnetische Kräfte, Energie und Arbeit.

#### a) Elektrodynamische Kraft (Stromkraft).

Für den Fall von der Feldstärke unabhängiger, mit dem Orte veränderlicher Permeabilität sind die Maxwell'schen fiktiven Flächenkräfte des magnetischen Feldes völlig analog zu denen des elektrischen Feldes. Um weitläufiger Wiederholungen zu vermeiden, verweisen wir deshalb auf die Ausführungen von 15. und benutzen hier lediglich die Ergebnisse.

Setzt man, wie dort,

$$\mathfrak{K} = \int_{\tau} \mathfrak{f} d\tau = \oint \mathfrak{p} df, \quad (1)$$

so entsprechen den „Spannungen“

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{G} \cdot \mathfrak{B}' n - n \frac{\mathfrak{G} \mathfrak{B}'}{2} \quad (2)$$

[und den zugehörigen Zug- und Druckkräften analog 15. Gl. (4), (4a), (4b)] räumliche Kraftdichten der Größe [vgl. 15. Gl. (9)]:

$$\mathfrak{f} = \operatorname{div} \mathfrak{B}' \cdot \mathfrak{G} - \frac{\mu_0}{2} \mathfrak{G}^2 \operatorname{grad} \mu + [\operatorname{rot} \mathfrak{G} \cdot \mathfrak{B}']. \quad (3)$$

Dabei ist  $\mu = \operatorname{const}_H$ ,  $\mathfrak{B}' = \bar{\mu} \mathfrak{G} = \mathfrak{B} - \mathfrak{M}$  gemäß 24. Gl. (3), (7) ( $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}$  nur, wenn die permanente Magnetisierung  $\mathfrak{M} = 0$ ). An Unstetigkeitsflächen steht für Gl. (3) eine Gleichung, die 15. Gl. (6) entspricht.

Das erste Glied in Gl. (3) ist analog der elektrischen Kraft auf elektrische Ladungen und tritt dort auf, wo die permanente Magnetisierung eine Quelle hat, denn es ist  $\operatorname{div} \mathfrak{B}' = -\operatorname{div} \mathfrak{M}$ . Den Sprung in der Normalkomponente von  $\mathfrak{M}$  hatten wir in 24. Gl. (11) als „Flächendichte des Magnetismus“ bezeichnet. Das zweite Glied tritt auf, wo der Stoffwert  $\mu$  sich örtlich ändert, so insbesondere an Unstetigkeitsflächen, an denen die Kraft als Zug auf die Oberfläche des Stoffes mit größerem  $\mu$  wirkt.

Für das dritte Glied benutzen wir die erste Hauptgleichung  $\operatorname{rot} \mathfrak{G} = \mathfrak{G}$  und erhalten

$$\mathfrak{f} = [\mathfrak{G} \mathfrak{B}'] = [\mathfrak{G} \cdot \bar{\mu} \mathfrak{G}] = [\mathfrak{G} (\mathfrak{B} - \mathfrak{M})], \quad (4)$$

$$\mathfrak{f} = [\mathfrak{G} \mathfrak{B}], \quad \text{wenn} \quad \mathfrak{M} = 0. \quad (4a)^1$$

*Grundgleichung der elektrodynamischen Kraft.*

Ist  $\mu = F(H)$ , so erfährt das zweite Glied von Gl. (3) eine Änderung, und in den beiden anderen ist unter  $\mu$  der örtliche Wert zu verstehen.

Wir haben zunächst die Zulässigkeit der Gl. (4), (4a) an den aus ihr zu ziehenden Folgerungen zu prüfen. Zunächst: Nach der ursprünglichen klassischen Theorie wirkt die mechanische Kraft nicht auf die elektrische Strömung selbst, sondern auf den Leiter, in welchem sie fließt. Durch ein zeitlich konstantes magnetisches

<sup>1</sup> Benennung in bezug auf das P. M. S.:  $k = \frac{J}{L^2} \cdot \frac{UT}{L^2} = \frac{K}{L^3}$  gemäß 9. Gl. (1).

Feld wird daher eine gegebene Strömungsverteilung nicht geändert. E. H. Hall hat gefunden, daß eine solche Beeinflussung doch vorhanden ist, sodaß also die Behauptung der klassischen Theorie nur angenähert zutrifft. — Nehmen wir in der aus 34. Gl. (9) bekannten Weise als durchströmtes Raumelement ein Längenelement eines „Stromfadens“  $\oint d\tau = J d\mathfrak{s}$ , so ergibt Gl. (4a)

$$d\mathfrak{R} = J [d\mathfrak{s} \mathfrak{B}]. \quad (5)$$

Die magnetische Kraft auf ein Stromelement gleicht ihrem Betrage nach dem aus  $ds$  und  $B$  gebildeten Parallelogramm, multipliziert mit  $J$ , ihre Richtung ist rechtswendig senkrecht zu dieser Fläche. Auch hier gelten die im Anschluß an 34. Gl. (13) gemachten Ausführungen über „Stromelemente“, wir untersuchen Folgerungen aus Gl. (5) für geschlossene Kreise. Erfährt das Stromelement eine kleine Verschiebung, die nach Betrag und Richtung durch den Vektor  $\delta l$  beschrieben wird, so ist die geleistete Arbeit

$$dA = d\mathfrak{R} \cdot \delta l = J \cdot \delta l [d\mathfrak{s} \mathfrak{B}] = J \cdot \mathfrak{B} [\delta l \cdot d\mathfrak{s}]; \quad (6)$$

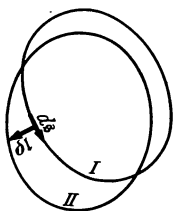


Abb. 36. 1. Zur Bestimmung der Arbeit bei Bewegung eines geschlossenen Stromfadens in einem magnetischen Feld.

das kleine Parallelogramm  $[\delta l \cdot d\mathfrak{s}]$  ist die Fläche, welche das Element  $d\mathfrak{s}$  bei seiner Verschiebung  $\delta l$  überstreicht, daher ist  $\mathfrak{B} [\delta l \cdot d\mathfrak{s}]$  der magnetische Induktionsfluß durch diese Fläche. Werden jedem Längenelement der geschlossenen Leitkurve  $\mathfrak{s}$  des Stromfadens kleine Verschiebungen  $\delta l$  erteilt (jedoch so, daß  $\mathfrak{s}$  eine geschlossene Kurve bleibt), so ist das entlang der Leitkurve  $\mathfrak{s}$  genommene Umlaufintegral  $\oint \mathfrak{B} [\delta l \cdot d\mathfrak{s}] = \delta \Phi$  der Zuwachs an magnetischem Fluß, der eintritt, wenn durch die Bewegung die Leitkurve aus ihrer alten Lage  $I$  in ihre neue Lage  $II$  übergeht (Abb. 1). Die

gesamte Arbeit ergibt sich daher als Summe aller Arbeiten, die für die einzelnen Stromelemente geleistet werden:

$$\delta A = J \cdot \delta \Phi; \quad (7)$$

Die Arbeit, welche die magnetischen Feldkräfte bei Bewegung eines geschlossenen linearen Leiters (Stromfadens) leisten, gleicht dem Produkt aus Stromstärke und Zuwachs des umrandeten Flusses. Dabei ist es gleichgültig, auf welche Weise die Flußänderung zustande kommt, ebenso, ob die Leitkurve ihre Gestalt ändert oder nicht. Ein frei beweglicher linearer Leiterkreis ändert daher im magnetischen Felde solange seine Lage und gegebenenfalls seine Gestalt, als mit der Bewegung eine Flußänderung verbunden ist. In der Ruhelage ist der umfaßte Fluß ein Extremum. Die Ruhelage ist eine Stellung stabilen Gleichgewichtes, wenn der umfaßte Fluß ein Maximum ist, denn dann muß für jede Lageänderung von außen her mechanische Arbeit geleistet werden. Der Leiter sucht eine solche Lage einzunehmen, daß er den nach den Umständen größten magnetischen Fluß umfaßt. Diese allgemeine, aus Gl. (4a) gefolgerte Regel wird durch die Erfahrung bestätigt.

In einem geschlossenen linearen Leiter fließt bei Fehlen eingepprägter Kräfte bei Flußänderungen nach dem Induktionsgesetz ein Strom von der Größe  $J = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}$ , der während der unendlich kleinen Zeitspanne  $dt$  als konstant angesehen werden darf. Die Arbeit der Feldkräfte während  $dt$  folgt hieraus und aus Gl. (7) zu

$$dA = J d\Phi = -\frac{dt}{R} \left( \frac{d\Phi}{dt} \right)^2 < 0, \quad (8)$$

also unter allen Umständen negativ: fließen bei einer Bewegung induzierte Ströme, so entstehen zugleich Kräfte auf den durchströmten Leiter, welche der Bewegung entgegenwirken. Dies ist die ebenfalls durch die Erfahrung bestätigte Lenzsche Regel (vgl. 31.).

Wir kommen schließlich zur magnetischen Induktion. Nach Gl. (5), (6) läßt sich aussagen: eine magnetische Induktionslinie ist eine Linie, längs der ein stromführender Leiter bewegt werden kann, ohne daß mechanische Arbeit geleistet wird:  $[\delta\mathfrak{l} \cdot d\mathfrak{s}] = 0$ . Ferner: bewegt man einen geschlossenen linearen Stromkreis in einem zeitlich konstanten magnetischen Feld beliebig, jedoch so, daß Endlage und Anfangslage identisch sind, so wird insgesamt keine Arbeit gewonnen<sup>1</sup>. Dies lehrt die Erfahrung. Sie wird mit Gl. (7) so ausgesprochen:

$$\delta A = J \oint \mathfrak{B} [\delta\mathfrak{l} \cdot d\mathfrak{s}] = 0. \quad (9)$$

Hierbei ist aber jetzt  $[\delta\mathfrak{l} \cdot d\mathfrak{s}]$  das Flächenelement  $d\mathfrak{f}$  der durch die Bewegung der Kurve beschriebenen geschlossenen Hülle, somit folgt aus Gl. (9), da  $J \neq 0$  ist:

$$\oint \mathfrak{B} d\mathfrak{f} = 0 \quad \text{oder} \quad \text{div } \mathfrak{B} = 0 \quad (10)$$

mit dem Satz von Gauß. Der ausgesprochene Erfahrungssatz bestätigt also entweder zusammen mit Gl. (10) die Richtigkeit von Gl. (7) und damit die Zulässigkeit von Gl. (5) und (4a), oder er beweist zusammen mit Gl. (7) die Quellenlosigkeit der magnetischen Induktion. Einen anderen Beweis für diese in 23. Gl. (9) aufgestellte Behauptung hatten wir auch in 31. Gl. (5) bei der Induktion durch Bewegung kennengelernt.

*b) Mechanische Arbeit und Kräfte bei Eisenkörpern  $\mu = F(H)$*

untersuchen wir für den wichtigsten Fall: Im magnetischen Felde eines starren Stromkreises sei ein Eisenkörper (von mehreren) in einer Richtung beweglich, seine jeweilige Stellung daher durch den Wert eines Parameters  $a$  gegeben. Dann haben wir, zu 33. Gl. (1), (2) zurückkehrend, lediglich den Überschuß

$$N dt - \Psi dt = J d\Phi \quad (11)$$

anders auszulegen: es muß nämlich nach dem Satz von der Erhaltung der Gesamtenergie in ihm teils die mechanisch geleistete Arbeit  $dA$ , teils die Änderung magnetischer Feldenergie zum Ausdruck kommen:

$$J d\Phi = dA + dW_m. \quad (12)$$

Dies gilt während des Bewegungsvorganges, dagegen ist, wie in 33. Gl. (3),  $J d\Phi = dW_m$ , solange keine Arbeit  $A$  geleistet wird. Daher ist in dem durch  $a_1$  und  $\Phi_1$  gekennzeichneten Anfangszustand und dem durch  $a_2$  und  $\Phi_2$  gekennzeichneten Endzustand die magnetische Energie nach 33. Gl. (4) bestimmt durch

$$W_1 = \int_0^{\Phi_1} J d\Phi, \quad W_2 = \int_0^{\Phi_2} J d\Phi. \quad (13)$$

Daher ist nach Gl. (12) die mechanische Arbeit beim Übergang von  $a_1, \Phi_1$  zu  $a_2, \Phi_2$ :

$$\int_{a_1}^{a_2} dA = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} J d\Phi - (W_2 - W_1). \quad (14)$$

Nach Gl. (11) ist aber

$$V|_1^2 = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} J d\Phi = \int_{t_1}^{t_2} (N - \Psi) dt \quad (15)$$

<sup>1</sup> Dies entspricht dem Erfahrungssatz des elektrostatischen Feldes, daß keine Arbeit gewonnen wird, wenn in einem solchen ein geladener Körper entlang einer geschlossenen Kurve bewegt wird [8. Gl. (4)].

der während des Bewegungsvorganges von der Quelle über die Stromwärmemenge hinaus gelieferte Energieüberschuß, daher ist

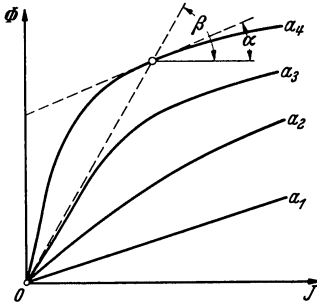


Abb. 36. 2. Der magnetische Fluß als Funktion des Stromes bei verschiedenen Stellungen des beweglichen Eisenkörpers.

$$A \Big|_{a_1}^{a_2} = V_1^2 - (W_2 - W_1). \tag{16}$$

Für die Schar der (experimentell bestimmbaren) „Magnetisierungskurven“  $\Phi = f(J; a)$  ist von der Abschätzung des magnetischen Kreises [28. Gl. (14)] her bekannt, daß die schwach gekrümmten Kurven großen, die stark gekrümmten Kurven kleinen Luftwegen zugehören (Abb. 2). Für das Integral  $V$  Gl. (15) muß der Integrationsweg, die Übergangskurve, bekannt sein. Besonders einfache Fälle sind:

a)  $\Phi = \text{const}$ <sup>1</sup>. Hier ist  $\Phi_1 = \Phi_2$ ,  $V = 0$ , daher

$$A = -(W_2 - W_1), \tag{17}$$

die mechanische Arbeit wird allein durch Abnahme der Feldenergie bestritten, die Quelle deckt nur

die Stromwärmeverluste (Abb. 3).

$$dA = -dW, \text{ daher } K_a = -\left(\frac{\partial W}{\partial a}\right)_{\Phi = \text{const}} \tag{18}$$

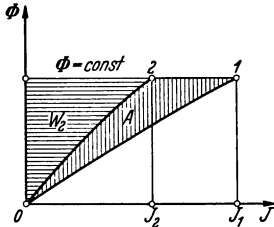


Abb. 36. 3. Arbeitsleistung bei konstantem Induktionsfluß.

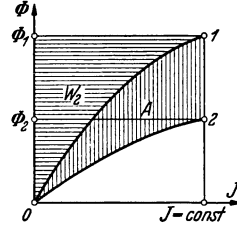


Abb. 36. 4. Arbeitsleistung bei konstantem Strom.

b)  $J = \text{const}$ <sup>2</sup>. Nach Gl. (15) ist  $V = J(\Phi_2 - \Phi_1)$ ; die Verteilung dieses Überschusses in Feldenergie und Arbeit gibt das Diagramm Abb. 4 an; nach Gl. (16) ist

$$A = J(\Phi_2 - \Phi_1) - (W_2 - W_1) = \{J\Phi_2 - W_2\} - \{J\Phi_1 - W_1\} \equiv F_2 - F_1. \tag{19}$$

Die damit neu eingeführte Funktion  $F$  ist gekennzeichnet durch

$$\left. \begin{aligned} F + W &= J\Phi, & dF + dW &= d(\Phi J), \\ \text{mit } W &= \int_0^\Phi J d\Phi & \text{daher } F &= \int_0^J \Phi dJ, \end{aligned} \right\} \tag{20}$$

dies alles aus Abb. 4 leicht abzulesen. Also ist auch

$$J = \frac{\partial W}{\partial \Phi}, \quad \Phi = \frac{\partial F}{\partial J}. \tag{20a}$$

Es ist somit die mechanische Arbeit

$$dA = +dF, \text{ daher } K_a = \left(\frac{\partial F}{\partial a}\right)_{J = \text{const}} \tag{21}$$

Für den Fall nicht merklich gekrümmter Magnetisierungskurve  $\mu = \text{const}_H$  ist

$$dF = dW; \quad F = W = \frac{1}{2} \Phi J. \tag{22}$$

In diesem Falle verteilt sich  $V$  zu gleichen Teilen in mechanische Arbeit und Zuwachs an Feldenergie, es ist dann

$$dA = +dW, \text{ daher } K_a = +\left(\frac{\partial W}{\partial a}\right)_{J = \text{const}} \text{ bei } \mu = \text{const}_H. \tag{23}$$

<sup>1</sup> Angenähert erfüllt bei mit konstanter Wechselspannung betriebenen Elektromagneten.

<sup>2</sup> Angenähert erfüllt bei mit konstantem Gleichstrom betriebenen Elektromagneten.

c)  $\Phi \neq const, J \neq const$  (Abb. 5). Man setzt das Element der Übergangskurve zusammen aus einem senkrechten Stückchen, für das  $J = const$ , und einem waagerechten Stückchen, für das  $\Phi = const$ ; so erhält man  $dA = dF - dW$  und mit der bekannten Übergangskurve

$$dA = \left( \frac{\partial F}{\partial \Phi} \frac{d\Phi}{da} - \frac{\partial W}{\partial J} \frac{dJ}{da} \right) da. \quad (24)$$

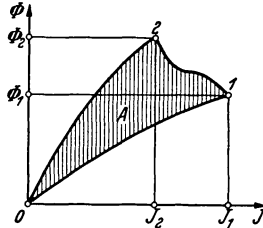


Abb. 36. 5. Arbeitsleistung bei bekannter „Übergangskurve“.

c) *Induktionskoeffizienten.*

Es ist nützlich, bei veränderlicher Permeabilität als Selbstinduktivität  $L$  die Neigung der Magnetisierungskurve im Betriebspunkt zu definieren (*tg*  $\alpha$  in Abb. 2). Diese ist mit Gl. (20a)

$$L = \frac{d\Phi}{dJ} = \frac{\partial^2 F}{\partial J^2} \quad (25)$$

mit der Maßgabe:  $L$  Funktion des Stromes und des (oder der) Lageparameters. Die Überlegung kann ausgedehnt werden auf beliebig viele Stromkreise und Lageparameter. Dann kann man die gegenseitige Induktivität  $L_{ik}$  entsprechend Gl. (25) definieren zu

$$L_{ik} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial J_k} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial J_i} = \frac{\partial^2 F}{\partial J_i \partial J_k} \quad (26)$$

mit der Maßgabe:  $L_{ik}$  Funktion aller Ströme und aller Lageparameter. Die Induktionskoeffizienten sind somit durch die Funktion  $F$  bestimmbar, die nur im Sonderfalle konstanter Permeabilität mit  $W$  identisch ist.

Eine grundsätzlich andere Definition bei Spulen mit kleiner Streuung ist für die Selbstinduktivität

$$L = \frac{\Phi}{J}, \quad (27)$$

also die Neigung der Ursprungsgeraden durch den Betriebspunkt (*tg*  $\beta$  in Abb. 2), wobei  $\Phi$  im Betriebspunkt aus dem magnetischen Kreis abgeschätzt und die Streuung vernachlässigt wird. Daher ist bei  $z$  Windungen  $\Phi = z\varphi$ , und der nach 28. Gl. (12)

bis (17) bestimmte magnetische Fluß durchsetzt  $z$  Windungsflächen:  $\varphi = \frac{zJ}{P}$ , wobei  $P = \sum_{\circ} P_v = \sum_{\circ} \frac{l_v}{\mu_v f_v}$  den magnetischen Widerstand des gesamten Kreises bedeute.

Daher gilt

$$L = z^2 \cdot \frac{1}{P}. \quad (28)$$

Die Überlegung kann auf mehrere Kreise ausgedehnt werden; bei entsprechender Definition von  $P_{12}$  als gesamtem magnetischem Widerstand des magnetischen Kreises 1 . . 2 . . 1 wird

$$M = z_1 z_2 \cdot \frac{1}{P_{12}}. \quad (29)$$

Man kann schließlich die Induktionskoeffizienten so definieren, daß die magnetische Energie sich richtig ergibt, z. B. bei einem Kreis

$$L = \frac{2}{J^2} \int_0^{\Phi} J d\Phi, \quad (30)$$

oder endlich aus dem „induktiven Widerstand“ der Grundschwingung bei Wechselstromvorgängen (vgl. 37.). Stets gilt, wie oben, daß die Induktionskoeffizienten Funktionen der Ströme und der Lageparameter sind.

Beispiel: Aus Gl. (28) ergibt sich für eine „eisengeschlossene Spule“ ( $f_E$  Querschnitt,  $l_E$  Länge der Leitlinie des Eisenkörpers):

$$L = z^2 \frac{\bar{\mu}_E f_E}{l_E}, \quad (28a)$$

und wenn der Eisenschluß durch einen Luftspalt  $d \ll l_E$  unterbrochen ist:

$$L = z^2 \mu_0 \frac{\mu_E f_E}{\mu_E d + l_E}, \quad (28b)$$

woraus der große Einfluß des Luftspaltes zu erkennen ist. Der Ohmsche Widerstand einer Spule aus  $z$  Windungen der mittleren Länge  $l_W$  und mit dem Drahtquerschnitt  $q$  ist  $R = z \rho \frac{l_W}{q}$ . Ist  $f_W$  der Wicklungsquerschnitt (Spulenseitenquerschnitt), so ist bis auf einen von der Raumausnutzung abhängigen Erfahrungsfaktor  $f_W \approx z q$ , daher  $R \approx z^2 \rho \frac{l_W}{f_W}$ , somit ist die magnetische Zeitkonstante bei gegebenem Wickelraum  $\tau_m = \frac{L}{R}$  unabhängig von der Windungszahl, z. B. mit Gl. (28b):

$$\tau_m = \frac{\mu_E \mu_0}{\rho} \cdot \frac{f_W f_E}{l_W (l_E + \mu_E d)}. \quad (28c)$$

Hieran schließt sich die häufig vorliegende Aufgabe an, festzustellen, unter welchen Umständen die der magnetischen Feldstärke  $H$  proportionale Wirkung eines Gerätes (Nadelgalvanometer, Arbeitsmagnet) am größten wird, wenn Wickelraum und magnetischer Kreis und die Gleichstromquelle ( $U^e$ ,  $R_i$ ) gegeben sind. Es ergab sich, daß der Widerstand näherungsweise  $z^2$  proportional ist:  $R \approx z^2 R_0$ , ferner ist  $H = \text{const} \cdot Jz$ . Nun ist  $J = \frac{U^e}{R_i + R}$ , und aus der Beziehung zwischen Widerstand und Windungszahl folgt

$$Jz = J \sqrt{\frac{R}{R_0}} = \text{const} \cdot J \sqrt{R} = \text{const} \cdot H.$$

Dies ist z. B. ein bekannter Satz der Galvanometertheorie: Bei gegebenem Wickelraum ist die Stromempfindlichkeit (das Verhältnis des  $H$  proportionalen Ausschlages zu  $J$ ) der Wurzel aus dem Widerstand proportional. Durch Vereinigung der Gleichungen erhalten wir

$$H = \text{const} \cdot \frac{U^e \sqrt{R}}{R_i + R}.$$

Der flache Höchstwert liegt bei  $R = R_i$ . In diesem Falle wird nach 27. Gl. (16a) dem Widerstand  $R$  zugleich die größte Wärmeleistung  $N$  zugeführt. In der Tat lehrt der Vergleich der beiden Gleichungen, daß hier  $H$  proportional  $\sqrt{N}$  ist. Daß die Bedingungen für größte Wärmeleistung und für größte Feldstärke zusammenfallen, liegt an den besonderen Voraussetzungen der Aufgabe, im allgemeinen darf man beide Aufgabestellungen nicht miteinander verwechseln.

Wir bestimmen schließlich die Arbeitsverhältnisse für den Fall, daß bei  $\mu = \text{const}_H$  durch die Bewegung der Leiter bei konstanten Strömen die Induktionskoeffizienten verändert werden.

Bei einem einzelnen linearen Kreis ergibt sich sofort aus  $W = \frac{1}{2} J^2 L$  mit Gl. (23):  $dA = dW = \frac{1}{2} J^2 \cdot dL$ . Für ein System  $n$  linearer geschlossener Stromkreise ist [33. Gl. (23)]

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n J_i J_k L_{ik}, \quad (31)$$

und der mit dem  $i$ -ten Kreis verkettete Fluß [35. Gl. (2)] ist

$$\Phi_i = \sum_{k=1}^n J_k L_{ik}. \tag{31a}$$

Daher ist bei konstanten Strömen  $J_1, J_2, \dots, J_n$ :

$$J_i \cdot d\Phi_i = \sum_{k=1}^n J_i \cdot J_k dL_{ik}. \tag{32}$$

Es gilt aber die allgemeine Gl. (12):  $J d\Phi = dA + dW$  für jeden einzelnen Kreis, unter entsprechender Auslegung der  $dA$  und  $dW$ , und daher gilt für ihre Summe, da sich bei konstanter Permeabilität die Einzelvorgänge einfach überlagern

$$\sum_{i=1}^n J_i d\Phi_i = dA + dW, \tag{33}$$

jetzt aber unter  $dA$  die gesamte mechanische Arbeit, unter  $dW$  den gesamten Feldenergiezuwachs verstanden. Wir führen die Summation Gl. (33) mit Gl. (32) aus und vergleichen mit dem aus Gl. (31) folgenden  $dW$ :

$$\sum_{i=1}^n J_i d\Phi_i = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n J_i J_k dL_{ik} = 2 dW,$$

denn nach Gl. (31):

$$dW = \frac{1}{2} d \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n J_i J_k L_{ik} \right\}, \quad J_i = \text{const}, \quad J_k = \text{const}.$$

Also folgt aus Gl. (33)

$$dA = dW = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n J_i J_k \cdot dL_{ik} \tag{34}$$

als bei konstant gehaltenen Strömen durch Bewegung geleistete mechanische Arbeit; insgesamt nimmt das System den doppelten Energiebetrag auf, die eine Hälfte kommt als mechanische Arbeit zum Ausdruck, die andere wird Feldenergiezuwachs. Die Kraft bei Veränderung der Selbstinduktivität  $L$  ist daher  $K_a = \frac{1}{2} J^2 \frac{\partial L}{\partial a}$  und die Kraft bei Veränderung der Gegeninduktivität  $L_{ik}$  ist  $K_a = J_i J_k \frac{\partial L_{ik}}{\partial a}$ , der Richtungssinn erhellt aus der zu Gl. (7) erörterten Regel.

### 37. Der elektrische Schwingungskreis.

Die durch Aneinanderfügen der drei konstanten Größen: Widerstand  $R$ , Selbstinduktivität  $L$ , Kapazität  $C$  gebildete Schaltung behandeln wir als ungeschlossenen quasistationären Stromkreis (32.:  $W_m$  soll durch  $L$ ,  $W_e$  quasistatisch ausgerechnet werden) in zwei Fällen: A. Der Kreis ist vom Zeitpunkt  $t = 0$  an sich selbst überlassen, freier Vorgang. B. Auf den Kreis wirkt fortwährend eine periodische Spannung ein, erzwungener Vorgang. Abb. 1. Alle Vorgänge lassen sich beschreiben mit Hilfe zweier kennzeichnender Konstanten

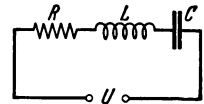


Abb. 37.1. Elektrischer Schwingungskreis (Reihenschaltung).

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= \frac{1}{\sqrt{LC}} && \text{„ungedämpfte Eigenfrequenz“} \\ D &= R \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{R}{\Omega L} = \Omega R C && \text{„Dämpfung“} \end{aligned} \right\} \tag{1}^1$$

<sup>1</sup> Benennung in bezug auf das P. M. S. gemäß Anm. zu 10. Gl. (1), 27. Gl. (4), 33. Gl. (17):  $\Omega = \frac{1}{T}$ , Einheit 1 sec<sup>-1</sup>;  $D$  reine Zahl. (Denn:  $L = \frac{U T}{J}$ ,  $C = \frac{J T}{U}$ ,  $R = \frac{U}{J}$ .)

A. *Der freie Vorgang* ( $U = 0$  in Abb. 1). Für jede Zeitspanne  $dt$  ist nach dem Satz von der Erhaltung der Gesamtenergie  $J^2 R dt = -dW_m - dW_e$ , daher nach dem oben Gesagten und nach 33. Gl. (17), 11. Gl. (15)

$$J^2 R = -\frac{d}{dt} \left( \frac{J^2 L}{2} + \frac{Q^2}{2C} \right) = -J \left( L \frac{dJ}{dt} + \frac{Q}{C} \right),$$

und durch Differenzieren

$$L \frac{d^2 J}{dt^2} + R \frac{dJ}{dt} + \frac{J}{C} = 0 \quad (2)$$

mit der Lösung  $A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$  und  $p^2 L + pR + \frac{1}{C} = 0$ , daher

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}.$$

Der Vorgang ist somit aperiodisch für positive und für verschwindende Diskriminante, für  $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC}$  dagegen ist mit Gl. (1) und  $\delta = \frac{R}{2L}$

$$p_{1,2} = -\delta + i\sqrt{\Omega^2 - \delta^2} = -\delta \pm i\omega_f,$$

und daher ist mit zwei durch die Anfangsbedingungen bestimmten Integrationskonstanten  $J_0$  und  $\varepsilon$  der Verlauf, z. B. der reelle Teil des Lösungsansatzes, gemäß

$$J = J_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_f t - \varepsilon) \quad (3)$$

eine gedämpfte Schwingung mit den kennzeichnenden Konstanten

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \frac{R}{2L} = \frac{D\Omega}{2} && \text{„Dämpfungsexponent“} \\ \omega_f &= \sqrt{\Omega^2 - \delta^2} = \Omega \sqrt{1 - \frac{D^2}{4}} && \text{„gedämpfte Eigenfrequenz“} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Für  $\delta = \Omega$ ,  $D = 2$  ist  $\omega_f = 0$ : „aperiodischer Grenzfall“, nur für  $\delta \ll \Omega$ ,  $D \ll 2$  ist  $\omega_f \approx \Omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ : „Thomsonsche Formel“.

Das Verhältnis zweier um eine Periodendauer  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  auseinander liegender Phasen (Nulldurchgänge, Höchstwerte) ist  $e^{\delta T}$  und daher das „logarithmische Dekrement“

$$\Lambda \equiv \delta T = \frac{2\pi}{\omega_f} \delta = \frac{\pi D}{\sqrt{1 - \frac{D^2}{4}}} = \frac{\pi R}{\omega_f L}. \quad (5)$$

Im aperiodischen Grenzfall ist  $\Lambda = \infty$ , für  $D \ll 2$  ist angenähert  $\Lambda = \frac{\pi R}{\Omega L} = \pi D$ .

B. *Der erzwungene Vorgang*. Für  $U \neq 0$  (Abb. 1) ist die elektrische Umlaufspannung

$$JR + \frac{Q}{C} - U = -L \frac{dJ}{dt}. \quad (6)$$

Hieraus kommen durch Differenzieren und Einsetzen von  $J = \frac{dQ}{dt}$  die Differentialgleichungen

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = U, \quad (7)$$

$$L \frac{d^2 J}{dt^2} + R \frac{dJ}{dt} + \frac{J}{C} = \frac{dU}{dt}. \quad (8)$$

Man beachte, daß in Gl. (8) rechts nicht die anregende Spannung, sondern ihre erste zeitliche Ableitung steht. Ist daher

$$U = U_0 \sin \omega t \quad (9)$$

von konstanter Frequenz  $\omega$  und Amplitude  $U_0$ , so steht rechts in Gl. (8):  $\omega U_0 \cos \omega t$ . Bei einem einfachen mechanischen linearen Schwinger gilt Gl. (7) für die Bewegung,



Gl. (8) für die Geschwindigkeit. Für den Fall aber, daß die Amplitude von  $U$  proportional zu  $\omega$  ansteigt, steht für Ladung oder Bewegung, nicht für Strom oder Geschwindigkeit, eine Differentialgleichung vom Typus Gl. (8) mit Gl. (9). Wir beschränken uns auf den Sonderfall konstanter, von  $\omega$  unabhängiger Amplitude  $U_0$ . Die vollständige Lösung von Gl. (7) und (8) ist die lineare Überlagerung des stationären Vorganges mit einem freien Vorgang, der entsprechend Gl. (3) verläuft, und nach Maßgabe der Anfangsbedingungen (Einschaltblick) eine Rolle spielt. Wir untersuchen den stationären Teil der Lösung (Ausgleichsvorgänge abgelaufen).  
Strom:

$$J = J_0 \sin(\omega t - \varphi); \quad J_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (10)$$

Strom- und Spannungsschwingung haben eine zeitliche Phasenverschiebung, die  $\geq 0$  nach  $\omega L \geq \frac{1}{\omega C}$  ist. Das Verhältnis von Spannungs- und Stromamplitude kann als Wechselstromwiderstand bezeichnet werden

$$\frac{U_0}{J_0} \equiv Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}. \quad (10a)$$

Daher spricht man von Ohmschem, induktivem, kapazitivem Anteil  $R, \omega L, \frac{1}{\omega C}$  von  $Z$ . Ist also der Augenblickswert des Stromes  $J = J_0 \sin \omega t$ , so ist der Augenblickswert der Spannung am Ohmschen Widerstand  $J_0 R \sin \omega t$ , an der Kapazität  $\frac{1}{C} \int J dt = -\frac{J_0}{\omega C} \cos \omega t$  (dazu eine Integrationskonstante, die bei Erstreckung des Integrals über den unendlich lang andauernden stationären Vorgang Null ist), an der Selbstinduktion  $L \frac{dJ}{dt} = J_0 \omega L \cos \omega t$ ; die Vorstellung des „induktiven Widerstandes“ geht davon aus, daß ein Teil der anregenden Spannung fortwährend als magnetische Feldänderung verbraucht wird. Also ist der zugehörige Augenblickswert der Gesamtspannung

$$U = J_0 R \sin \omega t + J_0 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \cos \omega t \equiv J_0 Z \sin(\omega t + \varphi). \quad (11)$$

Der erste Teil ist conphas mit dem Strom, der andere hat gegen den Strom eine Phasenverschiebung  $\frac{\pi}{2}$  einer Viertelperiode; der erste entspricht periodischer Energieumsetzung in Stromwärme, der andere periodischer Energiespeicherung und -umlagerung in  $L$  und  $C$ : diese aber wirken gegenläufig, denn ihre gegenseitige Phasenverschiebung ist  $\pi$ , eine halbe Periode. Daher hat bei konstantem  $U_0$  der Strom seinen Höchstwert  $J_{0r} = \frac{U_0}{R}$  („Resonanz“) für  $\omega_r L - \frac{1}{\omega_r C} = 0$  oder

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \Omega; \quad \operatorname{tg} \varphi = 0, \quad (12)$$

die Resonanzfrequenz gleicht der ungedämpften freien Frequenz; im Resonanzfall haben die Spannungen an  $L$  und  $C$  die Amplituden

$$J_{0r} \Omega L = \frac{J_{0r}}{\Omega C} = \frac{U_0}{D}, \quad (13)$$

sind also beträchtlich bei kleinem  $D$ . Somit ist die Dämpfung  $D$  im Resonanzfall leicht meßbar. Man bezeichnet  $J_0(\omega)$  und  $\varphi(\omega)$  bei  $U_0 = \text{const}$  als Amplituden- und Phasenresonanzkurve; für  $\omega = 0; \Omega; \infty$  ist  $J_0 = 0; \frac{U_0}{R}; 0$ ;  $\operatorname{tg} \varphi = -\infty; 0; \infty$ . Mit dem von Riegger und Backhaus eingeführten Abszissenmaßstab  $X = \frac{\omega}{\Omega} - \frac{\Omega}{\omega}$  werden die Resonanzkurven symmetrisch zur Ordinate in  $\Omega$ , nämlich

$$\text{a) } \operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{D}; \quad \text{b) } \frac{J_0}{J_{0r}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{X^2}{D^2}}}. \quad (14)$$

Man sieht, daß  $\Omega$  und  $D$  maßgebend sind für den Verlauf der Resonanzkurve, und  $D$  ist aus der aufgenommenen Resonanzkurve  $J_0(X)$  gemäß Gl. (14b) leicht abzulesen als Abszisse der Ordinaten  $\frac{J_0 r}{\sqrt{2}}$ . Abb. 2 und 3 zeigen normierte Resonanzkurven.

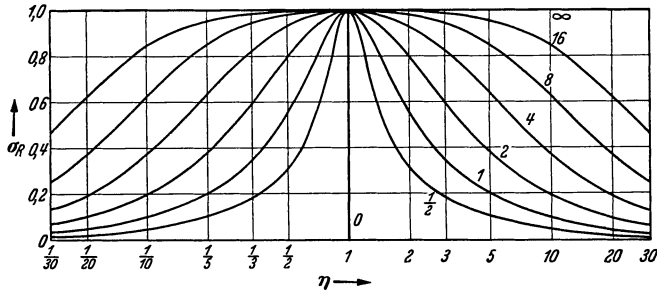


Abb. 37. 2<sup>1</sup>. Resonanzkurven des Stromes (der Spannung am Ohmschen Widerstand) nach Gl. (10).

Achsenbezeichnung:  $\eta = \frac{\omega}{\Omega}$ ;  $\sigma_R = \frac{J_0(\omega)}{J_0 r} = \frac{J_0(\omega) \cdot R}{U_0} = \frac{U_{0R}(\omega)}{U_0}$ .

Parameter: Dämpfung  $D$ . —  $\Omega, D$ : Gl. (1).

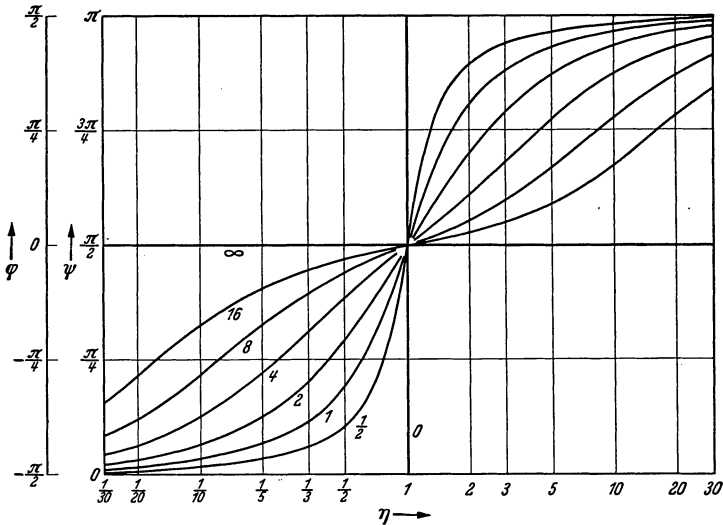


Abb. 37. 3<sup>1,2</sup>. Resonanzkurven der Phasenwinkel:  $\varphi$  nach Gl. (10),  $\psi$  nach Gl. (17).

Achsenbezeichnung:  $\eta = \frac{\omega}{\Omega}$ ; Parameter: Dämpfung  $D$ .

Eine bedeutende rechnerische Erleichterung für Vorgänge gleicher Frequenz, die durch lineare Differentialgleichungen beschrieben werden, bietet das Rechnen mit nach Verabredung dem reellen oder imaginären Anteil von

$$e^{i(\omega t + \alpha)} = \cos(\omega t + \alpha) + i \sin(\omega t + \alpha)$$

als Lösungsansatz der Differentialgleichungen. Man setzt zweckmäßig z. B.

$$\left. \begin{aligned} J &= J_0 \sin(\omega t - \varphi) = J_0 \cdot \text{Im} \{ e^{-i\varphi} \cdot e^{i\omega t} \} \\ &= \text{Im} \{ \tilde{J}_0 e^{i\omega t} \} \quad \text{mit} \quad \tilde{J}_0 = J_0 e^{-i\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Die „komplexe Amplitude“  $\tilde{J}_0$  enthält eine Aussage sowohl über die physikalische Amplitude  $J_0$ , wie über den Phasenwinkel  $\varphi$ . Daher wird einfacher, als Gl. (10)

<sup>1</sup> Siehe Anm. 2 auf S. 107. — <sup>2</sup> Siehe Anm. 3 auf S. 107.

$$\frac{\tilde{U}_0}{\tilde{J}_0} \equiv \tilde{Z} = R + i \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right). \quad (16)^1$$

Anwendung der Rechenregeln für komplexe Zahlen, Betrag und Winkel oder rechtwinkelige Komponenten, ergibt zwei Darstellungsarten je nach Bedarf.

Ladung:

$$Q = Q_0 \sin(\omega t - \psi); \quad Q_0 = \frac{U_0}{\omega \sqrt{\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 + R^2}} = \frac{J_0}{\omega}, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{R}{\frac{1}{\omega C} - \omega L}. \quad (17)$$

Der Höchstwert tritt ein für

$$\omega_r = \Omega \sqrt{1 - \frac{D^2}{2}}, \quad (18)$$

er rückt also mit wachsendem  $D$  gegen  $\omega = 0$ , für  $D > \sqrt{2}$  ist jede Resonanzwirkung unterbunden, für  $D = \sqrt{2}$  schmiegt sich die Resonanzkurve am weitesten der waagerechten Anfangstangente an. Im Resonanzfalle der Gl. (18) ist

$$Q_{0r} = \frac{U_0}{\Omega R \sqrt{1 - \frac{D^2}{4}}}, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{\omega_r}{\delta} = \sqrt{\frac{4}{D^2} - 2}, \quad \psi < \frac{\pi}{2}. \quad (19)$$

Dagegen ist für  $\omega = \Omega$ :  $Q_0 = \frac{U_0}{\Omega R}$ ,  $\operatorname{tg} \psi = \infty$ ,  $\psi = \frac{\pi}{2}$  (Abb. 4, 3). Für  $\omega = 0$ ;  $\infty$  ist  $Q_0 = U_0 C$ ; 0. Abb. 2 und 4 zeigen den unterschiedlichen Verlauf von  $J$  und  $Q$  (Spannung am Ohmschen Widerstand und am Kondensator oder mechanische

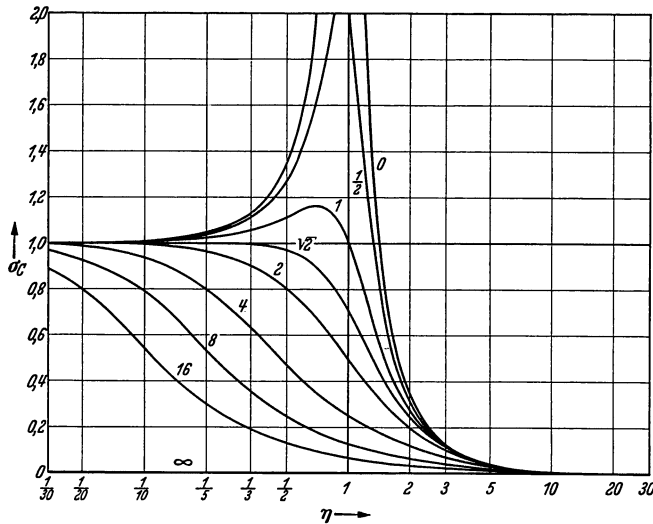


Abb. 37. 4<sup>2, 3</sup>. Resonanzkurven der Ladung (der Spannung am Kondensator) nach Gl. (17).

$$\text{Achsenbezeichnung: } \eta = \frac{\omega}{\Omega}; \quad \sigma_C = \frac{Q_0(\omega)}{C U_0} = \frac{U_0 C(\omega)}{U_0} = \frac{J_0(\omega)}{\omega C U_0}.$$

Parameter: Dämpfung  $D$ . —  $\Omega$ ,  $D$ : Gl. (1).

<sup>1</sup> Die in der Wechselstromlehre übliche Schreibung der komplexen Größen mit deutschen Buchstaben ist hier vermieden, um die Möglichkeit einer begrifflichen Verwechslung mit räumlichen Feldvektoren auszuschließen.

<sup>2</sup> Nach B. D. H. Tellegen: Arch. Elektrotechn. Bd. 22 (1929) S. 62.

<sup>3</sup> Vertauscht man  $\eta$  mit  $\frac{1}{\eta}$  für  $\sigma_C$  und  $\psi$ , nimmt also das Spiegelbild dieser Kurven zur senkrechten Achse, so erhält man die Resonanzkurven für die Spannung an der Induktivität

$$\sigma_L = \frac{J_0(\omega) \cdot \omega L}{U_0} = \frac{U_0 L}{U_0} \quad \text{und} \quad \varphi_L.$$

Geschwindigkeit und Bewegung; die „induktive Spannung“  $\omega L J_0$  hat ihr Maximum bei  $\frac{\Omega}{\sqrt{1 - \frac{D^2}{2}}}$ , daher ist die Ohmsche Resonanzfrequenz das geometrische Mittel aus der kapazitiven und der induktiven).

Leistung und Energie.

Der Augenblickswert der Leistung ist aus Gl. (11)

$$\left. \begin{aligned} UJ &= J_0^2 R \sin^2 \omega t + J_0^2 \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \cos \omega t \sin \omega t \\ &= \frac{J_0^2}{2} R (1 - \cos 2\omega t) + \frac{J_0^2}{2} \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \sin 2\omega t. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Beide Glieder schwingen mit der Frequenz  $2\omega$ , das erste hat den zeitlichen Mittelwert  $\frac{J_0^2}{2} R$ , das zweite den Mittelwert Null. Daher ist die während einer Periodendauer zugeführte und von dem System nicht umkehrbar als Stromwärme weitergegebene Leistung im Mittel

$$\bar{N} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} UJ dt = \frac{J_0^2}{2} R. \quad (21)$$

Ein Gleichstrom der Größe

$$J_{\text{eff}} = \frac{J_0}{\sqrt{2}} \quad (22)$$

würde dieselbe Stromwärme erzeugen, man definiert daher mit Gl. (22) den „Effektivwert“ des (einwelligen) Wechselstromes, und entsprechend den Effektivwert der Wechselspannung. Der Effektivwert kommt als quadratischer Mittelwert z. B. in thermischen Meßgeräten zum Ausdruck. Magnetische Energie  $W_m = \frac{1}{2} L J^2$  und elektrische Energie  $W_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{J^2}{\omega^2 \cdot 2C}$  [Gl. (17)] sind stets positiv und schwanken mit der Frequenz  $2\omega$  um die zeitlichen Mittelwerte  $\bar{W}_m = \frac{J_0^2}{2} \cdot \frac{L}{2}$  und  $\bar{W}_e = \frac{J_0^2}{2} \cdot \frac{1}{\omega^2 \cdot 2C}$ , daher ist im zweiten Glied in Gl. (20) die Größe

$$\frac{J_0^2}{2} \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = 2\omega (\bar{W}_m - \bar{W}_e) \equiv N_b \quad (23)$$

eine Leistung, die während einer Viertelperiode der Stromschwingung von der Quelle geliefert, in der folgenden von ihr wieder aufgenommen wird, im Zeitmittel daher Null ist: sie deckt die Differenz der Energieaufnahme der zueinander in Gegenphase wirkenden Energiespeicher, ist also Energiependelung (Merkmal: Phasenverschiebung beider Komponenten Strom und Spannung um eine Viertelperiode  $\pi/2$ ), nicht Energiebewegung in bestimmter Richtung, wie die Stromwärme, die fortwährend das System verläßt (Merkmal: beide Komponenten conphas):  $\bar{N}$  „Wirkleistung“,  $N_b$  „Blindleistung“. Die Aufteilung in Gl. (20) entspricht genau der Aufteilung Gl. (11) der Spannung in zwei um eine Viertelperiode gegeneinander verschobene Komponenten, daher gilt

$$\bar{N}^2 + N_b^2 = \left( \frac{J_0^2}{2} Z \right)^2 = N_s^2. \quad (24)$$

Die Größe der „Scheinleistung“  $N_s$  bestimmt die maximale Beanspruchung der Quelle. Die Aufteilung in Wirk- und Blindleistung ist also nicht gleich mit der Aufteilung in Mittelwert und zeitliche Schwankung. Mit  $\varphi$  und  $Z$  [Gl. (10), (10a)] kann man auch schreiben

$$\begin{aligned} R &= Z \cos \varphi, & \omega L - \frac{1}{\omega C} &= Z \sin \varphi, & U_0 &= Z J_0; \\ \bar{N} &= \frac{U_0 J_0}{2} \cos \varphi, & N_b &= \frac{U_0 J_0}{2} \sin \varphi, & N_s &= \frac{U_0 J_0}{2}. \end{aligned}$$

( $Z \cos \varphi$  „Wirkwiderstand“,  $Z \sin \varphi$  „Blindwiderstand“,  $Z$  „Scheinwiderstand“.) In entsprechender Auslegung kann auch von Wirk- und Blindkomponenten der Ströme und Spannungen gesprochen werden.

Für die Stromresonanz  $\omega_r = \Omega$  ist das absolute Maximum der Leistung  $\bar{N}_{\max} = \frac{U_0^2}{2R}$ ,  $N_b = 0$ : Die Quelle liefert nur die Stromwärmeverluste, magnetische und elektrische Energie haben die gleiche Amplitude (der Höchstwert von  $N_b$  liegt übrigens bei  $\tan \varphi = 1$ ). Der Höchstwert der magnetischen Energie liegt bei  $\Omega$  und hat die Amplitude  $(W_m)_{\max} = \frac{U_0^2 L}{2R^2}$ , die mit der Amplitude der elektrischen Energie übereinstimmt:  $W_e = \frac{U_0^2}{2R^2 \Omega^2 C}$ . Dagegen ist das Maximum der elektrischen Energie bei  $\omega_r = \Omega \sqrt{1 - \frac{D^2}{4}}$  erreicht und hat die Amplitude  $(W_e)_{\max} = \frac{U_0^2}{2R^2 C \Omega^2 \sqrt{1 - \frac{D^2}{4}}}$ , ist also das  $\left(1 - \frac{D^2}{4}\right)^{-1}$ -fache des Wertes bei der Stromresonanz. Für Ladungsresonanz bei  $\omega = 0$ , d. h.  $D = \sqrt{2}$ , ist  $(W_e)_{\max} = \frac{U_0^2 C}{2}$  doppelt so groß, als  $W_e$  bei Stromresonanz  $\Omega$ . Für  $D > \sqrt{2}$  fällt  $W_e$  monoton mit wachsendem  $\omega$ .

Ist die anregende Spannung aus mehreren harmonischen Schwingungen zusammengesetzt, so ist ihre Summe wieder ein periodischer Vorgang, wenn die Frequenzen aller einzelnen Schwingungen in rationalen, durch ganze Zahlen ausdrückbaren Verhältnissen zueinander stehen. Unsere Berechnung gilt dann für jede Teilschwingung einzeln (Fourier-Zerlegung). Eine in der Nähe der Resonanzfrequenz des Systemes liegende Teilfrequenz wird bei kleiner Dämpfung stark hervorgehoben. — Die Wirkleistung der zusammengesetzten Schwingung ist die Summe der nach Gl. (21) zu errechnenden Wirkleistungen der Teilschwingungen, und der Effektivwert der zusammengesetzten Schwingung ist daher die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der Effektivwerte der Teilschwingungen.

Eigenschaften von  $R$ ,  $L$ ,  $C$ . 1. Unter später näher untersuchten Umständen ist die Wärmeentwicklung bei Wechselstrom größer, als wenn ein Gleichstrom von der Größe des Effektivwertes des Wechselstromes den Widerstand durchfließt: der „Wirkwiderstand“ für Wechselstrom ist größer als der „Ohmsche Widerstand“ für Gleichstrom aus dem Grunde, weil der Wechselstrom sich anders über den Querschnitt verteilt, als der Gleichstrom (Stromverdrängung oder Hautwirkung, siehe 39.). Dieselbe Erscheinung verkleinert die innere Selbstinduktivität gegenüber ihrem stationären Werte. — 2. Enthält die Spule Eisen, so wird erstens während einer Periodendauer ein Magnetisierungszyklus durchlaufen, und daher während dieser Zeit bei merklicher Breite der Magnetisierungsschleife nach 24. Anm. 1 als Hysteriswärme in der Volumeneinheit des Eisens der Betrag  $\int_0^T H \cdot dB$  verbraucht, zweitens verursacht die Krümmung der Magnetisierungskurve (bei Sinusform der anregenden Spannung) eine Verzerrung der Stromkurvenform. Die wirksame Selbstinduktivität kann man dann aus dem induktiven Spannungsabfall für die Grundschwingung definieren gemäß  $L = \frac{U_L}{J \omega}$ . Sie nimmt mit wachsendem  $J$  monoton ab. Daher ist auch die Resonanzfrequenz von der Größe des Stromes abhängig, die Erscheinungen verlaufen erheblich anders als für konstantes  $L$ . — 3. Der Kondensator besitzt häufig ein „unvollkommenes Dielektrikum“, in welchem Verschiebungsstrom und Leitungsstrom zugleich bestehen. (Ist dieser letzte nicht linear von der Größe der Spannung abhängig, so kommen Verzerrungen zustande, ebenso, wenn die Kondensatorbelegungen infolge der elektrischen Anziehungskräfte vibrieren. Man kann dann entsprechend, wie bei der Spule, verfahren.) Man benutzt allgemein ein trigonometrisches Maß für die durch den Leitungsstrom im Dielektrikum

verursachten Verluste, indem man den Quotienten aus Leitungs- und Verschiebungsstrom als  $\operatorname{tg} \delta$  und  $\delta$  als Verlustwinkel bezeichnet. Ist  $\varphi$  der Phasenverschiebungswinkel zwischen Gesamtstrom und Spannung an den Kondensatorplatten, so ist  $\delta = \frac{\pi}{2} - \varphi$  eine oft kleine, und erfahrungsgemäß häufig von der Frequenz nicht sehr stark abhängige Größe. Der Quotient aus Verschiebungsstrom und Kondensatorspannung ist  $\omega C$  und hierbei  $C$  die wirksame Kapazität; ist die Kapazität bei Vakuum  $C_0$ , so ist die wirksame Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon = \frac{C}{C_0}$ . Für eine feste Frequenz kann ein unvollkommener Kondensator sowohl durch eine Reihen- wie durch eine Parallelschaltung eines Wirkwiderstandes und einer verlustfreien Kapazität nachgebildet und daher durch Vergleich mit einer solchen Nachbildung gemessen werden; der Frequenzgang beider Ersatzschaltungen stimmt aber meistens auch nicht entfernt mit dem Frequenzgang des wirklichen unvollkommenen Kondensators überein, weswegen man auch kaum dem einen dieser Ersatzbilder eine größere Realität vor dem anderen zubilligen kann.  $\operatorname{tg} \delta$  ist definitionsmäßig ein Maß für die gesamte, der Spannung proportionale verlorene Energie. Diese besteht erfahrungsgemäß nicht nur aus dem Verlust infolge unvollkommener Isolation, sondern außerdem aus inneren Verlusten bei der Umpolarisierung des Dielektrikums; diese Erscheinung, die mit der bei Gleichspannungsmessungen auftretenden dielektrischen Nachwirkung in Parallele steht, tritt bei allen festen oder flüssigen Nichtleitern mehr oder weniger auf und ist meist die wesentliche Ursache für den Energieverbrauch, sie zeigt sich auch dann, wenn von unzureichender Isolation nicht die Rede sein kann. — 4. Bei sehr hohen Frequenzen kann nicht mehr quasistationär gerechnet werden, weil weder das elektrische Feld auf den Zwischenraum zwischen den Kondensatorplatten, noch das magnetische Feld auf die Spule im wesentlichen beschränkt bleiben.

Die Bedeutung der Rechnung mit komplexen Zahlen gemäß Gl. (15), (16) besteht hauptsächlich in folgendem: Vorausgesetzt, daß 1. die Vorgänge durch lineare Differentialgleichungen beschrieben werden, daher der Grundsatz der linearen Überlagerung gilt, 2. die Vorgänge zeitlich sinusförmig verlaufen, 3. das elektrische Feld in Kondensatoren, das magnetische in Spulen konzentriert gedacht werden kann, so gelten für die Berechnung von quasistationären Wechselstromkreisen formal genau dieselben Beziehungen, wie sie für die Gleichstromvorgänge in linearen Stromkreisen (27.) festgestellt wurden, wenn man lediglich in diesen unter Strom und Spannung „komplexe Amplituden“  $\tilde{J}_0$  und  $\tilde{U}_0$  versteht, und unter Widerstand den „komplexen Wechselstromwiderstand“  $\tilde{Z}$ , dessen Elemente: Verlustwiderstand  $R$ , induktiver Widerstand  $i\omega L$ , kapazitiver Widerstand  $\frac{1}{i\omega C}$  sind. Z. B. lauten das Ohmsche Gesetz und die Kirchhoffschen Regeln [27. Gl. (3), (12), (13)] für Wechselstrom

$$\left. \begin{aligned} \tilde{U}_0 &= \tilde{J}_0 \cdot \tilde{Z}; \\ \sum_{\circ} (\tilde{J}_{0\nu} \cdot \tilde{Z}_{\nu} - \tilde{U}_{\nu}) &= 0, \quad \sum_{\circ} \tilde{J}_{0\nu} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Hierfür noch zwei Beispiele:

a) Parallelschwingungskreis. Wird dem aus einem verlustfreien Kondensator  $C$  und einer durch  $L$  und  $R$  gekennzeichneten Spule der Strom  $J$  gemäß Abb. 5 zugeführt und bezeichnen wir das Verhältnis der Wechselspannung zwischen den Punkten 1 und 2 zum zugeführten Strom  $J$  als Wechselstromwiderstand des Kreises:  $\tilde{U}_0 = \tilde{J}_0 \tilde{Z}$ , so errechnet sich dieser als Parallelschaltung des Spulenwiderstandes und des Kondensatorwiderstandes zu

$$\tilde{Z} = \frac{(R + i\omega L) \frac{1}{i\omega C}}{R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}}. \quad (26)$$

Für  $\omega = 0$  wird  $\tilde{Z} = R$  und für  $\omega = \infty$  wird  $\tilde{Z} = 0$ . Dazwischen liegt ein um so ausgeprägterer Höchstwert des Widerstandsbetrages, je mehr erfüllt ist  $R^2 < \frac{L}{C}$  oder, in Beachtung von Gl. (1),

$$D^2 = R^2 \frac{C}{L} < 1. \tag{27}$$

Für die Resonanzfrequenz  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \Omega$  wird

$$\tilde{Z} = \frac{L}{CR} - i \sqrt{\frac{L}{C}}, \tag{28}$$

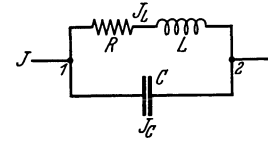


Abb. 37. 5. Elektrischer Schwingungskreis (Parallelschaltung).

wobei das zweite Glied um so mehr zu vernachlässigen ist, je mehr Gl. (27) erfüllt wird; meist genügt es völlig, den Querwiderstand im Resonanzfall mit  $\tilde{Z} = \frac{L}{CR}$  zu berechnen. Ferner ergibt sich für  $\omega = \Omega$

$$\left| \frac{J}{J_L} \right| = D. \tag{29}$$

Bei kleiner Dämpfung wird also im Resonanzfall durch einen kleinen zugeführten Strom  $J$  ein erheblicher Strom im Schwingungskreis selbst aufrechterhalten.

b) Wheatstonesche Brückenschaltung für Wechselstrom. Man überträgt nach Gl. (25) die Berechnungen von 27. Gl. (31) bis (35) auf den Fall, daß die dort mit  $x, r, a, b$  bezeichneten Widerstände Wechselstromwiderstände sind, die wir durch  $\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2, \tilde{Z}_3, \tilde{Z}_4$  bezeichnen wollen. Dann lautet die Abgleichungsbedingung

$$\tilde{Z}_1 \cdot \tilde{Z}_4 = \tilde{Z}_2 \cdot \tilde{Z}_3. \tag{30}$$

Indem man jeden Widerstand durch  $\tilde{Z}_v = Z_v \cdot e^{i\zeta_v}$  darstellt, erhält man

$$\frac{Z_1}{Z_2} \cdot e^{i(\zeta_1 - \zeta_2)} = \frac{Z_3}{Z_4} \cdot e^{i(\zeta_3 - \zeta_4)}. \tag{31}$$

Wir nehmen den Betrag ( $|e^{i\zeta}| = 1$ ):

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_4}; \tag{32}$$

dies in Gl. (31) eingesetzt, ergibt eine zweite Brückenbedingung

$$\zeta_1 - \zeta_2 = \zeta_3 - \zeta_4. \tag{33}$$

Es ist daraus zu schließen, daß in der Wechselstrombrücke im allgemeinen Falle zwei Stücke veränderlich sein müssen, um Abgleichung zu erhalten, während bei der Gleichstrombrücke ein veränderliches Stück genügt. Für manche Brückenschaltungen ist es an Stelle von Gl. (32) und (33) nützlicher, jeden Wechselstromwiderstand durch rechtwinkelige Komponenten darzustellen:  $\tilde{Z}_v = a_v + i b_v$ ; als Gleichung zwischen komplexen Größen enthält Gl. (30) eine Beziehung nur zwischen den reellen und eine zweite nur zwischen den imaginären Teilen. Diese beiden Gleichungen sagen natürlich das gleiche aus, wie Gl. (32) und (33), und lauten

$$\left. \begin{aligned} a_1 a_2 - a_3 a_4 &= b_1 b_2 - b_3 b_4, \\ a_1 b_2 + a_2 b_1 &= a_3 b_4 + a_4 b_3. \end{aligned} \right\} \tag{34}$$

### 38. Der Transformator.

A. Den Induktionsvorgang hat F. Emde am Beispiel des eisenhaltigen Transformators durch die folgende näherungsweise Darstellung des elektrischen Feldes beschrieben:

Das durch eine wechselstromdurchflossene Primärwicklung hervorgebrachte schwankende magnetische Feld ist im wesentlichen im Eisenkern vereinigt und verläuft dort in der Längsrichtung; mit Sicherheit nimmt die magnetische Induktion

wegen  $\bar{\mu} \gg \mu_0$  lediglich im Eisen erhebliche Werte an. Der Kern ist zusammengesichtet aus ebenen Blechen von der Höhe  $a$  und der Breite  $b$  und Papierzwischenlagen der Höhe  $p$ . Abb. 1 zeigt einige Bleche, wobei  $a$  und  $p$  übertrieben gezeichnet sind (Länge des Eisenkernes in Richtung der  $z$ -Achse; Index 1: Eisen, 2: Papierzwischenraum).

Ist die magnetische Induktion  $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{f} B_{1z}$  über den Querschnitt aller Bleche konstant und gleich, so folgt aus  $\text{rot } \mathfrak{C}_1 = -\frac{\partial \mathfrak{B}_1}{\partial t}$  das elektrische Feld im Eisen:

$$\text{rot } \mathfrak{C}_1 = -\mathfrak{f} \frac{\partial E_{1x}}{\partial y} = -\mathfrak{f} \frac{\partial B_{1z}}{\partial t}, \text{ daher } E_{1x} = y \frac{\partial B_{1z}}{\partial t}, \quad \mathfrak{C}_1 = i E_{1x} \quad (1)$$

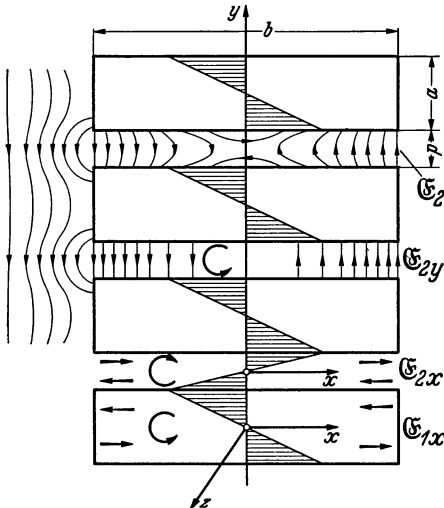


Abb. 38. 1. Zur Berechnung des elektrischen Feldes des Transformators.

in Übereinstimmung mit 30. Gl. (11): nur in der  $x$ -Richtung (bei  $b \gg a$ ), linear mit  $y$  ansteigend, antisymmetrisch zur Mittelebene. Ist  $B_{1z} = -B_0 \sin \omega t$ , so ist daher

$$E_{1x} = -y B_0 \omega \cdot \cos \omega t, \quad (2)$$

die Amplitude  $y B_0 \omega$  der elektrischen Feldstärke ist am größten an der Blechoberfläche  $y = \pm \frac{a}{2}$ . [Die Wirbelstromdichte

$G_{1x} = \frac{1}{\rho} E_{1x}$  wird daher um so größer, je höher das Blech ist: der Kern wird aus dünnen Blechen geschichtet, damit dieser Wert, und somit der Stromwärmeverlust, nicht zu groß wird. — Bei nicht zu großem  $a$  und  $\frac{\omega \bar{\mu}}{\rho}$  ist es für die geübte Näherungsbetrachtung erlaubt, die Wirkung der Wirbelströmung zu vernachlässigen und Gl. (1) als gute Näherung für das elektrische Feld zu betrachten. Ebenso wird hier die insbesondere für  $x = \pm \frac{b}{2}$  vorhandene  $y$ -Komponente von  $\mathfrak{C}_1$  vernachlässigt.]

An der Blechoberfläche ist die Tangentialkomponente von  $\mathfrak{C}$  stetig:

$$E_{2x} \left( y = \frac{a}{2} \right) = E_{1x} \left( y = \frac{a}{2} \right) = \frac{a}{2} \frac{\partial B_{1z}}{\partial t}, \quad (3)$$

und an der gegenüberliegenden Oberfläche des folgenden Bleches muß  $E_{2x}$  den entgegengesetzt gleichen Wert haben; den Übergang der Feldstärke von dem einen zu dem anderen Wert durch die dünne Papierschicht nehmen wir zunächst als linear an. Also ist, wenn der Nullpunkt des Achsenkreuzes in die Mitte der Papierdicke verlegt wird, das elektrische Feld im Papier mit Gl. (3)

$$\left. \begin{aligned} E_{2x} &= -E_{2x} \left( y = \frac{a}{2} \right) \cdot \frac{y}{p/2}, \\ i E_{2x} &= \mathfrak{C}_{2x} = -i y \frac{\partial B_{1z}}{\partial t} \cdot \frac{a}{p} = i y B_0 \omega \frac{a}{p} \cdot \cos \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Hieraus folgt aber

$$\text{rot } \mathfrak{C}_{2x} = -\mathfrak{f} \frac{\partial E_{2x}}{\partial t} = +\mathfrak{f} \frac{\partial B_{1z}}{\partial t} \cdot \frac{a}{p}. \quad (5)$$

Praktisch ist immer  $a \gg p$ , und die in Gl. (5) für den Papierzwischenraum erhaltene Wirbelstärke ist  $\frac{a}{p}$ -mal so groß, als die gesamte Wirbelstärke Gl. (1) im Eisen. Die magnetische Feldstärke durchsetzt mit stetiger Tangentialkomponente die Blechoberfläche und ist daher im Papier ebenso groß als im Eisen, somit ist



im Papier  $\mathfrak{B}_2 = \frac{\bar{\mu}_2}{\mu_1} \mathfrak{B}_1 \ll \mathfrak{B}_1$  praktisch immer so klein, daß die geringe Induktionsschwankung  $\frac{\partial \mathfrak{B}_2}{\partial t}$  im Papier durchaus zu vernachlässigen ist. Dann ist aber nach dem Induktionsgesetz der Papierzwischenraum auch praktisch frei von elektrischen Wirbeln: dem scheint Gl. (5) zu widersprechen. Es betrifft aber Gl. (5) nicht das gesamte elektrische Feld im Papier, sondern nur die  $x$ -Komponente. Zu diesem „Längsfeld“ muß offenbar ein „Querfeld“  $\mathfrak{E}_{2y}$  hinzukommen, das einen ebenso großen, aber entgegengesetzt drehenden Wirbel hat wie das Längsfeld, damit das gesamte Feld wirbelfrei ist. Demgemäß haben wir anzusetzen:

$$\text{rot } \mathfrak{E}_{2y} = -\text{rot } \mathfrak{E}_{2x} = -\ddagger \frac{\partial B_{1z}}{\partial t} \cdot \frac{a}{p} = +\ddagger \frac{\partial E_{2y}}{\partial x}, \quad (6)$$

daher

$$\mathfrak{E}_{2y} = j E_{2y} = -j x \frac{\partial B_{1z}}{\partial t} \cdot \frac{a}{p} = j x B_0 \omega \frac{a}{p} \cdot \cos \omega t. \quad (7)$$

Das Querfeld ist antisymmetrisch zur Mitte der Blechbreite verteilt, in der Mitte  $x = 0$  ist es Null ebenso wie das Längsfeld, und es ist am stärksten am Blechrand  $x = \pm \frac{b}{2}$ . Dort hat es die Amplitude

$$B_0 \omega \frac{a}{p} \cdot \frac{b}{2}, \quad (8)$$

und dies ist viel größer, als die Amplitude des Längsfeldes an der Blechoberfläche  $B_0 \omega \frac{a}{2}$  (im praktischen Fall mehrtausendfach größer). Das elektrische Gesamtfeld im Papier ist

$$\mathfrak{E}_2 = i E_{2x} + j E_{2y} = -(i y + j x) \frac{\partial B_{1z}}{\partial t} \cdot \frac{a}{p}; \quad (9)$$

$$\mathfrak{E}_2 = -\text{grad } \varphi, \quad \varphi = x y \frac{\partial B_{1z}}{\partial t} \cdot \frac{a}{p}. \quad (10)$$

Sowohl die Äquipotentiallinien  $x y = \text{const}$ , wie die elektrischen Feldlinien  $y^2 = x^2 + \text{const}$  sind gleichseitige Hyperbeln (in Abb. 1 im 3. Zwischenraum von unten angedeutet, im 2. das Querfeld, im 1. das Längsfeld). Die elektrische Spannung am Blechrand zwischen zwei Blechen ist nach Gl. (7), (8)  $p \cdot E_{2y}(x = \frac{b}{2})$ , und bei

Aufeinanderschichten von  $n$  durch Bleche getrennten Papierzwischenräumen ist daher die Spannungsamplitude an der einen Hochkantseite des Blechpaketes  $n B_0 \omega \frac{a b}{2}$ , an der anderen Hochkantseite ist sie entgegengesetzt gleich groß<sup>1</sup>, daher hat die elektrische Umlaufspannung um das ganze Blechpaket, wie zu erwarten, die Amplitude

$$\oint \mathfrak{E} d\tau = n a b B_0 \omega. \quad (11)$$

In den Raum außerhalb des eigentlichen Kernes setzt sich das elektrische Feld wirbelfrei fort, da wir auch dort die geringen magnetischen Induktionsschwankungen vernachlässigen können. Das starke Querfeld im Papier am Blechrande  $E_{2y}(x = \frac{b}{2})$  ist das wesentliche Bindeglied zwischen den Vorgängen innerhalb und außerhalb des Eisenkernes. Außerhalb verlaufen die elektrischen Kraftlinien im wesentlichen parallel zur Oberfläche des Blechpaketes, wenn wir zunächst annehmen, daß im Außenfeldraum sich kein Leiter befindet. In weiterer Entfernung vom Kern sind die elektrischen Kraftlinien in sich zurückkehrende Kurven, Kreise, wenn wir von den Störungen durch die vier Kanten des Kernes absehen, und ebenso bei kreisförmig angenommenem Querschnitt des Kernes [vgl. 30. Gl. (10)], s. Abb. 2. Dieses

<sup>1</sup> In den Beispielen der Abb. 2—6 sind zur Verdeutlichung einige Spannungswerte eingetragen. Für diese ist von einer Größe von 6 Volt der Spannungsamplitude an der Hochkantseite des Blechpaketes ausgegangen. Diese Größenordnung entspricht etwa technischen Transformatorformen normaler Bauart und Beanspruchung. [Die Abb. 2—6 aus F. Emde: Elektrotechn. u. Maschinenb. Bd. 51 (1933) Heft 14, Abb. 1 nach F. Emde: Physik. Z. Bd. 23 (1922) S. 347.]

Feldbild wird kaum geändert, wenn um den Kern eine leitend geschlossene Windung, z. B. ein Drahttring, gelegt wird. Die elektrische Feldstärke  $\mathcal{E}$  setzt sich wirbelfrei, mit stetiger Tangentialkomponente, in den Leiter hinein fort und bringt dort nach dem Ohmschen Gesetz die proportionale Strömung  $\mathcal{G} = \kappa \mathcal{E}$  hervor. Dagegen ändert sich das elektrische Feld stark, wenn eine ungeschlossene Windung um den Eisenkern gelegt wird, denn dann haben Anfang und Ende der Windung eine Spannung von der Größe der Umlaufspannung gegeneinander, tragen daher elektrische Ladungen, welche Quellen für ein elektrisches Feld sind, das sich dem zuerst beschriebenen überlagert (Abb. 3). (Für das wirbelfreie Feld im Außenraum sind hier einige Potentialwerte eingetragen, sowie die mathematische Sperrfläche, die notwendig ist, um das unendlich vielwertige Potential eindeutig zu machen, genau wie in 28. für das magnetische Feld gezeigt wurde<sup>1</sup>. Diese Wahl ist natürlich willkürlich und ändert nichts an den Feldbildern.)

Die Tatsache, daß entlang den beiden Hochkantseiten große, entgegengesetzt gleiche elektrische Spannungen vorhanden sind, legt es nahe, als Ersatz für den Induktionsvorgang im Kern sich vorzustellen, daß an jeder Hochkantseite sich eine elektrische Batterie befinde. Dafür erhält man bei Abwesenheit leitender Körper das Feldbild Abb. 4; das Feld ist nur in der Nähe der Hochkantseiten dem Feld der Abb. 2 ähnlich, sonst völlig verschieden. Die Umlaufspannung ist natürlich überall Null, das Potential einwertig, von einem in einem geschlossenen Drahttring induzierten Stromes nicht die Rede. Verbinden wir diese Batterie mit einer offenen Drahtwindung nach Abb. 5, so ist das Feld auf der einen Seite dem Feld der Abb. 3 ähnlich, auf der gegenüberliegenden Seite verschieden. Verknüpft man mit dem Ausdruck, es werde „in der Windung eine elektromotorische Kraft induziert“, die Vorstellung, daß der Induktionsvorgang der Wirkung einer Batterie in der Windung selbst gleichzustellen sei, so erhält man das von Abb. 3 gänzlich verschiedene Feld Abb. 6: Hier ändert sich das (einwertige) Potential entlang der Windung, beim induzierten Feld ist es auf jeder Windungshälfte konstant. Bei einem Kurzschluß verschwindet das äußere elektrische Feld der Abb. 6, das induzierte Feld der Abb. 3 dagegen nicht. Man kommt also mit dieser Hilfsvorstellung nicht auf das elektrische Feld, das tatsächlich durch Induktion entsteht.

B. Betriebseigenschaften des Transformators. Ausgehend von 35. Abb. 2, Gl. (13) nehmen wir  $L_1$ ,  $M$ ,  $L_2$  konstant an; wir setzen in

$$U = J_1 R_1 + L_1 \frac{dJ_1}{dt} + M \frac{dJ_2}{dt}, \quad (1)$$

$$0 = J_2 R_2 + L_2 \frac{dJ_2}{dt} + M \frac{dJ_1}{dt} \quad (2)$$

die anregende Spannung  $U = U_0 e^{i\omega t}$  und lösen mit dem Ansatz

$$J_1 = \tilde{J}_1 e^{i\omega t}; \quad \tilde{J}_2 = \tilde{v} \cdot \tilde{J}_1. \quad (3)$$

Gl. (3) in (2) eingesetzt ergibt

$$\tilde{v} = \frac{-i\omega M}{R_2 + i\omega L_2} = \frac{\omega M}{p^2} (-\omega L_2 - i R_2) = |v| \cdot e^{i\psi} \quad (4)$$

mit

$$p^2 = R_2^2 + \omega^2 L_2^2, \quad |v| = \frac{\omega M}{p}; \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{R_2}{\omega L_2}, \quad \cos \psi = \frac{-\omega L_2}{p}.$$

Gl. (4) und (3) in (1) angewendet ergibt

$$U_0 = \tilde{J}_1 \{ R'_1 + i\omega L'_1 \} \quad (5)$$

mit

$$R'_1 = R_1 + \left( \frac{\omega M}{p} \right)^2 R_2 = R_1 + |v|^2 R_2, \\ L'_1 = L_1 - \left( \frac{\omega M}{p} \right)^2 L_2 = L_1 - |v|^2 L_2.$$

<sup>1</sup> Siehe Anmerkung 1, S. 113.

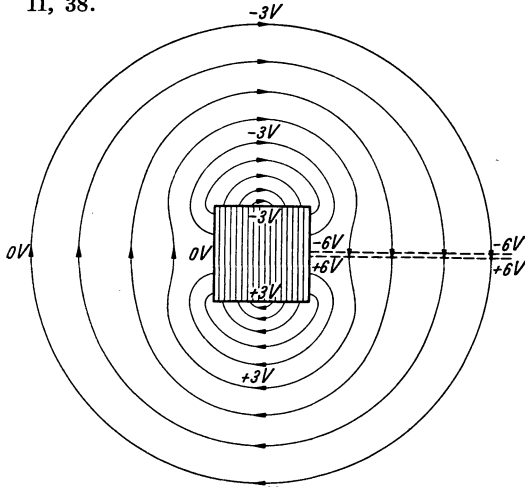


Abb. 38. 2.

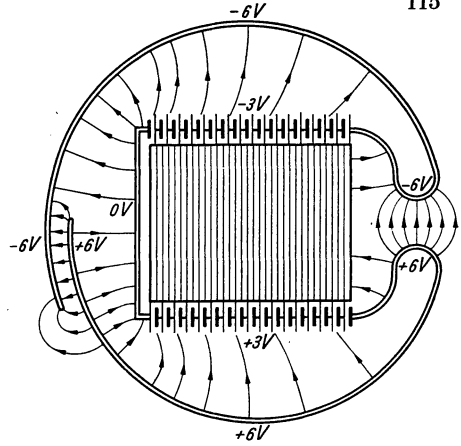


Abb. 38. 5.

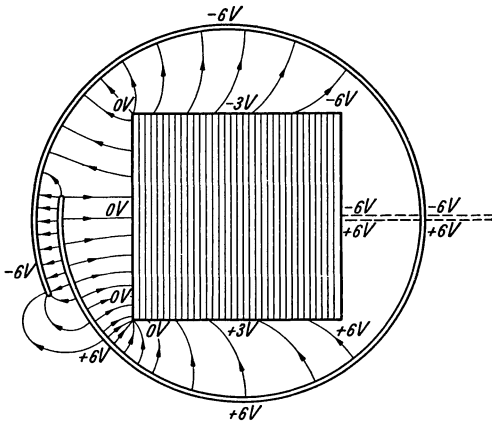


Abb. 38. 3.

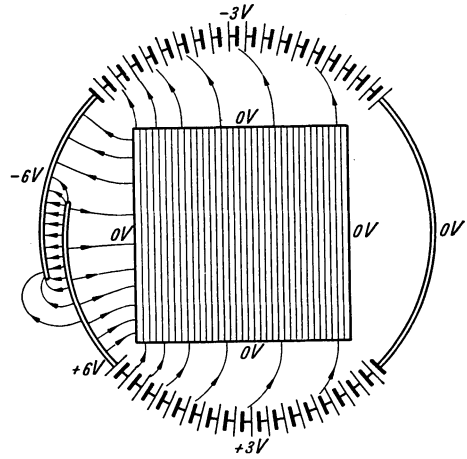


Abb. 38. 6.

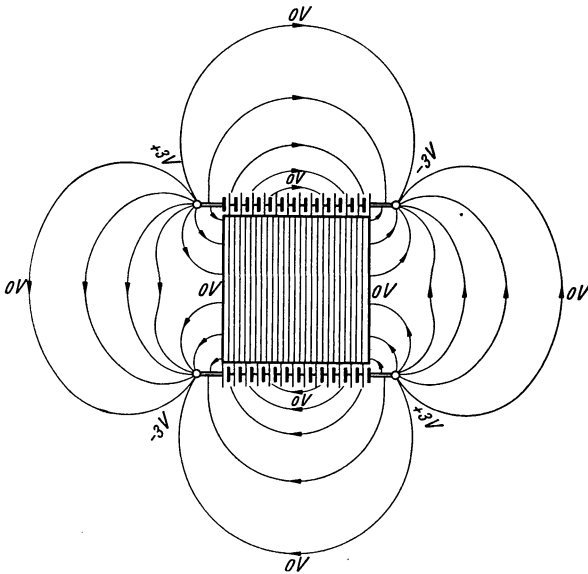


Abb. 38. 4.

Abb. 38. 2-6.  
Zur Beschreibung des elektrischen Feldes  
außerhalb des Transformatorernes.

Durch die Anwesenheit des zweiten Kreises erscheint der Wirkwiderstand des ersten Kreises vergrößert, seine Selbstinduktivität verkleinert. Die Frage, ob hiernach der Scheinwiderstand vergrößert oder verkleinert erscheint, d. h.

$$\sqrt{R_1'^2 + \omega^2 L_1'^2} \geq \sqrt{R_1^2 + \omega^2 L_1^2} \quad (6a)$$

ist, vereinfacht sich durch Ausrechnen in die Entscheidung über

$$\frac{2}{\tau_1 \tau_2} \geq \omega^2 (1 + \sigma), \quad (6b)$$

wobei  $\sigma$  der totale Streuungsfaktor,  $\tau_1$  und  $\tau_2$  die Zeitkonstanten des ersten und des zweiten Kreises sind [35, Gl. (7), (11)]. Die gesamte zugeführte und in Wärme umgesetzte Leistung ist [37. Gl. (21)] einfach

$$\bar{N} = \frac{|J_1|^2}{2} R_1'. \quad (7)$$

Ferner ist nach Gl. (3) mit Gl. (4)

$$\tilde{J}_2 = \frac{-i \omega M}{R_2 + i \omega L_2} \tilde{J}_1 = |J_2| \cdot e^{i\psi}, \quad (8)$$

$$|J_2| = |J_1| \frac{\omega M}{p} = |J_1| \cdot |v|, \quad \cos \psi = \frac{-\omega L_2}{p}.$$

Für Kurzschluß  $R_2 = 0$  wird  $\psi = \pi$  und  $|v| = \frac{M}{L_2}$ :  $J_1$  und  $J_2$  sind in Gegenphase, umkreisen also den Spulenkern entgegengesetzt zueinander, und ihre Beträge stehen in dem festen Verhältnis  $\frac{M}{L_2}$ . Die Änderung der magnetischen Energie  $J_1 d\Phi_1 = J_1 (L_1 dJ_1 + M dJ_2)$  findet man in gewissen Zeitabschnitten negativ: der Kreis 1 gibt also nicht fortwährend Energie ab, sondern nimmt auch zeitweise solche auf; es besteht demnach ein teilweises Hin- und Herwogen der Energie zwischen beiden Kreisen. — Die Kraft der beiden Stromkreise aufeinander, wenn  $|J_1|$  und  $|J_2|$  als konstant angesehen werden, ist nach 36. Gl. (34)  $K_x = J_1 J_2 \frac{\partial M}{\partial x}$ , sie schwankt um einen zeitlichen Mittelwert

$$\left. \begin{aligned} \bar{K}_x &= \frac{\partial M}{\partial x} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T |J_1| |J_2| \cdot \cos \omega t \cdot \cos (\omega t - \psi) \cdot dt \\ &= \frac{\partial M}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} |J_1| |J_2| \cos \psi = \frac{\partial M}{\partial x} \cdot \frac{|J_1|^2}{2} \cdot \frac{-\omega^2 M L_2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Der Kreis 2 sei beweglich, mit wachsendem  $x$  möge  $M$  abnehmen,  $\frac{\partial M}{\partial x} < 0$  sein, dann ist stets die Arbeit  $\bar{K}_x dx > 0$ : mit abnehmendem  $M$  wird Arbeit geleistet, die Kreise stoßen einander ab bis zur stabilen Gleichgewichtslage für  $M_{\min}$  (ein drehbarer zweiter Kreis stellt sich entsprechend senkrecht zur Ebene des ersten Kreises ein). Vgl. 36. Gl. (7).

Wir untersuchen ferner die Ströme in Abhängigkeit von  $R_2$  und setzen dazu  $R_1 = 0$ , was für die Leistungübertragung stets angestrebt wird. Es ist mit Gl. (3), (4), (1)

$$\begin{aligned} U_0 &= \tilde{J}_1 \left\{ i \omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + i \omega L_2} \right\}, \\ \tilde{J}_1 &= U_0 \frac{R_2 + i \omega L_2}{i \omega L_1 R_2 - \omega^2 \sigma L_1 L_2}, \end{aligned} \quad (10)$$

wobei  $\sigma$  der totale Streufaktor ist. Daraus mit Gl. (4)

$$\tilde{J}_2 = \tilde{v} \tilde{J}_1 = U_0 \frac{-i \omega M}{i \omega L_1 R_2 - \omega^2 \sigma L_1 L_2} \quad (11)$$

(z. B.  $\tilde{J}_2 = -\frac{U_0 M}{R_2 L_1}$  für  $\sigma = 0$ ). Ferner ist bei fehlendem zweiten Kreis der „Leerlaufstrom“

$$\tilde{J}_{1l} = \frac{U_0}{i \omega L_1} \quad \text{für} \quad R_2 = \infty. \quad (12)$$

Der Vergleich liefert den grundlegenden Zusammenhang

$$\tilde{J}_1 + \frac{M}{L_1} \tilde{J}_2 = \tilde{J}_{1l}. \tag{13}$$

Primärstrom und mit der „Transformatorübersetzung“  $\frac{M}{L_1}$  reduzierter Sekundärstrom ergeben stets zusammen den von  $\sigma$  unabhängigen Leerlaufstrom. Die beiden extremen Werte des Primärstromes  $\tilde{J}_{1l}$  für  $R_2 = \infty$  [Gl. (12)] und  $\tilde{J}_{1k} = U_0 \frac{-i \omega L_2}{\omega^2 \sigma L_1 L_2}$  für  $R_2 = 0$  („Kurzschlußstrom“) liegen auf derselben Achse des Diagrammes; für die Werte  $0 < R_2 < \infty$  ist der geometrische Ort des Endpunktes der Strecken  $\tilde{J}_1$  ein Halbkreis. Dessen Radius ist daher mit Abb. 7:  $a = \frac{1}{2} \frac{M}{L_1} |J_{2k}|$ , wobei  $|J_{2k}|$  der für  $R_2 = 0$  genommene Sekundärstrom ist. Man erhält aus Gl. (11) mit Gl. (12)

$$a = |J_{1l}| \cdot \frac{1 - \sigma}{2 \sigma}, \tag{14}$$

der Abstand des Kreismittelpunktes vom Koordinatenanfangspunkt ist

$$A = |J_{1l}| + a = |J_{1l}| \frac{1 + \sigma}{2 \sigma}. \tag{15}$$

Bei kleiner Streuung  $\sigma$  sind somit Kreisradius, Kurzschlußstrom, übertragene Leistung groß, bei großer Streuung klein (Abb. 7). Auch hier genügt als kennzeichnende Größe der Streufaktor  $\sigma$  vollständig.

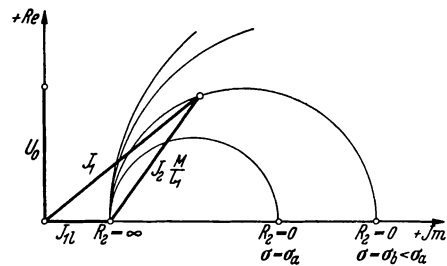


Abb. 38. 7. Transformator diagramm.

### 39. Stromverdrängung (Wirbelströmung, Hautwirkung).

In diesem Abschnitt soll die Ausbildung zeitlich veränderlicher elektrischer Strömungen und magnetischer Felder in homogenen metallischen Leitern untersucht werden. Zuerst erhebt sich hier die Frage, ob diese Vorgänge zu den quasistationären zu rechnen sind. Wir können sie bejahen, solange wir ausschließlich das Leiterinnere betrachten: dort ist mit Sicherheit die elektrische Strömung quellenfrei und die Vorgänge unterstehen dem Durchflutungs- und Induktionsgesetz; dies sind aber nach 32. Gl. (1), (2), (3) die entscheidenden Kennzeichen quasistationärer Felder. Einen größeren Zusammenhang erkennen wir erst im folgenden (41. und 44.), wenn wir auch das elektromagnetische Feld in dem an den Leiter angrenzenden Isolator in die Betrachtung einbeziehen. Wir können uns daher um so mehr in diesem Abschnitt auf den wichtigen Sonderfall harmonisch veränderlicher Felder in einigen einfachen Beispielen beschränken. Dabei läßt sich der Mechanismus der Vorgänge etwa folgendermaßen allgemein beschreiben: Im zeitlich unveränderlichen Zustande sind magnetisches Feld und elektrisches Strömungsfeld lediglich nach dem Durchflutungsgesetz miteinander verkettet. Bei zeitlich veränderlichen Zuständen sind nach dem Induktionsgesetz überall elektrische Wirbel von der Stärke  $-\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}$  vorhanden, die ihrerseits im Metall nach dem Ohmschen Gesetz  $\rho \mathfrak{G} = \mathfrak{E}$  zu elektrischer Strömung Anlaß geben und somit die Ausbildung der Strömung im wechselnden Zustand gegenüber der Verteilung im zeitlich konstanten Zustand verändern. Damit sind aber auch die Wirbel des magnetischen Feldes, die überall die Stärke  $\mathfrak{G}$  haben, dem zeitlich konstanten Zustand gegenüber verändert, und daher auch das magnetische Feld selbst. In welchem Sinne diese örtlichen Veränderungen des magnetischen Feldes und des elektrischen Strömungsfeldes erfolgen, hängt von den Bedingungen der einzelnen Aufgabe ab.

A. Eine ebene Metallplatte der gegenüber Länge und Breite kleinen Höhe  $h$  befinde sich in einem rein tangential gerichteten, homogenen magnetischen Wechselfeld

(Abb. 1). Für diesen Fall hatten wir in 30. Gl. (11) Abb. 2 und in 38. Gl. (1) mit Hilfe des Induktionsgesetzes das elektrische Feld näherungsweise bestimmt. Für eine genauere Untersuchung nehmen wir an, daß das magnetische Feld zwar ausschließlich parallel zur  $z$ -Achse verläuft, seine Stärke aber im Leiter von der Höhe  $x$  und der Zeit  $t$  abhängt:  $\mathfrak{H} = \mathfrak{k} \cdot H_z(x, t)$ , und im Außenraum sei  $\mathfrak{H}_a = \mathfrak{k} \cdot H_a(t)$  das gegebene, homogene Feld. Das elektrische Feld und die ihm proportionale elektrische Strömung verläuft dann, wie früher festgestellt, ausschließlich parallel zur  $y$ -Achse; auch hier ändert sich die Stärke mit der Höhe  $x$  und der Zeit  $t$ :  $\mathfrak{G} = \mathfrak{j} G_y(x, t)$ . Unter diesen Umständen bleibt von den Grundgleichungen  $\text{rot } \mathfrak{H} = \mathfrak{G}$ ,

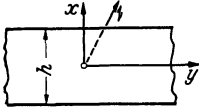


Abb. 39. 1. Zur Feldberechnung in einer ebenen Metallplatte.

$\text{rot } \mathfrak{G} = -\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}$  nur übrig

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} = G_y; \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}, \quad (1)$$

aus der zweiten Gleichung folgt mit  $\varrho \mathfrak{G} = \mathfrak{C}$ ,  $\bar{\mu} \mathfrak{H} = \mathfrak{B}$ :

$$\frac{\partial G_y}{\partial x} = -\frac{\bar{\mu}}{\varrho} \frac{\partial H_z}{\partial t}. \quad (2)$$

Aus Gl. (1) und (2) erhält man durch Substitution dieselbe partielle Differentialgleichung für  $H_z$  und  $G_y$ , nämlich

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{\bar{\mu}}{\varrho} \frac{\partial H_z}{\partial t}; \quad \frac{\partial^2 G_y}{\partial x^2} = \frac{\bar{\mu}}{\varrho} \frac{\partial G_y}{\partial t}. \quad (3)$$

Nach dem Obigen wollen wir uns auf zeitlich sinusförmige Vorgänge beschränken und rechnen daher mit „komplexen Amplituden“ gemäß

$$\left. \begin{aligned} H_z(x, t) &= \text{Re} \{ H_0(x) \cdot e^{i\omega t} \}, \\ G_y(x, t) &= \text{Re} \{ G_0(x) \cdot e^{i\omega t} \}. \end{aligned} \right\} \quad (4)^1$$

Diese Rechenweise erweist sich hier als formal sehr vorteilhaft, jedoch führt erst die Auslegung der Endergebnisse wieder auf den Boden des physikalisch Vorstellbaren zurück. Führen wir Gl. (4) in (3) ein, und schreiben zur Abkürzung

$$k^2 = +i \frac{\omega \bar{\mu}}{\varrho}, \quad (5)$$

so lautet die Differentialgleichung der komplexen Amplituden

$$\frac{\partial^2 H_0}{\partial x^2} = k^2 H_0; \quad \frac{\partial^2 G_0}{\partial x^2} = k^2 G_0. \quad (6)$$

Ihre Lösung ist aber einfach

$$\left. \begin{aligned} H_0 &= A \cdot \mathfrak{C} \circ \mathfrak{j} k x + B \cdot \mathfrak{S} \text{in} k x, \\ G_0 &= C \cdot \mathfrak{C} \circ \mathfrak{j} k x + D \cdot \mathfrak{S} \text{in} k x. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten bemerken wir, daß zu jedem Zeitpunkt der Gesamtstrom über dem Querschnitt Null sein muß:  $\int \mathfrak{G} d\mathfrak{f} = 0$ , da kein Strom von außen zugeführt wird. Daher ist  $H_0 = H_a$  für  $x = \pm \frac{h}{2}$ . Damit ergibt sich aus Gl. (7)  $B = 0$ ,  $H_a = A \mathfrak{C} \circ \mathfrak{j} k \frac{h}{2}$ , also

$$H_0 = H_a \frac{\mathfrak{C} \circ \mathfrak{j} k x}{\mathfrak{C} \circ \mathfrak{j} k \frac{h}{2}}. \quad (8)$$

Hieraus bestimmen wir  $G_0$  vollständig mit Gl. (1) durch Differenzieren zu

$$G_0 = -H_a k \frac{\mathfrak{S} \text{in} k x}{\mathfrak{C} \circ \mathfrak{j} k \frac{h}{2}}. \quad (9)$$

<sup>1</sup> Die in 37. Gl. (15) usw. benutzte Kennzeichnung komplexer Amplituden durch einen Zirkumflex unterlassen wir hier als entbehrlich, da Mißverständnisse kaum möglich sind.

Die hier benutzten Hyperbelfunktionen sind bekanntlich nichts anderes als Summen und Differenzen von Exponentialfunktionen der Form  $e^{\pm kx}$ , sie sind komplex, weil  $k$  gemäß Gl. (5) eine komplexe Größe ist:

$$k = \sqrt{i \frac{\omega \mu}{\rho}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega \mu}{\rho}} = (1+i)m; \quad m = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\rho}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}}. \quad (10)$$

[Auf die bei einem solchen  $k$  mit  $e^{\pm kx}$  verknüpfbare Vorstellung kommen wir in 44. Gl. (12) bis (15) zurück.] Mit Gl. (8), (9), (4) ist die Aufgabe grundsätzlich gelöst, da es für die Hyperbelfunktionen von komplexem Argument Tafelwerke gibt<sup>1</sup>, aus denen reeller und imaginärer Teil, Betrag und Phase entnommen werden können. Bei dem besonderen Bau von  $k$  [Gl. (10)] können jedoch einige einfache Ausdrücke angegeben werden<sup>2</sup>:

Der Verlauf der magnetischen Feldstärke in Abhängigkeit von  $x$  wird durch  $\mathfrak{Cof} kx$  beschrieben, hiervon kann man Betrag und Phase als

$$\mathfrak{Cof} (1+i)mx = S \cdot e^{i\gamma}$$

schreiben. Dann ist die Amplitude (der Betrag) der Feldstärke proportional<sup>3, 2</sup>

$$S = \sqrt{\frac{1}{2} (\mathfrak{Cof} 2mx + \cos 2mx)} = S(mx),$$

die Feldstärke wächst also mit  $\pm x$  symmetrisch zum Nullpunkt an. Aber auch der Phasenwinkel ist abhängig von der Höhe:

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} mx \cdot \mathfrak{I}g mx; \quad \gamma = \gamma(mx);$$

der Augenblickswert der Feldstärke ist somit gemäß Gl. (4) mit Gl. (8) mit zwei Konstanten zu schreiben

$$H(x, t) = \text{const} \cdot S(mx) \cdot \cos \{ \omega t + \gamma(mx) + \text{const} \}. \quad (11)$$

Da der Phasenwinkel sich mit  $mx$  ändert, schwankt die Verteilung von  $H$  über dem Querschnitt periodisch, es stimmt daher ein Bild der Augenblickswerte in keinem Falle mit dem der Beträge (Amplituden, Effektivwerte) überein. Dasselbe gilt auch für die Stromdichte und allgemein. Auf dem gezeigten Wege folgt aus Gl. (9) der Betrag (die Amplitude) der Stromdichte zu

$$|G_0(x)| = |H_a| m \sqrt{2} \sqrt{\frac{\mathfrak{Cof} 2mx - \cos 2mx}{\mathfrak{Cof} mh + \cos mh}}, \quad (12)^{4, 3}$$

und der Phasenwinkel  $\eta$  von  $\mathfrak{Cin} kx$  ist gegeben durch  $\operatorname{tg} \eta = \frac{\operatorname{tg} mx}{\mathfrak{I}g mx}$  als eine Funktion von  $mx$ . Abb. 2 zeigt die Verteilung von Beträgen<sup>5</sup>. Die Strömungsverteilung macht ohne weiteres deutlich, warum man hier von „Wirbelströmung“ spricht. Für kleine Argumentbeträge zeigen die Reihenentwicklungen

$$\mathfrak{Cin} u = u + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} + \dots, \quad \mathfrak{Cof} u = 1 + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} + \dots$$

leicht, wie etwa mit wachsender Frequenz  $G$  und  $H$  sich von der Gleichstromverteilung entfernen. Für hinreichend großes Argument ist

$$\mathfrak{Cin} u = \mathfrak{Cof} u = e^u \cdot \frac{1}{2},$$

<sup>1</sup> Jahnke-Emde: Funktionentafeln. Leipzig u. Berlin 1933. Hawelka-Emde: Vierstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen sowie ihrer Umkehrfunktionen im Komplexen. Braunschweig 1931.

<sup>2</sup> Formeln z. B. in Jahnke-Emde, Funktionentafeln.

<sup>3</sup>  $\frac{1}{2} (\mathfrak{Cof} u + \cos u) = 1 + \frac{u^4}{4!} + \frac{u^8}{8!} + \dots$ , vgl. Abb. 3.

<sup>4</sup>  $\frac{1}{2} (\mathfrak{Cof} u - \cos u) = \frac{u^2}{2!} + \frac{u^6}{6!} + \frac{u^{10}}{10!} + \dots$ , vgl. Abb. 3.

<sup>5</sup> Unter Berücksichtigung des Umstandes, daß die elektrische Strömung im wesentlichen antisymmetrisch zur Mittelebene verteilt sein muß, da der Gesamtstrom des Querschnittes Null ist, und in singemäßer Übereinstimmung mit 30. Gl. (11) Abb. 2.

und daher ist

$$\left. \begin{aligned} G_0 &= -H_a \cdot k \cdot e^{-k\left(\frac{h}{2}-x\right)}, \\ |G_0| &= |H_a| \cdot |k| \cdot e^{-\frac{|k|}{\sqrt{2}}\left(\frac{h}{2}-x\right)}; \quad |H_0| = \frac{|G_0|}{|k|}. \end{aligned} \right\} \quad (12a)$$

Bei sehr großem  $|k|$  haben also Strömung und Magnetfeld nur in unmittelbarer Nähe der oberen und unteren Oberfläche erhebliche Werte, der Innenraum ist praktisch frei von elektrischem und magnetischem Feld („Strom- und Feldverdrängung“).

Der zeitliche Mittelwert der räumlichen Wärmeleistungsdichte ist  $\bar{\psi} = \frac{1}{2} \rho |G_0|^2$ , daher ist die in einem

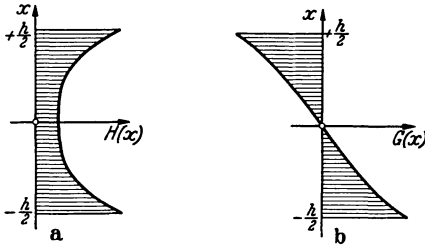


Abb. 39. 2. Ebene Metallplatte im homogenen tangentialen magnetischen Wechselfeld. Magnetisches Feld und elektrische Strömung im Innern (Wirbelströmung).

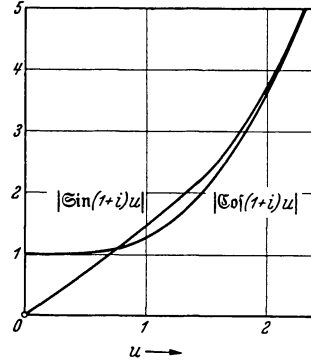


Abb. 39. 3. Kennzeichnende Funktionen der ebenen Stromverdrängung.

Quader der Höhe  $h$ , der Länge und Breite 1 verlorene Wärmeleistung im Zeitmittel

$$\bar{\Psi} = \int_{-h/2}^{+h/2} \rho \frac{|G_0|^2}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot dx = \frac{\rho}{h} \cdot \frac{|H_a|^2}{2} \cdot \psi(mh); \quad (13)$$

$$\psi(mh) = 2mh \frac{\sin mh - \sin mh}{\cos mh + \cos mh}, \quad (14)$$

siehe Abb. 4. Die Reihe  $\psi(mh) = \frac{(mh)^4}{3} \left\{ 1 - \frac{17}{420} (mh)^4 + \dots \right\}$  konvergiert für  $mh < 1$ ; für  $mh \rightarrow \infty$  ist  $\psi(mh) \rightarrow 2mh$ . Die Wirbelstromwärme steigt also z. B. bei kleiner Frequenz zunächst gemäß  $\omega^2$ , denn es ist  $mh = h \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\rho}}$ , schließlich mit

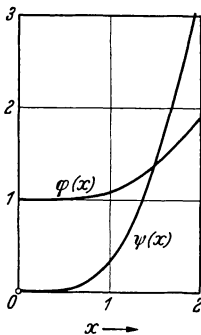


Abb. 39. 4. Die Wirbelstromwärme kennzeichnende Funktionen Gl. (14) und (23).

$\sqrt{\omega}$  unbegrenzt, da mit zunehmender Frequenz die Strömung sich mehr und mehr in die der Oberfläche benachbarten Schichten zusammenzieht.

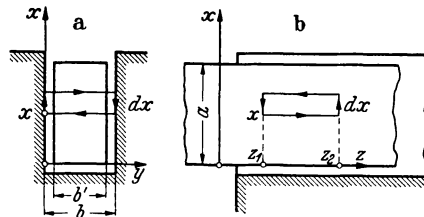


Abb. 39. 5. Zur Feldberechnung in einem rechteckigen Ankerstab.

B. Durch einen langen Kupferstab von rechteckigem Querschnitt werde in seiner Längsrichtung ein Wechselstrom  $J$  geschickt, das magnetische Feld sei ausschließlich senkrecht zu einer Seitenfläche gerichtet. Diese Verhältnisse liegen annähernd vor, wenn der Kupferstab in eine Nut eines Eisenkörpers eingebettet ist (Abb. 5,



Leiterstab im Anker elektrischer Maschinen). Die elektrische Strömung verläuft nur in der  $z$ -Richtung, ihre Größe ist von  $x$  und  $t$  abhängig:  $\mathcal{G} = \mathfrak{k} \cdot G_z(x, t)$ . Das magnetische Feld in der Nut steht um so genauer senkrecht auf den Nutwänden, je größer die Permeabilität des umgebenden Eisens ist; das Verhältnis der Luft- zur Eisenpermeabilität ist bei senkrechtem Austritt nach dem Brechungsgesetz [24. Gl. (4)]  $\frac{\mu_L}{\mu_E} \approx 0$ , dann ist aber wegen der Quellenfreiheit der magnetischen Induktion an den Nutenwänden das Verhältnis der Feldstärke im Eisen zu der in Luft  $H_E = \frac{\mu_L}{\mu_E} H_L \approx 0$ , daher hat die magnetische Spannung praktisch nur auf dem Weg durch die Nut von Null verschiedene Werte; bei nicht zu breiter Nut kann angesetzt werden, daß die magnetische Feldstärke nur aus einer  $y$ -Komponente besteht:  $\mathfrak{H} = \mathfrak{j} H_y(x, t)$ . Um auf die Differentialgleichungen des Problems zu kommen, wollen wir hier die Integralform der Grundgesetze benutzen. Wenden wir das Durchflutungsgesetz  $\oint \mathfrak{H} dr = \int \mathcal{G} d\mathfrak{f}$  auf einen in Abb. 5a angedeuteten Integrationsweg an, so erhalten wir

$$b \{ H_y(x + dx, t) - H_y(x, t) \} = b' dx G_z(x, t)$$

oder

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{b'}{b} G_z. \quad (15)$$

Wir wenden ferner das Induktionsgesetz  $\oint \mathcal{E} dr = -\frac{d}{dt} \int \mathfrak{B} d\mathfrak{f}$  auf einen in Abb. 5b angedeuteten Integrationsweg an und erhalten mit  $\varrho \mathcal{G} = \mathcal{E}$ ,  $\bar{\mu} \mathfrak{H} = \mathfrak{B}$ :

$$(z_2 - z_1) \varrho \{ -G_z(x + dx, t) + G_z(x, t) \} = - (z_2 - z_1) dx \bar{\mu} \frac{\partial H_y(x, t)}{\partial t}$$

oder

$$\frac{\partial G_z}{\partial x} = \frac{\bar{\mu}}{\varrho} \frac{\partial H_y}{\partial t}. \quad (16)$$

Abgesehen von dem wenig von 1 abweichenden Verhältnis  $\frac{b'}{b}$  stimmt Gl. (15) mit (1) und (16) mit (2) überein. Die weitere Rechnung verläuft daher auch völlig analog. Für die komplexen Amplituden  $H_0(x)$  und  $G_0(x)$  ergibt sich die Differentialgleichung (6), wobei jedoch hier ist

$$\left. \begin{aligned} k^2 &= +i \frac{\omega \bar{\mu}}{\varrho} \frac{b'}{b}, & k &= \sqrt{i \frac{\omega \bar{\mu}}{\varrho} \frac{b'}{b}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega \bar{\mu}}{\varrho} \frac{b'}{b}} = (1+i) m, \\ m &= \sqrt{\frac{\omega \bar{\mu}}{2\varrho} \frac{b'}{b}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Der Lösungsansatz ist Gl. (7), die Randbedingungen sind hier: für  $x=0$  ist  $b \cdot H(x, t) = 0$ , und für  $x=a$  ist  $b \cdot H(x, t) = J(t) = \text{Re} \{ J_0 \cdot e^{i\omega t} \}$ , beides nach dem Durchflutungsgesetz: Der Anteil im Eisen für die Umlaufspannung ist nach dem Obigen zu vernachlässigen, und für  $x=0$  wird kein, für  $x=a$  der ganze, dem Stab zugeführte Strom umfaßt. Damit sind  $A$  und  $B$  bestimmt, und es wird

$$H_0(x) = \frac{J_0}{b} \cdot \frac{\mathfrak{S}in kx}{\mathfrak{S}in ka}. \quad (18)$$

Zur vollständigen Bestimmung von  $G_0(x)$  zieht man Gl. (15) heran und erhält

$$G_0(x) = \frac{J_0}{b'a} \cdot ka \frac{\mathfrak{C}os kx}{\mathfrak{S}in ka}. \quad (19)$$

Nach den oben zu Gl. (12) und (11) gemachten grundsätzlichen Ausführungen über Betrag, Phase und Augenblickswert können wir uns hier darauf beschränken, die Beträge (Amplituden) anzuschreiben. Sie folgen aus den dort benutzten Formeln.

$$|H_0(x)| = \frac{|J_0|}{b} \sqrt{\frac{\mathfrak{C}os^2 2mx - \cos 2ma}{\mathfrak{C}os^2 2ma - \cos 2ma}}, \quad (20)$$

$$|G_0(x)| = \frac{|J_0|}{ab'} m a \sqrt{2} \sqrt{\frac{\mathfrak{C}os^2 2mx + \cos 2ma}{\mathfrak{C}os^2 2ma - \cos 2ma}} \quad (21)$$

(Abb. 6). Elektrische Strömung und magnetisches Feld werden nach oben gedrängt. Bei großem  $ma$  fließt der Strom nur in dünner Schicht entlang der oberen Stabkante („Stromverdrängung“). Aus Gl. (21) ergibt sich der zeitliche Mittelwert der in einem Stabstück der Länge  $l$  entwickelten Wärmeleistung zu

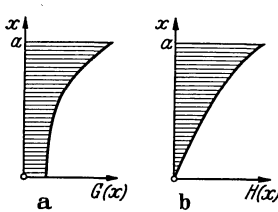


Abb. 39.6. Elektrische Strömung und magnetisches Feld in einem rechteckigen Ankerstab (Stromverdrängung).

$$\bar{\Psi} = \int_0^a \varrho \frac{|G_0(x)|^2}{2} b' \cdot l \cdot dx = \frac{|J_0|^2}{2} \cdot \frac{\varrho}{b'a} \cdot \varphi(ma); \quad (22)$$

$$\varphi(ma) = ma \frac{\text{Ein } 2ma + \sin 2ma}{\text{Cos } 2ma - \cos 2ma}. \quad (23)$$

Ein Gleichstrom von der Größe des Effektivwertes des Wechselstromes  $\frac{J_0}{\sqrt{2}}$  würde eine Wärmeleistung von der

Größe  $\frac{|J_0|^2}{2} \cdot \frac{\varrho}{b'a}$  in diesem Stabstück hervorbringen. Für  $\varphi(ma)$ , Abb. 4, ergibt sich die für  $ma < 1$  brauchbare

Reihenentwicklung  $\varphi(ma) = 1 + \frac{4}{45} (ma)^4 - \frac{104}{14175} (ma)^8 + \dots$ , und für  $ma \rightarrow \infty$  ist  $\varphi(ma) \rightarrow ma$ .

Die Wärmeleistung ist größer als die Gleichstromwärmeleistung, die Vergrößerung wächst mit  $ma = a \sqrt{\frac{\omega \mu}{2 \varrho}} \cdot \frac{b'}{b}$ , z.B. ist bei kleinem  $ma$  die Vergrößerung proportional  $\omega^2$ , bei großem  $ma$  proportional  $\sqrt{\omega}$ .

Es seien in der Nut mehrere Stäbe von der Höhe  $a$  übereinander angebracht. Wir nehmen an, daß der unterste Stab von außen den Wechselstrom  $J$  erhält, und betrachten den zweituntersten, der keinen Strom von außen erhalten möge. Differentialgleichung und Lösungsansatz sind die gleichen wie bisher. Die Randbedingungen zur Bestimmung der Integrationskonstanten sind für den betrachteten Stab: zu jedem Zeitpunkt ist der Gesamtstrom über den Querschnitt des nach außen nicht angeschlossenen Stabes Null:  $\int \mathfrak{G} d\mathfrak{f} = 0$ , daher ist, falls wir den Ursprungspunkt des Achsenkreuzes in die halbe Höhe des Stabes legen:  $b \cdot H = J$  für  $x = \pm \frac{a}{2}$ . Damit haben wir aber bis in jede Einzelheit die in A. behandelten Verhältnisse, es ist lediglich in den Gl. (8) bis (14) unter  $k$  die in Gl. (17) definierte Größe zu verstehen. Wird der betrachtete Stab von außen mit einem Wechselstrom gespeist, so überlagern sich in ihm die in A. beschriebenen Wirbelstrom- und die in B. beschriebenen Stromverdrängungserscheinungen. Das schließlich entstehende Bild der augenblicklichen Strömungs- und Feldverteilung hängt von der Phasenlage der einzelnen Vorgänge zueinander ab und kann daher nicht allgemein angegeben werden. Es kann höchstens für ein gegebenes Verhältnis der Beträge der dem Stabe zugeführten Ströme ein Bild der Verteilung der Beträge (Amplituden, Effektivwerte) gezeichnet werden.

C. Ein langer gerader Kreiszyylinder vom Radius  $a$  sei in axialer Richtung von elektrischer Leitungsströmung durchflossen (Leitungsdraht). Dann ist bei gehöriger Entfernung anderer stromführender Leiter das magnetische Feld rein zirkular, die Feldlinien sind zur Drahtachse coaxiale Kreise. Sowohl  $\mathfrak{H}$  wie  $\mathfrak{G}$  im Drahtinnern sind abhängig vom Abstand  $r$  von der Achse. Anwendung des Durchflutungsgesetzes ergibt (Abb. 7 b):

$$2 \pi r \cdot H(r, t) = \int_0^r G(r, t) \cdot 2 \pi r \cdot dr; \quad (24)$$

wir leiten nach der oberen Grenze des Integrales ab:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \{ r \cdot H(r, t) \} &= r \cdot G(r, t), \\ \frac{\partial H(r, t)}{\partial r} + \frac{1}{r} H(r, t) &= G(r, t). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Anwendung des Induktionsgesetzes ergibt (Abb. 7 a):

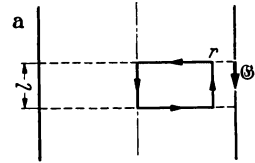
$$l \{ E(0, t) - E(r, t) \} = -l \int_0^r \frac{\partial B(r, t)}{\partial t} dr,$$

daraus folgt durch Ableiten nach der oberen Grenze des Integrales und Einsetzen von  $\mathfrak{E} = \varrho \mathfrak{G}$ ,  $\mathfrak{B} = \bar{\mu} \mathfrak{H}$ :

$$\varrho \frac{\partial G(r, t)}{\partial r} = \bar{\mu} \frac{\partial H(r, t)}{\partial t}. \tag{26}$$

Indem man Gl. (25) einmal nach  $r$ , das andere Mal nach  $t$  ableitet und beide Male aus Gl. (26) substituiert, erhält man

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} - \frac{1}{r^2} H &= \frac{\bar{\mu}}{\varrho} \frac{\partial H}{\partial t}, \\ \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial r} &= \frac{\bar{\mu}}{\varrho} \frac{\partial G}{\partial t} \end{aligned} \right\} \tag{27}$$

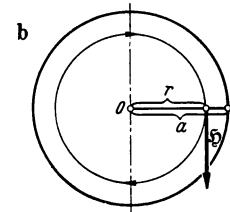


Für die „komplexen Amplituden“ des Wechselstromvorganges nach

$$\left. \begin{aligned} H(r, t) &= \text{Re} \{ H_0(r) \cdot e^{i\omega t} \}, \\ G(r, t) &= \text{Re} \{ G_0(r) \cdot e^{i\omega t} \} \end{aligned} \right\} \tag{28}$$

ergeben sich aus Gl. (27) die totalen Differentialgleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 H_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dH_0}{dr} - \left( \frac{1}{r^2} + i \frac{\omega \bar{\mu}}{\varrho} \right) H_0 &= 0, \\ \frac{d^2 G_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dG_0}{dr} - i \frac{\omega \bar{\mu}}{\varrho} G_0 &= 0, \end{aligned} \right\} \tag{29}$$



die wir mit der Abkürzung

$$k^2 = -i \frac{\omega \bar{\mu}}{\varrho} \tag{30}$$

Abb. 39. 7<sup>1</sup>. Zur Feldberechnung in einem zylindrischen Leiter.

und der vorübergehend gebrauchten Bezeichnung  $kr \equiv x$  schreiben als

$$\frac{d^2 H_0}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dH_0}{dx} + \left( 1 - \frac{1}{x^2} \right) H_0 = 0, \tag{31}$$

$$\frac{d^2 G_0}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dG_0}{dx} + G_0 = 0. \tag{32}$$

Von den Differentialgleichungen Gl. (6) der Aufgaben A. und B. unterscheiden sich diese formal insbesondere durch die mit  $\frac{1}{x}$ ,  $\frac{1}{x^2}$  behafteten Glieder. Sie werden auch nicht durch elementare Funktionen oder irgendwelche Kombinationen solcher gelöst, vielmehr bezeichnet man die Integrale als Zylinderfunktionen, die für Gl. (31) von erster Ordnung, für Gl. (32) von nullter Ordnung sind. Die vollständige Lösung besteht jedesmal aus der Summe von Zylinderfunktionen erster und zweiter Art [entsprechend besteht die vollständige Lösung Gl. (7) von Gl. (6) aus beiden Arten hyperbolischer Funktionen]. Also ist

$$H_0 = A \cdot J_1(kr) + B \cdot N_1(kr), \tag{33}$$

$$G_0 = C \cdot J_0(kr) + D \cdot N_0(kr). \tag{34}$$

Als Randbedingungen haben wir aus dem Durchflutungsgesetz: 1. Für  $x = 0$  ist  $H_0 = 0$ ; daher muß sein  $B = 0$ , denn die Zylinderfunktionen zweiter Art divergieren (logarithmisch) für verschwindendes Argument. 2. Für  $r = a$  ist  $2\pi a \cdot H_0 = I_0$ , wenn  $J = \text{Re} \{ I_0 e^{i\omega t} \}$  der den Draht durchfließende Gesamtstrom ist. Damit ist  $A$  bestimmt und es wird aus Gl. (33)

$$H_0 = \frac{I_0}{2\pi a} \cdot \frac{J_1(kr)}{J_1(ka)}. \tag{35}$$

<sup>1</sup> In Abb. 7a steht der Pfeil  $\mathfrak{G}$  richtig bei  $r$ , nicht bei  $a$ .

Hieraus bestimmen wir  $G_0$  vollständig auf Grund von Gl. (25)<sup>1</sup> zu

$$G_0 = \frac{I_0}{2\pi a} \cdot k \frac{J_0(kr)}{J_1(ka)}. \quad (36)^2$$

Wegen der komplexen Größe

$$k = \sqrt{-i \frac{\omega \mu}{\rho}} = \sqrt{-i} |k| = (1-i) \frac{|k|}{\sqrt{2}}; \quad |k| = \sqrt{\frac{\omega \mu}{\rho}} \quad (37)$$

sind die Zylinderfunktionen komplex, das bedeutet aber, wie bekannt: nicht nur die Amplituden, sondern auch die Phasen von Stromdichte und Magnetfeld sind von  $r$  abhängig, es wechselt also die Verteilung über den Querschnitt von  $G$  und von  $H$  periodisch. Eine Festlegung der Widerstandsverhältnisse ist trotzdem möglich, indem man von der Überlegung ausgeht, daß die elektrische Spannung entlang einer geraden Strecke  $l$  auf dem Zylindermantel  $l \cdot \rho G(a)$  gegenüber dem Gesamtstrom  $J$  eine eindeutig definierte Phasenverschiebung hat. Der Quotient ihrer komplexen Amplituden ist daher eine komplexe Größe, und durch diese definieren wir gemäß

$$\frac{l \cdot \rho G_0(a)}{I_0} = R + i\omega L_i \quad (38)$$

den Verlustwiderstand  $R$  und die wirksame innere Selbstinduktivität  $L_i$  der Länge  $l$ .

Gl. (38) wird aus Gl. (36) mit dem Gleichstromwiderstand  $R_0 = \frac{\rho l}{\pi a^2}$

$$\frac{R + i\omega L_i}{R_0} = \frac{ka}{2} \cdot \frac{J_0(ka)}{J_1(ka)}. \quad (39)$$

Zur Auslegung der Gl. (35), (36), (39) sei an die für jede Argumentform  $x$  gültigen Reihenentwicklungen erinnert

$$J_0(x) = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!^2} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{3!^2} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots,$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \dots \right\} = -J_0'(x).$$

Sie sind offenbar konvergent für  $\frac{x}{2} < 1$ . Das größte vorkommende Argument ist

$$\frac{ka}{2} = (1-i) \frac{|k|a}{2\sqrt{2}} = (1-i) \kappa; \quad \kappa = \frac{|k|a}{2\sqrt{2}}. \quad (40)$$

Setzen wir

$$J_0(|k|r\sqrt{-i}) = B_0 e^{-i\beta_0}, \quad J_1(|k|r\sqrt{-i}) = B_1 e^{-i\beta_1},$$

so sind die Beträge von Stromdichte und Magnetfeld bis auf einen konstanten Koeffizienten durch  $B_0, B_1$ , die Phasen bis auf eine additive Konstante durch  $\beta_0, \beta_1$  gegeben (Abb. 8<sup>3</sup>). Strömung und Magnetfeld werden demnach mit wachsendem  $|k|$  immer mehr in die äußeren Schichten gedrängt: „Hautwirkung“. Die Verteilung der Stromdichte für verschiedene Werte  $\kappa$  zeigt Abb. 9. Für sehr große Argumentbeträge gilt die asymptotische Darstellung der Zylinderfunktionen

$$\lim_{x \rightarrow \infty} J_0(x\sqrt{-i}) = \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2\pi x}} \cdot e^{i\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right)},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} J_1(x\sqrt{-i}) = -i \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2\pi x}} \cdot e^{i\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right)}.$$

<sup>1</sup>  $\frac{d}{dx} J_1(x) = -\frac{1}{x} J_1(x) + J_0(x)$ .

<sup>2</sup> Man verwechsle nicht miteinander die Bezeichnungen  $I_0$  für die komplexe Amplitude des zugeführten Gesamtstromes  $J$  und  $J_0(kr)$  für die Zylinderfunktion nullter Ordnung erster Art vom Argument  $kr$ .

<sup>3</sup> Nach Jahnke-Emde, Funktionentafeln (1933) S. 314.

Daraus ergibt sich die Stromdichte asymptotisch zu

$$\left. \begin{aligned} G_0 &= \frac{I_0}{2\pi a} \cdot \sqrt{i} |k| \cdot \sqrt{\frac{a}{r}} \cdot e^{-\sqrt{i} |k| (a-r)}, \\ |G_0| &= \frac{|I_0|}{2\pi a} \cdot |k| \cdot \sqrt{\frac{a}{r}} \cdot e^{-\frac{|k|}{\sqrt{2}} (a-r)}. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Bei dem vorausgesetzten sehr großen Wert  $|k|$  ist die Exponentialfunktion im wesentlichen bestimmend: es ist also die Wechselströmung auf eine sehr dünne Schicht an der Drahtoberfläche beschränkt. Für das Magnetfeld gilt mit Gl. (41):  $|H_0| = \frac{|G_0|}{|k|}$ .

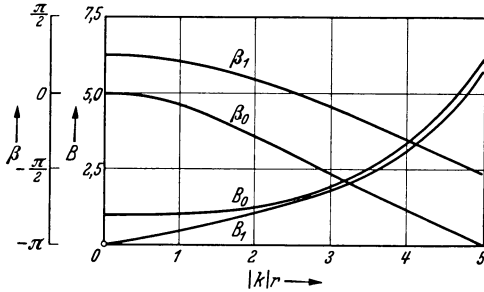


Abb. 39. 8. Kennzeichnende Funktionen der zylindrischen Stromverdrängung.

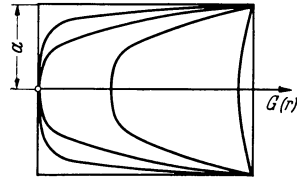


Abb. 39. 9. Elektrische Strömung im zylindrischen Leiter (Hautwirkung).

Der innere Wechselstromwiderstand Gl. (39) ist eine Funktion allein von  $\kappa$  [Gl. (40)]. Für  $\kappa < 1$  ergeben die angeschriebenen Reihen<sup>1</sup>

$$\frac{R + i \omega L_i}{R_0} = \left(1 + \frac{\kappa^4}{3}\right) + i \kappa^2. \quad (42)$$

Den allgemeinen Verlauf zeigt Abb. 10, die asymptotischen Darstellungen geben für  $\kappa \gg 1$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{R + i \omega L_i}{R_0} &= i \frac{\kappa a}{2} = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{i \omega \mu}{\rho}} = \kappa + i \kappa, \\ \frac{R}{R_0} &= \frac{a}{2} \sqrt{\frac{\omega \mu}{2 \rho}}, \quad \frac{L_i}{R_0} = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{\mu}{2 \rho \omega}}. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Der Widerstand wächst unbegrenzt, die innere Selbstinduktivität verschwindet mit  $\omega$ : dabei fließt der Wechselstrom nur in dünner Schicht der Oberfläche entlang, der weitere Innenraum ist ein elektrisch und magnetisch toter Raum.

Der betrachtete Zylinder sei ein Eisenstab, der dadurch wechselnd längsmagnetisiert wird, daß er in einer wechselstromdurchflossenen Zylinderspule steckt. Dann verläuft die Wirbelströmung auf Kreisbahnen um die Achse,  $G$  und  $H$  sind gegenüber dem bisher betrachteten Falle vertauscht. Dann zeigt also Abb. 9 die Verteilung der Amplituden des magnetischen Feldes, das proportional  $|J_0(kr)|$  ist; aus der  $|J_1(kr)|$  proportionalen Wirbelströmung ergeben sich die Stromwärmeverluste in bekannter Weise.

Die Erscheinungen der Strom- und Feldverdrängung sind allgemein um so ausgeprägter, je größer die Ausdehnung (Höhe, Radius) und je größer  $\sqrt{\frac{\omega \mu}{\rho}}$  ist. Sie wachsen daher mit der Wechselzahl und der Permeabilität (für Eisen gilt die Rechnung in der Näherung, mit der  $\mu = \text{const}_H$  angenommen werden kann) und der elektrischen Leitfähigkeit (sie sind daher z. B. in Elektrolyten im allgemeinen unmerklich).

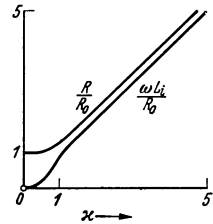


Abb. 39. 10. Zur Berechnung von  $R$  und  $L_i$  des wechselstromdurchflossenen zylindrischen Leiters.

<sup>1</sup>  $\frac{x}{2} \frac{J_0(x)}{J_1(x)} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{1}{12} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{48} \left(\frac{x}{2}\right)^6 - \dots$

## Ausbreitungsvorgänge.

### 40. Kennzeichnung des elektromagnetischen Feldes im allgemeinen Falle.

Wir stellen die Gleichungen der klassischen Elektrodynamik zusammen, die für örtlich und zeitlich beliebig veränderliche elektromagnetische Felder gelten.

a) Wechselseitige Verketzung der elektrischen und magnetischen Größen:

$$\oint \mathfrak{H} \, d\mathbf{r} = \int \mathfrak{G} \, d\mathfrak{f} + \frac{d}{dt} \int \mathfrak{D} \, d\mathfrak{f}, \quad (1)$$

$$-\oint \mathfrak{E} \, d\mathbf{r} = \frac{d}{dt} \int \mathfrak{B} \, d\mathfrak{f}, \quad (2)$$

als Differentialgesetze für ruhende Körper

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \mathfrak{G} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}, \quad (1a)$$

$$-\operatorname{rot} \mathfrak{E} = \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}. \quad (2a)$$

Daher: 1. Gleichgewichtszustand:  $\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0$ ,  $\operatorname{rot} \mathfrak{H} = 0$ : elektrische und magnetische Felder ohne wechselseitigen Zusammenhang, Ursache: Quellen, eingeprägte Kräfte; elektrisches Feld senkrecht zur Leiteroberfläche, Leiterinneres feldfrei.

2. Beharrungszustand:  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ : beharrliche elektrische Leitungsströmung, an Grenzflächen gegen Nichtleiter tangential; Wirbel für beharrliches Magnetfeld.

3. Veränderlicher Zustand: Schwankendes elektrisches Feld und Leitungsströmung bedeuten magnetische, schwankendes magnetisches Feld elektrische Wirbel. Oder: das wirbelfreie magnetische Feld hat keinen Zusammenhang mit dem elektrischen Feld, Wirbel des magnetischen Feldes bedeuten Veränderung des elektrischen. Das wirbelfreie elektrische Feld beeinflusst das magnetische Feld nicht, Wirbel des elektrischen Feldes bestimmen Änderung des magnetischen für den nächsten Zeitpunkt.

b) Quellen der Felder:

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = \eta; \quad \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0; \quad \operatorname{div} \left( \mathfrak{G} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} \right) = 0. \quad (3)$$

c) Zusammenhang der Feldgrößen durch stoffliche Eigenschaften:

$$\mathfrak{D} = \bar{\epsilon} \mathfrak{E}; \quad \rho \mathfrak{G} = \mathfrak{G} + \mathfrak{G}^e; \quad \mathfrak{B} = \bar{\mu} \mathfrak{H} + \mathfrak{M}, \quad (4)$$

dabei:  $\epsilon$ ,  $\rho$ ,  $\mathfrak{G}^e$ ,  $\mu$ ,  $\mathfrak{M}$  an der Materie haftende Eigenschaften, als von zeitlichen Feldänderungen im wesentlichen unabhängig angesehen; Abhängigkeit vom Betrag der Feldgrößen:  $\rho = \text{const}$ ,  $\epsilon \approx \text{const}$ ,  $\mu = \text{const}$  für nicht ferromagnetische Stoffe und Dauermagnete; weiches Eisen  $\mu = F(H)$ ,  $\mathfrak{M} = 0$  (Hysterese ausgeschlossen).

d) Feldenergie und Energieumsatz durch chemisch-thermische Leistung:

$$\left. \begin{aligned} W &= \int_{\tau} (w_e + w_m) \, d\tau; & \Psi &= \int_{\tau} \psi \, d\tau; \\ w_e &= \int_0^D \mathfrak{E} \cdot d\mathfrak{D}, & w_e &= \frac{\mathfrak{E} \mathfrak{D}}{2} & \text{für } \epsilon = \text{const}_E, \\ w_m &= \int_0^B \mathfrak{H} \cdot d\mathfrak{B}, & w_m &= \frac{\mathfrak{H} \mathfrak{B}}{2} & \text{für } \mu = \text{const}_H, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\psi = \mathfrak{E} \mathfrak{G};$$

$w_e$ ,  $w_m$ ,  $\psi$  auch für beliebig rasch veränderliche Felder geltend betrachtet.

e) Grenzflächen:

$$\left. \begin{aligned} B_n &\text{ stetig; } & \left( G + \frac{\partial D}{\partial t} \right)_n &\text{ stetig; } \\ \text{ohne Flächenwirbel: } E_t &\text{ stetig, } H_t &\text{ stetig.} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Aus Gleichung (1a) und (2a) folgt aus dem augenblicklich gegebenen elektromagnetischen Feldzustand die zeitliche Änderung eindeutig; durch einen gegebenen Anfangszustand sind die Folgezustände sämtlich eindeutig festgelegt. (Dabei beeinträchtigen die bekannten Eigenschaften der Stoffwerte die zahlenmäßige Richtigkeit des Ergebnisses; dies ist eine Unvollständigkeit, nicht eine Unrichtigkeit der Theorie.)

Teils zusammenfassend, teils die kommenden Ergebnisse vorausnehmend stellen wir die hauptsächlichsten Besonderheiten der klassischen Elektrodynamik zusammen:

1. Die elektrischen und magnetischen Wirkungen zwischen voneinander entfernten Körpern gehen unter Einwirkung des von Materie erfüllten oder leeren Zwischenraumes vor sich<sup>1</sup>. Den Wirkungszustand nennen wir elektrisches und magnetisches Feld. Er kann eindeutig physikalisch festgestellt und mit Hilfe der Vektorenrechnung beschrieben werden. Früher: der Zwischenraum spielt nur seine geometrische Rolle als Abstand.

2. Im felderfüllten Raum ist Energie als Funktion des Ortes vorhanden. Bei der Energiebewegung im veränderlichen Zustande spielen die etwa vorhandenen Leiter nur die untergeordnete Rolle, richtungweisend zu sein. Die Energieströmung geht im Nichtleiter vorstatten. Früher: verantwortlich für die Energie sind Polstärken, Ladungen, Stromelemente.

3. Im veränderlichen Zustande findet die Leitungsströmung ihre quellenfreie Fortsetzung in den Änderungen des elektrischen Feldes (Verschiebungsströmung), beide sind in gleicher Weise mit dem magnetischen Felde verknüpft. Früher war das magnetische Feld ungeschlossener Leitungsströme ungeklärt.

4. Elektromagnetische Vorgänge pflanzen sich von Raumteil zu Raumteil mit endlicher Geschwindigkeit fort, im leeren Raume mit Lichtgeschwindigkeit. Was an einem festen Ort zu gegebener Zeit sich abspielen kann, ist vollständig und eindeutig festgelegt durch die Geschehnisse, die in unmittelbarer örtlicher und zeitlicher Nachbarschaft stattfinden.

5. Licht ist „eine elektromagnetische Störung, die sich nach elektromagnetischen Gesetzen ausbreitet“ (Maxwell). Früher: Licht ist eine Wellenbewegung des starren elastischen unendlich feinen Stoffes „Äther“.

Benennungen und Einheiten. Ein Vergleich der Anzahl der Grundgleichungen mit der Anzahl der in ihnen vorkommenden Größen zeigt, daß vier Größen mehr vorhanden sind als Gleichungen. Ohne weitere (willkürlich<sup>2</sup> hinzugefügten) Beziehungen sind daher vier Größen voneinander unabhängig zu geben, und, insofern jede Größe in einer Gleichung als benannte Zahl aufgefaßt wird, sind ohne weitere Zutaten vier Einheiten (Benennungen) voneinander unabhängig. Dies wurde bereits in 4. ausgesprochen, und ist für die Maßsysteme der Elektrodynamik wichtig (vgl. den diesbezüglichen Abschnitt).

#### 41. Energiebeziehungen im allgemeinen Fall. Energieströmung.

Wir untersuchen in diesem Abschnitt die Beziehungen zwischen den beiden Hauptgleichungen [40. Gl. (1), (2)] einerseits und den Energiegleichungen [40. Gl. (5)] andererseits. Die Frage nach diesem Zusammenhang ist berechtigt, denn die Grundtatsachen, die in 28. bis 30. zu den beiden Hauptgleichungen geführt hatten, sind unabhängig von den Energieausdrücken und den für diese gemachten grundsätzlichen Voraussetzungen. Finden wir Übereinstimmung zwischen Folgerungen aus den beiden Hauptgleichungen, den Energieausdrücken und dem Satz von der Erhaltung der Gesamtenergie, so stützen die beiden Gleichungssysteme einander gegenseitig, das Bestehen des einen ist zugleich Beweis für das andere.

<sup>1</sup> „Faraday sah mit den Augen seines Geistes Kraftlinien, die durch alle Räume hindurchgehen ... er suchte den Sitz der Erscheinungen in wirklicher Tätigkeit, die in dem Medium vor sich geht...“ (Maxwell).

<sup>2</sup> Willkürlich insofern, als damit kein naturnotwendiger neuer physikalischer Zusammenhang ausgesprochen wird.

Um diese Übereinstimmung zu zeigen, gehen wir aus von den Differentialgesetzen für ruhende Körper

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \mathfrak{G} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}, \quad (1) \quad -\operatorname{rot} \mathfrak{E} = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}. \quad (2)$$

Wir vervielfachen Gl. (1) mit  $\mathfrak{E}$  und Gl. (2) mit  $\mathfrak{H}$ , addieren und beachten die Rechenregel  $\mathfrak{E} \operatorname{rot} \mathfrak{H} - \mathfrak{H} \operatorname{rot} \mathfrak{E} = \operatorname{div} [\mathfrak{H} \mathfrak{E}]$ ; es ergibt sich

$$-\operatorname{div} [\mathfrak{E} \mathfrak{H}] = \mathfrak{E} \mathfrak{G} + \mathfrak{E} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \mathfrak{H} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}. \quad (3)$$

Zur Erleichterung der physikalischen Deutung wenden wir dieses Differentialgesetz auf einen beliebig gewählten, endlichen, zusammenhängenden Raum  $\tau$  an; integrieren wir die mit  $d\tau$  vervielfachte Gl. (3) über  $\tau$ , so kann auf der linken Seite sogleich nach dem Satz von Gauß das Raumintegral der Divergenz in ein Flächenintegral über die den Raum  $\tau$  begrenzende geschlossene Hülle verwandelt werden; als die Normalenrichtung des positiv zu rechnenden Hüllenintegrals ist nach diesem Satz die nach außen weisende Normale zu betrachten; entscheiden wir uns dagegen für die nach innen weisende Normale, rechnen also den in den Raum  $\tau$  von außen eintretenden Fluß des Vektors  $[\mathfrak{E} \mathfrak{H}]$  positiv, so müssen wir das Vorzeichen ändern und erhalten somit

$$\oint [\mathfrak{E} \mathfrak{H}] d\mathfrak{f} = \int_{\tau} \left\{ \mathfrak{E} \mathfrak{G} + \mathfrak{E} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \mathfrak{H} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \right\} d\tau. \quad (4)$$

Das erste Integral der rechten Seite ist uns bekannt als die gesamte in  $\tau$  umgesetzte chemisch-thermische Leistung [26. Gl. (3)], welche die stets positive (Joulesche) Stromwärmeleistung enthält, im übrigen aber nach 26. positiv oder negativ sein kann; ihre räumliche Dichte ist  $\psi = \mathfrak{E} \mathfrak{G} = \rho \mathfrak{G}^2 - \mathfrak{E}^e \mathfrak{G}$ . Wir vergleichen das dritte Integral mit dem früher [33. Gl. (12) bis (15)] gefundenen allgemeinen Ausdruck für die Änderung der magnetischen Feldenergiedichte  $dw_m = \mathfrak{H} \cdot d\mathfrak{H}$  und stellen fest:  $\mathfrak{H} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \frac{\partial w_m}{\partial t}$ . Entsprechend dürfen wir deuten  $\mathfrak{E} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = \frac{\partial w_e}{\partial t}$  und  $dw_e = \mathfrak{E} \cdot d\mathfrak{D}$  als allgemeineren Ausdruck für die Änderung der elektrischen Feldenergiedichte; für  $\varepsilon = \operatorname{const}_E$ ,  $\mu = \operatorname{const}_H$  ergeben sich die bekannten Formen für  $w_e$  und  $w_m$  [40. Gl. (5)]. Wir haben somit

$$-\operatorname{div} [\mathfrak{E} \mathfrak{H}] = \psi + \frac{\partial w_e}{\partial t} + \frac{\partial w_m}{\partial t}, \quad (5)$$

$$\oint [\mathfrak{E} \mathfrak{H}] d\mathfrak{f} = \Psi + \frac{\partial W_e}{\partial t} + \frac{\partial W_m}{\partial t}. \quad (6)$$

Damit aber erkennen wir in dieser Gleichung eine Kontinuitätsgleichung für die Energie. Der Grundsatz von der Erhaltung der Materie führt z. B. für die Strömung einer unzusammendrückbaren Flüssigkeit mit Notwendigkeit zu der Feststellung, daß die Zunahme an Flüssigkeitsinhalt in einem abgegrenzten Raumgebiet gleich ist der durch die begrenzende Hülle eintretenden Strömung; der Grundsatz von der Unzerstörbarkeit der elektrischen Ladungen führte zu einer entsprechenden Aussage, deren formelmäßiger Ausdruck zu Gl. (5) und (6) völlig analog ist [25. Gl. (3)]. Wegen des Grundsatzes von der Erhaltung der Gesamtenergie ist daher die Gl. (6) so zu deuten, daß die Zunahme der gesamten Energie in einem abgegrenzten Raumbezirk (rechte Seite der Gleichung) gleich sein muß der durch die Hülle in diesen Raum eintretenden Energieströmung (linke Seite der Gleichung), und Gl. (5) beschreibt das Versickern (oder Entspringen) der Energieströmung für das Raumelement. Es ist somit die Auffassung erlaubt, daß der Vektor

$$\mathfrak{E} \equiv [\mathfrak{E} \mathfrak{H}] \quad (7)$$

die in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit strömende Energie ist, also die Flächendichte des Leistungsflusses<sup>1</sup>. Zu der Vorstellung Maxwells, daß

<sup>1</sup> Benennung  $S = \frac{U}{L} \frac{J}{L} = \frac{UJ}{L^2}$ , Einheit  $1 \frac{\text{Watt}}{\text{cm}^2}$  im P. M. S.



die elektrische und die magnetische Energie räumlich verteilt ist, vergleichbar der Verteilung eines homogenen Stoffes mit räumlich veränderlicher Dichte, tritt hier eine Aussage über die Bewegung der Energie: dem betrachteten Raume fließt die Energie von außen mit der Strömungsdichte  $\mathfrak{S}$  in der Zeiteinheit zu; diese Dichte wird dem Betrag nach durch das aus  $E$  und  $H$  gebildete Parallelogramm dargestellt, die Richtung ist die rechtswendig zu  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  senkrechte; die elektromagnetische Energie strömt also überall senkrecht zur elektrischen und magnetischen Feldstärke. Im Inneren des betrachteten Raumteiles verteilt sich die zuströmende Energie in chemisch-thermische Leistung und Zuwachs an elektrischer und magnetischer Feldenergie. Der Vektor  $\mathfrak{S}$  und seine Deutung wurde von Poynting und gleichzeitig und unabhängig von Heaviside gefunden. Zu beachten ist, daß durch die gesamten Energieänderungen (Energieumsetzungen, Feldenergieänderungen) immer nur der gesamte Hüllenfluß der zuströmenden Energie oder die Quellen und Senken der Energieströmung bekannt sind; ein etwa vorhandener, quellenfreier Anteil des Feldes  $\mathfrak{S}$  tritt in den Energieänderungen überhaupt nicht in Erscheinung und bleibt damit in jedem Falle bedeutungslos.

Wir erläutern die Bedeutung der Vorstellung von der Energieströmung noch an folgenden Beispielen:

Die geschlossene Hülle möge so gelegt werden, daß auf ihr überall gilt  $\mathfrak{S} d\mathfrak{f} = 0$ . Dies ist z. B. mit Sicherheit durch eine unendlich ferne Hülle erfüllbar, falls die Strombahnen und Ladungsträger im Endlichen begrenzt sind. Dann ergibt Gl. (6):

$$\Psi = -\frac{\partial}{\partial t} (W_e + W_m); \quad (8)$$

in Übereinstimmung mit dem Satz von der Erhaltung der Gesamtenergie ist die Abnahme der gesamten elektromagnetischen Feldenergie gleich der chemisch-thermischen Leistung; nun ist  $\psi = \varrho \mathfrak{U}^2 - \mathfrak{E} \mathfrak{U}$ ; somit kann dem abgeschlossenen System Energie ausschließlich in den Raumteilen zugeführt werden, in denen eingepreßte elektrische Kräfte sitzen, also  $\mathfrak{E} \mathfrak{U} \neq 0$  ist; fehlen solche, so geht die Feldenergie fortwährend in die nicht umkehrbare Energieform Joulescher Wärme über, die Felder verlöschen. Für die quasistationären Vorgänge, bei denen die elektrische Feldenergie nicht merklich an den Energieänderungen beteiligt ist, wurde Gl. (8) mit entsprechender Änderung schon in 33. Gl. (12) gefunden. — Im elektrostatischen Felde einerseits und im magnetostatischen Felde andererseits ist jeweils  $\mathfrak{S} = 0$  und  $\frac{\partial W}{\partial t} = 0$ , wie es definitionsmäßig sein muß (5.). Durchsetzen einander ein elektrostatisches und ein magnetostatisches Feld (z. B. elektrisches Feld eines ruhenden Ladungsträgers im magnetischen Erdfeld), so ist im allgemeinen in jedem Punkt des Feldraumes  $\mathfrak{S} \neq 0$ , jedoch ist unter allen Umständen und überall  $\text{div } \mathfrak{S} = 0$ , die Energieströmung quellenfrei und daher für das betrachtete System belanglos.

Eine elektrische Leitung bestehe aus zwei langen, rechteckigen Metallschienen, die einander parallel im Abstand  $a \ll h$  gegenüberstehen;  $h$  sei die lange Seite der rechteckigen Schienen (Abb. 1). Nehmen wir sie widerstandslos an, so ist die von der Quelle in den Leitungsanfang gelieferte Leistung  $UJ$  gleich der vom Verbraucher aus dem Leitungsende aufgenommenen. Das elektrische Feld der Leitung ist senkrecht zur Oberfläche gerichtet, es hat nur im Zwischenraum, in dem es homogen ist, eine beträchtliche Stärke vom Betrage  $\frac{U}{a}$  [nach 17. Gl. (23)]. Die magnetische Feldstärke ist tangential zur Oberfläche und senkrecht zum Strom in den Schienen gerichtet und hat im Zwischenraum, in dem sie homogen ist, den Betrag  $\frac{J}{h}$  [vgl. 28. Gl. (9)],  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  stehen im Zwischenraum aufeinander senkrecht, daher ist  $S = EH = \frac{UJ}{ah}$  die auf die Flächeneinheit des Querschnittes des Zwischenraumes bezogene Leistungsdichte; man kommt somit zu der Auffassung, daß die Energie durch den



Abb. 41. 1. Beispiel für die Energieströmung im Nichtleiter. (Querschnitt; Strom senkrecht zur Zeichenebene.)

nichtleitenden Zwischenraum von der Quelle zum Verbraucher strömt, nicht etwa in den beiden Platten, in die sie überhaupt nicht eindringt, da  $\mathfrak{E}$  tangential zu den Oberflächen steht. Die Auffassung, daß der nichtleitende Zwischenraum der Energieleiter ist, betrachtet man mit Recht als die am weitesten gezogene Folgerung aus der Faraday-Maxwellschen Feldvorstellung. Die von dem elektrischen Strome durchflossenen Leiter sind bei dem Energieübertragungsvorgang nicht Träger der

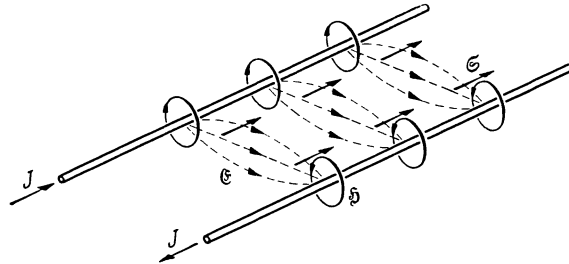


Abb. 41. 2. Elektrisches und magnetisches Feld, sowie Energieströmungsfeld  $\mathfrak{S} = [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]$  der Paralleldrahtleitung.

Energieströmung, sondern richtungweisend für diese. Für eine Paralleldrahtleitung verdeutlicht Abb. 2 schematisch die Energieströmung  $\mathfrak{S} = [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]$ ; sie verläuft parallel zu den Drähten, und hat die größte Stärke in der Nachbarschaft der Drähte.

Hat der Leiter, dem entlang die Energie durch das Dielektrikum strömt, einen von Null verschiedenen spezifischen elektrischen Widerstand, so ist nach dem

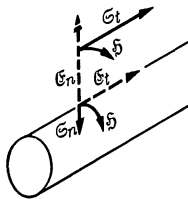


Abb. 41. 3. Entlanggleitende (tangentiale) und eindringende (normale) Komponente der Energieströmung an der Drahtoberfläche.

Ohmschen Gesetz eine zur Leiteroberfläche tangential Komponente des elektrischen Feldes zugleich mit der normalen vorhanden;  $\mathfrak{S}$  hat daher bei ruhenden Körpern außer der zur Leiteroberfläche parallelen Komponente eine dazu senkrechte, stets ins Innere des Leiters weisende Komponente: diese einströmende Energie stellt die als Joulesche Wärme verlorene Energie dar. Der nützliche Hauptteil der Energie gleitet im nichtleitenden Außenraum der Leitung entlang, ein Bruchteil geht durch das Eindringen in das Metall als Stromwärme verloren,  $\mathfrak{S}$  steht schief zur Leiteroberfläche (Abb. 3). Wir untersuchen diese Energieeinwanderung genauer an dem Beispiel eines Stückes der Länge  $l$  eines gleichstromdurchflossenen geraden Kreisdrahtes vom Radius  $a$ .  $\mathfrak{H}$  verläuft überall in Kreisen um die Achse, und zwar rechtswendig zu  $\mathfrak{E}$  und daher zu  $\mathfrak{S}$ , die parallel zur Achse gerichtet sind. Daher ist auf den Deckflächen des Zylinders  $\mathfrak{S} = 0$ , und nur auf den Mantelflächen ist  $\mathfrak{S} \neq 0$  und radial nach innen gerichtet. Für  $r = a$  ist  $H(a) = \frac{J}{2\pi a} = \frac{a}{2} G$ , und  $E_t(a) = \rho G$ , daher

$$S_n(a) = E_t(a) \cdot H(a) = \frac{a}{2} \rho G^2 \tag{9}$$

konstant auf der Zylindermantelfläche. Somit ist die ganze in das Zylinderstück einströmende Energie

$$\oint \mathfrak{S} \cdot d\mathfrak{f} = l \cdot 2\pi a \cdot S_n(a) = l \cdot \pi a^2 \cdot \rho G^2 = \tau \cdot \psi, \tag{10}$$

also gleich der in diesem Volumen auftretenden Stromwärme. Wir verfolgen den Verbleib der Energieströmung im Drahtinnern  $r < a$ : dafür ist  $E = \rho G$ ,  $H(r) = \frac{r}{2} G$ , daher

$$S_n(r) = \frac{r}{2} \cdot \rho G^2: \tag{10a}$$

die einströmende Energie versiegt also mit weiterem Eindringen gegen die Achse zu, indem sie ständig in Joulesche Wärme umgesetzt wird.

Die Vorstellung vom Eindringen der Energie aus dem nichtleitenden Raum in den Leiter ist in jedem Falle fruchtbar, z. B. auch bei wechselstromdurchflossenen Leitern (Wirbelstromerscheinungen). In diesem Falle geht allerdings nicht die gesamte eindringende Energie als die Stromwärme verloren, sondern sie wird zum Teil im inneren magnetischen Feld als magnetische Energie aufgespeichert, und zum gleichen Betrage wieder zurückgegeben: es findet also zum Teil ein periodisches Aus- und Einströmen von Energie statt. Nach Ablauf einer Periode hat die magnetische Energie aber wieder ihren Anfangswert, die algebraische Summe der eingeströmten Energie ist in Stromwärme umgesetzt. Nach Gl. (7) findet man z. B. leicht den Richtungssinn der Energieströmung für die in 39. behandelten Beispiele; untersucht man mit Hilfe der dort gefundenen örtlichen Verteilungen von  $\mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{E} = \varrho \mathfrak{G}$  die Energieströmung im Leiterinneren, so findet man: der beschriebene Vorgang des Eindringens ist auf eine um so dünnere Schicht an der Oberfläche beschränkt, je größer  $\frac{\omega \bar{\mu}}{\varrho}$  ist.

In ähnlicher Weise ergänzt die Vorstellung der Energieströmung in jedem Falle die Anschauung elektromagnetischer Vorgänge; bei den Lichtwellen werden wir finden, daß  $\mathfrak{S}$  die Richtung der Wellen angibt; als letztes Beispiel betrachten wir die Entladung eines zuvor aufgeladenen Kondensators in einen elektrischen Schwingungskreis (37.): im Augenblick des Stromschlusses finden wir eine aus dem Feldraum des Kondensators herausgerichtete Komponente von  $\mathfrak{S}$ ; die Energie entquillt dem Kondensator ebenso, wie sie aus den Raumteilen heraustreten kann, die eingepreßte elektrische Kräfte enthalten, und wird teils längs der Drähte zum Aufbau eines magnetischen Feldes geführt, teils dringt sie in diese ein und geht als Stromwärme verloren.

Der komplexe Energieströmungsvektor. In einem gleichförmigen Stoffe mit örtlich und zeitlich konstanten Werten  $\varrho$ ,  $\varepsilon$ ,  $\mu$  seien die Feldvektoren einfache harmonische Zeitfunktionen:

$$\mathfrak{E} = \operatorname{Re} \{ \tilde{\mathfrak{E}}_0 e^{i\omega t} \}, \quad \mathfrak{H} = \operatorname{Re} \{ \tilde{\mathfrak{H}}_0 e^{i\omega t} \}. \quad (11)$$

Dann lauten die beiden Hauptgleichungen (1) und (2) für die komplexen Amplituden

$$\operatorname{rot} \tilde{\mathfrak{H}}_0 = \left( \frac{1}{\varrho} + i\omega \bar{\varepsilon} \right) \tilde{\mathfrak{E}}_0, \quad (12)$$

$$\operatorname{rot} \tilde{\mathfrak{E}}_0 = -i\omega \bar{\mu} \tilde{\mathfrak{H}}_0. \quad (13)$$

Wir nehmen zu Gl. (12) den konjugierten Wert und erweitern mit  $\tilde{\mathfrak{E}}_0$ :

$$\tilde{\mathfrak{E}}_0 \cdot \operatorname{rot} \tilde{\mathfrak{H}}_0^* = \left( \frac{1}{\varrho} - i\omega \bar{\varepsilon} \right) \cdot \tilde{\mathfrak{E}}_0^* \tilde{\mathfrak{E}}_0. \quad (14)$$

Wir erweitern Gl. (13) mit  $\tilde{\mathfrak{H}}_0^*$ :

$$\tilde{\mathfrak{H}}_0^* \cdot \operatorname{rot} \tilde{\mathfrak{E}}_0 = -i\omega \bar{\mu} \cdot \tilde{\mathfrak{H}}_0 \tilde{\mathfrak{H}}_0^*. \quad (15)$$

Die Differenz von Gl. (14) und (15) ist

$$\left. \begin{aligned} -\operatorname{div} [\tilde{\mathfrak{E}}_0 \tilde{\mathfrak{H}}_0^*] &= \left( \frac{1}{\varrho} - i\omega \bar{\varepsilon} \right) \tilde{\mathfrak{E}}_0 \tilde{\mathfrak{E}}_0^* + i\omega \bar{\mu} \tilde{\mathfrak{H}}_0 \tilde{\mathfrak{H}}_0^* \\ &= \frac{1}{\varrho} |\tilde{\mathfrak{E}}_0|^2 + 2i\omega \left\{ \frac{\bar{\mu}}{2} |\tilde{\mathfrak{H}}_0|^2 - \frac{\bar{\varepsilon}}{2} |\tilde{\mathfrak{E}}_0|^2 \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

wobei die zwischen senkrechten Strichen stehenden Vektoren die Amplituden der Schwingungen bedeuten. Für eine harmonische Schwingung steht der quadratische Mittelwert  $\bar{A}$  zur Amplitude  $|A_0|$  in der Beziehung  $A^2 = \frac{1}{2} |A_0|^2$ . Definieren wir daher einen „komplexen Energieströmungsvektor“

$$\tilde{\mathfrak{U}}_0 = \frac{1}{2} [\tilde{\mathfrak{E}}_0 \tilde{\mathfrak{H}}_0^*], \quad (17)$$

so lautet Gl. (16) auch

$$-\operatorname{div} \tilde{\mathfrak{U}}_0 = \bar{\psi} + 2i\omega (\bar{w}_m - \bar{w}_e); \quad (18)$$

dabei ist  $\bar{\psi} = \frac{1}{\rho} \bar{\mathfrak{E}}^2$ ,  $\bar{w}_m = \frac{\bar{\mu}}{2} \bar{\mathfrak{H}}^2$ ,  $\bar{w}_e = \frac{\bar{\varepsilon}}{2} \bar{\mathfrak{E}}^2$  der zeitliche Mittelwert der Jouleschen Wärmeleistung, der magnetischen und der elektrischen Feldenergiedichte. Aus Gl. (18) folgt durch Integration über einen Raum  $\tau$  unter Anwendung des Satzes von Gauß und Umkehrung der Normalenrichtung, wie bei Gl. (4):

$$\oint \tilde{U}_0 d\mathfrak{f} = \bar{\Psi} + 2i\omega(\bar{W}_m - \bar{W}_e). \quad (19)$$

Daher hat man bei zeitlich sinusförmig veränderlichen Feldern die einfachen Formeln<sup>1</sup> zur Berechnung der mittleren Wärmeverlustleistung und der mittleren Feldenergien:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Psi} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \oint [\mathfrak{E}_0 \mathfrak{H}_0^*] d\mathfrak{f} \right\}, \\ 2\omega(\bar{W}_m - \bar{W}_e) &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left\{ \oint [\mathfrak{E}_0 \mathfrak{H}_0^*] d\mathfrak{f} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Diese Darstellung fand Emden. Es ist mit ihr die Bestimmung der Stromwärmeverluste, die sonst durch ein Raumintegral berechnet werden, auf ein häufig einfacher auszuführendes Oberflächenintegral zurückgeführt.

Beispiel: Für einen wechselstromdurchflossenen kreiszylindrischen Leiter (Hautwirkung gemäß 39. C) berechnet man gemäß Abb. 3 bei allseitig symmetrischer Feldverteilung die in den Zylindermantel einströmende Energie aus magnetischer und elektrischer Energie an der Drahtoberfläche zu

$$\frac{1}{2} \oint [\mathfrak{E}_0 \mathfrak{H}_0^*]_{r=a} d\mathfrak{f} = \frac{1}{2} E_0(a) \cdot H_0^*(a) \cdot 2\pi a l; \quad (21)$$

dabei ist  $H_0^*(a) = \frac{I_0^*}{2\pi a}$ , daher einfach

$$\bar{\Psi} + 2i\omega \bar{W}_m = \frac{1}{2} E_0(a) \cdot I_0^* l, \quad (22)$$

und durch Division mit  $\frac{1}{2} I_0 I_0^* = \bar{I}^2$ :

$$R + i\omega L_i = \frac{E_0(a) \cdot l}{I_0} \quad (23)$$

in Übereinstimmung mit 39. Gl. (38). Auf diese Weise läßt sich nicht nur beim Runddraht, sondern auch bei den anderen Stromverdrängungsaufgaben  $R$  und  $L_i$  einfach bestimmen.

#### 42. Ausbreitung elektromagnetischer Störungen in gleichförmigen Stoffen. Wellengleichung und Wärmeleitungsgleichung.

Wir nehmen an, der unendliche Raum sei mit einem durchaus gleichförmigen (homogenen isotropen) Stoff erfüllt. Daher ist überall  $\mathfrak{E}^e = 0$ ,  $\mathfrak{H}^e = 0$ , und die Stoffwerte  $\mu$ ,  $\rho$ ,  $\varepsilon$  sind von Feldort und Feldstärke unabhängige Konstante. Der Raum sei frei von elektrischen Ladungen, daher gilt

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = 0, \quad \text{ferner ist stets} \quad \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0. \quad (1)$$

Die beiden Hauptgleichungen [40. Gl. (1a), (2a)] für ruhende Körper lauten unter diesen Voraussetzungen für  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$ :

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{1}{\rho} \mathfrak{E} + \bar{\varepsilon} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}, \quad (2) \quad \operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\bar{\mu} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}. \quad (3)$$

<sup>1</sup> Für zwei harmonische Schwingungen  $U = U_0 \cos \omega t$ ,  $J = J_0 \cos(\omega t + \varphi)$  ist der zeitliche Mittelwert ihres Produktes

$$\overline{UJ} = \bar{N} = \frac{1}{2} U_0 J_0 \cos \varphi = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \tilde{U}_0 \tilde{J}_0^* \},$$

unter  $\tilde{U}_0$  und  $\tilde{J}_0$  die komplexen Amplituden verstanden. Vgl. Abschnitt 2': „Darstellung periodischer Vorgänge.“

Indem man von jeder dieser beiden Gleichungen den Rotor nimmt und jeweils aus der anderen substituiert, erhält man<sup>1</sup>

$$\left. \begin{aligned} -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{H} &= \frac{\bar{\mu}}{\varrho} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} + \bar{\varepsilon} \bar{\mu} \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial t^2}, \\ -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{E} &= \frac{\bar{\mu}}{\varrho} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \bar{\varepsilon} \bar{\mu} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Unter den ausgesprochenen Voraussetzungen über die Stoffwerte kommt aus Gl. (1)

$$\bar{\varepsilon} \operatorname{div} \mathfrak{E} = 0, \quad \bar{\mu} \operatorname{div} \mathfrak{H} = 0, \quad (5)$$

und damit ergibt sich aus Gl. (4)<sup>2</sup>

$$\left. \begin{aligned} \Delta \mathfrak{H} &= \frac{\bar{\mu}}{\varrho} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} + \bar{\varepsilon} \bar{\mu} \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial t^2}, \\ \Delta \mathfrak{E} &= \frac{\bar{\mu}}{\varrho} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \bar{\varepsilon} \bar{\mu} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Für  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$ , daher auch für  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{H}$ , daher für jede einzelne Komponente jedes elektrischen und jedes magnetischen Feldvektors besteht somit eine partielle Differentialgleichung von der Form

$$\Delta F = \frac{\bar{\mu}}{\varrho} \frac{\partial F}{\partial t} + \bar{\varepsilon} \bar{\mu} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}, \quad (7)$$

oder auch, wenn man neben der bekannten „Relaxationszeit“ [25. Gl. (16)]  $\beta = \bar{\varepsilon} \varrho$  eine neue Größe

$$v = \frac{1}{\sqrt{\bar{\varepsilon} \bar{\mu}}} \quad (8)$$

definiert (daher  $\frac{\bar{\mu}}{\varrho} = \frac{1}{\beta v^2}$ ),

$$v^2 \cdot \Delta F = \frac{1}{\beta} \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}. \quad (9)$$

Diese Differentialgleichung bestimmt eindeutig den Wert, den  $F$  in einem betrachteten Raumpunkt zu irgendeinem Zeitpunkt annimmt, wenn die Werte von  $F$  und von  $\frac{\partial F}{\partial t}$  für jeden Raumpunkt willkürlich für einen gewissen Zeitpunkt  $t = 0$  als Anfangswerte gegeben sind und  $F$  in unendlicher Entfernung verschwindet. Wir übergehen die Ausführung des mathematischen Eindeutigkeitsbeweises.

Von den besonderen Formen, die Gl. (9) unter einschränkenden Voraussetzungen annehmen kann, fällt zunächst auf, daß aus ihr bei Ausschluß zeitlicher Änderungen die Laplacesche Gleichung

$$\Delta F = 0 \quad (10)$$

hervorgeht. Bei ihrer Betrachtung waren wir in 17. so vorgegangen, daß wir kennzeichnende Eigenschaften für ihre Lösung bestimmten. Wir werden daher hier ebenso verfahren und untersuchen, welche besonderen Kennzeichen der Lösung von Gl. (9) zukommen müssen. Dabei sind zwei Grenzfälle von beherrschender Wichtigkeit:

A. Für einen *vollkommenen Nichtleiter* ist  $\beta = \infty$ , weil  $\varrho = \infty$ . Die elektromagnetischen Vorgänge werden daher durch die aus Gl. (9) folgende

$$\text{Wellengleichung} \quad v^2 \cdot \Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \quad (11)$$

beschrieben. Gl. (11) hat die Form der Bewegungsgleichung eines gleichförmigen, unzusammendrückbaren, elastischen, festen Körpers. (Für die elastischen Verschiebungen ist  $v^2$  gleich dem Verhältnis des Elastizitätskoeffizienten zur Dichte.) Daher können die aus diesem Gebiet bekannten Lösungen bei entsprechenden Anfangs- und Grenzbedingungen benutzt werden. Das von Poisson gefundene

<sup>1</sup> Reihenfolge der Differentialoperationen gleichgültig.

<sup>2</sup>  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{A} - \Delta \mathfrak{A}$ .

allgemeine Integral von Gl. (11) läßt sich in folgender Weise konstruieren: Um in einem Punkte  $p$  den im Zeitpunkt  $t$  vorhandenen Wert  $F_{pt}$  zu finden, wenn für  $t = 0$  die Werte  $F_0$  und  $\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_0$  für jeden Raumpunkt gegeben sind, legt man eine Kugelfläche mit dem Radius  $vt$  um  $p$  als Mittelpunkt, und bestimmt aus den Anfangswerten  $F_0$  auf der Kugeloberfläche den Mittelwert  $\bar{F}_0$  aller dieser Werte; entsprechend  $\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_0$ . Dann ist der Wert von  $F$  im Punkte  $p$  zur Zeit  $t$ :

$$F_{pt} = \frac{\partial}{\partial t} (\bar{F}_0 t) + t \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_0. \quad (12)$$

Daraus folgt: Der Zustand  $F$  im Punkte  $p$  wird in jedem Augenblick durch die Zustände festgelegt, welche um eine Zeitspanne  $t$  vorher in allen von  $p$  um die Strecke  $vt$  entfernten Raumpunkten geherrscht haben. Daher ist  $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$  [(Gl. (8)] die Geschwindigkeit, mit der jede Störung fortgepflanzt wird.

Zur Zeit  $t=0$  sei überall  $F=0$  und  $\frac{\partial F}{\partial t}=0$  mit Ausnahme eines geschlossenen Raumteiles  $S$ . Dann sind zur Zeit  $t$  in  $p$  diese Größen nur von Null verschieden, wenn die Kugelfläche mit dem Mittelpunkt  $p$  und dem Radius  $vt$  das Gebiet  $S$  schneidet. Liegt  $p$  außerhalb von  $S$ , so tritt somit in  $p$  erst dann eine Störung ein, wenn  $vt$  gleich dem kürzesten Abstände zwischen  $p$  und den Punkten in  $S$  wird, und dauert so lange an, bis  $vt$  gleich dem größten Abstände zwischen  $p$  und den Punkten in  $S$  geworden ist; dann hört die Störung in  $p$  gänzlich auf, die von den in  $S$  gegebenen Anfangswerten herrührt. Ist also  $r_1$  der kürzeste,  $r_2$  der weiteste Abstand zwischen  $p$  und den Punkten von  $S$ , so beginnt die Störung in  $p$  zur Zeit  $t_1 = \frac{r_1}{v}$  und endet zur Zeit  $t_2 = \frac{r_2}{v}$ ; ein bestimmter Punkt  $q$  in  $S$  liefert zur Störung in  $p$  in dem Zeitpunkte  $\frac{\overline{pq}}{v}$  einen Beitrag: die Störung breitet sich von  $q$  mit der Geschwindigkeit  $v$  aus.

Für den leeren Raum ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $v=c$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}, \quad (13) \quad v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}. \quad (13a)$$

Nun können aber die beiden Konstanten  $\epsilon_0$  und  $\mu_0$  durch verschiedene und unabhängige Verfahren bestimmt werden (z. B.  $\epsilon_0$  aus einer Kapazitätsmessung,  $\mu_0$  aus einer Induktivitätsmessung); die ersten Messungen dieser Art unternahm W. Weber und R. Kohlrausch<sup>1</sup>. Die mit großer Genauigkeit gemessenen Werte ergaben für  $c$  eine Geschwindigkeit, deren Größe mit der auf optischem und auf astronomischem Wege gemessenen Lichtgeschwindigkeit gut übereinstimmte<sup>2</sup>. Dies war eine der hauptsächlichsten Stützen Maxwells für seine 1865 gemachte Aussage, daß „Licht eine elektromagnetische Störung ist, die sich nach elektromagnetischen Gesetzen . . . fortpflanzt“. Damit war dafür entschieden, daß die Lichtausbreitung als Wellenvorgang zu beschreiben sei, nicht als Bewegung von Teilchen, die von dem leuchtenden zum beleuchteten Körper übergehen. Nach der Wellentheorie ist die Lichtgeschwindigkeit in verschiedenen Stoffen umgekehrt proportional zu deren Brechungsindex  $n$ , und nach der vorstehenden Hypothese ist sie durch

<sup>1</sup> W. Weber und R. Kohlrausch: Poggendorffs Ann. Bd. 99 (1856). — Ostwalds Klassiker der Naturwissenschaften Nr. 142. — Es sei erwähnt, daß damals infolge der ausschließlich bekannten „absoluten“ Maßsysteme die Schreibweise der Gleichungen, bezogen auf diese Maßsysteme, eine andere war, als die von uns hier gebrauchte maßunabhängig aufzufassende Form. Daher war auch die Problemstellung, ohne dem Sinne nach eine andere zu sein, auch etwas anders formuliert. Einzelheiten hierüber haben heute nur noch historische Bedeutung.

<sup>2</sup> Zahlenwerte für  $\epsilon_0, \mu_0, c$  in bezug auf die praktischen Einheiten s. Abschnitt „Maßsysteme“.

Gl. (8) gegeben. Die Permeabilitäten durchsichtiger Körper sind aber sehr wenig voneinander und von der Permeabilität des leeren Raumes verschieden. Es müßte daher die Dielektrizitätskonstante eines durchsichtigen Stoffes angenähert gleich dem Quadrate des Brechungsindex sein:

$$n \approx \sqrt{\varepsilon}. \quad (14)^1$$

Diese Maxwellsche Beziehung hat sich bekanntlich um so besser bestätigt erwiesen, je langsamer die Schwingungen des benutzten Lichts sind. Bei sehr schnellen Schwingungen sind, wie im folgenden Abschnitt gezeigt wird, die Lichtwellenlängen so klein, daß die Voraussetzung dieses Abschnittes, nämlich vollkommene Homogenität des Stoffes, von der wirklichen, atomistisch gearteten Materie auch nicht mehr angenähert erfüllt wird. Dies lehrt, „daß man die optischen Eigenschaften der Körper aus den elektrischen erst dann wird ableiten können, wenn wir über die Konstitution der Körper im klaren sind“ (Maxwell).

B. Für einen *metallischen Leiter* ist die Relaxationszeit äußerst klein, die Verschiebungsströmung im Vergleich zur Leitungsströmung nicht zu bemerken (vgl. 32.), daher wird aus Gl. (9) nach Multiplikation mit  $\beta$  für  $\beta \rightarrow 0$  die

$$\text{Wärmeleitungsgleichung} \quad \frac{\rho}{\mu} \cdot \Delta F = \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (15)$$

Dieselbe partielle Differentialgleichung gilt auch für die örtliche und zeitliche Temperaturverteilung in einem homogenen festen Körper. Die von Fourier gefundenen verschiedenen Lösungen für Wärmeleitungsprobleme können daher bei entsprechenden Rand- und Anfangsbedingungen übertragen werden (man muß dabei beachten, daß hier  $F$  die Komponente eines Vektors ist, die Temperatur dagegen ein Skalar). Aus Gl. (15) folgt eindeutig, wie sich beweisen läßt,  $F$  für jeden Ort und jede Zeit aus einer für  $t=0$  willkürlich vorgegebenen Anfangsverteilung  $F_0$  und der Bedingung, daß  $F$  in unendlicher Entfernung verschwindet. — Für einen unendlich ausgedehnten homogenen Körper, dessen Anfangszustand  $F_0$  gegeben ist, hat Fourier als allgemeines Integral von Gl. (15) gefunden

$$F_{pt} = \int_{\infty} \frac{F_0}{\pi^{3/2}} \cdot \frac{e^{-\frac{r^2}{4bt}}}{(4bt)^{3/2}} d\tau, \quad (16)$$

wobei  $b \equiv \frac{\rho}{\mu}$  und  $r$  die Entfernung zwischen  $p$  und Raumelement  $d\tau$  ist. Gl. (16) zeigt: zu dem Zustand  $F_{pt}$  im Punkte  $p$  zur Zeit  $t$  tragen alle Volumenelemente  $d\tau$  bei. Dabei ist jedes  $d\tau$  mit dem Gewicht

$$u = \frac{e^{-\frac{r^2}{4bt}}}{(4bt)^{3/2}} \quad (17)$$

zu belegen, dessen Wert vom Abstand  $r$  zwischen  $p$  und  $d\tau$  und der Zeit  $t$  bestimmt wird.  $u$  ist aber Null für  $t=0$  und  $t=\infty$  und hat dazwischen für  $t = \frac{r^2}{6b}$  seinen Höchstwert, der  $const \cdot r^{-3}$  ist.

Ist also zur Zeit  $t=0$  überall  $F=0$  mit Ausnahme eines Gebietes  $S$ , so tragen alle Punkte  $q$  in  $S$  zur Störung in  $p$  bei, und zwar in jeder (noch so großen) Entfernung  $r$ , und zu jeder (noch so kleinen, sowie unbegrenzt großen) Zeit  $t$ . Der Maximalbeitrag aber, den  $q$  zur Störung in  $p$  liefert, ist nach Gl. (17) um so kleiner, und trifft um so später ein, je größer die Entfernung  $r$  ist. Die Zeit, nach welcher er eintrifft, ist proportional  $r^2$  (nicht proportional  $r$ , wie bei der Wellenausbreitung). Es gibt daher keine bestimmte Geschwindigkeit, die man als Ausbreitungsgeschwindigkeit definieren könnte. Wollte man sie dadurch

<sup>1</sup> Verhalten sich die Brechungsindizes zweier Stoffe umgekehrt wie die Lichtgeschwindigkeiten in ihnen, so ist der Brechungsindex eines Stoffes, bezogen auf leeren Raum, definitionsmäßig  $n = \frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon\mu}$  nach Gl. (13a);  $\mu \approx 1$ .

bestimmen, daß man die Zeit mißt, nach welcher in gegebener Entfernung eine Störung von gewählter Stärke auftritt, so würde man eine um so größere Geschwindigkeit finden, je kleiner man die Störung gewählt hat (je empfindlicher ein im betrachteten Punkte angebrachtes Empfangsgerät ist, in um so kürzerer Zeit zeigt es eine Störung an). — Auch für diese der Wärmebewegung eigentümliche Art der Ausbreitung von Störungen ist die gemachte Voraussetzung vollkommener Homogenität des Stoffes notwendig. Der stärkste Unterschied gegenüber der Wellenausbreitung liegt darin, daß diese mit einer bestimmten Geschwindigkeit erfolgt, so daß in einem betrachteten Punkte Ruhe herrscht, bevor die Welle eintrifft, und wenn sie vorbeigelaufen ist, verschwindet die Störung für immer. Beispiele für beide Arten der Ausbreitung bringen die Abschnitte 43. und 44.

Wie die thermischen und die elektromagnetischen Größen einander entsprechen, zeigt die folgende Gegenüberstellung der jeweiligen Hauptgleichungen; dabei bedeuten:  $\Omega$  die Wärmestromdichte,  $\vartheta$  die Temperatur,  $k$  die Wärmeleitfähigkeit,  $c$  die spezifische Wärme,  $\gamma$  die Dichte.

Aus den Verknüpfungsgleichungen (links thermisch, rechts elektromagnetisch)

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= -k \operatorname{grad} \vartheta & \mathfrak{E} &= \rho \operatorname{rot} \mathfrak{H} \\ \operatorname{div} \Omega &= -c \gamma \frac{\partial \vartheta}{\partial t} & \operatorname{rot} \mathfrak{E} &= -\bar{\mu} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

ergeben sich die partiellen Differentialgleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{k}{c \gamma} \cdot \Delta \vartheta &= \frac{\partial \vartheta}{\partial t} & \frac{\rho}{\bar{\mu}} \cdot \Delta \mathfrak{H} &= \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \\ \frac{k}{c \gamma} \cdot \Delta \Omega &= \frac{\partial \Omega}{\partial t} & \frac{\rho}{\bar{\mu}} \cdot \Delta \mathfrak{E} &= \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} \end{aligned} \right\}$$

Es entsprechen einander die folgenden untereinander geschriebenen Größen

$$\left. \begin{array}{cccc} \vartheta & \Omega & k & c \gamma \\ H^1 & \mathfrak{E} & \rho & \bar{\mu} \end{array} \right\} \frac{k}{c \gamma} \quad (19)$$

Die „Leiterkonstante“  $b = \frac{\rho}{\bar{\mu}}$  entspricht also der „Temperaturleitfähigkeit“  $\frac{k}{c \gamma}$ . Besondere Beachtung verdient, daß der Wärmeleitfähigkeit  $k$  nicht etwa die elektrische Leitfähigkeit, sondern der spezifische elektrische Widerstand  $\rho$  entspricht<sup>2</sup>.

### 43. Ebene Wellen in einem gleichförmigen Nichtleiter.

Für den gleichförmigen, vollkommenen Nichtleiter ( $\varkappa=0$ ) gilt die Wellengleichung 42. Gl. (11). Um die kennzeichnenden Eigenschaften der von ihr beherrschten elektromagnetischen Zustände kennenzulernen, untersuchen wir eine besonders einfache und zugleich wichtige Art von Vorgängen. Diese sind dadurch gekennzeichnet, daß in einem bestimmten Zeitpunkt der Zustand in allen Punkten einer bestimmten Ebene der gleiche, also örtlich konstant ist, und daß dasselbe für alle zu dieser parallelen Ebenen gilt. Da aber, wie aus der Wellengleichung folgt (42. A),

<sup>1</sup> In geeignet gewählter Komponente, vgl. die vorangegangene Bemerkung.

<sup>2</sup> Vergleich in runden Zahlen

	Eisen	Kupfer	Blei	
$\frac{c \gamma}{k} =$	5,5	0,9	4	$\frac{\operatorname{sec}}{\operatorname{cm}^2}$
$\frac{\bar{\mu}}{\rho} =$	2,5	0,0074	0,0006	$\frac{\operatorname{sec}}{\operatorname{cm}^2}$

Es hat also z. B. Kupfer eine gute Temperaturleitfähigkeit, weil es ein guter Wärmeleiter ist; Blei hat ein großes  $b$ , weil es ein großes  $\rho$  hat; Eisen hat wegen seines großen  $\mu$  ein kleines  $b$ , ähnlich wie ein guter Wärmeleiter mit ungewöhnlich großer spezifischer Wärme eine kleine Temperaturleitfähigkeit haben würde. Abgesehen vom Eisen sind die Metalle thermisch viel träger, als elektromagnetisch, Temperaturdifferenzen gleichen sich viel langsamer aus, als magnetische Felder ihre stationäre Verteilung annehmen; nur die elektromagnetische Trägheit von Eisen kommt in die Größenordnung der thermischen Trägheit.



die Ausbreitungsgeschwindigkeit überall die gleiche und konstant ist, ist dieses Kennzeichen auch für jeden beliebigen Zeitpunkt erfüllt. Einen solchen Vorgang nennen wir Ausbreitung einer Welle mit ebenen Wellenfronten, die parallelen Ebenen nennen wir Wellenfronten oder Wellenebenen, ihre Normalenrichtung Wellennormale.

Wir untersuchen die Eigenschaften des elektromagnetischen Zustandes mit ebenen, zu einer  $x$ -Achse senkrechten Wellenfronten. Wie er (durch einen bei  $x = -\infty$  gelegenen Erreger) zustande kommen kann, wird später beschrieben. Da elektrisches und magnetisches Feld nach dem Gesagten sich in den Wellenebenen, also mit  $y$  und  $z$  nicht örtlich ändern, so ergibt sich überall  $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ ,  $\frac{\partial}{\partial z} = 0$  und die Hauptgleichungen 42. Gl. (2), (3) über die magnetischen und elektrischen Wirbel vereinfachen sich zu

$$\bar{\varepsilon} \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \quad (1a) \quad -\bar{\mu} \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0 \quad (1e)$$

$$\bar{\varepsilon} \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (1b) \quad -\bar{\mu} \frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (1f)$$

$$\bar{\varepsilon} \frac{\partial E_z}{\partial t} = +\frac{\partial H_y}{\partial x} \quad (1c) \quad -\bar{\mu} \frac{\partial H_z}{\partial t} = +\frac{\partial E_y}{\partial x}, \quad (1g)$$

dazu kommt die Quellenlosigkeit der Felder [42. Gl. (5)]:

$$0 = \bar{\mu} \frac{\partial H_x}{\partial x} \quad (1d) \quad 0 = \bar{\varepsilon} \frac{\partial E_x}{\partial x}. \quad (1h)$$

Nach (a) und (h) ist  $E_x$ , und nach (e) und (d) ist  $H_x$  in jedem Raumpunkt und zu jeder Zeit konstant. Diese unveränderlichen Feldanteile haben mit zeitlich und örtlich veränderlichen Vorgängen überhaupt keinen Zusammenhang und können daher auch für die Betrachtung dieser unbeachtet bleiben, z. B. zu Null angenommen werden.

Also: Die elektromagnetischen Störungen haben keine zur Wellennormale parallelen, „longitudinalen“ Komponenten. Genau dasselbe gilt für die Wellenausbreitung des Lichtes, was im Verein mit der in 42. (Gl. 13) festgestellten Übereinstimmung der Geschwindigkeit die Behauptung der Identität des Lichtes mit elektromagnetischen Ausbreitungsvorgängen bestärkt. Es liegen somit die Richtung sowohl der elektrischen wie des magnetischen Feldes in der Ebene der Welle (elektromagnetische Welle; Lichtwelle). Von diesen „transversalen“ Komponenten sind einerseits  $E_y$  und  $H_z$  durch (b) und (g), andererseits  $E_z$  und  $H_y$  durch (c) und (f) miteinander verknüpft, aber die beiden Gleichungspaare sind voneinander völlig unabhängig. Wir können daher den mit Gl. (1) beschriebenen Vorgang als lineare Überlagerung zweier anderer Vorgänge betrachten, deren Differentialgleichungen einander völlig entsprechen. Es ergibt sich z. B. aus (b) und (g) durch Elimination

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \bar{\varepsilon} \bar{\mu} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \bar{\varepsilon} \bar{\mu} \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}, \quad (2)$$

und aus (c) und (f) erhält man dieselbe Gleichung für  $E_z$  und  $H_y$ . Dies aber ist die Wellengleichung in bezug auf die einzige Raumkoordinate  $x$ , und hätte sich daher aus 42. Gl. (11) mit der geforderten Streichung der partiellen Ableitungen nach  $y$  und  $z$  ohne weiteres angeben lassen. Unsere Ableitung hat indes darauf hingewiesen, daß  $E_y$  und  $H_z$  einerseits,  $E_z$  und  $H_y$  andererseits zueinander gehörige Komponenten sind. Die allgemeine Lösung der Gleichung

$$v^2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \quad (2a)$$

lautet aber

$$F = f_1(x - vt) + f_2(x + vt), \quad (3)$$

dabei sind  $f_1$  und  $f_2$  willkürliche Funktionen. Wir betrachten zunächst den in einem gegebenen Punkte  $x$  zu einer bestimmten Zeit  $t$  durch  $f_1$  beschriebenen Zustand:

er ist der gleiche, der um eine Zeitspanne  $t$  vorher in einem anderen Punkte geherrscht hat, der um die Strecke  $vt$  auf der  $x$ -Achse zurückliegt. Also pflanzt sich der betrachtete Zustand  $f_1(x - vt) = \text{const}$  mit der Geschwindigkeit  $\frac{x}{t} = v$ ,

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \quad (4)$$

in der Richtung der positiven  $x$ -Achse fort, ohne dabei irgendeine Gestaltsveränderung zu erleiden; die Feldverteilung verschiebt sich wie ein starrer Körper, als Rechtswelle. Entsprechend beschreibt  $f_2$  die mit der Geschwindigkeit  $v$  in Richtung der negativen  $x$ -Achse laufende Linkswelle. Mit der elektrischen Feldstärke

$$E_y = f_1(x - vt) + f_2(x + vt) \quad (5a)$$

ist nach Gl. (1 b, g) die magnetische Feldstärke

$$H_z = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \{f_1(x - vt) - f_2(x + vt)\} \quad (5b)$$

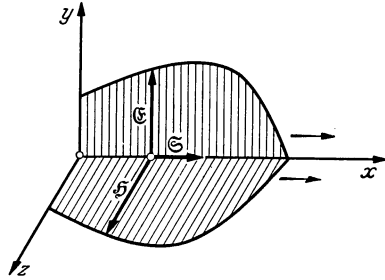


Abb. 43. 1. Schematische Darstellung einer ebenen elektromagnetischen Rechtswelle.

verkettet. Elektrisches und magnetisches Feld stehen senkrecht aufeinander und laufen mit gleicher und unveränderter Form in der dazu rechtswendig senkrechten Richtung mit der Geschwindigkeit  $v$ , vgl. die schematische Darstellung Abb. 1 für die Rechtswelle. Wir bestimmen die elektrische und die magnetische Energiedichte der

einen, z. B. der Rechtswelle, aus Gl. (5a, b) durch Quadrieren:  $E_y^2 = f_1^2(x - vt)$ ,  $H_z^2 = \frac{\epsilon}{\mu} f_1^2(x - vt) = \frac{\epsilon}{\mu} E_y^2$  und finden, daß stets erfüllt ist

$$\frac{\epsilon}{2} E^2 = \frac{\mu}{2} H^2; \quad w_e = w_m: \quad (6)$$

in jedem Augenblick haben elektrisches und magnetisches Feld gleich große Energie. Dieses Energiegleichgewicht ist eine kennzeichnende und notwendige Eigenschaft sich formgetreu fortpflanzender elektromagnetischer Wellen. Die gesamte elektromagnetische Energie ist die Summe der elektrischen und der magnetischen Feldenergie. Wir erhalten somit die beim Fortschreiten der Welle in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit einer Wellenebene hindurchtretende Energie zu

$$S = v(w_e + w_m) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \left\{ \frac{\epsilon}{2} E^2 + \frac{\mu}{2} H^2 \right\} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E^2, \quad (7)$$

$$S = E H.$$

Die Fortpflanzungsrichtung der Welle ist aber durch das vektorielle Produkt der aufeinander senkrechten Felder  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{H}$  bestimmt, d. h. durch die Richtung des Energiestromsvektors  $\mathcal{S}$  [41. Gl. (7)], und  $S$  nach Gl. (7) ist sein Betrag. Der Vektor

$$\mathcal{S} = [\mathcal{E} \mathcal{H}] \quad (8)$$

kann daher als „Strahlungsvektor“ bezeichnet werden, denn er kennzeichnet sowohl die Fortschrittsrichtung der Welle, wie ihre in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit der Wellenebene geströmte Energie. Gemäß Gl. (7)

$$S = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E^2 = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} f_1^2(x - vt) \quad (7a)$$

kann  $\mathcal{S}$  zu keinem Zeitpunkt negativ werden, die Energie bewegt sich beständig in der Fortschrittsrichtung des Lichtstrahles. Man hat Ursache, Gl. (8) auch für Felder von weniger einfacher geometrischer Struktur, wie das hier behandelte, als gültig anzusehen und entsprechend zu deuten.

Wir erkennen in diesem Zusammenhang, daß es unbedingt notwendig ist, die elektrische und die magnetische Energie nicht gebunden an elektrische Ladungen,

magnetische Menge und elektrische Ströme und vornehmlich oder ausschließlich gegeben durch diese zu denken, sondern stetig in dem Raume der elektrischen und magnetischen Felder selbst verteilt und dort durch das Quadrat des Feldvektors gegeben sich vorzustellen. Wir haben hier nämlich die Frage völlig offengelassen, in welcher Weise die betrachteten Felder durch irgendwelche ortsfesten Erreger hervorgebracht sein könnten. Es wäre aber nicht nur sinnlos, sondern auch im Widerspruch mit der Erfahrung, z. B. mit den Wirkungen des Lichtes, wollte man bei einer fortschreitenden elektromagnetischen Welle die Energie sich gebunden an einen (womöglich unbekanntem) Erreger vorstellen.

Nach Gl. (5a, b) stehen elektrische und magnetische Feldstärke, die einer mit der Geschwindigkeit  $v$  forteilenden Welle zugehören, bezüglich ihrer Beträge in dem konstanten Verhältnis

$$\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \equiv \Gamma; \quad (5c)$$

für den leeren Raum ist

$$\Gamma = \Gamma_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}, \quad (5d)$$

und die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist [42. Gl. (13)]  $v = c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ . Wenn man will, kann man daher an Stelle von  $\varepsilon_0$  und  $\mu_0$  auch  $c$  und  $\Gamma_0$  als kennzeichnende, universelle Konstante<sup>1</sup> betrachten (und aus ihnen ableiten  $\varepsilon_0 = \frac{1}{c \Gamma_0}$ ,  $\mu_0 = \frac{\Gamma_0}{c}$ ).  $\Gamma_0$  wird gelegentlich als Wellenwiderstand des leeren Raumes bezeichnet.

Wir werden zeigen, daß elektromagnetische Wellen durch periodische Wechselströme hervorgebracht werden können. Ist der Zustand überall ein rein sinusförmiger, so ist die Lösung der Wellengleichung (2a) bei Beschränkung auf die Rechtswelle und mit zwei Integrationskonstanten  $A$  und  $\varphi$ :

$$F = A \cdot \cos \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) + \varphi \right\}. \quad (9)$$

Man sieht: an einem festgehaltenen Orte  $x$  ändert sich  $F$  zeitlich sinusförmig mit der Frequenz  $\omega = 2\pi \frac{v}{\lambda}$ . In einem festgehaltenen Zeitpunkt ist  $F$  örtlich sinusförmig in der Richtung  $x$  verteilt, und weist denselben Wert auf in Abständen von je einer „Wellenlänge“

$$\lambda = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{v}{f} = v T = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{2\pi}{\omega} \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}; \quad (10)$$

in der Zeit  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  hat eine Fortschreitung um die Strecke  $\lambda$  stattgefunden, und die Ausbreitung der Phasen des Kosinus erfolgt mit der frequenzunabhängigen Geschwindigkeit  $v$ , die mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Störungen übereinstimmt. Mit Gl. (10) kann man Gl. (9) auch schreiben:

$$F = A \cdot \cos \left\{ \omega \left( \frac{x}{v} - t \right) + \varphi \right\}, \quad (9a)$$

daher ist die allgemeine Lösung der Wellengleichung für eine einfach-periodische Links- und Rechtswelle

$$F = \operatorname{Re} \left\{ A \cdot e^{i\omega \left( t + \frac{x}{v} \right)} + B \cdot e^{i\omega \left( t - \frac{x}{v} \right)} \right\}. \quad (9b)$$

Einer einfachen harmonischen Welle, bei welcher elektrisches und magnetisches Feld in zueinander senkrechten Ebenen verlaufen, entspricht ein Strahl ebenen,

<sup>1</sup> Benennungen und Zahlenwerte im P. M. S.:

$$c = v = \frac{\text{L}}{\text{T}}, \quad v = 2,9979 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}},$$

$$\Gamma_0 = \Gamma = \frac{\text{U}}{\text{J}}, \quad \Gamma_0 = 376,53 \text{ Ohm.} \quad \left( \text{Denn: } \varepsilon_0 = \frac{\text{JT}}{\text{UL}}, \quad \mu_0 = \frac{\text{UT}}{\text{JL}} \right)$$

polarisierten Lichtes (Abb. 2). An jedem Punkte treten zur selben Zeit gleiche Phasen der elektrischen und der magnetischen Feldstärke auf.

Wir stellen zusammenfassend fest: Es ist eine notwendige Folge der Feldvorstellung, daß Störungen des elektrischen oder magnetischen Gleichgewichtes sich als Wellen mit der endlichen Geschwindigkeit  $v$  in einem Nichtleiter ausbreiten. Im leeren Raume stimmen  $v = c$  und die Lichtgeschwindigkeit miteinander überein. Elektrischer und magnetischer Vektor der Störung liegen in der Wellenebene. Ebenso ist aus der Optik bekannt, daß Licht sich als reine Transversalwelle ausbreitet. Beide Tatsachen, zusammen mit den aus der weiteren Rechnung zu ziehenden Folgerungen über Ausbreitung, Reflexion und Absorption der Wellen bestimmten Maxwell zu seiner Folgerung. Er stieß damit die elastische (also

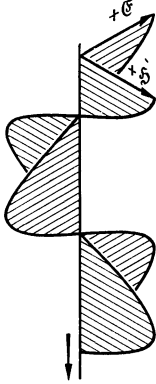


Abb. 43. 2. (Nach Maxwell.) Zur Veranschaulichung eines ebenen, polarisierten Lichtstrahles (Augenblicksbild).

mechanische) Lichttheorie um, welche das Licht beschrieben hatte mit Hilfe der Annahme eines vollkommen elastischen, unendlich feinen Mediums „Äther“, der alle Materie und auch den leeren Raum stetig durchdringen sollte; daß sich das Licht lediglich in Transversalwellen ausbreitet, konnte diese Theorie nur erklären, indem sie diesem „Äther“ die elastischen Eigenschaften eines festen Körpers beilegte; die kennzeichnenden Stoffkonstanten des Äthers können aber aus keinerlei physikalischen Messungen ermittelt werden. Die kennzeichnenden Konstanten  $\epsilon_0, \mu_0$  der elektromagnetischen Theorie sind durchs Experiment feststellbar. Es ist für die elektromagnetische Theorie sehr kennzeichnend, daß sie keinerlei Aussagen macht über ein etwaiges Medium, in dem die elektromagnetischen Störungen vor sich gehen, daß sie aber trotzdem über den elektromagnetischen Vorgang bis in jede Einzelheit seiner Struktur vollkommen Aufschluß gibt.

Es sei schließlich nochmals betont, daß die elektromagnetischen Wellen gegenüber dem bisherigen eine neue Erscheinungsform elektromagnetischer Vorgänge darstellen. Im stationären Zustand sind, wie bekannt, die elektrischen und magnetischen Felder an ihre primären Erreger, Ladungen und Ströme, als Quellen und Wirbel gebunden. Bei den Ausbreitungsvorgängen dagegen werden die Felder frei von primären Quellen und Wirbeln und verbreiten sich als quellenlose Felder (deren Feldlinien entweder geschlossene oder ins Unendliche verlaufende Linien sind) selbständig im Raume; dabei sind aber elektrisches und magnetisches Feld nicht etwa voneinander unabhängig, vielmehr sind sie nach den beiden Hauptgleichungen

$$\bar{\epsilon} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \text{rot } \mathfrak{H}; \quad -\bar{\mu} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \text{rot } \mathfrak{E}$$

stets und überall derart miteinander verkettet, daß jeweils die zeitliche Änderung des einen Feldes den Wirbel [die in bestimmter Weise zu errechnende Queränderung, vgl. Gl. (1)!] des anderen Feldes ausmacht; die Felder ergänzen sich fortwährend wechselseitig; hierin liegt die Möglichkeit ihrer Loslösung von primären Erregern und ihrer Ausbreitung durch den Raum, die wir in 48. an einem Beispiel näher beschreiben werden.

Einen Einblick in die Struktur elektromagnetischer Wellen vermittelt auch die folgende, von K. W. Wagner gegebene elementare Darstellung einer homogenen, ebenen Welle.

Ein homogenes, ebenes elektrisches Feld  $\mathfrak{E}_0$  und ein homogenes, ebenes magnetisches Feld  $\mathfrak{H}_0$  sollen senkrecht aufeinander stehen; es gelte

$$\frac{\bar{\epsilon}}{2} E_0^2 = \frac{\bar{\mu}}{2} H_0^2, \quad (11)$$

oder, indem wir zunächst nur die positive Wurzel beachten:

$$H_0 = \sqrt{\frac{\bar{\epsilon}}{\bar{\mu}}} E_0. \quad (12)$$

Die so gekennzeichneten Felder mögen zur Anfangszeit  $t = 0$  den ganzen Halbraum links von einer Trennebene  $Q \dots Q$  ausfüllen, der rechte Halbraum sei feldfrei. Wir fragen nicht nach der Entstehung dieser Feldanordnung, sondern danach, ob sie bestehen bleiben kann, und in welcher Weise die Veränderungen nach den elektromagnetischen Grundgesetzen vor sich gehen müssen.

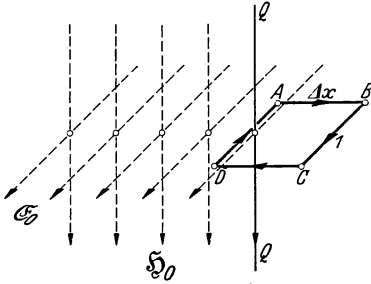


Abb. 43. 3. Ausbreitung einer homogenen, ebenen Welle. Anwendung des Induktionsgesetzes.

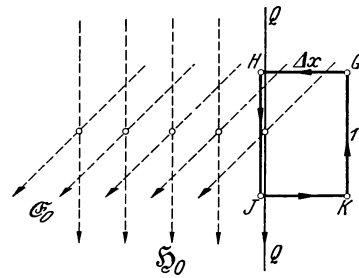


Abb. 43. 4. Ausbreitung einer homogenen, ebenen Welle. Anwendung des Durchflutungsgesetzes.

Wir wenden zunächst das Induktionsgesetz  $\oint \mathfrak{E} d\tau = -\bar{\mu} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathfrak{H} d\bar{\tau}$  auf den in Abb. 3 gekennzeichneten rechteckigen Integrationsweg  $\overline{ABCD A}$  an, dessen Seite  $\overline{AD}$  vom Betrage 1 links der Trennebene noch eben im Feldraum liegen und daher als einziger Wegteil zur elektrischen Umlaufspannung beitragen möge; mit  $\overline{AB} = \Delta x$  ist der umfaßte magnetische Fluß  $\Phi = \Delta x \cdot 1 \cdot \bar{\mu} H$ , und daher ergibt das Induktionsgesetz

$$1 \cdot E_0 = 1 \cdot \Delta x \cdot \bar{\mu} \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (13)$$

Der Sprung der elektrischen Feldstärke von  $E_0$  auf Null beim Durchstoßen der Trennebene  $Q \dots Q$  ist nur dadurch möglich (ist nach dem Induktionsgesetz nur dadurch erklärbar), daß die magnetische Feldstärke  $H$  im umfahrenen Rechteck zeitlich anwächst: ein örtlicher Sprung von  $\mathfrak{E}$  ist gleichbedeutend mit einem zeitlichen Anschwellen von  $\mathfrak{H}$ . Indem wir annehmen, daß in der Zeit  $\Delta t_1$  die magnetische Feldstärke von Null auf  $H_0$  anschwellt:  $E_0 \cdot \Delta t_1 = \Delta x \cdot \bar{\mu} H_0$ , erhalten wir mit Gl. (12):

$$\Delta t_1 = \Delta x \sqrt{\bar{\varepsilon} \bar{\mu}}; \quad (14)$$

in dieser Zeit hat sich der Sprung von  $\mathfrak{E}$  um  $\Delta x$  in den vorher feldfreien Raum vorwärtsgeschoben.

Wir wenden ferner das Durchflutungsgesetz  $\oint \mathfrak{H} d\tau = \bar{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathfrak{E} d\bar{\tau}$  auf den in Abb. 4 angegebenen rechteckigen Integrationsweg  $\overline{GHJK G}$  an, dessen Seite  $\overline{HJ}$  vom Betrage 1 links der Trennebene noch eben im felderfüllten Raum liege und daher als einziger Wegteil zur magnetischen Umlaufspannung beitrage; mit  $\overline{GH} = \Delta x$  ist der umfaßte elektrische Fluß  $\Omega = \Delta x \cdot 1 \cdot \bar{\varepsilon} E$ , und daher ergibt das Durchflutungsgesetz

$$1 \cdot H_0 = 1 \cdot \Delta x \cdot \bar{\varepsilon} \frac{\partial E}{\partial t}, \quad (15)$$

was wir entsprechend auslegen: der Sprung der magnetischen Feldstärke in der Trennebene ist Anlaß dazu, daß in der zunächst feldfreien Schicht unmittelbar rechts vor der Trennebene ein elektrisches Feld anschwillt. Die Geschwindigkeit erhalten wir, indem wir annehmen, daß die Zeitspanne  $\Delta t_2$  gebraucht werde, damit das magnetische Feld vom Betrage 0 auf den Betrag  $H_0$  komme:  $H_0 \cdot \Delta t_2 = \Delta x \cdot \bar{\varepsilon} E_0$ , mit Gl. (12) zu

$$\Delta t_2 = \Delta x \sqrt{\bar{\varepsilon} \bar{\mu}} = \Delta t_1. \quad (16)$$

Der Sprung im magnetischen Feld verschiebt sich genau so rasch, wie der Sprung im elektrischen Feld; beide Sprünge bleiben stets beisammen. Somit besteht die gesamte Feldänderung darin, daß die Trennebene  $Q \dots Q$  sich in den vorher feldfreien Raum hinein parallel zu sich selbst vorwärtsschiebt mit einer Geschwindigkeit

$$\frac{\Delta x}{\Delta t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t_2} = \frac{1}{\sqrt{\bar{\epsilon}\bar{\mu}}} = v. \quad (17)$$

Bei dieser Bewegung wird von einer auf der Trennebene gewählten Fläche von der Größe Eins ein zylinderförmiger Raum von der Größe  $1 \cdot v$  überstrichen. In der Zeiteinheit ist in diesem Raume die gesamte Feldenergie von 0 auf den Betrag

$$v(w_e + w_m) = \frac{1}{\sqrt{\bar{\epsilon}\bar{\mu}}} \left\{ \frac{\bar{\epsilon}}{2} E_0^2 + \frac{\bar{\mu}}{2} H_0^2 \right\} = \sqrt{\frac{\bar{\epsilon}}{\bar{\mu}}} \frac{E_0^2}{2} + \sqrt{\frac{\bar{\mu}}{\bar{\epsilon}}} \frac{E_0^2}{2} = E_0 H_0 = S \quad (18)$$

angewachsen. Oder: der Energiebetrag  $S$  ist in den linken Deckel des Zylinders eingeströmt.

Ein etwa an Stelle der angenommenen sprunghaften gegebene stetige Feldverteilung können wir in unetstetige Einzelvorgänge aufteilen und nach dem obigen Schema behandeln. Daher: jede beliebige Form wird ohne Verzerrung mit der Geschwindigkeit  $v$  vorwärtsbewegt.

Hätten wir in Gl. (12) das negative Vorzeichen gewählt, so wäre auf entsprechendem Wege erhalten worden, daß die Trennebene  $Q \dots Q$  mit der Geschwindigkeit  $v$  parallel zu sich selbst nach links sich bewegt. Ist das Stärkeverhältnis der elektrischen und magnetischen Feldstärke auch dem Betrage nach nicht mehr durch Gl. (11), (12) gegeben, so kann jedes Feld zusammengesetzt werden aus einer Rechtswelle  $E_1$  und einer Linkswelle  $E_2$  gemäß  $E_1 = +\sqrt{\frac{\bar{\mu}}{\bar{\epsilon}}} H$ ,  $E_2 = -\sqrt{\frac{\bar{\mu}}{\bar{\epsilon}}} H$ ,  $E_1 + E_2 = E_0$ , und entsprechend  $H_1 + H_2 = H_0$ , was stets möglich ist. Bei willkürlichem Stärkeverhältnis der Felder veranlaßt also jeder anfängliche Sprung in der Feldverteilung im allgemeinen zwei von der Sprungstelle in entgegengesetzter Richtung zueinander unverzerrt mit der Geschwindigkeit  $v$  forteilende Wellen. Das hier für den Sprungwirbel Gezeigte gilt für jede räumliche Änderung der Feldstärken, die einem Wirbel entspricht.

#### 44. Das Verhalten der Halbleiter und Metalle.

Wir wiederholen die Untersuchung des vorangegangenen Abschnittes 43. für einen gleichförmigen Stoff, in welchem zugleich Verschiebungs- und Leitungsströmung bestehen. Von der Annahme, daß die drei Stoffwerte  $\mu$ ,  $\epsilon$ ,  $\rho$  Konstante sind, wissen wir, daß sie hinsichtlich  $\epsilon$  und  $\rho$  von den wirklichen halbleitenden Stoffen schlecht erfüllt wird, jedoch können wir von der beabsichtigten Berechnung einen allgemeinen Überblick erwarten.

Für einen ebenen Ausbreitungsvorgang mit der  $x$ -Achse als Wellennormale erhalten wir aus 42. Gl. (2), (3) mit  $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ ,  $\frac{\partial}{\partial z} = 0$  entsprechend 43. Gl. (1)

$$\bar{\epsilon} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{1}{\rho} E_x = 0 \quad (1a) \quad -\bar{\mu} \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0 \quad (1e)$$

$$\bar{\epsilon} \frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{1}{\rho} E_y = -\frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (1b) \quad -\bar{\mu} \frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (1f)$$

$$\bar{\epsilon} \frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{1}{\rho} E_z = +\frac{\partial H_y}{\partial x} \quad (1c) \quad -\bar{\mu} \frac{\partial H_z}{\partial t} = +\frac{\partial E_y}{\partial x} \quad (1g)$$

$$0 = \bar{\mu} \frac{\partial H_x}{\partial x} \quad (1d) \quad 0 = \bar{\epsilon} \frac{\partial E_x}{\partial x}. \quad (1h)$$

Wie in 43. stellen wir aus (e) und (d) fest, daß  $H_x$  örtlich und zeitlich unveränderlich und daher für den veränderlichen Vorgang belanglos ist. (h) zeigt, daß  $E_x$  überall

den gleichen Wert hat, den wir bestimmen können, indem wir (a) integrieren. Es ergibt sich in bekannter Weise [25. Gl. (15); 29. Gl. (14)], daß  $E_x$  in jedem Raumpunkt von einem für  $t = 0$  bekannten Werte  $E_{x_0}$  an gemäß

$$\frac{E_x}{E_{x_0}} = e^{-\frac{t}{\beta}}$$

mit einer von irgendwelchen äußeren Feldern gänzlich unabhängigen, ausschließlich durch  $\beta = \bar{\varepsilon} \rho$  gegebenen Geschwindigkeit verklingt. Ein solcher, nach gehörig langer Zeit unmerklich gewordener Vorgang rührt, wenn überhaupt vorhanden, von inneren Ladungen des Stoffes her und kann als unabhängig von den elektromagnetischen Störungen, die von außen her in den Stoff eindringen, für diese unbeachtet bleiben. Von den nach Gl. (1) miteinander verketteten Komponenten  $E_y$  und  $H_z$  einerseits,  $E_z$  und  $H_y$  andererseits brauchen wir wieder nur ein Paar, z. B. das erste, zu betrachten. Für jede Komponente gilt 42. Gl. (7)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\bar{\mu}}{\rho} \frac{\partial F}{\partial t} + \bar{\varepsilon} \bar{\mu} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}. \quad (2)$$

Wir beschränken uns auf zeitlich harmonisch mit der Frequenz  $\omega$  verlaufende Vorgänge. Setzen wir

$$F = \operatorname{Re} \{ f(x) \cdot e^{i\omega t} \} \quad (3)$$

in Gl. (2) ein, so ergibt sich  $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = -\gamma^2 f(x)$ , somit  $f(x) = \operatorname{const} \cdot e^{\mp i\gamma x}$ . Dabei ist abgekürzt

$$\gamma^2 = \omega^2 \bar{\varepsilon} \bar{\mu} - i \frac{\omega \bar{\mu}}{\rho}. \quad (4)$$

Setzen wir die Wurzel

$$\begin{aligned} \gamma &= n - i p, & \text{daher} & & n^2 - p^2 &= \omega^2 \bar{\varepsilon} \bar{\mu}, \\ & & & & 2 n p &= \frac{\omega \bar{\mu}}{\rho}, \end{aligned} \quad (5)$$

so können wir die vollständige Lösung von Gl. (2) gemäß Gl. (3) mit den Integrationskonstanten  $A$  und  $\varphi$  ausdrücken als

$$F = A \cdot e^{\mp p x} \cdot \cos(\omega t \mp n x + \varphi). \quad (6)$$

Auch ein solcher Vorgang wird üblicherweise als „Welle“ bezeichnet. Gl. (6) beschreibt daher bei Benutzung des oberen Vorzeichens eine in der Richtung der positiven  $x$ -Achse mit abnehmender Amplitude laufende Welle (das untere Zeichen beschreibt die entsprechende Linkswelle). Die Geschwindigkeit, mit der die Phasen des Kosinus sich bewegen, folgt aus  $\omega dt - n dx = 0$  zu

$$V = \frac{\omega}{n}, \quad (7)$$

entsprechend kann

$$\lambda = \frac{2\pi V}{\omega} = \frac{2\pi}{n} \quad (8)$$

als Wellenlänge bezeichnet werden; ferner ist

$$p = \frac{\omega \bar{\mu}}{2\rho n} = V \frac{\bar{\mu}}{2\rho} = \frac{V}{2\beta v^2} \quad (9)$$

der Exponent der räumlichen Schwächung oder der Absorptionskoeffizient. Aus Gl. (5) ergibt sich

$$\frac{2 p^2}{2 n^2} = \omega^2 \bar{\varepsilon} \bar{\mu} \left\{ \sqrt{1 + \frac{1}{(\omega \bar{\varepsilon} \rho)^2}} \mp 1 \right\}, \quad (10)$$

wobei die Wurzeln positiv verstanden werden sollen. Demgemäß wächst die Schwächung  $p$  mit steigender Frequenz  $\omega$ ; nach Gl. (7) ist auch die Phasenschnelle  $V$  eine steigende Funktion von  $\omega$ . Ist also zu einer gewählten Anfangszeit  $t = 0$  die Feldverteilung nicht eine sinusförmige, sondern eine in einer Fourier-Reihe einzelner Teilschwingungen darstellbare Funktion, so haben die Summanden mit

höherer Ordnungszahl auch eine desto größere Absorption und Phasenschnelle, die Welle ändert beim Fortschreiten fortwährend ihre Gestalt. Beim Nichtleiter dagegen bleibt die Wellenform erhalten.

Unter dem Ausdruck Gl. (6) möge etwa die elektrische Komponente  $E_y$  verstanden sein. Die mit ihr verkettete magnetische Komponente  $H_z$  ergibt sich aus Gl. (1 b) und (1 g) zu

$$H_z = \frac{\pm \gamma}{\mu \omega} E_y, \quad (11)^1$$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \frac{H_z}{E_y} &= \pm \frac{v}{\omega} \gamma = \pm \frac{v}{\omega} |\gamma| e^{-i\vartheta}, \\ |\gamma| &= \sqrt[4]{1 + \frac{1}{(\omega \varepsilon \rho)^2}}, \quad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{p}{n}. \end{aligned} \right\} \quad (11 a)$$

Die magnetische Feldstärke bleibt in der Phase um den Winkel  $\vartheta$  hinter der elektrischen Feldstärke zurück, und das Amplitudenverhältnis ist derart, daß im Zeitmittel stets  $\overline{W}_e < \overline{W}_m$  ist. Beim Nichtleiter war keine Phasenverschiebung vorhanden und das Amplitudenverhältnis durch Gleichheit der Feldenergien gekennzeichnet. Die Abweichungen der Wellenausbreitung im Halbleiter gegenüber der im Nichtleiter werden durch die einzige Kenngröße  $\omega \varepsilon \rho = \omega \beta$  bestimmt; man verwirklicht leicht, daß die Verhältnisse des Nichtleiters (43.) durch  $\frac{1}{\omega \varepsilon \rho} = 0$  eintreten. Dafür ist  $p = 0$ ,  $V = v$ . Die Welle wird somit im Halbleiter nur infolge der nicht unendlich kleinen Leitfähigkeit  $\frac{1}{\rho}$  geschwächt, Stromwärmeverlust und Lichtabsorption sind das gleiche. Nach der elektromagnetischen Lichttheorie ist ein Stoff um so durchsichtiger, je vollkommener er Nichtleiter ist, und um so undurchsichtiger, je vollkommener er die Elektrizität leitet. Diese Regel trifft im allgemeinen zu. Es gibt indessen mancherlei Ausnahmen. So sind z. B. Elektrolyte zwar leitend, jedoch meist durchsichtig. Zu dieser Erscheinung hat Maxwell darauf hingewiesen, daß die Elektrizitätsleitung in einem Elektrolyten nach dem Faradayschen Gesetz [25. Gl. (17)] mit einer Massenbewegung notwendig verknüpft ist; bei den außerordentlich schnellen Wechseln, die den kleinen Wellenlängen des Lichtes entsprechen, kommt eine Massenbewegung im Zeitmittel gar nicht zustande, daher auch keine Leitung; somit tritt kein Verlust an elektrischer Energie, also auch keine Lichtabsorption ein. Auch die optischen Eigenschaften der Metalle (Durchsichtigkeit dünnster Schichten, Reflexionsvermögen) im Gebiete sichtbaren Lichtes stehen im Widerspruch zu dieser Theorie. Für Strahlen von mehr als  $10^{-3}$  cm Wellenlänge (ultrarote Strahlen) stimmen jedoch die optischen Eigenschaften mit den aus dem spezifischen Widerstand gemäß 45. Gl. (14) nach der Maxwellschen Theorie berechneten überein, wie als erste Hagen und Rubens gemessen haben. Für kleinere Wellenlängen kann man die Verteilung der Materie in den Körpern nicht mehr, wie diese Theorie voraussetzt, als vollkommen stetig betrachten, vielmehr fängt ihr atomistischer Aufbau an, sich bemerklich zu machen.

Die Kenngröße  $\omega \beta$  ist schon für Stoffe, die wir als sehr schlechte Leiter bezeichnen, und noch für sehr schnelle Wechsel eine sehr kleine Zahl, und für metallische Leiter dürfen wir sie stets als verschwindend klein ansetzen. Hierfür wird

$$\gamma = \sqrt{-i \frac{\omega \mu}{\rho}} = p(1-i), \quad p = |n| = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\rho}}, \quad (12)$$

daher verläuft der Vorgang [als periodische Lösung der Wärmeleitungsgleichung 42. Gl. (15), mit zwei Integrationskonstanten  $A$ ,  $\varphi$ ] gemäß

$$F = \operatorname{Re} \{ A \cdot e^{\mp p(1+i)x} \cdot e^{i(\omega t + \varphi)} \} = A \cdot e^{\mp p x} \cdot \cos(\omega t \mp p x + \varphi). \quad (13)$$

<sup>1</sup> Das untere Vorzeichen kommt der Linkswelle zu.



Das komplexe Amplitudenverhältnis Gl. (11) ist hier

$$\frac{\omega \bar{\mu}}{\gamma} = \sqrt{i \omega \bar{\mu} \varrho}. \quad (11b)$$

Der Vorgang schreitet in der  $\pm x$ -Richtung fort; die Geschwindigkeit, mit der die Phasen des Kosinus sich verschieben, ist hier

$$V = \frac{\omega}{p} = \sqrt{\omega \frac{2\varrho}{\bar{\mu}}}; \quad (14)$$

ebenso, wie der Schwächungsexponent, steigt  $V$  mit der Frequenz, ist jedoch meist sehr viel kleiner als die frequenzunabhängige Ausbreitungsgeschwindigkeit  $v$  ungedämpfter Wellen in einem Nichtleiter. Wegen dieser Frequenzabhängigkeiten ändert eine aus mehreren Harmonischen zusammengesetzte Welle beim Fortschreiten ständig ihre Form. In Analogie zur ungedämpften Welle kann man als Wellenlänge bezeichnen

$$\lambda = \frac{2\pi}{p} = 2\pi \sqrt{\frac{2\varrho}{\omega \bar{\mu}}}. \quad (15)$$

Beim Durchlaufen einer Strecke  $\lambda$  treten gemäß Gl. (13) sämtliche Schwingungsphasen auf, und die Amplitude hat am Ende den  $e^{-2\pi}$ -fachen Betrag des Anfangswertes<sup>1,2</sup>. Dies ist die stärkste nach der Theorie mögliche Absorption. Nach Durchlaufen einer Strecke  $\frac{1}{p}$  ist die Amplitude auf das  $e^{-1}$ -fache<sup>1</sup> des Anfangswertes gesunken. Man kann daher die Länge

$$\frac{1}{p} = \sqrt{\frac{2\varrho}{\omega \bar{\mu}}} \quad (15a)$$

oder eine ihr proportionale Größe, etwa  $\lambda$ , als „Eindringtiefe“ bezeichnen und als Maß für die Schirmwirkung metallischer Wände gegen einfallende Strahlung benutzen<sup>2</sup>. Zu beachten ist, daß die eingestrahlte Energie mit dem doppelten Exponenten abgeschwächt wird.  $\mathcal{G}$  und  $\mathcal{H}$  verlaufen nach demselben Gesetz und haben nach Gl. (11a, b) zu jedem Zeitpunkt eine frequenzunabhängige, konstante Phasenverschiebung von  $\frac{\pi}{4}$ . Als eine „Welle“ kann dieser der Wärmeleitungsgleichung eigentümliche Vorgang kaum mehr erkannt werden. Betrachtet man die Beträge der elektrischen Stromdichte und des magnetischen Feldes, so sieht man, daß sie mit wachsendem  $x$  um so stärker abnehmen, je größer  $p$ , also auch die Frequenz, ist. Werde etwa mit  $x = 0$  eine Trennebene zwischen Nichtleiter und Leiter bezeichnet, so können die zueinander senkrechten, in der Ebene  $x = 0$  vorhandenen elektrischen und magnetischen Feldstärken etwa dadurch entstanden sein, daß eine Welle aus dem Nichtleiter senkrecht auf diese Oberfläche auftrifft; in der Trennebene aber müssen die tangentialen Komponenten von  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{H}$  stetig, d. h. zu beiden Seiten die gleichen sein. (Dieser Vorgang wird in folgendem Abschnitt näher beschrieben werden.) Die durch Strahlung in den Leiter übertragene Energie dringt somit um so weniger tief ein, je schneller die Wechsel sind. Daher drängt sich die Strömung mit größerem  $p$  in eine um so dünnere Schicht an der Oberfläche zusammen. Diese Vorstellung ergänzt befriedigend, wie schon in 41. betont, die Beschreibung der Stromverdängung („Hautwirkung“; 39.).

Dem in 43. Gl. (11) behandelten Beispiel einer Sprungwelle im nichtleitenden Raum stellen wir hier ein einfaches Beispiel eines un stetigen elektro-

<sup>1</sup>  $e^{-2\pi} = 1/535 = 0,00187$ ;  $e^{-1} = 1/2,718 = 0,368$ .

<sup>2</sup> Zahlenbeispiele: Kupfer hat etwa  $\frac{\varrho}{\bar{\mu}} = 135 \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}}$ ; für  $\omega_1 = 2\pi \cdot 50 \text{ sec}^{-1}$  ist  $\lambda = 5,8 \text{ cm}$ ,  $V = 2,9 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ ; für  $\omega_2 = 2\pi \cdot 50 \cdot 10^4 \text{ sec}^{-1}$  ist  $\lambda = 0,58 \text{ mm}$ ,  $V = 290 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ . In Luft (Vakuum) ist  $V = v = c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ , und nach 43. Gl. (10) ist für  $\omega_1$  die Wellenlänge  $\lambda = 6000 \text{ km}$ , für  $\omega_2$  ist sie  $600 \text{ m}$ .

magnetischen Vorganges in einem leitenden Körper gegenüber; der Vergleich beider Beispiele bestätigt die in 42. abgeleiteten allgemeinen Gesetze über die in beiden Fällen auftretenden Eigentümlichkeiten der Ausbreitung.

Beispiel: An der Oberfläche eines ebenen Bleches, dessen Dicke  $h$  gegenüber seiner Länge und Breite gering ist, möge zur Zeit  $t = 0$  plötzlich ein tangential gerichtetes, homogenes magnetisches Feld  $H_0$  entstehen und von da an konstant bleiben. [Dem entspricht nach der in 42. Gl. (18), (19) gezeigten Analogie: das Blech wird plötzlich in ein gleichmäßiges Temperaturfeld gebracht.] Das der  $y$ -Achse parallele magnetische Feld  $\mathfrak{H} = j H_y$  beginnt dann allmählich in der  $\pm x$ -Richtung von außen in das Metall einzudringen, ( $x = 0$  in der Mitte der Dicke  $h$ ), daher wird aus 42. Gl. (15) mit der Abkürzung  $H_y(x, t) = H$ :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{\bar{\mu}}{\rho} \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (16)$$

Ein partikuläres Integral von Gl. (16) ist, wie man leicht durch Einsetzen verwirklicht:

$$H = A \cdot \cos \alpha x \cdot e^{-\alpha^2 \frac{\rho}{\bar{\mu}} t}, \quad (17)$$

wobei  $A$  und  $\alpha$  noch unbestimmte Größen sind, und die Symmetrie des Vorganges zur Mittelebene  $x = 0$  durch die Wahl der geraden Ortsfunktion  $\cos \alpha x$  berücksichtigt ist.

Den Vorgang des Feldaufbaues im Metall setzen wir zusammen aus dem stationären Zustand und dem Vorgang, der bei plötzlichem Verschwinden des vorher zeitlich konstanten, homogenen Feldes stattfindet. Diese einfachere Aufgabe ist somit gekennzeichnet durch:

$$\text{für } t > 0, \quad -\frac{h}{2} < x < +\frac{h}{2} \quad \text{gilt Gl. (16);} \quad (18a)$$

$$\text{für } t \leq 0, \quad -\frac{h}{2} < x < +\frac{h}{2} \quad \text{ist } H = H_0 = \text{const}_{x,t}; \quad (18b)$$

$$\text{für } t = 0, \quad x = \pm \frac{h}{2} \quad \text{ist } H = 0, \quad (18c)$$

denn das Feld wird plötzlich weggerissen. Gl. (18c) macht aus Gl. (17):  $0 = \cos\left(\pm \alpha \frac{h}{2}\right)$ , was erfüllt ist für die unendlich vielen Werte  $\alpha \frac{h}{2} = \frac{\pi}{2} \dots \frac{3\pi}{2} \dots \frac{5\pi}{2} \dots$  oder

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{h}, \quad (19)$$

wenn  $n$  eine Laufzahl ist, die hintereinander alle ganzen, positiven ungeraden Zahlen bedeutet:

$$n = 1 \dots 3 \dots 5 \dots 7 \dots \quad (20)$$

Daher ist eine vollständige Lösung von Gl. (16) als Summe der unendlich vielen Partikulärintegrale aufzubauen:

$$H(x, t) = \sum_n A_n \cdot \cos \frac{n\pi}{h} x \cdot e^{-\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 \frac{\rho}{\bar{\mu}} t}. \quad (21)$$

Die  $A_n$  müssen so bestimmt werden, daß Gl. (18b) erfüllt wird, es muß also zum Zeitpunkt  $t = 0$  sein

$$H_0 = \sum_n A_n \cdot \cos n\pi x' \quad (22)$$

mit der Abkürzung  $x' = \frac{x}{h}$ . Dieser Bedingung können wir mit Hilfe der Orthogonalitätseigenschaften der Kreisfunktionen genügen, indem wir Gl. (22) mit  $\cos m\pi x' \cdot dx'$  erweitern und integrieren:

$$H_0 \int_{x'=0}^{1/2} \cos m\pi x' \cdot dx' = \sum_n A_n \int_{x'=0}^{1/2} \cos n\pi x' \cdot \cos m\pi x' \cdot dx'. \quad (23)$$

Alle Integrale aber, für die  $m \neq n$  ist, sind Null, und für  $m = n$  ergibt sich aus Gl. (23) leicht  $A_n = \frac{\pm 1}{n} \cdot \frac{4}{\pi} H_0$ , daher ist die vollständige Lösung

$$H(x, t) = H_0 \cdot \frac{4}{\pi} \sum_n \frac{\pm 1}{n} \cdot \cos \frac{n\pi}{h} x \cdot e^{-\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 \frac{\rho}{\mu} t}. \tag{24}$$

Der magnetische Fluß durch einen Querschnitt der Höhe Eins ist im stationären Zustand  $\Phi_0 = h \bar{\mu} H_0$ , im veränderlichen Zustand ist er

$$\Phi(t) = \bar{\mu} \int_{-h/2}^{+h/2} H(x, t) \cdot dx = \Phi_0 \cdot \frac{8}{\pi^2} \sum_n \frac{1}{n^2} \cdot e^{-\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 \frac{\rho}{\mu} t}. \tag{25}$$

Gl. (24), (25) beschreiben den Feldabbau. Für den Feldaufbau gilt dann, wie man leicht sieht:

$$\frac{H(x, t)}{H_0} = 1 - \frac{4}{\pi} \sum_n \frac{\pm 1}{n} \cdot \cos \frac{n\pi}{h} x \cdot e^{-\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 \frac{\rho}{\mu} t}, \tag{26}$$

$$\frac{\Phi(t)}{\Phi_0} = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_n \frac{1}{n^2} \cdot e^{-\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 \frac{\rho}{\mu} t}. \tag{27}$$

Der Feldverlauf wird also durch eine unendliche Summe beschrieben; je größer indes  $t$  wird, um so weniger fallen die Glieder mit größeren Werten von  $n$  ins Gewicht. Abb. 1 zeigt die örtliche Verteilung von  $H$  zu verschiedenen Zeiten. In einem gewählten Punkte steigt das Feld zunächst rasch, dann ziemlich langsam auf seinen stationären Wert an; es beginnt um so früher merklich zu wachsen und nimmt einen bestimmten Wert um so früher an, je näher an der Oberfläche der Punkt liegt. Das Feld dringt also von außen ein. Der magnetische Fluß wächst anfänglich rasch, wenn er aber dem stationären Wert nahegekommen ist, nur noch sehr langsam.

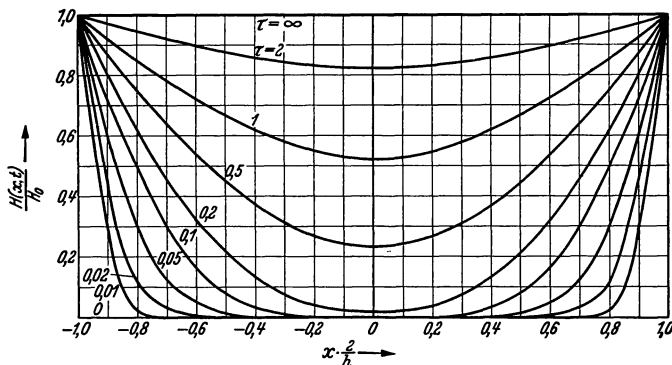


Abb. 44. 1. Eindringen eines magnetischen Feldes in eine ebene Metallplatte. Parameter (Zeitmaß):  $\tau = t \cdot \left(\frac{\pi}{h}\right)^2 \frac{\rho}{\mu}$ .

### 45. Reflexion und Brechung.

A. Rückwurf an Metallen. Die Ebene  $x = 0$  trenne einen durch einen gleichförmigen Nichtleiter erfüllten Halbraum  $x > 0$  von einem durch einen gleichförmigen metallischen Leiter erfüllten Halbraum  $x < 0$ . Wir untersuchen eine senkrecht auf die Trennebene fallende ebene Welle.

Eine vollständige Lösung für ebene Wellen beliebiger Gestalt mit zur  $x$ -Achse paralleler Wellennormale im Nichtleiter ist gemäß 43. Gl. (1c), (1f), (2a), (3), (5c):

$$\left. \begin{aligned} E_x &= 0, & E_y &= 0, & E_z &= f\left(t + \frac{x}{v}\right) + g\left(t - \frac{x}{v}\right); \\ H_x &= 0, & H_y &= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \left\{ f\left(t + \frac{x}{v}\right) - g\left(t - \frac{x}{v}\right) \right\}, & H_z &= 0. \end{aligned} \right\} \tag{1}$$

Die Trennebene  $x = 0$  wird von den tangential gerichteten  $E_z, H_y$  stetig durchsetzt, da Flächenwirbel nicht möglich sind [40. Gl. (6)]. Für den Leiter nehmen wir zunächst unendlich große Leitfähigkeit  $\rho = 0$  an. In einem solchen „vollkommenen Leiter“ ist notwendig überall  $\mathfrak{G} = 0$ , da die Stromdichte  $\mathfrak{G} = \frac{1}{\rho} \mathfrak{E}$  unmöglich unendlich groß werden kann. Daher wird in einem solchen auch keine Energie als Stromwärmeverlust umgesetzt. Aus der Stetigkeitsbedingung folgt dann aber, daß an der Trennebene  $x = 0$  auch auf der Seite des Nichtleiters an jedem Punkt und zu jeder Zeit  $E_z = 0$  ist. Mit Gl. (1) lautet diese Bedingung

$$f(t) + g(t) = 0, \quad (2)$$

was erfüllt ist, wenn man setzt

$$E_z = f\left(t + \frac{x}{v}\right) - f\left(t - \frac{x}{v}\right), \quad H_y = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left\{ f\left(t + \frac{x}{v}\right) + f\left(t - \frac{x}{v}\right) \right\}. \quad (3)$$

Die in der Richtung der negativen  $x$  senkrecht auf die Oberfläche  $x = 0$  des vollkommenen Leiters aus dem nichtleitenden Raum auftreffende Welle  $f\left(t + \frac{x}{v}\right)$  wird somit vollständig nach der entgegengesetzten Seite wieder zurückgeworfen, und zwar die elektrische Feldstärke mit negativem, die magnetische Feldstärke mit positivem Vorzeichen. Ist das Metall ein vollkommener Leiter, so wirkt seine Oberfläche als vollkommener Spiegel für die elektromagnetischen Wellen. Ist die einfallende Welle einfach-periodisch [43. Gl. (9), (10)]:

$$f\left(t + \frac{x}{v}\right) = A \cdot \cos \left\{ \frac{2\pi x}{\lambda} + \omega t \right\}, \quad (4)$$

so lautet Gl. (3):

$$\left. \begin{aligned} E_z &= -2A \cdot \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \sin \omega t, \\ \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H_z &= 2A \cdot \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \cos \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Dies drückt aus, daß infolge der vollkommenen Spiegelung eine stehende Welle sich ausbildet. Die Knoten der elektrischen Feldstärke liegen ersichtlich in den Ebenen

$$x = 0 \dots \frac{\lambda}{2} \dots \frac{3\lambda}{2} \dots, \quad (6)$$

und die Knoten der magnetischen Feldstärke bei

$$x = \frac{\lambda}{4} \dots \frac{3\lambda}{4} \dots \frac{5\lambda}{4} \dots \quad (6a)$$

Bei passender Wahl der Wellenlänge, also der Frequenz  $\omega = \frac{2\pi v}{\lambda}$ , können stehende elektromagnetische Wellen versuchsmäßig hergestellt werden und aus ihnen mit Hilfe der nach Gl. (5), (6) beobachteten Wellenlänge die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $v$  bestimmt werden.

Wir untersuchen als Zweites das Verhalten einer einfach-periodischen Welle unter den gleichen Umständen, aber mit der Annahme eines zwar gut, aber nicht unendlich gut leitenden Metalles. Für den Nichtleiter  $x > 0$ , Index 1, lautet die Gl. (1) entsprechende periodische Lösung nach 43. Gl. (9c):

$$\left. \begin{aligned} E_{1z} &= A \cdot e^{i\omega\left(t + \frac{x}{v}\right)} + B \cdot e^{i\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)}, \\ \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} H_{1y} &= A \cdot e^{i\omega\left(t + \frac{x}{v}\right)} - B \cdot e^{i\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Der mit  $A$  behaftete Summand bringt eine in Richtung negativer  $x$ , also gegen die Trennebene fortschreitende Welle zum Ausdruck, der andere Posten eine zurückgeworfene Welle. Im Metall  $x < 0$ , Index 2, ist ein Ausbreitungsvorgang nur in

Richtung wachsender negativer  $x$  in Betracht zu ziehen; er erfolgt in der in 44. Gl. (12) bis (15) beschriebenen Weise und wird dargestellt durch

$$\left. \begin{aligned} E_{2z} &= C \cdot e^{i(\omega t + \gamma x)}, \\ H_{2y} &= \frac{E_{2z}}{\sqrt{i \omega \bar{\mu}_2 \varrho_2}}; \quad \gamma = \sqrt{-i \frac{\omega \bar{\mu}_2}{\varrho_2}} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Der physikalische Vorgang wird durch die reellen Teile von Gl. (7) und (8) dargestellt; von den drei komplexen Konstanten  $A$ ,  $B$ ,  $C$  kann über eine willkürlich verfügt werden: wir tun dies, indem wir unter  $A$  die gegebene (reelle) Amplitude der einfallenden Welle verstehen. An der Trennebene  $x=0$  sind die Feldstärken zu jedem Zeitpunkt stetig: für  $x=0$  ist

$$E_{1z} = E_{2z}; \quad H_{1y} = H_{2y}, \quad (9)$$

somit

$$\begin{aligned} A + B &= C, \\ A - B &= C \cdot \sqrt{\frac{\bar{\mu}_1}{\varepsilon_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{i \omega \bar{\mu}_2 \varrho_2}} = C \cdot q; \\ \frac{B}{A} &= \frac{1-q}{1+q}; \quad \frac{C}{A} = \frac{2}{1+q}. \end{aligned} \quad (9a)$$

Das Verhältnis der zurückgeworfenen zur einfallenden Amplitude der elektrischen wie der magnetischen Feldstärke ist  $\left| \frac{B}{A} \right|$ , und das Quadrat dieses Quotienten ist ersichtlich das Verhältnis der zurückgeworfenen zur einfallenden Energie; es wird daher als Reflexionsvermögen bezeichnet

$$r = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = \left| \frac{1-q}{1+q} \right|^2, \quad (10)$$

und dies läßt sich mit der Kenngröße

$$\delta = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \sqrt{\frac{1}{2} \omega \bar{\mu}_2 \varrho_2} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2} \omega \bar{\mu}_2 \varrho_2}}{\Gamma_1} \quad (11)$$

schreiben als

$$r = \frac{1 - 2\delta + 2\delta^2}{1 + 2\delta + \delta^2}. \quad (10a)$$

Sowohl für sehr großes wie für sehr kleines  $\delta$  geht  $r$  gegen Eins und hat seinen Kleinstwert bei  $\delta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ; mehr als in diesem Falle kann also von dem Metall nicht absorbiert werden. Da der Ausbreitungsvorgang im Leiter bekannt ist, wenden wir uns der Welle im Nichtleiter zu; bei einem gut leitenden Metall gilt im allgemeinen noch bei sehr hohen Frequenzen:  $\delta \ll 1$ . Unter dieser Voraussetzung findet man aus Gl. (9a) leicht

$$B = -A(1 - 2\delta) \cdot e^{-i2\delta}. \quad (12)$$

Trägt man dies in Gl. (7) ein, und nimmt den reellen Teil, so ergibt sich für die Welle im Nichtleiter  $x > 0$ :

$$\left. \begin{aligned} E_{1z} &= A \cdot \cos \omega \left( t + \frac{x}{v} \right) - A(1 - 2\delta) \cdot \cos \left\{ \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) - 2\delta \right\}, \\ \Gamma_1 H_{1y} &= A \cdot \cos \omega \left( t + \frac{x}{v} \right) + A(1 - 2\delta) \cdot \cos \left\{ \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) - 2\delta \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Der Vergleich mit Gl. (3) zeigt den Einfluß des geringen, aber von Null verschiedenen spezifischen Widerstandes des Metalles: die im zweiten Summanden von Gl. (13) zum Ausdruck kommende zurückgeworfene Welle erleidet sowohl in der Amplitude wie in der Phase eine kleine Veränderung.

Wir betrachten noch den zeitlichen Mittelwert der Leistung, die auf die Oberflächeneinheit der Trennebene auffällt und von ihr ausgeht, mit Hilfe des Energieströmungsvektors [43. Gl. (7)]:

$$\bar{N} = \frac{1}{T} \int_0^T (E_y H_z)_{x=0} \cdot dt.$$

Man erhält für die auffallende Welle  $\frac{A^2}{2\Gamma_1}$ , für die zurückgeworfene Welle  $\frac{A^2}{2\Gamma_1} (1-2\delta)^2$ , daher für die eindringende Welle  $\frac{2A^2\delta}{\Gamma_1}$ . Das Reflexionsvermögen ist somit

$$r = 1 - 4\delta \quad (14)$$

in Übereinstimmung mit Gl. (10a) mit Rücksicht auf die angenommene Näherung  $\delta \ll 1$ .  $\delta$  ist aber proportional zu  $\sqrt{\rho}$ . Dies wurde, wie in 44. erwähnt, für gewisse, nicht zu kleine Wellenlängen durch Versuch bestätigt gefunden.

B. Brechung und Zurückwurf bei Nichtleitern. Die Ebene  $z = 0$  trenne zwei Nichtleiter mit den Eigenschaften  $\varepsilon_1, \mu_1$  und  $\varepsilon_2, \mu_2$ . Wir untersuchen die Erscheinungen beim Übergang des Lichtes von dem einen in den anderen Stoff. Das einwellige Licht möge in Stoff 1 unter dem vom Lot weg gemessenen Winkel  $\varphi_e$  die Trennebene treffen. Durch das Lot und die Richtung des Strahles ist die „Einfallsebene“ bestimmt. Wir legen die in der Trennebene liegende  $y$ -Achse senkrecht zur Einfallsebene. Wir bestimmen vorübergehend eine  $z'$ -Achse, die mit der Richtung des Lichtstrahles zusammenfallen soll, und eine neue  $x'$ -Achse, die senkrecht auf der Ebene steht, die durch die  $y$ - und die  $z'$ -Achse bestimmt ist. Das Licht soll eine ebene polarisierte Welle sein, d. h. nach 43., daß elektrische und magnetische Feldstärke in den Richtungen  $y$  und  $x'$  schwingen. Die Anwendung der Ergebnisse von 43. Gl. (1), (9) ergibt die Gleichungen für das einfallende Licht (Index  $e$ ):

$$\left. \begin{aligned} E_{e,y} &= A_e \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda_e} \{z' - v_1 t\} \\ \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} H_{e,x'} &= -A_e \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda_e} \{z' - v_1 t\} \\ E_{e,x'} &= B_e \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda_e} \{z' - v_1 t\} \\ \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} H_{e,y} &= B_e \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda_e} \{z' - v_1 t\} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Die Achsen  $x'$  und  $z'$  liegen in der zur  $y$ -Achse senkrechten Ebene der Achsen  $x$  und  $z$  und gegen diese um den Winkel  $\varphi_e$  gedreht. Aus Gl. (15) ergibt sich für das Achsenkreuz  $x, y, z$ :

$$\left. \begin{aligned} E_{e,x} &= B_e \cdot \cos \varphi_e \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda_e} \{x \sin \varphi_e + z \cos \varphi_e - v_1 t\} \\ E_{e,y} &= A_e \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda_e} \{x \sin \varphi_e + z \cos \varphi_e - v_1 t\} \\ E_{e,z} &= -B_e \cdot \sin \varphi_e \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda_e} \{x \sin \varphi_e + z \cos \varphi_e - v_1 t\} \\ \Gamma_1 H_{e,x} &= -A_e \cdot \cos \varphi_e \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda_e} \{x \sin \varphi_e + z \cos \varphi_e - v_1 t\} \\ \Gamma_1 H_{e,y} &= B_e \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda_e} \{x \sin \varphi_e + z \cos \varphi_e - v_1 t\} \\ \Gamma_1 H_{e,z} &= A_e \cdot \sin \varphi_e \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda_e} \{x \sin \varphi_e + z \cos \varphi_e - v_1 t\} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Der einfallende Strahl bewirkt einen im Stoff 1 zurückgeworfenen, und einen in den Stoff 2 durchgehenden Strahl. Der reflektierte Strahl (Index  $r$ ) möge vom

Lot aus den Winkel  $\varphi_r$  haben. Dann erhält man ganz entsprechend

$$\left. \begin{aligned} E_{r,x} &= B_r \cdot \cos \varphi_r \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda_r} \{x \sin \varphi_r + z \cos \varphi_r - v_1 t\} \\ E_{r,y} &= A_r \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda_r} \{x \sin \varphi_r + z \cos \varphi_r - v_1 t\} \\ E_{r,z} &= -B_r \cdot \sin \varphi_r \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda_r} \{x \sin \varphi_r + z \cos \varphi_r - v_1 t\} \\ \Gamma_1 H_{r,x} &= -A_r \cdot \cos \varphi_r \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda_r} \{x \sin \varphi_r + z \cos \varphi_r - v_1 t\} \\ \Gamma_1 H_{r,y} &= B_r \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda_r} \{x \sin \varphi_r + z \cos \varphi_r - v_1 t\} \\ \Gamma_1 H_{r,z} &= A_r \cdot \sin \varphi_r \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda_r} \{x \sin \varphi_r + z \cos \varphi_r - v_1 t\} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Der durchgehende Strahl (Index  $d$ ) möge im Stoff 2 mit dem Lot den Winkel  $\varphi_d$  bilden. Es ist

$$\left. \begin{aligned} E_{d,x} &= B_d \cdot \cos \varphi_d \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda_d} \{x \sin \varphi_d + z \cos \varphi_d - v_2 t\} \\ E_{d,y} &= A_d \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda_d} \{x \sin \varphi_d + z \cos \varphi_d - v_2 t\} \\ E_{d,z} &= -B_d \cdot \sin \varphi_d \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda_d} \{x \sin \varphi_d + z \cos \varphi_d - v_2 t\} \\ \Gamma_2 H_{d,x} &= -A_d \cdot \cos \varphi_d \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda_d} \{x \sin \varphi_d + z \cos \varphi_d - v_2 t\} \\ \Gamma_2 H_{d,y} &= B_d \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda_d} \{x \sin \varphi_d + z \cos \varphi_d - v_2 t\} \\ \Gamma_2 H_{d,z} &= A_d \cdot \sin \varphi_d \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda_d} \{x \sin \varphi_d + z \cos \varphi_d - v_2 t\} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

An der Trennebene sind die Tangentialkomponenten stetig, es gilt also für  $z = 0$  unabhängig von  $x$  und  $t$ :

$$E_{e,x} + E_{r,x} = E_{d,x} \quad (19a) \qquad E_{e,y} + E_{r,y} = E_{d,y} \quad (19c)$$

$$H_{e,x} + H_{r,x} = H_{d,x} \quad (19b) \qquad H_{e,y} + H_{r,y} = H_{d,y} \quad (19d)$$

Aus (16), (17), (18) hat man mit Gl. (19c)

$$\left. \begin{aligned} A_e \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda_e} \{x \sin \varphi_e - v_1 t\} + A_r \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda_r} \{x \sin \varphi_r - v_1 t\} \\ = A_d \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda_d} \{x \sin \varphi_d - v_2 t\}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Dies ist nur dann für beliebige Werte  $t$  erfüllt, wenn zugleich gilt

$$\frac{\lambda_e}{v_1} = \frac{\lambda_r}{v_1} = \frac{\lambda_d}{v_2}. \quad (20a)$$

Also ist zunächst  $\lambda_e = \lambda_r$ , wie nicht anders zu erwarten war, und weiter ist

$$\frac{\lambda_e}{\lambda_d} = \frac{v_1}{v_2}, \quad (21)$$

die Wellenlängen verhalten sich in den beiden Stoffen wie die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten; für  $\mu_1 = \mu_2$ , was hier immer sehr nahe erfüllt ist, gilt dann

$$\frac{\lambda_e}{\lambda_d} = \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}. \quad (21a)$$

Damit Gl. (20) für jeden Wert  $x$  gilt, muß sein

$$\frac{\sin \varphi_e}{\lambda_e} = \frac{\sin \varphi_r}{\lambda_r} = \frac{\sin \varphi_d}{\lambda_d}. \quad (20b)$$

Hieraus folgt zunächst mit  $\lambda_e = \lambda_r$ , daß  $\sin \varphi_e = \sin \varphi_r$  sein muß. Da aber  $\varphi_r$  unmöglich gleich  $\varphi_e$  sein kann, ist offenbar

$$\varphi_r = \pi - \varphi_e. \tag{22}$$

Dies ist das bekannte Reflexionsgesetz, das mit Abb. 1 so ausgesprochen wird, daß der Reflexionswinkel gleich dem Einfallswinkel ist. Außerdem ergibt Gl. (20 b) und (21)

$$\frac{\sin \varphi_e}{\sin \varphi_d} = \frac{\lambda_e}{\lambda_d} = \frac{v_1}{v_2}, \tag{23}$$

und dies ist das Brechungsgesetz von Snell.  $\frac{v_1}{v_2}$  wird als (relatives) Brechungsverhältnis bezeichnet. — Die Normalen der einfallenden, zurückgeworfenen und durchgehenden (gebrochenen) Welle liegen also alle in der gleichen Ebene. Berücksichtigen wir diese Ergebnisse:  $\lambda_r = \lambda_e$ ,  $\cos \varphi_r = -\cos \varphi_e$  und Gl. (23), so erhalten wir der Reihe nach aus Gl. (19 c), (19 b), (19 d), (19 a):

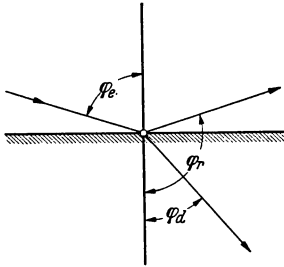


Abb. 45. 1. Brechung und Zurückwurf an der Grenzfläche zweier Nichtleiter.

$$\left. \begin{aligned} A_e + A_r &= A_d \\ \frac{1}{\Gamma_1} \cdot \cos \varphi_e \cdot (A_e - A_r) &= \frac{1}{\Gamma_2} \cdot \cos \varphi_d \cdot A_d \\ \frac{1}{\Gamma_1} (B_e + B_r) &= \frac{1}{\Gamma_2} \cdot B_d \\ \cos \varphi_e \cdot (B_e - B_r) &= \cos \varphi_d \cdot B_d \end{aligned} \right\} \tag{24}$$

Für das allein auftretende Verhältnis  $\Gamma_1/\Gamma_2$  gilt aber bei  $\mu_1 = \mu_2$  nach Gl. (21 a) und Gl. (23)

$$\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \frac{\sin \varphi_e}{\sin \varphi_d}. \tag{25}$$

Nach Einsetzen von Gl. (25) gewinnt man aus Gl. (24) durch trigonometrische Umformungen die folgenden von Fresnel aufgestellten Beziehungen der Amplituden des zurückgeworfenen und des durchgehenden (gebrochenen) Strahles zur Amplitude des einfallenden Strahles:

$$\left. \begin{aligned} A_r &= A_e \frac{\sin(\varphi_d - \varphi_e)}{\sin(\varphi_d + \varphi_e)} \\ A_d &= A_e \frac{2 \sin \varphi_d \sin \varphi_e}{\sin(\varphi_d + \varphi_e)} \\ B_r &= -B_e \frac{\operatorname{tg}(\varphi_d - \varphi_e)}{\operatorname{tg}(\varphi_d + \varphi_e)} \\ B_d &= B_e \frac{2 \sin \varphi_d \cos \varphi_e}{\sin(\varphi_d + \varphi_e) \cos(\varphi_d - \varphi_e)} \end{aligned} \right\} \tag{26}$$

#### 46. Vorgänge längs Leitungen.

Die Ausbreitungsvorgänge entlang langen, parallelen linearen Leitern sind wichtig erstens, weil mit derartigen Anordnungen und sehr hohen Frequenzen an stehenden elektromagnetischen Wellen die Ergebnisse der Theorie geprüft werden können, und zweitens, weil bei mäßig hohen Frequenzen diese Anordnung zur elektrischen Nachrichtenübermittlung dient. Wir betrachten den Verlauf von Spannung und Strom für den technisch wichtigen zweiten Fall.

Die Richtung der Leitung sei parallel zu einer  $x$ -Achse. Im idealen Falle, daß keine Verluste in den Leitern und im Nichtleiter auftreten, ist das elektromagnetische Feld eben, elektrische und magnetische Feldlinien verlaufen ausschließlich in Ebenen, die senkrecht zur Leiterachse stehen. Zwischen zwei zur  $yz$ -Ebene parallelen Ebenen mit dem Abstände  $dx$  ist daher sowohl der magnetische wie der elektrische Fluß eine wohl definierte Größe. Wir setzen den magnetischen Fluß wegen  $\mu = \text{const}$  proportional dem Strom  $J$  mittels  $\Phi dx = J \cdot L dx$ , bezeichnen also mit  $\Phi$  und  $L$



Fluß und Selbstinduktivität für die Längeneinheit. Ebenso definiert der elektrische Fluß durch  $Q dx = U \cdot C dx$  die Kapazität  $C$  der Längeneinheit.  $L$  und  $C$  sind von den Ausbreitungsvorgängen unabhängige Konstante, solange der Leiter widerstandslos und das Dielektrikum verlustlos angenommen ist. Wird diese Voraussetzung fallengelassen, so weicht die Feldstruktur von der ebenen ab, jedoch unerheblich. Wegen des schief auf der Leiteroberfläche stehenden elektrischen Feldes strömt nämlich ein Teil der im Nichtleiter fließenden Energie in der in 41. Abb. 2, 3 gezeigten Weise in die Leitungsdrähte ein und geht dort als Stromwärme verloren; diese setzen wir für die Längeneinheit  $J^2 \cdot R dx$  und bezeichnen  $R$  als den Verlustwiderstand der Längeneinheit; ein anderer Energieteil geht im Dielektrikum verloren, wir setzen ihn mit  $U^2 \cdot A dx$  proportional dem Quadrat der Spannung. Für  $A$  ist die Bezeichnung „Ableitung“ der Längeneinheit gebräuchlich; es kommt jedoch in  $A$  nicht etwa allein der Energieverlust infolge mangelhafter Isolation, sondern auch der in 37. gekennzeichnete dielektrische Verlust zum Ausdruck. Im allgemeinen Falle werden daher die vier kennzeichnenden Größen  $L$ ,  $C$ ,  $R$ ,  $A$  von den Ausbreitungsvorgängen selbst abhängig sein, bei periodischen Vorgängen z. B. wird infolge der Hautwirkung der Verlustwiderstand  $R$  mit der Frequenz wachsen, die in  $L$  enthaltene innere Selbstinduktivität abnehmen (erfahrungsgemäß wachsen auch die dielektrischen Verluste mit der Frequenz). Es bedarf daher besonderer Untersuchung, ob und wie weit diese vier Größen hinreichend definiert sind. Sie wurde von G. Mie unternommen. Die Ergebnisse der mit diesen vier Größen formal durchgeführten Rechnung können wir als eine erste Annäherung für die Vorgänge längs Leitungen betrachten.

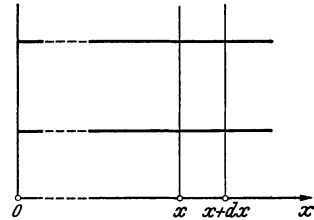


Abb. 46. 1. Zur Berechnung der Vorgänge längs Leitungen.

Wir wenden das Induktionsgesetz [30. Gl. (7)] auf einen Leitungsabschnitt der Länge  $dx$  an und erhalten (Abb. 1)

$$\begin{aligned} U(x+dx, t) + J(x, t) \cdot R dx - U(x, t) &= -\frac{\partial}{\partial t} J(x, t) \cdot L dx; \\ -\frac{\partial}{\partial x} U(x, t) &= R J(x, t) + L \frac{\partial}{\partial t} J(x, t). \end{aligned} \quad (1)$$

Wir bestimmen ferner im Sinne der Kontinuitätsgleichung 29. Gl. (3) den an der Stelle  $x$  in den Abschnitt eintretenden Strom (Abb. 1) als Summe des am Ende austretenden Stromes, des Ladestromes und des Ableitungsstromes:

$$\begin{aligned} J(x, t) &= J(x+dx, t) + \frac{\partial}{\partial t} U(x, t) \cdot C dx + U(x, t) \cdot A dx; \\ -\frac{\partial}{\partial x} J(x, t) &= A U(x, t) + C \frac{\partial}{\partial t} U(x, t). \end{aligned} \quad (2)$$

Aus den simultanen Grundgleichungen (1) und (2) erhält man durch Substitution die „Telegraphengleichung“ Gl. (3), in der die Abkürzung  $F$  entweder  $U(x, t)$  oder  $J(x, t)$  bedeutet:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + (CR + AL) \frac{\partial F}{\partial t} + RA \cdot F. \quad (3)$$

Für die verlustlose, ideale Leitung wird aus Gl. (3) mit  $R = 0$ ,  $A = 0$ :

$$\frac{1}{LC} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}. \quad (4)$$

Ihre vollständige Lösung ist bekanntlich

$$F = f_1(x - vt) + f_2(x + vt), \quad (5)$$

man hat also zwei Wellen beliebiger Gestalt;  $f_1$  rückt in Richtung wachsender  $x$ ,  $f_2$  in Richtung abnehmender  $x$  mit der Geschwindigkeit  $v$  vor, die Form bleibt erhalten.

Durch Einsetzen von Gl. (5) in (4) ergibt sich

$$v = \pm \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (6)$$

Bedeutet Gl. (5) die Spannung:  $F = U(x, t)$ , so gehört nach Gl. (1) und (2) dazu der Strom

$$\sqrt{\frac{L}{C}} \cdot J = f_1(x - vt) - f_2(x + vt). \quad (7)$$

Für jede einzelne der beiden Wellen ist also das Verhältnis

$$\frac{U}{J} = \pm \sqrt{\frac{L}{C}} = Z \quad (8)$$

an jedem Ort und zu jeder Zeit dasselbe, daher ein Kennzeichen der Leitung;  $Z$  wird Wellenwiderstand genannt. Aus Gl. (8) folgt durch Quadrieren, daß unabhängig von  $x$  und  $t$  gilt

$$\frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} L J^2, \quad (9)$$

die gesamte elektromagnetische Energie ist also überall und stets zu gleichen Teilen elektrische und magnetische Energie. Nur unter dieser Bedingung schreitet die Welle ohne Formänderung fort. Die mit einer Welle fortschreitende Leistung ist

$$N = U J = U^2 \sqrt{\frac{C}{L}} = v (W_e + W_m), \quad (9a)$$

die an einer Stelle vorhandene Energie läuft also bei dem Wellenvorgang mit der Geschwindigkeit  $v$  der Leitung entlang.

Unter der Voraussetzung, daß die innere Selbstinduktivität gegenüber der äußeren vernachlässigbar ist [ihre Definitionen s. 33. Gl. (17), (18)], gilt für jede verlustlose Leitung

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_a C}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \approx \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c. \quad (10)$$

Beispiel: Für die Leitung aus parallelen Runddrähten vom Radius  $R$  und dem Achsabstand  $2h$  ist unter der  $L_i \ll L_a$  gleichkommenden Voraussetzung  $h \gg R$  gemäß 20. Gl. (17) und 33. Gl. (26):

$$C = \frac{\pi \varepsilon_0}{\ln \frac{2h}{R}}, \quad L_a = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{2h}{R}, \quad C L_a = \varepsilon_0 \mu_0.$$

Die Wellen  $f_1$  und  $f_2$  sind bestimmt, wenn die Anfangsverteilung gegeben ist. Es sei für  $t = 0$  bekannt  $U(x, 0) = U_a(x)$  und  $J(x, 0) = J_a(x)$ , dann ist gemäß Gl. (5) und (7)

$$\left. \begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{2} \{U_a(x) + J_a(x) \cdot Z\}, \\ f_2(x) &= \frac{1}{2} \{U_a(x) - J_a(x) \cdot Z\}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Es sei z. B. für  $t = 0$  auf der stromlosen Leitung eine bestimmte Spannungsverteilung  $U_a(x) = F(x)$  und  $J_a(x) = 0$  gegeben. Dann hat man für  $t \geq 0$  die Spannungs- und Stromwellen gemäß Gl. (5), (7), (11):

$$\left. \begin{aligned} U(x, t) &= \frac{1}{2} F(x - vt) + \frac{1}{2} F(x + vt), \\ \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot J(x, t) &= \frac{1}{2} F(x - vt) - \frac{1}{2} F(x + vt). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Der physikalisch unhaltbare Zustand, daß für  $t = 0$  nur elektrische Energie vorhanden ist, bricht demgemäß zusammen in der Weise, daß aus dem ursprünglichen Spannungszustand zwei gleich große Wellen entstehen, die nach beiden Seiten weglaufen; eine jede hat für  $t = 0$  den Wert  $\frac{1}{2} F(x)$ .

An den Enden der Leitung ist das Verhalten der Welle durch die dort gegebenen Grenzbedingungen festgelegt. Es sei erwähnt:

a) Ist die Leitung am Ende offen, so muß dort für jeden Zeitpunkt  $J = 0$  sein, es ist also dort nach Gl. (7)  $f_1 = f_2$  und daher die Spannung  $U = 2f_1$ ; im Augenblick der Reflexion erreicht die Spannung am Leitungsende den doppelten Wert der einfallenden Spannungswelle  $f_1$ .

b) Ist die Leitung am Ende kurzgeschlossen, so ist dort für jeden Zeitpunkt  $U = 0$  oder nach Gl. (5):  $f_1 = -f_2$ . Daher ist der Strom  $J = \frac{2f_1}{Z}$ , der Strom nimmt bei der Reflexion den doppelten Wert der ankommenden Stromwelle  $\frac{f_1}{Z}$  an.

c) Ist die Leitung am Ende durch einen Widerstand  $R_e$  geschlossen, so gilt dort für jeden Zeitpunkt  $U = f_1 + f_2 = J R_e$ ,  $f_1 - f_2 = J Z$ . Daraus ergibt sich

$$f_1 = f_2 \frac{R_e - Z}{R_e + Z} = f_2 \cdot p. \quad (13)$$

$p$  ist der Reflexionsfaktor. Strom und Spannung sind im Augenblick der Reflexion

$$J = \frac{2f_1}{R_e + Z}, \quad U = \frac{2f_1 R_e}{R_e + Z}.$$

Für  $R_e = Z$  ist  $f_2 = 0$ . Diesen Fall, in dem keine reflektierte Welle auftritt, nennt man „Anpassung“.  $R_e$  kann natürlich auch der Wellenwiderstand einer angeschlossenen Leitung sein.

Die *verzerrungsfreie Leitung* hat Verluste, jedoch soll gelten

$$\frac{R}{L} = \frac{A}{C} = \tau = \text{const}_{x,t}. \quad (14)$$

Durch Einsetzen in Gl. (3) bestätigt man leicht den Lösungsansatz

$$F(x, t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \{f_1(x - vt) + f_2(x + vt)\}, \quad (15)$$

daher ist die allgemeine Lösung

$$\left. \begin{aligned} U(x, t) &= e^{-\frac{t}{\tau}} \{f_1(x - vt) + f_2(x + vt)\}, \\ \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot J(x, t) &= e^{-\frac{t}{\tau}} \{f_1(x - vt) - f_2(x + vt)\}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Der Unterschied gegenüber Gl. (5) und (7) besteht darin, daß jede Welle zeitlich gedämpft ist. Dies bedeutet aber, da die  $\{\dots\}$  Wellen von unveränderter Form vorstellen, daß die Wellen lediglich örtlich eine exponentielle Maßstabverzerrung im Sinne einer Schwächung erleiden. Man kann Gl. (14) so auslegen, daß in jedem Element  $dx$  die anfänglich vorhandene, elektrische und magnetische Feldenergie während der Zeitspanne  $dt$  im gleichen Verhältnis durch Verluste geschwächt worden sind; waren sie anfangs gleich groß, so sind sie nach der Zeit  $dt$  gleich geblieben, eine Verzerrung ist daher nicht eingetreten. Für tatsächliche Leitungen stellt allerdings Gl. (14) eine nicht verwirklichte Idealisierung vor.

Wir untersuchen ferner *einfach-periodische Vorgänge*, indem wir in bekannter Weise mit „komplexen Amplituden“ rechnen gemäß  $F(x, t) = \text{Re} \{F_0(x) \cdot e^{i\omega t}\}$ . Damit nimmt die Telegraphengleichung Gl. (3) die Gestalt an

$$\frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2} = \gamma^2 F_0; \quad \gamma^2 = (R + i\omega L)(A + i\omega C). \quad (17)^1$$

Setzen wir also z. B. für die Spannung die vollständige Lösung von Gl. (17)

$$U_0 = A e^{\gamma x} + B e^{-\gamma x}, \quad (18)$$

<sup>1</sup> Die Differentialgleichung, welche elastische Luftwellen in einem langen zylindrischen Rohr beschreibt, ist genau ebenso gebaut. Die Erscheinungen entsprechen einander daher in dem Sinne, daß die elektrische Spannung sich verhält wie der Druck, und der elektrische Strom wie die Geschwindigkeit. In beiden Fällen sind forteilende und stehende Wellen möglich.

so ergibt sich aus Gl. (1) oder (2) der zugehörige Strom zu

$$Z \cdot J_0 = A e^{\gamma x} - B e^{-\gamma x}, \quad (19)$$

wobei hier der „Wellenwiderstand“ die komplexe Größe

$$Z = \sqrt{\frac{R + i \omega L}{A + i \omega C}} \quad (20)$$

ist. Da  $\gamma^2$  komplex ist, ist es auch

$$\gamma = \beta + i \alpha. \quad (21)$$

Die physikalische Bedeutung der Lösung erkennen wir aus

$$\operatorname{Re} \{ \operatorname{const} \cdot e^{\mp \gamma x} e^{i \omega t} \} = | \operatorname{const} | \cdot e^{\mp \beta x} \cos (\omega t \mp \alpha x). \quad (22)$$

Es handelt sich somit um fortschreitende, sinusförmige Rechts- und Linkswellen, wobei die Geschwindigkeit der Phasenbewegung

$$\frac{dx}{dt} = v = \mp \frac{\alpha}{\omega} \quad (23)$$

ist, und jede Welle einer exponentiellen örtlichen Schwächung unterliegt, die durch den Schwächungsexponenten  $\beta$  bestimmt wird<sup>1</sup>.  $\alpha$  heißt Phasenkonstante. Gl. (18) und (19) sagen aus, daß Strom und Spannung entlang einer Leitung im eingeschwungenen Zustand als Überlagerung von fortschreitenden Rechts- und Linkswellen aufgefaßt werden können.

Bei verschwindenden Verlusten ist

$$\gamma = \pm i \omega \sqrt{LC} = \pm i \frac{\omega}{v}; \quad Z = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (24)$$

$$\operatorname{Re} \{ \operatorname{const} \cdot e^{\mp \gamma x} e^{i \omega t} \} = | \operatorname{const} | \cdot \cos \omega \left( t \mp \frac{x}{v} \right). \quad (25)$$

Die ungedämpfte sinusförmige Welle möge an dem Leitungsende  $x=0$  an einem Kurzschluß reflektiert werden, dann ist  $U=0$  für  $x=0$  für jedes  $t$ , daher gemäß Gl. (18)

$$A = -B. \quad (26)$$

Setzen wir dies und Gl. (24) in Gl. (18) und (19) ein und nehmen nach Multiplikation mit  $e^{i \omega t}$  den reellen Teil, so ergibt eine einfache trigonometrische Umformung, wenn wir noch die Periodendauer  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  und die Wellenlänge  $\lambda = vT$  benutzen:

$$\left. \begin{aligned} U &= -2 |A| \cdot \sin \frac{2\pi t}{T} \cdot \sin \frac{2\pi x}{\lambda}, \\ \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot J &= 2 |A| \cdot \cos \frac{2\pi t}{T} \cdot \cos \frac{2\pi x}{\lambda}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Durch die vollkommene Reflexion der ungedämpften fortschreitenden Welle tritt also eine stehende Welle auf. Spannungsknoten, in denen  $W_e = 0$  ist, sind vorhanden an den Stellen  $x = 0 \dots \frac{\lambda}{2} \dots \frac{3\lambda}{2} \dots$ , Stromknoten, in denen  $W_m = 0$  ist, an den Stellen  $x = \frac{\lambda}{4} \dots \frac{3\lambda}{4} \dots \frac{5\lambda}{4} \dots$ .

Zur Erörterung des allgemeinen Falles nehmen wir  $R, A, L, C$  als Konstante an. Aus Gl. (17) und (21) ergibt sich

$$\frac{2\beta^2}{2\alpha^2} = \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(A^2 + \omega^2 C^2)} \mp (\omega^2 LC - RA). \quad (28)$$

Aus denselben Gleichungen hat man  $\operatorname{Im} \gamma^2 = \omega(LA + RC) = 2\beta\alpha$ , daher mit Gl. (23):

$$\beta = v \frac{LA + RC}{2}; \quad (29)$$

<sup>1</sup>  $\beta$  wird auch „Dämpfungsexponent“ genannt. Diese Bezeichnung darf aber nicht zu Verwechslungen mit dem Dämpfungsexponenten einer zeitlich abklingenden Schwingung [37. Gl. (3)] Anlaß geben.

$\beta$  und  $v$  sind einander proportional, daher dieselbe steigende Funktion der Frequenz. Ist ein periodischer Vorgang aus vielen Teilschwingungen zusammengesetzt, so haben die Teilwellen mit höherer Frequenz größere Schwächung („Amplitudenverzerrung“) und größere Geschwindigkeit („Phasenverzerrung“).  $\beta(\omega)$  und  $v(\omega)$  liegen innerhalb endlicher Grenzwerte:

für  $\omega \rightarrow 0$  wird

$$\left. \begin{aligned} \beta \rightarrow \beta_{\min} &= \sqrt{RA}, & \alpha &\rightarrow 0, & \gamma &\rightarrow \beta_{\min}, \\ v \rightarrow v_{\min} &= \frac{2\sqrt{RA}}{LA + RC} = \left( \frac{C}{2} \sqrt{\frac{R}{A}} + \frac{L}{2} \sqrt{\frac{A}{R}} \right)^{-1}, \end{aligned} \right\} \quad (30a)$$

für  $\omega \rightarrow \infty$  wird

$$\left. \begin{aligned} \beta \rightarrow \beta_{\max} &= \frac{LA + RC}{2\sqrt{LC}} = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{A}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}, \\ v \rightarrow v_{\max} &= \frac{1}{\sqrt{LC}}, & \beta &\ll \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (30b)$$

(vgl. Abb. 2). Wegen der Hautwirkung wird  $L_i \rightarrow 0$  für  $\omega \rightarrow \infty$ , daher wird  $v_{\max} = \frac{1}{\sqrt{L_a C}} \approx c$  gemäß Gl. (10). Aus dem gleichen Grund steigt  $R$  mit  $\omega$ , es stellt also  $\beta_{\max}$  nicht in Strenge eine konstante Größe vor. Das gleiche gilt für die untere Grenze, da erfahrungsgemäß die in  $A$  zum Ausdruck kommenden dielektrischen Verluste mit  $\omega$  ansteigen. Die Bereichsgrenzen fallen zusammen für

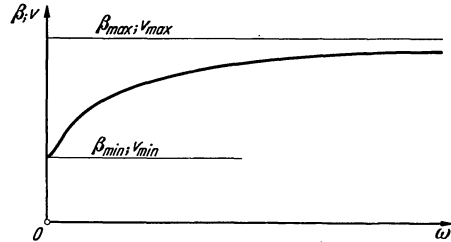


Abb. 46. 2. Schwächungsexponent und Phasengeschwindigkeit als Funktion der Frequenz bei konstantem  $R, A, L, C$ .

$$\frac{\beta_{\max}}{\beta_{\min}} = \frac{v_{\max}}{v_{\min}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{RC}{AL}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{AL}{RC}} = 1, \quad \text{also für } \sqrt{\frac{RC}{AL}} = 1 \quad (31)$$

oder

$$\frac{R}{L} = \frac{A}{C}; \quad (14)$$

dann ist die Leitung verzerrungsfrei, und es ist

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \beta = R \sqrt{\frac{C}{L}} = A \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{RA}, \quad v = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Zur übersichtlichen Darstellung führt man zwei Kenngrößen ein

$$e = \frac{R}{\omega L}; \quad d = \frac{A}{\omega C}. \quad (32)^1$$

Damit wird der Wellenwiderstand

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{\frac{1-ie}{1-id}}, \quad (33)$$

und Schwächungsmaß und Phasengeschwindigkeit nehmen die einfache Gestalt an

$$\beta = \frac{\beta_{\max}}{q}; \quad v = \frac{v_{\max}}{q}, \quad (34)$$

wobei  $q$  eine Funktion von  $e$  und  $d$  ist, die gemäß Gl. (28) und (23):

$$2q^2 = 1 - ed + \sqrt{(e^2 + 1)(d^2 + 1)} \quad (35)$$

ist.  $q$  hat den Sinn einer Korrekturgröße, denn es wächst mit  $e$  und  $d$  nur verhältnismäßig langsam über seinen Kleinstwert  $q=1$ , der für  $e=d$  erreicht ist. Man kann

<sup>1</sup> Praktisch ist meist  $d \ll 1$ .

daher  $\beta_{\max}$  und  $v_{\max}$  als Näherungen für  $\beta$  und  $v$  gebrauchen. Schreibt man also mit Gl. (30 b)

$$\beta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{A}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} = \beta_R + \beta_A, \quad (36)$$

so sieht man: ist  $R$  und  $A$  gegeben und ist  $\beta_R \neq \beta_A$ , so kann der Schwächungsexponent durch Verändern von  $L/C$  bis auf den Kleinstwert  $\beta_{\min} = \sqrt{RA}$  verringert werden, der mit Gl. (14) eintritt<sup>1</sup>.

Bei Paralleldrahtleitungen in Luft, bei denen nicht zu dünne Drähte in nicht zu engem Abstand voneinander stehen, ist  $e \ll 1$  und  $d \ll 1$ . Berücksichtigt man dies in Gl. (33) bis (35), so hat man in erster Näherung

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \alpha = \omega \sqrt{LC}, \quad \beta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{A}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (37)$$

Die Leitung ist verhältnismäßig schwach gedämpft und hat wenig Verzerrungen. Für Kabel, in denen die verhältnismäßig dünnen Drähte der Leitung einander sehr nahe benachbart sind, ist  $e \gg 1$ ,  $d \ll 1$ . Damit ergibt sich ebenso in erster Annäherung

$$Z = \sqrt{\frac{R}{\omega C}} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}, \quad \alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega C R}{2}}. \quad (38)$$

Gl. (37) entspricht der Ausbreitung gemäß der Wellengleichung, Gl. (38) gemäß der Wärmeleitungsgleichung, die Art und Weise des Ausbreitungsvorganges braucht daher hier nicht noch einmal erläutert zu werden.

#### 47. Dynamische Kapazität.

Aus dem besonders einfachen Beispiel des Kondensators zeigen wir den grundsätzlichen Unterschied gegenüber der quasistationären Betrachtungsweise. Dort (37.) war nämlich vorausgesetzt, daß die Kapazität auch bei zeitlich veränderlicher Ladung genau so wirke und zu berechnen sei, wie im elektrostatischen Falle. In Wirklichkeit ist aber nach der ersten Hauptgleichung (29.) auch mit dem im Feldraum des Kondensators schwankenden elektrischen Felde ein magnetisches Feld verknüpft. Es ist zu erwarten, daß dieses um so mehr bemerklich wird, je schneller die Zustandsänderungen vor sich gehen. Wir betrachten das axialsymmetrische Feld eines Kreisplattenkondensators, der Radius der Platten sei  $a$  und  $h$  ihre Entfernung voneinander;  $a \gg h$ . Im elektrostatischen Falle ist das elektrische Feld (nahezu) homogen und parallel zur Achse des Kondensators gerichtet. Im veränderlichen Zustand ist mit der axialen Verschiebungsströmung ein magnetisches Feld in der Weise verkettet, daß die magnetischen Feldlinien zur Achse des Kondensators conaxiale Kreise sind. Damit haben wir formal die Verhältnisse von 39. C, haben jedoch an Stelle der dort vorhandenen Leitungsströmung  $G(r, t)$  die Verschiebungsströmung  $\bar{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} E(r, t)$  einzusetzen. Aus der Integralform

$\oint \bar{\mathfrak{H}} d\mathfrak{r} = \int \bar{\varepsilon} \frac{\partial \bar{\mathfrak{E}}}{\partial t} d\mathfrak{f}$  folgt daher entsprechend 39. Abb. 7, Gl. (24), (25):

$$\frac{\partial H(r, t)}{\partial r} + \frac{1}{r} H(r, t) = \bar{\varepsilon} \frac{\partial E(r, t)}{\partial t}, \quad (1)$$

und nach dem Induktionsgesetz, wie in 39. Gl. (26):

$$\frac{\partial E(r, t)}{\partial r} = \bar{\mu} \frac{\partial H(r, t)}{\partial t}. \quad (2)$$

Wir beschränken uns auf zeitlich sinusförmige, mit der Frequenz  $\omega$  verlaufende Vorgänge und setzen demgemäß

$$H(r, t) = \text{Re} \{ H_0(r) \cdot e^{i\omega t} \}, \quad E(r, t) = \text{Re} \{ E_0(r) \cdot e^{i\omega t} \}. \quad (3)$$

Indem man Gl. (1) einmal nach  $r$ , das andere Mal nach  $t$  ableitet und beide Male aus Gl. (2) substituiert, indem man ferner Gl. (3) einsetzt und die Abkürzung benützt

$$k^2 \equiv \omega^2 \bar{\varepsilon} \bar{\mu}, \quad (4)$$

<sup>1</sup> Bei Freileitungen ist  $\beta_R > \beta_A$ , daher muß  $L$  vergrößert werden. Dies fand Heaviside.

erhält man mit  $x = kr$  die Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 H_0}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dH_0}{dx} + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) H_0 = 0, \tag{5}$$

$$\frac{d^2 E_0}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dE_0}{dx} + E_0 = 0; \tag{6}$$

sie werden entsprechend 39. Gl. (31), (32) durch Zylinderfunktionen integriert, die für Gl. (5) von der ersten, für Gl. (6) von der nullten Ordnung sind. Indem wir sogleich berücksichtigen, daß die Zylinderfunktionen zweiter Art aus dem gleichen Grunde, wie dort, für die vollständige Lösung nicht in Betracht kommen, erhalten wir mit zwei Integrationskonstanten  $A, B$ :

$$E_0(r) = A \cdot J_0(kr); \quad H_0(r) = B \cdot J_1(kr). \tag{7}$$

Als Zusammenhang zwischen  $A$  und  $B$  ergibt sich aus dem Induktionsgesetz, indem wir Gl. (7) mit  $e^{i\omega t}$  vervielfachen und in Gl. (2) einsetzen<sup>1</sup>:

$$B = +iA \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}.$$

Somit ist gemäß Gl. (3) der örtliche und zeitliche Verlauf der Feldstärken

$$E(r, t) = A \cdot J_0(kr) \cdot \cos \omega t, \tag{8}$$

$$H(r, t) = -A \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cdot J_1(kr) \cdot \sin \omega t. \tag{9}$$

Der Phasenwinkel ist  $-\frac{\pi}{2}$ , die Amplitude der elektrischen Feldstärke ist durch  $J_0(kr)$ , die der magnetischen durch  $J_1(kr)$  bestimmt; im Gegensatz zu 39. C sind dies Funktionen des reellen Argumentes

$$kr = r\omega \sqrt{\epsilon \mu} = \frac{r\omega}{c} \sqrt{\epsilon \mu} \tag{10}$$

mit der Lichtgeschwindigkeit  $c$  im leeren Raum [42. Gl. (13)]. Aus Abb. 1 ist daher die radiale Verteilung der Amplituden ohne weiteres abzulesen. In der Umgebung des Nullpunktes gilt: Die elektrische Feldstärke ist nicht konstant, vielmehr fällt ihre Amplitude von der Achse  $r = 0$  bis zum Plattenrande  $r = a$  um so stärker, je größer  $k$  ist, und die Amplitude der magnetischen Feldstärke steigt gegen den Plattenrand vom Werte Null in der Achse langsamer als linear an.

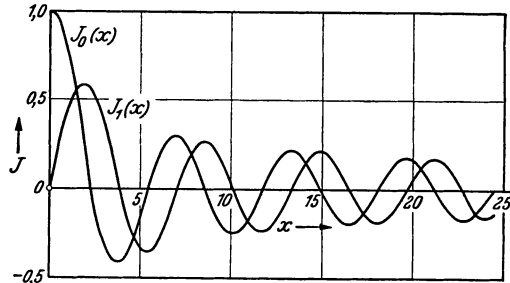


Abb. 47. 1. Zylinderfunktionen erster Art, nullter und erster Ordnung, für das Argument  $x = kr$ .

Wir bestimmen noch die Ladung aus  $Q = \oint \bar{\epsilon} \mathcal{E} d f$ , indem wir die Hülle unbegrenzt nahe um eine Platte legen, aus Gl. (8) zu<sup>2</sup>

$$\left. \begin{aligned} Q &= A \cdot \bar{\epsilon} \int_0^a J_0(kr) \cdot 2\pi r \cdot dr \cdot \cos \omega t \\ &= 2\pi A \bar{\epsilon} \cdot \cos \omega t \cdot \frac{a}{k} \cdot J_1(ka). \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

Damit bestätigt man leicht den von der ersten Hauptgleichung geforderten Zusammenhang zwischen Magnetfeld und Ladestrom

$$\frac{dQ}{dt} = H(a) \cdot 2\pi a. \tag{11a}$$

<sup>1</sup>  $\frac{d}{dx} J_0(x) = -J_1(x)$ .

<sup>2</sup>  $k \int x \cdot J_0(kx) \cdot dx = x \cdot J_1(kx) + const.$

Als Spannung definieren wir das Linienintegral der Feldstärke für  $r = a$ , d. h. vom einen Plattenrande zum anderen:

$$U = E(a, t) \cdot l = A l \cdot J_0(ka) \cdot \cos \omega t. \quad (12)$$

Wir wollen das Verhältnis der so definierten  $Q$  und  $U$  als „dynamische Kapazität“  $C_d$  bezeichnen; die statische Kapazität ist  $C_s = \varepsilon \frac{\pi a^2}{l}$ , und daher ist

$$C_d = \frac{Q}{U} = C_s \cdot \frac{2}{ka} \cdot \frac{J_1(ka)}{J_0(ka)}. \quad (13)$$

Aus den bekannten Reihenentwicklungen der Besselschen Funktionen [vgl. 39. zu Gl. (39)] findet man die für  $\frac{ka}{2} < 1$  brauchbare Entwicklung:

$$C_d = C_s \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{ka}{2} \right)^2 + \frac{1}{12} \left( \frac{ka}{2} \right)^4 + \dots \right\}. \quad (14)$$

Unter technisch normalen Verhältnissen bleibt die Abweichung des Klammerwertes von 1 sehr gering.

Die elektrische Feldstärke, und daher die elektrische Spannung zwischen den Platten am Plattenrande  $r = a$  wird Null, wenn  $J_0(ka) = 0$  ist. Dies trifft nach

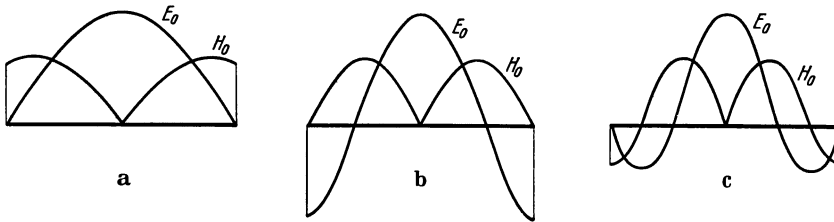


Abb. 47. 2. Radiale Verteilung der Feldstärken bei den ersten drei Eigenschwingungen des Kreisplattenkondensators.

Abb. 1 für eine fortgesetzte Folge von Argumentwerten zu<sup>1</sup>. In allen diesen Fällen ist nach Definition  $C_d = \infty$ , der Ladestrom hat eine endliche Größe. Die Wurzeln von  $J_1(ka) = 0$  liegen jeweils zwischen diesen Extremwerten von  $C_d$ . Für diese fortgesetzte Folge von Argumentwerten<sup>2</sup> ist aber die magnetische Feldstärke am Plattenrande Null, und daher nach der ersten Hauptgleichung auch der gesamte Verschiebungsstrom, folglich nach Gl. (11a) der gesamte Ladestrom, dessen Amplitude  $\omega Q$  ist. Unter diesen Umständen ist also jeweils  $C_d = 0$ , und die elektrische Spannung hat dabei einen endlichen Betrag. In allen diesen Fällen führen das elektrische und das magnetische Feld im Feldraum des Kondensators Schwingungen aus, die ohne Energiezufuhr von außen bestehen; elektrische und magnetische Feldenergie haben dabei den gleichen zeitlichen Mittelwert. Es treten also elektromagnetische Eigenschwingungen des Kondensators auf (Abb. 2).

#### 48. Allgemeine Lösung. Ausstrahlung eines schwingenden Dipols.

##### a) Integration der elektromagnetischen Grundgleichungen.

Wir erinnern daran, daß für gewisse Felder mit besonderen Eigenschaften die Differentialgleichungen, die diese Besonderheiten zum Ausdruck bringen (so besagt die Differentialgleichung  $\text{rot } \mathcal{E} = 0$  Wirbelfreiheit,  $\text{div } \mathcal{B} = 0$  Quellenfreiheit,) mit Hilfe sogenannter „Potentialfunktionen“ (skalarer oder vektorieller Natur) integriert werden konnten. Die Potentiale beweisen somit das Bestehen von Lösungen der Feldgleichungen in diesen besonderen Fällen, und erbringen als solche eine Vereinfachung der rechnerischen Darstellung. In dem gleichen Sinne fragen wir nach einer allgemeinen Lösung der Grundgleichungen des elektromagnetischen Feldes.

<sup>1</sup> Die ersten Wurzeln sind: 2,40 . . 5,52 . . 8,65 . .

<sup>2</sup> Die ersten Wurzeln sind: 0 . . 3,83 . . 7,02 . . 10,17 . .



Für einen ruhenden, gleichförmigen (homogenen isotropen) Stoff, dessen kennzeichnende Größen  $\rho$ ,  $\varepsilon$ ,  $\mu$  von der Zeit und dem Orte unabhängige Konstante sind, schreiben wir die Grundgleichungen im allgemeinen Falle in der Form

$$\bar{\mu} \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{\bar{\mu}}{\rho} \mathfrak{C} + \bar{\mu} \bar{\varepsilon} \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial t}; \quad (1) \quad \operatorname{div} \bar{\mu} \mathfrak{H} = 0; \quad (2)$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{C} = -\bar{\mu} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}; \quad (3) \quad \operatorname{div} \bar{\varepsilon} \mathfrak{C} = 0. \quad (4)$$

Die Lösung der Differentialgleichung (2) ist mit  $\mathfrak{B} = \bar{\mu} \mathfrak{H}$  aus 34. bekannt:

$$\mathfrak{B} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}; \quad (5)^1$$

damit wird Gl. (3)

$$\operatorname{rot} \left\{ \mathfrak{C} + \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} \right\} = 0, \quad (6)$$

was erfüllt ist, wenn man den wirbelfreien Vektor als Gradient einer skalaren Funktion  $\varphi$  darstellt<sup>2</sup>. Also wird

$$\mathfrak{C} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}. \quad (7)$$

Den Potentialen  $\varphi$  und  $\mathfrak{A}$ , mit deren Hilfe magnetisches und elektrisches Feld in Gl. (5) und (7) ausgedrückt sind, haftet insofern eine Unbestimmtheit an, als sich an  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{C}$  nicht das geringste ändert, falls wir zu  $\mathfrak{A}$  einen willkürlichen Vektor  $\operatorname{grad} \chi$ , und zu  $\varphi$  einen konstanten Skalar, hier  $-\frac{\partial \chi}{\partial t}$ , hinzufügen, d. h., die Funktion  $\chi$  ist mit Hilfe der Feldgleichungen nicht zu ermitteln. Das Vorhandensein dieser Unbestimmtheit der Potentiale stellt es uns frei,  $\varphi$  und  $\mathfrak{A}$  eine willkürliche Bedingung hinsichtlich ihres Zusammenhanges aufzuerlegen. Wir tun dies in der folgenden Gleichung. Setzen wir nämlich Gl. (5) und (7) in (1) ein, so nimmt Gl. (1) mit der Relaxationszeit  $\beta = \bar{\varepsilon} \rho$  und mit der Geschwindigkeit  $v = \frac{1}{\sqrt{\bar{\varepsilon} \bar{\mu}}}$  die Form an<sup>3</sup>:

$$v^2 \{ \Delta \mathfrak{A} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{A} \} = \frac{1}{\beta} \left\{ \operatorname{grad} \varphi + \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} \right\} + \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2}. \quad (8)$$

Wir unterwerfen nun  $\mathfrak{A}$  und  $\varphi$  der erlaubten, willkürlichen Bedingung

$$v^2 \cdot \operatorname{div} \mathfrak{A} + \frac{1}{\beta} \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (9)$$

mit anderen Worten: Wir verlangen, daß die Gradienten-Glieder in Gl. (8) für sich gleich Null werden. Es bleibt dann von Gl. (8) nur übrig

$$v^2 \cdot \Delta \mathfrak{A} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2}. \quad (10)$$

Wir schreiben die letzte verfügbare Grundgleichung (4) mit Gl. (7) als

$$\Delta \varphi + \operatorname{div} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} = 0, \quad (11)$$

und indem wir diese Beziehung in der nach  $t$  abgeleiteten Gl. (9) berücksichtigen, erhalten wir

$$v^2 \cdot \Delta \varphi = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (12)$$

Alle Potentiale  $\mathfrak{A}$  und  $\varphi$ , welche den Gl. (10) und (12) gehorchen, und im Zusammenhang Gl. (11) stehen, beschreiben einen möglichen elektromagnetischen Vorgang. Es ist indessen nicht nötig, jedesmal solche Paare von Funktionen aufzusuchen. Wir können vielmehr, wie man durch Einsetzen leicht erkennt, unsere willkürlich gesetzte Beziehung Gl. (9) identisch erfüllen durch

$$\varphi = -\operatorname{div} \mathfrak{B}; \quad (13) \quad \mathfrak{A} = \frac{1}{v^2} \left\{ \frac{1}{\beta} \mathfrak{B} + \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} \right\}. \quad (14)$$

<sup>1</sup>  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathfrak{A} \equiv 0$ .    <sup>2</sup>  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi \equiv 0$ .    <sup>3</sup>  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{A} - \Delta \mathfrak{A}$ .

Damit sind die Potentiale einem gemeinsamen Stammvektor untergeordnet. Dieser selbst muß der Gleichung genügen

$$v^2 \cdot \Delta \mathfrak{Z} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2}, \quad (15)$$

wie man erkennt, wenn man Gl. (13) und (14) in (10), (11), (12) oder in (8) einführt. Aus  $\mathfrak{Z}$  errechnet man nach Gl. (13), (14), (5), (7) die Felder

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{v^2} \cdot \text{rot} \left\{ \frac{1}{\beta} \mathfrak{Z} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} \right\}; \quad (16)$$

$$\mathfrak{E} = \text{grad div } \mathfrak{Z} - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{\beta} \mathfrak{Z} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} \right\}, \quad (17)$$

oder auch, mit Rücksicht auf Gl. (15):

$$\mathfrak{E} = \text{rot rot } \mathfrak{Z}, \quad (18)$$

und mit bekannten Beziehungen [43. Gl. (4), (5c)]:

$$\mathfrak{H} = \text{rot} \left\{ \frac{1}{\epsilon} \mathfrak{Z} + \bar{\epsilon} \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} \right\}, \quad (19)$$

$$\Gamma \cdot \mathfrak{H} = \frac{1}{v} \text{rot} \left\{ \frac{1}{\beta} \mathfrak{Z} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} \right\}. \quad (20)$$

Es genügt somit für die Darstellung eines möglichen elektromagnetischen Vorganges die Kenntnis einer einzigen, der Gl. (15) unterstehenden vektoriellen Funktion  $\mathfrak{Z}$ <sup>1</sup>. Wenn  $\mathfrak{Z}$  dieser Gleichung genügt, tun dies auch alle Feldgrößen und Potentiale. Für die Feldvektoren wurde die Differentialgleichung (15) schon in 42. Gl. (6), (7) gefunden.

Für einen vollkommenen Nichtleiter wird mit  $\beta = \infty$  aus Gl. (15) die Wellengleichung

$$v^2 \cdot \Delta \mathfrak{Z} = \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2}, \quad (21)$$

und aus Gl. (20)

$$\Gamma \cdot \mathfrak{H} = \frac{1}{v} \cdot \text{rot} \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}. \quad (22)$$

#### b) Ausstrahlung eines schwingenden Dipoles.

Für einen gleichförmigen, nichtleitenden Raum ist eine einfachste Lösung von Gl. (21) in rechtwinkligen Komponenten  $\mathfrak{Z} = iZ_x + jZ_y + kZ_z$ :

$$Z_x = 0, \quad Z_y = 0, \quad Z_z = \Pi; \quad \Pi = \frac{1}{r} \cdot f \left( t - \frac{r}{v} \right). \quad (23)$$

$\Pi$  erfüllt überall die Gl. (21) mit Ausnahme des Unstetigkeitspunktes  $r = 0$ ; von der Gültigkeit ist somit nur ein kleines Raumgebiet um den Ursprungspunkt ausgeschlossen. Nach 43. erkennen wir in der Funktion  $f \left( t - \frac{r}{v} \right)$  eine in Richtung des wachsenden  $r$  mit der Geschwindigkeit  $v$  bei unveränderter Form forteilende Welle willkürlicher Gestalt. Wir untersuchen die Struktur des Feldes und schließen aus ihr auch auf den Erregungsvorgang. Nach Gl. (18) und (22) ergeben sich die Komponenten des elektrischen und des magnetischen Feldes zu

$$E_x = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial z}; \quad E_y = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial z}; \quad E_z = - \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} \right); \quad (24)$$

$$\Gamma H_x = \frac{1}{v} \cdot \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial t}; \quad \Gamma H_y = - \frac{1}{v} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial t}, \quad H_z = 0. \quad (25)$$

Man sieht hieraus leicht ( $Z_x = 0$ ,  $Z_y = 0$ ,  $H_z = 0$ ), daß das Feld die  $z$ -Achse zur Symmetrieachse hat. Wir schreiben es daher auch in räumlichen Polar-

<sup>1</sup> Im P. M. S.: Benennung  $Z = \text{U L}$ , Einheit 1 Volt · cm.

koordinaten  $r$  (Aufpunktsabstand),  $\vartheta$  (Polarwinkel),  $\alpha$  (Längenwinkel):

$$Z_r = \Pi \cos \vartheta, \quad Z_\vartheta = -\Pi \sin \vartheta, \quad Z_\alpha = 0; \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned} E_r &= -\frac{2 \cos \vartheta}{r} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial r} = 2 \cos \vartheta \left\{ \frac{f}{r^3} + \frac{f'}{v r^2} \right\}, \\ E_\vartheta &= \frac{\sin \vartheta}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Pi}{\partial r} \right) = \sin \vartheta \left\{ \frac{f}{r^3} + \frac{f'}{v r^2} + \frac{f''}{v^2 r} \right\}, \\ E_\alpha &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$\left. \begin{aligned} H_r &= 0, \\ H_\vartheta &= 0, \\ \Gamma H_\alpha &= -\frac{\sin \vartheta}{v} \cdot \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r \partial t} = \sin \vartheta \left\{ \frac{f'}{v r^2} + \frac{f''}{v^2 r} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Man sieht hieraus: Das magnetische Feld besteht lediglich aus einer Komponente in Richtung des Längenwinkels  $\alpha$ . Die magnetischen Feldlinien sind darum die Parallelkreise der Wellenkugel  $r = \text{const}$  (die Durchschnitte der Wellenkugel mit den zur  $xy$ -Ebene parallelen Ebenen). Das elektrische Feld besitzt keine Komponente in Richtung des Längenwinkels  $\alpha$ , die elektrischen Feldlinien liegen daher in den Meridianebenen. Die Feldkomponenten stellen sich dar als Summenausdrücke, deren einzelne Posten in verschieden starker Weise mit wachsendem  $r$  abnehmen. Es wird daher darauf ankommen, unter welchen Bedingungen einzelne Summanden überwiegen können.

Wir untersuchen als erstes das Feld in der Nähe des Ursprungspunktes  $r = 0$ , um auf den Erreger schließen zu können. Dazu entwickeln wir

$$f\left(t - \frac{r}{v}\right) = f(t) - \frac{r}{v} f'(t) + \dots \quad (29)$$

Wir bezeichnen als „Nahbereich“ das durch die Bedingung

$$r \ll \frac{v \cdot f(t)}{f'(t)} \quad (30)$$

gekennzeichnete Gebiet. In ihm ist somit

$$\Pi = \frac{1}{r} f(t), \quad (31)$$

und die Komponenten des elektromagnetischen Feldes Gl. (24), (25) nehmen die Gestalt an

$$E_x = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \frac{1}{r} \cdot f(t); \quad E_y = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \frac{1}{r} \cdot f(t); \quad E_z = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{r} \cdot f(t); \quad (32)$$

$$\Gamma H_x = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} \cdot f'(t); \quad \Gamma H_y = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \cdot f'(t); \quad H_z = 0, \quad (33)$$

oder mit Gl. (27), (28)

$$E_r = \frac{2 \cos \vartheta}{r^3} \cdot f(t); \quad E_\vartheta = \frac{\sin \vartheta}{r^3} \cdot f(t); \quad E_\alpha = 0; \quad (34)$$

$$H_r = 0, \quad H_\vartheta = 0, \quad \Gamma H_\alpha = \frac{\sin \vartheta}{v r^2} f'(t). \quad (35)$$

Man sieht leicht aus Gl. (32), daß  $\mathcal{E}$  sich als Gradient eines Potentials ausdrücken läßt:

$$\mathcal{E} = -\text{grad } \varphi; \quad \varphi = -\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} \cdot f(t) = \frac{z}{r^3} \cdot f(t). \quad (36)^1$$

<sup>1</sup>  $\text{grad } \varphi = i \frac{\partial \varphi}{\partial x} + j \frac{\partial \varphi}{\partial y} + k \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ .

Dies ist das Potential eines Dipoles zeitlich veränderlicher elektrischer Ladung, der im Ursprungspunkt in der  $z$ -Achse liegt und dessen Moment proportional  $f(t)$  ist. Der Dipol der Abb. 1 hat das Potential  $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left( \frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-} \right)$  und das Moment  $q \cdot l$ ; demnach haben wir zu setzen

$$f(t) = \frac{l \cdot q(t)}{4\pi\epsilon}. \quad (37)$$

Im Nahbereich ändert sich somit das elektrische Feld mit der Zeit in allen Punkten verhältnismäßig, nicht die Gestalt des Feldes, nur seine Intensität (sein Energieinhalt) ändert sich zeitlich, und das Feld selbst ist durch das Coulombsche Gesetz gegeben.  $J = q'(t)$  ist demnach ein ungeschlossener Strom, der in dem Leiterstück der Länge  $l$  fließt. Damit liest man aus Gl. (35) ab

$$H_\alpha = \frac{Jl}{4\pi} \cdot \frac{\sin \vartheta}{r^2}, \quad (38)$$

und dies ist nach 34. Gl. (13) das magnetische Feld eines „linearen Stromelementes“ von der Länge  $l$  und der Stromstärke  $J$ . Daher ist das magnetische Feld durch ein vektorielles Potential zu geben gemäß

$$\Gamma \cdot \mathfrak{H} = \text{rot } \mathfrak{A}, \quad (39)$$

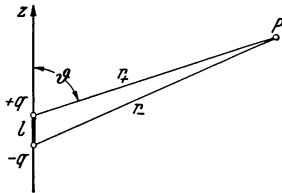


Abb. 48. 1. Elektrischer Dipol in der  $z$ -Achse.

wobei

$$A_x = 0, \quad A_y = 0, \quad A_z = \frac{f'(t)}{v r}, \quad (40)$$

wie man aus Gl. (33) erkennen kann. Im Nahbereich ist also das magnetische Feld quasistationär und durch die Biot-Savartsche Regel bestimmt. Ein im Ursprungspunkt auf der  $z$ -Achse befindlicher zeitlich veränderlicher elektrischer Dipol erzeugt also in seiner unmittelbaren Umgebung ein durch sein elektrisches Moment gegebenes elektrisches, und durch den die Ladungsänderung ausmachenden Strom ein magnetisches quasistationäres Feld.

Bei den von Hertz unternommenen Versuchen zum Nachweis der elektromagnetischen Wellen war ein schwingender Dipol, wie hier beschrieben, bekanntlich dadurch hergestellt, daß zwei Leiterstücke, die in gemeinsamer Achse liegend einander in kleinem Abstand gegenüberstehen, so stark aufgeladen werden, daß der kleine Zwischenraum von selbst durch einen Funken überbrückt wird. Da die Funkenbahn verhältnismäßig gut leitet, setzt der Umladungsstrom ein und Ladung und Strom ändern sich weiterhin nahezu periodisch (sie verlaufen als gedämpfte Schwingungen). Mit den heutigen Hilfsmitteln kann leicht ein ungedämpft periodisch schwingender Dipol hergestellt werden.

In nicht mehr unmittelbarer Nachbarschaft des schwingenden Dipoles (Abstand  $r$  des Feldpunktes von der Größenordnung  $\frac{v \cdot f(t)}{f'(t)}$ ) geben an Stelle der unübersichtlichen Rechnung die Abb. 2a–d eine Anschauung des Vorganges im elektromagnetischen Felde. Dabei ist angenommen, daß der Dipol einfache sinusförmige Schwingungen mit der Frequenz  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  ausführt. Wir können uns auf das elektrische Feld beschränken, da die magnetischen Feldlinien einfach die Parallelkreise der Wellenkugel sind. In den Abb. 2a–d ist durch eine Kugel um den Dipol der Ursprungspunkt von der Betrachtung ausgeschlossen. Abb. 2a gilt für einen Zeitpunkt  $t = 0$ , in dem der Strom im Dipol seinen Höchstwert, und daher die Ladungen den Wert Null haben. Wir erkennen dies daran, daß keine elektrischen Feldlinien auf dem Erreger anfangen oder endigen. Solche beginnen nun, mit wachsender Ladung, aus dem Erreger hervorzuschießen; in Abb. 2b, die für den Zeitpunkt  $t = \frac{T}{8}$  gilt, erfüllen die elektrischen Feldlinien schon den Raum  $\tau_1$  innerhalb der eingezeichneten Kugel und verlaufen dort übrigens nahezu ebenso, wie sie sich bei zeitlich unveränderlichen Ladungen verteilen. Abb. 2c gilt für den Zeitpunkt  $t = \frac{T}{4}$ , in welchem der Strom Null ist, die Ladungen des Dipols daher ihre

größte Stärke haben. Das elektrische Feld, das somit zu dieser Zeit seine größte Stärke hat, erfüllt die Wellenkugel  $\tau_2 > \tau_1$ . Mit weiter wachsender Zeit treten keine weiteren elektrischen Feldlinien aus dem Erreger hervor, sondern es beginnen die vorhandenen sich wieder in den Erreger zurückzuziehen. Hierbei tritt eine aus Abb. 2d ( $t = \frac{3T}{8}$ ) zu sehende eigentümliche Erscheinung ein: die am weitesten vom Ursprungspunkt entfernten Feldlinien erhalten bei der Zurückbildung des Feldes eine seitliche Einbiegung, und „indem diese Einbiegung sich mehr und mehr gegen

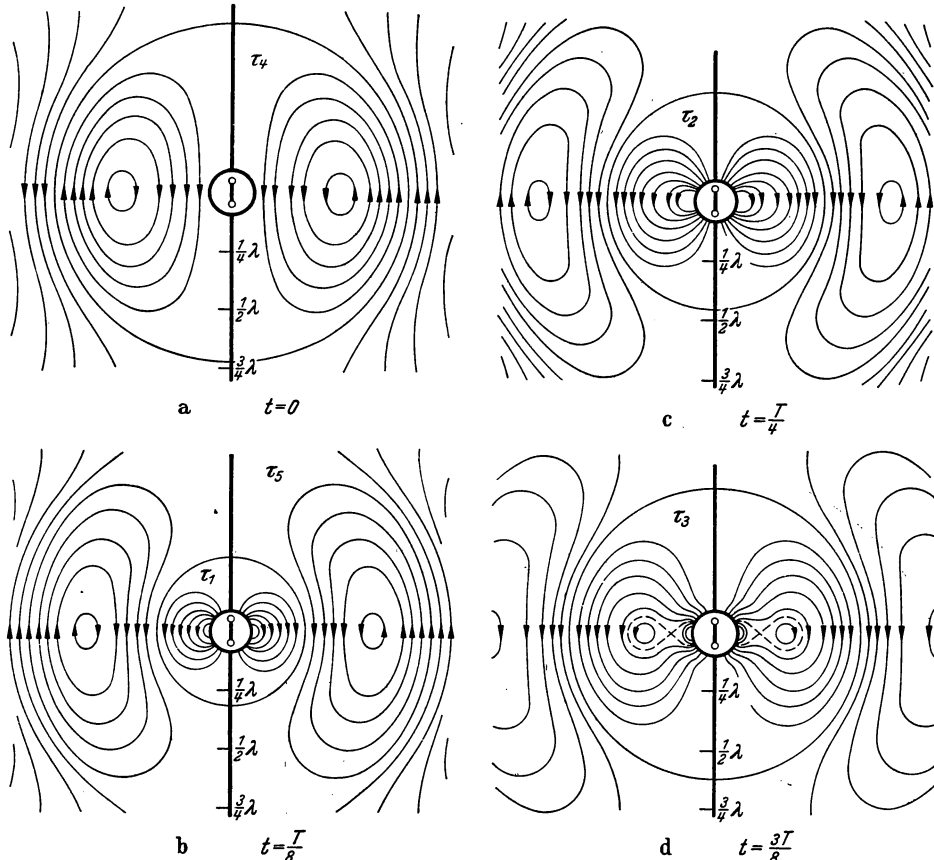


Abb. 48. 2. (Nach H. Hertz.) Ablösung des elektromagnetischen Feldes vom erregenden Dipol (Zwischenbereich).

die Achse des Dipoles zusammenzieht, schnürt sich von jeder der äußeren Feldlinien eine in sich geschlossene Feldlinie ab, welche selbständig in dem Raum fortschreitet, während der Rest der Feldlinien in den Erreger zurücksinkt. Die Zahl der zurückkehrenden Feldlinien ist also ebenso groß wie die Zahl der ausgegangenen, ihre Energie aber ist notwendig um die Energie der abgeschnürten Teile vermindert.

Dieser Energieverlust entspricht der Strahlung in den Raum“. Zur Zeit  $t = \frac{T}{2}$  gilt Abb. 2a mit umgekehrter Pfeilrichtung. Hier erfüllt das abgeschnürte elektrische Feld die Kugel  $\tau_4$ , vom Dipol ausgehende Feldlinien sind nicht vorhanden. Im weiteren Zeitablauf aber quellen neue Feldlinien aus dem Erreger hervor, während gleichzeitig die abgeschnürten Feldlinien nach außen eilen und in Abb. 2b den Raum  $\tau_5$  erfüllen. Wie dieses Feld nach außen wegläuft, zeigen Abb. 2c und d, das elektromagnetische Feld geht dabei nach außen mehr und mehr in eine reine Transversalwelle über. Dies zeigt das Folgende:

Der „Wellenbereich“ ist durch die zu Gl. (30) entgegengesetzte Bedingung

$$r \gg \frac{v \cdot f(t)}{f'(t)} \quad (39)$$

gekennzeichnet. Beachtet man diese Beziehung bei der Ausführung der in Gl. (24) und (25) vorgeschriebenen Rechnungen, so erhält man

$$E_x = \frac{xz}{v^2 r^3} f''; \quad E_y = \frac{yz}{v^2 r^3} f''; \quad E_z = -\frac{x^2 + y^2}{v^2 r^3} f''; \quad (40)$$

$$\Gamma H_x = -\frac{y}{v^2 r^2} f''; \quad \Gamma H_y = \frac{x}{v^2 r^2} f''; \quad H_z = 0 \quad (41)$$

mit  $f' \equiv f'' \left( t - \frac{r}{v} \right)$ . Die Gleichungen stellen eine mit der Geschwindigkeit  $v$  in der Richtung  $r$  des Halbmessers der Wellenkugel nach außen fortschreitende Welle dar. Um ihre Struktur zu erkennen, bilden wir die skalaren Produkte  $\mathfrak{E} \mathfrak{H}$ ,  $r \mathfrak{E}$ ,  $r \mathfrak{H}$  und finden

$$\mathfrak{E} \mathfrak{H} = E_x H_x + E_y H_y + E_z H_z = 0, \quad (42a)$$

daher stehen  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  aufeinander senkrecht. Ferner ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} r \mathfrak{E} &= x E_x + y E_y + z E_z = 0, \\ r \mathfrak{H} &= x H_x + y H_y + z H_z = 0, \end{aligned} \right\} \quad (42b)$$

also sind außerdem  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  senkrecht gerichtet zur Fortpflanzungsrichtung  $r$ , die Welle ist daher eine reine Transversalwelle. Die Richtungen von  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{H}$ ,  $r$  stehen rechtswendig rechtwinklig aufeinander. Dieses Ergebnis hätten wir auch unmittelbar aus Gl. (27) und (28) ersehen können, denn aus diesen liest man mit Berücksichtigung von Gl. (39) leicht ab:

$$\left. \begin{aligned} E_\vartheta &= \Gamma H_\alpha = \frac{\sin \vartheta}{v^2 r} \cdot f'' \left( t - \frac{r}{v} \right); \\ E_r &= 0, \quad H_r = 0; \\ E_\alpha &= 0, \quad H_\vartheta = 0. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

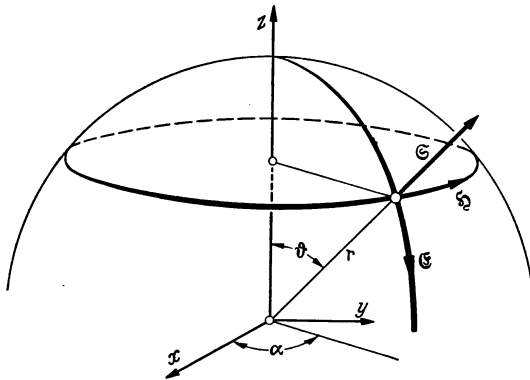


Abb. 48. 3. Elektromagnetisches Feld des strahlenden Dipols im Wellenbereich.

Die magnetischen Feldlinien sind die Parallelkreise, die elektrischen Feldlinien die dazu senkrechten durch die  $z$ -Achse gehenden größten Kreise der Wellenkugel (Abb. 3). Gl. (43) zeigt:  $E_\vartheta$  und  $\Gamma H_\alpha$  haben zur gleichen Zeit und am gleichen Ort denselben Wert, sind also bei einfach-periodischen Vorgängen stets in Phase. Auf

der  $z$ -Achse sind die Feldstärken Null, in der  $xy$ -Ebene haben sie ihren größten Wert. Das elektromagnetische Feld ist im Wellenbereich völlig verschieden von dem im Nahbereich. Dies zeigt sich auch deutlich in den Energieverhältnissen. Handelt es sich z. B. um einen zeitlich einfach-periodischen Vorgang, so ist im Nahbereich das elektromagnetische Feld quasistationär; die Energie pendelt periodisch mit dem Quadrat der Feldstärken; im Wellenbereich dagegen findet eine in der Fortschreitungsrichtung der Welle gerichtete Energiebewegung statt, bei der nicht mehr die Richtung, sondern lediglich die Stärke der Energieströmung periodisch wechselt. Dies ist aber kennzeichnend für die Transversalität der Wellen. Nach Gl. (43) hat die Energiestrahlungsdichte<sup>1</sup>

$$\mathfrak{S} = [\mathfrak{E} \mathfrak{H}]$$

<sup>1</sup> In der Technik der drahtlosen Nachrichtenübertragung werden heute Zeichen empfangen noch mit einer mittleren Leistungsdichte der Größenordnung  $10^{-16} \frac{\text{Watt}}{\text{cm}^2}$ ; die Empfindlichkeit des menschlichen Auges entspricht der Größenordnung  $10^{-14} \frac{\text{Watt}}{\text{cm}^2}$ ; zu beachten ist, daß die

die Richtung  $r$  der Ausbreitung und den Betrag

$$S = \frac{1}{\Gamma} \left\{ \frac{\sin \vartheta}{v^2 r} \cdot f'' \left( t - \frac{r}{v} \right) \right\}^2. \quad (44)$$

Durch Integration über die ganze Wellenkugelfläche finden wir die in der Zeit  $dt$  in der Welle nach außen geströmte Energie, indem wir als Flächenelement, auf dem  $S$  konstant ist, eine verschwindend schmale Zone zwischen zwei benachbarten Parallelkreisen  $df = 2\pi r \sin \vartheta \cdot r d\vartheta$  wählen:

$$\left. \begin{aligned} dW &= \frac{2\pi}{\Gamma} \left( \frac{f''}{v^2} \right)^2 dt \int_0^\pi \sin^3 \vartheta \cdot d\vartheta \\ &= \frac{8\pi}{3\Gamma} \left( \frac{f''}{v^2} \right)^2 \cdot dt. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Nehmen wir einen einfach-periodischen Vorgang

$$f(t) = P \cdot \sin \omega t, \quad (46)$$

also nach Gl. (37) einen harmonisch schwingenden Dipol an:

$$q(t) = Q \cdot \sin \omega t; \quad P = \frac{lQ}{4\pi\epsilon}, \quad (46a)$$

so ist die während einer Periodendauer  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  ausgestrahlte Energie

$$\left. \begin{aligned} W &= \frac{P^2}{\Gamma} \left( \frac{\omega}{v} \right)^4 \cdot \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2 \omega \left( t - \frac{r}{v} \right) dt \cdot \int_0^\pi 2\pi \sin^3 \vartheta \cdot d\vartheta \\ &= \frac{8\pi^2 \bar{\epsilon}}{3} P^2 \left( \frac{\omega}{v} \right)^3 = \frac{2\pi}{3} \frac{Q^2 l^2}{4\pi\epsilon} \left( \frac{\omega}{v} \right)^3, \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

also unabhängig von Zeit und Ort, und umgekehrt proportional zur dritten Potenz der Länge

$$\lambda = 2\pi \frac{v}{\omega}, \quad (47a)$$

welche die räumliche Periode der Schwingungsphasen bildet, der Wellenlänge.

Der zeitliche Mittelwert der mit der Wellenkugel bewegten Leistung  $\bar{N} = \left( \frac{dW}{dt} \right)$  wird entsprechend Gl. (47) gefunden zu

$$\bar{N} = \frac{4\pi}{3\Gamma} P^2 \left( \frac{\omega}{v} \right)^4 = \frac{\omega^4}{3v^3} \cdot \frac{Q^2 l^2}{4\pi\epsilon}; \quad (48)$$

setzen wir schließlich gemäß Gl. (37)

$$f'(t) = \frac{lJ}{4\pi\epsilon} \cos \omega t, \quad (49)$$

bezeichnen also mit  $J = \omega Q$  die Amplitude des in dem kurzen Dipol periodisch sich ändernden Stromes, so erhält man

$$\bar{N} = \frac{\Gamma}{12\pi} \left( \frac{\omega}{v} \right)^2 J^2 l^2 = \frac{\pi}{3} \Gamma \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2 J^2. \quad (50)$$

Setzt man diese vom schwingenden Dipol in das elektromagnetische Feld abgegebene Leistung proportional dem Quadrat des Effektivwertes des Stromes gemäß

$\bar{N} = R_s \cdot J_{\text{eff}}^2 = R_s \cdot \frac{J^2}{2}$ , so wird der „Strahlungswiderstand“

$$R_s = \frac{2\pi}{3} \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2 \Gamma. \quad (51)^1$$

Feldstärken sich wie die Wurzeln aus diesen Zahlen verhalten, und daß das menschliche Auge um Größenordnungen kleiner ist, als die kleinsten Empfangsvorrichtungen der Technik. — In unmittelbarer Nähe der Drähte von Energieübertragungsleitungen kommen mittlere Leistungsdichten der Größenordnung  $10^5 \frac{\text{Watt}}{\text{cm}^2}$  vor.

<sup>1</sup>  $\frac{2\pi}{3} \Gamma_0 = 790 \text{ Ohm.}$

Bringt man einerseits der  $xy$ -Ebene (Abb. 3) einen leitenden Halbraum an, so ändert sich an dem elektromagnetischen Feld in dem nichtleitenden Halbraum nicht das Geringste. Diese Anordnung entspricht einer senkrecht auf gut leitendem Erdboden stehenden Eindraht-Sendeantenne, deren Höhe  $h$  klein ist gegenüber der Wellenlänge  $\lambda$ . Da  $h = \frac{l}{2}$  ist, und von der Wellenhalbkugel die Hälfte der Leistung  $\bar{N}$  [Gl. (50)] abgestrahlt wird, ist der Strahlungswirkwiderstand einer Antenne unter diesen Bedingungen

$$R_s = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 \Gamma, \quad (51a)$$

ein Betrag, der meist keineswegs etwa zu vernachlässigen ist gegenüber dem Wärmeverlustwiderstand der Antenne.

Mit Gl. (49) kann man auch elektrische und magnetische Feldstärke im Wellenbereich [Gl. (43)] auf den Strom  $J$  beziehen; es ergibt sich mit Gl. (47a)

$$E_\vartheta = \Gamma H_\alpha = J \cdot \frac{\Gamma}{2} \cdot \frac{l}{\lambda} \cdot \frac{\sin \vartheta}{r}; \quad (43a)$$

Die Feldstärken sind im Wellenbereich proportional dem Verhältnis  $\frac{l}{\lambda}$  und nehmen in ihm mit wachsender Entfernung gemäß  $\frac{1}{r}$  ab, im Nahbereich dagegen, wie Gl. (34), (35) zeigen, mit höheren Potenzen, also stärker.

Bei einem mit der Frequenz  $\omega$  sinusförmig verlaufenden Vorgang ist die Bedingung des Nahbereiches Gl. (30) gleichbedeutend mit

$$r \ll \left| \frac{v}{\omega} \right| = \frac{\lambda}{2\pi}. \quad (52)$$

Damit ein periodischer Vorgang als quasistationär angesehen werden darf, ist es somit notwendig, daß die linearen Abmessungen des Gebildes, in dem die Ladungs- und Stromänderungen vor sich gehen, klein sind gegen die Größe  $\frac{v}{\omega}$ , in der man zur Abschätzung  $v = c$ , die Ausbreitungsgeschwindigkeit gleich der Lichtgeschwindigkeit zu setzen berechtigt ist. Je schneller die Vorgänge verlaufen, um so mehr geht diese Länge herunter. Sobald die Entfernung  $r$  des betrachteten Feldpunktes von der Größenordnung der Wellenlänge wird, kann der Vorgang nicht mehr quasistationär betrachtet werden, und im Wellenbereich zeigt Gl. (47), daß um so mehr Energie durch Strahlung verlorengeht, je größer die Schwingungszahl ist, falls nicht das elektromagnetische Feld nach außen abgeschlossen ist. Eine solche Energieabwanderung ist aber in Strenge selbst mit den langsamsten Zustandsänderungen, bei denen elektrische und magnetische Energie ineinander umgesetzt werden, verknüpft. Als entscheidendes Kennzeichen für die Zulässigkeit der quasistationären Betrachtung von Zustandsänderungen haben wir somit allgemein die Bedingung Gl. (30), und Gl. (52) für periodische Vorgänge.



### III. Verschiedenes.

#### 1'. Die Maßsysteme der Elektrizitätslehre<sup>1</sup>.

##### I. Entstehung der Maßsysteme.

Wir erinnern uns an das Entstehen der Grundgleichung der Mechanik: das Experiment lehrt, daß die Beschleunigung  $b$ , die ein Körper der Masse  $m$  unter Einwirkung einer Kraft  $K$  erfährt, der Kraft direkt und der Masse umgekehrt proportional ist:

$$b = f \cdot \frac{K}{m}.$$

Eine weitere Aussage, als die der Proportionalität, gestattet der Versuch nicht; das bedeutet: die Konstante  $f$  läßt sich nicht aus der Welt schaffen, man kann nur passend über sie verfügen. Zwei Möglichkeiten liegen nahe: entweder hat man für die in 4 der Gleichung auftretenden physikalischen Größen der Länge, der Zeit, der Kraft und der Masse schon voneinander unabhängige Einheiten erfunden: dann ist mit ihnen  $f$  eindeutig als benannte Zahl festgelegt. Oder aber man setzt  $f$  als reine Zahl (z. B. als Eins) willkürlich fest. Damit ist eine der 4 Größen, und also auch ihre Einheit, durch die 3 anderen ausgedrückt. Diese werden dann die Grundgrößen der Mechanik, da durch weitere Gleichungen keine neuen hinzukommen. So benutzt die Technik die Grundgrößen Länge, Zeit und Kraft, die Physik die Grundgrößen Länge, Zeit und Masse. Auf diese 3 Grundgrößen aufbauende Maßsysteme werden „absolut“ genannt (der Name<sup>2</sup> hat heute nur noch konventionelle Bedeutung); bei cm, sec und g als Grundeinheiten spricht man von  $c$ - $g$ - $s$ -Systemen.

Beide Wege sind auch in der Elektrodynamik beschritten worden.

Entwickelt man die elektromagnetischen Gleichungen und hütet sich dabei vor jedweden willkürlichen Festsetzungen, Zusätzen oder Unterlassungen, so treten unter allen denkbaren Umständen an zwei Stellen Koeffizienten auf, die ebenso, wie im erwähnten mechanischen Beispiel, nicht unmittelbar aus einer Gleichung hervorgehen, sondern nur mittelbar durch bestimmte Annahmen. Bei unserer Schreibweise sind dies die Größen  $\epsilon_0$  und  $\mu_0$ . Die verschiedenen Maßsysteme unterscheiden sich daher in erster Linie durch Zahlenwert und Benennung dieser Koeffizienten. Dabei sind  $\epsilon_0$  und  $\mu_0$  nicht unabhängig voneinander, vielmehr besteht zwischen ihnen und der Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  elektromagnetischer Störungen im leeren Raum eine durch die Wellengleichung festgelegte grundlegende Beziehung, die in der bisherigen Schreibweise lautet

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}. \quad (1)^3$$

Im einzelnen unterscheiden sich die verschiedenen Maßsysteme nach Wesen und Schreibweise einerseits durch die Entstehung der Einheiten, andererseits durch Koeffizienten in den Gleichungen. Dies zeigt sich in folgenden Punkten:

<sup>1</sup> Man mißt gegenwärtig den absoluten Maßsystemen und ihren gegenseitigen Beziehungen nicht mehr die grundsätzliche Bedeutung zu, wie früher. Ihre Kenntnis ist aber trotzdem unentbehrlich, will man nicht beim Eindringen in die bisherige Literatur fortwährend behindert sein.

<sup>2</sup> „Absolut“ wurden Einheiten genannt, wenn man sich zu der Annahme berechtigt hielt, daß sie von Ort und Zeit unabhängig sind.

<sup>3</sup> Daher kann man, wie in 43., an Stelle von  $\epsilon_0$  und  $\mu_0$  auch die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  im leeren Raum und das Verhältnis  $\Gamma_0$  der elektrischen zur magnetischen Feldstärke in einem Punkt des leeren Raumes als die beiden universellen Konstanten betrachten, also

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad \text{und} \quad \Gamma_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}};$$
$$\epsilon_0 = \frac{1}{c \Gamma_0}, \quad \mu_0 = \frac{\Gamma_0}{c}.$$

hieraus

1. Die Stellung des Zahlenfaktors  $4\pi$ . Dieser Faktor wird sowohl durch die Wahl der Beträge der „absoluten“ elektrischen und magnetischen Einheiten bestimmt (s. u.), als auch durch die willkürliche Annahme darüber, ob man den von der Menge Eins ausgehenden Fluß in eine oder in  $4\pi$  Feldröhren einteilen will. Dies ist natürlich physikalisch belanglos und nur eine Frage der Bezifferung (der zeichnerischen Darstellung).

2. Die Auffassung von dem, was festzulegen ist (vgl. das erwähnte Beispiel aus der Mechanik):

a) Man legt willkürlich dem einen universellen Koeffizienten einen bestimmten Wert bei; der andere ist dann mit Gl. (1) gegeben (über eine erweiterte Schreibweise dieser Gleichung s. u.). Aus den so vereinfachten Gleichungen lassen sich die Einheiten aller anderen elektrischen und magnetischen Größen ableiten, falls man diese Festsetzung dadurch ergänzt, daß man eine Einheit für die mechanische Kraft, allgemeiner gesagt, für die Energie gibt. Wird hierfür die „absolute“ mechanische Energieeinheit gewählt, so setzen sich die auf diese Weise gewonnenen Einheiten aller elektrischer und magnetischer Größen zusammen aus Potenzenprodukten der drei „absoluten“ Grundeinheiten der Mechanik für Länge, Masse und Zeit; man bezeichnet daher die so entstandenen Systeme als „absolute“ Maßsysteme (*c-g-s*-Systeme). [Beispiel: Man setzt  $\varepsilon_0$  als irgendeine unbenannte Zahl, dann erhält man aus dem Coulombschen Gesetz mit den absoluten mechanischen Einheiten der Kraft und der Länge eine Einheit für die elektrische Ladung (vgl. 9.); die magnetischen Einheiten werden durch Gl. (1) angeschlossen, ohne daß über die drei mechanischen Einheiten hinaus eine weitere erforderlich würde.] Den zahlreichen Möglichkeiten einer solchen willkürlichen Festsetzung entspricht eine Vielzahl absoluter Maßsysteme, die wir im folgenden näher betrachten.

b) Man vereinbart die Einheiten bestimmter physikalischer Größen (und mißt die genannten Koeffizienten in diesen). Schon Maxwell hat gezeigt, daß in den elektromagnetischen Gleichungen vier Grundgrößen voneinander unabhängig sind. Daher kann man vier Einheiten unabhängig voneinander festsetzen. Der Wert für  $\varepsilon_0$ ,  $\mu_0$ ,  $c$  kann dann um so genauer angegeben werden, je genauer die Meßtechnik die Grundeinheiten bestimmt. Um den Gegensatz zu den „absoluten“ elektrischen und magnetischen Einheiten ausdrücken zu können, nennen wir die auf diese Weise erhaltenen Einheiten die „empirischen“<sup>1</sup>. Es liegt nun nahe, die schon definierten drei mechanischen Grundeinheiten für Länge, Zeit, Masse (oder Kraft) zu ergänzen durch eine unabhängig definierte elektrische Einheit, z. B. für die elektrische Ladung. Die Energieeinheit eines solchen gemischten Systemes wäre die mechanische, die Spannungseinheit z. B. würde sich ergeben als Verhältnis der mechanischen Energieeinheit zur elektrischen Ladungseinheit. Diesen Weg hat man indessen nicht beschritten, vielmehr hat man zwei voneinander unabhängige elektrische Einheiten gegeben, denn alle praktischen Messungen sowohl elektrischer wie magnetischer Größen gehen zurück auf die Einheiten für elektrischen Strom (Ladung), elektrische Spannung, Länge und Zeit. Ein Maßsystem, das empirische Einheiten dieser vier Größen benützt, nennen wir nach seinem Urheber ein Miesches Maßsystem. Das praktische<sup>2</sup> Miesche Maßsystem benutzt die empirischen Einheiten Ampere, Volt, cm, sec<sup>3</sup>.

<sup>1</sup> Sie werden auch „international“ und „legal“ genannt, da die Grundeinheiten teils international vereinbart, teils durch Gesetz festgelegt worden sind.

<sup>2</sup> Diese Bezeichnung soll nicht irgendwelche Gegensätzlichkeiten ausdrücken, sondern daran erinnern, daß alle praktischen Messungen auf diese Einheiten zurückgehen.

<sup>3</sup> In einem solchen System mit zwei unabhängigen elektromagnetischen Grundeinheiten ist notwendig die Masseneinheit, wie schon in 9. erwähnt, eine abgeleitete Einheit. Dies kann in praktischer Hinsicht als Mißhelligkeit gewertet werden, denn entsprechend der geschichtlichen Entwicklung der Physik ist eine Masseneinheit als Grundeinheit vor den elektromagnetischen Einheiten festgelegt worden. Frei von diesem Nachteil ist das ersterwähnte System mit Grundeinheiten für Länge, Zeit, Masse (Kraft) und einer unabhängigen elektromagnetischen Einheit. Bestimmt man als solche eine Einheit für die elektrische Ladung, so kommt man zu einem System, das zwar spekulativ befriedigend ist, insbesondere durchsichtige Benennungsformeln besitzt, aber meßtechnisch den Ansprüchen nicht genügen könnte.

Wir stellen folgende Merkmale der absoluten und der praktischen Maßsysteme einander gegenüber:

In jedem absoluten Maßsystem wird durch gewisse ihm eigentümliche Verfügungen über Einheiten (durch Aufstellung einer ihm eigentümlichen, willkürlichen Einheitengleichung) die Anzahl der voneinander unabhängigen Grundeinheiten von vier auf drei erniedrigt, diese sind die „absoluten“ Grundeinheiten der Mechanik, wenn als Energieeinheit die absolute mechanische gewählt wird. Diese zwei Festsetzungen bestimmen das absolute System. Die praktischen Systeme sind aufgebaut auf vier voneinander unabhängigen Grundeinheiten von vereinbartem Werte, wovon zwei die Einheiten elektrischer (elektromagnetischer) Größen sind, die zwei anderen Raum und Zeit betreffen. Die Benennungsformel (zusammengesetzte Einheit) einer Größe im praktischen Mieschen System läßt in der Mehrzahl der Fälle unmittelbar das Verfahren erkennen, nach dem die Größe experimentell ermittelt und definiert wird. Dies wird als Vorteil vor den absoluten Einheiten gewertet, die meist keinerlei Zusammenhang mit Messung oder Definition erkennen lassen. Dies ist hier auch nicht zu erwarten, denn einzelne elektrische und magnetische Größen lassen sich nicht in mechanischem Maße ausdrücken, sondern immer nur Potenzenprodukte von wenigstens zwei solcher Größen.

Die Energieeinheit aller absoluten Systeme ist die *c-g-s*-Einheit 1 Erg. Im praktischen System ist sie keine mechanische, sondern eine elektromagnetische Größe, denn das System enthält zwei voneinander unabhängige elektromagnetische Grundeinheiten (Energieeinheit = Ladungseinheit mal Spannungseinheit). Es ist Sache der Meßtechnik, das Verhältnis zu anderen physikalischen Energieeinheiten festzustellen, ebenso, wie sie die Beziehung der Energieeinheit der Wärmelehre zu der der Mechanik zu bestimmen hat. Durch die experimentell zu bestimmende Verhältniszahl:

$$1 \text{ Elektromagnetische Energieeinheit} = A \text{ mechanische Energieeinheiten} \quad (2)$$

sind die praktischen elektromagnetischen Einheiten an die übrigen Einheiten der Physik angeschlossen, jede weitere Verknüpfungszahl ist überflüssig. Für das praktische Maßsystem muß also ermittelt werden: erstens, wie groß die benannten Zahlen  $\epsilon_0$  und  $\mu_0$ , ausgedrückt in den vier gegebenen Grundeinheiten, sind; zweitens, wie groß das Äquivalent  $A$  ist.

Das Verfahren a) geht auf C. F. Gauß und W. Weber zurück und war für die Theorie von weittragender Bedeutung, es entspricht aber nicht der Entwicklung der Meßpraxis, in der es sich mehr und mehr als vorteilhaft erwiesen hat, dadurch die Einheit einer Größe zu bestimmen, daß man einer in der Natur gegebenen Größe von der Art der festzulegenden Einheit einen nach internationalem Übereinkommen gesetzlich festgesetzten Zahlenwert erteilt (z. B. Festlegung der Temperatureinheit, der Stromeinheit, der Längeneinheit durch die rote Kadmiumlinie usw.). Dies ist die Grundlage des von G. Mie begründeten Verfahrens b)<sup>1</sup>.

## II. Maßsystemschlüssel.

Die folgende, von F. Emde<sup>2</sup> herrührende Schreibweise der elektromagnetischen Gleichungen schließt sämtliche bisher bekanntgewordenen Maßsysteme in sich ein:

$$\frac{\mathfrak{D}}{\nu} = \epsilon_0 \cdot \mathfrak{E}; \quad w_e = \frac{1}{2} \mathfrak{E} \frac{\mathfrak{D}}{\nu}; \quad \operatorname{div} \frac{\mathfrak{D}}{\nu} = \eta_e; \quad \int \mathfrak{G} d\mathfrak{f} = J = -\frac{\partial Q}{\partial t}; \quad \mathfrak{G} = \frac{1}{\rho} (\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^e) \quad (3)$$

$$\frac{\mathfrak{B}}{\kappa} - \mathfrak{M} = \mu_0 \cdot \mu \mathfrak{H} = \frac{\mathfrak{B}'}{\kappa}; \quad w_m = \frac{1}{2} \mathfrak{H} \frac{\mathfrak{B}'}{\kappa} \quad (4)$$

$$K_e = k \cdot \frac{e_1 e_2}{\epsilon r^2}; \quad k \equiv \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \quad (5)$$

<sup>1</sup> G. Mie: Handbuch der Experimentalphysik Bd. XI/1 (1932) 3. Teil 4. Kap. Da hier erstmals eine theoretische Begründung gegeben wurde, bezeichnen wir das Maßsystem als Miesches, obwohl schon zuvor von G. Giorgi ein Maßsystem mit vier Grundeinheiten angegeben worden ist. Die erste derartige Angabe findet sich bei Maxwell (Art. 623).

<sup>2</sup> F. Emde: Handwörterbuch der Naturwissenschaften Bd. 7 (1932) S. 1018. Elektrotechn. Z. Bd. 25 (1904) S. 432.

$$K_m = h \cdot \frac{m_1 m_2}{\mu r^2}; \quad h \equiv \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \quad (6)$$

$$\gamma [\mathfrak{E} \mathfrak{H}] = \mathfrak{S} \quad (7)$$

$$\gamma \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \mathfrak{G} + \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{D} \quad (8)$$

$$\gamma \operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{B} \quad (9)$$

$$\gamma \equiv c \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}. \quad (10)$$

Hierin bezeichnen  $\epsilon$  und  $\mu$  die relativen Stoffwerte (reine Zahlen, im leeren Raum  $\epsilon = 1$ ,  $\mu = 1$ ),  $c$  die Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Vorgänge im leeren Raum. Die reinen Zahlen  $\nu$  und  $k$  bedeuten: von der elektrischen Menge  $e$  denken wir uns  $\nu \cdot e$  Flußröhren, von der magnetischen Menge  $m$  denken wir uns  $\kappa \cdot m$  Flußröhren ausgehend<sup>1</sup>.  $k$  und  $h$  sind lediglich Abkürzungen. Der „Anschlußfaktor“  $\gamma$  kommt auf folgende Weise in die beiden Hauptgleichungen und den Strahlungsvektor hinein: Einige Maßsysteme (die nach Gauß und Lorentz benannt) gehen von der Annahme aus, daß die elektrischen und die magnetischen Einheiten unabhängig voneinander festgesetzt seien. (Dies steht im Gegensatz zur heutigen Meßpraxis; meist werden die magnetischen Einheiten an die elektrischen angeschlossen.) Der Anschluß der Einheiten aneinander geschieht dann durch einen die elektrischen und magnetischen Größen verknüpfenden Versuch; ein solcher aber wird von den Verkettungsgesetzen, den beiden Hauptgleichungen, beherrscht, und der Strahlungsvektor ist durch diese (gemäß 41.) festgelegt. Unter der Voraussetzung, daß die Einheiten für  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  unabhängig voneinander vorausgegeben sind, werden wir die beiden Hauptgleichungen für den leeren Raum und den Strahlungsvektor zunächst schreiben

$$\gamma_1 \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}; \quad \gamma_2 \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}; \quad \gamma_3 \cdot [\mathfrak{E} \mathfrak{H}] = \mathfrak{S}. \quad (11)$$

Aus den beiden ersten Gleichungen ergibt sich die Wellengleichung (auf dem in 42. vorgezeichneten Wege) mit der Geschwindigkeit im leeren Raum

$$c = \sqrt{\frac{\gamma_1 \gamma_2}{\epsilon_0 \mu_0}}. \quad (12)$$

Es ist das einfachste und bedeutet keine Beschränkung<sup>2</sup>, zu setzen

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma, \quad \text{daher} \quad \gamma = c \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}. \quad (13)$$

Bringt man dann (auf dem in 41. gezeigten Rechnungsgang) den Energieströmungsvektor mit den beiden Hauptgleichungen in Einklang, so findet man, daß die Benennungen von  $\gamma$  und  $\gamma_3$  übereinstimmen, daß daher auch

$$\gamma_3 = \gamma \quad (14)$$

gesetzt werden kann. Damit ist Gl. (10) gerechtfertigt; die Benennung von  $\gamma$  ist  $\gamma = \frac{1}{\tau} (\epsilon_0 \mu_0)^{1/2}$ , es ist also durch die Einführung von  $\gamma$  die Anzahl der unabhängigen Grundeinheiten nicht vermehrt. Die einzelnen absoluten Maßsysteme entstehen dadurch, daß über zwei der drei Größen  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$ ,  $\gamma$  eine willkürliche Festsetzung getroffen wird. Da  $\gamma$  gemäß Gl. (10) eine Abkürzung ist, kommt dies der Einführung einer willkürlichen Einheitenbeziehung gleich.

#### A. Absolute Maßsysteme (c-g-s-Systeme).

Sie haben gemäß I. durch willkürliche Einheitengleichungen dieselben drei Grundeinheiten (Benennungen) wie die Mechanik: für Länge (cm), Masse (gr) und Zeit (sec). Wir unterscheiden (a, b):

<sup>1</sup> Und zwar unabhängig von der Festsetzung der Mengeneinheit, daher fehlen  $\nu$  und  $\kappa$  in den Punktkraftgesetzen Gl. (5) und (6).

<sup>2</sup> Es besteht keine allgemeine Notwendigkeit für diese Setzung, sie trifft aber für alle bisher gebräuchlichen Maßsysteme zu. Über andere Schreibweisen der elektromagnetischen Gleichungen, die von ihr nicht Gebrauch machen, siehe J. Fischer: Physik. Z. Bd. 36 (1935) S. 914 und allgemeiner über das Auftreten derartiger Koeffizienten und ihre Beziehungen zueinander: J. Fischer: Z. Physik Bd. 100 (1936) S. 360.

a. Nichtrationale Systeme.

In diesen fehlt der Faktor  $4\pi$  im Nenner der Punktkraftgesetze (und der Potentialfunktionen), und tritt an anderer Stelle auf, an der seine Herkunft nicht mehr einleuchtend ist, z. B. stets im Nenner der durch  $\varepsilon \mathfrak{E}^2$  und  $\mu \mathfrak{H}^2$  ausgedrückten Energiedichten.

Das *elektrostatische System* geht aus von der willkürlichen Festsetzung  $K_e = \frac{e_1 e_2}{\varepsilon r^2}$ , also  $k = 1$ ,  $\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi}$  und bestimmt dadurch die „elektrostatische“ Einheit der elektrischen Ladung als  $1 \text{ cm}^{3/2} \text{ gr}^{1/2} \text{ sec}^{-1}$ . Der Anschluß geschieht durch eine reine Zahl:  $\gamma = \frac{1}{4\pi}$ , und daher wird  $\mu_0 = \frac{1}{4\pi c^2}$ ,  $h = c^2$ . Also

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{D}}{\nu} &= \frac{\varepsilon}{4\pi} \mathfrak{E}, & \frac{\mathfrak{B}'}{\kappa} &= \frac{\mu}{4\pi c^2} \mathfrak{H}; \\ w_e &= \frac{\varepsilon}{8\pi} \mathfrak{E}^2, & w_m &= \frac{\mu}{8\pi c^2} \mathfrak{H}^2, & \mathfrak{C} &= \frac{1}{4\pi} [\mathfrak{E} \mathfrak{H}]; \\ \text{rot } \mathfrak{H} &= 4\pi \left( \mathfrak{G} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} \frac{1}{\nu} \right) = \frac{4\pi}{\varrho} \mathfrak{E} + \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon \mathfrak{E}; \\ \text{rot } \mathfrak{E} &= -\frac{4\pi}{\kappa} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mu \mathfrak{H}. \end{aligned}$$

Das elektrostatische System hat Maxwell benutzt, ohne sich indes streng daran zu halten. Hinsichtlich der Zahlen  $\nu, \kappa$  ist die Schreibweise  $\nu = \kappa = 1$  weniger häufig, als  $\nu = \kappa = 4\pi$ , so z. B. im Handbuch der Physik<sup>1</sup>. In der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften schreibt Lorentz (V, 13, Nr. 7) ein elektrostatisches System mit  $\nu = 1$ ,  $\kappa = 4\pi$ .

Das *elektromagnetische Maßsystem* geht aus von der willkürlichen Festsetzung  $K_m = \frac{m_1 m_2}{\mu r^2}$ , also  $k = 1$ ,  $\mu_0 = \frac{1}{4\pi}$ , und bestimmt dadurch die „elektromagnetische“ Einheit der magnetischen Menge zu  $1 \text{ cm}^{3/2} \text{ g}^{1/2} \text{ sec}^{-1}$ . Der Anschluß geschieht durch eine reine Zahl:  $\gamma = \frac{1}{4\pi}$ , und daher wird  $\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi c^2}$ ,  $h = c^2$ . Also

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{D}}{\nu} &= \frac{\varepsilon}{4\pi c^2} \mathfrak{E}, & \frac{\mathfrak{B}'}{\kappa} &= \frac{\mu}{4\pi} \mathfrak{H}; \\ w_e &= \frac{\varepsilon}{8\pi c^2} \mathfrak{E}^2, & w_m &= \frac{\mu}{8\pi} \mathfrak{H}^2, & \mathfrak{C} &= \frac{1}{4\pi} [\mathfrak{E} \mathfrak{H}]; \\ \text{rot } \mathfrak{H} &= 4\pi \left( \mathfrak{G} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} \frac{1}{\nu} \right) = \frac{4\pi}{\varrho} \mathfrak{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon \mathfrak{E}; \\ \text{rot } \mathfrak{E} &= -\frac{4\pi}{\kappa} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \mu \mathfrak{H}. \end{aligned}$$

Auch hier ist die Schreibweise  $\nu = \kappa = 1$  weniger verbreitet, als  $\nu = \kappa = 4\pi$  (Handbuch der Physik); am wichtigsten ist die Wahl  $\nu = 1$ ,  $\kappa = 4\pi$  (Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften), denn diese Schreibweise ist die Grundlage für

Das *ursprüngliche technische Maßsystem*. In diesem hat man besondere Namen geschaffen für bestimmte Zehnerpotenzen der elektromagnetischen *c-g-s*-Einheiten, da diese selbst für praktische Zwecke sich meist entweder als zu groß oder als zu klein erwiesen:

$10^{-1}$	elmg. <i>c-g-s</i> -Einh.	des Stromes werden genannt . . . . .	1 abs. Ampere
$10^{-1}$	„	der Ladung werden genannt . . . . .	1 abs. Coulomb
$10^8$	„	der el. Spannung werden genannt . . . . .	1 abs. Volt
$10^9$	„	des el. Widerstandes werden genannt . . .	1 abs. Ohm
$10^9$	„	der Selbstinduktivität werden genannt . .	1 abs. Henry
$10^{-9}$	„	der Kapazität werden genannt . . . . .	1 abs. Farad

<sup>1</sup> Z. B. W. Jaeger in Band 2 und 16 des Handbuchs der Physik, herausgeg. von Geiger und Scheel.

1	elmgt. <i>c-g-s</i> -Einh.	der mgt. Feldstärke wird genannt . . . . .	1 Gauß früher; heute auch . . . . .	1 Oersted
1	„	„	der mgt. Induktion wird genannt . . . . .	1 Gauß
1	„	„	des mgt. Induktionsflusses wird genannt . . .	1 Maxwell
10 <sup>7</sup>	„	„	der Energie werden genannt . . . . .	1 abs. Joule ≡ 10 <sup>7</sup> Erg
10 <sup>7</sup>	„	„	der Leistung werden genannt . . . . .	1 abs. Watt

Als Längen- und Zeiteinheit bleiben cm und sec.

Nachdem diese Festsetzungen getroffen waren, hat man begonnen, nach internationalem Übereinkommen von den drei Einheiten des Stromes, des Widerstandes und der Spannung zwei gesetzlich festzulegen. Durch Messungen hat man dann ermittelt, wie genau die absoluten Einheiten des ursprünglichen technischen Maßsystemes durch die international vereinbarten, empirischen Einheiten verkörpert werden. Setzt man

$$\begin{aligned} 1 \text{ emp. Amp} &= q \text{ abs. Amp,} \\ 1 \text{ emp. Ohm} &= p \text{ abs. Ohm,} \end{aligned}$$

so folgt hieraus

$$\begin{aligned} 1 \text{ emp. Coul} &= q \text{ abs. Coul} \\ 1 \text{ emp. Volt} &= pq \text{ abs. Volt} \\ 1 \text{ emp. Watt} &= pq^2 \text{ abs. Watt} \\ 1 \text{ emp. Joule} &= pq^2 \text{ abs. Joule} \\ &= pq^2 \cdot 10^7 \text{ Erg} \\ 1 \text{ emp. Farad} &= p^{-1} \text{ abs. Farad} \\ 1 \text{ emp. Henry} &= p \text{ abs. Henry.} \end{aligned}$$

Die zur Zeit wahrscheinlichsten Werte in bezug auf die im folgenden (B.) genannten international vereinbarten, praktischen Einheiten sind

$$\begin{aligned} q &= 1 - 0,00004, & p &= 1,00051, \\ \text{soda\ss} & & pq &= 1,00047, & pq^2 &= 1,00043. \end{aligned}$$

Das *Gaußsche symmetrische System* geht aus von den zwei Festsetzungen  $K_e = \frac{e_1 e_2}{\epsilon r^2}$  und  $K_m = \frac{m_1 m_2}{\mu r^2}$ , also  $k = h = 1$ ,  $\epsilon_0 = \mu_0 = \frac{1}{4\pi}$ , und legt dadurch die Einheit der elektrischen und die der magnetischen Menge unabhängig voneinander fest. Dadurch folgt nach Gl. (10) als Anschlußfaktor die benannte Zahl  $\gamma = \frac{c}{4\pi}$ ; die Gleichungen lauten:

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{D}}{\nu} &= \frac{\epsilon}{4\pi} \mathfrak{E}, & \frac{\mathfrak{H}}{\kappa} &= \frac{\mu}{4\pi} \mathfrak{H}; \\ w_e &= \frac{\epsilon}{8\pi} \mathfrak{E}^2, & w_m &= \frac{\mu}{8\pi} \mathfrak{H}^2, & \mathfrak{E} &= \frac{c}{4\pi} [\mathfrak{E} \mathfrak{H}]; \\ c \cdot \text{rot } \mathfrak{H} &= 4\pi \left( \mathfrak{G} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} \frac{1}{\nu} \right) = \frac{4\pi}{q} \mathfrak{E} + \frac{\partial}{\partial t} \epsilon \mathfrak{E}; \\ c \cdot \text{rot } \mathfrak{E} &= -\frac{4\pi}{\kappa} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \mu \mathfrak{H}. \end{aligned}$$

Dieses Maßsystem wurde von Helmholtz und Hertz benutzt, die Nomenclatur stammt von Helmholtz; in der gebräuchlichsten Schreibweise mit  $\nu = \kappa = 4\pi$  wird es insbesondere in der theoretischen Physik oft angewandt<sup>1</sup>, die Schreibung  $\nu = \kappa = 1$  ist weniger häufig. Lorentz hat in der Enzyklopädie (und in seinen Vorlesungen)  $\nu = 1$ ,  $\kappa = 4\pi$ .

#### b. Rationale Systeme.

In diesen steht der Kugelflächenfaktor  $4\pi$  nur an dem ihm zukommenden Platze, nämlich im Nenner der Punktkraftgesetze. Dies wird dadurch bewirkt,

<sup>1</sup> Z. B. Handbuch der Physik, herausgeg. von Geiger und Scheel; Lehrbücher von M. Planck.

daß die Einheit der elektrischen Ladung und die Einheit der magnetischen Menge  $\frac{1}{\sqrt{4\pi}} = 0,2821$ mal so groß gemacht wird, als im entsprechenden nichtrationalen System. Man setzt ausschließlich  $\nu = \kappa = 1$ .

Das *Lorentzsche symmetrische rationale System*. Es ist das rationale Gaußsche, setzt also fest  $K_e = \frac{e_1 e_2}{4\pi \varepsilon r^2}$  und  $K_m = \frac{m_1 m_2}{4\pi \mu r^2}$ , also  $k = h = \frac{1}{4\pi}$ ,  $\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$ , daher muß sein  $\gamma = c$ ; die Gleichungen werden

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} &= \varepsilon \mathfrak{E}; & \mathfrak{B}' &= \mu \mathfrak{H}; \\ w_e &= \frac{\mathfrak{E} \mathfrak{D}}{2} = \frac{\varepsilon \mathfrak{E}^2}{2}; & w_m &= \frac{\mathfrak{H} \mathfrak{B}'}{2} = \frac{\mu \mathfrak{H}^2}{2}, & \mathfrak{S} &= c [\mathfrak{E} \mathfrak{H}]; \\ c \cdot \text{rot } \mathfrak{H} &= \mathfrak{G} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}; \\ c \cdot \text{rot } \mathfrak{E} &= -\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Dieses System hat Lorentz in der Enzyklopädie und in seinen Vorlesungen benutzt.

Die *Heavisideschen rationalen Systeme* sind gekennzeichnet durch die Festsetzung  $\gamma = 1$ , daher  $\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$ , z. B. ergibt sich

ein elektrostatisches rationales System durch die Festsetzung  $k = \frac{1}{4\pi}$ ,  $\varepsilon_0 = 1$ , also  $h = \frac{c^2}{4\pi}$ ,  $\mu_0 = \frac{1}{c^2}$ ;

ein elektromagnetisches rationales System durch die Festsetzung  $h = \frac{1}{4\pi}$ ,  $\mu_0 = 1$ , also  $k = \frac{c^2}{4\pi}$ ,  $\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ ;

ein symmetrisches Heavisidesches System durch die Festsetzung  $k = h = \frac{c}{4\pi}$ ,  $\varepsilon_0 = \mu_0 = \frac{1}{c}$ .

Allen Heavisideschen Systemen ist folgende Schreibweise gemeinsam:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} &= \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \mathfrak{E}, & w_e &= \frac{\mathfrak{E} \mathfrak{D}}{2}, & K_e &= \frac{e_1 e_2}{4\pi r^2 \varepsilon_0 \varepsilon}; \\ \mathfrak{B}' &= \mu_0 \cdot \mu \mathfrak{H}, & w_m &= \frac{\mathfrak{H} \mathfrak{B}'}{2}, & K_m &= \frac{m_1 m_2}{4\pi r^2 \mu_0 \mu}; \\ \text{rot } \mathfrak{H} &= \mathfrak{G} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}, & \text{rot } \mathfrak{E} &= -\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}, & \mathfrak{S} &= [\mathfrak{E} \mathfrak{H}]. \end{aligned}$$

Sie stimmt überein mit der Schreibweise der Gleichungen im praktischen Maßsystem.

### B. Praktische Maßsysteme.

Sie haben gemäß I. vier voneinander unabhängige, vereinbarte Grundeinheiten. Die Vereinbarung betrifft jeweils die Festsetzung sowohl des Betrages der Einheit als auch des Verfahrens, nach dem sie verkörpert (dargestellt) werden soll, und es sind hauptsächlich die Erfahrungen der Feinmeßtechnik, die für diese Definitionen bestimmend sind. Eine kritische Untersuchung dieser praktisch-meßtechnischen Fragen gehört nicht hierher, doch sei an die Möglichkeit erinnert, daß durch Fortschritte der Meßtechnik sich bessere und genauere Verfahren für die Darstellung (Verkörperung) einer Einheit ergeben können, als die bisherigen. Kommt man dann überein, die Einheit durch ein anderes Darstellungsverfahren zu definieren, so kann bei dieser Gelegenheit auch der Betrag verändert werden. Hierzu vgl. die Ausführungen von III. Weiterentwicklung.

Gegenwärtig sind die elektrischen Einheiten in allen Ländern der Erde die gleichen; ebenso steht es mit dem Zeitmaß, dagegen sind die Längen- (Raum-) Maße nicht überall einheitlich<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> England, Amerika.

Die gegenwärtigen Vereinbarungen über die vier Grundeinheiten des praktischen Mieschen Maßsystemes, und die daraus folgenden Zahlenwerte der Konstanten und Äquivalente, sind die folgenden:

1. Die Einheit der elektrischen Ladung, 1 emp. Coulomb, ist gleich der Ladung von  $1,11800 \cdot 10^{-3}$  g Silberionen. Ein Strom hat die Stärke 1 emp. Ampere, wenn bei konstanter Stromstärke die Ladung 1 emp. Coulomb in 1 sec durch den Leiter übergeht.

2. Die Einheit der Spannung wird nicht unmittelbar, sondern über das Ohmsche Gesetz durch die Einheit des Widerstandes festgelegt. Eine Quecksilbersäule von 106,300 cm Länge und 14,4521 g Gewicht von konstantem Querschnitt hat bei der Temperatur des schmelzenden Eises für Gleichstrom den Widerstand 1 emp. Ohm. Wenn durch einen Widerstand 1 emp. Ohm der konstante Strom 1 emp. Ampere geht, so beträgt die Spannung zwischen den Enden des Widerstandes 1 emp. Volt. Es hat sich aber das Bedürfnis herausgestellt, direkte Spannungsnormale zu haben, es wurde daher international vereinbart: Als „Normalelement“ dient eine Quecksilber-Kadmium-Kette von vorgeschriebener Zusammensetzung, genannt Weston-Element. Seine Spannung ist zu 1,01830 emp. Volt bei  $20^{\circ}$  C festgesetzt.

3. und 4. Als Einheiten der Länge und der Zeit werden cm und sec gebraucht, oder zweckmäßige Vielfache (Zehnerpotenzen) dieser Einheiten (Pohl). Ihre Definitionen sollen hier nicht erörtert werden.

Die Schreibweise ist die Heavisidesche rationale. Man hat nun die universellen Konstanten  $\epsilon_0$  und  $\mu_0$  auf sehr verschiedene Weise gemessen<sup>1</sup>; die derzeit besten Werte sind

$$\epsilon_0 = 0,8859 \cdot 10^{-13} \frac{\text{emp. Amp} \cdot \text{sec}}{\text{emp. Volt} \cdot \text{cm}},$$

$$\mu_0 = 1,25598 \cdot 10^{-8} \frac{\text{emp. Volt} \cdot \text{sec}}{\text{emp. Amp} \cdot \text{cm}}.$$

Aus  $\epsilon_0$  und  $\mu_0$  ergibt sich

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2,9979 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}} \quad \text{und} \quad \Gamma_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376,53 \text{ emp. Ohm.}$$

Zum Anschluß an die anderen Gebiete der Physik braucht man noch die Beziehung der elektromagnetischen zur mechanischen Energieeinheit [Gl. (2)]; die praktische elektromagnetische Energieeinheit ist

$$1 \text{ emp. Coul} \cdot 1 \text{ emp. Volt} = 1 \text{ emp. Joule}^2,$$

$$1 \text{ emp. Joule} = A \text{ Erg.}$$

Messungen der Verhältniszahl  $A$  ergeben als derzeit besten Wert

$$A = 1,00043 \cdot 10^7.$$

Übrigens hat man auch gemessen:

$$1 \text{ emp. Joule} = 0,23899 \text{ cal.}$$

Wir fügen hier noch die folgenden Beziehungen ein ( $g^*$  bedeutet Gramm als Krafteinheit, Joule die elektromagnetische Energieeinheit<sup>2</sup>):

$$1 \frac{\text{Joule}}{\text{cm}} \equiv 1 \text{ Sthen} = 10,2 \text{ kg}^*{}^3,$$

$$1 \text{ kg}^* \cdot m = 9,81 \text{ Joule},$$

$$1 \frac{\text{Joule}}{\text{sec}} \equiv 1 \text{ Watt} = 1,359 \cdot 10^{-3} \text{ PS},$$

$$1 \text{ cal} = 4,1842 \text{ Joule} = 4,1860 \cdot 10^7 \text{ Erg.}$$

Sind  $\bar{R}$ ,  $\bar{J}$ ,  $\bar{U}$  die Zahlenwerte eines Widerstandes, einer Stromstärke, einer Spannung in einem durch bestimmte Werte von  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$ ,  $A$  festgelegten praktischen

<sup>1</sup> G. Mie: a. a. O.

<sup>2</sup> In 9. Gl. (1) wurde hierfür zur Verdeutlichung geschrieben: 1 Joule (elektrisch).

<sup>3</sup> In bezug auf die praktischen Einheiten 1 Joule, 1 cm, 1 sec ist die Masseneinheit 1 gr =  $\frac{10^{-7} \text{ Joule sec}^2}{1,00043 \text{ cm}^2} = 0,99957 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Joule sec}^2}{\text{cm}^2}$ , denn es ist  $1 \text{ Erg} = \frac{10^{-7}}{1,00043} \text{ Joule} = 1 \text{ gr} \cdot \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}^2}$ .



Maßsystem, und will man diese umrechnen in die Zahlenwerte  $\bar{R}', \bar{J}', \bar{U}'$  in einem anderen, durch  $\epsilon'_0, \mu'_0, A'$  gegebenem System, so hat man dafür die Gleichungen

$$\begin{aligned} \bar{R}:\bar{R}' &= \mu_0:\mu'_0 = \epsilon'_0:\epsilon_0; \\ \bar{U} \bar{J}:\bar{U}' \bar{J}' &= \bar{R} \bar{J}^2:\bar{R}' \bar{J}'^2 = A':A. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \bar{R}' &= \bar{R} \frac{\mu'_0}{\mu_0} = \bar{R} \frac{\epsilon_0}{\epsilon'_0}, \\ \bar{J}' &= \bar{J} \sqrt{\frac{A \mu_0}{A' \mu'_0}} = \bar{J} \sqrt{\frac{A/\epsilon_0}{A'/\epsilon'_0}}, \\ \bar{U}' &= \bar{U} \sqrt{\frac{A/\mu_0}{A'/\mu'_0}} = \bar{U} \sqrt{\frac{A \epsilon_0}{A' \epsilon'_0}}, \end{aligned}$$

und entsprechend die abgeleiteten Größen. Durch Angabe zweier der vier Größen  $\epsilon_0, \mu_0, c, I_0$  und des Energieäquivalentes  $A$  als benannte Zahlen (Meßwerte), dazu des Ausdruckes der elektromagnetischen Energieeinheit in den Grundeinheiten des Systemes ist jedes praktische (Miesche) Maßsystem vollständig gekennzeichnet.

Benennungen<sup>1</sup>. L: Länge, T: Zeit, U: Spannung, Q: Ladung,  $J \equiv \frac{Q}{T}$ : Strom.

El. und mgt. Feldenergie $W$ , Arbeit $A$ . . . . .	$QU = JUT$
Kraft $K$ . . . . .	$\frac{QU}{L} = \frac{JUT}{L}$
Räuml. Feldenergiedichte $w$ . . . . .	$\frac{QU}{L^3} = \frac{JUT}{L^3}$
Leistung $N$ . . . . .	$\frac{QU}{T} = JU$
Leistungsstromdichte $S$ . . . . .	$\frac{QU}{TL^2} = \frac{JU}{L^2}$
Relaxationszeit $\beta$ . . . . .	T
Wellenkonstante $I'$ . . . . .	$\frac{U}{J}$
Wellengeschwindigkeit $v, c$ . . . . .	$\frac{L}{T}$
El. Feldstärke $E$ . . . . .	Mgt. Feldstärke $H$ . . . . . $\frac{J}{L}$
El. Verschiebungsdichte $D$ . . . . . $\frac{Q}{L^2} = \frac{JT}{L^2}$	Mgt. Induktion $B$ . . . . . $\frac{UT}{L^2}$
El. Fluß $\Omega$ . . . . . $Q = JT$	Mgt. Fluß $\Phi$ . . . . . $UT$
El. Konstante $\epsilon_0$ . . . . . $\frac{Q}{UL} = \frac{JT}{UL}$	Mgt. Konstante $\mu_0$ . . . . . $\frac{UT}{JL}$
Kapazität $C$ . . . . . $\frac{Q}{U} = \frac{JT}{U}$	Induktionskoeffizienten $L, M$ . . . . . $\frac{UT}{J}$
El. Widerstand $R$ . . . . . $\frac{U}{J}$	
Spez. el. Widerstand $\rho$ . . . . . $\frac{UL}{J}$	
El. Stromdichte $G$ . . . . . $\frac{J}{L^2}$	

<sup>1</sup> Die Benennungen der absoluten Maßsysteme entstehen, wenn man in diesen Benennungsformeln die Benennungen von Strom und Spannung des betreffenden absoluten M. einsetzt.

Tafel der Maßsysteme. Nach der Schreibweise Gl. (3) bis (10). Die Maßsystemerzeugenden Festsetzungen sind hervorgehoben.

Maßsysteme	$\epsilon_0$	$\mu_0$	$\gamma$	$k$	$h$
<i>Absolute M.</i> (willkürliche Einheitengl., 3 Grundeinheiten (Benennungen): Länge (cm), Zeit (sec), Masse (g).					
<i>Nichtrationale M.</i>					
elektrostatisch (Maxwell) . . . . .	$\frac{1}{4\pi}$	$\frac{1}{4\pi c^2}$	$\frac{1}{4\pi}$	1	$c^2$
elektromagnetisch (ursprünglich technisch)	$\frac{1}{4\pi c^2}$	$\frac{1}{4\pi}$	$\frac{1}{4\pi}$	$c^2$	1
symmetrisch (Gauß) . . . . .	$\frac{1}{4\pi}$	$\frac{1}{4\pi}$	$\frac{1}{4\pi}$	1	1
<i>Rationale M.</i>					
symmetrisch (Lorentz) . . . . .	1	1	$c$	$\frac{1}{4\pi}$	$\frac{1}{4\pi}$
Heavisidesche rationale					
elektrostatisch . . . . .	1	$\frac{1}{c^2}$	1	$\frac{1}{4\pi}$	$\frac{c^2}{4\pi}$
elektromagnetisch . . . . .	$\frac{1}{c^2}$	1	1	$\frac{c^2}{4\pi}$	$\frac{1}{4\pi}$
symmetrisiert . . . . .	$\frac{1}{c}$	$\frac{1}{c}$	1	$\frac{c}{4\pi}$	$\frac{c}{4\pi}$
<i>Praktische (Mieche) M.</i> (4 vereinbarte Grundeinheiten (Benennungen), davon 2 elektromagnetische: Ladung (Amp · sec), Spannung (Volt); Länge (cm), Zeit (sec) . . . . .	$\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$		1	$\frac{1}{4\pi \epsilon_0}$	$\frac{1}{4\pi \mu_0}$

## III. Weiterentwicklung.

Eine Änderung des im vorstehenden geschilderten Tatbestandes tritt in erster Linie dann ein, wenn die Grundeinheiten anders definiert und vereinbart werden (a). Außerdem kann die Schreibweise der Gleichungen geändert werden (b).

## a) Wechsel der Grundeinheiten.

„Das exekutive Organ der internationalen Meterkonvention, die Generalkonferenz für Maß und Gewicht, hat auf Vorschlag des ihm unterstellten Komitees für Maß und Gewicht im Jahr 1933 beschlossen, an Stelle des bisher allgemein benutzten Systems der internationalen Einheit das absolute elektrische Maßsystem einzuführen, und gleichzeitig das Komitee für Maß und Gewicht ermächtigt, den Termin der Einführung der neuen Einheiten zu einem geeigneten Zeitpunkt festzusetzen. Die Beschlüsse der Generalkonferenz sind für alle Staaten, die der Meterkonvention beigetreten sind, zu denen auch Deutschland gehört, bindend<sup>1</sup>.“

Nach diesem Beschluß sollen also die oben in II. B. angegebenen international vereinbarten elektrischen Einheiten als Grundeinheiten verlassen und die absoluten elektromagnetischen Einheiten in der Abänderung eingeführt werden, die wir in II. A. a) als „ursprüngliches technisches Maßsystem“ bezeichnet haben. Die Frage der Feinmeßtechnik, ob und in welcher Weise die neu einzuführenden Einheiten gegenüber den bisherigen mit größerer Genauigkeit festgelegt werden können und welches die Einzelheiten der maßgebenden Meßverfahren für die Darstellung sein sollen, kann hier nicht erörtert werden. Desgleichen übergehen wir die Frage der praktischen Meßtechnik, in welcher Weise sich die geplante Änderung in einer

<sup>1</sup> Das genannte Komitee hat 1935 beschlossen, „daß die endgültige Ersetzung am 1. Januar 1940 in Kraft treten wird“. — Bekanntmachung der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt, siehe z. B. Physik. Z. Bd. 37 (1936) S. 38.

Änderung der Zahlenwerte von Eichstücken, z. B. bei Widerstandsnormalen, bemerklich macht. Für die Theorie bedeutungsvoll ist die Frage, wie sich das praktische Maßsystem (II. B.) zu der Einführung der absoluten Einheiten verhält. Hierzu ist zu bemerken:

Versteht man diese Einführung dahin, daß die Einheiten Amp, Volt, Watt, Ohm usw. als dezimale Vielfache der elektromagnetischen *c-g-s*-Einheiten definiert werden (nicht diesen besser angenähert werden, als dies bisher durch die international vereinbarten Einheiten geschehen war), so hat man grundsätzlich wieder ein System mit den drei absoluten mechanischen Grundeinheiten, denn auf diese Weise sind die absoluten elektromagnetischen Einheiten definiert. Es ist z. B. definitionsmäßig

$$1 \text{ abs. Amp.} = 10^{-1} \sqrt{\text{Dyn}},$$

$$1 \text{ abs. Volt} = 10^8 \frac{\text{cm}}{\text{sec}} \sqrt{\text{Dyn}}.$$

Andererseits ist heute allgemein anerkannt, daß ein System mit vier Grundeinheiten, wie das praktische Miesche, der Elektrizitätslehre am besten angepaßt ist, weil man, wie schon in 4. angegeben und z. B. in 40. bestätigt wurde, genau vier unabhängige Größen, daher vier unabhängige Benennungen (Grundeinheiten) in der Elektrizitätslehre hat<sup>1</sup>. Da man weiß, daß die elektromagnetischen Vorgänge ausschließlich durch mechanische Begriffe nicht vollständig gekennzeichnet werden können, erscheinen rein mechanische Einheiten der elektromagnetischen Größen, wie man sie in der I. und II. beschriebenen Weise durch Zurückführung der vier unabhängigen Grundgrößen und -einheiten auf drei erzwingen kann, ungerechtfertigt<sup>2</sup>. Damit hängt zusammen, daß man häufig aus der Benennung in bezug auf das Vierersystem die Definition oder das Meßverfahren der betreffenden Größe erkennen kann, aus der „absoluten“ Benennung dagegen nicht. Man braucht indessen auch jetzt die Vorteile des Vierersystems nicht zu verlieren. Das Miesche System ist, wie gezeigt, auch mit anderen Definitionen, als den bisherigen, für die Einheiten von Ladung (Strom) und Spannung verträglich. Es ist somit sowohl begründet, wie auch gerechtfertigt, die Ausdrucksweise des praktischen Vierersystems, insbesondere die auf dieses bezogenen Benennungen, und daher auch zweckmäßigerweise die Heavisidesche Schreibweise beizubehalten. Eine Änderung gegenüber bisher besteht dann lediglich darin, daß die Grundeinheiten anders definiert sind, nämlich als bestimmte dezimale Vielfache der entsprechenden absoluten elektromagnetischen Einheiten. Dann gilt an Stelle der oben angeführten Zahlenwerte z. B.:

$$1 \text{ abs. Volt} \cdot 1 \text{ abs. Amp} \cdot 1 \text{ sec} \equiv 1 \text{ abs. Joule} = 1 \cdot 10^7 \text{ Erg} = 1 \cdot 10^7 \text{ Dyn} \cdot \text{cm},$$

$$\frac{1 \text{ abs. Volt}}{1 \text{ abs. Amp}} = 1 \text{ abs. Ohm},$$

$$\mu_0 = \frac{4\pi \text{ abs. Volt} \cdot \text{sec}}{10^9 \text{ abs. Amp} \cdot \text{cm}},$$

$$\epsilon_0 = \frac{10^9 \text{ abs. Amp} \cdot \text{sec}}{4\pi \bar{c}^2 \text{ abs. Volt} \cdot \text{cm}};$$

dabei ist  $\bar{c}$  der Zahlenwert der Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum, angegeben in  $\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ . Mit dem derzeit besten Wert  $c = 2,9979 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$  ist daher

<sup>1</sup> Dies gilt auch für die mikroskopische Elektrodynamik, die Elektronentheorie.

<sup>2</sup> „Die orthodoxe Zahl 3, die den sogenannten absoluten Maßsystemen zugrunde liegt, konnte so lange verbindlich erscheinen, als man hoffen konnte, die Elektrizität auf Mechanik zurückzuführen. Diese Zeit ist vorüber. Man tut den elektromagnetischen Größen Gewalt an, wenn man sie in das Prokrustesbett der 3 Einheiten hineinzwängt. Dagegen befinden sie sich in dem System der 4 Einheiten ganz bequem...“ A. Sommerfeld: Z. techn. Physik Bd. 16 (1935) S. 420.

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 &= 0,88544 \cdot 10^{-13} \frac{\text{abs. Amp} \cdot \text{sec}}{\text{abs. Volt} \cdot \text{cm}}, \\ \mu_0 &= 1,25664 \cdot 10^{-8} \frac{\text{abs. Volt} \cdot \text{sec}}{\text{abs. Amp} \cdot \text{cm}}, \\ \Gamma_0 &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 376,72 \text{ abs. Ohm}^1.\end{aligned}$$

b) *Schreibweise der Gleichungen.*

In 4. war festgestellt worden, daß die von uns benutzte Form der Gleichungen maßunabhängig aufgefaßt werden kann, somit unabhängig ist von der Wahl und Bestimmung der Grundeinheiten. Schreibt man andererseits ohne Rücksicht auf diese Überlegung für sämtliche in einer Gleichung auftretenden unabhängigen Größen unabhängige Einheiten vor, so wird die Gleichung allgemein mit Hilfe eines Proportionalitätsfaktors erfüllt, der als benannte Zahl eine Einheitenbeziehung darstellt (vgl. das Beispiel eingangs I.). Die einzelnen Maßsysteme unterscheiden sich aber voneinander in der Bestimmung der Grundeinheiten, somit auch im Auftreten und der Größe solcher Faktoren in den einzelnen Gleichungen. Betrachten wir daher die von uns betrachtete Schreibweise nicht als maßunabhängig, sondern als zum praktischen System gehörige Form der Gleichungen, so folgt demnach z. B. aus der Gleichung  $A = QU$ , daß bei unabhängig gegebenen Einheiten für Ladung und Spannung die Arbeits- (Energie-, Kraft-) Einheit nicht eine mechanische, sondern eine elektromagnetische Einheit ist (9.). Ebenso war es gerechtfertigt, das Durchflutungs- und das Induktionsgesetz (die beiden Hauptgleichungen) ohne Proportionalitätsfaktoren zu schreiben, da an diesen Stellen die Möglichkeit besteht, daß die Einheiten der magnetischen Größen nicht selbständig festgelegt, sondern bei gegebenen elektrischen Einheiten an diese angeschlossen werden<sup>2</sup>. Eine Änderung der Form der elektromagnetischen Gleichungen tritt somit (abgesehen von reinen Zahlen) dann ein, wenn man hervorzuheben wünscht, daß in gewissen Gleichungen die Benennungen (Einheiten) der Größen zu beiden Seiten des Gleichheitszeichens voneinander unabhängig sind. Betrifft dieser Wunsch den Anschluß der mechanischen Einheiten über die Energie- und Kraftgleichungen und den Anschluß der elektrischen und magnetischen Einheiten aneinander, so wird man etwa zu schreiben haben:

$$\begin{aligned}w_e &= k_1 \cdot \frac{\mathfrak{E} \mathfrak{D}}{2}, & w_m &= k_2 \cdot \frac{\mathfrak{H} \mathfrak{B}'}{2}; \\ \gamma_1 \cdot \text{rot } \mathfrak{H} &= \mathfrak{E} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}, & \gamma_2 \cdot \text{rot } \mathfrak{E} &= -\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}, & \gamma_3 [\mathfrak{E} \mathfrak{H}] &= \mathfrak{E}.\end{aligned}$$

Zwischen  $\bar{\varepsilon}$ ,  $\bar{\mu}$  und den fünf Koeffizienten bestehen dann hinsichtlich der Benennungen gewisse Beziehungen, die leicht anzugeben sind, falls die anderen elektromagnetischen Gleichungen keine weiteren Koeffizienten enthalten. Für manche Zwecke kann die Auffassung nützlich sein, daß  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{D}$  einerseits,  $\mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{B}$  andererseits jeweils in derselben Einheit zu messen seien. An die Stelle unserer Form  $\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{B}' = \bar{\mu} \mathfrak{H}$  tritt dann offenbar  $\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{B}' = \mu \mathfrak{H}$ . Damit ergibt sich die folgende symmetrische, dieser Voraussetzung besonders angepaßte Schreibweise:

<sup>1</sup> Setzt man die angegebenen absoluten Einheiten 1 abs. Volt und 1 abs. Amp ein, so erhält man in absoluten Einheiten:

$$\begin{aligned}1 \text{ abs. Ohm} &= 10^9 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}, \\ \mu_0 &= 4 \pi = 12,5664 \text{ (reine Zahl)}, \\ \varepsilon_0 &= \frac{1}{4 \pi c^2} = 0,8854 \cdot 10^{-22} \frac{\text{sec}^2}{\text{cm}^2}, \\ \Gamma_0 &= \mu_0 c = 37,672 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}.\end{aligned}$$

<sup>2</sup> Vgl. Anm. zu 28. Gl. (1) und 30. Gl. (1).

$w_e, w_m$  wie oben, daher z. B.  $\mathfrak{R} = k_1 \cdot Q \mathfrak{E}$ , ferner

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = \eta, \quad \rho \mathfrak{G} = \mathfrak{E} + \mathfrak{E}^e, \quad J = \int \mathfrak{G} d\mathfrak{f} = -\frac{\partial Q}{\partial t}, \quad U = k_1 \int \mathfrak{E} dr;$$

$$k_2 \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \mathfrak{G} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}, \quad k_1 \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t};$$

hieraus folgt

$$\mathfrak{S} = k_1 k_2 [\mathfrak{E} \mathfrak{H}] \quad \text{und} \quad c = \sqrt{k_1 k_2}.$$

Bei Benutzung der vier praktischen Grundeinheiten setzt man z. B.  $k_1 = \frac{1}{\varepsilon_0}$ ,  $k_2 = \frac{1}{\mu_0}$ , wobei  $\varepsilon_0$  und  $\mu_0$  die oben angegebenen Größen der beiden universellen Konstanten sind, außerdem läßt sich diese Schreibweise noch manchen anderen Forderungen anpassen<sup>1</sup>.

## 2'. Darstellung periodischer Vorgänge.

Ein zeitlicher Vorgang  $f(t)$  heißt periodisch, wenn seine gesamte Erscheinungsform („Phase“) in regelmäßigen Zeitabständen  $T$  (Periodendauer) identisch wiederkehrt. Dazu gehört, daß in diesen Zeitpunkten nicht nur  $f(t)$  selbst, sondern auch sämtliche zeitlichen Ableitungen ihren Wert wiederholen. (Eine abklingende Schwingung z. B. ist daher nicht in Strenge periodisch.) Der Kehrwert der Periodendauer ist die Anzahl der Perioden in der Zeiteinheit oder die „Frequenz“

$$f = \frac{1}{T}. \quad (1)$$

Sicherlich periodisch sind infolge der Eigenschaften der Kreisfunktionen die „harmonischen“ Zeitfunktionen

$$\cos 2\pi \frac{t}{T}; \quad \sin 2\pi \frac{t}{T}. \quad (2)$$

Hier bezeichnet man

$$\frac{2\pi}{T} = 2\pi f = \omega \quad (3)$$

zur Unterscheidung von  $f$  als „Kreisfrequenz“. Der Betrag des Höchstwertes einer harmonischen Schwingung wird „Amplitude“ oder Schwingungsweite genannt. — Zwei harmonische Schwingungen ergeben addiert einen periodischen Vorgang offensichtlich nur dann, wenn ihre Periodendauern sich zueinander verhalten, wie zwei ganze Zahlen (deren eine Eins sein kann, nicht muß). Dies gilt sinngemäß erweitert für die Summe beliebig vieler harmonischer Schwingungen. Daher umgekehrt: Jeder periodische Vorgang kann zerlegt werden in eine Summe harmonischer Schwingungen, deren Frequenzen sich zueinander verhalten, wie ganze Zahlen (oder: deren Frequenzen ganzzahlige Vielfache einer kleinsten Frequenz sind; die Schwingung dieser kleinsten Frequenz ist aber nicht notwendig mit endlicher Amplitude in der Summe vorhanden). Durch

$$f(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad (4)$$

ist ausgedrückt, daß die harmonische Schwingung mit der Amplitude  $A$  zur Zeit  $t = 0$  den Wert  $A \cdot \sin \varphi$  hat.  $\varphi$  wird Anfangsphase oder besser Phasenwinkel genannt. Eine harmonische Schwingung ist durch Amplitude, Frequenz und Phasenwinkel vollständig gekennzeichnet.

Dreht sich eine Strecke  $A$  mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um einen festen Endpunkt, wie der Zeiger einer Uhr, so beschreiben die Projektionen der Strecke auf eine feste Achse die Ordinaten einer Sinuskurve. Bezeichnet daher in Abb. 1 die Strecke  $\overline{OP} = A$  die Amplitude der harmonischen Schwingung und stimmt die Winkelgeschwindigkeit mit der Kreisfrequenz  $\omega$  überein, so stellen die Projektionen  $\overline{OP'}$  auf die zur Anfangslage senkrechte Richtung die Augenblicks-

<sup>1</sup> Vgl. Anm. 2 zu 1'. Gl. (13), S. 172.

werte von  $A \cdot \sin \omega t$  dar. Entsprechend bezeichnet für eine zweite Schwingung, die die gleiche Frequenz  $\omega$  und die Amplitude  $\overline{OQ} = B$  hat, und gegenüber  $A$  um einen Phasenwinkel  $\varphi$  verschoben ist, die Projektion  $\overline{OQ'}$  die Augenblickswerte von  $B \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ . Als Drehrichtung der Strecken wählt man allgemein die mathematische (gegen den Uhrzeiger). Anstatt die Strecken rotieren zu lassen,

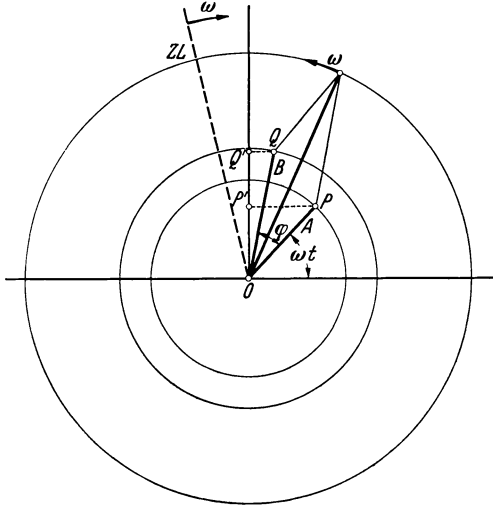


Abb. 2'. 1. Zur geometrischen Darstellung harmonischer Schwingungen.

kann man sie auch feststehend denken und die Gerade, auf die sie projiziert werden, im entgegengesetzten Sinne drehen lassen: Zeitlinie (Z.L.). Eine Schwingung 1 eilt um einen Phasenwinkel  $\varphi$  vor einer anderen 2 voraus, wenn die Zeitlinie zuerst in die Lage 1 kommt. Solange es sich um mehrere Schwingungen gleicher Frequenz handelt, sind die Winkel zwischen den einzelnen Strecken konstant, man kann daher die einzelnen Strecken, wie Vektoren, zu sich selbst parallel verschieben, es gelten daher die bekannten Regeln der geometrischen Addition für diese Strecken.

Das Gegenstück zu dieser Darstellung gründet sich auf die bekannte Tatsache, daß in der Ebene der komplexen Zahlen der Ausdruck

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha \quad (5)$$

eine Strecke der Länge Eins vorstellt, die mit der reellen Achse den (gegen den Uhrzeigerdrehsinn gezählten) Winkel  $\alpha$  bildet. Daher ist die komplexe Zahl

$$a + ib = r \cdot e^{i\alpha} = r(\cos \alpha + i \sin \alpha), \quad (6)$$

wenn

$$r^2 = a^2 + b^2, \quad \text{tg } \alpha = \frac{b}{a}.$$

Wir schreiben auch: Betrag von  $a + ib = r = |a + ib|$ . Abb. 2. Nehmen wir also  $\alpha$  zeitlich veränderlich an:  $\alpha = \omega t + \varphi$ , so ist der reelle Teil („Re“) von

$$A \cdot e^{i(\omega t + \varphi)} \quad (7)$$

die Schwingung  $A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ , der imaginäre Teil („Im“) ist  $A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ .

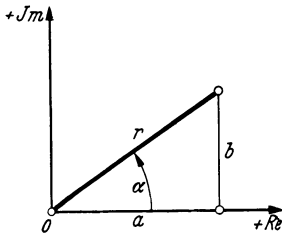


Abb. 2'. 2. Bezeichnungen in der Ebene der komplexen Zahlen.

Es ist offenbar, daß man mit Gl. (7) viel leichter rechnet, als mit den Kreisfunktionen (z. B. differenzieren und integrieren); es ist aber notwendig, jeweils anzugeben, ob man den reellen oder imaginären Teil der komplexen Ausdrücke meint. Stellt man mehrere Schwingungen nach Art von Gl. (7) dar, so bleiben, gleiche Frequenz  $\omega$  vorausgesetzt, die Winkel zwischen den einzelnen, die Amplituden vorstellenden Strecken konstant. Daher können die einzelnen Strecken parallel zu sich selbst verschoben und

ebenso addiert werden wie Vektoren. Wenn man sich aber nur für die Größen und die unveränderliche relative Lage der Strecken zueinander interessiert, liegt es nahe, überall die Zeitfunktion  $e^{i\omega t}$  abzuspalten:

$$A \cdot e^{i(\omega t + \varphi)} = \{ A \cdot e^{i\varphi} \} e^{i\omega t} = \tilde{A} e^{i\omega t}. \quad (8)$$

Die komplexe Zahl  $\tilde{A}$ , die aussagt sowohl über die Amplitude  $A$  der Schwingung wie über ihren Phasenwinkel (Anfangsphase)  $\varphi$ :

$$\left. \begin{aligned} \tilde{A} &= A e^{i\varphi}, & |\tilde{A}| &= A, & \operatorname{Re} \tilde{A} &= A \cos \varphi; \\ \tilde{A} &= a + ib, & A &= +\sqrt{a^2 + b^2}, & \operatorname{tg} \varphi &= \frac{b}{a} \end{aligned} \right\} \quad (9)^1$$

wird in abgekürzter Ausdrucksweise als „komplexe Amplitude“ bezeichnet. Mit den von der Zeit unabhängigen komplexen Amplituden ist daher zu rechnen wie mit gewöhnlichen komplexen Zahlen, deren Rechenregel wir hier nicht wiederholen wollen. Um zur physikalischen Lösung zu kommen, ist nach Multiplikation mit  $e^{i\omega t}$  je nach Verabredung der reelle oder der imaginäre Teil des Ausdrucks zu nehmen.

Die einfache Rechnung mit komplexen Amplituden beschränkt sich auf das lineare Gebiet (lineare Operationen, gleiche Frequenz).

Das Produkt der reellen Teile zweier komplexer Größen ist verschieden von dem reellen Teile des Produktes. Praktisch kommt es allein auf den zeitlichen Mittelwert des Produktes zweier harmonischer Schwingungen gleicher Frequenz an. Sind die beiden Schwingungen z. B.

$$U = U_0 \cos(\omega t + \varphi), \quad J = J_0 \cos(\omega t + \varphi), \quad (10)$$

so ist der zeitliche Mittelwert des Produktes

$$\overline{UJ} = \frac{1}{T} \int_0^T U J dt = \frac{1}{2} U_0 J_0 \cos(\varphi - \psi). \quad (11)$$

Sind  $U$  und  $J$  Wechselspannung und -strom, so ist  $\overline{UJ} = \bar{N}$  die mittlere Wirkleistung. — Setzt man  $U = J$ , so ergibt Gl. (11)

$$\bar{J}^2 = \frac{1}{2} J_0^2, \quad (12)$$

und  $\bar{J}^2$  als Zeitmittel des Quadrates des Wechselstromes wird Quadrat des „Effektivwertes“ genannt. Die beiden Schwingungen Gl. (10) können wir auch darstellen durch

$$\left. \begin{aligned} U &= \operatorname{Re} \{ \tilde{U}_0 e^{i\omega t} \}; & \tilde{U}_0 &= U_0 e^{i\varphi}, \\ J &= \operatorname{Re} \{ \tilde{J}_0 e^{i\omega t} \}; & \tilde{J}_0 &= J_0 e^{i\psi}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Ersetzen wir eine der beiden komplexen Größen  $\{ \dots \}$  durch ihren konjugiert komplexen Wert<sup>2</sup> und bilden das halbe Produkt mit der anderen, so haben wir

$$\left. \begin{aligned} \text{entweder} & \quad \frac{1}{2} \tilde{U}_0 e^{i\omega t} \cdot \tilde{J}_0^* e^{-i\omega t} = \frac{1}{2} U_0 J_0 \cdot e^{i(\varphi - \psi)} = \tilde{P}, \\ \text{oder} & \quad \frac{1}{2} \tilde{U}_0^* e^{-i\omega t} \cdot \tilde{J}_0 e^{i\omega t} = \frac{1}{2} U_0 J_0 \cdot e^{-i(\varphi - \psi)} = \tilde{P}^*; \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

hiervon ist der reelle Teil

$$\operatorname{Re} \tilde{P} = \operatorname{Re} \tilde{P}^* = \frac{1}{2} U_0 J_0 \cdot \cos(\varphi - \psi) = \overline{UJ}. \quad (15)^3$$

Der zeitliche Mittelwert des Produktes der beiden Schwingungen wird somit erhalten als der reelle Teil des halben Produktes des komplexen Ausdruckes der einen Schwingung mit dem konjugiert komplexen Ausdruck der anderen Schwingung.

<sup>1</sup> Die hier zur Verdeutlichung über die komplexen Zahlen geschriebenen Zirkumflexe werden normalerweise weggelassen.

<sup>2</sup> Zu  $\tilde{A} = a + ib = |\tilde{A}| e^{i\alpha}$  ist konjugiert komplex  $\tilde{A}^* = a - ib = |\tilde{A}| \cdot e^{-i\alpha}$ . Daher ist  $\tilde{A} \tilde{A}^* = |\tilde{A}|^2$ .

<sup>3</sup> Beispiel: Besteht zwischen  $U_0$  und  $J_0$  die Beziehung  $\tilde{U}_0 = \tilde{J}_0 (R + iX)$ , so ist

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \tilde{U}_0 \tilde{J}_0^* \} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \tilde{J}_0 \tilde{J}_0^* (R + iX) \} = \frac{1}{2} R |\tilde{J}_0|^2 = \bar{N},$$

$$\text{oder} \quad \frac{1}{4} (\tilde{U}_0 \tilde{J}_0^* + \tilde{U}_0^* \tilde{J}_0) = \frac{1}{4} \tilde{J}_0 \tilde{J}_0^* (R + iX + R - iX) = \frac{1}{2} R |\tilde{J}_0|^2 = \bar{N}.$$

Aus Gl. (14), (15) ergibt sich unmittelbar eine weitere, häufig bequeme Darstellung für  $\overline{UJ}$ : Es gilt für jede komplexe Zahl  $P$

$$\operatorname{Re} \tilde{P} = \frac{1}{2} (\tilde{P} + \tilde{P}^*), \quad (16)^1$$

daher hat man einfach

$$\overline{UJ} = \frac{1}{4} (\tilde{U}_0 \tilde{J}_0^* + \tilde{U}_0^* \tilde{J}_0). \quad (17)^2$$

Eine wichtige Anwendung findet diese Produktbildung beim „komplexen Energieströmungsvektor“ [41. Gl. (11) bis (20)].

### 3'. Formeln der Vektorenrechnung.

#### a) Vektoren und einfache Operationen.

Eine Größe wird als Skalar bezeichnet, wenn alle Werte, die sie annehmen kann, eindeutig auf der Zahlengeraden abgebildet werden können. Eine Größe wird als Vektor bezeichnet, wenn alle Werte, die sie annehmen kann, eindeutig abgebildet werden können in geradlinigen Verschiebungen eines Punktes aus einer Anfangs- in eine Endlage. Ein Skalar wird vollständig beschrieben durch Angabe eines Betrages, ein Vektor durch eine nach Betrag und Richtung zu gebende Strecke<sup>3</sup>. Ein Vektor ist demnach durch drei Zahlenangaben bestimmt, z. B. durch seine drei Komponenten in bezug auf ein rechtwinkeliges Koordinatensystem.

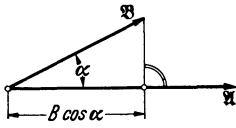


Abb. 3'. 1. Projektion eines Vektors.

Wir benutzen ausschließlich rechtswendige (rechtshändige) Koordinatensysteme.

Die Komponente eines Vektors ist seine Projektion auf eine gegebene Richtung. Die Projektion ist ein Skalar. Wir schreiben Vektoren mit deutschen, Skalare mit lateinischen Buchstaben: Vektor  $\mathfrak{A}$ , Betrag  $A = |\mathfrak{A}|$ ,  $x$ -Komponente  $A_x$ .

*Addition und Subtraktion* („Parallelogramm der Kräfte“, Krafteck):

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{B} + \mathfrak{A}$$

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{C} - \mathfrak{A} = \mathfrak{C} + (-\mathfrak{A})$$

$$\mathfrak{B} - \mathfrak{B} = 0$$

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) + \mathfrak{C} = \mathfrak{A} + (\mathfrak{B} + \mathfrak{C}) = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}.$$

*Multiplikation mit einem Skalar*  $\mathfrak{B} = \alpha \mathfrak{A}$ : Vektor  $\mathfrak{B}$  in Richtung des Vektors  $\mathfrak{A}$ , Betrag  $B = \alpha A$  (mit  $\alpha \leq 0$  ändert sich der Richtungssinn). Daher:

*Einheitsvektoren*  $\mathfrak{A} = A \mathfrak{A}^0$ : es ist  $\mathfrak{A}^0$  ein Symbol für einen Vektor vom Betrage Eins:  $A^0 = 1$ , daher  $\mathfrak{A}^0 = \frac{\mathfrak{A}}{A}$ .

$\mathfrak{r}^0 = \frac{\mathfrak{r}}{r}$  ist ein Vektor in Richtung des Fahrstrahles  $\mathfrak{r}$  vom Betrage Eins.

$\mathfrak{n}$  und  $\mathfrak{t}$  sind die normale und die tangentielle Richtung anzeigende Einheitsvektoren.

$\mathfrak{i}$ ,  $\mathfrak{j}$ ,  $\mathfrak{k}$  sind Einheitsvektoren in Richtung der  $x$ -,  $y$ -,  $z$ -Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystemes.

*Skalares oder inneres Produkt zweier Vektoren* definiert durch

$$\mathfrak{A} \mathfrak{B} = A B \cdot \cos(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}),$$

ist also ein Skalar<sup>4</sup> (Abb. 1). Weil  $\cos(-\varphi) = \cos \varphi$ , gilt das kommutative Gesetz

$$\mathfrak{A} \mathfrak{B} = \mathfrak{B} \mathfrak{A},$$

$$\mathfrak{A} \mathfrak{B} = 0, \quad \text{wenn } \mathfrak{A} \perp \mathfrak{B}.$$

<sup>1</sup> Beispiel:  $\operatorname{Re} \{e^{i\alpha}\} = \frac{1}{2} (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}) \equiv \cos \alpha$ .

<sup>2</sup> Siehe Anm. 3, S. 183.

<sup>3</sup> Masse, Arbeit, Energie sind Skalare; Kraft, Geschwindigkeit, Drehmoment sind Vektoren.

<sup>4</sup> Beispiel: Die Arbeit, wenn eine Kraft  $\mathfrak{K}$  an einem mit der Geschwindigkeit  $\mathfrak{v}$  bewegten Punkte angreift, ist in der Zeiteinheit  $\mathfrak{K} \mathfrak{v} = K v \cdot \cos(\mathfrak{K}, \mathfrak{v})$ .



$$\mathfrak{A} \mathfrak{A} = \mathfrak{A}^2 = A^2; \quad (\mathfrak{A}^0)^2 = 1$$

$$i i = j j = \mathfrak{k} \mathfrak{k} = 1; \quad i j = j \mathfrak{k} = \mathfrak{k} i = 0.$$

Die  $x$ -Komponente von  $\mathfrak{A}$  nach Definition

$$i \mathfrak{A} = 1 \cdot A \cdot \cos(x, \mathfrak{A}) \equiv A_x;$$

Zerlegung von  $\mathfrak{A}$  in rechtwinkelige Komponenten (vgl. Abb. 2a)

$$\mathfrak{A} = i A_x + j A_y + \mathfrak{k} A_z.$$

$$i \mathfrak{A} = i^2 A_x = A_x;$$

$$\mathfrak{A}^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A^2.$$

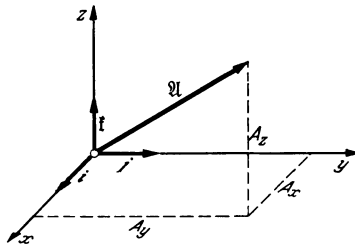


Abb. 3'. 2a. Komponenten eines Vektors in bezug auf ein rechtwinkeliges, rechtswendiges Koordinatensystem. Einheitsvektoren.

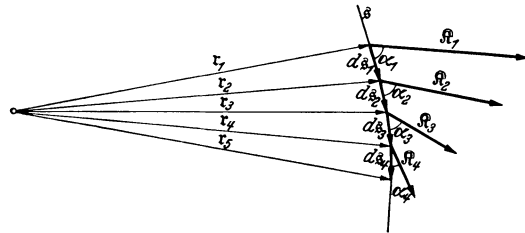


Abb. 3'. 3. Zum Begriff „Linienintegral“.

Komponente von  $\mathfrak{A}$  in beliebiger Richtung  $\mathfrak{s}$ , deren Winkel mit den Einheitsvektoren bekannt sind:

$$A_s = A_x \cos(\mathfrak{s}, x) + A_y \cos(\mathfrak{s}, y) + A_z \cos(\mathfrak{s}, z),$$

den Vektoren eigentümliches, grundlegendes Gesetz der Komponentenbildung.

Skalares Produkt in Komponenten

$$\mathfrak{A} \mathfrak{B} = (i A_x + j A_y + \mathfrak{k} A_z) (i B_x + j B_y + \mathfrak{k} B_z)$$

$$= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z,$$

daher

$$\frac{d}{dt} (\mathfrak{A} \mathfrak{B}) = \mathfrak{A} \frac{d\mathfrak{B}}{dt} + \mathfrak{B} \frac{d\mathfrak{A}}{dt};$$

$\mathfrak{A} \mathfrak{C} + \mathfrak{B} \mathfrak{C} = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \mathfrak{C}$ : distributives Gesetz gilt.

$\mathfrak{A} \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C}$ : Multiplikation des Vektors  $\mathfrak{C}$  mit dem Skalar  $\mathfrak{A} \mathfrak{B}$ . Daher

$$\mathfrak{A} \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C} = \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{A} \mathfrak{B} = \mathfrak{B} \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{A}.$$

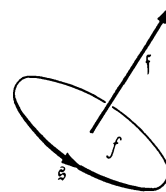


Abb. 3'. 2b. Vektorielle Fläche. Rechtswendige Zuordnung.

*Linienintegral eines Vektors.* Veranschaulicht durch Arbeit der Kraft  $\mathfrak{R}$  längs der Kurve  $\mathfrak{s}$ , durch Zerlegung von  $\mathfrak{s}$  in verschwindend kleine gerade Wegelemente  $d\mathfrak{s}$  (Abb. 3).  $dA = K \cdot d s \cdot \cos \alpha = \mathfrak{R} d\mathfrak{s}$ ,  $A = \int_1^2 \mathfrak{R} d\mathfrak{s} = \int_1^2 \mathfrak{R} dr$ , denn es ist zugleich  $d\mathfrak{s}_1 = r_2 - r_1$ , usw.

Bei geschlossener Kurve  $\mathfrak{s}$  heißt  $\oint \mathfrak{R} d\mathfrak{s}$  Rand- oder Umlaufintegral.

*Vektorielle Fläche, rechtswendige Zuordnung.* Ein ebenes, durch eine Kurve  $\mathfrak{s}$  umgrenztes Flächenstück wird durch einen Vektor  $\mathfrak{f}$  dargestellt, indem man festsetzt, daß der Betrag  $f$  ein Maß für den Flächeninhalt ist und der Vektor  $\mathfrak{f}$  normal auf dem Flächenstück steht: als positive Normale gilt uns stets die dem Umlaufssinn von  $\mathfrak{s}$  rechtswendig zugeordnete Normalenrichtung (Rechtsschraube, Korkzieher, Abb. 2b). Die Normale  $n$  ist stets der Fläche rechtswendig zugeordnet:  $\mathfrak{f} = n f$ ; es sind  $i, j, \mathfrak{k}$  den jeweiligen Koordinatenebenen rechtswendig zugeordnet.

*Fluß eines Vektors.* Eine nicht zusammendrückbare Flüssigkeit ströme mit der Geschwindigkeit  $v$  durch einen Querschnitt  $f$ . Das in der Zeiteinheit durchgeflossene Volumen ist

$$\Phi = v f \cdot \cos(v, n) = v f. \quad \text{Allgemein:}$$

$$\text{„Fluß“ } \Phi = \int v d f.$$

Ist die Fläche eine geschlossene Hülle, so ist der „Hüllenfluß“  $\Phi = \oint v d f$ .

*Vektoriell es oder äußeres Produkt zweier Vektoren* definiert durch

$$\mathfrak{C} = [\mathfrak{A} \mathfrak{B}]; \quad C = A B \cdot \sin(\mathfrak{A}, \mathfrak{B});$$

der Betrag gleicht dem Inhalt des aus  $A$  und  $B$  gebildeten Parallelogrammes, die Richtung ist rechtswendig senkrecht auf dieser Ebene<sup>1</sup> (Abb. 4). Wegen  $\sin(-\varphi) = -\sin \varphi$  ist

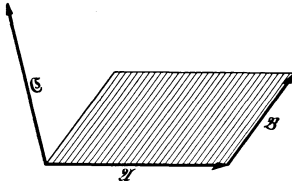


Abb. 3'. 4. Darstellung des vektoriellen Produktes.

$[\mathfrak{A} \mathfrak{B}] = -[\mathfrak{B} \mathfrak{A}]$ , kommutatives Gesetz gilt nicht.

$[\mathfrak{A} \mathfrak{B}] = 0$ , wenn  $\mathfrak{A} \parallel \mathfrak{B}$ .

$[\mathfrak{A} \mathfrak{A}] = 0$ .

$[i i] = [j j] = [k k] = 0$ .

$[i j] = k, [j k] = i, [k i] = j$ .

Daher Komponentendarstellung des vektoriellen Produktes

$$\mathfrak{C} = [\mathfrak{A} \mathfrak{B}] = i C_x + j C_y + k C_z$$

$$\mathfrak{C} = [(i A_x + j A_y + k A_z)(i B_x + j B_y + k B_z)]$$

$$= i(A_y B_z - A_z B_y) + j(A_z B_x - A_x B_z) + k(A_x B_y - A_y B_x),$$

oder als Determinante geschrieben

$$[\mathfrak{A} \mathfrak{B}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}.$$

Distributives Gesetz gilt:  $[\mathfrak{A}(\mathfrak{B} + \mathfrak{C})] = [\mathfrak{A} \mathfrak{B}] + [\mathfrak{A} \mathfrak{C}]$ .

*Zusammengesetzte Produkte.*

Vektor  $\mathfrak{A} \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C}$  siehe oben.

Skalares Produkt eines Vektorproduktes  $V = \mathfrak{A} [\mathfrak{B} \mathfrak{C}]$  veranschaulicht durch das Volumen des Quaders mit den Seiten  $A, B, C$ . Daher

$$V = \mathfrak{A} [\mathfrak{B} \mathfrak{C}] = \mathfrak{B} [\mathfrak{C} \mathfrak{A}] = \mathfrak{C} [\mathfrak{A} \mathfrak{B}] \text{ „Vertauschungssatz“}.$$

Daher:  $V = 0$ , wenn  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$  in derselben Ebene liegen.

Vektorprodukt eines Vektorproduktes  $\mathfrak{B} = [\mathfrak{A} [\mathfrak{B} \mathfrak{C}]]$

$$= [\mathfrak{C} \mathfrak{B}] \mathfrak{A} = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A} \mathfrak{C} - \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{A} \mathfrak{B} \text{ „Entwicklungssatz“}.$$

$\mathfrak{B}$  liegt in der Ebene durch  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{C}$  und senkrecht zur Projektion von  $\mathfrak{A}$  auf diese Ebene.

Daher:  $\mathfrak{B} = 0$ , wenn Ebene durch  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{C}$  senkrecht zu  $\mathfrak{A}$ .

$$\mathfrak{A} = n \cdot \mathfrak{A} n + [n [\mathfrak{A} n]],$$

der erste Summand ist parallel zu  $n$ , der zweite senkrecht zu  $n$ .

### b) Vektorfelder.

Wird in einem Raum der Wert einer Zustandsgröße in Abhängigkeit vom Ort untersucht, so spricht man vom Feld dieser Zustandsgröße; demnach sind möglich Skalarfelder (hier vorzugsweise „Verteilungen“ genannt, z. B. Temperaturverteilung in einem Raum) und Vektorfelder (z. B. Geschwindigkeitsverteilung in einer Strömung). Bild eines Feldes  $v$  durch Eintragen der Tangentenrichtung in jedem Raum-

<sup>1</sup> Beispiel: Moment  $\mathfrak{C}$  einer Kraft  $\mathfrak{B}$  am Hebelarm  $\mathfrak{A}$ .

punkt. Der Feldrichtung folgende Kurven heißen Feldlinien, ihre Gleichung ist  $[v \, d\mathfrak{s}] = 0$ . Oder: Einteilung des Feldes in Röhren, durch deren Wandungen kein Fluß hindurchtritt, so daß  $v \cdot \delta\mathfrak{f} = \text{const}$  für jede Feldröhre. Wir nennen ein Feld ein vollständiges, wenn durch die betrachtete Begrenzung keine Feldlinien (-röhren) hindurchtreten.

Ursprung für Vektorfelder: Quellen oder Wirbel. Ein von beiden verursachtes Feld kann stets eindeutig in ein quellenfreies und ein wirbelfreies verlegt werden. Daher bleiben zu untersuchen wirbelfreie und quellenfreie Felder mit Hilfe von Randintegral und Hüllenfluß;  $v$  ergibt sich als

wirbelfreies Feld, wenn  $\oint v \, d\mathfrak{r} = 0$  unabhängig vom Wege,

quellenfreies Feld, wenn  $\oint v \, d\mathfrak{f} = 0$  unabhängig von der Fläche.

In wirbelfreien Feldern entspringen und versiegen die Feldröhren in Quellen und Senken des Feldes, oder erstrecken sich ins Unendliche, in quellenfreien Feldern kehren die Feldröhren in sich zurück, sind also geschlossen, oder sie erstrecken sich ins Unendliche.

*Wirbelfreie Felder.*

*Quellenstärke oder Divergenz.* Um von dem von Null verschiedenen Hüllenfluß  $\oint v \, d\mathfrak{f} \neq 0$  auf die im umschlossenen, endlich großen Raumgebiet  $\tau$  vorhandenen Quellen oder Senken des Feldes zu schließen, dient der Satz von Gauß

$$\oint v \, d\mathfrak{f} = \int_{\tau} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) d\tau;$$

der Integrand des Raumintegrals bezeichnet die Ergiebigkeit oder Quellenstärke jedes Elementes  $d\tau$  des von  $\mathfrak{f}$  umhüllten Raumes:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \equiv \text{div } v;$$

Divergenz in rechtwinkligen Komponenten. Der Skalar  $\text{div } v$  bezeichnet also die Summe der Änderungen der Komponenten in der jeweiligen Längsrichtung. Aus dem Satz von Gauß:

$$\text{div } v = \lim_{\tau \rightarrow d\tau} \frac{1}{\tau} \oint v \, d\mathfrak{f};$$

die Quellenstärke ist der Hüllenfluß eines unbegrenzt kleinen Raumteiles, im Verhältnis zu dessen Rauminhalt.

Der Fluß eines quellenfreien Feldes durch eine Fläche, deren Randkurve fest und gegeben ist, ist unabhängig von der Form der in die Randkurve eingespannten Fläche. Beweis: Zwei in dieselbe Randkurve eingespannte Flächen bilden zusammen eine Hülle, und der Hüllenfluß des quellenfreien Feldes ist definitionsmäßig Null.

Sprungdivergenz. Ändert sich ein Vektor un-  
stetig beim Durchstoßen einer Grenzfläche, so umhüllen wir ein Element der Grenzfläche durch eine dosenartige Hüllfläche, vgl. Abb. 5. Der Satz von Gauß ergibt dann

$$\oint v \, d\mathfrak{f} = \int_{\mathfrak{f}} n_{1/2} (v_2 - v_1) \, d\mathfrak{f}.$$

$$n_{1/2} (v_2 - v_1) \equiv \text{Div } v$$

ist der Sprung der Normalkomponenten von  $v$ , also die „Längsänderung“.

*Gradient oder Gefällstärke; Potential.* Im wirbelfreien Feld ist das Randintegral Null (Beispiel: Arbeit im Schwerfeld längs eines geschlossenen Weges), und daher

$\int_1^2 v \, d\mathfrak{r}$  unabhängig von dem zwischen Anfangspunkt 1 und Endpunkt 2 durchlaufenen Wege. Beweis: Zwei zwischen 1 und 2 verlaufende, beliebige Wege bilden

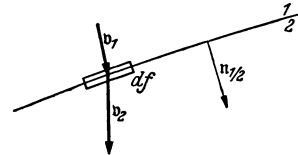


Abb. 3' 5. Zum Begriff „Sprungdivergenz“.

zusammen eine geschlossene Kurve, längs der im wirbelfreien Feld definitionsmäßig das Randintegral verschwindet. Daraus: vereinfachte Darstellung wirbelfreier Felder durch Hilfsskalar  $\varphi$  „Potential“, der eine Funktion der Feldpunkte, also des Ortes, ist, gemäß

$$\varphi_P = \varphi_0 - \int_0^P \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} ;$$

$P$  der betrachtete, 0 ein beliebig als Nullpunkt gewählter Bezugspunkt,  $\varphi_P$  daher bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt, und

$$\int_1^2 \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \varphi_1 - \varphi_2 .$$

Nach obiger Definition ist  $d\varphi = -\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = -v_r dr$ , daher Komponente des wirbelfreien Feldes  $\mathbf{v}$  in Richtung  $\hat{s}$ :

$$v_s = -\frac{\partial \varphi}{\partial s} ;$$

in rechtwinkligen Komponenten  $-d\varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx = v_x dx$ ; daraus durch Zusammenfassung

$$\mathbf{v} = i \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + j \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + k \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \equiv -\text{grad } \varphi ;$$

Darstellung des wirbelfreien Feldes  $\mathbf{v}$  durch negativen Gradienten oder Gefällstärke (Vektor) der Potentialfunktion (Skalar).

Veranschaulichung des wirbelfreien  $\mathbf{v}$  durch Flächen gleichen Potentials, äquipotentielle Flächen  $\varphi = \text{const}$ : auf ihnen stehen die Feldlinien senkrecht, denn für sie gilt  $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = 0$ . Man definiert als

Sprunggradient  $\text{Grad } \varphi \equiv n_{1/2} (\varphi_2 - \varphi_1)$

den die sprunghafte Änderung eines Skalars an einer Grenzfläche darstellenden Vektor<sup>1</sup>.

*Berechnung des wirbelfreien Feldes aus seinen Quellen.* Es sei gegeben die räumliche Quellenverteilung  $\rho(x, y, z) = \text{div } \mathbf{v}$ . Wegen der Wirbelfreiheit ist  $\mathbf{v} = -\text{grad } \varphi$ , daher

$$-\rho(x, y, z) = \text{div grad } \varphi \equiv \Delta \varphi ,$$

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} .$$

Über die Bestimmung des Potentials aus seinen Eigenschaften, und durch Integration von  $\Delta \varphi = 0$  und  $\Delta \varphi = -\rho$  (Laplacesche und Poissonsche Gleichung) siehe ausführlich das Beispiel des wirbelfreien elektrostatischen Feldes 17. bis 22.

#### Quellenfreie Felder.

*Rotation oder Wirbelstärke.* Im nicht wirbelfreien Feld ist  $\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \neq 0$ . Der Wert des entlang einer geschlossenen Kurve von endlicher Länge genommenen Umlaufintegrals ist bestimmt durch Beiträge der einzelnen Elemente der in den Rand eingespannten, im übrigen wegen der Quellenfreiheit beliebigen Fläche durch den Satz von Stokes:

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int \text{rot } \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} .$$

$$\text{rot } \mathbf{v} = i \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + j \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + k \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) ;$$

$$\text{rot } \mathbf{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

<sup>1</sup> Beispiel: Temperatursprung an einer Wandung, ihm proportional der Wärmestrom.

Der Integrand des Flächenintegrals beschreibt die sämtlichen nach bestimmter Vorschrift auszurechnenden Queränderungen des Feldes: Wirbelstärke oder Rotation.

Beispiel: Ebene Strömung in Richtung  $x$ , deren Geschwindigkeit quer zum Feld sich ändert:  $v = i v_x(y)$ , Abb. 6:  $\oint v dr = l(v_1 - v_2) \neq 0$ ,  $rot v = -j \frac{\partial v_x}{\partial y}$ .

Aus dem Satz von Stokes als anschaulicher Ausdruck für die Wirbelstärke:

$$|rot v| = \lim_{f \rightarrow df} \frac{1}{f} \oint v dr,$$

die Wirbelstärke ist das Randintegral um ein unbegrenzt kleines Flächenelement, im Verhältnis zu dessen Flächeninhalt. Die Richtung der Wirbelstärke ist die der

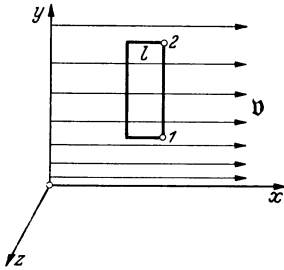


Abb. 3'. 6. Beispiel eines eindimensionalen, Wirbel enthaltenden Feldes.

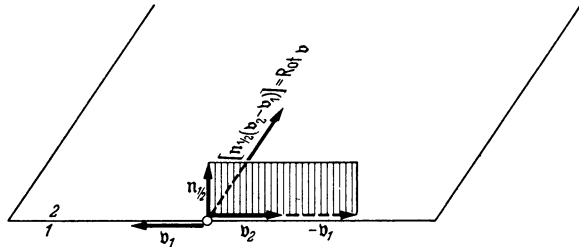


Abb. 3'. 7. Rechtsdrehender Sprungwirbel.

Flächennormalen. Eine die Vorstellungskraft unterstützende Veranschaulichung dieses Ausdruckes für die Wirbelstärke ist ein unendlich kleines Mühlrädchen mit freier Achse. An einem Punkt einer Flüssigkeitsströmung befindet sich kein Wirbel, wenn dort das Mühlrädchen bei sämtlichen Achsenstellungen unbeweglich bleibt (Beobachtung an Vorgängen des täglichen Lebens!).

Wo eine sprunghafte Queränderung eines Feldes vorhanden ist, z. B. ein Sprung in der Geschwindigkeit zweier benachbarter Schichten einer strömenden (z. B. zähen) Flüssigkeit, bildet man um die Sprungfläche einen schmalen Umlauf und findet mit dem Satz von Stokes

$$\oint v dr = \int_f [n_{1/2}(v_2 - v_1)] df,$$

mithin als Kennzeichen für die sprunghafte Queränderung den

Sprungwirbel  $Rot v \equiv [n_{1/2}(v_2 - v_1)]$

gleich dem Sprung der tangentialen Komponenten des Feldes (Queränderung!). Abb. 7 zeigt einen einfachen rechtsdrehenden Sprungwirbel.

Vgl. auch 28. Abb. 8. Beschreibt man mit den Händen die Bewegungen  $v_1$  und  $v_2$ , so beschreibt ein dazwischengelegter „Quirl“ (Küchengerät) den Vektor  $Rot v$ . Daraus:

an die Stelle von „Wirbelstärke“ wäre besser „Quirl“ zu setzen.

Wir betrachten noch das Beispiel eines ebenen Feldes, dessen Feldlinien konzentrische Kreise sind. Wegen der in sich zurückkehrenden Feldlinien ist das Feld sicher quellenfrei, daher hat es im allgemeinen die Eigenschaft  $\oint v dr \neq 0$ , es hat Wirbel. Wir fragen, unter welcher Bedingung ein solches Feld doch wirbelfrei sein kann. Dazu muß sein nach Abb. 8

$$0 = \oint v dr = v_1 \cdot \overline{AB} - v_2 \cdot \overline{CD};$$

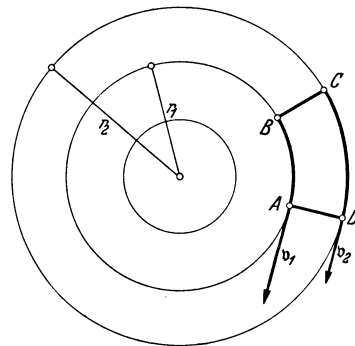


Abb. 3'. 8. Prüfung eines ebenen, zirkulären Feldes auf Wirbelfreiheit.

das Verhältnis der Wege ist  $\overline{AB}:\overline{CD}=r_1:r_2$ , die Bedingung lautet also  $v_1 r_1 = v_2 r_2 = \text{const}$ ;  $v = \text{const} \cdot \frac{1}{r}$ ; bei jedem anderen Entfernungsgesetz ist das Feld nicht wirbelfrei (Mühlrädchen!). Dies ist z. B. der grundlegende Unterschied zwischen dem magnetischen Feld im Innern eines einzelnen, Gleichstrom führenden Runddrahtes, und außerhalb des Drahtes.

Der Fluß der Wirbelstärke hat wegen des Satzes von Stokes  $\int \text{rot } v \, d\mathfrak{f} = \oint v \, dx$  für alle in dieselbe Randkurve eingespannten Flächen denselben Wert. Faßt man zwei beliebige derartige Flächen zu einer Hülle zusammen, so ist somit stets

$$\oint \text{rot } v \, d\mathfrak{f} = 0, \quad \text{daher} \quad \text{div rot } v = 0,$$

die Wirbelstärke ist stets quellenfrei.

Für ein wirbelfreies Feld ist

$$\oint \text{grad } \varphi \, dx = 0, \quad \text{daher} \quad \text{rot grad } \varphi = 0.$$

Durch Ausrechnen findet man ferner

$$\text{rot rot } v = \text{grad div } v - \Delta v,$$

wenn man unter dem Vektor  $\Delta v$  die Operation

$$\Delta v = i \Delta v_x + j \Delta v_y + k \Delta v_z$$

versteht, die oben auf einen Skalar angewendet angeschrieben ist. Daher auch

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}.$$

*Berechnung des quellenfreien Feldes aus seinen Wirbeln.* Ein Feld  $v$ , das quellenfrei ist,  $\text{div } v = 0$ , ist durch seine Wirbel gegeben:  $\mathfrak{B} = \text{rot } v$  (eindeutig, wenn  $v$  im Unendlichen verschwindet). Wie ein wirbelfreier Vektor als Gradient einer skalaren Ortsfunktion dargestellt werden kann, kann ein quellenfreier Vektor als Rotation einer vektoriellen Ortsfunktion  $\mathfrak{A}$  dargestellt werden durch  $v = \text{rot } \mathfrak{A}$ , denn es ist  $\text{div rot } \mathfrak{A} \equiv 0$ . Zwischen  $v$  und  $\mathfrak{B}$  besteht der Zusammenhang

$$\mathfrak{B} = \text{rot rot } \mathfrak{A} = \text{grad div } \mathfrak{A} - \Delta \mathfrak{A}$$

und  $\mathfrak{B} = -\Delta \mathfrak{A}$ , wenn  $\mathfrak{A}$  der Bedingung  $\text{div } \mathfrak{A} = 0$  unterworfen wird. Über die Integration dieser Differentialgleichung und die Bestimmung des vektoriellen Potentials siehe ausführlich das Beispiel des quellenfreien magnetischen Feldes 34.

### c) Rechenregeln.

Rechnung und Gedächtnis werden entlastet durch Benutzung des von Hamilton angegebenen „symbolischen Nabla-Operators  $\nabla$ “, der nach den Regeln der Vektoren- und der Differentialrechnung behandelt wird. Er ist in rechtwinkligen Komponenten

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}.$$

Anwendung auf einen Skalar:

$$\nabla \varphi = i \frac{\partial \varphi}{\partial x} + j \frac{\partial \varphi}{\partial y} + k \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \text{grad } \varphi.$$

Skalares Produkt mit einem Vektor:

$$\nabla \mathfrak{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \text{div } \mathfrak{A}.$$

Vektoriell Produkt mit einem Vektor:

$$[\nabla \mathfrak{A}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \text{rot } \mathfrak{A}.$$

Ferner

$$\nabla^2 = \nabla \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta.$$

Man findet auf diese Weise leicht

$$[\nabla (\nabla \varphi)] = \text{rot grad } \varphi = 0$$

$$\nabla [\nabla \mathfrak{A}] = \text{div rot } \mathfrak{A} = 0$$

$$\nabla (\nabla \varphi) = \text{div grad } \varphi$$

$$(\nabla \nabla) \varphi = \Delta \varphi = \text{div grad } \varphi$$

$$\nabla (\nabla \mathfrak{A}) = \text{grad div } \mathfrak{A}$$

$$(\nabla \nabla) \mathfrak{A} = \Delta \mathfrak{A}$$

$$[\nabla [\nabla \mathfrak{A}]] = \nabla (\nabla \mathfrak{A}) - (\nabla \nabla) \mathfrak{A} \text{ oder}$$

$$\text{rot rot } \mathfrak{A} = \text{grad div } \mathfrak{A} - \Delta \mathfrak{A}$$

$$\text{div } [\mathfrak{B} \mathfrak{C}] = \mathfrak{C} \cdot \text{rot } \mathfrak{B} - \mathfrak{B} \cdot \text{rot } \mathfrak{C}$$

$$\text{div } (\varphi \mathfrak{A}) = \mathfrak{A} \cdot \text{grad } \varphi + \varphi \cdot \text{div } \mathfrak{A}, \text{ hieraus für } \mathfrak{A} = -\text{grad } \varphi:$$

$$\mathfrak{A}^2 = \varphi \cdot \text{div } \mathfrak{A} - \text{div } (\varphi \mathfrak{A}).$$

*Verschiedene Koordinatensysteme.* Rechtswendige Zylinderkoordinaten (Z.K.)  $z$  (axiale Länge),  $\varrho$  (Abstand von der Achse),  $\alpha$  (Winkel). — Räumliche Polarkoordinaten (P.K.)  $r$  (Abstand vom Nullpunkt),  $\vartheta$  (Polarwinkel),  $\alpha$  (Längewinkel).

Die Komponenten von  $\mathfrak{A} = \text{grad } \varphi$  sind

$$\text{in Z.K.:} \quad A_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad A_\varrho = \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}, \quad A_\alpha = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}.$$

$$\text{in P.K.:} \quad A_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad A_\vartheta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}, \quad A_\alpha = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}.$$

Es ist  $\Delta \varphi$

$$\text{in Z.K.:} \quad \Delta \varphi = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} \right) + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

$$\text{in P.K.:} \quad \Delta \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}.$$

Es ist  $\text{div } \mathfrak{A}$

$$\text{in Z.K.:} \quad \text{div } \mathfrak{A} = \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho A_\varrho) + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha}.$$

$$\text{in P.K.:} \quad \text{div } \mathfrak{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \cdot A_\vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha}.$$

Die Komponenten von  $\mathfrak{B} = \text{rot } \mathfrak{A}$  sind

$$\text{in Z.K.:} \quad B_z = \frac{1}{\varrho} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho A_\alpha) - \frac{\partial A_\varrho}{\partial \alpha} \right\},$$

$$B_\varrho = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial A_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial z},$$

$$B_\alpha = \frac{\partial A_\varrho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \varrho}.$$

$$\text{in P.K.:} \quad B_r = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \cdot A_\alpha) - \left( \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \alpha} \right) \right\},$$

$$B_\vartheta = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left\{ \frac{\partial A_r}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \vartheta \cdot A_\alpha) \right\},$$

$$B_\alpha = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot A_\vartheta) - \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} \right\}.$$

## Bedeutung der verwendeten Formelzeichen.

Gewöhnliche lateinische Buchstaben: Skalare; deutsche Buchstaben: Vektoren; steile Buchstaben (z. B. H): Benennungen; Querstrich oben (z. B.  $\bar{H}$ ): Mittelwert, ausgenommen  $\bar{\epsilon}$ ,  $\bar{\mu}$ ; Bogen oben (z. B.  $\tilde{H}$ ): „komplexe Amplitude“.

Senkrecht gedruckte Zahlen (z. B. 43.) bezeichnen Abschnittsnummern, *schräg* gedruckte Zahlen (z. B. 43) bezeichnen Seitenzahlen.

Bei mehrfachem Gebrauch ist die Stelle der ersten Erklärung angegeben.

- A Arbeit
- $\mathfrak{A}$  Vektor allgemein, vektorielles Potential 23. 44, 34. 87.
- a Strecke, als Index: außen
- A Integrationskonstante, ebenso B, C, D 39. 118.
- $\mathfrak{B}$  magnetische Induktion 23. 43.
- b Strecke, Konstante der Wärmeleitungsgleichung 42. 135.
- $\mathfrak{C}$  wahre elektrische Strömung 29. 67.
- C Kapazität,  $C_1$  der Längeneinheit 10. 14, 15.
- c Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum 42. 134, spezifische Wärme 42. 136.
- $\mathfrak{D}$  Verschiebung (-sdichte), el. Erregung 12. 21.
- D Dämpfung 37. 103.
- d Strecke
- $\mathfrak{E}$  elektrische Feldstärke 6. 6.
- $\mathfrak{E}^e$  eingeprägte elektrische Feldstärke 26. 52.
- E als Index: Eisen betreffend
- e als Index: elektrisch
- F(H) Eisenmagnetisierungskurve, ebenso F(B) 24. 46.
- F Äquivalententladung 25. 51, besondere Funktion bei magnetischer Arbeitsleistung 36. 100, Funktion im allgemeinen
- f Funktion, Fläche (j Fläche vektoriell), Frequenz
- $\mathfrak{G}$  elektrische Stromdichte, Strömung 25. 49.
- g Flächenstromdichte 28. 61.
- $\mathfrak{H}$  magnetische Feldstärke (Erregung) 23. 42.
- $\mathfrak{H}^e$  eingeprägte magnetische Feldstärke 24. 47.
- h Strecke, Höhe
- $\mathfrak{J}$  temporäre Magnetisierung 24. 47.
- J elektrischer Strom 25, 48.
- $J_\nu(x)$  Zylinderfunktion erster Art (Besselsche) der Ordnung  $\nu$  vom Argument  $x$  39. 123, 47. 159.
- $Im\{\dots\}$  imaginärer Teil von  $\{\dots\}$ . 37. 106, 2'. 182.
- $i = \sqrt{-1}$  imaginäre Einheit
- i als Index: innen, Laufzahl
- $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  Einheitsvektoren in Richtung der x-, y-, z-Achse
- $\mathfrak{K}$  mechanische Kraft
- K Koerzitivkraft 23, 45.
- $\mathfrak{k}$  räumliche Kraftdichte 15. 29, 36. 97.
- k Konstante, Laufzahl, Kopplungsfaktor ( $k_1, k_2$ ) 35. 93, kennzeichnende Konstante der Stromverdrängung 39. 119, 121, 124, Wärmeleitfähigkeit 42. 136.
- L, l Länge
- L,  $L_{ii}$  Selbstinduktivität 33. 85.
- $L_{ik}$  Gegeninduktivität 33. 86.



- $\mathfrak{M}$  Magnetisierung 23. 46, Remanenz 23. 45.  
 $M$  Gegeninduktivität 33. 86.  
 $m$  Moment  
 $m$  Zahl, als Index: magnetisch, kennzeichnende Konstante der Stromverdrängung 39. 119, 121.  
 $N$  elektrische Leistung  
 $N_\nu(x)$  Zylinderfunktion zweiter Art (Neumannsche, Definition vgl. Jahnke-Emde, Funktionentafeln) der Ordnung  $\nu$  vom Argumente  $x$  39. 123.  
 $n_{1/2}$  Einheitsvektor der Normalenrichtung, von Gebiet 1 nach 2 gerichtet  
 $n$  Anzahl, als Index: normal gerichtet, Brechungsindex 42. 135.  
 $o$  Querschnitt 7. 8.  
 $\mathfrak{P}$  elektrische Polarisation 12. 23.  
 $p, p$  Kraft auf die Flächeneinheit (Druck, Spannung) 15. 27,  $p$  magnetische Polstärke 23. 42.  
 $\mathfrak{Q}$  Drehmoment, Wärmestromdichte 42. 136.  
 $Q, q$  elektrische Ladung 2. 2,  $Q_1$  der Längeneinheit 7. 9.  
 $R$  elektrischer Widerstand 27. 53.  
 $Re\{\dots\}$  reeller Teil von  $\{\dots\}$   
 $r, r$  Fahrstrahl, Entfernung von der Achse, vom Mittelpunkt u. ä.  
 $r$  Reflexionsvermögen 45. 149.  
 $\mathfrak{S}$  Energieströmungsvektor 41. 128.  
 $\mathfrak{s}, s$  Kurve vektoriell, skalar  
 $T$  Periodendauer 37. 104, 2'. 181.  
 $t$  tangentialer Einheitsvektor  
 $t$  Zeit, als Index: tangential, zeitlich  
 $\mathfrak{U}_0$  komplexer Energieströmungsvektor 41. 131.  
 $U$  elektrische Spannung 8. 10.  
 $U^e$  eingeprägte elektromotorische Kraft (EMK) 27. 53.  
 $V$  magnetische Spannung 23. 42, Phasengeschwindigkeit 44. 143.  
 $V^e$  eingeprägte magnetomotorische Kraft 24. 48.  
 $V_1^e$  Energieüberschuß 36. 99.  
 $v, v$  Geschwindigkeit  
 $\tilde{v}$  komplexe Zahl 38. 114.  
 $W_e, w_e$  elektrische Feldenergie, -dichte 11. 18.  
 $W_m, w_m$  magnetische Feldenergie, -dichte 33. 84.  
 $\mathfrak{Z}$  Stammvektor 48. 162.  
 $Z$  Wellenwiderstand 46. 154.  
 $z$  Windungszahl  
  
 $0$  als Index: Anfangswert, Amplitude (ausgenommen  $\varepsilon_0, \mu_0, \Gamma_0$ ).  
 $\infty$  als Index am Integralzeichen: über den unendlichen felderfüllten Raum zu erstrecken.  
 $\nabla$  Hamiltonscher Operator „Nabla“ 3'. 190.  
  
 $\alpha$  Winkel, Phasenkonstante 46. 156.  
 $\beta$  Schwächungsexponent 47. 156, Relaxationszeit 25. 51, 29. 69.  
 $\Gamma, \Gamma_0$  Wellenwiderstand eines Nichtleiters (Feldstärkenverhältnis elektromagnetischer Wellen), Wellenwiderstand des leeren Raumes 43. 139.  
 $\gamma$  Teilkapazität 19. 36, Dichte 42. 136, Maßsystemskoeffizient 1'. 172.  
 $\Delta$  Laplacescher Operator 17. 31, 3'. 188.  
 $\delta$  kleine Größe (Strecke), Verlustwinkel 37. 110, Dämpfungsexponent 37. 104, kennzeichnende Größe der Reflexion 45. 149.  
 $\varepsilon_0$  elektrische Konstante 7. 7, 9. 13, 1'. 176, 180.  
 $\varepsilon$  Dielektrizitätskonstante (DK), relative (reine Zahl),  $\varepsilon_0 \varepsilon = \bar{\varepsilon}$  absolute DK (Elektrifizierungsgrad) 12. 21.  
 $\zeta$  Winkel  
 $\eta$  räumliche Dichte elektrischer Ladungsverteilung 7. 9.  
 $\Theta$  Durchflutung 28. 59.

- $\vartheta$  Winkel, Temperatur 42. 136.  
 $\kappa$  spezifische elektrische Leitfähigkeit 25. 50, kennzeichnende Konstante der Stromverdrängung 39. 124.  
 $L$  Streuinduktivität 35. 95, logarithmisches Dekrement 37. 104.  
 $\lambda$  Wellenlänge 43. 139.  
 $\mu_0$  magnetische Konstante 23. 44, 1'. 176, 180.  
 $\mu$  Permeabilität, relative (reine Zahl),  $\mu_0 \mu = \bar{\mu}$  absolute Permeabilität (Magnetisierungsgrad) 23. 44.  
 $\nu$  Laufzahl  
 $\psi$  skalares Potential 23. 28.  
 $\Psi, \psi$  chemisch-thermische Leistung der Leitungsströmung, räumliche Dichte 26. 52, 53.  
 $\varphi(mh)$  kennzeichnende Funktion der Stromverdrängung 39. 120.  
 $P$  magnetischer Widerstand 28. 63.  
 $\rho$  spezifischer elektrischer Widerstand 25. 50.  
 $\sigma$  Flächendichte elektrischer Ladung 7. 9, 12. 21.  
 $\sigma_m$  Flächendichte des Magnetismus 24. 48.  
 $\sigma$  Streufaktor 28. 63, totaler Streufaktor 35. 93,  $\sigma_1, \sigma_2$  Streufaktoren 35. 96.  
 $\tau$  Raum  
 $\tau_e$  elektrische Zeitkonstante 27. 55.  
 $\tau_m$  magnetische Zeitkonstante 35. 93.  
 $\Phi$  magnetischer Fluß 23. 43.  
 $\varphi$  Winkel, skalares Potential 8. 11, 17. 31, Windungsfluß 30. 72.  
 $\varphi_h, \varphi_s$  Haupt- und Streuflüsse (fiktive) 35. 95.  
 $\varphi(mh)$  kennzeichnende Funktion der Stromverdrängung 39. 122.  
 $\chi$  Suszeptibilität (Aufnahmevermögen) dielektrische 12. 24, magnetische 24. 47.  
 $\Omega$  elektrischer Fluß 7. 7, 29. 67, ungedämpfte Eigenfrequenz 37. 103.  
 $\omega$  Kreisfrequenz 37. 104, 2'. 181.

## Namen- und Sachverzeichnis.

Die Abschnittsnummern sind mit gewöhnlichen, steilen Ziffern gedruckt (z. B. 43.), die Seitenzahlen mit *schrägen* Ziffern (z. B. 43). — Bei mehrfachem Auftreten ist die Stelle der ersten Erwähnung angegeben.

- Ablösung des elektromagnetischen Feldes vom Erreger 48 B. 165.  
 Abstrahlung der Energie 41. 128, 48 B. 166.  
 Ampère 28. 59.  
 Ampere (Einheit) 4. 4, 25. 48, 1'. 176.  
 Amplitude 2'. 181.  
 — komplexe 37. 107, 2'. 183.  
 Amplitudenverzerrung 46. 157.  
 Analogie, formale, elektrostatischer Felder und stationärer Strömungsfelder 27. 55.  
 — — thermischer und elektromagnetischer Ausgleichsvorgänge 42. 135, 136.  
 Anisotropie, elektrische 12. 22.  
 — magnetische 24. 46.  
 Äquivalente 9. 13, 1'. 176.  
 Äquivalententladung 25. 51.  
 Äquivalenz zwischen Strömen und Magneten 28. 64.  
 Äther 43. 140.  
 Aufnahmevermögen, elektrisches 12. 24.  
 — magnetisches 24. 47.  
 Ausbreitungsvorgänge, Kennzeichen des allgemein elektromagnetischen Feldes 40. 126.  
 Ausstrahlung des schwingenden Dipols 48 B. 162.
- Backhaus, H.** 37. 105.  
 Beharrungszustand 5. 5.  
 Benannte Zahlen 4. 4.  
 Benennung 4. 4.  
 Benennungen der elektromagnetischen Größen 1'. 177.  
 Bifilare Spule 35. 94.  
 Bild, elektrisches 20. 37.  
 Biot-Savartsche Regel 34. 88.  
 Blindleistung 37. 108.  
 Brechung ebener Lichtwellen 45 B. 150.  
 — elektrischer Feldlinien im statischen Fall 13. 24.  
 — — Strömungslinien 25. 50.  
 — magnetischer Feldlinien bei Flächenströmung 28. 62.  
 — — — im statischen Fall 24. 46.  
 Brechungsindex, Maxwellsche Beziehung 42. 135.
- cal (Einheit) 9. 13, 1'. 176.  
 c-g-s-Systeme, rationale und nicht rationale 1'. 170, 172.  
 Coulomb 7. 9.  
 — (Einheit) 4. 4, 9. 13, 1'. 174, 176.  
 Coulombsches Gesetz 7. 9.
- Dämpfung 37. 103.  
 Dämpfungsexponent 37. 103.  
 Dauermagnete, Zustandsgleichung 24. 46.  
 Dekrement, logarithmisches 37. 104.  
 Diamagnetische Stoffe 24. 45.  
 Dielektrikum 2. 2, 12. 20.  
 Dielektrizitätskonstante (DK) relative, absolute 12. 21.  
 Dipol, schwingender 48 B. 162.  
 Divergenz 3'. 187.  
 Durchflutung 28. 59.  
 Durchflutungsgesetz 28. 59.
- Ebene Wellen 43. 136.  
 — — Darstellung, elementare 43. 140.  
 — — in Halbleitern und Metallen 44. 142.  
 — — in Nichtleitern 43. 136.  
 — — stehende 45 A. 143.  
 Effektivwert 37. 108, 2'. 183.  
 Eichenwald, A. 31. 79.  
 Eigenfluß, magnetischer 35. 92.  
 Eigenfrequenz, gedämpfte 37. 104.  
 — ungedämpfte 37. 103.  
 Eigeninduktivität 33. 85.  
 Eindeutigkeit des elektrostatischen Feldes 16. 31.  
 Eindringtiefe 44. 145.  
 Einheitenentstehung 9. 12, 1'. 169.  
 Einheitsvektoren 3'. 184.  
 Elektrisierungsgrad 12. 21.  
 Elektrolyse, Faradays Gesetz 25. 51.  
 Elektromotorische Kraft eingeprägte (EMK) 27. 54.  
 Elementarmagnete, Ampères Vorstellung 28. 65.  
 Elemente, galvanische 26. 51.  
 Emde, F. 3. 3, 30. 74, 34. 91, 38. 111, 41. 132, 1'. 171.  
 Energie und Arbeit beim Kondensator 11 c. 19.  
 — Eindringen in Leiter 41. 130, 128.  
 — elektrische und Potential 18. 34.  
 — des elektrischen Feldes 11 b. 17.  
 — des magnetischen Feldes 33. 83.  
 — — — allgemeiner Ausdruck 33. 84.  
 — — — und Induktionskoeffizienten 33. 84, 85.  
 — — — bei konstanter Permeabilität 33. 84.  
 — — — bei linearen Stromkreisen 33. 83.  
 — — — und magnetische Streuung 35. 93, 96.  
 — — — und vektorielles Potential 34. 91.  
 Energieeinheit, mechanische (absolute) und elektromagnetische 1'. 171.

- Energieströmung 41. 127.  
 — entlang Leitern, und Eindringen 41. 128, 130.  
 Erg (Einheit) 1'. 171.  
 Erregung, magnetische 23. 42.
- Farad (Einheit) 10. 14.  
 Faraday, M. 3. 3, 7. 6, 12. 20, 15. 26, 25. 51, 30. 69, 40. 127 u. a.  
 Feldbild und Zeichnung 22. 49.  
 Feldlinien, allgemein 3'. 187.  
 — elektrische 7. 8.  
 — geschlossene elektrische in Nichtleitern 29. 68.  
 Feldröhren s. Feldlinien.  
 Feldstärke, eingeprägte elektrische 26. 52.  
 — — magnetische 24. 47.  
 — elektrische 6. 6.  
 — magnetische 23. 42.  
 Feldtheorie und Fernwirkungstheorie 6. 6, 40. 127, 42. 132.  
 Ferromagnetische Stoffe, harte, weiche 24. 46.  
 Flächenwirbel, elektrische 31. 77.  
 — magnetische 28. 61.  
 Fluß, allgemein, eines Vektors 3'. 186.  
 — elektrischer 7. 7.  
 — magnetischer 23. 43.  
 — eines Vektorfeldes bei bewegter Fläche 31. 74.  
 Fourier, M. 37. 109, 42. 135.  
 Fourierzerlegung 37. 109, 2'. 181.  
 Fremdfluß, magnetischer 35. 92.  
 Fremdinduktivität 33. 86, 34. 89.  
 Frequenz 2'. 181.  
 Fresnel 45. 152.
- Gauß, C. F. 1'. 171.  
 — (Einheit) 1'. 174.  
 — Satz von 3'. 187.  
 Gefällstärke 3'. 187.  
 Gegeninduktivität 33. 86, 34. 89.  
 — zweier Drahtlinge 34. 89.  
 Giorgi, G. 4. 4, 1'. 171.  
 Gleichgewichtsbedingung, elektrische, für Leiter 7. 8.  
 Gleichgewichtszustand 5. 5.  
 — und elektrische Feldenergie 16. 29.  
 Gleichwertige Ströme und Magnete 28. 64.  
 Goethe, J. W. 3. 3.  
 Gradient 3'. 187.  
 Grundeinheiten, Anzahl 4. 4, 1'. 170.  
 — des praktischen Mieschen Maßsystems 4. 4, 1'. 170, 175, 179.  
 Grundgrößen, Anzahl in der Elektrodynamik 4. 4.
- Hagen 44. 144.  
 Halbleiter 25. 51, 29. 69.  
 Hamiltonscher Operator 3'. 190.  
 Harmonische Schwingungen 2'. 181.  
 Hauptfluß, magnetischer 35. 95.  
 Hauptgleichung, erste Maxwellsche 29. 68.  
 — zweite 30. 71.  
 Hauptgleichungen bei Bewegung 31. 75, 79.  
 Hautwirkung 39. 117.
- Heaviside, O. 3. 3, 4. 4, 41. 129, 46. 158, 1'. 175.  
 Heavisidesche Schreibweise der elektromagnetischen Gleichungen 4. 4, 1'. 175.  
 Helmholtz, H. v. 3. 3, 4. 4, 25. 51, 27. 54.  
 Helmholtz'scher Überlagerungssatz 27. 54.  
 Henry (Einheit) 33. 85.  
 Hertz, H. 3. 3, 48 B. 165.  
 Hookesches Gesetz 12. 22.  
 Hopkinson 28. 63.  
 Hüllenfluß 3'. 186.  
 — elektrischer und Ladungen 7. 7, 12. 21.  
 Hysteresisschleife und -kurve 24. 45.
- Induktion, magnetische 23. 43.  
 — — grundsätzliche Quellenfreiheit 23. 43, 31. 75, 36. 99.  
 Induktionsgesetz 30. 69.  
 — für stationäre magnetische Felder 31. 75.  
 Induktionskoeffizienten 33. 85, 34. 89.  
 — Änderung der, magnetische Kräfte 36. 103.  
 — bei Eisen im Feld 36. 101, 37. 109.  
 Induktionsvorgang beim Eisentransformator 38. 111.  
 Induzierte elektromotorische Kraft 30. 73.  
 Isolator 2. 2, 12. 20.
- Joule 25. 50, 27. 54.  
 — (Einheit) 9. 13, 1'. 176.  
 Joulesche Wärme 25. 51.  
 Joulesches Gesetz, allgemein 25. 50.  
 — — für Drähte 27. 54.
- Kapazität 10. 14.  
 — dynamische 47. 158.  
 — geometrische 10. 14.  
 — der Paralleldrahtleitung 20 d. 38.  
 Kerr 12. 22.  
 Kirchhoff 27. 54.  
 Kirchhoffsche Regeln 27. 54.  
 — — verallgemeinert 30. 72.  
 — — für Wechselstrom 37. 110.  
 Klemmenspannung 27. 55.  
 Koeffizienten, Stellung von, in den elektromagnetischen Gleichungen 1'. 169, 171, 180.  
 Koerzitivkraft 24. 45.  
 Kohlrausch, R. 42. 134.  
 Komplexe Zahlen, Rechnen mit, bei Wechselstromvorgängen 37. 106, 2'. 182.  
 Kondensator 10. 14.  
 — Eigenschwingungen 47. 160.  
 — Schaltungen 10. 15.  
 Kondensatorentladung 27. 55.  
 Kondensatorumladung 27. 56.  
 Konstanten, Zahlenwerte 1'. 174, 176, 180.  
 Konvektionsstrom und magnetische Wirkung 31. 80.  
 Koordinaten, Rechtswendigkeit 3'. 185.  
 Koordinatensysteme, verschiedene, Vektoroperationen in 3'. 191.  
 Kopplung, magnetische 35. 93.  
 Kraft, elektrodynamische (Stromkraft) 36. 97.  
 — und Energieverhältnisse bei Eisenkörpern 36. 99.  
 Kraftgramm (Einheit) 9. 13, 1'. 176.

- Kräfte, elektrische, an Unstetigkeitsflächen 15. 28.  
 — elektrostatische, auf geladene Leiteroberflächen 11a. 17.  
 — — auf Nichtleiter 14. 26.  
 Kreisfrequenz 2'. 181.  
 Kreisstrom 34. 89.
- Ladung, elektrische 2. 2.  
 — magnetische 23. 41.  
 Laplace 17. 31, 3'. 188.  
 Laplacesche Differentialgleichung 17. 31.  
 Leistungsanpassung 27. 55.  
 Leistungsdichte, chemisch-thermische 26. 53.  
 Leistungsfluß, elektromagnetischer 41. 128.  
 Leiter, elektrische 2. 2.  
 Leitfähigkeit, elektrische spezifische 25. 50.  
 Leitungen, Vorgänge (verlustfrei, verzerrungsfrei, periodisch, stehende Wellen) 46. 152.  
 Lenard 25. 51.  
 Lenzsche Regel 31. 79, 36. 98.  
 Lichttheorie, elektromagnetische und elastische 42. 134, 43. 136, 44. 144.  
 Lineare Leiter 27. 53.  
 Linienintegral 3'. 185.  
 Lorentz, H. A. 3. 3, 31. 81, 1'. 175.
- Magnetisch gekoppelte Stromkreise 35. 92.  
 — — — zwei bei Gleichstrom 35. 94.  
 Magnetische Leiter und Nichtleiter 23. 41.  
 Magnetischer Kreis, Abschätzung nach Hopkinson 28. 63.  
 Magnetisches Feld im Gleichgewichtszustand 23. 42.  
 Magnetisierung 23. 42.  
 — permanente 24. 46.  
 — temporäre oder induzierte 24. 47.  
 Magnetisierungskurve und -schleife 24. 45.  
 Magnetomotorische Kraft, eingeprägte 24. 48.  
 Masse, elektromagnetische 31. 80.  
 Masseneinheit 9. 13, 1'. 170, 176.  
 Maßsysteme, Entstehung 9. 12, 1'. 169.  
 — Merkmale, absolute und praktisches 1'. 171.  
 — Tafel 1'. 178.  
 — Weiterentwicklung 1'. 178.  
 Maßsystemschlüssel 1'. 171.  
 Maßunabhängige Auffassung von Gleichungen 4. 4.  
 Maxwell, J. Clerk 3. 3, 6. 6, 7. 8, 12. 21, 15. 26, 28. 62, 29. 67, 40. 127, 42. 134, 43. 140, 44. 144, 1'. 173 u. a.  
 — (Einheit) 1'. 174.  
 Metalle, elektromagnetische Störungen in 42. 135, 44. 144.  
 Mie, G. 3. 3, 4. 4, 9. 10, 23. 47, 46. 153, 1'. 171, 175.  
 Mittelwert, zeitlicher, eines Produktes, bei komplexer Rechnung 2'. 183.  
 Mühlrädchen im wirbelhaften Feld 3'. 189.
- Nabla-Operator 3'. 190.  
 Nachwirkung, dielektrische 12. 23.  
 Nahbereich elektromagnetischer Strahlung 48B. 163.
- Nahewirkungstheorie und Fernwirkungstheorie 6. 6, 40. 127, 42. 134.  
 Nichtleiter 2. 2, 12. 20.  
 Nutzfluß, magnetischer 35. 95.
- Oersted, H. C. 3. 3.  
 — (Einheit) 1'. 174.  
 Ohm, G. S. 3. 3, 25. 50, 27. 53.  
 — (Einheit) 25. 50, 27. 53.  
 Ohmsches Gesetz, allgemein 25. 50.  
 — — für Drähte 27. 53.  
 — — für Wechselstrom 37. 110.
- Paramagnetische Stoffe 24. 45.  
 Periodendauer 37. 104, 2'. 181.  
 Periodische Vorgänge, Darstellung 2'. 181.  
 Permeabilität, absolute und relative 23. 44, 24. 45.  
 Phase 2'. 181.  
 Phasenkonstante 46. 156.  
 Phasenverzerrung 46. 157.  
 Phasenwinkel 2'. 181.  
 Poisson 17. 31, 42. 133, 3'. 188.  
 Poissonsche Differentialgleichung 17. 31, 34. 87.  
 Polarisierung, elektrische 12. 23.  
 Potential, skalares, elektrostatisches 8. 11, 17. 31.  
 — — — Differentialgleichung 17. 31.  
 — — — Eigenschaften 17. 32.  
 — — — und Energie 18. 34.  
 — — — komplexes 21. 39.  
 — — magnetisches, Vieldeutigkeit oder Unstetigkeit 28. 64.  
 — vektorielles, magnetisches 23. 44, 34. 87.  
 — — — Differentialgleichung 34. 87.  
 — — — Eigenschaften 34. 88.  
 — — — und Energie 34. 91.  
 — — — und Fluß 23. 44, 34. 90.  
 — — — und Induktionsgesetz 34. 90.  
 — — — und Induktionskoeffizienten 34. 91.  
 Poyntingscher Vektor 41. 129.  
 Praktische Einheiten 4. 4, 1'. 175.  
 Produkte von Vektoren, skalare und vektorielle 3'. 185, 186.  
 — — — zusammengesetzte 3'. 186.
- Quasistationärer Zustand 5. 5.  
 — — und Kennzeichen des elektromagnetischen Feldes 32. 81, 48B. 168.  
 Quasistatischer Zustand 5. 5.  
 Quellen des elektrischen Feldes 7. 7, 12. 21.  
 Quellenfreies Feld 3'. 187.  
 Quellenfreiheit der magnetischen Induktion 23. 43, 31. 75, 36. 99.  
 Quellenstärke 3'. 187.  
 Quirl 3'. 189.
- Randintegral 3'. 185.  
 Reflexion bei Leitungen 46. 155.  
 — an Metallen 45A. 147.  
 — bei Nichtleitern 45B. 150, 152.  
 Reflexionsvermögen und elektrischer Widerstand 44. 144, 45A. 149.

- Relaxationszeit 25. 51, 29. 69.  
 Remanenz 24. 45.  
 Resonanz im elektrischen Schwingungskreis 37. 105.  
 Resonanzkurve und Dämpfung 37. 106.  
 Reziproke Radian 20 c. 38.  
 Riegger, H. 37. 105.  
 Ringspule, magnetisches Feld 28. 59.  
 Rogowski, W. 35. 96.  
 Röntgenstrom 31. 80.  
 Rotation 3'. 188.  
 Rowland, H. A. 31. 79.  
 Rubens 44. 144.
- Savart 34. 88.  
 Scheinleistung 37. 108.  
 Schwächungsexponent 46. 156.  
 Schwingungen, harmonische, Darstellung von 2'. 181.  
 Schwingungskreis, elektrischer (erzwungene, freie, gedämpfte, ungedämpfte Schwingungen; Strom, Ladung, Energie, Leistung, Parallelschwingungskreis) 37. 103.  
 Schwund, magnetischer, und elektrische Umlaufspannung 30. 71.  
 Selbstinduktivität 33. 85.  
 — äußere und innere, Definition 33. 85.  
 — innere bei Stromverdrängung 39. 124.  
 — der Paralleldrahtleitung 33. 86.  
 Skalar 3'. 184.  
 Snell 45. 152.  
 Spannung, elektrische 8. 10.  
 — — im Gleichgewichtszustand 8. 10.  
 — magnetische 23. 42.  
 Spannungen, Faraday-Maxwellsche und mechanische Kräfte 15. 26.  
 Sperrfläche für Anwendung des skalaren Potentials 28. 64, 38. 114.  
 Spiegelung, elektrische Bilder 20 a, b, c. 36.  
 Sprungdivergenz 3'. 187.  
 Sprunggradient 3'. 188.  
 Sprungwirbel (-rotation) 3'. 189.  
 Spulenfluß 30. 72.  
 Stammvektor 48 A. 162.  
 Stationärer Zustand 5. 5.  
 — — elektrischer Strömung 25. 49.  
 Statischer (starrer) Zustand 5. 5.  
 Sthen (Einheit) 9. 13, 1'. 176.  
 Stokes, Satz von 3'. 188.  
 Stoney 25. 51.  
 Strahlungsleistung des schwingenden Dipols 48 B. 166.  
 Strahlungsvektor 41. 128, 43. 138.  
 Strahlungswirkwiderstand des strahlenden Stromelements 48 B. 167.  
 Streufluß, magnetischer 35. 95.  
 Streuinduktivitäten 35. 95.  
 — bei Gegenschaltung 35. 96.  
 — und Streuziffer 35. 96.  
 Streuung, magnetische 28. 63, 35. 92.  
 — — und Feldbild 35. 94.  
 Streuungsfaktor 35. 93.  
 Stromdichte oder Strömung 25. 49.  
 — Kontinuitätsgleichung der 25. 49.  
 — an Leiteroberflächen im Beharrungszustand 25. 49.  
 Stromelement 34. 88.
- Stromelement, Kraft auf 36. 98.  
 — magnetisches Feld des 34. 88.  
 — als Strahler 48 B. 164.  
 Stromkraft 36. 97.  
 Stromrichtung, elektrische 25. 48.  
 Strömung, elektrische, bei eingepprägten Kräften 26. 52.  
 — — in homogenen Leitern 25. 49.  
 — — in linearen Leitern 27. 53.  
 — wahre elektrische, Maxwells Vorstellung 29. 67.  
 Stromverdrängung 39. 117.  
 Stromwärmeleistung 25. 49, 26. 52, 27. 54.  
 Supraleitfähigkeit 28. 58.  
 Suszeptibilität, dielektrische 12. 24.  
 — magnetische 24. 47.
- Teilkapazitäten 19. 35.  
 Telegraphengleichung 46. 153.  
 Thermolemente 26. 51.  
 Thomson, W. 16. 29, 20. 37, 37. 104.  
 Thomsonsche Formel 37. 104.  
 Thomsonscher Satz über Energie des elektrostatischen Feldes 16. 29.  
 Trägheitswirkung des magnetischen Feldes 31. 80.  
 Transformator 30. 72, 38. 111.  
 — Betriebseigenschaften 38. 114.  
 — elektrisches Feld und Induktionsvorgang 38. 115.  
 — Streuung 35. 95.  
 Transversale elektromagnetische Wellen 43. 137.
- Umlaufintegral 3'. 185.  
 Unipolare Induktion 31. 78.  
 Universelle Konstante 43. 139, 1'. 169, 176, 180, Einheiten und Zahlenwerte 1'. 176, 180.
- Vektor 3'. 184.  
 Vektorfelder 3'. 186.  
 Vektoroperationen in verschiedenen Koordinatensystemen, Rechenregeln 3'. 190.  
 Verkettung elektrischer und magnetischer Felder 28. 61, 30. 71.  
 Verlustwinkel, kapazitiver 37. 110.  
 Verschiebung, elektrische und Maxwells Vorstellung von 12. 21.  
 Verschiebungsströmung und Maxwells Vorstellung von 29. 67.  
 Verzerrung elektromagnetischer Wellen 44. 143.  
 — auf Leitungen 46. 157.  
 Volt (Einheit) 4. 4, 1'. 174, 176, 179.
- Wagner, K. W. 43. 140.  
 Wallot, J. 4. 4.  
 Wärmeleitungsgleichung, Ausbreitung gemäß 42. 135.  
 Watt (Einheit) 4. 4, 25. 49, 1'. 174, 176, 179.  
 Weber, W. 42. 134, 1'. 171.  
 Wechselstromwiderstand 37. 105.  
 — komplexer 37. 107, 110.

- Wellen auf Leitungen, stehende und laufende 46. 152.  
 — elektromagnetische, ebene in Halbleitern und Metallen 44. 142.  
 — — — in Nichtleitern 43. 136.  
 — — — stehende 45 A. 148.  
 Wellenbereich der elektromagnetischen Strahlung 48 B. 166.  
 Wellenebene 43. 137.  
 Wellengleichung, Ausbreitung gemäß, und Wärmeleitungsgleichung 42. 132.  
 Wellenkugel 48 B. 166.  
 Wellennormale 43. 137.  
 Wellenwiderstand des leeren Raumes 43. 139.  
 — der Leitung 46. 154, 156.  
 Wheatstonesche Brückenschaltung 27. 57.  
 — — bei Wechselstrom 37. 111.  
 Widerstand, elektrischer, körperlicher Leiter 27. 55, 57.  
 — — linearer Leiter 27. 53.  
 — magnetischer 28. 63.  
 — — und Feldbild 28. 64.  
 — spezifischer elektrischer 25. 50.  
 Wilson, H. A. 31. 77.  
 Windungsfluß und Spulenfluß 30. 72.
- Wirbel bei Bewegung, elektrische und magnetische 31. 74.  
 — des elektrischen Feldes 30. 71.  
 — des magnetischen Feldes allgemein 29. 68.  
 — — — in Leitungsströmung 28. 60.  
 Wirbelfreies Feld 3'. 187.  
 Wirbelfreiheit des elektrostatischen Feldes 8. 11.  
 — des magnetostatischen Feldes 23. 42.  
 Wirbelstärke 3'. 188.  
 Wirbelströmung 39. 117.  
 Wirkleistung 37. 108.  
 Wirkwiderstand 37. 109.  
 — bei Stromverdrängung 39. 124.
- Zeitkonstante, elektrische 27. 55.  
 — magnetische 35. 93.  
 — — Wickelraum und Feldstärke 36. 102.  
 Zeitlinie 2'. 182.  
 Zirkulares Feld, wirbelfrei und nicht wirbelfrei 3'. 189.  
 Zuordnung, rechtswendige 3'. 105.  
 Zylinderspule, magnetisches Feld 28. 59.