

Einführung in die technische Strömungslehre

Von

Dr.-Ing. Bruno Eck

Leiter des Strömungslaboratoriums der höheren
technischen Staatslehranstalten in Köln

Erster Band

Theoretische Grundlagen

Mit 155 Abbildungen



Berlin
Verlag von Julius Springer
1935

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung
in fremde Sprachen, vorbehalten.
Copyright 1935 by Julius Springer in Berlin.
Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1935

ISBN-13:978-3-642-89639-2 e-ISBN-13:978-3-642-91496-6
DOI:10.1007/978-3-642-91496-6

Vorwort.

Eine gründliche und möglichst anschauliche Einführung in die Strömungslehre und Aerodynamik ist der Hauptzweck dieses Werkes. Es wurde besonderer Wert darauf gelegt, die beim Anfänger erfahrungsgemäß auftretenden Hemmungen zu überbrücken. Die Durchführung des Grundsatzes „Nichts ohne Ableitung“ schien deshalb bei den meisten theoretischen Erörterungen unerläßlich. Vorausgesetzt werden lediglich einfache physikalische Begriffe sowie die Elemente der Differential- und Integralrechnung. Auf letztere zu verzichten ist leider unmöglich, wenn man auf klare Ausdrucksweise Wert legt und eine „populär-wissenschaftliche Basis“ vermeiden will.

Das Werk richtet sich an verschiedene Kreise. Der Physiklehrer der höheren Schulen, der neuerdings die Fluglehre im Physikunterricht behandeln muß, soll die Strömungslehre mit der Gründlichkeit kennen lernen, mit der er bislang andere Gebiete der Physik anfassen mußte. Der Studierende der Hoch- und Fachschulen soll in einem leicht faßlichen und kurzen Leitfaden möglichst schonend mit den Hauptgrundlagen der Strömungslehre bekannt gemacht werden. Der Ingenieur der Praxis wird in dem Buche das Zahlenmaterial finden, das dem neuesten Stande der Forschungsarbeiten entspricht. Für viele praktische Anwendungen dürfte er sich hier bereits genügend Auskunft verschaffen können.

Ein reichhaltiges Bildmaterial war notwendig, um möglichst weitgehend die physikalischen Gedanken des rein formalen, d. h. math. Charakters zu entkleiden. Insbesondere wurde von Strömungsbildern reichlich Gebrauch gemacht. Die Erfahrungen und Beobachtungen, die Verfasser anlässlich einer früheren Schrift „Strömungslehre an Hand von Strömungsbildern“ (Selbstverlag Köln, 1931) gesammelt hat, zeigten deutlich, daß eine derartige Illustration keine schlechte Stütze für die Anschauung und für die Festigung der Grundbegriffe der Strömungslehre ist.

Die meisten Abbildungen stammen aus dem Laboratorium des Verfassers. Daneben wurden auch Abbildungen und Versuchsergebnisse insbesondere des Göttinger Kreises eingefügt, nicht zuletzt, um schon den Anfänger in gebührender Form mit den Hauptbaumeistern der modernen Strömungslehre bekannt zu machen.

Bei der Stoffauswahl wurde neben gebotener Knappheit auf systematischen Aufbau besonderer Wert gelegt. Der mehr für die Fluglehre interessierte Leser wird z. B., wie ich hoffe, die Überzeugung gewinnen, wie notwendig und nützlich die Beschäftigung mit dem Rohrproblem ist. Da an keinem anderen Beispiele die Grundlagen der Strömungslehre leichter und klarer dargestellt werden können, dürfte der diesen Dingen gewidmete Raum berechtigt sein, zumal dieses Problem durch die neueren Arbeiten von Prandtl und v. Kármán nunmehr eine die praktische und wissenschaftliche Seite ziemlich befriedigende Lösung gefunden hat. Die Behandlung des Tragflügelproblems, dem selbstverständlich ein gebührender Platz eingeräumt ist, wird durch solche Vorarbeiten sehr erleichtert.

Eine Unterteilung in zwei Bände schien zweckmäßig, um dem Leser zunächst in einer geschlossenen Darstellung die notwendigen theoretischen Grundlagen zu vermitteln und eine Ablenkung durch zu viele praktische Dinge zu vermeiden. Der zweite Band wird neben vielen praktischen Anwendungen in der Hauptsache experimentelle Möglichkeiten schildern und sich eingehender mit den Anwendungen in der Flugtechnik befassen. Mit Rücksicht auf das derzeitige Bestreben, der Jugend in anschaulicher Weise die Geheimnisse der Fliegerei zu vermitteln, werden viele einfache Versuche beschrieben werden, die mit einfachen Geräten ausgeführt werden können und dem Lehrer den Unterricht erleichtern sollen. Die vom Verfasser entwickelten bekannten Geräte zur Strömungslehre sowie grundsätzlich neue Vorrichtungen, die alle von der Firma: Pet. Koch, G. m. b. H., Köln-Nippes (Werkstätten für Feinmechanik und Modellbau) hergestellt werden, sollen für diesen experimentellen Aufbau die Grundlage bilden.

Um die Durchsicht bemühte sich in dankenswerter Weise Herr Bibliothekar Konrad Lempert aus Fulda.

Der Verlag sorgte in einer mustergültigen Weise für Herstellung und Ausstattung des Buches. Insbesondere verdient die Herstellung des Bildmaterials große Anerkennung. Den Wünschen des Verfassers kam der Verlag in jeder Weise entgegen, so daß es mir eine angenehme Pflicht ist, ihm an dieser Stelle meinen Dank auszusprechen.

Köln, im Juli 1935.

Bruno Eck.

Inhaltsverzeichnis.

I. Hydrostatik	Seite
1. Der statische Druck	1
2. Messung des Druckes	2
3. Einfluß der Kompressibilität bei Gasen	5
4. Gleichgewicht der Atmosphäre	6
II. Bewegungslehre.	
5. Vergleich mit der Bewegung fester Körper	8
6. Kräftegleichgewicht der stationären Strömung	12
7. Übergang von einer Stromlinie zu der Gesamtströmung	16
8. Die reibungsfreie Drehung	17
9. Wirbel und Drehbewegung	19
10. Linienintegral und Gesetze über Wirbelbewegung	20
11. Quellen und Senken	24
a) Grundsätzliches	24
b) Überlagerungsgesetz	25
c) Zusammensetzung einer Parallelströmung mit einer Quelle	25
d) Zusammensetzung von Quelle und Senke	26
e) Doppelquelle	27
f) Überlagerung von Parallelströmung und Quelle und Senke	28
g) Zusammensetzung von Quelle und Wirbel (Wirbelquelle)	29
h) Doppelquelle und Parallelströmung	30
12. Impulssatz	32
a) Ableitung	32
b) Ablenkung eines Strahles durch eine Schneide	34
c) Wirkung eines Schaufelgitters	34
d) Berechnung des Stoßverlustes	38
e) Die Kugel im schrägen Luftstrahl.	39
f) Auftrieb	40
13. Graphische Konstruktion von Strömungsbildern	43
14. Reibungsfreie Strömung in offenen Rinnen	45
III. Einfluß der Reibung bei durchströmten Körpern.	
15. Innere Reibung infolge Zähigkeit	49
16. Ähnlichkeitsgesetz	51
17. Strömungsformen	54
18. Strömungswiderstand in Rohren	57
19. Geschwindigkeitsverteilung bei der Rohrströmung.	62
20. Eingehendere Betrachtung der Rohrturbulenz	64
21. Einfluß der Wandrauigkeit	67
22. Anlaufstrecke.	68
23. Strömung in geraden Rohren nicht kreisförmigen Querschnittes	70
24. Strömung in erweiterten und verengten Kanälen	70

	Seite
25. Krümmer	76
26. Strömungsverlust infolge scharfer Kanten; Kontraktion usw.	78
IV. Einfluß der Reibung bei umströmten Körpern.	
27. Grundsätzliches zum Widerstandsproblem	80
28. Oberflächenwiderstand	85
29. Formwiderstand	87
30. Bewegung im Totwasserraum	91
31. Widerstand von Luftschiffkörpern.	94
V. Der Tragflügel.	
32. Die Haupteigenschaften des Tragflügels	96
a) Einfache Überlegungen	96
b) Genauere Betrachtung	96
33. Die Bestätigung der Tragflügeltheorie durch den Versuch	103
VI. Hilfsmittel zur Verringerung des Widerstandes.	
34. Grenzschichtabsaugung. Mitbewegte Wand. Einführung von Druckluft. Hilfsflügel.	110
VII. Hydraulisches Messen.	
35. Messung von Druck und Geschwindigkeit in offener Strömung	118
36. Feststellung der Strömungsrichtung mit Staugeräten	122
37. Mengen- und Geschwindigkeitsmessungen im Rohre	123
a) Feinmessungen	123
b) Messung mit Düsen, Blenden usw.	124
38. Überfallmessungen	130
39. Direkt anzeigende Durchflußmesser	130
40. Im Flüssigkeitsstrom sich drehende Meßgeräte	132
Namen- und Sachverzeichnis.	133

I. Hydrostatik.

1. Der Statische Druck.

Die meisten Erscheinungen der Hydrostatik lassen sich durch eine genaue Betrachtung des Begriffes „Druck“ leicht erklären. Dieser Begriff, der auch bei der Bewegung von Flüssigkeiten eine große Rolle spielt, sei deshalb hier etwas genauer behandelt. Wir setzen Reibungslosigkeit der Flüssigkeit voraus. Reibungslos wollen wir dann eine Flüssigkeit nennen, wenn beispielsweise auf ein quadratisches Teilchen nur Normalkräfte und keine Tangentialkräfte wirken (Abb. 1). In Anlehnung an die aus der Festigkeitslehre bekannten Begriffe nennen wir die Normalkraft pro Flächeneinheit p ; Tangentialkräfte, die wir ebenfalls auf die Flächeneinheit beziehen, deren Behandlung jedoch später erfolgen soll, nennen wir Schubspannung.

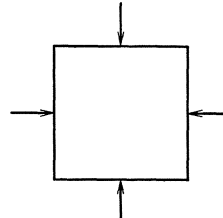


Abb. 1.

Wir betrachten ein Gefäß mit Wasser (Abb. 2) und wollen die Kräfte bzw. Drücke kennenlernen, die von der Flüssigkeit auf die Gefäßwand ausgeübt werden. Beginnen wir mit dem Boden. Ein etwa daran eingesetztes Kőlbchen gestattet leicht die Auswegung der Kräfte. Die hierbei wirkende Gesamtkraft muß gleich dem Gewicht des Wasserzylinders über dem Kolben sein. Ist F die Kolbenfläche und γ das spez. Gewicht der Flüssigkeit, so ist $F \cdot p = F \cdot h \cdot \gamma$, d.h.

$$p = h \cdot \gamma. \quad (1)$$

Nun machen wir denselben Versuch an einer Seite des Gefäßes etwa in der Höhe h' von der Oberfläche. Mit einem kleinen reibungsfreien Kőlbchen ist die Messung in der gleichen Weise leicht durchführbar. Bei der Berechnung kommen wir jedoch sofort in einige Verlegenheit. Eine Gewichtsberechnung wie vorhin ist hier nicht möglich. Wohl ist in einer Tiefe h' der Druck senkrecht nach unten aus Gl. (1) leicht zu ermitteln. Aber es drängt sich die Frage auf: wie ändert sich

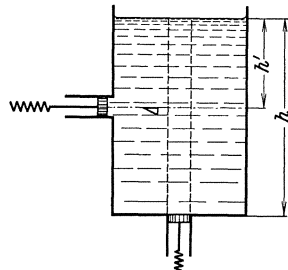


Abb. 2.

der Druck, wenn bei Beibehaltung der Tiefe die Bezugsebene ihre Richtung ändert?

Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir ein beliebiges kleines Teilchen, dem wir aus Zweckmäßigkeitsgründen die Form eines rechtwinkligen Dreiecks geben (Abb. 2). Stark vergrößert (Abb. 3) untersuchen wir die Gleichgewichtsbedingungen. Auf der waagerechten

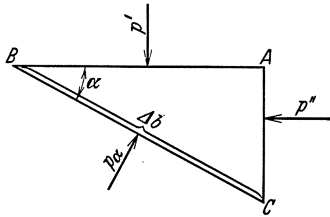


Abb. 3.

Seite AB ist der Druck $p' = h' \cdot \gamma$, auf den anderen Seiten AC und BC ist er unbekannt. Wir bezeichnen den Druck auf AC mit p'' und auf CB mit p_α . Die Hypotenuse des Dreiecks habe die Länge Δb . Da nur Normalkräfte vorhanden sind, ist das Gleichgewicht von drei Kräften zu untersuchen. Die Länge des Prismas senkrecht zur Zeichenebene sei l .

$$\begin{aligned} \text{Kräfte auf Seite: } AB &: p' \cdot \Delta b \cdot \cos \alpha \cdot l \\ CB &: p_\alpha \cdot \Delta b \cdot l \\ AC &: p'' \cdot \Delta b \cdot \sin \alpha \cdot l. \end{aligned}$$

Wir setzen die Summe der Kräfte in horizontaler und vertikaler Richtung gleich.

$$\text{senkrechte Kräfte: } p' \cdot \Delta b \cdot \cos \alpha \cdot l = p_\alpha \cdot \Delta b \cdot \cos \alpha \cdot l$$

$$\text{horizontale Kräfte: } p'' \cdot \Delta b \cdot \sin \alpha \cdot l = p_\alpha \cdot \Delta b \cdot \sin \alpha \cdot l$$

$$\text{hieraus folgt: } p' = p'' = p_\alpha.$$

Wir finden somit den wichtigen Satz. Der Druck ist nur abhängig von der Höhe und in einem Punkte unabhängig von der Richtung¹. Mit Rücksicht auf spätere Anwendung sei als Beispiel im folgenden die Druckmessung behandelt.

2. Messung des Druckes.

Verbindet man ein Gefäß (Abb. 4) mit einer seitlichen Steigröhre, so muß aus den oben abgeleiteten Gründen die Flüssigkeit so hoch steigen wie im Gefäß. Die Steigröhre kann also zur Feststellung des Wanddruckes benutzt werden. Da das Meßrohr nichts davon weiß, wie der Druck erzeugt wird, wird diese Messung auch bei einem geschlossenen Kessel noch stimmen. Befindet sich z. B. komprimierte Luft in einem Kessel (Abb. 5), so muß der von der Wassersäule h erzeugte Druck

¹ Bei fast allen bekannten Flüssigkeiten trifft dieser Satz zu. Sobald jedoch eine „Reibung der Ruhe“ vorhanden ist, verliert der Satz selbstverständlich seine Gültigkeit. Diese Bemerkung bedarf deshalb einer besonderen Betonung, weil es praktisch nicht unwichtige flüssigkeitsähnliche Gebilde gibt, die merkliche Schubspannungen übertragen. Hierzu gehören z. B. Kohlenstaub, überhaupt feinkörniges Material.

gleich dem Kesseldruck sein. Dieser Druck ist nach (1) $p = h \cdot \gamma$, wo γ das spez. Gewicht der Meßflüssigkeit ist. Die Meßhöhe h ändert sich somit in einfacher Weise mit dem spez. Gewicht der Absperrflüssigkeit. Bei Quecksilber als Meßflüssigkeit wird somit derselbe Kesseldruck nur den 13,6. Teil der Druckhöhe gegenüber Wasser anzeigen.

Befindet sich nun Druckwasser in dem Kessel (Abb. 6), so ist es oft zweckmäßig, im Interesse nicht zu großer Meßsäulen Quecksilber als Sperrflüssigkeit zu nehmen. Unterhalb der Linie 2—2 hält das Quecksilber sich die Waage, zwischen 1—1 und 2—2 erkennen wir in einem Schenkel die Wassersäule von der Höhe h , so daß im Schnitt 2—2 außer dem Gefäßdruck p noch der Druck $h \cdot \gamma_w$ wirkt. Der Gesamtdruck im Schnitt 2—2 ist somit $p + h \cdot \gamma_w$. Auf der anderen Seite wird dieser Druck aufgehoben durch die Quecksilbersäule h , die den Druck $h \cdot \gamma_{Hg}$ erzeugt. Das Gleichgewicht ergibt also

$$\left. \begin{aligned} p + h \cdot \gamma_w &= h \cdot \gamma_{Hg} \\ p &= h(\gamma_{Hg} - \gamma_w). \end{aligned} \right\} (2)$$

Das Quecksilber erfährt somit bei dieser Messung eine scheinbare Verminderung des spez. Gewichts um das spez. Gewicht des Wassers. Statt 13,6 ist also 12,6 einzusetzen, wenn, wie bei vielen Messungen, sich auf einer Seite Wasser über dem Quecksilber befindet.

Differenzdruckmessungen spielen bei vielen Versuchen eine wichtige Rolle. Abb. 7 zeigt eine solche Anordnung, wie sie z. B. zur Messung von Reibungsverlusten in Rohrleitungen Verwendung findet. Man erkennt die Notwendigkeit einer Sperrflüssigkeit von größerem spez. Gewicht, d. h. bei Luft wird Wasser oder Quecksilber, bei Wasser fast immer Quecksilber verwendet. Handelt es sich um Flüssigkeiten, so kann auch die Flüssigkeit selbst als Sperrflüssigkeit dienen. Abb. 8 zeigt diese Anordnung. Das

U-Rohr ist einfach umgestülpt. In dem Schenkel befindet sich Luft, die z. B. mit einer Fahrradluftpumpe eingedrückt und dosiert werden kann. Wenn die zu erwartenden Druckunterschiede klein sind, wird von dieser Möglichkeit gern Gebrauch gemacht, da eine solche Messung mit Wasser 12,6 mal genauere Resultate erzielt, als wenn mit Quecksilber gearbeitet wird.

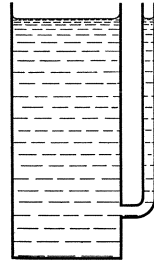


Abb. 4.

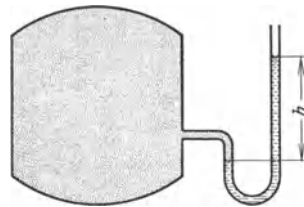


Abb. 5.

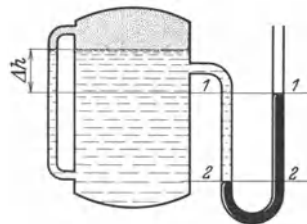


Abb. 6.

Als selbstständiges Meßgerät¹ spielt außer dem einfachen *U*-Rohr das Mikromanometer eine große Rolle. Indem man einen Schenkel des *U*-Rohres als Flasche ausbildet, vermeidet man das Ablesen an zwei Stellen. Ist nämlich die Querschnittsfläche der Flasche F und die des

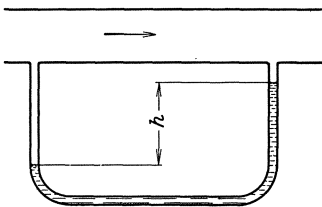


Abb. 7.

Meßrohres f , so wird bei einer Anzeige h im Meßrohr der Wasserspiegel in der Flasche um Δh sinken. Die Gleichheit der verdrängten Mengen ergibt die Gleichung:

$$F \cdot \Delta h = f \cdot h \quad \text{d. h.} \quad \Delta h = \frac{f}{F} \cdot h.$$

Bei einem Durchmesser Verhältnis von Meßrohr zu Flasche von 1:33,3 ist $\frac{b}{F}$ bereits $\frac{1}{1000}$, so daß Δh meist vernachlässigt werden kann.

Durch Schrägstellen des Meßrohres vergrößert man bei einer Druck-

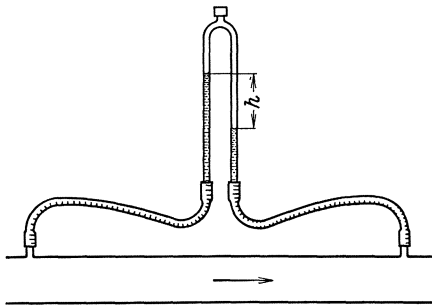


Abb. 8.

höhe h die Meßlänge s im Verhältnis $1 : \sin \alpha$. Vergrößerungen im Verhältnis 1:10 sind ohne besondere Vorkehrungen noch ausführbar. Abb. 9 zeigt eine einfache Anordnung des Verfassers, bei der das Steigrohr um einen Punkt A drehbar ist (den Nullpunkt der Skala). Durch einen Schlauch ist das Steigrohr mit der Fla-

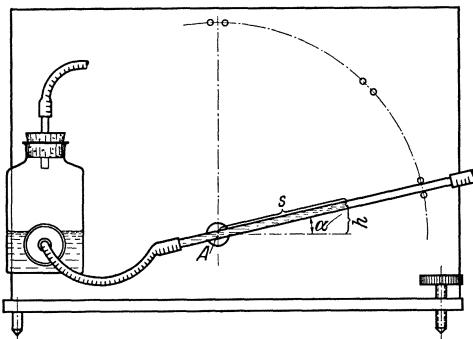


Abb. 9.

sche verbunden, die in der Höhe einstellbar ist. Bei dünnen Meßrohren ist Petroleum ($\gamma = 0,8$) wegen der guten Meniskusbildung und der kleinen inneren Reibung sehr geeignet.

Ein sehr empfindliches Gerät zur Druckmessung ist die Ringwaage (Abb. 10). Ein innen hohler Ring hat bei a eine Trennwand, links und rechts davon befin-

den sich Anschlüsse für sehr biegsame Schläuche, die z. B. den zu

¹ Ausführliche Angaben über Mikromanometer befinden sich in dem Abschnitt: Mikromanometer, von A. Betz, Göttingen in Handb. d. Experimentalphysik, Wien. Harms IV, 1.

messenden Differenzdruck übertragen. Im unteren Teil des Ringes befindet sich Wasser oder eine andere Flüssigkeit, so daß zwei getrennte Lufträume vorhanden sind. Im Mittelpunkt A liegt das Ganze auf einer Schneide auf, so daß im Zusammenhang mit dem Gewicht G ein Pendel entsteht. Ist nun auf einer Seite der Druck größer, so steigt auf der anderen Seite das Wasser, während auf der entgegengesetzten der Wasserspiegel sinkt. Das Mehrgewicht auf einer Seite bedingt einen Ausschlag der Waage, der erst dann zur Ruhe kommt, wenn das Gegenmoment von G gleich dem Moment der hoch gehobenen Wassersäule ist. Die Flüssigkeit wirkt also sozusagen als Kolben. Ein Zeiger Z zeigt an einer Skala den Druck an. Diese Instrumente, die wegen der unmittelbaren Anzeige sehr beliebt sind, lassen sich für Drücke von noch 1 mm WS ausbilden.

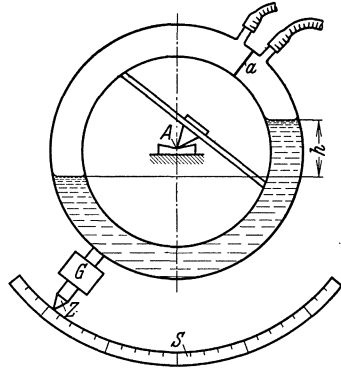


Abb. 10.

Dimensionen. Während in der Festigkeitslehre die Drücke bzw. Spannungen meist in kg/cm^2 , auch *at* genannt, und kg/mm^2 angegeben werden, wird in der Strömungslehre der Druck in kg/cm^2 und sehr oft in kg/m^2 angegeben. Letztere Angabe ist deshalb sehr beliebt, weil die Zahlenangabe identisch ist mit mm WS. Man überzeugt sich nämlich leicht, daß eine Wassermenge von 1 m^2 Grundfläche und 1 mm Höhe gerade 1 kg wiegt.

3. Einfluß der Kompressibilität bei Gasen.

Es entsteht die Frage, ob die Zusammendrückbarkeit von Gasen nicht einen prinzipiellen Unterschied gegenüber Flüssigkeiten bei einer Strömung bedingt. Ein solcher Einfluß ist tatsächlich vorhanden. Denn es ist klar, daß bei einer Gasströmung dort, wo ein Überdruck vorhanden ist, das Volumen kleiner ist wie bei einer Flüssigkeit unter sonst gleichen Verhältnissen. Die Stromlinien werden sich im ersten Falle mehr zusammendrängen und hierdurch indirekt andere Gebiete wieder beeinflussen. Nun ist es so, daß bei den meist vorkommenden Geschwindigkeiten dieser Einfluß unbedingt vernachlässigt werden kann. Ein Zahlenbeispiel soll dies verständlich machen.

Bei einem Flugzeug, daß eine Geschwindigkeit von 150 km/std., d. h. 41,7 m/sec hat, sind die maximal auftretenden Über- bzw. Unterdrücke von der Größenordnung 100 mm WS. Die hierdurch bedingte Änderung des Volumens läßt sich nach den thermodynamischen Zustandsgleichungen leicht berechnen.

Bei verlustfreier Strömung ist der Vorgang der Verdichtung unbedingt als adiabatisch anzusprechen (d. h. bei Verdichtung wird keinerlei Wärme nach außen abgeführt bzw. im inneren durch Stoß oder Reibung erzeugt). Druck und spez. Volumen ändern sich bei der Adiabate nach der Gl. $p \cdot v^\kappa = C$. Ausgehend von einem Atmosphärendruck von 1 kg/cm^2 , d. h. $10\,000 \text{ kg/m}^2 = 10\,000 \text{ mm WS}$ ist bei einem Überdruck von 100 mm WS ein absoluter Druck von $10\,100 \text{ kg/m}^2$ vorhanden. Das Druckverhältnis ist dann $\frac{1,01}{1} = 1,01$. Das Verhältnis der spez. Volumina ist nach der Adiabatenformel

$$\frac{v_1}{v_2} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\kappa}} = 1,01^{\frac{1}{\kappa}} \sim 1 + \frac{1}{\kappa} 0,01 = 1,00714$$

d. h. die Volumina ändern sich nur um $0,714 \text{ vH}$.

Dies bedeutet eine so geringfügige Änderung der Stromlinien, daß eine Vernachlässigung voll berechtigt ist.

Wir stellen somit fest: Die bei Strömungen von Gasen auftretenden Volumenänderungen können vernachlässigt werden. Gase gelten in der Strömungslehre durchweg als nicht zusammendrückbar.

Fortan werden wir deshalb unter dem Namen „Flüssigkeit“ sowohl eine Flüssigkeit wie ein Gas verstehen.

Bemerkt sei noch, daß die Dichteänderungen wohl berücksichtigt werden müssen, wenn die Strömungsgeschwindigkeit sich der Schallgeschwindigkeit nähert. Praktisch ist dies der Fall bei den Propellern von Rennflugzeugen, Lavaldüsen, Turbokompressoren usw. Verfasser ist der Ansicht, daß der Anfänger zunächst diese Dinge zurückstellen kann, weshalb in diesem Buche nicht darauf eingegangen wird.

4. Gleichgewicht der Atmosphäre.

Wir stellen die Frage, wie sich Druck, Temperatur und spez. Gewicht in einer Luftsäule einstellen, die auf dem Erdboden beginnt und sich bis in die Stratosphäre erstreckt. Am Boden ist der Druck dieser Luftsäule bekanntlich der sog. Atmosphärendruck, der ca. 1 kg/cm^2 ist. Nach oben nimmt das Gewicht der Luftsäule immer mehr ab, in gleicher Weise auch der Druck. Gleichzeitig wird das spez. Volumen immer größer, da mit abnehmendem Druck bei Gasen das Volumen größer wird. In unendlich großer Höhe ist schließlich der Druck gleich Null und das spez. Volumen unendlich¹.

Die Luftsäule habe die Fläche F . In irgend einer Höhe h über dem

¹ Vernachlässigt wird bei der folgenden Rechnung der Einfluß der Erdrotation sowie die Abnahme der Erdbeschleunigung g mit steigenden Höhen.

Boden betrachten wir ein Element von der Höhe dh (Abb. 11). Wenn der Druck auf der Oberseite p ist, muß er auf der unteren Seite größer sein, da das Gewicht der Luftsäule von der Höhe dh hinzugekommen ist, d. h.

$$dp = -dh \cdot \gamma = -\frac{dh}{v} *; \quad da \gamma = \frac{1}{v} \text{ ist.}$$

Wenn die betrachtete Luftsäule seitlich wärmedicht abgeschlossen ist, können Vorgänge im Innern, wenn noch Reibungsverluste ausgeschlossen werden, nur adiabatisch vor sich gehen, d. h. die Temperaturen müssen mit abnehmendem Druck kleiner werden. Es ist leicht nachweisbar, daß in der Luftsäule eine Temperaturverteilung vorhanden sein muß, die der Adiabate entspricht; andernfalls ist kein Gleichgewicht vorhanden.

Wir denken uns ein Luftteilchen von der Stelle h nach einer tieferen Stelle h' gebracht. Dem größeren Druck an der Stelle h' entsprechend wird sich das Teilchen verdichten und eine Temperatursteigerung annehmen, die sich aus der Adiabaten ergibt. Ist diese Temperatur nun identisch mit der Temperatur, die an dieser Stelle herrscht, so ist das spez. Gewicht des verschobenen Teilchens gleich dem an der Stelle herrschenden spez. Gewicht. Ist das nicht der Fall, so erhält das Teilchen einen Auftrieb oder einen Abtrieb, ein Gleichgewicht ist also nicht möglich. Man erkennt somit, daß nur bei adiabatischer Temperaturverteilung die Luftsäule in Ruhe bleiben kann.

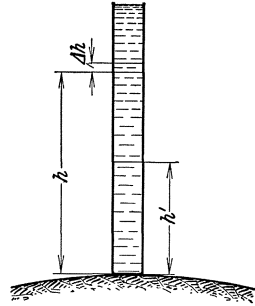


Abb. 11. Zylindrischer Ausschnitt der Atmosphäre.

Setzen wir in die letzte Gleichung aus der Gleichung der Adiabaten

$$p \cdot v^\kappa = p_0 \cdot v_0^\kappa = C \text{ den Wert } v = \left(\frac{C}{p}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \text{ ein, so ergibt sich } dp = -dh \frac{p^{\frac{1}{\kappa}}}{C^{\frac{1}{\kappa}}};$$

hieraus $dh = -p^{-\frac{1}{\kappa}} \cdot C^{\frac{1}{\kappa}} \cdot dp$.

Erstrecken wir die Integration vom Erdboden, d. h. von $h = 0$ bis zur Höhe h und bezeichnen die Zustände am Erdboden mit dem Index 0, so erhalten wir

$$-h = C^{\frac{1}{\kappa}} \frac{\kappa}{\kappa - 1} \left[p^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - p_0^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right].$$

Nach einigen leichten Umformungen und unter Berücksichtigung

* Das (—)-Zeichen kommt dadurch zustande, daß h nach oben positiv gerechnet wird.

von $p_0 \cdot v_0^\kappa = C$ entsteht

$$p = p_0 \left[1 - \frac{h}{v_0 \cdot p_0} \frac{\kappa - 1}{\kappa} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}.$$

Aus der Hauptzustandsgleichung $p \cdot v = R \cdot T$ läßt sich noch die Temperatur am Erdboden einsetzen

$$p = p_0 \left[1 - \frac{h}{R T_0} \frac{\kappa - 1}{\kappa} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}. \quad (3)$$

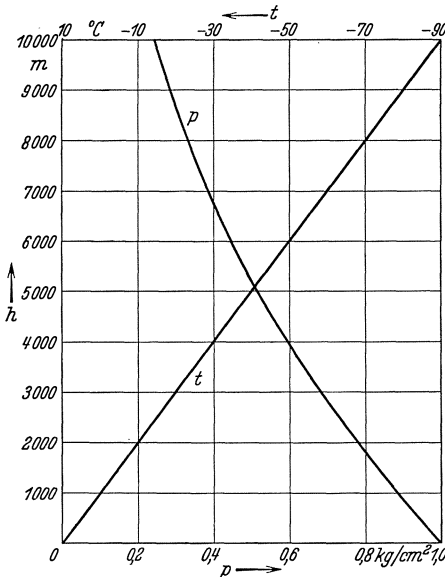


Abb. 12. Druck- und Temperaturverlauf in der Atmosphäre in Abhängigkeit von der Höhe.

Der Zusammenhang zwischen Druckverhältnis und Temperaturverhältnis ist durch

die Gl. $\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \frac{T}{T_0}$ gegeben.

Gl. (3) läßt sich leicht in diese Form kleiden:

$$\begin{aligned} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} &= 1 - \frac{h}{R \cdot T_0} \frac{\kappa - 1}{\kappa} = \frac{T}{T_0} \\ &= \frac{T_0 - \Delta T}{T_0} = 1 - \frac{\Delta T}{T_0}. \end{aligned}$$

Wir erkennen, daß die Temperatur linear mit der Höhe abnimmt. Die prozentuale Abnahme ist leicht zu ermitteln

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta T}{T_0} &= \frac{h}{R \cdot T_0} \frac{\kappa - 1}{\kappa} \\ \text{d. h.} \quad \Delta T &= \frac{h}{R} \frac{\kappa - 1}{\kappa}. \end{aligned} \right\} (4)$$

Für einen Höhenunterschied von $h = 100$ m erhalten wir

$$\Delta T = \frac{100}{29,3} 0,286 = 0,975 \sim 1^\circ \text{C}.$$

Wir finden die Regel, daß die Temperatur bei einem Höhenunterschied von je 100 m um 1°C abnimmt.

Abb. 12 zeigt noch wie nach Gl. (3) und Gl. (4) Druck und Temperatur in Abhängigkeit von der Höhe sich ändern.

II. Bewegungslehre.

5. Vergleich mit der Bewegung fester Körper.

In diesem Kapitel soll eine direkte Brücke zwischen der meist etwas geläufigeren Mechanik der festen Körper und der Mechanik der Flüssigkeiten geschlagen werden.

Der Ausfluß aus einem Gefäß ist hierzu sehr geeignet. Die sich zuerst aufdrängende Frage nach der Ausflußgeschwindigkeit ist mit Hilfe des Energiesatzes leicht zu beantworten (Abb. 13). Die in einem kurzen Zeitintervall ausgeflossene Wassermenge ΔV besitzt eine kinetische Energie $\frac{1}{2} \Delta V \cdot \frac{\gamma}{g} w^2$. Der Wasserspiegel hat sich in dieser Zeit um den Wert Δh gesenkt. Um den früheren Zustand wieder herbeizuführen, muß die Hubarbeit $\Delta V \gamma \cdot h$ geleistet werden. Die Gleichsetzung $\frac{1}{2} \Delta V \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot w^2 = \Delta V \cdot \gamma \cdot h$ ergibt

$$w = \sqrt{2gh}, \quad (5)$$

d. h. die Austrittsgeschwindigkeit ist dieselbe, als wenn das Wasser wie ein fester Körper die Höhe h frei gefallen wäre. Die bekannte Regel, daß die Fallgeschwindigkeit bei reibungsfreiem Fall unabhängig von Form und Gewicht des Körpers ist, hat hier ein Analogon: Die Austrittsgeschwindigkeit ist nur von der Höhe h und nicht vom spez. Gewicht abhängig.

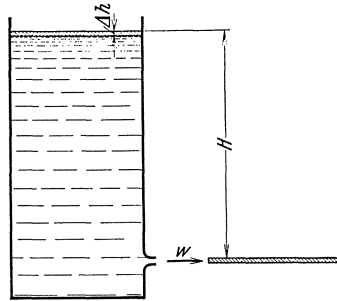


Abb. 13. Ausfluß aus einem Gefäß. Betrachtung eines kurzen Zeitelementes.

Ein zweites Gefäß hat zwischen Gefäß und Düse noch eine Rohrleitung von größerem Durchmesser als der Austrittsdüse (Abb. 14). Da wir Reibungsverluste ausschließen wollen, kann sich die Austrittsgeschwindigkeit gegenüber dem 1. Fall nicht ändern und ist infolgedessen bekannt. Die Geschwindigkeit $w_1 = w \cdot \frac{f}{f_1}$ in der Rohrleitung ist aus der Stetigkeitsgleichung $f_1 \cdot w_1 = f \cdot w$ bekannt. Diese Gleichung sagt aus, daß das durch jeden Querschnitt in der Sekunde durchtretende Volumen sich nicht verändert.

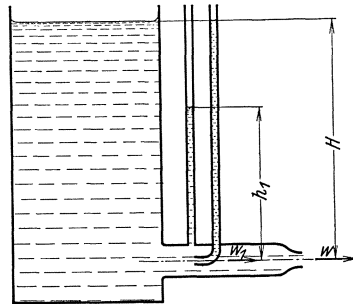


Abb. 14. Druckmessungen in dem Ausflußrohr eines Gefäßes.

Das Zwischenrohr enthalte eine Anbohrung, die mit einem offenen Steigrohr verbunden ist. Wie groß ist nun die Druckhöhe, die sich in diesem Steigrohr einstellt? Zum besseren Verständnis lohnt es sich, diese Druckhöhe h_1 so aufzufassen, als wenn in diesem Querschnitt die Flüssigkeit in der Lage wäre, sich selbst auf diese Höhe h_1 zu heben¹,

¹ Wenn man sich vorstellt, daß das Steigrohr etwas unter der Druckhöhe h_1 abgeschnitten ist, so würde das Wasser überlaufen und sich tatsächlich auf die Höhe h_1 heben, so daß diese Vorstellung durchaus berechtigt ist.

d. h. gleich der an dieser Stelle noch vorhandenen Lagenenergie pro kg, d. h. $1 \cdot h_1 = h_1 [m]$ zu setzen. Nach dem Energiesatz ergibt sich mit zwingender Notwendigkeit, daß der Rest $H - h_1$ sein Äquivalent in der kinetischen Energie $\frac{w_1^2}{2g} \cdot \gamma$ hat, so daß die Gleichung $H - h_1 = \gamma \cdot \frac{w_1^2}{2g}$ besteht. Die Ausrechnung nach

$$w_1 = \sqrt{2g \frac{H - h_1}{\gamma}} \quad (6)$$

zeigt, daß durch die Messung von H und h_1 , die Geschwindigkeit im Rohre unabhängig von Düse usw. zu bestimmen ist.

Eine zweite Messung bestehe darin, daß in dem Zwischenstück ein Meßrohr mit der Öffnung der Strömung entgegen gerichtet ist. In diesem Steigrohr steigt die Flüssigkeit bis auf die Höhe im Behälter.

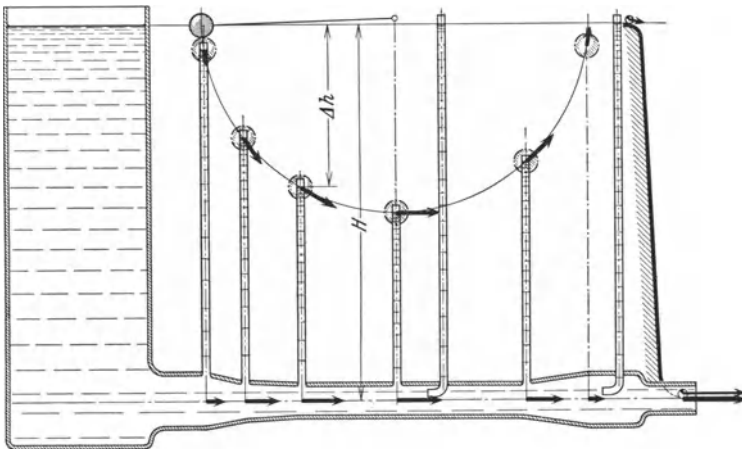


Abb. 15. Vergleich zwischen der Bewegung von Flüssigkeiten und festen Körpern.

Vor der Meßöffnung wird die Geschwindigkeit abgestoppt und verwandelt ihre ganze kinetische Energie wieder in Druckenergie. Die sich hier einstellende Druckhöhe H ist die gleiche wie die Niveauhöhe des Gefäßes, wenn, wie vorausgesetzt, keine Verluste auftreten. Wir merken uns bereits jetzt, daß an der untersuchten Stelle ohne Kenntnis der Vorgeschichte die Niveauhöhe des Behälters bestimmt werden kann.

Wir gehen einen Schritt weiter. Die Ausflußleitung vor der Düse weist verschiedene Querschnittsänderungen auf. Letztere seien so angeordnet, daß sich die Niveauhöhen der verschiedenen Steigrohre auf einem Kreisbogen befinden. Die Frage nach der Geschwindigkeit an irgendeiner Stelle ist nach obigem leicht zu beantworten. Die Differenz Δh zwischen Niveauhöhe des Gefäßes und des Steigrohres stellt die

Fallhöhe dar, nach deren direktem Durchfallen das Wasser dieselbe Geschwindigkeit wie im Rohre erhalten würde. Die kreisförmige Begrenzung der Druckhöhen stelle gleichzeitig die Bewegungsbahn eines in Abb. 15 eingezeichneten Fadenpendels dar. Das Pendelgewicht werde von der Niveauhöhe des Gefäßes freigegeben. Bei verlustfreier Bewegung wird an irgend einer Stelle, wo das Pendel um Δh gefallen ist, nach dem Energiesatz die Geschwindigkeit $w = \sqrt{2g\Delta h}$ sein. Das ist aber auch die Geschwindigkeit des im Querschnitt senkrecht darunter fließenden Wassers. Man erkennt: An Stellen, die senkrecht übereinander liegen, ist die Geschwindigkeit des Pendels und des Wassers

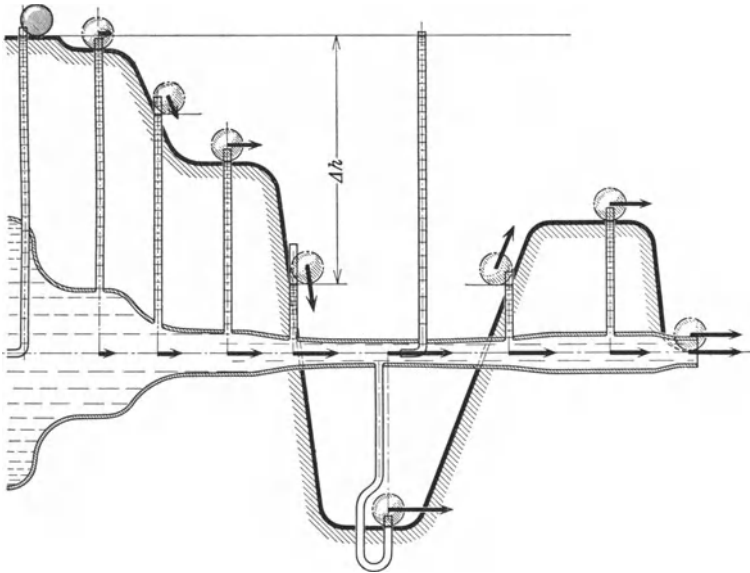


Abb. 16. Veranschaulichung des Unterdruckes durch Berg- und Talbewegung eines festen Körpers. Geschwindigkeit im Wasser und Kugel ist in senkrechten Schnitten gleich.

dieselbe. Die in Abb. 15 eingezeichneten Geschwindigkeitsvektoren deuten durch Richtung und Größe diesen Sachverhalt an.

Der Ausfluß in der Düse werde noch summarisch verglichen mit einem Gleitkörper, der die Höhe H reibungslos gleitet. Die Geschwindigkeit des Wassers und die des Gleitstückes sind dann ebenfalls gleich (Abb. 15).

In einem weiteren Experiment (Abb. 16) werde nur mehr ein Rohr betrachtet. Da ein dem Strome entgegen gehaltenes Staurohr nach dem oben geschilderten Verfahren exakt die Niveauläche des Gefäßes wiedergibt, gestattet diese Messung die Feststellung der Niveauhöhe. Es leuchtet ein, daß es belanglos ist, ob dieser Druck nun tatsächlich durch das höher liegende Wasserniveau eines Gefäßes oder aber durch eine

Pumpe od. dgl. erzeugt wird. Das Wasser besitzt hierfür kein Erinnerungsvermögen und richtet sich nur nach dem Druck. Die Leitung habe in der Mitte einen Querschnitt, der kleiner wie der Austrittsquerschnitt der Düse ist. Der Querschnitt sei im übrigen so geformt, daß die Niveauhöhe der Steigröhren eine aus Abb. 16 erkennbare Kurve durchläuft. Wie sofort auffällt, ist nun an der engsten Stelle der Druck negativ. Es soll versucht werden, für diese überaus wichtige Erscheinung wieder eine Stütze bei der Bewegung fester Körper zu finden. Die Kurve der Niveauhöhen sei gleichzeitig die Rutschbahn eines reibungsfrei gleitenden Körpers. Die Geschwindigkeit an irgendeiner Stelle bestimmt sich wieder nach $w = \sqrt{2g\Delta h}$. Die Endgeschwindigkeit kann somit nicht größer sein wie $\sqrt{2gH}$; an der tiefsten Stelle ist jedoch die Geschwindigkeit größer nämlich $\sqrt{2g(H+h')}$ ¹. In dem anschließenden Steigen wird allerdings der Überschuß der kinetischen Energie wieder in Hubarbeit umgesetzt. Genau so verhält sich die Flüssigkeit. Das beim letzten Beispiel Gesagte gilt auch hier. Die Geschwindigkeit des Wassers und des festen Körpers stimmen genau überein. Wir finden somit: Der in einer Leitung erzeugte Unterdruck ist das genaue Analogon zu dem Fallen und Steigen eines festen Körpers durch ein Tal. Wir fassen zusammen.

1. Ein der Strömung entgegengehaltenes Staurohr zeigt einen Druck an, der identisch mit der gesamten Energiehöhe des Wassers ist.

2. In einer geraden Rohrleitung kann die Geschwindigkeit festgestellt werden durch Messung des Wanddruckes und des Gesamtdruckes (durch ein dem Strom entgegen gerichtetes Staurohr). Die Differenz beider Druckhöhen ist die Fallhöhe, die notwendig ist, um die Rohrgeschwindigkeit zu erzielen.

Es werde bereits hier die Vereinbarung getroffen, daß der Druck senkrecht zur Strömungsrichtung, d.h. der Wanddruck bei einer Rohrleitung statischer Druck, und der Druck in Richtung der Strömung Gesamtdruck genannt wird.

6. Kräftegleichgewicht der stationären Strömung.

Die Wechselbeziehungen zwischen Druck und Geschwindigkeit sollen für den allgemeinen Fall der freien Strömung nunmehr zahlenmäßig festgestellt werden.

Abb. 17 stelle irgend einen Ausschnitt einer beliebigen Strömung dar. Die gekrümmten Linien seien die Bahnen einzelner Teilchen. Der Abstand der „Stromlinien“ sei so gewählt, daß zwischen zwei Linien immer dieselbe Wassermenge strömt.

¹ h' ist der Abstand von der tiefsten Stelle bis zur Rohrmitte.

Irgend ein Element (Abb. 17) werde aus der Gesamtströmung herausgegriffen. Außer der Krümmung mit dem Radius R setzen wir eine beliebige Querschnittsverengung in Strömungsrichtung voraus. Die Geschwindigkeit an jeder Stelle sei zeitlich konstant, im ganzen Strömungsraume somit ein Zustand, der meist mit dem Wort „stationär“ bezeichnet wird. Das abgegrenzte Massenteilchen mit den Abmessungen b (Ausdehnung senkrecht zur Zeichenebene) Δs und Δn wird sich nun so bewegen, als wenn ein fester Körper mit derselben Masse den gleichen äußeren Kräften unterworfen wird. Das Teilchen muß natürlich so klein gewählt werden, daß innerhalb seiner eigenen Ausdehnung keine nennenswerten Geschwindigkeitsunterschiede vorhanden sind. Nur bei dieser mikroskopischen Betrachtung ist der Vergleich mit einem festen Körper von gleichem Gewicht gestattet.

Folgende Kräfte wirken auf das Teilchen:

1. Druckkräfte. Der statische Druck wirkt normal auf die Oberflächen des Elementes und wird in dieser oder jener Richtung einen Überschuß bedingen, wenn er sich im betrachteten Gebiet ändert.

2. Gewichtskomponenten. Von solchen sprechen wir, wenn die Bewegung nicht in einer horizontalen Ebene erfolgt und beispielsweise ein Heben der Flüssigkeit stattfinden muß.

Die Summe aller auf das Teilchen wirkenden Kräfte bewirkt eine Beschleunigung, die nach dem Newtonschen Satze

$$\text{Kraft} = \text{Masse} \times \text{Beschleunigung}$$

leicht ermittelt werden kann.

Einige Vorarbeiten seien zuvor noch ausgeführt. Bei dem betrachteten Element wird sich Druck und Geschwindigkeit in Strömungsrichtung (s) und senkrecht dazu (n) um kleine Beträge ändern. Die Abhängigkeit der Geschwindigkeit in Strömungsrichtung ist in Abb. 17 dargestellt. Auf dem Wege Δs nehme w um Δw zu. Ist $\frac{dw}{ds} = \text{tg } \alpha$ die Steigung der Kurve, so ist $\Delta w = \frac{dw}{ds} \cdot \Delta s$.

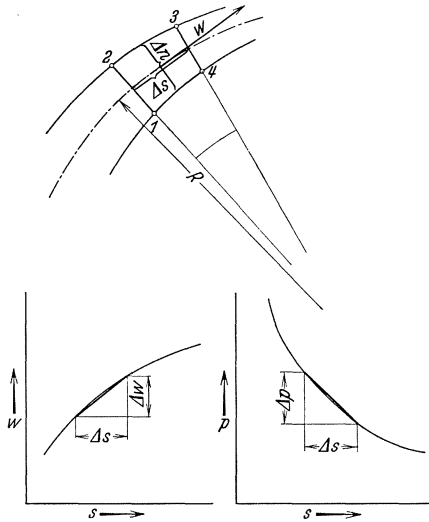


Abb. 17. Teilstück irgendeiner Strömung. Geschwindigkeits- und Druckverlauf in Strömungsrichtung.

Die Veränderung des statischen Druckes in Strömungsrichtung ist ebenfalls in Abb. 17 dargestellt. Auf der Strecke Δs wird der Druck sich um Δp ändern. Man erkennt leicht:

$$\Delta p = \frac{dp}{ds} \cdot \Delta s.$$

Die Druckänderung normal zu der Strömungsrichtung ergibt sich in gleicher Weise zu

$$\Delta p = \frac{dp}{dn} \cdot \Delta n.$$

Gleichgewicht gegen Verschiebung ist nun vorhanden, wenn die Kräfte in zwei senkrechten Richtungen gleich Null sind. Die Strömungsrichtung und die dazu senkrechte Richtung sollen zu dieser Nachprüfung gewählt werden.

1. Kräftegleichheit in Strömungsrichtung. Nur die Drücke auf die Fläche $b \cdot \Delta n$ ergeben Kräfte in dieser Richtung. Wir berücksichtigen, daß beim Fortschreiten um Δs der Druck sich um Δp ändert. Für die Bestimmung der Vorzeichen legen wir fest, daß alle Kräfte und Strecken in Strömungsrichtung positiv gerechnet werden.

Die gesamten äußeren Kräfte in Strömungsrichtung werden gleich der Beschleunigungskraft in dieser Richtung gesetzt.

$$b \cdot \Delta n \cdot p - b \cdot \Delta n \left[p + \frac{dp}{ds} \cdot \Delta s \right] = \frac{\gamma}{g} \cdot b \cdot \Delta n \cdot \Delta s \cdot \frac{dw}{dt} \text{ hieraus folgt}$$

$$-\frac{dp}{ds} = \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{dw}{dt}.$$

Da w eindeutig von s abhängt, kann

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dw}{ds} \cdot w$$

ersetzt werden.

$$-\frac{dp}{ds} = \frac{\gamma}{g} \frac{dw}{ds} \cdot w$$

Aus

$$-dp = \frac{\gamma}{g} w \cdot dw \quad \text{entsteht} \quad p = -\frac{\gamma}{g} \frac{w^2}{2} + C.$$

Nach einer weiteren Umschreibung erhalten wir

$$\frac{p}{\gamma} + \frac{w^2}{2g} = H \quad [m] \quad (7)$$

indem wir für die Konstante $\frac{C}{\gamma}$, die die Dimension einer Länge hat, den Buchstaben H einsetzen.

Wir finden somit: Der Ausdruck

$$\frac{p}{\gamma} + \frac{w^2}{2g}$$

ist konstant und zwar einstweilen nur für die betrachtete Stromlinie. Diese Aussage, bekannt unter der Bezeichnung Bernoullischer Satz, kann auch leicht aus dem Energiesatz gewonnen werden. Wenn man hier oft von dem Energiesatz der Flüssigkeiten spricht, so ist dies vom Standpunkt der allgemeinen Mechanik durchaus konsequent.

Beispiel: Eine Wasserleitung vom Durchmesser 200 mm habe einen Überdruck gegenüber der Atmosphäre von $p_1 = 1,5 \text{ kg/cm}^2$, d.h. einen absoluten Druck von 2,5 ata; die Geschwindigkeit sei 4 m/s; die Leitung verenge sich auf $d_2 = 150 \text{ } \varnothing$. Wie groß ist hier der Druck? Da durch beide Rohre die gleiche Menge strömt, besteht die Gleichung:

$$w_1 F_1 = w_2 F_2; \quad w_2 = w_1 \frac{F_1}{F_2} = w_1 \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^2 = 7,06 \text{ m/s.}$$

Wir stellen die Bernoullische Gleichung für beide Stellen auf:

$$\frac{w_1^2}{2g} \cdot \gamma + p_1 = \frac{w_2^2}{2g} \cdot \gamma + p_2; \quad \text{d.h.} \quad \Delta p = p_1 - p_2 = \frac{\gamma}{2g} [w_2^2 - w_1^2] = \frac{1000}{2g} [7,06^2 - 4^2] \\ = 1720 \text{ kg/m}^2$$

$$\Delta p = 0,172 \text{ kg/cm}^2; \quad p_2 = p_1 - \Delta p = 2,328 \text{ kg/cm}^2.$$

2. Kräfte senkrecht zur Strömungsrichtung. Wodurch können Druckänderungen in der Normalrichtung überhaupt auftreten? Offenbar nur durch Zentrifugalkräfte, die durch die Bewegung eines Massenteilchens auf der gekrümmten Stromlinie entstehen. Diese Zentrifugalkräfte müssen durch Druckkräfte aufgenommen werden. Man erkennt, daß deshalb der Druck in Richtung der Normalen nach außen zunehmen muß. Bewegt sich eine Masse m auf einem Kreise vom Radius R mit der Geschwindigkeit w , so ist die senkrecht zur Bahn auftretende Zentrifugalkraft $\frac{m \cdot w^2}{R}$. Es ist gleichgültig, ob die Masse durch einen festen Körper oder eine Flüssigkeit gebildet wird. In unserem Falle ist $m = \frac{\gamma}{g} b \cdot \Delta s \cdot \Delta n$. Ein Überdruck Δp , wirkend auf die Fläche $b \cdot \Delta s$, wirkt der Zentrifugalkraft entgegen.

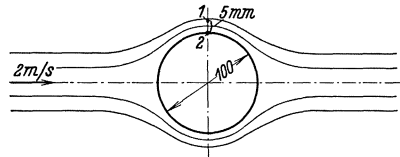


Abb. 18. Reibungsfreie Umströmung eines Zylinders.

Die Gleichsetzung dieser Kräfte ergibt:

$$b \cdot \Delta s \cdot \frac{dp}{dn} \cdot \Delta n = \frac{\gamma}{g} b \cdot \Delta s \cdot \Delta n \cdot \frac{w^2}{R} \\ \frac{dp}{dn} = \frac{\gamma}{g} \frac{w^2}{R}. \quad (8)$$

Diese Gleichung gestattet uns, die Druckänderung in der Normalrichtung auszurechnen.

Ein Beispiel möge die Verwendbarkeit der Gleichung zeigen.

Die reibungsfreie Umströmung eines unendlich langen Zylinders ¹ (Abb. 18) ergibt an der Stelle 2 eine Geschwindigkeit $2u$, wenn $u = 2$ m/s die Geschwindigkeit der ungestörten Strömung im Unendlichen ist. Um wieviel ändert sich der Druck, wenn wir von der Stelle 2 um 5 mm weiter nach der Stelle 1 gehen? Gl. (8) schreiben wir als Differenzgleichung:

$$\Delta p = \Delta n \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{w^2}{R}.$$

Hier ist $\Delta n = 5$ mm; $w = 2u$; $R = 5$ cm; $u = 2$ m/s.

Man erhält

$$\Delta p = 0,005 \frac{1000}{9,81} \cdot \frac{4^2}{0,05} = 163 \text{ mm WS}.$$

7. Übergang von einer Stromlinie zu der Gesamtströmung.

Nach Gl. (7) war H nur innerhalb einer Stromröhre konstant. Ändert sich nun H , wenn wir zu der Nachbarstromlinie übergehen? Mathematisch gesprochen heißt dies: ist $\frac{dH}{dn}$ gleich Null oder von Null verschieden?

Aus Gl. (7) ergibt sich:

$$\frac{dH}{dn} = \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{dn} + \frac{1}{g} \frac{dw}{dn} \cdot w$$

$\frac{dp}{dn}$ wird durch

$$\frac{dp}{dn} = \frac{\gamma}{g} \frac{w^2}{R}$$

Gl. (8) ersetzt, so daß folgende Form entsteht

$$\frac{dH}{dn} = \frac{1}{g} \frac{w^2}{R} + \frac{1}{g} \frac{dw}{dn} \cdot w = \frac{w}{g} \left[\frac{w}{R} + \frac{dw}{dn} \right].$$

Da nun w nicht gleich Null sein kann, entscheidet der Wert von $\frac{w}{R} + \frac{dw}{dn}$ unsere Frage. Die physikalische Deutung dieses Ausdruckes ist nun ebenso wichtig wie aufschlußreich.

Würde das betrachtete Massenteilchen $b \cdot \Delta s \cdot \Delta n$ sich um den Krümmungsmittelpunkt mit der Umfangsgeschwindigkeit w als starrer Körper drehen (Abb. 17), so wäre die Winkelgeschwindigkeit $\omega' = \frac{w}{R}$. Da jedoch unabhängig hiervon w in Richtung der Normalen um

$$\Delta w = \frac{dw}{dn} \cdot \Delta n$$

zunimmt, ergibt sich eine weitere Drehung

$$\omega'' = \frac{dw}{dn}.$$

¹ Der Beweis dieser Voraussetzung wird S. 31. folgen.

Der Wert

$$\omega = \omega' + \omega'' = \frac{w}{R} + \frac{dw}{dn} \quad (9)$$

ist somit die Gesamtdrehung des Teilchens¹. Ist eine solche nicht vorhanden, so ist

$$\frac{dH}{dn} = \frac{w}{g} \left[\frac{w}{R} + \frac{dw}{dn} \right] = \frac{w}{g} \cdot \omega \quad (10)$$

gleich Null, d. h. H ist dann im ganzen Stromgebiet konstant.

Die Drehung eines Teilchens kann niemals durch Druckkräfte, die normal zur Oberfläche wirken, erzeugt werden, da deren Resultierende immer durch den Schwerpunkt geht. Eine Drehung eines Teilchens muß durch Schubspannungen an den Berandungen eingeleitet werden. Diese sind aber nur durch Reibungskräfte möglich. Wir stellen somit fest:

1. Bei einer reibungsfreien Flüssigkeit ist H im ganzen Strömungsgebiet konstant.

2. Bei einer Flüssigkeit mit Reibung kann sich dagegen H , d. h. die Gesamtenergie von Stromlinie zu Stromlinie ändern.

8. Die reibungsfreie Drehung.

Eine reibungsfreie Drehbewegung ist eigentlich nach dem Vorhergehenden ein Widerspruch. Der Ausdruck $\frac{w}{R} + \frac{dw}{dn} = \omega$ muß ja für ein kleines Massenteilchen bei Reibungslosigkeit gleich Null sein. Die Bewegung auf einer gekrümmten Bahn kann also nur eine schiebende sein. Auf einer Kreisbahn bewegt sich somit ein Teilchen so, daß ein Richtungspfeil (Abb. 19) dem ruhenden Raum gegenüber immer dieselbe Richtung beibehält. Um falsche Vorstellungen zu vermeiden, sei ausdrücklich bemerkt, daß dies nur für kleinste Teilchen, d. h. mikroskopisch betrachtete Bewegung gilt. In Abb. 19 bewegt sich ein nebenan liegendes Teilchen genau so. Wenn links die Kanten $C'D'$ und AB sich berühren, so sind nach einer Bewegung auf einem Halbkreis nunmehr die gegenüberliegenden Seiten CD und $A'B'$ Berührungsflächen.

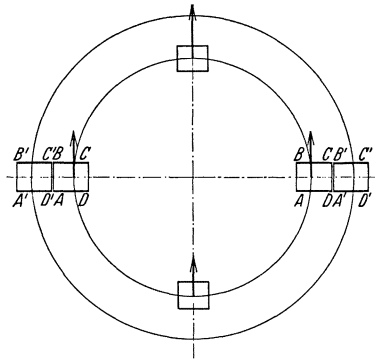


Abb. 19. Darstellung der schiebenden Drehbewegung bei Reibungslosigkeit.

¹ Genau genommen haben wir nur die Drehung einer Kante des Teilchens berechnet und mit ω bezeichnet. Untersucht man die Drehung aller Richtungen in einem Teilchen, so wechselt dieselbe. Es gelingt leicht, hieraus eine sog. mittlere Drehung abzuleiten. Diese ist gleich der Hälfte des oben abgeleiteten Wertes.

Die „Drehbewegung“ eines Teilchens auf einem Kreise ist somit eine reine Verschiebung.

Für diese reine Kreisbewegung ist nach Gl. (9) leicht die Geschwindigkeitsverteilung zu ermitteln. Da mangels Reibung $\omega = 0$ ist, erhalten wir $\frac{w}{R} + \frac{dw}{dn} = 0$; mit $dn = dr$ ergibt sich: $\frac{dw}{w} = -\frac{dr}{r}$; $\ln w = -\ln r + C$. Nehmen wir an, daß an einer Stelle r_0 die Geschwindigkeit w_0 gegeben

ist, so erhalten wir $\ln w_0 = -\ln r_0 + C$. Ziehen wir diese Gleichung von der vorhergehenden ab, so entsteht

$$\ln w - \ln w_0 = \ln r_0 - \ln r; \ln \frac{w}{w_0} = \ln \frac{r_0}{r}$$

oder

$$w \cdot r = w_0 \cdot r_0 = \text{konstant.} \quad (11)$$

Die Geschwindigkeitsverteilung ist somit durch eine gleichseitige Hyperbel gekennzeichnet (Abb. 20). Die unendlich große Geschwindigkeit für $r = 0$ überrascht zunächst.

Bei reibungsfreier Strömung müssen wir aber an diesem Ergebnis festhalten. Erst bei Betrachtung der Reibung wird es uns gelingen, die Gegend um $r = 0$ in Einklang mit der Erfahrung zu bringen.

Wir wollen noch die Druckverteilung dieser Bewegungsform ermitteln. Nach dem Bernoullischen Satz erhält man

$$\frac{w_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} = \frac{w^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} = H;$$

$$p = H \cdot \gamma - \frac{w^2}{2g} \cdot \gamma$$

Wir setzen aus Gl. (11)

$$w = w_0 \frac{r_0}{r}.$$

ein und erhalten

$$p = H \cdot \gamma - \frac{w_0^2 \cdot r_0^2}{2g} \frac{1}{r^2} \cdot \gamma.$$

In Abb. 21 ist $p = f(r)$ aufgetragen. Für $r = 0$ wird $p = -\infty$. Wir werden so zwangsläufig zu einem negativen Druck geführt, d. h. ein Druck unter

dem Vakuum. (Nicht zu verwechseln mit Unterdruck schlechthin.) Was ist hierunter nun zu verstehen? Der bisher behandelte Druck bedingte Druckspannungen (d. h. Normalkräfte nach dem Innern des Körpers gerichtet) und wurde naturgemäß positiv eingesetzt. Um uns unter einem negativen Druck etwas vorstellen zu können, denken wir

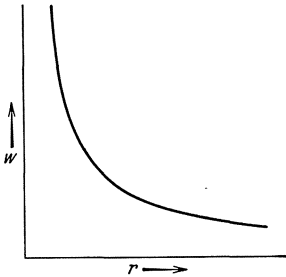


Abb. 20.
Geschwindigkeitsverteilung bei reibungsfreier Drehbewegung.

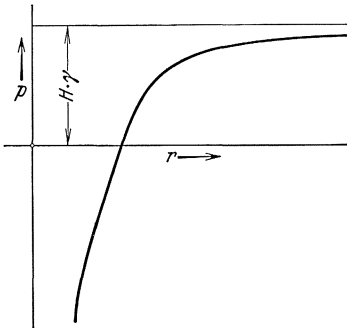


Abb. 21. Druckverlauf bei reibungsfreier Drehbewegung.

am besten an die Festigkeitslehre. Negativer Druck ist hier nichts anderes wie Zugspannung. Dasselbe bedeutet dies auch bei einer Flüssigkeit. Ob allerdings Flüssigkeiten Zugspannungen in Wirklichkeit aufnehmen können, ist uns bislang nicht bekannt geworden. Im allgemeinen dürfte das Flüssigkeitsgefüge vorher zerreißen und verdampfen.

Wir werden noch eine wichtige Feststellung machen. Bei der behandelten Bewegungsform nimmt die Geschwindigkeit w nach Gl. (11) mit $\frac{1}{r}$ ab. Diese Tatsache beantwortet uns gleichzeitig die Frage nach der Fernwirkung einer an einem Orte erzwungenen derartigen Drehbewegung. Wir merken uns, daß eine durch eine solche Bewegung bedingte örtliche Störung mit $\frac{1}{r}$ abklingt, d. h. in doppelter Entfernung vom Mittelpunkt ist die Geschwindigkeit nur halb so groß usw.

Fortan wollen wir diese Bewegungsform Potentialwirbel bzw. „reiner Wirbel“ nennen.

9. Wirbel und Drehbewegung.

Aus Gl. (7) ging hervor, daß bei der reibungsfreien Flüssigkeit H für eine ganze Stromröhre konstant sein muß. Gl. (10) zeigte uns, daß bei Reibungslosigkeit H im ganzen Strömungsfeld konstant ist.

Wir gehen nun einen Schritt weiter, indem wir in einer reibungslosen Flüssigkeit für eine Stromröhre eine Drehung voraussetzen, im übrigen aber Reibungslosigkeit annehmen. Wie diese Drehung scheinbar im Gegensatz zu unseren Annahmen entstanden ist, wollen wir zunächst noch ununtersucht lassen.

Nach früheren Darlegungen ist es gleichgültig, an welcher Stelle der Wert $\frac{dH}{dn}$ gebildet wird, da für die ganze Stromröhre die Änderung von H gegenüber den Nachbarstromlinien konstant sein muß. Als Differenzgleichung geschrieben, gestattet Gl. (10) nun eine anschauliche Deutung

$$\gamma \cdot \Delta H = b \cdot \Delta n \cdot w \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega}{b} = \Delta n \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega$$

$b \cdot \Delta n \cdot w \cdot \frac{\gamma}{g}$ ist die sekundlich durch die Stromröhre gehende Masse Δq , so daß

$$\gamma \cdot \Delta H = \Delta q \cdot \frac{\omega}{b} = \frac{\gamma}{g} \frac{\Delta F}{\Delta t} \cdot \omega \quad (12)$$

Dieses ΔH muß konstant sein für die ganze Stromlinie, die mit der Drehung behaftet ist.

* Gleichzeitig wurde $\Delta n \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}$ der vorhergehenden Gleichung durch $\frac{\Delta F}{\Delta t}$ ersetzt, wo $\Delta F = \Delta n \cdot \Delta s$ die Fläche eines Massenteilchens ist.

Der Ausdruck: Masse \times Wirbelgeschwindigkeit ist demnach konstant. Man bezeichnet dieses Produkt als den Impuls oder das Wirbelmoment.

Unter Beachtung dieser Zusammenhänge, ergeben sich noch folgende Regeln, auf die zuerst Helmholtz hingewiesen hat:

1. Zwischen zwei Stromlinien, die von einer sonst drehungsfreien Strömung herrühren, kann kein Wirbel entstehen, wenn man von der Reibung absieht; denn zur Ausübung einer Drehung ist ein Moment notwendig das nur durch Tangentialkräfte entstehen kann. Bei reibungsfreien Flüssigkeiten können aber nur Druckkräfte und keine Tangentialkräfte erzeugt werden.

2. Sind Wirbel, d. h. in Drehung befindliche Teilchen vorhanden, so bleibt die Drehung an den Teilchen haften. Ein Wirbelfaden kann also mit der Flüssigkeit wegschwimmen.

3. Ein Wirbelfaden kann niemals in einer Flüssigkeit enden. Entweder ist er in sich geschlossen (Ringwirbel) oder er endet an einer Wand oder einer freien Oberfläche.

10. Linienintegral und Gesetze über Wirbelbewegung.

Für das in Abb. 17 behandelte Element $b \cdot \Delta s \cdot \Delta n$ wollen wir entlang der Grenze den Ausdruck Σ (Weg \times Geschwindigkeit in Wegrichtung) bilden. Wir erinnern uns hierbei, daß beim Fortschreiten um Δn nach früheren Feststellungen die Geschwindigkeit um $\Delta n \frac{dw}{dn}$ zunimmt. Nur zwei Seiten des Elementes, nämlich die Begrenzungen parallel den Bewegungsrichtungen liefern einen Beitrag, da an den anderen Seiten die Geschwindigkeit gleich Null ist; somit entsteht:

$$\begin{aligned} \oint w ds &= \Sigma (\text{Weg} \times \text{Geschw.}) = (\Delta n + R) \Delta \varphi \left(w + \Delta n \frac{dw}{dn} \right) \\ &- w \cdot R \cdot \Delta \varphi = \Delta \varphi \left[\Delta n \cdot w + \Delta n^2 \cdot \frac{dw}{dn} + R \cdot \Delta n \cdot \frac{dw}{dn} \right]^*. \end{aligned}$$

Bei Vernachlässigung von $\Delta n^2 \frac{dw}{dn}$ ergibt sich

$$\oint w ds = \Delta \varphi \left[\Delta n \cdot w + R \cdot \Delta n \cdot \frac{dw}{dn} \right] = \Delta s \cdot \Delta n \left[\frac{w}{R} + \frac{dw}{dn} \right] = \Delta F \cdot \omega .$$

Das Resultat steht also in einfachem Zusammenhang mit der Fläche und der Drehung der Teilchen, d. h. mit der vorhin gewonnenen Beziehung.

Nun soll für einen größeren endlichen Bereich das Umlaufintegral gebildet werden (Abb. 22). Teilen wir diesen Bereich in kleine Rechtecke ein, so leuchtet ein, daß das Umlaufintegral des ganzen Bereiches gleich der Summe der Umlaufintegrale der kleinen Rechtecke sein muß, da alle

* Das Vorzeichen sei so festgelegt, daß alle positiven Beiträge beim Umfahren im Uhrzeigersinn positiv gerechnet werden.

Beiträge zu dem inneren Maschennetz je zweimal mit verschiedenen Vorzeichen vorkommen und sich aufheben.

Wir erhalten somit

$$\oint w ds = \Sigma (\omega \cdot \Delta F) \text{ (Satz von Stokes) .} \tag{13}$$

Ist nun in dem behandelten Gebiet keine Drehung vorhanden, d. h. $w = 0$, so ist auch das Umlaufintegral gleich Null.

Fragen wir nun nach der zeitlichen Änderung von $\oint w ds$. Wenn die geschlossene Kurve immer die gleichen Massenteilchen umfassen soll, so ergibt sich unter Berücksichtigung von Gl. (12)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\oint w ds] &= \frac{d}{dt} \Sigma (\omega \cdot \Delta F) = \Sigma \frac{d}{dt} (\omega \cdot \Delta F) \\ &= \Sigma \left[\omega \frac{dF}{dt} + F \cdot \frac{d\omega}{dt} \right] = g \cdot \Sigma \Delta H \end{aligned}$$

$\frac{dF}{dt}$ muß aus Gründen der Kontinuität gleich Null sein. Bei Reibungslosigkeit muß aber auch $\frac{d\omega}{dt} = 0$ sein, da bei vorhandener Drehung dieselbe ja nur durch Reibungskräfte vergrößert werden kann. $\frac{d}{dt} [\oint w ds]$ muß also gleich Null sein. Hieraus folgt aber $\oint w ds = \text{konstant}$. Wir finden somit den wichtigen Satz (Lord Thomson):

Das Umlaufintegral über einer geschlossenen Flüssigkeitslinie bleibt bei Reibungslosigkeit zeitlich konstant.

Teilt man die geschlossene Kurve durch zwei Punkte A und B in zwei Teile (Abb. 22), d. h. auch das Umlaufintegral in die beiden Teile:

$$\oint_A^B + \oint_B^A = 0$$

so muß der zweite Teil mit umgekehrten Vorzeichen gleich dem ersten Teil sein¹. Der Wert

$$\int_A^B w ds$$

ist somit unabhängig vom Weg und gestattet, jedem Punkte bestimmte Zahlenwerte zuzuordnen. Man erkennt, daß nur in Richtung der Stromlinien ein Zuwachs um $\oint w ds$ entstehen kann. Verbindet man die Punkte, für die \oint konstant ist, so erhält man Kurven, die auf den Stromlinien senkrecht stehen, sog. Potentiallinien.

Die gewonnenen Ergebnisse sollen auf die kreisförmige reibungsfreie

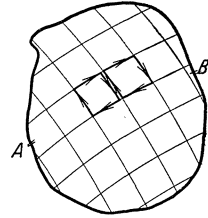


Abb. 22. Einteilung eines größeren Strömungsgebietes in quadratische Elemente.

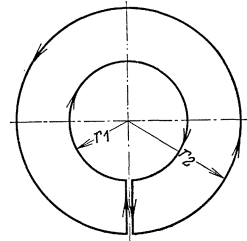


Abb. 23. Begrenzung zur Bildung des Umlaufintegrals bei der Kreisbewegung.

¹ Wenn keine Drehung vorhanden d. h. $\oint w ds = 0$ ist.

Bewegung angewandt werden (Abb. 23). Die Geschwindigkeitsverteilung ist durch $w \cdot r = w_0 \cdot r_0$ nach Gl. (11) gegeben. Wir bilden das Umlaufintegral für einen geschlossenen Bereich, bestehend aus zwei konzentrischen Kreisen von dem Radius r_1 und r_2 und zwei radialen Verbindungen. Auf letzteren ist $w = 0$, so daß diese Stücke keinen Betrag liefern.

Die Kreise ergeben

$$\oint w ds = 2r_1 \pi w_1 - 2r_2 \pi w_2 = 2\pi(r_1 w_1 - r_2 w_2)$$

nach Gl. (11) ist aber $r_1 w_1 - r_2 w_2 = 0$, so daß $\oint w ds = 0$ ist r_1 können wir beliebig klein nehmen. Im ganzen Außenbereich ist also hierbei für die Strömung $\oint w ds = 0$, wie es die reibungsfreie Strömung verlangt.

Bilden wir jedoch \oint für einen den Mittelpunkt umschließenden Kreis, so erhalten wir $\oint = 2r\pi w = \Gamma^*$. Dieser Wert bleibt auch, wenn r noch

so klein ist. Wir sind somit zu folgender Feststellung gezwungen. Die durch die Gl. (11) bedingte Strömung ist vollkommen wirbelfrei bis auf den mathematischen Mittelpunkt.

In Wirklichkeit bildet sich in $r=0$ keine unendlich große Geschwindigkeit aus, sondern ein sog. Wirbelkern vom Radius r_0 (Abb. 24). Dieser Kern dreht sich wie ein fester Körper, während außerhalb r_0 sehr genau das oben gezeichnete Bild vorhanden ist. Die Geschwindigkeitsverteilung besteht somit aus einer Geraden, die bei $r = r_0$ in eine Hyperbel übergeht.

Für den Kern gilt $\omega = \frac{w_0}{r_0} = \text{konstant}$. Für die Grenzen dieses Bereiches ist das Umlaufintegral

$$\oint w ds = 2r_0 \pi \cdot r_0 \cdot \omega = \Sigma \Delta F \cdot \omega = 2 \cdot \pi r_0^2 \cdot \omega^{**}.$$

Dieser Wert muß nun nach dem Thomson'schen Satz konstant bleiben, d. h. die Fläche des Kernes kann sich vergrößern (verkleinern), wenn in demselben Maße ω verkleinert (vergrößert) wird. Ferner bleibt die Drehung an denselben Teilchen haften, wie bereits vorhin festgestellt wurde.

Es bleibt noch die Frage zu beantworten, wie bei Annahme von

* Der Wert des Umlaufintegrals wird meist mit Γ bezeichnet und Zirkulation genannt.

** Siehe wegen des Faktors 2 die Bemerkung auf S. 17.

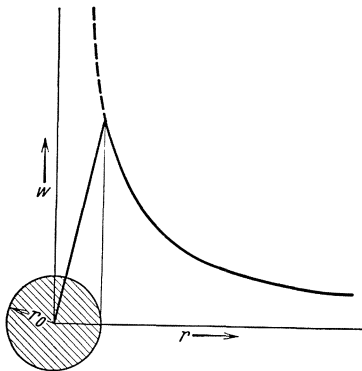


Abb. 24. Geschwindigkeitsverteilung eines Wirbels.

Reibungslosigkeit eine Drehbewegung (z. B. bei obigem Kerne) überhaupt entstehen kann.

Man kann zeigen, daß selbst bei einer exakt reibungsfreien Flüssigkeit tatsächlich Wirbel entstehen können. Das klassische „Kaffeelöffel-Experiment“ von Klein¹ diene uns als Wegweiser. Eine Platte werde in einer reibungsfreien Flüssigkeit in der angedeuteten Richtung (Abb. 25) bewegt. Auf der vorderen Seite strömt dann das Wasser nach unten und auf der hintern nach oben. Denken wir uns dann plötzlich die Platte aus dem Wasser gehoben, so bleibt diese Bewegung bestehen. Dort, wo vorher die Platte die Flüssigkeit teilte, befinden sich jetzt Flüssigkeitsschichten, die mit einem Geschwindigkeitsprung aneinander vorbeigleiten. Das Geschwindigkeitsgefälle $\frac{dw}{dx}$ ist somit unendlich groß. Nach dem Ansatz für die Schubspannung² ist $\tau = \mu \cdot \frac{dw}{dx}$. Da μ wegen der Reibungslosigkeit gleich Null ist, ergibt sich für τ die Größe $0 \cdot \infty$, die durchaus endlich sein kann. Mathematisch kann man auch so formulieren: Eine unendlich kleine Reibung genügt bereits, um Wirbel, oder besser ausgedrückt, Wirbelschichten auszubilden. Derartige Trennschichten sind in den meisten Fällen die eigentliche Ursache der Wirbelbildung³.

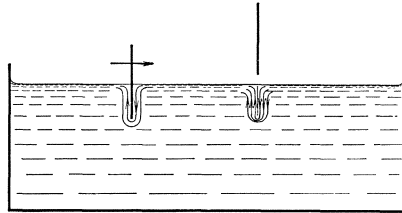


Abb. 25. Entstehung von Wirbeln in einer reibungsfreien Flüssigkeit nach Klein.

Beim Potentialwirbel sahen wir vorhin, daß die ganze Strömung bis auf einen mathematischen Punkt wirbelfrei sein kann. Um diesen Punkt in einen Wirbel zu verwandeln, ist wiederum nur eine unendlich kleine Reibung notwendig. Wir denken uns ein zylindrisches Flüssigkeitsteilchen, dessen Radius immer kleiner wird. Da $w = \frac{\Gamma}{2\pi r}$ ist, erhalten wir das Geschwindigkeitsgefälle

$$\frac{dw}{dr} = -\frac{\Gamma}{2\pi r^2}$$

¹ Klein, F.: Z. f. Math. u. Phys. Bd. 58 (1910), S. 259.

² Die genaue Ableitung dieser Formel, die sich auf S. 50 findet, möge der Leser später nachlesen.

³ Prandtl hat zuerst gezeigt, daß derartige Trennschichten, die theoretisch aus einer unendlichen Zahl kleinster Wirbel entstehen und quasi ein „Flüssigkeitswellenlager“ darstellen, instabil sind. Die ursprünglich gerade Trennlinie nimmt eine Wellenform an, deren Wellen sich infolge der auftretenden Zentrifugalkräfte vertiefen, um schließlich überzuschlagen. Nach dem Überschlagen vereinigen sich alle kleinen Wirbel zu einem größeren. Das Flattern einer Fahne zeigt sehr eindrucksvoll die Instabilität einer Trennschicht.

somit

$$|\tau| = \mu \cdot \left| \frac{dw}{dr} \right| = \mu \frac{\Gamma}{2\pi r^2}.$$

Wenn r gegen Null geht, ergibt sich sogar dann noch ein endliches τ , wenn μ mit r^2 gegen Null geht. Eine endliche Zähigkeit ist also auch hier nicht zur Erzeugung eines Wirbels notwendig.

Eine wichtige Schlußfolgerung soll noch aus dem Thomsonschen Satze gezogen werden. Wenn die zeitliche Änderung der Zirkulation um einen geschlossenen Bereich zeitlich konstant ist, so ist damit auch der Anfangszustand, d. h. der Ruhezustand, eingeschlossen. Der betrachtete Bereich der vollkommen reibungsfreien Flüssigkeit soll vom Ruhezustand aus verfolgt werden. Die aus dem Ruhezustand durch Druckkräfte erzeugte Bewegung wird für den betrachteten Bereich immer die Zirkulation Null ergeben. Wie kann dann ein Wirbel entstehen, selbst unter Hinzunahme der letzten Ausführungen (Trennflächen) ohne gegen den Thomsonschen Satz zu verstoßen? Die Antwort ist sehr einfach. Es müssen zwei Wirbel entstehen, deren Gesamtzirkulation gleich Null ist, d. h. der eine Wirbel dreht nach rechts und der andere nach links¹. (Beispiele: Zwei Anfahrwirbel hinter Platte; Anfangsströmung einer Tragfläche s. die Abb. 97 u. 98.)

Wir stellen somit fest: In einer reibungslosen Flüssigkeit kann niemals ein Einzelwirbel entstehen. Es bilden sich immer Wirbelpaare, deren Gesamtzirkulation gleich Null ist.

11. Quellen und Senken.

a) Grundsätzliches.

Von einem Punkte aus ströme eine Flüssigkeit gleichmäßig nach allen Seiten aus und verschwinde im Unendlichen. Diese Strömungsform wird als Quelle treffend bezeichnet. Verschwindet die von allen Seiten gleichmäßig ankommende Flüssigkeit in einem Punkte, so spricht man von einer Senke.

Die Punktsymmetrie bedingt im Raume gleiche Geschwindigkeiten auf Kugeln und in der Ebene auf Kreisen.

Die sekundlich aus dem Punkte strömende Menge Q nennen wir die Ergiebigkeit der Quelle. Die Kontinuität erfordert (ebenes Problem)

$$Q = 2r\pi \cdot c_m = 2r_0\pi c_{m_0}.$$

$$c_m = \frac{Q}{2r\pi} \quad (14)$$

¹ Verfasser macht folgendes Experiment zur Demonstration dieser Erscheinung. Auf zwei Prandtlische Drehschemel stellen sich zwei Personen. Der einzelne kann sich nicht in Umdrehung bringen, ebenso wie in der reibungslosen Flüssigkeit kein Einzelwirbel entstehen kann. Stoßen die beiden sich hingegen mit der Hand ab, so drehen sie sich im entgegengesetzten Sinne. Das Abstoßen mit der Hand entspricht bei der Flüssigkeit der Schubspannungsübertragung in den Trennschichten.

Die Geschwindigkeitsverteilung (Abb. 26) ist somit mathematisch dieselbe wie bei dem Wirbel. Für die Druckverteilung gilt das gleiche. Wieder merken wir uns, daß die durch eine Quelle verursachte Geschwindigkeit mit $\frac{1}{r}$ abklingt.

Es ist nützlich und zweckmäßig, diese einfachen „Idealfälle“ kennenzulernen, weil sie für verwickeltere Strömungsformen die Grundsteine bilden und eine Analyse nach dieser Richtung oft leichtverständliche Auskunftsmittel verschafft.

b) Überlagerungsgesetz.

Bewegungen flüssiger Massenteilchen können nach demselben Grundsatz wie bei der Bewegung fester Körper zusammengesetzt werden. Hat ein Teilchen an einer Stelle die Geschwindigkeit w_1 (Abb. 27) und infolge einer anderen Ursache auch noch die Geschwindigkeit w_2 , so erhält man durch geometrische Addition, d. h. durch den Parallelogrammsatz die tatsächliche Geschwindigkeit $w = w_1 \hat{+} w_2$. Geht man so von Punkt zu Punkt vor, erhält man das Geschwindigkeitsfeld der resultierenden Bewegung.

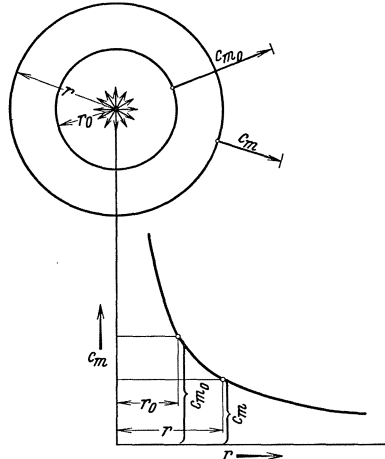


Abb. 26. Geschwindigkeitsverteilung einer Quelle.

c) Zusammensetzung einer Parallelströmung mit einer Quelle.

Mit Hilfe des Überlagerungsgesetzes soll untersucht werden, welche Strömung entsteht, wenn einer Parallelströmung mit der Geschwindigkeit u eine Quellenströmung überlagert wird. Der Quellenpunkt sei gleichzeitig Koordinatenanfangspunkt. Die Geschwindigkeitsverteilung der Quelle ist durch $c_m = \frac{Q}{2\pi r}$ gegeben. Man erkennt, daß auf der Achse ein Punkt vorhanden sein muß, bei dem c_m und die Geschwindigkeit der Parallelströmung u sich gerade aufheben; dort muß also Ruhe herrschen. Die Entfernung a dieses Punktes von der Quelle errechnet sich aus

$$u = c_m = \frac{Q}{2\pi a} \text{ zu } a = \frac{Q}{2\pi u}$$

Verfolgen wir auf der y -Achse die neuen Geschwindigkeitsrichtungen aus

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{c_m}{u} = \frac{Q}{2\pi y u},$$

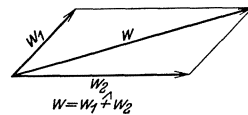


Abb. 27. Zusammensetzung von Geschwindigkeiten.

so werden diese mit wachsendem y immer kleiner und schließlich gleich Null. Die ganze Quelle wird nach links abgelenkt, bis im Unendlichen nur noch eine Parallelströmung vorhanden ist. Die von der Quelle kommende Flüssigkeit wird von einer nach hinten offenen Hohlkurve begrenzt. Bei Reibungsfreiheit steht nichts im Wege, diese Kurve durch

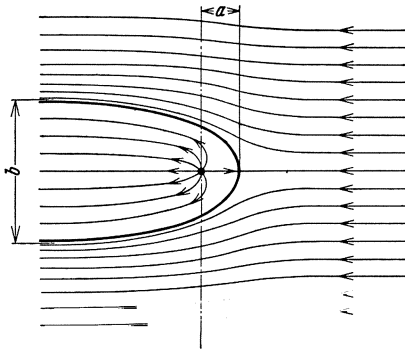


Abb. 28. Zusammensetzung von Quelle und Parallelströmung.

eine feste Wand zu ersetzen. Man erkennt, daß so die Strömung um einen vorne stumpfen, unendlich langen Körper nach Abb. 28 bestimmt werden kann.

Auch nach Superposition beider Strömungen behält die Bernoullische Gleichung volle Gültigkeit. Im Unendlichen sind die Stromlinien alle parallel, also muß auch der Druck nach S. 15 in einer zur Strömungsrichtung senkrechten Ebene konstant sein. Das ist aber nur möglich, wenn auch die Geschwindigkeit konstant ist, d. h. der Spalt von der Breite b , der im Unendlichen für die Quelle übrigbleibt (gleichzeitig die Breite des Hohlkörpers), weist die Geschwindigkeit u auf. Damit läßt sich die Breite berechnen $b \cdot u = Q$; $b = \frac{Q}{u}$. Dieser Breite b nähert sich der Körper asymptotisch.

d) Zusammensetzung von Quelle und Senke.

In A (Abb. 29) befinde sich eine Senke und in B eine Quelle von der Ergiebigkeit Q .

Für irgendeinen Punkt C , der von A die Entfernung r_1 und von B die Entfernung r_2 hat, ist die Senkengeschwindigkeit $w_1 = \frac{Q}{2r_1\pi}$ und die Quellengeschwindigkeit $w_2 = \frac{Q}{2r_2\pi}$. In Abb. 29 ist nach dem Parallelogrammsatz $w = w_1 \hat{+} w_2$ gebildet. In Punkt C muß die Strömungsrichtung somit identisch mit der Richtung von w sein.

Mit den Bezeichnungen von Abb. 29 ergibt sich

$$w^2 = w_1^2 + w_2^2 - 2w_1w_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) = \left(\frac{Q}{2\pi}\right)^2 \left[\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} - \frac{2}{r_1^2 r_2^2} \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) \right]$$

$$w^2 = \left(\frac{Q}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{r_1^2 \cdot r_2^2} [r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1)]$$

nun ist

$$r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) = e^2 \quad \text{d. h.} \quad w^2 = \frac{Q^2 e^2}{(2\pi)^2 \cdot r_1^2 r_2^2}$$

$$w = \frac{Q}{2\pi} \frac{e}{r_1 \cdot r_2} \quad (15)$$

Aus dem Geschwindigkeitsdreieck folgt weiter

$$\frac{w_1}{w} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\vartheta_2 - \vartheta_1)};$$

andererseits ist:

$$\frac{w_1}{w} = \frac{\frac{Q}{2\pi r_1}}{\frac{Q}{2\pi r_1 \cdot r_2} \cdot e} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\vartheta_2 - \vartheta_1)}$$

hieraus folgt:

$$\frac{r_2}{e} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\vartheta_2 - \vartheta_1)}.$$

Aus Dreieck ABC folgt nach dem sin-Satz

$$\frac{r_2}{e} = \frac{\sin \vartheta_1}{\sin(\vartheta_2 - \vartheta_1)}$$

d. h. $\alpha = \vartheta_1$.

Nach dem Sehnen- und Tangenten-satz folgt, daß w die Tangente an einen durch ABC gelegten Kreis ist. Für jeden Punkt dieses Kreises folgt dasselbe. Die Hüllkurve aller Geschwindigkeitsvektoren ist aber nichts anderes als die Bahn des Punktes. Der Kreis ist also eine Stromlinie. Für außerhalb dieses Kreises liegende Punkte kann man dieselbe Schlußfolgerung ziehen.

Wir finden somit: Die Stromlinien der Zusammensetzung (Quelle + Senke) werden durch ein Kreisbüschel dargestellt, das durch die Punkte A und B geht.

e) Doppelquelle.

Quelle und Senke sollen nunmehr zusammenfallen. Zunächst ist nicht einzusehen, wie ein derartiges Gebilde überhaupt eine Wirkung nach außen haben kann, da man annehmen wird, daß die Quelle sofort in der Senke verschwinden wird, ohne nach außen eine Wirkung zu ermöglichen.

Durch einen Grenzübergang wollen wir allmählich Quelle und Senke zusammenfallen lassen. Im Punkte C (Abb. 29) war die resultierende Geschwindigkeit.

$$w = \frac{Q}{2\pi} \frac{e}{r_1 \cdot r_2}.$$

Wird e gleich Null, so wird auch w gleich

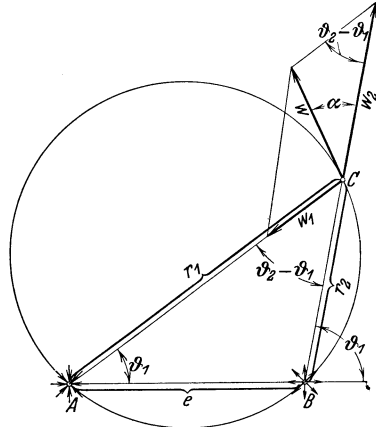


Abb. 29. Zusammensetzung von Quelle und Senke.

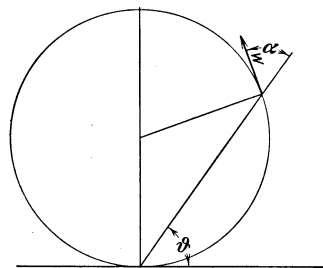


Abb. 30. Geschwindigkeitsverteilung bei einer Doppelquelle.

Null. Es besteht jedoch die Möglichkeit, Q in demselben Maaße wachsen zu lassen, wie man e abnehmen läßt, d. h. wir bilden

$$\lim_{Q=\infty, e=0} Q \cdot e = Q_0 e_0$$

und sorgen dafür, daß das Produkt $Q \cdot e$ konstant und endlich bleibt. Für w tritt dann keine Änderung ein. r_1 wird gleich r_2 , ϑ_1 wird gleich ϑ_2 , ebenso $\vartheta_1 = \alpha$, d. h. die Richtung von w ist wieder Kreistangente (Abb. 30). Die Stromlinien sind somit wieder Kreise. Das gesamte

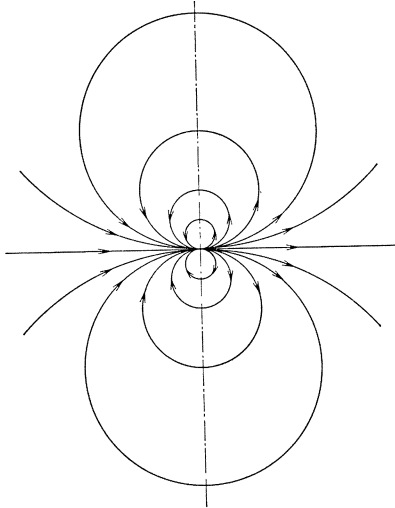


Abb. 31. Stromlinien einer Doppelquelle.

Strömungsbild wird durch zwei tangierende Kreisbüschel dargestellt (Abb. 31). Das Produkt $Q \cdot e = M$ nennt man das Moment der Quellenkombination während die x -Achse als Achse des Momentes bezeichnet wird. Die Geschwindigkeit im Abstände r ist

$$w = \frac{Q \cdot a}{2\pi r^2} = \frac{M}{2\pi r^2}. \quad (16)$$

Die Geschwindigkeit einer „Doppelquelle“ klingt somit mit wachsendem r prop. $\frac{1}{r^2}$ ab. Für endlichen Abstand e der Quelle und Senke gilt in großer Entfernung dasselbe, da hier $r_1 \sim r_2$ wird.

Wir merken uns schon jetzt, daß der Einfluß einer

Doppelquelle nach außen schneller verschwindet wie bei einer Einzelquelle oder einem Einzelwirbel.

f) Überlagerung von Parallelströmung und Quelle und Senke.

Eine Quelle A und eine Senke B gleicher Ergiebigkeit Q sollen mit einer Parallelströmung von der Geschwindigkeit u zusammengesetzt werden. Von A nach links ist die Quellensenkengeschwindigkeit nach Gl. (15) $w = \frac{Q \cdot e}{2\pi r_1 r_2}$ der Geschwindigkeit u entgegen gerichtet, in einem Punkt C müssen sie sich aufheben, da w sich stetig ändert. Der Abstand a dieses Staupunktes vom Nullpunkte ist aus

$$w = u = \frac{Q \cdot e}{2\pi \left(a - \frac{e}{2}\right) \left(a + \frac{e}{2}\right)}$$

leicht zu errechnen.

$$a = \sqrt{\frac{Q \cdot e}{2\pi u} + \frac{e^2}{4}}.$$

Ein zweiter Staupunkt liegt bei $-a$. Zwischen diesen Grenzen wird die Quellenströmung, die sich vorher auf die ganze Ebene erstreckte, eingengt. In der y -Richtung tritt ebenfalls eine Einengung ein. Es ergibt sich eine geschlossene ellipsenartige Kurve, innerhalb der Quelle und Senke sich auswirken können. Ersetzt man diese Kurve durch eine feste Wand und denkt nicht mehr an die Vorgänge im Innern, so ist dadurch die Strömung um einen ellipsenartigen Körper gewonnen.

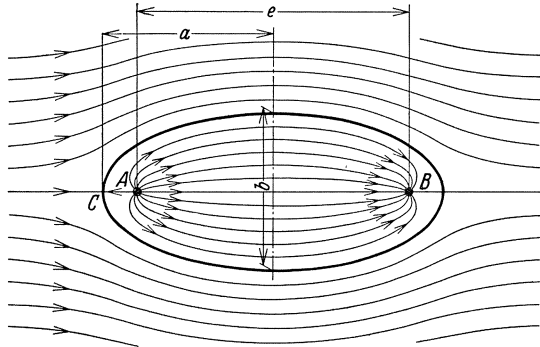


Abb. 32. Strömungsbild der Überlagerung von Parallelströmung mit Quelle und Senke.

Die Breite b kann aus der Bedingung berechnet werden, daß die zwischen $y = 0$ und $y = \frac{b}{2}$ strömende Menge gleich $\frac{Q}{2}$ sein muß. Abb. 32 zeigt das Bild dieser Strömung.

g) Zusammensetzung von Quelle und Wirbel (Wirbelquelle).

In einem Punkte befinde sich eine Quelle von der Ergiebigkeit Q . Der Quellenströmung sei eine Wirbelströmung überlagert. Eine derartige Kombination nennt man Wirbelquelle. Die Quelle ergibt Radialgeschwindigkeiten, die nach dem Gesetz Gl. (14)

$$c_m = \frac{c_{m0} \cdot r_0}{r}$$

sich ändern. Der Wirbel bedingt Umfangsgeschwindigkeiten c_u nach der Beziehung Gl. (11)

$$c_u = \frac{c_{u0} \cdot r_0}{r}.$$

Auf einem Kreis vom Radius r_0 seien die durch die Quelle erzeugte Geschwindigkeit c_{m0} und die durch den Wirbel bedingte Geschwindigkeit c_{u0} bekannt. Welche neue Bewegung entsteht nun, wenn beide Bewegungsformen gleichzeitig wirken?

Auf einem beliebigen Kreis vom Radius r kennen wir die Einzelgeschwindigkeiten, die senkrecht aufeinander stehen. Die resultierende Geschwindigkeit hat nun gegen den Umfang einen Winkel α , der sich leicht berechnen läßt.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{c_m}{c_u} = \frac{\frac{c_{m0} \cdot r_0}{r}}{\frac{c_{u0} \cdot r_0}{r}} = \frac{c_{m0}}{c_{u0}} = C. \tag{17}$$

Dieser Winkel ist also konstant. Da die Geschwindigkeitsrichtung identisch mit der Richtung der Stromlinie ist, können wir schreiben:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dr}{r \cdot d\varphi} = \frac{c_{m0}}{c_{u0}}$$

hieraus folgt nach einer leichten Integration

$$\ln \frac{r}{r_0} = \varphi \frac{c_{m0}}{c_{u0}}.$$

Dies ist die Gleichung einer logarithmischen Spirale. Die Strömung besteht also aus derartigen Spiralen.

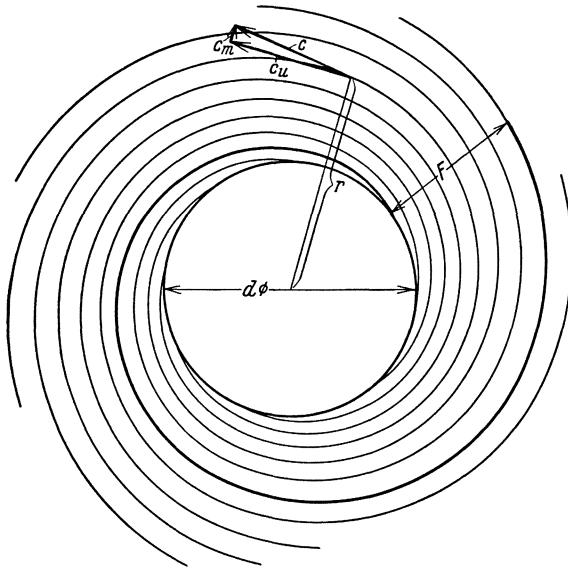


Abb. 33. Strömungsbild einer Wirbelquelle.

Abb. 33 zeigt das Bild dieser Strömung, wobei mit Rücksicht auf eine bestimmte Anwendung das Innere vom Durchmesser d freigelassen ist. Denkt man sich nämlich das Innere durch ein rotierendes Kreisrad vom Durchmesser d ausgefüllt, so ist die Außenströmung genau so, als wenn sich im Mittelpunkt eine sog. Wirbelquelle befindet. Bei einer reibungslosen Strömung ist es auch gestattet,

eine Stromlinie durch eine feste Wand zu ersetzen. In Abb. 33 ist dies geschehen. Man erkennt die Entstehung eines sog. Spiralgehäuses¹, welches in einfacher und exakter Weise gestattet, die Strömung einer Wirbelquelle in einer Rohrleitung verlustfrei zu sammeln.

h) Doppelquelle und Parallelströmung.

Eine Doppelquelle werde mit einer Parallelströmung von der Geschwindigkeit u so zusammengesetzt, daß die Momentenachse mit der Richtung von u zusammenfällt. Es ergeben sich wieder zwei symmetrisch liegende Staupunkte, die nach der Gl. 16

$$u = \frac{M}{2\pi a^2}; \quad \text{d. h.} \quad a = \sqrt{\frac{M}{2\pi u}}$$

zu berechnen sind.

¹Eck-Kearon: Turbo-Gebläse und Kompressoren. Berlin: Julius Springer 1929.

Wir betrachten nun einen Kreis vom Radius a (Abb. 34). Hier ist die Geschwindigkeit w_1 der Doppelquelle $w_1 = \frac{M}{2\pi a^2}$, d.h. gleich dem konstanten Wert u , ebenso wie auf anderen Kreisen um den Nullpunkt die Geschwindigkeit konstant ist. Die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten an der Stelle A zeigt nach Abb. 34, daß die Richtung von w gleich der Tangente an den Kreis mit dem Radius a ist.

$$[\sphericalangle MAO = \sphericalangle MOA = 90^\circ - \alpha,$$

deshalb ist

$$\sphericalangle BAO = 90^\circ + 90^\circ - \alpha = 180^\circ - \alpha,$$

hieraus folgt, daß $\beta = \alpha$ ist, und daß die Resultierende AC senkrecht auf dem Radius OA steht.]

Dieser Kreis ist somit Begrenzungslinie zwischen der äußeren Strömung und der inneren Quellenströmung; letztere schließt sich in einem Kreis vollständig. Das äußere Bild gibt somit die Strömung um einen Kreiszylinder, wie aus Abb. 35 ersichtlich ist.

Die Geschwindigkeitsverteilung längs der Kreiskontur ist leicht zu berechnen. Aus dem Dreieck ABD entnimmt man

$$w = 2u \cdot \sin \alpha. \quad (18)$$

Für $\alpha = 90^\circ$ wird $w = 2u$. Dies ist die größte Geschwindigkeit, die überhaupt außerhalb des Kreises auftritt.

Nach der Bernoullischen Gleichung läßt sich auch die Druckverteilung schnell angeben. Ist p_0 der Druck der ungestörten Parallelströmung, so erhält man

$$\frac{u^2}{2g} \cdot \gamma + p_0 = \frac{w^2}{2g} \gamma + p$$

$$p_0 - p = \frac{\gamma}{2g} [w^2 - u^2] = \frac{\gamma \cdot u^2}{2g} [4 \sin^2 \alpha - 1] = \frac{\gamma}{2g} u^2 \cdot [1 - 2 \cos 2\alpha].$$

Führt man den Staudruck der ungestörten Parallelströmung

$$p_s = \frac{\gamma}{2g} u^2$$

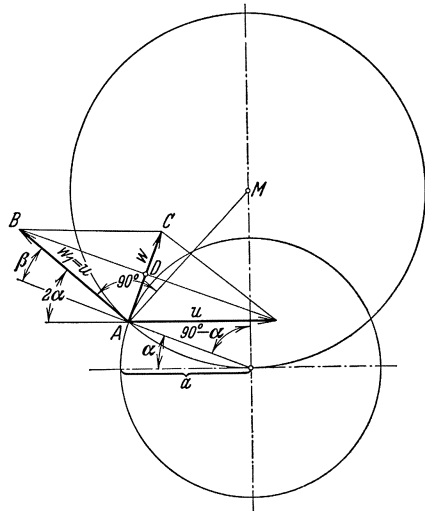


Abb. 34.
Geschwindigkeitsfeld der Zusammensetzung:
Parallelströmung + Doppelquelle.

ein, und bezieht hierauf die Druckdifferenz, so entsteht

$$\frac{p_0 - p}{p_s} = 1 - 2 \cdot \cos 2\alpha.$$

Für $\alpha = 90^\circ$ erhält man $\frac{p_0 - p}{p_s} = 3$, d.h. der größte Unterdruck ist gleich dem dreifachen Staudruck. Für $\alpha = 45^\circ$ ist $\frac{p_0 - p}{p_s} = 0$, d.h. der Druck ist dort gleich dem Druck der ungestörten Strömung.

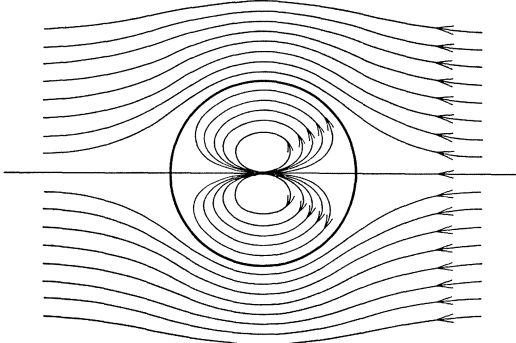


Abb. 35. Zylinderströmung, entstanden durch Überlagerung von Parallelströmung mit Doppelquelle.

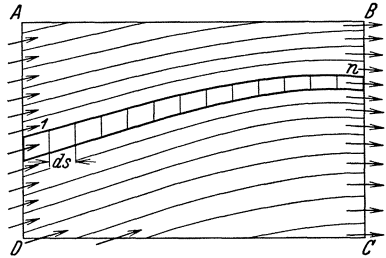


Abb. 36. Abgrenzung eines Strömungsbereiches zwecks Anwendung des Impulssatzes.

12. Impulssatz.

a) Ableitung.

Die Anwendung des Trägheitssatzes $P = m \cdot b$ in Form des sog. Impulssatzes bzw. Schwerpunktsatzes ist aus der Mechanik der festen Körper besonders für die Fälle geläufig, wo Anfangs- und Endgeschwindigkeit bekannt ist, der Zwischenverlauf jedoch nicht übersehen werden kann. Die Gl. $P = m \frac{dw}{dt}$ wird dann in der Schreibweise $P \cdot dt = m \cdot dw$ verwandt. Die Summation von Anfangs- bis zum Endzustand ergibt

$$\int_1^2 P dt = m (w_2 - w_1).$$

Da alle inneren Kräfte nach dem Prinzip von Aktion und Reaktion herausfallen, kann aus evtl. bekannten Zuständen an bestimmten Grenzen wertvoller Aufschluß gewonnen werden.

Die Anwendung dieses Satzes in der Strömungslehre verlangt einige kleine Umformungen.

Betrachten wir nach Abb. 36 einen Stromfaden des Gebietes $ABCD$, so ist die den Zustand charakterisierende Größe nicht irgend eine Einzelmasse, sondern die durch den Querschnitt sekundlich fließende Menge. Wir wollen anstreben, diese charakteristische Größe bei der Anwendung des Trägheitssatzes zu erhalten.

Diese sei für irgend eine Stromlinie Δq ; dann ist das in der Zeit dt einströmende Massenteilchen $\Delta m = \Delta q \cdot dt$. Hiermit lautet die Newtonsche Gl.:

$$\Delta P = \Delta m \frac{dw}{dt} = \frac{\Delta m}{dt} \cdot dw = \Delta q \cdot dw.$$

Rein formal gesprochen, besagt der Impulssatz der Strömungslehre, daß in der Newtonschen Gleichung das dt zu m bezogen wird $\frac{\Delta m}{dt} = \Delta q$. Um dann die Gesamtkraft z. B. in der X -Richtung zu erhalten, wird für eine Reihe Zwischenpunkte dieser Ausdruck gebildet und summiert

$$P_x = \sum \Delta P_x = \Delta q (dw_{1x} + dw_{2x} + \dots)$$

$$P_x = \Delta q (w_{nx} - w_{1x}).$$

Es bleibt nur der Geschwindigkeitsunterschied der Austrittsgeschwindigkeit w_{nx} und der Eintrittsgeschwindigkeit w_{1x} . Alle Zwischenwerte sind mit entgegengesetztem Vorzeichen gleich und heben sich deshalb aus der Rechnung heraus.

Das Gleichheitszeichen bedeutet hier selbstverständlich auch Richtungsgleichheit. Interessiert man sich z. B. für eine Kraft P in der X -Richtung, so sind die Unterschiede $w_2 - w_1$ ebenfalls in der X -Richtung zu rechnen.

Was der obigen Stromlinie recht ist, ist der benachbarten billig. Grenzt man einen bestimmten Bereich ab (sog. Kontrollfläche), so erhält man die Gesamtkraftrichtung, z. B. in der X -Richtung durch folgende Summation

$$\begin{array}{l} \Delta P_{1x} = \Delta q_1 (w_{nx} - w'_{1x}) \\ \Delta P_{2x} = \Delta q_2 (w''_{nx} - w''_{1x}) \\ \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \\ \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \\ \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \\ \Delta P_{kx} = \Delta q_k (w^k_{nx} - w^k_{1x}) \\ \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \\ \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \\ \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \end{array}$$

$$P_x = \sum_{k=1}^m P_{kx} = \sum_{k=1}^m \Delta q_k (w^k_{nx} - w^k_{1x}). \tag{19}$$

Bezeichnen wir nun $q \cdot w$ als Impuls, so lautet der Satz: Die Summe aller äußeren Kräfte in einer Richtung, die auf ein abgeschlossenes Gebiet wirkt, ist gleich der Differenz der austretenden und der eintretenden Impulse in dieser Richtung.

Was im Innern vor sich geht, ob insbesondere Reibungskräfte vor-

Eck, Strömungslehre I. 3

handen sind, ist gleichgültig. Der Satz gilt immer und besitzt deshalb eine besondere Bedeutung für die gesamte Strömungslehre.

Einige einfache Beispiele sollen die Verwendbarkeit des Satzes zeigen.

b) Ablenkung eines Strahles durch eine Schneide.

Ein senkrecht nach unten fließender Strahl werde mit einer scharfen Schneide leicht berührt. Man beobachtet eine plötzliche Ablenkung des Strahles um den Winkel α (Abb. 37)¹. (Anwendung: Strahlableiter der Peltonturbine und Escher-Wyss-Strahlregler².)

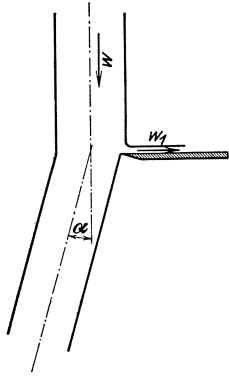


Abb. 37. Ablenkung eines Strahles durch eine scharfe Schneide.

Sieht man genau zu, so erkennt man, daß auf der Schneide etwas Wasser aufgefangen und nach rechts abgelenkt wird. Hierzu ist eine nach rechts gerichtete Kraft notwendig, deren Reaktionskraft den Strahl etwas ablenkt, da die Schneide keine Kraft in dieser Richtung übertragen kann. Somit sind nur innere Kräfte in der X -Richtung vorhanden, d. h. der Impuls des unter α abbiegenden Strahles in der X -Richtung muß gleich dem entgegengesetzten gleichen Impuls des durch die Schneide rechtwinkelig abgelenkten Strahles sein. Es ist

$$q_1 \cdot w \cdot \sin \alpha = q_2 \cdot w,$$

wenn q_1 und q_2 die durch die Schneide getrennten Teilmengen von $q = q_1 + q_2$ sind. Der Ablenkungswinkel ergibt sich aus

$$\sin \alpha = \frac{q_2 \cdot w}{q_1 \cdot w} = \frac{q_2}{q_1} = \frac{q_2}{q - q_2} = \frac{q_2}{q} \frac{1}{1 - \frac{q_2}{q}}.$$

Wird z. B. $\frac{1}{10}$ der Gesamtmenge durch die Schneide abgelenkt, so erhält man bereits einen Ablenkungswinkel von $\sim 6,5^\circ$.

c) Wirkung eines Schaufelgitters.

Durch ein unendlich langes Schaufelgitter werde eine von links (Abb. 38) unter dem Winkel α_1 , und der Geschwindigkeit c_1 kommende Strömung so abgelenkt, daß die Austrittsgeschwindigkeit c_2 den Winkel α_2 aufweise. Die Schaufelzahl sei zunächst unendlich groß, so daß α_1 und α_2 gleichzeitig die Schaufelwinkel sind (stoßfreier Ein- und Austritt voraus-

¹ Sehr schön läßt sich die Wirkung auch mit dem Eckschen senkrechten Windkanal zeigen. Ein im Luftstrahl freischwebender Ball weicht sofort nach der Seite aus, wenn man mit der Hand den Luftstrahl berührt.

² Escher-Wyss. Mitteilungen 1932, Nr. 1/2, S. 19.

gesetzt). (Im folgenden wollen wir die im Turbinenbau üblichen Bezeichnungen anwenden.) Die Kontinuität ergibt zunächst

$$c_m = c_1 \cdot \cos \alpha_1 = c_2 \cdot \cos \alpha_2,$$

wie aus dem Geschwindigkeitsdreieck von Abb. 38 ersichtlich ist. Die Ausdehnung des Gitters senkrecht zur Zeichenebene werde mit b bezeichnet.

Für die Anwendung des Impulssatzes grenzen wir den Bereich $ABCD$ ab. BC und AD sind Stromlinien. Durch diese Linien tritt somit kein Impuls, da keine Menge durchströmt. Der Abstand der beiden Stromlinien in Richtung der Gitterachse sei a . Es soll der Impuls in Richtung der Gitterachse berechnet werden. Durch AB tritt der Impuls

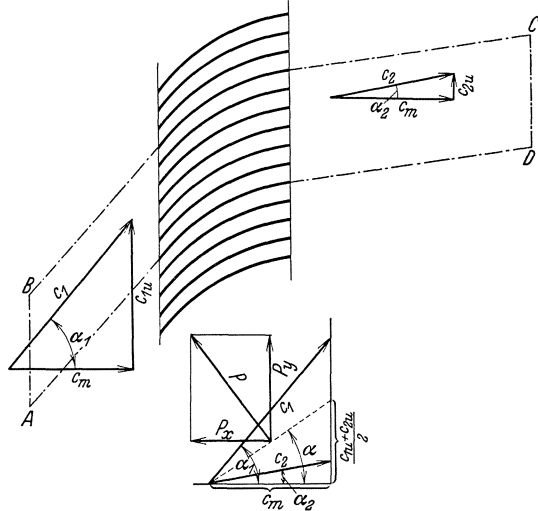


Abb. 38. Ablenkung einer Strömung durch ein Gitter mit unendlicher Schaufelzahl. Kraftwirkung auf das Gitter.

$$J_{AB} = b \cdot a \cdot c_1 \cos \alpha_1 \cdot c_1 \cdot \sin \alpha_1 \cdot \rho$$

und durch CD

$$J_{CD} = b \cdot a \cdot c_2 \cos \alpha_2 \cdot c_2 \sin \alpha_2 \cdot \rho .$$

Die Differenz ergibt die Kraft in Gitterrichtung, die dem Gitterstück von der Länge a und der Gittertiefe b (senkrecht zur Zeilenebene) entspricht.

$$P_{ya} = J_{CD} - J_{AB} = b \cdot a \rho c_2 \cos \alpha_2 [c_2 \sin \alpha_2 - c_1 \sin \alpha_1]$$

$$P_{ya} = b \cdot a \cdot \rho \cdot c_m (c_{2u} - c_{1u}) ,$$

indem die Komponenten von c in Gitterrichtung mit c_u bezeichnet werden.

Auf die Gitterlänge l ergibt sich somit

$$P_y = b \rho c_m (c_{2u} - c_{1u}) \tag{20}$$

Die Kraft in Gitterrichtung hängt somit nur von der Differenz der Geschwindigkeitskomponenten in dieser Richtung vor und hinter dem Gitter ab.

Senkrecht zum Gitter ist noch ein Druckunterschied vorhanden, der

nach der Bernoullischen Gleichung leicht berechnet werden kann.

$$\begin{aligned}
 p_1 + \frac{\rho}{2} c_1^2 &= p_2 + \frac{\rho}{2} c_2^2 \\
 p_1 - p_2 &= \frac{\rho}{2} (c_2^2 - c_1^2) = \frac{\rho}{2} [(c_{2m}^2 + c_{2u}^2) - (c_{1m}^2 + c_{1u}^2)] \\
 &= \frac{\rho}{2} (c_{2u}^2 - c_{1u}^2).
 \end{aligned}$$

Erweitern wir mit $b \cdot 1$ so erhalten wir dieselbe Bezugsfläche wie bei P_y

$$P_x = b \cdot 1 (p_1 - p_2) = \frac{b\rho}{2} (c_{2u}^2 - c_{1u}^2).$$

Um die Richtung der Resultierenden zu erhalten, bilden wir

$$\frac{P_y}{P_x} = \frac{b \cdot \rho c_m \cdot (c_{2u} - c_{1u})}{b \cdot \frac{\rho}{2} (c_{2u}^2 - c_{1u}^2)} = \frac{c_m}{\frac{c_{1u} + c_{2u}}{2}} = \text{ctg } \alpha.$$

Die Konstruktion von $\frac{P_y}{P_x}$ geht aus Abb. 38 hervor. Man erkennt, daß die Resultierende senkrecht auf der Richtung von α stehen muß. Wir erhalten somit den wichtigen Satz:

Wird durch ein unendlich langes Gitter die Strömungsrichtung vom Winkel α_1 nach dem Winkel α_2 abgelenkt, so übt die Flüssigkeit auf das Gitter eine Kraft aus, die senkrecht auf einer mittleren Richtung steht, die aus der Meridiangeschwindigkeit und der

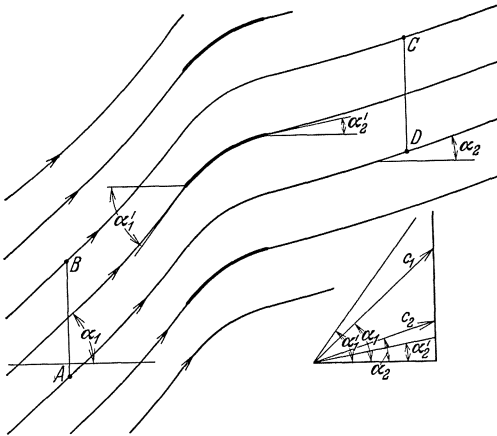


Abb. 39. Gitter mit endlicher Schaufelzahl. Charakteristische Winkel.

mittleren Komponente in Gitterrichtung gebildet wird.

Wenn wir nunmehr das Gitter auseinander rücken, d.h. einen endlichen Abstand t zwischen den Schaufeln lassen, so werden die Schaufelwinkel α_1' und α_2' nicht mehr mit den Strömungsrichtungen α_1 und α_2 identisch sein. Sollen die früheren Winkel α_1 und α_2 erhalten bleiben, so werden dafür die Schaufelwinkel vergrößert werden müssen, d.h. $\alpha_1' > \alpha_1$ und $\alpha_2' > \alpha_2$ (Abb. 39). Es leuchtet ein, daß in hinreichender Entfernung vom Gitter für alle Stromfäden gleiche Winkel α_1 und α_2 vorhanden sein müssen. Dort wollen wir unsere Kontrollfläche hinlegen. Im übrigen

werden wir wieder der Einfachheit halber zwei Stromlinien BC und AD nehmen, da hierdurch ja kein Impuls treten kann. AB sei identisch mit der Schaufelteilung t , so daß wir die Kraft für eine Schaufel durch die folgende Rechnung erhalten:

Wählen wir dieses t gleich dem Werte a der vorigen Rechnung, so ändert sich an der ganzen Rechnung gar nichts. Es ist

$$P_{yt} = t \cdot b \varrho \cdot c_m (c_{2u} - c_{1u})$$

$$P_{xt} = t \cdot b \cdot \frac{\varrho}{2} (c_{2u}^2 - c_{1u}^2) = t \cdot b \cdot \frac{\varrho}{2} \frac{c_{1u} + c_{2u}}{2} (c_{2u} - c_{1u}).$$

Da die Ausgleichung der Stromfäden theoretisch erst im Unendlichen erzielt wird, wollen wir die mittlere Geschwindigkeit c_∞ nennen in Übereinstimmung mit den im Turbinenbau üblichen Bezeichnungen.

Der obige Satz braucht jetzt nur so abgeändert zu werden, daß als Geschwindigkeiten und Richtungen die gewählt werden, die der bereits ausgeglichenen Strömung entsprechen.

Der aufmerksame Leser wird schon gemerkt haben, daß es für die Anwendbarkeit des Impulssatzes gleichgültig war, mit welchen Mitteln die Umlenkung von α_1 nach α_2 erfolgt. Das beschaufelte Gitter sollte nur unsere Vorstellung erleichtern, in der Rechnung kommt seine konstruktive Ausbildung nicht vor. Besonders bei dem letzten Beispiel tritt dies deutlich in Erscheinung. Lediglich auf Anfangs- und Endzustand kommt es an, nicht auf den Zwischenzustand.

Diese Bemerkungen sind von Nutzen, wenn man anschließend zu einem Gitter übergeht, das sich in Gitterrichtung mit der Geschwindigkeit u bewegt. Wenn durch dieses Gitter irgendwie erreicht wird, daß die Geschwindigkeit weit vor dem Gitter c_1 bei dem Winkel α_1 und weit hinter dem Gitter c_2 bei dem Winkel α_2 ist, so folgt für die Kraft in Gitterrichtung dasselbe wie vorher, nämlich

$$P_y = \varrho \cdot b \cdot c_m (c_{2u} - c_{1u}).$$

Das Gitter leistet aber jetzt eine Arbeit. Die Leistung ist

$$L = P_y \cdot u = b \varrho c_m \cdot u (c_{2u} - c_{1u}).$$

Bezeichnen wir die der Flüssigkeit pro kg erteilte Leistung im Sinne von II. 6 mit der Druckhöhe H , so ist: $b \cdot \gamma \cdot c_m \cdot 1$ das in der Sekunde durch die Breite 1 geförderte Gewicht und somit

$$L = H \cdot b \cdot \gamma \cdot c_m = b \cdot \varrho c_m \cdot u (c_{2u} - c_{1u})$$

d. h.

$$H = \frac{1}{g} \cdot u [c_{2u} - c_{1u}]. \quad (21)$$

Dies ist bereits die Turbinengleichung für ein gerades Gitter. Für die Berechnung aller propellerartigen Kreisräder ist diese Gleichung ebenso wie die Behandlung des Gitters die Grundlage.

d) Berechnung des Stoßverlustes.

Durch ein unendlich langes Gitter werde eine Strömung plötzlich von der Richtung α_1 nach α_2 abgelenkt (Abb. 40). Die stoßförmige plötzliche Umlenkung bedingt einen Energieverlust, der mit Hilfe des Impulssatzes berechnet werden kann.

Der Bereich $ABCDEF$ werde für die Impulsbetrachtung herangezogen. Da AFE und BCD Stromlinien sind, kann durch diese Grenzen kein Impuls übertragen werden. Wir berechnen die Impulsänderung in Richtung α_2 . Die Kontinuität erfordert

$$c_1 \sin \alpha_1 = c_2 \sin \alpha_2 .$$

Durch die Breite $AB = b$ strömt in der Sekunde die Masse:

$$q = \rho \cdot b \cdot c_1 \sin \alpha_1 = \rho b c_2 \cdot \sin \alpha_2 .$$

Impulsänderung in Richtung α_2 (hier Impulsverminderung):

$$q \cdot (c_1 \cdot \cos \delta - c_2) = \rho b c_2 \sin \alpha_2 (c_1 \cos \delta - c_2) .$$

Äußere Kräfte auf das Gitter können nur durch Änderung des Druckes erfolgen. Da die Drücke auf die Stromlinien AFE und BCD sich gegenseitig aufheben,

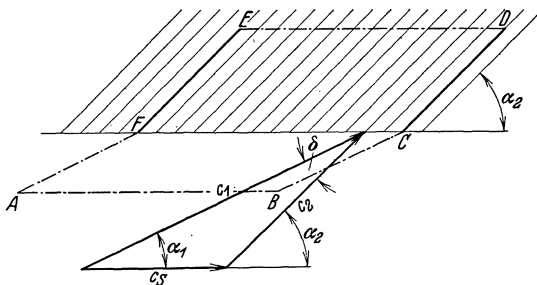


Abb. 40. Plötzliche Richtungsänderung einer Parallelströmung durch dichtstehendes Schaufelgitter.

spielen nur die Drücke auf AB und ED eine Rolle. In Richtung α_2 ergibt AB eine Breite $b \cdot \sin \alpha_2$, so daß ein evtl. Druckunterschied Δp zwischen AB und ED eine Kraft in Richtung α_2 ergibt von der Größe $\Delta p \cdot b \cdot \sin \alpha_2$. Wir setzen diese äußere

Kraft gleich der Impulsdifferenz und erhalten

$$\rho \cdot b \cdot c_2 \cdot \sin \alpha_2 [c_1 \cos \delta - c_2] = \Delta p \cdot b \cdot \sin \alpha_2 ,$$

$$p_2 - p_1 = \Delta p = \rho \cdot c_2 [c_1 \cdot \cos \delta - c_2] .$$

Nach dem Bernoullischen Satz (d. h. bei verlustfreiem Umsatz) würde sich ein Druckunterschied $\Delta p'$ ergeben:

$$\Delta p' = \frac{\rho}{2} (c_1^2 - c_2^2)$$

somit entsteht ein Verlust

$$\left. \begin{aligned} \Delta p' - \Delta p &= \frac{\rho}{2} c_1^2 - \frac{\rho}{2} c_2^2 + \rho c_2^2 - \rho c_1 c_2 \cdot \cos \delta \\ &= \frac{\rho}{2} [c_1^2 + c_2^2 - 2c_1 c_2 \cos \delta] = \frac{2}{\rho} c_2^2 . \end{aligned} \right\} (22)$$

Wir finden: Der bei plötzlicher Umlenkung auftretende Stoßverlust ist gleich der Geschwindigkeitshöhe der aus der geometrischen Differenz sich ergebenden Geschwindigkeit. Der Druckverlust ist also immer gleich der Geschwindigkeitshöhe der Geschwindigkeitsdifferenz!

Der durch unstetige Querschnittsänderung eintretende Stoßverlust ist durch den Impulssatz ebenfalls leicht zu erfassen. Eine Düse mit dem Querschnitt F_1 , sei einer Rohrleitung vom Querschnitt F_2 aufgesetzt (Abb. 41). Auf die Kontrollfläche $ABCD$ werde der Impulssatz angewandt. CD sei dort gewählt, wo die Strömung wieder den ganzen Querschnitt ausfüllt.

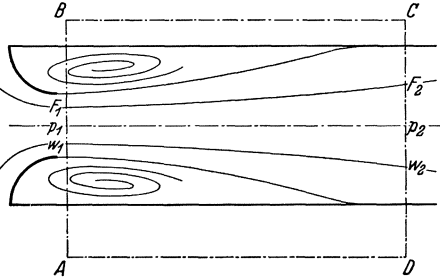


Abb. 41. Einströmung in eine Rohrleitung durch Düse.

Aus der Stetigkeitsgleichung folgt $\rho \cdot F_2 \cdot c_2 = \rho F_1 \cdot c_1$.

Durch AB eintretender Impuls $(\rho F_2 \cdot c_2) \cdot c_1$.

Durch CD austretender Impuls $(\rho \cdot F_2 \cdot c_2) \cdot c_2$.

Impulsdifferenz (hier Impulsverminderung): $\rho F_2 \cdot c_2 (c_1 - c_2)$.

Resultierende Druckkraft auf Kontrollfläche $ABCD$: $(p_2 - p_1) F_2^*$.

Die Gleichsetzung von Impulsdifferenz und Druckkraft ergibt:

$$\rho \cdot F_2 c_2 (c_1 - c_2) = (p_2 - p_1) F_2; \quad p_2 - p_1 = \rho c_2 (c_1 - c_2).$$

Nach dem Bernoullischen Satz würde sich bei verlustfreiem Umsatz ergeben

$$p'_2 - p_1 = \frac{\rho}{2} (c_1^2 - c_2^2).$$

Die Differenz beider ist der auftretende Druckverlust

$$= (p'_2 - p_1) - (p_2 - p_1) = \frac{\rho}{2} (c_1 - c_2)^2. \quad (23)$$

Der vorhin gefundene Satz, daß für den Druckverlust die Geschwindigkeitshöhe der Geschwindigkeitsdifferenz maßgebend ist, findet somit eine nochmalige Bestätigung.

e) Die Kugel im schrägen Luftstrahl.

Eine Kugel kann bei geeignetem Gewicht von einem schrägen Luftstrahl in Schwebelage gehalten werden. Sehr schön läßt sich dieser Versuch

* Vernachlässigt werden lediglich die durch Reibungsverluste zu erwartenden Schubspannungen an den Wänden BC und AD . Die Größenordnung dieses Fehlers ist sehr gering. Gegenüber der durch die Impulsberechnung sich ergebenden tatsächlichen Druckverluste werden Unterschiede von nur 1÷3% festgestellt.

mit dem vom Verfasser konstruierten schwenkbaren Windkanal und einem großen Gummiball ausführen. Man stellt dabei fest, daß die Kugel nach Abb. 42 im Strahl hängt. Nach dem Bernoullischen Satz

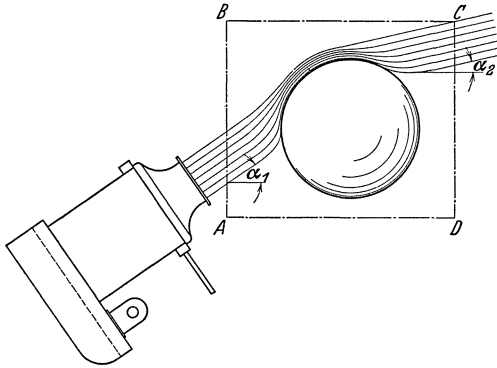


Abb. 42. Kugel schwebend im schrägen Luftstrahl.
Berechnung der Strahlablenkung nach dem Impulssatz.

ist dann der „Auftrieb“ leicht zu erklären¹.

Der Strahl wird durch die Kugel vom Gewichte G von Winkel α_1 nach α_2 abgelenkt. Im Bereich $ABCD$ berechnen wir die Impulsänderungen in senkrechter Richtung. Diese muß gleich dem Gewicht sein.

Eintretende Masse $q = \rho \cdot f \cdot c$.

Impulsdifferenz in

Richtung der Erdanziehung

$$q (c \sin \alpha_1 - c \sin \alpha_2) = \rho f c^2 (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) = G.$$

Zahlenbeispiel

$$f = \frac{\pi}{4} 14^2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2; \quad c = 15 \text{ m/s}; \quad \alpha = 45^\circ; \quad G = 0,2 \text{ kg}$$

$$\sin \alpha_2 = \sin \alpha_1 - \frac{G}{\rho \cdot f \cdot c^2} = 0,707 - \frac{9,81 \cdot 0,2}{1,2 \cdot 155 \cdot 10^{-4} \cdot 225} = 0,239$$

$$\alpha_2 = 13,8^\circ$$

$$\Delta \alpha = 31,2^\circ.$$

f) Auftrieb.

Eine reibungsfreie Flüssigkeit kann keine energieverzehrenden Kräfte übertragen. Alle Kräfte in Strömungsrichtung (gewöhnlich Widerstände genannt) gehören hierzu, sind also in der reibungsfreien Flüssigkeit unmöglich.

Offen bleibt jedoch die Frage, ob Kräfte senkrecht zur Strömungsrichtung möglich sind. Da dieselben keine Energie verzehren, ist mit einer solchen Möglichkeit zu rechnen. Mit Hilfe des Impulssatzes kann die Frage leicht beantwortet werden.

¹ Daß die Kugel im Strahl hängt, läßt sich durch Abtasten der Strömung mit der Hand oder mit Fäden leicht nachweisen. Die große Geschwindigkeit über der Kugel ergibt nach der Bernoullischen Gleichung einen Unterdruck. Die Kugel wird also vom Luftstrahl angesaugt. Nähert man die Kugel mit der Hand dem Luftstrahl, so ist die anziehende Kraft auch leicht zu fühlen.

Wir setzen eine Parallelströmung mit der Geschwindigkeit U voraus. Ein Körper von irgendwelchen Abmessungen befinde sich in dieser Strömung (Abb. 43). In der Nähe des Körpers wird sich eine Störung der Parallelströmung bemerkbar machen. Diese werde dadurch berücksichtigt, daß ein Teilchen außer der Geschwindigkeit U noch die Zusatzgeschwindigkeiten u und v hat. Richtung und Größe der tatsächlichen Geschwindigkeit können dann aus

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{U+u} \quad \text{und} \quad w = \sqrt{v^2 + (U+u)^2}$$

bestimmt werden. Je mehr wir uns von dem Körper entfernen, um so mehr werden die Störungsgeschwindigkeiten u und v abnehmen. Wir wollen annehmen, daß der Körper tatsächlich eine Kraft senkrecht zur Störungsrichtung überträgt und untersuchen, ob dies möglich ist. Für die nachfolgende Impulsberechnung werden wir einen Bereich $ABCD$ soweit vom Körper entfernt abgrenzen, daß an dieser Grenze u und v klein werden gegen U . Wir tun dies, um uns

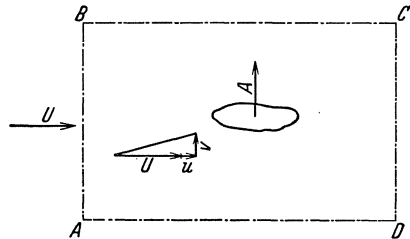


Abb. 43. Auftrieb in der reibungsfreien Strömung.

bei der Rechnung gewisse Vereinfachungen erlauben zu können. Denn bei hinreichend kleinem v wird der durch die Flächen BC und AD durchtretende Impuls vernachlässigbar klein werden. Rechnen wir dann die Differenz ΔJ des durch AB eintretenden und durch CD austretenden Impulses in der y -Richtung, so haben wir damit die Summe aller auf $ABCD$ in y -Richtung wirkenden Kräfte. Letztere setzen sich zusammen einmal aus Druckkräften auf AD und BC , die wir summarisch zunächst mit Bp bezeichnen, sodann aus der Kraft A , die auf den Körper wirkt. Hieraus folgt die Gleichung:

$$\text{Impulsdifferenz } \Delta J = A + Bp.$$

Ein durch AB eintretendes Teilchen von der Breite dy hat den Impuls in y -Richtung $(U+u) dy \cdot v \cdot \rho$.

Der Gesamtimpuls ist somit

$$\rho \int_A^B (U+u) v dy$$

und die Differenz

$$-\rho \int_A^B (U+u) v dy + \rho \int_D^C (U+u) v dy.$$

Zur Berechnung der Druckkräfte

$$\int_A^D p dx - \int_B^C p dx = Bp$$

müssen wir die Abhängigkeit des Druckes von der Geschwindigkeit nach der Bernoullischen Gleichung ausrechnen

$$p + \frac{\rho}{2} U^2 = p' + \frac{\rho}{2} w^2; \quad w^2 = (U + u)^2 + v^2 \sim (U + u)^2$$

da v klein gegen U sein soll, kann v^2 gegen $(U + u)^2$ vernachlässigt werden.

$$p + \frac{\rho}{2} U^2 = p' + \frac{\rho}{2} (U + u)^2$$

$$p' - p = \frac{\rho}{2} [U^2 - (U + u)^2] = \frac{\rho}{2} [-2uU - u^2] \sim -\rho U \cdot u,$$

indem wieder höhere Glieder vernachlässigt werden. Wir erhalten somit den Druck p' an einer beliebigen Stelle der Grenzen der Kontrollfläche:

$$p' = p - \rho U \cdot u.$$

Es bedeutet keine Einschränkung, wenn wir den Druck p im Unendlichen gleich Null setzen, weil er ja keine Resultierende auf dem abgegrenzten Raum hat.

Wir setzen nunmehr die inzwischen ausgerechneten Werte ΔJ und Bp in die Gl. $A = \Delta J - Bp$ ein.

$$A = -\rho \int_A^B (U + u) v dy + \rho \int_D^C (U + u) v dy + \rho \int_A^D U \cdot u dx - \rho \int_B^C U \cdot u dx.$$

Die bei der Ausrechnung entstehenden Werte $\rho \int u \cdot v dy$ usw. können wieder vernachlässigt werden, weil $u \cdot v$ klein gegen $U \cdot u$ ist.

$$\begin{aligned} A &= \rho \cdot U \left[-\int_A^B v dy - \int_C^D v dy - \int_D^A u dx - \int_B^C u dx \right] \\ &= \rho \cdot U - \left[\int_A^B v dy + \int_B^C u dx + \int_C^D v dy + \int_D^A u dx \right] = -\rho \cdot U \cdot \Gamma^*. \end{aligned}$$

Die $[\]$ Klammer, die durch die Bezeichnung Γ ersetzt wurde, bedeutet nun, daß über die geschlossene Kurve $ABCD$ der Wert $\text{Weg} \times \text{Geschwindigkeit}$ gebildet wird. Diese als Umlaufintegral oder Zirkulation schon früher abgeleitete Größe ist, wie man sieht, ein Kriterium dafür, ob eine Kraft A existiert. Nur wenn $\Gamma \neq 0$, ist eine Auftriebskraft vorhanden. Aus früheren Untersuchungen wissen wir aber schon, daß die durch einen Körper bedingte Störung einer Parallelströmung in weiter Entfernung immer angenähert werden

* Das $(-)$ -Vorzeichen bedeutet, daß Γ einen anderen Umlaufsinn haben muß, wenn A die angenommene Richtung hat. A ist die Kraft, die von außen auf den Körper ausgeübt wird. Die Flüssigkeit antwortet mit der Reaktionskraft, die natürlich die entgegengesetzte Richtung hat.

kann durch die einfachen Gebilde: Wirbel, Quelle, Doppelwirbel, Doppelquelle usw. Untersucht man diese Gebilde nach dem Ausdruck $\oint wds = \Gamma$, so ist dieser Wert nach den Ermittlungen von S. 22 nur beim Wirbel von Null verschieden.

Wir fassen zusammen:

Ein Auftrieb, d. h. eine zur Strömungsrichtung senkrechte Kraft ist nur möglich, wenn einer Parallelströmung eine Wirbelströmung überlagert ist. Die Größe der Kraft ist

$$A = \rho U \cdot \Gamma \cdot b \quad (24)$$

wenn wir noch die Ausdehnung senkrecht zur Zeichenebene mit b bezeichnen. (Bei der obigen Rechnung wurde stillschweigend die Ausdehnung senkrecht zur Zeichenebene mit 1 angenommen.)

Anmerkung: Wenden wir den Begriff Zirkulation nun nachträglich noch auf das ebene Gitter (S. 36) an, so ist für eine Schaufel $\Gamma = t(c_{1u} - c_{2u})$ zu setzen. Mit der neuen Schreibweise erhalten wir

$$P y_t = b \rho \cdot c_m \cdot \Gamma; \quad P x_t = b \rho \frac{c_{1u} + c_{2u}}{2} \cdot \Gamma.$$

Die Resultierende R steht, wie wir bereits wissen, senkrecht auf der Mittelgeschwindigkeit c_∞ . Man erhält

$$R^2 = P y_t^2 + P x_t^2 = b \rho^2 \Gamma^2 \left[c_m^2 + \left(\frac{c_{1u} + c_{2u}}{2} \right)^2 \right].$$

Die [] Klammer ist aber nach Abb. 38 gleich c_∞^2 , so daß folgende Beziehung entsteht:

$$R = b \rho \cdot \Gamma \cdot c_\infty,$$

d. h. der oben gefundene Satz gilt auch für das Gitter, wenn statt u die aus Austritts- und Eintrittsgeschwindigkeit gebildete Mittelgeschwindigkeit c_∞ genommen wird.

Eine gute Kontrolle besteht noch darin, daß beim Übergang zu unendlich großer Teilung ($t = \infty$) c_1 und c_2 nach Größe und Richtung zusammenfallen, so daß dann direkt der oben behandelte Fall Gl. (24) eintritt.

In diesem Falle wird $c_{1u} = c_{2u}$, d. h. in der Formel $\Gamma = t(c_{1u} - c_{2u})$ bleibt Γ konstant, wenn auf der rechten Seite $t = \infty$ und $c_{1u} - c_{2u} = 0$ wird.

Wir merken uns schon jetzt, daß bei einem Einzelauftrieb, entstanden durch eine einzelne Schaufel, die Gesamtströmung wegen $c_{1u} = c_{2u}$ keine endliche Ablenkung erfährt.

13. Graphische Konstruktion von Strömungsbildern.

Die allgemeinen Grundgleichungen geben Anhaltspunkte zur näherungsweise Konstruktion von Strömungsbildern. Im Falle der ebenen und der rotationssymmetrischen Strömung sind einfache Verfahren anwendbar, die in der Praxis oft mit Vorteil angewandt werden.

In Abb. 44 seien einige Stromlinien eingezeichnet von der schon früher festgesetzten Besonderheit, daß die zwischen 1—2; 2—3; 3—4 in der Zeiteinheit strömenden Mengen konstant sind. Ist Δn die Breite einer solchen Stromröhre und c die Geschwindigkeit an irgend einer Stelle, so ist die durchströmende Menge $\Delta n \cdot c = \Delta q$. Die Krümmungsradien an den Begrenzungslinien seien R' und R'' , die Geschwindigkeiten an dieser Stelle c' und c'' . Nach Gl. (11) ist dann $R'c' = R''c''$. Durch Erweiterung mit $\Delta\varphi$ entsteht

$$R' \cdot \Delta\varphi \cdot c' = R'' \Delta\varphi \cdot c''.$$

Unter Berücksichtigung von $R \cdot \Delta\varphi = \Delta s$ erhält man

$$\Delta s' \cdot c' = \Delta s'' \cdot c''.$$

Die Division mit der Stetigkeitsgleichung $\Delta n' \cdot c' = \Delta n'' \cdot c''$ ergibt:

$$\frac{\Delta s'}{\Delta n'} = \frac{\Delta s''}{\Delta n''}. \quad (25)$$

Denkt man sich überall im Abstände Δs die Normallinien zu den Stromlinien gezeichnet, so ergeben sich Rechtecke, die einander ähnlich sind. Wählt man an einer Stelle Δs so, daß ein Quadrat entsteht, so besteht das ganze Strömungsbild aus Quadraten.

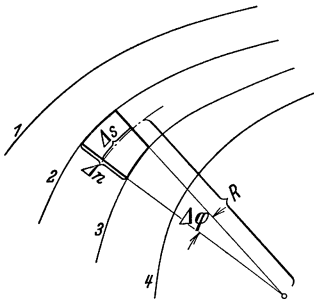


Abb. 44. Ausschnitt aus einer ebenen Strömung.

Streng genommen gilt die Ableitung nur für aller kleinste Teilchen. Diese wichtige Eigenschaft der ebenen Strömung zeigt die direkte Verwandtschaft mit einer einfachen Parallelströmung. Man sagt, jede ebene Strömung ist das konforme Abbild einer Parallelströmung. Man erkennt, daß es möglich sein muß, aus der einfachen Parallelströmung alle anderen ebenen Strömungen abzuleiten. Mit Hilfe der sog. konformen Abbildung¹ kann diese Aufgabe rein mathematisch gelöst werden. Es bestehen auch verschiedene mechanische Möglichkeiten zur Aufzeichnung der Stromlinien.

Nimmt man im Sinne graphischer Näherungsmethoden endlich große (nicht zu große) Quadrate, so kann auch hier noch ziemlich genau die Gültigkeit des Satzes erwartet werden. Im folgenden soll die Anwendbarkeit dieser Beziehung kurz erläutert werden.

Man zeichnet zunächst nach dem Gefühl die Stromlinien auf. Senkrecht zu den Stromlinien zeichnet man wieder nach dem Gefühl eine Schar senkrechter Linien so ein, daß ungefähr Quadrate entstehen.

¹ Eine leicht faßliche Einführung in die konforme Abbildung ist: Leo Lewent: Konforme Abbildung, 1912. Verlag B. G. Teubner.

Letzteres läßt sich nun sehr leicht überprüfen durch Einzeichnen von Kreisen. Durch Verlegen der Linien und nochmaliges Nachprüfen gelingt es dann, das Strömungsbild in 1. Näherung zu entwerfen.

Im allgemeinen ist das Verfahren langweilig und zeitraubend. Oft liegen die Dinge jedoch so, daß ungefähre Anhaltspunkte für gewisse Stromlinien bzw. die dazu Senkrechten vorliegen. An den Wandungen ist z. B. immer die Richtung der Senkrechten genau bekannt.

Abb. 45 gibt ein einfaches Beispiel für eine gute Anwendbarkeit des Verfahrens. Die Einströmung aus einem unendlich großen Raum in einen Kanal, dessen Einlauf abgerundet ist, soll untersucht werden. Im Kanal werden in genügend großem Abstand vom Einlauf alle Stromlinien gleichen Abstand haben und zu der Kanalachse parallel sein. Die eingezeichneten sieben

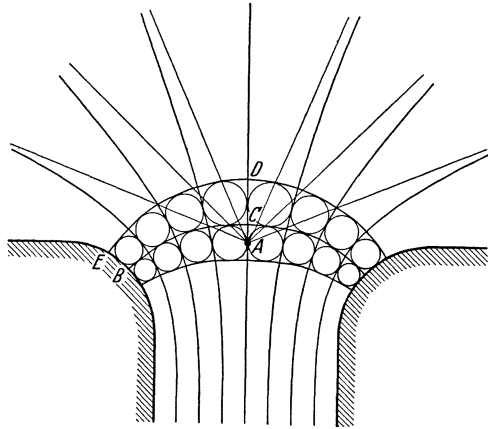


Abb. 45. Graphische Konstruktion von Strömungsbildern.

Stromlinien werden also sieben in gleichem Abstand eingezeichnete Parallele zur Asymptoten haben müssen. Im weiten Abstand vor dem Einlauf haben wir das Bild einer Senkenströmung. Ein Geradenbüschel durch den Punkt *A* stellt somit in weiter Ferne das Strömungsbild dar. Sieben um den Winkel $\frac{180}{8}$ verschiedene Geraden werden somit die Asymptoten im Außenbereich darstellen. Um für die Zwischenströmung genaueren Anhalt zu bekommen, wenden wir obiges Verfahren an. Vom Punkte *B* aus ziehen wir senkrecht zur Wand zunächst nach dem Gefühl *BC*. Die Asymptote verbinden wir gefühlsmäßig und zeichnen den ersten Kreis bei *C*. Dadurch bekommen wir einen Anhaltspunkt für *DE* und untersuchen die verbleibenden drei „Quadrate“ durch Kreise. Wir korrigieren so lange, bis die Kreise die Seiten berühren. Dadurch liegen die Stromlinien in diesem Bereich einigermaßen fest. Die Verbindung mit den Asymptoten ist jetzt schon bedeutend leichter. Für viele praktische Anwendungen reicht die hierdurch erzielte Genauigkeit schon aus.

14. Reibungsfreie Strömung in offenen Rinnen.

Bei Strömungen in offenen Rinnen kann sich das Niveau der Oberfläche in der verschiedensten Weise ändern. Durch diesen neuen Frei-

heitsgrad, der den bis hierher behandelten Bewegungsformen zu überlagern ist, ergeben sich eine Reihe Erscheinungen, die praktisch große Bedeutung haben.

Zunächst wollen wir beobachten. Durch eine Rinne, die stromabwärts Gefälle hat, ergieße sich eine Wassermenge mit großer Geschwindigkeit. Eine Strecke lang erkennt man eine glatte Strömung, bis plötzlich an

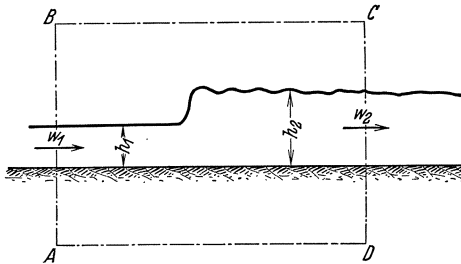


Abb. 46. Wassersprung.

einer Stelle die Niveauhöhe sprunghaft steigt und von da ab eine unruhige Oberfläche zeigt. Abb. 46 zeigt eine derartige Strömung. Um diese recht sonderbare, den Flußbau sehr interessierende Erscheinung zu erklären, wollen wir folgende Frage untersuchen.

Gegeben sei eine rechteckige Rinne mit dem Neigungswinkel α der Sohle und der seitlichen Breite b (Abb. 47). An der Stelle 1 sei die Geschwindigkeit w_1 ; die Niveauhöhe über der Sohle h_1 . Gehen wir nun um Δl stromabwärts weiter bis zur Stelle 2, so soll untersucht werden ob h_2 kleiner, größer oder gleich h_1 bleibt.

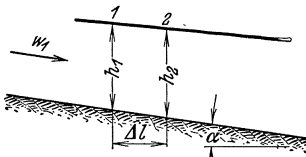


Abb. 47. Offene Rinne mit Gefälle.

Mit Hilfe der Bernoullischen Gleichung kann diese Frage leicht beantwortet werden, wenn man gleichzeitig berücksichtigt, daß der Druck auf die Oberfläche unabhängig von h konstant, nämlich gleich dem Druck der Atmosphäre ist. Wir betrachten die Punkte 1 und 2 und erhalten nach Bernoulli

$$h_1 + \Delta l \cdot \operatorname{tg} \alpha + \frac{w_1^2}{2g} = h_2 + \frac{w_2^2}{2g}$$

$$h_2 - h_1 - \frac{w_1^2 - w_2^2}{2g} = \Delta l \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$h_2 - h_1 - \frac{w_1 - w_2}{g} \frac{w_1 + w_2}{2} = \Delta l \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Wir führen die mittlere Geschwindigkeit $w = \frac{w_1 + w_2}{2}$, die mittlere Höhe h ein, und berücksichtigen die Kontinuitätsgleichung

$$w_1 \cdot b \cdot h_1 = V; \quad w_2 \cdot b \cdot h_2 = V;$$

hieraus $w_1 = \frac{V}{b h_1}$ und $w_2 = \frac{V}{b h_2}$

$$w_1 - w_2 = \frac{V}{b} \left[\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} \right]$$

$$w_1 - w_2 = \frac{V}{b} \frac{h_2 - h_1}{h_1 \cdot h_2} \sim \frac{V}{b} \frac{h_2 - h_1}{h^2} \sim \frac{w}{h} (h_2 - h_1).$$

Dieses wird in die Gleichung für $h_2 - h_1$ eingesetzt. Eine leichte Rechnung ergibt dann

$$h_2 - h_1 = \frac{\Delta l \cdot \text{tg } \alpha}{1 - \frac{w^2}{h \cdot g}}.$$

Der Nenner entscheidet über das Vorzeichen von $h_2 - h_1$. Der Grenzfall $h_2 - h_1 = 0$ tritt ein bei

$$1 - \frac{w^2}{h \cdot g} = 0$$

d. h.

$$w = \sqrt{g \cdot h} \quad (26)$$

ist $w > \sqrt{g \cdot h}$, so ist $h_2 < h_1$, d. h. die Niveauhöhe nimmt ab und die Geschwindigkeit nimmt zu. Umgekehrt wird bei $w < \sqrt{g \cdot h}$ die Niveauhöhe steigen und die Geschwindigkeit sich vermindern.

Diese für die Bewegung in offenen Flußläufen wichtige „Grenzgeschwindigkeit“ $\sqrt{g \cdot h} = c_0$ nennt man Schwallgeschwindigkeit. Die Bewegung unterhalb dieser Schwallgeschwindigkeit wird auch durch das Wort „Strömen“, oberhalb derselben mit „Schießen“ gut charakterisiert.

Nach diesen Vorbereitungen werde der Wassersprung Abb. 46 behandelt. Man erkennt, daß es sich um einen Stoßvorgang handelt und deshalb der Impulssatz die geeignete Waffe ist. Für den umgrenzten Bereich werde die Rechnung durchgeführt:

	Schnitt <i>AB</i>	Schnitt <i>CD</i>
Impulsdurchtritt	$\rho \cdot w_1 \cdot h_1 w_1$	$\rho w_1 h_1 \cdot w_2$
Druckkräfte ¹	$\frac{1}{2} \gamma \cdot h_1 \cdot h_1$	$\frac{1}{2} \gamma h_2 h_2$

Gleichheit von Impulsdifferenz und Differenz der Druckkräfte:

$$\frac{\gamma}{g} w_1 h_1 (w_1 - w_2) = \frac{1}{2} \gamma (h_2^2 - h_1^2).$$

Hier wurde bereits die Kontinuitätsgleichung berücksichtigt

$$w_1 h_1 = w_2 h_2.$$

Diese Gleichung dient gleichzeitig dazu, w_1 durch w_2 auszudrücken

$$w_2 = w_1 \frac{h_1}{h_2}$$

$$\frac{w_1^2}{g} \left(1 - \frac{h_1}{h_2} \right) = \frac{1}{2} \frac{h_2^2}{h_1} \left[1 - \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^2 \right].$$

¹ Der Faktor $\frac{1}{2}$ kommt dadurch zustande, daß der mittlere Druck $\frac{1}{2} \gamma \cdot h$ eingesetzt werden muß.

Hieraus entsteht nach einer kleinen Umformung

$$\frac{h_2}{h_1} \left(\frac{h_2}{h_1} + 1 \right) = 2 \frac{w_1^2}{g h_1} = 2 \left(\frac{w_1}{c_0} \right)^2,$$

indem im Sinne der oberen Rechnung die Schwallgeschwindigkeit $c_0 = \sqrt{g h}$ eingesetzt wurde.

Aus dieser Gleichung ist $\frac{h_2}{h_1}$ errechenbar:

$$\frac{h_2}{h_1} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2 \left(\frac{w_1}{c_0} \right)^2};$$

es läßt sich aus ihr folgern, daß nur dann $\frac{h_2}{h_1} > 1$ ist, wenn $w_1 > c_0$ ist.

Die äußere Ursache dieses sog. „Wassersprunges“ liegt meist in einem plötzlichen Hindernis unterhalb der Schwallbildung z. B. durch ein Wehr. Tritt der Wassersprung nicht ein, so ist die Voraussetzung dieser Rechnung natürlich nicht mehr erfüllt. Dies ist dann der Fall, wenn das Wehr sehr niedrig ist. In diesem Falle strömt das Wasser über das Wehr ohne Wassersprung, d. h. auch ohne den durch die Stoßwirkung bedingten Energieverlust.

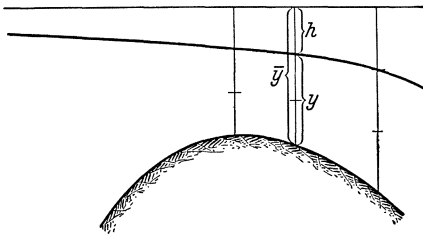


Abb. 48. Strömung einer offenen Rinne über ein Wehr.

Aus meßtechnischen Gründen ist die offene Strömung über ein Wehr aus einem vorhandenen großen Teich od. dgl. sehr wichtig. An einer Stelle (Abb. 48) sei die Einsenkung des Wasserspiegels h . Die in diesem Querschnitt auftretende Geschwindigkeit berechnet sich dann nach früherem zu $w = \sqrt{2g h}$. Die Menge V ergibt sich aus

$$V = w \cdot y \cdot b = b \sqrt{2g \cdot h} (\bar{y} - h).$$

Hält man die Niveauhöhe konstant und verändert h , so ergeben sich verschiedene Wassermengen. Bei einem h ist die Menge am größten. Durch Differentiation $\frac{dV}{dh} = 0$ kann dieses leicht erwiesen werden. Es ergibt sich

$$h = \frac{\bar{y}}{3}; \text{ d. h. } y = 2h.$$

Dieser Zustand stellt sich nun tatsächlich ein¹, so daß aus h leicht die

¹ Jeder Körper ist bestrebt, die möglichst tiefste Lage zu erreichen, d. h. er gleitet bis zur tiefsten Stelle. Dieser Tatsache entspricht das Bestreben, möglichst viel kinetische Energie aus der Lagenenergie umzusetzen.

Geschwindigkeit und die Menge berechnet werden kann, wenn insbesondere an der höchsten Stelle diese Untersuchung durchgeführt wird.

Setzt man $h = \frac{y}{3}$ in die Formel $\sqrt{2gh}$ ein, so entsteht \sqrt{gh} , d. h. in jedem Querschnitt ist gerade die Schwallgeschwindigkeit, die der jeweiligen Tiefe entspricht. Man erkennt, daß unterhalb des Wehres meist schießende Bewegung vorhanden ist. Ein Wassersprung führt in den meisten Fällen wieder die „strömende“ Bewegung ein.

III. Einfluß der Reibung bei durchströmten Körpern.

15. Innere Reibung infolge Zähigkeit.

Die eingangs gemachte Annahme, daß Flüssigkeiten nur Normaldrücke aufnehmen, bedarf bei Betrachtung der wirklichen Flüssigkeit einer Korrektur. Die Vorstellung wird erleichtert, wenn wir zunächst an zähflüssige Medien z. B. Teer, Glyzerin, Lava usw. denken. Die Erfahrungen des täglichen Lebens zeigen bereits hier, daß diese Flüssigkeiten einer Formänderung Widerstand leisten.

Zwischen zwei unendlich großen Platten befinde sich eine derartige zähflüssige Flüssigkeitsschicht von der Breite y (Abb. 49). Die untere Platte stehe fest, während die obere sich mit der Geschwindigkeit u nach rechts bewegt. Die Erfahrung zeigt, daß diese Bewegung eine Kraft P erfordert, die direkt proportional mit u wächst. Eine nähere Beobachtung zeigt nun, daß an den Platten die Flüssigkeit direkt haftet und die Geschwindigkeit der Flüssigkeit linear von 0 bis u zunimmt. Mit wachsendem u nimmt das Geschwindigkeitsgefälle $\frac{u}{y}$ proportional zu, so daß man auch sagen kann, die Kraft P wächst proportional mit dem Geschwindigkeitsgefälle u . Bezeichnet man die pro cm^2 übertragene Kraft analog zu ähnlichen Betrachtungen in der Festigkeitslehre mit der Schubspannung τ , so erhält man $\tau = \mu \cdot \frac{u}{y}$, indem man für den konstanten Proportionalitätsfaktor die sog. Zähigkeitsziffer μ einführt.

Hat man nun Bewegungsvorgänge, bei denen die Geschwindigkeitsverteilung aus irgend einem Grunde nicht linear verläuft z. B. nach Abb. 50, so begrenzt man einem so kleinen Bereich dy , daß dort die Kurve durch die Tangente an die Geschwindigkeitskurve angenähert werden kann.

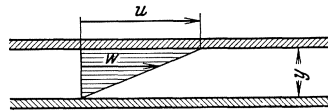


Abb. 49. Zähflüssige Strömung zwischen zwei bewegten Platten.

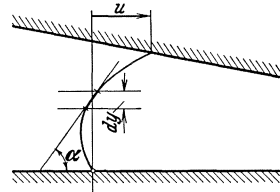


Abb. 50. Zähflüssige Strömung zwischen zwei konisch gestellten Platten.

In der Schicht dy sind dann dieselben Verhältnisse vorhanden wie oben, wenn man noch $\frac{u}{y}$ durch $\frac{du}{dy}$ ersetzt.

Die allgemeine Formel lautet somit

$$\tau = \mu \cdot \frac{du}{dy}; \quad (27)$$

hieraus folgt die Dimension von $\mu \left[\frac{kg}{cm^2 \cdot s} \right]$.

Mit dieser Festsetzung soll die Rohrströmung untersucht werden. Auch hier wird an der Rohrwand die Flüssigkeit haften, d. h. die Geschwindigkeit ist dort gleich Null. In der Mitte wird die Geschwindigkeit am größten sein und nach der Wand zu stetig abnehmen. Aus Symmetriegründen sind auf einem Kreise des Querschnittes gleiche Geschwindigkeiten und gleicher Druck vorhanden. Das Geschwindigkeitsgefälle bedingt nach obigem eine Schubspannung $\tau = \mu \cdot \frac{dw}{dr}$, die z. B. auf dem Zylindermantel vom Radius r und der Länge Δl konstant ist (Abb. 51).

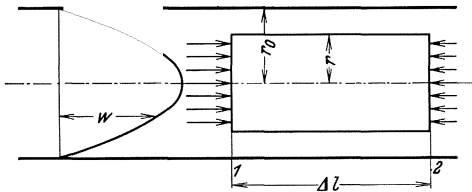


Abb. 51.

Die Gesamtkraft, die der Zylinder durch die Schubspannung erfährt, ist somit $2r\pi \cdot \Delta l \cdot \tau$. Diese Kraft ist im Gleichgewicht mit den Druckkräften, die auf die vordere und hintere Stirnfläche des Zylinders wirken. Da die Stromlinien parallel sind, müssen wir annehmen,

daß in einem zur Strömungsrichtung senkrechten Querschnitt der statische Druck konstant ist. Denn es ist nicht einzusehen, wie durch die Reibungserscheinungen hier eine Änderung eintreten kann. Es genügt deshalb vollkommen, für einen beliebigen Radius die Rechnung auszuführen. Wenn auf der Strecke Δl die Druckabnahme Δp ist, so erhalten wir

$$\Delta p \cdot r^2 \cdot \pi = 2r\pi \Delta l \cdot \mu \frac{dw}{dr}$$

$$\frac{\Delta p}{\Delta l} \cdot r dr = 2\mu dw$$

Die Integration ergibt unter Berücksichtigung der Randbedingungen $w = 0$; für $r = r_0$.

$$w = \frac{\Delta p}{\Delta l} \frac{1}{4\mu} (r_0^2 - r^2); \quad w_{max} = \frac{\Delta p}{\Delta l} \frac{r_0^2}{4\mu} * \quad (28)$$

* Dieses Gesetz, bekannt unter dem Namen „Poiseuillesches Gesetz“, wurde zuerst von Hagen und zwei Jahre später von Poiseuille experimentell (1840) ermittelt. Mit Rücksicht auf diesen Sachverhalt bezeichnet die neuere Literatur die Beziehung mit Recht: „Hagen-Poiseuillesches Gesetz“.

Die Geschwindigkeitsverteilung ist somit eine Parabel bzw. ein Rotationsparaboloid.

Durchflußmenge und mittlere Geschwindigkeit ergibt sich aus einer weiteren einfachen Rechnung.

$$V = \int_0^{r_0} w \cdot 2r \pi dr = \frac{r_0^2 \cdot \pi}{8 \mu} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta l} = r_0^2 \cdot \pi \left(\frac{\Delta p}{\Delta l} \frac{r_0^2}{8 \mu} \right) = r_0^2 \pi \cdot w_m. \quad (29)$$

Durch Vergleich mit Gl. (28) stellt man noch fest, daß die mittlere Geschwindigkeit gleich der halben Maximalgeschwindigkeit ist. (Vgl. den geometrischen Satz: Der Inhalt eines Rotationsparaboloides ist gleich dem Inhalt eines Zylinders von gleicher Grundfläche und halber Höhe.)

Die Rechnung, die für die Länge Δl ausgeführt ist, bleibt bei anderen Längen dieselbe, so daß für $\frac{\Delta p}{\Delta l}$ auch $\frac{p_2 - p_1}{l_2 - l_1}$ gesetzt werden kann.

16. Ähnlichkeitsgesetz.

Versuche können nicht immer unter denselben Bedingungen ausgeführt werden, wie sie bei einer praktischen Anwendung vorkommen. Die Abmessungen müssen oft verkleinert werden (z. B. bei Flugzeugen), die Geschwindigkeiten müssen aus irgendwelchen Gründen oft abweichen; auch ist es oft zweckmäßig, eine andere Flüssigkeit zur Untersuchung zu verwenden, d. h. statt Luft Wasser oder umgekehrt zu wählen.

Bei solchen Abweichungen entsteht folgende Kardinalfrage. Unter welchen Bedingungen sind die Strömungsbilder zweier umströmter geometrisch ähnlicher Körper ebenfalls geometrisch ähnlich? Ist eine solche Übereinstimmung zu erzielen, so steht zu erwarten, daß der „Modellversuch“ eine wirklichkeitsgetreue Nachbildung des Großversuches gestattet.

Rein formal kann diese Frage schnell beantwortet werden. Sie ist in dieser Sprache identisch mit der Frage, ob eine dimensionslose Zahl existiert, die den Strömungszustand charakterisiert. Die die Strömung charakterisierenden Größen (Abb. 52) sind die Geschwindigkeit im Unendlichen u , eine Hauptabmessung d die Massendichte ρ und die Reibungsziffer μ . Ist nun eine einfache algebraische Kombination dieser Größen so durchführbar, daß eine dimensionslose Zahl entsteht?

$$u \left[\frac{cm}{s} \right]; \quad \rho = \frac{\gamma}{g} \left[\frac{kg \cdot s^2}{cm^4} \right]; \quad d [cm]; \quad \mu \left[\frac{kg}{cm^2 \cdot s} \right].$$

Ein einfacher Versuch zeigt nun, daß nur folgende Möglichkeit besteht

$$R = \frac{u \cdot d \cdot \rho}{\mu} \left[\frac{cm \cdot cm \cdot kg \cdot s^2 \cdot cm^2}{kg \cdot cm^4 \cdot s^2} \right]. \quad (30)$$

d. h. dimensionslos.

Diese Zahl nennt man Reynoldsche Zahl.

Die außerordentliche Bedeutung, die dieser Zahl in der neueren Strömungslehre zuteil wird, berechtigt zu einigen weiteren Ausführungen, um dem Anfänger diese wichtige Kennzahl von der physikalischen Seite her etwas näher zu bringen.

Die Frage nach der geometrischen Ähnlichkeit der Strömungen nach Abb. 52 werde „mikroskopisch“ untersucht. Wir betrachten zwei

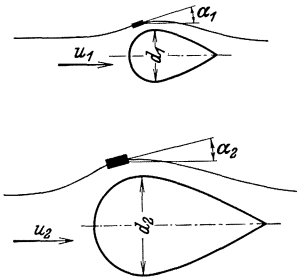


Abb. 52. Strömung um zwei geometrisch ähnliche Körper.

geometrisch ähnlich liegende Flüssigkeitsteilchen (in Abb. 52 eingezeichnet). Die Bewegungsrichtung (d.h. die Richtung der Stromlinien) an ähnlich liegenden Stellen sei α_1 und α_2 . Es leuchtet ein, daß bei geometrischer Ähnlichkeit der Strömungsbilder diese Winkel übereinstimmen müssen. Wodurch werden diese Winkel bestimmt? Offensichtlich durch die an Ort und Stelle an den Teilchen angreifenden Kräfte und zwar durch das Verhältnis dieser Kräfte. Drei Kräfte kommen in Frage: Druckkräfte,

Trägheitskräfte und Reibungskräfte. Da zwischen diesen Kräften die Gleichgewichtsbeziehung besteht, genügt es, das Verhältnis zweier dieser Kräfte zu nehmen. Wenn wir hierzu die beiden letzteren nehmen, so schließen wir damit zunächst die Einflüsse der Druckkräfte aus, die hier ja keine wesentliche Bedeutung haben können.

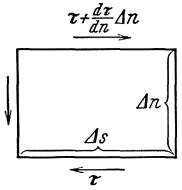


Abb. 53. Schubspannungen an einem rechteckigen Element.

1. Reibungskräfte: In der Strömungsrichtung wirken infolge der Reibung Schubspannungen $\tau = \mu \frac{dw}{dn}$ und zwar an der unteren Fläche eines viereckigen Elementes $\tau \cdot ds \cdot 1$, an der oberen

$$\left(\tau + \frac{d\tau}{dn} dn \right) ds \cdot 1$$

(Abb. 53). Da diese entgegen gerichtet sind (aus Gründen des Momentengleichgewichtes) verbleibt eine Kraft

$$\left(\tau + \frac{d\tau}{dn} \cdot dn \right) ds \cdot 1 - \tau ds \cdot 1 = \frac{d\tau}{dn} dn ds \cdot 1 = \mu \cdot \frac{d^2 w}{dn^2} \cdot dn \cdot ds .$$

2. Massenkkräfte: Diese Kräfte bestimmen sich aus der Gleichung Kraft = Masse \times Beschleunigung.

$$ds \cdot dn \cdot 1 \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{dw}{dt} = ds \cdot dn \cdot 1 \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{dw}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = ds \cdot dn \cdot 1 \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{dw}{ds} \cdot w .$$

Somit erhält man das Verhältnis

$$\frac{\frac{\gamma}{g} \frac{dw}{ds} \cdot w}{\mu \frac{d^2 w}{dn^2}} = \frac{\text{Trägheitskräfte}}{\text{Reibungskräfte}} .$$

Alle Größen an den betrachteten Stellen werden in irgendeiner Beziehung zu den charakteristischen Größen u ; (Geschwindigkeit der Parallelströmung im Unendlichen) d usw. stehen. Wird z. B. u doppelt so groß genommen, so wird auch w doppelt so groß sein. Zwischen allen Größen muß, wie einleuchten dürfte, eine prop. Beziehung bestehen, die durch \sim ausgedrückt werden soll

$$w \sim u; \quad ds \sim d; \quad dw \sim u.$$

Setzen wir dieses in die letzte Gleichung ein, so ergibt sich:

$$\frac{\gamma \frac{dw}{ds} \cdot w}{\mu \cdot \frac{d^2 w}{d^2}} = \frac{\gamma \frac{u^2}{d}}{\mu \cdot \frac{u}{d^2}} = \frac{u \cdot d}{\mu/\rho} = R.$$

Damit erhalten wir dieselbe Zahl wie vorhin.

Vorbehaltlich der in dem nächsten Kapitel zu erbringenden experimentellen Bestätigung gestattet der Satz folgende wichtige Aussage.

Zwei Strömungen um bzw. innerhalb geometrisch ähnlicher Gebilde sind nur dann geometrisch ähnlich, wenn die Reynoldsen Zahlen gleich sind. Innerhalb dieser Forderung können sich u , d und μ/ρ beliebig ändern. Man hat somit bei Versuchen die Möglichkeit, Modellgröße und Geschwindigkeit zu ändern. Es besteht sogar die Freiheit, eine andere Versuchsflüssigkeit zu nehmen, da der Wert von μ/ρ ja ebenfalls geändert werden kann (z. B. statt Luft, Wasser), wenn nur dafür gesorgt wird, daß R konstant bleibt.

Die immer wieder vorkommende Größe μ/ρ bezeichnet man als kinematische Zähigkeit und hat dafür den Buchstaben ν eingeführt. Meist findet man die Schreibweise $R = \frac{u \cdot d}{\nu}$.

Die folgende Tabelle enthält für einige wichtige Flüssigkeiten ν . Die Werte ändern sich stark mit der Temperatur und zwar so, daß bei Flüssigkeiten ν mit steigender Temperatur kleiner wird, während bei Gasen ein entgegengesetztes Verhalten bemerkt wird.

Tabelle I.

Temperatur °C	0	10	20	30	60
Wasser . . .	0,018	0,013	0,01	0,008	0,0048
Luft	0,13	0,14	0,15	0,16	0,19

Kinematische Zähigkeit für einige andere Flüssigkeiten bei 15° C in cm²/sec; Glycerin 11,6; Quecksilber 0,00118; Äther 0,00268; Alkohol 0,0167; Benzol 0,079.

Beim Vergleich von Luft und Wasser merke man sich, daß der ν -Wert für Luft ca. 14 mal größer ist wie bei Wasser. Vergleicht man also Strömungen in Wasser und Luft, so muß bei Luft die Geschwindigkeit 14 mal größer sein wie bei Wasser.

Ein Zahlenbeispiel soll eine wichtige Anwendung des Reynoldsschen Gesetzes zeigen. Die vorhin behandelte Strebe habe eine Tiefe von 10 mm (Profildraht) und werde in einem Flugzeug bei 150 km/std. verwendet. Im offenen Wasserkanal soll diese Strebe geometrisch ähnlich vergrößert untersucht werden. Mit Rücksicht auf Wasserwellen ist die Wassergeschwindigkeit auf 23 cm/sec beschränkt. Da (man denke z. B. an einen Zylinder) Übergeschwindigkeiten von ca. doppeltem Wert der Hauptgeschwindigkeit vorkommen können, wird die Geschwindigkeit auf ca. 10 cm/sec beschränkt werden müssen.

Berechnung der Reynoldsschen Zahl für Luft

$$R_L = \frac{u \cdot d}{\nu} = \frac{41,7 \cdot 1 \cdot 10^2}{0,149} = 28\,000.$$

Für Wasser muß derselbe Wert vorhanden sein.

$$R_w = \frac{u \cdot d}{\nu}; \quad d = \frac{\nu \cdot R}{u} = \frac{0,01 \cdot 28\,000}{10} = 28 \text{ cm}.$$

Die Strebe muß also eine Tiefe von 28 cm haben, d. h. 28mal größer genommen werden als im Flugzeug.

Soll die Strebe im Windkanal untersucht werden, so ist wegen des gleichen ν -Wertes nur die Konstanz von $u \cdot d$ erforderlich. Wenn z. B. eine Größe von $d' = 5$ cm erwünscht ist, so ergibt sich

$$u' = u \cdot \frac{d}{d'} = 41,7 \cdot \frac{1}{5} = 8,34 \text{ m/sec}.$$

Bei einer Geschwindigkeit von $\sim 8,5$ m/sec und einer Strebentiefe von 5 cm ist somit im Windkanal, und bei einer Geschwindigkeit von 10 cm/sec, bei einer Strebentiefe von 28 cm im Wasserkanal derselbe Strömungszustand vorhanden wie beim fliegenden Flugzeug.

17. Strömungsformen.

Nach den Ausführungen von S. 50 erscheint insbesondere das Rohrreibungsproblem höchst einfach und durch Gl. (28) und (29) umfassend gelöst.

Leider ist jedoch die dort gemachte Grundannahme, daß die einzelnen Flüssigkeitsfäden in stetigen Kurven, den sog. Stromlinien, sich bewegen und demzufolge die Schubspannung durch $\tau = \mu \frac{dw}{dn}$ bestimmt ist, nur in wenigen Fällen richtig. Die praktischen Anwendungsbeispiele dieser durch Laminarströmung oder Schichtenströmung sprachlich gut umschriebenen Bewegungsform beschränken sich auf folgende Fälle.

1. Strömung durch Kapillare und bei größeren Rohren für kleinere Geschwindigkeiten.
2. Strömung in Schwerkraftwarmwasserheizungen (teilweise!).
3. Strömung durch Filter, Gewebe usw.

4. Grundwasserströmung.
5. Strömung in dem Schmierfilm eines Lagers.
6. Bewegung von Lavamassen.

Die Laminarbewegung kann, dem klassischen Versuch von O. Reynolds folgend, dadurch nachgewiesen werden (Abb. 54), daß der Strömung durch eine Glasröhre *a* ein Farbstrahl beigemischt wird durch eine im Einlauf befindliche Düse *b*. Stellt man mit dem Hahn *c* kleinere Geschwindigkeiten ein, so zeigt sich, daß der Farbstrahl wie mit dem Lineal gezogen auf der ganzen Rohrlänge erhalten bleibt. (Vollkommen ruhiges Wasser im Behälter ist notwendig.) Vergrößert man nun durch Öffnen des Hahnes *c* die Geschwindigkeit, so bemerkt man auf einmal,

daß der Farbstrahl unruhig wird, hier und da zerflattert, um bei weiterer Steigerung der Geschwindigkeit ganz zu verschwinden, ein Zeichen, daß er sich ganz mit dem Wasser vermischt hat. Beim Übergang in die neue Strömungsform sieht man gut, wie Quer-

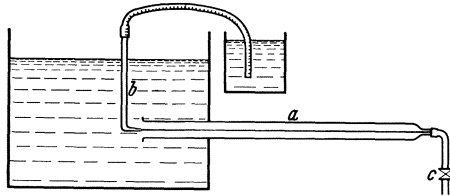


Abb. 54. Reynoldscher Versuch.

bewegungen auftreten, die ein wirbelartiges Aufrollen des Farbstrahles zur Folge haben. Durch ein scharfkantiges Einlaufstück, sowie evtl. Unruhe im Vorratsbehälter kann der Übergang beschleunigt werden. Wenn wir die so entstehende Strömungsform turbulent nennen, so bedeutet dies eine direkte Übertragung von der Beobachtung in die Sprache.

Es ist das große Verdienst von O. Reynolds, in einer grundlegenden Arbeit¹ dargelegt zu haben, daß der Übergang von der laminaren in die turbulente Strömung nur von der ihm zu Ehren benannten Zahl $\frac{u \cdot d}{\nu}$ abhängt.

Dieses Verdienst wird auch nicht dadurch geschmälert, daß gewisse Zeit vor ihm bereits Hagen² wesentliche Eigenschaften beider Strömungsformen richtig erkannte.

Einige weitere physikalische Erscheinungen, die beim Wechsel der Strömungsform beobachtet werden, seien kurz zusammengestellt.

1. Nach dem Übergang zur turbulenten Strömungsform wächst bei der Rohrströmung der Druckverlust erheblich.

2. Ein aus einer Kapillaren austretender Strahl hat bei laminarer Strömung das Aussehen eines glatten Glasstabes³. Beim Übergang zur

¹ Reynolds Phil. Trans. Roy. Soc. London 1883.

² Hagen, G.: Akad. der Wiss., S. 517. Berlin 1854.

³ Freie Strahlen können auch bei höheren Werten noch laminar sein, wenn eine vorherige Berührung mit einer Rohrwand vermieden wird. Man kann dies

Turbulenz beobachtet man zunächst ein Springen des Strahles und periodischen Rückfall in Laminarität. (Infolge des bei Turbulenz auftretenden größeren Druckverlustes.) Der endgültige turbulente Strahl ist dann wieder ruhig, zeigt aber eine gekräuselte Oberfläche.

3. Ein laminarer Strahl nach 2. vergrößert seine Sprungweite, wenn das Wasser erwärmt wird etwa durch ein vorgeschaltetes mit Gasflammen

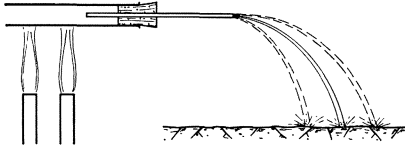


Abb. 55. Beeinflussung eines dünnen Wasserstrahles durch voraufgehende Erwärmung.

geheiztes Kupferrohr (Abb. 55). Nach dem Hagen-Poiseuillschen Gesetz, ist dies leicht zu erklären, da ν mit steigender Temperatur kleiner wird, infolgedessen die Reibung ebenfalls vermindert wird und der Strahl weiterspringt.

Macht man nun denselben Versuch im turbulenten Zustand, so zeigt sich keine merkbare Änderung der Sprungweite.

4. Der Wärmeübergang wird beim Übergang zur Turbulenz erheblich gesteigert.

5. In einer offenen Wasserwanne, in der die Strömung durch Aufstreuen mit Aluminiumpulver oder Bärlappsaamen sichtbar gemacht

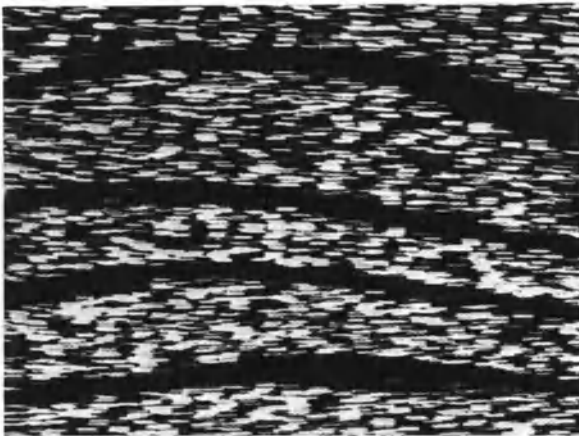


Abb. 56. Laminarströmung. Strömung in offener Wanne durch Aufstreuen mit Aluminiumpulver sichtbar gemacht. Die schwarzen Streifen sind durch die Trennung der voraufgehenden Umführungsschaufeln entstanden.

wird, zeigt sich der Übergang besonders eindrucksvoll.

Abb. 56 zeigt eine Aufnahme der Laminarströmung. Da nach dem Reynoldschen Gesetz wegen der Konstanz von $u \cdot d$ bei größer werdenden Abmessungen die Geschwindigkeit entsprechend kleiner wird, ergeben sich bei einer Wanne so kleine Geschwindigkeiten, daß man mit

dem Auge kaum mehr eine Bewegung feststellen kann. Die Zeitaufnahme (Abb. 56) läßt jedoch deutlich die kleinen geraden Striche erkennen, die

z. B. nach Schiller dadurch erreichen, daß man einen Strahl aus einem Behälter durch eine Düse austreten läßt. Man erkennt hieraus, daß der Einfluß der Wandreibung unbedingt notwendig ist für das oben gekennzeichnete Verhalten.

identisch sind mit dem Weg der Teilchen während der Belichtungszeit. Die schwarzen Streifen sind durch stromaufwärts liegende Umkehrschaufeln entstanden. Die Tatsache, daß diese Trennung der Oberfläche erhalten bleibt, ist ein schöner Beweis der Laminarität der Strömung.

Beschleunigt man nun die Strömung (z. B. bei der Eckschen Wanne durch zwei Propeller bzw. bei der neuen Ausführung durch eine Kleinst-Zentrifugalpumpe), so bleibt zunächst die Strömungsform erhalten. Bei weiterer Steigerung der Geschwindigkeit bemerkt man ein plötzliches „Zittern“ der Oberfläche und nun beobachtet man deutlich, wie die einzelnen Teilchen neben der Hauptbewegung Querbewegungen ausführen; das Bild macht einen turbulenten Eindruck.

Der Übergang von laminarer zur turbulenten Strömung hängt bei sonst gleichen Bedingungen nur von der Reynoldsschen Zahl ab. Als Grenze kann man für die Rohrströmung $R_{krit.} \sim 2000$ angeben. Eine umfangreiche Untersuchung des Grenzgebietes hat nun folgendes ergeben. Unter $R_{krit.}$ scheint selbst bei starken Störungen nur der laminare Zustand stabil zu sein, während bei vorsichtigem Experimentieren (absolute Ruhe im Vorratsbehälter, Vermeidung aller die Wirbelbildung begünstigenden Einflüsse) die laminare Strömung selbst noch bei $R \sim 30000$ erhalten bleiben kann. Die geringsten Störungen bedingen aber einen sofortigen Umschlag, so daß für praktische Fälle die obige Festsetzung $R_{krit.} \sim 2000$ genügen dürfte.

18. Strömungswiderstand in Rohren.

Die Strömungserscheinungen in runden Rohren stehen sowohl für die Praxis wie für die wissenschaftliche Forschung im Mittelpunkt der modernen Strömungslehre. Das Rohr ist für grundlegende Messungen mannigfacher Art ein besonders geeignetes Hilfsmittel. Viele Erscheinungen, die bei anderen Strömungsproblemen äußerst verwickelt erscheinen, können beim Rohre in Reinkultur beobachtet und ausgewertet werden. Die hier gewonnenen Erkenntnisse lassen sich, wie unsere Ausführungen zeigen werden, auf viele andere Dinge übertragen. Dieser Materie sei deshalb ein etwas weiterer Raum gewidmet.

Für die laminare Strömung konnten Druckverlust und Geschwindigkeitsverteilung in Gl. (28) und (29) einwandfrei berechnet werden.

Bei der turbulenten Strömung ist das nicht möglich ohne Zuhilfenahme von Versuchswerten. Während bei der laminaren Strömung der Druckverlust genau proportional der Geschwindigkeit ist, beobachtet man bei der Turbulenz durchweg eine quadratische Abhängigkeit von der Geschwindigkeit. Die periodischen Hin- und Herbewegungen, die sich infolge der Turbulenz der Hauptströmung überlagern, erklären dieses Verhalten bereits durch eine einfache Überlegung. Wenn nämlich durch

Querbewegungen¹ Teilchen mit höherer Geschwindigkeit in ein Gebiet mit kleinerer Geschwindigkeit kommen, verlieren sie durch Stoß kinetische Energie. Da diese aber proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit ist, ist ein nähnliches Verhalten für den Druckverlust einleuchtend.

Beim Aufbau der Hauptformel für den Druckverlust werde der gleiche Weg wie auf S. 50 beschritten. Denken wir uns wieder eine Schubspannung τ an einem Flüssigkeitszylinder wirken, so erhalten wir

$$\tau \cdot \pi d \cdot l = \Delta p \frac{\pi}{4} d^2; \quad \Delta p = \frac{l}{d} 4 \cdot \tau,$$

τ ist aber hier nicht proportional dem Geschwindigkeitsgefälle, sondern nach obigem proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit

$$\tau \sim \frac{\gamma}{g} \cdot w^2$$

indem aus Dimensionsgründen $\frac{\gamma}{g}$ hinzugefügt wurde. Hiermit ergibt sich

$$\Delta p = \lambda \cdot \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g} \cdot \gamma = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot q. \quad (31)$$

Der Proportionalitätsfaktor λ , Reibungskoeffizient genannt, ist somit eine dimensionslose Zahl. Das Problem ist damit auf die experimentelle Bestimmung von λ zurückgeführt. Es steht zu erwarten und die Versuche bestätigen dies, daß λ nur von der Reynold'schen Zahl abhängt.

Gl. (31) wird allgemein als Grundformel für die Berechnung der Rohrreibung betrachtet. Deshalb ist es zweckmäßig, die Formel der Laminarreibung auf dieselbe Benennung zu bringen. Nach Gl. (28) ergibt sich

$$\Delta p = l \cdot w_m \cdot \frac{8\mu}{r_0^2} = \frac{16 \cdot \mu \cdot g}{w \cdot d \cdot \gamma} \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g} \cdot \gamma = \frac{16}{\nu} \cdot \frac{l}{w \cdot d} \cdot \frac{w^2}{d} \cdot \frac{1}{2g} \cdot \gamma.$$

Es ist hier also $\lambda = \frac{16}{R}$, d. h. wie oben erwähnt, nur abhängig von der Reynold'schen Zahl². Dieses Gesetz hat bis $R \sim 2000$ Gültigkeit.

Im turbulenten Gebiet ist zunächst das glatte Rohr so eingehend untersucht worden, daß die λ -Werte mit großer Sicherheit feststehen und dieses Problem nunmehr als gelöst betrachtet werden kann.

Nach Blasius³ kann bis $R = 80\,000$

$$\lambda = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{R}} \quad (32)$$

gesetzt werden.

¹ Die Größenordnung der Geschwindigkeit der Querbewegung ist max. ca. 2—5% der Hauptgeschwindigkeit.

² Für quadratischen Querschnitt hat Boussinesq $\lambda = \frac{14,225}{R}$ ausgerechnet.

³ Mitt. Forschungsarbeit 131.

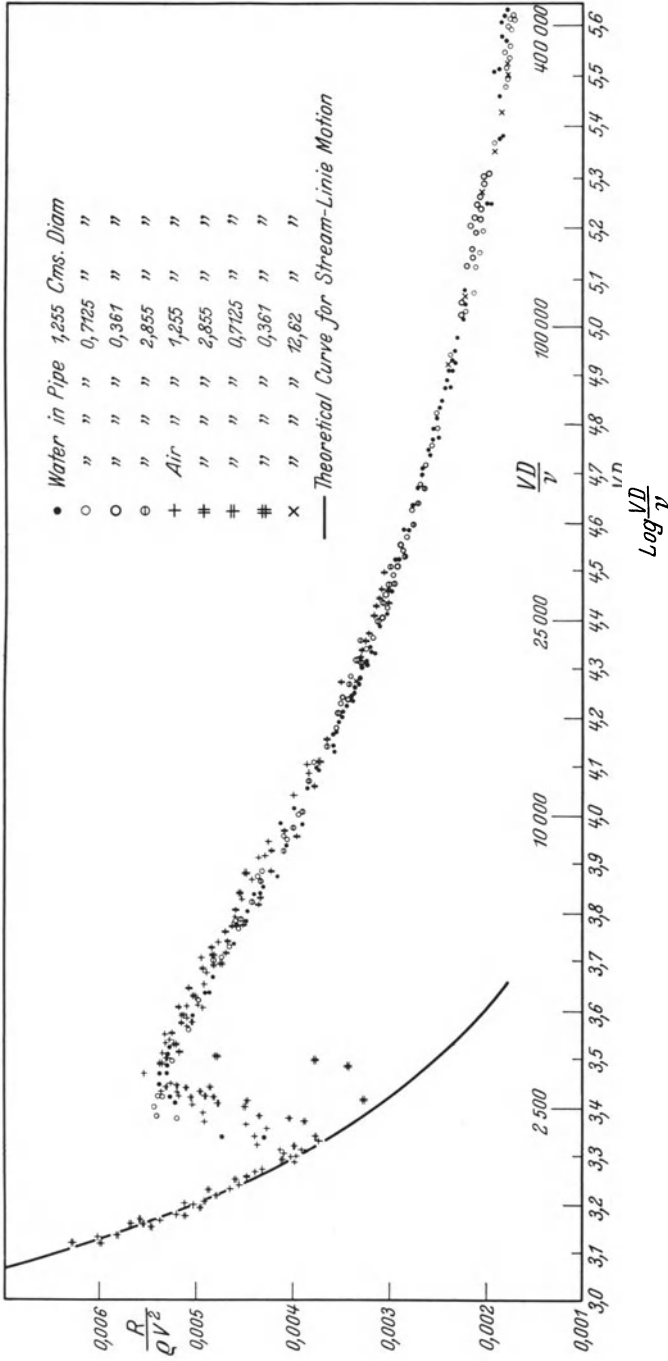


Abb. 57. Versuche von Stanton und Pannel zur Bestätigung des Ähnlichkeitsgesetzes.

Umfassender ist das von Nikuradse¹ auf Grund neuer Versuche gefundene Gesetz

$$\lambda = 0,0054 + 0,396 \frac{1}{R^{0,3}}. \quad (33)$$

Diese Beziehung gilt bis $R = 1\,500\,000$, d. h. Reynoldsche Zahlen, die fast alle praktischen Anwendungsbereiche überdecken. Bis $R = 80\,000$ stimmen die Werte mit den Blasius'schen Werten überein.

Von Stanton und Pannel² wurden zur Bestätigung des Ähnlichkeitsgesetzes Versuche mit Wasser und Luft bei verschiedenen Durchmesser auszuführen. Abb. 57 zeigt die entsprechenden λ -Werte über R aufgetragen. Die Werte fallen schön in eine Kurve. Diese Versuche dürften mit den besten Nachweis zur Bestätigung des Reynoldschen Ähnlichkeitsgesetzes bilden. Der linke Ast bezieht sich auf die laminare Bewegung. Sprunghaft steigen dann die Werte in die zweite Kurve, die die turbulente Bewegung darstellt. Denkt man sich die erste Kurve verlängert, so sieht man deutlich die Vergrößerung der λ -Werte infolge Turbulenz.

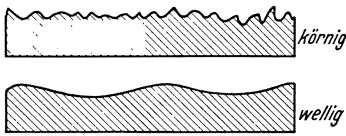


Abb. 58. Einteilung der verschiedenen Oberflächenrauigkeiten.

Würde man, wie es früher geschah, λ in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit auftragen, so erhielte man keine Kurve, sondern einen „Sternhimmel“.

Das Reynoldsche Gesetz dürfte sich bei dieser Gelegenheit bereits dem Anfänger mit elementarer Wucht vorstellen.

Größere Schwierigkeiten bereitet das rauhe Rohr. Beim glatten Rohr ist als einzige charakteristische Länge der Durchmesser vorhanden; bei rauhen Rohren kommt als Länge die mittlere Wanderhebung k hinzu. Da für Vergleiche geometrisch ähnlicher Gebilde nur Verhältniszahlen ausschlaggebend sind, werden wir das Verhältnis $\frac{k}{d}$ als maßgebend für die Rauigkeit angeben müssen. Es ist zu erwarten, daß hier λ außer von R noch von $\frac{k}{d}$ abhängig ist.

Hopf³ hat gefunden, daß man die Rauigkeit ihrer Wirkung nach zweckmäßig einteilt in solche, wo die Wanderhebungen eine körnige Oberfläche ergeben (genannt Rauigkeit I Art; Abb. 58) und in Rauigkeiten welliger Art (Abb. 58) (genannt Rauigkeit II Art).

Die Versuche zeigen, daß bei welliger Rauigkeit die Kurve $\lambda = f(R)$ parallel läuft mit der Kurve des glatten Rohres. Da nach Gl. (32) u. (33)

¹ Nikuradse, I.: Vortr. a. d. Geb. der Aerodynamik und verwandten Gebieten. Aachen 1929.

² Similarity of Motion in Relation to the Surface Friction of Fluids. Phil. Trans. (A) 214, 199. 1914.

³ Abhandl. des Aerodynamischen Instituts Aachen, H. 2.

die λ -Werte für das glatte Rohr mit wachsenden Reynoldsen Zahlen langsam kleiner werden, gilt dasselbe auch für die λ -Werte welliger Rauigkeiten. Geteerte Rohre gehören insbesondere hierher¹. Bei körnigen Rauigkeiten dagegen ist λ nahezu unabhängig von R d.h. konstant, wenigstens bei höheren Werten.

Neuerdings sind von Nikuradse raue Rohre systematisch untersucht worden, indem die Rauigkeit durch aufgeklebten Sand künstlich erzeugt wurde. Abb. 59 zeigt diese Versuche, die bis zu sehr hohen

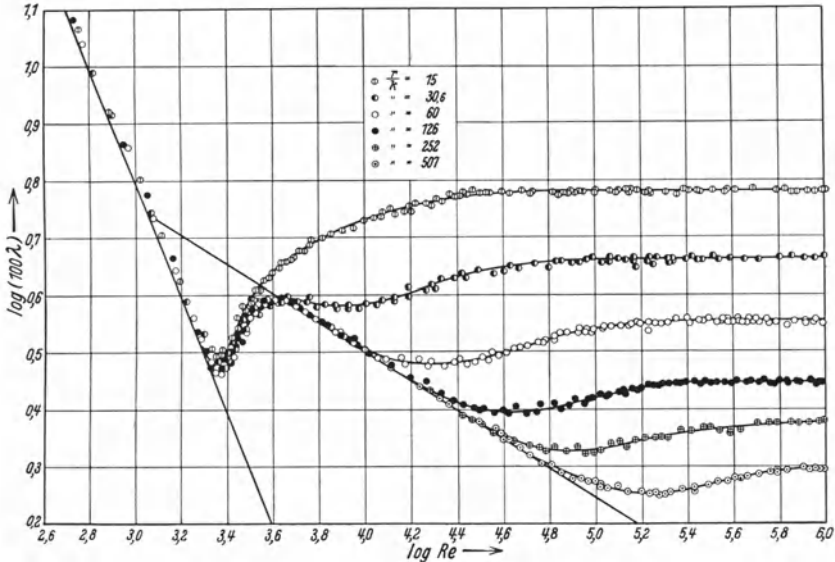


Abb. 59. Widerstandskoeffizienten in Abhängigkeit von der Reynoldsen Zahl für verschiedene Rauigkeiten nach Nikuradse.

Reynoldsen Zahlen ausgedehnt wurden. Für das Gebiet, wo λ unabhängig von R d.h. konstant wird, d.h. $R > 100\,000$ hat Nikuradse die Ergebnisse in folgendes Gesetz einkleiden können

$$\lambda = \frac{1}{\left(2 \lg \frac{r}{k} + 1,74\right)^2} . \tag{34}$$

Wenn es somit möglich ist, die mittlere Wanderhebung k eines Rohres in etwa festzustellen, gelingt es nach dieser Unterlage mit ziemlicher Sicherheit, den Rohr widerstand vor auszuberechnen.

Die logarithmische Auftragung ist hier sehr zweckmäßig, weil dann die beiden Vergleichsmaßstäbe $\lambda_{lam} = \frac{16}{R}$ und $\lambda_{Blasius} = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{R}}$ als Gera-

¹ Ist λ_0 der das glatte und λ der das wellige Rohr betreffende Wert, so gilt sehr genau $\lambda = \xi \cdot \lambda_0$. Die Konstante ξ ist z.B. bei asphaltierten Rohren $\sim 1,4$.

den mit der Steigung 1:1 und 1:4 erscheinen. In Abb. 59 sind beide Geraden eingetragen. Man erkennt, daß im laminaren Gebiet die Rauigkeit überhaupt keinen Einfluß hat. Die Wanderhebungen werden einfach „geschluckt“. Im turbulenten Gebiet bleibt die λ -Kurve um so länger auf der Blasius'schen Geraden, je kleiner die Rauigkeit ist. Man beobachtet deutlich, daß bei jeder Rauigkeit von einer gewissen Reynold'schen Zahl ab keine Änderung des λ -Wertes mehr eintritt.

19. Geschwindigkeitsverteilung bei der Rohrströmung.

Es ist bisher nicht gelungen, Einzelheiten der turbulenten Strömung theoretisch zu erfassen. Unter Zuhilfenahme von Versuchswerten und plausiblen Voraussetzungen konnten allerdings äußerst wichtige praktische Erkenntnisse abgeleitet werden.

An einem einfachen Beispiel soll dies gezeigt werden. Unter Annahme des Gesetzes von Blasius ergibt sich nach der Gl. (31) und (32) die Schubspannung an der Wand aus

$$\tau \cdot \pi \cdot d \cdot l = \Delta p \cdot \frac{\pi}{4} d^2; \quad \tau = \Delta p \cdot \frac{d}{4l} = \frac{d}{4l} \cdot \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{w_m^2}{2g} \cdot \gamma.$$

setzen wir λ Blasius = $\frac{0,3164}{\sqrt[4]{R}}$ ein, so erhalten wir

$$\tau = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{\frac{w_m \cdot d}{r}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{w_m^2}{g} \rho \sim w_m^{\frac{7}{4}} \cdot d^{-\frac{1}{4}} \sim w_{max}^{\frac{7}{4}} \cdot d^{-\frac{1}{4}}$$

(w_m bedeutet die mittlere Geschwindigkeit und wurde prop. w_{max} angenommen.)

indem zunächst nur die Abhängigkeit von w und d betrachtet werde. Die zu erwartende Geschwindigkeitsverteilung wird man zunächst mit den einfachsten Funktionen anzunähern versuchen. Wir versuchen eine Potenzfunktion

$$w = w_{max} \left(\frac{y}{r} \right)^m \quad d \cdot h \cdot w_{max} = w \left(\frac{r}{y} \right)^m$$

(y bedeutet hier den Wandabstand)

hiermit wird

$$\tau \sim w^{\frac{7}{4}} \left(\frac{r}{y} \right)^{m \cdot \frac{7}{4}} \cdot r^{-\frac{1}{4}} \sim w^{\frac{7}{4}} \cdot y^{m \cdot \frac{7}{4}} \cdot r^{m \cdot \frac{7}{4} - \frac{1}{4}}.$$

Wenn man nun nach Prandtl und v. Kármán annimmt, daß die Geschwindigkeitsverteilung in der Wandnähe nur von dem Wandabstand y und nicht vom Radius r abhängen kann, so bringt man dadurch die

* Für d wurde noch r eingesetzt, da es ja nur auf die Proportionalität ankommt.

plausible Tatsache zum Ausdruck, daß die Teilchen in der Wandnähe nichts davon wissen, wie groß der Rohrdurchmesser ist. Bei dieser Annahme muß aber τ unabhängig von r sein; nach der letzten Gleichung ist dies aber nur möglich, wenn der Exponent von r verschwindet.

$$m \cdot \frac{7}{4} - \frac{1}{4} = 0; \quad d \cdot h \cdot m = \frac{1}{7}.$$

Damit wird die Geschwindigkeitsverteilung

$$w = w_{max} \left(\frac{y}{r} \right)^{\frac{1}{7}}. \quad (35)$$

Diese unter dem Namen $\frac{1}{7}$ -Gesetz¹ bekannte Beziehung setzt die Gültigkeit des Blasius'schen Gesetzes voraus, das nach S. 58 nur bis $R = 80000$ Gültigkeit hat. Die außerhalb des Gültigkeitsbereiches von Blasius bedingten Abweichungen lassen sich nun sehr gut, wie Versuche bewiesen haben, dadurch berücksichtigen, daß man statt $\frac{1}{7}$ einen anderen Exponenten $\frac{1}{8}; \frac{1}{9} \dots \frac{1}{10}$ setzt. Selbst bei rauhen Rohren kann man durch ein Potenzgesetz die Geschwindigkeitsverteilung noch gut wiedergeben, wenn in

$$w = w_{max} \left(\frac{y}{r} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (35 a)$$

der Wert n kleiner gewählt wird, wie der jeweilige Wert des theoretisch glatten Rohres.

Anmerkung: Die Brauchbarkeit des Potenzgesetzes kann leicht durch logarithmische Auftragung der Versuchspunkte nachgeprüft werden. Aus Gl. (35 a) entsteht

$$\lg w = \lg w_{max} + \frac{1}{n} \lg \left(\frac{y}{r} \right).$$

Es ergibt sich somit eine Gerade, deren Steigung mit $\frac{1}{n}$ identisch ist. Abb. 60 zeigt nach Versuchen des Verfassers die logarithmische Auftragung eines Geschwin-

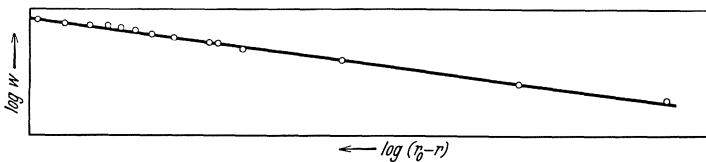


Abb. 60. Logarithmische Auftragung des Geschwindigkeitsprofils.

digkeitsprofils. Die Versuchspunkte liegen sehr gut auf einer Geraden. Ein über r aufgetragenes Geschwindigkeitsprofil zeigt Abb. 62 S. 69.

Das Potenzgesetz gestattet leicht, das Verhältnis der mittleren Geschwindigkeit zur Höchstgeschwindigkeit

$$\frac{w_m}{w_{max}} = \beta$$

auszurechnen, ein Wert, der aus meßtechnischen Gründen interessiert.

¹ Das $\frac{1}{7}$ -Gesetz wurde gleichzeitig von v. Kármán und Prandtl gefunden.

Es ist¹

$$w_m = \frac{1}{F} \int w \cdot dF = w_{max} \frac{2}{\left(\frac{1}{n} + 2\right) \left(\frac{1}{n} + 1\right)} = w_{max} \cdot \beta .$$

Für die glatte Rohrleitung gibt die folgende Tabelle die Werte n , β und die zugehörigen Reynold'schen Zahlen wieder.

Tabelle II.

n	6	7	8	9	10	11
β	0,792	0,817	0,837	0,855	0,865	0,877
R	nur bei rauhen Rohren	$13 \cdot 10^3$	$350 \cdot 10^3$	$1600 \cdot 10^3$		

Die ungleiche Geschwindigkeitsverteilung bedingt einige weitere Bemerkungen über die Bedeutung des Druckes. Der durch Anbohrung der Wand gemessene Druck ist nach früheren Darlegungen im ganzen Querschnitt konstant und meßtechnisch leicht bestimmbar; in den meisten Fällen ist auch die mittlere Geschwindigkeit

$$w_m = \frac{1}{F} \int w dF$$

z. B. aus der Durchflußmenge bekannt. Will man aus beiden Werten die gesamte Energie ausrechnen, so ist zu berücksichtigen, daß in der Bernoullischen Gleichung die Geschwindigkeiten mit den Quadraten eingesetzt sind, und wegen der ungleichen Geschwindigkeitsverteilung die Summe aller Einzelenergien zu bilden ist. So entsteht¹

$$H_{ges} = \frac{1}{F} \int \left[\frac{p}{\gamma} + \frac{w^2}{2g} \right] dF = \frac{p}{\gamma} + \int \frac{w^2}{2g} dF = \frac{p}{\gamma} + \frac{w_m^2}{2g} \cdot \delta .$$

Will man mit p und w_m die Energie ausdrücken, so ist somit der Staudruck um einen Faktor δ zu vergrößern, der etwas größer wie 1 ist. Es ergibt sich somit eine scheinbare Druckvergrößerung. Die folgende Tabelle enthält (δ) in Abhängigkeit von n

Tabelle III.

n	6	7	8	9	10	11
δ	1,0269	1,0204	1,016	1,0129	1,01062	1,0089

20. Eingehendere Betrachtung der Rohrturbulenz.

Wie zuerst Prandtl² und v. Kármán gezeigt haben, ist die turbulente Bewegungsform bei plausiblen Annahmen einer gewissen rechnerischen Behandlung tatsächlich zugänglich.

¹ Eck: Die ausgleichende Wirkung von Düsen. Ingenieurarchiv 1934.

² Prandtl: Neuere Ergebnisse der Turbulenzforschung. Z.d.V.D.I 1933 S. 105.

Wir nehmen nach Abb. 61 an, daß das Geschwindigkeitsprofil $w = f(y)$ gegeben sei und wollen versuchen, uns eine neue Vorstellung der Strömungsbewegungen zu machen. Die in zwei Schichten eingezeichneten Flüssigkeitsballen sollen gerade so groß sein, daß ihre Form bei der Querbewegung ungefähr erhalten bleibt. Es leuchtet ein, daß für eine kleine Strecke z. B. l eine solche Bewegung tatsächlich möglich ist; danach dürfte der Ballen allerdings weiter zerfallen und seine individuelle Form verlieren. Man kann fragen, wie groß im Mittel diese „freie Weglänge“ l ist.

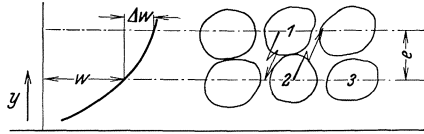


Abb. 61. Schematische Darstellung der turbulenten Bewegungsstruktur.

An der Stelle 2 ist die mittlere Geschwindigkeit w ; an der Stelle 1:

$$w + l \cdot \frac{dw}{dy}.$$

Der Ballen von der Masse Δm wird also beim Eindringen in die Bahn 2 seine Geschwindigkeit um $l \cdot \frac{dw}{dy}$ vermindern. Dadurch tritt ein Stoßverlust auf, der nach Gl. (23) pro Volumeinheit¹ einen Druckverlust

$$\Delta p = \frac{\rho}{2} (w_1 - w_2)^2 = \frac{\rho}{2} \left(l \frac{dw}{dy} \right)^2$$

bedingt. Um den gesamten Energieverlust zu erhalten, müssen wir wissen, wie viele Teilchen von 1 nach 2 und umgekehrt sich bewegen. Diese Frage ist identisch mit der Frage nach der mittleren Quergeschwindigkeit w_y . Durch folgende Überlegung ist wenigstens die Größenordnung von w_y zu bestimmen. Nehmen wir an, Ballen 1 sei in die Bahn 2 eingedrungen. Dieses Teilchen 1 nähert sich dann einem anderen Teilchen z. B. 3 derselben Reihe mit der Relativgeschwindigkeit $\left(l \cdot \frac{dw}{dy} \right)$. Dies ist aber nur möglich, wenn das dazwischen liegende Teilchen 2 verdrängt wird und mit annähernd der gleichen Geschwindigkeit in Querrichtung in die Lücke der Reihe 1 einrückt. Man erkennt, daß w_y die Größenordnung von $\left(l \cdot \frac{dw}{dy} \right)$ haben muß. Wir setzen deshalb $w_y = l \cdot \frac{dw}{dy}$. Der gesamte Energieverlust der Strecke L

¹ Der Druck hat die Dimension $\frac{kg}{m^2}$; dies kann auch aufgefaßt werden als Energie pro Volumeinheit da $\frac{kg \cdot m}{m^3} = \frac{kg}{m^2}$ ist. Die Druckhöhe hingegen, die die Dimension m hat, kann umschrieben werden als Energie pro kg , da $\frac{kg \cdot m}{kg} = m$ ist.

ist somit

$$(w_y \cdot L \cdot 1) \Delta p = L \left(l \frac{dw}{dy} \right)^3 \cdot \frac{\rho}{2} * .$$

Der durch den Stoßverlust (auch Impulsaustausch genannt) bedingte Energieverlust werde durch folgende Vorstellung weiter veranschaulicht. Wir denken uns, daß wir mit dem Ballen der Linie 2 und ihrer mittleren Geschwindigkeit w in der Hauptstromrichtung mitfahren. Dann beobachten wir die Ballen der Linie 1 mit der Relativgeschwindigkeit $l \frac{dw}{dy}$ vorbeifahren. In der Trennfläche 1 und 2 können wir uns nun eine scheinbare Schubspannung τ denken, die auf der Länge L wirkend, denselben Energieverlust bedingt wie obiger Vorgang. Dieser ist dann

$$\tau \cdot L \cdot 1 \cdot l \cdot \frac{dw}{dy} .$$

Durch Gleichsetzen entsteht

$$\begin{aligned} L \cdot \left(l \frac{dw}{dy} \right)^3 \cdot \frac{\rho}{2} &= \tau \cdot L \cdot l \frac{dw}{dy} . \\ \tau &= \frac{\rho}{2} \left(l \frac{dw}{dy} \right)^2 . \end{aligned} \quad (36)$$

So finden wir tatsächlich die Schubspannung τ . Gleichzeitig können wir aus dieser Gleichung l berechnen, wenn z. B. die Schubspannung τ (etwa aus Druckverlustmessungen) und das Geschwindigkeitsprofil bekannt ist.

Da $\frac{dw}{dy}$ sich proportional mit der Maximal- bzw. Mittelgeschwindigkeit ändert, können wir $\frac{dw}{dy} \sim w_m$ setzen und erhalten dann $\tau \sim \rho w_m^2$, d. h. die auf S. 58 bereits vorausgesetzte Tatsache, daß die Schubspannung proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit ist, findet eine neue Bestätigung.

Die Reibung ist bei dieser Berechnung nicht in Erscheinung getreten. Die Turbulenz als solche bedingt somit schon eine scheinbare Reibung bzw. Schubspannung. Dies gilt indes nur bedingt, da zur Aufrechterhaltung der Turbulenz die Wandreibung notwendig ist. Die Beobachtungen zeigen nun, daß die gleitende Reibung im Hagen-Poiseuillischen Sinne auf ein ganz kleines Gebiet in der Wandnähe beschränkt bleibt; außerhalb derselben kann man die Flüssigkeit als praktisch reibungsfrei ansehen.

Eine kleine Anwendung soll zeigen, daß die Einführung des Mischungsweges l sehr fruchtbar ist.

Wie wird sich z. B. der Mischungsweg l bei einer Rohrströmung in

* Die Ausdehnung senkrecht zur Zeichenebene werde gleich 1 gewählt.

einem Querschnitt ändern? An der Wand muß er gleich Null sein, während er in der Mitte am größten sein dürfte. Die einfachste Annahme, die man machen kann, ist die, daß l proportional dem Wandabstand y sich ändert.

$$l = \varkappa \cdot y .$$

Wir setzen dies in die Gl. (36) ein und erhalten

$$\tau = \frac{\varrho}{2} \left(\varkappa \cdot y \cdot \frac{dw}{dy} \right)^2 ; \quad \frac{dy}{y} \sqrt{2 \frac{\tau}{\varrho}} \frac{1}{\varkappa} = dw .$$

Wenn wir nun noch annehmen, daß in der Wandnähe τ ungefähr konstant bleibt, so ist diese Gleichung leicht zu integrieren

$$w = \frac{1}{\varkappa} \sqrt{\frac{\tau}{\varrho}} (\ln y + C) * . \quad (37)$$

Damit erhalten wir das Geschwindigkeitsprofil. Die Übereinstimmung mit dem Versuch ist eine sehr gute. Für \varkappa findet man den Wert 0,4. Diese Gleichung hat eine weit allgemeinere Bedeutung, wie das früher abgeleitete Potenzgesetz. Für praktische Rechnungen ist meist das Potenzgesetz bequemer.

21. Einfluß der Wandrauigkeit.

Bei einer rauhen Wand wird die oben erwähnte laminare Strömung in der Wandnähe sich nicht ausbilden können. Dies bedeutet nun für die Rechnung sogar eine Vereinfachung. Bei der glatten Rohrleitung hängt das Geschwindigkeitsprofil nur von dem Wandabstand y ab. Bei dem rauhen Rohr wird die mittlere Wanderhebung h noch eine Rolle spielen. Da wir im Sinne des Ähnlichkeitsgesetzes nur bei geometrisch ähnlichen Gebilden Vergleiche anstellen können, werden im Falle einer rauhen Wand bei gleichem $\frac{y}{\varkappa}$ ähnliche Verhältnisse zu erwarten sein. Das heißt also in der mathematischen Sprache, daß w nur eine Funktion von

$$\frac{y}{\varkappa} \text{ ist: } d \cdot h \cdot w = f \left(\frac{y}{k} \right) .$$

Führt man nun mit diesem Parameter obige Rechnung aus, so erhält man

$$w = 2,5 \sqrt{\frac{\tau}{\varrho}} \ln \left(1 + \frac{30 y}{\varkappa} \right) . \quad (38)$$

Der Vergleich mit den Geschwindigkeitsprofilen bei künstlich veränderter Rauigkeit (Nikuradse) zeigte nun, daß sehr gute Übereinstimmung vorhanden ist.

* Daß für $y = 0$; $w = \infty$ wird, kommt daher, weil in direkter Wandnähe die Gleichung ihre Gültigkeit verliert, da dort laminare Strömung herrscht. Dieser Schönheitsfehler stört weiter nicht, wenn man einen schmalen Bereich an der Wand ausschließt.

Die Vorausberechnung des Widerstandskoeffizienten und des Geschwindigkeitsprofils ist alles, was der Praktiker von der Rohrströmung wissen will. Nach den hier kurz angedeuteten Ergebnissen der Prandtl'schen und v. Kármán'schen Theorie kann man sagen, daß das Problem der Rohrströmung eine fast hinreichende Klärung auf strenger wissenschaftlicher Grundlage erfahren hat.

22. Anlaufstrecke.

Die im vorherigen Kapitel behandelten Widerstandskoeffizienten und Geschwindigkeitsprofile gelten für die „ausgebildete Rohrströmung“, die erklärlicherweise erst ein Stück hinter dem Einlauf zu erwarten ist.

Man versteht hierunter das Geschwindigkeitsprofil, das sich endgültig einstellt und dann bei einer geraden Rohrleitung bleibt. Handelt es sich, wie bei vielen praktischen Problemen (z. B. Kühlerrohre) um kurze Stücke, so ist der endgültige Beharrungszustand noch nicht erreicht. Bei gut abgerundetem Einlauf wird durchweg eine konstante Geschwindigkeitsverteilung im Eintrittsquerschnitt der Rohrleitung vorhanden sein. Da an der Wand das Geschwindigkeitsgefälle dann größer ist wie im endgültigen Zustand, sind auch die Schubspannungen größer und damit auch die Widerstandskoeffizienten. Abgesehen von der hierdurch bedingten Vergrößerung des Druckabfalles tritt ein weiterer Druckabfall dadurch ein, daß bei konstanter Verteilung der Geschwindigkeit die gesamte kinetische Energie kleiner ist, wie im ausgebildeten Zustand. Dies bedingt eine Drucksenkung, die nach Bernoulli leicht berechnet werden kann.

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{F} \int \frac{w^2}{2g} \cdot \gamma \cdot dF - \frac{w_m^2}{2g} \cdot \gamma.$$

Bei laminarer Strömung ergibt sich mit

$$w = 2 w_m \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right]$$

$$p_1 - p_2 = \frac{(2 w_m)^2}{F \cdot 2g} \gamma \int_0^{r_0} \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right]^2 2r \pi dr - \frac{w_m^2}{2g} \cdot \gamma = \frac{\rho}{2} w_m^2.$$

Hinzu kommt noch die Drucksenkung $\frac{\rho}{2} w_m^2$ zur Erzeugung von w_m im düsenförmigen Eintritt, so daß zu dem Reibungsverlust noch ein Scheinverlust von $2 \frac{\rho}{2} w_m^2$ hinzutritt. Die Messungen ergeben einen Gesamtwert von

$$\sim 2,2 \frac{\rho}{2} w_m^2.$$

Ist die Länge der Anlaufstrecke x , so gilt hierfür nach Boussinesq

$$\frac{x}{d} = 0,13 \cdot R.$$

Bei

$$R = 300 \text{ ist z. B. } \frac{x}{d} = 0,13 \cdot 300 = 39,$$

d. h. erst nach ~ 40 Durchmessern ist die parabelförmige Geschwindigkeitsverteilung vorhanden.

Für die turbulente Anlaufstrecke ergibt sich ebenfalls ein Druckabfall wie oben, der jedoch wegen der volleren Geschwindigkeitsverteilung wesentlich kleiner

ist. Mit

$$w = w_{max} \left(\frac{y}{r} \right)^{\frac{1}{7}}$$

und

$$w_m = \frac{49}{60} w_{max}$$

findet man

$$\sim 0,09 \frac{w_m^2}{2g}$$

d. h. nur etwa der zehnte Teil wie bei der laminaren Strömung. Hinzu kommt bei scharfkantigem Einlauf ein durch Kontraktion bedingter Verlust. Rechnet man wieder den Druckhöhen-

verlust $\frac{w_m^2}{2g}$ durch die Entstehung von w_m im Einlauf hinzu, so erhält man $\sim 1,4 \frac{w_m^2}{2g}$. Eine weitere Vergrößerung kann eintreten, wenn die Flüssigkeit bereits eine drehende Bewegung hat, die bei Verengung des Querschnittes die Umfangsgeschwindigkeiten nach dem Drallsatz merklich erhöht. Verfasser konnte in ungünstigen Fällen im turbulenten Anlauf einen ca. 2—2,5-fachen Widerstand, wie im ausgebildeten Zustand feststellen.

Die turbulente Anlaufstrecke ist durchweg kürzer, und hängt kaum von der Reynoldsen Zahl ab. Bereits nach ca. 10 Durchmessern ist eine der endgültigen Kurve sehr verwandte Geschwindigkeitsverteilung vorhanden. Man kann damit rechnen, daß das endgültige Profil nach 30—40 Durchmessern mit Sicherheit vorhanden ist. Abb. 62 zeigt die Geschwindigkeitsprofile für Anlaufängen gleich dem 40-, 65- und 100-fachen des Durchmessers nach Messungen von Nikuradse. Eine Änderung des Profiles ist hier nicht mehr vorhanden. Bemerkte sei noch, daß scharfkantiger Einlauf die Anlaufstrecke bedeutend verkürzt.

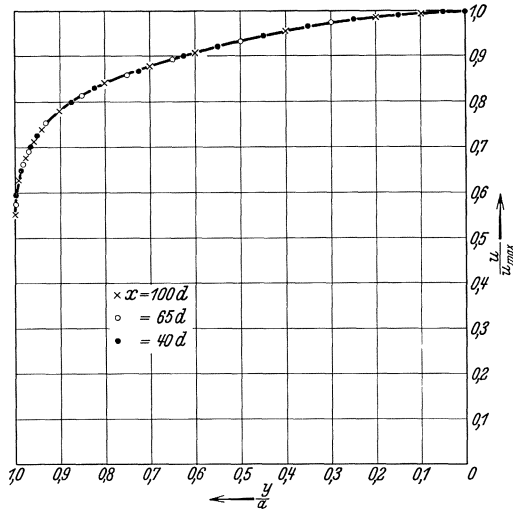


Abb. 62. Geschwindigkeitsprofile bei verschiedenen Anlaufängen nach Messungen von Nikuradse.

23. Strömung in geraden Röhren nicht kreisförmigen Querschnittes.

Bei unrundem Querschnitte etwa nach Abb. 63 geht man genau so vor wie beim Kreis. Man betrachtet das Gleichgewicht eines Zylinders von der Länge l und dem gegebenen Querschnitt. Ist die Schubspannung τ an der Wand — was zunächst angenommen wird — konstant und der Druckabfall Δp , so ergibt die Gleichgewichtsbedingung

$$\tau \cdot U \cdot l = \Delta p \cdot F; \quad \Delta p = \tau \frac{l}{F/U}$$

(U bedeutet hier den Umfang des betrachteten Querschnittes).

Für den Kreis ergibt die gleiche Rechnung (s. Gl. (31),

$$\Delta p = \tau \frac{l}{\frac{\pi}{4} d^2 / \pi d} = \tau \cdot \frac{l}{\frac{d}{4}}, \quad (39)$$

d. h. führen wir für $\frac{F}{U}$ eine Länge a , den sog. hydraulischen Radius ein,

so besteht Übereinstimmung mit der Kreisformel, wenn d durch

$$d = 4a = 4 \frac{F}{U}$$

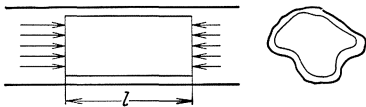


Abb. 63. Kräftegleichgewicht bei Röhren von unrundem Querschnitt.

Versuche von Schiller, Fromm und Nikuradse haben nun gezeigt, daß bei unrunder Querschnitten tatsächlich die aus der Formel für das Kreisrohr

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g} \cdot \gamma$$

entnommenen Werte von λ für unrunde Querschnitte verwendet werden können, wenn d durch $4 \cdot \frac{F}{U}$ ersetzt wird.

Bei unrunder Querschnitten wird man somit die Formel

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{4 \frac{F}{U}} \cdot \frac{w^2}{2g} \cdot \gamma \quad (39a)$$

verwenden, die Reynoldssche Zahl entsprechend

$$\frac{w \cdot d}{\nu} = \frac{w \cdot 4 \frac{F}{U}}{\nu}$$

wählen und die λ -Werte des Kreisrohres einsetzen.

24 Strömung in erweiterten und verengten Kanälen.

Der turbulente Charakter der Strömung, der beim Rohrwiderstand eine merkliche Erhöhung des Druckverlustes gegenüber der laminaren

Strömung bedingte, d.h. als unangenehme Verlustquelle zu buchen war, erweist sich im folgenden Falle als sehr nutzbringend.

Als Vorbereitung werde die Vermischung eines Strahles mit der Umgebung betrachtet. Man beobachtet, daß z.B. ein aus einer Düse austretender Luftstrahl in einiger Entfernung von der Mündung merklich abgebremst ist. Infolge der turbulenten Seitenbewegung wird den ruhenden außerhalb des Strahles liegenden Teilchen ein Impuls erteilt, d.h. an der Strahlgrenze werden andere Teilchen mitgerissen. Der Strahl verbreitert sich und bewirkt gewissermaßen eine Verzahnung mit

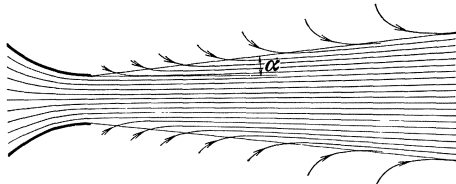


Abb. 64. Vermischung eines freien Strahles mit der Umgebung.

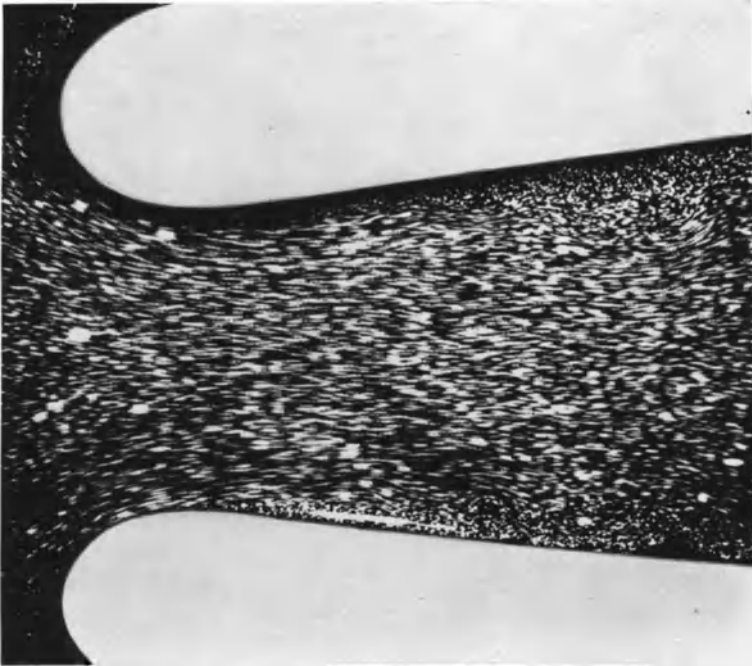


Abb. 65.
Verzögerte Strömung. Strömung liegt gerade noch an. Erweiterungswinkel 13° .

der Umgebung dank seiner Turbulenz. Genaue Beobachtungen zeigen, daß der Strahl sich kegelförmig vergrößert. Der Winkel α ist durch $\operatorname{tg} \alpha \sim 0,12$ festgelegt. Bemerkt sei, daß diese Strahlausbreitung der

Rechnung zugänglich gemacht werden konnte, und rechnerisch $\operatorname{tg}\alpha=0,12$ ebenfalls bestätigt gefunden wurde¹ (Abb. 64).

Dieses Beispiel zeigt wie kaum ein zweites, daß ein turbulenter Strahl wohl in der Lage ist, seitlich einen Einfluß auszuüben und daß diese Eigenschaft nur dem turbulenten Charakter der Strömung zu verdanken ist.

Wenn durch seitliche Wände die Ausbreitungsmöglichkeit des Strahles eingeengt ist, so zeigt sich folgendes. Ist bei geradliniger

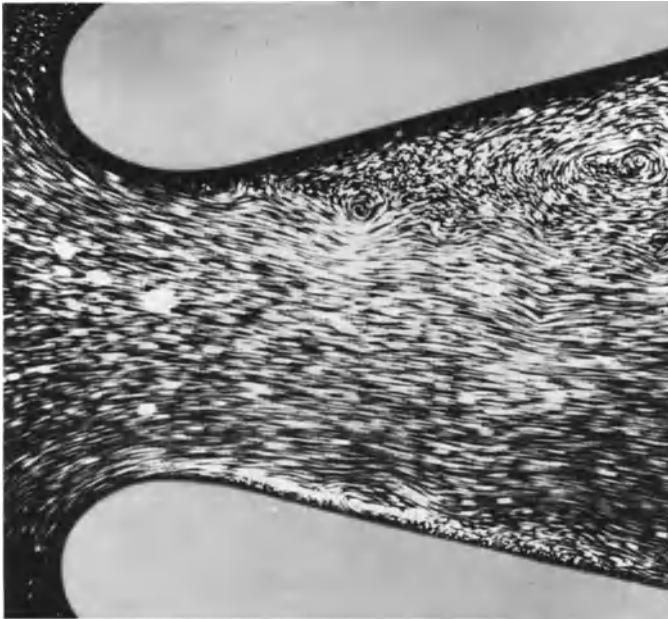


Abb. 66. Abgerissene Strömung. Erweiterungswinkel 28° .

Begrenzung der Erweiterungswinkel α unter dem Werte $\operatorname{tg}\alpha \sim 0,12$, so werden die Querschnitte voll ausgefüllt (Abb. 65), während bei größeren Winkeln die Strömung abreißt, wie aus Abb. 66 gut zu erkennen ist.

Wie kommt nun dieses eigentümliche, für viele praktische Anwendungen sehr wichtige Verhalten zustande? Zunächst soll das Verhalten der reibungsfreien Flüssigkeit bei einer konvergenten und divergenten Strömung untersucht werden. An irgendeiner Stelle 1 (Abb. 67) sei eine beliebige Geschwindigkeitsverteilung vorhanden. Wir betrachten

¹ Tollmien: Berechnung turbulenter Ausbreitungsvorgänge. Angew. Math. u. Mech. 6, 468, 1926.

zunächst eine beschleunigte Strömung, d.h. eine Bewegung von links nach rechts. Wie ändert sich nun das Geschwindigkeitsprofil, wenn wir von der Stelle 1 in Strömungsrichtung nach 2 gehen? Nach der Bernoullischen Gleichung wird die Druckhöhe um Δh sinken und ein Teilchen, welches im Querschnitt 1 die Geschwindigkeit w_1 hat, einen der Drucksenkung entsprechenden Zuwachs an kinetischer Energie erhalten.

$$\Delta h = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} d \cdot h \cdot w_2^2 = w_1^2 + (\sqrt{2g \Delta h})^2.$$

Denkt man sich w_1 und $\sqrt{2g \Delta h}$ als Strecken, so ist w_2 nach dem Pythagoräischen Satz leicht zu zeichnen. In Abb. 67 ist diese Konstruktion ausgeführt worden. Man erkennt sofort, daß bei Beschleunigung das Geschwindigkeitsprofil flacher wird. Bei Umkehr der Strömungsrichtung (von 2 nach 1) erhalten wir ein Spitzerwerden des Geschwindigkeitsprofils und merken uns dies gleich für die nachfolgenden Betrachtungen. (Daß das Geschwindigkeitsprofil des Querschnittes 2 über dem Querschnitt 1 aufgetragen wird, ist ein Schönheitsfehler, der für diese Betrachtungen belanglos ist.)

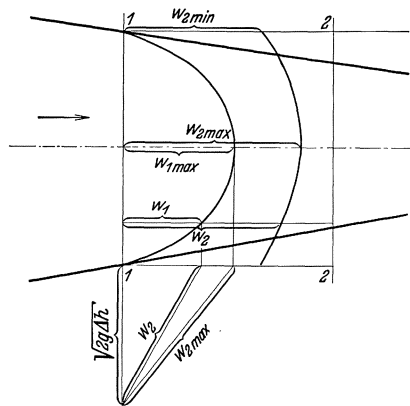


Abb. 67. Veränderung des Geschwindigkeitsprofils bei beschleunigter und verzögerter Strömung. Graphische Ermittlung.

Bei verzögerter Strömung ($2 \rightarrow 1$) wird der Druckanstieg dadurch gewonnen, daß die einzelnen Teilchen ihre kinetische Energie in Druck umsetzen. Hierbei ergeben sich allerdings in der Nähe der Wand große Schwierigkeiten, da infolge der Reibung die Geschwindigkeit dort klein ist. Wenn die Eigengeschwindigkeit infolge dieses Umsatzes aufgezehrt ist, so besteht noch die Möglichkeit einer „Anleihe“ bei benachbarten der Mitte zu gelegenen Teilchen. Als „Makler“ tritt hier die turbulente Querbewegung auf. Immerhin ist diese Möglichkeit begrenzt. Ist Zeit genug vorhanden, wie z.B. bei schwach erweiterten Kanälen, so ist durch dieses Kreditgeschäft tatsächlich eine Katastrophe zu vermeiden. (Der eingangs dieses Abschnittes eingeführte Begriff der Verzahnung dürfte ebenfalls zur anschaulichen Klärung beitragen.)¹

¹ Bei Umkehr der Strömungsrichtung ist die Wandreibung in der gleichen Weise vorhanden. Da aber jetzt die Hauptströmung beschleunigt ist, wird aus dem „Druckreservoir“ dauernd Druck entnommen, um kinetische Energie zu er-

Ist jedoch die durch die Querschnittserweiterung notwendige Drucksteigerung zu groß, so wird für die Wandteilchen sehr schnell der Augenblick kommen, wo ihre ganze Geschwindigkeitsenergie verausgabt ist und durch die Querturbulenz weniger nachkommt als abgegeben werden muß, d. h. die Teilchen bleiben einfach stehen und werden sogar zurückströmen. Das, was man „Ablösung“ nennt, hat eingesetzt. Die Strömung legt sich nicht mehr an die Wand an, sondern schießt ohne merkliche Druckzunahme durch (Abb. 66).

Von dem vorliegenden Versuchsmaterial sei nur das erwähnt, was für den Praktiker von Bedeutung ist. Abb. 68 enthält, dimensionslos auf-

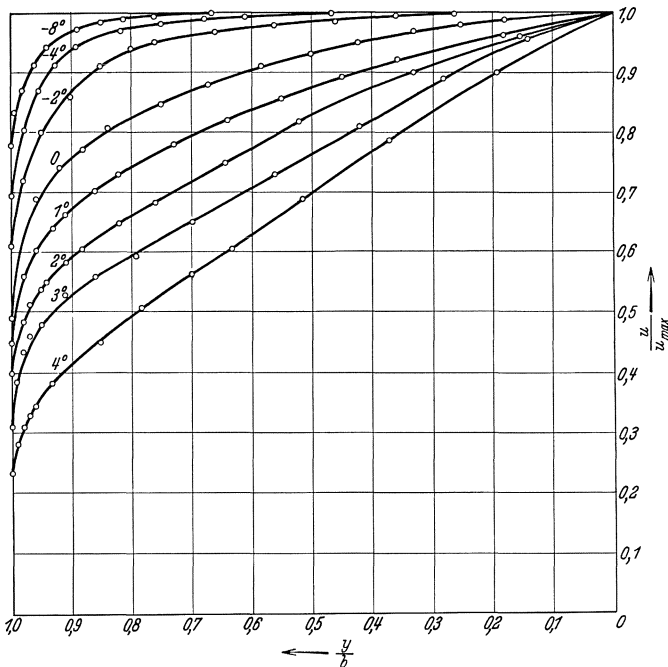


Abb. 68. Geschwindigkeitsverteilung in erweiterten und verengten Kanälen nach Nikuradse.

getragen, die Geschwindigkeitsverteilung in erweiterten und verengten Kanälen (rechteckig) nach Messungen von Nikuradse¹. Man beobachtet in der Tat ein Spitzerwerden mit steigender Erweiterung, ein Flacher-

zeugen, so daß für die energiehungrigen Wandteilchen hier keine Gefahr besteht. Man merke sich grundsätzlich, daß bei beschleunigter Strömung Ablösung immer vermieden werden kann, wenn scharfe Schneiden und zu starke Krümmungen vermieden werden.

¹ Nikuradse: Untersuchungen über die Strömungen des Wassers in konvergenten und divergenten Kanälen. Forsch. Arb. 289.

werden mit steigender Verengung. Man kann auch sagen, daß bei verzögerter Strömung die kinetische Energie aus den Wandzonen nach der Mitte zu gesaugt wird. Für die an solche Kanäle sich anschließenden Konstruktionen ist die Kenntnis dieser Tatsache sehr wertvoll (z. B. Strömung hinter einem Leitrad). Denn man erkennt, daß sorgfältigste Behandlung der Strömung notwendig ist, um das sehr spitze Geschwindigkeitsprofil ohne Verluste zu normalisieren.

Nikuradse beobachtete ein Abreißen bei $\alpha = 5^\circ$, d. h. 10° gesamter Öffnungswinkel. $10 \div 12^\circ$ kann als Anhalt angegeben werden, wenn man mit einiger Sicherheit ein Ablösen vermeiden will.

Da die Wandreibung die Ablösung sehr begünstigt, steht zu erwarten, daß alle die Wandreibung vermindernden Faktoren günstig wirken und die Ablösung evtl. aufhalten können. So ist verständlich, daß der runde Querschnitt geringere Ablösungstendenz und auch geringere Verluste aufweist wie der rechteckige. Anzustreben ist deshalb möglichst kleiner hydraulischer Radius. Ist in der Grenzschicht im Anfang des erweiterten Kanales eine größere Geschwindigkeit vorhanden (z. B. konstante Geschwindigkeitsverteilung beim Einlauf aus einem großen Gefäß), so sind, wie auch dahin gehende Versuche gezeigt haben, kleinere Vergrößerungen des zulässigen Winkels möglich. Als Grenze kann ca. 14° angegeben werden. Eine Vergrößerung der Reynoldsschen Zahl wirkt ebenfalls günstig. Die ungefähre Übereinstimmung dieser Winkel mit dem Ausbreitungswinkel des freien Strahles dürfte nach vorstehenden Erklärungen verständlich sein.

Die auftretenden Verluste werden zweckmäßig auf den Umsatz an Geschwindigkeitsenergie bezogen. Ist die Eintrittsgeschwindigkeit w_1 , die Austrittsgeschwindigkeit w_2 , so würde verlustlos eine Drucksteigerung

$$p_2 - p_1 = \frac{\gamma}{2g} (w_1^2 - w_2^2)$$

erzielt. Tatsächlich gehen hiervon $25 = 15\%$ verloren, so daß

$$p'_2 - p_1 = (0,75 \div 0,85) \frac{\gamma}{2g} (w_1^2 - w_2^2).$$

ist.

Genauere Angaben sind schwer möglich, da viele Einzelursachen, von denen einige eben angeführt wurden, die Verluste beeinflussen. Bemerkt sei jedoch, daß der Wert 0,85 nur bei vollkommen glatter Oberfläche und hohen Reynoldsschen Zahlen erreichbar ist, während meist die Verluste $\sim 20\%$ sind.

Die besonders im Maschinenbau vorkommenden erweiterten Kanäle müssen vielfach aus konstruktiven Gründen in der Querschnittsform wechseln. Hier entsteht die Frage, wie die zulässige Erweiterung bestimmt wird. Folgendes Verfahren kann hier empfohlen werden. Man trägt in Abhängigkeit vom mittleren Stromfaden die Querschnitte auf, rechnet dann die jeweiligen Durchmesser der Kreise aus, die denselben Querschnitt haben, und trägt diese Durchmesser über dem mittleren

Stromfaden auf. Man sorgt dann dafür, daß diese runde konische „Ersatzdüse“ an keiner Stelle mehr erweitert ist, wie den oben angegebenen Winkelwerten entspricht.

25. Krümmer.

Abb. 69 zeigt die Aufnahme einer Krümmerströmung. Unmittelbar hinter der inneren Krümmung löst sich die Strömung, weil die Verzögerung des inneren Stromfadens zu groß ist. Dieses Wirbelgebiet zeigt offensichtlich die Hauptursache des Krümmerverlustes. Die Wandreibung tritt gegenüber diesem „Ablösungswiderstand“ vollkommen zurück.

Kinematisch ist sehr interessant, daß der Hauptströmung sich eine Sekundärströmung, bestehend aus zwei entgegengesetzt drehenden Wir-

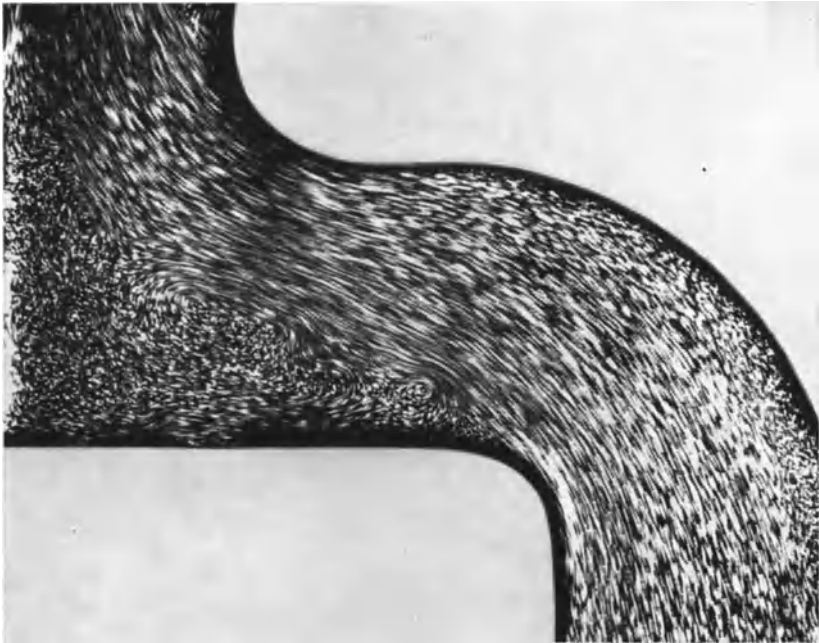


Abb. 69. Krümmerströmung, Abreißen der Strömung unmittelbar hinter der inneren Abrundung.

beln, überlagert. An der inneren Krümmung ist nach S. 18 die Geschwindigkeit am größten und nimmt nach außen, entsprechend dem Gesetz $r \cdot c_u = C$ ab. Die vorausgehende Rohrströmung wird jedoch eine ungleichmäßige nach den Wänden zu abfallende Geschwindigkeitsverteilung erzwingen. Infolgedessen sind die durch die gekrümmte Bewegung entstehenden Zentrifugalkräfte in der Mitte größer wie an den Seitenwänden und bewirken, daß die mittleren Teilchen sich nach außen

drängen, was nur möglich ist, wenn an den Seitenwänden eine umgekehrte Bewegung einsetzt. So entsteht der Doppelwirbel nach Abb. 70.

Die Krümmerverluste können vermindert werden, wenn die Ablösung vermieden wird. Möglichst großer Krümmungsradius an der inneren Stelle und Beschleunigung der Hauptströmung durch Verengung der Querschnitte sind die Maßnahmen, die hier zum Erfolg führen.

Zahlenmäßig werden die Verluste zweckmäßig verglichen mit dem Staudruck der mittleren Rohrgeschwindigkeit w . Der Verlust

$$\Delta p = \zeta \cdot \frac{\rho}{2} w^2$$

wird somit durch den Koeffizienten ζ erfaßt. Bei veränderlichem Querschnitt setzt man meist die Geschwindigkeit des Austrittsquerschnittes ein.

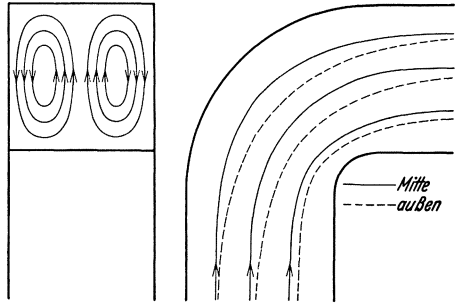


Abb. 70. Schematische Darstellung der Sekundärwirbel in einem Krümmen.

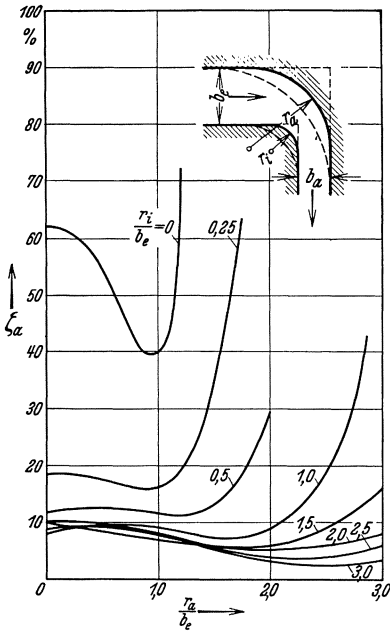


Abb. 71. Druckverlustziffern in Krümmen nach Versuchen von Nippert.

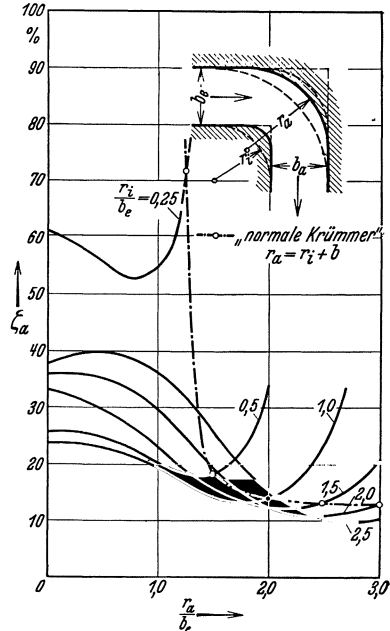


Abb. 72. Krümmerversuche nach Nippert.

Abb. 71 und 72 zeigen Versuchswerte aus dem bisher reichhaltigsten Versuchsmaterial von Nippert¹ Für einen rechteckigen Kanal ist ζ in Abhängigkeit von $\frac{r_a}{b_e}$ aufgetragen für verschiedene Werte von $\frac{r_i}{b_e}$. Man erkennt den großen Einfluß eines großen r_i . Der Austrittsquerschnitt war hier nur halb so groß wie der Eintrittsquerschnitt. Hierdurch kann die Ablösung ganz vermieden werden. Die geringsten

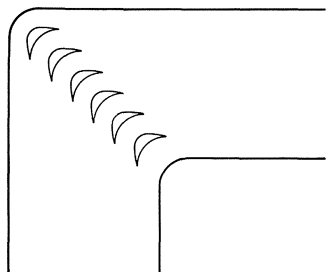


Abb. 73. Verbesserung eines rechtwinkligen Krümmers durch Unterteilung.

Verlustziffern $\zeta \sim 0,03$, sind tatsächlich nicht größer als bei Düsen (Abb. 71). Bei gleichbleibendem Querschnitt (Abb. 72) geht der Mindestverlust bei zweckmäßiger Gestaltung auf ca. 10% herunter. Die die Praxis interessierenden Konstruktionsmöglichkeiten dürften durch diese Versuchswerte klar gezeichnet sein. Bei großen Kanälen ist es aus konstruktiven Gründen oft unmöglich, durch hinreichend großes r_i die Verluste zu vermindern. Eine Unterteilung nach Abb. 73 führt hier zum Ziel. Beim Bau von Windkanälen ist diese Möglichkeit erstmalig von Prandtl angegeben und in vielen anderen Beispielen praktisch verwertet worden. Prandtl gibt für diese Konstruktion $\zeta \sim 0,12$ an.

26. Strömungsverluste infolge scharfer Kanten; Kontraktion usw.

Eine häufige Verlustquelle sind scharfe Kanten. Der Einfluß auf das Strömungsfeld ist, wie die folgende Betrachtung zeigt, zudem erheblich. Betrachten wir einen Querschnitt, der durch eine scharfe

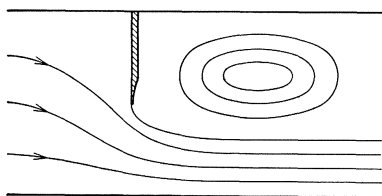


Abb. 74. Kontraktion bei einer scharfen Schneide.

Scheibe (Abb. 74) plötzlich verengt wird. (Labyrinth-Dichtung.) Die Strömung kann den kleinen Querschnitt nicht ausfüllen, weil an der scharfen Kante eine Stromlinie um 90° umbiegen müßte. Dieses scharfe Umbiegen wäre aber identisch mit einer Kurvenbewegung bei unendlich kleinem

Krümmungsradius, was bei endlicher Geschwindigkeit wiederum unendlich große Zentrifugalkräfte zur Folge hätte². Die Strömung

¹ Nippert: Über den Strömungsverlust in gekrümmten Krümmern. Forschungsarbeiten, H. 320.

² Bei der reibungsfreien Flüssigkeit ist eine unendlich große Geschwindigkeit

weicht in einem Bogen aus und füllt statt des Querschnittes F_2 einen kleineren Querschnitt $\alpha \cdot F_2$ aus. Wenn man α Kontraktionskoeffizient nennt, umschreibt man gleichzeitig den Vorgang sehr gut.

Die exakte Berechnung von α ist in einigen Fällen gelungen. Tritt ein unendlich breiter Strahl aus einem unendlich großen Gefäß aus, so ist z. B. $\alpha = \frac{\pi}{\pi + 2}$.

Die größte Kontraktion erreicht man durch die Anordnung nach Abb. 75 (Bordasches Mundstück). Nach dem Impulssatz wollen wir die Kontraktionszahl berechnen.

Wir wenden den Satz auf das Gebiet $ABCD$ an und berechnen die Impulse in der Strömungsrichtung. Unter der Annahme, daß der Rohrquerschnitt groß ist gegen F_2 , d. h. die Rohrgeschwindigkeit vernachlässigt werden kann gegen w_1 , erhalten wir als Impulsdifferenz

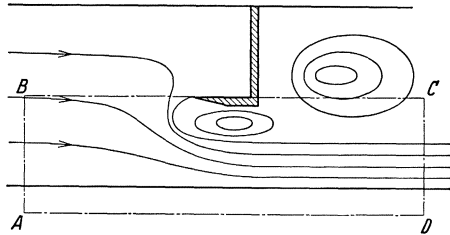


Abb. 75. Kontraktion beim Bordaschen Mundstück.

$$\frac{\gamma}{g} F \cdot \alpha \cdot w^2 .$$

Dieser Wert muß gleich der durch den Druckabfall Δp bewirkten Kraft sein

$$\Delta p \cdot F = \frac{\gamma}{g} F \cdot \alpha \cdot w^2 .$$

Berücksichtigen wir noch, daß

$$w^2 = 2g \frac{\Delta p}{\gamma}$$

ist, so ergibt sich

$$\Delta p \cdot F = \frac{\gamma}{g} F \alpha 2g \frac{\Delta p}{\gamma}$$

d. h. $\alpha = \frac{1}{2}$.

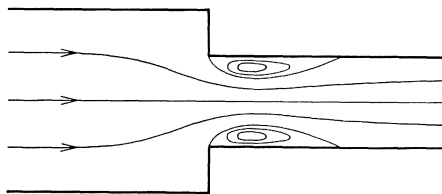


Abb. 76. Ablösung bei unstetiger Verengung eines Kanales.

Nun tritt der eigentliche Verlust erst ein, wenn der kontrahierte Strahl sich wieder dem großen Querschnitt anpassen muß. Diese plötzliche Verzögerung, die bereits bei sorgfältig erweiterten Düsen verlustreich ist, verursacht direkte Stoßverluste. An einer früheren Stelle (S. 39) wurde bereits der durch plötzliche Verzögerung von w_1

wohl denkbar. Da nach Bernoulli $\frac{w^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} = H$ zu erfüllen ist, folgt für unendlich großes w ein negativer unendlich großer Druck. Das ist aber eine Zugspannung, die man sich bei Flüssigkeiten schlecht vorstellen kann.

auf w_2 eintretende Druckverlust zu

$$\frac{(w_1 - w_2)^2}{2g} \cdot \gamma$$

berechnet. Das Wirbelfeld z. B. nach Abb. 75 ist die sichtbare Erscheinung dieser Verluste.

Daß sogar eine im Mittel beschleunigte Strömung eine Kontraktion ergeben kann, zeigt Abb. 76. Folgende Werte können hier als Anhaltspunkte gelten:

- $\alpha = 0,61 \div 0,65$ (scharfe Kante),
- $\alpha = 0,68 \div 0,8$ Kante etwas gebrochen,
- $\alpha = 0,9$ Abrundung mit kleinem Krümmungsradius,
- $\alpha = 0,99$ bei sehr großer und glatter Abrundung.

IV. Einfluß der Reibung bei umströmten Körpern.

27. Grundsätzliches zum Widerstandsproblem.

Die bei der Rohrströmung gefundenen Gesetzmäßigkeiten können leicht auf die Umströmung von Körpern übertragen werden. Nach Abb. 77 werde z. B. ein Zylinder in der unendlich breiten Parallelströmung betrachtet. In einer hinreichend

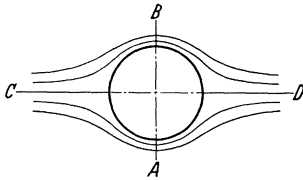


Abb. 77.

weiten Entfernung vor dem Zylinder nehmen wir eine gleichmäßige Einteilung vor. Das Schicksal der Einteilungsgrenzen verfolgen wir und erhalten so das Stromlinienbild. Bei reibungsfreier Flüssigkeit entsteht das bereits bekannte Bild nach Abb. 77.

Da Reibungslosigkeit vorausgesetzt ist, können wir die Begrenzung einer Stromlinie auch durch reibungsfreie Wände ersetzen. Bei der den Zylinder berührenden Stromlinie sei dieses Experiment durchgeführt. Nunmehr haben wir bereits eine Rohrströmung, auf die wir die früheren Gesetze anwenden können. Dort, wo der Kanalquerschnitt eng ist, z. B. direkt über dem Zylinder, herrscht große Geschwindigkeit d. h. nach Bernoulli kleiner Druck. Vor dem Zylinder ist der Querschnitt am größten, was dem größten statischen Druck entspricht. Die vollkommene Symmetrie in bezug auf die Achse $A-B$ zeigt, daß keine resultierende Kraft in Strömungsrichtung vorhanden ist, da die Drücke auf der Vorderseite des Zylinders genau denen auf der Rückseite entsprechen und sich aufheben. Denkt man sich jedoch den Zylinder durch $C-D$ in zwei Hälften geteilt, so würden diese nach oben und unten gesaugt werden (s. auch Berechnung auf S. 31). Die nach der Bernoullischen Gleichung berechenbare Saug-

wirkung an den Grenzen des Zylinders nimmt infolge der Zentrifugalkräfte normal zu der Stromlinie ab. Auf S. 15 war die Druckzunahme in der zur Strömung senkrechten Richtung berechnet worden, die durch die Zentrifugalkräfte bedingt ist. Eine kleine Rechnung soll zeigen, wie die Drücke sich zahlenmäßig ändern.

Größter Unterdruck

$$\Delta p = \frac{\gamma}{2g} [(2u)^2 - u^2] = 3 \cdot \frac{u^2}{2g} \cdot \gamma$$

Druckzunahme senkrecht zur Strömung

$$\Delta p = \frac{\gamma}{g} \frac{w^2}{R} \cdot \Delta n = \frac{\gamma}{g} \frac{4u^2}{R} \cdot \Delta n = 8 \cdot \frac{\Delta n}{R} \frac{u^2}{2g} \cdot \gamma$$

d. h. bei einem

$$\Delta n = \frac{R}{8}$$

ist bereits eine Druckzunahme gleich dem Staudruck vorhanden¹.

Aus Abb. 77 erkennen wir, daß alle Stromlinien sich bis $A-B$ verengen. Bis hierher ist also beschleunigte Bewegung vorhanden. Von $A-B$ nach rechts ist Verzögerung vorhanden. Die stärkste Verzögerung hat der Stromfaden, der den Zylinder berührt. Wir wissen aber nach den Ausführungen über erweiterte Kanäle, daß dann nur bei mäßiger Erweiterung mit einem Anliegen der Strömung gerechnet werden kann. Die starke Erweiterung des Kanales wird hier notwendig zu einer Ablösung führen, die in Abb. 78 angedeutet ist.

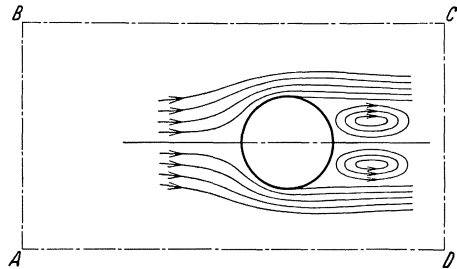


Abb. 78. Schematische Darstellung der Zylinderströmung.

Aus der nunmehr entstandenen Unsymmetrie der Strömung kann bereits auf eine resultierende Kraft in Strömungsrichtung geschlossen werden. Nehmen wir zunächst an, daß das „Totwasser“ hinter dem Zylinder sich in keiner Bewegung befindet. Der statische Druck, der direkt hinter dem Zylinder herrscht, ist dann leicht zu ermitteln. Er muß gleich dem Druck der begrenzenden Stromlinie sein. Dort herrscht aber der Unterdruck $3 \cdot \frac{u^2}{2g} \gamma$, der somit auf der hinteren Seite des Zylinders wirkt. Auf der vorderen Seite ist bis zum Winkel 45° ein Überdruck und am vorderen Staupunkt, sogar ein Überdruck von $\frac{u^2}{2g} \cdot \gamma$ vor-

¹ Streng genommen gilt diese Rechnung bei endlichem Δn nur dann, wenn die Geschwindigkeit sich nicht ändert.

handen, während vorne von $45^\circ \div 90^\circ$ ein Unterdruck den Widerstand herabsetzt. Man erkennt eine Kraft in Strömungsrichtung, die der Größenordnung nach gleich $\frac{w^2}{2g} \cdot \gamma F$ sein muß.

Eine grobe Abschätzung nach dem Impulssatz führt ebenfalls zu einer solchen Formel. Betrachten wir nach Abb. 78 irgend einen Widerstandskörper und nehmen an, daß hinter dem Körper (im Totwasser) die Geschwindigkeit gleich Null ist. Die Impulsänderung in Strömungsrichtung ist dann $\frac{\gamma}{g} \cdot F \cdot w \cdot w$, wo F die Schattenfläche des Körpers ist. Dies muß gleich der auftretenden Kraft, d. h. dem Widerstand W sein, wenn wir in 1. Näherung von Druckänderungen in den Grenzlinien $A-B$ bzw. $C-D$ absehen. Notwendig ist die Voraussetzung, daß die Grenzen sehr weit weg sind, so daß der Impulstransport durch $B-C$ und $A-D$ vernachlässigt werden kann.

$$\sim \frac{\gamma}{g} F w^2 \sim W = c_w \cdot \frac{w^2}{2g} \cdot \gamma \cdot F. \quad (40)$$

Die jeweilige Eigentümlichkeit des Körpers wird somit durch einen dimensionslosen Faktor c_w zum Ausdruck gebracht.

Dieser Widerstand entsteht durch Abreißen der Strömung hinter dem Körper. Durch zweckmäßige Gestaltung des Körpers kann derselbe weitgehend beeinflusst werden. Die Bezeichnung „Formwiderstand“ kennzeichnet deshalb den Vorgang sehr treffend.

Um den Formwiderstand zu vermeiden, müssen wir genau so vorgehen wie bei der Rohrströmung. Es muß dafür gesorgt werden, daß die den Körper begrenzende Stromlinie keine größere Erweiterung erhält wie ca. $10 \div 12^\circ$. Die Zylinderströmung läßt sich leicht in diesem Sinne verbessern, wenn man vom größten Querschnitt ab einen schlanken nach hinten spitz zulaufenden Abflußkörper anbaut. Auf diese Weise entsteht der sog. Stromlinienkörper (Abb. 80). Da wir bereits erkannt haben, daß der beschleunigte Teil der Strömung immer gesund ist, leuchtet es ein, daß die vordere Form des Stromlinienkörpers nur gut abgerundet zu werden braucht, um in 1. Näherung einen guten Körper zu erhalten.

Bezeichnend ist die Rolle, die die Reibung bei diesem Vorgang spielt. Die reibungsfreie Flüssigkeit gibt z. B. beim Zylinder das symmetrische Bild nach Abb. 77. Ein Widerstand ist, wie wir oben gesehen haben, nicht vorhanden. Gehen wir dann über zu einer Flüssigkeit mit Reibung, so bewirkt die Verzögerung an der Wand, daß die den Körper berührende Stromlinie in dem stark verzögerten Bereich abreißt, und die den Widerstand bedingende Druckverteilung ist da. Wenn die Ablösung erfolgt ist, können wir uns die Reibung wieder weg denken. Wir erkennen, daß die Wirkung der Reibung nur eine indirekte ist, daß

also insbesondere der tatsächliche Widerstand nicht durch Schubspannungen, sondern durch Druckkräfte erfolgt.

Grundsätzlich anders wirkt der sog. Oberflächenwiderstand¹. Eine in Strömungsrichtung gebrachte Platte zeigt diesen Widerstand in Reinkultur. Die Aufnahme (Abb. 79) läßt deutlich erkennen, daß keine

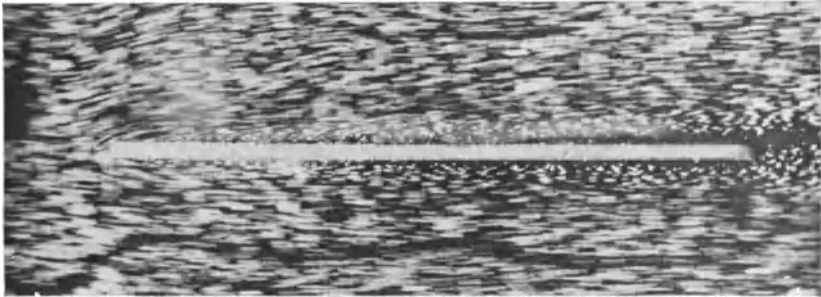


Abb. 79. Umströmung einer Platte. Sichtbarmachung der Grenzschicht.

Ablösung vorhanden ist, jedoch eine in Strömungsrichtung zunehmende Schicht an der Platte, in der die Geschwindigkeiten schnell bis auf Null abnehmen. Es ist so, daß außerhalb dieser Schicht, die man nach Prandtl Grenzschicht nennt, eine der reibungsfreien Flüssigkeit entsprechende Geschwindigkeit vorhanden ist. Hinter der Platte befindet sich eine die beiderseitige Grenzschichtdicke umfassende Schleppe, die das durch die Reibung verzögerte Material enthält.

Die Widerstandsleistung der Platte ist gleich der verminderten kinetischen Energie dieser Schleppe. Da hier nicht die Staufläche bzw. Schattenfläche, sondern die Fläche F der Platte parallel zur Strömungsrichtung den Widerstand beeinflusst, setzt man hier

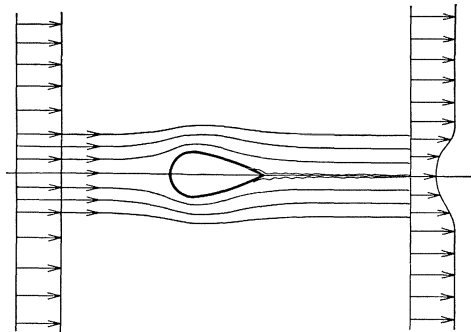


Abb. 80. Einbuchtung in der Geschwindigkeitsverteilung hinter einem Widerstandskörper ohne Ablösung der Strömung.

$$W = c_f \cdot \frac{w^3}{2g} \cdot \gamma \cdot F . \quad (41)$$

¹ Bei sehr kleinen Geschwindigkeiten oder kleinen Körperabmessungen, d. h. kleinen Reynoldsen Zahlen, ergibt sich ebenso wie bei der Rohrströmung laminare Gesamtströmung. Der Widerstand ist hier proportional der 1. Potenz der Geschwindigkeit analog dem Rohrreibungsgesetz. Für die Kugel hat Stokes den Widerstand berechnen können. Er fand $W = 3 \pi \mu \cdot d \cdot w$.

In der Regel wirken beide Widerstände zusammen, d. h. es ist Form- und Oberflächenwiderstand vorhanden. Experimentell zu trennen sind dieselben dadurch, daß man von dem gemessenen Widerstand den Widerstand abzieht, der durch Messung der Druckverteilung berechnet wird. So erhält man den Oberflächenwiderstand.

Wirkt nur reiner Oberflächenwiderstand, wie z. B. bei einer guten Strebe (Abb. 80) so ist nach Betz¹ noch eine weitere Meßmöglichkeit des Widerstandes vorhanden. Messen wir hinreichend weit vor der Strebe die Staudrücke, so erhalten wir eine konstante Druckverteilung entsprechend der konstanten Energie. Machen wir dieselbe Messung jedoch hinter der Strebe, so erfährt die Druckverteilung eine Einbuchtung, weil die in der Grenzschicht strömenden Teilchen sich in einem Kielwasser sammeln. Es ist nun nach Betz möglich, mit Hilfe des Impulssatzes den Widerstand aus dieser Messung auszurechnen.

Um zu der einfachsten Aussage zu kommen, legen wir die Grenzen so weit vom Körper weg, daß Druckänderungen an den Grenzen vernachlässigt werden können. Es soll auch die zur Hauptströmung senkrechte Komponente an diesen Grenzen vernachlässigt werden, so daß nur der Impulstransport durch die Stirnfläche der Kontrollfläche von der Breite b übrig bleibt. Der Impulstransport durch die vordere Fläche ist $\rho \cdot b \int w_1^2 dy$ und durch die hintere Fläche $\rho b \int w_2^2 dy$. Die Differenz

$$\rho b \int (w_1^2 - w_2^2) dy$$

ergibt den Impulsunterschied.

Durch die vordere Kontrollfläche strömt nun eine größere Wassermenge herein wie durch die hintere austritt. Die Differenzmenge ist

$$\rho \cdot b \int (w_1 - w_2) dy.$$

Diese Menge muß seitlich austreten (Verdrängung durch den Körper!) und zwar mit der Geschwindigkeit w_1 , so daß zu dem austretenden Impuls noch der Impuls

$$\rho \cdot b \cdot w \cdot \int (w_1 - w_2) dy$$

hinzukommt. Somit wird der Widerstand

$$\begin{aligned} W &= \rho b \int (w_1^2 - w_2^2) dy - \rho \cdot b \cdot w_1 \int (w_1 - w_2) dy \\ &= \rho b \int w_2 (w_1 - w_2) dy. \end{aligned}$$

Setzen wir nun

$$w_2 \sim \frac{w_1 + w_2}{2},$$

¹ Betz: Ein Verfahren zur direkten Ermittlung des Profilwiderstandes, Z. F. M. 16, 42. 1925.

so entsteht

$$W = \rho \frac{1}{2} b \int (w_2 + w_1) (w_1 - w_2) dy = \frac{\rho}{2} b \int (w_1^2 - w_2^2) dy.$$

Nach der Bernoullischen Gleichung ist

$$P_1 = p_1 + \frac{\rho}{2} w_1^2$$

$$P_2 = p_2 + \frac{\rho}{2} w_2^2.$$

Unsere Annahme, daß die statischen Drücke an der vorderen und hinteren Kontrollfläche gleich sein sollen, ergibt also

$$\frac{\rho}{2} (w_1^2 - w_2^2) = P_1 - P_2$$

Setzen wir dieses in die eben abgeleitete Gleichung von W ein, so erhalten wir:

$$W = b \int (P_1 - P_2) dy.$$

Damit ist die Widerstandsmessung auf die Druckmessung im Nachlauf der Strömung zurückgeführt. Durch ein Pitotrohr, welches quer zur Strömung verschoben wird, kann die Messung leicht ausgeführt werden.

Beim fliegenden Flugzeug kann mit dieser Methode der sog. Oberflächenwiderstand gemessen werden. Es ist der einzige Weg, der hier möglich ist.

Bemerkt sei noch, daß verschiedene Vernachlässigungen bei feineren Messungen berücksichtigt werden müssen, insbesondere wenn unmittelbar hinter dem Körper gemessen wird.

28. Oberflächenwiderstand.

Der reine Oberflächenwiderstand einer in Strömungsrichtung liegenden Platte wird zweckmäßig, wie bereits vorher angedeutet, mit der Fläche F und dem Staudruck

$$q = \frac{\rho}{2} w^2$$

in Beziehung gebracht. Man definiert nach Gl. (41) einen Koeffizienten c_f durch die Gleichung

$$W = c_f \cdot F \cdot q.$$

Da aus Abb. 79 erkennbar war, daß die sog. Grenzschicht nach hinten zu dicker wird, muß man annehmen, daß die einzelnen Flächenteile nicht gleichwertig in bezug auf den Widerstand sein können. Bei kleiner Grenzschichtdicke, d. h. vorne ist das Geschwindigkeitsgefälle und damit die übertragene Schubspannung größer als weiter strom-

abwärts bei dickerer Grenzschicht. Die Länge der Platte x wird c_f deshalb beeinflussen und charakteristisch für das Problem sein.

Damit wird auch die Frage nach der Definition der Reynoldsen Zahl erleichtert. Man wählt

$$R_x = \frac{w \cdot x}{\nu}$$

und wird vermuten, daß c_f eine Funktion von R_x ist, was durch Versuche bestätigt wird.

Man beobachtet nun zwei verschiedene Arten von Grenzschichten. Der vordere dünnere Teil ist meist laminar, während bei größerem x in der Grenzschicht Querbewegungen auftreten und ein Impulsaustausch eintritt, der Schubspannungen erzeugt.

Nun ist tatsächlich ein direkter Vergleich mit der Rohrströmung möglich. Faßt man nämlich bei letzterer die Schicht Rohrwand-Rohrmitte als Grenzschicht auf, so lassen sich die dort gewonnenen Ergebnisse auf die Plattenreibung übertragen. Die Vorschrift ist folgende: Ist an einer Stelle die Grenzschichtdicke δ , so denkt man sich ein Rohr, dessen Radius gleich δ , dessen Maximalgeschwindigkeit gleich w und dessen Strömungszustand (d. h. laminar oder turbulent) derselbe ist.

Auf diese Weise erhält man folgende Ergebnisse. Bei turbulenter Grenzschicht ist die Geschwindigkeitsverteilung durch das Potenzgesetz festgelegt

$$w = w_0 \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{7}} \text{ (glatte Wand).}$$

In einer laminaren Grenzschicht ist nach S. 49 eine lineare Geschwindigkeitsverteilung vorhanden.

Es läßt sich auch ermitteln, wie die Grenzschichtdicke δ in Abhängigkeit von x zunimmt:¹

$$\left. \begin{array}{l} \text{I) } \delta_{lam} = 5,5 x \frac{1}{\sqrt{R_x}} ; \quad R_x = \frac{w_0 \cdot x}{\nu} \\ \text{II) } \delta_{turb} = 0,37 \cdot x \frac{1}{\sqrt[5]{R_x}} . \end{array} \right\} (42)$$

Hieraus folgt, daß die laminare Grenzschichtdicke mit der Wurzel aus der Entfernung x und die turbulente mit der $\frac{4}{5}$ -Potenz von x wächst.

Weiter lassen sich die Koeffizienten c_f ermitteln

$$\left. \begin{array}{l} \text{I) } c_{f lam} = 1,327 \frac{1}{\sqrt{R_x}} , \\ \text{II) } c_{f turb} = 0,074 \frac{1}{\sqrt[5]{R_x}} . \end{array} \right\} (43)$$

¹ Z. A. M. 1, 17, 1921 und Z. A. M. M. 1, 233, 1921.

Es läßt sich nach Prandtl auch die Tatsache berücksichtigen, daß im Anfang laminare und später turbulente Grenzschicht vorhanden ist:

$$\text{III) } c_f = 0,074 \frac{1}{\sqrt[5]{R_x}} - \frac{1700}{R_x}. \quad (44)$$

Ebenso wie beim Rohre wird die laminare Schicht verkleinert bzw. aufgehoben (obere Kurve), wenn durch Rauigkeiten und scharfe Eintrittskanten der Turbulenz Vorschub geleistet wird.

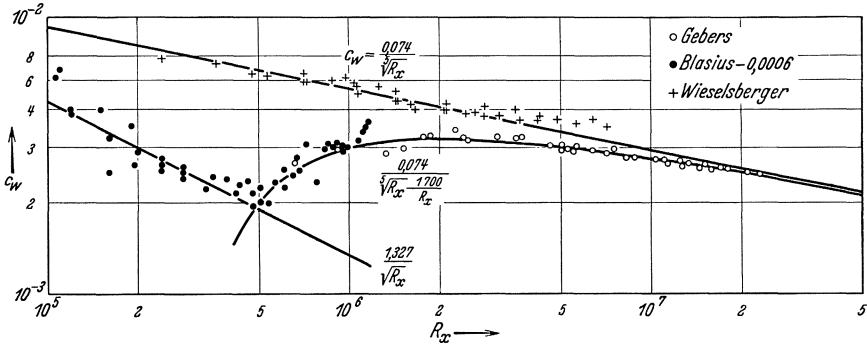


Abb. 81. Widerstandsbeiwerte glatter ebener Platten in Abhängigkeit von der Reynoldsen Zahl.

Die drei c_f -Werte sind in Abb. 81 logarithmisch aufgetragen. Gleichzeitig eingetragene Versuchspunkte zeigen die Brauchbarkeit der angeführten Theorie¹.

29. Formwiderstand.

Im allgemeinen werden Formwiderstand und Oberflächenwiderstand zusammenwirken. Je nachdem, ob die eine oder andere Ursache überwiegt, ergeben sich verschiedene Erscheinungen, die zum Verständnis des Widerstandsproblems von größter Bedeutung sind.

Zunächst kann man eine Gruppe von Körperformen abgrenzen, bei denen fast ausschließlich Formwiderstand vorhanden ist. Allgemein läßt sich sagen, daß dies solche Formen sind, bei denen scharfe Kanten vorhanden sind. Hierzu gehören runde Kreisplatten, überhaupt plattenförmige Körper. Ferner gehören zu dieser Gruppe offene Halbkugeln und ähnliche Gebilde.

Der Widerstand ist hier genau proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit analog der Rohrreibung bei sehr großer Rauigkeit. Nach

¹ Es sei darauf verwiesen, daß bei den Wieselsbergerschen Versuchen das Entstehen einer laminaren Grenzschicht künstlich verhindert wurde (Wieselsbergersche Platte).

Tab. IV. Scharfkantig begrenzte Körper.		dem Ansatz
Körperform	c_w	$W = c_w \cdot F \cdot \frac{\gamma}{2g} w^2$
Kreisplatte	1,11	ist c_w konstant für alle Reynoldsche Zahlen. Die nebenstehende Tabelle enthält eine Zusammenstellung dieser Gruppe.
Rechteck mit den Seiten a und b		
$\frac{a}{b} = 1$	1,1	Bei der zweiten Gruppe, die am besten durch die Bezeichnung „stetig abgerundete Körper“ umrissen wird, spielt der Oberflächenwiderstand, ob- schon oft prozentual kaum bedeutend, eine höchst merkwürdige Rolle.
$\frac{a}{b} = 2$	1,15	
$\frac{a}{b} = 4$	1,19	
$\frac{a}{b} = 10$	1,29	
$\frac{a}{b} = \infty$	2,01	
Offene Halbkugel		Bei der zweiten Gruppe, die am besten durch die Bezeichnung „stetig abgerundete Körper“ umrissen wird, spielt der Oberflächenwiderstand, ob- schon oft prozentual kaum bedeutend, eine höchst merkwürdige Rolle.
Offene Seite der Strömung entgegengerichtet	1,33	
umgekehrt	0,34	
Kreiszylinder (in Richtung der Zylinderachse angeströmt) ($l =$ Länge; $d =$ Durchmesser)		
$\frac{e}{d} = 1$	0,91	
$\frac{e}{d} = 2$	0,85	
$\frac{e}{d} = 4$	0,87	
$\frac{e}{d} = 7$	0,99	

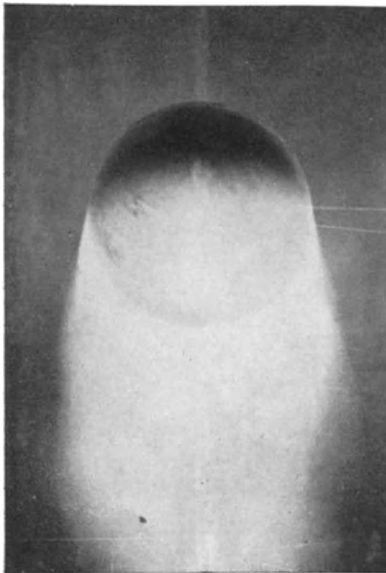


Abb. 82. Kugelströmung unterkritisch nach Prandtl.

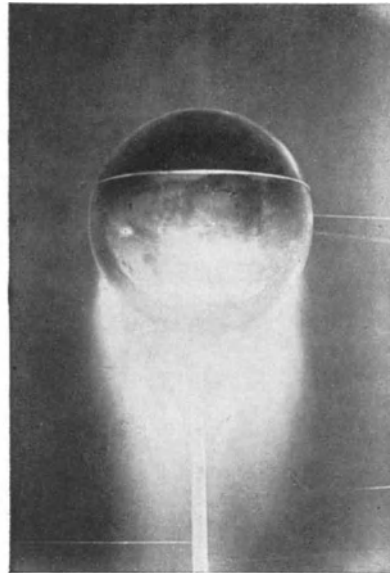


Abb. 83. Kugelströmung überkritisch nach Prandtl. Vorzeitiger Umschlag ist durch Drahtreif erzwungen.

An dem klassischen Beispiel der Kugel soll dieses gezeigt werden. Es wurden hier zwei verschiedene Widerstandsziffern festgestellt. Prandtl stellte bei Beginn seiner Forschungen $c_w = 0,44$ fest, während von Eiffel (Paris) nur 0,176 d. h. $\sim \frac{2}{5}$ des ersten Wertes ermittelt wurde. Von Prandtl stammt die Klärung dieses Widerspruchs.

Abb. 82 und 83 zeigen zwei Strömungsaufnahmen, die den Grund dieser Unterschiede deutlich machen. In Abb. 82 erkennt man, daß einmal die Strömung am größten Meridiankreis abreißt. Hier ist $c_w = 0,44$; Abb. 83 zeigt, wie sich die Strömung hinter der ersten Abreißstelle wieder etwas anlegt. Hierdurch wird der Widerstand merklich

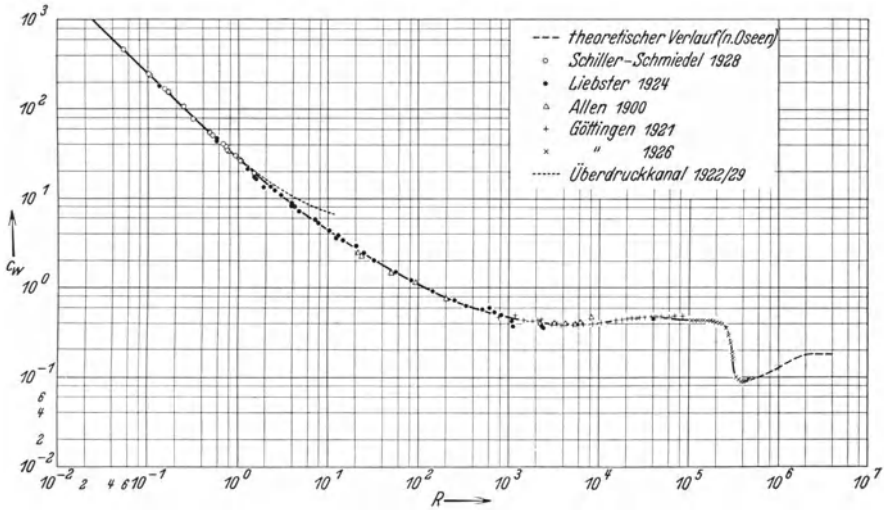


Abb. 84. Kugelwiderstandsbeiwert in Abhängigkeit von der Reynoldsen Zahl. Gesamter durch Messungen erreichter Bereich der Reynoldsen Zahlen.

verringert auf $c_w = 0,176$. Der Umschlag in die zweite Strömungsform konnte durch Auflegen eines in Abb. 83 erkennbaren Drahringes erzielt werden. Die genaue Untersuchung ergab nun, daß im ersten Falle die Grenzschicht laminar, im zweiten Falle hiergegen turbulent war. Daß die scheinbar widerstandsvermehrnde Maßnahme trotzdem den Widerstand erniedrigt, ist nun leicht zu erklären. Sowohl von der Rohrströmung her, wie von der Platte wissen wir, daß der Umschlag der laminaren in die turbulente Strömung (bzw. Grenzschicht) durch scharfe Kanten und ähnliche Maßnahmen beschleunigt werden kann. Nun ist beim Diffusorproblem erörtert worden, daß der turbulente Impulsaustausch eine mäßige Verzögerung ermöglicht. Bei der Kugel ist nun kurz hinter dem größten Meridiankreis die Verzögerung noch mäßig, steigt dann aber schnell an. Eine turbulente Grenzschicht wird also wie im Diffusor die Strömung noch etwas

zum Anliegen bringen. Hierdurch ändert sich nun das ganze Druckfeld hinter der Kugel. Eine erhebliche Widerstandsverminderung ist die Folge.

Tab. V. Widerstand stetig abgerundeter Körper.

Körperform	c_w	R	
Kugel	0,47	$2 \cdot 10^4 < R < 1,5 \cdot 10^5$	
	0,22	$R > 2,5 \cdot 10^5$	
Rotationsellipsoid Breite : Länge = 5 : 9	0,6	$R < 4,5 \cdot 10^5$	
	0,2	$R > 5,5 \cdot 10^5$	
Kreiszyylinder (Unendlich lang)	1,2	$R < 2 \cdot 10^5$	
	0,3 ÷ 0,4	$R > 5 \cdot 10^5$	
Tropfenprofil d größte Dicke, t Tiefe			
	$\frac{t}{d} = 18$	0,096	} $R \sim 10^6$ $R = \frac{w \cdot t}{\nu}$
	$\frac{t}{d} = 5$	0,04	

Abb. 84 zeigt c_w in Abhängigkeit von der Reynoldsen Zahl. Oberhalb $R \sim 4 \cdot 10^5$ ist auch ohne Drahtreif immer der kleine Widerstandskoeffizient vorhanden. Es leuchtet ein, daß die Wirkung des Drahtreifes (bzw. ähnlicher Mittel) beschränkt bleibt auf das Gebiet des Umschlages von laminarer zur turbulenten Grenzschicht. In Abb. 84 sind die Kugel-

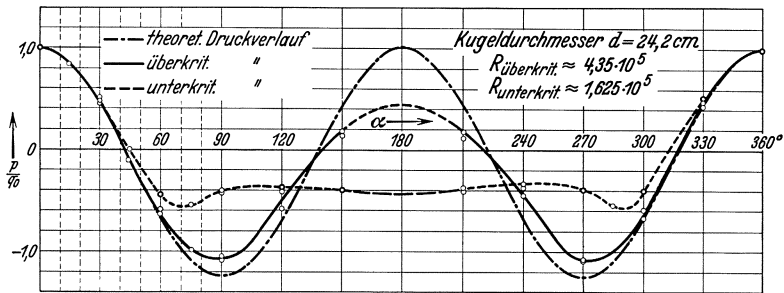


Abb. 85. Druckverteilung um eine Kugel (nach Flachsart).

widerstände für alle bisher durch Messungen erreichbaren Reynoldsen Zahlen eingezeichnet.

In ähnlicher Weise wie die Kugel verhalten sich nun alle abgerundeten Körper. Für jede derartige Körperform gibt es eine sog. kritische Reynoldsen Zahl, bei der eine Verminderung von c_w eintritt (Tab. V).

Für zwei wichtige Formen, Kugel und Zylinder, ist in Abb. 85 u. 86

noch die Druckverteilung über dem abgewickelten Umfang aufgetragen. Eingetragen sind die Druckverteilung der reibungslosen Flüssigkeit, die Druckverteilung im unterkritischen und im überkritischen Gebiet.

Die Kugel hat im überkritischen Gebiet auf der Hinterseite noch einen kleinen Überdruck, während beim Zylinder dort ein kleiner Unter-

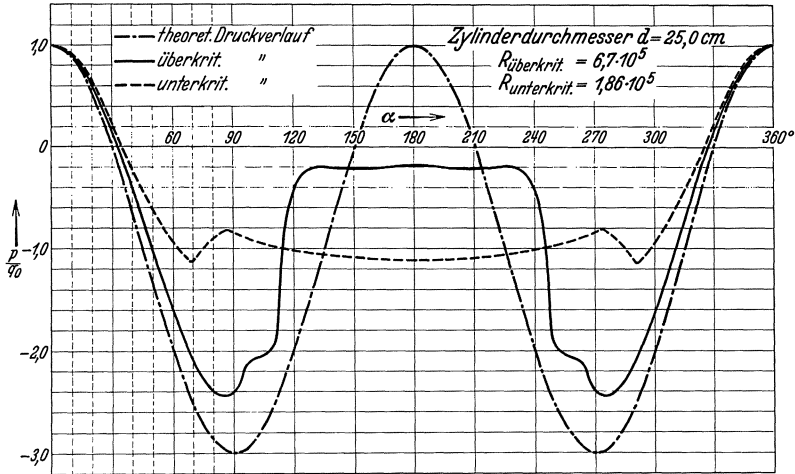


Abb. 86. Druckverteilung um einen Zylinder (nach Flachsbar).

druck ist, der im Gegensatz zur Kugel hier über einen größeren Bereich konstant bleibt.

Beim Zylinder und der Kugel sind die Ablösungspunkte fast an der gleichen Stelle nämlich unterkritisch bei ca. 70° , überkritisch bei ca. 110° .

Bemerkenswert ist noch, daß der theoretisch größte Unterdruck beim Zylinder ca. dreimal größer ist wie bei der Kugel.

30. Bewegung im Totwasserraum.

Das Gebiet der abgerissenen Strömung, meist Totwasserraum genannt, bedarf noch einer besonderen Betrachtung. Die Flüssigkeit ist hier durchaus nicht in Ruhe, sondern befindet sich meist in mehr oder weniger deutlich erkennbarer Drehbewegung. Besonders charakteristisch ist die Strömung hinter einem Zylinder bei kleinen Reynoldszahlen. Verfolgen wir die Strömung vom Beginn der Bewegung an. Im ersten Augenblick ist die Flüssigkeit bestrebt, die Bewegungsform der reibungsfreien Strömung anzunehmen. Es ist eine gewisse Zeit notwendig, bis sich überhaupt eine Grenzschicht ausbilden kann. Beim Zylinder kann man sagen, daß ein Teilchen erst einmal ca. $\frac{1}{4}$ Umfang durchlaufen haben muß. Nach einem solchen Weg wird ja erst das Anströmen gegen den Druck erforderlich. Nach diesem Weg kann



Abb. 87. Zylinderströmung im ersten Augenblick der Bewegung.

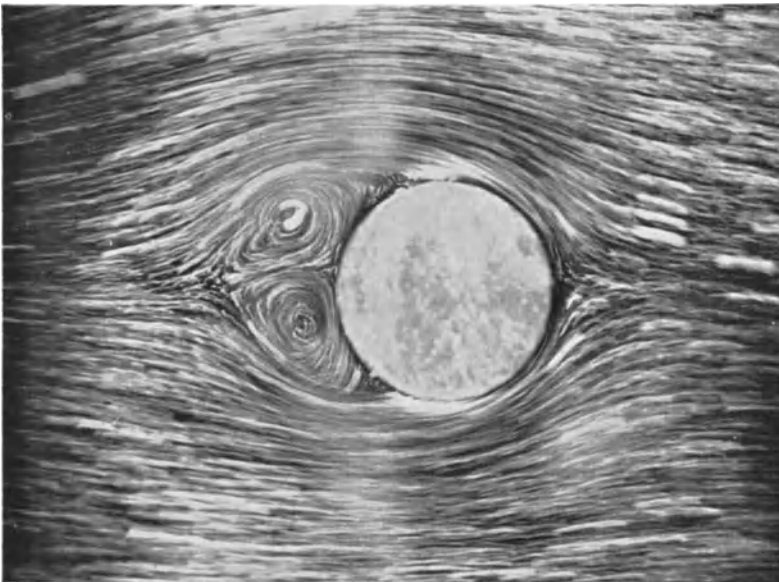


Abb. 88. Weiteres Stadium. Die beiden Anfahrwirbel sind bereits deutlich zu erkennen.

also infolge der Wandreibung erst ein Energieverlust eines wandernden Teilchens erfolgt sein. Es tritt dann Stillstand, Rückströmung und Ablösung ein.

Abb. 87 zeigt eine Aufnahme, die kurz nach dem „Start“ gemacht

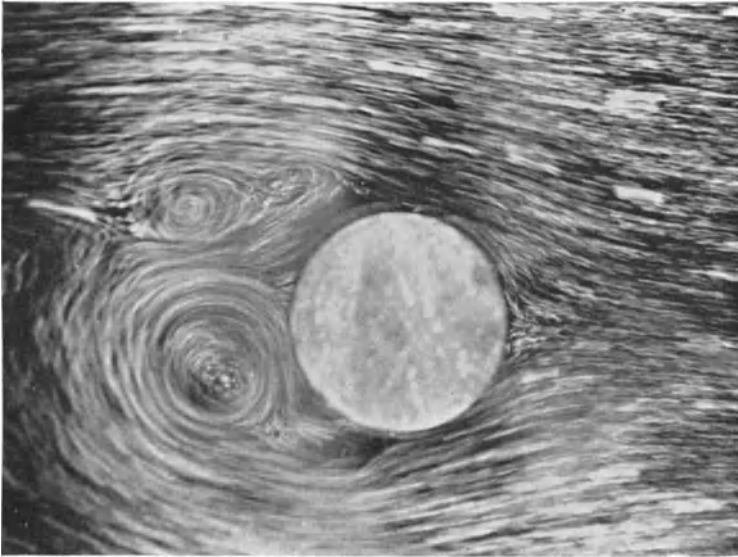


Abb. 89. Endgültiger Zustand. Die Anfahrwirbel sind bereits weggeschwommen.

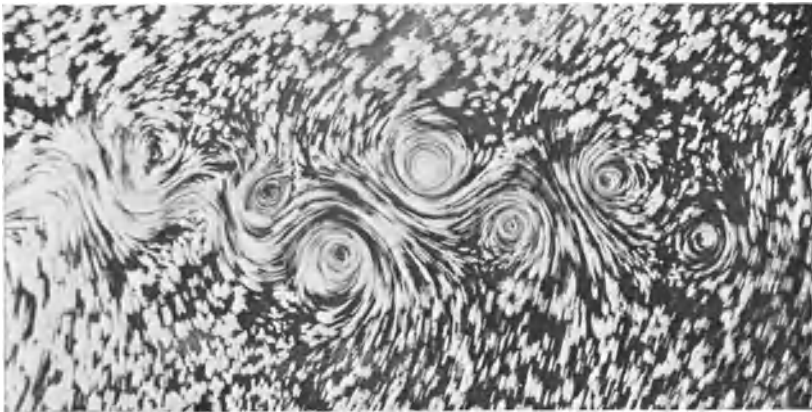


Abb. 90. Kármánsche Wirbelstraße.

wurde. Man erkennt, daß die Strömung durchweg noch hinten geschlossen ist. Einige Teilchen strömen aber bereits zurück und werden nun unter Wirbelbildung die Strömung aufrollen. Abb. 88 zeigt wie

die beiden Wirbel an Ausdehnung gewonnen haben. Beim weiteren Anwachsen werden diese beiden Wirbel von der Hauptströmung weggedrängt. Man sagt, die Anfahrwirbel schwimmen weg. Darauf tritt ein periodisches Ablösen von Wirbeln ein und es entsteht Abb. 89. In genau geordneter Zickzackform schwimmen die Wirbel nach hinten ab. Abb. 90 zeigt die als Kármánsche Wirbelstraße bekannte Anordnung. v. Kármán¹ ist der Nachweis gelungen, daß die Wirbelanordnung nur dann stabil sein kann, wenn das Verhältnis $\frac{\text{Teilung}}{\text{Abstand}} = 0,2806$ ist. Dies stimmt mit den Versuchen gut überein.

Interessant ist, daß in dem Augenblick, wo sich ein Wirbel ausbildet, ein gleich großer aber entgegengesetzt drehender Wirbel um den Zylinder übrigbleibt, wie die Ausführungen von S. 24 erkennen lassen. Dies bedingt aber, wie beim Magnuseffekt, einen Quertrieb, der hier seine Richtung im Takte der abgehenden Wirbel ändert. Verfasser bringt diese Kraft dadurch anschaulich zur Darstellung, daß er in einer Strömungswanne einen Zylinder, der als Pendel aufgehängt wird, rhythmisch hin und her bewegen läßt. Sorgt man für Resonanz zwischen Ablösungsgeschwindigkeit der Wirbel und der Schwingungszahl des Pendels, so erhält man besonders große Ausschläge.

31. Widerstand von Luftschiffkörpern.

Bei einem Luftschiffkörper läßt sich mit der auf S. 31 angedeuteten Quellen-Senken-Methode die Druckverteilung sehr genau vorausberechnen. Vorausgesetzt ist natürlich, daß keine Ablösung vorhanden

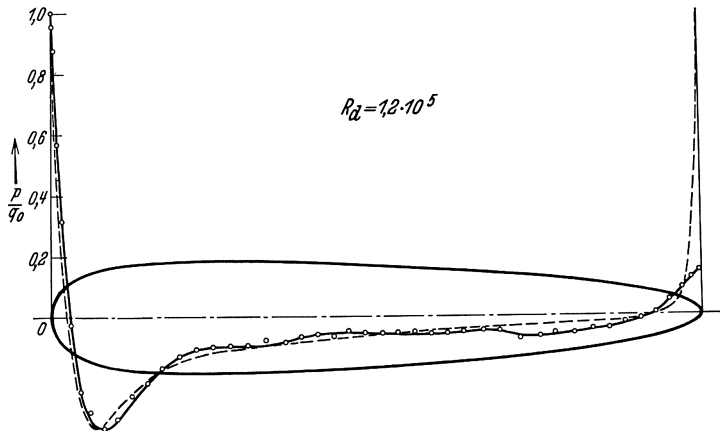


Abb. 91. Druckverteilung (berechnet und gemessen) an einem Luftschiffkörper (nach Fuhrmann).

¹ v. Kármán: Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math. phys. Klasse 1911, S. 509; 1912 S. 547 und Rubach: Über den Mechanismus des Flüssigkeits- und Luftwiderstandes. Phys.Z. 1912, S. 49.

und der Oberflächenwiderstand vernachlässigbar klein ist, was durch ein schlankes hinteres Ende mit Sicherheit erreicht werden kann.

Fuhrmann¹ hat zum ersten Male derartige Ermittlungen durchgeführt. Abb. 91 zeigt, wie Rechnung und Versuch gut in Einklang stehen.

Bei Beurteilung des Widerstandkoeffizienten nach der Formel

$$W = c_w \cdot q \cdot F$$

entsteht bei Luftschiffen ein schiefes Bild. Der Schattenquerschnitt, auch Spantquerschnitt genannt, interessiert beim Luftschiff weniger.

Die Fragestellung ist hier folgende. Bei einem gegebenen Volumen V soll ein möglichst kleiner Widerstand vorhanden sein. Es ist deshalb zweckmäßig, in die Widerstandsformel eine Fläche einzusetzen, die aus V abgeleitet wird. Man wählt meist die Fläche eines Würfels, der denselben Inhalt wie V hat. Diese ist gleich $V^{\frac{2}{3}}$; so ergeben sich zwei Widerstands-

koeffizienten

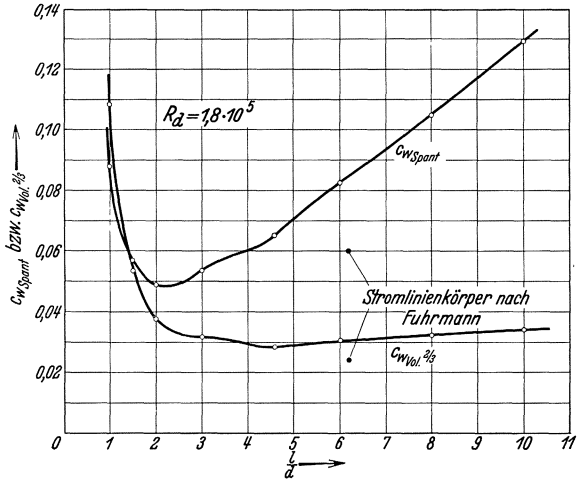


Abb. 92. Widerstandsbeiwerte von Stromlinienkörpern in Abhängigkeit vom Schlankheitsgrad nach amerikanischen Messungen.

$$W = c_{w \text{ spant}} \cdot F \cdot q$$

$$W = c_{w \text{ vol}}^{\frac{2}{3}} \cdot V^{\frac{2}{3}} \cdot q . \tag{45}$$

Für den konstruktiven Aufbau ist noch die Verhältnisgröße

$$\frac{\text{Länge}}{\text{größter Durchmesser}} = \frac{l}{d}$$

maßgebend. In Abhängigkeit von diesem sog. Schlankheitsgrad ist in Abb. 92 für eine Reihe amerikanischer Luftschiffmodelle $c_{w \text{ spant}}$ und $c_{w \text{ vol}}^{\frac{2}{3}}$ aufgetragen.

Das Optimum liegt bei ca.

$$\frac{l}{d} = 4 \div 5 .$$

¹ Fuhrmann, Georg: Diss. Göttingen 1912.

Bei gegebener Spantfläche ist hingegen bei

$$\frac{l}{d} \sim 2 \div 3$$

das Optimum vorhanden.

V. Der Tragflügel.

32. Die Haupteigenschaften des Tragflügels.

a) Einfache Überlegungen.

Vor der eingehenden Behandlung des Tragflügels wird es sich vielleicht lohnen, gewisse plausible Grundvorstellungen zu festigen. Die erste Frage, die sich dem Anfänger aufdrängt, ist wohl die: Wie kommt es, daß der Auftrieb so bedeutend groß gegenüber dem Widerstand ist? Durch „rohe“ Abschätzung läßt sich diese Frage verhältnismäßig leicht beantworten. Aus Abb. 93 erkennt man die Dicke h und die Tiefe t des Tragflügels. Der Widerstand ist nach früheren Überlegungen abhängig von der in Strömungsrichtung versperrenden Fläche, die hier

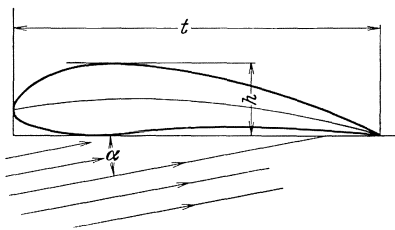


Abb. 93. Übliche Bezeichnungen beim Tragflügel.

proportional h sein muß. Der Auftrieb hingegen wird abhängen von der Fläche, die in Richtung der Strömung liegt. Wir können diese Fläche proportional t setzen. Da alle Kräfte nun durch hydraulische Drücke entstehen, liegt es nahe, einen mittleren Überdruck zugrunde zu legen, der sich gleich-

mäßig auf die Dicke h und die Tiefe t verteilt. Dieses Verhältnis ist bei normalen Profilen ca. 1:10. Von derselben Größenordnung ist nun auch in der Tat das Verhältnis vom Widerstand zum Auftrieb.

Eine weitere plausible Erklärung über die Entstehung des Auftriebs abseits der genau durchgeführten Rechnung dürfte noch am Platze sein. Nach dem Impulssatz läßt sich eine summarische Aussage leicht erzielen. Der Auftrieb entsteht dadurch, daß der Tragflügel eine große sek. Luftmasse q mit der Geschwindigkeit v' nach unten wirft. Nach dem Impulssatz entspricht dem ein Rückdruck $q \cdot v'$, der gleich dem Gewicht des Flugzeuges sein muß. Es ist dieselbe Rückdruckkraft, die man beim Abschuß eines Gewehres verspürt. Ob die weggeschleuderten Massen aus Luft oder festen Körpern bestehen, ist vollkommen gleichgültig.

b) Genauere Betrachtung.

In Abschnitt I2f war bereits erörtert worden, unter welchen Bedingungen ein Körper einen Auftrieb erhält. Notwendig war ein Wirbel

von einer Zirkulation Γ (Umlaufintegral) und eine Parallelströmung mit der Geschwindigkeit U . Man erhält

$$A = \rho \cdot U \cdot \Gamma \cdot b .$$

Abb. 94 enthält für einen Zylinder die reine Wirbelströmung (b), für denselben Zylinder die Parallelströmung (a) und die Kombination beider Strömungen (c), die angeblich einen Querdruck d. h. Auftrieb bringen soll (reibungsfreie Strömung). Die Symmetrieverhältnisse des letzten Bildes (Abb. 94 c) zeigen schon, daß nur eine auf der Parallelströmung senkrecht stehende Kraft auftreten kann. Oberhalb des Zylinders erkennt man an den eng liegenden

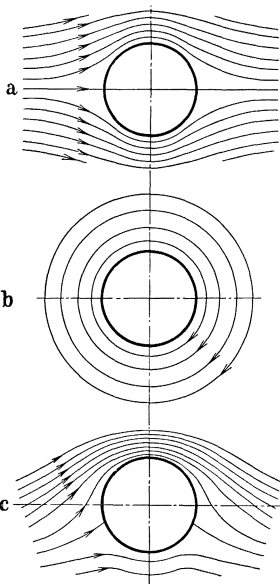


Abb. 94. Zylinderströmung. a Parallelströmung, b Zirkulationsströmung, c Parallelströmung mit Zirkulation.

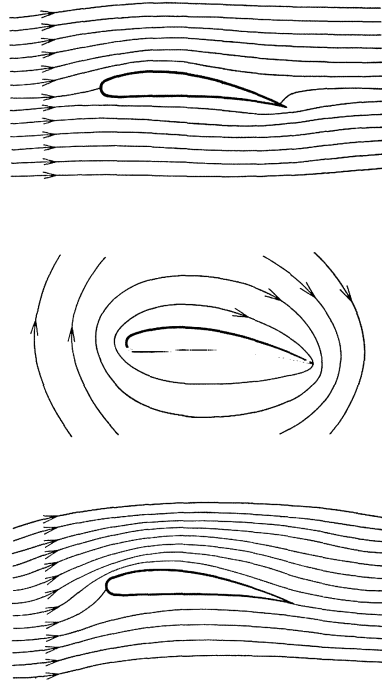


Abb. 95. Tragflächenströmung. Parallelströmung ohne Zirkulation; Zirkulationsströmung; Parallelströmung mit Zirkulation bei glattem Abfluß.

Stromlinien eine hohe Geschwindigkeit. Nach der Bernoullischen Gleichung bedeutet dies einen kleinen Druck; unterhalb des Zylinders ist gerade das Gegenteil vorhanden. Die Auftriebskraft ist somit offensichtlich.

Dieser Fall ist identisch mit dem sog. Magnuseffekt, bei dem durch Drehen des Zylinders in der angedeuteten Richtung die Entstehung des Zirkulationswirbels erzwungen wird.

Der Tragflügel ist nun eine Querschnittsform, die den zum Auftrieb

notwendigen Wirbel von selbst entstehen läßt. In einer Parallelströmung ergibt der Tragflügel zunächst eine Strömung nach Abb. 95 (oberes Bild). Ein Auftrieb ist nicht vorhanden. Die Zirkulationsströmung

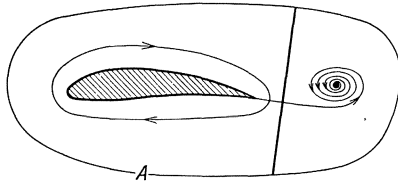


Abb. 96. Schematische Darstellung der beiden Anfahrwinkel.

zeigt das mittlere Bild von Abb. 95. Durch Zusammensetzung beider Bewegungen entsteht bei passend gewählter Zirkulation das untere Bild d. h. ein glattes Abfließen. Wie in der wirklichen Strömung der Zirkulationswirbel entsteht, soll die folgende Überlegung zeigen.

Die Umströmung der scharfen Hinterkante, die sich bei reibungsfreier Strömung zuerst einstellt, bewirkt ein Aufrollen der Strömung mit einer Trennfläche. Es bildet sich ein Wirbel, der in Abb. 96 angedeutet ist und wegschwimmt. Da nun in der reibungsfreien



Abb. 97. Strömungsbild kurz nach dem Start. Der Zirkulationswirbel und Anfahrwirbel sind deutlich zu erkennen.

Strömung die Gesamtzirkulation Null sein muß, ist für den durch die Kurve *A* begrenzten Bereich, in dem die Strömung entsteht, diese Rechnung auszuführen. Der erkennbare Wirbel hat nun eine Zirkulation, so daß eine gleich große Zirkulation um den Tragflügel mit entgegengesetzter Drehrichtung übrig bleiben muß. Ist nun der Wirbel, auch Anfahrwirbel genannt, wegeschwommen, so bleibt die mit dem

Wirbel behaftete Parallelströmung übrig. Es entsteht Abb. 95 (unteres Bild); am hinteren Ende erkennt man jetzt einen glatten Abfluß.

Die Bestätigung dieser Überlegungen durch den Versuch ist sehr eindrucksvoll. Die Aufnahme von Abb. 97 ist in der Weise entstanden, daß bei stillstehender Kamera der Flügel vom Zustand der Ruhe aus bewegt wurde. Man erkennt die Entstehung des Anfahrwirbels sowie eines zweiten Wirbels um den Tragflügel. Der Weg des Tragflügels während der Belichtungszeit ist deutlich zu erkennen. Hält man nach kurzem „Start“ den Tragflügel plötzlich still, so löst sich auch der

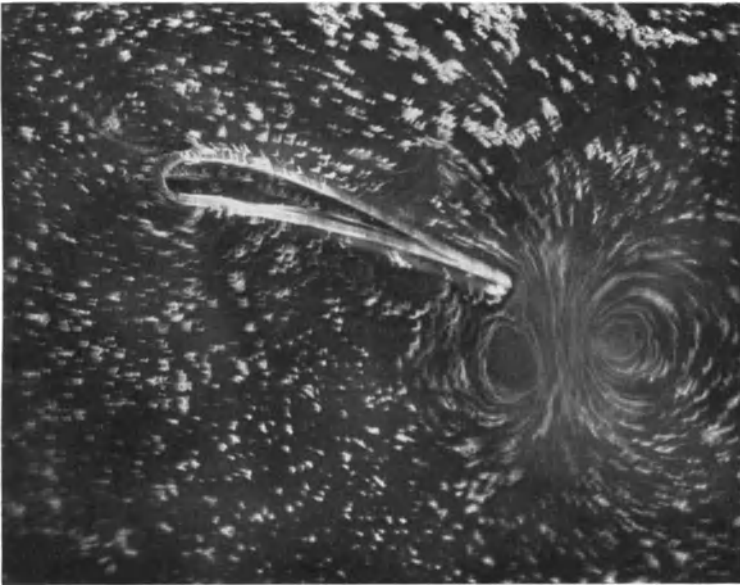


Abb. 98. Kurz nach dem Start wurde der Tragflügel gestoppt. Der Zirkulationswirbel hat sich wieder vom Tragflügel gelöst und schwimmt mit dem Anfahrwirbel zusammen weg.

Wirbel um den Tragflügel und schwimmt mit dem Anfahrwirbel gemeinsam weg. Abb. 98 zeigt diesen Vorgang. Aus den Aufnahmen geht klar hervor, daß tatsächlich ein Wirbel mit den Tragflügeln vorhanden ist.

Für die Kraftwirkung, d.h. den Auftrieb spielt außer der Anströmgeschwindigkeit nur die Wirbelstärke, durch die Zirkulation zahlenmäßig erfaßt, eine Rolle. Unabhängig von der Form des Tragflügels ist

$$A = U \cdot \rho \Gamma \cdot b .$$

Rein strömungstechnisch können wir somit den Tragflügel als einen tragenden Wirbelfaden betrachten. Da die von einem Wirbelfaden bedingten Geschwindigkeiten nach S. 18 umgekehrt proportional der Entfernung vom Wirbelzentrum abnehmen, erhalten wir eine sehr wichtige

Erkenntnis für die Störung der Parallelströmung, die durch die Anwesenheit eines Tragflügels bedingt ist. Wir stellen fest: Die durch den Tragflügel entstehenden Störungen der Parallelströmung klingen mit $\frac{1}{r}$ ab. In weiter Entfernung sieht die Strömung genau so aus, als wenn der Tragflügel durch einen Einzelwirbel ersetzt wäre. Für später kommende Anwendungen merken wir uns noch eine andere Ausdrucksweise derselben Tatsache: Die Fernwirkung eines Tragflügels ist eine verhältnismäßig starke, da sie nur umgekehrt proportional der 1. Potenz der Entfernung abnimmt.¹

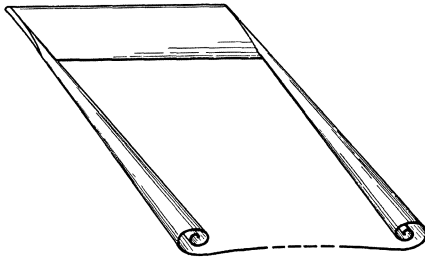


Abb. 99. Schematische Darstellung der Randwirbel.

Durch die endliche Begrenzung des Flügels entsteht eine Störung der Strömung, die aus Abb. 99 leicht zu erkennen ist. Da auf der oberen Seite Unterdruck und auf der unteren Überdruck ist, findet eine Umströmung der Tragfläche statt. Besonders mit einer langgestreckten Gasflamme² ist dieser Vorgang deutlich zu erkennen. Es stellt

sich eine spiralgig nach hinten schlagende Flamme ein, die deutlich zwei an den Tragflügelenden nach hinten abgehende Wirbel veranschaulicht. Hierdurch wird der Auftrieb vermindert und zwar um so mehr, je kleiner das sog. Seitenverhältnis $\frac{b}{t}$ ist. (t ist Tiefe und b Länge des Flügels.) Denn prozentual wird ein um so kleinerer Teil der Tragfläche hierdurch verschlechtert, je größer $\frac{b}{t}$ ist. Aber auch der Widerstand muß hierdurch eine Vergrößerung erfahren. Denn eine einfache Überlegung zeigt schon, daß die in den beiden abgehenden Wirbeln befindliche kinetische Energie irgendwie durch Widerstandsarbeit bezahlt werden muß.

Um einen Überblick über diesen zusätzlichen sog. induzierten Widerstand zu erhalten, denken wir uns, — was nach dem Voraufgehenden erlaubt ist, — den Tragflügel durch einen Wirbelfaden ersetzt. Nun kann nach S. 20 ein Wirbelfaden in einer idealen Flüssigkeit niemals

¹ Sehr fruchtbar hat sich diese Idealisierung erwiesen bei der Behandlung des Doppeldeckerproblems. Verfasser ist es in einer früheren Studie (Neuartige Berechnung der aerodynamischen Eigenschaften eines Doppeldeckers. Ztschr. f. Flugtechnik u. Motorluftschiffahrt, 1925, S. 183) gelungen, mit dieser stark idealisierten Annahme die Eigenschaften des Doppeldeckers sehr genau aus bekannten Eigenschaften des Eindeckers zu berechnen.

² Dieses neue Beobachtungsmittel erwies sich nach Versuchen des Verfassers bei nicht zu großen Geschwindigkeiten auch als sehr brauchbar für Arbeiten in großen Windkanälen.

enden. Es ist nicht anderes möglich, als daß der Wirbelfaden an den Enden des Tragflügels nach hinten unbegrenzt weiterlaufen muß. Man erkennt, daß die seitlichen Fortsetzungen des Wirbels identisch sind mit dem durch das Umströmen der Tragflügelenden bewirkten Wirbel.

Durch die nach hinten abgehenden Wirbel (das ganze Wirbelsystem wird meist mit Hufeisenwinkel bezeichnet) entsteht nun eine Störung des Geschwindigkeitsfeldes, deren Wirkung näherungsweise ermittelt werden soll.

Ein Einzelwirbel erzeugt an der Stelle r eine Umfangsgeschwindigkeit (d. h. hier Abwärtsbewegung) von der Größe

$$v_{1r} = \frac{\Gamma}{2 \pi r_1} .$$

Der zweite Wirbel bewirkt seinerseits eine Abwärtsbewegung

$$v_{2r} = \frac{\Gamma}{2 \pi r_2} .$$

Die tatsächliche Störung an dieser Stelle ist durch die Summe beider Geschwindigkeiten gegeben.

$$v = \frac{\Gamma}{2 \pi} \left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right] .$$

Die ausgezogene Kurve (Abb. 100) stellt diese Summe dar. Damit kennen wir die durch die beiden abgehenden Wirbel bedingten „induzierten“ Geschwindigkeiten am Flügel, allerdings unter der Voraussetzung, daß die Wirbelfäden beiderseitig ins Unendliche gehen. Da sie einseitig aufhören, ist, wie leicht ersichtlich, nur die Hälfte einzusetzen, so daß in der Mitte des Tragflügels eine Abwärtsbewegung von folgender Größe entsteht:

$$v = \frac{1}{2} \frac{\Gamma}{2 \pi \frac{b}{2}} + \frac{1}{2} \frac{\Gamma}{2 \pi \frac{b}{2}} = \frac{\Gamma}{\pi b} = \frac{A}{\pi \rho b^2 \cdot w} .$$

Setzen wir diese Abwärtsbewegung, unter der ersten rohen Annahme, daß v konstant über der Flügellänge ist, mit der Geschwindigkeit der Parallelströmung w zusammen, so ergibt sich eine neue resultierende Anströmgeschwindigkeit, die gegenüber der ursprünglichen Richtung um einen Winkel α geneigt ist, der aus

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{w}$$

zu ermitteln ist (Abb. 101). Da nun der Auftrieb, in der noch immer vorausgesetzten reibungsfreien Strömung, immer senkrecht auf der

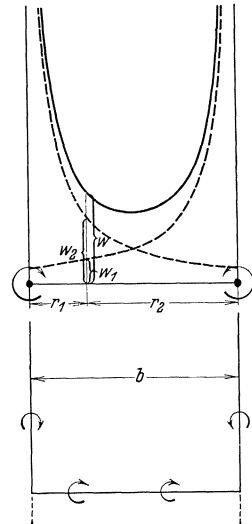


Abb. 100. Geschwindigkeitsfeld der Randwirbel¹.

¹ Nachtrag bei der Korrektur: In Abb. 100 ist W durch v zu ersetzen.

Anströmrichtung steht, erfährt auch der Auftrieb diese Neigung, so daß eine Komponente in Strömungsrichtung entsteht, die als Widerstand zu buchen ist.

$$W = A \cdot \frac{v}{w} = \frac{w \cdot \rho \cdot \Gamma \cdot b}{w} \cdot \frac{\Gamma}{\pi b} = \frac{\rho \Gamma^2}{\pi}$$

ersetzen wir noch

$$\Gamma = \frac{A}{w \rho b},$$

so erhalten wir

$$W = \rho \frac{A^2}{\pi \cdot w^2 \rho^2 \cdot b^2} = \frac{A^2}{\pi w^2 \rho b^2}.$$

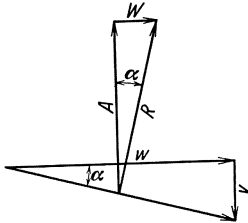


Abb. 101.

Der so gefundene induzierte Widerstand wächst somit mit dem Quadrat des Auftriebes, so daß $A = f(W)$ eine Parabel darstellen müßte. Und in der Tat sind die durch den Versuch ermittelten Kurven von ähnlicher Gestalt.

Nun wird nach Abb. 100 v nach den Flügelenden zu unendlich groß, was physikalisch unmöglich wird. Umgangen wird diese Schwierigkeit mathematisch dadurch, daß man die Wirbel stetig über die Flügelbreite nach hinten abgehen läßt (Abb. 102). Es läßt sich sogar eine konstante Abwärtsgeschwindigkeit erzielen, wenn die Zirkulation elliptisch verteilt wird. In diesem Falle ist $v' = 2v$. Der induzierte Widerstand wird damit doppelt so groß wie oben

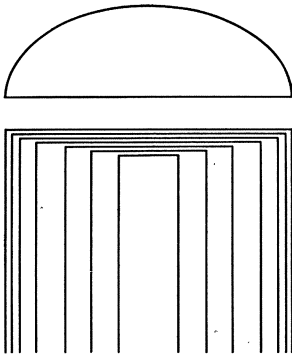


Abb. 102.
Elliptische Auftriebsverteilung mit stetig abgehenden Wirbeln.

$$W = 2 \frac{A^2}{\pi w^2 \cdot \rho \cdot b^2}. \tag{46}$$

Es läßt sich nun nachweisen, daß bei der elliptischen Zirkulationsverteilung, d. h. gleichzeitig elliptischer Auftriebsverteilung die Verluste durch den induzierten Widerstand am kleinsten sind. Deshalb wird man diese Auftriebsverteilung immer anstreben. Konstruktiv ist dies verhältnismäßig leicht (z. B. elliptische Grundrißform oder Verwindung des Flügels) erreichbar.

Um von der jeweiligen Fläche und Geschwindigkeit unabhängig zu sein, wird man sowohl beim Auftrieb wie beim Widerstand dimensionslose Zahlen zur Angabe der Kräfte anstreben. Da eine Kraft hydraulisch durch Fläche \times Druck dargestellt wird, wird man die für den Vorgang charakteristischen Druckkräfte und Flächen heranziehen. Als Fläche kommt nur die Flügelfläche F in Frage, die beim Widerstand hier

ebenfalls verwendet wird. Der einzige charakteristische Druck ist der Staudruck

$$q = \frac{\gamma}{2g} w^2 .$$

Danach werden die Koeffizienten c_a und c_w wie folgt definiert

$$A = c_a \cdot F \cdot q . \tag{47}$$

$$W = c_w \cdot F \cdot q . \tag{48}$$

Als Beispiel soll das c_w des induzierten Widerstandes ermittelt werden. In Gl. (46) setzen wir W und A aus Gl. (47) und Gl. (48) ein.

$$c_w F \cdot q \cdot \frac{1}{2} w^2 = \frac{2 c_a^2 \cdot F^2 \cdot \frac{1}{4} w^4 q^2}{\pi w^2 \cdot q \cdot b^2}$$

hieraus

$$c_w = c_a^2 \frac{F}{\pi b^2} . \tag{49}$$

Ist der Flügel rechteckig, so ist

$$F = b \cdot t, \quad \text{d. h.} \quad c_w = \frac{c_a^2}{\pi} \cdot \frac{t}{b} .$$

Der Widerstand ist somit direkt proportional mit $\frac{t}{b}$. Den reziproken Wert $\frac{b}{t}$ nennt man Seitenverhältnis. Durch kleines $\frac{t}{b}$ kann also dieser Verlust weitgehend beeinflusst werden. Bei Segelflugzeugen spielt der induzierte Widerstand eine entscheidende Rolle, so daß man hier großes Seitenverhältnis anstreben wird.

33. Die Bestätigung der Tragflügeltheorie durch den Versuch.

Trägt man in einem Schaubild $A = f(W)$ auf, so erhält man leicht die resultierende Luftkraft R durch Verbindung eines Punktes der Kurve mit dem Nullpunkt, wie aus Abb. 103 zu erkennen ist. Diese Darstellung, die bereits von Otto Lilienthal eingeführt wurde, ist deshalb äußerst zweckmäßig und gestattet außerdem sofort den Anstellwinkel sowie den Gleitwinkel¹, d. h. den Winkel zwischen R und

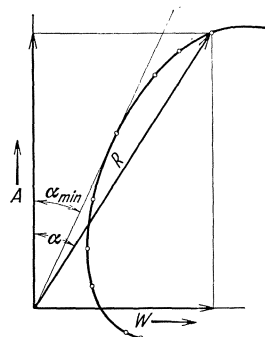


Abb. 103. Kraftbeziehungen im Polardiagramm.

¹ Die Bezeichnung „Gleitwinkel“ hat ihre Berechtigung darin, daß ein Flugzeug bei abgestelltem Motor unter diesem Winkel zu Boden gleitet. Da das Gleichgewicht in diesem Falle nur aus drei Kräften: Gewicht = Auftrieb + Widerstand gebildet wird, ist der Nachweis sehr leicht durch ein Kräfte-dreieck zu erbringen.

A abzulesen. Insbesondere erhält man durch die Tangente den besten d. h. kleinsten Gleitwinkel und den dazu gehörenden Punkt. Die jeweiligen Anstellwinkel werden in die Kurve gleich eingetragen.

Wählt man statt A und W die Koeffizienten c_a und c_w , so wird an dieser Eigenschaft des Schaubildes nichts geändert. In dieser Form findet man meist die Eigenschaften eines Tragflügels aufgetragen. Die Darstellung wird Polare genannt.

Abb. 104 zeigt einen Flügelquerschnitt und die zugehörige Polare¹⁾. Der dem Seitenverhältnis entsprechende induzierte Widerstand

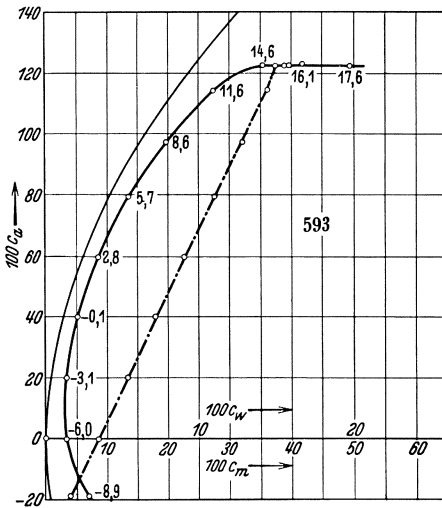


Abb. 104. Polare eines Tragflügels.

wir den Widerstand berechnen, wenn derselbe für irgend ein Seitenverhältnis bekannt ist, da c_{w0} bei beiden Seitenverhältnissen ziemlich genau denselben Wert behält.

$$c_{w1} = c_{w0} + \frac{c_a^2 F_1}{\pi b_1^2} ; \quad c_{w2} = c_{w0} + \frac{c_a^2 \cdot F}{\pi b_2^2} ,$$

$$c_{w2} = c_{w1} + \frac{c_a^2}{\pi} \left(\frac{F_2}{b_2^2} - \frac{F_1}{b_1^2} \right) . \quad (51)$$

Da der induzierte Widerstand durch eine Verdrehung der Anströmrichtung entsteht, muß der wirksame Anstellwinkel α ebenfalls korrigiert

¹ Entnommen aus : Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen. Lfg. 3, R. Oldenbourg, München.

$$c_w = \frac{c_a^2 F}{\pi b^2}$$

ist eingetragen. Die wirkliche Kurve unterscheidet sich von dieser Parabel praktisch nur durch eine Parallelverschiebung. Der ungefähr konstante Widerstand, der noch hinzukommt, ist der Oberflächenwiderstand.

Bezeichnen wir diesen Oberflächenwiderstand, auch Profilwiderstand genannt, mit c_{w0} , so ist der Gesamtwiderstand

$$c_w = c_{w0} + \frac{c_a^2 F}{\pi b^2} . \quad (50)$$

Vergleichen wir zwei gleiche Profile, die verschiedene Seitenverhältnisse haben, so können

werden. Setzen wir

$$\varphi \sim \operatorname{tg} \varphi = \frac{v}{w} = \frac{W}{A} = \frac{c_w}{c_a} = \frac{c_a^2 \cdot F}{\pi b^2 c_a} = \frac{c_a F}{\pi b^2}$$

so erhalten wir die tatsächlichen Anstellwinkel:

$$\alpha_1 = \alpha_0 + \frac{c_a}{\pi} \frac{F_1}{b_1^2}; \quad \alpha_2 = \alpha_0 + \frac{c_a}{\pi} \frac{F_2}{b_2^2}.$$

Hier bedeutet α_0 den Anstellwinkel des unendlich langen Flügels. Es ist somit folgende Korrektur des Anstellwinkels zu berücksichtigen

$$\Delta \alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = \frac{c_a}{\pi} \left(\frac{F_2}{b_2^2} - \frac{F_1}{b_1^2} \right). \quad (52)$$

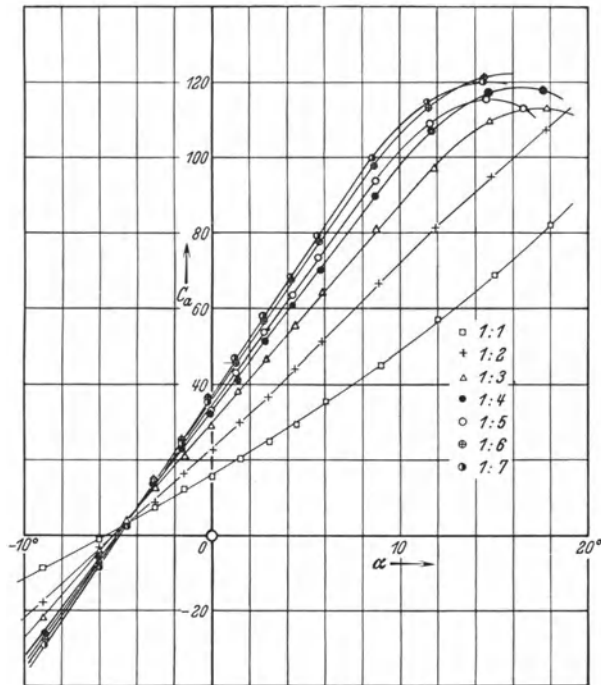


Abb. 105. $c_a = f(\alpha)$ für verschiedene Seitenverhältnisse bei gleichem Profil.

Abb. 105 zeigt $c_a = f(\alpha)$ ¹ für mehrere Tragflügel, die gleiches Profil, aber verschiedene Seitenverhältnisse haben². Die Umrechnung aller Flügel auf das Seitenverhältnis 1:5 ergibt bei Verwendung von Gl. (51) u. Gl. (52) Abb. 106. Das gleiche ist mit den Polaren geschehen (Abb. 107

¹ $c_a = f(\alpha)$ ist in dem verwendeten Gebiet eine Gerade. Theoretisch ergibt sich der erste Teil einer sin-Kurve, die bei kleinen Winkeln durch eine Gerade angenähert werden kann.

² Die angeführten Versuchsergebnisse sind entnommen aus: v. Kármán-Levi. Civitu, Hydro- und Aerodynamik, J. Springer, Berlin.

u. 108). Die Umrechnung nach den angegebenen Formeln ergibt nun für jedes Profil eine Polare bzw. eine Linie. Das Zusammenfallen aller Versuchspunkte in eine Kurve ist eine der schönsten Bestätigungen der Tragflügeltheorie.

Wie die Eigenschaften des Tragflügels von der äußeren Form abhängen, soll eine kurze Übersicht zeigen. Welche charakteristischen geometrischen Parameter hat ein Tragflügel? Wir bringen einen Flügel nach Abb. 93 in einen rechten Winkel. Sämtliche senkrechten Schnittlinien halbieren wir und bekommen so ein Gerippe, das die Krümmung

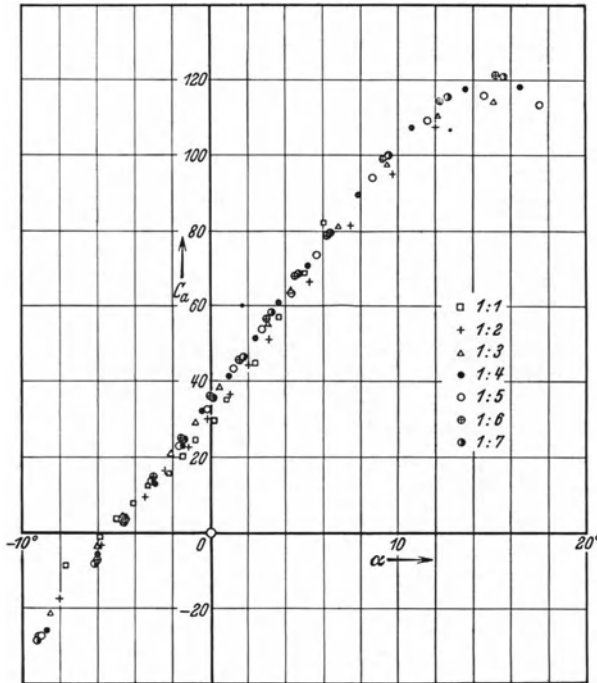


Abb. 106. Umrechnung der c_a - und α -Werte auf Seitenverhältnis 1:5.

darstellt. Man erkennt, daß die Dicke h und Krümmung die auffälligsten geometrischen Parameter sind.

Abb. 109 zeigt die Polaren von Profilen gleicher Krümmung, aber verschiedener Dicke nach Göttinger Messungen¹. Mit zunehmender Dicke wächst das Auftriebsmaximum, jedoch steigt der Widerstand bei kleinen Anstellwinkeln. Da hier die Projektionsfläche senkrecht zur Strömung größer wird, leuchtet dies ein.

Bei den Profilen nach Abb. 110 ist die Dicke beibehalten, die Krümmung jedoch geändert. Man stellt fest, daß mit größerer Krümmung

¹ Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen, R. Oldenbourg, München.

das Auftriebsmaximum steigt und der Widerstand bei kleinen Anstellwinkeln vergrößert wird. Die Wirkung ist somit ähnlich der vorherigen. Wir bemerken gleichzeitig, daß mit kleiner werdender Wölbung die Momentenlinie sich immer mehr einer Geraden nähert. Bei gleichbleibender Krümmung ist dasselbe Verhalten bei wachsender Dicke vorhanden.

In Abb. 111 befinden sich noch die Polaren für die ebene Platte, sowie für verschieden gewölbte Platten. Der Vergleich mit den Profilen zeigt hier besonders kraß

1. den Einfluß der Wölbung,
2. den großen Widerstand plattenförmiger Tragflächen gegenüber guten Profilen.
3. die Momentenlinie geht bei symetrischer Anordnung d. h. bei der geraden Platte durch den Nullpunkt. In diesem Falle findet keine Druckpunktwanderung statt. Derselbe bleibt für alle Anstellwinkel in $\frac{1}{4}$ Tiefe von der Vorderkante.

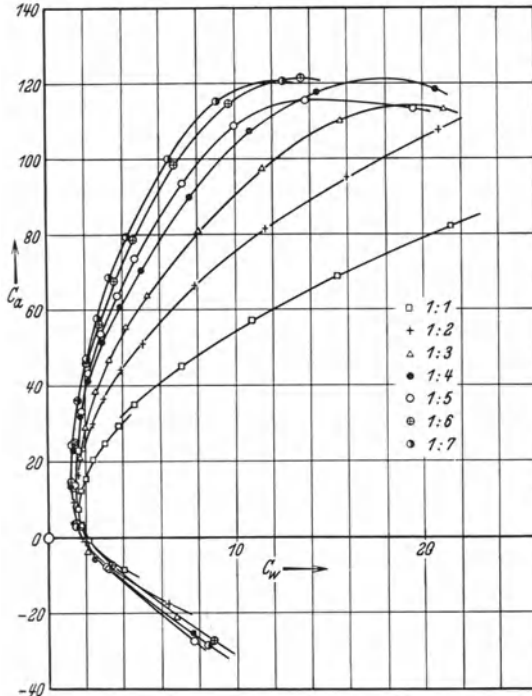


Abb. 107. Polaren für gleiche Profile bei verschiedenen Seitenverhältnissen.

Bei vielen praktischen Anwendungen muß man wissen, wie die Drücke auf Ober- und Unterseite verteilt sind. Abb. 112 zeigt für einen normalen Anstellwinkel die Druckverteilung. Wichtig ist die Erkenntnis, daß die Hauptwirkung ein Ansaugen der oberen Seite des Flügels ist und zwar ist das vordere Stück das wirksamste. Da bei großem Unterdruck nach dem Bernoullischen Satz eine hohe Geschwindigkeit vorhanden ist, erkennt man die Notwendigkeit sorgfältigster Ausführung gerade dieses Teiles. Der Tragflügel würde deshalb besser Saugflügel heißen.

Abb. 112 zeigt noch die Druckverteilung für einen Anstellwinkel -3° ,

Abb. 109.
Tragflächen
gleicher
Wölbung mit
verschiedenen
Dicken.

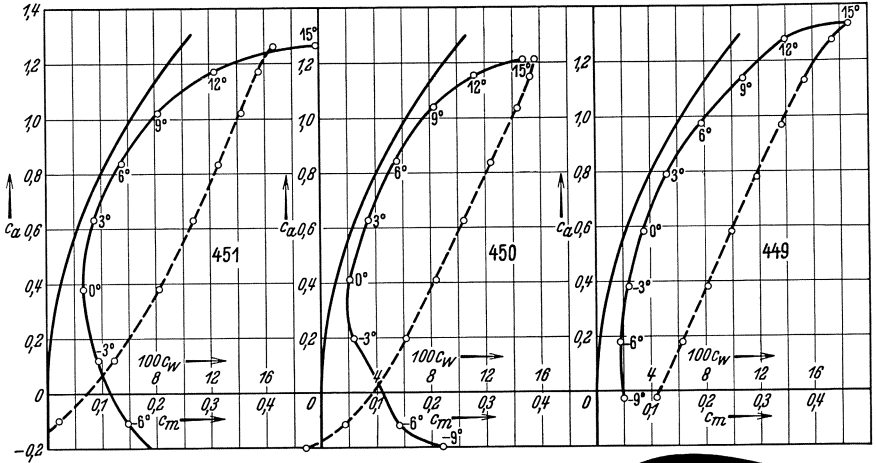


Abb. 110.
Tragflächen
gleicher Dicke
mit verschie-
denen
Wölbungen.

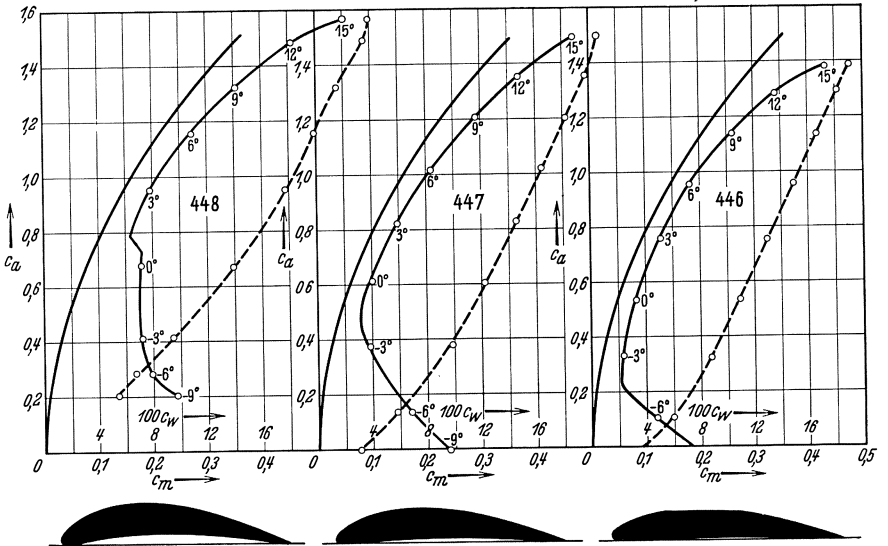
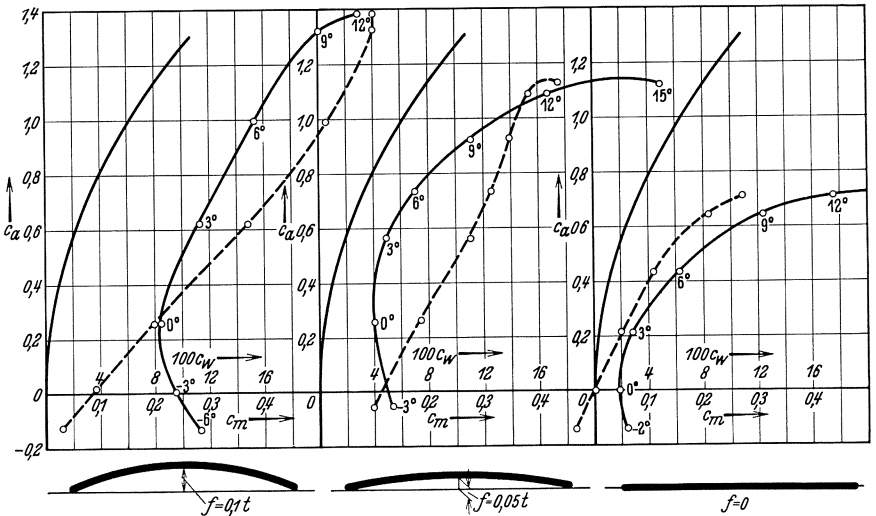


Abb. 111.
Platten
verschiedener
Wölbung.



bei dem der Auftrieb verschwindet. Man bemerkt, daß die Resultierende auf Druck- und Saugseite ein Kräftepaar ergibt und den Flügel stark auf Verdrehung beansprucht. (Beim Sturzflug liegt dieser Fall vor.)

Abb. 113 zeigt, wie bei einem Flügel mit dem Anstellwinkel der Angriffspunkt der Resultierenden wandert. Die Kräfte sind nach Größe und Richtung (sog. Druckmittelpunkt) eingetragen. Mit wachsendem Anstellwinkel wandert die Druckkraft nach vorn, um später wieder zurückzugehen. (Dies ist der Grund, weshalb ein Tragflügel allein instabil ist.)

Es ist üblich und zweckmäßig, das Moment der resultierenden Luftkraft in Bezug auf die Vorderkante anzugeben, statt der Darstellung von Abb. 113, da die Resultierende verschiedentlich ins Unendliche wächst. Zu einer dimensionslosen sog. Momentenzahl kommt man

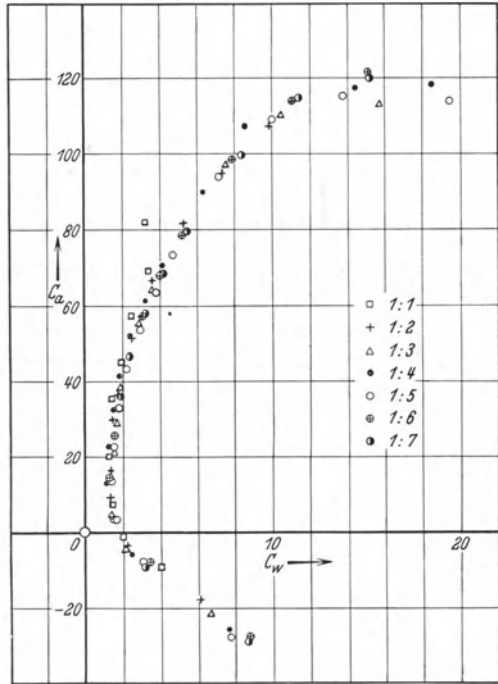


Abb. 108. Umrechnung der Polaren mit verschiedenen Seitenverhältnissen auf das Seitenverhältnis 1 : 5.

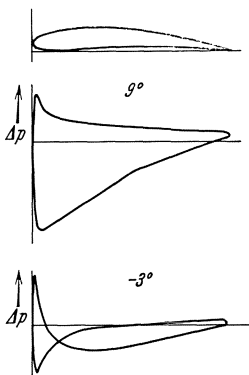


Abb. 112. Druckverteilung am Tragflügel bei normalem Anstellwinkel und bei verschwindendem Auftrieb.

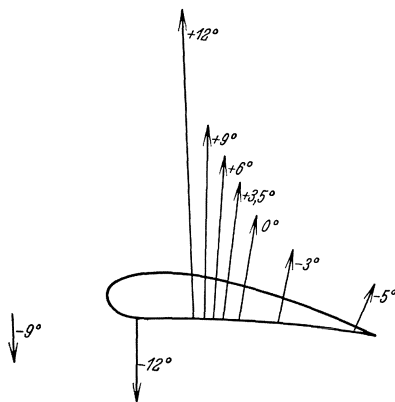


Abb. 113. Größe, Richtung und Lage der Luftkraftresultierenden bei einem Tragflügel.

durch folgende Darstellung

$$M = c_m \cdot t \cdot F \cdot \frac{\gamma}{2g} w^2. \quad (53)$$

Im Polardiagramm ergibt $c_m = f(c_a)$ eine Gerade mit der Neigung 1:4 (s. Abb. 104).

Bei allen Polaren bemerkt man ein starkes Abweichen von der Parabelform, wenn man in die Nähe des Höchstauftriebes kommt. An dieser Stelle löst sich die Strömung auf der Saugseite ab, weil die

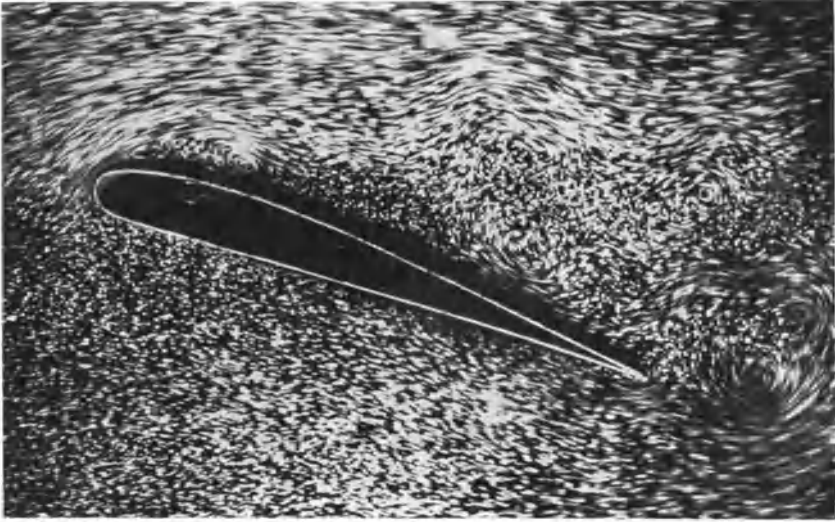


Abb. 114. Abgerissene Tragflächenströmung.

Erweiterung der die Saugseite berührenden Stromlinie zu groß ist. Abb. 114 zeigt, wie sich über dem Tragflügel jetzt ein Wirbelraum befindet. Der Auftrieb besteht jetzt hauptsächlich aus dem Überdruck auf die untere Seite. Durch sog. Überziehen eines Flugzeuges wird dieser Zustand erreicht. Das Fliegen in diesem Zustand sehr gefährvoll, weil die Stabilität der Maschine gegen sog. Rollbewegung nunmehr äußerst gering ist. Trudeln, Abrutschen über den Flügel sind die Bewegungsformen, die hierdurch entstehen.

VI. Hilfsmittel zur Verringerung des Widerstandes.

34. Grenzschichtabsaugung. Mitbewegte Wand. Einführung von Druckluft. Hilfsflügel.

Bei gegebenen Querschnittsformen hat es nur dann Zweck, künstlich den Widerstand verringern zu wollen, wenn es sich um Formwiderstand bzw. Ablösungserscheinungen bei durchströmten Körpern handelt. Der

reine Oberflächenwiderstand läßt sich nicht beseitigen. Wenn die Oberfläche vollkommen geglättet ist und die Strömung anliegt, sind alle Möglichkeiten erschöpft. Ist die Strömung bzw. die Grenzschicht laminar, so hat diese Maßnahme nicht einmal viel Zweck, da die laminare Strömung die Wandrauigkeiten einfach „schluckt“, und sozusagen eine neue glatte Flüssigkeitswand schafft. Im turbulenten Gebiet ist es natürlich sehr wichtig, auf glatte Oberfläche zu achten, wie bereits die Ausführungen über rauhe Rohre gezeigt haben.

Im Übergangsbereich haben wir sogar eine Widerstandsverminderung durch künstliche Rauigkeit (Drahtreif bei der Kugel) feststellen können. Man hüte sich aber, diese Maßnahme als Mittel zur Widerstandsverminderung ansehen zu wollen. Denn im turbulenten Bereich, wo die Strömung schon wieder anliegt, würde ein Drahtreif nur den Widerstand vergrößern. (Zu vergleichen ist diese paradoxe Erscheinung etwa mit der interessanten Wirkungsgradaufbesserung bei Ausbildung der Kavitation; praktisch ist diese Verbesserungsmöglichkeit ebenfalls nicht verwertbar.)

Grenzschichtabsaugung. Ist eine Diffusorströmung zu sehr erweitert, so reißt die Strömung ab. Der durch Wandreibung entstehende Energieverlust der wandnahen Schichten befähigt sie nicht mehr, Geschwindigkeitsenergie in Druck umzusetzen. Der Gegendruck wird größer und die Ablösung ist da. Schafft man nun die ermüdeten Teilchen in irgendeiner Weise weg, so ist eine Besserung zu erwarten. In der Tat gelingt es, durch Absaugen die Grenzschicht zu beseitigen und so neue Schichten an die Wand zu legen, die größere Geschwin-

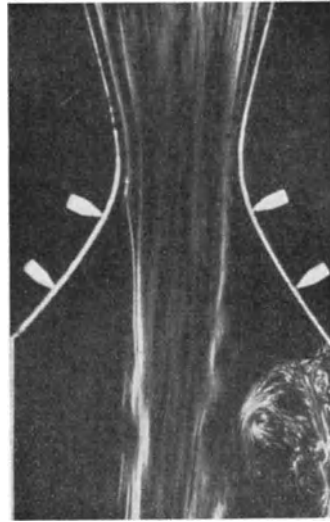


Abb. 115. Stark erweiterte Düse mit Ablösung nach Prandtl. Strömung schießt durch.

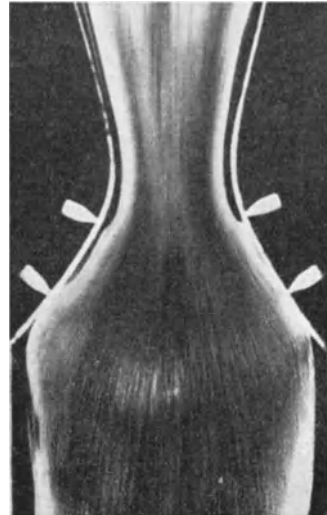


Abb. 116. Stark erweiterte Düse mit Absaugung der Grenzschicht nach Prandtl.

digkeit haben. Abb. 115¹ zeigt die abgerissene Strömung und Abb. 116 die Wirkung der Absaugung. Die Strömung liegt tatsächlich wieder an und ergibt einen ziemlich verlustfreien Umsatz in Druck. Wie Rechnung und Versuch gezeigt haben, ist die zum Absaugen notwendige Pumparbeit prozentual klein gegenüber dem Energieumsatz in der Düse. Bei Tragflügeln, Kugeln usw. hat man mit Erfolg von dieser Maßnahme Gebrauch machen können. Zwecklos wäre es dagegen, einen Diffusor, bei dem die Strömung gerade noch anliegt, hiermit verbessern zu wollen. Im Gegenteil würde man hier durch Wegschaffen der Grenz-



Abb. 117. Ablösungsfreie Umströmung einer Wand durch Absaugen am Kopf der Trennwand. Umströmung im Uhrzeigersinne.

schicht das Geschwindigkeitsgefälle und damit die Wandreibung erheblich steigern.

Es hat sich gezeigt, daß die Wirkung des Absaugens nicht immer auf obige Erklärung zurückgeführt werden kann. Besonders der vom Verfasser ausgeführte Versuch (Abb. 117) dürfte dies bekräftigen. Der Umlauf in einer schaufellosen Versuchsrinne wurde dadurch bewerkstelligt, daß die Trennwände aus einem Schlitz Druckwasser zum Antrieb der Strömung ausstoßen (Umlauf durch kleine Zentrifugalpumpe) und am Kopf der Trennwände wieder absaugen. Die Abrundung an den Absaugungsstellen ist durch Siebe, die unter dem Wasserspiegel liegen, ausgebildet. Es zeigt sich, daß das Wasser ohne Ablösung die ziemlich scharfe Umströmung ausführt. Die reibungsfreie Strömung um die Trennwände, die ziemlich identisch mit Abb. 117 ist, hat an der Krümmung

¹ Prandtl: Die Entstehung von Wirbeln in einer Flüssigkeit mit kleiner Reibung. Z. F. M. 1927, H. 21.

sehr große Geschwindigkeiten, die nach außen abnehmen. Nach früheren Ausführungen ist durch die auftretenden Zentrifugalkräfte eine Drucksteigerung von innen nach außen vorhanden. Das Absaugen wirkt hier nun so, daß diese für die glatte Umströmung notwendige Drucksenkung künstlich erzeugt wird. Die Absaugstelle ist eine Senke, bei der, wie wir ja wissen, der Druck sich stark verminderte.

Die Wirkung des Absaugens kann also zwei Ursachen haben.:

1. reine Grenzschichtabsaugung,
2. Senkenwirkung.

Die Fernwirkung einer Senke ist nach früheren Feststellungen eine sehr

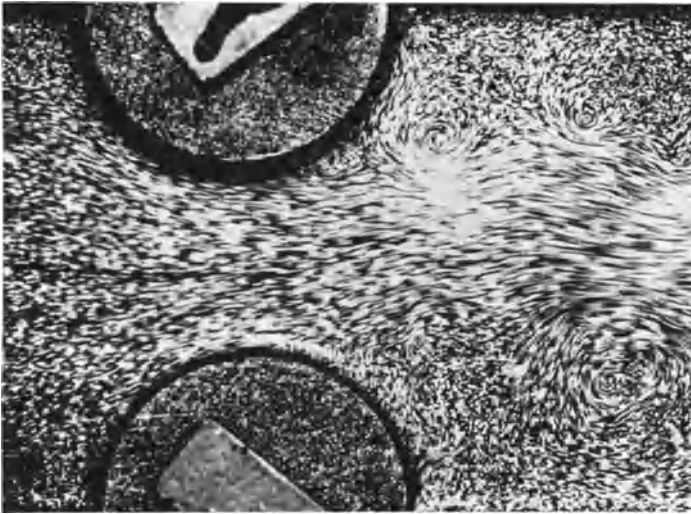


Abb. 118. Kanal durch Walzen verengt. Strömung löst sich ab und schießt durch.

starke. Die hierdurch überlagerten Geschwindigkeiten nehmen erst mit $\frac{1}{r}$ ab. In vielen Fällen ist es nicht leicht zu entscheiden, welcher Anteil der Wirkung à Konto Senkenwirkung bzw. à Konto Grenzschichtabsaugung kommt.

Eine „triviale“ Methode zur Verhinderung der Ablösung besteht darin, daß man die Wand in Strömungsrichtung mitlaufen läßt und so die Ursache der Grenzschichtbildung überhaupt vermeidet. Der folgende Versuch des Verfassers zeigt dies besonders eindrucksvoll. Ein durch zwei Walzen verengter Kanal ergibt nach Abb. 118 eine Ablösung am engsten Querschnitt. Läßt man die Walzen in Strömungsrichtung rotieren, so legt sich die Strömung wieder mustergültig an (Abb. 119). Der Magnuseffekt ist ein weiteres Beispiel.

Gewissermaßen das Gegenstück zur Grenzschichtablösung ist der Antrieb der Grenzschicht durch Einblasen von frischer Flüssigkeit. Beim Tragflügel hat man mit Erfolg ein Anliegen der Strömung bei



Abb. 119. Kanal durch rotierende Walzen verengt. Strömung legt sich wieder an. (Verlustfreie Drosselstelle.)

größeren Anstellwinkeln erreichen können, indem Frischluft mit einem Gebläse an der Saugseite eingeblasen wurde (Abb. 120). Auch hier ist



Abb. 120. Blasflügel. Abreißen der Strömung wird verhindert durch Einblasen von Frischluft auf die Saugseiten.

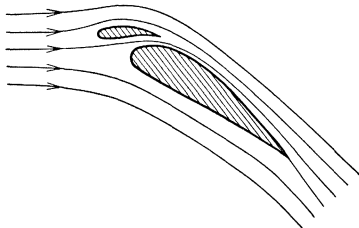


Abb. 121. Tragflügel mit Hilfsflügel nach Lachmann und Handley-Page.

es zwecklos, im Bereiche kleiner Anstellwinkel, wo also die Strömung sowieso anliegt, eine Verbesserung erwarten zu wollen.

Äußerst brauchbar ist die Korrektur einer abgerissenen Strömung durch Hilfsflügel. Lachmann und Handley Page haben zum erstenmal beim Tragflügel hiervon Gebrauch gemacht. Es zeigt sich, daß ein kleiner Hilfsflügel nach Abb. 121 die Strömung selbst bei großen Anstellwinkeln zum Anliegen bringen kann. Wichtig ist, daß der zwischen Flügel und Hilfsflügel liegende Spalt düsenförmig verengt wird. Die Wirkung des Spaltflügels läßt sich als Belüftung der oberen Seite auffassen. Durch den Spalt kommt frisches Material auf die obere Seite und wirkt dort so ähnlich wie das Einblasen.

Die Wirkung des Spaltflügels läßt sich als Belüftung der oberen Seite auffassen. Durch den Spalt kommt frisches Material auf die obere Seite und wirkt dort so ähnlich wie das Einblasen.

Die Wirkung von Hilfsflügeln kann auch anders erklärt werden, wenn man sich den Hilfsflügel als kleinen Tragflügel vorstellt. Die von einer Tragfläche erzwungene Strömung wurde S. 97 als Überlagerung eines Wirbels mit einer Parallelströmung aufgefaßt. In welchem Grade also ein Hilfstragflügel eine Fernbeeinflussung der Strömung bewirkt, hängt von dem Geschwindigkeitsfelde eines Wirbels ab. Diese Geschwindigkeiten nehmen umgekehrt proportional mit dem Radius ab, genau so wie bei der oben behandelten Senke. Dies ist die stärkste Fernwirkung, die strömungstechnisch überhaupt erzielt



Abb. 122. Normale Plattenströmung.

werden kann. Diese Zirkulationsströmung um den Hilfsflügel wirkt nun so, daß im Spalt die Geschwindigkeit verkleinert, über dem Hilfsflügel dieselbe vergrößert wird. Der Hilfsflügel reißt also gewaltsam die Strömung in den Wirbelraum des Hauptflügels.

Townend¹ benutzte diesen Gedanken, um durch einen kreisförmig gebogenen Hilfsflügel den Stirnwiderstand von Sternmotoren herabzusetzen. An einer einfachen Platte soll die Wirkung nach Versuchen des Verfassers gezeigt werden. Abb. 122 zeigt die gewöhnliche Plattenströmung. Diese Platte wurde mit Endscheiben versehen im großen Kölner Windkanal untersucht. Es ergab sich ein Widerstand von

¹ Townend, H.: The Townend Ring. Journal of the Royal Aeronautical Society. Vol. XXXIV. Oct. 1930.



Abb. 123. Hilfsflügel verhindern das weite Ausweichen der Strömung nach Abb. 122 und vermindern den Widerstand um 50%.



Abb. 124. Günstigste Stellung der Hilfsflügel für die Kreisplatte. An den Hilfsflügeln löst sich die Strömung ab. (Unterschied zwischen ebenem und rotationssymmetrischem Problem!)

450 g. Im Wasserkanal wurden dann, wie Abb. 123 zeigt, zwei Hilfsflügel so eingestellt, daß die Strömung um die Hilfsflügel wirbelfrei war. Die Nachmessung im Windkanal ergab einen Widerstand von 240 g bei der gleichen Geschwindigkeit, d.h. eine Widerstandsverminderung von $\sim 47\%$. Abb. 124 zeigt noch die Stellung des Hilfsflügels, wie sie von Townsend bei der Kreisplatte am günstigsten befunden wurde. Man sieht, daß bei der ebenen Strömung kein Anliegen mehr vorhanden ist. Im Windkanal ergab sich hier 400 g, d.h. nur 11 % Widerstandsvermin-

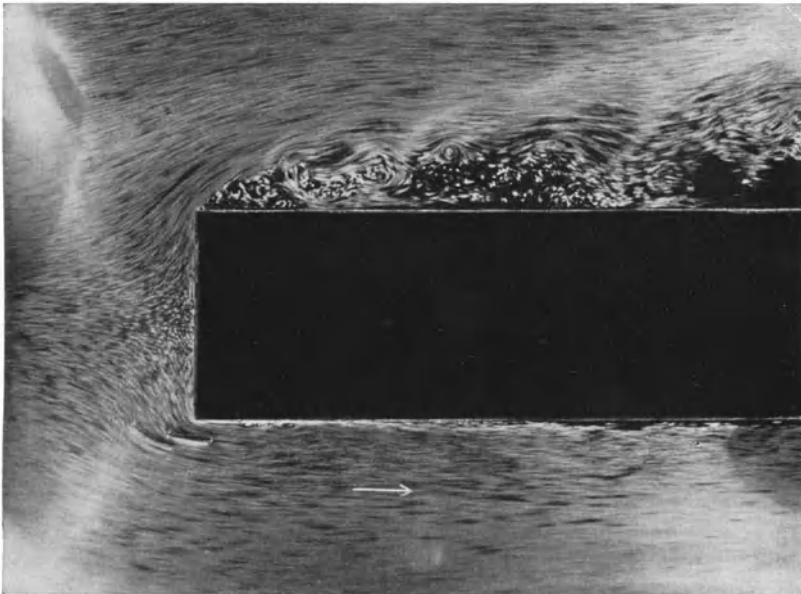


Abb. 125. Verringerung des Stirnwiderstandes durch Hilfsflügel nach Flügel.

derung. Das Beispiel zeigt gleichzeitig, daß man eine rotationssymmetrische Strömung nicht ohne weiteres mit der ebenen vergleichen kann.

Flügel¹ ist noch einen Schritt weiter gegangen und hat unterteilte Hilfsflügel benutzt, um bei allen Widerstandskörpern, die Ablösung zeigen, den Widerstand weitgehend zu verringern. Abb. 125 zeigt, wie durch zwei kleine Hilfsflügel der „Stirnwiderstand“ eines Körpers vermindert werden kann. Die obere Seite läßt deutlich erkennen, wie beim Weglassen der Hilfsflügel starke Wirbelbildung entsteht. In Abb. 126 ist die hintere Ablösung korrigiert. Bei mehreren Schaufeln gelingt es tatsächlich, die Strömung fast ganz wieder zum Anliegen zu bringen. Auch

¹ Flügel, G.: Ergebnisse aus dem Strömungsinstitut der Technischen Hochschule Danzig, Jb. schiffbautechn. Ges. 1930. S. 87.

hier gilt das oben Gesagte. Liegt bei einem Körper die Strömung schon an, oder bereits angenähert an, so ist auch durch Hilfsflügel keine Verbesserung zu erzielen. Im Gegenteil wird dann bei Verwendung von Hilfsflügeln eine Verschlechterung eintreten.

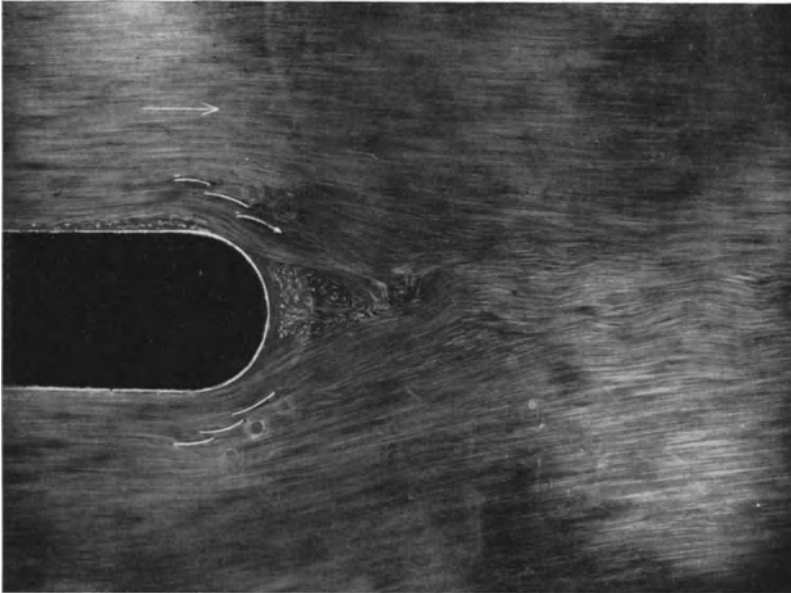


Abb. 126. Verbesserung des Totwasserraumes bei stumpfen Widerstandskörpern nach Flügel.

Wir fassen zusammen: Durch die hier erwähnten Hilfsmittel läßt sich eine um so größere Widerstandsverminderung erzielen, je schlechter der Körper ohne die Hilfsmittel ist.

Praktische Bedeutung haben diese Mittel, wenn z. B. aus konstruktiven oder sonstigen Gründen kein Platz vorhanden ist, um lange Abflußkörper zu bauen, oder wenn sich aus irgend welchen Gründen scharfe Kanten nicht vermeiden lassen (z. B. beim Sternmotor).

VII. Hydraulisches Messen.

35. Messung von Druck und Geschwindigkeit in offener Strömung.

An einem praktischen Beispiele sollen die Hauptgesichtspunkte, die sich bei strömungstechnischen Messungen ergeben, herausgeschält werden.

Aufgabe: Gegeben ein Tragflügel, der unter irgend einem Anstellwinkel angeströmt wird (Abb. 127). Im Punkte *A* sollen Geschwindig-

keit, statischer und dynamischer Druck sowie die Strömungsrichtung festgestellt werden. Mit welchen Mitteln ist dies möglich?

Am einfachsten läßt sich die Strömungsrichtung bestimmen. Ein dünner Wollfaden, an einem Draht befestigt, zeigt sehr gut diese Richtung an. Auch kleine Windfähnchen, bestehend aus einem Rechteck, das in $\frac{1}{4}$ Tiefe von der Vorderkante drehbar gelagert ist, leisten gute Dienste.

Druckmessungen sind schon schwieriger. Der Druck, den ein offenes Meßrohr anzeigt (Pitotrohr), ändert sich mit jedem Winkel, den die Meßöffnung zur Strömungsrichtung einnimmt. Aus den ersten

Erwägungen, die wir bei der Rohrströmung angestellt haben (S. 9) wissen wir, daß der Gesamtdruck erhalten wird, wenn die Meßöffnung direkt dem Strome entgegen gerichtet ist. Dies trifft auch hier bei der freien Strömung zu. Bei bekannter Strömungsrichtung kann also sehr leicht die Gesamtenergie, d.h. die Konstante der Bernoullischen Gleichung bestimmt werden. Es sei bemerkt, daß diese Messung sehr genau ist. Bei sehr kleinen Meßdüsen, wie sie z. B. bei Grenzschichtmessungen verwendet werden, muß allerdings darauf geachtet werden, daß die Wandstärke sehr dünn ist und dann möglichst konisch nach hinten zunimmt.

Schwieriger ist schon die Messung des statischen Druckes. Der Anfänger neigt dazu, die eben verwendete Meßdüse um 90° zu drehen und die sich dann ergebende Anzeige als statischen Druck anzusehen. Sieht man sich diesen Fall nach Abb. 128 genau an, so erkennt man, daß bei der Umströmung der Meßöffnung eine Ablösung entsteht, die einen starken Unterdruck bedingt, unabhängig von der absoluten Größe des Meßröhrchens.

Am leichtesten gewinnt man einen Überblick, wenn man, wie in Abb. 127, die Stromlinien einzeichnet und im Sinne früherer Überlegungen die Stromröhre als Kanal mit reibungsfreien Wänden ansieht. Bei der Rohrströmung ergibt sich der statische Druck aus einer Druckmessung durch Wandbohrung. Tatsächlich läßt sich auch nichts anderes machen. Eine Wand ist nun nicht vorhanden, sie muß

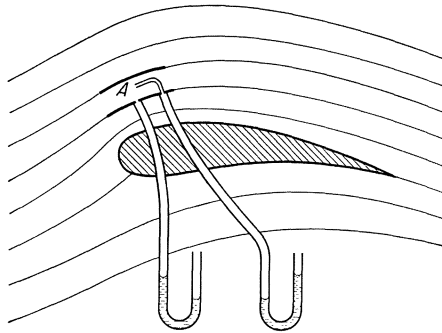


Abb. 127. Messen von Druck, Geschwindigkeit usw. im freien Strömungsfelde.

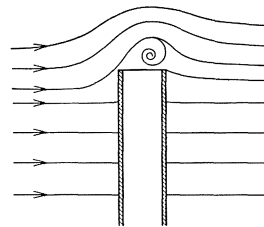


Abb. 128. Umströmung eines zylindrischen Rohres.

erst künstlich geschaffen werden. Da die Stromlinie gekrümmt ist, muß diese Wand genau so gekrümmt sein. In Abb. 127 ist das Meßinstrument, welches so entsteht, eingezeichnet. Einfacher ist die Messung am Körper selbst. Hier genügt selbstverständlich eine einfache Bohrung.

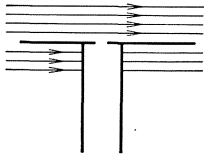


Abb. 129. Sersche Scheibe.

Nun ist es erklärlicherweise unmöglich, für alle möglichen Krümmungen solche Druckmeßinstrumente anzufertigen (etwa nach Abb. 127). Tatsächlich wird diese Messung nur bei geradlinigen Strömungen verwendet. Das Instrument besteht dann aus einer Kreisplatte mit einer Bohrung in der Mitte. An einem kleinen Röhrchen wird dann der Druck gemessen (Abb. 129). Als Sersche Scheibe ist dieses Instrument bekannt geworden. Nachteilig ist, daß dieses Instrument sehr empfindlich gegen Richtungsänderung ist. Dieses dürfte einleuchten, wenn man sich die runde Scheibe als Tragflügel vorstellt.

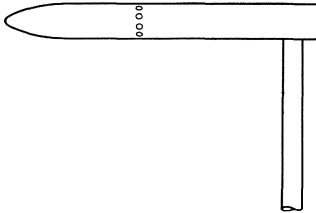


Abb. 130. Drucksonde.

Will man das Instrument bei gekrümmten Strömungen verwenden, so muß die Kreisplatte so klein sein, daß ein Stück Kurve dadurch ersetzt wird.

Die für die Druckmessung notwendigen künstlichen Wände kann man sich noch auf andere Weise bilden. Man bringt ein rundes, vorne gut abgerundetes Rohr genau in Strömungsrichtung (sog. Sonde). In einiger Entfernung von der Vorderkante bringt man ringsum kleine Bohrungen oder einen Ringschlitz an (Abb. 130). Im Innern stellt sich dann der statische Druck ein. Wichtig ist, daß die Bohrungen nicht zu weit vorne liegen, weil dort, wie die Druckverteilungskurve des Luftschiffkörpers zeigt, ein von der vorderen Bugform abhängiger Unterdruck entsteht.

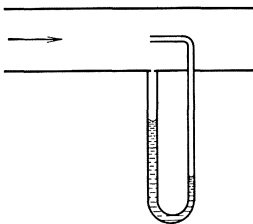


Abb. 131. Geschwindigkeitsmessungen in einem Rohre.

Um die Geschwindigkeit zu messen, müssen wir genau so vorgehen wie beim Rohre (s. S. 9). Wir messen den Gesamtdruck wie oben und den statischen Druck, indem wir uns z. B. ein der Stromröhre genau angepaßtes Rohr anfertigen, an dem durch Anbohrung der statische Druck gemessen wird. Die Differenz beider Drücke ist nach Gl. (6) gleich der Fallhöhe, die zur Geschwindigkeitserzeugung notwendig wäre, d. h. nach der Formel

$$w = \sqrt{2g \Delta H}$$

zu berechnen ist. Nach Abb. 131 kann der Differenzdruck unmittelbar

gemessen werden. Die Bernoullische Gleichung ergibt schnell die Bestätigung des vorhin Gesagten.

$$\text{Gesamtdruck } p + \gamma \frac{w^2}{2g}, \quad \text{statischer Druck } p,$$

Differenzdruck (Staudruck) = Gesamtdruck —
statischer Druck d. h.

$$\frac{\gamma}{2g} w^2 = \Delta p,$$

also

$$w = \sqrt{2g \frac{\Delta p}{\gamma}}.$$

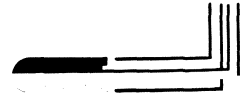


Abb. 132. Prandtl'sches Staurohr.

Die Schaffung einer künstlichen Berandung der Stromlinie ist praktisch natürlich unbrauchbar. Die Verbindung von Drucksonde (Abb. 130) mit Pitotrohr vermeidet geschickt alle Schwierigkeiten. Diese von Prandtl angegebene Anordnung (Abb. 132) hat vorne eine Bohrung zur Messung des Gesamtdruckes und einen seitlichen Ringschlitz zum Messen des statischen Druckes. Getrennte Leitungen führen den Druck nach außen. Das Instrument hat den Vorzug, daß bei Richtungsänderung von ca. 16° der angegebene Staudruck, d. h. Differenzdruck sich kaum ändert. Abb. 133 zeigt die verschiedenen Druckmessungen des Instrumentes d. h. wie statischer Druck, Gesamtdruck und Differenzdruck sich ändern, wenn der Richtungswinkel des Instrumentes mit der Strömungsrichtung sich ändert. Man sieht, daß der statische Druck allein sich schneller ändert, die Gesamtdruckmessung ist schon etwas unempfindlicher, während die Kombination, d. h. die Differenzdruckmessung erfreulicherweise ein großes Stück konstant bleibt¹.

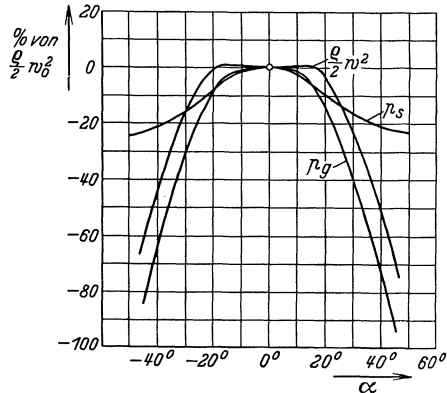


Abb. 133. Einfluß der Schiefstellung gegenüber der Strömungsrichtung beim Prandtl'schen Staurohr, beim Pitotrohr und bei der Drucksonde.

¹ Bei der Druckmessung durch Anbohrung einer Wand ist darauf zu achten, daß 1. die Meßöffnung möglichst klein ist und 2. sorgfältigst jeder Grat beseitigt wird. Genaue Messungen von Fuhrmann (Diss. Göttingen 1912) zeigten, daß selbst bei kleinen Öffnungen von 1/2—1 mm die Druckmessung trotzdem um ca. 1% des Staudruckes zu klein ist. Ist p_0 der statische Druck, w die Geschwindigkeit an der Meßstelle, so ist der gemessene Druck $p = p_0 - \frac{\gamma}{2g} w^2 \cdot 0,01$.

36. Feststellung der Strömungsrichtung mit Stageräten.

Abb. 133 zeigte, daß das Pitotrohr wie auch das Prandtl'sche Staurohr gegen kleine Richtungsänderungen vollkommen unempfindlich

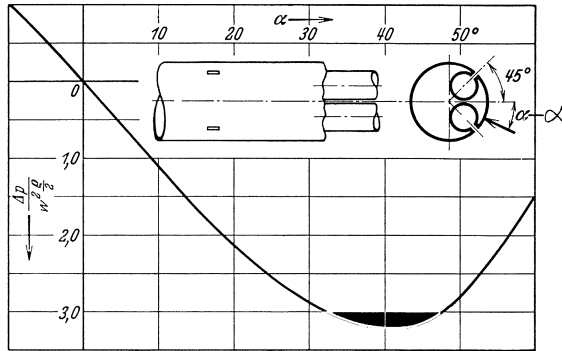


Abb. 134. Feststellung der Strömungsrichtung durch Zylinder, der 2 um 90° verschiedene Öffnungen aufweist. Empfindlichkeit in Abhängigkeit von α .

sind. Eine genaue Richtungsfeststellung ist mit diesen Instrumenten deshalb unmöglich.

Sehen wir uns nun die Druckverteilung um eine Kugel und einen

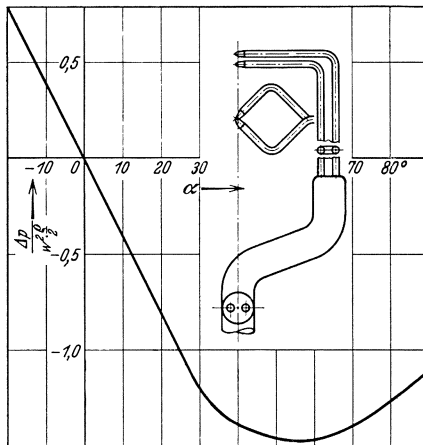


Abb. 135. Feststellung der Strömungsrichtung durch 2 auf einen Punkt hinweisende um 90° verschobene Pitotrohre. Empfindlichkeit in Abhängigkeit von α .

Zylinder an (Abb. 85 und 86, S. 90). An dem vorderen Stau-punkt ist ein Maximum des Druckes vorhanden. Die größte Druckänderung ist bei ca. 45° . Ist an dieser Stelle eine Meßöffnung vorhanden, so wird bei Drehung der Kugel ein Manometer den größten Anschlag geben. Denken wir uns nun eine zweite Messung an der unteren Hälfte (ebenfalls unter 45°), so wird die Differenzdruckmessung den Anschlag Null ergeben. Sobald jedoch eine kleine Drehung nach der einen oder anderen Richtung eintritt, erhalten wir sofort eine

erhebliche Druckanzeige. Es ist, wie man sich leicht nach Abb. 85 u. 86 überlegen kann, der größte Druckunterschied, der bei Drehung einer Kugel bzw. eines Zylinders überhaupt feststellbar ist. Auf dieser Erscheinung beruhen fast alle Richtungsanzeiger.

Abb. 135 zeigt ein solches Meßinstrument, bei dem ein Zylinder die Grundform bildet. Die beigegebene Kurve läßt erkennen, wie die Anzeige zunimmt bei Richtungsänderung. Die Handhabung dieses Instrumentes ist sehr einfach. Man dreht solange, bis das Differenzdruckmanometer Null anzeigt¹.

Statt eines Zylinders kann man auch zwei Pitotrohre nehmen, die unter 90—100° mit ihren Öffnungen zu einem Punkt hinweisen (Abb. 135).

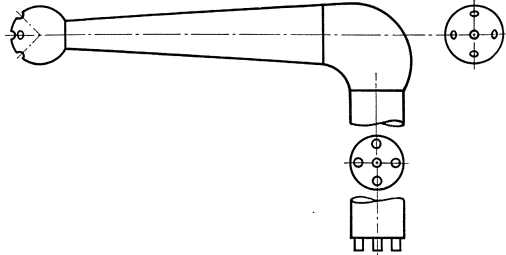


Abb. 136. Taylorsche Kugel zur räumlichen Bestimmung der Strömungsrichtung.

Bei der räumlichen Strömung nimmt man nach Taylor eine Kugel (Abb. 136) mit vier Meßöffnungen unter 45°. Statt der Kugel können auch hier analog der Abb. 135 vier Pitotrohre genommen werden, die in zwei aufeinander senkrecht stehenden Ebenen je zwei Pitotrohre enthalten.

37. Mengen- und Geschwindigkeitsmessungen im Rohre.

a) Feinmessungen. Nach den vorausgehenden Ausführungen insbesondere nach Abb. 131 kann leicht angegeben werden, wie in einem geraden Rohr an einer bestimmten Stelle die Geschwindigkeit gemessen wird. Das Pitotrohr, der Strömung genau entgegengesetzt gerichtet, zeigt genau den Gesamtdruck an, während der statische Druck durch Anbohrung der Wand leicht ermittelt werden kann, da bei geraden Stromlinien der statische Druck in einem Querschnitt konstant sein muß. Der gemessene Differenzdruck Δp ergibt den Staudruck $\frac{\gamma}{2g} w^2$, so daß die Geschwindigkeit aus

$$w = \sqrt{2g \frac{\Delta p}{\gamma}}$$

berechnet werden kann.

Durch Verschieben des Pitotrohres kann die Geschwindigkeitsverteilung im Rohrquerschnitt leicht ermittelt werden. Schwierigkeiten bereiten, wie einleuchten dürfte, die wandnahen Schichten, da das Pitotrohr immer eine endliche Ausdehnung hat, und auch eine gewisse lokale Störung des Geschwindigkeitsfeldes nicht zu vermeiden ist. Ist es jedoch möglich, am Austritt eines Rohres zu messen, so ergibt sich ein doppelter Vorteil: einmal kann nun ein ganz dünnes Pitotrohr über den ganzen Querschnitt also auch die Grenzschicht verschoben werden, außerdem ist der statische Druck gleich dem im Meßraum vorhandenen,

¹ Ohne Drehen des Instrumentes kann auch aus der Manometeranzeige der Winkel der Strömung ermittelt werden.

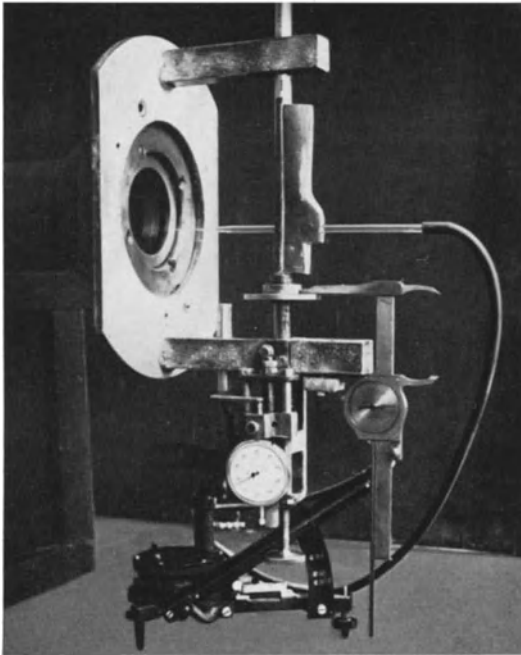


Abb. 137. Vorrichtung zur Aufnahme des Geschwindigkeitsprofils.

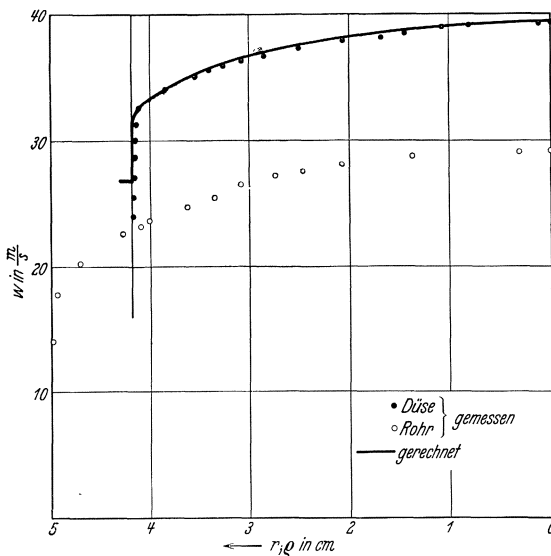


Abb. 138.
Geschwindigkeitsprofil in einer Düse und einem Rohr.

derselbe braucht also nicht gemessen zu werden. Abb. 137 macht mit einer Feinmessungsvorrichtung bekannt, die vom Verfasser zur genauen Aufnahme von Geschwindigkeitsprofilen benutzt wird. Abb. 138 zeigt ein hiermit aufgenommenes Geschwindigkeitsprofil einer Düse und eines Rohres. Die Meßöffnung dieser aus Glas gezogenen und nach einem besonderen Verfahren genau konisch geschliffenen Pitotrohre konnte bis auf $\frac{1}{30}$ mm gebracht werden. Die Größe der

Meßöffnung kann leicht bestimmt werden durch Eintauchen in eine Flüssigkeit. Die Kapillarspannung hält eine bestimmte Flüssigkeitssäule, die in einfachem Zusammenhang mit dem Öffnungsdurchmesser steht.

b) Messung mit Düsen, Blenden usw.

Größere praktische Bedeutung haben die Meßmethoden gewonnen, die mit einer Verengung der Rohrlei-

tung arbeiten. Ist z. B. nach Abb. 139 der Rohrquerschnitt F_1 durch eine Düse auf F_2 verengt, so läßt sich leicht zeigen, daß der Druckunterschied vor und hinter der Verengung in einem einfachen Zusammenhang mit der Geschwindigkeit in der Düse steht. Nachdem die Flüssigkeit die Düse verlassen hat, behält der Strahl zunächst seine Breite, so daß der statische Druck im Strahle in dem Düsenwinkel am Rohre gemessen werden kann. Erst allmählich vermischt sich der Strahl mit der Umgebung und füllt den Querschnitt wieder aus. Für die Messung wesentlich ist nur der beschleunigte Teil dieser Bewegung d. h. die Strömung aus dem Rohre bis zum engsten Querschnitt. Da bei guten Abrundungen die beschleunigte Bewegung fast verlustlos ist, mindestens jedoch ohne Ablösung vor sich geht, kann nach der Bernoullischen Gleichung gerechnet werden. Für die Stelle 1 (vor der Düse) und 2 (engster Querschnitt) schreiben wir die Bernoullische Gleichung an

$$p_1 + \frac{\gamma}{2g} w_1^2 = p_2 + \frac{\gamma}{2g} w_2^2 .$$

Mit Hilfe der Stetigkeitsgleichung $F_1 \cdot w_1 = F_2 \cdot w_2$ erhalten wir nach einigen leichten Umformungen, wenn wir gleichzeitig $p_1 - p_2 = \Delta p$ setzen,

$$w_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{F_2}{F_1}\right)^2}} \sqrt{2g \frac{\Delta p}{\gamma}} * . \tag{54}$$

Aus dem Druckunterschied Δp , der leicht meßbar ist, läßt sich also in der Tat die Geschwindigkeit w_2 berechnen. Die Durchflußmenge ergibt sich dann aus $V = F_2 \cdot w_2$.

* Die Rechnung setzt konstante Geschwindigkeitsverteilung in Düse und Rohre voraus. Dies ist jedoch sehr selten der Fall. Aus Abb. 138 ist zu erkennen, wie die Dinge bei der ausgebildeten Rohrströmung liegen. Verfasser konnte kürzlich nachweisen (Ing.-Arch. V, 4, 1934), daß hierdurch ein Fehler entsteht, wenn man nach Gl. (54) rechnet. Die Größenordnung dieses Fehlers ist nach den Berechnungen $\sim 1/2\%$ und stimmt gut mit der Toleranzgrenze überein, die bei genormten Düsen und Blenden angegeben wird.

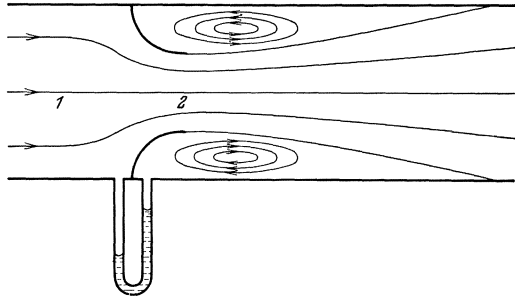


Abb. 139. Messung der Durchflußmenge durch eine Düse.

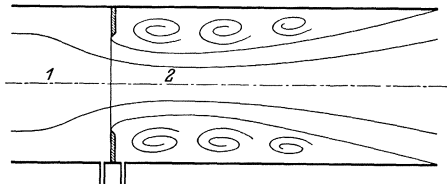


Abb. 140. Messung der Durchflußmenge durch eine Blende.

Prinzipiell dieselbe Wirkung hat die Blende (Abb. 140) eine Platte, die durch ein scharfkantig begrenztes kreisförmiges Loch die Flüssigkeit drosselt.

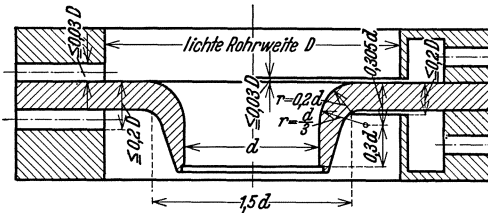


Abb. 141. Abmessungen der genormten Düse.

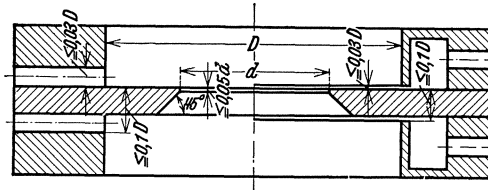


Abb. 142. Abmessungen der genormten Blende.

Die scharfe Kante bewirkt, wie schon bei anderen Beispielen gezeigt werden konnte, eine scharfe Kontraktion. Der wirksame Querschnitt ist deshalb kleiner wie F_2 . Die Verkleinerung bringt man durch eine Zahl μ den sog. Kontraktionskoeffizienten zum Ausdruck. Es ist

$$F'_2 = \mu F_2.$$

Gegenüber der Düse ist auch bei der Rechnung keine Änderung vorhanden, wenn F_2 durch $\mu \cdot F_2$ ersetzt wird.

Die nicht vorhandene Abrundung bei der Blende verschafft sich die Flüssigkeit, wie man erkennt, selbst.

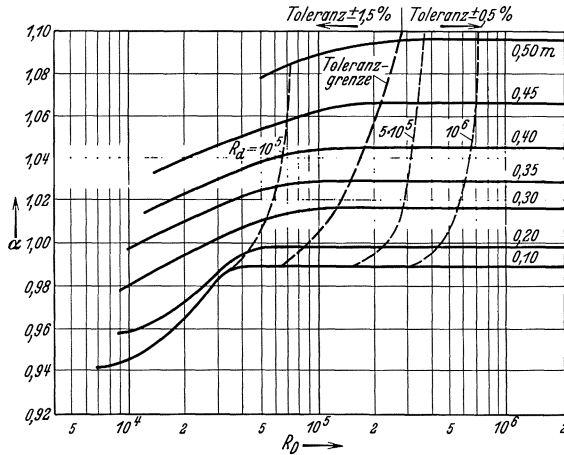


Abb. 143. Düsenkoeffizienten α in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl bei verschiedenen Öffnungsverhältnissen nach „Regeln“. Die Reynoldssche Zahl bezieht sich auf den Rohrdurchmesser und die dortige Geschwindigkeit.

Da diese beiden Meßmethoden die wichtigsten sind, die im Maschinenbau vorkommen, hat eine umfangreiche Forschung sich mit diesen Dingen beschäftigt. Nach genauer Untersuchung sind alle Einzelheiten dieser Messung¹ genau festgelegt und normalisiert worden.

Man schreibt Gl. (54) meist in der Form

$$w_2 = \alpha \sqrt{2g \frac{\Delta p}{\gamma}} \tag{55}$$

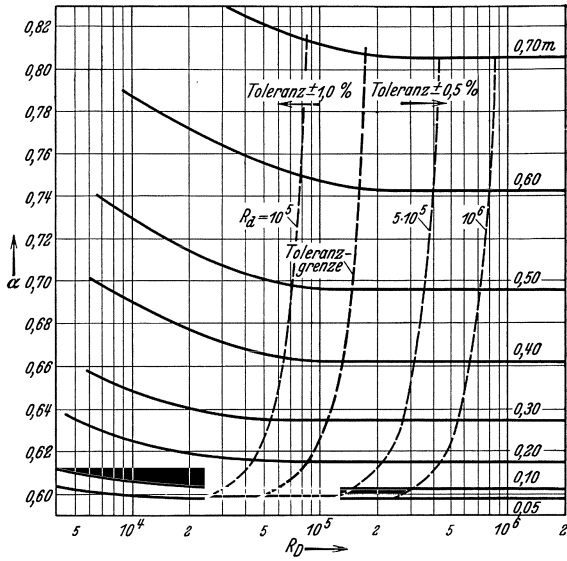
so daß in dem Koeffizienten α sowohl der Einfluß des sog. Öffnungs-

¹ Regeln für die Durchflußmessung mit genormten Düsen und Blenden. Berlin: VDI-Verlag 1930.

verhältnisses $\frac{F_2}{F_1} = m$, wie der Einfluß der Reibung steckt. Bei der Blende ist auch noch der Kontraktionskoeffizient darin enthalten.

Den größten Fortschritt machte die Düsenforschung, nachdem Witte die Reynoldsche Zahl bei den Messungen beachtete. Es zeigte sich die Möglichkeit, Düsen so zu konstruieren, daß die Koeffizienten α oberhalb gewisser Reynoldscher Zahlen konstant sind. Abb. 141 enthält die genaue Aufzeichnung der Düse mit den vorgeschriebenen Maßen, Abb. 142 in der gleichen Weise die Blende. Abb. 143 und 144 zeigen α in Abhängigkeit von R bei verschiedenen Öffnungsverhältnissen.

In den Abb. sind die Grenzen deutlich erkennbar, oberhalb welcher die α -Werte konstant werden. In diesem Gebiet ist die mit Sicherheit erreichte Genauigkeit 0,5 %, wenn man die Einbauvorschriften genau beachtet. Hierzu gehört insbesondere ein freies Rohrstück von ca. $10 \div 20 D$ vor und hinter der Meßstelle. Bemerkt



sei noch, daß bei kleinem Durchmesser $d < 50$ mm die Normen nicht mehr anwendbar sind. Ohne besondere Eichung sind hier Düsen und Blenden nicht zu verwerten, da dann die Rohrreibung und andere Einflüsse sich bemerkbar machen.

Abb. 144. Durchflußzahlen α für Blenden in Abhängigkeit von der Reynoldschen Zahl bei verschiedenen Öffnungsverhältnissen nach „Regeln ...“.

Die hinter der Verengung auftretenden Verluste lassen sich nach dem Impulssatz berechnen. Der Ansatz hierzu war bereits auf S. 39 aufgestellt worden. Bei plötzlicher Verzögerung der Geschwindigkeit von w_2 auf w_1 tritt ein Druckverlust von

$$\Delta p = \frac{(w_2 - w_1)^2}{2g} \cdot \gamma$$

auf.

Von Interesse ist der prozentuale Verlust bezogen auf den Differenzdruck, auch Wirkdruck genannt. Wir nennen dieses Verhältnis zweck-

mäßig den Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{\frac{\gamma}{2g} [w_1 - w_2]^2}{\frac{\gamma}{2g} [w_2^2 - w_1^2]} ;$$

mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung

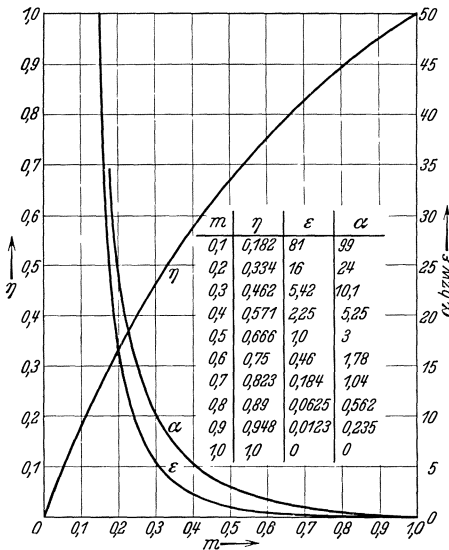


Abb. 145. Verluste, Wirkungsgrad, Wirkdruck bei Düsen und Blenden bezogen auf Staudruck der Rohrleitung, sowie Wirkdruck in Abhängigkeit von m .

was die Meßstelle an Druckverlust kostet, wenn man die Verluste mit dem Staudruck $\frac{\gamma}{2g} w^2$ der Rohrleitung vergleicht. Dies wird durch die Vergleichszahl

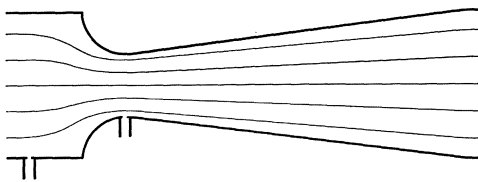


Abb. 146. Venturirühr.

$$F_1 \cdot w_1 = F_2 w_2$$

und der Festsetzung

$$\frac{F_2}{F_1} = m$$

gewinnen wir nach einigen leichten Umformungen

$$\eta = 2 \frac{m}{m + 1} . \quad (56)$$

Abb. 145 zeigt $\eta = f(m)$. Man sieht, daß im Bereich üblicher Öffnungsverhältnisse $m = 0,2 \div 0,5$ die Verluste $70 \div 30\%$ betragen.

Da beim Entwurf einer Meßstelle meist die Rohrleitung und die mittlere Geschwindigkeit gegeben ist, wird man sich oft beim Entwurf schon fragen müssen,

$$\epsilon = \frac{(w_2 - w_1)^2}{w_1^2} = \left(\frac{1 - m}{m} \right)^2 \quad (57)$$

dargestellt. Auch die Frage, das Wievielfache des Staudruckes der Wirkdruck ausmacht in Abhängigkeit von m , ist sehr wichtig. Die Verhältniszahl

$$\alpha = \frac{\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} \cdot \gamma}{\frac{\gamma}{2g} w_1^2} = \frac{1}{m^2} - 1 \quad (58)$$

drückt dieses aus. Abb. 145 zeigt sowohl α wie ϵ in Abhängigkeit von m .

Durch eine stetige Erweiterung des engsten Querschnittes können die Verluste zum Teil vermieden werden. Man erhält so das Venturirohr (Abb. 146). Die Verluste sind hier ca. 15—20% des gemessenen Differenzdruckes. Die Berechnung ist selbstverständlich dieselbe wie bei Düse und Blende. (Eine Normung hat hier noch nicht stattgefunden.)

Die vorgenannten Meßmethoden werden ungenau, wenn das Öffnungsverhältnis groß wird. Es leuchtet ein, daß sich dann die Wandreibung bemerkbar macht. Die auftretenden Reibungsverluste sind allerdings von geringer Rechnung. Wichtig ist, daß die Kontraktion bei der Blende durch den indirekten Einfluß der Reibung bei größeren Öffnungsverhältnissen unkontrollierbare Werte annimmt. Denn die infolge der Wandreibung unterschiedlich beeinflusste Grenzschicht, deren Geschwindigkeit für die Ausbildung der Kontraktion wesentlich ist, wird sich pro-

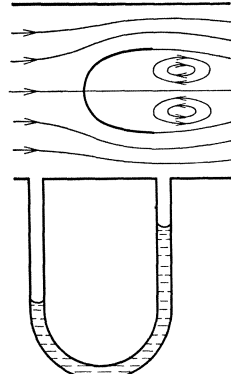


Abb. 147. Verdrängungsdüse nach Eck.

zentual um so mehr bemerkbar machen, je mehr sich die Blende dem Rohrdurchmesser nähert. Die Regeln empfehlen daher eine Verwendung der Blende nur bis $m = 0,7$.

Diesem Mangel wird abgeholfen durch die neue Ecksche Anordnung (Abb. 147, 148, 149). Sie stellt gewissermaßen die Negativlösung der vorherigen Instrumente

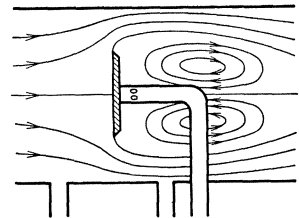


Abb. 148. Verdrängungsplatte nach Eck.

dar. Man erkennt, daß bei der Kreisplatte die Kontraktion durch Wandreibung nicht beeinflusst werden kann. Sie liegt immer in gesunder Strömung.

Die Messung kann direkt an der Rohrwand vorgenommen werden, oder aber wie in Abb. 148 angedeutet, durch eine Druckmessung unmittelbar hinter dem Körper.

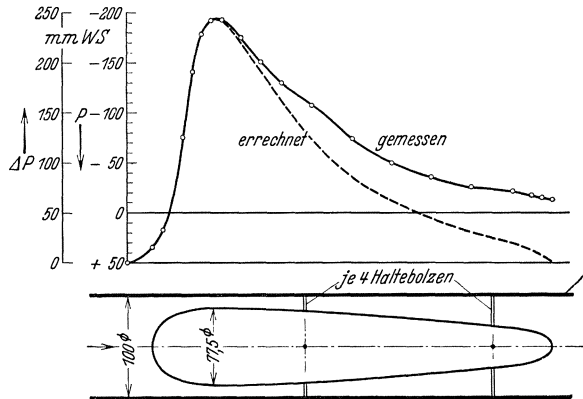


Abb. 149. Verdrängungsventurirohr nach Eck. Druckverteilung.

Der Ersatz des Venturirohres gestattet in höchst einfacher Weise, in einer glatten Rohrleitung eine gute verlustarme Meßstelle zu schaffen.

In bezug auf den Wirkungsgrad ist kaum ein Nachteil gegenüber dem Venturirohr vorhanden. Abb. 149 zeigt für eine Ausführung die gemessene Druckverteilung und die nach der Bernoullischen Gleichung berechnete. Der Wirkungsgrad war 0,79. Ein handelsübliches Venturirohr, welches dieselben Querschnittsabmessungen hatte, ergab $\eta = 0,8$.

38. Überfallmessungen.

Bei größeren Wassermengen und kleinen Gefällen, z. B. Turbinenkanälen, Kanälen, Flußläufen usw. kommt man mit den vorherigen Staugeräten nicht mehr aus. Am geeignetsten ist hier der Überfall.

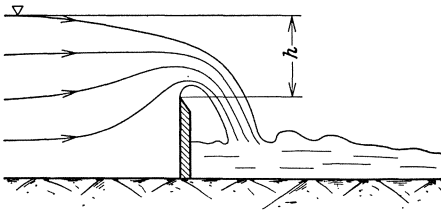


Abb. 150. Überfall zum Messen großer Wassermengen.

Durch ein Wehr, bestehend aus einer scharfkantigen Platte wird das Wasser angestaut (Abb. 150) und aus der Stauhöhe h die Menge berechnet.

Für das abgerundete Wehr war festgestellt worden, daß an der höchsten Stelle des Wehres die Niveauhöhe $\frac{2}{3}$

der ursprünglichen ist. Dieser Querschnitt $\frac{2}{3} b \cdot h$ verringert sich hier nun noch durch Kontraktion auf

$$\mu \cdot \frac{2}{3} b \cdot h.$$

Bei freiem Abfluß ist die Geschwindigkeit $\sqrt{2gh}$, so daß die Menge leicht ermittelt werden kann¹.

$$Q = \mu \cdot \frac{2}{3} b \cdot h \sqrt{2gh}. \quad (59)$$

Die ursprüngliche Niveauhöhe muß also genau gemessen werden. Spitzen, Pegel und ähnliche Hilfsmittel sind hierzu ausgebildet worden.

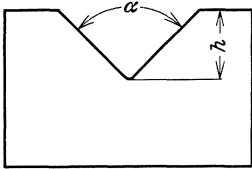


Abb. 151. Überfall nach Thomson.

Eine der wichtigsten Querschnittsformen für Überfallmessungen ist das scharfkantig begrenzte Dreieck, der sog. dreieckige Thomson-Überfall (Abb. 151).

Hier ist

$$Q = \mu \cdot \frac{8}{15} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} h^2 \sqrt{2yh} \quad (60)$$

von Thomson wurde μ für alle Überfallhöhen konstant zu 0,5926 gefunden.

39. Direkt anzeigende Durchflußmesser

Bei den folgenden Meßmethoden wird der Widerstand eines Körpers benutzt, um Geschwindigkeit und Menge zu bestimmen. Der Bayer-Siemens-Messer besteht aus einem konischen Rohrstück, in welchem eine

¹ Wichtig ist eine gute Belüftung der unteren Strahlseite.

scharfkantige Kreisplatte gehoben wird (Abb. 152). Je nach der Durchflußmenge stellt sich eine verschiedene Höhe ein. Die Verschiebung der Platte wird durch einen Stift nach außen geführt und zeigt dort unmittelbar die Menge an. Der Flüssigkeitswiderstand muß immer genau gleich dem Gewicht der Platte sein. Aus der Widerstandsformel

$$W = c_w \frac{w^2}{2g} \cdot \gamma \cdot F$$

folgt, daß dann auch w konstant sein muß. Nehmen wir konstante Kontraktionszahl an, so wird, da w konstant bleibt, die Durchflußmenge sich mit der freien Fläche ändern, d. h. mit dem Hub linear steigen. Da die Widerstandsformel im Rohre nun nicht genau gilt und außerdem die Kontraktion etwas veränderlich ist, findet man bei konischer Röhre kein lineares Verhalten. Bei dem Bayer-Siemens-Messer wird trotzdem genaue Linearität dadurch erreicht, daß der Konus eine schwach gewölbte, empirisch bestimmte Kurve annimmt, wie aus Abb. 152 erkennbar ist.

Die lineare Abhängigkeit der Menge von der Anzeige ist ein großer Vorteil dieses Instrumentes gegenüber den Staugeräten. Da bei letzteren die Manometeranzeige mit dem Quadrat der Durchflußmenge sich ändert, wird hier beim Messen einer kleinen Menge z. B. $\frac{1}{10}$ der Normalmenge die Anzeige nur $(\frac{1}{10})^2 = \frac{1}{100}$ der normalen Anzeige sein, während beim Bayer-Siemens-Messer bei $\frac{1}{10}$ der Menge die Anzeige genau $\frac{1}{10}$ des normalen Hubes ist. Man erkennt, daß bei großen Meßbereichen diese Instrumente unschätzbare Vorteile besitzen.

Prinzipiell dieselbe Wirkung hat der Rota-Messer. In einer schwach konisch erweiterten Glasröhre befindet sich ein freischwebender leichter Rotationskörper nach Abb. 153. Schräge Schlitz am Umfang bringen den Meßkörper in Umdrehung und sorgen so für Stabilisierung. Auf der Glasröhre eingätzte Striche zeigen direkt die Menge an. Auf genau lineares Verhalten wird hier aus begrifflichen Gründen verzichtet, so daß hier jeder Teilstrich vorher genau durch Eichung gefunden werden muß. Der Rota-Messer beherrscht hauptsächlich das Gebiet kleiner Luft- und Gasmengen. Sind doch noch Ausführungen möglich bei Durchfluß-

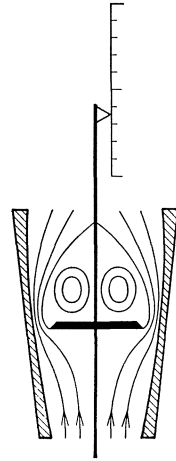


Abb. 152. Bayer-Siemens-Schwimmer-Messer.

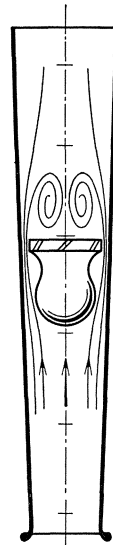


Abb. 153. Rota-Messer.

Wegen der direkten Ablesemöglichkeit und ihrer einfachen Hand-

habung sind die auf diesen Grundlagen beruhenden Instrumente in der Praxis sehr beliebt.

40. Im Flüssigkeitsstrom sich drehende Meßgeräte.

Bei kleinen Geschwindigkeiten versagen die Staugeräte vollkommen, da die Drücke zu klein werden. Bei z. B. 1 m/sec Luftgeschwindigkeit ist der Staudruck nur

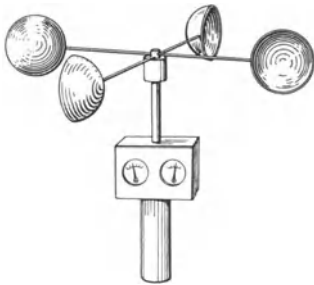


Abb. 154. Anemometer.

$$\Delta p = \frac{\gamma}{2g} w^2 = \frac{1,2}{2g} \cdot 1 \sim \frac{1}{16} \text{ mm WS .}$$

Im Flüssigkeitsstrom sich drehende Flügel u. dgl. eignen sich sehr gut zur Überbrückung dieses Bereiches. Das Anemometer benutzt die verschiedenen Widerstände, die eine offene Halbkugel erfährt, je nachdem in welcher Richtung die Halbkugel angeströmt wird. Die Anordnung nach Abb. 154 wird infolgedessen ein Drehmoment erhalten. Es stellt sich bei einer Windgeschwindigkeit w eine Umfangsgeschwindigkeit u ein mit einem konstanten Verhältnis $\frac{w}{u}$. Die Umdrehzahlen in einer bestimmten Zeit werden gestoppt und nach einer Eichkurve die Geschwindigkeit bestimmt.

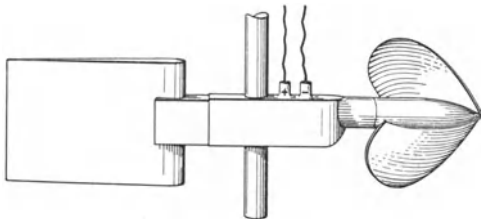


Abb. 155. Ottischer Flügel.

Geschwindigkeiten von 1 m/sec sind hiermit noch meßbar.

Für Wasser hat sich der Ottische Flügel (Abb. 155) gut bewährt. Ein Flügelrädchen, das sich mit Hilfe einer „Windfahne“ frei in

Strömungsrichtung einstellen kann, überträgt seine Umdrehungen auf einen kleinen Schneckentrieb 1:40. Nach einer Umdrehung des Schneckenrades schließt ein elektrischer Kontakt eine Klingelleitung, ein Lichtsignal usw. Mit der Stoppuhr wird die Zeit für eine Anzahl Signalpunkte gemessen. Ist n die Drehzahl in der Sekunde und w die Wassergeschwindigkeit, so ergeben sich lineare Eichkurven

$$w = C_1 + n \cdot C_2 .$$

Für die Ausmessung von Flußläufen, Turbinenkanälen usw. ist der Ottische Flügel das Haupthilfsmittel. Geschwindigkeiten von ca. 10 cm/sec können noch gemessen werden.

Namen- und Sachverzeichnis.

Die Ziffern bedeuten die Seitenzahlen.

- Ablösung 72, 76, 91.
Abwärtsgeschwindigkeit(Tragflügel)101.
Abrutschen des Flugzeuges 110.
Ähnlichkeitsgesetz 51.
Anemometer 132.
Anfahrwirbel 92.
Anlaufstrecke 68.
Anstellwinkel 103.
Anströmrichtung 102.
Atmosphäre 6.
Auftrieb 40.
Auftriebskoeffizient 103.
Ausfluß aus Gefäßen 9, 10, 11.
Ausgebildete Rohrströmung 68.
Bayer-Siemens Messer 131.
Bernoullische Gleichung 14.
Betz 84.
Blasflügel 114.
Blasius 58.
Blende 126.
Bordasches Mundstück 79.
Boussinesq 58.
Dicke des Tragflügels 106.
Divergente Strömung 72.
Doppeldecker 100.
Doppelquelle 27.
Drehbewegung 19.
Drehung (reibungsfrei) 17.
Druck 1.
Druckenergie 10.
Druckhöhe 9.
Druckluft (Einführung in Tragflügel)
114.
Druckmessung 3, 4, 5.
Druckmittelpunkt 109.
Drucksonde 120.
Düse 125.
Durchflußmesser 130.
Eiffel 89.
Elliptische Auftriebsverteilung 102.
Energiesatz für Strömungen 15.
Feinmessungen 123.
Flachsbart 90, 91.
Flügel 117.
Formwiderstand 82, 87.
Freier Strahl 71.
Fromm 70.
Fuhrmann 95.
Gasflamme 56, 100.
Gebers 87.
Geometrische Ähnlichkeit 52.
Gesamtdruck 12.
Geschwindigkeitsverteilung 62.
Gitterberechnung 34.
Glatter Abfluß 97.
Gleitwinkel 103.
Grenzschicht 83.
Grenzschichtabsaugung 111.
Hagen 55.
Hagen-Poiseuillesches Gesetz 50.
Handley-Page 114.
Helmholtz 20.
Helmholtzsche Wirbelsätze 20.
Hilfsflügel 114.
Hopf 60.
Hufeisenwirbel 101.
Hydraulisches Messen 118.
Hydraulischer Radius 70.
Hydrostatik 1.
Impulssatz 32.
Induzierte Geschwindigkeit 101.
Induzierter Widerstand 100.
v. Kármán 62, 68.
Kármánsche Wirbelstraße 93.
Kinematische Zähigkeit 53.
Klein 23.
Kompressibilität 5.
Konforme Abbildung 44.
Kontraktion 79.
Kontraktionskoeffizient 79.
Konvergente Strömung 72.
Krümmer 76.
Krümmung (des Tragflügels) 106.
Kugelströmung 88.
Labyrinth-Dichtung 78.
Lachmann 114.

- Laminare Anlaufstrecke 68.
 Laminare Strömung 56.
 Lilienthal, Otto 103.
 Linienintegral 20.
 Luftschiffkörper 94.
Magnuseffekt 97.
 Manometer 2.
 Mikromanometer 4.
 Mitbewegte Wand 113.
 Momentenzahl 109.
 Nikuradse 60, 61, 67.
 Nippert 77, 78.
 Normalkraft 1.
Oberflächenwiderstand 83, 85.
 Ottscher Flügel 85.
Pannel 59, 60.
 Pitotrohr 119.
 Polardiagramm 103.
 Poiseuille 50.
 Potentialwirbel 19.
 Potenzgesetz 63.
 Prandtl 62, 121.
 Prandtl'sches Staurohr 121.
 Profilwiderstand 84, 104.
Quellen 24.
 Querbewegungen 58, 65.
Regeln für Durchflußmessungen 126.
 Reynolds 51, 55.
 Reynoldsche Zahl 57.
 Ringwaage 5.
 Rohrwiderstand 57.
 Rota-Messer 131.
 Rubach 94.
 Schattenfläche 82.
 Schaufelgitter 34, 36.
 Schiller 70.
 Schwallgeschwindigkeit 47.
 Seitenverhältnis 100, 103.
 Sekundärwirbel 77.
 Senke 24.
 Senkenwirkung (bei der Grenzschicht-
 absaugung) 112.
 Sersche Scheibe 120.
 Spiralen 30.
 Stabilität 109, 110.
 Stanton 59, 60.
 Statischer Druck 1, 12.
 Stationäre Strömung 13.
 Staupunkt 27, 28.
 Staurohr 11, 12.
 Stetigkeitsgleichung 9.
 Stirnwiderstand 117.
 Stokes 21, 83.
 Stoßverluste 38.
 Strahlablenkung 34.
 Stromlinien 12.
 Stromlinienkörper 95.
Taylor'sche Kugel 123.
 Thomson 21, 130.
 Tollmien 72.
 Totwasserraum 91.
 Townend 115.
 Tragflügel 96.
 Trennschichten 23.
 Trudeln 110.
 Turbinengleichung 37.
 Turbulente Anlaufstrecke 69.
 Turbulenz 57, 64.
Überfallmessungen 130.
 Überlagerungsgesetz 25.
 Umströmung v. Tragflügeln 100.
 Überziehen v. Flugzeugen 110.
 Umlaufintegral 20.
Venturirohr 128.
 Verdrängungsdüse 128.
 Verdrängungsplatte 129.
 Verdrängungsventurirohr 128.
 Vermischung eines Strahles 71.
 Verwindung des Flügels 102.
Wandrauhigkeit 67.
 Wassersprung 46.
 Weglänge (freie) 65.
 Wehr 48.
 Widerstandskoeffizient 82, 103.
 Wieselsberger 87.
 Wirbel 17, 19, 22.
 Wirbelfaden 99.
 Wirbelkern 22.
 Wirbelmoment 20.
 Wirbelquelle 29.
 Witte 127.
 Wölbung des Tragflügels 106.
Zähigkeit 49.
 Zirkulation 22, 42.

Berichtigungen.

Seite 11, Abb. 16. Unterschrift: ... Geschwindigkeit von ...
schwindigkeit im ...

Seite 21, sechste Zeile: $\omega = 0$ statt $w = 0$.

Seite 31, Abb. 34: Mittelpunkt des unteren Kreises 0.

Seite 35, elfte Zeile v. unten: Zeichenebene statt Zeileneber

Seite 43, dritte Formel v. oben: setze b^2 statt b .

Seite 49, dritte Zeile: Es heißt $h = \frac{y}{2}$ und $\sqrt{g \cdot y}$ statt $h = \sqrt{g \cdot h}$.

Seite 62, zweite Formelreihe ersetze r in $\sqrt{\frac{w_m \cdot d}{r}}$ durch ν .

Seite 67, untere Hälfte: ersetze κ durch k .

Seite 87, Gl. (44) ist in Abb. (81) verschrieben.

Eck, Strömungslehre I.