

KERBSPANNUNGSLEHRE

GRUNDLAGEN FÜR GENAUE SPANNUNGSRECHNUNG

VON

H. NEUBER

MIT 106 ABBILDUNGEN IM TEXT
UND AUF EINER TAFEL



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

1937



KERBSPANNUNGSLEHRE

GRUNDLAGEN FÜR GENAUE SPANNUNGSRECHNUNG

VON

H. NEUBER

MIT 106 ABBILDUNGEN IM TEXT
UND AUF EINER TAFEL



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

1937

ALLE RECHTE, INSBESONDERE DAS DER ÜBERSETZUNG
IN FREMDE SPRACHEN, VORBEHALTEN.

Additional material to this book can be downloaded from <http://extras.springer.com>.

© SPRINGER-VERLAG BERLIN HEIDELBERG 1937
URSPRÜNGLICH ERSCHIENEN BEI JULIUS SPRINGER IN BERLIN 1937

ISBN 978-3-662-35735-4

ISBN 978-3-662-36565-6 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-662-36565-6

LUDWIG FÖPPL
ZUM 50. GEBURTSTAGE

Vorwort.

Die Fortschritte der Technik, insbesondere des Leichtbaues, bringen heute mehr und mehr das Bedürfnis nach einer genauen Festigkeits- und Spannungsberechnung mit sich, welche die in einem Konstruktionsteil wirklich auftretenden Spannungen zu ermitteln gestattet, die bekanntlich in der bisherigen Festigkeitslehre unberücksichtigt bleiben.

Die bisher über diesen Gegenstand vorliegende Literatur befaßt sich im wesentlichen nur mit der experimentellen Forschung; diese allein kann aber dem Bedürfnis nach genauer Spannungsermittlung auf die Dauer nicht gerecht werden, da sie sich immer nur auf Einzelfälle erstreckt, während allgemeingültige Gesetzmäßigkeiten auf rein experimentellem Wege nur sehr schwer aufgedeckt werden können.

Zu einer wirklich erfolgreichen Spannungslehre sind aber in erster Linie große und umfassende Gedankengänge erforderlich, und diese können nur durch gründliche theoretische Bearbeitung des Stoffgebietes gewonnen werden. Dieser Aufgabe ist das vorliegende Buch gewidmet.

Nachdem ich mehrere Jahre auf dem Gebiete der mathematischen und experimentellen Spannungsforschung im Institut für Mechanik der Technischen Hochschule München tätig war, hatte die Durchführung dieser Aufgabe für mich außerordentlichen Reiz.

Es sei mir an dieser Stelle gestattet, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. Ludwig Föppl, für die vielfachen Anregungen und Förderungen meiner Arbeiten herzlichst zu danken.

München, den 21. Februar 1937.

H. Neuber.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
I. Einführung	1
1. Die alte Festigkeitslehre	1
2. Forderungen an die genaue Festigkeitsrechnung	1
II. Grundbegriffe der Kerbwirkung	2
1. Die Formzahl	2
2. Das Abklingungsgesetz	3
3. Grundform der Kerben	4
4. Die Formzahl der beliebig tiefen Kerbe	4
III. Grundlagen der Spannungslehre	7
1. Das Gleichgewicht der Spannungen	7
2. Die Formänderung	11
3. Die Formänderung in krummlinigen Koordinaten	13
4. Das Hookesche Gesetz	16
5. Aufstellung der Grundgleichungen	18
6. Der Drei-Funktionen-Ansatz	19
7. Der Rechnungsgang in krummlinigen Koordinaten	23
IV. Theorie der ebenen Kerbwirkung	27
1. Die Ausgangsgleichungen	27
2. Die beiderseitige Außenkerbe	33
A. Reiner Zug	35
B. Reine Biegung	37
C. Reiner Schub	39
3. Die einseitige tiefe Außenkerbe	42
A. Reiner Zug	43
B. Reine Biegung	45
C. Reiner Schub	46
4. Bohrung und Langloch im sehr breiten Stab	47
A. Reiner Zug	48
B. Reine Biegung	51
C. Reiner Schub	53
5. Die flache Außenkerbe	56
A. Reiner Zug	57
B. Reine Biegung	60
C. Reiner Schub	61
6. Aufstellung der Formzahlnomogramme für Außenkerbe, Bohrung und Langloch von beliebigen Abmessungen	63
A. Die beiderseitige Außenkerbe	63
B. Die einseitige Außenkerbe	63
C. Bohrung und Langloch	64
7. Der Vorsprung (Kerbwirkung durch Werkstoffanhäufung)	65
V. Theorie der räumlichen Kerbwirkung	68
1. Die Ausgangsgleichungen	68
2. Lösung der Potentialgleichung in Ellipsoidkoordinaten	72
3. Die tiefe Umdrehungsaußenkerbe	77
A. Reiner Zug	77
B. Reine Biegung	81
C. Reiner Schub	85
D. Reine Drillung	90

Inhaltsverzeichnis.

VII

	Seite
4. Die flache Umdrehungsinnenkerbe ohne axiale Bohrung	93
A. Reiner Zug	94
B. Reine Biegung	100
C. Reiner Schub	107
D. Reine Drillung	115
5. Die Umdrehungskerven mit zweidimensionalem Spannungsverlauf	118
A. Reiner Zug	120
B. Reine Biegung	121
C. Reiner Schub	121
D. Reine Drillung	126
6. Aufstellung der Formzahnomogramme für Umdrehungskerven mit Abmessungen	128
A. Die Umdrehungsaußenkerbe	128
B. Die Umdrehungsaußenkerbe mit axialer Bohrung	128
C. Die Umdrehungsinnenkerbe	129
VI. Theorie der prismatischen Kerbwirkung	130
1. Die Ausgangsgleichungen	130
2. Vollquerschnitte (Stäbe mit Längsnut)	132
3. Dünnwandige Hohlquerschnitte	133
4. Wellen mit Querbohrung	135
VII. Theorie der Entlastungskerven	136
1. Begriffserklärung	136
2. Entlastungskerven bei Drillungsbeanspruchung	137
3. Allgemeine Eigenschaften der Formzahl bei Entlastungskerven	141
VIII. Theorie der Spitzkerven	142
1. Das Versagen der klassischen Elastizitätslehre bei Spitzkerven und seine Ursache	142
2. Das neue Gedankenmodell	143
3. Theorie der Spitzkervenformzahl	144
A. Die flache Spitzkerbe bei Schub oder Drillung	144
B. Die tiefe Umdrehungsspitzkerbe mit zweidimensionalem Span- nungsverlauf bei Schub oder Drillung	145
C. Der Zugstab mit beiderseitiger tiefer Spitzkerbe	146
4. Der Übergang von der Rundkerbe zur Spitzkerbe	148
5. Einfluß der Formänderung im Kerbgrund	149
6. Theorie des Flankenwinkels	150
7. Die allgemeine technische Formzahl	152
IX. Vergleich der Theorie mit Ergebnissen der experimentellen Spannungsforschung	154
1. Dehnungsmessungen	154
2. Spannungsoptische Messungen	156
X. Die Formzahnomogramme	159
1. Erläuterungen zu den Formzahnomogrammen	159
2. Anwendungsbeispiele	159
A. Beiderseitige Außenkerbe bei Biegung	159
B. Umdrehungsaußenkerbe mit axialer Bohrung bei Biegung	160

I. Einführung.

1. Die alte Festigkeitslehre.

In der ersten Zeit des Maschinenbaues genügte es, für die Berechnung der Maschinenteile einfache Verhältniswerte zugrunde zu legen. Beispielsweise wurde der Wellendurchmesser einer Dampfmaschine zu einem gewissen Bruchteil des Zylinderdurchmessers gewählt. Bei großer Ähnlichkeit der Betriebs- und Bauverhältnisse reichte diese einfache Berechnungsart noch vollkommen aus. Im Laufe der fortschreitenden Entwicklung der Technik erwies sich jedoch diese Anwendung von Verhältniswerten infolge der zunehmenden Unterschiede in Art und Größe der auftretenden Kräfte als unzureichend; man mußte sich zu einem anderen Vergleichsmaßstab entschließen und ging nun dazu über, die jeweils auftretenden Hauptkräfte in roher Annäherung zu ermitteln und sie in Beziehung zum Querschnitt der beanspruchten Teile zu setzen. Später führte man den Begriff der zulässigen Beanspruchung ein, der auch heute noch die Grundlage der technischen Festigkeitslehre darstellt. C. v. Bach hat das Verdienst, als erster für die zulässige Beanspruchung brauchbare Zahlenwerte aufgestellt zu haben; diese Werte sind heute noch für die üblichen Werkstoffe und das Aufgabengebiet des Durchschnittsmaschinenbauers maßgebend. Sie beruhen auf der Voraussetzung, daß sich die Spannungen über den Querschnitt der Bauteile gleichmäßig verteilen. So wird z. B. bei Zug- und Biegebeanspruchung der einfache geradlinige Spannungsverlauf, der sich in Wirklichkeit nur beim prismatischen Stab einstellt, auch für nichtprismatische Körper zugrunde gelegt. Um die wirklich eintretende Spannungsverteilung und damit um die eigentliche Spannungsspitze, welche den Bruch verursacht, kümmerte man sich nicht. Man hatte auch noch keine Möglichkeit, sie experimentell oder gar rechnerisch zu erfassen.

Diese alte Festigkeitslehre, welche sich also im wesentlichen auf die Anwendung elementarer Formeln beschränkte, konnte insbesondere für den ortsfesten Maschinenbau noch ausreichen.

2. Forderungen an die genaue Festigkeitsrechnung.

In der heutigen Zeit jedoch, wo infolge der weiteren Entwicklung der Technik, vor allem des Verkehrsmaschinenbaues, die Forderung nach geringstem Gewicht dazu zwingt, mit den Beanspruchungen höher hinaufzugehen, zeigte sich die Unzulässigkeit der obigen Voraussetzungen. Eine Steigerung der Beanspruchbarkeit der Werkstoffe war nämlich nur innerhalb einer verhältnismäßig engen Grenze möglich, und man konnte auf diesem Wege bei weitem nicht das erreichen, was auf Grund der Steigerung der Festigkeitseigenschaften der Werkstoffe zu

erwarten war. Da erkannte die wissenschaftliche Forschung auf einmal in vollem Umfange die Bedeutung der Form und die Notwendigkeit, durch richtige Formgebung den Spannungsverlauf zu verbessern. Man untersuchte nun mit Hilfe der Dehnungsmessung und der Spannungsoptik die wirklich eintretende Spannungsverteilung in Konstruktionsteilen und erkannte, daß Abweichungen vom gleichmäßigen Spannungsverlauf in hohem Maße durch Ungleichmäßigkeiten der Oberflächenform bedingt sind, Einflüsse, die wir unter dem Begriff Kerbwirkung zusammenfassen wollen. Da gerade die Ungleichmäßigkeiten der Oberflächenform bei Maschinenteilen in der Regel konstruktiv bedingt sind, so konnte man durch noch so geschickte Formgebung die Spannungsspitzen in den meisten Fällen nur teilweise abmildern. Da man es auch dann noch mit einem ungleichmäßigen Spannungszustand zu tun hat, für dessen Berechnung die bisherige Festigkeitslehre nicht ausreicht, ergibt sich als erste Forderung an die genaue Festigkeitsrechnung: Aufstellung von Rechnungsgrundlagen für die Ermittlung der wirklich eintretenden Spannungsverteilung.

Mit dieser ersten Forderung geht eine zweite Hand in Hand. Wie sich die alte Festigkeitslehre nur mit dem einfachen gleichmäßigen Spannungszustand befaßte, so war es auch bei der Werkstoffprüfung der Fall. Hier bestimmte man die Festigkeitskennwerte nur für einfach geformte Proben. Um den wirklichen Verhältnissen gerecht werden zu können, benötigen wir auch Festigkeitskennwerte für ungleichmäßig geformte Proben, d. h. bei gleichzeitiger Kerbwirkung. Erst dann sind wir in der Lage, die Beanspruchbarkeit des Werkstoffes bei ungleichmäßiger Spannungsverteilung richtig beurteilen zu können.

Schließlich muß bei Anwendung einer so verfeinerten Festigkeitsrechnung noch verlangt werden, daß die zugrunde gelegten Hauptkräfte mit äußerster Genauigkeit bestimmt werden, wobei Größt- und Kleinstwert der Betriebsbelastung einschließlich aller durch Temperatur- und Montagespannungen hervorgerufenen Zusatzkräfte genau zu ermitteln sind. Erst wenn auch dieser dritten Forderung Genüge geleistet wird, ist der Erfolg sichergestellt.

Das vorliegende Buch dient der Erfüllung der ersten und zugleich dringlichsten Forderung, nämlich der Berechnung der wirklich eintretenden Spannungsverteilung. Dabei müssen wir uns mit ungleichmäßigen Spannungszuständen, wie sie durch Kerbwirkung hervorgerufen sind, befassen. Als Vorbetrachtung hierzu sollen zunächst die allgemeinen Grundbegriffe der Kerbwirkung erläutert werden.

II. Grundbegriffe der Kerbwirkung.

1. Die Formzahl.

Um die Berechnung der wirklich eintretenden Spannungsverteilung dem Konstrukteur bei der praktischen Anwendung möglichst einfach zu gestalten, ist es zweckmäßig, die Spannung, die sich nach elementarer Berechnungsart ergeben würde, zu der jeweils wirklich eintretenden Höchstspannung in Beziehung zu setzen. Nach einem Vorschlag

von A. Thum bezeichnet man die sich aus den elementaren Formeln der alten Festigkeitslehre ergebende Spannung als Nennspannung. Wie wir in den nächsten Abschnitten zeigen werden, ist das Verhältnis der wirklich eintretenden Höchstspannung zur Nennspannung sowohl vom absoluten Wert der Nennspannung wie auch vom Werkstoff unabhängig, wofern dieser sich elastisch verhält und die Kerboberfläche nicht zu stark gekrümmt ist¹. Das Verhalten eines Werkstoffes kann bekanntlich als elastisch bezeichnet werden, wenn er das Hookesche Elastizitätsgesetz befolgt. Diese Bedingung ist in ausreichender Annäherung erfüllt, solange die Belastung nicht so groß ist, daß die Höchstspannung die Elastizitätsgrenze überschreitet. Jenseits der Elastizitätsgrenze bleibt das Verhältnis der Höchstspannung zur Nennspannung infolge der wesentlichen Abweichungen vom Hookeschen Gesetz nicht mehr konstant, sondern hängt wesentlich vom Werkstoff ab.

Das Verhältnis der innerhalb der Elastizitätsgrenze sich einstellenden Höchstspannung (τ_{\max}) zur Nennspannung (τ_n), welches demnach einen ganz bestimmten, von der Form des Bauteiles und der Beanspruchungsart abhängigen Wert hat, wollen wir Formzahl nennen und mit α_k bezeichnen. Entsprechend unserer Definition wird

$$\alpha_k = \frac{\tau_{\max}}{\tau_n}. \quad (1)$$

Bei Normalspannungen verwendet man bekanntlich statt τ den Buchstaben σ .

Da in vielen Fällen bei der Wahl des für die Berechnung der Nennspannung maßgebenden Bezugsquerschnittes verschiedene Möglichkeiten bestehen, muß gefordert werden, daß bei Formzahlangaben stets auch die zugehörige Nennspannung formelmäßig angegeben wird.

2. Das Abklingungsgesetz.

Um den Leser auf anschauliche Art mit dem Wesen der Kerbwirkung vertraut zu machen, wollen wir nun auf das Grundgesetz der Kerbwirkung eingehen, welches wir bei der Behandlung von Aufgaben der Kerbspannungslehre immer wieder bestätigt finden werden.

Die bei allen Kerbproblemen auftretende starke Spannungserhöhung hat in der Umgebung der hoch beanspruchten Zone stets eine beträchtliche Abminderung der Spannungen zur Folge. Je höher die Spannungsspitze ausgebildet ist, um so stärker erfolgt das Abklingen der Spannungen mit zunehmender Entfernung von der hoch beanspruchten Zone. Es handelt sich gewissermaßen um ein Reaktionsgesetz der Kerbwirkung. Wir wollen es das Abklingungsgesetz nennen. In besonders hohem Maße ist das Abklingungsgesetz bei räumlicher Spannungsverteilung erfüllt, wie wir in Abschnitt V sehen werden.

Die durch Anbringen einer Kerbe herbeigeführte Entlastung der Umgebung ist auch zugleich ein Mittel, um in der Umgebung etwa vorhandene Spannungserhöhungen abzumindern. Handelt es sich z. B.

¹ Bei Kerben starker Krümmung, insbesondere Spitzkerben, wird die Formzahl auch vom Gefüge des Werkstoffes beeinflusst, s. VIII.

bei einem Maschinenteil um eine konstruktiv bedingte Kerbe, welche eine große Spannungserhöhung hervorruft, so kann man in der Tat durch eine in der Nähe angebrachte zweite Kerbe eine wesentliche Abminderung der Spannungsspitze erzielen. Wir werden in Abschnitt VII auf diesen Entlastungseffekt der mehrfachen Kerben zurückkommen.

Auch bei Beurteilung der Kerbform macht man mit Vorteil vom Abklüftungsgesetz Gebrauch. Nur jener Teil der Kerboberfläche wird die Höchstspannung wesentlich beeinflussen, welcher der hoch beanspruchten Zone angehört, während die Form des Bauteiles in großer Entfernung von der Kerbe für die in der Kerbe selbst auftretende Spannungsspitze nicht mehr maßgebend ist. Daraus folgt z. B. für Rundkerben, daß in erster Linie die Krümmung des Kerbgrundes maßgebend sein wird, während dem Einfluß des Flankenwinkels nur untergeordnete Bedeutung zukommt.

3. Grundformen der Kerben.

Für die Behandlung des Aufgabengebietes der Kerbspennungslehre ist es von Vorteil, eine Einteilung der Kerben in Grundformen vorzunehmen.

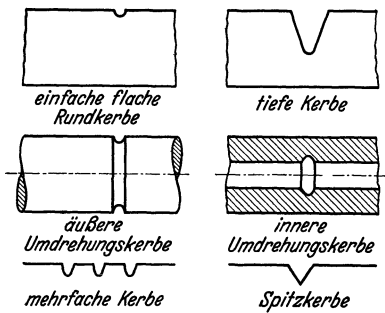


Abb. 1. Verschiedene Kerbformen.

Zunächst unterscheiden wir nach der Form der Kerben

flache und tiefe,
äußere und innere,

einfache und mehrfache Kerben,
schließlich

Rundkerben und Spitzkerben,
s. Abb. 1.

Nach der Art der Spannungsverteilung wollen wir ferner

ebene Kerbwirkung (Flachstäbe und Platten),

achsensymmetrische und räumliche Kerbwirkung (z. B. Umdrehungskernen) und

prismatische Kerbwirkung (z. B. Welle mit Keilnut) unterscheiden.

Außerdem gibt es eine ganze Reihe weiterer Fälle, bei denen es sich um verwickeltere Formen handelt, die sich nicht direkt auf obige Grundformen zurückführen lassen. In der Regel läßt sich jedoch die Formzahl auch in diesen Fällen aus bekannten Formzahlen der Grundformen berechnen. Ein typisches Beispiel hierfür bietet die beliebige tiefe Kerbe, deren Formzahl aus den Formzahlen der flachen und der tiefen Kerbe ermittelt werden kann. Dieses Umrechnungsverfahren hat infolge seiner weitgehenden Anwendbarkeit grundlegende Bedeutung und soll deshalb schon an dieser Stelle erläutert werden.

4. Die Formzahl der beliebig tiefen Kerbe.

Als Beispiel betrachten wir einen beiderseits symmetrisch gekerbten Zugstab, Abb. 2. Ohne Kerbe herrscht zunächst ein gleichmäßiger

Spannungszustand. Durch Anbringen einer „flachen Kerbe“ wird der Spannungsverlauf entsprechend dem Abklingungsgesetz nur in der näheren Umgebung der Kerbe gestört. In größerer Entfernung handelt es sich nach wie vor um einen gleichmäßigen Spannungszustand. Wie sich auch aus der rechnerischen Behandlung ergibt — in Abschnitt IV werden wir auf diesen Fall ausführlich eingehen —, kommen daher für die Formzahl nur jene Größen in Betracht, welche den Rand des gestörten Gebietes charakterisieren, also hier nur die Tiefe t und der Krümmungsradius ρ der Kerbe. Die Breite des Stabes ist dagegen für die Formzahl der flachen Kerbe unwesentlich. Diese Betrachtungsweise ist immer dann zulässig, wenn t genügend klein ist gegenüber der Breite b des Stabes. Der Grenzwert, welchen die Formzahl in diesem Falle annimmt, stellt die „Formzahl der flachen Kerbe“ dar, die wir mit α_{fk} bezeichnen wollen.

Handelt es sich andererseits um eine sehr tiefe Kerbe, so wird sich die Störung des Spannungsverlaufes auf den gesamten engsten Querschnitt erstrecken. Außer dem Krümmungsradius wird daher jetzt noch die Breite des engsten Querschnittes für die Formzahl maßgebend sein; wir können infolge der vorausgesetzten Symmetrie auch die halbe Breite des engsten Querschnittes einführen, die wir mit a bezeichnen wollen. Der Einfluß der Kerbtiefe kann dagegen nunmehr vernachlässigt werden, da die Spannungen entsprechend dem Abklingungsgesetz nach außen hin sehr rasch abklingen. Die Formzahl kann

mithin als Funktion des dimensionslosen Verhältniswertes a/ρ aufgefaßt werden. Die Tatsache, daß die Formzahl bei großer Tiefe von dieser unabhängig wird, ist auch durch die Theorie bestätigt, welche selbst bei der unendlich tiefen Kerbe eine durchaus endliche, nur von a/ρ abhängige Formzahl liefert. Wir wollen diesen Grenzwert, welcher die „Formzahl der tiefen Kerbe“ darstellt, mit α_{tk} bezeichnen.

Beide Grenzwerte lassen sich, wie wir in den nächsten Abschnitten sehen werden, teils vollkommen streng ableiten, teils durch einfache Schnittbetrachtungen in guter Annäherung errechnen. Um aus ihnen zu dem richtigen Wert für die beliebig tiefe Kerbe zu gelangen, betrachten wir wieder Abb. 2. Ausgehend von der flachen Kerbe wird der Zugstab nacheinander mit immer tieferen Kerben versehen, die sämtlich den gleichen Krümmungsradius besitzen sollen. Von einer quer zum Stab liegenden Bezugslinie aus wird nun jeweils über dem Kerbgrund die zu der betreffenden Kerbe gehörige Formzahl aufgetragen. Die Abszisse des so erhaltenen Diagrammes ist dann — von

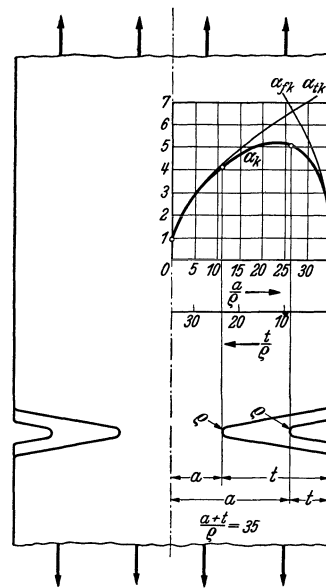


Abb. 2. Beiderseits symmetrisch gekerbter Zugstab.

links nach rechts gehend — a , andererseits — von rechts nach links gehend — t . Wir können aber auch die Verhältniszahlen a/ρ und t/ρ als Abszissen wählen, da der Krümmungsradius als konstant vorausgesetzt ist. Die Formzahl muß in der Nähe der Stelle $a/\rho = 0, t/\rho = b/\rho$ mit dem Grenzwert α_{tk} zusammenfallen, andererseits in der Nähe der Stelle $a/\rho = b/\rho, t/\rho = 0$ mit dem Grenzwert α_{fk} . An beiden Stellen wird die Formzahl gleich Eins; denn für $t = 0$ verschwindet die Kerbe, andererseits wird für $a/\rho \rightarrow 0$ der engste Querschnitt so schmal, daß infolge des konstant gehaltenen Krümmungshalbmessers die nähere Umgebung des engsten Querschnittes als gerader Stab anzusehen ist. In der Umgebung der beiden Grenzpunkte muß sich die Formzahllinie der jeweiligen Grenzkurve anschmiegen. In den Zwischenpunkten wird, da durch den in endlicher Nähe befindlichen Rand eine Abschwächung der Kerbwirkung erfolgt, die Formzahllinie unterhalb dieser Grenzkurven verlaufen. Diesen Bedingungen genügt nun folgender Ansatz:

$$\frac{1}{(\alpha_k - 1)^2} = \frac{1}{(\alpha_{fk} - 1)^2} + \frac{1}{(\alpha_{tk} - 1)^2} \quad (2)$$

oder aufgelöst

$$\alpha_k = 1 + \frac{(\alpha_{fk} - 1)(\alpha_{tk} - 1)}{\sqrt{(\alpha_{fk} - 1)^2 + (\alpha_{tk} - 1)^2}}. \quad (3)$$

Wie aus (2) hervorgeht, wird

$$\lim_{\alpha_{fk} \rightarrow 1} (\alpha_k) = \alpha_{fk}, \quad \lim_{\alpha_{tk} \rightarrow 1} (\alpha_k) = \alpha_{tk}. \quad (4)$$

Es tritt also in der Tat ein Anschmiegen an die Grenzkurven ein. Ist ferner $\alpha_{fk} > \alpha_{tk}$, so ist der Nenner stets größer als $\alpha_{fk} - 1$ und damit $\alpha_k < \alpha_{tk} < \alpha_{fk}$. Ist andererseits $\alpha_{tk} > \alpha_{fk}$, so wird der Nenner größer als $\alpha_{tk} - 1$ und damit $\alpha_k < \alpha_{fk} < \alpha_{tk}$. Die durch den obigen Ansatz festgelegte Formzahllinie verläuft also stets innerhalb des von den Grenzkurven eingeschlossenen Gebietes. An Stelle des in (2) auftretenden Exponenten 2 könnte natürlich

zunächst auch ein anderer, etwa 3, gewählt werden; die experimentelle Forschung hat aber ergeben, daß der wirkliche Zusammenhang mit dem Exponenten 2 erfaßt wird.

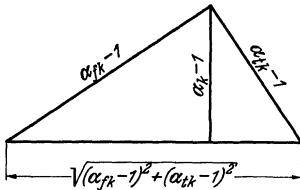


Abb. 3. Zusammenhang zwischen den Formzahlen der flachen, tiefen und beliebig tiefen Kerbe.

Die so gewonnene Beziehung für die Formzahl der beliebig tiefen Kerbe hat noch den Vorteil, daß eine nomographische Darstellung in einfacher Weise möglich ist.

Sind nämlich $\alpha_{fk} - 1$ und $\alpha_{tk} - 1$ Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, so erhält man $\alpha_k - 1$ als Höhe des Dreiecks (s. Abb. 3). Der Beweis folgt aus der Gleichung

$$(\alpha_{fk} - 1)(\alpha_{tk} - 1) = (\alpha_k - 1)\sqrt{(\alpha_{fk} - 1)^2 + (\alpha_{tk} - 1)^2}, \quad (5)$$

welche unmittelbar aus (3) hervorgeht. Auf beiden Seiten steht die doppelte Fläche des Dreiecks, einerseits als Kathetenprodukt, anderer-

seits als Produkt aus Hypotenuse und Höhe. Bei nomographischer Darstellung kann das Fällen des Lotes vermieden werden, indem man Kreise um die Spitze des Dreiecks schlägt; maßgebend für die Formzahl ist dann der von der Hypotenuse gerade berührte Kreis. Als Beispiel hierfür sei auf Abb. 104 verwiesen, welche verschiedene Formzahlnomogramme, u. a. auch das für den auf Zug beanspruchten Flachstab mit beiderseitig-symmetrischer Außenkerbe zeigt. Die richtige Handhabung ist durch Pfeile angedeutet.

Nach diesen Vorbetrachtungen über das Wesen der Kerbwirkung kommen wir nun zu den Grundlagen der Spannungslehre, welche uns das nötige mathematische Rüstzeug für die Berechnung der wirklich eintretenden Spannungsverteilung geben werden.

III. Grundlagen der Spannungslehre.

Als erstes werden wir die Bedingungen für das Gleichgewicht der Spannungen sowie für die geometrische Möglichkeit der Formänderung aufstellen. Die Kombination beider Gleichungssysteme führt dann zu den elastischen Grundgleichungen, welche wir mit Hilfe eines Dreifunktions-Ansatzes allgemein lösen werden. Als letzte Vorbereitung für die Berechnung der Spannungsverteilung in Kerben werden wir schließlich den Rechnungsgang in krummlinigen Koordinaten behandeln.

1. Das Gleichgewicht der Spannungen.

Greift an einem Flächenteilchen dF die Kraft dP an, so versteht man unter dP/dF die an der Fläche angreifende Spannung. Man spricht von einer Normalspannung, wenn sie normal zur Fläche gerichtet ist, bei tangentialer Richtung dagegen von einer Schubspannung.

Zur Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen legen wir kartesische Koordinaten x, y, z zugrunde und betrachten ein längs der Koordinatenrichtungen herausgeschnittenes Volumenelement mit den Kanten dx, dy, dz (s. Abb. 4). Wir bezeichnen die Spannungen zunächst allgemein mit dem Buchstaben τ .

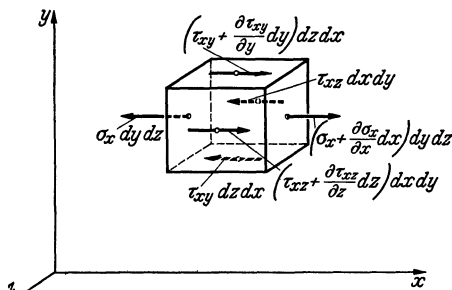


Abb. 4. Anordnung der Spannungen in kartesischen Koordinaten.

Um eine eindeutige Kennzeichnung zu erzielen, finden bekanntlich zwei Indizes Verwendung, von denen der erste die Richtung der Spannung, der zweite die Richtung der Flächennormale angibt. So bedeutet z. B. τ_{xy} eine Spannung, die an einer Fläche $y = \text{konst.}$ in der x -Richtung, also tangential angreift; es handelt sich demnach um eine Schubspannung. Andererseits ist τ_{yy} eine Spannung, welche an einer Fläche $y = \text{konst.}$ in der y -Richtung, also normal zur Fläche

angreift; demnach haben wir es in diesem Falle mit einer Normalspannung zu tun. Allgemein handelt es sich also immer um eine Normalspannung, wenn beide Indizes übereinstimmen. Man schreibt für die Normalspannungen statt τ_{xx} usw. kürzer σ_x usw.

Den positiven Richtungssinn der Spannungen wollen wir in der Weise festsetzen, daß die an den Flächen $x + dx = \text{konst.}$, $y + dy = \text{konst.}$ und $z + dz = \text{konst.}$ angreifenden Spannungen in Richtung der Koordinatenachsen wirken, an den Flächen $x = \text{konst.}$, $y = \text{konst.}$ und $z = \text{konst.}$ dagegen umgekehrt. Die Normalspannungen sind auf diese Weise als Zugspannungen positiv, als Druckspannungen negativ. Für die Formulierung des Spannungsgleichgewichtes ist es ferner wesentlich, daß sich die an den Flächen $x + dx = \text{konst.}$, $y + dy = \text{konst.}$ und $z + dz = \text{konst.}$ angreifenden Spannungen gegenüber den Flächen $x = \text{konst.}$, $y = \text{konst.}$ und $z = \text{konst.}$ um gewisse kleine Beträge vermehrt haben. So greift z. B. an der Fläche $x + dx = \text{konst.}$ die Normalspannung $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$ an, statt σ_x an der Fläche $x = \text{konst.}$ Um die Übersichtlichkeit nicht zu beeinträchtigen, wurden in Abb. 4 nur die in der x -Richtung wirkenden Spannungen eingezeichnet.

Aus den Spannungen erhalten wir die auf das Volumelement ausgeübten Kräfte, indem wir die Spannungen jeweils mit der Fläche, an der sie angreifen, multiplizieren, wie es bereits in Abb. 4 geschehen ist. Das Gleichgewicht gegen Verschieben in der x -Richtung verlangt dann

$$\left. \begin{aligned} \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy dz + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dz dx + \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz \right) dx dy = \\ = \sigma_x dy dz + \tau_{xy} dz dx + \tau_{xz} dx dy. \end{aligned} \right\} (1)$$

Die Spannungen σ_x , τ_{xy} , τ_{xz} selbst halten sich das Gleichgewicht und fallen heraus; es bleiben nur mehr ihre Ableitungen übrig. Wenn wir noch durch $dx \cdot dy \cdot dz$ dividieren, ergibt sich die erste der folgenden drei Gleichgewichtsbedingungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0, \end{aligned} \right\} (2)$$

Die zweite und dritte dieser Gleichungen ergeben sich in ganz derselben Weise aus dem Gleichgewicht gegen Verschieben in der y - und der z -Richtung. Sie gehen aus der ersten Gleichung auch durch zyklische Vertauschung in x, y, z hervor.

Unser Volumelement ist somit bei Erfüllung der Bedingungen (2) gegen Verschieben im Gleichgewicht. Ein Körper mit räumlichem Kräftesystem ist aber erst dann völlig im Gleichgewicht, wenn außerdem noch drei weitere Bedingungen, die sich aus dem Gleichgewicht gegen Verdrehen ergeben, erfüllt sind. Wir betrachten hierzu Abb. 5,

welche die Projektion unseres Volumelementes auf die x, y -Ebene darstellt, und wollen das Gleichgewicht gegen Verdrehen um eine in der z -Richtung liegende Achse untersuchen, welche durch den Mittelpunkt M des Volumelementes hindurchgeht. Hierzu kommen nur jene Kräfte in Betracht, die in bezug auf diese Achse ein Drehmoment besitzen (nur diese sind in Abb. 5 eingezeichnet). Die Momentengleichung in bezug auf M ergibt dann

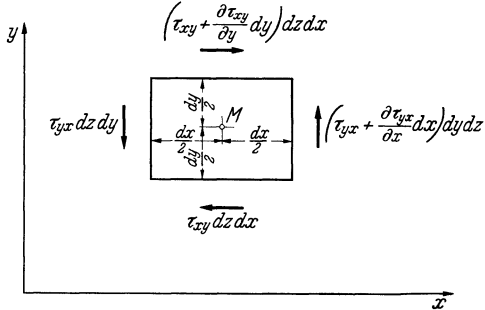


Abb. 5. Zum Gleichgewicht der Schubspannungen.

$$\left(2 \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dx\right) dy dz \frac{dx}{2} = \left(2 \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy\right) dz dx \frac{dy}{2} \quad (3)$$

oder

$$\tau_{yx} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dx = \tau_{xy} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy. \quad (4)$$

Die Glieder mit dx und dy als Faktor sind von höherer Ordnung klein und fallen fort. So gelangen wir zu der ersten der folgenden drei Gleichungen:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}. \quad (5)$$

Die zweite und dritte dieser Gleichungen, welche aus der ersten wieder durch zyklische Vertauschung hervorgehen, entsprechen dem Gleichgewicht gegen Verdrehen um zwei weitere, durch M in der y - und z -Richtung gelegte Achsen. Wir haben auf diese Weise eine bemerkenswerte Symmetrieeigenschaft der Schubspannungen abgeleitet, welche in der Vertauschbarkeit der Indizes zum Ausdruck kommt. Es handelt sich um den sog. Satz von der Gleichheit der einander zugeordneten Schubspannungen.

Damit sind alle Bedingungen für das Gleichgewicht der Spannungen in den Koordinaten x, y, z aufgestellt. Es bleibt aber noch die Frage nach jenen Spannungen offen, welche in beliebig geneigten Schnittflächen wirken. Auch diese Frage läßt sich auf Grund einer Gleichgewichtsbetrachtung beantworten. Durch eine beliebig geneigte Ebene, deren Normale die Richtung λ haben möge, schneiden wir eine Ecke unseres Volumelementes ab, s. Abb. 6. Die an dieser neuen Schnittfläche angreifende Spannung möge in der Richtung κ wirken und hat daher die Bezeichnung $\tau_{\kappa\lambda}$. An den übrigen Flächen wirken wieder die von unserem Volumelement her bekannten Spannungen. Wir wollen der Einfachheit halber jeweils die an jeder Fläche angreifenden Spannungen zu einer resultierenden Spannung zusammenfassen. Wir greifen eine der drei Flächen heraus, an der die Spannung $\tau_{\mu\nu}$ angreifen

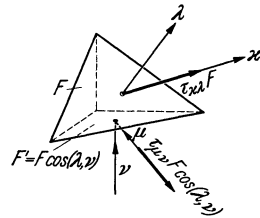


Abb. 6. Zur Berechnung einer beliebig orientierten Spannung.

soll, wobei allgemein die Richtung der Spannung bis auf das Vorzeichen mit μ und die Richtung der Normale mit ν bezeichnet ist. Die Richtungen μ und ν sind dabei zum Körper hin positiv, die Richtungen κ und λ dagegen vom Körper weg positiv gewählt. Die Spannungen selbst müssen entsprechend unserer anfangs getroffenen Vorzeichenfestsetzung immer vom Körper weg positiv eingezeichnet werden. Bei Aufstellung der Bedingung für das Gleichgewicht gegen Verschieben in der κ -Richtung haben wir die Spannung $\tau_{\mu\nu}$ zunächst mit der zugehörigen Fläche F' zu multiplizieren, um die Kraft zu erhalten. F' stellt aber die Projektionsfläche der Schnittfläche F dar, ergibt sich daher aus F durch Multiplikation mit $\cos(\lambda, \nu)$, wobei (λ, ν) der von den Richtungen λ und ν gebildete Winkel ist. Von der so gewonnenen Kraft $\tau_{\mu\nu} \cdot F \cdot \cos(\lambda, \nu)$ kommt nur ihre Komponente in der κ -Richtung in Betracht, d. h. wir haben noch mit $\cos(\kappa, \mu)$ zu multiplizieren. Der Betrag, den $\tau_{\kappa\lambda}$ annehmen muß, um der an der Fläche F' angreifenden Spannung $\tau_{\mu\nu}$ das Gleichgewicht zu halten, ist demnach $\tau_{\mu\nu} \cdot \cos(\kappa, \mu) \cdot \cos(\lambda, \nu)$. Wirken an allen drei Flächen Spannungen, so haben wir für ν nacheinander x , y und z zu setzen und die Beträge zu addieren, wobei für μ jeweils die Richtung der resultierenden Spannung der betreffenden Fläche einzusetzen ist. Wir können uns jetzt auch von der resultierenden Spannung freimachen, indem wir die Addition für die x -, y - und z -Komponenten der resultierenden Spannungen getrennt durchführen, d. h. für μ nacheinander x , y , z einsetzen. Es ergibt sich dann folgende Doppelsumme:

$$\tau_{\kappa\lambda} = \sum_{\mu=x, y, z} \sum_{\nu=x, y, z} \tau_{\mu\nu} \cos(\kappa, \mu) \cos(\lambda, \nu). \quad (6)$$

Die Auflösung ergibt neun Glieder. Infolge der Gleichheit der einander zugeordneten Schubspannungen reduziert sich ihre Zahl auf sechs. Die noch willkürliche Richtung κ kann man nun entweder mit Richtung λ zusammenfallen oder einen rechten Winkel bilden lassen. Im ersteren

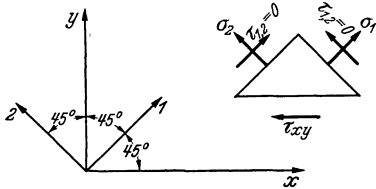


Abb. 7. Spannungen bei reiner Schubbeanspruchung.

Falle erhält man die an der Schnittfläche angreifende Normalspannung, im letzteren Falle eine Schubspannung.

Zur Erläuterung diene ein Beispiel.

Sämtliche Spannungen in den Koordinaten x , y , z seien gleich Null, bis auf die Schubspannung τ_{xy} . Welche Spannungen herrschen dann in den Schnittflächen, die zur x - und y -Achse unter 45° geneigt sind? Entsprechend

Abb. 7 legen wir in der x , y -Ebene die Richtungen 1 und 2 fest. Dann wird

$$\left. \begin{aligned} \tau_{11} = \sigma_1 &= \tau_{xy} \cos(1, x) \cos(1, y) + \tau_{yx} \cos(1, y) \cos(1, x), \\ \tau_{12} &= \tau_{xy} \cos(1, x) \cos(2, y) + \tau_{yx} \cos(1, y) \cos(2, x), \\ \tau_{22} = \sigma_2 &= \tau_{xy} \cos(2, x) \cos(2, y) + \tau_{yx} \cos(2, y) \cos(2, x). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Nun ist

$$\cos(1, x) = \cos(1, y) = \cos(2, y) = -\cos(2, x) = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (8)$$

Damit wird

$$\sigma_1 = \tau_{xy}, \quad \sigma_2 = -\tau_{xy}, \quad \tau_{12} = 0, \quad (9)$$

d. h. in den Schnitten unter 45° zur x - und y -Achse herrscht in diesem Falle ein reiner Zug-Druck-Spannungszustand.

Alle diese Beziehungen konnten wir ohne Rücksicht auf den Werkstoff ableiten. Jetzt aber, bei Aufstellung der Bedingungsgleichungen für die geometrische Möglichkeit der Formänderung, müssen wir auf das elastische Verhalten des Werkstoffes eingehen.

2. Die Formänderung.

Wir wollen mit ξ , η und ζ die in Richtung der Koordinatenachsen liegenden Komponenten der Verschiebung bezeichnen, welche eine beliebige Stelle unseres elastischen Körpers erfährt, wenn sich unter der Wirkung äußerer Kräfte ein Spannungs- und Formänderungszustand ausbildet. Mit der Kenntnis der Verschiebung an jeder Stelle ist der gesamte Formänderungszustand eindeutig bestimmt. Aus der Verschiebung lassen sich auch die eigentlichen Formänderungsgrößen, die Dehnungen und die Winkeländerungen, ermitteln.

Unter der Dehnung versteht man das Verhältnis der Verlängerung einer unendlich kleinen Strecke zu ihrer ursprünglichen Länge. Man bezeichnet sie mit dem Buchstaben ε und verwendet dabei einen Index, der die ursprüngliche Richtung der gedehnten Strecke angibt.

Die Winkeländerung stellt die Verkleinerung eines ursprünglichen rechten Winkels dar. Sie wird mit γ bezeichnet, wobei die ursprünglichen Richtungen der Schenkel des rechten Winkels durch zwei Indizes angegeben werden; die Reihenfolge der Indizes spielt dabei keine Rolle.

Bei der nun folgenden Formänderungsbetrachtung muß berücksichtigt werden, daß infolge des sehr hohen Elastizitätsmaßes der technischen Werkstoffe die Formänderungen in den meisten Fällen so außerordentlich klein sind, daß die im Quadrate auftretenden Formänderungsgrößen gegenüber den linearen stets als klein höherer Ordnung vernachlässigt werden dürfen. Eine wichtige Folgerung hieraus ist der Überlagerungssatz, nach welchem die Reihenfolge bei der Überlagerung von Formänderungszuständen für den Endzustand unwesentlich ist, da sich die auf dasselbe Koordinatensystem bezogenen Formänderungsgrößen einfach addieren.

Von diesem Satz wollen wir jetzt Gebrauch machen, indem wir zunächst nur die Verschiebung ξ allein berücksichtigen. Von den zugehörigen Formänderungsgrößen ε'_x usw., welche also nur die von ξ herrührenden Bestandteile darstellen, können wir dann leicht auch auf jene Anteile schließen, die nur von η bzw. ζ allein herrühren. Auf Grund des Überlagerungssatzes erhalten wir die vollständigen Ausdrücke für die Formänderungsgrößen durch einfache Addition dieser Anteile. Als Bezugspunkt wählen wir die Ecke O unseres Volumenelementes, an der die Kanten $OA = dx$, $OB = dy$ und $OC = dz$ zusammenstoßen, s. Abb. 8. Durch die Verschiebung ξ geht O nach O' .

In A haben wir entsprechend dem Koordinatenunterschied dx die Verschiebung ξ um den kleinen Betrag $\frac{\partial \xi}{\partial x} dx$ zu vermehren. Entsprechendes gilt für B und C . Die Kante dx wird demnach in sich selbst nach $O'A'$ verschoben und erfährt die Dehnung

$$\varepsilon'_x = \frac{dx + \xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx - \xi - dx}{dx} = \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (10)$$

Die Kante dy wird nach $O'B'$ verschoben und dabei gedreht. Die dadurch bewirkte Verkleinerung des rechten Winkels AOB ist die Winkeländerung γ'_{xy} . Da ein so kleiner Winkel seinem Tangens gleichgesetzt werden kann, ergibt sich:

$$\gamma'_{xy} = \frac{\xi + \frac{\partial \xi}{\partial y} dy - \xi}{dy} = \frac{\partial \xi}{\partial y}. \quad (11)$$

In entsprechender Weise wird Winkel AOC verkleinert um

$$\gamma'_{xz} = \frac{\xi + \frac{\partial \xi}{\partial z} dz - \xi}{dz} = \frac{\partial \xi}{\partial z}. \quad (12)$$

Abb. 8. Die Verschiebungen in kartesischen Koordinaten.

Die infolge der Schiefstellung der Kante OB bewirkte Dehnung

$$\varepsilon'_y = \frac{\sqrt{dy^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} dy\right)^2} - dy}{dy} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2} - 1 \quad (13)$$

ist als klein höherer Ordnung gleich Null zu setzen, da die kleine Größe $\partial \xi / \partial y$ im Quadrat auftritt. Das gleiche gilt für Kante OC , so daß auch ε'_z verschwindet. Ebenso sieht man leicht ein, daß die Winkeländerung γ'_{yz} als klein höherer Ordnung anzusehen ist.

Durch Vertauschung von ξ mit η und x mit y erhalten wir hieraus die von der Verschiebungskomponente η herrührenden Anteile. Entsprechendes gilt für die Anteile, die von ζ herrühren. Die Addition dieser Anteile liefert schließlich die vollständigen Formänderungsgrößen:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial \xi}{\partial x}, & \varepsilon_y &= \frac{\partial \eta}{\partial y}, & \varepsilon_z &= \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Eine wichtige Größe ist ferner die Volumdehnung, welche das Verhältnis der räumlichen Vergrößerung des Volumelementes zu seiner ursprünglichen Größe angibt. Wir bezeichnen sie mit e und erhalten

$$e = \frac{dx(1 + \varepsilon_x) dy(1 + \varepsilon_y) dz(1 + \varepsilon_z) - dx dy dz}{dx dy dz}. \quad (15)$$

Da die Produkte der Dehnungen als klein höherer Ordnung vernachlässigt werden können, ergibt sich

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \quad (16)$$

d. h. die Volumdehnung ist gleich der Summe der Dehnungen in drei zueinander senkrechten Richtungen.

Wir haben damit die Formänderungsgrößen in kartesischen Koordinaten auf die drei Verschiebungskomponenten zurückgeführt. Da bei der Berechnung der Spannungsverteilung in Kerben die Verwendung krummliniger Koordinaten große Vorteile bietet, sollen die entsprechenden Überlegungen jetzt auch für krummlinige Koordinaten durchgeführt werden.

3. Die Formänderung in krummlinigen Koordinaten.

Wir gehen auf das krummlinige orthogonale Koordinatensystem u, v, w über; dabei setzen wir u, v und w als differenzierbare Ortsfunktionen voraus. Umgekehrt sind dann auch x, y und z differenzierbare Funktionen von u, v und w , d. h. es bestehen die Gleichungen

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w). \quad (17)$$

Unter der u -Richtung verstehen wir die Richtung normal zu den Flächen $u = \text{konst.}$, und zwar im Sinne des zunehmenden u -Wertes positiv. Gehen wir in der u -Richtung um ein Linienelement ds_u weiter, so ändert sich dabei der u -Wert um das Differential du . Da wir Differenzierbarkeit vorausgesetzt haben, wird der Differentialquotient ds_u/du an jeder Stelle einen ganz bestimmten Wert haben, den wir h_u nennen wollen; das Linienelement ist demnach $h_u du$. Betrachten wir eine Fläche $u = \text{konst.}$, so gibt $h_u du$ den Abstand bis zur unmittelbar benachbarten u -Fläche an, für welche sich der u -Wert um das Differential du geändert hat. Infolge der verschiedenen Krümmung beider Flächen wird dieser Abstand an jeder Stelle anders sein, obwohl du immer denselben unendlich kleinen Wert hat. Diese krummlinige Verzerrung wird durch den Faktor h_u berücksichtigt, den wir deshalb als Verzerrungsfaktor bezeichnen wollen. Die Verzerrungsfaktoren in der v - und w -Richtung, also normal zu den Flächen $v = \text{konst.}$ und $w = \text{konst.}$, bezeichnen wir entsprechend mit h_v und h_w . Die zugehörigen Linienelemente sind $h_v dv$ und $h_w dw$.

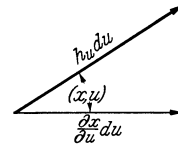


Abb. 9. Linienelement in gekrümmten Koordinaten mit x -Komponente.

Den Winkel zwischen zwei Richtungen bezeichnen wir wieder durch Angabe beider Richtungen; so ist z. B. (x, u) der Winkel zwischen der x - und der u -Richtung. Sein Kosinus ergibt sich aus dem Linienelement $h_u du$ und seiner x -Komponente, s. Abb. 9. Entsprechendes gilt für die Winkel (y, u) und (z, u) , sowie für die Winkel, welche von der v - bzw. w -Richtung mit den Koordinatenachsen gebildet werden. Wir erhalten

$$\cos(x, u) = \frac{1}{h_u} \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \cos(y, u) = \frac{1}{h_u} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \cos(z, u) = \frac{1}{h_u} \frac{\partial z}{\partial u} \quad \text{usw.} \quad (18)$$

Durch den Zusatz „usw.“ deuten wir an, daß noch zwei weitere Gleichungssysteme bestehen, welche sich durch Vertauschung von u mit v und w ergeben. Nach einem bekannten Satz der Raumgeometrie ist nun

$$\cos^2(x, u) + \cos^2(y, u) + \cos^2(z, u) = 1 \quad \text{usw.} \quad (19)$$

Setzen wir aus (18) die Ausdrücke für die Richtungskosinus ein, so ergibt sich

$$h_u^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \quad \text{usw.} \quad (20)$$

Diese Beziehungen geben uns die Möglichkeit, die Verzerrungsfaktoren aus (17) zu ermitteln.

Wir bezeichnen ferner die Verschiebungen in der u -, v - bzw. w -Richtung mit U , V und W . Auf Grund des Überlagerungssatzes können wir U additiv aus den u -Komponenten der Verschiebungen ξ , η und ζ zusammensetzen. Das Entsprechende gilt für V und W . Die Komponenten bilden wir dabei am einfachsten durch Multiplikation mit dem jeweiligen Richtungskosinus und erhalten so

$$U = \xi \cos(x, u) + \eta \cos(y, u) + \zeta \cos(z, u) \quad \text{usw.} \quad (21)$$

oder wegen (18)

$$U = \frac{1}{h_u} \left(\xi \frac{\partial x}{\partial u} + \eta \frac{\partial y}{\partial u} + \zeta \frac{\partial z}{\partial u} \right) \quad \text{usw.} \quad (22)$$

Bei Vertauschung von u mit v bzw. w muß also von jetzt ab auch zugleich U mit V bzw. W vertauscht werden.

Die Formänderungsgrößen enthalten zunächst jene Bestandteile, welche sich aus (14) ergeben, wenn wir lediglich die neuen Bezeichnungen für Koordinaten, Linienelemente und Verschiebungen einführen. Wir kennzeichnen diese Anteile mit ε'_u usw. und erhalten

$$\varepsilon'_u = \frac{1}{h_u} \frac{\partial U}{\partial u}, \quad \gamma'_{uv} = \frac{1}{h_v} \frac{\partial U}{\partial v} + \frac{1}{h_u} \frac{\partial V}{\partial u} \quad \text{usw.} \quad (23)$$

Wir haben dabei die krummlinigen Koordinaten in erster Annäherung als geradlinig behandelt. Obwohl zu erwarten ist, daß die von der Krümmung des Koordinatensystems bewirkten Änderungen der an sich schon kleinen Formänderungsgrößen als klein höherer Ordnung zu vernachlässigen sind, würden wir dabei einen grundsätzlichen Fehler begehen. Bei Aufstellung der Formänderungsgrößen in kartesischen Koordinaten waren nämlich von den Verschiebungen nur die sehr kleinen Zuwüchse $\frac{\partial \xi}{\partial x} dx$ usw. übriggeblieben, während die Verschiebungen selbst herausgefallen waren. Für die Formänderung, die von diesen kleinen Zuwüchsen herrührt, ist zwar die Krümmung ein Effekt höherer Ordnung; jedoch gilt dies für die Verschiebungen selbst nicht mehr. Während in kartesischen Koordinaten durch konstante Verschiebungen ξ , η , ζ kein Formänderungszustand erzeugt werden kann (der elastische Körper würde sich dabei als starrer Körper verschieben), ist dies in krummlinigen Koordinaten mit konstanten Verschiebungen U , V , W infolge der Krümmung durchaus möglich. Wie wir sehen werden, ist

diese Formänderung nicht mehr vernachlässigbar, da sie von den Verschiebungen selbst, nicht aber von ihren kleinen Zuwächsen hervorgerufen ist. Die zugehörigen Formänderungsgrößen wollen wir mit ε''_u usw. bezeichnen; sie sind also zu den in (23) angegebenen Bestandteilen noch zu addieren, um die vollständigen Formänderungsgrößen zu erhalten.

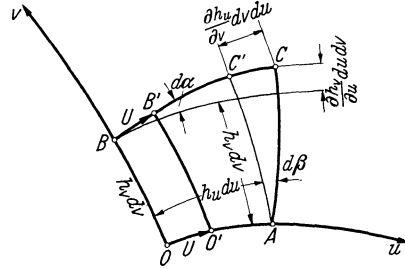


Abb. 10. Zur Formänderung in gekrümmten Koordinaten.

Wir betrachten ein kleines Stückchen einer Fläche $w = \text{konst.}$ in Abb. 10, an dessen Ecken wir zunächst nur die konstante Verschiebung U anbringen. Die in der v -Richtung liegende Kante OB hat die Länge $h_v dv$. Durch Verschieben um die Strecke $h_u du$ in die Lage AC' würde sich ihre Länge um $\frac{\partial h_v}{\partial u} dv du$ vergrößern, d. h. sie würde die Dehnung $\frac{1}{h_v} \frac{\partial h_v}{\partial u} du$ erfahren. Die bei der Verschiebung U eintretende Dehnung ergibt sich hieraus durch Multiplikation mit dem Verhältnis $\frac{U}{h_u du}$ zu

$$\varepsilon''_v = \frac{U}{h_u h_v} \frac{\partial h_v}{\partial u}. \quad (24)$$

Bei Verschieben der Kante OB in die Lage AC vergrößert sich andererseits der ursprünglich rechte Winkel zwischen dieser Kante und der u -Richtung um den kleinen Winkel $d\beta$, der sich zu $\frac{1}{h_v} \frac{\partial h_u}{\partial v} du$ ergibt. Als Vergrößerung eines rechten Winkels handelt es sich hierbei um eine negative Winkeländerung. Die der Verschiebung U entsprechende Winkeländerung γ''_{uv} erhalten wir wieder durch Multiplikation mit $\frac{U}{h_u du}$; es wird

$$\gamma''_{uv} = -\frac{U}{h_u h_v} \frac{\partial h_u}{\partial v}. \quad (25)$$

Weitere Anteile ergeben sich an Hand eines Stückchens einer Fläche $v = \text{konst.}$ Wir erhalten sie hier aus (24) und (25) durch Vertauschung von v mit w :

$$\varepsilon''_w = \frac{U}{h_u h_w} \frac{\partial h_w}{\partial u}, \quad \gamma''_{uw} = -\frac{U}{h_u h_w} \frac{\partial h_u}{\partial w}. \quad (26)$$

Die übrigen, von der konstanten Verschiebung U herrührenden Größen sind klein höherer Ordnung.

Nach dem Überlagerungssatz addieren wir hierzu die von den konstanten Verschiebungen V und W herrührenden Anteile; sie ergeben sich aus (24), (25) und (26) durch Vertauschung von u mit v und w . Ferner haben wir dazu noch die Anteile aus (23) zu addieren; dabei lassen sich die Ausdrücke für die Winkeländerungen noch etwas umformen. Wir erhalten schließlich als vollständige Formänderungsgrößen:

$$\varepsilon_u = \frac{1}{h_u} \left(\frac{\partial U}{\partial u} + \frac{V}{h_v} \frac{\partial h_u}{\partial v} + \frac{W}{h_w} \frac{\partial h_u}{\partial w} \right), \quad \gamma_{uv} = \frac{h_u}{h_v} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{U}{h_u} \right) + \frac{h_v}{h_u} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{V}{h_v} \right) \text{ usw.} \quad (27)$$

Auch bei Ableitung der Volumdehnung müssen wir zunächst beachten, daß bei unserem gekrümmten Volumelement die Längen der in gleicher Richtung verlaufenden Kanten voneinander abweichen. Da es sich bei diesen Längenunterschieden ebenso wie bei den Formänderungsgrößen um sehr kleine Effekte handelt, können wir zur Berechnung der Volumdehnung auch mittlere Kantenlängen k_u , k_v , k_w zugrunde legen, welche die mittleren Längen der in der u -, v - bzw. w -Richtung verlaufenden Kanten darstellen sollen. Die Volumdehnung berechnet sich dann zu

$$e = \frac{k_u(1 + \varepsilon_u)k_v(1 + \varepsilon_v)k_w(1 + \varepsilon_w) - k_u k_v k_w}{k_u k_v k_w}, \quad (28)$$

woraus bei Vernachlässigung der Dehnungsprodukte

$$e = \varepsilon_u + \varepsilon_v + \varepsilon_w \quad (29)$$

folgt; d. h. auch bei krummlinigen Koordinaten ist die Volumdehnung gleich der Summe der Dehnungen.

Damit haben wir die gesamte Formänderung auch in gekrümmten Koordinaten beschrieben. Wir werden nun die Beziehungen kennenlernen, durch welche Spannungs- und Formänderungszustand, die wir bisher getrennt voneinander behandelt haben, miteinander verknüpft sind.

4. Das Hookesche Gesetz.

Das Hookesche Elastizitätsgesetz verlangt einerseits Proportionalität zwischen Normalspannungen und Dehnungen, andererseits auch zwischen Schubspannungen und Winkeländerungen.

Denken wir uns zunächst nur die Normalspannung σ_x allein vorhanden, so wird in ihrer eigenen Richtung die Dehnung

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (30)$$

hervorgerufen; dabei stellt E das Elastizitätsmaß dar. Zugleich tritt aber in jeder der beiden Querrichtungen eine Zusammenziehung bzw. negative Dehnung ein vom Betrage

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{\sigma_x}{mE}. \quad (31)$$

Hierin ist m die Poissonsche Zahl, welche für Metalle gleich $10/3$ gesetzt werden kann. Wirken zugleich alle drei Normalspannungen, so ergibt sich durch Überlagerung

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \frac{1}{m} (\sigma_y + \sigma_z) \right], \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left[\sigma_y - \frac{1}{m} (\sigma_z + \sigma_x) \right], \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left[\sigma_z - \frac{1}{m} (\sigma_x + \sigma_y) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Setzen wir diese Ausdrücke in (16) ein, so ergibt sich für die Volumdehnung

$$e = \frac{1}{E} \left(1 - \frac{2}{m} \right) (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (33)$$

Die hierbei auftretende Summe der drei Normalspannungen wollen wir in folgenden kurz als Spannungssumme bezeichnen.

Ferner sind die Schubspannungen den zugehörigen Winkeländerungen proportional, wobei als Proportionalitätsfaktor das Schubelastizitätsmaß oder Gleitmaß dient, welches man mit G bezeichnet. Man setzt

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}, \quad \tau_{yz} = G \gamma_{yz}, \quad \tau_{zx} = G \gamma_{zx}. \quad (34)$$

Aus diesem Zusammenhang der Spannungen mit den Formänderungsgrößen geht hervor, daß der Überlagerungssatz, den wir bisher nur auf die Formänderung anwandten, auch für den Spannungszustand Gültigkeit besitzt.

Die drei Konstanten E , m und G , die wir so in die Rechnung eingeführt haben, sind noch durch eine wichtige Beziehung miteinander verknüpft. Wir gewinnen diese Beziehung am einfachsten durch folgende Überlegung. Herrscht nur die Schubspannung τ_{xy} , so wird ein Quadrat von der Seite b , dessen Kanten vor der Formänderung parallel zur x - und y -Richtung lagen, zu einem Rhombus ausarten, s. Abb. 11. Die Veränderung der Diagonale ergibt sich dabei aus der Winkeländerung zu $\gamma_{xy} \frac{b}{\sqrt{2}}$, wofür wir wegen (34) auch $\frac{\tau_{xy} b}{G \sqrt{2}}$ setzen können.

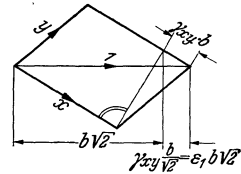


Abb. 11. Zusammenhang zwischen Dehnung und Winkeländerung.

Andererseits haben wir in III, 1 gesehen, daß diesem reinen Schubspannungszustand in Schnitten unter 45° ein reiner Zug-Druck-Spannungszustand entspricht, d. h. in Richtung der Diagonale herrscht die Zugspannung $\sigma_1 = \tau_{xy}$ und in der Querrichtung die Druckspannung $\sigma_2 = -\tau_{xy}$. Folglich erfährt die Diagonale entsprechend (32) die Dehnung $\epsilon_1 = \frac{1}{E} \left(\sigma_1 - \frac{1}{m} \sigma_2 \right) = \frac{1}{E} \left(1 + \frac{1}{m} \right) \tau_{xy}$ und damit die Verlängerung $\frac{b \sqrt{2}}{E} \left(1 + \frac{1}{m} \right) \tau_{xy}$. Durch Gleichsetzen der beiden für die Verlängerung der Diagonale gewonnenen Ausdrücke erhalten wir als Beziehung zwischen den drei Elastizitätskonstanten

$$G = \frac{E}{2 \left(1 + \frac{1}{m} \right)}. \quad (35)$$

Wir wollen diese Beziehung noch dazu verwenden, um die Gleichungen (32) etwas umzuformen. Für die erste dieser Gleichungen können wir auch setzen

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \left[\left(1 + \frac{1}{m} \right) \sigma_x - \frac{1}{m} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right]. \quad (36)$$

Auf diese Weise tritt die Spannungssumme auf, die mit Hilfe von (33) durch die Volumdehnung ausgedrückt werden kann; dann wird

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \left(1 + \frac{1}{m} \right) \sigma_x - \frac{1}{m} \frac{e}{1 - \frac{2}{m}}. \quad (37)$$

Nach σ_x aufgelöst geht dies über in

$$\sigma_x = \frac{E}{1 + \frac{1}{m}} \left(\varepsilon_x + \frac{e}{m-2} \right). \quad (38)$$

Machen wir noch von (35) Gebrauch, so ergibt sich die erste der folgenden Gleichungen

$$\sigma_x = 2G \left(\varepsilon_x + \frac{e}{m-2} \right) \text{ usw.} \quad (39)$$

In krummlinigen Koordinaten gilt entsprechend

$$\sigma_u = 2G \left(\varepsilon_u + \frac{e}{m-2} \right), \quad \tau_{uv} = G \gamma_{uv} \text{ usw.} \quad (40)$$

5. Aufstellung der Grundgleichungen.

Wir gehen nun zurück zu den Gleichgewichtsbedingungen (2), von denen die erste lautete

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0. \quad (41)$$

Für die Normalspannung σ_x ergibt sich aus (39) und (14):

$$\sigma_x = 2G \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{e}{m-2} \right); \quad (42)$$

ferner folgt aus (34) und (14) für die Schubspannungen τ_{xy} und τ_{xz}

$$\tau_{xy} = G \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right), \quad \tau_{xz} = G \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right). \quad (43)$$

Setzen wir diese Ausdrücke in (41) ein, so wird

$$2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{2}{m-2} \frac{\partial e}{\partial x} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial z} = 0. \quad (44)$$

Zur Abkürzung wollen wir den Operator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (45)$$

eingeführen. Ferner geht aus (16) durch Differenzieren hervor, daß

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial z} = \frac{\partial e}{\partial x} \quad (46)$$

wird, so daß sich schließlich die erste der folgenden Gleichungen ergibt:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \xi + \frac{m}{m-z} \frac{\partial e}{\partial x} &= 0, \\ \Delta \eta + \frac{m}{m-z} \frac{\partial e}{\partial y} &= 0, \\ \Delta \zeta + \frac{m}{m-z} \frac{\partial e}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Diese Gleichungen stellen zusammen mit

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = e \quad (48)$$

die sog. elastischen Grundgleichungen dar. Sind sie erfüllt, so haben wir damit nicht nur für die Verschiebungen, sondern auch für die Formänderungsgrößen und Spannungen alle Gleichungen, die wir kennengelernt haben, befriedigt.

Es kommt nun darauf an, die Grundgleichungen in möglichst einfacher Weise zu erfüllen. Wie wir im folgenden zeigen werden, lassen sich die Verschiebungen mit Hilfe meines neuen Drei-Funktionen-Ansatzes durch Differenzieren stets so ableiten, daß diese Gleichungen von vornherein befriedigt sind.

6. Der Drei-Funktionen-Ansatz.

Um die Grundgleichungen allgemein zu lösen, brachte bereits Maxwell¹ Spannungen und Verschiebungen zu drei Funktionen in Beziehung und stellte durch Einsetzen in die Grundgleichungen die zwischen den Funktionen bestehende Differentialgleichung auf, ohne jedoch diese mit Hilfe eines weiteren Ansatzes in allgemeiner Form zu lösen. Bei späteren Ansätzen wurde einerseits derselbe Weg eingeschlagen, wobei es dann gelang, die jeweils auftretende Differentialgleichung in Integralform zu befriedigen. So enthält z. B. einer dieser Ansätze eine Integration nach x in kartesischen Koordinaten². Andererseits führte man das Problem auf Randwertaufgaben der Potentialtheorie zurück³. Obwohl jeder dieser Ansätze eine mathematische einwandfreie Lösung des Problems darstellt, ist doch ihre Anwendung mit einem so großen Rechenaufwand verbunden, daß sie für Probleme der räumlichen Spannungsverteilung in Kerben keine Verwendung gefunden haben. Im Gegensatz hierzu hat der von mir aufgestellte neue Ansatz⁴ den Vorteil, daß die Ableitung von Verschiebungen und Spannungen ohne Integration gelingt. Der Ansatz enthält eine allgemeine räumliche Spannungsfunktion, welche sich aus drei Funktionen zusammensetzt. Infolge der Symmetrie des zugehörigen Gleichungssystems gestaltet sich der Rechnungsgang auch in krummlinigen Koordinaten verhältnismäßig einfach, so daß es in einer Reihe von Fällen sogar gelingt, Lösungen in geschlossener Form anzugeben.

Mein Drei-Funktionen-Ansatz hat die Form⁴:

$$\left. \begin{aligned} 2G\xi &= -\frac{\partial F}{\partial x} + 2\alpha\Phi_1, \\ 2G\eta &= -\frac{\partial F}{\partial y} + 2\alpha\Phi_2, \\ 2G\zeta &= -\frac{\partial F}{\partial z} + 2\alpha\Phi_3. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Hierin bedeutet F eine zunächst noch unbekannte räumliche Spannungs-

¹ Maxwell, J. C.: Sci. Pap., Paris Bd. 2 (1927) S. 198 ff.

² Trefftz, E.: Mathematische Elastizitätstheorie. Handb. d. Physik Bd. VI S. 92.

³ Korn, A.: Math. Ann. Bd. 75 (1914) S. 497.

⁴ Neuber, H.: Z. angew. Math. Mech. Bd. 14 (1934) S. 203 ff.

funktion; α ist eine Konstante. Φ_1, Φ_2, Φ_3 sind harmonische Funktionen; d. h. sie genügen der Bedingung

$$\Delta \Phi_1 = \Delta \Phi_2 = \Delta \Phi_3 = 0, \quad (50)$$

also der Potentialgleichung.

Um über den Zusammenhang dieser Funktionen mit der Spannungsfunktion F Aufschluß zu erhalten, setzen wir die Verschiebungen entsprechend unserem Ansatz in die Grundgleichungen (47) ein. Dann ergibt sich mit Berücksichtigung von (50):

$$\left. \begin{aligned} -\Delta \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) + 2G \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial x} &= 0, \\ -\Delta \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) + 2G \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial y} &= 0, \\ -\Delta \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right) + 2G \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Da beim Differenzieren in kartesischen Koordinaten die Reihenfolge vertauschbar ist, können wir diese Gleichungen auch in der Form

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(2G \frac{m}{m-2} e - \Delta F \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(2G \frac{m}{m-2} e - \Delta F \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(2G \frac{m}{m-2} e - \Delta F \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

schreiben. Daraus folgt, daß der Klammerausdruck unabhängig von x , y und z sein muß, d. h.

$$2G \frac{m}{m-2} e - \Delta F = \text{konst.} \quad (53)$$

Da die auf der rechten Seite befindliche Konstante unwesentlich ist, dürfen wir sie gleich Null setzen und erhalten

$$2Ge = \left(1 - \frac{2}{m} \right) \Delta F. \quad (54)$$

Wir gehen andererseits mit unserem Ansatz (49) auch in Gleichung (48) ein, die ja ebenfalls erfüllt sein muß. Wir erhalten

$$2Ge = -\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\alpha \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 2\alpha \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + 2\alpha \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \quad (55)$$

oder mit Anwendung des Δ -Operators

$$2Ge = -\Delta F + 2\alpha \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right). \quad (56)$$

Setzen wir den so gewonnenen Ausdruck für $2Ge$ in (54) ein, so ergibt sich

$$\left(2 - \frac{2}{m} \right) \Delta F = 2\alpha \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right). \quad (57)$$

Damit haben wir die gesuchte Beziehung zwischen der Spannungsfunktion und den drei harmonischen Funktionen gefunden. Während

bei den früheren Ansätzen die entsprechende Gleichung nur in Integralform lösbar war, läßt sie sich hier in einfacher Weise befriedigen. Setzen wir nämlich

$$F = \Phi_0 + x\Phi_1 + y\Phi_2 + z\Phi_3, \quad (58)$$

wobei auch Φ_0 eine harmonische Funktion sei, also der Gleichung

$$\Delta\Phi_0 = 0 \quad (59)$$

genügt, so liefert die Anwendung der Δ -Operation

$$\Delta F = \Delta\Phi_0 + x\Delta\Phi_1 + 2\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} + y\Delta\Phi_2 + 2\frac{\partial\Phi_2}{\partial y} + z\Delta\Phi_3 + 2\frac{\partial\Phi_3}{\partial z}. \quad (60)$$

Wegen (50) und (59) geht dies über in

$$\Delta F = 2\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial\Phi_3}{\partial z}\right). \quad (61)$$

Setzen wir dies in (57) ein, so ergibt sich für die Konstante α der Wert

$$\alpha = 2\left(1 - \frac{1}{m}\right). \quad (62)$$

Wir haben auf diese Weise sämtliche Bedingungen erfüllt. Zur Kontrolle wollen wir jetzt auch die Spannungen angeben.

Die Normalspannungen erhalten wir aus (42), wenn wir ξ aus (49) und e aus (54) einsetzen. Es wird

$$\sigma_x = 2G\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{2Ge}{m-z} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\alpha\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} + \frac{1}{m}\Delta F \quad \text{usw.} \quad (63)$$

Mit Hilfe von (62) läßt sich $1/m$ durch α ausdrücken:

$$\frac{1}{m} = 1 - \frac{\alpha}{2}. \quad (64)$$

Damit geht (63) über in

$$\sigma_x = -\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\alpha\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\Delta F \quad \text{usw.} \quad (65)$$

Definitionsgemäß ist einerseits

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}. \quad (66)$$

Andererseits ist wegen (61)

$$\frac{1}{2}\Delta F = \frac{\partial\Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial\Phi_3}{\partial z}, \quad (67)$$

so daß wir (65) schließlich auch in der Form

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \alpha\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} - \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial\Phi_3}{\partial z}\right) \quad \text{usw.} \quad (68)$$

schreiben können.

Für die Schubspannungen folgt aus (43) und (49) unmittelbar

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} + \alpha\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial y} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial x}\right) \quad \text{usw.} \quad (69)$$

Hierbei ist zu beachten, daß an der Vertauschung in x , y , z auch Φ_1 , Φ_2 und Φ_3 teilnehmen. Man überzeugt sich jetzt leicht, daß tatsächlich die Gleichgewichtsbedingungen (2) erfüllt sind. Ebenso sind auch alle übrigen Gleichungen erfüllt, die sich durch Kombinieren der Gleichungen (2), (14), (33), (34) und (39) noch aufstellen lassen¹.

Für den allgemeinen Spannungszustand ist es bemerkenswert, daß immer eine der vier harmonischen Funktionen gleich Null gesetzt werden darf, ohne die Vollständigkeit zu beeinträchtigen. Der Nachweis hierfür geht am einfachsten aus der folgenden Substitution hervor:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_3 &= \frac{\partial \Phi'_3}{\partial z}, & \Phi_2 &= \frac{\partial \Phi'_3}{\partial y} + \Phi'_2, & \Phi_1 &= \frac{\partial \Phi'_3}{\partial x} + \Phi'_1, \\ \Phi_0 &= 2\alpha \Phi'_3 - \left(x \frac{\partial \Phi'_3}{\partial x} + y \frac{\partial \Phi'_3}{\partial y} + z \frac{\partial \Phi'_3}{\partial z} \right) + \Phi'_0. \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

Hierbei sind Φ'_3 , Φ'_2 , Φ'_1 und Φ'_0 vier neue harmonische Funktionen. Haben wir einen Spannungszustand durch geeignete Wahl der Funktionen Φ_0 , Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 beschrieben, so sind mit den Gleichungen (70) auch die neu eingeführten Funktionen festgelegt; denn Φ'_3 ergibt sich unmittelbar aus

$$\frac{\partial \Phi'_3}{\partial z} = \Phi_3, \quad (71)$$

während Φ'_2 , Φ'_1 und Φ'_0 dann entsprechend (70) aus Φ_2 , Φ_1 , Φ_0 und Φ'_3 folgen. Durch Differenzieren überzeugt man sich leicht, daß die Einführung der neuen harmonischen Funktionen nicht im Widerspruch zu (50) und (59) steht.

Für die Spannungsfunktion erhalten wir mit Hilfe von (58)

$$F = \Phi_0 + x\Phi_1 + y\Phi_2 + z\Phi_3 = 2\alpha \Phi'_3 + \Phi'_0 + x\Phi'_1 + y\Phi'_2. \quad (72)$$

Wir wenden unsere Substitution nun auf den Ansatz (49) an und erhalten:

$$\left. \begin{aligned} 2G\xi &= -\frac{\partial}{\partial x} (\Phi'_0 + x\Phi'_1 + y\Phi'_2) + 2\alpha \Phi'_1, \\ 2G\eta &= -\frac{\partial}{\partial y} (\Phi'_0 + x\Phi'_1 + y\Phi'_2) + 2\alpha \Phi'_2, \\ 2G\zeta &= -\frac{\partial}{\partial z} (\Phi'_0 + x\Phi'_1 + y\Phi'_2). \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

Das Ergebnis zeigt, daß die Verschiebungen von Φ'_3 vollkommen unabhängig sind. Wir haben zwar Φ'_3 benötigt, um die Funktionen Φ'_2 , Φ'_1 und Φ'_0 bestimmen zu können. Im Endergebnis kommt es jedoch auf diese Funktion nicht mehr an; sie ist gewissermaßen schon mit Φ'_2 , Φ'_1 und Φ'_0 berücksichtigt, welche die Rolle von Φ_2 , Φ_1 und Φ_0 übernommen haben. Damit haben wir bewiesen, daß der allgemeine Spannungszustand stets auch nur durch drei Funktionen beschrieben werden kann. Es kann mithin in unserem Ansatz (49) von vornherein eine der Funktionen Φ_1 , Φ_2 oder Φ_3 gleich Null gesetzt werden.

¹ Siehe A. u. L. Föppl: Drang u. Zwang, I. Bd. 2. Aufl. S. 29 u. 30; ferner E. Trefftz: Mathematische Elastizitätstheorie. Handb. d. Physik Bd. VI S. 64 u. 65.

Durch eine andere Substitution läßt sich schließlich auch zeigen, daß man Φ_0 gleich Null setzen darf. Indem man nämlich

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= 2\alpha\Phi'_0 - x\frac{\partial\Phi'_0}{\partial x} - y\frac{\partial\Phi'_0}{\partial y} - z\frac{\partial\Phi'_0}{\partial z}, \\ \Phi_1 &= \frac{\partial\Phi'_0}{\partial x} + \Phi'_1, \quad \Phi_2 = \frac{\partial\Phi'_0}{\partial y} + \Phi'_2, \quad \Phi_3 = \frac{\partial\Phi'_0}{\partial z} + \Phi'_3 \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

setzt, wird

$$\left. \begin{aligned} 2G\xi &= -\frac{\partial}{\partial x}(x\Phi'_1 + y\Phi'_2 + z\Phi'_3) + 2\alpha\Phi'_1, \\ 2G\eta &= -\frac{\partial}{\partial y}(x\Phi'_1 + y\Phi'_2 + z\Phi'_3) + 2\alpha\Phi'_2, \\ 2G\zeta &= -\frac{\partial}{\partial z}(x\Phi'_1 + y\Phi'_2 + z\Phi'_3) + 2\alpha\Phi'_3. \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

Die Funktion Φ'_0 tritt in der Tat auf diese Weise nicht mehr auf. Da die drei Funktionen Φ'_1 , Φ'_2 , Φ'_3 jetzt in derselben Form auftreten wie vorher die Funktionen Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 , so haben wir damit bewiesen, daß Φ_0 von vornherein gleich Null gesetzt werden darf, ohne die Vollständigkeit zu beeinträchtigen.

Es werden also in Wirklichkeit nur drei harmonische Funktionen benötigt; welche von den vier Funktionen gleich Null gesetzt wird, ist dabei gleichgültig. Einer bestimmten harmonischen Funktion entsprechen folglich auch gerade drei voneinander verschiedene Spannungszustände, welche bis auf wenige Ausnahmefälle nicht durch eine andere harmonische Funktion erzeugt werden können. Die Mannigfaltigkeit des allgemeinen elastischen Zustandes ist mithin gleich der dreifachen Mannigfaltigkeit der harmonischen Funktionen.

7. Der Rechnungsgang in krummlinigen Koordinaten.

Die wesentlichste Forderung an die Spannungsberechnung ist die Erfüllung der Randbedingungen, welche den Spannungen, die an der Oberfläche des Körpers angreifen, einen ganz bestimmten Verlauf vorschreiben. Bei lastfreier Oberfläche z. B. verschwinden diese Spannungen. Da die Oberfläche des Körpers im allgemeinen gekrümmt ist, läßt sich diese Bedingung in kartesischen Koordinaten nicht leicht erfüllen. Benutzt man dagegen ein krummliniges Koordinatensystem, in welchem die Oberfläche z. B. als Fläche $u = u_0$ enthalten ist — im Sinne der in III, 3 gegebenen Definition —, so verschwinden dort alle Spannungen mit dem Index u , also

$$\sigma_u = 0, \quad \tau_{uv} = 0, \quad \tau_{uw} = 0 \quad \text{für } u = u_0. \quad (76)$$

Infolge dieser einfachen Form der Randbedingung geben wir dem Rechnungsgang in krummlinigen Koordinaten den Vorzug.

Die Grundlagen für die Rechnung in krummlinigen Koordinaten haben wir bereits in III, 3 kennengelernt. Wir wollen nun den Ansatz

(49) auf krummlinige Koordinaten übertragen und greifen zurück auf die Beziehungen (22) für die Verschiebungen U, V, W :

$$U = \frac{1}{h_u} \left(\xi \frac{\partial x}{\partial u} + \eta \frac{\partial y}{\partial u} + \zeta \frac{\partial z}{\partial u} \right) \quad \text{usw.} \quad (77)$$

Durch Einsetzen der Ausdrücke für ξ, η, ζ aus (49) erhalten wir hieraus

$$2GU = \frac{1}{h_u} \left[\left(-\frac{\partial F}{\partial x} + 2\alpha \Phi_1 \right) \frac{\partial x}{\partial u} + \left(-\frac{\partial F}{\partial y} + 2\alpha \Phi_2 \right) \frac{\partial y}{\partial u} + \right. \\ \left. + \left(-\frac{\partial F}{\partial z} + 2\alpha \Phi_3 \right) \frac{\partial z}{\partial u} \right] \quad \text{usw.} \quad (78)$$

Nun ist bekanntlich

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial u} \quad \text{usw.} \quad (79)$$

Es ergibt sich daher

$$2GU = \frac{1}{h_u} \left[-\frac{\partial F}{\partial u} + 2\alpha \left(\Phi_1 \frac{\partial x}{\partial u} + \Phi_2 \frac{\partial y}{\partial u} + \Phi_3 \frac{\partial z}{\partial u} \right) \right] \quad \text{usw.} \quad (80)$$

Diese Gleichungen, welche uns die Verschiebungen in krummlinigen Koordinaten liefern, sind in der Tat fast so einfach wie in kartesischen Koordinaten.

Die weitere Rechnung besteht in der Aufstellung der Dehnungen [siehe (27)!]:

$$\varepsilon_u = \frac{1}{h_u} \left(\frac{\partial U}{\partial u} + \frac{V}{h_v} \frac{\partial h_u}{\partial v} + \frac{W}{h_w} \frac{\partial h_u}{\partial w} \right) \quad \text{usw.} \quad (81)$$

Daraus erhält man die Volumdehnung [siehe (29)!]

$$e = \varepsilon_u + \varepsilon_v + \varepsilon_w \quad (82)$$

und schließlich auf Grund von (40) und (62) die Normalspannungen

$$\sigma_u = 2G \left(\varepsilon_u + \frac{2-\alpha}{2\alpha-2} e \right) \quad \text{usw.} \quad (83)$$

Die Schubspannungen ergeben sich aus (27) und (40):

$$\tau_{uv} = G \left[\frac{h_v}{h_u} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{V}{h_v} \right) + \frac{h_u}{h_v} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{U}{h_u} \right) \right] \quad \text{usw.} \quad (84)$$

Damit sind alle Beziehungen zusammengestellt, welche wir benötigen, um in krummlinigen Koordinaten die Spannungen aus der Spannungsfunktion gewinnen zu können.

Der Rechnungsgang, den wir auf diese Weise gewonnen haben, setzt allerdings die Ermittlung der Verschiebungen als Voraufgabe der Spannungsberechnung voraus. In den meisten Fällen ist es einfacher, die Spannungen aus der Spannungsfunktion direkt abzuleiten. Zwar spielen gewisse Eigenschaften der Verschiebungen, wie Eindeutigkeit und Stetigkeit, für die Wahl der Funktionen Φ_1, Φ_2, Φ_3 und Φ_0 eine entscheidende Rolle. Es ist jedoch hierzu in der Regel nicht notwendig, die Verschiebungen selbst zu kennen; wie aus (49), (58) und (80) hervorgeht, brauchen diese Eigenschaften nur von den Funktionen Φ_1, Φ_2 und Φ_3 selbst, bei Φ_0

nur von den Ableitungen $\partial \Phi_0 / \partial x$ usw. oder in krummlinigen Koordinaten von $\frac{1}{h_u} \frac{\partial \Phi_0}{\partial u}$ usw. erfüllt zu sein, um auch für die Verschiebungen zu gelten. Wir wollen deshalb das in der Regel etwas kürzere Verfahren der direkten Spannungsermittlung ebenfalls behandeln. Wir setzen zu diesem Zweck die Verschiebungen aus (80) in (81) und (84) ein. Dabei führen wir zur Abkürzung folgende Operatoren ein:

$$\frac{\partial^2}{\partial n_u^2} = \frac{1}{h_u} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{h_u} \frac{\partial}{\partial u} \right) + \frac{1}{h_u h_v^2} \frac{\partial h_u}{\partial v} \frac{\partial}{\partial v} + \frac{1}{h_u h_w^2} \frac{\partial h_u}{\partial w} \frac{\partial}{\partial w} \quad \text{usw.}, \quad (85)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial n_u \partial n_v} &= \frac{\partial^2}{\partial n_v \partial n_u} = \frac{1}{h_u} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{h_v} \frac{\partial}{\partial v} \right) - \frac{1}{h_u^2 h_v} \frac{\partial h_u}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} = \\ &= \frac{1}{h_v} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{h_u} \frac{\partial}{\partial u} \right) - \frac{1}{h_u h_v^2} \frac{\partial h_v}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} = \frac{h_v}{2 h_u} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{h_v^2} \frac{\partial}{\partial v} \right) + \frac{h_u}{2 h_v} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{h_u^2} \frac{\partial}{\partial u} \right) \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

mit zyklischer Vertauschung in u, v, w . Es ergeben sich dann Ausdrücke, welche noch wesentlich vereinfacht werden können. Wir betrachten hierzu den Sonderfall

$$\Phi_1 = \text{konst.} = C, \quad \Phi_0 = -x C, \quad \Phi_2 = 0, \quad \Phi_3 = 0, \quad F = 0. \quad (87)$$

Es ergibt sich in diesem Falle nur in der x -Richtung die konstante Verschiebung

$$\xi = \frac{\alpha}{G} C. \quad (88)$$

Alle Punkte des Körpers verschieben sich also in der gleichen Richtung um die gleiche Strecke, d. h. der Körper bleibt starr, und es ist keine Formänderung möglich. In der Tat verschwinden auch sämtliche Formänderungsgrößen. Aber auch in krummlinigen Koordinaten dürfen in diesem Fall des starr bleibenden Körpers keine Formänderungsgrößen auftreten, d. h. es müssen die Glieder, bei denen Φ_1, Φ_2 oder Φ_3 selbst auftritt, verschwinden. Daraus folgen:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial n_u^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial n_u \partial n_v} = 0 \quad \text{usw. mit zykl. Vert. in } u, v, w \text{ und } x, y, z. \quad (89)$$

Zur endgültigen Aufstellung der Normalspannungen wollen wir schließlich noch die Volumdehnung durch die Spannungsfunktion ausdrücken. Mit (54) und (62) wird

$$2Ge = (\alpha - 1) \Delta F \quad \text{und damit} \quad \frac{2 - \alpha}{2\alpha - 2} 2Ge = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \Delta F. \quad (90)$$

Für die Normalspannungen erhalten wir dann

$$\sigma_u = -\frac{\partial^2 F}{\partial n_u^2} + \frac{2\alpha}{h_u^2} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial u} \right) + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \Delta F \quad \text{usw.} \quad (91)$$

Für die Schubspannungen finden wir

$$\left. \begin{aligned} \tau_{uv} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial n_u \partial n_v} + \frac{\alpha}{h_u h_v} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \quad \text{usw.} \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

Vergleichen wir die gefundenen Ausdrücke mit den entsprechenden in kartesischen Koordinaten, also den Beziehungen (65) und (69), so erkennen wir, daß die Operatoren $\frac{\partial^2}{\partial n_x^2}, \frac{\partial^2}{\partial n_u \partial n_v}$ usw. nichts anderes sind als die zweiten Differentialquotienten in einem kartesischen Koordinatensystem, nennen wir es $u' v', w'$, dessen Koordinatenrichtungen in dem betrachteten Punkte des Körpers mit den $u-, v-, w$ -Richtungen des gekrümmten Koordinatensystems gerade zusammenfallen. Dieser Gedankengang erklärt andererseits auch die Beziehungen (89).

Auch die allgemeine Gleichgewichtsbedingung (6) ist befriedigt, wenn man berücksichtigt, daß zwischen den Differentialoperatoren in kartesischen Koordinaten x, y, z und jenen in den beiden beliebigen Richtungen κ und λ die leicht ableitbaren Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial n_\kappa \partial n_\lambda} &= \sum_{\mu, \nu = x, y, z} \sum \cos(\kappa, \mu) \cos(\lambda, \nu) \frac{\partial^2}{\partial \mu \partial \nu}, \\ \frac{\partial}{\partial n_\kappa} \frac{\partial}{\partial n_\lambda} &= \sum_{\mu, \nu = x, y, z} \sum \cos(\kappa, \mu) \cos(\lambda, \nu) \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial \nu} \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

bestehen. Schließlich läßt sich noch allgemein zeigen, daß eine in der Richtung κ wirkende und an einer Fläche mit der Normalenrichtung λ angreifende Spannung folgendermaßen aus der Spannungsfunktion gewonnen werden kann:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\lambda\kappa} = & -\frac{\partial^2 F}{\partial n_\kappa \partial n_\lambda} + \alpha \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial n_\kappa} \frac{\partial x}{\partial n_\lambda} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial n_\lambda} \frac{\partial x}{\partial n_\kappa} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial n_\kappa} \frac{\partial y}{\partial n_\lambda} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \Phi_2}{\partial n_\lambda} \frac{\partial y}{\partial n_\kappa} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial n_\kappa} \frac{\partial z}{\partial n_\lambda} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial n_\lambda} \frac{\partial z}{\partial n_\kappa} \right) + \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \cos(\kappa, \lambda) \Delta F. \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

Hierbei bedeuten $\partial/\partial n_\kappa$ bzw. $\partial/\partial n_\lambda$ Differentiationen längs Geraden, welche im Bezugspunkte in der κ - bzw. λ -Richtung verlaufen.

Um die Spannungsfunktion selbst aufstellen zu können, müssen wir geeignete harmonische Funktionen heranziehen, für welche also der Operator Δ verschwindet. Dabei ist es notwendig, die Form dieses Operators auch für gekrümmte Koordinaten zu kennen. Wir können sie hier leicht aus den vorstehenden Gleichungen ableiten. Am einfachsten verwenden wir dazu die Volumdehnung. In kartesischen Koordinaten hatten wir erhalten [vgl. (56)!]:

$$2Ge = -\Delta F + 2\alpha \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right). \quad (95)$$

Für gekrümmte Koordinaten folgt aus (80) bis (82) unter Verwendung von (85), (86) und (89)

$$\left. \begin{aligned} 2Ge = & - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial n_u^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial n_v^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial n_w^2} \right) + \frac{2\alpha}{h_u^2} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial u} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial u} \right) + \frac{2\alpha}{h_v^2} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial v} \right) + \\ & \left. + \frac{2\alpha}{h_w^2} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial w} \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial w} \frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial w} \frac{\partial z}{\partial w} \right). \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

Der Vergleich der Bestandteile ohne α in beiden Ausdrücken liefert den Operator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial n_u^2} + \frac{\partial^2}{\partial n_v^2} + \frac{\partial^2}{\partial n_w^2}. \quad (97)$$

Setzen wir für die drei einzelnen Operatoren die ausführlichen Ausdrücke aus (85) ein, so finden wir nach kurzer Zwischenrechnung

$$\Delta = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{h_v h_w}{h_u} \frac{\partial}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{h_w h_u}{h_v} \frac{\partial}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{h_u h_v}{h_w} \frac{\partial}{\partial w} \right) \right\}. \quad (98)$$

Andererseits folgt aus der Übereinstimmung der Glieder mit dem Faktor 2α , sowie aus (61) noch folgende Beziehung für ΔF , die man mit Vorteil bei Ermittlung der Normalspannungen anwendet:

$$\Delta F = 2 \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right) = \left. \begin{aligned} &= \frac{2}{h_u^2} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial u} \right) + \frac{2}{h_v^2} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v} + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial v} \right) + \frac{2}{h_w^2} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial w} \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial w} \frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial w} \frac{\partial z}{\partial w} \right). \end{aligned} \right\} \quad (99)$$

Bei Besprechung der einzelnen Probleme werden wir jeweils auf die harmonischen Funktionen, für welche also der mit (98) festgelegte Operator verschwindet, zurückkommen. Insbesondere wird dabei gezeigt werden, welche Gedankengänge von vornherein zur richtigen Wahl der Funktionen führen.

Wir kommen nun zur Behandlung der Kerbspannungsaufgaben und beginnen mit der ebenen Kerbwirkung.

IV. Theorie der ebenen Kerbwirkung.

1. Die Ausgangsgleichungen.

Um zu den Ausgangsgleichungen für die ebene Kerbwirkung zu kommen, wollen wir voraussetzen, daß Spannungen und Formänderungsgrößen nur von zwei Koordinaten abhängen, sagen wir von x und y . Unser allgemeiner Ansatz, den wir in III, 6 kennengelernt haben, nimmt dann eine ganz spezielle Form an. Die vier harmonischen Funktionen, von denen wir von vornherein Φ_2 gleich Null setzen wollen, sind nur von x und y abhängig. Damit auch die Spannungsfunktion von z unabhängig wird, muß außerdem Φ_3 gleich Null gesetzt werden, wie aus (68) hervorgeht. Wir erhalten:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \Phi_0(x, y), & \Phi_1 &= \Phi_1(x, y), & \Phi_2 &= 0, & \Phi_3 &= 0, \\ F &= \Phi_0 + x \Phi_1. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Die Verschiebungen ergeben sich entsprechend (49) zu

$$2G\xi = -\frac{\partial F}{\partial x} + 2\alpha \Phi_1, \quad 2G\eta = -\frac{\partial F}{\partial y}, \quad \zeta = 0. \quad (2)$$

Um für die Spannungen möglichst einfache Ausdrücke zu erhalten, wollen wir noch

$$\Phi_1 = \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x}, \quad \Phi_0 = \alpha \Phi'_1 + \Phi'_0 \quad (3)$$

setzen; dabei sind Φ'_1 und Φ'_0 zwei neue ebene harmonische Funktionen. Damit wird

$$F = \Phi'_0 + x \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x} + \alpha \Phi'_1. \quad (4)$$

Um abzukürzen, sei ferner

$$\Phi'_0 + x \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x} = F' \quad (5)$$

gesetzt, so daß

$$\left. \begin{aligned} F &= F' + \alpha \Phi'_1, & 2G\xi &= -\frac{\partial}{\partial x}(F' - \alpha \Phi'_1), \\ 2G\eta &= -\frac{\partial}{\partial y}(F' + \alpha \Phi'_1), & \zeta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

wird. Die Spannungen ergeben sich am einfachsten an Hand von (68) und (69). Berücksichtigen wir dabei $\Delta \Phi'_1 = 0$, so erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F'}{\partial y^2}, & \sigma_y &= \frac{\partial^2 F'}{\partial x^2}, & \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 F'}{\partial x \partial y}, \\ \tau_{xz} &= 0, & \tau_{yz} &= 0, & \sigma_z &= \frac{\partial^2 F'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F'}{\partial y^2} - \alpha \frac{\partial^2 \Phi'_1}{\partial x^2}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Wegen

$$\Delta F = \Delta F' = 2 \frac{\partial^2 \Phi'_1}{\partial x^2} \quad (8)$$

folgt für die dritte Normalspannung

$$\sigma_z = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \Delta F' = \frac{1}{m} \Delta F' \quad (9)$$

oder, wie aus (7) hervorgeht,

$$\sigma_z = \frac{1}{m} (\sigma_x + \sigma_y). \quad (10)$$

Wir haben auf diese Weise den ebenen Formänderungszustand erhalten, bei welchem in der z -Richtung die Verschiebung verschwindet, nicht aber die Normalspannung. Handelt es sich um einen scheibenförmigen Körper, dessen beide Begrenzungsflächen durch Ebenen $z = \text{konst.}$ gebildet werden, so wirken an diesen Flächen Normalspannungen vom Betrage $\frac{1}{m} (\sigma_x + \sigma_y)$.

Von praktischer Bedeutung ist aber vor allem der sog. ebene Spannungszustand, bei welchem in der z -Richtung nicht die Verschiebung, sondern die Normalspannung verschwindet. Hierzu benötigen wir einen besonderen räumlichen Ansatz.

Wir wollen wieder die ebenen harmonischen Funktionen Φ'_1 und Φ'_0 verwenden, müssen aber jetzt die Koordinate z in geeigneter Weise hereinnehmen. Der Ansatz lautet

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{4 - 4\alpha + \alpha^2}{\alpha(4 - \alpha)} \left(z^2 \frac{\partial^2 \Phi'_1}{\partial x^2} - x \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x} \right) + \frac{2 - \alpha}{4 - \alpha} \frac{d^2}{12} \frac{\partial^2 \Phi'_1}{\partial x^2} + \frac{4}{4 - \alpha} \Phi'_1 + \Phi'_0, \\ \Phi_1 &= \frac{4}{\alpha(4 - \alpha)} \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x}, & \Phi_2 &= 0, & \Phi_3 &= \frac{-4 + 2\alpha}{\alpha(4 - \alpha)} z \frac{\partial^2 \Phi'_1}{\partial x^2}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Hierin bedeutet d die Dicke der Scheibe. Die Ebene $z = 0$ ist als Scheibenmittelfläche gedacht (s. Abb. 12). Wie man sich leicht überzeugt, sind Φ_0 , Φ_1 und Φ_3 auf diese Weise in der Tat räumliche harmonische Funktionen.

Die Spannungsfunktion wird

$$F = \frac{-2 + \alpha}{4 - \alpha} \left(z^2 - \frac{d^2}{12} \right) \frac{\partial^2 \Phi'_1}{\partial x^2} + \frac{4}{4 - \alpha} \Phi'_1 + \Phi'_0 + x \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x}. \quad (12)$$

Setzen wir wieder

$$\Phi'_0 + x \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x} = F', \quad (13)$$

so wird

$$\Delta F' = 2 \frac{\partial^2 \Phi'_1}{\partial x^2} \quad (14)$$

und damit

$$F = F' + \frac{2 - \alpha}{2(4 - \alpha)} \left(\frac{d^2}{12} - z^2 \right) \Delta F' + \frac{4}{4 - \alpha} \Phi'_1. \quad (15)$$

Die Verschiebungen sind:

$$\left. \begin{aligned} 2G\xi &= -\frac{\partial}{\partial x} \left[F' + \frac{2 - \alpha}{2(4 - \alpha)} \left(\frac{d^2}{12} - z^2 \right) \Delta F' - \frac{4}{4 - \alpha} \Phi'_1 \right], \\ 2G\eta &= -\frac{\partial}{\partial y} \left[F' + \frac{2 - \alpha}{2(4 - \alpha)} \left(\frac{d^2}{12} - z^2 \right) \Delta F' + \frac{4}{4 - \alpha} \Phi'_1 \right], \\ 2G\zeta &= -\frac{2 - \alpha}{4 - \alpha} \Delta F' z. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Die Spannungen ergeben sich aus (68) und (69) mit Berücksichtigung von $\Delta \Phi'_1 = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[F' + \frac{2 - \alpha}{2(4 - \alpha)} \left(\frac{d^2}{12} - z^2 \right) \Delta F' \right], \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[F' + \frac{2 - \alpha}{2(4 - \alpha)} \left(\frac{d^2}{12} - z^2 \right) \Delta F' \right], \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[F' + \frac{2 - \alpha}{2(4 - \alpha)} \left(\frac{d^2}{12} - z^2 \right) \Delta F' \right], \\ \sigma_z &= 0, \quad \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Bei dünnen Scheiben ist d im Vergleich zu den übrigen Abmessungen klein. Da wir die Ebene $z = 0$ als Scheibenmittelfläche gewählt haben, ist $z \leq d/2$, nimmt also ebenfalls nur sehr kleine Werte an. Wir können daher die mit d^2 und z^2 behafteten Bestandteile in erster Annäherung vernachlässigen. Wie aus (17) hervorgeht, hängen dann die Spannungen in derselben Weise mit der Spannungsfunktion F' zusammen wie beim ebenen Formänderungszustand [vgl. (7)!].

Bei dicken Scheiben gilt dieser Zusammenhang für die Spannungen zwar nicht mehr an jeder Stelle, wohl aber für ihre über die Dicke d

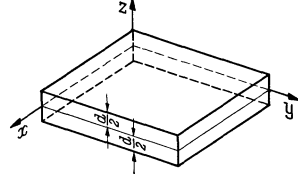


Abb. 12. Koordinaten der Scheibe.

genommenen Mittelwerte

$$\bar{\sigma}_x = \frac{1}{d} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \sigma_x dz \quad \text{usw.} \quad (18)$$

Denn es wird

$$\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \left(\frac{d^2}{12} - z^2 \right) dz = 0, \quad (19)$$

und wir erhalten

$$\bar{\sigma}_x = \frac{\partial^2 F'}{\partial y^2}, \quad \bar{\sigma}_y = \frac{\partial^2 F'}{\partial x^2}, \quad \bar{\tau}_{xy} = -\frac{\partial^2 F'}{\partial x \partial y}. \quad (20)$$

Dieselben Beziehungen, die wir beim ebenen Formänderungszustand für die Spannungen σ_x , σ_y und τ_{xy} gewonnen haben, gelten mithin beim ebenen Spannungszustand für die Mittelwerte dieser Spannungen. Bemerkenswert ist ferner, daß letztere nicht mehr von der Poisson'schen Konstante abhängen.

Wir werden uns in diesem Abschnitt ausschließlich mit dem ebenen Spannungszustand beschäftigen und wollen dabei der Einfachheit halber unter σ_x , σ_y und τ_{xy} die über die Dicke der Scheibe genommenen Mittelwerte dieser Spannungen verstehen. Ferner wollen wir F statt F' , Φ_0 statt Φ'_0 und Φ_1 statt $\partial \Phi'_1 / \partial x$ schreiben. Wir erhalten auf diese Weise als Ausgangsgleichungen des ebenen Spannungszustandes

$$\left. \begin{aligned} F &= \Phi_0 + x \Phi_1, & \Phi_0 &= \Phi_0(x, y), & \Phi_1 &= \Phi_1(x, y), \\ \Delta \Phi_0 &= 0, & \Delta \Phi_1 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \quad (22)$$

Die Spannungsfunktion F entspricht jetzt der von G. B. Airy für die ebene Elastizitätstheorie aufgestellten und nach ihm benannten

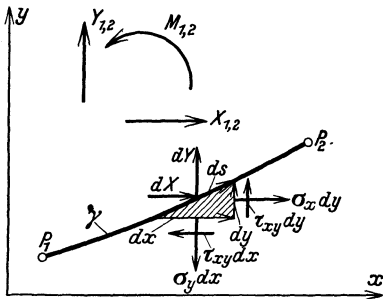


Abb. 13. Zu den allgemeinen Randbedingungen des ebenen Spannungszustandes.

Funktion. Die Spannungen werden also in einfacher Weise aus den zweiten Ableitungen dieser Funktion gewonnen. Wie wir sehen werden, hat man dabei ferner den Vorteil, daß die Randbedingungen des Spannungszustandes sich als Randbedingungen der Spannungsfunktion deuten lassen, so daß bei der Ermittlung der Spannungsfunktion zunächst die Spannungen selbst noch nicht aufgestellt zu werden brauchen.

Zur Ableitung dieser vereinfachten Randbedingungen betrachten wir in Abb. 13 das Kräftespiel an einem dreieckigen Scheibenelement mit den Kanten dx , dy (parallel zu den Koordinatenachsen) und ds .

An der Kante ds wirkt in der x -Richtung die Kraft dX , in der y -Richtung die Kraft dY . An den Kanten dx und dy wirken Kräfte, die von den Spannungen σ_x , σ_y und τ_{xy} herrühren. Aus dem Gleichgewicht gegen Verschieben in der x -Richtung folgt

$$dX = -\sigma_x dy + \tau_{xy} dx. \quad (23)$$

Entsprechend ergibt sich für die y -Richtung

$$dY = \sigma_y dx - \tau_{xy} dy. \quad (24)$$

Machen wir von (22) Gebrauch, so erhalten wir

$$dX = -\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dx = -d\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) \quad (25)$$

und

$$dY = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dy = d\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right). \quad (26)$$

Wir integrieren nun längs eines Linienzuges γ , der ununterbrochen im Material verläuft und die Punkte P_1 und P_2 verbindet (s. Abb. 13). $M_{1,2}$ sei das Drehmoment, $X_{1,2}$ und $Y_{1,2}$ seien die Kräfte, die insgesamt vom Material links des Linienzuges auf das Material rechts des Linienzuges ausgeübt werden. Es ergibt sich

$$X_{1,2} = \int_1^2 dX = -\int_1^2 d\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1, \quad (27)$$

$$Y_{1,2} = \int_1^2 dY = \int_1^2 d\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1. \quad (28)$$

In bezug auf die Stelle $x = 0$, $y = 0$ wird ferner das Drehmoment

$$\left. \begin{aligned} M_{1,2} &= \int_1^2 [x dY - y dX] = \int_1^2 \left[x d\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) + y d\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) \right] = \\ &= \int_1^2 \left(x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} - F \right) = \left(x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} - F \right)_2 - \left(x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} - F \right)_1. \end{aligned} \right\} (29)$$

Für den lastfreien Rand ergibt sich unmittelbar

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \text{konst.}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \text{konst.} \quad (30)$$

Als letzte Vorbereitung für die Ableitung der einzelnen Lösungen wollen wir noch in krummlinigen Koordinaten den Zusammenhang der Spannungen mit der Spannungsfunktion angeben. Dabei machen wir mit Vorteil von der Tatsache Gebrauch, daß die gesuchten Beziehungen von der Poissonschen Konstante unabhängig sind [vgl. (7), (20) und (22)!]. Deshalb dürfen wir für die Poissonsche Konstante und damit für die Konstante α einen beliebigen Wert wählen. Wir wollen hier $\alpha = 0$ setzen, da die Rechnung dann wesentlich verkürzt wird. Da α im Endergebnis wieder herausfällt, ist diese für die Rechnung vorgenommene Spezialisierung kein Fehler.

Wir hatten nun in kartesischen Koordinaten bereits festgestellt, daß der Zusammenhang zwischen der Spannungsfunktion und den in der Scheibe wirkenden Spannungen beim ebenen Spannungs- und Formänderungszustand der gleiche ist. Mit $\alpha = 0$ besteht jedoch auch zwischen dem ebenen Formänderungszustand und dem allgemein-räumlichen Spannungszustand kein Unterschied mehr, es ist dabei lediglich auf die Unabhängigkeit von der Koordinate z zu achten. Wir können deshalb auch ohne weiteres vom räumlichen Spannungszustand ausgehen und die für krummlinige Koordinaten bereits abgeleiteten Beziehungen benutzen, müssen dabei aber die Spannungsfunktion mit

$$F = F(u, v) \quad (31)$$

auf zwei Koordinaten spezialisieren. Für die dritte Koordinate setzen wir $w = z$. Dann folgt aus III, (20):

$$h_u^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2, \quad h_v^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2, \quad h_w = 1. \quad (32)$$

Aus (91) ergibt sich mit $\alpha = 0$

$$\sigma_u = -\frac{\partial^2 F}{\partial n_u^2} + \Delta F, \quad \sigma_v = -\frac{\partial^2 F}{\partial n_v^2} + \Delta F. \quad (33)$$

Aus III, (97) folgt mit Rücksicht auf (31):

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial n_u^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial n_v^2}. \quad (34)$$

In (33) eingesetzt ergibt

$$\sigma_u = \frac{\partial^2 F}{\partial n_v^2}, \quad \sigma_v = \frac{\partial^2 F}{\partial n_u^2}. \quad (35)$$

Setzen wir die Operatoren aus (85) ein, so erhalten wir mit Rücksicht auf (31) für die Normalspannungen schließlich folgende Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_u &= \frac{1}{h_v} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{h_v} \frac{\partial F}{\partial v} \right) + \frac{1}{h_u^2 h_v} \frac{\partial h_v}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial u}, \\ \sigma_v &= \frac{1}{h_u} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{h_u} \frac{\partial F}{\partial u} \right) + \frac{1}{h_u h_v^2} \frac{\partial h_u}{\partial v} \frac{\partial F}{\partial v}. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Die Schubspannung ergibt sich unmittelbar aus (92) und (86):

$$\tau_{uv} = -\frac{1}{h_u} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{h_v} \frac{\partial F}{\partial v} \right) + \frac{1}{h_u^2 h_v} \frac{\partial h_u}{\partial v} \frac{\partial F}{\partial u}. \quad (37)$$

Der Δ -Operator, der in (98) angegeben wurde, nimmt hier mit $h_w = 1$ die Form

$$\Delta = \frac{1}{h_u h_v} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{h_v}{h_u} \frac{\partial}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{h_u}{h_v} \frac{\partial}{\partial v} \right) \right] \quad (38)$$

an.

Zur Anwendung der Randbedingungen (26) bis (29) benötigen wir noch die Ausdrücke für $\partial F / \partial x$ und $\partial F / \partial y$. Nach einem bekannten Satze der Differentialgeometrie kann man $\partial F / \partial x$ additiv aus den x -Komponenten der Differentialquotienten in zwei zueinander senkrechten Richtungen, also hier aus

$$\frac{\partial F}{\partial s_u} = \frac{1}{h_u} \frac{\partial F}{\partial u} \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial s_v} = \frac{1}{h_v} \frac{\partial F}{\partial v} \quad (39)$$

zusammensetzen. Die x -Komponenten bilden wir dabei am einfachsten durch Multiplikation mit dem jeweiligen Richtungskosinus und setzen

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \cos(x, u) \frac{1}{h_u} \frac{\partial F}{\partial u} + \cos(x, v) \frac{1}{h_v} \frac{\partial F}{\partial v}. \quad (40)$$

Entsprechend wird auch

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \cos(y, u) \frac{1}{h_u} \frac{\partial F}{\partial u} + \cos(y, v) \frac{1}{h_v} \frac{\partial F}{\partial v}. \quad (41)$$

Setzen wir noch für die Richtungskosinus die Ausdrücke aus (18) von III, 3 ein, so ergibt sich schließlich

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{h_u^2} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{1}{h_v^2} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial F}{\partial v}, \quad (42)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{h_u^2} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{1}{h_v^2} \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial F}{\partial v}. \quad (43)$$

Wir hätten diese Beziehungen auch aus III, (99) mit $\Phi_2 = \Phi_3 = 0$ bzw. $\Phi_1 = \Phi_3 = 0$ ablesen können.

Für die Rechnung verwendet man mit Vorteil solche Koordinatensysteme, bei welchen die Verzerrungsfaktoren einander gleich werden. Dies ist der Fall, wenn für $x = x(u, v)$ und $y = y(u, v)$ die Bedingungen

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \pm \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \mp \frac{\partial y}{\partial u} \quad (44)$$

erfüllt sind. Aus (31) geht hervor, daß dann in der Tat

$$h_u = h_v = h \quad (45)$$

wird. Man spricht in diesem Falle von einem isometrischen Netz. Die Gleichung $\Delta \Phi = 0$ nimmt die einfache Form

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} = 0 \quad (46)$$

an, welche für das Aufsuchen der harmonischen Funktionen eine große Erleichterung bedeutet. Infolge der formalen Übereinstimmung dieser Gleichung in kartesischen und isometrischen Koordinaten lassen sich nämlich die harmonischen Funktionen auch in beiden Koordinatensystemen in gleicher Weise definieren.

In kartesischen Koordinaten x, y ist bekanntlich der Realteil (oder Imaginärteil) jeder komplexen Funktion $f(x + iy)$ eine harmonische Funktion. In gleicher Weise ist auch in den isometrischen Koordinaten u, v der Realteil jeder komplexen Funktion $f(u + iv)$ eine harmonische Funktion.

2. Die beiderseitige Außenkerbe.

Wie aus Abb. 14 hervorgeht, soll es sich um eine sehr tiefe beiderseitige Kerbe von symmetrischer Form handeln. Wie schon in I, 4 erwähnt wurde, nähert sich die Formzahl mit zunehmender Tiefe einem Grenzwert, der von der Tiefe unabhängig ist. Der Ermittlung dieses Grenzwertes sollen die folgenden Betrachtungen dienen. Dabei werden

wir auch die Spannungsverteilungen bei den einzelnen Beanspruchungsarten genau untersuchen. Infolge des Abklingungsgesetzes hat die

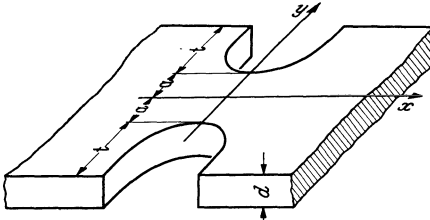


Abb. 14. Tiefe beiderseitige Außenkerbe.

Krümmung des Kerbgrundes den wesentlichsten Einfluß auf die Formzahl. Die weitere Gestalt der Kerbe, die für die Formzahl nur von geringer Bedeutung ist, soll hier so gewählt werden, daß sich ein möglichst einfacher Rechnungsgang ergibt, und zwar wollen wir der Kerbe die Form einer Hyperbel geben. Auf diese

Weise können wir Ellipsenkoordinaten mit

$$x = \mathfrak{C} \sin u \cos v, \quad y = \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{J} u \sin v \quad (47)$$

zugrunde legen. Dann wird

$$\left(\frac{x}{\mathfrak{C} \sin u} \right)^2 + \left(\frac{y}{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{J} u} \right)^2 = 1, \quad \left(\frac{y}{\sin v} \right)^2 - \left(\frac{x}{\cos v} \right)^2 = 1. \quad (48)$$

Demnach sind die Linien $u = \text{konst.}$ Ellipsen und die Linien $v = \text{konst.}$ Hyperbeln.

Für die Verzerrungsfaktoren folgt ferner aus (32)

$$\left. \begin{aligned} h_u^2 &= h_v^2 = h^2 = \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{J}^2 u \cos^2 v + \mathfrak{C} \sin^2 u \sin^2 v \\ &= \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{J}^2 u (1 - \sin^2 v) + (\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{J}^2 u - 1) \sin^2 v \\ &= \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{J}^2 u - \sin^2 v = \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{J}^2 u - 1 + \cos^2 v \\ &= \mathfrak{C} \sin^2 u + \cos^2 v. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Beide Verzerrungsfaktoren werden also einander gleich. Es handelt sich demnach um ein isometrisches Netz, so daß für die Gleichung $\Delta \Phi = 0$ die vereinfachte Form (46) in Anwendung kommt.

Die Beziehungen (42) und (43) gehen über in

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{h^2} \left[\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{J} u \cos v \frac{\partial F}{\partial u} - \mathfrak{C} \sin u \sin v \frac{\partial F}{\partial v} \right], \quad (50)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{h^2} \left[\mathfrak{C} \sin u \sin v \frac{\partial F}{\partial u} + \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{J} u \cos v \frac{\partial F}{\partial v} \right]. \quad (51)$$

Als Randlinie definieren wir allgemein eine Hyperbel mit dem Parameter v_0 . Entsprechend (30) müssen dann $\partial F / \partial x$ und $\partial F / \partial y$ für $v = \pm v_0$ konstant werden.

Die allgemeine Lösung der Spannungsaufgabe wollen wir nun so zerlegen, daß bei Integration der im engsten Querschnitt übertragenen Spannungen mit Hilfe von (27) bis (29) jeweils nur eine der drei Spannungsresultanten $X_{1,2}$, $Y_{1,2}$, $M_{1,2}$ von Null verschieden wird. Auf diese Weise zerfällt die Aufgabe in drei Einzelaufgaben, welche reinem Zug, reiner Biegung und reinem Schub entsprechen.

A. Reiner Zug.

Die Spannungsfunktion für reinen Zug ist so zu bestimmen, daß nur $X_{1,2}$ von Null verschieden wird.

Wir setzen¹

$$\Phi_0 = A(yv - xu) + B \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{J} u \cos v, \quad \Phi_1 = Au \quad (52)$$

und haben damit (46) erfüllt, wie man sich leicht überzeugt. Es wird

$$F = A y v + B \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{J} u \cos v \quad (53)$$

oder wegen (47)
$$F = \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{J} u (A v \sin v + B \cos v). \quad (54)$$

Wir bilden zunächst entsprechend (50) die Ableitung $\partial F / \partial x$ und erhalten

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\mathfrak{S} \mathfrak{I} n u \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{J} u}{h^2} (B - A \sin^2 v). \quad (55)$$

Am lastfreien Rand $v = \pm v_0$ muß $\partial F / \partial x$ konstant sein. Daraus ergibt sich eine Beziehung zwischen den Konstanten A und B :

$$B = A \sin^2 v_0. \quad (56)$$

Die Ableitung $\partial F / \partial y$ wird entsprechend (51)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{h^2} [& \mathfrak{S} \mathfrak{I} n^2 u \sin v (A v \sin v + B \cos v) \\ & + \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{J}^2 u \cos v (A v \cos v + A \sin v - B \sin v)] \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

oder wegen (49)

$$\frac{\partial F}{\partial y} = A v + B \cot v + \frac{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{J}^2 u \cos^2 v}{h^2} (A \operatorname{tg} v - B \operatorname{tg} v - B \cot v). \quad (58)$$

Setzen wir B aus (56) ein, so geht dies über in

$$\frac{\partial F}{\partial y} = A \left[v + \sin^2 v_0 \cot v + \frac{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{J}^2 u}{h^2} \cot v (\cos^2 v_0 - \cos^2 v) \right]. \quad (59)$$

Wir sehen hieraus, daß $\partial F / \partial y$ bereits für $v = \pm v_0$ konstant ist. Der Rand ist also lastfrei.

Wir kommen nun zur Untersuchung des durch den Stab hindurchgehenden Kraftflusses und machen Gebrauch von den Beziehungen (27), (28) und (29). Dabei haben wir an der Stelle 2 für v den Wert $+v_0$, an der Stelle 1 dagegen den Wert $-v_0$ einzusetzen. Es zeigt sich dann, daß $Y_{1,2}$ und $M_{1,2}$ verschwinden. Die allein vorhandene Spannungsergebnisse $X_{1,2}$ müssen wir noch mit der Dichte d der Scheibe multiplizieren, um bis auf das Vorzeichen die Gesamtzugkraft zu erhalten, die wir mit P bezeichnen wollen. Es wird

$$-X_{1,2} = \frac{P}{d} = 2A(v_0 + \sin v_0 \cos v_0). \quad (60)$$

Damit ist die Spannungsfunktion für diesen Fall endgültig festgelegt, und wir können dazu übergehen, die Spannungen mit Hilfe der Beziehungen (36) und (37) abzuleiten. Die sich dabei ergebenden

¹ Neuber, H.: Z. angew. Math. Mech. Bd. 13 (1933) S. 439.

zunächst unterhalb der gestrichelten Linie, welche der Nennspannung entspricht, steigt dann aber nach außen hin rasch an und erreicht im Kerbgrund mit dem 2,65fachen Wert der Nennspannung eine beträchtliche Spitze.

Für die im Kerbgrund auftretende Höchstspannung erhalten wir aus (61) und (66)

$$\sigma_{\max} = (\sigma_u)_{\substack{u=0 \\ v=v_0}} = p \frac{2 \operatorname{tg} v_0}{v_0 + \sin v_0 \cos v_0}. \quad (67)$$

Zu jedem v_0 -Wert gehört eine ganz bestimmte Kerbform. Wir führen das Verhältnis zwischen der halben Breite a des engsten Querschnittes und dem Krümmungsradius ϱ des Kerbgrundes als „Kerbkrümmung“ ein. Auf Grund der Hyperbelgleichung (48) wird

$$\frac{a}{\varrho} = \operatorname{tg}^2 v_0, \quad \cos v_0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{a}{\varrho} + 1}}, \quad \sin v_0 = \sqrt{\frac{\frac{a}{\varrho}}{\frac{a}{\varrho} + 1}}. \quad (68)$$

Mit Hilfe dieser Beziehungen läßt sich v_0 durch a/ϱ ausdrücken, und (67) geht über in

$$\frac{\sigma_{\max}}{p} = \frac{2 \left(\frac{a}{\varrho} + 1 \right) \sqrt{\frac{a}{\varrho}}}{\left(\frac{a}{\varrho} + 1 \right) \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a}{\varrho} + 1} + \sqrt{\frac{a}{\varrho}}}. \quad (69)$$

Abb. 16 zeigt die genaue Abhängigkeit der Höchstspannung von der Kerbkrümmung.

Bei schwacher Kerbkrümmung, also kleinen a/ϱ -Werten, läßt sich nachweisen, daß die Hauptspannungslinien in diesem Falle die Eigenschaft von Stromlinien haben. Es sei diesbezüglich auf die Literatur verwiesen¹.

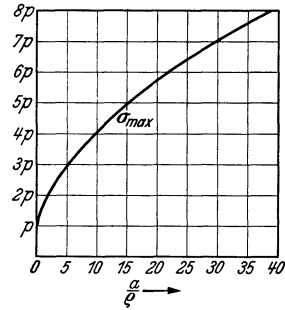


Abb. 16. Die Höchstspannung in tiefen beiderseitigen Außenkerben unter Zug.

B. Reine Biegung.

Bei reiner Biegung ist nur $M_{1,2}$ von Null verschieden. Dieser Bedingung genügt der Ansatz²

$$\Phi_0 = A \mathfrak{C} \operatorname{of} 2u \sin 2v + Bv, \quad \Phi_1 = -4A \mathfrak{S} \operatorname{in} u \sin v, \quad (70)$$

welcher (46) befriedigt. Die Spannungsfunktion wird hiermit

$$F = A \sin 2v + Bv. \quad (71)$$

Entsprechend (50) und (51) wird

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\mathfrak{S} \operatorname{in} u \sin v}{h^2} (2A \cos 2v + B), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\mathfrak{C} \operatorname{of} u \cos v}{h^2} (2A \cos 2v + B). \quad (72)$$

Der Rand ist demnach lastfrei, wenn

$$B = -2A \cos 2v_0 \quad (73)$$

¹ Neuber, H.: Ing.-Arch. Bd. 6 (1935) S. 325.

² Neuber, H.: Ing.-Arch. Bd. 5 (1934) S. 239.

gesetzt wird. Damit verschwinden beide Ableitungen für $v = +v_0$ und $v = -v_0$. Aus (27) und (28) folgt dann unmittelbar, daß $X_{1,2}$ und $Y_{1,2}$ verschwinden. Für $M_{1,2}$, welches mit d multipliziert das Gesamtbiegemoment M liefert, ergibt sich aus (29)

$$M_{1,2} = \frac{M}{d} = -(F)_{+v_0} + (F)_{-v_0} = -2(A \sin 2v_0 + B v_0). \quad (74)$$

Setzen wir B aus (73) ein, so wird

$$\frac{M}{d} = -2A(\sin 2v_0 - 2v_0 \cos 2v_0). \quad (75)$$

Die Spannungen ergeben sich mit Hilfe von (36) und (37) in der Form

$$\left. \begin{aligned} \sigma_u &= \frac{A}{h^2} \sin 2v \left(-4 + \frac{\cos 2v - \cos 2v_0}{h^2} \right), \\ \sigma_v &= \frac{A}{h^4} \sin 2v (\cos 2v_0 - \cos 2v), \\ \tau_{uv} &= \frac{A}{h^4} \sin 2v (\cos 2v - \cos 2v_0). \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

Als Nennspannung dient hier die elementare Biegungsspannung

$$\sigma_n = \frac{3M}{2a^2 d} = p. \quad (77)$$

Wir können hiermit aus (75) für die Konstante A einen Ausdruck gewinnen, der die Dimension einer Spannung besitzt. Es wird mit Rücksicht auf (64)

$$A = -p \frac{\sin^2 v_0}{3(\sin 2v_0 - 2v_0 \cos 2v_0)}. \quad (78)$$

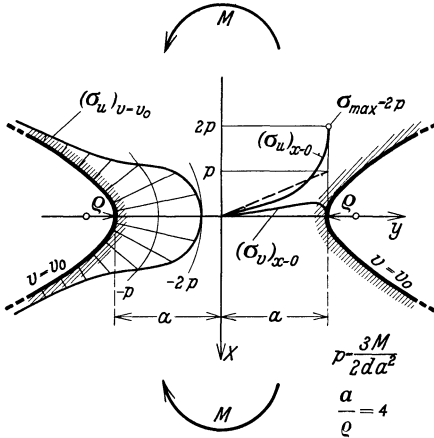


Abb. 17. Beiderseitige tiefe Außenkerbe bei Biegebungsbeanspruchung.

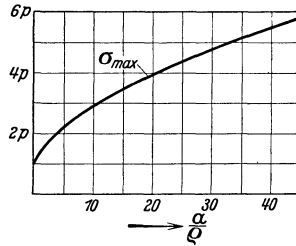


Abb. 18. Die Höchstspannung in tiefen beiderseitigen Außenkerben bei Biegung.

Abb. 17 zeigt den Spannungsverlauf für $\operatorname{tg} v_0 = 2$. Die gestrichelte Linie entspricht dem geradlinigen Spannungsverlauf nach der alten Festigkeitslehre. Die Spannung σ_u verläuft von der Mitte aus zunächst unterhalb dieser Linie, um dann nach außen hin rasch anzusteigen. Im Kerbgrund erreicht sie den doppelten Wert der Nennspannung.

Für die Höchstspannung ergibt sich mit Hilfe von (68)

$$\frac{\sigma_{\max}}{r} = \frac{4 \frac{a}{\varrho} \sqrt{\frac{a}{\varrho}}}{3 \left[\sqrt{\frac{a}{\varrho}} + \left(\frac{a}{\varrho} - 1 \right) \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{a}{\varrho}} \right]}. \quad (79)$$

Abb. 18 zeigt die genaue Abhängigkeit der Höchstspannung von a/ϱ .

C. Reiner Schub.

Für reinen Schub lautet der Ansatz¹

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= A \mathfrak{S}in u \sin v, & \Phi_1 &= B v, \\ F &= \mathfrak{S}in u (A \sin v + B v \cos v). \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

Wir bilden $\partial F/\partial y$ entsprechend (51) und erhalten

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\mathfrak{S}in u \mathfrak{C}os u}{h^2} (A + B \cos^2 v). \quad (81)$$

Die Randbedingung verlangt demnach

$$A = -B \cos^2 v_0. \quad (82)$$

Die Ableitung $\partial F/\partial x$ wird gemäß (50)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{1}{h^2} [\mathfrak{C}os^2 u \cos v (A \sin v + B v \cos v) - \\ &\quad - \mathfrak{S}in^2 u \sin v (A \cos v + B \cos v - B v \sin v)] \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

oder wegen (49) und mit Benutzung des für A gefundenen Wertes

$$\frac{\partial F}{\partial x} = B \left[v - \cos^2 v_0 \operatorname{tg} v + \frac{\mathfrak{S}in^2 u}{h^2} \operatorname{tg} v (\cos^2 v_0 - \cos^2 v) \right]. \quad (84)$$

Wie wir sehen, ist $\partial F/\partial x$ für $v = \pm v_0$ konstant, so daß der Rand lastfrei ist.

Die Anwendung der Beziehungen (27) bis (29) zeigt in diesem Falle, daß $X_{1,2}$ und $M_{1,2}$ verschwinden. Die allein von Null verschiedene Spannungsergebnante $Y_{1,2}$ entspricht, mit d multipliziert, der Querkraft, die wir mit $-V$ bezeichnen wollen. Es wird

$$Y_{1,2} = -\frac{V}{d} = 2B(v_0 - \sin v_0 \cos v_0). \quad (85)$$

Die Spannungen ergeben sich unter Umgehung der Zwischenrechnung in der Form:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_u &= \frac{B}{h^2} \mathfrak{S}in u \sin v \left(-2 + \frac{\cos^2 v - \cos^2 v_0}{h^2} \right), \\ \sigma_v &= \frac{B}{h^4} \mathfrak{S}in u \sin v (\cos^2 v_0 - \cos^2 v), \\ \tau_{uv} &= \frac{B}{h^4} \mathfrak{C}os u \cos v (\cos^2 v_0 - \cos^2 v). \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

¹ Neuber, H.: Ing.-Arch. Bd. 5 (1934) S. 240.

Als Vergleichswert dient hier zweckmäßig die mittlere Schubspannung des engsten Querschnittes

$$\tau_n = \frac{V}{2ad} = p. \quad (87)$$

Aus (85) erhalten wir dann mit Rücksicht auf (64)

$$B = -p \frac{\sin v_0}{v_0 - \sin v_0 \cos v_0}. \quad (88)$$

Abb. 19 zeigt die Spannungsverteilung für $\operatorname{tg} v_0 = 7$. Die maximale Spannung tritt diesmal nicht im Kerbgrund, sondern in dessen unmittelbarer Nähe auf. Im engsten Querschnitt herrscht reiner Schub.

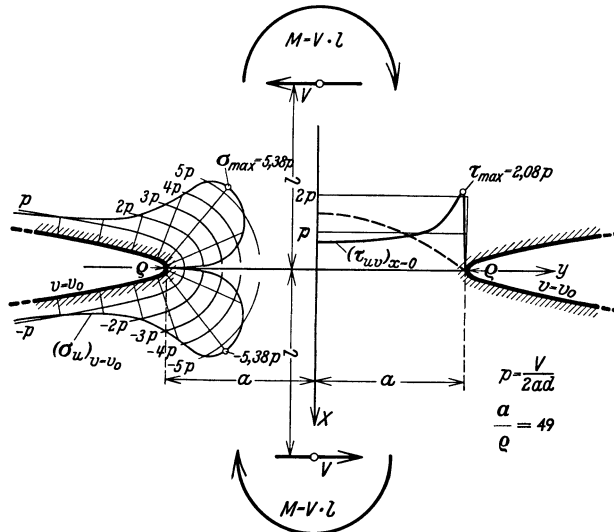


Abb. 19. Beidseitige tiefe Außenkerbe bei Schub.

Die Schubspannung in der Mitte ist noch kleiner als unser Vergleichswert. Nach außen hin steigt sie stark an, um unmittelbar vor dem Rand ihren Höchstwert zu erreichen. Jenseits dieses Höchstwertes erfolgt schroffes Abfallen zum Rand. Einen ähnlichen Verlauf zeigt die Spannung σ_u längs des Randes. In großer Entfernung vom Kerbgrund ist sie noch verschwindend klein, steigt aber zum Kerbgrund hin allmählich an, um dicht neben dem Kerbgrund ihren Höchstwert zu erreichen. Im Kerbgrund selbst geht sie durch Null hindurch, erreicht auf der anderen Seite als Druckspannung denselben Höchstwert wie vorher als Zugspannung, um dann nach außen hin wieder schnell abzuklingen.

Die gestrichelte Linie entspricht der parabelförmigen Schubspannungsverteilung, wie sie nach der elementaren Festigkeitslehre beim ungebogenen Stab eintreten würde. Der wirkliche Schubspannungsverlauf steht hierzu in schroffem Gegensatz.

Wir berechnen zunächst den Höchstwert der Spannung σ_u . Längs des Randes wird

$$(\sigma_u)_{v=v_0} = -2B \frac{\mathfrak{S}in u \sin v_0}{h^2} = -2B \sin v_0 \frac{\mathfrak{S}in u}{\mathfrak{S}in^2 u + \cos^2 v_0}. \quad (89)$$

Der Ausdruck hängt nur noch von u ab und hat daher dort ein Extremum, wo der Differentialquotient $\frac{\partial}{\partial u} (\sigma_u)_{v=v_0}$ verschwindet. Wir bilden

$$\frac{\partial}{\partial u} (\sigma_u)_{v=v_0} = -\frac{2B \sin v_0}{h^2} [(\mathfrak{S}in^2 u + \cos^2 v_0) \mathfrak{C}os u - 2 \mathfrak{S}in^2 u \mathfrak{C}os u] = 0 \quad (90)$$

und erhalten hieraus

$$\mathfrak{S}in^2 u = \cos^2 v_0, \quad \mathfrak{S}in u = \pm \cos v_0. \quad (91)$$

Der Zughöchstwert entspricht dem positiven Vorzeichen. Er liegt im Abstände [vgl. (47), (64) und (68)!]

$$x = \mathfrak{S}in u \cos v_0 = \cos^2 v_0 = a \frac{\cos^2 v_0}{\sin v_0} = \frac{a}{\sqrt{\frac{a}{\varrho} \left(\frac{a}{\varrho} + 1 \right)}} \quad (92)$$

und wird

$$\frac{\sigma_{\max}}{p} = \frac{\frac{a}{\varrho} \sqrt{\frac{a}{\varrho} + 1}}{\left(\frac{a}{\varrho} + 1 \right) \arctan \sqrt{\frac{a}{\varrho} - \frac{a}{\varrho}}}. \quad (93)$$

Zur Berechnung des Schubhöchstwertes bilden wir den Ausdruck für die Schubspannung τ_{uv} im engsten Querschnitt. Es wird

$$(\tau_{uv})_{u=0} = B \frac{\cos^2 v_0 - \cos^2 v}{\cos^3 v}. \quad (94)$$

Der Ausdruck hängt nur noch von v ab. Wir bilden daher

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} (\tau_{uv})_{x=0} = \frac{B}{\cos^6 v} [\cos^3 v \cdot 2 \sin v \cos v + \\ + (\cos^2 v_0 - \cos^2 v) 3 \cos^2 v \sin v] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

und erhalten hieraus

$$\cos^2 v = 3 \cos^2 v_0, \quad \cos v = \pm \sqrt{3} \cos v_0. \quad (96)$$

Der Schubhöchstwert liegt demnach an der Stelle [vgl. wieder (47), (64) und (68)!]

$$y = \sin v = \sqrt{1 - 3 \cos^2 v_0} = a \frac{\sqrt{1 - 3 \cos^2 v_0}}{\sin v_0} = a \sqrt{\frac{\frac{a}{\varrho} - 2}{\frac{a}{\varrho}}} \quad (97)$$

und wird

$$\frac{\tau_{\max}}{p} = \frac{\frac{2}{9} \sqrt{3} \left(\frac{a}{\varrho} + 1 \right) \sqrt{\frac{a}{\varrho}}}{\left(\frac{a}{\varrho} + 1 \right) \arctan \sqrt{\frac{a}{\varrho} - \frac{a}{\varrho}}}. \quad (98)$$

Für $a/\rho \leq 2$ liegt er noch an der Stelle $y=0$ und berechnet sich aus

$$\frac{\tau_{\max}}{p} = \frac{\frac{a}{\rho} \sqrt{\frac{a}{\rho}}}{\sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} \left[\left(\frac{a}{\rho} + 1 \right) \arctan \sqrt{\frac{a}{\rho} - \frac{a}{\rho}} \right]} \quad (99)$$

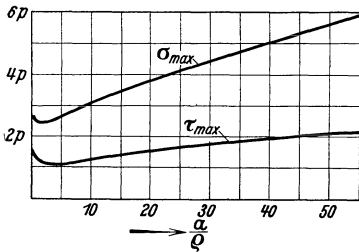


Abb. 20. Die Höchstspannungen in beiderseitigen tiefen Außenkerben bei Schub.

Abb. 20 erläutert die Abhängigkeit dieser Spannungshöchstwerte von der Kerbkürmung.

Der allgemeine Fall der zusammengesetzten Biegung stellt eine Überlagerung der beiden soeben behandelten Belastungsfälle dar. Wie wir gesehen haben, liegt der Höchstwert der Randspannung bei reiner Biegung im Kerbgrund, bei reinem Schub jedoch daneben. Wir können

daher strenggenommen beide Höchstspannungen nicht einfach addieren, um den Höchstwert für zusammengesetzte Biegung zu erhalten, sondern

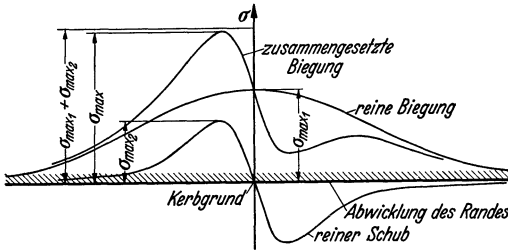


Abb. 21. Die Höchstspannung bei zusammengesetzter Biegung.

müssen ihn aus dem Verlauf der Randspannung, der durch Überlagerung erhalten wird, nach Ort und Größe neu bestimmen. Ein Beispiel einer solchen Überlagerung ist in Abb. 21 angegeben. Die Spannungen sind der größeren Deutlichkeit halber über dem abgewickelten

Rand aufgetragen. Man erkennt, daß der genaue Höchstwert nur sehr wenig kleiner als die mit $\sigma_{\max_1} + \sigma_{\max_2}$ bezeichnete Summe der beiden Einzelhöchstwerte ist. In den meisten Fällen der zusammengesetzten Biegung genügt es daher, mit der Summe der beiden von Biegung und Schub herrührenden Werte zu rechnen.

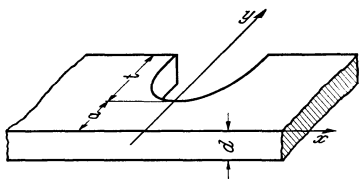


Abb. 22. Die einseitige tiefe Außenkerbe.

3. Die einseitige tiefe Außenkerbe.

Denken wir uns den bisher behandelten beiderseits gekerbten Flachstab längs der x -Achse aufgeschnitten, so erhalten wir den Flachstab mit einseitiger tiefer Außenkerbe (Abb. 22). Wie wir im folgenden sehen werden, lassen sich durch Anwendung dieser Schnittbetrachtung auf jede der drei für die beiderseitige Kerbe angegebenen Spannungsfunktionen ausreichende Rechnungsgrundlagen für die Ermittlung der

Spannungsverteilung im einseitig gekerbten Flachstab gewinnen. Allerdings handelt es sich hierbei nur um ein Näherungsverfahren, da längs der x -Achse, wo jetzt eigentlich ein lastfreier Rand sein sollte, noch gewisse kleine Spannungen vorhanden sind. Es kommt hier jedoch nur auf die Spannungsverteilung in der näheren Umgebung des Kerbgrundes an, für welche in erster Linie der durch den engsten Querschnitt gehende Kraftfluß maßgebend ist, während die Art der Einleitung der äußeren Kräfte entsprechend dem Abklingungsgesetz nur eine untergeordnete Rolle spielt. Es liegt deshalb nahe, von der genauen Erfüllung der Randbedingung in diesem Falle zugunsten der einfacheren Rechnung abzusehen.

Wir gehen also aus von den drei eben behandelten Spannungsfunktionen, müssen aber bei der Ermittlung des Kraftflusses mit Hilfe von (27) bis (29) jetzt beachten, daß an der Stelle 2 entsprechend dem neuen Rand nunmehr $v = 0$ einzusetzen ist. Ferner müssen wir, da es sich um den engsten Querschnitt handelt, $u = 0$ setzen.

A. Reiner Zug.

Wir legen zunächst die Spannungsfunktion für den beiderseits gekerbten Flachstab bei reinem Zug zugrunde. Für den Kraftfluß erhalten wir aus (54) bis (56)

$$\left. \begin{aligned} -X_{1,2} &= A(v_0 + \sin v_0 \cos v_0), \\ Y_{1,2} &= 0, \quad M_{1,2} = A \sin^2 v_0. \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

Wir führen wieder die Gesamtzugkraft mit

$$P = -X_{1,2} d \quad (101)$$

ein. Mit der mittleren Spannung des engsten Querschnittes als Nennspannung

$$\sigma_n = \frac{P}{ad} = p \quad (102)$$

ergibt sich dann für die Konstante A wieder derselbe Wert wie beim beiderseits gekerbten Stab [vgl. (66)!]. Damit behält die Beziehung (69) für die maximale Spannung auch beim einseitig gekerbten Stab ihre Gültigkeit. Allerdings gilt dies nur dann, wenn die Wirkungslinie der Kraft P einen ganz bestimmten Abstand von der x -Achse hat, den wir mit e bezeichnen wollen (vgl. Abb. 23). Das Moment $M_{1,2}$, mit der Dicke d der Scheibe multipliziert, ist offenbar das Moment der Kraft P in bezug auf die Stelle $y = 0$, muß also mit $P \cdot e$ identisch sein. Daraus ergibt sich für den Abstand e mit Rücksicht auf (64) und (68)

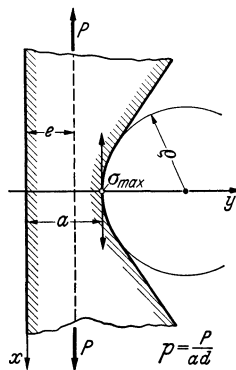


Abb. 23. Einseitig tiefe Außenkerbe unter Zug bei behinderter Stabkrümmung.

$$e = \frac{M_{1,2} d}{P} = \frac{M_{1,2}}{-X_{1,2}} = \frac{\sin^2 v_0}{v_0 + \sin v_0 \cos v_0} = a \frac{\sqrt{\frac{a}{\varrho} \left(\frac{a}{\varrho} + 1 \right)}}{\left(\frac{a}{\varrho} + 1 \right) \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a}{\varrho}} + \sqrt{\frac{a}{\varrho}}}. \quad (103)$$

Abb. 24 zeigt die Abhängigkeit des Verhältniswertes e/a von a/ρ . Nur dann, wenn die Wirkungslinie der Zugkraft von der ungekerbten Stabkante einen Abstand hat, der dieser Beziehung entspricht, gilt für die Höchstspannung Gleichung (69).

Kennt man die Lage der Wirkungslinie der Kraft P nicht, so ist es von Vorteil, eine andere Bedingung für die Anwendbarkeit der Formel (69) zu kennen, die sich auf die Formänderung des Stabes bezieht. Unsere Ableitung, welche durch Schnittbetrachtung am beiderseits gekerbten Stab entstanden ist, setzt für Spannungen und Formänderungsgrößen völlige Symmetrie zur x -Achse voraus. Die Verschiebung η muß infolgedessen längs der x -Achse verschwinden, und die x -Achse darf keine Krümmung erleiden. Die Formel (69) ist mithin immer dann anwendbar, wenn durch äußere Zwangsbedingungen eine Krümmung der ungekerbten geraden Stabkante verhindert ist.

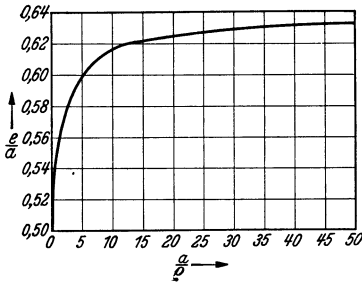


Abb. 24. Abstand e der Zugkraftwirkungslinie vom ungekerbten Rand im Verhältnis zur Breite a des engsten Querschnittes (vgl. Abb. 23).

Die eben behandelte Lösung entspricht demnach nur einem Sonderfall. Wir wollen deshalb noch einen allgemeineren Fall der reinen Zugbeanspruchung behandeln, und zwar wollen wir jetzt voraussetzen, daß die Wirkungslinie der Spannungsergebnante P im Abstand $a/2$ von der ungekerbten Kante liegt (Abb. 25). Bei der Behandlung dieses Falles müssen wir zur Spannungsfunktion für reinen Zug des beiderseits gekerbten Stabes noch diejenige für reine Biegung hinzunehmen. Die bei der letzteren auftretende Konstante A wollen wir zur Unterscheidung mit A' bezeichnen.

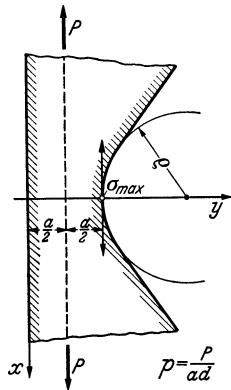


Abb. 25. Einseitige tiefe Außenkerbe unter Zug, wenn die Zugkraftwirkungslinie durch die Mitte des engsten Querschnittes geht.

Für den Kraftfluß ergibt sich dann aus (54), (55), (59), (71) und (72)

$$\left. \begin{aligned} -X_{1,2} &= A(v_0 + \sin v_0 \cos v_0) - 4A' \sin^2 v_0, \\ Y_{1,2} &= 0, \\ M_{1,2} &= A \sin^2 v_0 + A'(2v_0 \cos 2v_0 - \sin 2v_0). \end{aligned} \right\} (104)$$

Für die Gesamtzugkraft und die Nennspannung behalten (101) und (102) ihre Gültigkeit. Das Moment $M_{1,2}$, mit d multipliziert, muß entsprechend unserer Voraussetzung gleich $P \cdot \frac{a}{2}$ sein. Mit Rücksicht auf (64) wird daher

$$-X_{1,2} = \frac{P}{d} = p \sin v_0, \quad M_{1,2} = \frac{P}{d} \cdot \frac{a}{2} = p \frac{\sin^2 v_0}{2}. \quad (105)$$

Setzen wir diese Ausdrücke in (104) ein, so ergeben sich für die Konstanten A und A' zwei Gleichungen, aus welchen folgen

$$\left. \begin{aligned} 4 \frac{A'}{A} &= \frac{\sin v_0 (v_0 + \sin v_0 \cos v_0) - 2 \sin^2 v_0}{\sin^3 v_0 - \sin v_0 \cos v_0 + v_0 \cos 2 v_0}, \\ A &= p \frac{\sin v_0}{v_0 + \sin v_0 \cos v_0 - \frac{4 A'}{A} \sin^2 v_0}. \end{aligned} \right\} \quad (106)$$

Die im Kerbgrund auftretende Höchstspannung ergibt sich aus (61) und (76)

$$\sigma_{\max} = \frac{2A}{\cos v_0} - 8A' \operatorname{tg} v_0. \quad (107)$$

Setzen wir die Konstanten aus (106) ein, so erhalten wir die Höchstspannung als Funktion von v_0 . Drücken wir dann v_0 mit Hilfe von (68) durch a/ρ aus, so ergibt sich σ_{\max} schließlich als Funktion der Kerbkürmung. Der dabei auftretende sehr verwickelte Ausdruck läßt sich bei Verwendung der Formzahlen des beiderseits gekerbten Stabes noch wesentlich vereinfachen. Wir wollen dabei unter α_1 die Formzahl der beiderseitigen tiefen Außenkerbe bei Zugbeanspruchung [siehe (69)!] und unter α_2 diejenige für Biegebeanspruchung [siehe (79)!] verstehen. Dann können wir setzen

$$\frac{\sigma_{\max}}{p} = \frac{\alpha_1 - 2C}{1 - \frac{\sqrt{\frac{a}{\rho} + 1}}{C}}, \quad (108)$$

wobei

$$C = \frac{\alpha_1 - \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1}}{\frac{4}{3\alpha_2} \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} - 1}. \quad (109)$$

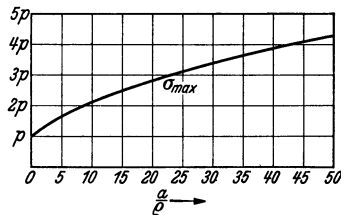


Abb. 26. Die Höchstspannung in einseitigen tiefen Außenkerben unter Zug, wenn die Zugkraftwirkungsline durch die Mitte des engsten Querschnittes geht.

Die Abhängigkeit der Höchstspannung von a/ρ ist in Abb. 26 dargestellt.

B. Reine Biegung.

Durch Überlagerung der Spannungsfunktionen für Zug und Biegung des beiderseits gekerbten Stabes läßt sich auch der Fall der reinen Biegung der einseitigen Außenkerbe leicht erledigen (Abb. 27). Mit (104) hatten wir den Kraftfluß bereits allgemein festgelegt, so daß es sich nur noch um die Hinzunahme der für reine Biegung charakteristischen Bedingungen handelt. Bei reiner Biegung verschwindet die Resultante $X_{1,2}$. Das Moment $M_{1,2}$ liefert, mit d multipliziert, das Moment M der äußeren Kräfte:

$$X_{1,2} = 0, \quad M_{1,2} = \frac{M}{d}. \quad (110)$$

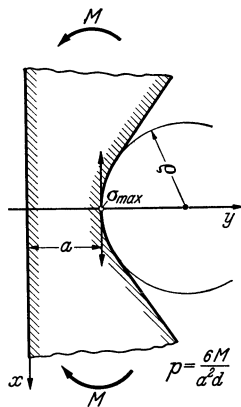


Abb. 27. Einseitige tiefe Außenkerbe bei Biegung.

Als Nennspannung benutzen wir die elementare Biegungsspannung

$$\sigma_n = \frac{6M}{a^2 d} = p. \quad (111)$$

Aus (104) ergibt sich dann

$$\left. \begin{aligned} \frac{A'}{A} &= \frac{v_0 + \sin v_0 \cos v_0}{4 \sin^2 v_0}, \\ A &= \frac{p}{6} \frac{1}{1 + \frac{A'}{A} \frac{2 v_0 \cos 2 v_0 - \sin 2 v_0}{\sin^2 v_0}}. \end{aligned} \right\} \quad (112)$$

Setzen wir die so gewonnenen Ausdrücke in (107) ein, so erhalten wir die Höchstspannung. Mit Hilfe von (68) und bei Verwendung der Formzahlen α_1 und α_2 der beiderseitigen Kerbe ergibt sich schließlich

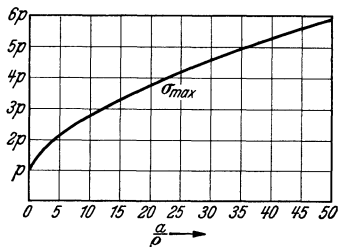


Abb. 28. Die Höchstspannung in einseitigen tiefen Außenkerben bei Biegung.

$$\frac{\sigma_{\max}}{p} = \frac{2 \left(\frac{a}{\rho} + 1 \right) - \alpha_1 \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1}}{\frac{4}{\alpha_2} \left(\frac{a}{\rho} + 1 \right) - 3 \alpha_1}. \quad (113)$$

Die Abhängigkeit der Höchstspannung von der Kerbkürmung veranschaulicht Abb. 28.

C. Reiner Schub.

Im Falle der reinen Schubbeanspruchung (Abb. 29) führt die Spannungsfunktion für reinen Schub der beiderseitigen Kerbe unmittelbar zum Ziele. Wir greifen zurück auf (80) bis (84) und (86). Für den Kraftfluß ergibt sich jetzt

$$X_{1,2} = 0, \quad Y_{1,2} = B(v_0 - \sin v_0 \cos v_0), \quad M_{1,2} = 0. \quad (114)$$

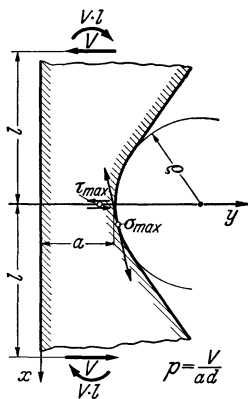


Abb. 29. Einseitige tiefe Außenkerbe bei Schub.

$Y_{1,2}$ liefert, mit d multipliziert, bis auf das Vorzeichen die Querkraft V :

$$Y_{1,2} = -\frac{V}{d}. \quad (115)$$

Als Bezugsspannung benutzen wir wieder die mittlere Schubspannung des engsten Querschnittes

$$\tau_n = \frac{V}{aa} = p. \quad (116)$$

Dann folgt aus (114) für die Konstante B wieder derselbe Wert wie beim beiderseits gekerbten Stab [vgl. (88)!]. Damit behalten die Formeln (93) und (99) für die Höchstwerte der Normalspannung und der Schubspannung auch beim einseitig gekerbten Stab ihre Gültigkeit.

Alle bisher behandelten Probleme dienen der Bestimmung der Formzahlen der tiefen Außenkerben. Zur Ermittlung der allgemeinen

Formzahlen benötigen wir außerdem noch die zugehörigen Formzahlen der flachen Außenkerben. Bevor wir uns jedoch diesem Aufgabengebiet zuwenden, soll noch ein anderer Zweig der ebenen Kerbwirkung behandelt werden, und zwar der Einfluß von Bohrungen und Langlöchern auf die ebene Spannungsverteilung. Die dabei gefundenen Ergebnisse werden uns dann später für die Behandlung der flachen Außenkerben gewisse Dienste leisten.

4. Bohrung und Langloch im sehr breiten Stab.

Wie Abb. 30 zeigt, soll es sich um einen Flachstab handeln, welcher in seiner Achse entweder eine Bohrung oder ein symmetrisches Langloch besitzt; das Langloch soll entweder in Richtung der Stabachse oder senkrecht zur Stabachse liegen.

Die drei Fälle, Bohrung, Langloch in Richtung der Stabachse und Langloch senkrecht zur Stabachse, lassen sich gemeinsam behandeln, wenn wir für das Loch elliptische Gestalt zugrunde legen. Die zur Stabachse (hier x -Achse) senkrecht liegende Halbachse der Lochellipse wollen wir mit t bezeichnen. Der Krümmungsradius am Ende dieser Halbachse sei ρ . Für $t > \rho$ handelt es sich dann um ein quer zur Stabachse liegendes Langloch, für $t = \rho$ um eine Bohrung, schließlich für $t < \rho$ um ein Langloch in Richtung der Stabachse.

Zur Ableitung der Lösungen legen wir den Ursprung des x, y -Koordinatensystems in den Lochmittelpunkt, so daß die Halbachse t der Lochellipse auf der y -Achse liegt, und gehen mit Hilfe der Beziehungen (47) bis (49) auf Ellipsenkoordinaten über. Die Lochellipse wollen wir mit u_0 kennzeichnen. Beim Aufsuchen der Spannungsfunktionen gehen wir jeweils vom elementaren Spannungszustand des ungelochten Stabes aus. Der zugehörigen Spannungsfunktion überlagern wir dann eine Zusatzfunktion, welche eine Störung der Spannungsverteilung herbeiführt, wie sie dem Vorhandensein des Loches entspricht. Da es sich um die Spannungsverteilung am freien Loch handeln soll, an welchem keine äußeren Kräfte angreifen, müssen sich längs des Lochrandes die Spannungen des ungelochten Stabes und die Zusatzspannungen gegenseitig aufheben. In der weiteren Umgebung des Loches zeigt sich dann infolge des Abklingungsgesetzes ein rasches Abfallen der Zusatzspannungen. Diese Abnahme ist so stark, daß die Zusatzspannungen an den äußeren Stabrändern, also für $y = \pm b$ (b ist die halbe Stabbreite, Abb. 31) gegenüber den elementaren Spannungen des ungelochten Stabes kaum noch bemerkbar sind. Wir wollen ein Verhältnis b/t voraussetzen, welches genügend groß ist, damit die Zusatzspannungen an den Stabrändern praktisch als abgeklungen angesehen werden können. Auf diese Weise brauchen wir die Randbedingung am äußeren Rand nicht mehr in Anwendung zu bringen. Da die Zusatzspannungen abgeklungen sind, herrscht dort nur noch die elementare Spannungsverteilung des un-

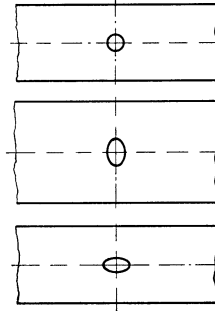


Abb. 30. Bohrung und Langloch im sehr breiten Stab.

gelochten Stabes, für welche die Randbedingung von vornherein erfüllt ist.

Es handelt sich dann nur um die Erfüllung der Randbedingung an der Lochellipse u_0 . Die Bedingungen des lastfreien Randes

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \text{konst.} = C_1, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \text{konst.} = C_2 \quad (117)$$

müssen für $u = u_0$ erfüllt sein. Da es sich nur noch um diesen einen Rand handelt, können wir diese Bedingungen auch noch etwas vereinfachen. Fügen wir nämlich zu F noch den Ausdruck $-C_1 \cdot x - C_2 \cdot y$ hinzu, so werden dadurch die Spannungen, welche wir ja durch zweimaliges Differenzieren gewinnen [vgl. (22)!], nicht geändert. Die Randbedingungen nehmen aber jetzt die einfachere Form

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (118)$$

an. Auf Grund von (50) und (51) gilt entsprechend in krummlinigen Koordinaten

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial v} = 0. \quad (119)$$

Diese Vereinfachung ist nur immer für einen Rand möglich, bietet daher bei mehreren Rändern keinen Vorteil. Bei der tiefen beiderseitigen Außenkerbe, wo es sich um die Erfüllung der Randbedingung an zwei Rändern handelte, haben wir deshalb von der Anwendung abgesehen.

Durch Anpassung der bei der Zusatzfunktion auftretenden Konstanten an die Randbedingung werden dieselben von u_0 abhängig. Damit ergibt sich schließlich auch die am Lochrand auftretende Spannungserhöhung als Funktion von u_0 . Zu jedem u_0 -Wert gehört aber eine ganz bestimmte Ellipsenform und damit ein ganz bestimmtes Verhältnis t/ϱ . Aus der Ellipsengleichung (48) ergibt sich

$$\frac{t}{\varrho} = \mathfrak{Cot}^2 u_0, \quad \mathfrak{Cof} u_0 = \sqrt{\frac{t}{\frac{t}{\varrho} - 1}}, \quad \mathfrak{Sin} u_0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{t}{\varrho} - 1}}. \quad (120)$$

Auf Grund dieser Beziehungen läßt sich u_0 durch t/ϱ ausdrücken. Indem nun entweder t/ϱ größer als Eins, gleich Eins oder kleiner als Eins gewählt wird, lassen sich die Lösungen unmittelbar für unsere drei Lochformen auswerten.

Wir geben wieder die Lösungen für Zug, Biegung und Schub einzeln an.

A. Reiner Zug.

Wir gehen aus von der Spannungsfunktion des ungelochten Stabes für reine Zugbeanspruchung. Ist P die Zugkraft, so wird die Zugspannung, da wir mit b die halbe Breite des Stabes eingeführt haben,

$$p = \frac{P}{2bd}. \quad (121)$$

Diese Spannung entspricht der Normalspannung σ_x , während die Spannungen σ_y und τ_{xy} verschwinden. Die zugehörige Spannungsfunktion ist daher

$$F = \frac{p}{2} y^2, \quad \text{wobei} \quad \Phi_0 = \frac{p}{2} (y^2 - x^2) \quad \text{und} \quad \Phi_1 = \frac{p}{2} x. \quad (122)$$

Aus (22) folgt dann in der Tat

$$\sigma_x = p, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0. \quad (123)$$

Wir gehen nun mit Φ_0 und Φ_1 auf Ellipsenkoordinaten über [vgl. (47)!] und erhalten mit Anwendung bekannter Formeln

$$\Phi_0 = \frac{p}{4} (1 - \mathfrak{C}\mathfrak{O}^2 2u \cos 2v), \quad \Phi_1 = \frac{p}{2} \cdot \mathfrak{S}\mathfrak{I}\mathfrak{N} u \cos v. \quad (124)$$

Wir nehmen nun geeignete Zusatzfunktionen herein, welche für große u -Werte, also in großer Entfernung vom Loch nach allen Seiten hin rasch abklingen und so die Spannungsfunktion des ungelochten Stabes nicht mehr stören. Dann ergibt sich als endgültiger Ansatz

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{p}{4} [1 + Au + (-\mathfrak{C}\mathfrak{O}^2 2u + Be^{-2u}) \cos 2v], \\ \Phi_1 &= \frac{p}{2} (\mathfrak{S}\mathfrak{I}\mathfrak{N} u + Ce^{-u}) \cos v. \end{aligned} \right\} \quad (125)$$

Von der Erfüllung der Bedingung (46) überzeugt man sich leicht. Die Spannungsfunktion lautet nunmehr

$$F = \frac{p}{8} \left\{ 1 + \mathfrak{C}\mathfrak{O}^2 2u + 2Au + 2Ce^{-u} \mathfrak{S}\mathfrak{I}\mathfrak{N} u + \right. \\ \left. + [-\mathfrak{C}\mathfrak{O}^2 2u - 1 + 2Be^{-2u} + 2Ce^{-u} \mathfrak{S}\mathfrak{I}\mathfrak{N} u] \cos 2v \right\}. \quad (126)$$

Die Erfüllung der Randbedingungen (119) für $u = u_0$ führt zu den Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} 2\mathfrak{S}\mathfrak{I}\mathfrak{N} 2u_0 + 2A + 2Ce^{-2u_0} &= 0, \\ -\mathfrak{C}\mathfrak{O}^2 2u_0 - 1 + 2Be^{-2u_0} + 2Ce^{-u_0} \mathfrak{S}\mathfrak{I}\mathfrak{N} u_0 &= 0, \\ -2\mathfrak{S}\mathfrak{I}\mathfrak{N} 2u_0 - 4Be^{-2u_0} + 2Ce^{-2u_0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (127)$$

Multiplizieren wir die zweite dieser Gleichungen mit 2 und addieren sie zur dritten, so ergibt sich daraus die Konstante C ; aus der dritten folgt dann die Konstante B und schließlich aus der ersten die Konstante A . Wir erhalten

$$A = -1 - \mathfrak{C}\mathfrak{O}^2 2u_0, \quad B = \frac{1}{2} e^{2u_0} + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} e^{4u_0}, \quad C = 1 + e^{2u_0}. \quad (128)$$

Die so gefundene Lösung wurde auf einem anderen Wege erstmals von C. E. Inglis¹ angegeben.

Wichtig ist vor allem die Kenntnis des Spannungsverlaufes am Lochrand. Dort verschwinden entsprechend der Randbedingung die Spannungen σ_u und τ_{uv} . Die im Lochrand wirkende Normalspannung σ_v wird

$$(\sigma_v)_{u=u_0} = \frac{p}{2h^2} (\mathfrak{S}\mathfrak{I}\mathfrak{N} 2u_0 - 1 - e^{2u_0} \cos 2v). \quad (129)$$

¹ Inglis, C. E.: Trans. Instn. Naval Archit., London Bd. 60 (1913) S. 219. Neuber, Kerbspannungslehre.

Abb. 31 zeigt die Spannungsverteilung für $\cot u_0 = 5$ bzw. $t/\rho = 25$. Am Ende der Halbachse t , also im Kerbgrund, erreicht die Randspannung ihren Höchstwert mit $11p$. Längs des Lochrandes nimmt sie rasch ab, um in der Stabmitte in Druck vom Betrage p überzugehen.

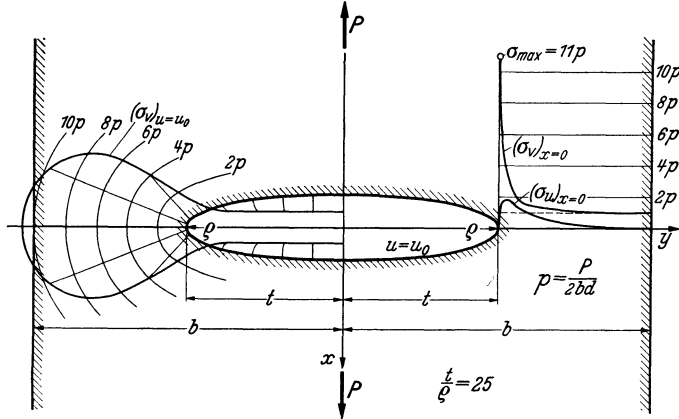


Abb. 31. Zugstab mit Langloch quer zur Stabachse.

Der Spannungsverlauf längs der y -Achse ist ebenfalls für das Wesen der Kerbspannung charakteristisch. Die Spannung σ_v , für die sich der Ausdruck

$$(\sigma_v)_{v=\frac{\pi}{2}} = p + \frac{p \cot^2 u_0}{2 \sin^2 u} [e^{u_0} (e^{2u_0} - 3) (1 + \frac{1}{2} \cot u) e^{-2u} + \cot u_0 \cot u] \quad (130)$$

ergibt, fällt in Abb. 31 von ihrem, am Lochrand scharf ausgeprägten Höchstwert nach außen hin schnell ab, bis auf den Wert p . Die gleichzeitig auftretende Spannung σ_v ist am Lochrand entsprechend der Randbedingung noch Null, steigt nach außen zunächst etwas an, um in einiger Entfernung vom Lochrand wieder ganz zu verschwinden. Die Schubspannung ist infolge Symmetrie längs der y -Achse gleich Null.

Für die im Kerbgrund auftretende Höchstspannung ergibt sich der Ausdruck

$$(\sigma_v)_{u=u_0} = \sigma_{\max} = p(1 + 2 \cot u_0). \quad (130a)$$

$v = \frac{\pi}{2}$

Mit Hilfe von (120) erhalten wir hieraus als Formzahl für das quer zur Stabachse liegende Langloch

$$\frac{\sigma_{\max}}{p} = 1 + 2 \sqrt{\frac{t}{\rho}}. \quad (131)$$

Für die Bohrung ergibt sich mit $t = \rho$:

$$\frac{\sigma_{\max}}{p} = 3. \quad (132)$$

Für das in der Stabachse liegende Langloch gilt ebenfalls (131). ρ ist in diesem Falle sehr groß, bei den meisten praktisch vorkommenden Langlöchern sogar unendlich, so daß $\sigma_{\max} = p$ wird.

Es liegt die Vermutung nahe, daß beim Langloch in Richtung der Stabachse (Abb. 30), also für $\frac{t}{\varrho} < 1$, sich die Kerbwirkung am Ende der jetzigen großen Achse — wir wollen sie mit t' bezeichnen — ausbildet. Für die dort wirkende Spannung ergibt sich jedoch aus (129)

$$(\sigma_v)_{u=v_0} = -p. \quad (133)$$

Bei allen Lochformen tritt demnach unabhängig von der Wahl des Krümmungshalbmessers am Lochscheitel nur eine Druckspannung vom Betrage p auf.

Die Höchstspannung tritt mithin bei allen, hier in Betracht kommenden Lochformen an den Stellen des Randes auf, an welchen die Lochrandtangente parallel zur Zugrichtung liegt. Die Abhängigkeit der Höchstspannung von der Kerbkrümmung, wie sie (131) entspricht, ist in Abb. 32 ersichtlich.

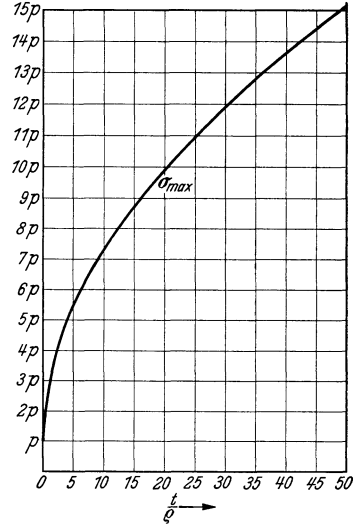


Abb. 32. Die Höchstspannung in Zugstäben mit Langloch.

B. Reine Biegung.

Im Falle der reinen Biegung gilt für den ungelochten Stab die elementare Spannungsfunktion

$$F = \frac{p}{6t} y^3, \quad \text{wobei} \quad \Phi_0 = \frac{p}{6t} (y^3 - 3x^2y), \quad \Phi_1 = \frac{p}{2t} xy. \quad (134)$$

Daraus ergeben sich die Spannungen

$$\sigma_x = p \frac{y}{t}, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0. \quad (135)$$

Die Spannung σ_x entspricht in der Tat dem Geradliniengesetz der elementaren Biegungslehre. Die Bezugsgröße p ist die Biegungsspannung im Abstand t von der Stabachse; sie wird, wenn wir das Biegemoment mit M bezeichnen,

$$p = \frac{3Mt}{2b^3d}. \quad (136)$$

Wir gehen mit dem Ansatz (104) auf Ellipsenkoordinaten über und nehmen zur Befriedigung der Randbedingungen geeignete Zusatzfunktionen herein, welche für großes u gegenüber den Anteilen der elementaren Biegung verschwinden. Mit Verwendung bekannter Formeln der Hyperbelfunktionen ergibt sich dann

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{p}{96t} [(-4 \mathfrak{C}0 \int 3u + Ae^{-3u}) \sin 3v + (12 \mathfrak{C}0 \int u + Be^u + Ce^{-u}) \sin v], \\ \Phi_1 &= \frac{p}{8t} (\mathfrak{C} \sin 2u + De^{-2u}) \sin 2v. \end{aligned} \right\} \quad (137)$$

Bei Aufstellung der Spannungsfunktion machen wir zweckmäßig noch von (47) Gebrauch und drücken die Strecke t durch u_0 aus. Es wird

$$t = (y)_{u=u_0} = \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} u_0. \tag{138}$$

$$v = \frac{\pi}{2}$$

Für die Spannungsfunktion erhalten wir dann¹

$$F = \frac{p}{96 \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} u_0} \left[(-\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} 3u - 3 \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} u + A e^{-3u} + 6 D e^{-2u} \mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n} u) \sin 3v \right. \\ \left. + (3 \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} 3u + 9 \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} u + B e^u + C e^{-u} + 6 D e^{-2u} \mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n} u) \sin v \right]. \tag{139}$$

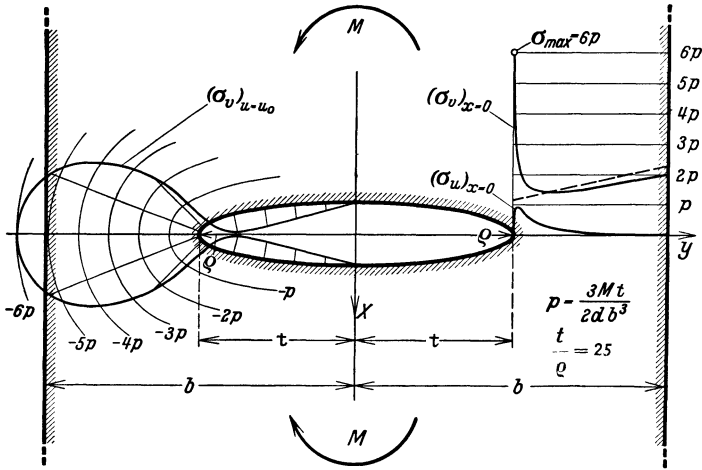


Abb. 33. Langloch bei Biegung.

Die Konstanten ergeben sich aus den Randbedingungen (119) zu

$$\left. \begin{aligned} A &= e^{3u_0} (\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} 3u_0 + 3 \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} u_0 - 12 \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f}^2 u_0 \mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n} u_0), \\ B &= -12 \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f}^2 u_0, \quad C = 0, \quad D = 2 e^{2u_0} \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f}^2 u_0. \end{aligned} \right\} \tag{140}$$

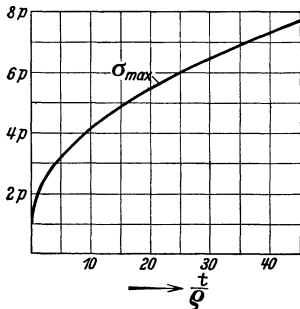


Abb. 34. Die Höchstspannung im Langloch bei Biegung.

Abb. 33 gibt die Spannungsverteilung für $\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{t} u_0 = 5$ bzw. $t/\rho = 25$ wieder. Im Kerbgrund tritt mit $\sigma_{\max} = 6p$ eine erhebliche Spannungsspitze auf. Nach außen hin und auch längs des Lochrandes nimmt die Spannung σ_v schnell ab. Die gestrichelte Linie entspricht der elementaren Biegungsspannung bei Berücksichtigung des Loches.

Für die im Kerbgrund auftretende Höchstspannung ergibt sich

$$\sigma_{\max} = (\sigma_v)_{u=u_0} = p(1 + \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{t} u_0) \tag{141}$$

$$v = 90^\circ$$

¹ Wolf, K.: Z. techn. Physik (1922) S. 160; ferner H. Neuber: Ing.-Arch. Bd. 5 (1934) S. 242.

oder wegen (120)
$$\frac{\sigma_{\max}}{p} = 1 + \sqrt{\frac{t}{\varrho}}. \quad (142)$$

Die Abhängigkeit der Höchstspannung von t/ϱ gibt Abb. 34 wieder.

Für die Bohrung wird
$$\frac{\sigma_{\max}}{p} = 2. \quad (143)$$

Für das Langloch in Richtung der Stabachse ergibt sich keine Kerbwirkung. [Mit $\varrho = \infty$ wird $\sigma_{\max} = p$. Im Lochsattel (x -Achse) verschwindet die Spannung.]

C. Reiner Schub.

Der Stab sei jetzt so beansprucht, daß im Querschnitt $x = 0$ reiner Schub herrscht. Die insgesamt übertragene Schubkraft sei V . Als Bezugswert führen wir mit

$$p = \frac{V}{2bd} \quad (144)$$

die mittlere Schubspannung des Stabes ohne Loch ein. Der Ansatz enthält wieder die elementare Lösung für den ungelochten Stab und Zusatzfunktionen, die für großes u verschwinden. Die Lösung für den ungelochten Stab lautet:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{p}{4b^2} (3xy^3 - 3x^3y - 6b^2xy), & \Phi_1 &= \frac{p}{4b^2} (-y^3 + 3x^2y). \\ F &= \frac{p}{2b^2} (xy^3 - 3b^2xy). \end{aligned} \right\} \quad (145)$$

Die zugehörigen Spannungen sind

$$\sigma_x = \frac{3p}{b^2} xy, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = \frac{3p}{2b^2} (y^2 - b^2). \quad (146)$$

In der Tat haben wir für $x = 0$ reinen Schub und für $y = \pm b$ lastfreie Ränder.

Durch Übergang auf Ellipsenkoordinaten gelangen wir bei Hinzunahme der geeigneten Abklüpfungsfunktionen zu folgendem Ansatz für den gelochten Stab:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{p}{128b^2} [(-3 \mathfrak{S} \sin 4u + A e^{-4u}) \sin 4v + \\ &\quad + (12(1 - 4b^2) \mathfrak{S} \sin 2u + B e^{-2u} \cdot \sin 2v)], \\ \Phi_1 &= \frac{p}{64b^2} [(4 \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{I} 3u + C e^{-3u}) \sin 3v \\ &\quad + (-12 \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{I} u + D e^{-u}) \sin v]. \end{aligned} \right\} \quad (147)$$

Die Spannungsfunktion nimmt mit Rücksicht auf (138) folgende Form an¹:

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{p}{128 \left(\frac{b}{a}\right)^2 \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{I}^2 u_0} \left\{ \begin{aligned} &[-\mathfrak{S} \sin 4u - 2 \mathfrak{S} \sin 2u + A e^{-4u} + \\ &\quad + C e^{-3u} \mathfrak{S} \sin u] \sin 4v + \\ &+ \left[2 \mathfrak{S} \sin 4u + 4 \left(1 - 12 \left(\frac{b}{a}\right)^2 \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{I}^2 u_0\right) \mathfrak{S} \sin 2u + B e^{-2u} + \right. \\ &\quad \left. + C e^{-3u} \mathfrak{S} \sin u + D e^{-u} \mathfrak{S} \sin u \right] \sin 2v \end{aligned} \right\}. \end{aligned} \quad (148)$$

¹ Neuber, H.: Ing.-Arch. Bd. 5 (1934) S. 243.

Für die Konstanten erhalten wir aus den Randbedingungen:

$$\left. \begin{aligned} A &= -24 e^{4u_0} \mathfrak{C} \sin^2 u_0 \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u_0, & B &= -96 e^{2u_0} \left(\frac{b}{a}\right)^2 \mathfrak{C} \sin^2 u_0 \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u_0, \\ C &= 8 e^{2u_0} (2 e^{2u_0} - 1) \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u_0, & D &= 24 e^{2u_0} \left(4 \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1\right) \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u_0. \end{aligned} \right\} \quad (149)$$

Die Spannungsverteilung für $t/\rho = 25$ und $b/t = 3$ ist in Abb. 35 dargestellt. Die Randspannung erreicht in unmittelbarer Nähe des Kerbgrundes ihren Höchstwert. Ebenso hat die Schubspannung, die im Schnitt $x=0$ übertragen wird, dicht neben dem Rand ihren Höchstwert.

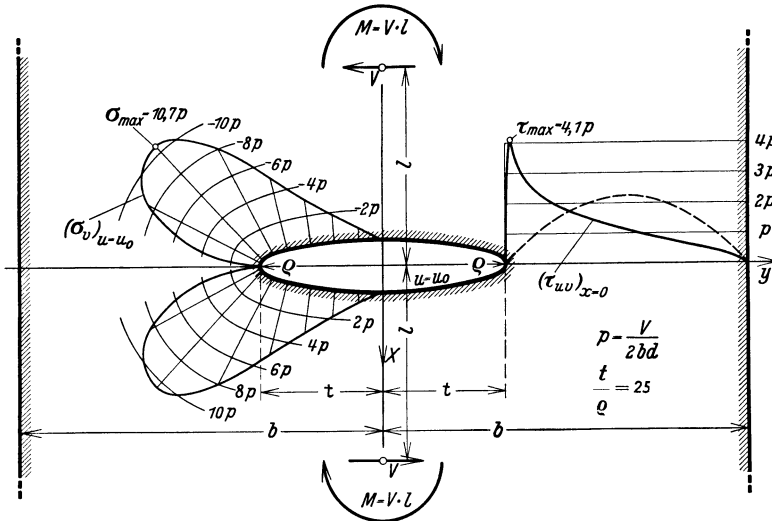


Abb. 35. Langloch bei Schub.

Bei der Ermittlung beider Höchstwerte werden zweckmäßig die Glieder ohne b^2 unberücksichtigt gelassen. Der dadurch begangene Fehler ist bei genügend großer Stabbreite vernachlässigbar klein. Diese Vernachlässigung ist insbesondere im Rahmen der Theorie des gelochten Stabes zulässig, bei der wir von vornherein eine relativ große Stabbreite vorausgesetzt hatten; denn es soll sich hier ja zunächst nur um die Ermittlung der Grenzwerte der Formzahlen handeln, welche sich bei relativ großer Stabbreite einstellen.

Die Spannungsfunktion lautet dann nach einigen Umformungen

$$F = -\frac{3p}{8} [\mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 2(u - u_0) - 1] e^{2u_0} \sin 2v. \quad (150)$$

Die Randspannung ergibt sich hieraus in der Form

$$(\sigma_v)_{u=u_0} = \left(\frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \right)_{u=u_0} = -\frac{3p e^{2u_0}}{2} \frac{\sin 2v}{\mathfrak{C} \sin^2 u_0 + \cos^2 v}. \quad (151)$$

Sie erreicht dort ihren Höchstwert, wo der Ausdruck

$$\frac{\partial}{\partial v} (\sigma_v)_{u=u_0} = -\frac{3p e^{2u_0}}{h^4} [(\mathfrak{C} \sin^2 u_0 + \cos^2 v) 2 \cos 2v + \sin^2 2v] \quad (152)$$

zu Null wird, also für

$$\cos 2v = -\frac{1}{\mathfrak{C}\mathfrak{O}^2 u_0} \quad \text{bzw.} \quad \cos v = \frac{\mathfrak{S}\mathfrak{in} u_0}{\sqrt{\mathfrak{C}\mathfrak{O}^2 u_0}}. \quad (153)$$

Der Höchstwert der Randspannung liegt mithin im Abstand

$$x = t \frac{\mathfrak{S}\mathfrak{in}^2 u_0}{\mathfrak{C}\mathfrak{O}^2 u_0 \sqrt{\mathfrak{C}\mathfrak{O}^2 u_0}} = \frac{t}{\sqrt{\frac{t}{\varrho} \left(\frac{t}{\varrho} + 1 \right)}} \quad (154)$$

von der y -Achse und wird

$$\frac{\sigma_{\max}}{p} = \frac{3}{2} \left(\sqrt{\frac{t}{\varrho}} + 2 + \frac{1}{\sqrt{\frac{t}{\varrho}}} \right). \quad (155)$$

Die im Schnitt $x = 0$ wirkende Schubspannung wird

$$\left. \begin{aligned} (\tau_{u,v})_{v=\frac{\pi}{2}} &= -\frac{1}{\mathfrak{S}\mathfrak{in}^2 u} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \mathfrak{C}\mathfrak{O} t u \frac{\partial F}{\partial v} \right)_{v=\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{3p e^{2u_0}}{8 \mathfrak{S}\mathfrak{in}^2 u} [-4 \mathfrak{S}\mathfrak{in} 2(u-u_0) + 2 \mathfrak{C}\mathfrak{O} t u (\mathfrak{C}\mathfrak{O}^2 2(u-u_0) - 1)]. \end{aligned} \right\} (156)$$

Die Stelle des Höchstwertes erhalten wir durch Nullsetzen des nach u differenzierten Ausdruckes. Unter Umgehung der Zwischenrechnung ergibt sich für den Abstand des Schubhöchstwertes von der y -Achse

$$y = \frac{t}{\mathfrak{C}\mathfrak{O}^2 u_0} \sqrt{1 + 3 \mathfrak{S}\mathfrak{in}^2 u_0} = t \sqrt{\frac{\frac{t}{\varrho} + 2}{\frac{\varrho}{t}}}. \quad (157)$$

Der Schubhöchstwert wird

$$\frac{\tau_{\max}}{p} = 3 \frac{\left(\frac{\frac{t}{\varrho} + 2}{3} \right)^{3/2} - \sqrt{\frac{t}{\varrho}}}{\left(\sqrt{\frac{t}{\varrho}} - 1 \right)^2}. \quad (158)$$

Die genaue Abhängigkeit der beiden Spannungshöchstwerte von t/ϱ zeigt Abb. 36.

Für die Bohrung wird

$$\frac{\sigma_{\max}}{p} = 6, \quad \frac{\tau_{\max}}{p} = 2. \quad (159)$$

Bei zusammengesetzter Biegung gilt das gleiche wie bei der tiefen Außenkerbe: Der Höchstwert der Randspannung ist nur unwesentlich kleiner als die Summe der beiden, von Biegung und Schub allein herrührenden Werte (vgl. Abb. 21).

Für das Langloch in Richtung der Stabachse ist nur die Spannungserhöhung durch Schub wesentlich. Wieder wollen wir mit t'/ϱ' die neue Kerbkrümmung am Ende der jetzigen großen Achse t' einführen. Für die Ellipse gilt dann bekanntlich

$$\frac{t}{\varrho} = \frac{t'^2}{t'^2} = \frac{\varrho'}{t'}. \quad (160)$$

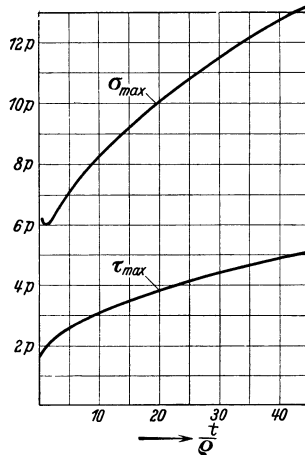


Abb. 36. Die Höchstspannungen im Langloch bei Schub.

Wir erhalten daher die Spannungshöchstwerte aus (34) und (38) mit ϱ'/t' statt t/ϱ . Gleichung (155) geht dann über in

$$\frac{\sigma_{\max}}{p} = \frac{3}{2} \left(\sqrt{\frac{t'}{\varrho'}} + 2 + \frac{1}{\sqrt{\frac{t'}{\varrho'}}} \right). \quad (161)$$

Wir hätten also ebensogut auch t'/ϱ' statt t/ϱ setzen können. Gleichung (158) würde auf diese Weise nach wie vor den Schubhöchstwert im Schnitt $x = 0$ liefern. Der wirkliche Schubhöchstwert liegt aber jetzt im Schnitt $y = 0$. Die Rechnung ergibt für den Schnitt $y = 0$

$$\frac{\tau_{\max}}{p} = 3 \frac{\left(\frac{t'}{\varrho'} + 2 \right)^{3/2} - \sqrt{\frac{t'}{\varrho'}}}{\left(\sqrt{\frac{t'}{\varrho'}} - 1 \right)^2}, \quad (162)$$

also denselben Ausdruck wie in (158), jedoch mit t'/ϱ' statt t/ϱ . Für die Spannungshöchstwerte beim Langloch in Richtung der Stabachse unter Schubbeanspruchung gelten mithin dieselben Formeln wie für das Langloch senkrecht zur Stabachse, wenn man t'/ϱ' statt t/ϱ setzt.

Wir kommen nun zur Behandlung der zur flachen Außenkerbe gehörenden Aufgabengruppe; die dabei ermittelten Formzahlen werden uns zusammen mit den Formzahlen der tiefen Kerben ausreichende Rechnungsgrundlagen für die beliebig tiefe Kerbe geben.

5. Die flache Außenkerbe.

Wie aus Abb. 37 hervorgeht, soll es sich jetzt entweder um einen Stab von der Breite b mit einseitiger flacher Außenkerbe oder um einen Stab von der Breite $2b$ mit beiderseitiger flacher Außenkerbe handeln.

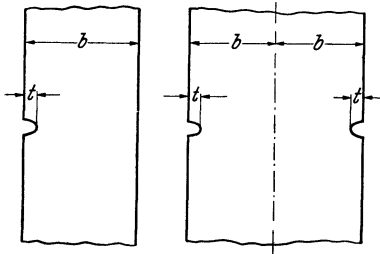


Abb. 37. Einseitige und beiderseitige flache Außenkerbe.

Infolge des Abklingungsgesetzes wird die Spannungsverteilung im Stab in gewisser Entfernung von der Kerbe nicht mehr von der Spannungsverteilung des ungekerbten Stabes abweichen, wenn wir entsprechend der vorausgesetzten flachen Kerbe ein genügend großes Verhältnis b/t zugrunde legen.

Die einseitige flache Kerbe wird folglich auf den Spannungsverlauf an der anderen Stabseite keinen Einfluß ausüben, so daß die Randbedingung für den anderen Rand auch dann erfüllt sein wird, wenn wir bei Ableitung der einzelnen Lösungen auf den zweiten Rand keine Rücksicht nehmen, soweit es sich um die zur elementaren Spannungsfunktion des ungekerbten Stabes hinzukommenden Störfunktionen handelt, welche die eigentlichen Kerbspannungen liefern und schnell nach allen Seiten hin abklingen. Beim beiderseits

gekerbten Stab müssen diese Störfunktionen an beiden Rändern der elementaren Spannungsfunktion überlagert werden. Liegt daher die Lösung für den einseitig gekerbten Stab vor, so gilt die sich ergebende Formzahl auch für den beiderseits gekerbten Stab, da es sich um die gleichen Störfunktionen handelt. Lediglich für die Ermittlung der Nennspannung ist dann eine andere Formel maßgebend.

A. Reiner Zug.

Wir gehen aus von dem krummlinigen Koordinatensystem

$$x = u + \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad y = v - \frac{v}{u^2 + v^2}. \quad (163)$$

In großer Entfernung von der Stelle $x = 1, y = 0$ fallen die Linien $u = \text{konst.}$ noch mit den Linien $x = \text{konst.}$ zusammen. In der Nähe

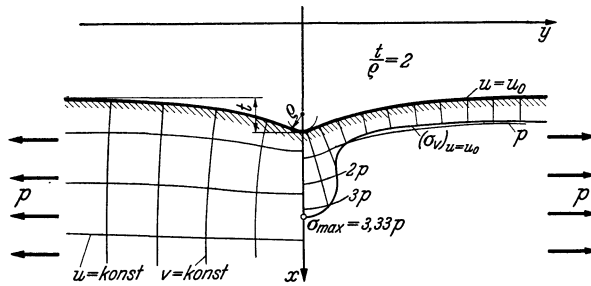


Abb. 38. Flache Außenkerbe bei Zug.

der Stelle $x = 2, y = 0$ erleiden sie jedoch eine Auslenkung nach Art einer Kerbe. Entsprechendes gilt für die orthogonalen Linien $v = \text{konst.}$ In Abb. 38 sind links einige Linien eingezeichnet.

Die Spannungsfunktion für reinen Zug vom Betrage p in der y -Richtung ist

$$F = \frac{p}{2} x^2 \quad \text{mit} \quad \Phi_0 = 0, \quad \Phi_1 = \frac{p}{2} x. \quad (164)$$

Wir gehen hiermit auf unser Koordinatensystem über und nehmen zur Erfüllung der Randbedingung der flachen Kerbe geeignete Zusatzfunktionen herein. Beim Aufsuchen der harmonischen Funktionen ist zu beachten, daß es sich hier wieder um ein isometrisches Netz handelt; denn es wird

$$h_u^2 = h_v^2 = h^2 = 1 + \frac{2v^2 - 2u^2 + 1}{(u^2 + v^2)^2}. \quad (165)$$

Die harmonischen Funktionen erfüllen daher die einfache Differentialgleichung (46).

Die Lösung lautet

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{p}{2} \left(A + B u + C \frac{u}{u^2 + v^2} + D \frac{v^2 - u^2}{(u^2 + v^2)^2} \right), \\ \Phi_1 &= \frac{p}{2} \left(u + \frac{u}{u^2 + v^2} + E \frac{u}{u^2 + v^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (166)$$

Die Spannungsfunktion wird

$$F = \frac{p}{2} \left[u^2 + \frac{2u^2}{u^2 + v^2} + \frac{u^2}{(u^2 + v^2)^2} + A + Bu + C \frac{u}{u^2 + v^2} + \right. \\ \left. + D \left(\frac{1}{u^2 + v^2} - \frac{2u^2}{(u^2 + v^2)^2} \right) + E \left(\frac{u^2}{u^2 + v^2} + \frac{u^2}{(u^2 + v^2)^2} \right) \right]. \quad (167)$$

Den für den Rand maßgebenden u -Wert wollen wir mit u_0 bezeichnen. Wenn wir nun die im Ansatz enthaltenen Konstanten so bestimmen, daß bei der Spannungsfunktion der Faktor $(u - u_0)^2$ auftritt, so sind auf diese Weise die Randbedingungen (119) für $u = u_0$ offenbar erfüllt. Unter Umgehung der Zwischenrechnung erhalten wir auf Grund dieses Gedankenganges

$$\left. \begin{aligned} A = u_0^2, \quad B = -2u_0, \quad C = \frac{2u_0}{2u_0^2 - 1}, \\ D = -\frac{u_0^2}{2u_0^2 - 1}, \quad E = \frac{1 - 4u_0^2}{2u_0^2 - 1}. \end{aligned} \right\} \quad (168)$$

Nach Einsetzen dieser Werte nimmt die Spannungsfunktion folgende einfache Form an:

$$F = \frac{p}{2} (u - u_0)^2 \left[1 - \frac{1}{(2u_0^2 - 1)(u^2 + v^2)} \right]. \quad (169)$$

Für die Randspannung ergibt sich hieraus, da die ersten Ableitungen von F am Rand verschwinden,

$$(\sigma_v)_{u=u_0} = \left(\frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \right)_{u=u_0} = p \frac{1 - \frac{1}{(2u_0^2 - 1)(u_0^2 + v^2)}}{1 + \frac{2v^2 - 2u_0^2 + 1}{(u_0^2 + v^2)^2}}. \quad (170)$$

Der Verlauf der Randspannung im Falle $u_0 = \sqrt{2}$ ist in Abb. 38 ersichtlich. Die Spannung ist in einiger Entfernung von der Kerbe noch gleich p . Zur Kerbe hin nimmt sie zunächst etwas ab, steigt dann unmittelbar vor der Kerbe scharf an und erreicht im Kerbgrund das $3^{1/3}$ -fache der Nennspannung p .

Für die Höchstspannung erhält man aus (170) den Ausdruck

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_v)_{u=u_0} = \sigma_{\max} = p \frac{u_0^3(2u_0^2 - 1) - 1}{u_0^4 - 2u_0^2 + 1} \cdot \frac{u_0^2}{2u_0^2 - 1} = \\ = p \frac{(2u_0^2 + 1)(u_0^2 - 1)u_0^2}{(2u_0^2 - 1)(u_0^2 - 1)^2} = p \frac{u_0^2(2u_0^2 + 1)}{(2u_0^2 - 1)(u_0^2 - 1)}. \end{aligned} \right\} \quad (171)$$

Wir ersetzen zweckmäßig den hier auftretenden Parameter u_0 , welcher mit der Form der Kerbe in engem Zusammenhang steht, durch das Verhältnis der Tiefe t der Kerbe zum Krümmungshalbmesser ϱ des Kerbgrundes. Beide Größen ergeben sich aus der Gleichung der Randlinie, welche aus (163) für $u = u_0$ in Parameterdarstellung hervorgeht.

Die Tiefe t ergibt sich aus der Differenz der x -Werte für den Kerbgrund ($v = 0$) und für große Entfernung vom Kerbgrund ($v = \infty$):

$$t = (x)_{u=u_0, v=0} - (x)_{u=u_0, v=\infty} = u_0 + \frac{1}{u_0} - u_0 = \frac{1}{u_0}. \quad (172)$$

Bei der Ermittlung des Krümmungshalbmessers verwenden wir am besten eine Beziehung, welche gestattet, ihn aus dem Verzerrungsfaktor abzuleiten. Ist φ der Winkel der Kurventangente gegen eine feste Richtung, z. B. die x -Achse, so gilt bekanntlich für die „Krümmung“ der Kurve

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial s}. \tag{173}$$

Hierin ist ρ der Krümmungshalbmesser und ds das Linienelement der Kurve. Es läßt sich nun zeigen, daß die Krümmung aus den Verzerrungsfaktoren gewonnen werden kann. Machen wir von diesem Zusammenhang, auf den hier nicht näher eingegangen werden kann¹, Gebrauch, so ergibt sich schließlich für die Krümmung einer Linie $u = \text{konst.}$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{h_u h_v} \frac{\partial h_v}{\partial u}. \tag{174}$$

Aus (165) folgt für den Verzerrungsfaktor an der Stelle $v = 0$

$$h_u = h_v = h = 1 - \frac{1}{u^2}. \tag{175}$$

Demnach wird die Krümmung des Kerbgrundes

$$\frac{1}{\rho} = \left(\frac{1}{h^2} \frac{\partial h}{\partial u} \right)_{u=u_0} = \frac{\frac{2}{u_0^3}}{\left(1 - \frac{1}{u_0^2}\right)^2} = \frac{2 u_0}{(u_0^2 - 1)^2}. \tag{176}$$

Durch Multiplikation mit der Kerbtiefe erhalten wir hieraus die Kerbkrümmung

$$\frac{t}{\rho} = \frac{2}{(u_0^2 - 1)^2}. \tag{177}$$

Damit wird

$$u_0^2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{t}{2\rho}}}. \tag{178}$$

Setzen wir dies in (171) ein, so erhalten wir für die Höchstspannung bzw. die Formzahl folgende einfache Formel:

$$\frac{\sigma_{\max}}{p} = 3 \sqrt{\frac{t}{2\rho}} - 1 + \frac{4}{2 + \sqrt{\frac{t}{2\rho}}}. \tag{179}$$

Die genaue Abhängigkeit der Formzahl von der Kerbkrümmung ist in Abb. 39 zu ersehen (gestrichelte Kurve!).

Die praktische Verwendung des so gefundenen Ergebnisses auf den Fall der

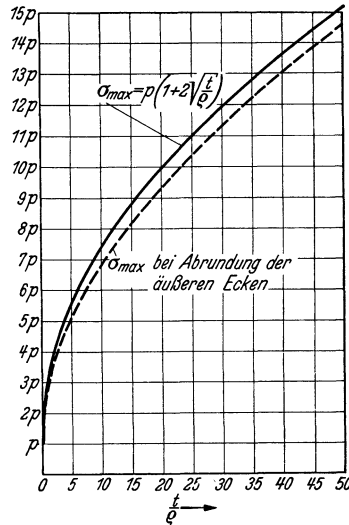


Abb. 39. Die Höchstspannung in flachen Außenkerben bei Zug.

¹ Siehe L. Föppl u. H. Neuber: Festigkeitslehre mittels Spannungsoptik. S. 91. München u. Berlin: R. Oldenbourg 1935.

flachen Kerbe (Abb. 37) ist allerdings nicht ganz unmittelbar möglich, da es sich bei dem hier verwendeten Koordinatensystem um ausgesprochen abgerundete Kerbformen handelt (vgl. Abb. 38). Die äußeren Ecken fehlen vollständig, so daß zu erwarten ist, daß die errechnete Formzahl etwas niedriger sein wird als bei der Kerbe mit scharfen äußeren Ecken, wie sie in vielen praktischen Fällen vorkommt. Es steht uns nun für die Kerbe mit äußeren Ecken noch eine einfache Näherungslösung zur Verfügung.

Das in IV, 4 behandelte Langloch im verhältnismäßig breiten Stab gestattet nämlich die Anwendung einer Schnittbetrachtung, welche uns eine Näherungslösung für die flache Außenkerbe mit scharfen äußeren Ecken liefert. Wir gehen aus von der Lösung für reine Zugbeanspruchung und denken uns den Stab (Abb. 31) längs der x -Achse aufgeschnitten. An der Schnittfläche greifen keine Schubspannungen, sondern nur Normalspannungen σ_y an, welche schnell abklingen. Da sie senkrecht zur Zugrichtung wirken, können wir in erster Annäherung von ihrem Einfluß auf die im Kerbgrund auftretende Höchstspannung absehen; denn diese wird ja in erster Linie von den Spannungen σ_x hervorgerufen, die in einiger Entfernung von der Kerbe den Stab auf Zug beanspruchen. Es liegt daher nahe, die Formzahl des Langloches bei Zugbeanspruchung unmittelbar für die flache Außenkerbe mit scharfen Ecken zu übernehmen¹. Die entsprechende Kurve ist in Abb. 39 eingezeichnet. Wie zu erwarten war, liegt die Formzahl der flachen Außenkerbe mit scharfen Ecken etwas höher als bei abgerundeten Ecken.

Der Bezugswert p stellt, wie anfangs erwähnt, die im ungekerbten Stabteil herrschende gleichmäßige Zugspannung dar, berechnet sich also aus

$$p = \frac{P}{bd} \quad \text{oder} \quad p = \frac{P}{2bd}, \quad (180)$$

je nachdem es sich um einen einseitig oder beiderseits gekerbten Stab handelt.

B. Reine Biegung.

Die bei Biegungsbeanspruchung geltende elementare Spannungsfunktion haben wir schon in (134) kennengelernt. Um den Anschluß an unser Koordinatensystem (163) zu finden, müssen wir eine Koordinatendrehung und -verschiebung vornehmen. Die Stabachse verläuft jetzt in der y -Richtung im Abstand $x = u_0 + b/2$ (einseitig gekerbter Stab, Abb. 40), statt wie in IV, 4 mit der x -Achse zusammenzufallen. Wir müssen daher y mit $u_0 + b/2 - x$ und x mit y vertauschen. Dabei können wir die konstanten und linearen Glieder, welche keine Spannungen liefern, weglassen. Als Bezugsspannung dient die elementare Biegungsspannung in der Stabkante, also beim einseitig gekerbten Stab (Breite b)

$$p = \frac{6M}{b^2d}. \quad (181)$$

¹ Diese Näherungsbetrachtung findet durch eine Arbeit von F. G. Maunsell Bestätigung [Stresses in a Notched Plate under Tension. Philos. Mag., VII. s. Bd. 21 (1936) S. 765—773]. Die dort mit Hilfe Fourierscher Reihen entwickelte strenge Lösung der Halbkreiskerbe liefert für die Formzahl mit großer Genauigkeit den Wert 3.

Es ergibt sich auf diese Weise folgende elementare Spannungsfunktion

$$F = \frac{p}{3b} \left[3 \left(u_0 + \frac{b}{2} \right) x^2 - x^3 \right] = \frac{p}{2} x^2 + \frac{p}{b} \left(u_0 x^2 - \frac{x^3}{3} \right). \quad (182)$$

Da es sich hier um die Ermittlung der Formzahl der flachen Kerbe handelt, ist die Ausdehnung des Gebietes der Spannungsstörung klein gegenüber der Stabbreite b , bzw. die Stabbreite b groß gegenüber den übrigen, in der Rechnung vorkommenden Strecken. Für die flache Kerbe haben wir daher die mit dem Faktor $1/b$ behafteten Glieder als klein zu vernachlässigen. Der Einfluß der Stabbreite, der für die flache Kerbe verschwindet, wird bei der endgültigen Aufstellung der Formzahlprogramme der beliebig tiefen Kerbe wieder berücksichtigt.) Vernachlässigen wir nun in (182) die Glieder mit dem Faktor $1/b$, so ergibt sich dieselbe elementare Spannungsfunktion wie für Zugbeanspruchung [vgl. (164)!]. Der weitere Rechnungsgang würde der gleiche sein, wie wir ihn für Zugbeanspruchung bereits durchgeführt haben. Es ergibt sich also bei der flachen Kerbe für Biegungsbeanspruchung die gleiche Formzahl wie für Zugbeanspruchung.

Zu demselben Ergebnis gelangt man auch für die beiderseitige flache Kerbe. Nur muß dann entsprechend der Stabbreite $2b$ als Bezugsspannung

$$p = \frac{3M}{2b^2 d} \quad (183)$$

eingeführt werden.

C. Reiner Schub.

Die elementare Spannungsfunktion für den Fall der reinen Schubbeanspruchung wurde schon mit Gleichung (145) angegeben. Setzen wir darin $b/2$ statt b entsprechend dem einseitig gekerbten Stab und nehmen wir mit Rücksicht auf unser jetzt benutztes Koordinatensystem wieder die Vertauschungen y mit $u_0 + b/2 - x$ und x mit y vor, so geht die Spannungsfunktion über in

$$F = \frac{2p}{b^2} \left\{ \begin{aligned} & -x^3 + 3 \left(u_0 + \frac{b}{2} \right) x^2 - 3 \left(u_0 + \frac{b}{2} \right)^2 x + \left(u_0 + \frac{b}{2} \right)^3 y - \\ & - \frac{3}{4} b^2 \left[u_0 + \frac{b}{2} - x \right] y \end{aligned} \right\} \quad (184)$$

oder nach Vernachlässigung der linearen Glieder

$$F = \frac{3p}{b} (x^2 - 2u_0 x) y + \frac{2p}{b^2} (-x^3 + 3u_0 x^2 - 3u_0^2 x) y. \quad (185)$$

Der Bezugswert p stellt wieder die mittlere Schubspannung des ungerkerbten Stabes dar (Querkraft V):

$$p = \frac{V}{b d}. \quad (186)$$

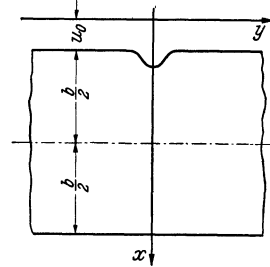


Abb. 40. Zur einseitigen flachen Außenkerbe bei Biegung.

Durch Übergang auf das Koordinatensystem (163) läßt sich das Problem wieder mit Hilfe geeigneter Zusatzfunktionen, welche für große u -Werte schnell abklingen, exakt lösen. Es ergibt sich dann eine Verteilung der

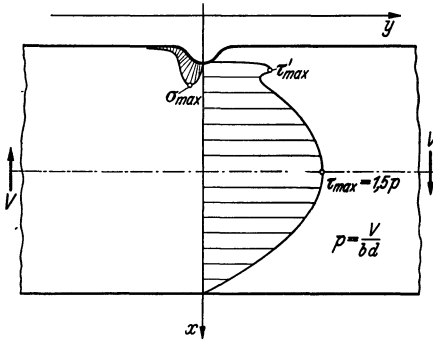


Abb. 41. Einseitige flache Außenkerbe bei Schub.

Schubspannungen über den Stabquerschnitt, wie sie in Abb. 41 skizziert ist. Die von den Zusatzfunktionen herrührenden Störspannungen nehmen vom Kerbgrund nach allen Seiten hin stark ab, so daß sich im Innern des Stabes bereits wieder die parabelförmige Schubspannungsverteilung, wie sie dem ungekerbten Stab entspricht, einstellt. In der Nähe des Randes bewirken die Störspannungen das Auftreten eines relativen Schubhöchstwertes τ'_{\max} , der jedoch — bei nicht

allzu starker Krümmung des Randes — wesentlich kleiner ist als die in Stabmitte herrschende Schubspannung

$$\tau_{\max} = 1,5 p. \quad (187)$$

Dies geht aus dem Aufbau der Spannungsfunktion hervor. Wie die elementare Spannungsfunktion in (185) aus zwei Ausdrücken besteht, von denen der eine den Faktor $1/b$, der andere den Faktor $1/b^2$ besitzt, so enthält auch die vollständige Lösung zwei derartige Anteile. Für die flache Kerbe ist b groß gegenüber den Abmessungen der Kerbe, so daß der mit $1/b^2$ behaftete Anteil als klein zu vernachlässigen ist. Die Spannungsfunktion der flachen Kerbe hat mithin den Faktor $1/b$ und liefert mithin auch für den in der Nähe des Kerbgrundes auftretenden Schubhöchstwert einen mit $1/b$ als Faktor behafteten Ausdruck, der im übrigen nur noch von der Kerbtiefe t und dem Krümmungshalbmesser ρ abhängen kann. Folglich wird

$$\frac{\tau'_{\max}}{p} = \frac{t}{b} f\left(\frac{t}{\rho}\right). \quad (188)$$

Für die flache Kerbe von nicht zu starker Krümmung ist dieser Ausdruck infolge des Faktors $1/b$ aber stets kleiner als $1,5p$. Auch die längs des Randes auftretende Höchstspannung ergibt sich in einer derartigen Form mit t/b als Faktor.

Dieselbe Überlegung läßt sich für den beiderseits gekerbten Stab durchführen. Als Schubhöchstwert bei nicht zu starker Randkrümmung ergibt sich wieder $1,5p$, wobei für p jetzt entsprechend der Stabbreite $2b$

$$p = \frac{V}{2bd} \quad (189)$$

zu setzen ist.

6. Aufstellung der Formzahlhomogramme für Außenkerbe, Bohrung und Langloch von beliebigen Abmessungen.

Bei Aufstellung der allgemeinen Formzahlen für Außenkerbe und Langloch gehen wir von den Betrachtungen aus, die wir in II, 4 angestellt hatten. Danach läßt sich die Formzahl aus den Grenzwerten der flachen und der tiefen Kerbe, die wir abgeleitet haben, zusammensetzen.

A. Die beiderseitige Außenkerbe.

Bei Zug und Biegung dienen als Grenzwerte der tiefen Kerbe die Beziehungen (69) und (79) mit den Nennspannungen (62) bzw. (77). Grenzwert der flachen Kerbe ist für Zug und Biegung (131). Bei Aufstellung der Formzahlen für beliebige Kerbtiefe ist es nun wesentlich, daß bei der flachen Kerbe dieselben Nennspannungen zugrunde gelegt werden müssen wie bei der tiefen Kerbe. So haben wir z. B. bei der flachen Kerbe unter Zug an Stelle der Bezugsspannung $\frac{P}{2bd}$ $= \frac{P}{2ad} (1 - t/b)$ jetzt $\frac{P}{2ad}$ zu setzen; denn wir müssen für die ideal flache Kerbe in der gesamten Rechnung, also auch bei der Bezugsspannung, das Verhältnis t/b als klein gegenüber den übrigen Größen vernachlässigen. Nur so ergibt sich ein Verlauf der „flachen Formzahl“ oberhalb der wirklichen Formzahllinie (s. Abb. 2) entsprechend der Bedingung $\alpha_k < \alpha_{fk}$. Die mit der endlichen Querschnittsbreite zusammenhängende Abminderung, wie sie durch den Faktor $(1 - t/b)$ bewirkt werden würde, muß bei folgerichtiger Anwendung der in II, 4 entwickelten Gedankengänge vollständig dem Einfluß der „tiefen Formzahl“ überlassen werden, die ja ausgesprochen zur Erfüllung dieser Aufgabe in die Rechnung eingeführt wurde. Die Nennspannung muß also auch bei der flachen Kerbe auf den engsten Querschnitt bezogen werden.

Der Fall der Schubbeanspruchung stellt nun gegenüber unserer für die beliebig tiefe Kerbe aufgestellten Theorie insofern einen Ausnahmefall dar, als die Höchstspannung nicht mehr im Kerbgrund auftritt. Andererseits ergibt die genaue Rechnung auch für die flache Kerbe, wie in IV, 5, C erläutert wurde, gänzlich andere Verhältnisse als bei Biegung und Zug. Die genaue Durchrechnung dieses Ausnahmefalles gestaltet sich infolgedessen außerordentlich verwickelt und sei hier übergangen. In vielen Fällen mag es genügen, mit der oben entwickelten Theorie der tiefen Kerbe zu rechnen.

B. Die einseitige Außenkerbe.

Für Zug und Biegung sind die Grenzwerte der tiefen Kerbe mit (108) und (113) gegeben, mit den Nennspannungen (102) und (111). Bei der flachen Kerbe gilt für Zug und Biegung (131), wobei die Nennspannungen aus den oben erwähnten Gründen dieselben bleiben müssen. Die Schubbeanspruchung stellt auch hier einen Ausnahmefall dar, für welchen in erster Annäherung die Theorie der tiefen einseitigen Außenkerbe maßgebend ist.

C. Bohrung und Langloch.

Den Grenzwert der Formzahl von Bohrung und Langloch für sehr kleine Werte a/b („tiefe Kerbe“) können wir aus der Theorie der einseitigen Außenkerbe herleiten, indem wir uns den Stab aus zwei einseitig gekerbten Stäben zusammengefügt denken (Abb. 42), welche — von der näheren Umgebung des Loches abgesehen — im wesentlichen ungekrümmt sind. Wir haben nun in IV, 3, A die Lösung für die einseitige tiefe Außenkerbe kennengelernt für den Fall, daß die ungekerbte

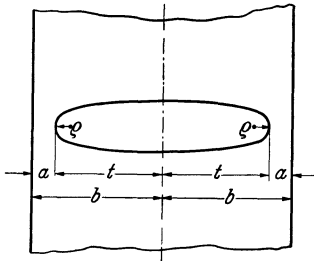


Abb. 42. Langloch als tiefe Kerbe.

Stabkante (sie entspricht hier der äußeren Stabkante) keine Krümmung erfährt. Wenn von der näheren Umgebung des Loches abgesehen wird, entspricht diese Bedingung in erster Annäherung dem hier vorliegenden Falle. Für die „tiefe Formzahl“ des Langloches bei Zug wird daher zunächst die Beziehung (69) in Betracht kommen. Wir müssen aber andererseits auch die nähere Umgebung des Loches berücksichtigen; denn dort tritt ja gerade die eigentliche Kerbwirkung in Erscheinung. Rein geometrisch ist bei der Verformung der Lochumgebung eine nach innen gerichtete Krümmung der äußeren Kanten zu erwarten, welche mit einer zusätzlichen Biegebungsbeanspruchung verbunden ist. Zur Erfassung dieses Anteiles setzen wir für die Formzahl

$$\alpha_{tk} = \alpha_1 + C\alpha_3, \quad (190)$$

wobei sich α_1 auf (69) und der Biegebungsanteil α_3 auf (113) bezieht. Die Konstante C ergibt sich durch Vergleich mit spannungsoptischen Messungen von A. Hennig zu 0,8. Wir werden hierauf in VII zurückkommen. Für die „flache Formzahl“ ist (131) maßgebend. Die Nennspannung liefert (102).

Bei Biegebungsbeanspruchung gilt als „tiefe Formzahl“ wieder (190), da es sich im Grenzfall der sehr kleinen Werte a/b auf der einen Stabseite nur mehr um Zug, auf der anderen Stabseite nur mehr um Druck handelt. Die Nennspannung ist jetzt die elementare Biegebungsbeanspruchung des Kerbgrundes

$$\sigma_n = \frac{3Mt}{2(b^3 - t^3)d}. \quad (191)$$

Sie geht nämlich in dieser Form in der Tat einerseits für kleine Werte a/b in

$$\sigma_n = \frac{M}{2b} \frac{1}{ad} \quad (192)$$

über, wobei $M/2b$ die Größe der auf der einen Stabseite übertragenen Zugkraft angibt, entspricht also der Nennspannung (102). Andererseits geht (191) für kleines t/b in

$$\sigma_n = \frac{3Mt}{2b^3d}, \quad (193)$$

also in den Bezugswert (136) über, so daß für die flache Formzahl un-mittelbar (142) anwendbar ist.

Bei Schubbeanspruchung des beliebig breiten Stabes mit Langloch haben wir wieder einen Ausnahmefall vor uns, der sich nicht mit den einfachen, für Zug und Biegung geltenden Gesetzmäßigkeiten erledigen läßt. In den meisten Fällen wird man entweder mit IV, 3, C oder mit IV, 4, C auskommen.

Die Formzahlnomogramme, die man so für Außenkerbe und Langloch erhält, sind in Abb. 104 enthalten. Die richtige Handhabung geht aus den angegebenen Pfeilen hervor. Im übrigen sei auf Abschnitt X verwiesen, in welchem die Formzahlermittlung näher erläutert ist.

7. Der Vorsprung (Kerbwirkung durch Werkstoffanhäufung).

Bisher haben wir ausschließlich solche Kerbspannungsaufgaben behandelt, bei welchen schon rein gefühlsmäßig infolge der mit dem Anbringen der Kerbe verbundenen Querschnittsschwächung eine Spannungssteigerung zu erwarten war. Im Gegensatz hierzu wollen wir uns jetzt einem Fall zuwenden, bei welchem nicht durch Werkstoffwegnahme, sondern durch Werkstoffanhäufung eine Erhöhung der Beanspruchung eintritt. Wir betrachten einen auf Zug beanspruchten Flachstab, an welchem sich seitlich ein kleiner Vorsprung befindet.

Als Randlinie benutzen wir zweckmäßig eine Linie $v = \text{konst.}$ unseres Koordinatensystems (163), die wir mit v_0 kennzeichnen wollen. Die Linien $v = \text{konst.}$ sind für großes u (oder x) noch geradlinig und fallen mit den Linien $y = \text{konst.}$ zusammen (vgl. Abb. 38 und 43). In der Nähe $x = 2$, $y = 0$ tritt jedoch eine Auslenkung nach Art eines Vorsprunges ein. Der Stab erstreckt sich in der x -Richtung und ist, von der näheren Umgebung des kleinen Vorsprunges abgesehen, gleichmäßig auf Zug beansprucht (Spannung p). Für den Stab ohne Vorsprung wird dann die Spannungsfunktion

$$F = \frac{p}{2} y^2 \quad \text{mit} \quad \Phi_0 = \frac{p}{2} (y^2 - x^2), \quad \Phi_1 = \frac{p}{2} x. \quad (194)$$

Wir gehen hiermit auf die mit (163) festgelegten krummlinigen Koordinaten über und nehmen, um für $v = v_0$ einen lastfreien Rand zu erhalten, geeignete Zusatzfunktionen herein, welche für großes u oder v abklingen und der Differentialgleichung (46) der harmonischen Funktionen genügen. Dann ergibt sich der folgende Ansatz:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{p}{2} \left[v^2 - u^2 - 2 + \frac{v^2 - u^2}{(u^2 + v^2)^2} + A + Bv + C \frac{v}{u^2 + v^2} + D \frac{v^2 - u^2}{(u^2 + v^2)^2} \right], \\ \Phi_1 &= \frac{p}{2} \left[u + \frac{u}{u^2 + v^2} + E \frac{u}{u^2 + v^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (195)$$

Die Spannungsfunktion wird

$$\left. \begin{aligned} F &= \Phi_0 + x \Phi_1 = \frac{p}{2} \left[v^2 - \frac{2v^2}{u^2 + v^2} + \frac{v^2}{(u^2 + v^2)^2} + A + Bv + C \frac{v}{u^2 + v^2} \right] \\ &+ D \left(-\frac{1}{u^2 + v^2} + \frac{2v^2}{(u^2 + v^2)^2} \right) + E \left(1 + \frac{1 - v^2}{u^2 + v^2} - \frac{v^2}{(u^2 + v^2)^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (196)$$

Die Randbedingungen sind am einfachsten erfüllt, wenn wir die Konstanten so bestimmen, daß bei der Spannungsfunktion der Faktor $(v - v_0)^2$ auftritt. Dies ist der Fall, wenn wir

$$\left. \begin{aligned} A + E &= v_0^2, & B &= -2v_0, & C &= \frac{2v_0}{2v_0^2 + 1}, \\ D &= \frac{-3v_0^2 - 1}{2v_0^2 + 1}, & E &= \frac{-4v_0^2 - 1}{2v_0^2 + 1} \end{aligned} \right\} \quad (197)$$

setzen. Die Spannungsfunktion nimmt hiermit die endgültige Form¹

$$F = \frac{p}{2} (v - v_0)^2 \left[1 - \frac{1}{(2v_0^2 + 1)(u^2 + v^2)} \right] \quad (198)$$

an. Für die Randspannung ergibt sich

$$(\sigma_u)_{v=v_0} = \frac{1}{h^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \right)_{v=v_0} = p \frac{1 - \frac{1}{(2v_0^2 + 1)(u^2 + v_0^2)}}{1 + \frac{2v_0^2 - 2u^2 + 1}{(u^2 + v_0^2)^2}}. \quad (199)$$

Abb. 43 zeigt den Verlauf der Randspannung für $v_0 = 1/3$. Sie ist in einiger Entfernung vom Vorsprung noch gleich p , nimmt dann zum

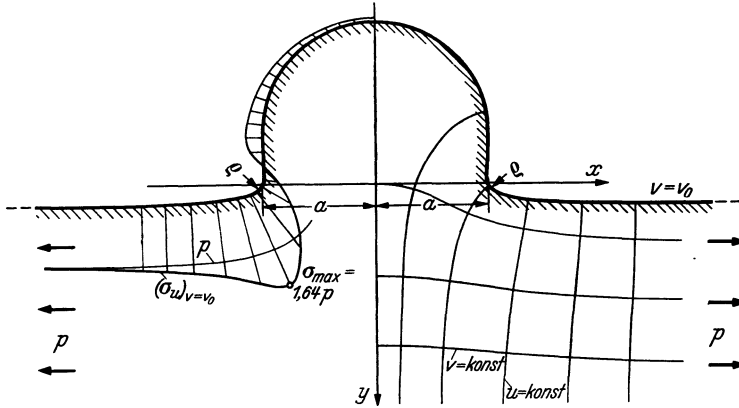


Abb. 43. Symmetrischer Vorsprung bei Zug.

Vorsprung hin allmählich zu, um ziemlich genau an der Stelle der stärksten Randkrümmung mit $1,64p$ ihren Höchstwert zu erreichen. Jenseits dieses Höchstwertes fällt sie rasch ab und geht längs des Vorsprungs in eine verschwindend kleine Druckspannung über.

Zur Berechnung des Spannungshöchstwertes haben wir Gleichung (199) nach u zu differenzieren und den sich ergebenden Ausdruck gleich Null zu setzen. Man gelangt dann zu folgender Beziehung

$$(1 + 4v_0^2)u^4 - 2(1 + 5v_0^2 + 4v_0^4)u^2 + 1 + 2v_0^2 - 11v_0^4 - 12v_0^6 = 0. \quad (200)$$

Diese Gleichung ist in u^2 quadratisch und hat die Lösung

$$u^2 = 1 + v_0^2 \pm \sqrt{4v_0^2 + 4v_0^4}. \quad (201)$$

¹ Neuber, H.: Z. angew. Math. Mech. Bd. 13 (1933) S. 440.

Dem Höchstwert der Randspannung entspricht das positive Vorzeichen. Durch Einsetzen in (199) erhalten wir für die Höchstspannung

$$\frac{\sigma_{\max}}{p} = 1 + \frac{(1 + 4v_0^3)(\sqrt{1 + v_0^2} - v_0)}{4v_0(1 + 2v_0^2)}. \quad (202)$$

Zu jedem v_0 -Wert gehört eine ganz bestimmte Randform. Die charakteristische Größe der Randform ist hier das Verhältnis der halben Breite a des Vorsprunges zum kleinsten Krümmungshalbmesser ϱ des Randes.

Für die halbe Breite des Vorsprunges müssen wir uns auf einen Randpunkt beziehen, der in der Nähe des Spannungshöchstwertes liegt. Um zugleich eine eindeutige Definition zu treffen, beziehen wir uns auf die Stelle des Randes, an der die Randtangente parallel zur y -Achse liegt, wo also

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 0 = 1 + \frac{1}{u^2 + v_0^2} - \frac{2u^2}{(u^2 + v_0^2)^2} \quad (203)$$

wird. Daraus ergibt sich als zugehöriger u -Wert

$$u_1^2 = \frac{1}{2}(1 - 2v_0^2 + \sqrt{1 - 8v_0^2}). \quad (204)$$

Damit wird

$$a = (x)_{u=u_1}^{v=v_0} = \frac{1}{4v_0} \sqrt{2[1 + 20v_0^2 - 8v_0^4 - (1 - 8v_0^2)^{3/2}]}. \quad (205)$$

Für den Krümmungshalbmesser der Randlinie erhalten wir entsprechend (174) zunächst allgemein

$$\frac{1}{\varrho} = \left(\frac{1}{h^2} \frac{\partial h}{\partial v} \right)_{v=v_0} = \frac{2v_0(3u^2 - v_0^2 - 1)}{[(u^2 + v_0^2)^2 + 2v_0^2 - 2u^2 + 1]^{3/2}}. \quad (206)$$

Die Stelle, an welcher der Krümmungshalbmesser am kleinsten ist, ergibt sich wieder durch Nullsetzen des nach u differenzierten Ausdruckes. Der zugehörige u -Wert wird

$$u_2^2 = 1 + v_0^2. \quad (207)$$

Durch Einsetzen in (206) folgt für die stärkste Randkrümmung

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{2v_0^3 \sqrt{1 + v_0^2}}. \quad (208)$$

Durch Multiplikation mit (205) wird schließlich die Kerbkrümmung

$$\frac{a}{\varrho} = \frac{1}{4v_0^3} \sqrt{\frac{1 + 20v_0^2 - 8v_0^4 - (1 - 8v_0^2)^{3/2}}{2(1 + v_0^2)}}. \quad (209)$$

Wir können somit jedem v_0 -Wert einen ganz bestimmten Wert von a/ϱ zuordnen. Abb. 44 erläutert die sich so ergebende Abhängigkeit der Höchstspannung von der Kerbkrümmung.

Es ist damit der Nachweis erbracht, daß auch durch Werkstoffanhäufung eine wesentliche Spannungserhöhung hervorgerufen wird; diese tritt nicht im Gebiete der Werkstoffanhäufung selbst, sondern unmittelbar daneben auf. Die Höchstspannung ist wie bei den eigentlichen Kerbproblemen von der Krümmung des Randes abhängig und kann unter Umständen sehr hohe Werte annehmen.

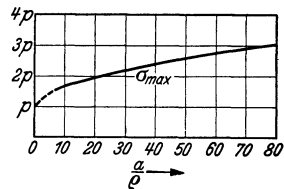


Abb. 44. Die Höchstspannung im symmetrischen Vorsprung bei Zug.

Es gibt nun noch eine große Anzahl ebener Probleme, deren Lösung sich in ähnlicher Weise durchführen läßt, sei es nun in geschlossener Form — wie in den hier behandelten Fällen —, sei es mit Hilfe unendlicher Reihen. Im Rahmen des vorliegenden Buches wollen wir jedoch — der Mannigfaltigkeit des Stoffes zufolge — auf weitere ebene Probleme nicht mehr eingehen, sondern uns nun dem Hauptgebiet der Kerbwirkung, der räumlichen Kerbwirkung zuwenden.

V. Theorie der räumlichen Kerbwirkung.

1. Die Ausgangsgleichungen.

In der räumlichen Kerbspansungslehre kommt das in III, 7 entwickelte Verfahren in seiner vollen Allgemeinheit zur Anwendung. Aus dem unendlich vielseitigen Aufgabengebiet der räumlichen Kerbwirkung

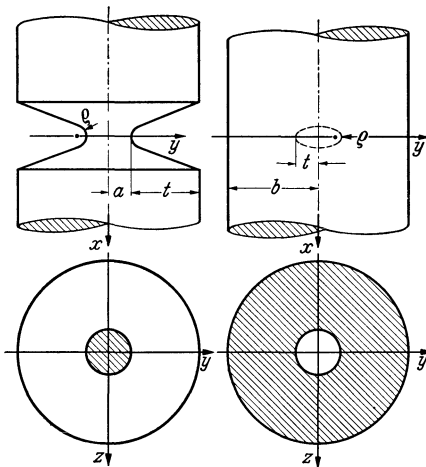


Abb. 45. Tiefe Umdrehungsaußenkerbe und flache Umdrehungsinnenkerbe ohne axiale Bohrung.

können wir natürlich hier nur einen kleinen Ausschnitt behandeln, und zwar sollen die Umdrehungskerbten, die in mannigfacher Gestalt an Maschinenteilen vorkommen, den Gegenstand unserer Untersuchung bilden. Die Umdrehungskerbten gestatten, wie wir sehen werden, zwischen dem ebenen und dem räumlichen Spannungszustand Vergleiche zu ziehen und so für den Zusammenhang beider Aufgabengruppen zu allgemeinen Gesetzmäßigkeiten zu gelangen.

Wieder behandeln wir zunächst tiefe und flache Kerben getrennt und bestimmen erst dann nach dem in II, 4 angegebenen Verfahren die Formzahlen für beliebige Tiefe.

Es ist nun bemerkenswert, daß sowohl flache Umdrehungsaußenkerben als auch sämtliche Umdrehungsaußen- und -innenkerben mit großer axialer Bohrung noch als zweidimensionale Spannungsprobleme behandelt werden können (wir werden hierfür in V, 5 den Nachweis erbringen). Dagegen haben wir für die beiden Grenzfälle, tiefe Umdrehungsaußenkerbe und flache Umdrehungsinnenkerbe ohne axiale Bohrung (Abb. 45), ausgesprochen räumliche Spannungsverteilungen zu erwarten. Die genaue Berechnung der Spannungen für diese beiden Grenzfälle bei den verschiedenen Beanspruchungsarten ist daher die Hauptaufgabe dieses Abschnittes.

Da infolge des Abklingungsgesetzes die Krümmung des Kerbgrundes den wesentlichsten Einfluß auf die Formzahl hat, kann die weitere Form der Kerboberfläche so gewählt werden, daß sich ein möglichst einfacher Rechnungsgang ergibt. Wir wollen hier die tiefe Umdrehungs-

außenkerbe als Hyperboloid und die flache Umdrehungsinnenkerbe als Ellipsoid idealisieren. Wir können auf diese Weise Ellipsoidkoordinaten verwenden und wollen setzen

$$x = \mathfrak{S}in u \cos v, \quad y = \mathfrak{C}o\mathfrak{f} u \sin v \cos w, \quad z = \mathfrak{C}o\mathfrak{f} u \sin v \sin w. \quad (1)$$

Die Flächen $u = \text{konst.}$ sind dann Ellipsoide, die Flächen $v = \text{konst.}$ Hyperboloide und die Flächen $w = \text{konst.}$ Ebenen, welche durch die x -Achse hindurchgehen. Wir bilden zunächst an Hand der Gleichungen (20) von III, 3 die drei Verzerrungsfaktoren h_u, h_v, h_w und erhalten aus (1)

$$h_u = h_v = h = \sqrt{\mathfrak{S}in^2 u + \cos^2 v}, \quad h_w = \mathfrak{C}o\mathfrak{f} u \sin v. \quad (2)$$

Für die neuen Verschiebungskomponenten sind die Gleichungen (80) von III, 7 maßgebend. Wenn wir von (1) und (2) Gebrauch machen, gehen sie über in

$$\left. \begin{aligned} 2GU &= \frac{1}{h} \left\{ -\frac{\partial F}{\partial u} + 2\alpha [\mathfrak{F}_1 \mathfrak{C}o\mathfrak{f} u \cos v + \mathfrak{S}in u \sin v (\mathfrak{F}_2 \cos w + \mathfrak{F}_3 \sin w)] \right\}, \\ 2GV &= \frac{1}{h} \left\{ -\frac{\partial F}{\partial v} + 2\alpha [-\mathfrak{F}_1 \mathfrak{S}in u \sin v + \mathfrak{C}o\mathfrak{f} u \cos v (\mathfrak{F}_2 \cos w + \mathfrak{F}_3 \sin w)] \right\}, \\ 2GW &= -\frac{1}{\mathfrak{C}o\mathfrak{f} u \sin v} \frac{\partial F}{\partial w} + 2\alpha (-\mathfrak{F}_2 \sin w + \mathfrak{F}_3 \cos w). \end{aligned} \right\} (3)$$

Für die Normalspannungen gelten die Beziehungen (91) von III, 7. Hier wird:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_u &= -\frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{1}{h^4} \left[\mathfrak{S}in u \mathfrak{C}o\mathfrak{f} u \frac{\partial F}{\partial u} + \sin v \cos v \frac{\partial F}{\partial v} \right] + \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \Delta F + \\ &\quad + \frac{2\alpha}{h^2} \left[\mathfrak{C}o\mathfrak{f} u \cos v \frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial u} + \mathfrak{S}in u \sin v \left(\cos w \frac{\partial \mathfrak{F}_2}{\partial u} + \sin w \frac{\partial \mathfrak{F}_3}{\partial u} \right) \right], \\ \sigma_v &= -\frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} - \frac{1}{h^4} \left[\mathfrak{S}in u \mathfrak{C}o\mathfrak{f} u \frac{\partial F}{\partial u} + \sin v \cos v \frac{\partial F}{\partial v} \right] + \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \Delta F + \\ &\quad + \frac{2\alpha}{h^2} \left[-\mathfrak{S}in u \sin v \frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial v} + \mathfrak{C}o\mathfrak{f} u \cos v \left(\cos w \frac{\partial \mathfrak{F}_2}{\partial v} + \sin w \frac{\partial \mathfrak{F}_3}{\partial v} \right) \right], \\ \sigma_w &= \frac{1}{h^2} \left[\left(\frac{1}{\mathfrak{C}o\mathfrak{f}^2 u} - \frac{1}{\sin^2 v} \right) \frac{\partial^2 F}{\partial w^2} - \mathfrak{I}g u \frac{\partial F}{\partial u} - \cot v \frac{\partial F}{\partial v} + \right. \\ &\quad \left. + 2\alpha \left(\frac{\sin v}{\mathfrak{C}o\mathfrak{f} u} - \frac{\mathfrak{C}o\mathfrak{f} u}{\sin v} \right) \left(\sin w \frac{\partial \mathfrak{F}_2}{\partial w} - \cos w \frac{\partial \mathfrak{F}_3}{\partial w} \right) \right] + \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \Delta F. \end{aligned} \right\} (4)$$

Für ΔF folgt aus (99):

$$\left. \begin{aligned} \Delta F &= \frac{2}{h^2} \left[\mathfrak{C}o\mathfrak{f} u \cos v \left(\frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial u} + \cos w \frac{\partial \mathfrak{F}_2}{\partial v} + \sin w \frac{\partial \mathfrak{F}_3}{\partial v} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \mathfrak{S}in u \sin v \left(-\frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial v} + \cos w \frac{\partial \mathfrak{F}_2}{\partial u} + \sin w \frac{\partial \mathfrak{F}_3}{\partial u} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\sin v}{\mathfrak{C}o\mathfrak{f} u} - \frac{\mathfrak{C}o\mathfrak{f} u}{\sin v} \right) \left(\sin w \frac{\partial \mathfrak{F}_2}{\partial w} - \cos w \frac{\partial \mathfrak{F}_3}{\partial w} \right) \right]. \end{aligned} \right\} (5)$$

Die Schubspannungen sind entsprechend III, (92) zu bilden. Hier ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned}
 \tau_{uv} &= -\frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} + \frac{1}{h^4} \left[\sin u \cos v \left(u \frac{\partial F}{\partial v} - \sin v \cos v \frac{\partial F}{\partial u} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\alpha}{h^2} \left[\cos v \left(u \cos v \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial v} + \cos w \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} + \sin w \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} \right) + \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sin u \sin v \left(-\frac{\partial \Phi_1}{\partial u} + \cos w \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} + \sin w \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} \right) \right], \right. \\
 \tau_{vw} &= -\frac{1}{h \cos v} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sin v} \frac{\partial F}{\partial w} \right) + \frac{\alpha}{h} \left[-\mathfrak{L}g u \frac{\partial \Phi_1}{\partial w} + \right. \\
 &\quad \left. + \cot v \left(\cos w \frac{\partial \Phi_2}{\partial w} + \sin w \frac{\partial \Phi_3}{\partial w} \right) - \sin w \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} + \cos w \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} \right], \\
 \tau_{uw} &= -\frac{1}{h \sin v} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\cos v} \frac{\partial F}{\partial w} \right) + \frac{\alpha}{h} \left[\cot v \frac{\partial \Phi_1}{\partial w} + \right. \\
 &\quad \left. + \mathfrak{L}g u \left(\cos w \frac{\partial \Phi_2}{\partial w} + \sin w \frac{\partial \Phi_3}{\partial w} \right) - \sin w \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} + \cos w \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} \right].
 \end{aligned} \right\} (6)$$

Um bei der Innenkerbe auch den Sonderfall der Kugelform erledigen zu können, benötigen wir schließlich noch die analogen Gleichungen in sphärischen Polarkoordinaten. Indem wir das Koordinatensystem mit

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v \cos w, \quad z = u \sin v \sin w \quad (7)$$

($u = \text{konst.}$ Kugelflächen, $v = \text{konst.}$ Kegelflächen, $w = \text{konst.}$ Ebenen durch die x -Achse) festlegen, erhalten wir in derselben Weise:

$$h_u = 1, \quad h_v = u, \quad h_w = u \sin v, \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned}
 2GU &= -\frac{\partial F}{\partial u} + 2\alpha [\Phi_1 \cos v + \sin v (\Phi_2 \cos w + \Phi_3 \sin w)], \\
 2GV &= -\frac{1}{u} \frac{\partial F}{\partial v} + 2\alpha [-\Phi_1 \sin v + \cos v (\Phi_2 \cos w + \Phi_3 \sin w)], \\
 2GW &= -\frac{1}{u \sin v} \frac{\partial F}{\partial w} + 2\alpha (-\Phi_2 \sin w + \Phi_3 \cos w),
 \end{aligned} \right\} (9)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_u &= -\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \Delta F + \\
 &\quad + 2\alpha \left[\cos v \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} + \sin v \left(\cos w \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} + \sin w \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} \right) \right], \\
 \sigma_v &= -\frac{1}{u} \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \Delta F + \\
 &\quad + \frac{2\alpha}{u} \left[-\sin v \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} + \cos v \left(\cos w \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} + \sin w \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} \right) \right], \\
 \sigma_w &= -\frac{1}{u} \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{u^2 \sin^2 v} \frac{\partial^2 F}{\partial w^2} - \frac{\cot v}{u^2} \frac{\partial F}{\partial v} + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \Delta F + \\
 &\quad + \frac{2\alpha}{u \sin v} \left(-\sin w \frac{\partial \Phi_2}{\partial w} + \cos w \frac{\partial \Phi_3}{\partial w} \right), \\
 \Delta F &= 2 \cos v \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial u} + \frac{\cos w}{u} \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} + \frac{\sin w}{u} \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} \right) + \\
 &\quad + 2 \sin v \left(-\frac{1}{u} \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} + \cos w \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} + \sin w \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} \right) - \\
 &\quad - \frac{2}{u \sin v} \left(\sin w \frac{\partial \Phi_2}{\partial w} - \cos w \frac{\partial \Phi_3}{\partial w} \right),
 \end{aligned} \right\} (10)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \tau_{uv} &= -\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{u} \frac{\partial F}{\partial v} \right) + \alpha \cos v \left(\frac{1}{u} \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} + \cos w \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} + \right. \\
 &\quad \left. + \sin w \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} \right) + \alpha \sin v \left(-\frac{\partial \Phi_1}{\partial u} + \frac{\cos w}{u} \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} + \frac{\sin w}{u} \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} \right), \\
 \tau_{vw} &= -\frac{1}{u^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sin v} \frac{\partial F}{\partial w} \right) + \frac{\alpha}{u} \left[-\frac{\partial \Phi_1}{\partial w} + \right. \\
 &\quad \left. + \cot v \left(\cos w \frac{\partial \Phi_2}{\partial w} + \sin w \frac{\partial \Phi_3}{\partial w} \right) - \sin w \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} + \cos w \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} \right], \\
 \tau_{uw} &= -\frac{1}{\sin v} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{u} \frac{\partial F}{\partial w} \right) + \alpha \left[\frac{\cot v}{u} \frac{\partial \Phi_1}{\partial w} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\cos w}{u} \frac{\partial \Phi_2}{\partial w} + \frac{\sin w}{u} \frac{\partial \Phi_3}{\partial w} - \sin w \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} + \cos w \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} \right].
 \end{aligned} \right\} (11)$$

Bei der Außenkerbe sei die Oberfläche durch das Hyperboloid v_0 gebildet. Dann müssen sämtliche Komponenten der Spannung, die an der Fläche $v = v_0$ angreift, verschwinden, und wir haben folgende Randbedingungen zu erfüllen:

$$\sigma_v = 0, \quad \tau_{uv} = 0, \quad \tau_{vw} = 0 \quad \text{für } v = v_0. \quad (12)$$

Bei der Innenkerbe soll das Ellipsoid u_0 die Oberfläche bilden, so daß in diesem Falle die Randbedingungen

$$\sigma_u = 0, \quad \tau_{uv} = 0, \quad \tau_{uw} = 0 \quad \text{für } u = u_0 \quad (13)$$

zu befriedigen sind.

Außerdem kommen noch die für das jeweilige Problem charakteristischen Integrale hinzu, welche sich aus dem Gleichgewicht zwischen den am Körper angreifenden äußeren Kräften und den an einer beliebig zu wählenden Schnittfläche wirkenden inneren Spannungen ergeben. Die Resultierende der äußeren Kräfte habe in der x -, y - bzw. z -Richtung die Komponenten P_x , P_y bzw. P_z und um die x -, y - bzw. z -Achse die Drehmomente M_x , M_y bzw. M_z .

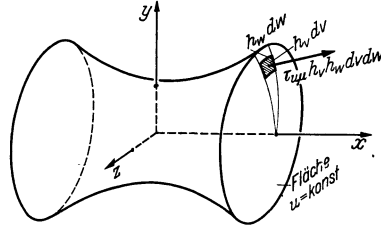


Abb. 46. Zur Ermittlung des Kraftflusses in der Umdrehungsauskerbe.

Bei den Außenkerben wird der Schnitt zweckmäßig längs einer Fläche $u = \text{konst.}$ (Flächeninhalt F) gelegt. Die an einem Flächeneilchen mit den Kanten $h_v dv$ und $h_w dw$ angreifende resultierende Spannung $\tau_{u\mu}$ entspricht einer Kraft vom Betrage $\tau_{u\mu} h_v h_w dv dw$ (siehe Abb. 46!). Um die Resultierende P_x zu erhalten, müssen wir die x -Komponenten dieser Kräfte integrieren. Statt die resultierende Spannung zu verwenden, können wir auch ihre u -, v - und w -Komponenten benutzen, d. h. für μ nacheinander u , v , w einsetzen. Dann ergibt sich

$$P_x = \iint_F \sum_{\mu=u, v, w} \tau_{u\mu} \cos(x, \mu) h_v h_w dv dw \quad \text{usw.} \quad (14)$$

Durch zyklische Vertauschung in x , y , z ergeben sich hieraus auch die Ausdrücke für P_y und P_z .

Das um die x -Achse drehende Moment M_x ergibt sich durch Integration der Momente der y - und z -Komponenten der resultierenden Spannung in bezug auf die x -Achse (Abstände z und y). Verwenden wir wieder statt der resultierenden Spannung ihre u -, v - und w -Komponenten, so erhalten wir

$$M_x = \iint_F \sum_{\mu=u, v, w} \tau_{u\mu} [y \cos(z, \mu) - z \cos(y, \mu)] h_v h_w dv dw \text{ usw.} \quad (15)$$

Die zyklische Vertauschung in x , y , z liefert die Ausdrücke für M_y und M_z .

Bei den Innenkerben legen wir den Schnitt am besten längs einer Fläche $x = \text{konst.}$ Zu integrieren sind dann die am Flächenelement $dy dz$ angreifenden Spannungen τ_{xx} ($= \sigma_x$), τ_{xy} , τ_{xz} . Aus den Gleichgewichtsbedingungen ergeben sich die Integrale

$$P_x = \iint_F \tau_{xx} dy dz, \quad M_x = \iint_F (y \tau_{xz} - z \tau_{xy}) dy dz \text{ usw.} \quad (16)$$

Durch zyklische Vertauschung der unterstrichenen Zeichen können hieraus sämtliche in Betracht kommenden Beziehungen abgeleitet werden.

Wir wollen nun festlegen, daß jeweils nur eines dieser sechs Integrale von Null verschieden sein soll. Auf diese Weise wird das Spannungsproblem in sechs Partikularlösungen aufgespalten, welche uns die von den sechs Raumkomponenten des äußeren Kräftesystems hervorgerufenen Spannungszustände liefern. Da es sich hier um drehsymmetrische Körper handeln soll (die x -Achse ist Umdrehungsachse, Abb. 45), werden die Kräfte P_y und P_z den gleichen Spannungszustand hervorrufen, dasselbe gilt für die Momente M_y und M_z . Die Zahl der aufzustellenden Lösungen reduziert sich daher auf vier (Zug, Biegung, Schub und Drillung). Bevor wir uns jedoch der eigentlichen Spannungsaufgabe zuwenden, wollen wir noch kurz auf die harmonischen Funktionen eingehen, welche wir ja bei der Spannungsberechnung zur Verfügung haben müssen.

2. Lösung der Potentialgleichung in Ellipsoidkoordinaten.

Wir gehen zurück auf Gleichung (98) von III, 7. Setzen wir die Verzerrungsfaktoren aus (2) ein, so lautet die Potentialgleichung in Ellipsoidkoordinaten

$$\Delta \Phi = \frac{1}{h^2} \left[\frac{1}{\mathfrak{C}0^2 u} \frac{\partial}{\partial u} \left(\mathfrak{C}0^2 u \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) + \frac{1}{\sin v} \frac{\partial}{\partial v} \left(\sin v \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{\sin^2 v} - \frac{1}{\mathfrak{C}0^2 u} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial w^2} \right] = 0. \quad (17)$$

Zu ihrer Integration fassen wir Φ zunächst als Produkt der drei Funktionen $f_1(u)$, $f_2(v)$ und $f_3(w)$ auf, von denen jede nur von einer der drei Veränderlichen abhängt:

$$\Phi = f_1(u) f_2(v) f_3(w). \quad (18)$$

Aus $\frac{h^2 \Delta \Phi}{\Phi} = 0$ folgt dann

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{f_1 \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{I} u} \frac{\partial}{\partial u} \left(\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{I} u \frac{\partial f_1}{\partial u} \right) + \frac{1}{f_2 \sin v} \frac{\partial}{\partial v} \left(\sin v \frac{\partial f_2}{\partial v} \right) \\ + \frac{1}{f_3} \left(\frac{1}{\sin^2 v} - \frac{1}{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{I}^2 u} \right) \frac{\partial^2 f_3}{\partial w^2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Das erste Glied hängt nur von u , das zweite nur von v ab. Damit die Gleichung erfüllt ist, muß sich das dritte Glied additiv aus zwei Bestandteilen zusammensetzen, von denen der eine nur von u allein, der andere nur von v allein abhängt. Das ist nur möglich, wenn $\frac{1}{f_3} \frac{\partial^2 f_3}{\partial w^2}$ konstant ist; wir bezeichnen diese Konstante mit $-n^2$. Die ganze Gleichung zerfällt so in zwei Bestandteile, von denen der eine nur von u , der andere nur von v abhängt. Da ihre Summe gleich Null werden soll, muß jeder von ihnen gleich bzw. entgegengesetzt gleich einer weiteren Konstanten sein, welche wir mit $\nu(\nu + 1)$ bezeichnen wollen. Wir gelangen so zu folgenden drei Differentialgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{I} u} \frac{\partial}{\partial u} \left(\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{I} u \frac{\partial f_1}{\partial u} \right) + \left[\frac{n^2}{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{I}^2 u} - \nu(\nu + 1) \right] f_1 = 0, \\ \frac{1}{\sin v} \frac{\partial}{\partial v} \left(\sin v \frac{\partial f_2}{\partial v} \right) + \left[-\frac{n^2}{\sin^2 v} + \nu(\nu + 1) \right] f_2 = 0, \\ \frac{\partial^2 f_3}{\partial w^2} + n^2 f_3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Die Differentialgleichung für f_3 hat die bekannte trigonometrische Lösung $c_n \sin(nw) + d_n \cos(nw)$. Die Differentialgleichungen für f_1 und f_2 lassen sich durch die Substitution $\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{I} u = \lambda$ bzw. $\sin v = \lambda$ auf die gemeinsame Form

$$(\lambda^2 - 1) \frac{\partial^2 f(\lambda)}{\partial \lambda^2} + \left(2\lambda - \frac{1}{\lambda} \right) \frac{\partial f(\lambda)}{\partial \lambda} + \left[\frac{n^2}{\lambda^2} - \nu(\nu + 1) \right] f(\lambda) = 0 \quad (21)$$

bringen; denn es wird

$$\frac{\partial}{\partial u} = \mathfrak{S} \sin u \frac{\partial}{\partial \lambda} = \sqrt{\lambda^2 - 1} \frac{\partial}{\partial \lambda} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial}{\partial v} = \cos v \frac{\partial}{\partial \lambda} = \sqrt{1 - \lambda^2} \frac{\partial}{\partial \lambda}. \quad (22)$$

Die Integration wird am zweckmäßigsten mit Hilfe einer Potenzreihe vorgenommen. Wir setzen hier allgemein für die gesuchte partikuläre Lösung ν -ten Grades

$$N_{n, \nu}(\lambda) = \lambda^\nu + a_2 \lambda^{\nu-2} + a_4 \lambda^{\nu-4} + a_6 \lambda^{\nu-6} + \dots \quad (23)$$

Durch Eingehen in die Differentialgleichung (21) ergeben sich die Koeffizienten a_2, a_4, a_6 usw. Zunächst erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} (\lambda^2 - 1) [\nu(\nu - 1) \lambda^{\nu-2} + a_2(\nu - 2)(\nu - 3) \lambda^{\nu-4} + a_4(\nu - 4)(\nu - 5) \lambda^{\nu-6} + \dots] \\ + \left(2\lambda - \frac{1}{\lambda} \right) [\nu \lambda^{\nu-1} + a_2(\nu - 2) \lambda^{\nu-3} + a_4(\nu - 4) \lambda^{\nu-5} + \dots] \\ + \left[\frac{n^2}{\lambda^2} - \nu(\nu + 1) \right] [\lambda^\nu + a_2 \lambda^{\nu-2} + a_4 \lambda^{\nu-4} + \dots] + 0. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Indem nun der Faktor jeder Potenz von λ für sich verschwinden muß, ergeben sich für die Konstanten die folgenden Bedingungsgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} & \{v(v-1) + 2v - v(v+1)\} \lambda^v = 0, \\ & \{-v(v-1) - v + n^2 + a_2[(v-2)(v-3) + 2(v-2) - v(v+1)]\} \lambda^{v-2} = 0, \\ & \{a_2[-(v-2)(v-3) - (v-2) + n^2] + a_4[(v-4)(v-5) + \\ & \quad + 2(v-4) - v(v+1)]\} \lambda^{v-4} = 0, \quad \text{usw.} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Die erste Gleichung ist von selbst erfüllt; die zweite liefert die Konstante a_2 , die dritte a_4 usw. Setzen wir die sich für die Konstanten ergebenden Ausdrücke in (23) ein, so erhalten wir unser partikuläres Integral n -ten und v -ten Grades zunächst in der Grundform α):

$$N_{n,v}(\lambda) = \lambda^v - \frac{v^2 - n^2}{2(2v-1)} \lambda^{v-2} + \frac{(v^2 - n^2)[(v-2)^2 - n^2]}{2 \cdot 4(2v-1)(2v-3)} \lambda^{v-4} + \dots \quad (26)$$

Ist $v + |n| = 0, 2, 4, 6 \dots$ (positiv gerade), so liefert die Grundform α) stets eine endliche Reihe.

Für positives ungerades $v + |n|$ würde die Grundform α) unendliche Reihen liefern. Mit Hilfe des Binoms

$$N_{0,1}(\lambda) = \lambda - \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{8} \frac{1}{\lambda^3} + \dots = \sqrt{\lambda^2 - 1} \quad (27)$$

läßt sich jedoch wieder die endliche Form herstellen, indem wir die Grundform α) durch diese Reihe dividieren. Wir gelangen so zur Grundform β)

$$\left. \begin{aligned} N_{n,v}(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - 1} \left[\lambda^{v-1} - \frac{(v-1)^2 - n^2}{2(2v-1)} \lambda^{v-3} + \right. \\ \left. + \frac{[(v-1)^2 - n^2][(v-3)^2 - n^2]}{2 \cdot 4(2v-1)(2v-3)} \lambda^{v-5} + \dots \right], \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

welche in der Tat für $v + |n| = 1, 3, 5, 7 \dots$ endlich ist.

Bei negativem $v + |n|$ muß die Funktion

$$\left. \begin{aligned} N_{0,-1}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{6} \frac{1}{\lambda^3} + \frac{3}{40} \frac{1}{\lambda^5} + \dots = \text{arcctg} \sqrt{\lambda^2 - 1} = \\ = -i \ln \frac{\lambda}{1 + \sqrt{1 - \lambda^2}} + \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

zu Hilfe genommen werden. Die Identität mit $\text{arcctg} \sqrt{\lambda^2 - 1}$ läßt sich leicht durch Differenzieren nachweisen. Es wird nämlich

$$\frac{d}{d\lambda} (N_{0,-1}(\lambda)) = -\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{2\lambda^4} - \frac{3}{9\lambda^6} - \dots \quad (30)$$

Andererseits wird

$$\frac{d}{d\lambda} (\text{arcctg} \sqrt{\lambda^2 - 1}) = -\frac{1}{1 + \lambda^2 - 1} \cdot \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} = -\frac{1}{\lambda \sqrt{\lambda^2 - 1}}. \quad (31)$$

Die Übereinstimmung der rechten Seiten folgt unmittelbar aus dem binomischen Lehrsatz. Diese Funktion ermöglicht nun bei negativem

$\nu + |n|$ die endliche Schreibweise unserer allgemeinen Funktion $N_{n,\nu}(\lambda)$ und zwar muß

$$N_{n,\nu}(\lambda) = C \left\{ N_{n,-\nu-1}(\lambda) \operatorname{arcc} \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda^2 - 1} + M(\lambda) \right\} \quad (32)$$

gesetzt werden. Hierin ist C eine Konstante und $M(\lambda)$ eine Potenzreihe, die für gerades negatives $\nu + |n|$ ohne weiteres, für negatives ungerades $\nu + |n|$ mit Hilfe von (27) stets endlich wird. Wir gelangen so zu zwei weiteren Grundformen:

Für $\nu + |n| = -2, -4, -6 \dots$ (negativ gerade) gilt Grundform γ)

$$N_{n,\nu}(\lambda) = - \frac{1}{a_{-2\nu}} \left\{ \sqrt{\lambda^2 - 1} \left[\lambda^{-\nu-2} + \frac{(\nu+2)^2 - n^2}{2(2\nu+3)} \lambda^{-\nu-4} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{[(\nu+2)^2 - n^2][(\nu+4)^2 - n^2]}{2 \cdot 4(2\nu+3)(2\nu+5)} \lambda^{-\nu-6} + \dots \right] \operatorname{arcc} \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda^2 - 1} + \right. \\ \left. + a_2 \lambda^{-\nu-2} + a_4 \lambda^{-\nu-4} + \dots + a_{-2\nu-2} \lambda^{\nu+2} \right\}. \quad (33)$$

Hierin ist

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= -1, \\ a_4 &= \frac{1}{3} - \frac{(\nu+2)^2 - n^2}{2(2\nu+3)}, \\ a_6 &= \frac{2}{15} + \frac{1}{3} \frac{(\nu+2)^2 - n^2}{2(2\nu+3)} - \frac{[(\nu+2)^2 - n^2][(\nu+4)^2 - n^2]}{2 \cdot 4(2\nu+3)(2\nu+5)} \\ &\text{usw.} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Für $\nu + |n| = -1, -3, -5 \dots$ (negativ ungerade) gilt schließlich Grundform δ)

$$N_{n,\nu}(\lambda) = - \frac{1}{a_{-2\nu+1}} \left\{ \left[\lambda^{-\nu-1} + \frac{(\nu+1)^2 - n^2}{2(2\nu+3)} \lambda^{-\nu-3} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{[(\nu+1)^2 - n^2][(\nu+3)^2 - n^2]}{2 \cdot 4(2\nu+3)(2\nu+5)} \lambda^{-\nu-5} + \dots \right] \operatorname{arcc} \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda^2 - 1} + \right. \\ \left. + [a_3 \lambda^{-\nu-3} + a_5 \lambda^{-\nu-5} + \dots + a_{-2\nu-1} \lambda^{\nu+1}] \sqrt{\lambda^2 - 1} \right\}. \quad (35)$$

Hierin ist

$$\left. \begin{aligned} a_3 &= -1, \\ a_5 &= -\frac{2}{3} - \frac{(\nu+1)^2 - n^2}{2(2\nu+3)}, \\ a_7 &= -\frac{8}{15} - \frac{2}{3} \frac{(\nu+1)^2 - n^2}{2(2\nu+3)} - \frac{[(\nu+1)^2 - n^2][(\nu+3)^2 - n^2]}{2 \cdot 4(2\nu+3)(2\nu+5)} \\ &\text{usw.} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Beispiele sind

$$\left. \begin{aligned} N_{0,-2}(\lambda) &= -3 \left\{ \sqrt{\lambda^2 - 1} \operatorname{arcc} \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda^2 - 1} - 1 \right\}, \\ N_{0,-3}(\lambda) &= \frac{4}{3} \left\{ [\lambda^2 - \frac{2}{3}] \operatorname{arcc} \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda^2 - 1} - \sqrt{\lambda^2 - 1} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Bei der Zusammenstellung der allgemeinen Lösung der Potentialgleichung ist noch zu beachten, daß die Vertauschung von ν mit $-\nu - 1$,

die an der Konstanten $\nu(\nu + 1)$ nichts ändert, zu einer neuen Kombination führt. Ferner ist zu beachten, daß die so gefundene Lösung noch unvollständig ist, und zwar insbesondere für $n = 0, \nu = 0$. Wir kommen hier jedoch aus, wenn wir noch das partikuläre Integral $\ln(y^2 + z^2)$ hinzunehmen. Es ergibt sich so

$$\Phi = \sum_0^{\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} N_{n,\nu}(\mathcal{C}\mathcal{O}u) [a_{n,\nu} N_{n,\nu}(\sin v) + b_{n,\nu} N_{n,-\nu-1}(\sin v)] \times \left\{ \begin{array}{l} (38) \\ \times [c_n \sin(nw) + d_n \cos(nw)] + a_{0,0}(\ln \mathcal{C}\mathcal{O}u + \ln \sin v). \end{array} \right.$$

Die sehr häufig vorkommende Funktion $N_{0,-1}(\mathcal{C}\mathcal{O}u) = \text{arctg}(\mathcal{S}\text{in } u)$ wollen wir zur Abkürzung stets mit T bezeichnen.

		Tiefe Umdrehungsaußenkerbe								Flache Umdrehungsinnenkerbe							
		Φ_0		Φ_1		Φ_2		Φ_3		Φ_0		Φ_1		Φ_2		Φ_3	
		I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II
Zug	n	0	0							0	0						
	ν	0	0	-1						2	-1	-3	1	-2			
Biegung	n	1	1	0						1	1	0					
	ν	-1	-1	-3	-2	-2				3	-2	-4	2	-3	2	-3	
Schub	n	1	1	0						1	1	0					
	ν	0	0	-1	-1					(4) 2	(3) -3	(3) (-5)	(3) -2	(-4) (-4)			
Drillung	n			1	1							1	1				
	ν			-2	-2							2	-3	2	-3		

I bedeutet $b_{n,\nu} = 0$, II bedeutet $a_{n,\nu} = 0$.

Zur Behandlung des Spezialfalles der kugelförmigen Innenkerbe müssen schließlich auch noch die harmonischen Funktionen in sphärischen Polarkoordinaten angegeben werden. Mit Bezug auf (7) und (8) erhalten wir auf Grund derselben Gedankengänge wie oben für die Potentialgleichung

$$\Delta\Phi = \frac{1}{u^2} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(u^2 \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) + \frac{1}{\sin v} \frac{\partial}{\partial v} \left(\sin v \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) + \frac{1}{\sin^2 v} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial w^2} \right] = 0 \quad (39)$$

und für ihre allgemeine Lösung

$$\Phi = \sum_0^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} u^{\nu} [a_{n,\nu} N_{n,\nu}(\sin v) + b_{n,\nu} N_{n,-\nu-1}(\sin v)] [c_n \sin(nw) + d_n \cos(nw)] + a_{0,0}(\ln u + \ln \sin v). \quad (40)$$

Die nebenstehende Tafel gibt für die hier in Betracht kommenden n - und ν -Werte einen Überblick. Wir werden jetzt — bei Behandlung der einzelnen Spannungsaufgaben — auf das Zustandekommen dieser Werte näher eingehen.

3. Die tiefe Umdrehungsaußenkerbe.

A. Reiner Zug.

Beim Aufsuchen geeigneter Funktionen ist zunächst notwendig, sich über charakteristische Eigenschaften des gesuchten Spannungszustandes Klarheit zu verschaffen. Wir gehen dabei zweckmäßig von den Integralen (14) und (15) aus. Bei reinem Zug verschwinden alle Integrale mit Ausnahme desjenigen für P_x . Wir wollen jetzt der Einfachheit halber P statt P_x schreiben; nach Auflösung der Summe und mit Verwendung der Beziehung (18) von III, 3 für den Richtungskosinus erhalten wir

$$P = \iint_F \left[\frac{\sigma_u}{h_u} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\tau_{uv}}{h_v} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\tau_{uw}}{h_w} \frac{\partial x}{\partial w} \right] h_v h_w dv dw, \quad (41)$$

oder mit Rücksicht auf die Beziehungen (1) und (2) unseres Koordinatensystems

$$P = \int_0^{v_0} \int_0^{2\pi} [\sigma_u \mathfrak{C} \cos v - \tau_{uv} \mathfrak{S} \sin v] \mathfrak{C} u \sin v dv dw. \quad (42)$$

Die Koordinate u , welche die Schnittfläche $u = \text{konst.}$ kennzeichnet, längs der die Spannungen zu integrieren sind, kann beliebig gewählt werden; der Wert des Integrals muß stets derselbe und von u unabhängig sein. Beispielsweise können wir auch u sehr groß ($= \infty$) annehmen. Dann wird $\mathfrak{S} \sin u = \mathfrak{C} \cos u = \frac{1}{2} e^u = h$ und das Integral geht über in

$$P = \int_0^{v_0} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} e^{2u} (\sigma_u \cos v - \tau_{uv} \sin v) \sin v dv dw. \quad (43)$$

Die Koordinate u tritt also nur noch in Form des Faktors e^{2u} auf. Das Integral kann mithin nur dann von u unabhängig sein, wenn die Spannungen für großes u mit $1/e^{2u}$ proportional sind. Dies ist aber nur dann der Fall, wenn die zur Aufstellung der Spannungen verwendeten Funktionen die folgenden höchsten ν -Werte haben: $\nu = 0$ bei Φ_0 und $\nu = -1$ bei Φ_1 . Außerdem sind noch kleinere ν -Werte möglich; wir kommen hier jedoch bereits mit $\nu = -2$ bei Φ_0 aus.

Aus der Umdrehungssymmetrie, welche bei reiner Zugbeanspruchung für den ganzen Spannungs- und Formänderungszustand gilt, folgt die Unabhängigkeit von der Koordinate w . Daraus ergibt sich, daß die Funktionen Φ_2 und Φ_3 nicht in Betracht kommen. Bei Φ_0 und Φ_1 muß ferner $n = 0$ gesetzt werden.

Bei den von ν abhängigen Bestandteilen muß entweder $a_{n,\nu}$ oder $b_{n,\nu}$ gleich Null gesetzt werden. Ausschlaggebend ist hierbei, daß im Innern,

insbesondere für $v = 0$, keine Unendlichkeitsstellen auftreten dürfen. Läßt sich die Unendlichkeitsstelle weder im einen noch im anderen Falle vermeiden, so führt stets eine geeignete Überlagerung beider Fälle zum Ziele.

Hier ergibt sich für $n = 0$, $\nu = 0$ bei Beachtung von (26) [Grundform α] und (29)

$$\left[a_{0,0} + b_{0,0} \left(-i \ln \frac{\sin v}{1 + \cos v} + \frac{\pi}{2} \right) \right] d_0 + a_{0,0} (\ln \mathfrak{C} \mathfrak{O} \int u + \ln \sin v). \quad (44)$$

Bei geeigneter Wahl der Konstanten ($b_{0,0} = -\frac{2}{\pi} a_{0,0}$; $d_0 = i \frac{\pi}{2}$) können wir hieraus die Funktion

$$a_{0,0} [\ln \mathfrak{C} \mathfrak{O} \int u + \ln(1 + \cos v)] \quad (45)$$

ableiten, welche für $v = 0$ keine Unendlichkeitsstelle mehr besitzt.

Für $\nu = -2$ und für $\nu = -1$ wird die Unendlichkeitsstelle vermieden, indem jeweils $a_{n,\nu}$ gleich Null gesetzt wird. So ergibt sich folgender Ansatz, welcher die strenge Lösung unserer Aufgabe ermöglicht:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= A [\ln \mathfrak{C} \mathfrak{O} \int u + \ln(1 + \cos v)] + B (\mathfrak{S} \sin u T - 1) \cos v, \\ \Phi_1 &= CT, \quad \Phi_2 = 0, \quad \Phi_3 = 0, \quad T = \arccos(\mathfrak{S} \sin u). \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Die Spannungsfunktion wird entsprechend (58) von III, 6

$$F = A [\ln \mathfrak{C} \mathfrak{O} \int u + \ln(1 + \cos v)] + B (\mathfrak{S} \sin u T - 1) \cos v + C \mathfrak{S} \sin u T \cos v. \quad (47)$$

Zur Ableitung der Spannungen bilden wir hieraus zunächst den Ausdruck für ΔF , der bei den Normalspannungen eine Rolle spielt. Mit Bezug auf (5) wird:

$$\Delta F = -\frac{2C \cos v}{h^2}. \quad (48)$$

Ferner müssen die mit $1/h^4$ behafteten Ausdrücke, die in (4) und (6) auftreten, besonders behandelt werden. Dabei läßt sich wiederholt durch $\mathfrak{S} \sin^2 u + \cos^2 v = \mathfrak{C} \mathfrak{O} \int^2 u - \sin^2 v = h^2$ kürzen. Man erhält:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{h^4} \left(\mathfrak{S} \sin u \mathfrak{C} \mathfrak{O} \int u \frac{\partial F}{\partial u} + \sin v \cos v \frac{\partial F}{\partial v} \right) = \\ & = \frac{1}{h^2} [A + (B + C) (\mathfrak{S} \sin u T - 1) \cos v] + \frac{\cos v}{h^4} [-A + B + C \cos^2 v], \\ & \frac{1}{h^4} \left(\mathfrak{S} \sin u \mathfrak{C} \mathfrak{O} \int u \frac{\partial F}{\partial v} - \sin v \cos v \frac{\partial F}{\partial u} \right) = \\ & = \frac{\sin v}{h^2} \left[-A \frac{\mathfrak{I} g u}{1 + \cos v} + B (-\mathfrak{C} \mathfrak{O} \int u T + \mathfrak{I} g u) - C \mathfrak{C} \mathfrak{O} \int u T \right] + \\ & \quad + \frac{\sin v}{h^4} \mathfrak{I} g u [-A + B + C \cos^2 v]. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Die Beziehungen (4) und (6) bieten im übrigen keinerlei Schwierigkeiten. Es ergeben sich folgende Normalspannungen:

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_u &= \frac{1}{h^2} \left\{ A \mathfrak{I} g^2 u + B \frac{\cos v}{\mathfrak{U} v^2 u} + C \left[-2 - \alpha + \frac{1}{\mathfrak{U} v^2 u} \right] \cos v \right\} + \\
 &\quad + \frac{\cos v}{h^4} \{ -A + B + C \cos^2 v \}, \\
 \sigma_v &= \frac{1}{h^2} \left\{ -A \frac{\cos v}{1 + \cos v} + (\alpha - 1) C \cos v \right\} + \frac{\cos v}{h^4} \{ A - B - C \cos^2 v \}, \\
 \sigma_w &= \frac{1}{h^2} \left\{ A \left(-\mathfrak{I} g^2 u + \frac{\cos v}{1 + \cos v} \right) - B \frac{\cos v}{\mathfrak{U} v^2 u} + \right. \\
 &\quad \left. + C \left[\alpha - 1 - \frac{1}{\mathfrak{U} v^2 u} \right] \cos v \right\}.
 \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Die Schubspannungen sind:

$$\left. \begin{aligned}
 \tau_{uv} &= \frac{\mathfrak{I} g u \sin v}{h^2} \left\{ -\frac{A}{1 + \cos v} + (\alpha - 1) C + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{h^2} [-A + B + C \cos^2 v] \right\}, \quad \tau_{vw} = 0, \quad \tau_{uw} = 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Bis auf die Wahl der Konstanten ist damit der Spannungszustand bereits festgelegt. Die Konstanten berechnen sich aus den Randbedingungen (12). Da bei σ_v und τ_{uv} der Faktor eines jeden Gliedes, das u enthält, für $v = v_0$ verschwinden muß, ergeben sich zunächst 4 Gleichungen. Infolge paarweiser Übereinstimmung reduziert sich jedoch ihre Zahl auf zwei, aus welchen folgen:

$$A = (\alpha - 1)(1 + \cos v_0) C, \quad B = A - C \cos^2 v_0. \quad (52)$$

Wir kommen nun zur Ermittlung des Kraftflusses, der durch unsere Umdrehungskerbe hindurchgeht. Hierfür ist das Integral (42) maßgebend. Machen wir Gebrauch von den Beziehungen (52), durch welche die Bedingung der lastfreien Oberfläche befriedigt wird, so läßt sich jetzt in der Tat nachweisen, daß der Wert des Integrals bei beliebig gewähltem u konstant und von u unabhängig ist. Wir wollen hier jedoch diese allgemeine Rechnung umgehen und zur Vereinfachung $u = 0$ setzen, d. h. über den engsten Querschnitt integrieren. Dort wird $h = \cos v$, und (42) geht über in

$$\left. \begin{aligned}
 P &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} (\sigma_u)_{u=0} \sin v \cos v \, dv \, dw = \\
 &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{B - \alpha C}{\cos v} + \frac{B - A}{\cos^3 v} \right] \sin v \cos v \, dv \, dw = \\
 &= 2\pi \left[(B - \alpha C)(1 - \cos v_0) + (B - A) \left(\frac{1}{\cos v_0} - 1 \right) \right]
 \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

oder wegen (52)

$$P = 2\pi C(1 - \cos v_0) [-1 + (\alpha - 2) \cos v_0 - \cos^2 v_0]. \quad (54)$$

Infolge der Dimensionslosigkeit unseres Koordinatensystems müssen wir statt P einen Bezugswert einführen, der die Dimension einer Span-

nung besitzt; wir wollen dazu die Nennspannung, also hier die mittlere Spannung des engsten Querschnittes (Halbmesser a)

$$\frac{P}{\pi a^2} = p \tag{55}$$

verwenden.

Aus (1) folgt für den Halbmesser a des engsten Querschnittes

$$a = \left(\sqrt{y^2 + z^2} \right)_{u=0, v=v_0} = \sin v_0, \tag{56}$$

so daß

$$P = p \pi \sin^2 v_0 = p \pi (1 - \cos v_0) (1 + \cos v_0) \tag{57}$$

wird und mithin aus (54)

$$C = -\frac{p}{2} \frac{1 + \cos v_0}{1 + (2 - \alpha) \cos v_0 + \cos^2 v_0} \tag{58}$$

folgt. Damit ist der gesamte Spannungszustand eindeutig festgelegt.

Abb. 47 zeigt den Spannungsverlauf längs der Kerboberfläche und im engsten Querschnitt; es handelt sich um den Fall $\cos v_0 = 0,2$. Im

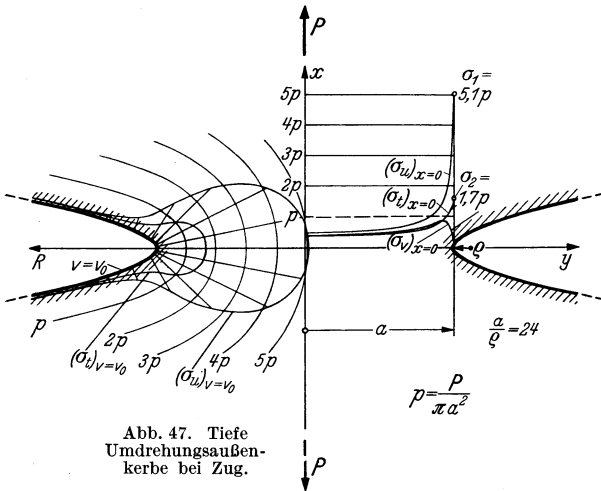


Abb. 47. Tiefe Umdrehungsaußenkerbe bei Zug.

Kerbgrund erreicht die in der Zugrichtung wirkende Spannung σ_u den 5,1-fachen Wert der Nennspannung. Zugleich erreicht dort die Ringspannung mit $1,7p$ ihren Höchstwert. Vom Kerbgrund erfolgt sowohl längs der Kerboberfläche als auch nach dem Inneren rasches Abklingen; nach außen nehmen die Spannungen angenähert umgekehrt proportional der zweiten Potenz der Entfernung vom Kerbgrund ab, also noch schneller als beim ebenen Spannungszustand

(das entsprechende ebene Problem zeigte nur ein Abklingen, welches angenähert umgekehrt proportional der ersten Potenz der Entfernung vom Kerbgrund erfolgt, siehe IV, 2, A).

Bei Aufstellung der allgemeinen Formeln für die im Kerbgrund auftretenden Höchstspannungen tritt v_0 als Parameter auf. Führen wir als für die Kerbform charakteristische Größe das Verhältnis zwischen Krümmungshalbmesser ρ und Halbmesser a des Kerbgrundes ein, so ergeben sich für den Zusammenhang mit v_0 dieselben Beziehungen, die wir schon in Gleichung (68) von IV, 2 kennenlernten. Wir erhalten als Formel für die Höchstspannung

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{p} (\sigma_u)_{u=0, v=v_0} = \frac{\sigma_1}{p} = \frac{1}{N} \left[\frac{a}{\rho} \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} + \left(0,5 + \frac{1}{m} \right) \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} + \right. \\ \left. + \left(1 + \frac{1}{m} \right) \left(\sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} + 1 \right) \right] \end{aligned} \right\} \tag{59}$$

und für den Höchstwert der Ringspannung

$$\frac{1}{p} (\sigma_w)_{u=0} = \frac{\sigma_2}{p} = \frac{1}{N} \frac{a}{\rho} \left[\frac{1}{m} \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} + 0,5 \right]. \quad (60)$$

Hierin ist

$$N = \frac{a}{\rho} + \frac{2}{m} \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} + 2. \quad (61)$$

Die genaue Abhängigkeit beider Höchstwerte von der Kerbkürmung ist in Abb. 48 ersichtlich.

B. Reine Biegung.

Zur Behandlung des Falles reiner Biegungsbeanspruchung greifen wir zurück auf die für den Kraftfluß charakteristischen Integrale (14) und (15.) Wir lassen das Biegemoment um die z-Achse drehen und fordern dementsprechend, daß von den sechs Integralen alle mit Ausnahme desjenigen für M_z verschwinden. Wenn wir jetzt M statt $-M_z$ schreiben, hat es mit Verwendung der bereits mehrmals benutzten Beziehungen für die Richtungskosinus die Form

$$M = \int_0^{v_0} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\sigma_u}{h_u} \left(y \frac{\partial x}{\partial u} - x \frac{\partial y}{\partial u} \right) + \frac{\tau_{uv}}{h_v} \left(y \frac{\partial x}{\partial v} - x \frac{\partial y}{\partial v} \right) + \frac{\tau_{uw}}{h_w} \left(y \frac{\partial x}{\partial w} - x \frac{\partial y}{\partial w} \right) \right\} h_v h_w dv dw \quad (62)$$

oder wegen (1) und (2)

$$M = \int_0^{v_0} \int_0^{2\pi} \left\{ \sigma_u \sin v \cos v \cos w - \tau_{uv} \text{Sin} u \text{Cos} u \cos w + \tau_{uw} h \text{Sin} u \cos v \sin w \right\} \text{Cos} u \sin v dv dw. \quad (63)$$

In großer Entfernung vom engsten Querschnitt wird $\text{Sin} u = \text{Cos} u = \frac{1}{2} e^u = h = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Das Integral enthält dann e^{3u} als Faktor. Da es von u unabhängig sein soll, müssen die Spannungen für großes u umgekehrt proportional mit e^{3u} sein. Daraus ergeben sich die höchstmöglichen ν -Werte für die von u abhängigen Bestandteile, und zwar $\nu = -1$ bei Φ_0 und $\nu = -2$ bei Φ_1 und Φ_2 . Außerdem sind auch Funktionen mit noch kleinerem ν brauchbar. Ferner läßt das Verschwinden der übrigen Integrale vermuten, daß bei σ_u und τ_{uv} der Faktor $\cos w$ auftreten wird, d. h. daß $c_n = 0$ wird und bei Φ_0 und Φ_1 nur $n = 1$, bei Φ_2 nur $n = 0$ in Betracht kommt.

Damit im Innern, insbesondere für $v = 0$, keine Unendlichkeitsstellen auftreten, muß ferner $a_{n,\nu}$ gleich Null gesetzt werden. Eine Ausnahme hiervon bildet die Funktion $\nu = -1, n = 1$; sie wird zunächst in der Form

$$\frac{1}{\text{Cos} u} \left[a_{1,-1} \cdot \frac{1}{\sin v} + b_{1,-1} \cdot i \cot v \right] d_1 \cos w$$

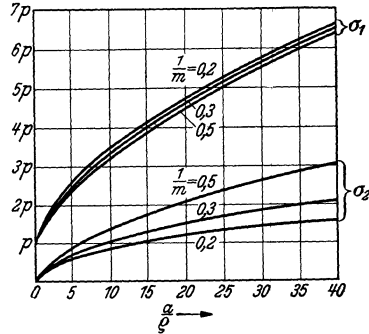


Abb. 48. Die Höchstspannungen in tiefen Umdrehungsaußenkerben bei Zug.

erhalten, deren beide Bestandteile für $v = 0$ unendlich werden. Setzen wir jedoch $a_{1,-1} = -ib_{1,-1}$, so ergibt sich, vom konstanten Faktor abgesehen,

$$\frac{\cos w}{\mathfrak{Cof} u} \frac{1 - \cos v}{\sin v} = \frac{\cos w}{\mathfrak{Cof} u} \frac{\sin v}{1 + \cos v}, \quad (64)$$

also eine brauchbare Funktion. Die Lösung der Aufgabe läßt sich bereits streng durchführen, wenn wir außer den erwähnten Funktionen noch jene mit $\nu = -3$, $n = 1$ bei Φ_0 hinzunehmen. Wir erhalten somit folgenden Ansatz¹:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= A \frac{\sin v \cos w}{\mathfrak{Cof} u (1 + \cos v)} + \\ &\quad + B \left[\mathfrak{Cof} u (\mathfrak{Sin} u T - 1) + \frac{1}{3 \mathfrak{Cof} u} \right] \sin v \cos v \cos w, \\ \Phi_1 &= C (\mathfrak{Cof} u T - \mathfrak{I}g u) \sin v \cos v, \\ \Phi_2 &= D (\mathfrak{Sin} u T - 1) \cos v, \quad \Phi_3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

Die Spannungsfunktion wird

$$\left. \begin{aligned} F &= \sin v \cos v \cos w \left[\frac{A}{\mathfrak{Cof} u \cos v (1 + \cos v)} + \right. \\ &\quad \left. + (B + C + D) \mathfrak{Cof} u (\mathfrak{Sin} u T - 1) + \left(\frac{B}{3} + C \right) \frac{1}{\mathfrak{Cof} u} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

Unter Umgehung der Zwischenrechnung, bei welcher wiederholt durch h^2 gekürzt werden kann, erhalten wir schließlich für die Spannungen folgende Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_u &= \frac{\sin v \cos v \cos w}{h^2} \left\{ -2 \mathfrak{Cof} u (\mathfrak{Sin} u T - 1) [B + (1 - \alpha)(C + D)] + \right. \\ &\quad + \frac{1}{\mathfrak{Cof} u} \left[-\frac{2A}{\cos v (1 + \cos v)} - \frac{2}{3} B - 6C + (2 + \alpha) D \right] + \\ &\quad + \frac{1}{\mathfrak{Cof}^3 u} \left[\frac{2A}{\cos v (1 + \cos v)} + \frac{2}{3} B + 2C \right] + \\ &\quad \left. + \frac{1}{h^2 \mathfrak{Cof} u} \left(A + \frac{2}{3} B + 2C \cos^2 v + D \sin^2 v \right) \right\}, \\ \sigma_v &= \frac{\sin v \cos v \cos w}{h^2} \left\{ 2 \mathfrak{Cof} u (\mathfrak{Sin} u T - 1) [B + (1 - \alpha)(C + D)] + \right. \\ &\quad + \frac{1}{\mathfrak{Cof} u} \left[\frac{A}{(1 + \cos v)^2} + \frac{2}{3} B + (1 - \alpha) D \right] - \frac{1}{h^2 \mathfrak{Cof} u} \left(A + \frac{2}{3} B + \right. \\ &\quad \left. + 2C \cos^2 v + D \sin^2 v \right) \left. \right\}, \\ \sigma_w &= \frac{\sin v \cos v \cos w}{h^2} \left\{ \frac{1}{\mathfrak{Cof} u} \left[\frac{A(2 + \cos v)}{\cos v (1 + \cos v)^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. + (-2 + 2\alpha) C + (1 - \alpha) D \right] + \\ &\quad \left. + \frac{1}{\mathfrak{Cof}^3 u} \left(-\frac{2A}{\cos v (1 + \cos v)} - \frac{2}{3} B - 2C \right) \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

¹ Neuber, H.: Ing.-Arch. Bd. 6 (1935) S. 138.

$$\left. \begin{aligned}
 \tau_{uv} &= \frac{\mathfrak{S}in u \cos w}{h^2} \left\{ \left[(\mathfrak{S}in u T - 1)(1 - 2 \cos^2 v) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{t \cos^2 v}{\mathfrak{S}in u} \right] [B + (1 - \alpha)(C + D)] + \frac{\sin^2 v}{\mathfrak{C}o\mathfrak{f}^2 u} \left[\frac{A}{(1 + \cos v)^2} - \frac{B}{3} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (-1 + \alpha)C \right] + \frac{1}{h^2} \left(A + \frac{2}{3} B + 2C \cos^2 v + D \sin^2 v \right) \right\}, \\
 \tau_{vw} &= \frac{\sin v \sin w}{h} \left\{ -(\mathfrak{S}in u T - 1)[B + (1 - \alpha)(C + D)] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\mathfrak{C}o\mathfrak{f}^2 u} \left[\frac{A}{(1 + \cos v)^2} - \frac{B}{3} + (-1 + \alpha)C \right] \right\}, \\
 \tau_{uw} &= \frac{\cos v \sin w}{h} \left\{ (\mathfrak{C}o\mathfrak{f} u T - \mathfrak{I}g u) [B + (1 - \alpha)(C + D)] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\mathfrak{S}in u}{\mathfrak{C}o\mathfrak{f}^3 u} \left(-\frac{2A}{\cos v(1 + \cos v)} - \frac{2}{3} B - 2C \right) \right\}.
 \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

Für die Konstanten A, B, C, D ergeben sich aus den Randbedingungen (12) zunächst acht Gleichungen, da ja bei den drei Spannungen $\sigma_v, \tau_{uv}, \tau_{vw}$ der Faktor eines jeden Gliedes, das in irgendeiner Form von u abhängt, für $v = v_0$ verschwinden muß. Diese Gleichungen sind jedoch teilweise identisch und lassen sich auf drei zurückführen, aus welchen folgen:

$$\left. \begin{aligned}
 A &= -\frac{D}{N_1} 2\alpha(1 - \alpha)(1 + \cos v_0)^2, & C &= \frac{D}{N_1} [-3\alpha + 2(1 - \alpha) \cos v_0 + \\
 B &= -(1 - \alpha)(C + D); & & \quad + (4 - \alpha) \cos^2 v_0],
 \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

hierin ist $N_1 = 2 \cos v_0 [2(1 - \alpha) + (4 - \alpha) \cos v_0]$.

Die Konstante C ergibt sich aus dem Integral (63), wobei wir zweckmäßig $u = 0$ setzen. Es wird

$$\frac{D}{N_1} = \frac{3M}{\pi(1 - \cos v_0)^2 2\alpha[6 + 4(4 - \alpha) \cos v_0 + 2(5 - 2\alpha) \cos^2 v_0 + (4 - \alpha) \cos^3 v_0]}. \quad (70)$$

Die Nennspannung ist bei diesem Spannungszustand die elementare Biegungsspannung des Kerbgrundes

$$p = \frac{4M}{\pi a^3} = \sigma_n. \quad (71)$$

Unter Verwendung von (56) und mit Einführung der Krümmung des Kerbgrundes $a/\varrho = \operatorname{tg}^2 v_0$ ergibt sich schließlich für die größte Biegungsspannung, die im Kerbgrund auftritt, folgender Ausdruck

$$\sigma_1 = (\sigma_u)_{\substack{u=0 \\ v=v_0 \\ w=0}} = \frac{p}{N} \frac{3}{4} \left(\sqrt{\frac{a}{\varrho}} + 1 + 1 \right) \left[3 \frac{a}{\varrho} - \left(1 - \frac{2}{m} \right) \sqrt{\frac{a}{\varrho}} + 1 + 4 + \frac{1}{m} \right], \quad (72)$$

wobei

$$N = 3 \left(\frac{a}{\varrho} + 1 \right) + \left(1 + \frac{4}{m} \right) \sqrt{\frac{a}{\varrho} + 1} + \frac{1 + \frac{1}{m}}{1 + \sqrt{\frac{a}{\varrho} + 1}} \quad (73)$$

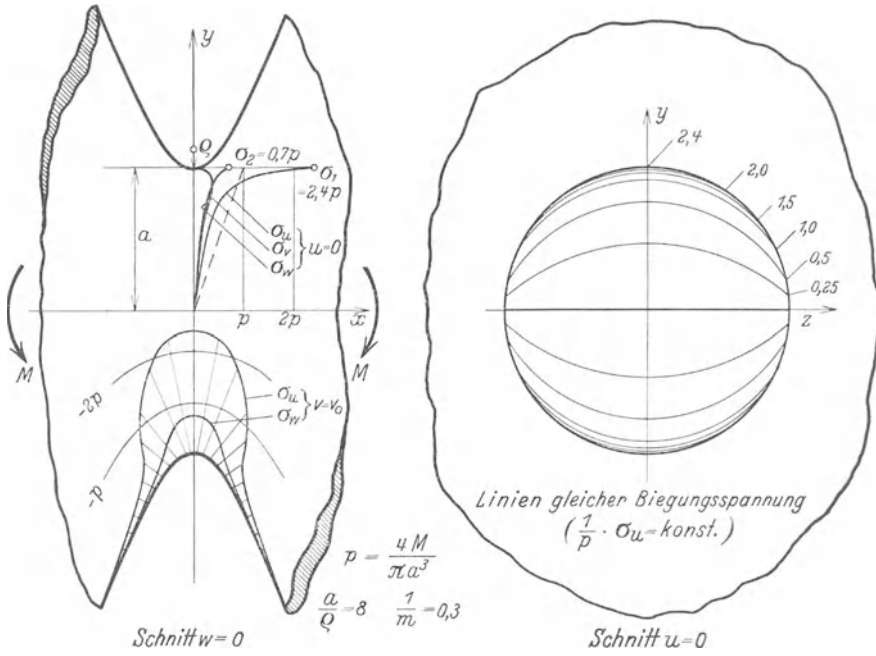


Abb. 49. Tiefe Umdrehungsaußenkerbe bei Biegung.

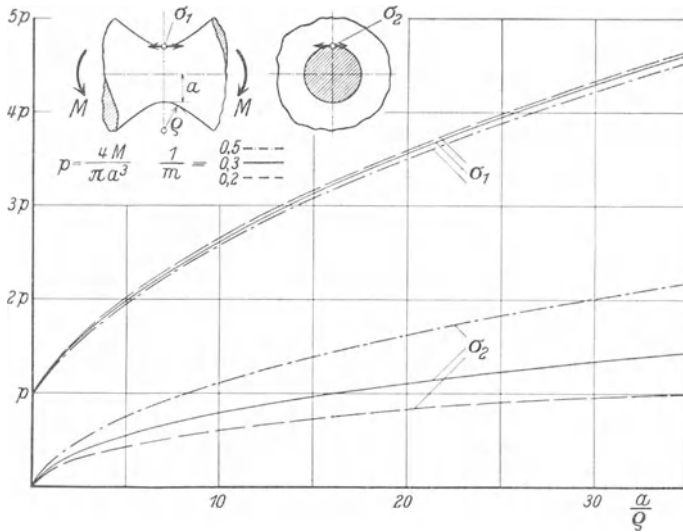


Abb. 50. Die Höchstspannungen in tiefen Umdrehungsaußenkerben bei Biegung.

bedeutet. Der ebenfalls im Kerbgrund auftretende Höchstwert der Ringspannung wird

$$\sigma_2 = (\sigma_w)_{\substack{u=0 \\ v=v_0 \\ w=0}} = \frac{p}{N} \frac{3}{4} \frac{a}{\rho} \left[\frac{3}{m} \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} + 1 + \frac{1}{m} \right]. \quad (74)$$

Abb. 49 zeigt für $a/\rho = 8$ und $1/m = 0,3$ die Spannungsverteilung. Links unten sehen wir den Verlauf der Spannungen längs der Kerboberfläche, wo sich das charakteristische Abklingen zeigt. Der obere Teil des Bildes zeigt den Spannungsverlauf im engsten Querschnitt. Die gestrichelte Linie würde dem Geradliniengesetz entsprechen. Die Biegungsspannung läuft in scharfer Spitze aus und erreicht im Kerbgrund den 2,4fachen Wert der elementaren Theorie. Die rechts gezeichneten Linien gleicher Biegungsspannung lassen erkennen, wie sich die Zone der hohen Beanspruchung gürtelförmig längs des Kerbgrundes erstreckt.

In Abb. 50 sind die beiden Spannungshöchstwerte abhängig vom Krümmungsmaß und für drei verschiedene Werte der Poissonschen Konstanten aufgetragen.

C. Reiner Schub.

Wird die Umdrehungsaußenkerbe im engsten Querschnitt auf Schub beansprucht, so müssen von den Integralen (14) alle, bis auf jenes, welches die Schubkraft angibt, zu Null werden. Wir wollen die Schubkraft parallel zur y -Achse legen und mit V bezeichnen (statt $-P_y$). Unter Umgehung der Zwischenrechnung ergibt sich dann

$$V = \int_0^{v_0} \int_0^{2\pi} (\sigma_u \sin u \sin v \cos w + \tau_{uv} \cos u \cos v \cos w - \tau_{uw} h \sin w) \cos u \sin v \, dv \, dw. \quad (75)$$

Für sehr große Werte von u tritt bei diesem Integral der Faktor e^{2u} auf. Die Spannungen müssen mithin für großes u umgekehrt proportional mit e^{2u} werden. Daraus ergeben sich als höchste v -Werte: $v = 0$ bei Φ_0 und $v = -1$ bei Φ_1 und Φ_2 . Im übrigen gilt wie beim vorigen Problem $c_n = 0$, sowie $n = 1$ bei Φ_0 und Φ_1 , ferner $n = 0$ bei Φ_2 . Wieder muß zur Vermeidung von Unendlichkeitsstellen $a_{n,v}$ gleich Null gesetzt werden. Eine Ausnahme bildet hier der Fall $v = 0$, $n = 1$, bei welchem wir zunächst die Funktion

$$\Im g u \left[a_{1,0} i \cot v + b_{1,0} \frac{1}{\sin v} \right] d_1 \cos w$$

erhalten, deren beide Bestandteile mit $v = 0$ unendlich werden. Setzen wir aber $a_{1,0} i = -b_{1,0}$, so ergibt sich bis auf den konstanten Faktor die brauchbare Funktion

$$\Im g u \frac{1 - \cos v}{\sin v} \cos w = \Im g u \frac{\sin v}{1 + \cos v} \cos w. \quad (76)$$

Nehmen wir außer den bereits erwähnten Funktionen noch jene mit $\nu = -2$, $n = 1$ bei Φ_0 hinzu, so gelingt bereits die strenge Lösung der Aufgabe. Wir wählen mithin folgenden Ansatz:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= A \Im g u \frac{\sin v \cos w}{1 + \cos v} + B(\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f}uT - \Im g u) \sin v \cos w, \\ \Phi_1 &= C \frac{\sin v \cos w}{\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f}u(1 + \cos v)}, \quad \Phi_2 = DT, \quad \Phi_3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Hieraus leiten wir die Spannungsfunktion

$$F = \sin v \cos w \left[\frac{A \Im g u}{1 + \cos v} + B(\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f}uT - \Im g u) + \frac{C \Im g u \cos v}{1 + \cos v} + D \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f}uT \right] \quad (78)$$

ab. Unter Umgehung der Zwischenrechnung ergeben sich folgende Spannungen:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_u &= \frac{\sin v \cos w}{h^2} \Im g u \left[C \left(-2 - \alpha + \frac{2\alpha}{1 + \cos v} \right) + D(-2 - \alpha) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f}^2 u} \left(\frac{2A}{1 + \cos v} - 2B + \frac{2C \cos v}{1 + \cos v} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{h^2} (A - 2B + C \cos^2 v - D \sin^2 v) \right], \\ \sigma_v &= \frac{\sin v \cos w}{h^2} \Im g u \left[-\frac{A}{(1 + \cos v)^2} + \right. \\ &\quad \left. + C \left(-1 + \alpha - \frac{2\alpha}{1 + \cos v} + \frac{1}{(1 + \cos v)^2} \right) + D(-1 + \alpha) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{h^2} (A - 2B + C \cos^2 v - D \sin^2 v) \right], \\ \sigma_w &= \frac{\sin v \cos w}{h^2} \Im g u \left[\frac{A}{(1 + \cos v)^2} + C \left(-1 + \alpha - \frac{1}{(1 + \cos v)^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + D(-1 + \alpha) - \frac{1}{\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f}^2 u} \left(\frac{2A}{1 + \cos v} - 2B + \frac{2C \cos v}{1 + \cos v} \right) \right], \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{uv} &= \frac{\cos w}{h^2} \left\{ \frac{A}{1 + \cos v} + C \left[(1 - \alpha) \cos v - 2\alpha - \frac{1 + \alpha}{1 + \cos v} \right] + D(1 - \alpha) \cos v + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f}^2 u} \left[-A \frac{1 - \cos v}{1 + \cos v} + C \left(\alpha \cos v - 1 - \alpha + \frac{2}{1 + \cos v} \right) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\cos v}{h^2} (A - 2B + C \cos^2 v - D \sin^2 v) \right\}, \\ \tau_{vw} &= \frac{\mathfrak{S}in u \sin v \sin w}{h \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f}^2 u (1 + \cos v)^2} [A + C(-1 + \alpha + \alpha \cos v)], \\ \tau_{uw} &= \frac{\sin w}{h \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} u} \left[-\frac{A}{1 + \cos v} - \frac{C(1 + \alpha) \cos v}{1 + \cos v} + D(-1 + \alpha) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f}^2 u} \left(\frac{2A}{1 + \cos v} - 2B + 2C \frac{\cos v}{1 + \cos v} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

Bei Anwendung der Randbedingungen (12) entstehen zunächst sechs Gleichungen für die vier in der Lösung enthaltenen Konstanten. Sie lassen sich jedoch auf drei zurückführen, aus welchen folgen:

$$\left. \begin{aligned} A &= C[1 - \alpha - \alpha \cos v_0], & B &= \frac{C}{2} \left[\frac{1}{1 - \alpha} + 1 - \alpha + \frac{\alpha^2 - 2\alpha}{1 - \alpha} \cos v_0 \right], \\ D &= C \left[-1 - \frac{\alpha}{(1 - \alpha)(1 + \cos v_0)} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

Die Konstante C liefert das Integral (75), wobei wieder zweckmäßig $u = 0$ gesetzt wird. Führen wir hier mit

$$p = \frac{V}{\pi a^2} = \tau_n \quad (82)$$

die mittlere Schubspannung des engsten Querschnittes als Bezugswert ein, so ergibt sich mit Rücksicht auf (56)

$$C = \frac{p(1 - \alpha)(1 + \cos v_0)^2}{\alpha(1 - \cos v_0)[2 + (2 - \alpha) \cos v_0]}. \quad (83)$$

Bemerkenswert ist, daß die größte Schubspannung nicht im Schnitt $w = 0$, sondern im Schnitt $w = \pi/2$ auftritt. Wir bezeichnen sie mit τ_1 und erhalten mit Hilfe von IV, (68)

$$\tau_1 = (\tau_{uv})_{\substack{u=0 \\ v=v_0 \\ w=\frac{\pi}{2}}} = p \frac{\frac{1}{2} \frac{a}{\varrho} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{m}\right) \left(\sqrt{\frac{a}{\varrho} + 1 + 1}\right)}{\sqrt{\frac{a}{\varrho} + 1 + \frac{1}{m}}}. \quad (84)$$

Im Schnitt $w = 0$ tritt nur ein relativer Höchstwert τ_2 der Schubspannung τ_{uv} auf, welche dort der Gleichung

$$\left. \begin{aligned} (\tau_{uv})_{\substack{u=0 \\ w=0}} &= \frac{\alpha C}{(1 - \alpha)(1 + \cos v_0)} \left[\frac{1 + (1 - \alpha) \cos v_0}{\cos v} - \frac{\cos^2 v_0}{\cos^3 v} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(1 - \alpha) \cos v_0 (1 + \cos v_0)}{\cos v (1 + \cos v)} \right] \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

genügt. Zur Ermittlung der genauen Stelle dieses Höchstwertes wollen wir diesen Ausdruck zunächst dadurch etwas vereinfachen, daß wir für die Werkstoffkonstante α den Wert 1 einsetzen (entsprechend $m = 2$). Dann wird

$$(\tau_{uv})_{\substack{u=0 \\ w=0}} = p \frac{1 + \cos v_0}{(1 - \cos v_0)(2 + \cos v_0)} \cdot \frac{\cos^2 v - \cos^2 v_0}{\cos^3 v}. \quad (86)$$

Wir erkennen bei diesem Ausdruck dieselbe Abhängigkeit von der Koordinate v , die wir bereits bei dem entsprechenden ebenen Problem festgestellt hatten [vgl. IV, (94)!]; der Schubhöchstwert τ_2 liegt daher an derselben Stelle wie beim ebenen Spannungszustand:

$$\cos v = \pm \sqrt[3]{\cos v_0}, \quad y = a \sqrt{\frac{\frac{a}{\varrho} - 2}{\frac{a}{\varrho}}}. \quad (87)$$

Untersucht man den Ausdruck (85) auch für andere Werte der Konstanten α , so zeigt sich, daß der Ort von τ_2 mit genügender Genauigkeit an derselben Stelle liegt. Zur Berechnung der Größe von τ_2 gehen wir daher mit $\cos v = \sqrt{3} \cos v_0$ in (85) ein und erhalten schließlich

$$\begin{aligned} \tau_2 &= (\tau_{uv})_{\substack{u=0 \\ \cos v = \sqrt{3} \cos v_0 \\ w=0}} = \\ &= p \frac{\left(\frac{a}{\varrho} + 1\right) \left(\frac{a}{\varrho} + 2 \sqrt{\frac{a}{\varrho} + 1} + 2\right)}{3 \sqrt{3} \frac{a}{\varrho} \left(\sqrt{\frac{a}{\varrho} + 1} + \frac{1}{m}\right)} \left[1 - \frac{3 \left(1 - \frac{2}{m}\right) (\sqrt{3} - 1)}{2 \left(\frac{a}{\varrho} + \sqrt{3} \left(\frac{a}{\varrho} + 1\right) + 1\right)} \right]. \quad (88) \end{aligned}$$

Für $\alpha/\varrho \leq 2$ liegt τ_2 in der Achse ($v = 0$) und wird

$$\tau_2 = (\tau_{uv})_{\substack{u=0 \\ v=0 \\ w=0}} = p \frac{\frac{a}{\varrho} + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{m}\right) \left(\sqrt{\frac{a}{\varrho} + 1} + 1\right)}{2 \left(\frac{a}{\varrho} + \frac{1}{m}\right) \sqrt{\frac{a}{\varrho} + 1} + 1}. \quad (89)$$

Im Schnitt $w = 0$ erreicht ferner die Spannung σ_u einen beträchtlichen Höchstwert, und zwar an der Oberfläche in unmittelbarer Nähe des Kerbgrundes. Für diese Spannung erhalten wir zunächst den Ausdruck

$$(\sigma_u)_{\substack{v=v_0 \\ w=0}} = \frac{\alpha C \sin v_0}{(\alpha - 1)(1 + \cos v_0)} \frac{\Im g u}{h^2} \left[4 - \alpha - (2 - \alpha) \frac{\sin^2 v_0}{\cos^2 v_0} \right]. \quad (90)$$

Die nähere Untersuchung zeigt auch hier, daß sich mit hinreichender Genauigkeit für den Abstand der σ_1 -Stelle vom engsten Querschnitt dieselbe Formel ergibt, wie beim ebenen Spannungszustand [vgl. IV, (92)!], nämlich

$$\sin u = \pm \cos v_0, \quad x = \frac{a}{\sqrt{\frac{a}{\varrho} \left(\frac{a}{\varrho} + 1\right)}}. \quad (91)$$

Setzen wir dies in (90) ein, so ergibt sich nach kurzer Zwischenrechnung

$$\sigma_1 = (\sigma_u)_{\substack{\sin u = \cos v_0 \\ v=v_0 \\ w=0}} = p \frac{\left(\frac{a}{\varrho} + 1\right) \left(\frac{a}{\varrho} + 2 \sqrt{\frac{a}{\varrho} + 1} + 2\right) \left(\frac{a}{\varrho} + 2 + \frac{2}{m}\right)}{2 \sqrt{\frac{a}{\varrho}} \left(\sqrt{\frac{a}{\varrho} + 1} + \frac{1}{m}\right) \left(\frac{a}{\varrho} + 2\right)^{3/2}}. \quad (92)$$

An derselben Stelle erreicht auch die Ringspannung ihren Höchstwert

$$\sigma_2 = (\sigma_w)_{\substack{\sin u = \cos v_0 \\ v=v_0 \\ w=0}} = p \frac{\frac{1}{m} \sqrt{\frac{a}{\varrho}} \left(\frac{a}{\varrho} + 2 \sqrt{\frac{a}{\varrho} + 1} + 2\right) \left(\frac{a}{\varrho} + 1\right)}{2 \left(\sqrt{\frac{a}{\varrho} + 1} + \frac{1}{m}\right) \left(\frac{a}{\varrho} + 2\right)^{3/2}}. \quad (93)$$

Abb. 51 zeigt die Spannungsverteilung für $a/\varrho = 8$, $1/m = 0,3$, und zwar zunächst im Axialschnitt parallel zur Schubrichtung. Links unten sehen wir die Oberflächenspannungen, die unmittelbar neben dem Kerbgrund ihre Höchstwerte erreichen. Im engsten Querschnitt herrscht nur Schubspannung; sie erreicht unmittelbar unter der Oberfläche ihren Höchstwert. Die gestrichelte Linie entspricht dem Fall $a/\varrho = 0$. Im

Normalschnitt rechts sind die Schubspannungslinien eingezeichnet, die im wesentlichen parallel zur Schubrichtung verlaufen.

Abb. 52 zeigt für dieselbe Kerbe den Axialschnitt senkrecht zur Schubrichtung. Die Schubspannung steigt außerordentlich stark an. Im Kerbgrund, wo ihre Richtung parallel zum Rand ist, läuft sie in einer sehr starken Spitze aus. An dieser Stelle herrscht offenbar die höchste Beanspruchung. Nach dem Innern und auch längs der Oberfläche klingt die Schubspannung schnell ab.

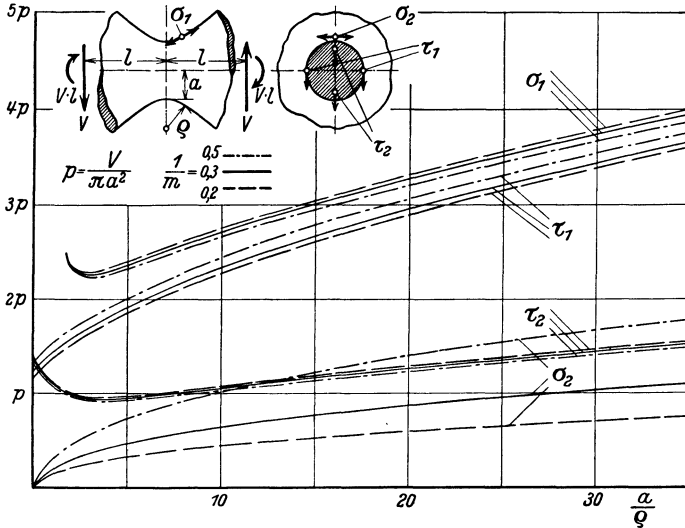


Abb. 53. Die Höchstspannungen in tiefen Umdrehungsaußenkerben bei Schub.

Im Normalschnitt rechts sind die Linien gleicher Schubspannung aufgetragen. Die Zone der höchsten Beanspruchung erstreckt sich gürtelförmig in der Umgebung der Punkte, an denen die Randtangente parallel zur Schubrichtung liegt.

Die Linien gleicher Schubspannung sowie die obenerwähnten Schubspannungslinien ergeben sich nach Ermittlung der resultierenden Schubspannung. Wir werden hierauf bei Besprechung der flachen Umdrehungsinnenkerbe noch zurückkommen und dafür unter V, 4, C ein einfaches Verfahren angeben.

Abb. 53 zeigt die Abhängigkeit der Spannungshöchstwerte vom Krümmungsmaß.

D. Reine Drillung.

Bei Drillungsbeanspruchung werden von den Integralen (14) und (15) alle zu Null bis auf jenes, welches das Drillungsmoment angibt. Wir bezeichnen das Drillungsmoment mit M statt M_x und erhalten

$$M = \int_0^{v_0} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\sigma_u}{h_u} \left(y \frac{\partial z}{\partial u} - z \frac{\partial y}{\partial u} \right) + \frac{\tau_{uv}}{h_v} \left(y \frac{\partial z}{\partial v} - z \frac{\partial y}{\partial v} \right) \right] + \frac{\tau_{uw}}{h_w} \left(y \frac{\partial z}{\partial w} - z \frac{\partial y}{\partial w} \right) h_v h_w dv dw. \quad (94)$$

In unseren Koordinaten geht dies über in

$$M = 2\pi \int_0^{v_0} \tau_{uw} h [\cos v]^2 u \sin^2 v dv. \quad (95)$$

Da für große u -Werte der Faktor e^{3u} auftritt, haben wir Spannungen zu erwarten, die dann umgekehrt proportional e^{3u} sind; dementsprechend sind folgende v -Höchstwerte einzuhalten: $v = -1$ bei Φ_0 und $v = -2$ bei Φ_1, Φ_2 und Φ_3 .

Die Lösung des Drillungsproblems bei Umdrehungskörpern ist eine bekannte Aufgabe der klassischen Elastizitätstheorie, bei welcher sich die Spannungen unabhängig von der Poissonschen ergeben¹. Aus unserem allgemein-räumlichen Gleichungssystem läßt sich dieser Sonderfall leicht herstellen, indem wir

$$\Phi_0 = 0, \quad \Phi_1 = 0 \quad (96)$$

und

$$\Phi_2 = -f(u, v) \sin w, \quad \Phi_3 = f(u, v) \cos w \quad (97)$$

setzen. Dann folgt zunächst

$$F = 0. \quad (98)$$

Die Beziehungen (3) liefern

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = \frac{\alpha}{G} f(u, v); \quad (99)$$

d. h. der Umdrehungskörper wird um seine Achse verdreht. Aus (4) und (5) folgen ferner

$$\sigma_u = 0, \quad \sigma_v = 0, \quad \sigma_w = 0. \quad (100)$$

Aus (6) ergibt sich schließlich

$$\left. \begin{aligned} \tau_{uv} &= 0, \\ \tau_{vw} &= \alpha \frac{\sin v}{h} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{f(u, v)}{\sin v} \right), \\ \tau_{uw} &= \alpha \frac{\cos v}{h} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{f(u, v)}{\cos v} \right). \end{aligned} \right\} \quad (101)$$

Zur Lösung genügt bereits die Funktion $v = -2$. Da $\cos w$ im Ansatz (97) auftritt, ist $n = 1$ zu setzen. Zur Vermeidung der Unendlichkeitsstelle wird wieder $a_{n,v} = 0$. Wir gelangen so zu folgendem Ansatz:

$$f(u, v) = A (\cos v u T - \mathfrak{L} g u) \sin v. \quad (102)$$

Diese Funktion hat uns bereits bei der Biegungsaufgabe beschäftigt. Für die Spannungen erhalten wir²

$$\tau_{vw} = 0, \quad \tau_{uw} = -2\alpha C \frac{\sin v}{h [\cos v]^2 u}. \quad (103)$$

¹ Siehe z. B. A. u. L. Föppl: Drang und Zwang, II. Bd., 2. Aufl. S. 108. München u. Berlin 1928.

² Th. Pöschl gelangte auf anderem Wege erstmalig zu diesem Ergebnis. Siehe Z. angew. Math. Mech. Bd. 2 (1922) S. 137.

Das Integral (95) liefert

$$\left. \begin{aligned} M &= -4\pi\alpha C \int_0^{v_0} \sin^3 v \, dv = -\frac{4}{3}\pi\alpha C(\cos^3 v_0 - 3\cos v_0 + 2) \\ &= -\frac{4}{3}\pi\alpha C(2 + \cos v_0)(1 - \cos v_0)^2. \end{aligned} \right\} \quad (104)$$

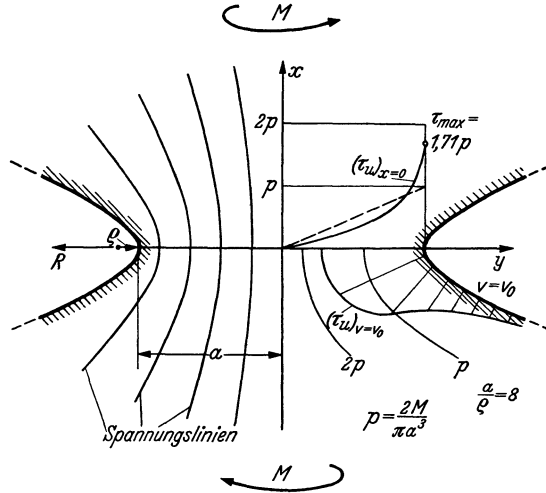


Abb. 54. Tiefe Umdrehungsaußenkerbe bei Drillung.

Wir führen die Nennspannung

$$\tau_n = \frac{2M}{\pi a^3} = p \quad (105)$$

ein und erhalten mit $a = \sin v_0$ für die Konstante C :

$$C = -\frac{3p \sin v_0 (1 + \cos v_0)}{8\alpha (2 + \cos v_0) (1 - \cos v_0)}. \quad (106)$$

Nach Einführung der Kerbkürmung ergibt sich schließlich für den im Kerbgrund auftretenden Schubhöchstwert

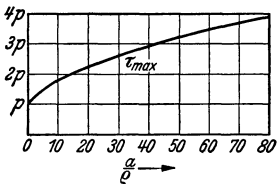


Abb. 55. Die Höchstspannung in tiefen Umdrehungsaußenkerben bei Drillung.

$$\tau_{max} = p \frac{3 \left(1 + \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} \right)^2}{4 \left(1 + 2 \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} \right)}. \quad (107)$$

Für $a/\rho = 8$ zeigt Abb. 54 rechts den Spannungsverlauf im engsten Querschnitt (oben) und längs der Kerboberfläche (unten; links sind die Spannungslinien eingezeichnet, welche in der u -Richtung verlaufen, da nur die Spannung τ_{uw} allein vorhanden ist und mithin die Rolle einer Hauptspannung spielt.

Die Abhängigkeit der Höchstspannung von der Kerbkürmung erläutert Abb. 55.

A. Reiner Zug.

Im Fall der reinen Zugbeanspruchung läßt sich der im ungekerbten Vollstab herrschende Spannungszustand mit Hilfe unseres räumlichen Verfahrens folgendermaßen beschreiben:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{(2-\alpha)p}{2(4-\alpha)} [y^2 + z^2 - 2x^2], \\ \Phi_1 &= \frac{p}{4-\alpha} x, \quad \Phi_2 = 0, \quad \Phi_3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (111)$$

Daraus ergibt sich mit III, (58) die Spannungsfunktion

$$F = \frac{p}{2(4-\alpha)} [(2-\alpha)(y^2 + z^2) + (2\alpha - 2)x^2]. \quad (112)$$

Für die Spannungen erhalten wir mit III, (68) und (69):

$$\sigma_x = p, \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0. \quad (113)$$

Der Bezugswert p stellt mithin die gleichmäßig verteilte Zugspannung des Stabes dar. Bezeichnen wir die Zugkraft mit P , so wird

$$p = \frac{P}{\pi b^2}. \quad (114)$$

Wir wollen das Problem zunächst noch nicht allgemein, sondern für einen verhältnismäßig einfachen Sonderfall lösen, und zwar für den Sonderfall der kugelförmigen Kerboberfläche. Dieser Fall ist sehr geeignet, den oben angedeuteten Rechnungsgang dem Leser anschaulich vor Augen zu führen.

Der Sonderfall $t = \varrho$.

Wir gehen mit unserem Ansatz auf Kugelkoordinaten über, indem wir von (7) Gebrauch machen, und erhalten

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{(2-\alpha)p}{2(4-\alpha)} u^2 (3 \sin^2 v - 2), \\ \Phi_1 &= \frac{p}{4-\alpha} u \cos v, \quad \Phi_2 = 0, \quad \Phi_3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (115)$$

An Hand der allgemeinen Potentialfunktion (40) stellen wir fest, das es sich um die Funktionen $\nu = 2, n = 0$ und $\nu = 1, n = 0$ mit $b_{n,\nu} = 0$ handelt. Wir müssen nun Zusatzfunktionen hinzunehmen, welche zur Erfüllung der Randbedingungen (13) geeignete Spannungen liefern. Diese Eigenschaft haben jene Funktionen, welche von v und w in derselben Weise, von u jedoch in anderer Weise abhängen. Sie ergeben sich, wenn wir ν mit $-\nu - 1$ vertauschen, also $\nu = -3$ statt 2 bei Φ_0 und $\nu = -2$ statt 1 bei Φ_1 , ferner $a_{n,\nu}$ statt $b_{n,\nu}$ gleich Null setzen. Außerdem ist zu beachten, daß auch die Funktion $\nu = -1, n = 0$ bei Φ_0 zu geeigneten Spannungen führt. Mit diesen Funktionen gelingt bereits die Lösung. Der Ansatz lautet:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \left[\frac{(2-\alpha)p}{2(4-\alpha)} u^2 + \frac{B}{u^3} \right] (3 \sin^2 v - 2) + \frac{A}{u}, \\ \Phi_1 &= \left[\frac{p}{4-\alpha} u + \frac{C}{u^2} \right] \cos v, \quad \Phi_2 = 0, \quad \Phi_3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (116)$$

Die Spannungsfunktion wird

$$F = \left[\frac{(4 - 3\alpha)p}{2(4 - \alpha)} u^2 + \frac{3B}{u^3} - \frac{C}{u} \right] \sin^2 v + \frac{(\alpha - 1)p}{4 - \alpha} u^2 - \frac{2B}{u^3} + \frac{A}{u} + \frac{C}{u}. \quad (117)$$

Hieraus bilden wir gemäß (10) den Ausdruck für ΔF ; im Anschluß daran stellen wir die Normalspannungen auf und erhalten

$$\left. \begin{aligned} \sigma_u &= \left[-p - \frac{36B}{u^5} + \frac{(8 + \alpha)C}{u^3} \right] \sin^2 v + \\ &\quad + p + \frac{24B}{u^5} - \frac{2A}{u^3} + \frac{(-6 - 2\alpha)C}{u^3}, \\ \sigma_v &= \left[p + \frac{21B}{u^5} + \frac{(1 - \alpha)C}{u^3} \right] \sin^2 v + -\frac{12B}{u^5} + \frac{A}{u^3} + \frac{(-1 + 2\alpha)C}{u^3}, \\ \sigma_w &= \left[\frac{15B}{u^5} + \frac{(3 - 3\alpha)C}{u^3} \right] \sin^2 v + -\frac{12B}{u^5} + \frac{A}{u^3} + \frac{(-1 + 2\alpha)C}{u^3}. \end{aligned} \right\} \quad (118)$$

Die Schubspannungen folgen aus (11):

$$\left. \begin{aligned} \tau_{uv} &= \left[-p + \frac{24B}{u^5} + \frac{(-4 + \alpha)C}{u^3} \right] \sin v \cos v, \\ \tau_{vw} &= 0, \quad \tau_{uw} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (119)$$

Die Randbedingungen (13) liefern für die drei noch unbekanntten Konstanten gerade drei Gleichungen, aus welchen sich folgende Werte ergeben (der Einfachheit halber ist hierbei $u_0 = 1$ gesetzt!):

$$A = \frac{(-2 - 5\alpha)p}{2(4 + 5\alpha)}, \quad B = \frac{p}{4 + 5\alpha}, \quad C = \frac{5p}{4 + 5\alpha}. \quad (120)$$

Für die im Kerbgrund auftretende Höchstspannung erhalten wir den Wert

$$\sigma_1 = (\sigma_v)_{u=1} = \frac{3(8 + 5\alpha)}{2(4 + 5\alpha)} p = \frac{3\left(9 - \frac{5}{m}\right)}{2\left(7 - \frac{5}{m}\right)} p \left(= 2,04p \text{ für } \frac{1}{m} = 0,3 \right). \quad (121)$$

An derselben Stelle erreicht auch die Ringspannung ihren Höchstwert mit

$$\sigma_2 = (\sigma_w)_{u=1} = \frac{3(8 - 5\alpha)}{2(4 + 5\alpha)} p = \frac{3\left(-1 + \frac{5}{m}\right)}{2\left(7 - \frac{5}{m}\right)} p \left(= 0,14p \text{ für } \frac{1}{m} = 0,3 \right). \quad (122)$$

Das Ergebnis stimmt überein mit einer bereits im Jahre 1908 von A. Leon¹ auf einem anderen Wege durchgeführten Rechnung. Es war damals Leon gelungen, für diesen noch achssymmetrischen Belastungsfall die Lösung durch stufenweises Befriedigen der einzelnen Elastizitätsgleichungen zu finden.

¹ Leon, A.: Störungen der Spannungsverteilung. Wien 1908.

Der allgemeine Fall.

Im allgemeinen Fall der beliebig gekrümmten Kerboberfläche läßt sich nun die Lösung unmittelbar mit Hilfe der analogen Funktionen in Ellipsoidkoordinaten aufstellen, d. h. es kommen dieselben n - und ν -Werte zur Anwendung, nur ist jetzt Gleichung (38) für die einzelnen Potentialfunktionen maßgebend. Wir erhalten mithin den Ansatz

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \left\{ \frac{(2-\alpha)p}{2(4-\alpha)} \left(\mathfrak{C}\mathfrak{O}^2 u - \frac{2}{3} \right) + B[(3\mathfrak{C}\mathfrak{O}^2 u - 2)T - 3\mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}u] \right\} \times \\ &\quad \times (3\sin^2 v - 2) + AT, \\ \Phi_1 &= \left\{ \frac{p}{4-\alpha} \mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}u + C[\mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}uT - 1] \right\} \cos v, \quad \Phi_2 = 0, \quad \Phi_3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (123)$$

Hieraus geht folgende Spannungsfunktion hervor:

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{p}{2(4-\alpha)} [(4-3\alpha)\mathfrak{C}\mathfrak{O}^2 u - 2 + 2\alpha] \sin^2 v + \\ &\quad + \frac{p}{4-\alpha} \left[(\alpha-1)\mathfrak{C}\mathfrak{O}^2 u + \frac{1-2\alpha}{3} \right] + AT + \\ &\quad + B[(3\mathfrak{C}\mathfrak{O}^2 u - 2)T - 3\mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}u](3\sin^2 v - 2) + \\ &\quad + C[\mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}^2 uT - \mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}u] \cos^2 v. \end{aligned} \right\} \quad (124)$$

Wieder bilden wir zuerst das für die Aufstellung der Normalspannungen benötigte Glied ΔF , sowie die bei σ_u , σ_ν und τ_{uv} auftretenden Glieder mit $1/h^4$. Dabei finden wir im Anschluß an (4), (5) und (6)

$$\left. \begin{aligned} \Delta F &= \frac{1}{h^2} \left\{ \frac{2p}{4-\alpha} \mathfrak{C}\mathfrak{O}^2 u + 2C[\mathfrak{C}\mathfrak{O}^2 uT - \mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}u] \right\} + \frac{\sin^2 v}{h^2} \left\{ -\frac{2p}{4-\alpha} - 2CT \right\}, \\ &\quad \frac{1}{h^4} \left[\mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}u \mathfrak{C}\mathfrak{O}^2 u \frac{\partial F}{\partial u} + \sin v \cos v \frac{\partial F}{\partial v} \right] = \\ &= \frac{1}{h^2} \left\{ \frac{2\alpha-2}{4-\alpha} p \mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}^2 u + B[-12\mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}^2 uT + 12\mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}u] + \right. \\ &\quad + C[2\mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}^2 uT - \mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}u] \left. \right\} + \frac{\sin^2 v}{h^2} \left\{ \frac{4-3\alpha}{4-\alpha} p \mathfrak{C}\mathfrak{O}^2 u + \frac{2\alpha-2}{4-\alpha} p + \right. \\ &\quad + B[(18\mathfrak{C}\mathfrak{O}^2 u - 12)T - 18\mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}u] + 2C[-\mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}^2 uT + \mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}u] \left. \right\} + \\ &\quad + \frac{\mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}u}{h^4} \{-A - 4B - C\mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}^2 u\}, \\ \frac{1}{h^4} \left[\mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}u \mathfrak{C}\mathfrak{O}^2 u \frac{\partial F}{\partial v} - \sin v \cos v \frac{\partial F}{\partial u} \right] &= \frac{\sin v \cos v}{h^2} \left\{ \frac{4-3\alpha}{4-\alpha} p \mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}u \mathfrak{C}\mathfrak{O}^2 u + \right. \\ &\quad + B \left[18\mathfrak{C}\mathfrak{O}^2 u (\mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}uT - 1) + \frac{6}{\mathfrak{C}\mathfrak{O}^2 u} \right] + \\ &\quad + C \left[-2\mathfrak{C}\mathfrak{O}^2 u (\mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}uT - 1) - \frac{1}{\mathfrak{C}\mathfrak{O}^2 u} \right] \left. \right\} + \frac{\sin v \cos v}{h^4 \mathfrak{C}\mathfrak{O}^2 u} \{A + 4B + C\mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}^2 u\}. \end{aligned} \right\} \quad (125)$$

Mit Verwendung dieser Beziehungen erhalten wir für die Normalspannungen:

$$\begin{aligned}
\sigma_u &= \frac{1}{h^2} \left\{ p \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u - A \frac{\mathfrak{S} \sin u}{\mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u} + B \left[12 \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u T - 12 \mathfrak{S} \sin u - 4 \frac{\mathfrak{S} \sin u}{\mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u} \right] + \right. \\
&\quad \left. + C \left[\alpha \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u T + (1 - \alpha) \mathfrak{S} \sin u + \frac{\mathfrak{S} \sin u}{\mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u} \right] \right\} + \\
&\quad + \frac{\sin^2 v}{h^2} \left\{ -p \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u + B \left[(-18 \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u + 6) T + 18 \mathfrak{S} \sin u + 6 \frac{\mathfrak{S} \sin u}{\mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u} \right] + \right. \\
&\quad \left. + C \left[(2 - 2\alpha) (\mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u T - \mathfrak{S} \sin u) + (-2 + \alpha) T - \frac{\mathfrak{S} \sin u}{\mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u} \right] \right\} + \\
&\quad + \frac{\mathfrak{S} \sin u}{h^4} \{ -A - 4B - C \mathfrak{S} \sin^2 u \}, \\
\sigma_v &= \frac{1}{h^2} \{ B[-6 \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u T + 6 \mathfrak{S} \sin u] + \\
&\quad + C[(2 - \alpha) \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u T + (-3 + \alpha) \mathfrak{S} \sin u] \} + \\
&\quad + \frac{\sin^2 v}{h^2} \{ p \mathfrak{S} \sin^2 u + B[(18 \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u - 12) T - 18 \mathfrak{S} \sin u] + \\
&\quad + C[(-2 + 2\alpha) \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u T - \alpha T + (2 - 2\alpha) \mathfrak{S} \sin u] \} + \\
&\quad + \frac{\mathfrak{S} \sin u}{h^4} \{ A + 4B + C \mathfrak{S} \sin^2 u \}, \\
\sigma_w &= \frac{1}{h^2} \left\{ A \frac{\mathfrak{S} \sin u}{\mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u} + B \left[-6 \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u T + 6 \mathfrak{S} \sin u + 4 \frac{\mathfrak{S} \sin u}{\mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u} \right] + \right. \\
&\quad \left. + C \left[(2 - \alpha) (\mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u T - \mathfrak{S} \sin u) - \frac{\mathfrak{S} \sin u}{\mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sin^2 v}{h^2} \left\{ B \left[6T - 6 \frac{\mathfrak{S} \sin u}{\mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u} \right] + C \left[(-2 + \alpha) T + \frac{\mathfrak{S} \sin u}{\mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u} \right] \right\} \right\}.
\end{aligned} \tag{126}$$

Die Schubspannungen werden mit Hilfe der Beziehungen (6) berechnet:

$$\begin{aligned}
\tau_{uv} &= \frac{\sin v \cos v}{h^2} \left\{ -p \mathfrak{S} \sin u \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u + B \left[-18 \mathfrak{S} \sin u \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u T + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 18 \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u - \frac{6}{\mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u} \right] + C \left[(2 - 2\alpha) \mathfrak{S} \sin u \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u T + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (-2 + 2\alpha) \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u + \frac{1 - \alpha}{\mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u} \right] \right\} + \\
&\quad + \frac{\sin v \cos v}{h^4 \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u} \{ A + 4B + C \mathfrak{S} \sin^2 u \}, \\
\tau_{vw} &= 0, \quad \tau_{uw} = 0.
\end{aligned} \tag{127}$$

Wir haben nun die in der Lösung enthaltenen Konstanten so zu bestimmen, daß die Randbedingungen (13) befriedigt sind. Zur Abkürzung sei

$$\mathfrak{C} \mathfrak{O}^4 u_0 \mathfrak{S} \sin u_0 (T)_{u=u_0} - \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u_0 \mathfrak{S} \sin^2 u_0 = g \tag{128}$$

gesetzt. Ferner wollen wir die Kerbtiefe einführen:

$$(y)_{u=u_0} = \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u_0 = t. \tag{129}$$

$$v = \frac{\pi}{2}$$

$$w = 0$$

Bei Verwendung dieser Bezeichnungen ergeben sich zunächst bei $(\sigma_u)_{u=u_0}$ durch Nullsetzen der Faktoren der drei für sich von v abhängigen

Bestandteile die folgenden Bedingungsgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} p t^2 + \frac{1}{\sin u_0} \left\{ A \left[-1 + \frac{1}{t^2} \right] + B \left[12 \frac{g}{t^2} - 4 + \frac{4}{t^2} \right] + \right. \\ \left. + C \left[\alpha \frac{g}{t^2} + t^2 - \frac{1}{t^2} \right] \right\} = 0, \\ -p t^2 + \frac{1}{\sin u_0} \left\{ B \left[-18 \frac{g}{t^2} + 6 \frac{g}{t^4} + 12 - \frac{12}{t^2} \right] + \right. \\ \left. + C \left[(2 - 2\alpha) \frac{g}{t^2} + (-2 + \alpha) \frac{g}{t^4} - 3 + \alpha + \frac{3 - \alpha}{t^2} \right] \right\} = 0, \\ -A - 4B + C[-t^2 + 1] = 0. \end{aligned} \right\} (130)$$

Die Auflösung dieser Gleichungen ergibt für die Konstanten folgende Werte:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{p \sin u_0 t^4}{N_1} [-6gt^2 + (4\alpha - 2)g + 4t^4 - 4\alpha t^2], \\ B &= \frac{p \sin u_0 t^4}{N_1} [(2 - \alpha)g + 2t^4 + (-3 + \alpha)t^2], \\ C &= \frac{p \sin u_0 t^4}{N_1} [6g - 12t^2]; \end{aligned} \right\} (131)$$

hierin ist $N_1 = 6[(-4 + \alpha)g^2 - 6gt^4 + 8gt^2 + 4t^6 - 4t^4]$.

Setzt man diese Werte in (127) ein, so erkennt man, daß auch die Schubspannung der Randbedingung genügt. Es sind damit alle Bedingungen erfüllt, und wir können dazu übergehen, die Spannungshöchstwerte zu berechnen.

Die absolut höchste Spannung tritt, wie zu erwarten war, im Kerbgrund in Zugrichtung auf. Führen wir mit

$$\left. \begin{aligned} \frac{t}{\rho} = \cot^2 u_0, \quad \cos u_0 = \sqrt{\frac{\frac{t}{\rho}}{\frac{t}{\rho} - 1}}, \quad \sin u_0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{t}{\rho} - 1}} \end{aligned} \right\} (132)$$

die Kerbkrümmung an Stelle des Parameters u_0 ein, so berechnet sich die Höchstspannung zu

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= (\sigma_v)_{u=u_0} = \\ &= \frac{p}{N} \left\{ 2 \left(\frac{t}{\rho} \right)^2 - \left(1,5 - \frac{1}{m} \right) \frac{t}{\rho} + 1 - \frac{1}{m} + \left[- \left(1,5 + \frac{1}{m} \right) \frac{t}{\rho} + \frac{1}{m} \right] \frac{t}{\rho} c \right\}, \end{aligned} \right\} (133)$$

wobei

$$c = \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{t}{\rho} - 1}}{\sqrt{\frac{t}{\rho} - 1}}, \quad \text{wenn } \frac{t}{\rho} > 1,$$

bzw.

$$c = \frac{\ln \left(1 + \sqrt{1 - \frac{t}{\rho}} \right) - \frac{1}{2} \ln \frac{t}{\rho}}{\sqrt{1 - \frac{t}{\rho}}}, \quad \text{wenn } \frac{t}{\rho} < 1,$$

$$\text{und } N = \frac{t}{\rho} + 1 - \frac{1}{m} + \left(\frac{t}{\rho} - 2 + \frac{2}{m} \right) \frac{t}{\rho} c - \left(1 + \frac{1}{m} \right) \left(\frac{t}{\rho} \right)^2 c^2 \quad (135)$$

bedeutet. Die senkrecht zur Zugrichtung wirkende Ringspannung erreicht gleichfalls im Kerbgrund ihr Maximum mit

$$\left. \begin{aligned} \sigma_2 &= (\sigma_w)_{u=u_0} = \\ & \quad v = \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{p}{N} \frac{t}{\rho} \left\{ \frac{2}{m} \frac{t}{\rho} + 1,5 - \frac{2}{m} + \left[- \left(0,5 + \frac{2}{m} \right) \frac{t}{\rho} - 1 + \frac{2}{m} \right] c \right\}. \end{aligned} \right\} (136)$$

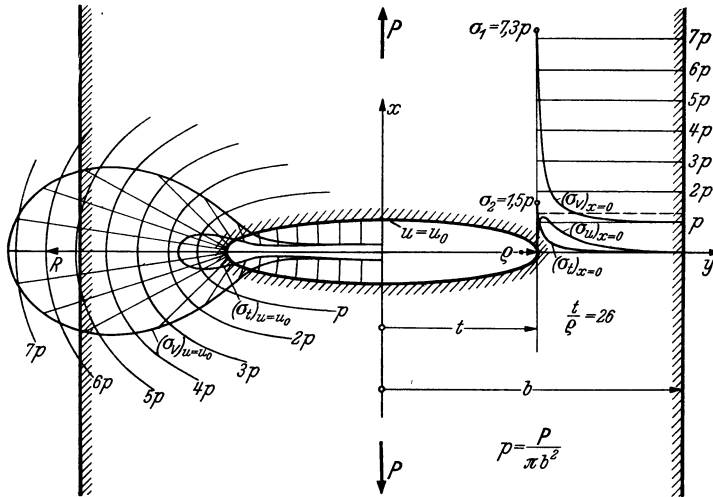


Abb. 57. Umdrehungsinnenkerbe bei Zug.

Der Sonderfall $t/\rho = 1$ läßt sich auch hieraus durch Grenzübergang mittels Reihenentwicklung ableiten, wobei sich Übereinstimmung mit (121) und (122) ergibt.

Abb. 57 erläutert den Spannungsverlauf für $t/\rho = 26$, und zwar im engsten Querschnitt (rechts) und längs des Randes vom Kerbgrund nach allen Seiten hin sehr stark ab, im wesentlichen umgekehrt proportional der dritten Potenz der Entfernung vom Kerbgrund. In einem Achsabstande gleich der doppelten Kerbtiefe herrscht bereits angenähert derselbe Spannungszustand wie im ungekerbten Stab, so daß der äußere Rand beispielsweise schon hier angenommen werden kann, wie in der Abbildung gezeichnet. Die beiden Spannungsspitzen sind in Abb. 58 über der Kerbkürmung aufgetragen.

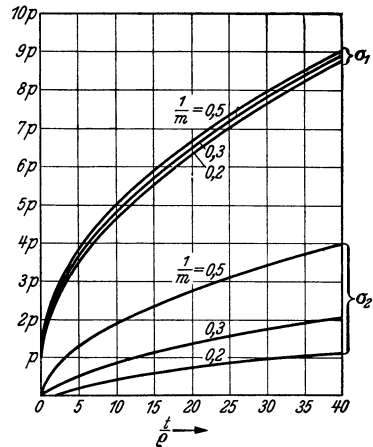


Abb. 58. Die Höchstspannungen in flachen Umdrehungsinnenkerben bei Zug.

B. Reine Biegung.

Die Lösung für reine Biegung enthält zunächst die elementare Biegung des Vollzylinders, die sich mit Hilfe des räumlichen Verfahrens in folgender Form ableiten läßt:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{(-1 + \alpha)(2 - \alpha)p}{2\alpha(4 - \alpha)t} y(y^2 + z^2 - 4x^2), & \Phi_1 &= \frac{(-4 + 4\alpha)p}{2\alpha(4 - \alpha)t} xy, \\ \Phi_2 &= \frac{(2 - \alpha)p}{2\alpha(4 - \alpha)t} (y^2 + z^2 - 2x^2), & \Phi_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (137)$$

Entsprechend III, (58) ergibt sich hieraus

$$F = \frac{p}{(4 - \alpha)t} \left[\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)(y^3 + yz^2) + (-3 + 2\alpha)x^2y \right]. \quad (138)$$

Die Spannungen folgen aus III, (68) und (69):

$$\sigma_x = p \frac{y}{t}, \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} - \tau_{zx} = 0. \quad (139)$$

Der Bezugswert p stellt mithin die elementare Biegungsspannung des Vollzylinders im Abstand $y = t$ dar. Es wird

$$p = \frac{4Mt}{\pi b^4}. \quad (140)$$

Um über den Aufbau der Funktionen, welche die Störspannungen liefern, Anhaltspunkte zu gewinnen, sei auch hier als Voraufgabe der Sonderfall der kugelförmigen Kerboberfläche behandelt.

Der Sonderfall $t = \rho$.

Zur Vereinfachung setzen wir die Kerbtiefe [vgl. (7)!]

$$t = (y)_{u=u_0} = u_0 = 1. \quad (141)$$

$$\begin{aligned} v &= \frac{\pi}{2} \\ w &= 0 \end{aligned}$$

Wir übertragen nun unseren Ansatz (137) auf das System (7) der Kugelkoordinaten. Durch Vergleich mit der allgemeinen Potentialfunktion (40) in Kugelkoordinaten erkennen wir, daß es sich bei den im Ansatz enthaltenen Funktionen um die Fälle $\nu = 3, n = 1$ bei Φ_0 , $\nu = 2, n = 1$ bei Φ_1 und $\nu = 2, n = 0$ bei Φ_2 , sämtlich mit $b_{n,\nu} = 0$, handelt. Die Zusatzfunktionen müssen zu Spannungen führen, mit deren Hilfe die Randbedingungen (13) befriedigt werden können. Dies leisten jene Funktionen, die in derselben Weise von v und w abhängen, während bei den von u abhängenden Bestandteilen ν mit $-\nu - 1$ vertauscht ist. Die Lösung gelingt, wenn außerdem noch die verwandte Funktion $\nu = -2, n = 1$ bei Φ_0 hinzugenommen wird. Der Ansatz ist daher:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \left[\frac{(-1 + \alpha)(2 - \alpha)p}{2\alpha(4 - \alpha)} u^3 + \frac{B}{u^4} \right] (5 \sin^3 v - 4 \sin v) \cos w + \frac{A}{u^2} \sin v \cos w, \\ \Phi_1 &= \left[\frac{(-4 + 4\alpha)p}{2\alpha(4 - \alpha)} u^2 + \frac{C}{u^3} \right] \sin v \cos v \cos w, \\ \Phi_2 &= \left[\frac{(2 - \alpha)p}{2\alpha(4 - \alpha)} u^2 + \frac{D}{u^3} \right] (3 \sin^2 v - 2) & \Phi_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (142)$$

Mit Hilfe der Beziehungen (7) bis (11) leiten wir hieraus ab:

Die Spannungsfunktion

$$F = \left. \begin{aligned} & \left[\frac{p}{4-\alpha} \left(4 - \frac{5}{2} \alpha \right) w^3 + \frac{5B}{u^4} - \frac{C}{u^2} + \frac{3D}{u^2} \right] \sin^3 v \cos w + \\ & + \left[\frac{p}{4-\alpha} (-3 + 2\alpha) w^3 + \frac{A}{u^2} - \frac{4B}{u^4} + \frac{C}{u^2} - \frac{2D}{u^2} \right] \sin v \cos w, \end{aligned} \right\} (143)$$

die Normalspannungen

$$\left. \begin{aligned} \sigma_u &= \left[-pu - \frac{100B}{u^6} + \frac{16+\alpha}{u^4} C - \frac{48+3\alpha}{u^4} D \right] \sin^3 v \cos w + \\ & + \left[pu - \frac{6A}{u^4} + \frac{80B}{u^6} - \frac{14+2\alpha}{u^4} C + \frac{36D}{u^4} \right] \sin v \cos w, \\ \sigma_v &= \left[pu + \frac{65B}{u^6} - \frac{1+\alpha}{u^4} C + \frac{3+3\alpha}{u^4} D \right] \sin^3 v \cos w + \\ & + \left[\frac{3A}{u^4} - \frac{50B}{u^6} + \frac{1+2\alpha}{u^4} C \right] \sin v \cos w, \\ \sigma_w &= \left[\frac{35B}{u^6} + \frac{5-5\alpha}{u^4} C + \frac{-15+15\alpha}{u^4} D \right] \sin^3 v \cos w + \\ & + \left[\frac{3A}{u^4} - \frac{30B}{u^6} + \frac{-3+4\alpha}{u^4} C + \frac{12-12\alpha}{u^4} D \right] \sin v \cos w, \end{aligned} \right\} (144)$$

die Schubspannungen

$$\left. \begin{aligned} \tau_{uv} &= \left[-pu + \frac{75B}{u^6} + \frac{-9+\alpha}{u^4} C + \frac{27-3\alpha}{u^4} D \right] \sin^2 v \cos v \cos w + \\ & + \left[\frac{3A}{u^4} - \frac{20B}{u^6} + \frac{3+\alpha}{u^4} C + \frac{-6+6\alpha}{u^4} D \right] \cos v \cos w, \\ \tau_{vw} &= \left[\frac{10B}{u^6} + \frac{-2+\alpha}{u^4} C + \frac{6-6\alpha}{u^4} D \right] \sin v \cos v \sin w, \\ \tau_{uw} &= \left[-\frac{25B}{u^6} + \frac{3+\alpha}{u^4} C + \frac{-9+9\alpha}{u^4} D \right] \sin^2 v \sin w + \\ & + \left[-\frac{3A}{u^4} + \frac{20B}{u^6} - \frac{3+\alpha}{u^4} C + \frac{6-6\alpha}{u^4} D \right] \sin w. \end{aligned} \right\} (145)$$

Die Randbedingungen (13) führen zunächst zu sechs Bedingungengleichungen für die noch unbekanntenen Konstanten. Zwei dieser Gleichungen sind miteinander identisch und eine weitere kann als Folge der übrigen angesehen werden, so daß gerade vier Gleichungen für vier Unbekannte zur Verfügung stehen. Die Auflösung ergibt mit $u_0 = 1$:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{-4 - 9\alpha - 7\alpha^2}{12\alpha(12 + 7\alpha)} p, & B &= \frac{p}{12 + 7\alpha}, \\ C &= \frac{12 + 63\alpha}{12\alpha(12 + 7\alpha)} p, & D &= \frac{4 - 7\alpha}{12\alpha(12 + 7\alpha)} p. \end{aligned} \right\} (146)$$

Die größte Biegungsspannung tritt, wie zu erwarten war, im Kerbgrund auf. Als Formel finden wir

$$\sigma_1 = (\sigma_v)_{u=u_0} = \frac{5 \left(17 - \frac{7}{m}\right)}{4 \left(13 - \frac{7}{m}\right)} p \left(= 1,71 p \quad \text{für} \quad \frac{1}{m} = 0,3 \right). \quad (147)$$

$v = \frac{\pi}{2}$
 $w = 0$

An derselben Stelle erreicht die Ringspannung mit

$$\sigma_2 = (\sigma_w)_{u=u_0} = \frac{5 \left(-1 + \frac{7}{m}\right)}{4 \left(13 - \frac{7}{m}\right)} p \left(= 0,13 p \quad \text{für} \quad \frac{1}{m} = 0,3 \right) \quad (148)$$

$v = \frac{\pi}{2}$
 $w = 0$

ihren Höchstwert.

Der allgemeine Fall.

Im allgemeinen Fall der beliebig gekrümmten Kerboberfläche zeigt die Rechnung, daß — wie bei Zugbeanspruchung — lediglich die analogen Funktionen in Ellipsoidkoordinaten herangezogen zu werden brauchen. Wir verwenden also dieselben n - und v -Werte, müssen aber jetzt von der allgemeinen Potentialfunktion (38) ausgehen. Da wir die mit (1) festgelegten Ellipsoidkoordinaten verwenden, wird die Kerbtiefe

$$t = (y)_{u=u_0} = \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} u_0. \quad (149)$$

$v = \frac{\pi}{2}$
 $w = 0$

Zur Abkürzung sei

$$\frac{p}{t} = p' \quad (150)$$

gesetzt. Dann wird

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \left\{ \frac{(-1+\alpha)(2-\alpha)p'}{2\alpha(4-\alpha)} \left(\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f}^3 u - \frac{4}{5} \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} u \right) + B \left[(5 \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f}^3 u - 4 \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} u) T - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 5 \mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n} u \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} u + \frac{2}{3} \mathfrak{I}\mathfrak{g} u \right] \right\} (5 \sin^3 v - 4 \sin v) \cos w + \\ &\quad + A (\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} u T - \mathfrak{I}\mathfrak{g} u) \sin v \cos w, \\ \Phi_1 &= \left[\frac{(-4+4\alpha)p'}{2\alpha(4-\alpha)} \mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n} u \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} u + \right. \\ &\quad \left. + C \left(\mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n} u \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} u T - \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} u + \frac{1}{3} \mathfrak{I}\mathfrak{g} u \right) \right] \sin v \cos v \cos w, \\ \Phi_2 &= \left[\frac{(2-\alpha)p'}{2\alpha(4-\alpha)} \left(\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f}^2 u - \frac{2}{3} \right) + \right. \\ &\quad \left. + D [(3 \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f}^2 u - 2) T - 3 \mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n} u] \cdot (3 \sin^2 v - 2) \right], \quad \Phi_3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (151)$$

Die Spannungsfunktion nimmt dementsprechend die Form

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{p'}{4-\alpha} \left\{ \left[\left(4 - \frac{5\alpha}{2} \right) \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f}^3 u + (-3 + 2\alpha) \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} u \right] \sin^3 v + \right. \\ &\quad \left. + \left[(-3 + 2\alpha) \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f}^3 u + \frac{2 + 32\alpha - 24\alpha^2}{15\alpha} \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} u \right] \sin v \right\} \cos w + \\ &\quad + A [\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} u T - \mathfrak{I}\mathfrak{g} u] \sin v \cos w + B [(5 \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f}^3 u - 4 \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} u) T - \\ &\quad \quad - 5 \mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n} u \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} u + \frac{2}{3} \mathfrak{I}\mathfrak{g} u] (5 \sin^3 v - 4 \sin v) \cos w + \\ &\quad + C [(\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f}^3 u - \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} u) T - \mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n} u \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} u + \frac{1}{3} \mathfrak{I}\mathfrak{g} u] \sin v \cos^2 v \cos w + \\ &\quad + D [(3 \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f}^3 u - 2 \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} u) T - 3 \mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n} u \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} u] (3 \sin^3 v - 2 \sin v) \cos w \end{aligned} \right\} \quad (152)$$

an. Wir bilden hieraus mittels der Beziehungen (4) und (5) die Normalspannungen; dabei läßt sich verschiedentlich durch h^2 kürzen. Wir finden:

$$\begin{aligned}
 \sigma_u = & \frac{p'}{h^2} \mathfrak{C}\mathfrak{O}^3 u \sin v \cos^2 w \cos w + 2A \frac{\sin v \cos w}{h^2} \left(-\frac{\mathfrak{S}in u}{\mathfrak{C}\mathfrak{O}^3 u} - \frac{\mathfrak{I}g u}{h^2} \right) + \\
 & + \frac{10B}{h^2} \sin^3 v \cos w \left[(-15 \mathfrak{C}\mathfrak{O}^3 u + 11 \mathfrak{C}\mathfrak{O} u) T + \right. \\
 & + 15 \mathfrak{S}in u \mathfrak{C}\mathfrak{O} u - \mathfrak{I}g u + \frac{2 \mathfrak{S}in u}{3 \mathfrak{C}\mathfrak{O}^3 u} \left. \right] + \\
 & + \frac{10B}{h^2} \sin v \cos w \left[(12 \mathfrak{C}\mathfrak{O}^3 u - 8 \mathfrak{C}\mathfrak{O} u) T - \right. \\
 & - 12 \mathfrak{S}in u \mathfrak{C}\mathfrak{O} u - \frac{8 \mathfrak{S}in u}{15 \mathfrak{C}\mathfrak{O}^3 u} - \frac{8 \mathfrak{I}g u}{15 h^2} \left. \right] + \\
 & + \frac{C}{h^2} \sin^3 v \cos w \left\{ [(6 - 4\alpha) \mathfrak{C}\mathfrak{O}^3 u + (-6 + 3\alpha) \mathfrak{C}\mathfrak{O} u] T + \right. \\
 & + (-6 + 4\alpha) \mathfrak{S}in u \mathfrak{C}\mathfrak{O} u + \left(2 - \frac{\alpha}{3} \right) \mathfrak{I}g u - \frac{2 \mathfrak{S}in u}{3 \mathfrak{C}\mathfrak{O}^3 u} \left. \right\} + \\
 & + \frac{C}{h^2} \sin v \cos w \left\{ [(-4 + 3\alpha) \mathfrak{C}\mathfrak{O}^3 u + (4 - 2\alpha) \mathfrak{C}\mathfrak{O} u] T + \right. \\
 & + (4 - 3\alpha) \mathfrak{S}in u \mathfrak{C}\mathfrak{O} u - \frac{2}{3} \mathfrak{I}g u + \frac{2 \mathfrak{S}in u}{3 \mathfrak{C}\mathfrak{O}^3 u} - \frac{2 \mathfrak{S}in^2 u}{3 h^2 \mathfrak{C}\mathfrak{O} u} \left. \right\} + \\
 & + \frac{6D}{h^2} \sin^3 v \cos w \left\{ [(-9 + 6\alpha) \mathfrak{C}\mathfrak{O}^3 u + (5 - 5\alpha) \mathfrak{C}\mathfrak{O} u] T + \right. \\
 & + (9 - 6\alpha) \mathfrak{S}in u \mathfrak{C}\mathfrak{O} u + (1 + \alpha) \mathfrak{I}g u \left. \right\} + \\
 & + \frac{6D}{h^2} \sin v \cos w \left\{ [(8 - 5\alpha) \mathfrak{C}\mathfrak{O}^3 u + (-4 + 4\alpha) \mathfrak{C}\mathfrak{O} u] T + \right. \\
 & + (-8 + 5\alpha) \mathfrak{S}in u \mathfrak{C}\mathfrak{O} u + \left(-\frac{2}{3} - \frac{2\alpha}{3} \right) \mathfrak{I}g u - \frac{2 \mathfrak{S}in u \mathfrak{C}\mathfrak{O} u}{3 h^2} \left. \right\}, \\
 \sigma_v = & \frac{p'}{h^2} \mathfrak{S}in^2 u \mathfrak{C}\mathfrak{O} u \sin^3 v \cos w + 2A \frac{\sin v \cos w}{h^4} \mathfrak{I}g u + \\
 & + \frac{10B}{h^2} \sin^3 v \cos w [(15 \mathfrak{C}\mathfrak{O}^3 u - 12 \mathfrak{C}\mathfrak{O} u) T - 15 \mathfrak{S}in u \mathfrak{C}\mathfrak{O} u + 2 \mathfrak{I}g u] + \\
 & + \frac{10B}{h^2} \sin v \cos w \left[(-11 \mathfrak{C}\mathfrak{O}^3 u + 8 \mathfrak{C}\mathfrak{O} u) T + 11 \mathfrak{S}in u \mathfrak{C}\mathfrak{O} u - \right. \\
 & - \frac{2}{3} \mathfrak{I}g u + \frac{8 \mathfrak{I}g u}{15 h^2} \left. \right] + \frac{C}{h^2} \sin^3 v \cos w \left\{ [(-6 + 4\alpha) \mathfrak{C}\mathfrak{O}^3 u + \right. \\
 & + (4 - 3\alpha) \mathfrak{C}\mathfrak{O} u] T + (6 - 4\alpha) \mathfrak{S}in u \mathfrak{C}\mathfrak{O} u + \frac{\alpha}{3} \mathfrak{I}g u \left. \right\} + \\
 & + \frac{C}{h^2} \sin v \cos w \left\{ [(6 - 3\alpha) \mathfrak{C}\mathfrak{O}^3 u + (-4 + 2\alpha) \mathfrak{C}\mathfrak{O} u] T + \right. \\
 & + (-6 + 3\alpha) \mathfrak{S}in u \mathfrak{C}\mathfrak{O} u - \frac{2}{3} \mathfrak{I}g u + \frac{2 \mathfrak{S}in^2 u}{3 h^2 \mathfrak{C}\mathfrak{O} u} \left. \right\} + \\
 & + \frac{6D}{h^2} \sin^3 v \cos w \left\{ [(9 - 6\alpha) \mathfrak{C}\mathfrak{O}^3 u + (-8 + 5\alpha) \mathfrak{C}\mathfrak{O} u] T + \right. \\
 & + (-9 + 6\alpha) \mathfrak{S}in u \mathfrak{C}\mathfrak{O} u + (2 - \alpha) \mathfrak{I}g u \left. \right\} + \\
 & + \frac{6D}{h^2} \sin v \cos w \left\{ [(-5 + 5\alpha) \mathfrak{C}\mathfrak{O}^3 u + (4 - 4\alpha) \mathfrak{C}\mathfrak{O} u] T + \right. \\
 & + (5 - 5\alpha) \mathfrak{S}in u \mathfrak{C}\mathfrak{O} u + \left(-\frac{4}{3} + \frac{2\alpha}{3} \right) \mathfrak{I}g u + \frac{2 \mathfrak{S}in u \mathfrak{C}\mathfrak{O} u}{3 h^2} \left. \right\},
 \end{aligned} \tag{153}$$

$$\sigma_w = 2A \frac{\sin v \cos w \mathfrak{S} \sin u}{h^2 \mathfrak{C} \mathfrak{O}^3 u} + 10B \sin v \cos w \left(-\mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u T + \mathfrak{I} g u + \right. \\ \left. + \frac{2 \mathfrak{S} \sin u}{3 \mathfrak{C} \mathfrak{O}^3 u} + \frac{8 \mathfrak{S} \sin u}{15 h^2 \mathfrak{C} \mathfrak{O}^3 u} \right) + C \sin v \cos w \left[(2 - \alpha) (\mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u T - \mathfrak{I} g u) - \right. \\ \left. - \frac{2 \mathfrak{S} \sin u}{3 \mathfrak{C} \mathfrak{O}^3 u} + \left(-\frac{2}{3} + \frac{2\alpha}{3} \right) \frac{\mathfrak{I} g u}{h^2} - \frac{2 \mathfrak{S} \sin u}{3 h^2 \mathfrak{C} \mathfrak{O}^3 u} \right] + \\ \left. + 6D \sin v \cos w \left[(1 - \alpha) (\mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u T - \mathfrak{I} g u - \frac{2 \mathfrak{I} g u}{3 h^2}) \right]. \right.$$

Die Schubspannungen erhalten wir auf Grund der Beziehungen (6), wobei ebenfalls durch h^2 zu kürzen ist:

$$\tau_{uv} = -\frac{p'}{h^2} \mathfrak{S} \sin u \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u \sin^2 v \cos v \cos w + 2A \frac{\cos v \cos w}{h^4} + \\ + \frac{10B}{h^2} \sin^2 v \cos v \cos w \left[(-15 \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u + 4) \mathfrak{S} \sin u T + \right. \\ \left. + 15 \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u - 9 - \frac{2}{3 \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u} \right] + \\ + \frac{10B}{h^2} \cos v \cos w \left(4 \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u \mathfrak{S} \sin u T - 4 \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u + \frac{4}{3} + \frac{8}{15 h^2} \right) + \\ + \frac{C}{h^2} \sin^2 v \cos v \cos w \left\{ [(6 - 4\alpha) \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u - 2 + \alpha] \mathfrak{S} \sin u T + \right. \\ \left. + (-6 + 4\alpha) \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u + 4 - \frac{7\alpha}{3} + \frac{2 - \alpha}{3 \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u} \right\} + \\ + \frac{C}{h^2} \cos v \cos w \left[(-2 + \alpha) \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u \mathfrak{S} \sin u T + (2 - \alpha) \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u - \frac{4}{3} + \right. \\ \left. + \frac{\alpha}{3} + \frac{2 \mathfrak{S} \sin^2 u}{3 h^2} \right] + \frac{6D}{h^2} \sin^2 v \cos v \cos w \left\{ [(-9 + 6\alpha) \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u + \right. \\ \left. + 2 - 2\alpha] \mathfrak{S} \sin u T + (9 - 6\alpha) \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u - 5 + 4\alpha \right\} + \\ + \frac{6D}{h^2} \cos v \cos w \left[(2 - 2\alpha) \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u \mathfrak{S} \sin u T + \right. \\ \left. + (-2 + 2\alpha) \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u - \frac{2\alpha}{3} + \frac{2 \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u}{3 h^2} \right], \quad (154)$$

$$\tau_{vw} = \frac{10B}{h} \left[(5 \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u - 4) T - 5 \mathfrak{S} \sin u + \frac{2 \mathfrak{S} \sin u}{3 \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u} \right] \sin v \cos v \sin w + \\ + \frac{C}{h} \sin v \cos v \sin w (2 - \alpha) \left(-\mathfrak{S} \sin^2 u T + \mathfrak{S} \sin u - \frac{2 \mathfrak{S} \sin u}{3 \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u} \right) + \\ + \frac{6D}{h} \sin v \cos v \sin w \left\{ [(3 - 3\alpha) \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u - 2 + 2\alpha] T + \right. \\ \left. + (-3 + 3\alpha) \mathfrak{S} \sin u \right\},$$

$$\tau_{uw} = -\frac{2A \sin w}{h \mathfrak{C} \mathfrak{O}^3 u} + \frac{10B}{h} \sin w \left(\mathfrak{S} \sin u \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u T - \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u + \right. \\ \left. + \frac{1}{3 \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u} + \frac{2}{15 \mathfrak{C} \mathfrak{O}^3 u} \right) (5 \sin^2 v - 4) + \\ + \frac{C}{h} \sin w \left[(2 - \alpha) \left(\mathfrak{S} \sin u \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u T - \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u + \frac{1}{3 \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u} \right) + \right. \\ \left. + \frac{2}{3 \mathfrak{C} \mathfrak{O}^3 u} \right] \cos^2 v + \frac{6D}{h} \sin w (1 - \alpha) \left(\mathfrak{S} \sin u \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u T - \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u + \right. \\ \left. + \frac{1}{3 \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u} \right) (3 \sin^2 v - 2).$$

Bei Anwendung der Randbedingungen ergeben sich acht Gleichungen (bei σ_u sind die Koeffizienten der Glieder mit $\frac{\sin^3 v \cos w}{h^2}$, $\frac{\sin v \cos w}{h^2}$ und $\frac{\sin v \cos w}{h^4}$ Null zu setzen; bei τ_{uv} sind es die Koeffizienten der Glieder mit $\frac{\sin^2 v \cos v \cos w}{h^2}$, $\frac{\cos v \cos w}{h^2}$ und $\frac{\cos v \cos w}{h^4}$; bei τ_{uw} handelt es sich um die Koeffizienten der Glieder mit $\frac{\sin^2 v \sin w}{h}$ und $\frac{\sin w}{h}$). Zwei dieser Gleichungen sind jedoch miteinander identisch; ferner lassen sich drei als Folgen der übrigen erklären, derart, daß nur insgesamt vier Gleichungen erfüllt zu sein brauchen, um die Randbedingungen sicherzustellen. Die noch unbekanntten Konstanten sind also gerade eindeutig bestimmt. Mit den Abkürzungen

$$3 \mathfrak{C} \mathfrak{O}^4 u_0 [\mathfrak{S} \sin u_0 (T)_{u=u_0} - 1] + \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u_0 = g, \quad \mathfrak{C} \mathfrak{O} u_0 = t \quad (155)$$

und

$$g \left\{ \begin{aligned} &g[g(4 - \alpha) + 20 \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u_0 - 16 - 4\alpha] - 32 \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u_0 + 16 - 4\alpha \} - \\ &- 16 \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u_0 = N \end{aligned} \right. \quad (156)$$

ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} A &= -\frac{8}{3} B + \frac{1-t^2}{3} C - 2t^2 D, \\ 10B &= \frac{3pt^3 \mathfrak{S} \sin u_0}{\alpha N_1} \{g[g(1-\alpha)(2-\alpha) + (10-8\alpha)t^2 - 4 + 4\alpha] + 4t^2\}, \\ C &= \frac{3pt^3 \mathfrak{S} \sin u_0}{\alpha N_1} \{g[g(2-2\alpha) + 10t^2 - 4 + 4\alpha] + 4t^2\}, \\ 6D &= \frac{3pt^3 \mathfrak{S} \sin u_0}{\alpha N_1} \{g[g(-2+\alpha) - 10t^2 + 4 + 2\alpha] - 4t^2\}. \end{aligned} \right\} \quad (157)$$

Die größte Biegungsspannung (im Kerbgrund) wird

$$\sigma_1 = (\sigma_u)_{u=u_0} = \frac{p}{N} \{g[g(10t^2 - 2\alpha) - 36t^2 + 16 - 4\alpha] - 16t^2\}. \quad (158)$$

$v = \frac{\pi}{2}$
 $w = 0$

Die Ringspannung erreicht (ebenfalls im Kerbgrund) ihren Höchstwert mit

$$\sigma_2 = (\sigma_w)_{u=u_0} = \frac{p}{N} g[g(10t^2 + 8 - 8\alpha) + 4t^2]. \quad (159)$$

$v = \frac{\pi}{2}$
 $w = 0$

Beachten wir die Beziehungen (132), so liefern obige Gleichungen die Höchstspannungen auch als Funktionen von t/ϱ . Dabei wird

$$g = \frac{\frac{t}{\varrho}}{\left(\frac{t}{\varrho} - 1\right)^2} \left[3 \frac{t}{\varrho} c - 2 \frac{t}{\varrho} - 1 \right], \quad (160)$$

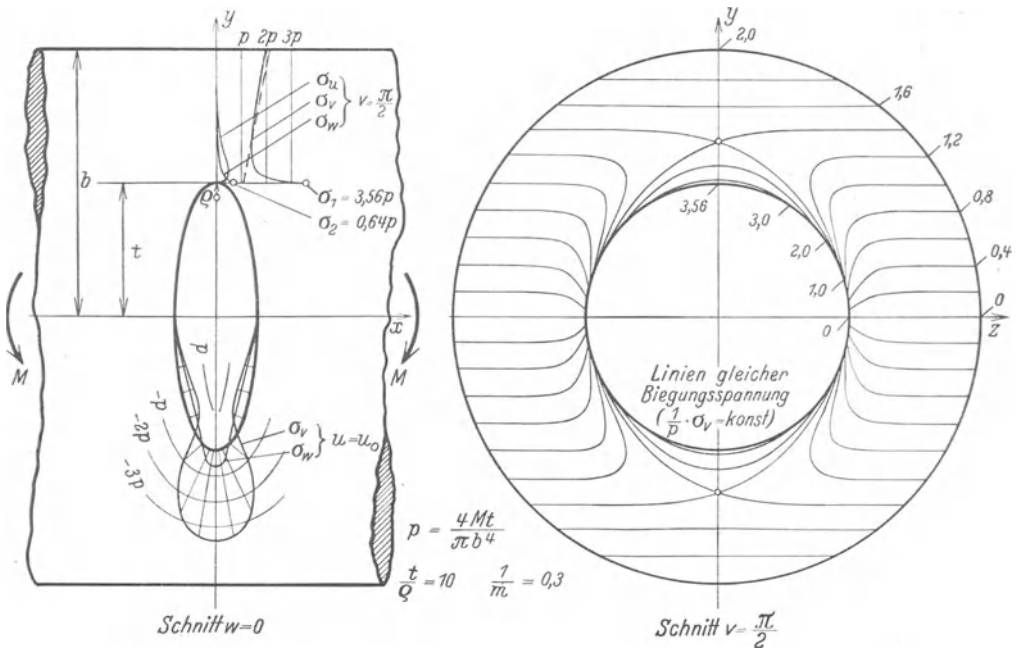


Abb. 59. Umdrehungsinnenkerbe bei Biegung.

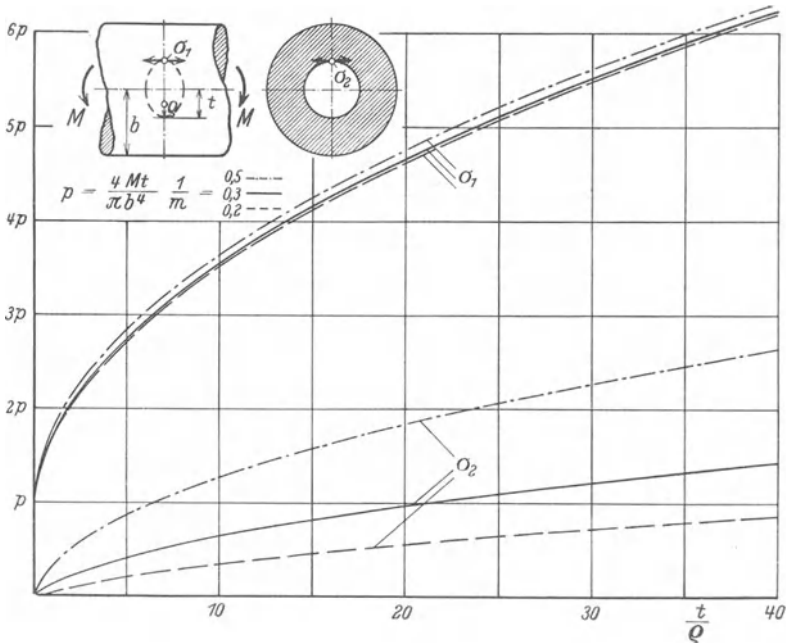


Abb. 60. Die Höchstspannungen in flachen Umdrehungsinnenkerben bei Biegung.

wobei sich der Wert c aus der Beziehung (134) errechnet. Entwickeln wir die sich ergebenden Ausdrücke nach steigenden Potenzen von $\frac{t}{\varrho} - 1$, so läßt sich durch Grenzübertragung $\frac{t}{\varrho} \rightarrow 1$ die Übereinstimmung mit (147) und (148) nachweisen (in V, 4, D ist eine derartige Rechnung durchgeführt).

Die Spannungsverteilung für eine Innenkerbe mit $\frac{t}{\varrho} = 10$, $\frac{1}{m} = 0,3$ ist in Abb. 59 dargestellt. Dieses Beispiel ist nicht nur durch die starke Ausbildung der Spannungsspitze, sondern vor allem dadurch bemerkenswert, daß deutlich vor Augen geführt ist, wie die Spannung in einem gebogenen Stab infolge der inneren Kerbwirkung innen größer als außen werden kann. Aus den rechts gezeichneten Linien gleicher Biegungsspannung ist ferner sehr deutlich zu erkennen, wie sich nach außen hin das Geradliniengesetz einstellt. In einem Abstände von der x -Achse gleich der zweifachen Kerbtiefe ist der Einfluß der Innenkerbe auf die Verteilung der Spannungen bereits kaum noch bemerklich, der Stab verhält sich dort praktisch wie ein Vollzylinder. Das für die Gültigkeit der Theorie der flachen Innenkerbe maßgebende Verhältnis t/b , das — mathematisch gesehen — eigentlich verschwindend klein sein müßte, braucht also praktisch gar nicht so sehr klein zu sein, um die vorliegende Lösung als ausreichend genau gelten zu lassen.

Abb. 60 gibt die Höchstspannungen in ihrer Abhängigkeit von der Kerbkrümmung und der Poissonschen Konstanten wieder.

C. Reiner Schub.

Bei der Behandlung des Schubproblems der flachen Umdrehungsinnenkerbe sind dieselben allgemeinen Gesichtspunkte maßgebend wie beim Biegungsproblem. Wir gehen aus von der Lösung für den im Schnitt $x = 0$ auf reinen Schub beanspruchten Vollzylinder, welche auf Grund des räumlichen Verfahrens folgende Form annimmt:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= -pxy + \frac{(\alpha - 1)(5 - 2\alpha)p}{\alpha(5 - \alpha)b^2} xy \left(y^2 + z^2 - \frac{4}{3}x^2 \right), \\ \Phi_1 &= \frac{(1 - \alpha)p}{\alpha(5 - \alpha)b^2} y(y^2 + z^2 - 4x^2), \\ \Phi_2 &= \frac{(4 - 2\alpha)p}{\alpha(5 - \alpha)b^2} x \left(y^2 + z^2 - \frac{2}{3}x^2 \right), \quad \Phi_3 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (161)$$

$$F = -pxy + \frac{pxy}{(5 - \alpha)b^2} \left[(4 - 2\alpha)(y^2 + z^2) + 4 \left(\frac{2\alpha}{3} - 1 \right) x^2 \right], \quad (162)$$

$$\sigma_x = \frac{4(4 - \alpha)p}{(5 - \alpha)b^2} xy, \quad \sigma_y = \sigma_z = 0, \quad (163)$$

$$\tau_{xy} = p \left(1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{(\alpha - 1)z^2}{(5 - \alpha)b^2} \right), \quad \tau_{yz} = 0, \quad \tau_{zx} = \frac{(-6 + 2\alpha)p}{(5 - \alpha)b^2} yz. \quad (164)$$

Man überzeugt sich leicht, daß am äußeren Rand die Bedingung (110) erfüllt ist. Aus (164) geht hervor, daß der Bezugswert p die Schub-

spannung in der Achse des Vollzylinders ist. Bezeichnen wir die im Stab übertragene Schub- oder Querkraft mit V , so finden wir auf Grund des Integrals (16)

$$V = P_y = \iint_F \tau_{xy} dy dz = p \iint_F \left[1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{(\alpha - 1) z^2}{(5 - \alpha) b^2} \right] dy dz. \quad (165)$$

Die Integrale $\iint_F y^2 dy dz$ und $\iint_F z^2 dy dz$ sind bekanntlich gleich dem äquatorialen Trägheitsmoment $\frac{\pi b^4}{4}$, das Integral $\iint_F dy dz$ gleich dem Flächeninhalt des Querschnittes zu setzen, so daß sich ergibt

$$p = \frac{5 - \alpha}{4 - \alpha} \frac{V}{\pi b^2} = \frac{3m + 2}{2m + 2} \frac{V}{\pi b^2}. \quad (166)$$

Der weitere Rechnungsgang besteht wieder darin, diesen Lösungsansatz auf das Koordinatensystem der Kerbe zu übertragen, und zwar beim Sonderfall $t = \varrho$ der kugelförmigen Kerboberfläche auf Kugelkoordinaten, beim allgemeinen Fall auf Ellipsoidkoordinaten.

Der Sonderfall $t = \varrho$.

Beim Übergang auf das Koordinatensystem (7) ergeben sich, wie zu erwarten war, Funktionen, welche ohne weiteres mit bestimmten n - und ν -Werten als Teile der allgemeinen Potentialfunktion (40) gedeutet werden können. Bei der Ermittlung der Störspannungen wollen wir die Glieder mit dem Faktor $1/b^2$, welche im Rahmen der Theorie der flachen Kerbe für die Formzahl am Ende der Rechnung doch vernachlässigt werden müßten, von vornherein unberücksichtigt lassen. Es handelt sich demnach nur noch darum, dem Spannungszustand $\tau_{xy} = p$ Zusatzspannungen zu überlagern, mit deren Hilfe die Randbedingungen (13) erfüllt werden können. Die mit $1/b^2$ behafteten Bestandteile, welche also bei der nun folgenden Rechnung unerwähnt bleiben, müssen natürlich bei der Beschreibung des gesamten Zustandes wieder berücksichtigt werden.

Die allein verbleibende Funktion

$$\Phi_0 = -pxy = -pu^2 \sin \nu \cos \nu \cos w \quad (167)$$

identifizieren wir als den Fall $n = 1, \nu = 2$. Als Zusatzfunktion kommt zunächst $n = 1, \nu = -3$ bei Φ_0 in Frage. Diese Funktion genügt jedoch noch nicht, und wir müssen noch $n = 1, \nu = -2$ bei Φ_1 und $n = 0, \nu = -2$ bei Φ_2 hinzunehmen, welche bei den Spannungen zu ähnlichen Bestandteilen in v und w führen. Dann erhalten wir den Ansatz

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \left[-pu^2 + \frac{A}{u^3} \right] \sin \nu \cos \nu \cos w, & \Phi_1 &= \frac{B}{u^2} \sin \nu \cos w, \\ \Phi_2 &= \frac{C}{u^2} \cos \nu, & \Phi_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (168)$$

Die Spannungsfunktion wird

$$F = \left[-p u^2 + \frac{A}{u^3} + \frac{B+C}{u} \right] \sin v \cos v \cos w. \quad (169)$$

Die Normalspannungen werden auf Grund der Beziehungen (10) erhalten:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_u &= \left[2p - \frac{12A}{u^5} - \frac{8+\alpha}{u^3} (B+C) \right] \sin v \cos v \cos w, \\ \sigma_v &= \left[-2p + \frac{7A}{u^5} + \frac{\alpha-1}{u^3} (B+C) \right] \sin v \cos v \cos w, \\ \sigma_w &= \left[\frac{5A}{u^5} + \frac{3\alpha-3}{u^3} (B+C) \right] \sin v \cos v \cos w. \end{aligned} \right\} \quad (170)$$

Entsprechend (11) leiten wir schließlich folgende Schubspannungen ab:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{uv} &= \left[p + \frac{4A}{u^5} + \frac{4-\alpha}{2u^3} (B+C) \right] \cos 2v \cos w + \frac{3\alpha}{2u^3} (B-C) \cos w, \\ \tau_{vw} &= \left[p - \frac{A}{u^5} + \frac{\alpha-1}{u^3} (B+C) \right] \sin v \sin w, \\ \tau_{uw} &= \left[-p - \frac{4A}{u^5} - \frac{2+\alpha}{u^3} B + \frac{2\alpha-2}{u^3} C \right] \cos v \sin w. \end{aligned} \right\} \quad (171)$$

Die Konstanten sind durch die Randbedingungen gerade eindeutig bestimmt und nehmen die folgenden Werte an, wobei der Einfachheit halber $u_0 = t = 1$ gesetzt ist:

$$A = -\frac{6}{5} C, \quad B = C, \quad C = \frac{5p}{4+5\alpha}. \quad (172)$$

Die größte Schubspannung tritt an der Stelle des Kerbgrundes auf, wo die Randtangente parallel zur Schubrichtung liegt, und wird

$$\tau_1 = (\tau_{vw})_{u=u_0} = \frac{15 \left(1 - \frac{1}{m}\right)}{7 - \frac{5}{m}} p \quad \left(= 1,91 p \quad \text{für} \quad \frac{1}{m} = 0,3 \right). \quad (173)$$

$v = w = \frac{\pi}{2}$

Längs der y -Achse erreicht die Schubspannung einen relativen Höchstwert; dort wird

$$-(\tau_{uv})_{v=\frac{\pi}{2}} = p + \frac{p}{4+5\alpha} \left[-\frac{24}{u^5} + \frac{5(4-\alpha)}{u^3} \right]. \quad (174)$$

$w = 0$

Durch Nullsetzen des nach u differenzierten Ausdruckes ergibt sich für die Stelle des Höchstwertes

$$u = \frac{y}{t} = \frac{2}{\sqrt{2 - \frac{\alpha}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{m}}}. \quad (175)$$

Durch Einsetzen dieses Wertes in (175) erhalten wir für den relativen Höchstwert den Ausdruck

$$\tau_2 = (\tau_{uv})_{\max} = p \left[1 + \frac{\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{\frac{5}{2}}}{4 \left(7 - \frac{5}{m}\right)} \right] \quad \left(= 1,09 p \quad \text{für} \quad \frac{1}{m} = 0,3 \right). \quad (176)$$

Die in der Oberfläche wirkende Normalspannung σ_v erreicht bei $v = -\frac{\pi}{4}$, $w = 0$ ($u = u_0 = 1$) mit

$$\sigma_1 = \frac{15}{7 - \frac{5}{m}} p \quad \left(= 2,73p \text{ für } \frac{1}{m} = 0,3 \right) \quad (177)$$

ihren Höchstwert. An derselben Stelle wirkt zugleich die Ringspannung σ_w mit ihrem Höchstwert

$$\sigma_2 = \frac{\frac{15}{m}}{7 - \frac{5}{m}} p \quad \left(= 0,82p \text{ für } \frac{1}{m} = 0,3 \right). \quad (178)$$

Der allgemeine Fall.

Zur Behandlung der beliebig gekrümmten Kerbe suchen wir die verwandten Funktionen in Ellipsoidkoordinaten auf und gelangen auf Grund von (38) unter Beibehaltung derselben n - und ν -Werte zu dem Ansatz

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \left[-p \mathfrak{S} \sin u \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} u + \right. \\ &\quad \left. + A \left(\mathfrak{S} \sin u \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} u T - \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} u + \frac{1}{3 \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} u} \right) \right] \sin v \cos v \cos w, \\ \Phi_1 &= B [\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} u T - \mathfrak{I} \mathfrak{g} u] \sin v \cos w, \\ \Phi_2 &= C [\mathfrak{S} \sin u T - 1] \cos v, \quad \Phi_3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (179)$$

Die mit dem Faktor $1/b^2$ behafteten Glieder sind dabei von vornherein weggelassen. Die Spannungsfunktion wird

$$F = \left[-p \mathfrak{S} \sin u \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} u + (A + B + C) \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} u (\mathfrak{S} \sin u T - 1) + \right. \\ \left. + \left(\frac{A}{3} + B \right) \frac{1}{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} u} \right] \sin v \cos v \cos w. \quad (180)$$

Aus den Verschiebungen erhalten wir mit (4) und (5) die Normalspannungen. Dabei ist wiederholt eine Kürzung durch h^2 möglich:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_u &= \frac{1}{h^2} \left\{ p \mathfrak{S} \sin 2u - [A + (1 - \alpha)(B + C)] (\mathfrak{S} \sin 2u T - 2 \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} u) + \right. \\ &\quad \left. + \left[-\frac{2A}{3} - 4B + (1 + \alpha)C \right] \frac{1}{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} u} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{2A}{3} + 2B \right) \frac{1}{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f}^3 u} \right\} \sin v \cos v \cos w + \frac{1}{h^4} \left[(-2B + C) \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} u + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{2A}{3} + 2B \right) \frac{1}{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} u} \right] \sin v \cos v \cos w, \\ \sigma_v &= \frac{1}{h^2} \left\{ -p \mathfrak{S} \sin 2u + [A + (1 - \alpha)(B + C)] (\mathfrak{S} \sin 2u T - 2 \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} u) + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{2A}{3} - 2B + (2 - \alpha)C \right] \frac{1}{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} u} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{h^2} \left[(2B - C) \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} u - \left(\frac{2A}{3} + 2B \right) \frac{1}{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} u} \right] \right\} \sin v \cos v \cos w, \\ \sigma_w &= \frac{1}{h^2} \left[(-2B + C) \frac{1 - \alpha}{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} u} - \left(\frac{2A}{3} + 2B \right) \frac{1}{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f}^3 u} \right] \sin v \cos v \cos w. \end{aligned} \right\} \quad (181)$$

Auch bei den Schubspannungen, die sich aus (6) ergeben, können wir durch h^2 kürzen, und finden:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{uv} &= \frac{\cos w}{h^2} \left\{ p \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u + [A + (1 - \alpha)(B + C)](-\mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u T + \mathfrak{S} \text{in } u) + \right. \\ &\quad + (2B - C) \mathfrak{S} \text{in } u \left. \right\} + \frac{\cos w \sin^2 v}{h^2} \left\{ -p \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 2u + \right. \\ &\quad + [A + (1 - \alpha)(B + C)] \cdot (\mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 2u T - 2 \mathfrak{S} \text{in } u) + \left[-\frac{A}{3} + \right. \\ &\quad \left. + (\alpha - 1)B \right] \frac{\mathfrak{S} \text{in } u}{\mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u} \left. \right\} + \mathfrak{S} \text{in } u \frac{\cos w}{h^4} \left[(-2B + C) \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u + \frac{2}{3} A + 2B \right], \\ \tau_{vw} &= \frac{1}{h} \left\{ p \mathfrak{S} \text{in } u + [A + (1 - \alpha)(B + C)](-\mathfrak{S} \text{in } u T + 1) + \right. \\ &\quad \left. + \left[-\frac{A}{3} + (\alpha - 1)B \right] \frac{1}{\mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u} \right\} \sin v \sin w, \\ \tau_{uw} &= \frac{1}{h} \left\{ -p \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u + [A + (1 - \alpha)(B + C)](\mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u T - \mathfrak{I} \mathfrak{g} u) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{2A}{3} + 2B \right) \frac{\mathfrak{S} \text{in } u}{\mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u} \right\} \cos v \cos w. \end{aligned} \right\} \quad (182)$$

Die Randbedingungen führen zunächst auf sechs Bedingungsgleichungen für die in der Lösung vorkommenden Konstanten; denn es müssen bei σ_u der Faktor des Gliedes mit $\frac{\sin v \cos v \cos w}{h^2}$ und des Gliedes mit $\frac{\sin v \cos v \cos w}{h^4}$ für $u = u_0$ gleich Null gesetzt werden, bei τ_{uv} der Faktor des Gliedes mit $\frac{\cos w}{h^2}$, mit $\frac{\sin^2 v \cos w}{h^2}$ und des Gliedes mit $\frac{\cos w}{h^4}$ Null gesetzt werden; bei τ_{uw} handelt es sich schließlich noch um den Faktor von $\frac{\cos v \cos w}{h}$. Zwei dieser Faktoren sind einander gleich, außerdem lassen sich zwei Bedingungsgleichungen als Folgen der übrigen erklären, so daß nur insgesamt drei Gleichungen zu erfüllen sind. Aus der Auflösung ergeben sich für die Konstanten folgende Werte:

$$\left. \begin{aligned} A &= 3 \left(\frac{1}{2} - \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u_0 \right) C, & B &= -\frac{C}{2}, \\ C &= \frac{p \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u_0}{\left(3 \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u_0 - 2 + \frac{\alpha}{2} \right) [-\mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u_0 \text{arcctg}(\mathfrak{S} \text{in } u_0) + \mathfrak{S} \text{in } u_0] + 2 \mathfrak{S} \text{in } u_0}. \end{aligned} \right\} \quad (183)$$

Bei der Berechnung der Spannungshöchstwerte führen wir zweckmäßig wieder mit (132) das Krümmungsmaß als Parameter ein. Zur Abkürzung sei außerdem

$$N = -\frac{p \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 u_0}{C} = \left(\frac{t}{\varrho} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \left[\left(2 - \frac{1}{m} \right) \frac{t}{\varrho} + 1 + \frac{1}{m} \right] \left[\frac{t}{\varrho} c - 1 \right] - 2 \frac{t}{\varrho} + 2 \right\} \quad (184)$$

eingeführt. Für c gilt wieder (134).

Für die größte Schubspannung ergibt sich

$$\tau_1 = (\tau_{vw})_{u=u_0} = \frac{p}{N} 2 \left(1 - \frac{1}{m} \right) \sqrt{\frac{t}{\varrho} - 1}. \quad (185)$$

$v = w = \frac{\pi}{2}$

Der im Schnitt $w = 0, v = \pi/2$ auftretende Schubhöchstwert liegt genügend genau an der Stelle $\sin u = \sqrt{3} \sin u_0$ oder $y = \frac{t}{\cos u_0} \sqrt{1 + 3 \sin^2 u_0} = t \sqrt{1 + \frac{2}{t/e}}$ und wird

$$\tau_2 = p + \frac{p \frac{t}{e}}{N \left(\frac{t}{e} - 1\right)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \left[\left(2 - \frac{1}{m}\right) \frac{t}{e} + 1 + \frac{1}{m} \right] \left[\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\arctg \sqrt{\frac{1}{3} \left(\frac{t}{e} - 1\right)}}{\sqrt{\frac{t}{e} - 1}} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\left(\frac{t}{e} - 1\right) \left[\left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{m}\right) \frac{t}{e} - \frac{1}{3} - \frac{1}{m} \right]}{\sqrt{3} \left(\frac{t}{e} + 2\right)} \right\}. \quad (186)$$

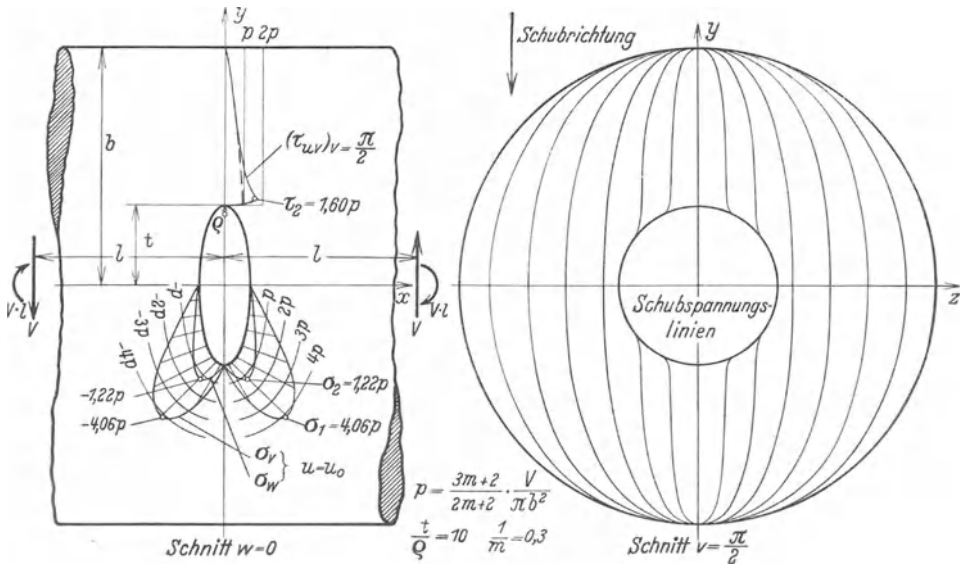


Abb. 61. Umdrehungsinnenkerbe bei Schub; links Axialschnitt in Schubrichtung mit Spannungsverlauf, rechts Normalschnitt mit Schubspannungslinien.

Die Spannung σ_u erreicht an der Oberfläche für $w = 0, \cos v = \frac{\sin u_0}{\sqrt{\cos^2 2u_0}}$ bzw. $x = \frac{t \sin^2 u_0}{\cos u_0 \sqrt{\cos^2 2u_0}} = \frac{e}{\sqrt{1 + \frac{1}{t/e}}}$ ihren Höchstwert mit

$$\sigma_1 = \frac{p}{N} 2 \sqrt{\frac{t}{e} - 1}. \quad (187)$$

Der an derselben Stelle liegende Höchstwert der Ringspannung wird

$$\sigma_2 = \frac{p}{N} \frac{2}{m} \sqrt{\frac{t}{e} - 1}. \quad (188)$$

Für $t/\rho = 1$ läßt sich durch Reihenentwicklung die Übereinstimmung mit (177) und (178) nachweisen (τ_2 stimmt nur für $m = 3$ über-

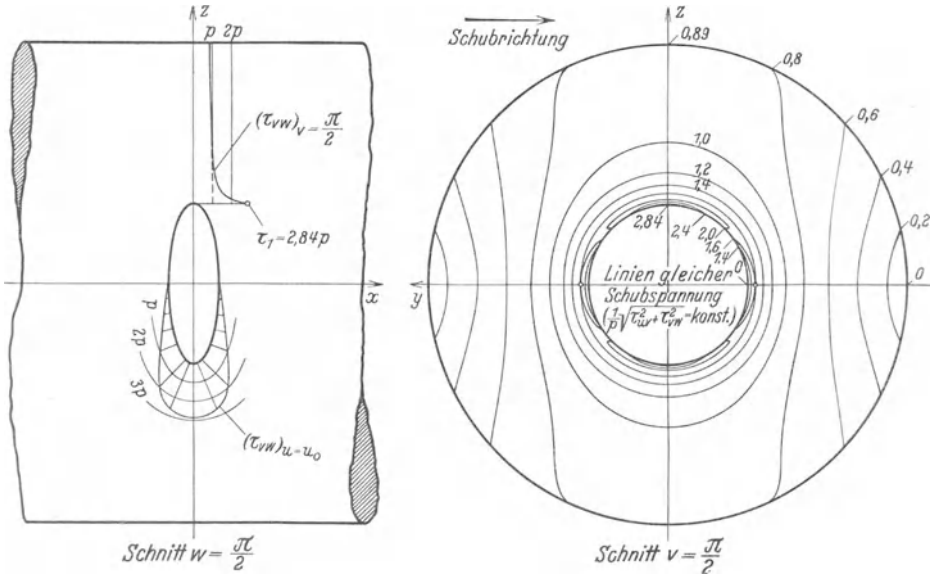


Abb. 62. Umdrehungsinnenkerbe bei Schub (Fortsetzung von Abb. 61); links Axialschnitt senkrecht zur Schubrichtung mit Spannungsverlauf, rechts Normalschnitt mit Linien gleicher Schubspannung.

ein; die Abweichung für andere Werte von m erklärt sich durch die nur angenäherte Bestimmung des Ortes).

Abb. 61 und 62 zeigen die Spannungsverteilung für $t/\rho = 10$, $1/m = 0,3$. Die typischen Erscheinungen sind im wesentlichen dieselben wie bei der Außenkerbe. In Abb. 61 links (Axialschnitt in Schubrichtung) ist sehr deutlich zu erkennen, wie die Spannungen σ_v , σ_w und τ_{uv} dicht neben dem Kerbgrund ihre Höchstwerte annehmen, im Kerbgrund selbst jedoch zu Null werden. Abb. 62 gibt links die Schubverteilung im Schnitt senkrecht zur Schubrichtung wieder, welche den vom Zug- und Biegeproblem her bekannten Verlauf einer Spannung zeigt, die ohne Vorhandensein der Kerbe gleichmäßig verlaufen würde, aber durch die Kerbe sehr stark gestört wird und zum Rand hin in starker Spitze ausläuft. An diesen Stellen, wo also die Randtangente in Schubrichtung liegt, herrscht die höchste Beanspruchung.

Auf den rechten Seiten beider Abbildungen ist der Schubfluß über den ganzen Querschnitt nach Größe und Richtung ausgewertet. Die

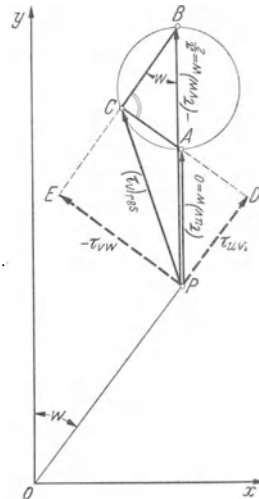


Abb. 63. Ermittlung der resultierenden Schubspannung.

für den Schubfluß maßgebende resultierende Schubspannung $(\tau_v)_{res}$ läßt sich in folgender einfacher Weise aus den Komponenten τ_{uv} und τ_{vw} , die unsere Rechnung liefert, ableiten. Wie aus (182) hervorgeht, können wir

$$\tau_{uv} = (\tau_{uv})_{w=0} \cos w, \quad \tau_{vw} = (\tau_{vw})_{w=\frac{\pi}{2}} \sin w \quad (189).$$

setzen. Die Werte von $(\tau_{uv})_{w=0}$ und $(\tau_{vw})_{w=\frac{\pi}{2}}$ sind bereits in den linken

Seiten beider Abbildungen in Kurvenform angegeben. Um nun in irgendeinem Punkte P des Querschnittes, dessen Mittelpunkt zugleich

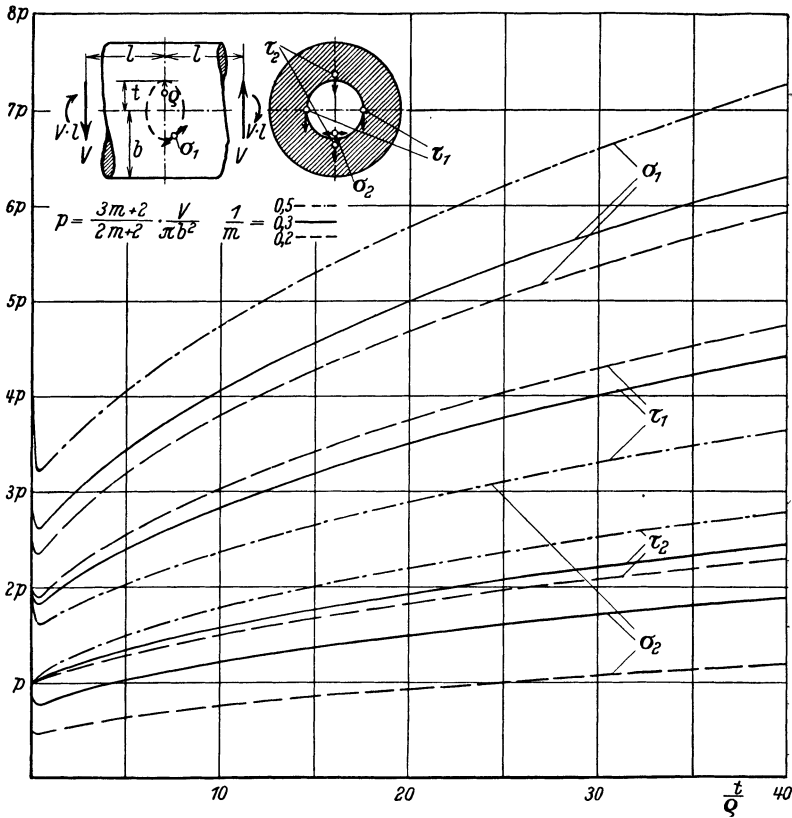


Abb. 64. Die Höchstspannungen in flachen Umdrehungsinnenkerben bei Schub.

der Ursprung O des Koordinatensystems ist, die resultierende Schubspannung nach Größe und Richtung abzuleiten, tragen wir von P aus in der y -Richtung einerseits den zu $y=OP$ gehörigen Wert von $(\tau_{uv})_{w=0}$, andererseits den zu $z=OP$ gehörigen Wert von $(\tau_{vw})_{w=\frac{\pi}{2}}$ ab, End-

punkte A und B in Abb. 63. Dann schlagen wir um AB als Durchmesser einen Kreis; eine durch B gehende Parallele zu OP schneidet diesen Kreis in C . Dann ist PC die resultierende Schubspannung nach Größe und Richtung.

Zum Beweise ziehen wir die in Abb. 63 gestrichelten Parallelen, Schnittpunkte D und E . Die Schubspannungen τ_{uv} und τ_{vw} , welche einerseits definitionsgemäß in der w -Richtung und senkrecht zu derselben verlaufen müssen, andererseits wegen (191) die Komponenten von PA und PB sind, erkennen wir als die Strecken PD und PE (bei τ_{vw} ist in der Zeichnung das negative Vorzeichen angegeben, da in Richtung dieser Spannung die Koordinate w abnimmt). PD und PE sind aber nach Konstruktion die Komponenten der resultierenden Schubspannung PC .

Abb. 64 stellt die Abhängigkeit sämtlicher Höchstwerte vom Krümmungsmaß dar.

D. Reine Drillung.

Im Fall der reinen Drillungsbeanspruchung tritt wieder der mit (96) und (97) gekennzeichnete Sonderfall in Kraft. Für den Spannungszustand im Vollzylinder ohne Kerbe wird zunächst:

$$\Phi_0 = 0, \quad \Phi_1 = 0, \quad \Phi_2 = -\frac{2M}{\alpha\pi b^4}xz, \quad \Phi_3 = \frac{2M}{\alpha\pi b^4}xy, \quad F = 0, \quad (190)$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0, \quad \tau_{xy} = -\frac{2M}{\pi b^4}z, \quad \tau_{xz} = \frac{2M}{\pi b^4}y. \quad (191)$$

Hierin ist M das Drillungsmoment, für welches auch das Integral (16) mit M_x statt M erfüllt sein muß. Dieser Nachweis erübrigt sich jedoch, da es sich um elementare Formeln der Festigkeitslehre handelt.

Bei diesem verhältnismäßig einfachen Problem beginnen wir, ohne den Sonderfall $t = \varrho$ getrennt zu behandeln, unmittelbar mit dem allgemeinen Fall der beliebig gekrümmten Kerbe. Wir gehen deshalb jetzt auf Ellipsoidkoordinaten über und erhalten

$$\frac{\Phi_3}{\cos w} = -\frac{\Phi_2}{\sin w} = \frac{2M}{\alpha\pi b^4} \mathfrak{S}in u \mathfrak{C}os u \sin v \cos v. \quad (192)$$

Das von u abhängige Glied $\mathfrak{S}in u \mathfrak{C}os u$ entspricht bei der allgemeinen Potentialfunktion (38) den Werten $n = 1$, $\nu = 2$. Die Zusatzfunktion erhalten wir durch Vertauschung von $\nu = 2$ mit $\nu = -3$, so daß sich ergibt

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Phi_3}{\cos w} = -\frac{\Phi_2}{\sin w} = \frac{2M}{\alpha\pi b^4} & \left[\mathfrak{S}in u \mathfrak{C}os u + \right. \\ & \left. + A \left(\mathfrak{S}in u \mathfrak{C}os u T - \mathfrak{C}os u + \frac{1}{3 \mathfrak{C}os^2 u} \right) \right] \sin v \cos v, \\ \Phi_1 = 0, \quad \Phi_0 = 0, \quad F = 0. \end{aligned} \right\} \quad (193)$$

An Hand von (4), (5) und (6) leiten wir hieraus ab:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_u = \sigma_v = \sigma_w = 0, \\ \tau_{uv} = 0, \\ \tau_{vw} = \frac{\nu'}{h} \left[\mathfrak{S}in u \mathfrak{C}os u + A \left(\mathfrak{S}in u \mathfrak{C}os u T - \mathfrak{C}os u + \frac{1}{3 \mathfrak{C}os^2 u} \right) \right] \sin^2 v, \\ \tau_{uw} = \frac{\nu'}{h} \left[\mathfrak{C}os^2 u + A \left(\mathfrak{C}os^2 u T - \mathfrak{S}in u - \frac{2 \mathfrak{S}in u}{3 \mathfrak{C}os^2 u} \right) \right] \sin v \cos v. \end{aligned} \right\} \quad (194)$$

da sich in dieser Entfernung bereits der Spannungsverlauf des Vollzylinders zeigte. Die am inneren Rand eintretende Spannungsspitze überragt mit $2,9p$ wesentlich den Spannungswert $2p$ des äußeren Randes. Längs der Oberfläche, insbesondere zur Achse hin, nimmt die Schubspannung sehr schnell ab. Eine axiale Bohrung von kleinem Durchmesser würde die Spannungsverteilung kaum merklich verändern, da der Werkstoff in der näheren Umgebung der Achse an der Formänderung so gut wie unbeteiligt ist. Links sind die Spannungslinien angegeben, welche an jeder Stelle die Richtung der resultierenden Schubspannung angeben. Sie lassen sich am einfachsten finden, indem wir ihre Differentialgleichung aufstellen und integrieren. Die u - und v -Komponenten des Linienelementes einer Spannungslinie verhalten sich zueinander wie die u - und v -Komponenten der Schubspannung; daher wird

$$\frac{hd u}{hd v} = \frac{d u}{d v} = \frac{\tau_{uw}}{\tau_{vw}}. \tag{201}$$

Setzen wir für beide Spannungskomponenten die Ausdrücke aus (198) ein, so liefert die Integration folgende Gleichung der Spannungslinien-schar¹:

$$[\text{Cof}^4 u + A(\text{Cof}^4 u T - \text{Cof}^2 u \text{Sin} u - \frac{2}{3} \text{Sin} u)] \sin^4 v = \text{konst.} \tag{202}$$

Die Abhängigkeit der Spannungshöchstwerte vom Krümmungsmaß gibt Abb. 66 wieder. Für den Sonderfall $t = \rho$, dessen getrennte Behandlung wir uns hier erspart haben, wollen wir die Höchstspannung durch Grenzübergang aus (200) ermitteln. Wir setzen dabei zur Abkürzung

$$\frac{t}{\rho} - 1 = q; \tag{203}$$

dann wird

$$c = \frac{\text{arctg} \sqrt{q}}{\sqrt{q}} = 1 - \frac{q}{3} + \frac{q^2}{5} - + \dots \tag{204}$$

und schließlich

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tau_{\max}}{p} &= \frac{2q^2}{3(1 + 2q + q^2) \left(1 - \frac{q}{3} + \frac{q^2}{5} - + \dots\right) - 5q - 3} = \\ &= \frac{2q^2}{\frac{8}{5}q^2 - \frac{8}{35}q^4 + \dots} = \frac{1}{\frac{4}{5} - \frac{4}{35}q^2 + \dots} \end{aligned} \right\} \tag{205}$$

Setzen wir jetzt $t = \rho$, also $q = 0$, so ergibt sich für die kugelförmige Kerbe

$$\frac{\tau_{\max}}{p} = \frac{5}{4}, \tag{206}$$

was sich in Kugelkoordinaten leicht nachweisen läßt.

¹ Vgl. H. Neuber: Z. angew. Math. Mech. Bd. 13 (1933) S. 441.

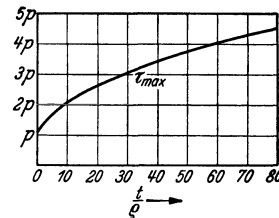


Abb. 66. Die Höchstspannung in flachen Umdrehungsinnenkerben bei Drilling.

Bei allen Belastungsfällen der Umdrehungsinnenkerben haben wir gesehen, daß an Stelle der auf den engsten Querschnitt bezogenen Nennspannung die Spannung des Vollzylinders als Bezugswert p in die Rechnung eingeht. Die jeweilige Höchstspannung ergibt sich durch Multiplikation der Vollzylinderspannung p mit einem Koeffizienten, der nur von der Krümmung t/ρ abhängt und die Formzahl der flachen Kerbe darstellt. Infolge des Abklingungsgesetzes ist die Störung der Spannungsverteilung bereits in verhältnismäßig geringer Entfernung von der Achse nicht mehr bemerklich, so daß die Theorie der flachen Kerbe innerhalb gewisser Grenzen auch als Näherungstheorie für die beliebig tiefe Kerbe benutzt werden kann. Bei den Abb. 57, 59, 61, 62 und 65 ist hiervon Gebrauch gemacht und der äußere Rand schon im Abstände $b = 2t$ bzw. $3t$ angenommen worden. Dieser Gedankengang führt jedoch nur zu einem Näherungsverfahren, bei welchem stets ein mehr oder weniger großer Fehler in Kauf genommen werden muß. Dem abmindernden Einfluß des äußeren Randes ist dabei insofern Rechnung getragen, als die Nennspannung durch den Bezugswert p ersetzt ist, so z. B. bei Drillungsbeanspruchung τ_n durch $p = \left(1 - \frac{t^4}{b^4}\right) \tau_n$. Dieses Verfahren liefert zwar in manchen Fällen genügend genaue Werte, nicht aber allgemein in jedem beliebigen Falle. Die Berücksichtigung des Einflusses des äußeren Halbmessers b muß vielmehr dadurch erfolgen, daß neben der Formzahl der flachen auch die der tiefen Kerbe ermittelt wird und beide nach dem in II, 4 angegebenen Verfahren einander überlagert werden. Ferner werden wir sehen, daß auch der Einfluß der axialen Bohrung bei Umdrehungskernen eine wesentliche Rolle spielt und jeweils durch einen dritten Formzahlgrenzwert berücksichtigt werden muß.

Im folgenden Abschnitt widmen wir uns nun der Ermittlung aller jener Formzahlgrenzwerte, die zur vollständigen Behandlung der Umdrehungskernen noch benötigt werden. Die zugehörigen Spannungsverteilungen liegen sämtlich nur mehr in großer Entfernung von der Achse und lassen sich infolgedessen zweidimensional behandeln.

5. Die Umdrehungskernen mit zweidimensionalem Spannungsverlauf.

Wir unterscheiden dabei folgende vier Fälle:

Die flache Umdrehungsaußenkerbe (Abb. 67, $t \ll a$),

die flache Umdrehungsinnenkerbe bei großer axialer Bohrung (Abb. 68, $t \ll a$, $t \ll c$),

die tiefe Umdrehungsaußenkerbe bei großer axialer Bohrung (Abb. 69, $a \ll t$, $a \ll c$),

die tiefe Umdrehungsinnenkerbe (Abb. 70, $a \ll t$).

Die beiden erstgenannten Fälle lassen sich gemeinsam behandeln, ebenso die beiden letztgenannten Fälle, so daß wir in diesem Zusammenhang nur

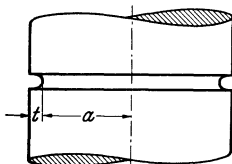


Abb. 67. Flache Umdrehungsaußenkerbe.

die „flache“ und die „tiefe“ Kerbe zu unterscheiden brauchen. Der für das Auftreten der Kerb- oder Störspannungen jeweils in Betracht

kommende Bereich liegt bei allen Fällen in großem Abstände von der Achse.

Zur rechnerischen Behandlung benutzen wir Zylinderkoordinaten und setzen

$$x = x, \quad y = r \cos w, \quad z = r \sin w. \quad (207)$$

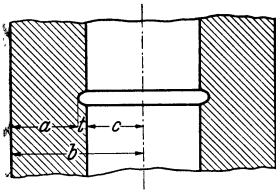


Abb. 68. Flache Umdrehungsinnenkerbe bei großer axialer Bohrung.

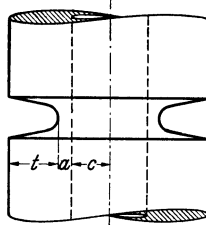


Abb. 69. Tiefe Umdrehungsaußenkerbe bei großer axialer Bohrung.

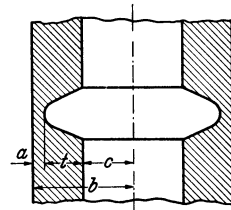


Abb. 70. Tiefe Umdrehungsinnenkerbe.

Wir nehmen Bezug auf die allgemeinen, für krummlinige Koordinaten geltenden Beziehungen und erhalten aus (20) von III, 3 mit x statt u und r statt v folgende Verzerrungsfaktoren

$$h_x = 1, \quad h_r = 1, \quad h_w = r. \quad (208)$$

Der Δ -Operator folgt hiermit aus (98) von III, 7

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial w^2}. \quad (209)$$

Für ΔF sowie für die Spannungen leiten wir mit Bezug auf (91) und (92) von III, 7 folgende Ausdrücke ab:

$$\Delta F = 2 \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \cos w \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} - \frac{\sin w}{r} \frac{\partial \Phi_2}{\partial w} + \sin w \frac{\partial \Phi_3}{\partial r} + \frac{\cos w}{r} \frac{\partial \Phi_3}{\partial w} \right), \quad (210)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \Delta F + 2\alpha \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}, \\ \sigma_r &= -\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \Delta F + 2\alpha \left(\cos w \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} + \sin w \frac{\partial \Phi_3}{\partial r} \right), \\ \sigma_w &= -\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial w^2} + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \Delta F + \frac{2\alpha}{r} \left(-\sin w \frac{\partial \Phi_2}{\partial w} + \cos w \frac{\partial \Phi_3}{\partial w} \right), \\ \tau_{xr} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial r} + \alpha \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \cos w \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \sin w \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} \right), \\ \tau_{rw} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial w} \right) + \alpha \left(\frac{\cos w}{r} \frac{\partial \Phi_3}{\partial w} - \sin w \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} + \frac{\sin w}{r} \frac{\partial \Phi_3}{\partial w} + \cos w \frac{\partial \Phi_3}{\partial r} \right), \\ \tau_{xw} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial w} + \alpha \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial w} - \sin w \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \cos w \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (211)$$

Hieraus lassen sich die für die einzelnen Beanspruchungsarten in Betracht kommenden Ansätze leicht ableiten.

A. Reiner Zug.

Bei Zugbeanspruchung können infolge der Drehsymmetrie Φ_2 und Φ_3 gleich Null gesetzt werden. Auf den Rest wollen wir dieselben Substitutionen anwenden, die wir beim ebenen Formänderungszustand benutzt hatten:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \Phi'_0 + \alpha \Phi'_1, & \Phi_1 &= \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x}, & \Phi_2 &= \Phi_3 = 0, & \Phi'_0 + x \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x} &= F', \\ \Phi'_0 &= \Phi'_0(x, r), & \Phi'_1 &= \Phi'_1(x, r), & \Delta \Phi'_0 &= \Delta \Phi'_1 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (212)$$

Dann wird

$$F = \Phi_0 + x \Phi_1 = F' + \alpha \Phi'_1. \quad (213)$$

Der für die Berechnung der gesuchten Formzahlgrenzwerte maßgebende Störspannungszustand liegt nun, wie bereits erwähnt, jeweils in großer Entfernung von der Achse, also in einem Gebiet, dessen Abmessungen in der x - und r -Richtung als klein gegenüber r selbst anzusehen sind. Wir haben daher, um den Grenzübergang folgerichtig durchzuführen, in der Rechnung $r = \infty$ zu setzen, wodurch der Δ -Operator in

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}, \quad (214)$$

also in den Δ -Operator der x, r -Ebene übergeht. Aus (210) folgt dann mit Rücksicht auf $\Delta \Phi'_1 = 0$:

$$\Delta F = \Delta F' = \frac{\partial^2 F'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F'}{\partial r^2} = 2 \frac{\partial^2 \Phi'_1}{\partial x^2} = -2 \frac{\partial^2 \Phi'_1}{\partial r^2}. \quad (215)$$

Machen wir hiervon Gebrauch und setzen in (211) ebenfalls $r = \infty$, so finden wir schließlich

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F'}{\partial r^2}, & \sigma_r &= \frac{\partial^2 F'}{\partial x^2}, & \sigma_w &= \frac{1}{m} (\sigma_x + \sigma_r), \\ \tau_{xr} &= -\frac{\partial^2 F'}{\partial x \partial r}, & \tau_{rw} &= 0, & \tau_{xw} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (216)$$

Wir erkennen, daß die Spannungen in derselben Weise von der Spannungsfunktion abhängen wie beim ebenen Formänderungszustand. Damit ist nachgewiesen, daß es sich im vorliegenden Falle um ein ebenes Problem handelt. Die rechnerische Behandlung erübrigt sich, da wir die in Frage stehenden Lösungen bereits im Abschnitt IV abgeleitet haben. Für die Formzahl der flachen Kerbe gilt daher Gleichung (131) von IV, 4, während für die tiefe Kerbe die Beziehung (190) von IV, 6 zur Anwendung kommt. Für den Höchstwert der Ringspannung, den wir mit σ_2 bezeichnen wollen, würde sich aus (216) mit $\sigma_r = 0$ (lastfreier Rand!) der Wert $\frac{1}{m} \sigma_x$ ergeben. Dabei ist jedoch zu berücksichtigen, daß die Beziehungen (216), welche wir mit Rücksicht auf den großen Achsabstand r des Störungsgebietes ableiten konnten, nur für die eigentlichen Kerbspannungen gelten, welche dem Abklüftungsgesetz gehorchen, und nicht für den elementaren Gleichgewichtszustand $\sigma_x = \sigma_n$, der sich schon beim ungekerbten Stab einstellt und

bei welchem die Ringspannung verschwindet. Zur Berechnung des Höchstwertes der Ringspannung haben wir daher für σ_x nicht σ_1 , sondern nur den durch die Kerbwirkung hervorgerufenen Zuwachs $\sigma_1 - \sigma_n$ einzusetzen und erhalten

$$\sigma_2 = \frac{1}{m} (\sigma_1 - \sigma_n). \quad (217)$$

B. Reine Biegung.

Im Falle der reinen Biegebungsbeanspruchung haben wir zu beachten, daß die Spannungen außer von x und r auch von der Koordinate w abhängen. Wie aus den bereits behandelten Problemen V, 3, B und V, 4, B hervorgeht, tritt bei den Funktionen Φ_0 und Φ_1 der Faktor $\cos w$ auf, und wir können setzen

$$\Phi_0 = \varphi_0(x, r) \cos w, \quad \Phi_1 = \varphi_1(x, r) \cos w. \quad (218)$$

Die Anwendung des Δ -Operators (209) führt dann zu folgender Differentialgleichung für φ_0 bzw. φ_1 :

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} - \frac{\varphi_0}{r^2} = \Delta \varphi_0 - \frac{\varphi_0}{r^2} = 0. \quad (219)$$

Setzen wir hierin $r = \infty$, so erhalten wir wieder die Potentialgleichung der x, r -Ebene, d. h. der bei Biegung auftretende Faktor $\cos w$ bewirkt im Vergleich zur Zugbeanspruchung keine Änderung im Aufbau der maßgebenden Differentialgleichung. Da auch für die Ableitung der Spannungen sich nichts ändert, wenn wir wieder Φ_2 und Φ_3 gleich Null setzen, so gilt für die Rechnung vollkommen derselbe Gedankengang wie beim Zugproblem, und es ergeben sich die gleichen Formzahlen.

C. Reiner Schub.

Aus den behandelten Schubproblemen V, C, 3 und V, 4, C geht hervor, daß Φ_0 und Φ_1 den Faktor $\cos w$ enthalten, während die Funktion Φ_2 , die jetzt nicht mehr gleich Null gesetzt werden darf, nur von x und r abhängt. Zur Aufstellung der Nennspannung benötigen wir zunächst die Spannungsverteilung im auf Schub beanspruchten Hohlzylinder, Innenhalbmesser c , Außenhalbmesser b , welche sich mit Hilfe des räumlichen Verfahrens in folgender Form darstellen läßt:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= C \left[-(b^2 + c^2) x r + \frac{(\alpha - 1)(5 - 2\alpha)}{\alpha(5 - \alpha)} \left(x r^3 - \frac{4}{3} x^3 r \right) - \frac{b^2 c^2}{\alpha} \frac{x}{r} \right] \cos w, \\ \Phi_1 &= C \left[\frac{1 - \alpha}{\alpha(5 - \alpha)} (r^3 - 4 x^2 r) + \frac{b^2 c^2}{\alpha} \frac{1}{r} \right] \cos w, \\ \Phi_2 &= C \frac{4 - 2\alpha}{\alpha(5 - \alpha)} \left(x r^2 - \frac{2}{3} x^3 \right), \quad \Phi_3 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (220)$$

$$F = C \left\{ -(b^2 + c^2) x r + \frac{1}{5 - \alpha} \left[(4 - 2\alpha) x r^3 + \left(-4 + \frac{8\alpha}{3} \right) x^3 r \right] \right\} \cos w, \quad (221)$$

$$\Delta F = \frac{8C}{5 - \alpha} x r \cos w, \quad (222)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= C \frac{4(4-\alpha)}{5-\alpha} x r \cos w, & \sigma_r &= 0, & \sigma_w &= 0, \\ \tau_{xr} &= C \left[b^2 + c^2 - \frac{b^2 c^2}{r^2} - r^2 \right] \cos w, & \tau_{rw} &= 0, \\ \tau_{xw} &= C \left[-b^2 - c^2 - \frac{b^2 c^2}{r^2} + \frac{\alpha-1}{5-\alpha} r^2 \right] \sin w. \end{aligned} \right\} \quad (223)$$

Bezeichnen wir die Querkraft mit V , so folgt durch Vergleich mit der elementaren Biegungslehre

$$C = \frac{5-\alpha}{4-\alpha} \frac{V}{\pi(b^4 - c^4)}. \quad (224)$$

Der hierdurch gegebene Spannungsverlauf im Hohlzylinder bildet zugleich insofern den ersten Anhaltspunkt für die Berechnung des gekerbten Zylinders, als wir die Kerbkrümmung zunächst noch unberücksichtigt lassen und so die Umgebung des engsten Querschnittes näherungsweise als Stück eines Hohlzylinders ansehen können. Bei der Außenkerbe wird dann b mit $c + a$ identisch, bei der Innenkerbe c mit $b - a$. Der Achsabstand r hat in der Störzone überall noch nahezu denselben Wert wie im Kerbgrund; die Abweichung ist im Rahmen des hier beabsichtigten Grenzüberganges jedenfalls vernachlässigbar klein gegenüber r selbst. Wenn wir ferner für den Kerbgrund $x = 0$ annehmen, ist auch x gegenüber b bzw. c zu vernachlässigen. Damit erhalten wir den folgenden Elementarspannungszustand der Störzone

$$\sigma_x = \sigma_r = \sigma_w = \tau_{xr} = 0, \quad (225)$$

$$\tau_{rw} = 0, \quad \tau_{xw} = \tau_n \sin w. \quad (226)$$

Die hierbei eingeführte Nennspannung τ_n hat bei der Außenkerbe (mit $c + a$ statt b) den Wert

$$\tau_n = -(\tau_{xw})_{r=b} = \frac{V \left[\left(3 + \frac{2}{m}\right) c^2 + \left(1 + \frac{2}{m}\right) (c + a)^2 \right]}{\pi \left(1 + \frac{1}{m}\right) [(c + a)^4 - c^4]}. \quad (227)$$

$w = \frac{\pi}{2}$

Bei der Innenkerbe wird (mit $b - a$ statt c)

$$\tau_n = -(\tau_{xw})_{r=c} = \frac{V \left[\left(3 + \frac{2}{m}\right) b^2 + \left(1 + \frac{2}{m}\right) (b - a)^2 \right]}{\pi \left(1 + \frac{1}{m}\right) [b^4 - (b - a)^4]}. \quad (228)$$

$w = \frac{\pi}{2}$

An Hand eines besonderen Ansatzes läßt sich nun zeigen, daß an diesem einfachen Spannungsverlauf bei Berücksichtigung der Kerbkrümmung nur insofern eine Änderung vorzunehmen ist, als die Spannung τ_{xw} sich ändert und die Spannung τ_{rw} als reine Störspannung hinzukommt. Letztere reicht zur Befriedigung der Randbedingung bereits aus, und es treten keine Normalspannungen auf. Wir setzen

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \left[x \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + r \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + (1 - 2\alpha) \varphi_0 \right] \cos w, \\ \Phi_1 &= -\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \cos w, & \Phi_2 &= -\frac{\partial \varphi_0}{\partial r} - \frac{\varphi_0}{r}, & \Phi_3 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (229)$$

wobei φ_0 nur von x und r abhängen soll und $\varphi_0 \cos w$ als harmonische Funktion vorausgesetzt ist. Es gilt also für φ_0 wieder die Differentialgleichung

$$\Delta \varphi_0 - \frac{\varphi_0}{r^2} = 0, \quad (230)$$

aus welcher einerseits

$$\Delta \left(\frac{\varphi_0}{r} \right) + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} - \frac{2\varphi_0}{r^3} = 0, \quad (231)$$

andererseits durch Differentiation

$$\Delta \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial r} \right) - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + \frac{2\varphi_0}{r^3} = 0 \quad (232)$$

folgt. Man erkennt hieraus leicht, daß Φ_0 , Φ_1 und Φ_2 in der Tat harmonische Funktionen sind.

Die Spannungsfunktion wird

$$F = -2\alpha\varphi_0 \cos w \quad (\Delta F = 0), \quad (233)$$

und wir erhalten folgende Spannungen:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 0, & \sigma_r &= -2\alpha \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\varphi_0}{r} \right) \cos w, & \sigma_w &= 2\alpha \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\varphi_0}{r} \right) \cos w, \\ \tau_{xr} &= -\frac{\alpha}{r} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \cos w, & \tau_{rw} &= \alpha \left(\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + \frac{\varphi_0}{r^2} \right) \sin w, \\ \tau_{xw} &= \alpha \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial r} \sin w. \end{aligned} \right\} \quad (234)$$

Setzen wir jetzt $r = \infty$ und führen zur Vereinfachung mit

$$\alpha \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} = \varphi \quad (235)$$

eine neue Funktion ein, so ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_r = \sigma_w = \tau_{xr} = 0, \\ \tau_{rw} &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} \sin w, & \tau_{xw} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \sin w. \end{aligned} \right\} \quad (236)$$

Für φ folgt aus (232) mit $r = \infty$ wieder die Potentialgleichung der x, r -Ebene. Mit Hilfe dieser Darstellung können wir nun die gesuchten Störspannungen in überraschend einfacher Weise ermitteln.

Bei der flachen Kerbe handelt es sich darum, dem elementaren Zustand $\tau_{xw} = \tau_n \sin w$, welchem die Funktion $\varphi = \tau_n x$ entspricht, einen geeigneten Störspannungszustand zu überlagern, so daß die Kerboberfläche lastfrei wird. Wir gehen hierzu auf Ellipsenkoordinaten über und setzen

$$\varepsilon = b - r \text{ (bzw. } r - c) = \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} u \sin v, \quad x = \mathfrak{E} \mathfrak{i} n u \cos v. \quad (237)$$

Wie aus (236) hervorgeht, wird die x -Komponente der im Axialschnitt $w = \text{konst.}$ herrschenden Schubspannung durch Differentiation der Spannungsfunktion $\varphi \sin w$ nach x , die r -Komponente durch Differentiation nach r erhalten. Mithin ist für die u - bzw. v -Komponente die Ableitung in der u - bzw. v -Richtung maßgebend. Bei Ver-

wendung unserer Schreibweise für gekrümmte Koordinaten (III, 3) wird mithin

$$\tau_{uw} = \frac{1}{h_u} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \sin w, \quad \tau_{vw} = \frac{1}{h_v} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \sin w. \quad (238)$$

Die hier gewählten Ellipsenkoordinaten haben uns schon mehrmals bei der Behandlung der Kerbaufgaben Dienste geleistet. Bezüglich der Verzerrungsfaktoren, welche infolge Isometrie einander gleich werden, sei auf (49) von IV, 2 verwiesen. Für φ kommt die einfache Potentialgleichung (46) von IV, 1 zur Anwendung.

Bei der flachen Kerbe besteht der gekerbte Rand sowohl aus der Geraden $\varepsilon = 0$ bzw. $v = 0$, als auch aus der eigentlichen Kerbe, für die wir eine mit u_0 bezeichnete Ellipse benutzen. Es sind daher die beiden Randbedingungen

$$(\tau_{vw})_{v=0} = 0, \quad (\tau_{uw})_{u=u_0} = 0 \quad (239)$$

zu befriedigen. Die elementare Funktion $\varphi = \tau_n x = \tau_n \mathfrak{C} \sin u \cos v$ genügt bereits der ersten Bedingung. Damit dies auch für die Störfunktion der Fall ist, muß sie in derselben Weise von v abhängen; andererseits wird sie dem Abklingungsgesetz folgen und für großes u verschwinden. Hieraus sowie mit Rücksicht auf die Potentialgleichung ergibt sich $e^{-u} \cos v$, und wir setzen

$$\varphi = \tau_n (\mathfrak{C} \sin u + A e^{-u}) \cos v. \quad (240)$$

Daraus folgen die Spannungen

$$\left. \begin{aligned} \tau_{uw} &= \frac{\tau_n}{h} (\mathfrak{C} \cos u - A e^{-u}) \cos v \sin w, \\ \tau_{vw} &= \frac{\tau_n}{h} (-\mathfrak{C} \sin u - A e^{-u}) \sin v \sin w. \end{aligned} \right\} \quad (241)$$

Die zweite Randbedingung verlangt schließlich

$$A = e^{u_0} \mathfrak{C} \cos u_0. \quad (242)$$

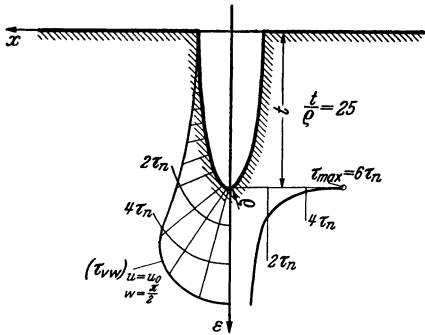


Abb. 71. Flache Umdrehungskerbe mit großem Achsabstand bei Schub oder Drillung (vgl. Abb. 67 und 68).

Der auf diese Weise auftretende Parameter u_0 berechnet sich aus Kerbtiefe und Krümmungsradius (vgl. IV, 4!); es wird $\mathfrak{C} \cot u_0 = \sqrt{t/\rho}$.

Die Spannungsverteilung ist für den Fall $\mathfrak{C} \cot u_0 = 5$ in Abb. 71 dargestellt. Die höchste Beanspruchung herrscht im Kerbgrund, wo die Schubspannung den 6fachen Wert erreicht. Für die Höchstspannung ergibt sich allgemein

$$\tau_{\max} = -(\tau_{vw})_{u=u_0, v=w=\frac{\pi}{2}} = \tau_n (1 + \mathfrak{C} \cot u_0) = \tau_n \left(1 + \sqrt{\frac{t}{\rho}} \right). \quad (243)$$

Dieselbe Formzahl hatten wir beim Langloch unter Biegung gefunden (s. Abb. 34).

Bei der tiefen Kerbe handelt es sich im Gegensatz zur flachen Kerbe nicht darum, einer vorgegebenen elementaren Spannungsfunktion eine Störfunktion zu überlagern, sondern um die Aufstellung einer selbständigen Spannungsfunktion, welche zugleich den inneren und den äußeren Rand lastfrei macht und durch diese doppelte Randbedingung bereits eindeutig bestimmt ist. Einer der beiden Ränder ist kerbartig gekrümmt und soll, da es nur auf die nähere Umgebung des Kerbgrundes ankommt, als Hyperbel v_0 in der Rechnung berücksichtigt werden, während der andere Rand durch die Gerade $\varepsilon = 0$ bzw. $v = 0$ gebildet wird. Wir haben mithin die beiden Randbedingungen

$$(\tau_{vu})_{v=0} = 0, \quad (\tau_{vu})_{v=v_0} = 0 \quad (244)$$

zu erfüllen. Als einzige Lösung kommt jene in Betracht, bei welcher die Schubspannung τ_{vw} nicht nur an beiden Rändern, sondern überhaupt verschwindet:

$$\varphi = Au, \quad \tau_{uw} = \frac{A}{h} \sin w, \quad \tau_{vw} = 0. \quad (245)$$

Zur Bestimmung der Konstanten A müssen wir den Kraftfluß untersuchen. Die Querkraft V muß bis auf das Vorzeichen gleich der Summe der y -Komponenten der Spannungen sein, die an einer beliebig gewählten, vom Rand $v = 0$ bis zum Rand $v = v_0$ reichenden Schnittfläche angreifen. Wir wählen eine Fläche $u = \text{konst.}$ und erhalten

$$V = - \iint_F \tau_{uw} \cos(y, w) dF = \iint_F \tau_{uw} \sin w dF. \quad (246)$$

Das Flächenelement dF ist dabei ein kleines Rechteck mit den Kanten $h_v dv$ und $h_w dw$. Der Verzerrungsfaktor h_w ist aber gleich dem Achsabstand r , welcher nach Voraussetzung groß gegenüber der Breite a des engsten Querschnittes ist und mithin bei obiger Integration als konstant aufgefaßt und bei der Außenkerbe gleich c , bei der Innenkerbe gleich b gesetzt werden kann. So ergibt sich bei der Außenkerbe

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{v_0} \tau_{uw} \sin w h dv c dw = A c \pi v_0. \quad (247)$$

Die Nennspannung der tiefen Außenkerbe können wir aus (227) durch Grenzübergang $a \rightarrow 0$ ableiten und finden

$$\tau_n = \frac{V}{\pi c a}. \quad (248)$$

In unserem Koordinatensystem ist nun

$$a = (\varepsilon)_{u=0} = \sin v_0. \quad (249)$$

Damit wird

$$V = \pi c \tau_n \sin v_0, \quad (250)$$

und (247) liefert schließlich

$$A = \tau_n \frac{\sin v_0}{v_0}. \quad (251)$$

Zu demselben Ergebnis wären wir auch bei der Innenkerbe gelangt.

Abb. 72 gibt den Spannungsverlauf für $\operatorname{tg} v_0 = \sqrt{8}$ wieder. Im Kerbgrund bildet sich mit $1,8 \tau_n$ eine beträchtliche Spannungsspitze aus. Allgemein ergibt sich für die Höchstspannung

$$\tau_{\max} = (\tau_{uw})_{u=0} = \tau_n \frac{\operatorname{tg} v_0}{v_0} \quad (252)$$

$$v = v_0$$

$$w = \frac{\pi}{2}$$

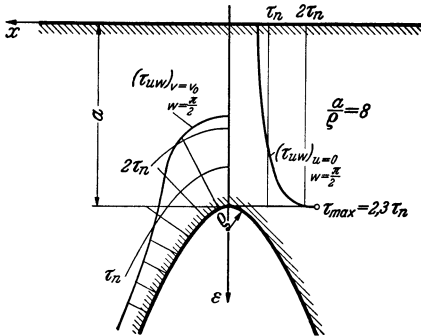


Abb. 72. Tiefe Umdrehungskerbe mit großem Achsabstand bei Schub oder Drilling (vgl. Abb. 69 und 70).

Der Parameter v_0 hängt in bekannter Weise mit dem Krümmungs-

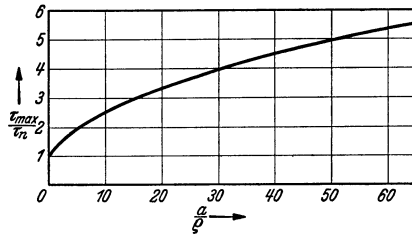


Abb. 73. Die Höchstspannung in tiefen Umdrehungskernen mit großem Achsabstand bei Schub oder Drilling.

radius und der Breite des engsten Querschnittes zusammen [vgl. (68) von IV, 2], und wir finden schließlich

$$\frac{\tau_{\max}}{\tau_n} = \frac{\sqrt{\frac{a}{\rho}}}{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{a}{\rho}}} \quad (253)$$

Abb. 73 erläutert diesen Zusammenhang.

D. Reine Drilling.

Für die Behandlung der Drillingaufgabe wird zweckmäßig folgender Ansatz zugrunde gelegt, durch welchen sich die Rechnung sehr vereinfacht:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= 0, & \Phi_1 &= 0, \\ \Phi_2 &= -\frac{1}{\alpha} \varphi(x, r) \sin w, & \Phi_3 &= \frac{1}{\alpha} \varphi(x, r) \cos w. \end{aligned} \right\} \quad (254)$$

Damit wird

$$F = 0 \quad (255)$$

und die Beziehungen (211) gehen über in

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x = \sigma_r = \sigma_w = \tau_{xr} &= 0, \\ \tau_{rw} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\varphi}{r}, & \quad \tau_{xw} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \quad (256)$$

bzw. mit $r = \infty$

$$\tau_{rw} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad \tau_{xw} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (257)$$

Vergleichen wir hiermit den Ansatz (236), so stellen wir bis auf das Fehlen des Faktors $\sin v$ Übereinstimmung fest; der Rechnungsgang ist mithin der gleiche wie beim Schubproblem, und wir können von vornherein aussagen, daß sich auch die gleiche Formzahl der flachen Kerbe, also $1 + \sqrt{\frac{t}{\rho}}$, ergibt¹. Für die tiefe Kerbe bedarf es wegen der Integration, die zur Ermittlung der Konstante A notwendig ist, eines besonderen Nachweises. Es wird

$$\varphi = Au, \quad \tau_{uw} = \frac{A}{h}, \quad \tau_{vw} = 0. \quad (258)$$

Das Moment der Spannungen um die x -Achse berechnet sich aus

$$M = \iint_F \tau_{uw} r dF. \quad (259)$$

Das Flächenelement dF ist wie unter C ein Rechteck mit den Kanten $h_v dv$ und $h_w dw$, wobei $h_w = r$ konstant und bei der Außenkerbe gleich c , bei der Innenkerbe gleich b gesetzt werden kann. Für die Außenkerbe erhalten wir dann

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^{v_0} \tau_{uw} c^2 h dv dw = 2Ac^2 \pi v_0. \quad (260)$$

Die Nennspannung für Drillungsbeanspruchung entspricht der elementaren Drillungslehre und wird mithin bei der Außenkerbe

$$\tau_n = \frac{2M(c+a)}{\pi[(c+a)^4 - c^4]} \quad (261)$$

und bei der Innenkerbe

$$\tau_n = \frac{2M(b-a)}{\pi[b^4 - (b-a)^4]}. \quad (262)$$

Für die tiefe Außenkerbe ergibt sich durch Grenzübergang $a \rightarrow 0$ aus (261)

$$\tau_n = \frac{M}{2\pi c^2 a}. \quad (263)$$

Bei Verwendung von (249) leiten wir hieraus

$$M = 2\pi c^2 \sin v_0 \tau_n \quad (264)$$

ab. Durch Einsetzen in (260) erhalten wir schließlich

$$A = \frac{\sin v_0}{v_0} \tau_n. \quad (265)$$

Dieselbe Beziehung hätte sich auch für die Innenkerbe ergeben; sie ist völlig identisch mit der bei Schubbeanspruchung gewonnenen Gleichung (251). Mithin stimmt auch die Formzahl überein.

¹ Für $t = \rho$ (Halbkreisgerbe) ist die Formzahl der flachen Kerbe mithin gleich 2. Dies entspricht auch den Berechnungen von Willers [Z. Math. Physik Bd. 55 (1907) S. 227] und Sonntag [Z. angew. Math. Mech. Bd. 9 (1929) S. 1].

6. Aufstellung der Formzahlnomogramme für Umdrehungskerb- mit beliebigen Abmessungen.

Zur Ermittlung der Formzahlen für beliebige Abmessungen bedienen wir uns des in II, 4 angegebenen Verfahrens. Wir machen dabei einerseits Gebrauch von den Formzahlen der flachen Umdrehungskerb-
andererseits von jenen der tiefen Umdrehungskerb-
abgeleitet haben.

A. Die Umdrehungsaußenkerbe.

Bei der tiefen Kerbe ist für Zug (59) mit der Nennspannung (55) maßgebend, für Biegung (72) mit der Nennspannung (71). Für Schub gilt (84), wobei als Nennspannung die Randschubspannung des ungekerbten Vollzylinders dient (nur so können wir der Bedingung $\alpha_{tk} \rightarrow 1$ für $a/\varrho \rightarrow 0$ genügen); sie ergibt sich aus (84) und (82) mit $a/\varrho = 0$ zu $\frac{1 + 2/m}{1 + 1/m} \frac{V}{\pi a^2}$. Infolge dieser vom Bezugswert p abweichenden Nennspannung müssen wir (84) noch mit $\frac{1 + 1/m}{1 + 2/m}$ multiplizieren, um den für unser Nomogramm richtigen Wert zu erhalten. Für Drillung ist schließlich (107) mit der Nennspannung (105) zu verwenden.

Bei der flachen Kerbe gilt für Biegung und Zug wieder die einfache Beziehung (131) von IV, 4; für Schub und Drillung haben wir den Ausdruck (243) gefunden. Da die Höchstspannung bei Schubbeanspruchung im Kerbgrund auftritt, handelt es sich hier im Gegensatz zur ebenen Kerbwirkung um keinen Ausnahmefall.

B. Die Umdrehungsaußenkerbe mit axialer Bohrung.

Bei Vorhandensein einer axialen Bohrung kommt zu den obigen Grenzwerten ein weiterer hinzu, nämlich der Formzahlgrenzwert der tiefen Umdrehungsaußenkerbe bei großer axialer Bohrung, den wir in V, 5 behandelt haben. Wir wollen diesen neu hinzukommenden Grenzwert mit α_{tb} bezeichnen. Das in II, 4 für die Formzahl aufgestellte allgemeine Gesetz muß dementsprechend erweitert werden.

Für große Bohrung folgt zunächst

$$\frac{1}{(\alpha_k - 1)^2} = \frac{1}{(\alpha_{fk} - 1)^2} + \frac{1}{(\alpha_{tb} - 1)^2}. \quad (266)$$

Hierin hängt α_{fk} von t/ϱ und α_{tb} von a/ϱ ab. Bei kleiner werdender Bohrung muß α_{tb} von dem Grenzwert der tiefen Umdrehungsaußenkerbe ohne Bohrung, also α_{tk} abgelöst werden. Dies wird erreicht, wenn für die Formzahl folgender erweiterter Ausdruck gesetzt wird:

$$\frac{1}{(\alpha_k - 1)^2} = \frac{1}{(\alpha_{fk} - 1)^2} + \frac{1}{(\alpha_{tb} - 1)^2} - \underbrace{\frac{1}{(\alpha_{tb} - 1)^2} + \frac{1}{(\alpha_{tk} - 1)^2}}_{\text{mit } a + c \text{ statt } a}. \quad (267)$$

Bei verschwindend kleiner Bohrung wird $a + c \approx a$, und es fällt α_{tb} heraus, wird also in der Tat durch α_{tk} ersetzt. Andererseits wird bei großer Bohrung c sehr groß, damit auch $\frac{a + c}{\varrho}$ und die Werte von α_{tb}

und α_{tk} mit $a + c$ statt a ; die beiden Brüche, in denen sie im Nenner auftreten, werden verschwindend klein. Die Formzahl nimmt folglich in der Tat für große Bohrung wieder den Ausdruck (266) an, von welchem wir ausgegangen waren. Da die beiden Bestandteile, die wir in Gleichung (267) gegenüber (266) hinzugenommen haben, von derselben Veränderlichen $\frac{a+c}{\rho}$ abhängen, liegt es nahe, an ihrer Stelle einen neuen Formzahlwert als Hilfsgröße zu verwenden, der von $\frac{a+c}{\rho}$ abhängt. Wir setzen dabei zweckmäßig

$$\frac{1}{(\alpha_{tk} - 1)^2} - \frac{1}{(\alpha_{tb} - 1)^2} = \frac{1}{(\alpha_h - 1)^2} \quad (268)$$

mit $a + c$ statt a

Damit nimmt der Ausdruck (267) die einfachere Form

$$\frac{1}{(\alpha_k - 1)^2} = \frac{1}{(\alpha_{fk} - 1)^2} + \frac{1}{(\alpha_{tb} - 1)^2} + \frac{1}{(\alpha_h - 1)^2} \quad (269)$$

an. Diese Gleichung besagt nichts anderes, als daß wir die für große Bohrungen geltende Formzahl, die sich entsprechend (266) in bekannter Weise aus α_{fk} und α_{tb} zusammensetzt, noch einmal mit der Hilfsformzahl α_h zusammensetzen müssen, um zur endgültigen Formzahl zu gelangen.

Bei Zug dient als Nennspannung die mittlere Spannung des engsten Querschnittes $\frac{p}{\pi[(a+c)^2 - c^2]}$. Für den Formzahlgrenzwert α_{tk} ist der Ausdruck (59) maßgebend, für α_{fk} gilt (131) vom Abschnitt IV und schließlich für α_{tb} (190) vom Abschnitt IV.

Im Falle der Biegung ist $\frac{4M(a+c)}{\pi[(a+c)^4 - c^4]}$ Nennspannung. α_{tk} berechnet sich nach (72), α_{fk} nach (131) vom Abschnitt IV, α_{tb} nach (190) vom Abschnitt IV.

Bei Schub dient (227) als Nennspannung. Für α_{tk} ist (84) maßgebend, wobei noch mit $\frac{1+1/m}{1+2/m}$ multipliziert werden muß. Für α_{fk} gilt (243), schließlich für α_{tb} (253).

Für Drillung ist (261) Nennspannung. Für α_{tk} gilt (107), für α_{fk} (243) und für α_{tb} (253).

C. Die Umdrehungsinnenkerbe.

Bei großer axialer Bohrung setzt sich die Formzahl nur aus den beiden Grenzwerten α_{tk} und α_{fb} zusammen, von denen erstere mit a/ρ , letztere mit t/ρ in Zusammenhang steht; z. B. bei Zug gilt für erstere (190) vom Abschnitt IV, für letztere (131) vom Abschnitt IV (vgl. V, 5). Bei verschwindend kleiner Bohrung muß nun α_{fb} durch den Grenzwert α_{fk} der flachen Umdrehungsinnenkerbe ohne axiale Bohrung abgelöst werden. Diese Bedingung erfüllen wir wieder durch Hinzunahme einer Hilfsformzahl α_h und setzen

$$\frac{1}{(\alpha_k - 1)^2} = \frac{1}{(\alpha_{tk} - 1)^2} + \frac{1}{(\alpha_{fb} - 1)^2} + \frac{1}{(\alpha_h - 1)^2} \quad (270)$$

α_h hängt nur von $\frac{t+c}{\varrho}$ ab und berechnet sich aus

$$\frac{1}{(\alpha_h - 1)^2} = \frac{1}{(\alpha_{fk} - 1)^2} - \frac{1}{(\alpha_{fb} - 1)^2} \quad (271)$$

mit $t+c$ statt t

Für $c=0$ wird auf diese Weise tatsächlich α_{fb} durch α_{tb} abgelöst; andererseits wird für großes c der Ausdruck $1/(\alpha_h - 1)^2$ verschwindend klein, so daß den geforderten Bedingungen Genüge geleistet ist. Bei Zug gilt für α_{fk} der Ausdruck (133). Als gemeinsame Nennspannung dient $\frac{p}{\pi[b^2 - (b-a)^2]}$. Hierin ist $b = a + t + c$ (Abb. 68 und 70).

Bei Biegung ist die Nennspannung aus $\frac{M(t+c)}{\pi[b^4 - (b-a)^4]}$ zu berechnen.

Für α_{tk} und α_{fb} gelten dieselben Beziehungen wie bei Zugbeanspruchung, während α_{fk} sich jetzt aus (158) errechnet.

Bei Schub ist (228) Nennspannung. Für α_{tk} gilt (253), für α_{fb} hatten wir (243) gefunden; für α_{fk} gilt (185), wobei durch 2 zu dividieren ist, da der Bezugswert (166) nur gleich der halben Nennspannung [Ausdruck (228) mit $b-a=0$] ist.

Im Falle der Drillingsbeanspruchung gilt (262) als Nennspannung. α_{tk} und α_{fb} berechnen sich wie bei Schub. α_{fk} ist durch (200) festgelegt.

Die sich so ergebenden Formzahlhomogramme für Umdrehungsaußen- und -innenkerben sind in den Abb. 104 und 105 enthalten. Die Handhabung geht aus den eingezeichneten Pfeilen sowie aus den im Abschnitt X angegebenen Beispielen hervor. Für den Abstand des Kerbgrundes von der Achse ($a+c$ bzw. $t+c$) ist zweckmäßig die gemeinsame Bezeichnung r verwendet.

Wir verlassen nunmehr das Gebiet der räumlichen Kerbwirkung, um uns einem weiteren Zweig der Kerbwirkung zuzuwenden, der im Hinblick auf die besondere Art der Spannungsverteilung ebenfalls eine eingehende Behandlung erfordert, der prismatischen Kerbwirkung.

VI. Theorie der prismatischen Kerbwirkung.

1. Die Ausgangsgleichungen.

Zur Aufstellung der Beziehungen für prismatische Stäbe greifen wir wieder zurück auf die allgemeinen Grundgleichungen von III, 6. Es war

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \alpha \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right) \quad \text{usw.}, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \alpha \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \right) \quad \text{usw.}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

wobei

$$F = \Phi_0 + x\Phi_1 + y\Phi_2 + z\Phi_3 \quad \text{und} \quad \alpha = 2 - \frac{2}{m} \quad (2)$$

war, ferner

$$\Delta \Phi_0 = \Delta \Phi_1 = \Delta \Phi_2 = \Delta \Phi_3 = 0 \quad (3)$$

vorausgesetzt ist. Bei den nun folgenden Betrachtungen sei die x -Achse zugleich Achse unseres prismatischen Stabes, während die y -Achse mit der Schubrichtung zusammenfallen soll (Abb. 75); die z -Achse sei zugleich Nulllinie des Stabquerschnittes. Bei reiner Zug- oder Biegebeanspruchung des prismatischen Stabes treten nur Spannungen σ_x auf, wie wir dies bereits im Abschnitt V mit den Gleichungen (111) bis (113), ferner (137) bis (139) nachgewiesen haben. Die elementare Festigkeitsrechnung gilt daher noch vollkommen streng, welche Form der in der y, z -Ebene liegende Stabquerschnitt auch haben möge; denn es treten ja keine Spannungskomponenten mit y oder z als Index auf, für welche eine Randbedingung zu erfüllen wäre. Anders ist es jedoch bei Schub und Drillung.

Bei reiner Schubbeanspruchung läßt sich auf folgende Weise die allgemeine Lösung in eine einfachere Form überführen [wir haben einen ähnlichen Ansatz schon in (161) bis (164) von Abschnitt V kennengelernt]: Wir setzen

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= -\frac{x}{\alpha} \varphi(y, z) + \frac{V}{4(4-\alpha)J} \left[\left(-4 + \frac{20}{3} \alpha - 2\alpha^2 \right) (xy^3 - x^3y) + \right. \\ &\quad \left. + (-8 + 8\alpha - 2\alpha^2) \left(xyz^2 - \frac{x^3z}{3} \right) \right], \\ \Phi_1 &= \frac{V}{4(4-\alpha)J} \left[2\alpha \left(yz^2 - \frac{y^3}{3} \right) + 4(1-\alpha)(yz^2 - xy^2) \right] + \frac{1}{\alpha} \varphi(y, z), \\ \Phi_2 &= \frac{V}{4(4-\alpha)J} (4 - 2\alpha) \left(xy^2 + xz^2 - \frac{2}{3} x^3 \right), \quad \Phi_3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Hierin ist φ eine nur von y und z abhängende harmonische Funktion. Man überzeugt sich leicht, daß dieser Ansatz der Bedingung (3) genügt. Die Spannungsfunktion wird gemäß (2)

$$F = \frac{V}{4(4-\alpha)J} \left[(4 - 2\alpha)(xy^3 + xyz^2) + \left(\frac{8}{3} \alpha - 4 \right) x^3y \right], \quad (5)$$

und wir erhalten aus (1)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{V}{J} xy, \quad \sigma_y = 0, \quad \sigma_z = 0, \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{V}{4(4-\alpha)J} [(-8 + 2\alpha)y^2 + (4 - 2\alpha)z^2], \\ \tau_{yz} &= 0, \quad \tau_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Die Normalspannung σ_x entspricht zwar noch dem Geradliniengesetz der elementaren Festigkeitslehre, aber es treten Schubspannungen τ_{xy} und τ_{xz} auf, welche noch Randbedingungen zu erfüllen haben.

Für reine Drillungsbeanspruchung nehmen wir am einfachsten die folgenden Umformungen vor:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= -\frac{x}{\alpha} \varphi(y, z), \quad \Phi_1 = \frac{1}{\alpha} \varphi(y, z), \quad \Phi_2 = \frac{G\theta}{\alpha} xz, \\ \Phi_3 &= -\frac{G\theta}{\alpha} xy. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

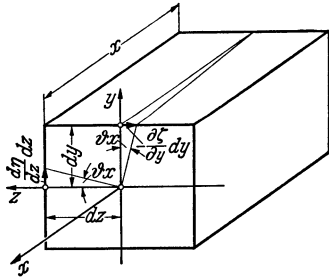


Abb. 74. Formänderung eines Elementarprismas bei Drillingsbeanspruchung.

Hiermit liefert (2)

$$F = 0, \tag{8}$$

und (1) geht über in

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0, \\ \tau_{xy} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + G \vartheta z, \\ \tau_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - G \vartheta y. \end{aligned} \right\} \tag{9}$$

Hierin ist ϑ der Verdrehungswinkel in bezug auf die Längeneinheit des Stabes, für welchen wir aus Abb. 74 die Beziehung

$$\vartheta x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \tag{10}$$

ablesen. Dieselbe ist in der Tat erfüllt; denn hier wird [vgl. (49) von III, 6]

$$\eta = \frac{1}{2G} \left(-\frac{\partial F}{\partial y} + 2\alpha \Phi_2 \right) = \vartheta xz, \quad \zeta = \frac{1}{2G} \left(-\frac{\partial F}{\partial z} + 2\alpha \Phi_3 \right) = -\vartheta xy. \tag{11}$$

Zunächst sollen die Vollstäbe auf Kerbwirkung hin untersucht werden.

2. Vollquerschnitte (Stäbe mit Längsnut).

Wir behandeln vorerst die „flache Kerbe“. Dabei setzen wir voraus, daß der Rand in der näheren Umgebung der Stelle, an welcher die Kerbe angebracht werden soll, in erster Annäherung als geradlinig angesehen werden kann (Abb. 75). Für die Schubspannungen an dieser Stelle, an welcher ja y und z ganz bestimmte Werte annehmen, ergeben sich aus (6) oder (9) die Ausdrücke

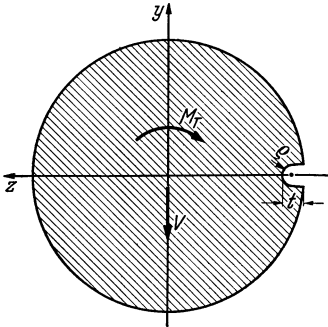


Abb. 75. Welle mit flacher Längsnut bei Schub oder Drillung.

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + C_1, \quad \tau_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + C_2. \tag{12}$$

Darin sind C_1 und C_2 Konstanten. Sie treten nicht mehr in Erscheinung, wenn wir zu φ noch das Glied $C_1 \cdot y + C_2 \cdot z$ hinzunehmen; dann wird

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \tau_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \tag{13}$$

Der Grenzübergang, der für die folgerichtige Behandlung der „flachen Kerbe“ notwendig ist, verlangt nun, daß dieser einfache Zusammenhang infolge der geringen Ausdehnung der Störzone nicht nur an der Stelle gilt, an der die Kerbe angebracht wird, sondern auch noch innerhalb der Störzone. Wir haben daher für die Berechnung der Kerbspannungen unmittelbar die Beziehungen (13) zu verwenden; sie sind uns aber in ähnlicher Form bereits wiederholt begegnet [vgl. (236) und (257)

von V, 5]. Der weitere Rechnungsgang ist daher schon bekannt. Die zugehörige Spannungsverteilung erläutert Abb. 71. Als Formzahl gilt

$$\frac{\tau_{\max}}{\tau_n} = 1 + \sqrt{\frac{t}{\varrho}}. \quad (14)$$

Als Nennspannung dient entsprechend unserer Ableitung die Schubspannung des ungekerbten Stabes an der betreffenden Stelle.

Als Beispiel diene der Zylinder mit Längsnut (Abb. 75). Bei Schub ist für die Nennspannung, wenn die Kerbe auf der Nulllinie des Querschnittes liegt,

$$\tau_n = \frac{1 + \frac{2}{m}}{1 + \frac{1}{m}} \frac{V}{\pi b^2} \quad (15)$$

maßgebend. Bei Drillung haben wir

$$\tau_n = \frac{2M_T}{\pi b^3} \quad (16)$$

zu setzen.

Bezüglich des Einflusses der Kerbtiefe im Verhältnis zu den Abmessungen des Querschnittes liegt eine allgemeine Theorie zur Zeit noch nicht vor. Für Drillungsbeanspruchung gilt jedoch eine von C. Weber¹ gegebene Lösung Aufschluß, welche sich auf den Fall der kreisförmigen Kerbe bezieht. Der Rand besteht aus zwei Kreisen, und zwar liegt der Mittelpunkt des kleineren auf der Peripherie des größeren (Abb. 76). Für kleine Werte c/b ist die Übereinstimmung der Weberschen Lösung mit (14) (für $t = \varrho$) bemerkenswert; denn in beiden Fällen ergibt sich für die Formzahl der Wert 2.

Im allgemeinen wird man auch bei Kerben, die nicht mehr als ausgesprochen flach anzusprechen sind, in erster Annäherung noch mit der Formzahl (14) rechnen können, wenn man als Nennspannung die Randschubspannung des ungekerbten Stabes verwendet; denn auf diese Weise wird die etwas zu hohe Formzahl durch eine zu niedrige Nennspannung wieder ausgeglichen.

3. Dünnwandige Hohlquerschnitte.

Bei dünnwandigen Hohlquerschnitten vereinfacht sich die Rechnung insofern, als die Schubspannung in den Wandungsteilen ohne Berücksichtigung der Kerbe noch als gleichmäßig über die Dicke der Wandung verteilt angesehen werden kann. Zur Berechnung der Nennspannung genügen infolgedessen jeweils reine Gleichgewichtsbetrachtungen.

In Abb. 77 ist ein zur y -Achse symmetrischer Querschnitt von überall gleicher Wandstärke dargestellt. Zur Ermittlung der Schubspannung an einer Stelle A infolge Schubbeanspruchung schneiden beiderseits an der betreffenden Stelle parallel zur x -Achse senkrecht zur Wandung

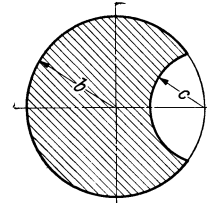


Abb. 76. Von C. Weber behandelter Sonderfall: Der Rand besteht aus zwei Kreisen, wobei der Mittelpunkt des kleineren auf der Peripherie des größeren liegt.

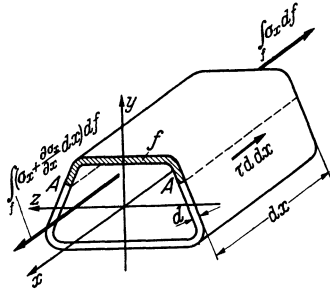
¹ Weber, C.: Lehre der Verdrehungsfestigkeit. VDI-Forsch.-Heft Nr. 249. Berlin: VDI-Verlag 1921.

auf und betrachten ein Stück von der Länge dx . Aus dem Gleichgewicht der Kräfte folgt dann

$$2\tau d dx = \int_f \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx y df. \tag{17}$$

Hierbei ist f die in Abb. 77 schraffierte Fläche des abgeschnittenen Teiles. Setzen wir σ_x aus (6) ein, so ergibt sich schließlich die bekannte Formel

$$\tau = \frac{VS}{2dJ}, \tag{18}$$



wobei S das statische Moment des Flächenstückes f in bezug auf die Nulllinie, J das Trägheitsmoment des ganzen Querschnittes in bezug auf die Nulllinie bedeutet.

Abb. 77. Gleichgewicht der Spannungen am symmetrischen Hohlquerschnitt.

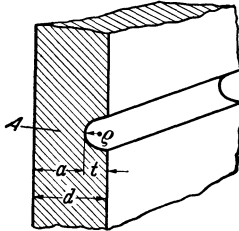
Bei Drillungsbeanspruchung ergibt sich aus dem Moment der Spannungen in bezug auf einen beliebig gewählten Punkt die bekannte Beziehung

$$\tau = \frac{M_T}{2dF}; \tag{19}$$

dabei ist F die von der Wandungsmittellinie eingeschlossene Fläche.

Bringen wir nun an der betrachteten Stelle außen oder innen eine Kerbe in Form einer Längsnut an (Abb. 78), so erhöht sich die Schubspannung infolge Verringerung der Wandstärke von d auf a aus Gleichgewichtsgründen bei Schubbeanspruchung auf den Wert

$$\tau_n = \frac{VS}{2aJ}, \tag{20}$$



bei Drillung auf

$$\tau_n = \frac{M_T}{2aF}. \tag{21}$$

Abb. 78. Längsnut am Hohlquerschnitt.

Diese Werte, welche gleichmäßige Verteilung der Spannung im engsten Querschnitt voraussetzen, stellen die Nennspannungen dar.

Zur Berechnung der in Wirklichkeit eintretenden ungleichmäßigen Verteilung greifen wir zurück auf die grundlegenden Beziehungen (6) und (9). Bei den Vollquerschnitten wurde durch den Grenzübergang zur flachen Kerbe die Ausdehnung der Störzone gegenüber den Querschnittsabmessungen als so klein angesehen, daß die einfachen Beziehungen (13) in Kraft traten. In ähnlicher Weise ist dies auch bei dünnwandigen Hohlquerschnitten der Fall. Infolge der kleinen Wandstärke erstreckt sich auch hier die Störzone nur auf einen Bereich, der im Vergleich zu den übrigen Abmessungen des Querschnittes als sehr klein anzusehen ist, so daß wir wieder mit den Beziehungen (13) an die Lösung der Aufgabe heranzugehen haben. Da bis auf den unwesent-

lichen Faktor $\sin w$ Übereinstimmung mit den Beziehungen (236) vom Abschnitt V besteht, so sind die dort für flache und tiefe Kerbe angegebenen Lösungen unmittelbar auf den hier vorliegenden Fall anwendbar. Es gilt mithin als Formzahl der flachen Kerbe wieder

$$1 + \sqrt{\frac{t}{e}} \quad \text{und als Formzahl der tiefen Kerbe} \quad \frac{\sqrt{\frac{a}{e}}}{\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a}{e}}}. \quad \text{Die Ermittlung der Formzahl für beliebige Tiefe geht aus dem Nomogramm, Abb. 103 und 104, hervor.}$$

4. Wellen mit Querbohrung.

Bei Wellen und Stäben mit Querbohrungen oder senkrecht zur Achse angeordneten Langlöchern haben wir es mit Ausnahmefällen zu tun; denn es handelt sich dabei nicht mehr um prismatische Körper, und die Grundgleichungen dieses Abschnittes sind infolgedessen nicht mehr anwendbar. Man kann aber derartige Fälle mit Hilfe der Beziehungen des ebenen Spannungszustandes behandeln, wie L. Föppl¹ gezeigt hat.

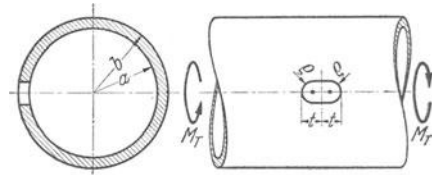


Abb. 79. Hohlwelle mit Querbohrung (Langloch).

Handelt es sich z. B. um eine dünnwandige Hohlwelle mit einer Querbohrung, deren Durchmesser als klein gegenüber dem Wellendurchmesser angesehen werden kann, so haben wir im Falle der Drillingsbeanspruchung einen ebenen Spannungszustand vor uns; denn die Störzone kann unter diesen Voraussetzungen als Stück einer Scheibe angesehen werden. Es handelt sich demnach um das Problem der auf Schub beanspruchten Scheibe, dessen Lösung wir in IV, 4, C bereits angegeben haben. Es ist dabei aber zu beachten, daß als Nennspannung die Drillspannung des ungelochten Stabes an der Stelle, an der das Loch angebracht wird, verwendet werden muß, also

$$\tau_n = \frac{2 M_T b}{\pi (b^4 - a^4)}. \quad (22)$$

Bei der auf Schub beanspruchten Scheibe [vgl. IV, (144) bis (146)] ist die entsprechende Spannung aber nicht der dort verwendete Bezugswert p , sondern $\frac{3}{2} p$. Beim Langloch (Abb. 79) ergibt sich daher für den Spannungshöchstwert, welcher am Rand in der Nähe des Kerbgrundes in Form einer Zugspannung auftritt [vgl. IV, (154) und Abb. 35], der Ausdruck

$$\frac{\sigma_{\max}}{\tau_n} = 2 + \sqrt{\frac{t}{e}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{t}{e}}}. \quad (23)$$

¹ Föppl, L.: Z. VDI Bd. 65 (1921) S. 497.

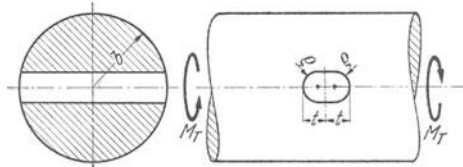


Abb. 80. Welle mit Querbohrung.

Bei kreisförmigen Löchern ($t = \rho$) ist also die Höchstspannung gleich der 4fachen Nennspannung.

Dieselbe Betrachtungsweise kann aber auch in guter Annäherung auf volle Wellen angewandt werden (Abb. 80, vgl. auch die oben zitierte Arbeit von L. Föppl).

VII. Theorie der Entlastungskerben.

1. Begriffserklärung.

Bisher haben wir uns mit Spannungszuständen befaßt, wie sie durch eine vorgegebene Kerbform bedingt sind. In dem nun folgenden Abschnitt soll der umgekehrte Gedankengang vorherrschend sein: Nicht mehr nach den Spannungen bei gegebener Gestalt des Randes, sondern nach der Gestalt des Randes bei gegebener und möglichst wenig gestörter Spannungsverteilung soll jetzt gefragt werden. Natürlich ist die Behandlung dieser zweiten Grundaufgabe mit der Beherrschung der ersten unmittelbar verknüpft.

Die Gestaltung eines Bauteiles ist zwar vorwiegend von vornherein konstruktiv bedingt, läßt sich aber doch zu einem gewissen Teile noch durch den Konstrukteur willkürlich festlegen, wobei sich in den meisten Fällen durch konstruktiv scheinbar unwesentliche Änderungen eine Verbesserung der Spannungsverteilung und damit der Festigkeit des Bauteiles erreichen läßt. Es handle sich beispielsweise um eine Welle, die aus rein konstruktiven Gründen eine ringsum laufende Nut besitzt, im übrigen aber vollkommen glatt ist (Abb. 67). Der Spannungsverlauf der Welle, die auf Drillung beansprucht sei, ist durch die Nut erheblich gestört, und es tritt im Kerbgrund der Nut eine beträchtliche Spannungserhöhung auf. Wir wollen nun annehmen, daß es in konstruktiver Hinsicht nichts ausmachen würde, wenn in der Nähe der Nut eine weitere Nut angebracht wird. Man wird zwar zunächst vermuten, daß hierdurch eine weitere und vor allem unnötige Spannungserhöhung hervorgerufen wird. Dies ist gewiß der Fall, aber — und darauf kommt es an — diese zweite willkürliche Spannungserhöhung ist verbunden mit einer Abminderung der ersten. Es tritt, anschaulich gesprochen, eine Verteilung des Kerbeffektes auf beide Stellen ein, mit dem Endergebnis, daß die Spannungserhöhung nunmehr an beiden Stellen geringer ist als im Falle des alleinigen Vorhandenseins der ersten (konstruktiv notwendigen) Kerbe.

Wohl noch anschaulicher läßt sich diese Erscheinung deuten, wenn wir von der Vorstellung des Kraftflusses ausgehen; dabei sei unter Kraftfluß schlechthin die Übertragung der von außen eingeleiteten Kräfte durch das Bauteil hindurch verstanden. Ohne auf die Eigenschaften des elastischen Zustandes im einzelnen näher eingehen zu müssen, führt diese Vorstellung schon ganz oberflächlich unmittelbar zu einer sehr einleuchtenden Erklärung der Erscheinung. Der Kraftfluß wird nämlich im Rahmen dieses Gedankenganges durch die zweite Kerbe nach den Seiten und dem Innern hin abgelenkt. Die Kerbwirkung

kann sich nicht mehr voll ausbilden, nachdem der ankommende Kraftfluß bereits geschwächt ist.

Aber auch ohne Zuhilfenahme dieser beiden Gedankenbilder können wir die Erscheinung streng theoretisch erklären, indem wir nämlich auf das schon wiederholt erwähnte Abklingungsgesetz (vgl. II, 2) Bezug nehmen. Danach ist es eine theoretisch nachgewiesene (vgl. IV und V) Eigenschaft aller Kerben, einerseits im Kerbgrund eine Spannungserhöhung, andererseits aber in der weiteren Umgebung eine Spannungsabminderung hervorzurufen. Die neue Kerbe ruft zwar an der Stelle, an der sie angebracht wird, eine Spannungserhöhung hervor, jedoch in der Umgebung und damit auch im Kerbgrund der ersten Kerbe eine Entlastung.

Durch geschickte Anordnung solcher zusätzlicher Kerben hat es der Konstrukteur weitgehend in der Hand, die Kerbwirkung günstig zu beeinflussen und gefährdete Zonen des Bauteiles zu entlasten. Nach A. Thum¹ nennt man derartige zusätzliche und nur mit Rücksicht auf die Verteilung der Spannungen angebrachte Kerben Entlastungskerbten.

2. Entlastungskerbten bei Drillungsbeanspruchung.

Wir wollen nun diesen Entlastungseffekt der mehrfachen Kerben mit Hilfe der mathematischen Elastizitätstheorie rechnerisch nachweisen, um damit zugleich die Eigenschaften der Formzahl bei mehrfachen Kerben feststellen zu können.

Als Beispiel diene eine auf Drillung beanspruchte Welle, welche eine bzw. mehrere flache Kerben besitzen möge, und zwar entweder in Form von Längsnuten wie in Abb. 75 oder in Form von ringsumlaufenden Nuten wie in Abb. 67. In beiden Fällen führt die Grenz- betrachtung der flachen Kerben zu den Beziehungen [vgl. V, (257) bzw. VI, (13)!]

$$\tau_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \tau_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (1)$$

Dabei haben wir entsprechend Abb. 81 die x -Achse längs des Randes und die y -Achse senkrecht zum Rand vorausgesetzt. Der gemeinsame Index der beiden Schubspannungen, welcher der dritten Koordinatenrichtung entsprechen würde, ist der Einfachheit halber fortgelassen worden. Die harmonische Funktion φ hängt nur von x und y ab und genügt der Bedingung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (2)$$

Wir wollen ferner ein isometrisches Netz zugrunde legen, indem wir zwischen den kartesischen Koordinaten x , y und den krummlinigen Koordinaten u , v die Beziehungen

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial y}{\partial u} \quad (3)$$

¹ Thum, A., u. H. Oschatz: Steigerung der Dauerfestigkeit bei Rundstäben mit Querbohrungen. Forsch. Ing.-Wes. Bd. 3 (1932) S. 87.

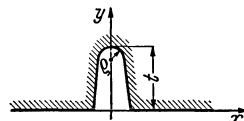


Abb. 81. Einfache flache Kerbe.

voraussetzen (vgl. IV, 1). Dann nimmt die Differentialgleichung (2) in krummlinigen Koordinaten die Form

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = 0 \quad (4)$$

an. Nach bekannten Sätzen der Funktionentheorie lassen sich auf diese Weise u und v als Real- und Imaginärteil einer komplexen Funktion $f(x + iy)$ auffassen, wobei $i = \sqrt{-1}$ bedeutet. Setzen wir also

$$x + iy = z, \quad u + iv = w, \quad (5)$$

so besteht zwischen den komplexen Funktionen z und w der Zusammenhang

$$z = x + iy = f(w) = f(u + iv). \quad (6)$$

Die Verzerrungsfaktoren in der u - und v -Richtung werden einander gleich, und es gilt

$$h_u = h_v = h = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2} = \left|\frac{dz}{dw}\right|. \quad (7)$$

Für die Krümmungshalbmesser ρ_u und ρ_v der Linien $u = \text{konst.}$ und $v = \text{konst.}$ gilt entsprechend (174) vom Abschnitt IV mit $h_u = h_v = h$ (vom Vorzeichen des Krümmungshalbmessers kann hier abgesehen werden):

$$\frac{1}{\rho_u} = \frac{1}{h^2} \frac{\partial h}{\partial u}, \quad \frac{1}{\rho_v} = \frac{1}{h^2} \frac{\partial h}{\partial v}. \quad (8)$$

Die Schubspannungen längs der Linien u bzw. $v = \text{konst.}$ ergeben sich aus φ mittels der Beziehungen [vgl. (238) von V]

$$\tau_u = \frac{1}{h} \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \quad \tau_v = \frac{1}{h} \frac{\partial \varphi}{\partial v}. \quad (9)$$

Die Lösung für φ muß in einiger Entfernung von den Kerben in $\tau_n y$ übergehen. Dieser Ausdruck entspricht dem ungekehrten Stab und liefert hier zugleich die Nennspannung.

Zunächst sei nur eine Kerbe vorhanden. Hat dieselbe elliptische Gestalt, so führt das Koordinatensystem

$$z = \mathfrak{S}in w \quad \text{mit} \quad x = \mathfrak{S}in u \cos v, \quad y = \mathfrak{C}of u \sin v \quad (10)$$

zum Ziele. Die Lösung wurde bereits in V, 5, C gegeben. Es ergibt sich die Formzahl

$$\frac{\tau_{\max}}{\tau_n} = 1 + \sqrt{\frac{t}{\varrho}}. \quad (11)$$

Das verwendete Koordinatensystem hatte insofern einen gewissen Nachteil, als der Rand aus zwei Koordinatenlinien bestand, nämlich aus der eigentlichen Kerbe $u = u_0$ und dem geradlinigen Teil $v = 0$. Einfacher gestaltet sich die Rechnung, insbesondere bei Behandlung der mehrfachen Kerben, wenn eine geschlossene Randlinie vorhanden ist. Bei der einfachen Kerbe läßt sich dies mit Hilfe des folgenden Koordinatensystems erreichen:

$$z = \sqrt{w^2 - 1} \quad (12)$$

Abb. 82 zeigt einige Linien $v = \text{konst.}$ Für große u - oder v -Werte wird $x = u$ und $y = v$, und die Linien $v = \text{konst.}$ fallen mit den Geraden $y = \text{konst.}$ zusammen. An der Stelle $x = 0, y = 1$ tritt eine Ablenkung ein. Benutzen wir nun eine solche Linie als Rand, so handelt es sich um eine Kerbe mit wesentlich abgerundeten äußeren Ecken; die Formzahl wird daher voraussichtlich etwas niedriger ausfallen, als Gleichung (11) entspricht.

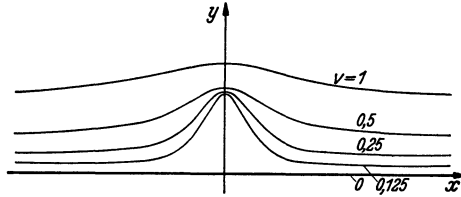


Abb. 82. Koordinatensystem mit geschlossenen Randlinien $v = \text{konst.}$ zur vereinfachten Behandlung der flachen Kerbe.

Die gesuchte Lösung muß der Bedingung (4) genügen, ferner für großes u oder v in $\tau_n x$ bzw. $\tau_n u$ übergehen (wie wir oben gesehen haben, wird dann $x = u$). Ferner muß τ_v

längs der Randlinie $v = v_0$ verschwinden. Da $\tau_n u$ allen drei Bedingungen genügt, stellt es die richtige Lösung dar. Mithin wird

$$\varphi = \tau_n u, \quad \tau_v = 0, \quad \tau_u = \frac{\tau_n}{h}. \quad (13)$$

Der Kerbgrund liegt auf der y -Achse; dort wird $u = 0$ und mithin

$$y = \sqrt{v^2 + 1}, \quad h = \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{v}{\sqrt{v^2 + 1}}, \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{h^2} \frac{\partial h}{\partial v} = \frac{1}{v^2 \sqrt{1 + v^2}}. \quad (14)$$

Im Kerbgrund ist ferner $v = v_0$ zu setzen. Die Kerbtiefe wird

$$t = (y)_{u=0} - (y)_{u=\infty} = \sqrt{v_0^2 + 1} - v_0, \quad (15)$$

so daß sich als Kerbkürmung

$$\frac{t}{\varrho} = \frac{1}{v_0^2} \left(1 - \frac{v_0}{\sqrt{1 + v_0^2}} \right) \quad (16)$$

ergibt. Die Formzahl erhalten wir aus (13) zu

$$\alpha_k = \frac{\tau_{\max}}{\tau_n} = \frac{1}{h} = \frac{1}{v_0} \sqrt{1 + v_0^2}. \quad (17)$$

Die Elimination des Parameters v_0 aus (16) und (17) ergibt schließlich

$$\frac{t}{\varrho} = (\alpha_k^2 - 1) \left(1 - \frac{1}{\alpha_k} \right). \quad (18)$$

Bei stark gekrümmten Kerben, also großen Werten t/ϱ , nimmt die Formzahl — wie zu erwarten war — große Werte an, und zwar wird

$$\alpha_k = \sqrt{\frac{t}{\varrho}}, \quad (19)$$

was mit (11) für großes t/ϱ übereinstimmt. Im übrigen liefert die gewonnene Beziehung (18) stets etwas kleinere Werte als (11), was von der oben erwähnten Abrundung der äußeren Ecken herrührt.

Nach diesen Vorbetrachtungen kommen wir zur eigentlichen Theorie des Entlastungseffektes. Wir legen jetzt ein neues Koordinatensystem

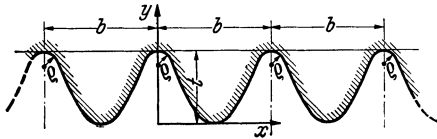


Abb. 83. Mehrfach gekerbter Rand.

zugrunde, welches einem mehrfach gekerbten Rand entspricht (Abb.83). Es soll sich dabei um unendlich viele gleich tiefe Kerben handeln, die in gleichem Abstände b voneinander angeordnet sind. Wir wollen wieder eine Abrundung der äußeren Ecken in Kauf nehmen, um eine geschlossene Randlinie verwenden zu können, und setzen

$$\cos z = \lambda \cos w. \quad (20)$$

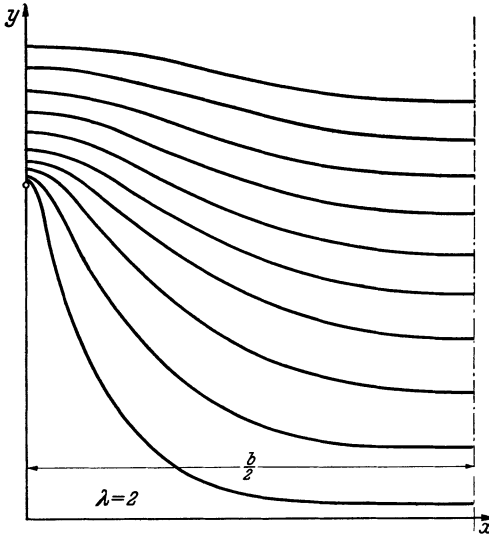


Abb. 84. Linien $v = \text{konst.}$ (zugleich Spannungslinien und auch Randlinien) für den mehrfach gekerbten Rand.

Abb. 84 gibt die Linien $v = \text{konst.}$ für den Fall $\lambda = 2$ wieder. Für großes y entsprechen dieselben noch den Geraden $y = \text{konst.}$, während in der Nähe der x -Achse mehr und mehr die periodische Auslenkung in Erscheinung tritt. Nachdem es sich wieder um eine geschlossene Randlinie $v = v_0$ handelt, gelten die Beziehungen (13) auch hier. Für $x = u = 0$ wird

$$\left. \begin{aligned} y &= \Re \operatorname{Co}f(\lambda \operatorname{Co}f v), \\ h &= \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\lambda \operatorname{Si}n v}{\sqrt{\lambda^2 \operatorname{Co}f^2 v - 1}}, \\ \frac{1}{e} &= \frac{1}{h^2} \frac{\partial h}{\partial v} = \frac{(\lambda^2 - 1) \operatorname{Co}f v}{\lambda \operatorname{Si}n^2 v \sqrt{\lambda^2 \operatorname{Co}f^2 v - 1}}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Für den jeweiligen Kerbgrund muß ferner $v = v_0$ gesetzt werden.

Bei der weiteren Rechnung kommt es uns in erster Linie darauf an, welche Beziehung sich für die Formzahl bei starker Kerbkürmung ergibt. Aus dem Vergleich mit der für die einfache Kerbe bei starker Krümmung abgeleiteten Beziehung (19) können wir dann ja bereits den Entlastungseffekt im wesentlichen erkennen. Für kleines v_0 erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} t &= (y)_{u=0} - (y)_{u=\frac{\pi}{2}} = \Re \operatorname{Co}f \lambda, \\ \frac{1}{e} &= \frac{\sqrt{\lambda^2 - 1}}{\lambda \operatorname{Si}n^2 v_0}, \quad \alpha_k = \frac{1}{h} = \frac{\sqrt{\lambda^2 - 1}}{\lambda \operatorname{Si}n v_0} = \sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda} \frac{1}{e}}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Daraus folgt
$$\alpha_k = \sqrt{\frac{\mathfrak{E}gt}{\varrho}} \tag{23}$$

oder bei Berücksichtigung der Einheitsstrecke des Koordinatensystems $l = b/\pi$:

$$\alpha_k = \sqrt{\frac{b}{\pi \varrho} \mathfrak{E}g \frac{\pi t}{b}} = \sqrt{\frac{t}{\varrho} \frac{b}{\pi t} \mathfrak{E}tg \frac{b}{\pi t}}. \tag{24}$$

Der Vergleich mit (19) zeigt, daß der Entlastungseffekt in dem Faktor $\frac{b}{\pi t} \mathfrak{E}tg \frac{b}{\pi t}$ zum Ausdruck kommt. Diese Zahl, welche nur vom Verhältnis b/t , d. h. von der Kerbnähe abhängt, wollen wir die Entlastungszahl nennen und mit γ bezeichnen. Sie ist in Abb. 85 dargestellt; sie steigt vom Wert 0 der unendlich nahen Kerben allmählich an zu dem Wert 1 für sehr weit voneinander entfernte Kerben, wo sich wieder die Formzahl der einfachen Kerbe einstellt; in der Tat stimmt Gleichung (24) für $b = \infty$ mit (19) überein.

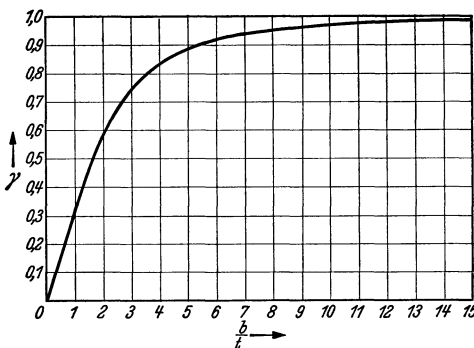


Abb. 85. Die Entlastungszahl γ in Abhängigkeit von der „Kerbnähe“ b/t .

3. Allgemeine Eigenschaften der Formzahl bei Entlastungskerbten.

Um zu allgemeinen Gesichtspunkten für die Formzahl bei Entlastungskerbten zu gelangen, nehmen wir noch einmal Bezug auf die Beziehungen (24) und (19). Der Übergang von der einfachen zur mehrfachen Kerbe äußert sich offenbar in einer Abminderung der Tiefenwirkung. An die Stelle der wirklichen Tiefe t tritt bei der mehrfachen Kerbe die mit der Entlastungszahl γ multiplizierte wirksame Tiefe

$$t_w = t \cdot \gamma. \tag{25}$$

Genauere rechnerische Untersuchungen zeigen, daß dieser Gedankengang ganz allgemein zu sehr befriedigenden Ergebnissen führt; es ist demnach einfach die wirkliche Tiefe t durch die wirksame Tiefe t_w in den bisherigen Formeln zu ersetzen.

Man setzt also beispielsweise für die Formzahl der mehrfachen flachen Kerbe ohne Abrundung der äußeren Ecken bei Drillung und Schub

$$\alpha_{fk} = 1 + \sqrt{\frac{t_w}{\varrho}} \tag{26}$$

und entsprechend bei Zug und Biegung

$$\alpha_{fk} = 1 + 2 \sqrt{\frac{t_w}{\varrho}}. \tag{27}$$

VIII. Theorie der Spitzkerben.

1. Das Versagen der klassischen Elastizitätslehre bei Spitzkerben und seine Ursache.

Unsere bisherigen Untersuchungen hatten ausschließlich ihre Grundlage in der klassischen Elastizitätslehre. Nun kommen wir zu einer Gruppe von Aufgaben, deren Lösung Gedankengänge erforderlich macht, welche uns an die Grenzen des Fundamentes der alten Elastizitätslehre, ja sogar darüber hinaus zu einer neuen Theorie hinführen.

Während bei Kerben von nicht allzu kleinem Krümmungshalbmesser die klassische Elastizitätslehre noch ausreichte, führt sie bei stark gekrümmten Kerben oder gar bei Spitzkerben zu völlig falschen Ergebnissen. So haben wir beispielsweise für die Formzahl der flachen Kerbe bei Schub oder Drillung die Beziehung $1 + \sqrt{t/\rho}$ gefunden. Beträgt also z. B. der Krümmungshalbmesser nur $1/10\,000$ der Tiefe, so würde hiernach die Formzahl den unmöglichen Wert 101 annehmen. Ähnlich liegen die Verhältnisse bei sämtlichen übrigen abgeleiteten Formzahlen. Bei verschwindend kleinem Krümmungshalbmesser wird die Formzahl jeweils mit $\sqrt{t/\rho}$ proportional. Für die Spitzkerben würde sich demnach der unmögliche Wert ∞ ergeben. Wir sind hier offenbar an der Grenze des Geltungsbereiches der alten Lehre angelangt. Um zu vernünftigen Rechnungsgrundlagen zu kommen, sehen wir uns jetzt vor die Aufgabe gestellt, eine neue Gedankenbrücke zu dem wirklichen Verhalten der Werkstoffe zu schlagen.

Bevor wir aber an diese nicht leichte Aufgabe herangehen, müssen wir uns darüber klar sein, worin das Versagen der bisherigen Rechnungsgrundlagen seine Ursache hat. Wir greifen deshalb zurück auf Abschnitt III; dort hatten wir die Beziehungen für Spannungs- und Formänderungszustand abgeleitet. Als Gedankenmodell diente uns dabei — und das ist bereits von grundlegender Bedeutung — ein unendlich kleines Teilchen mit den Kanten dx, dy, dz . Die dabei stillschweigend gemachten Voraussetzungen der beliebigen Aufteilbarkeit des Stoffes, seiner Strukturlosigkeit usw. stellen offenbar das Kriterium für die Brauchbarkeit der klassischen Elastizitätslehre dar. Solange es sich nämlich um schwach gekrümmte Ränder handelt oder — genauer gesagt — solange der Krümmungshalbmesser der Oberfläche überall genügend groß ist gegenüber den Kristallen des Werkstoffes, solange macht sich kein Fehler bemerkbar; denn bei schwach gekrümmter Oberfläche werden sich die Spannungen, die ja mit den Randbedingungen zusammenhängen, erst innerhalb größerer Strecken wesentlich ändern, nicht aber innerhalb von Entfernungen, die von derselben Größenordnung sind wie die Abmessungen der Kristalle. Daher kommt es, daß bei schwacher Randkrümmung das Werkstoffgefüge noch ohne Einfluß ist auf die Spannungsverteilung und damit auch auf die Formzahl.

Anders ist es dagegen bei starker Oberflächenkrümmung. Dann treten Spannungsänderungen bereits innerhalb sehr kleiner Entfernungen auf. Die Anwendbarkeit der klassischen Elastizitätslehre würde

jetzt bedingen, daß der Werkstoff noch in Bezirken von der Größenordnung der Kristalle als strukturlos angesehen werden kann, was aber dem Vorhandensein der Kristalle selbst widerspricht.

Diese Überlegung, die uns die Ursache des Versagens der alten Lehre vor Augen geführt hat, wird uns nun auch den Weg zu einer neuen Theorie zeigen.

2. Das neue Gedankenmodell.

Wir haben gesehen, daß es nicht mehr zulässig ist, ein unendlich kleines Teilchen zugrunde zu legen. Wir müssen daher offenbar dazu übergehen, ein Teilchen von endlichen Abmessungen als Gedankenmodell zu verwenden.

Wir denken uns mithin nunmehr den Werkstoff aus lauter kleinen, aber doch endlichen Teilchen aufgebaut. Die folgerichtige Durchführung dieses Gedankens ergibt einerseits neue Gleichgewichts-, andererseits auch neue Formänderungsbedingungen. Dabei müssen wir uns — strenggenommen — über eine bestimmte Gestalt des Teilchens klarwerden, ferner über das Wesen seiner elastischen Formänderung, die Art der Kraftübertragung auf die benachbarten Teilchen usw.; kurzum, es sind eine Reihe von Annahmen zu machen, welche dem Verhalten des Werkstoffes gerecht werden. Die Ergebnisse dieser Grundbetrachtungen wären dann neue elastische Grundgleichungen, welche — entsprechend der Endlichkeit der Teilchen — nicht mehr Differentialgleichungen, sondern Differenzgleichungen wären. Die Lösung der einzelnen Aufgaben würde in der Anwendung der Differenzenrechnung bestehen. Nach diesen Eröffnungen wird der Leser, der vielleicht einmal selbst Aufgaben der Potentialtheorie mit Hilfe der Differenzenrechnung gelöst hat, die praktische Durchführbarkeit der Rechnung sicher für fraglich halten; denn bekanntlich sind derartige Aufgaben ungeheuer zeitraubend. In der Tat wäre es so gut wie aussichtslos, auf diesem Wege weiter zu kommen; es ist aber — wie wir jetzt sehen werden — auch gar nicht notwendig.

Das Versagen der alten Lehre beschränkt sich ja nur auf die Zonen der starken Spannungsänderung; diese sind aber nach dem Abklingungsgesetz verhältnismäßig eng begrenzt. Es wäre also übertrieben, die alte Theorie völlig zu verwerfen, da sie ja in den übrigen Gebieten ohne weiteres anwendbar ist. Im Gegenteil, wir benutzen sie als eleganten Führer durch die verhältnismäßig weit ausgedehnten Zonen des Bauteiles, wo nur geringe Spannungsänderungen vorhanden sind und die Differenzenrechnung zu langwierig wäre. Auf diese Weise können wir auch bei starker Krümmung des Randes noch von der klassischen Elastizitätstheorie Gebrauch machen, und erst in der Störzone selbst müssen wir das neue Gedankenmodell zugrunde legen.

Rechnerische Überlegungen zeigen nun, daß in guter Annäherung auch noch ein Teil der Störzone mit der alten Theorie behandelt werden darf, ja man gelangt sogar selbst dann noch zu brauchbaren Ergebnissen, wenn man erst unmittelbar an der Störungsstelle selbst von dem neuen Gedankenmodell Gebrauch macht.

Es zeigt sich nämlich, daß die Formzahl der Spitzkerben in maßgeblichem Zusammenhang mit der Größe unseres Teilchens steht, derart, daß diese Größe die Rolle einer neuen Werkstoffkonstanten übernimmt. Nachdem aber diese Konstante ohnehin durch Vergleich mit Versuchsergebnissen bestimmt werden muß, wird der durch Vernachlässigung des Gedankenmodells in der übrigen Störzone evtl. noch vorhandene Fehler in bezug auf die Formzahl praktisch wieder aufgehoben.

3. Theorie der Spitzkerbenformzahl.

Für die Bestimmung der Spitzkerbenformzahl ergibt sich aus den obigen Entwicklungen nunmehr das folgende Verfahren. Wir gehen von der Lösung der Aufgabe nach der klassischen Elastizitätslehre aus, wobei die Spannungsverteilung — wie in den bereits behandelten Beispielen — für veränderlichen Kerbkrümmungshalbmesser vorliegen muß. Im Kerbgrund kommt das neue Gedankenmodell zur Anwendung, und wir denken uns dort ein Teilchen von der Breite ε . Das Teilchen ist immerhin so klein, daß die an seinen Seitenflächen angreifenden Spannungen als konstant verteilt angesehen werden können. Wir erhalten die neuen Spannungen mithin durch Bildung der Mittelwerte der alten Spannungen an den Seitenflächen des Teilchens.

Als Beispiel diene zunächst die flache Kerbe bei Schub oder Drillung.

A. Die flache Spitzkerbe bei Schub oder Drillung.

Entsprechend den Beziehungen (241) und (242) vom Abschnitt V herrschen im engsten Querschnitt folgende Spannungen:

$$(\tau_{uw})_{\substack{v=\pi/2 \\ w=\pi/2}} = 0, \quad -(\tau_{uw})_{\substack{v=\pi/2 \\ w=\pi/2}} = \frac{\tau_n}{h} (\mathfrak{S}in u + \mathfrak{C}o\mathfrak{f} u_0 e^{u_0 - u}). \quad (1)$$

Im engsten Querschnitt wird ferner $h = \mathfrak{S}in u$. Machen wir noch von $e^{-u} = \mathfrak{C}o\mathfrak{f} u - \mathfrak{S}in u$ Gebrauch, so erhalten wir

$$-\tau_{vw} = \tau_n (1 - e^{u_0} \mathfrak{C}o\mathfrak{f} u_0 + e^{u_0} \mathfrak{C}o\mathfrak{f} u_0 \mathfrak{E}tg u). \quad (2)$$

Wir führen nun mit

$$\mathfrak{C}o\mathfrak{f} u = 1 + \mu \quad (3)$$

eine neue Koordinate ein, die vom Kerbgrund der Spitzkerbe aus in der u -Richtung anwächst (Abb. 86).

Bei der Berechnung der Spitzkerbenformzahl wollen wir uns auf die Ermittlung des Grenzwertes für kleines ε beschränken, so daß die Koordinate μ , die ja in der Rechnung nur Werte zwischen 0 und ε annimmt, von vornherein als kleine Größe angesehen werden kann; wir brauchen daher jeweils nur die niedrigste Potenz von μ zu berücksichtigen und können setzen:

$$\mathfrak{C}o\mathfrak{f} u = 1, \quad \mathfrak{S}in u = \sqrt{2\mu}, \quad \mathfrak{E}tg u = \frac{1}{\sqrt{2\mu}}. \quad (4)$$

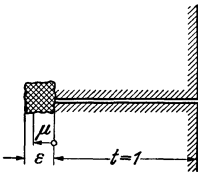


Abb. 86. Gedankenmodell für die flache Spitzkerbe bei Schub oder Drillung.

Den Randwert u_0 setzen wir — der Spitzkerbe entsprechend — von vornherein gleich Null. Dann wird

$$-\tau_{vw} = \frac{\tau_n}{\sqrt{2}\mu}. \quad (5)$$

Die Spannung der Spitzkerbe stellt nach den vorausgegangenen Erläuterungen den Mittelwert der Spannung längs der Strecke ε dar, berechnet sich mithin zu

$$\tau_s = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \tau_{vw} d\mu = (-) \frac{\tau_n}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \frac{d\mu}{\sqrt{2}\mu} = (-) \tau_n \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}. \quad (6)$$

Berücksichtigen wir noch die Einheitsstrecke des Koordinatensystems

$$\mathfrak{C}0 \mid u_0 = 1 = t, \quad (7)$$

so ergibt sich schließlich folgender Grenzwert der Spitzkerbenformzahl:

$$\alpha_s = \sqrt{\frac{2t}{\varepsilon}}. \quad (8)$$

Vergleichen wir hiermit den Grenzwert $\sqrt{t/\varrho}$ der Rundkerbenformzahl für starke Krümmung [vgl. (243) von V], so sehen wir, daß an die Stelle des Krümmungshalbmessers jetzt die halbe Breite des Elementarteilchens getreten ist.

Als nächstes Beispiel wollen wir die zugehörige tiefe Kerbe behandeln.

B. Die tiefe Umdrehungsspitzkerbe mit zweidimensionalem Spannungsverlauf bei Schub oder Drillung.

Wir nehmen Bezug auf die in V, 5, C behandelte tiefe Kerbe. Für den Axialschnitt senkrecht zur Schubrichtung ergab die Rechnung folgende Spannungen

$$(\tau_{uw})_{w=\frac{\pi}{2}} = \frac{A}{h}, \quad \tau_{vw} = 0. \quad (9)$$

Im engsten Querschnitt wird $h = \cos v$. Wir führen wieder eine neue, vom Kerbgrund der Spitzkerbe ausgehende Koordinate ein und setzen (Abb. 87)

$$\sin v = 1 - \mu. \quad (10)$$

Zur beabsichtigten Grenz Betrachtung kommen nur kleine Werte von μ in Betracht, so daß

$$\cos v = \sqrt{2\mu}, \quad \text{also} \quad \tau_{vw} = \frac{A}{\sqrt{2}\mu} \quad (11)$$

gesetzt werden kann. Die Spannung der Spitzkerbe wird dann

$$\tau_s = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \frac{A}{\sqrt{2}\mu} d\mu = A \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}. \quad (12)$$

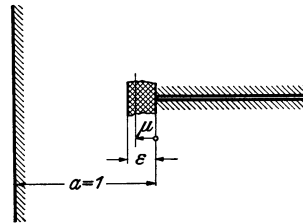


Abb. 87. Gedankenmodell für die tiefe Spitzkerbe bei Schub oder Drillung.

Die Konstante A ergibt sich aus (251) von V mit $v_0 = \pi/2$ zu

$$A = \frac{\tau_n}{\pi/2}. \quad (13)$$

Berücksichtigen wir schließlich noch die Einheitsstrecke $a = \sin v_0 = 1$, so erhalten wir als Formzahl

$$\alpha_s = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2a}{\varepsilon}}. \quad (14)$$

Vergleichen wir hiermit den Grenzwert der stark gekrümmten Rundkerbe, der sich aus (253) von V für großes a/ϱ zu $\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{a}{\varrho}}$ ergibt, so stellen wir auch bei diesem Problem fest, daß ϱ durch $\varepsilon/2$ abgelöst worden ist.

Wir wollen nun dieselbe Untersuchung auch für einen verwickelteren Spannungszustand durchführen.

C. Der Zugstab mit beiderseitiger tiefer Spitzkerbe.

Beim beiderseits gekerbten Zugstab gestaltet sich die Rechnung infolge des Auftretens der zweiten Hauptspannung wesentlich schwieriger. Wie aus IV, 2, A hervorgeht, sind im engsten Querschnitt folgende Spannungen vorhanden:

$$\sigma_u = \sigma_x = A \left(\frac{1}{\cos v} + \frac{\cos^2 v_0}{\cos^3 v} \right), \quad \sigma_v = \sigma_y = A \left(\frac{1}{\cos v} - \frac{\cos^2 v_0}{\cos^3 v} \right). \quad (15)$$

Das Koordinatensystem ist das gleiche wie beim vorigen Problem, so daß wieder die Beziehungen

$$\sin v = 1 - \mu, \quad \cos v = \sqrt{2\mu} \quad (16)$$

zur Anwendung kommen. Da ein Glied mit $\cos^2 v_0$ auftritt, sind wir genötigt, noch mit μ_0 den Abstand des Randes von der Stelle $\mu = 0$ zunächst allgemein einzuführen; erst nach Durchführung der Integration dürfen wir dann $\mu_0 = 0$ setzen. (Würden wir von vornherein $v_0 = \pi/2$ bzw. $\mu_0 = 0$ setzen, so würde im Kerbgrund $\sigma_x = \sigma_y$ werden und σ_y würde am Rand nicht verschwinden. Aus diesem Grunde darf der Grenzübergang zur Spitzkerbe hier erst nach der Integration vorgenommen werden.)

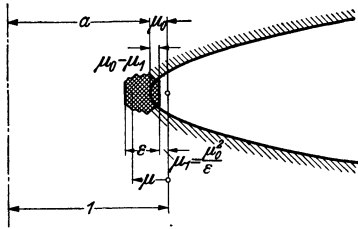


Abb. 88. Gedankenmodell für die tiefe Spitzkerbe bei Zug.

Außerdem ist zu beachten, daß hier der Rand $\mu = \mu_0$ nicht etwa direkt als untere Grenze eingesetzt werden darf, sondern ein etwas

kleinerer Wert, den wir mit μ_1 bezeichnen wollen (Abb. 88). Die untere Integrationsgrenze muß nämlich gerade so liegen, daß die Spannung σ_y nach der Integration der Randbedingung entsprechend verschwindet. Wir haben daher die Integration für beide Spannungen durchzuführen; denn wie bei den Span-

nungen der klassischen Elastizitätslehre müssen wir auch hier bei den Spannungen unseres Gedankenmodells die Gewähr haben, daß die Randbedingungen erfüllt sind. Das ist hier aber nur dadurch möglich, daß als untere Integrationsgrenze nicht μ_0 selbst, sondern ein etwas kleinerer Wert benutzt wird. Obwohl μ_0 begrifflich die Rolle der Randkoordinate spielt, sind wir gezwungen, uns das Teilchen um die kleine Strecke $\mu_0 - \mu_1$ aus der Randschicht herausgerückt zu denken, um die Randbedingung für σ_y erfüllen zu können. Diese kleine Verrückung, die beim Grenzübergang zur Spitzkerbe ja ohnehin wieder verschwindet, erklärt sich daraus, daß wir bei unserer Betrachtung plötzlich von der Differential- zur Differenzenrechnung übergegangen sind. Gewisse kleine Strecken, die bei der Differentialrechnung noch unendlich klein sind, nehmen bei der Differenzenrechnung nun plötzlich endliche Werte an.

Da μ_0 von derselben Größenordnung klein ist wie μ , dürfen wir ähnlich wie oben

$$\cos v_0 = \sqrt{2\mu_0} \quad (17)$$

setzen. Damit gehen die Spannungen über in

$$\sigma_x = A \left(\frac{1}{\sqrt{2}\mu} + \frac{\mu_0\sqrt{2}}{2\mu^{3/2}} \right), \quad \sigma_y = A \left(\frac{1}{\sqrt{2}\mu} - \frac{\mu_0\sqrt{2}}{2\mu^{3/2}} \right). \quad (18)$$

Wir bilden zunächst die Spannung σ_y der Spitzkerbe und erhalten

$$\sigma_{ys} = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mu_1}^{\varepsilon + \mu_1} \sigma_y d\mu = \frac{A}{\varepsilon} \left(\sqrt{2(\varepsilon + \mu_1)} - \sqrt{2\mu_1} + \frac{\mu_0\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon + \mu_1}} - \frac{\mu_0\sqrt{2}}{\sqrt{\mu_1}} \right). \quad (19)$$

Beim beabsichtigten Grenzübergang zur Spitzkerbe behält ε seinen festen Wert, während μ_0 und auch μ_1 , das ja jeweils noch kleiner als μ_0 ist, gegen Null konvergieren. Wir können daher bereits schon vor Durchführung des Grenzüberganges μ_0 und μ_1 gegenüber ε vernachlässigen. Damit geht (19) über in

$$\sigma_{ys} = \frac{A\sqrt{2}}{\varepsilon} \left(\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{\mu_1} + \frac{\mu_0}{\sqrt{\varepsilon}} - \frac{\mu_0}{\sqrt{\mu_1}} \right). \quad (20)$$

Diese Spannung muß aber der Randbedingung genügen und verschwinden. Daraus ergibt sich eine Beziehung für den noch unbekanntenen Wert μ_1 . Es folgt für $\sqrt{\mu_1}$ die quadratische Gleichung

$$\mu_1 - \left(\sqrt{\varepsilon} + \frac{\mu_0}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \sqrt{\mu_1} + \mu_0 = 0 \quad (21)$$

mit den Wurzeln

$$\sqrt{\mu_1} = \frac{\mu_0}{\sqrt{\varepsilon}} \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{\varepsilon}. \quad (22)$$

Da ja μ_1 kleiner als ε sein muß, kommt hier nur der erste Wert in Betracht.

Wir bilden nun die Spannung σ_x und erhalten bei Verwendung des soeben gefundenen Wertes von μ_1 :

$$\sigma_{xs} = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\frac{\mu_0^2}{\varepsilon}}^{\varepsilon + \frac{\mu_0^2}{\varepsilon}} \sigma_x d\mu = \frac{A\sqrt{2}}{\varepsilon} \left(\sqrt{\varepsilon + \frac{\mu_0^2}{\varepsilon}} - \sqrt{\frac{\mu_0^2}{\varepsilon}} - \frac{\mu_0}{\sqrt{\varepsilon + \frac{\mu_0^2}{\varepsilon}}} + \sqrt{\varepsilon} \right). \quad (23)$$

Nunmehr setzen wir endgültig $\mu_0 = 0$ und erhalten mithin für die Höchstspannung der Spitzkerbe den Wert

$$\sigma_{xs} = 2A \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}. \quad (24)$$

Die Konstante A ergibt sich aus (66) von IV mit $v_0 = \pi/2$ zu

$$A = \frac{2}{\pi} p. \quad (25)$$

Mithin wird die Formzahl der Spitzkerbe

$$\alpha_s = \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} = \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{2a}{\varepsilon}}. \quad (26)$$

Zum Vergleich wollen wir wieder die Formzahl der stark gekrümmten Rundkerbe heranziehen, die sich aus (69) von IV für großes a/ρ zu

$$\alpha_k = \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{a}{\rho}} \quad (27)$$

ergibt. Wieder stellen wir fest, daß bei der Spitzkerbe die Strecke $\varepsilon/2$ an die Stelle des Krümmungshalbmessers getreten ist.

Ebenso läßt sich dieses Gesetz bei allen übrigen Kerbspannungszuständen nachweisen. Die behandelten Beispiele mögen jedoch genügen, um das Zustandekommen der Spitzkerbenformzahl zu erkennen.

Der Einfachheit halber wollen wir nun an Stelle von $\varepsilon/2$ die Bezeichnung ρ' einführen. ρ' spielt also für die Spitzkerbenformzahl eine ausschlaggebende Rolle. Entsprechend unserer Theorie, die sich auf den Gefügeeinfluß bezog, steht ρ' als halbe Breite des für die Rechnung eingeführten Elementarteilchens mit dem Gefüge des Werkstoffes in Zusammenhang; d. h. ρ' wird für verschiedene Werkstoffe auch im allgemeinen verschiedene Werte annehmen. Es handelt sich somit um eine neue Werkstoffkonstante, und zwar mit der Dimension einer Länge. Wie im nächsten Abschnitt gezeigt werden wird, hat ρ' bei Stahl etwa die Größe eines halben Millimeters. Die Formzahl wird also beim Übergang zur Spitzkerbe vom Werkstoff abhängig.

4. Der Übergang von der Rundkerbe zur Spitzkerbe.

Dem Wert $\rho' = 0$ entspricht noch der Idealstoff der klassischen Elastizitätstheorie mit der höchsten elastischen Empfindlichkeit; bei wachsendem ρ' sinkt dieselbe. Wir wollen deshalb ρ' als elastische Kerbempfindlichkeit bezeichnen.

Bei schwach gekrümmten Kerben (ρ groß) gilt noch die Formzahl des Idealstoffes; bei abnehmendem ρ zeigt sich für technische Werkstoffe allmählich eine Abminderung der Formzahl; denn die Formzahl eines technischen Werkstoffes nähert sich bei immer kleiner werdendem ρ ja nicht dem Wert unendlich, sondern der Spitzkerbenformzahl als höchstem Grenzwert. Ohne nun in jedem einzelnen Falle die Formzahl der Rundkerbe unter Verwendung unseres Gedankenmodells errechnen zu müssen, genügt es, ein Übergangsgesetz zu verwenden, welches ähnlich wie bei der flachen und tiefen Kerbe hier den Übergang vom Idealwert $\alpha_k = (\alpha_k)_{\rho'=0}$ zum Wert $\alpha_s = (\alpha_k)_{\rho=0}$ der Spitzkerbe sicherstellt. Die Übergangskurve muß sich, wie aus Abb. 89 hervorgeht, an beide Grenzkurven anschließen. Da nun nach der Theorie die ideale Formzahl für kleines ρ mit $\sqrt{1/\rho}$ verhältnismäßig wird, ist es naheliegend, für den Übergang zur Spitzkerbe folgenden Ansatz zu wählen:

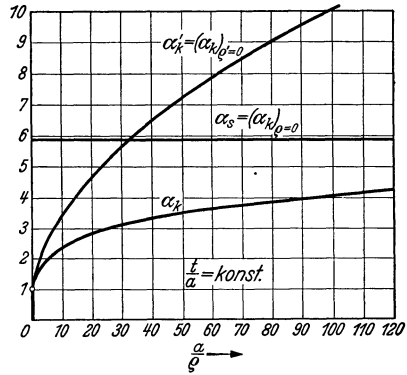


Abb. 89. Zusammenhang der technischen Formzahl einerseits mit dem Grenzwert für ideal-elastisches Verhalten ($\rho' = 0$), andererseits dem Grenzwert der Spitzkerbe ($\rho = 0$).

$$\alpha_k = 1 + \frac{\alpha'_k - 1}{1 + \sqrt{\frac{\rho'}{\rho}}} \tag{28}$$

Wir werden im nächsten Abschnitt noch sehen, wie dieser Ansatz auch mit den Versuchsergebnissen sehr gut im Einklang steht.

5. Einfluß der Formänderung im Kerbgrund.

Auch noch eines weiteren Nachteiles der klassischen Elastizitätstheorie muß hier gedacht werden. Wir waren bei Ableitung der elastischen Grundgleichungen von Formänderungsbetrachtungen in III, 2 ausgegangen, welche ein nur geringes Maß der Gestaltänderung zur Voraussetzung hatten. Bei Ableitung der Gleichgewichtsbedingungen in III, 1 konnten wir infolgedessen den nicht deformierten Körper zugrunde legen. Kürzlich hat nun L. Föppl¹ darauf hingewiesen, daß diese Voraussetzungen bei Kerben nicht mehr haltbar sind, wenn die Formänderung im Kerbgrund sehr groß wird, d. h. bei großer Formzahl bzw. starker Kerbkrümmung. Durch Gleichgewichtsbetrachtungen am deformierten Körper und mit Einführung einer entsprechenden Werkstoffkonstanten hat L. Föppl gezeigt, wie sich durch diesen Gedankengang eine Abminderung der Spannungsspitzen erklären läßt. Wir sehen also auch hier wieder, daß bei Kerben starker Krümmung die alte Theorie irgendwie ergänzt werden muß, um zu praktisch brauchbaren Ergebnissen zu kommen.

¹ Föppl, L.: Ing.-Arch. Bd. 7 (1936) S. 229.

Da der Einfluß der großen Formänderung sich, wie wir gesehen haben, in demselben Sinne auf die Formzahl auswirkt wie der oben mit unserem Gedankenmodell erfaßte Gefügeeinfluß — bei beiden Gedankengängen handelt es sich ja um eine Abminderung der Formzahl bei starker Kerbkrümmung —, so können wir mit einem der beiden Gedankengänge auskommen, wenn wir die zugehörige Werkstoffkonstante den Versuchsergebnissen anpassen. Bei Beibehaltung der oben in VIII, 1 bis 4 aufgestellten Beziehungen wird also der Einfluß der großen Formänderung von selbst mitberücksichtigt, wenn wir ρ' dem wirklichen Verhalten des Werkstoffes anpassen.

6. Theorie des Flankenwinkels.

Noch ein weiterer Einfluß macht sich beim Übergang zur Spitzkerbe bemerkbar, nämlich der des Flankenwinkels. Bei Kerben mit großem Krümmungshalbmesser konnte der Einfluß des Flankenwinkels noch vernachlässigt werden, weil der geradlinige Teil des Randes weit außerhalb der hoch beanspruchten Zone lag, also in einem Gebiet, welches infolge des starken Abklingens der Kerbspannungen für die Formzahl keine Bedeutung hat. Anders ist es jedoch bei den stark gekrümmten Kerben und den Spitzkerben. Hier spielt der Flankenwinkel ω eine wesentliche Rolle.

Die bisher entwickelten Spitzkerbenformzahlen bezogen sich sämtlich auf einen Flankenwinkel von 0° . Zur Ermittlung des Zusammenhanges zwischen den bei gleichen Abmessungen, aber veränderlichem Flankenwinkel auftretenden Formzahlen legen wir am einfachsten den Spannungszustand in der auf Drillung beanspruchten Welle mit flacher Kerbe zugrunde, dessen Behandlung wir anlässlich der Frage der Entlastungskerben bereits wesentlich vereinfacht haben, und übernehmen hier die Beziehungen (1) bis (7) vom Abschnitt VII.

Das Koordinatensystem muß hier eine für Spitzkerben mit beliebigem Flankenwinkel geeignete Randlinie enthalten. Wir genügen dieser Bedingung, indem wir

$$z^n = 1 + w^n \quad (29)$$

setzen. Dann stellt die Linie $u = 0$ eine solche Randlinie dar (Abb. 90). Für $n = 2$ beträgt der Flankenwinkel noch 0° , für $n = 1,5$ ist er 90° , schließlich für $n = 1$ gleich 180° (keine Kerbe mehr). Im Kerbgrund der Spitzkerbe wird $w = 0$, $z = 1$. Für die nähere Umgebung setzen wir $z = 1 + z_1$ und erhalten aus (29) durch Vernachlässigung höherer Potenzen von z_1 die Beziehung $n z_1 = w^n$. Die nähere Untersuchung ergibt daraus für den Flankenwinkel die Beziehung

$$\omega = (2 - n)\pi. \quad (30)$$

Für große Werte z wird $z = w$, d. h. $x = u$, $y = v$. Die gesuchte Lösung für φ muß eine harmonische Funktion sein, also der Differentialgleichung (4) von VII genügen, ferner muß dieselbe für großes u oder v in $\tau_n y$ (entsprechend $\tau_y = \tau_n$, $\tau_x = 0$) übergehen. Schließlich

muß τ_u längs einer beliebigen Randlinie $u = u_0$ verschwinden (wir betrachten zunächst die Rundkerbe!). Die Lösung ist

$$\varphi = \tau_n v, \quad \tau_u = 0, \quad \tau_v = \frac{\tau_n}{h}. \quad (31)$$

Im Kerbgrund wird $y = v = 0$. Daraus folgt

$$x^n = 1 + u^n, \quad h = \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{dx}{du}, \quad \tau_v = \tau_n \frac{du}{dx}. \quad (32)$$

Bilden wir hieraus in bekannter Weise die Spannung der Spitzkerbe, so ergibt sich als Formzahl

$$\alpha_s = \frac{1}{\varepsilon} \int_1^{1+\varepsilon} \frac{\tau_v}{\tau_n} dx = \frac{1}{\varepsilon} \int_1^{1+\varepsilon} \frac{du}{dx} dx = \frac{1}{\varepsilon} (u)_{x=1+\varepsilon} = \left[\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)^n - \frac{1}{\varepsilon^n} \right]^{\frac{1}{n}}. \quad (33)$$

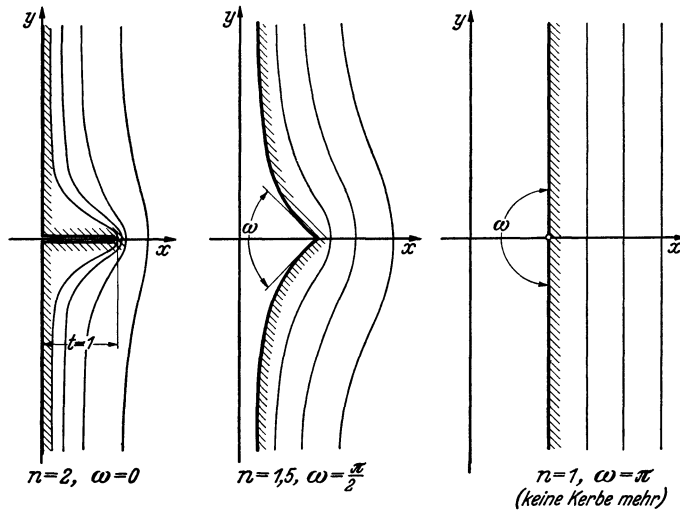


Abb. 90. Koordinatensysteme zur Theorie des Flankenwinkels.

Für $n = 2$ folgt hieraus die Formzahl des 0° -Flankenwinkels

$$\alpha_{0^\circ} = \sqrt{1 + \frac{2}{\varepsilon}}. \quad (34)$$

Nach $1/\varepsilon$ aufgelöst erhalten wir

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{\alpha_{0^\circ}^2 - 1}{2}. \quad (35)$$

Setzen wir für $1/\varepsilon$ diesen Ausdruck in (33) ein, so ergibt sich schließlich die gesuchte Beziehung zwischen der Formzahl bei $\omega = 0^\circ$ und jener bei beliebigem Flankenwinkel:

$$\alpha_s = \left[\left(\frac{\alpha_{0^\circ}^2 + 1}{2} \right)^n - \left(\frac{\alpha_{0^\circ}^2 - 1}{2} \right)^n \right]^{\frac{1}{n}}. \quad (36)$$

Hierbei hängt n entsprechend (30) mit ω zusammen:

$$n = 2 - \frac{\omega}{\pi}. \quad (37)$$

Abb. 91 stellt die nomographische Auswertung des Ergebnisses dar. Beträgt beispielsweise die 0° -Formzahl 7,0 und ist die Formzahl der sonst gleichen Kerbe für einen Flankenwinkel von 90° gesucht, so geht man von $\alpha_s = 7,0$ aus nach rechts auf der Kennlinie entsprechend der

Pfeilrichtung schräg abwärts bis zum Schnitt mit der zu $\omega = 90^\circ$ gehörenden Vertikalen. Von diesem Schnittpunkt geht man waagrecht nach links und liest $\alpha_s = 3,8$ ab.

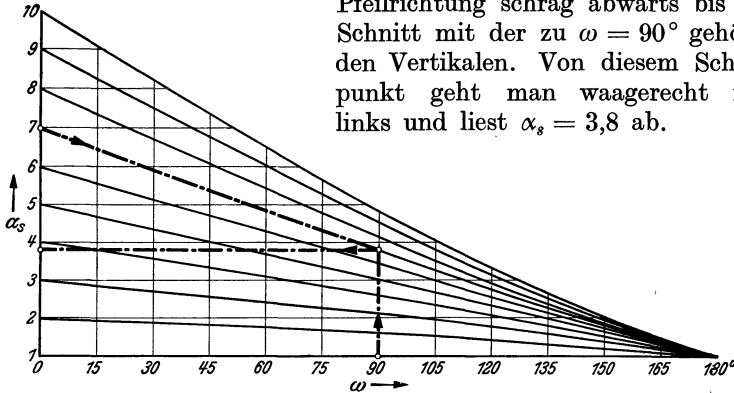


Abb. 91. Abhängigkeit der Spitzkerbenformzahl vom Flankenwinkel in nomographischer Darstellung.

Auf den ersten Blick fällt der fast geradlinige Verlauf der Kennlinien auf. Die Formzahl sinkt fast verhältnismäßig mit dem Flankenwinkel ab. Beachten wir, daß mit zunehmendem Flankenwinkel auch die Abrundung der äußeren Ecken zunimmt, die wir bei dem gewählten Koordinatensystem in Kauf genommen haben (Abb. 90), so ist zu erwarten, daß andererseits bei technischen Kerben mit ausgeprägten äußeren Ecken die Formzahl bei zunehmendem Flankenwinkel nicht so stark abfällt. Dies spricht für einen mehr geradlinigen Verlauf der Kennlinien bei technischen Kerben. Wir wollen deshalb für die praktische Anwendung den geradlinigen Verlauf zugrunde legen. Dem entspricht die Beziehung

$$\alpha_s = 1 + \frac{\pi - \omega}{\pi} [(\alpha_s)_{\omega=0} - 1], \quad (38)$$

welche ohnehin in einem gewissen Bereich mit (36) recht gut übereinstimmt. Im übrigen entspricht diese Gleichung auch den Versuchsergebnissen, die im nächsten Abschnitt diskutiert werden.

7. Die allgemeine technische Formzahl.

Es kommt nun noch darauf an, Gleichung (38) so mit Gleichung (28) zu vereinigen, daß sich eine unseren zu Anfang aufgestellten Forderungen entsprechende allgemeine technische Formzahl ergibt. Insbesondere muß die gesuchte Formzahlgleichung der Bedingung genügen, daß der Einfluß des Flankenwinkels mit zunehmendem Krümmungshalbmesser abnimmt.

Wir greifen zunächst noch einmal zurück auf die in den Abschnitten IV bis VI abgeleiteten Formzahlen, welche für den Idealstoff mit $\varrho' = 0$ unmittelbar gelten, also mit α'_k zu bezeichnen sind. Mit verschwindendem ϱ werden sie sämtlich mit $\sqrt{1/\varrho}$ proportional, und wir können

$$(\alpha'_k)_{\varrho \text{ klein}} = c \sqrt{\frac{1}{\varrho}} \quad (39)$$

setzen. In (28) eingesetzt ergibt

$$(\alpha_k)_{\varrho \text{ klein}} = 1 + \frac{c \sqrt{\frac{1}{\varrho}}}{1 + \sqrt{\frac{\varrho'}{\varrho}}} \quad (40)$$

(im Zähler wurde bereits 1 gegenüber $c \sqrt{\frac{1}{\varrho}}$ vernachlässigt), woraus durch Grenzübergang $\varrho \rightarrow 0$ die Spitzkerbenformzahl — unseren Entwicklungen entsprechend für einen Flankenwinkel von 0° — hervorgeht. Wir erhalten

$$(\alpha_s)_{w=0} = 1 + c \sqrt{\frac{1}{\varrho'}}. \quad (41)$$

Setzen wir dies in (38) ein, so wird

$$\alpha_s = 1 + \frac{\pi - \omega}{\pi} c \sqrt{\frac{1}{\varrho'}}. \quad (42)$$

Der Vergleich von (42) mit (41) könnte zunächst dazu führen, lediglich $\frac{\pi - \omega}{\pi} c$ statt c zu setzen, um die allgemeine Formzahl zu erhalten. Dies würde jedoch zur Folge haben, daß der Flankenwinkel auch bei großem ϱ noch einen maßgebenden Einfluß auf die Formzahl hat, würde also der Theorie widersprechen.

Die zweite Möglichkeit, die allgemeine Formzahl in einfacher Weise aufzustellen, besteht nun darin, $\frac{\pi - \omega}{\pi} \sqrt{\frac{1}{\varrho'}}$, statt $\sqrt{\frac{1}{\varrho'}}$, zu setzen. Damit können wir der an den Flankenwinkel geknüpften Bedingung gerecht werden; (28) geht nämlich in

$$\alpha_k = 1 + \frac{\alpha'_k - 1}{1 + \frac{\pi}{\pi - \omega} \sqrt{\frac{\varrho'}{\varrho}}} \quad (43)$$

über. In der Tat wird jetzt der Einfluß des Flankenwinkels bei großem Krümmungshalbmesser verschwindend klein, wie wir es bei der obigen Überlegung verlangt hatten; denn im Nenner wird dann $\frac{\pi}{\pi - \omega} \sqrt{\frac{\varrho'}{\varrho}}$ klein gegenüber 1, und die Größe ω hat keinen Einfluß mehr auf die Formzahl. Bei abnehmendem Krümmungshalbmesser dagegen macht sich der Einfluß des Flankenwinkels allmählich geltend, schließlich ist bei der Spitzkerbe mit $\varrho = 0$ Gleichung (42) verwirklicht.

Gleichung (43) steht außerdem zugleich mit Versuchsergebnissen im Einklang und stellt daher die maßgebende Beziehung für die technische Formzahl dar.

Bei der Formzahl α_k des Idealstoffes dienten Formzahlnomogramme (Abb. 104 und 105) zur schnellen Ermittlung. Ebenso läßt sich auch Gleichung (43) auf nomographischem Wege lösen. Hierzu dient das Diagramm in Abb. 106. Die Handhabung geht aus den angegebenen Pfeilen hervor, wobei auf die in Abschnitt X durchgeführten Beispiele verwiesen sei.

Wir wollen nun auf Ergebnisse der experimentellen Spannungsforschung eingehen und sie mit den hier gewonnenen Beziehungen vergleichen.

IX. Vergleich der Theorie mit Ergebnissen der experimentellen Spannungsforschung.

1. Dehnungsmessungen.

Mit gewöhnlichen Dehnungsmessern ist es nicht möglich, die im Kerbgrund wirklich eintretende große Dehnung und damit die Spannungsspitze zu ermitteln. Das im Jahre 1912 von E. Preuss¹ entwickelte Gerät kam dieser Anforderung bereits näher, ohne jedoch den Fehler ganz ausmerzen zu können. Erst im Jahre 1932 wurde von G. Fischer² ein Meßverfahren entwickelt und durch zahlreiche Versuche erprobt, mit welchem die wahre Spannungsspitze im Kerbgrund ausreichend genau bestimmt werden kann. Es beruht auf Ermittlung der Verschiebungen einzelner Punkte längs einer Geraden. Durch Auftragen der Größe der jeweiligen Verschiebung der Ordinate über der Meßgeraden erhält man die sog. Verschiebungskurve, aus deren Verlauf die Dehnung auch an solchen Stellen der Meßgeraden bestimmt werden kann, die ein unmittelbares Aufsetzen des Dehnungsmessers nicht gestatten. Die von Fischer ausgeführten Messungen an Kerben bei biegebeanspruchten Flachstäben sind in der Fachwelt als sehr zuverlässig anerkannt und sollen daher zum Vergleich mit der Theorie herangezogen werden.

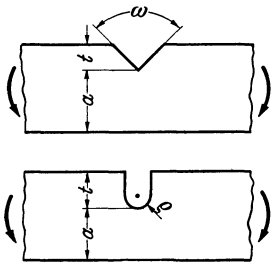


Abb. 92. Von G. Fischer untersuchte Kerben.

die Dehnung auch an solchen Stellen der Meßgeraden bestimmt werden kann, die ein unmittelbares Aufsetzen des Dehnungsmessers nicht gestatten. Die von Fischer ausgeführten Messungen an Kerben bei biegebeanspruchten Flachstäben sind in der Fachwelt als sehr zuverlässig anerkannt und sollen daher zum Vergleich mit der Theorie herangezogen werden.

Es handelte sich dabei einerseits um Spitzkerben mit verschiedenem Flankenwinkel, andererseits um Rundkerben, Abb. 92. Die Theorie liefert für den einseitig gekerbten Biegestab (IV, 6, B)

$$\alpha_{fk} = 1 + 2 \sqrt{\frac{t}{\rho}}, \quad (1)$$

¹ Preuss, E.: VDI-Forsch.-Heft Nr. 126 — Z. VDI Bd. 56 (1912), S. 1349 u. 1780.

² Fischer, G.: Kerbwirkung an Biegestäben. Berlin: VDI-Verlag 1932.

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{tk} &= \frac{2\left(\frac{a}{\varrho} + 1\right) - \alpha_1 \sqrt{\frac{a}{\varrho} + 1}}{\frac{4}{\alpha_2} \left(\frac{a}{\varrho} + 1\right) - 3\alpha_1}, & \alpha_1 &= \frac{2\left(\frac{a}{\varrho} + 1\right) \sqrt{\frac{a}{\varrho}}}{\left(\frac{a}{\varrho} + 1\right) \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a}{\varrho}} + \sqrt{\frac{a}{\varrho}}}, \\ \alpha_2 &= \frac{4 \frac{a}{\varrho} \sqrt{\frac{a}{\varrho}}}{3 \left[\left(\frac{a}{\varrho} - 1\right) \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a}{\varrho}} + \sqrt{\frac{a}{\varrho}} \right]}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\alpha'_k = 1 + \frac{(\alpha_{fk} - 1)(\alpha_{tk} - 1)}{\sqrt{(\alpha_{fk} - 1)^2 + (\alpha_{tk} - 1)^2}}, \quad (3)$$

$$\alpha_k = 1 + \frac{\alpha'_k - 1}{1 + \frac{\pi}{\pi - \omega} \sqrt{\frac{\varrho'}{\varrho}}}. \quad (4)$$

Um den noch unbekanntenen Wert ϱ' zu ermitteln, stellen wir zunächst die Formzahl der Spitzkerbe auf. Für sehr kleines ϱ geht α_{tk} und damit auch $\alpha_{tk} - 1$ in $\frac{4(\pi - 2)}{3(\pi^2 - 8)} \sqrt{\frac{a}{\varrho}} = \sqrt{0,663 \frac{a}{\varrho}}$ über. Setzen wir dies in (3) ein und zugleich für $\alpha_{fk} - 1$ den Wert $\sqrt{4 \frac{t}{\varrho}}$, so ergibt sich

$$(\alpha'_k)_{\varrho \text{ klein}} = 1 + \sqrt{\frac{4 \frac{t}{\varrho} \cdot 0,663 \frac{a}{\varrho}}{4 \frac{t}{\varrho} + 0,663 \frac{a}{\varrho}}} = 1 + \sqrt{\frac{0,663 \frac{a}{\varrho}}{1 + 0,166 \frac{a}{t}}}. \quad (5)$$

In (4) eingesetzt ergibt schließlich

$$(\alpha_k)_{\varrho \text{ klein}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{\pi}{\pi - \omega} \sqrt{\frac{\varrho'}{\varrho}}} \sqrt{\frac{0,663 \frac{a}{\varrho}}{1 + 0,166 \frac{a}{t}}}, \quad (6)$$

woraus durch Grenzübergang $\varrho \rightarrow 0$ die Formzahl der Spitzkerbe

$$\alpha_s = 1 + \frac{\pi - \omega}{\pi} \sqrt{\frac{0,663 \frac{a}{\varrho}}{1 + 0,166 \frac{a}{t}}}. \quad (7)$$

hervorgeht.

Die Versuche an Spitzkerben erstreckten sich auf Stäbe mit den ziemlich genau eingehaltenen Werten $a = 95 \text{ mm}$, $t = 15 \text{ mm}$. Die den Versuchen entsprechenden Formzahlwerte liegen, in Abhängigkeit vom Flankenwinkel aufgetragen, genügend genau auf einer Geraden, die für $\omega = \pi$ durch $\alpha_s = 1$, für $\omega = \pi/2$ durch $\alpha_s = 5$ hindurchgeht, Abb. 93. Die Übereinstimmung

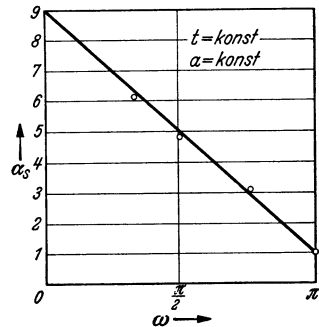


Abb. 93. Formzahlen der Spitzkerben bei konstanter Tiefe und Stabbreite, aber veränderlichem Flankenwinkel entsprechend Gl.(38) von Abschnitt VIII und Gl. (7) von Abschnitt IX, sowie nach Messungen von Fischer.

mit unserer Gleichung (7) liefert für ρ' den Wert 0,48 mm. Es handelt sich dabei um einen Sonderstahl mit einer Zugfestigkeit von 65 kg/mm².

Mittels des so gefundenen Wertes können wir nun auch die Ergebnisse der Fischerschen Messungen an Rundkerben mit der Theorie

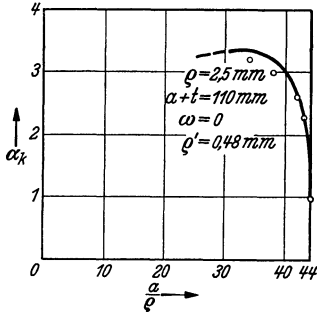


Abb. 94. Veränderliche Tiefe bei konstantem Krümmungshalbmesser und konstanter Stabbreite.

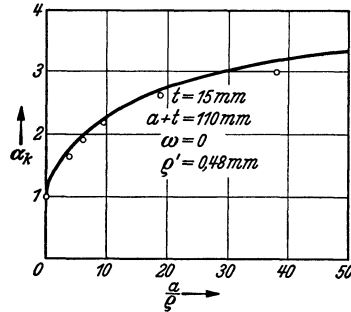


Abb. 95. Veränderlicher Krümmungshalbmesser bei konstanter Tiefe und Stabbreite.

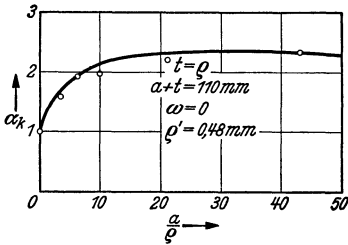


Abb. 96. Halbkreiskerben von veränderlichem Halbmesser bei konstanter Stabbreite.

Abb. 94–96. Vergleich der Formzahltheorie mit den Messungen von Fischer.

vergleichen. Der Flankenwinkel war dabei stets 0°. Abb. 94 zeigt den Verlauf der Formzahl für veränderliche Tiefe bei konstantem Krümmungshalbmesser, Abb. 95 für veränderlichen Krümmungshalbmesser bei konstanter Tiefe, schließlich Abb. 96 für Halbkreiskerben mit veränderlichem Halbmesser, sämtlich bei konstanter Stabbreite. Die theoretischen Formzahlkurven wurden dabei an Hand der Nomogramme ermittelt.

Die versuchsmäßigen Formzahlwerte sind jeweils eingetragen. Die Abweichungen von den theoretischen Kurven liegen noch innerhalb der Versuchsgenauigkeit, so daß die Theorie als bestätigt anzusehen ist.

2. Spannungsoptische Messungen.

Das spannungsoptische Verfahren, welches in den letzten Jahren mehr und mehr an Bedeutung gewonnen hat, stellt unbestritten das beste und leistungsfähigste Hilfsmittel zur Untersuchung ebener Spannungszustände dar. Bezüglich der allgemeinen Grundlagen sei auf die Literatur¹ verwiesen. Man erhält mit Hilfe dieses Verfahrens neben dem Verlauf der Hauptspannungslinien auch die Spannungen selbst, und zwar am Rand durch unmittelbare Messung, im Innern auf zeichnerischem oder rechnerischem Wege.

Die erste Kerbspannungsangabe, die auf optischem Wege gelöst wurde, war die Spannungsverteilung in Winkelecken. Mittels der in München befindlichen spannungsoptischen Anlage haben H. C. v. Wid-

¹ Föppl, L., u. H. Neuber: Festigkeitslehre mittels Spannungsoptik. München u. Berlin 1935.

dern, H. Kurzhals und L. Kettenacker unter Leitung von L. Föppl das Problem weitgehend geklärt¹. Ein Vergleich mit der Theorie kann jedoch bei diesem Problem nicht vorgenommen werden, da die strenge

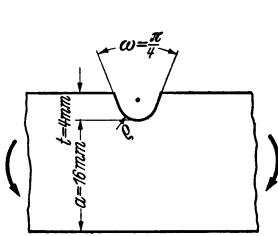


Abb. 97. Von E. Armbruster untersuchte einseitig gekerbte Biegestäbe.

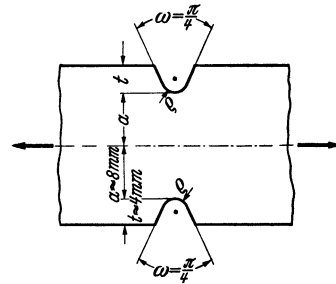


Abb. 98. Von E. Armbruster untersuchte beiderseits gekerbte Zugstäbe.

theoretische Lösung noch nicht vorliegt.

Dafür ist aber bei den Untersuchungen, die in München durch E. Armbruster² an gekerbten Stäben angestellt worden sind, ein Vergleich mit der Theorie möglich; denn es handelte sich um den einseitig gekerbten Biegestab (Abb. 97) und um den beiderseits gekerbten Zugstab (Abb. 98). Bei konstant gehaltener Kerbtiefe und gleichbleibendem Flankenwinkel, aber veränderlichem Krümmungshalbmesser sind die Versuchsergebnisse in Abb. 99 und 100 den theoretischen Formzahlen gegenübergestellt. Bei den letzteren wurden die Nomogramme (Abb. 103 bis 106) benutzt und wieder der Wert $\rho' = 0,48$ mm verwendet.

Für den Biegestab, Abbildung 99, ist die Übereinstimmung befriedigend, wenn man berücksichtigt, daß infolge der immerhin geringen Stabbreite von 20 mm keine sehr große Versuchsgenauigkeit erreicht werden konnte. Der Wert $\rho' = 0,48$ mm gilt also auch näherungsweise für das bei spannungsoptischen Versuchen benutzte Flintglas.

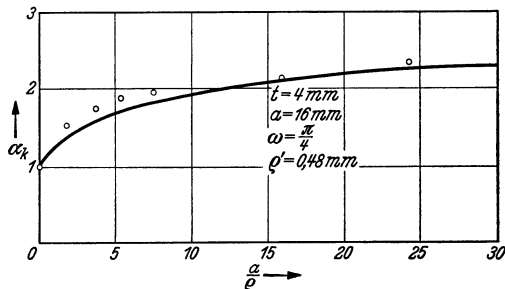


Abb. 99. Vergleich der von Armbruster durchgeführten Messungen an Biegestäben mit der Formzahltheorie.

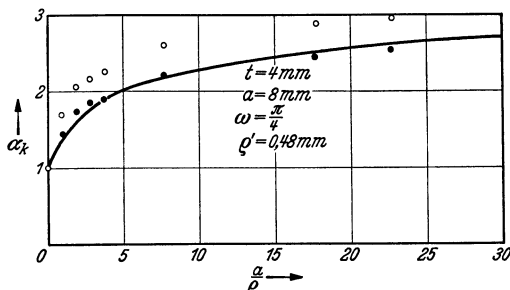


Abb. 100. Vergleich der Armbrusterschen Messungen an Zugstäben mit der Formzahltheorie.

¹ Siehe Fußnote 1 Seite 156.

² Armbruster, E.: Einfluß der Oberflächenbeschaffenheit auf den Spannungsverlauf und die Schwingungsfestigkeit. Berlin 1931.

Beim Zugstab, Abb. 100, liegen die versuchsmäßigen Formzahlen durchweg oberhalb der theoretischen Kurve. Wenn wir in Betracht ziehen, daß sich der Fall der reinen Zugbeanspruchung praktisch nur angenähert ver-

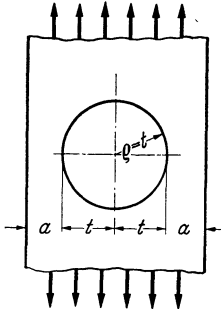


Abb. 101. Von A. Hennig untersuchte mittig gelochte Stäbe.

wirklichen läßt und daß immer eine gewisse Biegebeanspruchung in Kauf genommen werden muß, was allen spannungsoptischen Forschern bekannt ist, so setzt uns diese Abweichung nicht in Erstaunen. Treten z. B. in den Bolzen, durch welche bei der von Armbruster benutzten Vorrichtung die Zugkraft in den Stab eingeleitet wird, unsymmetrische Reibungskräfte auf, welche eine kleine Verlagerung der Zugrichtung aus der Stabachse heraus zur Folge haben, die im engsten Querschnitt etwa 3% der Breite $2a$ (also etwa 0,48 mm) ausmacht, so vermehrt sich dadurch die elementare Höchstspannung infolge des bei Biegung auftretenden Faktors 6 um 18%, d. h. die wirkliche

Nennspannung ist in diesem Falle gleich dem 1,18-fachen theoretischen Wert. Diese Zahlen liegen bei der geringen Stabbreite von 20 mm durchaus im Bereich der Wahrscheinlichkeit. Benutzen wir sie zu einer Korrektur der Armbrusterschen Ergebnisse, so erhalten wir — wie aus Abb. 100 zu ersehen ist — Werte, die sehr gut mit der theoretischen Kurve im Einklang stehen.

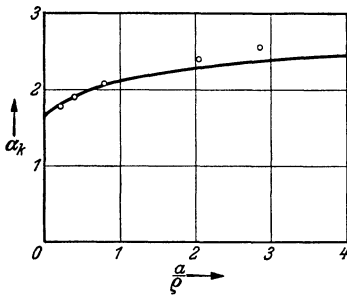


Abb. 102. Vergleich der von Hennig durchgeführten Messungen an mittig gelochten Stäben unter Zugbeanspruchung mit der Formzahltheorie.

Außenkerbe bei Biegung durch Multiplikation mit einem Faktor C ergibt. Dieser Faktor ist in Anlehnung an die von Hennig durchgeführten Versuche gleich 0,8 zu setzen. Der Nachweis hierfür ist in Abb. 102 erbracht, wo die sich theoretisch ergebende Formzahlkurve (mit $\rho' = 0,48$ mm) dargestellt ist. Wie man erkennt, kommt sie den versuchsmäßigen Formzahlen sehr nahe.

Noch eine ganze Reihe weiterer Untersuchungen finden wir in der Literatur der experimentellen Spannungsforschung² vor. Jedoch mögen

¹ Hennig, R.: Forschg. Ing.-Wes. (1933) S. 53.

² Föppl, L., u. H. Neuber: Festigkeitslehre mittels Spannungsoptik. München u. Berlin 1935; ferner E. Lehr: Spannungsverteilung in Konstruktionselementen. Berlin 1934.

hier die erwähnten Arbeiten bereits genügen, da es sich nur um einen Vergleich mit der Kerbspannungstheorie handeln sollte.

In dem nun folgenden letzten Abschnitt kommen wir unserer Pflicht nach, auf die bereits wiederholt erwähnten Formzahlnomogramme näher einzugehen, welche auch dem mathematisch weniger geschulten Leser ein leichtes und schnelles Ermitteln der Formzahl ermöglichen.

X. Die Formzahlnomogramme.

1. Erläuterungen zu den Formzahlnomogrammen.

Eine allgemeine Übersicht über alle Fälle, die mit der Theorie bereits erfaßt werden können, gibt Abb. 103. Links erläutert jeweils eine Skizze die wesentlichen Merkmale der betreffenden Kerbe; der Flankenwinkel, der hierbei immer in derselben Weise auftritt (vgl. z. B. Abb. 98), ist der Einfachheit halber nicht eingezeichnet worden. In der nächsten Spalte ist die Beanspruchungsart und in der weiteren Spalte die Formel für die jeweilige Nennspannung angegeben. Die folgenden Spalten beziehen sich auf die Anwendung der Formzahlnomogramme Abb. 104 und 105, wobei die Kennwerte $\sqrt{t/\varrho}$, $\sqrt{a/\varrho}$ und $\sqrt{r/\varrho}$ auftreten; die Wurzeln wurden im Hinblick auf größere Übersichtlichkeit und bessere Ablesbarkeit der Nomogramme eingeführt. Die eingetragenen Buchstaben beziehen sich auf die für $\sqrt{t/\varrho}$ maßgebende Zahlenreihe in Abb. 104 links; die Zahlen bezeichnen die jeweils maßgebende Kurve, und zwar für $\sqrt{a/\varrho}$ in Abb. 104 rechts und für $\sqrt{r/\varrho}$ in Abb. 105 rechts. Aus Abb. 104 bzw. bei Umdrehungskerbem aus Abb. 104 und 105 erhält man bereits die Formzahl α'_k des Idealstoffes. Der Einfluß von Gefüge und Flankenwinkel wird dann noch durch das Nomogramm Abb. 106 berücksichtigt. Die Handhabung wird am besten durch Beispiele erläutert.

2. Anwendungsbeispiele.

A. Beiderseitige Außenkerbe bei Biegung.

Gegeben: $\varrho = 2,5$ mm, $t = 15$ mm, $a = 95$ mm. Daraus ergibt sich

$$\sqrt{\frac{t}{\varrho}} = 2,45, \quad \sqrt{\frac{a}{\varrho}} = 6,16.$$

Wie aus der Übersicht, Abb. 103, hervorgeht, gilt für $\sqrt{t/\varrho}$ die Zahlenreihe **b** und für $\sqrt{a/\varrho}$ Kurve **2**. Wir gehen also in Abb. 104 von $\sqrt{a/\varrho} = 6,16$ senkrecht aufwärts bis zum Schnitt mit Kurve **2**, dann waagrecht nach links bis zum Schnitt mit der Achse des Diagrammes. Von hier ziehen wir eine Verbindungsgerade zur Stelle $\sqrt{t/\varrho} = 2,45$ auf der anderen Achse, wobei Zahlenreihe **b** maßgebend ist. Diese Gerade berührt den für die Formzahl maßgebenden Kreis, wir finden $\alpha'_k = 4,28$.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens geht daraus hervor, daß der Halbmesser des Berührungskreises zugleich Höhe des rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten $\alpha_{fk} - 1$ und $\alpha_{ik} - 1$ ist. Mithin handelt es sich

in der Tat um denselben Zusammenhang zwischen den Formzahlgrenzwerten, den wir in II, 4 gefordert und in Abb. 3 erläutert hatten.

Handelt es sich um einen Werkstoff mit $\varrho' = 0,48$ mm, so wird $\sqrt{\varrho'/\varrho} = 0,44$. Der Flankenwinkel ω sei 90° . Dann gehen wir in Abb. 106 von $\sqrt{\varrho'/\varrho} = 0,44$ waagrecht nach links und von $\omega = 0,5\pi$ senkrecht nach unten. Durch den Schnittpunkt geht ein bestimmter, von der rechten unteren Ecke kommender Leitstrahl. Dann gehen wir unten von $\alpha'_k = 4,28$ unter 45° nach rechts oben bis zum Schnitt mit dem Leitstrahl; von hier gehen wir senkrecht abwärts und lesen die endgültige technische Formzahl $\alpha_k = 2,73$ ab.

Der Beweis der Übereinstimmung dieses nomographischen Verfahrens mit Gleichung (43) vom Abschnitt VIII liegt in der Ähnlichkeit der auftretenden Dreiecke.

B. Umdrehungsaußenkerbe mit axialer Bohrung bei Biegung.

Gegeben: $\varrho = 4$ mm, $a = 13$ mm, $t = 36$ mm, $r = 25$ mm, $\varrho' = 0,48$ mm, $\omega = 90^\circ$. Es wird

$$\sqrt{\frac{t}{\varrho}} = 3; \quad \sqrt{\frac{a}{\varrho}} = 1,80; \quad \sqrt{\frac{r}{\varrho}} = 2,50; \quad \sqrt{\frac{\varrho'}{\varrho}} = 0,35.$$

In Abb. 104 finden wir in der bereits beschriebenen Weise aus $\sqrt{t/\varrho}$ (Zahlenreihe **b**) und $\sqrt{a/\varrho}$ (Kurve **5**) zunächst ein α'_k vom Betrage 3,60. Es handelt sich hierbei aber erst um den Wert für große Bohrung, d. h. um $(\alpha'_k)_{r=\infty}$.

Nun gehen wir in Abb. 105 von $\sqrt{r/\varrho} = 2,50$ aufwärts bis zum Schnitt mit Kurve **2**, dann nach links bis zur Achse; von hier legen wir die Verbindungsgerade zur Stelle $(\alpha'_k)_{r=\infty} = 3,60$ auf der anderen Achse. Der Berührkreis liefert $\alpha'_k = 2,08$.

Abb. 106 liefert hierzu in der bereits oben geschilderten Art mit $\sqrt{\varrho'/\varrho} = 0,35$ und $\omega = \pi/2$ den endgültigen Wert $\alpha_k = 1,63$.

Additional material from *Kerbspannungslehre*, ISBN 978-3-662-35735-4,
is available at <http://extras.springer.com>

