

Herzog-Feldmann

**Die Berechnung
elektrischer Leitungsnetze
in Theorie und Praxis**

Vierte, völlig umgearbeitete Auflage

Von

Clarence Feldmann

Professor an der Technischen Hochschule
zu Delft

Mit 485 Textabbildungen



Berlin
Verlag von Julius Springer
1927

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung
in fremde Sprachen, vorbehalten.

ISBN-13: 978-3-642-89300-1 e-ISBN-13: 978-3-642-91156-9
DOI: 10.1007/978-3-642-91156-9

Copyright 1921 by Julius Springer in Berlin.
Softcover reprint of the hardcover 3th edition 1921

Vorwort.

Die vorliegende vierte Auflage unterscheidet sich grundsätzlich von der früheren durch die Anordnung des Stoffes.

Während seit der zweiten Auflage vom Jahre 1903 von Anfang an Wechselstrom und Gleichstrom zusammen besprochen wurden, behandeln jetzt die ersten acht Kapitel nur den Gleichstromkreis und die induktionsfrei und kapazitätslos gedachten Netze. Danach beginnt erst die Behandlung des ein- und mehrphasigen Wechselstromkreises mit seinen eigenartigen Schwierigkeiten.

Die frühere Anordnung, wobei der Gleichstrom als einfacher Sonderfall des Wechselstromes betrachtet wurde, hat für den Vorgeschnittenen einen gewissen Reiz; die jetzige ist aber aus pädagogischen Gründen empfehlenswerter für das Studium. Tatsächlich entspricht sie auch, abgesehen von einigen Zusätzen, dem Inhalt meiner seit mehr als 20 Jahren an der Technischen Hochschule zu Delft gehaltenen Vorlesungen über elektrische Leitungen.

Man kann auf diese Weise erst die einfachen Leiterverbindungen, die Netzbildung und Netzumformung kennenlernen und darauf nachträglich superponieren, was man an Einsichten über die Eigenarten des Wechselstromes und der Mehrphasenströme sich zu eigen gemacht hat. Es ist auf diese Weise leichter und mit geringerer Zersplitterung der Aufmerksamkeit möglich, eine Übersicht über das ganze Gebiet zu erlangen.

Wirtschaftliche Fragen, Erwärmung, Entwurf des Netzes und Leitungen für Bahnen, die im XI. bis XIV. Kapitel behandelt werden, setzen diese Übersicht voraus, und ihre Behandlung ist darum, wie früher, für alle Leitungs- und Stromarten gemeinsam durchgeführt. Lange Leitungen endlich, denen das XV. und XVI. Kapitel gewidmet ist, bilden eine Klasse für sich und können nur für bestimmte Fälle in Näherungsmethoden wieder an die für Leitungen mit punktförmig konzentrierter Induktivität und Kapazität gegebenen Ableitungen anschließen.

Auch inhaltlich unterscheidet sich die vierte Auflage von der vorhergehenden besonders durch die an zahlreichen Stellen eingeflochtenen Betrachtungen über die vier Grundgrößen der Leitungsberechnung im Anschluß an die vortrefflichen Untersuchungen Teichmüllers.

Kleinere Änderungen finden sich bei der Erwärmung der Leitungen und bei den langen Leitungen, wo die Rechentafeln von Brown und von Blondel und Lavanchy, der Rechenapparat von Karapetoff und das bipolare Betriebsdiagramm von Schönholzer neu aufgenommen wurden.

Durch Ausmerzung einiger Beispiele und mathematischer Betrachtungen war es möglich, trotz der Zufügungen, den Umfang des Buches nicht zu vergrößern.

Möge es auch in der neuen Gestalt sich Freunde erwerben.

Delft, im März 1927.

C. Feldmann.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
I. Zur Einführung.	
1. Energieverkettung	1
2. Einteilung der Anlagen	1
3. Entwicklung der Lichtquellen.	3
4. Entwicklung der Stromquellen	4
5. Entwicklung der Verteilungssysteme	5
6. Entwicklung der elektrischen Kraftübertragung.	7
7. Entwicklung des Leitungsbaues und der Leitungslehre	10
II. Theorie des einfachen Gleichstromkreises und der einfachen Leiterverbindungen.	
1. Das Ohmsche Grundgesetz	18
2. Potentiale Spannung und EMK.	19
3. Leitwert und Temperaturkoeffizient	21
4. Hintereinanderschaltung	23
5. Nebeneinander- oder Parallelschaltung	25
Hilfssatz	28
6. Der einfache Schließungskreis (der Π -Leiter)	30
7. Die kettenförmige Leiterverbindung (der Γ -Leiter)	31
a) Darstellung durch Kettenbrüche	31
b) Näherungsmethode	33
8. Der offene Leitungsstrang. Einzel- und Summenabnahmen	38
III. Leiterquerschnitte und Metallaufwand bei dem Zweileitersystem.	
1. Leiter von gleichem oder abgestuftem Querschnitt mit mehreren Abnahmen	42
a) Gleichbleibender Querschnitt f	42
b) Gleichbleibende Stromdichte δ	42
2. Leiter mit mehreren Abnahmen bei geringstem Kupferaufwand	43
3. Vergleich dieser Rechnungen für offene unverzweigte Leiter	44
a) Methode konstanten Querschnittes	45
b) Methode konstanter Stromdichte	45
c) Methode geringsten Kupferaufwandes	45
d) Abänderung zur Methode c)	46
e) Vergleich der drei Ergebnisse	46
4. Gleich- und gegenläufige Zweileiteranordnung	47
5. Gleichmäßig verteilte Stromabnahme	47
6. Verzweigte Leiter.	50
7. Fiktive Leitungslänge des Ersatzleiters	51
8. Zahlenbeispiel für einen verästelten Leiter	53
9. Verzweigter offener Leiter.	55
a) Berechnung auf konstante Querschnittssumme	55
b) Die Methode der konstanten Stromdichte im Hauptstrang.	56
c) Methode des Kupferminimums	57
Abgeänderte Lösung	58
10. Geringster Metallaufwand für die Leiter eines Netzknotens und eines Netzes.	59

IV. Zulässiger Spannungs- und Leistungsverlust.

	Seite
1. Die vier Grundgrößen der Leistungsberechnung	63
a) Der relative Spannungsabfall	63
b) Die relative Spannungsschwankung	63
c) Der relative Leistungsverlust	64
d) Die relative Leistungsschwankung	64
2. Rücksichtnahme auf die Glühlampen	66
3. Rücksicht auf die Motoren	68
4. Rücksicht auf die Regelung	69

V. Die einfach und die mehrfach geschlossene Leitung.

1. Der einfache Leitungsstrang mit beiderseitigen Stromeingängen und einer einzigen Stromentnahme	72
2. Der einfache Leitungsstrang mit beiderseitigen Stromeingängen und mehreren Stromentnahmen	75
3. Die Schnittmethode	77
4. Zeichnerische Behandlung der offenen und der beiderseits gespeisten Leitungsstrecke.	81
5. Verteilte Stromentnahmen	84
6. Einführung zu mehrfach geschlossenen Leitungen mit einer Speisestelle und mehreren	86
1. Beispiel	86
2. Beispiel	87
7. Über die Bildung von Netzen	91
8. Kreis- oder Zyklusströme eines Netzes	93
9. Knotenspannungen eines Netzes	96
Beispiel	97
10. Zur Theorie der Knotenspannungsmethode	101
Beispiel	103
11. Die Vergleichung von Strom- und Spannungsgleichungen.	103
12. Die Verteilung der Energie in Netzen	104
13. Einfluß von Änderungen in der Stromabnahme auf die Strom- und Spannungsverteilungen	106
14. Zusammenfassung	111
15. Annäherungsverfahren zur Auflösung linearer Gleichungen	113
a) Das Gauß-Gerlingsche Annäherungsverfahren	113
b) Jacobi- und Seidelsche Behandlungen	117
16. Graphik linearer Gleichungen und Elektrographik der Netze	118
a) Graphik	118
b) Problem einer Graphik der Determinanten	125
c) Physische Hilfsmittel und Maschinen	125
d) Elektrographik des Netzes	126
Schlußbemerkungen zu den vorhergehenden Kapiteln	126
a) Elektrischer Vorgang für die Maschen	126
b) Mathematischer Vorgang für die linearen Gleichungen.	127
c) Elektrischer Vorgang für die Knoten	128
Literatur zum 16. Abschnitt	129

VI. Netzbildung.

1. Allgemeines	130
2. Die Strombefreiung des Mittelknotens in einem sternförmigen Leitergebilde. Die Knotenentlastung	132
3. Die Befreiung des mehrfachen Verzweigungspunktes von seiner Stromentnahme	134
4. Widerstandstreuung	136
5. Die Transfigurierung	137
a) Transfigurierung eines Dreiecks in einen Stern	137
b) Transfigurierung eines Sterns in ein Dreieck	138

	Seite
c) Zeichnerische Dreieckstransfiguration	139
d) Vierecksumwandlung	142
e) Zweieckumbildung	143
6. Zahlenbeispiel zur Zweiecksumbildung	146
7. Beispiel zur Dreiecksumbildung	151
8. Zerlegung in unabhängige Bezirke	153
9. Netzspaltung	154
10. Beispiel eines dreischenkligen Sterns	159
11. Beispiel eines Dreiecks mit drei angesetzten Strahlen	162
12. Beispiel zur Netzspaltung. Rotterdamer Netz	165
13. Zweites Beispiel. Haager Netz	168

VII. Leitungssysteme.

A. Unmittelbare Stromverteilung.

1. Reihensysteme	170
2. Zweileitersysteme	171
a) Eine kleine Leitungsrechnung	171
b) Eine Hausinstallation	172
3. Gemischte Systeme	173
a) Reihe von parallel geschalteten Gruppen.	173
b) Parallelgeschaltete Reihen	174
c) Einfluß der Abschaltung einer Lampe	174
4. Vorteil höherer Gebrauchsspannung	175
5. Verteilung mittels Speiseleitungen	176
6. Last örtlich und zeitlich veränderlich	177
7. Ausgleichsleitungen	178
8. Mehrleitersysteme.	186
a) Dreileitersystem	186
b) Fünfleitersystem	187
9. Ungleiche Belastung des Dreileitersystems	188
a) Der relative Spannungsabfall	190
b) Relative Spannungsschwankung	190
c) Relativer Leistungsverlust und relative Leistungsschwankung	192
10. Querschnitt des Mittelleiters bei unausgeglichener Belastung	192
11. Erdung des Mittelleiters bei Dreileiteranlagen	194

B. Mittelbare Verteilung.

1. Verteilung mittels Akkumulatoren	196
2. Verteilung mittels Transformatoren.	198
a) Reihenschaltung von Transformatoren	198
b) Parallelschaltung von Transformatoren	198

VIII. Theorie des einfachsten Wechselstromkreises und der einfachsten Leiterverbindungen.

1. Stromarten und ihre Entstehungsweise	200
2. Wechselströme beliebiger Kurvenform	206
3. Ohmsches Gesetz für Wechselströme	207
4. Anstieg und Ablauf des Stromes	211
a) Bei Gleichstrom	211
b) Bei Wechselstrom	213
5. Richtungswiderstand und Richtleitwert	214
6. Serienschaltung von Richtungswiderständen	217
7. Rechnerische Behandlung von Wechselstromgrößen	220
a) Komplexe Symbole	220
b) Die erste Normalform	221
Addition	221
Konjugierte Widerstände	223
Subtraktion	223

	Seite
Multiplikation und Division	225
Exponentielle Form	228
Über ebene Vektoren	229
8. Parallelschaltung von Richtungswiderständen	231
a) Rein Ohmscher parallel rein induktiver Widerstand	231
b) Weitere zeichnerische Methoden	231
9. Beziehungen zwischen den Größen der Reihen- und Parallelschaltung	236
10. Der einfache Schließungskreis (der Π -Leiter)	238
11. Rechnerische Behandlung	243
a) Der relative Spannungsabfall	243
b) Die relative Spannungsschwankung	243
c) Der relative Leistungsverlust	245
d) Die relative Leistungsschwankung	246
12. Vergleich zwischen Gleichstrom und Wechselstrom	246
13. Die kettenförmige Leiterverbindung (der Γ -Leiter)	248
a) Der ruhende Transformator	249
b) Allgemeiner Stromkreis	250
14. Das Strom- und Spannungsvielseit der kettenförmigen Leitungen	251
15. Phasenverschobene oder gerichtete Stromabnahmen an reaktionslosen Leitungen	255
a) Eine Stromabnahme	255
b) Mehrere Stromabnahmen	255
c) Beispiel	255
d) Zusammenhang zwischen relativer Spannungsschwankung und relativem Effektverlust	258
16. Verteilung in Wechselstromnetzen	259
17. Verteilung in reaktionslosen Netzen mit induktiven Abnehmern	260
18. Spannungsschwankungen im unsymmetrisch belasteten Einphasen-Dreileiternetz	262

IX. Mehrphasensysteme.

1. Allgemeines	264
2. Betrachtung im Stromkreissinn und im Leitungssinn	267
3. Drehstromleitungen bei Dreieckschaltung der Verbraucher	269
a) Die Zustandsgrößen ε und ζ	270
b) Die Schwankungsgrößen η und ξ	271
4. Induktionsfreie Belastung und Leitung bei Δ -Schaltung	272
a) Größte Spannungsänderung bei Gesamtänderung der Belastung	273
b) Größte Spannungsänderung bei Einzeländerung	273
c) Größte Spannungsschwankung bei Gesamtschwankung	273
d) Größte Spannungsschwankung bei Einzelschwankung	273
5. Induktive Belastung, induktionsfreie Leitung bei Δ -Schaltung	274
a) Größte Spannungsänderung bei Gesamtänderung	275
b) Größte Spannungsänderung bei Einzeländerung	275
c) Größte Belastungsschwankung	276
6. Drehstromleitungen bei Sternschaltung der Verbraucher	276
a) Die Zustandsgröße ε	276
b) Die Schwankungsgrößen η und ξ	278
7. Induktionsfreie Belastung und Leitung bei Y-Schaltung	278
8. Belastung induktiv, Leitung induktionsfrei bei Y-Schaltung	279
a) Größte Spannungsänderung	280
b) Größte Spannungsschwankung	281
9. Andere Behandlung der unsymmetrisch belasteten Dreiphasenleitung in Sternschaltung	282
10. Symmetrisches Vierphasensystem	284
11. Zweiphasensystem	285
12. Vergleich der Systeme auf Grund gleicher Verbrauchsspannung	287
13. Vergleich der Systeme auf Grund höchster Spannung zwischen den Leitern	287

X. Die Berechnung der Leitungen auf Grundlage der vier Grundgrößen.

	Seite
1. Berechnung auf relativen Spannungsabfall ε	289
2. Berechnung auf relativen Leistungsverlust ζ	290
3. Berechnung auf relative Spannungsschwankung η	291
4. Kritischer Vergleich auf Gesamtschwankung und -änderung, Einzelschwankung und -änderung	291
5. Berechnung auf Spannungsschwankung im engeren Sinne	293
6. Berechnung auf Spannungsänderung im engeren Sinne	295

XI. Die wirtschaftliche Bemessung elektrischer Leitungen.

1. Einige Sonderfälle	296
a) Die Kosten der Leitung belasten die Stromlieferung	297
b) Der Verbraucher bezahlt die Leitung und den Verlust darin	298
c) Fernleitung mit konstanter Anfangsleistung W_1	300
d) Leitung mit gegebener Endleistung W_2	301
2. Zeichnerische Behandlung der wirtschaftlichen Leitungs Bemessung	302
a) Der relative Reingewinn soll maximal sein	302
b) Die relativen Selbstkosten der ganzen Anlage sollen minimal werden	303
c) Die Selbstkosten der Leitung für 1 kWjahr sollen minimal werden	304
d) Wasserzentrale mit Dampfhilfskraft	305
3. Kosten in Erde verlegter Kabel	306
4. Jährliche Arbeitsverluste in den Leitungen	308
5. Verschiedenheitsfaktor der Leitungen	310
6. Ausgleichung wattloser Leitungsbelastung	313
a) Ersparnis an Leitungskosten	313
b) Verringerung der Stromstärke	313
c) Mehrauslagen für den Motor	314
d) Gesamtersparnis an Anlagekosten	314
e) Zahlenbeispiel	315
f) Ausgleichung durch asynchrone Motoren oder Drosselspulen	316
Literatur	318

XII. Erwärmung der elektrischen Leiter.

1. Erwärmung isolierter Leiter durch den Strom	319
2. Erwärmung von Leitungen im Freien	321
3. Erwärmung unterirdisch verlegter Kabel bei Dauerbetrieb	323
4. Erwärmung der Kabel bei aussetzendem Betrieb	327
5. Erwärmung bei Einziehsystemen	333
6. Abwägung der kritischen Länge	335

XIII. Entwurf geschlossener Leitungsnetze.

1. Allgemeines	336
2. Bestimmung der günstigsten Zahl von Speisepunkten	340
3. Sekundär zusammenhängendes Netz	343
4. Günstigste Anzahl der Transformatorstationen	347
5. Wahl der Transformatorgröße	354
6. Rotierende Umformer	356
7. Entwurf eines Städtetzes für Drehstrom	359
a) Entwurf des Niederspannungsnetzes	359
b) Nachprüfung des Entwurfes	364
c) Entwurf des Hochspannungsnetzes	370
d) Prüfberechnung des Hochspannungsnetzes	372

XIV. Die Leitung elektrischer Bahnen.

1. Fahrdrähte und Speiseleitungen	374
2. Beispiel. Eine Gleichstrombahnlinie	375
a) Graphischer Fahrplan	376
b) Kraftbedarf	380
c) Wagenkilometer und mittlerer Kraftbedarf	383

	Seite
d) Speiseleitungen	385
e) Schienenrückleitung	387
3. Rückspeisekabel und Zusatzmaschinen	390
4. Stromrückleitung und Streuströme	392
a) Verlauf der Erdströme	392
b) Gefährzustand und Gefahrzone	394
c) Verhütung schädlicher Wirkungen	396
5. Wechsel- und Drehstrombahnen	397
6. Wirtschaftliche Bemessung der Bahnspeisekabel	401
7. Wirtschaftlicher Spannungsabfall in Fernleitungen für Bahnkraftwerke	404

XV. Induktivität und Kapazität.

1. Definition der Fundamentalkonstanten eines Mehrleitersystems	407
a) Elektrische Energie	407
b) Magnetische Energie	408
2. Allgemeine Grundlagen und Begriffe	409
a) Eigenschaften der Mehrleitersysteme (MLS)	409
b) Fundamentalkonstanten	410
c) Induktiver und Ohmscher Spannungsabfall in einer Schleife	411
d) Zusammensetzung mit der Maxwellschen Theorie. Umlaufspannung	412
e) Kapazitäts- und Ableitungskoeffizienten des MLS	414
f) Induktionskoeffizienten des MLS	417
3. Betriebswerte	418
4. Induktivität von Luftleitungen	421
5. Induktivität von Drehstromleitungen	423
Zahlentafel für den Tangentenfaktor	427
6. Gegenseitige Induktion zwischen zwei Stromkreisen und Wirkung der Verdrillung	429
a) Beide Leitungen unverdrillt	432
b) Eine Leitung verdrillt	432
c) Beide Leitungen verdrillt	433
d) Gegenseitige Induktion auf eine Schwachstromleitung	434
7. Kapazität von Luftleitungen	435
a) Symmetrische Doppelleitung	435
b) Einzeldraht	436
8. Kapazität von Drehstromluftleitungen	437
a) Symmetrische Anordnung	437
b) Allgemeiner Fall. Sechs Drähte	438
c) Gegenläufige Anordnung	438
d) Gleichläufige Anordnung	441
9. Elektrostatische Beeinflussung von Schwachstromleitungen	442
10. Induktivität und Kapazität konzentrischer Kabel	444
11. Kapazität verseilter Kabel	446
12. Induktivität verseilter Kabel	449
13. Der dielektrische Effektverlust in Kabeln	450

XVI. Strom- und Spannungsverteilung bei langen Leitungen.

1. Ableitung der Grundgleichungen für verteilte Kapazität und Induktivität	454
2. Leerlauf- und Kurzschluß	460
3. Änderung der Gleichungen bei Zählung vom Anfang	462
4. Die unendlich lange Leitung	462
5. Vergleich mit der Leitung von endlicher Länge	464
6. Die am Ende belastete Leitung	466
7. Ersatzstromkreis der Leitung mit verteiltem C und L	468
8. Zwischenbemerkung über Hyperbelfunktionen	470
9. Darstellung in reeller Form	472
10. Behandlung spezieller Fälle in reeller Form	475
a) Am Ende offene Leitung	475
b) Am Ende kurzgeschlossene Leitung	476

	Seite
c) Zusammenhang mit früher Erörtertem	477
d) Anwendung auf kürzere Leitungen	480
e) Zahlenbeispiel	481
f) Belastung am Ende des Kabels	482
11. Graphische Darstellung durch logarithmische Spiralen	484
12. Übertragung über eine Viertelwellenlänge	486
13. Übertragung über eine halbe Wellenlänge	490
14. Übertragung über anderthalb Wellenlängen	494
15. Über die Zulässigkeit der Superposition bei mehreren Abnehmern	497
16. Praktische Näherungsmethoden	499
1. Beispiel: 200 km Einphasenleitung mit einer Abzweigung.	
a) Berechnung der Daten	500
b) Ein Kondensator am Ende	501
c) Ein Kondensator am Anfang	501
d) Mittelwert der beiden Ausdrücke	502
e) Genaue Methode	502
f) Näherungsmethode mit Reihenentwicklung	503
g) Zusammenstellung und graphische Behandlung	503
2. Beispiel: 200 km Drehstromleitung mit zwei Abzweigungen.	
a) Genaue Rechnung	506
b) Darstellung durch logarithmische Spiralen	507
c) Darstellung durch mehrere Kondensatoren	510
d) Berücksichtigung des 1. Korrektionsgliedes	511
e) Schlußfolgerungen	513
17. Betriebsdiagramm der Fernleitung	514
a) Leerlauf	514
b) Kurzschluß	515
c) Belastung	515
d) Kombination des Strom- und Spannungsdiagrammes	515
e) Beispiel einer 100 kV-Drehstromleitung	517
18. Behandlung mittelst hyperbolischer Rechentafeln	521
Die Tafel von Brown	522
Die Tafel von Blondel und Lavanchy	525
19. Ein Rechenapparat. Das Heavisidion	526
20. Ursachen und Größe der Ableitung und Strahlungsverluste	528
a) Über Korona und Koronaverluste	529
b) Zusammenfassung und Schlußfolgerungen	533
21. Ausgleichsvorgänge und freie Schwingungen in langen Leitungen	536
a) Arbeitsvorgang	536
b) Erzwungene Schwingungen	538
c) Resonanzbedingungen bei konzentriertem L und C	538
d) Resonanzbedingungen bei verteiltem L und C	539
e) Freie Schwingungen bei verteiltem L und C	541
f) Verlauf der Ladung bei Gleichstrom	545
g) Wanderwellen	546
Anhang. Amerikanische Maße	549
Sachverzeichnis	550

I. Zur Einführung.

1. Energieverkettung.

Alle Energie abgebenden und aufnehmenden Teile einer Elektrizitätsanlage sind untereinander und gegenseitig durch Energieströme verkettet, welche mechanischer, elektrischer oder magnetischer Art sind. Die zu verbindenden Teile, welche wir hier behandeln wollen, sind elektrische Energieerzeuger wie die Dynamomaschinen, welche mechanische Energie in elektrische umsetzen, oder sie sind Energieabnehmer, wie die Lichtquellen, welche die Elektrizität in Licht und Wärme verwandeln, oder wie die elektrischen Motoren, bei welchen die Rückumsetzung in mechanische Energie erfolgt. Außer diesen Anfangs- und Endgliedern der Arbeitskette oder Energieübertragung kommen noch Zwischenglieder, wie Umwandler und Umformer in Betracht, bei welchen elektrische Energie von bestimmten Eigenschaften in solche von anderen Eigenschaften, elektromagnetisch wie bei den Transformatoren, chemisch wie bei den Akkumulatoren, umgestaltet oder umgeformt wird.

Die Behandlung der Leitungssysteme hängt mit den Eigenschaften und Anforderungen der zu verbindenden Teile wesentlich zusammen. Alle Fragen über Anordnung und Bemessung der Leitungen entspringen vor allem aus dem Charakter der Anlage.

2. Einteilung der Anlagen.

Die Anlagen werden nach verschiedenen Gesichtspunkten eingeteilt, die keine scharfe Scheidung zulassen. Kleinere Anlagen für eine mäßige Zahl benachbarter Verbraucher, bei denen Erzeugung und Verbrauch meistens in einer Hand liegen, heißen Einzelanlagen, größere mit vielen Verbrauchsstellen dagegen Elektrizitätswerke. Soll elektrischer Strom auf viele Kilometer weit übers Land geführt werden, so wird die Anlage zu einer Fernleitungs- oder Überlandanlage. Die von Elektrizitätswerken gespeisten Hausanschlußanlagen bezeichnet man oft als Sekundäranlagen. Man unterscheidet weiter zeitweilige und beständige, feste, fahrbare und halb feste Einrichtungen, oder nach dem Träger der mechanischen Energie auch Wasser-, Dampf- und Gaskraftanlagen.

Die Einteilung nach den Verteilungssystemen, nach der Art des Stromes, der Verwendung von Nieder- oder Hochspannung, der Benutzung von Transformatoren oder Akkumulatoren läßt sich wie folgt noch schärfer fassen:

nach der Schaltung der Energieabgeber und -aufnehmer in solche mit Reihenschaltung oder mit Parallelschaltung usw.;

nach der Art der Verbindung zwischen Erzeuger und Abnehmer in direkte und indirekte Systeme;

nach der Zahl der Leiter in Zwei-, Drei- und Mehrleitersysteme und nach der Art des verwendeten Stromes in Gleichstrom- und ein- und mehrphasige Wechselstromsysteme.

Es läßt sich hiernach etwa nebenstehende Übersicht über die Verteilungssysteme geben.

Gleich- u. Wechsel- strom	Gleichstrom	Strom konstant	Direkte Verteilung	{ mit reihengeschalteten Bogenlampen mit reihengeschalteten Glühlampen mit reihengeschalteten Gleichstromgene- ratoren und ebensolchen Motoren bis zu Gesamtspannungen von 100 kV
			Indirekte Verteilung	
	Spannung konstant	Direkte Verteilung	{ als Zweileitersystem mit 110- oder 220 voltigen Glühlampen und mit 600 oder 1200 V für Gleichstrombahnen als Dreileitersystem für 2×110 und 2×220 V ferner für 2×600 und 2×1200 V für Gleichstrombahnen (als Fünfleitersystem für 4×110 V)	
		Indirekte Verteilung	{ drehender { Motor gekuppelt mit Dyna- Umformer { mo oder Dynamomaschine mit zwei Wicklungen in Bereitschaft und zur Akkumula- { Pufferung toren { auf vorgeschobenen Unter- stationen	
	Wechsel- und Drehstrom	Strom konstant	Direkte Verteilung	{ Glühlampen in Reihen Glühlampe in Reihe mit parallelgeschalte- ten Induktionsspulen od. Kondensatoren Bogenlampen in Reihen Bogenlampe in Reihe mit parallelgeschalte- ten Induktionsspulen
			Indirekte Verteilung	{ Ruhende Transformatoren Transformatoren für einzelne Bogenlampen oder Glühlampen
Ein- u. mehr- phasige Span- nung konstant		Direkte Verteilung	{ für Licht- und Kraftabgabe	
	Indirekte Verteilung	{ Ruhende { Einzeltransformatoren oder Transfor- { Transformatorunterstatio- matoren { nen mit verbundenen oder losen Sekundärnetzen bis zu 200 kV Spannung		
Gleich- u. Wechsel- strom	Spannung konstant	Direkte Verteilung	{ Doppeldynamo für Abgabe beider Strom- arten	
		Indirekte Verteilung	{ Motorgenerator oder Einankerumformer mit oder ohne Akkumulatoren.	

Die Mannigfaltigkeit dieser Übersicht rührt von der Vereinigung einfacher Lösungen her, obgleich nur rein elektrische Systeme berücksichtigt wurden, und die gemischten, wie die 1890 durch Viktor Popp in Paris im großen versuchten Preßluftanlagen oder die van Rysselbergischen Druckwasseranlagen in Brüssel weggelassen sind. Diese gemischten, nicht ohne Spott als unrein bezeichneten Systeme haben nur vorübergehende Bedeutung erlangen können.

Die Systemwahl hängt von den Eigenschaften der Schaltung, Leitung, Regulierung und den Betriebsumständen ab. Eine Vorbereitung über diese Fragen soll die folgende geschichtliche Darstellung gewähren, aus der auch die natürliche Entwicklung der Leitungsberechnung ersichtlich wird.

Die Geschichte der Starkstromtechnik zeigt zwei Entwicklungsstufen. Die erste verdankte sie der Anwendung elektrischer Energie zur Lichterzeugung, die zweite der elektrischen Kraftübertragung.

3. Entwicklung der Lichtquellen.

Die Entwicklung der elektrischen Lichtquellen beginnt mit dem 1808 von Humphry Davy mit Hilfe der Voltaschen Säule hervorgebrachten elektrischen Lichtbogen. Léon Foucault ersetzte 1844 die weichen Holzkohlenstäbchen durch harte Stifte aus Retortenkohle und verbesserte 1848 die Handbogenlampe durch den selbsttätigen Nachschub der Kohlenstifte, welche Bauweise durch Serrin-Duboscq wesentlich weitergeführt wurde. Von da an beginnen unablässige Bestrebungen zur Verbesserung des Bogenlichtes und der Bogenlampen. Anfangs mußte man jede einzeln mit einer Dynamo betreiben, bis es Tschikoleff und F. von Hefner-Alteneck 1878 durch die Differentialschaltung der regulierenden Bogenlampenspulen gelang, mehrere Bögen in stetem Gleichgewicht reihengeschaltet zu erhalten.

Die Teilung in „Einzellichter“ hat 1877 Paul Jablockhoff durch seine reihengeschaltete Kerzen praktisch zuerst gelöst. Zwei parallel liegende Kohlenstäbe waren durch eine dünne, abschmelzbare Isolierschicht voneinander getrennt, aber an der Spitze zur Zündung des Lichtbogens leitend gemacht. Seine Kerzen erleuchteten die Avenue de l'Opéra in Paris und fanden bald weite Verbreitung. Ihre unzureichende Brenndauer zwang zum selbsttätigen Einspringen bereitstehender Kerzen, wodurch die Einfachheit verloren ging.

Von den vielen Bogenlampen seien nur einige angeführt, wie die Brushlampe mit ihrer typischen Kohlenklemmung, die laufwerklose Křižik-Piettelampe aus dem Jahre 1886, die Grammesche usw. L. B. Marks hat 1894 den eingeschlossenen Lichtbogen studiert und die Jandusbogenlampe als erste Dauerbrandbogenlampe eingeführt. Die Verbesserung der Kohlenstäbe, die Leuchtzusätze von Carré und später auf der Pariser Weltausstellung 1900 von Bremer, die Blondelschen Kohlenstäbe, sowie die Magnetitbogenlampe von Charles P. Steinmetz, ferner die Quecksilberdampfampe von Cooper-Hewitt 1901 und das Mooresche Licht 1903 sind neuere Entwicklungen, die hier nur erwähnt werden können¹⁾.

Neben dem Lichtbogen hatte frühzeitig die Erscheinung Aufmerksamkeit erregt, daß ein vom Strome durchflossener kontinuierlicher Leiter sich erwärmt und ins Glühen und Leuchten geraten kann. J. W. Starr in Cincinnati und M. Jobart in Brüssel schlugen bereits

¹⁾ Näheres findet sich u. a. in dem Handbuch der elektrischen Beleuchtung von J. Herzog u. C. Feldmann, 3. Aufl. Berlin: Julius Springer 1907.

1838 vor, Kohlenfäden im Vakuum zu erhitzen, während W. R. Grove schon einige Monate vorher in gewöhnlicher Luft Metallfäden mit Kohlenpulver überschüttete und erhitze. Die erste Lampe hat Frederick de Moleyns 1841 in England mit einer Platinspirale gebaut. Heinrich Goebel, ein späterer Held in der Patentgeschichte der Glühlampe, soll 1854 Kohlenfadenlampen benutzt haben. Lodyguine betrieb 1871 in Petersburg 200 Platinglühlampen mit einer Maschine; gleiches tat Wallace Farmer 1875 mit 42 Glühlampen. De Changy, Lontin und Edinson versuchten vergebens widerstandsfähige, dünne Metalldrähte aus den verschiedensten Legierungen zu gewinnen. Sawyer, Maxim, Man, Lane-Fox ergänzten diese Versuche durch Karburierung. Im Jahre 1878 endlich gelang es Sawyer und Man, den aus Papier hergestellten Kohlenfaden gleichmäßig zu präparieren, während Edison den dichteren Bambus vorzog. Im Februar 1880 ließ Edison seine Herstellungsweise durch F. R. Upton veröffentlichen. Edison und Swan gebührt das Verdienst, die Kohlenfadenlampe zur praktischen Einführung gebracht zu haben.

Walther Nernst hat 1897, veranlaßt durch theoretische Studien über die Wirkung des Karl Auer von Welsbachschen Gasmantels, die elektrolytische Lichterzeugung wieder aufgenommen, welche schon Paul Jablochkoff 1877 an erhitzten Stäbchen aus Kaolin, Magnesia oder Zirkonoxyd versucht hatte. Alle Bemühungen, die Zündtemperatur des aus seltenen Erden hergestellten Fadens wesentlich zu erniedrigen, halfen über den Geburtsfehler der Vorerhitzung nicht hinweg. Auer war der erste, der schon vorher wieder zum Metallfaden aus dem seltenen und schwer schmelzbaren Osmium gegriffen hatte. Ihm folgte Siemens und Halske mit dem Tantal, während Just und Hanemann mit dem Metall Wolfram den Meistergriff taten. Die Wolframfäden konnten anfangs nur durch kolloidales Spritzverfahren gewonnen werden, bis 1912 auch die technologische Herstellung der gezogenen Drähte durch die General Electric Co. in Schenectady gelang. Mit dieser Rückkehr vom siegreichen Kohlenfaden der achtziger Jahre zum widerstandsfähigen Wolframdraht aus streckbarem Wolfram fiel der Verbrauch für die erzeugte Normalkerze von 4 Watt auf 1, ja $\frac{1}{2}$ Watt. Die im Laboratorium der General Electric Co. durchgeführten Untersuchungen von I. Langmuir und J. A. Orange über die Verhütung des Schwarzwerdens von Glühlampen haben 1913 zur Halbwattlampe mit Stickstofffüllung für große Lichtstärken und normale Spannungen geführt. Jetzt werden auch Lampen mit niedrigerer Kerzenzahl und normaler Spannung zum Teil mit Argonfüllung angefertigt. Der Verbrauch beträgt bei diesen Lampen etwa 0,7—0,8 Watt für die Kerze, bei großen Lichtstärken 0,5 Watt/Kerze.

4. Entwicklung der Stromquellen.

Diese Bestrebungen gingen mit der Vervollkommnung der Stromerzeugung Hand in Hand, um die primären Batterien zu verdrängen. Den Ausgangspunkt hierzu bildete die Entdeckung der Induktion durch

Michael Faraday 1831, welche zur magnetelektrischen Maschine führte. Einen wesentlichen Fortschritt brachte der Zylinderinduktor von Werner Siemens und 1867 die Entdeckung des dynamoelektrischen Prinzips durch ihn und durch Sir Charles Wheatstone.

Die ersten Maschinen waren magnetelektrische Wechselstrommaschinen. Erst nachdem der belgische Modellschreiner Zénobe T. Gramme 1871 den 1865 von Antonio Pacinotti erfundenen Ringanker und Fr. von Hefner-Alteneck den Trommelanker einführten, konnte man Gleichstrom wirtschaftlich durch Maschinen erzeugen.

Immerhin blieben anfänglich die Wechselstrommaschinen noch vorherrschend, weil sie den Strom einzelner Spulen zur unabhängigen Speisung von Einzellichtern oder mehrerer Spulen zum Betriebe unabhängiger Bogenlampenreihen liefern konnten.

Als indirekte Stromquelle folgt hier zeitlich der Akkumulator, dessen Geschichte auf die elektrolytische Polarisation zurückführt. Gautherot fand 1801 den Rückstrom bei einem Platin-Silber-Voltameter, und Ritter setzte 1803 die erste sekundäre Batterie aus Golddrähten zusammen. Schon 1837 hat aber Schönbein das oxydierte Blei benutzt, und 1842 hat William R. Grove die erste Gasbatterie erfunden, mit der er einen Lichtbogen erzeugte. Von 1860 bis 1879 hat Gaston Planté den Bleiakkumulator erfolgreich gefördert. 1879 hat sich R. L. Metzger in Deutschland mit der Formierung der Platten durch aufgetragenes Material beschäftigt, welches Verfahren jedoch erst Camille Faure und unabhängig von ihm Charles F. Brush zur Verkürzung der Formierungszeit ausgestaltet haben. Sir William Thomson schrieb damals an die Times über die „marvelous box of electricity“, worin „a million foot pounds of energy“ von Paris nach Glasgow reisten.

Mit der Einführung des Bleigitters durch Sellon und Volkmar 1882 möge diese kurze Besprechung der älteren Entwicklung abgeschlossen werden. Die heute allgemein abgenommene Bezeichnung Akkumulator für die sekundäre Batterie rührt merkwürdigerweise von James Clerk Maxwell her, der den Ladevorgang ähnlich dem eines gewöhnlichen Kondensators hinstellte.

5. Entwicklung der Verteilungssysteme.

Die Entwicklung der Stromverteilungssysteme wurde durch das Streben nach der bereits erwähnten „Teilung des Lichtes“ gefördert. Die Reihenschaltung der Jablockkoffschen Kerzen und der Regulatorlampen konnte nicht völlig befriedigen. Die Anwendung der Regulatorlampen blieb auf die Straßenbeleuchtung beschränkt. So beleuchtete die eigenartige Brush-Gleichstrommaschine die Straßen von Philadelphia noch 1910: Eine 60-kW-Maschine speiste 125 Gleichstrombogenlampen von je 50 V und 9 A in einer Reihe. Die erste Parallelschaltung von Lichtquellen erzielte Werdermann 1878 mit seiner Kontaktbogenlampe, bei welcher die Kohlenstifte sich berührten, durch Vorschaltung eines Beruhigungswiderstandes vor jeder Lampe. Diesen

Vorteil hat dann 1883 Gülcher auch für die gewöhnlichen Bogenlampen endgültig eingebürgert.

Gegen die Parallelschaltung herrschte aber noch ein großes Vorurteil, das erst mit der Verbreitung der Glühlampen wich.

Die ersten Glühlampen schaltete Francis Upton 1879 parallel. Die erste praktische Einrichtung mit 115 Glühlampen gab Thomas A. Edison auf dem Dampfer Columbia im selben Jahre. Im folgenden errichtete er in New York das erste Elektrizitätswerk, und 1881 wurde das Privathaus von W. H. Vanderbilt als isolierte Anlage mit Glühlicht versehen. Auf der Pariser elektrischen Ausstellung desselben Jahres führte Edison dann der großen Öffentlichkeit sein Zweileitersystem mit 1000 Glühlampen vor.

Da der Spannungsabfall bis zu den am weitesten entfernten Glühlampen nur einen kleinen Bruchteil der Lampenspannung von 110 V betragen durfte, mußten bei größeren Verteilungsnetzen recht große Leitungsquerschnitte angenommen werden. Dadurch stieg jedoch der Aufwand an Leitungsmaterial derart, daß bei einer Ausdehnung über mehrere hundert Meter die Ausführung unwirtschaftlich, ja selbst fraglich wurde.

Diesem Übelstande begegnete Edison durch Feeder- oder Speiseleitungen, wodurch das Verteilungsnetz neue Quellpunkte erhielt und billiger werden konnte. Trotzdem aber blieben die Versorgungsgrenzen noch immer sehr beschränkt. Man erkannte die Notwendigkeit höherer Verteilungsspannungen. Die Erhöhung der Glühlampenspannung auf 220 V konnte wegen der Fabrikationsschwierigkeiten erst viel später durchgeführt werden. Der kleineren Lampen- und größeren Verteilungsspannung wurde aber dadurch Rechnung getragen, daß man zwei Dynamomaschinen hintereinander schaltete, von den äußeren beiden Klemmen dieser Maschinengruppe je eine Hauptleitung und von der gemeinsamen Mittelklemme den Ausgleichs-, Mittel- oder neutralen Leiter abführte. Jede Lampe wurde zwischen diesen Mittelleiter und eine Hauptleitung parallel eingeschaltet. An ihren Klemmen herrschte daher ungefähr die Spannung einer Maschine, während die Spannung zwischen beiden Hauptleitungen das Doppelte betrug. Bei gleichem relativen Spannungsabfall mußte dieses Dreileitersystem somit wesentlich dünnere und billigere Leitungen als das Zweileitersystem ergeben.

Dieses von Th. A. Edison in Amerika 1883 und von John Hopkinson in England erfundene Dreileitersystem war ein gewaltiger Fortschritt. Es hatte in der Swanschaltung, bei welcher der Mittelleiter keinen Anschluß an die Maschine fand, einen unvollständigen Vorläufer. Wie hoch man ihren praktischen Wert sofort einschätzte, bezeugt, daß die Westinghouse Gesellschaft für das britische Patent 360000 M. an Hopkinson bezahlte.

Eine Möglichkeit, hohe Spannungen in den Leitungen anzuwenden, ohne die Lampenspannung zu erhöhen, bot in beschränktem Umfange wohl auch die reine Reihenschaltung. Aber sie erforderte Kurzschließer in den Leitungen und Ausschalter bei den Lampen, um ge-

fahrlos die Ausschaltung zu ermöglichen. Man versuchte vorübergehend auch mehrere Gruppen paralleler Lampen hintereinander anzuordnen, so in der ersten europäischen Straßenbeleuchtung mit Glühlampen durch die Brush-Gesellschaft in Temesvar. Allein nur die Nebeneinschaltung besaß alle durch die Löschbarkeit bedingten Eigenschaften, denen auch das Zwei- und Dreileitersystem genügten. Beide reichten jedoch nicht unmittelbar aus, den Strom über weite Gebiete wirtschaftlich zu leiten und zu verteilen, wozu weit höhere Spannungen als 2×110 und später 2×220 V nötig waren.

Schon lange kannte man die Induktionsapparate, welche die hohe Spannung der Leitungen in die niedrigere, gefahrlosere der Verteilungsleitungen herabzusetzen vermochten. Schon 1831 hatte Michael Faraday mit solchen Spulen gearbeitet. 1836 folgten Josef Henry und Charles Grafton Page, 1837 Nicholas J. Callan und 1848 Ruhmkorff, 1855 die Brüder C. T. und E. B. Bright. Jablochkoff benutzte 1873 eine Induktionsspule für die bereits genannte Kaolinlampe; er ließ sich auch die primäre Reihenschaltung der Induktoren bei einzelnen sekundären Serienkreisen patentieren. 1881 folgten ihm B. Haitzema Enuma in Amsterdam und mit praktischen Erfolgen 1883 Lucien Gaulard, der das Royal Aquarium und die Stationen der Metropolitan-Untergrundbahn in London beleuchtete. Die Endstationen dieser Linie waren 12 km voneinander entfernt. Die Induktionsapparate oder Sekundärgeneratoren, wie er sie nannte, hatten das Umsetzungsverhältnis 1:1. Die primären Spulen waren reihengeschaltet, die parallelgeschalteten Lampen an die sekundären Klemmen gesetzt. Da der primäre Kreis konstante Stromstärke, die sekundären Kreise konstante Spannung erforderten, so versagte die Regulierung bei Löschung der Lampen, denn der verschiebbar vorgesehene Eisenkern war hierfür unzureichend. Dieser Mangel offenbarte sich auch in Gaulards Beleuchtungsanlage auf der Turiner Ausstellung 1884. Erst im Jahr 1885 brachten Carl Zipernowsky, Max Déri und Otto T. Bláthy die richtige Lösung, nämlich die Parallelschaltung auch der primären Spulen, wie dies Rankin Kennedy 1883 bereits ohne tiefere Sachkenntnis vorgeschlagen hatte. Vorher hatte Bláthy den pollosen Voltainduktor, den schon Faraday und Werner von Siemens und andere kannten, in die Praxis unter dem Namen Transformator eingeführt. Durch seine günstigen elektrischen Eigenschaften wurde die nötige Selbstregelung von selbst erreicht.

Damit gelangte die alte außenerrregte Wechselstrommaschine, welche durch die von Edison verbesserte Gleichstrommaschine zurückgedrängt worden war, wieder zu neuer Bedeutung, die durch den später erscheinenden Drehstrom noch mehr wuchs.

6. Die Entwicklung der elektrischen Kraftübertragung.

Die Geschichte der elektrischen Kraftübertragung greift auf Michael Faradays Entdeckung der elektromagnetischen Drehung 1821, auf Barlows Rad 1823 und Josef Henrys Motor 1831 zurück.

Die Erkenntnis der Umkehrbarkeit in der Wirkungsweise von Dynamomaschine und Motor wird Heinrich F. E. Lenz 1838 und Moritz Hermann v. Jacobi 1850, beide in Petersburg, zugeschrieben. Die Arbeitsübertragung von einer Dynamo auf einen Elektromotor soll zufällig auf der Wiener Weltausstellung 1873 gefunden worden sein und ist von H. Fontaine und Z. Gramme bald verbreitet worden.

1881 führte Marcel Deprez in der Pariser Weltausstellung eine kleine Kraftübertragung dem Elekrikerkongreß vor. Ein Jahr darauf übertrug er einen kleinen Energiebetrag mit hohen Spannungen durch Gleichstrommaschinen, und Fontaine stellte 1886 eine solche Anlage her, indem er vier Dynamos von je 1500 V mit drei Motoren gleicher Spannung in eine Reihe bei einem Wirkungsgrad von 50% schaltete. Dieses System wird noch heute im Wesen von M. Thury bis zu Spannungen von 100 kV angewendet. Bei der 1887 durch Oerlikon ausgeführten Übertragung von Kriegstetten nach Solothurn wurden 50 PS auf 8 km mit einem Wirkungsgrad von 70% bei 2500 V geleistet. Von da an breitete sich die Kraftübertragung mit Gleichstrom, besonders befördert durch die Anwendung bei elektrischen Straßenbahnen, immer mehr und mehr aus.

Schon im Oktober 1840 hatte Robert Davidson einen Motorwagen laufen lassen, wie sein erster Probepassagier, Wm. H. Johnstone, wenigstens behauptet. Früher hat der bereits genannte M. H. Jacobi 1837 ein Boot auf der Newa mit einem Elektromotor angetrieben, der seinen Strom aus einer Batterie schöpfte. Den ersten elektrischen Wagenzug betrieb Charles G. Page 1851 mit einer Lokomotive, die die Batterie enthielt. Sie führte mehrere Wagen mit 30 km in der Stunde die 8 km lange Strecke von Washington nach Bladenburg. Die hohen Betriebskosten zwangen bald zur Einstellung des Betriebes. 1879 ließen Siemens und Halske auf der Berliner Gewerbeausstellung einen Motorwagen mit Stromzuführung aus den Schienen laufen. Dann folgten von derselben Firma 1881 die Bahnen zwischen dem Kadettenhaus und dem Bahnhofe in Lichterfelde, 1882 in Offenbach a. M., 1883 in Mödling bei Wien und einige Grubenbahnen. Trotzdem schlug diese Anwendung in Europa zunächst keine Wurzel, sie mußte erst in Amerika bahnbrechenden Erfolg erleben, um von dort in den alten Weltteil wieder neu eingeführt zu werden.

In Amerika sicherten sich St. D. Field 1879 und Thomas A. Edison schon 1880 Bahnpatente, ohne damit praktische Erfolge zu erzielen. C. J. Van Depoele ließ auf der Chicagoer Ausstellung 1883 einen dreipferdigen Motorwagen laufen, und Leo Daft versuchte im selben Jahre einen zwölfperdigen zu Saratoga. 1884 wurde durch Bentley und Knight die Stadtbahn zu Cleveland eingerichtet. Die Stromabnahme erfolgte durch ein Rollenpaar, welches auf einem Spannseile lief. Van Depoele drückte endlich die Stromabnehmerrolle federnd an den über die Gleismitte gespannten Arbeitsdraht nach oben, wodurch diese Frage ihre endgültige Lösung fand. Der weitere Ausbau ist Frank Julian Sprague zu verdanken. Er führte die Reihen- und Parallelschaltung der beiden Motoren eines Wagens vermittle des Kon-

trollers oder der Schaltwalze ein. Seinen geschäftlichen Erfolg hat er mit der 1888 zu Richmond erbauten 19 km langen Linie begründet, die überall beispiellos rasche Nachahmung fand.

In Europa suchten die städtischen Behörden zunächst aus Schönheitsgründen nach einer unterirdischen Stromzuführung. Die Schwierigkeiten der Entwässerung des Leitungskanals konnten jedoch für ein im Straßenniveau liegendes Gleise nicht völlig befriedigend überwunden werden; selbst die älteste Bahnlinie von Siemens und Halske, die seit 1889 in Budapest in Betrieb und seitdem vervollkommen worden ist, leidet darunter. Man ging daher auf Grund der guten amerikanischen Erfahrungen bald allgemein zu oberirdischer Stromzuleitung über.

Die Kraftübertragung mit Gleichstrom blieb auf mäßige Entfernungen beschränkt, weil der Stromwender der Dynamos und Motoren damals höhere Spannungen als etwa 500 V kaum zuließ. Man versuchte deshalb die Kraftübertragung mit Wechselstrom, wobei sich jedoch anfangs große Schwierigkeiten ergaben.

Als sich aber das aus Ungarn stammende Transformatorsystem gegen den mächtigen Gleichstrom in Deutschland bei der Stadtanlage in Frankfurt a. M. 1889 aufwarf, wurde der Wechselstrommotor im Anschluß an Einphasennetze unablässiges Bedürfnis. Der von Ganz & Co. beim Wettbewerb dort vorgeführte selbsterregende synchrone Wechselstrommotor entsprach nicht, erst einem neuen, dem Mehrphasensysteme gelang die volle Lösung dieser Frage.

Im Jahre 1887 nahm Charles S. Bradley in Amerika ein Patent auf eine Maschine zur Erzeugung zweier um $\frac{1}{4}$ Periode phasenverschobener Wechselströme. Schon 1879 hatte Walter Baily, und 1880 Marcel Deprez Ähnliches erfolglos versucht. Galileo Ferraris hatte sich eingehend mit der zirkularen und elliptischen Polarisation des Lichtes beschäftigt. Im Jahre 1885 kam ihm der Gedanke, die gleichartigen Beziehungen auf ein magnetisches Drehfeld zu übertragen, und 1888 beschrieb er ausführlich die Erzeugung eines Drehfeldes durch zwei um $\frac{1}{4}$ Periode verschobene Wechselströme und einen damit betriebenen Wechselstrommotor.

Der vorsichtige Gelehrte hat die technische Bedeutung seiner Arbeit nicht gleich erkannt. Dies hat um so mehr Nicola Tesla im selben Jahre getan. Bei zwei oder drei Strömen führte er vier oder sechs Leiter vom Generator zum Motor. Die Verkettung dieser Ströme durch Zusammenfassung je zweier Leiter ist von Charles S. Bradley, Wenström u. a. vorausgesehen worden, aber M. v. Dolivo-Dobrowolski hat das Verdienst, die drei phasenverschobenen Wechselströme zum Drehstrom zielbewußt vereinigt und einen brauchbaren Motor geschaffen zu haben. Auf der Frankfurter Ausstellung des Jahres 1891 hat er im Vereine mit Charles E. L. Brown 200 PS mit 15 bis 25 kV von Frankfurt a. M. nach Lauffen a. N. auf 175 km übertragen. Die Stadt Frankfurt blieb aber trotzdem 1894 wegen des mehrleitrigen Netzes bei der Einrichtung ihres Elektrizitätswerkes beim Einphasenstrom. Dem geschäftlichen Wettbewerbe des Gleichstromes gegen das Einphasensystem verdankt die Nachwelt die Frankfurter

Ausstellung und damit die industrielle Geburt des mit einem Machtfaktor, der gegenseitigen Phasenverschiebung der Spannungen, bereicherten Drehstroms.

Der kommutatorfreie Induktionsmotor hat die Kraftverteilung mit Drehstrom mächtig gefördert. Bis zum Auftauchen der Frage nach elektrischen Vollbahnen blieb er fast Alleinherrscher. Noch 1902 fand er durch Kolomán v. Kandó, den erfolgreichen Einführer des Drehstromes in Ungarn, Anwendung auf der Valtellinabahn, nachdem schon 1899 die schweizerische Drehstrombahn von Burgdorf—Thun durch die Maschinenfabrik Örlikon ausgeführt worden war. Die doppelte Fahrdrahteinrichtung, welche der Dreiphasenstrom erfordert, und die hierdurch bedungenen Netzschwierigkeiten in Bahnhöfen, sowie die beschränkte Regelbarkeit der Umdrehungszahl des Induktionsmotors drängten von diesem Wege, abgesehen von Sonderfällen, bald ab.

B. G. Lamme hatte 1902 bei der Westinghouse El. Mfg. Co. in Pittsburg den einphasigen Vollbahnmotor mit niedriger Periodenzahl gebaut. 1903 folgte ihm die Uniongesellschaft auf der Versuchsstrecke Niederschönweide—Spindlersfeld und 1904 die Siemens-Schuckert-Werke auf der Straße Murnau und Oberammergau. In der Schweiz hatte Örlikon die Versuchsbahn Seebach—Wettingen damit versehen, und die Studienkommission der Bundesbahnen hat 1913 dem Einphasenstrom endgültig den Vorzug eingeräumt.

Unter diesen Umständen wurde der Wechselstrommotor so vielgestaltig ausgebaut, daß er den durch die Hilfspole wesentlich verbesserten Gleichstrommotor wieder erreicht hat. Um die weit hinausführenden Anschlußlinien städtischer Bahnen dem Gleichstrom zu erhalten, begann man die Bahnmotoren mit höherer Spannung zu bauen. Die von der Siemens-Schuckert-Gesellschaft gebaute Bahn Cöln—Bonn hatte 1907 Motoren mit 1000 V. Schrittweise stieg man bis zum Jahre 1913 mit der Spannung auf 2000 V. Um die Vorteile des Drehstromes hinsichtlich der Fernleitung zu genießen und den Gleichstrom für die Verteilung innerhalb beschränkter Gebiete zu bewahren, werden gemischte Systeme mit Drehstrom und Gleichstrom benutzt. Für die Städte spielten anfänglich die bessere Gleichstrombogenlampe und der gute Gleichstrommotor für die Hausaufzüge eine Rolle. Bei den Trambahnen hat dieses gemischte System auch weite Verbreitung gefunden, so z. B. in Melbourne und Umgebung bis 1913 auf 480 km Gleislänge mit 11000 V Wechselstrom und 1500 V Gleichstrom.

7. Entwicklung des Leitungsbaues und der Leitungslehre.

Alle praktischen Kenntnisse zur Bemessung und Herstellung elektrischer Starkstromleitungen lassen sich als Leitungsbau zusammenfassen, welcher die physikalischen Eigenschaften des Leiterstoffes, seine elektrische Isolierung und Verlegung und für sehr hohe Spannungen die elektrische Festigkeit behandelt. Danach unterscheidet man im Freien geführte Leitungen, innerhalb gedeckter Räume geleitete, ferner in Erde oder Wasser versenkte. Die Leitungslehre zieht dagegen na-

mentlich die Berechnung des Leiterquerschnittes in ihr Gebiet. Beide greifen stark ineinander. Wir haben uns hier hauptsächlich mit der Leitungslehre zu beschäftigen, verweisen jedoch bezüglich des Baues von Leitungen auf unser „Handbuch der elektrischen Beleuchtung“. Den geschichtlichen Faden ziehen wir auch über den Leitungsbau hinweg, damit späteren theoretischen Fragen die praktische Grundlage, aus der sie entsprangen, gewahrt bleibe. Bevor man noch ahnen konnte, daß die Elektrizität auch als ein Mittel zur Hervorbringung von Licht und Kraft eine hervorragende Rolle spielen würde, hatte sie bereits in der elektrischen Telegraphie einen weltbedeutenden Erfolg hinter sich. Diese benutzt nur schwache Ströme und niedrige Spannungen im Vergleich mit den Starkströmen. Trotzdem sind aber manche Kenntnisse hinsichtlich der Fortleitung des Stromes in beiden Gebieten gleichgeblieben.

Seit 1835 hat sich der Leitungsbau unter dem ausschließlichen Einflusse der nach verschiedenen Richtungen hin fortschreitenden Telegraphie vollzogen. Durch ihre unterirdischen und unterseeischen Leitungen, welche Städte und Erdteile miteinander verbanden, hatte er immer neuen Stoff zur Entfaltung erhalten, und schon glaubte man, daß eine weitere Vervollkommnung nicht mehr wahrscheinlich sei, als gegen Mitte der achtziger Jahre unverhofft die Verwendung des elektrischen Stromes zur Telephonie und zur Beleuchtung kam und dem Leitungsbau einen erneuten Anstoß verlieh. Die fieberhafte Tätigkeit, welche nun folgte, war zuerst auf die Stromerzeugung und die Verteilungssysteme selbst gerichtet. Die Innenleitungen für elektrische Glühlampen fanden nicht gleich die verdiente Aufmerksamkeit. Mit der anfänglichen Nachahmung der elektrischen Haussignalleitungen hatte es bald ein Ende. Man lernte nämlich bei der Parallelschaltung der Glühlampen den Kurzschluß kennen, der seine eigene Naturgeschichte verdient.

Bald war der Kurzschluß durch die Gegner des elektrischen Lichtes populärer geworden als dieses selbst. Edison bändigte ihn durch die Schmelzsicherung, für welche er am 4. Mai 1880 ein amerikanisches Patent erwarb. Der erste öffentliche Anwalt des Kurzschlusses war Francis Jehl, der im „New York Herald“ vom 27. November 1881 sich wie folgt vernehmen ließ:

„Then, again, I may add that in the Edison system of electric lighting such a thing as catching fire, being killed by the electric shocks or like causes is wholly impossible. As to fire, the Edison Light Company have in each house where their light is used, an arrangement called the „safety catch“, which is a perfect safeguard against all accidents. Should any line or wire become crossed that portion would be instantly cut out and be disconnected from the main line, thereby becoming ineffective. A time is coming, not far off, when incandescent lighting will be universal.“

Noch wußte man nichts von den bösen Schlichen dieses Auskunftsmittels. Der Schmelzpfropfen oder -streifen ruhte ohne Scheu auf hölzerner Grundplatte — niemand verdächtigte die Sicherung selbst als

Brandstifterin. Im Gegenteil, die große Menge glaubte damit vor allem die Fäden der Glühlampen gegen überhohe Spannungen bewahren zu können, trotzdem es klar war, daß nur die Zuleitungen vor Überströmen, also vor brandgefährlicher Erhitzung sich schützen ließen. Im Januar 1882 schreibt Professor Henry Morton in der „Chemical News“ in Amerika bereits über „fire risks of electric lighting“. Im Mai 1883 tauchten die ersten Sicherheitsvorschriften der Feuerversicherungsgesellschaften in England auf.

Der „Board of Trade“ ließ vor 1884 bis zu 2000 A für den Quadrat-zoll und nach dieser Zeit 1000 A ($= 1,56$ A für 1 mm^2) Leiterbelastung zu. E. Dorn hatte bereits 1881 die richtige Formel gefunden, wonach dickere Drähte nur eine geringere Stromdicke vertragen. A. Perényi hat 1884 die Untersuchung in der „Elektrotechnischen Zeitschrift“, S. 26, hierüber erweitert, aber erst 1889 hat A. E. Kennelly im Edisonschen Laboratorium Erfahrungen an elektrischen Leitungen gesammelt, welche sichere Grundlagen für die Vorschriften boten.

Bei der freien Führung des Leiterdrahtes durch die Luft kam es vornehmlich auf seine isolierte Befestigung an den Stützpunkten an. Die gestützte einfache Telegraphenglocke aus Glas hat 1857 Borggreve angegeben. Sie wurde recht bald durch die Chauvinsche Porzellandoppelglocke verdrängt, welche den neuen Ansprüchen der höheren Spannungen bei größeren Formen nachkam. Aus ihr entwickelten sich die mehrmanteligen Riesenformen bis zu 60 kV. Erst hier trat durch die E. M. Hewlettsche Hängeglocke im Jahre 1907 ein ganz neuer Gedanke hinzu, der die Steigerung der Spannung auf 200 kV ermöglichte.

Auch die Kabeltechnik ist der Spannungserhöhung, wenn auch nicht im gleichen Maße, gefolgt. Während man 1890 für unterirdische Kabel bei 2 kV Wechselstrom hielt, 1900 meistens noch mit 10 kV sich begnügte, ist man 1913 bis auf 30 kV für dreiadrige und 60 kV für einadrige Kabel betriebssicher gelangt.

Hatte man ursprünglich die Elektrizitätswerke erst für einzelne Häuser, dann für Straßenblöcke und ganze Städte gebaut, so erlaubten nun die großen Fortschritte im Bau von Dampf- und Wasserturbinen bis zu 40000 bezüglich 20000 PS den Zusammenschluß vieler solcher Anlagen eines ganzen Landes an wenigen großen Werken. Die Verteilung der Energie von den Niagarafällen aus, das riesige Netz in Kalifornien, Überlandzentralen in Oberitalien, der Schweiz, Norwegen und Schweden und in Deutschland sind Beispiele hierfür. Aus dem Umfange dieser Entwicklung geht ihre wirtschaftliche Bedeutung hervor. Technik und Wirtschaft sind innig verquickt, der Dynamik des elektrischen Stromes folgt jene des Geldes. Mit Recht wird bewundernd erzählt, Edison habe zur Zeit seiner ersten Zentrale in New York den edlen Kapitalisten die Hand so bieder geschüttelt, bis ihnen das Geld aus der Tasche fiel. Sein Mitarbeiter war C. A. Coffin, der erste elektrische Geldmann. Als die elektrotechnische Großindustrie später ganz in die Hände der Banken fiel, blieb der Elektrobankier nicht mehr Begleit-, sondern Haupterscheinung.

William Thomson, der spätere Lord Kelvin, hat bereits im Jahre 1881 vor der British Association einen Vortrag über „Wirtschaftlichkeit metallischer Leiter für Elektrizität“ gehalten, der in ihren Reports diese Jahres, S. 518 und 526, abgedruckt ist. Er setzte konstante Stromstärke, wie bei Reihenschaltung, voraus.

Dieser ersten Leitungsrechnung folgten bald andere. A. Merling, „Die elektrische Beleuchtung“, 1882, S. 430, behandelt die Parallelschaltung von Lampenwiderständen. Die Formeln waren unübersichtlich, weil die Rechnung mit Nutzwiderständen, nicht mit Strömen in den Abnahmen, vorgenommen wurde.

Im Herbst 1883 gab Otto Titus Bláthy eine Anweisung zur Leitungsermittlung. Der Querschnitt der Leitung wurde mit der Lampenzahl und der Leitungslänge direkt wachsend angenommen. Diese wurde als Stromweg zur mittleren Lampe oder als arithmetisches Mittel der zur Maschine am nächsten und am entferntesten liegenden Lampe gewählt.

Der Uppenbornsche Kalender enthält in seiner 1884 erschienenen ersten Auflage keine Leitungsrechnungen, sondern nur Bemerkungen über die Größe des zulässigen Spannungsabfalles. Das „Zentralblatt für Elektrotechnik“ enthielt aber schon im Dezember 1884 in den Bestimmungen der städtischen Elektrizitätswerke zu Berlin folgendes:

„Der Querschnitt der Leitungen für Glühlicht bei Nebeneinschaltung der Lampen berechnet sich nach der Formel $Q = \frac{l \cdot n}{p \cdot 35}$ bzw. $\frac{l \cdot n}{105}$, wo Q den Querschnitt des Leitungsdrahtes in Quadratmillimeter,

l die Entfernung der Lampe vom Punkte aus, von welchem aus ein gewisser Verlust p stattfinden soll, bedeuten. Dieser Verlust p wird nach Prozenten der in den Lampen des betreffenden Stromkreises verbrauchten Arbeit ausgedrückt, n ist die Lampenzahl in 16kerzigen Normal-A-Lampen. Die Größe p darf in Gebäuden im allgemeinen 3% betragen.“

Im Jahre 1883 führt W. Siemens seine Glühlampen im Elektrotechnischen Verein zu Berlin vor. Im Anschluß an die Berechnung des Glühfadens erwähnt er in der „Elektr. Ztschr.“, Bd. 4, S. 107, daß die zugehörigen Glühlichtleitungen für einen Energieverlust von 10% bestimmt werden. F. Uppenborn rechnet dies in der „Zeitung der internationalen elektrischen Ausstellung“ in Wien des Jahres 1883, S. 22, formelmäßig für zehn Glühlampen und eine Entfernung von 1000 m aus.

Die Berechnung der Verteilung in Leitungen oder Leitungsnetzen war mit den Grundgesetzen von Simon Georg Ohm 1837 und Gustav Robert Kirchhoff 1845 schon längst vollkommen gelöst. Als aber anfangs der achtziger Jahre die Praktiker das Bedürfnis fühlten, auf einfache Weise einen Einblick in die Stromverteilung der Glühlampennetze zu erhalten, um deren Berechnung zu ermöglichen, zeigte es sich, daß mit diesen allgemeinen Erkenntnissen den besonderen Anforderungen nicht unmittelbar gedient war. Es ist gerade so wie in der

Mechanik. Der d'Alembertsche Satz gibt eine allgemeine Regel für das Gleichgewicht von Kräften, aber zum Verständnis muß der Ingenieur vorher die einfachen Hebelgesetze begriffen haben, um in voller Erkenntnis den allgemeinen Satz zu beherrschen. Die allgemeinen Sätze bieten gewissermaßen eine Gedanken sparende Schablone zur Lösung von Aufgaben, aber sie ermöglichen nicht ein volles Durchschauen der Vorgänge; sie genügen allein nicht zur vollen Bewältigung der Aufgaben. Es ist notwendig, zum restlosen Verständnis eines Gegenstandes zuerst den Weg vom Einfachen zum Zusammengesetzten zurückzulegen. Die einfachen Erkenntnisse werden gewissermaßen auch in unserem Gehirn aufeinandergelegt, um auf diese Weise erst den allgemeinen Fall zu erkennen. Danach scheint es nur natürlich, daß das Studium der Stromverteilung in Leitungsnetzen nicht bei den Kirchhoffschen Gesetzen beginnen kann, sondern daß diese erst als Zusammenfassung der einzelnen Erkenntnisse nachhinken müssen.

Die Arbeiten von Smaassen, Superposition der elektrischen Potentiale in „Poggendorfs Annalen“, Bd. 61, S. 161, 1846, von Hermann von Helmholtz, das Prinzip der Superposition der elektrischen Ströme ebendasselbst im Bd. 98, S. 211, 1853, und von E. du Bois Reymond in seinen Untersuchungen, Bd. 1, S. 647, wurden für die Fachausübung wieder zeitgemäß und folgewichtig.

Dieser Werdegang entspricht vollkommen anderen technischen Wissenschaften. G. Galilei hat die Wurfbewegung dadurch erklärt, daß er die krummlinige Bewegung aus zwei geradlinigen zusammensetzte. Fourier hat bei den schwierigen Wärmeerscheinungen „was auf einmal zu begreifen nicht gelingen will, schrittweise zu verstehen gelehrt“, indem er sie in übersichtliche Bestandteile zerlegte.

K. Hochenegg hat in der „Zeitschrift für Elektrotechnik“ 1887 die Methode der Graphostatik auf die Stromverteilung der offenen und der einfach geschlossenen Leitung übertragen. Das Schwerpunktsprinzip der Stromabnahmen, welches sich dabei ergab, war schon vorher von A. E. Kennelly in der New Yorker Zeitschrift „The Electrical Review“, Bd. 11, Nr. 10, am 5. November 1887 unter der Überschrift: „On the analogy between the composition of derivations in telegraph circuits into a resultant fault and the composition of gravitation on the particles of a rigid body into a center of gravity“ sowie von W. E. Ayrton in seiner Schrift „Determination of the true wire and insulation resistances and the position of the resultant fault in a telegraph line, Tokyo 1877“, behandelt, wie Latimer Clark im Bücherkatalog der „Wheeler gift of books“ im „American Institute of Electrical Engineers“ bemerkt.

Mit Telegraphennetzen beschäftigte sich auch R. Ulbricht in der „Zeitschr. f. Elektr.“, Wien 1888, Heft 4 u. 5 im Aufsatz: „Die Berechnung der Verzweigung stationärer Ströme in beliebigen Netzen linearer Leiter, auf die Knotenpunktentiale zurückgeführt und durch Beispiele erläutert“. Die Knotenpunktgleichungen enthielt schon Maxwells berühmtes „Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus“, deutsch von Weinstein 1883, S. 420. Der Schöpfer dieser Lösung

ist jedoch Karl Fr. Gauß gewesen, der durch die Verbindung mit Wilh. Ed. Weber zu solchen Fragen angeregt wurde. Von ihnen rühren die „Resultate aus den Beobachtungen des Magnetischen Vereins 1836 bis 1837“ gemeinschaftlich her. Die Sternwarte und das physikalische Laboratorium waren in Göttingen auf 1600 m durch die erste elektrische Leitung verbunden. Zwischen solchen magnetischen Eintragungen des Jahres 1833 fand man im Gaußschen handschriftlichen Nachlaß jene Netzrechnung, die dem 5. Bande seiner Werke, Göttingen 1867, S. 601, entspricht. Er lehrt die Knotenspannungen eines Netzes bei gegebener Spannung des Quellpunktes finden.

H. Helmholtz in seinen wissenschaftlichen Abhandlungen I, S. 435 und in Kap. V, und James Clerk Maxwell haben sich eingehend mit den den Knotengleichungen verwandten Maschengleichungen beschäftigt. In seinem letzten Lehrkurse 1879 an der Cambridger Universität hat Maxwell noch hierüber gelesen, wie sein damaliger Assistent J. A. Fleming in der Schrift „Problems on the distributions of electric currents in networks“ berichtet.

J. Bosscha hat 1858 in seinen „Verspreide Geschriften“ die Eigenschaften der linearen Verzweigung galvanischer Ströme, namentlich die Stromlosigkeit in einzelnen Zweigen, geprüft.

Für den praktischen Fall, daß die Abnahmen als Ströme, nicht als Nutzwiderstände gegeben sind, hat J. Herzog zusammen mit L. Stark 1890 die Schnittmethode in der „Elektrotechnischen Zeitschrift“, S. 221, angegeben. Sie schließt sich den Maschenrechnungen an.

Trotz der genannten Veröffentlichungen fand sich im „Zentralblatt für Elektrotechnik“ 1892, S. 350, im Briefkasten eine einfache Netzaufgabe ein, bei deren Lösung am 24. Juni desselben Jahres Uppenborn hinzufügte: „Spezielle Bücher für die Berechnungen gebe es bislang nicht, von einigen Elektrotechnikern werden dergleichen Rechnungen als Geschäftsgeheimnis betrachtet.“ Anfangs 1893 erschienen gleichzeitig vom selben Verleger die beiden Werke „Anordnung und Bemessung elektrischer Leitungen“ von K. Hochenegg und „Die Berechnung elektrischer Leitungsnetze“ von J. Herzog und C. Feldmann. Dieses war bereits wesentlich vom ungarischen Ingenieur- und Architektenverein anfangs 1892 durch J. Herzog veröffentlicht worden. Von 1888/89 an widmeten J. A. Snijders an der polytechnischen Schule zu Delft und E. Kittler in Darmstadt der Leitungslehre akademische Vorlesungen. In den folgenden Jahren fand dieser Gegenstand allgemeinere Aufmerksamkeit und eine reiche Literatur, die wir später sachlich anführen werden.

Die vorstehende Darstellung über das weite Gebiet der Elektrotechnik weist an Hand der geschichtlichen Entwicklung auf die Aufgabe der Leitungslehre hin. Alle Probleme führen auf Stromläufe, „Maschen“, die über Eisen und Luftwege miteinander verkettet sind. Ein Teil von ihnen wird durch mechanische Kraft bewegt, ein anderer erhält durch Induktion Bewegung. Jene sind die Generatoren, diese die Motoren. Teile von Maschen oder auch einzelne ganze Maschen dienen als Verbindungsglieder zwischen diesen Teilen

Allgemeines und Elektrochemie	Glüh- und Bogenlicht	Schwachstrom	Maschinen, Motoren und Verteilungssysteme, Kraftübertragung und gesondert elektrische Bahnen
Gray 1729 elektrische Leitungs-fähigkeit Galvani 1729 Be-rührungselektri-zität Franklin 1749 Gebäudeblitzab-leiter Divisch 1754 Ge-bäudeblitzab-leiter Volta 1799 voltai-sche Zelle Davy 1807 elek-trolytische Zer-setzung Ohm 1827 Grund-gesetz für Wider-stand Grove 1842 Gas-batterie Planté 1860 Blei-akkumulator Lord Kelvin 1853 oszillatorische Entladung der Leydner Flasche Faure 1880 Akku-mulator	Davy 1808 Lichtbogen Starr, Jobart, 1838 Kohlenfäden im Va-kuum de Moileyns 1841 Platin-lampe Foucault 1844 Hand-regulator Jablochhoff 1877 Kerze Tschikoleff, Hefner-Alteneck 1878 Diffe-rentialbogenlampe Swan, Edison 1879 Kohlenfadenglühllicht Gülcher 1883 Parallel-schaltung von Bogen-lampen Edison, Hopkinson 1883 Dreileitersystem Brush, Krizik-Piette, Gramme 1886 Bogen-lampen Marks 1894 Dauerbrand-bogenlampen Nernst 1897 Glühlampe Bremer 1900 Leuchtzu-sätze zu den Kohlen-stiften Cooper Hewitt 1901 Quecksilberbogenlampe Moore 1903 Röhrenlicht Langmuir 1913 Gasge-füllte Halbwattlampe	Gauß u. Weber 1833 elektrische Signalleitung Cook u. Wheatstone 1832 Nadetelegraph Reisheil 1836 Erdrück-leitung Morse 1837 Schreibtele-graph Siemens 1846 Gutta-perchadraht Siemens 1851 erste un-terseeische Verbindung über den Ärmelkanal Reis 1863 Telephon Stearn 1868 Duplex-telegraphie Edison 1869 Quadru-plextelegraphie Bell 1876 Telephon Hughes 1878 Mikrophon Hertz 1888, Branley 1890, Lodge 1893 Schwingungstheorie Marconi 1895, Slaby Braun 1897 drahtlose Telegraphie	Örsted 1819 Elektromagne-tismus Ampère 1820 Elektromagne-tismus Barlow 1823 Rad Sturgeon 1823 Elektromagnet Pixii, Page 1832 ältere Gene-ratoren Jacobi 1837 Boot auf Newa Ruhmkorff 1848 Induktions-spule Paccinotti 1865 Ring (Hjorth 1851) Siemens u. Wheatstone 1867 dynamoelektrisches Prinzip Gramme 1870 Ringanker Edison, Hopkinson, Kapp 1880 Gleichstrommaschinen Gaulard 1883 Serien-Induk-tionspulen Zipernowsky, Déri, Bláthy 1885 Parallelschaltungsspu-len: Transformator Thomson 1887 Repulsions-motor Ferraris, Tesla, Dobro-wolsky, Brown 1888—91 Drehstrom u. Induktionsmotor Telluride 1890 Kraftüber-tragung Frankfurt-Lauffen 1891 Kraftübertragung Niagarafälle 1893 Erste europäische 100-kV-Anlage 1911 bei der A.-G. Lauch-hammer 50 km

oder zwischen Nutzleitern und Generatoren; sie stellen die eigentliche Leitung dar. Haben nachbarliche Maschen solche Leiterstücke gemeinschaftlich, so entstehen Leitungsnetze. Die Gesetze solcher Maschensysteme mit gesetzmäßig veränderlichen elektromotorischen Erzeugungskräften in einzelnen Maschen, wie bei den elektrischen Maschinen, beschäftigt die Elektrodynamik. Alle Maschinen erzeugen ursprünglich Wechselströme. Deswegen konnte Oliver B. Shallenberger den Wechselstrom mit Recht als „the electric current as God gave it to us“ bezeichnen. Sämtliche auf ein Netz arbeitenden elektromotorischen Kräfte haben gleiche Periodenzahl, wenn von Oberschwingungen abgesehen wird. Besitzen sie keine zeitliche Verschiebung gegeneinander, so entsprechen sie parallelgeschalteten Wechselstrommaschinen. Sind sie regelmäßig in zwei, drei Gruppen gegeneinander zeitlich versetzt, so hat man Mehrphasensysteme. Ist die Zahl der elektromotorischen Kräfte, die auf das Netz einwirken, groß, mindestens 20, und rühren sie von den einzelnen Spulen einer mit Stromwender versehenen Maschine her, so heißt diese eine Gleichstrommaschine. Ändert sich die Belastung dadurch, daß ihr Widerstand oder ihre Rückwirkung geändert wird, so ändert sich bei konstantem Mittelwert der elektromotorischen Kraft auch der Mittelwert des Stromes bei allen Systemen, und außerdem ändert sich im allgemeinen bei einem zusammenhängenden Netze auch die Richtung des Mittelwerts des Stromes in einzelnen Netzteilen. Solche Belastungsschwankungen treten bei allen Netzen für Licht und Kraft auf. Die Lösung der Aufgabe, für alle Fälle bei gegebenem Netz und gegebenen Abnahmen die Strom-, Spannungs- und Energieverteilung zu ermitteln; oder ein Leiternetz zu schaffen, welches einem bekannten festen oder schwankenden Energieabsatz betriebssicher und wirtschaftlich entspricht, fußt auf der „Leitungslehre“.

Für alle Betrachtungen der Arbeitskette oder des Energieumwandlungsvorganges werden die aus der alten elektrischen Ferntheorie geschöpften Rechnungen und die Anschauungen mit den Faraday-Maxwellschen Feldern ausreichen. Die neue fruchtbare Iontheorie hat in den Starkstrom sichtlich noch wenig eingegriffen.

Eine nebenstehende Zeittafel über die geschichtliche Entwicklung mag diese Einführung abschließen, welche nicht nur leiten will, sondern weisen soll, wie es die richtige Wertung der Geschichte fordert.

Literatur.

- Fontaine, Hippolyte, deutsch von Fr. Roß: Die elektrische Beleuchtung, 1877 und 1880.
 Du Moncel, Th.: L'éclairage électrique, Paris 1879.
 Daniel, L. S. u. James D. Doyle: The light from its first to its most recent development, Melbourne 1879.
 Pope, Fr. L.: Evolution of the electric incandescent lamp, 1889.
 Wolcott, Townsend: The storage battery from its introduction. El. World Bd. 33, Nr. 9. 1894.
 Herzog, J.: Die Entwicklung elektrischer Leitungsrechnungen, Beitrag zur Festnummer der El. u. Maschinenb., Wien 1913.

II. Theorie des einfachen Gleichstromkreises und der einfachsten Leiterverbindungen.

1. Das Ohmsche Grundgesetz.

Georg Simon Ohm fand¹⁾, daß die vorher nur unklar erkannten Beziehungen zwischen konstanter elektromotorischer Kraft und ihrem Strom mathematisch ausgedrückt und physikalisch erklärt werden konnten. Die Stromstärke J ergab sich als Bruch aus der elektromotorischen Kraft (in der Folge mit EMK gekürzt) E Volt und dem Widerstand R Ohm

$$J = E/R \text{ Ampere.}$$

Für lineare Leiter, deren Querschnitt klein ist gegen ihre Länge, kann der Widerstand unmittelbar berechnet werden. Wird die Länge l in Meter, der Querschnitt f in Quadratmillimeter ausgedrückt, dann ist der Widerstand

$$R = \frac{l}{kf} = \frac{cl}{f} \text{ Ohm.}$$

Hierin bedeutet $c = 1/k$ eine nur vom Stoffe, nicht von der Querschnittsform des Körpers abhängige physikalische Konstante, den spezifischen Widerstand. Sein reziproker Wert k ist die spezifische Leitfähigkeit oder der spezifische Leitwert. Ähnlich nennt man den reziproken Wert G des Widerstandes R den Leitwert

$$G = \frac{1}{R} = \frac{kf}{l}.$$

Für seine Einheit empfahl Sir William Thomson, der spätere Lord Kelvin, die wenig wohlklingende Umkehrung von Ohms Namen Mho, während der Ausschuß des Verbandes Deutscher Elektrotechniker für Einheiten und Formelgrößen (gekürzt AEF) dafür den Namen Siemens vorschlug.

Beide Formen des Ohmschen Gesetzes $E = JR$ oder $J = EG$ werden je nach dem Zweck gebraucht. Wegen des geraden Verhältnisses würde manchmal dem Leitwert den Vorzug unbedingt gebühren, wenn die geschichtliche Entwicklung und das Gewohnheitsrecht nicht mehr auf den Widerstand geführt hätten.

Eine geschichtliche Betrachtung soll noch die grundlegenden Ausgleichsvorgänge des Ohmschen Gesetzes behandeln. Schon Davy hat den Leitwiderstand 1822 messend untersucht und soll angeblich Ohm vorgegriffen haben²⁾. Ohm prüfte mit Thermoströmen 1 bis 8 Drähte, welche er in einem Stromkreis nebeneinander einschob. Vorher

¹⁾ Ohm, Georg Simon: Die galvanische Kette mathematisch bearbeitet. Berlin 1827. Dieses klassische Werk enthält das Grundgesetz und die Stromverteilung der einfachen Verzweigung, sowie die Differentialgleichungen. Es gibt auch die zeichnerische Darstellung des Gesetzes.

²⁾ Thomson, Thomas: Outline of the sciences of heat and electricity, 2. Aufl., S. 379. 1840.

schon war Rieß der Erwärmung eines Drahtes nachgegangen, der zwei elektrisch verschieden hoch aufgeladene Kugeln verband. Man sprach von einer „Verzögerungskraft“ des Drahtes, der zwei Konduktoren verschiedenen Potentials verband. Den Ausdruck Potential hat Green eingeführt, und seine Verbreitung hat sich von der statischen zur dynamischen, von der mathematischen zur elektrotechnischen Elektrizitätslehre vollzogen, wenn er auch noch viel umfochten und selbst für einfache Fälle mißverstanden wird. 1826 veröffentlichte Ohm in seinem Aufsatz „Versuch einer Theorie der durch galvanische Kräfte hervorgebrachten elektroskopischen Erscheinungen“ das Verhalten im ganzen Kreislauf, wobei er den Begriff der elektromotorischen Kraft festlegte. Direkt meßbar ist nur die Klemmenspannung, die bei geöffnetem Kreise und dem Strom Null mit dem Wert der EMK sich deckt. In seinem zusammenfassenden Hauptwerk „Die galvanische Kette, mathematisch bearbeitet“ hat Ohm 1827 sein Gesetz auf die Fouriersche Theorie der Wärmeleitung gestützt.

Man muß daher zwei Ohmsche Gesetze unterscheiden, das ältere vom ganzen Kreislauf mit der eingepprägten EMK und das jüngere von den losen Teilstücken des Leiters und ihren Widerständen. Das Einfache hat sich auch hier geschichtlich aus dem Zusammengesetzten entwickelt. Die heutige Kenntnis und Darstellungsweise geht natürlich den umgekehrten Weg und läßt daher kaum die ursprünglichen Schwierigkeiten ahnen. Man spricht vom „erweiterten“ Gesetz und meint das ältere. Deshalb muß erwähnt werden, daß das Ohmsche Gesetz anfänglich und noch viele Jahrzehnte später nicht den heutigen Stempel der Selbstverständlichkeit trug. R. H. A. Kohlrausch¹⁾ prüfte es 1852 zwecks Feststellung der Maßeinheiten nach, und M. H. Jacobi²⁾ zweifelte noch 1857 an seiner Genauigkeit.

2. Potential. Spannung und elektromotorische Kraft.

Betrachtet man zwei beliebige Punkte A und B eines Stromkreises mit den Potentialen V_A und V_B , dann findet man im allgemeinen den Potentialunterschied $V_A - V_B$ um einen Betrag E größer oder kleiner als das Produkt aus dem Strom J und dem Widerstand r_{AB} zwischen den Punkten A und B . Es ist also

$$V_A - V_B = J r_{AB} \pm E,$$

worin E die elektromotorische Kraft bedeutet. Unter elektromotorischer Kraft (EMK) versteht man die Fähigkeit einer Elektrizitätsquelle, Spannungen zu erzeugen. Die EMK wird gemessen durch die Spannung zwischen den Enden der offenen Elektrizitätsquelle. Im vorliegenden Falle wird für $r_{AB} = \infty$ der Strom $J = 0$ und $E = V_A - V_B$.

¹⁾ Kohlrausch, Rud. Herm. Arndt: *Philosoph. mag. Ser. IV, Bd. 5. 1852.*

²⁾ Jacobi, Moritz Hermann von: *Sur la nécessité d'exprimer la force des courants électriques et la résistance des circuits en unités reconnues. 1857.* Nach Niederschrift dieser Zeilen fand ein lebhafter Gedankenaustausch über diesen Gegenstand zwischen S. P. Thomson und F. Jenkin im *Electr., London, 1914, statt.*

Zwischen den Punkten A und B besteht eine elektrische Spannung $V = V_A - V_B$, wenn die elektrische Arbeit $Q \cdot V$ aufgewendet werden muß, um die Elektrizitätsmenge Q von B nach A zu schaffen¹⁾.

Die elektrische Spannung ist demnach ihrem Zahlenwert und ihrem Vorzeichen nach gleich der Arbeit, die aufgewendet werden muß, um die Einheit der Elektrizitätsmenge von B nach A zu schaffen. Fließt der Strom J von A nach B , so geht sekundlich die elektrische Arbeit JV in dem Leiterstück AB verloren. V ist also in dieser Auffassung der Spannungsverlust, JV der sekundliche Arbeits- oder der Leistungsverlust.

Multipliziert man die Gleichung für die Spannung ($V_A - V_B$) mit J ,

$$J(V_A - V_B) = J^2 r_{AB} \pm JE,$$

so gibt sie die sekundlich aufgewendete Arbeit zur Überwindung des Verlustes im Widerstand r_{AB} und zur Abgleichung der Leistung der EMK, welche für einen Energiegeber positiv, für einen Energienehmer negativ zählt. Die elektrischen Apparate eines Stromkreises können also Generatoren oder Motoren oder einfache Widerstände sein. Im ersten Falle ist E positiv, im zweiten negativ, im dritten Null. Ja, einzelne können sogar zeitweilig aus dem erzeugenden oder tätigen in den empfangenden oder betätigten Zustand geraten, je nachdem mechanische Energie in elektrische oder elektrische in mechanische umgesetzt wird. Bei diesem Übergang wird der Zwischenzustand $V_A - V_B = E$ durchlaufen, wobei der Stromkreis stromlos ist. In reinen Widerständen mit $E = 0$ tritt nur Vernichtung bzw. Umsetzung der zugeführten Energie in Wärme nach dem Jouleschen Gesetz auf.

Die Verwirrung im Sprachgebrauch von Spannung und Potential scheint nach Janet²⁾ durch das Wörtchen „zwischen“ verursacht zu sein. Man spricht vom Unterschied des Potentials zwischen den Punkten A und B und von der EMK zwischen A und B und meint in diesem Falle die auf das Zwischenstück wirkende EMK.

Das Potential der Erde wird in der Regel gleich Null gesetzt. Demnach ist unter Potential V_A eines Punktes schlechthin sein Potentialunterschied gegen die Erde zu verstehen. Das Potential bezieht sich immer nur auf einen Punkt, die Potentialdifferenz oder der Potentialunterschied oder die Spannung auf zwei Punkte, die Spannungsdifferenz oder der Unterschied zweier Spannungen auf vier Punkte.

Der Begriff und die Bezeichnung Spannung und Spannungsunterschied sind in der Lehre von den Leitungsnetzen unentbehrlich, während das Wort Potential für gewöhnlich vermieden und nur in gewissen Fällen im Anschluß an die Elektrostatik bevorzugt werden soll.

Für ein loses Leiterstück AB ist der Strom J als Wirkung der treibenden Spannung $V = V_A - V_B$ betrachtet worden. Umgekehrt kann bei Leitungsrechnungen mit gegebenem Strom J die Spannungs-

1) Definition des AEF. ETZ 1908, S. 745 und 1909, S. 337.

2) Janet, P.: Allgemeine Elektrotechnik, deutsch von Süchting-Riecke, Bd. 1, S. 47. Jenkin, F. u. Fr. Emde: Disk. über das Wechselstrom-Potential. Electr., London 1912, S. 757, 959.

änderung — V als durch den Strom hervorgerufen aufgefaßt werden. Dem entgegengesetzt gerichteten Strom entspricht dann eine Spannungsänderung $+V$.

Die Gleichung $V = \frac{Jl}{kj}$ bildet die elementare Grundlage aller Leitungsbemessung. Sie läßt sich auch schreiben

$$JV = J^2 R = J(V_A - V_B),$$

und besagt dann, daß der im Leiter nach dem Jouleschen Gesetz $J^2 R$ auftretende Leistungsverlust dem Unterschied zwischen der am Anfang A des Leiterstückes zugeführten Leistung JV_A und der am Ende B abgenommenen Leistung JV_B gleich ist. Drückt man den Spannungsverlust V in Hundertsteln der Anfangsspannung V_A aus, also

$$V = p \cdot \frac{V_A}{100},$$

so folgt, daß der Verlust an Leistung ebenfalls $p\%$ der zugeführten Leistung beträgt. Wenn dies auch in dem hier behandelten einfachsten Fall selbstverständlich erscheint, werden wir doch bald Fälle kennenlernen, wo das Verhältnis der Spannungsänderung zur Gesamtspannung sich nicht mehr zahlenmäßig deckt mit dem Verhältnis der Leistungsänderung zur zugeführten Gesamtleistung.

3. Leitwert und Temperaturkoeffizient.

Der Widerstand der Metalle verändert sich mit der Temperatur, und zwar nimmt er um etwa $0,4\%$ für 1°C Erwärmung zu. Ist R_0 der Widerstand bei 0° , R_t bei t° , dann gilt für geringe Erwärmungen in erster Annäherung

$$R_t = R_0(1 + \alpha t) \quad \text{bzw.} \quad c_t = c_0(1 + \alpha t).$$

α heißt der Temperaturkoeffizient des Leiters. Er ist für Eisen etwas größer als bei den übrigen Metallen, nämlich $0,45$ bis $0,48\%$, für gewisse Legierungen aber kleiner als $0,03\%$ für 1°C . Solche Legierungen werden für Normalwiderstände und Meßinstrumente verwendet. Für die Zwecke der Leitungsführung spielt die Größe des Temperaturkoeffizienten keine Rolle, da bei einem Spannungsverlust von 5% in einer kupfernen Leitung die größten zwischen Sommer und Winter auftretenden Temperaturunterschiede in mittleren Breitengraden kaum mehr als 50° und die hieraus folgenden Spannungsänderungen relativ zwar etwa 20% , absolut aber nur 20% von 5% , also nur $\pm 0,5\%$ ausmachen.

Nach den Kupfernormalien des Verbandes Deutscher Elektrotechniker darf Leitungskupfer für 1 km Länge und 1 mm^2 Querschnitt bei 20°C keinen höheren Widerstand haben als $17,84 \text{ Ohm}$. Der bei $t^\circ \text{C}$ gemessene Widerstand R_t ist nach der Formel

$$R_{20} = \frac{R_t}{1 + 0,004(t - 20)}$$

umzurechnen.

Dies entspricht dem spez. Widerstand $c = 0,01784$; dem spez. Leitwert $k = 1/c = 56,1$ und dem Temp.-Koeffizienten $\alpha = 0,4\%$.

Die ersten Untersuchungen über den Leitwert des Kupfers rühren von Mathiesen aus dem Jahre 1896 her. Er fand bei der Temperatur t

$$G_t = G_0 (1 - 0,003870 t + 0,000009009 t^2)$$

bezogen auf den Leitwert G_0 bei 0°C , woraus sich für die entsprechenden Widerstände ergibt

$$R_t = R_0 (1 + 0,00387 t + 0,00000597 t^2).$$

Für diese Formel wird die zuerst gegebene vereinfachte gebraucht, deren Werte bis 40°C mit der genauen bis auf den Einfluß eines Bruchteils eines Grades C übereinstimmen.

Der Temperaturkoeffizient des reinen Kupfers sinkt mit steigender Temperatur nach der Beziehung $\alpha = \frac{1}{234,5 + t}$.

Die Internationale Elektrotechnische Kommission (IEC) hat im August 1913 in Berlin die folgenden Bestimmungen international anerkannt, die der Zusammenarbeit der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt zu Berlin, des National Physical Laboratory zu London, des Laboratoire Central de l'Électricité zu Paris und des Bureau of Standards zu Washington zu verdanken sind.

a) Für weiches Normalkupfer sollen die folgenden Werte als normal gelten:

Bei der Temperatur von 20°C ist der Widerstand eines Drahtes von 1 m Länge und 1 mm^2 gleichförmigem Querschnitt $0,01724 \text{ Ohm} = 1/58 \text{ Ohm}$. Die Dichte ist bei 20°C $8,89 \text{ g/cm}^3$ und der Temperaturkoeffizient bei konstanter Masse $0,00393$ oder $1/254,5$ für 1°C .

Hieraus folgt, daß bei 20°C der Widerstand eines Weichkupferdrahtes von gleichförmigem Querschnitt, der 1 m Länge und 1 g Masse besitzt, $0,01724 \cdot 8,89 = 0,1533 \text{ Ohm}$ ist.

b) Für Handelskupfer soll der Leitwert bei 20°C Temperatur in Hundertsteln des Leitwertes von Normalweichkupfer bis auf 0,1 Hundertstel ausgedrückt werden. Alles Kupfer mit mindestens $96,5 \text{ vH}$ des Leitwertes des Normalkupfers gilt als weiches Handelskupfer.

Der Leitwert des weichen Handelskupfers ist auf Grund folgender Annahmen zu berechnen: Die Temperatur, wobei Messungen gemacht werden, darf nicht mehr als $\pm 10^\circ \text{C}$ von 20°C abweichen. Der Widerstand eines Drahtes von 1 m Länge und 1 mm^2 Querschnitt nimmt für 1°C mit $0,000068 \text{ Ohm}$ zu. Der Widerstand eines Drahtes von 1 m Länge und 1 g Masse erhöht sich mit $0,00060 \text{ Ohm}$ für 1°C . Die Dichte ist $8,89 \text{ g/cm}^3$, und es ist dieser Wert und nicht der durch den Versuch gefundene in Rechnung zu bringen, da anders internationale Abmachungen unmöglich wären.

Die für weiches Normalkupfer gegebenen Werte sind Mittelwerte aus einer großen Anzahl von Versuchen. Sie entsprechen den folgenden physikalischen Konstanten:

Dichte bei $0^\circ \text{C} = 8,90$,

Linearer Ausdehnungskoeffizient = 0,000017 für 1° C,
 Spez. Widerstand bei 0° C = 1,5879 Mikrohmm-Zentimeter,
 Temperaturkoeffizient für 1° C = 0,00429,
 Temperaturkoeffizient bei konstanter Masse = 0,00427 = 1/234,5.
 Für Starkstromleitungen kommen hauptsächlich folgende Baustoffe
 in Betracht:

Stoff	Spez. Wdstd. bei 20° C	Spez. Leitwert bei 20° C	Temp.- Koeff. bei konst. Masse	Höchste Beanspruchung kg/mm ²	Spez. Gewicht kg/dm ³
	Ohm·mm ² m	m Ohm·mm ²			
Weiches Normal- kupfer	$c_{20} = 0,01724$	$k_{20} = 58$	0,00393	5	$\gamma = 8,89$
Handelskupfer . . .	0,01784	56,1	0,00381	12 bei Draht, 16 bei Seilen	8,89
Aluminiumseil . . .	0,0287	34,8	0,0037	7	2,70
Eisendraht	$0,12 \div 0,14$	$8,3 \div 7,2$	0,0048	$13 \div 20$	7,65
Stahldraht	$\approx 0,10 \div 0,20$	$10 \div 5$	$\approx 0,0045$	$20 \div 40$	$\approx 7,8$

Strukturveränderung des Baustoffes beeinflusst auch seine elektrischen Eigenschaften. Kupferdraht, der durch Dehnung seinen Querschnitt auf 90% vermindert, zeigt jedoch nur eine um 2% geringere Leitfähigkeit¹⁾.

Der spez. Widerstand c und der Temperaturkoeffizient α stehen nach Versuchen J. H. Dellingers²⁾ bei einigen Metallen, insbesondere bei Kupfer, in einfacher Beziehung zueinander. Für dieses ist nämlich bei 20° C das Produkt aus c , α und dem spezifischen Gewicht γ innerhalb 0,5% eine Konstante. Da das spez. Gewicht bei den verschiedenen Kupfersorten nur wenig von 8,89 verschieden ist, so wird $\alpha c = \frac{1724 \cdot 10^{-5}}{254,5} = 6,78 \cdot 10^{-5}$. Selbst für schlecht leitende Kupfersorten mit etwa 50% des normalen Leitwertes gilt die Beziehung noch annähernd, doch wird für diese der Wert des Produktes etwas größer.

4. Hintereinanderschaltung.

Die Leiter lassen sich hinter- oder nebeneinander anordnen. Die Eigenschaften dieser Leitergebilde sollen nun untersucht werden. Die Hintereinanderschaltung wird auch als Reihen- oder Serienschaltung bezeichnet. Noch in den achtziger Jahren wurde sie auch Kaskadenschaltung genannt in Anlehnung an die Erscheinung sich überstürzender Wasserfälle. Heute wird diese Bezeichnung nur noch für besondere Schaltungen von Ein- und Mehrphasenmotoren verwendet.

Bei der reinen Hintereinanderschaltung durchläuft derselbe Strom alle Teile des gesamten Stromkreises.

Haben die Leiter, wie beim Gleichstrombogen oder bei den Akkumulatoren, gegensätzliche Pole bei der Ein- und Austrittsstelle des Stromes, so muß man bei ihrer Serienschaltung diese gegensätzlichen

¹⁾ Dinglers polytechn. Journal, Heft 47, 1909.

²⁾ St. Lindeck, Mitteil. aus der Phys.-Techn. Reichsanstalt 1910, S. 23/XII.

Pole, also einen positiven mit einem negativen Pol usw., verbinden. Bei Verbindung gleichnamiger Pole entsteht Gegenschaltung.

Als Ohmscher Widerstand wird der Widerstand für Gleichstrom bezeichnet. Sind zwei Kupferdrähte mit den Widerständen $r_1 = 5$ und $r_2 = 3$ Ohm in Serie verbunden, so erhält man 8 Ohm als gesamten Widerstand. Eine Elektrizitätsquelle von 10 Volt Klemmenspannung erzeugt darin $10/8 = 1,25$ Amp., wobei im ersten Widerstande 6,25 Volt, im zweiten Widerstande 3,75 Volt verzehrt werden. Die Spannungsverluste setzen sich in demselben Sinne zusammen wie die Widerstände.

Herrschen in solchen Ohmschen Widerständen noch elektromotorischen Kräfte, so daß sie Polarität besitzen, so muß bei der Reihenschaltung hierauf Rücksicht genommen werden. Dies ist der Fall bei der Schaltung von galvanischen Elementen oder bei Gleichstrombogenlampen, Akkumulatoren und Gleichstrommaschinen und -motoren. Bei der Ermittlung des Gesamtwiderstandes kommen dann einzelne Glieder, deren Gegen-EMKe in umgekehrtem Sinne in die Reihe geschaltet sind, mit negativem Widerstand in die Rechnung.

Gibt es negative Widerstände?

Um hierauf zu antworten, muß zuerst die Frage des Bestehens negativer Größen erledigt werden. Sie hat in der Mathematik zu Anfang des neunzehnten Jahrhunderts die Köpfe ebenso verwirrt wie später in der Elektrotechnik. Noch vor 25 Jahren hat man Oliver Heaviside gefragt, ob der Lichtbogen einen negativen Widerstand haben könne.

Solange jemand Geld hat, solange gibt es für ihn nur positive Zahlen; sobald er aber mit Schulden rechnen muß, kommen auch die negativen Zahlen in ihre Rechte. Fragt man, ob negative Größen überhaupt existieren, so muß man dies verneinen. Schulden sind kein (eigenes) Geld; aber im Gegensatz zum eigenen Gelde läßt man ihren Zahlenwert gelten. So ist es auch mit den negativen Widerständen. Sie existieren nicht wirklich. Es gibt nur die in die Leitungslehre eingeführten negativen Zahlen für Widerstandsgrößen.

In einem Kreise, der außer der treibenden EMK E_1 auch eine Gegen-EMK E_2 enthält, wird der Strom bei verkehrter Einschaltung dieser Gegen-EMK größer als bei folgerichtiger Einschaltung vom positiven zum negativen Pol. In diesem Falle ist nämlich die Summe der im Gesamtwiderstand R wirkenden EMKe $E_1 - E_2$, der Strom also $J = (E_1 - E_2) : R$. In jenem Falle aber wird die Summe der EMKe $E_1 + E_2$ und der Strom $J' = [E_1 - (-E_2)] : R = (E_1 + E_2) : R$.

Bezeichnet bei der Reihenschaltung von n Widerständen r_n den einzelnen, $R = \Sigma r_n$ den gesamten Widerstand, v_n den einzelnen, $V = \Sigma v_n$ den gesamten Spannungsverlust, so gilt also für den in allen Widerständen der Reihe konstanten Strom J die Beziehung

$$V = \Sigma v_n = JR = J \Sigma r_n.$$

Die natürliche Zahlenreihe oder die reelle Zahlenlinie reicht zur Darstellung dieser Reihenschaltung vollkommen aus. Sie ist durch die ein-

fache Addition von Spannungen und Widerständen erklärt, und für sie gilt demnach auch die beliebige Ordnung der einzelnen Glieder, was physikalisch der Vertauschbarkeit der Glieder in der Reihe gleichkommt.

5. Nebeneinander- oder Parallelschaltung.

Werden die Leiter oder Widerstände r_1, r_2, \dots , Abb. 1, nebeneinandergeschaltet, so finden sich bei gegebenem Spannungsunterschiede \mathfrak{B} zwischen den Verzweigungspunkten A und B die voneinander unabhängigen Einzelströme $i_1, i_2 \dots$ durch $i_1 = \mathfrak{B}/r_1 = \mathfrak{B}/r_2 = \dots$ und der Gesamtstrom, der sich in diese Einzelströme auflöst, ist

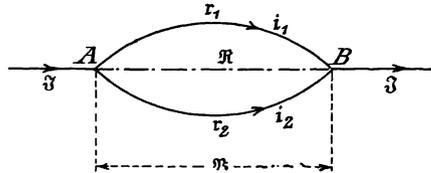


Abb. 1.

$$\mathfrak{J} = i_1 + i_2 + \dots = \mathfrak{B}/r_1 + \mathfrak{B}/r_2 + \dots = \mathfrak{B}(1/r_1 + 1/r_2 + \dots) = \mathfrak{B}/\mathfrak{R},$$

$$\mathfrak{B}\mathfrak{G} = \mathfrak{B}(g_1 + g_2 + \dots).$$

\mathfrak{R} ist der Gesamtwiderstand der Leiterverbindung und $1/\mathfrak{R} = \mathfrak{G}$ die gesamte Leitfähigkeit, die sich als Summe der Leitwerte $g_1, g_2 \dots$ der Zweige ergibt.

Hat man $r_1 = 5$ und $r_2 = 12,5$ Ohm auf eine Spannung von 100 Volt parallel geschaltet, dann ist $i_1 = 100/5 = 20$ Amp.; $i_2 = 100/12,5 = 8$ Amp.; $J = 20 + 8 = 28$ Amp.; $R = 100/28 = 3,57$ Ohm und

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{3,57} = \frac{1}{5} + \frac{1}{12,5}.$$

Zeichnerisch läßt sich diese Aufgabe dadurch lösen, daß man auf zwei parallelen Geraden A_1m_1 und A_2m_2 die Widerstände r_1 und r_2 von einer Linie A_1A_2 sinngemäß wie in Abb. 2 abträgt und den Schnittpunkt O ihrer Kreuzlinien sucht. Es ist dann $OC = R$, wie sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke leicht ergibt. Der Ausdruck

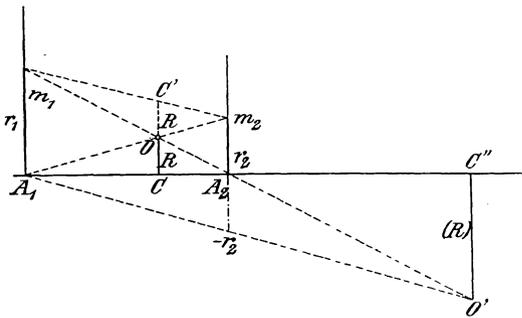


Abb. 2.

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{\frac{1}{2}CC'} = \frac{2}{CC'}$$

weist auf das harmonische Mittel der Arithmetik unmittelbar hin, das in der Diagonalenkonstruktion eines Vierecks in der Geometrie eben seinen zeichnerischen Ausdruck findet. Der Ersatzwiderstand ist also dem halben harmonischen Mittel gleich.

Die Basis A_1A_2 könnte hier auch als Gesamtstrom J angesehen werden, welcher durch C in die Teilströme $A_1C = i_2$ und $A_2C = i_1$

geteilt wird. Der untere Schnittpunkt O' in Abb. 2 entspricht der Parallelschaltung von r_1 mit $-r_2$. Er führt hier zu einem negativen Ersatzwiderstand (R), weil $A_1 m_1 > A_2 m_2$ ist.

Bei diesem Vorgehen konnte die Entfernung $A_1 A_2$ beliebig groß gewählt werden. Wird sie dem Werte $r_1 = A_1 m_1$ gleich gemacht und der Winkel $m_1 A_1 A_2$ mit 90° gezeichnet, so führen diese Annahmen

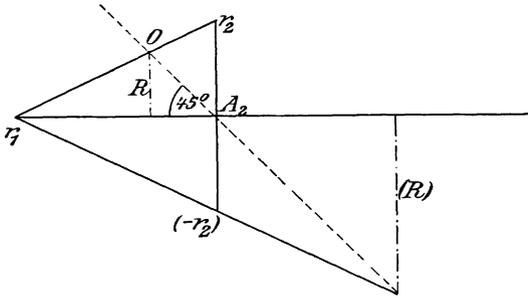


Abb. 3.

zur Abb. 3 u. 4. Demnach gilt: Trägt man einen Widerstand r_1 auf den einen, den anderen r_2 auf den zweiten Schenkel eines rechten (oder schiefen) Winkels auf und verbindet die so erhaltenen Endpunkte miteinander, so gibt der Schnitt ihrer Verbindungslinie mit der Winkelhalbierenden in dem entsprechenden Maßstab gemessen den gesuchten

Widerstand.

Sollen zwei parallele Ohmsche Widerstände sich so verändern, daß ihr Ersatzwiderstand konstant verbleibt, so dreht sich der Strahl in Abb. 5 um O . Es muß also der eine Widerstand zu-, der andere

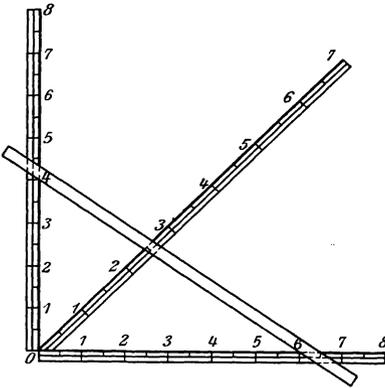


Abb. 4.

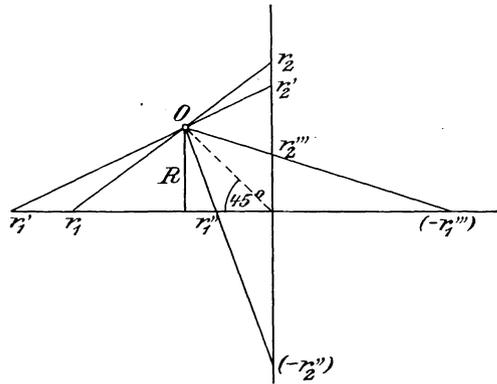


Abb. 5.

abnehmen, wodurch auch die Einzelströme im umgekehrten Verhältnisse schwanken und der Hauptstrom sich auf konstanter Größe zu halten vermag. Solche Widerstandspaare sind in Abb. 5 r_1 und r_2 ; r_1' und r_2' .

Ein anderes Verfahren ist das folgende: Man schlägt in Abb. 6 einen Kreis K vom Halbmesser $\rho = \sqrt{E}$ = der Quadratwurzel der gegebenen Spannung E . Für jeden Widerstand r , der vom Mittelpunkt O aus als Strecke $OP = r$ aufgetragen wird, läßt sich der zu-

gehörige Strom als Strecke $OQ = i$ ermitteln, denn es ist dabei $i = E/r = \sqrt{E^2}/r$. Das heißt aber, daß, auf einen Grundkreis mit dem Halbmesser \sqrt{E} bezogen, jedem Punkte P eines Widerstandes $OP = r$ ein reziproker Punkt Q für den Strom zugewiesen werden kann.

Die Haupteigenschaft dieses Verfahrens besteht darin, daß jeder Geraden G , die ein veränderlicher Schnittpunkt beschreibt, ein Kreis K durch das Zentrum O und durch die gemeinschaftlichen Punkte mit dem Grundkreise entspricht. Deshalb hat sie Möbius als Kreisverwandtschaft bezeichnet¹⁾.

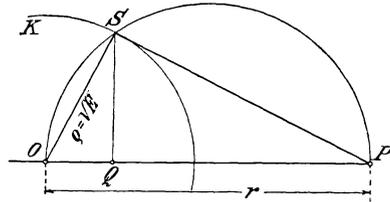


Abb. 6.

Die Spannung E kann auch negativ sein, also der Halbmesser des Grund- oder Abbildungskreises $q = \sqrt{-E}$ imaginär ausfallen, was auf die erwähnten Beziehungen keinen weiteren Einfluß ausübt. Das angeführte Abbildungsverfahren führt die Parallelschaltung von Widerständen immer auf die geometrische oder vektorielle Addition ihrer Stromstärken zurück.

Weiter kann man aus den rechtwinkligen Dreiecken PA_1B_1 , PA_2B_2 (Abb. 7) für verschiedene parallelgeschaltete Ohmsche Widerstände die jeweiligen Stromstärken konstruieren, wenn man als gemeinsame Höhe $OP = \sqrt{E}$, als den einen

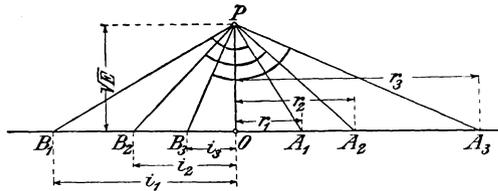


Abb. 7.

Abschnitt OA_1, OA_2, \dots der Hypotenuse die Widerstände $r_1, r_2, r_3 \dots$ aufträgt. Der andere Abschnitt $OB_1, OB_2 \dots$ der Hypotenuse ist dann $i_1, i_2 \dots$, da

$$(\sqrt{E})^2 = E = r_1 i_1 = r_2 i_2 = \dots$$

Ebenso wie man die mittlere Proportionale $\sqrt{r_1 r_2}$ durch Überschlagen eines Kreises über $r_1 + r_2$ findet, kann man durch Überschlagen einer unveränderlichen, als Werkzeug benutzten Parabel (Abb. 8), das harmonische Mittel $\frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2}$ finden.

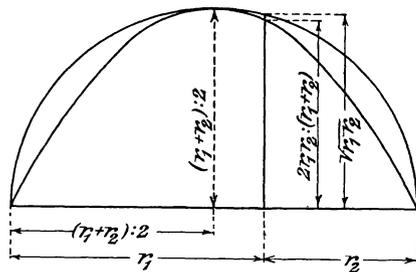


Abb. 8.

Sind mehr als zwei Wider-

¹⁾ Bezüglich der Geschichte dieser grundlegenden Beziehungen: Inverse Punkte behandelte Poncelet 1822, potenzhaltende Punkte Steiner 1822, reziproke Radien J. Plücker, Inversion und elektrische Bilder Sir William Thomson. Ausführliche Theorie rührt von J. Liouville 1847 her.

stände $r_1, r_2, r_3 \dots$ parallelgeschaltet, so ist der Ersatzwiderstand R gegeben durch

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \dots$$

Man kann also schrittweise vorgehen, indem man erst r_1 mit r_2 , dann das Ergebnis mit $r_3 \dots$ zusammenfaßt.

Beispiel. Für drei parallele Widerstände $r_1 = 15, r_2 = 20$ und $r_3 = 7$ Ohm bei 100 Volt Spannung ist

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{r_1 r_2 + r_{13} + r_{23}}{r_1 r_2 r_3},$$

$$R = \frac{15 \cdot 20 \cdot 7}{15 \cdot 20 + 15 \cdot 7 + 30 \cdot 7} = 3,85 \text{ Ohm.}$$

Die Zweigströme sind $i = 100/15 = 6,66; i_2 = 100/20 = 5$ und $i_3 = 100/7 = 14,28 \text{ A}$, der Gesamtstrom also $J = 25,94$, was auch mit

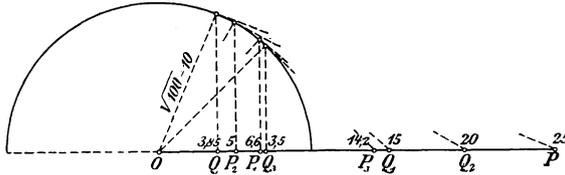


Abb. 9.

$J = 100/R = 100/3,85 = 25,94 \text{ A}$ stimmt. Abb. 9 zeigt hierfür die graphische Berechnung. Ein anderes Verfahren liefert der folgende

Hilfssatz.

Trägt man auf zwei beliebigen Geraden OA und OB in Abb. 10 zwei Maßstäbe mit den Einheiten e_1 und e_2 auf und ermittelt eine dritte

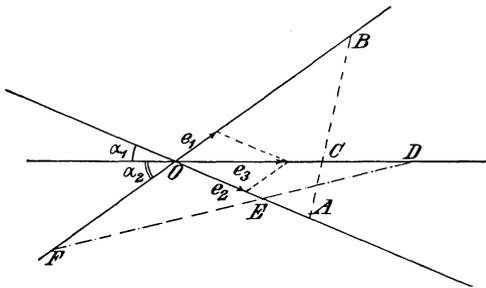


Abb. 10.

Gerade OC mit der Maßteilung e_3 aus dem Parallelogramm von e_1 und e_2 , dann spaltet ein beliebiger Strahl AB einen gegebenen Widerstand $r_1 = OC$ in zwei Teilwiderstände $r' = OA$ und $r'' = OB$, die parallelgeschaltet r ergeben. Dieser Satz gilt auch für negative Widerstände. So ist OD der Widerstand, der

sich aus der Parallelschaltung von OE und $(-OF)$ ergibt.

Mit diesem grundlegenden Satze läßt sich nun die fortlaufende Konstruktion des Ausdruckes für $1/R$ aufbauen. Angenommen, es seien $r_3 = 10,3, r_2 = 5,7, r_1 = 3,8$ Ohm parallelgeschaltet. Man zerlegt r_1 in zwei parallele Zweige r_1' und r_1'' , ebenso r_2 in r_2' und r_2'' , r_3 in r_3' und

r_3'' , und zwar so, daß

$$\begin{aligned} r_1'' &= -r_2, \\ r_2'' &= -r_3'. \end{aligned}$$

Diese Teile heben sich gegenseitig auf, so daß nur r_1' und r_3'' übrigbleiben (Abb. 11).

Daraus ergibt sich folgende Konstruktion: Ziehe in Abb. 12 durch r_1 den beliebigen Strahl $r_1 C$, der r_1 spaltet in OC und $-OA$. Mache $AB \parallel Or_1$ und spalte r_2 durch den Strahl $r_2 B$ in $OB = -OA$ und $-OD$. Wenn dann $DE \parallel Or_3$ gezogen wird, ergibt der Schnittpunkt des Strahls Er_3 mit der Verlängerung von OA die Zerlegung von r_3 in $OE = -OD$ und OF , und der Schluß-

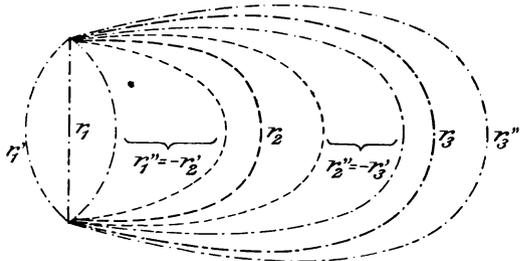


Abb. 11.

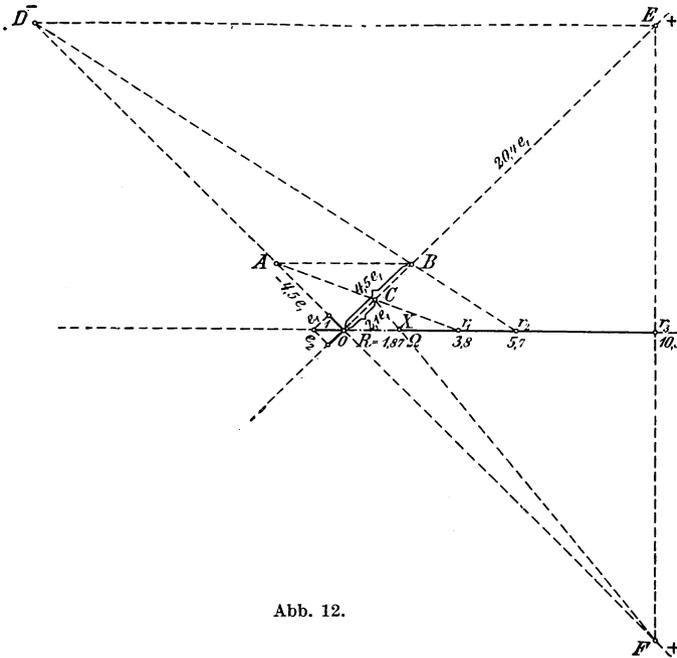


Abb. 12.

strahl FC gibt durch den Schnittpunkt X mit Or_3 den aus der Parallelschaltung von r_1' und r_3'' sich ergebenden Gesamtwiderstand $R = 1,87$ Ohm. Die Rechnung gibt ebenfalls

$$G = \frac{1}{R} = \frac{1}{10,3} + \frac{1}{5,7} + \frac{1}{3,8} = \frac{1}{1,87}.$$

6. Der einfache Schließungskreis (der Π -Leiter).

Die geschlossene Strombahn besteht aus drei Teilen, dem Leiterstück $A_1 B_1$, der Elektrizitätsquelle, dem Nutzleiter $A_2 B_2$ und der eigentlichen Leitung $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ (Abb. 13). Der einfache Schließungskreis enthält in seinem äußeren Teil den Nutzwiderstand hinter den Leitungswiderstand geschaltet.

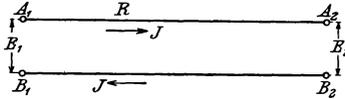


Abb. 13.

Bei einer Kraftübertragung mit Gleichstrom von der Maschine mit der Spannung E_1 zwischen den Klemmen $A_1 B_1$ werde der Strom J durch die Leitung mit dem Widerstand R nach dem Motor zwischen $A_2 B_2$ gebracht, dessen Klemmenspannung E_2 sei. Dann muß der Spannungsunterschied $E_1 - E_2$ genügen, um den Spannungsverlust RJ zu überwinden. Also $E_1 - E_2 = RJ$.

Die aufgewendete Leistung ist $E_1 J = RJ^2 + W_2$, die Nutzleistung ist $W_2 = E_2 J$.

Die quadratische Gleichung $RJ^2 - E_1 J + W_2 = 0$ führt zu zwei Strömen J und J' für gegebene Werte von W_2 , E_1 und R ,

$$\left. \begin{matrix} J \\ J' \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2R} (E_1 \pm \sqrt{E_1^2 - 4RW_2})$$

und das Güteverhältnis oder der Wirkungsgrad beträgt

$$\eta = \frac{W_2}{W_1} = \frac{E_2}{E_1} = 1 - \frac{RJ}{E_1}.$$

Die größte übertragbare Leistung ist $W_{2\max} = \frac{E_1^2}{4R}$ und der Strom beträgt dabei $E_1/2R$, der Wirkungsgrad nur 50%. Sind η und η' die Güteverhältnisse bei den zwei Strömen J und J' , so findet man $\eta + \eta' = 1$. Bei einem Strome, der kleiner ist als $E_1/2R$, erhält man also Wirkungsgrade höher als 50%.

Der Satz vom Wirkungsgrade 50% bei größter Leistung hat sich lange unverstanden erhalten. Die einzeln auf je eine Dynamo geschalteten Bogenlampen arbeiteten bis gegen 1883 damit recht gut. Ihr innerer Widerstand (Anker und Hauptstromspulen) war tatsächlich fast gleich dem äußeren des Schließungskreises, und so brannte das Einzellicht sehr beruhigt. Der gelehrte Satz ist jedoch weit älter. Er stammt von dem Petersburger Professor M. von Jakobi, der wie bei der Schaltung von galvanischen Elementen für seine magnetelektrische Maschine jene Gleichheit von innerem und äußerem Widerstand forderte.

Bei der Kraftübertragung und der Teilung des Lichtes hat der falschverstandene Satz viel geschadet. Als wissenschaftliches Petrefakt findet er sich noch zuweilen, obgleich ihn E. Mascart und J. Joubert in ihrem Lehrbuch 1888 literarisch unmöglich gemacht haben. Am sichersten hat ihm jedoch der schnelle Fortschritt der Kraftübertragung den Garaus gemacht.

Der Leistungsverlust der eigentlichen Leitung bezieht sich entweder auf die aufgenommene oder auf die abgegebene Leistung. Die Ver-

hältniszahlen p_1 und p_2 verhalten sich also wie die Zinsfüße Aufhundert und Inhundert.

$$RJ^2 = p_1 W_1 = p_2 W_2.$$

Zur Umrechnung kann folgende Zahlenreihe dienen. Da

$$\eta = 1 : \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) = \left(1 - \frac{p_1}{100}\right) : 1$$

wird

$$p_1 = p_2 - \frac{p_2^2}{100} + \frac{p_2^3}{10000} - \dots$$

und

$$p_2 = p_1 + \frac{p_1}{100} + \frac{p_1^3}{10000} + \dots$$

für: p_1	1	2	3	4	5	6
ist: p_2	1,010	2,041	3,092	4,166	5,263	6,382
für: p_1	7	8	9	10	15	20
ist: p_2	7,526	8,695	9,890	11,111	17,647	25,0
für: p_2	1	2	3	4	5	6
ist: p_1	0,990	1,958	2,912	3,846	4,761	5,660
für: p_2	7	8	9	10	15	20
ist: p_1	6,542	7,407	8,256	9,090	13,043	16,667

7. Die kettenförmige Leiterverbindung (der \sqcap -Leiter).

Setzt man einer \sqcap -förmigen Leiterverbindung schrittweise gleiche auf, so bildet sich eine \sqcap -Leiterform. Sie zeigt zwei überquerte Längsleiter. Ihre Entstehung, vom Ende nach der Quelle betrachtet, entspricht zwei parallelgeschaltetem Widerständen, vor welche ein dritter Widerstand vorgesetzt wird. Dem Ganzen wird ein vierter parallel, dann ein fünfter vorgeschaltet usw. Folgt man diesen Worten, also von unten nach oben links schreibend, vom Ende der Form zum Anfang, wo die Elektrizitätsquelle sitzt, so erscheint der Gesamtwiderstand als Kettenbruch. Die Zwischenstufen seiner Entstehung sind die Kettenbrüche ihrer aufsteigenden Näherungsbrüche. Ebenso leicht läßt sich der umgekehrte Vorgang vom Anfang der Form gegen ihr Ende einhalten, wodurch unserer üblichen Schreibweise des Kettenbruches, von oben links nach unten rechts, mit seinen absteigenden Näherungskettenbrüchen entsprochen wird.

Es ist ohne weiteres deutlich, daß man den Längsleiter $r_1, r_2 \dots r_1'$ so verändern kann, daß die Teilwiderstände r_1' und r_1'' zu einem Widerstande r_1 zusammengefaßt gedacht werden, wobei dann der Hinleiter allen Widerstand erhält, der Rückleiter widerstandslos ist.

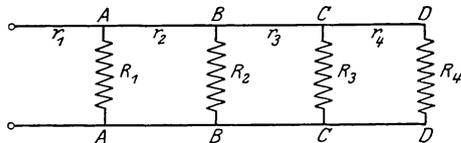


Abb. 14.

a) Darstellung des \sqcap -Leiters durch Kettenbrüche. Vom Ende nach dem Anfang fortschreitend, findet man dann für den Kettenleiter (Abb. 14) die folgenden Widerstände und Leitwerte:

Ort	Widerstand	Leitwert
Kurz vor CC	$r_4 + R_4$	$G_3 = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{r_4 + R_4}$
„ hinter CC		
„ vor BB	$r_3 + \frac{1}{G_3}$	$G_2 = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{G_3}$
„ hinter BB		
„ vor AA	$r_2 + \frac{1}{G_2}$	$G_1 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{G_2}$
„ hinter AA		
An den Klemmen . .	$r_1 + \frac{1}{G_1}$	

Der totale Widerstand des Kettenleiters ist also

$$R_{\text{tot}} = r_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{r_2 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{r_3 + \frac{1}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{r_4 + R_4}}}}}}$$

oder

$$R_{\text{tot}} = r_1 + \frac{1}{R_1^{-1}} + \frac{1}{r_2 + \frac{1}{R_2^{-1}} + \frac{1}{r_3 + \frac{1}{R_3^{-1}} + \frac{1}{r_4 + \frac{1}{R_4^{-1}}}}}}$$

Dem Kettenleiter entspricht also ein Kettenbruch, worin die Querwiderstände mit dem Exponenten (-1) vorkommen. Zur Verdeut-

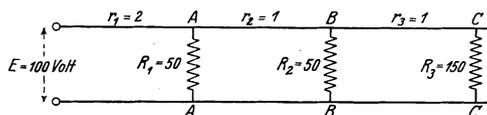


Abb. 15.

lichung diene ein Beispiel in Abb. 15. Die Spannung an den Klemmen sei 100 Volt, die Widerstände

$$r_1 = 2; \quad r_2 = 1; \quad r_3 = 1 \text{ Ohm}$$

$$R_1 = 50; \quad R_2 = 50; \quad R_3 = 150 \text{ Ohm.}$$

Der Gesamtwiderstand ist dann

$$R_{\text{tot}} = 2 + \frac{1}{\frac{1}{(50^{-1})} + \frac{1}{1} + \frac{1}{\frac{1}{(50^{-1})} + \frac{1}{1} + \frac{1}{(150^{-1})}}} = 23,7712 \text{ Ohm,}$$

oder in der Schreibweise von Pringsheim

$$R_{\text{tot}} = 2 + \left| \frac{1}{50^{-1}} \right| + \left| \frac{1}{1} \right| + \left| \frac{1}{50^{-1}} \right| + \left| \frac{1}{1} \right| + \left| \frac{1}{150^{-1}} \right| = 23,7712 \text{ Ohm.}$$

Der Gesamtstrom ist dann

$$J = \frac{E}{R_{\text{tot}}} = \frac{100}{23,7712} = 4,2067 \text{ Amp.}$$

Damit ist jedoch die Aufgabe noch nicht gelöst. Der Strom J_1 läuft von den Klemmen bis A und erzeugt im Widerstand r_1 den Spannungsverlust $v_1 = J r_1 = 4,2067 \cdot 2 = 8,4134$ Volt. Die Spannung zwischen AA ist also $E_1 = E - J r_1 = 100 - 8,4134 = 91,5866$ Volt. Durch R_1 fließt also nach dem Ohmschen Gesetz der Strom $J_1 = \frac{E_1}{R_1} = \frac{91,5866}{50} = 1,8317$ Amp. Bei A kommt der Strom J an und wird J_1 abgezweigt. In dem Stück AB läuft also nach dem Kirchhoffschen Gesetz der Strom $J - J_1 = 4,2067 - 1,8317 = 2,3750$ Amp. weiter und er erzeugt dabei den Spannungsverlust $v_2 = (J - J_1) r_2 = 2,3750$ Volt, so daß bei BB noch übrigbleiben

$$E_2 = E_1 - (J - J_1) r_2 = 91,5866 - 2,3750 = 89,2116 \text{ Volt.}$$

Der Strom durch R_2 ist

$$J_2 = \frac{E_2}{R_2} = \frac{89,2116}{50} = 1,7842 \text{ Amp.}$$

und der Spannungsverlust von BB bis CC

$$v_3 = (J - J_1 - J_2) \cdot r_3 = (2,3750 - 1,7842) 1 = 0,5908 \text{ Volt.}$$

Zwischen CC beträgt die Spannung also

$$E_3 = E_2 - v_3 = 89,2116 - 0,5908 = 88,6208 \text{ Volt,}$$

und der Strom durch R_3 ist

$$J_3 = \frac{E_3}{R_3} = \frac{88,6208}{150} = 0,5908 \text{ Amp.}$$

Hiermit ist die Strom- und Spannungsverteilung des dreigliedrigen Kettenleiters gefunden, indem abwechselnd das Ohmsche und das erste Kirchhoffsche Gesetz angewendet wurde. Die Methode ist genau, aber umständlich.

b) Näherungsmethode. Statt dieser genauen, aber umständlichen Methode kann man sich auch der folgenden Annäherung bedienen, sofern überragende Querwiderstände das Verteilungsbild

beherrschen. Man vernachlässigt zuerst den Widerstand der Längsleiter. Dieser vorläufigen Annahme mögen die Ströme J_1' , J_2' , J_3' entsprechen. Sie werden dann je nach der Größe des in den Längsleitern tatsächlich auftretenden Spannungsverlustes dem bereits ermittelten genauen Wert J_1 , J_2 , J_3 mehr oder weniger nahekommen.

In erster Annäherung ist: $J_1' = E : R_1 = 100 : 50 = 2$, $J_2' = E : R_2 = 100 : 50 = 2$, $J_3' = E : R_3 = 100 : 150 = 0,6666$ Amp., also

$$J' = 4,6666 \text{ Amp.}$$

Nun verwendet man diese Näherungswerte zur genaueren Auswertung der Spannungsverluste v_1' , v_2' , v_3' und der Spannungen E_1' , E_2' , E_3' . Man findet so

$$\begin{aligned} v_1' &= J' \cdot r_1 &&= 4,6666 \cdot 2 = 9,3333 \text{ Volt,} \\ v_2' &= (J' - J_1') \cdot r_2 &&= 2,6666 \cdot 1 = 2,6666 \text{ ,,} \\ v_3' &= (J' - J_1' - J_2') r_3 &&= 0,6666 \cdot 1 = 0,6666 \text{ ,,} \\ E_1' &= E - v_1' &&= 100 - 9,3333 = 90,6666 \text{ Volt,} \\ E_2' &= E_1' - v_2' &&= 90,6666 - 2,6666 = 88,00 \text{ ,,} \\ E_3' &= E_2' - v_3' &&= 88,00 - 0,6666 = 87,3333 \text{ ,,} \end{aligned}$$

Da die Ströme durch die erste Annahme zu groß gefunden würden, müssen die Spannungsverluste zu groß, die Spannungen zu klein werden. Man verbessert nun die ersten Stromwerte durch diese neugefundenen, zu kleinen Spannungswerte und erhält somit zu kleine Werte.

$$\begin{aligned} J_1'' &= E_1' : R_1 &= 90,6666 : 50 &= 1,8133 \text{ A; } J_1 = 1,8317 \text{ A,} \\ J_2'' &= E_2' : R_2 &= 88,00 : 50 &= 1,7600 \text{ A; } J_2 = 1,7842 \text{ A,} \\ J_3'' &= E_3' : R_3 &= 87,3333 : 150 &= 0,5828 \text{ A; } J_3 = 0,5908 \text{ A,} \\ J'' &= J_1'' + J_2'' + J_3'' &&= 4,1561 \text{ A; } J_3 = 4,2067 \text{ A.} \end{aligned}$$

Diese zu kleinen Werte mit zwei Akzenten, die jedoch bereits bis zur ersten Dezimale einschließlich mit den richtigen daneben gesetzten Zahlen übereinstimmen, kann man nochmals einsetzen und so rasch zu genauen Resultaten kommen.

Die mathematische Behandlung mittels des Kettenbruches ist dabei durch eine der Denkweise des Ingenieurs besser angepaßte physische, also anschauliche Rechnung ersetzt. Die Näherungswerte sind, wie beim Kettenbruch, abwechselnd zu groß und zu klein, konvergieren aber rasch.

Dies gilt in erhöhtem Maße für die praktische Anwendung, wobei die Abnahme der Spannung in den Längsleitern von dem der Stromquelle nächstliegenden bis zum entferntesten Abzweigpunkt nur wenige Hundertstel der an den Enden der Ohm- oder Nutzleiter herrschenden Spannung beträgt.

Diese Forderung muß namentlich bei Lichtnetzen erfüllt werden, damit die Spannung an den Nutzleitern annähernd dieselbe ist und damit ferner bei Ein- oder Ausschaltung von Nutzleitern die Spannung nicht wesentlich verändert wird.

Nimmt man eine mittlere Spannung E_m an, so wird in erster Annäherung der Fall der Abb. 15 auf die reine Parallelschaltung der

Nutzwiderstände mit widerstandslosen Längsleitern zurückgeführt. Bei $p\%$ Spannungsverlust, also

$$v_1 + v_2 + v_3 = \frac{p}{100} E_m$$

wird bei Ermittlung der Ströme ein Fehler von höchstens $\frac{p}{2}\%$ begangen. Derselbe Fehler tritt bei der Spannungsverteilung auf. Da aber die Spannungsverluste selbst nur $p\%$ der Nutzspeisung E betragen, sind die Fehler in den Werten der Spannungen selbst nur $\frac{1}{2} \left(\frac{p}{100}\right)^2$, also

$$\text{bei } p = 5\% \quad \text{nur } \frac{25}{20000} = 0,125\%,$$

$$\text{,, } p = 10\% \quad \text{nur } \frac{100}{20000} = 0,5\%,$$

$$\text{,, } p = 20\% \quad \text{nur } \frac{400}{20000} = 2\%,$$

somit bei Spannungsverlusten unter $10\%_0$ vernachlässigbar. In dem Beispiel der Abb. 15 war

$$\begin{aligned} p &= \frac{(v_1 + v_2 + v_3) \cdot 100}{E} = 8,4134 + 2,3750 + 0,5908 \\ &= 11,3792\% \\ &= \frac{E - E_3}{E} \cdot 100 = \frac{100 - 88,6208}{100} = 11,3792\%. \end{aligned}$$

Das hier angedeutete Verfahren soll an einem anderen Beispiel mit kleineren Verlusten näher erläutert werden.

An den Klemmen AA' (Abb. 16), herrschen 105 Volt. Die Nutzwiderstände 1 1', 2 2' und 3 3' haben 100, 50 und 100 Ohm. Die Längswiderstände sind so beschaffen, daß die einander gegenüberliegenden einander gleich sind. Sie haben 0,25, 0,3 und 0,2 Ohm. Es ist die Strom- und Spannungsverteilung zu ermitteln.

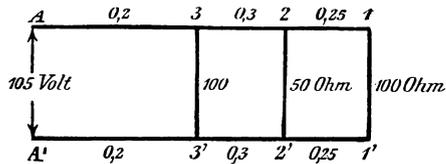


Abb. 16.

Es ist die Strom- und Spannungsverteilung zu ermitteln.

Der genaue Gesamtwiderstand ist:

$$2 \cdot 0,2 + \frac{1}{\left(\frac{1}{100}\right) + \frac{1}{2 \cdot 0,3}} + \frac{1}{\left(\frac{1}{50}\right) + \frac{1}{2 \cdot 0,25 + 100}} = 25,7668 \text{ Ohm.}$$

Der Strom im Leiter $A3$ und $3'A'$ ergibt sich demnach zu $105 : 25,7668 = 4,075$ Amp., sein Spannungsverlust zu $4,075 \cdot 0,4 = 1,63$ Volt. Die Spannung zwischen 3 und 3' beträgt $105 - 1,63 = 103,37$ Volt und der Strom in 3 3' ist $i_3 = 103,37/100 = 1,0337$ Amp.

Der Strom in 3 2 und 2' 3' ist gleich $4,075 - 1,0337 = 3,0413$ Amp., der Spannungsverlust in 3 2 + 2' 3': $3,0413 \cdot 0,6 = 1,825$ Volt und die

Spannung zwischen 2 und 2' $103,37 - 1,825 = 101,545$ Volt. Der Strom in 2 2' ist $i_2 = 101,545 : 50 = 2,0309$ Amp.

Der Strom in 21 und 1' 2' ist also $i_1 = 3,0413 - 2,0309 = 1,0104$ Amp., und sein Spannungsverlust $1,0104 \cdot 0,5 = 0,5052$ Volt. Daraus folgt die Spannung zwischen 1 und 1' : $101,545 - 0,505 = 101,04$ Volt.

Der Gesamtverlust beträgt demnach $105 - 101,04 = 3,96$ Volt, was $3,7\%$ von 105 Volt entspricht. Aus dieser Berechnung ist zu ersehen, daß die genaue Ermittlung der Stromverteilung, selbst in diesem einfachen Falle, schleppend wird.

Dieses Beispiel soll nun auch näherungsweise durchgerechnet werden. Angenommen, es herrsche bei allen Abnehmern eine mittlere Spannung von 103 Volt. Die Ströme i_3' , i_2' , i_1' in 3 3', 2 2' und 1 1' sind dann

$$i_3' = 103 : 100 = 1,03, \quad i_2' = 103 : 50 = 2,06 \quad \text{und} \quad i_1' = 103 : 100 = 1,03 \text{ Amp.}$$

Der Gesamtstrom J_1' beträgt $1,03 + 2,06 + 1,03 = 4,12$ Amp.

Mit Hilfe dieser angenäherten Stromverteilung können die Spannungen berechnet werden. Der Spannungsverlust in $A 3 + A' 3'$

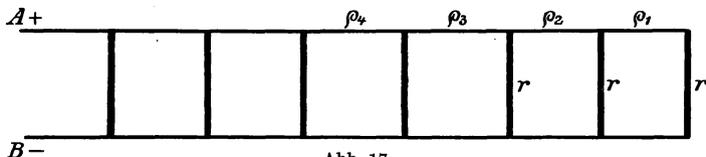


Abb. 17.

beträgt: $4,12 \cdot 0,4 = 1,648$ Volt und der Spannungsunterschied in 3 3' $105 - 1,648 = 103,352$ Volt. Daraus der Strom: $i_3'' = 103,352 : 100 = 1,0335$ Amp. In 3 2 und 3' 2' fließen $4,12 - 1,0335 = 3,0865$ Amp. und der Spannungsverlust berechnet sich zu $3,0865 \cdot 0,6 = 1,852$ Volt; daraus folgt der Spannungsunterschied in 2 2' $103,352 - 1,852 = 101,5$ Volt. Der Strom im Leiter wird also in zweiter Annäherung sein: $i_2'' = 101,5 : 50 = 2,03$ Amp. Der Spannungsverlust in $2 1 + 2 1'$ findet sich zu $(3,0865 - 2,03) 0,5 = 0,5282$ Volt und daraus die Spannung zwischen 1 und 1' zu $101,5 - 0,528 = 100,97$ Volt.

Der Strom in 1 1' ist nun $i_1'' = 100,97 : 100 = 1,0097$ Amp. Der Gesamtstrom J'' beträgt demnach $1,0097 + 2,03 + 1,0335 = 4,0732$ Amp. Dieser Wert nähert sich dem genauen $J = 4,075$ ebenso wie der Gesamtverlust $105 - 100,97 = 4,03$ Volt dem genauen 3,97. Das Verfahren kann fortgesetzt werden, wodurch jede gewünschte Annäherung erreicht werden kann.

Diese Konvergenzmethode enthält ein tiefgreifendes Prinzip zur Berechnung der Strom- und Spannungsverteilung in Leitungen.

Sie war möglich, weil die der elektrischen Anwendung übermächtig sind; dann kann man durch Vernachlässigung höherer Produkte von ρ gegen niedrigere zu einfachen Formeln gelangen. G. Guérault (Lum. él. 1883, S. 389) hat für gleiche r die folgende Rechnung gegeben.

Es sei $R_1 = r + \varrho_1$, dann wird

$$R_2 = \varrho_2 + \frac{r(r + \varrho_1)}{2r + \varrho_1} \approx \frac{r + \varrho_1 + 2\varrho_2}{2 + (\varrho_1/r)}$$

wenn $\varrho_1 \varrho_2$ vernachlässigt wird. Auf ähnliche Weise findet man für

$$R_3 = \varrho_3 + \frac{rR_2}{R_2} \approx \frac{r + \varrho_1 + 2\varrho_2 + 3\varrho_3}{3 + \frac{2}{r}(\varrho_1 + \varrho_2)}$$

und für

$$R_n = \frac{r + \varrho_1 + 2\varrho_2 + \dots + n\varrho_n}{n + \frac{1}{r} \{ (n-1)\varrho_1 + (n-2)2\varrho_2 + \dots + 1(n-1)\varrho_{n-1} \}}$$

Die Beschränkung auf gleiche Widerstände r der Nutzleiter kann jedoch entfallen, wenn die verschiedenen Querwiderstände $r_1, r_2 \dots$ in

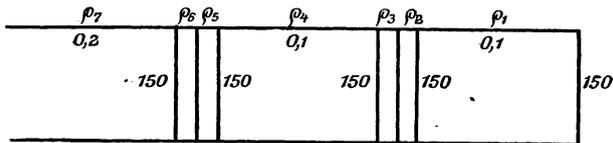


Abb. 18.

gleiche r gespalten und die Längswiderstände $\varrho_2, \varrho_3, \varrho_5, \varrho_6 \dots$ innerhalb der aufgelösten Gruppen vernachlässigt oder Null werden¹⁾, wie wir 1893 zeigten.

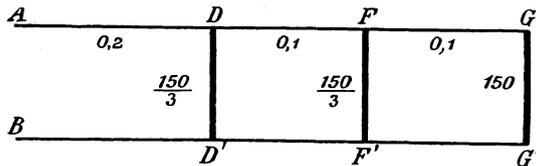


Abb. 19.

So wird das Beispiel in Abb 18 in den in Abb 19 dargestellten Fall verwandelt und gibt nach obiger Formel folgendes:

$$R = \frac{150 + \varrho_2 + 2\varrho_2 + 3\varrho_3 + 4\varrho_4 + 5\varrho_5 + 6\varrho_6 + 7\varrho_7}{7 + \frac{1}{150}(6\varrho_1 + 5 \cdot 2\varrho_2 + 4 \cdot 3\varrho_3 + 3 \cdot 4\varrho_4 + 2 \cdot 5\varrho_5 + 6\varrho_6)}$$

Die Seitenwiderstände innerhalb der Gruppen, d. i. $\varrho_2, \varrho_3, \varrho_5$ und ϱ_6 sind Null, es ist demnach:

$$R = \frac{150 + \varrho_1 + 4\varrho_4 + 4\varrho_7}{7 + \frac{1}{150}(6\varrho_1 + 3 \cdot 4\varrho_4)}$$

woraus nach Einführung der Werte $R = 21,6628$, der bis auf die vierte Dezimale mit dem absoluten Werte übereinstimmt.

Für das Beispiel der Abb. 16 ergäbe die Formel

$$R = \frac{100 + \varrho_1 + 2\varrho_2 + 3\varrho_3 + 4\varrho_4}{4 + \frac{1}{100}(3\varrho_1 + 2 \cdot 2\varrho_2 + 3\varrho_3)}$$

oder für $\varrho_1 = 2 \cdot 0,25$; $\varrho_2 = 0$; $\varrho_3 = 2 \cdot 0,3$; $\varrho_4 = 2 \cdot 0,2$ den Wert

$$R = \frac{100 + 0,5 + 3 \cdot 0,6 + 4 \cdot 0,4}{4 + 0,01(3 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,6)} = 25,787 \text{ Ohm,}$$

der von dem genauen Wert des Kettenbruches um 0,02 Ohm, also schon in der zweiten Dezimale abweicht, weil hier die Längswiderstände größer, die Querwiderstände kleiner sind.

Der Wert der bei Abb. 15 zuerst verwendeten Konvergenzmethode liegt vorall darin, daß sie, ohne Formeln zu verwenden, auf rein physikalischer Anschauung beruht und darum jederzeit anwendbar ist. Voraussetzung war bisher, daß die Widerstände der Querleiter bekannt sind. Sind diese jedoch, wie z. B. bei Glühlampen, selbst von der Größe der Spannung abhängig, dann müßte man auch dieser Abhängigkeit Rechnung tragen, wodurch das Problem hoffnungslos wird. Man hilft sich nun mit der kühnen Annahme, daß die Ströme der Abnehmer oder Nutzwiderstände direkt bekannt sind, wodurch die Rechnungen stark vereinfacht werden. Die Kühnheit besteht darin, daß man den Strom, welcher der mittleren Spannung entspricht, als unveränderlich gegeben ansieht, während man weiß, daß er eigentlich von der Spannung abhängt. Aber diese Annahme ist von derselben Ordnung wie die ebenso willkürliche Annahme, daß der Widerstand der Querleiter konstant sei. Nur führt sie zu technisch viel leichter zu übersehenden Rechnungen und soll darum von nun an stets durchgeführt werden.

Auch der Unterschied zwischen Nutzleitern und Verlust bringenden Leiterstücken ist rein subjektiver Art. Man sieht dies ein, wenn die Nutzwiderstände $R_1, R_2 \dots$ z. B. elektrische Öfen sind, worin die zugeführte elektrische Arbeit in Wärme umgesetzt wird. Auch in den Längsleitern verursachen die Teilwiderstände $r_1, r_2 \dots$ einen Effektverlust $J_1^2 r_1 = J_1 v_1, J_2^2 r_2 = J_2 v_2 \dots$, der in Wärme umgesetzt wird. Während man jedoch diese selbe Umsetzung in den Strahlungsöfen wünscht und darum nützlich nennt, bezeichnet man sie in den Längsleitern, wo sie unerwünscht ist, als Verlust. Die Unterscheidung ist also rein subjektiv, aber bei der Berechnung der Leitungen allgemein gebräuchlich.

8. Der offene Leitungsstrang, Einzel- und Summenabnahmen.

Die einfachen Leiterverbindungen bestehen aus offenen Leitern mit Verzweigungen und aus geschlossenen Strombahnen, welche Umläufe oder Maschen heißen. Ihre Ursprungsmasche enthält die EMK mit der treibenden Spannung, während in den andern Umläufen Spannungen auftreten. In den Verzweigungspunkten begegnen sich die Leiterströme, von denen die zufließenden als positiv, die abfließenden als negativ gelten können.

Soll keine Energieanhäufung, weder in Umläufen noch in den Verzweigungspunkten, stattfinden können, so muß in beiden Hinsichten Gleichgewicht herrschen; es müssen also die bezüglichlichen algebraischen Summen gleich Null sein. Diese beiden Regeln der Strom- und Spannungsverteilung für die einfachsten Stromverzweigungen hat bereits G. S. Ohm gelehrt, aber erst Kirchhoff¹⁾ hat sie, seinen eigenen Worten gemäß, nach Ohms Beispiel für Teilströme bei beliebigen Netzen umgefaßt. Das Stromgleichgewicht in den Verzweigungspunkten verlangt also für den Beharrungszustand:

$$\Sigma i = 0 \quad (1)$$

und das Spannungsgleichgewicht in den Umläufen:

$$\Sigma (i r) - E = 0.$$

Diese beiden sogenannten Kirchhoffschen Gesetze gelten unmittelbar nur für Gleichströme. Ihr Wortlaut bleibt aber, wie wir später sehen werden, auch für Wechselstrom aufrecht, sofern der Widerstandsbegriff erweitert wird.

J. Bosscha hat 1858 in seinen „Verspreide Geschriften“ die Eigenschaften solcher Netze untersucht und die Möglichkeit des Lostrennens eines Leiterstückes für den Fall seiner Stromlosigkeit ausgesprochen. Aber nicht nur solche Nulleiter, sondern jeder Leiter im Netze kann für einen bestimmten Zustand von seinen Knoten losgebunden und für diesen Sonderfall durch die bezüglichlichen ab- und zuführenden „freien“ Ströme ersetzt gedacht werden. Ist der ihm entsprechende Widerstand gegeben, so muß (oft recht umständlich) sein Strom erst gefunden werden und ebenso umgekehrt.

Die praktischen Netze bestehen aus dreierlei Leiter- oder Widerstandsstücken: erstens denen der Energieerzeuger, zweitens denen der Abnehmer oder Nutzwiderstände und drittens aus den Leiterstücken im engeren Sinne. Werden die beiden ersteren als aufgehoben angenommen, so zerfällt das vollkommene Netz in Netzteile mit freien Nutzströmen, mit Stromlasten. Man geht in den praktischen Fällen, wenn irgend tunlich, von gegebenen Stromabnahmen und nicht von Nutzwiderständen aus.

In dieser Weise zerfällt die \square -Form mit Hin- und Rückleiter in zwei endbelastete einfache Linien oder Leiter und die \square -Form in eben solche, aber mit zwei Stromabnahmen.

Geht von jedem Knoten zu jedem andern je ein Leiter, so ist der Leiterverbund vollständig. Meist fehlen jedoch viele Verbindungen.

Netze mit gegebenen Stromabnahmen können durch Ausheben von Leiterstücken oder durch Leiterschnitte mit eingefügten unbekanntem Leiterströmen nach der Netzspaltung behandelt werden.

Die \square -Leiterverbindung erhält die Energiezufuhr von einer Seite. Diese offene Leitung, welche wir als Kettenbruchleitung bereits

¹⁾ Ges. Abhandlungen S. 22.

eingeführt, zerfällt durch freie Nutzströme in zwei mehrfach strombelastete Leiter, Abb. 20.

Bezeichnen $r_1, r_2 \dots$ Teilwiderstände des Leiters und R_1, R_2 ihre Stufensummen, so findet man für die Spannungsänderung zwischen den Knoten A bis 1:

für die Ströme:	für die Widerstände:
$J_1 = i_1,$	$R_1 = r_1 + r_2 + r_3,$
$J_2 = i_1 + i_2,$	$R_2 = r_2 + r_3,$
$J_3 = i_1 + i_2 + i_3,$	$R_3 = r_3,$

und für die Spannungsänderung zwischen den Knoten A bis 1:

$$v = J_1 r_1 + J_2 r_2 + J_3 r_3 = \Sigma J r = v_1 + v_2 + v_3$$

$$\text{oder} \quad = i_1 R_1 + i_2 R_2 + i_3 R_3 = \Sigma i R = v_1' + v_2' + v_3'.$$

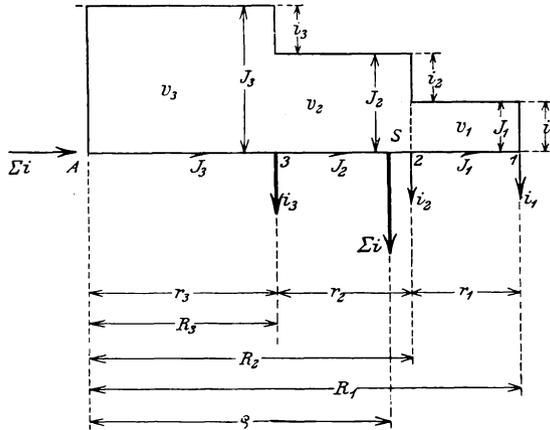


Abb. 20.

Der Spannungsverlust ist also die Summe der Produkte aus den Summenströmen J und den Teilwiderständen r , oder die Summe der Produkte aus den Einzellasten i und den Summenwiderständen R vom Anfang der Leitung an.

Nennt man das Produkt eines Abnahmestromes oder einer Stromlast i mit seinem Summenwiderstand R das Strommoment, so gilt bezüglich der Spannung der Satz: Der Spannungsverlust $v =$ Summe der Strommomente iR . Doch besteht zwischen den zwei gleichen Summen ein Unterschied bezüglich der Summanden. Der Verlust

$$\begin{aligned} \text{von } A \text{ bis } 3 \text{ ist } v_3 &= J_3 r_3, \\ \text{,, } 3 \text{ ,, } 2 \text{ ,, } v_2 &= J_2 r_2, \\ \text{,, } 2 \text{ ,, } 1 \text{ ,, } v_1 &= J_1 r_1, \end{aligned}$$

wie die Betrachtung der Abb. 20 nach Ohm lehrt.

$$\begin{aligned} \text{Der Verlust } v_1' &= i_1 R_1 \text{ würde auftreten, wenn } i_1 \text{ allein,} \\ \text{,, ,, } v_2' &= i_2 R_2 \text{ ,, ,, ,, } i_2 \text{ ,, ,} \\ \text{,, ,, } v_3' &= i_3 R_3 \text{ ,, ,, ,, } i_3 \text{ ,, } \end{aligned}$$

als Belastung vorhanden wäre. Ihre Superposition ergibt den Gesamtverlust v . Wir finden also bereits bei diesen einfachem offenen Leitungsstrang das weitgreifende Prinzip der Superposition, dessen wir uns noch häufig bedienen werden.

Sollen die verschiedenen Belastungen oder Lasten $i_1, i_2 \dots$ des offenen Leitungsstranges der Abb. 20 durch eine einzige Abnahme von gleichem Spannungsverlust ersetzt werden können, so muß die Summe der Ströme $\Sigma i = i_1 + i_2 + i_3$ (Abb. 20) angreifend gedacht werden an einem Widerstand ρ von solcher Größe, daß

$$v = \Sigma (iR) = \rho \Sigma i$$

bzw.
$$\rho = \frac{\Sigma (iR)}{\Sigma i} = \frac{v}{\Sigma i}.$$

Werden in Abb. 20 die Teilwiderstände r als Längen, die Abnahmen als Parallelkräfte an den Hebelsarmen R mit den Kraftmomenten iR aufgefaßt, so bedeutet ρ den Arm der Summenkraft Σi an dem Schwerpunkt S , hier dem Spannungsmittelpunkte. Beide sind in dieser Sache wesensgleich. Das Schwerpunktsprinzip in den Leitungen stammt noch von den Telegrapheningenieuren her. William E. Ayrton hat schon den center of gravity test für die Isolationsfehlerströme im Jahre 1877 zu Tokio behandelt, und Kennelly hat die gleiche Frage 1877 in New York erörtert¹⁾.

Der offene Leiterstrang mit Nutzlasten besteht, wenn diese als Ströme gegeben sind, nur aus Hin- und Rückleitung, die in den meisten Fällen gleiche Länge und gleichen Querschnitt haben können, aber nicht haben müssen. Man nennt dies dann auch die einfachste Form des Zweileitersystems.

III. Leiterquerschnitte und Metallaufwand bei dem Zweileitersystem.

Die Besprechung der Strom- und Spannungsverteilung in Leitern beantwortete alle Fragen bei gegebenen Widerständen, also gegebenen Längen und Querschnitten der Leiter.

Nun soll die umgekehrte Aufgabe behandelt werden. Die Abnahme-ströme und die größten oder mittleren Spannungsverluste und die Längen der Leiter sind bekannt, ihre Querschnitte sollen gefunden werden. Es treten also die Widerstände der Leiter als Unbekannte auf. Da ihrer mehr sind, als den linearen Verteilungsgleichungen entspricht, wird die Lösung erst durch andere Bedingungen bestimmt. Zu diesen gehört als eine der vornehmsten der sparsamste Metallaufwand.

Die Leitungen der verschiedenen Verteilungssysteme setzen sich zusammen aus den Hauptleitern, entsprechend den Polen der Quellen, unter Querschaltung der eigentlichen Stromabnahmen oder Nutz-

¹⁾ El. Review, New York, Vol. 11, Nr. 10.

widerstände. Hier soll zunächst nur das Zweileitersystem berücksichtigt werden. Die anderen Systeme mit ihren Grundeigenschaften und dem daraus hervorgehenden Metallaufwand werden erst später zugefügt.

1. Leiter von gleichem oder abgestuftem Querschnitt mit mehreren Abnahmen.

Dieser Leiter geht aus der kettenförmigen Leiteranordnung mit überwiegenden Nutzwiderständen hervor, die wir bereits auf Seite 34 behandelten. Alle Größen bezogen sich dort auf die Leiterwiderstände r . Um von diesen auf die Längen l der Leiter in m ihren Querschnitt f in mm^2 und den Metallaufwand M in kg zu schließen, dienen die Beziehungen:

$$r = \frac{cl}{f} \text{ Ohm}; \quad M = \gamma lf \cdot 10^{-3} \text{ kg}; \quad r = \frac{c\gamma l^2}{10^3 M} \text{ Ohm.} \quad (1)$$

Der Widerstand ist also dem Quadrat der Länge gerade, dem Gewicht des Metalls umgekehrt proportional.

Für weiches Kupfer setze man:	$c = 0,01724$	Ohm per m.	$\gamma = 8,89$	g/cm^3
„ hartes „ „ „	0,0175		8,89	
„ Aluminiumseil „ „	0,0287		2,70	
„ Eisendraht „ „	0,12 ÷ 0,14		7,86	
„ Stahldraht „ „	0,12 ÷ 0,20		7,8.	

Im folgenden soll der Metallaufwand in cm^3 ausgedrückt werden, so daß der Faktor $\gamma \cdot 10^{-3}$ fortfällt, wenn l in m, f in mm^2 eingeführt wird.

a) **Gleichbleibender Querschnitt f .** Bei gleichbleibendem Querschnitt f aller hintereinander gesetzten Leitungsstücke ist nach S. 40 der größte Spannungsverlust

$$v = \Sigma(Jr) = \Sigma\left(J \frac{cl}{f}\right) = \frac{c}{f} \Sigma(Jl) = \frac{c}{f} \Sigma(iL),$$

woraus sich der Querschnitt in mm^2 zu

$$f = \frac{c}{v} \Sigma(Jl) = \frac{c}{v} \Sigma(iL) = \text{konstant},$$

der Metallaufwand in cm^3 zu

$$M_f = \Sigma lf = \frac{c}{v} \Sigma[l \cdot \Sigma(Jl)]$$

ergibt.

b) **Gleichbleibende Stromdichte δ .** Werden die Querschnitte der aufeinanderfolgenden Leiter entsprechend den in ihnen herrschenden Stromstärken abgestuft, so daß die Stromdichte $\delta = J/f$ unveränderlich ist, dann ist in dem n ten Leiter

$$\frac{J_n}{f_n} = \frac{v_n}{f_n r_n} = \frac{v_n}{c l_n} = \frac{1}{c} \cdot \frac{v_n}{l_n} = \delta = \text{konstant},$$

also der Spannungsverlust v_n/l_n für die Längeneinheit konstant. Hieraus folgt für den größten Spannungsverlust:

$$v = c \Sigma l \delta = c \delta \Sigma l$$

und der Metallaufwand in cm^3

$$M_\delta = \Sigma l f = \Sigma \frac{lJ}{\delta} = \frac{1}{\delta} \Sigma (lJ)$$

oder unter Zuhilfenahme der letzten Gleichung

$$M_\delta = \frac{c}{v} \Sigma [l \cdot \Sigma (Jl)] = M_f.$$

Der Aufwand an Leitungsmetall (kürzer an Kupfer) ist also bei gleichbleibender Stromdichte ebenso groß wie bei gleichbleibendem Querschnitt f .

Der Spannungsverlust von Anfang A an bis zu einem Punkte 1, 2 ... wächst mit zunehmender Länge, was selbstverständlich erscheint, weil eine solche abgestufte Leiterfolge aus einzelnen gleich starken Fäden (Abb. 21) mit zusammenfallenden Punkten 1, 2 ... gleicher Entfernung und gleicher Spannungsverluste bestehen könnte. Hätte man dagegen die Einzelfäden zu allen Abnahmen gemäß gleichem größtem Spannungsverlust ermittelt, so müßten die Einzelfäden zerschlossen bleiben, ihre Zusammenfügung zum abgestuften Leiter ergäbe nämlich größeren Spannungsverlust, weil die Anfangsquerschnitte auch durch den Strom der folgenden belastet würden.

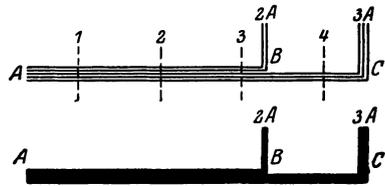


Abb. 21.

Bei gleicher Stromdichte ist der gesamte Leistungsverlust

$$w = \Sigma (J^2 r) = c \delta \Sigma (Jl)$$

und der Leistungsverlust für die Einheit des Kupferaufwandes

$$w/M_\delta = c \delta^2 = \text{konstant.}$$

Man hat diesen Verlust für 1 cm^3 w/M_δ den spezifischen Leistungsverlust genannt, läuft damit aber Gefahr, ihn mit dem auf die Längen- oder Widerstandseinheit bezogenen zu verwechseln.

Der Spannungsverlust von Anfang an bis zu einem Punkte verteilt sich der Länge nach bei gleichem Querschnitt gleichmäßiger als bei gleicher Stromdichte, was zugunsten des gleichmäßigen Leiters gegenüber dem abgestuften spricht.

Noch stärker sprechen für Vermeidung vieler Querschnittsstufen allerlei praktische Erwägungen, wie die Rücksicht auf die handelsüblichen Querschnitte, Verminderung der Lötstellen usw.

2. Leiter mit mehreren Abnahmen bei geringstem Kupferaufwand.

Der geringste Kupferaufwand liegt zwischen den beiden gleichen Werten, welche konstantem Querschnitt und konstanter Dichte entsprechen. Er berechnet sich aus den beiden Ansätzen für den höchsten Spannungsverlust:

$$v = v_1 + v_2 + \dots = \frac{c l_1 J_1}{f_1} + \frac{c l_2 J_2}{f_2} + \dots \quad (1)$$

und für die geringste Kupfermenge:

$$M = l_1 f_1 + l_2 f_2 + \dots \quad (2)$$

Die Änderung

$$dM = l_1 df_1 + l_2 df_2 + \dots$$

muß Null sein.

Unter Anwendung eines willkürlichen Eulerschen Multiplikators λ findet man aus (1) und (2)

$$\frac{\partial v}{\partial f_1} + \lambda \frac{\partial M}{\partial f_1} = 0; \quad \lambda l_1 - \frac{c l_1 J_1}{f_1^2} = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial f_2} + \lambda \frac{\partial M}{\partial f_2} = 0; \quad \lambda l_2 - \frac{c l_2 J_2}{f_2^2} = 0,$$

woraus

$$\text{oder} \quad \left. \begin{aligned} \frac{f_1^2}{J_1} = \frac{f_2^2}{J_2} = \text{konstant} \\ \frac{f_1}{\sqrt{J_1}} = \frac{f_2}{\sqrt{J_2}} = \text{konstant} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Der geringste Aufwand verlangt also Querschnitte, die sich wie die Wurzeln ihrer Ströme verhalten.

Für einen beliebigen, n ten Querschnitt eines abgestuften Leiters mit den Abnahmen J_1, J_2, \dots , den Längen l_1, l_2, \dots den Querschnitten f_1, f_2, \dots und dem größten Spannungsverlust v findet man

$$f_n = \frac{c}{v} \sqrt{J_n} (l_1 \sqrt{J_1} + l_2 \sqrt{J_2} + \dots)$$

und für die Gesamtmenge des Leiters in cm^3

$$M = \frac{c}{v} (l_1 \sqrt{J_1} + l_2 \sqrt{J_2} + \dots)^2 = \frac{c}{v} \Sigma (\sqrt{J} \cdot l)^2.$$

Den Klammerausdruck kann man entweder als einfaches Moment der Wurzel aus den Strömen oder als reduziertes Moment ansehen.

Da Leitungsdrähte und Kabel nur in bestimmten Querschnitten hergestellt werden, muß man häufig von dem errechneten Werte abweichen und einen der im Handel befindlichen dafür einsetzen. Die handelsüblichen oder normalen Querschnitte sind nach den Normalien des VDE 0,5; 0,75; 1; 1,5; 2,5; 4, 6, 10, 16, 25, 35, 50, 70,95, 120, 150, 185, 240, 310, 400, 500, 625, 800 und 1000 mm^2 .

3. Vergleich dieser Rechnungen für offene unverzweigte Leiter¹⁾.

In den hier folgenden Zahlenbeispielen sind alle Längen, Spannungsverluste und Kupfermengen für je einen Pol berechnet; daher ist beim Zweileitersystem der ganze Spannungsverlust und Metallaufwand doppelt so groß als hier angegeben.

¹⁾ Sumec, J. K.: Zur Berechnung offener elektrischer Leitungen. El. u. Maschinenb. 1908, S. 1137.

a) **Methode konstanten Querschnittes.** Der Leiter Abb. 22 soll auf gleichbleibenden Querschnitt berechnet werden. Der größte Spannungsverlust betrage $v = 1,1$ Volt.

Da

$$\Sigma (Jl) = \Sigma (iL) = 10 \cdot 155 + 40 \cdot 55 + 5 \cdot 50 + 20 \cdot 25 \\ = 4500 \text{ Meterampere,}$$

wird

$$f = \frac{0,0175}{1,1} \cdot 4500 = 71,55 \text{ mm}^2$$

und

$$M = f \Sigma l = 71,55 \cdot 155 = 11100 \text{ cm}^3.$$

Der nächste Normalquerschnitt ist 70 mm². Für ihn ist

$$M = 10850 \text{ cm}^3 \text{ und } v = 1,125 \text{ Volt.} \dagger$$

b) **Methode konstanter Stromdichte.** Für dasselbe Beispiel ist

$$\Sigma l = 155 \text{ m, also } \delta = \frac{v}{c \Sigma l} = \frac{1,1}{0,0175 \cdot 155} = 0,406 \text{ A/mm}^2$$

und somit

$$f = J/\delta = 185; 135,6; 123,3; 25,65 \text{ mm}^2. \\ \Sigma fl = 11100 \text{ cm}^3, \text{ wie oben.}$$

Abänderung der Methode b) mit nur zwei Querschnitten.

In der Praxis wechselt man mit Rücksicht auf die größere Arbeit an den Verbindungsstellen die Querschnitte möglichst selten. Im vorliegenden Beispiel sind zwei Querschnitte angewiesen, einer für 75, bzw. 55 und 50 A, der andere für 10 A.

Diese Querschnitte werden mit gleichem Spannungsverlust für den laufenden Meter gewählt.

Es ist also

$$v_0 = \frac{1,1 \cdot 55}{155} = 0,390 \text{ V,} \quad f_0 = \frac{0,0175}{0,390} \cdot 3500 = 157 \text{ mm}^2, \\ v_1 = \frac{1,1 \cdot 100}{155} = 0,710 \text{ V,} \quad f_1 = \frac{0,0175}{0,710} \cdot 1000 = 24,65 \text{ mm}^2,$$

und die Kupfermenge $M = \Sigma (fl) = 11100 \text{ cm}^3$, wie bei Methode a) und b). Die wirkliche Ausführung hätte mit $f_0 = 150$, $f_1 = 25 \text{ mm}^2$ zu geschehen und gäbe $\Sigma (fl) = 10750 \text{ cm}^3$, $v = 1,11$ Volt.

c) **Methode geringsten Kupferaufwandes.** Für dieselbe Aufgabe ist

$$\sqrt{J} = 8,66; 7,41; 7,07; 3,16, \\ l \sqrt{J} = 216,6; 185,3; 35,4; 316, \\ \Sigma (l \sqrt{J}) = 753,2; \quad \frac{c \Sigma (l \sqrt{J})}{v} = \frac{0,0175}{1,11} \cdot 753,2 = 11,97,$$

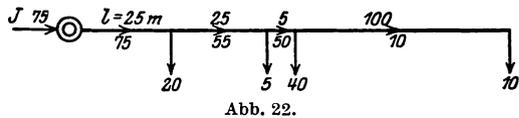


Abb. 22.

$$f = 11,97 \sqrt{J} = 104; \quad 89; \quad 85; \quad 38 \text{ mm}^2,$$

$$\Sigma(fl) = 11,97 \cdot 753,2 = 9020 \text{ cm}^3.$$

d) **Abänderung zur Methode c).** Man beschränkt die Zahl der Querschnittsstufen auf zwei und wählt für Strecken mit gleichem Querschnitt statt ihrer einzelnen Ströme den gemeinsamen fiktiven Strom

$$J' = \frac{\Sigma(lJ)}{\Sigma l}.$$

Dieser Strom würde, über die ganze Länge fließend, denselben Spannungsverlust ergeben wie die Einzelströme

$$J' \Sigma l = \Sigma(lJ).$$

Er entspricht der später (Seite 73) zu erklärenden Knotenkomponente der Abnahmeströme.

Es ist also

$$J' = \frac{\Sigma lJ}{\Sigma l} = \frac{3500}{55} = 63,65 \text{ A}, \quad J_1' = \frac{1000}{100} = 10 \text{ A}.$$

$$\sqrt{J} = 7,98; \quad 3,16.$$

$$l \sqrt{J} = 439; \quad 316.$$

$$\Sigma(l \sqrt{J}) = 755.$$

$$c \frac{\Sigma(l \sqrt{J})}{v} = \frac{0,0175 \cdot 755}{1,1} = 12.$$

$$f = 12 \sqrt{J} = 95,8; \quad 38 \text{ mm}^2.$$

$$M = \Sigma(fl) = 12 \cdot 755 = 9060 \text{ cm}^3.$$

Die wirkliche Ausführung wäre $f = 95$ und 35 mm^2 , wobei $\Sigma(fl) = 8725 \text{ mm}^2$ und $v = 1,144 \text{ V}$ wird.

e) **Vergleich der drei Ergebnisse.** Die Klammerwerte beziehen sich auf die errechneten Querschnitte, die anderen auf die wirkliche Ausführung.

	Methode a)	Methode c)	Methode b)
Querschnitt . . .	(71,55) 70	(95,8) 95	(157) 150 mm ²
Spannungsverlust	(1,1) 1,125	(1,1) 1,144	(1,1) 1,11 V
Kupfermenge . .	(11100) 10850	(9060) 8725	11100 10750 cm ³

Methode a) gibt eigentlich den Leiteranfang zu schwach, sein Ende zu stark.

Methode b) gibt eigentlich den Leiteranfang zu stark, sein Ende zu schwach.

Methode c) hält mit ihren, den Wurzeln aus den Strömen proportionalen Querschnitten die Mitte zwischen beiden. Daher soll man bei der Wahl der Normalquerschnitte den Anfangsquerschnitt immer nach der Seite des geringsten Kupfers wählen und die Endquerschnitte erst dann nach dem noch verfügbaren Spannungsverlust ermitteln.

4. Gleich- und gegenläufige Zweileiteranordnung.

In Abb. 23 sind durch volle Pfeile die positiven, durch gestrichelte die negativen Stromrichtungen eingetragen. Zwei Anordnungen der Hin- und Rückleiter kann man unterscheiden: die gleichläufige nach Abb. 23a und die gegenläufige nach Abb. 23b, entsprechend dem Lauf der gegensätzlichen Polpfeile. Bei der gegenläufigen Anordnung wird der Rückleiter zur Rückkehr oder weitläufigen Schleife gezwungen (Abb. 23c), wenn nicht die Örtlichkeit zur offenen Kreisleitung (Abb. 23d) einladet. Die einfach geschlossene Leitung wäre hier wesentlich vorteilhafter, weil sie unter sonst gleichen Umständen den halben Querschnitt ergibt. Da aus der Summe der Spannungsverluste der beiden Polleiter sich der Spannungsabfall bis zu den Nutzwiderständen oder Verbrauchern ergibt, muß dieser unter gleichen Verhältnissen bei der gegenläufigen Anordnung kleiner werden als bei der gleichläufigen. Das Zweileitersystem ist eben aus dem Hin- und dem Rückleiter gebildet. Nimmt man an, daß der Rückleiter nicht die Ströme des Hinleiters abführt, sondern den negativen Strom zu den negativen Klemmen hinleitet, so werden beide Strombilder gleich.

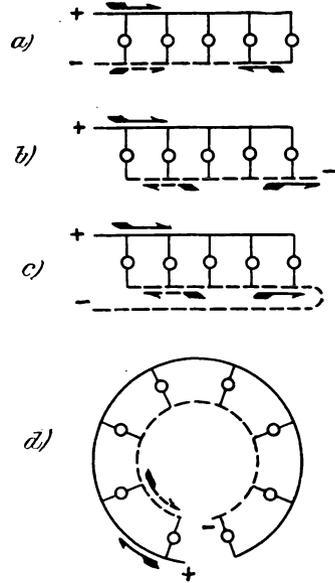


Abb. 23.

Die Gegenführung kommt heute nur noch ausnahmsweise vor, aber 1887 hat die Edison Co. in Paris den Boulevard de l'Opéra beglückt, ja sogar die Leitungen sehr weit, fast kegelförmig abgestuft¹⁾. Viele ausgezeichnete Praktiker glaubten damals, daß die Gegenführung alle Ungleichheiten in der Glühlampenhelligkeit beseitige und machten daher mit den Leitungen Umwege und Bogen, anstatt auf kürzestem Wege zur Hauptgruppe zu schreiten und von diesem Strange aus zu den Nebengruppen abzuzweigen.

5. Gleichmäßig verteilte Stromabnahme.

Man kann gleich- und gegenläufige Schaltung auch für den Fall gleichmäßiger Belastung bei zylindrischem und konischem Leiter untersuchen.

Bei zylindrischen Leitern und gleichläufiger Schaltung findet man für einen Punkt im Abstand x vom Anfang den Spannungsverlust für die Längeneinheit vom Widerstande.

$$R = \frac{1}{k f}, \quad \frac{d v_x}{d x} = - 2 R i .$$

¹⁾ Maréchal, H.: L'éclairage à Paris, S. 198.

i ist der Strom in diesem Punkte (Abb. 24), J_0 der Strom im Anfang, L die gesamte Länge. Dann gilt

$$\frac{i}{J_0} = \frac{L-x}{L}, \text{ woraus } \frac{di}{dx} = -\frac{J_0}{L}.$$

Differenziert man die erste Gleichung nach x und führt die zweite ein, dann folgt

$$\frac{d^2 v_x}{dx^2} = -2R \frac{di}{dx} = \frac{2RJ_0}{L},$$

und hieraus folgt durch Integration

$$v_x = \frac{RJ_0}{L} x^2 \quad \text{und} \quad v = RJ_0 L = \frac{J_0 L}{kf}$$

für den Verlust bis zu den Punkten x und $x = L$, wofür $v_x = v$. Der Querschnitt

$$f = \frac{J_0 L}{kv}.$$

Der Querschnitt ist also bei gleichmäßiger Belastung genau halb so groß als er sein müßte, wenn der Strom J_0 des Anfangsquerschnittes

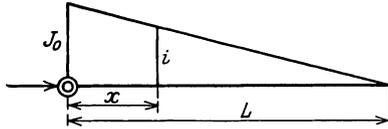


Abb. 24.

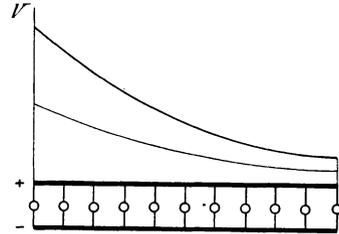


Abb. 25.

den ganzen Leiter durchflösse. Dies stimmt mit früher Abgeleitetem überein (Seite 40).

In Abb. 25 stellt die unterste Parabel den Verlust des Hinleiters, die obere den Verlust von Hin- und Rückleiter dar.

Bei zylindrischem Leiter und gegenläufiger Anordnung ist

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dx} &= -R \left(x \frac{di}{dx} - (L-x) \frac{di}{dx} \right) \\ &= -R \left(2x \frac{di}{dx} + J_0 \right) = -\frac{RJ_0}{L} (L-2x), \end{aligned}$$

da $-L \frac{di}{dx} = J_0$ ist.

Durch Integration findet man hieraus für die gesamte Spannungsänderung (Abb. 26) bis zum Punkte x :

$$v_x = \frac{RJ_0}{L} x(L-x).$$

Auch dies ist eine Parabel, deren Scheitel jedoch nicht wie zuvor am Ende, sondern in der Mitte der Leitung liegt. Die Unterschiede

zwischen den einzelnen Punkten sind also kleiner, aber nicht Null, wie man früher glaubte.

Für $x = L$ wird natürlich $v = 0$.

Aber für $x = \frac{L}{2}$ wird

$$v_{\max} = \frac{RJ_0L}{4}$$

also ein viertel so groß als bei gleichläufiger Schaltung am Ende der Leitung und halb so groß als bis zur Mitte derselben.

Um eine bessere Ausnutzung des Leitermaterials zu erzielen, griff man seinerzeit sogar zu dem Mittel, den Leiter konisch zu gestalten, so daß er auf seiner ganzen Länge mit derselben Stromdichte beansprucht ist. Für eine solche Leitung in gleichlaufender Schaltung der Leiter ergibt sich als Kurve des Spannungsgefälles eine gerade Linie (Abb. 27). Es ist nämlich im Punkte x :

$$-\frac{dv_x}{dx} = 2r_x i,$$

wenn r_x den Widerstand für die Längeneinheit, 1 m, ist. Setzt man

$$r_x = \frac{1}{kf_x} \text{ und } \frac{i}{f_x} = \delta, \text{ dann folgt}$$

$$-dv_x = 2k \frac{i}{f_x} \cdot dx = \frac{\delta}{k} 2dx$$

und daraus

$$v_x = 2R_0J_0x,$$

wenn R_0 der Widerstand für den Meter am Anfang. Nimmt man R_0 gleich dem Werte R in den vorhergehenden Fällen, dann ist das Gewicht nur ein drittel, der Spannungsverlust doppelt so groß. Verdreifacht man den Anfangsquerschnitt, dann ist der maximale Spannungsunterschied $\frac{2}{3}$ so groß als früher.

Führt man auch beim konischen Leiter die gegenläufige Schaltung durch, dann ergibt sich das Spannungsbild Abb. 28.

Daraus ist ersichtlich, daß bei Verwendung konischer Leiter in gegenläufiger Schaltung sämtliche Abnehmer die gleiche Spannung erhalten.

Die nachstehende Tabelle enthält einen Vergleich der vier genannten Fälle, ausgedrückt in Einheiten, und zwar bezüglich größter Abwei-

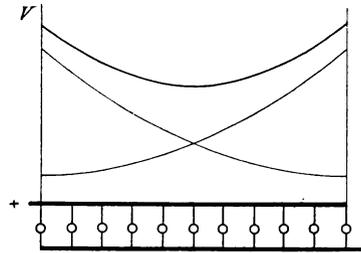


Abb. 26.

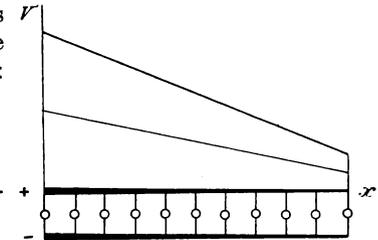


Abb. 27.

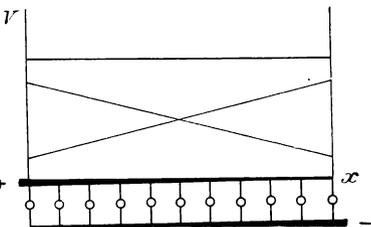


Abb. 28.

chung in der Spannung der einzelnen Abnehmer, Leitergewicht und Leistungsverlust in den Leitern¹⁾.

Leiter		Größte Spannungsabweichung	Gewicht	Leistungsverlust
Zylindrisch	gleichlaufend	2	3	2
	gegenlaufend	1	3	3
Konisch	gleichlaufend	4	1	2
	gegenlaufend	0	1	3

6. Verzweigte Leiter.

Eine Erweiterung des offenen Leitungsstranges entsteht durch baumartige Verästelung nach Abb. 29. Jeder Abnehmer ist zu einer Abzwegleitung $D_1D_2, E_1E_2 \dots$ bezüglich seiner Hauptleitung geworden.

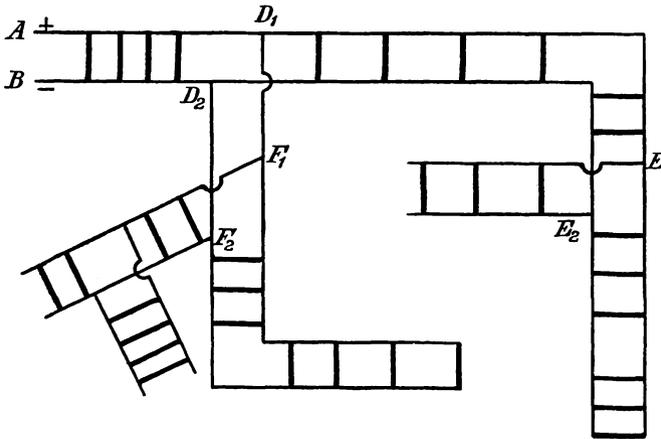


Abb. 29.

Im Kettenbruch der verästelten offenen Leitung wird jeder zweite Nenner wieder ein Kettenbruch sein usw. Dieser Leitungsbaum stellt das Bild der offenen Energieverteilung von einer Verteilungsstelle vor.

Jeder dicke Querstrich in Abb. 29 stellt einen Nutzleiter dar. Man erhält also auch bei dem offenen unverzweigten Leiterstrang sofort den verzweigten oder verästelten Leiter, sobald man auch die Leitungen einzeichnet, welche zu den Abnahmen führen, wie bei D_1D_2 (Abb. 29). Jede Abnahmestelle kann ihrerseits wiederum verästelnt sein, wie bei EE_2 oder F_1F_2 (Abb. 29). Es ist ohne weiteres klar, daß man jeden Hauptleiter und jeden Abzwegleiter für sich als offenen Strang berechnen kann. Man kann jedoch noch andere Berechnungen durchführen, wenn man bestimmten Bedingungen genügen will. Eine solche Bedingung ist die folgende:

¹⁾ Picou, R. V.: La distribution de l'électricité. Installations isolées. Paris 1892, S. 58ff.

7. Fiktive Leitungslänge des Ersatzleiters.

Die Endabnahmen i_1, i_2, \dots Abb. 30 sollen den gegebenen Spannungsverlust v in dem verzweigten Leiter $AB + (BC \parallel BD)$ hervorrufen. Der Hauptstrom i_0 teilt sich in i_1 und i_2 . Die Leiterlängen sind bekannt, die Querschnitte f_0, f_1 und f_2 gesucht.

Für die Querschnitte gelten die drei Gleichungen:

$$f_0 = \frac{(i_1 + i_2)l_0}{kv_0}, \quad f_1 = \frac{i_1 l_1}{k v_1}, \quad f_2 = \frac{i_2 l_2}{k v_2} \dots \quad \left(k = \frac{1}{c} \right) \quad (1)$$

Setzt man $v_1 = v_2, v_0 = v - v_1$, so hat man noch immer vier Unbekannte, nämlich die drei Querschnitte und den Teilverlust v_1 . Man muß daher, um der Aufgabe die Unbestimmtheit zu entnehmen, noch eine Bedingung einführen. Als solche gelte die Forderung kleinsten Aufwandes an Metall.

Die Menge ist

$$M = f_0 l_0 + f_1 l_1 + f_2 l_2.$$

Nach Einsetzung der Werte (1) ergibt sich

$$M = \frac{(i_1 + i_2)l_0^2}{k(v - v_1)} + \frac{i_1 l_1^2 + i_2 l_2^2}{v_1}. \quad (2)$$

Das Minimum ergibt sich für

$$\frac{dM}{dv_1} = \frac{(i_1 + i_2)l_0^2}{k(v - v_1)^2} + \frac{i_1 l_1^2 + i_2 l_2^2}{k v_1^2} = 0,$$

oder

$$\frac{v_1}{v - v_1} = \frac{1}{l_0} \sqrt{\frac{i_1 l_1^2 + i_2 l_2^2}{i_1 + i_2}} = \frac{\lambda}{l_0}, \quad (3)$$

wobei die fiktive Länge

$$\lambda = \sqrt{\frac{i_1 l_1^2 + i_2 l_2^2}{i_1 + i_2}} \quad (4)$$

gesetzt wurde.

Die Gleichung (3) ergibt auch

$$\frac{v_1}{\lambda} = \frac{v - v_1}{l_0}$$

und hieraus

$$\frac{v_1}{\lambda} = \frac{v_0}{l_0} = \frac{v}{l_0 + \lambda} \quad (5)$$

und besagt also: Geringster Kupferaufwand verursacht gleiche Spannungsverluste für die Längeneinheit der Verzweigung, des Hauptleiters und des Ersatzleiters λ .

Da der Ersatzleiter von der Länge λ den gleichen Strom $i_1 + i_2$ wie der Hauptleiter führt, muß also sein Querschnitt $\varphi = f_0$ sein.

Der Teilverlust v_1 in den parallelen Ästen ist nach (5)

$$v_1 = \frac{v \lambda}{l_0 + \lambda}$$

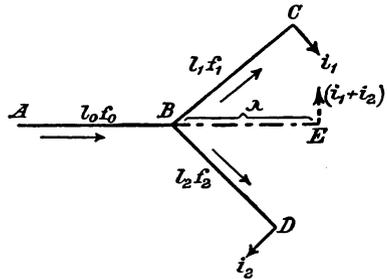


Abb. 30.

und die gesuchten Querschnitte sind nach Gleichung (1)

$$f_0 = \frac{(i_1 + i_2)}{kv} (l_0 + \lambda), \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \frac{i_1 l_1}{k v_1} = \frac{i_1 l_1}{kv} \cdot \frac{l_0 + \lambda}{\lambda}, \\ f_2 &= \frac{i_2 l_2}{k v_2} = \frac{i_2 l_2}{kv} \cdot \frac{l_0 + \lambda}{\lambda}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Aus Gleichung (6) folgt

$$\frac{f_0^2}{i_1 + i_2} = \frac{f_0^2}{i} = \left(\frac{l_0 + \lambda}{kv} \right)^2 (i_1 + i_2),$$

aus (7):

$$\frac{f_1^2}{i_1} + \frac{f_2^2}{i_2} = \left(\frac{l_0 + \lambda}{kv} \right)^2 \frac{i_1 l_1^2 + i_2 l_2^2}{\lambda^2}$$

und mit Rücksicht auf Gleichung (4) für λ ergibt sich auch¹⁾

$$\frac{f_1^2}{i_2} + \frac{f_2^2}{i_1} = \frac{f_0^2}{i_0}. \quad (8)$$

Aus Gleichung (6) und (7) lassen sich auch die Verhältnisse der Querschnitte berechnen:

$$\frac{f_0}{f_1} = \frac{i_1 + i_2}{i_1} \cdot \frac{\lambda}{l_1}, \quad \frac{f_0}{f_2} = \frac{i_1 + i_2}{i_2} \cdot \frac{\lambda}{l_2}$$

und

$$\frac{f_0}{f_1 + f_2} = \frac{(i_1 + i_2)\lambda}{i_1 l_1 + i_2 l_2} = \frac{\lambda}{\lambda'}, \quad (9)$$

wobei

$$\lambda' = \frac{i_1 l_1 + i_2 l_2}{i_1 + i_2}$$

eine andere, aus den einfachen Strommomenten beider Abzweigströme ermittelte Ersatzlänge bedeutet.

Sieht man die Ströme i als Kräfte oder Massen, die Entfernungen als Hebelarme an, so bedeutet λ den Trägheits-, λ' den Schwerpunktsstrahl.

Alle Schlüsse bleiben auch für drei solche Abzweigungen bestehen, weil der Ersatzleiter aus zweien mit der dritten Abzweigung sich vereinigen läßt. Sie gelten daher auch für eine beliebige Anzahl von Ästen und weiterschreitend auch für jede mehrfache Verzweigung.

Die beiden Mittelpunktentfernungen λ und λ' hängen wie folgt miteinander zusammen:

$$\lambda = \sqrt{\frac{\Sigma(i l^2)}{\Sigma i}} = \sqrt{\frac{\Sigma[(i l) l]}{\Sigma i}} \cdot \frac{\Sigma(i l)}{\Sigma(i l)} = \sqrt{\frac{\Sigma[(i l) l]}{\Sigma(i l)}} \cdot \sqrt{\frac{\Sigma(i l)}{\Sigma i}} = \sqrt{(\lambda) \cdot \lambda'} \quad (10),$$

wobei (λ) gleich einer einfachen Mittelpunktentfernung von fiktiven Strömen $(i l)$ gesetzt wurde.

Gleichung (10) besagt, daß das geometrische Mittel aus den beiden einfachen Ersatzlängen λ' mit den Strömen i und (λ) mit den gedachten Strömen $(i l)$ zur quadratischen Ersatzlänge λ führt.

¹⁾ Auf allgemeinere Weise von G. Santarelli: La Lumière élect. 1890, S. 457 bewiesen.

Die Rechnungen auf geringsten Kupferbedarf haben sich bei der reinen Stromabzweigung an einem Leiter und bei der verzweigten Leitung mit gleichen Ansätzen und daher gleichen Ergebnissen wiederholt.

Der gesunde Menschenverstand begreift dies auch leicht, natürlich nachträglich. Jede Stromabzweigung i_1 ist nämlich auch eine Leiterabzweigung mit einem Widerstand $r_1 = \frac{cdl_1}{df_1} = \frac{v_1}{i_1}$, Abb. 31, der sehr klein ist, also gewichtslos mit der Länge dl_1 und dem Querschnitt df_1 in die Stromabzweigung

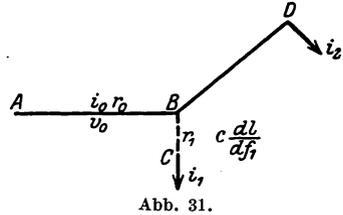


Abb. 31.

eingesetzt gedacht werden kann. In der Gleichung $\sum \left(\frac{l^2}{i}\right) = 0$ wird das Glied $\frac{df_1^2}{i_1}$ zu Null. Die Zwischenschiebung des Widerstandes r_1 hat also keine Wirkung auf die Knotenbedingung für kleinstes Kupfer.

8. Zahlenbeispiel für einen verästelten Leiter.

Es sei ein verzweigter Leiter (Abb. 32) so zu bemessen, daß bis zu allen Endabnahmen ein Spannungsverlust von 2,5 Volt auftritt. Auch soll der Kupferaufwand minimal sein.

Den Rechnungsgang bietet folgende Zusammenstellung:

$$\lambda_{1,2,3} = \sqrt{\frac{i_1 l_1^2 + i_2 l_2^2 + i_3 l_3^2}{i_1 + i_2 + i_3}}$$

$$\lambda_{1,2,3} + l_{BC} = \lambda_1$$

$$\lambda_{4,5} = \sqrt{\frac{i_4 l_4^2 + i_5 l_5^2}{i_4 + i_5}}$$

$$\lambda_{4,5} + \lambda_{BD} = \lambda_2$$

$$\lambda_3 = \sqrt{\frac{(i_1 + i_2 + i_3) \lambda_1^2 + (i_4 + i_5) \lambda_2^2}{i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5}}$$

$$\lambda = \lambda_3 + l_{AB}$$

$$f_{AB} = \frac{\lambda}{kv} (i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5)$$

$$f_{BC} = \frac{\lambda_1}{\lambda} (i_1 + i_2 + i_3)$$

$$f_{BD} = \frac{\lambda_2}{\lambda} (i_4 + i_5).$$

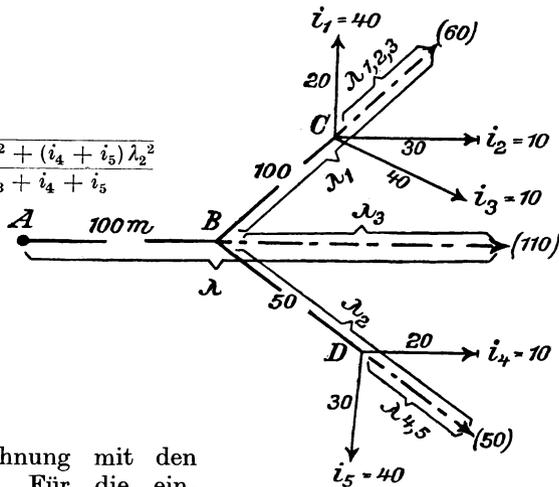


Abb. 32.

Einfacher ist die Rechnung mit den linearen Abständen λ' . Für die eingeschriebenen Abstände und Belastungen ist

$$\lambda'_{1,2,3} = \frac{40 \cdot 20 + 10 \cdot 30 + 10 \cdot 40}{40 + 10 + 10} = 25 \text{ m,}$$

$$\lambda'_1 = 100 + 25 = 125 \text{ m.}$$

Die Zweige des Knotens D ergeben

$$\lambda'_{4,5} = \frac{10 \cdot 20 + 40 \cdot 30}{10 + 40} = 28 \text{ m.}$$

Hierzu das Leiterstück $BD = 50$ m, gibt $\lambda'_2 = 78$ m. λ'_1 und λ'_2 vereinigt geben

$$\lambda'_{1,2} = \lambda'_3 = \frac{60 \cdot 125 + 50 \cdot 78}{60 + 50} = 103,6 \text{ m.}$$

Hierzu das Stück $AB = 100$ m liefert die ganze Leiterlänge $\lambda' = 103,6 + 100 = 203,6$ m, an deren Ende $\Sigma i = 110$ A abgezweigt sind.

Es wird also

$$f_{AB} = \frac{110 \cdot 203,6}{57 \cdot 2,5} = 157,2 \text{ mm}^2$$

und der Spannungsverlust

$$v_{AB} = \frac{110 \cdot 100}{57 \cdot 157,2} = 1,23 \text{ Volt.}$$

Für λ'_1 erhält man dann

$$v_1 = v - v_{AB} = 2,5 - 1,23 = 1,27 \text{ Volt,}$$

$$f_{BC} = \frac{60 \cdot 125}{57 \cdot 1,27} = 103,6 \text{ mm}^2.$$

Und da die Summe der Querschnitte der ausgehenden Zweige eines Knotens beim linearen Strommoment gleich dem Querschnitt des zuführenden Leiters ist, so muß $f_{BD} = 157,2 - 103,6 = 53,6 \text{ mm}^2$ sein. Der Verlust von B bis C beträgt $v_{BC} = \frac{60 \cdot 100}{57 \cdot 103,6} = 1,016$ Volt.

Für die Zweige 1, 2, 3 verbleiben also nur $1,27 - 1,016 = 0,254$ Volt und ihre Querschnitte werden 55,2; 20,8 und 27,6 mm^2 , zusammen 103,6 mm^2 wie f_{BC} .

Für die Zweige 4, 5 berechnet man den Spannungsverlust

$$v_{BD} = \frac{50 \cdot 50}{57 \cdot 53,6} = 0,82 \text{ Volt.}$$

Es entfallen also auf sie noch $1,27 - 0,82 = 0,45$ Volt und ihre Querschnitte werden 7,8 und 46,8, zusammen 54,6 mm^2 , statt 53,6 mm^2 bei genauerer Rechnung.

Wenn mit den quadratischen Strommomenten gerechnet wird, findet man

$$\lambda_{1,2,3} = \sqrt{\frac{40 \cdot 20^2 + 10 \cdot 30^2 + 10 \cdot 10^2}{60}} = 26,1 \text{ m gegenüber } \lambda'_{1,2,3} = 25 \text{ m}$$

und

$$\lambda = 26,1 + 100 = 126,1 \text{ m gegenüber } \lambda'_1 = 125 \text{ m}$$

$$\lambda_{4,5} = \sqrt{\frac{10 \cdot 20^2 + 40 \cdot 30^2}{50}} = 28,3 \text{ m} \quad ,, \quad \lambda'_{4,5} = 28 \text{ m}$$

und

$$\lambda_2 = 28,3 + 50 = 78,3 \text{ m} \quad ,, \quad \lambda'_2 = 78 \text{ m}$$

$$\lambda_3 = \sqrt{\frac{60 \cdot 126,1^2 + 50 \cdot 78,3^2}{110}} = 107,1 \text{ m} \quad ,, \quad \lambda_3' = 103,6 \text{ m}$$

und schließlich

$$\lambda = 107,1 + 100 = 207,1 \text{ m} \quad ,, \quad \lambda' = 203,6 \text{ m}$$

$$f_{AB} = \frac{110 \cdot 207,1}{57 \cdot 2,5} = 159,9 \text{ mm}^2 \quad ,, \quad f_{AB} = 157,2 \text{ mm}^2$$

usw. Die Abweichungen zwischen beiden Methoden sind gering; sie werden noch weiter vermindert bei der erforderlichen Berücksichtigung der Normalquerschnitte¹⁾.

9. Verzweigter offener Leiter.

Hier werden die im Abschnitt 3 dieses Kapitels besprochenen drei Verfahren des konstanten Querschnittes für den Hauptleiter, der konstanten Stromdichte und des kleinsten Kupferaufwandes sinngemäß angewendet. Ein Beispiel möge dies erläutern, wobei wieder die Längen, Spannungsverluste und Kupfermenge für je einen Pol angegeben sind.

a) Berechnung auf konstante Querschnittssumme. Der Leiter (Abb. 33) mit den eingeschriebenen Längen und Belastungen soll auf konstante Querschnittssumme berechnet werden²⁾.

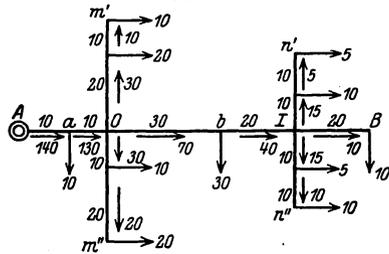


Abb. 33.

Der zulässige Gesamtspannungsverlust sei 1 Volt.

Von den äußersten Ausläufern an werden die einfachen Strommomente zusammengesetzt. Dies gibt

Leiter OB:	Leiter AB:
$10 \cdot 20 = 200$	Übertrag für OB = 3550
$5 \cdot 10 + 15 \cdot 10 = 200$	$10 \cdot 10 + 30 \cdot 20 = 700$
$10 \cdot 10 + 15 \cdot 10 = 250$	$20 \cdot 20 + 30 \cdot 10 = 700$
$40 \cdot 20 + 70 \cdot 30 = 2900$	$130 \cdot 10 + 140 \cdot 10 = 2700$
3550	7650

Hieraus folgen die Spannungsverluste

$$v_{A0} = 1 \cdot \frac{2700}{7650} = 0,353 \text{ Volt,}$$

$$v_{0B} = v - v_{A0} = 0,647 \quad ,,$$

$$v_{01} = 0,647 \cdot \frac{2900}{3550} = 0,528 \quad ,,$$

$$v_{1B} = v_{0B} - v_{01} = 0,119 \quad ,,$$

$$v_{1n''} = 0,119 \quad ,,$$

¹⁾ Siehe hierzu auch F. Behne: ETZ 1897, S. 393.

²⁾ Sumec, J. K.: El. u. Maschinenb. 1908, S. 1139.

und die Querschnitte

$$f_{A0} = \frac{0,0175 \cdot 2700}{0,353} = 134 \text{ mm}^2,$$

$$f_{0m'} = f_{0m''} = \frac{0,0175 \cdot 700}{0,647} = 18,9 \text{ ,,}$$

$$f_{01} = \frac{0,0175 \cdot 2900}{0,528} = 96 \text{ ,,}$$

$$f_{1B} = f_{1n'} = \frac{0,0175 \cdot 200}{0,119} = 29,4 \text{ ,,}$$

$$f_{1n''} = \frac{0,0175 \cdot 250}{0,119} = 36,7 \text{ ,,}$$

Der Kupferaufwand beträgt $\Sigma (fl) = 10712 \text{ cm}^3$.

Bei der Wahl der Normalquerschnitte wird wieder für den Leiteranfang der nächst starke Normalquerschnitt genommen. Man erhält dann

$f_{A0} = 150$	$v_{A0} = 0,315$	
$f_{0m'} = f_{0m''} = 16$	$v_{0m'} = 0,765$	$v_{Am'} = 1,080$
$f_{01} = 95$	$v_{01} = 0,534$	
$f_{1n'} = f_{1B} = 25$	$v_{1B} = 0,140$	$v_{AB} = 0,989$
$f_{1n''} = 35$	$v_{1n''} = 0,125$	$v_{An''} = 0,974$.

Der Kupferaufwand beträgt nun 10410 cm^3 .

b) Die Methode der konstanten Stromdichte im Hauptstrange. Der Hauptstrang wird wie eine unverzweigte Leitung auf konstante Stromdichte berechnet; der Spannungsverlust längs dieses Leiters wird also proportional der Länge verteilt; die Abzweigungen werden dann nach dem für eine jede übrigbleibenden Spannungsverlust berechnet. Die Querschnitte werden gewöhnlich nur in den Verzweigungspunkten (wie bei der vorhergehenden Methode) gewechselt.

Manchmal ist freilich schwer zu entscheiden, welcher Strang als Hauptstrang zu betrachten sei: ob der längste oder aber der mit dem größten Strommoment? Für ein nur einmal verzweigtes System ist diese Frage theoretisch leicht zu beantworten: Als Hauptstrang ist jener Strang zu wählen, dessen Wahl das kleinste Gesamtkupfervolumen ergibt; dies ist aber weder der längste noch der mit dem größten Strommoment, sondern jener, dessen Länge der nach der nächstfolgenden Methode des Kupferminimums bestimmten fiktiven Länge am nächsten kommt.

Beispiel.

Die Leitung, Abb. 33, ist auf konstante Stromdichte im Hauptstrange zu berechnen. Als Hauptstrang ist hier die Strecke $A01$ und ein beliebiger der letzten drei Zweige zu nehmen. Denn diese sind gleich lang und ergeben die Gesamtlänge $L = 90 \text{ m}$.

Man findet

$$v_{A0} = 1 \cdot \frac{20}{90} = 0,222 \text{ Volt},$$

$$v_{0B} = v - v_{A0} = 0,778 \text{ Volt,}$$

$$v_{01} = 1 \cdot \frac{50}{90} = 0,556 \text{ ,,}$$

$$v_{1B} = v_{0B} - v_{01} = 0,222 \text{ ,,}$$

$$v_{1n''} = 0,222 \text{ ,,}$$

$$f_{A0} = \frac{0,0175 \cdot 2700}{0,222} = 212,5 \text{ mm}^2,$$

$$f_{0m'} = f_{0m''} = \frac{0,0175 \cdot 700}{0,778} = 15,75 \text{ ,,}$$

$$f_{01} = \frac{0,0175 \cdot 2900}{0,556} = 91,5 \text{ ,,}$$

$$f_{1B} = f_{1n'} = \frac{0,0175 \cdot 200}{0,222} = 15,75 \text{ ,,}$$

$$f_{m''} = \frac{0,0175 \cdot 250}{0,222} = 19,7 \text{ ,,}$$

Die Kupfermenge ist 10794 cm^3 .

Bei der Wahl der Normalquerschnitte ist hier zwecks Annäherung an den kleinsten Kupferaufwand für den Leiteranfang der nächst kleinere Normalquerschnitt zu nehmen. Man wähle also

$$f_{A0} = 185 \text{ mm}^2, \text{ wobei } v_{A0} = 0,255 \text{ Volt,}$$

$$f_{0m'} = f_{0m''} = 16 \text{ ,,} \quad v_{0m} = 0,765 \text{ ,,} \quad v_{Am'} = 1,020 \text{ Volt,}$$

$$f_{01} = 95 \text{ ,,} \quad v_{01} = 0,535 \text{ ,,}$$

$$f_{1B} = f_{1n'} = 16 \text{ ,,} \quad v_{1B} = 0,219 \text{ ,,} \quad v_{AB} = 1,009 \text{ ,,}$$

$$f_{1n''} = 16 \text{ ,,} \quad v_{1n''} = 0,274 \text{ ,,} \quad v_{An''} = 1,064 \text{ ,,}$$

wobei der Kupferaufwand 10370 cm^3 wird.

c) **Methode des Kupferminimums.** Die Kupfermengen der einzelnen Zweige, mögen diese jeder für sich nach einer beliebigen Methode (auf konstanten Querschnitt, konstante Stromdichte oder geringstes Kupfer) dimensioniert sein, können immer durch die allgemeine Formel

$$\text{Kupfermenge } M = \frac{c}{v} \cdot \varphi$$

ausgedrückt werden. Bei jeder Methode ist ja die Kupfermenge dem spezifischen Widerstande direkt, dem Spannungsverluste umgekehrt proportional, während φ eine je nach der Berechnungsmethode verschiedene Funktion von Strom und (Länge)² bedeutet; nämlich bei konstantem Querschnitt oder konstanter Stromdichte

$$\varphi = \Sigma (Jl^2) \quad \text{oder} \quad \Sigma l \Sigma (lJ),$$

beim Kupferminimum

$$\varphi = \Sigma (l\sqrt{J})^2 = \Sigma (l^2 J).$$

Bei einer mehrfach verzweigten Leitung kann man die Zweige durch eine einfache Leitung von derselben Kupfermenge ersetzt denken.

Die Querschnitte sollen wieder nur an den Verzweigungspunkten 0 und 1 sich ändern. Man beginne am Ende und bilde für parallel liegende Teile $\Sigma l(lJ)$, für hintereinander liegende $\Sigma \sqrt{(l^2J)}$.

Leiter 1 B, 1 n', 1 n'': $20 \cdot 200 = 4000$ $20 \cdot 200 = 4000$ $20 \cdot 250 = 5000$ <hr style="width: 100%;"/> 13000	Leiter 0 m', 1 m'', 01: $495^2 = 245000$ $30 \cdot 700 = 21000$ $30 \cdot 700 = 21000$ <hr style="width: 100%;"/> 287000
---	--

Leiter 01: $\sqrt{13000} = 114$ $\sqrt{50 \cdot 2900} = 381$ <hr style="width: 100%;"/> $\Sigma \sqrt{(l^2J)} = 495$	Leiter A 0: $\sqrt{287000} = 535,5$ $\sqrt{20 \cdot 2700} = 232$ <hr style="width: 100%;"/> $\Sigma \sqrt{(l^2J)} = 767,5$
---	---

Kupfermenge $M = \frac{c}{v} \Sigma (l^2J) = \frac{0,0175}{1} \cdot 767,5 = 10300 \text{ cm}^3$.

Die einzelnen Spannungsverluste und Querschnitte sind:

$$v_{A0} = 1 \cdot \frac{232}{767,5} = 0,303; \quad f_{A0} = \frac{0,0175}{0,303} 2700 = 156 \text{ mm}^2,$$

$$v_{0B} = v - v_{A0} = 0,697; \quad f_{0m'} = \frac{0,0175}{0,697} 700 = 17,6 \text{ ,,}$$

$$v_{01} = 0,697 \frac{381}{495} = 0,536; \quad f_{01} = \frac{0,0175}{0,536} 2900 = 94,7 \text{ ,,}$$

$$v_{1B} = v_{0B} - v_{01} = 0,161; \quad f_{1B'} = \frac{0,0175}{0,161} 200 = 21,7 \text{ ,,}$$

$$f_{1n''} = \frac{0,0175}{0,161} 250 = 27,2 \text{ ,,}$$

Die wirkliche Ausführung wäre:

$$f_{A0} = 150 \text{ mm}^2, \quad v_{A0} = 0,315 \text{ V},$$

$$f_{0m'} = f_{0m''} = 16 \quad v_{0m} = 0,767 \quad v_{Am''} = 1,082 \text{ V},$$

$$f_{01} = 95 \quad v_{01} = 0,534$$

$$f_{1B} = f_{1n'} = 25 \quad v_{1B} = 0,139 \quad v_{AB} = 0,988$$

$$f_{1n''} = 25 \quad v_{1n''} = 0,176 \quad v_{An''} = 1,025.$$

Kupfermenge $\Sigma (lf) = 10210 \text{ cm}^3$.

Abgeänderte Lösung. Wollte man auch alle Einzelstrecken nach dem Kupferminimum berechnen, so wäre $\varphi = (\Sigma l \sqrt{J})^2$ und die Rechnung wie folgt:

$$(10 \sqrt{15} + 10 \sqrt{5})^2 = 61,1^2 = 3730$$

$$20^2 \cdot 10 = 4000$$

$$(10 \sqrt{15} + 10 \sqrt{10})^2 = 70,3^2 = 4930$$

$$\Sigma \varphi = \Sigma (l \sqrt{J})^2 = 12680$$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{12680} &= 112,6 \\
 20 \sqrt{40} &= 126,4 \\
 30 \sqrt{70} &= 250,8 \\
 \Sigma \sqrt{\varphi} &= 489,8 \\
 489,8^2 &= 240000 \\
 (20 \sqrt{30} + 10 \sqrt{10})^2 &= 141^2 = 19930 \\
 (10 \sqrt{30} + 20 \sqrt{20})^2 &= 144,1^2 = 20800 \\
 \Sigma \varphi &= 280730 \\
 \sqrt{280730} &= 530 \\
 10 \sqrt{130} &= 114 \\
 10 \sqrt{140} &= 118,2 \\
 \Sigma \sqrt{\varphi} &= 762,2
 \end{aligned}$$

Kupfermenge = $\frac{0,0175}{1} 762,2^2 = 10160 \text{ cm}^3$, gegen früher 10300 cm^3 .

Diese Ermittlung des absoluten Kupferminimums hat also trotz umständlicher Rechnung nur 1,4% Kupfer erspart, und selbst dies wird beim Übergang auf die Normalquerschnitte und den größeren Verschnitt bei den vielen Verbindungsstellen mehr als aufgewogen.

Die erhaltenen Ergebnisse sind zur Übersicht hier zusammengestellt:

	1. Methode	Aus- zuführen	3. Methode	Aus- zuführen	2. Methode
Quer- f_{A_0} . .	134	150	156	185	212,5
schnitte f_{01} . .	96	95	94,7	95	91,5
Kupfermenge M .	10712	10410	10300	10370	10794

10. Geringster Metallaufwand für die Leiter eines Netzknotens und eines Netzes.

Die Leiter 0, 1 und 2 des Knotens B der Abb. 34 mögen die Längen l_0, l_1, l_2 und die Querschnitte f_0, f_1, f_2 besitzen. Im Knoten B sei die Abnahme i . Die Leiterströme J_0, J_1, J_2 und i haben die algebraische Summe Null. Die Spannungsverluste betragen v_0, v_1 und v_2 , wobei die Endpunkte C und D hier, im Gegensatz zu dem früher behandelten Fall der Abb. 30, ungleiche Spannungsverluste gegen A haben mögen.

Die Rechnung auf geringsten Metallaufwand von Seite 51 würde sich hier mit gleichem Erfolg wesentlich wiederholen. Die für jeden einzelnen Leiter geltende Bedingung $\Sigma (f^2/J) = 0$ bleibt eben für jede Stromabzweigung und für jeden abnahmeloosen Knoten erhalten.

Dies geht auch aus der Umwandlung des allgemeinen Falles Abb. 34 mit $v_1 > v_2$ in den Sonderfall der Abb. 30 mit $v_1 = v_2$ hervor. Zum

Widerstand des Astes 2 kann man sich wieder einen Widerstand cdl_2/df_2 so hinzugefügt denken, daß sein Strom in ihm den zusätzlichen Span-

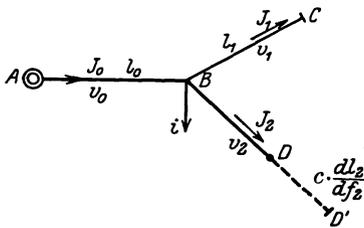


Abb. 34.

nungsverlust $v_1 - v_2$ erzeugt. l_2 und J_2 bleiben hiervon unberührt; der Punkt D' erreicht aber hierdurch den gleichen Spannungsverlust wie C .

Was für den Netzknoten gilt, das gilt auch für sein Gegenstück, die Netzmasche, wie wir noch sehen werden. Auch bei ihr besteht für den Maschenumfang die Bedingung $\sum f^2/J = 0$. Die allgemeine Bedingung für den geringsten Leiteraufwand eines Netztes oder ganzen Netzes ist also:

$$\sum \left(\frac{f^2}{J} \right) = 0.$$

Literatur.

- Santarelli, G.: La lumière électr. 1890, S. 457.
 Picou, R. V.: La distribution de l'Electricité 1892, S. 58.
 Müllendorff, E.: ETZ 1892, S. 48.
 Loppe: Die Berechnung der Feederspannung. El. Review Bd. 30, S. 754. 1892 und ETZ Wien Bd. 11, S. 77. 1892.
 Herzog-Feldmann: Leitungsnetze, 1. Aufl., 1893, S. 230ff.
 Müllendorff, E.: Der Spannungsverlust in den Hauptknoten von Stromverteilungsnetzen. ETZ 1894, H. 17.
 Cahen, Hermann: Die Berechnung elektrischer Kraftverteilungsnetze für Gleich- und Wechselstromsysteme S. 25. 1895.
 Heubach: Zur Berechnung elektrischer Leitungen. ETZ 1895, S. 785.
 Keller, E. R.: Formulas for the calculation of return loop circuits. El. World Bd. 26, S. 23. 1895.
 Catani: Sur le calcul de la section la plus économique des conducteurs. Ecl. él. Bd. 11, S. 364. 1897.
 Behne, F.: Zur Berechnung von elektrotechnischen Leitungsnetzen. ETZ 1897, S. 393.
 Hecker: Berechnung geringsten Kupfers. ETZ 1899, S. 162.
 Kronstein, E.: Über die Berechnung von Leitungen ohne Knotenpunkte. ETZ Wien 1904, S. 419.
 Sumec, K.: El. u. Maschinenb. Wien 1908, S. 1137.

IV. Zulässiger Spannungs- und Leistungsverlust.

Im vorhergehenden wurde die Aufgabe behandelt, bei gegebener Länge und bekannten Querschnitten der Leiter und ihrer Verbindungen die Strom- und Spannungsverteilung zu finden. Diese Aufgabe ist eindeutig lösbar.

Beim Entwurf eines Netzes tritt die umgekehrte Aufgabe auf: Von den Leitern und Leitungen sind die Belastungen und die gewünschte Strom- und Spannungsverteilung bekannt; gesucht werden bei gegebenen Längen die Querschnitte, oder eigentlich die aus den Netzgleichungen zu ermittelnden Widerstände der Leiter. Diese Aufgabe ist meistens vieldeutig und wird erst durch besondere Bedingungen einer bestimmten Lösung zugänglich.

Solche Bedingungen entspringen aus physikalischen, technischen und wirtschaftlichen Erwägungen.

Die Leitungen müssen den geforderten größten Strom ohne Brandgefahr führen können. Daraus ergibt sich ein kleinster Querschnitt, der mit Rücksicht auf die Erwärmung nicht unterschritten werden darf. Daneben sind aber auch die mechanische Festigkeit und die Isolierung des Leiters zu berücksichtigen. So wird man eine Freiluftleitung nicht unter 10 mm² aus Kupfer ausführen, selbst wenn ein viel kleinerer Querschnitt den elektrischen Bedingungen genügt. Die wichtigste Bedingung liefert jedoch die Rücksichtnahme auf die gegenseitige Unabhängigkeit der Nutzabnahmen, die ungleichartig und gleichzeitig erfolgen können. Eine gute Leitung entspricht diesem Lastwechsel ohne künstliche Regulierung.

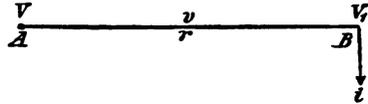


Abb. 35.

Für den einfachen Leitungsstrang in Abb. 35 werde die Anfangsspannung V im Punkte A beständig erhalten. Im Endpunkte B der Leitung sei eine Stromabnahme von i Amp. Der Spannungsverlust im Leiterwiderstand r beträgt $v = ir$ und die Endspannung V_1 ist somit

$$V_1 = V - ir = V - v.$$

Sie sinkt also mit der Größe der Stromentnahme.

Soll aber die Gebrauchsspannung V_1 am Ende B bei veränderlicher Belastung i konstant bleiben, dann muß die Anfangsspannung $V = V_1 + ir$ mit zunehmendem Strome steigen.

Der Löscharkeit der Belastung muß also die Elastizität der Leitung gewissermaßen nachkommen. Die Leitung wird um so elastischer, die Löscharkeit um so größer, je kleiner man den relativen Spannungsverlust in der Leitung wählt.

Theoretisch wäre die Leitung vollkommen, welche gleiche Spannungen an allen Abnahmen sichert. Praktisch ist diese Forderung unerfüllbar. Selbst bei einer reinen Beleuchtungsanlage ist es unstatthaft, völlig gleiche Glühlampen vorauszusetzen; auch ist die Abnahme der Lichtstärke mit der Brenndauer ungleichmäßig bei den einzelnen Lampen. Glücklicherweise kommt diesen Unvollkommenheiten gegenüber die Unempfindlichkeit des menschlichen Auges gegen langsame Änderungen der Lichtstärke zu Hilfe. Erfahrungsgemäß sind Spannungsänderungen von 3—4% der normalen Lampenspannung zulässig.

Sind alle Lampen gleichzeitig im Gebrauch, so bestimmt man für ihren Gesamtstrom das größte Spannungsgefälle bis zu den Lampen oder den größten Spannungsverlust in der Leitung. Werden nicht alle installierten Lampen gleichzeitig verwendet, so gilt der angegebene Grenzwert des Spannungsverlustes für den größten gleichzeitigen Strombedarf. Damit ist der Einfluß der örtlichen Löschung an einem Punkte geklärt. Für den Fall zweier Abzweigungen in Abb. 35 setzen sich diese Einflüsse einfach zusammen. Bleibt man beim Sonderfalle der Abb. 36 mit gleichen Lampen konstanter An-

fangsspannung V , löscht im Punkte C auf i_1/n_1 und in D auf i_2/n_2 Amp., so ergeben sich die Endspannungen V_1' und V_2' in C bezügl. D und nennt man den durch i_1 allein im Leiter AB erzeugten Verlust v_1' , den durch i_2 allein in AB erzeugten Verlust v_2' , dann ist

$$V_1' = V - \left[\frac{v_1 + v_1'}{n_1} + \frac{v_2'}{n_2} \right],$$

$$V_2' = V - \left[\frac{v_2 + v_2'}{n_2} + \frac{v_1'}{n_1} \right].$$

Die Abschaltung in dem einen Zweige zieht also auch Änderungen in den übrigen nach sich. Die Löschung kann daher in jedem Zweige nur so weit ausgedehnt werden, bis die Summenwirkung die zulässige Grenze erreicht. Das Beispiel, Abb. 36, mit Leitungsästen gilt wesentlich auch für mehrere unmittelbare Abnahmen längs eines Stranges.

Ist beschränkte Löschung vorhanden, so kann man nach Abb. 37 einen größeren Spannungsverlust im Leiter AB annehmen und in

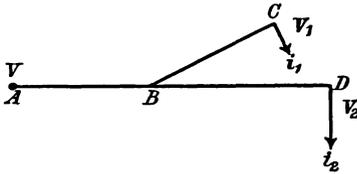


Abb. 36.

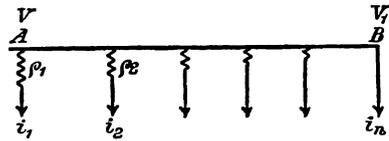


Abb. 37.

den Lampenzuleitungen Vorschaltwiderstände ρ_1, ρ_2, \dots zur Spannungsabgleichung einsetzen. Die einfachen Betrachtungen über die „Löschbarkeit der Leitungen“ haben wir bei der ersten Auflage dieses Werkes, 1893, auf Seite 245—248 und Seite 281 eingeführt und eine gute Leitung als „elastisch“ bezeichnet. Teichmüller¹⁾ hat den Begriff der Elastizität der Leitungen weitergeführt. Beschränkte und unbeschränkte Löscharkeit sind mit unvollkommener und vollkommener Elastizität gleichsinnig.

Er unterscheidet dabei vier Grundgrößen. Diese sind:

- I. Der relative Spannungsabfall $\varepsilon = \frac{v}{E}$.
- II. Die „ Spannungsschwankung $\eta = \frac{\Delta E}{E}$.
- III. Der „ Leistungsverlust $\zeta = \frac{w}{W}$.
- IV. Die „ Leistungsschwankung $\xi = \frac{\Delta(W)}{(W)}$.

Den Betrachtungen legen wir eine einfache unverzweigte Leitung zugrunde, an deren Ende die unter sich gleichwertigen Verbraucher je vom unveränderlichen Widerstand (R) parallel geschaltet sind. Am Anfang der Leitung herrsche die Spannung E_1 , am Ende die Span-

¹⁾ Teichmüller, J.: Die elektrischen Leitungen, S. 54. 1899; ETZ 1902, S. 1, 30; ETZ 1916, S. 397, 411.

nung E_2 , der Widerstand der Leitung sei r , der gesamte Strom J . In jeder Leitung des Halbnetzes tritt dann der Spannungsabfall $\frac{1}{2} v = \frac{1}{2} J r$ auf, praktisch dargestellt durch die fallende Linie AB, CD (Abb. 38). Jeder Verbrauchswiderstand (R) setzt die elektrische Leistung

$$(W) = \frac{E_2^2}{(R)} = (J)^2 (R) \text{ Watt}$$

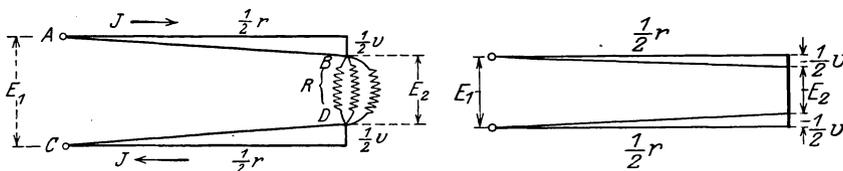


Abb. 38a.

Abb. 38b.

in Leistung der gewünschten Form (Licht, Wärme oder mechanische Leistung) um. Die in der Gruppe umgesetzte Leistung

$$W_2 = \frac{E_2^2}{R} = J^2 R \text{ Watt}$$

wächst also ebenfalls mit dem Quadrat der Spannung. Der Leistungsverlust ist

$$w = J^2 r = v J \text{ Watt.}$$

1. Die vier Grundgrößen der Leitungsberechnung.

a) Der relative Spannungsabfall

$$\varepsilon = \frac{v}{E}.$$

Diese Größe scheint die für die Leitungsberechnung wichtigste Größe zu sein und ist es auch nach verbreiteter Ansicht; deshalb haben wir sie auch an die Spitze gestellt. In Wirklichkeit hat sie an sich gar keine Bedeutung, sondern gewinnt eine solche erst durch ihren Zusammenhang mit den andern drei Größen. Sie bezieht sich auf einen bestimmten starren Zustand der Anlage, nämlich den, für den die Leitungen berechnet sind, also im allgemeinen den der Höchstbelastung; sie kann als eine Zustandsgröße bezeichnet werden.

Die an sich nebensächliche Beziehung

$$\varepsilon = \frac{v}{E_2} = \frac{J r}{J R} = \frac{r}{R} \equiv p \quad (1)$$

soll zum Vergleiche mit späterem hier Platz finden.

b) Die relative Spannungsschwankung

$$\eta = \frac{\Delta E}{E_2}.$$

Im Gegensatz zur vorigen Größe sagt η etwas über die Folgen einer Zustandsänderung aus, ist also eine Änderungs- oder Schwankungsgröße. Der Zustand hat sich nämlich von dem der höchsten Belastung

in den der Belastung Null geändert oder umgekehrt; wir betrachten die hierbei auftretende Spannungsschwankung ΔE am Anschlußpunkt des Verbrauchers, also dem Endpunkt der Leitung. Statt der Belastung Null nehmen wir an, daß die Belastung am Ende der Leitung sehr klein sei. Die Höchstspannung ist dem $E_{\max} = E_1$, die niedrigste $E_{\min} = E_1 - v$, also $\Delta E = E_{\max} - E_{\min} = v$ und

$$\eta = \varepsilon. \quad (2)$$

c) Der relative Leistungsverlust

$$\zeta = \frac{w}{W_2}$$

bezieht sich wie der relative Spannungsverlust ε auf einen starren Zustand, den Zustand der Berechnung. Da $w = vJ$ und $W_2 = E_2J$, so ist

$$\zeta = \varepsilon = \eta \quad (3)$$

$$= \frac{r}{R}. \quad (4)$$

Der Wirkungsgrad der Übertragung ist

$$\gamma = \frac{W_2}{W_2 + w} = \frac{W_2}{W_1} = \frac{1}{1 + \zeta}, \quad (5a)$$

also
$$\zeta = \frac{1}{\gamma} - 1, \quad (5b)$$

Auf den Arbeitsverlust in einer gewissen Zeit

$$\alpha = \frac{\int w dt}{\int W_2 dt}$$

soll hier noch nicht eingegangen werden.

d) Die relative Leistungsschwankung

$$\xi = \frac{\Delta(W)}{(W)}$$

bezieht sich nur auf die Schwankung, welche ein einzelner Verbraucher in seiner an sich kleinen Belastung (W) erleidet, wenn die Gesamtbelastung um ihren Höchstbetrag schwankt. Diese Einzelleistung ist bei Vollast

$$(W) = \frac{E_2^2}{(R)}$$

und bei nahezu erreichter Nullast

$$(W) + \Delta(W) = \frac{(E_2 + \Delta E)^2}{(R)} = \frac{E_2^2}{(R)} \left(1 + \frac{\Delta E}{E_2}\right)^2$$

oder

$$\frac{(W) + \Delta(W)}{(W)} = 1 + \xi = (1 + \eta)^2,$$

also

$$\xi = 2\eta + \eta^2 \quad (6a)$$

oder bei der meistens zulässigen Vernachlässigung des quadratischen Gliedes

$$\xi \approx 2\eta \quad (6b)$$

und somit

$$\xi = 2\zeta = 2\varepsilon. \quad (6c)$$

Dies ist die wichtigste Grundgröße für die Leitungsberechnung, obwohl dabei bisher meistens nur von ε (oder allenfalls noch von ζ) gesprochen wurde.

Die Größe ε bezieht sich auf einen starren Zustand, wobei der Strom J konstant bleibt. Für diesen Fall ist es aber gleichgültig, wie groß v ist:

Man wählt als Endspannung E_2 die gewünschte Verbrauchsspannung, wählt ferner eine Leitung aus irgendeinem Metall und mit irgendeinem Querschnitt, die nur der Bedingung genügender mechanischer Festigkeit und nicht zu hoher Erwärmung genügen muß, und richtet danach die Anfangsspannung, die Schienenspannung in der Erzeugeranlage, ein. Bei mehreren über die Leitungsstrecke verteilten Anschlüssen liegen die Verhältnisse grundsätzlich nicht anders. — Ein hier vom Leser vielleicht erhobener naheliegender Einwand wird alsbald entkräftet werden.

Viel wichtiger erscheint nun wohl die Größe η . Sie gibt ja an, welche Spannungsschwankung ein Verbraucher während des Betriebes im ungünstigsten Falle zu erleiden hat. Aber müssen denn die Verbraucher (in der Verrichtung ihrer Aufgabe, kann doch natürlich nur gemeint sein) leiden, wenn die Spannung an ihren Klemmen schwankt? Selbst wenn man diese Frage uneingeschränkt bejahen wollte, so muß man doch zugeben, daß die Spannungsschwankungen die Störungen im Arbeiten der Verbraucher erst nach sich ziehen, nicht aber selbst schon Störungen sind, vor allen Dingen auch kein für alle Verbraucher feststehendes und gleiches Maß für die Störungen sind. Es kann also auch nicht richtig sein, die Beseitigung oder vielmehr Beschränkung der Spannungsschwankungen an sich als das Hauptziel der Leitungsberechnung und damit η als wichtigste Grundgröße dafür zu bezeichnen. Und die eben gestellte Frage uneingeschränkt zu bejahen, wäre auch gar nicht richtig; denn es könnten ja Mittel gefunden werden, die das Arbeiten der Verbraucher, also z. B. die Leistungsaufnahme der Glühlampen, von der Schwankung der Leitungsspannung unabhängig machen. Nach solchen Mitteln hat man schon vor mehr als 30 Jahren gesucht. Findet man sie, dann wird es ganz deutlich werden, daß η an und für sich keine Bedeutung für die Leitungsberechnung und das Verhalten der Leitungen hat.

In der Tat: wäre die Leistungsaufnahme der Verbraucher von der Größe der Spannungsschwankungen völlig unabhängig, so würde eine andere Größe in den Vordergrund treten, nämlich der relative Leistungsverlust ζ . Diese Größe wird immer da von Bedeutung sein, wo der Wirkungsgrad der Übertragung eine Rolle spielt. Ihre Bedeutung ist im allgemeinen gering, weil in der Regel andere Rücksichten auf die Bestimmung des Leitungsquerschnittes ein größeres Recht geltend machen als der Wirkungsgrad. Wo solche Rücksichten nicht vorliegen, kann allerdings die Bedeutung von ζ sehr groß und ausschlaggebend sein.

Wenn oben bei der Betrachtung von ε von einem vielleicht zu erhebenden Einwande gesprochen wurde, so sollte damit die etwaige Einrede gemeint sein, daß auch bei einem unveränderlichen Zustande einer Anlage Anfangs- und Endspannung (für sich und in ihrem Ver-

hältnis zueinander) doch wegen des Wirkungsgrades nicht beliebig gewählt werden könnten, daß also dadurch v und ε bestimmt seien. Dem ist entgegenzuhalten, daß der Wirkungsgrad unmittelbar unter allen Umständen nur durch ζ bestimmt wird, durch ε dagegen nur mittelbar infolge der in Gl. (3) festgestellten Beziehung $\zeta = \varepsilon$. Diese Beziehung braucht aber gar nicht für alle Leitungen richtig zu sein.

Die oben gemeinten anderen Rücksichten, hinter der die Rücksicht auf den Wirkungsgrad in der Regel zurücktreten muß, sind in der Forderung enthalten, daß die Leistungsschwankung im einzelnen Verbraucher in mäßigen Grenzen bleibe; und damit tritt die Größe ξ in ihrer überragenden Bedeutung in die Erscheinung. Man kann dabei noch Änderungen der Leistung unterscheiden, bei denen die Geschwindigkeit der Änderung keine Rolle spielt, sondern im wesentlichen die Verminderung (oder auch Erhöhung) der Leistung an sich beurteilt wird; so ist es z. B. bei den Motoren der Fall. Dieser Änderung gegenüber steht die eigentliche Schwankung, bei der die Geschwindigkeit von Bedeutung ist; so ist es bei den Glühlampen. Im ersteren Falle soll im besonderen von „Leistungsänderung“ gesprochen werden, im letzteren von der eigentlichen „Leistungsschwankung“.

Daß ξ eine so große Bedeutung hat, dürfte zunächst aus der vorangegangenen Besprechung der anderen drei Grundgrößen hervorgegangen sein. ξ ist doppelt so groß als η ; das könnte stutzig machen. Wie? — sollten wir die Leitungen bisher immer falsch berechnet haben? Den Gedanken wird man entrüstet zurückweisen, und im allgemeinen auch mit Recht, aber doch nicht uneingeschränkt mit Recht. Und wo wir richtig gerechnet haben, ist es nicht immer bewußtermaßen, zum mindesten nicht ausgesprochenenmaßen geschehen; sondern, indem wir als Ziel unserer Rechnung hinstellten, daß die Spannungsschwankungen in mäßigen Grenzen blieben, sorgten wir — oft eben wohl unbewußtermaßen — doch in Wirklichkeit dafür, daß die Leistungsschwankungen mäßig waren. Und das Maß für die als zulässig anzusehende Spannungsschwankung entnahmen wir praktischen Versuchen, bei denen wir die Leistungsschwankungen und ihre Folgen als Funktion der Spannungsschwankungen beobachteten. Statt: die Leistungsschwankung ist doppelt so groß als die zugelassene Spannungsschwankung muß man also richtiger sagen, daß η halb so groß ist als ξ . Das gilt natürlich nur bei konstantem (R).

2. Rücksichtnahme auf die Glühlampen.

Der Wert des zulässigen Spannungsverlustes hängt von den Eigenschaften der Glühlampen ab. Diese müssen deshalb hier kurz besprochen werden.

Der mittlere Wert der wirtschaftlichen Benutzungszeit oder Nutzbrenndauer hängt wesentlich ab von der Beanspruchung des Glühfadens. Erhält eine für die normale Gebrauchsspannung richtig ausgewählte Glühlampe durch die Leitung eine höhere als die für sie bestimmte Spannung, so geht die dadurch erzielte größere Lichtstärke in HK auf Kosten der Lebensdauer h . Dabei nimmt auch die gesamte

Lichtleistung in Lumenstunden oder Hefnerkerzenstunden erheblich ab. So nahm für eine 32-HK-Osramlampe die Lichtstundenleistung wie folgt ab¹⁾:

Spannung V in % der normalen	Nutzbrenndauer bis 80% Anfangs- lichtstärke	Anfangslicht- stärke	Lichtstunden- leistung in $HK \cdot h$
	st	%	%
100	$h = 1800$	100	100
105	900	122	61
110	370	143	26
115	210	166	15
120	125	225	9
125	70	220	5

Wird der spezifische Verbrauch in Watt für die Hefnerkerze durch W/HK angedeutet, dann gelten innerhalb bestimmter Grenzen die folgenden Beziehungen²⁾.

$$h_1 : h_2 = (HK_2 : HK_1)^a = (W_1 / HK_1 : W_2 / HK_2)^b,$$

$$HK_1 : HK_2 = (W_2 / HK_2 : W_1 / HK_1)^m = (V_1 : V_2)^n,$$

$$W_1 : W_2 = (V_1 : V_2)^x.$$

Die Exponenten sind:

für die	a	b	m	n	x	y	z
Kohlenfadenlampe	3,65	5,83	1,58	5,55	2,05	7,1	14,7
Wolframlampe	3,80	6,65	1,75	3,68	1,69	6,5	10,3
Tantallampe	3,73	6,30	1,67	4,35	1,74	6,6	11,5

Bei 10% Spannungszunahme steigt die Lichtstärke³⁾ einer Kohlenfadenlampe mit 70%, einer Wolframlampe mit 42%, einer gasgefüllten Nitalampe mit 43%, bei 10% Spannungsverminderung betragen die Abnahmen der Lichtstärke für diese drei Lampenarten 44%, 32% und 30%. Die Wolframlampe mit oder ohne Gasfüllung ist also bezüglich der Lichtschwankung um etwa die Hälfte günstiger als die Kohlenfadenlampe.

Nimmt man als zulässige relative Leistungsschwankung $\xi = \frac{\Delta(W)}{(W)} = x\varepsilon$ an, dann ist für den Kohlenfaden $x = 2$, für Metalldrahtlampen $x = 1,7$ zu setzen.

Ändert sich die Spannung allmählich um $\frac{1}{2}p\%$ nach oben oder unten, dann beträgt der Unterschied der Lichtstärken, wenn man nach dem binomischen Satz entwickelt und Glieder höherer Ordnung vernachlässigt:

$$HK_2 - HK_1 = CV^n \left[\left(1 + \frac{p}{200}\right)^n - \left(1 - \frac{p}{200}\right)^n \right] \approx CV^n \frac{np}{200}$$

¹⁾ Remané, H.: ETZ 1908, S. 853.

²⁾ Merrill: Transact. Am. Inst. El. Eng. 1910, S. 558 u. 1709.

³⁾ Pécheux: Lum. él. Bd. 2, S. 199. 1908. — Hirschauer, F.: ETZ 1908, S. 87. — Lux, H.: ETZ 1914, S. 609. — Pirani, M. u. A. R. Meyer.: ETZ 1915, S. 493. — K. Mey, ETZ 1915, S. 376.

und die relative Lichtänderung gegenüber der normalen Lichtstärke HK bei der normalen Spannung V

$$100 \frac{HK_2 - HK_1}{HK} \approx np \% .$$

Der Exponent n ist also maßgebend für die zulässige Spannungsänderung, wenn die relative Änderung np einen bestimmten Wert, etwa 15%, nicht überschreiten soll. Nimmt man für Kohlenfadlampen $n = 5$ bis 6, für Wolfram- oder andere Metalldrahtlampen $n = 3,3$ bis 4, für die mit Stickstoff oder mit Argon und Stickstoff gefüllten Halbwattlampen angenähert $n \approx 4$, dann folgt als zulässiger Wert

$$\text{für Kohlenfadlampen } \varepsilon = \frac{15}{5} \text{ bis } \frac{15}{6} = 3 \text{ bis } 2,5\%, \quad \xi = 1,5 - 1,25,$$

$$\text{für Metalldrahtlampen } \varepsilon = \frac{15}{3,3} \text{ bis } \frac{15}{4} = 4,5 \text{ bis } 3,75\%, \quad \xi = 2,75 - 2,2.$$

Bei Einführung der Metallfaden-Glühlampe konnte also der relative Spannungsabfall auf das Anderthalbfache, die relative Leistungsschwankung um 80%, also auf das 1,8fache erhöht werden.

Man pflegt also — unbewußt richtig — auch mit ungefähr diesen Werten $\varepsilon = 3\%$ für Kohlenfadenglühlampen,

$$\varepsilon = 4,5\% \text{ ,, Metallfadenglühlampen}$$

zu rechnen.

Für das Verhältnis der Lichtleistung bei verschiedenen spezifischen Beanspruchungen und Spannungen findet man leicht

$$\frac{HK_1 \cdot h_1}{HK_2 \cdot h_2} = \left(\frac{W_2}{W_1} \right)^y = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^z,$$

wobei

$$y = \frac{n(b-m)}{mx} = \frac{n(a-1)}{x}$$

und

$$z = \frac{n(b-m)}{m} = n(a-1) \text{ ist.}$$

Die Lichtleistung nimmt also bei der Kohlenfadlampe mit nahezu der 15. Potenz, für Metallfadenlampen mit der 10.—12. Potenz der Spannungserhöhung ab.

Der große Gewinn an Lichtstunden bei stets richtiger Spannung nötigt zur Wahl geringer relativer Spannungsverluste, trotz höherer Leitungskosten. Selbst bei mäßigen Preisen der Glühlampen und des Stromes gestatten die unvermeidlichen Unterschiede zwischen den einzelnen Lampen und die beschränkte Schärfe der Spannungsregelung von der Stromquelle aus nur selten die Wahl größerer relativer Spannungsverluste als etwa 4—5% für Metalldrahtlampen.

3. Rücksicht auf die Motoren.

Die Motoren sind im allgemeinen weniger empfindlich auf Veränderungen der ihnen zugeführten Klemmenspannung als die Glühlampen. Sie würden also kaum so enge Grenzen für den zulässigen Spannungsverlust erheischen, wie ein ausschließlich Lampen speisendes Netz, ein

Lichtnetz. Sind jedoch Lampen und Motoren gleichzeitig von ein und demselben Netze abzweigt, so werden die Motoren noch weitere beachtenswerte Anforderungen an die örtliche und gesamte Lösbarkeit stellen. Ändert sich nämlich die Belastung stark und plötzlich, so muß auch für den ärgsten Stromstoß die relative Schwankung der Spannung für alle Abnehmer klein sein. Vor allem müssen also die Stromstöße möglichst mäßig und außerdem der Widerstand der Zuleitungen gering gehalten werden.

Die Erfahrung hat bei Parallelanlagen für reinen Motorenbetrieb selbst 10 bis zu 20% Spannungsverlust zugelassen, diesen Wert für Motorleitungen aber beträchtlich verringert, wenn sie an ein Beleuchtungsnetz angeschlossen sind.

Man prüft bei Elektrizitätswerken, deren Netze vornehmlich dem Lichtbetrieb zu dienen haben, die Motoren auf die Größe ihres Anlaufstroms, fordert oft allmähliche Einschaltung und Abstellung und untersagt den Anschluß störender Motorbetriebe. Man nimmt ferner bei großen Motoren besondere Maßregeln, indem man bei direkten Systemen z. B. besondere Leitungen zu ihnen zieht, oder bei indirekten besondere Umformer verwendet. Ist ein gemeinsames Licht- und Kraftnetz wegen der zahlreichen und großen Kraftanschlüsse nicht durchführbar, so werden die Netze getrennt in solche für ruhigen Betrieb (Licht- und Kleinmotoren) und unruhigen Betrieb (Großmotoren).

Man kann dann die Lichtleitungen mit 4—5% rechnen, die Kraftleitungen mit etwa 5—10%, wodurch eine wesentliche Ersparnis an Leitungsmetall und gleichzeitig ein besserer Lichtbetrieb erzielbar ist, besonders wenn auch die Dynamos für Kraft- und Lichtbetrieb getrennt laufen können.

4. Rücksichtnahme auf die Regelung.

Um größere Spannungsverluste für die Leitungsbemessung annehmen zu dürfen, selbst bei großer Löschung, kann die Anfangsspannung mit der Belastung erhöht oder herabgesetzt werden.

Ist wie in Abb. 35 ein Abnehmer am Ende einer Leitung vorhanden, so kann man ihm bei beliebigem Spannungsverlust v stets konstante Spannung V_1 zuführen, wenn man durch passende Regulierung die Anfangsspannung $V = V_1 + v$ stets auf dem Werte V erhält. Ist v sehr klein (in Hundertsteln von V_1) gegen V_1 , dann ist angenähert $V_1 \approx V$ und das Netz heißt selbstregulierend. Wird v verhältnismäßig groß gegen V_1 , dann muß für konstanten Wert von V_1 die Anfangsspannung dauernd mit der Belastung einreguliert werden. Die relative Größe von v bestimmt also den Regelzwang.

Als Beispiel ist in Abb. 39 der Leitungsplan eines Bauerngutes gegeben. Vom kleinen Sägewerk speist eine Dynamo die abseits liegenden Gebäude a , die Stallungen b , das Wohnhaus c , den Stall d und die Mühle e . Das Wirtschaftsgebäude b hat einen zweipferdigen, tagsüber verwendeten Motor. Die einfache Leitungslänge bis b beträgt 900 m. An diese Leitung werden 50 Stück 60-Watt-Lampen für 220 Volt angeschlossen, von denen höchstens 40 Stück gleichzeitig leuchten.

Bei Annahme eines Spannungsverlustes in der Hauptleitung von 13 Volt, das ist 6%, ergibt sich für ihren Querschnitt

$$\frac{2 \cdot 900 \cdot 10,9}{60 \cdot 13} = 25 \text{ mm}^2 \text{ bei } \frac{2400}{220} = 10,9 \text{ Amp.}$$

Die Spannung in I wird mittels Prüfdrähten, die von da zur Hauptschalttafel zurückführen, gemessen und auf 222 Volt konstant gehalten, so daß die Maschinenspannung bei Vollast der Hauptleitung 235 Volt beträgt. Für die Verteilungsleitungen verbleiben also noch

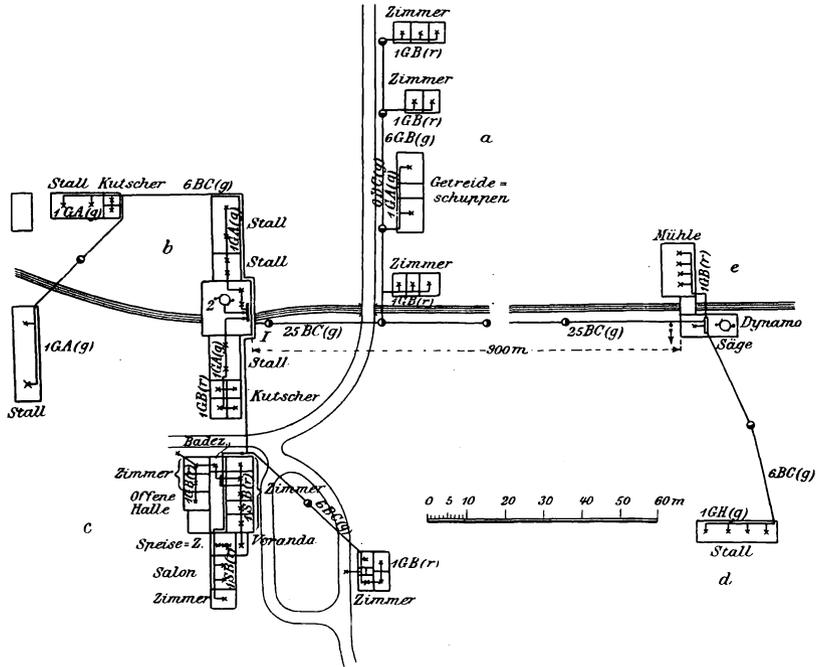


Abb. 39.

2 Volt; sie können nach den Vorschriften des V.D.E. als Freileitungen nicht dünner als 6 mm² gewählt werden.

In den der Maschine benachbarten Gebäuden d und e würden die Lampen zu hohe Spannung erhalten, wenn nicht durch regelbare Widerstände in ihren Zuführungsleitungen die zu hohe Spannung zeitweise vernichtet würde. Diese regelbaren Zusatzwiderstände der Speiseleitungen müssen bei Vollast 13 Volt vernichten, bei schwächerer Belastung entsprechend weniger, damit die Lampen im Stalle d und der Mühle e die normale Spannung von etwa 220 Volt erhalten.

Die Hauptleitung wird durch den verhältnismäßig hohen Spannungsverlust billig. Aber die Aufgabe des Dynamowärters wird durch die erforderliche Nachregulierung erschwert.

Die Freileitungen tragen die Bezeichnung 6 BC (g). Dies bedeutet nach den Normalien des V.D.E. blanker Kupferdraht BC von 6 mm²

Querschnitt auf Isolierglocken montiert. 1 GA (r) ist 1 mm² Gummiaderdraht auf Isolierrollen, 1 GB(r) ist 1 mm² Gummibanddraht auf Rollen verlegt. Für 2 Volt Verlust könnte bei Abständen von 60 m und Strömen von höchstens 5 Amp. der erforderliche Querschnitt betragen

$$\frac{60 \cdot 5}{30 \cdot 2} = 5 \text{ mm}^2.$$

Die meisten Leitungen könnten also noch dünner werden, wenn sich dem nicht die Vorschriften des V.D.E. widersetzen. Diese fordern mit Rücksicht auf mechanische Festigkeit als geringsten zulässigen Querschnitt für Freileitungen 6 mm².

Das Beispiel führt zu folgender allgemeinen Überlegung:

Die Aufgabe der Leitungsrechnung im engeren Sinne besteht darin, für gegebene Abnahmen, an denen Ohmsche Widerstände angebracht sind, die Stromverteilung zu wählen oder zu ermitteln und an ihrer Hand die Querschnitte der Leitungen zu den einzelnen Abzweigstellen so festzusetzen, daß die größte Leistungsschwankung ξ oder Spannungsschwankung η der Abnehmer bei allen vorkommenden Belastungsänderungen innerhalb der zulässigen Grenzen bleibt.

Nun hängen aber die Einzelwerte der Spannungen an den verschiedenen Abzweigungen nicht nur von der jeweiligen Belastung oder der Größe des ihr entsprechenden Widerstands, vom Querschnitt und von der Anordnung der Leitung, sondern auch von der Größe und der Konstanz der Spannung am Anfang der Leitung ab. Wenn in einem bestimmten Falle die Leitung bei allen vorkommenden Ab- und Zuschaltungen nur Spannungsänderungen von $\pm 2\%$ aufweist, kann die ganze Anlage doch nur dann befriedigend arbeiten, wenn die Stromquelle selbsttätig oder durch Nachregelung ihre Klemmenspannung bei allen Ab- und Zuschaltungen annähernd konstant hält. Schwankt die Klemmenspannung aber beispielsweise um $\pm 10\%$, so kann die Gesamtschwankung bis zu $\pm 12\%$ betragen und die ganze Anlage wird dann ebensowenig befriedigend arbeiten, wie eine mangelhaft regulierende Leitung mit $\pm 10\%$ Spannungsschwankung, die von einer gut regulierten Stromquelle mit $\pm 2\%$ Spannungsschwankung gespeist wird.

Man erkennt aus diesem einfachen Beispiel, daß man bei der Festsetzung der zulässigen Größe des Spannungsverlustes die Leitung im weitesten Sinne auffassen und ihre Eigenschaften stets zusammen mit dem Verhalten der Quellen und der Abnehmer, ja mit Einschluß des motorischen Teils der ganzen Anlage berücksichtigen muß.

Alle Stromquellen haben, wie die Abnehmer, auch einen Abfall. Je kleiner er ist, desto leichter ist sein Einfluß auszuregulieren.

Nur die sorgsamste Regulierung oder Kompoundierung nähert sich diesem idealen Grenzzustande eines inneren Widerstandes Null.

Am nächsten kommen ihm noch die Akkumulatoren, die wegen ihres geringen Widerstandes während mehrerer Stunden als Quellen praktisch konstanter Spannung gelten können.

Bei fortschreitender Entladung sinkt jedoch auch ihre Spannung allmählich unter den normalen Wert, und der von Hand bediente oder selbsttätige Zellschalter muß dann durch Zufügung neuer Zellen die Spannung in kleinen Sprüngen (von etwa 2 Volt für eine Zelle) von Zeit zu Zeit über den normalen Wert erhöhen.

Bei Gleichstrommaschinen mit Nebenschlußwicklung beträgt der Abfall zwischen Leerlauf und voller Belastung ohne Nachregelung etwa 15 bis 30%. Auch hier wird die Regulierung im allgemeinen nachhinkend sein und die Spannung, nachdem sie etwas unter den normalen Wert gesunken ist, durch verstärkte Erregung wieder auf oder über diesen Wert erhöht werden. Eine Kompoundwicklung würde diesen Regulierungsvorgang erleichtern oder überflüssig machen; doch bringt sie andere Schwierigkeiten, besonders bei der Parallelschaltung und der Anwendung von Akkumulatoren, mit sich. In England und Amerika werden kompondierte Gleichstrommaschinen oft so angeordnet, daß sie bei voller Belastung, besonders beim Betriebe von Motoren oder Bahnanlagen, um etwa 10% überkompondiert sind. Während bei Leerlauf in der Zentrale die Spannung etwa auf 500 Volt gehalten wird, steigt sie bei voller Belastung auf 550 Volt. Der Verlust in der Leitung zu den Abnahmestellen kann also größer gewählt werden, als unter sonst gleichen Umständen ohne diese Überkompondierung.

Diese Betrachtungen sollen später noch erweitert und ausgebaut werden, wenn erst alle Methoden der Netzbehandlung und Berechnung erörtert worden sind.

Bisher wurden nur offene Leiter behandelt, denen der Strom von einer Seite ausgeführt wurde. Wir wenden uns nun zum geschlossenen Leiter.

Als kennzeichnende Größe behalten wir den relativen Spannungsverlust bei, der für die Rechnung die zunächst zu ermittelnde Größe ist.

V. Die einfach und die mehrfach geschlossene Leitung.

Wir haben in Abb. 20 die Zusammenfassung mehrerer Abnahmen zu einer einzigen erörtert, wobei der Leiterstrang $A - 1$ einseitig im Punkte A gespeist wurde. Nun wollen wir den Fall betrachten, daß ein einfacher Leitungsstrang AB (Abb. 40) an seinen beiden Enden gespeist wird, aber nur eine einzige Stromabnahme i im Punkte C besitzt. Dies ist ein allgemeiner Fall, wenn wir uns i entstanden denken aus der Zusammenfassung willkürlich über den Strang AB verteilter Einzelabnahmen.

1. Der einfache Leitungsstrang mit beiderseitigen Stromeingängen und einer einzigen Stromentnahme.

Der Zusammensetzung von Stromentnahmen steht ihre Aufteilung gegenüber. Wie gestaltet sich diese, wenn ein Nutzstrom i , Abb. 40,

von dem Leiter AB im Punkte C abgezweigt ist? Es seien die Spannungen V_1 und V_2 an den beiden Enden A und B . Der Widerstand des ganzen Leiters sei r , die Widerstände der Leiter Teile zwischen den Enden und der Abnahme in C seien r_1 und r_2 . Setzt man voraus, daß in einem Punkte des Leiters zu einer Zeit bloß eine einzige Spannung V_c herrschen könne, und teilt man den Abnahmestrom i im Abzweigungspunkte C in Teilströme i_1 und i_2 , so hat man:

$$V_1 - i_1 r_1 = V_2 - i_2 r_2 \text{ und } i = i_1 + i_2. \quad (1)$$

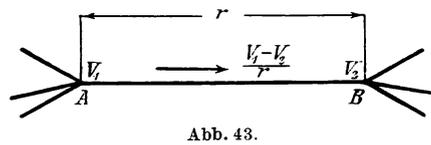
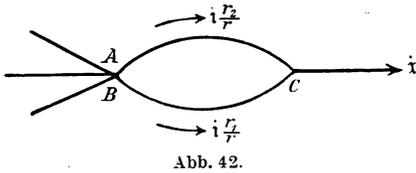
Hieraus folgen die Leiterströme:

$$i_1 = \frac{i r_2}{r} + \frac{V_1 - V_2}{r} = \frac{(V_1 - 0) - (V_2 - i r_2)}{r} \quad (2)$$

$$i_2 = \frac{i r_1}{r} + \frac{V_2 - V_1}{r}.$$

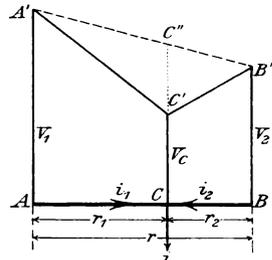
Die Vorderglieder der ersten Ausdrücke $i \cdot r_2/r$ und $i \cdot r_1/r$ bedeuten die Ströme, welche im Leiter AB auftreten würden, wenn die Spannungen in A und B gleich groß wären, Abb. 41. Es können diese Ströme als die den Punkten A und B entsprechenden Komponenten oder Entbundenen des Abnahmestromes i aufgefaßt werden. Denkt man sich die beiden Endknoten bei gleicher Spannung zusammengelegt, so ergibt sich die Stromverteilung wie in Abb. 42.

Die zweiten Glieder $(V_1 - V_2)/r$ und $(V_2 - V_1)/r$ unterscheiden



sich nur im Vorzeichen und stellen den Strom dar, welcher entstehen würde, wenn der Leiter AB in C keinen Abnehmer hätte und der Spannungsunterschied von A nach B nur auf den Leiterwiderstand $r = r_1 + r_2$ wirkt, Abb. 43.

Dieser Strom heißt der Leerlaufstrom oder auch Ausgleichstrom. Aus der Überlagerung oder Superposition der beiden Verteilungsbilder, Abb. 42 und 43, ergibt sich die tatsächliche Verteilung. Die oben angeführten Beziehungen besagen daher: Der Teilstrom, welcher einerseits dem Knoten C zufließt, ist gleich dem



Leerlaufströme, vermehrt um die auf seine Seite entfallende Abnahmekomponente¹⁾.

Sind die Spannungen an den Enden des Leiters *A* und *B* einander gleich, so ist im Leiter kein Leerlaufstrom. Ergibt die Rechnung den

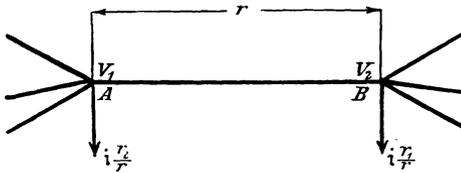


Abb. 44.

einen der beiden Teilströme negativ, so bedeutet dies, daß von der betreffenden Seite kein Strom gegen die Abnahmestelle, sondern von ihr weg über den Endpunkt hinausfließt. Dies ist möglich, weil der Leiter ein Teilstück

seines ganzen Netzes oder eines größeren Stranges bilden kann.

Das Versetzen oder Verlegen einer Abnahme auf zwei (sonst beliebige) Stellen eines Leiters, Abb. 44, ändert an dem Strom- und Spannungszustande außerhalb dieser nichts.

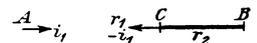


Abb. 45 a u. b.

Die zweite Form der Gleichung 2 zeigt den Strom *i*₁ in einem Schließungskreise vom Widerstande *r*, Abb. 45, hervorgebracht durch eine elektromotorische Kraft *V*₁ — *V*₂ gegen den Spannungsverlust *i r*₂ = (*v*)₂.

Schneidet man die Leitung innerhalb des Stückes *AB*, wie in Abb. 45 a, entzwei, so werden die Schnittenden die Spannungen (*V*₁ — 0) und (*V*₂ — *i r*₂) = *V*₂ — [*v*]₂ aufweisen. Der Spannungsunterschied dieses offenen Kreises ist aber gleich der elektromotorischen Kraft des geschlossenen.

Zwecks Ermittlung des Leiterstromes *i*₁ kann auch das Moment der Stromentnahme *i r*₂ = [*v*]₂ von der Spannung *V*₂ abgezogen werden. Während die Verlegung der Abnahme nach dem Komponentensatz die Spannungen *V*₁ und *V*₂ unberührt läßt, also die Befreiung des Leiters von seiner Abnahme spannungstreu oder äquipotential versorgt, wird die Stromstärke in einem bestimmten Leiterstücke (hier *i*₁) durch die Verwerfung des Leitungsverlustes [*v*]₂ nicht beeinflusst, sondern bleibt diesem Strom treu (stromtreu).

Anstatt den Leiter *AC* zu zerschneiden, wie in Abb. 45 a, kann er auch ausgehoben gedacht werden, sofern, Abb. 45 b, in den Knoten *A*

¹⁾ In dieser Weise von J. Herzog in der ETZ 1893 veröffentlicht. Ihr Wesen scheint in manchen Kreisen schon vorher erkannt gewesen zu sein, wie aus dem Briefkasten der ETZ 1890, H. 33 und 1892, S. 350, hervorgeht. Ihre fruchtbare Auslegung jedoch nicht. J. Teichmüller führt den Satz mit Quelle schon 1893 in ETZ 1893, S. 538, mit den Worten an: „Die vorgeschlagene Zerlegung der Belastung auf die Knoten läßt sich unter Umständen vorteilhaft verwerten, besonders wenn, wie es bei ausgeführten Netzen geschieht, die Stromverteilung bei verschiedener Belastung festgestellt werden soll.“ Otto Frick hat in der Z. f. Elektrotechnik in Wien 1894 diesen Satz ohne Quellenangabe benutzt, er nannte ihn Verlegungsmethode und bemerkte hinzu, daß er ihn schon 1891 besaß, aber erst auf seinen praktischen Wert gründlich prüfen wollte... In seinem Bureau bei O. v. Miller war jedoch dieser Verlegenheitssatz unbekannt, wie das Leitungsbuch von Miller-Hassold noch 1896 bewies.

und C die Ersatzströme wie bei den Nutzwiderständen jetzt für die Leitung selbst sinngemäß eingefügt werden. Diese Netzspaltung entspricht auch einer Schnittstelle mit der Abnahme Null, weil ja $i = 0 = i_x' + (-i_x')$ ist.

Beide Vorstellungen führen zu folgendem: Durch die Abnahmestelle C in Abb. 46 geht der Strom $i_2 = i + (-i_1)$. Es ist der Spannungsverlust im Stücke CB also $(i - i_1) r_2$ und die Spannung im Punkte C daher $V_2 - (i - i_1) r_2$. Der Strom i_1 im wiedereingefügten Leiterstücke AC wird demnach sein:

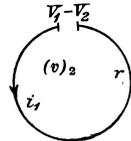


Abb. 46.

$$i_1 = \{V_1 - [V_2 - (i - i_1) r_2]\} : r,$$

was derselbe Ausdruck ist wie in Gleichung 2.

2. Der einfache Leitungsstrang mit beiderseitigen Stromeingängen und mehreren Stromentnahmen.

Die gewonnenen Ergebnisse gelten ohne weiteres für mehrere Abnahmen von einem Leiter mit verschiedenen hohen Endspannungen.

Es sei nun wieder ein Leiter AB mit zwei aufgedrückten Spannungen V_A und V_B wie in Abb. 47 gegeben. Der Leiterstrom i_x im Stücke $a_1' a_1''$ soll ermittelt werden. Die abgestuften Leiterströme sind nun $i_1' + i_x, i_2' + i_x \dots$ und $i_1'' - i_x, i_2'' - i_x \dots$. Der Spannungsverlust im Stücke $A a_1'$ beträgt

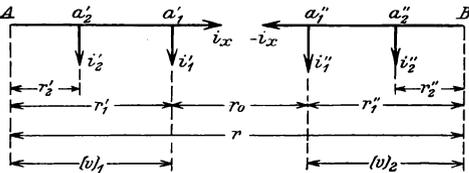


Abb. 47.

$$+ i_x r_1' + i_1' r_1' + i_2' r_2' + \dots = i_x r_1' + [v]_1$$

und der in $B a_1''$ ebenso: $-i_x r_1'' + [v]_2$. Die Spannung im offenen Punkte a_1' mit der Leiterabnahme i_x ist also gleich $V_A - i_x r_1' - [v]_1$, die im offenen Punkte a_1'' mit der Leiterabnahme $(-i_x)$ in gleicher Weise

$$V_B - (-i_x r_1'' + [v]_2).$$

Der Strom im Leiterstücke $a_1' a_1''$ muß also sein:

$$i_x = \frac{\{V_A - (i_x r_1' + [v]_1)\} - \{V_B - (-i_x r_1'' + [v]_2)\}}{r_0},$$

woraus nach der Zusammenfügung, also für $r_0 = 0$; $r_1' + r_1'' = r$ wieder der vorher gegebene Wert folgt:

$$i_x = \frac{\{V_A - [v]_1\} - \{V_B - [v]_2\}}{r}.$$

Sind die Spannungen in A und B gleich, so kann man diese Speisepunkte decken, der Strang wird dadurch geschlossen.

J. Teichmüller sagt über die Vorstellung geschlossener Leitungen aus offenen in seinem Aufsätze über „Ausgleichsleitungen“¹⁾ folgendes:

1) ETZ 1901, H. 1.

„In der geschlossenen Leitung setzen sich zwei Unmöglichkeiten zu einer Möglichkeit, zu den wahren Verhältnissen, zusammen. Die eine Unmöglichkeit ist, daß zwei Punkte verschiedener Spannung zusammengeschlossen sind; die andere ist, daß ein Kreisstrom ohne elektromotorische Kraft die Widerstände durchfließt.“ Ferner fügt er bei: „Neben dieser Erklärung hat schließlich auch jene eine Berechtigung, daß der

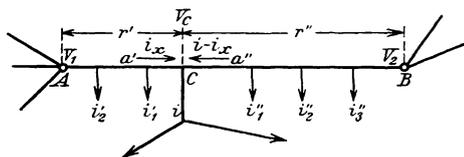


Abb. 48.

ursprünglich vorhandene Spannungsunterschied die elektromotorische Kraft sei, die den Strom durch die Widerstände treibt.“

In der Tat hat er in seinem Lehrbuche¹⁾ die gleichen Speisespannungen V Null ge-

setzt, um die Spannungsverluste als elektromotorische Kräfte einführen zu können, weil im Verteilungsproblem nur der Unterschied der Speisespannungen gegen eine Vergleichsspannung in Betracht kommt.

Für die nachfolgende Entwicklung sei mit Hinweis auf Abb. 48 wiederholt:

Sind V_1 und V_2 beliebige bekannte oder unbekannte Spannungen der Endpunkte A und B des Leiters AB in einem beliebigen Netze,

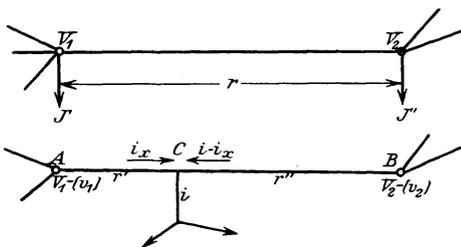


Abb. 49 a—c.

so kann man seine Abnahmestrukturstreu für alles außerhalb AB Liegende auf die Punkte A und B entbinden, wie in Abb. 49a durch die Teilströme J' und J'' angedeutet ist. Desgleichen vermag man aber auch stromtreuhinsichtlich der Teilströme i_x und $(i - i_x)$ die Spannungsverluste $[v]_1$ und $[v]_2$ der abgeschnittenen Stücke Aa' und Ba'' von den bekannten oder unbekanntem Bezugsspannungen V_1 und V_2 in Abzug zu bringen, wie in Abb. 49b. Die

Schnittmethode besagt, daß die Abnahme i für die Rechnung auch dann beiderseits beim Punkte C als gespeist angesehen werden kann, selbst wenn die wirkliche Verteilung dagegen ist, wie in Abb. 49c beim Punkte C'' . Die Spannung V_c findet sich dann entweder vom Punkte V_1 ausgehend nach Abb. 48 oder unmittelbarer durch den Momentensatz der Spannungen aus dem befreiten Netz nach Abb. 49b mit

$$\frac{\{V_1 - [v]_1\} - V_c}{r'} + \frac{\{V_2 - [v]_2\} - V_c}{r''} = i$$

¹⁾ Die elektrischen Leitungen I. Teil, 1899.

oder, wenn R den Widerstand von r' parallel r'' bedeutet:

$$\frac{V_c}{R} = V_c \cdot \left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} \right) = \frac{V_1 - [v]_1}{r'} + \frac{V_2 - [v]_2}{r''} - i$$

im Einklang mit Früherem.

Das Überlagerungsprinzip hinsichtlich der Spannungen spricht deutlich aus der Form:

$$V_c = \left(\frac{V_1 - [v]_1}{r'} + \frac{V_2 - [v]_2}{r''} \right) R - i R, \quad (6a)$$

das heißt die Spannung besteht ebenfalls aus dem Leerlauf- und aus dem Abnahmebeitrag. Jener entspricht der Abnahme $i = 0$, dieser setzt gleich hohe Spannungen voraus.

In dem Beispiele, Abb. 50, findet sich der Schwerpunkthalbmesser $\varrho = [15 \cdot 0,02 + 20 \cdot (0,02 + 0,03) + 30 \cdot (0,02 + 0,03 + 0,025)] : 65$

$$= 3,55/65 = 0,0546 \text{ Ohm.}$$

Die Komponente im Punkte B ist

$$J_2 = 65 \cdot \frac{0,0546}{0,02 + 0,03 + 0,025 + 0,016} = 39 \text{ Amp. ;}$$

also muß

$$J_1 = 65 - 39 = 26 \text{ Amp.}$$

sein.

Die Komponenten der Abzweigungen in 1, 2, 3 seien $i_A', i_B'; i_A'', i_B''$ und i_A''', i_B''' bezeichnet. Man findet für:

$$i_A' = 15 \cdot \frac{0,03 + 0,025 + 0,016}{0,091} = 11,7 \text{ Amp.,}$$

$$i_B' = 15 - 11,7 = 3,3 \text{ Amp.,}$$

$$i_A'' = 20 \cdot \frac{0,025 + 0,016}{0,091} = 9 \text{ Amp.,}$$

$$i_B'' = 20 - 9 = 11 \text{ Amp.,}$$

$$i_A''' = 30 \cdot \frac{0,016}{0,091} = 5,274 \text{ Amp.,}$$

$$i_B''' = 30 - 5,274 = 24,726 \text{ Amp.}$$

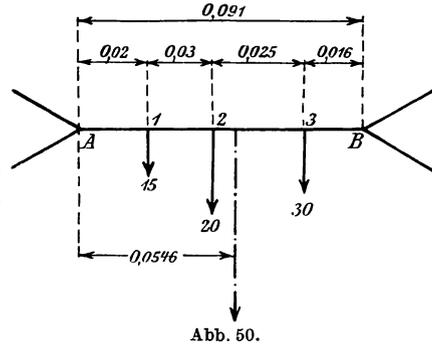
Daher für ihre Überlagerung

$$J_1 = i_A' + i_A'' + i_A''' = 11,7 + 9 + 5,274 = 25,974 \text{ Amp.,}$$

$$J_2 = i_B' + i_B'' + i_B''' = 3,3 + 11 + 24,726 = 39,026 \text{ ,,}$$

3. Die Schnittmethode.

Abb. 51 zeigt das Bild einer einfach geschlossenen Ringleitung mit einem Speisepunkt A und drei Stromabnahmen in den Knotenpunkten 1, 2 und 3. A ist eigentlich auch ein Knotenpunkt, jedoch besonderer Art, weil hier das Netz gespeist oder dem Netz Strom zugeführt wird. Die Abbildung gibt nur das Halbnetz (etwa den Hin-



leiter) wieder. Zwischen beiden Halbnetzen sind die Belastungen abgezweigt.

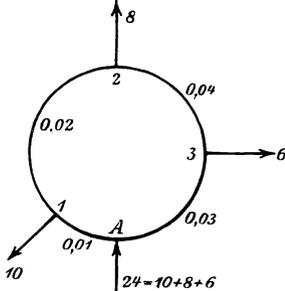


Abb. 51.

Die Leitung ist nicht länger ein offener Strang. Sie bildet eine Masche.

Der Gesamtstrom, welcher in *A* zugeführt wird, ist gleich der Summe der Nutzströme: $24 = 10 + 8 + 6$. Er teilt sich in die beiden Leiterströme. Wird die Ringleitung in *A* aufgeschnitten und ausgestreckt, so erhält man den in Abb. 40 bereits dargestellten Fall der zusammengehängten Leitung mit zweiseitiger Stromzuführung und gleich hohen Endspannungen. Die Stromverteilung kann für diesen Fall auch durch Überlagerung einfach ermittelt werden, indem man die Abnehmer einzeln wirken läßt.

Das Verfahren sei durch ein Beispiel erläutert. Die Zahlenwerte sind in Abb. 51 eingetragen. Läßt man den ersten Abnehmer von 10 Amp. allein wirken, Abb. 52a, dann berechnet sich der nach rechts fließende Strom zu

$$10 \cdot \frac{0,01}{0,01 + 0,02 + 0,03 + 0,04} = 1 \text{ Amp.},$$

dennach ist der nach links fließende $10 - 1 = 9$ Amp.

Wenn der zweite Abnehmer von 8 Amp. allein abgenommen wird, Abb. 52 b, dann berechnet sich der nach rechts fließende Strom zu

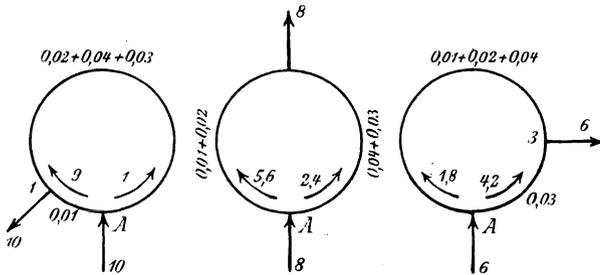


Abb. 52 a—c.

Abb. 52 b, dann berechnet sich der nach rechts fließende Strom zu

$$8 \cdot (0,01 + 0,02) / 0,1 = 2,4 \text{ Amp.},$$

dennach der nach links fließende zu $8 - 2,4 = 5,6$ Amp.

Wird der dritte Abnehmer von 6 Amp.

allein abgenommen, Abb. 52c, so berechnet sich der links fließende Strom zu

$$6 \cdot 0,03 / 0,1 = 1,8 \text{ Amp.},$$

dennach der rechts fließende zu $6 - 1,8 = 4,2$ Amp.

Legt man die drei Bilder der Abb. 52 aufeinander und addiert die in den einzelnen Leiterteilen fließenden Ströme, so erhält man die tatsächliche Stromverteilung Abb. 53. Wie ersichtlich, erhält der Abnehmer 2 von zwei Seiten Strom, und zwar $6,4 + 1,6 = 8$ Amp. Im Punkte 2 wird man einen wirklichen Schnitt durch die geschlossene Leitung führen können, ohne die Verteilung des Stromes irgendwie zu stören, sofern die Spaltung des Nutzstroms entsprechend geschieht.

Es handelt sich nun darum, diesen Schnitt oder besser Begegnungspunkt der entgegengesetzt fließenden Ströme zu ermitteln. Die Masche sei ausgestreckt wie in Abb. 54.

Bezeichnet man alle Ströme, die einem Entnahmepunkt zufließen, in bezug auf diesen als positiv, die von ihm wegfließenden als negativ, so ist klar, daß jeder Abzweigungsstrom gleich der algebraischen Summe seiner Nachbarströme sein muß. So etwa $i_3 = x_3 + (i_3 - x_3)$.

Ist 3 der Punkt, in welchem die Ströme von rechts und von links zuströmen, so haben x_3 und $(i_3 - x_3)$ hinsichtlich i_3 dieselbe etwa positive Richtung, und der Punkt 3 wäre dann schon der gesuchte Schnittpunkt, da die beiden Teilströme ihm zuströmen. Ist jedoch 3

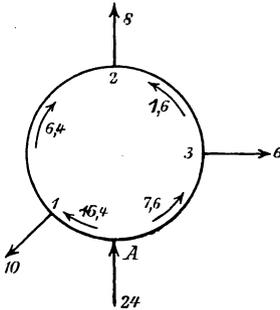


Abb. 53.

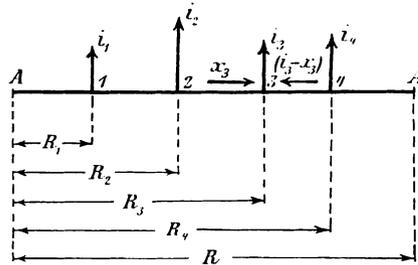


Abb. 54.

kein wahrer Schnittpunkt, so wird der Strom durch den Punkt 3 hindurchfließen. Mit anderen Worten, es wird der eine Teilstrom diesem Punkte zu- und der andere von diesem Punkte wegfließen. Der eine wird positiv, der andere negativ sein. Die Vorzeichen dieser Ströme x_3 und $(i_3 - x_3)$ werden also das Kennzeichen dafür bilden, ob man bei dem richtigen Schnittpunkte ist oder nicht. Im Punkte 3 kann jeweils nur eine bestimmte Spannung herrschen. Die Spannungsänderung vom Stromeingang A bis zum Punkte 3 muß beiderseits gleich sein, also

$$x_3 R_3 + i_2 R_2 + i_1 R_1 = (i_3 - x_3) (R - R_3) + i_4 (R - R_1),$$

woraus x zu berechnen ist. Nun untersucht man, ob x_3 und $(i_3 - x_3)$ beide positiv sind. Trifft dies zu, so ist 3 der gesuchte Schnittpunkt. Wenn jedoch der eine positiv, der andere negativ ist, so wäre die Rechnung nach der Reihe für die übrigen Abzweigpunkte so lange fortzusetzen, bis man zu einem Paare positiver Werte dieser Ströme gelangt.

Diese Aufsuchung der echten Schnittstelle läßt sich aber vermeiden. Es ist nicht notwendig, sämtliche x und $(i - x)$ aufzusuchen, um die Begegnungsstelle der geschlossenen Leitung zu finden, man braucht vielmehr die Rechnung nur für einen beliebigen Abzweigpunkt mit seinem x und $(i - x)$ anzustellen und kann damit sofort die Lage des echten Schnittpunktes schließen, auch wenn die ursprüngliche Wahl nicht den richtigen Punkt getroffen hat. Die errechneten Ströme x und $(i - x)$ sind nämlich sowohl ihrer

Größe als auch ihrem Sinne nach die wirklichen, unabhängig von der willkürlichen Wahl des Schnittpunktes. Wenn man daher bei einem beliebigen Punkte k beispielsweise ein positives x_k und ein negatives $(i_k - x_k)$ erhält, so geht man in der Richtung des letzteren weiter bis zum nächsten Abzweigpunkte $(k + 1)$, dessen Stromabgabe im allgemeinen entweder größer oder kleiner als $(i_k - x_k)$ sein wird. Im ersten Falle ist der Punkt $(k + 1)$ bereits der gesuchte Schnittpunkt, da ihm von der anderen Seite noch der Strom $i_{k+1} - (i_k - x_k)$ zufließen muß. Im zweiten Falle geht man in der Richtung des negativen Stromes so lange weiter, bis man den echten Schnittpunkt erreicht.

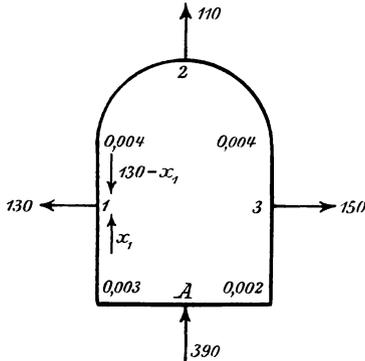


Abb. 55.

Zur Veranschaulichung diene ein Zahlenbeispiel.

In Abb. 55 treten bei A 390 Amp. ein, in 1, 2 und 3 werden bzw. 130, 110 und 150 Amp. abgenommen. Die

Werte der einzelnen Leitungswiderstände seien, von A in Richtung über 1 gerechnet: 0,003, 0,004, 0,004 und 0,002 Ohm. Die Stromverteilung soll ermittelt werden.

Vorläufig sei ein beliebiger Schnitt geführt, etwa in 1. Diesem Punkte entspricht die Gleichung:

$$x_1 \cdot 0,003 = (130 - x_1) [0,002 + 0,004 + 0,004] + 110[0,002 + 0,004] + 150 \cdot 0,002,$$

woraus sich

$$x_1 = 173,84 \text{ Amp.}$$

und

$$130 - x_1 = -43,84 \text{ Amp.}$$

finden.

Damit hat man bereits die richtigen Ströme nach Größe und Richtung gefunden. Da nämlich x_1 positiv ist, fließt er in der angenommenen und durch den Pfeil angedeuteten Richtung nach 1 zu, und da der Strom $(130 - x_1)$ negativ ist, so fließt er entgegengesetzt der angenommenen Pfeilrichtung, also von 1 weg. In der Teilstrecke A 1 fließen also 173,84 Amp. bis 1, wo 130 davon abgehen. In 1, 2 fließen demnach $173,84 - 130 = 43,84$ Amp. in Richtung gegen 2 weiter, in welchem Punkte 110 Amp. abgezogen werden. Es müssen sich also hier die von der einen Seite zuströmenden 43,84 Amp. mit 66,16 von der anderen Seite zu 110 ergänzen. Zwischen 2 und 3 herrscht also ein Strom von 66,16 Amp. mit der Richtung gegen 2. Man sieht, daß der Punkt 2 der gesuchte Schnittpunkt ist; denn in ihm könnte man die geschlossene Leitung öffnen, ohne die Stromgrößen in den einzelnen Teilstrecken irgend zu verändern (Abb. 56).

Um sich zu überzeugen, daß die Wahl irgendeines anderen Abzweig-

punktes zum selben Ergebnisse führt, stelle man die Gleichung etwa für den Punkt 3 auf:

$$(150 - x_3) 0,002 = x_3 [0,003 + 0,004 + 0,004] + 110 [0,003 + 0,004] + 130 \cdot 0,003,$$

woraus sich

$$x_3 = -66,16; \quad 150 - x_3 = 216,16$$

ergibt, was mit den vorherigen Werten übereinstimmt.

Da x_3 negativ ist, schreitet man gegen die angenommene Richtung mit 66,16 Amp. von 3 gegen 2 und findet, daß hier von der anderen Seite 43,84 Amp. zufließen müssen, damit im ganzen 110 Amp. bei 2 entnommen werden können. Das Bild der Stromverteilung zeigt Abb. 56.

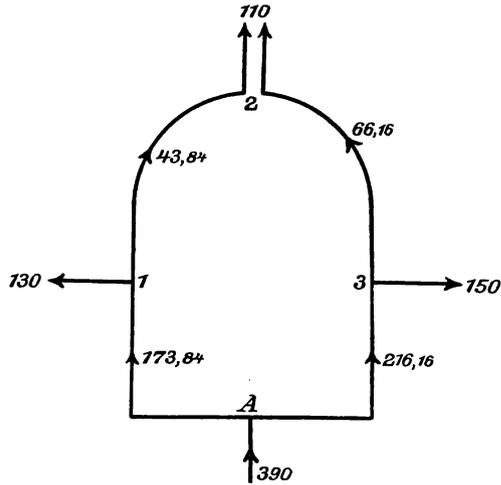


Abb. 56.

Die Masche (Abb. 55) kann natürlich im Speisepunkt A aufgeschnitten und ausgestreckt werden, wenn man dem dann entstehenden offenen Leitungsstrang an beiden Endpunkten die gleiche Spannung zuführt.

Dann ist zwar das geometrische Aussehen der Masche verändert, ihre Stromverteilung jedoch nicht. Wir haben nun aber die Möglichkeit, an den beiderseitigen Stromeingängen verschiedene Spannungen anzulegen und kommen so zu der bereits behandelten Lösung des verallgemeinerten Problems (Abb. 41).

4. Zeichnerische Behandlung der offenen und der beiderseits gespeisten Leitungsstrecke.

Für die \square -förmige Leiterform wurde ein endbelasteter Leiter bereits behandelt.

Bei mehreren Abnahmen, wie in Abb. 57, wird das Stromviereck OP_1 auf dem Lote im Punkte P durch die Ströme i_3 , i_2 und i_1 abgetragen und werden die Parallelstrahlen zu O_1 , O_2 , O_3 so gezogen, daß sie den gebrochenen Linienzug OQ bilden. Das Strombild wird durch den stufenartigen Linienzug veranschaulicht¹⁾.

Verlängert man den Strahl O_1 und zieht aus Q mit AB eine Parallele, so schneiden sich diese im Punkte S' , durch den der Summenstrom $J = \sum i$ geht. Das Spannungsviereck ist mit dem Seileck der Graphostatik wesensgleich.

¹⁾ Hochenegg, C.: Z. f. Elektrotechnik Wien Bd. 5, S. 11, 62. 1887.

Um dem Ingenieur die geometrische Zeichnungsweise zu erleichtern, wird ihm die Graphostatik geboten, welche die Geometrie in mechanische Gedanken umkleidet.

Der Elektroingenieur fordert gleiches.

Greifen wir zu diesem Zwecke zum argumentenreicheren Wechselstrom, der uns in der Winkeldrehung von 90° die reaktive elektrische Wirkung liefert.

Beim Gleichgewichtsfall eines Doppelhebels, an dem zwei parallele Kräfte angreifen, läßt man an seinen Enden zwei gleich große entgegengesetzte Hilfskräfte wirken, vereinigt sie einzeln mit den ursprünglichen und gelangt so

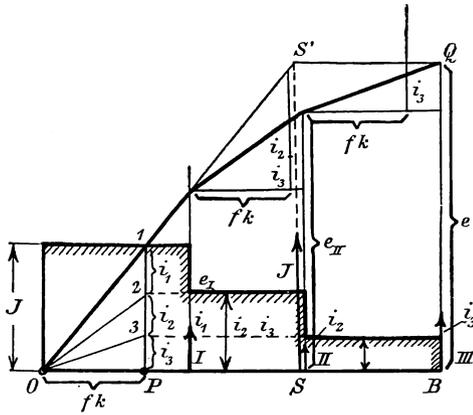


Abb. 57.

zu schiefen Kräften, aus deren Zusammensetzung auf die der parallelen Kräfte zurückgeschlossen wird. Dieser Weg vom Besondern zum Allgemeinen wird auch hier mit Erfolg betreten.

Man unterschiebt dem Gleichstromproblem den allgemeineren Wechselstrom, um den nichtparallelen Hilfslinien den elektrischen Geist einzuhauchen. Wirken nämlich in *I* der Abb. 58 außer dem Abnehmer i_1 noch die gerichteten Abnehmerströme i_1' und i_1'' , welche so gewählt sind, daß das von den dreien gebildete Dreieck als Höhe fk besitzt, in *II* die Ströme i_2, i_2' und i_2'' , wobei $i_2' = -i_1''$ gewählt wurde und fk ebenfalls die gemeinschaftliche Höhe des aus diesen drei Strömen gebildeten Dreieckes ist. Ebenso

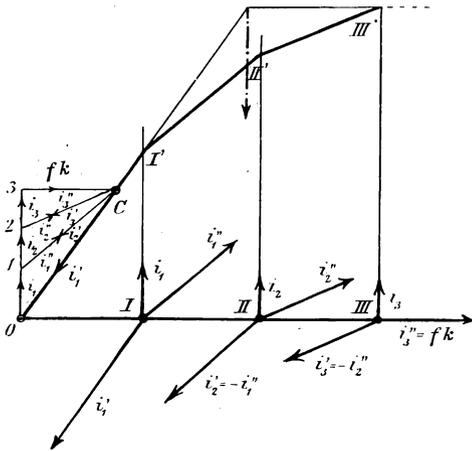


Abb. 58.

in *III*: $i_3, i_3' = -i_2''$ und $i_3'' = fk$, so ist, da sich die Ströme i_1'' und i_2' , i_2'' und i_3' aufheben, die Resultante von i_1' und i_3'' gleich der von $i_1 + i_2 + i_3$. Das hier eingeschlagene Verfahren entspricht dem der Zusammensetzung paralleler Kräfte mittels gleicher Hilfskräfte unter 90° , welche hier durch Hilfsströme ersetzt werden.

Unter Beibehaltung des Polabstandes fk kann man den Pol *C* lotrecht verschieben, wodurch die wagrechte Schlußlinie des Spannungsvielseits schief, wie OO' parallel zu $C_0 3$, Abb. 59, wird.

Wenn die Leitung aus zwei Stücken AM und MB mit den Querschnitten f_1 und f_2 besteht, so sind die Abstände der Pole C_1 und C_2 durch $f_1 k$ und $f_2 k$ bestimmt. Die Schlußlinie des Spannungsbildes ist dann gebrochen wie in Abb. 60. Werden jedoch die Pole C_1, C_2 so gewählt, daß $4 C_1 C_2$ in einer Geraden liegen, so wird auch die Schlußlinie $A M'' I V''$ eine Gerade sein.

Deutlich ist hier der Vorteil zu ersehen, den die Wahl des Widerstandes an Stelle der Leiterlänge im allgemeinen bietet.

Nun gehen wir auf eine beiderseitige Stromzuführung ein. Der Querschnitt sei der Länge nach unveränderlich, Länge und Widerstand werden dadurch in der zeichnerischen Darstellung gleichwertig.

Die Lösung in Abb. 61 enthält zwei Fälle:

1. Die Spannung sei in A und B gleich hoch. Auf dem Lote in A werden die Ströme i_1, i_2, i_3 und i_4 abgetragen und der Linienzug $A I' \dots B'$ gezeichnet. Durch die Schlußlinie 1 erhält man das Spannungsbild. Im Stromviereck wird der Strahl OC parallel zu AB' gezogen, womit die bei A und B eintretenden Ströme J_1 und J_2 sich ergeben. Das Strombild wird erhalten, indem man in O eine Parallele zu AB zieht und auf die Lote in I, II, III und IV die Punkte 1, 2, 3 und 4 projiziert. Die gesuchte Schnittstelle ist daher in II .

2. Die Spannung in A sei um V Volt höher als in B . Man trägt von B' aus $B' B'' = V$ auf, verbindet B'' mit A , wobei $A B''$ die Schlußlinie 2 des Spannungsbildes ist. Für diesen Fall sind die Spannungsänderungen die Lotabschnitte zwischen $A I'$

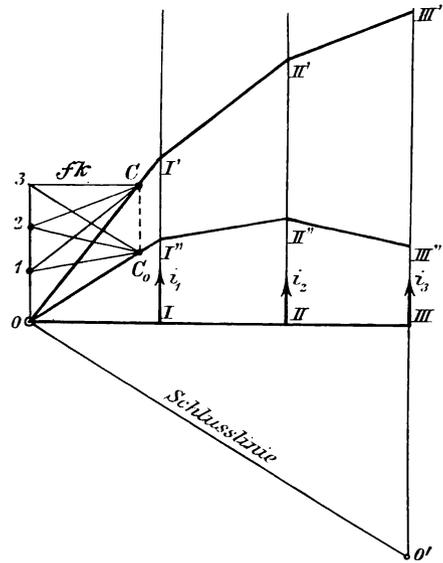


Abb. 59.

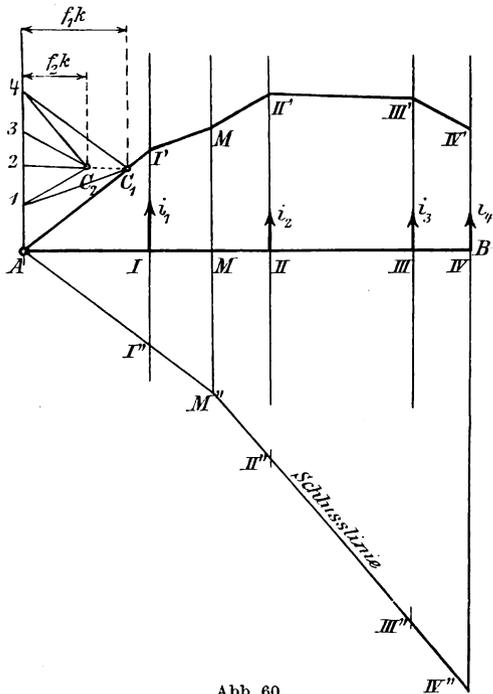


Abb. 60.

$II' III' IV' B'$ und der Schlußlinie 2 und ist J_0 der Ausgleichsstrom, III der Schnittpunkt.

Besteht die Leitung aus zwei Querschnitten f_1 auf der Länge A bis P und f_2 auf P bis B , Abb. 62, dann sind die Pole der Stromvierecke C_1 und C_2 in einer Wagerechten durch die Polabstände $f_1 k$ und $f_2 k$ bestimmt. Auf dem Lote in A werden die Ströme i_1, i_2 und i_3 aufgetragen und der Linienzug $A I' P' \dots B'$ gezeichnet. Teilt man die Strecke $C_1 C_2$ im Verhältnis

$$C_1 C_2 : C C_2 = f_1 l_2 : f_2 l_1$$

und zieht aus dem so erhaltenen dritten Pole C die mit AB' parallele

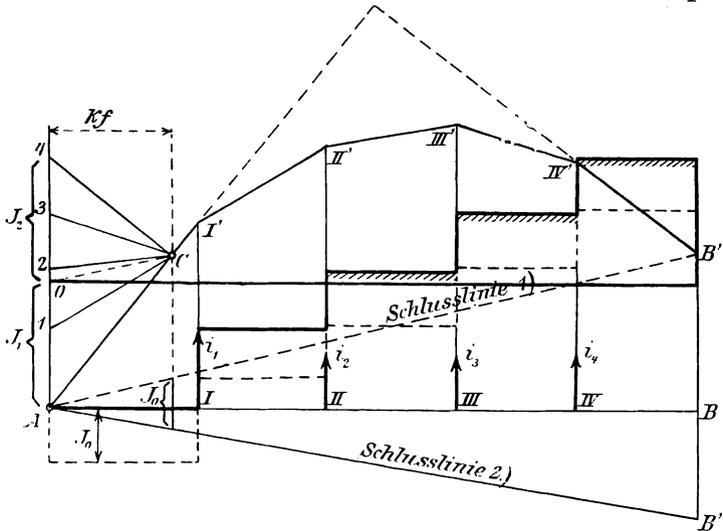


Abb. 61.

Cd , weiter AP'' parallel $C_1 d$ und $P'' B'$ parallel zu $C_2 d$, so ergibt sich der Linienzug $A I' P' \dots P'' A$ als Spannungsbild¹⁾.

Die drei Strahlen $C_1 d$, $C_2 d$ und $C d$ im Stromeck gehen aus dem Punkte d , Abb. 62, hervor, während die mit ihnen parallelen AP'' , $P'' B'$ und $A B'$ des Spannungsvierecks ein Dreieck bilden. Auf diese reziproke Beziehung werden wir nochmals zurückkommen.

5. Verteilte Stromentnahmen.

Die Zusammensetzung von Einzelabnahmen erfolgt, wie eben gezeigt, durch das Spannungsviereck, welches einem Summen- oder Differenzenausdruck entspricht. Oft ist die Leitung einer verteilten

¹⁾ Die Graphostatik hat schon längst über die hier vorliegenden Fragen vollkommen Aufschluß gegeben. Trotzdem sei auf einige elektrische Ausarbeitungen noch hingewiesen: Soschinski: Einige Konstruktionen zur graph. Berechnung von Leitungszetzen. ETZ 1902, S. 359; König, G.: Der mehrpolige Polplan in der zeichnerischen Leitungsberechnung. El. Anz. 1902 u. ETZ 1903, S. 69; Pforr: Die Anwendung für die Berechnung der Stromverteilung bei elektr. Bahnen. ETZ 1901, S. 411; Erwiderung S. 574.

Stromentnahme unterworfen, gleichwie ein Balken eine über seine Länge ausgebreitete Belastung zu ertragen hat. Dann wird in beiden Fällen von der Belastungsstärke, bezogen auf eine Längseinheit an einer bestimmten Stelle, gesprochen. Ist sie auf eine gewisse Länge der Leitung hin gleichförmig verteilt, d. h. die Entnahme für den laufenden Meter oder Kilometer gleich groß, so ergibt sich die Gesamtbelastung durch Multiplikation dieser Stärke mit der Länge der Strecke bzw. ihrem Widerstande. Für eine ungleichförmige Verteilung übertragen sich diese Begriffe sinngemäß.

Das Bild einer solchen verteilten Stromentnahme ist dann eine Kurve, die unendlich vielen, unendlich kleinen Entnahmen entspricht. Das Spannungsvieleck wird zur Spannungskurve, wie das Seilvieleck der Graphostatik in die allgemeine Seillinie übergeht.

Die Belastungslinie ist die Differentialkurve der Stromkurve. Da diese die Differentialkurve der Spannungslinie ist, so wird die Belastungslinie zur zweiten Differentialkurve der Spannungslinie.

Für eine gleich verteilte Stromentnahme über den ganzen Leiter von der Länge l ergibt sich: Die Belastungslinie ist hier eine wagerechte Gerade, der Summenstrom eine schiefe Gerade, die Spannungsänderung eine Parabel, wie wir bereits in Abb. 24—26, Seite 48, sahen. Der Effektverlust ist eine höhere Parabel.

In einem Element dl des Leiters ist bei der Strombelastung i auf das laufende Meter der Strom idl , am Anfang also der Gesamtstrom $J = \int idl = il$, die Spannungsänderung

$$v = J \int_0^l \frac{dl}{kf} = \frac{i}{kf} \int_0^l l dl = \frac{i^2}{2kf} = \frac{Jr}{2}$$

und die Leistungsänderung

$$w = J^2 \int_0^l \frac{dl}{kf} = \frac{J^2}{kf} \int_0^l l^2 dl = \frac{i^2 l^3}{3kf} = \frac{J^2 r}{3}$$

Die Spannungsänderung ist also die gleiche, als ob der Gesamtstrom $J = il$ in der Mitte des Leiters vom Widerstand r abgezweigt wäre, der Leistungsverlust so, als ob der Gesamtstrom J am Ende eines Leiters von einem Drittel des Gesamtwiderstandes angriffe¹⁾.

¹⁾ Es sei diesbezüglich auf die mechanische Technik verwiesen, etwa auf Föppl, 2. Bd. Die Bestimmung der Maximalmomente in der Mechanik entspricht der Aufsuchung des größten Spannungsverlustes im Begegnungspunkte. Alle Sätze kleiden sich ungezwungen ins Elektrische. Die gleichförmig verteilte Last führt zur Parabel. Sie ist als Schablone ein gutes Hilfsmittel zur raschen Arbeit,

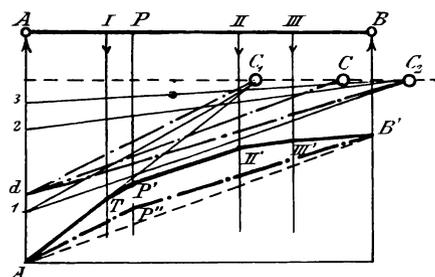


Abb. 62.

Die praktische Abnahme entwickelt sich längs der Straßenzüge als Einzelabnahme durch die großen Licht- und Kraftanschlüsse, während die verteilte durch die über Straßenflucht verteilte Geschäfts- und Wohnungsbeleuchtung eingeschätzt wird.

6. Einführung zu mehrfach geschlossenen Leitungen mit einer Speisestelle oder mehreren.

Jede mehrfach geschlossene Leitung mit einer Speisestelle läßt sich durch entsprechende Schnitte in so viele verästelte offene zerlegen, als sie Maschen besitzt. Jede von diesen offenen Leitungen soll mittelbar oder unmittelbar mit der Speisestelle zusammenhängen. Nicht jeder von diesen Schnitten führt zur natürlichen Begegnungsstelle entgegengesetzter Leiterströme. In Zweiecksmaschen, das sind parallele Leiter, treten oft falsche Schnitte auf, die nur zur Ausrechnung dienen. Dieses Aufschließen des vielfach geschlossenen Netzes läßt sich auf dreierlei Weise vorstellen: erstens durch Teilung von Stromabnahmen

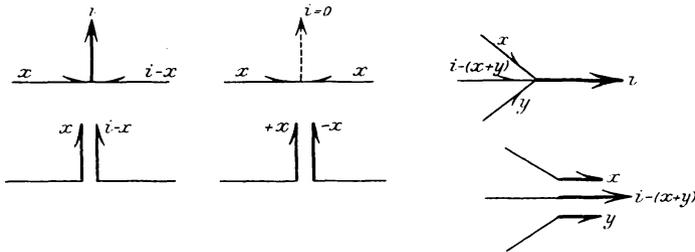


Abb. 63 a—c.

in den Abzweigpunkten i in x und $(i - x)$, Abb. 63a, zweitens durch Lostrennen, Ausheben einzelner Leiterstücke mit Anbringung der freien Ströme, was der Festsetzung eines Leiterstromes x gleichkommt, Abb. 63b, und drittens durch Lösung von Verzweigungspunkten bekannter Spannung, wie es Speisestellen sind, oder unbekannter Spannung, wie es die Knoten sind, Abb. 63c. Alle drei Vorgänge sind rechnerisch gleichwertig.

1. Beispiel.

Zur Vorbereitung diene folgendes Beispiel:

Vom Speisepunkte I in Abb. 64 führen drei Leiter zum Verzweigungspunkte II . Der Zweig $I-II$ besitzt keine Stromabnahme, er dient zum Spannungsausgleich. Es ist hier die Zahl der Verzweigungspunkte $p = 2$, die Leiterzahl $l = 3$ und die Maschenzahl $m = l - p + 1 = 2$.

wie F. Steiner: Techn. Blätter 1879, H. 4, für den Brückenbau zeigte. Gleiches gilt hier. Die Übereinstimmung mit dem Problem des graphischen Differenzierens und Integrierens tritt hier auf. Die zweite Differentialkurve deckt sich, wie Mohr gezeigt hat, auch mit der elastischen Linie. Es möge auf Nehls, Chr.: Über graphische Integration und ihre Anwendung in der graphischen Statik, 1877, und d'Ocagne, M.: Calcul graphique et Nomographie noch hingewiesen werden.

Wird der Knoten *II* gelöst, also $x + y + z = 60$ gesetzt, ferner die beiden Spannungsgleichungen für die obere und untere Masche aufgestellt:

$$x [0,01 + 0,01 + 0,005] + 200 [0,01 + 0,005] + 50 \cdot 0,005 = y \cdot 0,06,$$

$$z [0,09 + 0,02 + 0,007] + 120 [0,02 + 0,007] + 30 \cdot 0,007 = y \cdot 0,06,$$

so ergeben sich die Werte:

$$x = 4,63 \text{ Amp.}, \quad y = 56,09 \text{ Amp.}, \quad z = -0,72 \text{ Amp.}$$

Man sieht, daß der Ausgleichsleiter *I—II* 56,09 Amp. zum Knotenpunkte *II* bringt, daß ferner von oben her 4,63 Amp. gegen *II* zufließen und von da aus 0,72 weiterströmen, so daß die tatsächliche Stromverteilung der Abb. 65 entspricht. Die Begegnungsstelle tritt hier nur bei der Abnahme 120 Amp. auf und in *II* erfolgt eine teilweise Knotenlösung. Die Stromführung ist unwirtschaftlich, weil der Strom von 0,72 Amp. zum Speisepunkt zurück anstatt weg von ihm geführt wird. Der Spannungsabfall bis zur Abnahme 120 Amp. beträgt 3,366 Volt und bis zum Knoten *II* 3,430 Volt.

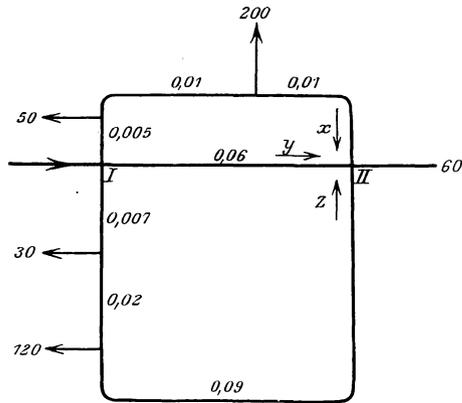


Abb. 64.

2. Beispiel.

Die bisherige Betrachtung gilt auch für den Fall, daß im Verzweigungspunkt *IV*, Abb. 66, keine Abnahme vorhanden ist. Für die zwei Unbekannten x und y lauten die Spannungsgleichungen:

Für $AIV = AIIIIV$:

$$-0,4(x + y) = 0,3(i_1 + i_3 + x) + 0,4i_2 + 0,6y.$$

Für $IIIV = IIIIV$:

$$0,1i_2 + 0,3y = 0,3i_3 + 0,5x.$$

Aus ihnen folgt:

$$x = \frac{-9i_1 - 2i_2 - 39i_3}{71} = -\frac{9}{71}i_1 - \frac{2}{71}i_2 - \frac{39}{71}i_3,$$

$$y = \frac{-15i_1 - 27i_2 + 6i_3}{71} = -\frac{15}{71}i_1 - \frac{27}{71}i_2 + \frac{6}{71}i_3,$$

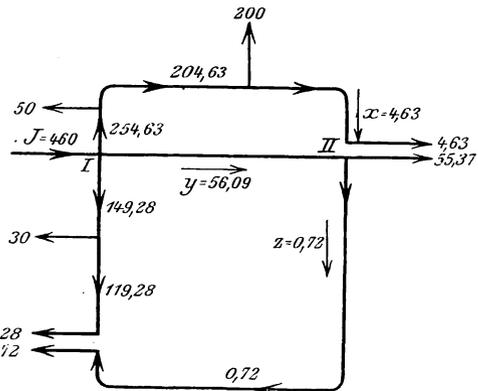


Abb. 65.

und nach Einsetzung der Zahlenwerte von i_1, i_2, i_3
 $x = -46,76$ Amp., $y = -31,26$ Amp.

Der Strom x wird nach obigem Ausdrucke seinen größten Wert bei den gleichzeitigen Abnahmen i_1, i_2, i_3 erreichen, während y seine größten Werte nach der einen oder anderen Richtung erfährt, je nachdem i_1 und i_2 , oder i_3 allein abgenommen werden.

Um nun zu den richtigen Schnitten *II* und *III* zu gelangen, muß man in der Richtung von *IV* zu den benachbarten Abzweigungspunkten weiterschreiten und findet durch Hinzufügen oder Abziehen die in Abb. 67 dargestellte Stromverteilung.

Dasselbe Beispiel der Abb. 66 soll nun nicht von den Maschen, sondern von den Verzweigungspunkten aus betrachtet werden.

Die Unbekannten sind dabei die Spannungen an allen Verzweigungs- und Abzweigungspunkten oder deren Unterschiede, und

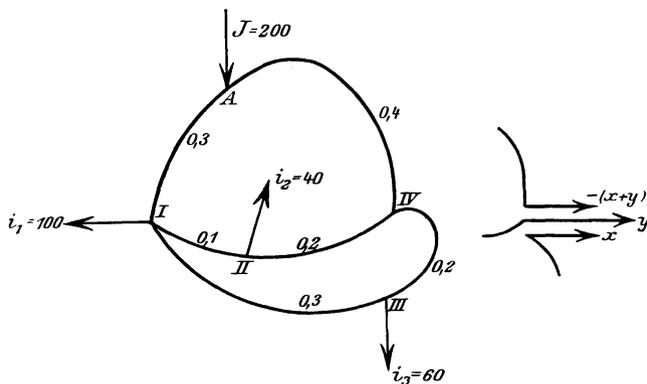


Abb. 66.

die aufzustellenden Gleichungen entsprechen den Stromgleichungen nach dem ersten Kirchhoffschen Gesetze.

Die Stromgleichungen der Abzweigungen längs der Leiter enthalten nur je zwei Unbekannte, nämlich ihre beiden Nachbarspannungen. Ihre Aufstellung kann aber durch die Benutzung des Komponentensatzes erspart werden. Es bleiben dann drei Verzweigungspunkte, wovon *A* der Speisepunkt und *I, IV* die Knoten (im engeren Sinne, d. h. mit unbekanntenen Spannungen und mit mindestens drei Schenkeln), zurück.

Werden zuerst die Abnahmen bei *II* und *III* nach den Knoten *I* und *IV* des Netzes versetzt, so finden sich die Komponentenströme:

herrührend von i_2 :	in <i>I</i> :	in <i>IV</i> :
$i_{2,I} = 40 \cdot \frac{0,2}{0,3} = 26,67$	$i_{2,IV} = 40 \cdot \frac{0,1}{0,3} = 13,33$ Amp.	
herrührend von i_3 :		
$i_{3,I} = 60 \cdot \frac{0,2}{0,5} = 24,00$	$i_{3,IV} = 60 - 24 = 36,00$ „	
zusammen	50,67	49,33 Amp.

Da in *I* noch $i_1 = 100$ abgeht, nimmt das Netz die Gestalt der Abb. 68 an.

Für den Knoten I gilt:

$$\left(\frac{1}{0,3} + \frac{1}{0,3} + \frac{1}{0,5}\right) V_I - \frac{1}{0,3} V_A - \left(\frac{1}{0,3} + \frac{1}{0,5}\right) V_{IV} = 150,67.$$

Für den Knoten IV :

$$\left(\frac{1}{0,4} + \frac{1}{0,3} + \frac{1}{0,5}\right) V_{IV} - \frac{1}{0,4} V_A - \left(\frac{1}{0,3} + \frac{1}{0,5}\right) V_I = 49,33.$$

Die zweifachen Leiter ohne Abzweigung zwischen I und IV können, wie auch diese Gleichungen anweisen, durch den Leiter vom Widerstande $0,3 \cdot 0,5$: $(0,3 + 0,5) = 0,1875$ Ohm ersetzt werden (Abb. 68 u. 69).

Für das umgeformte Netz mit $p = 2$ Knoten, $l = 3$ Leitern und $m = 1$ Masche kann man entweder nach der Strommethode für den unbekanntem Strom in dem einfach geschlossenen Kreis eine Spannungsgleichung oder nach der Spannungsmethode für die 2 unbekanntem Spannungen V_I und V_{IV} zwei Stromgleichungen niederschreiben. Da man zwei Knoten und einen Speisepunkt mit den Spannungen V_A , V_I , V_{IV} hat, so können

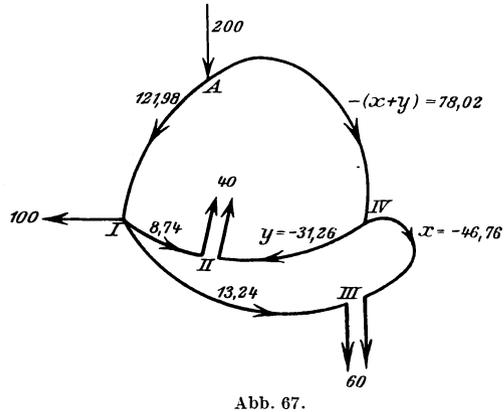


Abb. 67.

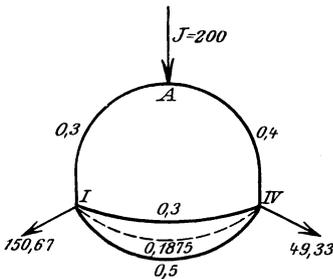


Abb. 68.

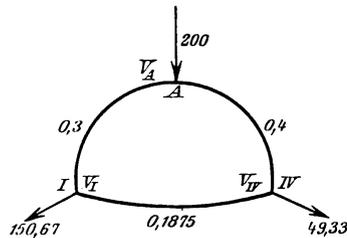


Abb. 69.

deren Spannungsunterschiede aus den zwei unabhängigen Gleichungen ermittelt werden, in welchen die Summe der in den zwei Knoten ankommenden und abfließenden Ströme Null gesetzt wird.

Für den Knoten I :

$$\frac{V_A - V_I}{0,3} + \frac{V_{IV} - V_I}{0,1875} - 150,67 = 0.$$

Für den Knoten A :

$$\frac{V_I - V_A}{0,3} + \frac{V_{IV} - V_A}{0,4} + 200 = 0.$$

Für den Speisepunkt IV :

$$\frac{V_A - V_{IV}}{0,4} + \frac{V_I - V_{IV}}{0,1875} - 49,33 = 0 .$$

Die Gleichungen für die Knoten lassen sich noch durch jene für den Speisepunkt ergänzen und mit den Leitwerten wie folgt schreiben (Abb. 70):

$$\begin{array}{r} I: \quad 3,33 V_A - 8,66 V_I + 5,33 V_{IV} - 150,67 = 0 \\ IV: \quad 2,50 V_A + 5,33 V_I - 7,83 V_{IV} - 49,33 = 0 \\ A: \quad \frac{5,83 V_A + 3,33 V_I + 2,50 V_{IV} + 200}{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0} = 0 \end{array}$$

Die Speisepunktgleichung A ist die Summengleichung der andern, mit umgekehrtem Vorzeichen.

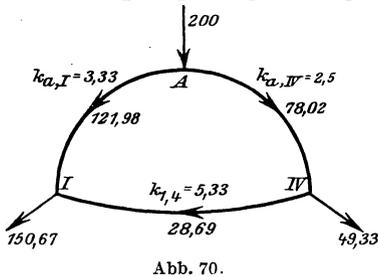


Abb. 70.

Die Stromverteilung hängt nur von den Spannungsunterschieden $V_A - V_I$ und $V_A - V_{IV}$ ab. Setzt man also $V_A = 0$, so werden die beiden andern Unbekannten jene Unterschiede un mittelbar liefern:

$$\begin{array}{l} V_A = 0; \quad V_A - V_I = -36,59; \\ V_A - V_{IV} = -31,21 \text{ Volt.} \end{array}$$

Um diese Beträge sind die Spannungen in I und IV niedriger als am Speisepunkt. Will man diesen Spannungsabfall positiv erhalten, dann müssen die Knotenlasten mit umgekehrten Vorzeichen eingeführt werden. Im Leiter $A I$ fließen also $36,59 \cdot 3,33 = 121,98$, im Leiter $I IV$ fließen $(36,59 - 31,21) \cdot 5,33 = 28,69$, im Leiter $A IV$: $31,21 \cdot 2,5 = 78,02$ Amp.

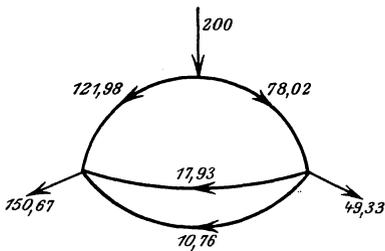


Abb. 71.

Diese Stromverteilung hätte sich auch mit nur einer Gleichung aus der Strommethode finden lassen. Sie ist jedoch nur für das vereinfachte Netz gültig. Für das ursprüngliche Netz

folgt zunächst das Strombild der Abb. 71, wobei die 28,69 Amp. verteilt sind im Verhältnis der Leitwerte 3,33 und 2 in 17,93 und 10,76 Amp. Dann ergibt sich, nach Zurückbringung der Komponentenströme,

$$\begin{array}{l} i_{2,I} = 26,67 - 17,93 = 8,74 \text{ Amp.,} \\ i_{3,I} = 24,00 - 10,76 = 13,24 \quad ,, \\ i_{2,IV} = 13,33 + 17,98 = 31,26 \quad ,, \\ i_{3,IV} = 36,00 + 10,76 = 46,76 \quad ,, \end{array}$$

die bereits in Abb. 67 gegebene Stromverteilung.

Die Spannungsänderung in diesem 2000 Volt-Netze von A bis II

auf beiden Wegen $A I III$ und $A I V II$ beträgt je 37,5, von A bis III je 40,6 Volt, also abgerundet 2%.

Sind mehrere Speisepunkte gleicher Spannung vorhanden, so können diese zu einem einzigen vereinigt gedacht werden. Diese Vereinigung kann auch unter Zwischenschaltung ihres Spannungsunterschiedes als elektromotorische Kraft bei ungleichen Speisespannungen beibehalten werden. Klarer bleiben jedoch in beiden Fällen die gesonderten Speisestellen.

Für die Strommethode ist die Zerlegung in offene Stränge für jeden Fall leicht zu erreichen, und für die Spannungsmethode ändert sich im Wesen auch nichts. Für beide Fälle läßt sich ganz ohne Voraussetzung arbeiten. Man erhält bei der ersten dadurch sehr lange Gleichungen mit vielen Gliedern, bei der zweiten sehr viele Gleichungen mit stark verkümmerten Gliedern. In

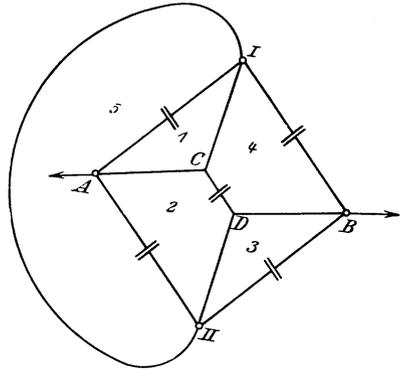


Abb. 72.

beiden hilft schon wesentlich die vorherige Anwendung der Befreiung der Leiter von ihren Entnahmen, also die Knotenbelastung.

Hat man m Maschen mit s Speisestellen, so wird die Zahl der erforderlichen Schnitte $k = m + s - 1$. Ist $s = 1$, so muß, wie angegeben, die Schnittzahl k der Maschenzahl m gleich sein. Jede weitere Speisestelle über die erste entspricht nämlich einer hinzugedachten Masche, wie in Abb. 72 die mit 5 bezeichnete. In diesem Falle werden vier Maschen mit zwei Speisestellen I und II durch $4 + 2 - 1 = 5$ Schnitte geöffnet. Löst man die Speiseknoten wie in Abb. 73 auf, so werden die vier Maschen geöffnet, also $m = 0$, und die Speisepunkte wachsen um vier, so daß $s = 6$. Die Schnittanzahl ist wieder $k = 0 + 6 - 1 = 5$. Wenn die Speisespannung $V_I = V_{II}$, so tritt die Vereinfachung ein, daß IA und IIA usw. zusammenklappbar werden.

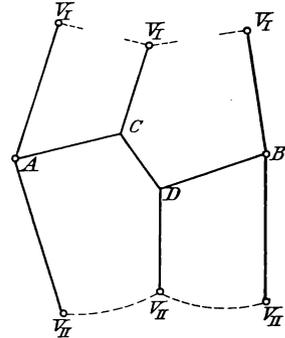


Abb. 73.

7. Über die Bildung von Netzen.

Die Verteilung des Stromes und der Spannung führte in beiden Fällen auf lineare Gleichungen. In diesen müssen alle Eigenschaften der Verteilung liegen. Jedem physikalischen wird ein mathematischer Vorgang lückenlos entsprechen. Ein Netz aus Ohmschen Widerständen hat bei gegebenen Abnahmen nur eine einzige Verteilung der Spannungen oder der Ströme, d. h. ihre linearen Gleichungen führen zu eindeutigen Werten. Diese Eindeutigkeit ging schon aus den Kirchhoffschen Sätzen hervor, die sich seinerzeit rasch einbürgerten. Die aus ihnen

hervorgegangenen Überlagerungs- oder Superpositionssätze gerieten dagegen in Vergessenheit und wurden erst viel später wieder bekannt.

Wirken in einem Netze gleichzeitig mehrere voneinander unabhängige EMKe, so ist ihr schließliches Ergebnis gleich dem, als ob sie nacheinander aufgetreten wären. Ihre Einzelwirkungen decken sich zur Gesamtwirkung, oder umgekehrt, die Gesamtwirkung zerlegt sich in die Einzelwirkungen. Gleiches gilt für den Strom in einem Netzleiter oder einer Abnahme aus einem Knoten. Der Kern dieser Beziehungen ruht im Ohmschen Gesetze.

Die Zusammensetzung eines Vorganges aus voneinander unabhängigen Teilvorgängen wird allgemein als Superposition bezeichnet. Der Satz des Kräfteparallelogramms von Newton, die Zusammensetzung der Saitenschwingungen von Sauveur, der Wärmeerscheinungen von Fourier sind Beispiele der Überlagerung oder Deckung von Gleichgewichtszuständen. Auch auf unserem Gebiete hat der Satz von der Superposition der Spannungen und Ströme seine volle Fruchtbarkeit erwiesen¹⁾.

Man kann ein Netz auf zweierlei Weise entstanden denken.

Die erste Art nimmt die Knoten als gegeben an und sieht in den Leitern ihre Verbindungen. Sind p Verzweigungspunkte vorhanden, so zählt man höchstens $\frac{1}{2} p \cdot (p - 1)$ Leiter, weil in jedem Knoten sich $p - 1$ Leiter vereinigen. Parallele Leiter werden dabei durch einen gleichwertigen ersetzt.

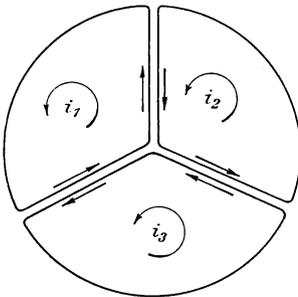


Abb. 74.

Dieser Entstehung entspricht das erste Kirchhoffsche Gesetz.

Die zweite Bildung nimmt zunächst selbständige lose Maschen als gegeben an. Jede solche Masche bestimmt eine abgegrenzte Fläche. Solange diese Flächen voneinander völlig entfernt liegen, kann von einem Netz keine Rede sein. Wohl aber wirkt schon jetzt jeder Maschenstrom auf alle anderen losen Maschen durch ein Kraftfeld ein, und das Stromverteilungsproblem steht bereits in gleicher Weise da wie beim schließlichen Netz. Dieses entsteht aus den losen Maschen durch Zusammenrücken zu gemeinschaftlichen Leiterstücken.

Der Strom in diesen Leiterstücken entspricht also der Summe der sich vereinigenden Maschenströme. Abb. 74 erklärt dies nur für die Ebene. Obige Erläuterung ist für den Raum gedacht, um störende Überkreuzungen der Leiter zu vermeiden. Bei p Knoten wird es höchstens für jeden Leiter $p - 2$ solcher nachbarlichen Maschenströme

¹⁾ Dieses Prinzip haben Smaassen: Pogg. Ann. 1864, S. 161, und E. du Bois-Reymond (in seinen Untersuchungen über tierische Elektrizität) vorausgesehen. Helmholtz hat die Superposition der elektrischen Ströme in Pogg. Ann. Bd. 89, S. 311, 353, 1853, und in den Wissensch. Abhandlungen Bd. 1, S. 475, streng bewiesen. Die Kirchhoff-Gesetze finden sich in Pogg. Ann. Bd. 75, S. 189, 1848. S. Kalischer beklagt in der ETZ 1892 das in vielen Fällen ungerechte Verdrängen der Superpositions-Sätze durch die Kirchhoffschen.

geben. Ebenso wie beim Netz eine Anzahl von Verbindungen fehlen können, die dann mit dem Widerstande Unendlich in Rechnung treten, können hier Maschen fehlen. Man muß sie dann mit den Maschenströmen Null in der allgemeinen Lösung bewerten. Die zweite Bildungsweise der Netze entspricht einer Superposition von Maschenströmen und bezieht sich auf das zweite Kirchhoffsche Gesetz.

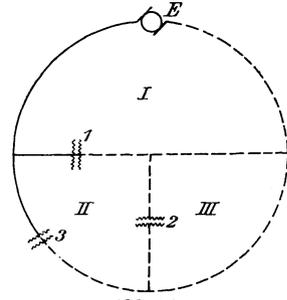


Abb. 75.

Jede neue Masche fügt 2 Knoten, 2 Leiter und einen Schnitt hinzu. Für die Abb. 75 ist $l - p + 1 = m = 6 - 4 + 1 = 3$, d. h. die Zahl der Leiter l vermindert um die Zahl der Knoten p ist gleich der um 1 verminderten Maschenzahl m . Für das um eine Masche bereicherte Netz gilt $(l + 2) - (p + 2) = m - 1$, also allgemein:

$$l - p = m - 1.$$

Die Anzahl der geschlossenen Wege oder Umläufe für n Punkte ist $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}{2}$. Drei Punkte haben $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$, vier Punkte $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{2} = 3$, fünf schon 12 mögliche Wege oder Maschen.

8. Kreis- oder Zyklenströme eines Netzes.

Nach der zweiten Entstehungsweise der Netze sucht man die freien Kreisströme $i_1, i_2 \dots$ der ursprünglichen losen Maschen eines Netzes. Die Leiter des Netzes sind hierbei als gemeinschaftliche Teile zweier Nachbarmaschen zu betrachten, und der tatsächliche Leiterstrom erscheint als Unterschied seiner zwei Nachbarzyklenströme. Sind $E_1, E_2 \dots$ die EMKE, r_{11}, r_{22} die Umfangswiderstände der Maschen 1, 2 .., ist ferner r_{ps} der Widerstand eines Leiterstückes, welches der p -ten und s -ten Masche gemeinschaftlich angehört, so gilt für eine Masche 1 nach der zweiten Kirchhoffschen Regel:

$$(i_1 - i_2) r_{12} + (i_1 - i_3) r_{13} + \dots = E_1$$

oder

$$i_1(r_{12} + r_{13} + \dots) - i_2(r_{21} + r_{23} + \dots) + \dots = i_1 r_{11} - i_2 r_{22} - \dots = E_1. \quad (1)$$

Für jede Masche ist also das Produkt ihres Zyklenstromes mit ihrem Gesamtwiderstand um die Produkte der nachbarlichen Zyklenströme mit den bezüglichen Widerständen zu vermindern und ihrer EMK gleichzusetzen. Für n Maschen lassen sich n solche Gleichungen .. aufstellen. Da der Widerstand zwischen der p ten und s ten Masche derselbe ist wie zwischen der s ten und p ten, so ist $r_{ps} = r_{sp}$, wodurch in den n Gleichungen symmetrisch zur Hauptdiagonale gleiche Koeffizienten auftreten, wie bei den Knotenspannungsgleichungen auch.

Läßt man, etwa in Abb. 76, aus den zwei dreieckigen Maschen r_{20}, r_{21}, r_{23} und r_{30}, r_{31}, r_{32} mit den Zyklenströmen i_2 und i_3 ein

einfaches Netz entstehen, Abb. 77, so kann man zur Ermittlung des gesamten Widerstandes zwischen den Punkten A und B noch eine Hilfsmasche i_1 hinzufügen, in der die EMK E mit einem Widerstand vom Werte Null wirkt. Für den Umlauf in jeder Masche des zusammengeführten Netzes gilt nun nach Gleichung (1):

$$\left. \begin{aligned} (r_{12} + r_{13} + 0) i_1 & - r_{12} i_2 & - r_{13} i_3 & = E \\ - r_{21} i_1 + (r_{21} + r_{23} + r_{20}) i_2 & - r_{23} i_3 & = 0 \\ - r_{31} i_1 & - r_{32} i_2 + (r_{31} + r_{32} + r_{30}) i_3 & = 0 \end{aligned} \right\} (2)$$

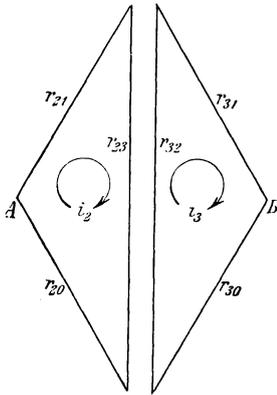


Abb. 76.

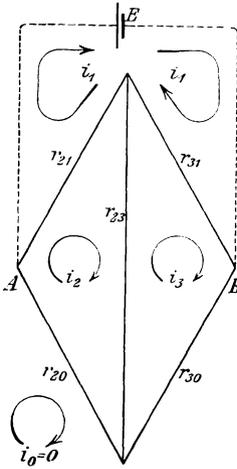


Abb. 77.

Der Strom i_1 geht vom Knoten A über E nach B . Wenn nämlich das ganze Netz in eine Ebene ausgebreitet wird, so darf man ihr unbenutztes unendliches Flächenstück als zu einer Masche gehörig ansehen, deren Zyklusstrom die Stärke $i_0 = 0$ besitzt. Dadurch wird ausnahmslos jeder Leiterstrom, auch der der Hilfsmasche, dem Unterschied seiner beiden nachbarlichen Maschenströme gleich. Nach der Determinantenlehre ist

aus den Gleichungen (2) der Zyklusstrom i_1 sofort anzusetzen:

$$i_1 = R_{AB} = \frac{E}{\begin{vmatrix} E & -r_{12} & -r_{13} \\ 0 & (r_{12} + r_{23} + r_{02}) & -r_{23} \\ 0 & -r_{23} & (r_{13} + r_{23} + r_{03}) \end{vmatrix}} \quad (3)$$

$$\begin{vmatrix} (r_{12} + r_{13} + 0) & -r_{12} & -r_{13} \\ -r_{12} & (r_{12} + r_{23} + r_{02}) & -r_{23} \\ -r_{13} & -r_{23} & (r_{13} + r_{23} + r_{03}) \end{vmatrix}$$

Der Zähler gibt

$$E \cdot \begin{vmatrix} (r_{12} + r_{23} + r_{02}) & -r_{23} \\ -r_{23} & (r_{13} + r_{23} + r_{03}) \end{vmatrix},$$

woraus der gesuchte Widerstand zwischen A und B folgt:

$$R_{AB} = \frac{\begin{vmatrix} (r_{12} + r_{13}) & -r_{12} & -r_{13} \\ -r_{12} & (r_{12} + r_{23} + r_{02}) - r & \\ -r_{13} & -r_{23} & (r_{13} + r + r_{03}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (r_{12} + r_{23} + r_{02}) & -r_{23} \\ -r_{23} & (r_{13} + r_{23} + r_{03}) \end{vmatrix}} = G_{AB}^{-1}.$$

Die Zählerdeterminante eines beliebigen Widerstandes zwischen zwei Knoten enthält in der Hauptdiagonale als Elemente die Summenwiderstände jeder einzelnen Masche

$$r_{11} = (r_{12} + r_{13} + \dots), \dots r_{22} = (r_{21} + r_{23} + r_{20}), \dots$$

Den Anfang macht die Hilfsmasche. Die anderen Elemente jeder Determinantenzeile bilden die negativ angesetzten Widerstände, welche die

dem Diagonalgliede entsprechende Masche von ihren Nachbarmaschen trennen. Null wird für jene Elemente eingefügt, welche den nicht unmittelbaren Maschen gelten. Der Nenner ist die Unterdeterminante seines Zählers, genommen nach dem ersten Elemente der Determinante. Diese Maschenregel bezog Clerk Maxwell auf in einer Ebene ausgebreitete Netze mit sich nicht überquerenden Leitern. Die späteren Erklärungen von Kirchhoff und Helmholtz als Randumläufe im Faden statt in der durch den Faden bestimmten einfach oder mehrfach zusammenhängenden Maschenfläche nehmen dieser Regel ihre Beschränkung.

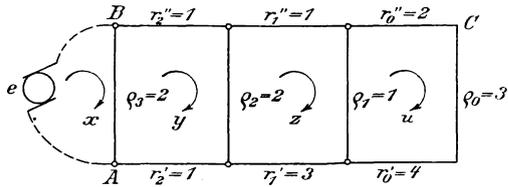


Abb. 78.

Man kann in einfachen Fällen die überkreuzenden Leiter in die gemeinschaftliche Ebene der anderen, sich nicht kreuzenden Leiter klappen und ihre Maschenflächen als Teile der mehrblättrigen Ebene auffassen. Die Netzspaltung (Seite 75 u. 154) gibt hier den einfachsten Aufschluß.

Diese Determinantenregel für den Widerstand zwischen zwei Knoten ist ebenso wie der Ausdruck (3) für den Leiterstrom das analytische Bild des Netzverbundes, dessen Einzelheiten sich in ihr vollständig widerspiegeln. Besteht das Netz aus Gruppen, so treten diese auch in ihren Determinanten hervor.

Als Beispiel diene noch die kettenförmige Leiterverbindung Abb. 78. x, y, z und u sind die gesuchten Zyklusströme, die Querwiderstände

$$\varrho_0 = 3, \quad \varrho_1 = 1, \quad \varrho_2 = 2, \quad \varrho_3 = 2$$

und die Längswiderstände

$$r'_2 = 1 = r''_2, \quad r'_1 = 3, \quad r''_1 = 1, \quad r'_0 = 4, \quad r''_0 = 2$$

sind gegeben. Die Zyklengleichungen lauten:

$$\begin{array}{cccc} 2x & -2y & -0z & -0u = e \\ -2x(2+1+2+1)y & & -2z & -0u = 0 \\ -0x & -2y(2+1+1+3)z & & -1u = 0 \\ -0x & -0y & -1z(1+2+3+4)u & = 0 \end{array}$$

woraus:

$$R_{AB} = \left| \begin{array}{cccc|cccc} 2 & -2 & 0 & 0 & 6 & -2 & 0 & \\ -2 & 6 & -2 & 0 & -2 & 7 & -1 & \\ 0 & -2 & 7 & -1 & 0 & -1 & 10 & \\ 0 & 0 & -1 & 10 & & & & \end{array} \right| = \frac{8 \cdot 59}{2 \cdot 187} = 1,26,$$

welches Ergebnis mit früherem, S. 32, übereinstimmt. Dies zeigt, daß jeder kontinuierliche oder Kettenbruch durch eine besondere Determinante (nach Muir Kontinuante genannt) darstellbar ist, wie bereits Ramus 1855¹⁾ fand.

¹⁾ Günther, Sig.: Darstellung der Näherungswerte von Kettenbrüchen in indepenter Form. 1873.

Die Zyklenmethode hat, nach einer Mitteilung J. A. Flemings¹⁾, Clerk Maxwell in seiner letzten Universitätsvorlesung gegeben. G. Kirchhoff hat sich mit diesen Umläufen gleichfalls befaßt²⁾, ebenso H. Helmholtz³⁾. Die Frage der mehrfach zusammenhängenden Räume mit den Netzgebilden hat B. Riemann⁴⁾ aufgedeckt.

9. Knotenspannungen eines Netzes.

Bei der ersten Art der Bildung von Netzen nimmt man die Knoten als gegeben und erhält dann bei p Knoten oder Verzweigungspunkten nach dem ersten Kirchhoffschen Gesetz p lineare Stromgleichungen mit den Knotenspannungen als Unbekannten. Ein sehr einfacher Fall ist hierfür schon anlässlich der Abb. 68 behandelt worden. Nun soll der allgemeine Fall folgen. (Abb. 79)

Bezeichnet man mit g_{pq} den Leitwert eines Leiters von A_p nach A_q , mit J_{pq} seinen Strom; ferner die Spannung und den Strom im Knoten A_p mit V_p und J_p , jene im Knoten A_q mit V_q und J_q , so hat man nach dem Ohmschen Gesetze:

$$J_{pq} = g_{pq} (V_p - V_q).$$

Der Leitwert des Leiters $A_p A_q$ ist von der Richtung unabhängig, also dem des Leiters $A_q A_p$ gleich, während den Strömen eine Richtung zukommt. Demnach gilt:

$$g_{pq} = g_{qp} \text{ und } J_{pq} = -J_{qp}.$$

Setzt man in den Knoten A stationären Zustand voraus, so daß also keine Elektrizitätsanhäufung stattfindet, so muß die erste Kirchhoffsche Beziehung für irgendeinen Knoten A_p gelten:

$$J_{p1} + \dots + J_{pn} - J_p = 0$$

oder:

$$g_{p1} (V_1 - V_p) + g_{p2} (V_2 - V_p) + \dots + g_{pn} (V_n - V_p) - J_p = 0,$$

und nach den Spannungen geordnet:

$$-(g_{p1} + g_{p2} + \dots + g_{pn}) V_p + g_{p1} V_1 + g_{p2} V_2 + \dots + g_{pn} V_n - J_p = 0 \dots (M).$$

In ihnen fehlt das Zeichen g_{pp} . Es würde den Leitwert eines Leiters vorstellen, der A_p mit A_p verknüpft. Da es einen solchen gemäß unserer

¹⁾ Philosoph. mag. Bd. (5), 20, S. 221, 1885, auch in der 3. Aufl. von Maxwells treatise von J. J. Thomson § 282 und in der Schlußbemerkung zu diesem Kapitel.

²⁾ W. Feußner gibt in seinem Aufsätze „Über Stromverzweigung in netzförmigen Leitern“ den Vergleich zwischen der Kirchhoffschen und Maxwell'schen Rechnung. Ann. Physik Bd. 9, Nr. 13, S. 1316, 1902.

³⁾ In seinen Wissenschaftl. Abhandl. Bd. 1, S. 435, und E. Cohn in seinem Werke „Das elektromagnetische Feld“ S. 141, 1900.

⁴⁾ In seinen Vorlesungen „Schwere, Elektrizität und Magnetismus“ und dem Hattendorffschen Buche S. 284, 1876.

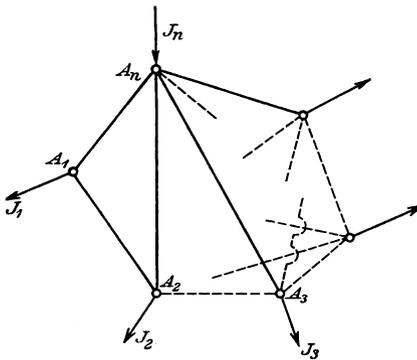


Abb. 79.

Annahme nicht gibt, so hat jenes Zeichen noch keine physikalische Bedeutung. Im folgenden soll darunter die Summe der Leitwerte verstanden werden, die sich auf den Knoten A_p bezieht.

Demgemäß wäre

$$g_{pp} = g_{p1} + \dots + g_{pn},$$

und damit verwandelt sich die Gleichung M in folgende:

$$g_{p1} V_1 + g_{p2} V_2 + \dots - g_{pp} V_p + g_{pn} V_n - J_p = 0. \quad (1)$$

Zählt man hierzu die Identität

$$(g_{p1} - g_{p1}) V_n + (g_{p2} - g_{p2}) V_n + \dots + (g_{pn} - g_{pn}) V_n = 0,$$

dann folgt

$$g_{p1} (V_1 - V_n) + g_{p2} (V_2 - V_n) + \dots - g_{pp} (V_p - V_n) - J_p = 0$$

oder nach Einführung der Spannungsunterschiede

$$V_n - V_1 = v_1; \quad V_n - V_2 = v_2 \dots V_n - V_p = v_p,$$

die neue Form

$$-g_{p1} v_1 - g_{p2} v_2 - \dots + g_{pp} v_p - \dots - g_{pn} v_n - J_p = 0. \quad (2)$$

Da p alle Werte von $p = 1$ bis $p = n$ durchläuft, ergeben sich n Gleichungen, die sich aber, weil ihre Summe identisch verschwinden muß, auf $n - 1$ unabhängige Gleichungen herabsetzen, sofern ein Speisepunkt angenommen wird. Hieraus lassen sich die $n - 1$ Unbekannten $v_1, v_2 \dots$ bis v_{n-1} ermitteln. Die Spannung V_n im Knoten A_n dient als bekannte Grundspannung und kann auch gleich Null gewählt werden. Physikalisch damit in Übereinstimmung ist, daß mindestens ein Verzweigungspunkt als Speisepunkt dienen muß, dessen Spannung bekannt ist.

Die Umformung ergibt also ein System von $n - 1$ unabhängigen Gleichungen von der Form

$$\begin{array}{rcccccc} +g_{11} v_1 - g_{12} v_2 - g_{13} v_3 - \dots - g_{1n} v_n & = & J_1 \\ -g_{21} v_1 + g_{22} v_2 - g_{23} v_3 - \dots - g_{2n} v_n & = & J_2 \\ \vdots & & \vdots \\ -g_{n1} v_1 - g_{n2} v_2 - g_{n3} v_3 & & + g_{nn} v_n & = & -J_n \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

aus denen die $n - 1$ Spannungsunterschiede vom Knoten A_n zu den übrigen ermittelt werden können.

In den Gleichungen sind alle Diagonalglieder positiv, alle übrigen negativ. Die Knotenlasten rechts vom Gleichheitszeichen sind positiv, die zugeführten Ströme in den Speisepunkten dagegen negativ.

Beispiel.

In Abb. 80 ist ein Netz für 2000 Volt gegeben, wobei alle Abnahmeströme auf die Knotenpunkte verlegt sind. Dadurch ergaben sich die Belastungen der sechs Knoten, die je auf zwei Dezimalen angegeben sind. Die Leiter besitzen verschiedene Querschnitte und Längen, wie aus der Abbildung ersichtlich.

Bezeichnet man die Spannungen in den Knotenpunkten *I* bis *VI* der Reihe nach mit V_1 bis V_6 , so erhält man fünf unabhängige lineare

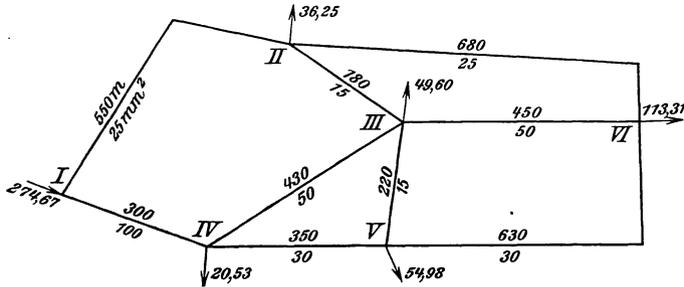


Abb. 80.

Gleichungen, während die Gleichung des Speisepunktes *I* abhängig ist und nur zur Kontrolle dient. Die Gleichungen lauten:

$$\frac{V_2 - V_1}{550} + \frac{V_4 - V_1}{300} = -274,67 \text{ zum Speisepunkt (I),}$$

$$\frac{V_1 - V_2}{550} + \frac{V_3 - V_2}{180} + \frac{V_6 - V_2}{680} = 36,25 \text{ zum Knoten (II),}$$

$$\frac{V_2 - V_3}{180} + \frac{V_4 - V_3}{430} + \frac{V_5 - V_3}{220} + \frac{V_6 - V_3}{450} = 49,60 \text{ zum Knoten (III),}$$

$$\frac{V_1 - V_4}{300} + \frac{V_3 - V_4}{430} + \frac{V_5 - V_4}{350} = 20,53 \text{ zum Knoten (IV),}$$

$$\frac{V_3 - V_5}{220} + \frac{V_4 - V_5}{350} + \frac{V_6 - V_5}{630} = 54,98 \text{ zum Knoten (V),}$$

$$\frac{V_2 - V_6}{680} + \frac{V_3 - V_6}{450} + \frac{V_5 - V_6}{630} = 131,13 \text{ zum Knoten (VI).}$$

Führt man statt der Widerstände ihre Leitwerte ein und umrahmt

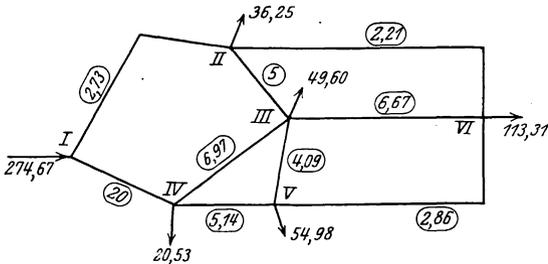


Abb. 81.

diese, um sie von den Strömen zu unterscheiden, so erhält man das Bild der Abb. 81. Man kann aus dieser Abb. direkt das Gleichungssystem von Seite 97 anschreiben, wobei z. B. für den Knotenpunkt *III* $g_{33} = 5 + 6,67 + 4,09$

+ 6,97 = 22,73 wird. Die Knotenpunktgleichungen sind Stromgleichungen. Es sind nur 5 Knotenpunkte vorhanden; die erste von

den 6 angeschriebenen Gleichungen entspricht dem Speisepunkt. Sie kann als Kontrollgleichung dienen und entspricht tatsächlich der von Gauß und Gerling eingeführten Gleichung (siehe Seite 113). Wir finden also hier eine physikalische Deutung eines von Gerling nach dem Vorschlag von Gauß in die später zu erörternde Ausgleichsrechnung eingeführten mathematischen Hilfsmittels.

(I)	22,73v ₁ - 2,73v ₂	- 20v ₄		= -274,67 (Kontrolle)
(II)	- 2,73v ₁ + 9,94v ₂ - 5v ₃		- 2,21v ₆	= 36,25
(III)	- 5v ₂	+ 22,73v ₃ - 6,97v ₄ - 4,09v ₅ - 6,67v ₆		= 49,60
(IV)	- 20v ₁	- 6,97v ₃ + 32,11v ₄ - 5,14v ₅		= 20,53
(V)		- 4,09v ₃ - 5,14v ₄ + 12,09v ₅ - 2,86v ₆		= 54,98
(VI)		- 2,21v ₂ - 6,67v ₃	- 2,86v ₅ + 11,74v ₆	= 113,31
	0	0	0	0

Die Kontrolle (oder Speisepunkt-) gleichung liefert also als Summe der vertikalen Koeffizienten der unbekanntenen Spannungsverluste links,

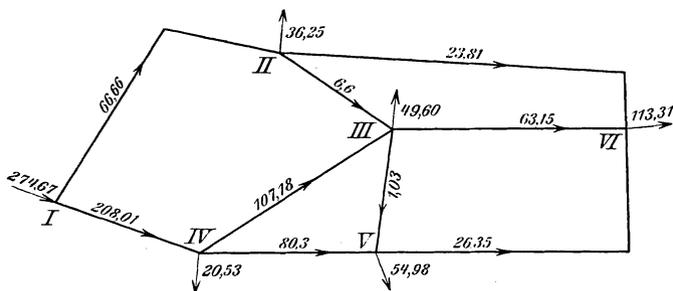


Abb. 82.

oder der Ströme rechts vom Gleichheitszeichen stets Null und gestattet so die Überwachung von Schreib- oder Rechenfehlern.

Hieraus können die Spannungsunterschiede v_2 , v_3 , v_4 , v_5 und v_6 und mit ihrer Hilfe die in Abb. 82 eingetragenen Leiterströme ermittelt werden. Man findet so für $v_1 = 0$, entsprechend dem Speisepunkt, die Werte:

$$v_2 = 24,46 \text{ Volt}$$

$$v_3 = 25,78 \text{ ,,}$$

$$v_4 = 10,40 \text{ ,,}$$

$$v_5 = 25,77 \text{ ,,}$$

$$v_6 = 35,24 \text{ ,,}$$

Im Leiter II—III fließt also ein Strom $(25,78 - 24,46) \cdot 5 = 1,32 \cdot 5 = 6,60$ Amp., im Leiter I—IV ein Strom $10,40 \cdot 20 = 208$ Amp., während in der Abbildung der Wert 208,01 eingeschrieben ist. Die zweite Dezimale ist etwas unsicher, weil die Rechnung nach der Schnittmethode nur auf soviel Stellen durchgeführt wurde.

Schneidet man das Netz an den Stellen *III* und *VI* auf, so kann man die in Abb. 83 eingeschriebenen unbekannt Teilströme x_1 bis x_4 aus den folgenden vier linearen Gleichungen nach der Schnittmethode erhalten:

$$(36,25 + x_1 + x_3) \frac{550}{25} + x_3 \cdot \frac{180}{15} = (238,42 - x_1 - x_2) \frac{300}{100} + (162,91 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4) \frac{450}{50} \quad (1)$$

$$x_1 \cdot \frac{680}{25} = x_3 \cdot \frac{180}{15} + (113,31 - x_1 - x_2) \frac{450}{50} \quad (2)$$

$$(162,91 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4) \frac{430}{50} = (54,98 + x_2 + x_4) \frac{350}{30} + x_4 \cdot \frac{220}{15} \quad (3)$$

$$x_4 \cdot \frac{220}{15} + (113,31 - x_1 - x_2) = x_2 \cdot \frac{630}{30} \quad (4)$$

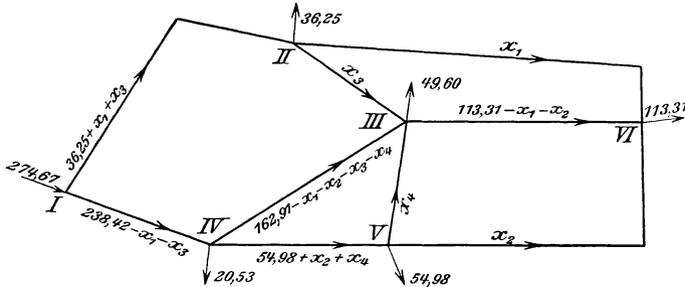


Abb. 83.

Diese Gleichungen ergeben umgeformt:

$$33,6x_1 + 8,6x_2 + 45,6x_3 + 8,6x_4 = 1318,786, \quad (I)$$

$$36,2x_1 + 9x_3 - 12x_4 = 1019,79, \quad (II)$$

$$25,8x_1 + 60,8x_2 + 25,8x_3 + 104,8x_4 = 2278,778, \quad (III)$$

$$27x_1 + 90x_2 - 44x_4 = 3059,37. \quad (IV)$$

Aus Gleichung II und IV erhält man

$$x_3 = \frac{36,2x_1 + 9x_2 - 1019,79}{12} \dots \quad (a)$$

$$x_4 = \frac{27x_1 + 90x_2 - 3059,37}{44} \dots \quad (b)$$

Nach Einsetzung dieser Werte in I und III findet man

$$3881,62x_1 + 1328,6x_2 = 127423,027,$$

$$3694,66x_1 + 6479,3x_2 = 258680,217,$$

woraus

$$x_1 = \frac{d_1}{D}, \quad x_2 = \frac{d_2}{D}.$$

Hierin bedeutet D die Nennerdeterminante

$$D = \begin{vmatrix} 3881,62 & 1328,6 \\ 3694,66 & 6479,3 \end{vmatrix}$$

und d_1, d_2 sind die Zählerdeterminanten:

$$d_1 = \begin{vmatrix} 127423,027 & 1328,6 \\ 258680,217 & 6479,3 \end{vmatrix}; \quad d_2 = \begin{vmatrix} 3881,62 & 127423,027 \\ 3694,66 & 255680,217 \end{vmatrix}.$$

Man findet also

$$x_1 = 23,81; \quad x_2 = 26,35 \text{ Amp.},$$

und nach Einsetzung in die Gleichungen (a) und (b)

$$x_3 = 6,6; \quad x_4 = -1,03 \text{ Amp.}, \text{ wie in Abb. 82.}$$

Die wirklichen Schnittpunkte sind also, wie in Abb. 82 ersichtlich, die Knoten *III, V* und *VI*. Die Probe ergibt folgende Werte:

Verlust auf dem Weg	I—II—VI: 24,46 + 10,78	= 35,24 V
	I—IV—V—VI: 10,4 + 15,62 + 9,22	= 35,24 V
	<u>I—IV—III—VI: 10,4 + 15,37 + 9,47</u>	<u>= 35,24 V</u>
" " " "	<u>IV—III—V: 15,37 + 0,25</u>	<u>= 15,62 V</u>
	<u>IV—V:</u>	<u>15,62 V</u>
" " " "	<u>I—II—III—V: 24,46 + 1,32 + 0,25</u>	<u>= 26,03 V</u>
	<u>I—IV—V: 10,4 + 15,62</u>	<u>= 26,02 V.</u>

10. Zur Theorie der Knotenspannungsmethode.

Die algebraische Summe der Ströme in einem Kreuzungspunkt, Knoten- oder Speisepunkt muß nach dem ersten Kirchhoffschen Gesetze Null sein. Daraus ergab sich bereits (S. 96) die lineare Abhängigkeit der Spannung eines Knotens von seinen Nachbarknotenspannungen und von seiner Knotenstromlast. Für die Folge werde der Leitwert eines Netzleiters vom Knoten n zu m und umgekehrt mit g_{nm} bezeichnet. Die Summe der Leitwerte aller Leiter eines Knotens n sei durch g_{nn} ausgedrückt; sie entspricht dem Leitwerte vom Knoten n zu allen untereinander kurzgeschlossenen nachbarlichen Knoten. Für jedes Netz aus bekannten Leitern und gegebenen Knotenlasten J mit n , hier vier, Kreuzungspunkten 1, 2, 3 und 4 bestehen hiernach $n = 4$ Gleichungen:

$$\begin{array}{r} + g_{11} E_1 - g_{12} E_2 - g_{13} E_3 - g_{14} E_4 = J_1 \\ - g_{21} E_1 + g_{22} E_2 - g_{23} E_3 - g_{24} E_4 = J_2 \\ - g_{31} E_1 - g_{32} E_2 + g_{33} E_3 - g_{34} E_4 = J_3 \\ - g_{41} E_1 - g_{42} E_2 - g_{43} E_3 + g_{44} E_4 = J_4 \\ \hline 0 0 0 0 0 \end{array} \quad (1)$$

Von diesen Ansätzen ist mindestens einer, etwa der vierte, von den übrigen abhängig; denn die Summe der in das Netz eintretenden Ströme entspricht der Gesamtheit der austretenden, $\sum J = 0$, und die Summe aller g in jeder Spalte oder lotrechten Reihe des obigen Schemas (1), z. B. $-g_{14} - g_{24} - g_{34} - g_{44} = 0$, oder in jeder Zeile muß laut Erklärung der Bezeichnung g_{nn} Null sein. Von allen Kreuzungspunkten muß mindestens einer eine Speisestelle des Netzes sein.

Die Verteilung hängt nicht von den absoluten Werten der Knotenspannungen E ab; es kommen nur ihre Unterschiede ($E_1 - E_4$) usw. in

Betracht. Die Determinante des Systems (1) muß wegen der Abhängigkeit einer Gleichung von den andern Null sein. Die erste Gleichung von (1) lautet dann:

$$\begin{aligned} g_{12}(E_1 - E_2) + g_{13}(E_1 - E_3) + g_{14}(E_1 - E_4) &= g_{12}\{(E_1 - E_2) - (E_2 - E_4)\} \\ &\quad + g_{13}\{(E_1 - E_4) - (E_3 - E_4)\} + g_{14}(E_1 - E_4) \\ &= g_{12}(V_1 - V_2) + g_{13}(V_1 - V_3) + g_{14}V_1 = g_{11}V_1 - g_{12}V_2 - g_{13}V_3 = J_1. \end{aligned}$$

Für die andern Gleichungen gilt Entsprechendes.

Die Spannungen E können mit irgendeiner beliebigen Nullhöhe verglichen werden. Wird etwa $E_4 = 0$ gewählt, so geht diese Gleichung bei Einsetzung der Spannungsunterschiede

$$E_1 - E_4 = V_1, \quad E_2 - E_4 = V_2, \dots$$

in den aus der ersten Gleichung von (1) unmittelbar lesbaren Ansatz über:

$$\begin{aligned} g_{11}V_1 - g_{12}V_2 - g_{13}V_3 &= J_1 \\ -g_{21}V_1 + g_{22}V_2 - g_{23}V_3 &= J_2 \\ -g_{31}V_1 - g_{32}V_2 + g_{33}V_3 &= J_3 \end{aligned} \quad (2)$$

und entsprechend weiter.

Da die Widerstände der hier betrachteten Leitungen als von der Stromrichtung unbeeinflusst angenommen werden, so ist $g_{nm} = g_{mn}$, wodurch die auf die Hauptdiagonale (von 11 gegen nn) bezogenen Koeffizienten, wie etwa g_{12} und g_{21} , des Gleichungssystems (2) einander gleich und ihre Determinante, sowie die aus ihr gebildeten kondiagonalen Unterdeterminanten, symmetrisch werden.

Die Auflösung des Gleichungssystems (2) gibt in anweisender Form die Determinantenlehre wie folgt an:

$$V_1 = \begin{vmatrix} J_1 - g_{12} - g_{13} \\ J_2 + g_{22} - g_{23} \\ J_3 - g_{32} + g_{33} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} g_{11} - g_{12} - g_{13} \\ -g_{21} + g_{22} + g_{23} \\ -g_{31} - g_{32} - g_{33} \end{vmatrix} \quad (3)$$

Entsprechend mit gleichem Nenner D für V_2, V_3, \dots

Bezeichnet man die Nennerdeterminante mit D , die Unterdeterminante nach dem Zahlenweiser ihres führenden Elementes, z. B. die zu g_{12} gehörige mit D_{12} usw., so hat man aus (3)

$$V_1 = J_1 \frac{D_{11}}{D} + J_2 \frac{D_{12}}{D} + \dots = J_1 \varrho_{11} + J_2 \varrho_{12} + \dots \quad (4)$$

Der Bruch D_{11}/D bedeutet den Spannungsbeitrag ϱ_{11} , der durch die Einheitsstromentnahme im Knoten 1, $J_1 = 1$, $J_2 = J_3 = \dots = 0$, allein hervorgerufen wird, ebenso D_{12}/D jenen ϱ_{12} für $J_1 = 0$, $J_2 = 1$, $J_3 = 0 \dots$ usw. Die Gleichung (4) spricht also das Überlagerungsgesetz der Spannungen aus.

Diese den einzelnen Einheitslasten der Knoten zugehörigen Spannungswerte entsprechen besonderen aus dem Netze zu bildenden Widerständen ϱ , weil die Spannung des Einheitsstromes immer mit dem Widerstand übereinstimmt.

Beispiel:

An einem einfachen Beispiel sollen diese Netzwidestände ϱ und ihre Beiwerte aufgeklärt werden. Ein einfachgeschlossener Kreis in Abb. 84 mit den zwei Abnahmen J_1 und J_2 , den Widerständen a, b, c und $a + b + c = s$ sei gegeben. Dann findet sich nach der Schnittmethode der Teilstrom x von J_1 wie folgt:

$$ax = (J_1 - x)(b + c) + J_2c, \text{ also } x = J_1 \frac{(b + c)}{s} + J_2 \frac{c}{s}$$

und

$$V_1 = ax = J_1 \frac{a(b + c)}{s} + J_2 \frac{ac}{s} = J_1 \varrho_1 + J_2 \varrho_1^{12},$$

$J_1 \varrho_1$ ist die Spannung, welche durch den Strom J_1 allein entsteht. J_2 erzeugt im Knoten 2 eine Spannung, die durch den Widerstand ϱ_2 zwischen O und 2 mit $\frac{(a + b)c}{s}$ bestimmt ist, also $J_2 \frac{(a + b)c}{s}$ beträgt.

Von dieser Spannung im Knoten 2 erhält aber der Knoten 1 nur den Teilbetrag $a : (a + b)$. Demnach beträgt der Spannungsbeitrag der Abnahme J_2 auf den Knoten 1

$$J_2 \frac{(a + b)c}{s} \frac{a}{a + b} = J_2 \frac{ac}{s},$$

wie sich bereits ergab. Der Widerstandsbeitrag ϱ_1^{12} findet sich aus ϱ_1 durch Weglassen aller Leiter in seinem Zähler, welche durch Kurzschließen der Knoten 1 und 2 entfielen.

Der Gesamtleitwert zwischen zwei Netzknoten drückt sich hier nach, etwa zwischen den Knoten 1 und n , auch aus durch:

$$g_{1n} = D_{(g)}/D_{1n} = \begin{vmatrix} +g_{11} - g_{12} - g_{13} \\ -g_{21} + g_{22} - g_{23} \\ -g_{31} - g_{32} + g_{33} \end{vmatrix} : D_{1n} = R_{1n}^{-1}. \quad (3)$$

Das Produkt der aus den Widerständen gebildeten Determinanten $R_{1n} = D_{(r)}/D_{1n} \dots$ und der aus den Leitwerten für dieselben Knoten 1 und n nun gewonnenen $g_{1n} = D_{(g)}/D_{1n}$ muß 1 geben.

Die Gleichung (3) lehrt eine zweite Determinantenregel, um den Leitwert zwischen zwei Knoten aus den Leitwerten des Netzes zu bestimmen, wie dies die Maschenregel für die Widerstände tut. Er ist ein Bruch aus der Netzdeterminante der Leiterwerte, geteilt durch die Unterdeterminante des führenden Elementes.

11. Die Vergleichung von Strom- und Spannungsgleichungen.

In den Maschen- oder Stromgleichungen kann unbeschadet ihrer Allgemeinheit die EMK $E = 1$ gesetzt werden. Dem vorerst sinnlosen Ausdruck r_{nn} kam die Bedeutung des Umfangswiderstandes zu. Ganz

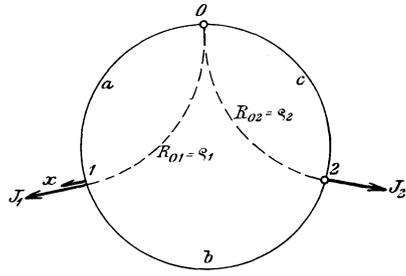


Abb. 84.

entsprechend war der Leitwert g_{nn} die Summe der Leitwerte um den Knoten. In den Knotengleichungen kann man wieder nacheinander die Einheitsabnahme wirken lassen, also den Abnahmestrom $J_n = 1$ und alle anderen der Null gleichsetzen. Auf diese Weise werden die beiden Strom- und Spannungsgleichungen völlig gleichartig. Den Gliedern r_i entspricht gV , dem Stromknoten die Spannungsmasche und umgekehrt, den Widerständen nachbarlicher Maschen sind die Leitwerte entsprechender Knoten zugewiesen.

Die Reziprozität der Gleichung (3) ist also der analytische Ausdruck für die Beziehung der Strom- und Spannungsbilder. Wenn im Leiternetz mehrere Knoten sich zu einem einzigen vereinigen, also ihre Verbindungen kurzgeschlossen werden, so decken sich ihre Spannungsknoten, während ihre Strommaschen sich zu einer einzigen öffnen. Wenn im Leiternetz mehrere Maschen sich öffnen, leerlaufend werden, so decken sich ihre Stromknoten, während ihre Spannungsmaschen sich zu einer einzigen öffnen.

12. Die Verteilung der Energie in Netzen.

Unter allen erdenklichen Verteilungen einer gegebenen Leistung in einem bestimmten Netze erfolgt tatsächlich nur die, welche den geringsten Aufwand in den Leitern beansprucht. Die durch Wärme nach dem Jouleschen Gesetz verlorene Energie beträgt z. B. an dem Netz der Abb. 77:

$$\begin{aligned} \varphi &= r_{12} (i_2 - i_1)^2 + r_{23} (i_2 - i_3)^2 + r_{02} (0 - i_2)^2 + r_{13} (i_1 - i_3)^2 + \\ &\quad + r_{03} (0 - i_3)^2 = \\ &= r_{11} i_1^2 + r_{22} i_2^2 + r_{33} i_3^2 - 2 r_{12} i_1 i_2 - 2 r_{13} i_1 i_3 - 2 r_{23} i_2 i_3. \quad (1) \end{aligned}$$

Die Änderung dieses Leistungsbetrages hinsichtlich der Maschenströme i_2 und i_3 wird durch ihre partiellen Differentialquotienten angezeigt. So ist

$$\frac{1}{2} \partial \varphi / \partial i_2 = r_{22} i_2 - r_{12} i_1 - r_{23} i_3 = -r_{12} i_1 + (r_{12} + r_{23} + r_{20}) i_2 - r_{23} i_3 \quad (2)$$

und entsprechend für i_1 und i_3 . Diese Gleichungen gleich Null gesetzt, stimmen mit den Maschengleichungen (2) Seite 94 überein. Demnach müssen die ersten partiellen Differentialquotienten dieser Zerstreuungsfunktion φ auch Null sein. Da ferner ihre zweiten Ableitungen, als nur von Widerständen abhängig, positiv sein müssen, so stellt φ das besagte Minimum vor. Dieser Satz des geringsten elektrischen Aufwands befand sich im handschriftlichen Nachlaß von C. F. Gauß zwischen Eintragungen des Jahres 1833¹⁾.

Der Ausdruck (1) für die Zerstreuungsfunktion gestaltet sich also wie folgt um:

$$\begin{aligned} \varphi &= r_{11} i_1^2 - 2 r_{12} i_1 i_2 - 2 r_{13} i_1 i_3 - \\ &\quad + r_{22} i_2^2 - 2 r_{23} i_2 i_3 - \\ &\quad + r_{33} i_3^2 - \end{aligned} \quad (3)$$

¹⁾ Ges. Werke Bd. 5, S. 601. 1874.

Für die Knotengleichungen ist die Summe der vergeudeteten Leistung ganz entsprechend dem vorhergehenden bei den Maschengleichungen zu ermitteln:

$$\sum (ri^2) = \sum \left[r \left(\frac{V - V_1}{r} \right)^2 \right] = \sum [g(V^2 - 2VV_1 + V_1^2)].$$

Man findet hieraus die Zerstreungsfunktion φ statt durch Ströme und Widerstände nun durch Knotenspannungen und Leiterwerte ausgedrückt:

$$\begin{aligned} \varphi = & g_{11}V_1^2 - 2g_{12}V_1V_2 - 2g_{13}V_1V_3 - \dots \\ & + g_{22}V_2^2 - 2g_{23}V_2V_3 - \dots \\ & + g_{33}V_3^2 - \dots \end{aligned}$$

Die Zerstreungsfunktion ist also nach den beiden Entwicklungen der Maschen- und Knotengleichungen eine quadratische Gleichung aller Unbekannten. Sie bildet die Mutterform, die alle gegebenen linearen Gleichungen in sich birgt.

Ihre Einführung und Bezeichnung rührt von Lord Rayleigh her. Für das Netzproblem könnte sie ebensogut als Verteilungsfunktion nicht nur der Energie, sondern auch der Ströme und Spannungen angesehen werden. Da diese Funktion aber auch in anderen Gebieten, so der Schwingungslehre, eine Rolle spielt, so ist sie weiterbehalten worden.

Jede quadratische Form läßt sich durch einfache Umwandlungsbeziehungen in eine Summe von rein quadratischen Gliedern umformen, worauf hier jedoch nicht eingegangen werden soll.

Ob die Strom- oder die Spannungsmethode zur geringeren Anzahl und zu rechnerisch bequemeren Gleichungen führt, ist eine von Fall zu Fall zu entscheidende Frage; ebenso, ob man besser mit Widerständen oder mit Leiterwerten rechnen soll. Dies gilt, weil bei praktischen Netzen meistens einige Leiter fehlen. Ist das Netz vollständig, d. h. sind n Kreuzungspunkte, und zwar eine Speisestelle und $n - 1$ Knoten durch alle $\frac{1}{2}n(n - 1)$ Leiterwerte g_{12}, g_{13}, \dots miteinander verbunden, so gibt die Determinante

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nn} \end{vmatrix}$$

durch Rändern, d. h. durch Abstreichen der untersten Zeile und der rechten äußersten Elementensäule die charakteristische oder Zerstreungsfunktion φ .

Manchmal ist das Arbeiten mit den Leitwerten g zweckmäßiger als mit den Widerständen r . Die n Knotenpunkte geben dem Strom $\frac{1}{2}(n - 1)(n - 2)$ Freiheitsgrade.

Dies ist die kleinste Zahl von Leitern, aus denen sich, wenn ihre Ströme gegeben sind, die Ströme aller übrigen Leiter folgern lassen. Wenn z. B. 10 Leiter 5 Kreuzungspunkte verbinden, müssen die Ströme in mindestens 6 Leitern gegeben sein, und es dürfen keine vier von ihnen in einem Knoten zusammenführen. Die übrigen Leiter sind der Zahl

nach $n - 1$, und dies ist der Grad der obigen Funktion φ , ausgedrückt durch Leitwerte g .

Setzt man dagegen nun $\varphi = 0$, ausgedrückt durch Widerstände r , vervielfacht dieses φ mit dem Produkte aller Widerstände, so erhält φ den Grad $\frac{1}{2}(n - 1)(n - 2)$, und das ist auch nun die Zahl der Freiheitsgrade.

Wenn $n = 4$, so bleibt der Grad derselben für g und r .

Wenn $n = 5$, so wird die Determinante 6. Grades für die Widerstände r und nur 4. Grades für die Leitwerte g .

Wenn $n = 6$, so wird die Determinante 10. Grades für die Widerstände r und nur 5. Grades für die Leitwerte g ¹⁾.

13. Einfluß von Änderungen in den Stromabnahmen auf die Strom- und Spannungsverteilungen.

Die Abnahme kann sich in der Größe, in der Lage oder in beiden ändern. In allen Fällen wird dabei keine neue Frage auftauchen können. Eine Veränderung in der Abnahme allein wirkt wie eine neu hinzutretende, eine örtliche Wanderung wie eine ganz neue Belastung, wobei die alte verschwindet. Diese Tatsache ist in den Superpositionsgesetzen der Spannungen und der Ströme bereits enthalten. Sie spricht aus unseren Formeln für die Abnahme an einem einfachen oder beiderseitig gespeisten Strang und aus den Strom- und Spannungsgleichungen der Netze.

Man läßt, je nach dem Charakter des unbelasteten Netzes, eine Einheitsabnahme von 10, 100, 1000 . . . Amp. einen Knoten nach dem anderen durchwandern. Soviel Knoten das Netz enthält, soviel Gleichungssysteme stellt man auf, aus denen sich die jedem einzelnen Orte der abgezweigten Stromeinheit entsprechende Strom- und Spannungsverteilung ergibt.

Diese Bestimmung wird durch den Umstand vereinfacht, daß die Nennerdeterminante in jeder Unbekannten aller Gleichungssysteme dieselbe ist, und daß in den Zählerdeterminanten die Unterdeterminante für dieselbe Unbekannte durch die ganze Gruppe von Gleichungssystemen ebenfalls unverändert bleibt.

Da die Methode der graphischen Behandlung mittels der Einflußlinie anscheinend noch stets Interesse bietet, soll ein Beispiel aus der ersten Auflage vom Jahre 1893 abgedruckt werden²⁾.

Man denkt sich eine geeignete Stromeinheit allein abgezweigt und läßt dieselbe einen Knoten nach dem andern durchwandern. Soviel Knoten das Netz enthält, soviel Gleichungssysteme stellt man auf, aus denen sich die jedem einzelnen Orte der abgezweigten Stromeinheit entsprechende Stromverteilung ergibt. Sind auf diese Weise die Stromverteilungen für alle Lagen der Stromverbrauchereinheit in den Knotenpunkten bestimmt, so legt man sich zweckmäßig ein graphisches Schema an, welches aus so vielen Tabellen besteht, als das Netz Leiter enthält.

¹⁾ Heaviside, O.: Philosoph. mag. V. Ser., Vol. 23, S. 178. 1887.

²⁾ S. I. Aufl. S. 207—214. Ferner Ogushi, K.: ETZ 1925, S. 1907.

Auf jeder stellt man je einen Leiter im Maßstabe seines Widerstandes als horizontale Gerade dar und errichtet in den beiden Endpunkten Senkrechte auf dieselbe. Auf die Senkrechte eines jeden Endpunktes trägt man nun die Werte der Ströme in allen Leitern auf, welche entstehen, wenn die Stromeinheit in dem betreffenden Punkte abgezweigt wird. Je nach dem Zeichen des Stromes trägt man ihre Werte nach aufwärts oder nach abwärts auf.

Nehmen wir beispielsweise ein Netz aus nur drei Leitern an und konstruieren wir die Tafel für einen der Leiter desselben, etwa für AB . Wir tragen alle Ströme, je nach ihrer Richtung, von A aus auf- oder abwärts auf, welche in den Leitern entstehen, wenn man die Stromeinheit im Knoten A abzweigt. Ebenso tragen wir von B aus jene Leiterströme auf, welche auftreten, wenn die Stromentnahme A in B erfolgt. Die Endpunkte der für einen und denselben Leiter in A und B gezeichneten Ströme werden dann durch die Geraden $\overline{11}$, $\overline{22}$, $\overline{33}$... verbunden (Abb. 85).

Es läßt sich nachweisen, daß die Lösungen, die durch die Verbindungslinien an irgendeiner Senkrechten MN abgeschnitten werden, die Größen der Leiterströme darstellen, welche entstehen, wenn eine Stromeinheit im Fußpunkt der Senkrechten vom Leiter AB abgezweigt wird. Denkt man sich nämlich die Stromabnahme i_1 von A nach B fortschreitend, so braucht man nur

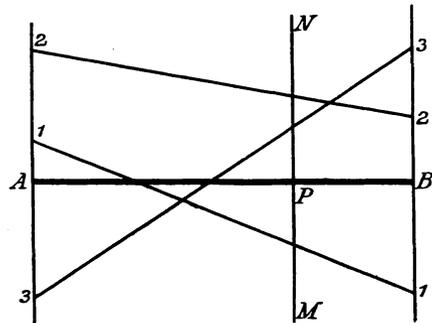


Abb. 85.

zu zeigen, daß das Verhältnis der Änderung irgendeines Stromes x in irgendeinem Leiter des Netzes zur Änderung des Widerstandes P von A bis r_1 eine konstante Größe ist.

Um dies einzusehen, greifen wir auf die Gleichungen zurück, die zur Berechnung aller Leiterströme dienen. Lösen wir sie nach den unbekanntenen Werten der Leiterströme auf, wobei wir nur eine Abnahme annehmen, so erscheint der variable Leitungswiderstand r_1 , um welchen die Abnahme verschoben wird, nur im Zähler der erhaltenen Brüche. Der Zusammenhang ist somit linear, und die Kurve, welche dieses Gesetz ausdrückt, demnach eine Gerade. Wir wollen diese Gerade Influenzlinie nennen.

Die in dieser Weise hergestellten Tafeln bieten ein bequemes Mittel für irgendeine Gruppierung von Stromentnahmen die Stromverteilung in dem gegebenen Netze zu bestimmen.

Man zeichnet nämlich für jeden Stromverbraucher im Abzweigungspunkte eine Senkrechte auf die Widerstandslinie und multipliziert die auf der ersteren durch die Influenzlinien abgeschnittenen Stromgrößen mit i , wenn an der betreffenden Abnahmestelle i_1 , Stromeinheiten abgeführt werden. Dasselbe Verfahren befolgt man für i_2, i_3 ... und addiert nach dem Satze der Superposition der Ströme.

Will man nun sehen, welchen Einfluß das Hinzukommen eines neuen

Stromabnehmers auf die Stromverteilung hat, so zeichnet man auf die Tafel des Leiters, von welchem der neue Abnehmer abzweigt ist, an die Abzweigstelle eine Senkrechte, deren Abschnitte mit den Influenzlinien, proportional vergrößert, die Stromwerte ergeben, um welche die schon bekannten Leiterströme unter dem Einflusse der neuen Stromentnahme sich ändern. Man erhält so aus den Tafeln unmittelbar die durch eine Abnahme in allen einzelnen Leitern hervorgerufenen Ströme. Nur bezüglich des Leiters, in welchem die Abnahme selbst stattfindet, muß man berücksichtigen, daß nicht in dem ganzen Leiter ein und derselbe Strom fließt, sondern daß der Abnahmestelle von zwei Seiten Strom zufließen wird. Da aber die Ströme in allen übrigen Leitern bekannt sind, so lassen sich auch diese beiden Zweigströme sofort bestimmen.

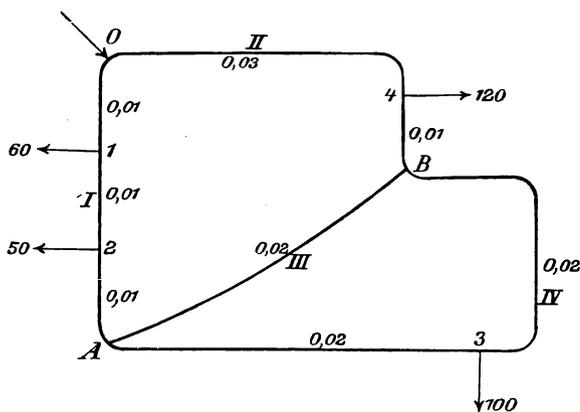


Abb. 86.

In einer Zentrale, welche ein größeres Netz versorgt, wird es von hervorragendem Interesse sein, die jeweiligen Stromverhältnisse in allen Teilen des Netzes stets überprüfen zu können. Zu diesem Zwecke kann man auf Grund des skizzierten Verfahrens eine vollständige Verbuchung aufbauen, aus der man jederzeit entnehmen kann, welche Stromverhältnisse in dem Netze herrschen.

Die Art und Weise, wie ein solches Verbuchungssystem etwa durchgeführt werden könnte, läßt sich am deutlichsten an einem

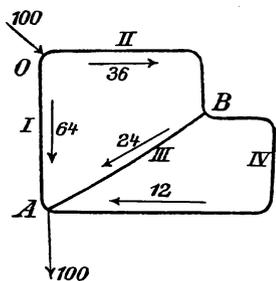


Abb. 87.

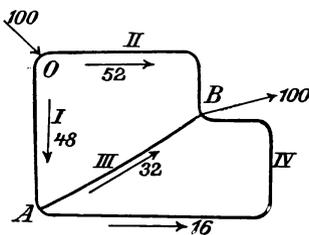


Abb. 88.

Beispiel zeigen. Wir möchten zu diesem Zwecke ein ganz einfaches Netz von der in Abb. 86 dargestellten Konfiguration und nehmen der Einfachheit halber an, daß der Betrieb nur mit einem einzigen Abnehmer (1) beginne, zu welchem nach und nach die Abnehmer 2, 3, 4 . . . hinzukommen. Wir nehmen 100 Ampere als Einheit an und berechnen die Stromverteilungen, welche sich ergeben, wenn dieselbe einmal in A, einmal in B abzweigt wird. Die erhaltenen Werte sind in die Skizzen Abb. 87 und 88 eingeschrieben.

Mit den so erhaltenen Stromwerten und den gegebenen Widerständen konstruieren wir nun für die einzelnen Leiter $OA = I$, $OB = II$ usw., die oben erörterten Tafeln (Abb. 89). Diese bilden die Grundlage für die folgenden Berechnungen. Der Abnahme 1 mit 60 A entsprechend, trägt man z. B. den Wert des Widerstandes der Strecke 0 1 auf die Widerstandslinie des Leiters I (Abb. 89) auf, errichtet in dem so erhaltenen Punkte P eine Senkrechte und erhält durch die Abstände PM_1 , PM_2 usw. die in den Leitern entstehenden Ströme, nachdem

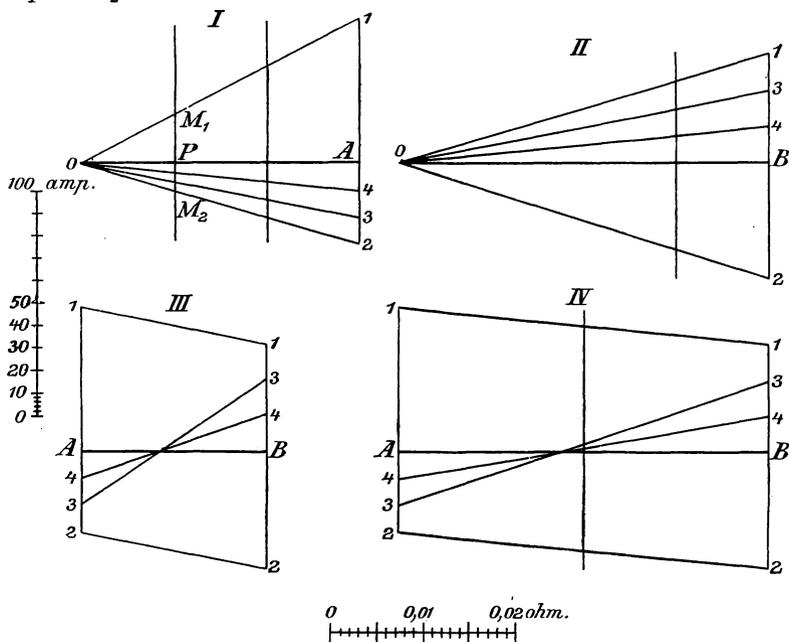


Abb. 89.

man die abgelesenen Werte — entsprechend der gewählten Einheit — mit 0,60 multipliziert hat.

Dasselbe Verfahren wird bei jeder neuen Abnahme eingehalten, und die so gewonnenen Werte werden zweckmäßig in eine Tabelle von nachstehend angegebener Anordnung eingetragen. Wir setzen noch fest, daß wir die Ströme, welche von 0 aus in der Richtung der Bewegung des Uhrzeigers fließen, als negativ, die in entgegengesetzter Richtung fließenden als positiv eintragen.

Tafel der durch die einzelnen Abnahmen einzeln hervorgerufenen Leiterströme.

Abnahme		Leiter			
Nr.	Amp.	I	II	III	IV
1	60		— 7,2	— 4,8	— 2,4
2	50		— 12	— 8	— 4
3	100	56	— 44	4	
4	120	43,2		28,8	14,4

Auf Grund der in obiger Tabelle verzeichneten Werte läßt sich die tatsächliche Stromverteilung für jeden Leiter in jedem Stadium aufstellen. Man wird zu diesem Behufe jedem Leiter eine Tafel widmen, in welche jede durch eine Änderung in den Abnahmen hervorgerufene neue Stromverteilung fortlaufend eingetragen wird.

Aus den nachstehenden Tabellen ersieht man die bei der links verzeichneten Abnahme herrschenden Stromstärken in den am Kopfe verzeichneten Leiterstück. Man gewinnt dieselben aus der allgemeinen Tabelle durch einfache Addition für alle Leiter, welche nicht durch die betreffende Abnahme belastet werden.

Man sieht, daß, wenn einmal die Buchung angelegt ist, die tatsächlichen Stromverhältnisse nach jeder Änderung der Abnahme ohne weit-schweifige Rechnung gefunden werden können und daß eine einfache Eintragung die dauernde Überwachung ermöglicht.

Leiter I.

Abnahme	Leiterstück			
	0 — 1	1 — A	1 — 2	2 — A
1 60	52,8	— 7,2	— 7,2	— 7,2
2 50	38	.	38	— 12
3 100	56	.	56	56
4 120	43,2	.	43,2	43,2

Die Summenströme sind also nach der Superposition der Abnahmen die folgenden:

Leiter I.

Abnahme	Leiterstück			
	0 — 1	1 — A	1 — 2	2 — A
1	52,8	— 7,2	— 7,2	— 7,2
1 + 2	90,8	.	30,8	— 19,2
1 + 2 + 3	146,8	.	86,8	36,8
1 + 2 + 3 + 4	190	.	130	80
.
.
1 + 2 + 4	134	.	74	24

Die letzte Spalte gibt die Ströme an, wenn der Abnehmer 3 die Belastung von 100 A ausgeschaltet hat. Ähnlich findet man für den

Leiter II.

Einzel-abnahme	Leiterstück			Summen-abnahme	Leiterstück		
	0 — B	0 — 4	4 — B		0 — B	0 — 4	4 — B
1	— 7,2	— 7,2	— 7,2	1	— 7,2	.	.
2	— 12	— 12	— 12	1 + 2	— 19,2	.	.
3	— 44	— 44	— 44	1 + 2 + 3	— 63,2	.	.
4		— 76,8	+ 43,2	1 + 2 + 3 + 4	.	— 140	— 20
.			
.			
.			
.				1 + 2 + 4	.	— 96	24

Der letzte Betrag ergibt sich wie folgt:

Die Abnahme 120 kommt hinzu. Der Beitrag von Leiter *I* ist 43,2 *A*, also muß Leiter *II* noch liefern — (120 — 43,2) = — 76,8 *A*, und zwar im Uhrzeigersinne. Dies gibt also für 0 — 4: — 76,8 — 63,2 = — 140, für 4 — *B* also — 20.

Leiter *III*.

Einzelabnahmen	Leiterstück <i>AB</i>	Summenabnahmen	Leiterstück <i>AB</i>
1	— 4,8	1	— 4,8
2	— 8	1+2	— 12,8
3	4	1+2+3	— 8,8
4	28,8	1+2+3+4	20
		.	.
		.	.
		1+2+4	16

Leiter *IV*.

Einzelabnahmen	Leiterstück			Summenabnahmen	Leiterstück		
	<i>A — B</i>	<i>A — 3</i>	<i>3 — B</i>		<i>A — B</i>	<i>A — 3</i>	<i>3 — B</i>
1	— 2,4	— 2,4	— 2,4	1	— 2,4	.	.
2	— 4	— 4	— 4	1+2	— 6,4	.	.
3		52	— 48	1+2+3	.	45,6	— 54,6
4	14,4	.	.	1+2+3+4	.	60	— 40
.
.
.	.	.	.	1+2+4	8	.	.

Man kann aus dem Seilpolygon, das unserem Spannungsvieleck entspricht, wie in der Mechanik den Einfluß einer wandernden Abnahme beurteilen und den Punkt der ungünstigsten Stellung einer wandernden Last graphisch aus den von uns in der ersten Auflage 1893 entwickelten Influenzlinien finden. Es gibt noch andere hierfür geeignete Methoden, etwa die von Dr. P. M. Verhoeckx¹⁾ entwickelte, welche auf die Determinantenlehre zurückgreift und die Knotenspannungen rückläufig nach dem Prinzip der Überlagerung als lineare Ausdrücke der Knotenlasten bestimmt. Diese und die unmittelbare Behandlung der Netze auf Grund der Kombinatorik waren in der dritten Auflage behandelt, sind hier aber zwecks Raumersparnis weggelassen.

14. Zusammenfassung.

Entsprechend den zwei Kirchhoffschen Sätzen gibt es zwei Methoden, die Stromverteilung in einem geschlossenen Netz mit *m* Maschen und *p* Knoten und *s* Speisepunkten zu ermitteln.

Die Schnittmethode oder Strommethode erfordert die Öffnung an *k* Schnittpunkten, welche so angebracht werden müssen, daß zwar

¹⁾ Verhoeckx: Z. Elektrot., Wien 1904, Heft 20 und 21.

jede Verbrauchsstelle noch mit einem Speisepunkt zusammenhängt, also gespeist werden kann, aber das geschlossene Netz in lauter offene Stränge zerfällt. Die Zahl der erforderlichen Schnitte ist

$$k = m + s - 1,$$

also für $s = 1$ Speisepunkt gleich der Zahl m der Maschen. Die Unbekannten sind dabei die Ströme, so daß diese Methode eigentlich besser als Strommethode bezeichnet wird. Um die unbekanntenen Ströme zu finden, schreibt man Spannungsgleichungen auf, welche besagen, daß der Verlust bis zu einem Schnittpunkt längs zweier Wege derselbe ist.

Die Knotenpunktmethode sieht als Unbekannte die Spannungen der Knotenpunkte an und ergibt somit bei p solcher Punkte, wovon mindestens einer Speisepunkt ist, höchstens $(p - 1)$ unabhängige lineare Gleichungen. Diese besagen, daß die Summe der Ströme in einem Knotenpunkt stets Null sein muß, wenn man die ankommenden als positiv, die abfließenden als negativ ansieht. Man ermittelt also die unbekanntenen Spannungen aus Stromgleichungen.

Die Strommethode ermittelt nach dem zweiten Kirchhoffschen Gesetz Ströme aus k Spannungsgleichungen, wobei man zweckmäßig Widerstände in die Rechnungen einführt.

Die Spannungsmethode ermittelt nach dem ersten Kirchhoffschen Gesetz Spannungen aus $(p - s)$ Stromgleichungen, wobei man zweckmäßig Leitfähigkeiten in die Rechnungen einführt. Man kann dabei zwecks fortlaufender Kontrolle eine Hilfsleichung einführen, welche elektrisch den Speisepunkten entspricht.

Welche von diesen beiden Methoden man bevorzugt, ist eine Frage des Geschmacks und der Gewöhnung. Ist man auf beide Methoden eingestellt, dann wird man diejenige bevorzugen, wobei weniger Rechenarbeit auftritt, also die Zahl der linearen Gleichungen kleiner ist.

Die Spannungsmethode verdient also den Vorzug, wenn

$$(p - 1) < k = m + s - 1$$

oder

$$p < m + s.$$

Die Netzbildung, der wir uns jetzt zuwenden wollen, kann zuweilen erhebliche Ersparnis an Rechenarbeit geben. Sie gestattet nämlich einen Teil der Gleichungen, die beim nicht umgebildeten Netz auftreten, durch physikalische Überlegungen fast ohne Rechnung fortzuschaffen. Sie ersetzt also einen Teil der mathematischen Behandlung durch die physische. Aber dies gelingt nur zuweilen, durchaus nicht immer. Und dann muß man den ganzen Weg, den man zwecks Vereinfachung des Netzes durchlaufen hat, nochmals rückwärts durchlaufen bis man wieder beim ursprünglichen Netze angekommen ist.

Während also Schnittmethode und Knotenpunktmethode stets verwendbar sind, muß die Netzbildung als ein interessanter und in vielen Fällen aussichtsreicher Versuch angesehen werden, durch einfache Überlegungen die Rechnungen zu verkürzen.

Hierzu ist eine gewisse Erfahrung und Übung nötig.

15. Annäherungsverfahren zur Auflösung linearer Gleichungen.

Bei der Strommethode oder der Spannungsmethode erhält man Systeme linearer Gleichungen, deren Unbekannte man nach dem gewöhnlichen Verfahren ermitteln kann. Häufig genügt die Genauigkeit des gewöhnlichen Rechenschiebers. Hat man jedoch viel zu rechnen, dann ist es zuweilen erforderlich, mehr als zwei Dezimalen einzuführen.

Je größer die Zahl der Unbekannten, desto mehr steigt die Rechenarbeit an. Hieraus haben sich in der Geodäsie und Astronomie besonders unter dem Einfluß von C. F. Gauß verschiedene Annäherungsverfahren entwickelt, von denen zwei durch uns in die Leitungsberechnung eingeführt wurden.

Bei den Leitungsnetzen kann, je nach dem Charakter und der Entstehung des Netzes, aus Netzstücken oder offenen Leitungen zufolge praktischer Rücksichten bereits vorweg entweder ein annäherndes Strom- oder Spannungsbild, also Grundwerte für den Beginn von Annäherungsverfahren gegeben werden.

Aus solchen Erwägungen heraus haben sich auch die ersten Versuche gestaltet, geschlossene Leitungen annähernd zu rechnen, welche J. Massau¹⁾, E. Cruciani²⁾ u. a. unternahmen.

a) **Das Gauß-Gerlingsche Annäherungsverfahren.** Aus den ersten Annäherungswerten der Unbekannten wird zunächst der größte ausgewählt. Dieser, in sämtliche Gleichungen eingesetzt, führt zu neuen absoluten Gliedern, mit deren Hilfe dann unter den nächsten Näherungswerten wieder der größte berechnet und in die Gleichungen eingesetzt wird. Die algebraische Summe dieser neuen Werte mit den vorher gewonnenen Absolutgliedern liefert die neuen absoluten Glieder usw., bis die Verbesserungen die gewünschte Genauigkeit der Unbekannten erreichen lassen³⁾.

Die Probe läßt sich erzielen durch eine Hilfsgleichung, deren Zahlenglieder aus der negativen Summe von Spalten- (oder Zeilen-)gliedern hervorgeht. Dadurch wird die Rechnung in jeder Stufe überprüfbar. Die überzählige Hilfsgleichung macht das gegebene Gleichungssystem homogen. Ihre elektrische Bedeutung entspricht entweder der erzeugenden Hilfsmasche oder dem speisenden Hilfsknoten, welcher aus der Deckung der Speisepunkte gleicher Spannung gebildet werden kann. Im Falle verschiedener Speisespannungen treten dann natürlich mehrere Gleichungen hinzu, die sich zusammensetzen lassen und dann einem fiktiven Ersatzspeiseknoten entsprechen.

¹⁾ Massau, J.: Ann. de l'Association des ing. sortis des écoles de Gand XI. 1889.

²⁾ Gérard, E.: Leçons sur l'Electricité. 3. Aufl., 1893, S. 542.

³⁾ Gerling, Christian Ludwig: Die Ausgleichsrechnungen der praktischen Geometrie oder die Methode der kleinsten Quadrate. 1843.

Im Nachtrag über das Gaußsche Eliminationsverfahren aus den Normalgleichungen sagt Gerling S. 386: „Auf meine Klage über die große Mühseligkeit dieses direkten Verfahrens teilte mir Gauß damals den Kunstgriff mit und gab weitere Auskunft über das indirekte Eliminieren.“

Ein Beispiel mag die Rechnungsweise zeigen.

Im Netz, Abb. 90, mit vier Speisepunkten gleicher Spannung *I* bis *IV* seien die Knoten 1 bis 5 mit den Entnahmen $J_1 = 100$, $J_2 = 130$, $J_3 = 110$, $J_4 = 150$, $J_5 = 100$ Amp. versehen.

Die den Leitern beigeetzten Zahlen bedeuten ihre Leitwerte *g*.

Die Knotengleichungen 1 bis 5 lauten:

$$\begin{array}{rcl}
 90 v_1 - 40 v_2 - 18 v_3 - 20 v_4 - 12 v_5 & = & 100 \quad (1) \\
 -40 v_1 + 160 v_2 - 18 v_3 & - & 22 v_5 = 130 \quad (2) \\
 -18 v_1 - 18 v_2 + 100 v_3 - 11 v_4 & = & 110 \quad (3) \\
 -20 v_1 & - & 11 v_3 + 170 v_4 - 16 v_5 = 150 \quad (4) \\
 -12 v_1 - 22 v_2 & - & 16 v_4 + 120 v_5 = 100 \quad (5) \\
 -80 v_2 - 53 v_3 - 123 v_4 - 70 v_5 & = & -590 \quad (6)
 \end{array}$$

0 0 0 0 0

Die Hilfsgleichung (6) entsteht durch Addition der fünf andern.

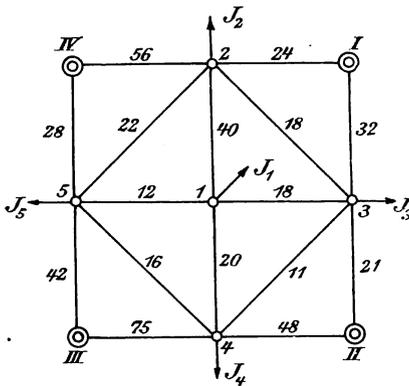


Abb. 90.

Die entstehenden Summanden erhalten entgegengesetztes Vorzeichen. Sie dient nur zur Probe, ob die Summe der Einsetzungswerte unter Benutzung der Hilfsgleichung Null wird. Ihre elektrische Bedeutung ist bereits gegeben worden¹⁾. Für den Knoten 2 muß der Koeffizient von v_2 in Gleichung (6) gleich der negativen Summe der Leitwerte $-(56 + 24) = -80$ bis zu den benachbarten Speisepunkten *I* und *IV* werden. Denn es muß nach der für g_{22} gegebenen Erklärung $-g_{12} + g_{22} - g_{23} - g_{25} - (g_{21} + g_{2IV}) = 0$ sein. Da der Mittelknoten 1 mit keinem Speisepunkt in unmittelbarer Verbindung

steht, fehlt für v_1 ein Ausdruck in der Hilfsgleichung. Diese kann also aus der Form des Netzes auf rein elektrischer Grundlage niedergeschrieben werden, was zur Vermeidung von Vorzeichen- und Rechenfehlern wertvoll ist. Sie entspricht in Abb. 90 der Beziehung

$$-g_{II II} v_2 - g_{III III} v_3 - g_{IV IV} v_4 - g_{V V} v_5 = - \sum_1^5 J.$$

Bezieht man nun sämtliche Hauptspannungen der Knoten auf eine Grundspannung in den Speisestellen, dann wird nur der Unterschied zwischen der Spannung der Knoten in Hundertstel der Speisepannung angenommen. Setzt man im vorliegenden Beispiel in den Verteilungsleitungen einen Verlust von 2% voraus, also $v_1' = v_2' = \dots = v_5' = 2$, dann sind diese Werte bereits als erste Näherungswerte zu betrachten, nach deren Einsetzung in das symmetrische Gleichungssystem man sofort die entsprechenden Bedingungen erhält.

¹⁾ Siehe auch S. 90, 97, 99.

Man hat also aus dem Charakter der Anlage als erste Näherungswerte $v_1 = v_2 \dots v_5 = 2$ bei $V_1 = V_{II} = 0$ Volt. Dies gibt, in die Normal- oder die Spannungsgleichungen eingesetzt, die Fehler $f_1, f_2 \dots$. Man macht nun zunächst einen Überschlag, welche von den Verbesserungen die größte wird:

Die absoluten Glieder:	Die Verbesserungen:
$f_1 = -100$	$\Delta v_1 = -\frac{f_1}{g_{11}} = +\frac{100}{90} = +1,11$
$f_2 = +30$	$\Delta v_2 = -\frac{f_2}{g_{22}} = -\frac{30}{160} = -0,19$
$f_3 = -4$	$\Delta v_3 = -\frac{f_3}{g_{33}} = +\frac{4}{100} = +0,04$
$f_4 = +96$	$\Delta v_4 = -\frac{f_4}{g_{44}} = -\frac{96}{170} = -0,56$
$f_5 = +40$	$\Delta v_5 = -\frac{f_5}{g_{55}} = -\frac{40}{120} = -0,33$
$f_6 = -62$	
0	

Unter den Verbesserungen ist nun abgerundet $\Delta v_1 = +1,1$ die größte. Dieser Wert wird in sämtliche Gleichungen eingesetzt und führt zu neuen Absolutgliedern, mit deren Hilfe dann unter den nächsten Verbesserungen wieder die größte berechnet und in die Gleichungen eingesetzt wird. Die algebraische Summe dieser neuen Werte mit den vorher gewonnenen Absolutgliedern liefert die neuen Absolutglieder usw., bis die Verbesserungen die gewünschte Genauigkeit erreicht haben.

Man hat die Gleichungen selbst nur einmal zu schreiben und verwendet dann ein Rechenschema, bei dem nur die Verbesserungen, die Produkte und die absoluten Glieder jeweils eingetragen werden, wie folgt:

g_{nn}	$V_1 = V_2 = V_3 =$ $V_4 = V_5 = 2$	$\Delta V_1 = +\frac{100}{90} = +1,1$	$\Delta V_4 = -\frac{74}{170} = -0,44$	$\Delta V_5 = -\frac{33,89}{120} = -0,28$
	Absolute Glieder	Produkte absol. Glieder		
90	— 100	+ 99 — 1	+ 8,8 + 7,8	+ 3,36 + 11,16
160	+ 30	— 44 — 14	0 — 14	+ 6,16 — 7,84
100	— 4	— 19,8 — 23,8	+ 4,84 — 18,96	0 — 18,96
170	+ 96	— 22 + 74	— 74,8 — 0,8	+ 4,48 + 3,68
120	+ 40	— 13,2 + 26,8	+ 7,04 + 33,84	— 33,60 + 0,24
—	— 62	0 — 62	+ 54,12 — 7,88	+ 19,60 + 11,72
	0	0	0	0
	$\Delta V_3 = +\frac{18,96}{100} = +0,19$	$\Delta V_1 = -\frac{7,74}{90} = -0,086$	$\Delta V_2 = +\frac{7,82}{160} = +0,049$	$\Delta V_1 = +\frac{1,96}{90} = +0,022$
—	3,42 + 7,74	— 7,74 0	— 1,96 — 1,96	+ 1,98 + 0,02
—	3,42 — 11,26	+ 3,44 — 7,82	+ 7,84 + 0,02	— 0,88 — 0,86
+ 19	+ 0,04	+ 1,548 + 1,588	— 0,882 + 0,706	— 0,396 + 0,31
— 2,09	+ 1,59	+ 1,72 + 3,31	0 + 3,31	— 0,44 + 2,87
0	+ 0,24	+ 1,032 + 1,272	— 1,078 + 0,194	— 0,264 — 0,07
— 10,07	+ 1,65	0 + 1,65	— 3,92 — 2,27	0 — 2,27
	0	0	0	0

$\Delta V_4 = -\frac{2,87}{170} = -0,017$		$\Delta V_2 = +\frac{0,86}{160} = +0,0054$		$\Delta V_3 = -\frac{0,3998}{100} = -0,004$	
+ 0,34	+ 0,36	- 0,216	+ 0,144	+ 0,072	+ 0,216
0	- 0,86	+ 0,864	+ 0,004	+ 0,072	+ 0,076
+ 0,187	+ 0,497	- 0,0972	+ 0,3998	- 0,04	- 0,0002
- 2,98	- 0,02	0	- 0,02	+ 0,044	+ 0,024
+ 0,272	+ 0,202	- 0,1188	+ 0,0832	0	+ 0,0832
+ 2,091	- 0,179	- 0,432	- 0,611	+ 0,212	- 0,399
0	0	0	0	0	0

$\Delta V_1 = -\frac{0,216}{90} = -0,0024$		$\Delta V_2 = -\frac{0,172}{160} = -0,0011$		$\Delta V_5 = -\frac{0,1362}{120} = -0,0011$	
- 0,216	0	+ 0,044	+ 0,044	+ 0,0132	+ 0,0572
+ 0,096	+ 0,172	- 0,176	- 0,004	+ 0,0242	+ 0,0202
+ 0,0432	+ 0,043	+ 0,0198	+ 0,0628	0	+ 0,0628
+ 0,048	+ 0,072	0	+ 0,072	+ 0,0176	+ 0,0896
+ 0,0288	+ 0,112	+ 0,0242	+ 0,1362	- 0,132	+ 0,0042
0	- 0,399	+ 0,088	- 0,311	+ 0,077	- 0,2340
0	0	0	0	0	0

$\Delta V_1 = -\frac{0,0572}{90} = -0,00064$		$\Delta V_3 = -\frac{0,07432}{100} = -0,00074$		$\Delta V_4 = -\frac{0,11054}{170} = -0,00065$	
- 0,0576	- 0,0004	+ 0,01332	+ 0,01292	+ 0,013	+ 0,02592
+ 0,0256	+ 0,0458	+ 0,01332	+ 0,05912	0	+ 0,05912
+ 0,01152	+ 0,07432	- 0,074	+ 0,00032	+ 0,00715	+ 0,00747
+ 0,0128	+ 0,1024	+ 0,00814	+ 0,11054	- 0,1105	+ 0,00004
+ 0,00768	+ 0,01188	0	+ 0,01188	+ 0,0104	+ 0,02228
0	- 0,234	+ 0,03922	- 0,19478	+ 0,07995	- 0,11483
0	0	0	0	0	0

$\Delta V_2 = -\frac{0,05912}{160} = -0,00037$		$\Delta V_1 = -\frac{0,04072}{90} = -0,00045$	
+ 0,0148	+ 0,04072	- 0,0405	+ 0,00022
- 0,0592	+ 0,00008	+ 0,018	+ 0,01792
+ 0,00066	+ 0,01413	+ 0,0081	+ 0,02223
0	+ 0,00004	+ 0,009	+ 0,00904
+ 0,00814	+ 0,03042	+ 0,0054	+ 0,03582
+ 0,0296	- 0,08523	0	- 0,08523
0	0	0	0

Die folgenden Verbesserungen ergeben für $\Delta v_5 = -0,0003$, $\Delta v_3 = +0,00022$, $\Delta v_2 = -0,00018$ Volt, so daß also nunmehr für die Spannungsverluste folgt:

$$\begin{aligned}
 v_1 &= 2 + 1,1 - 0,086 + 0,022 - 0,0024 - 0,00064 - 0,00045 \\
 &= 3,03251 \text{ Volt} \\
 v_2 &= 2 + 0,049 - 0,0054 - 0,0011 - 0,00037 - 0,00018 = 2,05375 \text{ ,,} \\
 v_3 &= 2 + 0,19 - 0,004 - 0,00074 - 0,00022 = 2,18504 \text{ ,,} \\
 v_4 &= 2 - 0,44 - 0,017 - 0,00065 = 1,54235 \text{ ,,} \\
 v_5 &= 2 - 0,28 - 0,0011 - 0,0003 = 1,7186 \text{ ,,}
 \end{aligned}$$

Die Verluste sind hier auf 5 Dezimalen ausgerechnet worden, weil drei davon verwendet werden sollen. Für praktische Zwecke hätte die Rechnung auf drei Dezimalen genügt, und man hätte die Reihe abbrechen können, sobald die Verbesserungen kleiner waren als etwa 0,005 Volt.

Die in den Leitern auftretenden Ströme finden sich als Produkt der Spannungsunterschiede und der Leitwerte. Sie fließen natürlich von Punkten höherer Spannung zu solchen niedriger Spannung. Man findet also für die Ströme in

$I-2: 2,054 \cdot 24 = 49,296$ Amp.	$2-3: 0,131 \cdot 18 = 2,358$ Amp.
$I-3: 2,185 \cdot 32 = 69,920$ „	$2-1: 0,979 \cdot 40 = 39,160$ „
$II-3: 2,185 \cdot 21 = 45,885$ „	$5-2: 0,335 \cdot 22 = 7,370$ „
$II-4: 1,542 \cdot 48 = 73,996$ „	$3-1: 0,848 \cdot 18 = 15,264$ „
$III-4: 1,542 \cdot 75 = 115,650$ „	$4-3: 0,643 \cdot 11 = 7,073$ „
$III-5: 1,719 \cdot 42 = 72,198$ „	$4-1: 1,491 \cdot 20 = 29,820$ „
$IV-2: 2,054 \cdot 56 = 115,024$ „	$4-5: 0,177 \cdot 16 = 2,832$ „
$IV-5: 1,719 \cdot 28 = 48,132$ „	$5-1: 1,314 \cdot 12 = 15,768$ „

Zeichnet man diese Ströme in das Netz ein, so tritt die größte Ungenauigkeit am Knoten 2 auf mit einer Stromzufuhr von 171,69 und einer Abfuhr von 171,518 Amp., entsprechend einem relativen Fehler von 0,1%.

b) Jacobi- und Seidelsche Behandlungen. Alle Fehlertheorien gehen überhaupt von zwei Annahmen aus. Die erste, wie das vorhergehende Annäherungsverfahren auch, geht aus von den kleinsten absoluten oder, wie bei Laplace 1792 und anfangs auch bei Gauß, von den kleinsten algebraischen Fehlern. Die zweite, verbesserte Annahme, gleichfalls von Gauß, in seiner späteren Methode der kleinsten Quadrate, stützt sich auf die kleinste Summe der quadratischen Fehler, welche von den Vorzeichen der Fehler befreit.

In der Astronomie wurde diese Fehlerquelle von Gauß bei dem Problem der Säkularstörungen der Planeten rasch angewendet¹⁾. Insbesondere war der Aufsatz Jacobis „Über ein leichtes Verfahren, die in der Theorie der Säkularstörung vorkommenden Gleichungen numerisch zu lösen“²⁾ fruchtbar. Für die sorgfältige Ausführung der in diesem Aufsatz vorkommenden Rechnungen bedankt Gauß sich bei seinem Schüler Ludw. Seidel. Dieser hat dem Gegenstande dann selbst weitere Ausführung gegeben³⁾, welche 1890 J. Herzog

¹⁾ Encke: Über die Methode der kleinsten Quadrate, im Berliner astr. Jahrbuch 1835; Bessel u. Jacobi: in Schumachers astron. Nachrichten Bd. 17, S. 225 u. 305. Ferner Jacobi, C. G. J.: Über eine neue Auflösungsart bei der Methode der kleinsten Quadrate vorkommender linearer Gleichungen. Jacobis ges. Abhandl. Bd. 3, S. 469. Dedekind, R.: Über Gauß in seiner Vorlesung über die Methode der kleinsten Quadrate“ gibt ein rascheres Konvergenzverfahren von Gauß in der Festschrift zur Feier des 150jähr. Bestehens der Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Berlin 1901, S. 45—49 an.

²⁾ Crelles Journ. Bd. 30. 1845.

³⁾ Seidel, Ludwig: Über ein Verfahren, die Gleichungen auf die Methode der kleinsten Quadrate, sowie lineare Gleichungen überhaupt durch sukzessive Annäherung aufzulösen. Abh. d. math.-phys. Klasse der Bayer. Akad. Bd. 11. 1874.

für die Leitungsrechnung aufnahm. Sie hat durch viele, namentlich J. Teichmüller¹⁾, B. Soschinski²⁾ u. a. Verbreitung gefunden. Seidels Methode ist von der Gaußschen nicht verschieden, nur unterließ er die Einführung der Hilfsunbekannten³⁾.

Die Geschwindigkeit der Annäherung hängt vom Überwiegen des diagonalen Gliedes über die einzelnen andern Zeilenglieder ab. Jacobi hat nun gelehrt, je zwei Gleichungen zusammenzufassen und ihre zweiten allenfalls belangreichen Nebenglieder durch Umformung, die geometrisch einer Achsendrehung entspricht, zu zerstören. R. Mehmkke⁴⁾ behandelt dies ohne trigonometrische Formel durch die zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_{k_1}x_1 + a_{k_2}x_2 + \cdots + a_{k_k}x_k + \cdots + a_{k_l}x_l + \cdots + c_k &= 0, \\ a_{l_1}x_1 + a_{l_2}x_2 + \cdots + a_{l_k}x_k + \cdots + a_{l_l}x_l + \cdots + c_l &= 0. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen irgendwelcher Anfangswerte für die Unbekannten in diese Gleichungen mögen sie die absoluten Glieder f_k bezüglich f_l annehmen. Dann werden die Verbesserungen Δx_k , Δx_l der Unbekannten x_k , x_l durch genaues oder angenähertes Auflösen der beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_{k_k} \Delta x_k + a_{k_l} \Delta x_l + f_k &= 0, \\ a_{l_k} \Delta x_k + a_{l_l} \Delta x_l + f_l &= 0 \end{aligned}$$

erhalten.

Gemischter Vorgang.

Unter Umständen kann eine gemischte Behandlung Platz greifen. Wenn nämlich für einen Teil der Unbekannten die äußerst wenig abweichenden Werte bekannt sind, z. B. die Knoten des größten Verlustes, so können natürlich diese eingesetzt (oder auch gegenseitig zuerst verbessert werden) und die übrigen schrittweise nach der direkten Auflösungsweise der quadratischen Form bestimmt werden⁵⁾.

16. Graphik linearer Gleichungen und Elektrographik der Netze⁶⁾.

a) **Graphik.** F. Klein, der seltene Mathematiker mit Vorliebe für Anwendung seiner Wissenschaft, sagt⁷⁾: „Die graphische Statik läßt sich als Lehre von der Auflösung n linearer Gleichungen mit ebenso-

¹⁾ Über die Stromverteilung in elektr. Leitungsnetzen. ETZ 1893, S. 537.

²⁾ Soschinski, B.: ETZ 1905, H. 47, S. 1069.

³⁾ Helmert in seiner Ausgleichsrechnung, 2. Aufl. 1907.

⁴⁾ Mehmkke, R. u. P. A. Nekrassow: Auflösung eines linearen Systems von Gleichungen durch sukzessive Annäherung. Moskauer Math. Ges. Bd. 16. 1892.

⁵⁾ So wendet die Coast and Geodetic Survey d. Ver. Staaten von Nordamerika seit 1878 das Verfahren an, die Normalgleichungen zu vereinfachen, daraus die Unbekannten zu bestimmen, die Werte in die genauen Normalgleichungen einzusetzen und deren Widersprüche mit den vereinfachten Gleichungen zur Verbesserung der Unbekannten zu benutzen. Civiling. Bd. 29, H. 2. 1882 und Wright, Th. W.: The adjustment of observations by the method of least squares etc. New York 1906, S. 114.

⁶⁾ Dieser Abschnitt kann von denen, die sich nicht für die graphische Behandlung interessieren, überschlagen werden, da er für die folgenden Erörterungen entbehrlich ist.

⁷⁾ Einleitung in die höhere Geometrie Bd. 1, S. 346.

viel Unbekannten auffassen.“ Danach gehört also die Graphostatik, mit ihren Kräfte- und Seilvielecken, als zeichnerischer Ersatz der Summen und der Summenprodukte, hierher.

Die Graphostatik weist in ihrer Entwicklung zwei Richtungen auf: die ursprüngliche, rein konstruktive auf Grund rechnerloser Geometrie und die spätere, synthetisch oder analytisch rechnende mittels graphischer Übertragungen.

Mit den Fortschritten der analytischen Geometrie verwischte sich vielfach der Gegensatz zwischen beiden Entwicklungen, ja, für den Wissenden laufen nun alle folgenden Lösungen mehr oder weniger auf den Eliminationsvorgang einer und derselben Unbekannten aus zwei linearen Gleichungen, d. h. auf die Schaffung einer neuen Gleichung hinaus.

Elektrisch entspricht diesem Vorgang die Bildung eines Knotens durch Deckung zweier oder einer Masche durch Ausheben eines gemeinschaftlichen Teiles aus zweien.

Für die zeichnerische Darstellung kommen nun zweierlei Koordinatensysteme in Betracht: eines mit dem Ursprung 0 aller Achsen im Endlichen, wobei diese als Träger der Gleichungsglieder vom Punkte 0 ausgehen, und ein anderes mit parallelen Achsen mit den einzelnen Nullpunkten ihrer Maßstäbe.

Je zwei Achsen geben ein Einzelbild, das bei Parallelachsen als Streifen bezeichnet wird. Mit zwei solchen Bildern, ausreichend für drei Unbekannte, ist der Techniker durch die darstellende Geometrie gewöhnt, raumanschaulich zu arbeiten. Da alle hochstufigeren Entwicklungen sich aber auf diese niedrigere zurückführen lassen, genügt diese beschränkte landläufige Raumanschauung völlig. Die Sprache der mehrdimensionellen Geometrie erleichtert diese Flucht aus den höheren Gebieten. Diese einleitenden Bemerkungen sollen an Hand der folgenden Literaturangaben verständlicher werden.

I. G. Fouret¹ und J. Massau² benutzen zur zeichnerischen Lösung das Prinzip der „falschen Lage“.

Die Koeffizienten der Unbekannten $a_i, b_i, c_i \dots$ einer jeden Gleichung werden nach Abb. 91 auf einer Wagerechten als einfachste Summe abgetragen, während die Unbekannten den trigonometrischen Tangenten $x = \text{tg } \alpha, y = \text{tg } \beta$ der Neigungswinkel α, β, \dots des oberen Linienzuges entsprechen sollen. Die richtigen Werte von x, y, \dots müssen diese Summe $a_i x + b_i y + \dots$ gleich der Absoluten l_i machen. Bei Festhaltung der Endpunkte der $n - 1$ ersten Linienzüge und Richtungsänderung der ersten Seite drehen sich die Seiten aller Linienzüge um feste Punkte, welche von den Absoluten l_i unabhängige Abszissen besitzen. In diesen Drehpunkten liegt die Invariante oder das Deckelement der Eliminierung.

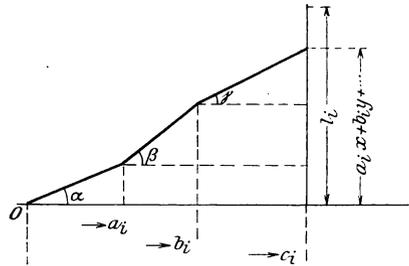


Abb. 91.

2. J. F. Van den Berg³ trägt auf Parallelachsen m, n, \dots (Abb. 92) die Koeffizienten von Nullpunkten $O_m O_n$ algebraisch auf. Um aus der

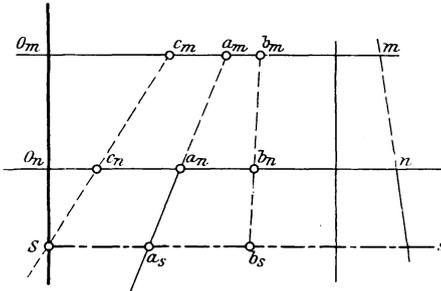


Abb. 92.

m ten und n ten Gleichung die Unbekannte z zu eliminieren, zieht man die Strahlen $a_m a_n, b_m b_n$ usw. und schneidet sie durch jene Wagerechte S_s , welche durch den Schnittpunkt S des Strahles $c_m c_n$ mit der Nulllinie $O_m O_n$ geht. Die Koeffizienten $a_s, b_s \dots$ der Wagerechten s sind die dergesuchten Eliminationsgleichung. Um flache Schnitte der Strahlen oder solche außerhalb der Zeichenfläche zu vermeiden, wählt man die Koeffizientenmaß-

stäbe mit verschiedenen Einheiten. Durch stufenweises Vorgehen von n Unbekannten auf $n - 1$, von $n - 1$ auf $n - 2$ usw. gelangt man schließlich auf eine einzige, die gelöst werden kann, und schreibt nun den Weg zurück, um alle Unbekannten zu finden. Abb. 93 zeigt den Fall für zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Ändern sich die Absoluten l eines Gleichungssystems, so ist immer nur der Strahl $l' l''$ neu zu zeichnen⁴.

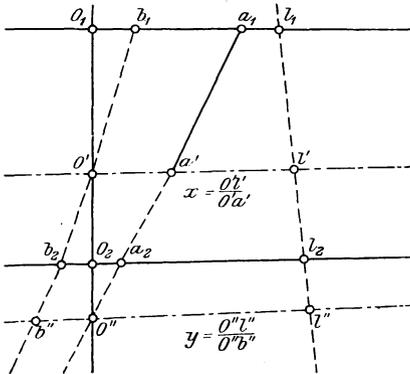


Abb. 93.

Die Parallelachsen hat K. Schwing⁵ als Linienkoordinaten eingeführt. Sie kommen als Sonderfall des trimetrischen Systems schon bei Salmon-Fiedler⁶ vor, wo eine Ecke des Fundamentaldreiecks ins Unendliche verschwin-

det. Schlegel⁷ zeigte, daß dieses Achsensystem dem gewöhnlichen Cartesianischen vollständig reziprok ist. Die Kreisgleichung in diesem

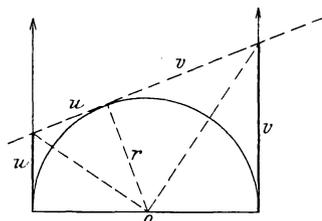


Abb. 94.

Systeme lautet z. B. $uv = r_2$, Abb. 94. W. Unverzagt⁸ hat sie gleichfalls frühzeitig gefunden, d'Ocagne^{1a} hat ihnen in seiner Nomographie einen erweiterten Begriff (die Träger der Punktreihen müssen nicht Gerade sein) und vielfache Anwendung, und R. Mehmke⁹ den bezeichnenden Namen der fluchtrechten Punkte gegeben.

Van den Berg hat auch das gewöhnliche Achsensystem wie folgt benutzt. Sind die Gleichungen $a_1 x + b_1 y = l_1$ und $a_2 x + b_2 y = l_2$ gegeben und hat der Punkt p_1 , Abb. 95; die Koordinaten a_1, a_2 , der Punkt p_2 die Werte b_1, b_2 und der Punkt p die Werte l_1, l_2 , so wird $x_1 = p s_1 / p_1 s_1$;

$x_2 = p_{s_2}/p_2 s_2$. Der Schnitt der beiden Strahlen $p_1 s_1$ und $p_2 s_2$ der Spaltenkoeffizienten ergibt wieder die Elimination.

3. A. Klingatsch¹⁰ nimmt die Kräfte a_{ki} und ihre Momente l_k als gegeben an und sucht die Wirkungslinien der Kräfte (also ihre wirkliche Lage). Er benutzt die Eigenschaften der Seilpolygone. Die Hebelabstände x_i der Kräfte sind dabei die Unbekannten. Die Elimination ergibt wieder ein Seilpolygon aus zweien. Zur zeichnerischen Durchführung werden nachträglich die Kräfte parallel gewählt. Eine kurze Darstellung, die wir ihm selbst verdanken, soll hier folgen.

Gleiten die Eckpunkte b, c eines Dreieckes abc auf zwei Geraden $s_{14} s_{24}$ (Abb. 96) und bleiben die Richtungen der drei Seiten des Dreieckes hierbei ungeändert, so beschreibt der dritte Eckpunkt a eine Gerade g , welche durch den Schnitt ($s_{14} s_{24}$) der Seiten s_{14} und s_{24} geht. Diese Gerade hat eine feste Lage, sofern s_{14} und s_{24} eine unveränderliche Lage besitzen. Ändert s_{14} und s_{24} die Lage, nicht aber die Richtung, so gilt dasselbe auch für g , d. h. die Richtung dieser Geraden bleibt unverändert. In Abb. 97 denke man sich die Aufgabe als gelöst. s_0 sei die erste, s_{11} die allen vier Polygonen gemeinschaftliche zweite Seite, also $s_0 s_{11} s_{12} s_{13} s_{14}$, $s_0 s_{11} s_{22} s_{23} s_{24}$, $s_0 s_{11} s_{32} s_{33} s_{34}$, $s_0 s_{11} s_{42} s_{43} s_{44}$ die vier zu suchenden Polygone.

Gegeben sind die Richtungen aller Seiten, von s_0 und $s_{14} s_{24} s_{34} s_{44}$ — den letzten Seiten — überdies die Lage. Gesucht wird der Punkt C , in welchem sich die Seiten $s_{12} s_{22} s_{32} s_{42}$ schneiden müssen. Man ermittelt zunächst die drei Geraden $g_1 g_2 g_3$, welche den geometrischen Ort der Schnitte $s_{13} s_{23}$, $s_{23} s_{33}$, $s_{33} s_{43}$ darstellen.

Die Ermittlung kann nach Obigem in einer besonderen Figur erfolgen, weil es sich nur um die Richtung handelt. Die Lage ist dadurch bestimmt, daß diese drei Geraden bezüglich durch die Punkte $(s_{12} s_{24})$, $(s_{24} s_{34})$, $(s_{34} s_{14})$ gehen müssen. Hat man nun $g_1 g_2 g_3$ (— — —) gefunden, so nehme man auf einer, z. B. g_1 , den Punkt t_1 beliebig an und konstruiere den Linienzug $s'_{13} s'_{23} s'_{33} s'_{43}$ so, daß $s'_{13} \parallel s_{13}$, $s'_{23} \parallel s_{23}$, $s'_{33} \parallel s_{33}$, $s'_{43} \parallel s_{43}$; und die Schnittpunkte t_2 und t_3 dieser Strahlen auf den ausgemittelten Geraden g_2 bzw. g_3 liegen.

Nun ermittelt man ganz so wie früher auch den Ort für den Schnitt der Strahlen s_{12} und s_{22} ; indem man irgendwo einen Strahl r (die Strahlen $r_1 r_2 r_3 r_4$ sind hier parallel angenommen) zieht, diesen mit $s'_{13} s'_{23}$ zum Schnitt bringt und durch diese Schnitte Parallelen zu s_{12} und s_{23} zieht;

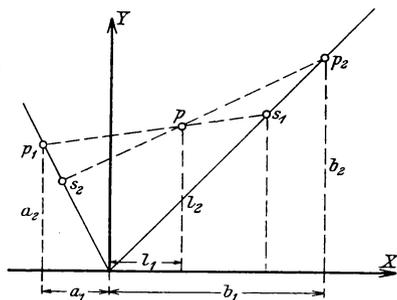


Abb. 95.

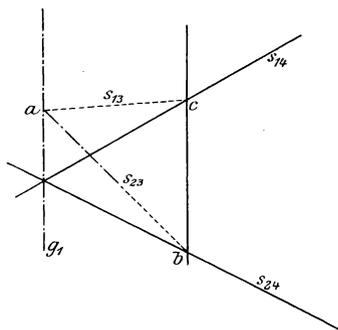


Abb. 96.

der Schnittpunkt dieser Parallelen mit t_1 verbunden, gibt die gesuchte Gerade f_1 . In derselben Weise wird f_2 und f_3 ermittelt, welche Geraden bezüglich durch die Punkte t_2 und t_3 gehen müssen. Die Geraden f_1, f_2 und f_3 sind nun nicht mehr fest; sie ändern ihre Lage jedoch bleibt ihre Richtung ungeändert. Nun fragt man um den Ort des Schnittpunktes P_{23} der Strahlen f_2 und f_3 .

Vom Dreiecke $P_{23} t_2 t_3$ gleitet t_2 auf einer festen Geraden g_2 , und t_3 auf einer festen Geraden g_3 ; alle Seiten bleiben bei der Bewegung parallel, daher beschreibt P_{23} nach einem bekannten Satze der Geometrie eine Gerade r_2 , welche durch den Schnittpunkt R_2 von g_2 und g_3 gehen muß; auf dieser Geraden liegt aber obigem zufolge auch C . Eine zweite Gerade r , auf welcher C liegen muß, findet man, wenn man P_{12} mit R_1 ,

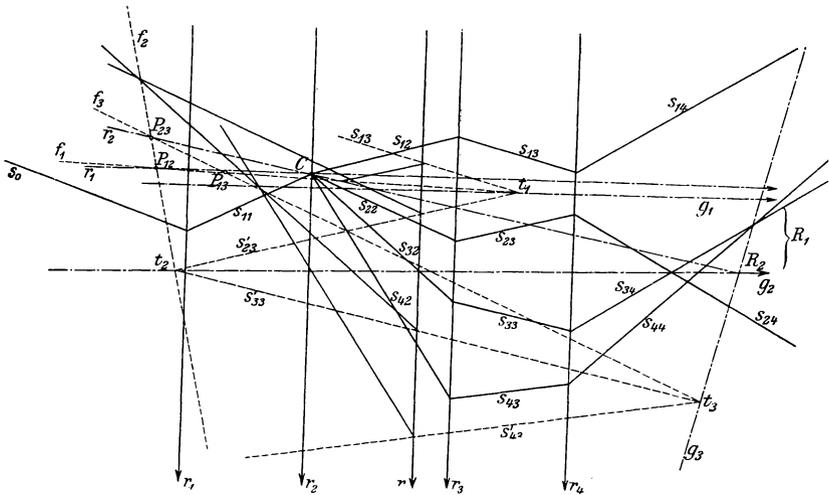


Abb. 97.

dem Schnittpunkte von g_1 und g_2 , verbindet. Im Schnitt der Geraden r_1 und r_2 ergibt sich daher C .

4. J. v. d. Griend jr.¹¹ hat 1899 die axiale Lösung von van den Berg mittels mehrdimensionaler Geometrie wieder entwickelt. Diesen Weg gibt in großer Allgemeinheit P. H. Schoute¹². Die Elimination läuft auf die Schnitte zweier linearer Gebilde in der höheren Räumen hinaus.

F. J. Vaes¹³ bildet die Eliminationsgleichung durch gleiche Koeffizienten der Unbekannten nach folgendem Schema:

$$\begin{array}{rcc}
 & \text{nach Vaes} & \text{nach Goldziher} \\
 \dots + a_{ik} x_k + \dots = l_i & - \frac{1}{a_{ik}} & - 1 \\
 \dots + b_{jk} x_k + \dots + l_j & \frac{1}{b_{jk}} & \frac{a_{ik}}{b_{jk}}
 \end{array}$$

Das entspricht zeichnerisch zentralen Projektionen der Koeffizientenskalen, deren Punktreihen dann addiert werden. Dieses ein-

fache Verfahren ist weniger empfindlich als jenes von van den Berg, weil es auf Streckenadditionen bzw. -subtraktionen und nicht auf neue Achsen durch Strahlenkreuzungen begründet ist. K. Goldziher¹⁴ verändert das Bildungsschema in obiger Weise, um die Vorteile beider Verfahren zu erreichen. Die Koeffizienten der zweiten Gleichung werden durch ähnliche Dreiecke nach der üblichen zeichnerischen Art im Verhältnis a_{ik}/b_{jk} verändert und von den unveränderten der ersten

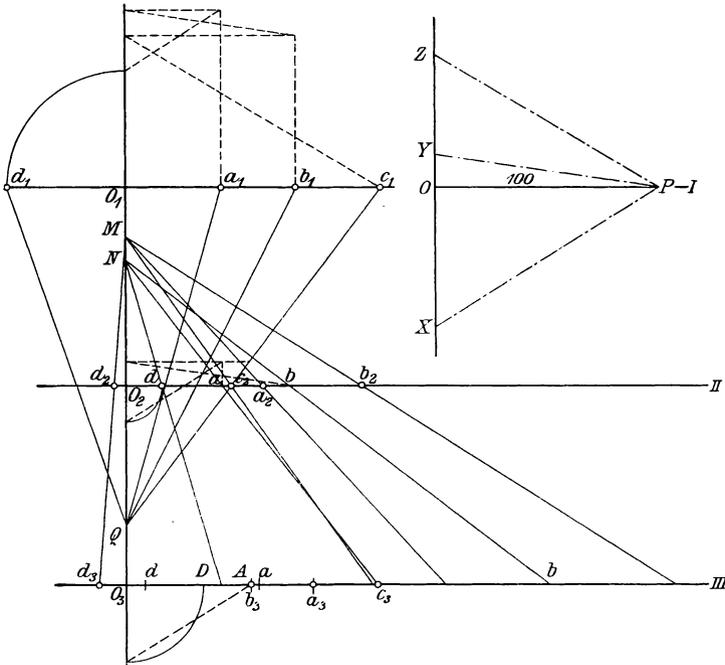


Abb. 98.

abgezogen. Sein Zahlenbeispiel soll an der Abb. 98 dies noch verdeutlichen: Gegeben sind die Gleichungen

$$\begin{aligned} 43x + 76y + 113,5z &= 53, \\ 61x + 105y + 46,5z &= 4,9, \\ 83x + 55,5y + 108z &= 20. \end{aligned}$$

Auf den drei Wagerechten *I*, *II* und *III* werden von den Nullpunkten $O_1O_2O_3$ aus die Zeilen-Koeffizienten $a_1b_1c_1d_1$, $a_2b_2c_2d_2$ und $a_3b_3c_3d_3$ abgetragen. Aus der ersten und zweiten, dann aus der zweiten und dritten Gleichung soll das z eliminiert werden, indem man aus den Schnittpunkten Q und N der Lotrechten O_1O_3 und der Strahlen c_1c_2 , bzw. c_2c_3 das eine Achsenbild auf das andere zentral projiziert, also *I* auf *II* bzw. *II* auf *III*. Man zieht nun die projizierten Koeffizientenreihen von den ursprünglichen ab. Auf diese Weise entstehen auf *II* bzw. *III* die neuen Achsenbilder a, b, d . Aus diesen wird nun y elimi-

niert. Die Strahlen der b -Punkte auf II und III liefert auf O_1O_2 wieder das Zentrum M für die neue Projektion und nachherige Streckensubtraktion auf III . Letztere führt zu den Punkten A und D , welche das Achsenbild einer Gleichung mit nur x enthält. Diese Unbekannte wird auf einem gesonderten Krafteck vorgenommen. Zur Berechnung von y können die beiden ersten Eliminationsbilder verwendet werden, z läßt sich aber unabhängig nicht ohne volle Neuarbeit leisten. Es ist ausreichend, y und z nacheinander mit dem geschlossenen Polygonzug (nach den üblichen einfachen zeichnerischen Regeln) zu bestimmen ($x = -0,66$; $y = 0,16$; $z = 0,61$).

5. M. F. Boulad¹⁵ ersetzte die Punktreihen durch Strahlensysteme.

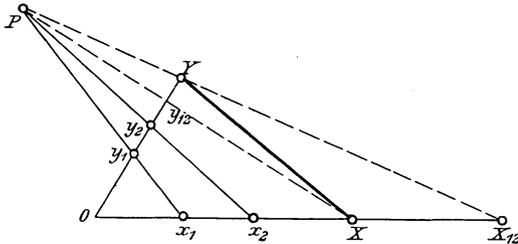


Abb. 99.

Das von den Bergsche Verfahren hat C. E. A. Maitland^{14a} zur Ermittlung der Knotenspannungen eines Netzes verwendet. Indem er nach Boulad die Absoluten der Gleichungen, hier Knotenströme, als Veränderliche ansieht, beweist er den allgemeinen Satz von der

„Überlagerung“ in jedem Einzelfalle neuerlich.

R. F. Muirhead¹⁶ verfolgt ebenfalls die Gleichsetzung der Unbekannten zur Bildung der Eliminationsgleichungen, wobei er aber axiale Koordinaten annimmt. Nur auf zwei Unbekannte sei hier eingegangen: Gegeben sei

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 &= 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 &= 0. \end{aligned}$$

Das Dreieck OXY wird angenommen. Auf den Achsen OX und OY (Abb. 99) sind die Punkte x_1, x_2 so gewählt, daß

$$\begin{aligned} a_1 \cdot O x_1 + c_1 \cdot x_1 X &= 0, \\ a_2 \cdot O x_2 + c_2 \cdot x_2 X &= 0. \end{aligned}$$

Ähnlich in OY die Punkte y_1, y_2 , so daß

$$\begin{aligned} b_1 \cdot O y_1 + c_1 y_1 Y &= 0, \\ b_2 \cdot O y_2 + c_2 y_2 Y &= 0. \end{aligned}$$

Die Strahlen $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ schneiden sich in P ,

„ „ „ YP und OX in x_{12} ,

„ „ „ XP und OY in y_{12} .

Dann ist $x = O x_{12} / x_{12} X$ und $y = O y_{12} / y_{12} Y$.

Die Richtigkeit läßt sich mit dem Menelausschen Satze von der Gleichheit der Produkte der nichtbenachbarten Dreiecksabschnitte einer Schnitt-Geraden von dem Dreieck OXY erweisen. Die Punkte X, Y können auch ins Unendliche verlegt werden.

A. Goldberger¹⁷ nimmt in den Summenprodukten nicht wie Klingatsch die Unbekannten x_k als Hebelarme und die Koeffizienten a_{ik} als Kräfte, sondern gerade umgekehrt die Unbekannten als Kräfte und die Koeffizienten als bekannte Hebelarme an. Alle Seilpolygone verlaufen hier mit parallelen Seiten. Sowie bei Klingatsch und Csillag wird der Desarguesche Satz verwendet, daß die entsprechenden Seiten perspektivisch liegender Figuren in einer Geraden liegen. In dieser erkennt man wieder das Schnittlement zur Erklärung der Elimination.

b) **Das Problem einer Graphik der Determinanten** fällt mit dem der linearen Gleichungen zusammen. Muirhead und andere geben in ihren Beweisen bereits hierüber Aufschluß. Boulad¹⁸ beschäftigt sich damit unmittelbar. Tief blicken läßt diesbezüglich auch der wie eine vielfache Nürnberger Schere gebaute gegliederte Determinantenrahmen von F. Butavand¹⁹, dessen Begründung auf die von Goldberger gemachten Annahmen führt.

c) **Physische Hilfsmittel und Maschinen.** Dieser Übergang führt uns zu den mechanischen Hilfsmitteln zur Auflösung linearer Gleichungen. Sie sind mannigfach, sehr lehrreich, haben aber bisher keinen praktischen Wert errungen.

Sir W. Thomson²⁰, der spätere Lord Kelvin, hat an n parallelen Doppelhebeln je n Rollen befestigt, über welche gewichtsbeschwerte Schnüre laufen. Die durch Schnüre hervorgerufenen Hebelwirkungen liefern die Unbekannten. W. Veltmann²¹ schlug Balkenwagen vor und benutzt Flüssigkeiten in kommunizierenden Gefäßen. H. Helberger²² hat den patentierten aber vergeblichen Vorschlag und Versuch gemacht, die Berechnung der elektrischen Leitungsnetze auf Grund des Durchhanges von Schnüren entsprechend dem Seilpolygon vorzunehmen.

Die großen Stadtnetze haben das Bedürfnis nach Leitungsrechnungen gezeitigt. Der allgemeine Aufschwung in den zwangsläufigen Rechenmaschinen hat J. Nowak²³ zu einer geistreichen Maschine zum Berechnen elektrischer Leitungsnetze geführt. Leider hat man über ihren Fortschritt seit der ersten Ausführung auf der Gewerbeausstellung zu München 1911 nichts mehr vernommen.

Aus den entsprechenden Bedürfnissen der Ausgleichsrechnungen in der praktischen Geometrie ging zur selben Zeit die Vorrichtung zur Auflösung eines linearen Gleichungssystems von M. Näbauer²⁴ hervor. Nach allen Richtungen hin hat Karl Fuchs in Preßburg diese Aufgabe durchgearbeitet und sie frühzeitig²⁵ im Zusammenhange mit dem Problem des Zentrifugal-Regulators veröffentlicht.

Schließlich soll noch auf das verwandte Gebiet der graphischen Behandlung von Beobachtungsfehlern hingewiesen werden, wo gleiche Bestrebungen denselben Weg bahnen. Auch dort findet man die Parallelachsen, z. B. zur Auflösung der Normalgleichungen²⁶, und die Methoden der Graphostatik, so bei A. Basch²⁷.

Den Abschluß dieses Kapitels kann nun endlich die reingezüchtete Lösung unserer Hauptaufgabe bilden:

d) Elektrographik des Netzes. Sie soll fachtreu der Zeichnung bestehen und von der Mathematik, Geometrie und Mechanik reinlich geschieden sein. Um aber den Gang des jungen Gedankens zu festigen, mögen noch seine mathematischen Stützen nebenher mithinken.

Schlußbemerkung zu den vorhergehenden Kapiteln.

Die Reihenschaltung führte zur Addition der Widerstände, die Parallelschaltung zum Produkte, der überbrückte Paralleleiter zum Kettenbruche und die Netzverbindung zu linearen Gleichungen.

Dieser Zusammenhang wurde ausführlich erörtert; er wird noch durch die folgende Netzelimination in seinem innersten Wesen aufgedeckt.

Zwei elektrische Entwicklungen stehen sich reziprok gegenüber:

Die „Netzelimination“ in mathematischer, elektrischer und zeichnerischer Behandlung¹⁾.

1. Die Strom- und Spannungsverteilung in elektrischen Netzen läuft mathematisch auf die Auflösung linearer Gleichungen hinaus.

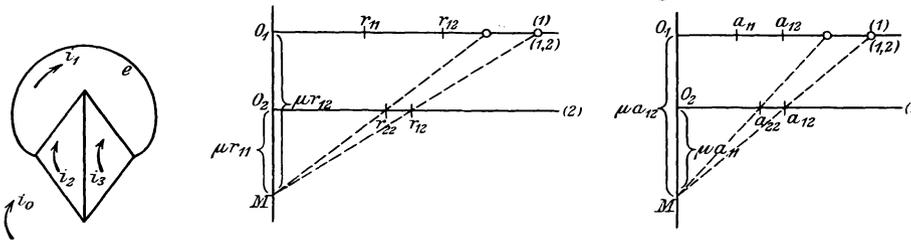


Abb. 100 a—c.

2. Diese Auflösung erfolgt durch schrittweise Elimination einer und derselben Unbekannten aus je zweien von ihnen.

3. Sobald daher diese Elimination rein elektrisch gedeutet wird, kann der Elektro-Ingenieur fachtreu seine Verteilungsaufgabe durchrechnen und durchzeichnen.

4. Die elektrische Deutung vollzieht sich in reziproker Weise an den Maschen und Knoten. Das Maschenöffnen entspricht dem Knotendecken, also Leerlauf dem Kurzschluß²⁾.

a) Elektrischer Vorgang für die Maschen. 1. Die Zahlenweiser 1, 2 (Abb. 100) beziehen sich auf die Maschen; daher 12, 13 .. auf die Widerstände r ihrer scheidenden Leiter; 11, 22 .. bedeuten die Umfangssummen $r_{11} = r_{12} + r_{13}$ usw.; i sind die unbekanntes Maschenströme; e vorerst die einzige elektromotorische Kraft;

$$+ r_{11}i_1 - r_{12}i_2 - r_{13}i_3 = e \tag{1}$$

$$- r_{12}i_1 + r_{22}i_2 - r_{23}i_3 = 0 \tag{2}$$

$$- r_{13}i_1 - r_{23}i_2 + r_{33}i_3 = 0 \tag{3}$$

¹⁾ Herzog, J.: Netzelimination. El. u. Maschinenb. 1904, S. 250.

²⁾ Man fasse die drei nachfolgenden Abschnitte in der Reihenfolge a, b a und b c, ferner a b wörtlich und gedanklich ins Auge.

2. Um das Öffnen von Masche (1) zu (2) zu erreichen, wird e und die r von (1) mit $-\frac{r_{12}}{r_{11}}$ multipliziert, der gemeinsame Widerstand r_{12} aufgehoben und dadurch zu einer neuen Masche vereinigt:

$$\left(-\frac{r_{12}^2}{r_{11}} + r_{12}\right) i_2 + \left(-\frac{r_{13}r_{13}}{r_{11}} + r_{13}\right) i_3 = -e \frac{r_{12}}{r_{11}}. \quad (1, 2)$$

Entsprechend öffnet man Masche (1) und (3) zu (1, 3) usw.

Aus n Maschen werden derart $n - 1$ neue, mit denen man zu $n - 2$ neuen und fortfahrend endlich bis zu einer einzigen gelangt, aus welcher ihr Strom bestimmt wird. Damit rückgehend folgen alle anderen Maschenströme.

Elektrographik der Maschenströme. 3. Elektrographisch ergibt sich dies vorerst durch parallele Maschenachsen als Träger der Widerstände r von den Nullpunkten O aus, Projektion des Trägers (2) aus dem Punkte M auf (1), wobei $O_1M/O_2M = r_{12}/r_{11}$ ist, und Addition der $r_{(1)}$ mit den projizierten negativen $r_{(2)}$ zwecks einer neuen Maschenachse (1), (2) usw.

4. Sind in jeder Masche (1), (2) . . die elektromotorischen Kräfte e vorhanden, so setzen sich diese unbekannt Ströme i'_1, i'_2 . . usw. aus denen der obigen Maschen (1), (2) . . zusammen:

$$i'_1 = \varrho_{11}i_1 + \varrho_{12}i_2 + \varrho_{13}i_3,$$

was als Überlagerung, Superposition der Ströme gilt.

b) **Mathematischer Vorgang für die linearen Gleichungen.** 1. Die Zahlenweiser beziehen sich auf die Gleichungen; daher 12, 13 auf die Koeffizienten ihrer Gleichungen; 11, 22 . . bedeuten die Diagonalglieder der Gleichungen; x sind die unbekannt GröÙen; l vorerst die einzige Absolute.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = l, \quad (1)$$

$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \quad (2)$$

$$a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 = 0, \quad (3)$$

2. Um die Eliminationsgleichung von (1) und (2) zu erreichen, multipliziert man (1) mit $-\frac{a_{12}}{a_{11}}$ und vereinigt dann beide zu einer neuen Gleichung ohne x_1 :

$$\left(-\frac{a_{12}^2}{a_{11}} + a_{22}\right)x_2 + \left(-\frac{a_{13}a_{11}}{a_{11}} + a_{13}\right)x_3 = -l \frac{a_{12}}{a_{11}}. \quad (1, 2)$$

Entsprechend geschieht die Elimination von x_1 aus (1) mit (3) usw.

Aus n Gleichungen werden derart $n - 1$ neue, mit denen man zu $n - 2$ neuen und fortfahrend endlich bis zu einer einzigen gelangt, aus welcher ihre Unbekannte bestimmt wird. Damit rückgehend folgen alle anderen Unbekannt.

Graphik der linearen Gleichungen. 3. Zeichnerisch ergibt sich dies vorerst durch parallele Gleichungsachsen als Träger der Zeilenkoeffizienten von den Nullpunkten O aus, Projektion des Trägers (2) aus dem Punkte M auf (1), wobei $O_1M/O_2M = a_{12}/a_{11}$ ist, und Addition

der $a_{(1)}$ mit den projizierten negativen $a_{(2)}$ zwecks einer neuen Gleichungsachse (1), (2) usw. (Abb. 100c).

4. Sind in jeder Gleichung (1), (2) . . die Absoluten l vorhanden, so setzen sich diese Unbekannten x'_1, y'_1 usw. aus denen der obigen Gleichungssysteme zusammen:

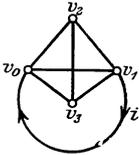


Abb. 101.

$$x'_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3,$$

was als lineare Zusammensetzung der Unbekannten gilt.

c) Elektrischer Vorgang für die Knoten. 1. Die Zahlenweiser beziehen sich auf die Knoten, daher 12, 13 . . auf die Leitwerte g ihrer verbindenden Leiter; 11, 22 . . bedeuten die Knotensummen (Abb. 101)

$$g_{11} = g_{12} + g_{13}$$

usw.; v sind die unbekanntenen Knotenspannungen (bezüglich Unterschiede); i vorerst die einzige Knotenstromabnahme.

$$g_{11} v_1 - g_{12} v_2 - g_{13} v_3 = i \tag{1}$$

$$-g_{12} v_1 + g_{22} v_2 - g_{23} v_3 = 0 \tag{2}$$

$$-g_{13} v_1 - g_{23} v_2 + g_{33} v_3 = 0. \tag{3}$$

2. Um das Decken vom Knoten (1) zu (2) zu erreichen, wird i und die g von (1) mit $-\frac{g_{12}}{g_{11}} i$ multipliziert, der Verbindungsleiter g_{12} kurzgeschlossen und dadurch zu einem neuen Knoten vereinigt:

$$\left(-\frac{g_{12}^2}{g_{11}} + g_{22}\right) v_2 + \left(-\frac{g_{13}g_{12}}{g_{11}} + g_{13}\right) v_3 = -i \frac{g_{12}}{g_{11}}. \tag{1, 2}$$

Entsprechend geschieht das Decken der Knoten (1) und (3) usw.

Aus n Knoten werden derart $n - 1$ neue, mit denen man zu $n - 2$ neuen und fortfahrend endlich bis zu einem einzigen gelangt, aus welchem seine Spannung bestimmt wird. Damit rückgehend folgen alle anderen Knotenspannungen.

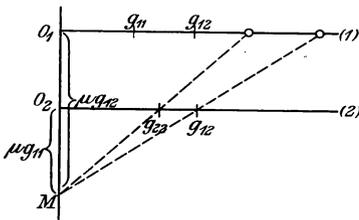


Abb. 102.

Elektrographik der Knotenspannungen. 3. Elektrographisch ergibt sich dies vorerst durch parallele Knotenachsen als Träger der Leitwerte g von den Nullpunkten O aus, Projektion des Trägers (2) aus dem Punkte M auf (1), wobei $O_1M/O_2M = g_{12}/g_{11}$ ist, und Addition der $g_{(1)}$ mit den projizierten negativen $g_{(2)}$ zwecks einer neuen Knotenachse (1), (2) usw. (Abb. 102).

4. Sind in jedem Knoten (1), (2) . . Abnahmeströme i vorhanden, so setzen sich die unbekanntenen Spannungen v_1, v_2 usw. aus denen der obigen Knoten (1, 2) zusammen:

$$v'_1 = \lambda_{11} i_1 + \lambda_{12} i_2 + \lambda_{13} i_{33},$$

was als Überlagerung, Superposition der Spannungen gilt.

Literatur zum 16. Abschnitt.

1. Fouret, G.: Pariser C. R. Bd. 80, S. 550. 1875. Z. T. auch in der Graphostatik Favaro-Terrier S. 224. Auf Indikatordiagramme von Verbunddampfmaschinen von J. C. Dijkhorn im Instituut van Ingen. Tijdschr. 1885/86, 2, S. 124 angewendet.
2. Massau, J.: Assoc. Ingén. sortis des écoles spéciales de Gand, Ann. 11, 1887/88, S. 91.
3. van den Berg, J. F.: Amst. Akad. Versl. Meded. (3) Bd. 4, S. 204. 1887. R. Mehmcke empfahl sie für viele Unbekannte in Z. f. Math. u. Phys. 1890 und in der Mosk. Math. Sammlung Bd. 16, S. 342. 1892.
4. R. Mehmcke gibt in der Enzyklopädie der math. Wiss. Bd. 1, H. 7, S. 1014. 1902 eine Literaturschau. Ihm verdankt J. Herzog eine schriftliche Auskunft hierüber vom Jahre 1891.
5. K. Schwing in seiner „Theorie und Anwendung der Linienkoordinaten in der anal. Geom. der Ebene“, 1884. Sein erster Aufsatz Z. f. Math. u. Phys. Bd. 21, S. 278 und Progr.-Abhandlg. des Briloner Gymnasiums.
6. Salmon-Fiedler: Die Kegelschnitte, Art. 76.
7. Schlegel: Z. f. Math. u. Phys. Bd. 23, S. 195.
8. Unverzagt, W.: „Über ein einfaches Koordinatensystem d. geraden Prop.“, Wiesbaden 1870/71.
- 8a. d'Ocagne: „Coordonnées parallèles et axiales.“ Nouv. Ann. 3. ser., Teil III, S. 410. 1884, u. Calcul graphique et nomographie. Encyclop. scientifique.
9. Mehmcke, R.: Encyclop. d. Math. Bd. 1, H. 7, S. 1039.
10. Klingatsch, A.: Monatshefte f. Math. u. Phys. 1892, S. 169, „Über eine geometrische Lösung eines Systems linearer Gleichungen“, und W. Csillag wie Klingatsch in der Mathematikai és physikai lapok, Budapest 1898, 4 und J. Herzog verwendet die Klingatschsche Lösung zur Stromverteilung in Leitungsnetzen in der ETZ 1893, H. 1.
11. v. d. Griend jr., J.: Nieuw Archief voor Wiskunde (2), 4, S. 22, 39. 1909.
12. Schoute, P. H.: Mehrdimensionale Geometrie. Sammlung Schubert Bd. 25, I. Teil, S. 167. 1905.
13. Vaes, F. J.: Graphische Auflösung von n linearen Gleichungen. Engg. Bd. 65. 1898; Nouv. Ann. de Math., 3. série, XVIII. 1899 und Nieuw Archief voor Wiskunde 1899.
14. Goldziher, K.: Ung. Ing.- u. Arch.-Z. 1911, Nr. 17 u. 19; Z. f. Math. u. Phys. Bd. 61, H. 1/2. 1912.
- 14a. Maitland, C. A. E.: Een nieuwe graphische methode voor het oplossen van systemen van lineaire vergelijkingen in verband met de berekening van electricische leidingsnetten. De Ingenieur 1909, Nr. 28.
15. Boulad, R. F.: Nouv. Ann. de Math., 4. sér., XVII. 1907, zweite Arbeit.
16. Muirhead, R. F.: A graphical method of solving n simultaneous linear equations involving n unknowns. Proc. Edinburgh Math. Soc., Bd. 26 1907/08.
- 16a. Verhoeckx, P. M.: El. u. Maschinenb. 1904, H. 7, S. 21.
17. Goldberger, A.: Ung. Ing.- u. Arch.-Z. 1911, H. 4.
18. Boulad, M. F.: Un procédé de calcul graphique des déterminants. Assoc. franç. pour l'av. de sciences 1909.
19. Boutavand, F.: Sur la représentation des déterminants par des systèmes articulés. L'enseignement mathem. Bd. 18, Nr. 5. 1911.
- 19a. Mehmcke, R.: Graphische Berechnung von Determinanten beliebiger Ordnung. Z. f. Math. u. Phys., 25. Sept. 1913.
20. Thomson, W.: R. Soc. Proc. 28, S. 111. 1878; Nature 1878, S. 161. Ähnliches bei F. Guarducci: Rom. Lincei Mem. (4), 7, S. 217. 1890.
21. Veltmann, W.: Z. Instrumentenk. Bd. 4, S. 338. 1884; Dycks Katalog, Nr. 40, S. 155.
22. Helberger-Schütz, H.: Dycks Katalog, Nr. 298 b, Nachtrag S. 122. Der Versuchsapparat ruht im Deutsch. Museum zu München.
23. Nowak, J.: ETZ 1911; Dtsche. Patentschr. Nr. 225756, Klasse 42m, Gruppe 20, vom 7. April 1910.
24. Näbauer, M.: Theorie, Beschreibung und Gebrauch einer Ausgleichsmaschine, Würzburg 1909 und Z. f. Math. u. Phys. Bd. 58, H. 3, April 1910.

25. Fuchs, Karl: Über die Berechnung von Zentrifugal-Regulatoren, fünf Unbekannte, Hebeln mit Gewicht in Flüssigkeiten. Z. öst. Ing.-V. Bd. 44, Nr. 31. 1892; ferner: Die Gleichungswage. Österr. Z. f. Vermessungswesen Jg. 5, Nr. 3—4. 1907, und: Hilfsapparat zur Berechnung elektrischer Leitungsnetze. El. u. Maschinenb. Wien 1913, S. 1115.
26. Weigel, K.: Graph. Ausgleichung der vermittelnden bedingten und anderen mehr komplizierten Beobachtungen. Österr. Z. f. Vermessungswesen 1910, S. 328, 355.
27. Basch, A.: Über eine Anwendung der graphostatischen Methode auf den Ausgleich von Beobachtungsergebnissen. Mitt. des Techn. Versuchsamtes, Jg. 1, H. 2 u. 3. 1912.

VI. Netzumbildung.

1. Allgemeines.

Wie kann ein Teil eines Netzes ohne Beeinflussung des übrigen Restes umgebildet werden?

Als wirksames Mittel zu diesen Untersuchungen dient die topographische oder Zweibildermethode der Vektorendarstellung, bei welcher statt des Spannungs- oder Stromvektors bloß sein Endpunkt,

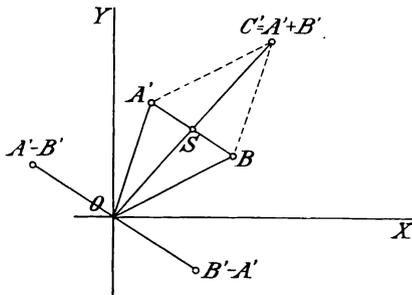


Abb. 103.

also statt OA' einfach A' im Bild und in der Rechnung erscheint¹⁾. Für den Wert eines Vektors ist der Weg, auf welchem man von seinem Anfangs- zu seinem Endpunkt gelangt, hier gleichgültig.

Beim Spannungsvektor OA' , Abb. 103, wird die Spannung A' durch den Unterschied gegenüber der Spannung Null im Ursprung O gemessen. Es ist also der Vektor $OA' = A' - O = -$

$(O - A') = -(A'O)$. Ebenso gilt für eine zweite Spannung $OB' = O - B'$. Da aber nach den Regeln der Richtungsgrößen in Abb. 103 $A'B' = A'O + OB' = (O - A') + (B' - O) = (B' - A')$ ist, so wird der Spannungsunterschied zwischen zwei beliebigen Werten $B' - A'$ durch $A'B'$ dargestellt. Ebenso ist $OC' = OA' + A'C' = A' - O + C' - A' = C' - O$.

Die Spannung im Diagonalmittelpunkt S ist die Hälfte jener im Punkte C' , weil sich die Diagonalen eines Parallelogramms hälften. Sie beträgt $\frac{1}{2}(A' + B') = S$, oder $A' + B' = 2S$. Der Halbierungspunkt von $A'B'$ kann also als Ersatz seiner Spannungswerte A' und B' dienen, sofern ihm die doppelte Maßzahl oder Wertigkeit beigelegt wird. In diesem Sinne kann dann den Spannungswerten A' und B'

¹⁾ Görges, H.: Über die graphische Darstellung des Wechselstrompotentials und ihre Anwendung. ETZ 1898, H. 11 und ferner Punga, Franklin: Z. f. Elektrotechnik, Wien 1901, S. 516.

die Wertigkeit „Eins“ zgedacht werden, durch deren Addition die Wertzahl ihres Mittelpunktes oder ihres Ersatzpunktes sich ergab.

Hat man nun einen dritten Spannungswert D zu A' und B' hinzuzufügen, so kann $2S$ mit D verbunden werden, und es wird $A' + B' + D = 3S$. Ebenso wird der Mittelpunkt von n Punkten das arithmetische Mittel der Werte der n -Punkte sein. Man erkennt, daß dann $nS = A' + B' \dots$, wobei die Operationen im allgemeinen nach den Gesetzen der Richtungszahlen auszuführen sind. Die Mechanik legt den Punkten die Gewichte als Maßzahlen bei, wobei dann dem Schwerpunkte die ganze Masse der einzelnen Punkte zugewiesen wird. Je nachdem man sich also einen Punkt, ob Spannungs-, Strom- oder Massenpunkt ist gleichgültig, aus zwei oder mehreren entstanden denkt, kann sein Lagewert mit einer Maßzahl multipliziert und sein Punktprodukt erhalten werden. In diesem Sinne kann man die ursprünglichen Punkte als einfache, die abgeleiteten als mehrfache bezeichnen. Für den Ersatzpunkt S zweier Punkte αA und βB wird sich danach $(\alpha + \beta)S = \alpha A + \beta B$ ergeben. Entsprechend der Graßmannschen Ausdehnungslehre wird das Punktprodukt des Mittelpunktes demgemäß gleichgesetzt der Summe der einzelnen Punktprodukte.

Das Überlagerungsprinzip gestattet nach vorstehendem eine neue Deutung. Die in

einem Knoten oder Leiter auftretenden sukzessiven Spannungen oder Ströme können durch die n -fache Spannung oder den n -fachen Strom ihres Mittelpunktes (Schwerpunktes) ersetzt werden.

Soll ein Knoten S in Abb. 104 mit seinen Nachbarknoten sich bezüglich der Verteilung im Gleichgewichte befinden, so muß nach Kirchhoff sein:

$$i = (V_1 - V + E_1)g_1 + (V_2 - V + E_2)g_2 + \dots$$

wobei $g_1, g_2 \dots$ die Leitwerte bedeuten. Hieraus ergibt sich unmittelbar bei $i = 0$

$$(V_1 + E_1)g_1 + (V_2 + E_2)g_2 + \dots = V(g_1 + g_2 + \dots)$$

Sieht man in den g die Maßzahlen der Spannungen $(V_1 + E_1) \dots$, so kommt man wieder auf den obigen Satz der Punktprodukte und erkennt, daß in diesem Sinne S den Ersatzpunkt seiner Nachbarwerte bilden muß. Das gegebene Punktsystem kann durch ein gleichwertiges

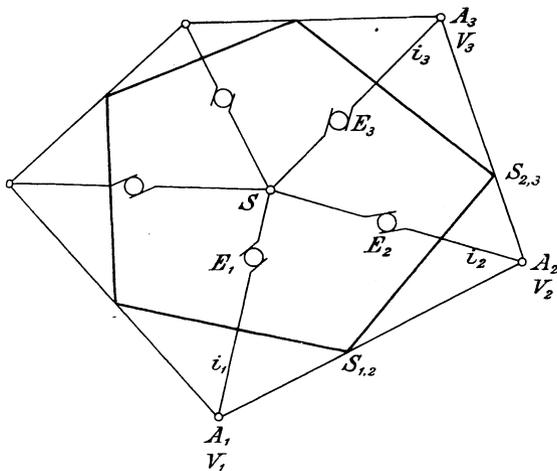


Abb. 104.

ersetzt werden, indem in jeder Seite aus den Eckenwerten die Seitenmittelpunkte $S_1, 2 \dots$ als neue Eckpunkte ermittelt werden. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man als Grenze den Ersatzpunkt S .

Die Bedingungsgleichung besagt aber auch, unter welchen Umständen ein Umfangsnetz durch ein sternförmiges und umgekehrt ohne sonstige Netzveränderung ersetzt werden kann. Wir werden diese Umbildung für drei und vier Knoten eines Netzes, namentlich für Gleichstrom, später eingehender betrachten.

2. Die Strombefreiung des Mittelknotens in einem sternförmigen Leitergebilde. Die Knotenentlastung.

Das Leitergebilde in Abb. 105 heiße Sternnetz. Die Punkte $I, II \dots$ können an ein Netz anschließen oder auch selbständige Speisestellen sein. O ist der Mittelknoten, V seine Spannung und i_0 seine Stromentnahme. $OI, OII \dots$ sind die Schenkel mit den Widerständen $r_1, r_2 \dots$

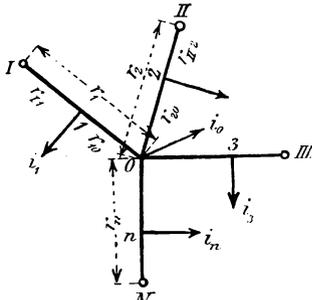


Abb. 105.

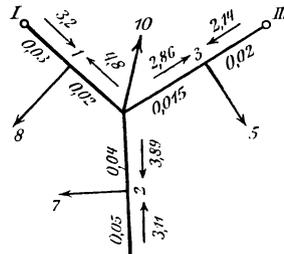


Abb. 106.

oder mit den Leitwerten $g_1, g_2 \dots, V_1, V_2 \dots$ die Spannungen in den Punkten $I, II \dots$

Zunächst soll das Zahlenbeispiel in Abb. 106 mit gleich hohen Spannungen in die Theorie einführen. Man versetzt die Abnahmen

$i_1 = 8, i_2 = 7$ und $i_3 = 5$ Amp. einerseits auf ihre Speisepunkte, andererseits auf den Mittelknoten O , fat dann die Speisepunkte mit ihren hier gleich hohen Speisespannungen $V_1 = V_2 = V_3$ zu einem Knoten zusammen, Abb. 107, und ersetzt den dreifachen Strang durch einen einzigen. Die bezüglichen Komponenten sind:

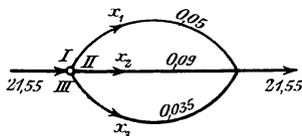


Abb. 107.

$$i_{I1} = 8 \frac{0,02}{0,02 + 0,03} = 3,2 \text{ Amp,} \quad i_{O1} = 8 - 3,2 = 4,8 \text{ Amp,}$$

$$i_{II2} = 7 \frac{0,04}{0,04 + 0,05} = 3,11 \text{ ,,} \quad i_{O2} = 7 - 3,11 = 3,89 \text{ ,,}$$

$$i_{III3} = 5 \frac{0,015}{0,015 + 0,02} = 2,14 \text{ ,,} \quad i_{O3} = 5 - 2,14 = 2,86 \text{ ,,}$$

Der Strom im Mittelknoten beträgt dann $10 + 4,8 + 3,89 + 2,86 = 21,55$ Amp. Seine Teilströme x_1 , x_2 und x_3 , Abb. 107, berechnen sich aus:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 21,55, \\ x_1(0,03 + 0,02) &= x_2(0,05 + 0,04), \\ x_2(0,05 + 0,04) &= x_3(0,02 + 0,015), \end{aligned}$$

woraus: $x_1 = 7,2216$; $x_2 = 4,012$ und $x_3 = 10,3164$ Amp.

Um die tatsächliche Stromverteilung zu erhalten, sind zu diesen Strömen die Leerlauf- oder Ausgleichströme zu addieren. Demnach sind die Ströme in *I1*, *II2* und *III3*:

$$\begin{aligned} 7,2216 + 3,2 &= 10,4216; \\ 4,012 + 3,11 &= 7,122; \\ 10,3164 + 2,14 &= 12,4564 \text{ Amp.} \end{aligned}$$

und die Ströme in 10, 20 und 30:

$$\begin{aligned} 10,4216 - 8 &= 2,4216; \quad 7,122 - 7 = 0,122 \text{ und} \\ 12,4564 - 5 &= 7,4564 \text{ Amp.} \end{aligned}$$

Betragen jedoch die Spannungen in den Knoten *I*, *II* und *III* 105, 103 und 104 Volt, dann berechnen sich die Ströme aus den drei neuen Gleichungen

$$\begin{aligned} x + y + z &= 10 \\ 105 - [(x + 8) 0,03 + 0,02 x] &= 104 - [(z + 5) 0,02 + 0,015 z], \\ 105 - [(x + 8) 0,03 + 0,02 x] &= 103 - [(y + 7) 0,05 + 0,04 y]. \end{aligned}$$

mit: $x = 19,45$; $y = -12,64$ und $z = 3,19$ Amp.

Die schließliche Stromverteilung ist hierfür in Abb. 108 eingetragen. Die Mittelspannung in *O* berechnet sich zu

$$105 - [(8 + 19,45) \cdot 0,03 + 19,45 \cdot 0,02] = 103,787 \text{ Volt.}$$

Dieses Beispiel soll nun auch durch Versetzung der Abnahmen auf die Knoten betrachtet werden. Die bezüglichen Komponenten sind gleich den in Abb. 106 eingetragenen, wodurch das Bild Abb. 109 entsteht. Die Leerlaufströme x' , y' und z' finden sich aus:

$$\begin{aligned} 105 - 0,05 x' &= 104 - 0,035 z', \\ 105 - 0,05 x' &= 103 - 0,09 y', \\ x' + y' + z' &= 21,55 \end{aligned}$$

oder geordnet

$$\begin{aligned} 0,05 x' &- 0,035 z' &= 1, \\ 0,05 x' - 0,09 y' & &= 2, \\ x' + y' + z' & &= 21,55, \end{aligned}$$

woraus $x' = 24,25$; $y' = -8,75$ und $z' = 6,06$ folgen.

Diese Leerlaufströme werden nun den Stromkomponenten superponiert, wodurch die Stromverteilung der Abb. 108 entsteht.

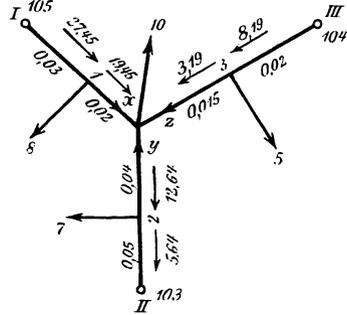


Abb. 108.

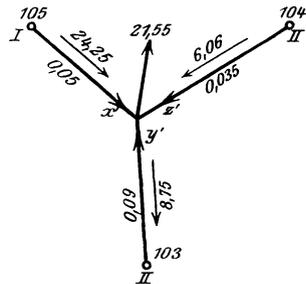


Abb. 109.

Wenn man den Fall der Abb. 106 hätte nach der Knotenspannungsmethode aufklären wollen, so wären vier Gleichungen für die Spannungen der drei Verzweigungspunkte und des Mittelknotens erforderlich. Betrachten wir nun nur diesen.

3. Die Befreiung des mehrfachen Verzweigungspunktes von seiner Stromentnahme.

Die in Abb. 41 Seite 73 gelehrt Entlastung oder Befreiung des einfachen Knotenpunktes C läßt sich auch auf mehrfache Knoten anwenden, worin mehr als drei Leitungen zusammenkommen. Ein solcher mehrfacher Knotenpunkt ist der Mittelknoten V in Abb. 110, worin die Schenkelwiderstände $r_1, r_2, r_3 \dots$ und die Belastung J zusammenkommen.

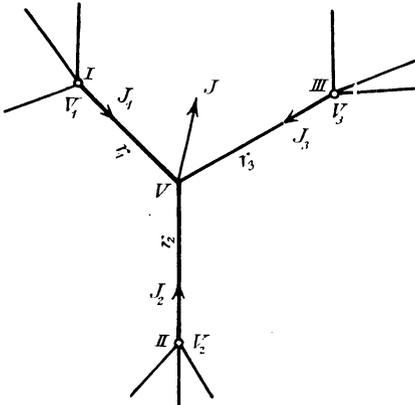


Abb. 110.

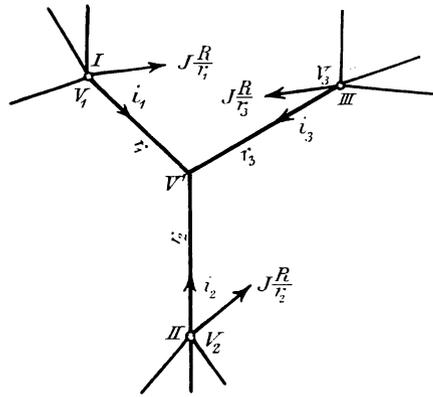


Abb. 111.

Die Einzelströme $J_1, J_2 \dots$ in Abb. 110, welche dem mit der Abnahme J belasteten Mittelknoten in den Leitern $r_1, r_2 \dots$ zufließen, sind bei den gegebenen Spannungen V_1, V_2, V_3 :

$$J_1 = \frac{V_1 - V}{r_1} = (V_1 - V)g_1 = V_1g_1 - Vg_1$$

$$J_2 = \frac{V_2 - V}{r_2} = (V_2 - V)g_2 = V_2g_2 - Vg_2$$

$$J_3 = \frac{V_3 - V}{r_3} = (V_3 - V)g_3 = V_3g_3 - Vg_3.$$

Für die Abnahme J im Mittelknoten gilt

$$J = J_1 + J_2 + J_3 = V_1g_1 + V_2g_2 + V_3g_3 - V(g_1 + g_2 + g_3).$$

Setzt man hierin die Summe der Leitwerte $= G = \frac{1}{R}$, dann folgt

$$J = \frac{V_1}{r_1} + \frac{V_2}{r_2} + \frac{V_3}{r_3} - VG$$

und die unbekannt Spannung des Mittelknotens

$$V = R \left\{ \frac{V_1}{r_1} + \frac{V_2}{r_2} + \frac{V_3}{r_3} - J \right\} \quad (1)$$

oder

$$= \frac{1}{G} \{ V_1 g_1 + V_2 g_2 + V_3 g_3 - J \}.$$

Durch Einsetzen dieses Wertes in die ersten Gleichungen erhält man dann die gesuchten Schenkelströme (Abb. 111)

$$\begin{aligned} J_1 &= \left[\frac{V_1}{r_1} - \frac{R}{r_1} \left(\frac{V_1}{r_1} + \frac{V_2}{r_2} + \frac{V_3}{r_3} \right) \right] + \frac{R}{r_1} J = i_1 + \frac{R}{r_1} J, \\ &= \left[V_1 g_1 - \frac{g_1}{G} (V_1 g_1 + V_2 g_2 + V_3 g_3) \right] + \frac{g_1}{G} J = i_1 + \frac{g_1}{G} J \end{aligned}$$

und ebenso

$$\begin{aligned} J_2 &= i_2 + \frac{R}{r_2} J = i_2 + \frac{g_2}{G} J, \\ J_3 &= i_3 + \frac{R}{r_3} J = i_3 + \frac{g_3}{G} J. \end{aligned}$$

Die Ströme $J_1, J_2 \dots$ bestehen also je aus den Leerlaufströmen i_1, i_2, i_3 , welche nur von den Spannungen der Knoten *I, II, III* und von den Widerständen der Schenkel abhängen und auftreten würden für $J = 0$, und aus den Komponentenströmen $J \frac{R}{r_1} \dots J \frac{R}{r_n}$, welche nur durch den Abnehmer im Mittelknoten und durch die Widerstände seiner Schenkel bestimmt werden, von den Knotenspannungen jedoch unabhängig sind. Demnach können die Ströme $J \frac{R}{r_1}, J \frac{R}{r_2}, J \frac{R}{r_3} \dots J \frac{R}{r_n}$, die Komponenten der Mittelknotenbelastung, auf die Knoten *I, II* ... geworfen werden, ohne die Spannung dieser Knoten hierdurch zu ändern.

Die Gleichung (1) läßt sich mit den Leitwerten als Spannungsmoment deuten.

$$VG = (V_1 g_1 + V_2 g_2 + V_3 g_3) - J = \sum (V_n g_n) - J \dots r).$$

Die Summe der Spannungsmomente der Umfangsknoten 1,2 ... n hält bei Leerlauf, also für $J = 0$ dem Spannungsmoment des Mittelknotens gerade das Gleichgewicht.

Demnach kann die Befreiung eines Verzweigungspunktes *O* von seiner Stromentnahme, seine Entlastung, durch Versetzung seiner Teilströme auf seine Nachbarknoten erfolgen. Dieses Ergebnis bestätigt sich durch Überlagerung von Strömen und Spannungen auch unmittelbar. Diesen Momentensatz der Knotenspannungen hat für Wechselströme und mehrere Schenkel bereits R. Ulbricht in der ETZ 1892, Heft 12 gegeben. Der Gedanke einer Knotenentlastung ist dort nicht ausgesprochen. Dieser ist noch im Jahre 1903 von berufener Seite als neu in der ETZ 1903, S. 339 befunden worden.

Diese Auslegung der Verlegung der Komponenten der Mittelknotenbelastung auf die Umfangsknoten, wobei der Mittelknoten entlastet wird, erweist sich zuweilen sehr fruchtbar.

4. Widerstandstreue.

Unter Widerstandstreue eines Netzes oder Netzteilens bezüglich bestimmter Netzpunkte (Speisestellen, Knoten oder beide) wird die Erhaltung der Strom- und Spannungsverteilung trotz teilweiser oder ganzer Netzumbildung verstanden. Widerstandstreue ist vorhanden, wenn die Widerstandsverhältnisse des Restnetzes unverändert bleiben. Auf den „Widerstand eines Netzes bezüglich mehrerer Punkte“ kann man sich hier jedoch noch nicht stützen, er ist ein künstlicher Begriff, der erst später geschaffen werden soll; sicher ist nur, daß dieser Widerstand erhalten bleibt, wenn die Widerstände zwischen jenen Punkten im Urnetz und in seiner Umwandlung einzeln übereinstimmen, was auf die Gültigkeit der Überlagerungsgesetze hinausläuft.

Der Netzwidestand zwischen zwei Punkten mit den Spannungen V_1 und V_2 kann durch einen einzigen Leiter ersetzt gedacht werden. Man kann dann zuerst den Punkt 2 geerdet oder auf die Spannung $V_2 = 0$

gebracht denken, wobei nur die Spannung V_1 noch wirkt; danach denke man V_1 geerdet, wobei nur V_2 wirkt. Die wirkliche Strom- und Spannungsverteilung ergibt sich durch Überlagerung der beiden Fälle. Es ist eben nach der Punktrechnung

$$V_1 - V_2 = (V_1 - 0) + (0 - V_2).$$

Daraus geht hervor, daß die Widerstandstreue ohne weiteres sich auch auf die Einzelwiderstände von jedem Bezugspunkt zu allen anderen Punkten beziehen kann, welche die Spannung

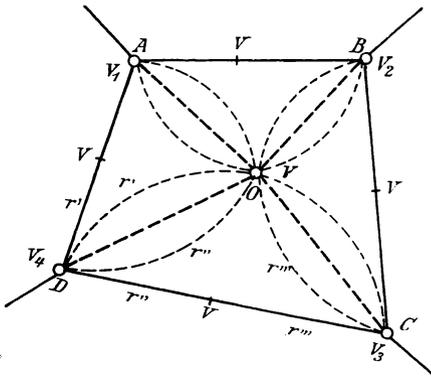


Abb. 112.

Null besitzen, also untereinander zusammengefaßt, kurzgeschlossen oder geerdet sind.

Soll ein Widerstandsvieleck mit den Knoten $A, B \dots$ in einen Stern O widerstandstreu, d. h. derart verwandelt werden, daß nach außen hin keinerlei Änderung eintritt, so kann man sich vorläufig in jedem Leiterstück einen Punkt von dem Spannungswert V des zu bildenden Knotens O aufgesucht denken und diese Punkte zu einem einzigen Knoten zusammenraffen oder kurzschließen. Werden dann in Abb. 112 die mehrfachen Widerstände r' und r'' durch je einen ersetzt, so erhält man einen widerstandstremen Stern mit ebensoviel Strahlen als das Vieleck Seiten besaß.

Führt man diesen Gedanken für ein beliebiges Vieleck durch, so zeigt sich, daß die neugebildeten Schenkelwiderstände des Sterns im allgemeinen von den Werten der Spannungen der Knoten $A, B \dots$ abhängen. Nur bei zwei und drei Knoten ergibt sich die wertvolle Eigenschaft, daß eine von diesen Spannungen unabhängige Umbildung möglich ist.

5. Die Transfigurierung.

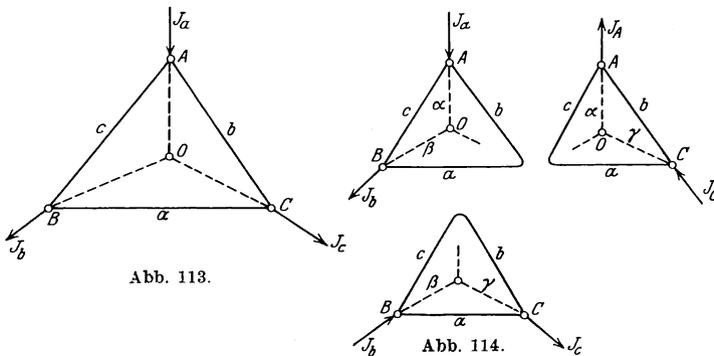
Die widerstandstreue Umgestaltung des Dreiecks in einen Stern oder des Dreistrahs in ein Dreieck haben wir 1900 als Dreieck-Transfigurierung in die Leitungsberechnung eingeführt. Sie ist von großer Bedeutung für die Netzberechnung.

a) **Transfigurierung eines Dreiecks in einen Stern.** Kennelly¹⁾, der diese Methode für Drehstromschaltungen verwendete, gab ohne Beweis die folgende Formel für die Umwandlung:

$$\alpha = \frac{bc}{a + b + c}.$$

Der Schenkelwiderstand α ist gleich dem Produkt seiner Seitenwiderstände b, c , geteilt durch die Umfangswiderstände $a + b + c$.

Zeichnet man die gegebene Abbildung mit vollen Linien, die gesuchte mit gestrichelten Linien, dann kann man sich den Fall der Abb. 113



entstanden denken aus der Superposition der drei in Abb. 114 gezeichneten Fälle, wobei jeweils einer der Ströme Null geworden ist. Die Knotenspannungen A, B, C sind willkürlich, die Ströme ebenfalls. Nur müssen sie der Bedingung genügen, daß $J_a + J_b + J_c = 0$ ist, entsprechend dem Kirchhoffschen Gesetz. Der Fall ist allgemein, wenn man alle Belastungen auf die Knoten versetzt denkt. Der leerlaufende Knoten ist in Abb. 114 abgerundet dargestellt. Die Ströme in den Schenkeln oder Strahlen des Sternes sind stets gleich den in den Knoten ankommenden oder abströmenden Strömen. Man liest

¹⁾ Kennelly, A. E.: On the determination of current strength in three-pointed star resistance systems. El. World Bd. 34 S. 268, 413. 1899. Diese Aufsätze hatten die Drehstromschaltungen und die Wheatstonesche Brückenschaltung im Auge. Als Mittel zur Leitungsberechnung wurde die Umformung zuerst von Herzog-Feldmann im Aufsätze: Über widerstandstreue Umgestaltung elektrischer Netze (Transfigurierung). ETZ 1900, S. 167 gebracht.

also aus den Abbildungen 114

$$\text{für } J_a = J_b: \quad \alpha + \beta = \frac{c(a+b)}{a+b+c} \quad (1)$$

$$\text{,, } J_b = J_c: \quad \beta + \gamma = \frac{a(b+c)}{a+b+c} \quad (2)$$

$$\text{,, } J_c = J_a: \quad \gamma + \alpha = \frac{b(c+a)}{a+b+c} \quad (3)$$

Aus der Addition dieser drei Gleichungen folgt

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{ab+bc+ca}{a+b+c} \quad (4)$$

Und aus dem Unterschied

$$\text{von (4) und (2)} \quad \alpha = \frac{bc}{a+b+c} \quad (5)$$

$$(4) \text{ und (3)} \quad \beta = \frac{ca}{a+b+c} \quad (6)$$

$$(4) \text{ und (1)} \quad \gamma = \frac{ab}{a+b+c} \quad (7)$$

Die Gleichungen (2) und (3) können durch zyklische Vertauschung der Buchstaben aus (1), ebenso (6) und (7) aus (5) abgeleitet werden.

Bei der Umwandlung des Dreiecks in den widerstandstreuen Stern muß man also mit Widerständen rechnen und den Beweis führen, indem man je einen Strom Null werden, also einen Knoten leerlaufen läßt.

b) Transfigurierung eines Sterns in ein Dreieck. Hier muß man umgekehrt mit Leitwerten rechnen und den Beweis führen durch Kurzschließen zweier Knoten.

Der gegebene Stern ist in Abb. 115 durch ausgezogene, das gesuchte Dreieck durch gestrichelte Linien angedeutet.

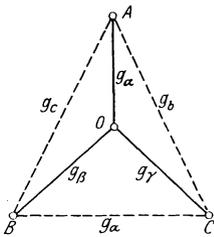


Abb. 115.

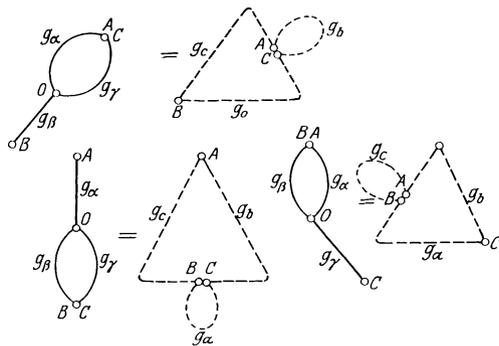


Abb. 116.

Superponiert man die drei Bilder der Abb. 116, dann erhält man wieder den ursprünglichen Fall (zweimal). Aus den Abbildungen oder durch Vertauschung der Buchstaben liest man sofort

$$g_a + g_c = \frac{g_\beta(g_\gamma + g_\alpha)}{g_\alpha + g_\beta + g_\gamma} \quad (1)$$

$$g_b + g_a = \frac{g_\gamma(g_\alpha + g_\beta)}{g_\alpha + g_\beta + g_\gamma} \quad (2)$$

$$g_c + g_b = \frac{g_\alpha(g_\beta + g_\gamma)}{g_\alpha + g_\beta + g_\gamma} \quad (3)$$

Aus der Superposition folgt

$$g_a + g_b + g_c = \frac{g_\alpha g_\beta + g_\beta g_\gamma + g_\gamma g_\alpha}{g_\alpha + g_\beta + g_\gamma} \quad (4)$$

und aus dem Unterschied zwischen

$$(4) \text{ und } (3): \quad g_a = \frac{g_\beta g_\beta}{g_\alpha + g_\beta + g_\gamma} \quad (5)$$

$$(4) \text{ und } (1): \quad g_b = \frac{g_\gamma g_\alpha}{g_\alpha + g_\beta + g_\gamma} \quad (6)$$

$$(4) \text{ und } (2): \quad g_c = \frac{g_\alpha g_\beta}{g_\alpha + g_\beta + g_\gamma} \quad (7)$$

Der Leitwert jeder Dreiecksseite = dem Produkt der benachbarten zwei Sternstrahlen geteilt durch die Summe der Leitwerte der drei Sternstrahlen. Bei der Transfigurierung von Dreieck in Stern erscheint ein Sternpunkt O , dessen Potential man berechnen kann. Bei der Transfigurierung von Stern in Dreieck verschwindet ein Sternpunkt. Sollte dieser belastet sein, dann müßte die Belastung erst auf die anderen Knoten geworfen werden.

¶ Für die widerstandstreue Umformung von Dreieck in Stern gilt die Mutterformel¹⁾ der Widerstände:

$$a\alpha = b\beta = c\gamma = \frac{abc}{a+b+c}.$$

Für die widerstandstreue Umformung von Stern in Dreieck gilt die Mutterformel der Leitwerte:

$$g_a g_\alpha = g_b g_\beta = g_c g_\gamma = \frac{g_\alpha g_\beta g_\gamma}{g_\alpha + g_\beta + g_\gamma}.$$

Diese Mutterformeln prägen sich leicht dem Gedächtnis ein. Da sie die Knotenspannungen A, B, C nicht enthalten, so gelten diese Beziehungen auch für beliebige unbekannte Spannungen.

c) **Zeichnerische Dreieckstransfigurierung.** In dem Dreiecksnetz der Abb. 117 seien A, B, C die Eckspannungen, a, b, c die Widerstände ihrer Gegenseiten. Hieraus folgen die Eckströme J_A, J_B, J_C und die Ströme der Dreiecksseiten i_a, i_b, i_c . Der Schenkelwiderstand α des Sternes findet sich aus dem Spannungsverlust

$$A - D = \alpha J_A = \alpha(i_c + i_b) = \alpha \left(\frac{A - B}{c} + \frac{A - C}{c} \right) \quad (M)$$

¹⁾ Sumec, J. K.: Zeitschr. für Elektrot. 1903, 1. November.

und entsprechend für β und γ . Jeder beliebigen Spannung D ließen sich also drei zusammengehörige Werte α , β , γ zuweisen. Um das weitere Verständnis zu erleichtern, werde die Entwicklung an einem Zahlenbeispiele weitergeführt, Abb. 117.

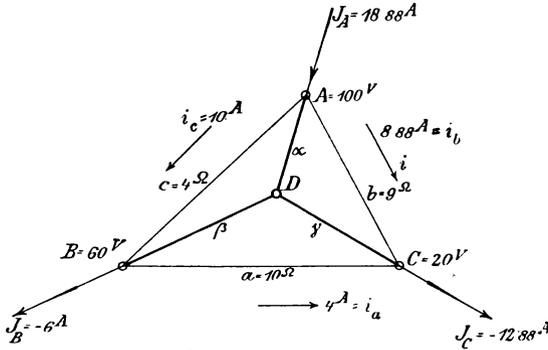


Abb. 117.

Nimmt man für D die willkürliche Spannung von 80 Volt an, so ergibt ihre Einsetzung in Gleichung (M), während $A = 100$ Volt, $J_A = 18,88$ Amp. ist, $\alpha' = \frac{100 - 80}{18,80} = 1,06$, $\beta' = 4,66$ und $\gamma' = 3,33$ Ohm.

Diese Werte entsprechen nur der besonderen Annahme von D . In jeder der drei Dreiecksseiten liege je ein Punkt mit der Spannung D , hier 80 Volt, in Abb. 118. Die drei Seiten tragen also sechs Widerstandsstücke, welche die merkwürdige Eigenschaft besitzen, daß das Produkt je dreier nicht benachbarter einander bis auf den Zeichenwechsel gleich ist; außerdem liegen diese drei Spannungspunkte auf der Niveau-

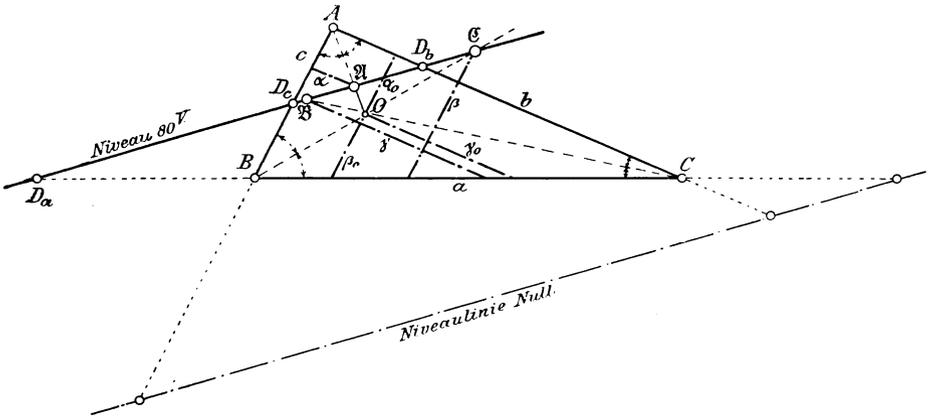


Abb. 118.

linie $D = 80$ Volt. Dies entspricht dem 2000 Jahr alten Satze von Menelaus und dem reziproken neueren von Ceva-Carnot der Geometrie. Bei der Wahl gleicher Spannungspunkte D_a , D_b , D_c auf den Seitenwiderständen findet man, daß dies nur möglich ist, wenn eine von den drei Seiten verlängert wird. Die Geometrie macht so aufmerksam, daß ein offener Widerstand durch die Einführung des Negativen eigentlich immer geschlossen wird, was ja dem Gegenstand natürlich ist.

Schiebt man nun die drei Punkte D_a , D_b und D_c zu D in Abb. 119 zusammen und ersetzt je zwei in einem Eckpunkte sich begegnende Widerstände durch den gleichwertigen, so ist die Verwandlung von der Dreiecks- zur Sternform vollzogen.

Es ist also für die Ecke A bei $D = 80$ Volt:

$$\frac{1}{\alpha'} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2,25} = \frac{1}{1,06},$$

für B :

$$\frac{1}{\beta'} = \frac{1}{-5} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3,33}$$

und für C :

$$\frac{1}{\gamma'} = \frac{1}{6,75} + \frac{1}{15} = \frac{1}{4,66},$$

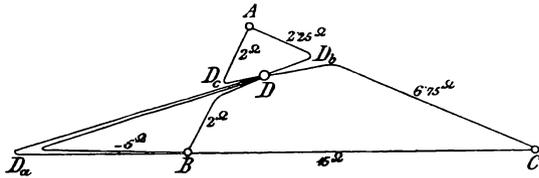


Abb. 119.

was mit den obigen Werten für α , β , γ übereinstimmt. Diese Parallelschaltung kann man aber auch graphisch nach Abb. 3 und 4 aus Kapitel II vornehmen. Jeder Winkel bei A , B , C ist (Abb. 118) zu hälften und mit der Niveaulinie 80 Volt zum Schnitt zu bringen. Durch diese Punkte \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} werden Parallele zu den Dreiecksseiten gezogen, wodurch sich α' , β' , γ' sofort ergeben. Für die bevorzugte Niveaulinie, welche durch den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden O , den Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises geht, fallen auch die Punkte \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} zusammen, und diese Sonderwerte α_0 , β_0 , γ_0 (Abb. 118) sind von der Richtung der Niveaulinie unabhängig, d. h. sie werden von den Spannungswerten A , B , C selbst nicht beeinflusst. Um die Spannung D des Punktes O zu ermitteln, versetzt man

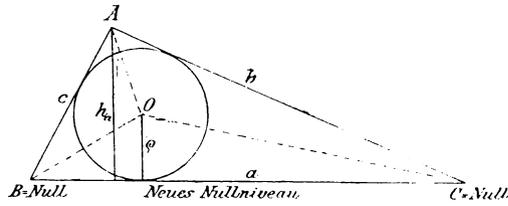


Abb. 120.

einfach die neue Niveaulinie Null nach BC . Dann verhalten sich nach Abb. 120 die Spannungen $A : D = h_a : \rho$, und da die doppelte Dreiecksfläche ABC gleich $(a + b + c) \rho = h_a \cdot a$, so folgt für $B = C = 0$ die Spannung

$$D = \frac{Aa}{a + b + c},$$

welche in Gleichung (M) eingesetzt für den Schenkelwiderstand des Stromes ergibt:

$$\alpha = \frac{bc}{a + b + c} = \frac{9 \cdot 4}{23} = 1,565 \text{ Ohm} \tag{5}$$

$$D = 100 - 1,565 \cdot 18,88 = 70,4 \text{ Volt}$$

$$\beta = \frac{ca}{a + b + c} = \frac{4 \cdot 10}{23} = 1,74 \text{ Ohm} \tag{6}$$

$$D = 60 + 1,74 \cdot 6 = 70,4 \text{ Volt}$$

$$\gamma = \frac{ab}{a + b + c} = \frac{10 \cdot 9}{23} = 3,91 \text{ Ohm} \tag{7}$$

$$D = 20 + 3,91 \cdot 12,888 = 70,4 \text{ Volt.}$$

Auch zeichnerisch läßt sich die Umwandlung verfolgen, wenn man wieder von den Punkten gleicher Spannung auf den Seitenwiderständen zur Sternbildung übergeht.

Ein Winkel $\alpha_1 + \alpha_2$ in Abb. 10 S. 28 schaltet die Schenkelwiderstände $r_1 = OB$ und $r_2 = OA$ durch den Mittelstrahl $OC = r = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$ parallel,

wobei die Widerstände in den bezüglichen Seitenmaßstäben e_1, e_2, e_3 abzulesen sind. Zwei dieser Maßstäbe e_1 und e_2 sind willkürlich, der dritte ist deren Resultante¹⁾. Nimmt man jedoch der Übersichtlichkeit wegen an, daß die gegebenen Widerstände des Dreiecks $a b c$ derartig sind, daß sie, mit gleich großer Einheit gemessen, Längen ergeben, die ein wirkliches Dreieck zeichnen lassen, also die Summe

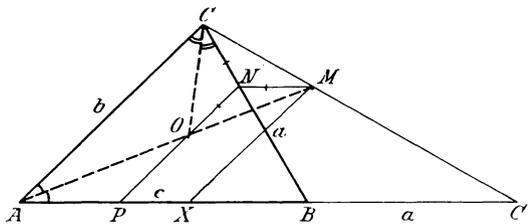


Abb. 121.

zweier Seiten größer als die dritte ist, so lesen sich alle obigen Betrachtungen aus der Abb. 121 wie folgt heraus: für $V_3 = 0$ muß c mit $a + b$ parallel geschaltet werden. Man schlägt also die Seite $a = BC'$ in die Verlängerung von $c = AB$, zieht CC' , halbiert den Winkel bei A und erhält damit den Schnittpunkt M und durch die Parallele MX zu AC den gesuchten Widerstand $MX = AX$. Zieht man MN parallel zu AB bis zum Schnittpunkte N mit BC und NP parallel zu AC , so muß NP die Winkelhalbierende AM im Mittelpunkt O des eingeschriebenen Kreises treffen. Nach der Zeichnung müssen nämlich die Winkel NMO und NOM , ferner Winkel NMC und NCM gleich sein. Zieht man dann CO , so hälft diese Gerade den Dreieckswinkel bei C . Man sieht also, daß die Seitenparallelen durch den Mittelpunkt des Inkreises die Schenkelwiderstände bestimmen.

Die Wichtigkeit dieser Transfigurierung zwingt zum weiteren rechnerischen Eingehen, wodurch ihr eigentliches Wesen als physikalische Elimination von verkümmerten Gleichungen erst klar wird.

d) Vierecksumwandlung. Die Verbindungen zwischen vier Knoten lassen sich im allgemeinen nicht in einen Stern zu einem fünften Knoten widerstandstreu umgestalten. Stellt man für erstere die vier Gleichungen für die Knotenspannungen auf, wovon nur drei unabhängige sind, und bringt diese mit den fünf, wovon vier unabhängige, Gleichungen des Sterns in Beziehung, so zeigt sich daraus die Überstimmtheit der Aufgabe.

Das gleiche lehrt der Versuch an einem einfachen Viereck, welches auf die Dreiecksaufgabe herabgesetzt werden soll. Abb. 122 stellt ein einfaches Viereck A, B, C und D mit den Widerständen a, b, c und d

¹⁾ S. 2. Aufl. S. 114. 1903.

dar. Die eingefügte Diagonale BC von unendlichem Widerstande läßt sich in die Widerstände x und $-x$ nach der Bedingung

$$1/\infty = 1/x + 1/(-x)$$

spalten. Dadurch zerfällt das Viereck in die beiden Dreiecke mit den Seiten a, b, x und $c, d, (-x)$, welche durch die Sterne O und O_1 ersetzbar sind. Die Mittelspannungen V_0, V_1 in O und O_1 sind von der Wahl des Widerstandes x abhängig, denn:

$$V_0 = \frac{Ax + Bb + Ca}{x + b + a} \quad \text{und} \quad V_1 = \frac{D(-x) + Bd + Cc}{-x + c + d}.$$

Wenn diese Werte einander gleichgesetzt werden, so können die Punkte O und O_1 zusammenfallen, und es wird aus dem Vierecke tatsächlich der gewünschte Stern entstehen, aber seine Spannungen bleiben immer von der Wahl des Widerstandes x abhängig.

Das vollständige Viereck mit sechs und das einfache mit vier Widerständen sind im genannten Sinne überstimmt. Sie erfordern

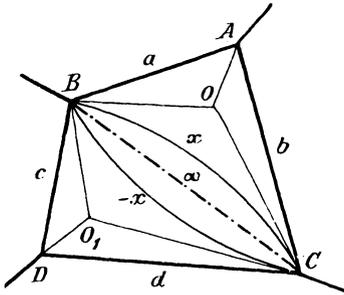


Abb. 122.

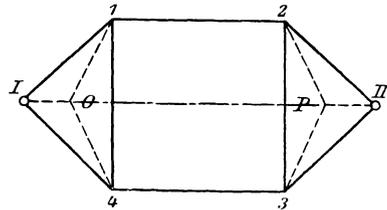


Abb. 123.

eine Beschränkung, entweder in den Widerständen oder in den vier Knotenspannungen. In vielen Fällen wird die Auflösung des Vierecks durch Öffnung nachbarlicher Dreiecke ermöglicht, wie dies Abb. 123 zeigt. Die Sterne O und P führen zu den parallelgeschalteten Widerständen $O12P$ und $O43P$, die durch OP ersetzbar sind.

e) **Zweiecksumbildung.** Ohm führte die reduzierte Länge für die Leiter eines Schließungskreises ein. Gauß zerlegte die Netzleiter der Länge nach auf gleichen Querschnitt, um mit nur einem Kabelquerschnitt auszukommen. Für einfache Verzweigungen wurde von beiden die Summe der Leitwerte dieser Zweige gleich dem Leitwert der ganzen Verbindung gesetzt. Otto Frick benutzte den Stromkomponentensatz, um bei Lichtnetzen zu Zweiecken zu gelangen.

In Abb. 124a ist ein Beispiel mit zwei Speisepunkten I und II gleicher Spannung, drei Knoten A, B, C und neun Leitern gewählt. Die letzteren sind durch bloße Ziffern bezeichnet, die auch ihre Ströme als Weiser tragen, so daß also z. B. i_3 der Strom ist im Leiter 3.

Durch Befreien der Leiter 1, 2 . . . 9 von den Abnahmen hat man nur mit Knotenlasten i_A, i_B und i_C sowie mit Strömen in den Speisestellen i_I und i_{II} zu tun. Die mehrfachen (hier mit " bezeichnet) Wider-

stände 6 und 9, 4 und 5 vereinfachen das Netz durch die Ersatzleiter (6||9) und (4||5) (Abb. 124b). Die Hintereinandersetzung von 8 + (4||5)

und 7 + (6||9) sowie die Parallelsetzung von 3 und (4||5) + 8 führen schließlich auf drei parallele Leiter zwischen den Speisestellen I und II. Das Öffnen der Speisepunkte nach Abb. 124b hätte darüber unmittelbar aufgeklärt. Der Lei-

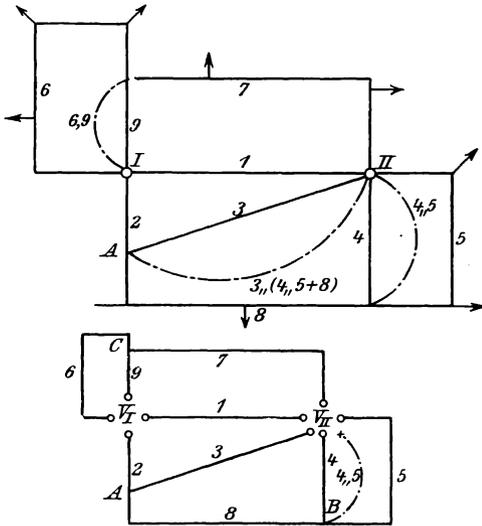


Abb. 124 a und b.

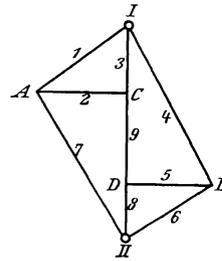


Abb. 125.

ter 1 wird lose, und zwei dreischenkellige Sterne mit den Mittelknoten A und C erscheinen. Bei gleichen Spannungen $V_I = V_{II}$ werden diese durch Wiedervereinigung sofort zu Zweiecken.

Das Schließen geöffneter Speisestellen führt tatsächlich zu weiterer Einsicht, wie das Netz in Abb. 125 zeigt. Löst man hierin die beiden Speisestellen I und II in je drei, $I I' I''$ und $II III' III''$ auf

und vereinigt bei gleichen Spannungen V_I und V_{II} 1 und 7 zu $1||7$, dann 6 und 4 zu $6||4$, ferner die Speisestelle $I' II'$ mit I und $I'' III''$ mit II, so ist dieser Fall aufgeklärt (Abb. 126).

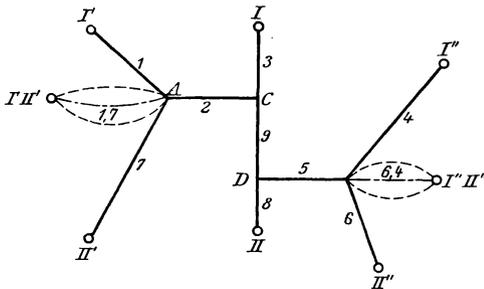


Abb. 126.

Mit dem Öffnen und Schließen der Speisestellen erklärt sich auch die Fricksche Behauptung, daß seine Reduktion „in

allen Fällen genügt, wo die Leitungen keine geschlossene Abbildung bilden, ohne daß in einem Punkte von den diese Abbildung bildenden Leitungen ein Speisepunkt sich befindet“.

Liegt in jeder Masche eines Netzes ein einziger Speisepunkt, wie in den vier Maschen der Abb. 127, so wird mit dem Öffnen dieses Speise-

punktes auch seine Masche aufgeschlossen, seine lineare Gleichung physikalisch gelöst.

Bezeichnet man in zweieckumbildbaren Netzen eine mit Speisepunkt versehene Masche als gespeiste, so gilt nach aufeinanderfolgender Entfernung der Zweiecke also: Netze mit gespeisten Maschen werden durch Öffnen in diesen Speisepunkten und entsprechendes Schließen gelöst.

Am besten stellt man sich diese Fragen klar an den beiden folgenden Leitungsfällen, bei welchen das erste mit Zweiecken, das zweite mit Dreiecken aufgelöst werden kann.

Als oft wiederkehrendes Beispiel sei auf die Netze kleinerer Straßengevierte in Abb. 127 hingewiesen.

Durch Öffnen der vier Speisepunkte I, II, III und IV und Zusammenschließen zu $I II, II IV, III IV$ und $I III$, sowie endlich mit dem

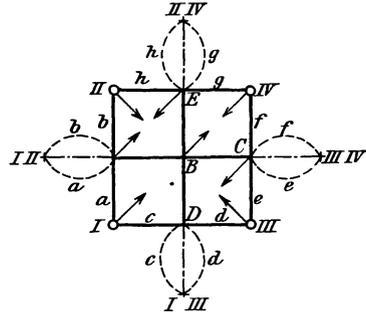


Abb. 127.

Decken von drei von je zweien der letzteren ist die Aufgabe geklärt.

Straßengevierte aus neun Häuserblöcken, wie in Abb. 128, mit vier Speisepunkten I, II, III und IV gleicher Spannung führen zur Dreiecksumwandlung. Öffnet man die Speisepunkte und faßt I mit II zu D , II mit III zu C usw. zusammen, so können die sich bildenden Drei-

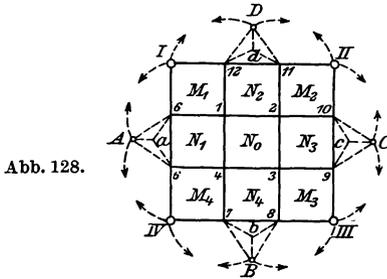


Abb. 128.

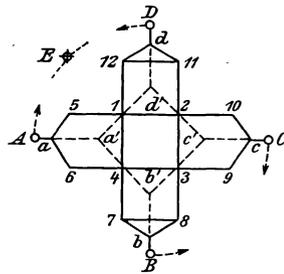


Abb. 129.

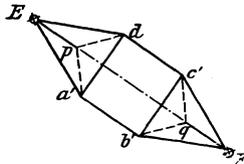


Abb. 130.

ecke $D, 12, 11$ durch den Stern d' ; $C, 10, 9$ durch c' usw. ersetzt werden, wie in Abb. 129. Wird nun der gleiche Vorgang für die Sternpunkte $d', c' \dots$ befolgt und werden die Speisestellen A und D sowie B und C , Abb. 129, zusammengeschlagen zu E und F , so läßt sich mit noch zwei Sternen p und q der schließliche Widerstand zwischen E und F errechnen (Abb. 130).

Die Entlastung eines Sternknotens, vereint mit der Dreiecksumbildung, hat die gleichungslose Netzbehandlung seit 1903 mit Erfolg eingeführt. Das ursprüngliche Stadtnetz von Köln erreichte 1893 noch zehn lineare Gleichungen, welche 1905 durch jenes Mittel überflüssig wurden.

6. Zahlenbeispiel zur Zweiecksbildung.

Zum behandelten Netz der Abb. 124a und b folgt hier ein ausführliches Zahlenbeispiel. In der Abb. 131 bezeichnet

[3] die Nummer des Leiters, (25) den Querschnitt in mm², 260 die Länge in m, 125 die Zahl der Lampen zu 50 Watt.

Die Werte sind folgende:

Leiter	Querschnitt f	Länge L	l/L	Widerstand r	Leitwert $g = 1/r$
[1]	16	225	0,071	0,2344	4,266
[2]	25	140	0,179	0,0933	10,718
[3]	25	300	0,083	0,2	5
[4]	16	400	0,040	0,4167	2,4
[5]	16	60	0,267	0,0625	16
[6]	16	550	0,029	0,5729	1,746
[7]	10	450	0,022	0,75	1,333
[8]	16	65	0,246	0,0677	14,771
[9]	25	340	0,074	0,2267	4,411
[10]	25	90	0,278	0,06	16,667

Werden die Stromabnahmen auf die Knoten geworfen und alle hierdurch zum Vorschein gebrachten Zweiecke beseitigt, so kann das bereinigte Netz also leicht wieder beurteilt werden.

Die Abb. 131 veranschaulicht ein Gleichstrom-Zweileiternetz mit einer Spannung von 220 Volt an den Speisepunkten I und II, die mit doppelten Kreisen gekennzeichnet sind. Die den Leitern beigefügten Lampenzahlen sind auf die zugehörigen Längen gleichmäßig verteilt.

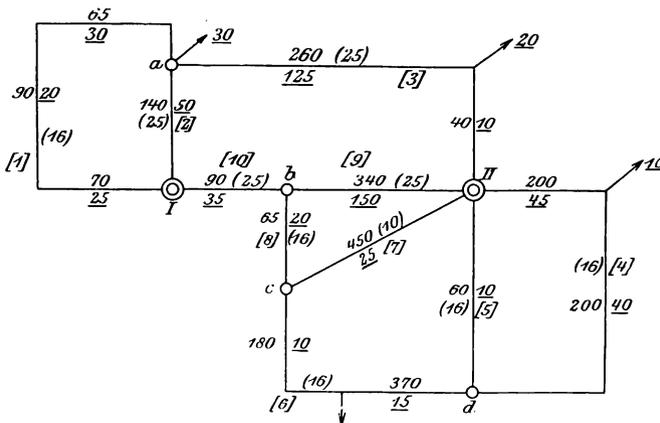
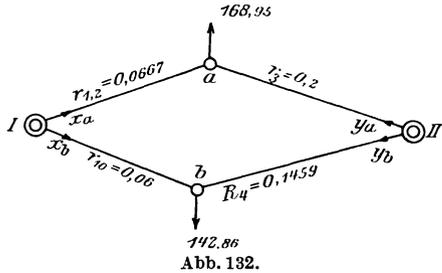


Abb. 131.

Nun soll die Netzverteilung ohne Aufstellung von Gleichungen gefunden werden. Das Netz hat vier Knoten, würde also zu vier Gleichungen mit vier Unbekannten führen. Statt dessen kann das vorliegende Netz derart behandelt werden, daß man die einzelnen Leiter in Parallel- bzw. Hintereinanderschaltung so zusammenfaßt, daß schließlich nur zwei, zwischen den Speisepunkten *I* und *II* parallelgeschaltete Zweige übrigbleiben. Man schaltet nämlich die Widerstände r_1 und r_2 parallel zu einem einzigen Widerstand $r_{1||2}$. Dann ergibt sich für den oberen Teil des Netzes nur ein Widerstand zwischen den Punkten *I* und *II*. Ebenso ersetzt man die Widerstände r_4 und r_5 durch einen einzigen $r_{4||5}$. Dieser, hintereinandergeschaltet mit r_6 , liefert einen neuen Widerstand, etwa R_1 , welcher wieder mit r_7 zu einem Widerstand R_2 nebengeschaltet wird usw.



Dieser Vorgang sei veranschaulicht durch:

$$\begin{aligned}
 r_{1||2} &= r_{1||2}; & r_{4||5} &= r_{4||5} \\
 r_{4||5} + r_6 &= R_1 \\
 R_{1||7} &= R_2 \\
 R_2 + r_8 &= R_3. \\
 R_{3||9} &= R_4.
 \end{aligned}$$

Das Netz nimmt schließlich die Gestalt in Abb. 132 an.

Die Berechnung der Widerstände gibt folgende Werte:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{r_{1||2}} &= \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 4,266 + 10,718 = 14,984; & r_{1||2} &= 0,0667 \text{ Ohm} \\
 \frac{1}{r_{4||5}} &= \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5} = 2,4 + 16 = 18,4; & r_{4||5} &= 0,0543 \text{ Ohm} \\
 R_1 &= r_{4||5} + r_6 = 0,0543 + 0,5729 = 0,6272; & \frac{1}{R_1} &= 1,594 \\
 \frac{1}{R_2} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{r_7} = 1,594 + 1,333 = 2,927; & R_2 &= 0,3416 \text{ Ohm} \\
 R_3 &= R_2 + r_8 = 0,3416 + 0,0677 = 0,4093; & \frac{1}{R_3} &= 2,443 \\
 \frac{1}{R_4} &= \frac{1}{R_3} + \frac{1}{r_9} = 2,443 + 4,411 = 6,854; & R_4 &= 0,1459 \text{ Ohm.}
 \end{aligned}$$

Nun werden in allen Leitern von Abb. 131 sämtliche Stromabnahmen auf die Speise- und Knotenpunkte versetzt.

Leiter [1]. Die auf den Knotenpunkt *a* entfallende Abnahme n_a in Lampen von je 50 Watt ist:

$$n_{a,1} = \frac{1}{L_1} \left[n_1 \frac{l_1}{2} + n_2 \left(l_1 + \frac{l_2}{2} \right) + n_3 \left(l_1 + l_2 + \frac{l_3}{2} \right) \right],$$

wenn $l_1 = 70$; $l_2 = 90$; $l_3 = 65$ m die Teillängen von L_1
 $n_1 = 25$; $n_2 = 20$; $n_3 = 30$ Lampen die gleichmäßig über diese
 Teillängen verteilten Belastungen in Einheitslampen à 50 Watt sind.
 Man findet also

$$n_{a,1} = \frac{1}{225} (25 \cdot 35 + 20 \cdot 115 + 30 \cdot 192,5) = \frac{8950}{225} = 39,78.$$

Die auf den Speisepunkt I entfallende Abnahme ist also

$$n_{I,1} = (25 + 20 + 30) - 39,78 = 35,22.$$

Für den Leiter [2] ist die Verlegung auf die angrenzenden Knoten
 einfach: Jeder erhält die Hälfte. Also gilt für Leiter [2]

$$n_{a,2} = n_{I,2} = 25 \text{ Lampen.}$$

Für Leiter [3] findet man ähnlich wie für [1]:

$$n_{a,3} = \frac{1}{L_3} \left[n_1 \frac{l_1}{2} + n_2 l_1 + n_3 \left(l_1 + \frac{l_2}{2} \right) \right],$$

weil hier die Last $n_2 = 20$ punktförmig im Abstand $l_1 = 40$ m (Abb. 131
 angreift. Also ist

$$n_{a,3} = \frac{1}{300} [10 \cdot 20 + 20 \cdot 40 + 125 \cdot 170] = \frac{22250}{300} = 74,17$$

und

$$n_{II,3} = (125 + 20 + 10) - 74,17 = 80,83.$$

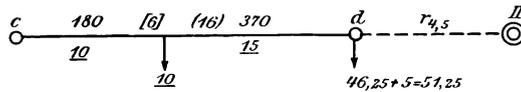


Abb. 133.

Ähnlich weiterschreitend findet man für:

Leiter [4] $n_{a,4} = \frac{1}{400} (45 \cdot 100 + 10 \cdot 200 + 40 \cdot 300) = \frac{18500}{400} = 46,25$

$$n_{II,4} = (45 + 10 + 40) - 46,25 = 48,75$$

Leiter [5] $n_{a,5} = n_{II,5} = 5.$

Nun folgt der Leiter R_1 , der sich wie folgt zusammensetzt, Abb. 133:

$$R_1 = r_6 + r_{4115}; \quad r_6 = 0,5729; \quad r_{4115} = 0,0543 \text{ Ohm.}$$

Auf den Knoten c entfällt also die Abnahme

$$n_{c,5} = \frac{1}{R_1} \left[(n_{d,4} + n_{a,5}) r_{4115} + n_1 \cdot \left(r_{4115} + \frac{\frac{1}{2} l_1}{k f_1} \right) + n_2 \left(r_{4115} + \frac{l_1}{k f_1} \right) + n_3 \left(r_{4115} + \frac{l_1 + \frac{1}{2} l_2}{k f_1} \right) \right],$$

wobei $n_2 = 10$ im Abstand $l_1 = 370$ m von d angreift. Es ist also

$$n_{c,5} = \frac{1}{0,5729 + 0,0543} \left[51,25 \cdot 0,0543 + 15 \left(0,0543 + \frac{185}{60 \cdot 16} \right) + 10 \left(0,0543 + \frac{370}{60 \cdot 16} \right) + 10 \left(0,0543 + \frac{460}{60 \cdot 16} \right) \right] = \frac{16,220}{0,6272} = 25,86,$$

$$n_{II,5} = (51,25 + 15 + 10 + 10) - 25,86 = 60,39,$$

Leiter [7] $n_{c,7} = n_{II,7} = 12,5.$

Der Leiter R_3 , Abb. 134, ist die Reihenschaltung von

$$r_8 = 0,0677 \text{ und } R_2 = 0,3416 \text{ Ohm.}$$

$$n_{b,8} = \frac{1}{0,0677 + 0,3416} [38,36 \cdot 0,3416 + 20 (0,3416 + 0,0339)]$$

$$= 20,614/0,4093 = 50,36$$

$$n_{II,8} = (20 + 38,36) - 50,36 = 8$$

Leiter [9] $n_{b,9} = n_{II,9} = 75$

Leiter [10] $n_{b,10} = n_{I,10} = 17,5$

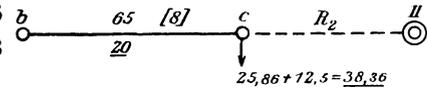


Abb. 134.

Faßt man nun die Abnahmen in den Punkten I , II , a und b zusammen, dann ergibt sich $n_I = 77,72$, $n_{II} = 290,47$, $n_a = 168,95$, $n_b = 142,86$

$$\begin{aligned} n_I &= 35,22 + 25 + 17,5 &= 77,72 \\ n_{II} &= 80,83 + 48,75 + 5 + 60,39 + 12,5 + 8 + 75 &= 290,47 \\ n_a &= 39,78 + 25 + 74,17 + 30 &= 168,95 \\ n_b &= 50,36 + 75 + 17,5 &= 142,86 \end{aligned}$$

mit der Gesamtsumme 680,00

übereinstimmend mit der Summe der im Netz eingetragenen Abnahmen.

In dem vereinfachten Netzbild, Abb. 132, wird nun die Stromverteilung bestimmt, indem man die einzigen vorhandenen Abnahmen in den Punkten a und b auf die entsprechenden Leiter verteilt und in jedem einzelnen Leiter diejenige Komponente der Abnahme, welche für den jeweiligen Leiter in der vorhergegangenen Rechnung auf den zugehörigen Speisepunkt geworfen wurde, zuzählt. Die Ersatzwiderstände werden wieder in ihre parallelgeschalteten Zweige mit den darauf entfallenden Strömen aufgelöst und so das vereinfachte Netzbild schrittweise in das ursprünglich gegebene zurückgeführt.

Man sieht, daß hier ohne Aufstellung von Maschen- oder Knotengleichungen das Netz rein physikalisch vereinfacht wurde. Es ist jedoch eine Frage, ob diese an sich interessante Methode in diesem oder einem anderen speziellen Falle auch eine Ersparnis an Zeit oder Rechenarbeit bedeutet. Dies kann der Fall sein. Alle Methoden zur Netzumgestaltung haben diesen Nachteil, daß sie nur in manchen Fällen Zeitersparnis liefern. Die Strom- und die Spannungsmethode sind stets anwendbar. Im allgemeinen kann man sagen, daß das Endergebnis rascher erreicht wird, wenn man durch eine zweckmäßige Umgestaltung des Netzes die Zahl der linearen Gleichungen etwa auf 3 oder 4 vermindert und dann diese auflöst.

Hier soll jedoch das Beispiel den soeben angegebenen Vorgang zahlenmäßig erläutern.

Der durch den Leiter r_{112} zugeführte Teil der Abnahme (Abb. 132) beträgt

$$x_a = 168,95 \frac{0,2}{0,0667 + 0,2} = 126,69.$$

Im Leiter r_3 strömen also nach a somit $y_a = 168,95 - 126,69 = 42,26$. x_a zerfällt in zwei parallelgeschaltete Teile:

$$n_1' = x_a \frac{r_2}{r_1 + r_2} = 126,69 \frac{0,0933}{0,0933 + 0,2344} = 36,11$$

$$n_2' = 126,69 - 36,11 = 90,58.$$

Im Leiter [3] ist $n_3' = y_a = 42,26$.

Addiert man nun zu n_1' und n_2' die zugehörigen Werte von n_I und zu n_3' den zugehörigen Wert von n_{II} , dann kann die Stromverteilung für die obere Netzhälfte bereits endgültig angegeben werden.

$$n_1 = n_1' + n_{I,1} = 36,11 + 35,22 = 71,33$$

$$n_2 = n_2' + n_{I,2} = 90,58 + 25 = 115,58$$

$$n_3 = n_3' + n_{II,3} = 42,26 + 80,83 = 123,09.$$

In gleicher Weise erfolgt die Ermittlung der Stromverteilung für den unteren Netzteil:

$$x_b = 142,86 \frac{0,1459}{0,1459 + 0,06} = 101,23$$

$$y_b = 142,86 - 101,23 = 41,63$$

$$n_{10}' = x_b = 101,23$$

$$n_{10} = n_{10}' + n_{I,0} = 101,23 + 17,5 = 118,73.$$

Zerlegung von y_b in die beiden parallelgeschalteten Teile:

$$n_9' = y_b \frac{R_3}{R_3 + r_9} = 41,63 \frac{0,4093}{0,4093 + 0,2267} = 26,81$$

$$n'_{R_3} = y_b - n_9' = 41,63 - 26,81 = 14,82$$

$$n_9 = n_9' + n_{II,9} = 26,81 + 75 = 101,81$$

$$n_{R_3} = n'_{R_3} + n_{II,8} = 14,82 + 8 = 22,82.$$

Da die Abnahme im Leiter $R_3 = r_8 + R_2$ von 22,82 die Leiter r_8 und R_2 hintereinander durchfließt, so ist r_8 für die Rechnung ohne

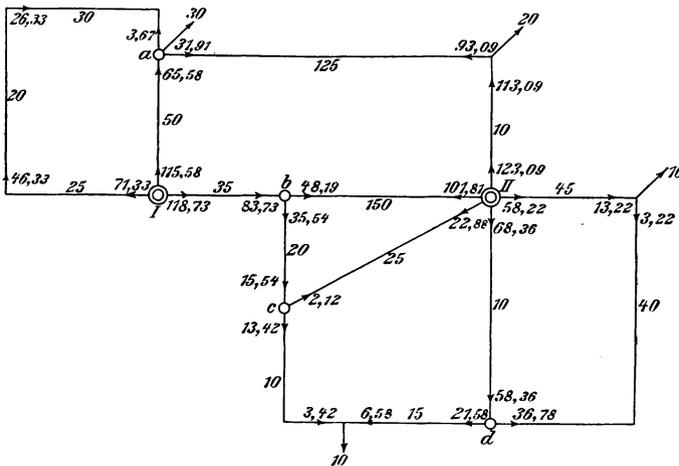


Abb. 135.

weiteren Einfluß; es handelt sich nur darum, die den Leiter R_2 durchfließende Abnahme 22,82 auf die parallelgeschalteten Zweige r_7 und R_1 zu versetzen.

$$\begin{aligned} n_7' &= n_{R_3} \cdot \frac{R_1}{R_1 + r_7} = 22,82 \frac{0,6272}{0,6272 + 0,75} = 10,38 \\ n'_{R_1} &= n_{R_3} - n_7' = 22,82 - 10,38 = 12,44 \\ n_7 &= n_7' + n_{II,7} = 10,38 + 12,5 = 22,88 \\ n_{R_1} &= n_{R_1}' + n_{II,5} = 12,44 + 60,39 = 72,84. \end{aligned}$$

Zerlegung von n_{R_1} auf die parallelen Zweige r_4 und r_5 :

$$\begin{aligned} n_5' &= n_{R_1} \cdot \frac{r_4}{r_4 + r_5} = 72,83 \frac{0,4167}{0,4167 + 0,0625} = 63,36 \\ n_4' &= n_{R_1} - n_5' = 72,83 - 63,36 = 9,47 \\ n_5 &= n_5' + n_{II,5} = 63,36 + 5 = 68,36 \\ n_4 &= n_4' + n_{II,4} = 9,47 + 48,75 = 58,22. \end{aligned}$$

Damit ist die in Abb. 135 gegebene Verteilung gefunden.

7. Beispiel zur Dreiecksumbildung.

Gesucht wird die Stromverteilung für ein Netz, Abb. 136, mit vier Maschen und fünf Knoten, *II* bis *VI*. *I* sei die Speisestelle.

Ersetzt man das Dreieck *III V VI* durch den Stern *O* der Abb. 136, so erhält man ein dreimaschiges Netz mit vier Knoten. Die Schenkelwiderstände dieses Sternes *O* sind:

$$\begin{aligned} \varrho_{III} &= \frac{r_6 r_7}{r_6 + r_7 + r_9}, \quad \varrho_V = \frac{r_7 r_9}{r_6 + r_7 + r_9}, \\ \varrho_{VI} &= \frac{r_6 r_9}{r_6 + r_7 + r_9}. \end{aligned}$$

Wird der Abnehmer J_5 versetzt, Abb. 137:

$$J_5' = \frac{r_8}{r_8 + \varrho_V} J_5 \quad \text{und} \quad J_5'' = \frac{\varrho_V}{r_8 + \varrho_V} J_5,$$

so sind r_8 und ϱ_V hintereinandergeschaltet.

Das Dreieck *III IV O* wird in den Stern *P*, Abb. 138, umgewandelt. Seine Schenkelwiderstände berechnen sich zu:

$$(\varrho)_{III} = \frac{r_3 \varrho_{III}}{r_3 + r_3 + \varrho_{III}}, \quad \varrho_{IV} = \frac{r_3 r_8}{r_3 + r_8 + \varrho_{III}}$$

und

$$\varrho_0 = \frac{r_8 \varrho_{III}}{r_3 + r_8 + \varrho_{III}}.$$

Das Netz zeigt nun nur noch zwei Maschen mit zwei Knoten. Wirft man die J_3 , J_6 und J_0 auf *II* und *P*, dann setzt sich $r_4 + (\varrho)_{III}$ parallel mit $r_5 + \varrho_{IV} + \varrho_0$ zusammen zu h , Abb. 139, und es verbleibt die einfache Masche *III h P IV*.

Haben die Widerstände die folgenden Zahlenwerte:

$r_1 = 1$, $r_2 = 1$, $r_3 = 2$, $r_4 = 2$, $r_5 = 1$, $r_6 = 3$, $r_7 = 2$, $r_8 = 2$, $r_9 = 1$ Ohm,

so betragen:

$$\varrho_{III} = 1, \varrho_V = 0,333 \text{ und } \varrho_{VI} = 0,5 \text{ Ohm,}$$

$$J_5' = 0,857 J_5 \text{ und } J_5'' = 0,143 J_5 \text{ Amp.;}$$

ferner

$$J_{IV} = J_4 + J_5'' = J_4 + 0,143 J_5 \quad ,,$$

$$J_6' = 0,666 J_6 \text{ und } J_6'' = 0,333 J_6 \quad ,,$$

ferner

$$J_0 = J_5' + J_6' = 0,857 J_5 + 0,666 J_6 \quad ,,$$

und

$$J_{II} = J_2 + J_0'' = J_2 + 0,333 J_0 \quad ,,$$

Abb. 136.

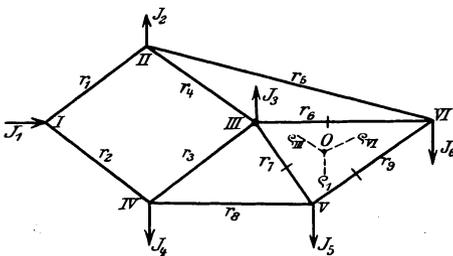


Abb. 137.

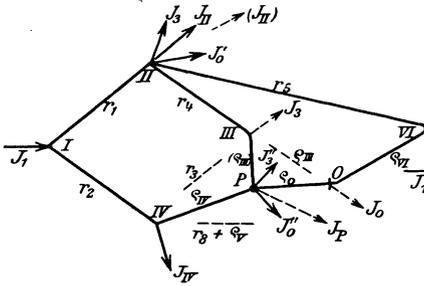
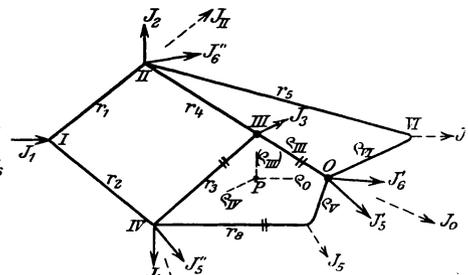


Abb. 138.

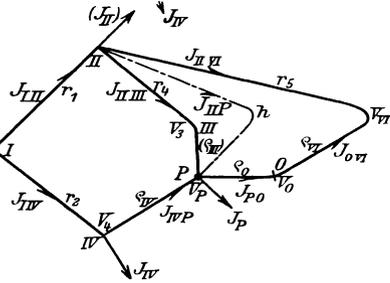


Abb. 139.

Nun ist $r_3 + \varrho_V = 2,333$. Der Stern P hat die Schenkelwiderstände:

$$(\varrho)_{III} = 0,3625, \varrho_{IV} = 0,875 \text{ und } \varrho_0 = 0,437.$$

J_3 muß auf II und P verlegt werden, also:

$$J_3' = 0,153 J_3, J_3'' = 0,847 J_3.$$

Ebenso wird J_0 zerlegt:

$$J_0' = 0,226 J_0, J_0'' = 0,774 J_0$$

oder

$$J_0' = 0,193 J_5 + 0,149 J_6, J_0'' = 0,664 J_5 + 0,511 J_6;$$

ferner

$$J_P = J_3'' + J_0'' = 0,847 J_3 + 0,664 J_5 + 0,511 J_6,$$

$$(J_{II}) = J_3' + J_0' + J_{II} = J_2 + 0,153 J_3 + 0,193 J_5 + 0,482 J_6.$$

Es ist:

$$h^{-1} = 1,937^{-1} + 2,3625^{-1} = 0,516 + 0,424 = 0,94;$$

$$h = 1,064 \text{ und } J_{IV} = J_4 + J_5'' = J_4 + 0,1429 J_5.$$

Der Strom in *III* ist:

$$\begin{aligned} J_{III} &= 0,746 (J_{II}) + 0,476 J_p + 0,254 J_{IV} \\ &= 0,746 J_2 + 0,517 J_3 + 0,254 J_4 + 0,497 J_5 + 0,603 J_6, \end{aligned}$$

in *IV*:

$$J_{IV} = 0,354 J_2 + 0,583 J_3 + 0,746 J_4 + 0,603 J_5 + 0,397 J_6.$$

Der weitere Rechnungslauf ist einfach, besonders wenn die Spannungsverluste gleichzeitig ermittelt werden. Haben die Ströme J_2 bis J_6 feste Werte, so wird die Rechnung weniger umständlich. Sollen die Widerstände r_1 bis r_8 und die Abnahmen als unveränderlich gelten, so bleibt der Vorgang wesentlich derselbe. Die Widerstände der Zwischenrechnungen erhalten neue Bezeichnungen, wie z. B. oben h , die schließlich wieder aus der Rechnung fallen.

Auf diese Weise werden die Ströme in den Leitern und die Spannungen in den Knoten lineare Funktionen der Abnahme. Ihre Koeffizienten bilden sich aus den Widerständen r_1 bis r_8 . Der Aufbau dieser Zahlen ist durch einen Rückweg von Abb. 139 gegen 136 zu erkennen. Die widerstandstreue Umgestaltung läßt sich verschiedentlich durchführen. Statt mit O zu beginnen, hätte man ein Dreieck einfügen können, welches sich auf die Punkte *II*, *III*, *IV* des Sternes *VI* stützt. Die Anzahl der Teilvorgänge wird durch den eingeschlagenen Weg nicht beeinflusst.

8. Zerlegung in unabhängige Bezirke.

Manche Netze lassen sich durch geometrische Hilfs- oder Grenzlinien ohne weiteres in voneinander unabhängige Distrikte oder Bezirke zerlegen.

J. Teichmüller¹⁾ führte diese einfachste Netztrennung wie folgt ein:

„Ein gegebenes Leitungsnetz kann im allgemeinen von vornherein in eine Anzahl voneinander unabhängiger Bezirke zerlegt werden, wenn unter Bezirk der kleinste Leiterkomplex verstanden wird, den man abgrenzen kann durch eine in sich geschlossene Linie, welche von Speisepunkt zu Speisepunkt führt, ohne einen Leiter zu schneiden“.

Ein Beispiel bietet das Netz der Abb. 140 mit den 8 durch doppelte Kreise angegebenen Speisepunkten. Zieht man von jedem Speisepunkt zu allen übrigen die in der Abbildung gestrichelt angedeuteten Linien, soweit dies möglich ist, ohne einen Leiter zu schneiden, dann zerfällt das Netz in die acht durch römische Ziffern angedeuteten Bezirke.

Diese können nur einzeln behandelt werden. Es ist ohne weiteres deutlich, daß auf diese Weise die Rechenarbeit bedeutend ermäßigt wird. Das Netz hat

$$s = 8 \text{ Speisepunkte,}$$

$$m = 16 \text{ Maschen,}$$

$$p = 14 \text{ Knoten,}$$

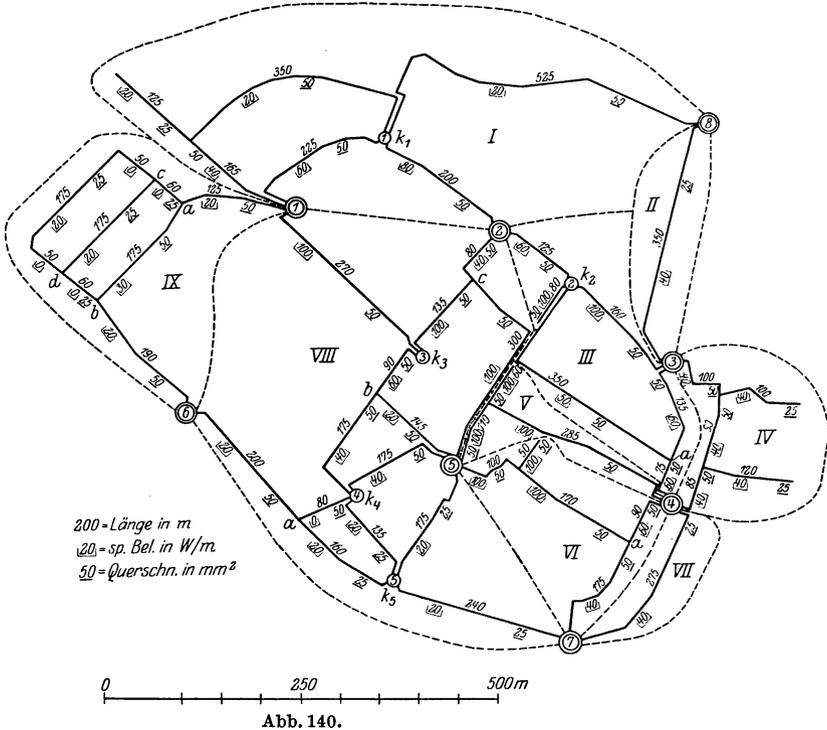
¹⁾ Teichmüller, J.: ETZ 1893, S. 539.

welche durch die Buchstaben a, b, c, \dots bzw. soweit sie als Schaltkästen ausgeführt sind, durch einfache Kreise und die Buchstaben k_1, k_2, \dots, k_5 angedeutet sind. Als ganzes würde das Netz

nach der Strommethode $k = m + s - 1 = 23$ Gleichungen

„ „ Spannungsmethode $p = 14$ „

ergeben. Nach der Zerlegung in Bezirke verursacht nur der Bezirk VIII erhebliche Arbeit, da er 5 Speisepunkte, 4 Maschen und 6 Knoten umfaßt. Er ergäbe also nach der Strommethode 8, nach der Spannungs-



methode 6 lineare Gleichungen. Dagegen sind die Distrikte II, IV, V und VII nur beiderseits gespeiste Leiter, Distrikt IX nach Zweiecks-umformung ebenfalls. Distrikt VI ist ein an den drei Endpunkten gespeister Stern.

Die Rechenarbeit kann also durch die Zerlegung in diese Distrikte sehr viel geringer und ermüdender werden. Sie soll erst später durchgeführt werden.

9. Netzspaltung.

Wie sollen aber Netze behandelt werden, in denen die Speisepunkte in dritter Entfernung von den ungespeisten Maschen liegen? Sind es wenige Leiter (oft Kabel, die über das übrige Netz hinweggehen), die

solches verursachen, so bietet die Netzspaltung wieder Abhilfe. Sie soll daher allgemein auseinandergesetzt werden.

Manche Netze lassen sich ohne weiteres durch Grenzlinien mm , Abb. 141, in die soeben besprochenen Distrikte zerlegen, ohne daß die Grenzlinien Leiter schneiden.

Die Linie nn in Abb. 141 würde jedoch die zwei stark gezeichneten Leiter schneiden, so daß hier diese Trennung nicht möglich wäre.

Für ebene Netze ohne Leiterkreuzungen reicht diese Erklärung aus. Das Aufschließen in den Speisepunkten gibt deutlicher die losen Netzstücke an. Eine weitere Zerlegung besorgt jedoch das Ausheben weniger Leiter von gegebenen Widerständen. Dies bedeutet praktisch eine Erweiterung der Zerlegung in Bezirke, wobei also die Grenzlinien auch einen oder einige Leiter schneiden dürfen, wenn der zerschnittene oder ausgehobene Leiter durch einen entsprechenden Abzweigstrom ersetzt wird. Die vorläufig unbekannte Größe dieses Ersatzstromes kann dann aus dem Netzverbund berechnet werden. Wir nennen dieses Verfahren, das manchmal Vorteil bietet, die Netzspaltung.

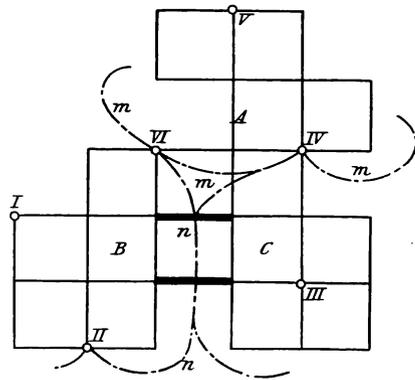


Abb. 141.

Es seien zwei Netzstücke A und B in Abb. 142 vorerst durch einen einzigen Verbindungsleiter mit dem Strom i_x zusammengehängt. Die Spannungen an den Verbindungsstellen V_x' und V_x'' lassen sich nach den vorherigen Lehren wie folgt ausdrücken:

$$V_x' = a' + b' i_x \quad \text{und} \quad V_x'' = a'' - b'' i_x,$$

und ihr Unterschied beträgt

$$V_x' - V_x'' = (a' - a'') + (b' + b'') i_x = i_x \varrho_x,$$

woraus i_x gerechnet werden kann.

Ist noch ein zweiter Verbindungsleiter ϱ_y vorhanden, so lassen sich zwei solche Gleichungen zur Ermittlung von i_x und i_y finden.

$$V_x' = a_1' i_x + b' i_y + c_1' \quad \text{und} \quad V_y' = b' i_x + a_2' i_y + c_2',$$

ferner

$$V_x'' = a_1'' (-i_x) + b'' (-i_y) + c_1''$$

und

$$V_y'' = b'' (-i_x) + a_2'' (-i_y) + c_2'',$$

wobei die Konstanten aus den Widerständen der bezüglichen Netzstücke gebildet werden. So ist a_1' gleich der Spannung im Knoten X' , wenn alle übrigen Knoten des Teiles I (demnach auch Y') unbelastet wären und i_x der Stromeinheit gleich wäre. So stellt b' den Spannungs-

wert im Knoten Y' dar, wenn in Y' der Strom eins abgenommen, während alle übrigen unbelastet bleiben.

Diese Gleichungen führen zu folgenden:

$$V_{x'} - V_{x''} = i_x \varrho_x = (a_1' + a_1'') i_x + (b' + b'') i_y + (c_1' - c_1'')$$

$$V_{y'} - V_{y''} = i_y \varrho_y = (b' + b'') i_x + (a_2' + a_2'') i_x + (c_2' - c_2'')$$

und daraus:

$$[\varrho_x - (a_1' + a_1'')] i_x - (b' + b'') i_y = c_1' - c_1''$$

und

$$-(b' + b'') i_x + [\varrho_y - (a_2' + a_2'')] i_y = c_2' - c_2''.$$

Aus diesen folgen die unbekanntnen Ströme i_x und i_y . Die Koeffizienten dieser Gleichungen lassen unschwer eine Verallgemeinerung

auf mehr als zwei Verbindungen zu, denn die Hauptdiagonale führt die Widerstände der Verbindungsleiter $\varrho_1, \varrho_2 \dots$ nebst der Summe der Leerlaufspannungen $(a_1' + a_1'' + \dots), (a_2' + a_2'' + \dots), \dots$. Die Nebendiagonale hat gleiche Glieder $-(b' + b'' + \dots)$ usw.

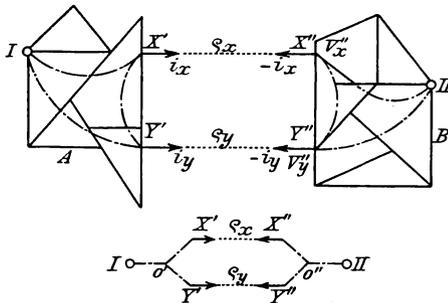


Abb. 142 a und b.

Bei zwei Verbindungsleitern kann man sich, wie aus Abb. 142a ersichtlich, die Netzstücke durch die strichpunktieren Widerstands-dreiecke $IX'Y'$ und $II X''Y''$ ersetzt denken. Werden diese Dreiecke in Sterne verwandelt, so erkennt man aus Abb. 142 b, daß der Speisepunkt I um $[v]'$, herrührend von IO' , und jener von II um $[v]''$, verursacht durch IIO'' , erniedrigt werden kann.

Bei mehreren Verbindungen hört diese Möglichkeit bereits auf.

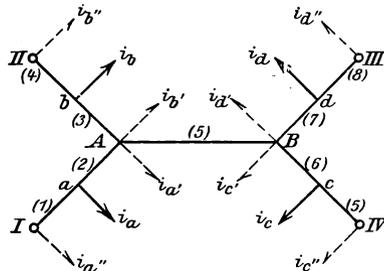


Abb. 143.

Statt der einfachen Verbindungsleiter können auch Netzstücke eingesprengt sein. Maßgebend bleibt doch nur der Netzverbund. Treibt man die Spaltung bis aufs äußerste, so zerfällt das Netz in einfach verzweigte, offene Stücke, wie bei der Schnittmethode. Sucht man die Stromabnahme durch Spannungserniedrigung der Speisepunkte aus jeder Maschengleichung herauszulesen, so sieht man die Aussichtslosigkeit für allgemeine Leitungsfälle ein.

Es sollen nun die verschiedenen „Methoden“ an der Abb. 143 erörtert werden¹⁾.

¹⁾ Herzog, Josef: El. u. Maschinenb. 1913, S. 140, 160.

Ein Netz mit vier Speisepunkten *I*, *II*, *III* und *IV* von verschiedener Spannung, mit zwei Knoten *A* und *B* und vier Abnahmen i_a, i_b, i_c und i_d soll untersucht werden. Die Leiterwiderstände sind in Zahlenwerten eingetragen. Die Leiter werden mit eingeklammerten Ziffern bezeichnet, welche ihre Widerstände r und ihre Ströme i als Weiser führen. Auf Speise- und Knotenpunkte, ihre Ströme und ihre Spannungen deuten dagegen Buchstaben hin. Die Summe zweier Widerstände wird durch die Summe ihrer Weiser, wie $r_1 + r_2 = r_{1+2}$, und der Widerstand ihrer Parallelschaltung durch r_{12} bezeichnet, also $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_{12}}$ gesetzt.

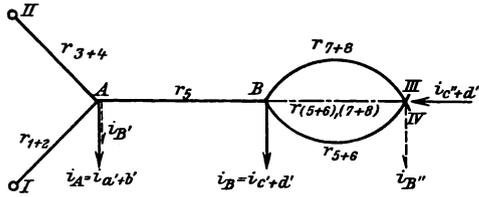


Abb. 144.

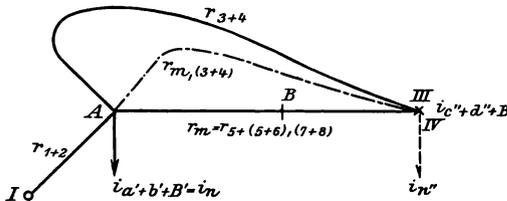


Abb. 145.

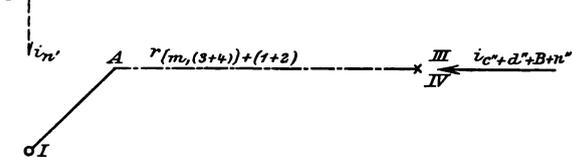


Abb. 146.

Entbindet man die Abnahme auf ihre Nachbarknoten

$$i_a = i_{a'} + i_{a''}; \quad i_b = i_{b'} + i_{b''} \dots$$

und vereinigt hierauf diese Teilströme knotenweise, so findet man das in den Speisepunkten spannungstreue Bild der Abb. 144.

Nach dem Überlagerungsprinzip löst sich die Aufgabe in vier Einzelbilder: für V_I und $V_{II} = V_{III} = V_{IV} = 0$, V_{II} und $V_I = V_{III} = V_{IV} = 0$ usw. auf. Macht man dieses Knotenzusammenfassen schrittweise, wie in Abb. 144 und 145, so schieben sich schrittweise die Ersatzwiderstände $r_{(5+6)}$, $r_{(7+8)}$, r_m und $r_{[m(3+4)]+(1+2)}$ aus Neben- und Hintereinandersetzung der Widerstände und die abgebundenen Ströme $i_{a'} i_{a''}$, $i_{b'} i_{b''}$ usw., $i_{A'} i_{A''}$, $i_{B'} i_{B''}$, ferner $i_{n'}$ und $i_{n''}$ ein. Schließlich zieht sich das Netz zu einem einzigen Widerstand wie in Abb. 146 zusammen, womit rückschreitend die Verteilung des Stromes und der Spannung gefunden wird. Da das Netz der Abb. 143 zu jedem Speiseknoten gleiche Netzbildung oder gleichen Netzverbund aufweist, so kann diese viermalige Wiederholung in Einzelbildern erspart werden, sofern die Weiser der Buchstabenwiderstände rhythmisch vertauscht werden.

Sind die Speisespannungen $V_I = V_{II} = \dots$ gleich, so tritt wieder deren Überlagerung wie bei den vorherigen Einzelbildern auf, so daß dieser Sonderfall damit auch erledigt ist. Er gestattet, diese Deckung

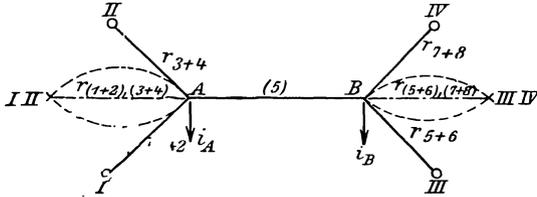


Abb. 147.

paarweise eintreten zu lassen. Werden die Speisepunkte I mit II, III mit IV vereinigt, so entsteht das Bild der Abb. 174. Fällt dagegen I mit III und II mit IV zusammen, so kommt man zur noch unbehandelten

Dreiecksfrage, die aber sofort hinfällig wird, insofern die vereinigten I III mit II IV aufeinandergelegt werden. Der Fall wird mit Abb. 147 gleich.

Die Netzspaltung läßt sich für den Fall der Abb. 143 verschieden durchführen. Hebt man den Mittelleiter $AB = (5)$ heraus, so zerfällt das Netz in zwei Teile mit den Ersatzabnahmen $i_5 = i_x$ und $-i_5 = -i_x$ in Abb. 148. Für die beiden Netzstücke, welche mit dem Falle in Abb. 48 (S. 76) übereinstimmen, kann man die Spannungen V_A und V_B in einfacher Abhängigkeit von i_x ausdrücken. Nun muß aber

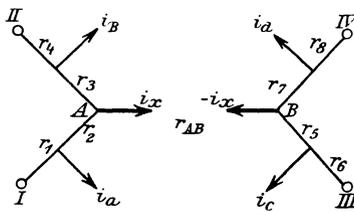


Abb. 148.

$(V_A - V_B) : r_{AB} = i_x$

sein, womit der unbekannte Strom i_x selbst bestimmt wird.

Nach Gleichung (6a) (S. 77) finden sich für die Knotenspannungen V_A und V_B die folgenden Werte, wobei $r_{1+2+3+4}$ kurz $r_{1+\dots 4}$ usw. bezeichnet wird.

$$\left. \begin{aligned} V_A &= (V_I - [v]_1) \frac{r_{3+4}}{r_{1+\dots 4}} + (V_{II} - [v]_2) \frac{r_{1+2}}{r_{1+\dots 4}} - i_x \frac{r_{1+2} r_{3+4}}{r_{1+\dots 4}} \\ V_B &= (V_{III} - [v]_3) \frac{r_{8+9}}{r_{6+\dots 9}} + (V_{IV} - [v]_4) \frac{r_{6+7}}{r_{6+\dots 9}} - (-i_x) \frac{r_{6+7} r_{8+9}}{r_{6+\dots 9}} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

In $(V_A - V_B) : r_{AB} = i_x$ eingesetzt, ergibt sich für dieses, wenn die Speisespannungen verschieden sind:

$$i_x = \frac{\left(\frac{r_{3+4}}{r_{1+\dots 4}} V_I + \frac{r_{1+2}}{r_{1+\dots 4}} V_{II} - \frac{r_{8+9}}{r_{6+\dots 9}} V_{III} - \frac{r_{6+7}}{r_{6+\dots 9}} V_{IV} \right) - \left(\frac{r_{3+4}}{r_{1+\dots 4}} [v]_1 + \frac{r_{1+2}}{r_{1+\dots 4}} [v]_2 - \frac{r_{8+9}}{r_{6+\dots 9}} [v]_3 - \frac{r_{6+7}}{r_{6+\dots 9}} [v]_4 \right)}{\frac{r_{1+2} r_{3+4}}{r_{1+\dots 4}} + \frac{r_{6+7} r_{8+9}}{r_{6+\dots 9}} + r_{AB}}$$

Werden die Speisespannungen $V_I = V_{II} = \dots$ gleich, so wird der erste Klammerausdruck Null, das heißt sie üben auf den Strom im Mittelleiter AB dann keinen Einfluß aus.

Aus dem Gedankengange und den Gleichungen (7) ergibt sich wieder, daß das gegebene belastete Netz wie in Abb. 143 stromtreu für den Leiter AB in ein leerlaufendes, lastfreies mit den erniedrigten neuen Speisespannungen $V_I - [v_1] = V_I - i_a r_1$ usw. wie in Abb. 149 übergeführt werden darf.

Das Netzspalten kann für den Fall in Abb. 143 auch durch Ausheben zweier Leiter (Abb. 150), etwa (6) und (9), geschehen, wodurch die Spannungen V_d gegen V_{III} und V_c gegen V_{IV} in Frage kommen. Das Netzstück $IIIcd$ entspricht wieder dem Falle der

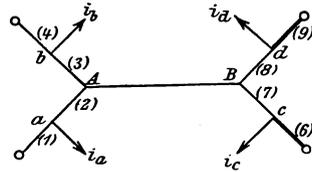


Abb. 150.

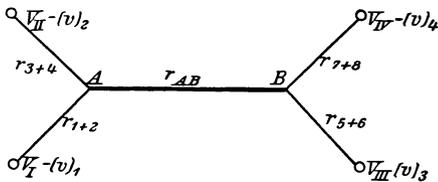


Abb. 149.

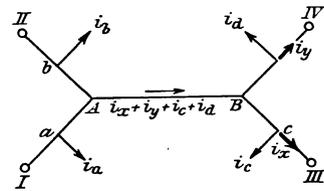


Abb. 151.

Abb. 49c; es steht nur statt der Mittelabnahme i nun $(i_x + i_c) + (i_y + i_d)$ in Abb. 151. Die beiden Ansätze

$$\frac{V_c - V_{III}}{r_6} = i_x \quad \text{und} \quad \frac{V_d - V_{IV}}{r_9} = i_y$$

führen zu zwei Gleichungen, die die fraglichen Leiterströme i_x und i_y ermitteln lassen. Sie bestätigen, daß hinsichtlich dieser Leiterströme (6) und (9) das Netzbefreien auch durch Erniedrigen der Spannung V_I um $i_a r_1$ und um $(i_c + i_d) \frac{r_{3+4}}{r_{1+\dots 4}}$, das von V_{II} um $i_b r_4$ und um $(i_c + i_d) \frac{r_{1+4}}{r_{1+\dots 2}}$ erfolgen kann. Wären die ursprünglichen Speisespannungen gleich, so würde man allerdings diesen Vorteil ohne wesentlichen nennenswerten Gegenwert bei diesem Vorgang preisgeben.

10. Beispiel eines dreischenkligen Sterns.

Die Verteilung in einem Leitungssterne wie in Abb. 152 soll noch an einem Zahlenbeispiel weiter erörtert werden.

Von den drei Speisespannungen I, II und III gleicher Spannung \bar{V} werden drei Abnehmer von 20, 40 und 50 Amp. gespeist. Wird an zwei Stellen mit den Leiterströmen i_x und i_y die Trennung in offene Leiter vorgenommen, so gibt beispielshalber die Schnittmethode für die Spannungsgleichheit von

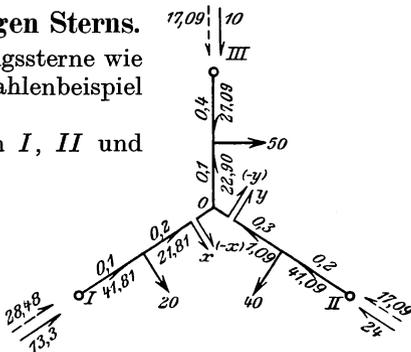


Abb. 152.

I, *x* zu *III*, $(-x)$ den Ansatz:

$$20 \cdot 0,1 + x \cdot 0,3 = 50 \cdot 0,4 + (-x - y) 0,5$$

oder

$$8x + 5y = 180. \quad (a)$$

Ferner die Spannungsgleichheit von *II*, *y* mit *III*, $(-y)$

$$40 \cdot 0,2 + y \cdot 0,5 = 50 \cdot 0,4 + (-x - y) 0,5$$

$$x + 2y = 24, \quad (b)$$

woraus die Schenkelströme $x = 240 : 11 = 21,8\ddot{1}$, $y = 12 : 11 = 1,0\ddot{9}$ und $x + y = 22,9\ddot{0}$ sich ergeben.

Die Abnahmen 20, 40 und 50 lassen sich auf ihre Nachbarknoten spannungstreu für die Punkte *I*, *II* und *III* werfen, wobei auf 0 $62,6\ddot{6} A = \frac{188}{3} A$ entfallen.

Der Leitwert der parallelgeschalteten Schenkel, welcher der Deckung der Punkte *I*, *II* und *III* entspräche, findet sich aus:

$$\frac{1}{0,5} + \frac{1}{0,5} + \frac{1}{0,3} = \frac{22}{3}$$

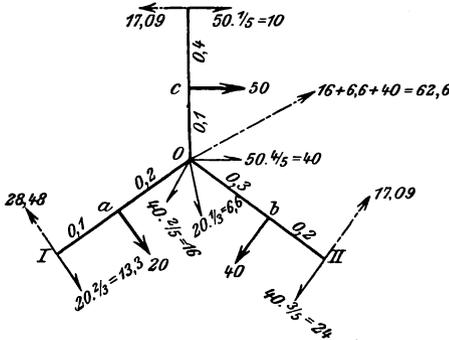


Abb. 153.

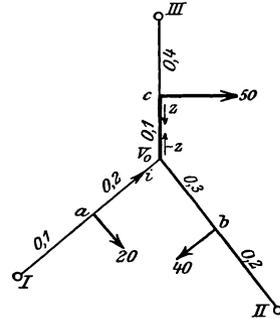


Abb. 154.

und die abgebundenen Teilströme der Mittelabnahme sind demzufolge:

$$\frac{188}{3} \cdot \frac{3}{22} \cdot \frac{1}{0,3} = 28,4\ddot{8}; \quad \frac{188}{3} \cdot \frac{3}{22} \cdot \frac{1}{0,5} = 17,0\ddot{9} A$$

und

$$\frac{188}{3} \cdot \frac{3}{22} \cdot \frac{1}{0,5} = 17,0\ddot{9} A,$$

deren Summe zu $62,6\ddot{6} A$ richtig führt. Das entsprechende Strombild ist in Abb. 153 eingetragen.

Setzt man die Behandlung eines doppeltgespeisten Leiters hier bereits voraus, so braucht man den dreischenkligten Knoten nicht sofort durch zwei Schnitte (für zwei unbekannte Ströme) zu zerlegen, sondern kann durch Ausheben eines einzigen Leiterstückes die Netzspaltung in einen einseitigen Leiter *IIIc* und in einen zweiseitigen *IOII* (Abb. 154) bewerkstelligen.

Die Spannung im Punkte c , Abb. 153 und 154, beträgt:

$$V_c = V_{III} - (z + 50) \cdot 0,4 = V_{III} - 0,4z - 20.$$

Der Strom im Leiter aO beträgt:

$$i = \frac{V_I - 20 \cdot 0,1 - (V_{II} - 40 \cdot 0,2 + 0,5z)}{0,1 + 0,2 + 0,3 + 0,2} = 1,25V_I - 1,25V_{II} + 7,5 - 0,625z$$

und die Spannung im Knoten O demnach:

$$V_0 = V_I - 2,0 - i(0,1 + 0,2) = 0,625V_I + 0,375V_{II} - 4,25 + 0,1875z.$$

Schließlich ist der Strom im Leiterstücke Oc :

$$z = \frac{V_c - V_0}{0,1} = V_{III} - 6,25V_I - 3,75V_{II} - 5,875z - 157,5,$$

woraus bei gleichen Spannungen

$$V_I = V_{II} = V_{III}$$

der Strom

$$z = -22,9 \text{ A}$$

wird und die Mittelspannung

$$V_0 = -4,25$$

$$= -0,1875 \cdot 22,9$$

$$= -8,54 \text{ Volt,}$$

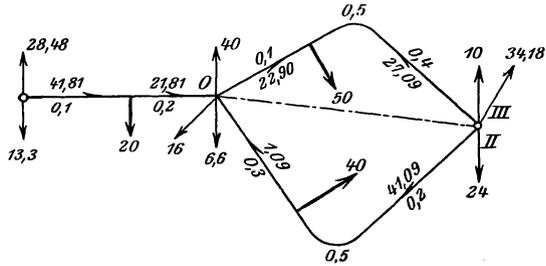


Abb. 155.

unter der Bezugsspannung bleibt.

Einfacher vollzieht sich der gleiche Vorgang durch Ausheben des Stückes Ia . Die feste Spannung im Punkte I und die veränderliche im Punkte a führen dann zum gesuchten Leiterstrom in Ia , wie oben.

Deckt man die gleichspannigen Speisepunkte II und III und befreit die Leiter von ihren Abnahmen, so gestaltet sich nach Abb. 156 die Rechnung einfach.

Dieses Beispiel diene noch zur Vorführung des Dekkungsprinzips. Zuerst werde das Netz durch Spannungserniedrigung in den Punkten I , II und III von den Abnahmen befreit (Abb. 156). Im Einzelbilde, Abb. 157, wirkt nur ein Speisepunkt

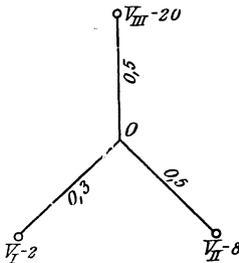


Abb. 156.

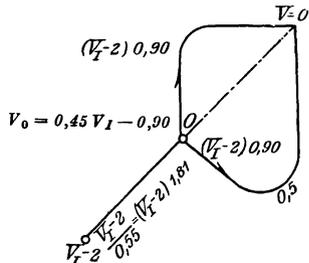


Abb. 157.

$$V_I - 20 \cdot 0,1 = V_I - 2,$$

während die beiden anderen mit der Spannung Null sich decken. In Abb. 158 wirkt ähnlich

$$V_{II} - 40 \cdot 0,2 = V_{II} - 8$$

mit den gedeckten beiden anderen, und in Abb. 159 ebenso

$$V_{III} - 50 \cdot 0,4 = V_{III} - 20.$$

Durch Ersatz der Zweiecke finden sich die Teilströme und Teilspannungen, und durch deren sinngemäße Deckung das gesuchte schließliche Strom- und Spannungsbild.

So wird die Spannung im Mittelknoten O betragen:

$$V_0 = 0,45 V_I + 0,27 V_{II} + 0,27 V_{III} - (0,90 + 2,18 + 5,45).$$

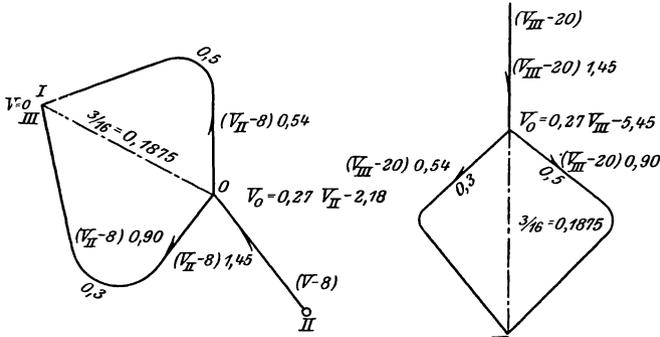


Abb. 158.

Abb. 159.

Dieser Wert läßt sich durch den Spannungsmomentensatz unmittelbar überprüfen.

$$V_0 \left(\frac{1}{0,3} + \frac{1}{0,5} + \frac{1}{0,5} \right) = (V_I - 2) \frac{1}{0,3} + (V_{II} - 8) \frac{1}{0,5} + (V_{III} - 20) \frac{1}{0,5},$$

woraus sich obiger Ausdruck bestätigt. Man sieht, daß die Befreiung von den Stromabnahmen durch Spannungserniedrigung in den Punkten I , II und III um den Vorteil gleich hoher Bezugsspannungen bringt.

11. Beispiel eines Dreiecks mit drei angesetzten Strahlen.

Es sei ein Netz mit drei Speisepunkten I , II und III und vier Knoten A , B , C und O in Abb. 160 a gegeben. Die Stromabnahmen sind von den Leitern bereits entbunden worden, so daß nur die Knoten mit den Strömen i_0 , i_1 , i_2 und i_3 belastet erscheinen. Für die Widerstände sind Zahlenwerte eingetragen.

Um den inneren Stern O in ein Dreieck verwandeln zu können, muß zuerst die Knotenlast i_0 auf die Nachbarknoten A , B und C entbunden werden.

$$i_A = \frac{0,77}{2} i_0 = 0,385 i_0, \quad i_B = \frac{0,77}{2,5} i_0 = 0,308 i_0$$

und

$$i_C = \frac{0,77}{2,5} i_0 = 0,308 i_0.$$

Der gemeinschaftliche Zähler bedeutet hierbei den Ersatz der parallelen Schenkelwiderstände

$$AO = 2, \quad BO = 2,5 \text{ und } CO = 2,5 \text{ Ohm,}$$

also

$$1 : \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2,5} + \frac{1}{2,5} \right) = 0,77 .$$

Die in den Knoten *A*, *B* und *C* nun vereinigten Ströme sind aus Abb. 160 b ersichtlich.

$$i' = i_1 + i_A = i_1 + 0,385 i_0$$

$$i'' = i_2 + i_B = i_2 + 0,308 i_0$$

und

$$i''' = i_3 + i_C = i_3 + 0,308 i_0 .$$

Der innere entlastete Stern wird nun durch das widerstandstreuere Dreieck mit den Seiten 6,5, 6,5 und 8,1 ersetzt.

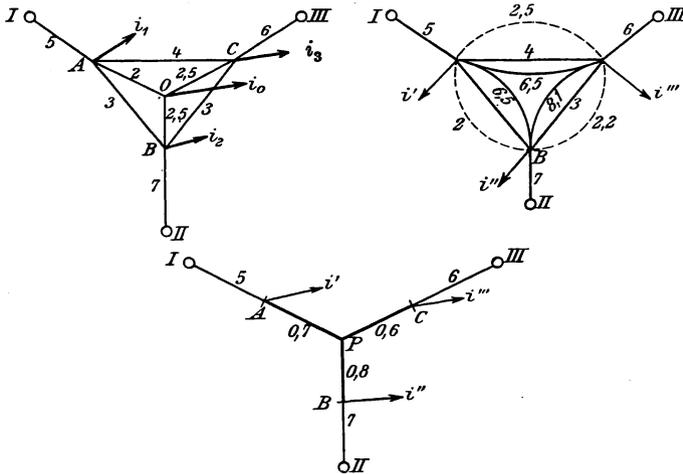


Abb. 160 a—c.

Die Widerstände dieser Seiten finden sich:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2,5} + \frac{1}{2,5} \right) : \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2,5} \right) = 6,5 \text{ usw.}$$

Die parallelen Zweige ($4 \parallel 6,5$), ($3 \parallel 6,5$) und ($3 \parallel 8,1$) werden hierauf durch die gleichwertigen 2,5, 2 und 2,2 ersetzt. Das aus ihnen gebildete Dreieck wird durch einen neuen Stern *P* mit den Schenkeln 0,7, 0,8 und 0,6 in Abb. 160 c widerstandstreu umgebildet.

Wirft man i' auf *I* und *P*, ebenso i'' auf *II* und *P*, ferner i''' auf *III* und *P*, so erhält man:

$$i'_I = \frac{0,7}{5 + 0,7} i' = 0,123 i' \quad \text{und} \quad i'_P = i' - 0,123 i' = 0,877 i' ;$$

$$i''_{II} = \frac{0,8}{7 + 0,8} i'' = 0,103 i'' \quad \text{und} \quad i''_P = i'' - 0,102 i'' = 0,897 i'' ;$$

$$i'''_{III} = \frac{0,6}{6 + 0,6} i''' = 0,091 i''' \quad \text{und} \quad i'''_P = i''' - 0,091 i''' = 0,909 i''' .$$

Und daher

$$i_P = 0,877 i' + 0,897 i'' + 0,909 i''' ,$$

die mit den Werten für i' , i'' und i''' zum Ausdruck führen:

$$J_P = 0,893 i_0 + 0,877 i_1 + 0,897 i_2 + 0,909.$$

Die Behandlung dieses einfachen Sternes bietet nichts Neues und soll hier unterlassen werden.

Alle Gedanken über Übereinanderlagerung lassen sich hier wiederholen. Ebenso alles über Netzspaltung Gesagte.

Die Speisespannung V_A muß um $[v]_1 = i_1 \cdot 5$, V_B um $[v]_2 = i_2 \cdot 7$ usw. erniedrigt werden, um die Ströme im inneren Dreieck und im inneren Stern stromtreu zu erhalten.

Wird ein Netz von seinen Leiterabnahmen durch die Knotenlasten befreit, werden die dadurch ersichtlichen Zweiecke und Dreiecke nacheinander weggeschafft, so läßt sich die volle Auflösbarkeit dadurch erkennen, daß die gespeisten Maschen den ungespeisten benachbart sind. So hat das Netz der Abb. 128 vier gespeiste Maschen $M_1 \dots M_4$ und fünf ungespeiste $N_0, N_1 \dots N_4$. $N_1 \dots N_4$ berühren längs eines Leiters die Speisemaschen, N_0 hat alle vier Knoten 1 ... 4 in solchen

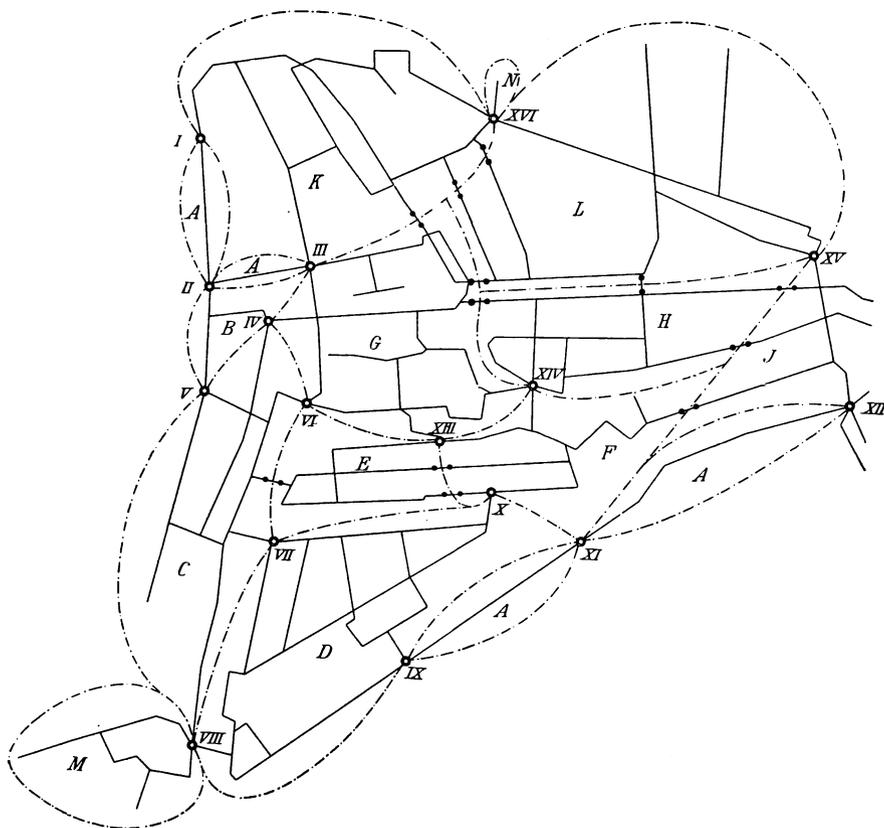


Abb. 161. Rotterdamer Gleichstromnetz.

liegen. Wenn die Speisepunkte aufgeschlossen werden, wie in Abb. 129, so verbleiben nämlich die neuen Speisepunkte $A \dots D$ noch immer der neuen Masche a', b', c', d' in erster Nachbarschaft.

12. Beispiel zur Netzspaltung. Rotterdamer Netz.

In Abb. 161 ist ein Teil des Rotterdamer 2 · 220 Volt Gleichstromnetzes gezeichnet, wobei die punktierten Trennungslinien die durch Buchstaben angedeuteten Bezirke scheiden. Die 16 Speisepunkte sind durch doppelte Kreise und römische Zahlen gekennzeichnet.

Die kleinsten Bezirke sind die Ausgleichleitungen A zwischen zwei Speisepunkten I und II , II und III , XI und XII ; dann folgt die offene Leitung N von XVI und der von $VIII$ gespeiste Bezirk M . Die Bezirke B und D schälen sich ohne weiteres heraus. In Abb. 161 sind die Bezirke A, B, D, M, N durch Trennungslinien aus dem Netz ablösbar.

Der Rest des Netzes hängt zusammen und könnte nur dann in kleinere Teile zerlegt werden, wenn es erlaubt wäre, mit den Trennungslinien einzelne wenige Leiter noch zu durchschneiden.

So fiele bei Durchschneidung eines Leiters zwischen VI und VII der Bezirk C heraus, bei Durchschneidung zweier Leiter Bezirk E zwischen X und $XIII$ usw.

Dieses Zerschneiden ist für die Rechnung zulässig, wenn der Netzverband durch Zwischenfügung passend gewählter Ersatzströme gewahrt bleibt.

Gegeben sei für einen Bezirk das Netz der Abb. 162a mit den Entnahmen $J_1 = 150, J_2 = 100, J_3 = 150, J_4 = 200$ Amp. und den eingetragenen Leitwerten. Man befreit die Knoten B und D von den Abnahmen und erhält die Komponenten:

$$\begin{aligned}
 J_{IV, D} &= \frac{20}{60} \cdot 150 = 50, & J_{II, B} &= \frac{25}{90} \cdot 150 = 41,67 \\
 J_{A, D} &= \frac{25}{60} \cdot 150 = 62,5 & J_{C, B} &= \frac{30}{90} \cdot 150 = 50 \\
 J_{C, D} &= \frac{15}{60} \cdot 150 = \frac{37,5}{150} & J_{A, B} &= \frac{35}{90} \cdot 150 = \frac{58,33}{150},
 \end{aligned}$$

so daß nun in A : $100 + 62,5 + 58,33 = 220,83$ Amp.

und in C : $200 + 37,5 + 50,00 = 287,50$ Amp. wirken.

Das Netz nimmt also die Gestalt der Abb. 162b an und kann durch Transfiguration der Sterne D und B in Dreiecke verändert werden

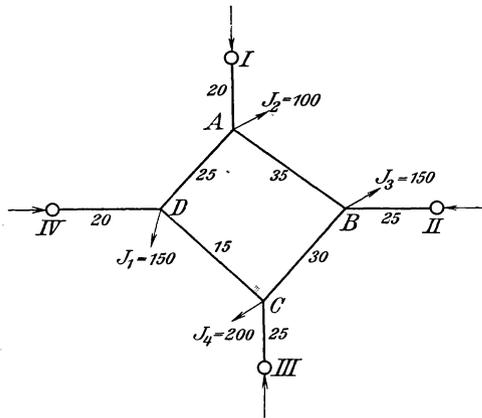


Abb. 162 a.

mit den Seiten

$$b = \frac{25 \cdot 15}{60} = 6,25$$

$$b_1 = \frac{35 \cdot 30}{90} = 11,67$$

$$a = \frac{20 \cdot 15}{60} = 5,00$$

$$a_1 = \frac{25 \cdot 30}{90} = 8,33$$

$$c = \frac{20 \cdot 25}{60} = 8,33$$

$$c_1 = \frac{35 \cdot 25}{90} = 9,72$$

Durch Parallelschaltung von b und b_1 erhält man den Leiter von

A nach C vom Leitwert $b + b_1 = 17,92$, durch Netzspaltung das Bild Abb. 163, woraus die Beziehungen

$$V_1 - V_a = (220,83 + x) : (20 + 8,33 + 9,72)$$

und

$$V_3 - V_c = (287,5 - x) : (25 + 5,00 + 8,33)$$

unmittelbar abzulesen sind. Setzt man $V_1 = V_3$, dann folgt

$$V_a - V_c = \frac{287,5 - x}{5 + 8,33 + 25} - \frac{220,83 + x}{20 + 8,33 + 9,72}$$

Es muß aber auch gelten (Abb. 162 b)

$$V_a - V_c = \frac{x}{b_1 + b_2} = \frac{x}{17,92}$$

woraus sich $x = 15,76$ Amp. für den unbekannteten Ersatzstrom ergibt.

Nun muß der Weg rückwärts wieder besritten werden (Abb. 164).

In A strömen ab:

$$J_A = 220,83 + 15,76 = 236,59 \text{ Amp.}$$

In C strömen ab:

$$J_C = 287,50 - 15,76 = 271,74 \text{ Amp.}$$

Sind nun die Knotenspannungen V_1 bis V_4 gleich, dann sind die Spannungsverluste

$$\text{bis } A: \frac{236,59}{20 + 8,33 + 9,72} = 6,22 \text{ Volt; bis } C: \frac{271,74}{5 + 8,33 + 25} = 7,09 \text{ Volt.}$$

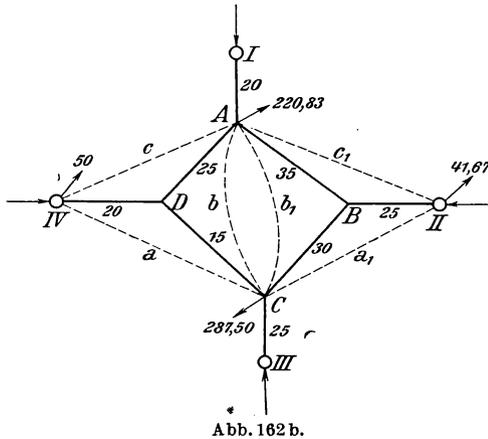


Abb. 162 b.

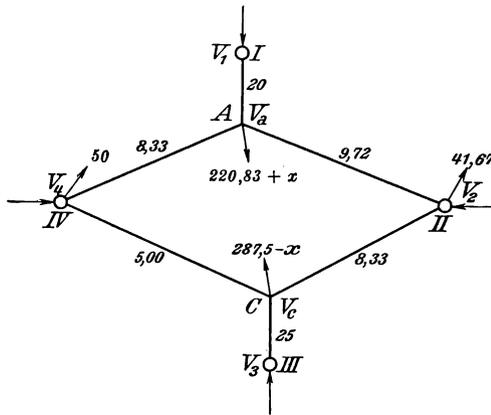


Abb. 163.

Die Ströme sind also von:

I nach A:	6,22 · 20	=	124,4	Amp.
II „ A:	6,22 · 9,72	=	60,44	„
IV „ A:	6,22 · 8,33	=	51,79	„
236,63				
II nach C:	7,09 · 8,33	=	59,06	Amp.
III „ C:	7,09 · 25	=	177,25	„
IV „ C:	7,09 · 5	=	35,45	„
271,76				

Hiermit lassen sich die vier Speiseströme in das gespaltene und transfigurierte Netz eintragen, wie in Abb. 164 geschehen. Die Ströme von I nach A und von III nach C sowie die Spannungsverluste auf diesen Strecken sind bereits bekannt. Die Verluste und Ströme in der ursprünglichen Abb. 165 ergeben sich nach der Wiedereinführung der Sterne B und D folgendermaßen:

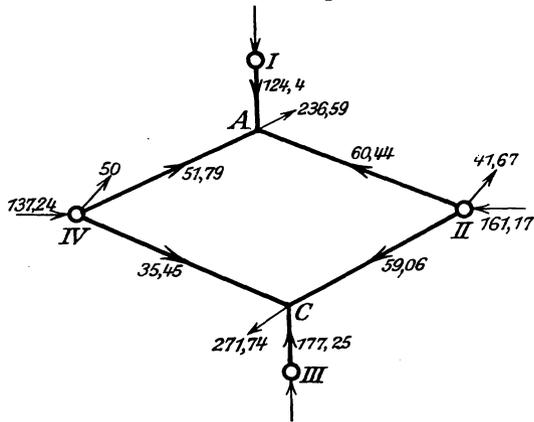


Abb. 164.

Strom II—B =	161,17;	$V_2 - V_B =$	$161,17 : 25 =$	6,45	Volt
„ IV—D =	137,23;	$V_4 - V_D =$	$137,24 : 20 =$	6,86	„
„ A—D =	$(6,86 - 6,22) · 25 =$	$0,64 · 25 =$	16,0	Amp.	„
„ A—B =	$(6,45 - 6,22) · 35 =$	$0,23 · 35 =$	8,05	„	„
„ B—C =	$(7,09 - 6,45) · 30 =$	$0,64 · 30 =$	19,2	„	„
„ D—C =	$(7,09 - 6,86) · 15 =$	$0,23 · 15 =$	3,45	„	„

Im Punkte C kommen bei 200 Amp. Belastung 199,9 Amp. an, im Punkte D beträgt die Ungenauigkeit der Rechnung 0,21 Amp., in A 0,35 Amp., in B strömen 169,22 Amp. zu, 169,2 Amp. ab. Da nur auf zwei Dezimalen gerechnet wurde, ist genauere Übereinstimmung nicht zu erwarten.

Sind die Spannungen V_1 bis V_4 ungleich, dann ergeben sich andere Verhältnisse, die entweder durch Superposition der Ausgleichströme über die gefundene Stromverteilung oder nach der Spannungsmethode ermittelt werden können.

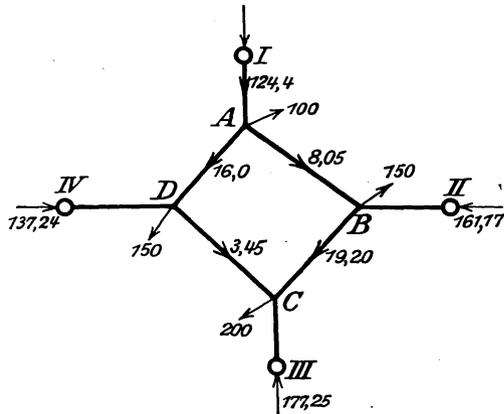


Abb. 165.

13. Zweites Beispiel. Haager Netz.

Aus dem Netz der Stadt Haag ist ein Distrikt abgelöst und in Abb. 166 dargestellt worden. Er läßt sich sehr einfach behandeln, sobald man in den Leitern 4—5 und 2—3 das Netz spaltet. Man erhält dann die folgende Abb. 167 und kann nun bei Annahme gleicher Spannung an den Speisepunkten sofort die Gleichungen für die Spannungsverluste hinschreiben.

So ist

$$v_4 = \left\{ J_4 + J_3 \cdot \frac{g_{34}}{g_{34} + g_{III3}} \right\} \cdot \frac{1}{g_{V4} + \frac{1}{r_{34} + r_{III3}}},$$

$$v_5 = \left\{ J_5 + J_6 \cdot \frac{g_{56}}{g_{V6} + g_{IV6} + g_{56}} \right\} \cdot \frac{1}{g_{III5} + \frac{1}{\frac{1}{g_{V6} + g_{IV6}} + r_{56}}},$$

während für den Ersatzstrom gilt

$$y = g_{45} (v_4 - v_5).$$

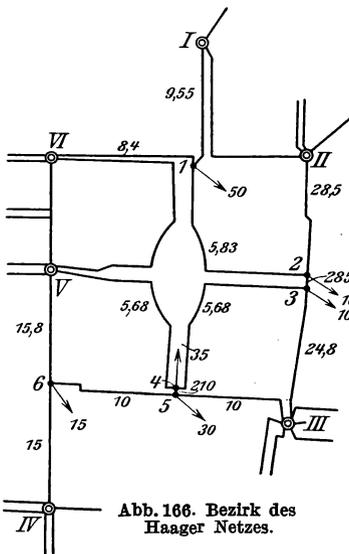


Abb. 166. Bezirk des Haager Netzes.

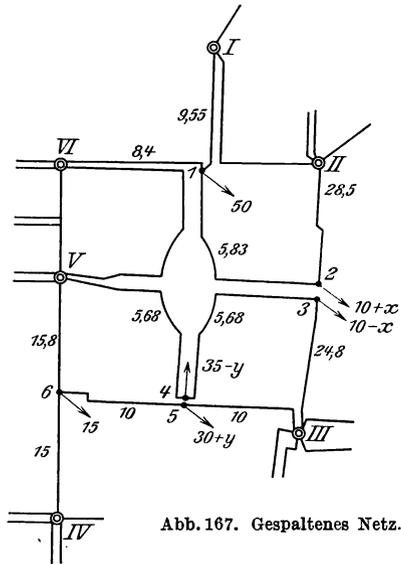


Abb. 167. Gespaltenes Netz.

Ähnliche Gleichungen finden sich für v_2 und v_3 .

$$v_2 = \left\{ J_2 + J_1 \frac{g_{12}}{g_{12} + g_{VI1} + g_{I1}} \right\} \cdot \frac{1}{g_{III2} + \frac{1}{r_{12} + \frac{1}{g_{VI1} + g_{I1}}}},$$

$$v_3 = \left\{ J_3 + J_4 \frac{g_{35}}{g_{V5} + g_{53}} \right\} \cdot \frac{1}{g_{III3} + \frac{1}{g_{34} + g_{V4}}}.$$

Nach Einsetzung der Zahlenwerte findet man folgende Gleichungen:

$$v_4 = \left\{ 35 - y + (10 - x) \frac{5,68}{5,68 + 24,8} \right\} \frac{1}{5,68 + \frac{1}{0,176 + 0,0404}},$$

$$v_5 = \left\{ 30 + y + 15 \frac{10}{15,8 + 15 + 10} \right\} \frac{1}{10 + \frac{1}{\frac{1}{15,8 + 15} + 0,1}},$$

$$210 (v_4 - v_5) = y$$

und ferner:

$$v_2 = \left\{ 10 + x + 50 \cdot \frac{5,83}{5,83 + 8,4 + 9,55} \right\} \frac{1}{28,5 + \frac{1}{0,172 + \frac{1}{8,4 + 9,55}}},$$

$$v_3 = \left\{ (35 - y) \frac{5,68}{5,68 + 5,68} + (10 - x) \right\} \frac{1}{24,8 + \frac{1}{0,176 + 0,176}},$$

$$285 (v_3 - v_2) = x.$$

Diese Gleichungen geben vereinfacht

$$\begin{aligned} v_4 &= 3,5790 - 0,0181 x - 0,0971 y & v_2 &= 0,6766 + 0,0304 x \\ v_5 &= 1,9196 + 0,0570 y & v_3 &= 0,9955 - 0,0362 x - 0,0181 y \\ v_4 - v_5 &= 0,0048 y & v_3 - v_2 &= 0,0035 x. \end{aligned}$$

Man hat also 6 Gleichungen für die 6 Unbekannten. Aus ihnen folgt für die Ersatzströme

$$x = 1,909 \quad y = 10,227 \text{ Amp.},$$

für die Spannungsverluste

Aus den Gleichungen:	Bei der Nachprüfung:
$v_2 = 0,735$ Volt	(0,734)
$v_3 = 0,741$ „	(0,741)
$v_4 = 2,551$ „	(2,550)
$v_5 = 2,503$ „	(2,502).

Hieraus findet man dann durch Multiplikation mit den zugehörigen Leitwerten die Stromverteilung, wie sie in Abb. 168 eingezeichnet ist, und bei der Nachprüfung die in Klammern gesetzten Werte für die Spannungsverluste, welche durchaus genügende Übereinstimmung zeigen.

Das Netz ist ein Dreiphasennetz mit Nulleiter und 127 Volt zwischen diesem und den Außenleitern. Die Rechnung ist für die Belastung einer Phase durchgeführt und ergibt unter den gemachten Belastungsannahmen als Höchstwert 2,55 Volt $\approx 2\%$ der Betriebsspannung.

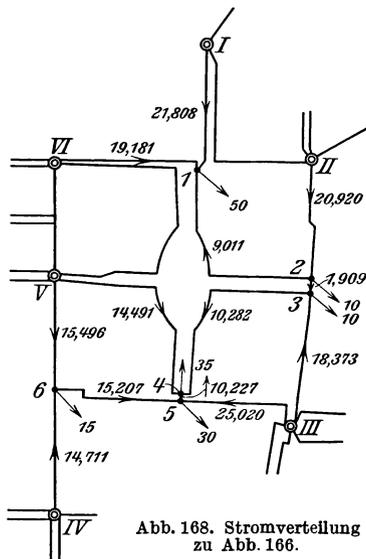


Abb. 168. Stromverteilung zu Abb. 166.

Zur Literatur der Netzbildung.

Die Knotenentlastung entspricht dem Komponentensatz für eine Abnahme in einer Leiterstrecke. Für Nullast des Mittelknotens haben schon Fr. Gauß, J. Cl. Maxwell u. a. ihn entwickelt. Für Wechselstromnetze hat diesen Sonderfall auch K. Ulbricht in der ETZ 1892, Heft 21 gegeben. Die fruchtbare Komponentendeutung der Knotenlast für Netzrechnungen rührt von uns her. Sie wurde noch 1903 in in der ETZ, S. 339 von berufener Seite als neu bezeichnet.

Auch die Ausdrücke „widerstandstreue Umbildung“ und „Transfigurierung“ sind zum ersten Male in der ETZ 1900, S. 167 von uns eingeführt worden. Der fremdsprachliche Ausdruck wird irrtümlich Kennelly zugeschrieben, während man den deutschen nur verschämt mitlaufen läßt.

VII. Leitungssysteme.

A. Unmittelbare Stromverteilung.

Die unmittelbaren Verteilungssysteme sind bereits im ersten Kapitel im allgemeinen besprochen worden. Die erzeugte elektrische Energie wird unverändert von den Verbrauchern verwendet, alle Teile der Anlage gehören also einem einzigen elektrischen Strömungsgebiete an.

Man unterscheidet weiter zwischen Reihen- und Parallelschaltung, zwischen in Reihe geschalteten Parallelgruppen und parallelen Reihen von Erzeuger und Abnehmer.

1. Reihensystem.

Ein konstanter Strom führt beim Reihensystem aus einer oder mehreren hintereinander geschalteten Erzeugern durch die Leitung zu einer Entnahmestelle, von dieser zur nächsten usw. und schließt sich auf möglichst kurzem Wege. Ein einziges Stück der Leitung kann auch durch die Erde gebildet sein. Die Nutzleistung oder ihr Spannungs-

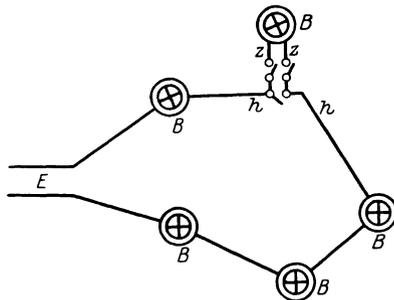


Abb. 169.

verlust entspricht der Anzahl der eingeschalteten Abnahmen. Die Verlustleistung der Leitung selbst aber und ihr Spannungsverlust bei konstant erhaltenem Strome bleiben unverändert, wenn nicht die Kurzschließung einer Abnahme durch die Leitungskürzung einer Zuführungsschlinge bedingt ist. Soll z. B. eine halbnächtige Straßenbogenlampe B, Abb. 169, nicht benutzt werden, so schließt man ihre Hauptleitung h h kurz und trennt

am besten durch denselben Schalter ihre Zuleitung z z ab. Hierdurch wird die Abnahme nicht nur strom-, sondern auch spannungsfrei. Soll etwa ein Reihenmotor, der abseits von der Hauptstraße steht, nur

zur Druschzeit verwendet werden, so fällt dies durch die Ersparnis des sonst langwährenden Leistungsverlustes in der Schlinge noch wesentlicher ins Gewicht. Der Ort der Erzeugermaschinen im Leitungskreise ist in elektrischer Hinsicht beliebig.

Wird der Widerstand des Leitungskreises gewählt, dann ist der Spannungsverlust und der Leistungsverlust bestimmt, sofern die Länge des Kreises gegeben ist und überall gleicher Querschnitt vorausgesetzt wird. Für die Wahl des Verlustes als Prozentsatz der Nutzspannung oder Nutzleistung können verschiedene später zu erörternde Umstände in Frage kommen. Dem Reihensystem stehen die Parallelschaltungssysteme gegenüber. Sie haben sich aus dem Zweileitersystem heraus entwickelt.

2. Zweileitersystem.

Die Abnahmen sind alle parallelgeschaltet. Die Eigenschaften dieses Systems wurden bei dem \square -, dem \square - und dem Kettenleiter im zweiten Kapitel, S. 30—38, ausführlich behandelt.

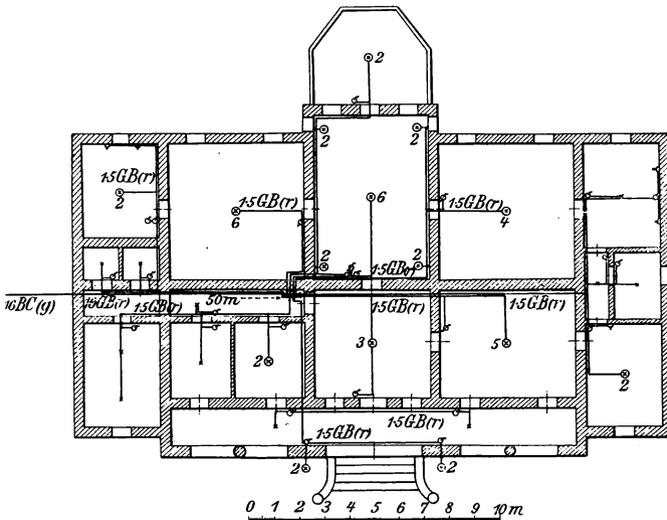


Abb. 170.

Hier mögen einige Beispiele folgen, wobei lebendiger als aus den allgemeinen Ableitungen die praktische Anwendung der erläuterten Grundsätze vor den Geist tritt.

a) Eine kleine Leitungsrechnung. Eine Villa, Abb. 170, soll mit 60 Metalldrahtglühlampen von 50 Watt eingerichtet werden, wovon höchstens 40 zugleich in Betrieb sind. Die Lampenspannung beträgt 110 Volt. Leitungsplan und Lampenverteilung sind den Vorschriften des Verbandes Deutscher Elektrotechniker entsprechend in Abb. 170 angedeutet. Die Straßenleitung liege 50 m entfernt von der im Quer gange links angebrachten Schalttafel, auf der je 8 Glühlampen mit

zusammen 4 Amp. Stromverbrauch von einer doppelpoligen Sicherung versorgt werden. In der Zufuhrleitung sollen 2 Volt verlorengehen; ihr Querschnitt wird also bei max 20 Amp.:

$$\frac{2 \cdot 50 \cdot 20}{57 \cdot 2} \approx 16 \text{ mm}^2.$$

Eigentlich 17,8 mm², so daß man bei dem handelsüblichen Querschnitt 2,2 Volt Verlust erhält.

Die größte Leiterlänge der Lampengruppen beträgt 20 m, der größte Verlust bei Anwendung von 1,5 mm² Gummibanddraht (*GB*) in Röhren verlegt (*r*) wäre daher bei max 4 Amp.:

$$\frac{2 \cdot 20 \cdot 4}{57 \cdot 1,5} = 1,9 \text{ V.}$$

Der Gesamtverlust für diese Gruppe beträgt also höchstens 2,2 + 1,9 = 4,1 Volt, was noch zulässig ist, da die 40 Lampen nur selten zugleich brennen werden.

Laut den Sicherheitsvorschriften dürfen isolierte Kupferleitungen von 1,5 mm² Querschnitt, die hier für die Verteilungsleitungen gewählt wurden, dauernd mit 10 Amp. belastet werden, während hier höchstens 4 Amp. auftreten. Der gewählte Querschnitt entspricht also auch vollkommen hinsichtlich zulässiger Erwärmung.

b) **Eine Hausinstallation.** Im allgemeinen läßt man für den Fall, daß alle Lampen brennen, vom Zähler bis zur entferntesten Lampe einen Spannungsabfall von 2% der zugeführten Spannung zu. Die Frage, wie dieser Abfall auf die verschiedenen Teile der mehrfach verzweigten Leitung verteilt werden soll, ist bereits auf S. 42 behandelt worden. Sie führt für das Minimum an Leitermetall zur Ermittlung der fiktiven Leiterlänge und des Schwerpunktstrahles λ' oder Trägheitshalbmessers λ'' .

$$\lambda' = \frac{\sum i l}{\sum i}; \quad \lambda'' = \sqrt{\frac{\sum (i l^2)}{\sum i}}.$$

Die meisten Installateure beschränken sich darauf, für Stromkreise bis 6 Amp., die unter einer Sicherung von 6 Amp. Nennstromstärke ohne Rücksicht auf die verwendeten Leiterquerschnitte zusammengefaßt werden können, einen Querschnitt von 1 mm² (in Holland 2,5 mm²) vorzusehen und hernach für die entferntesten Lampen nachzuprüfen, ob der zulässige Spannungsabfall nicht überschritten ist; ist dies der Fall, so vergrößern sie bestimmte Querschnitte, um zum Ziele zu gelangen. Dies zeigt, daß es eine Menge Lösungen gibt, unter denen aber nur die vorteilhaft ist, die am wenigsten Kupfer erfordert.

Man bestimmt zunächst auf einer Skizze im Maßstab 1:50 oder 1:100 die Zahl, Anordnung und Art der Lichtquellen; verteilt sie auf verschiedene Stromkreise von im Maximum 6 Amp., die an die verschiedenen Schaltbretter anschließen, und kennzeichnet die Stellen, wo Sicherungen, Schalter und eventuell Widerstände für Bogenlampen anzubringen sind. Stromkreise, in denen hochkerzige Glühlampen mit Goliathfassungen von einer Leitung gleichen Querschnitts in Parallel-

schaltung abgezweigt werden, können eine dem Querschnitt entsprechende gemeinsame Sicherung von höchstens 15 Amp. erhalten. Mittelleiter von Mehrleiter- oder Mehrphasensystemen sollen keine Sicherungen enthalten. Andere Verbrauchsapparate, wie kleine Motoren, Heizkörper werden durch besondere Leitungen an die in jedem Stockwerk angebrachten, tunlichst zentralisierten Verteilungsschaltbretter angeschlossen.

Es ist nun weiter darauf zu achten, daß die Stromstärke den in § 20 der Sicherheitsvorschriften des V. D. E. angegebenen höchsten Wert nicht überschreitet. Dies kann bei Berechnung auf Spannungsverlust allein bei kurzen Leitungen vorkommen. Da nämlich beim Zweileitersystem $f = \frac{2li}{kv}$ und somit $\frac{i}{f} = \delta = \frac{kv}{2l}$ ist, folgt, daß für Längen $l \leq \frac{kv}{2\delta}$ beim Zweileitersystem die zulässige Stromdichte δ erreicht oder überschritten würde.

Setzt man für Kupfer $k = 57$, $v = 2\%$ der Verbrauchsspannung E , dann wird beim Zweileitersystem

$$l_{\text{krit}} \leq \frac{57 \cdot 0,02 \cdot E}{2\delta} \leq \frac{0,57E}{\delta}.$$

Für die gebräuchlichsten Installationsquerschnitte gilt folgendes:

Querschnitt	Zulässige Dauerstromstärke	Stromdichte	Kritische Länge in m		
			bei 110 Volt	125 Volt	220 Volt
1 mm ²	7,5 Amp.	$\delta = 7,5$	$l_{\text{krit}} \leq 8,3$	9,4	16,6
1,5 „	9 „	6	10,4	11,8	20,8
2,5 „	11 „	4,4	14,2	16,1	28,4
4 „	14 „	3,5	17,8	20,2	35,6

Da nun bei einem gewöhnlichen Hausanschluß die Längen durch die Größe der Zimmer und Gänge für jedes Stockwerk begrenzt sind, wird es in den weitaus meisten Fällen genügen, die dünnen Drähte in den einzelnen Zimmern von 1 oder 2,5 mm² nach den zulässigen Strömen zu wählen und nur die Verteilungsleitungen in den Gängen und die Steigleitungen vom Hauptschaltbrett nach den Verteilungstafeln zu überprüfen auf Spannungsverlust bis zur entferntesten Lampe. Man kann dabei genau rechnen mit allen Abzweigungen oder mit fiktiven Längen oder endlich überschläglic, wie im vorigen Beispiel.

3. Gemischte Systeme.

Die Reihenschaltung begünstigte hohe Betriebsspannungen, die Parallelschaltung forderte niedrige. Man strebte daher, diese durch jene zu verbessern, was zu gemischten Systemen führte.

a) Reihen von parallelschalteten Gruppen. Diese Anordnung zeigt Abb. 171. An Stelle einzelner Glühlampen, um solche handelte es sich seinerzeit, treten gleiche Gruppen von untereinander parallelschalteten auf. Der Strom blieb wie bei der reinen Reihenschaltung

derselbe, innerhalb der Gruppe aber verteilte er sich auf die einzelnen Lampen.

Die Spannung an den Endpunkten jeder Gruppe muß konstant sein, und die Gesamtspannung an den Klemmen der Stromquelle muß der Summe aller Gruppenspannungen gleich sein, vermehrt um den Spannungsverlust in der Leitung.

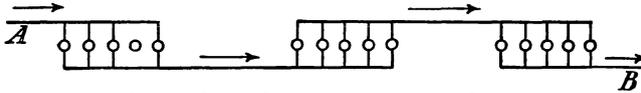


Abb. 171. Serienschaltung von parallelen Gruppen.

Die Berechnung des Leiterquerschnittes entspricht derjenigen für Reihensysteme überhaupt. Der Betrieb erfolgt bei konstantem Strom und bei einer der Anzahl der eingeschalteten Gruppen entsprechenden Regulierung der Spannung.

b) **Parallelgeschaltete Reihen.** An Stelle der einzelnen parallelgeschalteten Abnahmen traten gleiche Reihen von solchen ein, Abb. 172.

Wie bei der einfachen Parallelschaltung, muß die Spannung an den Abzweigungen der Reihen konstant sein. Die einzelnen Reihen

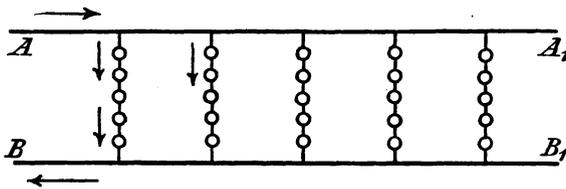


Abb. 172. Parallelschaltung von Serien.

sind dann voneinander unabhängig, nicht aber die Lampen innerhalb einer Reihe. Es muß daher immer eine ganze Reihe auf einmal ausgeschaltet werden oder es

muß beim Ausschalten einer einzelnen Lampe an deren Stelle ein Ersatzwiderstand treten, damit die auf eine Lampe der Reihe entfallende Spannung konstant bleibe. Gleiches gilt, wenn statt Lampen Motoren in Frage kommen. Hat jede Reihe n Lampen, so muß die Spannung zwischen den Hauptleitern n mal so groß sein als für eine Lampe. Bei gleichem, verhältnismäßigem Spannungsverluste in den Leitern wird der Leiterquerschnitt auf $1/n^2$ verkleinert. Das Leitermetall fällt somit gering aus; aber dem steht gegenüber die Abhängigkeit der Lampen oder Motoren namentlich einer Reihe, bei ihrer Aus- und Kurzschaltung.

Diese Anordnung wurde viele Jahre für Bogenlampen auf 250 bis 500 Volt angewendet. Die Reihen gingen jedoch von der Schaltstelle der Erzeugerstätte unmittelbar aus. Als Lückenbüßer schaltet man wegen der geringen Spannung des offenen Lichtbogens bei 110 Volt zwei, bei 220 Volt vier, bei der Tramleitung von 550 Volt zehn Bogenlampen hintereinander. Im Straßenbahnwagen werden je fünf Glühlampen zu 100 Volt in Reihe geschaltet.

c) **Den Einfluß der Abschaltung einer Lampe** auf die übrigen versuchte angeblich Swan Ende der siebziger Jahre durch einen Mittelleiter auszugleichen.

Zwischen den beiden Hauptleitern AA_1 und BB_1 , Abb. 173, seien je zwei hintereinander geschaltete Lampen parallel abzweigend. CC_1 ist ein Mittelleiter, welcher beim Verlöschen einer Lampe ihrer paarigen noch Strom zuführt. Die Spannung zwischen den Hauptleitern ist das Zweifache, der Gesamtstrom die Hälfte des Stromes bei einfacher Parallelschaltung. Der Querschnitt der Hauptleiter wird daher auf ein Viertel vermindert.

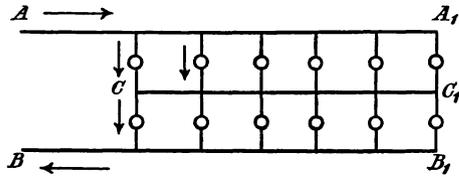


Abb. 173. Sevanschaltung.

Es seien von den beiden Hauptleitern mit einer Spannung von 200 Volt zwei Hälften zu je 100 Lampen gebildet. Der Widerstand jeder Lampe sei 150 Ohm.

Unter Vernachlässigung der Leiterwiderstände ergibt sich bei Vollast der Gesamtwiderstand $R = \frac{2 \cdot 150}{100} = 3$ Ohm und der Gesamtstrom $J = \frac{V}{R} = \frac{200}{3} = 66,66$ Amp. Auf eine Lampe entfällt somit 0,67 Amp. Werden in der einen Hälfte 70 Lampen abgeschaltet, so beträgt der Gesamtwiderstand näherungsweise wie oben $R_1 = \frac{150}{100} + \frac{150}{100 - 70} = 6,5$ Ohm und der Gesamtstrom $J_1 = \frac{V}{R_1} = \frac{200}{6,5} = 30,76$ Amp. Auf eine Lampe einer Hälfte entfällt demnach ein Strom von $\frac{J_1}{100} = 0,31$, auf eine der zweiten Hälfte von $\frac{J_1}{30} = 1,02$ Amp. Bei dieser Belastungsungleichheit wird also eine Lampe jener Systemhälfte nur die Hälfte und eine Lampe dieser Systemhälfte fast das Doppelte des normalen Stromes erhalten.

4. Vorteil höherer Gebrauchsspannung.

Da die Leitung das Produkt aus Strom und Spannung ist, sofern Gleichstrom verwendet wird, ergibt der n -te Teil des Stromes bei n -facher Spannung gleiche Leistung. Der Spannungsverlust sinkt dabei auf den n -ten Teil, der Leistungsverlust im Verhältnis $1/n^2$.

Da die Spannung selbst aber n -mal so hoch ist, beträgt der relative Spannungsverlust statt $p\%$ nur noch $p/n^2\%$. Bei gleichem prozentuellen Spannungsverlust $\varepsilon = p$ nimmt also nach früherem der erforderliche Leiterquerschnitt im quadratischen Verhältnis mit der Zunahme der Spannung ab.

Alle Überlegungen des vierten Kapitels waren für das Zweileitersystem gegeben. Wenn der relative Spannungsverlust in dem Verhältnis $1:n^2$ kleiner wird, nehmen auch die Spannungsschwankung η und die relative Leistungsschwankung ξ im Verhältnis $1:n^2$ ab. In den Kinderjahren der Kraftwerke war die Beleuchtung Hauptsache, und

nachdem Edison 1881 in Paris mit der Parallelschaltung von Glühlampen eine unverhofft einfache Lösung des geheimnisvollen Problems der „Teilung des Lichtes“ gegeben hatte, wandte man sich allerorten dieser Lösung zu. Die heute nicht mehr gut faßbare Geheimsinnigkeit der „Teilung des Lichtes“ erklärt sich ungezwungen aus der Tatsache, daß man in diese Aufgabe den Wunsch nach kleineren Lichtquellen als es Bogenlampen sein konnten, nach Elastizität der Leitung oder Lösbarkeit der Lichtquellen, nach Regelung auf konstante Anfangsspannung hineingeheimnist hatte, ohne diese verschiedenartigen Aufgaben auch nur formulieren zu können. Man suchte was Edison fand; aber man konnte anfänglich selbst die Lösung nicht vollkommen erfassen. Es war eben nicht ein Problem, sondern eine vielfach verknottete Gruppe von Problemen, für deren Lösung, da die Begriffe fehlten, man das Wort „Teilung des Lichtes“ fand, das man bereits gegen Ende der achtziger Jahre nicht mehr recht verstand.

Die ersten Glühlampen mit Kohlenfaden konnte man für etwa 100 bis 150 Volt so herstellen, daß ihr spezifischer Verbrauch nicht zu groß, ihre Lebensdauer genügend war. So kam man auf die Spannung von 110 Volt. Auf Grund langjähriger Versuche gelang es, die Spannung erst auf 150 Volt, in den 90er Jahren auch auf 220 Volt zu steigern. Und damit war es möglich, bei gleichem relativen Spannungsverlust und gleichem Querschnitt das Produkt aus Leistung und Abstand auf das $1,5^2 = 2,25$ fache, bzw. das Vierfache zu steigern. Die Spannung von 150 Volt wird tatsächlich noch in der Schweiz vielfach verwendet.

Als dann die Metallfadenlampen aufkamen, konnte man sie anfangs nur für etwa 40—50 Volt herstellen und griff man zu der veralteten und längst verlassenen Parallelschaltung von Reihen (Abb. 172) mit 3—4 Lampen in jeder Reihe zurück. Man verließ diese wenig erfreuliche Schaltung jedoch sofort, als es gelungen war, auch die Metallfadenlampe erst für 110, dann für 220 Volt ökonomisch herzustellen.

Von allem Anfang an war man darauf bedacht, die Spannung an einzelnen Punkten „aufzufrischen“ oder zu erhöhen und die Regelung des Netzes zu verbessern. Dazu dienten besonders die Speiseleitungen, auf die sogleich eingegangen werden soll, die vorgeschobenen Akkumulatorenbatterien, die Zusatzmaschinen oder Leichtermaschinen (Boosters) und ähnliche Einrichtungen maschineller Art.

5. Verteilung mittels Speiseleitungen.

Die Bedingung, daß der größte Spannungsverlust in einer Leitung oder einem Leitungsnetze nur ein kleiner Prozentsatz der Nutzspannung sein darf, beschränkte die Reichweite einer Dynamo oder Anlage sehr.

Um das Versorgungsgebiet zu vergrößern, wendete man eigene Speiseleitungen an. Dies sind die Verbindungen der früher bereits behandelten Speisepunkte mit den Hauptsammelschienen des Kraftwerkes. Sie sind in den Abbildungen bisher weggelassen oder nur durch einen kurzen Leiter mit Strompfeil angedeutet, müssen aber in Wirklichkeit ausgeführt werden. Kennzeichnend ist für die Speise-

leitung (oder den „Feeder“, wie Edison sie 1881 nannte), daß von ihr keine Ströme abzweigt werden. Sie hat nur die Aufgabe, dem Netz Strom zuzuführen, es zu „speisen“.

Ins eigentliche Verteilungsnetz, von welchem die Abzweigungen zu den Abnahmen ausgehen, führen von der Stromquelle aus gesonderte Speiseleitungen F zu einzelnen Punkten M des Verteilungsnetzes, den Verteilungspunkten.

Dieser Grundsatz wird in zweifacher Weise in Ausführung gebracht. Entweder sieht man lauter einzelne getrennte Verteilungsnetze vor, zu welchen je ein Feeder führt, oder man richtet ein Gesamtverteilungsnetz ein, dem sich mehrere Speiseleitungen je nach Lastverteilung anschließen.

Anstatt nun die Spannung an den Klemmen der Stromquelle konstant zu halten, reguliert man so, daß die Spannung an den Verteilungspunkten M konstant bleibt. Zur Kontrolle führen von diesen Punkten feine Prüfdrähte zur Zentrale zurück, wo die Spannung gemessen wird.

Durch die Anwendung der Speiseleitungen ist es möglich, ein größeres Verbrauchsgebiet

noch wirtschaftlich zu versorgen. Man wird z. B. die Anordnung so treffen, daß im eigentlichen Verteilungsnetze B (Abb. 174) nur Unterschiede von etwa 3% der Spannung auftreten können. Läßt man in den Abzweigungen zu den Lampen noch 1% zu, so beträgt der größtmögliche Spannungsunterschied 4%.

In den Speiseleitungen werden hingegen 10%, ja sogar bis 20% mit guter künstlicher Regelung zugelassen.

Diese Zulässigkeit hoher Spannungsverluste in den Feedern gestattet mit wirtschaftlichen Querschnitten größere Entfernungen zu beherrschen als mittels des einfachen Zweileitersystems.

Bei den Speiseleitungen ist die später zu erörternde Berechnung auf Grund der Wirtschaftlichkeit zweckmäßig.

6. Last örtlich und zeitlich veränderlich.

Dieser Fall tritt bei allen Bahnen oder anderen Anlagen mit beweglichen Stromabnehmern, also bei Schiebebühnen, fahrbaren Kranen auf. Welchen Einfluß die örtliche Veränderung in der Lage einer Stromabnahme haben kann, lehrt das allgemeine Verfahren, S. 106, das wir bereits 1893 entwickelt haben.

Er tritt aber ganz allgemein bei allen Netzen auf, weil die Belastung der einzelnen Abnehmer sich nach deren Willkür verändert und die für jeden Leitungsstrang oder jeden Knoten des Netzes re-

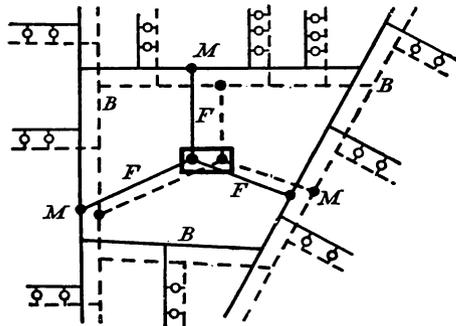


Abb. 174.

sultierende Gesamtbelastung somit im Laufe eines jeden Tages fortwährend ändert. Denkt man die resultierende Belastung nach den früheren Erläuterungen jeweils auf die Knoten geworfen, dann ist diese Änderung nur zeitlicher Art, z. B. groß für Motoren während der Arbeitsstunden der Fabrik, für Lampen in den Abendstunden des Winters, usw. Faßt man die Belastung jedes Leitungsstranges in einer im Schwerpunkt angreifenden Gesamtlast zusammen (S. 74), dann wandert die Last längs des Stranges zeitlich und örtlich. Ändern sich dabei die Knotenspannungen, dann kann auch der Strom in einem Teil eines Leiters oder im ganzen Leiter seine Richtung ändern. Man betrachtet hierbei eben nicht einen Zustand, sondern die mit den Belastungsänderungen verbundenen relativen Schwankungen η des Spannungsverlustes und ξ der Leistung des einzelnen Abnehmers. Wir verwendeten nur den „Zustand der Berechnung“ zur Ermittlung des relativen Spannungsabfalles ε meistens bei der maximalen Belastung aller Netzteile.

Ein Fall unbeabsichtigter örtlicher Veränderung der Belastung kann auch durch Abschmelzen von Sicherungen in zusammenhängenden Netzen entstehen.

Wenn etwa in einer Ringleitung eine Sicherung abschmilzt, kann es sich ereignen, daß alle oder fast alle Abnehmer noch mit Strom versorgt werden, der Spannungsabfall aber plötzlich auf etwa das Doppelte des normalen Wertes steigt.

Bei den später noch näher zu besprechenden Transformatoren mit primär und sekundär zusammenhängenden Netzen kann dieser Fall besonders verhängnisvoll werden. Angenommen, es schmilzt eine Sekundärsicherung wegen Überlastung des Transformators. Diese Überlastung kann durch einen Kurzschluß oder dadurch bewirkt sein, daß der Transformator etwas zu hohe Sekundärspannung gab und infolgedessen zu starke Ausgleichströme ins Netz sandte. Durch Ausschaltung des Transformators werden nun andere Transformatoren gezwungen, sekundär mehr zu liefern und primär mehr aufzunehmen. Es kann sich dann ereignen, daß auch bei einzelnen oder vielen dieser Transformatoren die Sicherungen durchschmelzen, obwohl sie vorübergehend erhebliche Überlastungen ertragen können. Die Leitungsberechnung im weiteren Sinne wird auch von der Bemessung und Anordnung der Sicherungen betroffen, und bei verketteten Netzen muß der Spannungsabfall niedrig gewählt werden, damit er nicht bei zufälligen Störungen das zulässige Maß überschreite.

Was hier für Transformatoren geschildert wurde, gilt in genau derselben Weise auch für andere Speisevorrichtungen oder Quellpunkte, also insbesondere auch für Speiseleitungen selbst.

7. Ausgleichsleitungen.

Die Berechnung der Netze auf den größten zulässigen Spannungsverlust reicht also in vielen Fällen nicht aus, vielmehr müssen die so

berechneten Leitungen für die der Zeit und dem Orte nach veränderliche Belastung noch auf Ausgleich geprüft werden.

Die Betrachtungen sollen schrittweise vom einfachen Falle mit zwei Speisepunkten *I*, *II* (Abb. 175) erfolgen.

Die Zentrale möge die Spannung *E* konstant halten und die Widerstände der Speiseleiter *R*₁ und *R*₂ seien derart berechnet, daß bei Vollast der Verlust bis zu den Speisepunkten $J_1 R_1 = J_2 R_2 = V$ sei, so daß $E - V = E_1$ die Knotenspannung ergibt. Denkt man sich nun die Stromabnahme *J*₁ auf *J*₁/*n* vermindert, während *J*₂ unverändert bliebe, so wird in *II* die unveränderte Spannung *E*₁ verbleiben, während *I* die Spannungserhöhung

$$\left(J_1 - \frac{J_1}{n} \right) R_1 = J_1 R_1 \left(\frac{n-1}{n} \right) = V \frac{n-1}{n}$$

erfährt. Wird nun *I* mit *II* durch den spannungs- und stromausgleichenden Widerstand *R*_a verbunden, so steigt der im Speiseleiter *R*₁ zufließende Strom *J*₁/*n* an, wodurch die Spannung des *I*. Knotens herabgedrückt, des *II*. Knotens gesteigert wird.

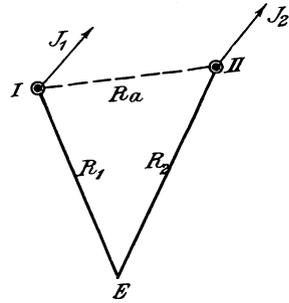


Abb. 175.

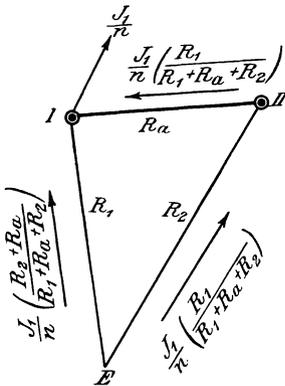


Abb. 176.

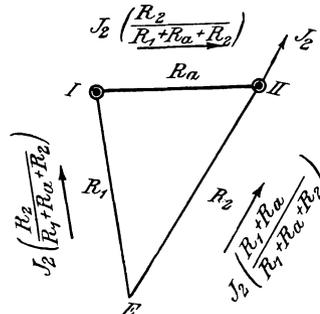


Abb. 177.

Es gilt nun, den Zusammenhang zwischen den so hervorgerufenen Spannungsänderungen und dem sie verursachenden Ausgleichswiderstand festzustellen.

Die Stromverteilung ermittelt man durch die Nacheinanderwirkung der Ströme *J*₂ und *J*₁/*n* und Deckung ihrer Strom- und Spannungsbilder (Abb. 176 und 177).

Die Spannung in *I* beträgt:

$$E - \left[\frac{J_1}{n} (R_2 + R_a) + J_2 R_2 \right] R_1,$$

die Spannung in *II*:

$$E - \left[\frac{J_1 R_1 + J_2 (R_1 + R_a)}{(R_1 + R_a + R_2)} \right] R_2$$

und demnach der Spannungsunterschied in *I*, *II* (Abb. 178)

$$\left[\frac{J_2 R_2 - \frac{1}{n} J_1 R_1}{R_1 + R_a + R_2} \right] R_a = V \left(\frac{n-1}{n} \right) \frac{R_a}{R_1 + R_a + R_2} = v. \quad (\text{A})$$

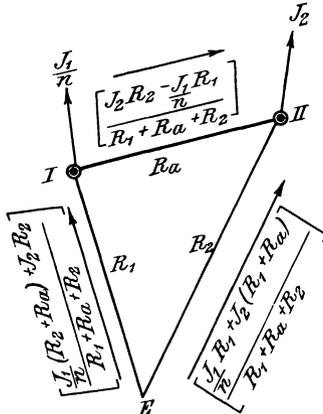


Abb. 178.

Beträgt z. B. die Spannung der Zentrale $E = 110$ Volt, ist ferner $J_1 = 100$, $J_2 = 160$ Amp., $V = 10$ Volt, dann ist

$$R_1 = \frac{V}{J_1} = \frac{10}{100} = 0,1 \Omega,$$

$$R_2 = \frac{V}{J_2} = \frac{10}{160} = 0,0625 \Omega.$$

Angenommen, die Belastung des Knotens *I* fiele von 100 Amp. auf $100/4 = 25$ Amp. und es sei kein Ausgleichsleiter vorhanden, so würde die Spannung in *I* auf $110 - 25 \cdot 0,1 = 107,5$ Volt steigen, während die in *II* noch immer 100 Volt wäre.

Nun soll ein Ausgleichswiderstand von $R_a = 0,1$ Ohm angebracht werden.

Die Spannung in *I* wird dann betragen

$$110 - \left[\frac{\frac{1}{4} 100 \cdot (0,0625 + 0,1) + 160 \cdot 0,0625}{0,1 + 0,1 + 0,0625} \right] 0,1 = 104,66 \text{ Volt.}$$

Die Spannung in *II*:

$$110 - \left[\frac{\frac{1}{4} 100 \cdot 0,1 + 160 (0,1 + 0,1)}{0,1 + 0,1 + 0,0625} \right] 0,0625 = 101,79 \text{ Volt.}$$

Der Spannungsunterschied zwischen *I*, *II* an den Enden des Ausgleichsleiters beläuft sich also auf $104,66 - 101,79 = 2,9$ Volt. Aus der Gleichung (A) ergäbe sich auch unmittelbar

$$v = 10 \frac{4-1}{4} \frac{0,1}{0,1 + 0,1 + 0,0625} = 2,9 \text{ Volt.}$$

Wird dagegen für den Ausgleichsleiter $R_a = 0,05$ Ohm gewählt, dann gilt für den Speisepunkt *I*

$$110 - \left[\frac{\frac{1}{4} 100 \cdot (0,0625 + 0,05) + 160 \cdot 0,0625}{0,1 + 0,05 + 0,0625} \right] 0,1 = 104 \text{ Volt}$$

und für den Speisepunkt *II*

$$110 - \left[\frac{\frac{1}{4} 100 \cdot 0,1 + 160 (0,1 + 0,05)}{0,1 + 0,05 + 0,0625} \right] 0,0625 = 102,2 \text{ Volt,}$$

so daß der Spannungsunterschied zwischen *I*, *II* $104 - 102,2 = 1,8$ Volt beträgt.

Vor allem sieht man hieraus, daß der Spannungsunterschied an den Enden des Ausgleichsleiters langsamer als der Ausgleichswiderstand abnimmt. Im ersten Falle war $R_a = 0,1$ Ohm und $v = 2,9$ Volt, im zweiten, bei der Hälfte des Widerstandswertes, nämlich $0,05$ Ohm, $v = 1,8$ Volt. Die Hälfte des früheren Spannungsunterschiedes betrüge hingegen $1,45$ Volt. Dieser Spannungsunterschied verläuft eben als Funktion des Ausgleichswiderstandes R_a , wie Gleichung (A) besagt nach einer Hyperbel.

Wir hatten nämlich

$$v = V \frac{n-1}{n} \frac{R_a}{R_1 + R_a + R_2}.$$

Da V , n , R_1 und R_2 als gegeben zu betrachten sind, so verwandelt sich die obige Gleichung in

$$v = C_1 \frac{R_a}{R_a + C_2},$$

wobei C_1 das Ansteigen der Spannung im Speisepunkte I bedeutet, wenn der Ausgleichsleiter R_a nicht vorhanden, sein Wert unendlich groß wäre. Für $R_a = 0$ ist $v = 0$ und die Hyperbel hat demnach den in Abb. 179 dargestellten Verlauf. Die negativen Ausgleichswiderstände beziehen sich auf den Fall, wo zwischen I, II eine erzeugende elektromotorische Kraft auftreten würde.

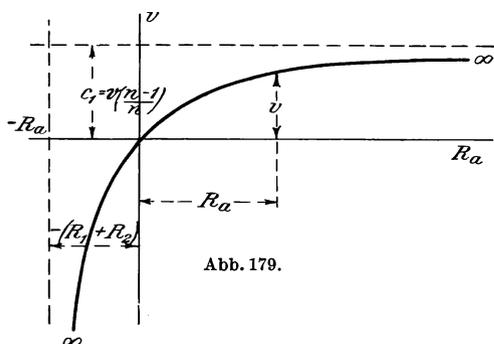


Abb. 179.

Bisher wurde konstante Spannung E der Zentrale angenommen. Drückt man diese Spannung um einen Betrag herab und bleibt dabei die Belastung der Knoten dieselbe, so wird die Spannung der Speisepunkte I, II natürlich um denselben Betrag sinken, wobei v , der Unterschied der Knotenspannungen I, II , auch unverändert bleibt. In unserem Beispiele für $R_a = 0,1$ Ohm ergab sich bei 110 Volt Zentralenspannung die Spannung für den Speisepunkt I zu $104,66$ Volt, für II zu $101,79$ Volt. Sinkt nun die Zentralspannung um $1,8$ Volt auf $110 - 1,8 = 108,2$ Volt, dann haben wir im Knotenpunkte II die ursprüngliche Spannung von 100 Volt, während die im Speisepunkte I $102,9$ Volt beträgt, demnach um $v = 2,9$ Volt höher ist als in II .

Worin liegt der Vorteil eines Ausgleichsleiters?

Ohne ihn könnte in unserem Beispiel die Spannung von $107,5$ Volt des Knotens I nur durch einen Feederreostat auf den zulässigen Betrag vermindert werden, wenn die Spannung in II auf dem erwünschten Wert von 100 Volt konstant erhalten werden soll.

Mit dem Ausgleichsleiter hingegen kann bei konstanter Spannung

des Knotens *II* der Unterschied v durch Regelung der Zentralenspannung auf der zulässigen Höhe von 2,9 Volt erhalten werden.

Es ist klar, daß die Regulierung statt auf 100 Volt im Knoten *II* auch auf die mittlere Spannung durchgeführt werden kann, wobei die Zentralenspannung $108,2 - \frac{1}{3}2,9 = 106,75$ Volt, die Spannung in *I* 101,45 Volt und in *II* 98,55 Volt beträgt. Aus der Formel

$$v = V \frac{n-1}{n} \frac{R_a}{R_1 + R_a + R_2} \tag{A}$$

ist ersichtlich, daß es für v und R_a gleichgültig ist, ob die Last des Knotens *I* (J_1) oder des Knoten *II* (J_2) auf den n ten Teil herabgedrückt wird. J_1 und J_2 kommen nämlich in der Formel gar nicht vor.

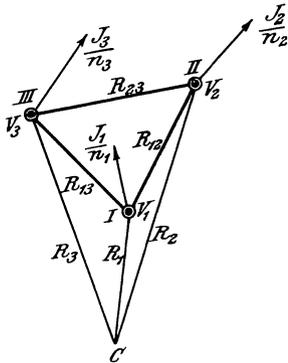


Abb. 180.

Wir betrachten nun ein Netz mit drei Speisepunkten *I*, *II*, *III* in Abb. 180 mit drei Ausgleichsleitungen R_{12} , R_{23} , R_{13} und den Speiseleitungen R_1 , R_2 und R_3 . Wie zuvor, ist $J_1 R_1 = J_2 R_2 = J_3 R_3 = V$, wobei J_1 , J_2 und J_3 die höchsten Belastungen der Speisepunkte bedeuten. Ändert sich die Belastung der Knoten, dann werden sich auch die Spannungen der Knotenpunkte ändern, sofern die Spannung der Zentrale *C* konstant erhalten wird. Die Spannungsmethode (S. 96) gibt, wenn die Spannung der Zentrale *C* einfachheitshalber als Null angenommen wird:

$$\left. \begin{aligned} \text{für I:} & \quad \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_1 - V_2}{R_{12}} + \frac{V_1 - V_3}{R_{13}} = -\frac{J_1}{n_1} \\ \text{für II:} & \quad \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_2 - V_1}{R_{12}} + \frac{V_2 - V_3}{R_{23}} = -\frac{J_2}{n_2} \\ \text{für III:} & \quad \frac{V_3}{R_3} + \frac{V_3 - V_1}{R_{13}} + \frac{V_3 - V_2}{R_{23}} = -\frac{J_3}{n_3} \end{aligned} \right\} \tag{M}$$

Sind $1/n_1 J_1$, $1/n_2 J_2$, $1/n_3 J_3$, ferner R_1 , R_2 , R_3 , R_{12} , R_{13} , R_{23} gegeben, dann lassen sich V_1 , V_2 und V_3 bestimmen, demnach auch $V_1 - V_2$, $V_1 - V_3$ und $V_2 - V_3$. Handelt es sich um die Bemessung der Ausgleichswiderstände R_{12} , R_{13} und R_{23} , dann müssen $1/n_1 J_1$, $1/n_2 J_2$, $1/n_3 J_3$, R_1 , R_2 , R_3 , ferner V_1 , V_2 und V_3 gegeben sein, um aus (M) die Ausgleichswiderstände ermitteln zu können. In der Praxis sind jedoch die Spannungen V_1 , V_2 und V_3 nicht gegeben. Für diese bestehen die Bedingungen:

$$(V_1 - V_2)_{\max} = (V_1 - V_3)_{\max} = (V_2 - V_3)_{\max} = v.$$

Die Schwierigkeit in der Bemessung der Ausgleichswiderstände R_{12} , R_{13} und R_{23} liegt nun in dem Umstande, daß die Maxima der Spannungsdifferenzen zwischen den Speisepunkten nicht gleichzeitig auftreten. Wird z. B. bei der Vollast J_2 von *II* und J_3 von *III* der

Knoten I auf $1/n_1 J_1$ entlastet, so kann trotz

$$(V_1 - V_2)_{\max} = (V_1 - V_3)_{\max} = v$$

gleichzeitig $(V_2 - V_3)$ sehr gering und zufällig auch Null sein. Nimmt man dies an, also

$$(V_1 - V_2)_{\max} = (V_1 - V_3)_{\max} = v, \quad V_2 - V_3 = 0,$$

dann kann man aus (M) R_{12} und R_{23} ermitteln. In (M) die obigen Werte eingesetzt, gibt:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{V_1}{R_1} + \frac{v}{R_{12}} + \frac{v}{R_{13}} = -\frac{J_1}{n_1} \\ \frac{V_2}{R_2} - \frac{v}{R_{12}} + 0 = -J_2 \\ \frac{V_2}{R_3} - \frac{v}{R_{13}} + 0 = -J_3 \\ V_1 - V_2 = v \end{array} \right\} \quad (M_1)$$

Das System (M_1) enthält vier unabhängige Gleichungen mit den vier Unbekannten R_{12} , R_{13} , V_1 und V_2 , woraus sich die gesuchten R_{12} und R_{13} berechnen lassen.

Wiederholt man diese Rechnung für den Knoten II mit der Belastung J_2/n_2 , bei Vollast der übrigen, dann ergeben sich R_{23} und R_{13} . In gleicher Weise finden sich für $1/n_3 J_3$, J_1 und J_2 die Werte R_{13} und R_{23} .

Bei ungleichen n_1 , n_2 und n_3 erhält man also für jeden Ausgleichsleiter zwei verschiedene Widerstandswerte. Von diesen wird der kleinere Wert beibehalten.

Dies ließe sich auch auf Netze mit n Speisepunkten, demnach mit $1/2 n (n - 1)$ Ausgleichsleitern, verallgemeinern. Da jedoch die praktischen Netze nicht gar so empfindlich sind und auch das Verteilungsnetz (und bei Mehrleiter- oder Mehrphasensystemen die Motoren und Transformatoren) selbst zum Teil den Ausgleich versieht, wird man im allgemeinen von derartigen Rechnungen gerne absehen.

Hier folge ein Zahlenbeispiel für drei Speisepunkte. Das Verteilungsnetz ist für $J_1 = 100$ Amp. in I , $J_2 = 120$ Amp. in II , $J_3 = 150$ Amp. in III bemessen. Die Speiseleitungen CI , CII , $CIII$ sind auf 12 Volt Verlust berechnet; die Normalspannung in den Speisepunkten ist 100 Volt (Abb. 180).

Für die Speiseleitungen berechnet man dann:

$$\begin{aligned} R_1 &= 12/100 = 0,12 \text{ Ohm}; & R_2 &= 12/120 = 0,10 \text{ Ohm}; \\ R_3 &= 12/150 = 0,08 \text{ Ohm}. \end{aligned}$$

Die Belastung des Netzes ist derartig, daß bei Vollast zweier Knoten der dritte mit der Hälfte seiner höchsten Belastung beansprucht wird. Es sind drei Ausgleichsleitungen derart zu legen, daß auch bei dieser Belastung zwischen den Speisepunkten höchstens $v = 1$ Volt Spannungsunterschied auftreten kann. Für die Belastung

$$\begin{aligned} 1/2 J_1 &= 50, \quad J_2 = 120 \quad \text{und} \quad J_3 = 150 \text{ Amp.}, \\ v &= 1 \text{ Volt} \quad \text{und} \quad R_1 = 0,12 \Omega, \quad R_2 = 0,1 \Omega \quad \text{und} \quad R_3 = 0,08 \Omega \end{aligned}$$

findet man aus (M_1)

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{0,12} + \left[\frac{1}{R_{12}} \right] + \left[\frac{1}{R_{13}} \right] &= -50 \\ \frac{V_2}{0,1} - \left[\frac{1}{R_{12}} \right] &= -120 \\ \frac{V_2}{0,08} - \left[\frac{1}{R_{13}} \right] &= -150 \\ V_1 - V_2 &= 1. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich für

$$R_{12} = 0,074 \text{ Ohm}, \quad R_{13} = 0,0592 \text{ Ohm}$$

bei

$$V_1 = -9,65 \text{ Volt} \quad \text{und} \quad V_2 = -10,65 \text{ Volt.}$$

Für die Belastung

$$J_1 = 100, \quad J_2 = \frac{120}{2} = 60 \quad \text{und} \quad J_3 = 150 \text{ Amp.}$$

hat man aus

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{0,12} - \left[\frac{1}{R_{12}} \right] &= -100 \\ \frac{V_2}{0,1} + \left[\frac{1}{R_{12}} \right] &= \left[\frac{1}{R_{13}} \right] = -60 \\ \frac{V_1}{0,08} - \frac{1}{R_{23}} &= -150 \\ V_2 - V_1 &= 1 \end{aligned}$$

die Widerstände

$$R_{12} = 0,074 \Omega \quad \text{und} \quad R_{23} = 0,0493 \Omega.$$

Es erübrigt noch, nach Abb. 181 einen Ausgleichsleiter zu behandeln, der zugleich die Verteilung besorgt. Er ist dadurch gekennzeichnet, daß zwischen den Speisepunkten I und II in a ein Abnehmer J vorhanden ist. Es sei der Abstand $I, II = L$ Meter und $Ia = l$ Meter.

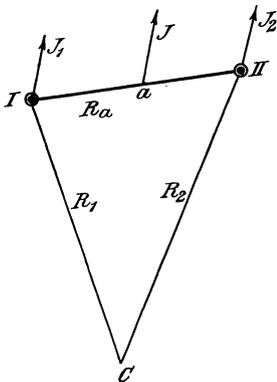


Abb. 181.

Wirft man die Abnahme J auf die Speisepunkte, dann wird in I der Strom $J_1 + J \frac{L-l}{L}$, in II der Strom $J_2 + J \frac{l}{L}$ abgenommen. Die Speiseleitungen sind demnach derart zu bemessen, daß

$$\left(J_1 + J \frac{L-l}{L} \right) R_1 = \left(J_2 + \frac{l}{L} \right) R_2 = V$$

wird. Vermindert sich nun bei Vollast des zweiten Speisepunktes die eigentliche Belastung des ersten von J_1 auf $1/n J_1$, dann ist R_a derart zu bestimmen, daß bei Belastung des ersten Knotens mit

$$\frac{J_1}{n} + J \frac{L-l}{L}$$

und des zweiten mit

$$J_2 + J \frac{l}{L}$$

der Spannungsunterschied zwischen *I* und *II* den zulässigen Betrag *v* nicht überschreitet. Aus dieser Bedingung ergibt sich R_a , und da *L* gegeben ist, auch der Querschnitt des Ausgleichsleiters. Da jedoch dieser auch als Verteilungsleiter dient, muß der bereits gefundene Querschnitt dahin geprüft werden, ob der Spannungsverlust in *Ia* die für die Verteilungsleiter zulässigen *v'* Volt nicht etwa überschreitet. Ist dies der Fall, so muß der berechnete Ausgleichsleiterquerschnitt entsprechend vergrößert werden.

Wenn die Belastungsänderungen der Speisepunkte so vor sich gehen, daß dabei das gegenseitige Verhältnis der Lasten dasselbe bleibt, so kann die so entstandene Spannungsschwankung (Erhöhung) durch Regulierung der Zentralenspannung ausgeglichen werden, wobei die Speisepunkte die gleiche Spannung behalten. Wenn jedoch die gleichzeitige Belastungsveränderung (Verminderung) bei den Abnehmern nicht im Verhältnis vor sich geht, dann müssen in den einzelnen Speiseleitungen entweder Widerstandsregler angebracht, oder es müssen Ausgleichsleitungen vorgesehen werden. In einem Netze, welches genügende Belastungselastizität oder Löscharkeit hat, reguliert man in der Zentrale auf eine konstante mittlere Netzspannung der Speisepunkte. Die dabei auftretenden Spannungsdifferenzen zwischen den Speisepunkten werden den zulässigen Wert *v*, welcher für die Berechnung der Ausgleichsleiter angenommen wurde, nicht überschreiten. Vorsichtige Praktiker werden allerdings bei Glühlampen lieber die Regulierung auf den Speisepunkt mit der niedrigsten Spannung vornehmen. Die vorhergehenden voraussetzungslosen Betrachtungen über vollkommene und unvollkommene Ausgleichsleiter sind durch die Sätze über Verteilungsvorgänge in einem einzelnen Leiter eines Netzes und in Netzstücken auf Seite 106 Kapitel V bereits behandelt. Speisepunkte mit veränderlicher Spannung sinken im geschlossenen Netz eben zu gewöhnlichen Knotenpunkten herab. Deshalb geht diese Aufgabe in das Netzproblem über, wie B. Soschinski schon 1906 gezeigt hat. Das „Feeder“-Patent hat Edison 1881 in Amerika erhalten, trotzdem der Grundgedanke durch de Khotinsky für galvanische Bäder bereits 1875 verwendet war.

Die Literatur umfaßt unter anderen die folgenden Arbeiten:

- Dihlmann, C.: Berechnung von Leitungsnetzen für elektrische Zentralanlagen (graphisch). ETZ 1889, S. 148.
 Lietke, Dr. Arth.: Über die Berechnung des Ausgleiches bei Leitungsnetzen elektr. Zentralanlagen. ETZ 1892, S. 426.
 Hohenegg, C.: Anordnung und Bemessung elektrischer Leitungen, 2. Aufl. 1897, S. 35 (1. Auflage 1893).
 Teichmüller, J.: Die elektrischen Leitungen. 1899. S. 162. Ausgleichsleitungen ETZ 1901, Heft 11, 12, 13.
 Edelstein, S. W.: ETZ 1901, S. 391; Erwiderung hierauf S. 574.
 Soschinski, B.: Die Leitungen. 1906, S. 161—192.

8. Mehrleitersysteme.

Die in § 4 dieses Kapitels angestellte Überlegung hat bei größerem Versorgungsgebiet zur Anwendung höherer Betriebsspannungen geführt, um das Leitermetall technisch und wirtschaftlich besser auszunützen.

a) Das durch J. Hopkinson angegebene, durch Edison etwa 1885 ausgeführte Dreileitersystem kann man sich aus zwei hintereinander geschalteten Zweileitungen entstanden denken, wobei zwei benachbarte Hauptleiter zu einem gemeinsamen Mittelleiter verschmolzen sind. Zwei Dynamomaschinen, jede für die einfache Spannung V , sind hintereinander geschaltet (Abb. 182). Von den beiden äußeren Klemmen der Maschinen gehen die Hauptleitungen AA_1 und BB_1 aus, so daß zwischen ihnen die doppelte Spannung herrscht. Von der

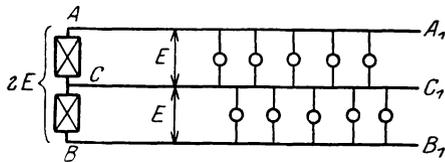


Abb. 182.

gemeinschaftlichen Mittelleiter klemme führt ein dritter Mittelleiter CC_1 ab, so daß zwischen diesem und je einem äußeren Leiter die Hälfte der Gesamtspannung herrscht.

Die Lampen werden zwischen den Mittelleiter und je einen Außenleiter parallel geschaltet. Sind beide Hälften der Leitung symmetrisch und gleich belastet, so ist der Mittelleiter stromlos; sind aber auf einer Seite mehr Lampen eingeschaltet als auf der anderen, so liefert die eine Maschine mehr Strom als die andere, und dieser Unterschied wird der schwächeren Hälfte durch den Ausgleichsleiter zugeführt.

Der Querschnitt für die beiden Außenleiter wird ganz so gerechnet wie beim Zweileitersystem mit doppelter Spannung. Der Gesamtstrom ist also halb, der Metallaufwand bei gleichem relativen Spannungsverlust ein viertel so groß als beim Zweileitersystem.

Das Verhältnis wird allerdings durch den Aufwand für den Ausgleichsleiter etwas ungünstiger. Dessen Querschnitt muß um so größer sein, je größer die voraussichtlichen Belastungsunterschiede zwischen den beiden Hälften des Leitungssystems sein können. Dies hängt mit der Löschbarkeit zusammen, auf die erst später eingegangen werden soll. Bei der praktischen Ausführung wählt man meistens den Querschnitt f_m des Mittelleiters halb so groß als den der Außenleiter. Er kann aber auch bei geringer Löschbarkeit dünner, bei großer dicker genommen werden. Nennt man die Spannung zwischen den Außenleitern E_3 , den Strom in ihnen J_3 , den Querschnitt f_3 , dann ist, verglichen mit einem Zweileitersystem mit der Spannung E_2 , dem Strom J_2 und dem Querschnitt f_2 oder kurzweg f , dann ist

$$E_3 = 2 E_2; \quad J_3 = \frac{1}{2} J_2, \quad \text{also } f_3 = \frac{1}{4} f_2 = \frac{1}{4} f,$$

und somit der Metallaufwand in cm^3

$$M_3 = 2 l f_3 + l f_0 = \frac{1}{4} M_2 + l f_m.$$

Nimmt man den Mittelleiter, je nach den maximalen Strömen, die er zu führen hat, gleich

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4} \text{ vom Querschnitt der Außenleiter, so wird } M_3 &= 2l \frac{f}{4} + l \frac{f}{16} = \frac{9}{16} lf \\
 &= 0,281 M_2, \\
 \frac{1}{2} \text{ " " " " " " " } M_3 &= 2l \frac{f}{4} + l \frac{f}{8} = \frac{5}{8} lf \\
 &= 0,312 M_2, \\
 \frac{3}{4} \text{ " " " " " " " } M_3 &= 2l \frac{f}{4} + l \frac{3f}{16} = \frac{11}{16} lf \\
 &= 0,344 M_2, \\
 \frac{4}{4} \text{ " " " " " " " } M_3 &= 2l \frac{f}{4} + l \frac{f}{4} = \frac{3}{4} lf \\
 &= 0,375 M_2.
 \end{aligned}$$

An Kosten der Leitung erspart man beim Dreileiter beiläufig ein Drittel gegenüber der einfachen Parallelschaltung. Mit gleichen Kosten der Leitung kann man daher mit dem Dreileiter eine um die Hälfte größere Entfernung beherrschen.

Bei einiger Entfernung der Stromquelle vom Versorgungsgebiete reichten jedoch auch die so erreichbaren Entfernungen bei weitem nicht aus.

Es muß daher die Spannung zwischen den Hauptleitern noch weiter erhöht werden, ohne daß jedoch die Gebrauchsspannung gesteigert wird. Zu diesem Zwecke wurde das Dreileitersystem erweitert, indem man drei, vier oder mehr Maschinen hintereinander schaltete und von ihnen in gleicher Weise Leiter abführte wie beim Dreileiter. Praktische Bedeutung hat nur kurze Zeit hindurch die Fünfleiteranordnung gehabt.

b) Fünfleitersystem. Beim Fünfleiter, Abb. 183, waren vier Stromquellen von der Gebrauchsspannung hintereinander geschaltet, etwa vier Maschinen, oder häufiger zwei Maschinen mit je zwei Kommutatoren. Von den äußeren Klemmen führten die Außenleiter AA_1 und BB_1 , von den sechs inneren die drei Mittelleiter CC_1 , DD_1 , EE_1 . Zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Leitern herrscht die einfache Spannung. Da die Spannung zwischen den Außenleitern das Vierfache der Spannung beim Zweileiter beträgt, wird der Querschnitt auf 1:16 herabgebracht.

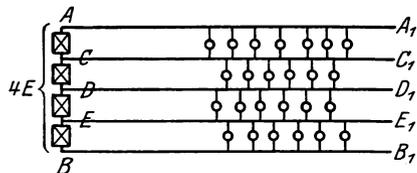


Abb. 183.

Hierzu treten jedoch noch die drei Mittelleiter, für deren Querschnitte gleiche Gesichtspunkte maßgebend sind wie beim Mittelleiter des Dreileiters. Bezeichnet E_5 die Spannung zwischen den zwei Außenleitern, J_5 den Strom in ihnen, f_5 ihren Querschnitt, dann gelten die

Beziehungen:

$$J_5 = \frac{J}{4}, \quad E_5 = 4E, \quad f_5 = \frac{f}{16}, \quad M_5 = \left(\frac{M_2}{16} + \text{Mittelleiter} \right).$$

Nimmt man den Mittelleiter zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \text{ der Außenleiter, so wird } M_5 &= lf \left(2 \cdot \frac{1}{16} + 3 \cdot \frac{1}{64} \right) = \frac{11}{64} lf = 0,086 M_2, \\ \frac{1}{2} \text{ „ „ „ „ } M_5 &= lf \left(2 \cdot \frac{1}{16} + 3 \cdot \frac{2}{64} \right) = \frac{14}{64} lf = 0,109 M_2, \\ \frac{3}{4} \text{ „ „ „ „ } M_5 &= lf \left(2 \cdot \frac{1}{16} + 3 \cdot \frac{3}{64} \right) = \frac{17}{64} lf = 0,133 M_2, \\ \frac{4}{4} \text{ „ „ „ „ } M_5 &= lf \left(2 \cdot \frac{1}{16} + 3 \cdot \frac{4}{64} \right) = \frac{20}{64} lf = 0,156 M_2. \end{aligned}$$

Der wesentlichen Ersparnis an Leitermetall steht jedoch der Nachteil einer schwierigen Regulierung gegenüber. Dieser Umstand zwingt oft dazu, entweder im Versorgungsgebiete selbst eine eigene Ausgleichsstation aufzustellen, oder aber die größeren Anschlüsse auch als Mehrleiter auszuführen.

Das praktisch nicht ausgeführte Vierleitersystem mit drei in Reihe geschalteten Stromerzeugern und zwei Ausgleichsleitern f_m gibt für Querschnitt und Metallaufwand

$$f_4 = \frac{1}{9} f_2; \quad M_4 = \frac{1}{9} M_2 + 2lf_m.$$

Da sich die feststehenden Wicklungen der einphasigen Wechselstrommaschinen durch Anzapfungen unterteilen lassen, so läßt sich jedes n -Leitersystem hiervon unmittelbar speisen. So wurde bereits 1884 das Glühlicht für den Zentralbahnhof in Budapest durch Dreileiter versorgt, wo damals gerade die Hopkinson-Edinsonsche Gleichstromleiterverteilung aufkam. Das von W. Siemens als verzweifelte Gegenwehr gegen das indirekte Einphasensystem vorgeschlagene Fünfleitersystem ist nur selten ausgeführt und meist nachträglich umgebaut worden.

So wurde das 1895 erbaute Rotterdamer Stadtnetz für viermal 110 Volt nach Einführung der 220-Volt-Lampen im Jahre 1898 durch Weglassung zweier Ausgleichsleiter verändert in das einfachere Dreileiternetz mit zweimal 220 Volt.

9. Ungleiche Belastung des Dreileitersystems.

Sind die beiden Hälften des Dreileitersystems nach Ort und Zeit gleich belastet, dann führt der Mittel- oder Nulleiter überhaupt keinen Strom. Bei ungleichmäßiger Belastung der zwei Netzhälften führt der Mittelleiter die Differenz der Belastungen, und der Spannungsabfall im Mittelleiter fällt der stärker belasteten Netzhälfte als Spannungsverlust, der schwächer belasteten als Spannungsgewinn zu.

Die zugeführte Spannung betrage V Volt, der Widerstand der Außenleiter R , der des Mittelleiters r und der Widerstand der Verbraucher ϱ_1 und ϱ_2 (Abb. 184).

Wirkt nun die Spannung V nur in der ersten Netzhälfte, dann fließt durch R , ϱ_1 und r der Strom

$$J_1 = \frac{V}{R + r + \varrho_1}.$$

Wirkt die Spannung V nur in der zweiten Netzhälfte, dann fließt durch r , ϱ_2 und R der Strom

$$J_2 = \frac{V}{R + r + \varrho_2}.$$

Wirkt endlich die Spannung V in beiden Netzhälften gleichzeitig, dann fließt in A 1 der Strom J_1 , in 3 C der Strom J_2 und in 2 B der Strom $J_1 - J_2$.

Der Spannungsverlust in A 1 und B 2 ist

$$v_1 = J_1 R + (J_1 - J_2) r = \frac{V(R + r)}{R + r + \varrho_1} - \frac{Vr}{R + r + \varrho_2}.$$

Der Spannungsverlust in B 2 und C 3 ist

$$v_2 = -(J_1 - J_2) r + J_2 R = \frac{V(R + r)}{R + r + \varrho_2} - \frac{Vr}{R + r + \varrho_1}.$$

Hieraus läßt sich schließen, daß die Ungleichheit in den Spannungen der Netzhälften mit zunehmendem r , also kleinerem Querschnitt des Mittelleiters wächst. Der Unterschied der Spannungsverluste ist nämlich

$$v_1 - v_2 = (J_1 - J_2)(R + 2r) = \frac{V(R + 2r)(\varrho_2 - \varrho_1)}{(R + r + \varrho_1)(R + r + \varrho_2)}.$$

Die größte Spannungssteigerung der schwächer belasteten Netzhälfte tritt ein bei $r = \infty$, also Unterbrechung des Mittelleiters, und für $J_1 - J_2$ so groß wie möglich, also bei Kurzschluß der anderen Netzhälfte.

Hieraus ist auch das Aufblitzen an Glühlampen einer Netzhälfte zu erklären: Es rührt von vorübergehenden Kurzschlüssen der anderen Netzhälfte her. Die Überspannung wächst mit dem Widerstand des Mittelleiters¹⁾.

Der Mittelleiterquerschnitt muß also je nach der zu erwartenden relativen Ungleichheit der Netzhälften bemessen werden. Gewöhnlich erhält er die Hälfte bis Dreiviertel des Querschnitts der Außenleiter.

Den Mittelleiter mit einer Abschmelzsicherung zu versehen, stünde im Widerspruche mit der ihm anvertrauten Rolle des Ausgleichs. Die Sicherheitsvorschriften des V. D. E. verbieten das Anbringen von Schmelzsicherungen oder anderer selbsttätiger Stromunterbrecher im Mittelleiter.

¹⁾ Boulton: El. Review Bd. 32, S. 112. — Waskowsky: Unsymmetrie der Dreileitersysteme. El. Anz. 1897, S. 322. — Lauteren, A.: Zur Frage der Spannungssteigerung in Dreileiter-Gleichstromnetzen. El. u. Maschinenb. 1913, S. 609. — Lohr, E.: Die Dimensionierung des Mittelleiters. ETZ 1895, S. 753. — Teichmüller, J.: Lehrbuch der elektr. Leitungen. S. 218. 1899 und ETZ 1916, S. 397.

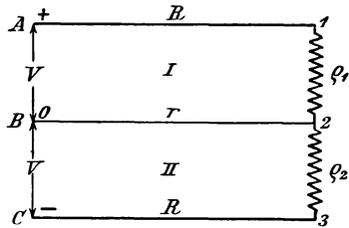


Abb. 184.

Die in Holland geltenden Vorschriften des Koninklyk Instituut van Ingenieurs gehen nicht ganz so weit und lassen die Anbringung von Abschmelzsicherungen im Nulleiter zu, sofern dieser an einigen Punkten geerdet ist. Die Sicherungen müssen dann jedoch für doppelt so hohen Normalstrom sein als die der Außenleiter, schmelzen also nur bei schweren Kurzschlüssen der einen Netzhälfte.

Ausgenommen sind in Deutschland und Holland isolierte Leitungen, die von einem Nulleiter abzweigen, und Teile eines Zweileitersystems. Diese dürften Sicherungen enthalten.

Es ist nun wichtig, die vier Grundgrößen auch für das Dreileiternetz zu untersuchen.

Im Dreileiternetze sind zwei verschiedenartige Stromkreise zu unterscheiden: die eigentlichen Verbraucherstromkreise und der Außenleiterstromkreis. Wenn zwischen die Außenleiter Verbraucher unmittelbar eingeschaltet werden, wirken sie wie Zweileiter, und es gelten die früher bereits abgeleiteten Beziehungen.

Für die eigentlichen Verbrauchsstromkreise ergibt sich folgendes für die vier Grundgrößen.

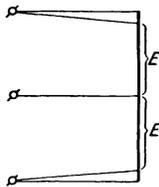


Abb. 185.

a) Der relative Spannungsabfall $\varepsilon = \frac{v}{E}$. Im Falle der gleichen höchsten Belastung in beiden Netzhälften ist der Mittelleiter stromlos, und es tritt ein Verlust nur in den Außenleitern auf, wie in Abb. 185 gezeichnet.

b) Bei der relativen Spannungsschwankung $\eta = \frac{\Delta E}{E}$ sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die größte überhaupt mögliche Zustandsänderung oder die tatsächlich leicht mögliche plötzliche Schwankung der Belastung und damit der Spannung betrachtet wird.

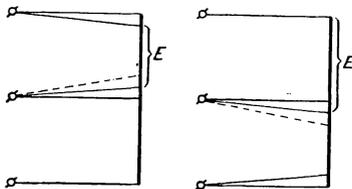


Abb. 186 a und b.

Die erste ist als plötzliche Schwankung kaum denkbar und entspricht dem von uns charakterisierten Fall unbeschränkter Löscharkeit; wir wollen dann hiervon oder von einer Spannungsänderung sprechen. Der zweite Fall entspricht beschränkter Löscharkeit oder der Spannungsschwankung.

Der Fall der größten Spannungsänderung ist der, daß erst die betrachtete Netzhälfte voll, die andere gar nicht belastet ist, darnach die betrachtete Hälfte gar nicht, die andere voll belastet ist. Die beiden Zustände sind für $f_m = f$ ausgezogen, für den Querschnitt f_m des Mittelleiters $f_m = \frac{1}{2}f =$ halbem Querschnitt des Außenleiters gestrichelt in Abb. 186 a und 186 b dargestellt. War der Spannungsabfall bei der gleichen höchsten Belastung der beiden Hälften, also stromlosem Mittelleiter, $v = \frac{lJ}{kf}$, so ist er jetzt vor der Änderung

$$v + v_m = \frac{lJ}{kf} + \frac{lJ}{kf_m}; \quad \text{also } = 2v, \text{ wenn } f_m = f \\ = 3v \quad ,, \quad f_m = \frac{1}{2}f,$$

und nach der Änderung

$$-v_m = -\frac{lJ}{kf_m}; \quad \text{also } = -v, \text{ wenn } f_m = f \\ = -2v, \quad ,, \quad f_m = \frac{1}{2}f.$$

Die Spannungsänderung beträgt also

$$\Delta E = v + 2v_m = zv,$$

und somit $\eta = z \cdot \varepsilon$; worin $z = \frac{2f}{f_m} + 1 = 2m + 1$, ein vom Verhältnis $f:f_m = m$ abhängiger Zahlenwert ist, der im allgemeinen, nämlich bei den beiden hervorgehobenen üblichen Querschnittsverhältnissen, gleich 3 und 5 ist.

Eine plötzliche Änderung der vorhin gedachten Art ist nicht wohl denkbar: man kann nicht annehmen, daß die volle Belastung plötzlich von der einen auf die andere Hälfte geworfen wird. Die größte plötzliche

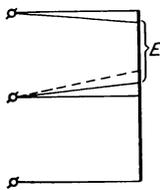


Abb. 187a und b.

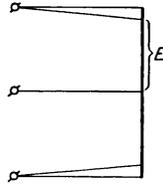
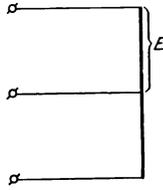
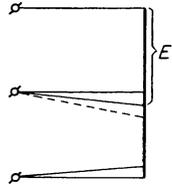


Abb. 188a und b.



Änderung, also Schwankung, wird vielmehr nur durch eine Belastungsänderung in der einen Hälfte zustande kommen, während gleichzeitig, d. h. im Augenblicke der Schwankung, die Belastung der anderen Hälfte ungeändert bleibt. Die größte Spannungsschwankung wird dann

$$\Delta E = 2v, \text{ wenn } f_m = f, \\ \Delta E = 3v, \quad ,, \quad f_m = \frac{1}{2}f,$$

unabhängig von der Belastung der anderen Hälfte. Auch in dieser schwankt die Spannung, und zwar um den Betrag

$$\Delta E = v, \text{ wenn } f_m = f, \\ \Delta E = 2v, \quad ,, \quad f_m = \frac{1}{2}f,$$

er ist also kleiner als in der ersten Hälfte und kommt deshalb hier, wo wir die größten Spannungsschwankungen ermitteln wollen, nicht in Betracht. Es folgt somit

$$\eta' = z' \cdot \varepsilon, \tag{8}$$

worin $z' = \frac{f}{f_m} + 1 = m + 1$ wiederum eine vom Querschnittsverhältnis m abhängige Zahl, im allgemeinen gleich 2 oder 3 ist.

Die Verhältnisse sind für zwei verschiedene Belastungen der nicht-betrachteten (unteren) Hälfte, nämlich die Belastung Null und die Höchstbelastung in den Abb. 187a, 187b und 188a, 188b dargestellt.

c) Relativer Leistungsverlust ζ und relative Leistungsschwankung ξ .

Die Größe ζ ist wieder auf den starren Zustand der Höchstbelastung zu beziehen, denselben Zustand, wie er unter I angenommen war. W ist die Belastung der einen Hälfte, w der Leistungsverlust darin, also in der einen Außenleitung, und es ist offenbar

$$\zeta = \varepsilon. \quad (9)$$

Derselbe Wert von ζ und dieselbe Beziehung zwischen ζ und ε würden sich natürlich auch für den Außenleiterstromkreis ergeben, den wir aber nicht besonders betrachten wollen.

Die Leistungsänderung und die Leistungsschwankung sind allgemein nur als Funktion der Spannungsänderung und -schwankung bei gleichbleibendem Verbrauchswiderstande darstellbar und dann in erster, aber genügender Annäherung $\xi = 2\eta$.

Also ist im Dreileiternetze

a) die größte relative Leistungsänderung

$$\xi = 2\eta = 2z \cdot \varepsilon, \quad (10)$$

wo z in der Regel gleich 3 oder 5 ist,

b) die größte relative Leistungsschwankung

$$\xi' = 2\eta' = 2z' \cdot \varepsilon, \quad (11)$$

wo z' in der Regel gleich 2 oder 3 ist.

10. Querschnitt des Mittelleiters bei unausgeglichener Belastung.

Bisher wurde der größte Spannungsverlust bis zu einem Stromempfänger auf Grund einfacher Überlegungen (Seite 60) angenommen und der Leitungsrechnung zugrunde gelegt. Dieser Verlust tritt beim Zweileitersystem oder bei den symmetrisch belasteten Mehrleitersystemen bei der größten Belastung auf und begrenzt somit als oberster erreichbarer Wert auch die größte Spannungsschwankung, die ein Stromempfänger auch im ungünstigsten Falle erleiden kann.

Eine Ausnahme bilden nur die Leitungen, bei denen infolge mangelhaft regulierender Quellen oder zu großen Spannungsverlustes die größtmöglichen Spannungsschwankungen von den Eigenschaften der Leitung im weiteren Sinne mit Inbegriff der Stromquellen abhingen (Seite 71).

Leitungen, bei denen die maximale Spannungsschwankung für einen beliebigen Stromempfänger auch im ungünstigsten Falle, also bei ganz beliebigen Belastungsschwankungen, innerhalb der zulässigen Grenzen blieben, besaßen unbeschränkte Belastungselastizität oder Löschbarkeit.

Bei allen anderen Leitungen war nur beschränkte Elastizität oder Löschbarkeit vorhanden. Die reinen Reihensysteme haben keine Löschbarkeit an und für sich.

Sobald man jedoch mit Mehrleitersystemen zu tun hat, deren Ströme und Spannungsverluste eines Stromkreises durch die elektrische Kupplung der Stromkreise auch von den Belastungsschwankungen

in den anderen Stromkreisen beeinflusst werden, kann die maximale Spannungsschwankung größer werden als der maximale Spannungsverlust, weil auch negative Spannungsgefälle auftreten können. Dies wird deutlich bei Betrachtung der unsymmetrischen Belastung bei Dreileiternetzen. In allen diesen Fällen ist für die Beurteilung der Belastungselastizität nicht der größte Spannungsverlust bis zu, sondern die größte Spannungsschwankung bei einem Abnehmer maßgebend.

Soll das Dreileiternetz unbeschränkt elastisch sein, dann muß die Summe dieser Spannungsänderungen gleich sein dem größten zulässigen Spannungsverlust

$$\Delta E = v = \frac{lJ}{kf} + 2 \frac{lJ}{kf_m}. \quad (1)$$

Eine zweite Gleichung ergibt die Forderung nach dem geringsten Metallaufwand. Dies gibt

$$M = (2f + f_m) l \quad \text{Minimum.} \quad (2)$$

Unter Einführung des willkürlichen Eulerschen Multiplikators λ ergibt die Rechnung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial f} + \lambda \cdot \frac{\partial v}{\partial f} &= 2l - \lambda \cdot \frac{lJ}{kf^2} = 0; & f^2 &= \frac{\lambda J}{2k} \\ \frac{\partial M}{\partial f_m} + \lambda \cdot \frac{\partial v}{\partial f_m} &= l - 2\lambda \cdot \frac{lJ}{kf_m^2} = 0; & f_m^2 &= \frac{2\lambda J}{k} \end{aligned}$$

oder
$$\frac{f_m}{f} = 2, \quad f = \frac{2lJ}{kv} : f_m = \frac{4lJ}{kv} \quad \text{aus (1)}$$

$$M = \frac{8lJ}{kv} \quad \text{aus (2).}$$

Für minimalen Aufwand an Leitungsmaterial muß also der Mittelleiter doppelt so dick werden als die Außenleiter. Dies steht im Widerspruch mit den Gepflogenheiten der Praxis, die den Mittelleiter höchstens ebenso stark macht als die Außenleiter. Die Schwierigkeit verschwindet, sobald man nur die tatsächlich auftretenden Belastungen in Betracht zieht.

Sei bei beschränkter Elastizität der Unterschied in der Belastung der Netzhälften bei höchster Belastung $h_1 J$, bei schwächster $h_2 J$ und stelle $h = h_1 + h_2$ dar. Dies ist nun kein willkürlicher, sondern ein aus den Verhältnissen des Netzes gewonnener Wert. Dann muß offenbar gelten.

$$v = \frac{lJ}{kf} + (h_1 + h_2) \frac{lJ}{kf_m} = \frac{lJ}{kf} + h \frac{lJ}{kf_m} \quad (1)$$

und

$$M = (2f + f_m) l \quad (2)$$

muß ein Minimum sein.

Hieraus folgt
$$\frac{f_m}{f} = \sqrt{2h}$$

und
$$f = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{h} + \sqrt{2}) \frac{lJ}{kv},$$

$$f_m = \sqrt{h} (\sqrt{h} + \sqrt{2}) \frac{lJ}{kv}; \quad M = (\sqrt{h} + \sqrt{2})^2 \frac{l^2 J}{kv}.$$

Für	$h = \frac{1}{2}$	wird	$f_m = f$	$\eta = 2$
	$= \frac{1}{3}$	„	$= \frac{1}{3} \sqrt{6} f \approx 0,82 f$	$= 2,22$
	$= \frac{1}{4}$	„	$= \frac{1}{2} \sqrt{2} f \approx 0,71 f$	$= 2,41$
	$= \frac{1}{6}$	„	$= \frac{1}{3} \sqrt{3} f = 0,57 f$	$= 2,75$
	$= \frac{1}{8}$	„	$= \frac{1}{2} f = 0,50 f$	$= 3.$

Dies sind die praktisch vorkommenden Fälle, wobei

$$\eta = z' \varepsilon = \left(\frac{f}{f_m} + 1 \right) \varepsilon \text{ wird.}$$

11. Erdung des Mittelleiters bei Dreileiteranlagen.

Jeder Isolationsfehler im Außenleiter einer Dreileiteranlage entsendet Stromfäden nach dem Mittelleiter, und da dieser, auch wenn er anfangs vollkommen isoliert verlegt war, im Laufe der Zeit kleine Isolationsfehler aufweisen wird, wird das Erdreich an verschiedenen Stellen von vielen schwachen Stromfäden durchzogen. Im ganzen Gebiet dieses Ausgleichs werden also Stromfelder vorhanden sein, die bei ordnungsgemäßen Hausanschlüssen und gut isolierten Kabeln zu schwach sind, um bei benachbarten Fernsprechleitungen die Anrufklappen auszulösen oder den Wecker zum Ansprechen zu bringen. Treten jedoch in einem Außenleiter und in einem isolierten Mittelleiter Fehler auf, so werden Telephonstörungen durch Klappenfall in großem Umfang eintreten. Und tritt schließlich zwischen einem ursprünglich isolierten Mittelleiter und einem schadhaf gewordenen Außenleiter ein Kurzschluß auf, so wird das Dreileitersystem einseitig belastet, der Mittelleiter selbst weist infolge des ihn durchfließenden Stromes einen Spannungsverlust auf, und es werden in der Nähe der Kurzschlußstelle plötzlich Verdichtungen des Stromfeldes auftreten. Die Größe der Störung durch Klappenfall hängt hier ganz davon ab, wie die Kurzschlußstelle zu den Erdleitungen der Fernsprechanschlüsse gelegen ist. Dagegen kann hier eine unangenehmere Art der Telephonstörung sich bemerkbar machen. Wenn nämlich die Stromfelder schwach, aber dauernd von solcher Stärke sind, daß sie ausreichen, um die Klappen zur Auslösung zu bringen und die Spulen magnetisiert zu halten, dann entsteht ein Dauerstrom, der eine Verständigung unmöglich macht. Sind schließlich bei isoliertem Mittelleiter Fehler an einem Außenleiter vorhanden, so werden sie einerseits starke Telephonstörungen, andererseits infolge des durch die Erde vermittelten Kurzschlusses mit der ganzen Spannung zwischen den Außenleitern Erwärmungen an den der Kurzschlußstelle benachbarten Metallmassen hervorrufen.

Ist der ganze Mittelleiter blank verlegt, so entfällt der störende Dauerstrom bei Telephonanlagen, da jeder Erdschluß eines Außenleiters in einen Kurzschluß ausartet.

Im Berliner Lichtnetz, das anfänglich mit 110 Volt als Zweileiter betrieben und später, unter Verwendung des stellenweise schadhafte

negativen Leiters als Mittelleiter, in ein Dreileiternetz umgewandelt wurde, betrug im Jahre 1893 die Gesamtlänge der Leitungen etwa 700 km, die Gesamtfläche des Beleuchtungsgebietes etwa 7 km² und der Isolationswiderstand des ganzen Netzes etwa 13 Ohm, entsprechend einem dauernden Stromübergang von etwa 8 Amp. von jedem Außenleiter nach Erde.

Weil nun beim blanken Mittelleiter die Gefahren eines Kurzschlusses, soweit Anschmelzungen der Kabel oder benachbarten Rohre und Kabelleitungen in Betracht kommen, entsprechend der halben größten Spannung, auf ein Viertel sinkt, ferner beim Erdschluß eines Außenleiters und blankem Mittelleiter nur ein kleineres Gebiet mit Telephonstörungen heimgesucht wird und Störungen durch lang andauernde, schwache Erdströme (mit einer Spannung von etwa 1—2 Volt), wie sie beim isolierten Mittelleiter vorkommen können, nicht auftreten, hat der Berliner Magistrat die Erdung des Mittelleiters seit 1894 vorgeschrieben. Der Verband deutscher Elektrotechniker bestimmte anschließend seit 1899¹⁾, daß der neutrale Mittelleiter von Gleichstrom-Dreileiter-Anlagen geerdet werden muß, sofern die effektive Gebrauchsspannung zwischen den zwei Außenleitern 500 Volt nicht überschreitet.

Der Mittelleiter ist in seiner ganzen Länge nur bei durchweg gleicher und an gleicher Stelle angreifender Belastung beider Netzhälften stromlos, führt sonst aber Strom. Da dieser Zustand nie andauert, so wird der Mittelleiter, falls er selbst zu einem Netze verzweigt ist, in einzelnen Teilen stromlos sein, in anderen Strom zur Zentrale führen, in anderen Strom von ihr entnehmen. Es ist also nötig, das Mittelleiternetz auf den zulässigen Spannungsverlust zu prüfen. In einem blanken Mittelleiter, der ein reich besetztes und mit Erdleitung versehenes Telephongebiet durchzieht, mußte man dafür sorgen, daß die Verluste ganz besonders klein werden. Nimmt man als oberen Grenzwert des Verlustes in den Außenleitern $p\%$ der Spannung $2E$ an, als größten Unterschied der Belastung der beiden Netzhälften $d\%$ an, so würde bei gleicher Länge und gleichem Querschnitt von Mittelleiter und Außenleitern der Verlust im Mittelleiter $\frac{2p \cdot d \cdot E}{10000}$ Volt sein, bei halbem Querschnitt des Mittelleiters also kleiner als $\frac{2p \cdot d \cdot E}{5000}$ Volt. p wird kaum jemals größer als 10% (außer bei Speiseleitungen) sein; d beträgt bei Dreileiteranschlüssen für alle großen und mittleren Abnehmer und mit Umschaltern von einer Netzhälfte auf die andere nur etwa 2—5%, bei mittleren und kleinen etwa 10—20%. Bei einer Anlage mit 2 mal 250 Volt, $p = 5\%$, $d = 10\%$ wird also bei halbem Querschnitt des Mittelleiters sein Verlust schon $5 \cdot 10 \cdot 500 : 5000 \leq 5$ Volt sein. Dieser Wert ist wegen der ungünstigen Annahme für p und d zu hoch. Nun tritt der höchste Wert von d bei schwacher Belastung auf; dann ist aber p niemals 5%, sondern

¹⁾ Kallmann: ETZ 1893, S. 155, 239. — Grawinkel: ETZ 1892, S. 634 und 1893, S. 62.

etwa 2,5% bei halber, etwa 1,25% bei ein viertel Belastung. Unter diesen Annahmen sinkt der Verlust im Mittelleiter auf etwa 1 Volt.

Die Ausführungsweise des blanken Mittelleiters ist verschieden. Man kann ihn bis in die Häuser selbst einführen, darf aber dann dort keine Sicherungen anbringen; oder man kann ihn in zwei parallele Teile spalten und nur noch als Verteilungsleiter benutzen, indem man in die Häuser selbst zwei getrennte zweipolig gesicherte Zweileiteranschlüsse einführt; oder man kann ihn im Innern der Häuser isoliert und ohne Sicherung verlegen, läuft aber Gefahr, daß die Leitungen zufällig vertauscht und die einpoligen Sicherungen im Mittelleiter untergebracht werden.

Auch die Anordnung des blanken Mittelleiters im Netz kann verschiedenartig sein. Man kann ein dem Außenleiternetz völlig gleichartiges Netz verlegen, das mit Querschnitten von der Hälfte der Außenleiter versehen ist. Oder man kann ein besonderes Netz ausbilden, das einfacher als jenes der Außenleiter ist, dessen einzelne Stränge jeweils mehreren Außenleitern entsprechen. Man kann insbesondere die Speiseleitungen zu den einzelnen Speisepunkten nur als Zweileiterkabel durchführen und das Mittelleiternetz mit einer starken, blanken Kabelleitung oder mit mehreren blanken Kabeln oder Drähten an die neutrale Schiene der Zentrale anschließen.

B. Mittelbare Verteilung.

Die mittelbare oder indirekte Verteilung erfolgt in zwei, ja auch drei verschiedenen Stromkreisen. Der erste leitet die Energie vom Erzeuger weg. Sie wird in Umformern für den zweiten, von diesen allenfalls noch in ebensolchen für den dritten umgestaltet.

Die Akkumulatoren, Transformatoren und Umformer sind als solche Zwischenapparate bereits S. 2 erwähnt worden.

1. Verteilung mittels Akkumulatoren.

Die Akkumulatoren besorgen die Umwandlung der elektrischen Energie in chemische und deren Rückwandlung in elektrische gleichzeitig oder zeitlich verschoben. Die erste Anwendungsart ist in den Fällen am Platze, in welchen zu verschiedenen Tageszeiten ein stark verschiedener Strombedarf zu decken ist. Während des stärksten Bedarfes speisen die Maschinen dann sowohl die Akkumulatoren als auch das Netz, in den übrigen Zeiten aber übernehmen die Akkumulatoren allein die Versorgung des Netzes. Die verschiedensten Kombinationen in der Anordnung und in den relativen Größen der Betriebselemente sind denkbar. An dieser Stelle wäre im besonderen nur noch die Anordnung und Bemessung der Leitungen zu erörtern. Diese Fragen bedürfen aber nach dem Vorausgegangenen keiner besonderen Beantwortung, da sich die Anordnung der an die Akkumulatoren angeschlossenen Leitungen von den bisher besprochenen nicht unterscheidet und

für die Bestimmung der Dimensionen ebenfalls die zur Genüge erörterten Gesichtspunkte maßgebend sind.

Zu betonen wäre nur, daß man bei Verwendung sog. vorgeschobener Akkumulatorenstationen unter Umständen erheblich an Leitungsmaterial sparen kann, indem man z. B. die Zentrale an einer Stelle unterbringt, wo Kondenswasser in genügenden Mengen leicht zu beschaffen ist, wo die Kohlenzufuhr bequem erfolgt, oder ganz allgemein, wo man beim späteren Betrieb gewisse Vorteile genießt. Wenn diese Vorteile genügend groß sind, kann man die Zentrale mit einfachen Speiseleitungen nach dem Zweileitersystem mit der vorgeschobenen Unterstation verbinden, kann in diesen Speiseleitungen erhebliche Verluste zulassen und von der Unterstation aus ein Dreileitersystem mit normalen Verlusten ausgehen lassen. Die Spannungsteilung wäre dann an der Batterie selbst oder mittels Ausgleichsmaschinen vorzunehmen, die ebenfalls an die Fernleitung zur Zentrale angeschlossen sind und entsprechend reguliert werden. Dem Vorteil der Kupferersparnis, der sich aus der größeren Annäherung der Unterstation an den Schwerpunkt des Verteilungsgebietes ergibt, steht als Nachteil der Energieverlust in den Zuleitungen während der Ladeperiode und in den elektrischen Sammlern selbst gegenüber, und es ist Sache einer wirtschaftlichen Rechnung, die Vor- und Nachteile gegeneinander abzuwägen. Im allgemeinen wird man nach den heutigen Anschauungen finden, daß das System unwirtschaftlicher arbeitet, als eines der anderen indirekten Systeme mit gleicher räumlicher Anordnung der Zentrale und der Unterstation, weil man in der Wahl der Zentralenspannung nicht frei ist und die Betriebsverluste im Jahresmittel zu groß werden. Eines der schönsten Beispiele für eine Station dieser Art war die von Schuckert 1891 erbaute Dreileiteranlage in Düsseldorf, deren 3 Unterstationen in 2, 3 und 2,7 km Entfernung von der Zentrale durch je zwei Zweileiterkabel mit 279, 376 und 726 mm² Querschnitt mit ihr verbunden waren. Zu jeder Unterstation führten also vier Kabel, von denen je 2 parallel geschaltet waren. Der maximale Verlust betrug 25%. Man ist jedoch beim weiteren Ausbau der Zentrale dazu übergegangen, die Verteilungsspannung von 2 · 110 auf 2 · 220 Volt zu erhöhen, den Mittelleiter zu erden und in der erweiterten Primärstation Drehstrommaschinen für 6000 Volt aufzustellen, die ihre Leistung zum Teil an Transformatoren, zum Teil an Motorgeneratoren abgeben, deren Gleichstromteil die Akkumulatoren mit Strom versorgt. Trotz der Einfügung eines weiteren Übertragungsgliedes ließen sich hier noch Vorteile erzielen.

Ein anderer Punkt, der für die Leitungsrechnung gewisse Beachtung verdient, ist die Bemessung der Querschnitte der Zellenschalterleitungen. Die maximale Stromstärke tritt hier nur bei der maximalen Entladespannung, d. h. dann auf, wenn der größte Teil der Schaltzellen eingeschaltet ist. Je weniger Strom die Batterie abgibt, um so weniger Zellen werden in der Regel auch auf der Entladeseite eingeschaltet. Es folgt hieraus, daß nur die letzten Zellenschalterleitungen mit dem maximalen Entladestrom beansprucht werden, während die nach der

Mitte der Batterie hin gelegenen Zellschalterleitungen eine geringere Stromstärke führen.

Man kann deshalb die Querschnitte abstufen und dadurch unter Umständen eine nicht unerhebliche Kupferersparnis erzielen.

2. Verteilung mittels Transformatoren.

a) **Reihenschaltung von Transformatoren.** Die Primärwindungen sämtlicher Transformatoren sind hintereinander in den Primärstromkreis eingeschaltet.

Abb. 189 stellt eine derartige Anordnung dar. AB ist der primäre Stromkreis, in welchem die Primärspulen der Transformatoren T der Reihe nach angeordnet sind, während die Sekundärspulen in den einzelnen Lampenkreisen liegen.

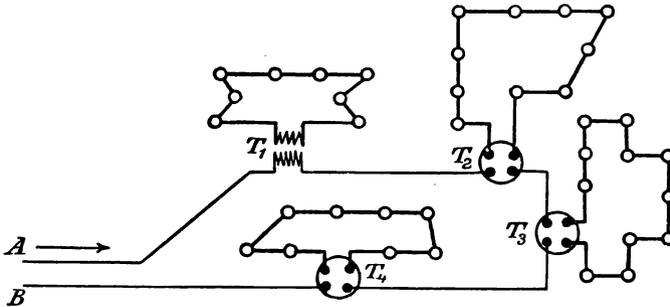


Abb. 189.

Da der Betrieb mit konstanter Stromstärke im primären Stromkreise erfolgt, muß bei ruhenden Spulen auch im sekundären Kreise die Stromstärke konstant gehalten werden, während die Spannung sich je nach der Anzahl der eingeschalteten Transformatoren und nach der Belastung der einzelnen Sekundärstromkreise ändert und dementsprechend so reguliert werden muß, daß die Lampen in ihrer normalen Funktion erhalten bleiben. Es ist einleuchtend, daß diesen Verhältnissen nur dann in einfacher und natürlicher Weise entsprochen wird, wenn auch die Lampen in den Sekundärkreisen hintereinander geschaltet sind. Man hat jedoch auch für einzelne Fälle Transformatoren mit beweglichen Sekundärspulen verwendet, die von konstantem Strom auf konstante Spannung umsetzen.

b) **Parallelschaltung von Transformatoren.** Dem Zwecke einer wirklichen Stromverteilung, wie sie in den überwiegend meisten Fällen notwendig ist, unter Anwendung der Parallelschaltung der an die sekundären Stromkreise angeschlossenen Verbraucher, kann nur die Parallelschaltung der Transformatoren genügen. Die Transformatoren müssen derart gebaut sein, daß sie die Spannung an den Sekundärklemmen annähernd konstant halten, wenn die Spannung an den Primärklemmen konstant bleibt. Solche Transformatoren sind dann

selbstregulierend, indem die Primärspule nur so viel Strom aufnimmt, als der in den Sekundärkreis eingeschalteten Belastung entspricht.

Das System der Parallelschaltung von Transformatoren ist somit dadurch gekennzeichnet, daß die Klemmenspannung im Leitungsnetze annähernd konstant ist und die Stromstärke sich nach der Anzahl der eingeschalteten Transformatoren und nach deren Beanspruchung richtet.

In Abb. 190 ist eine Parallelschaltungsanlage schematisch dargestellt.

$ABCD$ stellt die Primärleitung dar, welche den hochgespannten Strom zuführt. An geeigneten Stellen sind die Primärwindungen der Transformatoren T_1, T_2, \dots parallel abgezweigt. Die Sekundärspulen senden den Strom entweder in einzelne getrennte Netze, wie

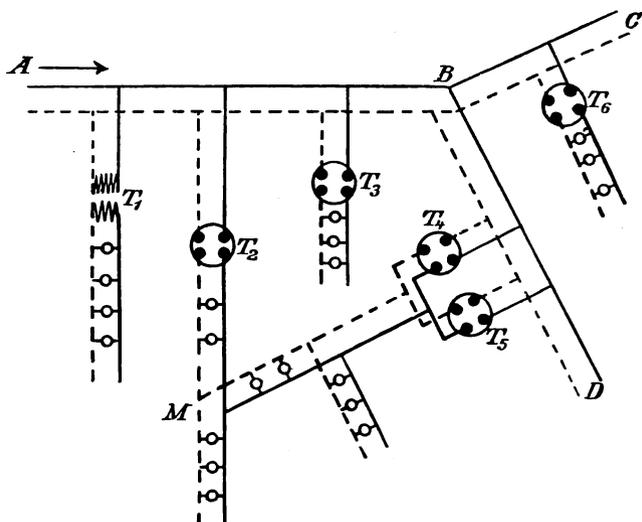


Abb. 190.

T_1, T_3, T_6 , oder es werden mehrere Sekundärspulen parallel geschaltet, die ein sekundäres Netz M gemeinsam versorgen, wie T_2, T_4, T_5 .

Die Primärleitung kann wieder offen oder geschlossen sein und wird dementsprechend berechnet, wobei die Orte, wo die Transformatoren bzw. Unterstationen eingeschaltet sind, als Stromabnahmestellen und deren primärer Bedarf als Abnahme anzusehen sind. Der primäre Strom ergibt sich aus dem sekundären unter Berücksichtigung des Umsetzungsverhältnisses und des inneren Verlustes der Transformatoren. Die sekundären Netze werden ebenso nach bereits bekannten Gesichtspunkten berechnet, wobei die Sekundärspulen der Transformatoren als Stromquellen zu betrachten sind.

Ist der sekundäre Leistungsfaktor $\cos \varphi_2$, so kann annähernd angenommen werden, daß der primäre bei Belastung mit mehr als ein

Viertel der Vollast ebenfalls $\cos \varphi_1 \approx \cos \varphi_2$ ist. Beim Übersetzungsverhältnis $E_1/E_2 = n$ ist dann der primäre Strom $J_2/n \cos \varphi_2$, also im Verhältnis $1 : n \cos \varphi_2$ kleiner als er bei direkter Verteilung mit der Spannung E_2 und induktionsfreier Last gewesen wäre.

Die Behandlung dieses Falles ist erst möglich, nachdem wir die allgemeinen Grundlagen für den einfachen Wechselstromkreis besprochen haben. Wir wenden uns also nun dieser Aufgabe zu.

VIII. Theorie des einfachsten Wechselstromkreises und der einfachsten Leiterverbindungen.

Im folgenden sollen einige Erläuterungen grundlegender Art gegeben werden, die vielleicht manchem Leser bekannt sind und dann ruhig überschlagen werden können.

1. Die Stromarten und ihre Entstehungsweise.

Einen Strom von stetigem Verlauf und gleicher Richtung liefert eine Akkumulatorenbatterie. Je nach ihrer Belastung und ihrem inneren Widerstande verändert sich jedoch ihre Klemmenspannung, so daß auch sie im allgemeinen keinen Strom konstanter Stärke ohne Regelung zu liefern vermag.

Alle anderen praktisch in Betracht kommenden Stromquellen erzeugen EMKE in elektrischen Leitern durch Relativbewegung gegenüber magnetischen Feldern. Wenn von der praktisch kaum in Betracht kommenden azyklischen oder unipolaren Induktion abgesehen wird, kann man feststellen, daß in allen Dynamomaschinen ursprünglich EMKE wechselnder Richtung entstehen, die entweder, wie bei den ein- und mehrphasigen Maschinen, unmittelbar dem äußeren Schließungskreis zugeführt oder, wie bei den Gleichstrommaschinen, durch den Stromwender für den äußeren Schließungskreis zusammengefügt und gleichgerichtet werden. Die in Dynamos entstehenden EMKe verlaufen alle periodisch, d. h. sie weisen in gleichen Zeitabständen T gleiche Zustände auf.

T heißt die Dauer einer Periode. Innerhalb der Periode hängt der Verlauf der EMKe von der Anordnung der Spulen und der Form des Feldes in der erzeugenden Maschine ab, gegen das sie relative Drehbewegungen ausführen.

Der Augenblickswert der EMK ist

$$\begin{aligned} e &= E_{\max} \sin \frac{2\pi}{T} t \\ &= E_{\max} \sin \omega t. \end{aligned}$$

Die EMK ist also eine einfache periodische Funktion der Zeit.

Wenn sich ein Punkt P mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf dem Kreise $ABCD$ (Abb. 191) bewegt, so vollführt seine Projektion P' auf

irgendeinen festliegenden Durchmesser, etwa BD , eine einfache harmonische Bewegung. Rechnet man die Zeit vom Punkte Q an und bezeichnet man die Winkelgeschwindigkeit des Punktes P mit ω , so ist zu irgendeiner Zeit t , zu der OP den Winkel Φ zurückgelegt hat, $\omega = \Phi/t$. Nennt man T die Zeit einer vollen Umdrehung, entsprechend dem Winkel 2π , so ist $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$ und somit $\Phi = \frac{2\pi}{T}t$. T ist dann die Periode, $\nu = 1/T$ die sekundliche Anzahl der Umdrehungen des Fahrstrahls OP , die Periodenzahl oder Frequenz. Der Winkel Θ zwischen dem Ursprung der harmonisch wechselnden Größe und dem Ursprungspunkte Q der Zeit kann positiv, Null oder negativ sein; der Winkel $(\Theta + \Phi)$ heißt der Phasenwinkel. Auf der dargestellten Sinuslinie entspricht dem Winkel $\Phi + \Theta$ die Zeit $t = a'p'$, und es ist

$$y = pp' = a \sin(\Phi + \Theta) = a \sin(\omega t + \Theta).$$

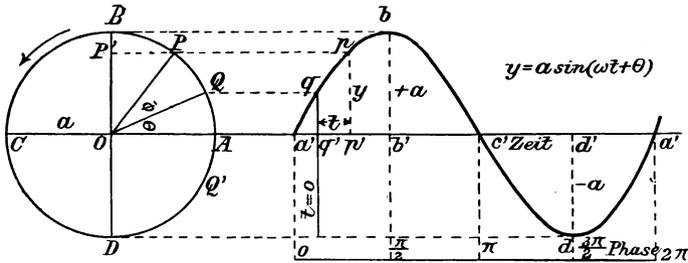


Abb. 191.

Gegen eine Sinuslinie, die durch den Vektor OA dargestellt werden kann, und deren Gleichung $y' = a \sin \omega t$ wäre, erscheint also die durch den Vektor OQ dargestellte Sinuslinie um den Winkel Θ , und zwar im Sinne der Voreilung, verschoben. Umgekehrt erscheint OA gegen OQ um den Winkel Θ verzögert. Man sieht also, daß man eine Sinuslinie in ihrem ganzen Verlauf und ihrer Stellung relativ zu einer anderen Sinuslinie durch zwei Vektoren darstellen kann. Die Länge dieser Vektoren entspricht der Amplitude oder dem Scheitelwert a , und sie schließen untereinander jenen Winkel Θ ein, der dem zeitlichen Unterschied $a'q'$ zwischen den Momenten entspricht, zu denen die zwei Sinuslinien gleiche Phasen, etwa jeweils ihren Scheitelwert erreichen. Θ heißt dann der Winkel der Phasenverschiebung zwischen beiden Kurven.

Der Bezugsgröße $y_0 = A_0 \sin \omega t$ möge in Abb. 192 eine horizontale Strecke Oa_0 von der Länge A_0 zugeordnet sein.

Denkt man sich nun die Strecke Oa_0 um den Punkt O mit der Winkelgeschwindigkeit ω im positiven Sinne rotierend und gilt die gezeichnete Lage Oa_0 für den Augenblick $t = 0$, so hat sich die Strecke nach Ablauf der Zeit t um den Winkel ωt gedreht, so daß sie die Lage

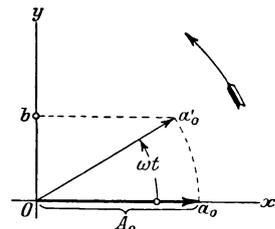


Abb. 192.

Oa_0' einnimmt. Ihre Projektion auf die vertikale Achse $Ob = A_0 \sin \omega t$ ist dann zu jeder Zeit numerisch gleich der Größe y_0 . Die Größe Oa_0 wird als der der Größe y_0 zugeordnete Vektor bezeichnet.

Man kann die zu dem Vektor Oa_0 gehörige Sinuslinie auch noch anders erzeugen als durch Drehung der Strecke Oa_0 . Man denke sich einen Strahl Ot (Abb. 193) in der Pfeilrichtung im negativen Sinne um den Punkt O mit der Winkelgeschwindigkeit ω drehend. Die Anfangslage des Strahles für $t = 0$ falle in die Richtung der Achse Oy , und nach Ablauf der Zeit t sei der Strahl in die Lage Ot' gelangt. Dann ist die Projektion Ob' des Vektors Oa_0 auf die Linie Ot' gleich $A_0 \sin \omega t$, also ebenfalls in jedem Augenblick numerisch gleich y_0 .

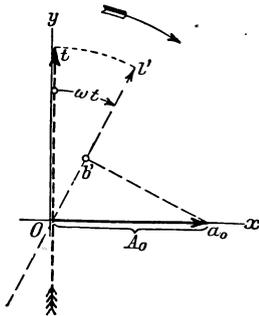


Abb. 193.

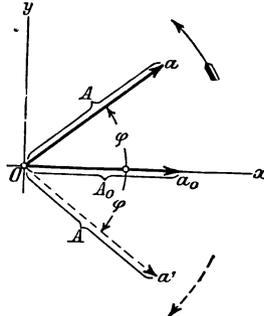


Abb. 194.

Der drehende Fahrstrahl Ot wird die „Zeitlinie“ genannt.

Es ist für die Darstellung von Sinuslinien durch Vektoren gleichgültig, ob man sie sich aus den ihnen zugeordneten Vektoren durch Drehung der Vektoren selbst oder der Zeitlinie erzeugt denken will.

Aus dem Vorhergehenden folgt, daß der Größe $y = A \sin(\omega t + \varphi)$ in demselben Bilde (Abb. 194) der Vektor Oa zugeordnet werden muß, dessen Länge oder „Betrag“ A ist, und der dem Vektor Oa_0 der Bezugsgröße um den Winkel φ im Vektordiagramm vorausliegt oder voreilt. Dem im positiven Sinn aufgetragenen Winkel φ entspricht dann ein zeitliches Voreilen der Wechselstromgröße y gegen die Bezugsgröße y_0 .

Dieser Satz ist jedoch nicht selbstverständlich, sondern eine Folge der vorher nach dem Beschluß der International Electrotechnical Commission (IEC) in Turin 1911 angenommenen Drehrichtung der Vektoren oder der Zeitlinie¹⁾.

Hätte man negativen Drehsinn der Vektoren (im Uhrzeigersinn) oder positiven der Zeitlinie angenommen, dann wäre Oa' dem Vektor $y = A \sin(\omega t + \varphi)$ zugeordnet. Dieser Vektor liegt aber in der Zeichnung hinter der Bezugsgröße um den Winkel φ zurück, während y zeitlich der Bezugsgröße y_0 voreilt. Die Annahme des negativen Drehsinns der Vektoren könnte daher leicht zu Irrtümern führen.

Da bei zweipoliger Anordnung des Feldes einer Maschine eine Umdrehung einer Periode, bei $2p$ -poliger Anordnung dagegen p Perioden

¹⁾ Vgl. hierzu die Verhandlung des Ausschusses für Einheiten und Formelzeichen (AEF) über „Drehsinn und Voreilung im Wechselstromdiagramm“ ETZ 1913, S. 893 u. 924.

entspricht, werden die Winkel nicht in Bogengraden, sondern in elektrischen Graden ausgedrückt, wobei 1^0 elektrisch = p^0 im Bogenmaß ist.

Bei Isolations- und Durchschlagswiderständen kommen die Scheitelwerte oder Amplituden der Kurven in Betracht. Dagegen geben Elektrodynamometer und Hitzdrahtinstrumente Ausschläge, die im geraden Verhältnis zur Quadratwurzel aus den mittleren Quadraten des Stromes stehen. Ist dessen Gleichung $y = a \sin x$, so hat das mittlere Quadrat den Wert

$$M(y_{\text{eff}}^2) = \frac{a^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \frac{a^2}{2\pi} \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin^2 x}{4} \right]_0^{2\pi} = \frac{a^2}{2},$$

und die Wurzel hieraus ist

$$\sqrt{M(y_{\text{eff}}^2)} = \frac{a}{\sqrt{2}} = 0,707 a.$$

Für manche Zwecke ist es jedoch auch nötig, den Mittelwert der einfachen Ordinaten der Sinuslinie zu kennen. Aus der Fläche zwischen

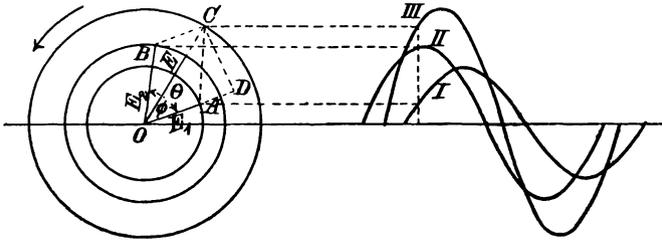


Abb. 195.

der Kurve und der Abszissenachse ergibt sich hierfür

$$M(y) = \frac{a}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{2}{\pi} a = 0,637 a.$$

Das Verhältnis der beiden Mittelwerte heißt Formfaktor k_f der Kurve. Er ist bei der Sinuslinie

$$k_f = \frac{\sqrt{M(y_{\text{eff}}^2)}}{M(y)} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11.$$

Das Verhältnis des Scheitelwerts zum einfachen Mittelwert wird nach Benischke Scheitelfaktor genannt. Er beträgt bei der Sinuslinie $\pi/2 = 1,57$.

Wirken in einem Stromkreis zwei EMKe, E_1 (Kurve I), und E_2 (Kurve II), von derselben Periode, die gegeneinander um den Winkel $AOB = \theta$ verschoben sind, so setzen sie sich zu einer gemeinsamen der Kurve III in Abb. 195 zusammen, die in jedem Moment der Beziehung genügt

$$e = E_1 \sin(\omega_b) + E_2 \sin(\omega t + \theta).$$

Es wird später (Seite 224, 229) gezeigt werden, daß die Diagonale $E = OC$ des Parallelogramms aus $OA = E_1$ und $OB = E_2$ der

Gleichung $e = E \sin (\omega t + \Theta)$ genügt, also wieder eine einfach harmonische EMK gleicher Periode ist, deren Wert

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cos \Theta}$$

ist, und deren Phasenverschiebung Φ gegen E_1 aus der Beziehung folgt:

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{CD}{DO} = \frac{E_2 \sin \Theta}{E_1 + E_2 \cos \Theta}.$$

Sind beliebig viele EMKe gleicher Periode A, B, C, D gegeben, so trägt man sie entsprechend ihrer Größe und Richtung als Vielseit auf und erhält dann die resultierende EMK als Schlußlinie dieses Streckenzuges.

Maschinen, die (zwei über eine halbe oder) drei oder mehr gleichmäßig über eine ganze Periode verteilte, gleich große EMKe gleicher Periode liefern, finden als Stromquellen für Mehrphasenströme Anwendung.

Ein Zweiphasenstrom entsteht aus zwei EMKen, deren Scheitelwerte $E_1 = E_2$ um 90° el. = $\pi/2$ gegeneinander verschoben sind. Ihre Resultante

$$e = E_1 \sin \omega t + E_2 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= E_1 (\sin \omega t + \cos \omega t) = E_1 \sqrt{2} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{4} \right) = E \sin (\omega t + 45^\circ)$$

besitzt somit den Maximalwert $E = E_1 \sqrt{2}$ und ist um $\pi/4$ oder 45° gegen jede der beiden EMKe E_1 und E_2 verschoben (Abb. 196). Diese heißen dann die EMKe jeder Phase oder kürzer die Phasenspannungen,

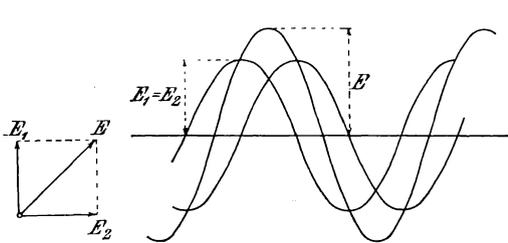


Abb. 196.

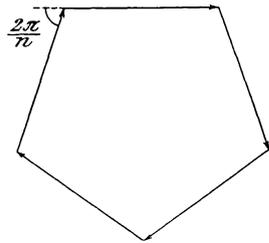


Abb. 197.

und E heißt verkettete Spannung des Zweiphasensystems. Zuweilen bezeichnet man auch die den Nutzleitern zugeführte Spannung als die Hauptspannung. Es ist dann klar, daß beim Zweiphasensystem Hauptspannung und Phasenspannung identisch sein müssen, da durch Verkettung der zwei Phasen ein Einphasensystem mit der Spannung $E_1 = E_1 \sqrt{2}$ entstünde.

Sobald man mehr als zwei Phasen auf die ganze Periode verteilt, kann man die EMKe so anordnen, daß sie entweder ein Vielseit (Polygon) oder einen Stern bilden, wie Abb. 197 und 198 dies für ein Fünfphasensystem darstellen. Im ersten Fall bilden die „Phasenspannungen“ einen geschlossenen Linienzug, ihre Resultante ist also in jedem Mo-

ment gleich Null; im zweiten Falle besitzen alle Phasenspannungen im Sternpunkte O gemeinsames Anfangspotential, das durch Erdung Null sein kann. Ihre Endpotentiale sind der Definition des Systems nach ebenfalls an Größe gleich, aber um $2\pi/n$ gegeneinander verschoben. Die Resultante $E_{1,2}$ von irgend zwei Phasenspannungen E_1 und E_2 findet man dann graphisch, indem man E_1 mit dem umgekehrten oder negativen Vektor E_2 zum Parallelogramm zusammensetzt. Sie wird auch „verkettete Spannung“ genannt.

Die verkettete Spannung ist also beim n -Phasensystem in Sternschaltung $E_{1,2} = 2 E \sin \frac{\pi}{n}$, und ihre Verschiebung gegen E_1 beträgt (Abb. 198)

$$\alpha = \frac{n-2}{2n} \cdot \pi.$$

Die verketteten Ströme in den Leitungen bei Netz- oder Polygonschaltung entsprechen der gleichen Beziehung. Bei Netz- oder

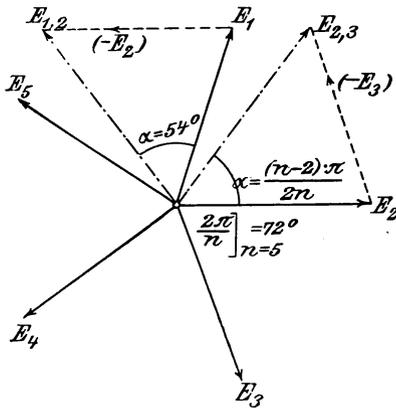


Abb. 198.

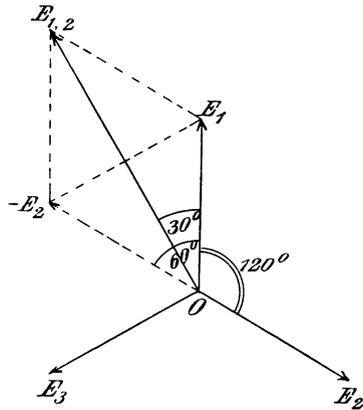


Abb. 199.

Polygonschaltung ist die Phasenspannung identisch mit der Spannung zwischen zwei Leitungen; bei Sternschaltung ist dagegen der Phasenstrom identisch mit dem Strom in den Zufuhrleitungen.

Beim Dreiphasensystem mit Sternschaltung sind die Ströme in den Zufuhrleitungen gleich den Phasenströmen; die verkettete Spannung ist $E_{1,2} = 2 E_1 \sin \pi/3 = E_1 \sqrt{3}$ und ihre Verschiebung gegen die Phasenspannung $\alpha = \pi/6 = 30^\circ$, wie sich aus Abb. 199 ergibt.

Beim Dreiphasensystem mit Netz- oder Dreieckschaltung sind die Spannungen zwischen den Zufuhrleitungen gleich den Phasenspannungen; die verketteten Ströme in den Leitungen sind $J_{1,2} = 2 J_1 \sin \pi/3 = J_1 \sqrt{3}$ und ihre Verschiebung gegen den Phasenstrom $\alpha = \pi/6 = 30^\circ$.

Die vielphasige Stromerzeugung ist schon lange vor der Erfindung der Mehrphasensysteme in der Gleichstrommaschine unbewußt an-

gewendet worden. Auch bei ihr ist die Summe aller $2k$ EMKE über $2\pi^0$ elektrisch gleich Null. Die technische Verwertung vollzieht sich aber von zwei um π^0 el. auseinanderliegenden Punkten unter Zwischenfügung des Stromwenders mit $2k$ Kollektorlamellen. Die Summe der k Phasenspannungen wird von den um π^0 el. gegeneinander versetzten Bürsten abgenommen. Sie ist der Richtung nach unveränderlich und schwankt der Größe nach nur um $\frac{100}{k} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{2k}\right) \%$, also bei 40 Lamellen für das Polpaar um 0,16%. Die Gleichstrommaschine ist also im Wesen ein $2k$ -Phasenerzeuger.

Von jedem Gleichstromanker können durch Anbringung von n um je $1/n$ Periode gegeneinander versetzten Anzapfungen, die mit n Schleifringen verbunden sind, n Phasenströme entnommen werden. Die Maschine kann dann für $n = 3$ als Doppelgenerator Gleichstrom und Drehstrom liefern, oder als Einankerumformer Drehstrom aufnehmen und Gleichstrom liefern, oder als umgekehrter Umformer Gleichstrom aufnehmen und Dreiphasenstrom abgeben.

2. Wechselströme beliebiger Kurvenform.

Bisher wurde durchweg angenommen, daß die von den Maschinen gelieferte EMK rein harmonisch verlief. Dies ist jedoch im allgemeinen nicht der Fall.

Die tatsächlich auftretende EMK verläuft zwar noch periodisch, aber als eine beliebige periodische Funktion der Zeit und kann dann nach Fourier als Summe einzelner harmonischer Schwingungen von verschiedener Frequenz dargestellt werden. In der Technik kommen beinahe nur Spannungskurven vor, deren zwei Hälften in bezug auf die Zeitachse symmetrisch sind. Eine solche Kurve kann dann aufgefaßt werden als Superposition oder Übereinanderlagerung von einfachen harmonischen Schwingungen mit ungerader Ordnungszahl. Die Sinusfunktion mit der kleinsten Frequenz nennt man die erste Harmonische oder die Grundwelle; alle anderen Sinusfunktionen, deren Frequenzen ein Vielfaches der Frequenz der Grundwelle sind, heißen höhere Harmonische oder Oberwellen. Im allgemeinen kann also die EMK dargestellt werden durch die Gleichung

$$e = E_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + E_3 \sin(3\omega t + \varphi_3) + E_5 \sin(5\omega t + \varphi_5) + \dots$$

Abb. 200 (aus Arnold, Wechselstromtechnik. I) stellt eine solche experimentell aufgenommene Kurve dar, die der Beziehung

$$e = 100 \sin(\omega t + 358^0) + 4,61 \sin(3\omega t + 140^0) + 13,05 \sin(5\omega t + 169^0) + 5,71 \sin(7\omega t + 342,5^0)$$

entspricht.

Die effektive Spannung, die durch ein Elektrodynamometer oder Hitzdrahtvoltmeter gemessen wird, wäre in diesem Falle:

$$E = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{E_1^2 + E_3^2 + E_5^2 + \dots}$$

oder für das Beispiel

$$E = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{100^2 + 4,61^2 + 13,05^2 + 5,71^2} = \frac{101,10}{\sqrt{2}} = 71,5.$$

Eine rein harmonische Spannungskurve ergäbe die gleiche Ablesung am Voltmeter, wenn sie der Beziehung $E \sqrt{2} \sin \omega t$ entspräche. Man nennt diese gedachte sinusförmige Wechselspannung die äquivalente Sinusspannung.

Analog führt man auch für den Strom, der je nach Art und Größe der Belastung weitere Abweichungen oder Verzerrungen gegen die ihn

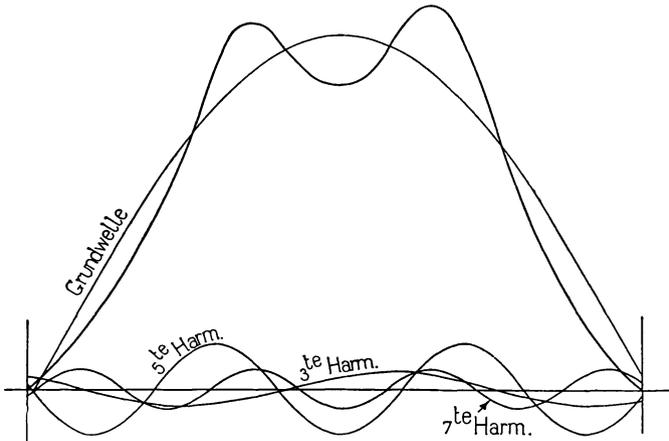


Abb. 200.

erzeugende Spannung aufweist, den äquivalenten Sinusstrom

$$J = 1/\sqrt{2} \sqrt{J_1^2 + J_3^2 + J_5^2 + \dots}$$

ein, der die Frequenz der Grundwelle $\nu = \omega/2\pi$ und den gleichen Effektivwert wie der verzerrte Strom besitzt.

Mit diesen äquivalenten, sinusförmigen Ersatzwerten der Spannung und des Stromes wird gewöhnlich gerechnet. In den meisten Fällen ist dies auch genau genug.

3. Ohmsches Gesetz für Wechselströme.

Für einen Stromkreis, in welchem eine EMK $E = f(t)$ einen Strom i unter gleichzeitiger Aufspeicherung magnetischer und elektrischer Felder erzeugt, gilt die allgemeine Beziehung

$$E = f(t) = R i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt.$$

Das erste Glied entspricht dem Ohmschen Verlust, das zweite der zur Bildung des magnetischen Feldes wegen der Selbstinduktivität L verbrauchten Spannung, das dritte der Spannung zur Ladung des Kondensators mit der Kapazität C .

Wenn nun statt der allgemeinen EMK $E = f(t)$ die sinusförmige $e = E_m \sin \omega t$

eingeführt wird, so erhält man den Augenblickswert des Stromes i aus der Differentialgleichung

$$e = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{\int i dt}{C} = E_m \sin \omega t,$$

woraus durch Differentiation nach t sich ergibt

$$R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{i}{C} = E_m \omega \cos \omega t.$$

Diese Differentialgleichung zweiten Grades gibt aufgelöst

$$i = E_m \frac{R}{|\mathfrak{R}|^2} \sin \omega t + E_m \cdot \frac{\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)}{|\mathfrak{R}|^2} \cos \omega t + B.$$

Der Ausdruck B stellt die Komplementfunktion dar, die nach sehr kurzer Zeit verschwindet. $|\mathfrak{R}|$ bedeutet den Betrag des Widerstandsoperators oder Richtungswiderstandes¹⁾ \mathfrak{R}

$$|\mathfrak{R}| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2},$$

der im absoluten Maßsystem tatsächlich die Dimension eines Ohmschen Widerstandes besitzt.

Die Gleichung kann also, nachdem $B = 0$ geworden ist, auch geschrieben werden

$$i = \frac{E_m}{|\mathfrak{R}|} \sin(\omega t + \varphi) = J_m \sin(\omega t + \varphi),$$

worin

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{CR\omega} - \frac{L\omega}{R}$$

ist und der Winkel φ die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung bedeutet.

Diese letzten Gleichungen sollen näher betrachtet werden. Wird zunächst die Kapazität C unendlich groß angenommen, dann besteht der Stromkreis aus einer Quelle sinusförmiger EMK, die im Widerstand R und der Selbstinduktivität L den ebenfalls sinusförmigen Strom

$$i = J_m \sin(\omega t - \varphi)$$

liefert, dessen Scheitelwert J_m gegen E_m um den Winkel $\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(L\omega/R)$ in Richtung der Verzögerung zeitlich verschoben ist.

Nach dem Eintritt des stetigen Zustandes stellt die Gleichung $J_m = E_m/|\mathfrak{R}|$, die auch für die Effektivwerte $J = J_m/\sqrt{2}$ und $E = E_m/\sqrt{2}$ gilt, $J = E/|\mathfrak{R}|$, das Ohmsche Gesetz für den Wechselstromkreis dar.

¹⁾ F. Breisig sagt in seiner Theoretischen Telegraphie 1910 (S. 241) hierüber: „ \mathfrak{R} ist als Wechselstromwiderstand des Kreises anzusehen. Wir nennen einen solchen Widerstand auch wohl einen gerichteten Widerstand oder Scheinwiderstand.“ Der Name „Widerstandsoperator“ ist zuerst 1887 von Heaviside gebraucht worden, die Bezeichnung „Richtungswiderstand“ 1900 von uns.

Zur Verdeutlichung werde ein einfacher Stromkreis betrachtet, dessen effektive EMK $E = 100$ Volt bei der Frequenz $\nu = 50$ auf einen Stromverbraucher arbeitet, dessen Widerstand $R = 7$ Ohm und dessen Selbstinduktivität $L = 0,01275$ Henry ist. Dann wird $\omega = 2\pi\nu = 314$ und $L\omega = 0,01275 \cdot 314 = 4$ Ohm.

Es ist also die augenblickliche Spannung

$$e = 100 \sqrt{2} \sin 314 t,$$

der Strom

$$i = \frac{100 \sqrt{2}}{\sqrt{7^2 + 4^2}} \sin(314 t - \varphi),$$

die Verschiebung zwischen beiden $\varphi = \arctan 4/7 = 29^\circ 45'$.

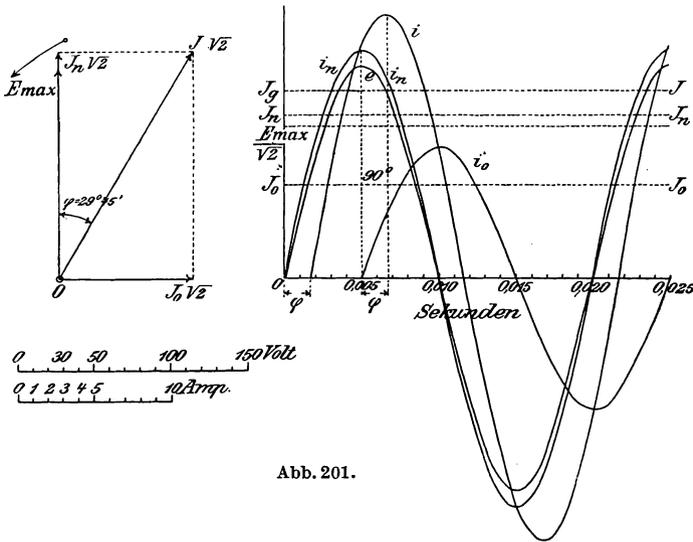


Abb. 201.

Der Effektivwert des Stromes

$$J = \frac{E}{|\Re|} = \frac{100}{\sqrt{7^2 + 4^2}} = 12,4 \text{ A}$$

ist also um $29^\circ 45'$ gegen den Effektivwert E der Spannung verzögert, was auch durch die Schreibweise $J/\varphi = 12,4/29^\circ 45'$ angedeutet werden kann.

Der Gesamtstrom J kann in zwei Komponenten zerlegt werden, von denen die eine J_n in Richtung von E_m , die andere J_0 senkrecht dazu steht.

Die Ströme J_n und J_0 , die man nach M. von Dolivo-Dobrowski den Watt- und den wattlosen Strom nennt, werden also im Vektordiagramm erhalten, indem man den Gesamtstrom J in seine zwei Komponenten parallel zu E_m und senkrecht dazu zerlegt und jeweils durch $\sqrt{2}$ dividiert, falls, wie in Abb. 201, die Scheitelwerte und nicht die effektiven Mittelwerte unmittelbar aufgetragen werden.

Für das Beispiel ist also der Leistung abgebende oder verzehrende Strom $i_n = \frac{E \cdot R}{|\mathfrak{R}|^2} \sin \omega t = J \cos \varphi \sin \omega t$ mit dem effektiven Wert $J_n = J \cos \varphi = 12,4 \cdot \cos 29^\circ 45' = 10,77/0^0 A$, und der Leistung in Form eines magnetischen Feldes aufspeichernde Strom $i_0 = \frac{E \cdot L \omega}{|\mathfrak{R}|^2} \sin \omega t = J_0 \sin \varphi \cdot \sin \omega t$ mit dem effektiven Wert $J_0 = J \sin \varphi = 12,4 \cdot \sin 29^\circ 45' = 6,15/90^0 A$.

Die momentane Leistung w des Stromes i ist:

$$w = e i = E \sqrt{2} \sin(\omega t) J \sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi) = 2 E J \sin(\omega t) \sin(\omega t - \varphi).$$

Dies gibt

$$\begin{aligned} w &= E J \{ 2 \sin^2(\omega t) \cos \varphi - 2 \sin(\omega t) \cos(\omega t) \sin \varphi \} \\ &= E J \{ \cos \varphi (1 - \cos 2\omega t) - \sin \varphi \sin(2\omega t) \} \\ &= E J \{ \cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi) \}. \end{aligned}$$

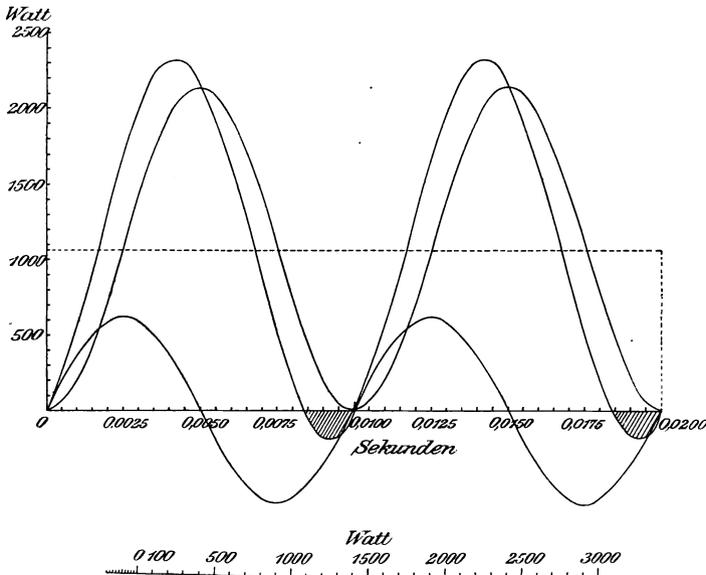


Abb. 202.

Da der einfache Mittelwert von $\cos(2\omega t - \varphi)$ Null ist, beträgt die mittlere Leistung $W = E J \cos \varphi$ Watt. Die Leistungskurve wechselt mit der doppelten Periodengeschwindigkeit (Abb. 202) und beschreibt dabei eine gegen die Zeitachse verschobene Sinus- bzw. Kosinuslinie. Am klarsten geht dies aus der Gleichung für den Wert $\varphi = 0$, also induktionsfreie Belastung hervor. Der für $\varphi = 0$ geltende Ausdruck

$$w = E J (1 - \cos 2\omega t)$$

kann aufgefaßt werden als Unterschied der konstanten Leistung $E J$, die einer Gleichstromleistung entspricht und durch ein Rechteck angedeutet werden kann, und der mit doppelter Periodengeschwindigkeit

wechselnden Leistung $EJ \cos 2\omega t$, die eine zur Zeitachse symmetrische Kosinuslinie ist und physikalisch die Aufspeicherung des Feldes in einer Halbperiode und ihre Rückgewinnung in der nächsten halben Periode bedeutet.

Abb. 202 stellt den zeitlichen Verlauf der Leistungskurve nach dieser Gleichung dar und weist negative, unterhalb der Zeitachse gelegene Teile auf. Diese schraffierten Teile werden erklärlich, wenn man die Nutzleistung $w_n = 2 EJ \cos \varphi \sin^2 \omega t$ und die für das Feld abwechselnd aufgewendete und von ihm zurückgewonnene Leistung getrennt aufzeichnet. Die magnetisierende Leistung, $w_0 = EJ \sin \varphi \sin 2\omega t$, die man ihrem Mittelwerte nach ganz widersinnig als „wattlose Watt“ bezeichnet hat, ist eine Sinuslinie mit positiven und negativen Teilen. Die tatsächliche Leistung w_n ergibt als \sin^2 -Kurve nur positive Werte. Beide zusammen ergeben dann als Gesamtleistung eine um den konstanten Betrag $EJ \cos \varphi$ verschobene Sinuslinie mit der Amplitude EJ , die um so größere negative Teile erhält, je größer die Phasenverschiebung φ ist. In unserem Zahlenbeispiel ist die mittlere Leistung

$$W = EJ \cos \varphi = 100 \cdot 12,4 \frac{7}{\sqrt{7^2 + 4^2}} = 1075 \text{ Watt.}$$

4. Anstieg und Ablauf des Stromes.

a) **Bei Gleichstrom.** Das Ohmsche Gesetz gibt nur den Grenzwert an, dem der Strom zustrebt und den er sehr angenähert schon nach kurzer Zeit erreicht. Wird eine Quelle konstanter EMK plötzlich geschlossen, dann verhält sich der Stromkreis so, als ob er außer Widerstand auch eine Art Trägheit besäße. In den ersten Augenblicken nach Stromschluß wird nämlich ein Teil der gesamten Arbeit $Eidt$ aufgewendet, um rings um die Leiter der Strombahn ein magnetisches Feld von der Größe Li aufzuspeichern; die hierfür erforderliche Arbeit $\frac{1}{2} Li^2$ wird dem Stromkreise wieder zurückgegeben, wenn der Strom von i auf 0 abläuft. Die Induktivität L ist dabei die Zahl der Krafröhrenverkettungen zwischen Stromkreis und Feld für die absolute Stromeinheit 10 Ampere. Ihre praktische Einheit im CGS-System ist das Henry = 10^9 cm.

Die Arbeitsgleichung für den Anstieg des Stromes von 0 bis i lautet also

$$Eidt = Ri^2 dt + \frac{1}{2} Li^2 di,$$

worin der erste Ausdruck rechts dem Arbeitsverlust durch Joulesche Wärme, der zweite der Aufspeicherung des Feldes entspricht. Für konstante Werte der Induktivität L folgt hieraus die Spannungsgleichung

$$E = Ri + L \frac{di}{dt}.$$

Nach Trennung der Veränderlichen di und dt folgt hieraus durch Integration

$$i = \frac{E}{R} \left(1 - \varepsilon^{-\frac{R}{L} t} \right) = J \left(1 - \varepsilon^{-\frac{R}{L} t} \right),$$

worin $\varepsilon = 2,718..$ die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet.

Die Wirkung der Selbstinduktion besteht also darin, das Anwachsen des Stromes auf seinen Grenzwert $J = E/R$ zu verzögern.

Das Anschwellen wird sich um so rascher vollziehen, je kleiner $\varepsilon^{-\frac{Rt}{L}}$ wird. Betrachtet man den Exponentialausdruck als vernachlässigbar sobald er den Wert a erreicht hat, so kann man die Beziehung

$$\varepsilon^{-\frac{Rt}{L}} = a$$

auch schreiben

$$t = -\frac{L}{R} \log \text{nat } a = -\frac{L}{R} \cdot 2,3026 \log a.$$

Der Strom i weicht von seinem Grenzwert J ab um

	$a = 10\%$	5%	2%	1%	5%	1%
wenn $t \cdot \frac{R}{L} =$	2,3	3	3,9	4,6	6,2	6,9

wird. Die Größe L/R hat im CGS-System die Dimension einer Zeit und heißt auch die Zeitkonstante T_c des Stromkreises.

Der Strom steigt von Null aus logarithmisch bis zu seinem Grenzwert an; wird darauf die EMK plötzlich entfernt, so fällt er nach der Gleichung

$$i = (E/R) \varepsilon^{-\frac{Rt}{L}} = J \varepsilon^{-\frac{Rt}{L}}$$

logarithmisch wieder auf Null ab, weil das beim Anstieg aufgespeicherte Feld sich jetzt dem Ablauf entgegensetzt.

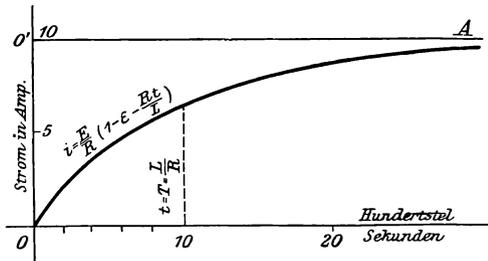


Abb. 203.

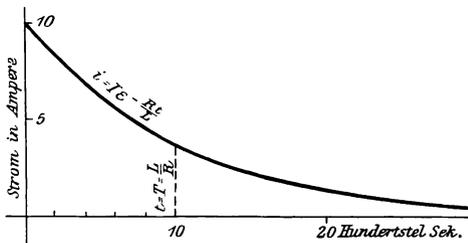


Abb. 204.

Abb. 203 stellt das Anschwellen des Stromes in einem Kreise mit $E = 1$ Volt, $R = 0,1$ Ohm, $L = 0,01$ Henry dar, Abb. 204 das Abflauen des Stromes in diesem Stromkreis. Die Abszissen sind Hundertstel Sekunden. Die Zeitkonstante $T_c = L/R$ ist hier $0,1$ Sekunden, der Grenzwert $J = 10$ A. Der Strom ist schon nach $0,69$ Sek. bis auf $9,99$ A gestiegen und hat nach $t = L/R$ Sekunden den Wert $J(1 - i/\varepsilon) = 6,32$ A erreicht.

Beim Abflauen des Stromes (Abb. 204) wird nach $t = L/R = 10$ Hundertstel Sekunden der Wert

$J/\varepsilon = 3,28 A$, nach $t = 6,9 L/R = 69$ Hundertstel Sekunden der Wert $0,001 J = 0,1 A$ erreicht.

Die Zeitkonstante T_c entspricht der Subtangente der Stroman- oder -abschwelung. Sie ist der Schwellungsgeschwindigkeit umgekehrt proportional und stellt die Zeit dar, worin der Strom auf seinen Grenzwert angewachsen wäre oder auf Null abgenommen hätte, wenn die An- oder Verschwellung stets die Schwellungsgeschwindigkeit des ersten Zeiteilchens beibehielte.

Denselben Verlauf zeigt die Lade- und Entladestromstärke eines Kondensators bei Anschluß oder Entfernung einer konstanten Spannung E . Der Grenzwert, dem der Ladestrom zustrebt, ist bei der Kapazität C gegeben durch die Ladung mit der Elektrizitätsmenge $Q = CE$. Zur Zeit t nach Abschaltung oder Einbringung der EMK ist die Elektrizitätsmenge

$$q = Q \cdot \varepsilon^{-\frac{t}{RC}} \quad \text{bzw.} \quad q = Q \left(1 - \varepsilon^{-\frac{t}{RC}} \right),$$

und da der Strom

$$i = \frac{dq}{dt},$$

so wird

$$i = \pm \frac{Q}{RC} \varepsilon^{-\frac{t}{RC}},$$

wobei das $+$ -Vorzeichen für die Ladung, das $-$ -Zeichen für die Entladung gilt.

b) Bei Wechselstrom. Auch bei Wechselstrom gibt das Ohmsche Gesetz in der Form

$$i = \frac{E_{\max}}{|\mathfrak{R}|} \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{oder} \quad J = \frac{E}{|\mathfrak{R}|}$$

den Grenzwert an, den der Strom erreicht, nachdem die Komplementfunktion $B = c \varepsilon^{-\frac{Rt}{L}}$ zu Null geworden ist. Die allgemeine Gleichung lautet also

$$i = J_{\max} \sin(\omega t + \varphi) + c \varepsilon^{-\frac{Rt}{L}}.$$

Die Integrationskonstante c ergibt sich aus der Bedingung, daß zur Zeit $t = t_1$ der Einführung der EMK in den Stromkreis der Strom $i = 0$ und seine Phase $\omega t_1 + \varphi = \psi_1$ war. Es gilt also:

$$0 = J_{\max} \sin \psi_1 + c \varepsilon^{-\frac{Rt_1}{L}}$$

oder

$$c = -J_{\max} \varepsilon^{+\frac{Rt_1}{L}} \sin \psi_1,$$

so daß schließlich der Strom wird

$$i = J_{\max} \sin(\omega t + \varphi) - J_{\max} \sin(\omega t_1 + \varphi) \varepsilon^{-\frac{R}{L}(t-t_1)}.$$

Der erste Ausdruck stellt den Grenzwert dar, dem der sinusförmige Strom zustrebt. Er entspricht in Abb. 205 der punktierten Sinuslinie *I*. Der zweite Ausdruck stellt keine Sinuslinie dar, da ψ_1 konstant ist,

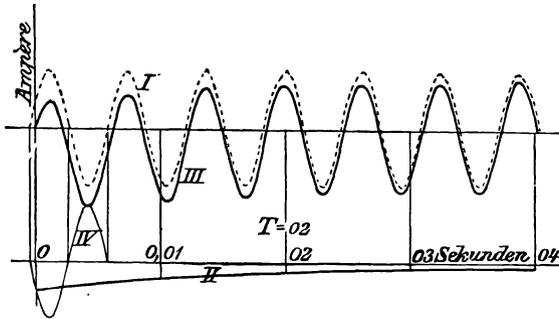


Abb. 205.

sondern entspricht der logarithmisch abnehmenden Kurve *II* der Abb. 205. Der Unterschied der beiden Kurvenordinaten ergibt eine Kurve *III*, deren Schwingungen nach kurzer Zeit in eine Sinuslinie übergehen¹⁾.

Das gezeichnete Beispiel entspricht einem Stromkreis mit

den Konstanten $L = 1$ Henry, $R = 50$ Ohm, in den eine sinusförmige Wechselspannung mit der Frequenz von 1000 Perioden in 2π Sekunden zur Zeit t_1 entsprechend $\psi_1 = 30^\circ$ eingebracht wurde. In diesem Augenblick müssen die Kurven *I* und *II* gleich große, aber entgegengesetzte Werte besitzen, damit $i = 0$ werde. Die Zeitkonstante ist $T_c = L/R = 0,02$ Sekunden, so daß der Strom nach $4,6 T_c = 0,092$ Sek. bis auf 1% und nach $6,9 T_c = 0,138$ Sek. bis auf $1/100$ seinen Grenzwert erreicht hat.

Alle möglichen Anfangswerte der logarithmischen Kurve *II* ergeben die um 180° gegen *I* verschobene Sinuslinie *IV*. Die Schwingungen beim Ein- oder Ausschalten werden am größten für $\psi_1 = 90^\circ$ oder 270° ; sie treten überhaupt nicht auf für $\varphi_1 = 0$, wo der Strom ohnehin Null ist.

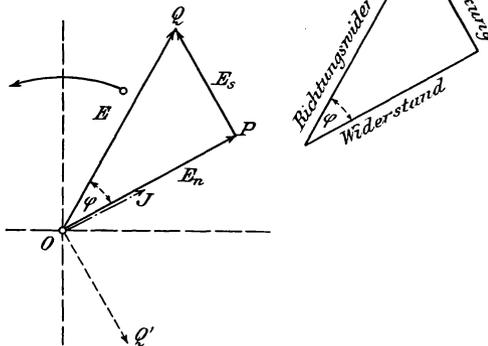


Abb. 206.

5. Richtungswiderstand und Richtleitwert.

Stellt man die sinusförmig wechselnden Größen durch ihre Scheitelwerte oder Mittelwerte im Diagramm der rotierenden Vektoren dar, so erhält man für einen mit Induktivität behafteten Stromkreis das Spannungsdreieck der Abb. 206 mit dem Drehungspfeil. Wird jede

¹⁾ Bedell u. Crehore: Theorie der elektr. Wechselströme. Deutsch von A. H. Bucherer.

Seite dieses Dreiecks durch den Strom J geteilt, dann ergibt sich das rechtwinklige Dreieck des Richtungswiderstandes oder der Impedanz $|\mathfrak{R}| = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$.

Die eine Komponente R ist der Widerstand des Kreises gegen den elektrischen Strom, die andere Komponente $x = L\omega$ der Widerstand gegen die zeitlichen magnetischen Strömungen. R ist also der Leistung verzehrende Teil, ($L\omega$) aber ist die Reaktanz oder Rückwirkung, die rechtwinklig oder in Quadratur zum Strome steht. R und \mathfrak{R} schließen miteinander den Winkel der Phasenverschiebung φ ein. Es ist also

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{\text{Reaktanz}}{\text{Widerstand}} = \frac{x}{R} \\ \text{und } \cos \varphi &= \frac{\text{Widerstand}}{\text{Impedanz}} = \frac{R}{|\mathfrak{R}|} \\ \sin \varphi &= \frac{\text{Reaktanz}}{\text{Impedanz}} = \frac{x}{|\mathfrak{R}|} \end{aligned}$$

Man hat bei dieser Zerlegung nur einen Strom, aber drei verschiedene EMKe. Die eine derselben, $E_n = OP$ in Abb. 206, ist die EMNutzkraft, deren Richtung mit der des Stromes übereinstimmt und die, mit dem Strome multipliziert, die Gesamtleistung in Watt angibt; die andere Komponente $E_s = PQ$ steht senkrecht zur Richtung des Stromes und eilt ihm um 90° vor; dies ist nötig, da sie der Gegen-EMK der Selbstinduktion OQ' das Gleichgewicht halten muß. Beide setzen sich zur EM-Gesamtkraft zusammen

$$E = \sqrt{E_n^2 + E_s^2} = J\sqrt{R^2 + L^2\omega^2} = J|\mathfrak{R}|,$$

die dem Strom um den Winkel φ voreilt.

Ebenso kann man aber auch eine Spannung und drei Ströme annehmen, indem man den Strom $J = E/\mathfrak{R}$ in die zwei Komponenten J_n in Richtung von E und J_0 lotrecht zu E zerlegt (Abb. 207). Teilt man jede Seite des Stromdreiecks durch die Spannung E , dann erhält man das rechts in Abb. 207 gezeichnete Dreieck des Richtleitwertes oder der Admittanz $|\mathfrak{S}| = \sqrt{g^2 + b^2}$.

Ihre eine Komponente $g = R/|\mathfrak{R}|^2$ bedeutet darin den effektiven Leitwert des Stromkreises. Die andere Komponente $b = L\omega/|\mathfrak{R}|^2$ bedeutet die Suszeptanz, d. i. die Aufnahme- oder Aufspeicherungsfähigkeit des Stromkreises für elektromagnetische Felder. g und b sind die wattverzehrende und die wattlose Komponente des Richtleitwertes $1/|\mathfrak{R}| = |\mathfrak{R}|^{-1} = |\mathfrak{S}|$ oder der Admittanz.

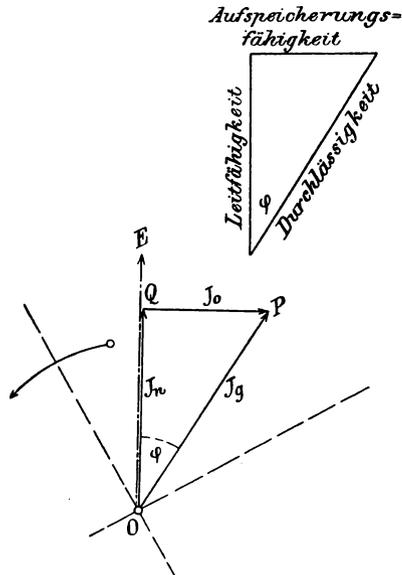


Abb. 207.

Man kann von der Darstellung in Widerständen oder Leitwerten Gebrauch machen, je nachdem sie zur Erreichung des Zieles geeigneter erscheinen.

Wenn der einfache Stromkreis statt der Induktivität einen Kondensator von der Kapazität C enthält, so durchfließt dessen Dielektrikum, selbst wenn seine Belegungen vollkommen voneinander isoliert sind, ein Wechselstrom von dem effektiven Mittelwert

$$J = E/|\Re|, \text{ wobei } |\Re| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}.$$

Dieser Strom eilt der EMK an den Belegungen um den Winkel φ vor, dessen Wert gegeben ist durch $\text{tg } \varphi = 1/CR\omega$.

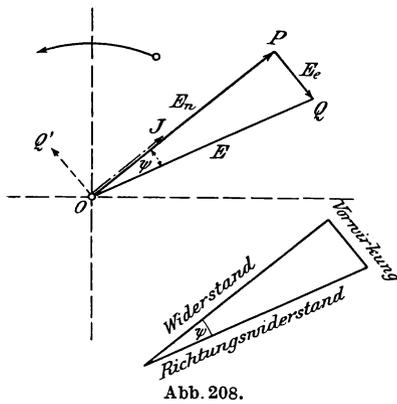


Abb. 208.

Die Wirkung des Kondensators stimmt demnach rechnerisch mit einer negativen Induktivität: $-L' = 1/C^2\omega^2$ überein. Man kann auch hier, wie vorher, den Richtungswiderstand oder seinen reziproken Wert in zwei Komponenten zerlegen. Im ersten Falle nach Abb. 208, erhält man den Strom J und drei Spannungen: die zur Abgleichung der Spannung OQ' an den Kondensatorplatten erforderliche wattlose Komponente $E_c = J/C\omega$, die Wattkomponente $E_n = JR$ und die Gesamtspannung

$$E = \sqrt{E_n^2 + E_c^2} = J \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}} = J |\Re|.$$

Aus dem Spannungsdreieck ergibt sich dann durch Teilung jeder Seite mit dem Strome J das Widerstandsdreieck der Abb. 208, dessen eine Kathete der Widerstand R ,

dessen andere die Vorwirkung oder Kondensanz $1/C\omega$ ist.

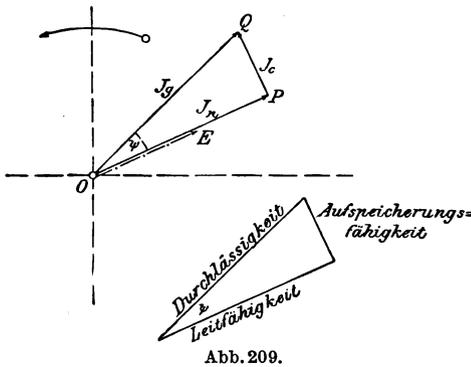


Abb. 209.

Im zweiten Falle erhält man nur die EMK E und drei Ströme (Abb. 209), nämlich den wattlosen oder Ladestrom

$$J_c = E \frac{\omega C}{|\Re|^2} = E \cdot b,$$

den Watt- oder Nutzstrom

$$J_n = E \cdot \frac{R}{|\Re|^2} = E \cdot g$$

und den Gesamtstrom

$$J_g = \sqrt{J_c^2 + J_n^2} = E/|\Re|.$$

Der Winkel der Voreilung ψ ist gegeben durch

$$\operatorname{tg} \psi = J_c/J_n = b/g.$$

Sind in einem Kreise Kondensatoren (oder ähnlich wirkende Vorrichtungen, etwa übererregte Synchronmotoren) und Induktivitäten (etwa Drosselspulen oder dgl.) gleichzeitig vorhanden, so bestimmt sich die resultierende Wirkung aus dem Unterschied der positiven Rückwirkung $L\omega$ und der Vorwirkung oder negativen Rückwirkung $1/C\omega$. Wenn die Induktivität überwiegt, eilt die Gesamtspannung dem Strom vor; wenn die Kapazitätswirkung überwiegt, bleibt sie hinter dem Strom zurück. Der Strom selbst ist gegeben durch

$$J = E : \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2}$$

und seine Phasenverschiebung gegen E durch die Beziehung

$$\operatorname{tg} \varphi = \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right) : R,$$

worin das positive Vorzeichen des Klammerausdruckes der Voreilung, das negative der Nacheilung von J gegen E entspricht.

Wenn also die beiden Wirkungen einander gerade aufheben, wird die Phasenverschiebung Null und der Strom folgt dem Ohmschen Gesetz in seiner einfachsten Form $J = E/R$.

In diesem Falle sagt man, daß Resonanz im Stromkreise vorhanden sei.

Der Ausschuß für Einheiten und Formelzeichen (AEF) des Verbandes Deutscher Elektrotechniker nennt

- \Re den Scheinwiderstand,
- $x = L\omega$ den Blindwiderstand,
- R den Wirkwiderstand,

wobei diese letzte Komponente auch eine ev. Vergrößerung des mit Gleichstrom gemessenen Ohmschen Widerstandes durch Wirbelströme, Hautwirkung usw. umfaßt.

6. Serienschaltung von Richtungswiderständen.

Bei der Reihenschaltung von Ohmschen Widerständen war der gesamte Widerstand $R = \sum r_n$ gleich der algebraischen Summe der einzelnen Teilwiderstände r_n . Für Richtungswiderstände $r_1, r_2 \dots r_n$ gilt ein ähnliches Gesetz

$$R = r_1 + r_2 + \dots + r_n = \sum_1^n r_n,$$

wobei jedoch das Pluszeichen im Sinne der geometrischen Addition aufgefaßt werden muß.

Hier soll nun die Reihenschaltung von Richtungswiderständen unter Annahme sinusförmiger Ströme und zunächst rein induktiver Widerstände betrachtet werden. Dies sind also etwa Spulen mit vielen Windungen, deren Ohmsche Widerstände im Vergleich zu ihrer

Reaktanz vernachlässigbar sind, oder Kondensatoren, die nur wattlose Ströme aufnehmen.

Wir wissen, daß hierbei die Spannung dem Strome um 90° oder $\pi/2$ vorausleilt oder nachhinkt. Wenn man die Ohmschen Widerstände in die horizontale oder X -Achse legt, müssen die induktiven Widerstände auf der Y -Achse dargestellt werden, welche durch eine Drehung der X -Achse um 90° nach links aus der X -Achse entstanden gedacht werden kann. Eine ähnliche Drehung beobachteten wir schon bei der Behandlung der Leistung eines Wechselstromes. Nehmen wir an, wir hätten bei einer Spannung von 1 Volt einen Wechselstrom von 1 Amp. in einem rein induktiven Widerstand von $L\omega = 1$ Ohm mit einer Verschiebung von $\pi/2$ zwischen Strom und Spannung, so ist die vom Widerstand verzehrte Leistung $JE \cos \pi/2 = 0$, also rein wattlos. Wächst dieser Phasen- bzw. Drehungswinkel von $\pi/2$ auf π an, so wird die Spannung dem Strome entgegengesetzt gerichtet, also zur Gegen-

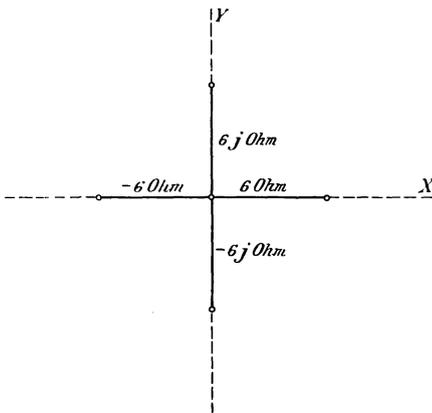


Abb. 210.

EMK und die Leistung $JE \cos \pi = -(JE)$, also negativ. Es kann also gesagt werden, daß der Widerstand statt positiv nun negativ geworden, etwa aus einem Generator ein Motor geworden ist.

Die Drehung einer Größe um $\pi = 180^\circ$ läuft also auf das gleiche hinaus wie die Multiplikation mit dem Faktor (-1) . Wird die Drehung abermals um $\pi = 180^\circ$ weiter vollführt, läßt man etwa den Motor wieder zum Generator werden, so erreicht man den ursprünglichen Zustand; man hat einen vollen

Umfang des Kreises zurückgelegt und der Behandlungsfaktor ist

$$(-1) \cdot (-1) = (-1)^2 = +1.$$

Es bleibt nun noch die Festsetzung dieses Faktors für den rechten Winkel übrig. Dieser Winkel kann als Einheitsmaß aller Drehungen oder Richtungsabweichungen dienen, geradeso wie eine Längeneinheit als Maß aller Strecken dient. Würde man für diese Einheit das Zeichen j wählen, so müßte die Multiplikation von j mit sich selbst zum gestreckten Winkel führen; es müßte also $j^2 = -1$ und $j = \sqrt{-1}$ sein. So stellt $6j$ Ohm einen rein induktiven, den Strom verzögernden Widerstand von 6 Ohm dar, während $-6j$ den Wert eines durch Kapazitätswirkung den Strom beschleunigenden Widerstandes von 6 Ohm anzeigt (Abb. 210).

Diese Zahlen bzw. die Strecken der Y -Achse werden in der Mathematik als imaginäre behandelt. Gauß hat sie 1831 mit i bezeichnet. Da dies jedoch zu Verwechslungen mit dem Zeichen für Stromstärken

führt, schreibt man in der Elektrotechnik mit Charles P. Steinmetz $\sqrt{-1} \equiv j$. Multiplikation mit j bedeutet also Drehung um 90° im Sinne der Voreilung.

Die rein imaginären Größen, auf der Y -Achse liegend, haben Wallis 1693 und H. Kühn 1753 behandelt, während J. R. Argand 1806 und namentlich F. Gauß 1831 die komplexen Zahlen und ihre geometrische Abbildung ausführlich brachten, womit die Auslegung der komplexen Größe als fester Planvektor ausgebaut war. Schon 1797 hatte C. Wessel in einer lange unbekannt gebliebenen Eingabe an die dänische Akademie der Wissenschaften Gleiches geleistet und die Behandlungszahl $\sqrt{-1}$ als Dreh- oder Schwenkungsfaktor bezeichnet; später tat dies unabhängig davon auch Graßmann 1844 in seiner Ausdehnungslehre.

Schaltet man einen Ohmschen und einen rein induktiven Widerstand in Reihe, so erhält man aus der so gebildeten Kette einen resultierenden Widerstand, der einem Richtungswiderstand entspricht. Wie bei diesem, ist die Summe der Spannungsverluste nicht mehr durch die algebraische, sondern durch die geometrische Addition der Einzelspannungsverluste gegeben.

Wenn also der Ohmsche Verlust oder Widerstand die Richtung der horizontalen Achse besaß und durch eine reelle Zahl, der induktive Verlust oder Widerstand aber in Richtung der vertikalen Achse gelegen und durch eine imaginäre Zahl darstellbar war, muß der aus beiden gebildete Richtungswiderstand einen reellen und einen imaginären Teil besitzen, also durch eine komplexe Zahl darstellbar sein.

Man kann sich den Richtungswiderstand so entstanden denken, daß vom Widerstande Null an sich erst die Ohmsche und dann die induktive Komponente durch allmähliches Anwachsen herausgebildet habe. Statt der gleichzeitigen Wirkung beider Komponenten betrachtet man sie also einzeln nacheinander entstehend und wirkend.

Dieser Vorgang stimmt mit der Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen. Auch hier wird der Satz vom Parallelogramm angewendet, wobei die Unabhängigkeit des Ergebnisses vom nacheinanderfolgenden oder gleichzeitigen Wirken vorausgesetzt oder aus der Erfahrung geschöpft wird. Ein gegebener Wechselwiderstand kann aber nicht nur aus den obigen beiden Komponenten r und x entstanden gedacht werden. Dasselbe endgültige Resultat erreicht man, wenn n gleiche Ohmsche und induktive Widerstände aneinandergereiht werden, von denen jeder $1/n$ des Widerstandes r bzw. x besitzt (Abb. 211 u. 212). Die geometrische Summe ergäbe denselben Richtungswiderstand.

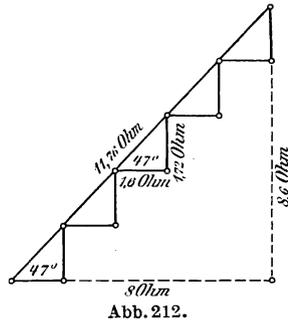
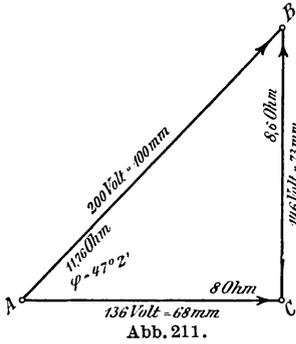
Deutlicher als die Schreibweise $|r + x|$ ist es jedoch, dem x einen vertikalen Richtungspfeil vorzusetzen, $\uparrow x$, wie dies Matzka¹⁾ vorgeschlagen hat, oder sich nach Silvanus P. Thompson²⁾ mit einem

¹⁾ Matzka, W.: Versuch einer richtigen Lehre von der Reellität der imaginären Größen. 1850.

²⁾ Thompson, Silv. P.: Polyphase electric currents. 1900.

vertikalen dicken Striche, $|x$, zu begnügen, um den queren Charakter des induktiven Teils zu kennzeichnen, oder schließlich $r + jx$ zu schreiben.

Der Buchstabe j bedeutet geometrisch einen Drehfaktor um 90° , rechnerisch einen Behandlungsfaktor oder Operator.



7. Rechnerische Behandlung von Wechselstromgrößen.

a) **Komplexe Symbole.** Da ein Vektor in der Ebene ein zweidimensionales Gebilde ist, gelingt die Übersetzung des Vektorbildes in die Sprache der Algebra nur durch die Verwendung zweidimensionaler, d. h. komplexer Zahlen¹⁾. Man denkt sich die Ebene des Vektordiagrammes, Abb. 213, zugleich als die Gaußsche Zahlenebene; der Drehpunkt der Vektoren sei ihr Nullpunkt. Nun ist der Vektor Oa , der die Sinuslinie $A \sin(\omega t + \varphi)$ vertritt, durch die Lage seines Endpunktes a vollständig bestimmt. Dem Punkte a ist aber in der Gaußischen Ebene die komplexe Zahl

$$\mathfrak{A} = a + jb$$

zugeordnet, die somit den Vektor $Oa = A \sin(\omega t + \varphi)$ symbolisch darstellt. Die beiden Arten der Darstellung vertreten einander vollständig, da die Zuordnung der komplexen und der Vektorsymbole umkehrbar und eindeutig ist.

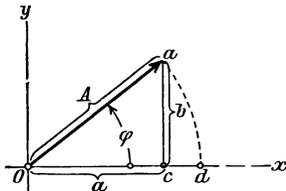


Abb. 213.

Für viele Zwecke empfiehlt es sich, das komplexe Symbol in der von Euler herührenden exponentiellen Normalform $\mathfrak{A} = A e^{j\varphi}$ zu schreiben, worin $e = 2,71828$ die Grundzahl der natürlichen Logarithmen ist. $\mathfrak{A} = A$ würde, als komplexes Symbol aufgefaßt, den Vektor Od in Abb. 213 darstellen. Die Hinzufügung des Faktors $e^{j\varphi}$

ergibt den Vektor Oa , ist also gleichbedeutend mit einer Drehung um den Winkel φ . Wollte man auch die Drehung der Vektoren mit der Winkelgeschwindigkeit ω zum Ausdruck bringen, so müßte man auch noch den Zeitfaktor $e^{j\omega t}$ hinzufügen, also schreiben $\mathfrak{A} = A e^{j\varphi} e^{j\omega t} = A e^{j(\omega t + \varphi)}$.

¹⁾ Breisig, E. u. K. W. Wagner: ETZ 1913, S. 894.

Man läßt ihn jedoch im allgemeinen weg, da es in vielen Fällen auf die zeitliche Änderung der Wechselstromgrößen weniger ankommt als auf ihre gegenseitige Phasenverschiebung.

b) Die erste Normalform, in welcher sich also ein Wechselwiderstand darstellen läßt, ist die Komponentenform $\mathfrak{R} = r + jx$.

Aus den Komponenten r und x läßt sich der absolute Wert des Wechselwiderstandes bestimmen:

$$|\mathfrak{R}| = \sqrt{r^2 + x^2};$$

sein Phasenwinkel φ folgt aus der Beziehung $x/r = \operatorname{tg} \varphi$.

Ebenso kann ein Wechselstromwiderstand durch seinen Betrag $|\mathfrak{R}|$ und seinen Phasenwinkel φ definiert werden, wozu häufig die symbolische Bezeichnung \mathfrak{R} , φ oder $[\mathfrak{R}, \varphi]$ benutzt wird. Der Winkel kann dabei entweder für praktische Verhältnisse in Graden oder für theoretische Untersuchungen in Einheiten des Halbmessers ausgedrückt werden.

Houston und Kennelly haben die symbolische Bezeichnung durch Einfügung des Winkelzeichens ergänzt, wobei sie bei Nacheilung \mathfrak{R}/φ , bei Voreilung $\mathfrak{R}/\overline{\varphi}$ schreiben. Eine polare Form des Richtungswiderstandes läßt sich dadurch gewinnen, daß seine Komponenten durch den Phasenwinkel trigonometrisch ausgedrückt werden.

$$\mathfrak{R} = |\mathfrak{R}| (\cos \varphi + j \sin \varphi).$$

Beispiel: Abb. 211 und 212 sind Bilder für den Fall, daß eine Wechselspannung von $E = 200$ Volt in einem Kreise mit $r = 8$ Ohm Widerstand $J = 17$ A hervorruft. Es ist also

$$|\mathfrak{R}| = E/J = 200/17 = 11,76 \text{ Ohm.}$$

Aus dem Dreieck folgt $AB = 200$ V, $AC = Jr = 136$ V, also ist der induktive Abfall $CB = JL\omega = Jx = 146$ V und die Reaktanz $x = L\omega = 146/17 = 8,6$ Ohm. Ferner ist $\operatorname{tg} \varphi = \frac{BC}{AC} = \frac{73}{68} = 1,073$, also $\varphi \approx 47^\circ 2'$.

Man hat also für die Spannung und den Richtungswiderstand

$$E = 200/\underline{47^\circ 2'} = 136 + 146j \text{ Volt,}$$

$$\mathfrak{R} = 11,76/\underline{47^\circ 2'} = 8 + 8,6j \text{ Ohm.}$$

Die polare Form ist für die Spannung

$$\mathfrak{E} = 200 (0,68 + 0,73j) \text{ Volt,}$$

für den Richtungswiderstand

$$\mathfrak{R} = 11,76 (0,68 + 0,73j) \text{ Ohm.}$$

Abb. 212 stellt die Reihenschaltung von fünf gleichen Richtungswiderständen vor, die je ein Fünftel von \mathfrak{R} betragen $5 (1,6 + 1,72j) = 8 + 8,6j$ Ohm.

Diese durch komplexe Zahlen dargestellten Richtungswiderstände lassen sich wie folgt behandeln:

Addition. Um Richtungswiderstände r_1, r_2 zeichnerisch zu addieren, werden sie ihrer Länge und Richtung nach gleichsinnig aneinander-

gereiht. Die Schlußlinie \Re der Streckenfolge bildet die gesuchte Streckensumme (Abb. 214). Projiziert man \Re auf beide Achsen, so zeigt sich,

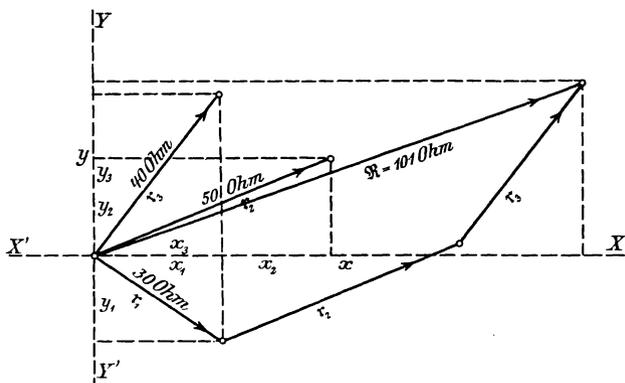


Abb. 214.

daß seine Komponenten aus der Summe der Einzelkomponenten bestehen. Dies folgt unmittelbar aus der Komponentenform

$$r_1 = r_1 + jx_1, r_2 = r_2 + jx_2 \dots$$

$$\Re = (r_1 + r_2 + \dots) + j \cdot (x_1 + x_2 + \dots) = R + jX;$$

daher

$$R = r_1 + r_2 + \dots \text{ und } X = x_1 + x_2 + \dots$$

Bei Reihenschaltung von Wechselstromwiderständen wird also der gesamte Widerstand durch getrennte Zusammensetzung der Ohmschen und der induktiven Teile gewonnen.

Beispiel zur Addition.

Es seien in einem Kreise hintereinander geschaltet ein Ohmscher Widerstand von 20 Ohm, ein rein induktiver Widerstand mit der Induktivität $L = 59$ Millihenry, ein Kondensator mit einer Kapazität von 300 Mikrofarad und ein Ohmscher Widerstand von 15 Ohm (Abb. 215). Es ist der resultierende Widerstand zu

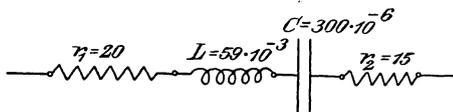


Abb. 215.

ermitteln. Die Annahmen entsprechen keinem praktischen Fall.

Die Periodenzahl sei $\nu = 50$, also $\omega = 2\pi\nu = 314$.

Der Betrag des Widerstandes des induktiven Leiters ist $L\omega$, wobei L in Henry auszudrücken ist.

$$x_1 = L\omega = 59 \cdot 10^{-3} \cdot 314 = 18,5 \text{ Ohm.}$$

Der Betrag des Widerstandes des Kondensators ist $1/C\omega$, wobei C in Farad zu nehmen ist.

$$x_2 = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{300 \cdot 10^{-6} \cdot 314} = \frac{10^6}{300 \cdot 414} = 10,6 \text{ Ohm.}$$

Der Gesamtwiderstand ist also

$$\mathfrak{R} = 20 + j \cdot 18,5 - j \cdot 10,6 + 15 = 35 + j \cdot 7,9,$$

sein Betrag also

$$|\mathfrak{R}| = \sqrt{35^2 + 7,9^2} \approx 36 \text{ Ohm}$$

und seine Phasenverschiebung $\varphi = \arctan(7,9:36) = 12^\circ 43'$.

Der Gesamtwiderstand ist also $\mathfrak{R} = (36; 12^\circ 43')$ oder $\mathfrak{R} = 36/\underline{12^\circ 43'}$ Ohm. In Abb. 216 ist $AB = r_1 = 20$; $BC = r_2 = 15$; $AD = x_1 = 18,5$; $AE = -DF' = 10,6$ Ohm. Aus ihnen ergibt sich $AF = 36/\underline{12^\circ 43'}$ mit den Komponenten $AC = r_1 + r_2$ und $CF = x_1 + x_2$, oder $AE = r_1 + jx_1 = 27,2$ Ohm und $EF = r_2 - jx_2 = 18,3$ Ohm.

Konjugierte Widerstände. Zwei komplexe Zahlen, die sich nur durch das Vorzeichen des imaginären Teiles unterscheiden, heißen konjugiert, also $r + jx$ und $r - jx$. Ihre Summe ergibt $2r$, ihre Differenz $2jx$. Unter besonderen Bedingungen können also zwei in Serie geschaltete Richtungswiderstände rein Ohmsche oder rein induktive Widerstände ergeben.

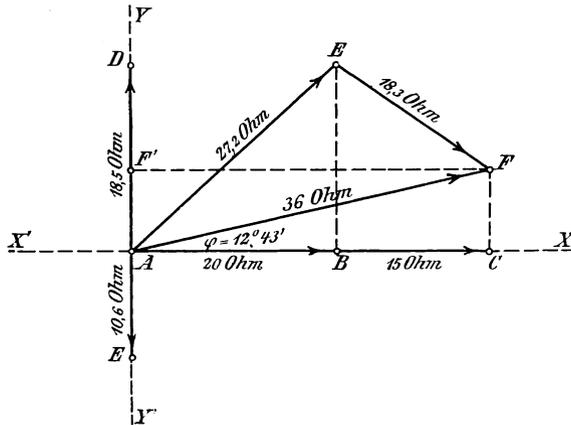


Abb. 216.

Beispiel hierzu:

Eine Spule und ein Kondensator seien in Serie geschaltet. Der Ohmsche Widerstand der Spule sei $r_1 = 20$ Ohm; die Zuleitung zum Kondensator besitze ebenfalls $r_2 = 20$ Ohm. Die Induktivität der Spule sei $L = 59$ Millihenry, die Kapazität des Kondensators $C = 172$ Mikrofarad, die Periodenzahl des Stromes $\nu = 50$. Es ist der gesamte Widerstand des Systems zu ermitteln. Kondensatoren mit so hohen Kapazitäten sind praktisch undurchführbar, weil ihre Dimensionen ins Riesenhafte gehen würden, doch ist das Beispiel (Abb. 217) der Deutlichkeit halber gewählt worden. Es ist

$$x_1 = L\omega = 59 \cdot 10^{-3} \cdot 2\pi \cdot 50 = 18,5 \text{ Ohm}; \quad r_1 + jx_1 = 20 + j \cdot 10,5,$$

$$x_2 = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{172 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50} = 18,5 \text{ Ohm}; \quad r_2 - jx_2 = 20 - j \cdot 10,5.$$

Ihre Summe ist somit ein Ohmscher Widerstand $2r_1 = 40$ Ohm, ihr Unterschied ein induktiver Widerstand $2x_1j = 37$ Ohm.

Subtraktion. Die Subtraktion bedingt nur eine dem Zeichenwechsel entsprechende gegenseitige Aneinanderfügung der Strecken.

Bei zwei Strecken mißt die eine Diagonale des Parallelogramms die geometrische Summe, die andere die geometrische Differenz der Seiten (Abb. 217 und 218).

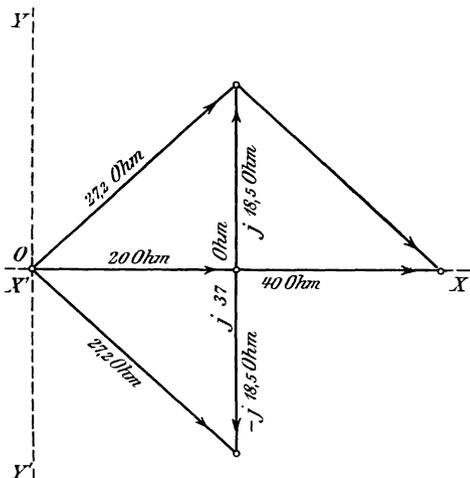


Abb. 217.

Ist beispielsweise $r_1 = 5$, $r_2 = 4$ Ohm, dann werden (Abb. 218)

$$r_1 + r_2 = 7,3 \text{ Ohm}$$

$$\text{und } r_1 - r_2 = 3,7 \text{ Ohm.}$$

Auf diesem Verhalten beruht die Dreivoltmetermethode. Wenn etwa r_1 und r_2 bestimmt werden sollen, mißt man dann die drei Spannungen an r_1 , r_2 und $r_1 + r_2$.

Man sende durch die Spulen AC und CB (Abb. 219) einen Wechselstrom von $10A$ bei $\nu = 100$ Perioden. An den Punkten AC , CB , BA mögen die drei Voltmeter V_1 , V_2 , V_3 1025 Volt, 497 Volt und 1429

Volt Spannung zeigen. Die Widerstände sind also der Reihe nach 102,5 Ohm für die Spule AC , 49,7 Ohm für die Spule CB und 149,2 Ohm für die äquivalente Spule. Um die Spannungen oder Widerstände in Ohmsche und induktive Komponenten zu zerlegen, ist noch eine Messung erforderlich, beispielsweise des Ohmschen

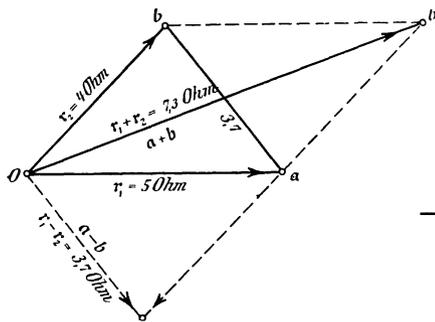


Abb. 218.

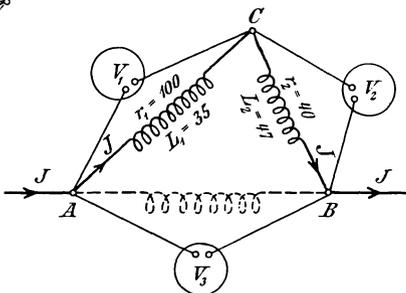


Abb. 219.

Widerstandes der Spule AC , $r_1 = 100$ Ohm. Eben denselben Dienst hätte uns die Kenntnis des Ohmschen Widerstandes der zweiten Spule CB oder des Selbstinduktionskoeffizienten einer der Spulen geleistet.

Mit den Voltmeterangaben kann man das Dreieck $A_1C_1D_1$ konstruieren (Abb. 220). Der über A_1C_1 als Durchmesser geschlagene Kreis schneidet die Strecke $A_1E_1 = Jr = 10 \cdot 100 = 1000$ Volt ab und ergibt so den Punkt E_1 . E_1C_1 ist dann 219 Volt, also $x_1 = 21,9$ Ohm.

Da aber $x_1 = 21,9 = L_1\omega = L_1 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 100$, so ist $L_1 = 35$ Millihenry. $C_1 F_1$ ist parallel zu $A_1 E_1$ und $= 400$ Volt bzw. 40 Ohm, und $D_1 F_1 = 295$ Volt bzw. $29,5$ Ohm. Da aber $x_2 = 29,5$ Ohm $= L_2\omega$ ist $L_2 = 47$ Millihenry. Man findet ferner $\varphi_1 = \arctan \frac{219}{1000} = 12^\circ 12'$; $\varphi_2 = \arctan \frac{295}{400} = 36^\circ 25'$ und aus der Figur

$$\cos \psi = \frac{A_1 D_1^2 + A_1 C_1^2 - C_1 D_1^2}{2 A_1 D_1 \cdot A_1 C_1} = \frac{1492^2 + 1025^2 - 497^2}{2 \cdot 1492 \cdot 1025}$$

woraus $\psi = 7^\circ 58'$ und $\varphi = \varphi_1 + \psi = 20^\circ 10'$.

Je nach der geforderten Genauigkeit werden solche Rechnungen mit der Quadrattafel und den trigonometrischen Funktionen ausgeführt oder mittels Logarithmen bewältigt. Dem Ingenieur genügt meist die Genauigkeit des Rechenschiebers. Bei kleinen Winkeln dient die Zeichnung nicht zur Auswertung, sondern nur zur Übersicht und Rechnungsführung.

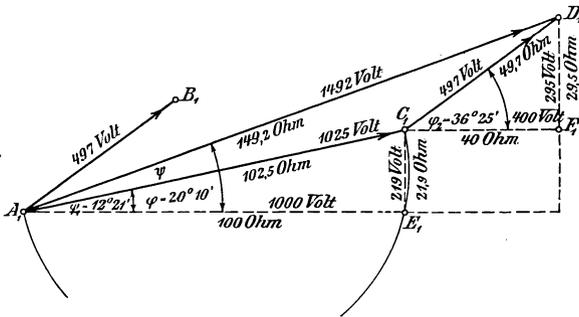


Abb. 220.

Bis zu Winkeln von 5° stimmt die Bogenlänge des Einheitskreises mit dem Sinus und der Tangente bis auf 3 Dezimalstellen, bis zu 2° auf 4 Stellen überein.

In einem rechtwinkligen Dreieck von den Katheten 1 und 57,3 beträgt der Gegenwinkel der ersteren Seite 1° . Folgende Tabelle wird bei den häufigen Rechnungen mit kleinen Winkeln gute Dienste leisten:

α°	arc α	sin α	tg α	α°	arc α	sin α	tg α
1	0,017	0,017	0,017	5	0,087	0,087	0,087
2	0,035	0,035	0,035	6	0,105	0,105	0,105
3	0,052	0,052	0,052	7	0,122	0,122	0,123
4	0,070	0,070	0,070	8	0,140	0,139	0,141

Multiplikation und Division. Bei der gewöhnlichen Multiplikation wird das Produkt aus dem Multiplikand geradeso gebildet, wie der Multiplikator aus der Einheit entstanden ist. Bei den gerichteten Größen gilt gleiches: Der Multiplikator r_1 (Abb. 221) entstand aus der Einheit durch Drehung um den Winkel α_1 und Vergrößerung im Verhältnis $r_1:1$. Ebenso muß also $\Re = r_1 \cdot r_2$ aus dem Multiplikand r_2 hervorgehen. Die Dreiecke $OA_1 m_1$ und $OB m_2$ (Abb. 221) müssen einander also ähnlich sein, und \Re muß die Länge $|r_1|$ mal $|r_2|$ und die Neigung $\alpha_1 + \alpha_2$ erhalten.

Das Produkt zweier konjugierter Zahlen

$$(r + jx)(r - jx) = |r|_{\varphi} \cdot |r|_{-\varphi} = |r|^2,$$

wird also, wie ihre Summe, auch reell. Zwei reziproke Richtungsgrößen r und $1/r = r'$ führen zu reziproken Beträgen oder absoluten Werten mit den Winkeln φ und $-\varphi$. Der Richtungswiderstand \Re und der Richtleitwert \mathcal{G} entsprechen dieser Bedingung.

Beispiele :

1. Die Richtungsgrößen $12 + 9j$ und $7 + 5j$ sind zu multiplizieren, wie in Abb. 222 gezeigt:

$$(12 + 9j) \cdot (7 + 5j) = 84 - 45 + j(60 + 63) = 39 + 123j.$$

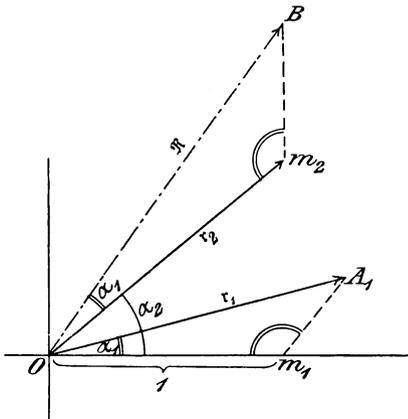


Abb. 221.

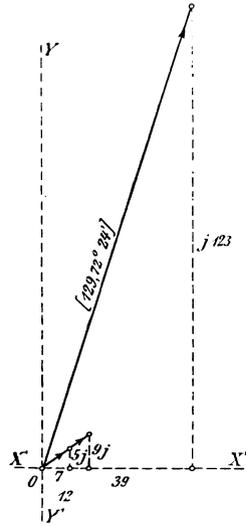


Abb. 222.

In der symbolischen Form:

$$12 + 9j = 15 / \underline{36^\circ 52'} = [15, 36^\circ 52'],$$

weil

$$\sqrt{12^2 + 9^2} = 15 \text{ und } 9/12 = \text{tg } 36^\circ 52'$$

und

$$7 + 5j = 8,6 / \underline{35^\circ 32'} = [8,6, 35^\circ 32'],$$

weil

$$\sqrt{7^2 + 5^2} = 8,6 \text{ und } 5/7 = \text{tg } 35^\circ 32'.$$

Also

$$39 + 123j = 129 / \underline{72^\circ 24'} = [129, 72^\circ 24'],$$

weil

$$\sqrt{39^2 + 123^2} = 129 \text{ und } 123/39 = \text{tg } 72^\circ 24'.$$

2. Es ist das Produkt der konjugierten Zahlen $20 + j \cdot 18,5$ und $20 - j \cdot 18,5$ zu ermitteln. Das Produkt bildet sich in folgender Weise:

$$(20 + j \cdot 18,5) \cdot (20 - j \cdot 18,5) = 20^2 + 18,5^2 + j(20 \cdot 18,5 - j \cdot 20 \cdot 18,5) \\ = 20^2 + 18,5^2 = 742,25.$$

Es ist

$$20 + j \cdot 18,5 = 27,3 / \underline{42^0 46'}$$

und

$$20 - j \cdot 18,5 = 27,3 / \overline{42^0 46'}$$

also

$$(20 + j \cdot 18,5) \cdot (20 - j \cdot 18,5) = 27,3^2 / \underline{42^0 46' - 42^0 46'} = 742,25,$$

also reell.

Da die Division eine Zahl finden lehrt, die, mit dem Divisor multipliziert, den Dividend gibt, ergibt sich folgende Divisionsregel:

$$\mathfrak{R} = r_1 : r_2 = (r_1 : r_2)_{(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} | \varphi_1 - \varphi_2.$$

Der absolute Wert $|\mathfrak{R}|$ ist gleich also dem Quotienten $r_1 : r_2$; sein Winkel $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ ist dem Unterschiede $\varphi_1 - \varphi_2$ gleich.

In einem Stromkreise mit der EMK $\mathfrak{E} = E_1 + jE_2$ und dem Strom $\mathfrak{S} = J_1 + jJ_2$ ist der Richtungswiderstand

$$\mathfrak{R} = \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{S}} = \frac{E_1 + jE_2}{J_1 + jJ_2} = \frac{(E_1 + jE_2)(J_1 - jJ_2)}{J_1^2 + J_2^2} \\ = \frac{E_1J_1 + E_2J_2}{J_1^2 + J_2^2} + j \frac{E_2J_1 - E_1J_2}{J_1^2 + J_2^2} = r + jx$$

also

$$r = \frac{E_1J_1 + E_2J_2}{J_1^2 + J_2^2} \text{ und } x = \frac{E_2J_1 - E_1J_2}{J_1^2 + J_2^2}.$$

E_1 und J_1 sind die aktiven oder Wattkomponenten, E_2 und J_2 die reaktiven oder wattlosen Komponenten von Spannung und Strom.

Der reziproke Wert \mathfrak{G} des Richtungswiderstandes $\mathfrak{R} = r \pm jx$ ergibt sich auf folgende Weise:

Sei

$$\mathfrak{G} = 1/\mathfrak{R} = g + jb = \frac{1}{r \pm jx},$$

dann folgt nach Rationalmachung durch Multiplikation von Zähler und Nenner mit der konjugierten Größe

$$g + jb = \frac{r \mp jx}{r_2 + x_2} = \frac{r \mp jx}{|\mathfrak{R}|^2},$$

und da die reellen und imaginären Glieder rechts und links einander gleich sein müssen, folgt

$$g = r/|\mathfrak{R}|^2; \quad b = \mp x/|\mathfrak{R}|^2.$$

Potenzieren und Radizieren von Richtungszahlen. Für positive ganze Exponenten entspricht die Potenz dem Produkte aus gleichen Faktoren, also:

$$\mathfrak{R} = r^n = [r, \varphi]^n = [r^n, (n\varphi)]$$

oder

$$(x + jy)^n = [r(\cos \alpha + j \sin \alpha)]^n = r^n [\cos n\alpha + j \sin n\alpha],$$

das Moivresche Theorem.

Bildlich wird die Potenzierung durch n -fache Aneinanderreihung von ähnlichen Dreiecken OA_0A_1, OA_1A_2, \dots nach Abb. 223 erreicht. Die Punkte A liegen auf einer logarithmischen Spirale, die Seiten $A_0A_1, A_1A_2 \dots$ werden bei unendlich kleinem α zu Tangenten. Sie bilden daher einen konstanten Winkel mit ihren Fahrstrahlen.

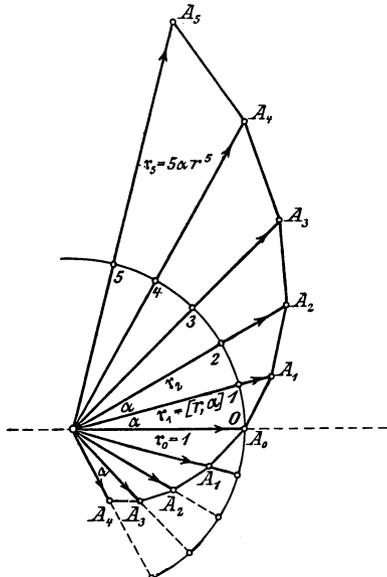


Abb. 223.

Der Linienzug $A^{-1}A_0A_1 \dots$ der logarithmischen Spirale der Abb. 223 besteht, wie aus der Ähnlichkeit der Dreiecke folgt, aus Strahlen, die wie die Glieder einer geometrischen Reihe anwachsen, während ihre Richtung stetig abschwengt.

Der Richtungswiderstand kann also entstanden gedacht werden durch Drehstreckung, d. h. durch stets Anwachsen des absoluten Wertes nach einer geometrischen Reihe unter gleichzeitiger Drehung.

Bei der Radizierung kommt anstatt der Vervielfältigung die entsprechende Winkelteilung, statt des Exponenten n also $1/n$ in die Rechnung, also

$$[r, \varphi]^{\frac{1}{n}} = \left[\frac{1}{r^n}, \frac{1}{n} \varphi \right]$$

oder

$$[r (\cos \varphi + j \sin \varphi)]^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\varphi}{n} + j \sin \frac{\varphi}{n} \right].$$

Mit diesem Satz kann man noch eine weitere Form für die Richtungsgröße finden.

Exponentielle Form. Bei Entwicklung des Ausdruckes $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ nach dem Binomialsatze wird für $n = \infty$ der Wert $2,718 = \varepsilon$, die Basis der natürlichen Logarithmen, erhalten.

Es ist also für $n = \infty$

$$\left(1 + \frac{\varphi}{n}\right)^n = 1 + \frac{\varphi}{1!} + \frac{\varphi^2}{2!} + \dots = \varepsilon^\varphi$$

und

$$\left(1 + j \frac{\varphi}{n}\right)^n = 1 + \frac{j\varphi}{1!}$$

$$+ \frac{j^2 \varphi^2}{2!} + \dots = \varepsilon^{j\varphi}.$$

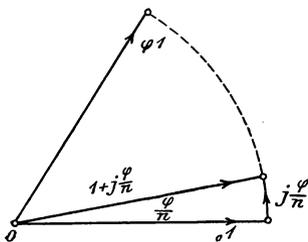


Abb. 224.

Der Ausdruck links ist aber nach Abb. 224 die n -Potenz des Radius $\left[1, \frac{\varphi}{n}\right]$, für welchen sich nach dem Moivreschen Theorem $\left[1, \frac{\varphi}{n}\right]^n =$

$= [1, \varphi] = \varepsilon^{j\varphi}$ ergibt. Und statt eine Richtungsgröße symbolisch nach der Polarform auszudrücken, kann man sie also auch schreiben:

$$(\cos \varphi + j \sin \varphi) = \varepsilon^{j\varphi},$$

woraus

$$[r, \varphi] = r (\cos \varphi + j \sin \varphi) = r \varepsilon^{j\varphi}.$$

Dies ist die exponentielle Normalform, die von Euler herührt.

Über ebene Vektoren. Ein Vektor entspricht entweder seinem physikalischen Vorgange unmittelbar, wie die gerichtete ruhende Strecke der mechanischen Kraft und wie die Drehung einer Strecke um ihren Anfangspunkt einem Drehvektor, oder erst mittelbar, wie der zeitliche Drehvektor dem zeitlichen Verlauf des Wechselstromes. Da aber das innerste Wesen des physikalischen Vorganges dabei eigentlich unberührt bleibt, wie bei der angeführten mechanischen Kraft, so ist diese Unterscheidung durchaus nicht scharf.

Beide Vektorarten verdanken ihre Entwicklung der Mechanik. So haben Stevin mit seiner Untersuchung über die schiefe Ebene um 1605, J. Newton 1668 und etwas später Varignon das Parallelogramm der Kräfte, der Geschwindigkeiten und der Beschleunigungen, der Streckenzusammensetzung, geschaffen.

Die Zusammensetzung zweier Drehbewegungen in der Ebene hat Roberval 1668 als Geometer, Fresnel 1821 bei der Wellentheorie des Lichtes und Möbius 1827 in seinem baryzentrischen Kalkül behandelt. Die Addition der Augenblickswerte einer einfach-periodischen oder welligen Größe überträgt sich auf ihre Scheitelwerte, wodurch die ruhenden und drehenden Vektoren in Beziehung treten.

Diese grundlegende Erkenntnis von der Zusammensetzung zweier Kreise durch die geometrische Addition ihrer Durchmesser liest sich aus Abb. 225 heraus.

Zwei Drehvektoren $r_1 = OA$ und $r_2 = OB$ seien gegeben; ihre Summe $r_1 + r_2 = \mathfrak{R}$ wird gesucht. Addiert man ihre Kreise k_1 und k_2 , indem man die augenblicklichen Werte der Drehvektoren, die Kreissehnen $Oa + Ob = Oc$ zusammensetzt, so findet sich die Diagonale $\mathfrak{R} = OC$ des Parallelogramms $OACB$ als Durchmesser des Summenkreises k , wie die Projektion Oa' und $Ob' = a'C$ zeigt. Aus der Kongruenz der Dreiecke OBb' und CAa' folgt noch die Gleichheit der auf der Diagonalen senkrechten Strecke $Aa' = a''O$ und $Bb' = b''O$. Für jede andere Lage Oc ist Aa' von Bb' verschieden groß, nur die Diagonale bringt die Aufhebung der gleichen und entgegengesetzten Komponenten Aa' und Bb' mit sich. Die Addition zweier Vektoren r_1 und r_2 unter beliebigem Phasenwinkel φ geht demnach aus dem besonderen Falle $\varphi = 90^\circ$ gewissermaßen als einfachstem Fall hervor¹⁾.

¹⁾ Auch für das Produkt zweier Vektoren (Seite 210) eignet sich diese Darstellung trotz der dabei auftretenden Frequenzen. Alb. A. Nims, Electrician. 22. Mai 1914.

Der trigonometrische Beweis für zwei Sinuslinien ist ebenso leicht, aber nicht so anschaulich¹⁾.

Der Satz vom Kräfteparallelogramm hat in der Statik seinen Ausgang von zwei gleichen unter 90° abweichenden Kräften genommen. Für diese konnte man schier beweislos die Lage der Schlußkraft mit Verschmähung der Erfahrung finden. Mit diesem Sonderfall glaubten Daniel Bernoulli und Poisson auch den allgemeinen beweisen zu können. Der Bolyaische Kritizismus der Geometrie ist von diesem Punkte lange vor der jetzigen physikalischen Relativitätstheorie ausgegangen. Die Dynamik hat erst die wahre Wurzel finden lassen: Die gleichzeitige oder aufeinanderfolgende Wirkung zweier unabhängiger Ursachen, hier der beiden Kräfte, führen zum gleichen Endergebnis.

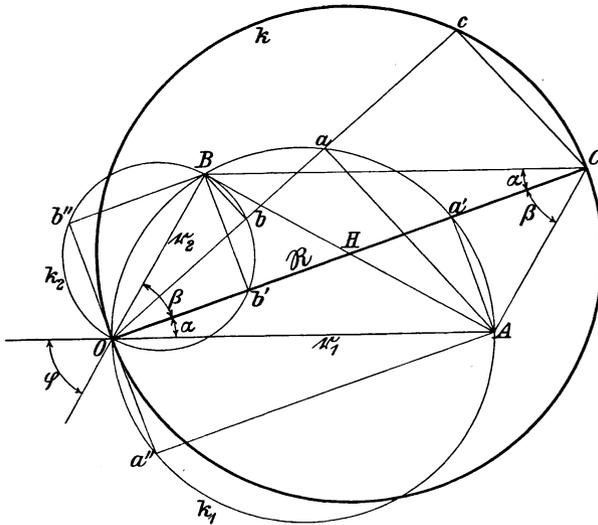


Abb. 225.

Dieses Deckungs- oder Superpositionsprinzip spielt auch in der Elektrotechnik, wie man sehen wird, dieselbe wichtige Rolle wie in der Mechanik.

Die Drehvektoren können sich entweder auf den Ort oder auf die Zeit oder auf beide beziehen. Die magnetischen Felder der Mehrphasenströme zwingen, Lage und Zeit im Polardiagramm streng zu trennen.

Bei den langen Leitungen mit gleichmäßig verteilter Induktivität und Kapazität kommen noch andere Behandlungsweisen der durch komplexe Zahlen darstellbaren ebenen Vektoren vor, auf die erst später näher eingegangen werden soll.

Hier sind einzelne Erläuterungen gegeben, die vielleicht manchem Leser schon bekannt waren und nur die Grundlage bilden, worauf sich die Leitungsrechnung aufbaut.

¹⁾ Emde, F.: ETZ 1901, S. 771.

8. Parallelschaltung von Richtungswiderständen.

a) **Rein Ohmscher parallel rein induktivem Widerstand.** Zuerst soll die Nebeneinsetzung eines Ohmschen mit einem rein induktiven Widerstande betrachtet werden (Abb. 226).

Die Größe der Spannung E ist natürlich auf den Ersatzwiderstand ohne Einfluß. Man darf deshalb den Grundkreis K , der zur reziproken Darstellung dienen soll und die Ströme ergibt, gleich der Höhe OH des Dreiecks OPP' wählen, dessen Katheten OP und OP' bzw. dem Ohmschen Widerstand X und dem induktiven Y oder der Richtungszahl jY entsprechen. Die ihnen zugewiesenen Strecken OQ und OQ' bedeuten die Ströme i_x und i_{0y} , welche, geometrisch addiert, durch das Parallelogramm $OQHQ'$ zum Gesamtstrom

führen, weil H im Grundkreis liegt. Der Höhenwiderstand des rechtwinkligen Dreiecks schaltet seine beiden Kathetenwiderstände parallel, und umgekehrt wird

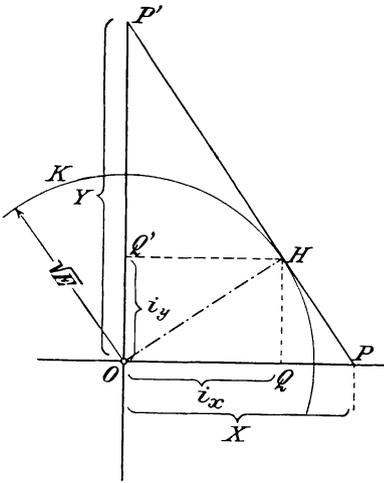


Abb. 226.

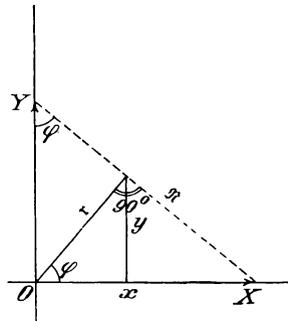


Abb. 227.

ein Richtungswiderstand r in zwei um 90° voneinander abweichende parallele Teilwiderstände, $X \parallel Y$ durch die Katheten gespalten (Abb. 227).

Sind viele Richtungswiderstände parallel zusammenzufassen, so spaltet man jeden auf zwei beliebig rechtwinklige Achsen entweder zeichnerisch oder rechnerisch und setzt die gleichnamigen Spaltkomponenten zusammen. Mit diesen Schlußkomponenten wird der gesuchte Richtungswiderstand durch die Höhe des Dreiecks ermittelt.

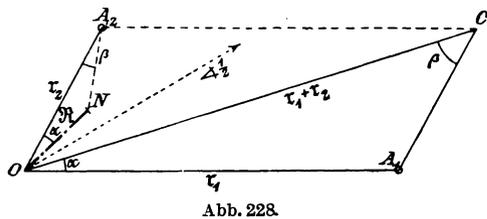


Abb. 228.

b) **Weitere zeichnerische Methoden.** Wenn nach Abb. 228

$$\frac{1}{\Re} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \text{ sein soll, muß } \Re = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \text{ oder } \frac{\Re}{r_2} = \frac{r_1}{r_1 + r_2}$$

sein. D. h.: der gesuchte Widerstand \mathfrak{R} verhält sich zu r_2 wie r_1 zur Diagonale von r_1 und r_2 , was in der Ähnlichkeit der Dreiecke OA_1C und ONA_2 (Abb. 228) begründet ist. Um dies rechnerisch einzusehen, werde angenommen, daß $\varphi_1 = 0$ sei, also r_1 mit der Richtung der Ohmschen Widerstände zusammenfiele. Dann ist

$$[R, \varphi] = \frac{[r_1, 0] \cdot [r_2, \varphi_2]}{[d, \alpha]},$$

wobei d die Diagonale OC bezeichnet.

Die Größe von \mathfrak{R} wird durch die Auftragung des Winkels β wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke ONA_2 und OA_1C bestimmt. Das Dreieck OA_2N besagt auch, daß der Ersatzwiderstand $ON = OA_2 + (-NA_2)$ ist, d. h. daß er auch durch Vorschaltung eines negativen Widerstands in der Größe:

$$NA_2 = r_2 \frac{r_2}{(r_1 + r_2)} = \frac{r_2^2}{r_1 + r_2}$$

vor r_1 erhalten werden kann. Man kann demnach jede Nebenschaltung durch eine Reihenschaltung ersetzt denken.

Zwei gleiche, aber phasenverschobene Widerstände führen bei ihrer Parallelschaltung selbstverständlich zur Winkelhalbierenden, wie in

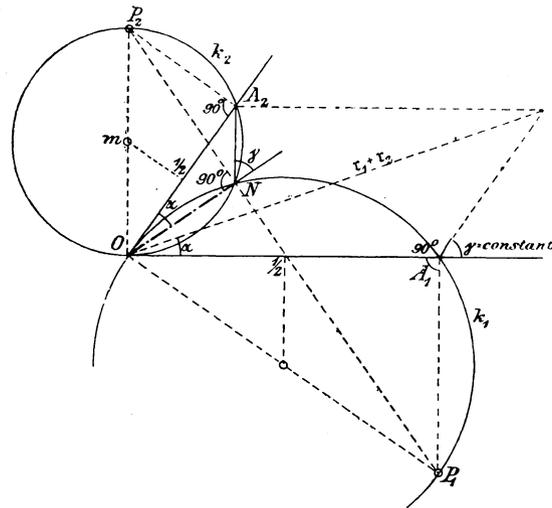


Abb. 229.

Abb. 229 ersichtlich, wonach $\mathfrak{R} = \frac{1}{2} r \cos \frac{1}{2} \varphi$ ist.

Wie ändert sich der Ersatzwiderstand zweier Richtungswiderstände r_1, r_2 , wenn bei konstantem r_2 der Richtungswiderstand r_1 seiner absoluten Größe nach von Null bis Unendlich anwächst? Im Dreiecke ONA_2 verbleibt dabei der Winkel bei N konstant (Abb. 230); es beschreibt also der Endpunkt N des Ersatzwiderstandes einen Kreis k_2 . Das gleiche gilt, wenn umgekehrt

r_2 konstant und r_1 veränderlich wird, wodurch der Kreis k_1 als geometrischer Ort erscheint.

Abb. 230.

Wenn der Endpunkt von r_2 einen Kreis mit dem Mittelpunkt O beschreibt, oder sich auf einer beliebigen Geraden bewegt, so beschreibt der Endpunkt von \mathfrak{R} noch immer Kreisscharen, welche in Diagrammen von Maschinen und Motoren praktische Bedeutung als geometrische Örter erlangen.

Durch diese Betrachtung gewinnt man auch unmittelbar den Beweis für eine andere Konstruktion der Parallelschaltung. Es wird in Abb. 230

$$OP_2 \perp OA_1 \quad OP_1 \perp OA_2$$

$$AP_1 \perp OA_1 \quad A_2P_2 \perp OA_2$$

und dann P_1P_2 gezogen und ON senkrecht darauf gefällt. Dieses Lot ist der gesuchte Ersatzwiderstand.

Ein weiteres lehrreiches Verfahren ergibt sich nach Abb. 231. Die beiden gegebenen Richtungswiderstände $OA = r_1$ und $OB = r_2$ werden in Komponenten derart gespalten, daß ein Paar derselben zusammenfallen. Man errichtet in A und B Senkrechte, die sich in E schneiden. r_1 spaltet sich in OE und OA'' , r_2 in OE und OB'' . Die beiden gleichen OE geben parallelgeschaltet die halb so große OG als Ersatz, während OA'' und OB'' zu $OF = \frac{1}{2}OC''$ führen. Verbindet man G mit F und errichtet von O die Senkrechte OC darauf, so muß dies \mathfrak{R} sein. Das Doppelte von OC weist auf C_1 im Kreise über OE hin.

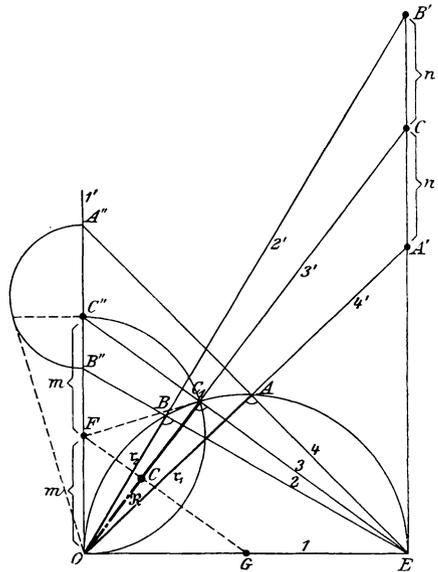


Abb. 231.

Mit den vier harmonischen Strahlen 1, 2, 3 und 4 und den abgeleiteten 1', 2', 3' und 4' läßt sich die Gleichheit von $A'C' = B'C'$ beweisen, wozu auch die Bemerkung führt, daß OA' und OB' den Strömen i_1 und i_2 entsprechen.

Die vorstehenden Betrachtungen enthalten übrigens einen tiefen Sinn: Bei den Ohmschen Widerständen erschien die harmonische Punktreihe. Nun findet man die naturgemäße Erweiterung für Wechselstromwiderstände in den harmonischen Punkten $OBCA$ auf der Kreislinie.

Diese harmonischen Kreiseigenschaften lassen die einfachste Lösung zur Bestimmung des Richtungswiderstandes \mathfrak{R} zu.

Sie soll hier aber auf Grund der genannten Kreisverwandtschaft gegeben werden.

In Abb. 232 wurde der Halbmesser ρ des Grundkreises k als das geometrische Mittel der absoluten Werte $|r_1|$ und $|r_2|$ der Widerstände gewählt, also $\rho = \sqrt{|r_1| \cdot |r_2|}$ durch die Berührende On an den über $OA_1 - O(A_2) = OA_1 - OA_2 = |r_1| - |r_2|$ geschlagenen Halbkreis. Dadurch kommen die zugeordneten Punkte von A_1 , nämlich (A_2) und von A_2 , nämlich (A_1) , bezüglich mit A_1 und A_2 um die Halbierungslinie des Winkels A_1OA_2 symmetrisch zu liegen. Da aber

$$|r_1| = OA_1 = \frac{\rho^2}{O(A_2)} = \frac{E}{|i_1|} \text{ und } |r_2| = OA_2 = \frac{\rho^2}{O(A_1)} = \frac{E}{|i_2|}$$

ist, d. h. die Ströme sich umgekehrt wie deren Widerstände verhalten, so kann man diese addieren. Dies kann durch den Hältungspunkt (H) geschehen, so daß vektoriell $O(H) = \frac{1}{2}(i_1 + i_2)$ den halben Gesamtstrom bedeutet.

Der Strecke (A_2) (A_1) entspricht reziprok der durch die Punkte O, A_1 und A_2 geschlagene Kreis K mit dem Mittelpunkt \mathfrak{M} ; daher ist dem Punkte (H) der Kreispunkt M zugeordnet. Die Strecke $OM = E:(1/2i) = 2OD$ muß demzufolge der doppelte Wert des gesuchten Widerstandes $\mathfrak{R} = OD$ sein.

Seine Lage ist durch die Winkelgleichheit A_1OH und MOA_2 bestimmt. Die Bögen A_1C und MA_2 gehören also gleichen Umfangswinkeln α

an; sie sind demnach gleich groß. Demzufolge liegt auch der Polpunkt P von A_1A_2 in bezug auf den Umkreis K auf der Geraden OM , also die Berührenden t_1 und t_2 in den bezüglichen Endpunkten A_1 und A_2 an den Umkreis K schneiden sich im Punkte P . Die Strecke OM ist das harmonisch-geometrische Mittel der Richtungsstrecken OA_1 und OA_2 und die Punkte OA_1MA_2 liegen auf dem Umkreis harmonisch. Die Hälfte des harmonischen Mittels ist der gesuchte Widerstand der Parallelschaltung, wie schon die Gleichung $\frac{(2\mathfrak{R})}{2} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$ besagte.

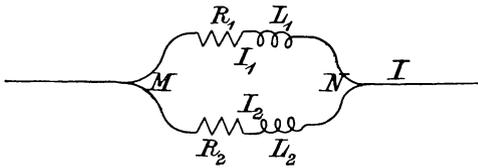


Abb. 233.

Beispiel.

Ein Beispiel möge die verschiedenen Methoden erläutern:

Zwei Widerstände (Abb. 233) $r_1 = 20$ Ohm, $L_1 = 0,04$ Henry; $r_2 = 15$ Ohm,

$L_2 = 0,05$ Henry sollen parallel geschaltet werden. Gesucht der Ersatzwiderstand und der Gesamtstrom bei einer Spannung von 200 V und der Frequenz $\nu = 100$ Pers./Sek.

Trigonometrische Methode. Bei der trigonometrischen Methode, die im allgemeinen die unbequemste, dafür aber anspruchsloseste ist, werden vor allem die Widerstandswerte der einzelnen Zweige berechnet. Man erhält

$$|\mathfrak{R}_1| = \sqrt{r_1^2 + L_1^2 \omega^2} = \sqrt{20^2 + (0,04 \cdot 2\pi \cdot 100)^2} = 32,1 \text{ Ohm,}$$

$$|\mathfrak{R}_2| = \sqrt{r_2^2 + L_2^2 \omega^2} = \sqrt{15^2 + (0,05 \cdot 2\pi \cdot 100)^2} = 34,8 \text{ Ohm,}$$

$$\text{tg } \varphi_1 = L_1 \omega / r_1 = (0,04 \cdot 2\pi \cdot 100) / 20 = 1,2566; \quad \text{also } \varphi_1 = 51^\circ 29',$$

$$\text{tg } \varphi_2 = L_2 \omega / r_2 = (0,05 \cdot 2\pi \cdot 100) / 15 = 2,09; \quad \text{also } \varphi_2 = 64^\circ 29'.$$

Nun berechnet man den Winkel β (Abb. 234). Aus Dreieck $ACF \cong$ Dreieck OBD folgt

$$\text{tg}(90^\circ - \varphi_2 + \beta) = \frac{r_1 + r_2}{L_1 \omega + L_2 \omega} = \frac{20 + 15}{25,132 + 31,141}$$

oder, da $\varphi_2 = 64^\circ 29'$

$$\text{tg}(25^\circ 21' + \beta) = \frac{20 + 15}{25,132 + 31,141}, \text{ woraus } \beta = 6^\circ 22'.$$

Aus Dreieck OAC folgt:

$$\alpha + \beta + [180 - (\varphi_2 - \varphi_1)] = 180^\circ$$

oder

$$\alpha = 6^\circ 45'$$

und mithin

$$\varphi_2 - \alpha = \varphi = 57^\circ 44'.$$

Die Diagonale OC' berechnet sich aus dem Dreieck entweder nach dem Carnotschen oder nach dem Sinuslehrsatz der Trigonometrie, und man findet für die Länge der Diagonale $d = 66,47$, woraus sich

$$|\mathfrak{R}| = |\mathfrak{R}_1| |\mathfrak{R}_2| / d = 16,8 \text{ Ohm}$$

ergibt.

Der Gesamtstrom J ergibt sich:

$$J = \frac{E}{|\mathfrak{R}|} = \frac{200}{16,8} = 11,9 \text{ Amp.}$$

Für die Zweigströme folgt:

$$i_1 = \frac{E}{|\mathfrak{R}_1|} = \frac{200}{32,1} = 6,23 \text{ Amp. und } i_2 = \frac{E}{|\mathfrak{R}_2|} = \frac{200}{34,8} = 5,75 \text{ Amp.}$$

Zeichnerisch-rechnerisches Vorgehen: Man zeichnet in Abb. 235 in ein rechtwinkliges Achsensystem die Richtungswiderstände $OA_1 = \mathfrak{R}_1 = [32,1; 51^\circ 29'] = 20 + 25,1j$ und $OA_2 = \mathfrak{R}_2 = [34,8; 64^\circ 29'] = 15 + 31,4j$ und ihre Fußlote B_1C_1 und B_2C_2 ein.

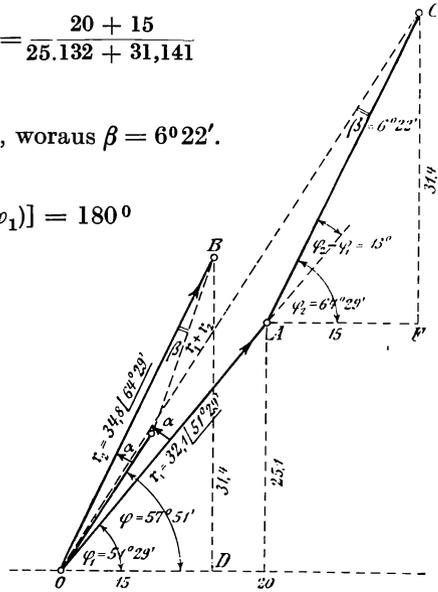


Abb. 234.

Man findet

$$\begin{aligned} X_1 &= OB_1 = 51,55 & Y_1 &= OC_1 = 41,02 \\ X_2 &= OB_2 = 80,78 & Y_2 &= OC_2 = 38,56. \end{aligned}$$

Nun werden die Widerstände X_1, X_2 und Y_1, Y_2 nach der Methode der Parallelschaltung von Ohmschen Widerständen parallel geschaltet.

Man erhält so $X = OB = 31,47$ und $Y = OC = 19,88$. Verbindet man nun B mit C und fällt von O aus eine Senkrechte OA auf BC , so ist $\overline{OA} = 16,8$ Ohm der gesuchte Widerstand.

Bei der Parallelschaltung von X_1 und X_2 hat man $OB = X$ bestimmt, indem man über B_1B_2 einen Kreis mit dem Mittelpunkt M schlug, an diesen von O aus eine Tangente zog und vom Berührungspunkt Q eine Lotrechte QP zeichnete. Dann war $OB = \frac{1}{2} OP = X$.

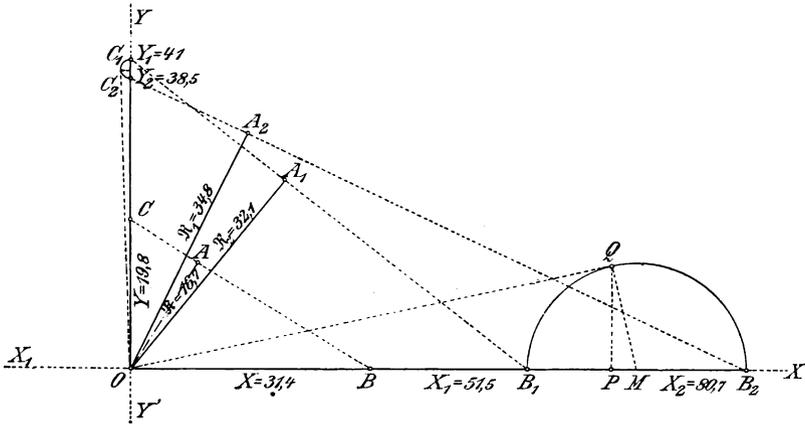


Abb. 235.

Analog wird C gefunden.

Rechnerisches Verfahren:

$$\Re_1 = 20 - 25,1 = [32,1; 51^\circ 29']$$

$$\Re_2 = 15 - 35,4 = [34,8; 64^\circ 29']$$

$$\Re = \frac{\Re_1 \Re_2}{\Re_1 + \Re_2} = \frac{(20 - 25,1 j)(15 - 31,4 j)}{(20 - 25,1 + 15 - 31,4 j)} = 9,2 - 14,5 j,$$

woraus $|\Re| = 16,8$ Ohm und $\text{tg } \varphi = \frac{14,5}{9,0}$, oder $\varphi = 57^\circ 44'$.

$$\Re = [16,8; 57^\circ 44'].$$

9. Beziehungen zwischen den Größen der Reihen- und Parallelschaltung.

In den bisherigen Betrachtungen darf ohne weiteres der Ohmsche Widerstand durch den allgemeineren, den effektiven, ersetzt werden. Die Darstellung gilt weiter nicht nur für Leitungen, sondern sie umfaßt ebenso Transformatoren, Generatoren und Motoren.

Im Höhensatz des rechtwinkligen Widerstandsdreiecks liegt die Wurzel der Kreisdiagramme, wie sie bei asynchronen Motoren, Transformatoren und synchronen Maschinen auftreten.

Alle Maschinen und Apparate können nämlich durch äquivalente oder Ersatzschemata zurückgeführt werden auf die Reihen- und Parallelschaltung von Richtungswiderständen¹⁾. Die Behandlung dieser Ersatzschaltungen fällt jedoch außerhalb des Rahmens dieses Buches. Sie findet sich in den Lehrbüchern bei der Theorie der betreffenden Maschinen und Apparate.

Die bisherigen Ergebnisse lassen eine duale und umkehrbare Gegenüberstellung zu. Es entspricht

der Reihenschaltung dem konstanten Strome \mathfrak{I} der veränderlichen Spannung \mathfrak{E} dem Widerstande \mathfrak{R} der Gesamtspannung $\mathfrak{E} = \mathfrak{I} \Sigma r = \mathfrak{I} \mathfrak{R} = \mathfrak{I} (\Sigma r + j \Sigma x)$	die Nebeneinanderschaltung die konstante Spannung \mathfrak{E} die konstante Stromstärke \mathfrak{I} der Leitwert \mathfrak{G} der Gesamtstrom $\mathfrak{I} = \mathfrak{E} \Sigma g = \mathfrak{E} \mathfrak{G} = \mathfrak{E} (\Sigma g - j \Sigma b)$
--	--

Eine reziproke Verwandtschaft in den rechnerischen Ausdrücken desselben Leitungskreises besteht zwischen der Induktion und der Kapazität $x_2 = +1/C\omega j = -L\omega j$, wonach die Kapazität für die Rechnung als eine negative Induktivität sich ansehen läßt. Die obige duale Beziehung vereint sich in manchen Fällen mit dieser reziproken, so daß gleiche Formelausdrücke hervortreten. So für reihengeschaltete Kondensatoren der Kapazität $C_1, C_2 \dots$ und parallele Induktivitäten $L_1, L_2 \dots$ gleicher Kreisfrequenz.

Induktanzen:
 in Serie $L = L_1 + L_2 + \dots$
 parallel $\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots$
 Gesamtspannung in Reihe
 $V = jJ\omega (L_1 + L_2 + \dots)$,
 Gesamtstrom parallel
 $J = \frac{jV}{\omega} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots \right)$.

Kapazitäten:
 parallel $C = C_1 + C_2 + \dots$
 in Serie $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots$
 Gesamtstrom parallel
 $J = jV \cdot \omega (C_1 + C_2 + \dots)$,
 Gesamtspannung in Reihe
 $V = \frac{jJ}{\omega} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots \right)$.

Aus diesen Beziehungen folgt, daß bei einer Serienschaltung von Kondensatoren die Gesamtspannung sich im umgekehrten Verhältnis der Kapazitäten verteilt, daß also der kleinste der vom gleichen Strome durchlaufenen oder geladenen Wechselstromkondensatoren die höchste Spannung zwischen seinen Belegungen aufweist. Sind nur zwei Kondensatoren in Serie geschaltet, so muß

$$V_1 : V_2 = C_2 : C_1$$

sein.

Bei einem konzentrischen Wechselstromkabel ist die Kapazität C_1 des Innenleiters gegen Erde klein, die des Außenleiters C_2 gegen Erde

¹⁾ S. a. S. 249.

wesentlich größer. Werden Außen- und Innenleiter an eine Wechselspannung V mit der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi\nu$ angeschlossen, so durchfließt derselbe Ladestrom die Kondensatoren C_1 und C_2 . Die Spannung V_1 des Innenleiters gegen Erde wird also wesentlich höher sein als die des Außenleiters V_2 gegen Erde. Und da $V_1 + V_2 = V$ sein muß, folgt

$$V_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \cdot V \quad \text{und} \quad V_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \cdot V.$$

Wenn also C_1 sehr klein gegen C_2 ist, wird V_2 sich dem Grenzwert 0 und V_1 dem Grenzwert V nähern, so daß der Innenleiter fast die ganze Spannung zwischen beiden Leitern als Spannung gegen Erde aufweist.

10. Der einfache Schließungskreis (der Π -Leiter).

An eine aus Hin- und Rückleitung bestehende, durch den Linienzug AB (Abb. 236) dargestellte Leitung mit der Induktivität L und dem Widerstand R sei eine Belastung $J|\varphi_2$ angeschlossen, die der Endspannung E_2 im Punkte B um φ_2 nachteilt.

Sei $OA = E_2$ (Abb. 236) die Spannung am Ende der Linie, OJ der Strom, dann erhält man die erforderliche Anfangsspannung E_1 und ihre Verschiebung gegen J , indem man an OA die Linie AB parallel und gleich JR anlegt, auf AB die Senkrechte $BC = J \cdot L\omega$ errichtet und die Schlußlinie OC zieht. Man hätte auch einfach an die Endspannung OA den Verlust $AC = J|\Re|$ in Richtung des Richtungswiderstandes \Re anlegen können. Man kann aus dem Dreieck OAC der Abbildung folgende Beziehungen ablesen:

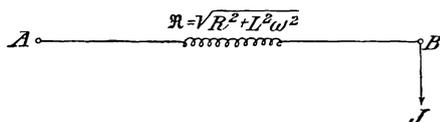


Abb. 236.

$$E_1 = \sqrt{E_2^2 + (|\Re|J)^2 - 2E_2|\Re|J \cdot \cos(180^\circ - \vartheta)} \\ = \sqrt{E_2^2 + e^2 + 2E_2e \cos \vartheta}. \tag{1}$$

Hierin ist der Verlust in dem Richtungswiderstande $J|\Re| = e$ gesetzt und die Phasenverschiebung zwischen dieser Spannung e und der Endspannung mit ϑ bezeichnet.

Es sind im ganzen vier Winkel der Phasenverschiebung zu unterscheiden. Wir nennen

- $\sphericalangle (E_1, J) = \varphi_1$ positiv, wenn J hinter E_1 liegt
- $\sphericalangle (E_2, J) = \varphi_2$ „ „ J „ E_2 „
- $\sphericalangle (e, J) = \lambda$ „ „ J „ e „
- $\sphericalangle (\varphi_2 - \lambda) = \vartheta$ „ „ e „ E_2 „

In Abb. 237 ist ϑ also negativ und gleich $\lambda - \varphi_2$ zu stellen. Das Zeichen λ soll auf Leitung deuten und $\cos \lambda$ der Leitungsfaktor der Leitung sein, so daß der Wirkwiderstand $R = \Re \cos \lambda$, der Blindwiderstand $x = L\omega = \Re \sin \lambda$ ist.

Man kann aus der letzten Gleichung oder $\triangle OGC$ der Abbildung selbst auch ablesen

$$E_1 = \sqrt{E_2^2 + J^2(R^2 + L^2\omega^2) + 2E_2J(R \cdot \cos \varphi_2 \pm L\omega \sin \varphi_2)}, \quad (1a)$$

wobei das doppelte Vorzeichen sich auf Winkel $\varphi_2 \geq \frac{\pi}{2} - \lambda$ bezieht.

Führt man hierin die Verhältnisse $J R/E_2 = p_2$ und

$$J x/E_2 = J L\omega/E_2 = q_2$$

ein, so geht die Gleichung über in

$$E_1 = E_2 \sqrt{1 + p_2^2 + q_2^2 + 2(p_2 \cos \varphi_2 \pm q_2 \sin \varphi_2)},$$

woraus unter Vernachlässigung höherer Glieder die relative Spannungsschwankung angenähert

$$\eta \approx \frac{E_1 - E_2}{E_2} \approx p_2 \cos \varphi_2 \pm q_2 \sin \varphi_2 \quad (2)$$

oder die Spannungsdifferenz $\Delta E = AG$ (Abb. 237)

$$\Delta E = E_1 - E_2 \approx RJ \cos \varphi_2 \pm xJ \sin \varphi_2. \quad (3)$$

Der Unterschied der Spannungen ΔE wird gefunden, indem man zum Spannungsverlust, den die Wattkomponente $J \cos \varphi_2$ des Stromes im Widerstand R der Leitung hervorruft, den Spannungsverlust hinzufügt, den die wattlose Komponente $J \sin \varphi_2$ des Stromes in der Reaktanz x der Leitung erzeugt.

(Für $\varphi_2 < \frac{\pi}{2} - \lambda$.)

Der Unterschied der Spannungen kann hier positiv, null oder negativ werden. Der Leistungsfaktor am Anfang ergibt sich, wenn man die Lote AD und BF zieht

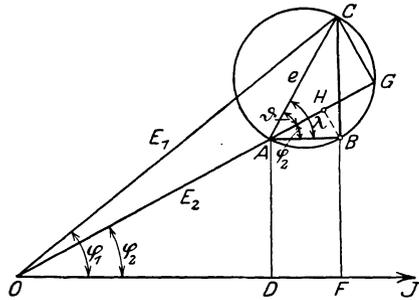


Abb. 237.

$$\cos \varphi_1 = \frac{E_2 \cos \varphi_2 + RJ}{E_1} \quad (4)$$

und
$$\sin \varphi_1 = \frac{E_2 \sin \varphi_2 + L\omega J}{E_1}. \quad (5)$$

Schlägt man (Abb. 237) über $AC = Jx$ einen Kreis, zieht $OA = E_2$ bis zum Schnittpunkte G durch und fällt die Lote BH und CG , dann stellt offenbar AG mit größter Annäherung den Unterschied ΔE der Spannungen vor. Denn $\Delta E = AG + \frac{1}{2}(GC)^2$.

Zeichnet man in relativem Maße, indem man $AB = p_2 E_2$, $BC = q_2 E_2$ wählt, dann wird offenbar

$$\begin{aligned} \eta = \frac{\Delta E}{E_2} &= (p_2 \cos \varphi_2 \pm q_2 \sin \varphi_2) + \frac{p^2 + q^2}{2} \\ &= \frac{AG}{OA} + \frac{1}{2} \left(\frac{GC}{OA} \right)^2. \end{aligned} \quad (2a)$$

Der quadratische Ausdruck kann meistens vernachlässigt werden.

a) Zeichnerische Behandlung. Abb. 237 läßt sich auch leicht zur Veranschaulichung des Einflusses verwenden, den der Leistungsfaktor der Belastung oder die Größe des Richtungswiderstandes der Leitung selbst auf Phase und Größe der Endspannung bei gegebener Anfangsspannung besitzen. Man braucht nur das für eine gegebene Leitung unveränderliche

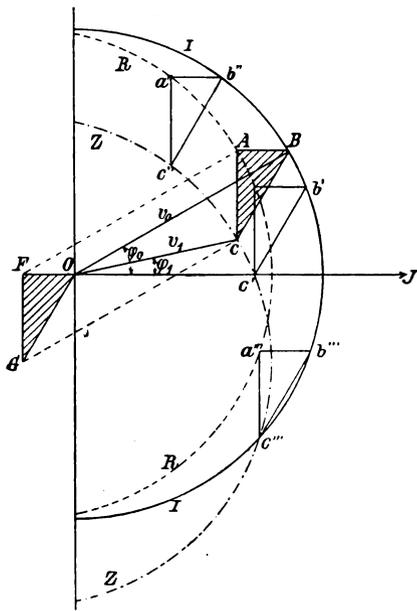


Abb. 238.

keinen Spannungsverlust auf, weil die Spannung $E_2 = Oc'''$ beträchtlich gegen den Strom verzögert ist, oder weil die Belastung eine starke Kondensatorwirkung besitzt. Wächst diese noch weiter an, so tritt auf dem unteren Teile zwischen den Kreisen I und Z Spannungszunahme ($E_2 > E_1$) ein, was nur bei induktiver Linie möglich ist.

Soll nun das Verhalten der Linie untersucht werden, wenn der Strom J am Ende der Leitung nach Richtung und Größe sich ändert, so läßt sich dies rein zeichnerisch durchführen (Abb. 239).

Es sei für eine Leitung mit $R = 2$ Ohm, $L\omega = 5$ Ohm die konstante zugeführte Spannung $E_1 = 100$ Volt. Für die Ströme $J = 2,5; 5; 7,5 \dots$ Amp. ergeben sich dann die Ohmschen Verluste $JR = 5, 10, 15$ Volt und die Mittelpunkte $G_1, G_2, G_3 \dots$ der Kreise mit dem Strahl $OA = E_1 = 100$ Volt. Diese Kreisschar ist der eine geometrische Ort von E_2 , den zweiten Ort ergeben die Strahlenbündel OA, OB, OC unter den Phasenwinkeln φ_2 gegen die feste Stromachse OJ . Die Schnittpunkte beider Örter ergeben die Endpunkte von E_2 , und Parallele zu OG durch diese Schnittpunkte bis zum Grundkreise OAB ergeben die nur der Phase nach veränderliche Anfangsspannung E_1 . Diese Konstruktion ist der Deutlichkeit halber in Abb. 239 nur für $\cos \varphi = 0,9$ durchgeführt.

liche Dreieck des Richtungswiderstandes ABC parallel mit sich selbst zu verschieben, dann wandern in Abb. 238 die Punkte A, B, C auf den gleichen Kreisen R, I, Z mit dem Strahl $OB = E_1$ und den Mittelpunkten F, O, G , während die Lage OJ des Stromes unverändert bleibt.

Hat die konstante Anfangsspannung die Lage OB , so ist die Endspannung nach Größe und Lage für induktionsfreie Leitung durch OA , für induktive Leitung durch Oc gegeben. Soll die Endspannung bei induktiver Linie phasengleich mit dem Strome sein, so muß sie die Größe und Lage Oc' haben. Die zugehörige Anfangsspannung ist Ob' . Für den Punkt c''' sind Anfangs- und Endspannung gleich groß, aber um den Winkel $c'''Ob'''$ gegeneinander verschoben. Es tritt also hier

Trägt man diese Ergebnisse in ein rechtwinkliges Achsensystem ein, so erhält man zunächst in Abb. 240 a für die drei im oberen Teile der Abb. 239 gezeichneten Strahlen OA, OB, OC mit den Leistungsfaktoren $\cos \varphi = 0,7, 0,9$ und 1 die Charakteristik $E_2 = f(J)$ und die in Abb. 240 b zusammengestellten Werte der Phasenverschiebung φ_1

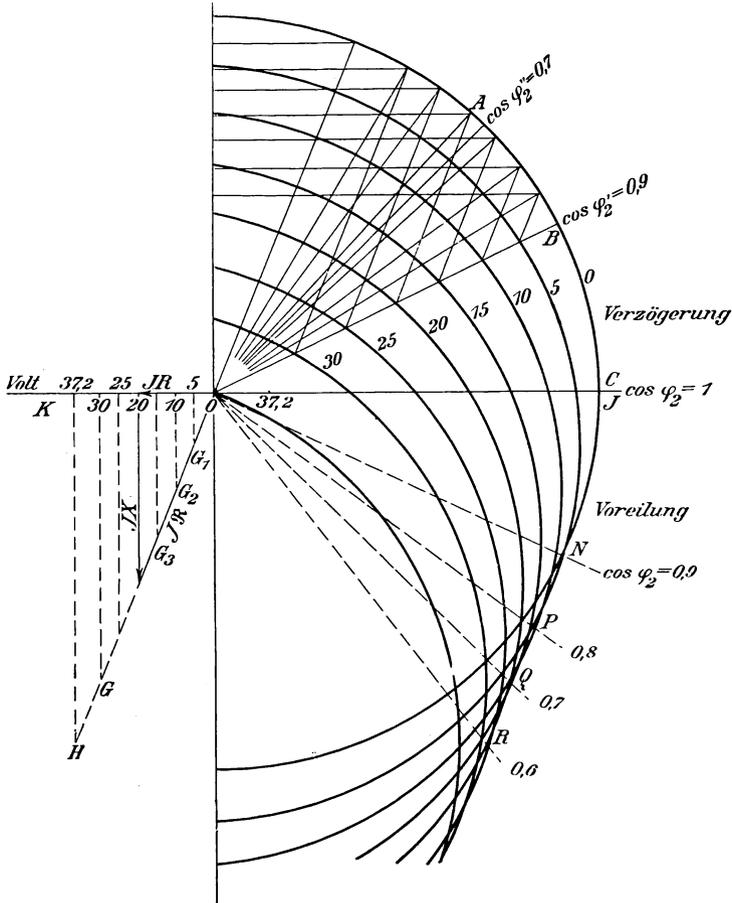


Abb. 239.

zwischen E_1 und J bzw. des Leistungsfaktors am Anfang der Linie. Man kann daraus die Nutzleistungen am Ende der Leitung und die Gesamtleistung an ihrem Anfang ermitteln und in Abb. 240a eintragen. Man sieht dann folgendes:

Für jeden Wert der Phasenverschiebung am Ende der Leitung gibt es einen Wert des Stromes, der der größten durch die Linie bei konstanter Anfangsspannung übertragbaren Leistung entspricht.

Bei einem bestimmten Stromwerte ist die Leistung am Ende der

Leitung Null. Die Leitung selbst verzehrt also die ihr zugeführte Leistung. Dieser Stromwert J_k ergibt sich zeichnerisch durch Abtragen von $OA =$

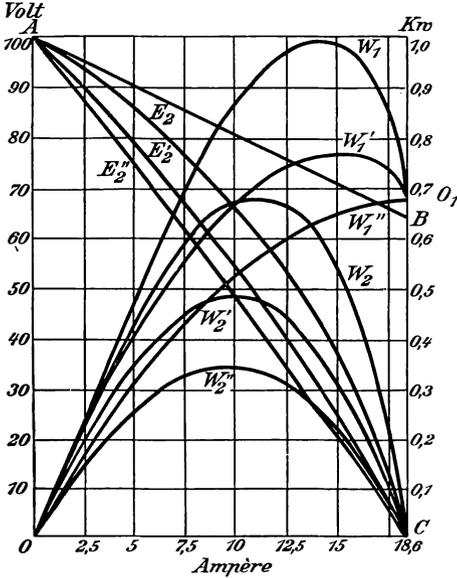


Abb. 240a.

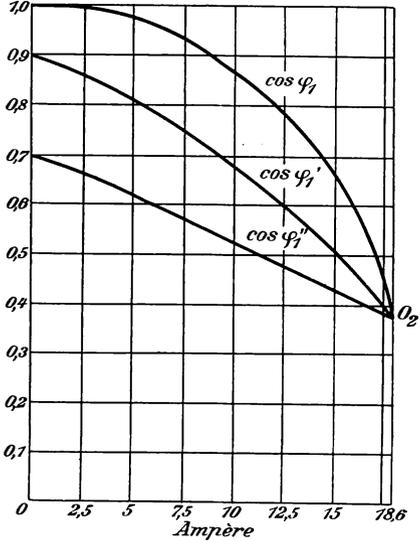


Abb. 240b.

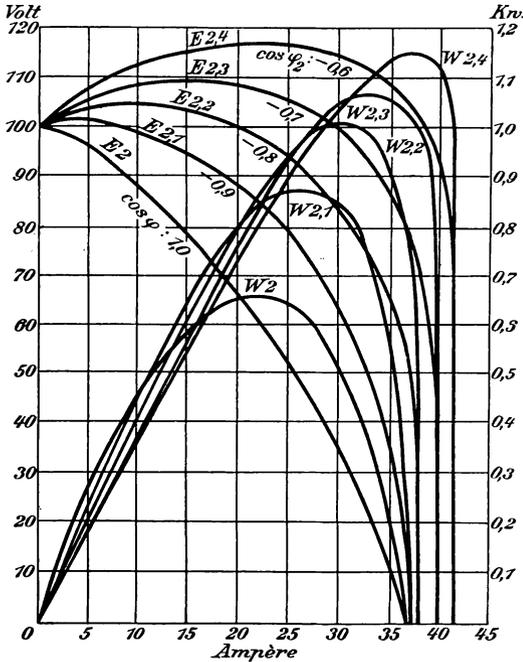


Abb. 241.

= 100 Volt auf OH (Abb. 239) und Messen der Strecke OK im Maßstab der Ströme. Rechnerisch ist

$$J_k = \frac{E}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} = 100 / \sqrt{2^2 + 5^2} = 18,6 \text{ Amp.}$$

Natürlich münden auch alle drei Kurven der aufzuwendenden Leistung in dem Punkt O_1 , Abb. 240 a, der dem Verlust in der Linie, also

$$J_k^2 R = 18,6^2 \cdot 2 = 690 \text{ Watt}$$

entspricht.

Die Anfangsspannung ist stets, auch für induktionsfreie Belastung, gegen den Strom beschleunigt, weil sie die Rückwirkung der Leitung zu überwinden hat. Die drei Kurven

des Leistungsfaktors am Anfang stoßen ebenfalls in einem Punkte O_2 (Abb. 240 b) zusammen, dessen Wert sich ergibt aus

$$J_k E_1 \cos \varphi_1 = J_k E_1 \cos \varphi_1' = J_k E_1 \cos \varphi_1'' = J_k^2 R$$

oder

$$\cos \varphi_1 = \frac{J_k^2 R}{J_k E_1} = \frac{690}{1860} = 0,37.$$

Abb. 241 zeigt schließlich die Kennlinien $E_2 = f(J)$ und die zugehörigen Leistungslinien $W_2 = f(J)$ für konstante Anfangsspannung bei voreilem Strom. Die Verluste sind hier übertrieben groß gewählt, um deutliche Abbildungen zu erhalten.

11. Rechnerische Behandlung.

Wir wollen die vier kennzeichnenden Grundgrößen für diesen Π -Leiter bei Wechselstrom ermitteln.

a) Der relative Spannungsabfall $\varepsilon = \frac{e}{E}$. Der Spannungsabfall e kann aufgefaßt werden als die Spannung $e = J\Re$, die den Strom durch den Richtungswiderstand \Re treibt, wobei vorläufig die Leitung nur Widerstand R und Induktivität L , jedoch keine Kapazität besitzen soll. Wir nennen diese Größe Spannungsabfall und bezeichnen sie mit dem Buchstaben e , während wir bei Gleichstrom den Abfall, der dort auch einem Verlust entsprach, mit $v = JR$ angedeutet haben. Hier ist in Abb. 237 $v = JR$ für den einphasigen Wechselstrom durch die Linie AB angedeutet und an Größe gegeben durch die Beziehung

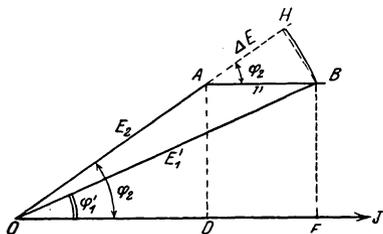


Abb. 242.

$$JR = v = e \cos \lambda,$$

welche für induktionsfreie Leitung mit $L = 0$ und $\lambda = 0$ übergeht in $v = e$.

Für diesen Fall geht Abb. 237 über in Abb. 242 und Gl. (1a) in

$$E_1' = \sqrt{E_2^2 + (RJ)^2 + 2ERJ \cos \varphi_2}. \quad (1b)$$

Aus der Abbildung oder Gl. (5) folgt

$$\sin \varphi_1' : \sin \varphi_2 = E_2 : E_1'. \quad (5a)$$

Da E_1' stets $> E_2$, muß stets $\varphi_1' < \varphi_2$ sein, solange $L = 0$ ist. Dies ist natürlich, weil durch den Ohmschen Verlust $v = AB$ zur Endspannung $OA = E_2$ eine Wattkomponente gefügt wird.

b) Die relative Spannungsschwankung $\eta = \frac{\Delta E}{E_2}$. Während e der geometrische Unterschied von E_1 und E_2 ist, ergibt sich die algebraische Differenz $\Delta E = E_1 - E_2$ in Abb. 237 aus dem $\triangle OGC$ wie folgt:

$$E_1^2 = (E_2 + \Delta E)^2 = (E_2 + e \cos \vartheta)^2 + (e \sin \vartheta)^2,$$

woraus

$$\Delta E = -E_2 + \sqrt{E_2^2 + 2Ee \cos \vartheta + e^2}.$$

Die negative Wurzel kommt nicht in Betracht, weil $E_2 + \Delta E = E_1$ nicht negativ sein kann. Es ist also genau

$$\eta = \frac{\Delta E}{E_2} = -1 + \sqrt{1 + 2\varepsilon \cos \vartheta + \varepsilon^2}. \quad (6)$$

Entwickelt man den Wurzelausdruck unter der praktisch stets erfüllten Annahme, daß $(2\varepsilon \cos \vartheta + \varepsilon^2) < 1$ ist, in eine Reihe, so ergibt sich bei Berücksichtigung aller quadratischen Glieder von ε als guter Näherungswert

$$\eta = \varepsilon \cos \vartheta + \frac{\varepsilon^2}{2} \sin^2 \vartheta \quad (6a)$$

und in roherer Annäherung

$$\eta \approx \varepsilon \cos \vartheta. \quad (6b)$$

Die relative Spannungsschwankung η ist also stets kleiner als der relative Spannungsabfall ε außer in dem Sonderfalle, daß $\varphi_2 = \lambda$, also $\vartheta = 0$, wobei dann

$$\eta = \varepsilon. \quad (6c)$$

Wird einer der beiden Winkel φ_2 oder λ gleich Null, dann tritt an Stelle von ϑ der andere Winkel.

Man hat also für induktionsfreie Leitung (Abb. 242) und induktive Belastung

$$\lambda = 0 \quad \eta = \varepsilon \cos \varphi_2 = p \cos \varphi_2, \quad (6d)$$

für induktive Leitung (Abb. 237) induktionsfreie Belastung

$$\varphi_2 = 0 \quad \eta = \varepsilon \cos \lambda, \quad (6c)$$

für induktionsfreie Leitung und induktionsfreie Belastung, wobei $\lambda = 0$ und $\varphi_2 = 0$, schrumpft ΔOAB von Abb. 242 in eine Gerade zusammen und wird

$$\eta = \varepsilon = v, \quad (6f)$$

also $E_1 = E_2 + RJ$, $\Delta E = v$ wie bei Gleichstrom. Dies ist ein Sonderfall des Sonderfalles $\varphi = \lambda$, der bereits erwähnt wurde.

Man hätte diese Beziehungen auch aus Gl. (2a) finden können. Es ist nämlich

$$p_2 = \frac{RJ}{E_2} = \varepsilon \cos \lambda, \quad q_2 = \frac{XJ}{E_2} = \varepsilon \sin \lambda,$$

$\eta = p_2 \cos \varphi_2 \pm q_2 \sin \varphi_2 = \varepsilon (\cos \lambda \cos \varphi_2 \pm \sin \lambda \sin \varphi_2) = \pm \varepsilon \cos \vartheta$
oder in feinerer Annäherung

$$\begin{aligned} \eta &= (p_2 \cos \varphi_2 \pm q_2 \sin \varphi_2) + \frac{p_2^2}{2} \sin^2 \varphi_2 + \frac{q_2^2}{2} \cos^2 \varphi_2 \\ &= \pm \varepsilon \cos \vartheta + \frac{\varepsilon^2}{2} \sin^2 \vartheta. \end{aligned}$$

Wichtig ist die Beziehung für die induktionsfreie, aber induktiv belastete Leitung, weil sie dem am meisten vorkommenden Fall für Licht- und Motoranschlüsse von mäßiger Länge entspricht.

Es ist dann für $\lambda = 0$, $\vartheta = \varphi_2$ (Abb. 242) und somit

$$\eta = \varepsilon \cos \varphi_2.$$

Der Unterschied der Spannungen am Anfang und Ende der induktionsfreien Leitung $\Delta E = \eta E_2 = RJ \cos \varphi_2$ entspricht also nur dem durch die Wattkomponente $J \cos \varphi_2$ im Widerstand R hervorgerufenen Spannungsabfall.

c) Der relative Leistungsverlust $\zeta = \frac{w}{W}$. Hier ergibt sich eine bemerkenswerte Abweichung gegenüber den Verhältnissen bei Gleichstrom oder bei induktionsfreier Leitung und Belastung.

In diesem Sonderfalle ist $W_2 = E_2 J$ und $w_2 = v_2 J = R_2 J^2$ also

$$\zeta = \frac{w_2}{W_2} = \frac{v_2}{E_2} = \varepsilon. \quad (8a)$$

Diese Gleichheit tritt auch noch auf für den allgemeinen Fall (Abb. 237), wenn $\varphi_2 = \lambda$.

Sonst ist aber allgemein

$$W_2 = E_2 J \cos \varphi_2, \quad w_2 = e J \cos \lambda,$$

also

$$\zeta = \frac{w_2}{W_2} = \frac{e \cos \lambda}{E_2 \cos \varphi_2} = \varepsilon \frac{\cos \lambda}{\cos \varphi_2}. \quad (8b)$$

Für die induktionsfreie Leitung (Licht- und Motoranschlüsse bei Niederspannung) ist

$$\lambda = 0 \text{ und } \zeta = \frac{\varepsilon}{\cos \varphi_2}. \quad (8c)$$

Der relative Leistungsverlust ist hier also nicht gleich dem relativen Spannungsverlust wie bei Gleichstrom oder induktionsfreier Belastung, sondern größer als dieser.

Den wichtigsten Zusammenhang zwischen Leistungsverlust und Spannungsschwankung findet man durch Einsetzen von Gl. (8b) in die früheren Beziehungen (7) für $\eta = \varepsilon \cos \vartheta$.

Man findet dann mit genügender Annäherung

$$\eta = \zeta \frac{\cos \varphi_2}{\cos \lambda} \cos \vartheta \quad (9)$$

oder auch

$$\eta = \zeta \cos^2 \varphi_2 (1 + \operatorname{tg} \lambda \operatorname{tg} \varphi_2) = M \cdot \zeta \quad (9a)$$

wie auch von Harold Pender¹⁾ entwickelt. Hierin ist

$$M = (1 + \operatorname{tg} \lambda \operatorname{tg} \varphi_2) \cos^2 \varphi_2$$

der Abfallfaktor. Man findet dann für die induktionsfreie Leitung, also $\lambda = 0$ und $\vartheta = \varphi_2$

$$\eta = \zeta \cos^2 \varphi_2. \quad (9b)$$

Diese Beziehung verdient besondere Beachtung. Es ist nicht in Abrede zu stellen, daß Wechselstromleitungen heute noch von vielen auf relativen Effektverlust ζ berechnet werden, wobei man der Meinung ist,

¹⁾ Pender, Harold: Proc. Am. Inst. El. Eng. 1908, S. 763.

die so berechneten Leitungen verhielten sich in bezug auf Spannungsschwankungen ebenso wie entsprechend berechnete Gleichstromleitungen. Dies ist jedoch, wie Gl. (9) oder (9a) zeigten, falsch. Bei unterirdischen Netzen und Hausinstallationen

$$\begin{aligned} \text{wird für } \cos \varphi_2 &= 0,8 & \eta &= 0,64 \zeta \\ \text{,, ,,} &= 0,7 & &= 0,49 \zeta. \end{aligned}$$

Der berechnete Querschnitt wäre unter dieser irrigen Annahme andert-halb, bzw. doppelt so groß als er nach den Absichten des Rechners hätte sein sollen und für Gleichstrom auch hätte sein müssen.

Es ist das Verdienst Teichmüllers¹⁾ hierauf zuerst hingewiesen zu haben.

d) Die relative Leistungsschwankung $\xi = \frac{\Delta(W)}{(W)}$ ist wie bei Gleichstrom

$$\xi = 2\eta + \eta^2 \quad (10)$$

oder mit fast immer genügender Annäherung

$$\xi = 2\eta. \quad (10a)$$

12. Vergleich zwischen Gleichstrom und Wechselstrom.

Einen gewissen praktischen Wert hat die Frage, wie das Verhältnis der beiden Spannungsabfälle in den beiden Fällen ist, daß eine bestimmte Endleistung W_2 bei einer bestimmten Endspannung E_2 durch dieselbe Leitung einmal mit Gleichstrom, das andere Mal mit Wechselstrom übertragen wird. Die Formelgrößen sollen in beiden Fällen durch die Indexe G für Gleichstrom und W für Wechselstrom unterschieden werden.

Es ist also

$$W_{2W} = W_{2G}$$

und

$$E_{2W} = E_{2G}.$$

Dann ist

$$J_W = \frac{J_G}{\cos \varphi}.$$

Und da

$$\Re = \frac{R}{\cos \lambda}, \text{ ist } e_W = J_W \Re = \frac{J_G \cdot R}{\cos \varphi_2 \cdot \cos \lambda}.$$

Wir finden also

$$\varepsilon_W = \frac{\varepsilon_G}{\cos \varphi_2 \cdot \cos \lambda} \quad (11)$$

und in Annäherung

$$\eta_W = \frac{\cos \vartheta}{\cos \varphi_2 \cdot \cos \lambda} \eta_G \quad (12)$$

oder auch

$$\eta_W = (1 + \operatorname{tg} \varphi_2 \operatorname{tg} \lambda) \eta_G. \quad (12a)$$

Führt man den Ausdruck (12) für η_W in die Formel

$$\eta = \zeta \frac{\cos \varphi_2}{\cos \lambda} \cos \vartheta, \quad (9)$$

¹⁾ Teichmüller, J.: ETZ 1916, S. 397, 411.

dann ist

$$\zeta_W = \frac{\cos \lambda}{\cos \varphi_2 \cdot \cos \vartheta} \eta_W = \frac{1}{\cos^2 \varphi_2} \eta_G = \frac{1}{\cos^2 \varphi_2} \zeta_G, \quad (13)$$

da

$$\eta_G = \zeta_G,$$

worin die Tatsache zum Ausdruck kommt, daß $J_G = J_W \cos \varphi_2$.

Gleichung (12) zeigt, daß

$\eta_W > \eta_G$, solange φ_2 und λ gleiches Vorzeichen haben,

$\eta_W < \eta_G$, sobald φ_2 und λ ungleiches Vorzeichen haben,

$\eta_W = \eta_G$, sobald $\varphi_2 = 0$ oder $\lambda = 0$.

Dementsprechend ist auch die Anfangsspannung E_1 beim Wechselstrom größer, gleich oder kleiner als beim Gleichstrom, oder bei gleicher Anfangsspannung die Endspannung E_2 beim Wechselstrom kleiner, gleich oder größer als beim Gleichstrom. Man kann die Werte aus der

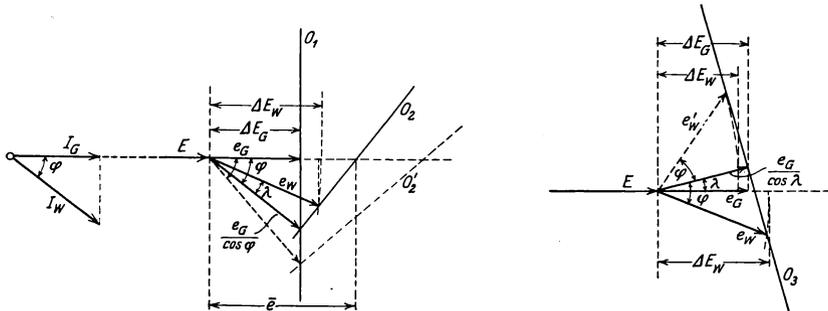


Abb. 243a und b.

Formel $E_1 = E_2 (1 + \eta)$ durch Einsetzung von η_G und η_W leicht berechnen.

In Abb. 243a sind die Beziehungen graphisch dargestellt. Aus e_G ist zunächst $e_G \cdot \cos \varphi$, danach $(e_G \cdot \cos \varphi) \cdot \cos \lambda$ und damit e_W durch reziproke Projektion gefunden; schließlich ist in bekannter Weise noch ΔE_W konstruiert. Die $\bar{\epsilon}$ und ΔE kann man als Maß für die ϵ und η ansehen. Die Gerade O_1 ist der Ort der Endpunkte für alle Werte $e_G \cdot \cos \varphi$ (also auch für alle Werte von e_W , wenn $\lambda = 0$) bei gegebenem e_G und beliebigem φ , die Gerade O_2 der Ort aller Endpunkte von e_W bei gegebenem e_G und φ und beliebigem λ ; O_2' bedeutet denselben Ort für dasselbe e_G und ein anderes φ . Endlich ist O_3 (um nicht zu verwirren, in einem Nebenbilde 243b besonders gezeichnet) der Ort für die Endpunkte von e_W bei gegebenem e_G und λ und beliebigem φ . Die Konstruktion ist für dieselben φ und λ durchgeführt wie in Abb. 243a, außerdem aber noch für ein anderes, und zwar ein negatives φ , um dessen den Wert η_W gegenüber η_G verkleinernde Wirkung zu zeigen. Bei allen Divisionen mit dem Kosinus eines Winkels ist sorgfältig auf das Vorzeichen des Winkels zu achten.

13. Die kettenförmige Leiterverbindung (der Π -Leiter).

Von den Quellpunkten des Stromes AA gehen (Abb. 244) zwei Längsleiter aus, die durch die Querwiderstände $\mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_4 \dots$ überbrückt sind. Von rechts nach links schreitend hat man

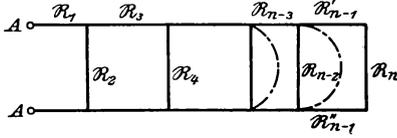


Abb. 244.

$\mathfrak{R}_n + (\mathfrak{R}'_{n-1} + \mathfrak{R}''_{n-1}) = \mathfrak{R}_n + \mathfrak{R}_{n-1}$,
d. h. für den Gesamtwiderstand spielt nur die Summe der gegenüberliegenden zugehörigen Längsteile eine Rolle. Man darf hinsichtlich dieses Punktes die Abb. 244 in jene von 245 umwandeln, bei der ein ganzer Längsleiter zu einem Punkt zusammengeschrumpft ist.

Von unten nach oben schreitend, findet man die Näherungsbrüche¹⁾

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{N}_1} \uparrow &= \mathfrak{R}_n; & \frac{\mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{N}_2} \uparrow &= \mathfrak{R}_{n-1} + \frac{1}{\mathfrak{R}'_{n-1}}; \\ \frac{\mathfrak{Z}_3}{\mathfrak{N}_3} \uparrow &= \frac{1}{\mathfrak{R}_{n-2}} + \frac{1}{\mathfrak{R}_{n-1}} + \frac{1}{\mathfrak{R}_{n-1} + \dots} & &= \frac{1}{|\mathfrak{R}_{n-2}|} + \frac{1}{|\mathfrak{R}_{n-1}|} + \frac{1}{|\mathfrak{R}_{n-1} + 1|}. \end{aligned}$$

Jeder zweite Nenner im Kettenbruch $\frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{N}_1}, \frac{\mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{N}_2} \dots$ geht aus seinen beiden Vorgängern auf lineare Weise hervor:

$$\frac{\mathfrak{Z}_k}{\mathfrak{N}_k} \uparrow = \frac{1}{\mathfrak{u}_{n-k+1} + \frac{\mathfrak{Z}_{k-1}}{\mathfrak{N}_{k-1}} \uparrow} = \frac{\mathfrak{N}_{k-1}}{\mathfrak{u}_{n-k+1} \mathfrak{N}_{k-1} + \mathfrak{Z}_{k-1}}. \tag{1}$$

Hierin bedeuten die \mathfrak{u}_{n-k+1} die aufeinanderfolgenden Teilnennner. Um diese Rechenregel auch für den ersten Näherungsbruch $\mathfrak{Z}_1/\mathfrak{N}_1$ gelten zu lassen, kann man einen Bruch $\mathfrak{Z}_0/\mathfrak{N}_0 = 0/1 = 0$ voranstellen.

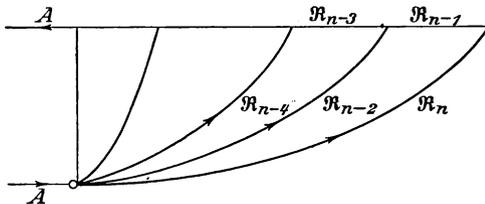


Abb. 245.

Für die absteigenden Näherungsbrüche

$$\frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{N}_1} \downarrow, \quad \frac{\mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{N}_2} \downarrow, \dots$$

findet sich die gleiche Beziehung:

$$\frac{\mathfrak{Z}_k}{\mathfrak{N}_k} \downarrow = \frac{\mathfrak{u}_k \mathfrak{Z}_{k-1} + \mathfrak{Z}_{k-2}}{\mathfrak{u}_k \mathfrak{N}_{k-1} + \mathfrak{N}_{k-2}}, \tag{2}$$

wobei \mathfrak{u}_k entweder \mathfrak{R}_k oder \mathfrak{R}_k^{-1} bedeutet, je nachdem ein Längs- oder Querleiter in Betracht kommt.

Man hat hier also mit Kettenbrüchen allgemeinerer Art als auf S. 33 zu tun, deren Glieder komplexe Größen sind.

Der „elektrische Kettenbruch“ wurde wohl zuerst 1881 von J. Mascart (C. Rend. Ac. Paris, S. 126, 1260; 1881) und im Lehrbuche Mascart-Joubert 1882 für die parallelen Glühlichter angewendet. 1883 haben ihn J. Herzog und sein Freund Jg. Wittenberg zum

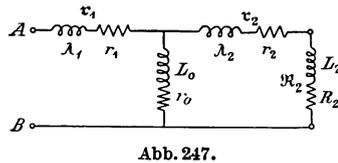
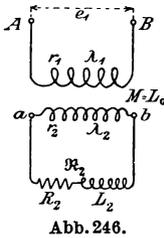
¹⁾ Bezeichnung nach Pringsheim.

gleichen Zweck selbständig gefunden und hat ihn ersterer seither in vielfachen Arbeiten verbreitet. In den letzten Jahren erfuhr er durch Kennelly weitere Förderung und endgültige Einbürgerung für die Telegraphen- und Telephonleitungen.

Wenn auch der Kettenbruch mit dem gemeinen Bruche durch die Dezimalbrüche an Volkstümlichkeit eingebüßt hat, so hat er doch in der hohen Wissenschaft das gerade Gegenteil erfahren: er ist in die Zahlen- und Funktionentheorie eingedrungen und ein wichtiges Mittel der Forschung geworden. Ganz gleiches vollführt er in der Elektrotechnik.

Beispiele.

a) Der ruhende Transformator, Abb. 246, kann ersetzt werden durch das in Abb. 247 dargestellte Ersatzschema. Dies ist in erster Annäherung



eine \square -Schaltung, wenn man die Impedanz \mathfrak{R}_0 des Leerlaufs als unendlich groß ansieht.

r_0 und L_0 sind hierin so zu bestimmen, daß sie dem Wattverlust W_0 und der Phasenverschiebung φ_0 bei Leerlauf entsprechen. Es ist also

$$r_0 = \frac{E_1^2}{W_0} \quad \text{und} \quad \cos \varphi_0 = \frac{r_0}{|\mathfrak{R}_0|}.$$

In dieser ersten Annäherung liest man aus dem \square -Leiter des Ersatzschemas sofort ab, daß der Richtungswiderstand \mathfrak{R}_1 beim Übersetzungsverhältnis u gegeben ist durch die Reihenschaltung von r_1 und $u^2(r_2 + \mathfrak{R}_2)$. Also $\mathfrak{R}_1 = r_1 + u^2(r_2 + \mathfrak{R}_2)$.

Bei Berücksichtigung von \mathfrak{R}_0 hat man den \square -Leiter und findet den Kettenbruch

$$\mathfrak{R}_1 = r_1 + \frac{1}{\mathfrak{R}_0^{-1} + \frac{1}{u^2(r_2 + \mathfrak{R}_2)}} = r_1 + \frac{1}{\frac{1}{\mathfrak{R}_0} + \frac{1}{u^2(r_2 + \mathfrak{R}_2)}}.$$

Bei Nullast wird $\mathfrak{R}_2 = \infty$, also

$$\mathfrak{R}_{1,0} = r_1 + \mathfrak{R}_0;$$

bei Kurzschluß wird $\mathfrak{R}_2 = 0$, also

$$\mathfrak{R}_{1,k} = r_1 + \frac{1}{\frac{1}{\mathfrak{R}_0} + u^2 r_2} \approx r_1 + u^2 r_2.$$

Bei Vernachlässigung des Richtungswertes $1/\mathfrak{R}_0$ geht der \square -Leiter von Abb. 247 in den \square -Leiter über. Die Ableitungen der Abb. 237, S. 239, gelten also auch ohne weiteres für den ruhenden Transformator oder für

irgendeinen anderen Apparat oder eine andere Maschine, deren Ersatzschema angenähert dem \square -Leiter entspricht.

Damit ist das Verhalten des Transformators als Richtungswiderstand völlig festgelegt.

b) Allgemeiner Stromkreis. Zwischen den Klemmen $A_1 A_2$, Abb. 248, eines allgemeinen Stromkreises wirke die Spannung \mathfrak{E}_1 , während zwischen den Klemmen $B_1 B_2$ an irgendeiner Stelle eine Belastung W_2 angeschlossen sei, deren Spannung \mathfrak{E}_2 gegen den Strom \mathfrak{I}_2 die Verschiebung φ_2 besitze.

Beim Leerlauf werde \mathfrak{E}_1 so geregelt, daß bei $B_1 B_2$ die Spannung \mathfrak{E}_2 den normalen Wert hat, während $\mathfrak{I}_2 = 0$ ist. Dann ist offenbar

$$\mathfrak{E}_{1,0} = \mathfrak{E}_1 \mathfrak{E}_2 = C_1 \varepsilon^{j\psi_1} \mathfrak{E}_2$$

und

$$\mathfrak{I}_0 = \mathfrak{E}_{1,0} \mathfrak{Y}_0 = \mathfrak{E}_{1,0} (g_0 - jb_0).$$

\mathfrak{E}_1 ist eine komplexe Zahl, die das Verhältnis $E_{1,0}/\mathfrak{E}_2$ angibt. \mathfrak{Y}_0 ist die Leerlaufadmittanz, \mathfrak{I}_0 der Leerstrom. Der dem Leerlauf entsprechende Verlust ist

$$W_0 = \mathfrak{E}_{1,0}^2 g_0.$$

Nun werde $B_1 B_2$ widerstandslos kurzgeschlossen und die Spannung bei $A_1 A_2$ so eingestellt, daß durch den Kurzschluß der normale Strom \mathfrak{I}_2 fließt. In diesem Zustand (Kurzschluß) werde der Stromquelle der Strom $\mathfrak{I}_{1,k}$ entnommen. Dann ist symbolisch

$$\mathfrak{I}_{1,k} = \mathfrak{E}_2 \mathfrak{I}_2 = C_2 \varepsilon^{j\psi_2} \mathfrak{E}_2$$

$$\mathfrak{E}_k = \mathfrak{I}_{1,k} \cdot \mathfrak{Z}_k = \mathfrak{I}_{1,k} (r_k + jx_k).$$

\mathfrak{E}_2 ist eine komplexe Zahl, die das Verhältnis $\mathfrak{I}_{1,k}/\mathfrak{I}_2$ angibt. \mathfrak{Z}_k ist die Kurzschlußimpedanz. Der dem Kurzschluß entsprechende Verlust ist

$$W_k = J_{1,k}^2 \cdot r_k.$$

Durch Überlagerung von Leerlauf und Kurzschluß ergibt sich dann der normale Belastungszustand. Für diesen ist die Spannung

$$\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_{1,0} + \mathfrak{E}_k = \mathfrak{E}_1 \mathfrak{E}_2 + \mathfrak{I}_{1,k} \mathfrak{Z}_k,$$

der Strom

$$\mathfrak{I}_1 = \mathfrak{I}_0 + \mathfrak{I}_{1,k} = \mathfrak{Y}_0 \mathfrak{E}_{1,0} + \mathfrak{I}_2 \mathfrak{E}_2;$$

da aber $\mathfrak{I}_{1,k} = \mathfrak{E}_2 \mathfrak{I}_2$ und $\mathfrak{E}_{1,0} = C_1 \mathfrak{E}_2$ ist, folgt

$$\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_1 \mathfrak{E}_2 + \mathfrak{E}_2 \mathfrak{I}_2 \mathfrak{Z}_k$$

$$\mathfrak{I}_1 = \mathfrak{E}_2 \mathfrak{I}_2 + \mathfrak{E}_1 \mathfrak{E}_2 \mathfrak{Y}_0$$

Diese beiden Gleichungen sind die Hauptgleichungen des Stromkreises, der also durch die vier Konstanten $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{Y}_0, \mathfrak{Z}_k$ bestimmt ist.

Zwischen ihnen besteht die dritte Hauptgleichung

$$\mathfrak{E}_1 \mathfrak{E}_2 (1 - \mathfrak{Y}_0 \mathfrak{Z}_k) = 1,$$

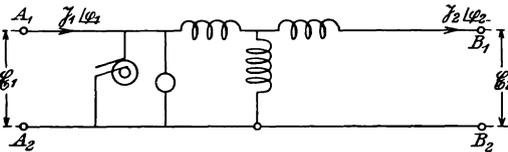


Abb. 248.

so daß drei Messungen zur Bestimmung der vier Konstanten $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{Y}_0, \mathfrak{Z}_k$ genügen.

Da sich diese vier Größen durch vier andere unabhängige Konstanten $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Y}_a, \mathfrak{Y}_b$ ausdrücken lassen, so läßt sich jeder elektrische Stromkreis stets durch einen äquivalenten Kreis nach dem Schema Abb.

249 ersetzen. Für diesen ist der Richtungswiderstand

$$\Re_1 = \mathfrak{Z}_1 + \frac{1}{\mathfrak{Y}_a} + \frac{1}{\mathfrak{Z}_2} + \frac{1}{\mathfrak{Y}_b}$$

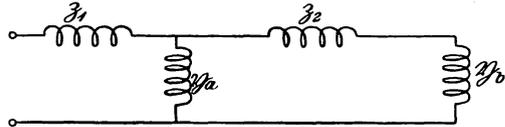


Abb. 249.

Diese Erweiterung der von Ad. Franke¹⁾ für lange Leitungen abgeleiteten Gleichungen ist von La Cour 1904 veröffentlicht worden.

Alle Maschinen, Apparate, Leitungen usw. fügen sich gedanklich einfach hier ein, wengleich die Ausarbeitung für Einzelfälle schwierig und hier unnötig ist.

14. Das Strom- und Spannungsvielseit der kettenförmigen Leitung.

Die Leitung in Abb. 250 zeigt in den Strom- und Spannungsbildern nur Dreiecke. Die Frequenz betrage $\nu = 50$. Die Anfangsspannung zwischen AA' sei mit 3000 Volt gegeben. Für die Querstücke seien:

Stück 1,1'	2,2'	3,3'	4,4'
$R_1 = 260,88,$	$R_2 = 341,1,$	$R_3 = 200$ und	$R_4 = 137,3$ Ohm.
$L_1 = 544,$	$L_2 = 1108,5$	$L_3 = 0$ und	$L_4 = 446,2$ Millihenry
$\cos \varphi_1 = 0,836,$	$\cos \varphi_2 = 0,7,$	$\cos \varphi_3 = 1,0,$	$\cos \varphi_4 = 0,7$

und für die Längsstücke:

$$\frac{1-2}{r_1 = 5,6}, \quad \frac{2-3}{r_2 = 5,5}, \quad \frac{3-4}{r_3 = 5} \quad \text{und} \quad \frac{4-A}{r_4 = 4} \text{ Ohm}$$

Man nimmt zunächst eine willkürliche Endspannung, etwa 1600 Volt, an und bestimmt damit in der sogleich zu beschreibenden Weise die

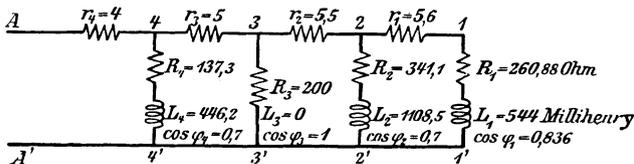


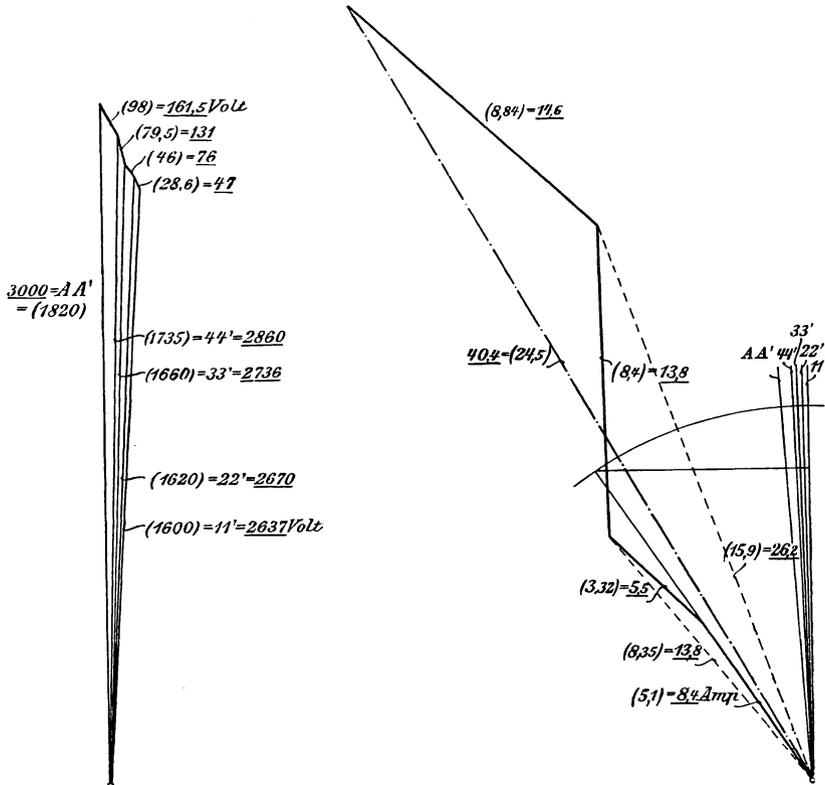
Abb. 250.

Spannungen und Ströme. Hierdurch erhält man 1820 Volt als Anfangsspannung zwischen A und A' , welche von der gegebenen 3000 abweicht.

¹⁾ Franke, Ad.: ETZ 1891, S. 459. — Cour, J. L. la: Leerlauf und Kurzschlußversuch in Theorie und Praxis. Braunschweig 1904.

Die richtigen Werte folgen also durch Vergrößerung im Verhältnisse von 3000:1820.

Für die Endspannung von 1600 Volt ist der Strom im Querstück 1 1' 1600: $\sqrt{260,88^2 + (314 \cdot 0,544)^2} = 5,1$ Amp. Die Richtung der Spannung im Stück 1 1' in Abb. 251 ist beliebig, die Richtung seines Stromes im Strombilde Abb. 252 wird durch den angelegten Winkel φ_1 , entsprechend $\cos \varphi_1 = 0,836$, bestimmt und darauf 5,1 Amp. aufgetragen.



Die Summe der Spannungsänderungen in 2 1 und 2' 1' beträgt $5,1 \cdot 5,6 = 28,6$ Volt. Um diesen Wert im Spannungsbilde aufzutragen, zieht man zum Stromvektor 5,1 Amp. eine Parallele gleich 28,6 Volt, wodurch sich die Spannung in 2 2' gleich 1620 Volt als Schlußlinie ergibt. Im Strombild wird zu 2 2' eine Parallele gezogen, dann ein dem $\cos \varphi_2 = 0,7$ entsprechender Winkel angelegt und der Strom im Querstück 2 2' gleich 1620: $\sqrt{341,1^2 + (314 \cdot 1,1085)^2} = 3,32$ Amp. in dieser Richtung aufgetragen, wodurch der Strom von 8,35 Amp. im Leiter 3 2 bzw. in 3' 2', als Schlußlinie der zwei Stromvektoren erhalten wird.

Der Spannungsverlust in 3 2 und 3' 2' beträgt $8,35 \cdot 5,5 = 46$ Volt

und wird im Spannungsbilde mit dem Stromvektor 8,35 Amp. parallel aufgetragen. Die Schlußlinie 1660 Volt ergibt die Spannung in 3 3'; $1660/200 = 8,4$ Amp. ist der Strom im Querwiderstande 3 3'. Da für ihn $\varphi_3 = 0$, wird der Stromvektor mit 3 3' parallel gezogen. Die zugehörige Schlußlinie des Strombildes ergibt den Strom von 15,9 Amp. in 3 4 bzw. 3' 4'. Die Spannungsänderung in diesem Leiter von $15,9 \cdot 5 = 79,5$ Volt wird im Spannungsbilde parallel mit 15,9 des Strombildes gezogen. Die weitere Schlußlinie von 1735 Volt im Spannungsbilde ergibt die Spannung 4 4'. Der betreffende Querstrom wird demnach

$$1735: \sqrt{(137,3^2 + 314 \cdot 0,4462)^2} = 8,84 \text{ Amp.}$$

und der Gesamtstrom endlich 24,5 Amp. sein. Die Spannungsänderung $24,5 \cdot 4 = 98$ Volt in $A 4 + A' 4'$ wird mit 24,5 Amp. parallel gezogen, und die Anfangsspannung ergibt sich zu 1820 Volt. Da sie jedoch 3000 betragen soll, so müssen alle Größen im Verhältnis 3000:1820 verändert werden. Die Endspannung wird demnach $1600 \cdot 3000/1820 = 2637$ Volt, der Gesamtstrom $24,5 \cdot 3000/1820 = 40,4$ Amp. betragen. Die übrigen neuen Werte wurden in den Bildern unterstrichen. Die gesamte Spannungsänderung ist also $3000 - 2637 = 363$ Volt, demnach 12% der Anfangsspannung.

Die Leistung ist $3000 \cdot 40,4 \cdot 0,876 = 106170$ Watt, wobei die Anfangsspannung 3000 Volt, der Gesamtstrom bei $\cos \varphi = 0,876$ gegen die Spannung zwischen A und A' 40,4 Amp. betragen. Der Energieverlust in der Leitung findet sich zu

$$8,4 \cdot 5,6 + 13,8^2 \cdot 5,5 + 26,2^2 \cdot 5 + 40,4^2 \cdot 4 = 11400 \text{ Watt,}$$

d. i. 10,4% der Gesamtleistung. Spannungsänderung und Energieverlust, auf hundert bezogen, sind demnach ganz verschieden, im Gegensatz zum Gleichstrom, wo sie gleich ausfallen müssen.

Aus diesem Beispiel ist ersichtlich, daß das Spannungsstrahlenbüschel 1 1', 2 2', 3 3' und 4 4' im Strombild (Abb. 252) selbst bei verhältnismäßig großen Verlustsätzen (hier 10,6%) und bei großen Phasenverschiebungen der Ströme mit großer Annäherung zu einem einzigen Strahl zusammenschumpft. Man kann daher auch ohne Kenntnis der genauen Spannungsverteilung das Strombild ermitteln. Dieses annähernde Strombild, entsprechend dem zur Linie verkümmerten Spannungsbilde, zeigt Abb. 253. Es wird einfach durch Abtragen der verschiedenen Phasenwinkel von der gemeinsamen lotrecht angenommenen Spannungsrichtung gewonnen. Der Gesamtstrom ist 40,9 Amp.; der durch das verkümmerte Spannungsbild verursachte Fehler erreicht hier etwa 1,5%.

Nach diesem annähernden Strombild läßt sich ein verbessertes Spannungsbild entwerfen und danach ein verbessertes neues Strombild usw. Die erste Annahme im Spannungsbilde entspricht der Vernachlässigung des Einflusses der Längswiderstände gegenüber den großen queren Nutzwiderständen auf die Spannung.

Das Spannungsbild enthält so viel Dreiecke, als die kettenförmige Leitung Nutzwiderstände hat. Ein weiterer Nutzwiderstand bringt

ein neues Dreieck hinzu. Wenn jedoch dieser selbst eine kettenförmige Leitung ist, so entsteht eine verästelte Leitung wie in Abb. 254. Dem Spannungsdiagramm schließt sich dann nicht ein neues Dreieck, sondern ein aus einer entsprechenden Zahl von Dreiecken gebildetes neues Teilstück an (Abb. 255).

Wird die Endspannung für beide Zweige gleich hoch, so kann der Punkt 8 mit 1, der Punkt 8' mit 1' zusammengelegt werden, ohne daß an der Stromverteilung irgendeine Änderung eintritt. Es schließt sich also auch das Spannungsbild der geschlossenen Leitung.

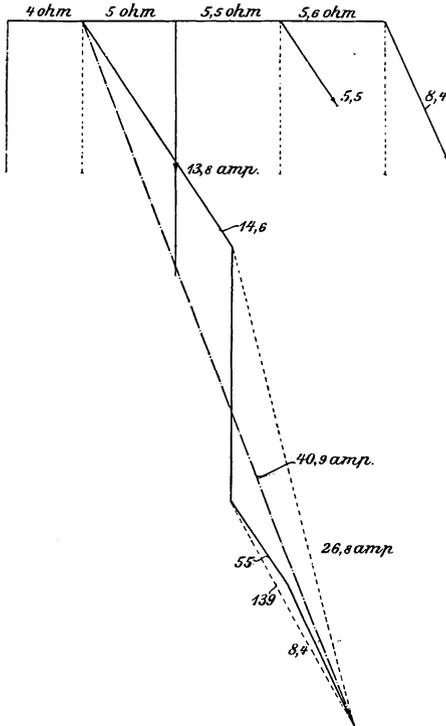


Abb. 253.

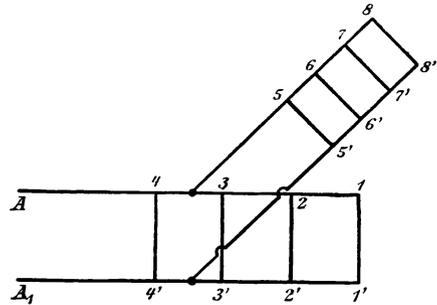


Abb. 254.

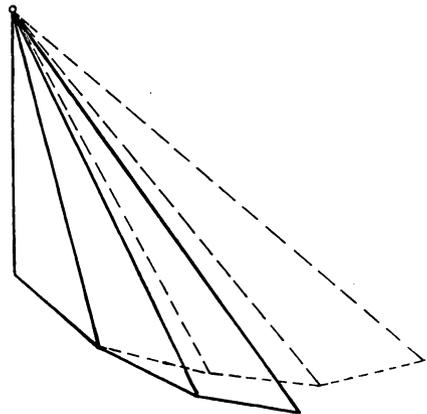


Abb. 255.

Als reaktionslos soll eine Leitung bezeichnet werden, die induktionsfrei und kapazitätslos ist. Sind dann auch noch alle Abnehmer induktionsfrei und kapazitätslos, dann unterscheidet sich die Berechnung für die Effektivwerte der Wechselströme und -spannungen in keiner Weise von der für Gleichstrom erörterten. Dieser Fall tritt näherungsweise auf bei Lichtbelastung von oberirdischen Leitungen von mäßiger Länge und Spannung. Mit der Länge nehmen nämlich die Induktivität und die Kapazität zu, mit der Spannung die Ladeströme. Genaueres kann hierüber erst bei Behandlung der langen Leitungen gesagt werden.

15. Phasenverschobene oder gerichtete Stromabnahmen an reaktionslosen Leitungen.

a) **Eine Stromabnahme.** Der einfachste Fall betrifft das \square -förmige Leitergebilde, wobei die beiden seitlichen Stücke Widerstände, das Querstück den überwiegend großen Richtungswiderstand der Abnahme vorstellen.

Dieser Fall ist bereits im elften Abschnitt behandelt worden. Dort ergab sich für $\lambda = 0$ die relative Spannungsschwankung

$$\eta = \varepsilon \cos \varphi_2 = v \cos \varphi_2 \tag{6d}$$

und der Unterschied der Spannung am Anfang E_1 und am Ende E_2 der Leitung gleich dem durch die Wattkomponente $J \cos \varphi_2$ im Widerstand R hervorgerufenen Spannungsverlust (Seite 245).

$$\Delta E = \eta E_2 = R \cdot J \cos \varphi_2 = v \cos \varphi_2.$$

Der relative Leistungsverlust war

$$\zeta = \frac{\varepsilon}{\cos \varphi_2} = \frac{\eta}{\cos^2 \varphi_2}, \tag{8c \text{ und } 9b}$$

so daß also für gleichen relativen Spannungsverlust

$$\varepsilon_W = \frac{\varepsilon_\alpha}{\cos \varphi_2}, \tag{11}$$

der Leitungsquerschnitt im Verhältnis $\frac{1}{\cos \varphi_2}$, für gleichen Leistungsverlust im Verhältnis $\frac{1}{\cos^2 \varphi}$

$$\zeta_W = \frac{\zeta_\alpha}{\cos^2 \varphi_2} \tag{13}$$

größer werden muß als bei Gleichstrom. Da aber nach (12) für $\lambda = 0$ auch $\eta_W = \eta_G$, genügt für gleiche relative Spannungsschwankung derselbe Leitungsquerschnitt wie bei Gleichstrom.

b) **Mehrere Stromabnahmen.** Das Spannungsbild der Abb. 256 entsteht wieder aus dem Strombild der Abb. 257. Aus den Abzweigströmen $I_1 \dots I_4$ werden durch Zusammensetzung die Stromstrahlen $J_1 \dots J_3$ funden (Abb. 257). Dies sind die Ströme in den Strangstücken $III IV$, $IIIII \dots IA$. Werden die Ecken des Strombildes auf die lotrechte Spannungslinie geworfen (Abb. 257), so erhält man die Punkte 1, 2 ... 4 und damit $01 = J_1 \cos \varphi_1$, $02 = J_2 \cos \varphi_2 \dots$. Die wagerechte Polentfernung OC ist gleich dem Leitwerte des laufenden Meters $g_0 = fk$, und die Strahlen $A'I' \parallel 1C$, $I'II' \parallel 2C \dots$ führen zum Bild der Spannungsänderungen $A'I' \dots IV'$ (Abb. 256).

Diese Näherungsmethode zeigt selbst bei größeren Spannungsverlusten nur geringe Ungenauigkeiten. Dies ist begreiflich, wenn man bedenkt, daß sie sich vollkommen deckt mit dem in Abb. 253 erläuterten Zusammenschrumpfen des schmalen Spannungsbildes zu einer Linie.

c) **Beispiel.** Als Beispiel diene der in Abb. 250 behandelte Fall, der in Abb. 258 maßstäblich gezeichnet ist.

Die Teilwiderstände der Leitung sind:

$$r_1 = 4, r_2 = 5, r_3 = 5,5 \text{ und } r_4 = 5,6 \text{ Ohm,}$$

und die Abzweigströme betragen

$$I_I = 14,6, \cos \varphi_1 = 0,7; \quad I_{II} = 13,8, \cos \varphi_2 = 1;$$

$$I_{III} = 5,5, \cos \varphi_3 = 0,7 \text{ und } I_{IV} = 8,4 \text{ Amp. und } \cos \varphi_4 = 0,836.$$

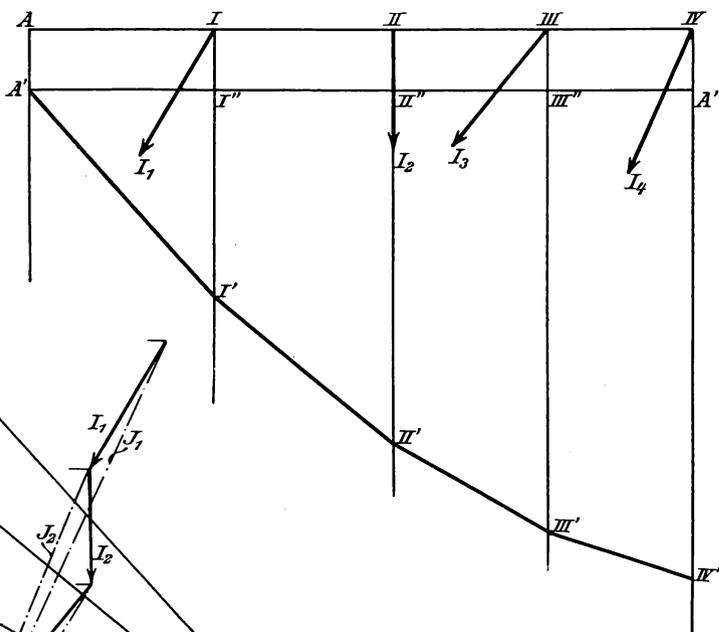


Abb. 256. Spannungsbild.

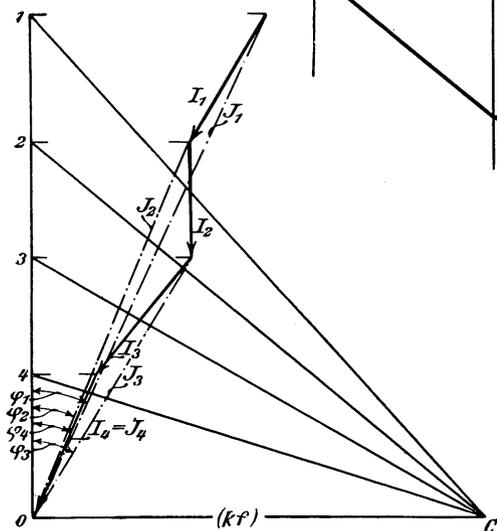


Abb. 257. Strombild.

Abb. 258 ist das Stromviereck, wobei 10 mm = 6 Amp. gesetzt wurden.

Der Polabstand ist mit 30 mm angenommen. In dem Leitungsplan bedeutet 1 mm eine Länge von 180 m, somit bei $f = 10 \text{ mm}^2$ Querschnitt und $k = 60$ auch 0,3 Ohm. Man projiziert nun die Endpunkte des Stromecks auf die Lotlinie, zieht vom Pole C aus die Strahlen und zeichnet zu diesen parallel das Spannungsviereck. Bis zum ersten Abzweigpunkte wird ein Spannungsverlust entsprechend einer Länge

$a = 26$ mm auftreten. Der Spannungsabfall berechnet sich zu

$$26 \cdot 30 \cdot 0,3 \cdot 0,6 = 26 \cdot 5,4 = 140,4 \text{ Volt,}$$

wobei 26 mm die im Spannungsvieleck abgemessene Länge, 5,4 die Maßzahl des Leiterwiderstandes bedeutet.

140,4 Volt ist der Spannungsverlust in dem ersten Teilwiderstande von 4 Ohm und die Spannung daselbst beträgt $3000 - 140,4 = 2859,6$ Volt. Die genaue Methode hat eine Spannung von 2860 Volt ergeben. Für die übrigen Abzweigepunkte geschieht die Umrechnung auf gleiche

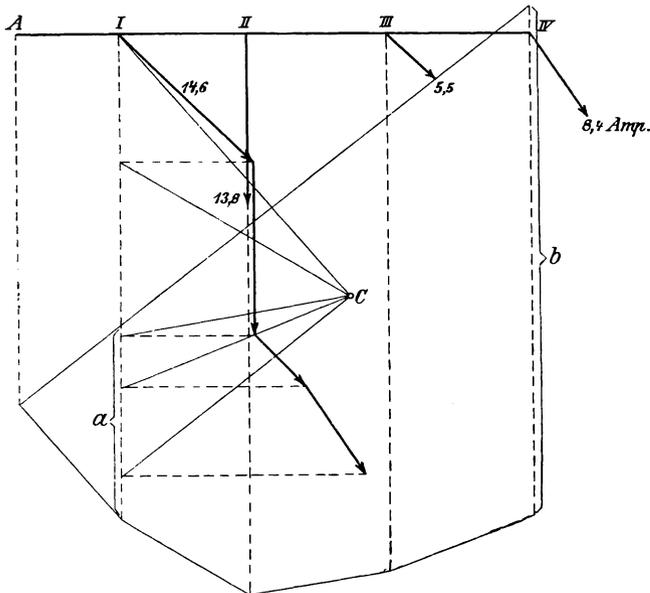


Abb. 258.

Weise. Der ganze Spannungsverlust am Ende der Leitung berechnet sich aus den vom Spannungsvieleck abgemessenen Längen zu $b = 68$ mm, also $68 \cdot 5,4 = 367$ Volt.

Demnach beträgt die Endspannung $3000 - 367 = 2633$, was gegenüber den genauen 2637 Volt einen Fehler von 4 Volt bedeutet. In diesem Fehler ist auch die Ungenauigkeit enthalten, die durch die Annahme der Ströme beim Näherungsverfahren gegenüber den Nutzwiderständen bei genauer Rechnung entstand.

Vollständigkeitshalber sei hier auch das Beispiel der Abb. 250 bis 252 mit vollständigem (unverkümmertem) Spannungsbild zeichnerisch-rechnerisch behandelt.

Dort waren gegeben wie in Abb. 258 die Ströme¹⁾

¹⁾ Die Bezeichnung der Abzweigepunkte in Abb. 258 ist anders als in Abb. 250, I entspricht 4, usw.

$I_1 = 8,4$ Amp. mit dem Leistungsfaktor $\cos \varphi_1 = 0,836$ gegen die Spannung 11'.

$I_2 = 5,5$ Amp. mit dem Leistungsfaktor $\cos \varphi_1 = 0,7$ gegen die Spannung 22'.

$I_3 = 13,8$ Amp. mit dem Leistungsfaktor $\cos \varphi_1 = 1,0$ gegen die Spannung 33'.

$I_4 = 14,6$ Amp. mit dem Leistungsfaktor $\cos \varphi_1 = 0,7$ gegen die Spannung 44'.

Durch Zusammensetzung ergab sich aus den Stromdreiecken:

$$J_1 = 8,4 A; \cos \varphi_1' = 0,836; J_1 r_1 = 47 V; J_1 r_1 \cos \varphi_1' = 39,2$$

$$J_2 = 13,8 A; \cos \varphi_2' = 0,777; J_2 r_2 = 76 V; J_2 r_2 \cos \varphi_2' = 59,0$$

$$J_3 = 26,2 A; \cos \varphi_3' = 0,943; J_3 r_3 = 131 V; J_3 r_3 \cos \varphi_3' = 123,5$$

$$J_4 = 40,4 A; \cos \varphi_4' = 0,872; J_4 r_4 = 161,5 V; J_4 r_4 \cos \varphi_4' = 140,8$$

$$\frac{\sum_1^4 J r}{1} = 415,5 V; \frac{\sum_1^4 J r \cos \varphi'}{1} = 362,5 V.$$

Die Winkel φ_1' bis φ_4' entsprechen den Verschiebungen der Summenströme J_n gegen ihre Spannungen E_n im Abzweigpunkte $n = 2, 3, 4, A$. Sie lassen sich aus der Abb. 252 direkt messen.

Der Energieverlust in der Leitung wurde zu 11400 Watt berechnet, die aufgenommene Leistung zu 106170 Watt. Rechnerisch findet man als Summe der Nutzleistung

$$\text{Volt} \times \text{Amp} \times \cos \varphi = \text{Watt}$$

$$2637 \cdot 8,4 \cdot 0,836 = 18500$$

$$2670 \cdot 5,5 \cdot 0,70 = 10300$$

$$2736 \cdot 13,8 \cdot 1,0 = 37760$$

$$2760 \cdot 14,6 \cdot 0,7 = 29200$$

$$\hline 97760 \text{ Watt}$$

und den Leistungswert 11400 „

$$\hline 106160 \text{ Watt, was gut übereinstimmt mit dem früher gefundenen Werte.}$$

d) Zusammenhang zwischen relativer Spannungsschwankung und relativem Effektverlust. Im elften Abschnitt dieses Kapitels ist abgeleitet worden, daß für den Π -Leiter mit einer einzigen Abzweigung und mit induktionsfreien Seitenleitern die relative Spannungsschwankung

$$\eta = \frac{J R}{E} \cos \varphi = \varepsilon \cos \varphi_2, \tag{6 d}$$

der relative Leistungsverlust

$$\zeta = \frac{J^2 R}{E J \cos \varphi} = \frac{J R}{E} \cdot \frac{1}{\cos \varphi} = \frac{\varepsilon}{\cos \varphi} = \frac{\eta}{\cos^2 \varphi}.$$

Er ist also stets größer als der relative Spannungsabfall. Der Unterschied zwischen ζ und η ist

$$\zeta - \eta = \frac{J^2 R}{W} - \frac{J R \cos \varphi}{E} = \frac{J^2 R}{W} (1 - \cos^2 \varphi) = \frac{J^2 R}{W} \sin^2 \varphi = \zeta \sin^2 \varphi.$$

Er ist also stets positiv.

Nun kann es Verwunderung wecken, daß in dem soeben behandelten Beispiel $\varepsilon = \frac{363}{3000} = 12,1\%$ und $\zeta = \frac{11400}{106170} = 10,8\%$, also $\zeta < \eta$ ist.

Eine einfache Rechnung zeigt jedoch, daß für den Kettenleiter mit mehreren phasenverschobenen Abzweigungen $\zeta \gtrless \eta$ sein kann.

Für die vier Abzweigungen der Abb. 250 ist nämlich die relative Spannungsschwankung

$\eta = (J_1 r_1 \cos \varphi_1 + J_2 r_2 \cos \varphi_2 + J_3 r_3 \cos \varphi_3 + J_4 r_4 \cos \varphi_4) : E$,
der relative Leistungsverlust

$$\zeta = (J_1^2 r_1 + J_2^2 r_2 + J_3^2 r_3 + J_4^2 r_4) : E J_1 \cos \varphi_1,$$

worin E die Spannung, $W_1 = E J \cos \varphi_1$ die Leistung am Anfang der Leitung ist.

Es ist also

$$\zeta - \eta = \left(\sum_{n=1}^{n=4} J_n^2 r_n - J_1 \cos \varphi_1 \sum_{n=1}^{n=4} J_n r_n \cos \varphi_n \right) : W_1.$$

Dieser Ausdruck kann auch geschrieben werden

$$\zeta - \eta = (J_1^2 r_1 \sin^2 \varphi + \sum_{n=2}^{n=4} J_n^2 r_n - J_1 \cos \varphi_1 \sum_{n=2}^{n=4} J_n r_n \cos \varphi_n) : W_1.$$

Er kann positiv, null oder negativ sein. Für das soeben behandelte Beispiel wird er negativ und gleich $1,3\%$.

Es ist nämlich:

$$\begin{aligned} J_1^2 r_1 \sin^2 \varphi_1 &= 1570 \\ J_2^2 r_2 - J_1 J_2 r_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 &= -940 \\ J_3^2 r_3 - J_1 J_3 r_3 \cos \varphi_1 \cos \varphi_3 &= -1030 \\ J_4^2 r_4 - J_1 J_4 r_4 \cos \varphi_1 \cos \varphi_4 &= -998 \\ \zeta - \eta &= \frac{1570 - 2968}{106170} = \frac{-1402}{106170} = -1,3\%. \end{aligned}$$

16. Verteilung in Wechselstromnetzen.

Alle Gesetze, welche für die Verteilung in Gleichstromnetzen gelten, gelten auch für die Augenblickswerte der Wechselströme, solange von Induktivität und Kapazität der Leiter und der Belastungen abgesehen wird, die dem Wechselstrom eigentümlich sind.

Alle Gesetze, welche für die Augenblickswerte von reinen Sinusströmen gelten, bestehen auch für ihre gerichteten oder komplexen Mittel- und Scheitelwerte.

Jede lineare Gleichung mit komplexen Unbekannten zerfällt in zwei lineare Gleichungen, von denen die eine nur die reellen, die andere nur die imaginären Teile enthält. Die Gleichheit zweier komplexen Größen bedingt eben Gleichheit der reellen und der imaginären Teile.

In der mathematischen Form und der sprachlichen Ausdrucksweise bleiben nach Vorstehendem die Kirchhoffschen Gesetze erhalten,

ihr Sinn erweitert sich aber. Alle Verteilungsgleichungen müßten also unsrer Bezeichnung nach zum Gegensatz gegen Gleichstrom mit deutschen Buchstaben geschrieben werden.

Die n Knotenspannungen oder Maschenströme eines Netzes führen im allgemeinen Fall, wo sie Richtungs- oder komplexe Größen sind, zur doppelten Zahl (also $2n$) Unbekannten als bei Gleichstrom. Man hat eben nicht nur die absoluten Werte, sondern auch deren Phasenwinkel als Unbekannte zu ermitteln.

Das Prinzip der Überlagerung von Strom- und Spannungsgleichgewichtszuständen bleibt auch für diese Erweiterung bestehen. Die Superposition der Ströme geschieht aber unter Berücksichtigung der Phasenverschiebung der sie erzeugenden, zeitlich aufeinanderfolgenden EMKe. Wenn daher ein Leiter von mehreren verschobenen Wechselströmen durchflossen wird, so addieren sich die dadurch hervorgerufenen Spannungsänderungen in ihm phasengemäß.

17. Verteilung in reaktionslosen Netzen mit induktiven Abnehmern.

Gegeben sei ein solches Netz in Abb. 259 mit den eingeschriebenen Stromabnahmen und den in Winkeln beigesetzten Leistungsfaktoren.

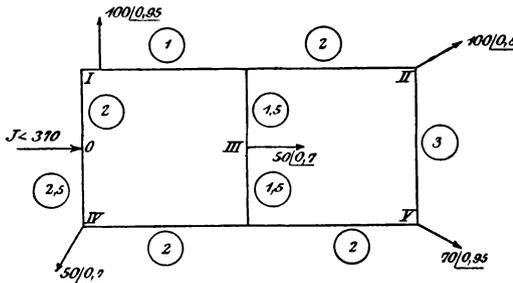


Abb. 259.

Die Widerstände der verseilten Kabel wurden an den Teilstrecken in tausendstel Ohm eingekreist beigefügt.

Die Abnahmen I_n lassen sich in die wattleistenden $I_n \cos \varphi_n$ und wattlosen Komponenten $I_n \sin \varphi_n$ auflösen¹⁾. Damit ergeben sich zwei Verteilungsfälle,

die getrennt behandelt werden können. Ihre Stromverteilungen sind in den Abb. 260 und 261 eingetragen. Sie lassen sich dann wieder zu einem Gesamtbilde (Abb. 262) vereinigen. So hat z. B. der von der Stromquelle zu liefernde Strom den Wert

$$\sqrt{184,45^2 + 311,5^2} = 362 A$$

mit einem Leistungsfaktor von

$$\cos \varphi = 1 : \sqrt{1 + \left(\frac{184,45}{311,5}\right)^2} = 0,862.$$

Auf dieselbe Weise sind die Wattströme aus Abb. 260 mit den wattlosen Komponenten aus Abb. 261 in Abb. 263 zusammengestellt worden: Der Hauptstrom von 362 Amp. teilt sich in $216/0,88$ Amp. und $146/0,83$

¹⁾ Feldmann-Herzog: Über Stromverteilung in Wechselstromnetzen. ETZ 1899, H. 45, S. 780.

Amp.; sonst stimmt in keinem Abschnitt die Summe der abgehenden Ströme mit dem ankommenden überein, weil die Phasenverschiebungen der Ströme gegen die gemeinsame Hauptspannung des Netzes verschieden sind. Die Ströme in den Ohmschen Widerständen der Leiterstücke haben natürlich keine Verschiebung gegen ihre eigenen, d. h. die durch sie hervorgerufenen Spannungsverluste. Wohl aber haben sie, wenn ihre Leistungsfaktoren nicht gleich sind, Verschiebungen gegeneinander. Der ankommende Strom ist darum nur die geometrische, nicht die arithmetische Summe der abfließenden Ströme.

Es wäre falsch, auch die Spannungsverluste der Wattkomponenten und der wattlosen Komponenten unter 90° superponieren zu wollen. Dies gilt nur für eine einzige Abzweigung oder bei gleicher Verschiebung für alle Abzweigungen.

Die Spannungsschwankung ist jedoch für jeden einzelnen Abschnitt gleich dem durch die Wattkomponente verursachten Spannungsverlust. Die totale Schwankung kann also durch Addition dieser gleichgerichteten Komponenten gefunden werden.

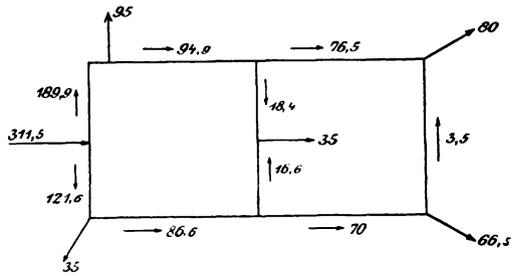


Abb. 260. Wattströme.

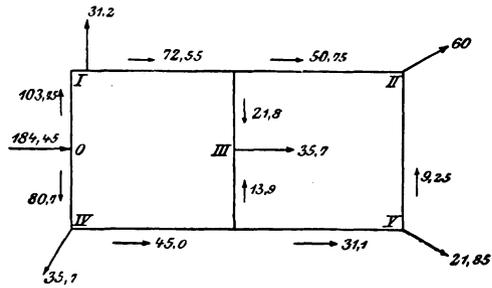


Abb. 261. Wattlose Ströme.

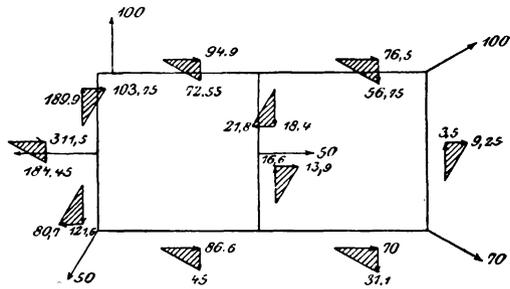


Abb. 262.

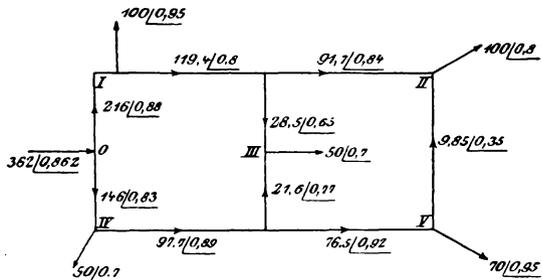


Abb. 263. Resultierende Stromverteilung.

Die Schwankung auf dem Wege von O über I nach III in Abb. 263:
 $\eta = 216 \cdot 0,88 \cdot 2 + 119,4 \cdot 0,8 \cdot 1 + 28,5 \cdot 0,65 \cdot 1,5 =$
503,4 tausendstel Volt

muß gleich sein der Schwankung von O über IV nach III :
 $\eta = 146 \cdot 0,83 + 2,5 \cdot 97,7 \cdot 0,89 \cdot 2 + 21,6 \cdot 0,77 \cdot 0,5 =$
501,8 tausendstel Volt,

und ebenso muß die Schwankung von O über I nach II :
 $\eta = 216 \cdot 0,88 \cdot 2 + 119,4 \cdot 0,8 \cdot 1 + 91,7 \cdot 0,84 \cdot 2 = 629,9$ tausendstel Volt,
 übereinstimmen mit der Schwankung von O über IV, V nach II :
 $\eta = 146 \cdot 0,83 \cdot 2,5 + 97,7 \cdot 0,89 \cdot 2 + 76,5 \cdot 0,92 \cdot 2 + 9,85 \cdot 0,35 \cdot 3$
= 628,4 tausendstel Volt.

Diese Übereinstimmung ist praktisch vollkommen genügend.

18. Spannungsschwankungen im unsymmetrisch belasteten Einphasen-Dreileiternetz.

Das Wechselstrom-Dreileiternetz besitzt seit der Einführung des Drehstromes keine große Bedeutung mehr, während es vor dieser Zeit vielfach angewendet wurde. Hier soll es besprochen werden, weil es einen Übergang bildet zu den bei Mehrphasenströmen anzustellenden Überlegungen.

Wir betrachten wieder nur die Verbrauchsstromkreise. Bei den Zustandsgrößen ist der betrachtete Zustand gekennzeichnet durch gleiche Belastung und gleiche Leistungsfaktoren in den beiden Hälften des Netzes.

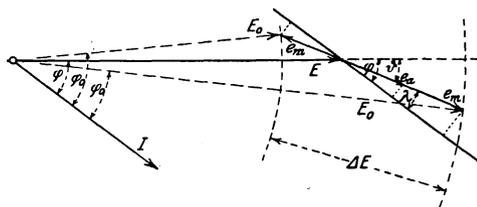


Abb. 264.

Die Belastungsänderungen und ihre Wirkungen auf die Ströme und Spannungsabfälle in den drei Leitungen und den beiden Netzhälften sind zunächst dieselben wie beim Gleichstrom;

vgl. Abb. 186 bis 188 (S. 190). Die Übertragung auf Wechselstrom scheint keine neuen Überlegungen zu erfordern. Will man aber genau verfahren, so muß man berücksichtigen, daß bei Freileitungen die drei die Spannungsschwankungen bestimmenden Spannungsabfälle, nämlich e_a in den Außenleitern und $\pm e_m$ im Mittelleiter, wegen der verschiedenen Leitungsabstände und damit verschiedenen λ im Vektordiagramm nicht in einer Geraden liegen. Wir wollen von diesen kleinen Abweichungen hier absehen und erhalten dann

a) für den Fall der größten Spannungsänderung das in Abb. 264 gezeichnete Diagramm als für eine Anlage mit drei Leitungen von gleichem Querschnitt gültig. Um die größte Spannungsänderung zu erhalten, hat man hiernach anzunehmen, daß e , also auch ε verdreifacht, bei

ungleichen Querschnitten ($f_m = 0,5 f_a$) verfünffacht wäre, und man hat allgemein, gemäß Gl. (6)

$$\eta = -1 + \sqrt{1 + 2z \cdot \varepsilon \cdot \cos \vartheta + z^2 \cdot \varepsilon^2}, \quad (6')$$

worin $z = \frac{f_a}{f_m} + 1$ für die beiden angenommenen Querschnittsverhältnisse $z = 3$ und 5 zu setzen ist.

Die in Abb. 264 dargestellte Änderung von E_0 bei gleichbleibendem E entspricht natürlich nicht der Wirklichkeit, sondern ist nur wegen der bequemeren Darstellung gewählt. In Wirklichkeit bleibt bei einer Belastungsschwankung oder -änderung E_0 gleich; in dem im übrigen richtigen Diagramm muß man sich also den Maßstab stets so geändert denken, daß diese Bedingung erfüllt wird.

Die Näherungsformeln sind:

$$\eta = z \cdot \varepsilon \cdot \cos \vartheta + \frac{z^2}{2} \varepsilon^2 \cdot \sin^2 \vartheta \quad (6'a)$$

und in roher Annäherung

$$\eta = z \cdot \varepsilon \cdot \cos \vartheta. \quad (6'b)$$

Ferner wird

$$\varepsilon = -\frac{\cos \vartheta}{z} + \frac{1}{z} \sqrt{2\eta + \eta^2 + \cos^2 \vartheta}$$

und in mäßiger Annäherung

$$\varepsilon = \eta \frac{1}{z \cdot \cos \vartheta}$$

b) Für die größte Spannungsschwankung sind dieselben Formeln zu gebrauchen; dann ist jedoch

$$\begin{aligned} z &= 2 \text{ für } f_m = f_a, \\ z &= 3 \text{ ,, } f_m = 0,5 f_a \end{aligned}$$

zu setzen.

Die Zustandsgröße ζ weicht in keiner Weise von der für das Zweileiternetz aufgestellten ab, und auch die Beziehung zwischen ζ und ε bleibt dieselbe, nämlich

$$\zeta = \varepsilon \frac{\cos \lambda}{\cos \varphi} \quad (8b)$$

oder

$$\varepsilon = \zeta \frac{\cos \varphi}{\cos \lambda}.$$

Führt man dies in Gleichung (6'b), so folgt die wichtige Beziehung

$$\eta = z \zeta \frac{\cos \varphi}{\cos \lambda} \cos \vartheta \quad (9')$$

$$= z \zeta \cos^2 \varphi (1 + \operatorname{tg} \lambda \operatorname{tg} \varphi). \quad (9'a)$$

Hier tritt gegenüber der entsprechenden Formel für Zweileiter neu der Faktor

$$z = m + 1 = \frac{f_a}{f_m} + 1$$

auf.

Für die Schwankungsgröße $\xi = \frac{\Delta(W)}{(W)}$ genügt es, wieder festzustellen, daß bei konstantem Widerstand des Verbrauchers

$$\xi = 2\eta^2 + \eta^2 \approx 2\eta \quad (10)$$

ist.

Bei genauerer Untersuchung entartet die Gerade, welche den geometrischen Ort der Endpunkte des Vektors e_m darstellt, in ein schmales Parallelogramm¹⁾.

IX. Mehrphasensysteme.

1. Allgemeines.

Wie bereits kurz erwähnt, enthalten die Mehrphasensysteme mehrere gegeneinander phasenverschobene elektromotorische Kräfte gleicher Frequenz, welche ebensolche Ströme erzeugen. Sind n gleich große elektromotorische Kräfte je um $1/n$ Periode oder $2\pi/n$ gegeneinander verschoben, so bilden sie ein symmetrisches n -Phasensystem.

Das Dreiphasensystem besitzt drei gleich große EMKE, welche um ein Drittel Periode oder $2\pi/3 = 120^\circ$ gegeneinander verschoben sind und deshalb als symmetrisch oder ganzperiodisch bezeichnet werden. Sind n gleich große EMKE je um $1/2n$ Periode oder π/n gegeneinander verschoben, so bilden sie ein halbsymmetrisches oder halbperiodisches System. Zu diesen gehört das Zweiphasensystem, welches aus zwei gegeneinander um je ein Viertel Periode verschobenen elektromotorischen Kräften gebildet wird.

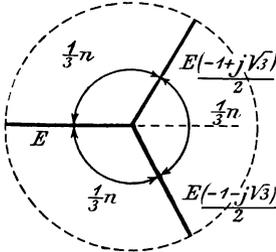


Abb. 265.

Im Vektorbilde ergeben sich die Vektoren der EMKE eines symmetrischen Mehrphasensystems nach Abb. 265 um je $2\pi/n$ Perioden verschoben, also durch aufeinanderfolgendes Drehen eines Vektors um diesen Betrag. Die Augenblickswerte der EMKE sind $E \sin \omega t$, $E \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3})$ und $E \sin(\omega t - \frac{4\pi}{3})$. In der Rechnung mit Richtungsgrößen war $1^{1/n} = \sqrt[n]{1} = \cos \frac{2\pi}{n} + j \sin \frac{2\pi}{n}$.

Demnach sind die EMKE eines symmetrischen Systems die mit E vervielfachten n Wurzeln der Einheit. Für das Dreiphasensystem gibt dies nach Abb. 265 E , $E(-1 + j\sqrt{3})$ und $E(-1 - j\sqrt{3})$.

Jedes n -Phasensystem kann durch $2n$ Leiter unabhängige Verbrauchsstromkreise (Phasen) speisen und heißt dann unverkettet. Gehören jedoch einzelne oder alle Leiter gleichzeitig mehreren Phasen an, dann sind die einzelnen phasenverschobenen Zweigstromkreise elektrisch miteinander gekuppelt oder verkettet.

¹⁾ Teichmüller, J.: ETZ 1917, H. 45—47.

Die verketteten Mehrphasen weisen zwei charakteristische Schaltungen auf: den Stern, und das Vielseit oder den Ring. Diese zwei Schaltungsarten finden sich sowohl für die Stromerzeuger wie auch für die Motoren und anderen Verbrauchsapparate. Bei der Sternschaltung (Abb. 266) werden die Endpunkte der n -Phasen im Null- oder Sternpunkt 0 zusammengefaßt, während Anfänge $1, 2, 3, \dots, n$ mit der aus n -Hauptleitern bestehenden Leitung verbunden werden. Der Null- oder Sternpunkt 0 kann geerdet werden oder isoliert bleiben. Bei Dreiphasen heißt diese Schaltung auch Y -Schaltung. Beim Ring, Abb. 267, werden die Anfangs- und die Endpunkte benachbarter Phasen $1' 2, 2' 3, 3' 4, \dots$ zusammengefaßt und alle n Verbindungspunkte auch mit den n Leitern verbunden. Für diese zwei Schaltungen müssen Stern- und Ringspannung, Stern- und Ringstrom eingeführt werden.

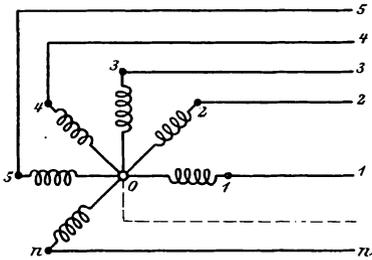


Abb. 266. Sternschaltung.

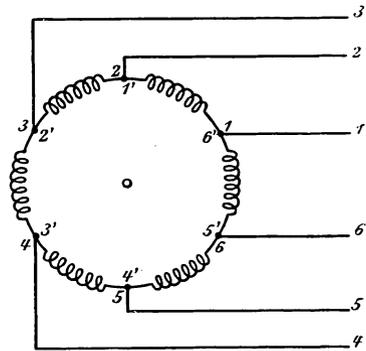


Abb. 267. Ringschaltung.

Die Spannung zwischen dem Nullpunkt und je einem der Hauptleiter heißt Stern- oder Phasenspannung; jene zwischen zwei aufeinanderfolgenden Hauptleitern die verkettete oder kurzweg die Spannung des n -Phasensystems. Die Mehrphasen- oder Mehrleiter-systeme erheischen im Vektorbilde der Spannungen oder Ströme die Unterscheidung zwischen dem Betrachtungssinn des Stromkreises und dem der Leitung¹⁾. Diese Betrachtung bietet den Vorteil der Symmetrie; Hin- und Rückleitung erscheinen völlig gleichwertig. Bei der Betrachtung nach dem Stromkreissinn wird die Spannung zwischen den Drähten 1 und 2 des n -Phasensystems durch einen Vektor E_{12} dargestellt; bei der Betrachtung nach dem Leitungssinn kommt der Leitung 1 die Sternspannung E_1 , der Leitung 2 die Sternspannung E_2 zu. Will man die im Stromkreise $1-2$ wirkende verkettete (gesamte) Spannung bestimmen, so hat man den einen Vektor E_2 umzukehren und zu E_1 hinzuzufügen.

Beim symmetrischen n -Phasensystem in Sternschaltung stellt die Differenzdiagonale also die verkettete Spannung dar, und diese

¹⁾ Teichmüller: ETZ 1902, S. 1 u. 30.

ist für das n -(5-)Phasensystem in Abb. 268

$$E = 2E_{\text{ph}} \sin \frac{\pi}{n}; \quad J = J_{\text{ph}}.$$

Der Strom J in den Hauptleitern fällt beim Stern mit dem Stern- oder Phasenstrom J_{ph} zusammen. Abb. 269 zeigt das zugehörige Strombild für gleichphasige Belastung. Hier ist $n = 5$ gewählt, und die Ströme sind untereinander um $\frac{2\pi}{5} = 72^\circ$ verschoben. Die geometrische Summe aller Stromvektoren wird Null, das Vielseit schließt sich. Es ist also kein Rückleiter nötig. Wird das symmetrische System jedoch ungleichmäßig belastet, dann ist der $(n + 1)$ -Leiter erforderlich.

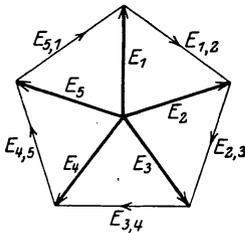


Abb. 268.

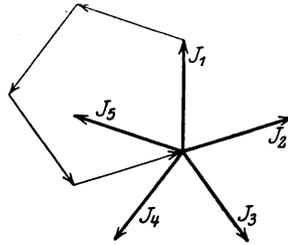


Abb. 269.

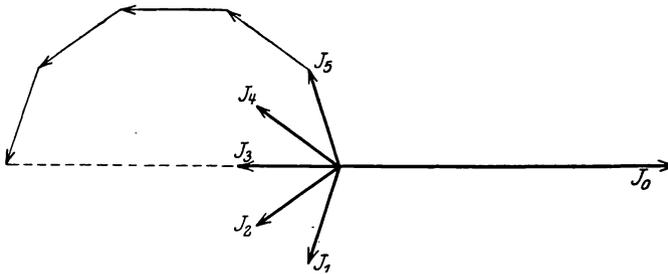


Abb. 270.

Abb. 268 bis 270.

Hat man ein halbsymmetrisches System in Sternschaltung wie in Abb. 270 mit $n = 5$ unter je $\pi/5 = 36^\circ$ gegeneinander verschobenen Strömen, dann ist auch bei gleichmäßiger Belastung aller Phasen der Rückleiter nötig. Er führt den Rückstrom $J_0 = -(J_1 + J_2 + \dots + J_n)$ gleich und entgegengesetzt der geometrischen Summe der Sternströme, ihr Vielseit bleibt offen; seine Schlußlinie ist der Rückleiterstrom J_0 . Die geometrische Summe der Effektivwerte aller Ströme einschließlich J_0 muß eben nach dem Kirchhoffschen Gesetz Null sein.

Bei der Verkettung in Ringschaltung bildet die geometrische Summe aller Spannungen eines symmetrischen n -Phasensystems ein geschlossenes n -Seit. Die verkettete Spannung E ist der Phasen- oder Ringspannung E_{ph} identisch gleich. Es sind hierbei jedoch zweierlei Ströme zu unterscheiden, nämlich die Ring- oder Phasenströme J_{ph}

einer Ringseite, und die Leiterströme oder Ströme kurzweg in den Zuleitungen.

Da die Leiter an den Punkten 1, 2, . . . , n in Abb. 266 zweier benachbarter Phasen zusammentreffen, so führen sie ihren Differenzstrom. Bei gleichmäßiger Belastung aller Phasen ergibt sich also der verkettete oder Leiterstrom J_{12} , durch Umkehrung des einen Vektors J_2 und Hinzufügung zu J_1 . Bei der Ringschaltung gilt also

$$J = 2J_{\text{ph}} \sin \frac{\pi}{n}; \quad E \equiv E_{\text{ph}},$$

Ring und Stern sind also dual, wie Strom und Spannung (S. 237). Was beim Stern für Spannungen und Ströme gilt, trifft beim Ring für Ströme und Spannungen zu. Tatsächlich sind bei einem Stromerzeuger oder Transformator die EMKe voneinander nicht völlig unabhängig. Sie wirken infolge der magnetischen Verkettung der sie erzeugenden Stromkreise aufeinander ein. In diesen elektromagnetischen Verkettungen liegt die tiefere Ursache des Vorsprungs der Mehrphasen gegenüber den Einphasensystemen. Das Metall einer Leitung und das Eisen eines Transformators werden zeitlich beim Mehrphasensystem besser ausgenützt als beim einphasigen.

Bei diesem wechselt die augenblickliche Leistung w mit doppelter Frequenz zwischen zwei Grenzwerten, wie im achten Kapitel S. 210 behandelt,

$$w = EJ \{ \cos \varphi - \cos (2\omega t - \varphi) \}.$$

Beim symmetrischen Dreiphasensystem wechseln wohl noch die augenblicklichen Leistungen jeder Phase; der gesamte Energiefluß ist jedoch konstant, und zwar

$$w = 3 E_{\text{ph}} J_{\text{ph}} \cos \varphi,$$

weil

$$E_{\text{ph}} J_{\text{ph}} \left[\cos (2\omega t - \varphi) + \cos \left(2\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi \right) + \cos \left(2\omega t - \frac{4\pi}{3} - \varphi \right) \right] = 0$$

wird.

Dieser unveränderliche Energiefluß ruft bei Motoren ein drehendes Feld hervor. Die guten Eigenschaften dieser Motoren und die Ersparnis an Leitermetall haben wesentlich dazu beigetragen, dem Dreiphasen- oder Drehstrom die Oberherrschaft zu erringen.

2. Betrachtung im Stromkreissinn und im Leitungssinn.

Man kann eine Leitung auf zweierlei Weise betrachten: einmal, wie Abb. 271 andeutet, im Sinne des Stromkreises, wobei der Strom vom Erzeuger zum Empfänger läuft und von diesem zum Empfänger zurück: In diesem Fall haben die rotierenden Vektoren der Spannung E und des Stromes J nur einen positiven Teil. Dies bedeutet, daß die EMK in dem Sinne wirkt oder der Strom in dem Sinne fließt, in dem man den Stromkreis betrachtet.

Bei Leitungen pflegt man die Richtung der Energieströmung vom Erzeuger zum Verbraucher ins Auge zu fassen. Daraus ergab sich schon bei Gleichstrom die Teilung des Netzes in zwei Halbnetze, in denen

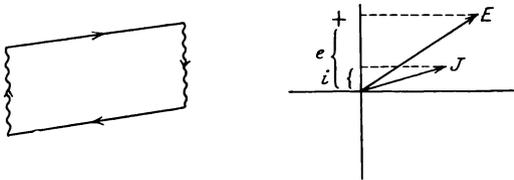


Abb. 271. Betrachtung im Stromkreissinn.

der Strom vom Erzeuger zum Verbraucher fließt. Der Strom fließt dann in beiden Halbnetzen in demselben Sinne, der positive durch die positive Leitung, der negative durch die negative Leitung

zum Empfänger hin. Der Betrachtungssinn ist dann in der negativen Leitung entgegengesetzt dem Stromkreissinn. Man kann sich also durch den Mittelpunkt des Generators und Empfängers eine Nulleitung oder neutrale Leitung vom Potential Null gelegt denken und erhält dementsprechend in Abb. 272 die Halbnetze a und b , die zwei entgegengesetzten Ströme J_a und J_b und Spannungen oder Potentiale E_a und E_b , deren Mitten im Nullpunkt des Koordinatensystems liegen. Die Ströme sind

gerade so groß als in Abb. 271, kann man die in dem Stromkreise wirkende gesamte EMK bestimmen, indem man den

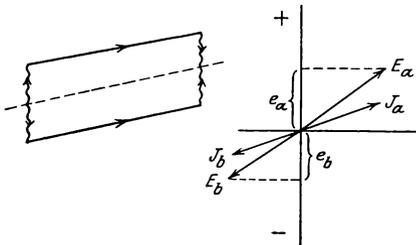


Abb. 272. Betrachtung im Leitungssinn.

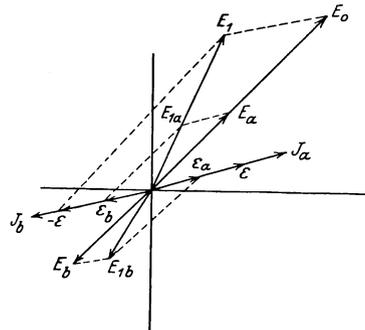


Abb. 273.

einen Vektor E_b oder E_a umkehrt und zu dem anderen addiert. Will man den im Stromkreis fließenden Strom bestimmen, so hat man einen von den beiden Stromvektoren J_a für das Halbnetz a oder J_b für das Halbnetz b zu wählen.

Diese Betrachtung im Leitungssinne muß man auch bei der Ermittlung des Spannungsabfalls verwenden¹⁾.

Der gesamte Spannungsabfall e zerfällt in zwei Teile e_a und e_b , welche zusammen, nach Umkehrung des einen Vektors, e ergeben. Die Zusammensetzung ist in Abb. 273 für das Halbnetz a unter Annahme des Leitungssinnes durchgeführt für eine induktions- und kapazitäts-

¹⁾ Teichmüller, J.: ETZ 1902, S. 1 u. 30.

freie Leitung. E_1 ist die Klemmenspannung am Empfänger. In der Abbildung ist ihre Entstehung aus der Anfangsspannung E_0 am Erzeuger und dem Spannungsabfall in doppelter Weise gezeichnet; einmal sind die Vektoren E_a und E_b um die zugehörigen Spannungsabfälle e_a und e_b vermindert, also $-e_a = e_b$ und $-e_b = e_a$ hinzugefügt; das

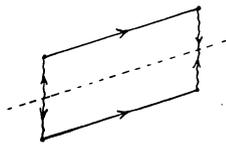


Abb. 274.

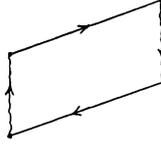


Abb. 275.

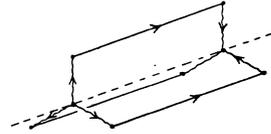


Abb. 276.

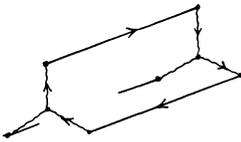


Abb. 277.

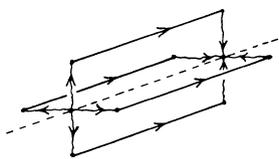


Abb. 278.

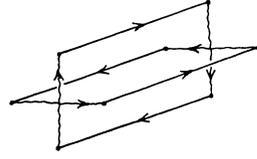


Abb. 279.

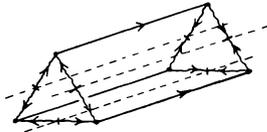


Abb. 280.

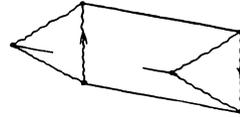


Abb. 281.

Abb. 274—281.

andere Mal ist e_a und $-e_b$ zu e zusammengesetzt, und dies ist umgekehrt und zu e_0 hinzugezählt. Die Fruchtbarkeit dieser Auffassung zeigt sich besonders in verwickelteren Fällen, etwa bei Drehstrom. In den geradzahigen Abb. 274 bis 280 sind die Schemata der verschiedenen Systeme im Stromkreissinne, in den ungeraden Abb. 275 bis 281 im Leitungssinne aufgezeichnet, wobei, strenggenommen, das Einphasensystem zum Zweiphasensystem, die Dreieckschaltung bei drei Phasen zum Sechssystem geworden ist.

3. Drehstromleitungen bei Dreiecksschaltung der Verbraucher.

Wir nennen

I', I'', I''' die Verbrauchsströme in den Netzdritteln,
 J_1, J_2, J_3 die Leitungsströme in den drei Leitungen,
 I und J die Höchstwerte der Verbrauchs- und der Leitungsströme,
 $\gamma', \gamma'', \gamma'''$ Zahlen zwischen 0 und 1, diese Grenzwerte eingeschlossen,
wobei jeweils

$$I' = \gamma' \cdot I; \quad I'' = \gamma'' \cdot I; \quad I''' = \gamma''' \cdot I,$$

e', e'', e''' die für die Verbrauchsströme wirksamen Spannungsabfälle,
 e_1, e_2, e_3 die Spannungsabfälle in den drei Leitungen¹⁾,

¹⁾ Teichmüller, J.: ETZ 1919, S. 45f.

E', E'', E''' die Endspannungen,
 E_0', E_0'', E_0''' die Anfangsspannungen.

a) Die Zustandsgrößen ε und ζ . Der Zustand, für den die Größen ε und ζ gelten, ist der, den man allgemein der Leitungsberechnung zugrunde zu legen pflegt, nämlich der der höchsten gleichen Belastung der drei Netzdritteln, wobei die Phasenverschiebungen der Verbrauchsströme gegen ihre Spannungen alle gleich und die Phasenabstände der Anfangs-, der Endspannungen und der Ströme, je untereinander, über-

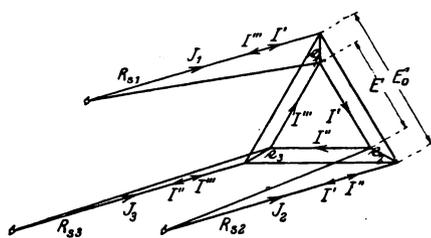


Abb. 282. Perspektives Bild. Dreieckschaltung der Verbraucher.

all gleich $\frac{2\pi}{3}$ sind. Eine so vollkommene Symmetrie des Vektordiagramms kann allgemein, also auch für den Fall induktiver Leitungen, natürlich nur vorhanden sein, wenn die Induktionswirkungen der Leitungen aufeinander dieselben sind, und das setzt offenbar gleiche Abstände der drei Leitungen voneinander voraus. Die Vorstellung des

„Zustandes der Berechnung“ schließt also die Vorstellung einer Anordnung der Leitungen im gleichseitigen Dreieck ein.

Man kann nun entweder ein perspektives Bild, wie Abb. 282, oder ein Vektordiagramm, wie Abb. 283, zeichnen, wobei nicht nur die Belastungsströme, sondern auch die Wirkwiderstände lR_w , Blindwiderstände $lL\omega$ und Schein- oder Richtungswiderstände lR_s der drei Leitungen von der Länge l gleich angenommen sind.

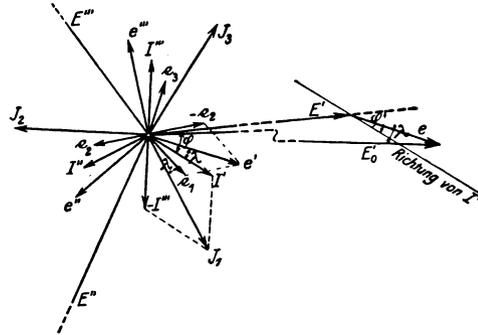


Abb. 283.

Setzt man an die Endspannung E' , die dem Verbrauchsstrom I' um φ voreilt, den Spannungsabfall $e' = I' \cdot lR_s$, dann findet man die Anfangsspannung E_0' . I' setzt sich aber mit $-I'''$ zu J_1 zusammen, und dieser Leitungsstrom erzeugt in der Leitung 1 den Spannungsabfall (1) ... $e_1 = J_1 \cdot lR_s$, welcher mit $-e_2 = -J_2 \cdot lR_s$ den für den Verbrauchsstrom wirksamen Spannungsabfall $e' = \sqrt{3} e_1 = \sqrt{3} J l R_s = 3 I l R_s \dots$ (2) ergibt. Man erkennt aus Abb. 283, daß in jedem Verbraucherstromkreise dieselben Verhältnisse gelten wie beim Einphasenstromkreise und insbesondere, daß $\sphericalangle(e_1', I') = \sphericalangle(e_1, J_1) = \lambda$.

Der relative Spannungsabfall ist $\varepsilon_A = \frac{e'}{E'}$, und da der Richtungswider-

stand des Verbrauchers $\Re_A = \frac{E}{I}$, folgt aus Gleichung (2)

$$\varepsilon_A = \frac{3lR_s}{\Re_A}. \quad (3)$$

Für Einphasenstrom gilt die ähnliche Formel

$$\varepsilon_{\text{einph}} = \frac{2lR_s}{\Re_{\text{einph}}}. \quad (3a)$$

Um dieselbe Leistung zu erhalten, müssen aber bei der Einphasenleitung mit derselben Endspannung drei solche Verbrauchswiderstände \Re_{einph} parallel geschaltet werden, so daß also $\Re_{\text{einph}} = \frac{1}{3} \Re_A$.

Daraus folgt, daß für Übertragung derselben Leistung über den Abstand l und mit gleicher Endspannung

$$\varepsilon_{\text{einph}} = \frac{2lR_s}{\frac{1}{3} \Re_A} = \frac{6lR_s}{\Re_A} = 2\varepsilon_A \quad (4)$$

bei gleichem Scheinwiderstand R_s der Leitung der relative Spannungsabfall bei Einphasenstrom doppelt so groß wird als bei Dreiecksschaltung der mit Drehstrom gespeisten Verbraucher.

Der relative Leistungsverlust $\zeta = \frac{w}{W}$ ergibt sich aus

$$w = 3 e_1 J_1 \cos \lambda = \sqrt{3} e' J_1 \cos \lambda$$

$$W = \sqrt{3} E' J_1 \cos \varphi,$$

zu

$$\zeta_A = \varepsilon_A \frac{\cos \lambda}{\cos \varphi} \quad (5)$$

Auch hier gilt für gleichen Wert von R_s (also auch für gleichen Querschnitt)

$$\zeta_A = \frac{1}{2} \zeta_{\text{einph}}, \quad (4a)$$

weil für gleiche Leistung

$$J_{\text{einph}} = J_1 \sqrt{3} = 3I'$$

sein muß.

b) Die Schwankungsgrößen η und ξ . Um die Spannungsänderungen ΔE festzustellen, welche die Verbrauchsspannung allgemein oder als absolut größte, oder als größte plötzliche Änderung (Schwankung) erleiden kann, beobachten wir zuerst ein Netzdrittel. Dabei nehmen wir der bequemeren Entwicklung wegen die Endspannung E' unveränderlich, die Anfangsspannung E_0' veränderlich. Der Übergang zu den gegenteiligen, wirklichen Verhältnissen läßt sich gedanklich leicht vollziehen. Man liest aus Abb. 282 und 283:

$$\begin{array}{lll} J_1 = I' - I''' & e_1 = e_1' - e_1''' & e' = e_1 - e_2 \\ J_2 = I'' - I' & e_2 = e_2'' - e_2' & e'' = e_2 - e_3 \\ J_3 = I''' - I'' & e_3 = e_3''' - e_3'' & e''' = e_3 - e_1, \end{array}$$

also auch

$$e' = e_1' - e_1''' + e_2' - e_2''' \tag{6a}$$

oder

$$e' = II[(\gamma' - \gamma''') R_{s1} + (\gamma' - \gamma'') R_{s2}]. \tag{6b}$$

Alle Additionen und Subtraktionen sind graphisch auszuführen. Die veränderlichen Verbrauchsströme in den Netzdritteln sind $\gamma' I$, $\gamma'' I$ und $\gamma''' I$, wo die γ -Werte zwischen 0 und 1 liegen.

e_1''' deutet den Spannungsabfall an, der durch den Strom I''' in der Leitung 1 hervorgerufen wird.

4. Induktionsfreie Belastung und Leitung.

In Abb. 284 sind zunächst die Höchstwerte der zu addierenden Komponenten unter der Annahme gleicher Leitungswiderstände $R_{s1} = R_{s2} = R_{s3}$ (wobei die Scheinwiderstände gleich den Wirkwiderständen sind) gezeichnet und danach in Abb. 285 die nach Gl. (6) auszuführende Addition für den Fall gleicher Leitungswiderstände durchgeführt. Ungleiche Wirkwiderstände sind sehr selten.

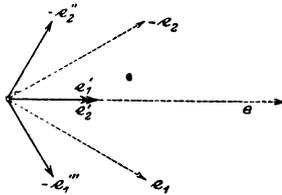


Abb. 284. Graphische Darstellung von Gl. (6 b).

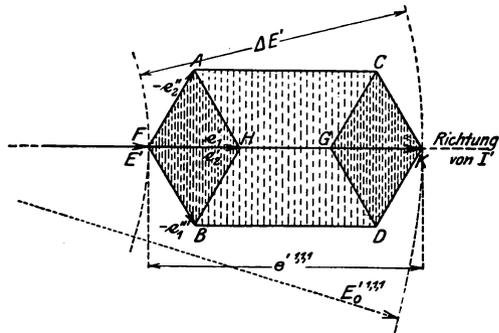


Abb. 285. Ortssechseck für die Endpunkte von e und E_0' .

Gehen wir vom Zustande der Höchstbelastung, für den das eingezeichnete $e^{1,1,1}$, d. h. das e' für $\gamma' = 1$, $\gamma'' = 1$, $\gamma''' = 1$ gilt, aus und lassen die Komponenten e_2'' und e_1''' , — die sich, weil sie von verschiedenen Verbrauchsströmen I'' und I''' herrühren, unabhängig voneinander ändern können — durch Verkleinerung dieser Verbrauchsströme ändern, so verkürzt sich e' und verschiebt sich im allgemeinen in der Phase etwas, und zwar so, daß das eng schraffierte Parallelogramm zwischen C und D den Ort für die Endpunkte von e' und damit auch von E_0' darstellt. Lassen wir nun bei beliebiger Änderung von e_2'' und e_1''' die Komponenten e_1' und e_2' abnehmen — was, weil sie von demselben Verbrauchsstrom I' herrühren, nur gleichzeitig geschehen kann —, so verschiebt sich die eben festgestellte Ortsfläche von ihrer rechten in die linke Lage zwischen A und B , der Stiel, an dem das Blatt CD saß, und der die Länge $e_1' + e_2' = FG$ hatte, hat sich auf Null verkürzt. Die Ortsfläche bleibt während ihrer Verschiebung als solche natürlich unverändert, denn die Wirkung von I'' und I''' ist, weil sich die Ströme

in den Leitungen 1 und 2 über den Strom I' in denselben Leitungen einfach überlagern, von der Größe des Stromes I' unabhängig. Das ganze schraffierte Sechseck, das von dem sich verschiebenden Blatte bestrichen wurde, ist nunmehr der Ort der Endpunkte von e' und E_0' für alle beliebigen Belastungen. Man erkennt, daß die Ortsfläche ganz zwischen den beiden mit $E'^{1,1,1}$ und $E_0'^{1,1,1}$ geschlagenen Kreisen, liegt. Dies sind die Vektoren der End- und der Anfangsspannung im Falle der Höchstbelastung der drei Netzdrittel. Jede Komponente des Spannungsabfalles vergrößert also E_0' über E' hinaus.

Wir unterscheiden folgende vier Fälle.

a) Der Fall der größten Spannungsänderung bei Gesamtänderung der Belastung. Hierbei ändert sich die gesamte Belastung als Ganzes von ihrem Höchstwerte I auf Null, nur die drei Drittel bleiben in jedem Augenblick gleich belastet. Natürlich sind dann dabei auch alle Komponenten von e' (oder e'' und e''') gleich groß und der Ort aller Endpunkte von e' und E_0' ist dann in Abb. 285 die Strecke $FK = e'^{1,1,1}$, also die den Spannungsabfall bei Höchstbelastung darstellende Strecke; die ist aber auch gleich dem Spannungsabfall im Zustande der Berechnung. Die größte Spannungsänderung ist also

$$\Delta E = e = e'^{1,1,1}$$

und die relative Spannungsschwankung bei Änderung (\ddot{a}) der Gesamtbelastung (g)

$$\eta_{\ddot{a},g} = \varepsilon. \quad (7)$$

b) Der Fall der größten Spannungsänderung bei Einzeländerung der Belastungsdrittel. Hierbei können sich die Drittel einzeln und unabhängig voneinander ändern. Da jedoch jede Komponente von e' die Anfangsspannung vergrößert, kann e' unter keinen Umständen größer werden als $e'^{1,1,1}$, und die absolut größte Spannungsänderung ist infolgedessen wie beim Falle a)

$$\eta_{\ddot{a},e} = \eta_{\ddot{a},g} = \varepsilon \quad (8)$$

c) Der Fall der größten Spannungsschwankung bei Gesamtschwankung der Belastung. Fall a) ist auch als plötzliche Änderung denkbar, z. B. beim Abschalten eines Motors, und soll dann als Schwankung bezeichnet werden.

Dann ist also wiederum die Spannungsschwankung dieselbe wie im Fall a):

$$\eta_{s,g} = \varepsilon. \quad (9)$$

Der Index s soll auf „Schwankung“ deuten.

d) Der Fall der größten Spannungsschwankung bei Einzelschwankung der Belastungsdrittel. Besteht die Belastung in drei voneinander unabhängigen Dritteln, so ist vernünftigerweise nur ein plötzliches Verschwinden der Belastung in einem der Drittel anzunehmen; ein plötzliches gleichzeitiges Verschwinden in zwei oder allen drei Dritteln ist

zu unwahrscheinlich. Dann ist die größte Spannungsschwankung

$$\Delta E = \frac{2}{3} e,$$

also ist

$$\eta_{s,e} = \frac{2}{3} \varepsilon.$$

Diese Spannungsschwankung tritt in demjenigen Netzdrittel ein, in dem die Belastung verschwindet, und zwar dann, wenn gleichzeitig die beiden anderen Belastungen einander gleich sind. Die Richtigkeit der beiden letzten Gleichungen wird für die Fälle $\gamma'' = \gamma''' = 1$ und $\gamma'' = \gamma''' = 0$ aus Abb. 285 ohne weiteres bewiesen; im ersten Falle ist $\Delta E' = HK$, im zweiten Falle ist $\Delta E' = FG$. Abb. 286 zeigt, daß

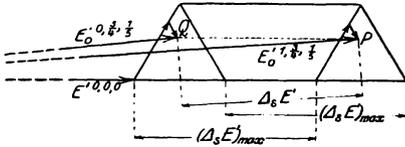


Abb. 286.

für $\gamma'' \geq \gamma'''$ die Spannungsschwankung $\Delta E'$ stets kleiner sein muß. Es ist darin beispielsweise $\gamma'' = 3/4$ und $\gamma''' = 1/5$ gesetzt. P und Q sind die Endpunkte des Vektors von E'_0 vor und nach der Abnahme von I' um seinen vollen Betrag. Der unmittelbare Abstand zwischen P und Q ist hier wie in allen anderen Fällen gleich $2/3$ von $e'^{1,1,1}$, aber die Spannungsschwankung, die ja durch den radialen Abstand zwischen den beiden um den Anfangspunkt O des Vektordiagramms mit OP und OQ geschlagenen Kreisen dargestellt wird, ist nach einfachen geometrischen Gesetzen offenbar stets kleiner als PQ , außer wenn PQ in die Verlängerung des Vektors von E' fällt; dann ist sie gleich diesem Abstände PQ . Und das tritt ein, wenn $\gamma'' = \gamma'''$. Die Behauptung ist also richtig.

5. Belastung induktiv, Leitung induktionsfrei.

Ist der Leistungsfaktor des Verbrauchers kleiner als 1, während der der Leitungen wie bisher gleich 1 ist, so wird — gerade so wie früher

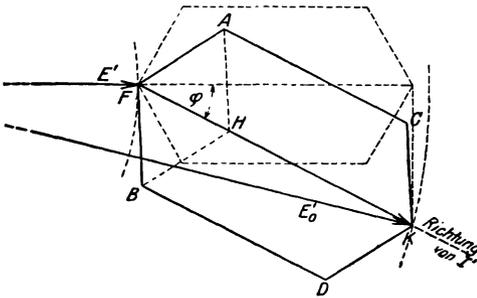


Abb. 287.

beim Einphasenstrom der Vektor des Spannungsabfalls — jetzt die ganze sechseckige Ortsfläche für die Endpunkte von e' und E'_0 gegen den Vektor von E' um den Winkel φ geneigt; denn nach Abb. 283 muß der Abfall e' im Falle der Höchstbelastung, also $e'^{1,1,1}$, um diesen Winkel gegen E' verschoben sein, während die vier einzelnen Komponenten

als reine Wirkspannungsabfälle (Ohmsche Abfälle) vom Charakter $e = I \cdot lR_w$ stets mit den sie hervorrufenden Stromkomponenten in gleicher Phase sein müssen. Das Diagramm von Abb. 285 ändert sich also in das von Abb. 287, in welcher Abb. 285 gestrichelt wiederholt ist.

Wir haben nun wieder die in Abschnitt 4 unterschiedenen Fälle gesondert zu behandeln.

a) **Der Fall der größten Spannungsänderung bei Gesamtänderung der Belastung.** Aus der Ortsfläche für e' und E_0' wird, wie im Falle 1a, wiederum die den Vektor e' darstellende Gerade. Daraus folgt, daß die für das Einphasennetz abgeleiteten Beziehungen auch hier gelten, daß also je nach dem gewünschten Grade der Annäherung

$$\left. \begin{aligned} \eta_{\bar{a},g} &= -1 + \sqrt{1 + 2 \cdot \varepsilon \cdot \cos \varphi + \varepsilon^2} \\ \eta_{\bar{a},g} &= \varepsilon \cdot \cos \varphi \left[+ \frac{\varepsilon^2}{2} \cdot \sin \varphi \right] \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

oder zu setzen ist.

b) **Der Fall der größten Spannungsänderung bei Einzeländerung der Belastungsdrittel.** Hier sind verschiedene Fälle möglich, je nach dem Leistungsfaktor der Belastung. Ist $\varphi = \frac{\pi}{6}$, also $\cos \varphi \geq 0,866$, dann fällt die Oberfläche des Sechsecks vollständig innerhalb der beiden den

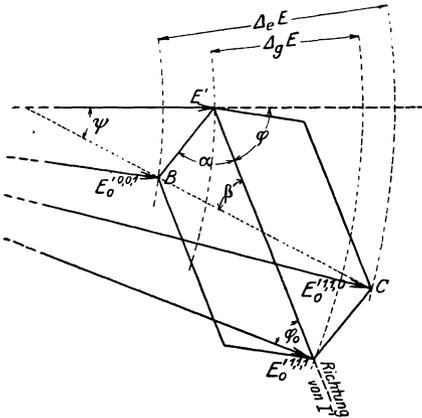


Abb. 288. Ortssechseck bei induktiver Belastung.

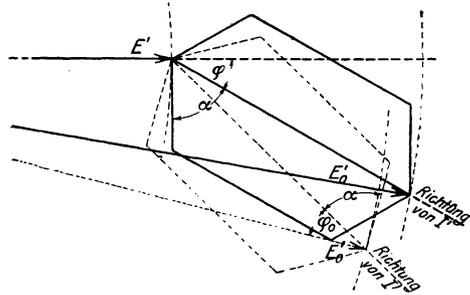


Abb. 289. Grenzfall.

Wert $\Delta_g E$ bei Gesamtschwankung (g) bestimmenden Kreise. Dann ist auch

$$\eta_{\bar{a},e} = \eta_{\bar{a},g} \quad (12)$$

und

$$\Delta_e E = \Delta_g E.$$

In Abb. 288 ist dies nicht der Fall, Abb. 289 gibt den Grenzfall. Dieser ist bestimmt durch die Beziehung

$$\varphi + \alpha \leq \frac{\pi}{2} \text{ oder, da } \alpha = \frac{\pi}{3}, \text{ durch } \varphi \leq \frac{\pi}{6}, \quad (13)$$

wobei kein Punkt unter den Kreis mit E' nach innen fällt, und (im punktierten Teil von Abb. 289 durch

$$\varphi_0 + \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \text{ oder } \varphi_0 \leq \frac{\pi}{6}, \quad (14)$$

wobei kein Punkt über den Kreis mit E'_0 nach außen hinausfällt.

Da nun bei induktiver Belastung und induktionsfreier Leitung der Winkel φ_0 zwischen E_0' und I' stets kleiner ist als der Winkel φ zwischen Endspannung E' und I' , bleibt als Bedingung für Gl. (11) und (12) übrig

$$\varphi \leq \frac{\pi}{6}; \cos \varphi \geq 0,866. \tag{15}$$

Ist Gl. (15) nicht befriedigt, dann tritt in Abb. 288 die Strecke \overline{BC} an Stelle von e und ψ an Stelle von φ . Nun ist aber $BC = \frac{\sqrt{7}}{3} e$ und $\cos \beta = \frac{2}{\sqrt{7}} = 0,76$, also $\beta \approx 41^\circ$ und somit gilt

$$\eta_{\bar{a},g} = -1 + \sqrt{1 + \frac{2}{3} \sqrt{7} \varepsilon \cos(\varphi - 41^\circ) + \frac{7}{9} \varepsilon^2}. \tag{16}$$

c) Die größte Spannungsschwankung verändert im Netzdrittel den Spannungsabfall um $\frac{2}{3}$. Es ergibt sich daraus genau

$$\eta_{s,e} = -1 + \sqrt{1 + \frac{4}{3} \varepsilon \cos \varphi + \frac{4}{9} \varepsilon^2} \tag{17}$$

oder mit meist genügender Annäherung

$$\eta_{s,e} \approx \frac{2}{3} \varepsilon \cos \varphi. \tag{17a}$$

Die Schwankung ist wieder, wie im Falle b), auf die unveränderte Endspannung E' bezogen. Der Wert von $\eta_{s,e}$ ist wiederum unabhängig von der gleichzeitigen Größe von I'' und I''' und bleibt derselben gleichgültig, ob $\cos \varphi \geq 0,866$. Denn eine Schwankung soll nur in einem Netzdrittel vorkommen.

Will man nicht auf die Endspannung E' , sondern auf den jeweils nach der Spannungsschwankung vorhandenen Wert der Spannung beziehen, so stimmen die Gleichungen (17) nicht mehr genau und verfährt man besser graphisch.

6. Drehstromleitungen bei Sternschaltung der Verbraucher¹⁾.

Hier sollen nur die zwischen Außen- und Mittelleiter geschalteten Verbraucher behandelt werden, weil diese Netzart gerade geschaffen wurde, um die Verbraucher in Stern zu schalten und dadurch den Vorteil der Spannungserhöhung zwischen den Außenleitern zu erhalten.

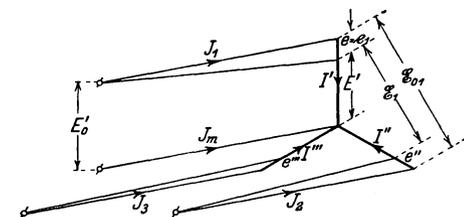


Abb. 290. Perspektives Bild. Sternschaltung der Verbraucher.

a) Die Zustandsgrößen ε und ζ . Der Darstellung für die Dreieckschaltung in Abb. 282 des vorigen Aufsatzes entspricht, ebenso unbefangen hingeworfen wie jene,

jetzt die Darstellung in Abb. 290, die uns gleichzeitig zur Erläuterung mehrerer Zeichen dienen kann. Sie gilt für den Zustand der gleichen

¹⁾ Teichmüller J.: ETZ 1919, S. 580.

höchsten Belastung der drei Netzdrittel, der allgemein der Berechnung der Leitungen zugrunde gelegt wird; d. h. es ist angenommen

$$I' = I'' = I''' = I; \quad \gamma' = \gamma'' = \gamma''' = 1.$$

Ferner wird angenommen, daß die Phasenverschiebungen zwischen diesen Strömen und ihren zugehörigen Spannungen einander gleich seien. Der Mittelleiter ist stromlos

$$J_m = 0.$$

Die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= I' = \gamma' \cdot I, \\ J_2 &= I'' = \gamma'' \cdot I, \\ J_3 &= I''' = \gamma''' \cdot I, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

und

$$J_m = - (I' \hat{+} I'' \hat{+} I''') \quad (2)$$

entsprechen den für das Dreileiternetz aufgestellten.

Aus dem vollständigen Vektordiagramm, Abb. 291, entnehmen wir die Tatsache, daß, wenn der für den Verbraucher wirksame Spannungsabfall e' seinem Verbrauchsstrom I' um den Winkel λ vorauseilt, so daß er gegen die Verbraucherspannung um $\vartheta = \varphi - \lambda$ in der Phase verschoben ist, auch der Spannungsabfall für die Außenleiterspannung e_a gegen die verkettete Spannung \mathcal{E} um denselben Winkel ϑ im selben Sinne verschoben ist.

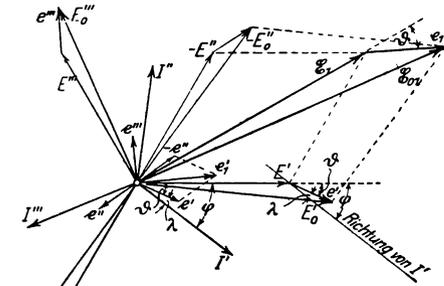


Abb. 291. Vollständiges Diagramm zu Abb. 290.

Das Diagramm verdeutlicht uns noch die bekannten Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E} &= \sqrt{3} \cdot E; \quad J_1 = I'; \quad e_1 = e' \\ e_a &= \sqrt{3} \cdot e_1 = \sqrt{3} J_1 \cdot l R_s = \sqrt{3} I' \cdot l R_s \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Diese Formeln setzen allerdings gleiche R_s und λ für alle drei Netzdrittel, also bei induktiven Leitungen vollkommen gleiche Induktionswirkung voraus. Zum „Zustande der Berechnung“ gehört also auch vollkommen symmetrische Anordnung der Leitungen.

Dann ergibt sich für die erste Grundgröße, den relativen Spannungsabfall, aus den für die Verbraucher geltenden Größen, also aus

$$\varepsilon_y = \frac{e'}{E'}$$

der Wert

$$\varepsilon_y = \frac{l \cdot R_s}{R_y}, \quad (4)$$

wobei R_y der Scheinwiderstand eines Verbrauchers ist. In dieser Gestalt steht ε in deutlichem Gegensatz zu dem ε_A bei Dreieckschaltung nach Gl. (3), S. 271. Wollte man — wozu allerdings kein zwingender Anlaß vorliegt — den relativen Spannungsabfall durch die die Außenleitungen betreffen-

den Größen ausdrücken, so würde man in

$$\frac{e_a}{\mathcal{E}} = \frac{e'}{E'} = \varepsilon_y, \tag{5}$$

eine Größe von demselben Werte haben wie die vorige.

Die zweite Zustandsgröße, der relative Leistungsverlust,

$$\zeta = \frac{w}{W}$$

ergibt sich aus

$$w = 3 e_1 J_1 \cos \lambda = \sqrt{3} e_a J_1 \cos \lambda$$

und

$$W = 3 E' I \cos \varphi = \sqrt{3} \mathcal{E} J_1 \cos \varphi,$$

wie früher zu

$$\zeta = \varepsilon \frac{\cos \lambda}{\cos \varphi}. \tag{6}$$

b) Die Schwankungsgrößen η und ξ . Die relative Leistungsschwankung ist bei von der Spannung unabhängigen Richtungswiderstand R_y der Verbraucher zu η stets in der einfachen Beziehung

$$\xi = 2 \eta + \eta^2 \approx 2 \eta. \tag{7}$$

Für die Endpunkte des Vektoren des mit der Belastung veränderlichen Spannungsabfalls, also auch der Anfangsspannungen, erhalten wir auch jetzt ein Sechseck, wie bei der Dreiecksschaltung, in dieses Sechseck ist aber bei induktionsfreien Leitungen eine Gerade FK eingesprengt. Die größte Spannungsänderung hängt nun auch noch von dem Verhältnis $m = \frac{f_1}{f_m}$ der Querschnitte f_1 der Außenleiter und f_m des Mittelleiters ab, wie beim Dreileitersystem. Für induktionsfreie Leitung und Belastung wird die größte Spannungsänderung

$$\eta_a = (2 m + 1) \varepsilon, \tag{8}$$

die größte Spannungsschwankung

$$\eta_s = (m + 1) \varepsilon, \tag{9}$$

also für $f_m = 0,5 f_1$, $m = 2$ wird $\eta_a = 5 \varepsilon$ und $\eta_s = 3 \varepsilon$.

7. Induktionsfreie Belastung und Leitung bei Sternschaltung.

Der Spannungsabfall ist

$$e' = I l R_{w1} (\gamma' (m + 1) + \gamma'' m + \gamma''' m),$$

wobei der Vektor des ersten Gliedes in Phase ist mit dem Verbraucherstrome I' , des zweiten mit I'' , des dritten mit I''' , wie in Abb. 292a und b und Abb. 293a und 293b für $m = 1$ und $m = 2$ dargestellt.

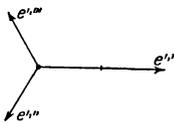


Abb. 292 a.

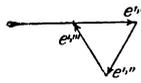


Abb. 292 b.

$m = 1$

Hierin ist R_{w1} der Wirkwiderstand des Außenleiters 1, und in Abb. 292 und 293 $e^{1,2,3}$ der Abfall,

den der Höchstwert des Stromes I''' im Leiter, hervorruft, usw. Man kann obige Gleichung also auch schreiben

$$e' = \gamma' (m + 1) e''' + \gamma'' m e'' + \gamma''' m e^{1, '''} ,$$

wobei die Addition graphisch zu geschehen hat. Die in Abb. 292 dargestellten Komponenten ergeben, wenn man durch beliebige Änderung der drei Ströme jeder Komponente erlaubt, sich von ihrem Höchstwert auf Null herab zu ändern, das in Abb. 294 gezeichnete Diagramm als Ortssechseck für die Endpunkte aller e' und E_0' .

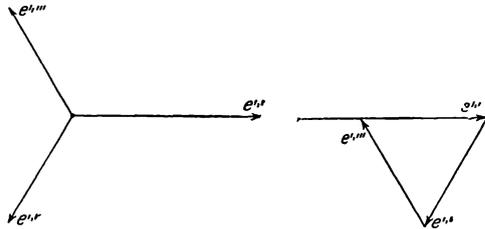


Abb. 293 a.

$m = 2$

Abb. 293 b.

Man erkennt, daß bei gleichen Leitungsquerschnitten, also $m = 1$, die Ortssechsecke genau dieselbe Gestalt und Größe haben wie bei der Dreiecksschaltung, sich aber grundsätzlich von jenen unterscheiden, als sich dort das Sechseck mit einer Ecke an das Ende des Vektors E' ansetzte und sich bei Veränderung von φ um diesen drehte (Abb. 289), während jetzt dieser Endpunkt oder Drehpunkt innerhalb des Sechsecks liegt.

Der Spannungsabfall im Zustand der Berechnung ist $e = FK$, die größte Spannungsänderung $\Delta_{\bar{a}} E = GH = 3 e$ in Abb. 294, allgemein $(2m + 1) e$. Diese Spannungsänderung tritt ein, wenn die Belastung sich ändert von

$$\gamma' = 1; \quad \gamma'' = \gamma''' = 0,$$

$$\text{bis } \gamma' = 0; \quad \gamma'' = \gamma''' = 1.$$

Es ist also

$$\eta_{\bar{a}} = (2m + 1) \varepsilon. \quad (10)$$

Die größte Spannungsschwankung erhalten wir, da $\Delta_s E$ höchstens $= GF = KH = 2 e$ in Abb. 294, allgemein

$$\eta_s = (m + 1) \varepsilon. \quad (11)$$

Sie tritt für den Stromkreis von I' ein, wenn I' selbst auf Null abnimmt, während gleichzeitig $I'' = I'''$ irgendeinen beliebigen Wert haben. Ist $I'' \geq I'''$, dann ist die Spannungsschwankung immer kleiner als $\eta_s = (m + 1) \varepsilon$.

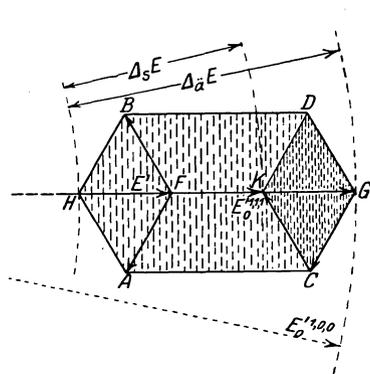


Abb. 294. Ortssechseck für die Endpunkte von e' und E_0' .

8. Belastung induktiv, Leitung induktionsfrei bei Sternschaltung.

Bei induktiver Belastung geht Abb. 294 für $m = 1$ über in Abb. 295. Bei dieser Umgestaltung ist angenommen, daß Leistung, Spannung und Leitungsquerschnitte ($m = 1$) dieselben geblieben sind, so daß der Strom und damit alle Komponenten des Spannungsabfalls im Verhält-

nis $1:\cos \varphi$ vergrößert sind. Diese reziproke Projektion ist in Abb. 295 mit gestrichelten Linien ausgedrückt. Darstellung und Bezeichnungen lehnen sich an Abb. 285—289 möglichst an.

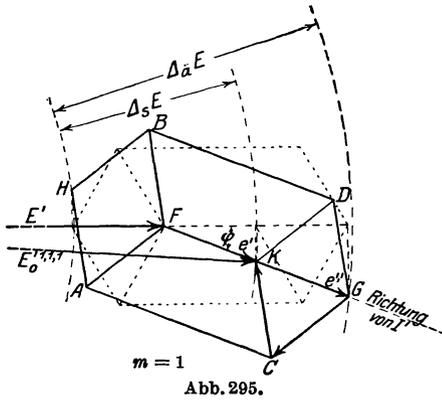
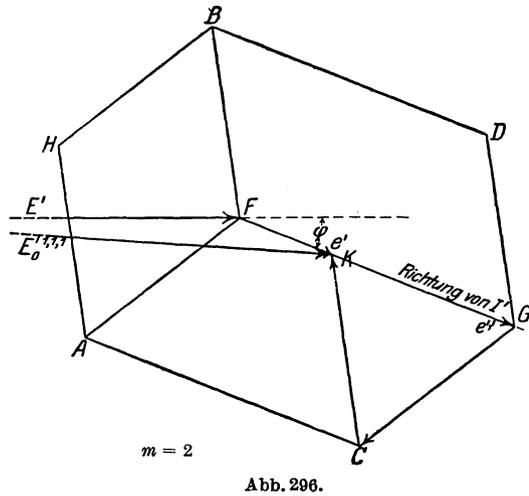


Abb. 296 zeigt dasselbe Ortssechseck für $m = 2$.

Gemäß der für Dreieckschaltung gegebenen Erklärung können wir die Ortsflächen in Abb. 294 bis 296 am einfachsten folgendermaßen erklären: Das Blatt, das den Ort für den Endpunkt des Spannungsabfalls e' und die Anfangsspannung E_0' darstellt, wenn $\gamma' = 1$ und $0 \leq \gamma'' \leq 1$ und ebenso

$0 \leq \gamma''' \leq 1$, nämlich das Parallelogramm zwischen C und D ist an seinem Stiele $FG = e^{1,1}$ jetzt so befestigt, daß sich seine Spitze im



Gegensatz zu der Lage bei Dreiecksschaltung zum Endpunkte von E' hinwendet. In dieser Lage bleibt es, während es sich bei Änderung von I' gegen den Vektor E' hinbewegt, bis es in die Lage AB kommt. Bei der Sternschaltung haben wir nicht mehr die Gesamtänderung oder -schwankung zu behandeln, weil sie gegenüber den Vorgängen bei Dreiecksschaltung nichts Neues wäre.

a) Die größte Spannungsänderung ist,

wie bei Dreiecksschaltung, abhängig vom Leistungsfaktor der Belastung. Wir müssen unterscheiden, ob

$$\varphi \geq \frac{\pi}{6}, \text{ also } \cos \varphi \leq 0,866 .$$

In Abb. 297 ist das Diagramm für den Grenzwert $\varphi = + \frac{\pi}{6}$ gezeichnet; für $\varphi = - \frac{\pi}{6}$ würde HB auf E' senkrecht stehen.

Läßt man den Winkel φ von Null aus anwachsen, so erkennt man, daß für sehr kleine φ das Ortssechseck mit allen seinen Punkten zwischen

den um den Nullpunkt der Spannungsvektoren durch die Punkte H und G geschlagenen Kreisen liegt; für die größte Spannungsänderung ist also dann die Strecke GH maßgeblich. Nähert sich $\varphi_0^{1,0,0}$, d. i. der Winkel der Phasenverschiebung zwischen $E_0^{1,0,0}$ und I' , dem Werte $\pi/6$ mehr und mehr, so tritt das Sechseck mit dem Endpunkte D aus dem Kreisringe zwischen G und H nach außen hinaus; und überschreitet φ den Wert $\pi/6$, so fällt A aus diesem Kreisringe nach innen heraus. Kurz vorher haben schon Punkte in der Gegend zwischen H und A diese Grenze überschritten; der Wert $\varphi = \pi/6$ als Grenzwert ist also nicht ganz genau, aber die Ungenauigkeit spielt offenbar eine sehr kleine Rolle, und da der genaue Grenzwert vom Verhältnis $GH:E_0$ abhängig und nur umständlich festzustellen ist, so dürfen wir es

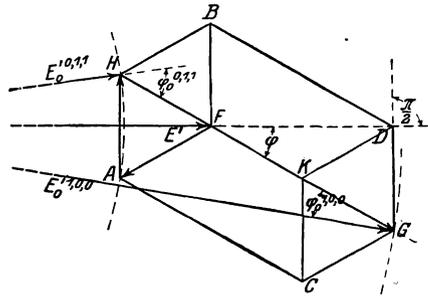


Abb. 297. Grenzfall $\varphi = \pi/6$.

bei der oben gemachten Feststellung als einer weitaus genügend genauen bewenden lassen. Alle weiteren Überlegungen würden dieselben sein wie bei der Dreiecksschaltung; unter Verweisung auf diese Ausführungen ziehen wir somit die Schlußfolgerung, daß die größte Spannungsänderung

$$\eta_{\bar{a}} = -1 + \sqrt{1 + 2z \cdot \varepsilon \cdot \cos \chi + z^2 \cdot \varepsilon^2} \tag{10a}$$

oder in Annäherung

$$\eta_{\bar{a}} = z \cdot \varepsilon \cdot \cos \chi \left[+ \frac{z^2}{2} \cdot \varepsilon^2 \cdot \sin^2 \chi \right] \tag{10b}$$

worin

$$\left. \begin{aligned} z &= 2m + 1 \\ \chi &= \varphi \end{aligned} \right\}, \tag{12}$$

und solange $\cos \varphi \geq 0,866$, dagegen

$$\left. \begin{aligned} z &= \frac{1}{3} \sqrt{7} \cdot (2m + 1) \\ \chi &= \varphi - 41^\circ \end{aligned} \right\}, \tag{13}$$

und

wenn $\cos \varphi \leq 0,866$. Die Gleichsetzung von χ mit ψ soll an Abb. 289 erinnern.

b) Bei der Ermittlung der Spannungsschwankungen fallen Erwägungen dieser Art wieder (wie bei der Dreiecksschaltung) weg; denn nur in einem Netzdrittel ist eine plötzliche Belastungsschwankung anzunehmen, genau gleichzeitig schwanken andere Belastungen nicht. Es gelten also jetzt die Gleichungen (10) ebenfalls, jedoch ist darin

$$\left. \begin{aligned} z &= m + 1 \\ \chi &= \varphi \end{aligned} \right\} \tag{14}$$

und

zu setzen, gleichgültig, ob der Leistungsfaktor des Verbrauchers größer oder kleiner als 0,866 ist.

Wir haben hier in beiden Fällen (a und b) die relative Spannungsänderung und -schwankung immer einfach auf den nach Größe und Phase unveränderten Vektor E' bezogen, wie wir es auch bei der Dreiecksschaltung zunächst getan hatten. Im vorliegenden Falle der Sternschaltung könnte man sogar schon für $\cos \varphi > 0,866$ hiergegen Bedenken tragen, denn die bei der Änderung vorkommende kleinste Spannung ist in der Größe $E'_0{}^{0,1,1}$ kleiner als E' . Wir wollen aber von peinlicheren Untersuchungen absehen, da deren Behandlung keinen ihre Umständlichkeit rechtfertigenden Vorteil bringen würde.

9. Andere Behandlung der unsymmetrisch belasteten Dreiphasenleitung in Sternschaltung.

Eine weniger genaue, aber vielleicht für manchen durchsichtigere Behandlung der größten Belastungsänderung und Belastungsschwankung möge hier noch folgen. Betrachtet wird ein vierdrähtiges Stromnetz, dessen Mittelleiter den Querschnitt f_m besitzt, während die drei Außenleiter den Querschnitt f haben.

Die größte Spannungserhöhung tritt in einer der Phasen auf, wenn sie unbelastet ist, während gleichzeitig die beiden anderen Phasen den Vollaststrom J führen; sie beträgt dabei e_m . Die größte Spannungsverminderung erfolgt im umgekehrten Falle, wenn die betrachtete Phase voll belastet ist und die beiden anderen vollkommen unbelastet sind. Diese Verminderung beträgt $e_a + e_m$.

Soll das Netz vollkommen elastisch sein, dann muß die größte Spannungsänderung gleich sein der zulässigen, also

$$v = \Delta E_{\bar{a}} = e_a + 2e_m = \frac{lJ}{kf} + 2 \frac{lJ}{kf_m}. \quad (1)$$

Die zur Bestimmung der zwei Unbekannten f und f_m erforderliche zweite Gleichung kann durch die Bedingung geringsten Metallaufwandes gefunden werden¹⁾. Diese Forderung gibt ein Minimum für:

$$M = (3f + f_m)l. \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt durch partielle Differentiation

$$\frac{\partial M}{\partial f} + \lambda \frac{\partial v}{\partial f} = 3l - \lambda \frac{lJ}{kf^2} = 0,$$

$$\frac{\partial M}{\partial f_m} + \lambda \frac{\partial v}{\partial f_m} = l - 2\lambda \frac{lJ}{kf_m^2} = 0$$

oder

$$\left. \begin{aligned} f^2 &= \frac{\lambda J}{3k} \\ f_m^2 &= \frac{2\lambda J}{k} \end{aligned} \right\} \text{ bzw. } \frac{f_m}{f} = \sqrt{6} = 2,45. \quad (3)$$

¹⁾ Verhoeckx, P. M.: De Ingenieur. Bd. 22, S. 710. 1907. Die Hilfs-gleichung 2 zum gleichen Zweck hat auch schon H. Cahen 1897 benutzt. ETZ 1897, S. 332.

Unter Wegfall des willkürlichen (Eulerschen) Multiplikators λ ergibt sich also, daß der Querschnitt des neutralen Leiters $f_m = f\sqrt{6}$ sein muß, um den geringsten Aufwand zu erreichen.

In (1) und (2) eingesetzt, führt dies zu

$$\left. \begin{aligned} f &= \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3})lJ}{\sqrt{3}kv} \\ f_m &= \sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{3})\frac{lJ}{kv} \end{aligned} \right\} \quad (1a)$$

$$M = (3f + f_m)l = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 \frac{l^2 J}{kv} = 9,9 \frac{l^2 J}{kv}. \quad (2a)$$

Wird kein neutraler Leiter verwendet, so beträgt die größte Spannungsänderung einer der Phasen

$$v = 3 \frac{lJ}{kf'}, \quad \text{woraus} \quad f' = 3 \frac{lJ}{kv} \quad (4)$$

$$\text{und} \quad M' = 3f'l = 9 \frac{lJ}{kv}. \quad (5)$$

Das Verhältnis der Kupfermengen ist also mit und ohne neutralen Leiter mindestens

$$\frac{M}{M'} = \frac{3f + f_m}{3f'} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2}{9} = 1,10.$$

Wählt man aber $f_m = f$, dann wird $M/M' = 1,33$,

„ „ „ $f_m = \frac{1}{2}f$, „ „ $M/M' = 1,95$

für die gleiche vollkommene Elastizität.

Je dünner man also den neutralen Leiter innerhalb praktisch-gebräuchlicher Werte wählt, desto größer wird das Verhältnis der Kupfermengen mit und ohne Nulleiter für gleiche absolute Elastizität. Den günstigsten Wert ergibt ein Nulleiter, der viel dicker ist als die Hauptleiter, nämlich $f_m/f = \sqrt{6} = 2,45$.

Wie ist es nun zu erklären, daß die in der Praxis gebräuchliche Annahme gleichen Querschnittes für Null- und Hauptleiter keine Unzulänglichkeiten zeitigt? Die Erklärung ist die Tatsache, daß die Praxis sich nur bekümmert um die praktisch auftretenden Belastungsunterschiede der drei Phasen, nicht um die höchsten denkbaren.

Bei der höchsten Gesamtbelastung sei der größte Unterschied in der Belastung der Phasen $h_1 J$, bei der geringsten Belastung sei der Belastungsunterschied $h_2 J$. Ferner sei

$$h = h_1 + h_2.$$

Dann tritt die größte Spannungserhöhung in einer Phase auf, wenn bei der Belastung $= 0$ dieser Phase die beiden anderen mit $h_2 J$ belastet sind. Die größte Spannungsverminderung einer Phase tritt auf, wenn diese selbst mit den vollen Strom J belastet ist, während die beiden anderen die Belastung $(1 - h_1) J$ besitzen. Die zwei Bedingungs-

gleichungen für die Spannungsschwankung sind also:

$$\Delta E_s = \frac{lJ}{kf} + (h_1 + h_2) \frac{lJ}{kf_m} = \frac{lJ}{kf} + h \frac{lJ}{kf_m}$$

$$M = (3f + f_0) l \text{ Minimum.}$$

Hieraus folgt

$$f_m/f = \sqrt{3h}$$

und

$$f = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{h} + \sqrt{3}) \frac{lJ}{kv},$$

$$f_m = \sqrt{h}(\sqrt{h} + \sqrt{3}) \frac{lJ}{kv}$$

sowie

$$M = (\sqrt{h} + \sqrt{3})^2 \frac{l^2 J}{kv}.$$

Das Verhältnis der Kupfermengen mit und ohne neutralen Leiter ist dann

$$\frac{M'}{M} = \frac{(\sqrt{h} + \sqrt{3})^2}{9}$$

und für $h = \frac{1}{3}$ wird $f_m/f = 1$, $M/M' = \frac{16}{9} = 0,59$. Dies ist der gewöhnlich vorkommende Fall, wobei also durch Zufügung eines Nullleiters für gleiche beschränkte Löscharbeit eine Kupferersparnis von 41% eintritt.

Das Verhältnis des Spannungsverlustes in den Hauptleitungen zum Gesamtverlust bei Anwendung eines Nulleiters ist

$$v':v = \frac{lJ}{kf} \cdot \left(\frac{1}{f} + \frac{h}{f_m} \right) \frac{lJ}{k}$$

$$= \frac{1}{f} \cdot \frac{f_m + hf}{ff_m} = \frac{f_m}{f_m + hf}.$$

Da aber

$$f_m = f\sqrt{3h}, \text{ folgt}$$

$$v':v = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \sqrt{h}} \text{ und für } h = \frac{1}{3} \text{ wird } v' = \frac{3}{4}v.$$

Teichmüller weist darauf, daß man bei Drehstromsternleitungen mit vier Leitern hie und da so verfährt, daß man den Einfluß des Mittelleiters dadurch berücksichtigt, daß man den üblichen relativen Spannungsverlust auf $\frac{3}{4}$ ermäßigt. Hier wäre also eine Begründung dieses empirischen Verfahrens gegeben.

10. Symmetrisches Vierphasensystem.

Wählt man beim vierdrätigen Vierphasensystem die Phasenspannung halb so groß wie beim Zweileitersystem $E_{ph} = \frac{1}{2}E_2$, dann wird für jedes der zwei getrennten Zweileitersysteme die Spannung E , die Leistung und der Querschnitt halb so groß. Da aber jetzt doppelt so viele Leiter vorgelegt werden müssen, wird der Metallaufwand genau so groß werden wie bei diesem System.

$$f_4 = \frac{1}{2} f_2; \quad M_4 = M_2.$$

Das Vierphasensystem in Sternschaltung mit neutralem Leiter, Abb. 298, kann als Vereinigung zweier Dreileitersysteme angesehen werden und unter Verwendung des neutralen Leiters für beide Systeme eine erhebliche Metallersparnis geben, wenn man als Verbrauchs- und Sternspannung $E_{ph} = E$ nimmt.

Die Belastung ist dabei jeweils zwischen zwei um 180° auseinanderstehende Außenleiter und den neutralen Leiter vom gleichen Querschnitt geschaltet, und der Metallaufwand ist somit $\frac{5}{16}M_2 = 31\frac{1}{4}\%$ von M_2 . Schaltet man aber, wie in Abb. 299, die Belastung im Vielseit, so daß sie je zwei in der Phase um 90° auseinanderliegende Leiter überbrückt, so ist die Verbrauchsspannung $\sqrt{2}$ mal so groß. Es ist somit bei diesem Vierphasensystem mit vier Leitern der Metallaufwand

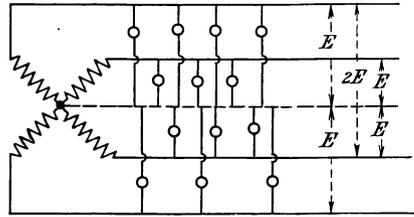


Abb. 298.

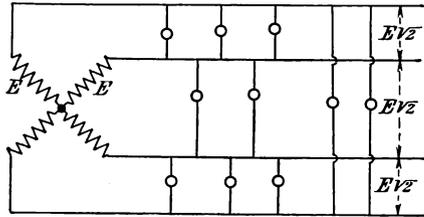


Abb. 299.

$$f_4' = \frac{lW}{4ka \cos^2 E^2} = \frac{f_2}{8}; \quad M_4' = 4lf_4 = \frac{1}{4}M_2.$$

Durch Verteilung der Belastung auf vier Phasen statt auf zwei ist die Last einer Phase halb so groß als zuvor. Gleichzeitig ist die Verbrauchsspannung $\sqrt{2}$ mal so groß geworden. Der Querschnitt ist also $f_4' = f_2/8$ wie angegeben.

11. Zweiphasensystem.

Das unverkettete Zweiphasensystem, Abb. 300, besteht aus zwei elektrisch getrennten Einphasensystemen. Bei gleicher Belastung führen die vier Leiter gleiche Ströme J . Bezeichnet E die Spannung jeder Leitung an der Stromquelle, R den Widerstand jedes Leiters, so ist der Leistungsverlust im ganzen vierdrähtigen System $4RJ^2$. Da aber jedes System nur halb so viel Strom als im Zweileitersystem führt, wird $f_L = f_2$ und $M_L = M_2$.

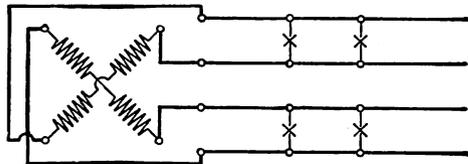


Abb. 300.

Das verkettete Zweiphasensystem (Abb. 301) kann aus zwei benachbarten Phasen eines symmetrischen fünfdrähtigen Vierphasensystems entstehen, von dessen in Stern geschalteten Phasen zwei wegfallen, während der neutrale Leiter bleibt, oder aus dem vierdrähtigen

unverketteten Zweiphasensystem durch Zusammenlegung zweier Leiter verschiedener Stromkreise zu einem gemeinsamen Rückleiter. Ist R_0 der Widerstand des Rückleiters, R der Widerstand, J der Strom eines jeden der beiden Hauptleiter, E die Spannung zwischen jedem der Hauptleiter und dem Rückleiter, so ist der Strom im Rückleiter $J_0 = \sqrt{2}/45^\circ$, also $\sqrt{2}$ mal so groß und um 45° gegen J verschoben.

Werden alle drei Leiter gleich stark, so wird $R_0 = R$ und der Leistungsverlust in den drei Leitern

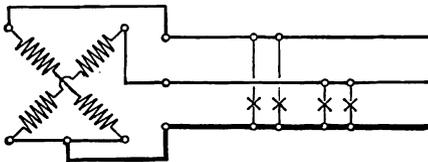


Abb. 301.

$$2RJ^2 + R_0J_0^2 = 2J^2(R + R_0)$$

wird ebenso groß wie beim unverketteten System. In diesem Falle wird also bei gleicher zu übertragender Leistung W , gleicher Leiterlänge l und gleichem Leistungsverlust w , der Querschnitt halb so groß;

$f_L = \frac{1}{2}f_2$; $M_L = \frac{3}{4}M_2 = 75\%$ von M_2 und der Metallaufwand $\frac{3}{4}$ so groß wie zuvor.

Macht man hingegen die Stromdichte in den drei Leitungen gleich groß, dann wird der Metallaufwand größer, der Leistungsverlust kleiner. Es ist nämlich

$$w = 2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)J^2R = (2 + \sqrt{2})J^2R = (2 + \sqrt{2})\frac{J^2l}{kf_L},$$

also

$$f_L' = \frac{(2 + \sqrt{2})J^2l}{kw}$$

oder da

$$W = 2E_{ph}J_{ph}\cos\varphi = EJ\sqrt{2}\cos\varphi$$

$$f_L = \frac{(2 + \sqrt{2})Wl}{4kp_aE^2\cos^2\varphi} = \frac{2 + \sqrt{2}}{8}f_2 = 0,427f_2$$

und

$$M_L = 2lf_L' + lf_L\sqrt{2} = \frac{(2 + \sqrt{2})^2}{16}M_2 = 72,9\% \text{ von } M_2.$$

Das Zweiphasen- und das Vierphasensystem haben nur geringe praktische Bedeutung erlangt und sind hier nur der Vollständigkeit halber aufgenommen worden. Ähnliches gilt für die folgenden zwei Tabellen, da weder die Berechnung auf gleichen relativen Leistungsverlust ζ , noch auf gleichen Wirkungsgrad $\gamma = \frac{1}{1 + \zeta}$ von ausschlaggebender Bedeutung ist für die von einer Leitung zu erwarteten Dienste. Wir haben ja ausführlich besprochen, daß sowohl bei Gleichstrom-, als besonders bei Wechselstrom- und Mehrphasenleitungen genügende Unabhängigkeit der einzelnen Verbraucher nur dann versichert ist, wenn die größten Änderungen oder Schwankungen der Spannung innerhalb

zulässiger Grenzen bleiben. Wirtschaftliche Bedeutung hat bei Leitungen nur das Zeitintegral des Leistungsverlustes, der Arbeitsverlust, worauf bei Berechnung der Leitungen auf Wirtschaftlichkeit zurückgekommen werden soll.

12. Vergleich der Systeme auf Grund gleicher Verbrauchsspannung.

Zur Übertragung gleicher Leistung auf gleiche Entfernung mit gleichem Leistungsverlust oder Wirkungsgrad sind bei gleicher Verbrauchsspannung E und dem Leistungsfaktor $\cos \varphi = 1$, sowie bei symmetrischer Belastung der Mehrleiter- oder Mehrphasensysteme erforderlich:

Bezeichnung des Systems	Zahl der Drähte	Höchste eff. Spannung zwischen irgend zwei Leitern	Metallaufwand
Gleich- oder Einphasenstrom	2	E	100
Gleichstrom oder Einphasen-Dreileiter	{ 3	$2 E$ mit $\frac{1}{2}$ Mittelleiter	31,25
	{ 3	$2 E$ „ $\frac{1}{1}$ „	37,5
Dreiphasenstrom	3	E „ „	75,0
Verketteter Zweiphasenstrom mit drei Leitern	3	$\sqrt{2} E$ „ $\sqrt{2}$ fachem Rückleiter	72,9
Dreiphasenstrom-Sternschaltung	{ 4	$\sqrt{3} E$ mit $\frac{1}{2}$ Nulleiter	29,17
	{ 4	$\sqrt{3} E$ „ $\frac{1}{1}$ „	33,3
Unverketteter Zweiphasenstrom	4	E „ „	100
Vierphasenstrom-Sternschaltung	{ 5	$\sqrt{2} E$ „ $\frac{1}{2}$ „	28,125
	{ 5	$\sqrt{2} E$ „ $\frac{1}{1}$ „	31,25
Fünfleiter, Gleich- oder Einphasenstrom	5	$4 E$ „ $\frac{1}{2}$ „	10,93
Fünfleiter, Gleich- oder Einphasenstrom	5	$4 E$ „ $\frac{1}{1}$ „	15,625

Bezüglich Metallersparnis sind also die Mehrleiter- den Mehrphasensystemen überlegen, weil bei ihnen der Effektivwert der höchsten Spannung zwischen irgend zwei Leitern des Systems, wie die vorstehende Tabelle erkennen läßt, höher ist als bei diesen. Zwischen Gleich- und Wechselstrom ist in dieser Beziehung kein Unterschied vorhanden, weil der Vergleich auf Grund gleichen Leistungsverlustes und gleichen Effektivwertes der Verbrauchsspannung angestellt wurde.

13. Vergleich auf Grund gleicher höchster Spannung zwischen zwei Leitern.

Wenn es sich um Fernleitungen für hohe Spannungen handelt, ist für die Wahl und damit die Kosten der Isolation die höchste Spannung E_m zwischen irgend zwei Leitern des Systems maßgebend. Damit verschwindet natürlich die Überlegenheit der Mehrleitersysteme vollständig und bliebe als günstigstes System der Zweileitersystem,

soweit er für Hochspannungen in Betracht kommt. Dieses System hätte, mit Wechselstrom betrieben, bei gleicher Effektivspannung eine $\sqrt{2}$ mal so große Maximalspannung, also bei gleicher Maximalspannung für dieselbe Leistung und Leiterlänge den doppelten Kupferaufwand.

Daraus ergibt sich ohne weiteres folgendes:

Bezeichnung des Systems	Drahtzahl	Verbrauchsspannung	Materialaufwand
Einphasensystem	2	$E = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{E}_m$	100
Gleichstrom, Zweileiter	2	$E = E_m$	50
Drehstrom	3	$E = \frac{1}{\sqrt{3}} \bar{E}_m$	75
Zweiphasen, Rückleiter $\sqrt{2}$ fach	3	$E = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{E}_m$	145,7
Zweiphasen, unverkettet	4	$E = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{E}_m$	100

Darnach erscheint von den Wechselstromsystemen das Drehstromsystem als das günstigste. Seine Überlegenheit ergibt sich aber besonders in dem Falle, der hier nirgends Platz finden konnte, daß man die Verbrauchsspannung nicht auf dem Werte E konstant hält, sondern auf $E/\sqrt{3}$. In diesem Falle ist der Kupferaufwand, verglichen mit dem Einphasensystem, nur $75 : (\sqrt{3})^2 = 25$.

Diese Zahl wäre also eigentlich noch zu den Werten der vorigen Tabelle hinzuzufügen, obwohl bei ihr die Metalleersparnis nur wieder durch eine Erhöhung der Betriebsspannung (oder durch die Weglassung des neutralen Ausgleichsleiters) erzielt worden ist.

In der letzten Tabelle ist nur die Zahl für das verkettete Zweiphasensystem nicht ganz einfach festzustellen. Für gleiche Maximalspannung E_m wird der Metallaufwand für jeden Außenleiter $\frac{2 + \sqrt{2}}{4}$ mal so groß, als für jeden Leiter des Einphasensystems mit gleicher Maximalspannung; der Mittelleiter ist für gleiche Stromdichte $\sqrt{2}$ mal stärker zu nehmen.

Der Gesamtaufwand ist also

$$\frac{2(2 + \sqrt{2})}{4} + \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \sqrt{2} = \frac{(2 + \sqrt{2})^2}{4} = 1,457 \text{ mal}$$

so groß als beim Einphasensystem.

X. Die Berechnung der Leitungen auf der Grundlage der vier Grundgrößen.

Der Berechnung der Leitungen werden gewisse Annahmen zugrunde gelegt, die zunächst die Größe der zu übertragenden Leistung und ihres Leistungsfaktors, die Streckenlänge und das zu verwendende Leitermetall betreffen. Bei Mehrleiter- und Mehrphasenleitungen muß außerdem die Verteilung der zu übertragenden Leistung auf die Teilnetze

und die Größe der zugehörigen Leistungsfaktoren in den Netzhälften und -dritteln angenommen werden. Diese Annahmen bestimmen den Zustand der Berechnung.

Ihr Ziel ist eine solche Bemessung der Leitungsquerschnitte, daß der Einfluß der Leitungen auf das Arbeiten der Stromverbraucher in zulässigen Grenzen gehalten wird. Um nicht unnötig viele verschiedene Formeln zu erhalten, setzen wir im folgenden als gegebene Größen stets voraus:

- die zu übertragende Leistung W Watt,
- den Leistungsfaktor beim Verbraucher $\cos \varphi$,
- die Leitungslänge l Meter,
- die Verbraucherspannung E Volt.

Dabei stellen wir uns vor, daß die Leistung W durch einen Außenleiter und einen vorhandenen oder gedachten Mittelleiter zu gleichen Teilen über die Netzhälften beim Zweileiter- und beim Dreileitersystem und über die Netzdrittel beim Dreiphasensystem verteilt sei und in allen Hälften oder Dritteln gleichen Leistungsfaktor habe.

Durch Einführung der Leistung vermeiden wir beim Drehstrom den Unterschied zwischen Verbraucherstrom I und Leitungsstrom J , der bei Dreiecksschaltung eine Rolle spielt. Durch die Einführung der für das Zweileitersystem und die Dreiecksschaltung der Verbraucher fiktiven Sternspannung E erhalten wir Formeln, die jederzeit mühelos bei einigem Nachdenken wiedergefunden werden können, und die man nicht auswendig zu lernen braucht.

1. Berechnung der Leitungen auf relativen Spannungsabfall ε .

Gemeint ist hier der Spannungsabfall, der bei der höchsten Belastung zustande kommt, also bei Mehrleiter- oder Mehrphasenanlagen der Spannungsabfall bei höchster und gleicher Belastung aller Teilnetze. Das ist also der Spannungsabfall, der jeweils für die Gesamtschwankung oder Gesamtänderung maßgebend ist.

Der Querschnitt ist für einphasigen Wechselstrom mit zwei Leitern

$$f_2 = \frac{l \cdot \frac{W}{2}}{k \varepsilon \left(\frac{E}{2}\right)^2 \cos \varphi \cos \lambda} = \frac{2 l W}{k \varepsilon E^2 \cos \varphi \cos \lambda}, \quad (1)$$

für Wechselstrom — Dreileiter

$$f_3 = \frac{l \cdot \frac{W}{2}}{k \varepsilon E^2 \cos \varphi \cos \lambda} = \frac{l W}{2 k \varepsilon E^2 \cos \varphi \cos \lambda} = \frac{f_2}{4}, \quad (2)$$

für Dreiphasen-Dreiecksschaltung der Verbraucher

$$f_{\Delta} = \frac{l \cdot \frac{W}{3}}{k \varepsilon \left(\frac{E}{\sqrt{3}}\right)^2 \cos \varphi \cos \lambda} = \frac{l W}{k \varepsilon E^2 \cos \varphi \cos \lambda} = \frac{f_2}{2}, \quad (3)$$

für Dreiphasen-Sternschaltung der Verbraucher

$$f_r = \frac{l \cdot \frac{W}{3}}{k \varepsilon E^2 \cos \varphi \cos \lambda} = \frac{lW}{3k \varepsilon E^2 \cos \varphi \cos \lambda} = \frac{f_2}{6}, \quad (4)$$

also allgemein:

$$f = C \cdot \frac{lW}{k \varepsilon E^2 \cos \varphi \cos \lambda}. \quad (5)$$

Diese Gleichung gilt ganz allgemein, sowohl für Gleichstrom als für ein- oder mehrphasigen Wechselstrom. Der Leistungsfaktor der Leitung $\cos \lambda$ ist für Gleichstrom und induktionsfreie Leitung = 1; auch der Leistungsfaktor $\cos \varphi$ der Belastung ist für Gleichstrom und induktionsfreie Belastung = 1.

Der Artfaktor C der Querschnittsformel (5)

ist für Gleichstrom- oder Einphasenstrom	Zweileiter	$C = 2,$
„ „ „ „	Dreileiter	$C = 1/2,$
„ Drehstrom in Dreiecksleitung		$C = 1,$
„ „ in Sternleitung		$C = 1/3.$

2. Berechnung auf relativen Leistungsverlust.

Zwischen dem relativen Leistungsverlust ζ und dem relativen Spannungsabfall ε besteht die früher abgeleitete Beziehung

$$\zeta = \varepsilon \frac{\cos \lambda}{\cos \varphi}, \quad (6)$$

worin bei Gleichstrom $\lambda = \varphi = 0$ zu setzen ist. Führt man sie in Gl. (5) ein, so erhält man allgemein

$$f = C \cdot \frac{lW}{k \zeta \cdot E^2 \cos^2 \varphi}. \quad (7)$$

Die Artfaktoren sind dieselben als früher. Beachtenswert ist auch, daß der Querschnitt bei dieser Berechnung auf relativen Leistungsverlust unabhängig von der Induktivität der Leitung ist. Der Leistungsfaktor $\cos \lambda$ der Leitung beeinflußt also die drei übrigen Größen, aber nicht den Leistungsverlust. Dies ist wohl die meist gebrauchte Formel zur Berechnung von Drehstromleitungen. Mit ihr half M. von Dolivo Dobrowolski im Anhang der Drehstromtechnik den ratlosen Fachleuten aus der Verlegenheit. Auf ihr fußen die Behauptungen, daß der Leitungsquerschnitt umgekehrt proportional dem Quadrat des Leistungsfaktors der Belastung sein müsse.

Als Verhältnis der Querschnitte der Außenleiter bei den verschiedenen Systemen und der Metallmengen bei gleichem Mittelleiterquerschnitt ($f_m = f$ oder $m = 1$) ergibt sich für $\cos \varphi = 1$:

Zweileiter	$f = 1$	$M = 1$
Dreileiter	$1/4$	$3/8$
Dreiecksleiter	$1/2$	$3/4$
Sternleiter	$1/6$	$1/3$

wie in der Tabelle Seite 287 angegeben.

3. Berechnung auf relative Spannungsschwankung.

Wir fanden auf Seite 244 Gl. (6b) mit fast stets genügender Annäherung

$$\varepsilon = \frac{\eta}{\cos \vartheta}, \tag{8}$$

so daß Gl. (5) übergeht in

$$f = K \cdot C \cdot \frac{lW}{k\eta E^2} \cdot \frac{\cos \vartheta}{\cos \varphi \cos \lambda}. \tag{9}$$

Berücksichtigt man, daß $\cos \vartheta = \cos(\varphi - \lambda) = \cos \varphi \cos \lambda + \sin \varphi \sin \lambda$, so erhält diese Gleichung die Form

$$f = K \cdot C \cdot \frac{lW}{k\eta E^2} (1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \lambda). \tag{10}$$

Hierin erscheint als neue Größe der Beiwert K , der verschieden ist, je nach der Art der Leitung und der Betrachtung der Gesamtänderung (K_g) oder -schwankung (K_s) und der Einzeländerung (K_a) oder -schwankung (K_s). Er ist durch Teichmüller¹⁾ in die Literatur eingeführt und als Mehrleiterfaktor bezeichnet worden. Er kann offenbar nur von 1 abweichen, wenn mindestens 3 Leiter vorhanden sind.

Bei allen Leitungen gilt	$K_g = 1$	
„ Dreileitersystemen ist	$K_{s,e} = m + 1$	$K_{\ddot{u},e} = 2m + 1$
„ Drehstrom - Sternsystemen	$= m + 1$	$= 2m + 1$
„ „ - Dreieckssystemen	$= \frac{2}{3}$	$= 1$.

Teichmüller nennt ferner den aus drei Kosinus gebildeten Faktor in Gl. (9) den Kosinusfaktor, die Klammer in Gl. (10) den Tangensfaktor $T = 1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \lambda$ des Querschnitts und die Größe

$$C \cdot \frac{lW}{\eta E^2} \cdot \frac{1}{K}$$

den Artquerschnitt, ohne den Artfaktor C den Grundquerschnitt. Der Tangensfaktor T bestimmt durch sein erstes Glied den Querschnitt, den die Leitung haben müßte, wenn Belastung und Leitung beide induktionsfrei wären. Er möge Querschnitt ohne Induktion heißen. Das zweite Glied ergibt die Vergrößerung des Querschnitts oder den Zusatz durch Induktion.

Wie wir diese zu ermitteln haben, soll später erörtert werden. Dort sollen auch Tabellen gegeben werden für $\operatorname{tg} \varphi$ und $\operatorname{tg} \lambda$.

4. Kritischer Vergleich auf Gesamtschwankung und -änderung, Einzelschwankung und -änderung.

Man kann nun leicht auf Grund der entwickelten Beziehungen die folgenden Verhältnisse der Querschnitte und Metallmengen ableiten: Das Verhältnis der Querschnitte ist für Zweileiter als Einheit:

	g	s, e	\ddot{a}, e
Für Dreileiter	$\frac{1}{4}$	$\frac{m + 1}{4}$	$\frac{2m + 1}{4}$
„ Drehstrom Δ	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
„ „ Y	$\frac{1}{6}$	$\frac{m + 1}{6}$	$\frac{2m + 1}{6}$

¹⁾ Teichmüller, J.: ETZ 1921, S. 780, 817.

Das Verhältnis der Metallmenge ist für Zweileiter als Einheit:

	g	s, e	\bar{a}, e
Dreileiter	$\frac{3}{8}$	$\frac{2m+1}{m} \cdot \frac{m+1}{8}$	$\frac{(2m+1)^2}{8m}$
Drehstrom Δ	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
„ Y	$\frac{1}{3}$	$\frac{3m+1}{m} \cdot \frac{m+1}{12}$	$\frac{3m+1}{m} \cdot \frac{2m+1}{12}$

Man findet also für $f_m = f$ oder $m = 1$:

	Querschnitt			Metallmenge		
	g	s, e	\bar{a}, e	g	s, e	\bar{a}, e
Zweileiter	1	1	1	1	1	1
Dreileiter	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{8}$
Drehstrom Δ	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
„ Y	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

und für $f_m = \frac{1}{2} f$ oder $m = 2$:

	Querschnitt			Metallmenge		
	g	s, e	\bar{a}, e	g	s, e	\bar{a}, e
Zweileiter	1	1	1	1	1	1
Dreileiter	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{25}{16}$
Drehstrom Δ	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
„ Y	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{35}{24}$

Man will nun die Leitungen so berechnen, daß die Ansprüche, die die Verbraucher in bezug auf Größe und Stetigkeit ihrer Energiezufuhr stellen, befriedigt werden. Sind die Ansprüche verschieden, so muß auch das Rechnungsziel verschieden sein. Man ist gewöhnt, Glühlampen- und Motorleitungen zu unterscheiden, aber doch nur in dem Sinne, daß man für die letzteren einen größeren Spannungsverlust zuläßt als für die ersteren. Das kann einer sorgfältigen Betrachtung nicht genügen. Der Unterschied ist nicht quantitativ, sondern wesentlich qualitativ: bei der einen Art der Verbraucher kommt es nicht in erster Linie auf die Größe ihres Leistungsverbrauchs, also ihrer Spannung, sondern auf die plötzliche Schwankung an; und als deren typischen und wichtigsten Vertreter kennen und nennen wir die Glühlampen. Bei der anderen Art tritt die Größe des Leistungsverbrauchs, also der Spannung, in den Vordergrund und die Schwankung zurück; das sind beinahe alle anderen Verbraucher, Motoren, Heizkörper u. a.

Nun steht es ja so, daß eine Leitung mit geringen Spannungsschwankungen, also eine Glühlampenleitung, keine großen Spannungsänderungen haben kann, so daß sie immer die Ansprüche der Motoren befriedigt. Sie ist die feinere, die Motorleitung die rohere. Aber wenn wir eine Motorleitung berechnen wollen, dürfen wir doch nicht (ohne einen technischen Fehler zu begehen) der Art nach gerade so rechnen wie bei Glühlampenleitungen und nur größere Zahlen einsetzen, sondern wir müssen uns von den Spannungsänderungen, die als Ursachen der Änderung im Leistungsverbrauch jetzt das Wesentliche sind, deutlich Rechenschaft geben.

5. Berechnung auf Spannungsschwankungen im engeren Sinne.

Wir behandeln zunächst Glühlampenleitungen, berechnen also Leitungen auf Spannungsschwankung und betrachten dazu die Mehrleiterfaktoren K .

Für Zweileiter- und Drehstrom-Dreiecksleitungen ist mit einer Ausnahme $K = 1$. Die Dreiecksleitungen beweisen also uneingeschränkt ihren Vorrang vor den Gleichstrom- und Einphasenleitungen, denn der Artfaktor C ist bei ihnen 1, bei den letzteren dagegen 2; der Querschnitt der auf Gesamtschwankung berechneten Dreiecksleitung ist halb so groß als der der Gleichstrom- und der Einphasen-Zweileiterleitungen. Ja, die Dreiecksleitungen stellen sich noch erheblich günstiger, wenn wir sie auf Einzelschwankung, d. h. mit dem Ziele berechnen, daß bei plötzlicher Zu- oder Abschaltung eines Belastungsdrittels die Spannungsschwankung in gewollten Grenzen bleibt. Dann ist $K_{s,e} = \frac{2}{3}$, und der Querschnitt wird den dritten Teil, die Metallmenge halb so groß als der Gleichstrom- oder Einphasen-Zweileiter-Querschnitt. Einzelschwankung ist aber bei Glühlampenleitungen zweifellos das Wesentliche; denn die Lampen sind zwischen je zwei Leiter geschaltet, und daß einmal große Gruppen, die in Dreieck zwischen den drei Leitungen liegen, als Ganzes ab- oder zugeschaltet würden, kommt so wenig vor, daß darauf in der Tat kaum Rücksicht genommen zu werden braucht. Drehstrom-Dreiecksleitungen als Glühlampenleitungen braucht man also im allgemeinen nur $\frac{2}{3}$ so stark zu nehmen, als sie bisher angenommen waren, oder umgekehrt: nach den bisherigen Regeln berechnete Drehstrom-Dreiecksleitungen für Glühlampen verhalten sich im allgemeinen günstiger, als bei der Berechnung angenommen war. Das stimmt mit der Wahrnehmung aufmerksamer Beobachter überein.

Bei Dreileiterleitungen und Drehstrom-Sternleitungen sind die Mehrleiterfaktoren für Berechnung auf Spannungsschwankung

$$K_g = 1 \text{ und } K_{s,e} = m + 1.$$

Der erstere Fall der Gesamtschwankung erledigt sich von selbst; er liefert die dem Quadrate der Spannungserhöhung entsprechend verminderten Querschnitte, wie sie in der Zahlentafel auf Seite 292 verzeichnet sind; er kommt aber für Glühlampen ebensowenig in Betracht wie der gleiche Fall bei Dreiecksleitungen. Für den letzteren Fall sind

die Verhältniszahlen ebenfalls oben abgedruckt. Für die Dreileiterleitungen, an die wir, um uns einfacher ausdrücken zu können, unsere weiteren Überlegungen anknüpfen wollen — für Drehstrom-Sternleitungen sind sie grundsätzlich gleich —, ist also, abgesehen von den Einflüssen der Größen φ , λ , und f , das Verhältnis der Querschnitte:

Zweileiter zu Dreileiter:

$$\text{für } m = 1 \dots \dots \dots 1 : \frac{1}{2},$$

$$\text{für } m = 2 \dots \dots \dots 1 : \frac{3}{4};$$

das Verhältnis der Metallmengen ist:

$$\text{für } m = 1 \dots \dots \dots 1 : \frac{3}{4},$$

$$\text{für } m = 2 \dots \dots \dots 1 : \frac{15}{16}.$$

Diese Zahlen widersprechen den üblichen Angaben, und wir haben allen Grund, die Sache genau zu untersuchen.

Nach der oben beschriebenen üblichen Berechnung der Dreileiterleitungen auf $\frac{3}{4}$ des für die Zweileiterleitung zugelassenen ε ergibt sich, unabhängig von der Größe m , das Querschnittsverhältnis

$$1 : \frac{1}{3}$$

und ein entsprechendes anderes Verhältnis der Metallmengen.

Eine Überprüfung der beiden Berechnungsweisen sagt uns, daß die neue zweifellos richtig ist, daß wir mit ihr eine Leitung erhalten, bei der die Ab- und Zuschaltung einer bestimmten Leitung zwischen zwei Leitungen der Dreileiterleitung dieselbe Spannungsschwankung hervorruft wie die Ab- und Zuschaltung einer gleich großen an die entsprechende Zweileiterleitung angeschlossene Leistung. Die alte Berechnungsweise dagegen ist vollkommen willkürlich. Freilich könnte man sich nach der jahrelangen Verwendung dieser Formeln auf die Erfahrung berufen und behaupten, daß die vielen tausend Kilometer so berechneter und verlegter Leitungen den Ansprüchen genügen. Mit einem so allgemeinen Urteil ist die Sache aber nicht erledigt, sondern es handelt sich darum, ob auf $\frac{3}{4}$ ε berechnete Dreileiterleitungen (und Drehstrom-Sternleitungen) in bezug auf Spannungsschwankungen tatsächlich dasselbe leisten wie auf ε berechnete Zweileiterleitungen. Messungen an praktischen Leitungen, die diese Frage beantworten würden, sind schwerlich gemacht. Würde also jemand sagen, daß die nach dem alten Verfahren berechneten Dreileiter- und Drehstrom-Sternleitungen befriedigen, so wäre darauf zu erwidern: Das mag sein, dann muß aber der Spannungsverlust für die Berechnung der Zweileiterleitungen auf $\frac{3}{2}$ ε erhöht werden, wenn man von der Dreileiter- oder Drehstrom-Sternleitung mit gleichen Querschnitten ($m = 1$) ausgeht, und auf $\frac{9}{4}$ ε , wenn man bei diesen Leitungen ungleiche Querschnitte ($m = 2$) annimmt. Diese Zahlen ergeben sich folgendermaßen: Bei Berechnung der Zweileiter-

leitung auf ε und der Dreileiterleitung auf $\frac{3}{4} \varepsilon$ ergibt sich das Querschnittsverhältnis bekanntlich zu 3:1. Der Zahlentafel auf S. 292 gemäß, muß es aber bei gleichen Spannungsschwankungen $1 : (m + 1)/4$, also $4 : (m + 1)$ sein. Der auf ε berechnete Querschnitt hat also den Relativwert 3, er soll aber den Relativwert $4/(m + 1)$ haben. Da der Querschnitt umgekehrt proportional dem Spannungsverluste ist, so muß er nicht mehr auf ε , sondern auf den Spannungsverlust x berechnet werden, wobei

$$x : \varepsilon = 3 : \frac{4}{m + 1}.$$

Das gibt für $m = 1$ den Wert $x = \frac{3}{2} \varepsilon$ und für $m = 2$ den Wert $\frac{9}{4} \varepsilon$, wie oben ausgesagt war. Bei Drehstrom-Sternleitungen wird das Querschnittsverhältnis, wenn auf $\frac{3}{4} \varepsilon$ berechnet ist, 9:2, während es $6 : (m + 1)$ sein soll. Es ist also zu setzen

$$x : \varepsilon = \frac{9}{2} : \frac{6}{m + 1},$$

woraus sich für $m = 1$ der Wert $x = \frac{3}{2} \varepsilon$ und für $m = 2$ der Wert $x = \frac{9}{4} \varepsilon$, also dieselben Werte wie oben ergeben.

Hat man für Glühlampenleitungen bisher Spannungsschwankungen von 3—4% für zulässig erachtet, so dürfte man auf Grund der Erfahrungen mit den Dreileiter- und Drehstrom-Sternleitungen die Schwankungen beim Zweileitersystem auf 4,5—6% (für $m = 1$) und $6\frac{3}{4}$ bis 9% (für $m = 2$ beim Dreileitersystem) erhöhen, um gleichen Ansprüchen auf Unempfindlichkeit oder Belastungselastizität zu genügen. Man hat das nur nicht gemerkt, weil die meisten Zweileiteranlagen nur Hausinstallationen, keine Netze sind.

6. Berechnung auf Spannungsänderung im engeren Sinn.

Diese hat besonders Bedeutung für Motorleitungen, für welche die plötzliche Spannungsschwankung ziemlich gleichgültig ist. Die langsam vor sich gehende Änderung bestimmt jedoch die Änderung des Leistungsverbrauches, und da die Motoren meistens zwischen die Außenleiter geschaltet werden, gilt für sie der Mehrleiterfaktor K_g der Gesamtänderung.

Aus der Zahlentafel auf S. 292 sehen wir aber, daß, solange wir hiermit zu tun haben, die Verhältnisse der Querschnitte und Metallmengen die allgemein bekannten sind, weil für alle Leitungen $K_g = 1$. Wollte man Einzelschwankungen zulassen, dann erhielte man mehr oder gerade soviel Metall wie bei der Zweileiteranlage.

Diese Überlegung gilt auch für die Speiseleitungen von Stadtnetzen, bei denen ebenfalls die Spannungsänderungen das Wesentliche sind. Man läßt in ihnen einen großen Abfall zu (siehe S. 177), den man im Kraftwerke entsprechend beiregelt. Um noch sicherer zu sein, daß man es nie mit Einzeländerungen der Netzhälften oder -drittel (bei Sternschaltung) zu tun bekommt, führt man, wie bereits erwähnt, die Speiseleitungen häufig nur den Außenleitern zu, bildet sie also im Dreileiternetz als Zweileiter, im Stern-Vierleiternetz als drei Leiter aus.

XI. Die wirtschaftliche Bemessung elektrischer Leitungen.

Die Fortleitung elektrischer Energie bedingt in den Leitungen einen Energieverlust, welcher von den Dimensionen der Leitung abhängt. Bei reichlicher Bemessung des Querschnittes sinkt der Energieverlust, steigt aber der einmalige oder in Jahresraten erforderliche Geldaufwand für die Herstellung der Leitungen. Es gibt also eine wirtschaftliche Wahl zwischen diesen Gegensätzen.

Solche wirtschaftliche Fragen treten auf vielen Gebieten neben den rein technischen auf. Man wählt z. B. bei einem künstlichen Kanal sein Gefälle bei gegebener Wassermenge und Bodenbeschaffenheit, um seinen Querschnitt ermitteln zu können. Je größer das Gefälle ist, desto größer wird die Wassergeschwindigkeit und desto kleiner werden der Querschnitt und die Anlagekosten. Mit steigendem Gefälle wachsen aber auch die Auslagen für die Unterhaltung, bis sie die Ersparnis an jährlichen Kosten für Verzinsung und Abschreibung oder Tilgung des Anlagekapitals wieder aufheben. Die Dynamik des Geldes beherrscht bis zu einem gewissen Grade alle technischen Fragen.

W. Launhardt hat die Erwägung der Wirtschaftlichkeit dem Bahningenieur, der Hüttenmeister Reiche dem Konstrukteur vorgehalten. Prof. Riedler bezeichnet sie in seinem Buche über Schnellbetrieb sogar als das Kennzeichen des Technikers gegenüber dem Physiker.

Der große Physiker Sir W. Thomson, der spätere Lord Kelvin, behandelte schon 1881 dieses Gebiet in seinem Vortrag „The economy of metal conductors of electricity“¹⁾. Diese erste Studie erstreckte sich übrigens nur auf den Fall, daß die Kosten der Leitungsanlage dem Gewichte des aufgewendeten Leitungsmaterials proportional sind, und besagte, jener Leitungsquerschnitt sei als wirtschaftlich zu bezeichnen, für welchen die jährlichen Ausgaben für Zinsen und Abschreibung des Anlagekapitals gleich seien den Kosten des jährlichen Energieverlustes.

Dieser Grundsatz hat unter dem Namen „Regel von Thomson“ eine weite Verbreitung gefunden.

Es ist jedoch zu bemerken, daß diese Regel in der angegebenen Form nur in den allerseltensten Fällen anwendbar ist. Der Unverstand der Menge hat aber aus Thomsons beschränkter, nur auf den konstanten Strom reihengeschalteter Bogenlampen bezogenen Formel eine allbereite Bemessungsanweisung an Stelle einer Grenzfestlegung oder eines wirtschaftlichen Gedankens herausgelesen. Aber auch in ihrer Erweiterung besitzt die Regel nicht dadurch ihren hauptsächlichsten Wert, daß sie uns eine unmittelbar anwendbare Rechnungsmethode liefern würde; ihre tatsächliche Bedeutung liegt vielmehr in der durch sie veranlaßten Aufhellung der Gesichtspunkte, auf welche man im wirtschaftlichen Interesse Rücksicht zu nehmen hat.

Von den mannigfaltigen Fällen sollen einige nun erörtert werden.

¹⁾ Thomson, W.: British Assoc. Reports. 1881, S. 518 u. 526.

1. Einige Sonderfälle.

a) Die Kosten der Leitung belasten die Stromlieferung. Die Leistung am Ende ist konstant. Von einem vorhandenen Elektrizitätswerke aus sollen an einen Abnehmer in einer Entfernung von L Meter ständig W_2 Watt als Endleistung durch T Stunden jährlich abgegeben werden. Die Spannung V_1 am Anfang der Leitung sei bekannt. Gesucht werden für die geringsten jährlichen Gesamtkosten K die unveränderlichen Größen der Anfangsleistung W_1 , des Stromes J und des Leistungsverlustes w in der Leitung. Die Selbstkosten der erzeugten Wattstunde seien P_1 . Dann verursacht der Leistungsverlust w die Kosten $K = wT P_1$. Die Leitung vom Querschnitt f koste für die Längeneinheit $a + bf$. Ist p der Prozentsatz für die Verzinsung und Instandhaltung der Leitung, so betragen die jährlichen Ausgaben hierfür $K_2 = (a + bf) L p$ und die jährlichen Gesamtausgaben sind also

$$K = K_1 + K_2 = wT P_1 + (a + bf) L p. \quad (1)$$

Diese Gleichung (1) enthält außer gegebenen Größen auch noch die gesuchten Größen w und f , die voneinander abhängen. Für eine Zweileiteranlage gilt

$$w = \frac{2J^2 L \rho}{f} \quad \text{und} \quad J = \frac{W_1}{V_1} = \frac{W_2 + w}{V_1},$$

woraus

$$f = \left(\frac{W_2 + w}{V_1} \right)^2 \frac{2L\rho}{w}. \quad (2)$$

Setzt man (2) in (1) und ermittelt zur Erreichung des Minimums den Differentialbruch

$$\frac{dK}{dw} = T P_1 + \frac{2L^2 b \rho p}{V_1^2} \cdot \frac{w^2 - W_2^2}{w^2} = 0, \quad (3)$$

so ergeben sich der durch die eckige Klammer angedeutete wirtschaftliche Leistungsverlust

$$[w] = W_2 \sqrt{\frac{2L^2 b \rho p}{2L^2 b \rho p + P T V_1^2}} \quad (I)$$

und der wirtschaftliche Leiterquerschnitt:

$$[f] = \left(\frac{W_2 + [w_2]}{V_1} \right)^2 \cdot \frac{2L\rho}{[w]}. \quad (II)$$

Führen wir $[w]$ und $[f]$ in Gleichung (1) ein, so erhalten wir die minimalen Betriebskosten $[K]$. Die Stromeinnahme muß die Selbstkosten für die Gesamtlieferung übersteigen, wenn der Betrieb lohnend sein soll. Wird die Wattstunde mit P_2 bezahlt, so muß also

$$W_2 T P_2 > (W_2 + [w]) T P_1 + (a + b[f]) L p.$$

Ein Beispiel soll das deutlicher machen:

Ein Elektrizitätswerk mit 240 Volt Schaltbrettspannung soll ein Gut in 600 m Abstand mit 8,4 kW während 1000 Stunden jährlich versorgen und muß dabei die Kosten der Zuleitung selbst bestreiten. Diese betragen für die Holzmasten, Glocken samt Eisenstützen und Verlegung $a = 70$ R Pf, $b = 2,85$ R Pf für den m und mm². Das Dampf-

kraftwerk berechnet seine Selbstkosten zu $P_1 = 0,01$ R Pf/Wattstunde. Für Verzinsung, Tilgung und Instandhaltung sind 8% der Anlagekosten der Leitung erforderlich. Demnach ist im vorliegenden Falle $L = 600$ m; $W_2 = 8400$ Watt; $V_1 = 240$ Volt; $T = 1000$ Stunden; $P_1 = 0,01$; $a = 70$; $b = 2,85$ R Pf; $p = 0,08$; $q = 0,017$. Diese Werte in (I) eingesetzt, ergeben für den wirtschaftlichen Leistungsverlust $[w] = 583$ Watt oder etwa 7% von 8400 Watt. Der wirtschaftliche Querschnitt wird aus (II) gefunden zu $[f] = 49$ mm². Wir runden auf 50 mm² ab. Für die Leitung sind also

$$(70 + 2,85 \cdot 50) \cdot 600 \text{ R Pf} = 1275 \text{ RM}$$

aufzuwenden.

Die kleinsten jährlichen Ausgaben für diese Leitung betragen also $[K] = 583 \cdot 1000 \cdot 0,01 + 127500 \cdot 0,08$ R Pf = $160,3$ RM. Der doppelte Querschnitt würde $199,5$ RM, der halbe $184,4$ RM jährlicher Ausgaben verursachen, woraus für diesen Fall folgt, daß das Ergebnis ziemlich unempfindlich ist für große Querschnittsänderungen. Der Verbraucher bezahlt für die kWh 30 R Pf, so daß die Bruttoeinnahme $8400 \cdot 1000 \cdot 0,04$ R Pf = 2520 RM beträgt. Die jährlichen Gesamtausgaben belaufen sich für den wirtschaftlichen Verlust und Querschnitt auf $(70 + 2,85 \cdot 50) \cdot 600 \cdot 0,08 + (8400 + 583) \cdot 1000 \cdot 0,01$ R Pf = 1000 RM und der Gewinn erreicht jährlich $2520 - 1000 = 1520$ RM.

Ist die Entfernung $L = 2000$ m, so würde $[w] = 1900$ Watt oder $22,6\%$ von W_2 und $[f] = 66$ mm² betragen. Dies wäre auf 70 mm² abzurunden, um handelsübliche Maße zu erzielen. Die kleinsten Betriebskosten wären bei $(70 + 2,85 \cdot 70) \cdot 2000$ R Pf = 5390 RM Anlagekosten auf $621,2$ RM, die Gesamtausgaben auf $621,2 + 840 = 1461,2$ RM gestiegen und der jährliche Gewinn auf $2520 - 1461,2 = 1058,8$ RM gesunken. Die Stromlieferung wäre demnach bei den angenommenen Verhältnissen noch lohnend bei einer Entfernung von 2000 m. Der wirtschaftliche Querschnitt darf hier jedoch nur als untere Grenze dienen, da er einen Spannungsverlust von $18,4\%$ (bzw. bei 70 mm² von $17,4\%$) von $W_1 = W_2 + W_2$ und dadurch übermäßigen Regelungszwang verursachen würde. Mit anderen Worten bedeutet dies, daß der wirtschaftliche Querschnitt in dem zuletzt behandelten Falle nicht verwendet werden kann ohne besondere Einrichtungen zur Konstanthaltung der Spannung. Bei Ein- und Ausschaltung eines Teils der Last oder der ganzen Last würden ohne Nachregelung unzulässige und für den Abnehmer unerträgliche Spannungsschwankungen auftreten. Auf die Güte der Spannungsregelung oder die Kosten der Regelapparate ist aber in den Gleichungen keine Rücksicht genommen.

b) Der Verbraucher bezahlt die Leitung und den Arbeitsverlust darin. Der Strom ist konstant. Wenn der Verbraucher für die Kosten der Leitung aufkommt und auch den Verlust in ihr mit bezahlt, werden die jährlichen Gesamtkosten wie vorher:

$$K = \frac{2Lq}{f} J^2 T P_2 + (a + bf) L p, \quad (4)$$

worin nun der Kaufpreis P_2 der Wattstunde an die Stelle der Selbst-

kosten P_1 von Gleichung (1) getreten ist. Nimmt man die Spannung am Anfang als gegeben an, so erhält man die Gleichung (I) und (II) mit P_2 an Stelle von P_1 . Nimmt man an, daß der Strom gegeben ist, dann folgt aus (4) und aus

$$\frac{dK}{df} = 0$$

unmittelbar

$$[f] = J \sqrt{\frac{2 \rho T P_2}{b p}}. \quad (\text{III})$$

Der wirtschaftliche Querschnitt ist also unabhängig von der Leitungslänge L und dem Festwert a . Dieselbe Beziehung hätte sich auch aus (1) ergeben, mit P_1 an Stelle von P_2 , wenn man statt gegebener Leistung W_2 am Ende der Leitung den Strom J als gegeben angesehen hätte.

Beispiel: Zwei Glühlampen von je 1 Amp. und 1000 Brennstunden sind an eine 110-Volt-Leitung in 45 m Abstand anzuschließen. Der Strom wird mit $P_2 = 0,05$ R Pf/Wh bezahlt. Die gummiisolierte Leitung auf Porzellanrollen kostet für den Meter Leitung 21,5 + 2,9 R Pf; für Verzinsung, Abschreibung und Instandhaltung werden $p = 10\%$ gerechnet. Dann ist

$$[f] = 2 \sqrt{\frac{2 \cdot 0,017 \cdot 1000 \cdot 0,05}{2,9 \cdot 0,1}} = 4,85 \text{ mm}^2.$$

Bei 3% zulässigem Spannungsverlust würde $\frac{45 \cdot 2}{30 \cdot 3} = 1 \text{ mm}^2$ Querschnitt bereits genügen. Diese Leitung würde einschließlich Verlegung etwa 11 RM kosten und für Zinsen usw. jährlich 1,10 RM erfordern.

Demgegenüber werden in ihr $2 \cdot 3 \cdot 1000 \text{ Wh} = 6 \text{ kWh}$ vernichtet, wofür 3 RM bezahlt werden, so daß die Jahresauslagen sich auf 4,10 RM stellen.

Rundet man auf 4 mm^2 ab, so würde die Leitung etwa 14,9 RM kosten und für Abschreibung usw. 1,49 RM beanspruchen. In ihr würden nur 1,5 kWh vernichtet, wofür 75 R Pf jährlich zu zahlen wären. Die Jahreskosten betragen also bei der 4-mm^2 -Leitung $1,49 + 0,75 = 2,24$ RM. Der wirtschaftliche Querschnitt erspart daher jährlich $4,10 - 2,24 = 1,86$ RM, wobei der Leitungsverlust statt 3 nur 0,75 Volt erreicht. Damit hat man gleichzeitig einen großen Rückhalt für etwaige unvorhergesehene Mehrbelastung.

Für andere Querschnitte gibt folgende Tabelle Aufschluß:

f in mm ²	Anlagekosten	Jährliche Kosten			Verlust
		K_1	K_2	K	
1	RM 11,0	RM 3,00	RM 1,10	RM 4,10	3,0 Volt
2,5	„ 12,5	„ 1,20	„ 1,25	„ 2,45	1,2 „
4	„ 14,9	„ 0,75	„ 1,49	„ 2,24	0,75 „
4,85	„ 16,0	„ 0,62	„ 1,60	„ 2,22	0,62 „
6	„ 17,5	„ 0,50	„ 1,75	„ 2,25	0,50 „

Auch hier ist das Minimum nicht scharf ausgesprochen. Erhebliche Abweichungen haben nur geringen Einfluß. Noch verwischter und un-

deutlicher tritt das Ergebnis zutage bei gewöhnlichen Lichtanschlüssen mit nur wenigen (etwa 300—400) Stunden jährlicher Benutzung des Anschlußwertes. Man wird dann in den meisten Fällen nur auf Spannungsverlust rechnen und wegen der geringeren Anlagekosten möglichst dünne Querschnitte, hier etwa 1,5 oder 2,5 mm², wählen. Die ökonomischen Erwägungen spielen jedoch zuweilen eine Rolle beim Anschluß von Motoren mit lang dauernder Belastung¹⁾.

c) Fernleitung mit konstanter Anfangsleistung W_1 . Auf die Betriebskosten der Leitung entfällt ein Anteil an den Anlagekosten der Zentrale.

In einer Entfernung L vom Verbrauchsorte sei ein Kraftwerk mit einer Leistung W_1 vorhanden. Für die Fernleitung sollen der wirtschaftliche Querschnitt und Verlust ermittelt werden.

Die jährlichen Auslagen umfassen außer den Beträgen K_1 für die verlorene Arbeit wT , und K_2 für Verzinsung usw. der Leitung, auch noch einen Betrag K_3 für Verzinsung, Abschreibung und Instandhaltung jenes Anteils der Anlagekosten des Kraftwerkes, welcher ausschließlich zur Deckung des Verlustes w in der Leitung dient.

Bedeutet L die Länge in km, w den Verlust in kW, W_1 die Leistung in kW, V_1 die Spannung in Kilovolt, A die Anlagekosten der Zentrale für 1 kW, p' den Prozentsatz für Verzinsung usw. der Zentrale, p den Prozentsatz für Verzinsung usw. der Leitung, P_1' die direkten Betriebskosten für die in der Zentrale erzeugte kWh, a und b die Festwerte für 1 mm² und 1 km der Leitung, dann lassen sich die gesamten Jahreskosten der Fernleitung ausdrücken durch

$$K = K_1 + K_2 + K_3 = wT P_1' + (a + bf) Lp + wAp'.$$

Setzt man für Zweileiteranlagen wieder

$$f = \left(\frac{W_1}{V_1}\right)^2 \cdot \frac{2Lq}{w},$$

dann folgt für die jährlichen Kosten der Leitungsanlage

$$K = aLp + (TP_1' + Ap') \cdot w + \frac{2L^2 qpb}{w} \left(\frac{W_1}{V_1}\right)^2. \quad (5)$$

Hierin erscheint noch die zu wählende Betriebsspannung V_1 der Zentrale, von der sowohl die Anlage- als auch die Unterhaltungskosten der Leitung und der Zentrale abhängen. Die sogenannten „Konstanten“ a , b , A , p und p' hängen von der Wahl der Spannung V_1 ab; insbesondere die Kosten der Transformatoren und Schaltanlagen werden von dieser Wahl beeinflusst, wie sogleich noch näher erläutert werden soll. Bestimmt man nun für verschiedene Spannungen V_1 und zugehörige Werte von a , A , p und p' die wirtschaftlichen Werte, dann findet man aus (5) für $\frac{dK}{dw} = 0$:

$$[w] = \left(\frac{W_1}{V_1}\right) L \sqrt{\frac{2qpb}{TP_1' + Ap'}}, \quad (IV)$$

$$[f] = \left(\frac{W_1}{V_1}\right) \frac{2Lq}{[w]} = \sqrt{\frac{(TP_1' + Ap') 2q}{pb}}. \quad (V)$$

¹⁾ Ayrton: Remarks on economy in house wiring. J. Inst. El. Eng., London Vol. 25, S. 121.

Hochenegg¹⁾ nannte $\sqrt{\varrho b p}$ die Leitungszahl und $\sqrt{TP_1' + Ap'}$ die Betriebszahl.

d) **Leitung mit gegebener Endleistung W_2 .** Die gesamten Betriebskosten sollen minimal werden.

Wichtiger ist der Fall, daß die Leistung am Leitungsende gegeben ist. Hierbei betragen die Jahreskosten für die Leitungsanlage

$$K = aLp + (TP_1' + Ap')w + 2 \frac{L^2 \varrho p b}{w} \left(\frac{W_2 + w}{V_1} \right)^2 \quad (5')$$

und die jährlichen Auslagen der Gesamtanlagen

$$K_g = aLp + wTP_1' + \frac{2L^2 \varrho p b}{w} \left(\frac{W_2 + w}{V_1} \right)^2 + (W_2 + w) Ap'. \quad (6)$$

Zu den Kosten K_2 tritt außer dem auf den Leitungsverlust w entfallenden Anteil der Betriebskosten auch der darauf entfallende Anteil der Anlagekosten A für 1 kW Zentrallenleistung.

Auch hier kann eine für die geringsten Kosten günstigste Spannung durch Probieren gefunden werden. Aus

$$\frac{dK_g}{dw} = TP_1' + \frac{2L^2 \varrho p b}{V_1^2} \frac{(w^2 - W_2^2)}{w^2} + Ap' = 0$$

folgt für den wirtschaftlichen Verlust in kW

$$[w] = W_2 \sqrt{\frac{2L^2 b \varrho p}{2L^2 b \varrho p + (TP_1' + Ap') V_1^2}} \quad (VI)$$

und für den wirtschaftlichen Querschnitt in mm^2

$$[f] = J \sqrt{\frac{2 \varrho TP_1'}{pb}}. \quad (VII)$$

Diese Formel entspricht (III) und ist nur scheinbar unabhängig von der Spannung V_1 . Tatsächlich steckt ihr Einfluß außer in der Größe von J auch in den „Konstanten“ b, A, p, p' .

Man kann den Einfluß der Spannung V_1 , insbesondere bei Hochspannungsanlagen für Transformatoren, Masten, Isolatoren und Schaltanlagen durch Kurven festlegen. Der Kostenverlauf läßt sich aber nur mühsam durch polytrope Kurven von der Form $y = K^x$ darstellen. Die daraus abgeleiteten undurchsichtigen Gleichungen widerspiegeln keineswegs die verwickelten Überlegungen, welche beim Entwurf einer solchen Anlage zu bewältigen sind. C. W. Meyer²⁾ schmiegt eine polytrope Kurve (mit gebrochenen Exponenten) an der in Betracht kommenden Stelle der tatsächlichen Preiskurve an und nennt $y = K^x$ die Verteuerungsfunktion. Diese Anschmiegun ist stets möglich, meist aber nutzlos, sobald die Preise durch Trustbildung, Wettbewerb usw. in ihren Grundlagen verschoben werden.

Derartige Preisbildungen vertragen nicht den Schnürleib von Formeln. Bessere Anpassung bietet die zeichnerische Behandlung, wobei

¹⁾ Hochenegg, C.: Anordnung und Bemessung der elektrischen Leitungen 1893 u. 1897.

²⁾ Meyer, C. W.: Die Berechnung elektrischer Anlagen auf wirtschaftlichen Grundlagen. 1908.

man in vielen Fällen die Linien wegen der Unsicherheit ihrer geldlichen Festwerte durch breite Streifen ersetzt denken muß.

2. Zeichnerische Behandlung der wirtschaftlichen Leitungsbemessung.

a) Der relative Reingewinn soll maximal werden. Von einem Wasserkraftwerk sollen W_1 Kilowatt auf L km Entfernung mit dem Leistungsverlust $p\%$ der vorhandenen Leistung und der gegebenen Phasenspannung V_1 Kilovolt des Drehstroms übertragen werden.

Der Leiterquerschnitt

$$f = \frac{\rho L W_1}{V_1^2 \cos^2 \varphi_1} \cdot \frac{1}{p}$$

ergibt die Hyperbel f in Abb. 302. Aus praktischen Gründen müssen bei größeren Querschnitten mehrere parallele Drähte verwendet werden.

Man zeichnet nun für verschiedene Werte von p die Hyperbel der Kupferkosten C , die gebrochene Linie B für die Kosten der Masten, Isolatoren usw. der Leitung ohne Drähte, die bei jeder Änderung der Drahtzahl eine Stufe zeigt und schließlich die Wagrechte A der Anlagekosten in Lire unter Anschluß der Leitung.

Die Summe der Ordinaten von A , B und C gibt nun eine Linie S , welche das Anlagekapital als Funktion des zulässigen Verlustes p darstellt.

Der Wert D (für die allgemeinen Betriebskosten des Unternehmens ohne Kupfer) kann im allgemeinen aus S abgeleitet werden, und zwar durch Multiplikation der Ordinaten von S mit einem gewissen Koeffizienten für Verzinsung, Amortisation, Instandhaltung und Betrieb.

Schließlich erhält man für die dem Kupfer zuzuschreibenden Betriebskosten eine Linie $E = aC$, deren Ordinaten proportional sind denen der Kurve C ; a ist der Prozentsatz für Verzinsung, Abschreibung und Instandhaltung des Kupfers. Da in dem gezeichneten Beispiel der Abb. 302 $a = 10\%$ ist, fällt Kurve E mit Kurve C zusammen.

Die Bruttoeinnahmen $PW_2 = PW_1(1 - p)$ werden durch eine geeignete Gerade M wiedergegeben.

Durch Subtraktion der Ordinaten der Kurven D und E von denen der Linie M erhält man die Nettoeinnahme

$$J = PW_2 - D - E.$$

Nun bleibt nur noch die gesuchte Kurve des Verhältnisses J/S zu zeichnen. Der relative Reingewinn J/S wird am größten für $p = 0,12$, ändert sich aber nur wenig für $p = 0,15$, wobei eine beträchtliche Ersparnis an Anlagekapital auftritt.

Dem untersuchten Fall liegen folgende Annahmen zugrunde: $W_1 = 2000$ Kilowatt, $V_1 = 20$ Kilovolt, $L = 50$ Kilometer, $A = 1,7$ Millionen Lire, Leistungsfaktor $\cos \varphi_1 = 0,80$, Verzinsung und Instandhaltung des Kupfers $= 0,10$, jährlicher Pauschalpreis für 1 Kilowatt $P = 200$ Lire, Kosten des Kupfers für 1 kg $= 2$ Lire.

Die Leistung wurde hier pauschal verkauft.

b) Die relativen Selbstkosten der ganzen Anlage sollen minimal werden. Im allgemeinen ist jedoch der Preis, zu welchem das Kilowattjahr abgegeben wird, nicht gegeben und dann kann die Untersuchung in der Absicht geführt werden, die jährlichen Selbstkosten des am Ende der Leitung abgenommenen Kilowatt mini-

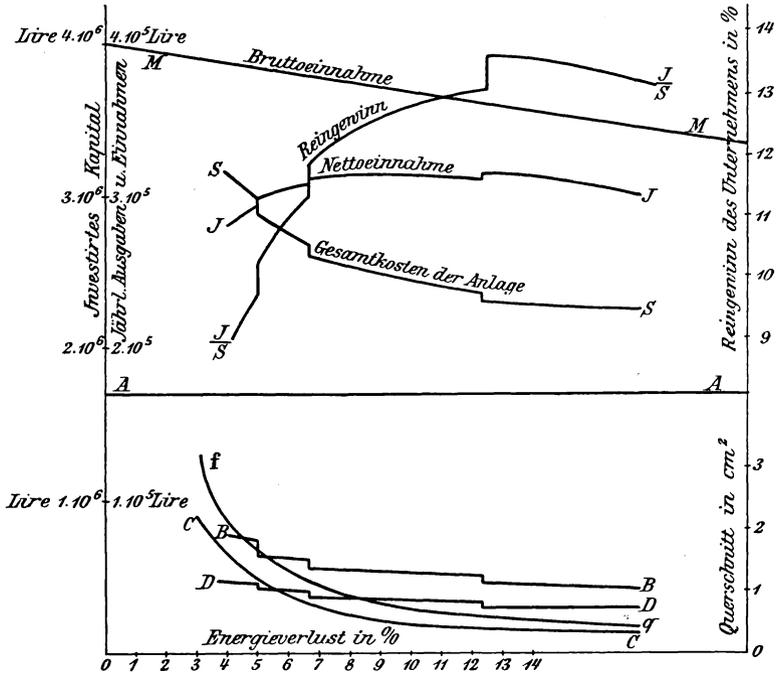


Abb. 302.

mal zu gestalten. Dieser Fall ist in Abb. 303 zeichnerisch behandelt für eine Drehstromanlage mit:

- | | |
|---|------------------------|
| $W_1 = 10000$ Kilowatt | $A = 5$ Millionen Lire |
| $V_1 = 40000$ Volt | $B = 2$ " " |
| $L = 120$ Kilometer | $D = 0,1$ " " |
| Verzinsung, Abschreibung } der Anlage $b = 0,12,$ | |
| und Instandhaltung } des Kupfers $a = 0,08.$ | |

Die jährlichen Selbstkosten für 1 kW am Ende der Linie sind

$$x = \{b(A + B) + aC + D\} : W_2.$$

Wird

$$C = c/p, \quad W_2 = W_1(1 - p)$$

hierin eingesetzt, dann folgt

$$x = \frac{b(A + B) + D + a(c/p)}{W_1(1 - p)},$$

woraus sich der kleinste Wert von x in bekannter Weise ermitteln läßt. Bei 2 Lire für 1 kg Kupfer findet man ihn für $p \approx 0,10$. Mit Rück-

sicht auf den Verlauf der Linie xx in Abb. 303 empfiehlt es sich, ihn nicht viel zu überschreiten und ja nicht zu unterschreiten.

c) Die Selbstkosten der Leitung für 1 kW-Jahr sollen minimal werden. Ein anderer, häufig vorkommender Fall ist der, daß eine bestimmte Energiemenge W_2 am Ende der Leitung verlangt wird und an der Erzeugungsstelle nur eine beschränkte Menge vorhanden ist.

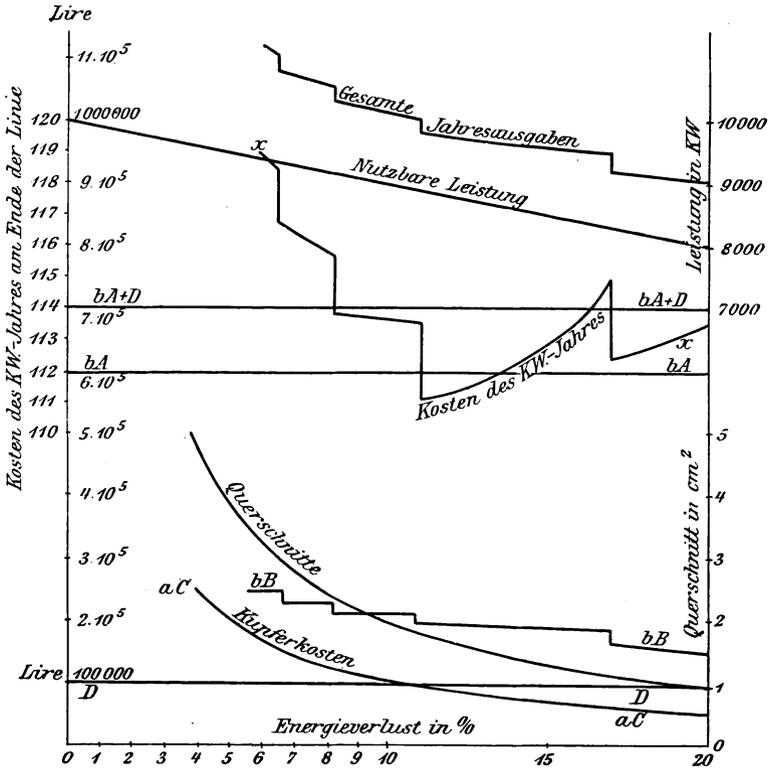


Abb. 303.

Der Preis des Kilowattjahres an der Erzeugungsstelle sei P . Dann sind die Kosten für das abgegebene Kilowattjahr

$$\frac{S}{W_2} = \frac{P W_1 + b B + D + a C}{W_2}$$

Daraus findet sich in ähnlicher Weise wie früher zu einem Werte von p ein Minimum von S/W_2 .

Als Beispiel diene eine kurze Gleichstromübertragung mit 2 Kilovolt, welche 1000 Kilowatt auf 2 km überträgt. Angenommen, es seien $B = 20000$ Lire, $D = 10000$ Lire, $P = 200$ Lire.

Für die Verzinsung, Abschreibung und Instandhaltung der Anlage ohne Kupfer sind $b = 12\%$, für das Kupfer $a = 0,08$ angenommen. Man erhält das Diagramm (Abb. 304), welches sich als sehr einfach erweist, weil der Wert B konstant erhalten werden kann.

Setzt man $W_1 = W_2(1 + p)$, so gibt dies die unterste Gerade in Abb. 304, entsprechend PW_1 . Die zweite Gerade entspricht $(bB + D)$. Zählt man hierzu noch $aC = ac/p$, welche Kurve in Abb. 304 nicht gezeichnet ist, dann ergeben sich die Gesamtkosten S mit dem niedrigsten Wert bei etwa $p = 2,5\%$.

d) Wasserzentrale mit Dampfhilfskraft. Wenn im ganzen 4000 Kilowatt benötigt werden, aber nur 3000 Kilowatt von der Wasserkraft verfügbar sind, müssen $1000 + w$ Kilowatt mittels Dampf erzeugt werden, wobei w die in der Leitung verlorene Leistung bedeutet. Welches wird bei gegebenen Kosten der verschiedenen Größen der wirtschaftliche Wert von w sein?

Man zeichnet in Abb. 305 die Linie aa der wahrscheinlichen Aus-

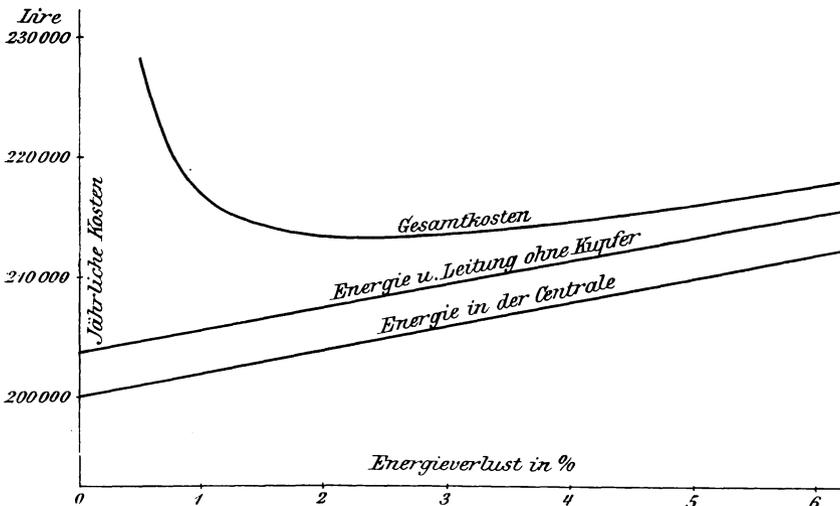


Abb. 304.

nützung, indem man als Abszissen die Kilowatt und als Ordinaten die Stunden aufträgt.

Von den Anlagekosten der Dampfzentrale kommt bei der Berechnung nur der über 1000 Kilowatt liegende zusätzliche Teil in Betracht, denn der andere Teil muß auf jeden Fall bestehen. Die Kosten der Zusatz-Dampfanlage werden nun durch die Linie bb dargestellt, deren Ursprung bei der Abszisse 3000 Kilowatt liegt und deren Ordinaten nach links zunehmen. Die Linie cc für Verzinsung, Amortisation und Instandhaltung befolgt gleichfalls das Gesetz der Linie bb .

Die Kosten der Kohle sind proportional zur Anzahl der Zusatz-Kilowattstunden. Da aus der Kurve aa die Anzahl der jährlichen Kilowattstunden bekannt und der Preis der Kohle gegeben ist, kann eine Summenlinie dd gezeichnet werden, welche die jährliche Auslage für Kohle angibt. Die Summe ee der Ordinaten cc und dd stellt die jährliche Gesamtausgabe für die Dampfanlage dar.

Für das Wasserkraftwerk kann eine Linie *ff* für die jährlichen Gesamtausgaben in Abhängigkeit von den Kilowatt am Leitungsende gezeichnet werden. Sie nähert sich asymptotisch einer Horizontalen durch den Schnittpunkt der Kurve *bb* mit der *y*-Achse und einer Vertikalen durch den Abszissenpunkt 3000 Kilowatt. Die Horizontale entspricht reinem Dampf-, die Vertikale reinem Wasserbetrieb.

Die Summe der Ordinaten von *ee* und *ff* liefert die Kurve der Gesamtkosten *gg*, welche im vorliegenden Falle ein Minimum für 350 Kilowatt der Zusatz-Dampfanlage aufweist. Der vom Lote durch 3000 Kilo-

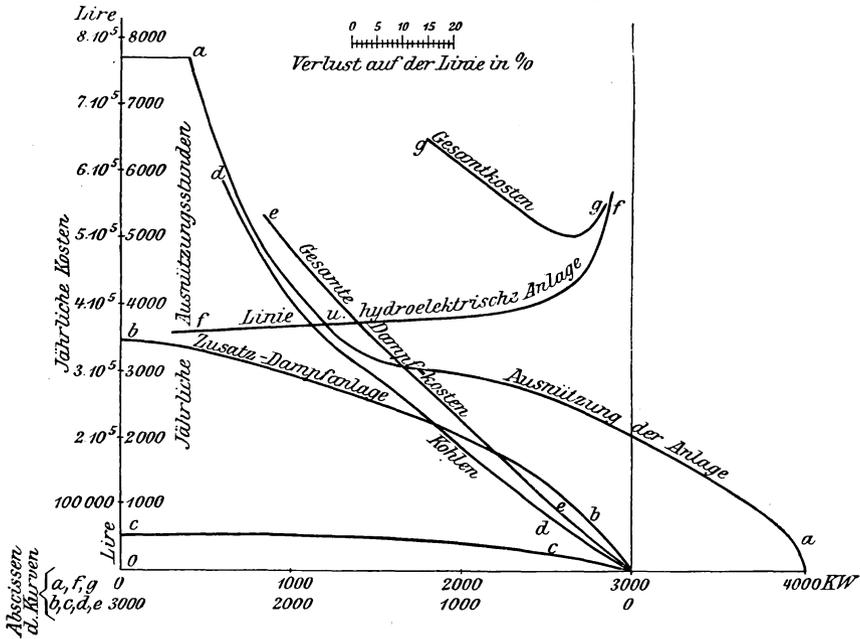


Abb. 305.

watt der Wasserkraftanlage zu messende Verlust auf der Linie beträgt dabei ungefähr 12%.

Diese Darstellung und Beispiele hat G. Semenza¹⁾ gegeben.

3. Kosten in Erde verlegter Kabel.

In den Formeln für die Berechnung elektrischer Übertragungen auf Wirtschaftlichkeit der Anlagen wurden die Kosten der Leitungen durch $K = (a + bf)L$ ausgedrückt, wobei *f* den gesamten Querschnitt jeder der *n* Leitungen, *L* ihre Länge und *a* und *b* Zahlenwerte bedeuten.

Die nachfolgende Zusammenstellung gibt die Werte von *a* und *b* von eisenbewehrten Kabeln bei einem Grundpreis von £ 85 für die englische Tonne Elektrolytkupfer und etwa £ 17 für die Tonne Blei.

¹⁾ Semenza, G.: L'Elettricità 1903, Nr. 12; 1904, Nr. 6.

Die Preise sind der jeweiligen höchsten Londoner Notierung für Elektrolytkupfer in der Weise anzupassen, daß für jedes £ über oder unter £ 85 ein Aufschlag bzw. Abzug von RM 0,20 für 1 mm² Kupferquerschnitt und ein Kilometer Kabel in Anrechnung gebracht wird. Maßgebend ist die höchste Notierung des dem Auftragseingang vorhergehenden Freitags, die am folgenden Samstag im Mining-Journal veröffentlicht wird, wobei Bruchteile eines £ nach oben abgerundet werden.

		Preis für 100 Meter unverlegtes eisenbewehrtes Kabel in Mark	
Einleiterkabel	700 V	$a = 70$	$b = 2,1$
Verseiltes Zweileiterkabel . . .	700 V	120	2,76
„ Dreileiterkabel	700 V	170	2,23
„ „	3000 V	200	2,42
„ „	6000 V	270	2,70
„ „	10000 V	400	2,70
„ „	12000 V	500	2,82
„ „	15000 V	600	2,96
„ „	20000 V	800	2,96

Die Kosten der Verbindungsmuffen nehmen mit dem Querschnitt wenig, mit der Spannung stark zu. Für Querschnitte von 25—70 mm² kosten sie bis 700 Volt etwa 20 RM, für 20000 Volt etwa 100 RM. Je nach der Fabrikationslänge werden 2—5 Muffen für 1 km erforderlich.

Die Verlegung umfaßt außer der Montage der Verbindungs-, Anschluß- und Endmuffen die folgenden Arbeiten:

Herstellen des Grabens von 70 cm Tiefe, Einfüllen einer 20 cm dicken Sandschicht, Feststampfen, Abfuhr der verbleibenden Erde für 1 m	1—1,5	Mk.
Einlegen der Kabel und Abdecken	0,15	„
Betonplatten zum Abdecken je nach der Breite	0,6—1	„
Wiederherstellung des Pflasters bei Verwendung des brauchbaren Altmaterials		
für 1 m ² bei Makadam	1,20	„
für 1 m ² Asphalttrottoir	5—7	„
Klinkerpflaster in Zementmörtel	2—4	„

Rechnet man dazu noch die Kosten der Anfuhr, der Montage der Muffen und des Verschnittes, dann kann man als mittleren Preis für die Verlegung von 1 km Kabel etwa 500—1000 RM ansetzen.

Einfluß auf die Breite des Grabens hat die Zahl der darin verlegten Kabel. Bei Hochspannung legt man selten mehr als 2 Kabel in einen etwa 35 cm breiten Graben; bei Niederspannung können 4—8 Kabel in einen 50—60 cm breiten Graben gelegt werden. Dann steigen die Kosten für Herstellung des Grabens und Einlegen der Kabel jedoch nicht proportional mit der Zahl der Kabel. Diese werden häufig, besonders wenn Hoch- und Niederspannung in demselben Graben liegen, durch Bleiringe mit entsprechenden Aufschriften gemerkt.

Diese Preise können natürlich nur Anhaltspunkte für vorläufige

Schätzungen bieten. Sie müssen von Fall zu Fall nach den örtlichen Verhältnissen und ortsüblichen Löhnen überprüft werden¹⁾).

4. Jährliche Arbeitsverluste in den Leitungen.

Im Leitungswiderstande r wird während der Zeit t durch den veränderlichen Strom i die Arbeit $\int_0^t i^2 r dt = r \int_0^t i^2 dt$ in Wärme umgesetzt. Sucht man die Verlustzeit T_v , während welcher der größte Strom

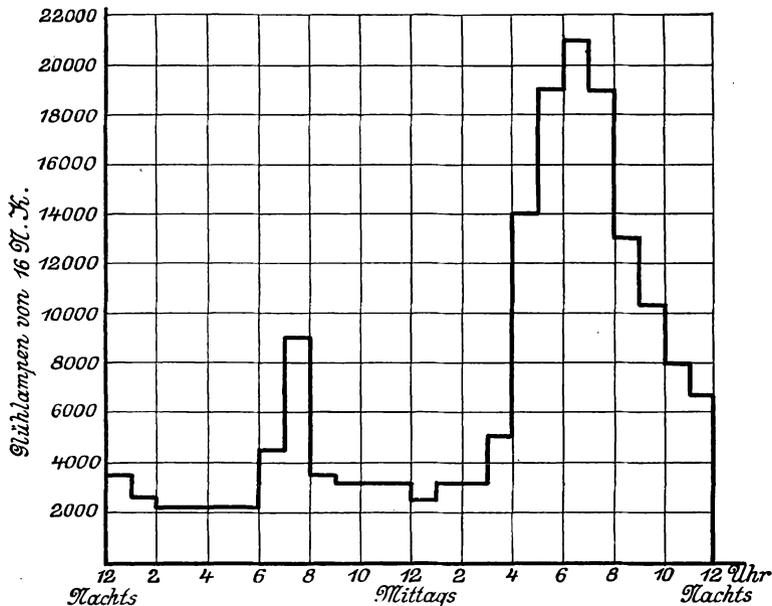


Abb. 306.

denselben Arbeitsverlust wie der veränderliche Strom i hervorbringt,

so findet man aus: $J^2 r T_v = r \int_0^t i^2 dt$.

$$T_o = \int_0^t \left(\frac{i}{J}\right)^2 dt.$$

Bei großen Licht- und Kraftwerken genügt es, als Zeiteilchen dt eine Stunde anzunehmen und einige Tage aus dem Jahr herauszugreifen, für welche man den Belastungsverlauf kennt oder schätzt.

Ein aus dem Gutachten von O. von Miller und W. H. Lindley für das Elektrizitätswerk Frankfurt a. M. 1892 entnommenes Zahlenbeispiel möge dies erläutern.

¹⁾ Dieser 1914 vor dem Kriege geschriebene Satz hat eine merkwürdige Bestätigung erhalten: während des Krieges wurden in Holland als Höchstpreis 3,50 fl. für 1 kg festgesetzt, im Schleichhandel aber bis zu 30 fl. bezahlt.

Die größte Belastung mit 21 000 Glühlampen von je 50 Watt gleich 1050 Kilowatt war für den 24. Dezember nachmittags zwischen 6 und 7 Uhr angenommen. Der ihr entsprechende maximale Strom werde gleich Eins gesetzt. Abb. 306 zeigt den Belastungsverlauf, der der ersten Spalte der folgenden Tabelle entspricht. Die drei anderen Spalten entsprechen dem Belastungsverlauf eines (mittleren) Tages aus jeder Jahreszeit.

Zeit des betr. Tages	Höchstverbrauch: 24. Dezember 1 Tag		Wintermonate: November, Dezember, Januar 91 Tage		Frühjahr und Herbst: Februar, März, April und August, September, Oktober 181 Tage		Mindestverbrauch: Sommermonate: Mai, Juni, Juli 92 Tage	
	$\frac{i}{J}$	$\left(\frac{i}{J}\right)^2$	$\frac{i}{J}$	$\left(\frac{i}{J}\right)^2$	$\frac{i}{J}$	$\left(\frac{i}{J}\right)^2$	$\frac{i}{J}$	$\left(\frac{i}{J}\right)^2$
Morgen 12—1	0,170	0,0289	0,100	0,0100	0,085	0,0072	0,070	0,0049
1—2	0,120	0,0145	0,070	0,0049	0,050	0,0025	0,050	0,0025
2—3	0,106	0,0112	0,060	0,0036	0,040	0,0016	0,040	0,0016
3—4	0,106	0,0112	0,060	0,0036	0,035	0,0012	0,032	0,0010
4—5	0,106	0,0112	0,060	0,0036	0,035	0,0012	0,032	0,0010
5—6	0,106	0,0112	0,060	0,0036	0,035	0,0012	0,032	0,0010
6—7	0,260	0,0676	0,140	0,0196	0,040	0,0016	0,036	0,0013
7—8	0,440	0,1936	0,350	0,1225	0,050	0,0025	0,041	0,0017
8—9	0,170	0,0289	0,125	0,0156	0,045	0,0020	0,041	0,0017
9—10	0,150	0,0225	0,120	0,0144	0,045	0,0020	0,041	0,0017
10—11	0,150	0,0225	0,120	0,0144	0,045	0,0020	0,041	0,0017
11—12	0,150	0,0225	0,120	0,0144	0,045	0,0020	0,041	0,0017
Mittag 12—1	0,120	0,0144	0,100	0,0100	0,040	0,0016	0,041	0,0017
1—2	0,155	0,0240	0,120	0,0144	0,040	0,0016	0,041	0,0017
2—3	0,155	0,0240	0,125	0,0156	0,050	0,0025	0,043	0,0018
3—4	0,240	0,0570	0,200	0,0400	0,060	0,0036	0,043	0,0018
4—5	0,670	0,4489	0,580	0,3364	0,080	0,0064	0,050	0,0025
5—6	0,910	0,8281	0,703	0,5329	0,155	0,0240	0,055	0,0030
6—7	1,000	1,0000	0,750	0,5625	0,350	0,1255	0,065	0,0042
7—8	0,900	0,8100	0,307	0,5329	0,490	0,2401	0,095	0,0090
8—9	0,620	0,3844	0,540	0,2916	0,345	0,1190	0,160	0,0256
9—10	0,490	0,2401	0,410	0,1681	0,285	0,0812	0,210	0,0441
10—11	0,380	0,1444	0,320	0,1024	0,150	0,0225	0,120	0,0144
Nacht 11—12	0,320	0,1024	0,220	0,0484	0,100	0,0100	0,095	0,0090
	6,994	4,5240	6,207	2,8854	2,695	0,6620	1,515	0,1406

Hier ist also für $dt = 1$ Stunde

$$T_v = \sum (i/J)^2 = 1 \cdot 4,5240 + 91 \cdot 2,8854 + 181 \cdot 0,6620 + 92 \cdot 0,1406 \approx 400 \text{ Stunden.}$$

Der höchste Strom hätte also in 400 Stunden den gleichen Arbeitsverlust ergeben wie der wirklich auftretende Strom in 8760 Stunden.

Die Benutzungsdauer des Maximums aber hätte sich ergeben aus

$$T_M = \int \left(\frac{i}{J}\right) dt.$$

Sie wäre im vorliegenden Falle

$$T_M = \sum (i/J) = 1 \cdot 6,994 + 91 \cdot 6,207 + 181 \cdot 2,965 + 92 \cdot 1,515 \\ \approx 1200 \text{ Stunden}$$

gewesen.

Von den 8760 Stunden des Jahres müßte die Vollast nur 1200 Stunden, oder 13,7%, wirken, um den Jahresverbrauch zu ergeben.

In diesen $T_M = 1200$ Stunden wäre der Arbeitsverlust $J^2 T_M r$. In der Verlustzeit war er $J^2 T_v r$. Es gilt also

$$T_M : T_v = \int_0^t \left(\frac{i}{J}\right) dt : \int_0^t \left(\frac{i}{J}\right)^2 dt = k_f^2.$$

Das Verhältnis der Betriebszeit T_M zur Verlustzeit T_v des Maximums ist also gleich dem Quadrat des Formfaktors der Jahresbelastungskurve.

Hier ist $k_f = 1,73$.

Wenn die Belastung aussetzend oder stoßweise auftritt, wie bei Aufzügen, Bahnen usw., dann muß das Zeitelement kurz genommen werden, etwa in Minuten oder Sekunden.

Für Bahnnetze hat man auch das Verhältnis der maximalen zur mittleren Belastung als Schwankungsverhältnis s bezeichnet. Bei Wechselstrom und konstanter Spannung ist also

$$s = J \cos \varphi / J_{\text{mittel}} \cos \varphi_{\text{mittel}}.$$

Nach Dänzler¹⁾, der k_f als Stromwärmefaktor bezeichnet, ergaben vier Fälle von Vollbahnstrecken mit den angegebenen Schwankungsverhältnissen s und Tagesleistungen die folgenden Formfaktoren:

Tagesleistung	$1,10 \cdot 10^6$ ton-km	$k_f = 1,064$	$s = 3,10$
	$1,24 \cdot 10^6$	„	1,075
	$1,11 \cdot 10^6$	„	1,118
	$0,79 \cdot 10^6$	„	1,169
			3,45
			3,40
			4,40.

Sengel²⁾ fand aus 721 Augenblickswerten durch Zerlegung des Strombildes einer Bahnlinie in schmale Streifen $k_f = 1,225$.

Der Formfaktor der reinen Sinuslinie beträgt 1,11. Man kann also, wenn keine anderen Mittel zur Verfügung stehen, die Jahresbelastungskurve bei Licht- und Kraftwerken und bei Bahnen ersetzt denken durch ihre erste Harmonische und findet dann $k_f \approx 1,11$. Dies ist für Lichtwerke mittlerer geographischer Breite einleuchtend wegen des Zusammenhanges mit dem Jahresverlauf des natürlichen Lichtbedürfnisses.

Andere Belastungslinien können durch harmonische Analyse zerlegt werden, wenn man aus ihnen weitere Schlüsse ziehen will.

5. Verschiedenheitsfaktor der Leitungen.

Wenn ein Kraftwerk dauernd mit der maximalen Belastung im Betriebe wäre, gäbe dies den günstigsten und gleichzeitig auch den ein-

¹⁾ Dänzler, A.: Bull. Schweiz. Elektrot. Verein. 1911, Bd. 2, S. 13.

²⁾ Sengel, A.: ETZ 1902, S. 385.

fachsten Fall. Die Zentrale wäre voll ausgenützt, ihr Benützungsfaktor wäre Eins. Tatsächlich sind die Verhältnisse meistens bedeutend ungünstiger. Die Maschinen müssen viel länger laufen als bei fortwährend gleichmäßiger maximaler Belastung zur Leistung der gleichen Arbeitsmenge gebraucht würde. Um ein Bild der tatsächlichen Verhältnisse zu erhalten, kann man sich die gesamte, im Jahre abgegebene Arbeitsmenge in Kilowattstunden gleichmäßig über eine Anzahl von Stunden so verteilt denken, als wenn während dieser Zeit die Maschinen voll belastet liefen, während sie in der übrigen Zeit des Jahres ruhen. Ist diese Zeit T_B die Gesamtzahl der im Jahre abgegebenen Kilowattstunden kWh, und die Maschinenleistung bei Vollast kW, so ist $T_B = \frac{kWh}{kW}$ Stunden. Das Verhältnis T_B zur Zahl 8760 der Stunden im Jahr heißt Belastungsfaktor. Es ist also

$$f_B = T_B/8760 = kWh:(8760 kW).$$

In gleicher Weise kann man für jeden einzelnen Abnehmer und für jeden Leitungsstrang und, im weiteren Sinn, selbst für Netzteile einen Benützungsfaktor ermitteln.

Indem man die vom Abnehmer gebrauchten kWh entweder durch die installierten kW_i oder durch die maximal gleichzeitig gebrauchten kW_{max} teilt, erhält man entweder

$$T_i = \frac{kWh}{kW_i} \text{ oder } T_M = \frac{kWh}{kW_{max}},$$

die Benützungsdauer des installierten oder des maximal gleichzeitig abgegebenen Kilowatt.

Hierbei ergibt sich der Umstand, daß mit wachsender Ausdehnung des Netzes die höchsten Anforderungen der Verbraucher an die Zentrale in ihrer zeitlichen Aufeinanderfolge immer verschiedenartiger werden. Das Verhältnis zwischen der Summe der Höchstbelastungen der Verbraucher und der tatsächlichen Höchstbelastung der Kraftanlage wird nach Wright Verschiedenheitsfaktor k_v genannt, während Klingenberg¹⁾ den reziproken Wert als Gleichzeitigkeitsfaktor einführt.

$$k_v = \sum kW/kW_{max}.$$

Die Höchstwerte der Verbraucher können in einem bestehenden Netz an Höchstverbrauchsmessern abgelesen werden; ebenso kann man den Höchstwert der Zentrale ermitteln. Da jedoch die Zeit der Aufzeichnung und der Ablesung dieser Höchstwerte willkürlich sind, braucht die Summe der abgelesenen Maxima keineswegs der Summe der gleichzeitig aufgetretenen zu entsprechen. Der Verschiedenheitsfaktor hat also keinen festen, ein für allemal für ein bestehendes Netz angebbaren, sondern nur einen wahrscheinlichsten Wert, der aus den Ablesungen der Instrumente ermittelt wird.

¹⁾ Klingenberg, G.: ETZ 1912, S. 731; ferner Russell, C. J.: Diversity factor, El. World. 1911, S. 552. Gear, H. B.: Diversity factor. Am. Inst. of El. Ing. 1910, S. 1365.

Zwei Belastungen können entweder ganz unabhängig sein, wenn sie in verschiedene Tages- oder Jahreszeiten fallen, oder sie können teilweise oder ganz zeitlich zusammenfallen. Da die Lichtleistung sich auf wenige Abendstunden zusammendrängt, so daß die Maxima bei den meisten Verbrauchern zeitlich annähernd zusammenfallen, wird bei Zentralen mit überwiegendem Lichtbetrieb eine Erhöhung des Verschiedenheitsfaktors günstig auf die Ausnützung wirken. Wenn alle Verbraucher ihre Lampen gleichzeitig ein- und ausschalteten, so wäre der Verschiedenheitsfaktor Eins. In praktischen Fällen übersteigt er nicht häufig den Wert $k_v = 1,2$ bis $1,3$. Das nachfolgende, zu günstig gewählte Beispiel soll den Begriff noch weiter aufklären.

Von einer Leitung wurde nach Abb. 307, abgenommen:

Von 7—9 Uhr morgens Lichtstrom nach *I*;

Von 8—12 und von 2—8 Uhr Motorstrom, entsprechend *II*;

Von 5 Uhr nachmittags bis 1 Uhr nachts Lichtstrom nach *III*;

Von 3—6 Uhr morgens für den Nachtbetrieb eines Bäckers nach *IV*.

Diese Leitung wird für die Zentrale besonders wirtschaftlich arbeiten, weil ihr Verschiedenheitsfaktor

$$\sum i_n = i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 1,5 + 2,5 + 6,0 + 1,0 = 11; \quad J = 7;$$

$$k_v = \frac{\sum i_n}{J} = \frac{11}{7} = 1,57,$$

außergewöhnlich hoch ist.

Wenn man den gesamten Verschiedenheitsfaktor zweier von der-

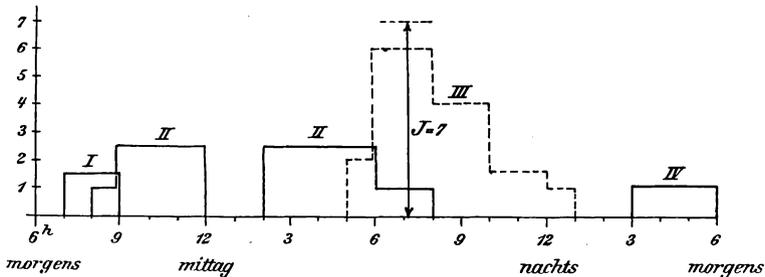


Abb 307.

selben Quellstelle ausgehenden offenen Leitungen vergleicht mit dem der aus ihnen gebildeten einfach-geschlossenen Leitung, bei dem sich die Scheidestelle immer den Anschlüssen nach von selbst günstig einstellt, so erkennt man die große Wichtigkeit der Netze. Diese sammeln die Anschlüsse leicht, und je mehr davon vorhanden sind, desto wahrscheinlicher gleichen sie sich in ihrer Gleichzeitigkeit aus, desto größer kann der Verschiedenheitsfaktor werden.

Darauf beruht die große Wirtschaftlichkeit der Zusammenziehung vieler Verbraucher an ein Netz und vieler kleiner Werke an ein gemeinschaftliches Werk.

So weist P. Torchio 1909 auf die Newyorker Edison Company mit einer höchsten Zentralenleistung von 173000 Kilowatt aus zwei

parallel geschalteten Werken für 139000 Kilowatt Scheitelverbrauch und auf die Stadt London mit 30 städtischen und 40 privaten Werken von 235000 Kilowatt für jährlich den höchsten gleichzeitigen Verbrauch von 141000 Kilowatt hin. Der Rückhalt oder die Bereitschaft war also in Newyork 24%, in London aber 66%, was teilweise dem mangelnden Ausgleich der 70 Verschiedenheitsfaktoren beizumessen ist.

Da man bei der Vorausberechnung einer Leitung in der Regel keine bindenden Angaben über den Verbrauch hat, muß man sowohl ihren höchsten Strombedarf als auch die ungefähre Benutzung auf Grund praktischer Erfahrungen an ähnlichen Fällen schätzen. Die Berechnung des wirtschaftlichen Querschnittes, Leistungs- und Spannungsverlustes entspricht also nicht der Summe der Stromhöchstwerte Σi , sondern der höchstens auftretenden Summe gleichzeitiger Stromentnahmen, das ist

$$J = (\Sigma i)/k_v.$$

6. Ausgleichung wattloser Leitungsbelastung.

Wattlose nacheilende Ströme können durch die Kapazitätswirkung übererregter Synchronmotoren ausgeglichen oder kompensiert werden.

Nimmt man die zu übertragende Leistung, den Spannungsverlust v in der Leitung und damit die Anfangs- und Endspannungen E_1 und E_2 , die Wattkomponente J_w des zu einer einzigen Abnahme zusammengefaßten Belastungsstromes als konstant an, so können durch Einschaltung eines entsprechenden Motors Ersparnisse an Anlagekapital und Betriebskosten eintreten¹⁾.

a) **Ersparnis an Leitungskosten.** Bei konstantem Leitungsverlust und bei teilweiser Ausgleichung der wattlosen Komponente $J_0 = J_w \operatorname{tg} \varphi$ kann der Strom von

$$J = J_w + jJ_0 \text{ auf } J_1 = nJ_w$$

vermindert und dadurch an Kupfer gespart werden.

Wenn c die Kosten des Leitungsmaterials pro übertragenes Kilovoltampere bedeutet, wenn der am Ende amgeschlossene Motor einen Strom i aufnimmt, dessen voreilende wattlose Komponente i_0 und dessen zur Deckung der Leerverluste erforderliche Wattkomponente i_w ist, so beträgt die Ersparnis an Anlagekapital

$$K_l = c \frac{E_2 J_1}{\cos \varphi} 10^{-3} (1 - n^2 \cdot \cos^2 \varphi),$$

wobei

$$n^2 = (1 + i_w/J_w)^2 + (\operatorname{tg} \varphi - i_0/J_w)^2 = (J_1/J_w)^2$$

gesetzt wurde.

Wird nun das Anlagekapital zu 5 verzinst und mit 3 abgeschrieben, so sind die jährlichen Ersparnisse $0,08 K_e$.

b) Durch den Anschluß eines Motors mit $iE_2 \cdot 10^{-3}$ Kilovoltampere

¹⁾ Blondel, A.: Moteurs synchrones à courants alternatifs, Paris, und Théorie des Moteurs synchrones. Paris 1895. — Berg, E. J.: El. World 28, 1896, S. 622, 656, 723.

scheinbarer Leistung tritt eine Verringerung der vom Generator zu liefernden Stromstärke von $J_w/\cos \varphi$ auf $J_1 = n J_w$ auf, und die Ersparnis an jährlichen Kosten ist $0,15 K_1$, wenn das Kapital mit 5% verzinst und mit 10% abgeschrieben wird. Man kann auch schreiben

$$K_1 = c_1 E_1 J_w \left(\frac{1}{\cos \varphi} - n \right) \cdot 10^{-3}.$$

c) Der Motor selbst bringt Mehrauslagen, also negative Ersparnisse an Anlagekapital in der Höhe

$$- K_2 = c_2 \cdot E_2 \cdot i \cdot 10^{-3},$$

wenn der Preis des Kilovoltampere beim Motor c_2 RM beträgt. Die jährlichen Mehrauslagen werden also bei 5% Verzinsung und 10% Abschreibung $0,15 K_2$ sein, wozu noch die Ausgaben für die vom Motor während h Stunden jährlich verbrauchte Arbeit kommen. Hier dürfen offenbar nur die reinen Betriebs selbstkosten der Zentrale, P_1 pro Kilowattstunde, also die Auslagen für Öl, Kohlen, Kondenswasser und evtl. Wartung des Motors, nicht aber für Löhne und Gehälter in der Zentrale in Rechnung gestellt werden, da die Zentrale den Motor ja nur in ihrem eigenen Interesse verwendet und Mehrauslagen an anderen Stellen für ihn nicht entstehen. Die jährlichen Mehrauslagen werden also als negative Ersparnisse einzuführen sein mit dem Betrage

$$- 0,15 K_2 - E_2 i_2 \cdot P_1 \cdot h \cdot 10^{-3}.$$

d) Daraus ergibt sich eine Gesamtersparnis an Anlagekosten

$$K = \left[c E_2 J_w \left(\frac{1}{\cos \varphi} - n^2 \cos \varphi \right) + c_1 \cdot E_1 \cdot J_w \left(\frac{1}{\cos \varphi} - n \right) - c_2 \cdot E_2 \cdot i_w \right] \cdot 10^{-3}$$

und eine jährliche Ersparnis an Betriebskosten

$$K' = \left[0,08 c E_2 J_w \left(\frac{1}{\cos \varphi} - n^2 \cos \varphi \right) + 0,15 c_1 E_1 J_w \left(\frac{1}{\cos \varphi} - n \right) - 0,15 c_2 E_2 i - E_2 \cdot i_w \cdot P_1 \cdot h \right] \cdot 10^{-3},$$

worin wie zuvor

$$n^2 = \left(1 + \frac{i_w}{J_w} \right)^2 + \left(\operatorname{tg} \varphi - \frac{i_0}{J_w} \right)^2 = \left(\frac{J_1}{J_w} \right)^2.$$

Wenn γ das spezifische Gewicht des Leitermaterials, k seine Leitfähigkeit, b sein Preis je kg und l die Leitungslänge bedeuten, so ist für Einphasenstrom $c = 2 l \cdot f \cdot \gamma \cdot b$, wenn f den Querschnitt, $J_2 = 10^3/E^2$ den Strom für das übertragene Kilovoltampere bedeutet. Dieser Querschnitt ist

$$f = \frac{2 l J_2 \cdot 10^3}{k p E_1} = \frac{2 l \cdot 10^6}{k E_1^2} \cdot \frac{1+p}{p},$$

da $E_1 \approx (1+p) E_2$ ist. Daraus berechnet sich der Preis c für das übertragene Kilovoltampere zu

$$c = \frac{4 \cdot 10^6 \gamma l^2 b (1+p)}{k E_1^2 p}.$$

Für Drehstrom ohne Nulleiter ist $J_2 = 10^3/E_2 \sqrt{3}$,

$$f_r = \frac{l \cdot 10^6}{k E_1^2} \cdot \frac{1+p}{p}, \quad c_r = \frac{3 \cdot 10^6 \gamma l^2 b (1+p)}{k E_1^2 p} = 3/4 c.$$

Ist der Preis nicht nur vom Querschnitt, sondern auch von einem Festwerte abhängig, gilt also wie bei Kabeln oder Leitungen einschließlich Gestänge und Montage $c = l(a + bf)$, so sind die Formeln entsprechend zu ergänzen. Für blankes Kupfer mit den Werten $\gamma = 8,9$, $k = 55$, $b = 2$ RM/kg findet man

$$\text{für Einphasenstrom } c = 1,3 \frac{l^2}{E_1^2} \cdot \frac{1+p}{p} \cdot 10^6,$$

$$\text{für Drehstrom } c_r = 0,975 \frac{l^2}{E_1^2} \cdot \frac{1+p}{p} \cdot 10^6.$$

e) **Zahlenbeispiel.** Es seien über eine Dreiphasenleitung von $l = 10$ km Länge 100 Kilowatt zu übertragen. Die verkettete Spannung am Ende der Leitung sei $E_2 = 3000$ Volt, der Spannungsverlust $p = 0,1$. Die übrigen Konstanten seien:

$$c = 0,975 \cdot \frac{10^3}{3000^2} \cdot \frac{1,1}{0,1} \cdot 10^6 = 119 \text{ RM,}$$

$$c_1 = c_2 = 80 \text{ RM;}$$

$$P_1 = 0,07 \text{ RM/kWh;}$$

$$h = 3000 \text{ und } 2000 \text{ Stunden;}$$

$$J_w = 19,2 \text{ Amp.}$$

Zur vollständigen Ausgleichung des wattlosen Stromes braucht man bei

$$\cos \varphi = 0,9: \quad i_0 = 9,3 \text{ Amp.;} \quad i = i_0/0,95 = 9,8 \text{ Amp.}$$

$$= 0,7: \quad 19,6 \quad ,, \quad = 20,6 \quad ,,$$

also Motoren von 51 bzw. 107 kVA, wenn deren Leistungsfaktor 0,95 beträgt.

Um den günstigen Motor herauszuwählen, wurden leerlaufende Motoren von 25, 50, 75, 100 und 150 kVA Leistung geprüft und die Ergebnisse in den Abb. 308 und 309 wiedergegeben.

Die Kurven zeigen die Ersparnisse K_L und K_1 an Leitung und Generator und die Mehrkosten K_2 für verschieden große Motoren und lassen erkennen, daß die schließlichen Anlagekosten (Abb. 308) K bei $\cos \varphi = 0,9$ für den 25-kVA-, bei $\cos \varphi = 0,7$ für den 75-kVA-Motor, also etwa bei Dreiviertelausgleichung, am günstigsten werden, während die jährlichen Betriebskosten (Abb. 309) unter Benutzung der hier angenommenen Zahlenwerte bei $\cos \varphi = 0,9$ eine nennenswerte Ersparnis überhaupt nicht zeigen, bei $\cos \varphi = 0,7$ aber in der Nähe der vollen Ausgleichung am kleinsten werden. Die wachsende Betriebsdauer h des Motors drückt die Größe des günstigsten Motors herab, weil dabei die direkten Betriebskosten K_2 überwiegen. Je billiger also die Kilowattstunde erzeugt werden kann, je kleiner P_1 ist, desto vorteilhafter wird sich die Ausgleichung erweisen. Gleiches gilt für abnehmenden Leistungsfaktor, also für zunehmende Motor-

belastung. Bei halber Motor- und Lichtbelastung, $\cos \varphi = 0,9$, dürfte sich die Ausgleichung nur selten, etwa bei Wasserkraften, wo P_1 klein wird, als wirtschaftlich größte erweisen.

Bei $\cos \varphi = 0,7$ erreicht die maximale Ersparnis an Leitungsmaterial fast 7000 RM, am Generator fast 3000 RM, beide etwa für einen Motor von 90 bis 100 kVA; die höchste Gesamtersparnis beträgt aber nur etwa 6000 RM und tritt für den 75-kVA-Motor ein. Man wird also

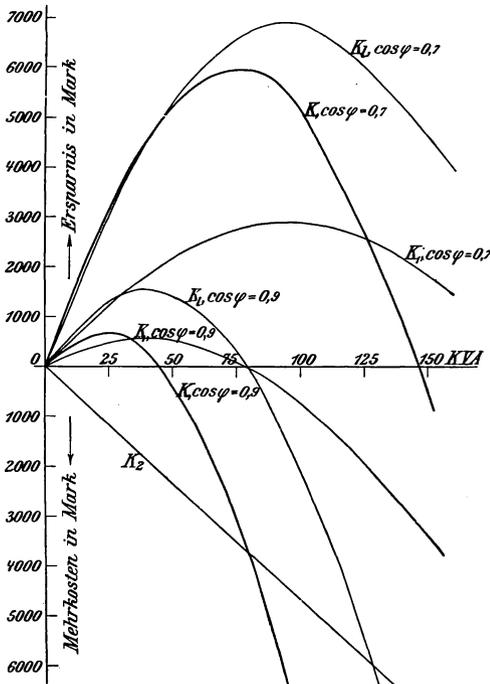


Abb. 308. Anlagekosten bei verschiedenen Synchronmotoren.

auch für einzelne Fälle nicht stets einfach und einwandfrei feststellen können, welcher Motor der günstigste ist. Dazu kommt noch, daß man fast niemals konstante Belastung hat und daß der Leistungsfaktor während der 24 Stunden des Tages wechselt. Alle diese Verhältnisse können n ähnlicher Weise untersucht werden, und man könnte auch noch in Erwägung ziehen, welchen Einfluß die Verwendung von Kabeln und die teilweise Belastung des Motors ausüben. Kabel vermindern die Ersparnisse an Leitungsmaterial noch weiter, weil hier eine Verringerung des Kupfers weniger ausmacht; sie werden also die Ausgleichung zwecklos machen, wenn nicht $\cos \varphi$ klein ist. Teilweise Belastung der Motoren wird, wenn die vom Motor abgegebene Energie verkauft werden kann, die Ausgleichung wirtschaftlich günstiger gestalten.

f) **Ausgleichung durch asynchrone Motoren oder Drosselspulen.** Bei Hochspannungslinien mit 60 und mehr Kilovolt kann man so starke voreilende Kondensatorströme erhalten, daß man sie durch die wattenlosen Ströme leerlaufender Induktionsmotoren ausgleichen muß.

Dies wird stets vorteilhaft sein, weil die Kapazitätswirkungen bei schwach belasteter Leitung recht besonders sind und leerlaufende Induktionsmotoren kleine Leistungsfaktoren, etwa 0,2 bis 0,3, aufweisen. Man kann also mit verhältnismäßig kleinen Motoren viel erreichen, muß aber die Motoren mit Transformatoren an das Netz anschließen, wenn man nicht überhaupt stark streuende Transformatoren oder Drosselspulen verwenden will.

Dieser Fall hat sich in Holland bei den großen 10000-Volt-Kabelnetzen der provinziellen und städtischen Versorgungen in der Praxis

ergeben, und man ist an verschiedenen Stellen mit gutem Erfolg dazu übergegangen, Drosselspulen dem Netz parallel zu schalten. Dadurch wird einerseits der erhebliche Arbeitsverlust dieser Ladeströme $\int J_c^2 R dt$ vermindert, andererseits die Stabilität der Generatoren erhöht. Diese werden nämlich durch die voreilenden Ladeströme erregt, so daß die Gleichstromerregung stark vermindert (im Grenzfall Null) werden muß, was eine genaue Spannungsregulierung erschwert.

In einem geschlossenen Netz kann man niemals alle wattlosen Ströme durch einen Motor ausgleichen. Man müßte eigentlich jeden einzelnen Abnehmer abgleichen, was, solange billige Kondensatoren für große Leistungen nicht zu haben sind, nicht möglich ist. Jedersynchrone oder asynchrone Motor kann mit seinem wattlosen Strom nur jene Teile eines offenen Stranges beeinflussen, die zwischen ihm und dem Quellpunkt liegen; die hinter ihm liegenden Teile nur mittelbar durch Verringerung des Spannungsverlustes. Wird er in der Zentrale selbst aufgestellt, so kann er nur die Generatoren, nicht aber den Strom in den Leitungen beeinflussen.

Bei diesen hohen Spannungen bestehen die Netze meistens aus offenen Strängen oder aus wenigen großen Maschen. Bei geschlossenen Leitungen gilt die Abgleichung jeweils für den geschlossenen Netzbereich.

Während des Krieges haben die Kohlennot und die Herstellung von Munition die Motoranschlüsse gewaltig vermehrt und dadurch die Aufmerksamkeit weiter Kreise in allen Ländern auf die Bestreitung der „wattlosen“ Netzbelastungen gelenkt. Die französische, englische, amerikanische Fachpresse enthält darüber ebensoviel als die deutsche, österreichische, schweizerische. Neuere Lösungen sind insbesondere der Vibrator von Gisbert Kapp und ein Kompensator mit Wechselstrom-Kollektormotor von Brown, Boveri & Co. Auch die älteren Lösungen des Einbaues von Kondensatoren und übererregten synchronen Motoren oder Einankerumformern haben in England und Amerika vielfache Anwendung gefunden. Eine Besprechung dieser Lösungen liegt außerhalb des Rahmens dieses Buches. Die im vorhergehenden entwickelten Gesichtspunkte genügen zum Studium eines eventuell vorliegenden Spezialfalles.

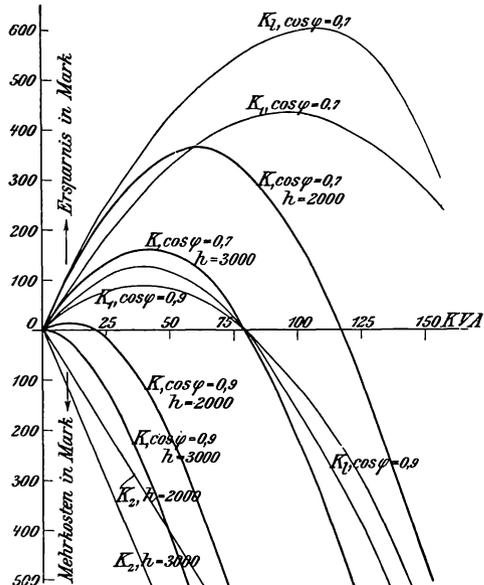


Abb. 309. Jährliche Betriebskosten.

Literatur.

1. Thomson, Sir W.: Brit. Assoc. Reports. 1881, S. 518 u. 526.
2. Forbes, G.: Electrician Bd. 15 u. 16. 1885.
3. Rhodes: Economical size of line wire for constant current circuits. El. Eng. Bd. 4, S. 19. London 1889.
4. Barni: Z. f. Elektrotechn. Bd. 9, S. 247, 344, 361. Wien 1890.
5. Kilgour: ETZ 1891, S. 124.
6. Roberts: The most econom. loss in conductors. El. World Bd. 18, S. 41, 58, 146, 156. 1891,
7. Carter: Thomsons law of economy. El. World Bd. 20, S. 75. 1892. (Gültigkeit auch für jede andere als elektrische Übertragung.)
8. Vogel: Most econom. cross section. El. World Bd. 21, S. 393. 1893.
9. Boucherot: Sur le coût des lignes à haute tension. Lum. él. Bd. 50, S. 601. 1893.
10. Anthony, A.: Eclair. él. Bd. 2, S. 318. 1895, und Z. f. Elektrotechn., Wien 1895, S. 95.
11. Vogel: Wirtschaftlicher Querschnitt isolierter Leitungen. ETZ 1895, S. 501.
12. Hasson: Econom. size of feed-wires for electric railways. El. World Bd. 26, S. 260. 1895.
13. Burch: Econom. of cond. used . . . for electric railways. El. World Bd. 26, S. 165.
14. Whitcher: The econ. current density for el. lighth mains. Electrician, London, Bd. 36, S. 723. 1896.
15. Bull: Eine einfache Methode zur Bestimmung des wirtschaftlichen Querschnitts und Arbeitsverlustes für elektrische Leitungen. ETZ 1898, S. 361.
16. Rossander u. Forsberg: Über den ökonomisch vorteilhaften Querschnitt elektrischer Leitungen. El. Anz. 1901, S. 3273.
17. Whitcher: Econom. current density for small conductors. El. Rev. Bd. 48, S. 361, 396. 1901.
18. Teichmüller: Die Berechnung der Leitungen auf Wirtschaftlichkeit. ETZ 1902, S. 190.
19. Cahen: Bemerkungen hierzu. ETZ 1902, S. 306, 462, 511.
20. Griswold: Cross-section of electr. conductors. El. World Bd. 40, S. 164. 1902.
21. Perrine: Conductors for electrical distribution. El. World 1903, S. 161.
22. Albaret, J. L.: Essai sur la tension économ. des conduites souterraines à haut potentiel. Schweiz. El. Ztschr. 1904, S. 403, 414, 430. (Er findet $[\]$ und $[\ w]$ proportional der Quadratwurzel der übertragenen Leistung und unabhängig von der Leitungslänge.)
23. Semenza, G.: Du calcul de la saction la plus économ. dans une transm. d'énergie él. Ecl. él. Bd. 41, S. 73. 1904.
24. Wallace: Economics of a 200 mile transm. El. World Bd. 44, S. 771. 1904.
25. Sarrat, F.: De l'économie dans les conducteurs él. Ecl. él. Bd. 44, S. 481. 1904.
26. Swyngedaew, R.: Densité de courant et tension les plus économ. Bull. Société intern. des Electriciens. 1904.
27. Sarrat, F.: Discussion sur les conditions les plus favor. Bull. Montefiore 1905, S. 246.
28. Adams: Voltage and costs of elect. transm. lines. El. Review, New York Bd. 48, S. 412. 1906.
29. Wallace: Berechnung des Spannungsabfalls in Speiseleitungen. El. u. Maschinenb., Wien 1906, S. 445.
30. Baum: Economical conductor section. El. World Bd. 47, S. 1029. 1907.
31. Meyer, F. W.: Die Berechnung elektrischer Anlagen auf wirtschaftlichen Grundlagen. Berlin 1908.
32. Calocairinos: Densité de courant correspondant au maxim. de dividende Bull. Montefiore Bd. 8, S. 460 1908, u. Bd. 9, S. 55.
33. Dick: The design of underground mains and network. (Mit Jahreswirkungsgrad.) Electrician Bd. 62, London 1909, S. 715, 752.
34. Fowler, C. P.: Short cuts in high tension transm. line estimates. El. World Bd. 37, S. 617. 1910.

35. Garnier: Über Ökonomie der Übertragung. Electricien Bd. 39, Paris 1910, S. 2, 259ff.
 36. Richter, C.: Der Einfluß des Verschiedenheitsvektors auf die Dimensionierung elektrischer Leitungen. El. u. Maschinenb., Wien 1910, S. 681.
 37. Majerczik, W.: Die Berechnung elektrischer Freileitungen nach wirtschaftlichen Gesichtspunkten. Berlin 1910. (Auch ETZ 1911, S. 624.)
 38. Roy, C. le: Transport de force. Paris 1912. 1. Teil. S. 42. (Benützt ebenfalls die Beispiele von Semenza.)

XII. Erwärmung der elektrischen Leiter.

1. Erwärmung isolierter Leiter durch den Strom.

Da zur Zeit der Internationalen Elektrizitätsausstellung in München 1881 keine brauchbaren Messungen über die Erwärmung eines blanken, in freier Luft gespannten Drahtes durch den Strom bekannt waren, so versuchte Dr. E. Dorn¹⁾ auf theoretischem Wege wenigstens zu einer Schätzung zu gelangen.

Bedeutet λ die äußere Wärmeleitfähigkeit oder die Anzahl Grammkalorien, welche 1 cm² der Oberfläche des runden Drahtes vom Durchmesser d an eine um 1° kältere Umgebung abgibt, und τ die Temperaturerhöhung des Drahtes gegen seine Umgebung, so ist die in einer Sekunde an diese abgegebene Wärmemenge proportional der Temperaturerhöhung τ , der Wärmeübergangszahl λ und der Oberfläche $d\pi$ eines Stückes von 1 cm Länge, also gleich $\tau\lambda d\pi$ in Grammkalorien.

Setzt man die sekundliche Wärmezufuhr und Wärmeabgabe nach Eintritt des Gleichgewichtszustandes einander gleich und vernachlässigt die Zunahme, welche der spezifische Widerstand ρ in Ohm cm/cm² mit steigender Erwärmung erfährt, so erhält man die Beziehung

$$0,24 \cdot \frac{J^2 \rho}{f} = \tau \lambda d \pi,$$

wobei J den Strom in Ampere, f den Querschnitt des Leiters in cm² bedeutet. Hieraus folgt für die Temperaturerhöhung

$$\tau = a \cdot \left(\frac{f}{d}\right) \cdot \left(\frac{\rho}{\lambda}\right) \cdot \left(\frac{J}{f}\right)^2 = b \cdot \left(\frac{\rho}{\lambda}\right) \cdot \left(\frac{J}{f}\right)^2 \cdot d, \quad (1)$$

worin a und b reine Zahlenwerte sind, welche nicht von dem Material oder der Verlegung des Leiters abhängen. Aus (1) ergibt sich

$$\tau = K J^2 / d^3 \quad (2)$$

oder für eine bestimmte Erwärmung τ

$$J = C d^{\frac{3}{2}}. \quad (3)$$

Die Beiwerte K und C hängen von den Materialwerten λ und ρ , also auch von der Beschaffenheit und Farbe der Oberfläche des Leiters, von seiner Verlegung und von der Bewegung der umgebenden Luft ab;

¹⁾ Offizieller Bericht über die Internationale Elektrizitätsausstellung in München 1881, 2. Teil, S. 15.

der Wert C enthält auch noch die als zulässig erachtete höchste Erwärmung τ . Die Vorschriften des Verbandes Deutscher Elektrotechniker (VDE) § 20 von 1907 beruhen auf einer zulässigen Erwärmung der isolierten Leitungen um 20° . Hierbei ist eine höchste Raumtemperatur von 30° angenommen, so daß sich die Höchsttemperatur der Leitung mit 50° C ergibt. Da es aus praktischen Gründen nicht empfehlenswert war, für die verschiedenen Isolierungen und Verlegungsarten verschiedene Belastungen festzusetzen, wurden für Drähte von $0,75$ bis 10 mm^2 die für Rohrverlegung (Hin- und Rückleitung in einem Rohre) als Grenzbelastungen ermittelten Werte, für Drähte über 10 mm^2 die für offene Verlegung auf Rollen bestimmten Werte den Vorschriften zugrunde gelegt. Spalte 2 stellt also die höchste Dauerbelastung von isolierten Leitungen dar.

Belastungstabelle für isolierte Kupferleitungen¹⁾.

Querschnitt in mm^2	Höchste zulässige Stromstärke in Ampere	Querschnitt in mm^2	Höchste zulässige Stromstärke in Ampere
0,75	9	95	240
1,0	11	120	280
1,5	14	150	325
2,5	20	185	384
4,0	25	240	450
6	31	310	540
10	43	400	640
16	75	500	760
25	100	625	880
35	125	800	1050
50	160	1000	1250
70	200		

Blanke Leitungen bis 50 mm^2 können ebenfalls nach der Tabelle belastet werden. Blanke Leitungen mit höheren Querschnitten (über 50 mm^2) und Freileitungen sind derart zu bemessen, daß sie durch den stärksten vorkommenden Betriebsstrom keine für den Betrieb oder die Umgebung gefährliche Temperatur annehmen können.

Dies entspricht dem praktischen Bedürfnis. Tatsächlich kann bei isolierten Leitungen in geschlossenen Räumen, durch die größere Oberfläche der Leiterhülle, der Leiter selbst kühler bleiben als der gleich starke blanke Leiter.

Dies ist lange bekannt²⁾ und durch Versuche von Teichmüller und Humann³⁾ bestätigt gefunden. Sie fanden für im Zimmer freigespannte blanke Drähte

$$J^2 = \tau (3,95 f + 1,72 f^{3/2}) = \tau (3,1 d^2 + 1,2 d^3),$$

¹⁾ Passavant: Erläuterung zu der von der Unterkommission des VDE und des V.d.E.W. festgestellten Belastungstabelle für isolierte Kupferleitungen. ETZ 1907, H. 20, S. 499.

²⁾ Oelschläger, E.: ETZ 1885, S. 93. — Grassi, G.: Ztschr. f. El. Wien 1890, S. 71.

³⁾ Teichmüller, J. u. Humann P.: ETZ 1907, S. 475.

für umflochtene Gummiader-Drähte

$$J^2 = \tau (10 f + 2,1 f^3/2) = \tau (7,85 d^2 + 1,47 d^3).$$

Bei der Verlegung in Rohrwegen ist die Luftabfuhr ungünstiger.

Bei etwa $\tau = 30^0 \text{ C}$ wird die Tränkungsmaße der Papierrohre so weich, daß die Drähte ankleben. Bei $\tau = 60^0 \text{ C}$ wird ihre Umklöpfung mürbe. Versuche von Klement¹⁾ im Münchener Elektrizitätswerk ergaben beispielsweise für $1,5 \text{ mm}^2$ und $\tau = 40^0$ Übertemperatur

bei Verlegung auf Rollen	26,5	Amp.
„ „ in messingbewehrtem Papierrohr	20,4	„
„ „ „ Stahlpanzerrohr auf den Putz	22,5	„
„ „ „ „ unter „ „	23,5	„
„ „ „ „ Peschelrohr unter Putz . . .	21,6	„

Die bei anderen Drähten bis 10 mm^2 Querschnitt erzielten Ergebnisse sind ähnlich: stets ergab offene Verlegung auf Rollen die kleinste Erwärmung, danach folgten Stahlrohre unter Putz, während das Stahlrohr auf Putz höhere, Papierrohr die höchste Erwärmung aufwies.

Für blanke Kupferleitungen, bei denen die Gefahr der Isolationserweichung nicht vorliegt, nimmt die oben gegebene allgemeine Bestimmung Rücksicht darauf, daß häufig eine vom Kreis abweichende Querschnittsform angewendet wird. Viereckige Leiterschienen besitzen günstigere Abkühlung als kreisrunde von gleichem Querschnitt.

Für Leitungen aus Aluminium, Eisen oder Bronzelegierungen verändern sich die zulässigen Ströme gemäß der Wurzel aus dem Verhältnis der Leitwerte. Bei gleich starken Drähten aus Kupfer und Aluminium gilt für gleiche Erwärmung τ angenähert

$$\frac{J_{\text{Al}}}{J_{\text{Cu}}} = \sqrt{\frac{\varrho_{\text{Cu}}}{\varrho_{\text{Al}}} \cdot \frac{\lambda_{\text{Al}}}{\lambda_{\text{Cu}}}} < \sqrt{\frac{k_{\text{Al}}}{k_{\text{Cu}}}},$$

und da

$$\lambda_{\text{Al}} < \lambda_{\text{Cu}}, \quad 1/\varrho_{\text{Al}} = k_{\text{Al}} = 36, \quad 1/\varrho_{\text{Cu}} = k_{\text{Cu}} = 60,$$

folgt

$$J_{\text{Al}} \approx 0,75 J_{\text{Cu}}.$$

Isolierte oder blanke Leitungen in geschlossenen Räumen aus Aluminium können also etwa Dreiviertel der Belastung gleich dicker Kupferleitungen erhalten.

2. Erwärmung von Leitungen im Freien.

Bei Freiluftleitungen tritt außer der Wärmeabgabe durch Strahlung noch eine beträchtliche Abgabe auf durch Konvektion oder mechanische Wärmeabfuhr infolge der Luftbewegungen.

Langmuir²⁾ hat gezeigt, daß Konvektion von warmen Drähten in Gasen wesentlich in Wärmeleitung durch eine dünne Schicht verhältnismäßig ruhenden Gases rund um den Draht besteht. Ihre

¹⁾ Klement, W.: ETZ 1906, S. 331.

²⁾ Langmuir, Irving: Proc. Am. Inst. El. Eng. 1912, S. 1011.

Dicke ist für Raumtemperatur und 76 cm Luftdruck bei ebenen Flächen 0,43 cm. Sie ändert sich jedoch mit der 0,75sten Potenz des Luftdrucks, mit der Windgeschwindigkeit, ist unabhängig vom Drahtdurchmesser und bei freier Konvektion völlig, bei erzwungener nahezu auch von der Temperatur des Drahtes. Dagegen steigt sie im geraden Verhältnis mit der absoluten Temperatur der Umgebung des Drahtes. Die bei freier Konvektion auftretende Luftgeschwindigkeit ist $2,7 (1 + 0,0024 \tau)$ cm/sec für τ° C Übertemperatur.

Für eine nur wenig über die Umgebungstemperatur erwärmte Fläche ist die durch Konvektion verlorene Wärmemenge gleich der durch die 0,43 cm dicke Luftschicht abgeleiteten. Diese Wärmemenge W kann berechnet werden. Sie ist proportional der Erwärmung τ in $^{\circ}$ C und umgekehrt proportional dem Widerstand S . Es gilt also für die Wärmeströmung ein dem Ohmschen Gesetz ähnliches Ausgleichsgesetz¹⁾

$$W = \tau/S.$$

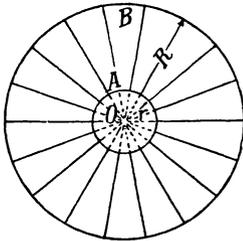


Abb. 310.

Wenn A und B (Abb. 310) die Querschnitte zweier konzentrischen Zylinder mit den Halbmessern $R = D/2$ und $r = d/2$ darstellen, die auf dem konstanten Temperaturunterschied τ erhalten werden, so wird, falls der ringförmige Raum zwischen beiden Zylindern mit einem gleichförmigen Stoff vom spezifischen Wärmewiderstande σ ausgefüllt ist, der Widerstand S eines ringförmigen Streifens für den laufenden Zentimeter der Zylinder ausgedrückt durch

$$dS = \frac{\sigma dr}{2\pi r},$$

woraus

$$S = \frac{\sigma}{2\pi} \log \text{nat} \frac{R}{r} = \frac{\sigma}{2\pi} \log \text{nat} \frac{D}{d}.$$

Für ebene Platten ist $S = \sigma l/f$, wenn l den Abstand, f den Querschnitt bedeutet.

Wenn W in Watt, τ in $^{\circ}$ C ausgedrückt wird, ist die Einheit des Wärmewiderstandes Grad C/Watt.

Der spezifische Wärmewiderstand der Luft bei Zimmertemperatur 20° ist $\sigma = 4000$.

Dies gibt, multipliziert mit der Dicke der Schicht 0,43 cm für die Konvektion eines Körpers nahe der Zimmertemperatur $S_1 = 1700$ Grad/Watt und $W = 1/1700 = 0,00059$ Watt für 1 cm^2 und 1° C. Dieser Wärmeverlust ist annähernd ebenso groß als der Strahlungsverlust eines schwarzen Körpers, der wenig wärmer ist als die Raumtemperatur

¹⁾ Ohm wurde durch Fouriers Untersuchungen zur Erkenntnis des elektrischen Strömungsgesetzes geführt. Es erscheint jedoch nicht ratsam, den Wärmewiderstand in „Thermal-Ohm“ auszudrücken. Die Einheiten sind völlig andere. Siehe Kennelly, E. u. E. R. Shepard: Proc. Am. Inst. El. Eng. 1907, S. 800 und Hering, Carl: Proc. Am. Inst. El. Eng. 1912, S. 885.

von 20° C. Dieser Strahlungsverlust ist 0,00057 Watt für 1 cm² und 1° C, entsprechend $S_2 = 1760$ Grad/Watt. Treten Konvektion und Strahlung zusammen auf, dann ist die Wärmeabgabe $1,16 \cdot 10^{-3}$ Watt/cm² und °C, entsprechend der Parallelschaltung der Wärmewiderstände $S_1 = 1700$ und $S_2 = 1760$, $S = 860$ Grad/Watt.

Die Verbandsvorschriften enthalten keinerlei Festsetzung über die zulässige Erwärmung von Freiluftleitungen. Für Drähte gleicher Dicke wird die Erwärmung im Freien für gleiche Stromstärke bedeutend geringer als im Zimmer.

Als rohe Schätzung mag man annehmen, daß unter mittleren Wind- und Wetterverhältnissen die Stromstärke etwa doppelt so hoch genommen werden kann, als in der Tabelle auf S. 320 für isolierte Kupferleitungen im Zimmer angegeben.

3. Erwärmung unterirdisch verlegter Kabel bei Dauerbetrieb mit unveränderter Stromstärke.

Bei der Untersuchung der Erwärmung in den Boden verlegter Kabel geht man von der Wärmeströmung aus. Der spezifische Wärmewiderstand in Watt für 1 cm und 1° C ist für die hier in Betracht kommenden Stoffe hier zusammengestellt:

σ in Watt per cm per °C	σ in W/cm/°C
Kupfer 0,26 ÷ 0,29	Feuchter, weicher Erdboden 70—100
Eisen 1,5	Papier 780
Blei 3	Paraffin 960
Toniger Kalk 30	Kabelpackung 600
Weicher Sandboden. 40 ÷ 60	Kabelmasse 550—560

Nimmt man für den sandigen Erdboden, in den die Kabel gebettet werden, $\sigma_l = 50$, für die Kabelisoliermasse $\sigma_k = 550$, dann kann man die Summe der hintereinander geschalteten Wärmewiderstände S_l und S_k berechnen. Es wird dann angenähert der Wärmewiderstand der Kabelisolation für 1 m bei Vernachlässigung des Wärmewiderstandes des Bleimantels und der Eisenbewehrung

$$S_k = \frac{\sigma_k \cdot 10^{-2}}{2\pi} \log \text{nat} \frac{D}{d} = \frac{550 \cdot 2,303}{2\pi \cdot 100} \log_{10} \frac{D}{d} \approx 2 \log_{10} \frac{D}{d}.$$

Die Strömung von der Kabelhülle zur Erdoberfläche erfolgt so, als wenn die Strömungslinien in einem Spiegelbild des Kabels oberhalb der Erdoberfläche sich vereinigten. Der Wärmewiderstand bis zur Erdoberfläche ist also die Hälfte des Gesamtwiderstandes zwischen dem Kabel und seinem Bild. Er beträgt

$$S_l = \frac{\sigma_l}{2\pi} \log \text{nat} \left(\frac{l}{R} + \sqrt{\left(\frac{l}{R}\right)^2 - 1} \right).$$

Da die Verlegungstiefe l etwa 70 cm beträgt, wird das Verhältnis l/R nie kleiner als 10 und somit für 1 m Länge

$$S_l \approx \frac{\sigma_l \cdot 10^{-2}}{2\pi} \log \text{nat} \frac{2l}{R} = \frac{\sigma_l \cdot 10^{-2}}{2\pi} \log \text{nat} \frac{4l}{D}$$

oder, für $\sigma_l = 50$,

$$S_l \approx 0,183 \log_{10} \frac{4l}{D}.$$

Ist das Kabel in Erde gebettet, so hat der Wärmestrom W die Widerstände S_k der Isolation und S_l der Erde hintereinander zu überwinden, also

$$W = \frac{\tau}{S_k + S_l} = \frac{2\pi\tau}{\sigma_k \log \text{nat} \frac{D}{d} + \sigma_l \log \text{nat} \frac{4l}{D}}$$

oder für

$$W = \frac{J^2 \rho}{f}$$

für 1 m Länge gesetzt, wobei f den Querschnitt in mm^2 bedeutet,

$$J = \sqrt{\frac{1}{\rho(S_k + S_l)}} \cdot \sqrt{f\tau} = C \sqrt{f\tau},$$

worin

$$C^2 = \frac{2\pi \cdot 10^{-2}}{2,3026 \cdot 10^{-4}} \cdot \frac{1}{\sigma_l \rho} \cdot \frac{1}{\frac{\sigma_k \log_{10} \frac{D}{d} + \log_{10} \frac{4l}{D}}{\sigma_l}}$$

oder

$$C = \frac{16,52}{\sqrt{\sigma_l \rho}} \cdot \frac{1}{\frac{\sigma_k \log_{10} \frac{D}{d} + \log_{10} \frac{4l}{D}}{\sigma_l}}$$

Nach unseren Messungen¹⁾ kann $\sigma_l = 50$, das Verhältnis $m = \sigma_k/\sigma_l = 11$ gesetzt werden. Setzt man für den spez. Widerstand, der von der Temperatur abhängt, den Festwert $\rho = 0,02$ Ohm/m und mm^2 ein, dann wird $\sigma_l \cdot \rho = 50 \cdot 0,02 = 1$.

Für die den deutschen Vorschriften entsprechenden Kabelabmessungen der Einleiterkabel bei 70 cm Verlegungstiefe ergeben sich die hierunter zusammengestellten Wärmewiderstände S_k und S_l . Von dem gesamten Temperaturgefälle τ entfallen $S_k/(S_k + S_l)$ auf die Isolierung des Kabels, der Rest auf das Erdreich.

Querschnitt in mm^2	S_k	S_l	$S_k + S_l$	$C = \sqrt{\frac{100}{0,02(S_k + S_l)}}$	$S_k/(S_k + S_l)$
$f = 16$	50,6	45,5	96,1	7,2	0,52
70	26,8	41,7	68,5	8,55	0,39
120	21,7	40,0	61,7	9,0	0,35
500	15,2	34,9	50,1	10,0	0,30
1000	11,9	32,0	44,4	10,5	0,27

Apt²⁾ hat bei blanken 70 cm tiefen in Sand eingegrabenen Bleikabeln der Allgemeinen Elektrizitätsgesellschaft für C Werte zwischen 7—8,8 gefunden. Er nahm $\tau = 25^\circ$ als zulässig an und setzte $J = 40 \sqrt{f}$, was $C = 8$ entspricht. Humann³⁾ hat bei 80 cm tief in Sandboden

¹⁾ Herzog u. Feldmann: ETZ 1900, S. 787.

²⁾ Apt, R.: ETZ 1900, S. 613.

³⁾ Humann, P.: ETZ 1900, S. 599.

verlegten, eisenbewehrten Kabeln von Felten & Guillaume für C Werte zwischen 6,8—8,7 gefunden und $C = 7,5$ als Mittelwert angenommen.

1903 sind in München Versuche an Kabeln unternommen worden¹⁾. Ihre Ergebnisse hat Kath zu der Formel zusammengefaßt

$$J = K \sqrt{\frac{I\tau}{\log_{10}(4l/d)}} = 11,55 \sqrt{\frac{I\tau}{\log_{10}(4l/d)}},$$

worin l die Verlegungstiefe, d den Durchmesser der Kabelader bedeutet und K zu 11,55 angenommen wurde. Sie hat zur Ermittlung der seit 1907 in Deutschland zulässigen Stromstärken für Einleiterkabel bis 700 Volt für $\tau = 25^{\circ}\text{C}$ Übertemperatur gedient:

Querschnitt in mm ²	Höchster Strom in A	Querschnitt in mm ²	Höchster Strom in A
16	130	185	575
25	170	240	670
35	210	310	785
50	260	400	910
70	320	500	1035
95	385	625	1190
120	450	800	1350
150	510	1000	1585

Die Tabelle gilt, solange nicht mehr als zwei Kabel im gleichen Graben nebeneinander liegen; gesondert verlegte Mittelleiter bleiben hierbei unberücksichtigt. Bei Anordnung von Kabeln in Kanälen oder Anhäufung von Kabeln im Erdboden wird Dreiviertel der Höchstbelastung empfohlen.

Über die gegenseitige Erwärmung benachbarter Kabel geben die Isothermen oder Wärmegleichen Aufschluß.

Abb. 311, S. 326 und die zugehörige Tabelle stellen den Fall eines Kabels dar, dessen Achse um den 40fachen Betrag seines Radius unter die Erdoberfläche versenkt ist. Wählt man die Temperatur der Kabelhülle als Einheit, so deuten die exzentrischen Kreise die Isothermen von 95% bis herab zu 10% dieser Einheitstemperaturen an. Man erkennt, daß ein guter Wärmeleiter, der in die Bahn einer Isotherme eingebracht wird, Temperatur annehmen muß, wenn seine Einführung die ursprüngliche Isotherme nicht wesentlich beeinflußt. Dies gilt für die praktisch häufig vorkommenden Fälle, daß zwei oder mehrere Kabel nebeneinander in denselben Graben gelegt werden. Die bloße Gegenwart mehrerer Kabel, von denen nur eines stromzuführend ist, verursacht Temperaturzunahmen auch in den stromlosen Kabeln und drückt dadurch den maximalen Strom herab, den die Kabelgruppe zu führen vermag. Nimmt man an, daß jedes Kabel sich um 25° erwärmen darf, und hat man ermittelt, daß das zuerst eingeschaltete Kabel die anderen

¹⁾ Teichmüller, J.: ETZ 1904, S. 464, 933; 1907, S. 500 und die Erwärmung der elektrischen Leitungen. Enke 1905. S. a. Teichmüller u. Humann: ETZ 1906, S. 579.

um 5° erwärmt, auch wenn sie stromlos sind, so darf man diese nur soweit belasten, daß sie durch Eigenwärme noch um 20° zunehmen.

Bei den Münchener Versuchen 1903 waren 9 Kabel in drei Lagen übereinander angeordnet. Sie ergaben bei 200 Amp. nach 8 Stunden folgende Temperaturerhöhungen in $^{\circ}\text{C}$.

Bei Einzelschaltung			Bei Hintereinanderschaltung		
18,6	20,4	19,2	23,2	24,0	22,9
20,6	21,8	21,4	27,5	27,7	28,0
20,6	20,5	17,0	25,6	26,0	20,9

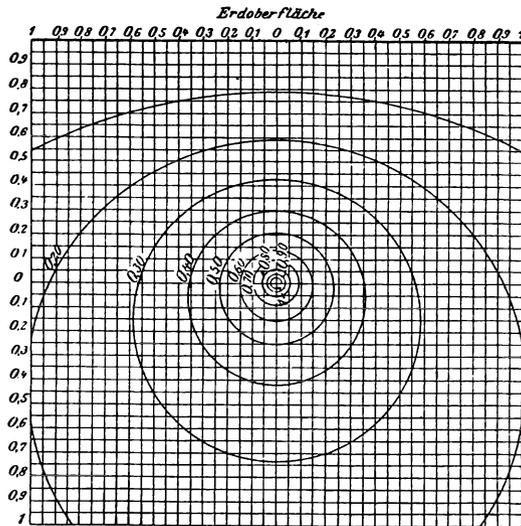


Abb. 311. Isotherme in Prozenten der Hülltemperatur:
95 90 85 80 75 70 65 60 55 50 45 40 35 30 25 20 15 10 5

Horizontaler Abstand von der Kabelachse in Kabeldurchmessern:

0,63 0,784 0,976 1,21 1,5 1,8 2,3 2,9 3,6 4,5 5,6 7,1 8,9 11,2 14,2 18,4 24,3
33,8 53,9

Die Kabel der mittleren Lage haben infolge größeren Widerstandes höhere Erwärmung, besonders beim Betriebe aller 9 Kabel. In diesem Falle tritt auch die gegenseitige Anwärmung dadurch zutage, daß alle Zunahmen der Temperatur um $4\text{--}7^{\circ}\text{C}$ höher liegen als beim Einzelbetriebe. Dieselben Überlegungen gelten natürlich auch für mehradrige Kabel. Wenn auch nur zwei Adern eines Drehstromkabels Strom führen, erwärmt sich auch die dritte, stromlose.

Besitzt ein Kabel also n Adern, so liegt die zulässige Stromstärke J_n niedriger als die Stromstärke J des Einleiterkabels. Führen alle n Adern denselben Strom, so ist $W = nJ_n^2 \rho / f$ und dementsprechend

$$J_n = \sqrt{\frac{2\pi f \tau}{n \varrho \left(\sigma_k \log \text{nat} \frac{D}{d} + \sigma_l \cdot \log \text{nat} \frac{4l}{D} \right)}}$$

Für das verseilte Zweileiterkabel ist also $J_2 = 0,717 J$
 „ „ „ Dreileiterkabel „ „ $J_3 = 0,58 J$
 „ „ „ Vierleiterkabel „ „ $J_4 = 0,50 J$

die zulässige Stromstärke.

4. Erwärmung der Kabel bei aussetzendem Betrieb.

Ein Lichtkabel im Netze wird nur kurze Zeit mit der höchsten Stromstärke beansprucht werden. Diese Dauer wird selten mehr als 4 Stunden betragen, und da hierauf eine längere Abkühlungszeit folgt, wird die höchste Temperaturerhöhung bei einem Lichtkabel erst bei starker Überlastung oder gar nicht eintreten, und es wird beispielsweise der

in Abb. 312 angedeutete Verlauf der Temperaturüberschüsse des Kabels unter der Annahme unveränderlicher Bodentemperatur auftreten. Daraus folgt, daß man vorübergehend ohne Unzuträglichkeiten irgend-

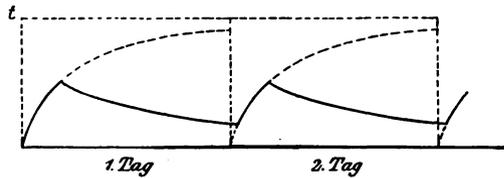


Abb. 312.

welcher Art ein Lichtkabel, besonders von kleinem Querschnitt, wesentlich stärker als entsprechend der alten Faustregel mit 2 Amp./mm² beanspruchen kann.

Anders liegt der Fall für ein Ladekabel, welches die Zentrale mit einer Akkumulatorenunterstation verbindet und durch viele Stunden

täglich voll belastet und nur während wenigen sich wieder abkühlen kann. Hier wird man das Kabel verhältnismäßig schwächer beanspruchen müssen und sich trotzdem der zulässigen Höchsttemperatur mehr nähern, wie dies Abb. 313 andeutet. Solche Kurven

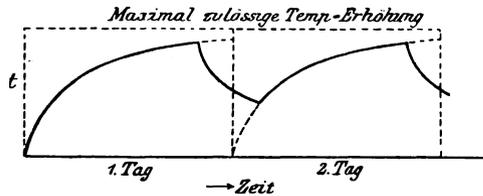


Abb. 313.

werden also mit den Erwärmungslinien und der Verlegung und Verwendungsweise der Kabel die Beurteilung der größten Erwärmung für eine bestimmte Beanspruchung oder der höchsten Beanspruchung für eine bestimmte Erwärmung gestatten. Dabei muß noch beachtet werden, daß ein Leiter eines mehrfach geschlossenen Netzes nicht notwendigerweise größten Strom führt bei höchster Stromabgabe, daß für jeden Netzteil die höchste Belastung bei einer bestimmten Belastungsart auftritt, die unter Umständen einer recht kleinen Stromabgabe des Gesamtnetzes entsprechen kann.

Betrachtet man den Verlauf der Erwärmung eines homogenen Körpers, so zeigt sich, Abb. 314, daß die Temperatur allmählich nach einer Exponentialkurve ansteigt. Zur beliebigen Zeit t ist die Temperatur

$$\tau = \tau_m (1 - e^{-t/T}),$$

worin T die Zeit ist, in der das Kabel seine Endtemperatur τ_m ohne Abkühlung erreicht hätte. Zur Zeit $t = T$ ist $\tau = 0,633 \tau_m$, zur Zeit $2 T$ hat das Kabel etwa 85 vH, zur Zeit $3 T$ schon 95 vH seiner Endtemperatur erreicht. Um bis auf p vH an seine Endtemperatur zu gelangen, braucht ein Körper

$$t = T \log \text{nat} (100/p).$$

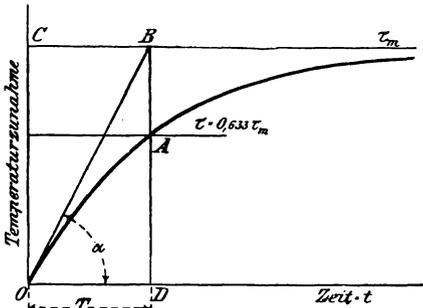


Abb. 314. Erwärmung und Abkühlung.

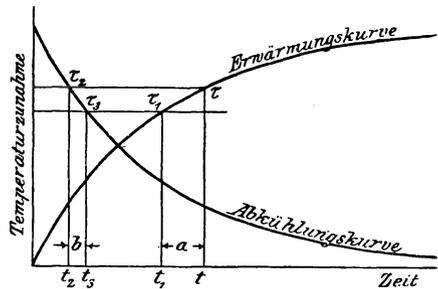


Abb. 315.

Dies gibt für

$p = 5$	4	3	2	1	Hundertstel Abweichung
$t = 3 T$	$3,2 T$	$3,5 T$	$3,9 T$	$4,6 T$	

Eine weitere Beziehung für die Zeitkonstante T ergibt sich aus der Gleichung

$$\frac{dt}{d\tau} = \cotg \alpha = T.$$

Dies hat schon Lambert 1744 gewußt, er hat T nach dieser geometrischen Bedeutung als Subtangente der Erwärmung oder Erhaltung bezeichnet. Die Abkühlungskurve, Abb. 315, ist bei gleichen λ für beide Vorgänge das Spiegelbild der Erwärmungskurve, mit der Gleichung

$$\tau = \tau_m e^{-t/T}.$$

Wenn nun die Belastung so schwankt, daß sie während einer Zeit $a = (t - t_1)$ (Abb. 315) von τ_1 auf τ ansteigt, dann während einer Zeitdauer $t_3 - t_2 = b$ von τ_2 auf τ_3 fällt, um wieder von neuem zu beginnen, so wird bei sich wiederholendem Spiel nach Erreichung des stetigen Zustandes offenbar $\tau_2 = \tau$ und $\tau_3 = \tau_1$ sein müssen.

Bis zum Eintritt dieses Zustandes wird die Temperatur während jeder Periode b abfallen, wie Abb. 316 dies andeutet. Die einzelnen Abschnitte der Zickzacklinie sind Teile der Erwärmungs- und Er-

kaltungskurven und ergeben sich leicht, wenn man mit einer Schablone diese Kurven parallel zu sich selbst verschiebt und jeweilig die Stücke zwischen den Zeitabschnitten zeichnet¹⁾. Nach Erreichung des stetigen Zustandes schwankt die Temperatur periodisch zwischen zwei Grenzen $\tau = \tau_2$ und $\tau_1 = \tau_3$.

Es gelten also die Gleichungen²⁾

$$t = T \log \text{nat} \frac{\tau_m}{\tau_m - \tau} \quad \text{und} \quad t_1 = T \log \text{nat} \frac{\tau_m}{\tau_m - \tau_1}$$

oder

$$t - t_1 = a = T \log \text{nat} \frac{\tau_m - \tau_1}{\tau_m - \tau} \quad (6)$$

und

$$t_2 = T \log \text{nat} \frac{\tau_m}{\tau_2} \quad \text{und} \quad t_3 = T \log \text{nat} \frac{\tau_m}{\tau_3}$$

oder

$$t_3 - t_2 = b = T \log \text{nat} \frac{\tau_2}{\tau_3}. \quad (7)$$

Setzt man $\tau = \tau_2$, $\tau_1 = \tau_3$, so folgt

$$\frac{b}{T} = -\log \text{nat} \left[\frac{\tau_m}{\tau} - \varepsilon \frac{a}{T} \left(\frac{\tau_m}{\tau} - 1 \right) \right], \quad (8)$$

worin τ_m die höchste Übertemperatur bedeutet, welche der Leiter annehmen müßte, wenn er nicht aussetzend sondern dauernd mit der Stromstärke J_m (ρ als konstant angenommen) betrieben würde. τ aber bedeutet die Temperatur, mit welcher zur Zeit t die Erwärmung bei aussetzendem Betrieb unterbrochen wird und die Abkühlung beginnt. Diese Temperatur τ kann aber auch für den aussetzenden Betrieb gleich der Übertemperatur gesetzt werden, die für das Kabel bei normaler Dauerbelastung als zulässig erachtet wurde. Das Verhältnis $\tau_m/\tau = n$ gibt also die beiden Endtemperaturen für n -fache Überlastung und normale Dauerlast. Es wird somit

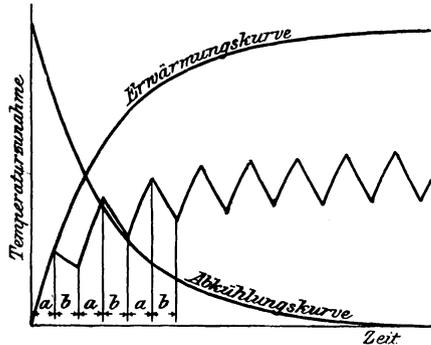


Abb. 316. Aussetzender Betrieb.

$$\frac{\tau_m}{\tau} = n = \frac{\text{Überlast}}{\text{Normale Dauerlast}} \quad (9)$$

¹⁾ „Special-Crocker-Wheeler Motors“. El. World Bd. 34, Nr. 4, 22. Juli 1889, S. 140, in welcher E. R. Douglas die Motorerwärmung bei periodischem Betrieb bereits gibt. Ferner in El. World Bd. 37, Nr. 19, 11. Mai 1901, S. 769. Heating of electrical machinery under two regularly alternating conditions of load.

²⁾ Oelschläger: ETZ 1900, S. 1058. Die Berechnung von Widerständen, Motoren u. dgl. für aussetzende Betriebe.

und

$$\frac{b}{T} = -\log \text{nat} \left[n - \varepsilon^{\frac{a}{T}} (n-1) \right]$$

oder

$$\frac{a}{P} = \frac{1}{1 - \frac{T}{a} \log \text{nat} \left[n - \varepsilon^{\frac{a}{T}} \cdot (n-1) \right]} \quad (10)$$

Diese Gleichung gibt die Beziehung zwischen der zulässigen n -fachen Überlastung eines während a Stunden betriebenen, während b Stunden abkühlenden Kabels, der Belastungszeit a und der Periode $P = (a + b)$ an.

Die Werte n sind in Abb. 317 für verschiedene Verhältnisse a/T und a/P dargestellt, und es ist nur noch erforderlich, aus dieser für einen homogenen Körper abgeleiteten Beziehung die für Kabel in mittlerem Boden gültigen Verhältnisse herauszugreifen.

Die Zeitkonstante T läßt sich auch für ein Kabel angenähert berechnen. Ist s die spezifische Wärme, G das Gewicht des erwärmten Körpers, so ist für die Längeneinheit

$$T = \frac{cG \tau_m}{W} = cG S_m,$$

wenn $S_m = \tau_m/W$ den Widerstand darstellt. Hier genügt es, für den Wärmewiderstand nur die Isoliermasse und das Packungsmaterial des Kabels in Betracht zu ziehen.

Für ein mit 1000 Amp. belastetes 500 mm² Einleiterkabel wurden 29° Erwärmung bei 15° Umgebungstemperatur beobachtet. Die Zeitkonstante für den Kupferkern vom Volumen V und spezifischen Gewicht γ ist

$$T_{Cu} = \frac{cG \tau_m}{W} = \frac{c\gamma V \tau_m}{J^2 \varrho / f} = \frac{c\gamma (f)^2}{\varrho (J)^2} \cdot \tau_m = \frac{c\gamma \tau_m}{\varrho \delta^2}$$

also proportional der Endtemperatur τ_m und umgekehrt proportional dem Quadrat der Stromdichte δ^2 . Da $\gamma = 8,9$ für 1 cm³ oder 0,89 für

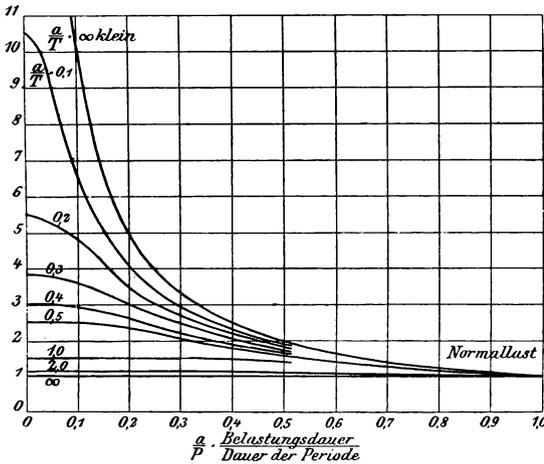


Abb. 317.

1 m Länge und 1 mm² Querschnitt; $c = 0,093$ gcal/sec-cm² oder $= 0,093 \cdot 4,16$ Watt/cm² ist, folgt

$$T_{Cu} = \frac{0,093 \cdot 4,16 \cdot 0,89 \cdot 44}{0,02 \cdot 2^2} = 169 \text{ Sekunden.}$$

Für den Isoliermantel gilt

$$T_k = c_k G_k S_k = \frac{c_k \sigma_k \gamma V_k}{2\pi} \log \text{nat} \frac{D}{d},$$

Die spezifische Wärme c_k ist etwa gleich 0,2 gcal/sec-cm², das spezifische Gewicht γ des Papiers 0,7 — 1,1, im Mittel 0,9; $\sigma_k = 550$, daraus folgt für das 500-mm²-Kabel mit $D = 34,5$, $d = 29$ mm und $V = 270$ cm³/m

$$T_k = \frac{0,2 \cdot 0,9 \cdot 550 \cdot 270 \cdot 0,174}{2\pi \cdot 0,24} = 3080 \text{ Sek.} = 0,86 \text{ Stunden.}$$

Will man T_k in Stunden, G in Kilogramm ausdrücken, so ergibt sich

$$T_k = \frac{4160}{3600} \cdot c_k G_k S_k = 1,155 \cdot 0,2 G_k S_k = 0,231 G_k S_k \text{ Stunden.}$$

Das Gewicht der Isoliermasse war $G = 0,243$ kg/m, ihr Widerstand $S_k = 15,2$, also $T_k = 0,231 \cdot 0,243 \cdot 15,2 = 0,86$ Stunden, wie oben.

Wegen der Vernachlässigung des Übergangswiderstandes S_l der äußeren Hülle des Kabels an die Erde und des abkühlenden Einflusses der Erdmasse ist die tatsächlich an einem 500-mm²-Kabel beobachtete Zeitkonstante größer als der berechnete Wert, nämlich 1,4 Stunden. Setzt man nach S. 324 $S_k = 15,2$, $S_k + S_l = 50,1$, dann wäre an Stelle des Beiwertes 0,231 sicher ein höherer Wert einzusetzen.

Als praktische Erfahrungsregel kann man also annehmen, daß die Zeitkonstante eines in Erde gelegten, mit den zulässigen Strömen nach Tabelle S. 325 belasteten Kabels etwa $T = (0,4 \text{ bis } 0,5) G_k S_k$ Stunden ist. Für verschiedene Belastungen des Kabels ändert sich die Zeitkonstante T mit der Neigung α der Tangente im Ursprung, Abb. 318. Wenn $J = C \sqrt{f \tau}$ wäre, müßte

$$T = \frac{\sum (cG) \tau_m f}{J^2 \rho} = \frac{\sum cG}{C^2 \rho} \cdot \frac{\tau_m}{\tau}$$

sein. Hierin bedeutet τ_m die Grenztemperatur, τ die Erwärmung.

Aus Messungen von de Gelder¹⁾ läßt sich ableiten, daß für das verlegte 500-mm²-Einleiterkabel galt:

bei 500 A	$T = 2$ Stdn.	$\tau = 7,2^\circ \text{C}$	$\tau_m = 22,2^\circ \text{C}$
„ 700 A	1,75 „	15,1 ⁰ C	30,1 ⁰ C
„ 900 A	1,5 „	21,4 ⁰ C	36,4 ⁰ C
„ 1000 A	1,4 „	29,0 ⁰ C	44,0 ⁰ C
„ 1200 A	1,1 „	35,0 ⁰ C	57,0 ⁰ C

Das Kabel würde 98% seiner Grenztemperatur τ_m erreichen nach 3,9 T Stunden.

¹⁾ Gelder, G. de: Kabelnet der gemeente Amsterdam. Diss. Delft, 1907.

Die übrigen Schaulinien der Abb. 318 sind aus der Beziehung $J = 8,35 \sqrt{f\tau}$ errechnet; die Kurven gleicher Abweichung $p\%$ von den Endtemperaturen genügen der Gleichung

$$y = T \log \text{nat } 100/p.$$

Die strichpunktierte Linie ist eine Abkühlungskurve nach langer Erwärmung mit 900 Amp.

Nach der auf S. 325 gegebenen Tabelle darf das Kabel mit 1035 Amp. dauernd belastet werden. Dabei erreicht es $0,98 \cdot 29^{\circ}$ Erwärmung in ungefähr $5\frac{1}{2}$ Stunden.

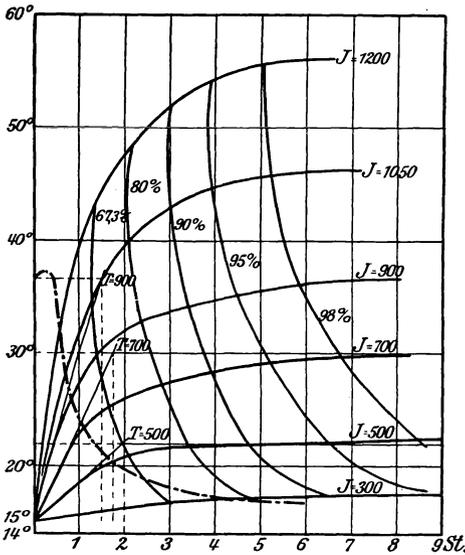


Abb. 318.

Da es im praktischen Betriebe, außer allenfalls in elektrochemischen Fabriken, nicht vorkommt, daß dieselbe Stromstärke unverändert während mehr als 5 bis 6 Stunden aufrechterhalten wird, kann man füglich annehmen, daß die Endtemperatur τ_m niemals im Dauerbetrieb erreicht wird. Dafür wären bei $\frac{1}{2}$ bis 1% Abweichung etwa 10 Stunden erforderlich. Bei Überlastung hängt die Überlastbarkeit n in hohem Maße von dem Verhältnis der Betriebsdauer a zur Zeitkonstanten T ab. Ist dieses Verhältnis, wie etwa bei Lichtkabeln, groß, etwa $a = 1$ Stunde am Tage des höchsten Verbrauches, $T = 2$ Stunden, dann wäre

$a/T = \frac{1}{2}$, und die höchste Überlastung wäre für $a/P = \frac{1}{24}$ etwa 2,6fach, entsprechend der 1,6fachen höchstzulässigen Dauerstromstärke. Hierbei ist vorausgesetzt, daß das Kabel 23 Stunden täglich abkühlen kann, was nicht zutrifft. Die zulässige Überlastung während einer Stunde wird also kleiner sein als 2,6fach, und zwar um so kleiner, je höher das Kabel schon durch Belastung vorgewärmt war. Stoßweise Belastungen, für die a/T und a/P klein sind, können das 7- bis 10fache des normalen Wertes betragen, wie der Verlauf der Kurven in Abb. 318 andeutet.

Maßgebend ist hierbei auch die Frage der höchsten zulässigen Temperatur des Isoliermasse. Hierfür kann man bei Faserkabeln etwa 50° C, bei Papierkabeln etwa 65° C annehmen. Bei Hochspannungskabeln ist jedoch zu beachten, daß die dielektrischen Verluste mit zunehmender Temperatur rasch anwachsen. Für diese Kabel sind dann auch die zulässigen Stromstärken etwas kleiner als aus den Formeln für mehradrige Kabel S. 327 und der Tabelle für einadrige 700-Volt-Kabel auf S. 325 folgt.

Bei einadrigen blanken Kabeln, wie sie zuweilen für Wechselstrom verwendet werden, erhöht der blanke Bleimantel die Temperatur erheblich durch die in ihm auftretenden induzierten Ströme.

5. Erwärmung bei Einziehsystemen.

Über die Erwärmung von Kabeln bei einem der in England und Amerika vielfach verwendeten Einziehsysteme wird berichtet, daß bei 12 Zügen die Erwärmung der äußeren Züge etwa $2,2^{\circ}\text{C}$, der inneren Züge etwa $2,7^{\circ}\text{C}$ für je 1 Watt Verlust und 1 m Länge des Systems beträgt. Mosman¹⁾ hat gezeigt, daß auch hier die Beobachtungen mit der Rechnung gut übereinstimmen.

Bei Messungen an einadrigen Wechselstromkabeln von 250 und 500 mm² Querschnitt, welche in Zementblöcke mit 9×9 Löchern eingezogen waren, ergab sich, daß die innersten Kabel wärmer werden als die äußeren,

durch die Berührung mit der Erde gekühlten. Bei der von Mosman untersuchten Fabrikanlage waren Fiberrohre in Zement so angebracht, daß ein Teil des Einziehsystems zwischen den Mannlöchern 3 und 4 (Abb. 319)

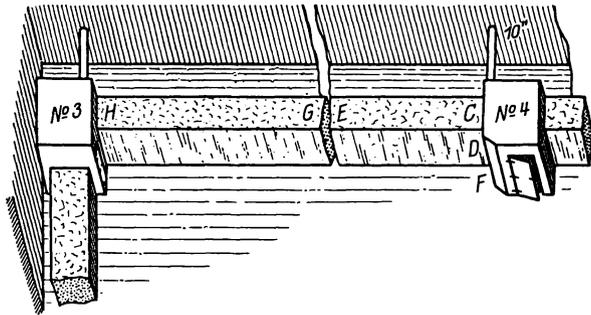


Abb. 319.

etwa 25 bis 30 cm mit der untersten Reihe von Kanälen über dem Boden des Gebäudes lag. In den Fundamenten dieses Gebäudes waren eine Anzahl Dampf- und Wasserrohre und war die Temperatur in der Regel höher als im Erdboden. Der Zementblock ruhte also nur mit einer Seite *F* auf der Erde, die anderen drei Seitenwände *D* bzw. *CE* und *GH* ragen darüber hinaus. Durch die gezeichneten 10zölligen Lüftrohre konnte Druckluft zu- und abgeführt werden, oder diese Lüftrohre konnten der natürlichen Entlüftung dienen.

Beziffert man in Abb. 320 die Züge der ersten wagrechten Reihe mit 1 bis 9, die der zweiten mit 10 bis 18 usw. und deutet man die durch Kabel besetzten Züge durch dickere Kreise an, dann ergaben sich bei Belastung der Kabel oder eisernen Einziehdrähte mit der in den Kreisen unten vermerkten Belastung in Watt für 1 m die darüber vermeldeten Temperaturzunahmen in $^{\circ}\text{C}$. Die Züge Nr. 13, 14, 15 enthielten mit Gummi isolierte einadrige Kabel von 250 mm², die anderen mit Kabeln belegten Züge enthielten papierisolierte Einaderkabel von 500 mm² Querschnitt. Die Temperaturen der Kabel wurden mit an die Bleimäntel angelegten Thermometern bestimmt, die der Einziehdrähte aus Widerstands-

¹⁾ Mosmann, Trans. A. J. E. E. 1912, Bd. 31, S. 755.

messungen beim Anschluß an ein 125-Volt-Gleichstromnetz. Abb. 320 zeigt, daß die höchsten Erwärmungen in den Zügen 11 und 20 mit

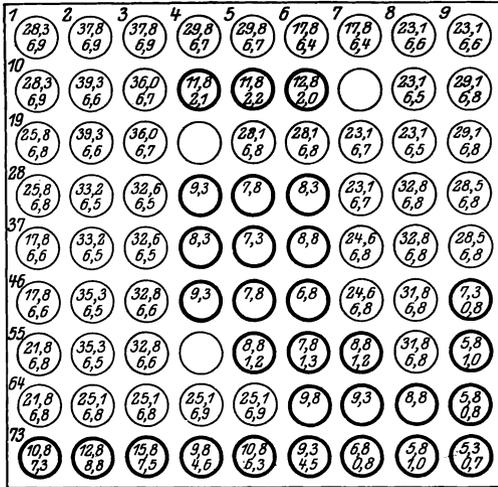


Abb. 320.

Prüfdrähten und die niedrigsten Erwärmungen in den Zügen Nr. 6, 7, 37 und 46 auftreten. Die bei den Kabeln erreichten geringen Erwärmungen rühren zum Teil von der schwachen Belastung, zum Teil daher, daß kalte Zugluft über das System von den geschlossenen Fenstern in der Rückwand wegblies, während nur die Temperatur des Bleimantels gemessen wurde. Die Messung erstreckte sich über 11 1/2 Stunden und ergab als

mittlere Temperatur bei C	in Abb. 319	45,7° C
„ „ „	D „ „ „	35,6° C
„ „ „	E „ „ „	26,7° C
„ „ „	F „ „ „	28,7° C
„ „ „	G „ „ „	27,7° C
„ „ „	H „ „ „	31,6° C
„ „ „	des Bodens im Mannloch	22,2° C
„ „ „	der in das Mannloch ein-	
	tretenden Luft	16,1 bis 7,5° C.

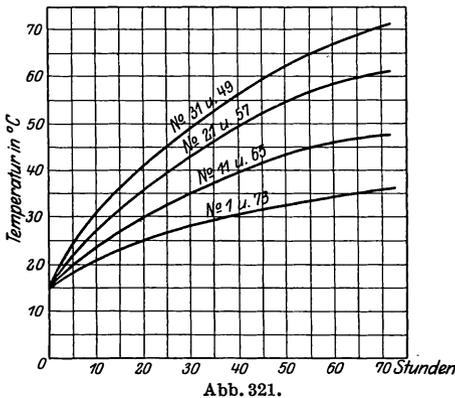


Abb. 321.

Die höchste Temperatur trat etwa in 4,5 m Abstand vom Mannloch und bei natürlichem Zug auf. Weitere Untersuchungen mit Prüfspulen an diesen Stellen höchster Temperatur ergaben, daß bei Kühlung mit Druckluft die Belastung etwa auf 13 Watt für 1 m Zuglänge gesteigert werden konnte, wobei die mittlere Temperatur der Züge etwa 25° C, die Erwärmung etwa 20° C, der Verbrauch des Ventilators 2,2 kW betrug.

Bei 72stündigem Betrieb mit 6,56 Watt/m zwischen zwei anderen Mannlöchern ergaben sich die Kurven der Abb. 321, dann wurde nach Abstellung während 48 Stunden der wirkliche Betrieb während einer

Woche nachgeahmt. Bei 6,56 Watt/m ergaben sich die Zickzackkurven der Abb. 322. Von den in der von links nach rechts absteigenden Diagonale angeordneten Zügen war der oberste (1) am kühlfsten, der innerste (31) am wärmsten. Die Endtemperatur trat erst am Abend des fünften Tages auf. Die mittlere Bodentemperatur war dabei 17,5° C, die Temperatur-

zunahme des wärmsten Zuges also 49° C. Der mehrfach erwähnte Verlust im Kupfer- und Bleimantel von 6,56 Watt/m = 2 Watt/Fuß entspricht einer Belastung von etwa 340 Amp. bei den 500-mm²-Kabeln. Diese konnten bei natürlicher Kühlung etwa mit

2,5 Watt/Fuß, entsprechend 475 Amp., bei künstlicher Kühlung mit Druckluft etwa mit 4 Watt/Fuß, entsprechend 600 Amp. Wechselstrom von 60 Per./Sek. belastet werden, wobei die mittlere Erwärmung über den ganzen Block etwa 25° C gegen die Luft-, etwa 40° C gegen die Bodentemperatur betrug. Auffallend groß waren dabei die Ströme in den blanken Bleimänteln: bei 600 Amp. je nach Art des Kabels 175 bis 200 Amp.

Hieraus ergibt sich die Notwendigkeit, blanke Bleikabel so zu verlegen, daß die Bleimäntel stellenweise geerdet sind und sich nicht berühren. Bei der Diskussion wurde erwähnt, daß man in Städten Einziehsysteme mit mehr als 12 bis 16 Zügen nicht ratsam erachtet.

6. Abwägung der kritischen Länge.

Eine Leitung muß im allgemeinen so berechnet werden, daß sie den Anforderungen der Verbraucher entspricht. Außerdem muß noch überprüft werden, ob die für den so übermittelten Querschnitt zulässige Stromstärke nicht überschritten wird. Dies wird bei Berechnung auf zulässigen relativen Spannungsabfall stets dann der Fall sein, wenn die Leitung eine bestimmte Länge unterschreitet. Wir wollen sie die kritische Länge nennen.

Für isolierte Kupferdrähte gibt die Belastungstabelle die zusammengehörigen Querschnitte und Ströme. Die kritische Länge ist dann für Zweileitersysteme für Gleichstrom oder Wechselstrom mit $\cos \varphi = 1$ und $\cos \lambda = 1$ umgekehrt proportional der zulässigen Stromdichte

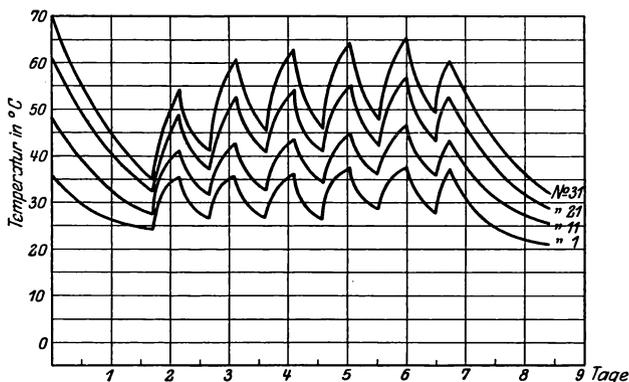


Abb. 322.

$$\delta = J/f:$$

$$L_{\text{krit}} = \frac{vf}{2J\rho} = \frac{v \cdot k}{2\delta}$$

Meter einfacher Länge. Man findet also für $k = 57$

		bei $v = 8,8$ Volt		zulässige Stromdichte	
für $f = 1,5$ mm ²	$J = 14$ A	$L_{\text{krit}} = 27$ m	$\frac{J}{f} = 9,35$ A/mm ²		
2,5 „	20 „	31 „	8,00	„	
4 „	25 „	40 „	6,25	„	
6 „	31 „	48 „	5,17	„	
10 „	43 „	58 „	4,30	„	

Ist die Länge der Leitung $l < L_{\text{krit}}$, dann darf sie nicht auf Verlust gerechnet, sondern muß sie mit Rücksicht auf die Erwärmung bemessen werden. Die 8,8 Volt Spannungsabfall sind willkürlich gewählt worden und entsprechen 4% von 220 Volt. Bei kleinerem relativen Abfall oder bei niedrigeren Spannungen kommt man also selbst bei Fabrikanlagen oder Hausinstallationen häufig in die Nähe der kritischen Länge.

Auch für unterirdisch verlegte Kabel kann man ähnlich verfahren, indem man die Tafeln der zulässigen Belastung verwendet. So findet man für versilbte dreidrigige Kabel für 10000 Volt in den Boden verlegt bei der zulässigen Stromdichte $\delta = \frac{J}{f}$

$$L_{\text{krit}} = \frac{vf}{J\rho} = \frac{vk}{\delta} \text{ Meter.}$$

Nimmt man beispielsweise $v = 5\%$ von $E = 10000$ Volt, dann wird für $\cos \varphi = 1$

$$L_{\text{krit}} = \frac{57 \cdot 500}{\delta}$$

und somit

für $f = 16$ mm ²	$J = 80$ A	$L_{\text{krit}} = 5,7$ km	$\delta = \frac{J}{f} = 5,0$ A/mm ²	
25 „	105 „	6,8 „	4,2	„
35 „	125 „	8,0 „	3,57	„
50 „	155 „	9,2 „	3,1	„
70 „	190 „	10,6 „	2,7	„
95 „	225 „	12,1 „	2,35	„

also schon immerhin beträchtliche Längen. Man darf also jedenfalls nie versäumen, nach der Rechnung auf relativen Spannungsabfall ε oder relative Spannungsschwankung η noch zu überprüfen, ob der gefundene Querschnitt der zu erwartenden Belastung in bezug auf Erwärmung entspricht.

XIII. Entwurf geschlossener Leitungsnetze.

1. Allgemeines.

Die Aufgabe der Bemessung eines geschlossenen Leitungsnetzes führt zu einer relativ einfachen Lösung, sobald man sie auf offene Leitungen zurückführt. Zu diesem Zwecke wird das Netz in

offene Teile zerlegt. Der hierbei einzuschlagende Weg ist gerade dem entgegengesetzt, der zur Bestimmung der Stromverteilung benutzt wurde.

Dort waren die Querschnitte des Netzes gegeben und die Stromverteilung zu ermitteln; hier hingegen nehmen wir die Stromverteilung von vornherein an und bestimmen die Querschnitte danach. Früher haben wir behufs Ermittlung der Stromverteilung die Schnittpunkte gesucht, jetzt nehmen wir umgekehrt diese an. Die Frage ist nun: wie sollen wir diese Schnittpunkte wählen? Die natürlichste Annahme ist wohl die, daß jeder Stromabnehmer seinen Strom auf dem kürzesten Wege zugeführt erhält.

Führt man diesen Grundsatz für alle Stromabnehmer durch, so erhält man in jeder Masche des Netzes zwei aufeinander folgende

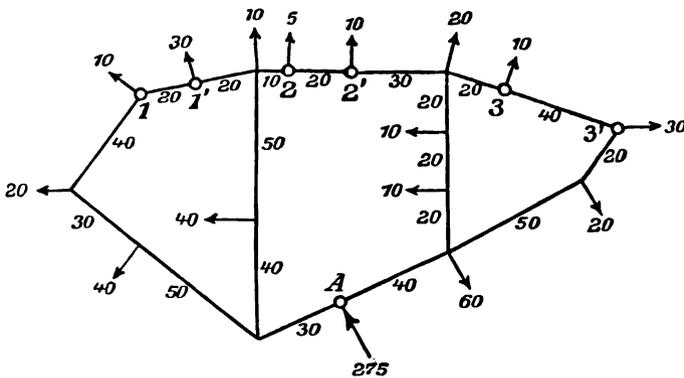


Abb. 323.

Abnahmepunkte, denen Ströme in entgegengesetzten Richtungen zugeführt werden, und ein dazwischen liegendes stromloses Stück, das als Ersatz des Schnittpunktes zu betrachten ist. Die beiden genannten Punkte können in einen zusammengerückt gedacht werden und entsprechen dann tatsächlich einem Schnittpunkt. In diesen Punkten denkt man sich das Netz getrennt und erhält so lauter offene Stränge, deren Querschnitte leicht berechnet werden können, wenn der maximale Spannungsabfall angenommen wird. An den Enden zweier Stränge, welche aus der Auflösung eines Schnittpunktes hervorgegangen sind, müssen natürlich gleiche Spannungen vorausgesetzt werden; sonst wäre ja der betreffende Punkt kein Schnittpunkt. Wenn man vorderhand von allen anderen praktischen Bedingungen absieht und voraussetzt, daß in allen Schnittpunkten die gleiche geringste Spannung herrsche, welche man im Netze überhaupt zulassen will, oder mit anderen Worten, wenn man für alle offenen Stränge denselben maximalen Spannungsabfall annimmt, so wird man die kleinsten Querschnitte erhalten, vorausgesetzt, daß dieser Abfall auch längs jedes Leiters ökonomisch verteilt ist.

Die Gestalt des Netzes und die Stromabnehmer seien nach Ort und Größe gegeben, wie in Abb. 323 dargestellt.

Bei A sei die Stromzuführungsstelle. Schreitet man vom Punkte A aus zu den einzelnen einander folgenden Abnahmestellen und vergleicht für jede die Längen der durchlaufenen Wege, so erreicht man in jeder Masche einen Punkt, bis zu welchem der Weg von der einen Seite, und einen folgenden Punkt, bis zu welchem der Weg von der anderen Seite aus am kürzesten ist. So ergeben sich im Netze die Punkte 1 und 1', 2 und 2', 3 und 3'. Dort denkt man sich das Netz aufgeschnitten und erhält dann zwei offene Stränge (Abb. 324 und 325) mit den stromlosen Verbindungsstücken 1 1', 2 2', 3 3', die man zunächst vernachlässigt.

Die für die offenen Stränge gewonnenen Werte müssen nun noch in mancherlei Hinsicht abgeändert werden. Vor allem müssen sie den Handelsmaßen entsprechen. Dann wird man nur wenige verschie-

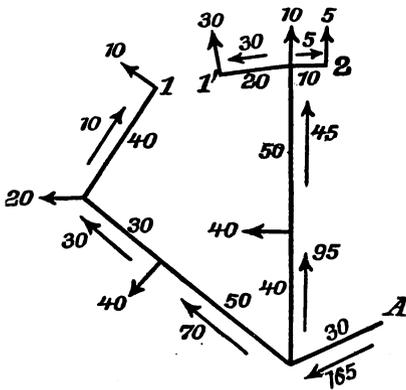


Abb. 324.

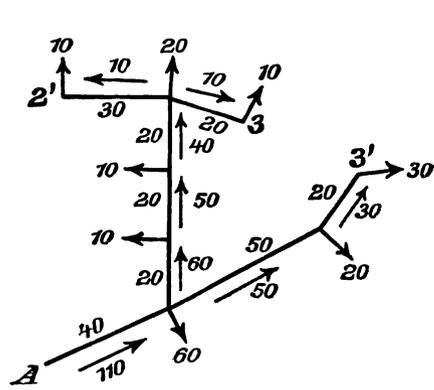


Abb. 325.

dene Querschnittsstufen im Netze zulassen, am liebsten nicht mehr als zwei bis drei. Schließlich muß zur Sicherung des Betriebes ein gewisses Zirkulationsprinzip eingehalten werden. Das Netz muß so gebaut sein, daß auch bei Betriebsstörung oder Unterbrechung eines Teiles der Rest des Netzes ohne Überlastung im Betrieb erhalten bleibt, und daß wichtige Stromabnehmer von zwei Seiten Strom erhalten. Niemals darf ferner, selbst bei ungünstigster Belastung, die zulässige Erwärmung überschritten werden.

Soll die Menge des aufzuwendenden Metalls in dem Netze ein Minimum werden, so muß für jeden Knotenpunkt die Bedingungsgleichung $\sum \left(\frac{j^2}{i} \right) = 0$ erfüllt sein. Der Wert dieser Regel wird bei praktischen Anwendungen durch zwei Umstände wesentlich beeinflusst. Zunächst durch die bereits erwähnten handelsüblichen Querschnittsstufen. Für Drähte und Kabel aus Kupfer setzen die Sicherheitsvorschriften des Verbandes deutscher Elektrotechniker die nachstehende Querschnittsreihe fest: 0,75, 1, 1,5, 2,5, 4, 6, 10, 16, 25, 35, 50, 70, 95, 120, 150, 185, 240, 310, 400, 500, 625, 800, 1000.

Diese Querschnittsstufen üben unter Umständen starken Einfluß dahin aus, daß sie das Resultat der genauen Rechnung wesentlich verwischen und neue Proberechnungen mit den Nachbarstufen erheischen. Die hiermit zusammenhängende Frage, welche Veränderungen in der Spannungs- resp. Stromverteilung eines Netzes auftreten, wenn sich ein oder mehrere Leiter verändern, wurde bereits bei den Ausgleichsleitern angetroffen. Für die Praxis genügt es, zu beachten, wie der betrachtete Leiter durch die erwartete Löscharkeit beeinflußt wird. Ist er ein Hauptleiter, der jeder Laständerung im gleichen Sinne folgt, so ist er auf Querschnittsänderung empfindlich. In Querleitern oder Brücken zwischen den Hauptleitern übt die Veränderung des Querschnitts dagegen geringeren Einfluß auf den Strom- und Spannungszustand aus.

Der zweite Umstand ist die schon in dem Kapitel über die Wirtschaftlichkeit erwähnte Abhängigkeit der Gesamtkosten von der Art der Verlegung, Isolierung und Spannung. Die Gesamtkosten lassen sich angenähert durch die Beziehung $(a + bf) L$ darstellen, deren erster Teil aL die festen Kosten ergibt, die auf die Querschnittsveränderung ohne Einfluß sind.

Alle diese rechnerischen und praktischen Rücksichtnahmen, deren gegenseitiges Gewicht sich nicht durch exakte Formeln ausdrücken läßt, und deren Abwägung ganz von dem Geschicke und der Erfahrung des Projektierenden abhängt, rufen Veränderungen der ursprünglich berechneten Querschnittswerte hervor, so daß diese eigentlich nur als erste Schätzungswerte für den Entwurf dienen.

Das nach den erwähnten Gesichtspunkten entworfene und abgeänderte Netz fordert nun eine genaue Nachrechnung. Zu diesem Zwecke berechnet man die Strom- und Spannungsverteilung und überprüft, ob tatsächlich alle maßgebenden Bedingungen erfüllt werden. Insbesondere wird man nachsehen, ob der größte im Netze vorkommende Spannungsverlust unter der zulässigen Grenze liegt, und ob nicht bei der zu erwartenden Löschung einzelner Gruppen bestimmte Leiterstücke überlastet werden.

Sind aus praktischen Rücksichten noch einige Abänderungen notwendig, so wird man sie vornehmen; eine darauffolgende neue Berechnung der Stromverteilung ergibt dann, ob man bereits am Ziele ist oder noch weitere Verbesserungen vorzunehmen hat.

Erwünscht ist, daß bei der schließlichen Spannungsverteilung bis zum fernsten Punkte der größte und bis zu jedem anderen Punkte ein um so kleinerer Spannungsverlust auftritt, je näher der Punkt der Stromquelle liegt.

In dieser Hinsicht kann man schon beim Entwurf entsprechende Annahmen machen, indem man bei der Berechnung der einzelnen offenen Stränge die Spannungsverluste nicht gleich, sondern proportional der Länge annimmt.

Es bedarf keiner weiteren Erklärung, daß der angedeutete Rechnungsgang derselbe bleibt, wenn mehrere Stromzuführungsstellen anstatt einer vorhanden sind. Man wird dann die Auflösung des Netzes

in bezug auf mehrere Ausgangspunkte vorzunehmen haben. Solange nur wenige Speisepunkte in Frage kommen, ist dies noch leicht möglich. Wenn jedoch viele zu beachten sind, wird die Lösung schwieriger. Es ist daher die Prüfung der gewählten Querschnitte um so dringlicher.

2. Bestimmung der günstigsten Zahl von Speisepunkten eines Netzes.

Wird für einen gegebenen Verbrauch W , der gleichförmig über eine Fläche O verteilt gedacht werden kann, so daß $\delta_w = W/O$ die mittlere Verbrauchsdichte darstellt, die Zahl der Speisepunkte vermehrt, so werden die Kosten für die Verteilungsleitungen abnehmen. Umgekehrt würden bei ihrer Verminderung diese Kosten wachsen, die der Stromzuführung durch die Speiseleitungen aber abnehmen. Es muß also zwischen den beiden eine bestimmte Zahl von Speisepunkten geben, für welche sich die geringsten Gesamtkosten ergeben. Bei einem unregelmäßig gestalteten Netz mit unregelmäßig verteilten Abnahmen ist die Aufgabe der rein rechnerischen Behandlung nicht zugänglich. Sengel¹⁾ hat aber aus Quadraten, gleichseitigen Dreiecken und gleichseitigen Sechsecken aufgebaute Netze untersucht, welche bei großer Maschenzahl auch auf unregelmäßig gestaltete Leitungsnetze anwendbar erscheinen.

Die Rechnung erfolge zunächst für eine Gleichstromverteilung mit Speiseleitungen bei oberirdischer Verlegung der Leitungen.

Die Gesamtkosten setzen sich aus den Kosten für Kupferaufwand der Speise- und Verteilungsleitungen, aus den Montagekosten für Speise- und Verteilungsleitungen, einschließlich der Isolatoren, und den Kosten für die Speisepunkte sowie den Anschluß der Speiseleitungen in der Zentrale zusammen. Die Kosten für das Leitungsgestänge dürften auch bei verschiedenen Speisepunktanordnungen stets den gleichen Betrag aufweisen und fallen somit als fester Betrag aus der Rechnung.

Bezeichnet γ das spezifische Gewicht des Leitermaterials,
 c den Preis von 1 kg des Leitermaterials,
 m die Kosten für die Verlegung eines Meters Draht einschließlich Isolatoren,
 s die Kosten eines Speisepunktes,
 p proz. Spannungsverlust in den Verteilungsleitungen,
 L den Abstand zwischen Zentrale und Schwerpunkt der Belastung,

dann ist für einen Netzteil mit dem Verbrauch W und der Betriebsspannung E die günstigste Anzahl der Speisepunkte

$$[S] = \frac{W}{E} \sqrt{\frac{\gamma c}{10 (Lm + \frac{1}{2} s) p k \delta_w}}.$$

Werden statt der Freileitungen Kabel verwendet, so treten an Stelle der Koeffizienten γ und c zwei Koeffizienten a und b auf.

¹⁾ Sengel, A.: ETZ 1899, S. 807, 826.

Eine bestimmte Länge l eines Kabels von $f \text{ mm}^2$ Querschnitt kostet nämlich $l(a + b \cdot f)$. Die gleiche Länge einer Freileitung kostet $lf\gamma c 10^{-3}$. An Stelle von γc ist daher 1000 b zu setzen. Ferner tritt die Konstante a zu den Errichtungskosten hinzu.

Die günstigste Zahl der Speisepunkte wird sonach sein

$$[S] = \frac{E}{W} \sqrt[4]{\frac{100b}{L(m + a + s/2L)pk\delta_w}}.$$

Die Kosten für Kabelgräben sind ebenso wie die für Gestänge bei Freileitungen als Konstante unabhängig von der Zahl der Speisepunkte. Sie treten daher in obigen Formeln nicht auf.

Sind Straßen beiderseits mit Leitungen belegt, so wird der gesamte Kupferquerschnitt stets denselben Wert ergeben wie bei einseitiger Verlegung. Die veränderlichen Kosten bleiben sonach in beiden Fällen dieselben.

Die Erweiterung vom Zweileiter zum Dreileiter verändert die abgeleitete Gleichung für S nicht. Denn werden die Nulleiter der Speise- und Verteilungsleitungen zu einem besonderen Mittelleiternetz zusammengelegt, so bleiben die Querschnitte dieses Netzes ganz unabhängig von der Zahl der Speisepunkte und den Querschnitten der Verteilungsleitungen. Auch wenn Speise- und Verteilungsleitungen mit je einem Mittelleiter versehen werden, dessen Querschnitt in konstantem Verhältnis zu dem Querschnitt der Außenleiter steht, bleibt das Verhältnis zwischen den veränderlichen Kosten der Speise- und Verteilungsleitungen stets das gleiche. Als Spannung E bei Dreileiteranlagen ist natürlich die Spannung zwischen den Außenleitern einzuführen.

Für den günstigsten Abstand l zweier Speisepunkte findet man für oberirdische Leitung

$$[l] = \sqrt{E} \sqrt[4]{\frac{10(Lm + \frac{1}{2}spk)}{\gamma c \delta_w}},$$

für Kabel

$$[l] = \sqrt{E} \sqrt[4]{\frac{L(m + a + s/2L)pk}{100b\delta_w}}.$$

Die Zahl der Speisepunkte ist der Abnahme W direkt, der Spannung E indirekt proportional. Alle übrigen Größen treten nur mit ihrer Wurzel im Ausdrucke für $[S]$ auf. Für ein gegebenes Netz sind die Größen γ , c , m , s , p , k , a , b als konstant anzunehmen, dagegen ändern sich L und δ_w für jeden Speisepunkt. Das Netz wird in einzelne Bezirke so eingeteilt, daß in ihnen die Unterschiede zwischen den Werten für L und δ_w möglichst gering bleiben. Für L ist alsdann die längs der kürzesten Leitung gemessene Entfernung zwischen der Zentrale und dem Abnahmeschwerpunkt der einzelnen Bezirke einzuführen. Bei Bildung von δ_w entfallen alle Großabnahmen, die an einen Feeder unmittelbar anschließen.

Im allgemeinen ergeben sich für die verschiedenen Werte von S in den einzelnen Bezirken gebrochene Zahlen, deren Summe die Gesamtsumme der Speisepunkte darstellt. Die errechnete Zahl von Speise-

punkten wird nun so auf das Netz verteilt, daß die für die einzelnen Bezirke ermittelten Zahlen möglichst eingehalten werden. Die Anwendung der Formeln soll noch erläutert werden.

In Abb. 326 ist ein Netzabschnitt, für welchen die Zahl der Speisepunkte berechnet werden soll, im Maßstabe 1:16667 dargestellt. Die den Verteilungsleitungen beige-schriebenen Zahlen bedeuten den gleichzeitigen Verbrauch in Kilowatt, der auf die ganze Strecke gleichmäßig verteilt zu denken ist.

Die umkreisten Zahlen bezeichnen Großabnahmen. Das Werk ist vom Punkte *f* zwischen den Speisepunkten X, XI und XV nach links 200 m entfernt.

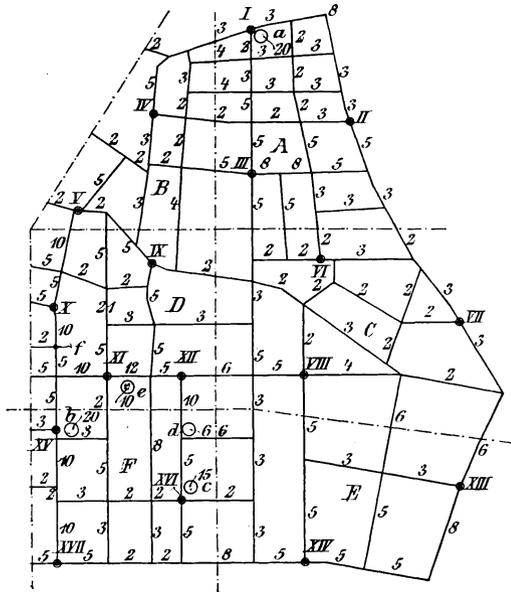


Abb. 326.

Die Berechnung werde zunächst für eine unterirdisch verlegte Gleichstromreileiteranlage mit 2×110 Volt Verbraucherspannung durchgeführt. Der prozentuale Spannungsverlust in den Verteilungsleitungen betrage $p = 1,5\%$. Für eisenbandarmierte Einfachgleichstromkabel ergibt sich bei einem Kupferpreis von 75 £ $a = 1,0$; $b = 0,029$ Mark. Die Montagekosten für den

Meter Kabel betragen $m = 0,4$ Mark, und die Kosten für den Anschluß einer Speiseleitung in der Zentrale und im Netze mögen sich auf $s = 200$ Mark belaufen. Die Leitfähigkeit des Kupfers sei zu $k = 57$ angenommen.

Zur Ermittlung von L und δ_w werde das Netz in sechs Bezirke A bis F eingeteilt, die zu folgendem führen:

Bezirk	A	B	C	D	E	F
Abnahme W in Watt	113000	52000	70000	131000	61000	103000
Oberfläche O in Quadratmeter	150000	120000	240000	165000	180000	145000
$\delta_w = W : O$	0,75	0,43	0,29	0,80	0,34	0,71
Länge der Speiseleitung L in Meter	1150	750	1050	400	1300	750

Die Einführung dieser Werte in die Gleichungen ergibt:

Abstand d. Speisepunkte [Z]	230	250	300	190	300	220
Anzahl d. Speisepunkte [S]	2,65	1,97	2,76	4,78	2,00	2,99

Die Summe der S ergibt 17,15, also 17 als Anzahl der Speisepunkte. Ihre Verteilung geht aus Abb. 326 hervor (I bis XVII).

In den Abnahmezahlen W sind a , b und c nicht enthalten, weil diese Großabnahmen die Anlage von Speisepunkten an diesen Stellen von vornherein als zweckmäßig erscheinen ließ.

Bei Wechsel- und Drehstromanlagen mit Transformatoren erfolgt die Zuführung der primären Energie wesentlich anders als bei Gleichstromnetzen. Die primären Verteilungsstellen bilden ein aus wenigen großen Maschen bestehendes Verteilungsnetz, an welches die Transformatoren entweder unmittelbar oder durch kurze Verbindungsleitungen angeschlossen sind. Die Gesamtkosten der Primärleitungen bleiben daher von der Zahl der Transformatorstationen nahezu unabhängig. Andererseits treten die Kosten für die Transformatoren und deren Stationen hinzu. Die sekundären Klemmen der Transformatoren dagegen bilden Quellpunkte oder Speisepunkte des offenen oder geschlossenen sekundären Netzes.

3. Sekundär zusammenhängendes Netz.

Werden die Transformatoren nicht nur primär, sondern auch sekundär zusammengehängt, so können mit veränderlicher Belastung an den sekundären Klemmen der Transformatoren derartige Lastverteilungen entstehen, daß einzelne überlastet werden.

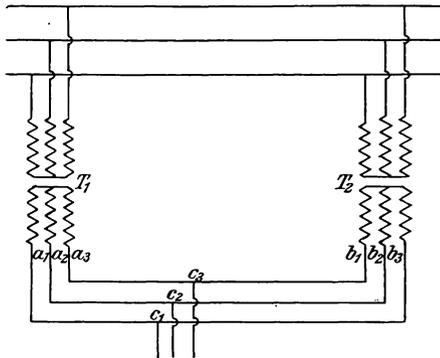


Abb. 327.

Wenn zwei Transformatoren T_1 , T_2 eine Leitung ab mit Strom versorgen, deren Gesamtentnahme in ihrem Schwerpunkt c (Abb. 327, 328) zusammengefaßt ist, dann fließt dem Abzweigpunkt c von T_1 der Strom

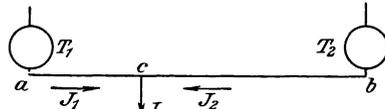


Abb. 328.

J_1 , von T_2 der Strom J_2 zu, so daß die Vektorgleichung $J_1 + J_2 = J$ gilt. Nur wenn T_1 und T_2 zwei gleich große Transformatoren mit gleichen elektrischen Eigenschaften sind, wenn sie gleiche Primärspannung erhalten, und wenn c mitten zwischen a und b liegt, wird $J_1 = J_2$ werden. Bleiben sonst alle Bedingungen bestehen und rückt nur der Schwerpunkt der Belastung näher an T_1 heran, so wird J_1 steigen. Im allgemeinen werden sich die Ströme so verteilen, daß in beiden Transformatoren und in dem zugehörigen Stück der Leitung bis zum Abzweigpunkte c der gleiche Spannungsabfall ε auftritt. Es muß also $\varepsilon = J_1 r_1 = J_2 r_2$ oder $J_1 : J_2 = r_2 : r_1$ sein. r_1 und r_2 bedeuten dabei die auf den Sekundärkreis reduzierten (inneren) Impe-

danz der Transformatoren (mit Inbegriff der Impedanz der Leitungsstücke ac bei r_1 und cb bei r_2).

Der Beweis ergibt sich aus dem Ersatzschema, Abb. 247, des Transformators. T_1 und T_2 entsprechen zwei parallel geschalteten Impedanzen r_1 und r_2 , die nach der in Abb. 228 des VIII. Kapitels gegebenen Ableitung miteinander den konstanten Winkel $\alpha = \varphi_1 - \varphi_2$ einschließen. Der Richtungswiderstand ihrer Parallelschaltung ist ON (Abb. 329).

Durch Inversion ergibt sich hieraus das Diagramm der Richtleitwerte oder Admittanzen und nach Multiplikation mit dem gemeinsamen Abfall $\varepsilon = OA$ der Ströme J_1 und J_2 .

Ist also der gesamte Sekundärstrom bekannt, so kann man leicht die beiden Teilströme finden. Umgekehrt ergibt sich auch leicht der

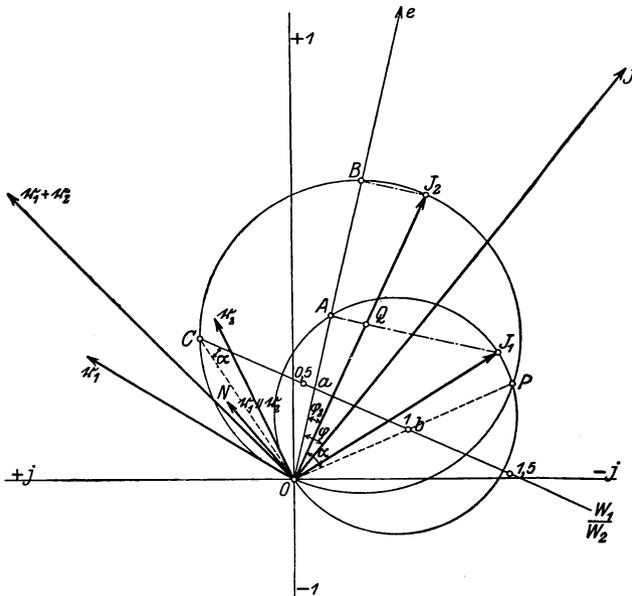


Abb. 329.

Anteil jedes Transformators an der Gesamtlieferung. Die Teillieferung hängt in hohem Maße von der sekundären Phasenverschiebung φ des Gesamtstromes gegen die Spannung e ab. Der willkürlichen Veränderung von φ entspricht der willkürliche Stand des Spannungsvektors e in Abb. 329.

Beschreibe über J_1 und J_2 , die untereinander den Winkel α bilden, Kreise. Die Gerade e , welche die Richtung der gemeinsamen sekundären Klemmenspannung angibt, schneidet diese Kreise in A und B . Dann ist $OA = eJ_1 \cos \varphi_1$ ein Maß für die Leistung des Transformators T_1 , $OB = eJ_2 \cos \varphi_2$ für die von T_2 .

Das Verhältnis beider Leistungen ist

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{OA}{OB} = q = \frac{J_1 \cos(\varphi_2 + \alpha)}{J_2 \cos \varphi_2} = \frac{J_1}{J_2} (\cos \alpha - \sin \alpha \operatorname{tg} \varphi_2).$$

Dies ist die Gleichung einer Geraden, die für $q = 0$ durch den Schnittpunkt c von $Oc \perp J_1$ mit dem Kreis über J_2 geht und senkrecht steht auf J_2 . q wird nämlich Null für $\varphi_2 = 90^\circ - \alpha$ und Unendlich für $\varphi_2 = 90^\circ$. Für willkürliche Lage des Spannungsvektors e mißt die Strecke ac das zugehörige Verhältnis q der Leistungen. Der Maßstab wird durch die Strecke cb bestimmt, weil OP der Stand des Spannungsvektors für gleiche Leistung beider Transformatoren ist. Es ist also, im Maßstab der q gemessen, $bc = 1$ und $q/1 = ac/bc$.

Dies ist richtig, wenn bewiesen werden kann, daß $ac:bc = OA:OB$, was ohne weiteres aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $\triangle Ocb \sim \triangle J_1OJ_2$ und $\triangle Oca \sim \triangle J_1OQ$ zu ersehen ist. Für die ersten zwei Dreiecke, die den Winkel α gemeinsam haben, gilt:

$$\begin{aligned} \triangle Ocb &\sim \triangle J_1OJ_2 \\ (\angle \alpha = \angle \alpha; \quad \angle O = \angle J = 90^\circ + \angle J_1OP). \end{aligned}$$

Für die zweiten Dreiecke ist der Beweis ähnlich

$$\begin{aligned} \triangle Oca &\sim \triangle J_1OQ \\ (\angle \alpha = \angle \alpha; \quad \angle a = \angle Q = 90^\circ + \varphi_2). \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$ac:oc = OQ:J_1 \quad \text{und} \quad bc:oc = J_2:J_1$$

und aus beiden

$$ac:bc = OQ:J_2 = OA:OB = q:1.$$

Die Leistungen hängen also von den Widerständen r und den Reaktanzen x , auf den Sekundärkreis reduziert, und außerdem von der Phasenverschiebung φ der Belastung J ab. Zu $r_1 = r_1 + jx_1$ und $r_2 = r_2 + jx_2$ sind die entsprechenden Werte der Zuleitungen ac und bc (Abb. 328) bis zum Anschluß der Belastung zu zählen, was häufig versäumt wird und das Ergebnis unter Umständen fälschen kann.

Das in Abb. 329 gezeichnete Beispiel entspricht zwei 20-kVA-Transformatoren mit den auf den 220 Volt Sekundärkreis bezogenen Impedanzen

$$r_1 = 0,5 + 0,8j \text{ Ohm} \quad \text{und} \quad r_2 = 0,65 + 0,3j \text{ Ohm}.$$

Gezeichnet ist der Fall, daß die Gesamtlast J einen Leistungsfaktor $\cos \varphi = 0,9$ besitzt. In diesem Falle wird das Verhältnis $W_1/W_2 = q = 0,55$. T_2 leistet also etwa 23,2, T_1 etwa 12,8 kW. Bei induktionsfreier Belastung wird $W_1/W_2 = 0,75$ und erst bei voreilem Strom mit $\cos \varphi \approx 0,86$ wird bei dem Stande OP des Spannungsstrahls gleiche Leistung für beide Transformatoren erreicht. Die Verhältnisse sind so gewählt, daß die Abbildung deutlich wurde. Aber beide Transformatoren entsprechen möglichen Typen.

T_2 hat bei dem normalen Strom von 90 Amp. $4,5V \approx 2\%$ Ohmschen und $7,2V \approx 3,3\%$ induktiven Verlust; T_1 hat $5,85V \approx 2,7\%$ Ohmschen und $2,7V \approx 1,3\%$ induktiven Verlust. Der Gesamtabfall liegt also in normalen Grenzen. Nur hat T_2 infolge geringer Unterteilung der Spulen viel höhere Streuung als T_1 .

Bisher wurde vorausgesetzt, daß die Primärspannungen gleich seien. Sind diese außerdem noch verschieden, so wird ihr Spannungsunterschied bezogen auf den Sekundärkreis, einen Leerlaufs- oder Ausgleichstrom durch das Sekundärnetz von den Punkten, wo der Transformator an höhere Primärspannung angeschlossen ist, nach den Punkten hintreiben, wo infolge der größeren Primärverluste auch niedrigere Sekundärspannung herrscht. Bei den in der Regel verhältnismäßig kleinen Primärverlusten werden auch die Unterschiede zwischen ihnen klein, und deshalb ist dieser Leerlaufstrom im Sekundärnetz gegenüber den eigentlichen Belastungsströmen meist vernachlässigbar. Immerhin kann bei teilweiser Abschaltung von Transformatoren auch der Ausgleichstrom einzelne Transformatoren überlasten. Daraus erklären sich dann die einander folgenden Durchschmelzungen der Sicherungen an den Transformatoren, wenn in einem primär und sekundär zusammengehängten Netz infolge einer Störung erst einmal eine Sicherung geschmolzen ist. Zunächst erfolgt andere Lastverteilung mit örtlicher Verschiebung des Lastschwerpunkts, dann Überlastung der zwei benachbarten Transformatoren usw. Man hängt darum sehr ausbreitete Stadtnetze nicht überall zusammen, sondern bildet Distrikte (s. Abb. 140, Kap. V), welche gekoppelt werden können, für gewöhnlich aber getrennt sind.

Bei der Parallelschaltung von Drehstromtransformatoren können sich noch Schwierigkeiten besonderer Art ergeben, selbst wenn bei symmetrischer Belastung aller drei Phasen anstandsloser Parallelbetrieb möglich ist¹⁾. Maßgebend hierfür sind die Schaltungsart und der kleinste Winkel, um den ein Vektor der sekundären Klemmenspannung einem Vektor der primären voreilt. Dieser Winkel ist bei der Dreieck-Dreieckschaltung 0° , bei der Stern-Sternschaltung 60° , bei der Dreieck-Stern- oder Stern-Dreieckschaltung, je nach dem Anschluß, 30° oder 90° . Neuerdings benutzt man häufig die Zickzack- oder Doppelsternschaltung, wobei die Wicklungen einer Phase auf zwei verschiedenen Kernen liegen. Die Sternspannungen setzen sich also aus zwei gleichen um 120° versetzten Teilspannungen zusammen.

Nur Transformatoren bestimmter Schaltungsart und Verbindungsweise²⁾ können durch Verbindung gleichnamiger Klemmen parallel geschaltet werden, wenn Frequenz, Spannung und Übersetzungsverhältnis übereinstimmen.

Selbst dann aber ergibt sich ungleiche Lastverteilung infolge ungleicher Streuung bei unsymmetrischer Belastung. Die Motorenbelastung ist von Haus aus symmetrisch, die Lichtbelastung dagegen einphasig und daher im allgemeinen unsymmetrisch.

Bei rein einphasiger Belastung zweier primär und sekundär geschalteten Drehstromtransformatoren kann sich auch ungleiche Lastverteilung ergeben³⁾.

1) Vgl. Stern: ETZ 1907, S. 981. — Faye Hansen: ETZ 1908, S. 1081.

2) Siehe hierüber die Maschinennormalien des VDE, ETZ 1909, S. 506.

3) Vidmar, Dr. techn. M.: El. u. Maschinenb. 33, 1915, S. 65, 82, 92.

4. Günstigste Anzahl der Transformatorstationen.

Bei einem sekundär geschlossenen Netz wird man nach praktischen Gesichtspunkten das ganze Gebiet in Bezirke einteilen und für jeden eine Transformatorstation vorsehen, die etwa in den Schwerpunkt des Versorgungsgebietes zu liegen kommt. Sie muß auch noch für etwaige Ausschaltung von Transformatoren auf anderen Strecken ausreichen. Im allgemeinen wird man Straßenkreuzungen und öffentliche Plätze bevorzugen, an denen mehrere Straßen zusammenstoßen, wird einzelne hervorragende Anschlüsse, wie Theater oder Rathaus, selbst zu Unterstationen ausbilden oder von mehreren Seiten an das Netz derart anschließen, daß auch im Fall des Versagens einer Unterstation keine Betriebsunterbrechung eintreten kann. Man bringt die örtlichen Rücksichten mit den technischen Anforderungen möglichst in Einklang. Durch Vermehrung der Unterstationen werden die Kosten der Leitung selbst vermindert, weil jeder Transformator für das Sekundärnetz als Stromquelle erscheint. Andererseits werden durch die erhöhte Zahl der Transformatoren die hierfür verauslagten Kosten vergrößert, und es läßt sich deshalb für jeden Fall eine günstigste Anzahl von Transformatorstationen ermitteln, bei welcher die gesamten Anlagekosten für Leitung samt Transformatoren am kleinsten werden.

Dieser Fall ist für eine einfache, unverzweigte Leitung durch Haas¹⁾ und Pojatzi²⁾, für regelmäßige Vielecke durch Sengel³⁾ behandelt worden, während hier eine Untersuchung folgen soll, welche die Behandlung von C. von Schmidt⁴⁾ selbständig weiterführt.

Im folgenden wird stets die Abnahme oder Belastung w in Watt/m Straßenlänge oder Häuserflucht angegeben.

Im einfachsten Falle soll ein Leitungsstrang von der Länge L mit der Belastung W betrachtet werden, wobei auf jede der n Transformatorstationen die Streckenlänge $l = L/n$ und die Leistung $W = wL/n$ entfallen. Jeder Transformator liefert nach beiden Richtungen je die halbe Leistung. Der Querschnitt der Leitung ist

$$f = \frac{1}{2} \cdot \frac{w}{k p E^2 \cos \varphi} \cdot \frac{L^2}{n^2} \text{ mm}^2$$

für Drehstrom mit der verketteten Spannung E und doppelt so groß für Wechselstrom mit derselben Spannung. p ist der relative Spannungsverlust, $p/\cos \varphi$ der relative Leistungsverlust. Der Leiteraufwand pro Strecke L ist bei Drehstrom

$$3Lf = \frac{3}{2} \cdot \frac{w}{k p E^2 \cos \varphi} \cdot \frac{L^3}{n^2},$$

bei Wechselstrom um ein Viertel größer (also $\frac{4}{2}$ statt $\frac{3}{2}$). Setzt man die Leitungskosten proportional $a + bf$, dann betragen sie für die ganze Strecke von L Meter

$$K_l = (a + 3bf) L = C_1 + C_2/n^2.$$

¹⁾ Haas, R.: ETZ 1896, S. 130.

²⁾ Pojatzi, J.: ETZ 1896, S. 329.

³⁾ Sengel, A.: ETZ 1899, S. 807ff.

⁴⁾ Schmidt, C. von: ETZ 1910, S. 1085ff.

Ihr veränderlicher Anteil ist also umgekehrt proportional dem Quadrat der Zahl der Unterstationen. C_1 und C_2 sind Konstanter.

Bezeichnet man den Preis eines Transformators samt Säule mit $A + BW$, dann sind die Gesamtausgaben

$$\begin{aligned} K_t &= An + BnW = An + BwL \\ &= C_3 + nC_4, \end{aligned}$$

mit C_3 und C_4 als Konstanten.

Die Kurve der Kupferkosten (Abb. 330) wird also eine mit dem Scheitel nach unten gerichtete Parabel, jene der Transformatoren

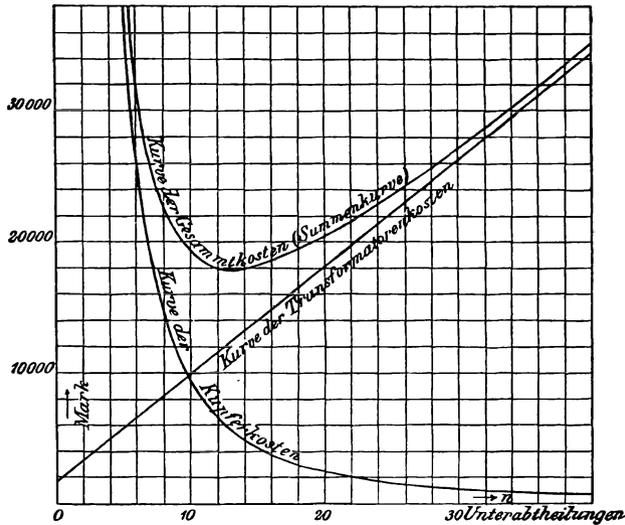


Abb. 330.

eine Gerade sein. Addiert man die Ordinaten der beiden Kurven, so zeigt ihre Summenlinie einen kleinsten Wert, der für $w = 2,5$ Watt für $1 m$ und $p = 2,7\%$ bei $n = 12$ bis 14 Unterstationen für die Gesamtlänge von $10 km$ auftritt. Die Streckenlänge wird also hier etwa 700 bis $800 m$ sein.

Rechnerisch ergibt sich für den günstigsten Abstand der Transformatorstationen bei $\cos \varphi = 1$:

$$\begin{aligned} [L] &= \sqrt[3]{\frac{kE^2 p A}{bw}} = 3,85 \sqrt[3]{\frac{E^2 p A}{bw}} \text{ für Einphasenstrom,} \\ &= \sqrt[3]{\frac{4}{3} \frac{kE^2 p A}{bw}} = 4,24 \sqrt[3]{\frac{E^2 p A}{bw}} \text{ für Drehstrom.} \end{aligned}$$

Setzt man wie in Abb. 330 für Einphasenstrom $k = 58$, $E = 110$ Volt, $p = 3\%$ ($p = 2,7\%$), $A = 820 RM$, $b = 0,0135 RM^1$, $w = 2,5 W/m$, dann

¹⁾ b sind hier die Kosten für einen Querschnitt der 2-, bzw. 3-dräftigen Leitung.

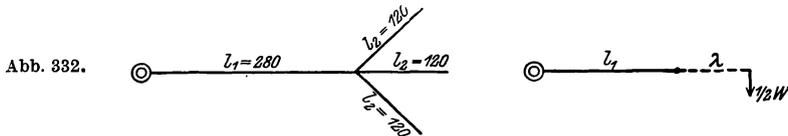
folgt

$$[l] = 3,85 \sqrt[3]{\frac{110^2 \cdot 0,027 \cdot 820}{0,0135 \cdot 2,5}} \approx 770 \text{ m}$$

wie oben.

Für Abstände bis zu 500 m kann man diese einfachen Annahmen aufrechterhalten. Die Streckenlänge l ist dann bei Abgabe nach zwei Seiten stets gleich dem Abstand D der Transformatorstationen, bei Abgabe nach n -Richtungen $n/2$ mal diesem Abstand D . Für Abstände über 500 m soll hier ein möglichst einfaches Straßenbild samt Netzform angenommen werden, so daß die Streckenlänge größer als der Abstand der Transformatorstationen wird. Man kann durch Einführung der fiktiven Leitungslänge an Stelle der Verzweigungen hier leicht eine gewisse Gesetzmäßigkeit für bestimmte Netzformen finden. Hier soll angenommen werden, daß bei einem Abstand $D > 500$ m und bei Stromlieferung nach n Seiten die gleichmäßig belastete Leitungslänge

$$l = \left(\frac{D}{500}\right)^2 n \frac{D}{2}$$



ist; bei $D = 800$ m Abstand für $n = 4$ Richtungen wäre also

$$l = \left(\frac{800}{500}\right)^2 4 \frac{500}{2} = 2560 \text{ m,}$$

oder 1280 m zwischen zwei Stationen, während in gerader Linie (unverzweigt) nur 800 m geborgen werden können. Nimmt man jedoch etwa folgenden Fall (Abb. 331, 332) an, der wohl denkbar ist, dann ergibt die Rechnung auf fiktive Länge bei w Watt/m Belastung, daß jeder der Transformatoren I und II jeweils nach einer Richtung zu liefern hat, als ob er eine fiktive Länge $l_1 + \lambda = l_2$ besäße, an deren Ende die Belastung

$$\frac{W}{2} = \frac{w}{2} \left[\frac{(l_1 + l_2)(l_1 + n'l_2) + (n' - 1)l_1 l_2}{l_1 + l_2} \right]$$

angriffe. Im gezeichneten Falle wird der Klammerausdruck für $l_1 = 280$ m, $l_2 = 120$ m, $n' = 3$ leicht ermittelt zu $808 w$. Der Querschnitt für jeden der $n' = 3$ Zweige von der Länge l_2 wird ein Drittel des Querschnittes von l_1 . Die Kupfermenge ist also

$$l_1 f + n' l_2 \frac{f}{n'} = (l_1 + l_2) f = \frac{D}{2} f;$$

für jede Richtung ist also die auf eine Transformatorstation entfallende Menge an Leitermetall gleich dem Querschnitt der unverzweigten Leitung vervielfacht mit dem halben Abstand D der Stationen voneinander.

Mit diesen Annahmen findet die Einführung der Streckenlänge ihre Begründung. Bei unregelmäßigen Netzformen wird man abweichende und auch übereinstimmende Werte finden. Hier mußten Annahmen gemacht werden, die sich ziffernmäßig verfolgen lassen und mit einer Reihe ausgeführter Netze übereinstimmen.

Der Vergleich ist hier für ein unterirdisch angelegtes Stadtnetz mit 5000 oder 6000 Volt primärer Spannung und 3×120 Volt bzw. $3 \times 208/3 \times 120$ Volt sekundärer Spannung durchgeführt worden. Im letzten Falle ist ein Vierleiternetz gedacht.

Die Kosten des primären Netzes üben nahezu keinen Einfluß auf den günstigsten Abstand der Transformatoren aus, sie entfallen hier also.

Die Preise der Transformatoren sind angenähert

bis 30 kW Leistung	400 + 32	kW RM
über 30 „ „	800 + 18,5	„ „

Eine fertig eingerichtete Schaltsäule kostet 2000 RM. Die festen Kosten A der Transformatorstation sind also 2400 bzw. 2800 RM.

Die Preise verlegter Kabel (bis 700 Volt) seien hier bei einem Grundpreis von etwa 70 £ per Tonne Elektrolytkupfer:

für Dreileiterkabel	1700 + 57,5 f	RM/km,
„ Vierleiterkabel	1700 + 76,5 f	„
„ Montage, Muffen usw.	8,5 f	„
für Herstellung des Grabens, Auffüllen mit Sand, Abdeckung des Kabels, Abfuhr des übrigbleibenden Bodens und Herstellung des Pflasters	3200	„

so daß die Kosten $a + bf$ für 1 m verlegten

Dreileiterkabels	4,9 + 0,066 f	RM,
Vierleiterkabels	4,9 + 0,085 f	„

betragen. Mit diesen Werten sind nun Tabellen für $w = 60, 50, 40, 30, 20$ Watt für 1 m entworfen worden. Die Querschnitte sind für $p = 1,5\%$ und 2% Verlust berechnet worden aus den Beziehungen

$$f = L \text{ kW} / 11,25 \text{ für } E = 3 \cdot 120 \text{ V} \quad p = 1,5\%$$

$$L \text{ kW} / 15 \quad \text{„} \quad 3 \cdot 120 \text{ „} \quad 2\%$$

$$L \text{ kW} / 33,75 \quad \text{„} \quad 3 \cdot 208 \text{ „} \quad 1,5\%$$

$$L \text{ kW} / 45 \quad \text{„} \quad 3 \cdot 208 \text{ „} \quad 2\%$$

wobei kW hier die Belastung nach jeder Richtung andeutet, also bei Speisung nach rechts und links die halbe Leistung des Transformators ist.

Um stetige Linien zu erhalten, sind die Querschnitte nicht handelsüblich abgestuft worden. Der Kürze halber sind hier nur die Werte für $p = 2\%$ Verlust (bei $\cos \varphi = 0,9$) wiedergegeben.

Wenn der Festwert a in einem bestimmten Falle von dem hier angenommenen Betrag von 4,9 RM abweicht, lassen sich die Kosten für das kW je nach den Einzelwerten umrechnen. Auf den günstigsten Abstand üben sie keinen Einfluß aus, dagegen tun dies die Festwerte A und b .

Mit den Werten der Tabelle I sind auch die Schaubilder Abb. 333 und 334 für 3×120 Volt und 3×208 Volt, $p = 0,02$, bei $w = 60$ W/m entworfen, wobei auf der vertikalen Achse die Kosten für 1 kW in

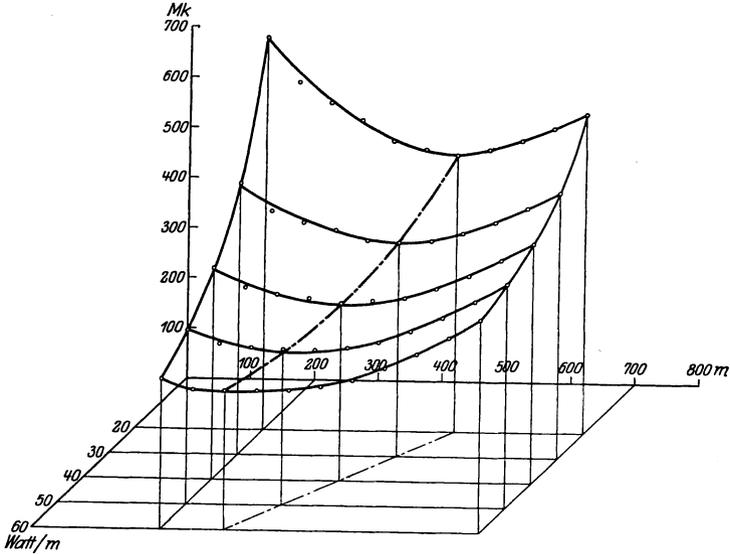


Abb. 333. 3×120 Volt. $w = 60$ W/m.

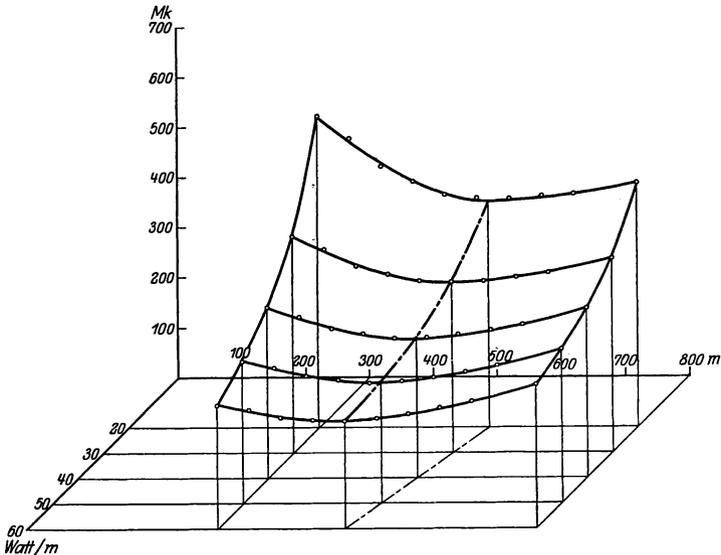


Abb. 334. 3×208 Volt. $w = 60$ W/m.

R.M., auf der horizontalen Achse die Abstände der Transformatoren in Meter, auf der nach vorn gerichteten Achse die Belastungen w für 1 m Straßenlänge aufgetragen sind.

Tabelle I. Spannung 3×120 Volt.

Entfernung der Transformatorstationen voneinander m	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650
	2 bis 3	2 bis 3	2 bis 3	2 bis 3	3	3 bis 4	4	4	4	4
Stromabgabe nach Richtungen	250	320	385	450	600	750	1000	1200	1450	1650
Streckenlänge für eine Transformatorstation	$w = 60$ Watt für 1 m.									
Größe der Transformatorstation	15	19,2	22,5	27	36	45	60	72	87	99
Belastung nach jeder Eichtung	6	7,7	9	10,6	12	13,6	15	18	21,8	24,8
Querschnitt eines Leiters nach jeder Richtung	22	36	50	68	90	112	140	184	244	298
Kosten für 1 kW	298	278	275	277	277	286,5	299,5	323,5	352	385
Größe der Transformatorstation	$w = 50$ Watt für 1 m.									
Belastung nach jeder Richtung	12,5	16	18,75	22,5	30	37,5	50	60	72,5	82,5
Querschnitt eines Leiters nach jeder Richtung	5	6,5	7,5	9	10	11	12,5	15	18	20,6
Kosten für 1 kW	18,5	30	41,5	56,5	75	94	116	154	200	250
Größe der Transformatorstation	$w = 40$ Watt für 1 m.									
Belastung nach jeder Richtung	10	12,8	15	18	24	30	40	48	58	66
Querschnitt eines Leiters nach jeder Richtung	4	5	6	7	8	9	10	12	14,5	16,5
Kosten für 1 kW	15	24	33	45	60	75	93	122	162	198
Größe der Transformatorstation	$w = 30$ Watt für 1 m.									
Belastung nach jeder Richtung	7,5	9,6	11,3	13,5	18	22,5	30	36	43,5	49,5
Querschnitt eines Leiters nach jeder Richtung	3	3,8	4,5	5,3	6	6,8	7,5	9	10,9	12,4
Kosten für 1 kW	11	18	25	34	45	56	70	92	122	149
Größe der Transformatorstation	$w = 20$ Watt für 1 m.									
Belastung nach jeder Richtung	5	6,4	7,5	9	12	15	20	24	29	33
Querschnitt eines Leiters nach jeder Richtung	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	6	7,3	8,25
Kosten für 1 kW	781,5	691,5	651,5	618,5	576	561	550	580	605,5	605,5

Tabelle II. Spannung $3 \times 208/3 \times 120$ Volt.

Entfernung der Transformatorstationen voneinander m	300	350	400	450	500	550	600	650	700	800
	2 bis 3	2 bis 3	3	3 bis 4	4	4	4	4	4	4
Stromabgabe nach Richtungen	375	450	600	750	1000	1200	1450	1650	1950	2550
Streckenlänge nach Transformatorstationen	$w = 60$ Watt für 1 m.									
Größe der Transformatorstation	22,5	27	36	45	60	72	87	99	117	152
Belastung nach jeder Richtung	9	10,6	12	13,6	15	18	21,8	24,8	29,3	38,3
Querschnitt eines Leiters nach jeder Richtung	16,5	22,5	30	37,5	46,5	61,5	81	99	126	187,5
Kosten für 1 kW	244	284,5	220,5	215,5	212,5	218,5	227	238,5	252	285
Größe der Transformatorstation	$w = 50$ Watt für 1 m.									
Belastung nach jeder Richtung	18,75	22,5	30	37,5	50	60	72,5	82,5	97,5	127,5
Querschnitt eines Leiters nach jeder Richtung	7,5	9	10	11	12,5	15	18	20,6	24,4	31,9
Kosten für 1 kW	13,5	18,5	25	31	39	51,5	67,5	82,5	105	166,5
Größe der Transformatorstation	$w = 40$ Watt für 1 m.									
Belastung nach jeder Richtung	281,5	268,5	252,5	244,5	238,5	242,5	250	261	273,5	305
Querschnitt eines Leiters nach jeder Richtung	15	18	24	30	40	48	58	66	78	102
Kosten für 1 kW	6	7	8	9	10	12	14,5	16,5	19,5	25,5
Größe der Transformatorstation	$w = 30$ Watt für 1 m.									
Belastung nach jeder Richtung	11	15	20	25	31	41	54	66	84	125
Querschnitt eines Leiters nach jeder Richtung	338	320	297	287,5	277	279	284	294	305	335
Kosten für 1 kW	11,3	13,5	18	22,5	30	36	43,5	49,5	58,5	76,5
Größe der Transformatorstation	$w = 20$ Watt für 1 m.									
Belastung nach jeder Richtung	4,5	5,3	6	6,8	7,5	9	10,9	12,4	14,6	19,1
Querschnitt eines Leiters nach jeder Richtung	8	11,5	15	18,5	23	31	40,5	49,5	63	93,5
Kosten für 1 kW	431	405	371	354,5	341	339	341	348,5	357,5	384,5
Größe der Transformatorstation	$w = 20$ Watt für 1 m.									
Belastung nach jeder Richtung	7,5	9	12	15	20	24	29	33	39	51
Querschnitt eines Leiters nach jeder Richtung	3	3,5	4	4,5	5	6	7,3	8,25	9,75	12,75
Kosten für 1 kW	620,5	576	519,5	490	463	456,5	455	459	463,5	485

Die Abbildungen enthalten auch die strichpunktierte Linie $D = f(w)$, welche die günstigsten Abstände miteinander verbindet und, auf die $w - D$ -Ebene projiziert, angenähert eine Gerade ergibt. Da diese graphischen Darstellungen noch stets von den Werten A und b abhängen, ist auch noch ermittelt worden, wie sich die Verhältnisse ändern, wenn der Festwert A der Reihe nach 2200, 2000, 1800, 1600 und 1400 R.M. beträgt, während b sich von 0,01 bis 0,26 für 1 m Länge ändert. Der Abstand D der Transformatoren ist vertikal nach oben, b horizontal nach rechts, A horizontal nach vorn in Abb. 335 für $w = 40$ W/m und in Abb. 336 für $w = 20$ W/m aufgetragen worden.

5. Wahl der Transformatorgröße.

Man muß außer dem Mindestwert an Anlagekosten auch den kleinsten Wert der jährlichen Betriebskosten in Betracht ziehen. Sie werden

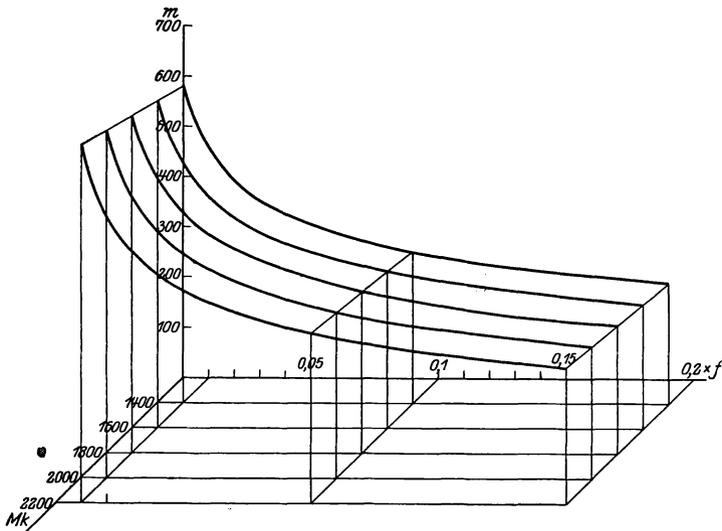
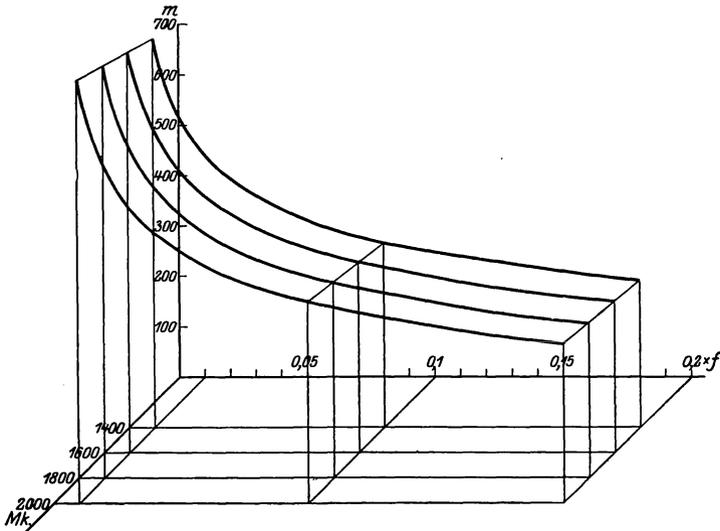


Abb. 335. $w = 40$ W/m.

durchaus nicht zusammenfallen, da etwa im Falle der Abb. 330 die vielen kleinen Transformatoren zu viel Magnetisierungsarbeit jährlich verbrauchen. Man erhält für den dort behandelten Fall kleinere Betriebskosten bei weniger Unterstationen. Es hat keinen Zweck, hierfür ein bestimmtes Beispiel durchzurechnen, da die wirtschaftlich günstigen Verhältnisse von der Benutzungsdauer der Transformatoren, von den Selbstkosten der kWh und schließlich in hohem Maße davon abhängen, ob man die Transformatoren während des größten Teils des Jahres selbsttätig oder von der Hand ausschaltet, sobald die gesamte Leistung entsprechend gesunken ist.

Damit hängt auch die Frage nach der Wahl der in bezug auf die Beanspruchung günstigen Größe der Transformatoren zusammen.

Ohne ein zusammenhängendes Sekundärnetz muß jeder Transformator seine normale Belastung und gelegentliche Überlastungen ohne Schädigungen allein zu ertragen vermögen. Wenn das Sekundärnetz aber zusammenhängt, werden bei Löschungen oder Einschaltungen die Maxima der Belastungen für einzelne Transformatorstationen unregelmäßig, je nach der Art des primären und sekundären Netzes, wandern und zuweilen auch dann auftreten, wenn die gesamte Anlage nicht maximal belastet ist. Man wird deshalb gut tun, die Transformatoren in Unterstationen so zu bemessen, daß sie den an sie herantretenden maximalen Beanspruchungen während der Dauer der Vollbelastung gewachsen sind und auch weitere vorübergehende Stromstöße, die beim Abschmelzen von Sicherungen oder anderen Störungen auftreten können, noch auszuhalten vermögen. Hier kommt nun der günstige Umstand in Betracht, daß der Betrieb in Unterstationen, soweit die Transforma-

Abb. 336. $w = 20 \text{ W/m}$.

toren in Betracht kommen, als ein aussetzender aufzufassen ist, wobei in der Mehrzahl der Fälle kurze Perioden starker Beanspruchung mit langen Perioden abwechseln, innerhalb deren die Transformatoren schwach belastet sind oder nur durch ihre Eisenverluste erwärmt werden.

Man muß sich nur versichern, daß die Transformatoren genügende Überlastungen auf die Dauer einiger Stunden vertragen können, und sie dann nicht entsprechend der maximalen Leistung der Unterstation, sondern kleiner, vielleicht $\frac{2}{3}$ bis $\frac{3}{4}$ so groß wählen. Dadurch kann man erreichen, daß der Jahreswirkungsgrad steigt, und daß, besonders wenn noch automatische oder Handausschaltung während der Sommermonate vorgesehen wird, nicht unerhebliche Betriebsersparnisse erzielt werden. Die einzige Schwierigkeit liegt dann darin, daß die während

der Dauer der maximalen Belastung überanspruchten Transformatoren größere Spannungsabfälle aufweisen. Aber diesem Übelstand steht mildernd gegenüber, daß bei Zentralen mit gemischtem Motoren- und Lichtbetrieb der Leistungsfaktor gegen Abend zunimmt, daß also hohe Belastung mit kleiner Verschiebung zusammenfällt. Sollte das noch nicht ausreichen, um die Netzspannung in der kurzen Zeit der Höchstbelastung genügend konstant zu halten, so kann man, nach den Angaben des Zentralen-Amperemeters oder einer Spannungsrückleitung die Zentralenspannung ein wenig, etwa 1%, etwas erhöhen. Man sieht, wie hier die Fragen der eigentlichen Leitung und der Leitung im weiteren Sinne ineinander übergreifen.

6. Rotierende Umformer.

Es ist oft erforderlich, hochgespannten Mehr- oder Einphasenstrom in Gleichstrom umzuwandeln. Die nächstliegende Lösung ist die Kuppelung zweier besonderen Maschinen, von denen die eine als Motor, die andere als Generator arbeitet, ein solcher Maschinensatz ist ein Motor-generator. Für die Berechnung der primären Wechselstromleitungen ist der Motorteil des Aggregats offenbar nur als eine mit Richtungs-widerstand behaftete Abnahme zu behandeln, und es ergeben sich nur insofern Unterschiede zwischen dem synchronen und dem asynchronen Motor-generator, als jener durch Übererregung auf $\cos \varphi \approx 1$ eingestellt werden kann, während dieser zwischen halber und voller $\cos \varphi \approx 0,8-0,9$, bei Leerlauf oder Anlauf etwa 0,2 bis 0,3 aufweist. Der Gleichstromteil tritt für sein Netz als Stromquelle auf und bietet somit für die Netzberechnung ebenfalls keine neuen Gesichtspunkte dar.

Ähnliches gilt auch für den Fall, daß der Motor-generator aus zwei Gleichstrommaschinen verschiedener Spannung oder zwei Wechselstrommaschinen verschiedener Periodenzahl besteht. Die erste Lösung verwendet Thury für Seriensysteme, indem er bis zu 16 Generatoren von 2000 bis 3500 Volt in der Zentrale und eine entsprechende Anzahl Motoren für konstanten Strom von 50 bis 100 Amp. in Reihe schaltet und von den mit diesen Motoren gekuppelten Dynamos Licht- und Kraftstrom mit niedriger Spannung bei Parallelschaltung der Verbraucher entnimmt. Die Spannung der Motoren ist dabei je nach der Leistung verschieden. Die Cie. de l'Industrie électrique et mécanique in Genf hat nach diesem System 1906 für die Société Grénobloise de force et lumière eine Zentrale bei Moutiers in Savoyen errichtet, worin die Gesamtleistung von 6300 PS in vier Einheiten von je 1575 PS erzeugt wird; jede Einheit gibt 14400 Volt und ist aus zwei Paar Doppelmaschinen zusammengesetzt. Jeder Anker erzeugt also 3600 Volt, alle 16 in Reihe 57600 Volt und 75 Amp. Diese Leistung wird über 100 km Entfernung übertragen, wobei in den 100 Ohm der Leitung 7500 Volt und 562,5 kW = 13% der an den Klemmen verfügbaren Leistung verloren gehen. Die übertragene Leistung wird in zwei Unterwerken aufgenommen, von denen eines drei, das andere fünf Seriomotoren mit je 535 kW-Leistung besitzt. Im ersten Unterwerk sind die drei Motoren

mit einer Drehstromdynamo von je 500 kW gekuppelt, die mit dem Dreiphasennetz verbunden sind; im zweiten sind die fünf Motoren mit je einer Gleichstrommaschine von 500 kW gekuppelt, von denen das Straßenbahnnetz in Lyon gespeist wird. Obwohl durch dieses System große Gebiete mit mäßigem Aufwand an Leitungsmaterial bestrichen werden können, ist es der Regelungsschwierigkeiten¹⁾ halber nur vereinzelt zur Ausführung gekommen.

Es gibt aber noch eine weitere Lösung, den Einankerumformer, mit nur einer Bewicklung, welcher durch Schleifringe Wechselstrom zugeführt und von deren Kommutator Gleichstrom abgenommen werden kann. Eine solche Maschine nennt man einen rotierenden oder Einanker-Umformer. Da sie nur eine Wicklung und ein gemeinsames Feld besitzt, sind die Gleichstrom- und die Wechselstromspannung fest aneinander gekuppelt; man kann nicht die eine verändern, ohne gleichzeitig die andere zu verändern. Wir müssen hierauf noch zurückkommen, wollen aber zunächst das Verhältnis der Spannungen für reine Wattströme ermitteln. Zu diesem Zweck betrachten wir die Mitte zwischen zwei Gleichbürsten als einen fiktiven neutralen Punkt. Die Spannung zwischen diesem neutralen Punkt und jeder Bürste ist gleich der halben Gleichstromspannung und auch gleich dem Maximalwert der Sternspannung für jede Art von n Phasenumformer. Man erkennt das besonders deutlich bei der zweipoligen Anordnung, für welche die Wicklung schematisch durch einen Kreis mit dem Durchmesser E_g dargestellt werden kann. Dann ist $E_{\max} = \frac{E_g}{2}$ und somit der Effektivwert der verketteten Spannung bei n Phasen

$$E_n = 2 E \sin \frac{\pi}{n} = \frac{E_g}{\sqrt{2}} \cdot \sin \frac{\pi}{n}.$$

Dann wird

$$\text{bei Einphasenstrom } (n = 2) \quad E_1 = \frac{E_g}{\sqrt{2}} = 0,707 E_g,$$

$$\text{bei Drehstrom } (n = 3) \quad E_3 = \frac{E_g \sqrt{3}}{2 \sqrt{2}} = 0,612 E_g,$$

$$\text{bei Zweiphasenstrom } (n = 4) \quad E_2 = \frac{E_g}{2} = 0,50 E_g.$$

Die Gleichspannung ist also immer höher als die Wechselspannung. Umgekehrt wird im allgemeinen beim Mehrphasenumformer ($n > 2$) der Gleichstrom geringere Stärke besitzen als der Wechselstrom. Wenn nämlich von Verlusten abgesehen wird, müssen Gleichstrom- und Wechselstromleistung einander gleich sein; es muß also

$$n J E_p = E_g J_g \quad \text{oder} \quad J = \frac{2 \sqrt{2}}{n} J_g$$

sein, worin J den verketteten Strom bezeichnet, der den Schleifringen durch die Leitungen zufließt.

¹⁾ Näheres siehe ETZ 1906, S. 1091.

Hieraus ergibt sich

$$\text{bei Drehstrom} \quad J_3 = \frac{2\sqrt{2}}{3} J_g = 0,943 J_g,$$

$$\text{bei Zweiphasenstrom} \quad J_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} J_g = 0,707 J_g,$$

$$\text{bei Einphasenstrom} \quad J_1 = \sqrt{2} J_g = 1,414 J_g.$$

Da nun in den Windungen der Gleich- und der Wechselstrom einander entgegengesetzt laufen, so haben die Ankerströme ganz eigentümliche Form, die Ankerspulen erwärmen sich (in einem bestimmten Augenblick betrachtet) ungleich, und zwar am stärksten an den Schleifringanschlüssen, und die Gesamterwärmung ist bei gleichen Abmessungen und Leistungen kleiner als bei einer Gleichstrommaschine.

Die Erwärmungsgrenze ist aber bei Einankerumformern allein maßgebend, da sie für die Wattkomponenten der Wechselströme keine Armaturreaktion besitzen. Dagegen wird ein um 90° verzögerter Strom gerade in Phase mit dem Felde des synchronen Motorteiles liegen, also magnetisierend wirken, ein um 90° voreilender Strom das Feld schwächen. Da das Feld immer der zugeführten Spannung entsprechen muß, wird bei Schwächung der Erregung so viel nacheilender Strom entstehen, daß dessen Armaturreaktion gerade wieder das erforderliche Feld herstellt. Umgekehrt werden bei stärkerer Erregung voreilende Ströme im Umformeranker fließen, die das zu starke Feld wieder auf den normalen Betrag abschwächen. Man kann also durch Veränderung der Erregung eines Umformers nur die Phase seines Ankerstromes, nicht aber die Klemmenspannung auf der Gleichstromseite direkt beeinflussen.

Dagegen ist es möglich, dies indirekt dadurch zu erzielen, daß man in die Zuleitung zum Motor Induktanz verlegt. Erregt man dann schwach, so entstehen nacheilende Ströme, die in der Drosselspule oder Induktanz der Leitung einen Spannungsverlust hervorrufen. Dadurch sinkt die Klemmenspannung auf der Wechselstromseite und die ihr proportionale Klemmenspannung auf der Gleichstromseite. Bei Erhöhung der Erregung steigen beide Spannungen an den Klemmen des Umformers, weil der Verlust in der Drosselspule oder induktiven Zuleitung jetzt negativ, d. h. zu einer Zusatzspannung geworden ist.

Versieht man einen weit von der Zentrale entfernten Umformer mit einer Kompoundwicklung, so wird mit wachsender Belastung der Gleichstromseite die Erregung des Feldes um den Betrag der Amperewindungen des Hauptschlusses zunehmen. Man kann dann eine automatische Kompoundierung für eine gegebene maximale Belastung und Leitung auf der Gleichstromseite hervorrufen, indem man die Zuleitung auf der Wechselstromseite mit entsprechender Drosselung versieht und den Nebenschluß so einstellt, daß er bei Leerlauf und schwacher Belastung nacheilende Ströme aufnimmt; diese Ströme rufen dann in der induktiven primären Zuleitung einen starken Spannungsabfall hervor. Mit wachsender Belastung steigt die Felderregung durch die

Hauptschlußpule, die Nacheilung der primären Ströme nimmt mehr und mehr ab, erreicht bei mittlerer bis normaler Belastung den Grenzwert $\varphi = 0$ und geht schließlich in Voreilung über. Während der ganzen Zeit kann dann, je nach der Wahl der Verhältnisse, der Spannungsabfall in den primären Zuleitungen annähernd konstant geblieben oder sogar (durch die Voreilung) trotz wachsender Primärströme kleiner geworden sein. Die Gleichstromseite des Umformers kann dann ihr Leitungsnetz trotz des Verlustes in der langen Primärzuleitung mit konstanter oder sogar mit der Belastung steigender Spannung versorgen.

7. Entwurf eines Stadtnetzes für Drehstrom.

Der Charakter der Stadt und ihrer Straßen ließen die für den laufenden Meter angenommenen Belastungen in Watt schätzen und die mit Kabeln zu belegenden Straßen wählen. Jedes Kabel zwischen zwei Knotenpunkten trägt in der maßstäblichen Abb. 140 S. 154 seine Länge in m und die seiner Berechnung zugrunde gelegte spezifische Belastung in W/m eingetragen. Die Art und Lage des Netzes ergab die zweckmäßige Anbringung von fünf Kabelkasten k_1 bis k_5 und aus örtlichen Abnahmeverhältnissen schienen 8 Transformatorensäulen T_1 bis T_8 in etwa 400 bis 500 m Entfernung wohl angebracht zu sein.

Nimmt man an, daß alle Transformatoren sekundär dieselbe Spannung liefern, dann kann das Netz in 9 voneinander unabhängige Bezirke geschaltet werden, wie dies durch punktierte Linien und die römischen Zahlen I bis IX angedeutet ist.

Die Arbeit begann also mit der Schätzung des Verbrauches, der zu erwartenden Anschlüsse und Belastungen, dann des Netzentwurfes und der Wahl der Speisepunkte. Nun folgt

a) **Der Entwurf des Niederspannungsnetzes.** Für jeden Bezirk müssen die Querschnitte ermittelt werden, die erforderlich sind, um bei den angenommenen Belastungen und bei einem Leistungsfaktor $\cos \varphi = 1$ Spannungsverluste unter 2% der Niederspannung von 216 Volt zu erzielen.

Jeder Bezirk wird also an den wahrscheinlichen Schnittstellen der größten Spannungsverluste geöffnet, und für die so erzielten offenen Stränge werden die Querschnitte ermittelt und auf Handelsmaß in möglichst wenigen Abstufungen abgerundet, wodurch leichter Vorrat und Ersatz an Kabeln und Muffen auf Lager zu halten ist. Hier sollen für das Verteilungsnetz nur zwei Querschnitte verwendet werden, nämlich 50 und 25 mm² für jede Ader der vieradrigen Kabel.

Bei $p\%$ größten Spannungsabfalls wird der Querschnitt einer offenen Drehstromleitung mit w Watt/m Belastung und l m Länge:

$$f = \frac{wl^2}{2kpE^2 \cos \varphi} = \frac{kW \cdot 10^3}{kpE^2 \cos \varphi} \cdot \frac{l}{2}.$$

Die Belastung in kW wurde an dem Pfeil inmitten der Länge des Kabelstückes wirkend gedacht. Für $p = 0,02$, $E = 216$, $\cos \varphi = 1$, $k = 57$ wird also

$$f = \frac{kW}{53,2} \cdot \frac{l}{2}.$$

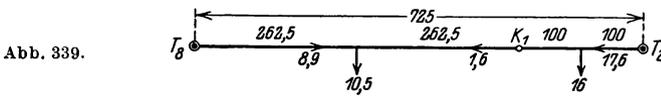
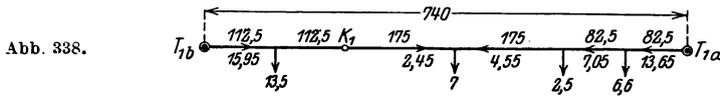
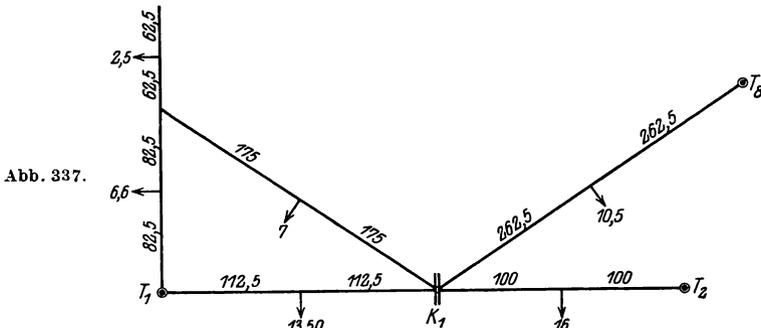
Bezirk I in Abb. 337 bis 339. Man schneidet bei k_1 auf und erhält dadurch zwei beiderseitig gespeiste Kabelstränge, nämlich $T_1 k_1 T_1$ und $T_2 k_1 T_2$.

Von T_{1a} in Abb. 338 werden zugeführt

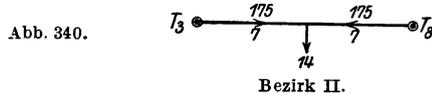
$$(6,6 \cdot 627,5 + 2,5 \cdot 575 + 7 \cdot 400 + 13,5 \cdot 112,5) : 740 = 13,65 \text{ kW},$$

der Querschnitt wird also

$$f = (13,65 \cdot 82,5 + 7,05 \cdot 82,5 + 4,55 \cdot 175) : 53,2 = 47,7 \text{ mm}^2 \approx 50 \text{ mm}^2.$$



Bezirk I.



Von T_2 werden zugeführt 17,6 kW (Abb. 339), so daß der Querschnitt sich zu $(8,9 \cdot 262,5) : 53,2 = 44 \text{ mm}^2 \approx 50 \text{ mm}^2$ berechnet.

Bezirk II zwischen T_3 und T_3 in Abb. 340 ergibt $7 \cdot 175 : 53,2 = 23 \text{ mm}^2 \approx 25 \text{ mm}^2$.

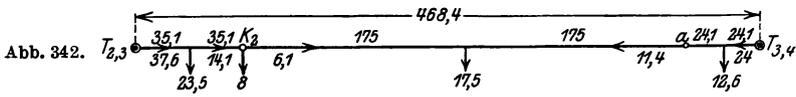
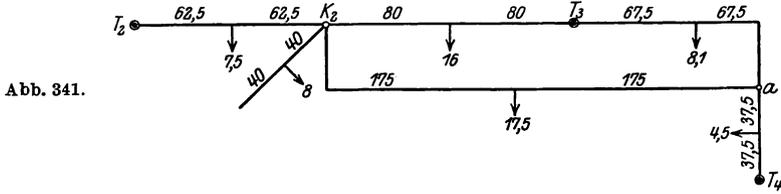
Bezirk III in Abb. 341 und 342 wird einfach durch die Wahl gleich starker Kabel.

Da nämlich T_3 , T_2 und T_4 gleiche Spannung haben, so kann man sich $T_3 k_2$ parallel zu $T_2 k_2$ und $T_3 a$ zu $T_4 a$ geschaltet denken, und erhält die Ersatzlängen (Abb. 342)

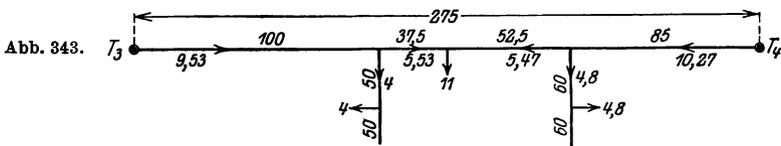
$$\text{für } T_{2,3} k_2 = \frac{125 \cdot 160}{125 + 160} = 70,2 \text{ m},$$

$$\text{für } T_{3,4} a = \frac{135 \cdot 75}{135 + 75} = 48,2 \text{ m}.$$

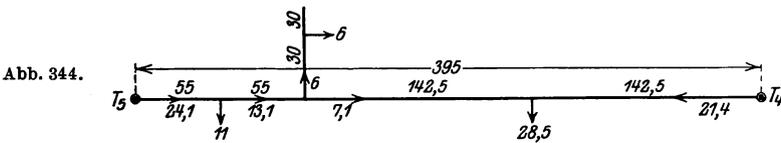
Dadurch erhält man den von zwei Seiten gespeisten Leiter $T_{2,3} - k_2$ — $T_{4,3}$, dem von links 37,6 kW zugeführt werden. Der zu 54 mm^2 ermittelte Querschnitt wird auf 50 mm^2 abgerundet.



Bezirk III.



Bezirk IV.



Bezirk V.

Bezirk IV erhält vom Transformator T_3 nach Abb. 343

$$(4 \cdot 175 + 11 \cdot 137,5 + 4,8 \cdot 85) : 275 = 9,53 \text{ kW.}$$

Hierfür genügt also ein Querschnitt von

$$f = (9,53 \cdot 100 + 37,5 \cdot 5,53) : 53,2 = 21,8 \text{ mm}^2.$$

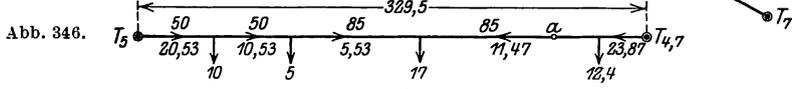
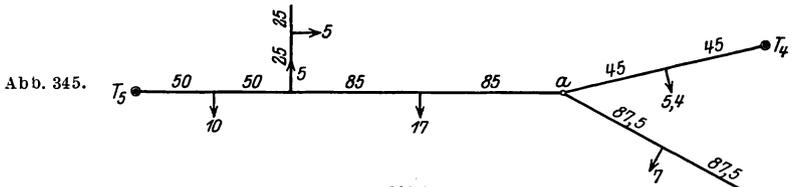
Für die Verbindung $T_3 T_4$ wurde durchwegs 50 mm^2 und für die Abzweigungen je 25 mm^2 gewählt.

Bezirk V nach Abb. 344 ergibt bei Annahme der in der Mitte vereinigten Lasten $f = 57,3$, wofür 50 mm^2 genügend erschienen.

Bezirk VI nach Abb. 345 und 346. Werden alle Kabel von gleichem Querschnitt genommen und nun $T_4 a$ und $T_7 a$ durch ein gleichwertiges

Kabelstück von der Länge $T_{4,7} a = \frac{90 \cdot 175}{50 + 115} = 59,5 \text{ m}$ ersetzt, dann ergibt sich Abb. 346 und aus der Stromverteilung mit

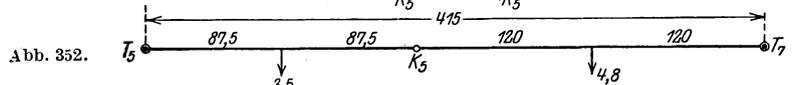
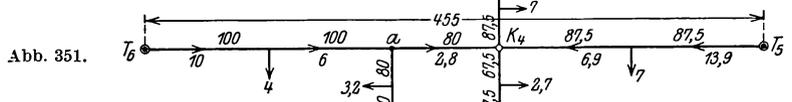
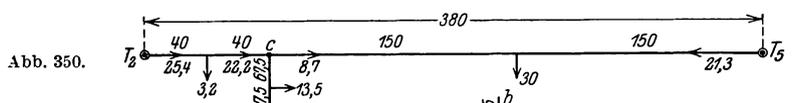
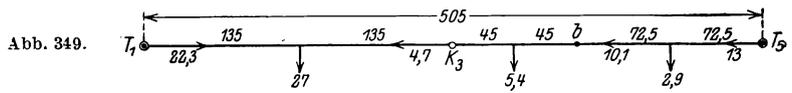
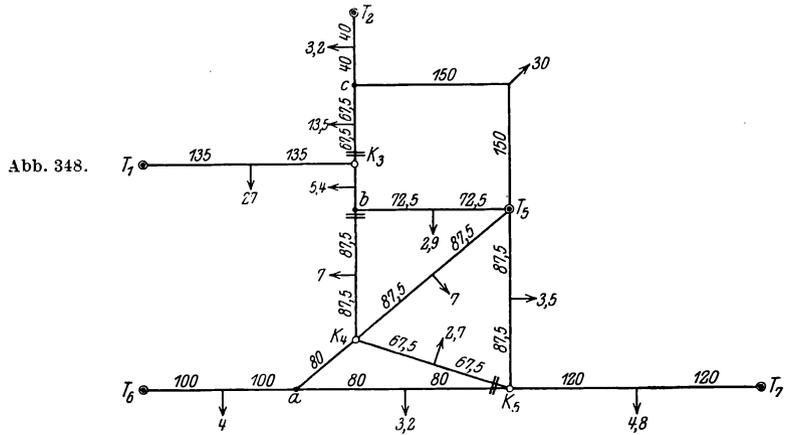
$(10 \cdot 279,5 + 5 \cdot 229,5 + 17 \cdot 144,5 + 12,4 \cdot 29,75) : 329,5 = 20,53 \text{ kW}$ von links folgt $f = 39 \text{ mm}^2$. Angenommen 50 mm^2 .



Bezirk VI.



Bezirk VII



Bezirk VIII.

Bezirk VII nach Abb. 347 erhält statt des berechneten Querschnittes von 14,2 den Querschnitt 25 mm².

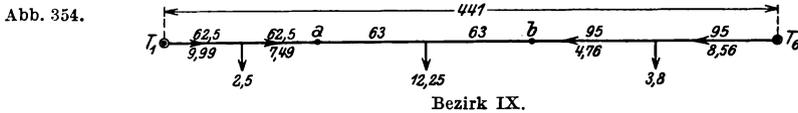
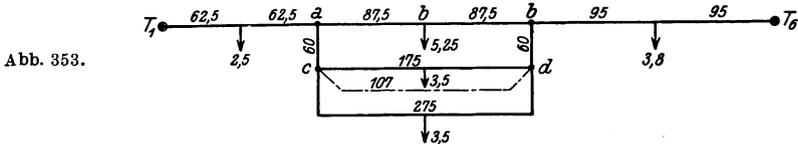
Bezirk VIII nach Abb. 348 bietet einige Schwierigkeit, da er vier Maschen besitzt und an fünf Transformatoren hängt. Man öffnet ihn bei k_3 , b und k_5 auf die angedeutete Weise und erhält dann die einfachen Fälle der Abb. 349—352.

Aus der gezeichneten Stromverteilung findet man

bei Abb. 349	$f = 56,7$	angenommen	50 mm ² ,
„ „	350	60	„ 50 mm ² ,
„ „	351	34,3	„ $T_6 - a - k_4 - T_5$ 50 mm ² ,
„ „	352	12	„ 25 mm ² .

Bei Abb. 351 nimmt man den durchlaufenden Strang 50 mm², die Stücke ak_5 und k_4k_5 je 25 mm², den Strang k_4b jedoch wieder 50 mm², um zu vermeiden, daß T_5b in Abb. 349 beim Schließen des Netzes noch stärker belastet werde.

Bezirk IX besteht aus einem von den Transformatoren T_1, T_6 gespeisten Kabel, wovon bei a und b in Abb. 353 zwei andere Kabel



parallel abzweigt sind. Diese beiden Kabel sollen die Hälfte des Querschnitts des durchlaufenden Leiters $T_1 T_6$ besitzen.

Die Parallelschaltung zwischen c und d , Abb. 353, besitzt die Ersatzlänge $\frac{175 \cdot 275}{175 + 275} = 107$ m und den Querschnitt $\frac{1}{2}f$. Parallel mit ab liegt also ein fiktiver Leiter von 227 m Länge und halbem Querschnitt, der zur gleichwertigen Länge

$$\frac{175 \cdot 2 \cdot 227}{115 + 2 \cdot 227} = 126 \text{ m}$$

vom Querschnitt f führt, in deren Mitte 12,25 kW in Abb. 354 angreifen. Von T_1 fließen 10 kW zu. Der Querschnitt ergibt sich zu 29,5 mm². Man wählt $T_1 - a - b - T_6$ zu 50 mm², die parallelen Stücke zu 25 mm².

Damit ist der erste Entwurf des Netzes beendet, und man muß nunmehr überprüfen, ob die gewählten Ausmaße auch im geschlossenen Netz sich als zweckmäßig erweisen, d. h. weder überlastet sind, noch zu hohe Spannungsverluste ergeben. Wegen der Bereitschaft bei Störungen und der Möglichkeit örtlicher Überlastung müssen zu-

oder Leistungen. In der Zeichnung sind diese Stellen nur angenähert angegeben.

Bezirk I. Man verlegt alle Leistungen nach T_1 , k_1 , T_2 und T_3 und erhält ihre Leistungskomponenten, wie sie in Abb. 355 angegeben sind. In k_1 greifen 26,46 kW an, die aus den vier Richtungen im umgekehrten Verhältnis der Abstände von den Transformatoren zufließen, Abb. 356. Superponiert man diese zwei Strombilder, dann ergibt sich die wirkliche Strom- oder Leistungsverteilung wie in Abb. 357.

Bezirk II ist in Abb. 340 schon erledigt.

Bezirk III. Man verlegt alle Leistungen nach T_2 , T_3 , T_4 , k_2 und a , Abb. 358, und erhält in k_2 als Gesamtbelastung 28,5 kW, in a 15,05 kW. Nun ersetzt man wie beim Entwurfe und $T_3 k_2$ $T_2 k_2$ parallel durch

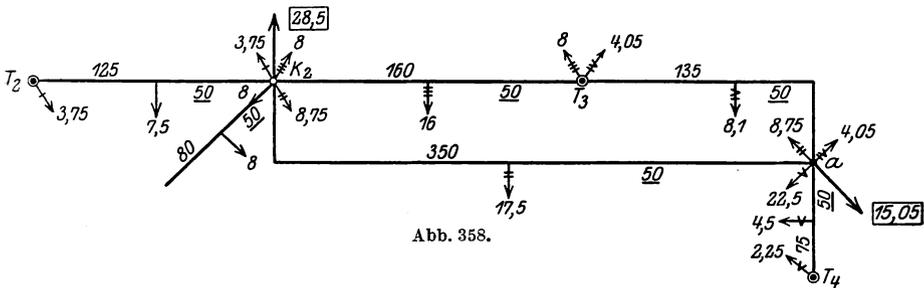


Abb. 358.

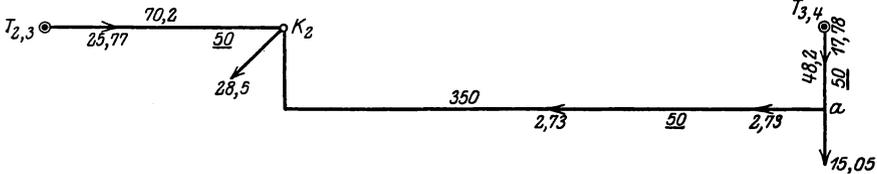


Abb. 359.
Bezirk III.

einen Leiter. Ebenso $T_3 a \parallel T_4 a$ durch den äquivalenten Leiter und erhält so Abb. 359, woraus die Leistungsverteilung sich unmittelbar ergibt.

Von $T_{2,3}$ strömen 25,77 kW, von $T_{3,4}$ 17,78 kW zu. Diese Beträge müssen nun im umgekehrten Verhältnis der Widerstände $T_2 k_2$, $T_3 k_3$ und $T_3 a$, $T_4 a$ verteilt werden, wie Abb. 360 andeutet. Die wahre Leistungsverteilung in Abb. 361 rührt von der Superposition der Strombilder Abb. 358 und 360 her.

Für Bezirk IV, V, VI, VII sind die Stromverteilungen schon beim Entwurfe in Abb. 343 bis 347 gefunden worden.

Bezirk VIII verursacht auch hier bei der Überprüfung die meiste Arbeit. Nach der Verlegung auf die Knotenpunkte, wobei zusammengehörige Komponentenströme gleiche römische Ziffern quer durch den Pfeil aufweisen, ergeben sich die umrahmten Belastungen in den

sechs Knotenpunkten der Abb. 362. Das Netz ist in Abb. 363 nochmals gezeichnet.

Da angenommen werden kann, daß die fünf Transformatoren dieselbe Spannung liefern, so kann man Leitungen, die von verschiedenen Transformatoren nach demselben Knotenpunkt führen, durch eine gleichwertige Leitung ersetzen, die von einem dieser Transformatoren ausgeht, ohne daß dadurch an der Stromverteilung im übrigen Netze etwas geändert wird. So kann man die Kabel T_2c und T_5c durch ein Kabel von $(300 \cdot 80) : 380 = 63,2$ m Länge ersetzen, das von T_5 ausgeht, und die Kabel T_5k_5 und T_7k_5 durch ein ebenfalls von T_5 ausgehendes Kabel von $(350 \cdot 480) : 830 = 202,5$ m Länge (50 mm^2).

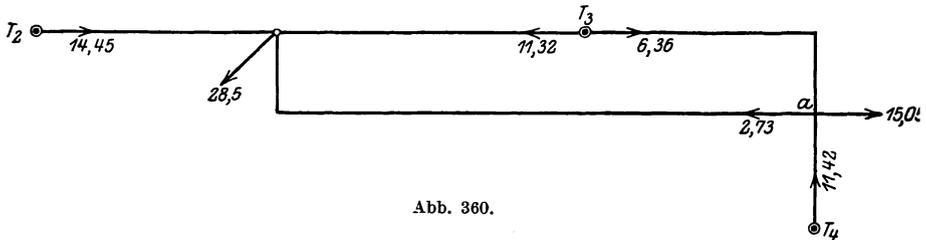
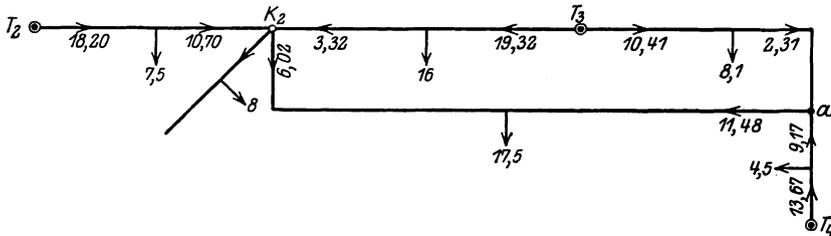


Abb. 360.

Abb. 361.
Bezirk III.

Das Dreieck ak_4k_5 kann also durch den Stern S ersetzt werden wobei

$$aS = \frac{ak_4 \cdot ak_5}{ak_5 + ak_5 + k_4k_5} = \frac{80 \cdot 320}{80 + 320 + 270} = 38,2 \text{ m},$$

$$k_4S = \frac{80 \cdot 270}{670} = 32,25 \text{ m},$$

$$k_5S = \frac{320 \cdot 270}{670} = 129 \text{ m}.$$

Durch diese widerstandstreuen Umbildungen erhält man Abb. 364 mit den auf die überbleibenden Knoten verlegten Belastungen. Da nun aber c und a keine echten Knoten mehr sind, kann auch $T_1k_3 \parallel T_5k_3$ und $T_6S \parallel T_5S$ gelegt werden, wobei sich Abb. 365 ergibt. Werden nun schließlich an Stelle der beiden parallelen Kabel, die den einzigen noch

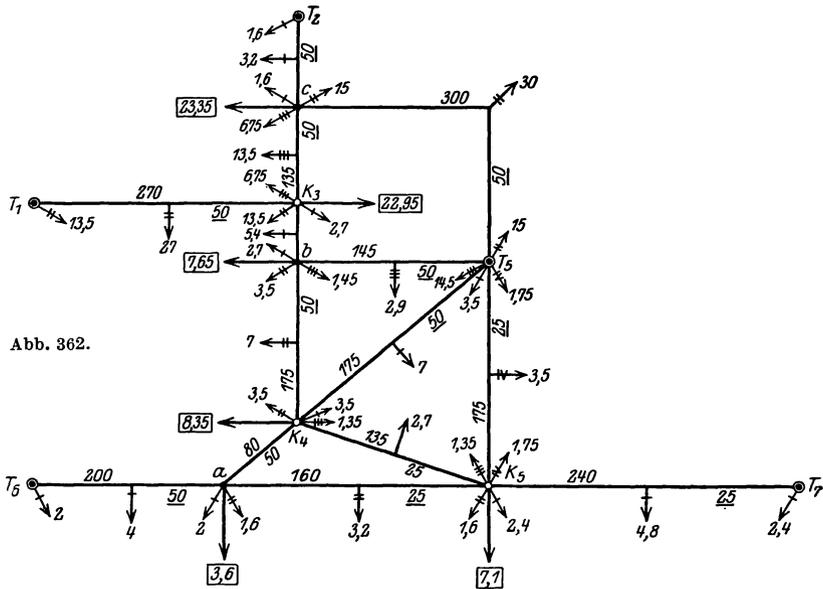


Abb. 362.

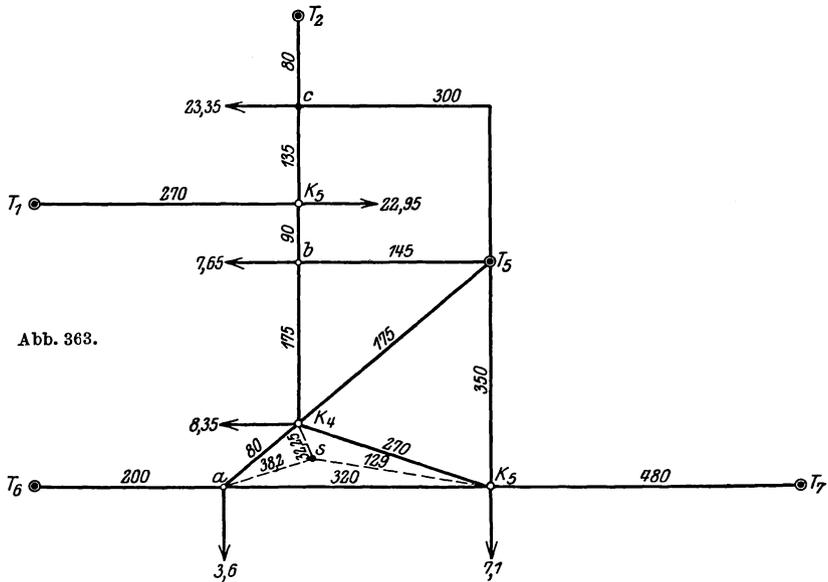
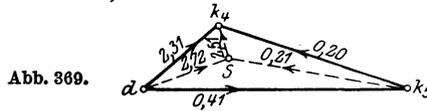
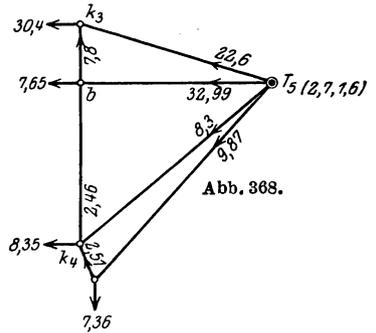
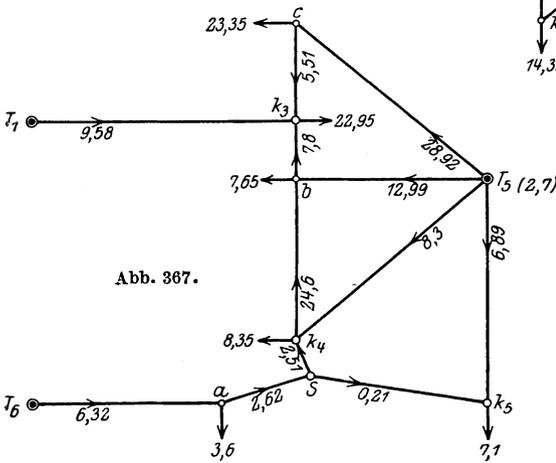
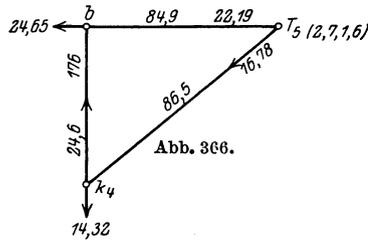
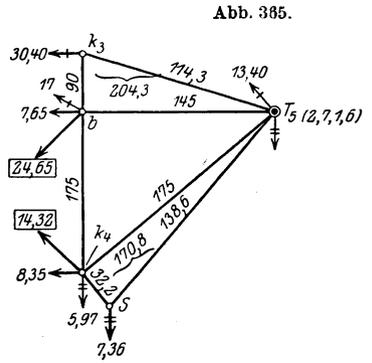
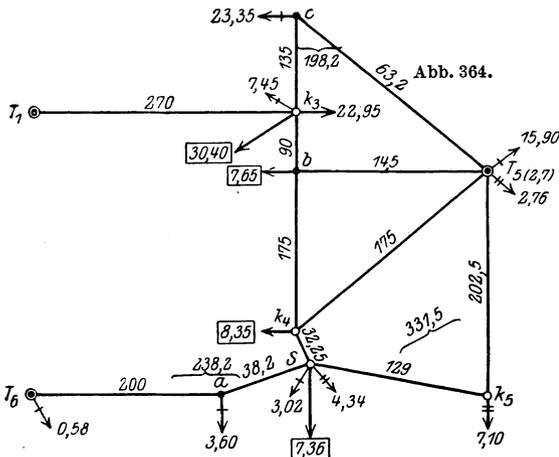


Abb. 363.

Bezirk VIII.

übriggebliebenen Transformator T_5 einerseits mit b , andererseits mit k_4 verbinden, die äquivalenten Leiter eingeführt, dann ist der gesamte



Zwischenstufen VIII. Bezirk.

Bezirk zur Schleife Abb. 366 mit zwei Belastungen und einem Speisepunkt vereinfacht.

Die Lösung einer einzigen Gleichung ergibt dann die eingezeichnete Leistungsverteilung.

Nun muß derselbe Weg rückwärts durchlaufen werden. Durch Aufteilung der äquivalenten Leiter, Verteilung der Leistungen im umgekehrten Verhältnis der Widerstände und Überlagerungen dieser Teilströme mit den Komponentenströmen erhält man in Abb. 367 die Stromverteilung für das Netz der Abb. 364, in Abb. 368 jene für das Netz der Abb. 365.

Aus dem Stern ak_4k_5S wird die Stromverteilung im Dreieck ak_4k_5 gefunden. Es muß nämlich (Abb. 367 u. 369)

$$i_{ak_4} = \frac{i_a \cdot aS + i_{k_4} \cdot k_4S}{ak_4} = \frac{2,72 \cdot 38,2 + 2,51 \cdot 32,25}{80} = 2,31 \text{ kW sein.}$$

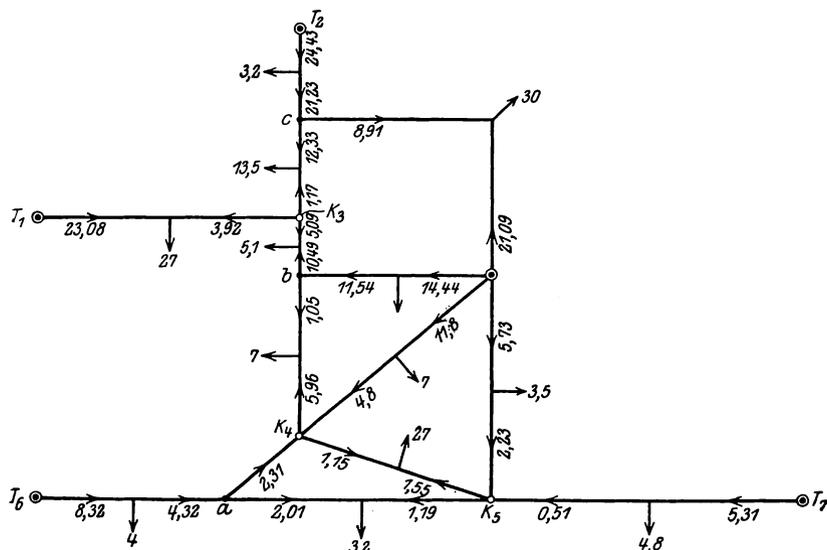


Abb. 370. Stromverteilung im VIII. Bezirk.

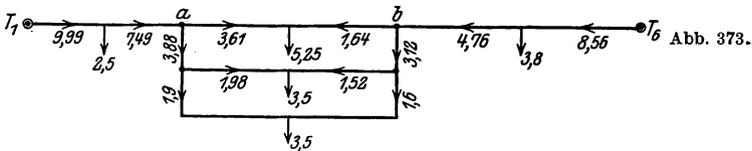
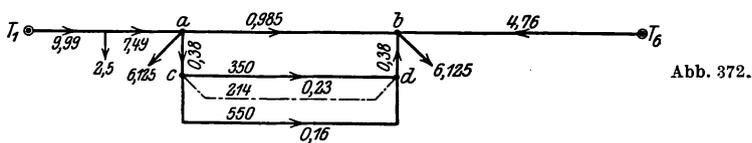
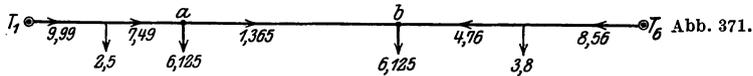
Da nun in jedem Eckpunkt die Summe der Stern- und Dreieckströme Null sein muß, so findet man ohne weiteres die in Abb. 368 gezeichnete Verteilung.

Durch Zusammenfügung von Abb. 368 und 369, Spaltung der Ersatzleiter und Deckung mit den Komponentenströmen der Abb. 362 zeigt sich schließlich die Leistungsverteilung des ganzen achten Bezirkes, Abb. 370.

Bezirk IX. Die Stromverteilung wurde zum Teil schon beim Entwurfe in Abb. 354 gefunden. Nur muß für die Knoten a, b, c und d durch Spaltung der ersetzenden Leiter die endgültige Verteilung noch gefunden werden.

Man verlegt zunächst die Belastungen der drei Kabel ab und cd auf die Knoten a und b und erhält dann aus Abb. 354 unmittelbar Abb. 371, nach der Spaltung des Ersatzleiters hieraus Abb. 372 und nach Zurückverlegung der Belastung schließlich Abb. 373, womit die Nachprüfung schließt.

Zeichnet man die Leistungsverteilung und an verschiedenen Stellen auch die höchsten Spannungsverluste ein, so sieht man, daß sie nur zwischen T_1 und k_3 die zugelassenen 2% erreichen. Die größte Leistung, die durch ein fünfziger Kabel übertragen wird, liegt unter 25 kW, was bei 210 Volt $\cos \varphi = 1$ einem Strom von ≈ 67 Amp. entspricht, während für Vierleiterkabel noch 150 Amp. zulässig sind; der höchste Strom, der bei normalem Betriebe ein 25-mm²-Kabel durchläuft, ist etwa 16 Amp., während 100 Amp. zulässig sind. Die Untersuchung darüber,



IX. Bezirk.

welche höchste Belastungen bei teilweiser Abschaltung von Verbrauchern oder von Kabelstücken auftreten kann, ist hier nicht durchgeführt.

c) Entwurf des Hochspannungsnetzes. Es handelt sich jetzt noch um den Entwurf des Hochspannungsnetzes. Die acht Transformatoren, welche das Niederspannungsnetz speisen, sind primär an ein weitmaschiges 6000-Volt-Netz angeschlossen, das in Abb. 374 maßstäblich wiedergegeben ist.

Die Belastungen der Transformatoren sind nach oben abgerundet und außerdem an den Stellen, in deren Nähe Hochspannungsanschlüsse zu erwarten sind, mit den entsprechenden Beträgen vermehrt. Das außen um die Stadt geführte Kabel von T_7 nach T_8 und der Ausläufer von T_8 führen durch ein Gebiet, wofür keine Niederspannungskabel vorgesehen sind, worin aber Anschluß seitens der Großindustrie in Aussicht steht.

Das Speisekabel aus der Unterstation des Überlandbezirkes schließt in dem Schalthause an, das auch den Transformator T_1 herbergt.

Die Querspeile deuten die Angriffsstellen der in kW gegebenen Belastung an. Die Längen der Kabelstücke zwischen zwei Belastungen stehen oberhalb der Leiter in m, die gefundenen Querschnitte in unterstrichenen Zahlen stehen unter dem Kabelstück. Die Längspfeile

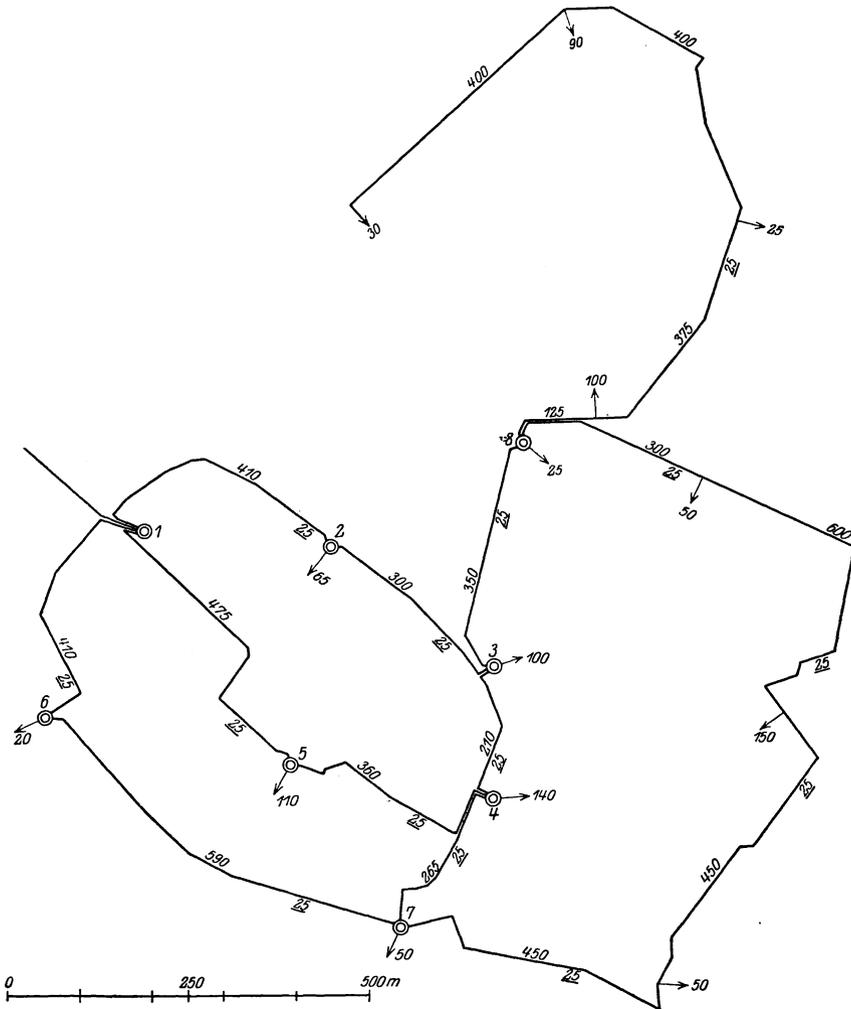


Abb. 374. Hochspannungsnetz.

geben die Leistungen in kW an, welche die einzelnen Kabelstrecken durchlaufen.

Um zu einer vorläufigen Schätzung der Querschnitte zu kommen, denkt man sich das Netz bei *a* und *b* in Abb. 375 gespalten und berechnet für die einfachen Leitergebilde die Querschnitte aus der für Hochspannung bequemsten Form.

$$f = \frac{\sum(kW \cdot km)}{k \cdot p \cdot (kV)^2} = \frac{\sum(kW \cdot l)}{1000 k \cdot p \cdot (kV)^2},$$

worin kW die Leistung in Kilowatt, km die Länge in Kilometer, kV die Spannung in Kilovolt bedeutet. $\cos \varphi$ ist gleich 1 angenommen.

In Abb. 375 verlegte man zunächst die Belastungen von T_2 , T_4 und T_5 auf die Knoten T_1 und T_3 und ersetzt die zwei parallelen Leiter zwischen T_1 und T_3 durch den gleichwertigen. Haben diese zwei Kabel gleichen Querschnitt, dann ist die Ersatzlänge $(710 \cdot 1045) : 1755 = 422,76$. Nimmt man auch den Strang von T_8 aus vom gleichen Querschnitt und setzt $p = 1\%$, dann ergibt sich für

$$\begin{aligned} \Sigma kWl &= 299,41 \cdot 422,76 + 75 \cdot 772,76 + 100 \cdot 897,76 + 25 \cdot 1272,76 \\ &+ 90 \cdot 1672,76 + 30 \cdot 2072,76 + 519000 \\ f &= \frac{519}{57 \cdot 0,02 \cdot 36} = \frac{519}{20,5} \approx 25 \text{ mm}^2. \end{aligned}$$

Da dieser Querschnitt durchaus entspricht und bei erwünschter

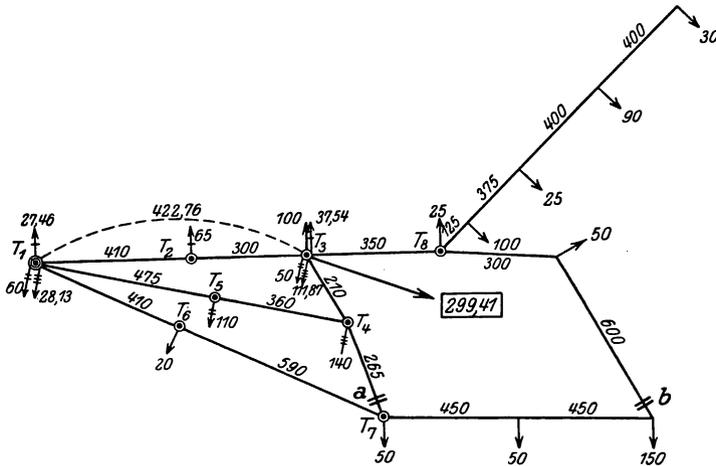


Abb. 375.

größerer Elastizität des Netzes nur geringe Mehrkosten gegenüber 16 oder 10 mm² entstehen, so sollen alle Verteilungsleiter diesen Querschnitt erhalten.

d) **Nachrechnung des Hochspannungsnetzes.** Es sei x die Leistung des gespaltenen Kabels a von T_4 nach T_7 ; die von T_8 über b nach T_7 strömende Leistung sei y . Dann lassen sich diese Unbekannten nach der Methode der Netzspaltung wie folgt finden:

Das Netz zerfällt durch die Spaltung bei a und b in die zwei Bezirke Abb. 376 und 377.

In Abb. 376 sind die Belastungen T_2 , T_4 und T_5 schon früher nach T_1 und T_3 verlegt. Man bringt dahin auch noch die Komponenten der unbekanntesten Leistungen x und y . In T_3 greifen dann an

$(299,41 + \frac{167}{209}x)$ kW; von T_3 nach T_8 strömen noch $(320 + y)$ kW, so daß durch den gleichwertigen Leiter von T_1 nach T_3 zusammen $A = (619,41 + \frac{167}{209}x + y)$ kW geführt werden. Dieser Ausdruck sei der Kürze halber mit A bezeichnet.

Von T_1 nach T_5 gehen dann $\frac{422,76}{1045}A$ vermehrt um die früher nach T_1 verlegten Komponentenströme $60 + 28,13 + \frac{210}{1045}x$, zusammen also $(\frac{422,76}{1045}A + \frac{42}{209}x + 88,13)$ kW. Die Ausdrücke für die Spannungsverluste in Abb. 376 bis a und b können nun direkt niedergeschrieben werden. Da jedoch die Querschnitte überall gleich sind, genügt es, die $\Sigma(\text{kW} \cdot l)$ anzusetzen. Der Verlust bis a ist proportional

$$\left(\frac{422,76}{1045}A + \frac{42}{209}x + 88,13\right)(475 + 360) - 110 \cdot 360 + 265 \cdot x. \quad (I)$$

Der Verlust bis b ist proportional

$$422,76A + 350(320 + y) + 900(50 + y) - 600 \cdot 50. \quad (II)$$

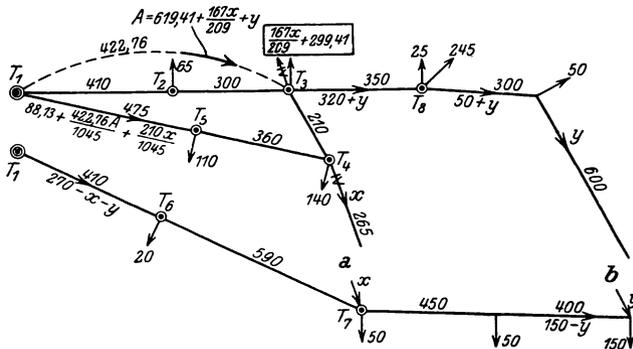


Abb. 376.

Abb. 377.

In Abb. 377 sieht man sogleich, daß von T_1 nach T_6 $(270 - x - y)$ kW strömen müssen, so daß der Spannungsverlust bis a proportional ist

$$(270 - x - y) 1000 - 20 \cdot 590 \quad (III)$$

Der Spannungsverlust bis b ist proportional

$$410 \cdot 20 + 1000(50 - x) + 1450 \cdot 50 + 1900 \cdot (150 - y). \quad (IV)$$

Nun besteht bei a nur eine bestimmte Spannung, bei b ebenfalls. Es muß also $III = IV$ sein. Daraus folgen für die beiden Unbekannten die Gleichungen

$$1702,7x + 1337,8y = 14943,$$

$$1337,8x + 3572,8y = 26838,$$

woraus

$$x \approx 4,1 \text{ kW},$$

$$y \approx 6,0 \text{ kW}.$$

Die Leistungsverteilung des ganzen Netzes ist nun bekannt und kann in Abb. 374 eingetragen werden. Der größte Spannungsverlust

im Ausläufer beträgt nur 1,025%, die höchste Leistung in einem 6000-Volt-Kabel für $3 \cdot 25 \text{ mm}^2$ ungefähr 400 kW, was einem Strome von $\approx 38,4$ Amp. entspricht. Zulässig sind höchstens für verteilte Dreileiterkabel 95 Amp., so daß also das Netz allen Anforderungen entspricht.

XIV. Die Leitung elektrischer Bahnen.

Die allgemeinen Gesichtspunkte bleiben für Bahnleitungen dieselben wie für andere Leitungen. Abweichungen werden durch die Eigenart des Betriebes hervorgerufen. Die Lasten und ihre Stromabnahmen sind beweglich und verschieben sich innerhalb bestimmter Abstände längs der ganzen durch den Fahrdraht und die Schienenrückleitung gebildeten Strecke örtlich. Solche beweglichen Stromentnahmen, die manchmal auch negativ werden, sind auch im vorhergehenden bereits behandelt worden. Deshalb kann man sich auf die allgemeine Anordnung der Leitungen beschränken und dann das bei der Berechnung einzuschlagende Verfahren an einem einfachen Beispiel erläutern.

1. Fahrdrähte und Speiseleitungen.

Es gibt zwei wesentlich verschiedene Anordnungen des Fahrdrahtes. Die eine in Abb. 378 besteht darin, den Fahrdraht der ganzen Länge des Geleises nach unterbrochen zu führen, indem man ihn allein verwendet, oder ihm Strom durch eine (Abb. 379), oder mehrere einzelne (Abb. 380) oder untereinander verbundene (Abb. 381) Speiseleitungen zuführt. Dies ist nur bei kleineren unverzweigten Bahnen anwendbar, bei welchen kurzzeitige Unterbrechungen auf der ganzen Strecke keine ersten Verkehrsstörungen herbeizuführen vermögen.

Die zweite Anordnung besteht in der Teilung des Fahrdrahtes in einzelne voneinander durch Streckenisolatoren getrennte Abschnitte, die einzeln gespeist werden. Abb. 382 stellt den Fall dar, daß jeder Abschnitt am Anfang und Ende gespeist wird, Abb. 383 den Fall eines größeren Bahnnetzes mit längeren Fahrdraht-Abteilungen, bei dem besondere Speiseleitungen einige Hauptleitungen versorgen, die durch Unterbrecher in mehrere Unterabteilungen zerlegt werden können, von welchen erst die Fahrdrähte gespeist werden. Die Trennung und Kuppung der einzelnen Teile der Haupt- und Fahrleitungen ermöglicht eine erhöhte Betriebssicherheit gegenüber Verkehrsstockungen oder schränkt sie ein.

Diese Anordnungen gelten für alle Arten von Bahnen. Bei Gleichstrombetrieb, der in der Regel mit etwa 500 bis 600 Volt durchgeführt wird, versorgt die Zentrale die Speiseleitungen direkt mit Strom. Bei Wechsel- oder Drehstrombetrieb können weite Entfernungen bei mäßigem Kupferaufwand dadurch überbrückt werden, daß man von der Zentrale aus mit hochgespanntem Strom (10 000—30 000 Volt) Transformatoren versorgt, die entweder direkt aus ihren Sekundärkreisen (mit

300—3000 Volt) die Fahrleitungen speisen, oder rotierende Umformer bzw. Motorgeneratoren betreiben, deren Gleichstromteil dann die Kontaktleitungen mit Gleichstrom versorgt. Die eingehende Betrachtung aller dieser Fälle würde über den Rahmen dieses Buches hinausgehen.

Die Untersuchungen erstrecken sich auf den Leistungsverlauf und Wirkungsgrad der antreibenden Generatoren, der getriebenen (zeit-

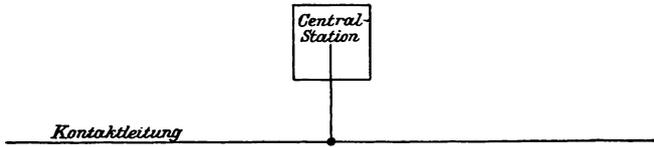


Abb. 378.

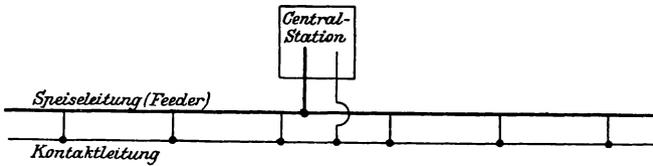


Abb. 379.

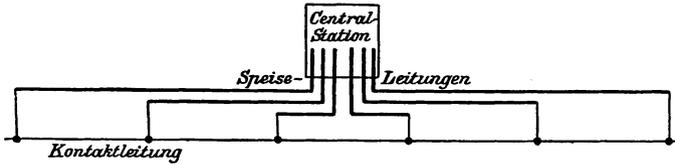


Abb. 380.

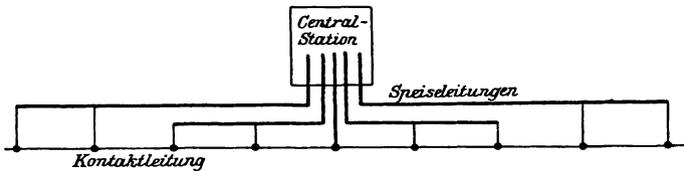


Abb. 381.

weise auch treibenden) Fahrzeuge, der Leitungen und Zwischenglieder. Viele Fragen lassen sich durch statische oder dynamische Charakteristiken verfolgen. Aber noch 1912 beschreibt A. J. Lawson ein Drahtmodell zur Bestimmung des Tramnetzes, ganz wie 30 Jahre früher von Edison das Netz der ersten Lichtzentrale durch Messung am Modell ausprobiert wurde. Wir können hier nur die an die Leitungsberechnung anschließenden Fragen namentlich für Gleichstrom behandeln.

2. Beispiel. Eine Gleichstrombahnlinie.

Um die Betrachtungen bequem durchführen zu können, werde ein bestimmtes Beispiel gewählt. In Abb. 384 erkennt man zwei vom gleichen

Anfangspunkte *A* ausgehende Linien, von denen *ABCD* doppelgleisig, *AEC* eingleisig ausgeführt werden soll. Die erste dieser Linien erhält zur Stromzuführung entsprechend den zwei Gleisen auch zwei Fahrdrähte; die zweite soll zunächst nur mit einem Fahrdraht ausgerüstet werden. Für beide dienen die an den Stößen durch entsprechende Schienenverbinder überbrückten Schienen der Gleise zur Rückführung

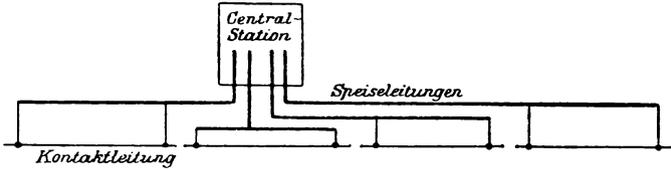


Abb. 382.

des Stromes zur Zentrale, deren positiver Pol also an die Fahrdrähte und deren negativer an die Schienen angeschlossen werden soll. Da die beiden Strecken im Punkte *C* zusammentreffen, bildet die Schienenrückleitung eine geschlossene Masche mit einer Verlängerung *CD*.

Für die 4,8 km lange Strecke *AD* ist 5-Minuten-, für die Nebens Strecke *AEC* von 5 km 10-Minuten-Verkehr vorgesehen. Die Durch-

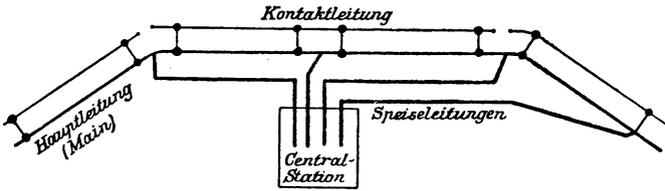


Abb. 383.

schnittsgeschwindigkeit soll auf beiden 12 km/h betragen. Wenn man nun noch die Aufenthalte am Anfang und Ende jeder Strecke festsetzt, z. B. auf 6 Minuten für die doppelgleisige und auf 5 für die eingleisige Strecke, so kann man die Gesamtzahl der betriebserforderlichen Wagen ermitteln. Ein graphischer Fahrplan klärt alle in Betracht kommenden Verhältnisse auf.

a) **Graphischer Fahrplan.** Für die Linie *ABCD* beträgt bei 12 km/h Geschwindigkeit und 4,8 km Länge

die Dauer einer Hinfahrt	$t_1 = \frac{4,8 \cdot 60}{12} = 24$ Minuten
die Dauer einer Rückfahrt ebenfalls	$t_3 = 24$ „
der Aufenthalt am Anfang und Ende je 6 Minuten	$t_2 = t_4 = 6$ Minuten
die Zeit zwischen zwei Abfahrten desselben Wagens von <i>A</i> also:	$t_2 + t_4 = 12$ „
	60 Minuten.

Und da in Pausen von je 5 Minuten je ein Wagen vom Anfangspunkte abgehen soll, der erste aber erst nach 60 Minuten wieder zur

Verfügung steht, müssen für diese Strecke im ganzen 12 Wagen vorhanden sein.

In derselben Weise berechnet sich für die Linie AEC

die Dauer einer Hinfahrt zu	$t_1 = \frac{5 \cdot 60}{12} = 25$ Minuten
die Dauer einer Rückfahrt.	$t_4 = 25$ „
die Aufenthalte am Anfang und Ende zu $2 \cdot 5$. . .	$t_2 = 10$ „
die volle Betriebsperiode also zu:	60 Minuten

und somit bei 10-Minuten-Verkehr die erforderlichen Wagen zu $60:10 = 6$.

Nun entwirft man den Fahrplan Abb. 385 und 386 für jede der beiden Strecken durch Auftragen der Streckenlänge als Abszisse und der Zeit als Ordinate. Der erste Wagen wird zur Zeit $t = 0$ am Anfangspunkt der Linie ($l = 0$) stehen. Nach t_1 Minuten langt er am Ende ($l = L$)

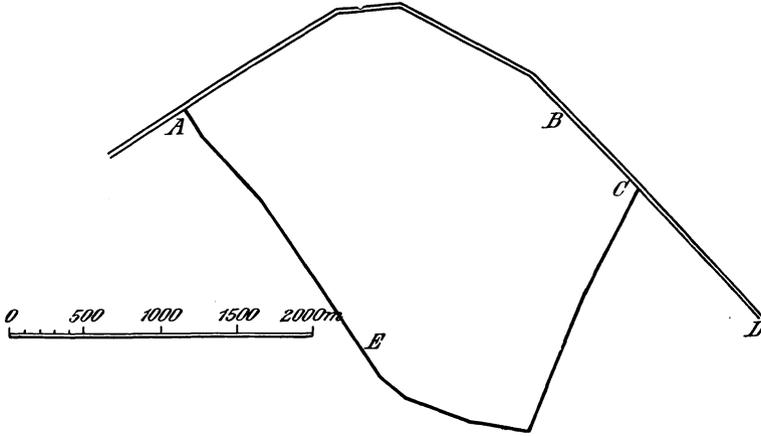
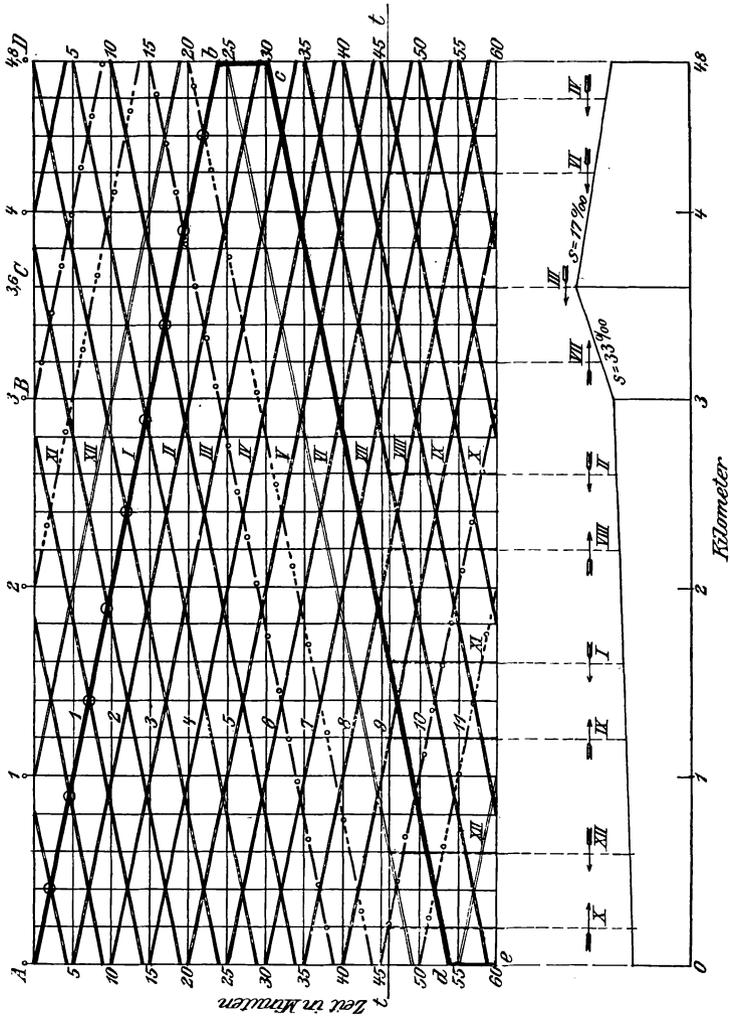


Abb. 384.

an, hält sich dort t_2 Minuten auf, um nach weiteren t_3 Minuten die Rückfahrt zu beenden und nach $t_1 + t_2 + t_3 + t_4$ Minuten wieder am Punkte $l = 0$ zur Wiederabfahrt bereitzustehen. Diese Erwägung war auf einer mittleren Durchschnittsgeschwindigkeit aufgebaut. Der Weg des ersten Wagens kann also durch eine gebrochene Gerade dargestellt werden, die für die Hinfahrt von $t = 0, l = 0$ ausgeht und bei $t = t_1, l = L$ endet, dann dem Aufenthalt am Ende entsprechend um das Stück t_2 senkrecht abbiegt, und von da an symmetrisch zu dieser Halbperiode verläuft. Die Neigung der Linie gibt im gewählten Maßstab ein Bild für die mittlere Geschwindigkeit. Wenn auf einer Strecke die Geschwindigkeit wechselt, etwa innerhalb der Stadt 12 km/h, außerhalb aber 18 km/h beträgt, muß die Neigung der Fahrtrinie für Hin- und Rückfahrt an der Stelle des Geschwindigkeitswechsels eine Änderung erfahren.

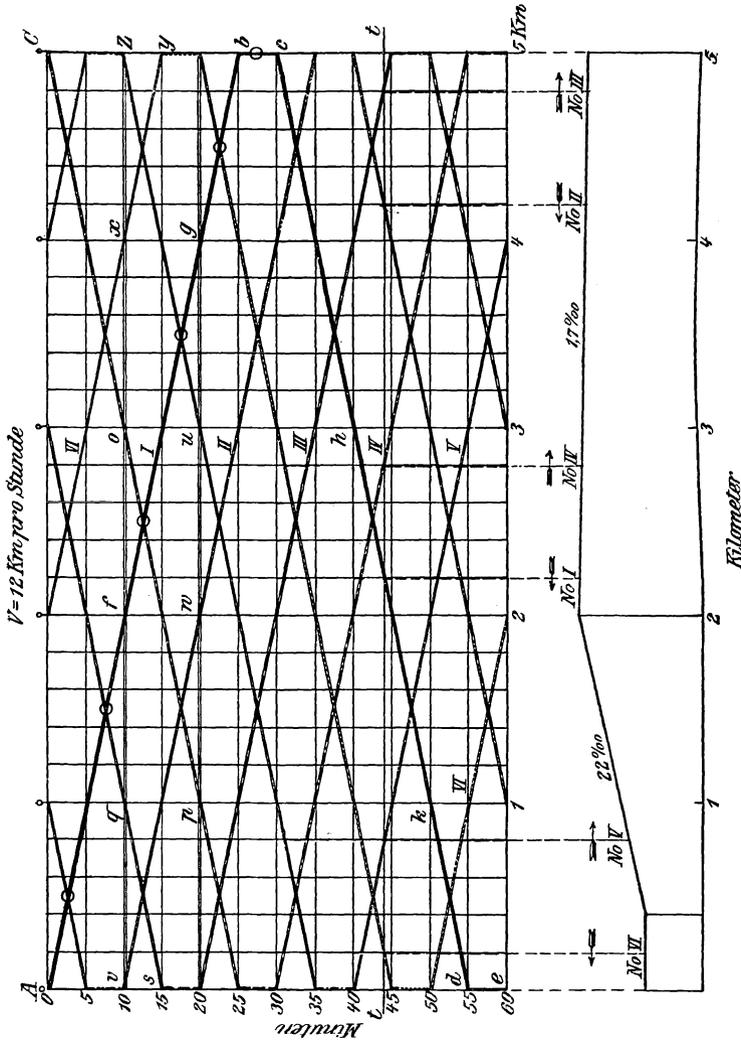
Führt man dieses Verfahren für die Strecke $ABCD$ (Abb. 385) durch, indem man die Zeiten nach abwärts, die Längen nach rechts

wachsend aufträgt, dann ergibt der stark ausgezogene Linienzug *Abcde* in dem gewählten Maßstab den ganzen Verlauf einer Betriebsperiode des ersten Wagens. Man kann also auch für irgendeinen Augenblick z. B. die 46. Minute nach der Abfahrt von *A* den Stand auf der Strecke



(in 1,6 km Entfernung vom Punkte *e*, der dem Anfang *A* wieder entspricht) oder für irgendeinen Punkt der Strecke (z. B. eine in 3,6 km von *A* entfernt liegende Weiche) die zwei Zeiten (17 und 37 Minuten nach der Abfahrt von *A*) finden, zu denen der Wagen auf der Hin- oder Rückfahrt diesen Punkt durchfährt. Da alle 5 Minuten ein Wagen *A* abgelassen wird, der mit dem ersten gleiche Durchschnittsgeschwindigkeit haben soll, kann der Fahrplan vervollständigt werden, indem man

durch $t = 5, 10, 15 \dots$ Parallele zu Ab zieht, welche den abfahrenden Wagen entsprechen, und Parallele zu cd , die den heimfahrenden Wagen entsprechen. Man erkennt nun, daß der Wagen Nr. 1 auf seiner Heim-



fahrt von c der Reihe nach den übrigen 11 Wagen begegnet, und ebenso auf der Hinfahrt 11 heimkehrende Wagen kreuzt.

Man kann also statt der vorigen Rechnung für die Zahl der erforderlichen Wagen nur den graphischen Fahrplan entwerfen und hieraus erkennen, daß von den 11 Wagen die auf einer Fahrt irgendeinen gerade herausgegriffenen Wagen kreuzen, nur neun tatsächlich auf der Fahrt sind, während je einer am Anfang und Ende der Linie als Stand-

wagen hält. Nötigenfalls würden acht Wagen ausreichen, wenn man nicht den Aufenthalt von nur einer Minute, der sich aus dem Verhältnis zwischen Länge der Linie und mittlerer Geschwindigkeit ergibt, aus betriebstechnischen Gründen für zu kurz erachtet.

In gleicher Weise ist der Fahrplan für die Strecke AEC (Abb. 386) entworfen worden, bei dem schon das Bild den größeren Abstand zwischen zwei Wagen zum Ausdruck bringt. Den Fahrplänen sind die Höhenprofile der Linien beigelegt, so daß man für irgendeinen beliebigen Zeitpunkt auch feststellen kann, wo jeder einzelne Wagen nach seiner wagerechten Entfernung (vom Anfangspunkte aus) und nach seiner lotrechten von einer Nullebene aus gerechnet sich gerade befindet. Dies ist für die Ermittlung des Kraftbedarfes erforderlich.

b) Der Kraftbedarf. Die Leistung, welche die Fortbewegung eines Wagens auf den Schienen erfordert, kann für eine bestimmte Geschwindigkeit v m/sek dem Gewicht G des Wagens in Tonnen proportional angenommen werden. Der Traktionskoeffizient oder Zugwiderstand χ ist die Zugkraft in kg, welche nötig ist, um eine Tonne des Wagengewichts in der Horizontalen mit gleichmäßiger Geschwindigkeit fortzubewegen; χ hängt von der Art und von der Verlegung der Schienen ab, kann aber innerhalb der für Straßenbahnen in Betracht kommenden Grenzen als von v unabhängig angesehen und für Rillenschienen mit $12 \div 15$, für Vignolschienen mit $6 \div 8$ kg/t angenommen werden. Für die Bewegung auf wagrechter Strecke beträgt also die für die Fortbewegung des Wagens erforderliche Leistung in PS, gemessen an den Klemmen des Elektromotors mit dem Wirkungsgrad η

$$PS_h = \frac{\chi G v}{75 \eta}.$$

Für G ist das Gewicht des Wagens in Tonnen, für den Wirkungsgrad einschließlich der Zahnräder am Motor etwa $0,7 \div 0,8$ zu setzen. Um aber den Mittelwert des beim Anfahren auftretenden zusätzlichen Verlustes zu erhalten, ist es üblich, zu PS_h einen Zuschlag zu machen, der für mittlere bis große Anlagen und geordneten Betrieb etwa 25% beträgt. Es wird dann

$$PS_h = \frac{1,25 \chi G v}{75 \cdot \eta}.$$

Soll der Wagen aber auf einer Steigung von ξ ‰ mit der Geschwindigkeit v m/sek bewegt werden, so tritt als reine Hubarbeit noch der Betrag

$$PS_v = \frac{\xi G v}{75}$$

hinzu, so daß nunmehr die Gesamtleistung in PS den Wert

$$PS = \frac{(1,25 \chi + \xi) G \cdot v}{75 \cdot \eta}$$

erreicht.

In vorliegendem Falle sei das Gewicht des leeren Wagens 7 t, des mit 30 Personen voll besetzten Wagens 9,25 t. Der Reibungskoeffizient werde zu $\chi = 12$ kg/t, der Gesamtwirkungsgrad $\eta = 0,7$ angenommen.

Da die Geschwindigkeit $v = 12 \text{ km/st}$ und somit $v = \frac{12}{3,6} \text{ m/sek}$ beträgt, braucht der vollbesetzte Wagen auf wagerechter Strecke

$$\frac{15 \cdot 9,25 \cdot 12}{75 \cdot 0,7 \cdot 3,6} = 8,8 \text{ PS},$$

auf einer Strecke von 15‰ Steigung

$$\frac{(1,25 \cdot 12 + 15) 9,25 \cdot 12}{75 \cdot 0,7 \cdot 3,6} = 17,6 \text{ PS},$$

auf einer Strecke von 15‰ Fall

$$\frac{(1,25 \cdot 12 - 15) 9,25 \cdot 12}{75 \cdot 0,7 \cdot 3,6} = 0 \text{ PS}.$$

Ähnlich wird der Kraftbedarf für jeden einzelnen Wagen ermittelt und durch Addition der gesamte Kraftbedarf aller fahrenden Wagen festgestellt. Er ist natürlich zu verschiedenen Zeiten je nach der Stellung der Wagen verschieden. Man wird deshalb eine horizontale Schnittlinie an einer beliebigen Stelle durch den graphischen Fahrplan legen, für den entsprechenden Augenblick die Stellung jedes Wagens auf dem Höhenprofil und seinen Kraftbedarf feststellen und schließlich diese Schnittlinie tt (die Zeitlinie) solange parallel mit sich selbst verschieben, bis man den Wert des höchsten Kraftbedarfs erreicht hat. Es ist nicht nötig, mehrere Fälle wirklich durchzurechnen. Da nämlich in dem Intervall der fahrplanmäßigen Wagenfolge die Stellungen sich alle wiederholen, genügt es, die Zeitlinie innerhalb dieses Intervalles (also bei der Hauptstrecke $ABCD$ innerhalb 5, bei der andern innerhalb 10 Minuten) zu verschieben und dann durch bloße Betrachtung zu überlegen, zu welcher Zeit die meisten Wagen sich auf Steigungen befinden oder anfahren.

Es ist dabei üblich, alle Steigungen unter 12‰ in der Rechnung zu vernachlässigen, indem man die rohe Annahme macht, daß für diese Steigungen die Mehrleistung beim Aufwärts- und die Minderleistung beim Abwärtsfahren einander gerade ausgleichen. Diese Annahme ist offenbar geeignet, die Höchstbelastung etwas größer erscheinen zu lassen, als sie tatsächlich sein wird, und entspricht somit einem geringen weiteren Zuschlag zu den vorerwähnten 25%. Sie vereinfacht aber die Rechnung bedeutend.

Für die Strecke $ABCD$ tritt der Höchstwert des Kraftbedarfs zur Zeit $t = 46$ Minuten. Die Stellungen der Wagen sind dabei die folgenden (Abb. 385) entsprechend der horizontalen Schnittlinie tt :

Wagen- Nummer	Entfernung von A in m	Entfernung zwischen zwei Wagen	Fahrtrichtung	Steigung in ‰
10	200	} 200	aufwärts	3
12	600	} 400	abwärts	3
9	1200	} 600	aufwärts	3
1	1600	} 400	abwärts	3
8	2200	} 600	aufwärts	3

Wagennummer	Entfernung von A in m	Entfernung zwischen zwei Wagen	Fahrtrichtung	Steigung in ‰
2	2600	400	abwärts	3
7	3200	600	aufwärts	33
3	3600	400	abwärts	17
6	4200	600	aufwärts	17
4	4600	400	abwärts	17
		200		

Hieraus berechnet sich nun der Kraftbedarf, indem alle Steigungen unter 12‰ vernachlässigt werden und statt des Zuschlages von 25% zum Bedarf aller Wagen anders vorgegangen wird. Im betrachteten Augenblick ($t = 46$ Min.) denkt man sich eine bestimmte Anzahl gleichzeitig anfahrend, wie es zufällige Verkehrs- oder Betriebsstörungen zur Folge haben können, woraus die Aufstellung folgt:

Wagen-Nummer	Kraftbedarf	PS	Anfahrt	Gesamt-Amp. bei 500 Volt, abgerundet	Entfernung von A in m
10	$\frac{9,25 \cdot 12 \cdot 12}{3,6 \cdot 75 \cdot 0,7}$	= 7	3	15	200
12		7	—	10	600
9		7	3	15	1200
1		7	—	10	1600
8		7	3	15	2200
2		7	3	15	2600
7	$\frac{92,5 \cdot 12 \cdot (12 + 33)}{3,6 \cdot 75 \cdot 0,7}$	= 26	3	43	3200
3	$\frac{92,5 \cdot 12 \cdot (12 + 17)}{3,6 \cdot 75 \cdot 0,7}$	= 17	3	30	3600
6	auf 17‰ Gefälle	= 0	3	5	4200
4	auf 17‰ Steigung wie Nr. 3	= 17	3	30	4600
		102 PS	24 PS	188 Amp.	

Es wären also insgesamt 126 PS und 188 Amp. bei 500 Volt unter den ungünstigsten Umständen und bei besetzten Wagen erforderlich.

Bei der Linie *AEC* entspricht die ungünstigste Wagenstellung dem Zeitpunkt $t = 44$ Minuten. Dem entspricht (Abb. 386):

Wagen-Nummer	Steigung	Abstand von A in m	Abstand zweier Wagen in m	PS	Anfahrt	Gesamtstrom bei 500 Volt
6	0	200	200	7	3	15
5	22	800	600	20	3	34
			1400			

Wagen- Nummer	Steigung	Abstand von A in m	Abstand zweier Wagen in m	PS	Anfahrt	Gesamtstrom bei 500 Volt
1	0	2200	} 600	7	3	15
4	0	2800		} 1400	7	3
2	0	4200	} 600		7	3
3	0	4800		} 200	7	3
				55 + 18 = 73		109 Amp.

Aus diesen Aufstellungen geht hervor, daß der Zuschlag für Anfahren hier in Anbetracht der verhältnismäßig kleinen Zahl von Wagen mehr als 25% beträgt. Doch kommt man mit diesem Zuschlage aus, wenn man statt des höchsten Kraftbedarfes den mittleren berechnen will.

c) **Wagenkilometer und mittlerer Kraftbedarf.** Um den mittleren Kraftbedarf festzustellen, müssen für jeden einzelnen Punkt des Betriebsintervalls t Sekunden zwischen zwei in gleicher Richtung aufeinander folgenden Wagen die erforderlichen Leistungen festgestellt, diese Werte addiert und die Summe durch t geteilt werden. Da aber innerhalb dieses Betriebsintervalls immer nur andere Wagen an die Stelle des ersten treten, die ihrerseits genau dieselben Leistungen erfordern wie der erste Wagen an der betreffenden Stelle, so genügt es, nur einen einzigen Wagen die ganze Bahnstrecke durchlaufen zu lassen und die von ihm auf diesem Wege verbrauchte Arbeit durch die Zeit t des Betriebsintervalles in Sekunden zu teilen, um die mittlere Leistung für diesen einen Wagen zu erhalten. Diese muß genau gleich der mittleren Leistung sein, die von allen Wagen verbraucht wird. Denn es werden z. B. für das Intervall $t = 10$ Minuten bis $t = 20$ Minuten in Abb. 386 die einzelnen Strecken

$$\begin{aligned}
 vw \text{ von Wagen 2} &= Af \text{ von Wagen 1} \\
 fg \text{ „ „ } &1 = fg \text{ „ „ } 1 \\
 xy \text{ „ „ } &6 = gb \text{ „ „ } 1 \\
 zu \text{ „ „ } &5 = ch \text{ „ „ } 1 \\
 op \text{ „ „ } &4 = hk \text{ „ „ } 1 \\
 qs \text{ „ „ } &3 = kd \text{ „ „ } 1
 \end{aligned}$$

und somit ihre Summe gleich der Fahrt des Wagens 1 von A über bcd nach dem Endpunkte e sein, der wieder dem Anfangspunkt A entspricht. Man besteht hiernach folgende Regel:

Um für alle Wagen die mittlere Leistung festzustellen, hat man nur die Arbeit, welche erforderlich ist, um einen Wagen einmal über die ganze Strecke hin- und einmal zurückzuführen, durch die Zeit in Sekunden zu teilen, die zwischen zwei in gleicher Richtung fahrenden Wagen liegt.

Man kann dabei auch die schon bei Feststellung des Höchstbedarfs verwendete Vereinfachung benutzen, daß man für einen Traktionskoeffizienten $\chi = 12 \text{ kg/t}$ alle Steigungen bis 12‰ vernachlässigt.

Es ist gebräuchlich, diese Annahme zu machen, um die Wahl der Maschinengröße sicherer zu treffen. Um jedoch zu verhindern, daß die Maschinen dauernd nur mit teilweiser Belastung laufen und daß man bei allen bisher erwähnten Vernachlässigungen zu hohe Werte für die Leistung erhält, pflegt man nur das Gewicht der leeren Wagen in Rechnung zu stellen. Dadurch gleicht man die bisher alle nach Seite der Vergrößerung liegenden Ungenauigkeiten teilweise wieder aus.

Der Zeitpunkt höchsten Strombedarfs wurde für jede der Linien einzeln bestimmt. Er wird für sie im allgemeinen verschieden ausfallen. Wenn man trotzdem den höchsten Gesamtbedarf einfach durch Addition der einzelnen Höchst- oder Gipfelwerte und Vernachlässigung ihrer zeitlichen Verschiebung (des Verschiedenheitsfaktors) bestimmt, wird der Gesamtbedarf ebenfalls etwas höher als in Wirklichkeit berechnet. Diese einfache Annahme wird trotzdem gemacht, weil sich der höchste Kraftbedarf entsprechend den Speiseleitungen bestimmt, deren Bereich sich den Betriebslinien anzupassen hat, namentlich wenn diese getrennt verlaufen. Die Schwankungen des Bedarfs gleichen sich um so mehr aus, je mehr Wagen auf der Strecke sind und je vorsichtiger die Fahrschalter bedient werden. Um so näher rücken einander also auch die Werte des höchsten und des mittleren Leistungsbedarfs.

Dieser beträgt, wenn l den Weg des Wagens bedeutet,

$$\text{für Steigungen und Gefälle bis } 12\text{‰} \quad A = \frac{1,25 \cdot (12 \pm \xi) \cdot G \cdot l}{\eta} \text{ kg/m,}$$

$$\text{für beide zusammen} \quad A = \frac{30 \cdot G \cdot l}{\eta} \text{ kg/m.}$$

Bei Steigungen über 12‰ hört die Anwendung dieser einfachen Formel natürlich auf, weil man bei dieser Talfahrt bremsen muß und nicht aufspeichert.

Bei starkem Gefälle würde der Wagen selbst im Falle des Anfahrens keines Antriebes bedürfen; doch soll auch hier wegen einheitlicher Rechnung die Anfahrt mit einer Zugkraft von 3 kg/t , entsprechend 25‰ Zuschlag, selbst bei den stärksten Gefällen gerechnet werden. Für die Talfahrt ergibt sich demnach für Steigungen über 12‰

$$A = \frac{0,25 \cdot 12 \cdot G \cdot l}{\eta} \text{ m/kg,}$$

und für die Bergfahrt

$$A = \frac{(1,25 \cdot 12 + \xi) G \cdot l}{\eta} \text{ m/kg,}$$

für beide zusammen also

$$A = \frac{(18 + \xi) G \cdot l}{\eta} \text{ m/kg.}$$

Sind also auf einer Strecke von $l = l_1 + l_2 + l_3 \dots \text{ km}$ Länge die Strecke l_1 horizontal, die Strecken $l_2, l_3 \dots$ mit den Steigungen $\xi_2,$

$\xi_3 \dots$ behaftet, so ist die mittlere Arbeit für die Bewegung aller Wagen

$$A = \frac{[30 \cdot l_1 + (18 + \xi_2)l_2 + (18 + \xi_3)l_3 + \dots] \cdot G}{\eta} \text{ m/kg,}$$

und der Verbrauch für den Wagenkilometer in Wattsekunden also

$$\frac{A}{\Sigma l} = \frac{9,81 A}{\eta(l_1 + l_2 + l_3 + \dots)} = \frac{9,81 A}{\eta \Sigma l} \text{ Wattsek.}$$

Aus A ergibt sich die mittlere Leistung in mkg/sec, wenn man durch das Betriebsintervall t in Sek. dividiert. Daraus kann man durch Division mit 75 die mittlere Leistung in PS, oder durch Multiplikation mit 9,81 in Watt erhalten. Sie beträgt also bei $G = 7$ Tonnen bei unserem Beispiel für die Strecke $ABCD$:

$$\text{PS}_m = \frac{[30 \cdot 3000 + (18 + 33) 602 + (18 + 12) 1200] \cdot 7}{0,7 \cdot 75 \cdot 60 \cdot 5} \approx 75 \text{ PS}$$

für die Strecke AEC :

$$\text{PS}_m = \frac{[30(3000 + 400) + (18 + 22) 1600] \cdot 7}{0,7 \cdot 75 \cdot 60 \cdot 10} \approx 38 \text{ PS.}$$

Für beide Strecken zusammen sind also im Mittel $(75 + 38) = 113$ PS, höchstens sind aber $102 + 24 + 55 + 18 = 199$ PS erforderlich. Bei täglich 15stündigem Betrieb werden auf der Strecke $ABCD$ mit 5-Minuten-Betrieb geleistet

$$\text{im Tag} = \frac{2 \cdot 4,8 \cdot 15 \cdot 60}{5} = 1728 \text{ Wagenkm; im Jahr } 630720 \text{ Wagenkm,}$$

für die Strecke ACD mit 10-Minuten-Betrieb

$$\text{im Tag} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 15 \cdot 60}{10} = 900 \text{ Wagenkm; im Jahr } 328500 \text{ Wagenkm,}$$

also im ganzen täglich: 2628 Wagenkm; jährlich: 959220 Wagenkm.

Verbraucht werden hierbei an den Klemmen der Wagenmotoren $113 \text{ PS} \times 15 \text{ Stunden} = 1695 \text{ PS-Stunden}$ oder 1240 Kilowattstunden und somit im Durchschnitt für ein Wagenkilometer auf beiden Strecken

$$\frac{1240000}{2628} = 475 \text{ Wattstunden.}$$

d) Speiseleitungen. Man kennt nun aus der früheren Ermittlung des höchsten Kraftbedarfs die Stellung der einzelnen Wagen für den ungünstigsten Zeitpunkt und den Strom, den der Wagenmotor an dieser Stelle dem Fahrdraht entnimmt.

Da nun weiter aus dem Betriebsverlauf hervorgeht, daß der Verkehr auf der Linie AEC sich vollständig unabhängig von dem auf der Linie $ABCD$ abspielen soll, ist auch die Stromzuführung für beide Linien getrennt auszuführen. Man ordnet deshalb zweckmäßig im Punkt C (Abb. 387) einen Streckenisolator an, der mit einem Schaltehebel so ausgerüstet ist, daß für Notfälle die isolierende Unterbrechung bei C auch wieder leitend überbrückt werden kann. Dadurch steht der Fahrdraht der Nebenstrecke im Notfall auch als Speiseleitung für die Hauptstrecke $ABCD$ bereit.

ausreichend bemessen, daß es nur den Strom für die entferntere Abteilung zu führen hat, was richtig ist, sobald vor der Anschlußstelle des Speisekabels bei O ein Streckenisolator eingebaut wird.

Denn es ist

$$v = \frac{(43 + 30 + 5 + 30) 2600}{57 \cdot 200} = 26,4 \text{ Volt.}$$

Für die Linie AEC ergibt sich der Verlust

$$v = \frac{1}{57 \cdot 50} (15 \cdot 200 + 34 \cdot 800 + 15 \cdot 2200 + 15 \cdot 2800 + 15 \cdot 4200 + 15 \cdot 4800) = 85 \text{ Volt,}$$

es muß daher die ganze Strecke AEC mit Doppeldraht versehen werden, wenn der Verlust unter 50 Volt bleiben soll.

Damit schließt die Berechnung der Speiseleitungen für diesen Fall, man kommt nunmehr zur Schienenrückleitung.

e) Schienenrückleitung. Da die Schienen zur Rückleitung des Stromes dienen, ist es auch erforderlich, den in ihnen auftretenden Spannungsverlust zu ermitteln. Man kann dies tun durch einen Zuschlag zum Widerstand des Fahrdrahtes zwischen 20 und 70%, je nach der Schwere der Schienen, der Ausdehnung und Belastung der Anlage. Als guter Mittelwert für Durchschnittsverhältnisse wird häufig ein Zuschlag von 40% genommen.

Dieses Verfahren überläßt einen reichlichen Spielraum der Willkür und Erfahrung des Planenden, der in keinem Verhältnisse steht zu der erheblich größeren Sicherheit, die man durch die einfache Berechnung des Widerstandes der Rückleitung erhalten könnte. Man soll überall rechnen anstatt schätzen, wo die erzielbare größere Genauigkeit durch verhältnismäßig geringen Zeitaufwand erkaufte wird. Im vorliegenden Falle hat der Spannungsverlust in der Rückleitung sicherlich keinen hohen Wert. Der durch ihn bedingte Leistungsverlust wird also so gering sein, daß man seinethalben ruhig sich mit der Schätzung begnügen könnte. Die Größe des Spannungsverlustes in den Schienen gibt aber einen Anhalt über die Stärke der abirrenden Erdströme und damit indirekt einen Schluß über mögliche und zu befürchtende Störungen durch diese Ströme. Und aus diesem Grunde soll dieser Verlust möglichst klein gehalten und so genau als möglich durch Rechnung vorausbestimmt werden.

Manche Vorschriften geben 7 Volt als größten Spannungsunterschied zwischen Anfang und irgendeinem Punkt der Schienenrückleitung, gerechnet für die durchschnittliche Normalbelastung des Schienennetzes. Dieser Wert entspricht den englischen Vorschriften und soll für diese Rechnung auch als obere Grenze gewählt werden.

Zunächst sollen die Schienen betrachtet werden. Ihr weicher Stahl ist ein verhältnismäßig guter Leiter. Bell-Rasch geben den Leitwert mit 0,14 des Kupfers an, was etwa $k = 8$ entspräche; Schiemann rechnet als spez. Widerstand $\varrho = 0,11$, entsprechend $k = 9$, die Schweizer Kommission setzt $\varrho = 0,17 \div 0,25 \text{ m/mm}^2$. Von uns ausgeführte Messungen ergaben $k \approx 8$. Da nun das spez. Gewicht etwa 7,75 ist,

so hat eine Schiene von f mm² Querschnitt und 1 m Länge das Gewicht $G_s = \frac{f \cdot 7,75}{1000}$ kg und ihr Widerstand beträgt für 1 km

$$R = \frac{1000}{kf} = \frac{7,75}{8G_s} = \frac{0,97}{G_s} \text{ Ohm/km} \approx \frac{1}{G_s} \text{ Ohm/km.}$$

Um nun eine nach oben abgerundete Zahl zu haben, setzen wir den Widerstand der Schiene für den Kilometer

$$R = \frac{1}{G_s} \text{ Ohm/km.}$$

Ein Kilometer Schiene von 35 kg Gewicht für 1 m besitzt demnach $1/35$ Ohm, ein Gleis aus zwei solchen Schienen einen Widerstand von $1/70$ Ohm. Hierbei sind jedoch die Widerstände der Schienenstöße nicht berücksichtigt. Diese werden selbst bei der besten Bauweise immer nach der Sauberkeit der Ausführung erheblich voneinander abweichen. Wenn man also auch Widerstände wesentlich unter 0,00005 Ohm beobachtet hat, dürfte es doch wünschenswert sein, etwa ein Zehntausendstel Ohm für den Schienenstoß als Übergangswiderstand zu rechnen und außerdem den Kupferdraht zur Verbindung der Stöße mit einer mittleren Länge von etwa 30 cm und dem Querschnitt der Ausführung in Rechnung zu stellen. Dies gibt also, wenn man den Kupferquerschnitt der Schienenverbinder mindestens = 50 mm² setzt (besser wären zwei parallel geschaltete Fahrdrabtastfallstücke von je 50 mm²), für den Widerstand für 1 km Schiene bei 12 m langen Schienen

2×84 Übergangswiderstände zwischen Schiene und Draht je 0,0001	0,0168 Ohm
gibt	0,0084 „
84 Schienenverbinder je 30 cm = $\frac{0,30 \cdot 84}{60 \cdot 50}$	0,029 „
Widerstand der Schiene selbst von 35 kg Gewicht für den Meter	0,027 „
<u>Zusammen</u>	<u>0,054 Ohm.</u>

Der Schienenwiderstand erscheint hier nahezu verdoppelt; der Widerstand des Gleises von 0,027 Ohm/km ist aber trotzdem noch recht klein gegenüber dem Widerstand der doppelten Fahrdrähte mit 0,175 Ohm/km. Die 35-kg-Schiene entspricht eben auch einem Kupferleiter von etwa 610 mm².

Die gesamte Rückleitung bildet hier ein geschlossenes Netz. Diese Maschenbildung kennzeichnet alle Rückleitungsnetze. Im allgemeinen werden die Schienen infolge ihrer durch den Straßenverlauf bedingten Lage ein vielfach geschlossenes Netz bilden. Es ist für seine Stromverteilung zweckmäßig, sich der in den vorhergehenden Kapiteln erläuterten Transfiguration zu bedienen.

Im vorliegenden einfachen Falle vermittelt man die Verteilung wie folgt:

Zunächst nimmt man an, daß auf beiden Strecken die Höchstbelastung gleichzeitig eintritt. Im allgemeinen wird dies nicht der Fall sein, da sie für die Strecke $ABCD$ 46 Minuten, für die Strecke AEC 44 Minuten nach der Abfahrt von A aus eintritt. Wenn aber der erste Wagen über die eingleisige Strecke um 2 Minuten später abgelassen

Woraus für den Spannungsverlust bis C folgt:

$$v = 100 \left(\sum i l \right) \frac{R}{1000}$$

$$\left. \begin{aligned} v_1 &\approx 2,433 \cdot 2,7 = 6,57 \text{ Volt} \\ v_2 &\approx 2,402 \cdot 2,7 = 6,49 \text{ ,, } \end{aligned} \right\}$$

Die geringe Ungenauigkeit rührt von der Abrundung bei der Festsetzung von x her. Der Höchstwert des Spannungsunterschiedes bei D ist noch um

$$\frac{(600 \cdot 35 + 400 \cdot 30) \cdot 0,027}{1000 \cdot 2} \approx 0,45 \text{ Volt}$$

höher, also rund 7,0 Volt bei höchster Belastung, und noch innerhalb der hier als zulässig angenommenen Grenze. Die obige Rechnung ist gleichwertig der Ermittlung des Schwerpunktes der Belastung aus dem Netz. Seine Entfernung λ ist für die doppelgleisige Strecke ABC

$$\lambda_1 = \frac{\sum i l}{\sum i} = \frac{486600}{188 \cdot 1000} = 2,6 \text{ km,}$$

für die eingleisige Strecke AEC

$$\lambda_2 = \frac{\sum i l}{\sum i} = \frac{240200}{109 \cdot 1000} = 2,2 \text{ km.}$$

Daraus folgt

$$v_1 = \frac{2,6 \cdot 188 \cdot 0,027}{2} = 6,57 \text{ Volt,}$$

$$v_2 = 2,2 \cdot 109 \cdot 0,027 = 6,49 \text{ ,,}$$

wie oben.

3. Rückspeisekabel und Zusatzmaschinen.

Nach den vom Verein Deutscher Straßenbahn- und Kleinbahnverwaltungen und dem Verbands deutscher Elektrotechniker im Einvernehmen mit dem Deutschen Verein von Gas- und Wasserfachmännern im Jahre 1910 aufgestellten „Vorschriften¹⁾ zum Schutz der Gas- und Wasserrohre gegen schädliche Einwirkungen der Ströme elektrischer Gleichstrombahnen, welche die Schienen als Leiter benutzen“, müssen die elektrischen Schienenverbindungen derart bemessen sein, daß der Gesamtwiderstand einer mit solchen Verbindungen versehenen Gleisstrecke um höchstens 20% größer ist als der Widerstand eines gleich langen ununterbrochenen Gleises von gleichem Querschnitt und gleicher Leitfähigkeit. Ferner sollen die Schienen eines Gleises sowie die mehrerer nebeneinander liegenden Gleise mindestens an jedem zehnten Stoß leitend verbunden sein. Auch sind die Schienenanschlüsse an Weichen und Kreuzungen, wie auch deren Einzelschienen mit Kontaktverbindungen zu versehen. Diese Überbrückungs- und Querverbindungen müssen wenigstens die Leitfähigkeit einer Kupferverbindung von 80 mm² haben. Die Schienenverbindungen sind jährlich einmal

¹⁾ ETZ 1910, S. 491.

nachzuprüfen und, falls sie einen höheren Widerstand als eine 10 m lange ununterbrochene Schiene aufweisen, instand zu setzen.

Bezüglich der Verteilung der Spannung längs des Gleises wird vorgeschrieben, daß im inneren verzweigten Schienennetz und innerhalb eines 2 km breiten Gürtels bei mittlerem fahrplanmäßigen Betrieb die rechnerisch ermittelte Schienenspannung zwischen zwei beliebigen Punkten des Netzes 2,5 Volt nicht überschreiten darf, während auf den auslaufenden Strecken das größte Spannungsgefälle in den Schienen höchstens 2 Volt/km betragen darf.

Diesen scharfen Bedingungen entspricht das durchgerechnete Beispiel nicht. Selbst bei widerstandslosen Schienenverbindern wäre bei der betrachteten ungünstigen Belastung der größte Spannungsverlust 3,5 Volt, bei mittlerem Betriebe also annähernd 2,5 Volt. Man müßte daher entweder schwerere Schienen wählen oder isolierte Rückleitungen anwenden, deren Querschnitt sich jedoch nur in seltenen

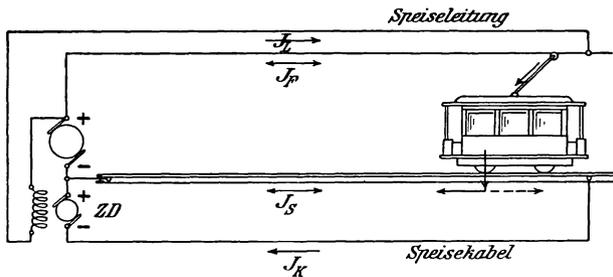


Abb. 389. Kappsche Saugdynamo.

Fällen den auf Kupfer umgerechneten Querschnitten der Schienen nähern kann. Denn diese haben nur aus mechanischen Gründen so große Querschnitte (im Beispiel gleichwertig 610 mm^2 Kupfer). Legt man in Abb. 384 noch ein Schienen- oder Rückspeisekabel von 200 mm^2 , also vom gleichen Querschnitt wie das Hauptspeisekabel, dann zeigt eine einfache Rechnung, daß dies nur äußerst wenig hilft. Man bringe dazu die in den Schwerpunkten der Strecken angreifenden Gesamtbelastungen auf die Knotenpunkte über. Dann erhält A 113 Amp., C 184 Amp. Ein 200-mm^2 -Kabel parallel dem Doppelgleis ABC und dem einfachen Gleis AEC übernehme nur etwa $\frac{1}{10}$ der Last in C . Will man haben, daß das Rückspeisekabel die ganze Last in C übernimmt, dann muß man den in ihm dabei auftretenden Verlust von $\frac{3600 \cdot 184}{57 \cdot 200} = 58 \text{ Volt}$ durch Einschaltung einer elektromotorischen Kraft ausgleichen. Man schaltet dann eine Rückleitungs- oder Zusatzdynamo ZD (Saugmaschine, milking booster, dévolteur) so ein (Abb. 389), daß ihr Anker in Reihe zum Rückspeisekabel mit dem Strom J_K liegt, während ihr Feld von dem Strom J_L , der den Bezirk versorgenden Speiseleitungen erregt wird. Dies ist eigentlich Lahmeyers Fernleitungsdynamo in

etwas abgeänderter Form. Für Schienenrückleiter hat sie Kapp vorgeschlagen.

Diese Zusatzmaschine saugt sozusagen den größten Teil des Stromes aus den Schienen ab. Die Spannungen in C und A werden einander gleich und im Falle der Abb. 384 ist der größte auftretende Spannungsverlust, wie man durch Aufschneiden der beiderseits gespeisten Leiter finden kann,

$$\begin{aligned} &\text{in } ABC \text{ nur noch } 1,32 \text{ Volt,} \\ &,, AEC \text{ ,, ,, } 1,55 \text{ ,, .} \end{aligned}$$

Die nun noch von A ausgehenden Ströme sind auf der doppelgleisigen Strecke 52, auf der eingleisigen 61 Amp. Bei ausgedehnteren Netzen wählt man für Netzteile, die weiter als 3—5 km liegen, Schienenzuleitungen mit (negativen) Zusatzmaschinen, zuweilen auch mit regelbaren Vorschaltwiderständen in den einzelnen Rückspeisekabeln, die mit Kabelprüfdrähten versehen sind, um im Kraftwerke auf minimale Spannungsunterschiede einregeln zu können.

Die Zusatzmaschine kann auch (positiv) gebraucht werden, um bei langen Speisekabeln deren Spannung zu erhöhen (Booster, survolteur). Die hierbei auftretenden Wirkungen beruhen auf der Erhöhung der Spannung am Speisepunkte und sind aus den früher gegebenen Erläuterungen ohne weiteres deutlich.

Die Zusatzmaschine wird nicht viel angewendet. Häufig wählt man statt isolierter Rückspeisekabel alte Schienen, deren Querschnitt sehr groß gewählt werden kann.

Der Einfluß der Spannungsunterschiede auf die von den Schienen ausgehenden Streuströme soll nun klargelegt werden.

4. Stromrückleitung und Streuströme.

Die Störungen, welche elektrische Bahnen mit Schienenrückleitung hervorrufen können, lassen sich meist auf drei Ursachen zurückführen. Es sind Fernwirkungen der Stromleitungen auf physikalische

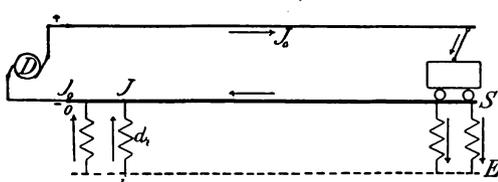


Abb. 390.

als Nebenschluß zu den Schienenleitungen in der Erde bilden, und schließlich Ausgleicherdströme, die zwischen zwei von derselben Zentrale gespeisten Straßenbahnstrecken hervorgerufen werden, so

daß zwischen ihnen ausgleichende Erdströme auftreten.

a) **Verlauf der Erdströme.** Zunächst soll ein typischer Fall betrachtet werden. Das Erdreich wird als ein unbegrenzter Leiter von gleichförmiger und gegen die Schienen großer Leitfähigkeit betrachtet. Der Wagen soll am Ende der Schienenleitung S (Abb. 390) stehen und durch die Kontaktleitung den Strom J_0 aus der Dynamo D erhalten, und längs der ganzen Strecke l soll Überleitung von den Schienen

nach der Erde hin stattfinden. Dieser Erdstrom verzweigt sich teils im Erdreich, teils fließt er durch Metallmassen, die sich im Erdreich befinden. Wenn dann R der Widerstand der Schienen, r der Übergangswiderstand von ihnen zur Erde E für dieselbe Längeneinheit bedeuten, so ist der Stromübergang di von den Schienen¹⁾ zur Erde in der Entfernung x von der Zentrale für das Schienenelement dx

$$di = (V - V_E) \frac{dx}{r}, \quad \text{woraus} \quad V = r \frac{di}{dx} + V_E.$$

Der Maschinenstrom J_0 verzweigt sich in einen Strom J durch die Schienen und einen Strom i durch die Erde, so daß $J = J_0 - i$ und $dJ = -di$ ist. Der Spannungsabfall auf der Strecke dx in den Schienen ist $-dV = JRdx$, woraus

$$\frac{dV}{dx} = -JR.$$

Aus den Gleichungen folgt

$$\frac{dV}{dx} = r \frac{d^2i}{dx^2} = -r \frac{d^2J}{dx^2} = -JR$$

oder

$$\frac{d^2J}{dx^2} = J \frac{R}{r}.$$

Die Integration dieser Differentialgleichung ergibt

$$J = C_1 \varepsilon^{x\sqrt{\frac{R}{r}}} + C_2 \varepsilon^{-x\sqrt{\frac{R}{r}}},$$

worin die Konstanten C_1 und C_2 aus der Bedingung folgen, daß $J = J_0$ für $x = 0$ und für $x = l$ sein muß.

Man erhält also für den Strom durch die Schienen

$$J = \frac{J_0}{1 + \varepsilon \sqrt{\frac{R}{r}}} \left(\varepsilon^{x\sqrt{\frac{R}{r}}} + \varepsilon^{(l-x)\sqrt{\frac{R}{r}}} \right)$$

und für den Strom durch die Erde

$$i = J_0 - J = J_0 \left[1 - \frac{1}{1 + \varepsilon \sqrt{\frac{R}{r}}} \left(\varepsilon^{x\sqrt{\frac{R}{r}}} + \varepsilon^{(l-x)\sqrt{\frac{R}{r}}} \right) \right].$$

Der Strom in den Schienen nimmt also von Anfang und Ende der Linie nach der Mitte hin in Gestalt einer Kettenlinie ab, der Erdstrom ist in der Mitte (Abb. 391) am stärksten. Entwickelt man in Reihen und vernachlässigt die Glieder höherer Ordnung, was für mäßige Werte von l und R/r zulässig ist, so geht die Kettenlinie in eine

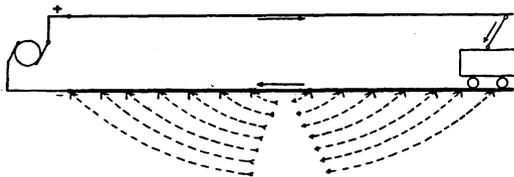


Abb. 391.

¹⁾ Michalke, C.: ETZ 1895, S. 421.

Parabel über, und man erhält angenähert

$$J_0 = \left[1 + \frac{x(l-x)R}{2r} \right]; \quad i = \frac{J_0 x(l-x)R}{2r}$$

und den Höchstwert des Erdstroms

$$i_{\max} = \frac{J_0 l^2 R}{8r} \quad \text{für } x = \frac{l}{2}.$$

Der Spannungsverlust in den Schienen, der vorher so ermittelt wurde, als ob die Erde überhaupt nicht mitleitete, wird jetzt etwas kleiner, nämlich

$$v = - \int_0^l dV = V_0 - V_1 \approx J_0 R l \left(1 - \frac{l^2 R}{12r} \right).$$

Die Klammergröße ist für unseren Fall (Abb. 384), wo $l = 5 \text{ km}$, $r = 50 R$ war, gleich

$$\frac{25}{12} \cdot \frac{1}{50} = 0,042,$$

wobei

$$i_{\max} = \frac{25}{8 \cdot 50} J_0 = \frac{J_0}{16}.$$

Der Spannungsverlust und mit ihm die Erdströme können verkleinert werden, wenn man nach der Mitte der Bahn ein Speisekabel führt, welches die Schienen teilweise vom Strom entlastet. Ein solches Kabel muß isoliert sein. Denn ein blankes Kabel würde nur wirken wie eine geringe Vergrößerung des Schienenquerschnitts. Es ist dabei zu bemerken, daß die Schienen des Gleises in regelmäßigen Abständen eine leitende Querverbindung erhalten, und daß ein blankes Kabel, wenn es als

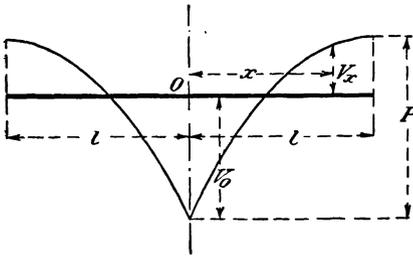


Abb. 392.

Rückspeisekabel, d. h. zur Entlastung der den negativen Strom heraus oder den positiven Strom zur Zentrale zurückführenden Schienenstränge, mit stärkerem Spannungsabfall arbeitet, die Stromverteilung der Erdströme ungünstiger zu gestalten vermag.

Betrachtet man einen Schienenstrang von der Länge $2l$ in Abb. 392, der in der Mitte O durch ein isoliertes Rückspeisekabel auf das Potential V_0 gebracht wird, so stellt dieses ein negatives Maximum dar und wird unter den früheren Annahmen parabolisch auf den Wert V_x in der Entfernung x und den positiven Maximalwert P zunehmen.

Metallene Rohrleitungen, die durch ihren Zusammenhang mit einem größeren Rohrnetz das Potential Null erhalten, sind gefährdet, wenn sie in den Bereich negativer Erdpotentiale hineinragen.

b) Gefährzustand und Gefahrzone. Die Leitsätze des V. D. E. geben zur Schätzung des Gefährzustandes und der Gefahrzone keinen be-

stimmten Wert des Spannungsverlustes in den Schienen an, sondern setzen fest:

Ein Gefährzustand besteht nicht bei Metallrohren, deren Verbindungsstellen den Strom schlecht leiten. Es besteht jedoch die Möglichkeit einer elektrolytischen Gefährdung bei kontinuierlich leitenden Metallrohren, und zwar in um so höherem Maße, je größer ihre Längserstreckung und je kleiner ihre Entfernung von den Gleisen, ferner, je größer die Potentialdifferenz im Boden entlang den Rohren ist.

Die Gefährdung ist dagegen um so geringer, je weniger die chemische Beschaffenheit des Bodens elektrolytische Wirkungen begünstigt und je größer die Übergangswiderstände der Rohre und Gleise sind, ferner je geringer die Stromdichte an den stromaussendenden Stellen des Rohrmantels ist.

Als ungefährdet gelten alle Rohrkomplexe, deren nächster Punkt mindestens 1 km von den Gleisen entfernt ist. Ein parallel und dicht neben den Gleisen verlegtes Rohr gilt als ungefährdet, wenn seine Länge innerhalb dieser Nachbarzone nicht größer ist, als dem Spannungsabfall von 0,3 Volt, bezogen auf den Jahresdurchschnitt der Belastung in den gegenüberliegenden Punkten der Erde, dicht neben den Schienen gemessen, entspricht. Für Rohre, welche von dem Gleise weiter abliegen, kann diese Länge ohne Gefährdung um das Dreifache des Abstandes von den Gleisen vermehrt werden. Wird der Abstand des Rohres vom nächsten Schienenpunkte mit d in Meter bezeichnet, und ist V das durchschnittliche negative Potential an diesem Schienenpunkt, ferner V_a das Erdpotential in der Nähe des Rohres, so ist dessen Abhängigkeit von dem Abstand D angenähert:

$$V_a = \frac{a_1 V}{1 + bD}.$$

Bei gleichmäßiger Bodenbeschaffenheit und ungehindertem Kontakt zwischen Schienen und Boden hat a_1 die Größe 1. Bezeichnet ferner V_0 das durchschnittliche negative Potentialmaximum im Gleise am Rückspisepunkt, so ist das Erdpotential V_a in der Umgebung eines im Abstände d von den Gleisen in der senkrecht durch den Rückleitungspunkt gelegten Ebene befindlichen Rohres angenähert ausgedrückt durch

$$V_a = \frac{a_2 \delta_s l}{1 + bD}.$$

Dabei ist δ_s die im Jahresdurchschnitt sich ergebende Stromdichte in Ampere/cm² Schienenquerschnitt und l die Länge der freitragenden Gleisstrecke in Metern. Die Konstanten a_1 , a_2 und b hängen von der Schienenleitung und den Gleisübergangswiderständen ab. Bei gleichmäßiger Bodenbeschaffenheit ist $a_2 \approx 10^{-3}$, $b \approx 0,1$.

Für eine zweigleisige, in gleichmäßig leitendem Boden liegende Bahn würde hiernach das Erdpotential im Abstände $D = 10$ m von den Schienen gleich der Hälfte des am Rückleitungspunkt herrschenden negativen Potentialmaximums V_0 , im Abstände von 100 m der elfte, im Abstände von 1000 m von den Gleisen nur noch der hundertste Teil sein.

Um den Spannungsunterschied von 0,3 Volt nicht zu überschreiten, ist zu beachten, daß das Produkt Stromdichte δ_s mal Länge l der freitragenden Gleisstrecke entsprechend klein ausfällt. Die Speisepunkte der Gleise sind möglichst entfernt von den zu schützenden Rohren, insbesondere von Kreuzungsstellen und an das Gleis heranreichenden Rohrausläufern anzulegen. Keinesfalls dürfen die Gleise mit den Rohren leitend verbunden sein oder besondere Erdableitungen erhalten.

Besig¹⁾ bezeichnet als Grad der Gefährdung durch Korrosion die zerstörte Schichtdicke d im Bereich F der Korrosion. Nennt man a das elektrochemische Äquivalent, t die Zeit in Sek., während der die Stromstärke i durch die Austrittsstelle aus dem Rohr fließt, γ das spezifische Gewicht des Rohrmaterials, dann wird

$$d = \frac{a \cdot \delta_s \cdot t}{F \cdot \gamma}.$$

Für 0,001 Amp. für je 100 cm² oder $\delta_s = 10^{-5}$ Amp. über die Dauer eines Jahres wird $d = 0,115$ mm bei Eisen, bzw. halb so groß für Verbindungen, in denen das Metall mit der kleineren Valenz auftritt, und 0,295 mm bei Blei. Diese theoretisch berechneten Werte gestatten jedoch wegen sekundärer chemischer Vorgänge keine zahlenmäßigen Schlüsse bezüglich der Gefährdung. Da der Übergangswiderstand r stets veränderlich ist, treten an korrodierten Stellen kraterförmige Vertiefungen in der Rohrwand auf. Die Erscheinung wird als „Lochfraß“ bezeichnet.

Nach der von Haber vorgeschlagenen Methode hat Besig 1912 in Genf die Erdstromdichte an einigen besonders gefährdeten Stellen des Rohrnetzes ermittelt²⁾. Er fand bei einem angerostetem Rohr

$$\begin{array}{ll} \text{als Mittelwerte } \delta_s = 0,10 \text{ mA/dm}^2, & V = 0,65 \text{ Volt,} \\ \text{,, Höchstwerte } & 0,31 \text{ ,,} & 0,9 \text{ ,,} \end{array}$$

bei einem deutlich angefressenen Rohr $\delta_s = 0,33$ mA/dm², $V_d = 1,0$ Volt als mittlere und $\delta_s = 0,93$ mA/dm², $V_d = 3,2$ Volt als höchste Werte. Es kamen aber auch höhere Werte an anderen Stellen vor.

Die Schweizer Kommission gibt zu, daß $\frac{3}{4}$ Milliamp. für 1 dm² ($\delta_s = 0,75 \cdot 10^{-5}$) entsprechend den Erdstromvorschriften des Deutschen Vereins von Gas- und Wasserfachmännern Rohrleitungen gefährdet, wirft aber die Frage auf, ob bei Aufstellung solcher Grenzwerte nicht auch der erhofften Lebensdauer des Rohres und seinem Material (Blei oder Eisen) Rechnung zu tragen sei.

c) **Verhütung der schädlichen Wirkungen.** Die wesentlichsten Mittel sind die tunlichst isolierte Verlegung der Schienen, die aber auf die Dauer weder durch Pech-, noch durch Teeranstrich zu erzielen ist, und die Erhöhung des Selbstschutzes der Rohrleitungen, etwa durch Einfügung isolierender Zwischenstücke. Hier kommen jedoch vor allem die elektrischen Methoden in Betracht, durch welche der Abfall in der

¹⁾ Besig, F.: Erdströme und Rohrleitungen. Journ. f. Gasbeleuchtung u. Wasserversorgung 1913, Nr. 3.

²⁾ Wyssling: Die Korrosion durch Erdströme als Bahnen. Bull. des Schweiz. El. Vereins. Bd. 9, Nr. 7 u. 8. 1918.

Schienenrückleitung vermindert werden kann. Dies kann, wie bereits erwähnt, geschehen durch Erniedrigung des Gleiswiderstandes unter Verwendung schwerer Schienen, durch isolierte Rückspeisekabel und durch Zusatzdynamos, welche so geschaltet sind, daß die zu schützenden Rohrmassen negativ gegen die Schienen werden, so daß also im Fall der Elektrolyse das Metall nach den Rohren hin nicht von ihnen weggeführt würde. Das erste Verfahren der Erhöhung des Schienenquerschnitts über den betriebsmäßig erforderlichen Wert ist teuer und wenig zweckmäßig. Dagegen werden isolierte Rückspeisekabel häufig angewendet.

5. Wechsel- und Drehstrombahnen.

Bahnen von geringer Streckenlänge und dichtem Verkehr werden meistens mit nieder- oder hochgespanntem Gleichstrom gespeist. Für schwere Züge hat man dabei vielfach statt der Oberleitung die dritte (isolierte) Schiene verwendet, solange die Spannung unter 1000 Volt bleibt. In dieser Weise sind die amerikanischen Hochbahnen, die Londoner Untergrundbahn und 1902 die Berliner elektrische Hoch- und Untergrundbahn ausgeführt. Für höhere Spannungen als 1000 Volt kommt dagegen nur Oberleitung in den verschiedenen Ausführungsarten der einfachen und vielfachen Aufhängung zur Anwendung.

Die vom Fahrdraht auf das Fahrzeug zu übertragende größte elektrische Arbeit ergibt sich aus der Überlegung, daß ein Stromabnehmer dauernd etwa 100 Amp. übertragen kann. Hat der Motorwagen¹⁾ zwei solcher Abnehmer, so können bei 1500 Volt 300 kW dauernd, 500 kW vorübergehend übertragen werden. Bei Übertragung höherer Leistung kann Fahrdraht und Stromabnehmer leiden. Bei 15000 Volt Wechselstrom können unter gleichen Verhältnissen 3000 bis 5000 kVA dem Fahrzeug zugeführt werden.

Als besonderen Vorteil des Gleichstromsystems hat man die Möglichkeit zu puffern angesehen. Man versteht darunter die Möglichkeit, durch besondere Einrichtungen die Strom- und Leistungsstöße des Bahnbetriebes abzuschwächen. Solche Einrichtungen sind Pufferbatterien (Speicherbatterien), oder bei Einphasen- und Drehstrom umlaufende Maschinensätze oder Umformer mit Schwungrädern oder Batterien. Nach den Ermittlungen der schweizerischen Studienkommission für die Elektrizierung der Schweizer Bahnen ergab sich das Einphasensystem als das günstigste, das Gleichstromsystem von allen dreien als das ungünstigste in bezug auf wirtschaftliche Pufferungsmöglichkeit. Trotzdem für die schweizerischen Bahnverhältnisse die Kraftwerke als Spitzenleistung $3\frac{1}{2}$ mal die mittlere Leistung haben müssen, ist die Frage noch nicht entschieden, ob die Werke für diese Höchstleistung oder mit Pufferung ausgebaut werden sollen. Die genannte Studienkommission empfahl dann auch das Einphasensystem bei Verwendung von Kommutatormotoren mit Reihenschlußcharakte-

¹⁾ Reichel, W.: Elektr. Kraftbetr. u. Bahnen. S. 109. 1913.

ristik, ausgeführt mit 15 Per./Sek. und einer Fahrdrachtspannung von ungefähr 15000 Volt als das für Schweizer Verhältnisse günstigste System.

In dieser Weise ist auch die Mittenwaldbahn Innsbruck—Garmisch—Partenkirchen—Murnau ausgeführt¹⁾, deren erste Teilstrecke 1912 in Betrieb kam. Ihre gesamte Länge war mit 105 km geplant und sollte bis zur Inbetriebsetzung des Walchenseewerkes aus einem Wasserkraftwerk bei Innsbruck mit 50000 Volt aus zwei Transformatorenunterwerken mit rund 56 km Entfernung gespeist werden. Die Leitungen erhielten dabei Querschnitte, die aus Gründen der mechanischen Festigkeit nicht gut zu unterschreiten waren.

Demgegenüber hat die 106,5 km lange Valtellinabahn, die mit Drehstrom von 3000 Volt betrieben wird, neun Unterwerke mit zehn Transformatoren zu je 300 kVA, also etwa alle 12 km einen Speisepunkt. dabei muß allerdings gesagt werden, daß die 106,5 km nicht in einer Linie liegen, was bei der Zahl der Speisepunkte natürlich eine Rolle spielt.

Die Elemente der Energieübermittlung bei diesen Anlagen bestehen aus den für hohe Spannungen bestimmten Primärleitungen, den Transformatoren und den sekundären oder Arbeitsleitungen, welche in der Regel bei Wechselstrom durch einen, bei Drehstrom durch zwei Fahrdrähte als Zuleitung und durch die Schienen als Rückleitung gebildet werden.

Die Grundlage zur Ermittlung der bis zu den jeweiligen Belastungspunkten auftretenden Spannungs- und Energieverluste bildet auch hier das Belastungsdiagramm, das durch den Fahrplan, das Längenprofil und die Beschaffenheit der Strecke, das Gewicht und die Geschwindigkeit der Züge bestimmt ist.

Aus dem veränderlichen Charakter des Belastungsdiagramms folgt ohne weiteres, daß eine genaue Berechnung dieser Verluste schwierig und zeitraubend ist. Hier sind die einem örtlichen Punkt entsprechenden Werte zeitlich stark verschieden und die einen Zeitpunkt entsprechenden Werte örtlich nach unbestimmbaren Gesetzen verteilt. Glücklicherweise aber treten die höchsten Beanspruchungen nur vorübergehend beim Anfahren und während der Beschleunigungsperiode auf, so daß ein Fehler in der Ermittlung des für den Effektverlust maßgebenden Faktors k_f

$$k_f = \frac{\sqrt{M(i^2)}}{M(i)}$$

nicht allzu stark ins Gewicht fällt. Der Charakter und die Überlastungsfähigkeit der Motoren sind ähnlich den Gleichstrommotoren, und die bei ihnen auftretenden Unterschiede in den Phasenverschiebungen zwischen den Strömen einzelner Abzweigungen und zwischen Strom und Spannung eines verschieden belasteten Motors können für die Leitungsrechnung in erster Annäherung vernachlässigt werden, obgleich wir hier auch die Mittel und Wege angegeben haben, wie sie genau

¹⁾ Siehe E. E. Seefehlner: El. Kraftbetr. u. Bahnen. S. 116. 1913.

zu berücksichtigen wären, wenn man diese erhebliche Arbeit nicht für praktisch unnötig erachtete.

Man entwirft die primäre und sekundäre Leitungsanlage, indem man dabei auf die Schirmwirkung bei Wechselströmen achtet, für einen größten Spannungsverlust von je etwa 10%, ordnet die Leitungen aber so an, daß diese Höchstwerte niemals gleichzeitig erreicht werden, sondern der größte gleichzeitige Verlust etwa 9—10% der transformierten Motorspannung ausmacht. Diese Aufgabe erfordert das Erfassen der charakteristischen Fälle.

Die Speiseleitungen werden, soweit ihre Anzahl und der Spannungsverlust in Betracht kommen, wie für ein Transformatorennetz, soweit die Verluste und wirtschaftliche Rücksichten, wie für ein mit Gleichstrom betriebenes Bahnnetz berechnet. Hierauf soll im folgenden Abschnitt näher eingegangen werden.

In den Transformatoren treten wechselnde Verluste und Belastungen dadurch auf, daß sich die Last allmählich von der Anschlußstelle des einen Transformators längs der Fahrleitung zum Anschlußpunkt des nächsten Transformators verschiebt. Bei gleichen Transformatoren mit gleichen primären Klemmenspannungen wird dann jeder die Hälfte der Last übernehmen, wenn diese in der Mitte zwischen den Anschlußstellen angreift, sonst wird immer der der Last am nächsten liegende Transformator am meisten zu ihrer Speisung herangezogen. Auch diese Verhältnisse sind bereits im 13. Kapitel auf Seite 344 behandelt worden.

Die Berechnung der Arbeitsstrecken¹⁾ unterscheidet sich wie bei allen Fahrdrableitungen insofern von sonstigen Leitungsberechnungen, als hier der Leitungsquerschnitt sich nicht als das Ergebnis der Rechnungen findet, sondern von vornherein festgestellt wird. Man benützt auch bei Dreiphasenanlagen gewöhnlich Kupferdrähte von 50 mm², bei schweren Betrieben Profildrähte von 80 mm² Querschnitt und mehr. Die Rechnungen zielen nur auf die Feststellung der Entfernung der Transformatoren ab und lassen ebenfalls eine Abweichung von der für den Fahrdraht gewählten Betriebsspannung als wünschenswert erscheinen. Bei der Festsetzung der Transformatorenentfernungen ist auf Überlastung beim Schadhafwerden eines Transformators Rücksicht zu nehmen.

Die Grundlage der Rechnungen bildet der zulässige Spannungsabfall, dessen Höchstwert gewöhnlich zwischen 5 und 10% gewählt wird, und dessen Durchschnittswert etwa $\frac{1}{2}$ bis $\frac{3}{4}$ hiervon beträgt.

In derlei Berechnungen wird zwischen Stadtbahn- und Vollbahnbetrieben unterschieden, indem bei ersterem der Betrieb überwiegend aus dem Anfahren und Auslaufen der Züge besteht. Da das Anfahren mit großer Beschleunigung erfolgt, ist die hierbei aufgewendete Energie bedeutend größer, als sonst zur Beförderung der Züge erforderlich ist. Diese großen Stromstöße, welche sich an jeder der einander nahe liegenden Stationen rasch nacheinander wiederholen, lassen es als

¹⁾ S. auch Hultschiner: ETZ 1910, S. 1206. Sumec ebenda. S. 1175.

wünschenswert erscheinen, sämtliche Stationen von vornherein mit Transformatoren zu versehen. In diesem Falle beschränkt sich die Berechnung auf einzelne Kontrollfälle. Es ist aber durchaus nicht ausgeschlossen, daß man bei Stadtbahnen eine ähnliche Transformatorverteilung wie für Fernbetrieb mit Vorteil anwendet. In diesem Fall sind die Teile der Arbeitsleistungen miteinander durch die Transformatoren verbunden, während sonst jedes Stationsintervall eine von allen anderen ständig isolierte Abteilung bildet.

Für den Abfall in den Schienen ist eine besondere Rechnung erforderlich, wobei zu beachten ist, daß die Schienen nur so wirken, als ob nicht ihre Masse, sondern nur eine dünne, äquivalente Schicht rings um den Schienenumfang homogen leitend wäre. Nach unseren Messungen¹⁾ von 1900 wird der Widerstand der Schienen bei 50 Perioden auf etwa das Achtfache, bei den für Bahnen verwendeten Frequenzen von 15 bis 20 Per./Sek. etwa auf das Vierfache des Schienenwiderstandes bei Gleichstrom erhöht.

A. E. Kennelly²⁾ hat 1914 mit F. H. Achard und A. S. Dana umfassende Untersuchungen über den Wechselstromwiderstand von Eisenbahnschienen angestellt, die sich auf normale Schienen und Kontaktschienen (sogenannte dritte Schienen) bezogen. Bei normalen Fahr-schienen und bei 25 Per./Sek. ist der Wechselstromwiderstand 5,35- bis 10,1mal, bei den aus Weichstahl hergestellten Kontaktschienen 10,9- bis 13,4mal größer als bei Gleichstrom. Zwischen 25 und 60 Per./Sek. ist der Wechselstromwiderstand einer Schiene in erster Annäherung der Quadratwurzel aus der Frequenz proportional. Bei gegebener Frequenz ist er umgekehrt proportional dem Umfang des Schienenquerschnitts und der Wurzel aus dem Verhältnis k/μ , der elektrischen Leitfähigkeit zur magnetischen Permeabilität.

Schienen und Fahrdrabt bilden eine mit Selbstindustrie behaftete Schleife³⁾, worauf bei Ermittlung des Abfalls zu achten ist.

Die Streuströme können bei Wechselstrombahnen durch Übertritt in benachbarte Telegraphen- und Telephonleitungen, sofern diese die Erde als Leiter mitbenutzen, Störungen hervorrufen. Daneben kann der im Erdreich fließende Wechselstrom auch durch elektrodynamische Induktion den benachbarten Schwachstrombetrieb stören.

Zur Verkleinerung des im stromleitenden Gleise und umgebenden Boden auftretenden Spannungsverlustes können hier saugende Transformatoren mit Erfolg verwendet werden, deren Primärwickelungen nach Kapp mit der Fahrleitung und deren Sekundärwickelungen mit der Schienenrückleitung in Reihe geschaltet sind, während Behn-Eschenburg die Sekundärleitungen in eine Hilfsleitung legt und diese mit der Schiene parallel schaltet. Auf der 46 km langen Wechselstrombahn Perpignan-Villafranca der französischen Südbahn sind derartige

¹⁾ Vgl. Herzog u. Feldmann: Über den Widerstand eiserner Wechselstromleiter. ETZ 1900, S. 844, 861.

²⁾ J. Frankl. Inst. Bd. 182, S. 135. Auch elektrische Bahnen u. Betriebe 1917, S. 301.

³⁾ Lichtenstein, E.: ETZ 1907, S. 620.

Saugtransformatoren nach Behn-Eschenburg in Abständen von 4 km aufgestellt. Sie leisten je 12 kVA mit einer Übersetzung 115/110 Volt sind isoliert auf 20 000/2000 Volt, als Öltransformatoren für $16\frac{2}{3}$ Per./Sek. gewickelt und haben 1,13% Eisenverlust, 7,3% Kupferverlust und 8% Kurzschlußspannung. Der Erfolg war vollkommen befriedigend¹⁾.

6. Wirtschaftliche Bemessung der Bahnspisekabel.

Wegen der Unempfindlichkeit der regelbaren Motoren gegenüber geringen Spannungsschwankungen entfällt für die Speiseleitungen die für Lichtbetrieb in erster Linie maßgebende Rücksichtnahme auf sehr genaue Festhaltung der Spannung, und es tritt an ihre Stelle die Rücksichtnahme auf die Betriebskosten. Diese kommen eben für täglich 22 bis 15 Stunden in Betracht.

Wir haben in dem früheren Beispiel die Speiseleitungen nur nach dem Höchststrome bemessen, den sie zu führen haben. Wenn wir aber die Querschnitte so wählen wollen, daß die Summe der Kosten für den Leistungsverlust in den Leitungen und des Betrages für Verzinsung und Amortisation am kleinsten wird, muß man die Schwankungen des Speisestromes beachten.

Ist der Strom irgendeine Funktion $i = f(t)$ der Zeit, so ist der Mittelwert $M(i)$ stets kleiner als der Effektivwert $J = \sqrt{M(i^2)}$, der, mit dem Widerstand des Leiters multipliziert, den Leistungsverlust ergibt. Es wird also der Formfaktor

$$k_f = \sqrt{\frac{\frac{1}{t} \int_0^t i^2 dt}{\frac{1}{t} \int_0^t i dt}} = J : M(i)$$

stets größer als 1 werden. Für Kurven mit regelmäßigem Verlauf läßt sich k_f leicht rechnerisch ermitteln.

Bei praktischen Betrieben treten jedoch unregelmäßige Schwankungen auf (Abb. 393)²⁾. Die Teilstrecke, welcher der Strom durch ein Speisekabel von $f = 240 \text{ mm}^2$ Querschnitt und $L = 5400 \text{ m}$ Länge zugeführt wurde, besaß eine dreifache Länge von 1150 m und wies Steigungen bis zu 6% auf. Die mittlere Steigung betrug 5%. Die Teilstrecke wurde in $7\frac{1}{2}$ Minuten von zwei Linien durchfahren, wobei jedoch die Wagen beider Linien von 10 Tonnen Gewicht bei mittlerer Besetzung aufeinander folgten und die Strecke aufwärts in $6\frac{1}{2}$, abwärts in $5\frac{1}{2}$ Minuten durchliefen.

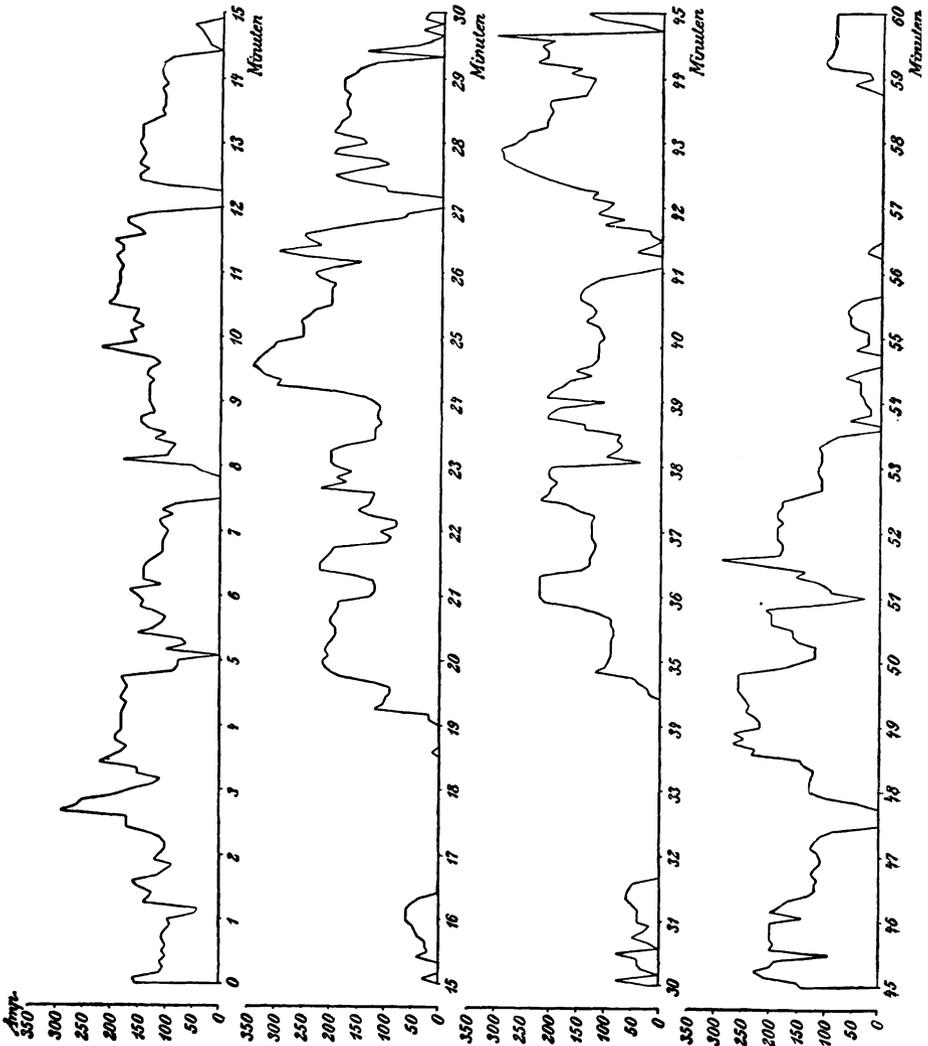
Aus den abgelesenen Strömen wurden dann die Mittelwerte $M(i)$ und $\sqrt{M(i^2)}$ rechnerisch gebildet. Der Linienwert ergibt sich durch Planimetrieren der Fläche und Teilen durch die Abszisse. Der Flächenwert ergibt sich, indem man die Kurve in schmale Streifen teilt, so daß ihre Elemente als geradlinige Begrenzungen einer Trapezfläche an-

¹⁾ Rev. gén. élect. Bd. 1, H. 9 u. 14, S. 331.

²⁾ Sengel, A.: ETZ 1902, S. 335, 487.

gesehen werden können. Die mittlere Ordinate der Fläche eines solchen Trapezes ist

$$\frac{i_1 + i_2}{2} = M(i);$$



die mittlere Ordinate der quadrierten Fläche ist, wenn die Grundlinie = 1 gesetzt wird,

$$J = \frac{1}{2}(i_1^2 + i_2^2 + i_1 i_2) = \{M(i)\}^2 + \frac{1}{12}(i_1 - i_2)^2.$$

Das letzte kleine Glied kann meistens vernachlässigt werden. Hier ist es bei $i_1 - i_2 < 25$ Amp. vernachlässigbar.

Aus den 721 Beobachtungen folgte dann $M(i) = 112,5$ Amp., $\sqrt{M(i)^2} = 137,8$ Amp., also $k_f = 1,225$. Da nun die Leistungsverluste k_f proportional sind, waren sie hier um 50% höher als sie bei konstant gehaltenem mittleren Strom $M(i)$ aufgetreten wären.

Nennt man J_{\max} den Gipfel- oder Spitzenstrom, T die Betriebszeit des Werkes im Jahr ($T \leq 8760$ Stunden), dann ist der jährliche Arbeitsverlust proportional $J_{\max}^2 T = k_f^2 \cdot \{M(i)\}^2 \cdot T$. Die jährlichen Ausgaben für den Arbeitsverlust im Speisekabel von L m Länge werden dann bei P_1 Pfening Selbstkosten für die kWh für Gleichstrom mit einer Zuleitung

$$K_1 = \frac{w T P_1}{1000} = \frac{J^2 L \varrho}{1000 f} T P_1 = \{M(i)\}^2 k_f^2 \cdot \frac{L \varrho T P_1}{f \cdot 1000}.$$

Wenn der Preis des Kabels für 1 m durch $(a + bf)$ ausgedrückt wird und das Anlagekapital zu p' % verzinst und abgeschrieben werden muß, so betragen die jährlichen Ausgaben für Verzinsung und Abschreibung

$$K_2 = L(a + bf) \frac{p'}{100},$$

die Gesamtkosten also

$$K = K_1 + K_2 = L \cdot \left[\{M(i)\}^2 \cdot \frac{k_f^2 \cdot \varrho T P_1}{f \cdot 1000} + (a + bf) \frac{p'}{100} \right].$$

Sie werden am kleinsten für den Wert des Querschnitts f , der gegeben ist durch

$$\frac{dK}{df} = 0,$$

woraus

$$[f] = M(i) k_f \sqrt{\frac{\varrho T P_1}{10 p' b}}.$$

Bei der untersuchten Bahnlinie ergibt täglich 15stündiger Betrieb $T = 5500$ Stunden im Jahr. Die Selbstkosten der Kilowattstunde für die Bahn betragen 11 R Pf, p' war = 7% und $b = 0,0195$ bei $\varrho = 1/57$. Dann folgt für den wirtschaftlichen Querschnitt

$$[f] = M(i) \cdot 1,225 \cdot \sqrt{\frac{5500 \cdot 0,11}{10 \cdot 57 \cdot 7 \cdot 0,0195}} = 3,42 M(i) = 385 \text{ mm}^2.$$

Für $M(i) = 112,5$ Amp. und $a = 0,97$ RM sind für die betrachtete Bahnlinie auch die Kosten K_1 , K_2 und K bei anderen Querschnitten zusammengestellt. Beim günstigsten Querschnitt sind die Gesamtkosten jährlich um 650 RM geringer als bei dem verwendeten, und die

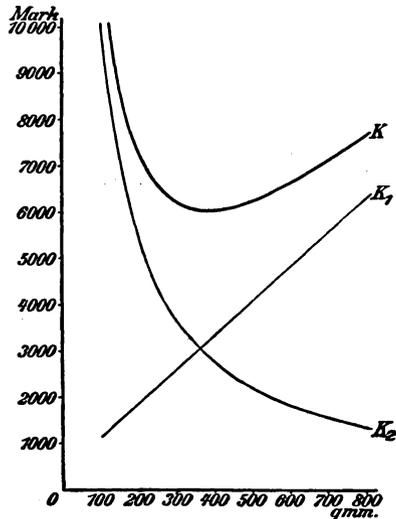


Abb. 394.

Spannungsverluste und Spannungsschwankungen um etwa 40% niedriger.

Dänzler nennt k_f den Stromwärmefaktor und findet für Voll- und Hauptbahnstrecken im allgemeinen kleinere Werte als für das Sengelsche Beispiel mit stark aussetzendem Betriebe. Er führt auch noch für Wechselstrombahnen den Begriff des Schwankungsverhältnisses ein als Verhältnis der Höchstlast zu Mittellast

$$s = \frac{W_{\max}}{W_{\text{mittl.}}} = \frac{J_{\max} \cos \varphi_{\max}}{M(i) \cos \varphi_{\text{mittl.}}}$$

Für große Tagesleistungen von etwa 1500000 tkm wird $k \approx 1,07$, $s \approx 3 \div 3,5$. Im Augenblick der Höchstbelastung wird $\cos \varphi_{\max}$ des Netzes sich dem $\cos \varphi_{\max}$ des Zuges, der etwa $0,9 \div 0,93$ beträgt, nähern, ihn aber nie erreichen, weil stets einzelne Züge nicht voll belastet sind. Bei mittlerer Last können die Leistungsfaktoren des Netzes und der Züge ungefähr einander gleich gesetzt werden. Das Verhältnis $\cos \varphi_{\max} / \cos \varphi_{\text{mittl.}}$ muß daher durch Schätzung ermittelt werden¹⁾.

7. Wirtschaftlicher Spannungsabfall in Fernleitungen für Bahnkraftwerke.

Bahnkraftnetze erfordern auch bei Einphasen- oder Drehstrommotoren weniger sorgfältige Regelung.

Der Spannungsabfall pE kann also größer gewählt werden bei gleicher Betriebsspannung E als bei Lichtnetzen oder bei Industriernetzen mit gemischter Belastung.

Behält man die vorstehenden Bezeichnungen bei, dann sind bei Einphasenstrom die jährlichen Ausgaben für den Arbeitverlust in den zwei Ferndrähren

$$K_1 = w T P_1 = J^2 \frac{2 L \varrho}{f} \cdot T P_1 = \{M(i)\}^2 k_f^2 \frac{2 L \varrho T P_1}{f \cdot 1000}$$

Führt man nun noch das Schwankungsverhältnis

$$s = \frac{J_{\max} \cos \varphi_{\max}}{M(i) \cos \varphi_{\text{mittl.}}}$$

und

$$f = \frac{2 L \varrho W_{\max}}{p E^2 \cos \varphi_{\max}}$$

ein, dann wird

$$K_1 = \frac{P_1 T}{1000} \cdot p W_{\max} \cdot \frac{k_f^2 \cos \varphi_{\max}}{s^2 \cos^2 \varphi_{\text{mittl.}}}$$

Analog ergibt sich für die jährlichen Kosten der Leitungsanlage

$$K_2 = (a + b n f) L p',$$

wenn n die Zahl der Systemleiter, hier also $n = 2$ und p' der Satz

¹⁾ Kummer, W.: Schweiz. Bauzg. Bd. 48, S. 159, 1906. — Dahlander, R.: Versuche mit elektr. Betrieb auf schwedischen Staatseisenbahnen S. 164. 1908.

für Zinsen, Abschreibung und Instandhaltung ist. Hier ist also

$$K_2 = \left(a + \frac{4 \varrho b L W_{\max}}{p E^2 \cos \varphi_{\max}} \right) L p'.$$

Die Mindestkosten treten auf für

$$\frac{dK}{dp} = \frac{d(K_1 + K_2)}{dp} = 0$$

oder für L in km, p und p' in ‰

$$[p] = \frac{20000}{k_f} \cdot \frac{\cos \varphi_{\text{mittl.}}}{\cos \varphi_{\max}} \cdot \frac{Ls}{E} \sqrt{\frac{\varrho b p'}{T P_1}} = \frac{\mu Ls}{E \sqrt{P_1}}.$$

Die Wurzel enthält im Zähler die Leitungszahl, im Nenner die Betriebszahl für den vorliegenden Fall. Der Beiwert

$$\mu = \frac{20000}{k_f} \frac{\cos \varphi_{\text{mittl.}}}{\cos \varphi_{\max}} \sqrt{\frac{\varrho b p'}{T}}$$

für Einphasenstrom und

$$\mu = \frac{17300}{k_f} \frac{\cos \varphi_{\text{mittl.}}}{\cos \varphi_{\max}} \sqrt{\frac{\varrho b p'}{T}}$$

für Drehstrom kann für gegebene Verhältnisse festgelegt werden. Dänzler¹⁾ findet die Schweizer Hochspannungsleitungen $b = 28 \div 40$ Francs mit Holzgestängen, für die Betonmaste des Albulawerkes $b = 23,7$; für die 50000-Volt-Leitung Brusio-Castellanza mit $L = 159$ km und Eisenmasten $b = 20,4$ Francs. Hier wird mit Eisenmasten und großen Spannweiten $b = 22$ Francs für 1 km Länge angenommen.

Die Spannung ist $E = 60000$ Volt bei 15 Per./Sek., die Länge L ist in km,

$$\begin{aligned} p' &= 9,5 \text{ ‰}; \\ k_f &= 1,07; \\ \cos \varphi_{\text{mittl.}} &= 0,7, \quad \cos \varphi_{\max} = 0,85; \\ \varrho &= 1/57; \\ T &= 8500 \text{ Stunden jährlich.} \end{aligned}$$

Dann folgt

$$\mu = \frac{2000}{1,07} \cdot \frac{0,7}{0,85} \sqrt{\frac{22 \cdot 9,5}{57 \cdot 8500}} = 320$$

und

$$[p] = \frac{\mu}{E} \frac{Ls}{\sqrt{P_1}}.$$

Nimmt man hierin E als Konstante an, dann kann man den größten wirtschaftlichen Abfall p in Hundertsteln als Funktion der zwei unabhängigen Variablen L und P_1 darstellen. Man erhält dann Paraboloid, wie in Abb. 395 für $\mu = 320$; $s = 3$ dargestellt. Stellt man umgekehrt den Einfluß des Schwankungsverhältnisses s und Strompreises auf die wirtschaftliche Übertragungslänge L dar, dann erhält man ein hyperbolisches Paraboloid (Abb. 396).

¹⁾ Dänzler-Ischer, A.: Bull. d. Schweiz. El. Vereins. Bd. 2, S. 13 u. 324. 1911.

Sind mehrere Transformatorstationen vorhanden, so werden die verschiedenen Abzweigungen zu einer einzigen fiktiven Leitungslänge

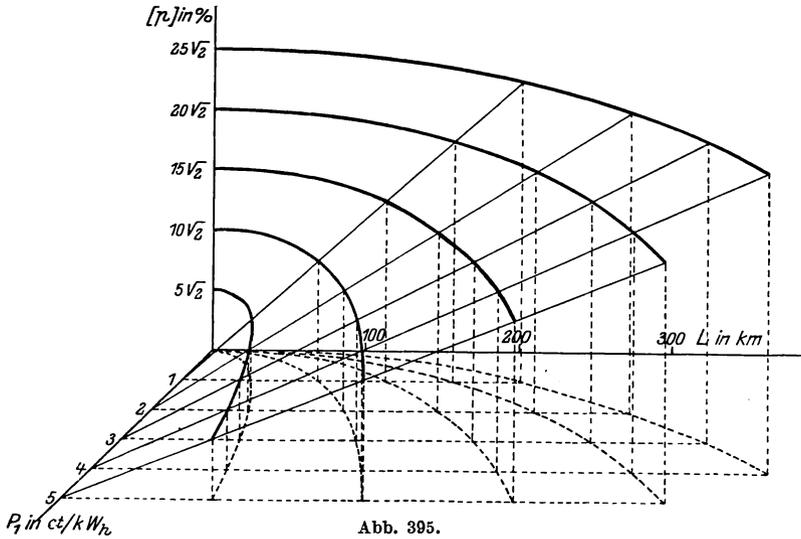


Abb. 395.

λ zusammengefaßt, wie auf Seite 51 und 390 erläutert.

Als günstigsten Wert findet Dänzler $[p] = 12\sqrt{2} = 17\%$ für den

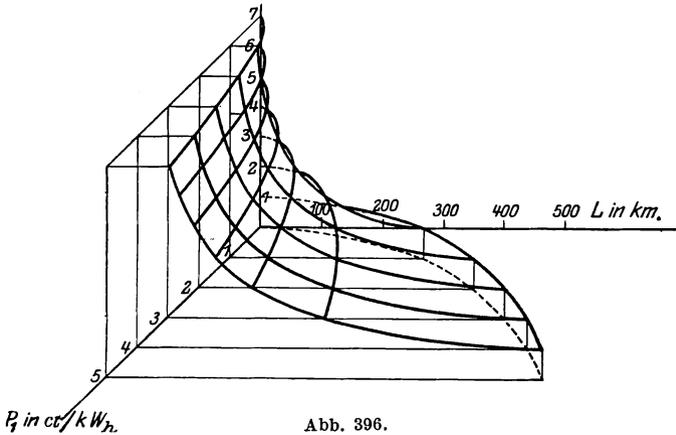


Abb. 396.

größten und

$$[p_{\text{mittl.}}] = \frac{[p]}{s} \cdot \frac{\cos \varphi_{\text{max}}}{\cos \varphi_{\text{mittl.}}}$$

für den mittleren prozentischen Verlust. Bei $s = 3$ wäre also unter den früheren Annahmen

$$[p_{\text{mittl.}}] = \frac{17}{3} \cdot \frac{0,85}{0,7} = 6,9\%$$

XV. Induktivität und Kapazität.

1. Definition der Fundamentalkonstanten eines Mehrfachleitungssystems.

Bei Leitungen, welche mit wechselnden Strömen betrieben werden, beobachtet man Ladeströme und elektromotorische Gegenkräfte der Selbstinduktion. Um jene aus der Spannung, diese aus der Stromstärke zu berechnen, hat man bestimmte Koeffizienten nötig.

Da diese Koeffizienten für den normalen Betrieb feste Werte, die sogenannten Betriebswerte, besitzen, bei anderer Betriebsart jedoch davon abweichende Werte ergeben, sind für Mehrfachleitungssysteme besondere Definitionen erforderlich, die im folgenden gegeben werden sollen.

Jede Vereinigung mehrerer langgestreckter metallischer Leitungen, wie sie z. B. bei Drehstromkabeln oder bei einer Gruppe parallel geführter Telegraphen- oder Starkstromdrähte vorliegt, wird als Mehrfachleitersystem (abgekürzt MLS) bezeichnet¹⁾.

Das MLS oder einzelne Leiter darin oder Gruppen von Leitern können mit metallischen Hüllen umgeben sein. Diese Hüllen werden hier auch als Leiter berücksichtigt.

Jede Vereinigung zweier Einzelleiter eines MLS durch Verbindung der Enden heißt eine Schleife.

Die für die Strom- und Spannungsverteilung eines MLS charakteristischen Größen lassen sich auf vier Fundamentalkonstanten zurückführen: Kapazität, Induktivität, Widerstand und Ableitung.

Diese Begriffe sind auch bei einfachen Kondensatoren und Drosselspulen üblich. Für MLS werden sie mit Hilfe allgemeiner Sätze über den Wert der elektrischen und der magnetischen Energie in der folgenden Weise definiert:

a) Elektrische Energie. Hat ein Leiter eines MLS die Spannung V gegen Erde, während alle anderen Leiter einschließlich der Hülle ohne Spannung gegen Erde sind, so läßt sich die elektrische Energie des Systems darstellen durch den Ausdruck:

$$U = \frac{1}{2} C V^2. \quad (1)$$

Von dieser Energie wird bei unvollständiger Isolation des Leiters in der Zeiteinheit ein Betrag

$$U' = A V^2 \quad (2)$$

in Wärme umgesetzt.

Definition 1. Der Koeffizient C heißt „Kapazität“ des Leiters.

Definition 2. Der Koeffizient A heißt „Ableitung“ des Leiters.

Die Ladung des Leiters ist

$$Q = C V, \quad (1a)$$

sein Ladungsverlust in der Sekunde

$$Q' = A V. \quad (2a)$$

¹⁾ Nach den am 26. April 1910 vom Elektrotechnischen Verein angenommenen Vorschlägen von Diesselhorst, H. u. F. Emde: ETZ 1909, S. 1155 u. 1184.

b) **Magnetische Energie.** Fließt in einer Schleife eines MLS der Strom J , während alle übrigen Schleifen stromlos sind, so läßt sich die magnetische Energie des Systems darstellen durch den Ausdruck:

$$T = \frac{1}{2} L J^2. \quad (3)$$

Von dieser Energie wird in der Zeiteinheit der Betrag

$$T' = R J^2 \quad (4)$$

in Wärme umgesetzt.

Definition 3. Der Koeffizient L heißt „Induktivität“ der Schleife.

Definition 4. Der Koeffizient R heißt „Widerstand“ der Schleife.

Der Induktionsfluß durch die Schleife ist

$$\Phi = L J. \quad (3a)$$

Der induktive Spannungsabfall in der Schleife ist

$$\frac{d\Phi}{dt} = L \frac{dJ}{dt}.$$

Der Ohmsche Spannungsabfall in der Schleife ist

$$v = R J. \quad (4a)$$

Sämtliche Koeffizienten sind der Länge des MLS proportional und werden auf die Längeneinheit (km) bezogen. Die Bezeichnungen C , A , R , L gelten im folgenden gleichfalls für die Längeneinheit und ebenso die obigen Gleichungen (1) bis (4a).

Die Koeffizienten, insbesondere Ableitung und Widerstand, hängen von der Temperatur ab.

Die Ableitung kann von der Höhe und dem zeitlichen Verlauf der Spannung abhängen. Sie enthält den Verlust durch Leitung im Dielektrikum und durch dielektrische Hysterese. Man erhält den letzteren Teil für sich bei Verwendung von Gleichspannung. Der reziproke Wert der mit Gleichstrom bestimmten Ableitung heißt „Isolationswiderstand des Leiters“.

Allgemein bezeichnet man den reziproken Wert der Ableitung als „wirksamen Isolationswiderstand des Leiters“. Die Ableitung ist fast stets so klein, daß die sie enthaltenden Glieder als Korrektionsglieder behandelt oder ganz vernachlässigt werden dürfen ($A = 0$). Zu berücksichtigen ist die Ableitung insbesondere bei Telephonkabeln.

Induktivität und Widerstand können bei ungleichmäßiger Verteilung des Stromes über den Querschnitt (Skinneffekt) von der Art des zugrunde gelegten Stromes, insbesondere von der Frequenz des Wechselstromes und bei Gegenwart von Eisen auch von der Stärke des Stromes abhängen.

Von der entwickelten Wärme T' entsteht in jedem der beiden Einzelleiter λ und μ der Schleife ein Teil. Bezeichnen $R_\lambda J^2$ und $R_\mu J^2$ diese Teile, so heißen R_λ und R_μ die Widerstände der Einzelleiter. Diese sind hierdurch auch beim Auftreten von Skinneffekt definiert. Der Widerstand der Schleife ist gleich der Summe der Widerstände der beiden Einzelleiter.

Der Ohmsche Spannungsabfall in der Schleife verteilt sich auf die beiden Leiter und hat im Leiter λ den Wert $v_\lambda = R_\lambda J$.

2. Allgemeine Grundlagen und Begriffe.

a) **Eigenschaften der MLS.** Die mathematische und physikalische Behandlung der elektromagnetischen Vorgänge in einem MLS läßt sich nicht ohne weiteres in derselben Weise vornehmen, die bei Stromkreisen aus konzentrierten Kapazitäten (Kondensatoren) und konzentrierten Induktivitäten (Drosselspulen) üblich ist. Vielmehr sind folgende Unterschiede zu beachten:

Sämtliche Leiter, die eine merkliche Wirkung aufeinander ausüben, also auch eine metallische Hülle, oder, wenn das MLS keine Hülle besitzt, eventuell die Erde, müssen als zum System gehörige gleichzeitig berücksichtigt werden.

Man kann die Einzelleiter nicht als linear ansehen, sondern muß ihren endlichen Querschnitt in Betracht ziehen. Über diesen braucht die Stromstärke nicht gleichmäßig verteilt zu sein.

Infolge der elektrischen Aufladung der langgestreckten Leiter sind die Stromstärken nicht in allen Querschnitten desselben Leiters gleich, der Strom ist also nicht quasistationär. Es ist daher bei einem längeren Kabel nicht möglich, den Widerstand eines Leiters durch einen Vorschaltwiderstand und die Ableitung durch einen Nebenschluß zu ersetzen.

Andererseits gestatten die speziellen Eigenschaften der MLS gewisse Vereinfachungen, wodurch das Problem einer allgemeinen Behandlung zugänglich wird. Diese Vereinfachungen sind:

Bei einem MLS kann man geschlossene Strombahnen, wie sie insbesondere für die Anwendung des Induktionsgesetzes zugrunde gelegt werden, auf sehr übersichtliche Weise herstellen, nämlich aus je zwei Einzelleitern durch Verbinden der Enden. Jede solche Vereinigung zweier Einzelleiter heißt eine „Schleife“.

Es ist im allgemeinen möglich, die durch den endlichen Querschnitt bewirkte Komplizierung gesondert zu behandeln, so daß in dem Hauptproblem nur noch der Gesamtstrom jedes Leiters auftritt.

Man kann im allgemeinen annehmen, daß trotz der Verschiedenheit der Aufladung verschiedener Stellen eines Leiters und trotz dem Ohmschen Spannungsverlust im Leiter elektrische Kraftlinien nicht zwischen zwei Punkten desselben Leiters verlaufen, sondern nur zwischen zwei solchen Punkten verschiedener Leiter (darunter Hülle oder Erde), die im selben Querschnitt des MLS liegen.

Mit Hilfe dieser Vereinfachungen lassen sich für die Ströme und Spannungen lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten aufstellen. Dazu treten die Grenzbedingungen an den beiden Enden des MLS, sowie die Anfangsbedingungen oder die Abhängigkeit von der Zeit.

In allen Beziehungen ist das MLS ursprünglich definiert durch die geometrischen Dimensionen der Leiter und der Isolierung und

durch die Materialkonstanten. Es ist jedoch zweckmäßig, diese Definition durch eine zweite zu ergänzen, die unmittelbar die Größen liefert, die im normalen Betriebe für die Beurteilung der Eigenschaften des MLS in Frage kommen. Für das Problem der Strom- und Spannungsverteilung geschieht dies durch Bestimmung der in den Differentialgleichungen des Systems auftretenden Konstanten.

b) Fundamentalkonstanten. Um allgemein gültige Definitionen der vier Grundbegriffe Kapazität, Induktivität, Widerstand und Ableitung zu erhalten, werden sie auf die einfachsten erforderlichen Begriffe zurückgeführt, nämlich die folgenden:

- den Gesamtstrom durch den Querschnitt eines Leiters,
- die elektrische Spannung zwischen zwei in einer Ebene liegenden Leiterquerschnitten,
- die elektrische Energie,
- die magnetische Energie.

Die Zurückführung geschieht durch die Definitionsgleichungen (1) bis (4).

Strom und Spannung sind direkt meßbar. Die elektrische und die magnetische Energie, die als bekannt oder bestimmbar vorausgesetzt sind, lassen sich berechnen, wenn die Feldverteilung gegeben ist, die wiederum aus der Verteilung von Ladungen und Strömen hervorgeht.

In dem Falle, der dem Satz über die elektrische Energie zugrunde gelegt ist, wenn nämlich ein Leiter die Spannung V gegen Erde hat und alle anderen Leiter (einschließlich der Hülle) spannungslos gegen Erde sind, bezeichne Q die Ladung des Leiters von der Spannung V . Dann ist die elektrische Energie gleich dem halben Produkt aus Ladung und Spannung

$$U = \frac{1}{2} Q V,$$

und daher nach Gl. (1)

$$Q = C V. \quad (1a)$$

Bezeichnet ferner Q' den durch ungenügende Isolation eintretenden Ladungsverlust in der Zeiteinheit, so ist der Energieverlust in derselben Zeit

$$U' = Q' V,$$

und daher nach Gl. (2)

$$Q' = A V. \quad (2a)$$

Da Ladungen und Spannungen sich direkt messen lassen und ebenso der einen Strom darstellende Ladungsverlust pro Zeiteinheit, so sind durch Gl. (1a) und (2a) Kapazität C und Ableitung A als meßbare Größen definiert.

In dem Falle, der dem Satz über die magnetische Energie zugrunde liegt, führt eine Schleife Strom und sind alle anderen Schleifen stromlos gedacht. Es sei hier die folgende Betrachtung von vornherein auf ein kurzes Stück des MLS beschränkt, was für die Bestimmung von L und R wegen der Proportionalität mit der Länge genügt. Außerdem sei die Verbindung der beiden Leiter zur Schleife mindestens an einem Ende widerstandlos. Dann kann die elektrische Energie gegen

die magnetische vernachlässigt werden, weil die Spannung zwischen den beiden Leitern wegen der Kürze des Stückes nur kleine Werte annimmt.

Bezeichnet E die Summe der äußeren elektromotorischen Kräfte in der vom Strom J durchflossenen Schleife (Akkumulatorenbatterie, Dynamomaschine usw.), so ist die von ihnen in der Zeit dt geleistete Arbeit gleich der Zunahme der magnetischen Energie plus der erzeugten Wärme

$$E J dt = dT + T' dt.$$

Hierin bedeutet

$$T = \frac{1}{2} L J^2 \quad (3)$$

die magnetische Energie,

$$T' = R J^2 \quad (4)$$

den Teil dieser Energie, der in der Zeiteinheit in Wärme umgesetzt wird.

Das ergibt nach Gl. (3) und (4)

$$E = L \frac{dJ}{dt} + R J. \quad (5)$$

Da diese Gleichung genau übereinstimmt mit der entsprechenden Gleichung für einen einfachen Stromkreis mit Drosselspule, so ergibt sich das Resultat, daß man zur Messung von Induktivität und Widerstand einer kurzen Schleife in einem MLS alle die Methoden anwenden kann, die zur Messung der entsprechenden Größen bei Drosselspulen gelten, insbesondere also die Methoden mit der Brückenanordnung. Dabei ist zu beachten, daß die so gemessenen Werte nur für die Stromart gültig sind, mit der die Messung gemacht ist.

c) Induktiver und Ohmscher Spannungsabfall in einer Schleife. Die Gl. (5) gilt für eine kurze Schleife, an deren Enden äußere elektromotorische Kräfte von der Gesamtsumme E wirken. Man kann sie auch anwenden auf ein kurzes Stück einer langen Schleife. Dies kurze Stück sei zugleich die Längeneinheit, so daß auch R und L für die Längeneinheiten gelten. Die Endquerschnitte des Stückes seien mit den Indexen a und b bezeichnet. Es sei also V_a die Spannung zwischen den beiden Einzelleitern im Querschnitt a und V_b die entsprechende Spannung im Querschnitt b . Als Summe der äußeren elektromotorischen Kräfte wirkt dann auf das betrachtete Stück der Schleife die Differenz

$$E = V_a - V_b.$$

Es bedeutet also E die Spannungsverminderung oder den Spannungsabfall pro Längeneinheit in der Schleife, und zwar den Momentanwert. Die Gl. (5) zerlegt diesen Spannungsabfall in zwei Teile, für die besondere Namen üblich sind. Man nennt $L \frac{dJ}{dt}$ den Momentanwert des induktiven und RJ den Momentanwert des Ohmschen Spannungsabfalles.

Diese rein mathematische Zerlegung ist deswegen von Bedeutung, weil in der Praxis gewöhnlich für gegebene R , L , J der Spannungsabfall

$$V_a - V_b = R J + L \frac{dJ}{dt}$$

gesucht wird. Eine weitere Bedeutung erhalten die Begriffe durch folgende Überlegung:

Fließt in dem betrachteten Stück der Schleife der Strom J , so leisten die äußeren elektromotorischen Kräfte pro Zeiteinheit die Arbeit nach Gl. (5):

$$EJ = LJ \frac{dJ}{dt} + RJ^2 = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} LJ^2 \right) + RJ^2.$$

Diese Arbeit zerfällt durch Energieumwandlung in zwei physikalisch trennbare Teile, nämlich erstens einen Zuwachs der magnetischen Energie, der gleich ist dem Produkt aus der Stromstärke und dem induktiven Spannungsabfall, und zweitens eine Entwicklung von Wärme, die gleich ist dem Produkt aus der Stromstärke und dem Ohmschen Spannungsabfall.

Fließt Wechselstrom in der Schleife und bildet man die beiden Energieteile für die Zeit einer Periode, so wird der erste Teil Null, und es bleibt nur die Wärmeentwicklung übrig. Der induktive Spannungsabfall ist nicht mit Verlust an elektromagnetischer Energie verbunden.

Nach Gl. (5) verhält sich der Strom J so, als ob er in der Schleife vom Widerstand R nach dem Ohmschen Gesetz durch eine EMK erzeugt würde, die man erhält, wenn man den induktiven Spannungsabfall $L \frac{dJ}{dt}$ von der Summe E der äußeren elektromotorischen Kräfte

abzieht. Der induktive Spannungsabfall oder der Ausdruck $L \frac{dJ}{dt}$ verhält sich also wie eine dem Strom entgegenwirkende eingeprägte EMK (etwa die eines Akkumulators). Man bezeichnet daher den negativen Wert jenes Ausdruckes als „in der Schleife pro Längeneinheit induzierte EMK“. Es ist selbstverständlich, daß dieser induzierten EMK ebensowenig eine reale Existenz (direkte Meßbarkeit) zukommt, wie dem induktiven Spannungsabfall.

Ein gleichfalls viel benutzter Begriff ist der des Induktionsflusses durch eine Schleife. Für eine Schleife aus linearen Leitern pflegt man das Induktionsgesetz in der Form auszusprechen: „die induzierte EMK ist gleich dem negativen nach der Zeit genommenen Differentialquotienten des hindurchtretenden Induktionsflusses“. Bei unseren Leitern von ausgedehntem Querschnitt ist jedoch der Induktionsfluß durch die verschiedenen Stromfäden der Schleife ganz verschieden. Um die einfache Form des Induktionsgesetzes zu wahren, definiert man den Ausdruck

$$\Phi = LJ \tag{3a}$$

als den „durch die Längeneinheit der Schleife hindurchtretenden Induktionsfluß“, wenn die Schleife vom Strom J durchflossen wird und alle anderen Schleifen stromlos sind.

Die in der Schleife induzierte EMK ist gleich $-\frac{d\Phi}{dt}$. Der induktive Spannungsabfall in der Schleife ist gleich $\frac{d\Phi}{dt}$.

d) Zusammenhang mit der Maxwell'schen Theorie. Umlaufspannung. Geht man nicht von der Gl. (1) bis (4), sondern direkt von den Max-

wellschen Grundgleichungen aus, so gelangt man nur mit Hilfe verwickelter Rechnungen zu dem gleichen Resultat, erhält dafür freilich zugleich den Wert der eingeführten Koeffizienten, ausgedrückt durch die Dimensionen und Materialkonstanten des MLS. Wir wollen diesen Weg, da er die physikalisch strengste Auffassung der Begriffe liefert, wenigstens kurz andeuten.

Das zweite Grundgesetz der Maxwell'schen Theorie sagt aus, daß das Linienintegral der elektrischen Feldstärke über eine beliebige, geschlossene Kurve, die sogenannte Umlaufspannung, gleich ist dem negativen nach der Zeit genommenen Differentialquotienten des hindurchtretenden Induktionsflusses. Dabei ist die elektrische Feldstärke in Leitern außerhalb der galvanischen und der Thermoelemente stets gleich dem Produkt aus dem spezifischen Widerstand und der Stromdichte, so daß die Umlaufspannung in linearen Leitern sich gleich der Summe der Ohmschen Spannungsverluste ergibt, eventuell vermindert um die äußeren elektromotorischen Kräfte.

Geht die geschlossene Kurve nur zum Teil durch Leiter, zum andern Teil durch Nichtleiter (Luft), so erhält man bei der Berechnung der Umlaufspannung für die Teile des Linienzuges, die durch Nichtleiter führen, die entsprechenden Spannungen zwischen den Leitern. Berechnet man so die Umlaufspannung für die kurze Schleife zwischen den Querschnitten a und b , indem man die Leiter als linear behandelt, und bezeichnet mit R_1 , R_2 die Widerstände der beiden Leiter ($R_1 + R_2 = R$), so findet man (siehe Abb. 397):

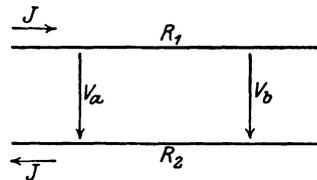


Abb. 397.

$$R_1 J + V_b + R_2 J - V_a$$

oder

$$R J + V_b - V_a.$$

Der Induktionsfluß, dessen negativem Differentialquotienten die Umlaufspannung gleich ist, läßt sich für die Schleife nicht ohne weiteres aus der Feldverteilung berechnen, auch dann nicht, wenn man die Leiter als linear ansehen kann. Denn innerhalb des linearen Leiters würde das magnetische Feld unendlich groß werden und damit die Abgrenzung des Induktionsflusses wiederum unbestimmt. Es läßt sich nur der Induktionsfluß für jeden einzelnen Stromfaden berechnen, und man findet schließlich einen gewissen mittleren Wert des Induktionsflusses, der sich in Beziehung zur Umlaufspannung setzen läßt. Dieser Wert ergibt sich proportional der Gesamtstromstärke, entsprechend Gl. (6). Man erhält so die Gleichung:

$$R J + V_b - V_a = -L \frac{dJ}{dt},$$

die mit Gl. (5) identisch ist. Auf der linken Seite steht eine elektrische Größe (die Umlaufspannung), auf der rechten Seite eine magnetische Größe (die Abnahme des Induktionsflusses in der Zeiteinheit). Die Gleichung entspricht in dieser Form direkt der zweiten Grundgleichung der Maxwell'schen Theorie.

e) **Kapazitäts- und Ableitungskoeffizienten des MLS.** Das MLS habe außer der Hülle (bzw. Erde) n Leiter, die mit den Indexen $1, 2, \dots, n$ unterschieden werden. Für die Hülle gelte der Index 0 . Bei fehlender oder stromloser Hülle kann ein beliebiger Einzelleiter an Stelle der Hülle treten und mit dem Index 0 versehen werden.

Nennt man J_μ den Strom, Q_μ die Ladung, Q_μ' den Ladungsverlust des Leiters μ pro Zeiteinheit, und wird der Einfachheit halber die Spannung des Leiters μ gegen die Hülle (bzw. die Erde) anstatt mit $V_{\mu 0}$ auch mit V_μ bezeichnet, dann ist

$$V_{\mu\nu} = V_\mu - V_\nu.$$

Bei der Kleinheit der Querdimensionen im Verhältnis zur Längenausdehnung des MLS kann, wie schon zu Eingang bemerkt, angenommen werden, daß elektrische Kraftlinien nur zwischen Punkten verschiedener Leiter im selben Querschnitt des MLS verlaufen. Dies ist gleichbedeutend damit, daß die Summe der Ladungen sämtlicher Leiter (einschließlich Hülle), pro Längeneinheit genommen, stets gleich Null ist:

$$Q_0 + Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = 0$$

Das gleiche gilt für die Ladungsverluste und die Ströme. Man hat stets

$$\begin{aligned} Q_0 &= -(Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n), \\ Q_0' &= -(Q_1' + Q_2' + \dots + Q_n'), \\ J_0 &= -(J_1 + J_2 + \dots + J_n), \end{aligned}$$

so daß diese Größen für die Hülle nicht besonders geführt zu werden brauchen. Die Differentialgleichungen für das MLS sind

$$\begin{aligned} -\frac{\partial J_\mu}{\partial z} &= \frac{\partial Q_\mu}{\partial t} + Q_\mu', \\ -\frac{\partial V_{\mu\nu}}{\partial z} &= \frac{\partial \Phi_{\mu\nu}}{\partial t} + (RJ)_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (7)$$

für alle μ und ν .

Die erste Gleichung gilt für jeden Einzelleiter und besagt, daß die Elektrizitätsmenge, die einem Stück des Leiters durch den Strom zugeführt wird, teils zur Vergrößerung der Ladung dient, teils durch Ableitung verloren geht. Die zweite Gleichung gilt für jede Schleife, die sich aus zwei Einzelleitern bilden läßt und entspricht Gl. (5).

MLS mit Hülle.

Setzt man in einem System von n Leitern Ladung und Ladungsverlust eines Leiters als lineare Funktionen der Spannungen der n Leiter gegen Erde an, dann erhält zunächst:

$$Q_\mu = c_{\mu 1} V_1 + c_{\mu 2} V_2 + \dots + c_{\mu n} V_n \quad (8)$$

$$Q_\mu' = a_{\mu 1} V_1 + a_{\mu 2} V_2 + \dots + a_{\mu n} V_n \quad (9)$$

wo

$$c_{\nu\mu} = c_{\mu\nu} \text{ und } a_{\nu\mu} = a_{\mu\nu}.$$

(8) gibt das von Maxwell¹⁾ aufgestellte Gleichungssystem zur Berechnung der Ladungen, die sich auf den verschiedenen Leitern eines Systems anhäufen, wenn diese bestimmte Spannungen gegen Erde besitzen.

Die Koeffizienten $c_{\mu\nu}$ und $a_{\mu\nu}$ bestimmen vollständig die Kapazitäts- bzw. Ableitungseigenschaften des MLS. Sie können auf die Fundamentalkonstanten „Kapazität“ und „Ableitung“ zurückgeführt werden durch die folgenden direkt ausführbaren Messungen:

1. Es seien alle Leiter außer μ mit der Hülle verbunden. Der Leiter μ habe die Spannung V_μ . Dann ist seine Ladung nach (8)

$$Q_\mu = c_{\mu\mu} V_\mu = C_\mu V_\mu.$$

Es ist also $c_{\mu\mu}$ die unter (1a) definierte Kapazität des Leiters μ , die mit C_μ bezeichnet werde.

2. Es seien alle Leiter außer u und v mit der Hülle verbunden. Die Leiter μ und ν seien unter sich verbunden und haben die Spannung $V_\mu = V_\nu = V$ gegen Hülle. Dann ist nach (8) die Summe ihrer Ladungen

$$Q_\mu + Q_\nu = (c_{\mu\mu} + 2c_{\mu\nu} + c_{\nu\nu})V.$$

Der Ausdruck

$$C_{\mu,\nu} = c_{\mu\mu} + 2c_{\mu\nu} + c_{\nu\nu}$$

ist nach (1a) als Kapazität der beiden vereinigten Leiter μ und ν meßbar. Man findet also die sämtlichen $\frac{n(n+1)}{2}$ Kapazitätskoeffizienten des MLS

$$\text{und} \quad \left. \begin{array}{l} C_{\mu\mu} = C_\mu \\ c_{\mu\nu} = -\frac{C_\mu + C_\nu - C_{\mu,\nu}}{2} \end{array} \right\} \quad (10)$$

aus ebensoviel direkt meßbaren Kapazitäten.

In genau analoger Weise erhält man die $\frac{n(n+1)}{2}$ Ableitungskoeffizienten

$$\text{und} \quad \left. \begin{array}{l} a_{\mu\mu} = A_\mu \\ a_{\mu\nu} = -\frac{A_\mu + A_\nu - A_{\mu,\nu}}{2} \end{array} \right\} \quad (11)$$

aus direkt meßbaren Ableitungen.

Die Kapazität und Ableitung ist von jedem einzelnen Leiter des MLS und von jeder Kombination aus zwei Leitern zu bestimmen.

MLS ohne Hülle.

Wenn eine Hülle nicht vorhanden und auch der Einfluß der Erde unmerklich ist, so kann man oft mit Vorteil einen beliebigen Einzelleiter an Stelle der Hülle setzen. In einem solchen Falle sei die Gesamtzahl der Einzelleiter als $n + 1$ angenommen und der an Stelle

¹⁾ Maxwell, J. C.: El. a. Magn. I, Art. 87.

der Hülle gesetzte mit dem Index 0 versehen, so daß außerdem wieder n Einzelleiter vorhanden sind. Dann gelten die Gleichungen unverändert. Auch bei der Messung der Fundamentalkonstanten tritt der mit dem Index 0 versehene Leiter an Stelle der Hülle.

Wenn bei der Kapazitätsmessung ein Einfluß der Erde merklich ist, oder wenn die Hülle vorhanden, aber im Betrieb stromlos bleibt, so kann man ebenfalls einen beliebigen Einzelleiter an Stelle der Hülle wählen und diese unberücksichtigt lassen. Freilich würde zunächst die Kapazitätsmessung davon abhängen, ob der mit dem Index 0 versehene Leiter mit Erde oder Hülle verbunden ist oder nicht. Es gilt dann aber im Betrieb die Bedingung, daß die Summe der Ströme und daher auch die Summe der Ladungen aller $n + 1$ Einzelleiter stets null bleibt. Bezieht man das Maxwell'sche Gleichungssystem für die Ladungen zunächst auf Erde, so wird

$$Q_\mu = c_{\mu 0} V_0 + c_{\mu 1} V_1 + \dots + c_{\mu n} V_n \quad \left. \vphantom{Q_\mu} \right\} \quad (12)$$

$$(\mu = 0, 1, \dots, n)$$

Zur Abkürzung sei bezeichnet

$$c_\mu = c_{\mu 0} + c_{\mu 1} + \dots + c_{\mu n}$$

und

$$c = c_0 + c_1 + \dots + c_n.$$

Dann wird

$$\sum Q = 0 = c_0 V_0 + c_1 V_1 + \dots + c_n V_n.$$

Zieht man diese Gleichung mit $\frac{c_\mu}{c}$ multipliziert von Gl. (12) ab, so erhält man

$$Q_\mu = \gamma_{\mu 0} V_0 + \gamma_{\mu 1} V_1 + \dots + \gamma_{\mu n} V_n, \quad (13)$$

wo

$$\gamma_{\mu \nu} = c_{\mu \nu} - \frac{c_\mu c_\nu}{c}. \quad (14)$$

Für die Koeffizienten $\gamma_{\mu \nu}$ gilt hiernach die Beziehung

$$\gamma_{\mu 0} + \gamma_{\mu 1} + \dots + \gamma_{\mu n} = 0.$$

Dies bedeutet: Man kann in Gl. (14) die V_n von einem beliebigen Anfangspunkt rechnen, z. B. von V_0 aus. Man erhält dann

$$Q_\mu = \gamma_{\mu 1} V_{10} + \dots + \gamma_{\mu n} V_{n0}.$$

Setzt man diese Gleichung an Stelle von Gl. (8), so hat man der Bedingung genügt, daß die Hülle stromlos und infolgedessen ladungslos bleibt.

Die $\gamma_{\mu \nu}$ sind nach Gl. (14) aus den $c_{\mu \nu}$ zu berechnen. Man kann jedoch auch die $\gamma_{\mu \nu}$ ganz ebenso wie die $c_{\mu \nu}$ direkt aus gemessenen Fundamentalkonstanten bestimmen, wenn man bei der Messung den mit dem Index 0 versehenen Leiter als Hülle betrachtet und zugleich die Bedingung erfüllt, daß die Summe der Ladungen sämtlicher $(n + 1)$ Leiter null bleibt. Wenn der Einfluß der Hülle oder Erde un-

merklich, so ist diese Bedingung von selbst erfüllt und die $\gamma_{\mu\nu}$ sind mit den $c_{\mu\nu}$ identisch.

Ganz Analoges gilt für die Ladungsverluste. Man erhält

$$Q_{\mu}' = \alpha_{\mu 1} V_{10} + \dots + \alpha_{\mu n} V_{n0}, \quad (9a)$$

wo

$$\alpha_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} - \frac{a_{\mu} a_{\nu}}{a}$$

und

$$\begin{aligned} a_{\mu} &= a_{\mu 0} + a_{\mu 1} + \dots + a_{\mu n} \\ a &= a_0 + a_1 + \dots + a_n. \end{aligned}$$

f) **Induktionskoeffizienten des MLS.** Ebenso wie bei dem Vorgange der Selbstinduktion in einer Schleife des MLS lassen sich auch im allgemeinen Falle die Leiter in bezug auf die Induktionsvorgänge als linear behandeln, das heißt, es läßt sich, wie bei der Aufstellung der Gl. (7) bereits geschehen ist, für jede Schleife eine „induzierte EMK“ als negativer Differentialquotient des durch die Schleife hindurchtretenden Induktionsflusses angeben.

Sind ferner λ, μ, ν drei beliebige Leiter des MLS, so ist der Induktionsfluß durch die Schleife $\mu\nu$ gleich der Differenz der Induktionsflüsse durch die Schleifen $\mu\lambda$ und $\nu\lambda$, das heißt

$$\Phi_{\mu\nu} = \Phi_{\mu\lambda} - \Phi_{\nu\lambda}. \quad (15)$$

Da bei der Aufstellung des Maxwell'schen Gleichungssystems für die Ladungen der Leiter alle Spannungen von der Hülle aus gerechnet sind, ist es zweckmäßig, auch den Induktionsfluß von der Hülle bzw. dem an Stelle der Hülle gesetzten Leiter aus zu rechnen. Kennt man die n Induktionsflüsse $\Phi_{\mu 0}$ zwischen der Hülle und sämtlichen Leitern, so berechnet sich der Induktionsfluß zwischen zwei beliebigen Leitern $\mu\nu$ nach Gl. (15) zu

$$\Phi_{\mu\nu} = \Phi_{\mu 0} - \Phi_{\nu 0}. \quad (16)$$

Die Induktionsflüsse $\Phi_{\mu 0}$ sind lineare homogene Funktionen der n Ströme $J_1 \dots J_n$,

$$\Phi_{\mu 0} = l_{\mu 1} J_1 + l_{\mu 2} J_2 + \dots + l_{\mu n} J_n, \quad (17)$$

wo

$$l_{\mu\nu} = l_{\nu\mu}. \quad (18)$$

Die Koeffizienten l lassen sich sämtlich auf „Induktivitäten“ zurückführen. Dies geschieht auf folgende Weise durch direkt ausführbare Messungen:

1. Man bilde eine Schleife aus dem Leiter μ und der Hülle, während alle anderen Schleifen offen bleiben. Dann sind alle Ströme 0 außer $J_{\mu} = -J_0$. Nach Gl. (17) wird

$$\Phi_{\mu 0} = l_{\mu\mu} J_{\mu},$$

das heißt $l_{\mu\mu}$ ist gleich der Induktivität der Schleife $\mu 0$, die mit $L_{\mu 0}$ bezeichnet werde, und als solche meßbar. Man hat also:

$$l_{\mu\mu} = L_{\mu 0}. \quad (19)$$

2. Man bilde die beliebige Schleife $\mu\nu$, während alle anderen Schleifen offen sind. Dann sind alle Ströme 0, außer $J_\mu = -J_\nu = J$ und man hat

$$\Phi_{\mu\nu} = \Phi_{\mu 0} - \Phi_{\nu 0} = (l_{\mu\mu} - 2l_{\mu\nu} + l_{\nu\nu}) J.$$

Der Ausdruck

$$L_{\mu\nu} = l_{\mu\mu} - 2l_{\mu\nu} + l_{\nu\nu}$$

ist also die Induktivität der Schleife $\mu\nu$ und als solche meßbar. Mit Hilfe von Gl. (19) erhält man daraus

$$l_{\mu\nu} = \frac{L_{\mu 0} + L_{\nu 0} - L_{\mu\nu}}{2}, \quad (20)$$

Man kann $l_{\mu\nu}$ auch als gegenseitigen Induktionskoeffizienten der Schleifen $\mu 0$ und $\nu 0$ ansehen. Man denkt sich dann das MLS zerlegt in die n Schleifen (10) . . . ($n 0$) und erhält als Induktionsfluß durch die Schleife ($\mu 0$), hervorgerufen durch Selbstinduktion und gegenseitige Induktion, direkt den Ausdruck Gl. (17) für $\Phi_{\mu 0}$. Ferner erhält man aus Gl. (16) und (17) leicht eine Formel für die gegenseitige Induktivität zweier beliebiger Schleifen.

Bezeichnet $L_{(\mu\nu)}$ die Induktivität der aus den Leitern μ und ν gebildeten Schleife und $M_{(\mu\nu), (\mu'\nu')}$ den gegenseitigen Induktionskoeffizienten der Schleifen ($\mu\nu$) und ($\mu'\nu'$), so ist

$$M_{(\mu'\nu'), (\mu\nu)} = \frac{1}{2} [L_{(\mu\nu')} + L_{(\mu'\nu)} - L_{(\mu\mu')} - L_{(\nu\nu')}]. \quad (21)$$

Haben beide Schleifen den Leiter μ gemeinsam, so ist

$$M_{(\mu\nu), (\mu\nu')} = \frac{1}{2} [L_{(\mu\nu)} + L_{(\mu\nu')} - L_{\nu\nu'}]. \quad (22)$$

Hiervon soll später bei Ermittlung der Induktivität von Drehstromleitungen Gebrauch gemacht werden.

Die Koeffizienten l sind durch die Gl. (19) und (20) bestimmt. Setzt man den bisher nicht eingeführten Ausdruck

$$L_{\mu\mu} = 0,$$

so ist die Gl. (22) in (21) enthalten.

3. Betriebswerte.

In bestimmten Betriebsfällen und bei symmetrischen MLS läßt sich die Verteilung der Ströme und Spannungen besonders einfach beschreiben, nämlich durch die Angabe eines einzigen Stromes und einer einzigen Spannung, die dann als „Betriebsstrom J “ und „Betriebsspannung V “ bezeichnet werden und die den folgenden Differentialgleichungen genügen:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial J}{\partial z} &= \left(C \frac{\partial}{\partial t} + A \right) V \\ -\frac{\partial V}{\partial z} &= \left(L \frac{\partial}{\partial t} + R \right) J \end{aligned} \right\}, \quad (I)$$

Im Gegensatz zu den Betriebsvariablen J und E werden die Koeffizienten $CALR$ als „Betriebskonstanten“ bezeichnet, und zwar als „Betriebskapazität, Betriebsableitung, Betriebsinduktivität und Be-

triebswiderstand“. Sie stellen gewisse Kombinationen der angegebenen Konstanten des MLS dar und sind ausreichend, um das Verhalten des MLS in dem angenommenen Betriebsfalle zu beschreiben.

Welche Größe als Betriebsspannung gewählt wird, unterliegt einer gewissen Willkür. Im folgenden ist dafür angenommen.

Beim Zweileiterkabel: Die Spannung eines Leiters gegen den anderen.

Beim symmetrischen Drehstromkabel mit Drehstrombetrieb: Die Spannung eines Leiters gegen den Sternpunkt (Stern- oder Phasenspannung).

Beim symmetrischen vieraderigen Kabel mit Zweiphasenbetrieb: Die Spannung eines Leiters gegen den gegenüberliegenden.

Betriebsstrom ist der Strom des Leiters, dessen Spannung gegen einen anderen als Betriebsspannung gewählt wird. Bei einer Gruppe parallel geschalteter Leiter, deren Spannung als Betriebsspannung gewählt wird, gilt der Gesamtstrom der Gruppe als Betriebsstrom.

Die Betriebskonstanten gelten für die Längeneinheit des Kabels.

Der effektive Ladestrom eines am Ende offenen kurzen Kabelstückes von der Länge l (Leerlaufstrom) ist:

$$J_0 = l \sqrt{C^2 \omega^2 + A^2} \cdot V; \quad (\text{II})$$

der effektive Kurzschlußstrom eines am Ende geschlossenen kurzen Kabelstückes von der Länge l ist:

$$J_k = \frac{V}{l \sqrt{L^2 \omega^2 + R^2}}, \quad (\text{III})$$

wenn V den Effektivwert der an das Kabel gelegten sinusförmigen Betriebswechselspannung von ω Perioden in 2π Sekunden bedeutet.

Sind Ableitung Al und Widerstand Rl des Kabelstückes von der Länge l bekannt, so kann man durch Messung des Lade- und Kurzschlußstromes C und L erhalten:

$$C = \frac{1}{l\omega} \sqrt{\frac{J^2}{V^2} - A^2} l^2 \quad (\text{IV})$$

$$L = \frac{1}{l\omega} \sqrt{\frac{V^2}{J^2} - R^2} l^2 \quad (\text{V})$$

Beim Drehstromkabel mit Drehstrombetrieb kann man in die Formeln für Lade- und Kurzschlußstrom an Stelle der Sternspannung V die verkettete Spannung $E = \sqrt{3} V$ einführen. Dann ist zu setzen:

Ladestrom:

$$J_0 = l \sqrt{C^2 \omega^2 + A^2} \frac{E}{\sqrt{3}} \quad (\text{IIa})$$

Kurzschlußstrom:

$$J_k = \frac{1}{l \sqrt{L^2 \omega^2 + R^2}} \frac{E}{\sqrt{3}} \quad (\text{IIIa})$$

$$C = \frac{1}{l\omega} \sqrt{\frac{3J^2}{E^2} - A^2} l^2 \quad (\text{IVa})$$

$$L = \frac{1}{l\omega} \sqrt{\frac{E^2}{3J^2} - R^2} l^2. \quad (\text{Va})$$

Tabelle der Betriebswerte.

Kabel	Betriebsart	Betriebsspannung V	Betriebskapazität C	Betriebsableitung A	Betriebsinduktivität L	Betriebswiderstand R
Zweileiterkabel	Einphasenstrom, Hülle stromlos	zwischen den beiden Leitern	$\frac{C_1 + C_2}{2}$	$\frac{A_1 + A_2}{2}$	L''	R''
dasselbe, symmetrisch	symmetrisch ¹⁾	desgl.	$C'' - \frac{1}{4}C''$	$A'' - \frac{1}{4}A''$	L''	R''
dasselbe, ohne Hülle u. ohne Einfluß d. Erde	desgl.	desgl.	C''	A''	L''	R''
dasselbe, konzentrisch	Außenleiter geerdet	desgl.	C_1	A_1	L''	R''
Symmetrisches Dreileiterkabel	Drehstrom, symmetrisch ²⁾	Sternspannung	$2C'' - \frac{1}{2}C''$	$2A'' - \frac{1}{2}A''$	$\frac{1}{3}L''$	$\frac{1}{2}R''$
	Einphasenstrom in einer Schleife	zwischen den beiden Leitern der Schleife	$C'' - \frac{1}{4}C''$	$A'' - \frac{1}{2}A''$	L''	R''
	alle 3 Leiter parallel, Schleife aus diesen u. Hülle	zwischen den Leitern und Hülle	$C''' = 3(C'' - C')$	$A''' = 3(A'' - A')$	$L' - \frac{1}{3}L'$	$R' - \frac{1}{3}R''$
	darin Einphasenstrom					
	2 Leiter parallel, Schleife aus diesem u. dem dritten Leiter, darin Einphasenstrom, Hülle stromlos	zwischen den parallel geschalteten und dem einzelnen Leiter	$\frac{4}{3}(C'' - \frac{1}{4}C'')$	$\frac{4}{3}(A'' - \frac{1}{4}A'')$	$\frac{3}{4}L''$	$\frac{3}{4}R''$
Symmetrisches Vierleiterkabel	Symmetrischer Zweiphasenbetrieb ³⁾	zwischen 1 und 3	$C' - \frac{1}{4}C''$	$A' - \frac{1}{4}A''$	L''	R''
	1 und 2 parallel, 3 und 4 parallel, daraus Schleife mit Einphasenstrom	zwischen 1 und 3	$2(C' - \frac{1}{4}C'')$	$2(A' - \frac{1}{4}A'')$	$\frac{1}{2}L''$	$\frac{1}{2}R''$
	1 und 3 parallel, 2 und 4 parallel, daraus Schleife mit Einphasenstrom	zwischen 1 und 2	$2C' + \frac{1}{2}C'' - C''$	$2A' + \frac{1}{2}A'' - A''$	$L'' - \frac{1}{2}L''$	$\frac{1}{2}R''$

1) $V_1 + V_2 = 0$.

2) $V_1 + V_2 + V_3 = 0$; $J_1 + J_2 + J_3 = 0$.

3) $V_1 + V_3 = V_2 + V_4 = 0$; $J_1 + J_3 = J_2 + J_4 = 0$.

In der nebenstehenden Tabelle sind die Betriebskonstanten für einige Fälle ausgedrückt durch die definierten allgemeinen Kabelkonstanten. Betriebsinduktivität und Betriebswiderstand hängen von der Frequenz des benutzten Wechselstromes ab.

Hier bedeutet:

C_1 die Kapazität des Leiters 1 (beim konzentrischen Kabel: C_1 die Kapazität des Innenleiters),

C' die Kapazität eines beliebigen Leiters,

C'' die Kapazität der Kombination aus zwei Leitern (beim Vierleiterkabel: C_g'' aus zwei gegenüberliegenden, C_a'' aus zwei anliegenden),

C''' die Kapazität der Kombination aus den drei Leitern des symmetrischen Drehkabels,

L' die Induktivität einer Schleife aus einem Leiter und der Hülle,

L'' die Induktivität einer Schleife aus zwei Leitern (beim Vierleiterkabel: L_g'' aus zwei gegenüberliegenden, L_a'' aus zwei anliegenden).

Die Ableitungen A_1 , A' usw. haben analoge Bedeutung wie die Kapazitäten C_1 , C' usw.

Die Widerstände R' und R'' haben analoge Bedeutung wie die Induktivitäten L' und L'' .

Bezeichnet R_0 den Widerstand der Hülle und R_1 den Widerstand eines Leiters, so wird bei symmetrischen Kabeln für die Schleife:

$$R'' = 2 R_1 \text{ und } R' = R_0 + R_1.$$

Für das symmetrische Drehströmungskabel ist die Betriebskapazität doppelt, die Betriebsinduktivität halb so groß als beim symmetrischen Zweileiterkabel.

Wird das symmetrische Dreileiterkabel jedoch für Zweiphasenbetrieb verwendet, dann sind die Betriebswerte der Kapazität und Induktivität genau die gleichen wie beim symmetrischen Zweileiterkabel.

Ähnliches gilt für die Betriebswerte der Ableitung und des Widerstandes. Erstere ist bei Drehstrom doppelt, letztere halb so groß als beim symmetrischen Zweileiterkabel.

4. Induktivität von Luftleitungen.

Luftleitungen sind im Gegensatz zu Kabeln dadurch gekennzeichnet, daß die Abmessungen des Querschnittes klein sind gegen den Abstand der Drahtachsen. Es ist deshalb nötig, diese beiden Gruppen von Leitern getrennt zu behandeln. Als Länge l gilt stets die Leitungslänge (Kabellänge), also der Abstand vom Quellpunkt zur Verbrauchsstelle. Bei einem Mehrfachleitersystem mit n Leitern ist dann die Drahtlänge $n \cdot l$.

Nach Maxwell ist für zwei lange zylindrische Leiter mit dem Achsenabstand D und den Durchmessern d_1 und d_2 , die zur Schleife vereinigt und von dem gleichen Strome durchflossen werden, die Induktivität für 1 cm Leitungslänge

$$L = 2 \mu_0 \log \text{nat} \frac{4D^2}{d_1 d_2} + \frac{1}{2} (\mu_1 + \mu_2),$$

worin μ_0, μ_1, μ_2 die Permeabilitäten des umgebenden Mediums und der zwei Leiter sind. Für gleiche runde Drähte ($d_1 = d_2 = d$) aus unmagnetischem Material in Luft geht dies über in

$$L = \left(4 \log \operatorname{nat} \frac{2D}{d} + 1\right) \text{ cm für } l = 1 \text{ cm.}$$

Die gleichen Zahlen geben die Induktivitäten in 10^{-4} Henry für 1 km Kabellänge. Es ist also

$$L = \left(0,92 \log \frac{2D}{d} + 0,1\right) \text{ Millihenry für } l = 1 \text{ km Schleife.}$$

Induktivität in Millihenry pro km Schleife.

	$D = 25 \text{ cm}$	50 cm	75 cm	100 cm	150 cm	200 cm
$d = 3 \text{ mm}$	2,147	2,424	2,586	2,701	2,864	2,979
4 „	2,032	2,309	2,471	2,586	2,748	2,864
5 „	1,942	2,220	2,382	2,497	2,639	2,774
6 „	1,869	2,147	2,309	2,424	2,586	2,701
7 „	1,808	2,085	2,247	2,362	2,525	2,640
8 „	1,754	2,032	2,194	2,306	2,471	2,586
9 „	1,707	1,985	2,147	2,262	2,424	2,539
10 „	1,665	1,942	2,105	2,220	2,382	2,497

Man erkennt aus Formel und Zahlentafel, daß die Induktivität mit wachsendem Abstand und abnehmender Dicke wächst.

Zahlentafel 1.

 L in Millihenry für 1 km des einzelnen Leiters.

$f =$	10	16	25	35	50	70	95 mm ²
$d =$	3,57	4,52	5,66	6,69	8,0	9,46	10,9 mm
$D=30 \text{ cm}$	1,075	1,028	0,983	0,949	0,914	0,880	0,852
40	1,133	1,085	1,040	1,007	0,971	0,938	0,909
50	1,177	1,130	1,085	1,052	1,016	0,973	0,954
60	1,214	1,167	1,122	1,088	1,052	1,019	0,991
70	1,244	1,198	1,152	1,119	1,083	1,049	1,021
80	1,271	1,225	1,179	1,146	1,110	1,077	1,048
90	1,295	1,248	1,203	1,169	1,133	1,099	1,072
100	1,316	1,269	1,224	1,190	1,153	1,121	1,093
110	1,335	1,288	1,243	1,209	1,174	1,140	1,112
120	1,352	1,305	1,260	1,227	1,191	1,158	1,129
130	1,368	1,321	1,276	1,242	1,207	1,174	1,145
140	1,383	1,336	1,291	1,258	1,222	1,188	1,160
150	1,397	1,349	1,305	1,271	1,236	1,202	1,174
160	1,410	1,363	1,318	1,284	1,248	1,215	1,187
170	1,422	1,375	1,329	1,296	1,261	1,227	1,199
180	1,433	1,386	1,341	1,308	1,272	1,239	1,210
190	1,444	1,397	1,352	1,319	1,283	1,249	1,221
200	1,454	1,407	1,362	1,329	1,293	1,259	1,231
210	1,464	1,417	1,372	1,339	1,303	1,269	1,241
220	1,473	1,426	1,381	1,348	1,312	1,279	1,250
230	1,482	1,435	1,390	1,357	1,321	1,288	1,259
240	1,491	1,444	1,399	1,365	1,329	1,296	1,268
250	1,499	1,452	1,407	1,374	1,338	1,304	1,276

Statt der Schleife kann man rechnerisch, obwohl dies physikalisch keinen rechten Sinn hat, auch die Induktivität für 1 km des einzelnen Leiters berechnen. Die Induktivität der Schleife ist dann für Einphasenstrom zweimal so groß, für Drehstrom so groß wie in der vorstehenden Zahlentafel 1 angegeben.

Die Formel ist natürlich

$$L = \left(0,46 \log \frac{2D}{d} + 0,05 \right) \text{ mH/km Draht.}$$

Hat man es mit einer Leitung mit mehr als zwei Drähten zu tun, so gebraucht man den Kunstgriff, in die Selbstinduktion jeder Schleife die Wirkungen der benachbarten Schleifen einzubeziehen. Sind jedoch z. B. bei einer Drehstromleitung die drei Drähte unsymmetrisch angeordnet oder belastet, so werden die Betrachtungen schwieriger.

5. Induktivität von Drehstromleitungen.

Nach den Ableitungen des Abschnittes 2f (S. 417) sind für ein Drehstromsystem mit den Leitern A , B , C die Induktionsflüsse in den durch diese Leiter und den Leiter Null (oder die Hülle) gebildeten Schleifen

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{a0} &= l_{aa} J_a + l_{ab} J_b + l_{ac} J_c \\ \Phi_{b0} &= l_{ba} J_a + l_{bb} J_b + l_{bc} J_c \\ \Phi_{c0} &= l_{ca} J_a + l_{cb} J_b + l_{cc} J_c \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

worin

$$l_{aa} = l_{bb} = l_{cc} = L_{a0} = L_{b0} \quad (12)$$

$$l_{ab} = l_{ba} = \frac{1}{2} (L_{a0} + L_{b0} - L_{ab}) = L_{a0} - \frac{1}{2} L_{ab}. \quad (13)$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \Phi_{a0} &= L_{a0} J_a + (L_{a0} - \frac{1}{2} L_{ab}) J_b + (L_{a0} - \frac{1}{2} L_{ac}) J_c \\ &= L_{a0} (J_a + J_b + J_c) - \frac{1}{2} L_{ab} J_b - \frac{1}{2} L_{ac} J_c. \end{aligned}$$

Der erste Ausdruck verschwindet, da die Summe der drei Ströme Null ist. L_{a0} wäre die Induktivität der Schleife aus A und dem Nulldraht, der im Schwerpunkt des aus den drei Drähten gebildeten gleichseitigen Dreiecks gedacht werden kann. Man findet also

$$\Phi_{a0} = -\frac{1}{2} L_{ab} J_b - \frac{1}{2} L_{ac} J_c$$

und analog

$$\Phi_{b0} = -\frac{1}{2} L_{bc} J_c - \frac{1}{2} L_{ba} J_a.$$

Der Induktionsfluß zwischen den Leitern A und B ist also

$$\Phi_{ab} = \frac{1}{2} (-L_{ab} J_b - L_{ac} J_c + L_{bc} J_c + L_{ba} J_a)$$

oder nach Ordnung und Eliminierung von

$$-J_b = +J_a + J_c:$$

$$\Phi_{ab} = L_{ab} J_a + \frac{1}{2} (L_{ab} + L_{bc} - L_{ac}) J_c$$

$$\Phi_{ab} = L_{ab} J_a + M_{(ab)(bc)} J_c. \quad (16)$$

Der Induktionsfluß ist also die Summe der Beträge, welche durch die Selbstinduktivität der Schleife AB mal dem Strom J_a und die gegenseitige Induktivität zwischen den Schleifen AB und BC mal

dem Strom J_c geliefert werden. Φ_{bc} und Φ_{ca} finden sich leicht durch zyklische Vertauschung.

Nun ist für 1 cm Länge

$$L_{ab} = 4 \log \text{nat} \frac{2D}{d} + 1 = L''$$

$$\begin{aligned} M_{(ab)(bc)} &= \frac{1}{2} (L_{ab} + L_{bc} - L_{ac}) \\ &= 2 \log \text{nat} \frac{2D}{d} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} L'', \end{aligned}$$

da bei symmetrischer Anordnung in den Eckpunkten eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge D offenbar $L_{ab} = L_{bc} = L_{ac}$ wird. Bei symmetrischem Drehstrombetrieb ist also

$$\Phi_{ab} = (L'' - \frac{1}{2} L'') J_a - \frac{1}{2} L'' J_b$$

und somit, da J_a gegen J_b um 120° verschoben ist, die Betriebsinduktivität $L = \frac{1}{2} L''$ halb so groß als beim Betrieb nur einer Schleife (AB) mit Einphasenstrom.

Dasselbe Ergebnis hätte man auch aus dem ersten Ansatz der Gl. (10) erhalten können. Wegen der Symmetrie wird

$$\begin{aligned} l_{aa} &= l_{bb} = l_{cc} = L'; \\ l_{ab} &= l_{bc} = l_{ca} = L' - \frac{1}{2} L'', \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \Phi_{ab} &= L' J_a + (L' - \frac{1}{2} L'') \\ (J_b + J_c) &= \frac{1}{2} L'' J_a. \end{aligned}$$

Drückt man die Induktivitäten durch Briggs'sche Logarithmen, die Längen in km aus, dann ist

$$L_{ab} = 0,92 \log \frac{2D}{d} + 0,1 \text{ mH/km},$$

$$M_{(ab)(bc)} = 0,46 \log \frac{2D}{d} + 0,05 \text{ mH/km}.$$

Bei der praktischen Ausführung kommen zwei Fälle in Betracht. Man ordnet die Drähte entweder nach Abb. 398a und b in Form eines gleichseitigen Dreiecks an, wie in Frankfurt-Lauffen, Paderno geschehen, oder nach Abb. 398c und d in einer Ebene, wie in Heilbronn und bei den Schnellbahnversuchen Berlin-Zossen geschehen. Diese Anordnung ist unsymmetrisch, da der Draht A von B den Abstand $2D$ besitzt, wenn $AC = BC = D$ ist.

Bei unsymmetrischer Anordnung nach Abb. 398c und d mit dem Drahte C zwischen den beiden anderen A und B sind die Induktivitäten verschieden. Es ist

$$L_{ac} = L_{bc} = 4 \log \text{nat} \frac{2D}{d} + 1 = L''$$

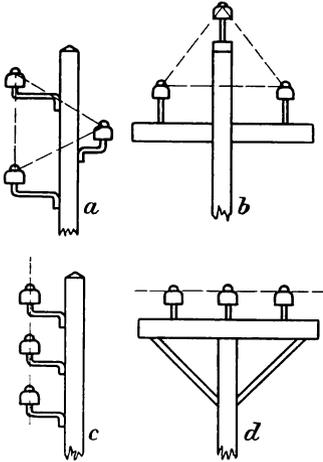


Abb. 398.

$$\begin{aligned} L_{ab} &= 4 \log \text{nat} \frac{4D}{d} + 1 \\ &= \left(4 \log \text{nat} \frac{2D}{d} + 1 \right) + 4 \log \text{nat} 2 \\ &= L'' + 4 \log \text{nat} 2 = L'' + 2,36. \end{aligned}$$

Da der gesamte induktive Spannungsabfall $L \frac{dJ}{dt}$ klein ist gegen die Betriebsspannung, werden die Unsymmetrien nur wenig merkbar.

Man erkennt dies deutlicher beim Niederschreiben der Gleichungen für die Verluste in jeder Schleife, die aus einem Leiter und der gedachten Hülle bzw. einem an deren Stelle gesetzten Nulldraht gebildet werden. Die Gleichungen lauten

$$\frac{\partial v_a}{\partial z} = L_{a0} \frac{\partial i_a}{\partial t} + M_{ab} \frac{\partial i_b}{\partial t} + M_{ac} \frac{\partial i_c}{\partial t} + i_a R_a$$

usw. in zyklischer Vertauschung für die beiden anderen Schleifen. ∂z ist das Längenelement. Da der Verlust vom Ort (∂z) und der Zeit (∂t) abhängt, ist das Zeichen der partiellen Differentiation verwendet worden.

Jede Schleife unterliegt der Wirkung der Selbstinduktion und der gegenseitigen Induktion aus den zwei benachbarten Schleifen. Der Nulleiter, der nicht mit dem neutralen Leiter zu identifizieren ist, ist widerstandslos gedacht.

Für die Koeffizienten gilt

$$L_{a0} = L_{b0} = L_{c0} = L'; \quad L_{ac} = L_{bc} = L''; \quad L_{ab} = L'' + 2,36$$

und ferner

$$\begin{aligned} M_{ab} &= M_{ba} = \frac{1}{2} (L_{a0} + L_{b0} - L_{ab}) = L' - \frac{1}{2} L'' - 1,38 \\ M_{ac} &= M_{bc} = \frac{1}{2} (L_{a0} + L_{c0} - L_{ac}) = L' - \frac{1}{2} L''. \end{aligned}$$

Hieraus folgt unter Berücksichtigung des symmetrischen Drehstrombetriebes, wobei

$$\begin{aligned} i_a + i_b + i_c &= 0, \\ \frac{\partial v_{a0}}{\partial z} &= i_a R_a + \frac{\partial}{\partial t} (\frac{1}{2} L'' i_a - 0,138 i_b) \cdot 10^{-3} \\ \frac{\partial v_{b0}}{\partial z} &= i_b R_b + \frac{\partial}{\partial t} (\frac{1}{2} L'' i_b - 0,138 i_a) \cdot 10^{-3} \\ \frac{\partial v_{c0}}{\partial z} &= i_c R_c + \frac{\partial}{\partial t} (\frac{1}{2} L'' i_c) \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

Hierin ist R_a in Ohm/km, die Induktivität in Henry/km eingeführt. Die drei Verluste sind also ungleich groß; beim mittleren Draht C treten keine Abweichungen auf, weil die beiden Schleifen, denen er angehört, symmetrisch zu ihm liegen. Für die Drähte A und B widerspiegelt sich die Symmetrie der Schleifen (BA) (AC) und (AB) (BC) in dem symmetrischen Bau der Gleichungen.

Setzt man den Operator $\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$, so können die letzten Gleichungen auch geschrieben werden

$$\begin{aligned} v_{a0} &= J_a R_a + j\omega (\frac{1}{2} L'' J_a - 0,138 J_b) \\ v_{b0} &= J_b R_b + j\omega (\frac{1}{2} L'' J_b - 0,138 J_a) \\ v_{c0} &= J_c R_c + j\omega \frac{1}{2} L'' J_c. \end{aligned}$$

In dieser Form erkennt man deutlicher, daß die Betriebsinduktivität der Schleife $C \div \text{Null}$ normal ist, während die beiden Schleifen $A \div \text{Null}$ und $B \div \text{Null}$ sich so verhalten, als ob sie eine schiefwinklige Reaktanz besäßen. Die kleinen Abweichungen von der Lotrechten sind angenähert gegeben durch

$$\Delta \lambda_a = \arctan \frac{2 \log \text{nat } 2}{2 \log \text{nat } \frac{2D}{d} + \frac{1}{2}} = \arctan \frac{0,138}{0,46 \lg \frac{2D}{d} + 0,05} = \arctan \frac{0,138}{\frac{1}{2} L''}$$

Für $d = 4 \text{ mm}$, $D = 100 \text{ cm}$ ist $\frac{1}{2} L'' = 1,292 \text{ mH/km}$,

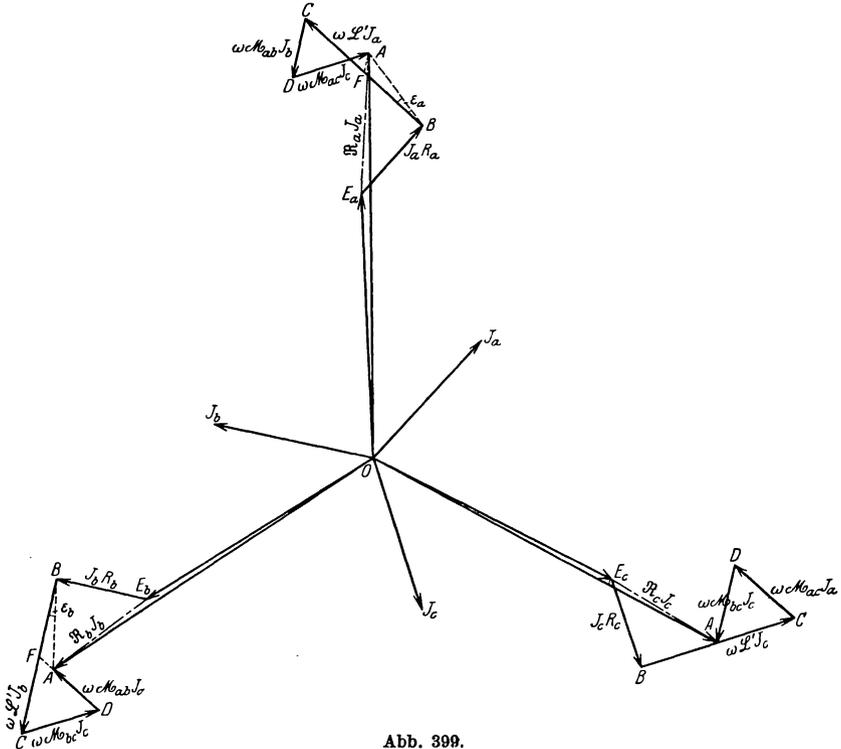


Abb. 399.

also

$$\Delta \lambda_a = (-\Delta \lambda_b) = \arctan \frac{0,138}{1,292} = \arctan 0,107$$

$$\Delta \lambda_a = (-\Delta \lambda_b) \approx 6^\circ$$

Für $d = 8 \text{ mm}$, $D = 50 \text{ cm}$ wäre $\epsilon_a \approx 7^\circ 40'$ geworden. Die Abweichungen sind also klein. Der Leistungsfaktor der drei Leitungen ist nicht derselbe; nur für die mittlere gilt

$$\text{tg } \lambda_c = \frac{\omega L''}{2 R_c} = \frac{\omega L'}{R_c}$$

Abb. 399 entspricht einer graphischen Darstellung des Gleichungssystems für v_{a0} , v_{b0} , v_{c0} .

\overline{OE}_a stellt die Spannung gegen den Nulldraht am Ende des Drahtes A vor. Zählt man hierzu $\overline{EB} \# R_a J_a$ und $\overline{BC} = \omega L' J_a$ senkrecht zu J_a und um 90° voreilend, dann ist $\overline{E_a C}$ der induktive Verlust in der Schleife AO , wenn alle anderen Schleifen stromlos sind. $\overline{CD} \perp J_b$ hält der durch gegenseitige Induktion zwischen den Schleifen A , Null und B , Null induzierten Spannung das Gleichgewicht, $\overline{DA} = \omega M_{ac}$ steht senkrecht zu J_c und überwindet die gegenseitige Induktion zwischen A , Null und C , Null. Die gesamte Wirkung der Selbst- und gegenseitigen Induktion ist also so, als ob zum Ohmschen Verlust $\overline{E_a B}$ die schiefwinklige Reaktanz \overline{BA} hinzuträte, welche zusammen den Richtungswiderstand \Re_a ergeben. $\sphericalangle E_a B A$ ist um $\Delta \lambda = \varepsilon_a$ größer als 90° .

Dieselben Beziehungen ergeben für die Spannung E_b den Impedanzverlust $\Re_b J_b$ aus dem Ohmschen Verlust $R_b J_b$ und dem Verlust in der schiefwinkligen Reaktanz \overline{BA} ; hier ist $\sphericalangle E_b B A$ um $\Delta \lambda = \varepsilon_b$ kleiner als 90° .

Für den Strom J_c fällt F mit A zusammen. OA sind Anfangsspannungen. In dem gezeichneten Falle mit zu großen Verlusten werden für $\overline{OE} = 100$ Volt die Anfangsspannungen OA' beziehungsweise 153, 144 und 146 Volt für a, b, c .

In der Darstellung von Teichmüller erhält man bei gleichseitiger Anordnung der Drähte als Endpunkt der Vektoren wieder ein Ortssechseck, bei Anordnung in einer Ebene ein Ortssechseck mit einem eingeschobenen Parallelogramm. Der größte Spannungsabfall ist dann die Diagonale dieses Ortssechseckes.

Zahlentafeln für den Tangensfaktor. Hierauf soll hier nicht näher eingegangen werden. Da aber bei der Berechnung des Querschnittes nach Formel (10) in Kapitel 10

$$f = K \cdot C \cdot \frac{Wl}{\eta E^2} \varrho (1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \lambda)$$

der Tangensfaktor $T = 1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \lambda$ eine große Rolle spielt, sollen hier noch zwei Tafeln eingeführt werden, wovon die eine $\operatorname{tg} \varphi$, die andere $\cos \lambda$ und λ für die üblichen Verhältnisse angibt. Der spezifische Widerstand des Leitungskupfers ist zu $\varrho = 0,0175$ angenommen worden, R_g der mit Gleichstrom gemessene Widerstand je km Draht¹⁾.

Zahlentafel 2.

Die den üblichen Leistungsfaktoren der Belastung entsprechenden Tangenten.

$\cos \varphi$	φ	$\operatorname{tg} \varphi$	$\cos \varphi$	φ	$\operatorname{tg} \varphi$
0,50	$60^\circ 0' 0''$	1,7321	0,80	$36^\circ 52' 12''$	0,7500
0,55	$56^\circ 37' 59''$	1,5185	0,85	$31^\circ 47' 18''$	0,6197
0,60	$53^\circ 7' 48''$	1,3333	0,90	$25^\circ 50' 30''$	0,4843
0,65	$49^\circ 27' 30''$	1,1691	0,95	$18^\circ 11' 42''$	0,3287
0,70	$45^\circ 34' 23''$	1,0202	1,00	$0'$	0,0000
0,75	$41^\circ 24' 35''$	0,8819			

¹⁾ Teichmüller, ETZ 1921, Heft 13, 14, 29, 30.

Zahlentafel 3.
Werte von $\cos \lambda$ und λ .

f in mm^2	10	16	25	35	50	70	95
d in mm	3,57	4,52	5,66	6,69	8,00	9,46	10,90
R_g	1,75	1,094	0,700	0,500	0,350	0,250	0,184
D in cm							
30	0,982 10° 55'	0,959 16° 27'	0,915 23° 49'	0,859 30° 48'	0,773 39° 22'	0,669 47° 53'	0,567 55° 27'
40	0,980 11° 30'	0,955 17° 19'	0,906 25° 3'	0,845 32° 19'	0,754 41° 5'	0,648 49° 37'	0,542 57° 11'
50	0,978 11° 56'	0,951 17° 59'	0,899 25° 59'	0,834 33° 28'	0,739 42° 21'	0,630 50° 57'	0,523 58° 26'
60	0,977 12° 18'	0,948 18° 32'	0,893 26° 44'	0,825 34° 22'	0,727 43° 22'	0,615 52° 1'	0,509 59° 23'
70	0,976 12° 36'	0,946 18° 59'	0,888 27° 21'	0,818 35° 9'	0,717 44° 12'	0,603 52° 50'	0,498 60° 9'
80	0,975 12° 51'	0,943 19° 24'	0,884 27° 53'	0,812 35° 45'	0,708 44° 54'	0,594 53° 33'	0,488 60° 47'
90	0,974 13° 5'	0,941 19° 44'	0,880 28° 22'	0,806 36° 19'	0,701 45° 31'	0,586 54° 7'	0,480 61° 19'
100	0,973 13° 17'	0,939 20° 2'	0,876 28° 47'	0,801 36° 48'	0,694 46° 1'	0,579 54° 37'	0,473 61° 47'
110	0,972 13° 28'	0,938 20° 18'	0,873 29° 10'	0,796 37° 15'	0,688 46° 30'	0,572 55° 5'	0,466 62° 12'
120	0,972 13° 39'	0,936 20° 33'	0,870 29° 30'	0,792 37° 39'	0,683 46° 56'	0,567 55° 29'	0,461 62° 34'
130	0,971 13° 48'	0,935 20° 47'	0,868 29° 49'	0,788 37° 59'	0,678 47° 19'	0,561 55° 52'	0,455 62° 54'
140	0,970 13° 58'	0,934 21°	0,865 30° 6'	0,784 38° 19'	0,674 47° 39'	0,556 56° 12'	0,451 63° 12'
150	0,970 14° 5'	0,932 21° 12'	0,863 30° 22'	0,781 38° 38'	0,670 47° 58'	0,552 56° 30'	0,447 63° 28'
160	0,969 14° 12'	0,931 21° 23'	0,860 30° 38'	0,778 38° 55'	0,666 48° 16'	0,548 56° 47'	0,443 63° 43'
170	0,969 14° 20'	0,930 21° 34'	0,858 30° 51'	0,775 39° 11'	0,662 48° 32'	0,544 57° 2'	0,439 63° 57'
180	0,968 14° 26'	0,929 21° 44'	0,857 31° 4'	0,772 39° 26'	0,659 48° 47'	0,540 57° 17'	0,436 64° 9'
190	0,968 14° 32'	0,928 21° 53'	0,855 31° 17'	0,770 39° 40'	0,656 49° 2'	0,537 57° 30'	0,433 64° 21'
200	0,968 14° 38'	0,927 22° 1'	0,853 31° 21'	0,767 39° 53'	0,653 49° 16'	0,534 57° 43'	0,430 64° 32'
210	0,967 14° 43'	0,926 22° 9'	0,851 31° 39'	0,765 40° 6'	0,650 49° 29'	0,531 57° 56'	0,427 64° 43'
220	0,967 14° 49'	0,925 22° 17'	0,850 31° 49'	0,763 40° 16'	0,647 49° 41'	0,528 58° 7'	0,424 64° 53'
230	0,966 14° 54'	0,924 22° 24'	0,848 31° 59'	0,761 40° 27'	0,645 49° 52'	0,525 58° 18'	0,422 65° 2'
240	0,966 14° 59'	0,924 22° 32'	0,847 32° 8'	0,759 40° 38'	0,642 50° 3'	0,523 58° 28'	0,420 65° 11'
250	0,966 15° 4'	0,923 22° 38'	0,845 32° 17'	0,757 40° 48'	0,640 50° 13'	0,520 58° 38'	0,418 65° 19'

Mit Hilfe beider Tafeln kann man auch leicht $\cos \vartheta = f(\cos \lambda)$ in Abhängigkeit von dem Leistungsfaktor der Leitung und Belastung berechnen.

Zahlentafel 4.

$\cos \vartheta$ in Abhängigkeit vom $\cos \varphi$ und $\cos \lambda$.

$\cos \lambda =$	1	0,9	0,8	0,7	0,6
$\cos \vartheta$ bei $\cos \varphi = 0,95$	0,95	0,991	0,947	0,888	0,82
$= 0,9$	0,9	1,0	0,982	0,941	0,889
$= 0,8$	0,8	0,982	1,0	0,989	0,96
$= 0,7$	0,7	0,941	0,989	1,0	0,991
$= 0,6$	0,6	0,889	0,96	0,991	1,0

6. Gegenseitige Induktion zwischen zwei Stromkreisen und Wirkung der Verdrillung.

Es wurde bereits erörtert, daß die gegenseitige Induktion die Symmetrie des Dreiphasensystems beeinflussen kann. Werden mehrere Leitungen von demselben Generator aus geführt, so können die einzelnen Linien einander derart beeinflussen, daß eine Unsymmetrie oder Verzerrung des Spannungsdiagramms auftritt. Ändert sich die Belastung, so wird sich auch der Einfluß der gegenseitigen Induktion ändern. Dies kann so weit gehen, daß bei zwei von verschiedenen Generatoren gespeisten, aber an denselben Masten angeordneten Linien die Schwabungen in den nahezu übereinstimmenden Frequenzen der Generatoren unangenehm fühlbare Schwankungen im Lichtbetrieb hervorrufen. Wenn \overline{OE} (Abb. 400) die einer Phase zugeführte Spannung und $\overline{EA} = v$ die von der gegenseitigen Induktion zwischen dieser Phase und den sämtlichen anderen Linien und Phasen herrührende Spannung ist, so äußert sich die Wirkung so, als ob die Phase die Spannung \overline{OA} direkt zugeführt erhielte. Die Größe v schwankt mit der Belastung der betrachteten und aller anderen Linien an denselben Masten; werden diese Linien also von nicht synchron laufenden Generatoren mit gleicher Frequenz gespeist, dann beschreibt der Endpunkt A von v einen Kreis um \overline{E} und die scheinbare Phasenspannung \overline{OA} wird zwischen den Grenzwerten $\overline{OE} \pm v$, also um $2v$ periodisch variieren.

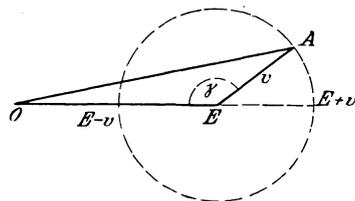
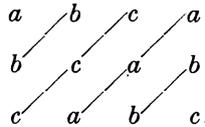


Abb. 400.

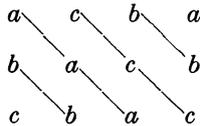
Strenggenommen treten ähnliche, wenn auch vernachlässigbare Unsymmetrien auch schon bei einer einzigen Drehstromleitung auf, wenn ihre drei Drähte nicht in den Eckpunkten eines gleichseitigen Dreiecks, sondern in einer Ebene angeordnet sind. Es läßt sich leicht zeigen, daß man diese kleinen Unsymmetrien völlig beseitigen könnte, indem man die drei Drähte dieser einen Linie unter sich verdrillte. Doch ist dies kaum nötig.

Hier soll der schwierigere Fall betrachtet werden, daß zwei Drehstromlinien an denselben Gestängen angebracht und zur Erzielung möglichst geringer gegenseitiger Induktion untereinander verdreht werden sollen.

Unter einer Verdrehung soll immer eine vollständige Vertauschung der Drähte an den Masten bis zur Wiederherstellung der ursprünglichen Reihenfolge der Drähte verstanden werden. Wenn also eine Dreiphasenleitung die Drähte des Anfangszustandes a, b, c enthält, die von Mast zu Mast gegeneinander etwas versetzt werden, so kann dies zum Beispiel in folgender Weise geschehen:



In der vierten Lage ist also dann die Anfangslage wiederhergestellt; die Verdrehung umfaßt also in diesem Falle drei Stangen oder Maste und ist hier in der natürlichen Reihenfolge der Drähte erfolgt. Setzt man aber am zweiten Mast statt des zweiten Drahtes den dritten an die oberste Stelle, so erhält man die entgegengesetzte Verdrehung in der Reihenfolge:



Sind nun zwei Stromkreise an den Masten vorhanden, die gegeneinander verdreht werden, so kann dies an den gleichen oder an verschiedenen Masten und in gleicher oder entgegengesetzter Richtung geschehen. Die Anordnung kann dabei verschiedener Art sein.

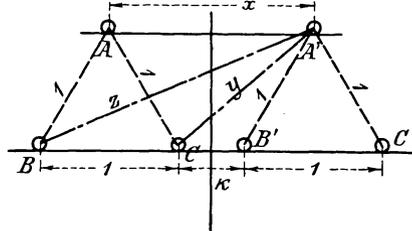


Abb. 401.

a) **Beide Leitungen unverdreht.**
 In dem einfachen Fall, daß die drei Drähte jedes Systems als Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks angeordnet sind (Abb. 401), ergeben sich bei ähnlichen Überlegungen, wie sie für die Ermitte-

lung des Induktionsflusses durch eine Schleife bei einem Drehstromsystem angestellt wurden, die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} \text{Es ist} \quad \Phi_{ab} &= Li + M_{(ab)}(a'b')i_{b'}' + M_{(ab)}(b'c')i_{c'}', \\ \Phi_{bc} &= Li + M_{(bc)}(b'c')i_{c'}' + M_{(bc)}(c'a')i_{a'}', \\ \Phi_{ca} &= Li + M_{(ca)}(c'a')i_{a'}' + M_{(ca)}(a'b')i_{b'}'. \end{aligned}$$

Der Induktionsfluß durch die Schleife AB besteht aus drei Teilen: Der erste rührt her von der Selbstinduktion, der zweite und dritte von

der gegenseitigen Induktion durch die Schleifen $A'B'$ und $B'C'$. L ist die Betriebsinduktivität der Schleife AB . Läßt man den Ausdruck L weg, so ergibt sich als Induktionsfluß durch die Schleife AB infolge gegenseitiger Induktion bei vollständiger Angabe der gegenseitigen Induktivitäten:

$\Phi'_{ab} = \frac{1}{2} \{ (L_{aa'} + L_{bb'} - L_{ab'} - L_{ba'}) J_{b'} + (L_{aa'} + L_{bc'} - L_{ac'} - L_{ba'}) J_{c'} \}$.
Für die beiden anderen Schleifen erhält man die Werte durch zyklische Vertauschung. Bei Einführung der Abstände

$$\begin{aligned} AA' &= x \\ AB' &= A'C = y \\ AC' &= A'B = z \\ AB &= BC = CA = 1 \end{aligned}$$

findet man

$$\begin{aligned} \Phi'_{ab} &= 2 \log \text{nat} \frac{x(1+k)}{yz} J_{b'} + 2 \log \text{nat} \frac{x(2+k)}{z^2} J_{c'} \\ \Phi'_{bc} &= 2 \log \text{nat} \frac{(1+k)^2}{(2+k)k} J_{c'} + 2 \log \text{nat} \frac{(1+k)y}{zk} J_{a'} \\ \Phi'_{ac} &= 2 \log \text{nat} \frac{x(1+k)}{yz} J_{a'} + 2 \log \text{nat} \frac{(1+k)y}{zk} J_{b'}. \end{aligned}$$

Die durch gegenseitige Induktion erzeugte Spannung ist

$$v_{ab} = 0,00289 \nu \left(\log \frac{x(1+k)}{yz} J_{b'} + \log \frac{x(2+k)}{z^2} J_{c'} \right) \text{ Volt/km},$$

wobei der Zahlenwert sich ergibt aus

$$2\pi\nu \cdot 4,6 \cdot 10^{-4} = 0,00289 \nu.$$

v_{bc} und v_{ca} können aus den Gleichungen für Φ'_{bc} und Φ'_{ca} leicht angeschrieben werden.

Wird $J_{b'} = J_{c'} = J'$ gesetzt und die Verschiebung von 120° zwischen beiden berücksichtigt, dann ergibt sich für 1 km Länge und $J' = 1$ Amp. $v_{ab} = 0,00289$ mal

$$\nu \sqrt{\left(\log \frac{x(1+k)}{yz} \right)^2 + \left(\log \frac{x(2+k)}{z^2} \right)^2 - \log \frac{(1+k)^2}{yz} \cdot \log \frac{y(1+k)}{zk}}.$$

Es ist gleichgültig, welcher von den drei Strömen eliminiert wird; das Resultat bleibt stets dasselbe. Wird einer der Werte unter der Wurzel kleiner als 1, so setzt man für $\log a/b = -\log b/a$ in die Wurzel ein. Ist z. B. $k = 0,5$ $\overline{BC} = 1$, so berechnet sich für die Wirkung auf die Phase AB eine EMK von der Größe 1,52 Volt für 100 Amp. \times km bei $\nu = 50$ Perioden.

Da nämlich

$$\begin{aligned} y &= 1 + k &&= 1,5 \\ y &= \sqrt{(k + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} &&= 1,32 \\ z &= \sqrt{(k + 1\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} &&= 2,18 \text{ ist } v_{ab} = 1,52 \text{ Volt.} \end{aligned}$$

Analog erhält man für Phase

$$\begin{aligned} BC \text{ pro } 100 \text{ Amp.} \times \text{ km: } v_{bc} &= 3,73 \text{ Volt} \\ CA \text{ ,, } 100 \text{ ,, } \text{ ,, } : v_{ca} &= 4,74 \text{ ,, } . \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen folgt, daß

$$v_{ab} = v_{a'c'},$$

$$v_{bc} = v_{b'c'},$$

$$v_{ca} = v_{a'b'}$$

ist, wenn die Ströme in beiden Systemen $J = J'$ einander gleich sind.

Die Wirkungen auf die drei Phasen sind also ungleich, und es treten Verzerrungen des Spannungsdiagramms auf, die mit wachsendem Abstand k zwischen den einander zunächst liegenden Drähten der zwei Systeme abnehmen.

b) **Eine Leitung verdreht.** Die verdrehte Leitung kann offenbar auf die gerade durchlaufende Leitung nicht einwirken. Dagegen wird letztere alle Schenkel oder Phasen des verdrehten Systems in gleicher Größe und Richtung induzieren. Die Wirkung der gegenseitigen Induktion wird sich also in einer geringen Verdrehung des Dreiecks der zugeführten Spannungen, nicht aber in einer Verzerrung desselben

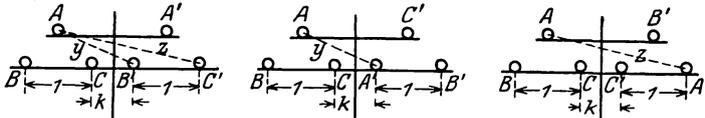


Abb. 402 a—c.

äußern. Der Betrag dieser Verdrehung ergibt sich aus den Abb. 402 a—c und der allgemeinen Gleichung wie folgt:

Hier nimmt der Reihe nach jeder Draht den Stand A, B, C ein. Alle Induktionswirkungen werden also symmetrisch für die drei Phasen. Nun war früher gegenüber einer gedachten Hülle

$$\Phi'_{a_0} = -\frac{1}{2}(L_{a'a'} J_{a'} + L_{a'b'} J_{b'} + L_{a'c'} J_{c'})$$

$$\Phi'_{b_0} = -\frac{1}{2}(L_{b'a'} J_{a'} + L_{b'b'} J_{b'} + L_{b'c'} J_{c'})$$

$$\Phi'_{c_0} = -\frac{1}{2}(L_{c'a'} J_{a'} + L_{c'b'} J_{b'} + L_{c'c'} J_{c'})$$

Jetzt wird also für alle drei Phasen

$$\Phi'_{a_0} = -\frac{1}{2}(L_{a'a'} + L_{b'a'} + L_{c'a'}) \frac{J_{a'}}{3}$$

$$-\frac{1}{2}(L_{a'b'} + L_{b'b'} + L_{c'b'}) \frac{J_{b'}}{3}$$

$$-\frac{1}{2}(L_{a'c'} + L_{b'c'} + L_{c'c'}) \frac{J_{c'}}{3}$$

oder nach Eliminierung von

$$-J_{a'} = +J_{b'} + J_{c'}$$

$$\Phi'_{a_0} = \frac{1}{2} \left\{ (L_{b'a'} - L_{c'b'}) \frac{J_{b'}}{3} + (L_{c'a'} - L_{b'c'}) \frac{J_{c'}}{3} \right\}$$

$$= 4,6 \left(\log \frac{z}{k} \frac{J_{b'}}{3} + \log \frac{y}{2+k} \frac{J_{c'}}{3} \right)$$

da

$$L_{a'a'} = L_{b'b'} = L_{c'c'}; \quad L_{b'a'} = L_{a'c'}; \quad L_{c'a'} = L_{a'b'}$$
 ist.

Bei Eliminierung von J_b' folgt für die durch gegenseitige Induktion induzierte Spannung

$$v_{ab} = 0,00289 \cdot v \cdot \frac{1}{3} \left\{ J_a' \log \frac{k}{z} + J_c' \log \frac{2+k}{y} \right\} \text{ Volt/km,}$$

welche Formel in anderer Ableitung sich auch in der zweiten Auflage dieses Buches von 1903 (S. 350) vorfindet.

Ist wieder wie vorher $k = \frac{1}{2}$, so berechnet sich die induzierte EMK für 100 Amp. \times Kilometer zu 3,93 Volt für alle drei Phasen. Durch diese Art der Verdrillung ist also kaum eine der aufgewendeten Mehrarbeit und Sorgfalt bei der Montage entsprechende Verbesserung zu erzielen.

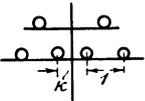
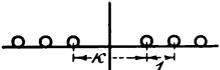
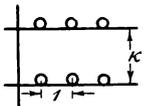
c) Beide Leitungen verdrillt. Hier kann man eine Reihe von Fällen nach den eben erörterten Grundsätzen durchrechnen. Man findet dabei, daß die gegenseitige Induktion stets Null ist, wenn eine Leitung eine vollständige Verdrillung durchläuft, während die andere auf derselben Strecke dreimal verdrillt ist. Dies gilt unabhängig von der Anordnung der Drähte zueinander, von der Richtung der Verdrillungen und von der Belastung der einzelnen Phasen. Die Lösung stellt somit die vollkommenste in theoretischer Hinsicht vor, ist aber praktisch, besonders wenn es sich um mehr als zwei Linien handelt, schwer durchzuführen. Man kann deshalb, um die Zahl der Kreuzungen zu vermindern, zweckmäßig auch andere Verdrillungsarten anwenden, wenn es gelingt, dadurch die Montage zu vereinfachen, ohne die Wirkung wesentlich zu verändern.

Wenn beide Leitungen gleich viele Verdrillungen aufweisen und diese an denselben Masten stattfinden, so ist bei gleichmäßiger Belastung der Zweige der Einfluß der gegenseitigen Induktion symmetrisch unter folgenden Bedingungen: Wenn die Leitungen in derselben Richtung verdrillt sind und eine Leitungsführung beginnt in der Reihenfolge ABC , so muß die andere auf den entsprechenden Traversen in der Reihenfolge $A'B'C'$, $B'C'A$ oder $C'A'B'$ anfangen, sind dagegen die Leitungen mit entgegengesetzter Richtung verdrillt, so muß der zweite Stromkreis anfangen in der Reihenfolge $B'A'C'$, $A'C'B$ oder $C'B'A$.

Wenn die Verdrillungen nicht an denselben Masten stattfinden, sondern abwechselnd erfolgen, ist die gegenseitige Induktion nur halb so groß, und ihre Phase ist um 60° gegen ihre vorige Lage verschoben. Diese Anordnung dürfte deshalb die empfehlenswertere sein.

Die folgende Tabelle gibt die Werte der EMK für je 100 Amp. \times Kilometer bei 50 Perioden je Sekunde und für die in Abb. 403 dargestellten drei Fälle I bis III wieder.

Besonders wichtig ist die Verdrillung, wenn zwei oder mehr Leitungen an demselben Gestänge angeordnet sind, die von nicht synchron laufenden Generatoren getrieben werden. Ist in diesem Fall die gegenseitige Induktion nicht völlig aufgehoben, so treten nach Abb. 400 Spannungsschwabungen auf, die bei Glühlichtbetrieb unangenehm bemerkbar werden.

Anordnung der Leitungen	Wert von k	Art der Verdrillung der Systeme I und II an denselben Masten					
		$I = 0$ mal $II = 0$ „			$I = 0$ mal $II = 1$ „		
		$I = +1$ $II = -1$	$I = +1$ $II = +1$				
 <p>Fall I</p>	$1/2$	V_{AB}	V_{BC}	V_{CA}	$V_{AB} = V_{BC} = V_{CA}$		
	1	1,52	3,73	4,74	3,93	3,06	1,94
	2	0,92	1,75	2,24	2,81	1,56	0,76
 <p>Fall II</p>	$1/2$	1,44	4,33	5,78	5,60	3,6	2,95
	1	1,01	2,27	3,26	4,20	1,69	1,66
	2	0,58	1,01	1,59	2,29	0,82	0,79
 <p>Fall III Abb. 403.</p>	$1/2$	9,54	9,54	15,45	1,29	4,45	11,0
	1	4,75	4,75	8,75	0,95	3,33	5,46
	2	1,91	1,91	3,90	0,49	1,72	2,08

d) Gegenseitige Induktion auf eine Schwachstromleitung. Nach derselben Methode kann man sich auch darüber klar werden, welche EMK in einer Schwachstromlinie durch eine parallel zu ihr verlegte Wechselstromleitung induziert wird. Eine zweidrähtige Telephonleitung $B'C'$ sei seitwärts von der Drehstromleitung ABC geführt (Abb. 404). Dann ist der gegenseitige Induktionsfluß durch $B'C'$

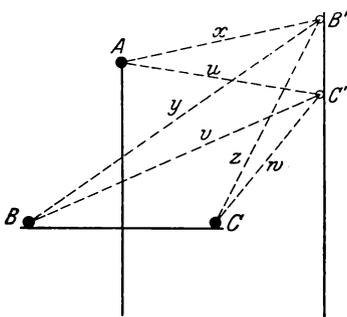


Abb. 404.

$$\Phi_{B'C'} = M_{(aB)(B'C')} J_a + M_{(bC)(B'C')} J_c.$$

Nun ist nach Gleichung (21) (Seite 418)

$$M_{(aB)(B'C')} = \frac{1}{2} (L_{aB'} + L_{bB'} - L_{aB} - L_{bC'}),$$

$$M_{(bC)(B'C')} = \frac{1}{2} (L_{bC'} + L_{cC'} - L_{bB'} - L_{cC'}).$$

Sind die Drähte der Drehstromleitung d mm, die der Telephonleitung d' mm, dann ist

$$L_{aC'} = 2 \log \text{nat} \frac{4u^2}{dd'} + \frac{1}{2} (1 + \mu),$$

wobei μ die Permeabilität der Telephondrähte darstellt. Für die übrigen Koeffizienten gelten ähnliche Gleichungen. Aus ihnen berechnet sich

$$M_{(aB)(B'C')} = 2 \log \text{nat} \frac{uy}{vx},$$

$$M_{(bc)(b'c')} = 2 \log \text{nat} \frac{vz}{wy},$$

$$\Phi_{b'c'} = 2 J_a \log \text{nat} \frac{uy}{vx} + 2 J_c \log \text{nat} \frac{vz}{wy}$$

und

$$e_{b'c'} = 0,00289 J \nu \sqrt{\left(\log \frac{uy}{vx}\right)^2 + \left(\log \frac{vz}{wy}\right)^2 - \left(\log \frac{uy}{vx}\right)\left(\log \frac{vz}{wy}\right)}$$

in Volt/km.

Als Beispiel werde eine Betriebsfernsprechstelle behandelt, die ohne Verdrillung an den Hochspannungsmasten unterhalb der Drähte BC angebracht sei. Aus Symmetriegründen ergibt sich

$$x = u, \quad y = w, \quad z = v.$$

Wählt man den Abstand der untersten Hochspannungsdrähte vom Boden zu 7 m, ihren gegenseitigen Abstand 1 m und liegt die Telefonleitung mit 50 cm Abstand zwischen B' und C' 2 m unter BC , dann sind die Abstände $\overline{BC} = 0,5$ m (Abb. 405),

$$x = u = 2,876; \quad y = w = 2,015; \\ z = v = 2,136$$

und bei 50 Perioden in der Hochspannungsleitung werden für je 100 Ampere \times Kilometer induziert $e_{b'c'} = 14,45 \cdot 0,067 = 0,97$ Volt für je 100 Amp. \times km.

Befindet sich die doppeldrähtige Fernsprechleitung in gleicher Höhe auf der anderen Seite eines nur 10 m breiten Weges und ist, wie oben, der Abstand der Drähte B' und C' voneinander 50 cm, dann wird

$$x = 10,16 \text{ m} \quad u = 10,64 \text{ m} \\ y = 10,44 \text{ m} \quad v = 10,93 \text{ m} \\ z = 9,46 \text{ m} \quad w = 9,95 \text{ m},$$

und dann findet man als induzierte Spannung für je 100 Amp. km des 50 periodigen Drehstroms

$$e_{b'c'} = 14,45 \cdot 0,0021 = 0,03 \text{ Volt für je 100 Amp. km.}$$

Die induktiven elektromagnetischen Wirkungen auf eine doppeldrähtige Fernsprechleitung sind also auch bei mäßigen Abständen klein. Die praktische Erfahrung hat dies bestätigt.

7. Kapazität von Luftleitungen.

a) **Symmetrische Doppelleitung.** Sei d die Drahtdicke, D der Achsenabstand einer symmetrischen Doppelleitung ohne Hülle und ohne merklichen Einfluß der Erde, dann gilt streng, daß die Betriebskapazität in absoluten elektrostatischen Einheiten (cm) für 1 cm Leitungslänge

$$C = \frac{1}{4 \log \text{nat} \frac{D + \sqrt{D^2 - d^2}}{d}},$$

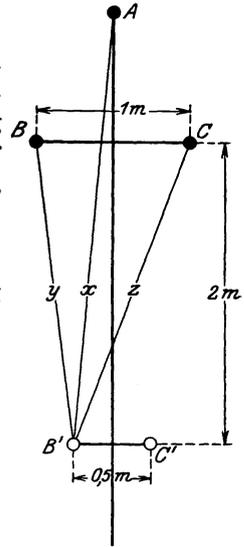


Abb. 405.

oder wenn d erheblich kleiner ist als D , angenähert

$$C = \frac{1}{4 \log \text{nat} \frac{2D}{d}}.$$

Hieraus erhält man die Betriebskapazität in Mikrofarad pro km Doppelleitung für ein Medium mit der Dielektrizitätskonstante ε durch Multiplikationen mit $\frac{1}{9} \varepsilon$. Für Luftleitung ist also

$$C = \frac{1}{9 \cdot 4 \cdot \log \text{nat} \frac{2D}{d}} = \frac{0,0121}{\log \frac{2D}{d}} \text{ Mf/km}.$$

Ist bei der symmetrischen Doppelleitung der Einfluß des Erdbodens im Abstände h nicht vernachlässigbar, so gilt, wenn d erheblich kleiner ist als D und h , für die Betriebskapazität in Mf/km

$$C = \frac{0,0121}{\log \frac{4Dh}{d\sqrt{4h^2 + D^2}}} \text{ Mf/km}.$$

Ist D klein gegen h , dann geht diese Formel offenbar in die andere über, wobei $D^2/4h^2$ vernachlässigt ist. Selbst für $D = \frac{1}{5} h$ ist der Fehler bei der Vernachlässigung nur $\frac{1}{2}\%$. Auf Grund dieser Beziehung sind die Werte der Kapazität in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Betriebskapazität je km Doppelleitung in Mf/km.

	$D=25 \text{ cm}$	50	75	100	150	200
$d=3 \text{ mm}$	0,00543	0,00478	0,00447	0,00427	0,00402	0,00386
4	576	503	469	447	420	402
5	604	525	487	464	434	416
6	628	543	503	478	447	427
7	651	560	518	491	459	438
8	672	576	531	503	469	447
9	692	590	543	514	478	456
10	710	604	555	525	487	464

Benachbarte Bäume usw. können die Kapazität erhöhen.

b) **Einzeldraht.** Für eine Einzelleitung bestehend aus einem Draht, der in der Höhe h über den Erdboden gespannt ist, berechnet sich die Kapazität zu

$$C = \frac{1}{2 \log \text{nat} \frac{2h + \sqrt{4h^2 - d}}{d}}$$

in elektrostatischem Maße für 1 cm Länge. Dies gibt

$$C = \frac{0,0242}{\log \frac{2h + \sqrt{4h^2 - d}}{d}} \approx \frac{0,0242}{\log \frac{4h}{d}} \text{ in Mf/km}.$$

Die letzte angenäherte Formel gilt, wenn d sehr klein gegen h ist. Die Kapazität einer Einzelleitung ist also doppelt so groß,

als die einer Doppelleitung mit dem Achsenabstand $2h$ wäre. Die Erde als Rückleitung verhält sich also in bezug auf Kapazität wie ein zu der Oberleitung im Abstand h unter der Erdoberfläche gelegener Rückleiter. Der äquivalente Leiter ist das Spiegelbild der Oberleitung im Erdboden.

8. Kapazität von Drehstromluftleitungen.

a) Symmetrische Anordnung. Die Gleichungen für ein symmetrisches Dreileiterkabel mit den Indexen 1, 2, 3 für die Leiter und 0 für die Hülle lauten für den ersten Leiter

$$Q = c_{11} V_1 + c_{12} V_2 + c_{13} V_3; \quad Q' = a_{11} V_1 + a_{12} V_2 + a_{13} V_3$$

und analog für den zweiten und dritten Leiter.

Wegen der Symmetrie werden die Koeffizienten wie folgt:

$$c_{11} = c_{22} = c_{33} = C_1 = \text{Kapazität eines Leiters gegen Erde,}$$

$$c_{1,2} = c_{1,3} = c_{2,3} = -\frac{C_1 + C_2 - C_{12}}{2}, \quad (10)$$

aber C_1 ist die Kapazität des ersten Leiters, wenn alle außer ihm mit Hülle und Erde verbunden sind; C_{12} ist die Kapazität der beiden vereinigten Leiter 1 und 2, wenn 3 mit Hülle und Erde verbunden ist. Daher wird

$$C_1 = C_2 = C_3 = C', \quad C_{1,2} = C_{1,3} = C_{2,3} = C''$$

und

$$c_{1,2} = -C' + \frac{1}{2}C''.$$

Ist bei symmetrischem Drehstrombetrieb die Hülle, oder bei fehlender Hülle die Erde ohne Rückstrom, dann gilt

$$Q = C' V_1 - (C' + \frac{1}{2}C'')(V_2 + V_3) = C V_1,$$

$$Q' = A' V_1 - (A' + \frac{1}{2}A'')(V_2 + V_3) = A V_1.$$

Um Betriebswerte einführen zu können, ist es erforderlich, daß die Ausdrücke rechts vom Gleichheitszeichen bei Division durch V_1 nach Ort und Zeit konstante Werte haben. Dies trifft beim symmetrischen Drehstrombetrieb zu, weil $V_1 + V_2 + V_3 = 0$ ist.

Die Betriebskapazität wird also $C = 2C' - \frac{1}{2}C''$,

Die Betriebsableitung wird also $A = 2A' - \frac{1}{2}A''$.

Beim symmetrischen Zweileitersystem mit der Betriebsspannung V zwischen den beiden Leitern $V_1 = -V_2 = \frac{1}{2}V$ wäre die Ladung

$$Q = C' V_1 - (C' + \frac{1}{2}C'')V_2 = C V,$$

also die Betriebskapazität $C = C' - \frac{1}{4}C''$ halb so groß gewesen.

Die Betriebskapazität des Drehstromsystems ist also doppelt so groß als die des Zweileitersystems oder ebenso groß als die der eindrähtigen Leitung.

Für Drehstromluftleitungen sind also die Werte der Tabelle auf Seite 436 zu verdoppeln.

b) **Allgemeiner Fall. Sechs Drähte.** In einem allgemeinen Falle mit mehr als drei Leitern können die Teilkapazitäten mit Hilfe der elektrischen Bilder einfach ermittelt werden. Da jedoch jedem Leiter sein Bild gegenüber der spiegelnd gedachten Erdoberfläche entspricht, ist es vorteilhaft, von Fall zu Fall die Rechnung zahlenmäßig durchzuführen, weil sich dabei gegenüber den umfangreichen Formeln manche Vereinfachungen ergeben¹⁾.

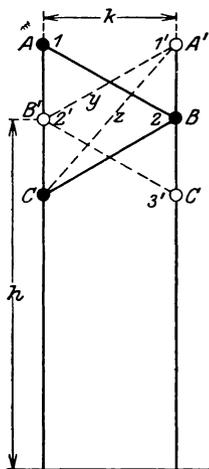


Abb. 406.
Gegenläufige
Anordnung.

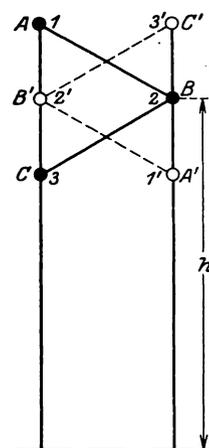


Abb. 407.
Gleichläufige
Anordnung.

Dies möge an einem praktisch vorkommenden Fall erläutert werden.

Gegeben seien zwei Hochspannungsdrehstromleitungen, welche nach Abb. 406 gegenläufig oder nach Abb. 407 gleichläufig angeordnet sind. Die Drähte jedes Systems liegen in den Endpunkten eines gleichseitigen

Dreiecks und die Systeme besitzen den Achsenabstand $k = x \sqrt{3}$. Dadurch liegt Draht B zwischen A' und C' , Draht B' auf der anderen Mastenreihe zwischen A und C .

c) **Gegenläufige Anordnung.** Sind die sechs Drähte nach Abb. 406 angeordnet, dann findet man, wenn A, B, C mit 1, 2, 3; A', B', C' mit 1', 2', 3' bezeichnet werden:

$$V_1 = p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2 + p_{13}Q_3 + p'_{11}Q'_1 + p'_{12}Q'_2 + p'_{13}Q'_3,$$

$$V_2 = p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2 + p_{23}Q_3 + p'_{21}Q'_1 + p'_{22}Q'_2 + p'_{23}Q'_3 \text{ usw.}$$

In diesen sechs Gleichungen bedeuten die Maxwell'schen „Potentialkoeffizienten“

$$p_{11} = 2 \log \text{nat} \frac{2h + 2x}{r}; \quad p_{22} = 2 \log \text{nat} \frac{2h}{r}; \quad p_{33} = 2 \log \text{nat} \frac{2h - 2x}{r}$$

$$p'_{11} = 2 \log \text{nat} \frac{2h + 2x}{k}; \quad p'_{22} = 2 \log \text{nat} \frac{2h}{k}; \quad p'_{33} = 2 \log \text{nat} \frac{2h - 2x}{k}$$

$$p_{12} = 2 \log \text{nat} \frac{2h + x}{x}; \quad p_{23} = 2 \log \text{nat} \frac{2h - x}{y}; \quad p_{31} = 2 \log \text{nat} \frac{2h}{2x}$$

$$p'_{12} = 2 \log \text{nat} \frac{2h + x}{y}; \quad p'_{23} = 2 \log \text{nat} \frac{2h - x}{y}; \quad p'_{31} = 2 \log \text{nat} \frac{2h}{z}$$

$$p'_{12} = p'_{12}; \quad p_{12} = p_{21}; \quad p'_{23} = p'_{23}; \quad p_{23} = p_{32}; \quad p'_{31} = p'_{31}; \quad p_{13} = p_{31}.$$

Hierin sind $x = \frac{1}{2}y$, z, k die eingezeichneten Abstände, $2r$ ist der Durchmesser der Drähte. Als vernachlässigbar ist nur der Unterschied zwischen $\sqrt{(2h)^2 + n^2}$ gegen $2h$ für $n = x, y, k$ angenommen.

¹⁾ Für vier Drähte hat Schrottke die allgemeinen Formeln in der ETZ 1907, S. 707 entwickelt. S. a. C. Feldmann und A. C. Loos: ETZ 1913, S. 89, 254.

Ist z. B. $h = 8$, $x = 1$, $k = \sqrt[3]{3}$, $y = 2$ Meter, so ist $2h \sqrt{1 + \frac{n^2}{4h^2}}$ höchstens um den Betrag $(n/8h)^2 = 4/512 = 1/128$, also um weniger als 1% falsch eingeführt.

Bei Verwendung gewöhnlicher Logarithmen statt der natürlichen ergeben sich die Kapazitätswerte in Mf/km durch Multiplikation mit 0,0483, so daß also

$$p_{11} = 0,0483 \log \frac{2h + 2x}{r} \text{ usw.}$$

Hieraus lassen sich die sechs Maxwell'schen Gleichungen

$$Q_1 = c_{11} V_1 + c_{12} V_2 + c_{13} V_3 + c'_{11} V'_1 + c'_{12} V'_2 + c'_{13} V'_3,$$

$$Q_2 = c_{21} V_1 + c_{22} V_2 + c_{23} V_3 + c'_{21} V'_1 + c'_{22} V'_2 + c'_{23} V'_3 \dots \text{ usw.}$$

finden. Die gesuchten Teilkapazitäten ergeben sich nach den Regeln der Inversion linearer Gleichungen aus der Beziehung

$$c_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta}, \quad c_{12} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta}, \quad c_{13} = \frac{\Delta_{13}}{\Delta} \dots \text{ usw.},$$

wo Δ die Determinante des Gleichungssystems der c und Δ_{12} , Δ_{13} usw. die Unterdeterminanten sind, welche dem mit gleichem Index versehenen Koeffizienten c zugehören.

Einfacher erscheint jedoch für den vorliegenden Sonderfall folgender Weg:

$$\begin{aligned} \text{Es seien die Potentiale } V_1 = V'_1; \quad V_2 = V'_2; \quad V_3 = V'_3, \\ \text{die Ladungen } Q_1 = Q'_1; \quad Q_2 = Q'_2; \quad Q_3 = Q'_3. \end{aligned}$$

Die beiden Systeme sind also nach Abb. 406 gegenläufig, und die Gleichungen lauten:

$$V_1 = (p_{11} + p'_{11}) Q_1 + (p_{12} + p'_{12}) Q_2 + (p_{13} + p'_{13}) Q_3,$$

$$V_2 = (p_{21} + p'_{21}) Q_1 + (p_{22} + p'_{22}) Q_2 + (p_{23} + p'_{23}) Q_3,$$

$$V_3 = (p_{31} + p'_{31}) Q_1 + (p_{32} + p'_{32}) Q_2 + (p_{33} + p'_{33}) Q_3.$$

Hieraus lassen sich die Maxwell'schen Gleichungen leicht erhalten, wenn man Zahlenwerte einführt. Sei beispielsweise $h = 8$, $x = 1$, $k = \sqrt[3]{3}$, $y = 2$, $z = \sqrt{7}$ m und $d = 4$ mm ($r = 2$ mm), dann findet man:

$$V_1 = 9,94 Q_1 + 4,32 Q_2 + 3,37 Q_3,$$

$$V_2 = 4,32 Q_1 + 9,74 Q_2 + 4,10 Q_3,$$

$$V_3 = 3,37 Q_1 + 4,10 Q_2 + 9,51 Q_3,$$

und daraus:

$$Q_1 = 0,1298 V_1 + 0,0468 V_2 - 0,0259 V_3,$$

$$Q_2 = -0,0468 V_1 + 0,1423 V_2 - 0,0451 V_3,$$

$$Q_3 = -0,0259 V_1 - 0,0451 V_2 + 0,1337 V_3,$$

und nach Hinzufügung des Faktors 0,0483

$$1000 Q_1 = 6,27 V_1 - 2,26 V_2 - 1,25 V_3,$$

$$1000 Q_2 = -2,26 V_1 + 6,87 V_2 - 2,18 V_3,$$

$$1000 Q_3 = -1,25 V_1 - 2,18 V_2 + 6,45 V_3.$$

Da hier in der Formel für Q_1 die Koeffizienten von V_2 und V_3 ungleich sind, kann, strenggenommen, von einer für die drei Phasen gleichen „Betriebskapazität“ nicht die Rede sein.

Führt man für Drehstrom ein

$$V_1 = V \sin \omega t,$$

$$V_2 = V \sin (\omega t - 120^\circ) = -0,5 V \sin \omega t - 0,867 V \cos \omega t,$$

$$V_3 = V \sin (\omega t + 120^\circ) = -0,5 V \sin \omega t + 0,867 V \cos \omega t,$$

so erhält man nach der Umrechnung

$$1000 Q_1 = 8,07 V \sin (\omega t + 6^\circ 15') \text{ entspr. } C_1 = 8,07 \cdot 10^{-3} \text{ Mf/km,}$$

$$1000 Q_2 = 9,09 V \sin (\omega t - 120^\circ - 25') \quad C_2 = 9,09 \cdot 10^{-3} \text{ Mf/km,}$$

$$1000 Q_3 = 8,2 V \sin (\omega t + 120^\circ - 5^\circ 38') \quad C_3 = 8,2 \cdot 10^{-3} \text{ Mf/km.}$$

Die drei Kapazitäten sind untereinander ungleich; die mittelste Phase hat die größte Kapazität, weil die Drähte 2, 2' räumlich zwischen den beiden anderen Drähten 1', 3' bzw. 1, 3 liegen.

Auch hat der Begriff $C = \frac{Q}{V}$ abgeänderte Bedeutung, da hier die Ladungen mit den Spannungen nicht völlig in Phase sind.

Für eines der Drehstromsysteme 1, 2, 3, oder 1', 2', 3' wäre

$$C = \frac{0,0483}{2 \log \frac{2x}{r}} = 8,05 \cdot 10^{-3} \text{ Mf/km.}$$

Um einen Näherungswert zu erhalten, kann für eine mittlere Höhe h der Drähte das geometrische Mittel aus den gegenseitigen Abständen aller Drähte gleicher Phase, A , und den gegenseitigen Abständen aller Drähte verschiedener Phase, B , eingeführt werden. Der Abstand eines Drahtes von sich selbst ist hierbei nicht gleich Null, sondern gleich seinem Halbmesser r zu setzen.

Die Definitionen sind also für A und für B :

$$2 \log \frac{(2h)^2}{A} = \frac{1}{3} (p_{11} + p_{22} + p_{33} + p'_{11} + p'_{22} + p'_{33}), \text{ oder } A^6 = k^3 r^3,$$

$$2 \log \frac{(2h)^2}{A} = \frac{1}{3} (p_{12} + p_{23} + p_{31} + p'_{12} + p'_{23} + p'_{31}), \quad ,, \quad B^6 = 2x^3 y^2 z.$$

Die Gleichungen werden dann:

$$V_1 = 4 \left(Q_1 \log \text{nat} \frac{2h}{A} + Q_2 \log \text{nat} \frac{2h}{B} + Q_3 \log \text{nat} \frac{2h}{B} \right)$$

$$V_2 = 4 \left(Q_1 \log \text{nat} \frac{2h}{B} + Q_2 \log \text{nat} \frac{2h}{A} + Q_3 \log \text{nat} \frac{2h}{B} \right)$$

$$V_3 = 4 \left(Q_2 \log \text{nat} \frac{2h}{B} + Q_2 \log \text{nat} \frac{2h}{B} + Q_3 \log \text{nat} \frac{2h}{A} \right),$$

und deshalb wird nunmehr für alle drei Phasen die „Betriebskapazität“ (angenähert)

$$C' = \frac{Q_1}{V_1} = \frac{1}{4 \log \text{nat} \frac{B}{A}} \text{ in CGS.}$$

oder in Mf/km:

$$C' = \frac{0,0121}{\log \frac{B}{A}} = \frac{0,0121}{1,45} = 8,35 \cdot 10^{-3} \text{ Mf/km.}$$

Der Mittelwert von C_1, C_2, C_3 war $8,45 \cdot 10^{-3}$ Mf/km.

d) Gleichläufige Anordnung. Ist die Anordnung nach Abb. 407, S. 438 so, daß

$$V_1 = V_3'; \quad V_2 = V_2'; \quad V_3 = V_1',$$

dann findet man durch ähnliche Rechnungen in Mf/km:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= 8,83 \cdot 10^{-3} / + 2^0 35' \\ C_2 &= 9,10 \cdot 10^{-3} / - 1^0 20' \\ C_3 &= 8,83 \cdot 10^{-3} / - 2^0 35' \end{aligned} \right\} \text{Mittelwert } 8,92 \cdot 10^{-3}$$

$$C = 8,05 \cdot 10^{-3} \text{ für eines der Systeme, wie bei c),}$$

$$C' = 8,91 \cdot 10^{-3} \text{ angenäherte Betriebskapazität für beide Systeme.}$$

Bei der gleichläufigen Anordnung sind also die Unterschiede zwischen den drei Kapazitäten kleiner geworden, die Kapazitäten selbst aber größer.

Der Einfluß des zweiten Systems ist hier also größer als bei der gegenläufigen Spaltung der Abb. 406, wie ein Vergleich zwischen C , für ein System und C' beweist.

Bei gleichläufiger Schaltung ist

$$C' = 8,91 \cdot 10^{-3} \text{ Mf/km} = 1,11 C.$$

Bei gegenläufiger Schaltung war

$$C' = 8,35 \cdot 10^{-3} \text{ Mf/km} = 1,04 C,$$

die (angenäherte) Betriebskapazität also 11 bzw. 4% größer, als sie beim Vorhandensein nur eines Systems gewesen wäre. Der Unterschied ist erklärlich, da die Kapazitäten kleiner werden, wenn man Drähte verschiedenen Potentials (etwa 1 und 3') weiter auseinanderrückt.

Es ist interessant, festzustellen, daß die gegenseitige (elektromagnetische) Induktion für die Anordnung nach Fall c) oder d) ganz gleich ist.

Setzt man wie auf Seite 432 die Seitenlänge $y = 1$, dann wird $k = \frac{1}{2} \sqrt{3}$ und die durch das System $A'B'C'$ (oder $1'2'3'$) in ABC (oder 123) erzeugten Spannungen sind

$$v_{ab} = 8,53 \text{ Volt je } 100 \text{ Amp.} \times \text{ km,}$$

$$v_{bc} = 8,53 \quad ,, \quad ,, \quad 100 \quad ,, \quad ,, \quad ,$$

$$v_{ac} = 4,61 \quad ,, \quad ,, \quad 100 \quad ,, \quad ,, \quad .$$

Man kann jedoch noch einen Schritt weitergehen, und die hier eingeführten Definitionen für die geometrischen Mittel aus den Abständen

$$\text{aller Drähte gleicher Phase } A = (k^3 r^3)^{1/6},$$

$$,, \quad ,, \quad \text{verschiedener } ,, \quad B = (2 x^3 y^2 z)^{1/6}$$

zur Bestimmung der Betriebsinduktivität des Systems verwenden.

Diese wird nämlich

$$L' = 4 \log \text{nat} \frac{B}{A} + 1 \text{ in CGS}$$

$$\text{oder } L' = 0,92 \log \frac{B}{A} + 0,1 \text{ in mH/km.}$$

Für den vorliegenden Fall, wobei $k = \sqrt{3}$ m; $x = 1$ m; $y = 2$ m; $z = \sqrt{7}$ m; $r = 2 \cdot 10^{-3}$ m ist, ergibt sich

$$L' = 0,92 \cdot 1,45 + 0,1 = 1,38 \text{ mH/km.}$$

Die Induktivität eines der Drehstromsysteme wäre

$$L = 0,46 \log \frac{2x}{r} + 0,05 = 1,43 \text{ mH/km,}$$

also etwa 4% größer gewesen.

Die Anwendung dieses Verfahrens auf andere Anordnungen dürfte nunmehr leicht sein.

Zusammenfassung. Für die näherungsweise Ermittlung der Betriebskapazität von Drehstromdoppelleitungen werden die Begriffe der geometrischen Mittel aus den gegenseitigen Abständen aller Drähte gleicher Phase A und aller Drähte ungleicher Phase B eingeführt. Der Abstand eines Drahtes zu sich selbst ist hierbei gleich seinem Halbmesser zu setzen.

Dann ist die Betriebskapazität der Drehstromdoppelleitung

$$C' = \frac{0,0121}{\log_{10} \frac{A}{B}} \text{ in Mf/km,}$$

ihre Betriebsinduktivität

$$L' = 0,92 \log_{10} \frac{B}{A} + 0,01 \text{ in mH/km.}$$

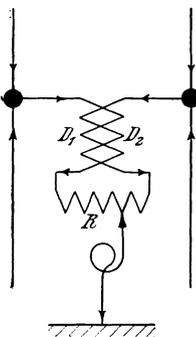


Abb. 408.

Diese angenäherten Betriebskapazitäten sind fiktive. Die genau ermittelten Einzelkapazitäten unterscheiden sich jedoch auch dadurch von der gebräuchlichen Definition, daß die Ladungen gegen die sie hervorrufenden Potentiale verschoben sind. Die dadurch hervorgerufenen Unsymmetrien des Systems sind jedoch klein.

9. Elektrostatische Beeinflussung von Schwachstromleitungen.

Hochspannungs-Freileitungen erzeugen an benachbarten Leitungen, insbesondere an den Betriebs-Fernsprechleitungen, durch Influenz mehr oder weniger hohe Spannungen gegen Erde. Die Höhe dieser Influenzspannungen ist von der Lage der Leitungen und von ihrem Isolationszustande abhängig. Sie ist am größten bei Erdschluß einer Hochspannungsleitung, wenn die influenzierte Telephonleitung von Erde isoliert ist und kann unter Umständen so groß werden, daß die Berührung von Betriebs-Fernsprechleitungen lebensgefährlich ist¹⁾. Verkleinert wird sie durch Vergrößerung der Erdkapazität der influenzierten Leitung. So schützen sich Leitungen, die nur streckenweise

¹⁾ Schrottke, F.: ETZ 1907, S. 685, 707.

mit der Hochspannungsleitung parallel laufen, durch ihre größere Erdkapazität gewissermaßen selbst. Auch Bäume oder Häuser, die sich zwischen Hochspannungs- und influierter Leitung befinden, wirken schützend. Nach Messungen an den Fernsprechleitungen in der Nähe der mit 34 000 Volt arbeitenden Urfttalsperre¹⁾ werden die durch Bäume geschützten Leitungsabschnitte bei 11 bis 20 m Abstand nicht stärker influiert, als wenn sie sich ungefähr in doppeltem Abstand befänden.

Drehstromleitungen wirken im allgemeinen stärker als Wechselstromleitungen. Ist nun die Fernsprechleitung nicht vollkommen isoliert, so ist auch bei Doppelleitung eine Störung des Sprechverkehrs möglich, die man durch Zwischenschaltung einer Drosselspule mit geredetem Nullpunkt nur teilweise beheben kann. Abb. 408. Die Sprechströme durchfließen nämlich die Leitung in entgegengesetzter Richtung, während die Influenzspannungen in den Leitungen Ströme gleicher Richtung hervorzurufen trachten.

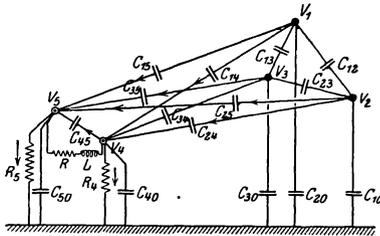


Abb. 409.

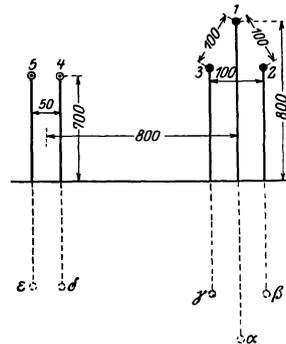


Abb. 410.

Die Ausgleichsdrossel bietet also den Influenzströmen nur Ohmschen, den Sprechströmen induktiven Widerstand.

Die elektrostatische Beeinflussung ist zuerst von Schrottke rechnerisch für ein System mit 4 Drähten untersucht worden, wobei an Stelle einer doppelten Sprechleitung der ihr äquivalente Leiter eingeführt wurde. Into van Dam²⁾ hat 1915 den allgemeineren Fall des Einflusses einer Drehstromleitung auf eine zweidrähtige Telephonleitung theoretisch untersucht (Abb. 409) und dann für das in Abb. 410 gegebene Beispiel, wobei die 10 mm dicke Drehstromleitung auf 8 m Abstand 20 km weit parallel der 6 mm dicken und 60 km langen Schwachstromleitung läuft, die wichtigsten Betriebsfälle durchgerechnet. Er nimmt dabei $R = 200 \text{ Ohm}$, $L = 0,2 \text{ Henry}$, $\omega = 2\pi \cdot 50 = 314$ und als verkettete Spannung 27 680 Volt bzw. als Phasenspannung 16 000 Volt. Bei Erdschluß einer Phase soll außerdem die 13. Harmonische $7,5\%$ der Grundschwingung betragen, so daß ihr effektiver Wert 1200 Volt, ihre Frequenz $13 \cdot 50 = 650 \text{ Per./Sek.}$ ist. Er findet

¹⁾ Brauns, O.: ETZ 1908, S. 382.

²⁾ Tijdschrift van het Koninklijk Instituut von Ingenieurs 1915. Verhandelingen, 1 aflevering.

bei vollkommener Isolation der Drehstromleitungen, daß bei gleicher Isolation der zwei Telephondrähte ein Strom von etwa 0,4 Milliampere das Telephon durchfließt. Dies ist ziemlich viel im Vergleich zu den Sprechströmen, stört aber wegen der niedrigen Frequenz von 50 Per./Sek. nur wenig. Bei größerem Unterschied zwischen den Isolationswiderständen R_4 und R_5 (Abb. 409) werden die Ströme im Telephonkreise größer, bei Erdschluß des einen Drahtes ($R_5 = 0$) überschreiten sie 7 mA, so daß ein starkes Brummen sich den Sprechströmen überlagert, das jedoch den Sprechverkehr nicht völlig unmöglich zu machen braucht.

Hat nun eine der Drehstromleitungen direkten Erdschluß ($V_1 = 0$), dann erreichen bei gleichen Isolationswiderständen der Telefonleitung ($R_4 = R_5 = 10^5 \div 10^7$ Ohm) die induzierten Spannungen etwa 800 bis 850 Volt, der Strom im Telephonkreise 2,75 mA. Kommt auch einer der Telephondrähte an Erde ($R_5 = 0$), dann sinkt V_4 auf 15 Volt, aber der Strom steigt auf 72 mA, wobei Sprechen unmöglich ist, selbst bei rein sinusförmiger Spannung.

Besitzt die Spannungskurve jedoch noch die 13. Harmonische mit 1200 Volt effektiver Spannung, dann ist, selbst bei vollkommener Isolation aller 5 Drähte, das Sprechen erschwert, da der Telephonstrom jetzt ca. 1,5 mA bei $\nu = 650$ beträgt, während bei Erdschluß eines Telephondrahtes der Strom von 12,7 mA Sprechen unmöglich macht.

Kommt nun auch ein Draht der Drehstromleitung an Erde, dann treten bei guter Isolation der Telephondrähte 10 mA, bei Erdschluß von Draht 5 ($R_5 = 0$) 125 mA im Telephon auf, welchen Strom es nicht zu führen vermag. Die Spannungen V_4 betragen dabei etwa 103 Volt.

Wird endlich die Telefonleitung verdrillt, so wird $c_{14} = c_{15}$; $c_{24} = c_{25}$; $c_{34} = c_{35}$ und der Sprechverkehr wird erheblich besser, solange die Telefonleitung vortrefflich isoliert ist. Bei Erdschluß eines Telephondrahtes versagt das Mittel. Die zuweilen ebenfalls verwendete Verdrillung der Hochspannungsleitung ist dagegen zwecklos oder selbst schädlich in bezug auf Verbesserung der elektrostatischen Störung der Telefonverbindung.

10. Induktivität und Kapazität konzentrischer Kabel.

Die Selbstinduktion einer Fernleitung kann man am einfachsten dadurch verringern, daß man die Hin- und Rückleitung nahe zueinander anbringt. Dadurch wird aber der Wert der Kapazität vermehrt. Dasselbe gilt für die konzentrischen Kabel, die aus zwei Leitern gebildet sind, von denen der eine zylindrisch, der andere röhrenförmig ist; ihre gegenseitige Anordnung ist koaxial. Entsprechende Isolationschichten trennen die beiden Leiter voneinander und den äußeren von der Erde oder dem Wasser, in die das Kabel verlegt wird. Als mechanischer Schutz dient die äußere Eisenbewehrung. Eine ebenfalls gebräuchliche Anordnung ist die von zwei koaxialen röhrenförmigen Leitern, die entsprechend gegeneinander und gegen außen isoliert sind. In beiden Fällen wird die Induktivität des Stromkreises zu einem Minimum.

Sei

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = \text{innerer} \\ a_2 = \text{äußerer} \end{array} \right\} \text{Radius des Innenleiters,}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_3 = \text{innerer} \\ a_4 = \text{äußerer} \end{array} \right\} \text{Radius des Außenleiters,}$$

μ = Permeabilität des Innenleiters,
 μ' = Permeabilität des Außenleiters,
 μ_0 = Permeabilität des Zwischenmediums, dann läßt

sich die Induktivität aus den Abmessungen berechnen.

Erster Fall: Der Strom ist gleichmäßig über den Leiterquerschnitt verteilt (langsamer Wechselstrom), dann gilt

$$\begin{aligned} L'' &= 2\mu_0 \log \text{nat} \frac{a_3}{a_2} + 2\mu \frac{a_1^4}{(a_2^2 - a_1^2)^2} \log \text{nat} \frac{a_2}{a_1} \\ &+ 2\mu' \frac{a_4^4}{(a_4^2 - a_3^2)^2} \log \text{nat} \frac{a_4}{a_3} + \mu \left(1 - \frac{1}{2} \frac{a_2^2 + a_1^2}{a_2^2 - a_1^2} \right) \\ &- \mu' \left(1 + \frac{1}{2} \frac{a_4^2 + a_3^2}{a_4^2 - a_3^2} \right). \end{aligned}$$

Für einen vollen Innenleiter ($a_1 = 0$) und $\mu = \mu' = \mu_0 = l$ wird:

$$L'' = 2 \log \text{nat} \frac{a_3}{a_2} + 2 \frac{a_4^4}{(a_4^2 - a_3^2)^2} \log \text{nat} \frac{a_4}{a_3} - \frac{a_4^2}{a_4^2 - a_3^2}.$$

Zweiter Fall: Der Strom fließt nur an der Außenfläche des Innenleiters und der Innenfläche des Außenleiters (Hochfrequenz).

$$L'' = 2\mu_0 \log \text{nat} \frac{a_3}{a_2}.$$

Nun betrachten wir in diesen Fällen auch die Kapazitätsverhältnisse. Die Seele des Kabels und der leitende Mantel bilden die Belegungen, die dazwischenliegende Isolation das Dielektrikum des zylindrischen Kondensators.

Auch der äußere Leiter bildet mit dem Bleimantel einen Kondensator $C_{1,2}$. Nach den früheren Bezeichnungen gilt $c_{11} = -c_{12} = C_1 = C$ und die Betriebskapazität ist daher (streng)

$$C = \frac{1}{2 \cdot \log \text{nat} \frac{a_3}{a_2}} \cdot \frac{\varepsilon}{9} = \frac{0,0242 \cdot \varepsilon}{\log \frac{a_3}{a_2}}$$

wenn ε die Dielektrizitätskonstante der Kabelmasse ist.

Die Kapazität

$$C_{1,2} = \frac{0,0242 \cdot \varepsilon}{\log \frac{R}{a_4}} \text{ Mf/km,}$$

wenn R den inneren Radius des Bleimantels bedeutet.

11. Kapazität verseilter Kabel.

Konzentrische Kabel werden zur Zeit viel weniger angewendet als verseilte. Dreiphasenkabel werden fast ausschließlich als verseilte Kabel ausgeführt, weil dreiphasige konzentrische Kabel außer praktischen Schwierigkeiten, auch Unsymmetrien im System verursachen.

Um den Einfluß der Erde zu berücksichtigen, sind zwei verschiedene Methoden angegeben worden, die hier für ein verseiltes Dreileiterkabel erläutert werden sollen. In Abb. 411 stellt A den Leiter einer Phase und B den Bleimantel dar. Dieses aus zwei exzentrischen Kreisen bestehende System kann durch Inversion übergeführt werden in das System A, B' , worin der Kreis A sich selbst, der Kreis B der Geraden B' entspricht. Die Gerade B' kann als spiegelnde Fläche angesehen und der Leiter A darauf gespiegelt werden. Sein Spiegelbild A'' erhält

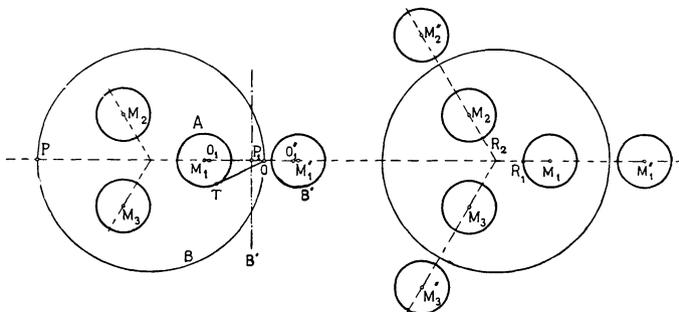


Abb. 411.

Abb. 412.

entgegengesetzte Ladung wie der Kreis A und ersetzt dann die Gerade B' . Diese steht senkrecht zu \overline{OP} , und ihr Schnittpunkt P_1 wird gefunden aus der für die Inversion charakteristischen Gleichung

$$\overline{OP_1} = \frac{\overline{OT}^2}{\overline{OP}}.$$

Führen wir diese Umformung für alle Phasen durch, so erhalten wir drei Paare von zylindrischen Leitern, deren Feld seine Form nicht verändert, wenn die über die Zylinder verteilten Ladungen in den Linien O_1 und O_2 parallel den Achsen M_1 und M_2 konzentriert gedacht werden (Abb. 412). Läßt man nun der Einfachheit halber O_1 mit M_1 , O_2 mit M_2 usw. zusammenfallen, so ergibt sich die Kapazität einer Phase zu

$$C = \frac{0,0242 \cdot \varepsilon}{\log \frac{M_2 R_1}{M_1 R_1} \cdot \frac{M_1'' R_1}{M_2'' R_1}} \text{ Mf/km.}$$

Diese Ableitung ist von Steinmetz¹⁾ gegeben und von Arnold-la Cour²⁾ erweitert worden. Diese Methode gibt jedoch verschiedene

¹⁾ Steinmetz, ETZ. 1883, S. 477.

²⁾ Arnold-la Cour, Wechselstromtechnik, 1. Bd., 1. Aufl., S. 375 ff.

Werte, je nachdem man die Kabelachse oder einen Punkt des Bleimantels als mit dem Nullwert des Potentials behaftet ansieht. Die Mehrzahl der deutschen Autoren bevorzugt darum die von Lichtenstein¹⁾ angegebene Methode, wobei der Bleimantel ebenfalls ersetzt gedacht wird durch drei fiktive Leiter mit entgegengesetzten Ladungen, wobei $ad = R^2$. Hierin ist

a = Radius des Kreises, auf dem die Drahtmitten liegen,

d = Radius des Kreises, auf dem die Spiegelbilder liegen,

R = Radius des Bleimantels (Abb. 413).

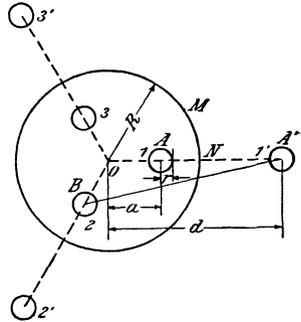


Abb. 413.

Nennt man noch r den Radius der Drähte, dann gilt, wenn r erheblich kleiner ist als a und $R - a$, für die Betriebskapazität bei symmetrischem Betrieb:

$$C = \frac{\varepsilon}{9 \cdot \log \text{nat} \frac{3a^2(R^2 - a^2)^2}{r^2(R^4 + R^2a^2 + a^4)}} \\ = \frac{0,0484 \cdot \varepsilon}{\log \frac{3a^2(R^2 - a^2)^2}{r^2(R^4 + R^2a^2 + a^4)}} \text{ Mf/km} = \frac{0,0484 \cdot \varepsilon}{\log \frac{3a^2(R^2 - a^2)^3}{r^2(R^6 - a^6)}} \text{ Mf/km.}$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$F = 2 \log \text{nat} \left(\frac{R^2 - a^2}{Rr} \right);$$

$$G = \log \text{nat} \frac{R^4 + R^2a^2 + a^4}{3R^2a^2},$$

so wird unter Weglassung des zur Reduktion auf Mf/km erforderlichen Faktors $\varepsilon/9$:

$$C = \frac{1}{F - G};$$

$$c_{11} = C' = \frac{F + G}{(F - G)(F + 2G)};$$

$$c_{12} = - \frac{G}{(F - G)(F + 2G)};$$

$$C'' = \frac{2F}{(F - G)(F + 2G)}; \quad C''' = \frac{3}{F + 2G}.$$

In ähnlicher Weise findet man für das symmetrische vieradrige Zweiphasenkabel aus runden Drähten, für symmetrischen Zweiphasen-

¹⁾ Lichtenstein: ETZ 1904, S. 106, 124. — Über Kapazitäten siehe u. a. Breisig, F.: ETZ 1898, S. 722. — Lichtenstein, L.: Beiträge zur Theorie der Kabel. München 1908. — Orlich, E.: Über Induktivitäten. ETZ 1908, S. 310.

betrieb nach Lichtenstein als Betriebskapazität:

$$C = \frac{\epsilon}{9 \cdot 4 \log \text{nat} \frac{2a(R^2 - a^2)}{r(R^2 + a^2)}} = \frac{0,0121 \cdot \epsilon}{\log \frac{2a(R^2 - a^2)}{r(R^2 + a^2)}} \text{Mf/km}$$

und für das symmetrische (verseilte) Zweileiterkabel aus runden Drähten bei symmetrischem Betrieb und für den Fall, daß r erheblich kleiner ist als a und $(R - a)$, folgende Näherungsformeln als Betriebskapazität:

$$C = \frac{\epsilon}{9 \cdot 4 \log \text{nat} \frac{2a(R^2 - a^2)}{r(R^2 + a^2)}} = \frac{0,0121 \cdot \epsilon}{\log \frac{2a(R^2 - a^2)}{r(R^2 + a^2)}} \text{Mf/km}.$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$F = \log \text{nat} \frac{R^2 - a^2}{Rr}; \quad G = \log \text{nat} \frac{R^2 + a^2}{2Ra};$$

so wird unter Weglassung des Faktors $\epsilon/9$:

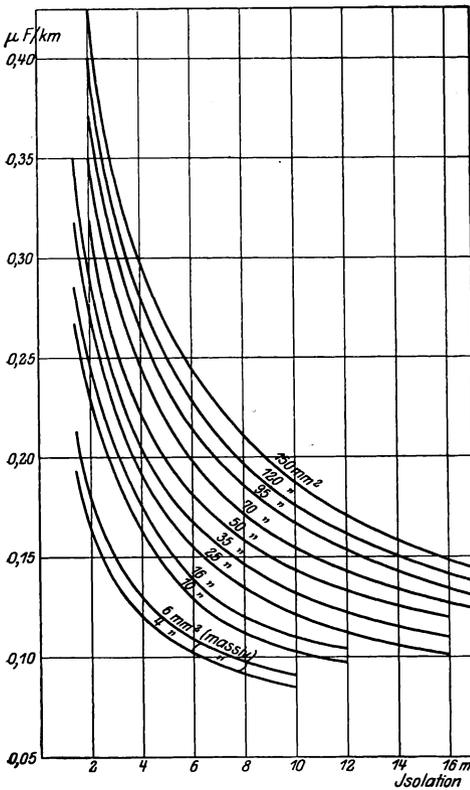


Abb. 414. Betriebskapazität verseilter Drehstromkabel.

$$C = \frac{1}{4(F - G)}$$

und ferner:

$$C_1 = C_2 = c_{11} = c_{22} = \frac{F}{2(F^2 - G^2)},$$

$$C_{1,2} = \frac{1}{F + G};$$

$$c_{12} = \frac{G}{2(F^2 - G^2)}.$$

Unter der Annahme einer Dielektrizitätskonstanten $\epsilon = 4,20$ sind die Werte der graphischen Tabelle Abb. 414 ermittelt worden, worin die Betriebskapazität verseilter Dreileiterkabel in Mf/km als Funktion der Isolationsdicke für die handelsüblichen Querschnitte dargestellt ist. Der Mittelwert $\epsilon = 4,20$ ergab sich aus Messungen, die uns durch das Kabelwerk von Dr. Casirer & Co. zur Verfügung gestellt wurden.

Die Tabelle deckt den Spannungsbereich von 2000 bis über 20000 Volt. Die Isolationsstärke beträgt zwischen je zwei Adern und zwischen jeder Ader und Blei etwa

	2,3 mm	bei	700 Volt
	2,8	„	2000 „
	4,4	„	5000 „
	6,6 ÷ 7,5	„	10000 „
	9,2 ÷ 10,5	„	15000 „
	11,0 ÷ 12,5	„	20000 „
	etwa 17	„	50000 „

Die Kapazität

$$C_1 = C' + 2 C''$$

eines Leiters gegen die beiden anderen und Blei, die meistens gemessen wird, ist stets kleiner als die Betriebskapazität C ; im Mittel dürfte $C = 2 C' - \frac{1}{2} C'' = 1,2 C_1 \div 1,25 C_1$ sein. Der Wert nach Lichtenstein ist stets kleiner als nach Arnold La Cour; der Unterschied ändert sich mit der Isolationsstärke und dem Querschnitt, erreicht aber im Mittel 30%.

Die Kapazitätswerte wechseln je nach der Beschaffenheit der Tränkflüssigkeit und des Papiers ziemlich stark. Als gute Mittelwerte kann man $\varepsilon = 3,6 \div 4,2$ ansehen.

12. Induktivität verseilter Kabel.

Bei kreiszylindrischen Leitern vom Radius r und Achsenabstand D und bei Abwesenheit des Blei- und Eisenmantels ist die wirksame Selbstinduktivität für Drehstromkabel

$$L = \sqrt{3} \left(4,605 \log_{10} \frac{D}{r} + 0,5 \right) 10^{-4} \text{ Henry/km.}$$

Daß auch bei verseilten Dreifachkabeln die Verluste im Eisenmantel, namentlich bei großen Leiterquerschnitten, nicht unmerklich sind, dürfte weniger bekannt sein.

In einer in den „Atti Associaz. Elettrotecnica Italiana“ 1910, Heft 4, veröffentlichten Abhandlung gibt Herr L. Emanuelli die Werte des effektiven Widerstandes verseilter Dreifachkabel mit Kupferleitern infolge der zusätzlichen Verluste in den Leitern, dem Bleimantel und in der Armierung. Das Verhältnis des effektiven Widerstandes bei Drehstrom von 50 Per./Sek. zu dem mit Gleichstrom gemessenen Widerstande ergibt sich hieraus bei 300 mm² Leiterquerschnitt und blanken Kabeln zu etwa 1,12, bei armierten Kabeln zu etwa 1,22. Bei 600 qmm sind die entsprechenden Werte bereits 1,47 und 1,78. Diese Ergebnisse wurden durch die sogleich zu besprechenden Messungen bestätigt.

Bei einem Sektorkabel Type KBA 3×380 mm² für 700 Volt wurde bei Drehstrom der effektive Widerstand $R_w = 1,31 R_g$, bei Wechselstrom $R_w = 1,343 R_g$ gemessen. R_g ist der mit Gleichstrom ermittelte Ohmsche Widerstand. Die Induktivität war für Drehstrom 0,390, für Wechselstrom 0,454 mH/km. Bei runden Querschnitten hätte man für L etwas kleinere Werte aus den bekannten Formeln errechnet, nämlich

bei 2,8 mm Isolation, $r = 12,5$ mm Halbmesser, $D = 27,8$ mm Achsenabstand: für Drehstrom

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{3} \cdot (4,605 \log_{10} 27,8/12,5 + 0,5) \cdot 10^{-4} \\ &= \sqrt{3} \cdot 2,09 \cdot 10^{-4} = 3,62 \cdot 10^{-4} \text{ Henry/km,} \end{aligned}$$

für Wechselstrom

$$L = (9,21 \log_{10} 27,8/12,5 + 1) \cdot 10^{-4} = 4,18 \cdot 10^{-4} \text{ Henry/km.}$$

Ein Sektorkabel $KA 3 \times 310 \text{ mm}^2$ für 700 Volt mit 3,4 mm Isolation (Leiter-Leiter und Leiter-Blei), $r = 11,4 \text{ mm}$ Radius, $D = 26,3 \text{ mm}$ Achsenabstand ergab berechnet: bei Drehstrom

$$L = \sqrt{3} \cdot (4,605 \log_{10} 26,3/11,4 + 0,5) \cdot 10^{-4} \\ = \sqrt{3} \cdot 2,16 \cdot 10^{-4} = 3,74 \cdot 10^{-4} \text{ Henry/km,}$$

bei Wechselstrom

$$L = (9,21 \log_{10} 26,3/11,4 + 1) \cdot 10^{-4} = 4,32 \cdot 10^{-4} \text{ Henry/km.}$$

Die Messung ergab bei 50 Per./Sek.

bei Drehstrom	blank	$R_w/R_g = 1,106$	$L = 0,405 \text{ Mh/km}$	
"	"	armiert	1,180	0,450
"	Wechselstrom	blank	1,105	0,464
"	"	armiert	1,184	0,522.

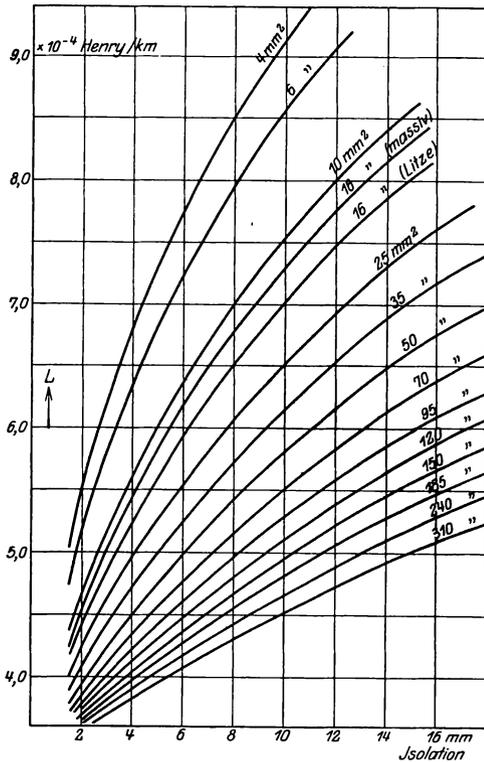


Abb. 415. Betriebsinduktivität verseilter Drehstromkabel.

Von den 18% Widerstandszunahme kommen rund 8% auf Hautwirkung im Kupfer, 3% auf Wirbelströme im Bleimantel, 7% auf Verluste im Eisenmantel.

Auf Grund der obigen Formelsind die Werte der graphischen Tabelle (Abb. 415) errechnet worden, worin die Betriebsinduktivität verseilter Dreileiterkabel als Funktion der Isolationsdicke für die üblichen Querschnitte dargestellt ist.

Der induktive Abfall der verketteten Spannung berechnet sich zu

$$E_s = 2 \pi \nu J L \text{ in Volt/km,}$$

wenn ν die Frequenz, J den Strom bedeutet.

13. Der dielektrische Effektverlust in Kabeln.

In dem Dielektrikum eines Hochspannungskabels findet ein beständiger Energieumsatz statt. Zunächst hat der Widerstand der Isoliermasse einen endlichen Wert, so daß ein kleiner Teil des Stromes durch die Kabelmasse fließt. Diese ist auch dauerndem Arbeitsverlust durch dielektrische Hysterese unterworfen.

Die dielektrischen Verluste fester und flüssiger Körper hängen stark von der Temperatur ab und müssen wegen der Kleinheit der zu bestimmenden Leistungsfaktoren mit besonders empfindlichen Meßmethoden bestimmt werden. Am besten genügt dieser Anforderung die von Schering¹⁾ angegebene Hochspannungsbrücke. Birnbaum²⁾ gibt für frische und gebrauchte Kabeltränkmass aus 60% Öl und 40% Harz die Schaulinien 1a und 2a der Abb. 416, worin die Tangente des Verlustwinkels $\text{tg } \delta$ bei 35° C ein Minimum, den sog. Gelpunkt, zeigt, das auch bei Kabeln gefunden wird. Das Minimum beträgt hier $\text{tg } \delta = 0,003$, die Dielektrizitätskonstante (1b und 2b Abb. 416) ist etwa $\epsilon = 2,6 \div 2,7$. Kennzeichnend ist der V-förmige Verlauf der Kurve $\text{tg } \delta = f(t^\circ)$, der sich auch bei einem von der Nederlandsche Kabel-fabrik Delft hergestellten Einleiterkabel³⁾ aus dem Jahre 1919 mit $f = 95 \text{ mm}^2$ Kupferquerschnitt und 8,5 mm Isolationsdicke für 30000 Volt 50 Per./Sek. bei den Leerverlusten zeigt (Abb. 417). Dieses Kabel weist, wie die meisten Hochspannungskabel, einen Ionisierungspunkt auf, der dadurch merkbar wird, daß bis zu einer gewissen „kritischen“ Spannung der Leistungsfaktor konstant bleibt, von da an langsam ansteigt, wie Abb. 418 für Kabel anderer Herkunft dies zeigt. Der Knick ist auch bei der charakteristischen Kurve 14 deutlich merkbar; die starke Steigung der Schaulinie 15 deutet auf schlechte Füllung des Kabels mit Tränkmass.

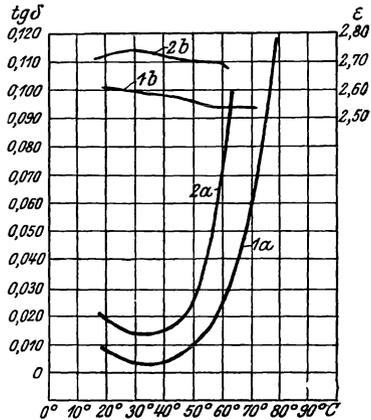


Abb. 416.
 Schaulinie 1: frische Kabeltränkmass.
 „ 2: gebrauchte „

Das holländische Kabel der Abb. 417 zeigte den Ionisierungspunkt bei 30000 Volt, d. h. bei 5700 Volt/mm Maximalbeanspruchung. Diese maximale Beanspruchung oder der Gradient ist für einen runden Leiter mit dem Potential V und Durchmesser d mm innerhalb einer homogenen Isolation vom Durchmesser D mm, deren Hülle an Erde liegt,

$$\mathcal{E}_r = \frac{2V}{d \log n \frac{D}{d}} \text{ Volt/mm .}$$

Das Vorhandensein einer kritischen Spannung, vollkommene Füllung vorausgesetzt, wird von vielen Seiten noch bezweifelt; auch ist die Frage noch nicht geklärt, ob die Höhe der Ionisierungsspannung ein Kriterium für die Güte des Kabels sein kann.

Fest steht, daß eine kritische Spannung sofort auftritt, wenn im Dielektrikum Luft enthalten ist, doch scheint es vorläufig gewagt, den

1) Schering: Arch. f. Elektr. Bd. 9, S. 30.
 2) Birnbaum: ETZ 1924, Heft 12.
 3) Höchststädter: ETZ 1922, H. 7, S. 205.

umgekehrten Schluß zu ziehen, wie Clark und Shanklin¹⁾ es tun, daß beim Auftreten des Ionisierungspunktes Luft im Kabel enthalten sein müsse.

Jedenfalls erscheint der von ihnen angegebene Grenzwert von $\mathcal{E}_r = 1950$ Volt/mm für die Maximalbeanspruchung viel zu niedrig gegriffen, da Kabel mit 3000-4000 Volt/mm maximaler Beanspruchung seit Jahren anstandslos in Betrieb sind.

Örtliche Ionisation verrät sich durch das Auftreten „heißer Stellen“. Solche heiße Stellen können auch bei sorgfältigster Fabrikation auftreten. Die bei verselten Mehrleiterkabeln erforderlichen Beiläufe unterliegen elektrostatischen

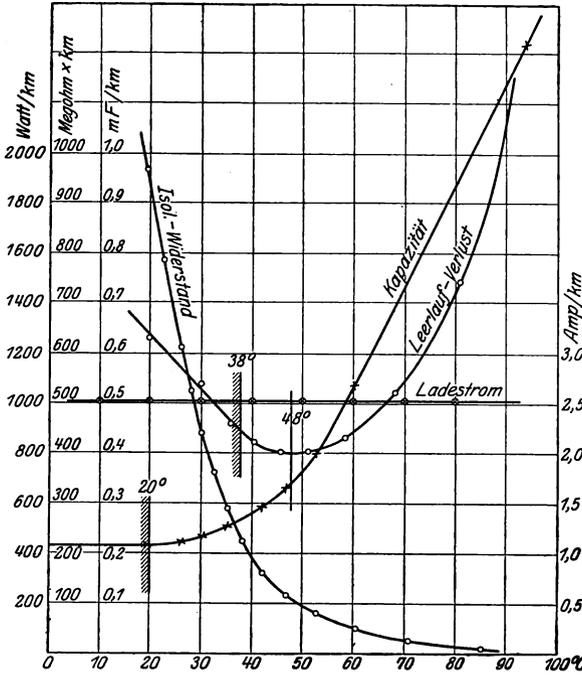


Abb. 417. Änderung der dielektrischen Eigenschaften bei einem Einleiterkabel von 95 mm² mit der Temperatur.

Tangentialspannungen und können dadurch Anlaß geben zu zusätzlicher Wärmeentwicklung. Die von Höchstädter angegebene Metallisierung der einzelnen Adern führt das Dreileiterkabel auf drei Einleiterkabel zurück und gestattet so, diese zusätzlichen Verluste zu vermeiden.

Dabei wird auch der Wärmewiderstand verkleinert²⁾.

Abb. 419 zeigt die Wärmebilanz³⁾ des holländischen 95-mm²-Einleiterkabels für verschiedene Stromstärken und Betriebsspannungen bei 50 Per./Sek. Man sieht, daß weit über die normale Betriebsspannung dieses Kabels hinaus der Wärmeszustand, entsprechend der Erwärmungsgrenze von 25° C für 240 Amp. bei 30000 Volt

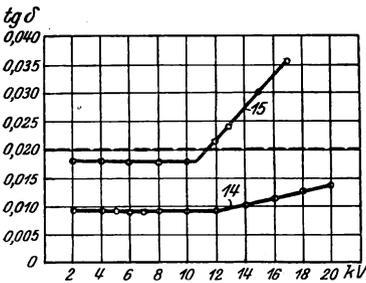


Abb. 418. Ionisierungsspannung von Kabeln.

¹⁾ Clark u. Shanklin: Proc. A. I. E. E. 1917, S. 476.

²⁾ Siehe C. Feldmann: ETZ. 1922, S. 1500.

³⁾ Bang und Louis: Proc. A. I. E. E., Febr. 1917.

und 13° Umgebungstemperatur, stabil ist und daß erst bei doppelter Betriebsspannung und 1¹/₂ fachem Wert des normalen Stromes der labile Punkt bei etwa 93° C = 80° Übertemperatur auftritt.

Der Leitungsverlust durch die Isolation kann meistens vernachlässigt werden gegenüber dem dielektrischen Verlust und dem Jouleschen Verlust. Der Leistungsfaktor $\cos \varphi = \sin \delta \approx \text{tg } \delta$ kann für gute Kabel etwa zu 0,01 angenommen werden. Auf seine Abhängigkeit von der Temperatur wurde bereits hingewiesen.

Kabelanlagen für 25000 bis 30000 Volt Drehstrom sind häufig angewendet, für 50 bis 60 kV in der letzten Zeit möglich geworden,

wo die großen Ladeströme kein Hindernis bilden. Bei einer Betriebskapazität von $C = 0,15 \mu\text{ F je km}$ und einer Spannung von 60 kV wird der Ladestrom für 100 km eines $3 \times 120\text{-mm-Kabel}$ bei 50 Per./Sek. $J_c = C \omega LE$,

$$J_c = 0,15 \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 100 \frac{6000}{\sqrt{3}} \cdot 10^{-6} = 163 \text{ Amp.},$$

entsprechend einer Scheinleistung von $\frac{60}{\sqrt{3}} \cdot 3 \cdot 163 = 17000 \text{ kVA}$, der

Ladestromverlust $RJ_c^2 = \frac{100 \cdot 0,0175}{120} \cdot 163^2 = 387 \text{ kW}$, der dielektrische Verlust bei $\cos \varphi = \text{tg } \delta = 0,01$ etwa 170 kW, so daß, um diese 100 km $3 \times 120 \text{ mm}^2$ 60-kV-Kabel unter Spannung zu halten, die Maschineneinheiten mindestens 20000 kVA sein müßten und der Leergang in einem Jahre

$$(387 + 170) \cdot 8760 = 557 \text{ kW} \cdot 8760 = 4,88 \cdot 10^6 \text{ kWh}$$

erfordern würde. Das Kabel käme wirtschaftlich in dieser Länge wohl nur zur Anwendung, wenn damit wenigstens 50 Millionen kWh geliefert werden könnten, d. h. die Absatzmöglichkeit hierfür vorhanden wäre.

Meistens werden für 50 kV noch Einleiterkabel verwendet, die dann nicht armiert und in entsprechendem Abstand, etwa 1 m, voneinander verlegt werden, so daß auch ihre Induktivität nicht vernachlässigt werden kann.

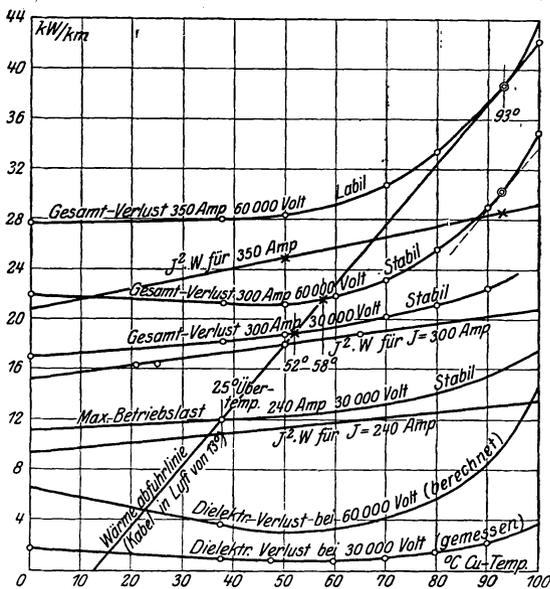


Abb. 419.

XVI. Strom- und Spannungsverteilung bei langen Leitungen.

1. Ableitung der Grundgleichungen für verteilte Kapazität und Induktivität.

In dem Falle zweier parallelen Drähte oder eines Zweileiterkabels und allgemein in allen Fällen, die sich durch „Betriebswerte“ nach Abschnitt 3 des vorigen Kapitels darstellen lassen, gelten für den Betriebsstrom J und die Betriebsspannung V im Abstand x vom Ende der Leitung¹⁾ die schon auf Seite 418 gegebenen Differentialgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial x} &= \left(C \frac{\partial}{\partial t} + A \right) V, \\ \frac{\partial V}{\partial x} &= \left(L \frac{\partial}{\partial t} + R \right) J, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

wobei C die Kapazität, A die Ableitung, L die Induktivität, R der Widerstand für die Längeneinheit sind und der Abstand x positiv in Richtung wachsender Energie zu nehmen, also vom Ende 2 der Leitung zu zählen ist. Wird an irgend einer Stelle der Leitung eine einfache Schwingung erregt, so folgt aus der linearen Form der Gleichungen, daß Strom und Potential in der ganzen Leitung als Sinusschwingungen verlaufen. Aus dem symmetrischen Bau der Gleichungen folgt, daß die Lösungen für J und V sich nur durch die Grenzbedingungen unterscheiden können. Differenziert man partiell nach x , so erhält man nach Einsetzung der Werte für $\frac{\partial V}{\partial x}$ und $\frac{\partial J}{\partial x}$ aus (1) die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} &= \left(C \frac{\partial}{\partial t} + A \right) \frac{\partial V}{\partial x} = m^2 J, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \left(L \frac{\partial}{\partial t} + R \right) \frac{\partial J}{\partial x} = m^2 V, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

worin m^2 den Differentialoperator

$$\begin{aligned} m^2 &= \left(C \frac{\partial}{\partial t} + A \right) \left(L \frac{\partial}{\partial t} + R \right) \\ &= C L \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (A L + C R) \frac{\partial}{\partial t} + A R \end{aligned} \quad (3)$$

bedeutet. Diese Gleichungen besitzen die Form der sogenannten „Telegraphengleichung“

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = m^2 \Psi,$$

die zuerst durch Sir W. Thomson (Lord Kelvin) 1855 anlässlich der ersten Unterseekabel für Telegraphie behandelt wurde und danach noch Gegenstand vieler mathematisch-physikalischen Unter-

¹⁾ Zählt man vom Anfang der Leitung, dann erscheint das auf S. 418 gegebene Minuszeichen.

suchungen (von G. Kirchhoff, O. Heaviside, Lord Rayleigh, H. Poincaré u. a.) war.

Hat man eine Lösung Ψ , so erhält man eine zusammengehörige Strom- und Spannungsverteilung, die den Differentialgleichungen (1) entspricht, wenn man setzt:

$$J = \left(C \frac{\partial}{\partial t} + A \right) \Psi \quad \text{und} \quad V = \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

oder

$$V = \left(L \frac{\partial}{\partial t} + R \right) \Psi \quad \text{und} \quad J = \frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Die Telegraphengleichung läßt für sinusförmigen Wechselstrom eine imaginäre Lösung zu von der Form

$$\Psi = (\Psi_0' \varepsilon^{mx} + \Psi_0'' \varepsilon^{-mx}) e^{j\omega t},$$

worin Ψ_0' und Ψ_0'' die beiden den Werten $\pm m$ entsprechenden Integrationskonstanten sind. Sie sind, wie auch m selbst, komplexe Größen.

ω ist die Frequenz in 2π Sekunden. Die Ableitung nach der Zeit $\partial/\partial t$ läßt sich dann durch den Faktor $j\omega$ ersetzen, und es wird:

$$m^2 = (R + j\omega L)(A + j\omega C) = \Re \Im, \quad (3a)$$

worin

$$\Re = R + j\omega L \text{ den Richtungswiderstand,}$$

$$\Im = A + j\omega C \text{ den Richtungsleitwert,}$$

beide für den Längeneinheit bedeuten.

Die Gleichungen (1) nehmen nun die Form an:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Im}{dx} &= \Im \Re, \\ \frac{d\Re}{dx} &= \Re \Im, \end{aligned} \right\} \quad (1a)$$

die sich auch bei Einführung imaginärer Größen direkt hätten finden lassen.

Bei quasistationärem Wechselstrom tritt, solange Kapazität und Induktivität konzentriert sind, als einzige unabhängig Veränderliche die Zeit auf, die durch Einführung komplexer Größen verschwindet.

Wechselstromgrößen, die eigentlich Funktionen der Zeit sind, werden dabei dargestellt durch eine konstante algebraische Zahl.

Alle Aufgaben, in welchen verteilte Kapazität und Induktivität vorkommen, führen zu Funktionen des Abstandes und der Zeit und können durch Einführung komplexer Größen auf Funktionen einer einzigen Variablen, des Abstandes, zurückgeführt werden.

Beide Rechnungsweisen führen zum gleichen Ziel. Man kann dem dem Algorithmus der komplexen Zahlen vorhalten, daß er zu einer Arithmisierung der Mathematik führe. Da aber die meisten Lehrbücher den Weg der komplexen Zahlen bewandelt haben, wollen wir beide Behandlungsweisen hier geben. Der Leser kann dann selbst das ihm Zusagende wählen und findet leichter den Anschluß an die vorhandene Literatur.

Um die Gleichungen (1a) unmittelbar niederzuschreiben, sind die folgenden Überlegungen auszuführen:

Zählt man den Abstand x wieder vom Ende der Leitung aus, also positiv der Richtung des Energieflusses entgegen, so ist die Zunahme des Stromes $d\mathfrak{I}$ in dem Leitungselement dx durch den Leckstrom $A\mathfrak{B}dx$, durch den Ladestrom $j\omega C\mathfrak{B}dx$, also

$$d\mathfrak{I} = (A + j\omega C)\mathfrak{B}dx \quad \text{oder} \quad \frac{d\mathfrak{I}}{dx} = \mathfrak{C}\mathfrak{B}. \quad (1a)$$

Analog ist die Zunahme des Potentials $d\mathfrak{B}$ durch den (effektiven) Widerstand R und die (effektive) Reaktanz ωL im Element dx

$$d\mathfrak{B} = (R + j\omega L)\mathfrak{I}dx \quad \text{oder} \quad \frac{d\mathfrak{B}}{dx} = \mathfrak{R}\mathfrak{I}. \quad (1a)$$

Differenziert man die Gleichungen (1a) nach der unabhängig Variablen, so erhält man die zwei völlig symmetrischen Differentialgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\mathfrak{I}}{dx^2} &= \mathfrak{C} \frac{d\mathfrak{B}}{dx} = \mathfrak{R}\mathfrak{C}\mathfrak{I} = m^2\mathfrak{I}, \\ \frac{d^2\mathfrak{B}}{dx^2} &= \mathfrak{R} \frac{d\mathfrak{I}}{dx} = \mathfrak{R}\mathfrak{C}\mathfrak{B} = m^2\mathfrak{B}. \end{aligned} \right\} \quad (2a)$$

Bei Betrieb mit sinusförmigem Wechselstrom ist das allgemeine Integral dieser Gleichung von der Form

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} = m^2\Psi$$

gegeben durch den Ausdruck

$$\Psi = (\Psi_0' \varepsilon^{mx} + \Psi_0'' \varepsilon^{-mx}) \varepsilon^{j\omega t},$$

worin Ψ_0' und Ψ_0'' die beiden, den Werten $\pm m$ entsprechenden Integrationskonstanten sind. Man erhält hieraus imaginäre und zusammengehörige Werte, wenn man setzt:

$$\mathfrak{I} = \Psi \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} = \frac{1}{\mathfrak{C}} \cdot \frac{d\Psi}{dx}$$

oder

$$\mathfrak{B} = \Psi \quad \text{und} \quad \mathfrak{I} = \frac{1}{\mathfrak{R}} \cdot \frac{d\Psi}{dx}.$$

Im ersten Fall erscheint der Strom als Summe, die Spannung als Differenz zweier Ausdrücke. Im zweiten Fall wird die Spannung als Summe, der Strom als Differenz zweier Ausdrücke vorgestellt.

Wir wählen die erste Form und schreiben unter Weglassung des Faktors $\varepsilon^{j\omega t}$:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{I} &= \mathfrak{A} \varepsilon^{mx} + \mathfrak{B} \varepsilon^{-mx}, \\ \mathfrak{B} &= \frac{m}{\mathfrak{C}} (\mathfrak{A} \varepsilon^{mx} - \mathfrak{B} \varepsilon^{-mx}) = \mathfrak{Z} (\mathfrak{A} \varepsilon^{mx} - \mathfrak{B} \varepsilon^{-mx}), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

worin nach Gleichung (3a)

$$\mathfrak{Z} = \frac{m}{\mathfrak{C}} = \sqrt{\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{C}}} \quad (5)$$

gesetzt ist. Ähnlich werde

$$\mathfrak{Y} = \frac{m}{\mathfrak{R}} = \sqrt{\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{G}}} = \frac{1}{\mathfrak{Z}} \quad (5a)$$

gesetzt. \mathfrak{Z} ist der ursprüngliche Richtungswiderstand der Leitung, \mathfrak{Y} ihr Richtungsleitwert.

Hierin sind \mathfrak{U} und \mathfrak{B} durch die Grenzbedingungen bestimmbare Integrationskonstanten von komplexer Form. Zu ihrer Bestimmung dienen die Grenzbedingungen, daß für $x = 0$, also am Ende belastete Leitung $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_2$ und $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_2$ wird.

Setzt man diese Werte ein, so folgt aus (4):

$$\mathfrak{Z}_2 = \mathfrak{U} + \mathfrak{B}$$

$$\mathfrak{B}^2 = \mathfrak{Z}(\mathfrak{U} - \mathfrak{B})$$

oder

$$\mathfrak{U} = \frac{1}{2}(\mathfrak{Z}_2 + \mathfrak{B}_2 \mathfrak{Y})$$

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{2}(\mathfrak{Z}_2 - \mathfrak{B}_2 \mathfrak{Y}).$$

Es wird also allgemein nach Substitution in Gl. (4)

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{Z} &= \frac{1}{2} \mathfrak{Z}_2 (\varepsilon^{mx} + \varepsilon^{-mx}) + \frac{1}{2} \mathfrak{B}_2 \mathfrak{Y} (\varepsilon^{mx} - \varepsilon^{-mx}) \\ \mathfrak{B} &= \frac{1}{2} \mathfrak{B}_2 (\varepsilon^{mx} + \varepsilon^{-mx}) + \frac{1}{2} \mathfrak{Z}_2 \mathfrak{Z} (\varepsilon^{mx} - \varepsilon^{-mx}) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

oder bei Einführung hyperbolischer Funktionen (s. S. 470):

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{Z} &= \mathfrak{Z}_2 \mathfrak{Cof} mx + \mathfrak{B}_2 \mathfrak{Y} \mathfrak{Sin} mx \\ \mathfrak{B} &= \mathfrak{B}_2 \mathfrak{Cof} mx + \mathfrak{Z}_2 \mathfrak{Z} \mathfrak{Sin} mx. \end{aligned} \right\} \quad (6a)$$

Die Bedeutung von \mathfrak{Z} und \mathfrak{Y} und der Zusammenhang mit früher Erörtertem (S. 250) ergeben sich klar, sobald man die Verhältnisse bei der unendlich langen Leitung untersucht. Vor der Behandlung spezieller Fälle müssen jedoch die Grundgleichungen noch behandelt werden.

Die Grundgleichungen (6) enthalten die komplexen Größen \mathfrak{U} , \mathfrak{B} und m . Bringt man diese Gleichungen in die trigonometrische Form, dann ergeben sich zum Teil neue, tiefere Einsichten.

Wir hatten gefunden bei Zählung vom Ende der Leitung:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{Z} &= \mathfrak{U} \varepsilon^{mx} + \mathfrak{B} \varepsilon^{-mx}, \\ \mathfrak{B} &= \mathfrak{Z} (\mathfrak{U} \varepsilon^{mx} - \mathfrak{B} \varepsilon^{-mx}). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Setzt man

$$m = \beta + j\alpha \quad \text{und} \quad \varepsilon^{\pm j\alpha x} = \cos \alpha x \pm j \sin \alpha x, \quad (7)$$

dann folgt:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{Z} &= \mathfrak{U} \varepsilon^{\beta x} (\cos \alpha x + j \sin \alpha x) + \mathfrak{B} \varepsilon^{-\beta x} (\cos \alpha x - j \sin \alpha x), \\ \mathfrak{B} &= \mathfrak{Z} \{ \mathfrak{U} \varepsilon^{\beta x} (\cos \alpha x + j \sin \alpha x) - \mathfrak{B} \varepsilon^{-\beta x} (\cos \alpha x - j \sin \alpha x) \}. \end{aligned} \right.$$

Strom und Spannung bestehen also aus zwei Wellen. Die Amplitude der einen mit dem Faktor βx wächst mit wachsendem x , also nach der Stromquelle hin, und ihr Phasenwinkel nimmt zu. Die Amplitude der anderen mit dem Faktor $\mathfrak{B} \varepsilon^{-\beta x}$ stirbt mit wachsendem Abstände x aus, während ihr Phasenwinkel abnimmt. Die erste kann füglich als die Hauptwelle, die andere als (die am Ende) reflektierte

Welle bezeichnet werden. Bei Zählung des Abstandes von der Stromquelle an bestehen die Wellen aus zwei Komponenten, von denen die Amplitude der einen mit dem Faktor $\varepsilon^{-\beta x}$ mit wachsendem x , also nach dem Ende der Leitung hin abnimmt und zurückbleibt, während die Amplitude der anderen mit dem Faktor $\varepsilon^{\beta x}$ nach dem Ende der Leitung hin zunimmt und voreilt. Die letztere kann als reflektierte Welle aufgefaßt werden.

Setzt man nun die komplexe Zahl

$$m = \beta + j\alpha, \quad (7)$$

so folgt:

$$m^2 = \Re \mathfrak{C} = (\beta + j\alpha)^2 = (R + j\omega L)(A + j\omega C)$$

oder

$$\beta^2 - \alpha^2 + 2j\alpha\beta = (AR - CL\omega^2) + j(AL + CR)\omega,$$

und da die reellen und die imaginären Teile einander einzeln gleich sein müssen, zerfällt diese Gleichung in die zwei anderen:

$$\begin{aligned} \beta^2 - \alpha^2 &= AR - CL\omega^2, \\ 2\alpha\beta &= (AL + CR)\omega, \end{aligned}$$

welche durch Quadrieren und Addieren die Beziehung liefern:

$$\beta^2 + \alpha^2 = \sqrt{(A^2 + \omega^2 C^2)(R^2 + L^2 \omega^2)}.$$

Hieraus folgt dann leicht:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \sqrt{\frac{1}{2} \{ \sqrt{(A^2 + \omega^2 C^2)(R^2 + \omega^2 L^2)} - (AR - \omega^2 CL) \}} \\ \beta &= \sqrt{\frac{1}{2} \{ \sqrt{(A^2 + \omega^2 C^2)(R^2 + \omega^2 L^2)} + (AR - \omega^2 CL) \}}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Ist A gegenüber ωC und R gegenüber ωL klein, so gehen die Formeln (8) angenähert über in

$$\left. \begin{aligned} \alpha &\approx \omega \sqrt{CL}, \\ \beta &\approx \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{A}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Die Amplituden der Maximalwerte des Stromes und der Spannung nehmen für 1 km im Verhältnis $\varepsilon^{-\beta}$ ab. Man nennt darum β die Dämpfungskonstante. Die räumliche Phase des Stromes und der Spannung ändert sich für 1 km um den Winkel α im Bogenmaß oder $57,3 \cdot \alpha^\circ$. Nach dem Durchlaufen von $\frac{2\pi}{\alpha}$ km oder 360° beginnen sich die räumlichen Phasen zu wiederholen. Man nennt darum den Abstand

$$\lambda = \frac{2\pi}{\alpha}$$

die Wellenlänge und α selbst die Wellenlängenkonstante für diese stehenden Wellen des quasistationären Falles.

Nun ist bei allen Wellenbewegungen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit w gleich dem Produkt aus der Frequenz $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ und der Wellen-

länge λ , also

$$w = v\lambda = \frac{\omega}{\alpha},$$

und das logarithmische Dekrement der räumlichen Dämpfung

$$\Delta = \beta\lambda.$$

Die Formeln (8) für α und β sind umständlich auszuwerten. Man kann die Ausrechnung von Zahlenwerten vereinfachen durch eine trigonometrische Umformung. Zu diesem Zwecke setze man

$$\Re = |\Re| \varepsilon^{j\gamma} = |\Re| \cos \gamma + j |\Re| \sin \gamma = R + j\omega L$$

und

$$\Im = |\Im| \varepsilon^{j\delta} = |\Im| \cos \delta + j |\Im| \sin \delta = A + j\omega C;$$

dann wird

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\omega L}{R}; \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{\omega C}{A},$$

und da $m = \sqrt{\Re \Im} = \beta + j\alpha = |m| \varepsilon^{j\mu}$ ist, findet man nach dem Moivreschen Satz:

$$\beta = |m| \cos \mu$$

$$\alpha = |m| \sin \mu, \quad \text{wobei } \mu = \frac{1}{2}(\gamma + \delta)$$

und analog

$$\mathfrak{B} = \sqrt{\frac{\Re}{\Im}} = |\mathfrak{B}| \varepsilon^{j\zeta}, \quad \text{wobei } \zeta = \frac{1}{2}(\gamma - \delta).$$

Hierin ist

$$|\Re| = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{R}{\cos \gamma} = \frac{\omega L}{\sin \gamma},$$

$$|\Im| = \sqrt{A^2 + \omega^2 C^2} = \frac{A}{\cos \delta} = \frac{\omega C}{\sin \delta},$$

$$|\mathfrak{B}| = \left| \sqrt{\frac{\Re}{\Im}} \right| = Z = \sqrt{\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{A^2 + \omega^2 C^2}}.$$

Ein Beispiel möge die Anwendung erläutern. Für ein Drehstromkabel bei $v = 50$ Pers./Sek. seien gegeben $R = 0,25$ Ohm; $L\omega = 0,0985$ Ohm; $A = 1,13 \cdot 10^{-6}$ Siemens; $\omega C = 49 \cdot 10^{-6}$ Siemens. Man berechnet daraus leicht:

$$\operatorname{tg} \gamma = 0,394$$

$$\operatorname{tg} \delta = 43,363$$

$$\gamma = 21^\circ 30'$$

$$\delta = 88^\circ 40' 45''$$

$$\cos \gamma = 0,930$$

$$\cos \delta = 0,230$$

$$|\Re| = 0,2687 \text{ Ohm} \quad |\Im| = 49,02 \cdot 10^{-6} \text{ Siemens.}$$

Daraus folgt der Betrag und der Phasenwinkel von m :

$$|m| = \left| \sqrt{\Re \Im} \right| = 3,629 \cdot 10^{-3}$$

$$\mu = \frac{1}{2}(\gamma + \delta) = 55^\circ 5' 23''$$

$$\cos \mu = 0,572 \quad \text{also} \quad \beta = 2,077 \cdot 10^{-3}$$

$$\sin \mu = 0,820 \quad \alpha = 1,976 \cdot 10^{-3}.$$

Die Wellenlänge wird also

$$\lambda = \frac{2\pi}{\alpha} = 2110,4 \text{ km,}$$

die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bei $\nu = 50$ Per./Sek.

$$w = \nu\lambda = 105520 \text{ km/sek.,}$$

und das Kabel verhält sich bei unendlicher Länge¹⁾ wie eine Impedanz \mathfrak{Z} vom Betrage

$$Z = \left| \sqrt{\frac{\Re}{\mathfrak{E}}} \right| = 74,03 \text{ Ohm}$$

mit dem Phasenwinkel

$$\zeta = \frac{1}{2}(\gamma - \delta) = -33^\circ 35' 23''.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit w ist also hier, obschon sehr groß, doch nur etwa ein Drittel von der Geschwindigkeit des Lichts. Für den Grenzfall zweier parallelen Drähte mit $A = 0$ und $R = 0$ folgt aus Gl. (9), daß $w = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{CL}}$ für Luftleitungen diesem Grenzwert nahe kommt.

Nun mögen einige Sonderfälle behandelt werden.

2. Leerlauf und Kurzschluß.

Bei Leerlauf ist die Leitung an den Enden unterbrochen, also ist für $x = 0$ auch $\mathfrak{I}_2 = 0$ und $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_2$. Am Leitungsanfang für $x = l$ sind dann die entsprechenden Werte nach den Gl. (6a):

$$\left. \begin{array}{l} \text{für den Ladestrom } \mathfrak{I}_{1,0} = \mathfrak{Y} \mathfrak{B}_2 \mathfrak{S} \sin ml, \\ \text{für die Spannung } \mathfrak{B}_{1,0} = \mathfrak{B}_2 \mathfrak{C} \cos ml. \end{array} \right\} \quad (10)$$

Der Richtungswiderstand der offenen Leitung ist also

$$\mathfrak{Z}_0 = \frac{\mathfrak{B}_{1,0}}{\mathfrak{I}_{1,0}} = \mathfrak{Z} \mathfrak{C} \cotg ml, \quad (11)$$

ihr Richtungsleitwert

$$\mathfrak{Y}_0 = \frac{\mathfrak{I}_{1,0}}{\mathfrak{B}_{1,0}} = \mathfrak{Y} \mathfrak{T} g ml. \quad (11a)$$

Bei Kurzschluß am entfernten Ende, also für $x = 0$ wird $\mathfrak{B} = 0$ und $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_2$. An der Stromquelle ist somit für $x = l$

$$\left. \begin{array}{l} \text{der Strom } \mathfrak{I}_{1,k} = \mathfrak{I}_2 \mathfrak{C} \cos ml, \\ \text{die Kurzschlußspannung } \mathfrak{B}_{1,k} = \mathfrak{Z} \mathfrak{I}_2 \mathfrak{S} \sin ml. \end{array} \right\} \quad (12)$$

Das Verhältnis der Ströme ist also

$$\frac{\mathfrak{I}_{1,k}}{\mathfrak{I}_2} = \mathfrak{C} \cos ml \quad (12a)$$

und der Widerstandsoperator der kurzgeschlossenen Linie:

$$\left. \begin{array}{l} \mathfrak{Z}_k = \frac{\mathfrak{B}_{1,k}}{\mathfrak{I}_{1,k}} = \mathfrak{Z} \mathfrak{T} g ml, \\ \text{ihr Richtungsleitwert } \mathfrak{Y}_k = \mathfrak{Y} \mathfrak{C} \cotg ml. \end{array} \right\} \quad (13)$$

¹⁾ Siehe dieses Kapitel, Abschnitt 4, Seite 462.

Aus den Gl. (11) und (13) folgt also, daß der Widerstandsoperator $\mathfrak{Z} = \sqrt{\mathfrak{R}/\mathfrak{C}}$ das geometrische Mittel ist aus den Widerstandsoperatoren \mathfrak{Z}_0 bei offenem und \mathfrak{Z}_k bei kurzgeschlossenem Ende.

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{\mathfrak{Z}_0 \cdot \mathfrak{Z}_k} \quad \text{und analog} \quad \mathfrak{Y} = \sqrt{\mathfrak{Y}_0 \cdot \mathfrak{Y}_k}. \quad (13a)$$

Schreibt man die Gl. (6a) für den Anfang der Leitung nieder, so wird $x = l$, $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_1$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1$, und erhält unter Berücksichtigung der Gleichungen (10) bis (14):

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{I}_1 &= \mathfrak{I}_2 \mathfrak{Cof} ml + \mathfrak{B}_2 \mathfrak{Y} \mathfrak{Sin} ml = (\mathfrak{I}_2 + \mathfrak{B}_2 \mathfrak{Y}_0) \mathfrak{Cof} ml = \mathfrak{I}_{1,k} + \mathfrak{I}_{1,0} \\ \mathfrak{B}_1 &= \mathfrak{B}_2 \mathfrak{Cof} ml + \mathfrak{I}_2 \mathfrak{Z} \mathfrak{Sin} ml = (\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{I}_2 \mathfrak{Z}_k) \mathfrak{Cof} ml = \mathfrak{B}_{1,0} + \mathfrak{B}_{1,k} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Die Gleichungen (14) zeigen mit seltener Klarheit, daß sich die Belastungsverhältnisse durch einfache Übereinanderlagerung der Erscheinungen ergeben, die bei Leerlauf mit der Betriebsspannung \mathfrak{B}_2 und bei Kurzschluß mit dem Betriebsstrom \mathfrak{I}_2 am Ende der Leitung auftreten.

Da diese Hauptgleichungen allgemein für die Spannungen und Ströme zwischen zwei Grenzpunkten im Abstände l voneinander gelten und die komplexen Betriebskonstanten \mathfrak{Y}_0 , \mathfrak{Z}_k und $\mathfrak{Cof} ml$ des Leitungsstückes l unabhängig von den Zuständen der Leitungstrecken zu beiden Seiten dieses Stückes sind, so genügen die Gleichungen auch, um den elektrischen Zustand in irgend einem Punkte der Leitung zu berechnen.

Wenn man, was wegen der Symmetrie möglich ist, überall die Weiser 1 und 2 vertauscht und in Gl. (14) das Vorzeichen des zweiten Gliedes umgekehrt, erhält man Strom \mathfrak{I}_2 und Spannung \mathfrak{B}_2 am Ende, ausgedrückt durch die Werte am Anfang:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{I}_2 &= \mathfrak{I}_1 \mathfrak{Cof} ml - \mathfrak{B}_1 \mathfrak{Y} \mathfrak{Sin} ml = (\mathfrak{I}_1 - \mathfrak{B}_1 \mathfrak{Y}_0) \mathfrak{Cof} ml = \mathfrak{I}_{2,k} - \mathfrak{I}_{2,0} \\ \mathfrak{B}_2 &= \mathfrak{B}_1 \mathfrak{Cof} ml - \mathfrak{I}_1 \mathfrak{Z} \mathfrak{Sin} ml = (\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{I}_1 \mathfrak{Z}_k) \mathfrak{Cof} ml = \mathfrak{B}_{2,0} - \mathfrak{B}_{2,k} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Diese Gleichung hätte auch unmittelbar auf Gl. (14) abgeleitet werden können, indem man die Gleichung für \mathfrak{I}_1 mit $\mathfrak{Z} \mathfrak{Sin} ml$, die zweite für \mathfrak{B}_1 mit $\mathfrak{Cof} ml$ multipliziert und abzieht. Man findet dann bei Elimination von \mathfrak{I}_2 :

$$\mathfrak{B}_1 \mathfrak{Cof} ml - \mathfrak{I}_1 \mathfrak{Z} \mathfrak{Sin} ml = \mathfrak{B}_2 (\mathfrak{Cof}^2 ml - \mathfrak{Sin}^2 ml) = \mathfrak{B}_2$$

und ähnlich bei Elimination von \mathfrak{B}_2 :

$$\mathfrak{I}_1 \mathfrak{Cof} ml - \mathfrak{B}_1 \mathfrak{Y} \mathfrak{Sin} ml = \mathfrak{I}_2 (\mathfrak{Cof}^2 ml - \mathfrak{Sin}^2 ml) = \mathfrak{I}_2.$$

Die Gl. (14) und (15) entsprechen einander vollkommen. Beide gelten nach dem soeben Erörterten auch allgemein für zwei beliebige Punkte im Abstände l voneinander.

Man kann also für einen Punkt in dem beliebigen Abstände x vom Ende, oder $(l - x)$ vom Anfang der Leitung von der Länge l den Strom und die Spannung auf zweierlei Weise schreiben:

$$\mathfrak{I}_x = \mathfrak{I}_2 \mathfrak{Cof} mx + \mathfrak{B}_2 \mathfrak{Y} \mathfrak{Sin} mx \quad (16)$$

$$= \mathfrak{I}_1 \mathfrak{Cof} m(l - x) - \mathfrak{B}_1 \mathfrak{Y} \mathfrak{Sin} m(l - x) \quad (17)$$

und

$$\mathfrak{B}_x = \mathfrak{B}_2 \operatorname{Cof} mx + \mathfrak{F}_2 \mathfrak{B} \operatorname{Sin} mx \quad (18)$$

$$= \mathfrak{B}_1 \operatorname{Cof} m(l-x) - \mathfrak{F}_1 \mathfrak{B} \operatorname{Sin} m(l-x). \quad (19)$$

Die Gl. (16 und (18) ergeben die speziellen Werte \mathfrak{F}_1 und \mathfrak{B}_1 entsprechend Gl. (14) für $x = l$. Sind umgekehrt Strom und Spannung am Anfang gegeben, so folgen die Sonderwerte der Gl. (15) für $x = 0$ aus den Gl. (17) und (19).

3. Änderung der Gleichungen bei Zählung vom Anfang.

Bisher sind die Abstände x stets vom Ende der Leitung an gezählt worden, also positiv mit wachsenden Werten des Stromes und der Spannung. Bei manchen Problemen ist es jedoch angenehm, die Abstände vom Anfang der Leitung an zu zählen, also positiv mit abnehmenden Werten des Stromes und der Spannung. Die hierfür erforderlichen Veränderungen der Beziehungen ergeben sich, wenn man in den Grundgleichungen 4

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{F} &= \mathfrak{A} \varepsilon^{mx} + \mathfrak{B} \varepsilon^{-mx} \\ \mathfrak{B} &= \mathfrak{B} (\mathfrak{A} \varepsilon^{mx} - \mathfrak{B} \varepsilon^{-mx}), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

welche bei Zählung vom Ende der Leitung gelten, — x schreibt an Stelle von x .

Man erhält dann bei Zählung vom Anfang der Leitung:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{F} &= \mathfrak{A} \varepsilon^{-mx} + \mathfrak{B} \varepsilon^{mx} \\ \mathfrak{B} &= \mathfrak{B} (\mathfrak{A} \varepsilon^{-mx} - \mathfrak{B} \varepsilon^{mx}). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Daraus ergeben sich die allgemeinen Ausdrücke für Strom und Spannung in einem Punkte im Abstand x vom Anfang, bzw. $l-x$ vom Ende der Leitung, wenn man in den Gleichungen (16) bis (19), ($l-x$) schreibt an Stelle von x :

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_2 \operatorname{Cof} m(l-x) + \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B} \operatorname{Sin} m(l-x) \quad (21)$$

$$= \mathfrak{F}_1 \operatorname{Cof} mx - \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B} \operatorname{Sin} mx \quad (22)$$

und

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_2 \operatorname{Cof} m(l-x) + \mathfrak{F}_2 \mathfrak{B} \operatorname{Sin} m(l-x) \quad (23)$$

$$= \mathfrak{B}_1 \operatorname{Cof} mx - \mathfrak{F}_1 \mathfrak{B} \operatorname{Sin} mx. \quad (24)$$

4. Die unendlich lange Leitung.

Ein solcher Fall, wobei Zählung vom Anfang angewiesen ist, wird durch eine Leitung von unendlicher Länge gegeben.

Einer unendlich langen Leitung werde am Anfang, bei $x = 0$, die Spannung \mathfrak{B}_1 zugeführt. Am Ende, bei $x = \infty$, müssen $\mathfrak{B} = 0$ und $\mathfrak{F} = 0$ sein.

Führt man diese beiden Grenzbedingungen in Gl. (20) ein, so folgt

$$\mathfrak{B} = 0$$

und

$$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B} \mathfrak{A}, \quad \text{oder} \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{B} \mathfrak{B}_1,$$

also nach Einsetzung in Gl. (20)

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{S} &= \mathfrak{Y} \mathfrak{R}_1 \varepsilon^{-m x} \\ \mathfrak{B} &= \mathfrak{R}_1 \varepsilon^{-m x} = \mathfrak{B} \mathfrak{S} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

\mathfrak{B} ist also der Richtungswiderstand der unendlich langen Leitung, \mathfrak{Y} ihr Richtleitwert.

Für den Strom und die Spannung in irgendeinem Punkte im Abstand x von der Stromquelle kann man auch schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{S} &= \mathfrak{Y} \mathfrak{R}_1 \varepsilon^{-\beta x} (\cos \alpha x - j \sin \alpha x), \\ \mathfrak{B} &= \mathfrak{R}_1 \varepsilon^{-\beta x} (\cos \alpha x - j \sin \alpha x). \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Eine reflektierte Welle tritt nicht auf. ($\mathfrak{B} = 0$.) Strom und Spannung wandern also beide mit der gleichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit längs des Kabels. Sie stehen in jedem Punkt im gleichen Verhältnis \mathfrak{Y} und unter gleichem räumlichen Phasenwinkel $\xi = -\zeta$ zueinander. Dabei erfahren aber beide Vektoren, des Stromes und der Spannung, eine fortschreitende Verdrehung αx proportional dem Abstand x gegenüber der Anfangslage im Punkte $x = 0$. Es besteht also der bemerkenswerte Zustand, daß in Abständen von einer halben Wellenlänge, $\lambda = \pi/\alpha$ km, gleichzeitig die Ströme entgegengesetzt laufen und die Spannungen einander entgegengesetzt sind.

Der räumliche Phasenwinkel ξ ergibt sich für die unendlich lange Leitung als identisch mit der Verdrehung des polaren Vektors \mathfrak{Y} gegenüber seiner reellen Komponente.

Nun war nach Gl. (5)

$$\mathfrak{Y} = \frac{\sqrt{\mathfrak{R} \overline{\mathfrak{C}}}}{\mathfrak{R}} = \frac{m}{\mathfrak{R}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} = \frac{\sqrt{\mathfrak{R} \overline{\mathfrak{C}}}}{\overline{\mathfrak{C}}} = \frac{m}{\overline{\mathfrak{C}}}.$$

Setzt man $\mathfrak{B} = Z' + jZ''$, dann findet man in ähnlicher Weise, wie β und α bestimmt wurden, für die beiden Komponenten:

$$\left. \begin{aligned} Z' &= \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{(A^2 + \omega^2 C^2)(R^2 + \omega^2 L^2)} + (AR + \omega^2 CL) \right\} : (A^2 + \omega^2 C^2)}, \\ Z'' &= \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{(A^2 + \omega^2 C^2)(R^2 + \omega^2 L^2)} - (AR + \omega^2 CL) \right\} : (A^2 + \omega^2 C^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Diese Ausdrücke sind ähnlich gebaut wie die für β und α , aber unter anderem durch das Vorzeichen des Gliedes $\omega^2 CL$ von ihnen verschieden.

Nur für $A = 0$ wird $Z' = \frac{\alpha}{\sqrt{\omega C}}$, $Z'' = \frac{\beta}{\sqrt{\omega C}}$. Der räumliche Phasen-

winkel ζ von \mathfrak{B} ergibt sich dann als $\text{arc tg } \frac{Z''}{Z'}$.

Übersichtlicher findet man aus Gl. (5) und (26)

$$\mathfrak{B} = \frac{m}{\overline{\mathfrak{C}}} = \frac{(\beta + j\alpha)}{A + j\omega C} = \frac{(\beta A + \bar{\alpha} \omega C) + j(\alpha A - \beta \omega C)}{A^2 + \omega^2 C^2} \quad (28)$$

und

$$\text{tg } \zeta = \frac{Z''}{Z'} = \frac{\alpha A - \beta \omega C}{\beta A + \alpha \omega C}. \quad (28a)$$

Der Verdrehungswinkel von \mathfrak{V} ist gleich dem von \mathfrak{B} , aber entgegengesetzt gerichtet, also $\xi = -\zeta$

$$\operatorname{tg} \xi = -\frac{\alpha A - \beta \omega C}{\beta A + \alpha \omega C}, \quad (28b)$$

oder auch

$$= -\frac{\alpha R - \beta \omega L}{\beta R + \alpha \omega L}$$

aus $\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{R}}{m}$ abgeleitet.

Wird statt einer einfachen Sinusschwingung dem Anfang der Leitung eine willkürlich geformte Wechselfspannung zugeführt, so kann man sich diese nach Fourier in eine Reihe einfacher Sinusschwingungen verschiedener Frequenz aufgelöst denken. Ströme und Spannungen verschiedener Frequenz wandern jedoch längs der Leitung mit verschiedenen Geschwindigkeiten und werden nicht alle in demselben Umfang gedämpft.

Im allgemeinen Falle werden also die Formen der Wellen verändert oder verzerrt. Nur in dem von O. Heaviside behandelten Sonderfalle, daß

$$\frac{R}{L} = \frac{A}{C},$$

wird $\beta = \sqrt{AR}$, $\alpha = \omega \sqrt{CL}$ und $w = \frac{1}{\sqrt{CL}}$.

Da hierbei β und w völlig unabhängig von der Frequenz sind, werden auch willkürlich gestaltete Strom- und Spannungswellen mit der gleichen Geschwindigkeit fortgepflanzt und in demselben Maße gedämpft. Man nennt darum eine solche Leitung oder ein solches Kabel verzerrungsfrei. Der Fall hat besondere Bedeutung in der Telephonie, wobei hohe Frequenzen von etwa 800 Per./Sek. durch die Stimme erzeugt werden. Die kurze Betrachtung hier gibt uns aber schon die Einsicht, daß im allgemeinen auch Ströme und Spannungen niedriger Frequenz, die von der reinen Sinusform abweichen, längs einer sehr langen Leitung ihre Gestalt einigermaßen verändern müssen. Sie werden bei der Wanderung über eine sehr lange Linie verzerrt. Bei 50 Per./Sek. und Leitungen der praktisch vorkommenden Längen von höchstens einigen hundert Kilometer tritt diese Erscheinung jedoch nur schwach zutage.

5. Vergleich mit der Leitung von endlicher Länge.

Will man nun die unendlich lange Leitung mit der Leitung endlicher Länge vergleichen, dann ist es zweckmäßig, die Gl. (25) in anderer Form zu schreiben. Es ist nämlich

$$\varepsilon^{-mx} = \operatorname{Cos} mx - \operatorname{Sin} mx,$$

also

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{V} &= \mathfrak{V}_1 (\operatorname{Cos} mx - \operatorname{Sin} mx), \\ \mathfrak{B} &= \mathfrak{B}_1 (\operatorname{Cos} mx - \operatorname{Sin} mx). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Für die offene Leitung von der Länge l war nach Gl. (22) und (24):

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \cos mx - \mathfrak{Y} \mathfrak{B}_1 \sin mx, \quad (22)$$

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \cos mx - \mathfrak{Z} \mathfrak{F}_1 \sin mx. \quad (24)$$

Führt man ein $\frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{F}_1} = \mathfrak{B}_0 = \mathfrak{Z} \cotg ml$ (11), so folgt, daß die Gl. (22) und (24) sich auch schreiben lassen in der Form:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{F} &= \mathfrak{Y} \mathfrak{B}_1 (\cos mx \mathfrak{Z} \cotg ml - \sin mx), \\ \mathfrak{B} &= \mathfrak{B}_1 (\cos mx - \sin mx \mathfrak{Z} \cotg ml). \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Hierin treten die gleichen Ausdrücke auf wie in Gl. (25), nur machen sich durch den Faktor $\mathfrak{Z} \cotg ml$ die Reflexionen vom Anfang und Ende der Leitung bemerkbar, die bei dem unendlich langen Kabel entfallen. Das Verhältnis der Amplituden der reflektierten Welle zur Hauptwelle ist $\mathfrak{B}:\mathfrak{A}$. Es läßt sich leicht aus der allgemeinen Gl. (20) ermitteln, wenn man die Grenzbedingungen einführt.

Für

$$x = 0 \text{ ist hier } \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1, \text{ also } \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{Z}(\mathfrak{A} - \mathfrak{B})$$

und für

$$x = l \quad ,, \quad ,, \quad \mathfrak{F} = 0, \quad ,, \quad 0 = \mathfrak{A} \varepsilon^{-ml} + \mathfrak{B} \varepsilon^{ml}.$$

Bestimmt man hieraus \mathfrak{A} und \mathfrak{B} , so erhält man nach Einsetzung in Gl. (20) wieder die Beziehung (29). Das Reflexionsverhältnis ist

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} = - \frac{\varepsilon^{-ml}}{\varepsilon^{ml}} = - \varepsilon^{-2ml}.$$

Kennelly hat darauf hingewiesen, daß man aus der Gleichung (25) für ein unendlich langes Kabel, von dem man sich ein Stück abgeschnitten denkt, die Gl. (10) für ein endliches Stück ableiten könne.

Man stelle sich vor, die Spannung \mathfrak{B}_1 werde am Anfang angelegt und die Welle laufe nun über die (sehr große) Länge l bis zum Ende, wo sie gedämpft auf den Betrag $\mathfrak{B}_1 \varepsilon^{-ml}$ ankommt. Von dem offenen Ende wird sie zurückgeworfen, so daß die ankommende und die reflektierte Welle sich überlagern und sich eine Ladung der Leitung auf die Spannung $2\mathfrak{B}_1 \varepsilon^{-ml}$ ergibt. Die ursprüngliche Welle wird also am offenen Ende durch Reflexion verdoppelt¹⁾. Sie gelangt wieder an den Anfang in der durch die Dämpfung verminderten Stärke $\mathfrak{B}_1 \varepsilon^{-2ml}$ und wird auch am geschlossenen Senderende zurückgeworfen, hier jedoch unter Umkehrung des Vorzeichens. Die zurückgeworfene Welle läuft nun wieder zum offenen Ende, wo sie mit dem Betrage $-\mathfrak{B}_1 \varepsilon^{-3ml}$ angelangt und durch Reflexion ohne Zeichenumkehrung auf den Betrag $-2\mathfrak{B}_1 \varepsilon^{-3ml}$ schnellte. Bei der folgenden Ankunft am Anfang hat sie die Stärke $-\mathfrak{B}_1 \varepsilon^{-4ml}$ und nach der Reflexion mit Zeichenwechsel kommt sie am offenen Ende an in der Stärke $+\mathfrak{B}_1 \varepsilon^{-5ml}$, die dort verdoppelt wird. So geht das Spiel weiter, und die Spannung am entfernten Ende baut sich auf nach dem Gesetz²⁾

$$\mathfrak{B}_2 = 2\mathfrak{B}_1 (\varepsilon^{-ml} - \varepsilon^{-3ml} + \varepsilon^{-5ml} - \varepsilon^{-7ml} + \dots).$$

¹⁾ Hierauf wird auf S. 467 u. 544 näher eingegangen.

²⁾ Kennelly, A. E.: Proc. Am. Academy of Arts and Sciences, Bd. 27, S. 710. 1900.

Die Summe in der Klammer ist eine unendliche geometrische Reihe mit dem ersten Gliede $2\mathfrak{B}_1\varepsilon^{-m l}$ und dem Verhältnis $(-\varepsilon^{-2m l})$. Ihr Wert ist also

$$\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_1 \cdot \frac{2\varepsilon^{-m l}}{1 + \varepsilon^{-2m l}}$$

oder, wenn man Zähler und Nenner des Bruches mit $\varepsilon^{m l}$ multipliziert:

$$\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B} \cdot \frac{2}{\varepsilon^{m l} + \varepsilon^{-m l}} = \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{Cof} ml}. \quad (10)$$

Diese Gleichung ist identisch mit der früher gefundenen Gl. (10).

6. Die am Ende belastete Leitung.

Die allgemeinen Gleichungen sind bereits durch die früher entwickelten Beziehungen (6), (6a) und (16) bis (24) gegeben worden. Für Zählung vom Ende lauteten beispielsweise die Gl. (16) und (18), bzw. (6a):

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_2 \mathfrak{Cof} mx + \mathfrak{B}_2 \mathfrak{J} \mathfrak{Sin} mx, \quad (16)$$

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_2 \mathfrak{Cof} mx + \mathfrak{J}_2 \mathfrak{B} \mathfrak{Sin} mx. \quad (18)$$

Sind nun nicht Strom \mathfrak{J}_2 und Spannung \mathfrak{B}_2 am Ende gegeben, sondern ist nur ihr Verhältnis $\mathfrak{B}_2 = \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{J}_2}$ bekannt, dann findet man aus Gl. (16) und (18) durch Teilung mit \mathfrak{J}_2 die allgemeinen Ausdrücke

$$\frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{J}_2} = \frac{1}{2} \mathfrak{J} \{ (\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{B}) \varepsilon^{mx} - (\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{B}) \varepsilon^{-mx} \}, \quad (16a)$$

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_2} = \frac{1}{2} \mathfrak{J} \{ (\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{B}) \varepsilon^{mx} - (\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{B}) \varepsilon^{-mx} \}, \quad (18a)$$

welche im folgenden Abschnitt graphisch behandelt werden sollen.

Zählt man vom Anfang aus, dann gelten die allgemeinen Gleichungen:

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_1 \mathfrak{Cof} mx - \mathfrak{B}_1 \mathfrak{J} \mathfrak{Sin} mx, \quad (22)$$

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \mathfrak{Cof} mx - \mathfrak{J}_1 \mathfrak{B} \mathfrak{Sin} mx. \quad (24)$$

Die besonderen Werte \mathfrak{J}_2 und \mathfrak{B}_2 für das Leitungsende ergeben sich, wenn man hierin $x = l$ setzt. Tut man dies, und eliminiert man aus Gl. (22) und (24) \mathfrak{J}_1 , indem man die erste Gleichung mit $\mathfrak{B} \mathfrak{Sin} ml$, die zweite mit $\mathfrak{Cof} ml$ multipliziert und beide addiert, dann findet man:

$$\mathfrak{J}_2 = \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{B} \mathfrak{Sin} ml + \mathfrak{B}_2 \mathfrak{Cof} ml}. \quad (30)$$

Eliminiert man aus Gl. (22) für $x = l$ den Strom \mathfrak{J}_2 , dann findet man

$$\mathfrak{J}_1 = \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{B}} \cdot \frac{\mathfrak{B} \mathfrak{Cof} ml + \mathfrak{B}_2 \mathfrak{Sin} ml}{\mathfrak{B}_1 \mathfrak{Cof} ml + \mathfrak{B} \mathfrak{Sin} ml}. \quad (31)$$

Dies sind die Ströme am Ende und Anfang der Linie. Ihr Verhältnis ist

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{J}_1}{\mathfrak{J}_2} &= \mathfrak{Cof} ml + \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{B}} \mathfrak{Sin} ml = \mathfrak{Cof} ml \left(1 + \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{B}} \mathfrak{Tg} ml \right) \\ &= \frac{\mathfrak{J}_{1, k}}{\mathfrak{J}_2} \left(1 + \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{B}_0} \right). \end{aligned} \quad (32)$$

Beim Vergleich mit der für Kurzschluß gefundenen Beziehung (12a) zeigt sich, daß der zweite Ausdruck neu hinzugekommen ist.

Der Widerstandsoperator am Anfang der belasteten Leitung ergibt sich leicht aus Gl. (31) oder (16) zu:

$$\mathfrak{Z}_1 = \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{A}_1} = \mathfrak{Z}_0 \cdot \frac{\mathfrak{Z}_2 \mathfrak{C} \cos ml + \mathfrak{Z} \mathfrak{S} \sin ml}{\mathfrak{Z} \mathfrak{C} \cos ml + \mathfrak{Z}_2 \mathfrak{S} \sin ml} = \mathfrak{Z}_0 \cdot \frac{\mathfrak{Z}_k + \mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{Z}_0 + \mathfrak{Z}_2}. \quad (33)$$

Für Kurzschluß mit $\mathfrak{Z}_2 = 0$ geht dies über in $\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z}_k$, für Nullast mit $\mathfrak{Z}_2 = \infty$ in \mathfrak{Z}_0 .

Das Verhältnis der Amplitude der reflektierten und der Hauptwelle $\mathfrak{B}/\mathfrak{A}$ findet man für die belastete Leitung leicht aus den allgemeinen Gl. (20):

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{S} &= \mathfrak{A} \varepsilon^{-mx} + \mathfrak{B} \varepsilon^{mx}, \\ \mathfrak{B} &= \mathfrak{Z} (\mathfrak{A} \varepsilon^{-mx} - \mathfrak{B} \varepsilon^{mx}) \end{aligned} \right\}. \quad (20)$$

Für $x=0$ ist $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1$, also $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{Z} (\mathfrak{A} - \mathfrak{B})$.

Für $x=l$ ist $\mathfrak{Z}_2 = \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{A}_2}$, also $\mathfrak{Z}_2 = \mathfrak{Z} \frac{\mathfrak{A} \varepsilon^{-ml} - \mathfrak{B} \varepsilon^{ml}}{\mathfrak{A} \varepsilon^{-ml} + \mathfrak{B} \varepsilon^{ml}}$.

Man findet hieraus leicht

$$\frac{\mathfrak{Z} + \mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}_2} = \frac{\mathfrak{A} \varepsilon^{-ml}}{\mathfrak{B} \varepsilon^{ml}}$$

oder

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} = \varepsilon^{-2ml} \cdot \frac{\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{Z} + \mathfrak{Z}_2} = \mathfrak{D}; \quad \text{und} \quad \mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{Z}(1 - \mathfrak{D})}.$$

Für $\mathfrak{Z}_2 = 0$ folgt daraus als Reflexionsverhältnis $\mathfrak{D}_0 = \varepsilon^{-2ml}$, für $\mathfrak{Z}_2 = \infty$ wird $\mathfrak{D}_0 = -\varepsilon^{-2ml}$ wie früher.

Das Vorzeichen ergibt sich für Kurzschluß positiv, für Leerlauf negativ. Die Gleichungen lauten also bei Einsetzung in (20)

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{S} &= \frac{\mathfrak{B}_1 \mathfrak{D}}{1 - \mathfrak{D}} (\varepsilon^{-mx} + \mathfrak{D} \varepsilon^{mx}), \\ \mathfrak{B} &= \frac{\mathfrak{B}_1}{1 - \mathfrak{D}} (\varepsilon^{-mx} - \mathfrak{D} \varepsilon^{mx}). \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Bei offenem Ende ($\mathfrak{Z}_2 = \infty$) werden also die Spannungswellen (da \mathfrak{D} selbst negativ ist und in der Spannungsgleichung auch ein negatives Zeichen steht) ohne Umkehrung des Vorzeichens reflektiert; bei kurzgeschlossenem Ende ($\mathfrak{Z}_2 = 0$) werden die Spannungswellen unter Umkehrung des Vorzeichens reflektiert, weil \mathfrak{D} positiv ist. Für die Stromwellen gilt das Umgekehrte, weil die Gleichung die Summe der zwei Ausdrücke enthält: am offenen Ende tritt Zeichenwechsel der reflektierten Welle ein, denn nur dadurch kann der Strom Null werden; am kurzgeschlossenem Ende überlagern sich Hauptwelle und zurückgeworfene ohne Zeichenwechsel. Der Zeichenwechsel entspricht der physikalischen Bedingung, daß am kurzgeschlossenem Ende die Spannung Null, am offenen Ende der Strom Null ist.

7. Ersatzstromkreise der Leitung mit verteilter Kapazität und Induktivität.

Die drei charakteristischen Größen der Gl. (14), nämlich \mathcal{Y}_0 , \mathcal{Z}_k und $\mathcal{C}\text{of } ml$, wofür hier der Kürze halber nur \mathcal{C} geschrieben werden soll, lassen sich durch Leerlauf und Kurzschluß ermitteln. Es ist $\mathcal{C}\text{of } ml = \mathcal{C}$ und

$$\mathcal{Y}_0 = \mathcal{Y} \mathcal{X} g ml, \quad (11a)$$

$$\mathcal{Z}_k = \mathcal{Z} \mathcal{X} g ml, \quad (13)$$

also

$$\mathcal{Y}_0 \mathcal{Z}_k = \mathcal{X} g^2 ml = \frac{\mathcal{C}^2 - 1}{\mathcal{C}^2}. \quad (20)$$

Die Leitung mit verteilter Kapazität läßt sich nun durch die zwei folgenden einfachen und einander gleichwertigen Schaltungen nach

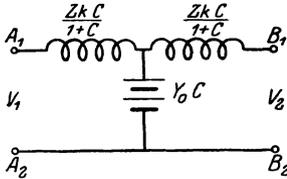


Abb. 420.

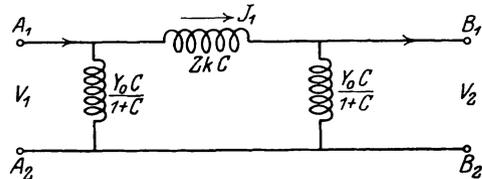


Abb. 421.

Breisig¹⁾ und Kennelly²⁾ ersetzen. Bei beiden soll bei A_1B_1 die Stromzuführung, bei A_2B_2 die Stromabnahme geschehen. Der Leiter A_1A_2 möge als Hinleitung, B_1B_2 als Rückleitung angesehen werden.

Die erste Schaltung (Abb. 420) enthält zwei Richtungswiderstände von der Größe

$$\frac{\mathcal{Z}_k \mathcal{C}}{1 + \mathcal{C}} = \frac{\mathcal{Z} \mathcal{C} \sin ml}{1 + \mathcal{C} \text{of } ml} \quad (21)$$

und dazwischen einen Richtleitwert vom Betrage

$$\mathcal{Y}_0 \mathcal{C} = \mathcal{Y}_0 \mathcal{C} \text{of } ml = \mathcal{Y} \mathcal{C} \sin ml. \quad (22)$$

Die zweite Schaltung (Abb. 421) enthält zwischen zwei parallelen Überbrückungen von der Größe

$$\frac{\mathcal{Y}_0 \mathcal{C}}{1 + \mathcal{C}} = \frac{\mathcal{Y} \mathcal{C} \sin ml}{1 + \mathcal{C} \text{of } ml} \quad (23)$$

den Richtungswiderstand

$$\mathcal{Z}_k \mathcal{C} = \mathcal{Z} \mathcal{C} \sin ml. \quad (24)$$

Der Beweis ist leicht zu führen. Man liest aus der Abbildung unmittelbar die folgenden Gleichungen ab:

$$\mathcal{I}_a = \mathcal{Y}_0 \mathcal{C} \left(\mathcal{V}_2 + \mathcal{I}_2 \frac{\mathcal{Z}_k \mathcal{C}}{1 + \mathcal{C}} \right)$$

und

$$\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_a + \mathcal{I}_2 = \mathcal{C} \mathcal{Y}_0 \mathcal{V}_2 + \mathcal{I}_2 \frac{\mathcal{Y}_0 \mathcal{Z}_k \mathcal{C}^2}{1 + \mathcal{C}} + \mathcal{I}_2,$$

¹⁾ Breisig, F.: ETZ 1900, S. 87.

²⁾ Kennelly, A. E.: Proc. Amer. Acad. of Arts and Sciences, Bd. 44 u. 45. 1908 u. 1909. — S. a. K. W. Wagner, Arch. Elektrot. Bd. 3, S. 315. 1915.

und da nach Gl. (20)

$$\frac{\mathfrak{Y}_0 \mathfrak{Z}_k \mathfrak{C}^2}{1 + \mathfrak{C}} = \frac{(\mathfrak{C}^2 - 1) \mathfrak{C}^2}{(1 + \mathfrak{C}) \mathfrak{C}^2} = \mathfrak{C} - 1, \quad (20a)$$

folgt unmittelbar Gl. (14)

$$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{C} (\mathfrak{S}_2 + \mathfrak{B}_2 \mathfrak{Y}_0) \quad (14)$$

und ähnlich für die Spannung am Anfang

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_1 &= \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{S}_2 \cdot \frac{\mathfrak{Z}_k \mathfrak{C}}{1 + \mathfrak{C}} + \mathfrak{S}_1 \frac{\mathfrak{Z}_k \mathfrak{C}}{1 + \mathfrak{C}} \\ &= \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{S}_2 \frac{\mathfrak{Z}_k \mathfrak{C}}{1 + \mathfrak{C}} + \mathfrak{B}_2 \mathfrak{Y}_0 \frac{\mathfrak{Z}_k \mathfrak{C}^2}{1 + \mathfrak{C}} + \mathfrak{S}_2 \frac{\mathfrak{Z}_k \mathfrak{C}^2}{1 + \mathfrak{C}} \end{aligned}$$

und nach Einsetzung von Gl. (20):

$$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{C} (\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{S}_2 \mathfrak{Z}_k). \quad (14)$$

Für die zweite Ersatzschaltung sind die Gl. (15) ganz ähnlich zu halten:

$$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_2 + \mathfrak{B}_2 \mathfrak{Y}_0 \frac{\mathfrak{C}}{1 + \mathfrak{C}} + \left[(\mathfrak{S}_2 + \mathfrak{B}_2 \mathfrak{Y}_0 \frac{\mathfrak{C}}{1 + \mathfrak{C}}) \mathfrak{C} \mathfrak{Z}_k + \mathfrak{B}_2 \right] \mathfrak{Y}_0 \frac{\mathfrak{C}}{1 + \mathfrak{C}}.$$

Der Ausdruck in eckigen Klammern ist

$$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_2 + \left(\mathfrak{S}_2 + \mathfrak{B}_2 \mathfrak{Y}_0 \frac{\mathfrak{C}}{1 + \mathfrak{C}} \right) \mathfrak{C} \mathfrak{Z}_k.$$

Nach Ordnung der Ausdrücke folgt

$$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_2 \left(1 + \mathfrak{Y}_0 \mathfrak{Z}_k \frac{\mathfrak{C}^2}{1 + \mathfrak{C}} \right) + \mathfrak{B}_2 \mathfrak{Y}_0 \frac{\mathfrak{C}}{1 + \mathfrak{C}} \left(2 + \mathfrak{Y}_0 \mathfrak{Z}_k \frac{\mathfrak{C}^2}{1 + \mathfrak{C}} \right)$$

und

$$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_2 \left(1 + \mathfrak{Y}_0 \mathfrak{Z}_k \frac{\mathfrak{C}^2}{1 + \mathfrak{C}^2} \right) + \mathfrak{S}_2 \mathfrak{C} \mathfrak{Z}_k$$

und nach Einsetzung von Gl. (20a), wonach

$$1 + \mathfrak{Y}_0 \mathfrak{Z}_k \frac{\mathfrak{C}^2}{1 + \mathfrak{C}} = \mathfrak{C},$$

ergeben sich unmittelbar die Gl. (14)

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{S}_1 &= \mathfrak{C} (\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{B}_2 \mathfrak{Y}_0), \\ \mathfrak{B}_1 &= \mathfrak{C} (\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{S}_2 \mathfrak{Z}_k). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Die drei charakteristischen Größen entsprechen auch der Hauptgleichung

$$\mathfrak{C}^2 (1 - \mathfrak{Y}_0 \mathfrak{Z}_k) = 1,$$

die nur eine andere Schreibweise der Gl. (20) ist. Nur sind hier bei den Abb. 420 und 421 wegen der völligen Symmetrie die zwei Konstanten der Abb. 248, S. 250, einander gleich, $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_2 = \mathfrak{C}$.

Die Bedeutung der ursprünglichen Werte \mathfrak{Z} und \mathfrak{Y} ergibt sich im Zusammenhang mit den Figuren aus den Gleichungen (16) und (18), bzw. (22) und (24), die wie die Figuren selbst einander völlig entsprechen. Auch wird der Zusammenhang deutlich mit den im VIII. Kapitel, S. 251 behandelten Kettenbrüchen und Kettenleitern.

Hiermit ist die Theorie vollständig behandelt. Man kann, wenn man dies wünscht, direkt mit den gegebenen Beziehungen arbeiten, oder direkt

zu den praktischen Näherungsmethoden übergehen, deren Behandlung hier auf Seite 499 beginnt. Man kann aber auch die hyperbolischen Funktionen umgestalten oder graphisch darstellen und erhält dann jeweils dieselben Resultate, nur in anderer Form.

8. Zwischenbemerkung über Hyperbelfunktionen.

Die Vorgeschichte der hier verwendeten Hyperbelgrößen beginnt etwa mit R. Riccati, der 1757 eine einheitliche Darstellung der trigonometrischen Funktionen anbahnte und hierzu den Einheitskreis mit der gleichseitigen Einheitshyperbel verglich. Alle Beziehungen der gewöhnlichen Trigonometrie ließen sich hierbei willig übertragen. J. H. Lambert hatte schon 1768 nicht nur die Abkürzung der Hyperbelgrößen durch eine besondere Bezeichnung gewürdigt, sondern die geometrische Vorstellung ihrer analytischen Funktion und ihren Zusammenhang mit den trigonometrischen gerühmt. 1830 tat dies C. Gudermann mit seiner Abhandlung „Potential oder zyklisch-hyperbolische Funktionen“. S. Günther verwies in seiner Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten

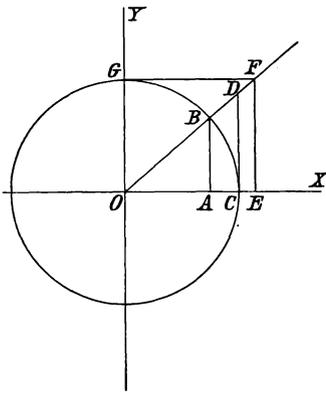


Abb. 422.

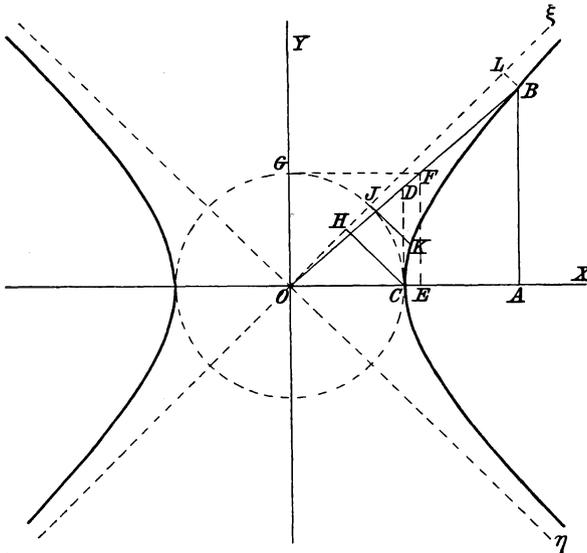


Abb. 423.

Hyperbelfunktionen 1881 auf vielfache Anwendungen. Die Versuche, sie in den Unterricht einzupflanzen, scheiterten jedoch. So erging es auch E. H. v. der Heyden 1886 mit seinem Streben: „Mich bestimmte in erster Linie die Wichtigkeit dieser den Kreisfunktionen koordinierten Funktionen, die gerade da zur Anwendung kommen, wo jene, indem sie imaginäre Resultate ergeben,

ihren Dienst versagen, sich also als eine notwendige Ergänzung der gemeinen trigonometrischen Funktionen erweisen.“

Die Bezeichnung der Hyperbelgrößen ist nicht einheitlich. Nach Riccati schreibt man für den Sinus sh, nach Gudermann Sin oder \sin , oft findet man auch sinh oder sih. Die Gudermannsche in Deutschland gebräuchliche Bezeichnung könnte bei gleichzeitiger Annahme gotischer Vektorzeichen zu der irrigen Meinung verführen, daß in diesem Funktionszeichen auch sein komplexes Merkmal liegen solle. Wir wählen sie hier trotzdem.

Für den Kreis, Abb. 422. Für die Hyperbel, Abb. 423.
 sei $OA = x, AB = y, OC = OG = 1, \alpha$ Argument.

Kreisausschnitt $COB = \frac{1}{2} \alpha$

Hyperbelausschnitt $COB = \frac{1}{2} \alpha$

Dann ist:

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 &= 1 \\
 OA^2 + AB^2 &= \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \\
 \operatorname{tg} \alpha &= \frac{CD}{1} = \frac{AB}{OA} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\
 \operatorname{cotg} \alpha &= \frac{GF}{1} = \frac{OA}{OB} \cdot \frac{\cos \alpha}{1} \\
 x &= \cos \alpha, \quad y = \sin \alpha \\
 x \pm yj &= \cos \alpha \pm j \sin \alpha = \varepsilon^{\pm \alpha j} \\
 \alpha &= \frac{1}{j} \log_{\varepsilon} (x + yj) \\
 \cos \alpha &= \frac{1}{2} (\varepsilon^{\alpha j} + \varepsilon^{-\alpha j}) \\
 \sin \alpha &= \frac{1}{2j} (\varepsilon^{\alpha j} - \varepsilon^{-\alpha j}) \\
 \cos(\alpha j) &= \operatorname{Cof} \alpha \\
 \sin(\alpha j) &= j \operatorname{Sin} \alpha \\
 \operatorname{tg}(\alpha j) &= j \operatorname{Tg} \alpha
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x^2 - y^2 &= 1 \\
 OA^2 - AB^2 &= \operatorname{Cof}^2 \alpha - \operatorname{Sin}^2 \alpha = 1 \\
 \operatorname{Tg} \alpha &= \frac{CD}{1} = \frac{AB}{OA} = \frac{\operatorname{Sin} \alpha}{\operatorname{Cof} \alpha} \\
 \operatorname{Cotg} \alpha &= \frac{GF}{1} \\
 x &= \operatorname{Cof} \alpha \quad y = \operatorname{Sin} \alpha \\
 x \pm y &= \operatorname{Cof} \alpha \pm \operatorname{Sin} \alpha = \varepsilon^{\pm \alpha} \\
 \alpha &= \log_{\varepsilon} (x + y) \\
 \operatorname{Cof} \alpha &= \frac{1}{2} (\varepsilon^{\alpha} + \varepsilon^{-\alpha}) \\
 \operatorname{Sin} \alpha &= \frac{1}{2} (\varepsilon^{\alpha} - \varepsilon^{-\alpha}) \\
 \operatorname{Cof}(\alpha j) &= \cos \alpha \\
 \operatorname{Sin}(\alpha j) &= j \sin \alpha \\
 \operatorname{Tg}(\alpha j) &= j \operatorname{tg} \alpha
 \end{aligned}$$

Ebenso gelten die Formeln für die Summen zweier Argumente:

$ \begin{aligned} \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \\ &\mp \sin \alpha \sin \beta \\ \operatorname{tg} \alpha \pm \beta &= \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \end{aligned} $	$ \begin{aligned} \operatorname{Cof}(\alpha \pm \beta) &= \operatorname{Cof} \alpha \operatorname{Cof} \beta \\ &\pm \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Sin} \beta \\ \operatorname{Tg}(\alpha \pm \beta) &= \frac{\operatorname{Tg} \alpha \pm \operatorname{Tg} \beta}{1 \pm \operatorname{Tg} \alpha \operatorname{Tg} \beta} \end{aligned} $
--	---

und für die Umwandlung der Summe zweier Sinusse oder Kosinusse in ein Produkt oder umgekehrt

$ \begin{aligned} &\sin \alpha + \sin \beta \\ = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) &\text{ usw.} \end{aligned} $	$ \begin{aligned} &\operatorname{Sin} \alpha + \operatorname{Sin} \beta \\ = 2 \operatorname{Sin} \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \operatorname{Cof} \frac{1}{2}(\alpha - \beta) &\text{ usw.} \end{aligned} $
---	---

ferner gilt das sog. Moivresche Theorem:

$ \begin{aligned} (\cos \alpha \pm j \sin \alpha)^n &= \cos(n\alpha) \\ &\pm j \sin(n\alpha) \end{aligned} $	$ \begin{aligned} (\operatorname{Cof} \alpha \pm j \operatorname{Sin} \alpha)^n &= \operatorname{Cof}(n\alpha) \\ &\pm j \operatorname{Sin}(n\alpha) \end{aligned} $
---	---

Die Hyperbelfunktionen erscheinen also als Kreisfunktionen mit imaginärem Argument und umgekehrt die Kreisfunktionen als Hyperbelfunktionen mit imaginärem Argument. Gleiches gilt für die umgekehrten sog. Bogen-Funktionen, in welchen die Kreis- und Hyperbelausschnitte zum Sinus, Kosinus usw. gesucht werden. Bei den ebenen Vektoren findet man stets komplexe Argumente. Für diese gelten die Hilfssätze:

$$\begin{aligned}\operatorname{Sin}(a \pm jb) &= \operatorname{Sin} a \operatorname{Cof} jb \pm \operatorname{Cof} a \operatorname{Sin} jb \\ &= \operatorname{Sin} a \cos b \pm j \operatorname{Cof} a \sin b \\ \operatorname{Cof}(a \pm jb) &= \operatorname{Cof} a \cos b \pm j \operatorname{Sin} a \sin b.\end{aligned}$$

Die hyperbolischen Funktionen komplexer Argumente sind also gleichfalls ebene Vektoren und können als solche gezeichnet werden.

Die komplexen Argumente von der Form $a + bj$ lösen sich in die reellen und rein imaginären Teile auf. Zu ihrer bildlichen Darstellung wird der Kreis und anschließend die Hyperbel benutzt. Man mißt die Zeit zuerst im ebenen Kreis, dann in einer senkrechten Ebene als Hyperbelargument.

Zum einfachen Kreisvektor der Ebene gesellt sich also sein zentrales Abbild als einfacher Hyperbelvektor, entweder in derselben Ebene oder auf einer senkrechten Ebene in den Raum reichend.

9. Darstellung in reeller Form.

Ist statt der Impedanz \mathfrak{Z}_2 am Ende die Spannung \mathfrak{B}_2 und der Strom \mathfrak{I}_2 gegeben, dann gelten die früher schon behandelten Gl. (22) und (24).

P. Janet¹⁾ hat zuerst darauf hingewiesen, wie man aus den Vektoren für Strom und Spannung die Leistung zu bestimmen hat. Es seien gegeben $\mathfrak{B} = V_{\text{eff}} \varepsilon^{j\varphi}$ und $\mathfrak{I} = J_{\text{eff}} \varepsilon^{j\psi}$, wo V_{eff} und J_{eff} die effektiven Werte sind. Dann ist die Leistung

$$W = V_{\text{eff}} J_{\text{eff}} \cos(\varphi - \psi).$$

Man muß also $V_{\text{eff}} \varepsilon^{j\varphi}$ und $J_{\text{eff}} \varepsilon^{-j\psi}$ multiplizieren, oder $V_{\text{eff}} \varepsilon^{-j\varphi}$ und $J_{\text{eff}} \varepsilon^{j\psi}$. Die Leistung ist der reelle Teil des Produktes.

Man kann nun aus den bisher abgeleiteten symbolischen Gleichungen mit einiger Rechnerei leicht die reellen Lösungen erhalten.

Schreibt man für Zählung vom Anfang oder Ende die Gl. (20) oder (4) nieder und berücksichtigt man, daß

$$\varepsilon \pm \alpha^m = \operatorname{Cof} mx \pm \operatorname{Sin} mx,$$

dann gehen sie über in die Form:

$$\left. \begin{aligned}\mathfrak{B} &= \mathfrak{Z} [(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) \operatorname{Cof} mx \mp (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \operatorname{Sin} mx], \\ \mathfrak{I} &= (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \operatorname{Cof} mx \mp (\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) \operatorname{Sin} mx.\end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (20b) \\ (4b) \end{array}$$

Das obere —-Zeichen gilt für Zählung vom Anfang, das untere +-Zeichen gilt für Zählung vom Ende.

¹⁾ Janet, P.: *Ecl. él.* Bd. 13, S. 529. 1897. Eine allgemeinere Lösung hat J. A. Schouten gegeben durch seine Grundlagen der Vektor- u. Affinoranalysis. Leipzig 1914. S. auch die Dissertation von Frl. J. H. M. Manders, *Application of direct analysis to pulsating and oscillating phenomena.* Leiden 1919.

Setzt man nun

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{B} &= V' + jV'' \\ \mathfrak{S} &= J' + jJ'' \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

ferner

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{I}(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) &= A' + jA'' \\ \mathfrak{I}(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) &= B' + jB'' \\ \mathfrak{A} + \mathfrak{B} &= C' + jC'' \\ \mathfrak{A} - \mathfrak{B} &= D' + jD'' \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

dann ist

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{B} &= (A' + jA'') \mathfrak{Cof} mx \mp (B' + jB'') \mathfrak{Sin} mx \\ \mathfrak{S} &= (C' + jC'') \mathfrak{Cof} mx \mp (D' + jD'') \mathfrak{Sin} mx \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Unter Berücksichtigung von $m = \beta + j\alpha$ kann man nun die reellen und imaginären Komponenten von \mathfrak{B} und \mathfrak{S} voneinander trennen. Man setze¹⁾

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{Cof} mx &= \mathfrak{Cof}(\beta x + j\alpha x) = \mathfrak{Cof} \beta x \cos \alpha x + j \mathfrak{Sin} \beta x \sin \alpha x \\ &= Q_1 + jQ_2, \\ \mathfrak{Sin} mx &= \mathfrak{Sin}(\beta x + j\alpha x) = \mathfrak{Sin} \beta x \cos \alpha x + j \mathfrak{Cof} \beta x \sin \alpha x \\ &= Q_3 + jQ_4. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Dann wird:

$$\left. \begin{aligned} V' &= (A' Q_1 - A'' Q_2) \mp (B' Q_3 - B'' Q_4) \\ V'' &= (A' Q_2 + A'' Q_1) \mp (B' Q_4 + B'' Q_3) \\ J' &= (C' Q_1 - C'' Q_2) \mp (D' Q_3 - D'' Q_4) \\ J'' &= (C' Q_2 + C'' Q_1) \mp (D' Q_4 + D'' Q_3) \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Bei Änderung der Zählungsrichtung des Abstandes x ändern nur die zweiten Ausdrücke mit den Hilfsgrößen Q_3 und Q_4 das Vorzeichen. Aus den Definitionsgleichungen folgt, daß die Integrationskonstanten C und D von A und B abhängen.

Nach früherem ist

$$\mathfrak{Y} = Y \cdot e^{j\xi} = 1/\mathfrak{I},$$

worin der Betrag:

$$Y = \sqrt{\frac{A^2 + \omega^2 C^2}{(R^2 + \omega^2 L^2)(A^2 + \omega^2 C^2)}}$$

und der Phasenwinkel

$$\xi = \text{arc tg} \frac{\beta \omega B - \alpha A}{\beta A + \alpha \omega C}. \quad (28 b)$$

Dann gelten die Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} C' &= Y (B' \cos \xi - B'' \sin \xi); & C'^2 + C''^2 &= Y^2 (B'^2 + B''^2) \\ C'' &= Y (B' \sin \xi + B'' \cos \xi); & D'^2 + D''^2 &= Y^2 (A'^2 + A''^2) \\ D' &= Y (A' \cos \xi - A'' \sin \xi); & C'D' + C''D'' &= Y^2 (A'B' + A''B'') \\ D'' &= Y (A' \sin \xi + A'' \cos \xi); & C'D' - C''D'' &= Y^2 (A'B'' - A''B') \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

¹⁾ Dean, G. R.: Proc. Am. Inst. El. Eng. Bd. 34, S. 2241. 1915, Trans Am. Inst. El. Eng. Bd. 34, S. 2511. 1915. Eine andere „Vollständige Auflösung des W. S. Fernleitungsproblems“ (Berlin 1920) rührt von Paul Mahlke her.

Für die weiteren Rechnungen bedarf man noch der Hilfsformeln, die sich mühelos ergeben:

$$\left. \begin{aligned} Q_1^2 + Q_2^2 &= \frac{1}{2} (\mathfrak{C}o\int 2\beta x + \cos 2\alpha x) \\ Q_3^2 + Q_4^2 &= \frac{1}{2} (\mathfrak{C}o\int 2\beta x - \cos 2\alpha x) \\ Q_1 Q_3 + Q_2 Q_4 &= \frac{1}{2} \mathfrak{S}in 2\beta x \\ Q_1 Q_4 - Q_2 Q_3 &= \frac{1}{2} \sin 2\alpha x \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Will man den Verlust durch Ableitung im Dielektrikum $\int_0^l AV_{\text{eff}}^2 dx$ oder durch Joulesche Wärme im Leiter $\int_0^l RJ_{\text{eff}}^2 dx$ bestimmen, dann muß man die effektiven Werte der Spannung und des Stromes kennen.

Die Berechnung der Integrale ist zwar umständlich, aber ohne Schwierigkeit auszuführen, wobei die soeben erwähnten Hilfsformeln gute Dienste beweisen werden.

Aus Gl. (39) und (40) folgt nach Ordnung der Ausdrücke:

$$V_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{2} \{ (A'^2 + A''^2 + B'^2 + B''^2) \mathfrak{C}o\int 2\beta x \mp 2(A'B' + A''B'') \mathfrak{S}in 2\beta x + (A'^2 + A''^2 - B'^2 - B''^2) \cos 2\alpha x \mp 2(A''B' - A'B'') \sin 2\alpha x \}.$$

Nun ist

$$\int \mathfrak{C}o\int 2\beta x dx = \frac{\mathfrak{S}in 2\beta x}{2\beta}; \quad \int \mathfrak{S}in 2\beta x dx = \frac{\mathfrak{C}o\int 2\beta x}{2\beta}$$

$$\int \sin 2\alpha x dx = -\frac{\cos 2\alpha x}{2\alpha}; \quad \int \cos 2\alpha x dx = \frac{\sin 2\alpha x}{2\alpha}.$$

Also wird der mittlere dielektrische Verlust über die Länge l für 1 km:

$$\begin{aligned} \frac{1}{l} \cdot W_A &= \frac{1}{l} \int_0^l AV_{\text{eff}}^2 dx = \frac{A}{2} \left\{ (A'^2 + A''^2 + B'^2 + B''^2) \frac{\mathfrak{S}in 2\beta l}{2\beta l} \right. \\ &\quad + (A'^2 + A''^2 - B'^2 - B''^2) \frac{\sin 2\alpha l}{2\alpha l} \\ &\quad \mp 2(A'B' + A''B'') \frac{\mathfrak{C}o\int 2\beta l}{2\beta l} \\ &\quad \left. \pm 2(A''B' - A'B'') \frac{\cos 2\alpha l}{2\alpha l} \right\}. \end{aligned} \quad (42)$$

Ebenso findet man:

$$J_{\text{eff}}^2 = Y_2^2 \{ (A'^2 + A''^2 + B'^2 + B''^2) \mathfrak{C}o\int 2\beta x \mp 2(A'B' + A''B'') \mathfrak{S}in 2\beta x - (A'^2 + A''^2 - B'^2 - B''^2) \cos 2\alpha x \pm 2(A''B' - A'B'') \sin 2\alpha x \}$$

und den Verlust im Widerstande für 1 km:

$$\begin{aligned} \frac{1}{l} W_R &= \int_0^l RJ_{\text{eff}}^2 dx = \frac{RY^2}{2} \left\{ (A'^2 + A''^2 + B'^2 + B''^2) \frac{\mathfrak{S}in 2\beta l}{2\beta l} \right. \\ &\quad \left. - (A'^2 + A''^2 - B'^2 - B''^2) \frac{\sin 2\alpha l}{2\alpha l} \right\} \end{aligned}$$

$$\mp 2(A'B' + A''B'') \frac{\mathfrak{Cof} 2\beta l}{2\beta l} \pm 2(A''B' - A'B'') \frac{\cos 2\alpha l}{2\alpha l} \}. \quad (43)$$

Der Gesamtverlust enthält also, wie man sieht, den Faktor $A \pm RY^2$. Dieser kann nun leicht weiter verändert werden. Denn es ist nach Seite 459:

$$A + RY^2 = |\mathfrak{C}| (\cos \delta + \cos \gamma) = 2 |\mathfrak{C}| \cos \frac{1}{2}(\delta + \gamma) \cos \frac{1}{2}(\delta - \gamma).$$

$$A - RY^2 = |\mathfrak{C}| (\cos \delta - \cos \gamma) = -2 |\mathfrak{C}| \sin \frac{1}{2}(\delta + \gamma) \sin \frac{1}{2}(\delta - \gamma).$$

Nun ist aber

$$\cos \frac{1}{2}(\delta + \gamma) = \cos \mu = \frac{\beta}{|\mathfrak{R}\mathfrak{C}|}; \quad \cos \frac{1}{2}(\delta - \gamma) = \cos \xi$$

und

$$\sin \frac{1}{2}(\delta + \gamma) = \sin \mu = \frac{\alpha}{|\mathfrak{R}\mathfrak{C}|}; \quad \sin \frac{1}{2}(\delta - \gamma) = \sin \xi.$$

Man erhält also

$$\frac{1}{2}(A + RY^2) = \frac{\beta}{2} \left| \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{R}} \right| \cos \frac{1}{2}(\delta - \gamma) = \frac{\beta}{2} Y \cos \xi$$

$$\frac{1}{2}(A - RY^2) = -\frac{\alpha}{2} \left| \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{R}} \right| \sin \frac{1}{2}(\delta - \gamma) = \frac{\alpha}{2} Y \sin \xi$$

und somit für den Gesamtverlust über l km Länge;

$$W_A + W_R = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A^2 + C^2 \omega^2}{R^2 + L^2 \omega^2}} \{ [A'^2 + A''^2 + B'^2 + B''^2] \mathfrak{Cin} 2\beta l \mp 2(A'B' + A''B'') \mathfrak{Cof} 2\beta l \cos \xi - [(A'^2 + A''^2 - B'^2 - B''^2) \sin 2\alpha l \pm 2(A''B' - A'B'') \cos 2\alpha l \sin \xi] \}, \quad (44)$$

Von den doppelten Vorzeichen bei den zweiten Ausdrücken jeder eckigen Klammer in den Gl. (42), (43) und (44) gilt jeweils das obere für Zählung des Abstandes vom Beginn, das untere für Zählung des Abstandes vom Ende der Leitungen.

Die Gleichungen von (37) an gelten allgemein. Sie enthalten noch die vier Unbekannten A' , A'' , B' und B'' , die sich aus den Betriebsbedingungen für spezielle Fälle ermitteln lassen. Einzelne dieser Fälle sollen nun hier behandelt und ihr Zusammenhang mit früher Erörtertem soll aufgezeigt werden.

10. Behandlung spezieller Fälle in reeller Form.

a) **Am Ende offene Leitung.** Die Grenzbedingungen sind für Zählung vom Ende, wobei $x = 0$ ist: $V_2' = E_{2,0}$, $V_2'' = 0$; $J_2 = 0$.

Also folgt aus (39)

$$A' = E_{2,0}; \quad A'' = 0; \quad B' = B'' = 0.$$

Die Spannung im Punkte x hat die Komponenten

$$\left. \begin{aligned} V_x' &= E_{2,0} Q_1 \quad \text{und} \quad V_x'' = E_{2,0} Q_2. \\ \text{Die Komponenten des Stromes sind:} \\ J_x' &= Y E_{2,0} (Q_3 \cos \xi - Q_4 \sin \xi), \\ J_x'' &= Y E_{2,0} (Q_4 \cos \xi + Q_3 \sin \xi). \end{aligned} \right\} \quad (39a)$$

Unter Berücksichtigung von Gl. (41) folgt nach Quadrierung und Zusammenzählung

$$\left. \begin{aligned} V_x &= E_{2,0} \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2} = E_{2,0} \sqrt{\frac{1}{2} (\mathfrak{Cof} 2\beta x + \cos 2\alpha x)} \\ J_x &= Y E_{2,0} \sqrt{Q_3^2 + Q_4^2} = Y E_{2,0} \sqrt{\frac{1}{2} (\mathfrak{Cof} 2\beta x - \cos 2\alpha x)} \end{aligned} \right\} \quad (39b)$$

und für den Ladestrom am Anfang ($x = l$) aus den beiden vorstehenden Gleichungen

$$J_{1,0} = E_{1,0} Y \sqrt{\frac{\mathfrak{Cof} 2\beta l - \cos 2\alpha l}{\mathfrak{Cof} 2\beta l + \cos 2\alpha l}}, \quad (45)$$

für die Ladespannung

$$E_{1,0} = E_{2,0} \sqrt{\frac{1}{2} (\mathfrak{Cof} 2\beta l + \cos 2\alpha l)}, \quad (46)$$

für den Ladeverlust nach Gl. (41), (42), (43) und (46)

$$\left. \begin{aligned} W_A &= \frac{A E_{1,0}^2}{\mathfrak{Cof} 2\beta l + \cos 2\alpha l} \left(\frac{\mathfrak{Cin} 2\beta l}{2\beta} + \frac{\sin 2\alpha l}{2\alpha} \right) \\ W_R &= \frac{R Y^2 E_{1,0}^2}{\mathfrak{Cof} 2\beta l + \cos 2\alpha l} \left(\frac{\mathfrak{Cin} 2\beta l}{2\beta} - \frac{\sin 2\alpha l}{2\alpha} \right) \\ W_A + W_R &= E_{1,0}^2 Y \frac{\mathfrak{Cin} 2\beta l \cos \xi - \sin 2\alpha l \sin \xi}{\mathfrak{Cof} 2\beta l + \cos 2\alpha l} \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Man kann auch ausrechnen, daß

$$\operatorname{tg} \varphi_{1,0} = - \frac{\mathfrak{Cin} 2\beta l \cos \xi + \sin 2\alpha l \sin \xi}{\mathfrak{Cin} 2\beta l \sin \xi - \sin 2\alpha l \cos \xi}. \quad (47a)$$

b) **Am Ende kurzgeschlossene Leitung.** Hierbei ist für $x = 0$ die Endspannung $E_2 = 0$, der Strom $J = J_2 e^{j\varphi_2}$, also $Q_1 = 1$; $Q_2 = Q_3 = Q_4 = 0$.

Man findet dann aus Gl. (37) $J_2 \cos \varphi_2 = C'$; $J_2 \sin \varphi_2 = C''$; $A' = A'' = 0$. Dies gibt eingesetzt in Gl. (39)

$$\begin{aligned} V' &= B' Q_3 - B'' Q_4 \\ V'' &= B' Q_4 + B'' Q_3 \\ J' &= J_2 (Q_1 \cos \varphi_2 - Q_2 \sin \varphi_2) + (D' Q_3 - D'' Q_4) \\ J'' &= J_2 (Q_2 \cos \varphi_2 + Q_1 \sin \varphi_2) + D' Q_4 + D'' Q_3. \end{aligned}$$

Hierin sind noch B' , B'' , D' und D'' aus Gl. (40) zu bestimmen. Man findet

$$\begin{aligned} D' = D'' &= 0; \quad C' = J_2 \cos \varphi_2 = Y (B' \cos \xi - B'' \sin \xi) \\ C'' &= J_2 \sin \varphi_2 = Y (B' \sin \xi + B'' \cos \xi) \end{aligned}$$

und hieraus ergibt sich leicht

$$\begin{aligned} B' &= Z J_2 \cos (\varphi_2 - \xi) \\ B'' &= Z J_2 \sin (\varphi_2 - \xi). \end{aligned}$$

Bei Einsetzung in Gl. (39) folgt

$$\left. \begin{aligned} V_x' &= Z J_2 [Q_3 \cos(\varphi_2 - \xi) - Q_4 \sin(\varphi_2 - \xi)] \\ V_x'' &= Z J_2 [Q_4 \cos(\varphi_2 - \xi) + Q_3 \sin(\varphi_2 - \xi)] \\ J_x' &= J_2 (Q_1 \cos \varphi_2 - Q_2 \sin \varphi_2) \\ J_x'' &= J_2 (Q_2 \cos \varphi_2 + Q_1 \sin \varphi_2) \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Durch Quadrieren und Addieren findet man für den Punkt im Abstand x vom Ende:

$$\left. \begin{aligned} V_x &= Z J_2 \sqrt{Q_3^2 + Q_4^2} = Z J_2 \sqrt{\frac{1}{2} (\cos 2\beta x - \cos 2\alpha x)} \\ J_x &= J_2 \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2} = J_2 \sqrt{\frac{1}{2} (\cos 2\beta x + \cos 2\alpha x)} \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

und für $x = l$ die Spannung und den Strom am Anfang bei kurzgeschlossenem Ende:

$$\left. \begin{aligned} V_{1,k} &= Z J_2 \sqrt{\frac{1}{2} (\cos 2\beta l - \cos 2\alpha l)} = E_{1,k} \\ J_{1,k} &= J_2 \sqrt{\frac{1}{2} (\cos 2\beta l - \cos 2\alpha l)} \\ &= Y E_{1,k} \sqrt{\frac{\cos 2\beta l + \cos 2\alpha l}{\cos 2\beta l - \cos 2\alpha l}} \end{aligned} \right\} \quad (49a)$$

Die Komponenten im Punkte x sind aus Gl. (48) völlig bekannt, sobald φ_2 bekannt ist. Da wir die Spannung V' am Ende als Ursprung der räumlichen Phasenzählung gewählt haben, muß für $x = 0$ auch $V'' = 0$ sein. Und da für $x = 0$ auch die Leistung Null sein muß, folgt $J' = 0$. Somit muß in Gl. (48)

$$J' = J_2 (Q_1 \cos \varphi_2 - Q_2 \sin \varphi_2) = 0 \text{ für } x = 0$$

und da $Q_1 = 1$, $Q_2 = 0$ für $x = 0$, folgt $\cos \varphi_2 = 0$; $\sin \varphi_2 = 1$, $\varphi_2 = \varphi_k = 90^\circ$ für $x = 0$. Eingesetzt in Gl. (48) gibt

$$\left. \begin{aligned} V_x' &= Z J_2 (Q_3 \sin \xi - Q_4 \cos \xi) \\ V_x'' &= Z J_2 (Q_4 \sin \xi + Q_3 \cos \xi) \\ J_x' &= -J_2 Q_2 \\ J_x'' &= J_2 Q_1 \end{aligned} \right\} \quad (48a)$$

Der Verlust folgt aus der allgemeinen Beziehung $V_{\varepsilon 0} \cdot J_{\varepsilon} \cdot \varphi = V J_{\varepsilon} - \varphi = J' V' + J'' V''$. Man findet ihn aus den drei Gleichungen (47) durch Vertauschung der Vorzeichen in den Klammern und im Zähler des Bruches.

c) Zusammenhang mit früher Erörtertem. Wir fanden hier für Leerlauf

$$\text{den Ladestrom } J_{1,0} = E_{1,0} Y \sqrt{\frac{\cos 2\beta l - \cos 2\alpha l}{\cos 2\beta l + \cos 2\alpha l}} \quad (45)$$

und für Kurzschluß den Strom $J_{1,k}$ am Anfang gleich demselben Ausdruck mit der reziproken Wurzel. Für diese kann man nach Gl. (38) und (40) auch schreiben:

$$\sqrt{\frac{\cos 2\beta l - \cos 2\alpha l}{\cos 2\beta l + \cos 2\alpha l}} = \sqrt{\frac{Q_3^2 + Q_4^2}{Q_1^2 + Q_2^2}} \Bigg]_{x=l} = \frac{\sin ml}{\cos ml} = \operatorname{Tg} ml$$

und der Ausdruck Gl. (45) nimmt dann die Form an:

$$J_{1,0} = E_1 Y \mathfrak{I}g ml = E_1 Y \frac{\varepsilon^{ml} - \varepsilon^{-ml}}{\varepsilon^{ml} + \varepsilon^{-ml}} \quad (10)$$

und ähnlich ist

$$J_{1,k} = E_{1,k} Y \mathfrak{C}otg ml = E_{1,k} Y \cdot \frac{\varepsilon^{ml} + \varepsilon^{-ml}}{\varepsilon^{ml} - \varepsilon^{-ml}}. \quad (12)$$

Es sind also die früheren Gleichungen (10) und (12), die nun durch Gl. (45) und (49) in reeller Form dargestellt werden, wobei für m der absolute Wert $|m|$ zu nehmen ist. Der Richtungswiderstand der offenen Leitung ist:

$$Z_0 = \frac{E_{1,0}}{J_{1,0}} = Z \cdot \sqrt{\frac{\mathfrak{C}of 2\beta l + \cos 2\alpha l}{\mathfrak{C}of 2\beta l - \cos 2\alpha l}} = Z \mathfrak{C}otg ml. \quad (11)$$

Der Widerstandsoperator der kurzgeschlossenen Leitung ist

$$Z_k = \frac{E_{1,k}}{U_{1,k}} = Z \cdot \sqrt{\frac{\mathfrak{C}of 2\beta l - \cos 2\alpha l}{\mathfrak{C}of 2\beta l + \cos 2\alpha l}} = Z \mathfrak{I}g ml, \quad (13)$$

wobei

$$Z = \sqrt{\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{A^2 + \omega^2 C^2}}. \quad (5)$$

In dem hypothetischen Falle, daß die Verluste vernachlässigbar sind, also $\beta = 0$ ist, findet man aus den Gl. (39b) für Leerlauf:

$$V_x = E_2 \sqrt{\frac{1}{2}(\mathfrak{C}of 2\beta x + \cos 2\alpha x)} = E_2 \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha x}{2}} = E_2 \cos \alpha x,$$

$$J_x = Y E_2 \sqrt{\frac{1}{2}(\mathfrak{C}of 2\beta x - \cos 2\alpha x)} = Y E_2 \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha x}{2}} = Y E_2 \sin \alpha x,$$

also $J_x = Y E_x \operatorname{tg} \alpha x$ und $Y_0 = Y \cdot \operatorname{tg} \alpha x$.

Die resultierenden Spannungs- und Stromwellen besitzen also in diesem besonderen Falle die Eigenschaften stehender Wellen. Für die Punkte $x = 0, \frac{\pi}{\alpha}, \frac{2\pi}{\alpha}, \frac{3\pi}{\alpha} \dots$ ist der Strom stets Null, zwischen diesen Punkten schwingt er zwischen einem Maximum und einem Minimum. An den Stellen $\alpha x = \pi, 2\pi, 3\pi \dots$ oder den geraden Quadranten treten also stets Knoten, an den Stellen $\alpha x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \dots$ oder an den Enden der ungeraden Quadranten treten stets Bäuche der Stromwelle auf.

Die Spannungswelle, die räumlich (und zeitlich) um 90° voreilt, hat Knoten an den Stellen $\alpha x = \frac{\pi}{2}$ oder ungeraden Vielfachen davon, und Bäuche an den Stellen $\alpha x = 0, \pi, 2\pi \dots$ oder an den Enden der geraden Quadranten.

Am Leitungsende, für $x = 0$, ist die höchste Spannung vorhanden, im Abstände $x = \frac{2\pi}{\alpha}$ wiederholt sich derselbe Wert und im Abstände $\frac{3\pi}{2\alpha}$ und $\frac{5\pi}{2\alpha}$ ist die Spannung Null. Ist also die Leitungslänge $l = \frac{\pi}{2\alpha}$ oder $\frac{5\pi}{2\alpha}$, dann ist in dem hier vorliegenden hypothetischen Falle keine

Spannung nötig (also $V_1 = 0$) um in der leerlaufenden Leitung ($J_2 = 0$) starke Ströme J_x und Spannungen V_x hervorzurufen.

Denkt man β zwar klein, aber von Null verschieden, dann findet man auch, daß am Leitungsende die höchste Spannung auftritt, wenn die Leitung in Viertelwellenlänge (oder ungeraden Vielfachen daran) schwingt. Dieser Höchstwert ist dann aus Gl. (46)

$$E_{2,0} = \frac{2 E_{1,0}}{\sqrt{2 \operatorname{Co} | 2 \beta l + 2 \cos 2 \alpha l}} \quad (46)$$

und Einführung von $\alpha l = \pi/2$ zu:

$$E_{2,0 \max} = \frac{2 E_{1,0}}{\sqrt{\varepsilon^2 \beta l + \varepsilon^{-2} \beta l - 2}} = \frac{2 E_{1,0}}{\varepsilon \beta l - \varepsilon^{-\beta l}} = \frac{E_{1,0}}{\operatorname{Sin} \beta l} \approx \frac{E_{1,0}}{\beta l}.$$

Und da für kleine Werte von β nach Gl. (9) $\alpha \approx \omega \sqrt{CL}$, tritt dieser höchste Wert ein bei der Frequenz

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{4l\sqrt{CL}}.$$

Für Kurzschluß bei vernachlässigbaren Verlusten ($\beta = 0$) werden die Gleichungen (49):

$$V_{x,k} = Z J_2 \sqrt{1 - \cos 2\alpha x} = Z J_2 \sin \alpha x,$$

$$J_{x,k} = J_2 \sqrt{1 + \cos 2\alpha x} = J_2 \cos \alpha x,$$

$$Z_k = Z \operatorname{tg} \alpha x.$$

Hier ist die Stromwelle räumlich und zeitlich vom Ende an gerechnet 90° vor der Spannungswelle, und man erhält wiederum stehende Wellen, wobei die Strombäuche an den Stellen $\alpha x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi \dots$, die Spannungsbäuche an den Stellen $\alpha x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \dots$ liegen. Hier erhält man für den Sonderfall $\beta = 0, l = \frac{5\pi}{2\alpha}$ den eigenartigen Zustand, daß eine große Anfangsspannung keinen Strom ($J_{1,k} = 0$) in der Leitung entsendet, obwohl am kurzgeschlossenen Ende ($x = 0$) der meßbare Strom J_2 vorhanden ist. Dieser erreicht seinen Höchstwert für $\alpha l = \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} J_{2,k \max} &= \left. \frac{2 J_{1,k}}{\sqrt{2 \operatorname{Co} | 2 \beta l + 2 \cos 2 \alpha l}} \right]_{\alpha l = \frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2 J_{1,k}}{\sqrt{\varepsilon^2 \beta l + \varepsilon^{-2} \beta l - 2}} = \frac{2 J_{1,k}}{\varepsilon \beta l - \varepsilon^{-\beta l}} = \frac{J_{1,k}}{\beta l}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich wieder der mehrfach betonte Dualismus von Leerlauf und Kurzschluß. Nur in diesen Betriebszuständen, also bei offenem oder kurzgeschlossenem Ende und bei verschwindend kleinen Verlusten treten stehende Wellen auf. Sobald eine dieser Bedingungen nicht erfüllt ist, schreiten Strom- und Spannungswellen längs der Leitung fort.

d) **Anwendung auf kürzere Leitungen.** Wenn die Leitung so kurz bzw. l so klein ist, daß für ε^{ml} die Reihenentwicklung vorgenommen und beim ersten Gliede abgebrochen werden kann, findet man für den effektiven Wert des Ladestromes angenähert¹⁾

$$J_{1,0} \approx l \sqrt{A^2 + \omega^2 C^2} E_{1,0} \left\{ 1 + \frac{1}{3} l^2 (CL\omega^2 - AR) \right\} \quad (49)$$

für die Spannung am Ende

$$E_{2,0} \approx E_{1,0} \left\{ 1 + \frac{1}{2} l^2 (CL\omega^2 - AR) \right\} \quad (50)$$

und für den Richtungsgegenstand

$$\mathfrak{B}_0 \approx \frac{1}{l(A + j\omega C)} + \frac{1}{3} l(R + j\omega L). \quad (50a)$$

Der Ladestrom ist also der gleiche, als wäre ein Leiter vom Widerstandsoperator

$$\frac{1}{l(A + j\omega C)}$$

und ein Leiter vom Widerstandsoperator $\frac{1}{3} l(R + j\omega L)$ in Serie an die Ladespannung gelegt, das heißt als wäre dem Kabelstück ein Drittel seiner Induktivität und seines Widerstandes in Serie vorgeschaltet, und als wäre es selbst dafür ohne Induktivität und Widerstand.

Ähnlich gilt für die effektiven Werte bei Kurzschluß:

$$J_{1,k} = \frac{E_{1,k}}{l \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \left\{ 1 - \frac{1}{3} l^2 (CL\omega^2 - AR) \right\}, \quad (51)$$

$$J_{2,k} = \frac{E_{1,k}}{l \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \left\{ 1 + \frac{1}{6} l^2 (CL\omega^2 - AR) \right\}. \quad (52)$$

Im allgemeinen ist $J_{2,k}$ größer als $J_{1,k}$ weil die Leitung mit Induktivität und Kapazität einen geschlossenen Schwingungskreis bildet, in dem eine erzwungene Schwingung sich dem zugeführten Strom superponiert.

Endlich ergibt sich aus Gl. (51) und (52) die Beziehung

$$E_{1,k} = l \sqrt{R^2 + L^2 \omega^2} \left\{ \frac{1}{3} J_{1,k} + \frac{2}{3} J_{2,k} \right\},$$

die völlig analog ist der für die leerlaufende Leitung aus Gl. (49) und (50) abzuleitenden Beziehung

$$J_{1,0} = l \sqrt{A^2 + C^2 \omega^2} \left\{ \frac{1}{3} E_{1,0} + \frac{2}{3} E_{2,0} \right\}. \quad (54)$$

Überhaupt kann man das Problem des Kurzschlußstromes aus dem des Ladestromes herleiten, wenn man E mit J , A mit R und C mit L vertauscht.

Setzt man

$$J_{1,k} = \frac{E_1 \varepsilon^{j\omega t}}{\mathfrak{B}_k},$$

so ergibt sich für den Widerstandsoperator die Beziehung

$$\mathfrak{B}_k = \frac{1}{\mathfrak{B}_k} = \frac{1}{l(R + j\omega L)} + \frac{1}{3} l(A + j\omega C). \quad (53)$$

¹⁾ Vgl. G. Roessler, Fernleitung von Wechselströmen, Berlin 1908. — Orlich, E.: Kapazität und Induktivität, Braunschweig 1909. — Diesselhorst, H. u. F. Emde: ETZ 1909, S. 1186.

Der zugeführte Kurzschlußstrom ist also der gleiche, als wäre ein Leiter vom Widerstandsoperator $l(R + j\omega L)$ und ein anderer mit der Admittanz $\frac{1}{3}l(A + j\omega C)$ parallel an die Spannung gelegt, das heißt als wäre dem Kabelstück ein Drittel seiner Kapazität und seiner Ableitung parallel geschaltet und als wäre es selbst dafür ohne Kapazität und Ableitung.

e) **Zahlenbeispiel.** Für ein Drehstromkabel von $3 \times 70 \text{ mm}^2$ Durchmesser, dessen Länge $l = 175,9 \text{ km} = \frac{1}{12}$ der Wellenlänge ($\lambda = 2110,4 \text{ km}$) ist, sei die Betriebsspannung 30000 Volt. In die Rechnungen tritt dann überall die Phasenspannung $30000 : \sqrt{3} = 17330 \text{ Volt}$ ein. Es ist dies dasselbe Kabel, wofür bereits auf Seite 459 dieses Kapitels berechnet wurde:

$$\begin{aligned} \gamma &= 21^\circ 30' & \delta &= 80^\circ 40' 45'' \\ |\mathfrak{R}| &= 0,2687 / \underline{21^\circ 30'} \text{ Ohm} & |\mathfrak{G}| &= 49,02 \cdot 10^{-6} / \overline{88^\circ 40' 45''} \text{ Siemens} \\ Z &= 74,03 / \underline{-33^\circ 35' 23''} \text{ Ohm}; & m &= 3,629 \cdot 10^{-3}; \quad \mu = 55^\circ 5' 23'' \\ \beta &= 2,077 \cdot 10^{-3} & \lambda &= 2110,4 \text{ km} \\ \alpha &= 2,976 \cdot 10^{-3} & w &= 105520 \text{ km/sec.} \end{aligned}$$

Für die Länge $l = 175,9 \text{ km}$ ergibt sich nun noch:

$$\begin{aligned} \alpha l &= 0,524 = 30^\circ & \mathfrak{S}in \beta l &= 0,3732 & \cos \alpha l &= 0,866 \\ \beta l &= 0,365 & \mathfrak{C}os \beta l &= 1,0675 & \sin \alpha l &= 0,500 \\ 2\alpha l &= 1,048 = 60^\circ & \mathfrak{S}in 2\beta l &= 0,7966 & \cos 2\alpha l &= 0,500 \\ 2\beta l &= 0,730 & \mathfrak{C}os 2\beta l &= 1,2785 & \sin 2\alpha l &= 0,866. \end{aligned}$$

Ferner war $\xi = \frac{1}{2}(\delta - \gamma) = 33^\circ 35' 23''$, also $\cos \xi = 0,833$; $\sin \xi = 0,553$. Daraus berechnet man leicht

$$\begin{aligned} Q_1 &= 0,9244 \\ Q_2 &= 0,1866 \\ Q_3 &= 0,3230 \\ Q_4 &= 0,5340. \end{aligned}$$

Bei Leerlauf mit $E_2 = 17330 \text{ Volt}$ findet man aus (46)

$$\frac{E_{1,0}}{E_2} = \sqrt{\frac{1}{2}(\mathfrak{C}os 2\beta l + \cos 2\alpha l)} = \sqrt{\frac{1}{2}(1,2785 + 0,500)} = 0,942.$$

Die Spannung am Anfang ist also nur 94,2% der Endspannung. Die Komponenten der Spannung und des Stromes ergeben sich nach (39 a)

$$\begin{aligned} V_1' &= E_2 Q_1 = 17330 \cdot 0,9244 = 16020 \text{ Volt} \\ V_1'' &= E_2 Q_2 = 17330 \cdot 0,1866 = 3234 \quad ,, \\ J_{1,0}' &= \frac{17330}{74,03} (0,3230 \cdot 0,833 - 0,5340 \cdot 0,553) = -6,16 \text{ A} \\ J_{1,0}'' &= \frac{17330}{74,03} (0,5340 \cdot 0,833 + 0,3230 \cdot 0,553) = 145,9 \text{ A} \\ J_{1,0} &= \sqrt{\frac{1,2785 - 0,500}{2}} = 146 \text{ A.} \end{aligned}$$

Der Verlust bei Leerlauf ergibt sich aus (47) zu

$$W_A = 57,3 \text{ kW im Dielektrikum,}$$

$$W_R = 316,0 \text{ kW durch den Ladestrom,}$$

$$W_A = W_R = 373,3 \text{ kW zusammen.}$$

Den gleichen Wert findet man aus

$$\begin{aligned} W_A + W_R &= V_1' J_{1,0}' + V_1'' J_{1,0}'' = 16020(-6,16) + 3234 \cdot 145,9 \\ &= 373300 \text{ Watt.} \end{aligned}$$

Dieses Kabel werde nun noch am Ende belastet. Dafür müssen jedoch erst noch aus (39) die Beziehungen abgeleitet werden.

f) **Belastung am Ende des Kabels.** Gegeben sei die Endspannung $E_2 + j \cdot 0$ und der Strom am Ende $J_2 (\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2)$. In Gl. (39) ist also das untere Vorzeichen zu nehmen.

$$\begin{aligned} \text{Für } x = 0_1 \text{ ist} \quad J' &= J_2 \cos \varphi_2; & J'' &= J_2 \sin \varphi_2 \\ V' &= E_2; & V'' &= 0 \\ Q' &= 1; & Q_2 = Q_3 = Q_4 &= 0. \end{aligned}$$

Dies gibt eingesetzt in (39) $A' = E_2$; $A'' = 0$; $C' = J_2 \cos \varphi_2$; $C'' = J_2 \sin \varphi_2$. Führt man auch dies in (39) ein und bestimmt man B' , B'' , D' und D'' aus (40)

$$\begin{aligned} J_2 \cos \varphi_2 &= Y (B' \cos \xi - B'' \sin \xi) \\ J_2 \sin \varphi_2 &= Y (B' \sin \xi + B'' \cos \xi), \end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned} B' &= Z J_2 \cos (\varphi_2 - \xi) \\ B'' &= Z J_2 \sin (\varphi_2 - \xi) \\ D' &= Y E_2 \cos \xi \\ D'' &= Y E_2 \sin \xi, \end{aligned}$$

dann folgen aus (39) die neuen allgemeinen Gleichungen für das am Ende belastete Kabel

$$\left. \begin{aligned} V' &= E_2 Q_1 + J_2 Z [Q_3 \cos (\varphi_2 - \xi) - Q_4 \sin (\varphi_2 - \xi)] \\ V'' &= E_2 Q_2 + J_2 Z [Q_4 \cos (\varphi_2 - \xi) + Q_3 \sin (\varphi_2 - \xi)] \\ J' &= J_2 (Q_1 \cos \varphi_2 - Q_2 \sin \varphi_2) + Y E_2 [Q_3 \cos \xi - Q_4 \sin \xi] \\ J'' &= J_2 (Q_2 \cos \varphi_2 + Q_1 \sin \varphi_2) + Y E_2 [Q_4 \cos \xi + Q_3 \sin \xi] \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Hierin muß φ_2 negativ genommen werden, wenn der Strom am Ende verzögert ist gegen E_2 .

Nun sei in unserem Zahlenbeispiel

$$E_2 = 17330 \text{ Volt} \quad J_2 = 140 \text{ Amp.}, \quad \cos \varphi = 0,8, \quad \sin \varphi_2 = -0,6,$$

also der Verzögerungswinkel

$$\varphi_2 = -36^\circ 52'.$$

Da

$$\xi = -\zeta = +33^\circ 35' 23''$$

folgt

$$\varphi_2 - \xi = -70^\circ 27' 23''$$

$$\sin(\varphi_2 - \xi) = -0,9424; \quad \cos(\varphi_2 - \xi) = 0,3345.$$

Dies gibt, eingesetzt in (55),

$$\begin{aligned} V_1' &= 0,9244 E_2 + J_2 \cdot 74 [0,3230 \cdot 0,3345 - 0,5340 \cdot (-0,9424)] \\ &= 0,9244 E_2 + 45,22 J_2 = 16020 + 6331 = 22351 \text{ Volt,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_1'' &= 0,1866 E_2 + J_2 \cdot 74 [0,5340 \cdot 0,3345 + 0,3230 (-0,9424)] \\ &= 0,1866 E_2 - 9,31 J_2 = 3234 - 1303 = 1931 \text{ Volt.} \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{V_1''}{V_1'} = 0,0864; \quad \Phi = 4^\circ 56' 18''; \quad \cos \Phi = 0,9963;$$

$$V_1 = \frac{V_1'}{\cos \Phi} = 22440 \text{ Volt.}$$

Ähnlich findet man:

$$\begin{aligned} J_1' &= J_2 (0,9244 \cdot 0,8 + 0,1866 \cdot 0,6) + \frac{E_2}{74} (0,3230 \cdot 0,833 - 0,534 \cdot 0,553) \\ &= 0,8516 J_2 - 0,000354 E_2 = 119,22 - 6,14 = 113,08 \text{ A;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_1'' &= J_2 (0,1866 \cdot 0,8 - 0,9244 \cdot 0,6) + \frac{E_2}{74} (0,534 \cdot 0,833 + 0,323 \cdot 0,553) \\ &= -0,4054 J_2 + 0,00843 E_2 = -56,75 + 146,02 = 89,27 \text{ A;} \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{J_1''}{J_1'} = 0,789; \quad \chi = 38^\circ 17' 24''; \quad \cos \chi = 0,785;$$

$$J_1 = \frac{J_1'}{\cos \chi} = 144,1 \text{ A.}$$

Aus den Hilfswinkeln ergibt sich die Verschiebung zwischen V_1 und J_1 zu

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \chi - \Phi = 38^\circ 17' 24'' - 4^\circ 56' 18'' \\ &= 34^\circ 21' 6''; \quad \cos \varphi_1 = 0,826. \end{aligned}$$

Und daraus folgt

$$W_1 = 3 V_1 \cdot J_1 \cos \varphi_1 \cdot 10^{-3} \text{ kW,}$$

$$W_1 = 22400 \cdot 144,1 \cdot 0,826 \cdot 3 \cdot 10^{-3} = 8007 \text{ kW,}$$

$$W_2 = 17330 \cdot 140 \cdot 0,8 \cdot 3 \cdot 10^{-3} = 5820 \text{ kW,}$$

also der Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{W_2}{W_1} = 72,7 \text{ \% .}$$

Für andere Spannungen und Ströme am Ende kann man die Werte am Anfang ermitteln aus den für diesen Sonderfall geltenden Gleichungen

$$V_1' = 0,9244 E_2 + 45,22 J_2$$

$$V_1'' = 0,1866 E_2 - 9,31 J_2$$

$$J_1' = 0,8516 E_2 - 0,000354 J_2$$

$$J_1'' = -0,4054 E_2 + 0,00843 J_2$$

solange nämlich die Betriebswerte dieselben sind und $\cos \varphi_2 = 0,8$ bleibt.

Für andere Werte des Leistungsfaktors ergibt sich ein anderes System ähnlicher Gleichungen. Da die Leistung am Anfang stets $V_1' J_1' + V_1'' J_1''$, kann man für gegebene Leistung am Ende auch den höchsten und geringsten Wirkungsgrad ermitteln.

11. Graphische Darstellung durch logarithmische Spiralen¹⁾.

Das Verhalten von Strom und Spannung in der offenen kurzgeschlossenen oder belasteten Leitung, wie es durch die Gleichungen

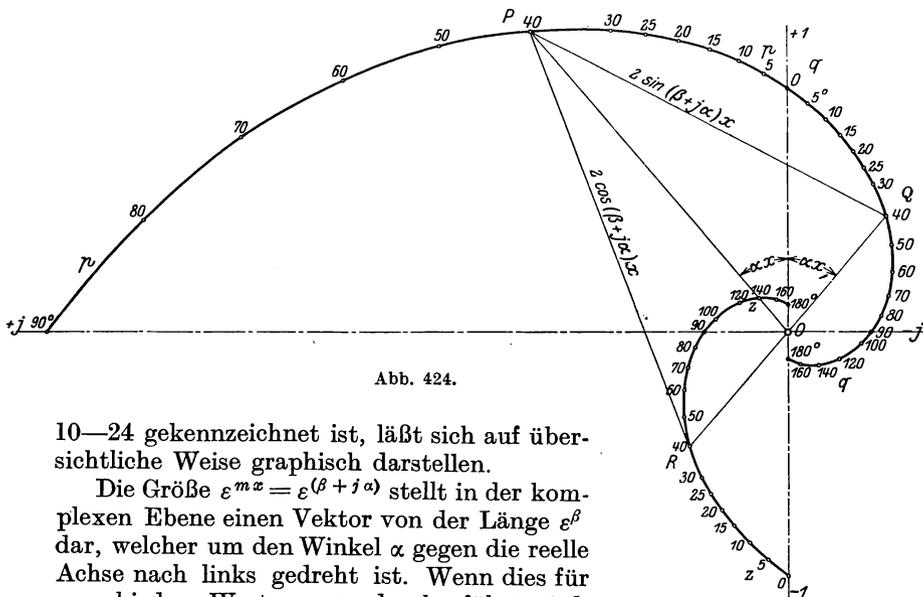


Abb. 424.

10—24 gekennzeichnet ist, läßt sich auf übersichtliche Weise graphisch darstellen.

Die Größe $\varepsilon^{m x} = \varepsilon^{(\beta + j \alpha) x}$ stellt in der komplexen Ebene einen Vektor von der Länge $\varepsilon^{\beta x}$ dar, welcher um den Winkel αx gegen die reelle Achse nach links gedreht ist. Wenn dies für verschiedene Werte von x durchgeführt wird, liegen die Endpunkte der Vektoren auf der logarithmischen Spirale pp , die für $x = 0$ im Punkte $+1$ beginnt (Abb. 424).

Die Größe $\varepsilon^{-m x} = \varepsilon^{-(\beta + j \alpha) x}$ liefert ebenfalls eine logarithmische Spirale, die im Punkte $+1$ beginnt; ihre Vektoren besitzen die mit x abnehmende Länge $\varepsilon^{-\beta x}$ und sind um den Winkel $(-\alpha x)$ gegen die reelle Achse geneigt. Die Endpunkte dieser Vektoren liegen also auf der logarithmischen Spirale 99 , die im Gegensatz zu pp über $\alpha x = 180^\circ$ gezeichnet ist.

Die Größe

$$-\varepsilon^{-m x} = -\varepsilon^{-(\beta + j \alpha) x}$$

schließlich ergibt sich durch Drehung der Spirale qq um 180° als die in Abb. 424 ebenfalls gezeichnete Kurve zz .

Hieraus lassen sich nun leicht die charakteristischen Größen \mathfrak{Y}_0 , \mathfrak{Z}_k und $\mathfrak{C} \cos m x$ der Grundgleichungen (10) bis (19) für beliebige Werte von x ermitteln.

¹⁾ Breisig, F.: ETZ 1900, S. 87 und 1899, Bd. 192, S. 383, 400, 417; auch Franke: ETZ 1891, S. 447, 458.

Unter dem beliebigen Winkel $\pm \alpha x$ stellt OP den Vektor $\varepsilon^{(\beta+j\alpha)x}$, OQ den Vektor $\varepsilon^{-(\beta+j\alpha)x}$, OR den Vektor $-\varepsilon^{-(\beta+j\alpha)x}$ dar. Es ist also

$$\cos mx = \frac{1}{2}(OP + OQ) = \frac{1}{2}RP$$

$$\sin mx = \frac{1}{2}(OP - OQ) = \frac{1}{2}QP,$$

und somit für den Punkt im Abstände x vom Ende:

$$\mathfrak{Y}_{o,x} = \mathfrak{Y} \cdot \cos mx = \mathfrak{Y} \cdot QP/RP, \quad (11a)$$

$$\mathfrak{Z}_{k,x} = \mathfrak{Z} \cdot \sin mx = \mathfrak{Z} \cdot QP/RP. \quad (13)$$

Für isoliertes oder kurzgeschlossenes Ende findet man dann für den Punkt im Abstände x vom Ende:

bei Leerlauf

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{B}_{x,0} &= \mathfrak{B}_2 \cos mx = \frac{1}{2} \mathfrak{B}_2 \cdot \overline{RP} \times \text{Maßstab der Volt} \\ \mathfrak{Z}_{x,0} &= \mathfrak{Y} \mathfrak{B}_2 \sin mx + \frac{1}{2} \mathfrak{Y} \mathfrak{B}_2 \cdot \overline{QP} \times \text{Maßstab der Amp.} \end{aligned} \right\}, \quad (10)$$

bei Kurzschluß

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{B}_{x,k} &= \mathfrak{Z}_2 \sin mx = \mathfrak{Z}_2 \cdot \overline{QP} \times \text{Maßstab der Volt} \\ \mathfrak{Z}_{x,k} &= \mathfrak{Z}_2 \cos mx = \frac{1}{2} \mathfrak{Z}_2 \cdot \overline{RP} \times \text{Maßstab der Amp.} \end{aligned} \right\}, \quad (12)$$

Für die am Ende mit der Impedanz \mathfrak{Z}_2 belasteten Leitung galten die Gl. (16a) und (18a)

$$\mathfrak{Z}/\mathfrak{Z}_2 = \frac{1}{2} \mathfrak{Y} \{ (\mathfrak{Z}_2 + \mathfrak{Z}) \varepsilon^{(\beta+j\alpha)x} - (\mathfrak{Z}_2 - \mathfrak{Z}) \varepsilon^{-(\beta+j\alpha)x} \}, \quad (16a)$$

$$\mathfrak{B}/\mathfrak{Z}_2 = \frac{1}{2} \{ (\mathfrak{Z}_2 + \mathfrak{Z}) \varepsilon^{(\beta+j\alpha)x} + (\mathfrak{Z}_2 - \mathfrak{Z}) \varepsilon^{-(\beta+j\alpha)x} \}, \quad (18a)$$

welche ebenfalls graphischer Behandlung zugänglich ist.

Die beiden Ausdrücke in der geschweiften Klammer stellen ebenfalls logarithmische Spiralen vor, die jedoch für $x = 0$ nicht mit der Einheit, sondern mit $(\mathfrak{Z}_2 \pm \mathfrak{Z})$ beginnen und dementsprechend verdreht sind. Der Verdrehungswinkel ergibt sich leicht aus der graphischen Konstruktion des ersten Fahrstrahles. Sei OD nach Größe und Richtung der Vektor \mathfrak{Z} (Abb. 425), OF der Vektor \mathfrak{Z}_2 . Fügen wir nun OD zu beiden Seiten an OF , dann sind A und B die Beginnpunkte der beiden Spiralen $(\mathfrak{Z}_2 + \mathfrak{Z})\varepsilon^{mx}$ und $(\mathfrak{Z}_2 - \mathfrak{Z})\varepsilon^{-mx}$ (Abb. 426). Durch Verdrehung von OB um 180° ergibt sich schließlich auch der Anfangspunkt C der Spirale $-(\mathfrak{Z}_2 - \mathfrak{Z})\varepsilon^{-mx}$.

Wollen wir nun Strom und Spannung im Punkt P im belasteten Zustande finden, dann tragen wir von den Anfangsstrahlen OA bzw. OB aus dem zugehörigen Winkel αx nach links bzw. rechts auf und finden dann die Längen.

$$\overline{PR} = \overline{OP} - \overline{OR} = 2\mathfrak{B}/\mathfrak{Z}_2 = (\mathfrak{Z}_2 + \mathfrak{Z})\varepsilon^{mx} + (\mathfrak{Z}_2 - \mathfrak{Z})\varepsilon^{-mx},$$

$$\overline{PQ} = \overline{OP} - \overline{OQ} = 2 \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{Z}_2 \mathfrak{Y}} = (\mathfrak{Z}_2 + \mathfrak{Z})\varepsilon^{mx} - (\mathfrak{Z}_2 - \mathfrak{Z})\varepsilon^{-mx},$$

die in Abb. 426 für $\alpha x = 40^\circ$ eingezeichnet sind.

Sind hieraus, unter Berücksichtigung der Maßstäbe, \mathfrak{B} und \mathfrak{Z} der Größe nach bestimmt, dann müssen sie noch auf ihren richtigen gegenseitigen Stand verdreht werden. Dies wird an den Beispielen deutlicher werden.

12. Übertragung über eine Viertelwellenlänge.

Durch ein Drehstromkabel von $3 \times 70 \text{ mm}^2$ Kabel mit 9 mm Isolation zwischen den Leitern und zwischen Leiter und Bleimantel sollen mit 30000 Volt verketteter Spannung 5820 kW bei $\cos \varphi = 0,8$ übertragen werden. Die Frequenz sei 50 Per./Sek.

Die Phasenspannung am Ende wird also

$$\mathfrak{R}_2 = \frac{30000}{\sqrt{3}} = 17330 \text{ Volt,}$$

der nacheilende Strom am Ende

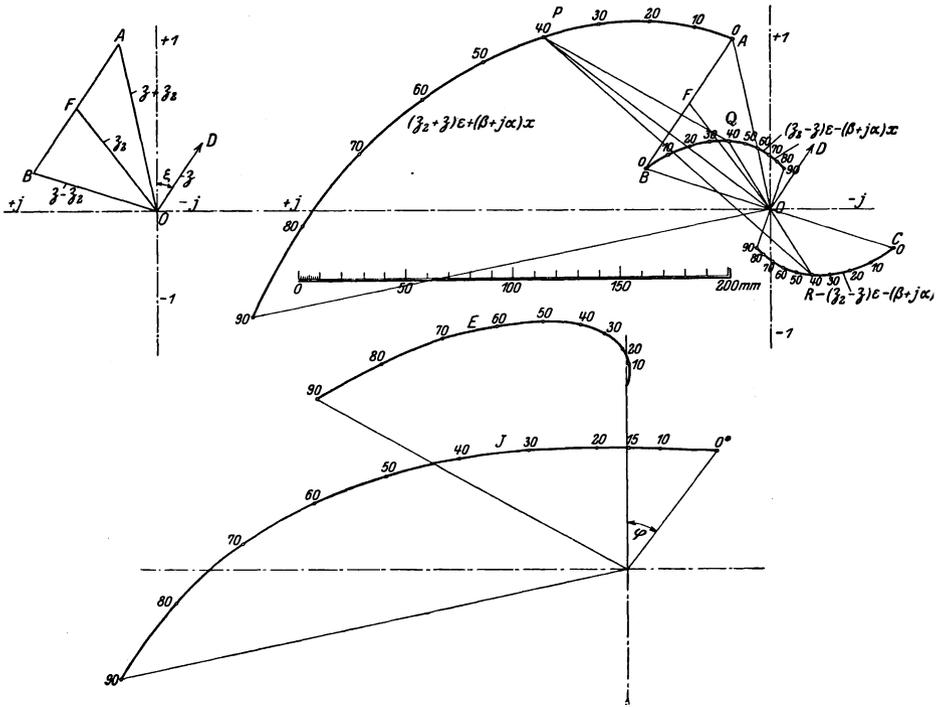


Abb. 425—427. Spiralen für ein belastetes Drehstromkabel von $\frac{1}{4}$ Wellenlänge.

$$J_2 = 140 / - 36^\circ 35' 23'' \text{ Amp.,}$$

der Richtungswiderstand am Ende

$$\mathfrak{Z}_2 = 123,8 / - 36^\circ 35' 23'' \text{ Ohm.}$$

Dasselbe Kabel ist bereits auf S. 459 und 481 dieses Kapitels verwendet worden. Die Betriebskapazität des Kabels betrage $C_1 = 0,156 \text{ Mf/km}$, die Betriebsinduktivität $3,14 \cdot 10^{-4} \text{ Henry/km}$, der dielektrische Verlust $\approx 0,6 \text{ Watt/kg Isolationssmasse}$ oder $1,014 \text{ kW/km}$. Daraus berechnen sich die bereits erwähnten Kabeldaten

$$R = 0,25 \text{ Ohm/km} \quad \mathfrak{R} = 0,2687 / 21^\circ 30' \text{ Ohm}$$

$$\begin{aligned}
 L\omega &= 0,0985 & \text{,,} & & \mathfrak{S} &= 49,02 \cdot 10^{-6} / 88^\circ 40' 45'' \text{ Ohm} \\
 A &= 1,13 \cdot 10^{-3} \text{ Siemens/km} & & & \beta &= 2,077 \cdot 10^{-3} \\
 C\omega &= 49 \cdot 10^{-3} & \text{,,} & & \alpha &= 2,976 \cdot 10^{-3}.
 \end{aligned}$$

Die Wellenlänge ist $\lambda = 2110,4$ km, ein Viertel davon oder $527,6$ km sind $\alpha x = 90^\circ$, so daß $1^\circ = 5,864$ km.

Die Impedanz des unendlich langen Kabels wäre $\mathfrak{Z} = 74,03$, ihre räumliche Phase $\zeta = -33^\circ 35' 23''$, wie auf S. 460 berechnet.

Für Vollast zeichne man etwa (in Abb. 425) $OD = 37$ mm unter $\xi = -33^\circ 35' 23''$ nach rechts von der reellen Achse. Der Maßstab wäre dann $1/2$. Man zeichne ferner $OF = \mathfrak{Z}_2 = 63,4$ mm unter dem Winkel $\varphi_2 = 36^\circ 35' 23''$ nach links von der reellen Achse. Man erhält so die Beginnstrahlen OA, OB, OC der drei logarithmischen Spiralen in Abb. 426. Aus dieser Abbildung mißt man dann $PR = 2 \text{ Coj } m x$ und $PQ = 2 \text{ Sin } m x$ in mm ab und findet für den Maßstab:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{S} &= \frac{2\mathfrak{Z}_2}{2\mathfrak{Z}} PQ = \frac{2 \cdot 140}{2 \cdot 73,03} PQ = 1,89 PQ; \\
 \sphericalangle \mathfrak{S} &= \sphericalangle \mathfrak{Z}_2 - \sphericalangle \mathfrak{Z} + \sphericalangle PQ; \\
 \mathfrak{B} &= \frac{2\mathfrak{Z}_2}{2} PR = \frac{2 \cdot 140}{2} PR = 140 PR; \\
 \sphericalangle \mathfrak{B} &= \sphericalangle \mathfrak{Z}_2 + \sphericalangle PR.
 \end{aligned}$$

Aus diesen Beziehungen ergeben sich auch die Winkel, unter welchen \mathfrak{S} und \mathfrak{B} erscheinen. Am Ende der Leitung wünschen wir zu erhalten

$$\sphericalangle \mathfrak{B}_2 = 0 \text{ und } \sphericalangle \mathfrak{S}_2 = \varphi_2 = -36^\circ 52'.$$

Wenn also die Richtung von \mathfrak{B}_2 als Ausgang gewählt wird, wünschen wir \mathfrak{S}_2 um den Winkel φ_2 dagegen verzögert. Tatsächlich finden wir aber für das Ende der Leitung, wo der allgemeine Wert \mathfrak{S} in den Sonderwert J_2 übergeht, $\sphericalangle PQ = \sphericalangle \mathfrak{Z} = \zeta = -33^\circ 35' 23''$. Wir müssen also alle Stromwerte noch $3^\circ 17'$ mit dem Uhrzeigersinn (nach

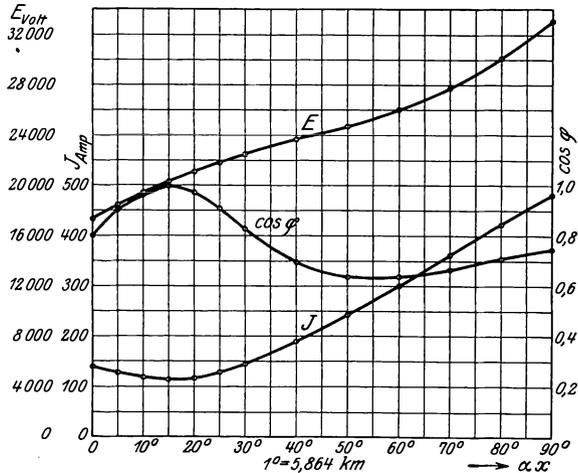


Abb. 428. Belastetes Kabel.

rechts) verdrehen. Für den Endwert \mathfrak{B}_2 finden wir $\sphericalangle PR = 36^\circ 52'$; erforderlich ist $\sphericalangle PR = 0$. Also müssen alle Spannungswerte um den Winkel φ_2 nach rechts gedreht werden. Die J_2 -Strahlen müssen also um $\varphi_2 - \zeta$, die \mathfrak{B} -Strahlen um φ_2 zurückgedreht werden, so daß sich in Polarkoordinaten, Abb. 427, in rechtwinkligen Koordinaten Abb. 428 ergibt. Aus Abb. 428 sind auch die Werte der Tabelle von 5° zu 5°

entnommen worden. Abb. 428 zeigt deutlich den wellenförmigen Verlauf der Effektivwerte der Spannung und des Stromes längs des Kabels. Der aus Abb. 427 berechnete in die Tafel eingetragene Leistungsfaktor wird gleich der Einheit, der Strom also ein Minimum für $\alpha x = 15^\circ = 87,93 \text{ km}$.

Tabelle für volle Belastung.

αx in °C	Aus Abb. 426 abgemessen		Berechnet		Aus Abb. 427 ent- nommen $\cos \varphi$	Leistung in kW	Wirkungs- grad $\eta_1 = \frac{5820}{\text{kW}}$ %/o	Strom
	PQ mm	PR mm	J Amp.	E Volt				
0	74	124	140	17330	0,8	5820	100	nachteilend
5	66,9	131,8	126,4	18452	0,90	6305	92,3	„
10	62,3	138,7	117,7	19418	0,97	6620	87,9	„
15	60,5	144,8	114,3	20272	1,0	6945	83,9	„
20	62,2	150,2	117,6	21028	0,97	7225	80,6	voreilend
25	67,6	155,6	127,8	21784	0,91	7580	76,8	„
30	76,6	160,8	144,8	22512	0,83	8100	71,9	„
40	99,5	168,7	188	23618	0,69	9240	63,0	„
50	128	177	241,9	24780	0,64	11440	51,0	„
60	158	186,2	298,6	26068	0,64	14880	39,1	„
70	190,9	199,2	360,8	27888	0,66	20100	28,9	„
80	223,5	215,5	422,4	30170	0,71	27130	21,5	„
90	257,2	237	485,7	33180	0,75	36100	16,3	„

Die Übertragung ist sowohl in bezug auf Wirkungsgrad als auf Spannungsänderung höchstens bis zu $30^\circ = \frac{1}{12}$ Wellenlänge praktisch brauchbar. Selbst dabei erreicht die Spannungsveränderung den hohen Wert von

$$100 \times \frac{22512 - 17330}{22512} = 23\%$$

und der Wirkungsgrad sinkt auf 72%. Aber 30° entsprechen auch bereits $30 \times 5,862 = 175 \text{ km}$, was für $22512 \sqrt{3} = 39000 \text{ Volt}$ bei dieser Leistung zu viel ist.

Für Nullast gehen wir aus von den Kurven der Abb. 426, worin die Einheit = 100 mm gezeichnet war. Die Maßstäbe sind dann für:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{S}_{x,0} &= \frac{n \cdot \mathfrak{S}_2}{2 \cdot 3} \cdot PQ = \frac{17330}{2 \cdot 100 \cdot 74,03} QP = 1,17 PQ \\ &\quad \sphericalangle \mathfrak{S}_{x,0} = \sphericalangle \mathfrak{S}_2 + \sphericalangle QQ - \sphericalangle 3. \\ \mathfrak{S}_{x,0} &= \frac{n \cdot \mathfrak{S}_2}{2} \cdot PR = \frac{17330}{200} RP = 86,65 PR; \\ &\quad \sphericalangle \mathfrak{S}_{x,0} = \sphericalangle \mathfrak{S}_2 + \sphericalangle RP. \end{aligned} \right\} (10)$$

Die Spannungsvektoren ergeben sich also in dem richtigen Stande, die Stromvektoren müssen um den Winkel $-\zeta = +33^\circ 35' 23''$ nach links verdreht werden. Man erhält so Abb. 429 in Polar-, Abb. 431 in rechtwinkligen Koordinaten.

Für Kurzschluß ergeben sich aus Abb. 426 die Maßstäbe

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{x,k} &= \frac{n \cdot \mathfrak{S}_2}{2} \cdot RP = \frac{140}{2 \cdot 100} RP = 0,7 PR; \\ \mathfrak{B}_{x,k} &= \frac{n \cdot \mathfrak{S}_2 \cdot \mathfrak{B}}{2} \cdot QP = \frac{140 \cdot 74,03}{2 \cdot 100} PQ = 51,84 PQ; \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} \sphericalangle \mathfrak{S} &= \sphericalangle \mathfrak{S}_2 + \sphericalangle RP. \\ \sphericalangle \mathfrak{B} &= \sphericalangle \mathfrak{S}_2 + \sphericalangle \mathfrak{B} + \sphericalangle QP. \end{aligned} \right\} (12)$$

Für die richtigen Stände muß folgende Überlegung angestellt werden. Der Stand des Spannungsstrahls \mathfrak{S}_2 am Ende soll wiederum der Ausgangspunkt der Zählung für die räumliche Phase sein. Die Linie QP steht im Endstande ($x=0$) aber unter dem Winkel $\mu = 1/2 (\gamma + \delta)$ gegen die reelle Achse. Es muß also am Ende

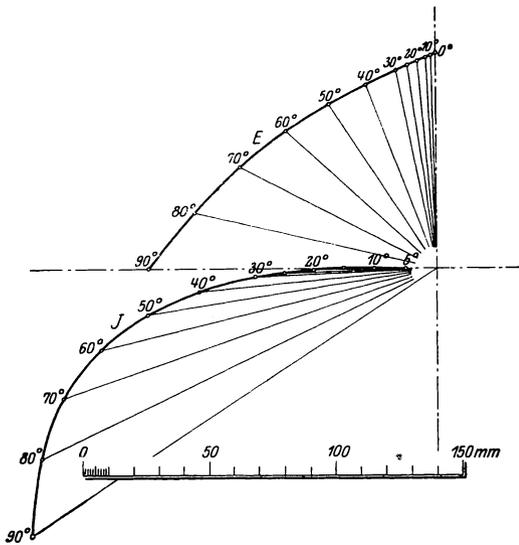


Abb. 429.

Nullast und Kurzschluß beim Kabel.

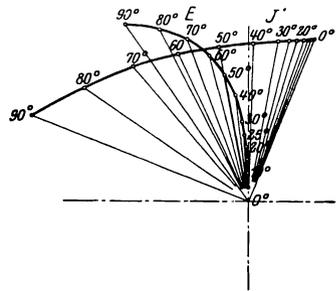


Abb. 430.

der Leitung $\sphericalangle \mathfrak{B} = 0 = \sphericalangle \mathfrak{S}_2 + \zeta + \mu$ oder $\sphericalangle \mathfrak{S}_2 = -(\mu + \zeta) = -55^\circ 5' 23'' + 33^\circ 35' 23'' = -21^\circ 30'$. Um diesen Winkel müssen alle Stromvektoren negativ, d. h. nach rechts gedreht werden; und um den Winkel $\mu = -55^\circ 5' 23''$ müssen alle Spannungsvektoren ebenfalls im Uhrzeigersinn gedreht werden. Man erhält so Abb. 430 und 432, wobei aus der Superposition von Leerlauf und Kurzschluß sich auch der Belastungszustand der Abb. 427 ergibt. Nur muß man, um Abb. 429 und Abb. 430 superponieren zu können, letztere Abb. noch um $\varphi_2 - (\mu + \zeta) = -36^\circ 52' + 21^\circ 30' = -15^\circ 22'$ im positiven Sinn, also nach rechts drehen

Die Werte für Nullast und Kurzschluß sind nicht mehr tabellarisch zusammengestellt, um Raum zu sparen. Man erkennt jedoch aus Abb. 431 und 432, daß schon bei etwa $30^\circ \approx 175$ km Länge bei Leerlauf die Spannung und bei Kurzschluß der Strom am Ende ($l = 0$) höher sind als am Generator, wie auf S. 481 für Leerlauf auch ausgerechnet wurde.

Abb. 433 zeigt schließlich noch, welche Leistungen bei Nullast, Kurzschluß und Vollast geliefert werden müssen und wie der Wirkungsgrad η_1 und das Verhältnis

$$\eta_2 = \frac{\text{abzugebende Leistung}}{\text{Leistung bei Vollast} - \text{Leistung bei Leerlauf}}$$

sich ändern.

Bei der Behandlung dieses Beispiels ist außer acht gelassen, ob die

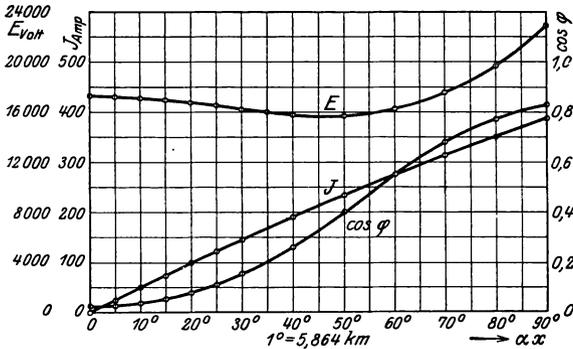


Abb. 431. Leerlaufendes Kabel.

Aluminiumkabel mit den Konstanten

$$R = 0,27 \text{ Ohm/km} \quad A = 0,0247 \cdot 10^{-6} \text{ Siemens/km}$$

$$\omega L = 0,376 \quad \omega C = 3,044 \cdot 10^{-3}$$

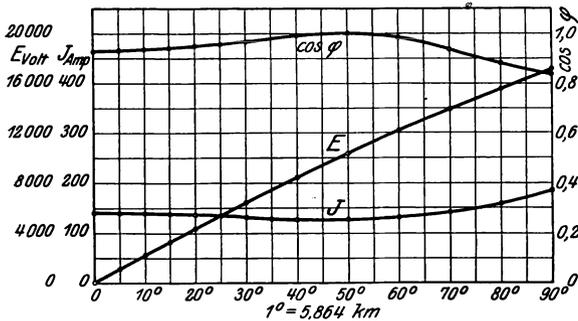


Abb. 432. Kurzgeschlossenes Kabel.

Isolation den hohen Spannungen gewachsen ist. Es handelt sich hier ja nur um die Erörterung der Verhältnisse, wobei diese Annahme zulässig war.

13. Übertragung über eine halbe Wellenlänge.

Durch eine Luftleitung aus 100 mm²

sollen 15000 kW Drehstrom mit dem Leistungsfaktor $\cos \varphi_2 = 0,8$ am Ende der Leitung abgeliefert werden. Die Phasenspannung sei 60000 Volt, die verkettete Spannung also 103922 Volt, die Frequenz 50 Per./Sek.

Aus den Daten folgt:
 $\beta = 0,4628 / 54^{\circ} 18'$

$$\alpha = 3,044 \cdot 10^{-6} / 89^{\circ} 32'$$

und ferner

$$\beta = 0,7725 \cdot 10^{-3}$$

$$\alpha = 0,9012 \cdot 10^{-3},$$

also die Wellenlänge

$$\lambda = 6972 \text{ km},$$

so daß

$$1^{\circ} = 19,367 \text{ km} .$$

Der ebene Vektor

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{\frac{\Re}{\mathfrak{E}}} = \sqrt{\frac{0,4628}{3,044 \cdot 10^{-3}}} / \frac{1}{2} (54^\circ 18' - 89^\circ 32') = 389,888 / -17^\circ 47'$$

werde durch OD (Abb. 434) vorgestellt. Der Richtungswiderstand der Belastung am Ende $\mathfrak{Z}_2 = \mathfrak{Z}_2 / \mathfrak{S}_2 = 60000 / 104,2 = 576 / 36^\circ 52'$ sei $OF_1 = 57,6$ mm. Der Maßstab ist dann 1:10 und A_1, B_1 sind die Anfangspunkte der Spiralen $(\mathfrak{Z}_2 + \mathfrak{Z}) \varepsilon^{-m\alpha}$ und $(\mathfrak{Z}_2 - \mathfrak{Z}) \varepsilon^{-m\alpha}$. Um die Spiralen noch auf ein Zeichenblatt von mäßiger Größe zu bringen, wählen wir als Maßstab 1:40 und erhalten so von A aus die Spirale

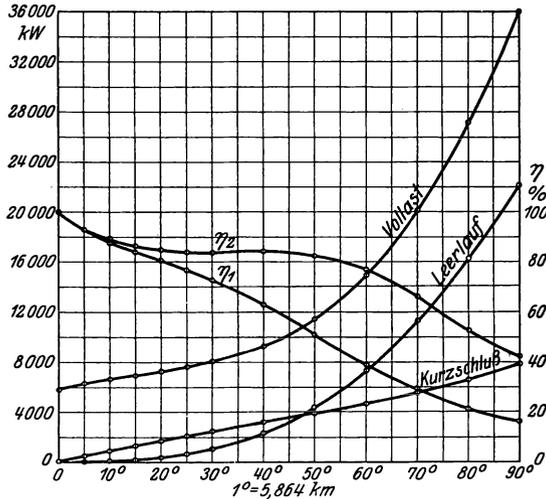


Abb. 433. Leistungsaufnahme und Wirkungsgrad des Kabels.

$(\mathfrak{Z}_2 + \mathfrak{Z}) \varepsilon^{m\alpha}$, die positiv fortschreitet, und die Spiralen $(\mathfrak{Z}_2 - \mathfrak{Z}) \varepsilon^{-m\alpha}$ und $-(\mathfrak{Z}_2 - \mathfrak{Z}) \varepsilon^{-m\alpha}$, die von B und C aus negativ verlaufen.

Der Abstand $PR = 2 \mathfrak{Z} / \mathfrak{S}_2$ zweier Punkte gleicher Neigung α in Abb. 434 gibt dann die Spannung, der Abstand $PQ = 2 \mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{S} / \mathfrak{S}_2$ den Strom. Daraus folgt:

$$\mathfrak{Z} = \frac{1}{2} PR \cdot \mathfrak{S}_2 \cdot n = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 104,2 \cdot PR = 2084 PR \text{ Volt,}$$

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{2} PQ \cdot \mathfrak{S}_2 / \mathfrak{Z} \cdot n = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 104,2 / 389,88 PQ = 5,345 PQ \text{ Amp.}$$

Für $\alpha = 40^\circ$ mißt man

$$PR = 45 \text{ mm} \rfloor = 93780 \text{ Volt}$$

und

$$PQ = 31,9 \text{ mm} = 170,52 \text{ Amp.}$$

Den richtigen Stand der beiden Spiralen, welche die geometrischen Orte der Endpunkte der Spannungs- und Stromvektoren in Polarkoordinaten darstellen, erhält man in Abb. 435, indem man alle Strahlen PQ um $\varphi_2 - \zeta = -36^\circ 52' + 17^\circ 37' = -19^\circ 15'$, alle Strahlen PR um $\varphi_2 = -36^\circ 52'$ verdreht.

Für Nullast gelten die Abb. 436—438, für Kurzschluß werden die Verhältnisse durch die Abb. 436, 439, 440 wiedergegeben.

Abb. 441 zeigt schließlich noch die Leistungen für diese drei Be-

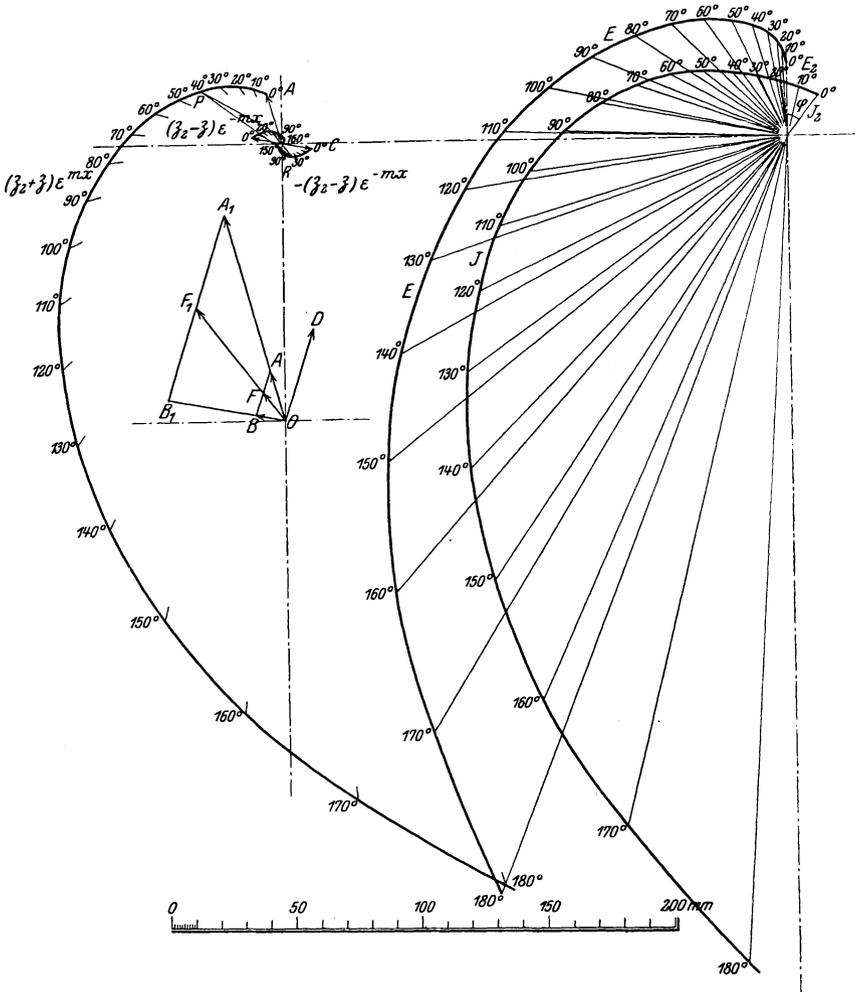


Abb. 434.

Abb. 435.

Spiralen für eine Luftleitung von $\frac{1}{2}$ Wellenlänge.

triebszustände und den Wirkungsgrad bei Vollast als Funktion des Abstandes.

Überprüft man die Werte von E und J bei Nullast und bei Vollast, dann erkennt man, daß man, um bei konstanter Spannung $E_2 = 60\,000$ Volt am fernen Ende den Strom J_2 von Null bis zum Betriebswert $J_2 = 104$ Amp. anwachsen zu lassen, die Beginnspannung von $450\,000$ Volt

bei Leerlauf auf 650000 Volt bei Vollast erhöhen muß. Dies hat natürlich keinen Sinn; selbst bei Leerlauf wäre es unmöglich infolge der Ausstrahlung die Energie auf dem Drahte zu halten. Wirklich praktisch brauchbar wäre auch diese Leitung höchstens bis etwa $26^\circ \approx 500$ km, wobei der Wirkungsgrad noch $\approx 50\%$ beträgt.

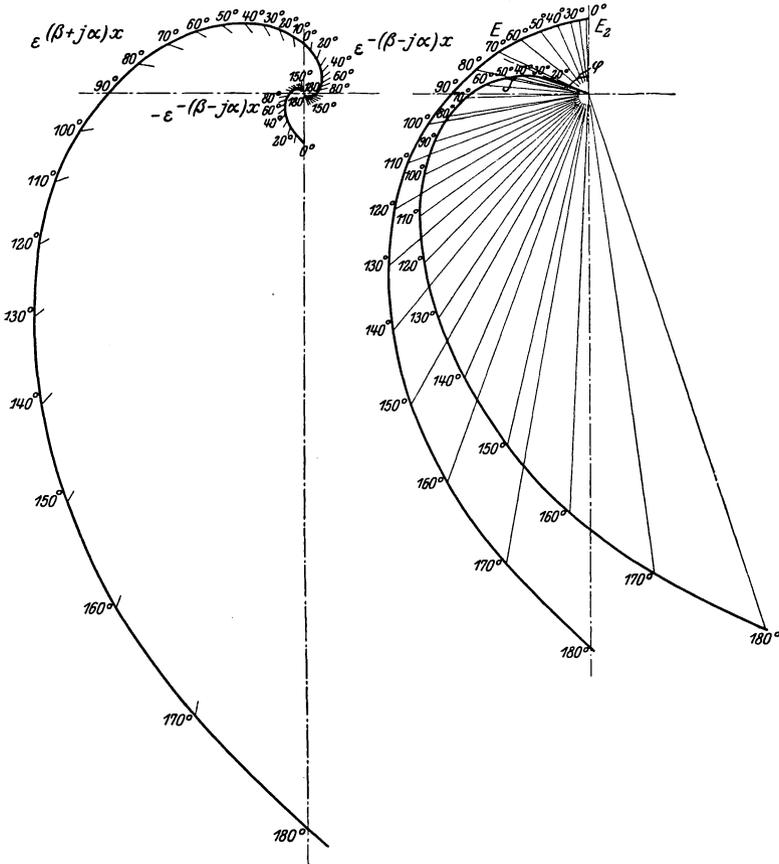


Abb. 436.

Abb. 437.

Leerlaufende Luftleitung.

	bei Vollast	bei Leerlauf $E_2 = 60000$
Bei $\alpha x = 20^\circ = 388$ km ist	$J_1 = 112$; $E_1 = 77425$	$J_1 = 72,6$; $E_1 = 59700$
	$= 30^\circ = 583$,, ,, $= 138$; $E_1 = 86068$	$= 106$; 59550
	bei Kurzschluß $J = 104,2$	
	$J_1 = 103,7$ $E_1 = 19196$	
	$= 103,4$ $= 27032$.	

14. Übertragung über $1\frac{1}{2}$ Wellenlängen.

Untersuchungen über die Übertragung über eine ganze Wellenlänge oder mehr haben natürlich für die Zwecke der Starkstromtechnik keinen praktischen Wert. Sie sind jedoch äußerst lehrreich und interessant, da sie, besonders bei starker Übertreibung der Verhältnisse, unsere Einsicht auch für geringere Winkelabstände αl vertiefen.

Abb. 442 stellt nach Steinmetz das Verhalten einer Fernleitung dar, die am Ende $J_2 = 65$ Amp. bei $\cos \varphi_2 = 0,385$ entsprechend

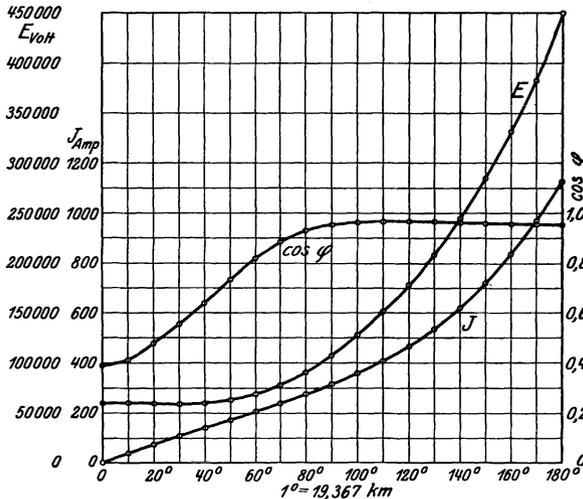


Abb. 438. Leerlaufende Luftleitung.

$\varphi_2 = 67^\circ 20'$ und einer Spannung $E_2 = 10000$ Volt abgibt, wobei die Leitungskonstanten für 1 km

$$R = 1; \quad \omega L = 4; \quad A = 2 \cdot 10^{-5}; \quad \omega C = 20 \cdot 10^{-5} \text{ sind.}$$

Es ist dann $\alpha = 28,36 \cdot 10^{-3}$, $\beta = 4,95 \cdot 10^{-3}$ und die Wellenlänge $\lambda = 221,5$ km.

Der Verlauf der Effektivwerte von Strom und Spannung ist für $1\frac{1}{2}$ Wellenlängen in Abb. 442 dargestellt. Man erkennt, daß die Effektivwerte, wie auch die Phasenverschiebung, stark pendeln.

Die Verhältnisse sind sehr übertrieben gewählt. Dies zeigt sich besonders bei Betrachtung der Ableitung A entsprechend einem Isolationswiderstand von 50000 Ohm für 1 km, oder von 226 Ohm für die Wellenlänge von 221,5 km. Abgesehen vom Wirkungsgrad, der nicht untersucht ist, und von anderen Dingen, würde man eine 10-kV-Leitung mit mehr als 2 kW Isalationsverlust für 1 km nicht zulassen. Dies wirkt aber mit dem kleinen Leistungsfaktor zusammen, um die Verhältnisse in Steinmetz' Beispiel besonders sprechend zu gestalten.

Bei induktiver Belastung schwankt der Winkel der Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung, zwischen Nach- und

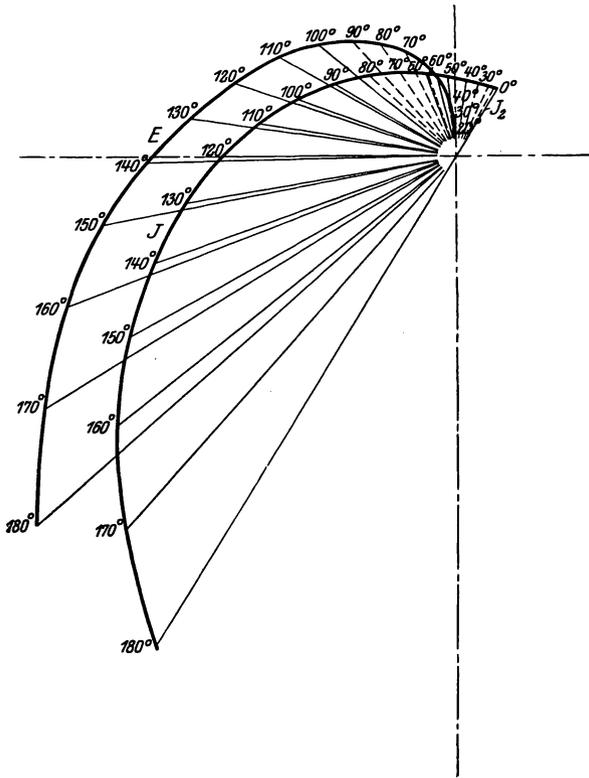


Abb. 439. Kurzgeschlossene Luftleitung.

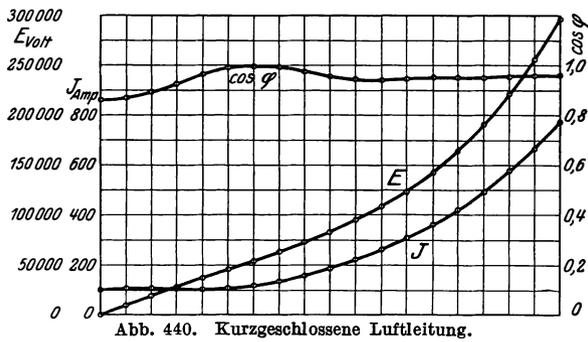


Abb. 440. Kurzgeschlossene Luftleitung.

Voreilung hin und her, und nähert sich schließlich mit wachsender Länge der Linie dem Grenzwert für die unendlich lange Leitung.

$$\operatorname{tg} \varphi_{\infty} = -\frac{R\alpha - L\omega\beta}{R\beta + L\omega\alpha} = -0,073; \varphi_{\infty} = -4,2^{\circ}.$$

Die Amplituden der Oszillationen nehmen aber nicht nur bei der Phasenverschiebung zwischen J und E , sondern auch beim Strom und der

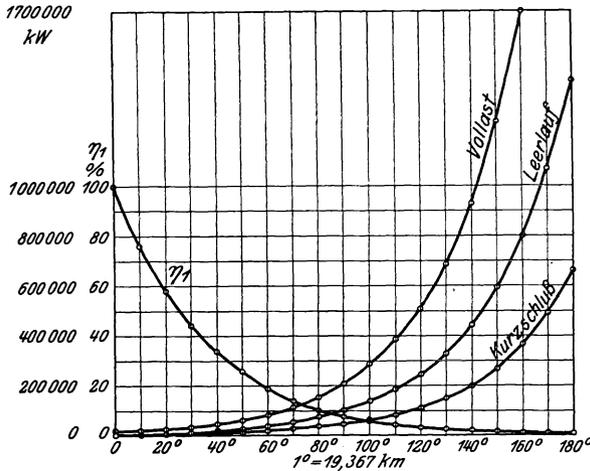


Abb. 441. Leistungsaufnahme und Wirkungsgrad.

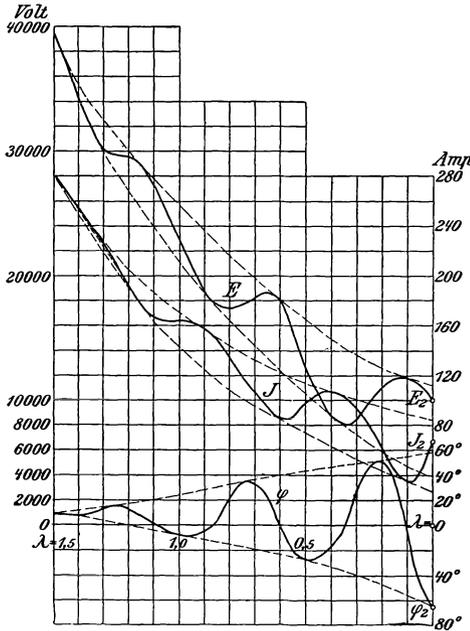


Abb. 442. Übertragung über $1\frac{1}{2}$ Wellenlänge.

Spannung selbst vom Empfänger nach dem Generator hin ab. Bei rein wattloser Belastung sind die Schwankungen am stärksten, bei induktionsfreier verschwinden sie fast vollständig. Es wird sich also empfehlen, bei langen Leitungen die Empfänger tunlichst in bezug auf die Entnahme wattloser Ströme aus der Leitung zu kompensieren. Beim Anschluß asynchroner Motoren kann dies dadurch geschehen, daß man entweder die Motoren selbst kompensiert, oder entsprechend übererregte Synchronmotoren oder synchrone rotierende Umformer zu ihnen parallel schaltet. Bei sehr hoher Kapazität der Fernleitung kann aber auch der Fall eintreten, daß man die wattlosen voreilenden Ladeströme der Leitung da-

durch kompensieren muß, daß man in annähernd regelmäßigen Abständen wattlose nachteilige Ströme aus der Leitung entnimmt. Dies

kann dadurch geschehen, daß man leer laufende asynchrone Motoren unter Zwischenschaltung von Transformatoren oder nur stark streuende Drosselspulen oder Transformatoren von der Fernleitung abzweigt.

15. Über die Zulässigkeit der Superposition bei mehreren Abnehmern.

Es ist hier hervorzuheben, daß wir bis jetzt nur von einem Abnehmer am Ende der Leitung gesprochen haben und daß erst noch bewiesen werden muß, ob, falls mehrere Abnehmer vorhanden sind, die Superposition der Ströme oder Spannungen zulässig ist. Im allgemeinen ist das nicht der Fall. Denn jede Abzweigstelle zu einem neuen Abnehmer wird für die Wellen elektromagnetischer Energie einen neuen Reflexionspunkt bilden, und es müßte erst untersucht werden, ob die fortschreitenden und die reflektierten Wellen sich gegenseitig merklich beeinflussen oder ob sie praktisch als voneinander unabhängig betrachtet werden können. Nur in diesem Falle ist die Superposition der Ströme und Spannungen zulässig.

Wir können diese schwierige Betrachtung verhältnismäßig einfach umgehen, indem wir zunächst bei einigen typischen langen Leitungen untersuchen, ob beim Falle eines einzigen Abnehmers die strenge Methode praktisch merkbare Unterschiede gegen Näherungsmethoden ergibt, bei denen die verteilte Kapazität der Leitung durch punktweise konzentrierte Kapazitäten ersetzt wird. Wir wissen nämlich, daß in diesem Falle die Superposition zulässig ist.

Gehen wir von der Schreibweise der allgemeinen Gl. (16) und (18) aus

$$\mathfrak{I}_x = \mathfrak{I}_2 \mathfrak{Cof} mx + \mathfrak{Y} \mathfrak{B}_2 \mathfrak{Sin} mx \quad (16)$$

$$\mathfrak{B}_x = \mathfrak{B}_2 \mathfrak{Cof} mx + \mathfrak{Z} \mathfrak{I}_2 \mathfrak{Sin} mx \quad (18)$$

und berücksichtigen wir, daß nach Gl. (3)

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{G}}} = \frac{m}{\mathfrak{G}} = \frac{\mathfrak{R}}{m} = \frac{1}{\mathfrak{Y}},$$

so ergibt sich nach Multiplikation und Division der zweiten Glieder mit x die Form

$$\mathfrak{I}_x = \mathfrak{I}_2 \mathfrak{Cof} mx + \mathfrak{B}_2 \cdot \mathfrak{G} \cdot x \cdot \frac{\mathfrak{Sin} mx}{mx}, \quad (16a)$$

$$\mathfrak{B}_x = \mathfrak{B}_2 \mathfrak{Cof} mx + \mathfrak{I}_2 \cdot \mathfrak{R} \cdot x \cdot \frac{\mathfrak{Sin} m}{mx}. \quad (18a)$$

Wenn es nun uns gelingt, die Vektorgröße mx so festzusetzen, daß bis auf praktisch vernachlässigbare Größen

$$\mathfrak{Cof} mx \approx 1,$$

$$\frac{\mathfrak{Sin} mx}{mx} \approx 1,$$

dann würden die Gl. (16) und (18) übergehen in die einfachere Form

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{I}_x &\approx \mathfrak{I}_2 + \mathfrak{B}_2 \cdot \mathfrak{G} \cdot x \\ \mathfrak{B}_x &\approx \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{I}_2 \cdot \mathfrak{R} \cdot x \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

Dieser Bedingung läßt sich für die praktisch in Betracht kommenden Längen leicht genügen. Man findet nämlich durch Reihenentwicklung

$$\begin{aligned} \cos mx &= 1 + \frac{(mx)^2}{2!} + \frac{(mx)^4}{4!} + \dots \\ \frac{\sin mx}{mx} &= 1 + \frac{(mx)^2}{3!} + \frac{(mx)^4}{5!} + \dots \end{aligned}$$

und somit für $x = l$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_1 &= \mathfrak{S}_2 \left(1 + \frac{(ml)^2}{2!} + \frac{(ml)^4}{4!} + \dots \right) + \mathfrak{B}_2 \mathfrak{S} l \left(1 + \frac{(ml)^2}{3!} + \frac{(ml)^4}{5!} + \dots \right) \\ \mathfrak{B}_1 &= \mathfrak{B}_2 \left(1 + \frac{(ml)^2}{2!} + \frac{(ml)^4}{4!} + \dots \right) + \mathfrak{S}_2 \mathfrak{R} l \left(1 + \frac{(ml)^2}{3!} + \frac{(ml)^4}{5!} + \dots \right) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \mathfrak{S}_1 \\ \mathfrak{B}_1 \end{aligned}} \right\} (56a)$$

Beide Klammerausdrücke werden praktisch gleich der Einheit, wenn $\frac{1}{2} m^2 x^2$ klein ist gegen 1.

Der absolute Wert von $mx = (\beta + j\alpha) x$ ist

$$|mx| = x \sqrt{\beta^2 + \alpha^2}$$

und bei gut isolierten Leitungen ist stets $\beta < \alpha$. Nimmt man aber annähernd $\beta \approx \alpha$, dann wird für

$$\begin{aligned} \alpha x \approx \beta x = 4\frac{1}{2}^0 &= \frac{\pi}{40} & mx \approx 0,0785 \sqrt{2} &= 0,111, \\ \alpha x \approx \beta x = 9 &= \frac{\pi}{20} & mx \approx 0,157 \sqrt{2} &= 0,222. \end{aligned}$$

Der Fehler der ersten Glieder von Gl. (56a) wird dann für $\alpha x = 4\frac{1}{2}^0$ etwa $\frac{1}{2}\%$, der Fehler des zweiten Gliedes etwa $\frac{1}{6}\%$. Für $\alpha x = 9^0$ sind die Fehler etwa $2\frac{1}{2}\%$ und $\frac{3}{4}\%$.

Bei der Frequenz von 50 Per./Sek. ist die Wellenlänge von der Größenordnung 6000 km bei Luftleitungen, 2400 bei Kabeln. Wenn wir also $\alpha x \approx 6^0 \approx 100$ km bzw. 40 km wählen, liegen die Abweichungen zwischen der Näherungsformel (56) und der genauen Formel unterhalb eines Prozentes.

Damit ist aber bewiesen, daß mit praktisch ausreichender Annäherung jede oberirdische Fernleitung mit gleichförmig verteilter Ableitung, Induktivität und Kapazität ersetzt werden kann durch eine Linie, bei der alle 100 km konzentriert angebracht sind

$$\begin{aligned} \text{eine Ableitung} &= 100 A \\ \text{,, Kapazität} &= 100 C \\ \text{,, Induktivität} &= 100 L \\ \text{ein Widerstand} &= 100 R, \end{aligned}$$

von denen die A und C parallel zwischen den Drähten, die L und R in Serie zu der sonst widerstands-, induktions- und kapazitätslosen Leitung geschaltet sind. Bei Kabeln sind diese Abzweigungen von der Größe 40 A und 40 C alle 40 km anzubringen.

Denn dies ist die wahre Bedeutung der Gl. (56), daß an Stelle der verteilten Kapazität und Induktivität, welche die hyperbolischen Funktionen erforderte, nunmehr kon-

zentrierte Kapazität $\mathfrak{C} = A + j\omega C$ und Induktivität $\mathfrak{R} = R + j\omega L$ getreten sind.

Damit ist für den quasistationären Zustand auch die Zulässigkeit der Superposition bei mehreren Abnehmern und die Anwendbarkeit aller früher gegebenen Rechnungsverfahren auf Leitungen bis zu großen Längen erbracht, wenn man mindestens bei Luftleitungen alle 100 km, bei unterirdischen Kabeln etwa alle 40 km einen Kondensator und eine Induktivität punktförmig konzentriert angebracht denkt.

Dieser Beweis war durch uns in anderer Form bereits auf S. 351 des II. Teils der 2. Auflage (1905) bis zur Frequenz 100 durchgeführt worden und daraus Gl. (56) analytisch abgeleitet worden. Blondel und Le Roy¹⁾ haben 1909 die Reihenentwicklung auf dieselben Gl. (16) und (18) angewendet und graphisch weiter durchgeführt. Wir werden ihr Verfahren in der von Schönholzer gegebenen Erweiterung später behandeln.

16. Praktische Näherungsmethoden.

Von den Näherungsmethoden, die hier in Betracht kommen, ist die einfachste und nächstliegende die, daß ein Kondensator am Ende oder am Anfang der Leitung untergebracht ist. Diese Methode wird bei Leitungen über 100 km Länge nicht ganz zutreffende Werte ergeben, aber die wahren Werte werden der Lage und Größe nach zwischen den auf diese Weise erhaltenen Werten liegen, wie die Beispiele zeigen werden. Nimmt man den Kondensator am Ende der Leitung an, so wird der Ladestrom zu klein, weil der Kondensator an der niedrigsten Spannung liegt; es wird also der Gesamtstrom bei induktionsfreier Belastung zu groß, weil der Kondensatorstrom zu wenig verschoben ist. Nimmt man den Kondensator am Anfang an, so wird der Ladestrom offenbar zu groß; es läßt sich aber nicht allgemein sagen, ob und in welchem Sinne Gesamtstrom, Spannungsverlust und Anfangsspannung bei gegebener Endspannung durch diese Annahme verändert werden, weil alle diese Werte voneinander und von den Phasenverschiebungen zwischen ihnen abhängig sind. Es läßt sich jedoch allgemein feststellen, daß der nächste, etwas schwierigere Fall, wo ein Kondensator in der Mitte angebracht ist, den wirklichen Werten des Stromes und der Spannung schon recht nahekommen muß, und gleiches gilt von den von uns aufgestellten Sätzen

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{C}_1 &= \mathfrak{C}_2 + \mathfrak{S}_2 \cdot \mathfrak{R} \cdot l, \\ \mathfrak{S}_1 &= \mathfrak{S}_2 + \mathfrak{C}_2 \cdot \mathfrak{C} \cdot l, \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

daß bei Luftleitungen von der beliebigen Länge l es stets genügt, alle 100 km die Leitung mit einem Kondensator zu überbrücken. Von den beiden soeben angeführten Gleichungen besagt die erste, daß der Kondensator am Anfang der Linie angebracht

¹⁾ Blondel, A. u. C. Le Roy: Lum. él. Bd. 7, S. 355, 387. 1909. — Siehe auch Deutsch, W.: ETZ 1911, S. 56, 83.

ist, und die zweite, daß der Kondensator am Ende angeschlossen ist. Die wahren Strom- und Spannungswerte werden also irgendwo zwischen diesen Fällen liegen, wie sich noch genauer bei den jetzt durchzuführenden Beispielen ergeben wird.

Beispiel.

Eine 200 km lange Einphasenleitung mit einer Abzweigung am Ende. Wir nehmen zunächst eine 200 km lange Leitung aus 2 Kupferdrähten von 8 mm Durchmesser an, die in 75 cm Achsenabstand voneinander montiert sind und einem Abnehmer am Ende der Leitung 20 000 Volt mit 50 sekundlichen Perioden zuführen. Der Strom am Ende soll konstant 30 Amperere betragen und zunächst als gleichphasig mit der Endspannung angenommen werden. Die Gleichungen werden jedoch zuerst für einen beliebigen Strom i aufgestellt werden.

a) Berechnung der Daten. Es ist die Leitungslänge $l = 200$ km, der Drahtquerschnitt $f = 50,27$ mm², entsprechend $d = 8$ mm, der Ohmsche Widerstand $R = 0,693$ Ohm, entsprechend $k = 57,5$ und 2 km Draht, die Induktanz $L = 2,174 \cdot 10^{-3}$ Henry, die Kapazität $C = 0,01056 \cdot 10^{-6}$ Farad für 1 km Schleife und $A = 0$.

Es ist somit

$$\begin{array}{l} \omega L = 0,684 \quad \text{pro km Leitung} \quad \left| \quad \overline{LR} = 136,8 = \overline{AB} \right. \\ \omega C = 3,32 \cdot 10^{-6} \quad \text{,, ,, ,,} \quad \left| \quad \overline{l\omega L} = 136,8 = \overline{BC} \right. \\ \overline{lR} = l\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = l \cdot 0,973 = 194,6 = \overline{AC} \quad (\text{Abb. 443}) \\ \frac{\omega L}{R} = 0,988 = \text{tg}(44^\circ 40'). \end{array}$$

Also:

$$\begin{array}{l} \overline{l\omega C} = 0,664 \cdot 10^{-3} = \overline{DE} \\ \overline{lR} = l(R + j\omega L) = 200(0,693 + j \cdot 0,0684) \\ \quad = 194,6 / 44^\circ 40' = \overline{AC} \\ \overline{lC} = l(A + j\omega C) = 200(0 + j \cdot 3,32 \cdot 10^{-6}) \\ \quad = 0,664 \cdot 10^{-3} / 90^\circ = \overline{DE} \quad (\text{Abb. 443}) \\ \overline{l^2 R C} = 200^2 \cdot 3,23 \cdot 10^{-6} \cdot / 134^\circ 40' = \overline{GF} \quad (\text{Abb. 444}) \\ \quad = 0,1292 / 134^\circ 10' = -0,09055 + j \cdot 0,0921 \\ \overline{l\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = 200 \cdot 1,80 \cdot 10^{-3} / 67^\circ 20' = 0,360 / 67^\circ 20' \\ \quad = 0,1386 + j \cdot 0,332 = \overline{FH} = \overline{FP} + j \overline{PH} \end{array}$$

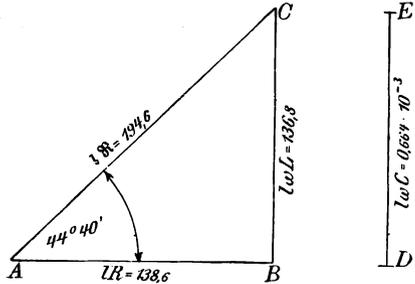


Abb. 443.

$$\mathfrak{Z}^2 = \frac{\Re}{\mathfrak{E}} = 0,293 \cdot 10^6 \sqrt{45^\circ 20'} = \overline{KM} \quad (\text{Abb. 445}).$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z} &= \sqrt{\frac{\Re}{\mathfrak{E}}} = 0,541 \cdot 10^3 \cdot \sqrt{22^\circ 40'} = 541 \sqrt{22^\circ 40'} = 499 - j \cdot 208 \\ &= \overline{KN} = \overline{KQ} - j \cdot \overline{QN} \end{aligned}$$

b) Ein Kondensator am Ende. Aus der Abb. 446 folgt:

$$\begin{aligned} e_c &= e, \\ i_c &= e \cdot \mathfrak{S}l, \\ \mathfrak{S}_1 &= i + i_c = i + e \mathfrak{S}l, \\ \mathfrak{E}_1 &= e + \mathfrak{S}_1 \Re l = e(1 + \Re \mathfrak{S}l^2) + i \Re l. \end{aligned}$$

Setzt man die Zahlenwerte ein, so erhält man:

$$i_c = 20000 \cdot 0,664 \cdot 10^{-3} / 90^\circ = 13,280 / 90^\circ = \overline{AB}_1 \quad (\text{Abb. 448}),$$

$$\mathfrak{S}_1 = 30 + 13,28 / 90^\circ = 30 + j \cdot 13,28 = 32,8 / 23^\circ 53' = \overline{OB}_1,$$

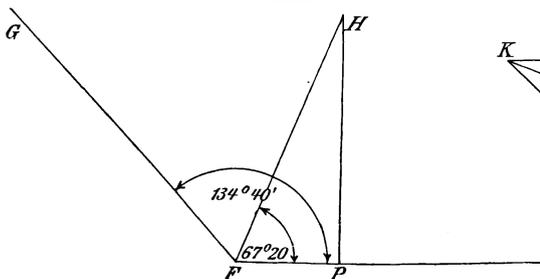


Abb. 444.

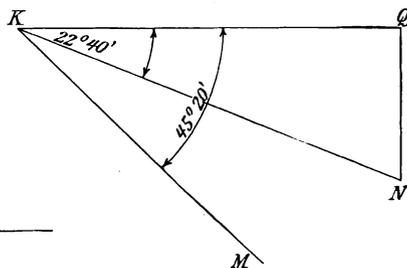


Abb. 445.

$$\mathfrak{E}_1 = 20000 + 32,8 / 23^\circ 53' \cdot 194,6 / 44^\circ 40' = \overline{OD}_1,$$

$$20000 + 6380 / 68^\circ 33' = 22346 + j5942 = 23100 / 14^\circ 52'$$

allgemein:

$$\mathfrak{S}_1 = i + e \cdot 0,664 \cdot 10^{-3} / 90^\circ,$$

$$\mathfrak{E}_1 = e \cdot 0,9142 / 5^\circ 48' + i \cdot 194,6 / 44^\circ 40'.$$

c) Ein Kondensator am Anfang. Aus der Abb. 447 folgt:

$$\begin{aligned} e_c &= E, \\ \mathfrak{E}_1 &= e + i \Re l, \\ i_c &= E \cdot \mathfrak{S} = e \mathfrak{S}_v + i \Re \mathfrak{S}l^2, \\ \mathfrak{S}_1 &= i + i_c = e \mathfrak{S}l + i(1 + \Re \mathfrak{S}l^2). \end{aligned}$$

Setzt man die Zahlenwerte ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_1 &= 20000 + 30 \cdot 200 \cdot 0,973 / 44^\circ 40' = 20000 + 5838 / 44^\circ 40', \\ &= 24158 + j \cdot 4104 = 24500 / 9^\circ 40' = \overline{OD}_2 \quad (\text{Abb. 448}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_1 &= 30(0,9095 + j0,0921) + 20000 \cdot 0,664 \cdot 10^{-3} j, \\ &= 27,29 + 16,04j = 31,68 / 30^\circ 25'; \end{aligned}$$

allgemein:

$$\mathfrak{E}_1 = e + i \cdot 194,6 / 44^\circ 40',$$

$$\mathfrak{I}_1 = i 0,9142 \cdot / 5^\circ 48' + e \cdot 0,664 \cdot 10^{-3} / 90^\circ.$$

Nimmt man

d) den Mittelwert der beiden Ausdrücke, so erhält man:

$$2\mathfrak{I}_1 = [i + e \mathfrak{S}l] + [e \mathfrak{S}l + i(1 + \Re \mathfrak{S}l^2)],$$

$$2\mathfrak{E}_1 = [e(1 + \Re \mathfrak{S}l^2) + i \Re l] + [e + i \Re l],$$

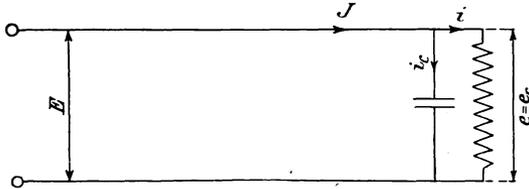


Abb. 446.

also

$$\mathfrak{I}_1 = i \left(1 + \frac{\Re \mathfrak{S}l^2}{2} \right) + e \mathfrak{S}l$$

und

$$\mathfrak{E}_1 = e \left(1 + \frac{\Re \mathfrak{S}l^2}{2} \right) + i \Re l.$$

Man sieht also, daß diese Werte eine vollkommene Annäherung an die Reihe für $\mathfrak{C}o\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{S}in l \sqrt{\Re \mathfrak{S}}$ bilden, sobald das Glied $\frac{\Re \mathfrak{S}l^2}{6}$

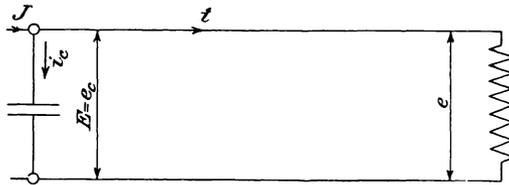


Abb. 447.

zu vernachlässigen ist, während oben der Fehler $\frac{\Re \mathfrak{S}l^2}{2}$ betrug.

$$\mathfrak{E}_1 = 23252 + j \cdot 5023 = 23800 / 12^\circ 16'$$

$$\mathfrak{I}_1 = 28,65 + j \cdot 14,66 = 32,24 / 27^\circ 9'$$

$$\mathfrak{E}_1 = e 0,9571 / 2^\circ 54' + i 194,6 / 44^\circ 40'$$

$$\mathfrak{I}_1 = i 0,9571 / 2^\circ 54' + 1 \cdot 0,664 \cdot 10^{-3} / 90^\circ.$$

e) Genaue Methode. Es ist zu bilden:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E}_1 &= e \mathfrak{C}o\mathfrak{f} l \sqrt{\Re \mathfrak{S}} + i \sqrt{\frac{\Re}{\mathfrak{S}}} \cdot \mathfrak{S}in l \sqrt{\Re \mathfrak{S}} \\ \mathfrak{I}_1 &= i \mathfrak{C}o\mathfrak{f} l \sqrt{\Re \mathfrak{S}} + e \sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{\Re}} \cdot \mathfrak{S}in l \sqrt{\Re \mathfrak{S}} \end{aligned} \right\} \quad (6a)$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}of\ 0,1386 &= 1,0096 & \cos\ 0,332 &= \cos\ 19^\circ\ 1' = 0,9454 \\ \mathfrak{S}in\ 0,1386 &= 0,1391 & \sin\ 0,332 &= \sin\ 19^\circ\ 1' = 0,3258 \\ \mathfrak{C}of\ l\ \sqrt{\mathfrak{R}}\ \mathfrak{C} &= 0,9544 + j \cdot 0,04531 = 0,9554 / 2^\circ\ 45' \\ \mathfrak{S}in\ l\ \sqrt{\mathfrak{R}}\ \mathfrak{C} &= 0,1315 + j \cdot 0,3289 = 0,354 / 68^\circ\ 10'. \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{C}}} \cdot \mathfrak{S}in\ l\ \sqrt{\mathfrak{R}}\ \mathfrak{C} &= 0,354 \cdot 541 / 68^\circ\ 10' - 22^\circ\ 40' = 191,5 / 45^\circ\ 30' \\ \sqrt{\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{R}}} \cdot \mathfrak{S}in\ l\ \sqrt{\mathfrak{R}}\ \mathfrak{C} &= \frac{0,354}{541} / 68^\circ\ 10' + 21^\circ\ 40' = 0,654 \cdot 10^{-3} / 90^\circ\ 50', \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_1 &= e \cdot 0,9554 / 2^\circ\ 45' + i \cdot 191,5 / 45^\circ\ 30' \\ \mathfrak{S}_1 &= i \cdot 0,9554 / 2^\circ\ 45' + e \cdot 0,654 \cdot 10^{-3} / 90^\circ\ 50'. \end{aligned}$$

f) **Näherungsmethode mit Reihenentwicklung.** Entwickelt man nach Gl. (56a) die Ausdrücke für den hyperbolischen Sinus und Kosinus in Reihen, so erhält man angenähert

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{C}_1 &= e \left(1 + \frac{\mathfrak{R}\mathfrak{C}l^2}{2} \right) + i\mathfrak{R}l \left(1 + \frac{\mathfrak{R}\mathfrak{C}l^2}{6} \right) \\ \mathfrak{S}_1 &= i \left(1 + \frac{\mathfrak{R}\mathfrak{C}l^2}{2} \right) + e\mathfrak{C}l \left(1 + \frac{\mathfrak{R}\mathfrak{C}l^2}{6} \right) \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

oder

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_1 &= e \cdot 0,9558 / 2^\circ\ 46' + i \cdot 194,6 \cdot 0,985 / 44^\circ\ 40' + 0^\circ\ 53' \\ &= e \cdot 0,9558 / 2^\circ\ 46' + i \cdot 191,5 / 45^\circ\ 33' \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_1 &= i \cdot 0,9558 / 2^\circ\ 46' + e \cdot 0,664 \cdot 10^{-3} \cdot 0,985 / 90^\circ + 0^\circ\ 53' \\ &= i \cdot 0,9558 / 2^\circ\ 46' + e \cdot 0,664 \cdot 10^{-3} / 90^\circ\ 53'. \end{aligned}$$

Man sieht also, daß dieses Resultat erst in der vierten Dezimalstelle und bei den Winkeln erst in den Einheiten der Minuten von dem genauen Resultat unter e) abweicht.

Für die Methoden e) und f) ergeben sich also die übereinstimmenden Resultate:

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_1 &= 23\,118 + j \cdot 5020 = 23\,410 / 9^\circ\ 5' \\ \mathfrak{S}_1 &= 28,43 + j \cdot 14,46 = 31,9 / 26^\circ\ 58'. \end{aligned}$$

g) **Zusammenstellung und graphische Behandlung der Resultate.** Man erhält durch die fünf beschriebenen Rechnungsmethoden (b bis f), von denen e genau, die anderen Annäherungsmethoden sind, \mathfrak{C}_1 und \mathfrak{S}_1 in der Form

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_1 &= e\mathfrak{A} + i\mathfrak{B} \\ \mathfrak{S}_1 &= i\mathfrak{A}' + e\mathfrak{C}, \end{aligned}$$

worin \mathfrak{A}' und \mathfrak{A} sich um so weniger unterscheiden werden, je genauer die Annäherung ist, während sie bei genauer Berechnung natürlich übereinstimmen müssen. Die Werte von \mathfrak{A} , \mathfrak{A}' , \mathfrak{B} und \mathfrak{C} sind in der

nebenstehenden Tabelle der Übersichtlichkeit halber tabellarisch zusammengestellt.

Wir wollen jetzt diese Fälle graphisch behandeln, wobei wir Spannung und Strom am Ende, also die Belastung in Kilovoltampere, konstant halten und nur den Leistungsfaktor $\cos \varphi_2$ verändern.

	\mathfrak{A}	\mathfrak{B}	\mathfrak{A}'	\mathfrak{C}
b	0,9142 / $5^\circ 48'$	194,6 / $44^\circ 40'$	1,0 / 0°	$0,664 \cdot 10^{-3}$ / 90°
c	1,0 / 0°	194,6 / $44^\circ 40'$	0,9142 / $5^\circ 48'$	$0,664 \cdot 10^{-3}$ / 90°
d	0,9571 / $2^\circ 54'$	194,6 / $44^\circ 40'$	0,9571 / $2^\circ 54'$	$0,664 \cdot 10^{-3}$ / 90°
e	0,9554 / $2^\circ 45'$	191,5 / $45^\circ 30'$	0,9554 / $2^\circ 45'$	$0,654 \cdot 10^{-3}$ / $90^\circ 50'$
f	0,9558 / $2^\circ 46'$	191,5 / $45^\circ 33'$	0,9558 / $2^\circ 46'$	$0,654 \cdot 10^{-3}$ / $90^\circ 53'$

Die sämtlichen Gleichungen enthalten e und i als Vektoren. Man könnte also den Einfluß einer Veränderung von φ_2 auf \mathfrak{C}_1 und \mathfrak{S}_1 rechnerisch ermitteln, indem man für e und i die entsprechenden Zahlenwerte einsetzt. Einfacher und übersichtlicher läßt sich diese Untersuchung jedoch geometrisch in folgender Weise durchführen:

1. Wir nehmen einen Kondensator (Abb. 448) am Ende der Leitung an und tragen nun auf der horizontalen Achse $\overline{OA} = i$ und $\overline{OC} = e$ auf. Stellt dann $\overline{AB}_1 \perp \overline{AO}$ den Wert $e \mathfrak{C} l$ dar, so ist $\overline{OB}_1 = \mathfrak{S}$. Auf diesem Strahl ist dann der Ohmsche Verlust $0a_1 = \mathfrak{S} \overline{(Rl)}$ abzuschneiden und senkrecht dazu $\overline{a_1 b_1} = J (\omega Ll)$ abzutragen; dann ist $\overline{Ob_1} = \mathfrak{S} \mathfrak{R} l$ und, wenn $\overline{OC} = e$ mit $\overline{CD}_1 =$ und $\parallel \overline{Ob_1}$ zusammengesetzt wird, ist $\mathfrak{C} = \overline{OD}_1$. Für irgendeine Verschiebung von i gegen e könnte die gleiche Konstruktion durchgeführt werden, nur müßte dann \overline{OA} unter dem entsprechenden Winkel φ_2 gegen \overline{OC} gezogen werden. Da aber

$$\mathfrak{C}_1 = e (1 + \mathfrak{R} \mathfrak{C} l^2) + i \mathfrak{R} l \quad \text{und} \quad \mathfrak{S}_1 = i + e \mathfrak{C} l \text{ ist,}$$

kann man für konstante Werte von e und i den Einfluß einer Änderung ihrer relativen Phasenverschiebung auf \mathfrak{C} und \mathfrak{S} durch Drehung des entsprechenden Vektors erhalten. Denken wir uns z. B. e fest und i sich gegen e drehend, so beschreibt sein Endpunkt A einen Kreis um O mit dem Radius \overline{OA} . Es bleibt dann der Summand $e (1 + \mathfrak{R} \mathfrak{C} l^2) = \overline{OF}$ fest, während der Summand $i \mathfrak{R} l = \overline{FD}_1$ sich um den Mittelpunkt F auf einem Kreis mit dem Radius \overline{FD}_1 dreht. In ähnlicher Weise liegt der Endpunkt B_1 des Stromvektors J auf einem Kreis mit dem Radius $\overline{GB}_1 = i$, dessen Mittelpunkt G der Endpunkt des Vektors $\overline{OG} = e \mathfrak{C} l$ ist.

2. Liegt der Kondensator am Anfang der Leitung, so ist $i \cdot \overline{(Rl)} = \overline{Oa_2}$ in Richtung von $\overline{OA} = i$, $i (\omega Ll) = \overline{a_2 b_2} \perp \overline{OA}$, $\overline{Ob_2} = i \mathfrak{R} l = \overline{CD}_2$. Legt man $\overline{CD}_2 =$ und $\parallel \overline{Ob_2}$ an $\overline{AC} = e$, so erhält man $\overline{OD}_2 = E$. Zieht man von A aus $\overline{AB}_2 = E \mathfrak{C} l \perp \overline{OD}_2$, so erhält man $\overline{OB}_2 = J$. Da hier $E = e + i \mathfrak{R} l$, $J = i (1 + \mathfrak{R} \mathfrak{C} l^2) + e \mathfrak{C} l$ ist, liegt unter den gleichen Voraussetzungen wie bei 1. der Endpunkt D_2 des

Vektors E auf einem Kreisbogen mit dem Radius $i\Re l = \overline{CD_2}$ um den Endpunkt C von e , und der Endpunkt B_2 des Vektors J auf einem Kreis mit dem Radius $i(1 + \Re \mathcal{E} l^2) = \overline{GB_2}$ um den Endpunkt G des Vektors $\overline{OG} = e \mathcal{E} l$.

3. Die genaue Methode ergibt in abgekürzter Schreibung:

$$\mathcal{E} = e\mathfrak{A} + i\mathfrak{B}$$

$$\mathfrak{F} = i\mathfrak{A} + e\mathcal{C}.$$

Hier sind die Werte $e\mathfrak{A} = \overline{OH}$, $i\mathfrak{B} = \overline{HD}$, $e\mathcal{C} = \overline{OK}$ und $i\mathfrak{A} = \overline{KB}$ zu bestimmen, wobei K fast genau mit G , und H fast mit der Mitte der Strecke \overline{FC} zusammenfällt. Für beliebige Phasenverschiebung zwischen e und i liegt der Endpunkt D von \mathcal{E} auf einem Kreis mit dem Radius $\overline{HD} = i\mathfrak{B}$ um den Endpunkt H des Vektors $e\mathfrak{A} = \overline{OH}$; der Endpunkt B

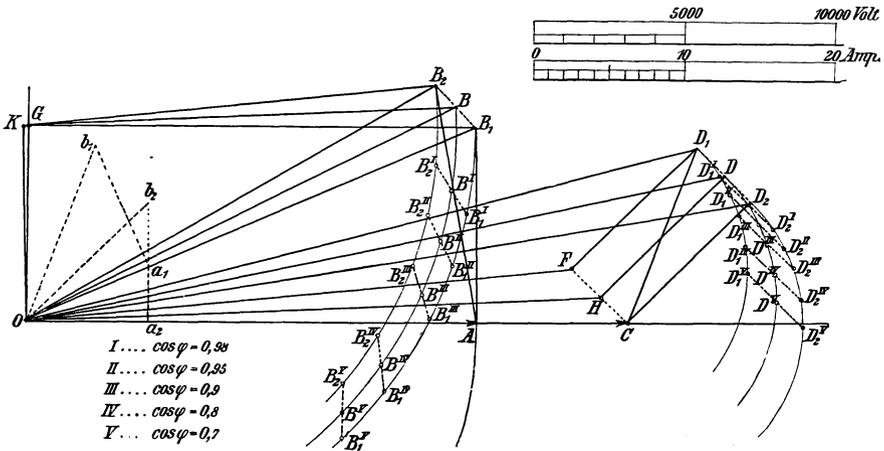


Abb. 448.

von J auf einem Kreis mit dem Radius $\overline{KB} = i\mathfrak{A}$ um den Endpunkt K des Vektors $eD = \overline{OK}$.

In der Abbildung erkennt man die geringen Abweichungen der durch die Weiser angedeuteten Näherungsverfahren 1) und 2) gegeneinander und die fast vollkommene Übereinstimmung des Mittelwerts von 1) und 2) mit den genauen Werten.

Beispiel.

Eine 200 km lange Drehstromleitung mit zwei Abzweigungen. Einer 200 km langen Drehstromluftleitung aus sechs Kabeln von je 70 mm² Querschnitt mit 2,4 m vertikalem und 4,2 m horizontalem Abstand werden in 125 km Abstand von der Kraftstelle 20 Megawatt, in 200 km Abstand 30 Megawatt entnommen. Die Anfangsspannung ist 110 Kilovolt, die Frequenz 50 Per./Sek. Beide Belastungen besitzen $\cos \varphi = 0,8$.

a) **Genaue Berechnung.** Man berechnet leicht die folgenden Leitungs-konstanten:

Widerstand $R = 0,25$ Ohm/km, daraus $R = 0,25$ Ohm/km

Induktivität $L = 1,3$ Millihenry/km $L\omega = 0,41$ „

Kapazität $C = 0,089$ Mikrofarad/km $C\omega = 2,8 \cdot 10^{-6}$ Siemens/km

Ableitung $A = 0,07 \cdot 10^{-6}$ Siemens/km $A = 0,07 \cdot 10^{-6}$ „

Die Dämpfungskonstante wird $\beta = 0,324 \cdot 10^{-3}$

„ Wellenlängenkonstante $\alpha = 1,11 \cdot 10^{-3}$

„ Wellenlänge $\lambda = 5660$ km.

Die Länge $l = 200$ km entspricht also $\alpha l = 12^\circ 42'$.

Bei Nullast wird das Verhältnis der Spannungen am Ende und Anfang nach Gl. (39):

$$\frac{\mathfrak{B}_{2,0}}{\mathfrak{B}_{1,0}} = \frac{2}{\sqrt{2 \cos^2 2\beta l + 2 \cos 2\alpha l}}, \quad (39b)$$

Nun ist

$$2\beta l = 0,1296 \quad 2\alpha l = 0,444 = 25,44^\circ$$

$$\cos^2 2\beta l = 1,0085 \quad \cos 2\alpha l = 0,9030$$

also

$$\frac{\mathfrak{B}_{2,0}}{\mathfrak{B}_{1,0}} = \frac{2}{\sqrt{3,8230}} = 1,0228,$$

und $\mathfrak{B}_{1,0} = 63509$ Volt, $\mathfrak{B}_{2,0} = 64961$ Volt pro Phase gegen Erde.

Der Ladestrom am Anfang der unbelasteten Linie ist nach Gl. (45):

$$\begin{aligned} J_{1,0} &= V_{1,0} Y \sqrt{\frac{\cos^2 2\beta l - 2\alpha l}{\cos^2 2\beta l + 2\alpha l}} = \frac{V_{2,0} Y}{2} \sqrt{\cos^2 2\beta l - \cos^2 \alpha l} \quad (45) \\ &= \frac{64961}{2 \cdot 414,6} \sqrt{0,1055} = 36,03 \text{ Amp.} \end{aligned}$$

da

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{414,6} \text{ Siemens/km}$$

und

$$\xi = -\zeta = 14^\circ 58' 12''.$$

Für den Verlust findet man aus Gl. (47) für jede Phase

$$\begin{aligned} W_A &= \frac{AE_{2,0}^2}{2} \left(\frac{\cos 2\beta l}{2\beta} + \frac{\sin 2\alpha l}{2\alpha} \right) = \frac{0,07}{2} \cdot 10^{-6} \cdot 64961^2 \cdot 391,52 \\ &= 57830 \text{ Watt,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_R &= \frac{RY^2 E_{2,0}^2}{2} \left(\frac{\cos 2\beta l}{2\beta} - \frac{\sin 2\alpha l}{2\alpha} \right) = \frac{0,25 \cdot 64961^2}{2 \cdot 414,6^2} \cdot 5,42 \\ &= 16670 \text{ Watt,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_A + W_R &= \frac{Y E_{2,0}^2}{2} (\cos 2\beta l \cos \xi - \sin 2\alpha l \sin \xi) = \frac{64961^2}{2 \cdot 414,6} \cdot 0,0146 \\ &= 74380 \text{ Watt.} \end{aligned}$$

Der dielektrische Verlust ist also $3 \cdot 57,83 = 173,5$ kW, der Joule-sche Verlust $3 \cdot 16,67 = 50$ kW. Für die Verschiebung am Anfang

findet man nach Gl. (47 a):

$$\operatorname{tg} \varphi_{1,0} = -\frac{0,1256 + 0,1110}{0,3357 - 0,4150} = 29,84; \quad \varphi_{1,0} = 88^\circ 5'.$$

und in guter Übereinstimmung damit aus

$$\cos \varphi_{1,0} = \frac{3 \cdot (W_A + W_R)}{3 \cdot V_{1,0} \cdot J_{1,0}} = \frac{74,50 \text{ kW}}{63,5 \cdot 36,0 \text{ kVA}} = 0,0325; \quad \varphi_{1,0} = 88^\circ 8'.$$

Die Abweichungen erklären sich aus geringen Ungenauigkeiten der Rechnung.

Bei der belasteten Leitung (Abb. 449) gehen wir von der Spannung im Endpunkte C aus. Da nur die Anfangsspannung bei A konstant gehalten wird, müssen wir hierfür einen Näherungswert haben. Dieser findet sich leicht durch Probieren nach früher erörterten Methoden zu etwa 49000 Volt. Wir berechnen dann erst die Spannung und den Strom in B als Anfangspunkt, betrachten diese als Be-

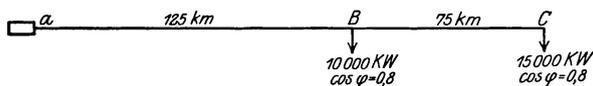


Abb. 449.

lastung für das Stück AB und ermitteln daraus die Spannung und den Strom in A . Das Endergebnis der langwierigen Rechnung ist folgendes:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_C &= 49000 / 0^\circ & \mathfrak{S}_C &= 127,55 / 36^\circ 52' 12'' \\ \mathfrak{S}_B &= 53089 / 2^\circ 2' 35'' & \mathfrak{S}_B &= 199,98 / 33^\circ 35' 52'' \\ \mathfrak{S}_A &= 63700 / 6^\circ 36' 45'' & \mathfrak{S}_A &= 188,29 / 28^\circ 39' 42''. \end{aligned}$$

Die zugeführte Leistung beträgt für jedes System von drei Drähten

$$3 \cdot 63700 \cdot 188,29 \cdot 0,816 = 29377 \text{ kW},$$

die abgegebene Leistung 25000 kW.

Der Wirkungsgrad also

$$\eta = \frac{25000}{29377} = 85,2\%.$$

Die Spannungsänderung in Hundertsteln der Beginnspannung ist

$$\varepsilon = \frac{63700 - 49000}{63700} = 100 = 23\%.$$

Da als Anfangsspannung sich 63700 Volt statt 63500 Volt ergaben, beträgt die Abweichung nur 0,3%, so daß von einer nochmaligen Rechnung abgesehen werden kann.

b) Darstellung durch logarithmische Spiralen. Der Winkel, worüber wir die Spiralen nötig haben, ist nur $12^\circ 42'$, so daß wir nur ein Stück mit den Winkeln $\alpha x = 3^\circ, 6^\circ, 9^\circ$ und $12,7^\circ$ zeichnen müssen. 3° entsprechen dann 47,1 km Abstand. Wir wählen als passende Größe die Zeichnung etwa so, daß die vorläufig unbekannte Endspannung 40 cm lang wird. Aus der gefundenen Anfangsspannung ergibt sich dann später der Spannungsmaßstab. Wir berechnen sodann die Fahrstrahlen für die Spirale $\varepsilon^{+\beta l}$ und $\varepsilon^{-\beta l}$ und finden für Nullast (Abb. 450, S. 508)

$$\begin{aligned} \alpha x = 3^\circ \quad OA_2 &= 20,31 \text{ cm} \quad OB_2 = 19,70 \text{ cm} \\ 6^\circ \quad OA_3 &= 20,62 \text{ ,,} \quad OB_3 = 19,40 \text{ ,,} \\ 9^\circ \quad OA_4 &= 20,94 \text{ ,,} \quad OB_4 = 19,10 \text{ ,,} \\ 12,7^\circ \quad OA_5 &= 21,34 \text{ ,,} \quad OB_5 = 18,75 \text{ ,,} \end{aligned}$$

so daß die Anfangsspannung $\overline{A_5B_5} = 39,09 \text{ cm} = 63509 \text{ Volt}$ oder $1 \text{ cm} = 1622,2 \text{ Volt}$ wird. Die Endspannung $\overline{A_1B_1} = 40 \text{ cm}$ ist also

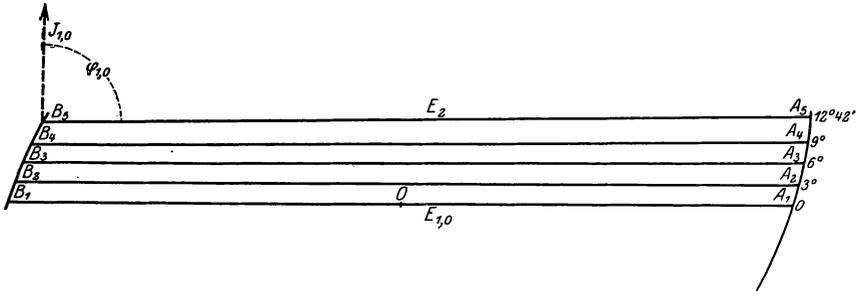


Abb. 450. Spiralenreste.

$40 \cdot 1622,2 = 64888 \text{ Volt}$. Berechnet war unter a) 64961 Volt oder $73 \text{ Volt} = 0,1\% \text{ mehr}$.

In ähnlicher Weise verfahren wir für den Nullaststrom. Die

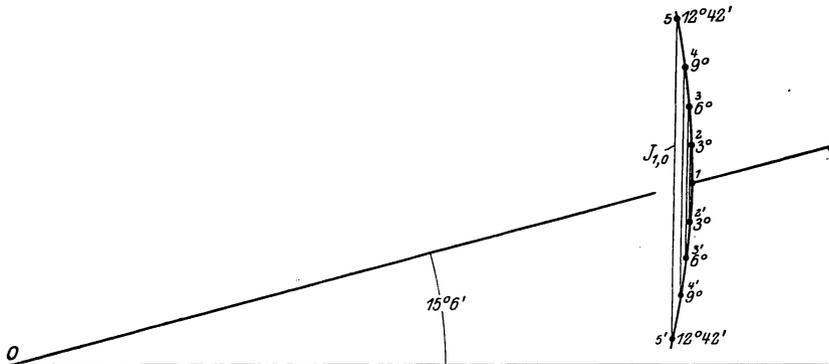


Abb. 451. Ermittlung des Standes der Spiralen bei Nullast.

Länge der Strahlen ist die gleiche. Der Maßstab ergibt sich aus der Beziehung, daß

$$\Im_{1,0} = \Im \mathcal{E}_{1,0} = \frac{64888}{414,6} = 156,5 \text{ Amp. gleich } 40 \text{ cm,}$$

also $1 \text{ cm} = 3,9 \text{ Amp.}$ sein muß. Der Ladestrom $55'$ (Abb. 451), ist also $9,2 \text{ cm} = 35,9 \text{ Amp.}$

Der Anfangspunkt der Spiralen ist nun um einen Winkel

$$\zeta = \text{arc tg} \frac{\alpha R - \beta L \omega}{\beta R + \alpha L \omega} = -15^\circ 6'$$

in positiver Richtung verdreht (Abb. 451).

Für die belastete Leitung (Abb. 452 und 453) nehmen wir wieder die Spannung am Endpunkte C zu 49000 Volt an und konstruieren nach den Gl. (16a) und (18) Spannung und Strom im Punkte B . Als Maßstab wählen wir 1 cm = 300 Volt bzw. = 10 Amp. Die Spiralen

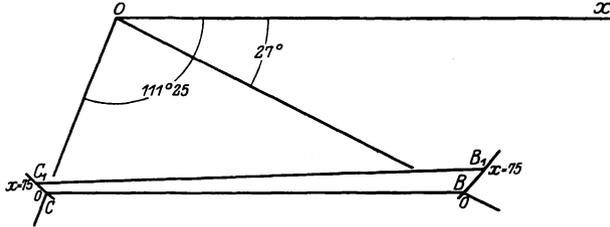


Abb. 452. Spannung der belasteten Leitung im Abschnitt BC .

sind nun auf die Reststückchen BB_1 und CC_1 für die Spannung, bzw. BB_1 und EE_1 für den Strom zusammengeschumpft und sehen nur sehr wenig „spiralg“ aus. $\mathcal{E}_{2,0} = E_c$ wird dann nach Lage und Größe durch $\overline{BC} = 49000 V = 16,33 \text{ cm}$ dargestellt, E_B durch $\overline{B_1C_1} = 17,65 \text{ cm} = 52950$ Volt. Die von der Belastung in C und dem Kondensatorstrom von B bis C herführende Komponente $J_{1,B}$ ist mit der Belastung

$J_{2,B} = \frac{10000 \cdot 10^3}{3 \cdot 52950 \cdot 0,8} = 78,9 \text{ Amp.}$ in B zum Strom J_B zusammengesetzt, der durch Projektion auf E_B zerfällt in J_B

$= 160 + j 118,6$. Jetzt, nachdem wir Strom und Spannung für den Punkt B gefunden haben zu $E_B = 52950$ Volt und $J_B = 160 + j 118,6$, muß genau dieselbe Konstruktion für das Stück AB der Leitung wiederholt werden. Dies ist in den Abb. 454 und 455 geschehen. Die Maßstäbe sind dabei die gleichen wie zuvor. Wir finden

$$J_A = \overline{H_1 J_1} = 18,7 \text{ cm} = 187 \text{ Amp.} \quad \text{kW}_A = 29000$$

$$E_A = \overline{G_1 F_1} = 21,1 \text{ ,,} = 63600 \text{ ,,} \quad \eta = 86\%$$

$$\varphi_A = 35^\circ 30'; \quad \cos \varphi_A = 0,814. \quad \varepsilon = 23\%$$

Bei den letzten beiden Abbildungen erstrecken sich die Spiralen nur über $125 \text{ km} = 7,95^\circ$, also über die nahezu geraden Stücke FF_1 und GG_1 in Abb. 454 bzw. $\overline{HH_1}$ und $\overline{JJ_1}$ in Abb. 455.

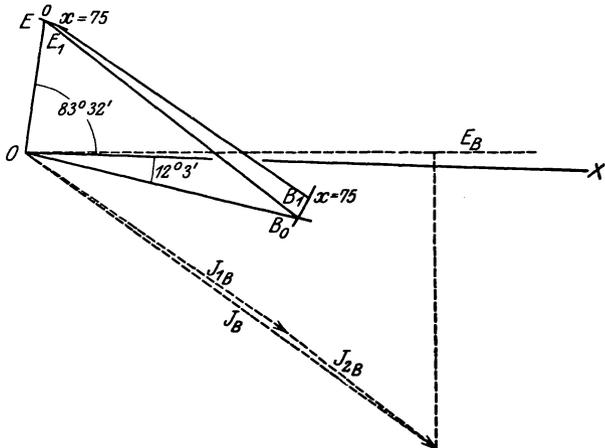


Abb. 453. Ströme der belasteten Leitung im Abschnitt BC .

Die Methode stimmt bei sorgfältiger Zeichnung etwa im angegebenen (hier natürlich stark verkleinert wiedergegebenen) Maßstab. Aber sie ist umständlich und bietet keine Vorteile gegenüber den Näherungsverfahren.

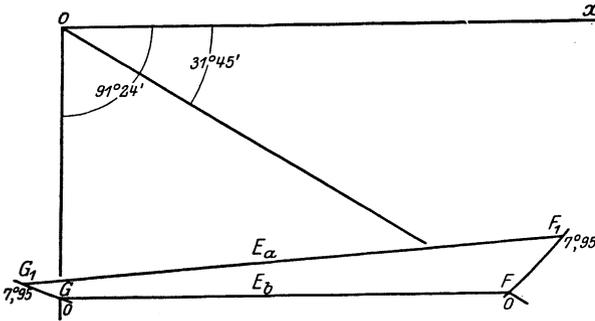
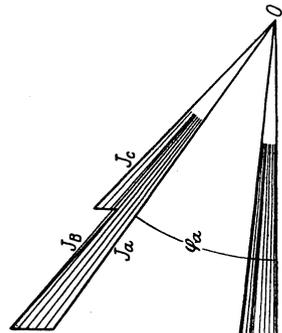


Abb. 454. Spannung im Abschnitt AB.



c) Darstellung durch mehrere Kondensatoren. Die verteilte Kapazität ist konzentriert gedacht in acht Kondensatoren, die in den Mitten der je 25 km langen Teilstrecken angebracht sind. Es bleiben also an den Enden, bei C und A, je $12\frac{1}{2}$ km übrig, und

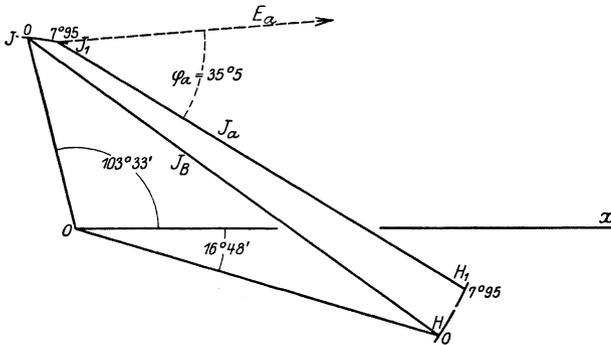


Abb. 455. Ströme im Abschnitt AB.

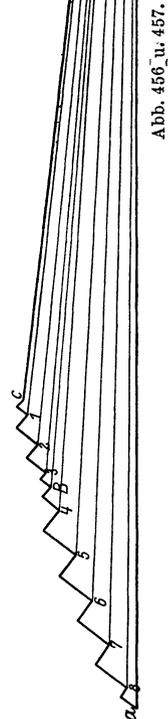
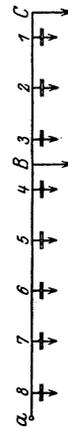


Abb. 456 u. 457.

auch die Abzweigung B liegt hier mitten zwischen zwei Teilkondensatoren (Abb. 456). Jede Teilstrecke hat dann

die Kapazität $C = 25 \cdot 0,0089 \text{ Mf} = 0,2225 \text{ Mf}$,

$$C\omega = 69,865 \cdot 10^{-6}$$

„ Induktivität $L = 25 \cdot 1,304 \text{ mH} = 32,6 \text{ mH}$;

$$L\omega = 10,24$$

den Widerstand $R = 25 \cdot 0,25 = 6,25 \text{ Ohm}$.

Als passender Maßstab kann etwa 1 mm = 1 Amp. bzw. 100 Volt gewählt werden. Die Endspannung bei C sei 49000 Volt. Da bei C 15000 kW, bei $\cos \varphi = 0,8$ per System geliefert werden, ergibt sich unter Annahme von $E_c = 49000$ Volt der Strom zu 127,55 Amp. Von C bis 1 werden dann $127,55 \cdot 3,125 = 399$ Volt durch den Widerstand und 654 Volt induktiv verloren, wodurch die Spannung im Punkte 1 sich zu 49700 Volt aus der Zeichnung (Abb. 457) ergibt.

Der Kondensatorstrom 1 ist also: $49700 \cdot 69,865 \cdot 10^{-6} = 3,47$ Amp. und ergibt mit J_c zusammengestellt für den Strom im Endpunkt 1 der ersten Teilstrecke den Betrag 125,2 Amp.

Konstruiert und rechnet man so schrittweise weiter, dann erhält man nach der Zweibildermethode

in B: 53100 Volt und 199,2 Amp.

in A: 63800 „ „ 186,9 „ $/35^{\circ}$.

Es ist also $\cos \varphi_A = 0,819$, die Energieaufnahme 29200 kW und

der Wirkungsgrad $\eta = 86\%$

der Spannungsabfall $\varepsilon = 23,2\%$.

d) Berücksichtigung des ersten Korrektionsgliedes.

In diesem Falle nehmen die Gl. (56a) die Form an

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E} &= \mathfrak{E}_2 \left(1 + \frac{m^2 l^2}{2} \right) + \mathfrak{I}_2 \Re l \left(1 + \frac{m^2 l^2}{6} \right), \\ \mathfrak{I} &= \mathfrak{I}_2 \left(1 + \frac{m^2 l^2}{2} \right) + \mathfrak{E}_2 \Im l \left(1 + \frac{m^2 l^2}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (56a)$$

Diese Gleichungen mögen auf unser zweites Beispiel angewendet werden. Die Spannung in C werde wieder zu 49000 Volt angenommen. Man findet

$$\Re = 0,48 \quad /58^{\circ} 37,6' \quad \Im = 2,8 \cdot 10^{-6} \quad /88^{\circ} 34'$$

und somit

$$2\mu = \gamma + \delta = 147^{\circ} 11,6'.$$

Für die Strecke BC ist $(ml)^2 = 0,48 \cdot 2,8 \cdot 10^{-6} \cdot 75^2 = 0,758 \cdot 10^{-2}$, also $MM_1 = \frac{1}{2} \cdot \mathfrak{E}_2 (ml)^2 = 24500 \cdot 0,758 \cdot 10^{-2} = 186$ Volt (Abb. 458)

$$\overline{OM} = E_c = 49000 \text{ Volt}$$

$$\overline{OQ} = \mathfrak{I}_2 \Re l = 127,55 \cdot 0,48 \cdot 75 = 4600 \text{ V} / \varphi_0 + Q$$

$$S_0 - Q = 58^{\circ} 45' - 37^{\circ} = 21^{\circ} 42'$$

$$\overline{QQ} = \frac{1}{6} \mathfrak{I}_2 \Re l (ml)^2 = 5,8 \text{ Volt.}$$

Q_1 fällt also praktisch mit Q zusammen, und man mißt aus der Zeichnung $E_b = MQ = 53120$ Volt.

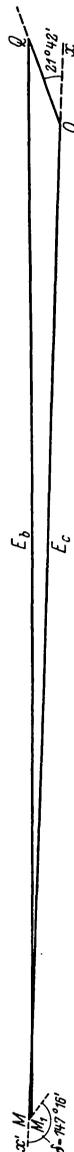


Abb. 458. Spannung E_b .

In Abb. 459 ist

$$\overline{OP} = \mathfrak{S}_2 = 127,55 \text{ Amp.}$$

$$\overline{PP_1} = \frac{1}{2} \mathfrak{S}_2 (ml)^2 = 0,484/\delta = 147^\circ 16' \text{ Amp.}$$

$$\overline{ON} = \mathfrak{C}_2 \mathfrak{S} l = 10,3/\theta' = 88^\circ 34' \text{ Amp.}$$

$$\overline{NN_1} = \frac{1}{6} \overline{ON} (ml)^2 = 0,013 \text{ Amp.},$$

so daß auch hier N_1 praktisch mit N zusammenfällt und nicht gezeichnet werden kann. Man findet als Strom

$$J_{1,b} = \overline{P_1 N_1} = 121,7 \text{ Amp.}$$

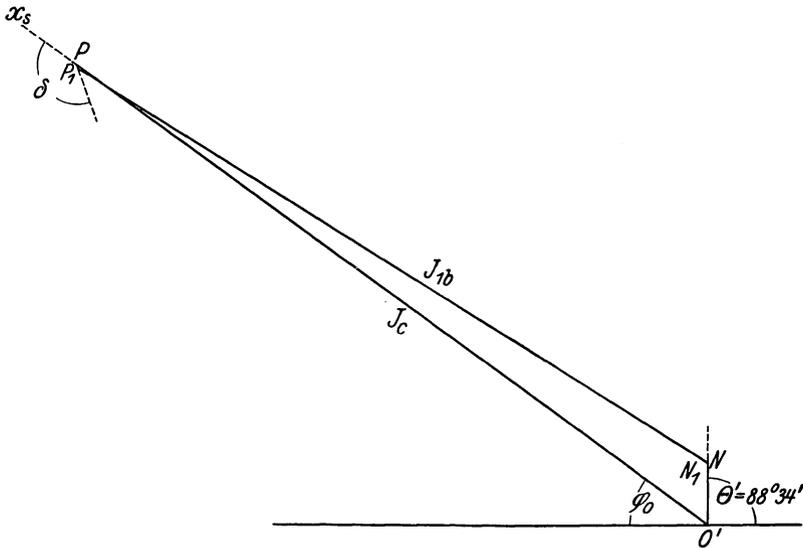


Abb. 459. Strom $J_{1,b}$.

In Abb. 460 ist dieser Komponentenstrom mit dem Belastungsstrom $J_{2,B} = 78,5$ Amp. zum Gesamtstrom $J_B = 200$ Amp. zusammengestellt.

Nun folgt dieselbe Konstruktion für den Leitungstrang AB .

In Abb. 461 ist

$$E_b = \overline{OM} = 53120/147^\circ 16' \text{ Volt}$$

$$\overline{MM_1} = \frac{1}{2} E_b \cdot (ml)^2 = 559 \text{ Volt}$$

$$\overline{OQ} = \mathfrak{S}_2 \mathfrak{R} l = 12000 \text{ Volt}$$

$$\overline{QQ_1} = \frac{1}{6} \mathfrak{S}_2 \mathfrak{R} l (ml)^2 = 42 \text{ Volt}$$

$$E_a = \overline{MQ_1} = 63800 \text{ Volt.}$$

In Abb. 462 bedeutet wiederum

$$\overline{O'P} = J_B = 200 \text{ Amp.}$$

$$\overline{P'P_1} = \frac{1}{2} \mathfrak{S}_2 (ml)^2 = 2,1 \text{ Amp.}$$

$$\overline{O'N} = \mathfrak{C}_2 \mathfrak{S} l = 18,6 \text{ Amp.}$$

$$\overline{N'N_1} = \frac{1}{6} \overline{O'N} (ml)^2 = 0,065 \text{ Amp.}$$

also

$$J_A = \overline{N_1 P_1} = 188,5 \text{ Amp.}$$

Man findet weiter aus Abb. 462 $\varphi_A = 35^\circ$, $\cos \varphi_A = 0,189$, so daß also die zugeführte Leistung $3 \cdot 63800 \cdot 188,5 \cdot 10^{-3} = 29600 \text{ kW}$

der Wirkungsgrad = 84,6%
 der Spannungsabfall $\varepsilon = 23\%$.

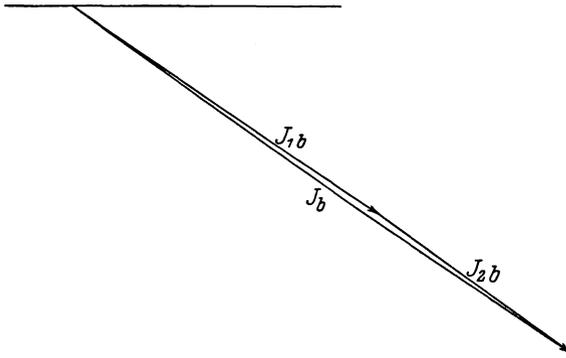


Abb. 460. Zusammenstellung der Ströme.

Die Methode ist also nicht genauer als die zu c) gegebene und erfordert jedenfalls ebensoviel Arbeit. Die Korrektionsglieder lassen sich nicht zeichnen, so daß

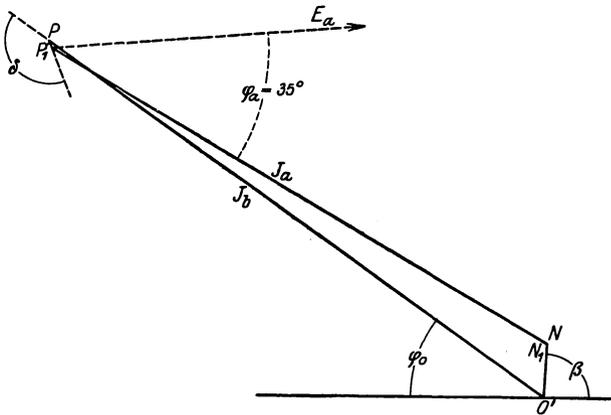


Abb. 462. Strom J_A .

tatsächlich die Reihenentwicklung für das vorliegende Beispiel graphisch nicht durchführbar ist. Man hat also faktisch doch nur nach unseren Gl. (56) gearbeitet, wie im vorigen Beispiel auch.

e) **Schlußfolgerung.** Überprüfen wir nun das Endergebnis, dann verdienen für die Praxis vor allem die einfachsten Näherungsverfahren den Vorzug. Es wird meistens genügen, einen oder einige Kondensatoren

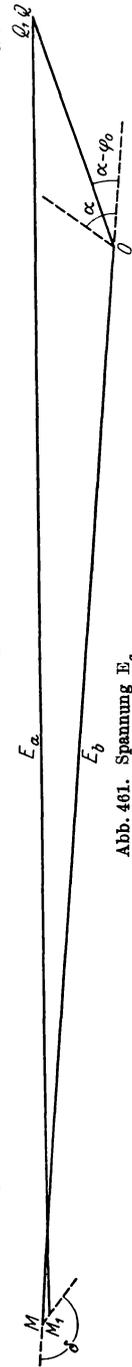


Abb. 461. Spannung E_a .

angebracht zu denken, deren Abzweigpunkte man so wählt, wie man das Beispiel mit dem mindesten Aufwand an Zeit und Rechenarbeit durchführen kann. Nur für sehr lange Leitungen mit hohen Spannungen ist die Reihentwicklung erforderlich.

17. Betriebsdiagramm der Fernleitung.

Tatsächlich haben wir in den Abb. 458—462 das graphische Verfahren von Blondel und Le Roy bereits verwendet. Man kann jedoch bei Fernleitungen mit großer relativer Spannungsänderung die Verhältnisse besser übersehen,

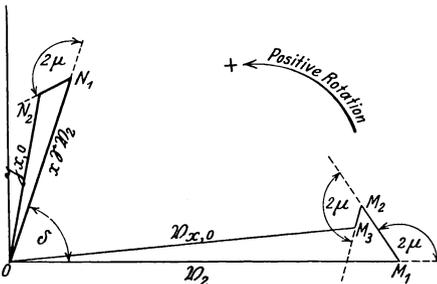


Abb. 463. Leerlaufdiagramm.

wenn man das Spannungs- und Stromdiagramm zu einem bipolaren Betriebsdiagramm zusammensetzt. Dies zeigt sich besonders deutlich, wenn man auch automatische Spannungsregelung durch Synchronmotoren oder Phasenschieber zwecks Verminderung der vom Kraftwerke zu übertragenden Blindleistung erwägt.

a) **Leerlauf.** Die Leerlaufspannung im Abstand x vom Ende der Fernleitung ist nach Gl. (18a)

$$\mathfrak{B}_{x,0} = \mathfrak{B}_2 \mathfrak{C} \circ \int m x = \mathfrak{B}_{2/0} + \frac{(m x)^2}{2} \mathfrak{B}_{2/2\mu} + \frac{(m x)^4}{24} \mathfrak{B}_{2/4\mu}$$

und kann durch Abb. 463 dargestellt werden.

Man sieht, daß in dieser Reihe das erste Korrektionsglied gegen den zu korrigierenden Vektor um den Winkel $\gamma + \delta = 2\mu$, das zweite gegen das erste abermals um 2μ verschoben ist. Die Reihen (56a), wodurch \mathfrak{B} und \mathfrak{S} ausgedrückt sind, sind also Vektorsummen mit konvergierenden Gliedern, die gegeneinander jeweils um den Winkel 2μ verschoben sind.

In Abb. 463 ist $\mathfrak{B}_2 = OM_1$, das erste Korrektionsglied M_1M_2 , das zweite M_2M_3 , die Leerspannung $\mathfrak{B}_{x,0} = OM_3$.

Der Leerstrom beträgt x km vom Ende nach Gl. (16a)

$$J_{x,0} = x \mathfrak{S} \mathfrak{B}_2 \frac{\mathfrak{S} \sin m x}{m x} = \mathfrak{S} \mathfrak{B}_{2/\delta} + x \mathfrak{S} \mathfrak{B}_2 \frac{(m x)^2}{6} / \delta + 2\mu$$

oder

$$ON_2 = ON_1 + N_1N_2 \quad (\text{Abb. 463}),$$

wobei der Ladestrom ON_1 der Leerspannung OM_1 um den Winkel δ voreilt.

b) **Kurzschluß.** Wenn die Erregung des Generators so eingestellt ist, daß am kurzgeschlossenen Ende mit $\mathfrak{B}_2 = 0$ der Vollaststrom \mathfrak{S}_2 fließt,

beträgt die Kurzschlußspannung x km vom Ende (Abb. 464) nach Gl. (18a)

$$\mathfrak{B}_{x,k} = x \mathfrak{S}_2 \Re \frac{\sin mx}{mx} = x \Re \mathfrak{S}_2 / \gamma + x \Re \mathfrak{S}_2 \frac{(mx)^2}{6} / \gamma + 2\mu$$

oder

$$O'Q_2 = O'Q_1 + Q_1Q_2.$$

Der Kurzschlußstrom x km vom Ende beträgt nach Gl. (16a)

$$\mathfrak{S}_{x,k} = \mathfrak{S}_2 \mathfrak{C}o\{mx = \mathfrak{S}_2 / 0 + \frac{(mx)^2}{2} \mathfrak{S}_2 / 2\mu + \frac{(mx)^4}{24} \mathfrak{S}_2 / 4\mu$$

oder

$$O'P_3 = O'P_1 + P_1P_2 + P_2P_3.$$

c) **Belastung.** Nach den Gleichungen (14) die den allgemeinen Beziehungen (16) und (18) völlig entsprechen, findet man die Belastungsverhältnisse im Abstände x vom Ende durch Übereinanderlagerung der Ergebnisse für Leerlauf mit $\mathfrak{B}_{2,0}$ und Kurzschluß mit $\mathfrak{S}_{2,k}$

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{S}_x &= \mathfrak{S}_{x,k} / \varphi_2 + \mathfrak{S}_{x,0} \\ \mathfrak{B}_x &= \mathfrak{B}_{x,0} + \mathfrak{B}_{x,k} / \varphi_2 \end{aligned} \right\} \quad (14a)$$

Die gesuchte Spannung \mathfrak{B}_x und der gesuchte Strom \mathfrak{S}_x ergeben sich, wenn der Kurzschlußvektor um den Phasenverschiebungswinkel φ bei Voreilung im positiven, bei Verzögerung im negativen Sinne gedreht und sein Endpunkt mit dem des letzten berücksichtigten Leerlaufvektors verbunden wird, also im Spannungsdiagramm (Abb. 465) Q_2 mit M_3 und im Stromdiagramm (Abb. 466) P_3 mit N_2 bei $\cos \varphi_2 = 1$; dagegen T mit M_3 und S mit N_2 bei Phasenverzögerung φ_2 , bzw. $\cos \varphi_2 < 1$.

d) **Kombination des Strom- und Spannungsdiagrammes.** Die Aufgabe, die Diagramme so zu entwerfen, daß bei Kenntnis der Endbelastung W_2 in kW und des Leistungsfaktors $\cos \varphi_2$ ihnen ohne weitere Rechnung mit praktisch

genügender Genauigkeit die gesuchten elektrischen Werte der Spannung \mathfrak{E}_1 , des Stromes \mathfrak{S}_1 und des Leistungsfaktors $\cos \varphi_1$ am Anfang der Fernleitung entnommen werden können, ist durch E. Schönholzer¹⁾ in glücklicher Weise gelöst worden. Wir bedenken zunächst, daß die Kurzschlußvektoren $\mathfrak{B}_{2,k} = O'Q_2$ und $\mathfrak{S}_{2,k} = O'P_3$ direkt proportional dem Wattstrom $\mathfrak{S}_{2/0}$ sind, also bei konstanter Endspannung \mathfrak{E}_2 auch der Belastung W_2 . Da die Drehungswinkel 2μ bei P_1, P_2 und M_1, M_2 gleich sind, können wir Strom- und Spannungsdiagramm zusammenlegen, wie das in Abb. 467 geschehen ist. Darin

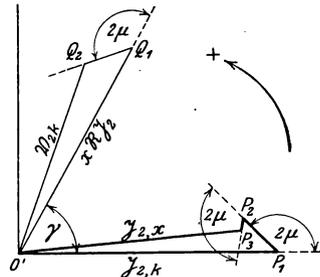


Abb. 464. Kurzschlußdiagramm.

¹⁾ Schönholzer, E.: Über eine moderne und praktische Berechnungsmethode sehr langer Hochspannungs-Fernleitungen mit Potentialregelung durch Synchronmotoren. Schweizerische Techniker-Zeitung 1922, Nr. 6—9.

decken sich die Grundvektoren \mathfrak{E}_2 und \mathfrak{S}_2 , und zwar so, daß Punkt M_1 auf Punkt P_1 zu liegen kommt. Dann teilen wir die Vektoren OQ_2 und $O'P_3$ in gleiche Teile und ziehen durch diese Teilpunkte die Leistungs-

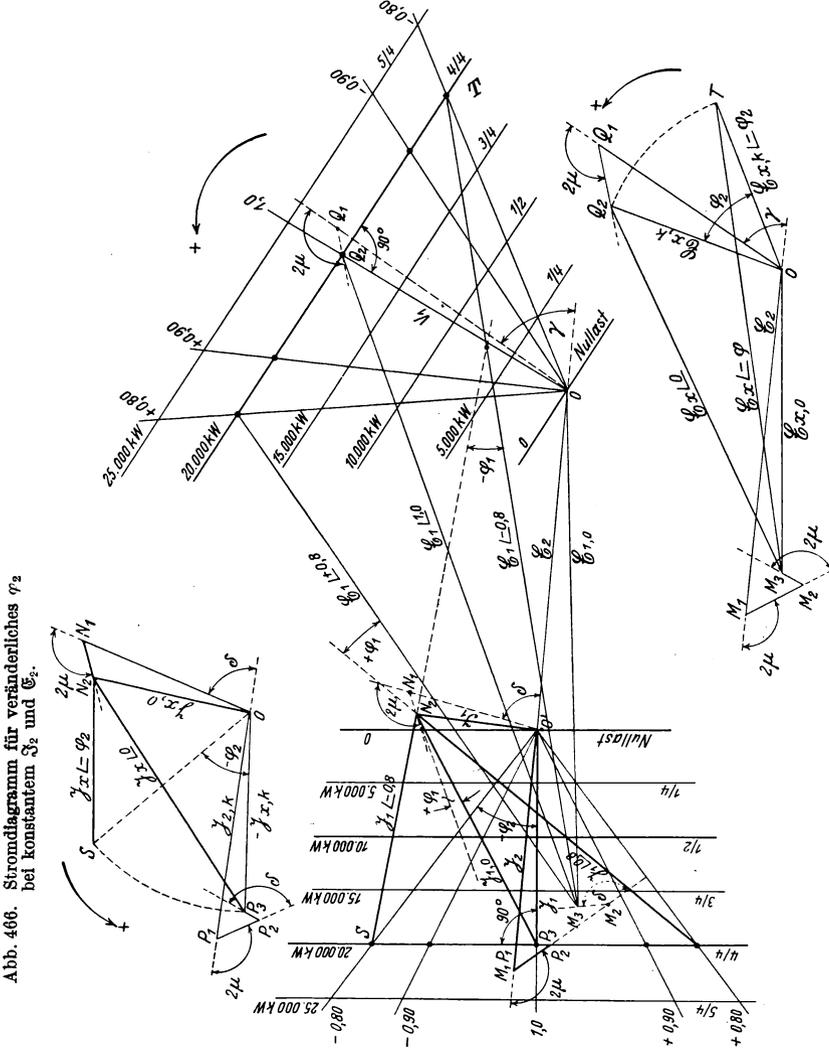


Abb. 466. Stromdiagramm für veränderliches φ_2 bei konstantem \mathfrak{S}_2 und \mathfrak{E}_2 .

Abb. 465. Spannungsdiagramm für veränderliches φ_2 bei konstantem \mathfrak{S}_2 und \mathfrak{E}_2 .

Abb. 467. Vollständiges bipolares Diagramm.

linien. In Abb. 467 sind solche Leistungslinien in das bipolare Diagramm eingezeichnet für Null, $1/4$ -, $1/2$ -, $3/4$ - und $4/4$ -Last und ein weiterer Abschnitt auf der Verlängerung von OQ_2 und $O'P_3$ für $5/4$ -Last. Ferner sind von den Polen O und O' aus Strahlen links und rechts der Kurzschlußvektoren OQ_2 und $O'P_3$ gezeichnet, welche den Leistungsfaktoren $\cos \varphi_2 = \pm 0,9; \pm 0,8 \dots$ entsprechen. In dem so kombinierten Dia-

gramm sind nur die Phasenspannungen \mathfrak{E}_1 und in dicken Strichen die Phasenströme \mathfrak{I}_1 (entsprechend $x = l$) für $W_2 = 20000$ kW und $\cos \varphi_2 = 1,0$; $+0,80$ und $-0,80$ eingezeichnet. Welche Werte müssen \mathfrak{E}_1 , \mathfrak{I}_1 und $\cos \varphi_1$ am Anfang haben, wenn z. B. $W_2 = 20000$ kW, $\cos \varphi_2 = -0,80$ am Ende bekannt sind?

Wir suchen zunächst im Spannungsdiagramm der Abb. 467 den Schnittpunkt T der Leistungslinie für $W_2 = 20000$ kW mit dem durch „ $-0,8$ “ angedeuteten Strahl und verbinden ihn mit M_3 . Dann gibt der Vektor M_3T nach Größe und Richtung die gesuchte, mit $\mathfrak{E}_1 / -0,8$ angedeutete Phasenspannung. Im Stromdiagramm ziehen wir vom Schnittpunkt S der 20000-kW-Leistungslinie mit dem „ $-0,8$ “-Strahl eine Linie nach N_2 , welche ebenfalls nach Größe und Richtung den mit $\mathfrak{I}_1 / -0,8$ angedeuteten Phasenstrom am Anfang darstellt. Der Winkel $(\mathfrak{I}_1, \mathfrak{E}_1)$ ist die gesuchte Phasenverschiebung $-\varphi_1$ am Anfang.

Als vernünftigen Maßstab empfiehlt Schönholzer etwa $1 \text{ kV} = 1 \text{ cm}$ und $1 \text{ Ampere} = 2 \text{ mm}$.

Der Wirkungsgrad ist

$$\eta = \frac{W_2}{3 \mathfrak{E}_1 \mathfrak{I}_1 \cos \varphi_1},$$

worin W_2 in kW, \mathfrak{E}_1 in kV eingesetzt werden kann. Bei Rechnung mit den Verlusten gilt

$$\eta = \frac{W_2}{W_2 + 3R \int_0^l \mathfrak{I}_x^2 dx + 3A \int_0^l \mathfrak{E}_x^2 dx},$$

wofür mit genügender Genauigkeit gesetzt werden kann:

$$\eta = \frac{\text{kW}_2}{\text{kW}_2 + 3 \cdot 10^{-3} \left[\left(\frac{\mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2}{2} \right)^2 R + \left(\frac{\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2}{2} \right)^2 A \right]},$$

wenn die Leistung in Kilowatt, die Spannung in Volt ausgedrückt werden.

e) **Beispiel einer 110-kV-Drehstromleitung.** Abb. 467 entspricht einer $l = 230$ km langen Leitung von Seira in den spanischen Pyrenäen nach San Adrian bei Barcelona. Die technischen Daten sind folgende:

Vollast $W_2 = 20000$ kW; $\cos \varphi_2 \text{ min} = -0,80$,

Spitzenlast $W_2 = 25000$ kW; $\cos \varphi_2 \text{ min} = -0,80$,

$\mathfrak{E}_2 \sqrt{3} = 110000$ Volt verkettet; $\mathfrak{E}_2 = 63510$ Volt,

Länge $l = 230$ km,

Frequenz $\nu = 50$ Per./Sek.

Leiterquerschnitt $\mathfrak{E} = 85 \text{ mm}^2$; 7adriges Kupferseil; $d = 11,94$ mm,

Leiterabstand $D = 385$ mm,

Erdungsseil aus Stahl von 50 mm^2 Querschnitt,

Mittlerer Abstand vom Erdboden $h = 12$ m,

Eisenmasse im Abstand von 200 m,

Leiteranordnung liegendes gleichschenkliges Dreieck,

Verdrillung: Jede Phase beschreibt je 4 km 120° ,

Elektrostatische Kapazität des 8teiligen Hängeisolators

$$C_2 = 0,0002 \mu F.$$

Schaltung: Sternschaltung am Anfang und Ende, Sternpunkte und Seil geerdet.

Die Leitungskonstanten je km sind folgende:

$$\text{Widerstand bei } 15^\circ \text{ C} \quad R = 0,2068 \text{ Ohm}$$

$$\text{Mittlere Induktivität} \quad L_m = 1,345 \cdot 10^{-3} \text{ Henry}$$

$$\text{Mittlere Reaktanz} \quad \omega L_m = 0,4225 \text{ Ohm.}$$

Die durchlaufende Verdrillung ermöglicht die Annahme einer mittleren Induktivität.

Die Kapazität setzt sich zusammen aus der des Leiters

$$C_1 = \frac{0,02413}{\log^2 \frac{D_m}{d}} = 0,00853 \mu F$$

und der der 5 parallel geschalteten Isolatoren je km

$$C_2 = 5 \cdot 0,0002 = 0,00100 \mu F$$

$$C = C_1 + C_2 = 0,00953.$$

Also wird

$$\omega C = 2,99 \cdot 10^{-6} \text{ Siemens.}$$

Für die Konduktanz rechnet Schönholzer wie folgt: Er schätzt bei einer mittleren Phasenspannung $\mathfrak{E}_{1, \text{mittel}} = 70 \text{ kV}$ entsprechend $\mathfrak{E}_2 = 63,5 \text{ kV}$ und $\mathfrak{E}_1 \approx 75 \text{ kV}$ den Strahlungsverlust auf 220 Watt je Leiter und Kilometer. Also wird (bei trockenem Wetter)

$$A_1 = \frac{220 \text{ Watt}}{70^2 \cdot 10^6 \text{ Volt}} = 0,045 \cdot 10^{-6} \text{ Siemens.}$$

Die Isolatorenverluste sind für 5 Isolatoren je km und Phase 123 Watt, also

$$A_2 = \frac{123}{70^2 \cdot 10^6} = 0,025 \cdot 10^{-6} \text{ Siemens}$$

$$A = 0,070 \cdot 10^{-6} \text{ Siemens.}$$

Somit ist die Impedanz je km

$$\mathfrak{R} = R + j\omega L_m = 0,4715 \text{ Ohm}$$

$$\gamma = \text{arc tg} \frac{\omega L_m}{R} = \text{arc tg} \frac{0,4225}{0,2068} = 63^\circ 54'.$$

Die Admittanz

$$\mathfrak{S} = A + j\omega C = 3,0 \cdot 10^{-6} \text{ Siemens}$$

$$\delta = \text{arc tg} \frac{\omega C}{A} = \text{arc tg} \frac{2,99}{0,07} = 88^\circ 41'.$$

Somit wird

$$m^2 = \mathfrak{R} \mathfrak{S} = 0,4715 \cdot 3,0 \cdot 10^{-6} = 1,4145 \cdot 10^{-6}$$

und

$$\mu = \gamma + \delta = 152^\circ 35'.$$

Hieraus lassen sich die Werte der Diagramme für den Wattstrom

$$\mathfrak{S}_2 = \frac{20\,000 \text{ kW}}{110 \sqrt{3} \text{ kV}} = 105 \text{ Amp.}$$

wie folgt berechnen

Spannungsdiagramm		Stromdiagramm	
$M_1 M_2 = 2380$	$O Q_1 = 11380$	$P_1 P_2 = 3,93$	$O' N_1 = 43,9$
$M_2 M_3 = 14,90$	$Q_1 Q_2 = 142$	$P_2 P_3 = 0,024$	$N_1 N_2 = 0,55$
$M_3 M_4 = 0,037$	$Q_2 Q_3 = 0,53$	$P_3 P_4 = 0,00006$	$N_2 N_3 = 0,002.$

Die Leerlaufspannung ist $OM_3 = 61\,400$ Volt, verkettet $106\,345$ Volt.

Der Leerlaufstrom ist $O'N_2 = 43,5$ Amp.

Die Leerlaufleistung $W_0 = \sqrt{3} \cdot 106\,345 \cdot 43,5 \cdot 10^{-3} = 8025$ kVA.

Die Kurzschlußspannung ist $OQ_2 = 11\,250$ Volt.

Der Kurzschlußstrom ist $O'P_3 = 102$ Amp.

Die Kurzschlußleistung $W_k = \sqrt{3} \cdot 11\,250 \cdot 102 \cdot 10^{-3} = 3440$ kVA.

Die belastete Fernleitung ergibt für \mathfrak{E}_1 und \mathfrak{S}_1 die Werte gemäß der folgenden Zahlentafel.

$\mathfrak{E}_1 \sqrt{3}$ aus dem Spannungsdiagramm.

W_2 in kW	$\cos \varphi = + 0,90$	1,0	- 0,9	- 0,8
5000	106250	108608	110640	111800
10000	107040	111020	115090	117345
15000	107820	113705	119595	122975
20000	108855	116390	124220	128690
25000	110155	119320	128950	134360

\mathfrak{S}_1 aus dem Stromdiagramm

W_2 in kW	$\cos \varphi_2 = + 0,9$	1,0	- 0,9	- 0,8
5000	62,5	51,5	41,5	37,0
10000	86,5	68,5	55,5	52,5
15000	112,5	89,5	78,0	79,0
20000	139,0	112,0	103,5	109,0
25000	167,0	136,5	130,5	140,0

Die Spannungserhöhung bei Nullast beträgt $\Delta \mathfrak{E} = - 3655$ Volt; also die relative Spannungsänderung $\eta = - 3,32\%$. Bei voller Last und $\cos \varphi_2 = 0,8$ wird $\Delta E = 128\,690 - 110\,000 = 18\,690$ Volt und

$$\frac{\Delta \mathfrak{E}}{\mathfrak{E}_1} = \frac{18\,690}{110\,000} = 17,0\%.$$

Um diese großen Unterschiede beizuregeln, sind im Unterwerk aufgestellte leichtgebaute Synchronmotoren erforderlich. Es liegt nahe, den Netzstrom $\mathfrak{S}_2 / \varphi_2$ gemäß Abb. 468 in seine Watt- und wattlose Komponente $\mathfrak{S}_{2,w}$ und $\mathfrak{S}_{2,wl}$ oder in irgend eine andere von gewünschter Größe und Phasenverschiebung \mathfrak{S}_r / φ und entsprechendem wattlosen Strom $\mathfrak{S}'_{2,wl}$ zu zerlegen. Der Wattstrom ist dann vom Kraftwerk zu liefern, der wattlose pendelt zwischen Kraftwerk und Synchronmotor

hin und her, oder ist, wie man zu sagen pflegt, vom unter- oder übererregten Synchronmotor aufzunehmen, evtl. unter Zwischenschaltung von Transformatoren.

Da die Zerlegung willkürlich ist, zwingen wir den Strömen \mathfrak{I}_r/φ und \mathfrak{I}_2' bestimmte Werte auf, indem wir ihren Schnittpunkt S für $W_2 = 20000$ kW auf einem Kreisbogen mit dem Mittelpunkt M_3 über das ganze Arbeitsgebiet von Nulllast bis $5/4$ -Last wandern lassen. Schönholzer zeichnet zwei solcher Kreisbögen durch S und R , beide mit dem Mittelpunkt M_3 . Der Schnittpunkt wird durch einen an Trans-

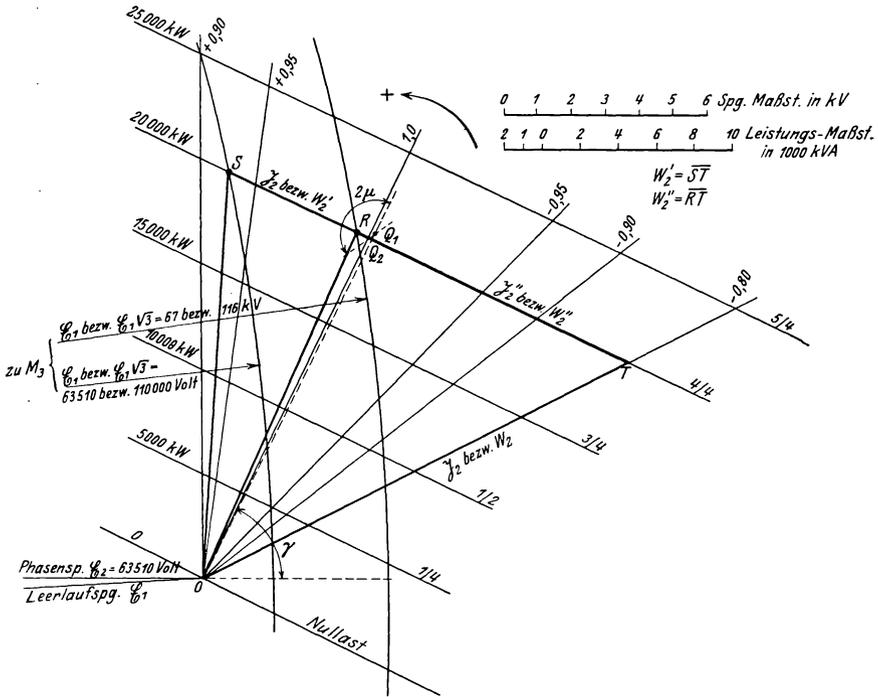


Abb. 468. Bestimmung der für die Kompensation erforderlichen Blindleistung.

formatoren angeschlossenen Schnellregler automatisch auf dem Kreisbogen gehalten, d. h. die Erregung des Synchronmotors wird entsprechend verändert. Man kann dabei zwei Fälle unterscheiden:

1) $\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_2 = 110$ kV. Anfangs- und Endspannung werden gleich gehalten.

Bei Nulllast ist $OQ_2 = 11250$ Volt oder im Leistungsmaßstab 20000 kW. Da aber (im Original) 1 cm = 1 kV, ist der Leistungsmaßstab 20000 kW : 11,25 cm = 1778 kW je cm. Der Abschnitt auf der Leistungslinie Null ist aber 2,3 Längeneinheiten entsprechend $- 2,3 \cdot 1778 = - 4090$ kVA Scheinleistung, welche durch den untererregten Motor aufzunehmen sind. Das Minuszeichen deutet auf nachteilendem Strom im Synchronmotor.

Trifft der Spannungsvektor, wie im Punkte S , zufällig auf die gewünschte Leistung W_2 und Verschiebung φ_2 , dann haben die Synchronmotoren keine Blindleistung vom Netz zu entnehmen oder ihm zu liefern: sie „schweben oder schwimmen“ dann, they are flowing on the line.

Bei Vollast mit $\cos \varphi_2 = -0,8$ ist als kompensierende Blindleistung der Abschnitt $ST = W_2' = + 23375$ kVA erforderlich, bei $5/4$ -Last mit $\cos \varphi = -0,8$ selbst $+ 31290$ kVA, was sehr viel ist.

Es ist nun, wie Schönholzer gezeigt hat, vorteilhaft, eine andere Lösung zu suchen, nämlich (2) $\mathfrak{E}_1 > \mathfrak{E}_2$. Er nimmt $\mathfrak{E}_1 \sqrt{3} = 116000$ Volt entsprechend dem Radius $M_3 R$ und verringert dadurch die kompensierende Scheinleistung bei 20000 kW $\cos \varphi = -0,8$ auf die Strecke $RT = + 15560$ kVA, bei 25000 kW $\cos \varphi = -0,8$ auf $+ 23200$ kVA, wobei dann auch R sehr nahe Q_2 liegt, also $\cos \varphi_2 \approx 1$ ist. Die wirtschaftlichen Vorteile der Kompensierung sind für den Fall kürzerer Leitungen bereits auf Seite 313 behandelt worden. Hier ist der Vorteil größer und die Kompensierung auch wegen der Spannungsreglung nötig¹⁾.

18. Behandlung mittels hyperbolischer Rechentafeln.

Die Aufgabe kann auch durch Rechentafeln gelöst werden. Brown²⁾ geht bei seiner Rechentafel von den Gleichungen (6) für Spannung \mathfrak{B} und Strom \mathfrak{I} im Abstände x vom Ende aus.

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} &= \mathfrak{B}_2 \mathfrak{Cof} mx + \mathfrak{I}_2 \mathfrak{I} \mathfrak{Sin} mx \\ \mathfrak{I} &= \mathfrak{I}_2 \mathfrak{Cof} mx + \mathfrak{B}_2 \mathfrak{I} \mathfrak{Sin} mx \end{aligned} \quad (6)$$

und führt die komplexen Hilfsgrößen

$$\mathfrak{I}g \mathfrak{O}_2 = \frac{\mathfrak{I}_2}{\mathfrak{B}_2} / \zeta - \varphi_2 \quad \text{und} \quad \mathfrak{O}_2 + mx = \mathfrak{O} \quad \text{ein.}$$

\mathfrak{B}_2 ist der Richtungswiderstand des Verbrauchers am Ende der Leitung

$$\mathfrak{B}_2 = \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{I}_2} / \varphi_2.$$

Die Gleichungen nehmen dann die Gestalt an:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} &= \mathfrak{B}_2 (\mathfrak{Cof} mx + \mathfrak{I}g \mathfrak{O}_2 \mathfrak{Sin} mx) \\ &= \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{Cof} \mathfrak{O}_2} \mathfrak{Cof} (\mathfrak{O}_2 + mx) = \mathfrak{B}_2 \frac{\mathfrak{Cof} \mathfrak{O}}{\mathfrak{Cof} \mathfrak{O}_2} \end{aligned} \quad (6c)$$

und

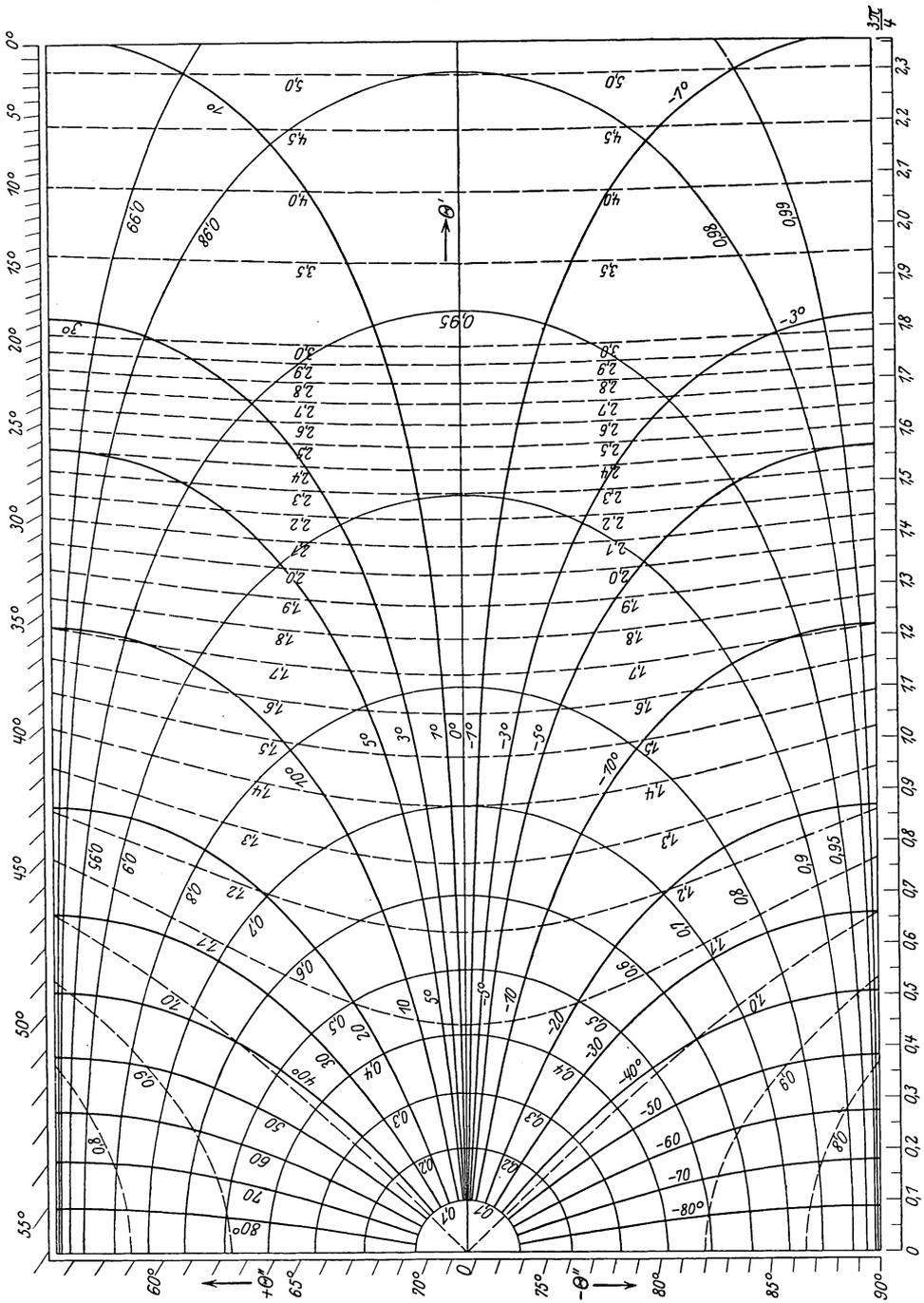
$$\begin{aligned} \mathfrak{I} &= \mathfrak{I}_2 (\mathfrak{Cof} mx + \mathfrak{Cotg} \mathfrak{O}_2 \mathfrak{Sin} mx) \\ &= \frac{\mathfrak{I}_2}{\mathfrak{Sin} \mathfrak{O}_2} \mathfrak{Sin} (\mathfrak{O}_2 + mx) = \mathfrak{I}_2 \frac{\mathfrak{Sin} \mathfrak{O}}{\mathfrak{Sin} \mathfrak{O}_2} \end{aligned} \quad (6d)$$

woraus durch Division von (6d) durch (6c) folgt

$$\frac{\mathfrak{I}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{I}_2}{\mathfrak{B}_2} \frac{\mathfrak{I}g \mathfrak{O}}{\mathfrak{I}g \mathfrak{O}_2} = \frac{\mathfrak{I}g \mathfrak{O}}{\mathfrak{I}} = \mathfrak{I} \mathfrak{I}g \mathfrak{O}.$$

¹⁾ S. auch L. Thielemans; Rev. gén. électr. 1920, 1921 und Burger: ETZ 1926, S. 1289.

²⁾ Latour, M. u. G. Viard: Rev. gén. électr. IV, S. 67—71. 1918.



Diese Gleichungen können nun durch das Nomogramm von Brown gelöst werden. Dieses ist in Abb. 469 u. 470 dargestellt. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem sind auf der horizontalen Achse die reellen Teile Θ' , auf der vertikalen die imaginären Teile Θ'' der komplexen Hilfsgröße $\Theta = \Theta' + j\Theta''$ aufgetragen. Eine Schar elliptischer Kurven mit O als Mittelpunkt trägt die Ziffern 0 bis 1 und gibt den Modulus von $\text{Tg } \Theta$ an. Die andere strahlenförmig von O ausgehende Kurvenschar gibt die zugehörigen Argumente von 0° bis $+90^\circ$ und von 0° bis -90° . Ist $\text{Tg } \Theta = u$, so schreibt man $\Theta = \text{Ar Tg } u$. Der Ausdruck rechts bedeutet diejenige Hyperbelfläche, deren Tg gleich u ist. Es ist

$$\text{arc tg } u = -j \text{Ar Tg } u = \frac{1}{2j} \cdot \ln \frac{1+u}{1-u}.$$

Die Abkürzung Ar bedeutet Area = Fläche. Die Größe ist also imaginär.

Auf die dritte gestrichelte Kurvenschar kommen wir noch zurück.

Die Bedingungsgleichung $\text{Tg } \Theta_2 = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_2} \zeta - \varphi_2$ bestimmt einen Punkt M_2 in der komplexen Fläche, welcher dem Betriebszustand am Ende der Leitung mit den gegebenen Konstanten \mathfrak{B}_2 , \mathfrak{S}_2 , φ_2 entspricht. Der Fahrstrahl $OM_2 = \Theta_2$ braucht aber nicht gezeichnet zu werden. Zählt man dazu den Vektor M_2M , mit der Länge mx , der mit der Horizontalen den Winkel μ einschließt, dann gibt dessen Endpunkt M den Betriebszustand im Abstand x vom Ende an. Der Fahrstrahl $OM = \Theta$. War $x = l$, dann gibt M die Spannung am Leitungsanfang an, und wir können dort den Modulus $\mathfrak{B} \frac{\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{B}_1}$ und das Argument $\zeta - \varphi_1$

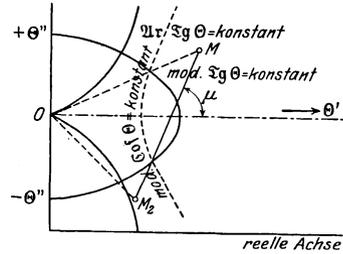


Abb. 470. Anwendung des Nomogramms von Brown.

ablesen, da $\text{Tg } \Theta = \mathfrak{B} \frac{\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{B}_1} / \zeta - \varphi_1$ für $x = l$ wird. Die Aufgabe ist gelöst, wenn wir nun noch etwa \mathfrak{B}_1 bestimmen können. Dazu gehen wir aus von Gl. (6c)

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_2} = \frac{\mathfrak{Cof } \Theta}{\mathfrak{Cof } \Theta_2}$$

und fügen der Rechentafel noch die bereits erwähnte dritte Kurvenschar gestrichelt bei, welche den Modulus von $\mathfrak{Cof } \Theta_2$ bei M_2 und $\mathfrak{Cof } \Theta$ bei M anweist. Die Phasenverschiebung zwischen \mathfrak{B} und \mathfrak{B}_2 ist dann als weniger wichtig wegzulassen. Liest man bei M_2 ab den $\text{mod } \mathfrak{Cof } \Theta_2 = u_2$ und bei M den $\text{mod } \mathfrak{Cof } \Theta = u$, dann ist, wenn $|\mathfrak{B}| = V$ gesetzt wird,

$$|\mathfrak{B}| = |\mathfrak{B}_2| \cdot \frac{u}{u_2} \text{ oder } V = V_2 \frac{u}{u_2}.$$

Will man auch noch die Phasenverschiebung $(\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2)$ aufnehmen, dann erhält man noch eine vierte Kurvenschar, oder man muß die Verschiebung

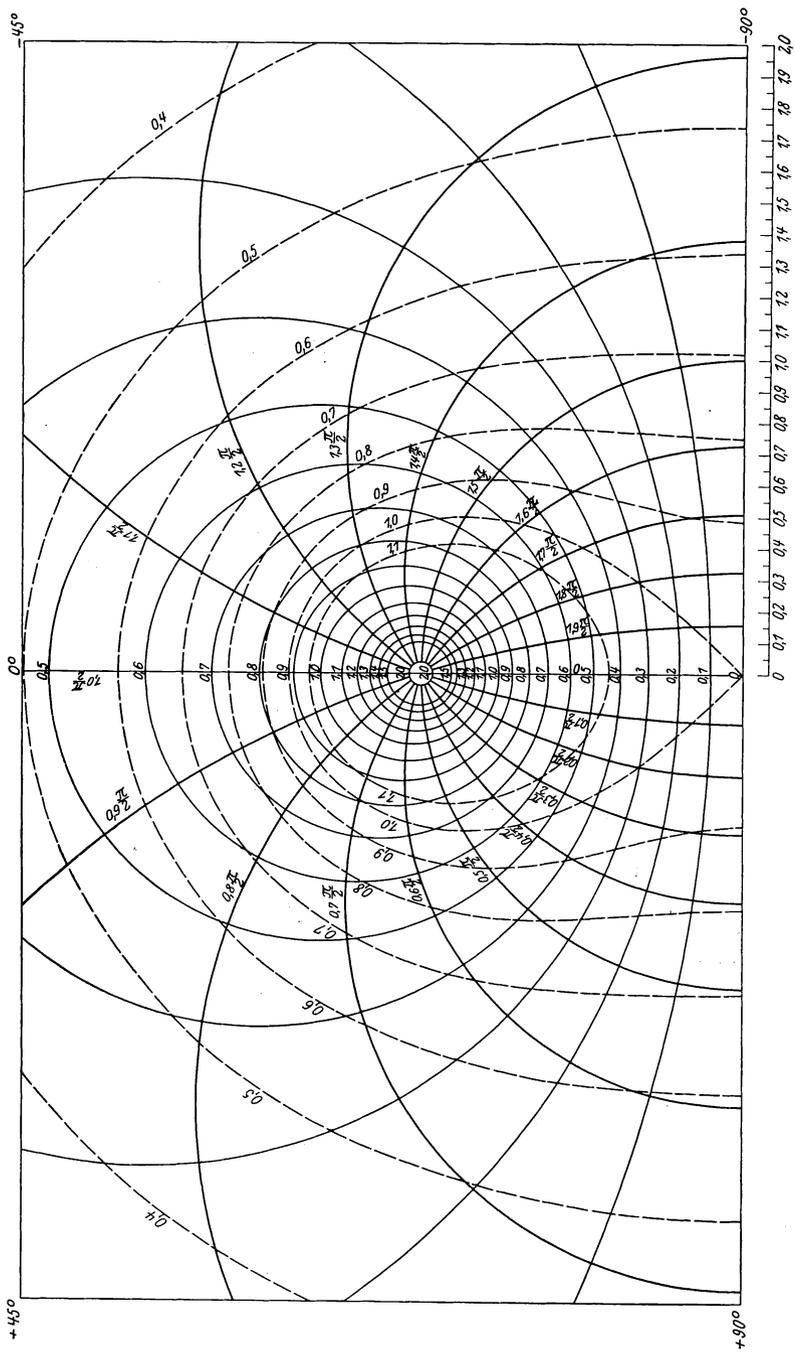


Abb. 471. Nomogramm von Blondel.

φ_1 am Anfang ($x = l$) aus dem Diagramm ablesen

$$\varphi_1 = \zeta - \text{Ar } \mathfrak{I}g \Theta_1,$$

wobei φ_1 positiv wird für einen der Spannung \mathfrak{B}_1 nacheilenden Strom.

A. Blondel¹⁾ hat zusammen mit Lavanchy 1923 das Nomogramm von Brown verändert und vervollständigt durch Zufügung einer vierten Kurvenschar, wobei dann je zwei auf einem Blatt vereinigt werden, durch Verdopplung der Abmessung in Richtung der imaginären Achse und Zufügung eines Teils der negativen reellen Achse. (Abb. 471.)

Tatsächlich ist jedoch Blondels Nomogramm nur eine Umkehrung des Brownschen. Dieser verwendete auf der horizontalen und vertikalen Achse die Komponenten Θ' und Θ'' der komplexen Größe $\Theta = \Theta' + j\Theta''$ und zeichnete zwei Scharen mod $\mathfrak{I}g \Theta = \text{konstant}$ und $\text{Ar } \mathfrak{I}g \Theta = \text{konstant}$.

Jener schneidet auf der horizontalen und vertikalen Achse die zwei Projektionen von $\mathfrak{I}g \Theta = \mathfrak{I}g (\Theta' + j\Theta'') = q' + jq''$, ab und zeichnet die Kurvenscharen $\Theta' = \text{konstant}$ und $\Theta'' = \text{konstant}$, die auch schon in Kennellys Atlas zu finden sind²⁾. Hierbei ist Blondel entgangen, daß diese Kurven Kreise sind, da er sie punktweise berechnen will. Bei Brown sind die Linien $\Theta' = \text{konst.}$ und $\Theta'' = \text{konst.}$ Gerade; bei Blondel und Kennelly sind die Koordinatenachsen q' und q'' , und die erwähnten Linien sind als Inversionen der Geraden Kreise, wie sich leicht beweisen läßt. Die dritte Kurvenschar ist wieder mod $\mathfrak{C}of \Theta = \text{konst.}$; sie kann aus Kennellys Tafeln durch Interpolation gefunden werden und ist hier wiederum gestrichelt.

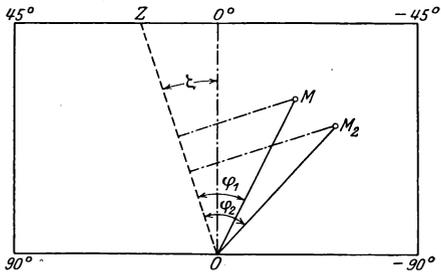


Abb. 472. Anwendung des Nomogramms von Blondel.

Die komplexe Größe $\mathfrak{I}g \Theta_2 = OM_2$ ist ein Vektor vom Ursprung bis zum Punkte M_2 (Abb. 472). Seine Länge ist $\left| \mathfrak{I}g \frac{\mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{Z}_2} \right| = \frac{Z}{Z_2}$, und er schließt mit der Vertikalen den Winkel $(\zeta - \varphi_2)$ ein. Die Länge entnehmen wir dem Maßstab der Moduli, den Winkel der an drei Seiten angebrachten Gradverteilung.

Nun muß noch der Punkt M gefunden werden, der dem Zustand im Abstand x , oder evtl. $x = l$, vom Ende entspricht. Gemäß der Definition ist $\Theta = \Theta_2 + mx$. Wir kennen die Komponenten Θ_2' und Θ_2'' von M_2 . Nun schreiben wir auch mx in Komponentenform

$$mx = |mx| (\cos \mu + j \sin \mu) = ax + jbx$$

¹⁾ Blondel, A. u. C. Lavanchy: Rev. gén. élect. Bd. 8, S. 667ff; Bd. 14, S. 775—798.

²⁾ Kennelly, A. E.: Graphical charts. IX, A, B, C.

und finden

$$\Theta = [\Theta_2' + ax] + j[\Theta_2'' + bx],$$

also M auch als Schnittpunkt der zwei in eckige Klammern gesetzten Kurven.

Verbinden wir M mit O , dann gibt die Länge dieses Vektors $\left| \mathfrak{B} \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{B}_1} \right|$ und der Winkel mit der Vertikalen ist $(\zeta - \varphi_1)$.

Lesen wir nun noch auf der gestrichelten Kurve $u = \text{mod } \mathfrak{C} \circ \mathfrak{I} \Theta$ und $u_2 = \text{mod } \mathfrak{C} \circ \mathfrak{I} \Theta_2$ ab, dann finden wir

$$|\mathfrak{B}| = |\mathfrak{B}_2| \frac{u}{u_2} \quad \text{oder} \quad V = V_2 \frac{u}{u_2}$$

und

$$|\mathfrak{S}| = \left| \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_1} \right| \cdot OM \quad \text{oder} \quad J = \frac{V}{Z} \cdot \overline{OM}.$$

Ziehen wir die Gerade OZ , die mit der Vertikalen den Winkel ζ bildet, dann finden wir $\varphi = \sphericalangle (MOZ)$. Das Lot von M_2 und M auf OZ ergibt nun die Wirkleistung W , Blindleistung W_0 und Scheinleistung W_s . Denn

$$OM_2 = \text{mod } \mathfrak{I} \mathfrak{g} \Theta_2 = \mathfrak{B} \frac{\mathfrak{S}_2}{\mathfrak{B}_2} = \mathfrak{B} \frac{\mathfrak{S}_2 \mathfrak{B}_2}{\mathfrak{B}_2^2}; \quad \text{also} \quad W_{2,s} = OM_2 \cdot \frac{V_2^2}{Z},$$

$$ON_2 = Z \cdot \frac{W_{2,s}}{V_2^2} \cos \varphi_2 = Z \cdot \frac{W_2}{V_2^2}; \quad \text{also} \quad W_2 = ON_2 \frac{V_2^2}{Z},$$

$$N_2 M_2 = Z \cdot \frac{W_{2,s}}{V_2^2} \sin \varphi_2 = Z \cdot \frac{W_3}{V_2^2}; \quad \text{also} \quad W_2 = N_2 M_2 \frac{V_2^2}{Z}$$

und ähnlich für W_1 und M , so daß der Wirkungsgrad

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{ON_2}{ON_1} \cdot \frac{V_2^2}{V_1^2} = \frac{ON_2}{ON_1} \cdot \left(\frac{u_2}{u_1} \right)^2$$

wird.

19. Ein Rechenapparat. Das Heavisidion.

VI. Karapetoff¹⁾ geht bei seiner kinematischen Lösung durch einen Apparat, welchen er das „sofortige“ Heavisidion nennt, von den Gl. (6) aus, deren zweite er mit $\mathfrak{B} = \sqrt{\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{C}}}$ multipliziert. Er schreibt also:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} &= \frac{1}{2} (\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{B} \mathfrak{S}_2) e^{mx} + \frac{1}{2} (\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{B} \mathfrak{S}_2) e^{-mx} \\ \mathfrak{B} \mathfrak{S} &= \frac{1}{2} (\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{B} \mathfrak{S}_2) e^{mx} + \frac{1}{2} (\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{B} \mathfrak{S}_2) e^{-mx} \end{aligned} \quad (6)$$

und setzt nun

$$\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{B} \mathfrak{S}_2 = V_a; \quad \mathfrak{B}_2 - \mathfrak{B} \mathfrak{S}_2 = V_b; \quad e^{mx} = e^{\beta x} \cdot e^{j\alpha x}.$$

Dann ist am Ende der Leitung für $x = 0$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_2 &= \frac{1}{2} (V_a + V_b) \quad \text{oder} \quad V_a = \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{B} \mathfrak{S}_2 \\ \mathfrak{B} \mathfrak{S}_2 &= \frac{1}{2} (V_a - V_b) \quad \text{oder} \quad V_b = \mathfrak{B}_2 - \mathfrak{B} \mathfrak{S}_2. \end{aligned}$$

V_a ist also die geometrische Summe, V_b die geometrische Differenz von $\mathfrak{B}_2 = OC$ und $\mathfrak{B} \mathfrak{S}_2 = CA = -CB$ (Abb. 473).

¹⁾ Gen. El. Rev. Bd. 28, Nr. 11, S. 746. 1925. Dieser Apparat ist einfacher als der ursprüngliche A. I. E. E., Trans. 1923, Bd. 42, S. 42.

Am Anfang der Linie für $x = l$, $\Delta = \beta l$ ist:

$$\mathfrak{R}_1 = \frac{1}{2}(V_a \varepsilon^{\Delta} \varepsilon^{\alpha l} + V_b \varepsilon^{-\Delta} \varepsilon^{-\alpha l}) = \frac{1}{2}(V_a' + V_b')$$

$$\mathfrak{I}\mathfrak{S}_2 = \frac{1}{2}(V_a \varepsilon^{\Delta} \varepsilon^{\alpha l} - V_b \varepsilon^{-\Delta} \varepsilon^{-\alpha l}) = \frac{1}{2}(V_a' - V_b')$$

Man findet also V_a' indem man V_a mit ε^{Δ} multipliziert und entgegen dem Uhrzeiger um den Winkel $57,3 \alpha l = \tau$ dreht. Und ebenso findet man V_b' aus V_b durch Teilung mit ε^{Δ} und Drehung um τ im Uhrzeiger-sinne. $\Delta = \beta l$ ist das räumliche Dekrement (s. Seite 459). Man findet so $\mathfrak{R}_1 = \overline{OC'}$ und $\mathfrak{I}\mathfrak{S}_1 = C'A' = -C'B'$ (Abb. 473).

Die Drehstreckung ist in Abb. 471 gestrichelt ausgeführt. Gleichzeitig aber ist das dem Anfang entsprechende Teil des Diagrammes um $180^\circ + \tau$ gedreht, so daß V_b' in die Verlängerung von V_b fällt. Der Winkel AOA' ist also $180^\circ + 2\tau$.

Diesem Diagramm entspricht der in Abb. 474 dargestellte, aus durchsichtigen Zelluloidstücken gebildete Apparat. Zur Aufrechterhaltung des $\sphericalangle 180^\circ + 2\tau$ zwischen V_a und V_a' dienen die Kuppelstangen $AMFM'A'$. Die Dreiecke AMO und $A'M'O$ sind gleichschenkelig und einander stets ähnlich, wie auch das Parallelogramm $OMFM'$ deformiert wird. Sind $\mathfrak{R}_2, \mathfrak{I}\mathfrak{S}_2, \varphi_2$ am Empfänger gegeben, $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{I}\mathfrak{S}_1, \varphi_1$ am Anfang gesucht, dann löst man die Flügelmutter bei F und verfährt wie folgt:

Man stellt den Strom $\mathfrak{I}\mathfrak{S}_2 = AC$ auf dem Strommaßstabe AB ein, dreht den Proportionalteiler oder Storchnabel ADB , bis auf dem oberen Gradbogen φ_2 (oder $\cos \varphi_2$) längs der Schneide von AG abgelesen wird, wobei der Schnittpunkt der zwei kurzen Stäbe GC und HC mit dem Mittelpunkt C des Bogens zusammenfallen muß. Dann hält man A und B fest und verschiebt den Stift O in einem Schlitz mitten in CP' bis der gegebene Wert von $CO = \mathfrak{E}_2$ erreicht ist. Damit ist der dem Leitungsende entsprechende Teil eingestellt.

Die Storchnäbel ADB und $A'D'B'$ sind von den Leitungskonstanten unabhängig, der Schnabel BLB' muß jedoch die Länge BB' in O im Verhältnis ε^{Δ} teilen, ist also nur für eine bestimmte Leitung mit dem räumlichen Dekrement Δ verwendbar. Man kann ihn jedoch, wie das bei Storchnäbeln (oder Pantographen) üblich ist, mit mehreren Löchern versehen.

Ist dieses Teilungsverhältnis eingestellt, dann liest man den Strom $\mathfrak{I}\mathfrak{S}_1$ am Anfang auf dem Maßstab $A'B'$ ab, schraubt die Flügelmutter F fest und dreht den ganzen Apparat um O nach links, wobei zugleich der Stift O im Schlitz gleitet, bis C' mit P' zusammenfällt.

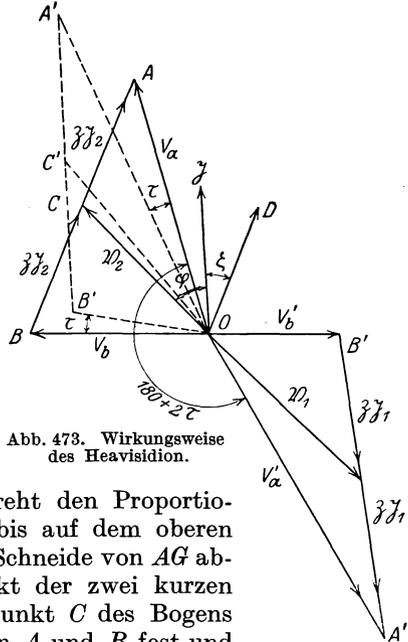


Abb. 473. Wirkungsweise des Heavisidion.

Dann liest man bei O die gesuchte Anfangsspannung $OP' = \mathcal{E}_1$ und am unteren Gradbogen die gesuchte Vorschubung φ_1 ab, während der

Strom \mathfrak{I}_1 auf dem Maßstabe $A'C'$ abgelesen wird. Die Maßstäbe der Spannungen können Phasenspannung oder verkettete Spannung anzeigen. Ihre Nullpunkte C und P' sind willkürlich und nur mit Rücksicht auf die Bewegung der

Stangen gewählt. Die Maßstäbe der Ströme können statt in demselben Maßstabe in einem 3 mal größeren gemessen werden.

Der Apparat kann Rechnung ersparen, wenn man eine bestimmte Leitung untersuchen will.

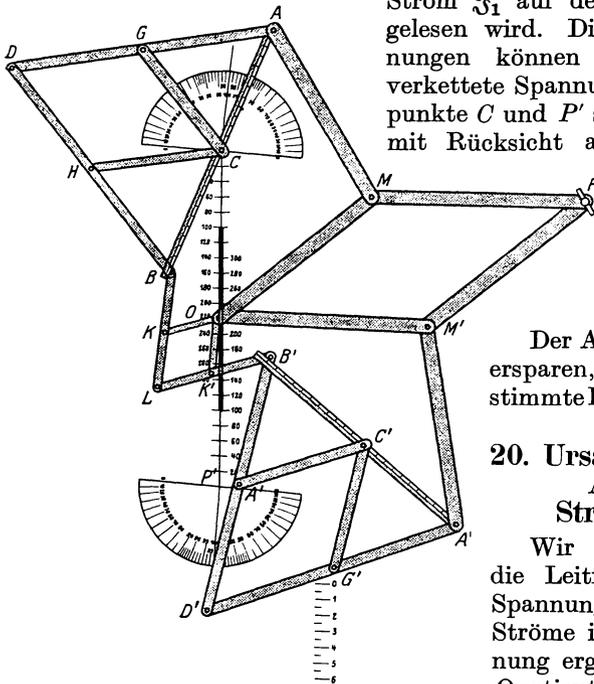


Abb. 474. Das Heavisidion von Karapetoff.

20. Ursachen und Größe der Ableitung und Strahlungsverluste.

Wir haben A definiert als die Leitfähigkeit, die, mit der Spannung multipliziert, sämtliche Ströme in Phase mit der Spannung ergibt; es ist also A der Quotient aus dem Effektverbrauch, der von unvollkommener

Isolation, dunklen Entladungen, elektrostatischer Influenzwirkung und dielektrischer Hysteresis herrührt, geteilt durch die Spannung.

Über den dielektrischen Verlust bei Kabeln ist bereits das Erforderliche in Kapitel XV, S. 450 mitgeteilt.

Bei Kabeln und bei Hochspannungsanlagen wird ein bestimmter Isolationswiderstand meistens nicht vorgeschrieben; an seine Stelle tritt in den Vorschriften die Prüfung mit Überspannung auf Durchschlag.

Die Erkenntnis, daß Isolationswiderstand und Durchschlagsfestigkeit in der Regel nichts miteinander zu tun haben und daß sehr hoch isolierende Massen die Papierisolation spröde machen, hat zum Verzicht auf Festlegung von Mindestwerten für den Isolationswiderstand bei Kabeln geführt. Wollte man diese doch festlegen, dann müßte berücksichtigt werden, daß unter sonst gleichen Umständen der Isolationswiderstand eines Kabels mit steigendem Querschnitt erheblich abnimmt, wie sich aus geometrischen Beziehungen leicht ableiten läßt¹⁾.

Wenn es nur auf die Durchschlagsspannung der Isolatoren ankäme, könnte man bei Freileitungen die Spannung noch höher treiben. Die Grenze wird hier durch die elektrische Durchschlagsfestigkeit der

¹⁾ ETZ 1908, S. 658.

Luft gesteckt. Die dabei auftretenden Erscheinungen faßt man unter der von Steinmetz gegebenen Bezeichnung als Koronaerscheinungen zusammen.

a) **Über Korona und Koronaverluste.** Bei Leitungen mit außergewöhnlich hohen Spannungen treten, wie schon A. Schneller¹⁾ vor Inbetriebnahme der Lauffener Anlage 1891 voraussagte, dunkle Entladungen auf. Bei Überschreitung der kritischen Spannung E_0 zwischen einem Leiter und Erde entsteht ein zischendes und krachendes Geräusch und von einer bestimmten Spannung E_v an beginnen die Drähte unter starkem Geräusch und lebhafter, am Geruch merkbarer Ozonbildung der ganzen Länge nach bläulich zu leuchten. An einzelnen Stellen, wo Staubteilchen oder Unebenheiten sich befinden, zeigen sich innerhalb der bläulichen Lichthülle der Korona glänzende weiße bis gelbe Punkte oder Blitze. Mit dem Auftreten der Korona ist ein gewisser Energieverlust verbunden, auf welchen zuerst Scott, darnach Mershon hinwies.

Da dem System aus zwei oder mehreren parallelen und gegeneinander isolierten Leitern eine bestimmte Kapazität C innewohnt, wirkt es wie ein Kondensator. Solange nun der Höchstwert der Wechselspannung kleiner ist als die kritische Spannung E_0 , wirkt das System wie ein vollkommener Isolator. Solange also die elektrische Feldstärke oder der Gradient

$$g = \frac{de}{dr} = \frac{e}{r \log \text{nat } D/r}$$

am Umfang der Drähte vom Radius r kleiner ist als die Durchschlagsfestigkeit der Luft, treten bei einem vollkommen runden, reinen und polierten Leiter keine anderen Verluste auf, als die von der natürlichen Ionisation der Luft und der unvollkommenen Isolation an den Unterstützungstellen der Drähte herrührenden. Wird aber die Beanspruchung g an der Drahtoberfläche größer als die Durchschlagsfestigkeit g_0 der Luft, $g > g_0$, so erfolgt durch Stoßionisierung der Durchbruch der Luft. Es bildet sich ein dünne, leitende Luftschicht, in welcher die Ionendichte bis zur Erzielung der leitenden und leuchtenden Korona gesteigert ist. Da eine sehr große Zahl von Zusammenstößen hierzu erforderlich ist, muß sich die Ionisierung über einen Abstand x erstrecken, der, verglichen mit der freien Weglänge des Ions sehr beträchtlich ist (Abb. 475).

Diese scheinbare Durchmesserzunahme hat eine periodische Vergrößerung der Kapazität des Drahtsystems zur Folge, und es lagert sich über den ursprünglich wattlosen Ladestrom eine der zusätzlichen und periodisch veränderlichen Kapazität entsprechende Wattkomponente. Der hiermit verbundene Energieverlust läßt sich vorläufig nicht nach theoretischen Formeln ableiten, weil die Natur der Verluste durch den zusätzlichen Ladestrom sehr verschiedener Art sein kann. Es bleibt also nur die Aufstellung empirischer Formeln übrig, die sich an Ergebnisse von Versuchen anschließen. Solche Versuche

1) ETZ 1891, S. 108, 172.

sind an Versuchslinien insbesondere durch Peek¹⁾ mit den reichen Mitteln der General Electric Co., durch Harding²⁾ an der Purdue-Universität, durch Görges, Jentsch und Weidig³⁾ in Dresden, durch Zickler⁴⁾ in Brünn angestellt worden. An wirklichen Linien haben Faccioli⁵⁾ und früher auch Mershon und Scott⁶⁾ gearbeitet.

Das Versuchsmaterial ist also noch klein. Dazu kommt, daß bei langen Linien durch die verteilte Kapazität die Spannung der zwecks Vornahme der Versuche unbelasteten Linie gegen das Ende hin ansteigt und daß bei Bestimmung der Strahlungsverluste als Differenz zwischen den auf der Niederspannungsseite gemessenen Aufnahmen der Transformatoren mit und ohne Leitung sich leicht Ungenauigkeiten ergeben.

Am zuverlässigsten erscheinen zur Zeit die über mehrere Jahre sich erstreckenden Untersuchungen über die Größe der Koronaverluste von Peek, die durch die Messungen von Harding bestätigt werden. Die Werte von Görges sind höher, die von Faccioli niedriger als die zuerst genannten.

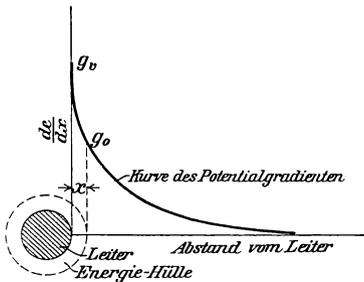


Abb. 475.

Die umfangreichen Untersuchungen von Peek ergaben, daß die Verluste p proportional mit dem Quadrat des Überschusses der Netzspannung E über die kritische Durchschlagsspannung E_0 wachsen.

Bezeichnet man die effektiven Werte der Spannungen zwischen den Leitern und dem neutralen Punkt (Erde), also bei Einphasenstrom die halbe Spannung zwischen den Leitungen, bei Dreiphasen die Sternspannung oder $1/\sqrt{3}$ mal der Spannung zwischen zwei Leitern mit E , den effektiven Wert der kritischen Durchschlagsspannung gegen den neutralen Punkt (Erde) mit E_0 , die Dichte der Luft bezogen auf 76 cm Barometerstand und 25° C mit δ , die Frequenz mit ν , dann befolgt der Verlust in kW für das km Drahtlänge die empirische Beziehung

$$p = \frac{k}{\delta} \sqrt{\frac{r}{D}} \cdot \nu \cdot (E - E_0)^2 \cdot 10^{-5} \text{ kW/km.}$$

Der effektive Wert der kritischen Durchschlagsspannung ist gegeben durch

$$E_0 = m_0 g_0 \delta \cdot r \log \text{ nat } D/r \text{ kV gegen Erde;} \quad (59)$$

1) Proc. Am. Inst. El. Eng. Bd. 30, S. 1484—1561. 1911 und Bd. 31, S. 1085 bis 1126. 1912; ETZ 1912, S. 61.

2) Proc. Am. Inst. El. Eng. Bd. 31, S. 1271. 1912.

3) ETZ 1911, S. 1071; 1913, S. 637, 679.

4) El. u. Masch. 1911, S. 761.

5) Proc. Am. Inst. El. Eng. Bd. 30, S. 99. 1911.

6) Trans. Am. Inst. El. Eng. Bd. 15, S. 511. 1898; Proc. Am. Inst. El. Eng. Bd. 27, S. 1027. 1908.

die Durchschlagsfestigkeit der Luft

$$\left. \begin{aligned} g_{0, \max} &= 29,8 \text{ kV/cm} \\ g_0 &= 21,1 \text{ kV/cm} \end{aligned} \right\} \text{ bei } b = 76 \text{ cm, } t = 25^\circ \text{ C,}$$

D ist der Achsabstand, r der Radius der Drähte.

Bei einem kreisrunden Leiter ist für größere Werte von D/r der Potentialgradient an der Drahtoberfläche

$$g = \frac{dE}{dx} = \frac{E}{r \log \text{nat } D/r}, \text{ wobei } E = \text{Spannung gegen Erde.}$$

Für mehradrige Drahtseile liegt der Gradient g , also auch die kritische Bruchfestigkeit der Luft niedriger, so daß

$$\frac{g_0 \text{ für Drähte}}{g_0 \text{ für Seile}} = m_0 \text{ ist.}$$

$m_0 = 1$ für blanke, glatte Drähte,

$m_0 = 0,98$ bis $0,92$ für alte oder aufgerauhte Drähte,

$m_0 = 0,87$ bis $0,83$ für 7adrige Seile.

Whitehead fand $m_0 = 0,71; 0,78; 0,83; 0,85; 0,87; 0,88; 0,89$ für Seile mit 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9

Drähte in der äußersten Lage der Litze.

Das Glimmen der Drähte beginnt erst bei Überschreitung der kritischen Leucht- oder Glimmspannung E_v , die höher liegt als die kritische Durchbruchsspannung E_0 .

Die kritische Glimmspannung in Kilovolt gegen Erde ist:

$$E_v = m_v g_v \cdot \delta \cdot r \log \text{nat } D/r, \quad (60)$$

der kritische Potentialgradient g_v , wobei das Glimmen beginnt oder die sichtbare

Entladung zwischen zwei parallelen Drähten einsetzt, hängt vom Durchmesser dieser Drähte ab. Abb. 476, stellt diesen Zusammenhang dar, für welchen Peek folgende Formeln gibt:

$$g_v = g_0 m_v \delta \left(1 + \frac{0,301}{\sqrt{r}} \right) \text{ in kV/cm} \quad (61)$$

Der Wert $0,301/\sqrt{r}$ stimmt gut mit anderen Beobachtungen überein. Ryan¹⁾ fand 1904 aus Messungen an konzentrischen Zylindern für den Zahlenbeiwert 0,316; 1911 für Gleichstrom zwischen zwei Kugeln

¹⁾ Ryan: Proc. A. I. E. E. Bd. 30, S. 8. 1911; Transact. A. I. E. E. Bd. 23, S. 101. 1904.

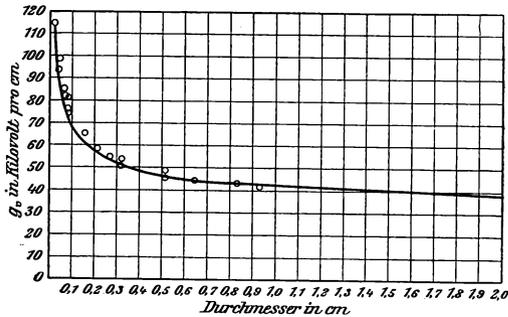


Abb. 476. Kritischer Gradient für zwei parallele Drähte.

0,300; Petersen¹⁾ 0,35, Whitehead²⁾ fand 0,301, Weidig und Jaensch³⁾ 0,33.

Der Wert δ ergibt sich wie folgt: das Gewicht der Luft in g/cm^3 ist beim Barometerstand b cm und der Temperatur t^0 gleich $\frac{0,00465 \cdot b}{273 + t}$.

Bei $t = 25^0 C$, $b = 76,0$ cm ist es 0,001185 Gramm. Daraus folgt

$$\delta = \frac{0,00465 b}{(273 + t) \cdot 0,001185} = \frac{3,92 b}{273 + t} \quad (62)$$

Abb. 477 stellt die Ergebnisse der Versuche von Peek an einer Leitung von 1095 m Gesamtlänge dar. Die Leitung bestand aus 7 adriger Draht-

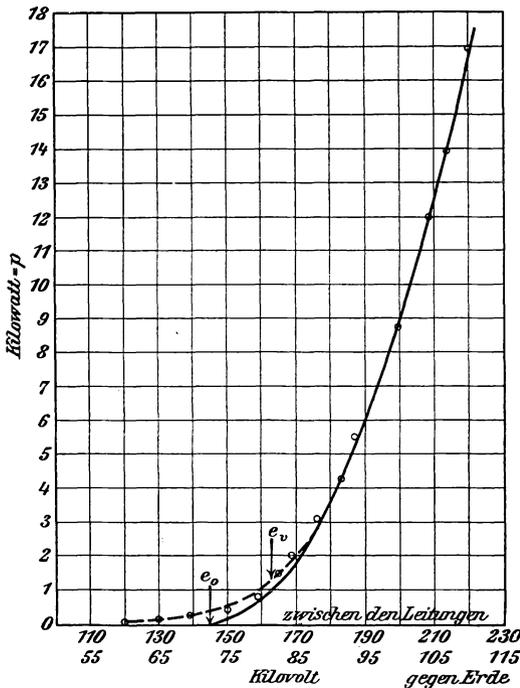


Abb. 477. Koronaverluste nach Peek.

ist, wie ihre Unregelmäßigkeiten. Bei größeren Leitern entspricht jedoch der Überschuß der gemessenen Verlustkurven, die in Abb. 477 gestrichelt angedeutet ist, über die berechnete dem Wahrscheinlichkeitsgesetz

$$p_1 = k_1 \cdot e^{-k_2 (E_0 - E)^2},$$

wobei k_1 von der Anzahl der unregelmäßigen Stellen, k_2 von ihrer Größe abhängt.

¹⁾ Petersen: Hochspannungstechnik, S. 43.

²⁾ Whitehead: Proc. A. I. E. E. Bd. 30, S. 1081. 1911; Bd. 31, S. 839.

³⁾ Weidig u. Jaensch: ETZ 1913, S. 638, 679.

b) Zusammenfassung und Schlußfolgerungen. Der Koronaverlust ist bei ν Per./Sek.

$$p = \frac{k}{\delta} \cdot \nu \cdot \sqrt{\frac{r}{D}} (E - E_0)^2 \cdot 10^{-5} \text{ kW per km Draht.}$$

Hierin ist E die effektive Spannung in kV gegen Erde

$$k \approx 344 \text{ nach Peek, } r = \text{Radius der Leiter,}$$

$$g_0 = 21,1 \text{ kV/cm, } D = \text{Achsabstand der Leiter,}$$

$$\delta = \frac{3,92b}{273 + t}; \text{ also gleich Eins für } b = 76 \text{ cm, } t = 25^\circ \text{ C,}$$

$$m_0 = 1 \text{ für polierte Drähte,}$$

$$= 0,98 - 0,93 \text{ für aufgerauhte alte Drähte,}$$

$$= 0,89 - 0,83 \text{ für Drahtseile,}$$

$$m_\nu = m_0 = 1 \text{ bis } 0,93 \text{ für Drähte,}$$

$$m_\nu = 0,72 \text{ für örtliche oder Teilkorona bei Drahtseilen,}$$

$$= 0,82 \text{ für ausgesprochene Vollkorona bei Drahtseilen.}$$

Für Einphasenleitungen sind die Formeln:

$$E_{0,1} = 2m_0 g_0 \delta r \log \text{nat} \frac{D}{r} = 2E_0 \text{ kV}_{\text{eff}} \text{ zwischen den Leitern,}$$

$$E_1 = 2E \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,}$$

$$p_1 = 2p = \frac{k}{2\delta} \cdot \nu \sqrt{\frac{r}{D}} \cdot (E_1 - E_{0,1})^2 \cdot 10^{-5} \text{ kW} \quad (59a)$$

per km zweidrähtiger Leitung.

Für Drehstromleitungen gilt:

$$E_{0,3} = E_0 \sqrt{3} \text{ verkettete Spannung in kV}_{\text{eff}} \text{ zwischen je 2 Leitern,}$$

$$E_3 = E \sqrt{3};$$

$$p_3 = 3p = \frac{k}{\delta} \cdot \nu \sqrt{\frac{r}{D}} \cdot (E_3 - E_{0,3})^2 \cdot 10^{-5} \text{ kW} \quad (59b)$$

per km dreidrähtiger Leitung.

Bei gleicher Spannung zwischen den Leitern verhalten sich also die Verluste für Drehstrom und Wechselstrom für 1 km Draht wie 4:3, für 1 km Leitung wie 2:1.

Hat man eine Kurve für eine zweidrähtige Wechselstromleitung aufgenommen und ist auf der Abszissenachse die Spannung zwischen den Leitern in kV, auf der Ordinatenachse die Verlustleistung in kW/km aufgetragen, so kann man daraus die Verluste für Drehstrom wie folgt finden:

Der gleiche Verlust pro Draht tritt bei gleicher Spannung gegen Erde auf. Dann ist die verkettete Spannung aber $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ mal so groß als die Spannung zwischen den zwei Wechselstromdrähten, der Verlust aber $\frac{3}{2}$ mal so groß. Man liest also auf der Abszissenachse eine Spannung ab, die $\frac{1}{2}\sqrt{3} = 0,866$ des daselbst angegebenen Wertes entspricht und multipliziert den Ordinatenwert mit 1,5.

Der Einfluß des Wetters macht sich auch geltend in bezug auf die Größe der Verluste.

Zwar haben der Feuchtigkeitsgehalt der Luft und die Windstärke keinen Einfluß auf die Größe der Verluste. Aber Nebel, Regen, Hagel

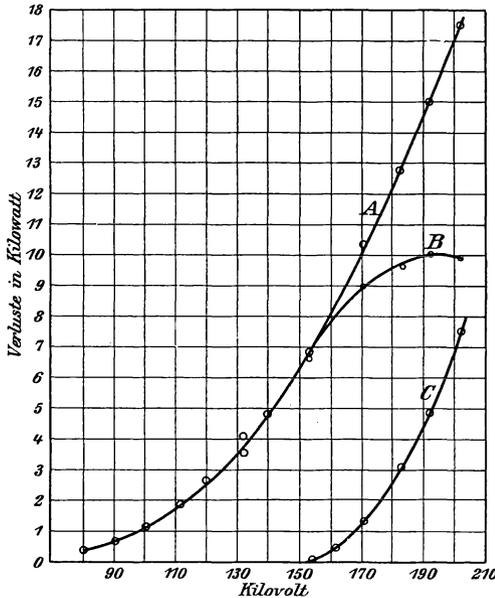


Abb. 478. *A* Koronaverluste bei Schneesturm. *B* Schneeverluste. *C* Verluste bei trockenem Wetter.

und vor allem Schnee erniedrigen die kritische Durchschlagsspannung und erhöhen die Verluste. Abb. 478 zeigt die bedeutende Zunahme der Verluste an Peeks Versuchsleitung von 1095 m Länge bei Schneesturm. Bei 202 kV zwischen den Leitern stieg der für gutes Wetter und gleiche Temperatur und Luftdruck berechnete Wert von 7,53 kW auf 17,46 kW.

Im allgemeinen jedoch empfiehlt es sich, wenn man das Koronagebiet betreten muß, der Unsicherheit wegen in den unteren Grenzen zu bleiben und die Betriebsspannung nur wenig höher zu wählen als die kritische Durchschlagsspannung E_0 .

Ist die Länge der Leitung so groß, daß schon bei Nullatt ein Unterschied zwischen Beginnspannung E_1 und der Spannung E_2 am Ende besteht, dann findet man den Koronaverlust zwischen dem offenen Ende und einem Punkt im Abstände $x = s$, wo die Korona beginnt, durch Integration der Gleichung:

$$\frac{d p}{d x} = k v (E_x - E_0)^2,$$

also

$$p = k v \int_{x=0}^{x=s} (E_x - E_0)^2 d x. \quad (63)$$

Nun ist bei der offenen Leitung die Spannung im Punkte x vom Ende

$$E_x = E_1 \sqrt{\frac{\cos \beta x + \cos 2 \alpha x}{\cos \beta l + \cos 2 \alpha l}} \quad (39b)$$

$$= \frac{E_2}{\sqrt{2}} \sqrt{\cos \beta x + \cos 2 \alpha x}. \quad (46)$$

Führt man dies in Gl. (40 a) ein, so folgt¹⁾ $p = k \nu$ mal

$$\int_0^l \left\{ \frac{E_2}{2} (\mathfrak{Cof} 2\beta x + \cos 2\alpha x) - \frac{2E_2E_0}{\sqrt{2}} \sqrt{\mathfrak{Cof} 2\beta x + \cos 2\alpha x + E_0^2} \right\} dx.$$

Der erste Ausdruck ergibt integriert

$$\int_0^l (\mathfrak{Cof} 2\beta x + \cos 2\alpha x) dx = \frac{\mathfrak{Sin} 2\beta l}{2\beta} + \frac{\sin 2\alpha l}{2\alpha}.$$

Der zweite Ausdruck ergibt für den Fall, daß $\mathfrak{Cof} 2\beta l \approx 1$ ist, was außer für sehr lange Linien meistens zutrifft, angenähert

$$\int_0^l \sqrt{\mathfrak{Cof} 2\beta x + \cos 2\alpha x} \approx \sqrt{2} \frac{\mathfrak{Sin} \beta l}{\beta}.$$

Die angenäherte Integration ergibt also:

$$p = k \nu \left[\frac{E_2^2}{2} \left\{ \frac{\mathfrak{Sin} 2\beta l}{2\beta} + \frac{\sin 2\alpha l}{2\alpha} \right\} - 2E_2E_0 \frac{\mathfrak{Sin} \beta l}{\beta} + lE_0^2 \right]. \quad (63)$$

Man erkennt, daß die zwei hyperbolischen Ausdrücke vereinfacht werden können, da mit großer Annäherung

$$\frac{\mathfrak{Sin} 2\beta l}{2\beta} \approx \frac{\mathfrak{Sin} \beta l}{\beta} \approx l,$$

und wenn mit derselben Annäherung $\frac{\sin 2\alpha l}{2\alpha} \approx l$ gesetzt werden darf, geht Gl. (63) über in

$$p = k \nu \left[\frac{E_2^2}{2} \cdot 2l - 2E_2E_0l + E_0^2l \right] = k \nu (E_2 - E_0)^2 l. \quad (58)$$

Genauer ist für eine $l = 200$ km lange Drehstromleitung aus 3 Kabeln von 70 mm² Querschnitt ($r = 0,55$ cm) mit D cm Achsabstand $\frac{\sin 2\alpha l}{2\alpha} = 193,55; 193,52; 193,42$ für $D = 300$ bzw. 250 und 200 cm. Die genauere Gl. (58) wäre also von der Form

$$p = k \nu \left(\frac{1+n}{2} E_2^2 - 2E_2E_0 + E_0^2 \right) l, \quad (58a)$$

wobei

$$n = \frac{\sin 2\alpha l}{2\alpha l} = 1 - \frac{2}{3}\alpha^2 l^2 + \frac{2}{15}\alpha^4 l^4.$$

In den drei genannten Fällen ist der Fehler für $l = 200$ km nur von der Größenordnung 3% für den ersten Ausdruck in Gl. (58a), aber viel größer für das Endergebnis.

Nimmt man in der unbelasteten Leitung den Ladeverlust $J^2 R$ vernachlässigbar gegenüber dem Koronaverlust, dann findet man leicht aus Gl. (63), daß die in diesem entsprechende Ableitung ausgedrückt wird durch

$$A = \frac{p (\mathfrak{Cof} 2\beta l + \cos 2\alpha l)}{E_{2,0}^2 \left(\frac{\mathfrak{Sin} 2\beta l}{2\beta} + \frac{\sin 2\alpha l}{2\alpha} \right)}.$$

¹⁾ Dean, G. R.: Proc. Am. Inst. El. Eng. 1915, S. 2256.

Für 150 kV zwischen den 3 Kabeln von 70 mm² Querschnitt¹⁾ findet man bei $l = 200$ km die folgenden Daten:

$$r = 0,55 \text{ cm}; \quad R = 0,35 \text{ Ohm/km}; \quad v = 50 \text{ Per./Sek.}$$

$D = 300 \text{ cm}$	$D = 250 \text{ cm}$	$D = 200$
$L = 1,31 \text{ mH/km}$	$1,274 \text{ mH/km}$	$1,222 \text{ mH/km}$
$C = 0,00882 \text{ Mf/km}$	$0,00911 \text{ Mf/km}$	$0,00945 \text{ Mf/km}$
$\beta = 0,3113 \cdot 10^{-3}$	$0,3201 \cdot 10^{-3}$	$0,3319 \cdot 10^{-3}$
$\alpha = 1,112 \cdot 10^{-3}$	$1,165 \cdot 10^{-3}$	$1,1175 \cdot 10^{-3}$
$\lambda = 5650 \text{ km}$	5400 km	5340 km
$w = 282000 \text{ km/sec}$	270000 km/sec	267000 km/sec
$\frac{E_{1,0}}{E_{2,0}} = 0,9774$	$0,9774$	$0,9774$
$E_0 = 63,62 \text{ kV}$	$61,78 \text{ kV}$	$59,17 \text{ kV}$
$E_v = 74,0 \text{ ,,}$	$71,8 \text{ ,,}$	$68,7 \text{ ,,}$
$J_c = 47,5 \text{ Amp.}$	$49,3 \text{ Amp.}$	$51,1 \text{ Amp.}$

nach Gl. (58):

$$p = 600 \text{ kW} \qquad 812,5 \text{ kW} \qquad 1155 \text{ kW}$$

nach Gl. (63):

$$p \approx 780 \text{ kW} \qquad 994 \text{ kW} \qquad 1360 \text{ kW.}$$

21. Ausgleichsvorgänge und freie Schwingungen in langen Leitungen.

Je höher man mit der Betriebsspannung elektrischer Kraftnetze hinaufgeht und je weiter sich diese ausdehnen, um so unliebsamer macht sich eine Reihe von Erscheinungen bemerkbar, die man mit dem Sammelnamen „Überspannungen“ bezeichnet. Der Name sagt schon, daß dabei Spannungen auftreten, die im regelrechten Betriebe nicht vorhanden sind, die höchste normale Betriebsspannung oft um bedeutende Beträge überschreiten und schwere Störungen des Betriebes veranlassen.

a) Arbeitsvorgang. Ein dämpfungsreicher Stromkreis mit der punktförmig konzentrierten Kapazität C und Induktanz L stellt ein schwingungsfähiges Gebilde dar, dessen Eigenschwingungszahl in 2π Sek. $\omega_0 = 1/\sqrt{CL}$. Die Periodenzahl ist 2π -mal kleiner, die Periode $= 2\pi\sqrt{CL}$. Mit dieser Periode würde das durch Zuführung einer gewissen Energie gestörte, dann sich selbst überlassene System frei schwingen.

Diese eindeutigen Ausdrücke ergeben sich nur, wenn man sich die Kapazität C und die Induktanz L punktförmig konzentriert denkt. Für verteilte Kapazität und Induktanz ergeben sich vieldeutige Ausdrücke, auf die erst später eingegangen werden soll. Freie Schwingungen können auch auftreten, ohne daß die dem Netz aufgedrückte EMK periodischen Veränderungen unterliegt, also bei Störung des Gleich-

¹⁾ Feldmann, C.: De Ingenieur Nr. 38, S. 701. 1917.

gewichtszustandes in einem Gleichstromnetze¹⁾, ja selbst in einem von der Stromquelle abgeschalteten Netze.

Der Arbeitsvorgang läßt sich jedoch deutlicher übersehen, wenn man zur Unterstützung der Anschauung einen Stromkreis (Abb. 479) voraussetzt, bestehend aus einer Gleichstromquelle mit der Spannung E , die mittels des Schalters S_1 bei a und b an das Netz gelegt werden kann, das L und R in Reihe und C parallel dazu enthält. Der Schalter S_2 sei offen, S_1 werde geschlossen, bis die Kapazität mit der Elektrizitätsmenge Q geladen ist. Dann werde S_1 geöffnet. Der Kondensator enthält nun die potentielle Energie

$$U = \frac{1}{2} Q E = \frac{1}{2} C E^2$$

und wird sie bei vollkommener Isolierung unbeschränkt lange bewahren. Das Netz ist jetzt ohne aufgedrückte EMK in einem Gleichgewichtszustande²⁾.

Dieser werde durch das Schließen des Schalters S_2 gestört. Dann beginnt der Kondensator sich zu entladen und in dem Stromkreise $CaLS_2RbC$ einen Strom hervorzurufen, der sich periodisch ändert und im Dielektrikum zwischen den Kondensatorbelegungen durch den Verschiebungsstrom geschlossen wird. Dieser rasch anwachsende Strom i verkleinert die potentielle Energie des Kondensators und speichert in der Induktanz einen magnetischen Kraftfluß auf, dessen kinetische Energie bis zum Grenzwert $T = \frac{1}{2} L J^2$ wächst. In diesem Augenblick besitzt der Strom seinen höchsten Wert J , und die Spannung E am Kondensator ist Null; der Kondensator ist also völlig entladen, und die gesamte Energie ist in der Induktivität L kinetisch aufgespeichert.

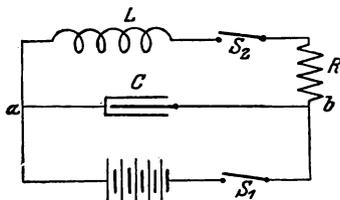


Abb. 479.

Wird zunächst der Widerstand R als vernachlässigbar angesehen, dann hat bei dieser Energieumsetzung kein Verlust stattgefunden, und es muß $T = U$ oder $\frac{1}{2} C E^2$.

Nun nimmt die magnetische Durchflutung allmählich auf Null ab und ruft dabei einen abnehmenden Strom i hervor, der den Kondensator in umgekehrter Richtung wieder lädt. Bei jeder halben Schwingung geht durch Dämpfung der Betrag $\int R i^2 dt$ verloren. Die einander folgenden Amplituden nehmen also in geometrischem Verhältnis ab, und der Vorgang stirbt in kurzer Zeit völlig aus. Wenn jedoch die durch das Ohmsche Gesetz definierte Größe $R = r/i$ keine Invariante, sondern eine Funktion $f(i)$ der Stromstärke ist, können dauernde Schwingungen entstehen.

Bei dem einfachen Stromkreis nach Abb. 479 mit konstanten Werten

¹⁾ Feldmann u. Herzog: Über Schwingungen mit hoher Spannung und Frequenz in Gleichstromnetzen. ETZ 1906, S. 897, 923.

²⁾ Feldmann: Ursache, Wirkung und Bekämpfung von Überspannungen. ETZ 1908, S. 605, 629, 645, 671, 691, 794.

von L , R und C pendelt ein Teil der Energie in umkehrbarer Form zwischen der kinetischen Energie eines magnetischen Feldes und der potentiellen eines elektrostatischen Zwangszustandes hin und her; der andere Teil geht durch Umsetzung in eine nicht unmittelbar umkehrbare Form verloren. Die oszillierende, umkehrbare Energie entspricht dem wattlosen Strome; die dämpfende, nicht umkehrbare Energie dem wattverzehrenden Strome.

Diese elementare Erläuterung des Arbeitsvorganges der freien Schwingungen ist für das Verständnis der Vorgänge nötig.

b) **Erzwungene Schwingungen** entstehen, wenn man dem Kreise eine Wechselspannung E aufdrückt, deren Periodenzahl von dem des Stromkreises abweicht. Während kurzer Zeit treten dann Überlagerungen beider Schwingungen auf, bis schließlich die aufgedrückte Spannung ihre Periode zur Geltung bringt, nachdem die freien Schwingungen durch Dämpfung abgelaufen sind. Dann können nur noch, bis zur folgenden Störung des Gleichgewichts, Schwingungen durch die wattlose Komponente des Stromes mit der Periodenzahl der zugeführten EMK verursacht werden.

Diese aber kann zufällig mit der Periodenzahl der Eigenschwingungen des Netzes übereinstimmen. Dann hat man bei völliger Übereinstimmung Resonanz, bei angenäherter Konsonanz. Dabei kann die maximale Stärke des Stromes bei vernachlässigbarem Widerstand unendlich, beim Widerstand R bis auf den durch das Ohmsche Gesetz gegebenen Grenzwert E/R anwachsen. Mit ihr wächst die Spannung E_C am Kondensator, so daß sie stets größer als die Betriebsspannung E , zuweilen viel größer als E wird.

c) **Resonanzbedingung bei konzentriertem L und C .** Die Überspannungen durch Resonanz zerfallen wieder in zwei Gruppen:

a) Überspannung, herrührend von Resonanz zwischen der Kapazität C und der Selbstinduktion L der Leitung im weiteren Sinn;

b) Überspannungen, herrührend von Resonanz zwischen den Teilen einer langen Linie mit verteilter Kapazität und Induktanz, die gleich einer schwingenden Saite Knoten und Bäuche aufweisen kann.

Nur Fall a) soll zunächst behandelt werden. Die Spannung sei nicht rein sinusförmig. Die n -te Harmonische der Grundschwingung mit dem Effektivwert E_n entsendet in den Kondensator den voreilenden Ladestrom $J_C = Cn\omega E_n$, in eine parallel dazu liegende Induktanz L den nacheilenden Erregerstrom $J_L = E_n/Ln\omega$. Die Harmonischen des Kondensatorladestromes werden also um so mehr verstärkt, die des Ladestromes der Drosselspule um so mehr geschwächt, je höher die Ordnungszahl n der Harmonischen ist. Der Kondensatorstrom J_C wird also schärfere, der Erregerstrom J_L schwächere Zahnung aufweisen als die eingeprägte EMK (Abb. 480). Halten diese beiden wattlosen Ströme einander das Gleichgewicht, dann tritt diese eine Harmonische in Resonanz, die übrigen jedoch nicht. Die Bedingung hierfür ist bei Vernachlässigung des Widerstandes:

$$Cn\omega = \frac{1}{Ln\omega} \quad \text{oder} \quad n\omega = 1/\sqrt{CL}.$$

Bei Berücksichtigung des Widerstandes R ergibt sich als Periodenzahl in 2π Sek.:

Für die Resonanz

$$n_r \omega = \frac{1}{\sqrt{CL}} \sqrt{1 - \frac{CR^2}{2L}}, \text{ oder für } \beta = \frac{R}{2L}$$

$$= \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \approx \omega_0 \left[1 - \left(\frac{\beta}{\omega} \right)^2 \right];$$

für die freien Schwingungen:

$$n_f \omega = \frac{1}{\sqrt{CL}} \sqrt{1 - \frac{CR^2}{4L}}$$

$$= \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \omega_0 \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{\omega} \right)^2 \right];$$

für diese bei vernachlässigtem Widerstand:

$$n_0 \omega = \frac{1}{\sqrt{CL}} = \omega_0.$$

Bei Resonanz der n_r -ten Harmonischen im Betrieb stimmt also die Periodenzahl nicht streng mit der Frequenz der freien Schwingungen

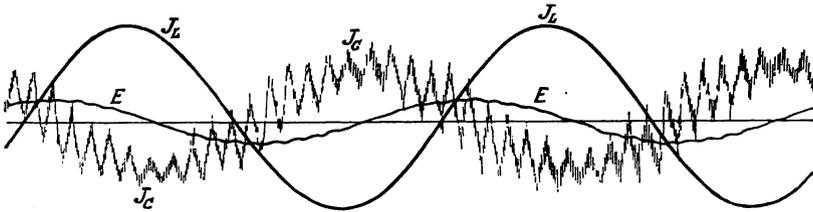


Abb. 480.

überein. Es ist vielmehr $n_0 > n_f > n_r$, aber der Unterschied nach oben und unten ist nur $\pm \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{\omega} \right)^2$, also meistens vernachlässigbar.

Heinke unterschied nach den eintretenden Wirkungen zwischen Stromresonanz bei Parallelschaltung, und Spannungsresonanz bei Serienschaltung von C und L . Im ersten Fall steigt der Strom durch die Drosselspule bei konstanter Spannung E_n von J_L auf $J = E_n/R$, im zweiten steigt die Spannung am Kondensator von E_n auf $E_0 = J/Cn\omega$.

Der Überstrom und die Überspannung sind also für Resonanz gekennzeichnet durch die Beziehung:

$$k_n = \frac{J}{J_L} = \frac{E_0}{E_n} = \frac{n\omega L}{R} = \frac{1}{Rn\omega C}.$$

d) Resonanzbedingung bei verteiltem L und C . Ist der Widerstand vernachlässigbar und sind die Gesamtkapazität C_l und die Gesamtinduktanz L_l eines Kabelstranges gleichförmig über seine Länge ver-

teilt, so ergibt sich Resonanz bei isoliertem Ende des Kabels:

$$\text{für } n\alpha \frac{L_g}{L_l} \cdot \operatorname{tg} n\alpha = 1 \quad \text{statt für } n\alpha \frac{L_g}{L_l} = 1,$$

also bei $L_g/L_l = 1$: für $n\alpha = 0,86$ statt für $n\alpha = 1$.

Hierin bedeutet L_g die Induktanz des Generators, und es ist $\alpha^2 = \omega^2 C_l$ gesetzt. Konzentrierte Kapazität gibt also die eindeutige Lösung $n\alpha = L_l/L_g$. Der verteilten Kapazität entsprechen aber alle Lösungen von der Form:

$$\cos n\alpha = \frac{L_g}{L_l} \cdot n\alpha \sin n\alpha.$$

Setzt man hierin $\frac{L_g}{L_l} n\alpha = \operatorname{tg} \chi$, dann wird:

$$\cos n\alpha = \operatorname{tg} \chi \sin n\alpha$$

oder:

$$\cos n\alpha \cos \chi - \sin n\alpha \sin \chi = 0.$$

Dieser Bedingung wird Genüge geleistet, wenn $(\chi + n\alpha) = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$ und k irgend eine ganze Zahl bedeutet. Für kleine Werte von α und $n\alpha$ kann die Tangente durch den Winkel ersetzt werden, und es wird:

$$n\alpha \left(1 + \frac{L_g}{L_l} \right) = (2k + 1) \frac{\pi}{2},$$

welche Formel für $L_g = 0$ in die Steinmetzsche¹⁾ übergeht.

Über α wissen wir aber nichts Genaueres, da es von dem Verhältnis der Induktanzen L_l/L_g von Leitung und Generator abhängt. Dies ist an sich eine bemerkenswerte Tatsache, auf welche Brylinski²⁾ wohl zuerst hingewiesen hat. Setzt man beispielsweise $L/L_g = 1$, was einen möglichen Wert darstellt, dann wird:

	$k = 0$	1	2	3	4
für $\alpha = 0,17$	$n = 5,3$	20,4	38	56	74
	0,29	3,1	12	22,3	33
	0,86	1,04	4	7,5	11
					14,7.

Je nach der Größe von α kommen also ganz verschiedene Obertöne zur Resonanz.

Aus der Vieldeutigkeit des Resonanzausdrucks bei verteiltem L_l und C_l folgt für das Verhältnis der Endspannung E zur Spannung E_c im Abstand x vom Ende und bei der Leitungslänge l :

$$\frac{E_c}{E} = \frac{\cos \alpha \frac{x}{l} \cdot \sin \omega t}{\cos \alpha - \frac{L_g}{L_l} \cdot \sin \alpha}.$$

Für eine völlig sinusförmige EMK treten also längs der Linie zwei Arten von Überspannungen auf. Die eine, wenn der Nenner Null wird. Das ist die soeben besprochene Resonanz. Die andere, wenn der Zähler Null wird, wobei das Verhältnis der Endspannung E zur Anfangs-

¹⁾ Steinmetz, C. P.: ETZ 1898, S. 702.

²⁾ Brylinski: Bull. Soc. Intern. des Electriciens Bd. 4, S. 319. 1904.

spannung E_c (für $x = l$) unendlich wird. Das ist jedoch keine Resonanz, sondern ein mit der Wellenfortpflanzung verknüpftes Phänomen.

Die kürzeste Leitung, welche diese Erscheinung hervorruft, ist die, welche in Viertel-Wellenlänge schwingt. Für sie ist

$$\alpha = \frac{\pi}{2} = \omega \sqrt{CL}$$

oder

$$\nu_1 = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2k+1}{4\sqrt{CL}}.$$

Für Luftleitungen und Kabel gilt angenähert $\sqrt{CL} = \frac{k_c \cdot \varepsilon_a \cdot l}{w} F$, wenn l die Länge, w die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichts, beide in km ausgedrückt, bedeutet. Die Dielektrizitätskonstante ε_a sei 4 für Kabel, 1 für Luft, die Korrektur $k_c = 1,5$ für Kabel und 1 für Luft. Daraus folgt also für $\omega = 300$ (entsprechend 48 Per./Sek.):

$$\alpha = \omega \sqrt{CL} = k_a \cdot \varepsilon_c \cdot \frac{\omega l_0}{w} = k_c \cdot \varepsilon_a \cdot \frac{l}{1000},$$

so daß die soeben berechnete Reihe von Harmonischen zur Resonanz käme bei $l = 170, 290, 860$ km Luftleitung oder etwa 28, 48 oder 143 km Kabel.

Diese Längen und die Werte der Tabelle sollen nur andeuten, daß diese Spannungsknoten und Bäuche sowohl bei Luftleitung als bei Kabeln schon für verhältnismäßig niedrige Harmonische, bei $\alpha = 0,29$ schon für die 3., 12., 22. denkbar sind, sobald die Leitung ein Vielfaches von 290 beziehungsweise rund 50 km ist.

e) **Freie Schwingungen bei verteiltem L und C .** Nach den Grundgleichungen bei Zählung vom Anfang

$$\begin{cases} -\frac{\partial V}{\partial x} = RJ + L \frac{\partial J}{\partial t} \\ -\frac{\partial J}{\partial x} = AV + C \frac{\partial V}{\partial t} \end{cases} \quad (1)$$

regelt sich jeder elektromagnetische Vorgang auf der Leitung, doch ist durch sie die Spannungs- und Stromverteilung auch im stationären Zustande noch nicht bestimmt; es treten noch gewisse Nebenbedingungen hinzu, die abhängen vom Rest des Stromkreises, zu dem die Leitung gehört, und von den in diesem Kreise tätigen elektromotorischen Kräften. Wir nehmen nun an, es habe sich auf der Leitung ein stationärer Zustand eingestellt, das heißt ein Zustand, bei dem Strom und Spannung entweder zeitlich unverändert bleiben, wie bei Gleichstrom, oder einer rein periodischen Zeitfunktion folgen, wie bei Wechselstrom. Den diesem Zustande entsprechenden Strom nennen wir i_1 , die Spannung e_1 . In irgendeinem Augenblicke, wir sagen zur Zeit $t = 0$, soll nun eine oder mehrere der erwähnten Nebenbedingungen plötzlich geändert werden. Den geänderten Nebenbedingungen entspricht ein neuer Beharrungszustand (II) mit dem Strome i_2 und der Spannung e_2 .

Nun kann jedoch der Strom nicht in einer endlichen Leitungslänge plötzlich von i_1 auf i_2 springen; es müßten sonst wegen der Selbstinduktion der Leitung unendlich hohe Spannungen entstehen. Auch

die Spannung kann nicht unstetig von e_1 auf e_2 übergehen; die Kapazität der betreffenden Leitungslänge würde einen unendlich großen Ladestrom erfordern. Beides ist physikalisch unmöglich. Strom und Spannung werden vielmehr zur Zeit $t = 0$ zunächst ihre Werte i_1 und e_1 behalten und mit wachsender Zeit stetig in i_2 beziehungsweise e_2 übergehen. Man kann sich nun vorstellen, daß der stationäre Strom i_2 schon vom Augenblicke $t = 0$ an vorhanden ist, daß sich ihm aber ein Ausgleichsstrom i_f überlagert, derart, daß

$$i_1 = i_f + i_2 \text{ für } t = 0 \quad (64)$$

st. Ebenso denkt man sich e_2 schon zur Zeit $t = 0$ vorhanden und von einer Ausgleichsspannung e_f überlagert:

$$e_1 = e_f + e_2 \text{ für } t = 0. \quad (65)$$

Dann ist auch für jede spätere Zeit der wirkliche Strom

$$i = i_f + i_2, \quad (66)$$

die wirkliche Spannung

$$e = e_f + e_2, \quad (67)$$

Diese Zerlegung ist deshalb zulässig, weil die Gl. (1) linear sind. Es wird darum auch für p_f und i_f allein das Gleichungspaar 1 gelten; außerdem müssen diese Werte die Grenzbedingungen des Zustandes (II) erfüllen. i_f und e_f sind Strom und Spannung der dem betreffenden Probleme entsprechenden freien Schwingung; wir werden sehen, daß sie im Laufe der Zeit verschwinden, so daß nach Gl. (66) und (67)

$$\begin{aligned} i &= i_2, \\ e &= e_2 \end{aligned}$$

für den Beharrungszustand übrigbleibt, wie es sein soll.

Wie erwähnt, genügen die i_f , e_f für sich den Gl. 1. Ein partikuläres Integral dieser Gleichungen ist

$$\begin{aligned} e_f &= \Phi \cdot \Psi' \\ i_f &= -C \cdot \Phi' \Psi. \end{aligned}$$

Hierin ist Φ nur eine Funktion der Zeit, Ψ eine Funktion des Ortes von der Form

$$\begin{aligned} \Phi &= \varepsilon^{-\beta t} (A \sin \omega t + B \cos \omega t); \\ \Psi &= a \sin \alpha + b \cos \alpha. \end{aligned}$$

Φ' und Ψ' sind die ersten Ableitungen dieser Funktionen und ferner ist $\beta = \frac{R}{2L}$, $\alpha^2 = LC(\omega^2 + \beta^2) \approx LC\omega^2$.

Die Wellenlänge der Schwingung ist $\lambda = \frac{2\pi}{\omega}$, ihre Frequenz $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$, ihre Geschwindigkeit $w = \frac{\omega}{\alpha}$.

Es wird also die allgemeinste Lösung¹⁾

¹⁾ Wagner, K. W.: ETZ 1908, S. 707. Auch sein Buch: Elektromagnetische Ausgleichvorgänge in Freileitungen und Kabeln. 1908.

$$e_f = \varepsilon^{-\beta t} \sum (A \sin \omega t + B \cos \omega t) (\alpha a \cos \alpha x - \alpha b \sin \alpha x)$$

oder

$$e_f = \varepsilon^{-\beta t} \{f_1(x - wt) + f_2(x + wt)\} \quad (68)$$

und ähnlich

$$i_f = \varepsilon^{-\beta t} \sqrt{\frac{C}{L}} \{f_1(x - wt) - f_2(x + wt)\}. \quad (69)$$

Da die Konstanten α, A, B, a, b sämtlich willkürlich wählbar sind, so bedeuten f_1 und f_2 willkürliche Funktionen.

Was sagen uns nun die Gl. (68) und (69)? Der Ausdruck $f_1(x - wt)$ hat die Eigenschaft, daß er sich nicht ändert, wenn t etwa um τ und x gleichzeitig um $w\tau$ wächst. Er stellt also eine in Richtung wachsender x mit der Geschwindigkeit $w = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ fortschreitende Welle dar.

Ebenso bedeutet $f_2(x + wt)$ eine in $-x$ -Richtung mit der Geschwindigkeit w fortschreitende Welle. Der Faktor $e^{-\beta t}$ verursacht ein allmähliches Absterben der Wellen mit wachsender Zeit.

Die Spannung e_f des Ausgleichsvorganges entsteht in dieser Darstellung durch Übereinanderlagerung zweier Wellen f_1 und f_2 , die sich in entgegengesetzten Richtungen mit der Geschwindigkeit w unverzerrt längs der Leitung fortpflanzen und dabei nach einem Exponentialgesetze (dem Gesetze der fallenden geometrischen Reihe) absterben. Der Strom i_f läßt sich in derselben Weise aus zwei Wellen zusammensetzen. Die Stromwellen sind den Spannungswellen gleichgeformt; der Proportionalitätsfaktor ist bei der in Stromrichtung ($+x$ -Richtung) fortschreitenden Welle $+\sqrt{\frac{C}{L}}$, bei der gegen die Stromrichtung fortschreitenden Welle $-\sqrt{\frac{C}{L}}$.

Wir wollen an einem einfachen Beispiel zeigen, wie sich die Wellen für einen bestimmten Ausgleichsvorgang ermitteln lassen.

f) Verlauf der Ladung mit Gleichstrom. Eine zunächst strom- und spannungslose unbelastete (das heißt bei $x = l$ offene) Leitung soll im Augenblicke $t = 0$ mit ihrem Anfange ($x = 0$) an eine Quelle konstanter Spannung E Volt gelegt werden. Wie verläuft die Ladung?

Nach Ablauf des Ausgleichsvorganges ist auf der ganzen Leitung: $i_2 = 0, e_2 = E$. Im Momente $t = 0$ ist $i_1 = 0$ und $e_1 = 0$. Es muß somit die freie Schwingung der Anfangsbedingung genügen $i_f = 0$ und $e_f = -E$.

Setzen wir in den Gl. (68) und (69) für t den Wert Null ein, so ergibt die Bedingung $i_f = 0$:

$$f_1 = f_2 = f$$

die Bedingung $e_f = -E$ dagegen:

$$f = -\frac{E}{2}.$$

Beide Wellen haben somit die konstante Höhe $-\frac{E}{2}$. Das gilt aber nur für den Augenblick $t = 0$. Von da ab wandern die Wellen mit der Geschwindigkeit w . Da wir nun die Wellen nur für einen

Bereich kennen, der ebenso lang ist wie die Leitung, so entsteht bei der Verschiebung der Wellen die Schwierigkeit, daß sich von beiden Leitungsenden aus immer größer werdende Bereiche ausbilden, für die man nur eine der Wellen kennt, nämlich die ankommende. Nach Gl. (68) und (69) sollen jedoch e_f und i_f aus je zwei Wellen zusammengesetzt werden. Die zweite Welle, die bisher fehlende Fortsetzung der von dem betreffenden Leitungsende fortteilenden Welle, entsteht durch Reflexion der ankommenden Welle beim Auftreffen auf jenes Leitungsende. Wir erhalten die Reflexionsgesetze aus den Grenzbedingungen.

1. Das Gesetz für das offene Ende folgt aus der Bedingung:

$$i_f = 0 \quad \text{für} \quad x = l.$$

Laut Gl. (69) bedeutet das, daß bei $x = l$ die reflektierte Welle f_2 der ankommenden Welle f_1 gleich sein muß.

$$f_1 = f_2 \quad \text{für} \quad x = l.$$

2. Am Anfang der Leitung wird die Spannung

$$e = e_1 + e_2 = e_1 + E$$

durch die fremde Stromquelle nach unserer Voraussetzung auf dem konstanten Werte E gehalten. Dann muß also

$$e_f = 0 \quad \text{für} \quad x = 0$$

sein. Das ist nach Gl. (68) nur möglich, wenn die reflektierte Welle f_1 der ankommenden Welle f_2 entgegengesetzt gleich ist:

$$f_1 = -f_2 \quad \text{für} \quad x = 0.$$

Nun sind wir in der Lage, ein Bild vom Verlaufe der Ladung einer offenen Leitung zu entwerfen. In jedem Augenblicke und in jedem Punkte ist der wirkliche Strom i und die wirkliche Spannung e gegeben durch:

$$\begin{aligned} i &= i_f \\ e &= E + e_f. \end{aligned}$$

i_f und e_f sind aus den soeben definierten Wellen zusammensetzen:

$$\begin{aligned} i_f &= \varepsilon^{-\beta t} \sqrt{\frac{C}{L}} (f_1 - f_2), \\ e_f &= e^{-\beta t} (f_1 + f_2). \end{aligned}$$

In der Abb. 481 ist die Zeichnung für den Verlauf der Spannung e (stark umrahmte schraffierte Fläche) für einige Zeitpunkte durchgeführt. Der Einfluß des Dämpfungsfaktors $e^{-\beta t}$ ist hierbei vernachlässigt worden.

Man sieht, wie eine Welle von der Höhe E und von scharfer rechteckiger Front in die Leitung eindringt, mit der Geschwindigkeit w nach dem Ende hineilt und dort durch Reflexion auf den doppelten Betrag erhöht wird. Diese Spannungserhöhung pflanzt sich vom Ende bis zum Anfange der Leitung fort; hier bricht sich die Welle, da bei $x = 0$ die fremde Stromquelle, die die Spannung unveränderlich auf dem Betrage E erhält, für die Überspannung wie ein Kurzschluß wirkt. Nun beginnt eine Entladungsperiode; die Leitung wird zunächst von

der Spannung $2E$ auf E und hiernach wegen der eigenartigen Reflexionsverhältnisse am offenen Leitungsende vollständig entladen. Zuletzt ($t = t_9$) befindet sich die Leitung wieder in dem Anfangszustande.

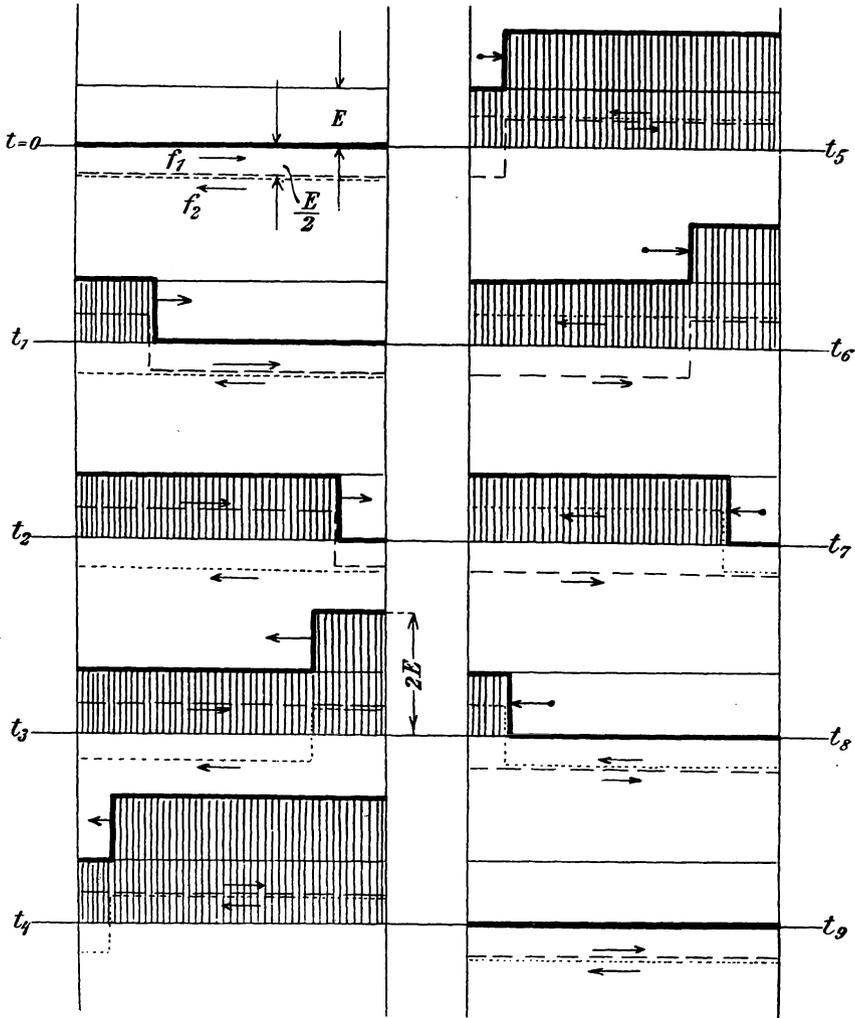


Abb. 481. Spannungsverlauf bei Ladung einer Leitung mit konstanter Spannung.

Das Spiel beginnt von neuem und würde sich in ganz derselben Weise bis in alle Ewigkeit wiederholen, wenn keine Dämpfung vorhanden wäre. Diese verursacht ein allmähliches Absterben der Wellen, und es bleibt zuletzt:

$$e = E,$$

$$i = 0.$$

Durch Aufzählen aller dem gleichen Zeitpunkte angehörigen, übereinander stehenden Glieder ergibt sich der Wert der Spannung von Halbperiode zu Halbperiode zu¹⁾

$$E_m \cdot (2, -4, +6, -8, +10 \dots).$$

Die Spannung stiege also am Ende der Leitung um den Betrag $4 E_m$ für die Periode bis zum Wert ∞ an, wenn sich dem nicht die (vernachlässigte) Dämpfung entgegensezte. Die Leitung mit der Länge l befindet sich also in Resonanz mit der aufgedrückten Wellenlänge $\lambda = 4 l$.

Folgt auf eine Leitung mit dem Wellenwiderstande $W_1 = \sqrt{L_1/C_1}$ eine zweite mit dem Wellenwiderstande¹⁾ $W_2 = \sqrt{L_2/C_2}$, so bestehen zwischen dem Augenblickswert e_1 der auftreffenden, e_{11} der nach W_1 reflektierten und e_{12} der in W_2 eindringenden Welle die Beziehungen

$$e_{11} = \frac{W_1 - W_2}{W_1 + W_2} e_1 = q_{12} e_1,$$

$$e_{12} = \frac{2 W_1}{W_1 + W_2} e_1 = (1 + q_{12}) e_1,$$

worin

$$q_{12} = \frac{W_1 - W_2}{W_1 + W_2}$$

der Reflexionsfaktor ist.

Betrachten wir z. B. die Verbindungsstelle einer Leitung mit der Wirkung eines Transformators oder einer Hochspannungsmaschine (Generator oder Motor). Die Längeneinheit der Wicklung hat viel mehr Selbstinduktion und viel weniger Kapazität als die der Leitung; es ist daher W_1 klein gegenüber W_2 . Daraus folgt, daß sehr angenähert

$$e_{11} \approx e_1; \quad e_{12} \approx 2 e_1$$

ist. Das heißt, daß die Wicklung wegen ihrer großen Selbstinduktion für die Leitung wie ein offenes Ende wirkt. Die Spannung erhöht sich durch Reflexion auf den doppelten Betrag. In die Wicklung selbst aber dringt eine Welle von der doppelten Höhe ein; denn die Leitung wirkt wegen ihrer viel größeren Kapazität der Wicklung gegenüber wie eine nicht abfallende Stromquelle.

Für die Verbindung einer Leitung mit einem Kabel, wo W_1 groß gegenüber W_2 ist, liegen die Verhältnisse anders; das Kabel verhält sich der Leitung gegenüber wie ein Kurzschluß; die eindringende Welle ist nur klein im Vergleich zur auftretenden Welle.

Wenn wir also Wicklungen gegen eindringende Wellen schützen wollen, so müssen wir dafür sorgen, daß sie wie Kabel wirken. Man erreicht das durch Vorschalten von Schutzdrosselspulen, die auf der Längeneinheit noch mehr Selbstinduktion und noch weniger Kapazität enthalten sollen wie die Wicklung. Die von der Leitung auf die Drosselspule auftreffende Welle erhöht sich zwar in dieser auf das Doppelte;

¹⁾ Näheres siehe W. Petersen: Arch. Elektrot. Bd. 1, S. 233. 1912; auch ETZ 1913, S. 167 und sein Buch: Hochspannungstechnik.

die Drosselspule ist aber leicht vorzüglich zu isolieren. Von der in die Spule eingedrungenen Welle geht bei passender Bemessung der Spule nur ein verschwindend kleiner Teil auf die Wicklung über, während diese bei nicht vorhandener Spule mit der doppelten Wellenspannung beansprucht werden würde, wie wir vorhin sahen.

Schalten wir etwa bei $E_m = 20$ kV eine unerregte Freileitung mit $W_1 = 600$ über ein unter Spannung stehendes Kabel mit $W_2 = 60$ ein, so ist die Entladewelle nur $e_{11} = -1,81$ kV. Schalten wir aber eine unter Spannung stehende Luftleitung mit $W_1 = 600$ auf ein Kabel mit $W_2 = 60$, so enthält wir eine Entladewelle $e_{11} = -18,1$ kV. Die Spannung der Entladewelle ist nämlich nach Rüdénberg¹⁾

$$e_{11} = -E_m \cdot \frac{W_1}{R + W_1 + W_2},$$

wenn R einen Ohmschen Vorschaltwiderstand bedeutet.

Während nun alle längs einer Leitung liegenden Apparate den

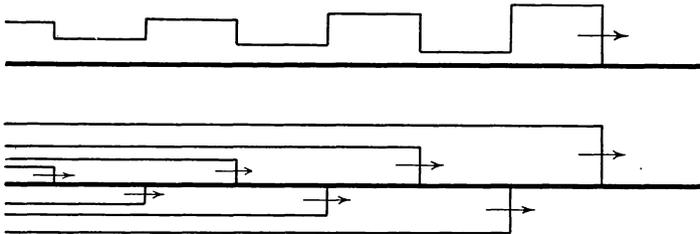


Abb. 484.

Spannungsstoß e_{11} erhalten, werden die am Ende angeschlossenen Apparate von dem doppelten Spannungsstoß $2 e_{11}$ betroffen.

Trotzdem der Leiter W_2 verlustfrei gedacht ist, reflektiert er nur unvollkommen, da ein Teil der Ladung in ihn eindringt. Ein Kurzschluß oder eine Stromquelle von unendlicher Ergiebigkeit reflektieren die auftreffende Spannungswelle vollkommen unter Umkehrung des Vorzeichens, ein offenes Leitungsende ebenfalls vollkommen, jedoch ohne diese Umkehrung des Vorzeichens. Die in die Leitung 2 eindringenden Wellen ergeben also einen nach der geometrischen Reihe

$$E_m \cdot (1 + q) (1, -q, +q^2, -q^3 \dots)$$

abklingenden Wellenzug (Abb. 484), der seinerseits wieder zu neuer Resonanz Anleitung geben kann.

Wenn ein nach dieser Form abklingender Wellenzug mit der Wellenlänge $4l$ am Ende eines Kabels mit $W_2 = 52,5$ Ohm auf eine offene Freileitung mit der Länge l und dem Wellenwiderstand $W_2 = 652,5$ Ohm trifft, arbeitet sich die Spannung infolge Resonanz der Leitung mit dem auftreffenden Wellenzug allmählich in die Höhe. Der Reflexionsfaktor ist $q = 0,85$; die höchste Spannungserhöhung gegenüber der ersten

¹⁾ Rüdénberg: Z. El. u. Masch. Wien 1912, S. 157.

auftretenden Halbwelle beläuft sich auf 6 und gegenüber der Spannung E_m , welche den Wellenzug an irgendeiner Stelle des Kabels hervor- gebracht hat, auf 11,1 (Abb. 485).

Im unteren Teil der Abbildung, die den zeitlichen Verlauf der Spannung am Leitungsende angibt, ist der die Überspannung er- regende Wellenzug dargestellt in richtiger Phasenlage. Wie bei allen ähnlichen Vorgängen herrscht die Amplitude der Spannung örtlich

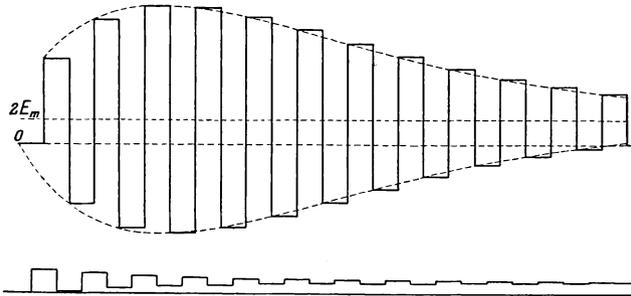


Abb. 485.

nicht nur am Ende, sondern an jedem Punkte der Leitung. Die Zeit- dauer ihres Auftretens ist proportional der Entfernung von der Über- gangsstelle und nimmt linear vom Werte $2l/V$ am Ende bis auf 0 an der Übergangsstelle ab.

Die weitere Verfolgung dieser Verhältnisse führt zur Behandlung der Schutzvorrichtungen gegen Überspannungen, die außerhalb des Rahmens dieses Buches liegt.

Anhang.

In der amerikanischen Literatur finden sich häufig Angaben über lange Hochspannungslinien mit wenig bekannten Maßeinheiten, deren Umrechnung durch die folgenden Angaben erleichtert werden soll. Man nennt

Mil = 0,001 Inch (Zoll) = 0,0254 mm

Circular mil = Kreis, dessen Durchmesser = 0,001 inch ist,

Square mil = Quadrat, dessen Seite = 0,001 inch ist,

also 1 circular mil = 0,0005067 mm²

oder 1 mm² = 1973,5 circular mils

$\frac{1}{3}$ Yard = 1 Fuß = 12 inches = 0,3048 m.

Die Nummern der B. u. S. G. (Drahtlehre nach Brown und Sharp) entsprechen folgenden Durchmessern in mm

B. u. S. G. Nr.	0000	000	00	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Durchm. in mm	11,683	10,404	9,266	8,251	7,348	6,544	5,827	5,190	4,621	4,115	3,655	3,263

Sachverzeichnis.

- Abfall der Spannung 6, 13, 63, 245, 288.
Ableitung bei langen Leitungen 408, 414, 528.
Abnahmen auf Knotenpunkte verlegt 73.
— gleichmäßig verteilt 47.
— induktive 260.
Absaugen durch Zusatzdynamo 390.
Abschreibungen 298.
Admittanz 215.
AEF-Normalien 217.
Akkumulatoren 5, 71, 196.
┌-Leiter bei G.-S. 31, 35.
— — W.-S. 248, 251.
Allgemeiner Stromkreis 251.
Aluminium 23.
Amerikanische Maße 549.
Amplitude 200, 203.
Änderung in der Stromverteilung 107.
Anlagen, Einteilung derselben 1, 2.
Anstieg und Ablauf des Stromes 211.
Äquivalente Schemas 249, 468.
Äquivalente Sinusspannung 207.
Äquivalenter Leiter 51, 349.
Arbeitsdraht 8, 374, 399.
Asymmetrische Belastung bei Dreileitern 188, 262.
— Belastung bei Dreiphasen 269, 276, 282.
Auffrischung der Spannung 6, 176, 390.
Aufgabe der Leitungsrechnung 17, 71.
Aufschließen der Speisepunkte 75, 91, 145, 156.
Augenblickswerte 200.
Ausführung des blanken Mittelleiters 195.
Ausgleichrechnung 114.
Ausgleichsleitungen 75, 178—185.
Ausgleichstrom 73.
Ausgleichung wattloser Belastung 313.
Ausgleichvorgänge 536.
Ausheben eines Leiters 74, 154, 165, 168.
Aussetzender Betrieb 327.
Außenleiter 186, 193.

Bahnen 7, 374.
— Speiseleitung 375, 390, 399, 401.
Beeinflussung von Schwachstromleitungen 434, 442.
Befreiung des mehrfachen Knotens 132, 134.
Belastung 38, 43, 177.
— gleichmäßig verteilt 47.
— induktive 260, 274, 279.
— verlegt auf Knotenpunkte 132.
— wattlose 37, 313.
— zulässige 320, 325.
Belastungsfaktor 311.
Belastungskurven 308, 402.
Belastungsschwankungen 17, 63, 308, 404.
Benutzungsdauer des Maximums 309.
Beschränkte Lösbarkeit 61, 66, 190, 258, 270.
Bestimmung der Knotenspannungen 14, 96, 101.
— der Maschenströme 15, 77, 111.
Betrachtung im Stromkreissinn und im Leitungssinn 267.
Betrag eines Vektors 201.
Betriebsdiagramm der Fernleitung nach Schönholzer 514.
Betriebskosten, Ersparnis an 296.
Betriebswerte der Induktivität und Kapazität 418.
Betriebszahl nach Hohenegg 301.
Betriebszeit 297, 311.
Bezirke nach Teichmüller 153.
Bildung von Netzen 15, 91.
Bildverwandtschaft 252.
Blanke Leitungen, Erwärmung 320.
Blanker Mittelleiter 195.
Bleisicherung 11, 178.
Bogenlampen 3.
Brücke von Wheatstone 94.
Buchung von Belastungsänderungen 106.

Capazität s. Kapazität.
Corona 528.

Dämpfungskonstante 458.
Darstellung langer Leitungen in reeller Form 427, 475.
— durch logarithmische Spiralen 484, 508.
— graphische 25, 40, 81, 118—125, 140, 240, 252, 302, 484, 505, 522, 545

- Dauer der Benutzung des Maximums 309.
 Dauerbelastung 320, 325.
 Deckungsprinzip 14, 62, 230.
 Determinanten 95.
 Diagramme für W.-S. 200.
 Dielektrischer Verlust 450.
 Differentialgleichung des allgemeinen Stromkreises 36, 454.
 Distrikte nach Teichmüller 153.
 Drahtlehren 549.
 Drehsinn der Vektoren 202.
 Drehstreckung 228.
 Drehstrom 205, 269, 276, 423, 437.
 Drehstrombahnen 398.
 Drehstromleitung bei Δ -Schaltung 269, 292.
 — — Y-Schaltung 276, 282, 292.
 Drehstromleitungen, Berechnung 505.
 — Induktivität 420, 423, 450.
 — Kapazität 420, 437, 446.
 Drehvektor 202, 229.
 Dreiecksmasche 137.
 Dreieckstransfigurierung 137, 151.
 Dreileitersystem 6, 186, 262, 287.
 Dreiphasen, Dreieckschaltung 269, 292, 451.
 — Sternschaltung 282, 286, 292.
 Dreischenkliger Stern 138, 159.
 Dreivoltmetermethode 224.
 Dynamo 1, 5, 34, 432, 531.

 Ebene Vektoren 229.
 Effektivwert 203, 206, 209.
 Einfacher Schließungskreis bei G.-S. 30.
 — — — W.-S. 200, 238.
 — Leitungsstrang mit beiderseitigem Stromeingang 72, 75, 360.
 Einflußlinie 107.
 Einphasensystem 200, 238.
 Einziehsysteme, Erwärmung 333.
 Einteilung der Anlagen 1, 2.
 Einzellichter 3.
 Eisendraht 23.
 Elastizität der Leitung 61, 66, 190, 258, 270.
 Elektrischer Kettenbruch 32, 248, 251.
 Elektrographik 25, 40, 81, 118—125, 140, 240, 252, 302, 505.
 Elektrostatistische Beeinflussung 442.
 Elimination von Unbekannten 113, 118.
 EMK 19.
 Endbelastete lange Leitung 466, 484, 514.
 Energieabnehmer 1, 7, 38, 313.
 Energieerzeuger 1, 4.
 Energieverteilung in Netzen 106.
 Entlastung der Knoten 132, 365.
 Entlastung mehrfacher Knoten 134.
 Entwicklung der Leitungslehre 12.
 Entwurf des Netzes 336, 359.
 Erdströme bei Bahnen 392.
 Erdung des Mittelleiters 194.
 Ersatzleiter 51.
 Ersatzleiterschemas 249, 468.
 Ersparnis an Leitungskosten durch synchrone Motoren 313.
 Erwärmung der Leitungen 319—336.
 Erzwungene Schwingungen 538.

 Fahrdrähte 8, 374, 399.
 Fahrstrahl 200.
 Feeder (s. Speiseleitungen) 6.
 Fernleitungen 404, 514.
 Fiktive Leiterlänge 51, 349.
 Formfaktor des W.-S. 203.
 Form der Jahresbelastungskurve 308, 402.
 Freie Schwingungen 541.
 Freileitungen, Erwärmung 321.
 Frequenz 200.
 Fünfleiter 187, 287.

 Gaußsche Hilfsleichung 114.
 Gaußsches Reduktionsverfahren 113.
 Gefahrzone bei Bahnen 395.
 Gegenseitige Induktion 429.
 — Erwärmung benachbarter Kabel 325.
 Gerichete Größen 202, 208.
 Geringster Kupferaufwand 45, 296, 401.
 Geschlossene Leitung 72, 86, 336.
 Gleich- und gegenläufige Anordnung 471.
 Gleichmäßig verteilte Abnahme 47.
 Gleichungen, lineare 113.
 Gleichzeitigkeitsfaktor 311.
 Gleiswiderstand bei Bahnen 388.
 Glühlampen 2, 4, 6, 16, 66.
 Graphik 25, 40, 81, 118—125, 140, 240, 252, 302, 484, 505, 522, 545.
 — wirtschaftliche Leitungsberechnung 302.
 Graphische Parallelschaltung 25, 231, 344.
 Graphischer Fahrplan 378.
 Grundgrößen der Leitungsberechnung 60, 288.
 Grundwelle und Harmonische 206.
 Günstigste Querschnitte 45, 296, 401.
 — Zahl von Speisepunkten 340.
 — — — Transformatoren 347.

 Halbsymmetrische Mehrphasensysteme 266.
 Halbwattlampe 4.
 Handelskupfer 22.
 Harmonische 206.

Hausinstallation 70, 171.
 Heavision 526.
 Hilfgleichung von Gauß 114.
 Hintereinanderschaltung (s. Serieschal-
 tung) 5, 23, 170, 173, 198.
 Höhere Spannung, Vorteile derselben
 175.
 Hyperbelfunktionen 470.
 Hyperbolische Rechentafeln 521.
 Hysterese, dielektrische 450.

IEC-Normalien 22, 202.
 Imaginäre Größen 218—230, 455, 470.
 Impedanz 215.
 Induktion, gegenseitige 429.
 Induktionskoeffizienten 408, 417, 423.
 Induktive Belastung 260.
 — Leitung 238, 423.
 Induktiver Widerstand 215, 217.
 Induktivität 215, 222, 407, 421, 444,
 454.
 Influenz, elektrostatische 442.
 — linie 107.
 Intermittierender Betrieb 327.
 Isolationswiderstand 408.
 Isolatoren 12.
 Isolierte Leitungen, Belastungstabelle
 320, 325.
 Isothermen 326.

Jablochkoffkerze 3, 4.
 Jahresbelastungskurve 308, 402.
 Jakobische Behandlung linearer Glei-
 chungen 117.

Kabel 13, 306, 444.
 — Erwärmung 323.
 — Induktivität und Kapazität 444
 bis 449.
 Kabelmasse, Wärmewiderstand 323.
 Kapazität 213, 222, 237, 407, 414.
 Kaskadenschaltung s. Reihenschaltung.
 Kettenbruch 31, 248, 251.
 Kettenleiter 31, 248, 251, 468.
 Kirchhoffsche Gesetze 13, 88.
 Kleinen Winkeln, \sin und tg von 225.
 Knoten, mehrfache 132.
 Knotenentlastung 130, 132, 365.
 Knotenpunktsgleichungen 15, 96, 101.
 Knotenpunktverlegung 132.
 Knotenspannungen 14, 96, 101, 249.
 Komplexe Größen 218, 230, 470.
 Komponentenstrom 73.
 Kondensator 213, 222, 237, 407, 414.
 Konjugierte Widerstände 226.
 Konvektion in Gasen 321.
 Konvergenzmethode 33, 36.
 Koronaverluste 528.
 Kosten der Leitung 298, 300, 304, 307.
 — des jährlichen Verlustes 298, 300, 304.

Kraftbedarf der Bahnen 383.
 Kraftübertragung, Geschichtliches 7.
 Kreis- und Hyperbelfunktion 470.
 Kreisströme 93.
 Kritische Länge 173, 335.
 Kupferleitungen, zulässige Belastung
 173, 320, 325, 335.
 Kupfernornmalien 22.
 Kurzschlußstrom 419.

Ladestrom 213.
 Lange Leitungen 407—549.
 Leerlauf und Kurzschluß 73, 419, 460.
 Leistung, augenblickliche 210.
 Leistungsfaktor 427.
 Leistungsschwankung 62, 190, 258,
 271.
 Leistungsverlust 60.
 Leiter, Π -Form 30, 238.
 — Γ -Form 31, 248, 251.
 — äquivalenter 51, 349.
 — beiderseits gespeist 72, 75, 81.
 — kettenförmiger 31, 248, 251, 468.
 Leitermetall minimal 45, 193, 338.
 Leiterquerschnitt, Zweileiter 41, 171.
 — Dreileiter 186, 262, 287.
 — Mehrphasen 269, 282, 292.
 Leitung, geschlossene 72, 86.
 — offene 31, 53.
 — verzweigte 31, 53.
 — ∞ lang 462.
 Leitungslehre, Entwicklung 10.
 Leitungssysteme 2, 102, 324, 394—420.
 Leitungsstrang, offener 31, 38, 55.
 Leitungszahl nach Hochenegg 301.
 Leitwert 18, 21, 23.
 — verschiedener Metalle 21.
 Lichtquellen 1, 3, 66.
 Lineare Gleichungen 113, 118.
 Logarithmische Spiralen 484, 508.
 Lösbarkeit 61, 66, 190, 258, 270.
 Luftleitungen, zulässige Belastung 321.
 — Induktivität 421, 423.
 — Kapazität 435, 437.
 — Überspannung 541.

Maschen 16, 72, 91, 104, 112.
 Maschengleichungen 16, 72.
 Maschen öffnen 91, 145.
 Maschenströme 91.
 Mehrfacher Knoten 134.
 Mehrphasensystem 9, 264, 407.
 Metallaufwand bei verschiedenen Sy-
 stemen 41.
 — kleinster 43, 45, 338.
 Minimaler Kupferaufwand 45, 193, 338.
 Mittelknoten 134.
 Mittelleiter 6, 186, 192.
 Mittelwert der Sinusspannung 200.
 Motoren 8, 367, 426, 517.

- Nacheilung 217.
 Näherungsmethode, Kettenleiter 33.
 — lineare Gleichungen 113.
 — lange Leitung 499.
 Nebeneinanderschaltung 5, 14, 25, 231, 236
 Negative Widerstände 29.
 Netz, sekundär zusammengehängt 343.
 Netze, Bildung derselben 15, 91.
 Netzentwurf 336, 359.
 Netzknoten 96, 101.
 Netzmaschen 91.
 Netzspaltung 154, 165, 168.
 Netzbildung 130—170, 336.
 Netzerfall 75, 91.
 Neutraler Leiter 6, 186.
 Normalien für Kupfer 23.
 Normalgleichungen 113.
 Nutzwiderstände 34.

Oberwellen 206.
 Offener Leitungsstrag 31, 38, 55.
 Öffnen von Maschen 75, 91, 145.
 Ökonomische Erwägungen 14, 296, 401, 404.
 Ohmsche Widerstände 18.
 Ohmsches Gesetz 13, 18.
 — — für W.-S. 207.

Parallelschaltung 5, 14, 25, 231, 236.
 — von Reihen 174.
 — — Richtungswiderständen 231.
 — — Transformatoren 7, 344.
 Periodenzahl 200.
 Phasenspannung 204.
 Phasenverschiebung 201.
 Potential 14, 19.
 Prinzip der Superposition 14, 62, 106, 134, 230, 497.
 Π -Leiter bei G.-S. 30.
 — — W.-S. 238.
 Prüfdrähte 70.

Quellpunkt und Sinkpunkt 6, 433.
 Querschnitt, Zweileiter 41, 171.
 — Dreileiter 186, 262, 287, 291.
 — Mehrphasen 287, 291.
 — Mittelleiter 192, 283.
 — Bahnspisekabel 401.
 Querschnitte, normale 44, 338.
 Querschnittsminimum 43, 193, 338.

Räumlicher Phasenwinkel 458.
 Reaktanz 215.
 Rechenapparate 125, 526.
 Rechentafeln 521.
 Reflektierte Welle 457, 465, 544.
 Reihenschaltung 3, 5, 23, 170, 198, 217, 236.
 — von Gruppen 173.
 Relative Leistungsschwankung 64, 192, 271.

 Relative Spannungsschwankung 63, 190, 258, 271.
 Relativer Leistungsverlust 64, 192, 258, 270.
 Relativer Spannungsabfall 63, 190, 270.
 Resonanzbedingungen 540.
 Richtungsgrößen 202, 220, 231.
 Richtungswiderstand 208, 214, 463.
 Ring- oder Δ -Schaltung 265.
 Rotierende Umformer 359.
 Rückleitung bei Bahnen 392.
 Rücksichtnahme auf Glühlampen 66.
 — — Motoren 68.
 — — Regelung 69.
 Rückspisekabel 390.

Schienenrückleitung 388, 392.
 Schnittmethode 15, 77, 111.
 Schwankungsgrößen 63.
 Schwankungsverhältnis bei Bahnen 404.
 Schwerpunktsprinzip 41.
 Schwingungen, freie und erzwungene 538, 541.
 Seidelsche Behandlung linearer Gleichungen 117.
 Sekundärgeneratoren 7.
 Selbstinduktion 211, 215, 222, 407.
 Serienschaltung 3, 5, 23, 170, 173, 198.
 Sicherheitsvorschriften 11, 44, 70, 173, 338.
 Sinusspannung 200.
 Spaltung des Netzes 154, 165, 168.
 Spannung 19, 175.
 Spannungsabfall 6, 62.
 Spannungsbild und Strombild 252.
 Spannungsdiagramm 82, 204, 262—281.
 Spannungsdifferenz 20.
 Spannungsgleichungen 103, 111.
 Spannungsmethode 96, 111.
 Spannungsschwankung η 62.
 Spannungstreu 74.
 Spannungsverkettung 262.
 Spannungsverlust 20, 62.
 Spannungszunahme gegen das Ende 461.
 Speiseleitung 6, 176, 375, 390, 399.
 Speisepunkte 144, 182, 375, 390.
 Spezifische Widerstände 23, 42.
 Spiralen, logarithmische 484, 508.
 Stahldraht 23.
 Stern, dreischenkliger 138, 159.
 Sterndreiecktransfiguration 138.
 Sternschaltung 265.
 Störung bei Telefonen 434, 442.
 Strahlungsverluste (Korona) 528.
 Streuströme 392.
 Stromarten 26, 200.
 Stromdichte 42.
 Stromgleichungen 103, 111.
 Stromkreis, allgemeiner 251.
 Strommethode 15, 77, 111.
 Stromtreu 74.

- Stromverteilungssysteme 5, 170—200, 264—288.
 Stromverzerrung 207, 464.
 Stromvieleck und Spannungsvieleck 252.
 Stromwärmefaktor 404.
 Superposition, Prinzip 14, 41, 62, 134, 230, 497.
 — der Potentiale 14, 62, 230.
 — — Ströme 14, 62, 106, 134.
 — bei langen Leitungen 497.
 Suszeptanz 215.
 Swanschaltung 7, 175.
 Symmetrische Mehrphasensysteme 264.
 Systeme von Gleichungen 114.
 Tafelmäßiges Rechnen bei Richtungsgrößen 522.
 Tangensfaktor 245, 427, 428.
 Teilung des Lichts 3, 5.
 Teilstück eines Leiters 19.
 Telegraphengleichung 454.
 Telephonstörungen 434, 442.
 Temperaturkoeffizient 24.
 Transfigurierung 137—153, 367.
 — Δ in Y 137, 367.
 — Y in Δ 138, 369.
 — zeichnerisch 140.
 Transformatoren 7, 198, 249, 347, 399.
 — Parallelschaltung 199, 344.
 Überspannungen 544.
 Umbildung von Netzen 130—170.
 Umformer, rotierende (Transformatoren) 359.
 — ruhende 7, 198, 249.
 Umformung der Zerstreungsfunktion — widerstandstreue 137—153, 367.
 Unbekannte aus linearen Gleichungen 111, 114.
 — Spannungen (Strommethode) 77, 111.
 — Ströme(s. Spannungsmethode) 96, 111.
 Unmittelbare Stromverteilung 170—196.
 Unsymmetrische Belastung beim Dreileitersystem 188, 262.
 — — bei Drehstrom 269, 276, 282.
 VDE-Vorschriften 44, 70, 173, 338.
 Vektor 200.
 Verästelte Leitung 53, 55.
 Verdrillung von Leitungen 429—435.
 Vergleich der Metallmengen bei verschiedenen Systemen 246, 287, 291.
 — zwischen ∞ langer und endlicher Leitung 464.
 Verkettung b. Mehrphasen 9, 204, 262—281.
 Verlegungsart und Erwärmung 319—335.
 Verlust durch Korona 528.
 Verlustzeit 310.
 Verschiedenheitsfaktor 312.
 Verteilungssysteme 5, 170—200, 264—288.
 Verteilungsleitung 70.
 Verzerrter Strom 464.
 Verzerrungsfreie Leitung 464.
 Verzweigter Leiter 50—55.
 Viereckstransfigurierung 142.
 Vier Grundgrößen 60, 288.
 Vierleitersystem 188.
 Vierphasensystem 284, 420.
 Voreilung 217.
 Vorteil höherer Spannung 175.
 Wanderwellen 544.
 Wärmeübergang 373.
 Wärmewiderstand 322.
 Wärmezufuhr und -abgabe 319—335.
 Wattloser Strom 209.
 Wattstrom 209.
 Wechselstrombahnen 397.
 Wechselstromkreis 200, 259.
 Wechselstromnetze 259.
 Wechselstromwiderstand 215.
 Wellen 543.
 Wellenlänge 458.
 Wellenwiderstand 546.
 Widerstand 18.
 — negativer 24, 29.
 — spezifischer 21, 23.
 Widerstandstreue 136.
 Winkel, kleine 225.
 Wirtschaftliche Leiterbemessung 14, 296, 401, 404.
 Zahlen, gerichtete und komplexe 215, 230, 455, 470.
 Zeichnerische Behandlung geschlossener Leiter 81.
 — — linearer Gleichungen 118—125.
 — — paralleler Leiter 25—29, 226.
 — — der Transfigurierung 140.
 — — — Transformatoren 199, 344.
 — — unsymmetrischer Belastung 270, 276.
 — — wirtschaftlicher Leitungsberechnung 302.
 Zeitkonstante 41, 328, 331.
 Zeitlinie 202.
 Zerlegung in Komponentenströme 73.
 — in Wattstrom und wattlosen Strom 209.
 Zerstreungsfunktion 104.
 Zerteilung in Distrikte n. Teichmüller 153.
 Zulässige Belastung der Leiter 173.
 Zulässigkeit der Superposition bei langen Leitungen u. b. mehr. Abnehmern 497.
 Zulässiger Spannungsverlust 60, 190, 270.
 — Leistungsverlust 60, 192, 258.
 Zusatzmaschine bei Bahnen 391.
 Zustandsgröße 63, 190, 270, 288.
 Zweibildermethode 252.
 Zweieckstransfigurierung 146.
 Zweileiter 41, 171.
 Zweiphasen 284, 420.
 Zyklenströme 93.

Handbuch der elektrischen Beleuchtung. Von Dipl.-Ing. **Jos. Herzog**, Budapest, und Prof. **Clarence Feldmann**, Delft. Dritte, vollständig umgearbeitete Auflage. Mit 707 Textfiguren. XII, 765 Seiten. 1907. Gebunden RM 20.—

Überströme in Hochspannungsanlagen. Von **J. Biermanns**, Chefelektriker der AEG-Fabriken für Transformatoren und Hochspannungsmaterial. Mit 322 Textabbildungen. VIII, 452 Seiten. 1926. Gebunden RM 30.—

Theorie der Wechselstromübertragung (Fernleitung und Umspannung). Von Dr.-Ing. **H. Grünholz**. Mit etwa 140 Abbildungen im Text und etwa 12 Tafeln. Erscheint Mitte Juni 1927.

Die Fernleitung von Wechselströmen. Von Prof. Dr. **G. Roessler**, Danzig. Mit 60 Textfiguren. XII, 243 Seiten. 1905. Gebunden RM 7.—

Die Rechtsverhältnisse von Leitungsnetzen. Von berat. Ingenieur Dr. phil. **Bruno Thierbach**. Mit 4 Textfiguren. IV, 14 Seiten. 1915. RM 0.60

Hochspannungstechnik. Von Dr.-Ing. **Arnold Roth**. Mit 433 Abbildungen im Text und 73 Tabellen. Erscheint im Mai 1927.

Höchstspannungs-Tagung Essen. Sechs Vorträge. Herausgegeben vom Elektrotechnischen Verein des rheinisch-westfälischen Industriebezirks e. V., Essen 1926. 108 Seiten. 1926. Gebunden RM 12.—

Die Stromversorgung von Fernmelde-Anlagen. Ein Handbuch von Ingenieur **G. Harms**. Mit 190 Textabbildungen. VI, 137 Seiten. 1927. RM 10.20; gebunden RM 11.40

Kurzschlußströme beim Betrieb von Großkraftwerken. Von Prof. Dr.-Ing. und Dr.-Ing. e. h. **Reinhold Rüdberg**, Chefelektriker, Privatdozent, Berlin. Mit 60 Textabbildungen. IV, 75 Seiten. 1925. RM 4.80

Elektrische Schaltvorgänge und verwandte Störungerscheinungen in Starkstromanlagen. Von Prof. Dr.-Ing. und Dr.-Ing. e. h. **Reinhold Rüdberg**, Chefelektriker, Privatdozent, Berlin. Zweite, berichtigte Auflage. Mit 477 Abbildungen im Text und einer Tafel. VIII, 510 Seiten. 1926. Gebunden RM 24.—

Die Transformatoren. Von Dr. techn. **Milan Vidmar**, ordentl. Professor an der jugoslawischen Universität Ljubljana. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 320 Abbildungen im Text und auf einer Tafel. XVIII, 752 Seiten. 1925. Gebunden RM 36.—

Der Transformator im Betrieb. Von Dr. techn. **Milan Vidmar**, ordentl. Professor an der jugoslawischen Universität Ljubljana. Mit 126 Abbildungen im Text. VIII, 310 Seiten. 1927. Gebunden RM 19.—

Die elektrische Kraftübertragung. Von Oberingenieur Dipl.-Ing. **Herbert Kyser**. In 3 Bänden.

Erster Band: **Die Motoren, Umformer und Transformatoren.** Ihre Arbeitsweise, Schaltung, Anwendung und Ausführung. Zweite, umgearbeitete und erweiterte Auflage. Mit 305 Textfiguren und 6 Tafeln. XV, 417 Seiten. 1920. Unveränderter Neudruck. 1923. Gebunden RM 15.—

Zweiter Band: **Die Niederspannungs- und Hochspannungs-Leitungsanlagen.** Ihre Projektierung, Berechnung, elektrische und mechanische Ausführung und Untersuchung. Zweite, umgearbeitete und erweiterte Auflage. Mit 319 Textfiguren und 44 Tabellen. VIII, 405 Seiten. 1921. Unveränderter Neudruck. 1923. Gebunden RM 15.—

Dritter Band: **Die maschinellen und elektrischen Einrichtungen des Kraftwerkes und die wirtschaftlichen Gesichtspunkte für die Projektierung.** Zweite, umgearbeitete und erweiterte Auflage. Mit 665 Textfiguren, 2 Tafeln und 87 Tabellen. XII, 930 Seiten. 1923. Gebunden RM 28.—

Bau großer Elektrizitätswerke. Von Prof. Dr.-Ing. h. c. Dr. phil. **G. Klingenberg**, Geh. Baurat. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 770 Textabbildungen und 13 Tafeln. VIII, 608 Seiten. 1924. Berichtigter Neudruck. 1926. Gebunden RM 45.—

Die elektrischen Einrichtungen für den Eigenbedarf großer Kraftwerke. Von Oberingenieur **Friedrich Titze**. Mit 89 Textabbildungen. VI, 160 Seiten. 1927. Gebunden RM 12.—

Über den Ausgleich der Einzelbelastungen bei Elektrizitätswerken (Verschiedenheitsfaktor) und über Elektrizitätstarife. Von Prof. Dr.-Ing. e. h. **G. Dettmar**, Hannover. (Sonderabdruck aus der „Elektrotechnischen Zeitschrift“ 1926, Heft 2, 3, 4, 7 und 19.) Mit 35 Abbildungen. 70 Seiten. 1926. RM 1.80

Die Schaltungsarten der Haus- und Hilfsturbinen. Ein

Beitrag zur Wärmewirtschaft der Kraftwerksbetriebe. Von Dr.-Ing. **Herbert Melan**. Mit 33 Textabbildungen. VI, 119 Seiten. 1926.

RM 10,50; gebunden RM 12.—

Die Wechselstromtechnik. Herausgegeben von Professor Dr.-Ing.

E. Arnold, Karlsruhe. In fünf Bänden.

- I. Band: **Theorie der Wechselströme.** Von **J. L. la Cour** und **O. S. Bragstad**. Zweite, vollständig umgearbeitete Auflage. Mit 591 in den Text gedruckten Figuren. XIV, 922 Seiten. 1910. Unveränderter Neudruck. 1923. Gebunden RM 30.—
 - II. Band: **Die Transformatoren.** Ihre Theorie, Konstruktion, Berechnung und Arbeitsweise. Von **E. Arnold** und **J. L. la Cour**. Zweite, vollständig umgearbeitete Auflage. Mit 443 in den Text gedruckten Figuren und 6 Tafeln. XII, 450 Seiten. 1910. Unveränderter Neudruck. 1923. Gebunden RM 20.—
 - III. Band: **Die Wicklungen der Wechselstrommaschinen.** Von **E. Arnold**. Zweite, vollständig umgearbeitete Auflage. Mit 463 Textfiguren und 5 Tafeln. VII, 371 Seiten. 1912. Unveränderter Neudruck. 1923. Gebunden RM 16.—
 - IV. Band: **Die synchronen Wechselstrommaschinen.** Generatoren, Motoren und Umformer. Ihre Theorie, Konstruktion, Berechnung und Arbeitsweise. Von **E. Arnold** und **J. L. la Cour**. Zweite, vollständig umgearbeitete Auflage. Mit 530 Textfiguren und 18 Tafeln. XX, 896 Seiten. 1913. Unveränderter Neudruck. 1923. Gebunden RM 28.—
 - V. Band: **Die asynchronen Wechselstrommaschinen.**
 1. Teil: **Die Induktionsmaschinen.** Ihre Theorie, Berechnung, Konstruktion und Arbeitsweise. Von **E. Arnold** und **J. L. la Cour** unter Mitarbeit von **A. Fraenckel**. Mit 307 in den Text gedruckten Figuren und 10 Tafeln. XVI, 592 Seiten. 1909. Unveränderter Neudruck. 1923. Gebunden RM 24.—
 2. Teil: **Die Wechselstromkommutatormaschinen.** Ihre Theorie, Berechnung, Konstruktion und Arbeitsweise. Von **E. Arnold**, **J. L. la Cour** und **A. Fraenckel**. Mit 400 in den Text gedruckten Figuren und 8 Tafeln. XVI, 660 Seiten. 1912. Unveränderter Neudruck. 1923. Gebunden RM 26.—
-

Arnold-la Cour, Die Gleichstrommaschine. Ihre Theorie,

Untersuchung, Konstruktion, Berechnung und Arbeitsweise. Dritte, vollständig umgearbeitete Auflage. Herausgegeben von **J. L. la Cour**. In 2 Bänden.

- I. Band: **Theorie und Untersuchung.** Mit 570 Textfiguren. XII, 728 Seiten. 1919. Unveränderter Neudruck. 1923. Gebunden RM 24.—
- II. Band: **Konstruktion, Berechnung und Arbeitsweise.** Mit etwa 600 Textabbildungen und etwa 20 Tafeln. Erscheint im Sommer 1927.

Elektronen und Ionen-Ströme. Experimental-Vortrag bei der Jahresversammlung des Verbandes Deutscher Elektrotechniker am 30. Mai 1922. Von Prof. Dr. **J. Zenneck**, München. Mit 41 Abbildungen. 48 Seiten. 1923. RM 1.50

Elektrische Durchbruchfeldstärke von Gasen. Theoretische Grundlagen und Anwendung. Von Prof. **W. O. Schumann**, Jena. Mit 80 Textabbildungen. VII, 246 Seiten. 1923. RM 7.20; gebunden RM 8.40

Die Grundlagen der Hochvakuumtechnik. Von Dr. **Saul Dushman**. Deutsch von Dr. phil. **R. G. Berthold** und Dipl.-Ing. **E. Reimann**. Mit 110 Abbildungen im Text und 52 Tabellen. XII, 298 Seiten. 1926. Gebunden RM 22.50

Die Grundlagen der Hochfrequenztechnik. Eine Einführung in die Theorie von Dr.-Ing. **Franz Ollendorff**, Charlottenburg. Mit 379 Abbildungen im Text und 3 Tafeln. XVI, 640 Seiten. 1926. Gebunden RM 36.—

Hochfrequenzmeßtechnik. Ihre wissenschaftlichen und praktischen Grundlagen. Von Dr.-Ing. **August Hund**, Beratender Ingenieur. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit etwa 270 Textabbildungen. Erscheint im Juni 1927.

Elektrische Hochspannungszündapparate. Theoretische und experimentelle Untersuchungen. Von Prof. Dipl.-Ing. **Viktor Kulebakin**, Moskau. Mit 100 Textabbildungen. 89 Seiten. 1924. RM 4.20

Der phasenverschobene Strom. Seine Messung und seine Verrechnung. Von Dipl.-Ing. **Richard F. Falk**, Ingenieur bei den Siemens-Schuckertwerken. Mit 52 Textabbildungen. IV, 92 Seiten. 1927. RM 6.60

Das elektromagnetische Feld. Ein Lehrbuch von **Emil Cohn**, ehem. Professor der theoretischen Physik an der Universität Straßburg. Zweite, völlig neubearbeitete Auflage. Mit 41 Textabbildungen. VI, 266 Seiten. 1927. Gebunden RM 24.—

Lehrbuch der Elektrodynamik von Dr. **J. Frenkel**, Professor für theoretische Physik am Polytechnischen Institut in Leningrad. Erster Band: **Allgemeine Mechanik der Elektrizität.** Mit 39 Abbildungen. X, 365 Seiten. 1926. RM 28.50; gebunden RM 29.70

Einführung in die Elektrizitätslehre. Von Prof. Dr. **R. W. Pohl**, Göttingen. Mit 393 Abbildungen. VII, 256 Seiten. 1927. Gebunden RM 13.80