

Die  
**Zusatzkräfte und Nebenspannungen**  
**eiserner Fachwerkbrücken.**

---

Eine systematische Darstellung  
der verschiedenen Arten, ihrer Grösse und ihres Einflusses auf die  
konstruktive Gestaltung der Brücken.

Von

**Fr. Engesser,**

Baurath und Professor an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe.

---

**I.**

**Die Zusatzkräfte.**

*Mit 58 in den Text gedruckten Abbildungen.*



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH  
1892

Die  
**Zusatzkräfte und Nebenspannungen**

**eiserner Fachwerkbrücken.**

---

Eine systematische Darstellung  
der verschiedenen Arten, ihrer Grösse und ihres Einflusses auf die  
konstruktive Gestaltung der Brücken.

Von

**Fr. Engesser,**

Baurath und Professor an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe.

---

**I.**

**Die Zusatzkräfte.**



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH  
1892

**ISBN 978-3-662-33634-2**

**ISBN 978-3-662-34032-5 (eBook)**

**DOI 10.1007/978-3-662-34032-5**

## Vorwort.

---

Die statische Berechnung der Fachwerkbrücken erfolgt in der Praxis bekanntlich nur näherungsweise, unter vereinfachenden Annahmen bezüglich der Wirkungsweise der äusseren und der inneren Kräfte. In der Regel werden, abgesehen von den Windkreuzen, nur die durch lothrechte Lasten (Eigengewicht, Verkehrslast) hervorgerufenen Stabkräfte (Hauptkräfte) in Betracht gezogen, die den übrigen Belastungsarten (Winddruck, Bremskraft u. s. w.) entsprechenden Stabkräfte (Zusatzkräfte) jedoch meist ausser Acht gelassen. Bei Bestimmung der inneren Kräfte wird, ausser in einigen besonderen Fällen, stets die Annahme gemacht, dass die einzelnen Stäbe nur reine Zug- oder Druckspannungen (Grundspannungen) auszuhalten haben, was neben Anderem insbesondere die Ausführung reibungsloser Gelenkverbindungen an den Knotenpunkten zur Voraussetzung hat. Die bei den wirklichen Trägern thatsächlich noch weiter auftretenden Biegungs-, Schub- und Verwindungsspannungen (Nebenspannungen) werden gleichfalls vernachlässigt. Den bei der Berechnung gemachten Vernachlässigungen wird dann schliesslich bei der Querschnittsbestimmung durch entsprechend niedrig gehaltene Spannungszahlen schätzungsweise Rücksicht getragen. Ein derartiges Verfahren unterliegt bei normalen Verhältnissen in praktischer Hinsicht meist keinen Bedenken; in besonderen Fällen kann es jedoch angezeigt erscheinen, eine genauere Berechnung anzustellen. Abgesehen von Neubauten grösserer Spannweite kommen hier namentlich ältere Brücken mit starker Beanspruchung in Betracht, bei denen zur Zeit die rechnungsmässige normale Sicherheit nicht mehr vorhanden ist. Hier ist eine möglichst genaue Kenntniss der Gesamtspannungen (einschliesslich Zusatzspannungen und Neben-

spannungen) erforderlich, um ein zutreffendes Urtheil über die Betriebssicherheit der betreffenden Brücke abgeben zu können. Derartige Aufgaben werden in den nächsten Jahren bei zahlreichen Eisenbahnbrücken an die Ingenieure herantreten, wo mit Rücksicht auf die stets wachsenden Gewichte und Geschwindigkeiten der Züge der rechnungsmässige Sicherheitsgrad unter das normale Maass gesunken ist, und die Fragen, ob Verstärkung, ob Auswechslung des Eisenwerks, beantwortet werden müssen.

Ausser der unmittelbaren Anwendung auf den besonderen Fall haben die Untersuchungen über die Zusatzkräfte und Nebenspannungen aber noch den weiteren allgemeinen Zweck, einen richtigen Einblick in das mannigfaltige Kräftespiel einer Brücke zu gewähren, die für die allgemeine Anordnung und die Querschnittsbildung in Betracht kommenden Faktoren möglichst klar zu legen und gleichzeitig ein sicheres Urtheil über die Zweckmässigkeit verschiedener Einzelanordnungen zu ermöglichen.

Den Bedürfnissen der Praxis entsprechend, finden wir in der Litteratur vorzugsweise die Theorie der Hauptkräfte behandelt, während die Zusatzkräfte und Nebenspannungen erst in der letzten Zeit eine eingehendere Bearbeitung erfahren haben. Ueber einzelne derselben sind vollkommen erschöpfende Untersuchungen veröffentlicht worden, insbesondere sind hier die trefflichen Arbeiten von Winkler\*) und Manderla zu erwähnen. Doch fehlt es z. Zt. noch an einer zusammenhängenden, systematischen Behandlung des Gegenstands, durch welche eine Uebersicht über das Gesamtgebiet geliefert wird. In der vorliegenden Abhandlung, welche die von mir an der Karlsruher Hochschule gehaltenen Vorträge in erweiterter Form wiedergiebt, soll nun der Versuch gemacht werden, die verschiedenen Arten von Zusatzkräften und Nebenspannungen im Zusammenhang, nach bestimmten Gesichtspunkten geordnet, vorzuführen, wobei zur Ausfüllung vorhandener Lücken eine Reihe neuer Untersuchungen erforderlich wurde. Vielfach konnten hierzu Arbeiten benutzt werden, die ich s. Zt. bei der Badischen Staatsbahn-

---

\*) In den Vorlesungen über Brückenbau 1874 wurden zum ersten Male die Brückenkonstruktionen als räumliche Fachwerke behandelt und die Bedingungen der statischen Bestimmtheit und Standfestigkeit aufgestellt.

verwaltung anlässlich der Prüfung und Untersuchung eiserner Brücken gefertigt hatte.

Im 1. Hefte, welches für sich ein abgeschlossenes Ganzes bildet, werden die — in erster Linie wichtigen — Zusatzkräfte, in dem später erscheinenden 2. Hefte die Nebenspannungen behandelt. Die Einleitung des 1. Hefts erörtert zunächst die Bedingungen, unter denen die Fachwerkstäbe nur Grundspannungen aber keine Nebenspannungen erleiden würden. Derartige gedachte Stabsysteme, welche zum Unterschied von den wirklichen Brückensystemen Grundsysteme heissen, werden stets bei der Ermittlung der Hauptkräfte und Zusatzkräfte vorausgesetzt. Es folgen dann die Untersuchungen über statische Bestimmtheit und Standfestigkeit der räumlichen Grundsysteme und die Bestimmung der Zusatzkräfte in statisch bestimmten und unbestimmten Grundsystemen. Als Belastungen kommen hierbei die wagrechten Längsbelastungen (Bremskräfte) und die wagrechten Querbeltungen (Winddruck, Seitentösse und Centrifugalkräfte der Fahrzeuge) in Betracht. Ferner werden die Einflüsse der Temperatur und der Reibungskräfte an den Auflagern näher untersucht.

Die Behandlungsweise ist durchgehends rechnerisch; die einzelnen Entwicklungen sind in allen wichtigeren Fällen vollständig durchgeführt, und ihre Ergebnisse in Endformeln zusammengefasst.

Bei der grossen Mannigfaltigkeit der in Betracht kommenden Verhältnisse können die nachstehenden Untersuchungen keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Vollkommenheit erheben. Doch darf ich wohl hoffen, dass sie auch in der vorliegenden Form manchem Fachgenossen beim Entwerfen neuer und beim Revidiren alter Brücken von Nutzen sein werden und einen geeigneten Untergrund für weitere Arbeiten abgeben.

Karlsruhe, im April 1892.

**Fr. Engesser.**

# Inhaltsverzeichnis.

---

	Seite
Einleitung . . . . .	1
I. Die Zusatzkräfte . . . . .	3
A. Statisch bestimmte Systeme . . . . .	8
1. Einfluss wagrechter Längsbelastungen . . . . .	8
2. Einfluss wagrechter Querbeltastungen . . . . .	17
a) Winddruck . . . . .	18
b) Seitenstösse der Fahrzeuge . . . . .	25
c) Centrifugalkräfte der Fahrzeuge . . . . .	27
3. Temperatureinflüsse . . . . .	31
4. Nebeneinwirkungen der Auflager . . . . .	35
a) Excentrischer Angriff der Reaktionen . . . . .	35
b) Reibungskräfte . . . . .	36
B. Statisch unbestimmte Systeme . . . . .	39
1. Uebergrosse Anzahl der Auflagerreaktionen . . . . .	41
a) Ueberzählige lothrechte Reaktion . . . . .	41
b) Ueberzählige wagrechte Reaktion . . . . .	45
2. Uebergrosse Anzahl der Einzelsysteme . . . . .	53
3. Statisch unbestimmte Einzelsysteme . . . . .	65
a) Statisch unbestimmte Hauptträger . . . . .	65
b) Statisch unbestimmte Längs- und Querverbände . . . . .	70
c) Statisch unbestimmte Fahrbahnkonstruktion . . . . .	73

---

## Einleitung.

---

Durch die mannigfachen, auf eine Brückenkonstruktion einwirkenden äusseren Einflüsse — Eigengewicht, Verkehrslast, Horizontalkräfte der Fahrzeuge, Winddruck, Temperatureinflüsse — werden in den einzelnen Fachwerkstäben Spannungen verschiedener Art hervorgerufen, welche sich zunächst in zwei Hauptgruppen, Grundspannungen und Nebenspannungen eintheilen lassen. Erstere begreifen die einfachen Zug- und Druckspannungen in sich, deren Resultanten — die Grundkräfte — in den Schwerpunkten der Stabquerschnitte längs den Stabachsen wirken. Sämmtliche übrigen Spannungen — Biegungsspannungen, Schubspannungen, Verwindungsspannungen — werden unter dem Namen Nebenspannungen zusammengefasst; durch ihre Wirksamkeit werden die Stäbe verbogen, verschoben und verwunden, während die Grundkräfte nur einfache Verlängerungen zur Folge haben. Von den Nebenspannungen sind die Biegungsspannungen die bedeutendsten; Schubspannungen und Verwindungsspannungen sind bei den gebräuchlichen Anordnungen so gering, dass sie in der Anwendung unbedenklich vernachlässigt werden dürfen.

Eine vollkommene Ausnutzung der Festigkeitseigenschaften des Materials könnte theoretisch nur dann eintreten, wenn keine Nebenspannungen, sondern ausschliesslich Grundspannungen in den Stäben vorhanden wären. Dies würde unter folgenden Voraussetzungen möglich sein:

1. Die Stäbe sind in den Knotenpunkten durch reibungslose Gelenke mit einander verbunden. (Für ebene Knoten genügen Bolzengelenke, für räumliche Knoten sind Kugelgelenke erforderlich.)
2. Die Stabachsen sind gerade; das verwendete Material besitzt in allen Punkten eines Querschnitts gleiche Elasticität; das nöthige Trägheitsmoment gegen Ausknicken ist vorhanden.
3. Die Stabachsen schneiden sich in den Knotenpunkten.



4. Die äussern Kräfte greifen entweder nur in den Knotenpunkten an, oder aber sie wirken, falls sie zwischen den Knoten an den Stabachsen angreifen, in der Richtung der letzteren.

In Wirklichkeit sind die vorstehenden Bedingungen niemals vollständig erfüllt; es treten daher in den Stäben eines wirklichen Trägers neben den Grundspannungen stets auch Nebenspannungen auf. Die Grundspannungen sind hierbei in der Regel nur unwesentlich verschieden von denen eines entsprechenden gedachten Trägers, bei welchem die obigen Bedingungen erfüllt sind (Grundträger), so dass es fast immer gestattet ist, an Stelle der Grundspannungen des wirklichen Trägers diejenigen des zugehörigen Grundträgers, welche leichter bestimmbar sind, zu setzen.

Anmerkung. Eine Ausnahme macht u. A. der armirte Balken, welcher aus diesem Grunde gewöhnlich nicht als Fachwerkträger, sondern als Träger gemischten Systems nach einer besonderen Theorie, welche diesem Umstand Rücksicht trägt, berechnet wird.

Die wichtigsten Grundkräfte sind die durch Eigengewicht und Verkehrslast hervorgerufenen; sie sollen Hauptkräfte genannt werden. Die den übrigen Einflüssen entsprechenden Grundkräfte werden unter dem Namen Zusatzkräfte zusammengefasst.

In den gewöhnlichen Fällen der Anwendung werden bei der Querschnittsbestimmung der Hauptträger meist nur die Hauptkräfte berücksichtigt. Die Zusatzkräfte und namentlich die Nebenspannungen werden dagegen nur selten rechnungsmässig ermittelt und haben dementsprechend auch in der Litteratur eine weit geringere Beachtung gefunden als die Hauptkräfte. Im Folgenden soll nun versucht werden, die mannigfachen Arten von Zusatzkräften und Nebenspannungen möglichst vollständig und systematisch geordnet vorzuführen und deren Einfluss auf die Gesamtanordnung und Querschnittsgestaltung zu ermitteln.

---

## I. Die Zusatzkräfte.

---

Zur Ermittlung der Zusatzkräfte denken wir uns an die Stelle der wirklichen Träger die entsprechenden Grundträger gesetzt, bezw. an die Stelle des räumlichen Gesamtsystems der Brückenkonstruktion das entsprechende Grundsystem. Für die statische und geometrische Bestimmtheit (Standfestigkeit) des letzteren ist es nun erforderlich, dass die Zahl der Glieder (Stäbe und Lagerreaktionen) gleich ist der Zahl der verfügbaren statischen Gleichungen, d. i.  $= 3k$ , wo  $k = \text{Zahl der Knotenpunkte}$ , und dass

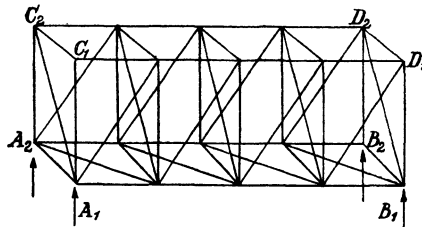


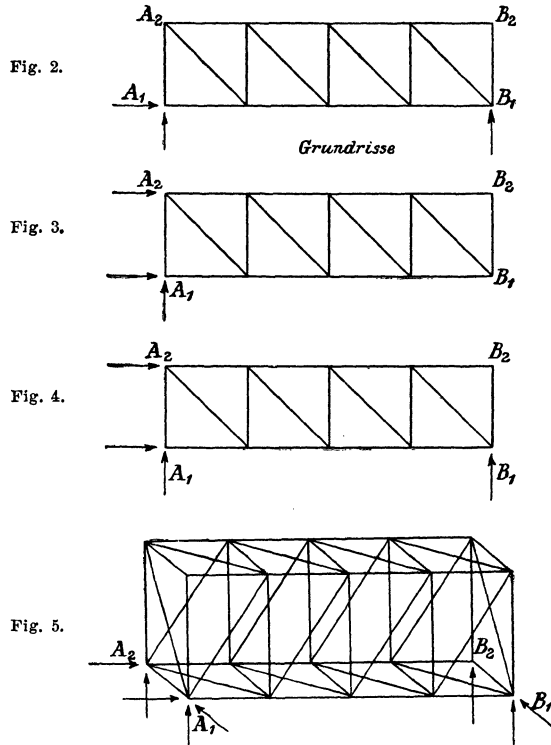
Fig. 1.

die Glieder derart angeordnet sind, dass die Unbekannten aus den  $3k$ -Gleichungen unzweideutig bestimmt werden können. Dies wird am einfachsten bei der Anordnung Fig. 1 erreicht, wo nach der üblichen Ausdrucksweise 2 Hauptträger, 1 Längsverband in der einen Gurtungsebene, und soviel Querverbände, als zur Absteifung der Knoten der freien Gurtungen erforderlich, vorhanden sind, und dabei jedes Einzelsystem\*) (Hauptträger, Längsverband, Querverbände) für sich allein statisch bestimmt ist.

---

\*) In Fig. 1 stellen  $A_1 B_1 C_1 D_1$  und  $A_2 B_2 C_2 D_2$  die Hauptträger,  $A_1 A_2 B_1 B_2$  den Längsverband,  $A_1 A_2 C_1 C_2$ ,  $B_1 B_2 D_1 D_2$  etc. die Querverbände dar. Die Gurtungen des Längsverbands fallen mit den unteren Gurtungen  $A_1 B_1$  und  $A_2 B_2$  der Hauptträger zusammen, desgl. die Randstäbe der Querverbände mit den entsprechenden Ständern der Hauptträger und Längsverbände.

Es ergibt dies  $3k - 7$  Stäbe, so dass noch 7 Lagerreaktionen zur Erfüllung der statischen Gleichungen erforderlich sind. Dem entsprechend werden 4 Lager, je 2 für jeden Hauptträger angeordnet (Fig. 1), welche zunächst in lothrechter Richtung Widerstand zu leisten vermögen. Ausserdem müssen dann noch 3 horizontale Reaktionen ausgeübt werden können, entweder nach Fig. 2 bei  $A_1$  in Quer- und Längsrichtung, und bei  $B_1$  in Querrichtung, oder



nach Fig. 3 bei  $A_1$  in Quer- und Längsrichtung und bei  $A_2$  in Längsrichtung.

Erstere Anordnung ist geeigneter zur Aufnahme von Querbelastungen, letztere von Längsbelastungen. In der Anwendung führt man entweder Anordnung Fig. 2 oder, weitaus häufiger, eine Vereinigung der Anordnungen Fig. 2 und Fig. 3 aus, wie in Fig. 4 dargestellt.

Im letzteren Falle wird das System statisch unbestimmt und es bedarf dann noch einer besondern Untersuchung über die

Grösse und den Einfluss der einen überzähligen Reaktion (siehe B 1 b).

Eine statisch bestimmte Gesamtanordnung kann ferner erzielt werden bei 2 Hauptträgern, 2 Längsverbänden in den Gurtebenen und 2 Endquerverbänden (Fig. 5). Bei 3 k-Gleichungen und  $3k - 6$  Stäben sind hier noch 6 Auflagerbedingungen zu erfüllen, was durch 3 lothrechte und 3 wagrechte Reaktionen erreicht wird. Eine solche Anordnung wäre jedoch zur Aufnahme der lothrechten Lasten in hohem Grade ungeeignet; es bedarf für diesen Zweck noch der Zufügung eines vierten Lagers mit lothrechter Reaktion, wodurch das System im Allgemeinen wieder statisch unbestimmt wird. In den besondern Fällen, wo Stabsystem und Kraftsystem symmetrisch angeordnet sind, bleibt die statische Bestimmtheit erhalten (siehe B 1a), so dass hier die Vertheilung der lothrechten und wagrechten Lasten auf die 2 Hauptträger und 2 Längsverbände nach rein statischen Gesetzen vorgenommen werden kann. Die genannte Bedingung ist in der Anwendung fast immer erfüllt. Die 3 wagrechten Reaktionen sind nach Fig. 2 oder Fig. 3 anzuordnen, oder es wird auch hier noch eine vierte wagrechte Reaktion nach Fig. 4 hinzugefügt, wodurch eine weitere statische Unbestimmtheit entsteht. Zu erwähnen ist, dass die 2 Stäbe der Endquerverbände fortgelassen und durch 2 an den obern Gurtungen angreifende wagrechte Querreaktionen ersetzt werden können, ohne den Grad der statischen Bestimmtheit zu ändern.

Anmerkung. Bei Lagern, welche nach 3 Richtungen Reaktionen ausüben können ( $A_1$  in Fig. 5), ist der betr. Lagerpunkt des Grundsystems vollkommen fest gehalten (feste Lager). Bei Lagern mit nur 2 oder 1 Reaktionen kann sich der Lagerpunkt in einer Geraden ( $A_2$  und  $B_1$ ) bzw. in einer Ebene ( $B_2$ ) verschieben (verschiebliche Lager).

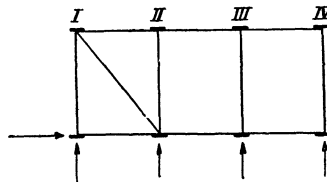


Fig. 6.

Werden mehr als 2 Hauptträger verwendet, so ist auch hier statische Bestimmtheit möglich, wenn man, wie z. B. in Fig. 6, die weiteren Hauptträger mittelst je 1 Stab für 1 Knoten angliedert

und einem jeden derselben die 3 gewöhnlichen Lagerreaktionen des frei aufliegenden Trägers zuweist (2 lothrechte und 1 wagrechte Reaktion in der Längsrichtung).

Sind mehr als 3 k Glieder vorhanden, so wird das Grundsystem statisch unbestimmt und kann nur unter Beachtung der Formänderungen berechnet werden (siehe B).

Bei weniger als 3 k Glieder ist das Grundsystem beweglich. Das zugehörige wirkliche System kann jedoch durch feste Knotenverbindungen steif und dadurch für die Verwendung brauchbar gemacht werden\*). Bezüglich der hierbei auftretenden Nebenspannungen siehe später.

Die Belastungen der Fahrbahn wirken selten unmittelbar auf das Grundsystem, sondern in der Regel durch Vermittlung des Fahrbahngerippes (Quer- und Längsträger), welches zumeist in einer der beiden Gurtebenen gelegen ist. Damit hierbei die Belastungen nach rein statischen Gesetzen auf die Knotenpunkte des Grundsystems vertheilt werden, muss eine der nachstehend beschriebenen Anordnungen des Fahrbahngerippes vorhanden sein:

a) Die Querträger sind als einfache Träger mit einem festen und einem in ihrer Achse verschieblichen Lager drehbar an den Knoten des Grundsystems gelagert; die Längsträger sind in gleicher Weise an den Querträgern aufgelagert.

b) Von den Querträgern wird nur ein einziger so, wie unter a) angegeben, angeordnet; die übrigen erhalten Lager, welche auch eine Verschiebung in der Richtung der Brückenachse zulassen. Die Längsträger werden mit drehbaren aber unverschieblichen Lagern versehen.

In zahlreichen Fällen bilden die Querträger einen Theil des Längsverbands, wo sie die Stelle der Querpfeiler versehen. Hier kann nur Anordnung a) Platz greifen mit der selbstverständlichen Abänderung, dass die Querträger in jeder Richtung unverschieblich mit dem Grundsystem verbunden sind.

Bisweilen liegt die Fahrbahn und mit ihr ein Längsverband ausserhalb den Gurtebenen, wobei gleichzeitig einer der sonst in den Gurtebenen vorhandenen Längsverbände fortfällt. Es bedingt

---

\*) Derartige Konstruktionen kommen beispielsweise bei unten liegender Fahrbahn in Betracht. An Stelle der Querverbände mit Querdiagonalen (Fig. 43) treten hier steife Querrahmen (Fig. 44), welche zur Aufnahme von Biegemomenten geeignet sind.

dies 2 m weitere Knoten des Grundsystems (Fig. 7), wobei  $m = \text{Zahl}$  der Ständer eines Hauptträgers, und  $3 \cdot 2 m = 6 m$  weitere Gleichungen, welche erfüllt werden müssen. Dem gegenüber sind 2 m Stäbe durch Theilung der 2 m Ständer hinzugekommen; 2 m Stäbe

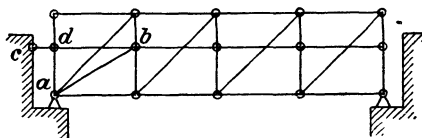


Fig. 7.

sind erforderlich zur Abstützung der frei gewordenen Gurtknoten (in den Querverbänden liegend), und  $2(m - 1)$  Stäbe dienen als Gurtstäbe für den Zwischenlängsverband (Fig. 7). Die schliesslich noch zur Verfügung stehenden 2 Stäbe ( $= 6m - 2m - 2m - 2(m - 1)$ ) sind zur Festhaltung des Zwischenlängsverbands gegen Längsbelastungen erforderlich und können entweder nach Art des Stabs ab der Fig. 7 im Innern der Konstruktion oder nach Art des Stabs cd mit unmittelbarem Anschluss an das Mauerwerk angeordnet werden. Lässt man letztere Stäbe fort, so ist das Grundsystem beweglich, und der entsprechende wirkliche Träger wird nur durch die Steifigkeit der Ständer bzw. durch Weglassung der Zwischengelenke standfest, wobei dann die später zu behandelnden Nebenspannungen auftreten.

Bei den folgenden Untersuchungen gehen wir von dem Normalfall eines statisch bestimmten Grundsystems aus, mit 2 lothrecht gestellten Hauptträgern, rechteckigem Grundriss und mit wagrechtlicher Fahrbahn, und bestimmen zunächst hierfür die betr. Zusatzkräfte; sodann werden die statisch unbestimmten Systeme behandelt und die hier noch weiter hinzutretenden Zusatzkräfte ermittelt. Als Hauptträger werden ausschliesslich freiaufliegende (einfache) Träger vorausgesetzt, um die Grenzen der Abhandlung nicht allzu weit auszudehnen. Die Behandlungsweise bei kontinuierlichen Trägern und bei Bogenträgern bleibt übrigens im Wesentlichen die gleiche. Bezüglich der letzteren wird auf die Abhandlung „Ueber den Windverband bei Bogenbrücken“, Zeitschrift für Bauwesen 1881, verwiesen, in welcher die dem Winddruck entsprechenden Zusatzkräfte ermittelt werden.

## A. Statisch bestimmte Systeme.

### 1. Einfluss wagrechter Längsbelastungen.

Die Verkehrslast übt bei der Bewegung wagrechte Reibungskräfte längs der Fahrbahn auf die Brückenkonstruktion aus. Dieselben sind im Allgemeinen nur bei Eisenbahnbrücken von Bedeutung und erreichen hier ihren grössten Gesamtbetrag bei einem voll gebremsten Zuge, annähernd  $= \Sigma Pf$ , wo in der Summe alle gebremsten Achsen eingeschlossen sind, P das Gewicht einer Achse und f den Beiwert der gleitenden Reibung  $= \frac{1}{5}$  bis  $\frac{1}{7}$  bezeichnet. Die Zahl der gebremsten Achsen, welche für eine Brücke in Betracht kommt, ist je nach den Steigungsverhältnissen der Bahn verschieden und kann im Lauf der Zeit mit den Fortschritten der Betriebstechnik sich ändern. Für die heutigen Betriebsverhältnisse würde es genügen, folgende Annahmen der Berechnung der Bremskräfte bei Hauptbahnen zu Grunde zu legen: die 2 ersten Lokomotiven des Zugs sind vollständig gebremst, von den etwa noch folgenden Lokomotiven jedoch nur die Tender; die Zahl der gebremsten Güterwagen wechselt je nach den Steigungsverhältnissen der Bahn von rund 0,1 der Gesamtzahl (Flachland) bis rund 0,4 derselben (Gebirgsbahn von 2,5% Steigung).

Mit Rücksicht auf die Zukunft dürfte es sich jedoch empfehlen, sämtliche Wagen gebremst anzunehmen.

Von einer etwaigen Mithilfe des Schienengestängs bei Uebertragung der Bremskräfte wird im Folgenden abgesehen.

In Verbindung mit den Bremskräften treten stets noch Aenderungen in den Achsdrücken auf, davon herrührend, dass die Bremskräfte ausserhalb der Schwerpunkte der Fahrzeuge wirken. Der Einfluss dieser Druckänderungen ist im Allgemeinen ohne Belang für die Hauptträger; nur bei sehr kleinen Spannweiten kann die Druckvermehrung  $\Delta P$  der Vorderachse in Betracht kommen. Bei zweiachsigen Fahrzeugen ist  $\Delta P = \frac{t \cdot T}{e}$ , wo t = Schwerpunkthöhe, e = Radstand, T = Bremskraft des Fahrzeugs. Für t = 1,5 m, e = 3 m, T =  $\frac{1}{5} \cdot 2 P$  wird beispielsweise  $\Delta P = 0,2 P$ .

a) Wir setzen zunächst die Anordnung der Auflager nach Fig. 3 voraus, wobei jeder der beiden Hauptträger ein gegen Längsbelastungen widerstandsfähiger Lager A besitzt. Der auf einen Knotenpunkt entfallende Betrag der Bremskraft sei = T, positiv in der Richtung von rechts nach links\*).

α) Die Fahrbahn (Schienenkopfhöhe) liegt in der Ebene der untern Gurtungen. Es treten dann nur in den untern Gurtstäben Zusatzkräfte auf,

$$U = - \sum_x T,$$

die übrigen Stäbe der Hauptträger bleiben spannungslos. Die Summe bezieht sich auf alle rechts vom betr. Gurtstab angreifenden Kräfte T.

β) Die Fahrbahn liegt in der Ebene der oberen Gurtungen um t über den Lagern (Fig. 8). Die Lagerreaktionen haben folgende Werthe

$$A = \sum T \cdot \frac{t}{l}; \quad B = - \sum T \cdot \frac{t}{l}; \quad H = \sum T.$$

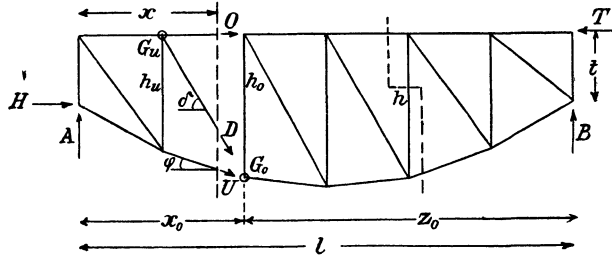


Fig. 8.

Die Zusatzkräfte der Stäbe des beliebigen Schnittes x ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} \text{Oberer Gurtstab } O &= - \frac{M_0}{h_0} = - \frac{A x_0 + H (h_0 - t) - \sum_0^x T h_0}{h_0} \\ &= \frac{z_0 t}{l h_0} \sum T - \sum_x T, \end{aligned}$$

$x_0$   $z_0$   $h_0$  beziehen sich auf den Gegenpunkt  $G_0$  der obern Gurtung (Fig. 8).

\*) Auf die Art und Weise, wie die Bremskräfte auf die Knotenpunkte übergeführt werden, wird später, bei den Nebenspannungen, näher eingegangen.



$$\text{Unterer Gurtstab } U = \frac{M_u}{h_u \cos \varphi} = \frac{Ax_u - Ht}{h_u \cos \varphi} = -\frac{t z_u}{l h_u \cos \varphi} \Sigma T.$$

$$\text{Strebe (Diagonale) } D = \frac{A - U \sin \varphi}{\sin \delta} = \frac{t}{l \sin \delta} \left( 1 + \frac{z_u}{h_u} \operatorname{tg} \varphi \right) \Sigma T.$$

Die Winkel  $\varphi$  und  $\delta$  sind positiv anzunehmen, wenn die betr. Stäbe nach rechts fallen, wie bezüglich des Schnitts  $x$  in Fig. 8 (fallende Strebe).

Für Ständer wird  $\delta = \pm \frac{\pi}{2}$ , je nachdem der Ständer als Grenzfall einer fallenden oder steigenden Strebe anzusehen ist. (In Fig. 8 sind die Ständer steigend).

$$\text{Ständer (Vertikale) } V = \pm \frac{t}{l} \left( 1 + \frac{z}{h} \operatorname{tg} \varphi \right) \Sigma T,$$

wo sich  $z$  und  $h$  auf den betrachteten Ständer und  $\varphi$  auf den mitgeschnittenen untern Gurtstab beziehen.

Die Summen ohne Index begreifen sämtliche Lasten in sich.

Für Parallelträger wird  $h_0 = h_u = t$ ,  $\varphi = 0$ , somit

$$O = \frac{z_0}{l} \Sigma T - \frac{l}{x} T = \frac{z_0}{l} \Sigma_x T - \frac{x_0}{l} \Sigma_x T;$$

bei gleichmässig vertheilter Belastung  $= 0$ .

$$U = -\frac{z_u}{l} \Sigma T; \quad D = \frac{t \Sigma}{l \sin \delta} T; \quad V = \pm \frac{t}{l} \Sigma T.$$

Für die Berechnung der Zusatzkräfte ist in der Regel derjenige Belastungszustand zu Grunde zu legen, welcher die Hauptkräfte der betr. Stäbe zu Grösstwerthen macht, also bezüglich der Gurtungen Vollbelastung, bezüglich der Streben einseitige Belastung.

$\gamma$ ) Die Fahrbahn liegt zwischen den Gurtflächen, in der Höhe  $t$  über den Lagern (Fig. 9).

$$A = \Sigma \frac{Tt}{l}, \quad B = -\Sigma \frac{Tt}{l}, \quad H = \Sigma T,$$

$$\text{Zwischengurtung } Z = -\frac{l}{x} \Sigma T.$$

Die Zusatzkräfte der übrigen Stäbe fallen verschieden aus, je nachdem Stab cd oder ab ausgeführt ist. Im ersteren Falle sind dieselben sämtlich = 0; im letzteren erhält man

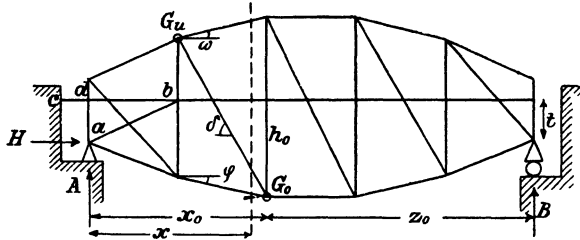


Fig. 9.

$$O = - \frac{B z_0}{h_0 \cos \omega} = - \frac{t z_0}{l h_0 \cos \omega} \Sigma T;$$

$$U = \frac{B z_u}{h_u \cos \varphi} = - \frac{t z_u}{l h_u \cos \varphi} \Sigma T;$$

$$D = \frac{A + O \sin \omega - U \sin \varphi}{\sin \delta} = \frac{t}{l} \left( 1 + \frac{z_0}{h_0} \operatorname{tg} \omega + \frac{z_u}{h_u} \operatorname{tg} \varphi \right) \frac{\Sigma T}{\sin \delta}$$

oder

$$= \frac{t}{l \cos \delta} \left( \frac{z_u}{h_u} - \frac{z_0}{h_0} \right) \Sigma T.$$

$$\text{Stab cd} = - \frac{ab}{bd} \cdot \Sigma T.$$

Der Winkel  $\omega$  ist positiv, wenn der obere Gurtstab, wie im Schnitt x der Fig. 9, nach rechts steigt;

$\varphi$  ist positiv, wenn der untere Gurtstab nach rechts fällt.

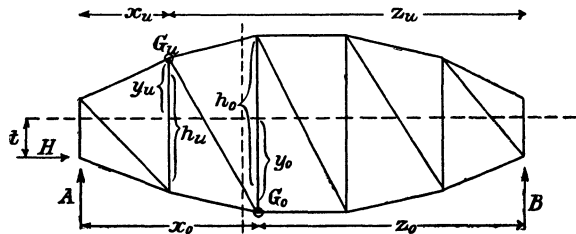


Fig. 10.

Bisweilen liegt die Fahrbahn für sich allein in mittlerer Trägerhöhe, während die Längsverbände davon getrennt in den Gurtflächen angeordnet sind (Fig. 10). Es fallen dann die Zwischen-

gurtungen fort, und es müssen die Ständer die Längsbelastungen auf die Knotenpunkte übertragen, wobei sie auf Biegung in Anspruch genommen werden. Die entsprechenden Nebenspannungen werden später behandelt.

Die hierbei auftretenden Zusatzkräfte haben folgende Werthe

$$O = \frac{1}{h_0 \cos \omega} \left( \frac{tz_0}{1} \Sigma T - y_0 \Sigma_x T \right),$$

$$U = - \left[ \frac{tz_u}{1} \Sigma T + y_u \Sigma_x T \right] \frac{1}{h_u \cos \varphi},$$

$$D = \frac{t}{l \sin \delta} \left( 1 + \frac{z_0}{h_0} \operatorname{tg} \omega + \frac{z_u \operatorname{tg} \varphi}{h_u} \right) \Sigma T + \left( \frac{y_u \operatorname{tg} \varphi}{h_u \sin \delta} - \frac{y_0 \operatorname{tg} \omega}{h_0 \sin \delta} \right) \Sigma_x T,$$

oder

$$= \frac{t}{l \cos \delta} \left( \frac{z_u}{h_u} - \frac{z_0}{h_0} \right) \Sigma T + \left( -1 + \frac{y_0}{h_0} + \frac{y_u}{h_u} \right) \frac{1}{\cos \delta} \Sigma_x T.$$

$y_0$  und  $y_u$  bezeichnen die Ordinaten der Gegenpunkte  $G_0$  und  $G_u$  bezüglich der Fahrbahn.

b) Wir gehen nunmehr zu der Auflageranordnung nach Fig. 2, bzw. zu der nach Fig. 11, welche im Princip mit ihr übereinstimmt, über und setzen:

a) einen ebenen Längsverband in der Lagerebene voraus; die Lage der Fahrbahn kann hierbei beliebig sein.

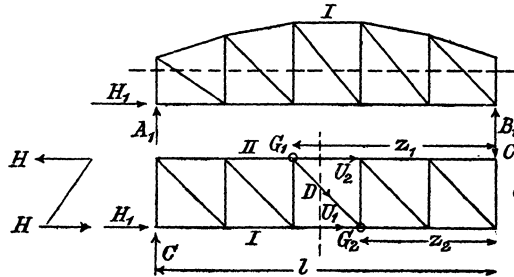


Fig. 11.

Die Längsbelastung ( $= 2 \Sigma T$ ) wirke symmetrisch zur Brückenachse. Es entstehen sodann die 3 wagrechte Reaktionen  $H_1 C C$ , wo  $H_1 = 2 \Sigma T$  und  $C = \frac{b}{l} \Sigma T$ , während bei der früheren Anordnung nach Fig. 3 zwei wagrechte Reaktionen  $H = \Sigma T$  vor-

handen waren. Die neuen Reaktionen können aus den alten erhalten werden, wenn man letzteren die 2 gleichen und entgegengesetzten Kräftepaare  $C_1$  und  $H_b$  ( $= b \Sigma T$ ) zufügt. Man kann daher auch die neuen Stabkräfte dadurch erhalten, dass man den früher unter  $a$  ermittelten diejenigen Grössen zufügt, welche der Wirkung der 2 Kräftepaare  $C_1$  und  $H_b$  entsprechen, d. h. welche in einem links eingespannten und rechts durch die Kraft  $C$  belasteten Kragträger entstehen.

Man erhält

$$\text{für einen untern Gurtstab des Trägers I } U_1 = -\frac{Cz_1}{b} = -\frac{z_1}{l} \Sigma T,$$

$$\text{für einen untern Gurtstab des Trägers II } U_2 = +\frac{Cz_2}{b} = +\frac{z_2}{l} \Sigma T,$$

für eine Diagonale des Längsverbands

$$D = \frac{C}{\sin \delta} = \pm \frac{C \cdot d}{b} = \pm \frac{d}{l} \Sigma T,$$

je nachdem die Diagonale nach rechts fällt oder steigt.  $d$  bezeichnet die Länge der Diagonalen.

Die übrigen Stabkräfte der Hauptträger I und II werden durch  $C$  nicht beeinflusst und bleiben unverändert. Vereinigt man die vorstehend bestimmten Kräfte  $U_1$  und  $U_2$  mit den früher ermittelten, so erhält man die gesammten Zusatzkräfte der untern Gurtungen. Für die linken Endfelder ergeben sich als äusserste Werthe  $U_1 = 2 \Sigma T$  und  $U_2 = 0$ .

$\beta$ ) Wenn die untern Gurtungen gekrümmt sind, bzw. ein Vieleck bilden, so stellt der zugehörige Längsverband ein Vielfach dar. Die Diagonalen desselben erhalten durch die Reaktion  $C$ , wie im Fall  $\alpha$ , die Kräfte

$$D = \pm \frac{Cd}{b} = \pm \frac{d}{l} \Sigma T.$$

Zur Ermittlung der in den Stäben eines Hauptträgers durch  $C$  hervorgerufenen Kräfte denken wir uns den Träger durch einen Längsschnitt herausgeschnitten und an den Schnittstellen des Längsverbands die entsprechenden Kräfte  $D$  angebracht. Die Komponenten von  $D$  senkrecht zur Trägerebene heben sich gegenseitig auf; die Komponenten in der Trägerebene haben die Werthe

$$K = \frac{Du}{d} = \frac{Cu}{b}$$

(siehe Fig. 12), sie wirken in der Richtung des zugehörigen Gurtstabs und zwar, Grundriss nach Fig. 11 vorausgesetzt, bei Träger I

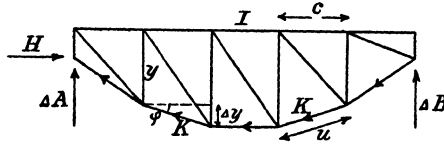


Fig. 12.

von rechts nach links, bei Träger II von links nach rechts. Die wagrechten und lothrechten Komponenten der Kräfte  $K$  sind

$$K \cos \varphi = \frac{Cu}{b} \cdot \frac{c}{u} = \frac{Cc}{b} \quad \text{und} \quad -K \sin \varphi = -\frac{C \Delta y}{b},$$

wo  $c$  die Feldweite und  $\Delta y$  den Zuwachs der Knotenpunktsordinate, beim Vorschreiten von links nach rechts bezeichnet. In Folge der Kräfte  $K$  entstehen die Lagerreaktionen  $H$ ,  $\Delta A$  und  $\Delta B$  (Fig. 12). Für Träger I ist

$$H = \Sigma K \cos \varphi = \Sigma \frac{Cc}{b} = \frac{Cl}{b} = \Sigma T,$$

für Träger II  $H = -\Sigma T$ . Die Reaktionen  $\Delta A$  und  $\Delta B$  sind gleich gross und entgegengesetzt; für Träger I ist  $\Delta A$  negativ,  $\Delta B$  positiv,

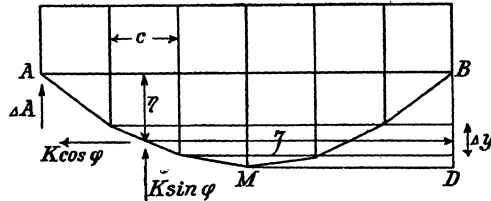


Fig. 13.

für Träger II liegen die Verhältnisse umgekehrt. Der Absolutwerth dieser Reaktionen ergibt sich aus der Momentengleichung um Punkt B zu

$$\Delta A = \frac{\Sigma K \cos \varphi \eta + \Sigma K \sin \varphi \zeta}{1} = \Sigma \frac{Cc \eta}{bl} + \Sigma \frac{C \zeta \Delta y}{bl},$$

wo  $\eta$  und  $\zeta$  für die Mitte jedes Gurtstabs die Ordinate (Tiefe unter AB) und die Abscisse (Entfernung von B) bezeichnen (siehe Fig. 13).

Nun ist

$$\Sigma \frac{C c \eta}{bl} = \frac{C}{bl} \Sigma c \eta = \frac{C}{bl} \Phi = \frac{C y_m}{b},$$

wo  $\Phi$  die Fläche zwischen der untern Gurtung und A B,  $y_m$  deren mittlere Höhe bezeichnet.

Ferner wird

$$\begin{aligned} \frac{\Sigma C \zeta \Delta y}{bl} &= \frac{C}{bl} \Sigma \zeta \Delta y = \frac{C}{bl} \Sigma \zeta (+ \Delta y) + \frac{C}{bl} \Sigma \zeta (- \Delta y) \\ &= \frac{C}{bl} \text{Fl [ABDM]} - \frac{C}{bl} \text{Fl [BDM]} = \frac{C}{bl} \Phi = \frac{C y_m}{b}. \end{aligned}$$

Somit ist schliesslich

$$\Delta A = \frac{2C \Phi}{bl} = \frac{2 C y_m}{b}.$$

Die Zusatzkräfte, welche durch die Belastungen K in den Stäben der Hauptträger entstehen, sind in bekannter Weise leicht zu ermitteln, indem man nach einander den Einfluss der lothrechten und der wagrechten Komponenten  $K \sin \varphi$  und  $K \cos \varphi$  berechnet. Einfacher kommt man zum Ziele, wenn man unmittelbar die Wirkungen der Reaktion C verfolgt. Man verlängere die Ebene der beiden durch den Schnitt x getroffenen untern Gurtstäbe  $U_1$  und  $U_2$  bis zum Schnitt mit der Vertikalebene durch die rechtseitigen Lager und versetze C an die um e entfernte Schnittlinie unter Zufügung eines Versetzungsmomentes Ce.

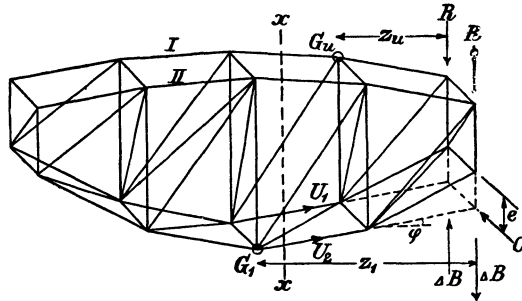


Fig. 14.

Das Moment Ce wird sodann durch das gleichwertige Moment Rb der lothrechten Kräfte  $R \left( = \frac{Ce}{b} \right)$ , welche an den Trägern I

und II angreifen, ersetzt (siehe Fig. 14). Unter dem gleichzeitigen Einfluss von  $C$ ,  $R$  und der vertikalen Reaktion  $\mathcal{A}B$  entsteht in der untern Gurtung von Träger I die Stabkraft

$$U_1 = -\frac{Cz_1}{b \cos \varphi} - \frac{Rz_u}{h_u \cos \varphi} + \frac{\mathcal{A}Bz_u}{h_u \cos \varphi} = -\frac{C}{b \cos \varphi} \left( z_1 + \frac{(e - 2y_m)z_u}{h_u} \right),$$

wo  $z_1$  und  $z_u$  die rechtseitigen Abscissen der 2 Gegenpunkte  $G_1$  und  $G_u$  des Stabs  $U_1$  (im System des Längsverbands und dem des Hauptträgers),

$h_u$  die Hauptträgerhöhe im Gegenpunkt  $G_u$ ,  
 $\varphi$  den Neigungswinkel des Stabs  $U_1$  bezeichnen.

In ähnlicher Weise erhält man

$$U_2 = \frac{C}{b \cos \varphi} \left( z_2 + \frac{(e - 2y_m)z_u}{h_u} \right).$$

Die Stabkräfte der obern Gurtungen und der Streben der Hauptträger hängen nur von  $R$  und  $\mathcal{A}B$  ab und sind verhältnissmässig klein;

$$O_1 = \frac{(R - \mathcal{A}B)z_0}{h_0 \cos \omega} = \frac{C(e - 2y_m)z_0}{b h_0 \cos \omega}, \quad O_2 = -\frac{C(e - 2y_m)z_0}{b h_0 \cos \omega},$$

$$D_1 = -D_2 = \frac{C(e - 2y_m)}{b \sin \delta} \left( 1 + \frac{z_0 \operatorname{tg} \omega}{h_0} + \frac{z_u \operatorname{tg} \varphi}{h_u} \right).$$

Winkel  $\varphi$  und  $\delta$  sind positiv für nach rechts fallende,  $\omega$  für steigende Stäbe. Bei Schnitt  $x$  der Fig. 14 sind alle 3 Winkel negativ.

Auch hier werden die gesammten Zusatzkräfte durch Addition der vorstehend bestimmten mit den unter a) ermittelten erhalten.

$\gamma$ ) Der Fall, dass der Längsverband ausserhalb der Lager angeordnet ist, kommt bei der Anordnung der Lager nach Fig. 2 nicht in Betracht.

$\delta$ ) Grundsysteme mit zwei Längsverbänden sind wegen der unsymmetrischen Anordnung der Auflagerung statisch unbestimmt und werden später unter B behandelt. —

Wenn die Bremskräfte unsymmetrisch zur Brückenachse wirken, so zerlege man deren Resultirende  $\Sigma T$  in 2 Komponenten

$\Sigma T_1$  (in der Ebene des Hauptträgers I) und  $\Sigma T_m$  (in der Brückenachse wirkend). (Siehe Fig. 15.)

Erstere wird vollständig vom Hauptträger I aufgenommen, letztere ruft die nach  $\alpha$  und  $\beta$  zu berechnenden Stabkräfte hervor.

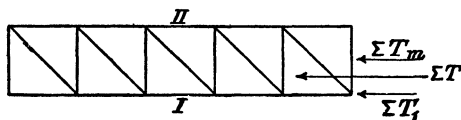


Fig. 15.

c) Zum Schlusse ist noch die Anordnung der Lager nach Fig. 4 in Betracht zu ziehen. Im Allgemeinen ist, wie früher erwähnt, diese Anordnung statisch unbestimmt und nach den später angegebenen Methoden zu behandeln. Bei symmetrischer Längsbelastung (eingeleisige Brücken) und symmetrischer Stabanordnung wird jedoch die Konstruktion statisch bestimmt, da hierfür  $C=0$ . Die Zusatzkräfte sind dann nach den unter a) aufgestellten Regeln zu berechnen.

Von den im Vorstehenden betrachteten Zusatzkräften sind namentlich diejenigen der Gurtstäbe nächst den festen Lagern von Bedeutung, welche u. U. die Hauptkräfte übersteigen und dann von maassgebendem Einfluss auf die Querschnittsbildung sind. Insbesondere kann es hierbei nöthig fallen, dem untern Gurtstab des Endfelds ein Druckprofil zu geben, während die übrigen Stäbe mit flachem Profil ausgeführt werden können.

Da das Verhältniss der Verkehrslast zur Gesamtlast mit wachsender Spannweite abnimmt, so mindert sich dementsprechend auch der Einfluss der Bremskräfte auf die Beanspruchungen der Stäbe.

Ausser den Bremskräften kommen strenggenommen auch noch Längsbelastungen durch Winddruck in Betracht. Ein näheres Eingehen hierauf erscheint jedoch unnöthig, da die später zu behandelnden Querbelastungen durch Winddruck weitaus grössere Zusatzkräfte hervorrufen.

## 2. Einfluss wagrechter Querbelastungen.

Als wagrechte Querbelastungen der Brücke können auftreten: Winddruck, Seitenstösse und Centrifugalkräfte bewegter Fahrzeuge.



### a) Winddruck.

Man nimmt an, dass in unsern Gegenden der Winddruck auf eine normale Ebene bis zu 250 kg f. d. qm steigen könne. Sofern es sich um den Winddruck auf Fahrzeuge handelt, darf 150 kg als obere Grenze betrachtet werden, da bei grösserer Windstärke ein Verkehr nicht mehr möglich ist. Bildet die Windrichtung mit der Normalen auf die Ebene einen Winkel  $\alpha$ , so ist der Druck auf den qm der Ebene  $= \sin \alpha \cdot 250$  bzw.  $= \sin \alpha \cdot 150$  kg zu setzen. Der Druck auf cylindrische Flächen kann etwa gleich Zweidrittel des Drucks auf die entsprechende Projektionsebene angenommen werden.

Die Grösse der Winddruckflächen ist im Einzelfalle mit Rücksicht darauf zu bemessen, dass der Wind bei etwas schiefer oder geneigter (bis zu  $10^\circ$ ) Richtung ausser dem vorderen Träger auch noch Theile der hinteren Träger bzw. der Fahrzeuge treffen kann. Je nach der Grösse der Maschenweite erleidet hierbei die wirkliche Sichtfläche der hinteren Träger eine Reduktion. Beispielsweise werden nach der österreichischen Brückenverordnung vom Jahr 1887 von der wirklichen Sichtfläche des hinteren Trägers 20, 40, 100 % als Winddruckfläche in Rechnung gestellt, wenn das Verhältniss der offenen Flächen zur Gesamtumrissfläche in der vorderen Tragwand 40, 60, 80 % beträgt. Bei dazwischenfallenden Werthen ist geradlinig zu interpoliren.

Als Mittelwerth der gesammten Winddruckfläche einer Brücke kann für den lfd. Meter  $1 + 0,04 l^m$  qm gesetzt werden. Der Winddruck auf Eisenbahnzüge ist im maximum  $= 450$  kg für den Meter, der auf Strassenfahrzeuge  $= 300$  kg anzunehmen. Hierbei liegt die Druckresultante 2 m bzw. 1,5 m über Fahrbahn.

Gewöhnlich wird vorausgesetzt, dass der Wind in gleicher Stärke auf die ganze Druckfläche einwirke; ausnahmsweise wurde bei Berechnung der Forthbrücke auch der Einfluss begrenzter Windstösse berücksichtigt. Es wird bei einfachen Trägern in der Regel genügen, die übliche Annahme eines gleichmässigen Winddrucks der Rechnung zu Grunde zu legen, für welche Annahme die Zusatzkräfte der Gurtungen ihre Höchstwerthe erreichen. Will man in besonderen Fällen für die Streben den ungünstigsten Einfluss einseitiger Windstösse auf die Brückenfläche berücksichtigen, so geschieht dies in gleicher Weise wie bezüglich des Winddrucks auf die Fahrzeuge bei einseitiger Belastung.

Die Wirkung des Winddrucks auf die Brücke kann in 2 Einzelwirkungen geschieden werden. Die im Allgemeinen ausserhalb der Längsverbände angreifenden Windbelastungen müssen erstens ( $\alpha$ ) an die Längsverbände versetzt werden und dann zweitens ( $\beta$ ) durch letztere bezw. durch die Endquerverbände bis zu den Lagern fortgeführt werden.

$\alpha$ ) Durch die Versetzung der Windbelastungen an die Längsverbände entstehen, ausser den später zu behandelnden Nebenspannungen, Versetzungsmomente bezw. Aenderungen in den lothrechten Belastungen der Hauptträger, welche z. Th. durch die Querverbände vermittelt werden. Diese Versetzungsmomente sind für den lfd. Meter Brücke

$N = w_1 t_1 + w_2 t_2$ , wenn nur 1 Längsverband vorhanden, wie in Fig. 16 a, 16 b, 16 c, und

$N = w_1 t_1$ , wenn 2 Längsverbände vorhanden, wie in Fig. 16 d und 16 e.

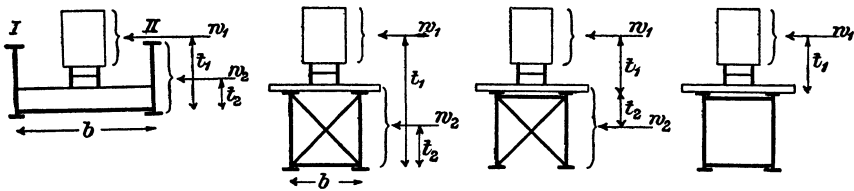


Fig. 16 a.

Fig. 16 b.

Fig. 16 c.

Fig. 16 d.

Hierin bedeutet

$w_1$  den Winddruck für den lfd. Meter Fahrzeuge,

$w_2$  - - - - - Brücke,

$t_1$  und  $t_2$  die Höhen der Angriffspunkte von  $w_1$  und  $w_2$  über den betr. Längsverbänden; dieselben sind negativ, wenn  $w$  unterhalb des Längsverbandes liegt, wiez. B.  $t_2$  in Fig. 16 c.

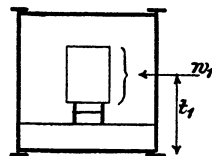


Fig. 16 e.

Den Momenten  $N$  entsprechen lothrechte Belastungen der Hauptträger  $q = \frac{N}{b}$ , welche, positives  $N$  vorausgesetzt, beim hinteren Träger I nach unten, beim vorderen Träger II nach oben gerichtet sind. Trennt man  $q$  in die von den Fahrzeugen und von der Brücke herrührenden Antheile  $q_1$  und  $q_2$ , so ist

$$q_1 = \frac{w_1 t_1}{b} \quad \text{und} \quad q_2 = \frac{w_2 t_2}{b},$$

wenn nur 1 Längsverband vorhanden, bezw.  $q_2 = 0$ , bei 2 Längsverbänden. Die Werthe von  $q_1$  und  $q_2$  sind bei Parallelträgern konstant, sofern man die gebräuchliche, für frei aufliegende Träger hinreichend genaue Annahme konstanter Winddrücke  $w_1$  und  $w_2$  macht. Bei Polygonalträgern sind  $q_1$  und  $q_2$ , den wechselnden Werthen von  $t_1$  und  $t_2$  entsprechend, veränderlich. Durch die lothrechten Belastungen  $q_1$  und  $q_2$  werden in sämtlichen Stäben der Hauptträger Zusatzkräfte hervorgerufen, welche in bekannter Weise zu berechnen sind und für die gleichen Laststellungen wie die Hauptkräfte ihre Höchstwerthe erreichen. Bei Parallelträgern kann man einfach setzen

$$Z_1 = S_1 \frac{q_1}{p} \quad \text{und} \quad Z_2 = S_2 \frac{q_2}{g},$$

wo  $g$  = Eigengewicht für den Meter Träger,  
 $S_2$  = entsprechende Hauptkraft,  $Z_2$  = Zusatzkraft, welche  $q_2$  entspricht,  
 $p$  = Verkehrslast für den Meter Träger,  
 $S_1$  = entsprechende Hauptkraft,  $Z_1$  = Zusatzkraft, welche  $q_1$  entspricht.

Ein Vergleich der Fig. 16 b, 16 c, 16 d zeigt, dass bezüglich der Mehrbelastungen  $q$  sich Anordnung c) am günstigsten, Anordnung b) am ungünstigsten verhält. Beispielsweise ist für eine Eisenbahnbrücke von 36 m Stützweite und 4 m Höhe  $w_1 = 450$  kg,  $w_2 = 360$  kg,  $b = 3,5$  m, man erhält für Anordnung

$$\text{b) } q = \frac{450 \cdot 6 + 360 \cdot 2}{3,5} = 980 \text{ kg,}$$

$$\text{c) } q = \frac{450 \cdot 2 - 360 \cdot 2}{3,5} = 50 \text{ kg,}$$

$$\text{d) } q = \frac{450 \cdot 2}{3,5} = 260 \text{ kg,}$$

Da die Belastungen durch Eigengewicht und Verkehrslast ca.

$$\frac{2000 + 4800}{2} = 3400 \text{ kg}$$

für den Meter Träger betragen, so erhebt sich bei der ungünstigsten Anordnung b) die lothrechte Mehrbelastung durch Wind bis auf 30 % der Hauptbelastung.

β) Betrachten wir zweitens die Wirkung der nunmehr an die Knotenpunkte der Längsverbände versetzten wagrechten Windbelastungen. Dieselben seien für den lfd. Meter Horizontalprojektion eines Längsverbands konstant, =  $w'$  (von den Fahrzeugen herrührend) und =  $w''$  (von der Brücke herrührend). Bei Vorhandensein nur eines Längsverbands entsprechen  $w'$  und  $w''$  dem gesamten Winddruck, d. h. es ist  $w' = w_1$  und  $w'' = w_2$ . Bei 2 Längsverbänden ist  $w_2$  nach dem Hebelgesetz zu vertheilen, wobei im Mittel auf den der Fahrbahn benachbarten Längsverband der Antheil  $w'' = 0,55 w_2$ , auf den andern der Antheil  $w'' = 0,45 w_2$  entfällt. Der auf die Fahrzeuge treffende Winddruck  $w_1$  kann vollständig dem der Fahrbahn benachbarten Längsverband zugetheilt werden, so dass für diesen  $w' = w_1$ , für den andern  $w' = 0$  wird. Genau richtig ist diese Vertheilungsart nur bei Gesamtbelastung; bei einseitiger Windbelastung ist das System wegen der vorhandenen Unsymmetrie des Kräfteplans statisch unbestimmt und müsste streng genommen nach B 1 a berechnet werden\*).

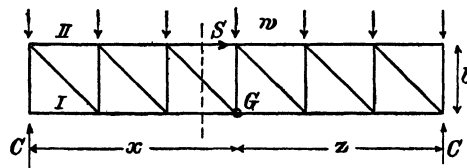


Fig. 17.

Ist der betrachtete Längsverband eben, so entstehen durch die Belastungen  $w'$  und  $w''$  nur in den ihm zugehörigen Stäben Kräfte, welche in einfacher Weise zu berechnen sind. Für einen Gurtstab ergibt sich

$$S = \pm \frac{(w' + w'') x z}{2 b},$$

wo sich die Abscissen  $x$  und  $z$  auf den Gegenpunkt  $G$  des betrachteten Stabs  $S$  beziehen (Fig. 17), und die Zeichen  $+$  und  $-$  die Träger  $I$  bzw.  $II$  betreffen. Wenn die Hauptträgergurten wie

\*) Selbstverständlich tritt statische Unbestimmtheit auch bei Unsymmetrie der Stabanordnung auf.

gewöhnlich zugleich die Gurten des Längsverbands bilden, so treten die Kräfte  $S$  als weitere Zusatzkräfte der Hauptträgergurten auf. Bei besonderen Zwischengurtungen für den Längsverband (Fig. 7) müssen erstere die Kräfte  $S$  aufnehmen, und die Hauptträgergurten bleiben dann frei von den bezüglichen Zusatzkräften.

Ist der Längsverband gekrümmt (Vielflach), so treten unter der Einwirkung der wagrechten Windbelastungen in sämtlichen Stäben eines Hauptträgers Zusatzkräfte auf. Zu ihrer Bestimmung denken wir uns den betr. Hauptträger durch einen lothrechten Längsschnitt herausgeschnitten und betrachten das Gleichgewicht der an ihm wirkenden Kräfte. Die senkrecht zur Trägerebene wirkenden Komponenten der äusseren Kräfte (Windbelastungen, Lagerreaktionen, Strebenkräfte des Längsverbands) heben sich gegenseitig auf; es verbleiben als Belastungen der Hauptträger die Komponenten der Strebenkräfte in der Trägerebene, =  $K$ , welche in der Richtung der zugehörigen Gurtstäbe wirken, und zwar beim

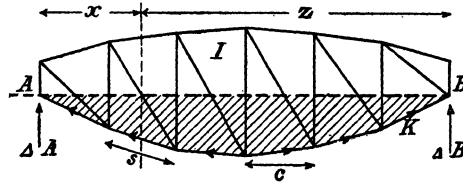


Fig. 18.

hintern Träger I nach aussen (Fig. 18), beim Träger II nach innen. Ihre Absolutwerthe sind

$$K = \frac{D_s}{d} = \frac{Q_s}{b},$$

wo  $s$  = Länge des zugehörigen Gurtstabs,  $d$  = Länge der Strebe des Längsverbands,  $Q$  = Querkraft für das betr. Feld. Für Totalbelastung ist

$$Q = (w' + w'') \left( \frac{1}{2} - x \right),$$

wo sich  $x$  jeweils auf Mitte Feld bezieht.

Die Belastungen  $K$  erzeugen ausschliesslich lothrechte Reaktionen,  $\Delta A$  und  $\Delta B$ , welche zusammen gleich der Summe der lothrechten Komponenten der  $K$  sind. Bezeichnet man mit  $k$  die Normalen von  $A$  auf die Richtungen der  $K$ , so ist

$$\mathcal{A}B = \pm \Sigma \frac{Kk}{l}.$$

Bei Krümmung des Längsverbands nach unten gilt das Vorzeichen + für Träger II, das Vorzeichen — für Träger I; bei Krümmung des Verbands nach oben liegen die Verhältnisse umgekehrt. Für Totalbelastung und symmetrische Träger erhält man, ähnlich wie auf Seite 15,

$$\mathcal{A}A = \mathcal{A}B = \frac{(w' + w'') l y_m}{2b} = \frac{(w' + w'') \Phi}{2b}.$$

Es bezeichnet hierbei  $\Phi$  die Fläche, welche von der gekrümmten Gurtung und ihrer Sehne eingeschlossen wird (in Fig. 18 schraffirt),  $y_m$  die mittlere Höhe von  $\Phi$ . Bei unsymmetrischer Gestalt von  $\Phi$  wird

$$\mathcal{A}A = \frac{(w' + w'') \Phi \zeta}{bl}, \quad \mathcal{A}B = \frac{(w' + w'') \Phi (l - \zeta)}{bl},$$

wo  $\zeta$  = Schwerpunktsabstand der Fläche  $\Phi$  vom Lager B.

Zur Berechnung der durch die Kräfte  $K$  hervorgerufenen Zusatzkräfte zerlegt man die  $K$  in ihre wagrechten und lothrechten Komponenten,

$$K \cos \varphi = \frac{Qc}{b} \quad \text{und} \quad K \sin \varphi = \frac{Q \mathcal{A}y}{b},$$

und wendet dann eines der bekannten Verfahren an. In der Regel erhalten nur die im Längsverband liegenden Gurtstäbe Zusatzkräfte von grösserer Bedeutung, welche näherungsweise

$$S = \pm \frac{(w' + w'') x z}{2b \cos \varphi} = \pm \frac{(w' + w'') x z s}{2bc}$$

gesetzt werden können.

Die wagrechten Reaktionen  $C$  des Längsverbands sind im Höchsthalle  $= \frac{(w' + w'') l}{2}$ ; sie werden, wenn der Längsverband zwischen den Hauptlagern liegt, unmittelbar von letzteren aufgenommen. Ist der Längsverband ausserhalb der Hauptlager angeordnet (z. B. in der Ebene der oberen Gurtungen), so müssen die Reaktionen  $C$  entweder durch besondere seitliche Lager in der Höhe

der oberen Gurtungen aufgenommen oder durch Endquerverbände auf die Hauptlager herabgeführt werden. Die seitlichen Lager können bei „Fahrbahn oben“ an der Kammerrückmauer angebracht werden (verschiedene Brücken der Badischen Bahn); bei „Fahrbahn unten“ ist die Anordnung derselben nur bei Portalbauten möglich (Alte Kinzigbrücke bei Offenburg, Eipelbrücke; siehe Fig. 19).

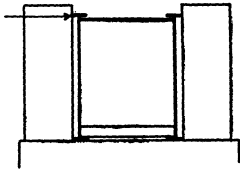


Fig. 19.

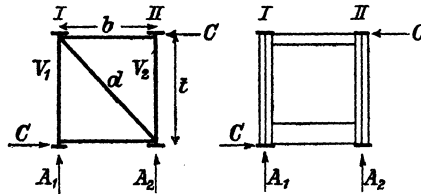


Fig. 20.

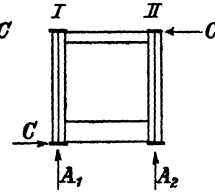


Fig. 21.

Werden Endquerverbände nach Fig. 20 angeordnet, so entstehen in den Stäben derselben durch Herabführung der Kräfte C folgende Stabkräfte und lothrechte Lagerreaktionen:

$$\text{Endständer } V_1 = \frac{Ct}{b}, \quad V_2 = 0; \quad \text{Strebe } D = \frac{Cd}{b},$$

$$\text{Reaktion } A_1 = B_1 = \frac{Ct}{b}; \quad A_2 = B_2 = -\frac{Ct}{b}.$$

Bei „Fahrbahn unten“ müssen die Endquerverbände durch steife Rahmen, welche das nöthige Lichtprofil freilassen, ersetzt werden (Fig. 21). Ausser den später zu behandelnden Nebenspannungen entstehen in den Endständen Zusatzkräfte, die zwischen Null und

$$V_1 = -\frac{Ct}{b} \quad \text{und} \quad V_2 = +\frac{Ct}{b}$$

schwanken.

Die gesammten durch den Winddruck hervorgerufenen Zusatzkräfte sind nun gleich der Summe der unter  $\alpha$  und  $\beta$  berechneten Einzelkräfte. Sie wachsen mit der Spannweite und können bei sehr grossen Weiten sogar die Hauptkräfte der Verkehrslast überschreiten. Was ihren Einfluss auf die Querschnittsbildung der Hauptträger anbelangt, so ist zu beachten, dass die Grösstwerthe des Winddrucks nur selten auftreten und dann ein Zusammentreffen mit der grössten Verkehrslast sehr unwahrscheinlich ist. Man wird für

diesen Ausnahmefall dem Material eine erhöhte Beanspruchung\*) zumuthen dürfen, so dass bei nicht allzu grossen Spannweiten die Querschnitte, welche für lothrechte Belastungen mit den normalen Spannungszahlen berechnet sind, auch noch für die erwähnte aussergewöhnliche Belastung ausreichen. Die Spannweitengrenze, von welcher an die Zusatzkräfte des Winddrucks eine besondere Berücksichtigung verlangen, kann bei eingelegisen Eisenbahnbrücken im Allgemeinen bei 45 bzw. 60 m angenommen werden, je nachdem 1 oder 2 Längsverbände angeordnet sind. Bei zweigelegisen Brücken rückt die Grenze etwa bis 110 bzw. 140 m. Strassenbrücken von 6 m Breite verhalten sich annähernd wie eingelegise Brücken. Speciell bei den Endständern und den Gurtstäben der Endfelder wird unter Umständen schon bei geringeren Spannweiten eine Berücksichtigung der Zusatzkräfte erforderlich. In weitaus den meisten Fällen sind die Zusatzkräfte der Windbelastungen bei belasteter Brücke (Eigengewicht + Verkehrslast), mit einem Einheitsdruck des Winds von 150 kg, in Betracht zu ziehen; nur selten, bei aussergewöhnlichen Abmessungen, wird ein Einheitsdruck von 250 kg bei unbelasteter Brücke (Eigengewicht allein) der Rechnung zu Grunde zu legen sein.

Was die in den Streben der Längsverbände auftretenden Stabkräfte  $D$  anbelangt, so ist  $D = Q \frac{d}{b}$ , wo  $Q$  die dem betreffenden Felde entsprechende Querkraft der Windbelastungen bezeichnet.

$$\max Q \text{ ist } = \frac{w'(1-x)^2}{2l} + w'' \left( \frac{l}{2} - x \right).$$

Für die Streben der Querverbände ist  $D = W \frac{d}{h}$ , wo  $W$  die zu übertragende Windbelastung,  $h$  die Höhe des Querverbands bedeutet.

#### b) Seitenstösse der Fahrzeuge.

Es handelt sich hier wohl ausschliesslich um Eisenbahnfahrzeuge, in erster Linie um Lokomotiven. Für die Zwecke der Anwendung darf angenommen werden, dass die Stosskräfte paarweise an den äussersten Achsen, in gleicher Grösse aber nach entgegen-

\*) Vielfach werden für solche Fälle die Spannungszahlen der ruhenden Belastung in Anwendung gebracht.



gesetzten Richtungen, auftreten und ein Kräftepaar  $= Te$  ( $T =$  Stosskraft,  $e =$  Radstand) bilden. Die grössten von der Brücke aufzunehmenden Momente entstehen, wenn 2 aufeinanderfolgende Lokomotiven Stossmomente verschiedenen Sinnes ausüben, und es ist dann ihre Grösse  $= Te$ . Liegt der Längsverband in der Fahrbahnebene, so treten in dessen Gurtstäben Zusatzkräfte,

$$S = \pm \frac{Te}{b}$$

auf; ausserdem werden, wenn die Fahrbahn um  $t$  über den Lagern angeordnet ist, auch noch in den Endständern, als Gliedern der Endquerverbände, Zusatzkräfte hervorgerufen, deren Höchstwerthe rund  $= \pm 1,5 \frac{Tt}{b}$  gesetzt werden können. Befindet sich die Fahrbahn um  $t$  oberhalb des ebenen Längsverbands, so müssen die Momente  $Te$  zunächst an den Längsverband versetzt werden, wodurch die Hauptträger durch lothrechte Momente  $M = Te \cdot \frac{t}{b}$  und lothrechte Querkräfte  $Q = T \cdot \frac{t}{b}$  in Anspruch genommen werden. Die gesammte Zusatzkraft eines untern Gurtstabs, welcher gleichzeitig dem Längsverband und einem Hauptträger angehört, ist dann

$$S = \pm \left( \frac{Te}{b} + \frac{Tet}{bh} \right) = \pm \frac{Te}{b} \left( 1 + \frac{t}{h} \right).$$

Für eine Strebe des Längsverbands ist

$$D = \pm \frac{Td}{b}.$$

Die Grösse der Stosskraft  $T$  hängt ab von der Geschwindigkeit des Zugs, von dem Zustand des Geleises, von den Konstruktionsverhältnissen der Lokomotiven, namentlich auch von deren Radstand  $e$ . Für Hauptbahnen setzen wir im Mittel  $T = 2500$  kg und  $Te = 10000$  kg. Beispielsweise erhält man hiermit, wenn  $t = \frac{h}{5}$  und die Entfernung der Hauptträger  $b = 4,5$  m, als Zusatzkraft der unteren Gurtstäbe

$$S = \pm \frac{10000}{4,5} (1 + 0,2) = 2700 \text{ kg};$$

für  $b = 1,5$  m und  $t = 0$  steigt  $S$  auf 6700 kg. Hiernach ist der Einfluss der Seitenstöße auf die Stabkräfte im Allgemeinen nur unbedeutend und erfordert höchstens bei sehr kleinen Spannweiten mit geringer Hauptträgerentfernung besondere Berücksichtigung.

c) Centrifugalkräfte der Eisenbahnfahrzeuge.

Die Centrifugalkraft einer Last  $G$ , welche sich mit der Geschwindigkeit  $v$  in einer Kurve vom Radius  $r$  bewegt, ist

$$C = \frac{Gv^2}{gr} = \frac{Gv^2}{9,8r}.$$

Für Güterzüge ist

$$v = 7 \text{ bis } 10 \text{ m, } C \text{ rund} = \frac{5G}{r} \text{ bis } \frac{10G}{r},$$

für Personenzüge

$$v = 20 \text{ bis } 30 \text{ m, } C = \frac{40G}{r} \text{ bis } \frac{90G}{r}.$$

Bei Berechnung der Zusatzkräfte der Hauptträger sind nicht sowohl die Höchstwerthe der Centrifugalkräfte als diejenigen Werthe, welche im Verein mit den zugehörigen lothrechten Belastungen die grössten Stabkräfte hervorrufen, in Rechnung zu führen. Bei kleinen Spannweiten kommt hiernach die Belastung durch Personenzüge, bei mittleren und grossen Spannweiten die durch Güterzüge in Betracht.

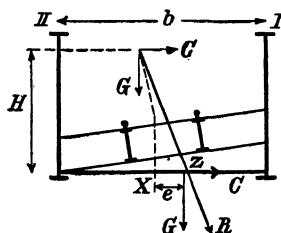


Fig. 22.

Die Wirkung der Centrifugalkräfte auf die Brücke kann wie die des Winddrucks in 2 Einzelwirkungen geschieden werden, deren erste der Versetzung der Centrifugalkräfte an den benachbarten Längsverband, deren zweite dem Durchgang der Kräfte durch letzteren entspricht. Gleichzeitig mit der erstgenannten Einzelwir-

kung wird zweckmässigerweise auch dem Einfluss der Schienenüberhöhung  $h$  und der Krümmung der Bahnachse Rechnung getragen.

$\alpha$ ) Die am Schwerpunkt des Fahrzeugs angreifende Resultierende  $R$  des Gewichts  $G$  und der Centrifugalkraft  $C$  schneidet die Ebene des Längsverbandes in einem Punkt  $Z$  (Fig. 22), woselbst sie sich wieder in ihre beiden Komponenten  $G$  und  $C$  zerlegt. Hierdurch wird die Last  $G$  um die Strecke  $e$  gegen die Geleisachse  $X$  nach aussen versetzt, wo

$$e = \frac{Hv^2}{gr} - \frac{ht}{s}.$$

In diesem Ausdruck bedeutet

$H$  die Höhe des Schwerpunkts über dem Längsverband,  
 $t$  - - - - - den Schienen,  
 $s$  - Spurweite.

Für  $s = t = 1,5$  m,  $v = 7$  m folgt  $e$  rund  $= \frac{5H}{r} - h$ ,

$$v = 10 \text{ m} \quad - \quad e \quad - \quad = \frac{10H}{r} - h,$$

$$v = 20 \text{ m} \quad - \quad e \quad - \quad = \frac{40H}{r} - h,$$

$$v = 30 \text{ m} \quad - \quad e \quad - \quad = \frac{90H}{r} - h.$$

Der Grenzfall  $v = 0$  und  $e = -h$  bedarf in der Regel keiner besonderen Berücksichtigung, da er nur ausnahmsweise vorkommt, und ausserdem eine ruhende Last nicht so ungünstig wirkt wie eine in Bewegung befindliche.

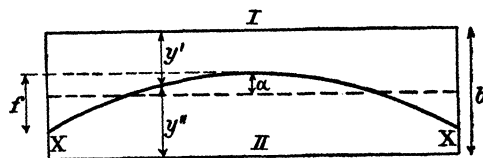


Fig. 23.

Durch die Versetzung der Last  $G$  um die Strecke  $e$  nach aussen wird die Belastung des äussern Trägers  $I$  um  $\frac{Ge}{b}$  vergrössert,

die des innern Trägers II um denselben Betrag vermindert. Es trifft demnach von der Gesamtlast  $G$  (s. Fig. 23)

$$\begin{aligned} \text{auf Träger I der Betrag } G' &= G \left( \frac{y''}{b} + \frac{e}{b} \right), \\ \text{. . . II . . . } G'' &= G \left( \frac{y'}{b} - \frac{e}{b} \right). \end{aligned}$$

Handelt es sich um einen ganzen Zug, so ist strenggenommen jede Einzellast  $G$  in ihre Theillasten  $G'$  und  $G''$  zu zerlegen und sodann Träger I und II diesen Belastungen entsprechend zu berechnen. An Stelle dieses umständlichen Verfahrens empfiehlt sich die Anwendung nachstehender Näherungsformeln, welche unter der Voraussetzung gleichförmig vertheilter Verkehrslast entwickelt wurden\*). Bezeichnet man mit  $M$  das grösste Moment, mit  $Q$  die grösste Querkraft, welche durch einen im geraden Geleis stehenden Zug in einem gewissen Querschnitt  $x$  hervorgerufen werden, so berechnen sich die entsprechenden Momente und Querkräfte der Träger I und II nach folgenden Formeln:

$$\begin{aligned} \text{für } x=0 \quad Q' &= \left( \frac{1}{2} + \frac{3a-f}{3b} + \frac{e}{b} \right) Q; & Q'' &= \left( \frac{1}{2} - \frac{3a-f}{3b} - \frac{e}{b} \right) Q; \\ x = \frac{1}{4} l \quad Q' &= \left( \frac{1}{2} + \frac{8a-f}{8b} + \frac{e}{b} \right) Q; & Q'' &= \left( \frac{1}{2} - \frac{8a-f}{8b} - \frac{e}{b} \right) Q; \\ x = \frac{1}{2} l \quad Q' &= \left( \frac{1}{2} + \frac{6a-f}{6b} + \frac{e}{b} \right) Q; & Q'' &= \left( \frac{1}{2} - \frac{6a-f}{6b} - \frac{e}{b} \right) Q; \\ x = \frac{3}{4} l \quad Q' &= \left( \frac{1}{2} + \frac{2a-f}{2b} + \frac{e}{b} \right) Q; & Q'' &= \left( \frac{1}{2} - \frac{2a-f}{2b} - \frac{e}{b} \right) Q; \\ x=0 \quad M' &= \left( \frac{1}{2} + \frac{3a-f}{3b} + \frac{e}{b} \right) M; & M'' &= \left( \frac{1}{2} - \frac{3a-f}{3b} - \frac{e}{b} \right) M; \\ x = \frac{1}{4} l \quad M' &= \left( \frac{1}{2} + \frac{24a-5f}{24b} + \frac{e}{b} \right) M; & M'' &= \left( \frac{1}{2} - \frac{24a-5f}{24b} - \frac{e}{b} \right) M; \\ x = \frac{1}{2} l \quad M' &= \left( \frac{1}{2} + \frac{6a-f}{6b} + \frac{e}{b} \right) M; & M'' &= \left( \frac{1}{2} - \frac{6a-f}{6b} - \frac{e}{b} \right) M. \end{aligned}$$

\*) Siehe Zeitschrift des Vereins Deutscher Ing. 1889 S. 327.

Hierin bedeutet

- a die Entfernung des Kurvenscheitels von der Brückenachse,
- f den Kurvenpfeil (s. Fig. 23),
- b die Hauptträgerentfernung.

Für zwischenliegende Querschnitte genügt geradlinige Interpolation.

Mit Hilfe der Grössen  $M'Q'M''Q''$  werden die Stabkräfte der Träger I und II in bekannter Weise berechnet. Dieselben begreifen in sich die Hauptkräfte der Verkehrslast und die Zusatzkräfte  $\alpha$ .

$\beta$ ) Die in den ebenen Längsverband versetzten Centrifugalkräfte rufen daselbst Momente  $\mathfrak{M} = M \frac{v^2}{gr}$  und Querkräfte  $\mathfrak{Q} = \frac{Qv^2}{gr}$  hervor; die entsprechenden Gurtkräfte des Längsverbands sind

$$S = \pm \frac{\mathfrak{M}}{b} = \pm \frac{M}{b} \frac{v^2}{gr}.$$

Das Moment  $\mathfrak{M}$  bezieht sich auf den jeweiligen Gegenpunkt des Gurtstabs. Ausserdem entstehen noch, wenn der Längsverband um  $t$  über den Lagern liegt, in den Endständern Zusatzkräfte, welche bei Anordnung nach Fig. 20 die Werthe

$$V_1 = - \mathfrak{Q}_0 \frac{t}{b} = - Q_0 \frac{t}{b} \cdot \frac{v^2}{gr} \quad \text{und} \quad V_2 = 0$$

erhalten. —

Die Zusatzkräfte  $\alpha$  und  $\beta$  der Centrifugalbelastung sind stets bei der Querschnittsbildung zu berücksichtigen, da sie immer gleichzeitig mit den Hauptkräften der Verkehrslast auftreten. Bei solchen Stäben, wo die Zusatzkräfte entgegengesetztes Vorzeichen wie die Hauptkräfte besitzen, ist unter Umständen auch der Grenzfall  $v = 0$  in Betracht zu ziehen, für welchen jedoch die erhöhten Spannungszahlen der ruhenden Belastung eingeführt werden dürfen.

In Folge der Einwirkung der Centrifugalkräfte fallen die Gesamtkräfte analoger Stäbe in beiden Hauptträgern im Allgemeinen ungleich aus, wie man auch die Lage des Geleises auf der Brücke wählen möge. Meist legt man den Kurvenscheitel und die Kurvenenden gleichweit von der Brückenachse entfernt, d. h. man setzt  $a = \frac{1}{2}f$ , um möglichst kurze Querträger zu erhalten, und führt dann die Hauptträger, ihren verschiedenen Stabkräften entsprechend,

ungleich stark aus, soweit nicht im Einzelfalle, der einfachern Herstellung wegen, gleich grosse Querschnitte vortheilhafter erscheinen. Bisweilen legt man auch die Geleisachse derart, dass die Grösstwerthe der Gurtkräfte in Brückenmitte oder der Strebenkräfte an den Enden in beiden Trägern gleich gross werden. Letztere Bedingung ergibt, da  $Q' = Q''$  sein soll,

$$\frac{3a - f}{3b} + \frac{e}{b} = -\frac{3a - f}{3b} - \frac{e}{b}, \text{ somit } a = \frac{f}{3} - e.$$

Erstere Bedingung, auf die ausserhalb des Längsverbands befindlichen Gurtungen angewandt, ergibt mit Hülfe der Gleichung  $M' = M''$  für  $a$  den Werth  $\frac{f}{6} - e$ . —

Die Strebenkräfte der Längs- und Querverbände sind in gleicher Weise wie unter 2 a für Windbelastung angegeben, zu berechnen.

### 3. Temperatureinflüsse.

Wenn die einzelnen Stäbe eines statisch bestimmten Fachwerksystems in Folge von Temperaturwechsel ihre Längen ändern, so nimmt das System eine geänderte Gestalt an, ohne dass hierdurch Zusatzkräfte hervorgerufen werden, da die Stablängen von einander unabhängig sind, und die Auflager, abgesehen von der hier ausser Acht zu lassenden Reibung, keinen Zwang ausüben.

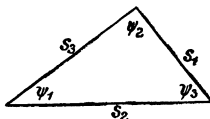


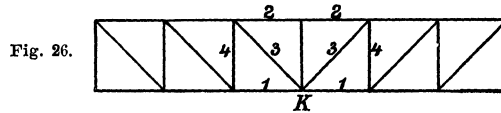
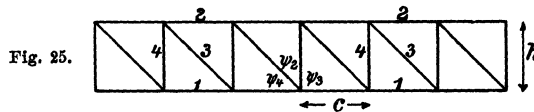
Fig. 24.

Die Ermittlung der Formänderung ist eine rein geometrische Aufgabe. Bei der gebräuchlichen Dreiecksanordnung des Knotenpunktnetzes setzt sich die Formänderung des letzteren aus derjenigen der einzelnen Dreiecke zusammen. Sind die Dehnungen der Dreiecksstäbe  $s_1 s_2 s_3$  auf die Längeneinheit  $\varepsilon_1 = \omega t_1$ ,  $\varepsilon_2 = \omega t_2$ ,  $\varepsilon_3 = \omega t_3$ ,  $\omega =$  Wärmedehnungsziffer  $= 0,0000118$  für Schmiedeeisen,  $t_1 t_2 t_3 =$  Wärmeänderung in Graden, so ändern sich die Dreieckswinkel  $\psi_1 \psi_2 \psi_3$  um

$$\begin{aligned} \Delta \psi_1 &= (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \operatorname{ctg} \psi_3 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3) \operatorname{ctg} \psi_2 \\ &= \omega (t_1 - t_2) \operatorname{ctg} \psi_3 + \omega (t_1 - t_3) \operatorname{ctg} \psi_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \psi_2 &= (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) \operatorname{ctg} \psi_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \operatorname{ctg} \psi_3 \\ &= \omega (t_2 - t_3) \operatorname{ctg} \psi_1 + \omega (t_2 - t_1) \operatorname{ctg} \psi_3, \\ \Delta \psi_3 &= (\varepsilon_3 - \varepsilon_1) \operatorname{ctg} \psi_2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_2) \operatorname{ctg} \psi_1 \\ &= \omega (t_3 - t_1) \operatorname{ctg} \psi_2 + \omega (t_3 - t_2) \operatorname{ctg} \psi_1. \end{aligned}$$

Bei gleich grosser Temperaturänderung sämtlicher Stäbe, d. h.  $t$  konstant, werden die Winkeländerungen  $\Delta \psi = 0$ ; es finden nur Längenänderungen statt, und die neue Gestalt des Fachwerks bleibt der ursprünglichen ähnlich. Bei verschiedenen grossen  $t$  tritt eine Verzerrung der ursprünglichen Gestalt ein, das Fachwerk krümmt sich. Die neue Gestalt der Einzelsysteme (Hauptträger, Längsverbände, Querverbände) lässt sich durch Aneinanderreihen der einzelnen Dreiecke mittels Zeichnung oder Rechnung leicht be-



stimmen. In der Anwendung kommt hauptsächlich der Fall in Betracht, dass die eine Trägergurtung den Sonnenstrahlen ausgesetzt ist, während die andere durch die Fahrbahn geschützt wird. Es kann hier der Werth von  $t$  gruppenweise konstant angenommen werden; er betrage für die Stäbe der untern Gurtung  $t_1$ , der obern Gurtung  $t_2$ , der Wandstäbe  $t_3$ . Sind die Gurtungen parallel und gerade, die einzelnen Dreiecke einander kongruent und gleichgerichtet (Fig. 25), so erhält man in sämtlichen mittleren Knotenpunkten die gleiche Aenderung der Randwinkel

$$\begin{aligned} \Delta \varrho &= \Delta \psi_4 + \Delta \psi_2 + \Delta \psi_3 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) (\operatorname{ctg} \psi_4 + \operatorname{ctg} \psi_3) \\ &= (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \frac{c}{h} = \omega (t_2 - t_1) \frac{c}{h}, \end{aligned}$$

wo  $h$  = Trägerhöhe,  $c$  = Feldweite. Die Knotenpunkte einer Gurtung liegen somit auf einem Kreisbogen vom Radius

$$r = \frac{c}{\Delta \varrho} = \frac{h}{\omega (t_2 - t_1)}$$

und von einem Krümmungspfeil

$$\delta = \frac{l^2}{8 r} = \frac{\omega (t_2 - t_1) l^2}{8 h}.$$

Die Ausdehnung der Wandstäbe,  $= \omega t_3$ , ist nach vorstehenden Formeln ohne Einfluss auf  $r$  und  $\delta$ .

Bei der Anordnung nach Fig. 26, wo die rechtwinkligen Dreiecke symmetrisch zum Knotenpunkt K (meist Brückenmitte) liegen, erhält die Winkeländerung bei Punkt K eine von den übrigen Winkeländerungen  $\Delta \varrho$  abweichende Grösse,  $= \Delta k$ . Die Differenz  $\Delta k - \Delta \varrho$  ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \Delta k - \Delta \varrho &= 2 (\Delta \psi_2 + \Delta \psi_4) - (\Delta \psi_4 + \Delta \psi_2 + \Delta \psi_3) \\ &= \Delta \psi_2 + \Delta \psi_4 - \Delta \psi_3 = \varepsilon_1 (\text{ctg } \psi_4 - \text{ctg } \psi_3) + \varepsilon_2 (\text{ctg } \psi_4 + \text{ctg } \psi_3) \\ &\quad + 2 \varepsilon_4 \text{ctg } \psi_1 - 2 \varepsilon_3 (\text{ctg } \psi_1 + \text{ctg } \psi_4) \\ &= \varepsilon_1 \frac{c}{h} + \varepsilon_2 \frac{c}{h} + 2 \varepsilon_4 \frac{h}{c} - 2 \varepsilon_3 \left( \frac{h}{c} + \frac{c}{h} \right). \end{aligned}$$

Die Knotenpunkte einer Gurtung liegen hier auf 2 Kreisbögen vom früheren Radius  $r = \frac{c}{\Delta \varrho}$ , welche bei K unter dem Winkel  $\Delta k - \Delta \varrho$  zusammenstossen. Der Pfeil bei K (Brückenmitte) beträgt

$$\delta = \frac{l^2}{8 h} + \frac{1}{4} (\Delta k - \Delta \varrho).$$

Für  $t_3 = t_2$  wird  $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_2$ ;  $\Delta k - \Delta \varrho = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \frac{c}{h}$ ;

$$\delta = \frac{\omega (t_2 - t_1) l^2}{8 h} - \frac{\omega (t_2 - t_1) c l}{4 h} = \frac{\omega (t_2 - t_1) l^2}{8 h} \left( 1 - \frac{2 c}{l} \right).$$

Für  $t_3 = t_1$  wird  $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_1$ ;  $\Delta k - \Delta \varrho = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \frac{c}{h}$ ;

$$\delta = \frac{\omega (t_2 - t_1) l^2}{8 h} + \frac{\omega (t_2 - t_1) c l}{4 h} = \frac{\omega (t_2 - t_1) l^2}{8 h} \left( 1 + \frac{2 c}{l} \right).$$



Der Pfeil wird hiernach im Verhältniss  $\frac{1+2c}{1}$  grösser als bei Fig. 25; für  $c = 0,11$  macht dies 20% aus.

Für  $t_3 = \frac{t_1 + t_2}{2}$  wird  $\Delta k - \Delta \rho = 0$  und  $\delta$  wie früher

$$= \frac{\omega (t_2 - t_1) l^2}{8 h}.$$

Die Temperaturdifferenz der beiden Gurtungen,  $t_2 - t_1$ , beträgt äussersten Falls 20°; die gewöhnlichen Höchstwerthe dürften jedoch wohl selten 16° überschreiten.

Für  $t_2 - t_1 = 20^\circ$   $\omega = \frac{1}{80000}$ ,  $c = 0,11$  wird

$$\delta = \frac{l^2 (1 + 0,2)}{h \cdot 32000} = \frac{l^2}{26700 h} \text{ bzw. } = \frac{l^2}{40000 h}.$$

Die Gestalt des deformirten Gesamtsystems ergibt sich, wenn man die deformirten Einzelsysteme entsprechend an einander

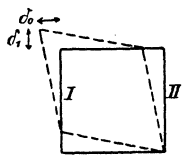


Fig. 27 a.

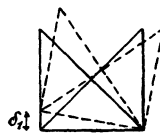


Fig. 27 b.

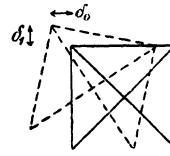


Fig. 27 c.

reicht. In Brückenmitte erhält man die in Fig. 27 dargestellten Deformationsfiguren des Querschnitts, für den Fall, dass nur die obere Gurtung des Trägers I um  $t^0$  erwärmt wurde, und zwar bezieht sich Fig. 27 a auf die Anordnung mit 2 Längsverbänden, Fig. 27 b und Fig. 27 c auf die Anordnungen mit 1 Längsverband in der unteren bzw. oberen Gurtebene.  $\delta_1$  bedeutet den nach obigen Formeln zu bestimmenden Pfeil des Trägers I,  $\delta_0$  den Pfeil des obren Längsverbandes.

Ausser den bisher betrachteten Formänderungen treten bei ungleichmässiger (einseitiger) Erwärmung der einzelnen Stäbe auch noch Verbiegungen der letzteren auf. Nimmt die Temperatur gleichmässig der Quere nach zu, so findet die Krümmung ohne

Nebenspannungen statt, nach einem Radius  $r = \frac{\beta}{\omega \Delta t}$ , wo  $\beta =$

Stabbreite,  $\Delta t =$  Wärmeunterschied der beiden Randfasern. Ein Wärmeunterschied  $\Delta t$  wird namentlich bei getheilten Stäben stattfinden können; als Höchstwerth von  $\Delta t$  darf hier etwa 5 Grad angenommen werden, somit  $r =$  rund 16000  $\beta$ ,

$$\text{Centriwinkel } \alpha = \frac{s}{r} = \frac{s}{16000 \beta}.$$

#### 4. Nebenwirkungen der Auflager.

##### a) Excentrischer Angriff der wagrechten Lagerreaktionen.

Die Stützpunkte bzw. Stützflächen der Lager sind aus konstruktiven Gründen um ein gewisses Mass  $e$  unterhalb der Endknoten E (Fig. 28) gelegen, so dass die wagrechte Reaktion H des

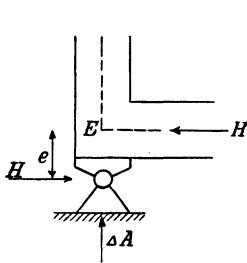


Fig. 28.

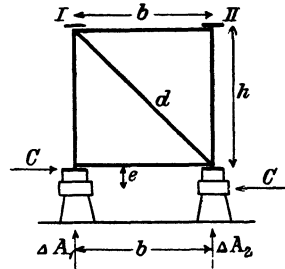


Fig. 29.

festen Lagers, welche durch Längsbelastungen hervorgerufen wird, am Hebelsarm  $e$  auf den Träger einwirkt. Es entstehen hierdurch die zusätzlichen Auflagerdrücke  $\Delta A = - \Delta B = \frac{He}{1}$  und die zusätzlichen Momente  $\Delta M = \Delta B (1 - x) = - He \frac{(1 - x)}{1}$  im beliebigen Querschnitt  $x$ . Die entsprechenden Zusatzkräfte des Hauptträgers sind sehr klein und können vernachlässigt werden; von grösserer Bedeutung sind die gleichzeitig in der Nähe des festen Lagers auftretenden Nebenspannungen, bezüglich welcher auf die späteren Untersuchungen verwiesen wird.

In gleicher Weise wirken auch die Reaktionen  $C$  der Querbelastungen um  $e$  unterhalb des Endknotens E, wodurch die zusätzlichen Auflagerdrücke  $\Delta A_1 = - \Delta A_2 = - \frac{Ce}{b}$  hervorgerufen

werden. Die entsprechenden Zusatzkräfte sind für Fig. 29

$$V_1 = -\frac{C e}{b}; \quad V_2 = 0; \quad \text{Strebe } D = \frac{C e}{b} \cdot \frac{d}{h}.$$

Bezüglich der Nebenspannungen siehe später.

#### b) Reibungskräfte.

In Folge der Formänderungen, welche durch Kräfte oder durch Temperatureinflüsse hervorgebracht werden, finden Bewegungen der Brückenkonstruktion gegenüber den Stützkörpern statt. Diese Bewegungen sind theils Verschiebungen, theils Drehungen um wagrechte und lothrechte Achsen. Sie rufen Reibungskräfte hervor, welche im Sinne der relativen Bewegung der Stützkörper auf die Brückenkonstruktion einwirken und an den festen Lagern entsprechende Reaktionen bedingen.

#### a) Verschiebungen.

Es kommen bei den gewöhnlichen Brückenbreiten hauptsächlich nur Längsverschiebungen in Betracht und zwar sowohl bezüglich der wagrechten als auch der lothrechten Stützflächen (Seitenrippen der Lager). Bezeichnet  $V$  den lothrechten Auflagedruck,  $C$  den wagrechten, so ist die Gesamtreibung am betr. Lager  $R = \pm (\mu V + \mu C)$ . Die Reibungsziffer  $\mu$  ist bei guter Unterhaltung zu setzen  $\mu = 0,2$  für Gleitlager und  $\mu = \frac{0,2}{d_{\text{mm}}}$  für Walzenlager; bei schlechter Unterhaltung kann  $\mu$  wesentlich höher ausfallen. Bezüglich des wagrechten Lagerdrucks  $C$  kommt stets gleitende Reibung in Betracht, d. h.  $\mu \geq 0,2$ . Das Vorzeichen  $+$  ist anzuwenden bei auffahrender Last bzw. Temperaturerhöhung, das Vorzeichen  $-$  bei abfahrender Last bzw. Temperaturerniedrigung.

Die Zusatzkräfte, welche den Reibungskräften  $R$  entsprechen, sind im Einzelfalle leicht zu bestimmen. Wir setzen beispielsweise die Lageranordnung nach Fig. 2 bzw. Fig. 30 voraus. Die lothrechten Auflagerdrücke unter dem gleichzeitigen Einfluss lothrechter und wagrechter Belastungen seien  $A_1, A_2, B_1, B_2$ , die wagrechten Lagerdrücke  $C'$  und  $C''$ . Es entstehen sodann an den 3 verschieblichen Lagern die Reibungskräfte  $R_1'' = \pm (\mu B_1 + \mu C'')$ ,

$R_2' = \pm \mu A_2$ ,  $R_2'' = \pm \mu B_2$ . Die entsprechenden wagrechten Reaktionen sind  $H' = R_1'' + R_2'' - R_2'$  und

$$N' = -N'' = \frac{b}{l} (R_2'' - R_2') = \pm \frac{b}{l} \mu (B_2 - A_2);$$

ausserdem wird durch die Wirksamkeit von  $N''$  der Werth von  $R_1'$  verkleinert, d. h. es ist  $R_1' = \pm [\mu B_1 + \mu (C'' + N'')]$  zu setzen.

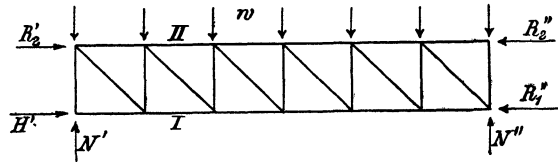


Fig. 30.

Gewöhnlich ist  $A_2 = B_2$  somit  $N' = N'' = 0$ . Die Zusatzkräfte der die Lager geradlinig verbindenden Gurtungen sind dann konstant  $= R_2$  bzw.  $= R_1$ , die übrigen Stäbe erhalten keine Zusatzkräfte.

Bei gekrümmten Gurten treten in sämtlichen Stäben Zusatzkräfte auf; man erhält mit den Bezeichnungen der Fig. 31

$$O = -\frac{R y_0}{h_0 \cos \omega}; \quad U = -\frac{R y_u}{h_u \cos \varphi};$$

$$D = \frac{R}{\sin \delta} \left( \frac{y_u}{h_u} \operatorname{tg} \varphi - \frac{y_0}{h_0} \operatorname{tg} \omega \right).$$

Diese Zusatzkräfte sind in den meisten Fällen, namentlich bei Walzenlagern, gering. Eine besondere Berücksichtigung derselben

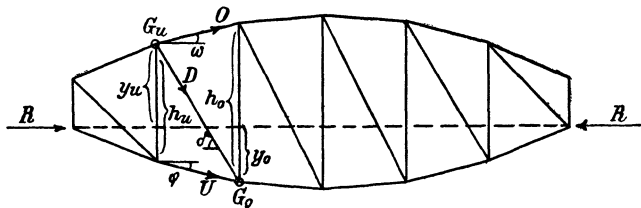


Fig. 31.

wird nur bei Gleitlagern bezügl. der äussersten Gurtstäbe in Frage kommen können.

In Folge der unter a) erwähnten excentrischen Anordnung der Lager wirken die Reibungskräfte der wagrechten Stützflächen an

den Hebelsarmen  $e$  (Fig. 28); es entstehen hierdurch in den Ebenen der Hauptträger Momente, welche für den gewöhnlichen Fall  $A=B$ , den konstanten Werth  $M = \pm \mu A e$  besitzen. In gleicher Weise sind auch die lothrechten Stützflächen ausserhalb der Mittelebene der Hauptträger angeordnet, wodurch zusätzliche Momente in der Lagerebene,  $M_0 = \pm \mu C e_0$ , hervorgerufen werden. Die den Momenten  $M$  und  $M_0$  entsprechenden Zusatzkräfte dürfen unbedenklich vernachlässigt werden.

### $\beta$ ) Drehungen.

Bei der Drehung um die wagrechten Zapfenachsen entstehen Reibungsmomente

$$M' = \pm \mu A \frac{d}{2} \quad \text{und} \quad M'' = \pm \mu B \frac{d}{2},$$

wo  $d$  = Zapfendurchmesser,  $\mu = 0,15-0,2$  bei guter Ausführung.

Desgleichen werden bei den durch die wagrechten Durchbiegungen verursachten Drehungen um die lothrechten Achsen der Auflagerknoten Reibungsmomente von der Grösse  $M_0' = \mu A \varrho$  bzw.  $M_0'' = \mu B \varrho$  hervorgerufen, wo

$\varrho$  = mittlerer Radius der Lagerfläche  $F$ , =  $St : F$ ,

$St$  = statisches Moment der Lagerfläche um ihren Schwerpunkt,

$\mu$  = Koeffizient der gleitenden Reibung =  $0,2$ .

Der Einfluss der Reibungsmomente  $M$  und  $M_0$  auf die Zusatzkräfte ist sehr gering und kann vernachlässigt werden; bezüglich der gleichzeitig auftretenden Nebenspannungen siehe die späteren Untersuchungen.

Anmerkung. Bei geneigter Fahrbahn werden die Bahnen der verschieblichen Lager — abgesehen von ganz kleinen, hier nicht in Betracht kommenden Brücken — stets wagrecht angeordnet. Die 4 Lagerpunkte liegen hierbei meist in einer der Fahrbahn parallelen Ebene, bisweilen auch in einer wagrechten Ebene. Die Berechnung der Stabkräfte und Lagerreaktionen erfolgt in ähnlicher Weise wie bei wagrechter Fahrbahn, unter Berücksichtigung der selbstverständlichen, durch die Bahnneigung bedingten Abänderungen. Für lothrechte Belastungen ergeben sich in beiden Fällen genau die gleichen Werthe der Stabkräfte und der Lagerreaktionen; letztere sind, unabhängig von der Bahnneigung, lothrecht gerichtet. Wagrechte Reaktionen in der Längsrichtung (=  $H$ ) werden ausschliesslich durch Längsbelastungen hervorgerufen und sind gleich den wagrechten Komponenten derselben, bzw. da es sich in der Regel um geringe Neigungen handelt, annähernd gleich den Längsbelastungen  $\Sigma T$  selbst. Dem-

entsprechend sind die Pfeilerstärken, welche durch die Grösse der Reaktionen bedingt werden, unabhängig von der Bahnneigung, wenn man gleiche Zugslängen und gleiche Bremsachsen voraussetzt. Letzteres ist zwar bei den derzeitigen Betriebsverhältnissen nicht der Fall, doch wird man mit Rücksicht auf die Zukunft gut thun, bei Berechnung der Pfeiler sämtliche Achsen als gebremst anzunehmen. Es fällt dann in dieser Beziehung der Unterschied zwischen geneigter und wagrechter Fahrbahn fort. Was die Zugslängen anbelangt, so kommen dieselben nur dort in Betracht, wo die Brückenlänge die Zugslänge übertrifft; je länger der Zug, desto stärker der Pfeiler. Demgemäss sind streng genommen in diesem Falle für Brücken im Flachland stärkere Pfeiler erforderlich, als für Brücken von Gebirgsbahnen. That- sächlich wird man aber einen solchen Unterschied wohl kaum machen, und in beiden Fällen der Berechnung die Bremskraft eines die Brücke vollständig bedeckenden Zugs zu Grunde legen. Es ist dann die Pfeilerstärke in jeder Beziehung unabhängig von der Bahnneigung.

## **B. Statisch unbestimmte Systeme.**

---

Bei statisch unbestimmten Systemen ist die theoretisch genaue Ermittlung der Stabkräfte, h. i. der Zusatzkräfte, meist sehr um- ständiglich; es müssen ausser den statischen Gleichungen auch noch die dem betr. Einzelfalle entsprechenden Formänderungsgleichungen aufgestellt werden. Trotzdem stimmen die Ergebnisse bei der theilweisen Unsicherheit der Rechnungsgrundlagen nicht vollkommen mit der Wirklichkeit überein. Sie sind ausserdem an den Gültig- keitsbezirk des Elasticitätsgesetzes gebunden und verlieren ausser- halb der Elasticitätsgrenze ihre Brauchbarkeit, so dass sie bezügl. der Bruchsicherheit keinen Aufschluss gewähren. Man begnügt sich daher in der Regel schon bezüglich der Hauptkräfte mit Näherungs- bzw. Schätzungsverfahren; um so mehr erscheint ein derartiges Vorgehen bei den meist viel unwichtigeren Zusatzkräften gerechtfertigt. In zahlreichen Fällen ist es ausreichend, die Stab- kräfte in bekannter Weise durch Zerlegung des statisch unbe- stimmten Gesamtsystems in mehrere statisch bestimmte Theil- systeme zu ermitteln. Die gegenseitige Abhängigkeit der Form- änderung der Theilsysteme und die Temperatureinflüsse werden hierbei vernachlässigt und höchstens am Schlusse der Rechnung durch schätzungsweise Erniedrigung der Spannungszahlen berück-

sichtigt. Die bisher unter A entwickelten Methoden sind dann ohne weiteres anwendbar. In andern Fällen, wo eine grössere Genauigkeit wünschenswerth erscheint, ist zunächst das vorerwähnte Verfahren zu befolgen und sodann nachträglich der gegenseitigen Abhängigkeit der Theilsysteme Rechnung zu tragen.

Die folgenden Untersuchungen befassen sich mit der Bestimmung der hierbei noch weiterhin auftretenden Zusatzkräfte (Zusatzkräfte 2. Ordnung); sie beziehen sich auf folgende Fälle:

1. Uebergrosse Anzahl der Auflagerreaktionen;
2. übergrosse Anzahl der Einzelsysteme (Hauptträger, Längsverbände etc.), wobei jedes Einzelsystem für sich statisch bestimmt ist;
3. statisch unbestimmte Einzelsysteme, bei richtiger Anzahl derselben.

Die mannigfachen Kombinationen, welche zwischen vorstehenden Einzelfällen vorkommen können, bleiben im Allgemeinen ausser Betracht. Sie können mit Hülfe der für die Einzelfälle gegebenen Methoden ohne besondere Schwierigkeiten berechnet werden.

Anmerkung. Die nachstehend entwickelten Formeln beruhen auf dem Elasticitätsgesetz  $\sigma = E\varepsilon$ , und gelten daher streng genommen nur innerhalb der Elasticitätsgrenze. Die Verhältnisse ausserhalb dieser Grenze können zwar theoretisch behandelt werden (siehe Hann. Zeitschrift 1889 S. 733), doch sind die Ergebnisse selten direkt verwendbar wegen der Unsicherheit bezüglich des in Rechnung zu stellenden Formänderungsgesetzes. Im Allgemeinen ergibt sich, dass der Einfluss ungleicher Erwärmung und der ähnlich wirkende unrichtiger Montirung ausserhalb der Elasticitätsgrenze abnimmt, da dort das Verhältniss der Temperaturdehnungen zu den Kraftdehnungen wesentlich kleiner wird. Die Temperaturspannungen sind daher auf die Bruchsicherheit von geringerem Einfluss, als die entwickelten Formeln angeben. Bezüglich der Belastungen kann man bei den nachstehend untersuchten Systemen annehmen, dass in der Regel die Bruchsicherheit thatsächlich etwas grösser ausfällt, als die Formeln anzeigen, insofern nach Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze meist eine Art von Spannungsausgleich in den vorher ungleich beanspruchten Gliedern eintritt (z. B. in ungleich langen Kreuzstreben).

Den bekannten Nachtheilen der statisch unbestimmten Systeme (geringere Genauigkeit bei Berechnung der Grundkräfte, Erhöhung der Grundkräfte durch Temperatureinflüsse u. s. w.) stehen andererseits die Vortheile kleinerer Formänderungen und dementsprechend auch kleinerer Nebenspannungen gegenüber. Der Satz, dass statisch bestimmte Systeme unter allen Umständen den statisch unbestimmten vorzuziehen

seien, lässt sich daher in seiner Allgemeinheit nicht aufrechterhalten. Es hängt vollständig von den Verhältnissen des Einzelfalls ab, welche Konstruktionsart hier am zweckmässigsten zur Verwendung gebracht wird.

## 1. Uebergrosse Anzahl der Auflagerreaktionen.

### a) Ueberzählige lothrechte Reaktion.

Ein Grundsystem, bestehend aus 2 Hauptträgern, 2 Längsverbänden, 2 Endquerverbänden (Fig. 5), welches auf 4 Punkten aufgelagert ist, besitzt nach den früheren Ausführungen eine überzählige lothrechte Reaktion und ist daher im Allgemeinen statisch unbestimmt. Die übliche Rechnungsweise, nach welcher die Lasten nach rein statischen Gesetzen auf die 4 Lager vertheilt werden\*), ist nur dann genau richtig, wenn bei der hierdurch bedingten Formänderung die 4 Lagerpunkte, den Bedingungen der Aufgabe entsprechend, in der ursprünglichen Ebene bleiben, somit bei symmetrischer Anordnung des Stabwerks und des Kräfteplans bezüglich der durch den Brückenmittelpunkt gehenden lothrechten Längsebene oder Querebene. Die Forderung eines symmetrischen Kräfteplans ist bezüglich der ungünstigsten Belastungsweisen in den meisten Fällen vollständig oder doch wenigstens annähernd erfüllt, so dass hierfür das übliche Rechnungsverfahren richtige Ergebnisse liefert. Bei beliebiger, unsymmetrischer Anordnung erhält man die lothrechten Reaktionen auf folgende Weise.

Es seien  $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2$  die lothrechten Reaktionen bei der üblichen statischen Lastvertheilung,  $\mathfrak{S}$  die zugehörigen Stabkräfte. Bei diesem Kräfteplan und bei den unter Umständen gleichzeitig eintretenden Temperaturänderungen  $t$  hebe sich das Trägerende  $B_2$  um den Betrag  $\mathcal{A}$  über die Ebene  $A_1 A_2 B_1$ , welche durch die 3 anderen Endpunkte bestimmt wird. Lässt man nun in den diagonal gegenüberliegenden Endpunkten  $B_2$  und  $A_1$  die Kraft  $Z$  lothrecht nach unten, in den 2 anderen Endpunkten  $B_1$  und  $A_2$  die Kraft  $Z$  lothrecht nach oben wirken, von solcher Grösse, dass die frühere Hebung  $\mathcal{A}$  wieder aufgehoben wird, so ist  $Z = \mathcal{A} : \delta$ , wo  $\delta =$  Senkung für  $Z = 1$ , und die endgültigen Auflagerdrücke sind

$$A_1 = \mathfrak{A}_1 - Z; \quad A_2 = \mathfrak{A}_2 + Z; \quad B_1 = \mathfrak{B}_1 + Z; \quad B_2 = \mathfrak{B}_2 - Z.$$

\*) d. h. wie wenn es sich um das statisch bestimmte Grundsystem Fig. 1 handelte.



Bezeichnet man die Längen der Stäbe mit  $s$ ,  
deren volle Querschnitte\*) mit  $F$ ,

deren Dehnungen durch  $\mathfrak{E}$  und  $t$  mit  $\varepsilon = \frac{\mathfrak{E}}{EF} + \omega t$ ,

die Stabkräfte in Folge der Reaktionen  $Z = 1$  mit  $\mathfrak{s}$ ,  
so erhält man mit Hülfe des Satzes der virtuellen Geschwindigkeiten

$$\mathcal{A} = -\sum \varepsilon s \mathfrak{s}; \quad \delta = \sum \frac{\mathfrak{s}^2 s}{EF}; \quad Z = -\sum \varepsilon s \mathfrak{s} : \sum \frac{\mathfrak{s}^2 s}{EF},$$

die Summen  $\sum$  beziehen sich auf sämtliche Stäbe des Grundsystems.

Die Stabkräfte  $\mathfrak{E}$  sind nach den früheren Regeln zu berechnen; die Stabkräfte  $\mathfrak{s}$  ergeben sich in folgender Weise. Es bezeichne  $N$

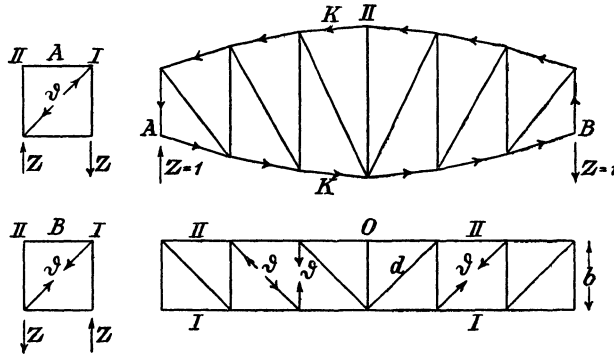


Fig. 32.

die konstante wagrechte Querkomponente der Stabkräfte in den Streben der 2 Längsverbände und der 2 Endquerverbände in Folge der Reaktionen  $Z = 1$ . Die Strebenkräfte selbst sind dann  $\mathfrak{s} = \frac{Nd}{b}$  (Fig. 32), ihre Komponenten in der Ebene der Hauptträger

$$K = \mathfrak{s} \cdot \frac{s}{d} = \frac{Ns}{b},$$

\*) Streng genommen handelt es sich bei Zugstäben um einen Zwischenwerth zwischen vollem und nietverschwächtem Querschnitt, welcher jedoch bei den üblichen Niettheilungen fast vollständig mit dem Werthe des vollen Querschnitts übereinstimmt.

wo  $b =$  Hauptträgerentfernung und  $s =$  Länge des der betreffenden Strebe entsprechenden Hauptträgerstabs (Gurtstab bzw. Endständer). Diese Kräfte  $K$  belasten im Verein mit den Reaktionen  $Z = 1$  die Hauptträger; die entsprechenden Stabkräfte sind leicht zu bestimmen, sobald  $N$  bekannt. Letzteres ergibt sich aus der Bedingung, Summe der statischen Momente bezüglich des Punkts A gleich Null, d. h.  $1 \cdot 1 - \sum Kk = 0$  oder  $1 \cdot 1 - \frac{N}{b} \sum sk = 0$ , wo  $k =$  Hebelsarm von  $K$  bezüglich des Punkts A, somit  $N = b1 : \sum sk$ .

Bei symmetrischer Anordnung des Stabwerks wird  $\sum sk$  gleich 2 mal der Trägersichtfläche  $= 2 \Phi = 2 l \cdot h_m$ , wo  $h_m =$  mittlere Trägerhöhe, somit  $N = b1 : 2 l h_m = b : 2 h_m$ . Der Beweis hierfür ist ähnlich wie auf Seite 15 zu führen. Für Parallelträger wird

$$h_m = h, N = b : 2 h.$$

Die Stabkräfte  $\delta$  nehmen alsdann folgende Werthe an:

$$\text{Streben } \delta = \pm \frac{d}{2 h}, \quad \text{Gurtstäbe } g = \pm \frac{z - z'}{2 h}.$$

Hierbei ist  $z =$  Entfernung des Gegenpunkts von  $g$  vom rechtseitigen Lager B hinsichtlich des Hauptträgersystems,  
 $z' =$  Entfernung des Gegenpunkts von B hinsichtlich des Systems des Längsverbands (Fig. 33).

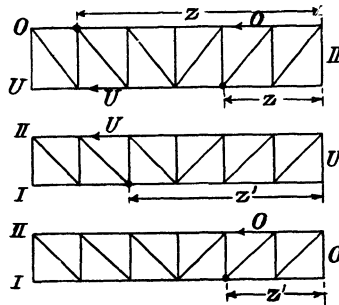


Fig. 33.

Je nach der Stabanordnung wird  $g = \pm \frac{C}{2h}$  (Stab U in Fig. 33)  
 oder  $g = 0$  (Stab O in Fig. 33).

Werden die Hauptträger I und II und die Längsverbände O und U abwechselnd mit entgegengesetzter Strebenrichtung angeordnet

(Fig. 34), so werden alle Gurtkräfte gleich Null,  $g = 0$ , da stets  $z = z'$ ; die Reaktionskräfte  $Z$  sind in Folge dessen nur von den Streben abhängig.

Das gleiche ist der Fall, wenn die Hauptträger, Längsverbände und Querverbände zweifaches Strebensystem (Kreuzstreben) besitzen, da auch hier stets  $z = z'$  ist.

Hiernach ist beispielsweise beliebige ungleiche Erwärmung der Gurten ohne Einfluss auf die statische Lastvertheilung, während eine solche der Streben die Lastvertheilung ändert. —

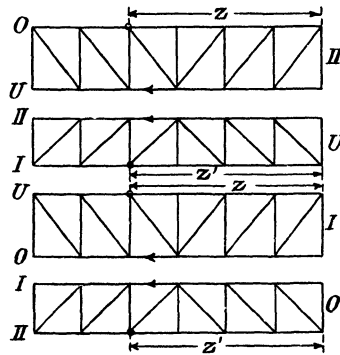


Fig. 34.

Durch eine zufällige Stützensenkung wird gleichfalls die Lastvertheilung geändert; senkt sich z. B. Stütze  $B_2$  um  $\mathcal{A}$ , so entsteht daselbst eine Verringerung des Auflagerdrucks um  $Z = \mathcal{A} : \delta$ ; die gleiche Verringerung tritt bei  $A_1$  ein, während  $A_2$  und  $B_1$  um  $Z$  zunehmen. —

Die gesammte Stabkraft ist schliesslich  $S = \mathfrak{S} + \mathfrak{s}Z$ .

Handelt es sich nur um den Einfluss von Temperaturänderungen oder Stützensenkungen, so wird  $\mathfrak{S} = 0$ , somit  $S = \mathfrak{s}Z$ .

Anmerkung. Das vorstehend angewendete Verfahren der Berechnung statisch unbestimmter Systeme weicht von dem sonst gebräuchlichen etwas ab. Gewöhnlich wählt man die gesammte Kraft des überzähligen Gliedes als Unbekannte  $X$ , nach deren Bestimmung die einzelnen Stabkräfte die Form  $S = \mathfrak{S}' + \mathfrak{s}X$  erhalten, wo  $\mathfrak{S}' =$  Stabkraft für  $X = 0$ , d. h. für das nach Entfernung des überzähligen Gliedes statisch bestimmt gewordene System. Bei dem oben angewandten Verfahren wird als Unbekannte die Differenz  $Z$  zwischen dem wirklichen Werthe des überzähligen Gliedes und dem bei der üblichen statischen Lastvertheilung auftretenden Werthe gesetzt, wobei die Stabkräfte die Form  $S = \mathfrak{S} + \mathfrak{s}Z$  annehmen. Man erreicht hierbei fol-

gende praktische Vortheile: Die Stabkräfte  $\mathfrak{S}$  sind schon bekannt, da sie bereits zur vorläufigen Querschnittsbestimmung berechnet werden mussten, während die Kräfte  $\mathfrak{S}'$  noch einer besonderen Ermittlung bedürfen. Ferner sind die Glieder  $\mathfrak{S}Z$  meist nur klein, gewissermaassen nur Korrektionsglieder, während im anderen Falle die Glieder  $\mathfrak{S}X$  verhältnissmässig gross und meist von entgegengesetztem Vorzeichen wie  $\mathfrak{S}'$  ausfallen. Geringe Ungenauigkeiten in der Bestimmung von  $\mathfrak{S}X$  können daher das Endergebniss sehr bedeutend beeinflussen.

**b) Ueberzählige wagrechte Reaktion.**

Gewöhnlich sind die Auflager auf dem einen Widerlager A vollkommen fest, auf dem andern B verschieblich angeordnet. An den verschieblichen Lagern bewegen sich die Trägerenden mit geringem Spielraum zwischen den Seitennerven der Grundplatten bezw. der Lagerwalzen. Je nach der Einwirkung der äusseren Kräfte kommt entweder Träger I oder Träger II zum Anliegen an einen Seitennerv, so dass für beide verschiebliche Lager zusammen stets nur eine wagrechte Reaktion  $C''$  auftritt. An den festen Lagern sind strenggenommen 4 wagrechte Reaktionen  $H_1 H_2 C_1' C_2'$  (Fig. 35) wirksam; da jedoch für alle Stäbe, mit Ausnahme des

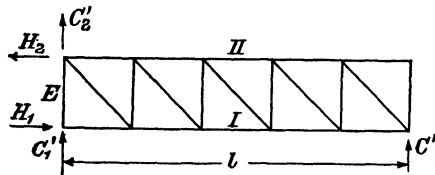


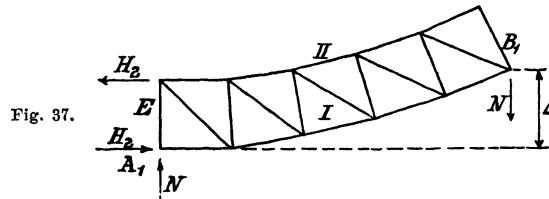
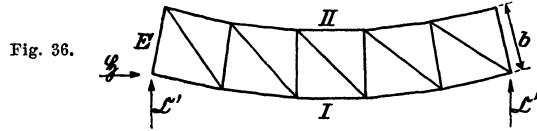
Fig. 35.

wagrechten Querpfostens E nur die Summe  $C_1' + C_2' (= C')$  in Betracht kommt, so haben wir es in den folgenden Untersuchungen nur mit 3 Reaktionen auf der Seite A, im Ganzen also mit 4 wagrechten Reaktionen  $H_1 H_2 C' C''$  zu thun. Von diesen 4 Reaktionen ist eine statisch unbestimmbar und muss mit Hülfe von Formänderungsgleichungen ermittelt werden.

$\alpha)$  Wir setzen zunächst den Fall voraus, dass nur ein einziger Längsverband und zwar in der Ebene der Auflager vorhanden ist.  $H_2$  sei die überzählige Reaktion, nach deren Beseitigung die Konstruktion statisch bestimmt wird und nach den früheren Regeln berechnet werden kann. Die entsprechenden 3 horizontalen Reaktionen werden mit  $\mathfrak{H} \mathfrak{C}' \mathfrak{C}''$  bezeichnet, die zugehörigen Stabkräfte mit  $\mathfrak{S}$ . Bei alleiniger Wirkung von lothrechten Belastungen oder

von Temperatureinflüssen wird  $\mathfrak{S} = \mathfrak{C}' = \mathfrak{C}'' = 0$ ; bei alleiniger Wirkung von Querblastungen wird  $\mathfrak{S} = 0$ .

Die Formänderung, welche der Längsverband unter den gemachten Voraussetzungen erleidet sei in Fig. 36 dargestellt. Dreht man nun den Längsverband derart, dass der Endstab E die durch die festen Lager vorgeschriebene Lage (Fig. 37) erhält, so weicht



der Endpunkt  $B_1$  um einen gewissen Betrag  $\mathcal{A}$  von dem zugehörigen Lager ab und muss nun durch die Einwirkung der überzähligen Reaktion  $H_2$  auf dasselbe zurückgeführt werden. Gleichzeitig mit  $H_2$  müssen zur Herstellung des Gleichgewichts noch die Reaktionen  $N$  bei  $B_1$ ,  $N$  und  $H_2$  bei  $A_1$  angebracht werden (Fig. 37), wo  $N = \frac{H_2 b}{1}$ . Der Längsverband kann dann als Konsolträger, welcher bei  $A$  eingespannt und bei  $B$  mit  $N$  belastet ist, angesehen werden. Bezeichnet man die Senkung des Punktes  $B_1$ , welche  $N = 1$  entspricht, mit  $\delta$ , so muss sein  $N \delta = \mathcal{A}$ ,  $N = \frac{\mathcal{A}}{\delta}$ ,  $H_2 = \frac{1}{b} \frac{\mathcal{A}}{\delta}$ . Ferner erhält man als endgültige Reaktionen die Werthe  $H_1 = \mathfrak{S} + H_2$ ,  $C' = \mathfrak{C}' + N$ ,  $C'' = \mathfrak{C}'' - N$ . Was die Durchbiegung  $\mathcal{A}$  anbelangt, so ist dieselbe  $\mathcal{A} = -\sum \varepsilon s \mathfrak{s}$ , wo

$\varepsilon$  die Dehnung bei statisch bestimmtem System  $= \frac{\mathfrak{C}}{EF} + \omega t$ ,

$s$  die Stablänge,

$\mathfrak{s}$  die Stabkraft bei der Belastung des Konsolträgers mit  $N=1$  bezeichnet.

Trennt man in dem Ausdruck von  $\mathcal{A}$  die einzelnen Stabgattungen und führt für  $\mathfrak{s}$  die zugehörigen Einzelwerthe ein, so erhält man

$$\mathcal{A} = \frac{1}{b} \Sigma (-\varepsilon s_2 z + \varepsilon s_1 z - \varepsilon d_v^2 + \varepsilon d_s^2),$$

wo  $s_2$  und  $s_1$  die Stablängen der Gurten II und I,  $z$  die Entfernungen der zugehörigen Gegenpunkte von B,  $d_v$  und  $d_s$  die Stablängen der fallenden und steigenden\*) Streben bezeichnen. Bei symmetrischen Verhältnissen vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$\mathcal{A} = \frac{1}{b} \Sigma' (-\varepsilon s_2 + \varepsilon s_1),$$

wo sich die Summe  $\Sigma'$  nur auf die eine Hälfte bezieht.

In ähnlicher Weise erhält man

$$\delta = \Sigma \frac{s \hat{s}^2}{EF} = \frac{1}{Eb^2} \Sigma \left( \frac{s_2 z^2}{F} + \frac{s_1 z^2}{F} + \frac{d_v^3}{f_v} + \frac{d_s^3}{f_s} \right),$$

wobei die Querschnitte der fallenden und steigenden Streben die besondere Bezeichnung  $f_v$  und  $f_s$  erhalten haben. Schliesslich ist

$$N = \frac{\mathcal{A}}{\delta} = \Sigma (-\varepsilon s_2 z + \varepsilon s_1 z - \varepsilon d_v^2 + \varepsilon d_s^2) Eb$$

$$: \Sigma \left( \frac{s_2 z^2}{F} + \frac{s_1 z^2}{F} + \frac{d_v^3}{f_v} + \frac{d_s^3}{f_s} \right).$$

Der vorstehende Werth von  $N$  gilt näherungsweise auch bei doppeltem Strebensystem (Kreuzstreben), wenn man  $z$  jeweils auf die Mitte der betr. Gurtstäbe bezieht,  $f_v$  und  $f_s$  gleich den vierfachen Querschnitten der Kreuzstreben setzt und die Zwischenständer ausser Betracht lässt.

Handelt es sich um wagrechte Querbelastungen, und bezeichnet  $w$  den auf den lfd. Meter Längsverband entfallenden Betrag,  $q$  die lothrechte Belastung, welche durch Versetzung der Querbelastung an den Längsverband hervorgerufen wird (siehe A 2 a), z. B.  $q = \frac{wt}{b}$ , wenn  $t =$  Höhe der Querbelastung  $w$  oberhalb des Längsverbands, so wird für die Gurtstäbe

---

\*) Fallend und steigend sind im Sinne eines den Strebenzug von links nach rechts durchlaufenden Punktes verstanden.

$$\mathfrak{S} = \pm \frac{z(1-z)}{2} \left( \frac{w}{b} + \frac{q}{h} \right),$$

wo  $h$  = Hauptträgerhöhe im Gegenpunkt des betr. Gurtstabs.

Für die Streben ist  $\mathfrak{S} = \pm w \frac{d}{b} \left( z_m - \frac{1}{2} \right)$ , wo  $z_m$  sich auf Stabmitte bezieht.

Wenn  $hFf_v f_s$  konstant und die Stäbe symmetrisch angeordnet sind, erhält man annähernd

$$N = \left( w + \frac{qb}{h} \right) \frac{l^4}{12F} : \left[ \frac{2}{3} \frac{l^3}{F} + \frac{1}{c} \left( \frac{d_v^3}{f_v} + \frac{d_s^3}{f_s} \right) \right],$$

wo  $c$  = Feldweite.

Bei sehr schwachen Strebenquerschnitten ( $f_v = f_s = 0$ ) wird  $N = 0$ , bei sehr starken Querschnitten ( $f_v = f_s = \infty$ ) wird

$$N = \left( w + \frac{qb}{h} \right) \frac{1}{8} \text{ bzw. } N = \frac{wl}{8} \text{ für } q = 0.$$

Die Werthe der Reaktionen  $C'$  und  $C''$  gehen dann über in

$$C' = \frac{wl}{2} + \frac{wl}{8} = \frac{5wl}{8} \text{ und } C'' = \frac{3wl}{8},$$

in Uebereinstimmung mit den entsprechenden Werthen des einerseits eingespannten und andererseits frei aufgelagerten Balkens.

Lothrechte Belastungen, welche symmetrisch zur Brückenachse wirken, rufen bei symmetrischer Anordnung des Längsverbands keinerlei wagrechte Reaktionen hervor; Totalbelastung kommt somit als symmetrische Belastung hier nicht weiter in Betracht. Einseitige Belastungen (z. B. 1 Gleis bei zweigleisiger Brücke belastet) sind im Allgemeinen weniger gefährlich als Totalbelastung; nur in den Endfeldern kann unter Umständen durch die gleichzeitige Wirkung der einseitigen Belastung und des zugehörigen  $N$  eine stärkere Beanspruchung der unteren Gurtung als bei Totalbelastung entstehen. Bemerkenswerth ist, dass bei unsymmetrischer Anordnung des Längsverbands (siehe z. B. Fig. 35, wo in Brückenmitte keine Umkehr der Strebenrichtung stattfindet) wagrechte Reaktionen  $N$  auch dann auftreten, wenn beide Hauptträger vollkommen gleichartig belastet sind. Es sind dann zwar in jedem

Felde die  $\epsilon$  und  $s$  der Gurtstäbe I und II gleich gross, dagegen die zugehörigen  $z$  jeweils um  $c$  verschieden, so dass man erhält

$$\Sigma(-\epsilon s_2 z + \epsilon s_1 z + \epsilon d_v^2 - \epsilon d_s^2) = \Sigma \epsilon s c = c^2 \Sigma \epsilon,$$

und

$$N = c^2 b \Sigma \sigma : \Sigma \left( \frac{s_2 z^2}{F} + \frac{s_1 z^2}{F} + \frac{d_v^3}{f_v} + \frac{d_s^3}{f_s} \right),$$

wobei  $E\epsilon = \sigma =$  Spannung der Gurtstäbe in Folge der lothrechten Belastung gesetzt wurde. Bei konstantem  $F$  und sehr grossen  $f_v$

und  $f_s$  ergibt sich annähernd  $N = \frac{bc}{l^2} Fk$ , Zusatzkraft im Endfeld

$S_0 = \frac{Nl}{b} = \frac{c}{l} Fk$ , Zusatzspannung  $\sigma' = \frac{S_0}{F} = \frac{c}{l} \cdot k$ , wo  $k =$

grösster Werth der Gurtspannung  $\sigma$ , welche in Trägermitte auftritt.

Für  $\frac{c}{l} = 0,1$  und  $\frac{b}{l} = 0,1$  beträgt somit die wagrechte Reaktion  $N$

1 Procent der grössten Hauptkraft  $Fk$  und die Zusatzspannung im

Endfeld 10 Procent von  $k$ .

Wagrechte Längsbelastungen wirken fast immer symmetrisch zur Achse; es wird dann bei der üblichen symmetrischen Anordnung des Stabwerks  $N = 0$ , und die auftretenden Zusatzkräfte sind nach A 1 zu berechnen.

Die bei ungleicher Erwärmung der Gurtungen (Gurtung I um  $t_1$  Grad wärmer als Gurtung II) entstehende wagrechte Reaktion ergibt sich zu

$$N = E b \omega t_1 \Sigma s_1 z : \Sigma \left( \frac{s_2 z^2}{F} + \frac{s_1 z^2}{F} + \frac{d_v^3}{f_v} + \frac{d_s^3}{f_s} \right)$$

und für  $F f_v f_s$  konstant annähernd zu

$$N = \frac{E \omega t_1 b l}{2} : \left[ \frac{2}{3} \frac{l^2}{F} + \frac{1}{c} \left( \frac{d_v^3}{f_v} + \frac{d_s^3}{f_s} \right) \right]$$

$$= 250 b l : \left[ \frac{2}{3} \frac{l^2}{F} + \frac{1}{c} \left( \frac{d_v^3}{f_v} + \frac{d_s^3}{f_s} \right) \right],$$

$$\text{für } t_1 = 20, \quad \omega = \frac{1}{80000}.$$



Im Grenzfall  $f_v = f_s = \infty$  wird  $N = 375 \frac{Fb}{l}$  und die zugehörige Zusatzspannung

$$\sigma' = \frac{Nz}{bF} = 375 \frac{z}{l} = 375 \frac{\text{kg}}{\text{qcm}} \text{ für } z = l.$$

Für  $f_s = \frac{F}{8}$ ,  $f_v = f_s \cdot \frac{d_v}{d_s}$ ,  $c = b = 0,1l$  wird

$$N = 280 \frac{Fb}{l} \text{ und } \sigma' = 280 \frac{z}{l}.$$

Bei veränderlichem Gurtquerschnitt  $F$  wird  $\max \sigma'$  noch grösser als 375 bzw. 280 kg.

$\beta$ ) Wenn die unteren Gurtungen der Hauptträger als Vieleck und der dazwischenliegende Längsverband als Vielfach angeordnet sind, so gelten wie unter ( $\alpha$ ) die Gleichungen

$$N = \mathcal{A} : \delta, \quad \mathcal{A} = -\sum \varepsilon s \xi, \quad \varepsilon = \frac{\mathcal{C}}{EF} + \omega t, \quad \delta = \sum \frac{\xi^2 s}{EF}.$$

Die Stabkräfte  $\xi$ , welche durch  $N = 1$  hervorgerufen werden, sind nach der unter  $\mathbf{A1b\beta}$  entwickelten Methode zu bestimmen. Es zeigt sich, dass in sämtlichen Stäben des Längsverbands und der Hauptträger Kräfte  $\xi$  entstehen, so dass die Summen  $\Sigma$  auf alle diese Stäbe auszudehnen sind, während bei der unter  $\alpha$  behandelten Anordnung eines ebenen Längsverbands die Summen  $\Sigma$  nur die Stäbe des Längsverbands umfassen, da für die übrigen Stäbe  $\xi = 0$  wird.

$\gamma$ ) Es handle sich drittens um eine Anordnung mit ausserhalb der Lager befindlichen ebenem Längsverband (Fig. 16c). Die Verschiebung  $\mathcal{A} = -\sum \varepsilon s \xi$  nimmt bei geraden Hauptträgergurten und unter den gewöhnlich in Betracht kommenden symmetrischen Verhältnissen den einfachen Ausdruck

$$\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2) \cdot \frac{1}{2b} = \frac{1u}{b \cdot 2} \Sigma (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$

an, wo  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  die Dehnungen der unteren Gurtstäbe  $u$  von Träger I und II bezeichnen.

Die Verschiebung  $\mathcal{A}$  muss nun durch die Einwirkung der

4 wagrechten Reaktionen  $H_2$  und  $N$  (Fig. 38) wieder aufgehoben werden. Da letztere nur durch Vermittlung des obern Längsverbands mit einander ins Gleichgewicht gebracht werden können, so

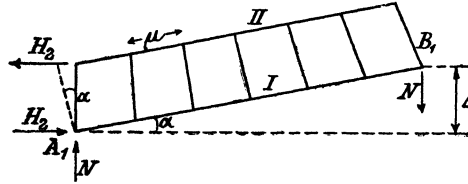


Fig. 38.

müssen sie zunächst an denselben versetzt werden, was durch Zufügung der Kräftepaare

$$+ Nt, - Nt, + H_2t \left( = \frac{Nlt}{b} \right), - H_2t \left( = - \frac{Nlt}{b} \right)$$

erfolgt. Diese Kräftepaare werden in Wirklichkeit durch zusätzliche lothrechte Reaktionen

$$\begin{aligned} \mathcal{A} A_1 \left( = \frac{2Nt}{b} \right), \quad \mathcal{A} A_2 \left( = - \frac{2Nt}{b} \right), \\ \mathcal{A} B_1 \left( = - \frac{2Nt}{b} \right), \quad \mathcal{A} B_2 \left( = \frac{2Nt}{b} \right), \end{aligned}$$

mit den Hebelsarmen  $b$  bzw.  $l$  gebildet. Die 8 Reaktionen  $H_2 N \mathcal{A} A \mathcal{A} B$  vertheilen sich in der durch Fig. 39 dargestellten Weise auf die 5 Einzelsysteme (2 Hauptträger, 2 Endquerverbände, 1 oberer Längsverband). Die entsprechenden Stabkräfte lassen sich in bekannter Weise leicht berechnen, wobei zu beachten ist, dass die obern Gurtstäbe und die Endständer jeweils in 2 Einzelsystemen vorkommen, demnach ihre Kräfte durch Summirung der betr. Einzelwerthe erhalten werden. Setzt man  $N=1$  so gehen die Stabkräfte in die Werthe  $\hat{s}$  über; die entsprechende Durchbiegung ist  $\delta = \Sigma \frac{\hat{s}^2 s}{EF}$  und schliesslich die wagrechte Reaktion

$$N = \mathcal{A} : \delta = - \Sigma \epsilon s \hat{s} : \Sigma \frac{\hat{s}^2 s}{EF}.$$

Bei geraden Hauptträgergurten kann man näherungsweise setzen

$$N = \frac{1u}{2b} \Sigma (\epsilon_1 - \epsilon_2) : \frac{1}{Eb^2} \Sigma \left( \frac{uz^2}{F} + \frac{d^3}{f} \right),$$

wobei sich die Summen auf alle untern Gurtstäbe  $u$  bzw. auf sämtliche Streben  $d$  (2 Hauptträger, Längs- und Querverbände) beziehen. Beispielsweise erhält man hieraus für horizontale Querbelastung  $w$  und zusätzliche lothrechte Belastung  $\pm q$ , wenn  $F$  und  $f$  konstant sind, den Werth

$$N = \left( w + q \frac{b}{h} \right) \frac{1^4}{12F} : \left[ \frac{2}{3} \frac{1^3}{F} + \Sigma \frac{d^3}{f} \right],$$

ein Werth, welcher sich von dem früher unter  $\alpha$  entwickelten nur dadurch unterscheidet, dass in  $\Sigma$  sämtliche Streben und nicht

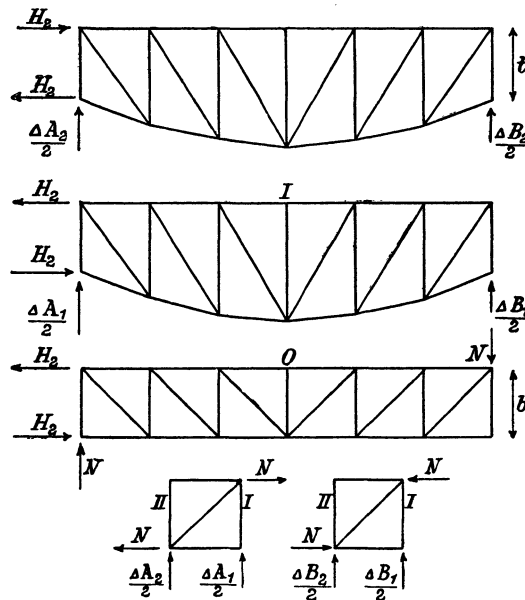


Fig. 39.

nur die des Längsverbands enthalten sind. In Folge dessen fällt  $N$  etwas kleiner aus als früher.

d) Sind 2 ebene Längsverbände in den beiden Gurtebenen vorhanden, so wird ein Theil der wagrechten Reaktion  $N$  ( $= N_1$ ) durch den unteren Längsverband nach ( $\alpha$ ), der andre Theil  $N_2$  durch den obern Verband nach ( $\gamma$ ) aufgenommen. Es muss dann sein

$$A = N_1 \delta_1 = N_2 \delta_2; \quad N = N_1 + N_2 = A \left( \frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_2} \right).$$

Hierbei bedeuten  $\delta_1$  und  $\delta_2$  die unter  $(\alpha)$  und  $(\gamma)$  entwickelten Werthe von  $\delta$ .

Wie aus Vorstehendem ersichtlich, vertheilt sich  $N$  nicht nach dem Hebelgesetz, sondern in dem durch elastische Deformationen bedingten Verhältniss  $\delta_2 : \delta_1$  auf den untern und obern Längsverband. Das bei vollkommener Symmetrie statisch bestimmte System (2 Hauptträger, 2 Längsverbände, 2 Endquerverbände) wird somit bei der zur Mitte unsymmetrischen Belastung  $N$  statisch unbestimmt. —

Mit Hülfe der unter  $(\alpha)$  bis  $(\delta)$  entwickelten Ausdrücke für  $N$  und  $\delta$  erhält man schliesslich die gesammten Stabkräfte zu  $S = \mathcal{C} + N \delta$ . Das zweite Glied  $N \delta$  giebt den Einfluss der überzähligen Reaktion  $N$  an; es fällt fort, wenn man die unter  $A$  behandelte, statisch bestimmte Anordnung mit 3 verschieblichen Lagern ( $A_2, B_1, B_2$ ) wählt. Mit Rücksicht auf die Reibungskräfte treten jedoch auch hier wagrechte Reaktionen  $H_2 (= R = \mu A_2)$  und  $N \left( = \frac{Rb}{l} \right)$  und die ihnen entsprechenden Zusatzkräfte auf. Das verschiebliche Lager  $A_2$  wird bei Eisenbahnbrücken zweckmässig als Gleitlager ausgeführt, um die Bremskräfte möglichst unmittelbar (durch Reibung) auf die Pfeiler überführen zu können, ohne den Längsverband wesentlich in Anspruch zu nehmen, während die Lager  $B_1$  und  $B_2$ , jedenfalls von  $l = 25$  m an, als Rollen- oder Stelzenlager auszubilden sind.

## 2. Uebergrosse Anzahl der Einzelsysteme.

Von den verschiedenen möglichen Anordnungen soll hier nur die gebräuchlichste — 2 Hauptträger, 2 Längsverbände, 2 Endquerverbände und  $m$ -Zwischenquerverbände (Fig. 40) — näher untersucht werden. Die Hauptträger werden gerade und einander kongruent vorausgesetzt, die Gurtquerschnitte mit  $F$ , die Strebenquerschnitte\*) mit  $f$  bezeichnet. Der obere und der untere Längsverband sind im Allgemeinen ungleich stark, ihre Strebenquer-

\*) Unter dem allgemeinen Ausdruck „Streben“ sind stets auch die Ständer bezw. Querpfeiler inbegriffen.

schnitte werden mit  $f_0$  und  $f_u$  bezeichnet. Die Strebenquerschnitte der Endquerverbände seien  $= \Phi$ , die der Zwischenverbände  $= \varphi$ ; die übrigen Stäbe der Querverbände fallen mit den Ständern der Hauptträger bzw. den Querpfeuern der Längsverbände zusammen. Anordnung der Lager nach Fig. 2.

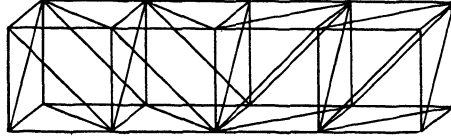


Fig. 40.

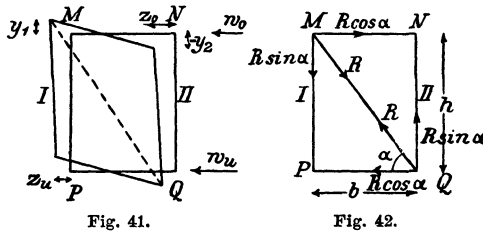
Wir wählen die  $m$ -Streben der Querverbände als überzählige Glieder, nach deren Entfernung ein System  $Y$  (2 Hauptträger, 2 Längsverbände, 2 Endquerverbände) übrig bleibt, welches nach den früheren Ausführungen für symmetrische Verhältnisse, welche hier ausschliesslich in Betracht gezogen werden sollen, statisch bestimmt ist; die entsprechenden Stabkräfte werden mit  $\mathfrak{S}$  bezeichnet. Die Kräfte  $R$  der überzähligen Glieder sind in allen jenen Fällen gleich Null, wo beide Hauptträger in gleicher Weise belastet bzw. deformiert werden. Es trifft dies bezügl. der lothrechten Belastungen und der Längsbelastungen entweder immer oder doch bei den ungünstigsten Belastungsfällen zu, so dass für diese Belastungsarten weitere Untersuchungen nicht erforderlich sind. Bezüglich der Querbelastungen und der Temperatureinflüsse ist jedoch die obige Bedingung nicht erfüllt, so dass in den überzähligen Gliedern bestimmte Kräfte  $R$  auftreten, welche nachstehend bestimmt werden sollen.

Die wagrechten Querbelastungen  $w_0$  des obern und  $w_u$  des untern Längsverbands sowie ungleiche Erwärmungen deformieren das System  $Y$  derart, dass die ursprünglichen Rechtecke  $MNPQ$  der Zwischenverbände in Rhomben übergehen. Bezeichnet man für ein beliebiges Rechteck die Verschiebungen der Eckpunkte in wagrechter und lothrechter Richtung mit  $z_0 z_u y_1 y_2$ , so ändert sich die Entfernung  $MQ (= d)$  um

$$\Delta = \frac{(z_0 - z_u) b + (y_1 - y_2) h}{d}.$$

Bedeutet  $\Delta'$  die Aenderung von  $MQ$  in Folge der Einwirkung

der überzähligen Kräfte  $R$  auf das System  $Y$ ,  $\mathcal{A}''$  die Längenänderung des zugehörigen überzähligen Stabs, so muss für jedes der  $m$  in Frage kommenden Rechtecke die Beziehung  $\mathcal{A} = \mathcal{A}' + \mathcal{A}''$  erfüllt sein, woraus sich die  $m$  Unbekannten  $R$  bestimmen lassen. Für die Anwendung kann man sich mit Näherungsverfahren begnügen, indem man bezüglich der Abhängigkeit der Grössen  $R$  von der Längensabscisse  $x$  ein bestimmtes Gesetz  $R = f(x, C)$  annimmt und sodann die eine Konstante  $C$  mittels der Beziehung  $\mathcal{A} = \mathcal{A}' + \mathcal{A}''$  für Brückenmitte bestimmt. Wir betrachten die beiden Grenzfälle  $R = \text{konstant}$  und  $R = Cx(1-x)$  (Parabel).



Die Kräfte  $R$  zerlegen sich in den Eckpunkten  $M$  und  $Q$  in die Komponenten  $R \sin \alpha = \frac{Rh}{d}$  und  $R \cos \alpha = \frac{Rb}{d}$ , welche auf die lothrechten Träger  $I$  und  $II$  und auf die wagrechten Träger  $O$  und  $U$  (Längsverbände) belastend wirken.

Bei konstantem  $R$  und konstanter Feldweite  $c$  sind die Belastungen f. d. lfd. Meter  $\frac{R}{c} \frac{h}{d} = \frac{rh}{d}$  bzw.  $\frac{R}{c} \frac{b}{d} = \frac{rb}{d}$ , wenn man  $\frac{R}{c} = r$  setzt, und dem entsprechend sind die Spannungen der Streben der Hauptträger  $I$  und  $II$  proportional  $\frac{rh}{d}$ , die der Längsverbände proportional  $\frac{rb}{d}$ . Die Gurtstäbe gehören jeweils einem Hauptträger und einem Längsverband gemeinsam an; ihre Spannungen ergeben sich als Summe der betr. Einzelspannungen und können proportional

$$\frac{rh}{d} \cdot \frac{1}{h} + \frac{rb}{d} \cdot \frac{1}{b} = \frac{2r}{d}$$

gesetzt werden; sie sind demnach doppelt so gross, wie wenn die

Hauptträger für sich allein mit je  $\frac{rh}{d}$  oder die Längsverbände mit je  $\frac{rb}{d}$  belastet wären. Für die Bestimmung der Durchbiegungen der 4 Einzelträger I, II, O, U sind daher bezüglich der Gurtungen jeweils die doppelten Belastungen wie bezüglich der Streben in Rechnung zu führen. Die Durchbiegung eines symmetrisch belasteten Parallelträgers von der Höhe  $t$  ist allgemein

$$\delta = \frac{1}{Et} \Sigma' (-\sigma_o x + \sigma_u x) + \frac{1}{Et} \Sigma' (\sigma d_v^2 - \sigma d_s^2),$$

wo sich  $\Sigma'$  auf die halbe Trägerlänge bezieht, die 1. Summe den Einfluss der Gurtstäbe  $o$  und  $u$ , die 2. den der fallenden und steigenden Streben  $d_v$  und  $d_s$  darstellt,  $\sigma$  die bezügl. Spannungen,  $x$  die Abscissen der Gegenpunkte der Gurtstäbe bezeichnet. Bei einer gleichförmigen Belastung  $2p$  für die Gurten und  $1p$  für die Streben wird annähernd

$$\delta = 2p \frac{l^2}{t^2} \cdot \Sigma' \frac{x^2(1-x)}{2l^2 EF} + p \Sigma' \frac{(0,5l-x')}{Et^2} \left( \frac{d_v^3}{f_v} + \frac{d_s^3}{f_s} \right),$$

wo sich  $x'$  jeweils auf Feldmitte bezieht. Setzt man zur Abkürzung

$$\Sigma' \frac{x^2(1-x)}{2l^2 EF} = \beta$$

und

$$\Sigma' \frac{(0,5l-x')}{Et^2} \left( \frac{d_v^3}{f_v} + \frac{d_s^3}{f_s} \right) = \gamma,$$

so wird

$$\delta = 2p \frac{l^2}{t^2} \cdot \beta + p \cdot \gamma.$$

Für Ständerfachwerk mit der Fachweite  $c$ ;  $F$ ,  $f_v$  und  $f_s$  konstant,  $f_s = f_v \cdot \sin \alpha = f \sin \alpha$ , wo  $\alpha =$  Neigungswinkel der Streben, wird annähernd

$$\beta = \frac{0,026 l^2}{EF}, \quad \gamma = \frac{l^2}{8Ef \sin \alpha} \left( \frac{c}{t} + \frac{2t}{c} \right) = \frac{0,371^2}{Ef \sin \alpha} \text{ für } c = t.$$

Sind die Querschnitte variabel, und bezeichnet  $F$  den grössten

Gurtquerschnitt, f den grössten Strebenquerschnitt, so lässt sich setzen\*)

$$\beta = \frac{0,031 l^2}{E F},$$

$$\gamma = \frac{l^2}{E f} \left( 0,16 \frac{c}{t} + 0,32 \frac{t}{c} \right) \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{0,67 l^2}{E f} \text{ für } t = c.$$

Die Durchbiegungen der Hauptträger sind hiernach, da  $p = \frac{r h}{d}$ ,  $t = h$ ,

$$\delta_1 = \delta_2 = r \left( \frac{2 \beta l^2}{d h} + \frac{\gamma h}{d} \right);$$

die der Längsverbände, da  $p = \frac{r b}{d}$ ,  $t = b$ ,

$$\delta_o = r \left( \frac{2 \beta l^2}{d b} + \frac{\gamma_o b}{d} \right) \text{ und } \delta_u = r \left( \frac{2 \beta l^2}{d b} + \frac{\gamma_u b}{d} \right).$$

Die Beiwerte  $\gamma_o$  und  $\gamma_u$  sind im Allgemeinen verschieden gross, da die Strebenquerschnitte  $f_o$  und  $f_u$  der beiden Längsverbände i. A. ungleich sind.

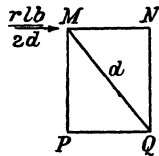


Fig. 43.

Auf einen Endquerverband wirkt im Punkt M die Hälfte der Belastung des obern Längsverbands,  $= r \frac{l-c}{2} \cdot \frac{b}{d}$ , angenähert  $= r \frac{l b}{2 d}$ ; Punkt M verschiebt sich in Folge dessen angenähert um

$$\delta_e = \frac{r l d^2}{2 E \Phi b} = r \frac{d}{b} \cdot \xi, \text{ wo } \xi = \frac{l d}{2 E \Phi}.$$

\*) Siehe Ztschr. für Baukunde 1879, S. 590.



Der Werth von  $\mathcal{A}'$  ergibt sich nun zu

$$\mathcal{A}' = \frac{(\delta_1 + \delta_2)h + (\delta_0 + \delta_u + \delta_s)b}{d}$$

$$= \frac{r}{d^2} [8\beta l^2 + 2\gamma h^2 + \gamma_0 b^2 + \gamma_u b^2 + \xi d^2].$$

Der Werth von  $\mathcal{A}''$  ist  $= \frac{rc \cdot d}{E\varphi} = r\zeta$  wo  $\zeta = \frac{cd}{E\varphi}$ .

Aus der Gleichung  $\mathcal{A} = \mathcal{A}' + \mathcal{A}''$  erhält man den Werth von  $r$  zu

$$r = [(z_0 - z_u)bd + (y_1 - y_2)hd]$$

$$: [8\beta l^2 + 2\gamma h^2 + \gamma_0 b^2 + \gamma_u b^2 + \xi d^2 + \zeta d^2].$$

In dieser Gleichung sind noch die Werthe von  $z_0$   $z_u$   $y_1$   $y_2$  einzusetzen. Aehnlich wie vorstehend erhält man

$$z_0 = \beta w_0 \frac{l^2}{b^2} + \gamma_0 w_0 + \xi w_0 \frac{d^2}{b^2} + \delta_0'; \quad z_u = \beta w_u \frac{l^2}{b^2} + \gamma_u w_u + \delta_u';$$

$$y_1 = \beta \frac{w_0 - w_u}{2} \frac{l^2}{bh} + \delta_1'; \quad y_2 = -\beta \frac{w_0 - w_u}{2} \frac{l^2}{bh} + \delta_2',$$

wo  $\delta_0'$   $\delta_u'$   $\delta_1'$   $\delta_2'$  die den Temperatureinflüssen entsprechenden Durchbiegungen bedeuten und nach A 3 zu berechnen sind. Es ergibt sich schliesslich

$$r = \frac{2(w_0 - w_u)\beta l^2 + (w_0\gamma_0 - w_u\gamma_u)b^2 + w_0\xi d^2 + (\delta_0' - \delta_u')b^2 + (\delta_1' - \delta_2')hb}{8\beta l^2 + 2\gamma h^2 + (\gamma_0 + \gamma_u)b^2 + (\xi + \zeta)d^2} \cdot \frac{d}{b}.$$

Sieht man vorerst von den Temperatureinflüssen ab, so erhält man

für  $\xi = \infty$ , d. h. für übermässig schwache Endquerverbände,

$$r = w_0 \frac{d}{b}; \quad \text{die Zwischenquerverbände müssen die ganze}$$

Belastung des obern Längsverbandes übertragen;

für  $\xi$  und  $\zeta = \infty$ , d. h. für übermässig schwache Querverbände,

$$r = w_0 \frac{\xi}{\xi + \zeta} \cdot \frac{d}{b}, \quad = \frac{w_0}{2} \frac{d}{b} \quad \text{für } \xi = \zeta;$$

für  $\xi = \zeta = 0$ , d. h. übermässig starke Querverbände,

$$r = \frac{2(w_0 - w_u)\beta l^2 + (w_0\gamma_0 - w_u\gamma_u)b^2}{8\beta l^2 + 2\gamma h^2 + (\gamma_0 + \gamma_u)b^2} \cdot \frac{d}{b}.$$

Ist gleichzeitig  $\beta = \infty$ , d. h. die Gurten übermässig schwach, so wird

$$r = \frac{w_0 - w_u}{4} \cdot \frac{d}{b},$$

$\gamma_0 = \gamma_u = \infty$ , d. h. die Längsverbände übermässig schwach, so wird

$$r = \frac{w_0 - w_u}{2} \cdot \frac{d}{b},$$

$\gamma_0 = \gamma_u = \gamma = \infty$ , d. h. alle Streben übermässig schwach, so wird

$$r = \frac{(w_0 - w_u)db}{2(b^2 + h^2)}.$$

Für  $b = h$  folgt hieraus

$$r = \frac{(w_0 - w_u)d}{4b}.$$

Wird in letzterem Ausdruck  $w_0 = -w_u = w$ , d. h. wirkt auf die Längeneinheit der Brücke das Torsionsmoment  $wh$ , so erhält man  $r = \frac{w}{2} \cdot \frac{d}{b}$ ; die Gurtkräfte werden hierbei gleich Null, die Streben der 4 Einzelsysteme haben jeweils die Belastung  $\frac{w}{2}$  auszuhalten.

Für die Temperatureinflüsse ergibt sich

$$r = \frac{\omega l^2 (t_{01} + t_{u2} - t_{02} - t_{u1}) d}{4 [8\beta l^2 + 2\gamma h^2 + (\gamma_0 + \gamma_u) b^2 + (\xi + \zeta) d^2]},$$

wo  $\omega$  den Ausdehnungsbeiwert,  $t_{01} t_{02} t_{u1} t_{u2}$  die Temperaturerhöhungen der 4 Gurten bedeuten, und für die Wandstäbe jeweils das Mittel aus den Temperaturen der zugehörigen Gurten angenommen wird.

$r$  wird gleich Null für  $\xi$  oder  $\zeta = \infty$ , d. h. übermässig schwache

Querverbände; ferner für  $t_{01} + t_{u2} = t_{02} + t_{u1}$ . Wenn  $\xi = \zeta = 0$  und  $t_{01} = t_{u1} = t_{02} = t$ ,  $t_{u2} = 0$ , wird

$$r = \frac{-\omega t l^2 d}{4 [8\beta l^2 + 2\gamma h^2 + (\gamma_0 + \gamma_u) b^2]}.$$

Beispielsweise erhält man hieraus für  $t = 20^\circ$ ;  $h:l = b:l = 0,1$ ;

$$f = f_0 = f_u = \frac{1}{2,5} F, \quad r = \text{rund} - 500 \frac{F d}{l^2} = - 62 \frac{d}{h} \frac{p}{k},$$

wenn man  $F = \frac{p l^2}{8 h k}$  setzt, wo  $k = \text{Spannungszahl}$ .

Aus  $\frac{r h}{d} : p = - 62 : k$  folgt, dass die Beanspruchung der Streben durch Temperatureinflüsse  $62 \text{ kg/qcm}$  beträgt; die der Gurtungen steigt nach den früheren Ausführungen bis auf  $2 \cdot 62 = 124 \text{ kg/qcm}^*$

Betrachten wir nun den 2. Fall, wo die Kräfte  $R$  der Parabelgleichung  $Cx(1-x)$  folgen und bezeichnen wir mit  $r$  den Mittelwerth von  $R$ ;  $c$ , so kann genau genug die Durchbiegung in Folge der  $R$  1,2 mal, und die Verlängerung der mittleren Querstrebe 1,5 mal so gross angenommen werden als früher, so dass man für den Mittelwerth  $r$  erhält

$$r = \frac{2(w_0 - w_u)\beta l^2 + (w_0\gamma_0 - w_u\gamma_u)b^2 + w_0\xi d^2 + (\delta'_0 - \delta'_u)b^2 + (\delta'_1 - \delta'_2)hb}{1,2 [8\beta l^2 + 2\gamma h^2 + (\gamma_0 + \gamma_u)b^2] + \xi d^2 + 1,5\zeta d^2} \cdot \frac{d}{b}.$$

Im beliebigen Punkt  $x$  ist

$$r_x = r \cdot \frac{6x(1-x)}{l^2} \quad \text{und} \quad R_x = cr_x = 6cr \frac{x(1-x)}{l^2}.$$

Werden die Querverbände durch steife Rahmen gebildet, welche aus den Ständern der Hauptträger und Längsverbände zusammengesetzt sind (Fig. 44), so kann man für  $\xi$  und  $\zeta$  näherungsweise folgende Werthe setzen\*\*):

\*) Die Spannungen beziehen sich auf die vollen Querschnitte; in den nicht-verschwächten Querschnitten sind sie entsprechend grösser, im Mittel etwa um 10%.

\*\*\*) Es ist  $\zeta = \Delta d : r$ , wo  $\Delta d = \text{Aenderung der Entfernung MN} (= d)$  durch die Kräfte  $rc$  (Fig. 44); ferner ist  $\Delta d = \frac{hb\gamma}{d}$ , wo  $\gamma = \text{Aenderung der ursprüng-}$

$$\xi = \frac{1b^2h^2}{24Ed^2} \left[ \frac{b}{I_0} \left( \frac{2h}{I} + \frac{b}{I_u} \right) + \frac{h}{I} \left( \frac{3h}{I} + \frac{2b}{I_u} \right) \right] \\ : \left[ \frac{b}{I_0} + \frac{6h}{I} + \frac{b}{I_u} \right],$$

$$\zeta = \frac{cb^2h^2}{12Ed^2} \left[ \frac{b}{i_0} \left( \frac{2h}{i} + \frac{b}{i_u} \right) + \frac{h}{i} \left( \frac{3h}{i} + \frac{2b}{i_u} \right) \right] \\ : \left[ \frac{b}{i_0} + \frac{6h}{i} + \frac{b}{i_u} \right].$$

Hierin bedeuten  $I_0 I_u I$  die Trägheitsmomente der oberen, untern und seitlichen Stäbe der Endquerverbände,  $i_0 i_u i$  die entsprechenden Grössen der Zwischenquerverbände.

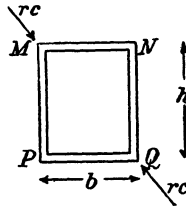


Fig. 44.

Wenn die oberen Gurtungen seitlich durch Portale festgehalten werden, so ist  $\xi = 0$ ; sind ausserdem die Trägheitsmomente  $i$  der Zwischenrahmen klein und dementsprechend  $\zeta$  sehr gross, so ergibt sich annähernd  $r = 0$ , d. h. bei der geringen Steifigkeit der Zwischenrahmen findet keine Kräfteübertragung daselbst statt; der Kräfteplan ist derselbe wie bei dem statisch bestimmten System ohne Zwischenverbände. —

lich rechten Eckwinkel. Nach Winkler, Querkonstruktionen Seite 295, ergibt sich

$$\gamma = \frac{Hh}{12E} \left[ \frac{b}{i_0} \left( \frac{2h}{i} + \frac{b}{i_u} \right) + \frac{h}{i} \left( \frac{3h}{i} + \frac{2b}{i_u} \right) \right] : \left[ \frac{b}{i_0} + \frac{6h}{i} + \frac{b}{i_u} \right],$$

wo  $H =$  Horizontalkomponente von  $rc$ , d. h.  $H = \frac{rcb}{d}$ . Nach Ausführung der einfachen Eliminationen erhält man den oben stehenden Werth von  $\zeta$ . Der Werth von  $\xi$  ergibt sich, wenn man in  $\zeta$  die Grössen  $i$  durch  $I$  und  $c$  durch  $\frac{1}{2}$  ersetzt.

Die vorstehenden Formeln zur Berechnung von  $r$  können auch bei mehrtheiligen Strebensystemen der Hauptträger und der Längsverbände angewendet werden. Es ist dann nur in den Ausdrücken der Beiwerthe  $\gamma$  die Grösse  $nf$  statt  $f$  einzuführen, wo  $n =$  Zahl der Strebensysteme. Bei Kreuzstrebensystemen sind die Ständer ohne Einfluss auf die Durchbiegung; bei  $n$  fachem System ist zu setzen

$$\gamma = \frac{l^2}{n8Efsin\alpha} \left( \frac{c}{t} + \frac{t}{c} \right), = \frac{l^2}{n4Efsin\alpha} = \frac{0,35 l^2}{nEf}$$

für  $c = t$  und  $\alpha = 45$  Grad. —

Nachdem der Werth von  $r$  ermittelt, werden die entsprechenden Zusatzkräfte in den Gurten und Streben der Hauptträger in bekannter Weise bestimmt, wobei zu beachten ist, dass die Gurtstäbe in zweifacher Weise, als Glieder der Hauptträger und der Längsverbände beansprucht werden.

Es sei beispielsweise

$$w_0 = \frac{2}{3} w, \quad w_u = \frac{1}{3} w, \quad w_0 - w_u = \frac{w}{3}, \quad h = b = 0,1 l;$$

für die Durchbiegungsbeiwerte sei gefunden

$$\gamma = 50 \beta, \quad \gamma_0 = \gamma_u = 200 \beta, \quad \zeta = 200 \beta, \quad \xi = 0.$$

Unter der Annahme, dass  $R$  bzw.  $r$  konstant und dass die Temperatur unveränderlich, erhält man

$$r = \frac{2 \cdot \frac{w}{3} + \frac{w}{3} \cdot 200 \cdot 0,01}{8 + 2 \cdot 50 \cdot 0,01 + 2 \cdot 200 \cdot 0,01 + 200 \cdot 0,02} \cdot \frac{d}{b}$$

$$= \text{rund } 0,08 w \cdot \frac{d}{b}.$$

Bei Nichtvorhandensein der Zwischenquerverbände wären die Zusatzkräfte der Gurtstäbe in Brückenmitte

$$\mathfrak{S}_0 = \frac{2}{3} w \cdot \frac{l^2}{8h} = \frac{10wl}{12} = 0,83 wl \text{ und } \mathfrak{S}_u = 0,415 wl;$$

die grössten Querkräfte der Längsverbände wären

$$\mathfrak{D}_0 = \frac{2}{3} \frac{wl}{2} = 0,33 \text{ wl} \text{ und } \mathfrak{D}_a = 0,165 \text{ wl}.$$

Durch den Einfluss der Zwischenverbände werden die obern Gurtungen um

$$S' = 2 \cdot r \cdot \frac{b}{d} \cdot \frac{l^2}{8b} = 0,2 \text{ wl}$$

entlastet, die unteren um das gleiche Maass mehr belastet, so dass man die wirklichen Zusatzkräfte erhält zu

$$S_0 = \mathfrak{S}_0 - S' = (0,83 - 0,2) \text{ wl} = 0,63 \text{ wl} \text{ und}$$

$$S_u = \mathfrak{S}_u + S' = (0,415 + 0,2) \text{ wl} = 0,615 \text{ wl}.$$

Die Verringerung der Querkraft des oberen Querverbands durch r ist

$$Q' = r \frac{b}{d} \cdot \frac{l}{2} = 0,04 \text{ wl},$$

somit wirkliche Querkraft

$$Q_0 = \mathfrak{D}_0 - Q' = (0,33 - 0,04) \text{ wl} = 0,29 \text{ wl} \text{ und}$$

$$Q_u = \mathfrak{D}_u + Q' = (0,165 + 0,04) \text{ wl} = 0,205 \text{ wl}.$$

Die Summen  $Q_0 + Q_u$  bzw.  $S_0 + S_u$  sind die gleichen wie  $\mathfrak{D}_0 + \mathfrak{D}_u$  bzw.  $\mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S}_u$ . Der Materialbedarf der Gurten und der Längsverbände wird demnach durch das Anbringen der Zwischenverbände nicht geändert. Dagegen entstehen durch letztere zusätzliche Querkräfte in den Hauptträgern

$$Q' = \pm r \frac{b}{d} \cdot \frac{l}{2} = \pm 0,04 \text{ wl} \text{ (am Trägerende)}$$

und dementsprechend ein geringer Mehraufwand in den Streben der Hauptträger. Berücksichtigt man ferner, dass bei ungleicher Erwärmung weitere Zusatzkräfte in den Stäben entstehen, so ersieht man, dass die Zwischenverbände bezüglich der Grösse der Grundkräfte von ungünstigem Einflusse sind. Dagegen tragen sie zur Minderung der Durchbiegungen und Verschiebungen sowie der hierdurch bedingten Nebenspannungen bei, aus welchen Gründen sie in den meisten Fällen, namentlich bei Eisenbahnbrücken, Verwendung finden. Eine bemerkenswerthe Ausnahme bildet die bekannte

Forthbrücke, welche nach Art der Fig. 1 ohne oberen Längsverband ausgeführt ist und demnach kein überzähliges Einzelsystem besitzt.

Anmerkung. Für den Fall, dass nicht nur die beiden Längsverbände, sondern auch die beiden Hauptträger ungleich belastet sind ( $q_1$  und  $q_2$ ), wie dies beispielsweise in Folge des Winddrucks auf die Fahrzeuge eintritt (vgl. A 2 a a Fig. 16), ändert sich in den vorstehenden Entwicklungen nur die Grösse

$$A = \frac{(z_0 - z_u) b + (y_1 - y_2) h}{d}.$$

Die Werthe von  $y_1$   $y_2$   $z_0$   $z_u$  vergrössern sich um

$$\begin{aligned} - q_1 \left( \beta \frac{l^2}{h^2} + \gamma \right), & \quad + q_2 \left( \beta \frac{l^2}{h^2} + \gamma \right), \\ + \frac{(q_2 - q_1) \beta l^2}{2 b h}, & \quad - \frac{(q_2 - q_1) \beta l^2}{2 b h}. \end{aligned}$$

Der Einfluss der ungleichen lothrechten Belastungen auf  $r$  ergibt sich hiernach ähnlich wie früher zu

$$r = (q_2 - q_1) [2\beta l^2 + \gamma h^2] \frac{d}{h} : N.$$

Der Nenner  $N$  behält den alten Werth bei und ist, für die Annahme  $R = \text{konstant}$ ,

$$N = 8\beta l^2 + 2\gamma h^2 + (\gamma_0 + \gamma_u) b^2 + (\xi + \zeta) d^2.$$

Für die Annahme  $R = Cx(1-x)$  ist

$$N = 1,2 [8\beta l^2 + 2\gamma h^2 + (\gamma_0 + \gamma_u) b^2] + \xi d^2 + 1,5\zeta d^2.$$

Setzt man  $q_2 = -q_1 = -\frac{w_1 t_1}{b}$  (Fig. 16), so erhält man

$$r = -2 w_1 t_1 [2\beta l^2 + \gamma h^2] \frac{d}{h b} : N,$$

welcher Betrag zu dem durch ungleiche Belastungen  $w_0$  und  $w_u$  der beiden Längsverbände verursachten hinzukommt. Letzterer ist für  $w_0 = w_1$  und  $w_u = 0$  (Fahrbahn oben)

$$r = w_1 [2\beta l^2 + \gamma_0 b^2 + \xi d^2] \frac{d}{b} : N.$$

Durch Summation erhält man den der excentrischen Windbelastung  $w_1$  entsprechenden Gesamtwert

$$r = \frac{w_1 d}{Nb} \left[ 2\beta l^2 \left( 1 - \frac{2t_1}{h} \right) + \gamma_0 b^2 + \xi d^2 - \frac{2t_1}{h} \gamma h^2 \right].$$

Für  $w_0 = 0$ ,  $w_u = w_1$  (Fahrbahn unten) wird

$$r = - \frac{w_1 d}{Nb} \left[ 2\beta l^2 \left( 1 + \frac{2t_1}{h} \right) + \gamma_u b^2 + \frac{2t_1}{h} \gamma h^2 \right].$$

### 3. Statisch unbestimmte Einzelsysteme.

#### a) Statisch unbestimmte Hauptträger.

$\alpha$ ) Bei den gewöhnlichen mehrtheiligen Ständerfachwerken (Fig. 45) ist der Fehler, welchen man in Folge der üblichen Zer-

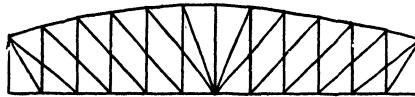


Fig. 45.

legung in  $n$  statisch bestimmte Theilsysteme und der Vernachlässigung der Temperatureinflüsse bezüglich der Zusatzkräfte begeht, nicht bedeutend, so dass hier das genannte einfache Verfahren, u. U. mit schätzungsweise Erniedrigung der Spannungszahlen, ohne Bedenken angewendet werden kann.

$\beta$ ) Weniger zutreffend erscheint dieses Verfahren bei Kreuzstreben systemen mit  $(m - 1)$  Zwischenständern (Fig. 46), welches

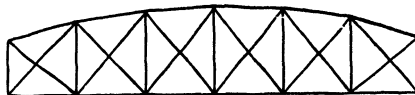


Fig. 46.

$m$  fach unbestimmt ist. Genauere Ergebnisse kann man auf folgende Weise erhalten. Zunächst bestimme man die Zusatzkräfte durch Zerlegung in 2 statisch bestimmte Theilsysteme, =  $\mathcal{E}$ , sowie die entsprechenden Stabdehnungen und die etwa in Betracht zu ziehenden Temperaturdehnungen, deren Summe für einen Stab mit  $\alpha$  bezeichnet werde,

$$\alpha = \frac{\mathcal{E}}{EF} + \omega t.$$



Die beiden Theilsysteme werden nach der Formänderung i. A. nicht mehr in Uebereinstimmung stehen, sondern bedürfen hierzu der Einwirkung weiterer Zusatzkräfte (2. Ordnung). Wenn die beiden Theilsysteme, bei beliebiger Dehnung  $\varepsilon$  der einzelnen Stäbe, in Uebereinstimmung sein sollen, so muss bekanntlich für jedes Feld die Bedingung erfüllt sein  $\varepsilon o^2 + \varepsilon u^2 + (\varepsilon' + \varepsilon'')h'h'' = \varepsilon d_v^2 + \varepsilon d_s^2$ , wo  $o$  u  $h'$   $h''$   $d_v$   $d_s$  die entsprechenden Stablängen bezeichnen (siehe Fig. 47). Setzt man nun jedes  $\varepsilon = \alpha + \beta$ , wo  $\beta$  die den Zusatzkräften 2. Ordnung entsprechenden Dehnungen der einzelnen Stäbe

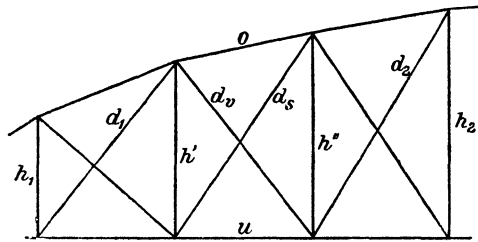


Fig. 47.

bedeutet, so erhält man, durch Aufstellung vorstehender Bedingung für jedes Feld, m Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten. Als Unbekannte wählen wir die Zusatzkräfte 2. Ordnung der steigenden Streben, =  $Z$ ; für ein beliebiges Feld  $r$  sind dann die entsprechenden Kräfte der Gurtstäbe und der fallenden Diagonale

$$-Z_r \cdot \frac{o}{d_s}, \quad -Z_r \cdot \frac{u}{d_s}, \quad Z_r \cdot \frac{d_v}{d_s}.$$

Bezüglich der Ständer ist zu beachten, dass dieselben jeweils 2 Feldern angehören; ihre Kräfte sind

$$-\left[ Z_{r-1} \frac{h_1}{d_1} + Z_r \frac{h''}{d_s} \right] \quad \text{und} \quad -\left[ Z_{r+1} \frac{h_2}{d_2} + Z_r \frac{h'}{d_s} \right].$$

Hierbei beziehen sich  $h_1$  und  $d_1$  auf Ständer und steigende Strebe des links gelegenen,  $h_2$  und  $d_2$  auf die des rechtsgelegenen Feldes (Fig. 47). Die Dehnungen  $\beta$  erhält man durch Division der zugehörigen Kräfte mit den Produkten  $E$  mal Querschnitt, d. h. mit  $EF_o$ ,  $EF_u$ ,  $Ef_v$ ,  $Ef_s$ ,  $Ef'$ ,  $Ef''$ .

Nach Einsetzen der Werthe von  $\beta$  in die früher aufgestellte Deformationsgleichung nimmt dieselbe folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} & \frac{Z_r}{E d_s} \left[ \frac{o^3}{F_o} + \frac{u^3}{F_u} + h' h'' \left( \frac{h''}{f'} + \frac{h'}{f''} \right) + \frac{d_v^3}{f_v} + \frac{d_s^3}{f_s} \right] \\ & + \frac{Z_{r-1} h_1 h' h''}{E d_1 f'} + \frac{Z_{r+1} h_2 h' h''}{E d_2 f''} \\ & = [\alpha o^2 + \alpha u^2 + (\alpha' + \alpha'') h' h'' - \alpha d_v^2 - \alpha d_s^2] = C. \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann für jedes Feld, also m mal aufgestellt werden; die Bestimmung der m Unbekannten Z mit Hülfe derselben ist sehr umständlich, da in jeder Gleichung 3 Unbekannte vorkommen. Näherungswerthe erhält man, wenn man die einzelnen Felder durch Längstheilung der Ständer von einander unabhängig macht und hierbei jedem der Nachbarfelder einen Theil des gemeinsamen Ständerquerschnitts nach Schätzung zuweist. Diese Theile seien für das betrachtete r<sup>te</sup> Feld  $\varphi'$  und  $\varphi''$ ; in der Regel ist  $\varphi' = \frac{f'}{2}$ ,  $\varphi'' = \frac{f''}{2}$  anzunehmen, für die Endfelder  $\varphi' = f'$  bezw.  $\varphi'' = f''$ . Die Dehnungen  $\beta$  der 2 zum Feld gehörigen Ständer sind dann

$$\beta' = - \frac{Z_r h''}{E d_s \varphi'} \quad \text{und} \quad \beta'' = - \frac{Z_r h'}{E d_s \varphi''};$$

$Z_r$  ergibt sich aus der r<sup>ten</sup> Deformationsgleichung zu

$$Z_r = E C d_s : \left[ \frac{o^3}{F_o} + \frac{u^3}{F_u} + h' h'' \left( \frac{h''}{\varphi'} + \frac{h'}{\varphi''} \right) + \frac{d_v^3}{f_v} + \frac{d_s^3}{f_s} \right] = \frac{E C d_s}{N}.$$

Die übrigen Zusatzkräfte 2. Ordnung erhält man mit Hülfe der oben angeführten Ausdrücke zu

$$\bar{O} = - Z_r \cdot \frac{o}{d_s}, \quad \bar{U} = - Z_r \frac{u}{d_s}, \quad \bar{D}_v = Z_r \frac{d_v}{d_s} \text{ etc.,}$$

und die gesammten Zusatzkräfte zu

$$O = \mathfrak{C} + \bar{O}, \quad U = \mathfrak{C} + \bar{U}, \quad D_v = \mathfrak{C} + \bar{D}_v, \quad D_s = \mathfrak{C} + Z_r \text{ etc.}$$

Treten nur in einer Stabgattung Kräfte 1. Ordnung (=  $\mathfrak{C}$ ) auf, z. B. in der untern geraden Gurtung in Folge von Windbelastung, Bremskräften oder Centrifugalkräften, so wird

$$C = \alpha u^2 = \frac{\mathfrak{E} u^2}{E F_u}; \quad \bar{U} = -Z_r \frac{u}{d_s} = -\frac{E \cdot C u}{N} = -\frac{\mathfrak{E} u^3}{F_u \cdot N};$$

$$U = \mathfrak{E} + \bar{U} = \mathfrak{E} \left( 1 - \frac{u^3}{F_u \cdot N} \right).$$

Die Zusatzkraft des direkt beanspruchten Stabs  $U$  wird hier nach gegenüber dem statisch bestimmten Zustand ( $\mathfrak{E}$ ) verringert, allerdings auf Kosten der übrigen, sonst nicht beanspruchten Stäbe; durch die statisch unbestimmte Anordnung findet somit ein gewisser Kräfteausgleich statt. In Folge ungleicher Erwärmung treten in sämtlichen Stäben Zusatzkräfte auf; bei einer Wärmezunahme  $t$  der untern Gurtung wird

$$C = \omega t u^2, \quad Z = \frac{E \omega t u^2 d_s}{N}.$$

Beispielsweise ergibt sich für

$$\omega t = \frac{16}{80000} = \frac{1}{5000}, \quad u = o = h' = h'',$$

$$F = 8 \varphi' = 8 \varphi'' = 4 f_v \frac{d_v}{h} = 4 f_s \cdot \frac{d_s}{h} = 4 f \frac{d}{h} :$$

$$N = \frac{u^2 d}{0,16 f}, \quad Z = \frac{2000000}{5000} \cdot 0,16 f = 64 f$$

und die zugehörige Zusatzspannung

$$\sigma = \frac{Z}{f} = 64 \text{ kg/qcm.}$$

Für die untere Gurtung wird

$$\bar{U} = -Z_v \frac{u}{d} = -64 f \frac{u}{d}$$

und die zugehörige Spannung

$$\sigma = -64 \frac{f}{F} \cdot \frac{u}{d} = -8 \text{ kg/qcm.}$$

Nach Vorstehendem wird die Ausgleichung der bei ungleicher Temperatur entstandenen Längenunterschiede hauptsächlich durch

die Dehnung der schwächeren Stäbe hervorgebracht, und ist namentlich bei den Kreuzstreben diesem Umstand bei der Querschnittsbestimmung Rechnung zu tragen.

Vergleicht man das Kreuzstrebensystem mit einem einfachen Ständerfachwerk, so fallen, sofern man nur die Grundkräfte in Betracht zieht, bei ersterem die Gewichte der Gurtungen und Streben etwas grösser aus, während an den Ständern Ersparnisse erzielt werden, welche in den meisten Fällen den erstgenannten Mehraufwand übertreffen. Zu Gunsten des Kreuzstrebensystems sprechen ferner noch die kleineren Deformationen und dementsprechend die geringeren Nebenspannungen sowie vielfach eine bequemere Anordnung der Knotenverbindungen.

Es liegt hier einer derjenigen Fälle vor, wo ein statisch unbestimmtes System in erfolgreichem Wettbewerb mit statisch bestimmten treten kann.

Anmerkung. Das vorstehend für die Zusatzkräfte eines Kreuzstrebenträgers angegebene Verfahren kann selbstverständlich auch für die Hauptkräfte angewendet werden. Die ideellen Querschnitte  $\varphi'$  und  $\varphi''$  der Ständer werden im Allgemeinen bei Totalbelastung ebenfalls gleich  $0,5 f'$  und  $0,5 f''$  gesetzt, während bei den einseitigen Belastungen, welche für die Streben in Betracht zu ziehen sind, nach der belasteten Seite hin  $\varphi'' = 0,5 f''$ , nach der unbelasteten Seite hin  $\varphi' \geq f'$  anzunehmen ist. Für  $\varphi' = \infty$  erhält man etwas zu ungünstige Resultate.

$\gamma$ ) Zu den statisch unbestimmten Hauptträgeranordnungen ist auch diejenige Anordnung zu zählen, wo die Fahrbahn mit besonderen Zwischengurtungen in mittlerer Höhe angebracht ist, jedoch die Stäbe  $ab$  oder  $cd$  der Fig. 9 fehlen, und wo die Ständer steif, d. h. ohne Zwischengelenk, konstruirt sind, um die Längskräfte auf die oberen und unteren Knotenpunkte übertragen zu können. Sieht man von der unbedeutenden Zusammendrückung der Zwischengurtungen ab, so biegen sich alle Ständer unter dem Einfluss der Längskräfte  $\mathcal{S}T$  um das gleiche Maass durch und theilen sich im Verhältniss ihrer Steifigkeit in die Uebertragung von  $\mathcal{S}T$ .

Da die Durchbiegung  $\delta$  eines durch  $T$  in den Abständen  $h_o$  und  $h_u$  von den Enden belasteten Stabs

$$\delta = \frac{T \cdot h_o^2 h_u^2}{3EIh}$$

ist, so wird das Maass der Steifigkeit durch den Ausdruck  $\frac{Ih}{h_o^2 h_u^2}$

bestimmt (siehe Fig. 48). An den einzelnen Ständern wirken die Längskräfte

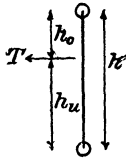


Fig. 48.

$$T = \frac{Ih}{h_o^2 h_u^2} \cdot \Sigma T : \Sigma \frac{Ih}{h_o^2 h_u^2};$$

die entsprechenden Zusatzkräfte sind nach den auf Seite 11 angegebenen Formeln zu bestimmen.

### b) Statisch unbestimmte Längs- und Querverbände.

α) Die Längsverbände sind sehr häufig als Kreuzstreben-systeme ausgeführt, auf welche die im vorigen Abschnitt entwickelten Formeln anwendbar sind.

Die Gurtungen der Längsverbände erhalten als Glieder der Hauptträger Dehnungen  $\alpha$ , wodurch i. A. in sämtlichen Stäben des Verbands, also auch der Gurten selbst, Zusatzkräfte hervorgerufen werden. Bezeichnet man die Spannung der Gurtstäbe  $s$ , als Glieder der Hauptträger, mit  $k$ , so wird für dieselben  $\alpha = \frac{k}{E}$ ,

$C = \frac{2 k s^2}{E}$ , Zusatzkraft der Gurtstäbe

$$S = -\frac{E C s}{N} = -\frac{2 k s^3}{N}, \text{ der Streben } D = \frac{2 k s^2 d}{N}.$$

Für quadratische Felder wird

$$N = 2 s^3 \left( \frac{1}{F} + \frac{1}{\varphi} + \frac{2 d}{f s} \right), \quad S = -k : \left( \frac{1}{F} + \frac{1}{\varphi} + \frac{2 d}{f s} \right),$$

$$\sigma = \frac{S}{F} = -k : \left( 1 + \frac{F}{\varphi} + \frac{2 F d}{f s} \right), \quad D = \frac{k d}{s} : \left( \frac{1}{F} + \frac{1}{\varphi} + \frac{2 d}{f s} \right),$$

$$\sigma = \frac{D}{f} = k : \left( \frac{s}{d} \frac{f}{F} + \frac{s}{d} \frac{f}{\varphi} + 2 \right).$$

Hiernach werden stets die Gurtstäbe entlastet auf Kosten der Streben der Längsverbände. Die Entlastung beträgt beispielsweise für den Fall, dass der Strebenquerschnitt  $f$  gering gegen  $F$  und  $\varphi$  (Querträger), annähernd

$$\sigma = -k \frac{fs}{2Fd} = -k \frac{0,35f}{F},$$

d. h. gerade so viel, wie wenn die Gurtung um 0,35 des Strebenquerschnitts verstärkt wäre. Diese Entlastung kommt jedoch nur dann in sämtlichen Gurtquerschnitten zur Geltung, wenn an den Knotenpunkten Knotenbleche angebracht sind, welche die Ueberleitung der Strebenkräfte ermöglichen, ohne die Gurtungen in Anspruch nehmen zu müssen (Fig. 49). Die Zusatzspannungen  $\sigma$  der

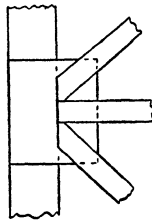


Fig. 49.

Streben des Längsverbands werden unter den erwähnten Voraussetzungen  $\sigma = 0,5k$ . Zur Herabminderung dieses erheblichen Werthes wird bisweilen die eine Strebenlage des Längsverbands erst nach erfolgter Ausrüstung eingebaut, so dass unter  $k$  nur die Gurtspannung in Folge der Verkehrslast zu verstehen ist.

Sind beide Kreuzstreben flach ausgeführt, so hat man es so lange mit einem doppelten System zu thun, als die hiefür gültigen Formeln für beide Streben Zugspannungen ergeben, was z. B. für den Längsverband der untern Gurtebene der Fall ist, so lange keine oder verhältnissmässig geringe Querbelastungen wirken. Bei grösster Querbelastung dagegen tritt in den meisten Fällen nur das eine Streben system in Wirksamkeit, während das andere spannungslos wird. Die Spannungen des wirksamen Systems hängen dann nur von den Querbelastungen ab, die oben berechnete Zusatzspannung  $\sigma$  fällt ausser Rechnung. Letztere kommt theoretisch nur dann in Betracht, wenn sie die Hauptspannung des doppelten Systems überwiegt, was bei übermässigem Strebenquerschnitt eintreten kann (kleine Spannweiten, mittlere Felder); praktisch ist dieser Fall selbstverständlich ohne Bedeutung.

Im obern Längsverband sind die vorstehend entwickelten Zusatzkräfte der Streben Druckkräfte; flach ausgeführte Streben biegen

unter deren Wirkung aus und bleiben im Wesentlichen ohne Spannung; man hat es in diesem Falle mit einem einfachen System zu thun. Um die Ausbiegungen der Streben zu vermeiden, empfiehlt es sich, letztere steif auszuführen und hierdurch ein doppeltes System zu schaffen. Abgesehen davon, dass die seitliche Durchbiegung des doppelten Systems, gleiche wirksame Strebenquerschnitte vorausgesetzt, geringer ist als die des einfachen Systems, fällt auch bei doppeltem System die Beweglichkeit des Längsverbandes fort, welche bei flachen Streben innerhalb der durch die Strebenausbiegung bedingten Grenzen Platz greifen kann. Die gleiche Wirkung könnte übrigens auch durch künstliche Anspannung der Streben, allerdings auf Kosten der Gurtspannungen, erzielt werden.

Was den Einfluss der Temperatur anbelangt, so können durch denselben theils Erhöhungen, theils Erniedrigungen der einzelnen Stabspannungen bewirkt werden; bei flachen Streben wird ausserdem die Grenze zwischen einfacher und doppelter Systemwirkung verschoben. Bezüglich des unteren Längsverbandes wird beispielsweise bei Mehrerwärmung der einen Gurtung um  $t^0$  gegenüber den andern Stäben und unter der früheren Voraussetzung quadratischer Felder die Grösse  $C = \omega t s^2$ ,

$$S = -E \omega t : \left[ \frac{2}{F} + \frac{2}{\varphi} + \frac{4d}{fs} \right], \quad D = \frac{E \omega t d}{s} : \left[ \frac{2}{F} + \frac{2}{\varphi} + \frac{4d}{fs} \right].$$

Für  $t = 16^0$  und geringe Strebenquerschnitte  $f$  erhält man die Zusatzspannungen der Gurten zu

$$\sigma = -\frac{E \omega t \cdot fs}{4 F d} = -100 \frac{f}{F} \frac{s}{d} = -70 \frac{f}{F},$$

die der Streben zu

$$\sigma = \frac{E \omega t}{4} = 100 \text{ kg/qcm.}$$

$\beta$ ) Bei den Querverbänden mit Kreuzstreben treten ähnliche Verhältnisse auf wie bei den Längsverbänden. Die entsprechenden Zusatzkräfte der Ständer und Kreuzstreben, welche sich nach den gleichen Grundsätzen wie vorstehend berechnen lassen, sind praktisch ohne grosse Bedeutung. Am stärksten fällt auch hier der Einfluss ungleicher Erwärmung ins Gewicht.

c) **Statisch unbestimmte Fahrbahnkonstruktion.**

α) Die Lastvertheilung durch die Querträger wird fast immer unter der Annahme, dass letztere wie einfache Träger wirken, berechnet, auch wenn es sich um theilweise eingespannte oder um kontinuierliche Träger über mehrere Oeffnungen handelt. Der Fehler, welcher hierbei auftreten kann, ist bei den für die Querschnittsbestimmung maassgebenden Belastungsfällen meist ohne Belang. Grössere Beachtung verlangen die Temperatureinflüsse bei kontinuierlichen Querträgern, welche auf n Hauptträgern aufruhem\*).

Bei obenliegender Fahrbahn werde die untere Gurtung des einen äusseren Trägers durch Sonnenbestrahlung um  $t^0$  stärker erwärmt als die übrigen Konstruktionstheile. In Folge davon würde sich der äussere Träger um  $\mathcal{A}$  durchbiegen (siehe A 3), wenn er nicht durch die Querträger (u. U. auch durch Querverbände) daran verhindert würde, welche einen gewissen Ausgleich in der Höhenlage der Träger bewirken. Die genaue Lösung der Aufgabe ist sehr umständlich; Näherungswerthe erhält man, wenn man die Steifigkeit der Querträger sehr gross annimmt, bezw. deren Formänderungen vernachlässigt, so dass in jedem Querschnitt die Oberkanten der Hauptträger auch nach der Deformation in einer Geraden

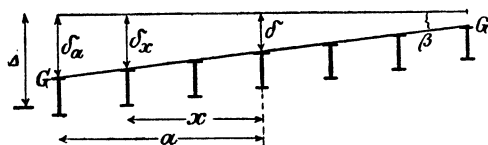


Fig. 50.

GG liegen (Fig. 50). Für den Querschnitt in Brückenmitte sei der Neigungswinkel der Geraden GG gleich  $\beta$ , die Senkung in der Achse gleich  $\delta$ , die Senkung eines um  $x$  entfernten Hauptträgers gleich  $\delta_x$ . Man kann die Reaktion des letzteren dann setzen  $C = m \delta_x I = m(\delta + x \operatorname{tg} \beta) I$ . Für den um  $a$  entfernten Aussenträger ist die Reaktion  $A = m(\delta_a - \mathcal{A}) I = m(\delta + a \operatorname{tg} \beta - \mathcal{A}) I$ . Hierbei bedeutet  $m$  einen Proportionalitätsfaktor,  $I$  das Maass der Steifigkeit;  $I$  ist bei Blechträgern konstanten Querschnitts gleich dem Trägheitsmoment, bei Fachwerkträgern gleich einer von sämtlichen Stabquerschnitten abhängigen Funktion.

\*) Siehe Centralblatt d. Bauverwaltung 1881, S. 355.



Das Gleichgewicht der Reaktionen verlangt  $A + \Sigma C = 0$  und  $A a + \Sigma C x = 0$ , woraus sich ergibt

$$\delta = \frac{\mathcal{A}}{n}, \quad \operatorname{tg} \beta = \mathcal{A} \cdot a : \Sigma x^2, \quad A = m \cdot \mathcal{A} \cdot I \left( \frac{1}{n} + \frac{a^2}{\Sigma x^2} - 1 \right),$$

$$C = m \cdot \mathcal{A} \cdot I \left( \frac{1}{n} + \frac{a x}{\Sigma x^2} \right).$$

Bezeichnet man mit  $q$  diejenige Belastung f. d. Meter, welche die gleiche Durchbiegung  $\mathcal{A}$  wie die Temperatureinflüsse hervorbringen würde, so trifft auf den Träger  $C$  eine Mehrbelastung

$$p_x = q \left( \frac{1}{n} + \frac{a x}{\Sigma x^2} \right),$$

auf den Träger  $A$  von

$$p_a = q \left( \frac{1}{n} + \frac{a^2}{\Sigma x^2} - 1 \right)$$

d. i. negativ.

Allgemein kann man setzen  $p = \alpha q$ ; für 4, 6, 8, 10 Hauptträger erhält man

	Träger	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
4Tr.	$\alpha$	— 0,3	+ 0,4	+ 0,1	— 0,2						
6 -		— $\frac{10}{21}$	+ $\frac{8}{21}$	+ $\frac{5}{21}$	+ $\frac{2}{21}$	— $\frac{1}{21}$	— $\frac{4}{21}$				
8 -		— $\frac{7}{12}$	+ $\frac{4}{12}$	+ $\frac{3}{12}$	+ $\frac{2}{12}$	+ $\frac{1}{12}$	0	— $\frac{1}{12}$	— $\frac{2}{12}$		
10 -		— $\frac{7,2}{11}$	+ $\frac{3,2}{11}$	+ $\frac{2,6}{11}$	+ $\frac{2}{11}$	+ $\frac{1,4}{11}$	+ $\frac{0,8}{11}$	+ $\frac{0,2}{11}$	— $\frac{0,4}{11}$	— $\frac{1}{11}$	— $\frac{1,6}{11}$

Der Werth von  $q$  folgt für Fachwerkträger aus der Durchbiegungsgleichung

$$\mathcal{A} = \frac{q}{Eh} \cdot \Sigma' [-\sigma_o x + \sigma_u x + \sigma d_v^2 - \sigma d_s^2]$$

zu  $q = E \mathcal{A} h : \Sigma'$ , oder da

$$\mathcal{A} = \frac{\omega t^2}{8h}, \text{ zu } q = \frac{E\omega t^2}{8} : \mathcal{S}'.$$

Hierin bedeuten  $\sigma$  die Stabspannungen für  $q = 1$ ;  $\mathcal{S}'$  bezieht sich auf den halben Träger. Für Parallel-Fachwerkträger variirten Querschnitts kann man näherungsweise setzen (Ztschr. für Baukunde 1879, S. 590)

$$\mathcal{A} = \frac{q l^4}{E h^2 F} \left( 0,031 + 0,12 \frac{h}{l} \right),$$

wo  $F =$  grösster Gurtquerschnitt, somit

$$q = \frac{E h^2 F \mathcal{A}}{l^2 \left( 0,031 + 0,12 \frac{h}{l} \right)} = \frac{E \omega t h F}{l^2 \left( 0,248 + 0,96 \frac{h}{l} \right)},$$

$$= \frac{116 \cdot F}{l} \text{ für } t = 16^{\circ} \text{ und } \frac{h}{l} = 0,1.$$

Die zugehörige Spannung der Gurtung in Trägermitte ist

$$\zeta = \frac{q l^2}{8 h F} = \frac{1160}{8} = 145 \text{ kg/qcm.}$$

Für die einzelnen Hauptträger sind die entsprechenden Zusatzspannungen  $\sigma = \alpha \cdot \zeta = \alpha \cdot 145$ , wo  $\alpha$  der vorstehenden Tabelle zu entnehmen ist. Beispielsweise beträgt die Spannung des 2. Trägers, bei  $n = 4$ ,  $\sigma = 0,4 \cdot 145 = 58 \text{ kg/qcm}$ .

Mit Rücksicht auf die in der Rechnung nicht berücksichtigten Durchbiegungen der Querträger, fallen die Zusatzspannungen in Wirklichkeit etwas geringer aus als vorstehend angegeben.

$\beta$ ) Die Querträger seien wie gewöhnlich unverschieblich in der Richtung der Brückenachse gelagert, die Längsträger durchlaufend über die ganze Brücke hin angeordnet, und zwar als Einzelträger, welche an den Querträgern durch Drehbolzen mit einander verbunden sind. Die Drehbolzen können in der neutralen Achse, oberhalb oder unterhalb derselben (d. h. in der Druck- oder Zuggurtung) angebracht sein. Die Längsträger werden bei dieser Anordnung gezwungen, soweit an den Dehnungen der mit ihnen in gleicher Ebene liegenden Hauptträgergurtungen Theil zu nehmen,

als der Fähigkeit der Querträger, horizontale Kräfte zu übertragen, entspricht.

Hierbei erleiden die Querträger Verbiegungen, indem die Punkte A der Längenänderung der Hauptträger, die Punkte C derjenigen der Längsträger folgen (Fig. 51). Durch die Endquerträger,

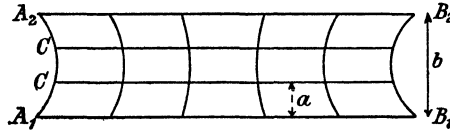


Fig. 51.

welche am stärksten verbogen werden, wird eine Kraft übertragen, welche bei eingleisigen Eisenbahnbrücken und drehbarer Querträgerlagerung den Werth

$$T = \frac{0,5 l J (\sigma_1 - \sigma_2)}{a^2 (0,5 b - 0,67 a)}$$

besitzt, wo  $J$  = seitliches Trägheitsmoment des Querträgers,  $\sigma_1$  = mittlere Spannung der Hauptträgergurtung,  $\sigma_2$  = mittlere Spannung der durch den Drehbolzen gehenden Faser des Längsträgers,  $a$  = Abstand der Haupt- und Längsträger. Es ist hierbei vorausgesetzt, dass die Drehbolzen in der Höhe der Hauptträger-Gurtachsen liegen; andernfalls wäre für  $\sigma_1$  eine entsprechend geänderte Spannung in Rechnung zu stellen. Der Betrag von  $T$  ist bei den gewöhnlichen Abmessungen so gering, dass von einer beachtenswerthen Entlastung der Hauptträgergurten durch die Längsträger nicht die Rede sein kann, während andererseits die Querträger sehr bedeutende Nebenspannungen hierbei erleiden können.

Die Bremskräfte werden von den Längsträgern unmittelbar aufgenommen und, wenn man von der unbedeutenden Zusammendrückung der letzteren absieht, gleichmässig auf die Knotenpunkte des zugehörigen Längsverbandes, in der Regel durch Vermittlung der Querträger oder durch besondere Zwischenkonstruktionen, vertheilt. Setzt man die Längsträger am festen Brückenende in feste Verbindung mit dem Mauerwerk, so gehen die Bremskräfte durch die Längsträger unmittelbar in das Mauerwerk über, ohne die übrigen Konstruktionsglieder nennenswerth zu beanspruchen.

Anmerkung. Man kann durch besondere Hilfskonstruktionen (z. B. wagrechte Versteifungsbleche zwischen den 2 letzten Querträgern jeder Seite) die Längsträger zwingen, an den Dehnungen der betr.

Hauptträgergurtungen in ausgiebiger Weise theilzunehmen und letztere hierdurch theilweise zu entlasten. Selbstverständlich ist dies nur dann zulässig, wenn eine Ueberanstrengung der Längsträger hierbei nicht eintritt. Hierzu gehört, dass die Drehbolzen der Längsträger nicht in deren Achse, sondern in der der Hauptträgergurtung entgegengesetzten Längsträgergurtung angeordnet sind (z. B. bei unten liegender Fahrbahn in der oberen Längsträgergurtung), weil dann die zusätzliche Dehnung der betr. Längsträgergurtung der normalen Biegedehnung entgegengesetzt ist.

Im theoretischen Grenzfall, d. h. wenn die Hilfskonstruktion unendlich steif und wenn die Drehbogen genau in der Ebene der Hauptträgergurtungen liegen, erhält man die entlastende Kraft X für 1 Gurtung zu

$$X = E \Delta l : \left[ \frac{1}{nf} + \Sigma \frac{c}{F} \right],$$

wo  $\Delta l$  = Unterschied der Längenänderung der Gurtungen der Haupt- und Längsträger, bei Nichtvorhandensein der Hilfskonstruktion,

$$= \Sigma \left( \frac{Sc}{EF} \pm \omega tc \right),$$

c = Feldlänge, F = Querschnitt der Hauptträgergurtung, f = Querschnitt der Längsträgergurtung, t = Temperaturunterschied der Haupt- und Längsträger, n = Zahl der auf 1 Hauptträger treffenden Längsträger.

Für F konstant und gleichmässige Belastung wird

$$\Delta l = \frac{2}{3} \frac{S_m \cdot l}{EF} + \omega tl,$$

$$X = E \frac{\Delta l}{l} : \left( \frac{1}{F} + \frac{1}{nf} \right).$$

Bezeichnet man mit  $\xi$  die ideelle Spannung, welche der spezifischen Dehnung  $\Delta l : l$  entspricht, so kann man auch schreiben

$$X = \xi : \left( \frac{1}{F} + \frac{1}{nf} \right) = \frac{\xi Fnf}{F + nf}.$$

Querschnittsgewinn

$$\frac{X}{k} = \frac{\xi}{k} \frac{Fnf}{F + nf},$$

wo k = Spannungszahl.

In der Anwendung wird  $X$  in Folge der Deformation der Hilfskonstruktion, der Ungenauigkeiten der Montage etc., wesentlich geringer ausfallen als vorstehend berechnet. Berücksichtigt man ferner noch die Kosten der Hilfskonstruktion, so wird der wirkliche Gewinn in der Regel nicht von Bedeutung sein, so dass derartige statisch unbestimmte, künstliche Anordnungen höchstens dort am Platz sein dürften, wo noch ein weiterer Zweck, Vermeidung der Querträgerverbiegungen, erreicht werden soll. Siehe hierüber später bei den Nebenspannungen.

Anmerkung. An dieser Stelle möge eine kurze Bemerkung über Zwischenfachwerke Platz finden. Dieselben können aufgefasst werden als Verschmelzung eines einfachen Hauptträgers mit dreieckförmigen Längsträgern (Fig. 52), welche die Last von Zwischenquerträgern auf

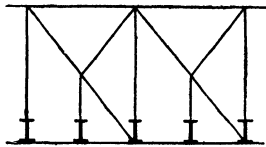


Fig. 52.

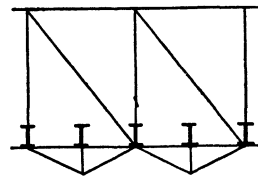


Fig. 53.

die Hauptknotenpunkte übertragen sollen. Die Stabkräfte werden demgemäss als Summen der Kräfte des einfachen Hauptträgers und des Längsträgers erhalten. Bei der üblichen Konstruktion sind jeweils beide Kräfte gleichen Sinns, es findet stets eine wirkliche Summierung statt. Die Anordnung von Zwischenfachwerken bietet somit theoretisch keinen Vortheil gegenüber getrennten Haupt- und Längsträgern; der Gewinn beruht lediglich in praktischen Vorzügen (grosse Trägerhöhe, kleine Stabzahl). Anders liegt die Sache, wenn man die Anordnung derart trifft, dass die auf einander fallenden Theile der Haupt- und Längsträger verschiedene Spannung aufweisen, z. B. untere Gurtung des Hauptträgers und obere Gurtung des Längsträgers (Fig. 53). Die Hauptträgergurtung wird um ebensoviel entlastet, als die Spannung der betr. Längsträgergurtung beträgt. Unter allen Umständen wird in Folge der Verschmelzung die gerade Längsträgergurtung erspart. Eine Ersparnis an der Hauptträgergurtung tritt jedoch nur dann ein, wenn es sich um ruhende, ständige Belastung des Längsträgers handelt, und zwar ist dann die Ersparnis ebenfalls gleich der geraden Längsträgergurtung, so dass durch die Zwischenkonstruktion nur ein geringer Gesamtmehraufwand erforderlich wird. Theoretisch könnte durch geeignete Wahl der Pfeilhöhe die Spannung der Hauptträgergurtung auf Null gebracht, letztere somit durch die geknickte Längsträgergurtung ersetzt werden. Bei gleichförmig vertheilter Belastung ginge die untere Gurtung in Parabelstücke von wechselndem Pfeil über. Bezüglich der Verkehrsbelastung tritt eine Ersparnis an der Hauptträgergurtung nicht ein, da hier unter Umständen der betreffende

Längsträger unbelastet sein kann, während die übrige Brücke belastet ist, so dass die Hauptträgergurtung durch die Verschmelzung nicht entlastet wird.

In welchen Fällen eine derartige Zwischenkonstruktion für die Anwendung vortheilhaft erscheint, kann an dieser Stelle nicht weiter erörtert werden.

Anmerkung. Wenn die Fahrbahntafel aus einer zusammenhängenden Eisendecke gebildet wird, welche in fester Verbindung mit den Hauptträgergurtungen steht, so werden letztere hierdurch wesentlich entlastet. Günstigsten Falls kann bei geeigneter Anordnung fast der gesammte Querschnitt der Bleche und Längsträger den Gurtungen zugezählt werden (Röhrenbrücken von Stephenson). Auch bei Hängblechen, deren Achsen parallel der Brückenachse, liegen die Verhältnisse günstig. Namentlich findet hier, da die zusätzliche Beanspruchung in der Längsrichtung senkrecht zur Querbeanspruchung der direkten Belastung steht, eine Erhöhung der Gesamtbeanspruchung des Blechs nicht statt. Bei Buckelplatten ist die Dehnung in der Längsrichtung grösser und somit die Entlastung der Hauptträgergurtungen geringer, als bei Hängblechen; auch können in einzelnen Punkten des Blechs Spannungserhöhungen in Folge der doppelten Beanspruchungsweise auftreten, welche jedoch mit Rücksicht auf die reichlich bemessenen Blechstärken praktisch ohne Bedeutung sind. Die Längsträger werden durch die Bleche wesentlich verstärkt, so dass sie den Längsbeanspruchungen gegenüber selten einer weiteren Verstärkung bedürfen.

Für die Anwendung wird es sich empfehlen, die vorerwähnten günstigen Verhältnisse bei der Querschnittsbemessung der Hauptträgergurtungen nur mit grosser Vorsicht in Anschlag zu bringen.

γ) Wenn die Längsträger als kontinuierliche Träger angeordnet sind, so treten erstens die unter β) behandelten Kräftwirkungen auf, wobei die Verhältnisse ähnlich sind wie bei einfachen Trägern mit Drehbolzen in der Achse; dann aber auch noch solche, die in dem ununterbrochenen Biegungswiderstand der Längsträger begründet sind. Sehen wir zunächst von der Deformation der Querträger ab, so stimmen die Biegungslinien der Längsträger mit denen der Hauptträger im Wesentlichen überein. Die Längsträger übertragen hierbei einen Theil der Gesamtlast unmittelbar auf die Widerlager,  $G_2 = G \frac{I_2}{I_1 + I_2}$ , wo  $I_2$  und  $I_1$  die Steifigkeitsmaasse der Längsträger und Hauptträger bezeichnen; für Blechträger stellen  $I_1$  und  $I_2$  die Trägheitsmomente dar. Der Betrag von  $G_2$ , welcher je nach den Temperaturunterschieden der einzelnen Glieder noch etwas grösser bzw. kleiner ausfallen kann, ist unter normalen Verhältnissen so klein, dass er praktisch nicht in Betracht kommt.

Von grösserer Bedeutung ist der Einfluss der Querträgerdurchbiegung auf die Lastvertheilung bezw. Beanspruchung der Hauptträger. Jede Einzellast wird durch die steifen Längsträger auf mehrere Querträger bezw. Knotenpunkte der Hauptträger (theoretisch auf alle) übertragen, so dass die wirkliche Einflusslinie ( $\theta$ ) für eine bestimmte Stabkraft eine von der gewöhnlichen, unter der Annahme einfacher Längsträger berechneten ( $\mathcal{J}$ ) abweichende Gestalt erhält. Bezeichnet man mit  $\eta$  die Bruchtheile der Einzellast  $P=1$ , welche auf die einzelnen Knotenpunkte entfallen, so ergeben sich für die wirkliche Einflusslinie die Ordinaten  $\theta = \sum \eta \cdot \mathcal{J}$ . Die Einflusslinie  $\theta$  unterscheidet sich von der gewöhnlichen  $\mathcal{J}$  hauptsächlich dadurch, dass die scharfen Ecken der letzteren (u. U. auch an den Trägerenden) abgerundet erscheinen. Die Linien  $\mathcal{J}$  sind bei den gewöhnlichen einfachen Trägern aus 2 oder 3 Geraden

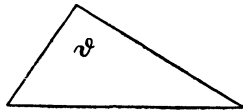


Fig. 54 a.

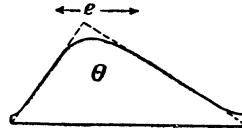


Fig. 54 b.

zusammengesetzt (Fig. 54 a, 55 a). Sofern die Länge  $e$ , innerhalb welcher eine Lastvertheilung durch die Längsträger praktisch in Betracht kommt, verhältnissmässig gering ist, d. h. kleiner als die Entfernung der Eckpunkte von  $\mathcal{J}$ , so behält die Linie  $\theta$  gerade Stücke von  $\mathcal{J}$  bei, an welche sich dann die Abrundungen der Ecken

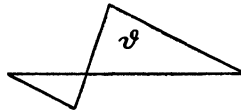


Fig. 55 a.

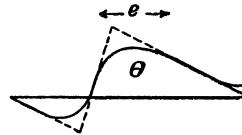


Fig. 55 b.

anschlüssen (Fig. 54 b und 55 b). Der Unterschied zwischen  $\theta$  und  $\mathcal{J}$  kommt hauptsächlich bei den Streben (Fig. 55) in Betracht, da hier die Ecken von  $\mathcal{J}$  schärfer sind und somit eine Abrundung mehr ins Gewicht fällt.

Nehmen wir beispielsweise an, das Gewicht einer an einem Querträger liegenden Last werde nur noch auf die 2 benachbarten Querträger übertragen ( $\eta_1 \eta_0 \eta_1$ ), so ist

$$\begin{aligned} \theta &= \eta_1 \mathcal{J}' + \eta_0 \mathcal{J} + \eta_1 \mathcal{J}'' = \mathcal{J} (1 - 2\eta_1) + \eta_1 (\mathcal{J}' + \mathcal{J}'') \\ &= \mathcal{J} - \eta_1 (2 \mathcal{J} - \mathcal{J}' - \mathcal{J}''), \end{aligned}$$

ein Ausdruck, der sich nach Angabe der Fig. 56 leicht konstruieren lässt.

Für  $\mathcal{J}' = -0,4$ ,  $\mathcal{J} = 0,5$ ,  $\mathcal{J}'' = 0,4$ ,  $\eta_0 = 0,7$ ,  $\eta_1 = 0,15$  erhält man  $\theta = 0,5 - 0,15 (2 \cdot 0,5 - 0,4 + 0,4) = 0,35$  gegen  $\mathcal{J} = 0,5$ , d. h. 30 % weniger als  $\mathcal{J}$ .

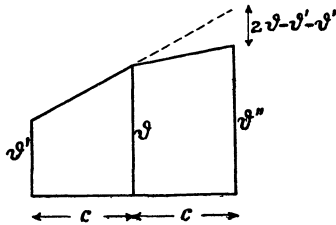


Fig. 56.

Es geht aus Vorstehendem hervor, dass in Folge der Kontinuität der Längsträger namentlich die Strebenkräfte in Wirklichkeit etwas geringer ausfallen, als die gewöhnliche Theorie angiebt; doch wird man bei der statischen Berechnung nur selten von diesem günstigen Umstande Gebrauch machen, mit Rücksicht auf anderweitige ungünstige Verhältnisse (Nebenspannungen), welche meist ebenfalls nicht besonders in Rechnung gezogen werden. —

Bezüglich der allgemeinen Gestalt der Einflusslinien  $\theta$  ist noch hervorzuheben, dass dieselbe im Allgemeinen zwischen 2 Knotenpunkten krummlinig verläuft.

Anmerkung. Die Bestimmung der Werthe von  $\eta$  erfolgt nach der Theorie des kontinuierlichen Balkens auf elastischen Stützen (Jahrbuch des Polyt. Vereins Karlsruhe 1869; Winkler, Brückenbau). Zwischen je 3 auf einander folgenden Stützenmomenten gilt bei konstanter Stützenentfernung  $c$  die Gleichung

$$\begin{aligned} M_{r-1} + 4 M_r + M_{r+1} &= \frac{6 E I}{c^2} (2 \delta_r - \delta_{r-1} - \delta_{r+1}) \\ &= \frac{6 E I}{c^2 \gamma} (2 \eta_r - \eta_{r-1} - \eta_{r+1}), \end{aligned}$$

wo die jeweilige Senkung  $\delta$  proportional dem Stützendruck  $\eta$ , d. h.  $\delta = \frac{\eta}{\gamma}$  gesetzt wurde. Ferner besteht zwischen den Stützenmomenten



M und den Stützendrücken  $\eta$  die Beziehung

$$\eta_r = \frac{1}{c} (M_{r-1} + M_{r+1} - 2 M_r) + \mathfrak{C},$$

wo  $\mathfrak{C}$  = Stützendruck, der bei Einzelträgern auftreten würde.  $\mathfrak{C}$  ist im Allgemeinen = 0; nur für die  $m^{\text{te}}$  Stütze, wo die Last  $P = 1$  liegt, ist  $\mathfrak{C} = 1$ .

Mit Hülfe der vorstehenden Gleichungen können, nach Elimination der Momente  $M$ , die Werthe von  $\eta$ , welche der gegebenen Lastlage entsprechen, ermittelt werden.

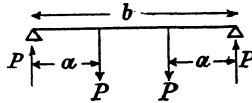


Fig. 57.

Der Beiwerth  $\gamma$  ergibt sich aus Betrachtung der elastischen Verhältnisse der Querträger. Beispielsweise ist bei eingleisigen Eisenbahnbrücken (Fig. 57) die Senkung des Querträgers am Angriffspunkt der Last  $P$

$$\delta = \frac{P a^2 (3b - 4a)}{6 E Y}, \quad \gamma = \frac{P}{\delta} = \frac{6 E Y}{a^2 (3b - 4a)},$$

wo  $Y$  = Trägheitsmoment des Querträgers.

$$\text{Für } a = \frac{b}{3} \text{ wird } \gamma = \frac{32,4 E Y}{b^3}.$$

Zieht man vom Lastpunkt nach jeder Seite hin noch 3 Stützen, im Ganzen also 7 Stützen in Betracht, so erhält man für die belastete Stütze  $\eta_0$  und die übrigen Stützen

$$\eta_0 = \frac{1 + 72\beta + 131\beta^2 + 26\beta^3}{7 + 196\beta + 193\beta^2 + 26\beta^3}; \quad \eta_1 = \frac{1 + 57\beta + 46\beta^2}{N},$$

$$\eta_2 = \frac{1 + 23\beta - 18\beta^2}{N}; \quad \eta_3 = \frac{1 - 18\beta + 3\beta^2}{N}.$$

Hierin ist  $\beta = \frac{\gamma c^3}{6 E I}$ , für eingleisige Eisenbahnbrücken

$$\beta = \frac{5,4 Y c^3}{I b^3}. \quad N = 7 + 196\beta + 193\beta^2 + 26\beta^3.$$

Setzt man  $c = 0,6 b$ ,  $I = ca 0,29 Y$ , so wird  $\beta = 4$ ,  $\eta_0 = 0,73$ . Hiernach werden in diesem Falle von der direkt belasteten Stütze nur 73 % der Last aufgenommen; die übrigen 27 % werden auf die benachbarten Stützen übertragen.

Interessant ist der theoretische Grenzfall unendlich steifer Längsträger, wo die  $\eta$  durch die Ordinaten einer Geraden dargestellt werden,

$$\eta = \frac{1}{n} + \frac{\alpha \xi}{\Sigma m^2}$$

(Fig. 58). Hierin bezeichnet  $n$  die Zahl der Querträger,  $\alpha$  die Entfernung der Last von Trägermitte,  $\xi$  die Abscissen der Geraden auf Trägermitte bezogen,  $m$  die Ordnungszahl eines Querträgers, von Trägermitte aus gerechnet.

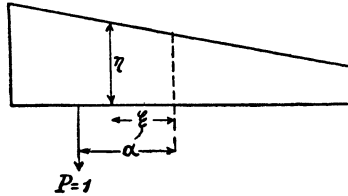


Fig. 58.

Angenähert kann man bei grossem  $n$  setzen

$$\eta = \frac{1}{n} \left( 1 + \frac{12\alpha\xi}{l^2} \right) = \frac{c}{l} \left( 1 + \frac{12\alpha\xi}{l^2} \right).$$

Die wirkliche Einflusslinie erhält die Gleichung

$$\begin{aligned} \theta &= \Sigma \eta \vartheta = \Sigma \frac{c \vartheta}{l} + \frac{12\alpha}{l^3} \Sigma \xi \vartheta c = \frac{\Phi}{l} + \frac{12\alpha}{l^3} \Phi s \\ &= \frac{\Phi}{l} \left( 1 + \frac{12s}{l^2} \cdot \alpha \right). \end{aligned}$$

$\Phi$  bezeichnet hierin den Flächeninhalt, welcher der gewöhnlichen Einflusslinie  $\vartheta$  entspricht,  $s$  die Entfernung des Schwerpunkts von  $\Phi$  von Trägermitte. Die Gleichung von  $\theta$  stellt bei variablem  $\alpha$  eine Gerade dar.

Für symmetrische  $\vartheta$  Kurven, wo  $s=0$ , wird  $\theta = \frac{\Phi}{l}$  = horizontale Gerade. Bei unsymmetrischen  $\vartheta$  Kurven wird für  $\alpha=0$  stets  $\theta = \frac{\Phi}{l}$ , d. h.

die Gerade  $\theta$  hat in Trägermitte stets die Ordinate  $\frac{\Phi}{l}$  = mittlere Höhe der Fläche  $\vartheta$ . Für  $\alpha = \pm \frac{l}{2}$  wird  $\theta = \frac{\Phi}{l} \left( 1 \pm \frac{6s}{l} \right)$ . Die grössten Werthe von  $\theta$  treten hiernach an den Trägerenden auf.

Für  $s = \frac{l}{6}$  wird  $\theta_0 = \frac{2\Phi}{l}$ ,  $\theta_1 = 0$ ; bei noch grösserem  $s$  wird  $\theta_1$  negativ.

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

---

---

Theorie und Berechnung  
der  
**Bogenfachwerkträger ohne Scheitelgelenk.**

*Mit verschiedenen der Praxis entnommenen Zahlenbeispielen.*

Von

**Fr. Engesser.**

~~~~~  
Mit 2 lithographirten Tafeln.

Preis M. 2,—.

---

**Elasticität und Festigkeit.**

Die für die Technik wichtigsten Sätze und deren erfahrungsmässige Grundlage.

Von

**C. Bach,**

Professor des Maschinen-Ingenieurwesens am K. Polytechnikum Stuttgart.

~~~~~  
Mit in den Text gedruckten Abbildungen und 14 Tafeln in Lichtdruck.

Preis in Leinwand geb. M. 17,50.

---

**Die Forth-Brücke.**

Von

**G. Barkhausen,**

Professor an der technischen Hochschule in Hannover.

~~~~~  
Mit in den Text gedruckten Figuren und 9 lithographirten Tafeln.

Kart. Preis M. 8,—.

---

---

Zu beziehen durch jede Buchhandlung.